HAL open science

Contribution à l'étude des systèmes différentiellement plats

Philippe Martin

To cite this version:

Philippe Martin. Contribution à l'étude des systèmes différentiellement plats. Mathématiques [math]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1992. Français. NNT : 1992ENMP0374 . tel-00005720

HAL Id: tel-00005720

https://pastel.hal.science/tel-00005720

Submitted on 30 Nov 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

par

Philippe MARTIN

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Spécialité :

MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE

Sujet de la thèse :

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELLEMENT PLATS

soutenue le 7 décembre 1992 devant le jury composé de :

MM.	**Michel FLIESS**	Président
	Ivan KUPKA	Rapporteur
	Hector SUSSMANN	Rapporteur
	Georges BASTIN	Examinateur
	Jean LÉVINE	Examinateur
	Riccardo MARINO	Examinateur
	Pierre ROUCHON	Examinateur

Remerciements

Je suis reconnaissant aux membres du jury, M. Fliess, G. Bastin, J. Lévine, R. Marino, P. Rouchon et particulièrement aux rapporteurs I. Kupka et H. Sussmann, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail.

Je tiens par ailleurs à remercier spécialement M. Fliess, J. Lévine et P. Rouchon, au contact desquels j'ai beaucoup appris, ainsi que l'ensemble des membres du Centre Automatique et Systèmes.

Abstract

This thesis introduces the new concept of flatness. A system is differentially flat (or simply flat) if its behaviour can be completely described by a set of differentially independant functions depending on the system variables and their derivatives: any trajectory of the system can be recovered from the knowledge of this set of functions without integrating differential equations. Flatness is defined through an equivalence relation, called equivalence by endogenous feedback. Two systems S and T are equivalent if there exists a bijective correspondance between trajectories of S and trajectories of T. A flat system is by definition equivalent to a system "without dynamics", that is a set of arbitrary functions.

The link between equivalence and feedback is the following: given two equivalent systems S and T, it is possible to transform S into T extended with pure integrators by a dynamic feedback and a coordinate change, and vice versa. In particular, a flat system is linearizable by dynamic feedback and coordinate change. The so constructed feedback has a remarkable feature: it is "generated" only by the system variables and their derivatives, and called for that reason endogenous feedback. The main property of endogenous feedbacks is that they are revertible, up to pure integrators. This means that equivalence by endogenous feedback respects lots of important properties of systems such as controllability and linearizability.

Checking that a given system is flat is an open problem. We give here two criterions for particular cases. Nevertheless, many systems arising in engineering are known to be flat.

Flat systems are very interesting for engineering purposes because they are easy to control. A detailed application to the design of an aircraft automatic pilot is presented.

Keywords

Nonlinear control, Flat system, Feedback linearization, Dynamic feedback, Endogenous feedback, System equivalence, Regular decoupling, Aircraft control.

Résumé

On introduit dans cette thèse le concept nouveau de platitude. Un système est différentiellement plat (ou plus simplement plat) si son comportement peut être complètement décrit par un ensemble de fonctions différentiellement indépendantes dépendant des variables du système et de leurs dérivées: toute trajectoire du système peut s'obtenir à partir de cet ensemble de fonctions sans intégrer d'équations différentielles. La platitude se définit par l'intermédiaire d'une relation d'équivalence. Deux systèmes S et T sont équivalents s'il existe une correspondance bijective entre les trajectoires de S et celles de T. Par définition, un système est plat s'il est équivalent à un système "sans dynamique", c'est à dire un ensemble de fonctions arbitraires.

Le lien entre équivalence et bouclage est le suivant: si S et T sont deux systèmes équivalents, on peut trouver un bouclage dynamique et un changement de coordonnées qui transforme S en T étendu par des intégrateurs purs, et vice versa. En particulier, un système plat est linéarisable par bouclage dynamique et changement de coordonnées. Le bouclage ainsi construit présente la caractéristique remarquable d'être "engendré" par les variables du système et leurs dérivés, et est appelé pour cette raison bouclage endogène. La propriété principale d'un bouclage endogène est d'être réversible à des intégrateurs purs près. Ceci signifie que l'équivalence par bouclage endogène respecte beaucoup de propriétés importantes comme la commandabilité ou la linéarisabilité.

Déterminer si un système donné est plat est un problème ouvert. On donne ici deux critères dans des cas particuliers. Cependant, on connait de nombreux exemples de systèmes plats issus de problèmes concrets.

Du point de vue de l'ingénieur, les systèmes plats sont intéressants parce que faciles à commander. On présente une application détaillée à la conception d'un pilote automatique d'avion.

Mots-clés

Commande non-linéaire, Système plat, Linéarisation par bouclage, Bouclage dynamique, Bouclage endogène, Equivalence entre systèmes, Découplage régulier, Commande d'avion.

Table des matières

Introduction **1**

1 Point de vue algébrique **5**
1.1 Rappels d'algèbre 6
1.2 Systèmes, dynamiques et réalisations 7
1.3 Equivalence et bouclage endogène 9
1.4 Bouclages exogènes 14
1.5 Platitude et défaut 15
1.6 Exemples de systèmes plats 18
1.7 Systèmes entrée-sortie et découplage 21

2 Point de vue analytique **25**
2.1 Equivalence, bouclage endogène et platitude 26
2.2 Construction de bouclages et découplage 30
2.3 Filtration entrée-sortie 31
2.3.1 Propriétés génériques 32
2.3.2 Systèmes non classiques 36
2.3.3 Propriétés ponctuelles 38
2.3.4 Action d'un bouclage 41
2.4 Conséquences de la régularité 44

3 Critères de platitude **49**
3.1 A criterion for flatness with structure $\{1,\ldots,1,2\}$ 51
3.2 Systems without drift and flatness 61

4 Application au pilotage d'avion **71**
4.0.1 Fonctions de pilotage 71
4.0.2 Limites de l'approche linéaire 72
4.1 Le modèle utilisé 73
4.2 Commande non-linéaire 75
4.2.1 Avion idéal 75
4.2.2 L'avion idéal est plat 76
4.2.3 Problèmes posés par la mise en oeuvre pratique 78
4.2.4 Expression détaillée du bouclage 79
4.3 Simulations numériques 82

A Modélisation d'un avion **87**
A.1 Hypothèses de modélisation 87
A.2 Mécanique du vol 88
A.2.1 Trièdres de références 89
A.2.2 Forces et moments 91
A.2.3 Coefficients aérodynamiques 93
A.2.4 Projection des équations de la mécanique 94
A.3 Modèle atmosphérique 96
A.4 Ce qu'il faut retenir de cette modélisation 98

Bibliographie **99**

Introduction

La motivation initiale de ce travail est le problème de la *linéarisation par bouclage*: étant donné un système

$$\dot{x} = f(x,u), \tag{1}$$

est-il possible de trouver un bouclage

$$\begin{array}{rcl} u & = & \alpha(x,z,v) \\ \dot{z} & = & a(x,z,v) \end{array} \tag{2}$$

et un difféomorphisme

$$\xi = \Phi(x,z)$$

qui transforme le système bouclé

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,\alpha(x,z,v)) \\ \dot{z} & = & a(x,z,v) \end{array}$$

en un système linéaire commandable?

L'importance pratique de la linéarisation par bouclage est très grande et réside dans le fait qu'on peut ainsi "transporter" des propriétés d'un système linéaire à un système non linéaire, ce qui permet de proposer une solution simple à l'un des problèmes de fond de l'automatique, à savoir la *stabilisation autour d'une trajectoire quelconque* du système; ce problème, qui est extrêmement compliqué en général est très simple pour un système linéaire, la stabilisation autour d'une trajectoire quelconque se ramenant à la stabilisation autour d'un point d'équilibre.

Déterminer si un système est linéarisable par bouclage est un problème ouvert dans le cas général. Mentionnons les principaux résultats connus: on sait déterminer si un système est linéarisable par bouclage statique (i.e. le bouclage (2) se réduit à $u = \alpha(x,u)$) [30, 27]; un système à une seule commande est linéarisable par bouclage dynamique ssi il est linéarisable par bouclage statique [8]; enfin un système linéaire en les commandes avec m commandes et $m+1$ variables d'état est linéarisable par bouclage ssi il est commandable [8].

On introduit ici un nouveau point de vue: la notion de système *différentiellement plat* (ou plus simplement *plat*). Schématiquement, on dira que le système (1) est plat si on peut trouver une application $y = h(x,u,\dot{u},\ldots,u_{(k)})$, appelée *sortie plate*, dépendant de l'état x et d'un nombre fini de dérivées de la commande u et dont les composantes sont "différentiellement indépendantes", telle qu'on puisse exprimer x et u en fonction de y et d'un nombre fini de ses dérivées:

$$\begin{aligned} x &= A(y,\ldots,y_{(l)}) \\ u &= B(y,\ldots,y_{(l)}). \end{aligned}$$

On peut ainsi calculer les trajectoires du système (1) à partir de y sans intégrer d'équations différentielles; comme les composantes de y sont libres, n'importe quel choix $y = y(t)$ détermine une trajectoire $(x(t),u(t))$. Notons que c'est une propriété évidente des systèmes linéaires commandables, dûe à l'existence de la forme canonique de Brunovsky.

Cette notion est reliée à la linéarisation par bouclage de la manière suivante: si y est une sortie plate de (1), on peut construire un bouclage linéarisant et un difféomorphisme qui transforme le système bouclé en des chaines d'intégrateurs purs formées à partir de y. Le bouclage linéarisant ainsi construit présente une particularité; on peut exprimer son état z et sa commande v en fonction de x et d'un nombre fini de dérivées de u:

$$\begin{aligned} z &= C(x,u,\ldots,u_{(l)}) \\ v &= D(x,u,\ldots,u_{(l)}). \end{aligned}$$

Un bouclage possédant cette propriété sera dit *endogène*. Un système plat est donc linéarisable par bouclage endogène. Réciproquement un système linéarisable par bouclage endogène est plat. Un système plat est clairement un cas particulier de système linéarisable; cependant, il ne semble pas qu'on connaisse à l'heure actuelle d'exemple d'un système linéarisable qui ne soit pas plat.

Les bouclages endogènes possèdent une faculté de "réversibilité", qui généralise une propriété évidente des bouclages statiques, et sont naturellement associés à une notion *d'équivalence* entre systèmes: deux systèmes sont équivalents si on peut calculer les trajectoires de l'un à à partir de celles de l'autre sans intégrer d'équations différentielles, et réciproquement. En ce sens, un système plat est équivalent à un système sans dynamique. Une telle notion d'équivalence pour des systèmes sous-déterminés d'équations différentielles a en fait déja été étudiée par D. Hilbert (cf [23] où il parle de transformations "umkehrbar integrallos", i.e. "inversible sans intégrales") et E. Cartan [7].

Les systèmes plats, bien que "non génériques" dans l'ensemble des systèmes, semblent très courants en pratique dans les modèles simplifiés issus de la physique, et particulièrement de la mécanique. Cependant, déterminer qu'un système est plat est, comme pour la linéarisation, un problème ouvert.

Détaillons l'ensemble des résultats originaux présentés dans ce mémoire: le chapitre 1 développe dans le cadre algébrique de la théorie des systèmes les notions évoquées plus haut. Un des intérêts de l'approche algébrique est de fournir des formulations naturelles et des démonstrations simples pour de nombreux problèmes d'automatique théorique; cependant, même si on espère pouvoir tirer parti de l'aspect "calculatoire" de l'algèbre, on ne connait pas aujourd'hui de critère permettant de déterminer si un système est plat au sens algébrique, y compris dans les cas déjà mentionnés.

Le chapitre 2 généralise au cadre analytique (ou plutôt géométrique) ce qui a été fait pour le cadre algébrique. Bien que le formalisme soit beaucoup plus lourd, cette généralisation est indispensable pour se raccrocher à des formulations classiques de problèmes d'automatique; elle permet également d'utiliser des résultats puissants de géométrie différentielle. A cause du caractère local de l'approche, il peut y avoir des problèmes de

singularités pour construire un bouclage linéarisant, ou plus généralement découplant; on donne une condition nécessaire et suffisante permettant le découplage sans singularités.

Dans le chapitre 3, on établit deux critères de platitude dans le cadre géométrique du chapitre précédent; vu la difficulté du problème, on est bien sûr très loin d'un résultat général. Le premier donne une condition suffisante pour les systèmes à m commandes et $m+1$ états, généralisant ainsi le résultat de [8]. Le deuxième est une condition nécessaire et suffisante pour les systèmes sans dérive à deux commandes. Ces deux critères sont en fait des conditions d'intégrabilité de systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Le dernier chapitre est une application "réaliste" au pilotage automatique d'avion de la commande des systèmes plats; partant d'un modèle d'avion assez complet, on construit, grâce à diverses approximations, une loi de commande simple permettant de suivre une trajectoire quelconque. Des simulations numériques illustrent les bonnes performances de cette loi.

Chapitre 1

Point de vue algébrique

Introduction

Ce chapitre introduit, dans le cadre de la théorie algébrique des systèmes, les concepts importants d'*équivalence*, de *bouclage endogène*, de *platitude* et de *défaut*. On dira que deux systèmes sont équivalents si leurs trajectoires sont reliées par une correspondance inversible "sans intégrales" (cf [29] pour une notion voisine). On peut y voir une généralisation non linéaire des matrices unimodulaires utlisées dans la théorie polynômiale des systèmes linéaires. Un système plat se définit comme un système équivalent à un système sans dynamique; on peut alors paramétrer ses trajectoires par un certain nombres de fonctions "libres". Le défaut est introduit pour "mesurer la non platitude" d'un système.

L'équivalence, la platitude et le défaut sont des notions intrinsèques, indépendantes de toute representation d'état. Une fois choisie une telle représentation, on peut faire le lien avec des notions plus classiques, grâce aux bouclages endogènes, qui sont des bouclages dynamiques présentant une propriété de "réversibilité".

Le chapitre est organisé de la façon suivante; après quelques rappels d'algèbre et de théorie des systèmes (sections 1.1 et 1.2), on donne à la section 1.3 la définition de l'équivalence et des bouclages endogènes et on fait le lien entre ces notions par le théorème 1.2; la section 1.4 contient quelques remarques sur des généralisations possibles. La platitude et le défaut sont introduits à la section 1.5; des exemples de systèmes plats tirés de la mécanique forment la section 1.6. Le découplage des systèmes entrée-sortie fait l'objet de la section 1.7.

Les notions d'équivalence, de platitude et de défaut telles qu'elles sont présentées ici sont le fruit d'un travail mené avec M. Fliess, J. Lévine et P. Rouchon (cf [18, 19, 20]); il va de soi que le reste du chapitre a largement été influencé par cette collaboration. L'exemple 1.6 tire par ailleurs son origine d'une publication avec B. d'Andréa et R. Sépulchre (cf [10]). La section 1.3 constitue le corps d'une conférence invitée pour le MTNS 93.

1.1 Rappels d'algèbre

On rappelle ici les quelques notions de théorie des corps utilisées dans la suite du chapitre. Pour le cas non différentiel, on peut se reporter à [26]; pour le cas différentiel, on consultera les ouvrages de Ritt [42] et Kolchin [32]. On supposera tous les corps de caractéristique nulle.

Une *extension* L/K est la donnée de deux corps K et L tels que K est un sous-corps de L. Un élément de L est *algébrique* sur K s'il est solution d'un polynôme non nul à coefficients dans K; dans le cas contraire, il est *transcendant* sur K. Soit S un sous-ensemble de L; on note $K(S)$ le corps engendré par K et S (i.e. le plus petit sous-corps de L contenant K et S). L'extension K/L est *finiment engendrée* (ou *de type fini*) si $L = K(S)$ pour un S de cardinal fini. S est *algébrique* sur K, si tous ses éléments sont algébriques sur K; S est *transcendant* sur K s'il contient un élément transcendant sur K. Si L est algébrique (resp. transcendant) sur K, on dira également que l'extension L/K est algébrique (resp. transcendante) sur K. S est *algébriquement dépendant* (ou *lié*) sur K s'il existe un polynôme P non nul à coefficients dans K tel que $P(s^1, \ldots, s^n) = 0$ pour des éléments $s^1, \ldots, s^n$ de S distincts; dans le cas contraire S est *algébriquement indépendant*. Une *base de transcendance* de L/K est un sous-ensemble B de L algébriquement indépendant sur K et maximal par rapport à l'inclusion. On a les résultats importants suivants:

- soit S un sous-ensemble de L algébriquement indépendant sur K. Alors S est une base de transcendance de L/K ssi L est algébrique sur $K(S)$.
- Deux bases de transcendance de L/K ont le même cardinal.

On appelle alors *degré de transcendance* de L/K (noté $\mathrm{d}^\circ\mathrm{tr}\, L/K$) le cardinal de n'importe quelle base de transcendance de L/K et on montre:

- Soient deux extensions L/M et M/K. Alors $\mathrm{d}^\circ\mathrm{tr}\, L/K = \mathrm{d}^\circ\mathrm{tr}\, L/M + \mathrm{d}^\circ\mathrm{tr}\, M/K$.

On passe maintenant au cadre différentiel. Un *corps différentiel* L est un corps muni d'une *dérivation* notée "$\cdot$", c'est à dire une application de L dans lui-même vérifiant

$$\forall\ a,b \in L, \quad \dot{\overbrace{a+b}} = \dot{a} + \dot{b}, \quad \dot{\overbrace{ab}} = \dot{a}b + a\dot{b}.$$

Tout ce qui a été dit prcédémment dans le cas non différentiel s'étend immédiatemment en rajoutant partout le mot "différentiel". Ainsi, une *extension différentielle* L/K est la donnée de deux corps différentiels K et L tels que K est un sous-corps différentiel de L (ce qui signifie que la dérivation de K coïncide avec la restriction de la dérivation de L). Un élément de L est *différentiellement algébrique* sur K s'il est solution d'une équation différentielle algébrique à coefficients dans K. Dans le cas contraire, il est *différentiellement transcendant* sur K. Soit S un sous-ensemble de L; on note $K{<}S{>}$le corps différentiel engendré par K et S (i.e. le plus petit sous-corps différentiel de L qui contient K et S). L'extension différentielle K/L est *finiment engendrée* (ou *de type fini*) si $L = K{<}S{>}$ pour un S de cardinal fini. On définit de même un sous-ensemble de L *différentiellement algébrique* sur K, *différentiellement transcendant* sur$K$, *différentiellemnet algébriquement*

dépendant sur K, *différentiellement algébriquement indépendant* sur K, une *base de transcendance différentielle* de L/K, et le *degré de transcendance différentielle* de L/K, noté d°tr diff L/K. Les résultats énoncés précédemment restent également valables. On a également le résultat suivant:

- Soit L/K une extension différentielle de type fini. Alors L/K est différentiellement algébrique ssi son degré de transcendance (non différentielle) est fini.

Dans la suite du texte, et comme souvent en géométrie algébrique, toutes les quantités considérées sont des éléments d'un "grand" corps différentiel U et tous les corps différentiels sont des sous-corps différentiels de U. Quand on parlera de la clôture algébrique $\overline{K}$ d'un corps K, on sous-entendra toujours clôture algébrique dans U. Notons que la clôture algébrique d'un corps différentiel est un corps différentiel. Il sera immédiat de vérifier que les résultats établis sont indépendants du choix de U.

Précisons enfin quelques notations qui seront fréquemment utilisées: si $\xi \in \mathcal{U}$ et $r \in \mathbb{N}$, $\xi_{(r)}$ désigne la dérivée d'ordre r de ξ; on pose $\overline{\xi} := (\xi,\dot{\xi},\ldots,\xi_{(r)}$, où r est un entier arbitraire (cette notation est très commode pour indiquer qu'une fonction dépend d'un nombre arbitraire mais fini de dérivées de ξ). Si $u := (u^1,\ldots,u^m) \in \mathcal{U}^m$, on pose de même $u_{(r)} = (u^1_{(r)},\ldots,u^m_{(r)})$, et $\overline{u} = (u,\ldots,u_{(r)})$, où r est un entier arbitraire; si $\nu := (\nu^1,\ldots,\nu^m) \in \mathbb{N}^m$, on note également $u_{(\nu)} = (u^1_{(\nu^1)},\ldots,u^m_{(\nu^m)})$.

1.2 Systèmes, dynamiques et réalisations

On donne ici quelques définitions de la théorie algébrique des systèmes introduite par M. Fliess (cf [17]). Dans toute la suite $\mathbf{k}$ désigne un corps différentiel qui est en pratique presque toujours $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. Un *système* est une extension différentielle $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ de type fini. Une *dynamique* est une extension différentielle algébrique $\mathcal{D}/\mathbf{k}<u>$de type fini, où $u = (u^1,\ldots,u^m)$ est différentiellemt algébriquement indépendant sur $\mathbf{k}$. Notons que d°tr $\mathcal{D}/\mathbf{k}<u>$est alors fini. Une *réalisation* du système $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ est un couple (x,u), où $u := (u^1,\ldots,u^m)$ est une base de transcendance différentielle de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ et $x := (x^1,\ldots,x^n)$ est une base de transcendance (non différentielle) de $\mathcal{D}/\mathbf{k}<u>$. On a alors $\overline{\mathcal{D}} = \overline{\mathbf{k}<x,u>} = \overline{\mathbf{k}<u>(x)}$. Si $\tilde{\mathcal{D}}/\mathcal{D}$ est une extension différentielle algébrique, (x,u) est encore une réalisation de $\tilde{\mathcal{D}}/\mathbf{k}$.

Ceci implique que pour tout ξ algébrique sur $\mathcal{D}$, il existe P et Q, polynômes sur $\mathbf{k}$, tels que

$$\begin{aligned} P(\overline{\xi},\overline{u}) &= 0 \\ Q(\xi,x,\overline{u}) &= 0. \end{aligned}$$

En particulier, pour $i = 1,\ldots,n$, il existe des polynômes F^i tels que

$$F^i(\dot{x}^i,x,\overline{u}) = 0,$$

ce qui apparait comme une généralisation dans le cadre algébrique de la représentation d'état d'un système. Pour cette raison, on appelle x et u l'*état* et l'*entrée* du système; on appelle également n la *dimension d'état* et m la *dimension d'entrée*. Notons que la dimension d'entrée ne dépend que du système (c'est le degré de transcendance différentiel

de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$); la dimension d'état dépend par contre du choix d'une entrée u (c'est le degré de transcendance de $\mathcal{D}/\mathbf{k}<u>$). Autrement dit, deux réalisations d'un même système ont la même dimension d'entrée, mais pas forcément la même dimension d'état. Par exemple, $((x,u),\dot{u})$ est aussi une réalisation de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$. Plus généralement, on appelle *entrée* du système $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ toute base de transcendance différentielle $v := (v^1,\ldots,v^m)$ de $\overline{\mathcal{D}}/\mathbf{k}$. Une *sortie* sera un ensemble $y := (y^1,\ldots,y^l)$ algébrique sur $\mathcal{D}$. Une entrée est donc un cas particulier de sortie.

Une réalisation (x,u) de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ est dite *classique* si aucun des F^i dans (1.2) ne dépend des dérivées de u. Si $\nu \in \mathbb{N}^m$ est suffisamment grand, $(x,u,\ldots,u_{(\nu)})$ est clairement une réalisation classique de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$. Dans la notation $(x,u,\ldots,u_{(\nu)})$, que l'on utilisera fréquemment par la suite, l'état est $\{x^1,\ldots,x^n,u^i,\ldots,u^i_{(\nu^i-1)},\ i=1,\ldots,m\}$ (avec $u^i_{(-1)} := 0$) et l'entrée est $u_{(\nu)} := \{u^1_{(\nu^1)},\ldots,u^n_{(\nu^n)}\}$.

A une réalisation (x,u) on associe la filtration $(\mathcal{U}_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$\begin{array}{ll} \mathcal{U}_r := \mathbf{k}, & r \leq -2, \\ \mathcal{U}_r := \overline{\mathbf{k}(x)}, & r = -1, \\ \mathcal{U}_r := \overline{\mathbf{k}(x,u,\ldots,u_{(r)})}, & r \geq 0. \end{array}$$

Dans la suite, on parlera parfois d'une réalisation (x,u) sans faire référence explicitement à un corps. On sous-entend par là que $\mathbf{k}<x,u>/\mathbf{k}$ est un système admettant (x,u) comme réalisation.

En pratique un système $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ est défini par des équations différentielles algébriques à coefficients dans $\mathbf{k}$ reliant les composantes d'un ensemble fini de variables $\xi := (\xi^1,\ldots,\xi^r)$, sans faire de distinction de type état ou entrée entre les variables. Une réalisation consiste à effectuer (arbitrairement) une telle distinction, et est souvent implicite pour des systèmes modélisant des problèmes concrets. Cette façon de voir est très proche du point de vue de J.Willems [47].

Exemple 1.1 Soit $\mathcal{D}/\mathbb{Q}$, le système défini par les deux équations différentielles suivantes, reliant les variables ξ^1,ξ^2,ξ^3,ξ^4:

$$\begin{array}{rcl} \dot{\xi}^1 + \ddot{\xi}^3\dot{\xi}^4 & = & 0 \\ \dot{\xi}^2 + (\xi^1 + \ddot{\xi}^3\xi^4)\xi^4 & = & 0. \end{array}$$

Le degré de transcendance différentiel de ce système est égal à 2. Une réalisation possible consiste à choisir $x := (\xi^1,\xi^2)$ comme état, et $u := (\xi^3,\xi^4)$ comme entrée, ce qui donne

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}^1 & = & -\ddot{u}^1\dot{u}^2 \\ \dot{x}^2 & = & -(x^1 + \ddot{u}^1u^2)u^2. \end{array}$$

On a une réalisation classique en choisissant $y := (\xi^1,\xi^2,\xi^3,\xi^4,\dot{\xi}^3)$ et $v := (\ddot{\xi}^3,\dot{\xi}^4)$:

$$\begin{array}{rcl} \dot{y}^1 & = & -v^1v^2 \\ \dot{y}^2 & = & -(y^1 + v^1y^4)y^4 \\ \dot{y}^3 & = & y^5 \\ \dot{y}^4 & = & v^2 \\ \dot{y}^5 & = & v^1. \end{array}$$

Sur cet exemple sans signification concrète, on voit bien que le choix d'une réalisation est totalement arbitraire. □

Remarque 1.1 De manière plus abstraite, on se donne un idéal différentiel $\mathcal{I}$ de polynômes différentiels. Si cet idéal est premier, le quotient de l'anneau des polynômes différentiels par I est intègre et on peut considérer son corps de fractions, qui définit alors un système. Si I n'est pas premier, il faut le décomposer en ses composantes premières. Nous n'entrerons jamais dans ces problème difficiles. □

1.3 Equivalence et bouclage endogène

Définition 1.1 *Deux systèmes* $\mathcal{D}_1/\mathbf{k}$ *et* $\mathcal{D}_2/\mathbf{k}$ *sont* équivalents*, ou encore* équivalents par bouclage endogène*, s'il existe un automorphisme* Φ *de* $\mathcal{U}$ *tel que* $\Phi(\mathcal{D}_1)$ *est algébrique sur* $\Phi(\mathcal{D}_2)$ *et* $\Phi(\mathcal{D}_2)$ *est algébrique sur* $\Phi(\mathcal{D}_1)$*.*

Deux dynamiques $\mathcal{D}_1/\mathbf{k}<u_1>$ *et* $\mathcal{D}_2/\mathbf{k}<u_2>$ *sont* équivalentes *si les systèmes* $\mathcal{D}_1/\mathbf{k}$ *et* $\mathcal{D}_2/\mathbf{k}$ *sont équivalents.*

Deux réalisations (x,u) *et* (y,v) *sont dites* équivalentes *si les systèmes* $\mathbf{k}<x,u>/\mathbf{k}$ *et* $\mathbf{k}<y,v>/\mathbf{k}$ *sont équivalents.*

Remarque 1.2 Rappelons (cf section 1.1) que $\mathcal{U}$ est un "grand" corps différentiel contenant toutes les quantités considérées. Il est clair que la définition de l'équivalence entre systèmes ne dépend pas du choix de ce corps. Par ailleurs, on identifiera très souvent dans la suite $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ à leurs images $\Phi(\mathcal{D}_1)$ et $\Phi(\mathcal{D}_2)$, ce qui simplifie les énoncés et n'enlève rien à la généralité; on peut alors considérer que $\mathcal{D}_1$ est algébrique sur $\mathcal{D}_2$ et réciproquement. □

On écrira parfois $\mathcal{D}_1/\mathbf{k} \sim \mathcal{D}_2/\mathbf{k}$. Remarquons que deux systèmes $\mathcal{D}_1/\mathbf{k}$ et $\mathcal{D}_2/\mathbf{k}$ sont équivalents ssi $\overline{\mathcal{D}}_1 = \overline{\mathcal{D}}_2$.

N.B. Dans toute la suite, quand on considérera des réalisation équivalentes (x,u) et (y,v), on supposera implicitement que x et y ont respectivement n et p composantes, et que u et v en ont m.

Soient (x,u) et (y,v) deux réalisations équivalentes. Comme (x,u) est une réalisation de $\overline{\mathbf{k}<x,u>}/\mathbf{k}$, c'est aussi une réalisation de $\overline{\mathbf{k}<y,v>}/\mathbf{k}$. On peut donc écrire

$$\begin{array}{rcl} \varphi^i(x^i,y,\overline{v}) & = & 0 \\ \alpha^j(u^j,y,\overline{v}) & = & 0 \end{array}$$

pour $i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m$, et réciproquement

$$\begin{array}{rcl} \psi^i(y^i,x,\overline{u}) & = & 0 \\ \beta^j(v^j,x,\overline{u}) & = & 0 \end{array}$$

pour $i = 1,\ldots,p$ et $j = 1,\ldots,m$, où les $\varphi^i,\alpha^j,\psi^i,\beta^j$ sont des polynômes sur $\mathbf{k}$. Dans le cas de deux systèmes équivalents $\mathcal{D}_1/\mathbf{k}$ et $\mathcal{D}_2/\mathbf{k}$, définis par $\mathcal{D}_1 = \mathbf{k}<\xi>$ et $\mathcal{D}_2 = \mathbf{k}<\zeta>$ où

les composantes de $\xi := (\xi^1, \ldots, \xi^r)$ (respectivement $\zeta := (\zeta^1, \ldots, \zeta^s)$) sont reliées par des équations différentielles algébriques, les relations ci-dessus s'écrivent

$$\begin{array}{rcl} \Phi^i(\xi^i, \overline{\zeta}) & = & 0 \\ \Psi^j(\zeta^j, \overline{\xi}) & = & 0 \end{array}$$

pour $i = 1, \ldots, r$ et $j = 1, \ldots, s$, les Φ^i, Ψ^j étant des polynômes sur $\mathbf{k}$. On voit bien le caractère "inversible sans intégrales" (umkehrbar integrallos) de cette transformation, qui est une généralisation non linéaire de la notion de matrice unimodulaire.

Deux systèmes (dynamiques, réalisations) équivalents ont forcément le même degré de transcendance différentielle, i.e. la même dimension d'entrée. Cependant, deux réalisations équivalentes peuvent avoir des dimensions d'état différentes, comme le montre l'exemple élémentaire suivant où $n = 1$, $m = 1$ et $p = 2$.

Exemple 1.2 Soient les systèmes définis par $\dot{x} = u$ et $\dot{y}^1 = y^2, \dot{y}^2 = v$. On définit un automorphisme Φ en posant $\Phi(x) := y^1$ et $\Phi(y^1) := y^1$, ce qui entraine $\Phi(u) = y^2$ et $\Phi(\dot{u}) = v$ (ainsi que $\Phi(y^2) = y^2$, $\Phi(v) = v$). Ces deux systèmes sont donc équivalents. $\square$

En s'inspirant de cet exemple, on montre facilement que deux systèmes linéaires commandables sont équivalents ssi ils ont le même nombre de commandes (il suffit de les mettre sous forme de Brunovsky).

Introduisons également une autre notion d'équivalence, qui, contrairement à la précédente, n'a de sens que pour des réalisations:

Définition 1.2 *Deux réalisations* (x,u) *et* (y,v) *sont* fortement équivalentes*, ou encore* équivalentes par bouclage statique*, si les filtrations associées à* (x,u) *et* (y,v) *coïncident.*

Conformément à la remarque 1.2, cette définition s'entend "à un automorphisme différentiel de $\mathcal{U}$ près".

Par définition, x est algébrique sur $k(y)$, u est algébrique sur $k(y,v)$, et vice-versa, d'où $p = n$ (deux réalisations fortement équivalentes ont donc la même dimension d'état) et

$$\begin{array}{rcl} \varphi^i(x^i, y) & = & 0 \\ \alpha^j(u^j, y, v) & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \psi^i(y^i, x) & = & 0 \\ \beta^j(v^j, x, u) & = & 0 \end{array}$$

pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$. Il est clair que l'équivalence forte entraine l'équivalence.

Passons maintenant au deuxième volet de cette section:

Définition 1.3 *Soit* (x,u) *une réalisation de* $\mathcal{D}/\mathbf{k}$*. Une entrée* v *de* $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ *est appelée*

- bouclage endogène *sur* (x,u)*, si* x *est indépendant sur* $\mathbf{k}<v>$
- bouclage quasistatique *sur* (x,u)*, si* x *est une base de transcendance de* $\mathcal{D}<v>/\mathbf{k}<v>$
- bouclage statique *sur* (x,u)*, si les filtrations associées à* (x,u) *et* (x,v) *coïncident.*

La définition d'un bouclage quasistatique donnée ici est différente de la définition originale (cf [11]), mais strictement équivalente; son avantage est de bien faire ressortir la différence entre bouclages quasistatique et endogène. Clairement, statique $\Rightarrow$ quasistatique $\Rightarrow$ endogène.

Soit (x,u) une réalisation de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$. Si v est un bouclage endogène sur (x,u), il est possible de compléter x par un ensemble $z := (z^1,\ldots,z^q)$, éventuellement vide, d'éléments de $\mathcal{D}<v>/\mathbf{k}<v>$, de façon que (x,z) soit une base de transcendance de $\mathcal{D}<v>/\mathbf{k}<v>$. On peut alors écrire

$$\begin{array}{rcl} \alpha^i(u^i,x,z,\overline{v}) & = & 0 \\ a^j(\dot{z}^j,x,z,\overline{v}) & = & 0 \end{array} \tag{1.1}$$

pour $i = 1,\ldots,m$ et $j = 1,\ldots,q$, où les α^i,a^j sont des polynômes sur $\mathbf{k}$. Ceci correspond bien à la notion usuelle de *bouclage dynamique*. Notons que comme x est une base de transcendance de $\mathcal{D}/\mathbf{k}<u>$, on peut aussi écrire

$$\begin{array}{rcl} \beta^i(v^i,x,\overline{u}) & = & 0 \\ b^j(z^j,x,\overline{u}) & = & 0 \end{array}$$

pour $i = 1,\ldots,m$ et $j = 1,\ldots,p$, où les β^i and b^j sont des polynômes sur $\mathbf{k}$. Autrement dit, les grandeurs z et v constituant le bouclage sont "engendrées" par x et les dérivées de u, d'où l'appellation *endogène*.

Si v est un bouclage quasistatique, $z := \emptyset$, et on a simplement

$$\begin{array}{rcl} \alpha^i(u^i,x,\overline{v}) & = & 0 \\ \beta^i(v^i,x,\overline{u}) & = & 0 \end{array}$$

pour $i = 1,\ldots,m$.

Si v est un bouclage statique, $z := \emptyset$ et $\overline{\mathbf{k}(x,u)} = \overline{\mathbf{k}(x,v)}$, donc

$$\begin{array}{rcl} \alpha^i(u^i,x,v) & = & 0 \\ \beta^i(v^i,x,u) & = & 0 \end{array}$$

pour $i = 1,\ldots,m$.

On dira qu'un bouclage endogène est *classique* s'il est possible de choisir z de façon que les polynômes α^i et a^j dans (1.1) ne dépendent pas des dérivées (d'ordre ≥ 1) de v. Un bouclage statique est toujours classique; un bouclage quasistatique ne l'est jamais, sauf s'il est statique.

Exemple 1.3 Soit une réalisation (x,u) de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$. Alors $v := \dot{u}$ est un bouclage endogène. Comme (x,u) est une base de transcendance de $\mathcal{D}/\mathbf{k}<\dot{u}>$, on peut prendre $z := u$, et on a

$$\begin{array}{rcl} u & = & z \\ \dot{z} & = & v. \end{array}$$

Ce bouclage est classique, donc pas quasistatique. Plus généralement, ajouter n'importe quel nombre d'intégrateurs purs sur les composantes de l'entrée d'une réalisation revient à faire un bouclage endogène non quasistatique. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir les liens entre les diverses notions d'équivalence et de bouclage.

L'équivalence forte est l'adaptation algébrique de la notion usuelle d'"équivalence par bouclage statique et changement de coordonnées". Comme conséquence immédiate des définitions, on a

Proposition 1.1 *Soient* (x,u) *et* (y,v) *deux réalisations fortement équivalentes. Alors* v *est un bouclage statique sur* (x,u).

Cette propriété est bien sûr symétrique, et u est aussi un bouclage statique sur (y,v). Pour obtenir un résultat comparable dans le cas endogène, une définition supplémentaire est requise:

Définition 1.4 *Soient* (x,u) *et* (y,v) *deux réalisations équivalentes. On dit que* (y,v) *est une* extension dynamique *de* (x,u) *si* x *est algébrique sur* $\mathbf{k}(y)$. *Ceci entraine que* v *est un bouclage endogène sur* (x,u).

L'extension est dite quasistatique *s'il existe un bouclage quasistatique* w *et un multientier* $\nu \in \mathbb{N}^m$ *tels que* $w_{(\nu)} = v$.

Quelques remarques sont utiles pour comprendre le sens de cette définition. Soit $\mathcal{D} := \overline{\mathbf{k}<y,v>} = \overline{\mathbf{k}<x,u>}$; puisque x est indépendant sur $\mathbf{k}$ et $\overline{\mathbf{k}(x)} \subset \overline{\mathbf{k}(y)}$, on peut compléter x par un ensemble z de composantes de y de façon que (x,z) soit une base de transcendance de $\overline{\mathbf{k}(y)}/\mathbf{k}$. Pour tout choix possible d'un tel z, (x,z) et y ont forcément le même nombre d'éléments. Mais $\mathcal{D} = \overline{\mathbf{k}<v>(y)} = \overline{\mathbf{k}<v>(x,z)}$, ce qui signifie que (x,z) contient une base de transcendance de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$. Comme (x,z) a le même nombre d'éléments que y, c'est aussi une base de transcendance de $\mathcal{D}/\mathbf{k}<v>$. On en conclut que (x,z,v) est une réalisation de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ équivalente à (y,v) et même fortement équivalente, puisque $\overline{\mathbf{k}(x,z)} = \overline{\mathbf{k}(y)}$. En résumé, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\alpha^i(u^i,x,z,\overline{v}) &= 0 \\
a^j(\dot{z}^j,x,z,\overline{v}) &= 0 \\
\\
\varphi^k(x^k,y) &= 0 \\
\varphi^{n+j}(z^j,y) &= 0 \\
\\
\psi^l(y^l,x) &= 0
\end{aligned}$$

pour $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,p-n$, $k = 1,\ldots,n$ et $l = 1,\ldots,p$, où les $\alpha^i,a^i,\varphi^1,\psi^i$ sont des polynômes sur $\mathbf{k}$. Autrement dit, (y,v) s'obtient à partir de (x,u) par bouclage endogène et "changement de coordonnées". Pour une extension quasistatique, ce bouclage peut se décomposer en un bouclage quasistatique suivi de chaines d'intégrateurs purs. L'extension est dite *classique* si le bouclage v est classique. On a alors un résultat essentiel:

Théorème 1.2 *Soient* (x,u) *et* (y,v) *des réalisations équivalentes. Pour* $\nu \in \mathbb{N}^m$ *suffisamment grand,* $(y,v,\ldots,v_{(\nu)})$ *est une extension dynamique classique de* (x,u).

Si (x,u) et (y,v) sont fortement équivalentes, la proposition précédente affirme qu'on peut choisir $\nu = (0,\ldots,0)$.

Preuve. Soit $\mathcal{D} := \overline{\mathbf{k}<y,v>} = \overline{\mathbf{k}<x,u>}$. Pour $\nu \in \mathbb{N}^m$, soient $\tilde{y} := (y,v,\ldots,v_{(\nu)})$ et $\tilde{v} := v_{(\nu+\mathbf{1})}$, avec $\nu + \mathbf{1} := (\nu_i + 1)_{i=1,\ldots,m}$. Quand ν est suffisamment grand, $(\tilde{y},\tilde{v})$ est une réalisation classique de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$, x est algébrique sur $\mathbf{k}(\tilde{y})$ et u est algébrique sur $\mathbf{k}(\tilde{y},\tilde{v})$. De plus, d'après la discussion précédent l'énoncé, on peut choisir z pour que $(x,z,\tilde{v})$ et $(\tilde{y},\tilde{v})$ soient des réalisations fortement équivalentes, ce qui entraine que $\dot{z}$ est algébrique sur $\mathbf{k}(x,z,\tilde{v})$. Il est alors clair que $\tilde{v}$ est un bouclage classique sur (x,u). ■

Comme dans la proposition précédente, on peut échanger les rôles de (x,u) et (y,v). Ce théorème a un corollaire immédiat mais néanmoins très important:

Corollaire 1.3 *Soient (x,u) et (x,z,v) deux réalisations équivalentes. Pour $\nu \in \mathbb{N}^m$ suffisamment grand, $(x,u,\ldots,u_{(\nu)})$ est une extension dynamique classique de (x,u).*

Ceci veut dire que, à des intégrateurs purs près, il est toujours possible de "défaire" un bouclage endogène au moyen d'un autre bouclage endogène. C'est la généralisation d'une propriété évidente de "réversibilité" des bouclages statiques. Autrement dit, étant donné un système "bouclé" par un bouclage endogène:

$$\begin{array}{rcl} F^i(\dot{x}^i,\overline{u}) & = & 0 \\ \alpha^j(u^j,x,z,\overline{v}) & = & 0 \\ a^k(\dot{z}^k,x,z,\overline{v}) & = & 0 \end{array} \tag{1.2}$$

(avec $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,m$ et $k = 1,\ldots,q$, où les F^i,α^j,a^k sont des polynômes sur $\mathbf{k}$), on peut trouver un bouclage endogène (classique)

$$\begin{array}{rcl} \beta^i(v^i,x,z,\eta,w) & = & 0 \\ b^j(\dot{\eta}^j,x,z,\eta,w) & = & 0 \end{array} \tag{1.3}$$

$(i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,r)$, tel que (1.2) bouclé par (1.3) se ramène à

$$\begin{array}{rcl} F^i(\dot{x}^i,\overline{u}) & = & 0 \\ \dot{u}_{(\nu)} & = & w \end{array}$$

par un "changement de coordonnées", i.e. $\overline{\mathbf{k}(x,z,\eta)} = \overline{\mathbf{k}(x,u,\ldots,u_{(\nu)})}$. En termes imagés, les propriétés qui se conservent par ajout d'intégrateurs purs se conservent également par bouclage endogène.

Terminons cette section par un critère caractérisant les bouclages endogènes: étant données deux réalisations (x,u) et (x,z,v), on voudrait savoir si v est un bouclage endogène sur (x,u). C'est une question naturelle quand on considère un bouclage dynamique donné par des équations de la forme (1.1). Pour cela, considérons la filtration $(\mathcal{E}_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{E}_r & := & \mathbf{k}, & r \leq -2, \\ \mathcal{E}_r & := & \overline{\mathbf{k}(x,z,v)}, & r = -1, \\ \mathcal{E}_r & := & \overline{\mathbf{k}(x,z,v,u,\dot{u},\ldots,u_{(r)})}, & r \geq 0. \end{array}$$

Le critère s'énonce alors:

Théorème 1.4 *Soient* (x,u) *et* (x,z,v) *deux réalisations. Alors* v *est un bouclage endogène sur* (x,u) *ssi* $\mathrm{d^\circ tr\,diff}\,\mathbf{k}<x,z,v>/\mathbf{k} = m$ *et* $\mathrm{d^\circ tr}\,\mathcal{E}_r = m(r+1)+n$ *pour* $r \in \mathbb{N}$ *suffisamment grand.*

Preuve. Soient $\mathcal{D} := \overline{\mathbf{k}<x,u>} = \overline{\mathbf{k}<u>(x)}$ et m le degré de transcendance différentiel de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$. Par définition x est indépendant sur $\mathbf{k}<v>$. Il suffit donc de montrer que v est une entrée de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ et que z est algébrique sur $\mathcal{D}$. Par définition d'une réalisation, les composantes de u sont différentiellement algébriquement indépendantes sur $\mathbf{k}$ et x est algébriquement indépendant sur $\overline{\mathbf{k}(u,\dot{u},\ldots,u_{(r)})}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$; ceci implique $\mathrm{d^\circ tr}\,\overline{\mathbf{k}(x,u,\dot{u},\ldots,u_{(r)})} = m(r+1)+n$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. Mais z et v algébriques sur $\mathcal{D}$ signifie simplement qu'ils sont algébrique sur $\mathbf{k}(u,\dot{u},\ldots,u_{(r)})$ pour r suffisamment grand, i.e. $\mathrm{d^\circ tr}\,\mathcal{E}_r = m(r+1)+n$. Comme $\mathrm{d^\circ tr\,diff}\,\mathbf{k}<x,z,v>/\mathbf{k} = \mathrm{d^\circ tr\,diff}\,\mathbf{k}<x,u>/\mathbf{k} = m$, v est bien une entrée de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$. ■

Remarque 1.3 Par définition, un bouclage endogène est toujours *inversible* au sens où la réalisation entrée-sortie $((x,u),v)$ est inversible (cf section 1.7). Il est cependant possible de définir une notion de bouclage endogène non inversible à partir du critère précédent; il est clair les propriétés liées à la "réversibilité" des bouclages endogènes ne sont alors valables que pour des bouclages inversibles. □

1.4 Bouclages exogènes

Cette section contient quelques remarques informelles sur l'irréversibilité des bouclages dynamiques quelconques.

Exemple 1.4 Soit le système (commandable!) défini par

$$\dot{x} = u,$$

sur lequel on fait agir le bouclage dynamique

$$\begin{aligned} u &= v \\ \dot{z} &= v. \end{aligned}$$

Clairement, le système bouclé n'est plus commandable. Par le théorème 1.4, v n'est pas un bouclage endogène: en effet, pour $r \geq 0$, on a $\mathrm{trd}^\circ\mathcal{E}_r = 1.(r+1)+1$. Notons que z est différentiellement algébrique sur $\mathbf{k}<x,u>$ (c'est l'intégrale de u).

Examinons quelque chose d'un peu plus subtil. Appliquons maintenant le bouclage dynamique

$$\begin{aligned} u &= z^2 \\ \dot{z}^1 &= x + (z^2)^2 \\ \dot{z}^2 &= v. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que le système bouclé est commandable, mais pas linéarisable statiquement. D'après [8], un système à une seule commande qui n'est pas linéarisable

statiquement ne l'est pas non plus dynamiquement, et n'est donc pas plat. Comme précédemment, v n'est pas un bouclage endogène, puisque $\mathrm{trd}^\circ\mathcal{E}_r = 1.(r+1)+1$ pour $r \geq 1$, et z est différentiellement algébrique sur $\mathbf{k}<x,u>$ (puisque $z^2 = u$, $v = \dot{u}$ et $\dot{z}^1 = x + (u)^2$). □

Ainsi un bouclage (inversible) général peut transformer un système linéaire commandable en un système non commandable ou non linéarisable, i.e. avoir un effet fondamentalement irréversible, contrairement à un bouclage endogène. Un bouclage dynamique qui n'est pas endogène est dit *exogène*. Les grandeurs z et v définissant un tel bouclage ne sont plus algébrique sur (x,u), mais seulement *différentiellement* algébriques. L'intérêt des bouclages endogènes n'est pas complètement clair (cf par exemple la remarque 1.4

1.5 Platitude et défaut

Rappelons qu'une extension différentielle L/K est dite *purement différentiellement transcendante* si elle possède une base de transcendance différentielle ξ telle que $L = K<\xi>$. Pour un système $\mathcal{D}/\mathbf{k}$, qui est par définition une extension différentielle de type fini, on dira plutôt système purement différentiellement transcendant; dans ce cas, ξ se compose d'un nombre fini d'éléments $(\xi^1,\ldots,\xi^m)$, où m est le degré de transcendance différentiel de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$.

Définition 1.5 *Un système $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ est dit* différentiellement plat *(ou plus simplement* plat *s'il est équivalent à un système purement différentiellement transcendant $L/\mathbf{k}$. Une base de transcendance différentielle $y = (y^1,\ldots,y^m)$ de $L/\mathbf{k}$ telle que $L = k<y>$ est appelée* sortie plate *(ou* linéarisante*) de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$.*

Soit un système plat $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ muni d'une sortie plate y; alors $\overline{\mathcal{D}}/\mathbf{k}<y>$ est une extension différentielle algébrique, qui admet $(\emptyset,y)$ pour réalisation (l'état est l'ensemble vide et l'entrée est y): en d'autres termes, la connaissance de y permet de "calculer toutes les trajectoires du système" sans intégrer d'équations différentielles. Clairement, un système $\tilde{\mathcal{D}}/\mathbf{k}$ équivalent à $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ est lui-même plat, et admet y pour sortie plate. Notons également que si $\tilde{y}$ est une autre sortie plate de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$, alors les systèmes $\mathbf{k}<y>/\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}<\tilde{y}>/\mathbf{k}$ sont équivalents, et on a

$$\begin{array}{rcl} \varphi^i(y^i,\overline{\tilde{y}}) & = & 0 \\ \psi^i(\tilde{y}^i,\overline{y}) & = & 0, \end{array}$$

pour $i = 1,\ldots,m$, où les φ^i,ψ^i sont des polynômes sur $\mathbf{k}$: à partir d'une sortie plate, on peut donc fabriquer une infinité d'autres sorties plates par de telles transformations "unimodulaires".

Exemple 1.5 (suite de l'exemple 1.1) Prenons comme sortie $y := (y^1,y^2)$ avec

$$\begin{array}{rcl} y^1 & = & 2\xi^2\xi^3_{(3)} + (\xi^1 + \ddot{\xi}^3\xi^4)^2 \\ y^2 & = & \xi^3. \end{array}$$

En dérivant y^1, on a

$$\begin{array}{rcl} \dot{y}^1 & = & 2\xi^2\xi^3_{(4)} \\ \ddot{y}^1 & = & 2\xi^2\xi^3_{(5)} - 2\xi^4(\xi^1 + \ddot{\xi}^3\xi^4). \end{array}$$

On en déduit

$$\begin{array}{rcl} \xi^3 & = & y^2 \\ 2\xi^2 y^2_{(4)} - \dot{y}^1 & = & 0 \\ (2\xi^4)^2(\dot{y}^1 y^2_{(3)} - y^1(y^2_{(4)})^2) + (\dot{y}^1 y^2_{(5)} - \ddot{y}^1 y^2_{(4)})^2 & = & 0 \\ 2\xi^1\xi^4 y^2_{(4)} + \ddot{y}^1 y^2_{(4)} + 2(\xi^4)^2\ddot{y}^2 y^2_{(4)} - \dot{y}^1 y^2_{(5)} & = & 0, \end{array}$$

et il ne reste plus qu'à éliminer ξ^4 de la dernière équation à l'aide de l'avant dernière. Ceci montre que ξ est algébrique sur $\mathbb{Q}(y^1,\dot{y}^1,\ddot{y}^1,y^2,\ddot{y}^2,y^2_{(3)},y^2_{(4)},y^2_{(5)})$, donc que le système est plat.

On peut fabriquer une autre sortie plate $\tilde{y}$ en posant par exemple $\tilde{y}^1 := y^1 + \dot{y}^2$ et $\tilde{y}^2 := y^2$, la transformation réciproque étant donnée par $y^1 = \tilde{y}^1 - \dot{\tilde{y}}^2$ et $y^2 = \tilde{y}^2$. □

Le théorème 1.2 permet d'établir le lien entre platitude et linéarisation par bouclage endogène: soient (x,u) une réalisation d'un système plat et y une sortie plate; pour $\nu \in \mathbb{N}^m$, $(y,\ldots,y_{(\nu)})$ est alors une extension dynamique classique de (x,u). En posant $Y := (y,\ldots,y_{(\nu)})$ et $v := y_{(\nu+\mathbf{1})}$, les équations définissant la réalisation (Y,v) s'écrivent

$$\dot{Y} = AY + Bv,$$

où la paire de matrices (A,B) est évidemment commandable (au sens usuel du terme). D'après les commentaires précédant le théorème 1.2, il existe alors un ensemble z tel que

$$\begin{array}{rcl} \alpha^i(u^i,x,z,v) & = & 0 \\ a^j(\dot{z}^j,x,z,v) & = & 0 \\ \\ \varphi^k(x^k,Y) & = & 0 \\ \varphi^{n+j}(z^j,Y) & = & 0 \\ \\ \psi^l(Y^l,x,z) & = & 0 \end{array}$$

pour $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,p-n$, $k = 1,\ldots,n$ et $l = 1,\ldots,p$, où les $\alpha^i,a^i,\varphi^1,\psi^i$ sont des polynômes sur $\mathbf{k}$, avec $p := \nu_1 + \ldots + \nu_m$. Autrement dit, la réalisation (x,u) est linéarisable au sens usuel du terme par un bouclage endogène classique. Réciproquement, il est immédiat qu'une réalisation (x,u) linéarisable par bouclage endogène est plate. La platitude est la formulation intrinsèque de cette propriété.

Exemple 1.6 (suite de l'exemple 1.5) Choissisons la réalisation $x := (\xi^1,\xi^2)$ et $u := (\xi^3,\xi^4)$. D'après les calculs précédents, on peut appliquer le théorème 1.2 avec $\nu = (2,5)$. Posons donc $Y := (y^1,\dot{y}^1,y^2,\dot{y}^2,\ddot{y}^2,y^2_{(3)},y^2_{(4)})$ et $v := (\ddot{y}^1,y^2_{(5)})$. Il faut maintenant choisir 5 composantes de Y pour constituer z, de façon que $\overline{\mathbf{k}(x,z)} = \overline{k(Y)}$; un choix simple consiste à prendre $z := (y^2,\dot{y}^2,\ddot{y}^2,y^2_{(3)},y^2_{(4)})$. Le bouclage linéarisant est alors donné par

$$\begin{array}{rcl} u^1 & = & z^1 \\ 2u^2(x^1+z^3u^2)+v^1-2x^2v^2 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \dot{z}^1 & = & z^2 \\ \dot{z}^2 & = & z^3 \\ \dot{z}^3 & = & z^4 \\ \dot{z}^4 & = & z^5 \\ \dot{z}^5 & = & v^2, \end{array}$$

où la deuxième équation n'est rien d'autre que l'expression de $\ddot{y}^1$ calculée plus haut à un changement de notation près. Le changement de coordonnées s'obtient immédiatement à partir des formules de l'exemple 1.5. □

Remarquons que dans l'exemple ci-dessus, l'extension dynamique est quasistatique (i.e. le bouclage linéarisant se compose d'un bouclage quasistatique suivi d'intégrateurs purs): en posant $w := (v^1,u^1)$, on a en effet les transformations réciproques

$$\begin{array}{rcl} u^1 & = & w^2 \\ 2u^2(x^1+\ddot{w}^2u^2)+w^1-2x^2w^2_{(5)} & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} w^1 & = & 2x^2u^1_{(5)}-2u^2(x^1+\ddot{u}^1u^2) \\ w^2 & = & u^1. \end{array}$$

Quand un système $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ n'est pas plat, on peut essayer de quantifier sa "non-platitude" de la manière suivante: si z est une entrée du système (i.e. une base de transcendance différentielle de $\overline{\mathcal{D}}/\mathbf{k}$), l'extension $\mathcal{D}<z>/\mathbf{k}<z>$est algébrique et son degré de transcendance est fini. Ceci conduit à la

Définition 1.6 *On appelle* défaut *du système $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ l'entier δ défini par*

$$\delta := \min_z \mathrm{d}^\circ\mathrm{tr}\,\mathcal{D}<z>/\mathbf{k}<z> \ ,$$

où z parcourt l'ensemble des entrées de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$. Une entrée y permettant d'atteindre ce minimum est appelée sortie maximalement plate *(ou plus simplement* sortie maximale*).*

Clairement, deux systèmes équivalents ont le même défaut, mais deux systèmes ayant le même défaut ne sont pas forcément équivalents. Il est évident qu'un système est plat ssi son défaut est nul. Le défaut correspond à la notion de "dimension non linéarisable" par bouclage endogène, étendant ainsi dans le cadre algébrique une notion de [33]. Pour le voir, on utilise le théorème 1.2 en généralisant ce qui a été fait précédemment pour un système plat: soient (x,u) une réalisation d'un système $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ de défaut δ et y une sortie maximale. On peut alors trouver un ensemble $\eta := (\eta^1,\ldots,\eta^\delta)$ tel que (η,y) soit une réalisation de $\overline{\mathcal{D}}/\mathbf{k}<y>$; pour $\nu \in \mathbb{N}^m$, $(\eta,y,\ldots,y_{(\nu)})$ est alors une extension dynamique classique de (x,u). En posant $Y := (y,\ldots,y_{(\nu)})$ et $v := y_{(\nu+\mathbf{1})}$, les équations définissant la réalisation (η,Y,v) s'écrivent

$$\begin{aligned} \gamma^i(\dot{\eta}^i,\eta,Y) &= 0 \\ \dot{Y} &= AY + Bv, \end{aligned} \tag{1.4}$$

pour $i = 1,\ldots,\delta$, où les γ^i sont des polynômes sur k. Il existe alors un ensemble z tel que

$$\begin{aligned} \alpha^i(u^i,x,z,v) &= 0 \\ a^j(\dot{z}^j,x,z,v) &= 0 \\ \\ \varphi^k(x^k,\eta,Y) &= 0 \\ \varphi^{n+j}(z^j,\eta,Y) &= 0 \\ \\ \psi^l(\eta^l,x,z) &= 0 \\ \psi^{\delta+s}(Y^l,x,z) &= 0 \end{aligned}$$

pour $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,p-n$, $k = 1,\ldots,n$, $l = 1,\ldots,\delta$ et $s = 1,\ldots,p$, où les $\alpha^i,a^i,\varphi^1,\psi^i$ sont des polynômes sur $\mathbf{k}$, avec $p := \nu_1 + \ldots + \nu_m$. L'équation (1.4) est clairement "le plus petit système non linéarisable par bouclage endogène". Comme dans le cas statique, ce système n'est pas unique et seule sa "dimension" δ est intrinsèque.

Remarque 1.4 Un système plat n'est donc rien d'autre qu'un système linéarisable par bouclage endogène. Une question intéressante est de savoir quels sont les liens entre la linéarisation la plus générale (i.e. la linéarisation par bouclage exogène) et la platitude: alors que de nombreux systèmes issus de problèmes concrets sont plats, les systèmes qui sont linéarisables sans être plats ont l'air plutôt rares. A l'heure actuelle, il ne semble d'ailleurs pas que l'on en connaisse un seul exemple, et en fabriquer ne parait pas si facile. □

1.6 Exemples de systèmes plats

On donne ici trois exemples simples de systèmes plats issus de la mécanique des solides. Ces exemples sont intéressants en tant que "prototypes" de situations fréquemment rencontrées en pratique. Comme souvent en mécanique, les équations les décrivant comportent des fonctions trigonométriques, résultant de la projections des équation de la dynamique dans un repère. Il est cependant très facile de les réécrire sous forme algébrique de la façon suivante: si α est une variable d'état représentant un angle, le changement de coordonnées $t := \tan\frac{\alpha}{2}$ conduit à $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\dot{\alpha} = \frac{2\dot{t}}{1+t^2}$ et met le système sous forme différentielle algébrique.

Pendule plan

Cet exemple est la réinterprétation d'un résultat plus général de [10]. Soit un solide plan de masse m dont on sait commander les accélérations en un point A distinct du centre

d'inertie G. En appelant θ l'angle entre la droite AG et la verticale, et x,z les coordonnées de A, les équations du mouvement sont

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= u \\ \ddot{z} &= v \\ a\ddot{\theta} &= g\sin\theta + u\cos\theta + v\sin\theta, \end{aligned}$$

avec $a := \dfrac{I}{md} + d$, où d est la distance AG et I le moment d'inertie en G.

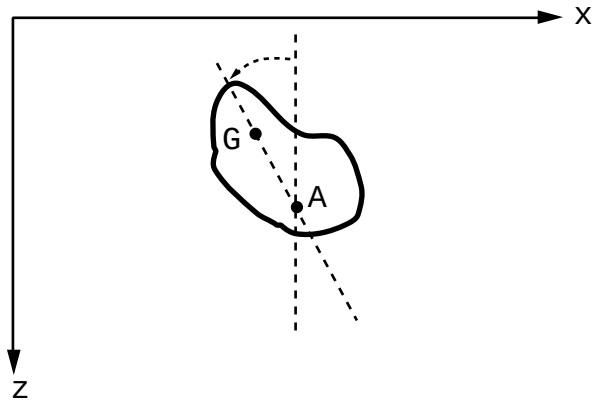


FIG. 1.1 – pendule plan

Une sortie plate est fournie par $y^1 := x - a\sin\theta$, $y^2 := z + a\cos\theta$. En effet, on établit facilement

$$\begin{aligned} (y^1 - x)^2 + (y^2 - z)^2 &= a^2 \\ (y^1 - x)(\ddot{y}^2 + g) - (y^2 - z)\ddot{y}^1 &= 0 \\ (y^1 - x) - (y^2 - z)\tan\theta &= 0. \end{aligned}$$

Les deux premières équations permettent de calculer x et z en fonction de la sortie. En les dérivant, il est facile d'exprimer u et v en fonction des dérivées de y d'ordre au plus 4. La troisième équation permet de calculer θ; en posant $t := \tan\frac{\theta}{2}$, elle devient algébrique:

$$(1 + t^2)(y^1 - x) - 2t(y^2 - z) = 0.$$

On peut intepréter $y = (y^1,y^2)$ comme les coordonnées d'un point C du solide, situé sur la droite AG à une distance a de A. Ce point, appelé *centre d'oscillation*, est depuis longtemps connu des mécaniciens (cf par exemple [46]): un pendule ponctuel AC (toute la masse est concentrée en C) de masse m, oscille à la même vitesse que le solide.

Avion à décollage vertical

Considérons avec [22] les équations simplifiées d'un avion à décollage vertical évoluant dans le plan vertical:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -u\sin\theta + \varepsilon v\cos\theta \\ \ddot{z} &= ucos\theta + \varepsilon v\sin\theta - 1 \\ \ddot{\theta} &= v, \end{aligned}$$

où x et z sont les coordonnées du centre d'inertie de l'avion et θ est l'angle de roulis (i.e. orientation de l'avion par rapport à l'horizontale). Les commandes u et v sont respectivement la poussée et le moment de roulis. Toutes les grandeurs physiques ont été normalisées (ainsi "-1" représente l'accélération de la pesanteur); ε est un (petit) coefficient traduisant le couplage entre le moment de roulis et l'accéleration latérale.

Une sortie plate est $y^1 = x - \varepsilon \sin\theta$, $y^2 = z + \varepsilon\cos\theta$. On vérifie facilement que

$$\begin{array}{rcl} (y^1 - x)^2 + (y^2 - z)^2 & = & \varepsilon^2 \\ (y^1 - x)(\ddot{y}^2 + 1) - (y^2 - z)\ddot{y}^1 & = & 0 \\ (y^1 - x)\tan\theta - (y^2 - z) & = & 0. \end{array}$$

Les commandes u et v s'obtiennent alors à partir de

$$\begin{array}{rcl} u\cos\theta & = & \ddot{y}^2 + 1 + \varepsilon\dot{\theta}^2\cos\theta \\ v(1+\tan^2\theta) & = & \ddot{\overbrace{\tan\theta}} - 2\dot{\theta}^2\tan\theta. \end{array}$$

La similitude avec l'exemple précédent est flagrante, ce qui n'est pas complètement surprenant quand on réfléchit à la signification physique du modèle.

Camion à n remorques

L'exemple traité maintenant est un cas typique de système mécanique non holonome. Considérons avec [36] les équations cinématiques d'un véhicule auquel est attaché un train de n remorques, le timon de la remorque i étant accroché au milieu de l'axe des roues arrière de la remorque $i-1$. Les commandes u et v sont la vitesse de rotation des roues arriére du camion et l'orientation de ses roues avant. Sous l'hypothèse de roulement sans glissement, on a alors

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}^0 & = & u\cos\theta^0 \\ \dot{y}^0 & = & u\sin\theta^0 \\ \dot{\varphi} & = & v \\ \dot{\theta}^0 & = & \dfrac{u}{d_0}\tan\varphi \\ \dot{\theta}^i & = & \dfrac{u}{d_i}\sin(\theta^{i-1} - \theta^i)(\prod_{j=1}^{i-1}\cos(\theta^{j-1} - \theta^j)), \quad i = 1,\ldots,n, \end{array}$$

avec (x^0,y^0) coordonnées du point P_0, milieu de l'axe des roues arriére du camion, φ vitesse de rotation de ces roues, et $\theta^0,\ldots,\theta^n$ orientations du camion et des remorques. Les paramètres $d_0,\ldots,d_n$ sont positifs (ce sont des distances).

Soient (x^i,y), $i = 1,\ldots,n$, les coordonnées du point P_i, milieu de l'axe des roues de la remorque i:

$$\begin{array}{rcl} x^i & = & x_0 - \sum_{k=1}^i d_k\cos\theta^k \\ y^i & = & y_0 - \sum_{k=1}^i d_k\sin\theta^k. \end{array}$$

On va montrer que les coordonnées de P_n forment une sortie plate. Un calcul direct montre que $\dot{y}^i = \dot{x}^i\tan\theta^i$ pour $i = 0,\ldots,n$. Par ailleurs, $x^{i-1} = x^i + d^i\cos\theta^i$ et $y^{i-1} = y^i + d^i\sin\theta^i$ ce qui entraine

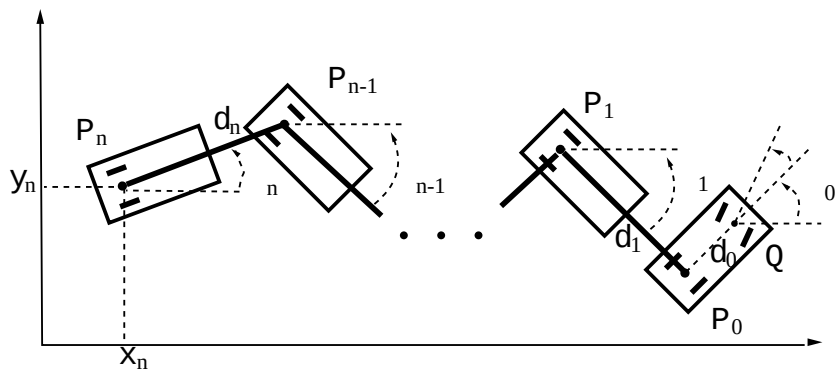


FIG. 1.2 – camion à n remorques

$$\begin{aligned}(x^{i-1}-x^i)^2((\dot{x}^i)^2+(\dot{y}^i)^2)-(d^i\dot{x}^i)^2 &= 0\\ (y^{i-1}-y^i)^2((\dot{x}^i)^2+(\dot{y}^i)^2)-(d^i\dot{y}^i)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Autrement dit, $\tan\theta^i$, x^{i-1} et y^{i-1} sont algébriques sur $\mathbb{R}(x^i,\dot{x}^i,y^i,\dot{y}^i)$. On en déduit facilement que $\tan\theta^0$, x^0 et y^0 sont algébriques sur $\mathbb{R}(x^n,\ldots,x^n_{(n+1)},y^n,\ldots,y^n_{(n+1)})$. De plus, on exprime u, v et φ en fonction de $\dot{x}^0,\dot{y}^0,\theta^0$ par

$$\begin{aligned}(u)^2 &= (\dot{x}^0)^2+(\dot{y}^0)^2\\ ((\dot{x}^0)^2+(\dot{y}^0)^2)\tan^2\varphi &= (d_0\dot{\theta}^0)^2\\ v &= \dot{\varphi},\end{aligned}$$

ce qui montre que (x^n,y^n) est une sortie plate.

Il est intéressant de constater que dans ces trois exemples, la sortie plate correpond aux coordonnées d'un point "remarquable" du système physique considéré.

1.7 Systèmes entrée-sortie et découplage

On reformule ici certains résultats de [15, 16] sur le découplage des systèmes entrée-sortie, en les précisant à l'aide des notions précédemment établies.

Un *système entrée-sortie* $(\mathcal{D}/\mathbf{k},y)$ est un couple constitué d'un système $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ et d'une sortie y de ce système (i.e. y est algébrique sur $\mathcal{D}$). On définit de même une *dynamique entrée-sortie* et une *réalisation entrée-sortie*. On pose $m := \mathrm{d}^\circ\mathrm{tr}\,\mathrm{diff}\,\mathcal{D}/\mathbf{k}$ et $y := (y^1,\ldots,y^p)$.

Définition 1.7 *Deux systèmes entrée-sortie* $(\mathcal{D}_1/\mathbf{k},y_1)$ *et* $(\mathcal{D}_2/\mathbf{k},y_2)$ *sont dits* équivalents *(ou* équivalents par bouclage endogène*) si* $\mathcal{D}_1/\mathbf{k}\sim\mathcal{D}_2/\mathbf{k}$ *et* $\mathbf{k}<y_1>/\mathbf{k}\sim\mathbf{k}<y_2>/\mathbf{k}$.

Le *rang différentiel de sortie* ρ de $(\mathcal{D}/\mathbf{k},y)$ est le degré de transcendance différentielle de $\mathbf{k}<y>/\mathbf{k}$. Le système entrée sortie $(\mathcal{D}/\mathbf{k},y)$ est inversible à gauche si $\rho=m$, *inversible à droite* si $\rho=p$. Si $m=p$, inversibilité s droite et gauche sont équivalentes et on

dira simplement que le système entrée-sortie est *inversible*. L'inversibilité à droite signifie simplement qu'il n'y a aucune relation différentielle entre les composantes de la sortie.

Proposition 1.5 *Un système entrée-sortie* $(\mathcal{D}/\mathbf{k},y)$ *est inversible à gauche ssi* $\mathcal{D}$ *est différentiellement algébrique sur* $\mathbf{k}<y>$.

Preuve. Comme y est par définition algébrique sur $\mathcal{D}$, l'énoncé signifie simplement d°tr diff $\mathcal{D}<y>/\mathbf{k}<y>= 0$. Mais d°tr diff $\mathcal{D}<y>/\mathbf{k}<y>=$ d°tr diff $\mathcal{D}/\mathbf{k}-$d°tr diff $\mathbf{k}<y>/\mathbf{k} = m-\rho$, d'où le résultat.. ■

Si $p = m$, l'inversibilité du système entrée-sortie signifie donc simplement que y est une entrée de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$. De plus, l'extension $\mathcal{D}<z>/\mathbf{k}<z>$est algébrique et son degré de transcendance est fini.

Définition 1.8 *On appelle* défaut *du système entrée-sortie inversible* $(\mathcal{D}/\mathbf{k},y)$ *le degré de transcendance différentielle de* $\mathcal{D}<y>/\mathbf{k}<y>$.

Remarque 1.5 On dira parfois pour insister *défaut entrée-sortie* du système $(\mathcal{D}/\mathbf{k},y)$, pour bien faire la distinction avec le défaut du système $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ qui est une notion indépendante de toute sortie. □

Le rang différentiel de sortie et le défaut sont des nombres importants pour le problème du découplage, que nous abordons maintenant. Notons qu'en pratique il n'est pas restrictif de considérer qu'un système entrée-sortie $(\mathcal{D}/\mathbf{k},y)$ est inversible à gauche; en effet si son rang différentiel de sortie est $\rho < m$, on peut toujours compléter ly par $m-\rho$ éléments de $\mathcal{D}$ qui ne "servent à rien" de façon à obtenir un système entrée-sortie inversible à gauche, et on n'a pas changé les propriétés d'inversibilité à droite (au sens où il y a toujours le même nombre de relations différentielles entre les composantes de la sortie).

Une dynamique entrée-sortie $(\mathcal{D}/\mathbf{k}<u>\ ,y)$ est *découplée* s'il existe une partition $u := (u^a,u^b)$ et un multiientier $\nu \in \mathbb{N}^p$ tels que $u^a = y_{(\nu)}$; chaque composante de la sortie ne dépend donc que d'une seule composante de l'entrée. Un système entrée-sortie $(\mathcal{D}/\mathbf{k},y)$ est *découplable* s'il admet une entrée u telle que $(\mathcal{D}<u>/\mathbf{k}<u>\ ,y)$ soit découplée. On a alors:

Théorème 1.6 *Un système entrée-sortie est découplable ssi il est inversible à droite.*

Preuve. Soit $(\mathcal{D}/\mathbf{k},y)$ un système entrée-sortie. S'il n'est pas inversible à droite, y est lié sur $\mathbf{k}$, et pour tout $\nu \in \mathbb{N}^p$, $y_{(\nu)}$ est aussi lié sur $\mathbf{k}$. Comme u est indépendant sur $\mathbf{k}$, il ne peut exister de partition $u := (u^a,u^b)$ telle que $u^a = y_{(\nu)}$, ce qui fait que le système n'est pas découplable.

Réciproquement, $(\mathcal{D}/\mathbf{k},y)$ inversible à droite signifie que y est indépendant sur $\mathbf{k}$. On peut alors partitionner u en (u^a,u^b) de sorte que $v := (y,u^a)$ soit une entrée de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$, et il est clair que la dynamique entrée-sortie $(\mathcal{D}<v>/\mathbf{k}<v>\ ,y)$ est découplée. ■

Corollaire 1.7 *Un système entrée-sortie est découplable ssi il est équivalent à une dynamique découplée.*

Preuve. Deux systèmes entrée-sortie équivalents ont évidemment le même rang différentiel de sortie. ■

Le théorème 1.2 permet de faire le lien entre ce résultat et la notion usuelle de découplage par bouclage dynamique: soient $(\mathcal{D}/\mathbf{k},y)$ un système entrée-sortie inversible de défaut δ et (x,u) une réalisation de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$; les commentaires faits après la définition du défaut de $\mathcal{D}/\mathbf{k}$ à la section 1.5 montrent immédiatement qu'on peut transformer la réalisation (x,u) par bouclage endogène classique et "changement de coordonnées" en une réalisation

$$\begin{aligned} \gamma^i(\dot{\eta}^i,\eta,Y) &= 0 \\ \dot{y}_{(\nu)} &= v, \end{aligned} \tag{1.5}$$

pour $i = 1,\ldots,\delta$, où les γ^i sont des polynômes sur k. L'équation (1.5), qui est de "dimension" δ est la transcription algébrique de la notion de "dynamique des zéros" (cf [6, 28]).

Il est intéressant de constater que l'on construit le bouclage découplant de façon "intrinsèque" sans utiliser d'algorithme de découplage du type algorithme de Singh [43]: dans la preuve du théorème 1.2, on choisit simplement des composantes de y pour compléter x en une base de transcendance et on calcule le bouclage par élimination; l'algorithme de Singh peut alors s'interpréter comme un choix particulier de ces composantes. On trouvera dans [11] des résultats intéressants sur une autre approche "intrinsèque" des bouclages découplants. Au chapitre suivant, on mènera une démarche analogue dans le cas analytique, ce qui permettra de s'affranchir des "fausses" singularités liées au choix d'un algorithme.

Chapitre 2

Point de vue analytique

Introduction

On veut étendre les concepts introduits dans le chapitre précédent aux systèmes analytiques

$$\dot{x} = f(x,\overline{u}),$$

avec f analytique sur un ouvert connexe d'un espace vectoriel de dimension finie (comme au chapitre précédent, $\overline{u}$ désigne un nombre arbitraire mais fini de dérivées de u); pour respecter la terminologie usuelle, on appelle ici "système" ce qu'on aurait plutôt appelé "réalisation" pour être cohérent avec le chapitre précédent.

Notons qu'une réalisation d'un système algébrique peut se mettre sous cette forme explicite au voisinage de presque tout point par le théorème des fonctions implicites. Cette situation est caractéristique du genre de généralisation qu'on va faire: on commence par définir "le système f possède la propriété Pr au point P", et on dit ensuite que "le système f possède la propriété Pr" s'il existe un point P tel que le système f possède la propriété Pr en P. A chaque fois la propriété Pr sera générique au sens suivant: si Pr est vraie en un point, alors elle est vraie en presque tout point. On écarte donc complètement le problème des points singuliers. Ce faisant, on perd bien sûr l'aspect "global" de l'approche algébrique; en revanche, on a maitenant la possibilité d'utiliser des résultats d'existence, typiques de la géométrie différentielle (cf par exemple les critères de platitude du chapitre 3). Notons que ce qui est fait dans ce chapitre pourrait être étendu au cadre C^∞ moyennant les précautions d'usage.

Le chapitre est organisé de la manière suivante: l'équivalence, les bouclages endogènes et la platitude sont définis à la section 2.1, et un résultat analogue au théorème 1.2 est établi. La section 2.2 introduit le problème de la construction à partir d'une sortie plate d'un bouclage linéarisant autour d'un point donné, et le replace dans le cadre plus général du *découplage en un point* d'un système entrée-sortie; ce genre de question est typique du cadre analytique (dans le cadre algébrique, l'existence de bases de transcendance, jointe à l'utilisation de l'algorithme d'élimination permet de construire globalement le bouclage, cf section 1.7). Un bon outil pour traiter ce problème est la *filtration entrée-sortie* associée à un système entrée-sortie, dont l'étude à la section 2.3 constitue le plus gros de ce chapitre: la première partie expose les propriétés "génériques" de cette filtration, et la seconde les propriétés "ponctuelles"; la coïncidence de ces deux types de propriétés conduit à la

notion importante de *régularité en un point* d'un système entrée-sortie; la troisième partie s'intéresse au comportement de cette filtration sous l'effet d'un bouclage. La section 2.4 clôt le chapitre en montrant les implications de la notion de régularité, et en particulier résoud le problème du découplage en un point.

La notion de régularité en un point (dans le cas d'un point déquilibre) et le fait qu'un système inversible et régulier en un point est découplable en ce point font l'objet d'un article à paraitre [34].

2.1 Equivalence, bouclage endogène et platitude

On précise ici quelques conventions et notations utilisées par la suite. Lorsqu'on considère un système $\dot{x} = f(x,\overline{u})$, on suppose que son domaine de définition est $X \times \overline{U}$, avec X ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\overline{U} := U_0 \times \ldots \times U_k$ produit de $k+1$ ouverts de $\mathbb{R}^m$, k étant un entier "suffisamment" grand (on travaille en fait dans l'espace des jets infinis de U, avec des objets ne dépendant que d'un nombre fini, mais arbitraire de jets de u); on notera $\pi_x,\pi_u,\pi_{\dot{u}}$, etc, les projections canoniques sur X,U_0,U_1, etc; on désignera toujours par N un point $(x,\overline{u})$ de $X \times \overline{U}$. De même, on supposera que le système $\dot{y} = g(y,\overline{v})$ est défini sur $Y \times \overline{V}$ ouvert de $\mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^m)^{k+1}$ et on désignera par P un point $(y,\overline{v})$ de $Y \times \overline{V}$. On appellera B un bouclage dynamique sur f de la forme

$$\begin{array}{rcl} u & = & \alpha(x,z,\overline{v}) \\ \dot{z} & = & a(x,z,\overline{v}), \end{array}$$

défini sur un ouvert $X \times Z \times \overline{V} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times (\mathbb{R}^m)^{k+1}$, et on désignera par Q un point $(x,z,\overline{v})$ de cet espace. Le système bouclé sera noté f_B. On utilisera parfois le système $f_{(\nu)}$, $\nu \in \mathbb{N}^m$, obtenu à partir de f par

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,\overline{u}) \\ \dot{u}_{(\nu)} & = & \tilde{u} \end{array}$$

(l'état est $\tilde{x} := (x,u,\ldots,u_{(\nu)})$ et l'entrée est $\tilde{u} := u_{(\nu+1)}$; comme au chapitre précédent, on écrit $(x,u,\ldots,u_{(\nu)})$ pour $(x^1,\ldots,x^n,u^i,\ldots,u^i_{(\nu^i-1)})$, $i = 1,\ldots,m$ (avec $u^i_{(-1)} := 0$) et $u_{(\nu)}$ pour $\{u^1_{(\nu^1)},\ldots,u^n_{(\nu^n)}\}$). On écrira $\overline{f}$ pour $f_{(\nu)}$ avec ν "suffisamment" grand. Si $r \in \mathbb{N}$, on pose $f_{(r)} := f_{(\nu)}$, avec $\nu := (r,\ldots,r) \in \mathbb{N}^m$.

Si k est une application définie sur $X \times \overline{U}$, on notera, sauf ambiguité, $\dot{k}$ sa *prolongation* (ou *dérivee totale*) par rapport à $\overline{f}$, i.e. $\dot{k} := Dk.\overline{f} = L_{\overline{f}}k$; si k est définie sur $Y \times \overline{V}$, on posera de même $\dot{k} := L_{\overline{g}}k$, et si k est définie sur $X \times Z \times \overline{V}$, $\dot{k} := L_{\overline{f}_B}k$.

Comme au chapitre précédent on dira que le système f est *classique* s'il ne dépend pas des dérivées de u d'ordre > 1 (I;e. $\dot{x} = f(x,u)$). De même, le bouclage B est dit classique si ni α ni a ne dépendent des dérivées de u d'ordre > 1.

Donnons pour terminer une définition qui est l'adaptation d'une notion classique de géométrie différentielle. Soient f et $\tilde{f}$ deux systèmes $\dot{x} = f(x,\overline{u})$ et $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x},\overline{u})$ définis respectivement sur $X \times \overline{U}$, voisinage de $N_0 := (x_0,\overline{u}_0)$, et $\tilde{X} \times \overline{U}$, voisinage de $\tilde{N}_0 := (\tilde{x}_0,\overline{u}_0)$. On dit que f et $\tilde{f}$ sont *conjugués en* $(N_0,\tilde{N}_0)$ s'il existe un difféomorphisme (analytique) Φ d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de $\tilde{x}_0$ tel que $\Phi(x_0) = \tilde{x}_0$ et

$\tilde{f}(\Phi(x),\overline{u}) = D\Phi(x).f(x,\overline{u})$; on a bien sûr une relation réciproque en utilisant l'inverse de Φ.

On peut maintenant entrer dans le vif du sujet: dire que deux systèmes (au sens algébrique) sont équivalents signifie qu'il y a une correspondance (algébrique) biunivoque "sans intégrales" entre leurs trajectoires; pour étendre cette notion au cadre analytique, on va demander que cette correpondance soit analytique, ce qu'on énonce de la façon suivante:

Définition 2.1 *Deux systèmes f et g sont* équivalents en (N_0,P_0) *s'il existe quatre applications analytiques $\varphi : Y \times \overline{V} \to \mathbb{R}^n$, $\psi : X \times \overline{U} \to \mathbb{R}^p$, $\alpha : Y \times \overline{V} \to \mathbb{R}^m$ et $\beta : X \times \overline{U} \to \mathbb{R}^m$ telles que $N_0 = (\varphi(P_0),\overline{\alpha}(P_0))$, $P_0 = (\psi(N_0),\overline{\beta}(N_0))$ et, pour tout $(x,y,\overline{u},\overline{v}) \in X \times Y \times \overline{U} \times \overline{V}$,*

$$x = \varphi(\psi(x,\overline{u}),\overline{\beta}(x,\overline{u})) \tag{2.1}$$
$$u = \alpha(\psi(x,\overline{u}),\overline{\beta}(x,\overline{u})) \tag{2.2}$$

$$y = \psi(\varphi(y,\overline{v}),\overline{\alpha}(y,\overline{v})) \tag{2.3}$$
$$v = \beta(\varphi(y,\overline{v}),\overline{\alpha}(y,\overline{v})) \tag{2.4}$$

$$g(\psi(x,\overline{u}),\overline{\beta}(x,\overline{u})) = D\psi(x,\overline{u}).\overline{f}(x,\overline{u}) \tag{2.5}$$
$$f(\varphi(y,\overline{v}),\overline{\alpha}(y,\overline{v})) = D\varphi(y,\overline{v}).\overline{g}(y,\overline{v}). \tag{2.6}$$

Deux systèmes f et g sont équivalents *s'il existe des points (N_0,P_0) tels que f et g sont équivalents en (N_0,P_0).*

Autrement dit, si $(x(t),u(t))$ est une trajectoire de f alors $(\psi(x(t),\overline{u}(t)),\beta(x(t),\overline{u}(t)))$ est une trajectoire de g; de plus, il existe une unique trajectoire $(y(t),v(t))$ de g telle que $(x(t),u(t)) = (\varphi(y(t),\overline{v}(t)),\alpha(y(t),\overline{v}(t)))$. On a évidemment un enoncé similaire en intervertissant f et g. On peut aussi interprêter définition en disant que les systèmes étendus $\overline{f}$ et $\overline{g}$ sont "conjugués sur l'espace des jets infinis". Comme au chapitre précédent, on dira parfois pour insister que les systèmes f et g sont *équivalents par bouclage endogène*. Clairement, si deux systèmes sont équivalents en (N_0,P_0), ils sont aussi équivalents en tout couple de points $(N,\psi(N))$ pour N appartenant à un voisinage de N_0; notons aussi que si deux systèmes sont équivalents, ils sont équivalents en $(N,\psi(N))$ pour presque tout N. On a bien sûr des énoncés analogues en échangeant les rôles de N et P.

Une conséquence immédiate de la définition est que deux systèmes linéaires commandables ayant le même nombre de commandes sont équivalents.

Cette définition de l'équivalence dans le cadre analytique est bien une généralisation de l'équivalence dans le cadre algébrique: deux systèmes algébriques équivalents au sens algébrique le sont aussi au sens analytique, mais la réciproque est fausse (la correpondance entre les trajectoires peut être analytique sans être algébrique).

Pour définir l'*inversibilité* d'un bouclage on transpose une propriété évidente d'un bouclage algébrique:

Définition 2.2 *Un bouclage B est* inversible au point Q_0 *si pour tout $r \in \mathbb{N}$ les applications $\alpha,\dot{\alpha},\ldots,\alpha_{(r)}$ sont indépendantes en Q_0 (c'est à dire les $m(r+1)$ différentielles $d\alpha^i(Q_0),\ldots,d\alpha^i_{(r)}(Q_0)$, $i=1,\ldots,m$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$).*

Un bouclage B est inversible *s'il existe un point Q_0 tel que B est inversible en Q_0.*

Pour définir un bouclage endogène, on généralise le fait que les variables z et v d'un bouclage endogène algébrique sont "engendrées" par x et $\overline{u}$, ce qui s'écrit:

Définition 2.3 *Un bouclage B est* endogène au point Q_0 *s'il existe deux applications analytiques $\kappa : X \times \overline{U} \to \mathbb{R}^q$ et $\lambda : X \times \overline{U} \to \mathbb{R}^m$ telles que pout tout $(x,z,\overline{v}) \in X \times Z \times \overline{V}$,*

$$\begin{array}{rcl} \kappa(x,\overline{\alpha}(x,z,\overline{v})) & = & z \\ \lambda(x,\overline{\alpha}(x,z,\overline{v})) & = & v. \end{array}$$

Un bouclage B est endogène *s'il existe un point Q_0 tel que B est endogène en Q_0.*

On reviendra à la section 2.4 sur certains aspects des deux définitions précédentes et leurs liens avec un critère analogue au critère 1.4, qui permettra de verifier concrètement qu'un bouclage est endogène.

Pour établir un lien entre équivalence et bouclage endogène, analogue au théorème 1.2, on a également besoin d'une notion d'*extension dynamique*.

Définition 2.4 *Soient f et g deux systèmes. On dit que g est une* extension dynamique de f en (N_0,P_0) *s'il existe un point $Q_0 := (x_0,z_0,\overline{v}_0) \in X \times Z \times \overline{V}$ et un bouclage B défini sur un voisinage de Q_0, vérifiant $\overline{\alpha}(Q_0) = \overline{u}_0$ et inversible en Q_0, tels que f_B et g sont conjugués en (Q_0,P_0).*

On dit que g est une extension dynamique de f *s'il existe des points (N_0,P_0) tels que g est une extension dynamique de f en (N_0,P_0).*

L'extension est dite *endogène en* (N_0,P_0) (resp. *endogène*) si le bouclage B est endogène en Q_0 (resp. endogène). Elle est dite *classique*, s'il est possible de trouver un bouclage B classique vérifiant la définition. On a alors le résultat important suivant, qui relie la notion d'équivalence à cele de bouclage et analogue dau théorème 1.2:

Théorème 2.1 *Soient f et g deux systèmes équivalents en (N_0,P_0). Pour $\nu \in \mathbb{N}^m$ suffisamment grand, $g_{(\nu)}$ est une extension dynamique endogène classique de f en (N_0,P_0).*

Preuve. Posons $\tilde{y} := (y,\ldots,y_{(\nu)})$, $\tilde{v} := y_{(\nu+\mathbf{1})}$ et $\tilde{g} := g_{(\nu)}$. Pour ν suffisamment grand, $\tilde{g}$ est un système classique, et il existe par définition de l'équivalence des applications φ,α,β telles que

$$\begin{array}{rcll} x & = & \varphi(\psi(x,\overline{u})) & (2.7) \\ u & = & \alpha(\psi(x,\overline{u}),\beta(x,\overline{u})) & (2.8) \\ \tilde{y} & = & \psi(\varphi(\tilde{y}),\overline{\alpha}(\tilde{y},\tilde{v})) & (2.9) \\ \tilde{v} & = & \beta(\varphi(\tilde{y}),\overline{\alpha}(\tilde{y},\tilde{v})) & (2.10) \\ f(\varphi(\tilde{y}),\overline{\alpha}(\tilde{y},\tilde{v})) & = & D\varphi(\tilde{y}).\tilde{g}(\tilde{y},\tilde{v}). & (2.11) \end{array}$$

La relation (2.7) implique que φ est de rang maximum n au point $\tilde{y}_0$; on peut, quitte à le restreindre, partitionner $\tilde{Y}$ en $\tilde{Y}^a \times \tilde{Y}^b \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-n}$ de façon que l'application

$$\Phi(\tilde{y}) := (\varphi(\tilde{y}),\pi^b(\tilde{y}))$$

soit un difféomorphisme dans un voisinage de $\tilde{y}_0$ (on dénote les projections canoniques par π^a et π^b). Ce difféomorphisme admet un inverse Ψ défini sur un voisinage $\tilde{X}$ de $\tilde{x}_0 := \Phi(\tilde{y}_0)$, que l'on peut également supposer de la forme $\tilde{X}^a \times \tilde{X}^b \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-n}$. Clairement, $\pi^b \circ \Phi = \pi^b$, ce qui entraine $\pi^b \circ \Psi = \pi^b \circ \Phi \circ \Psi = \pi^b$; on a aussi $\pi^a(\tilde{x}_0) = \varphi(\tilde{y}_0) = x_0$.

Considérons alors le champ de vecteurs

$$\tilde{f}(\tilde{x},\tilde{v}) := \begin{pmatrix} f(\pi^a(\tilde{x}),\alpha(\Psi(\tilde{x}),\tilde{v})) \\ \pi^b \circ \tilde{g}(\Psi(\tilde{x}),\tilde{v}) \end{pmatrix}$$

défini sur $\tilde{X} \times \tilde{V}$. En posant $(x,z) := (\pi^a(\tilde{x},\pi^b(\tilde{x}))$, on voit que ceci définit un bouclage B sur le système f. En posant $\tilde{\alpha}(\tilde{x},\tilde{v}) := \alpha(\Psi(\tilde{x}),\tilde{v})$, et en prolongeant la relation (2.8), il est immédiat que $\overline{\tilde{\alpha}}(Q_0) = \overline{u}_0$ et que B est inversible en Q_0. De plus, sur un voisinage de Q_0, on a en utilisant (2.11)

$$\tilde{f}(\Phi(\tilde{y}),\tilde{v}) := \begin{pmatrix} f(\phi(\tilde{y}),\alpha(\tilde{y},\tilde{v})) \\ \pi^b \circ \ \tilde{g}(\tilde{y},\tilde{v}) \end{pmatrix} = D\Phi(\tilde{y}).\tilde{g}(\tilde{y},\tilde{v}),$$

et réciproquement, i.e. $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont conjugués en (Q_0,P_0). Autrement dit $\tilde{g}$ est une extension dynamique de f en (N_0,P_0).

Il reste à montrer que B est endogène en Q_0; en écrivant les relations (2.9) et (2.10) pour $\tilde{y} := \Psi(\tilde{x})$, on a

$$\begin{array}{rcl} \Psi(\tilde{x}) & = & \psi(\varphi \circ \Psi(\tilde{x}),\overline{\alpha}(\Psi(\tilde{x}),\overline{v})) \\ & = & \psi(\pi^a(\tilde{x}),\overline{\alpha}(\Psi(\tilde{x}),\overline{v})) \\ v & = & \beta(\varphi \circ \Psi(\tilde{x}),\overline{\alpha}(\Psi(\tilde{x}),\overline{v})) \\ & = & \beta(\pi^a(\tilde{x}),\overline{\alpha}(\Psi(\tilde{x}),\overline{v})). \end{array}$$

Comme $z = \pi^b(X)$, on en déduit

$$\begin{array}{rrcl} \forall\ x,z,\overline{v}, & z & = & \pi^b \circ \psi(x,\overline{\alpha}(\Psi(x,z),\overline{v})) =: \kappa(x,z,\overline{v}) \\ & v & = & \beta(x,\overline{\alpha}(\Psi(x,z),\overline{v})) =: \lambda(x,z,\overline{v}), \end{array}$$

ce qui conclut la démonstration. ■

On a également un résultat réciproque, ce qui montre que l'équivalence et les bouclages endogènes sont bien deux facettes de la même notion:

Théorème 2.2 *Si g est une extension dynamique endogène de f en (N_0,P_0), alors f et g sont équivalents en (N_0,P_0).*

Preuve. Par définition, il existe un point $Q_0 := (x_0,z_0,\overline{v}_0)$ et un bouclage endogène B défini dans un voisinage de ce point, vérifiant $\overline{\alpha}(Q_0) = \overline{u}_0$ et inversible en Q_0, tels que f_B et g sont conjugués en (Q_0,P_0). Il existe donc un difféomorphisme Φ défini sur un

voisinage de y_0 telle que $(x_0,z_0) = \Phi(y_0)$ et $f_B(\Phi(y),\overline{v}) = D\Phi(y).g(y,\overline{v})$. On vérifie alors facilement que les quatre applications $\varphi,\tilde{\alpha},\psi,\beta$ définies par

$$\begin{array}{rcl} \varphi(y,\overline{v}) & := & \pi_x \circ \Psi(y) \\ \tilde{\alpha}(y,\overline{v}) & := & \alpha(\Psi(y),\overline{v}) \\ \psi(x,\overline{u}) & := & \Psi^{-1}(x,\kappa(x,\overline{u})) \\ \beta(x,\overline{u}) & := & \lambda(x,\overline{u}), \end{array}$$

où κ et λ sont les applications de la définition 2.3, vérifient les six relations de la définition 2.1.

■

Terminons cette section avec la notion de platitude. Au chapitre précédent, on a défini un système plat comme étant un système équivalent à un système purement différentiellement transcendant, ou, ce qui revient au même, équivalent à un système linéaire commandable. Il est donc naturel de poser:

Définition 2.5 *Le système f est dit* plat au point N_0 *s'il existe un point P_0 tel que f est équivalent en (N_0,P_0) à un système linéaire commandable défini autour de P_0. L'application ψ de la définition 2.1 est alors appelée* sortie plate *(ou encore* sortie linéarisante*).*

Le système f est dit plat *s'il existe un point N_0 tel que f est plat en point N_0.*

Pour se conformer à l'usage, on notera h (au lieu de ψ) pour une sortie plate. Le contenu intuitif de la platitude est le suivant (on particularise la discussion de la définition 2.1): si $(x(t),u(t))$ est une trajectoire de f, il existe une unique application $y(t)$ telle que $(x(t),u(t)) = (\varphi(\overline{y}(t)),\alpha(\overline{y}(t)))$. Réciproquement, toute application $y(t)$ définit une trajectoire $(\varphi(\overline{y}(t)),\alpha(\overline{y}(t)))$ de f.

D'après les théorm̀es 2.1 et 2.2, il est immédiat qu'un système est plat ssi il est linéarisable par bouclage endogène.

2.2 Construction de bouclages et découplage

Etant donné un système fplat en N_0, muni d'une sortie h plate en N_0, il est possible par le théorème 2.1 de construire un bouclage B défini sur un voisinage de Q_0 avec $\overline{\alpha}(Q_0) = \overline{u}_0$ tel que f_B et $h_{(\nu)} = v$ sont conjugués en $(N_0,\overline{h}(N_0))$; pour utiliser directement le théorème, il faut aussi connaitre les applications φ et α de la définition 2.5. On montrera à la section 2.4 que la connaissance de h suffit pour construire le bouclage. En fait, on résoudra le problème plus général du *découplage régulier*. Afin de poser le problème, donnons d'abord quelques définitions.

Soit un système entrée-sortie (f,h)

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,\overline{u}) \\ y & = & h(x,\overline{u}), \end{array}$$

avec f et $h := (h^1,\ldots,h^s)$ analytique sur un ouvert connexe $X \times \overline{U}$ du pointN_0. Ce système est *découplé* si on peut partitionner U en $U^a \times U^b \subset \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m-s}$ de façon qu'il existe $\nu \in \mathbb{N}^s$ tel que $h_{(\nu)} = u^a$; il est *découplable en* N_0, s'il existe un bouclage B

$$\begin{array}{rcl} u & = & \alpha(x,z,\overline{v}) \\ \dot{z} & = & a(x,z,\overline{v}) \end{array}$$

défini sur un voisinage d'un point $Q_0 \in X \times Z \times \overline{V}$, avec $\overline{\alpha}(Q_0) = \overline{u}_0$, tel que le système entrée-sortie bouclé (f_B,h_B)

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,\overline{\alpha}(x,z,\overline{v})) \\ \dot{z} & = & a(x,z,\overline{v}) \\ y & = & h(x,\alpha(x,z,\overline{v})) \end{array}$$

est découplé. Il est *découplable* s'il existe un point N_0 tel qu'il est découplable en N_0. Pour insister, on dira parfois *régulièrement découplable en* N_0 au lieu de découplable en N_0.

Le problème du découplage "générique" a été largement étudié (cf [43, 37, 12, 38, 13, 4]). A l'aide d'algorithmes d'inversion, il est possible de construire explicitement un bouclage méromorphe découplant ssi le système est inversible à droite; cependant, ce bouclage peut éventuellement prendre une valeur infinie au point Q_0. Une condition, dite de *régularité forte*, permet de garantir que cela n'arrive pas: si le système (f,h) est fortement régulier en N_0, alors il est régulièrement découplable en N_0 (en fait il y a plusieurs variantes de cette notion, cf également [41, 24, 25, 3]). Il est bien connu que cette condition n'est pas nécessaire; il a même été montré ([40]) que les bouclages construits à partir de ces algorithmes ne sont pas assez généraux pour découpler régulièrement un système. Un des résultats nouveaux de ce chapitre est une condition nécessaire et suffisante pour résoudre ce problème.

2.3 Filtration entrée-sortie

Soit un système entrée-sortie (f,h)

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,u) \\ y & = & h(x,u), \end{array}$$

avec f et h analytiques sur un ouvert connexe $X \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Pour simplifier, on ne considère ici que des systèmes classiques; l'adaptation des résultats aux systèmes non classiques, qui est très facile, est exposée au paragraphe 2.3.2.

Un certain nombre de propriétés de (f,h) sont liées à la *filtration entrée-sortie* $(E_\nu)_{\nu\in\mathbb{Z}}$ du $\mathcal{M}$-espace vectoriel $\mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x,d\pi_{\overline{u}}\}$ définie par

$$\begin{array}{rcll} E_\nu & := & 0, & \nu \leq -2 \\ E_{-1} & := & \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x\}, & \\ E_\nu & := & \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x,dh,\ldots,dh_{(\nu)}\}, & \nu \geq 0, \end{array}$$

où $\mathcal{M}$ désigne le corps des fonctions méromorphes sur $X \times \overline{U}$, et dk la différentielle de l'application $k := (k^1,\ldots,k^s)$ définie sur $X \times \overline{U}$; on écrit un peu abusivement $\mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{dk\}$ au lieu de $\mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{dk^1,\ldots,dk^s\}$; rappelons que $\pi_x,\pi_u,\pi_{\dot{u}}$, etc désignent les projections canoniques sur X,U_0,U_1, etc. Cette filtration a été initialement introduite dans [4], puis a

été utilisée dans le cadre algébrique (cf [11, 2, 1]). Alors que les démonstrations dans [4] reposent esentiellement sur un algorithme d'inversion, l'approche algébrique, fondée sur l'existence d'un polynôme numérique classiquement utilisé en algèbre, est beaucoup plus synthétique. On s'est fortement inspiré de ce point de vue, aussi bien pour les propriétés "génériques" (paragraphe 2.3.1) de la filtration entrée-sortie et ses propriétés ponctuelles (paragraphe 2.3.3) que pour son comportement sous l'action d'un bouclage (paragraphe 2.3.4).

Il est immédiat que la filtration n'est pas modifiée par un bouclage statique (inversible) sur f mais l'est par un bouclage dynamique; on verra à la section 2.3.4 que les coefficients de son polynôme numérique sont par contre invariants par bouclage endogène (inversible), ce qui montre que l'objet important est ce polynôme, et pas la filtration elle-même.

2.3.1 Propriétés génériques

La brique de base qui permet de montrer l'existence d'un polynôme numérique est le théorème 2.3; c'est le pendant dans le cadre analytique d'un résultat de [11]. Dans les démonstrations, on a souvent utilisé la propriété suivante: si k est une fonction définie sur $X \times \overline{U}$, alors $\dot{\widehat{dk}} := L_{\overline{f}} dk = dL_{\overline{f}} k = d\dot{k}$, en utilisant le fait que la dérivée de Lie et la dérivée extérieure commutent.

Théorème 2.3 $\forall\ \nu \geq 0$, $\dim E_\nu / E_{\nu-1} = \dim E_\nu \cap U_0$, *avec* $U_0 := \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_u\}$.

Preuve. On commence par montrer que pour tout $\nu \geq 0$, $\dim E_\nu/E_{\nu-1} \leq \dim E_\nu \cap U_0$. Comme $E_0 \subset \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, d\pi_u\}$, c'est vrai à l'étape 0. On suppose que c'est vrai à l'étape 0ν et on pose $k := \dim E_\nu/E_{\nu-1}$. A un réindiçage près des composantes de h, on a $E_\nu = E_{\nu-1} \oplus \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{dh^1_{(\nu)}, \ldots, dh^k_{(\nu)}\}$. Il existe alors un sous-espace $V \subset U_0$ tel que $E_{\nu+1} = (E_\nu + \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{dh^1_{(\nu+1)}, \ldots, dh^k_{(\nu+1)}\}) \oplus V$. On en déduit

$$\begin{array}{rcl} \dim E_{\nu+1}/E_\nu & \leq & \dim E_\nu/E_{\nu-1} + \dim V \\ & \leq & \dim E_\nu \cap U_0 + \dim V \\ & \leq & \dim(E_\nu \cap U_0) \oplus V \\ & \leq & \dim(E_\nu + V) \cap U_0 \\ & \leq & \dim E_{\nu+1} \cap U_0. \end{array}$$

La réciproque va être démontrée en trois points:

(a) Soit $l := \dim E_\nu \cap U_0$. On peut partitionner u en $(u^a, u^b) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{m-l}$ de façon que $U_0 \subset E_\nu + \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_{u^b}\}$. Pour $\nu \geq 0$ on pose

$$\begin{array}{rcl} U_\nu & := & \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_u, \ldots, d\pi_{u_{(\nu)}}\} \\ U^b_\nu & := & \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_{u^b}, \ldots, d\pi_{u^b_{(\nu)}}\}. \end{array}$$

On va montrer que pour $\mu \geq 0$, $U_\mu \subset E_{\nu+\mu} + U^b_\mu$. C'est évident à l'étape 0; si c'est vrai à l'étape μ, alors

$$\begin{array}{rcl} U_{\mu+1} & \subset & E_{\nu+\mu+1} + U_0 + U^b_{\mu+1} \\ & \subset & E_{\nu+\mu+1} + (E_\nu + U^b_0) + U^b_{\mu+1} \\ & \subset & E_{\nu+\mu+1} + U^b_{\mu+1}. \end{array}$$

(b) Soit $j := \dim E_\nu/E_{\nu-1}$. Posons $\tilde{h} := (h^1,\ldots,h^j)$ et pour $\nu \geq 0$, définisoons $\tilde{E}_\nu := \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, d\tilde{h},\ldots,d\tilde{h}_{(\nu)}\}$. En renumérotant les composantes de h, on a alors $E_\nu = E_{\nu-1} + \tilde{E}_\nu$. On va montrer que pour $\mu \geq 0$, $E_{\nu+\mu} + U^b_\mu \subset E_{\nu-1} + \tilde{E}_{\nu+\mu} + U^b_\mu$. C'est vrai l'étape 0. Si c'est vrai à l'étape μ, alors

$$\begin{array}{rcl} E_{\nu+\mu+1} + U^b_{\mu+1} & \subset & E_\nu + \tilde{E}_{\nu+\mu+1} + U_0 + U^b_{\mu+1} \\ & \subset & E_\nu + \tilde{E}_{\nu+\mu+1} + (E_\nu + U^b_0) + U^b_{\mu+1} \\ & \subset & E_\nu + \tilde{E}_{\nu+\mu+1} + U^b_{\mu+1} \\ & \subset & (E_{\nu-1} + \tilde{E}_\nu) + \tilde{E}_{\nu+\mu+1} + U^b_{\mu+1} \\ & \subset & E_{\nu-1} + \tilde{E}_{\nu+\mu+1} + U^b_{\mu+1}. \end{array}$$

(c) D'après (a) et (b), $U_\mu \subset E_{\nu-1} + \tilde{E}_{\nu+\mu} + U^b_\mu$ pour $\mu \geq 0$. Or $\dim U_\mu = m(\mu+1)$, $\dim U^b_\mu = (m-l)(\mu+1)$, $\dim E_\nu \leq p\nu + n$ et $\dim \tilde{E}_{\nu+\mu} \leq j(\nu+\mu+1)+n$. Ceci entraine $m(\mu+1) \leq (m+j-l)(\mu+1)+\kappa$ avec κ indépendant de μ. Pour que cette inégalité soit verifiée pour tout $\mu \geq 0$, il faut donc $j \geq l$, i.e. $\dim E_\nu/E_{\nu-1} \geq \dim E_\nu \cap U_0$. ■

On en déduit immédiatement:

Corollaire 2.4 *$\forall\ \nu \geq 0$, $\dim E_{\nu+1}/E_\nu \geq \dim E_\nu/E_{\nu-1}$.*

On peut alors énoncer le résultat essentiel de cette section, qui est l'existence d'un polynôme numérique semblable au polynôme de Hilbert de l'algèbre différentielle.

Corollaire 2.5 *$\exists\ \rho,\delta,\nu_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $\forall\ \nu \geq \nu_0$, $\dim E_\nu = \rho(\nu+1)+\delta$.*

Preuve. Une suite d'entiers croissante et majorée est stationnaire à partir d'un certain rang, donc il existe ρ,ν_0 tels que pour $\nu \geq \nu_0$, $\dim E_\nu/E_{\nu-1} = \rho$. On en déduit que pour $\nu \geq \nu_0$,

$$\begin{array}{rcl} dim E_\nu & = & \dim E_{\nu_0-1} + \rho(\nu-\nu_0+1) \\ & = & \rho(\nu+1) + \dim E_{\nu_0-1} - \rho\nu_0, \end{array}$$

et on pose $\delta := \dim E_{\nu_0-1} - \rho\nu_0$. ■

Il existe bien sûr un plus petit entier ν_0, noté σ, qui vérifie le corollaire. On a ainsi mis en lumière trois nombres, dont l'importance justifie une définition.

Définition 2.6 *On appelle ρ le* rang*, δ le* défaut *et σ l'*index *du système (f,h).*

Remarque 2.1 Le rang, le défaut (également appelé pour insister *défaut entrée-sortie*) sont clairement les analogues du rang différentiel de sortie et du défaut entrée-sortie définis dans le cadre algébrique à la section 1.7.

On a choisi d'appeler σ l'index de (f,h) en référence à la notion classique d'index utilisée en analyse numérique des équations différentielles implicites (cf [21]). □

Pour donner les premières propriétés de ces nombres, il est utile d'introduire la filtration $(Y_\nu)_{\nu\in\mathbb{Z}}$:

$$\begin{array}{rcll} Y_\nu & := & 0, & \nu < 0 \\ Y_\nu & := & \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{dh,\ldots,dh_{(\nu)}\}, & \nu \geq 0. \end{array}$$

Proposition 2.6 $\forall\ \nu \geq 0$, $\dim Y_{\nu+1}/Y_\nu \leq \dim Y_\nu/Y_{\nu-1}$.

Preuve. S'il y a s relations liant les $dh_{(\nu)}$ modulo $Y_{\nu-1}$, on obtient en les dérivant s relations liant les $dh_{(\nu+1)}$ modulo Y_ν. ■

Proposition 2.7 $\forall\ \nu \geq 0$, $\dim Y_\nu/Y_{\nu-1} \geq \dim E_\nu/E_{\nu-1}$.

Preuve. Comme $Y_{\nu-1} \subset E_{\nu-1}$, s relations entre les $dh_{(\nu)}$ modulo $Y_{\nu-1}$ induisent s relations entre les $dh_{(\nu)}$ modulo $E_{\nu-1}$. ■

Corollaire 2.8 $\forall\ \nu \geq n$, $\rho = \dim E_\nu/E_{\nu-1} = \dim Y_\nu/Y_{\nu-1} = \rho$.

Preuve. D'après la proposition 2.6, pour $\nu \geq 0$,

$$\begin{array}{rcl} \dim Y_\nu & = & \dim Y_{-1} + \sum_{\mu=0}^{\nu} \dim Y_\mu/Y_{\mu-1} \\ & \geq & (\nu+1)\dim Y_\nu/Y_{\nu-1}. \end{array}$$

Par ailleurs le corollaire 2.4 implique que pour $\nu \geq 0$,

$$\begin{array}{rcl} \dim E_\nu & = & \dim E_{-1} + \sum_{\mu=0}^{\nu} \dim E_\mu/E_{\mu-1} \\ & \leq & n + (\nu+1)\dim E_\nu/E_{\nu-1}. \end{array}$$

Comme $\dim Y_\nu \leq \dim E_\nu$, on en conclut que pour $\nu \geq 0$,

$$(\nu+1)(\dim Y_\nu/Y_{\nu-1} - \dim E_\nu/E_{\nu-1}) \leq n,$$

ce qui entraine $\dim Y_\nu/Y_{\nu-1} \leq \dim E_\nu/E_{\nu-1}$ pour $\nu \geq n$, et donc, d'après la proposition 2.7, $\dim Y_\nu/Y_{\nu-1} = \dim E_\nu/E_{\nu-1}$. La suite $\dim Y_\nu/Y_{\nu-1}$ étant décroissante et la suite $\dim E_\nu/E_{\nu-1}$ croissante, on a pour $\nu \geq n$ $\dim E_\nu/E_{\nu-1} = \dim Y_\nu/Y_{\nu-1} =$ constante, et cette constante est forcément égale à ρ. ■

On peut maintenant borner ρ, δ et σ. Il est facile de voir que ces bornes sont strictes.

Proposition 2.9

(i) $0 \leq \rho \leq \min(m,p)$

(ii) $0 \leq \delta \leq n$

(iii) $0 \leq \sigma \leq n-1$.

Preuve. (i) est évident. (iii) découle du corollaire 2.8. Par ailleurs on a montré dans la preuve de ce corollaire que

$$(\nu+1)\dim Y_\nu/Y_{\nu-1} \leq \dim E_\nu \leq n + (\nu+1)\dim E_\nu/E_{\nu-1},$$

ce qui entraine (ii). ■

L'importance de ρ est liée au concept d'inversibilité, dont les implications sont étudiées dans les pages suivantes.

Définition 2.7 *On dit que le système* (f,h) *est* inversible à droite *si* $\rho = p$*,* inversible à gauche *si* $\rho = m$*,* inversible *si* $\rho = m = p$*.*

Comme dans le cadre algébrique, l'inversibilité à droite signifie que les sorties sont différentiellement indépendantes. L'inversibilité n'est en pratique pas une restriction, car on peut toujours compléter h par des composantes de u sans modifier les dépendances entre les composantes de y; en particulier, on peut ainsi transformer un système inversible à droite en un système inversible.

On va maintenant relier ρ,δ et σ à la notion plus classique de structure à l'infini (cf [35, 4]). On pourra se reporter à l'exemple filex pour une illustration de cette définition.

Définition 2.8 *On appelle l'entier* $\sigma_\nu := \dim E_\nu/E_{\nu-1}$ *le* nombre de zéros à l'infini d'ordre inférieur ou égal à ν *et l'entier* σ_n *le* nombre de zéros à l'infini*. La* structure à l'infini *est la liste* $\Sigma_\infty := \{n_1, \ldots, n_{\sigma_n}\}$ *des indices* ν *pour lesquels* $\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1} \neq 0$*, avec* $\sigma_{-1} := 0$*, ces indices étant répétés* $\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}$ *fois (i.e. la structure à l'infini est la liste des ordres des zéros à l'infini).*

On a alors:

Proposition 2.10

(i) ρ *est égal au nombre de zéros à l'infini*

(ii) $\delta + \sum_{i=0}^{\rho} ni = n$

(iii) $\sigma + 1 = \max_{i=1,\ldots,\rho} n_i$.

Preuve. (i) résulte du corollaire 2.8. (ii) découle du fait que pour $\nu \geq 0$,

$$\dim E_\nu = n + \sum_{i=1}^{\rho} \max(\nu + 1 - n_i, 0),$$

donc pour $\nu \geq \max_{i=1,\ldots,\rho} n_i$,

$$\begin{array}{rcl} \dim E_\nu & = & n + \sum_{i=1}^{\rho}(\nu + 1 - n_i) \\ & = & \rho(\nu + 1) + n - \sum_{i=1}^{\rho} n_i, \end{array}$$

ce qui entraine $\delta = n - \sum_{i=1}^{\rho} n_i$. On en tire aussi que pour $\nu < \max_{i=1,\ldots,\rho} n_i$, $\dim E_\nu \neq \rho(\nu + 1) + \delta$, d'où (iii). ■

On va illustrer les notions développées par un exemple simple.

Exemple 2.1 Considérons le système

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}^1 & = & x^2 \\ \dot{x}^2 & = & u^1 \\ \dot{x}^3 & = & u^2 \\ \dot{x}^4 & = & x^3(1-u^1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h^1(x) & = & x^1 \\ h^2(x) & = & x^4. \end{array}$$

En dérivant les sorties, on trouve

$$\begin{array}{rcl} h^1(N) & = & x^1 \\ \dot{h}^1(N) & = & x^2 \\ \ddot{h}^1(N) & = & u^1 \\ h^1_{(3)}(N) & = & \dot{u}^1 \\ h^1_{(4)}(N) & = & \ddot{u}^1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h^2(N) & = & x^4 \\ \dot{h}^2(N) & = & x^3(1-u^1) \\ \ddot{h}^2(N) & = & u^2(1-u^1) - x^3\dot{u}^1 \\ h^2_{(3)}(N) & = & \dot{u}^2(1-u^1) - x^3\ddot{u}^1 - 2\dot{u}^1u^2 \\ h^2_{(4)}(N) & = & \ddot{u}^2(1-u^1) - x^3u^1_{(3)} - 3\dot{u}^1\dot{u}^2 - 3\ddot{u}^1u^2 \end{array}$$

En différentiant ces relations, on construit les espaces E_ν:

$$\begin{array}{rcl} E_0 & = & \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x\} \\ E_1 & = & \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, \pi_{x^3}d\pi_{u^1}\} \\ & = & \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, d\pi_{u^1}\} \\ E_2 & = & \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, d\pi_{u^1}, (1-\pi_{u^1})d\pi_{u^2} - \pi_{x^3}d\pi_{\dot{u}^1}\} \\ E_3 & = & \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, d\pi_{u^1}, d\pi_{\dot{u}^1}, (1-\pi_{u^1})d\pi_{u^2}, (1-\pi_{u^1})d\pi_{\dot{u}^2} - \pi_{x^3}d\pi_{\ddot{u}^1} - 2\pi_{\dot{u}^1}d\pi_{u^2}\} \\ & = & \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, d\pi_u, d\pi_{\dot{u}^1}, (1-\pi_{u^1})d\pi_{\dot{u}^2} - \pi_{x^3}d\pi_{\ddot{u}^1}\}. \end{array}$$

On a alors $\dim E_0 = 4$, $\dim E_1 = 5$, $\dim E_2 = 6$ et $\dim E_3 = 8$. Le saut de dimension maximum est atteint, d'où $\dim E_\nu = 2(\nu+1)$ pour $\nu \geq 2$. On en déduit $\rho = 2$ (i.e. le système est inversible), $\delta = 0$, $\sigma = 2$ et $\Sigma_\infty = \{1,3\}$. □

2.3.2 Systèmes non classiques

Pour étendre les notions développées dans le paragraphe précédent aux systèmes non classiques, regardons d'abord comment elles se transportent au système retardé $(f_{(k)},h)$:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,u) \\ u_{(k+1)} & = & v \\ y & = & h(x,u). \end{array}$$

Ayant rajouté k dérivées de u dans l'état, on est naturellement amené à considérer la filtration $(E_\nu^k)_{\nu\in\mathbb{Z}}$ de $\mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x,d\pi_{\overline{u}}\}$ définie par

$$\begin{array}{lcll} E_\nu^k & := & 0, & \nu \leq -2 \\ E_{-1}^k & := & \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x,d\pi_u,\ldots,d\pi_{u_{(k)}}\}, & \\ E_\nu^k & := & \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x,d\pi_u,\ldots,d\pi_{u_{(k)}},dh,\ldots,dh_{(\nu)}\}, & \nu \geq 0, \end{array}$$

Proposition 2.11 $\forall\ \nu,k \geq 0$, $\dim E_{\nu+k+1}^k/E_{\nu+k}^k = \dim E_\nu/E_{\nu-1}$.

Preuve. Il suffit évidemment de considérer $k=0$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} \dim E_{\nu+1}^0/E_\nu^0 & = & \dim(E_{\nu+1}+U_0)/(E_\nu+U_0) \\ & = & \dim E_{\nu+1}+\dim U_0-\dim(E_{\nu+1}\cap U_0) \\ & & -(\dim E_\nu+\dim U_0-\dim(E_\nu\cap U_0)) \\ & = & \dim E_{\nu+1}/E_\nu-\dim(E_{\nu+1}\cap U_0)+\dim(E_\nu\cap U_0) \\ & = & \dim E_\nu/E_{\nu-1}, \end{array}$$

où la dernière égalité résulte du théorème 2.3. ■

Corollaire 2.12 *Pour tout $k\in\mathbb{N}$,*
(i) $\rho^{(k)}=\rho$
(ii) $\delta^{(k)}=\delta+(k+1)(m-\rho)$
(iii) $\sigma^{(k)}=k+1+\sigma$
(iv) $\forall\ i=1,\ldots,l,\quad n_i^{(k)}=k+1+n_i$.
Preuve. D'après la proposition précédente, on a, pour $\nu\geq\sigma+k+1$,

$$\begin{array}{rcl} \dim E_{\nu+k+1}^k & = & \dim E_\nu+\dim E_{-1}+\dim E_k^k \\ & = & \rho(\nu+1)-n+(m(k+1)+n) \\ & = & \rho(\nu+k+2)+(m-\rho)(k+1)+\delta, \end{array}$$

et l'énoncé s'en déduit immédiatement. ■

En particulier, ρ et δ se conservent quand (f,h) est inversible à gauche, ce qui rappelons-le, n'est pas restrictif en pratique.

Soit maintenant un système général

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,\overline{u}) \\ y & = & h(x,\overline{u}), \end{array}$$

Si ce système est inversible à gauche, il suffit de "rajouter" dans l'état suffisamment de dérivées de u, i.e. d'utiliser la filtration $(E_\nu^{(k)})_{\nu\in\mathbb{Z}}$ pour n'importe quel k suffisamment grand (on peut prendre par exemple l'ordre de la plus grande dérivée de u effectivement présente); ρ et δ sont alors parfaitement définis. On peut également associer une structure à l'infini en posant:

Définition 2.9 *(Structure à l'infini généralisée pour un système inversible à gauche)*

$$n_i := n_i^{(k)}-k.$$

La cohérence de cette définition est assurée par le corollaire. Notons que certains des n_i peuvent être négatifs et que d'autres peuvent être supérieurs à n.

2.3.3 Propriétés ponctuelles

La filtration $(E_\nu)_{\nu\in\mathbb{Z}}$ donne des renseignements génériques. Pour avoir des informations "ponctuelles", on la "spécialise" en un point $N := (x,\overline{u})$ en considérant la filtration $(E_\nu(N))_{\nu\in\mathbb{Z}}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N),d\pi_{\overline{u}}(N)\}$ définie par

$$\begin{array}{lcll} E_\nu(N) & := & 0, & \nu \leq -2 \\ E_{-1}(N) & := & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N)\}, & \\ E_\nu(N) & := & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N),dh(N),\ldots,dh_{(\nu)}(N)\}, & \nu \geq 0. \end{array}$$

Des chutes de rang pouvant survenir, on a évidemment $\dim E_\nu(N) \leq \dim E_\nu$. Les propriétés de $(E_\nu(N))_{\nu\in\mathbb{Z}}$ sont liées au *système tangent en N à (f,h)* noté $T_N((f,h))$ ou $(\delta f(N),\delta h(N))$:

$$\begin{array}{lcl} \dot{\widehat{\delta x}} & = & \partial_x f(N).\delta x + \partial_u f(N).\delta u \\ \delta y & = & \partial_x h(N).\delta x + \partial_u h(N).\delta u. \end{array}$$

De manière générale, si k est une application définie sur $X \times \overline{U}$, on notera $\delta k(N) := \partial_x k(N).\delta x + \partial_{\overline{u}} k(N).\delta\overline{u}$. On peut alors considérer la filtration $(T_N E_\nu)_{\nu\in\mathbb{Z}}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\delta\pi_x(N),\delta\pi_{\overline{u}}(N)\}$ définie par

$$\begin{array}{lcll} E_\nu(N) & := & 0, & \nu \leq -2 \\ E_{-1}(N) & := & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\delta\pi_x(N)\}, & \\ E_\nu(N) & := & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\delta\pi_x(N),\delta h(N),\ldots,\delta h_{(\nu)}(N)\}, & \nu \geq 0, \end{array}$$

et on montre facilement:

Proposition 2.13 *$\forall\ \nu \in \mathbb{Z}$, $\dim E_\nu(N) = \dim T_N E_\nu$.*

Preuve. On vérifie immédiatement que si on identifie $d\pi_x(N)$ avec $\delta\pi_x(N)$, et $d\pi_{u_{(r)}}(N)$ avec $\delta\pi_{u_{(r)}}(N)$, on a $dk(N) = \delta k(N)$. ■

Cette remarque prend tout son interêt quand $T_N(f,h)$ est stationnaire, donc en particulier quand N est un point d'équilibre de (f,h): tous les résultats des paragraphes précédents s'appliquent alors directement; ce n'est en général plus le cas pour un point N quelconque, mais on va voir que certaines propriétés essentielles sont néanmoins préservées.

Théorème 2.14 *$\forall\ \nu \geq 0$, $\dim E_\nu(N)/E_{\nu-1}(N) = \dim(E_\nu \cap \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_u(N)\})$.*

Preuve. Adaptation immédiate de la preuve du théorème 2.3. ■

Comme dans le paragraphe 2.3.1, il vient alors:

Corollaire 2.15 *$\exists\ \nu_0,\rho(N),\delta(N) \in \mathbb{Z}$ tels que $\forall\ \nu \geq \nu_0$, $\dim E_\nu(N) = \rho(N).(\nu+1)+\delta(N)$.*

On peut également définir un index $\sigma(N)$ et une structure à l'infini $\{n_1(N),\ldots,n_{\sigma(N)}(N)\}$, et on conserve des relations semblables à celles de la proposition 2.10. Par contre les propositions 2.6 (décroissance de la suite $\dim Y_\nu/Y_{\nu-1}$) et 2.7 ne sont plus valables, ce qui fait que $\delta(N)$ ne peut être minoré ni $\sigma(N)$ majoré, comme dans la proposition 2.9 (cf

exemple 2.2).

Introduisons maintenant une notion importante:

Définition 2.10 (f,h) *est dit* régulier en N *si* $\exists\ \nu_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall\ \nu \geq \nu_0$, $\dim E_\nu(N) = \dim E_\nu$.

La régularité en N_0 est donc équivalente à $\dim E_\nu(N) =$ constante sur un voisinage de N_0 pour $\nu \geq \nu_0$. Cette formulation est typique de l'usage des filtrations: on demande qu'une propriété soit vraie "à partir d'un certain rang". Le système (f,h) est dit *régulièrement inversible (à gauche, à droite) en* N s'il est régulier en N et inversible (à gauche, à droite).

Un critère simple permet de tester la régularité avec un volume fini de calculs:

Proposition 2.16 (f,h) *est régulier en* N *ssi* $\dim E_n(N) = \dim E_n$.

Preuve. D'après le théorème 2.14, la suite $\dim E_\nu(N)/E_{\nu-1}(N)$ est croissante. Elle est forcément majorée par ρ, sinon on aurait $\dim E_\nu(N) > \dim E_\nu$ pour ν suffisamment grand.

Si $\dim E_n(N) < \dim E_n$, alors pour $\nu \geq n$

$$\begin{array}{rcl} \dim E_\nu(N) & \leq & \dim E_n(N) + \rho(\nu - n) \\ & < & \dim E_n + \rho(\nu - n) \\ & = & \dim E_\nu, \end{array}$$

et (f,h) n'est pas régulier en N.

Supposons $\dim E_n(N) = \dim E_n$. Si $\dim E_n(N)/E_{n-1}(N) < \rho = \dim E_n/E_{n-1}$, alors on aurait

$$\begin{array}{rcl} \dim E_{n-1}(N) & > & \dim E_n(N) - \rho \\ & > & \dim E_n - \rho \\ & = & \dim E_{n-1}, \end{array}$$

ce qui est impossible. On a donc $\dim E_n(N)/E_{n-1}(N) = \rho$ et pour $\nu \geq n$, $\dim E_\nu(N) = \dim E_\nu$. ■

La régularité autorise donc certaines chutes de rang pour $\nu < n$. En particulier il n'est pas nécessaire que (f,h) et son tangent aient la même structure à l'infini; par contre, la *régularité forte* (cf définition intrinsèque de [3]), exige $\dim E_\nu(N) = \dim E_\nu$ pour $i = 0, \ldots, n$. Les seuls nombres importants sont en fait rang ρ et le défaut δ:

Proposition 2.17 (f,h) *est régulier en* N *ssi* $\rho(N) = \rho$ *et* $\delta(N) = \delta$.

Preuve. Pour ν suffisamment grand,

$$\begin{array}{rcl} \dim E_\nu & = & \rho(\nu + 1) + \delta \\ \dim E_\nu(N) & = & \rho(N).(\nu + 1) + \delta(N). \end{array}$$

La régularité de (f,h) en N implique donc $(\rho - \rho(N))(\nu + 1) + \delta - \delta(N) = 0$ pour ν suffisamment grand. Mais comme $\rho,\delta,\rho(N),\delta(N)$ ne dépendent pas de ν, il faut $\rho(N) = \rho$ et $\delta(N) = \delta$. La réciproque est évidente. ■

On a également un corollaire immédiat de la proposition 2.16:

Corollaire 2.18 *Si (f,h) est régulier en N, alors $\sigma(N) \leq n-1$.*

Concluons par un substitut de la proposition 2.6, qui sera utile pour le découplage.

Proposition 2.19 *Si (f,h) est régulier en N, alors $\forall\ \nu \geq 0$, $\dim Y_\nu(N) \geq \rho(\nu+1)$.*

Preuve. Soit $\mu < n$ le plus entier tel que $\dim E_\mu(N)/E_{\mu-1}(N) < \rho$; or d'après les propositions 2.6 et 2.8 $\dim E_\mu/E_{\mu-1} \geq \rho$, et donc une combinaison des $dh_{(\mu)}$ dégénère en N modulo $Y_{\mu-1}(N)$, ce qui entraine une dégénérescence similaire des $dh_{(n)}$ en N modulo $Y_{n-1}(N)$, et le système ne peut être régulier en N. ■

Exemple 2.2 On reprend l'exemple 2.1 avec diverses hypothèses sur le point $N := (x,\overline{u})$. Rappelons que $\rho = 2, \delta = 0$ et $\Sigma_\infty = \{1,3\}$.

- $x^3 \neq 0$ et $u^1 \neq 1$

$$\begin{array}{rcl} E_0(N) & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N)\} \\ E_1(N) & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N), x^3 d\pi_{u^1}(N)\} \\ & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N), d\pi_{u^1}(N)\} \\ E_2(N) & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N), d\pi_{u^1}(N), (1-u^1)d\pi_{u^2}(N) - x^3 d\pi_{\dot{u}^1}(N)\} \\ E_3(N) & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N), d\pi_u(N), d\pi_{\dot{u}^1}(N), (1-u^1)d\pi_{\dot{u}^2}(N) - x^3 d\pi_{\ddot{u}^1}(N)\} \end{array}$$

On a $\dim E_0(N) = 4$, $\dim E_1(N) = 5$, $\dim E_1(N) = 6$, $\dim E_3(N) = 8$ et donc $\dim E_\nu(N) = 2(\nu+1)$ pour $\nu \geq 2$. On en déduit $\rho(N) = 2$, $\delta(N) = 0$, $\sigma(N) = 2$ et $\Sigma_\infty(N) = \{1,3\}$. Le système est fortement régulier en N.

- $x^3 = 0$ et $u^1 \neq 1$.

$$\begin{array}{rcl} E_0(N) & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N)\} \\ E_1(N) & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N)\} \\ E_2(N) & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N), d\pi_{u^1}(N), (1-u^1)d\pi_{u^2}(N) - x^3 d\pi_{\dot{u}^1}(N)\} \\ & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N), d\pi_u(N)\} \end{array}$$

On a $\dim E_0(N) = 4$, $\dim E_1(N) = 4$, $\dim E_2(N) = 6$ et donc $\dim E_\nu = 2(\nu+1)$ pour $\nu \geq 1$. On en déduit $\rho(N) = 2$, $\delta(N) = 0$, $\sigma(N) = 1$ et $\Sigma_\infty(N) = \{2,2\}$. Le système est régulier en N, mais pas fortement régulier.

- $x^3 = 0, u^1 = 1$ et $\dot{u}^1 \neq 0$.

$$\begin{array}{rcl} E_0(N) & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N)\} \\ E_1(N) & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N)\} \\ E_2(N) & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N), d\pi_{u^1}(N)\} \\ E_3(N) & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N), d\pi_{u^1}(N), d\pi_{\dot{u}^1}(N), \dot{u}^1 d\pi_{u^2}(N)\} \\ & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N), d\pi_u(N), d\pi_{\dot{u}^1}(N)\} \end{array}$$

On a $\dim E_0(N) = \dim E_1(N) = 4$, $\dim E_2(N) = 5$, $\dim E_3(N) = 7$ et donc $\dim E_\nu(N) = 2(\nu+1)-1$ pour $\nu \geq 2$. On en déduit $\rho(N) = 2$, $\delta(N) = -1$, $\sigma(N) = 2$ et $\Sigma_\infty(N) = \{2,3\}$.

Le système n'est pas régulier en N.

- $x^3 = 0, u^1 = 1, \dot{u}^1 = 0$ et $\ddot{u}^1 \neq 0$.

$$\begin{array}{rcl} E_0(N) & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N)\} \\ E_1(N) & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N)\} \\ E_2(N) & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N), d\pi_{u^1}(N)\} \\ E_3(N) & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N), d\pi_{u^1}(N), d\pi_{\dot{u}^1}(N)\} \\ E_4(N) & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N), d\pi_{u^1}(N), d\pi_{\dot{u}^1}(N), \ddot{u}^1 d\pi_{u^2}(N)\} \\ & = & \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{d\pi_x(N), d\pi_u(N), d\pi_{\dot{u}^1}(N), d\pi_{\ddot{u}^1}(N)\} \end{array}$$

On a $\dim E_0(N) = \dim E_1(N) = 4$, $\dim E_2(N) = 5$, $\dim E_3(N) = 6$, $\dim E_4(N) = 8$ et donc $\dim E_\nu(N) = 2(\nu+1)-2$ pour $\nu \geq 3$. On en déduit $\rho(N) = 2$, $\delta(N) = -2$, $\sigma(N) = 3$ et $\Sigma_\infty(N) = \{2,4\}$. Le système n'est pas régulier en N.

Si $x^3 = 0, u^1 = 1, \dot{u}^1 = 0, \ldots, u^1_{(k-1)} = 0$ et $u^1_{(k)} \neq 0$, on voit facilement que $\rho(N) = 2, \delta(N) = -k, \sigma(N) = k+1$ et $\Sigma_\infty(N) = \{2, k+2\}$, ce qui montre qu'on ne peut borner ni l'index ni le défaut. □

2.3.4 Action d'un bouclage

Considérons maintenant le système (f_B, α)

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x, \alpha(x,z,v)) \\ \dot{z} & = & a(x,z,v) \\ y & = & \alpha(x,z,v), \end{array}$$

défini sur $X \times Z \times \overline{V}$ et résultant de l'action sur $\dot{x} = f(x,u)$ du bouclage dynamique B

$$\begin{array}{rcl} \dot{z} & = & a(x,z,v) \\ u & = & \alpha(x,z,v), \end{array}$$

la loi de bouclage $\alpha(x,z,v)$ constituant la sortie de ce système. On peut considérer la filtration entrée-sortie $(F_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ de ce système

$$\begin{array}{rcll} F_\nu & := & 0, & \nu \leq -2 \\ F_{-1} & := & \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, d\pi_z\} & \\ F_\nu & := & \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, d\pi_z, d\alpha, \ldots, d\alpha_{(\nu)}\}, & \nu \geq 0. \end{array}$$

Ces espaces sont des sous-espaces de $\mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, d\pi_z, d\pi_{\overline{v}}\}$. Il existe alors des entiers ρ_B et δ_B tels que pour ν suffisamment grand, $\dim F_\nu = \rho_B(\nu+1) + \delta_B$, avec $0 \leq \delta_B \leq n+q$. Grâce à la structure particulière du système (la sortie est la loi de bouclage), on peut affiner ce résultat:

Proposition 2.20 $n \leq \delta_B \leq n+q$.

Preuve. L'argument essentiel est que pour tout ν, $\dim \operatorname{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, d\alpha, \ldots, d\alpha_{(\nu)}\} \geq \rho_B(\nu+1)+n$. En effet, si pour un certain ν il y avait plus de $m-\rho$ relations entre les $d\pi_x, d\alpha, \ldots, d\alpha_{(\nu)}$ modulo $d\pi_x, d\alpha, \ldots, d\alpha_{(\nu-1)}$, il y aurait en dérivant plus de $m-\rho$ relations entre les $d\pi_x, d\alpha, \ldots, d\alpha_{(\nu+1)}$ modulo $d\pi_x, d\alpha, \ldots, d\alpha_{(\nu)}$. On aurait alors $\dim F_\mu / \dim F_{\mu-1} < \rho_B$ pout $\mu \geq \nu$, contredisant ainsi la définition de ρ_B. On en déduit $\rho_B \geq n$. ■

Une conséquence immédiate de ce résultat est qu'il est possible de partitionner Z en $Z^a \times Z^b \subset \mathbb{R}^{n+q-\delta_B} \times \mathbb{R}^{\delta_B - n}$ de façon que $F_\nu = \operatorname{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, d\alpha, \ldots, d\alpha_{(\nu)}\} \oplus \operatorname{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_{z^b}\}$ pour ν suffisamment grand. En un point $Q := (x,z,\overline{v})$, on peut répéter les arguments de la preuve précédente, d'où la

Proposition 2.21 $n \leq \delta_B(Q) \leq n+q$.

On dira que le bouclage B est *régulier en* Q si (f_B,α) est régulier en Q.

Proposition 2.22 *Le bouclage B est inversible en Q (resp. inversible) ssi le système (f_B,α) est inversible en Q (resp. inversible).*

Preuve. Rappelons (cf définition 2.2) que l'inversibilité de B en Q signifie que les applications $\alpha, \ldots, \alpha_{(\nu)}$ sont indépendantes en Q pour tout ν, i.e. $\dim Y_\nu(N) = m(\nu+1)$. Le résultat découle alors de la proposition 2.19. Pour l'inversibilité générique, on utilise le même raisonnement avec le corollaire 2.8. ■

Considérons également le système (f_B,h_B)

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,\alpha(x,z,v)) \\ \dot{z} & = & a(x,z,v) \\ y & = & h(x,\alpha(x,z,v)), \end{array}$$

obtenu par action de B sur le système (f,h); on pose $h_B(x,z,v) := h(x,\alpha(x,z,v))$ et on note $(\tilde{E}_\nu)_{\nu \ln \mathbb{Z}}$ la filtration

$$\begin{array}{rcl} \tilde{E}_{-1} & := & \operatorname{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, d\pi_z\} \\ \tilde{E}_\nu & := & \operatorname{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, d\pi_z, dh_B, \ldots, dh_{B(\nu)}\}. \end{array}$$

On note $\tilde{\rho}_B, \tilde{\delta}_B$ les coefficients du polynôme numérique associé à ces espaces.

Le résultat suivant précise les liens existant entre les coefficients des polynômes numériques associés aux systèmes (f,h),(f_B,α) et (f_B,h_B).

Théorème 2.23

(i) $\tilde{\rho}_B \leq \min(\rho,\rho_B)$

(ii) *Si (f,h) est inversible à gauche et B est inversible, alors (f_B,h_B) est inversible à gauche et $\tilde{\delta}_B = \delta + \delta_B - n$.*

(iii) $\tilde{\rho}_B(Q) \leq \min(\rho(N),\rho_B(Q))$

(iv) *Si* (f,h) *est inversible à gauche en* N *et* B *est inversible en* Q*, alors* (f_B,h_B) *est inversible à gauche en* Q *et* $\tilde{\delta}_B(Q) = \delta(N) + \delta_B(Q) - n$.

Preuve. (i) et (iii) sont évidents.

(ii) D'après la proposition 2.20, on peut partitionner Z en $Z^a \times Z^b \subset \mathbb{R}^{n+q-\delta_B} \times \mathbb{R}^{\delta_B - n}$ de façon que $F_\mu = \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, d\alpha, \ldots, d\alpha_{(\mu)}\} \oplus \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_{z^b}\}$ pour μ suffisamment grand. Mais (f,h) inversible à gauche entraine d'après le théorème 2.3 $\mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_u\} \subset E_\nu$ pour ν suffisamment grand, donc $\mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_u, \ldots, d\pi_{u_{(\mu)}}\} \subset E_{\mu+\nu}$, et enfin $\mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\alpha, \ldots, d\alpha_{(\mu)}\} \subset \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, dh_B, \ldots, dh_{B(\nu+\mu)}\}$. Comme par ailleurs

$$\operatorname*{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, dh_B, \ldots, dh_{B(\nu)}\} \subset \operatorname*{span}_{\mathcal{M}}\{d\alpha, \ldots, d\alpha_{(\mu)}\},$$

on en déduit que pour tout ν,

$$\operatorname*{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_{z^b}\} \cap \operatorname*{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, dh_B, \ldots, dh_B(\nu)\} = \emptyset.$$

Pour ν suffisamment grand, on aura donc

$$\tilde{E}_\nu = \operatorname*{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, dh_B, \ldots, dh_{B(\nu)}\} \oplus \operatorname*{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_{z^b}\}.$$

Mais l'inversibilité de B entraine l'indépendance des $d\pi_x, d\alpha, \ldots, d\alpha_{(\nu)}$ (cf preuve de la proposition 2.20), d'où $\dim \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, dh_B, \ldots, dh_{B(\nu)}\} = E_\nu$. Pour ν suffisamment grand, il vient alors

$$\tilde{\rho}_B(\nu+1) + \tilde{\delta}_B = \rho(\nu+1) + \delta + \delta_B - n,$$

d'où $\tilde{\rho}_B = \rho = m$ et $\tilde{\delta}_B = \delta + \delta_B - n$.

Pour (iv) on fait le même raisonnement en utilisant le théorème 2.14. ■

On résume l'essentiel de ce résultat par le

Corollaire 2.24

(i) (f_B,h_B) *est inversible ssi* (f,h) *et* B *sont inversibles*

(ii) (f_B,h_B) *est régulièrement inversible en* Q *ssi* (f,h) *et* B *sont regulièrement inversibles respectivement en* N *et* Q.

Preuve. (i) est une conséquence immédiate du théorème.

(ii) Si (f_B,h_B) est régulièrement inversible en Q, alors $\tilde{\rho}_B(Q) = \tilde{\rho}_B$ et $\tilde{\delta}_B(Q) = \tilde{\delta}_B$ par la proposition 2.17; d'après le théorème précédent, on a alors $\delta(N) + \delta_B(Q) = \delta + \delta_B$, ce qui entraine $\delta(N) = \delta$ et $\delta_B(Q) = \delta_B$ (puisque le défaut en un point est forcément inférieur ou égal au défaut générique). On procède de même pour la réciproque. ■

Concluons par un résultat qui souligne le rôle de ρ et δ.

Théorème 2.25 *Si* (f,h) *est inversible à gauche,* δ *et* ρ *sont invariants par bouclage endogène.*

Preuve. Si B est endogène, il est immédiat d'après la définition que pour ν suffisamment grand $F_\nu = \mathrm{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, d\alpha, \ldots, d\alpha_{(\nu)}\}$. Comme B est inversible par définition, l'énoncé découle immédiatement du théorème 2.23. ■

2.4 Conséquences de la régularité

La régularité en un point correspond à une notion de rang constant autour de ce point. On peut alors obtenir un certain nombre de résultats en utilisant le théorème du rang; nous nous servirons partout dans cette section de la version suivante de ce théorème.

Lemme 2.26 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un application analytique de rang constant r sur un voisinage de $a \in U$. Si $df^1(a), \ldots, df^r(a)$ sont indépendantes, il existe une application analytique F d'un voisinage de $(f^1(a), \ldots, f^r(a))$ dans $\mathbb{R}^{m-r}$ tel que sur un voisinage de a, $f^{r+i}(x) = F^i(f^1(x), \ldots, f^r(x))$ pour $i = 1, \ldots, m-r$.*

Preuve. On peut supposer $a = 0, f(a) = 0$ et $\frac{\partial(f^1,\ldots,f^r)}{\partial(x^1,\ldots,x^r)}$ est de rang r en a. Considérons l'application $\varphi : U \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ définie par $\varphi(x) := (f^1(x), \ldots, f^r(x), x_{r+1}, \ldots, x_m)$. Clairement, $D\varphi(0)$ est un isomorphisme linéaire, et par le théorème d'inversion locale, φ est un difféomorphisme analytique autour de 0. En écrivant f dans ces nouvelles coordonnées, on a

$$f(\varphi^{-1}(y)) = f(x) = (y^1, \ldots, y^r, F^1(y), \ldots, F^{m-r}(y)),$$

avec F analytique. Comme f, et donc $f \circ \varphi^{-1}$, est de rang r autour de 0, on a $\frac{\partial F}{\partial(y^{r+1},\ldots,y^m)} = 0$ autour de 0, ce qui implique que F ne dépend pas de $(y^{r+1}, \ldots, y^m)$. On en déduit que sur un voisinage de a et pour $i = 1, \ldots, m-r$,

$$\begin{aligned} f^{r+i}(x) &= f^{r+i}(\varphi^{-1}(y)) \\ &= F^i(y^1, \ldots, y^r) \\ &= F_i(f^1(x), \ldots, f^r(x)). \end{aligned}$$

■

Le résultat principal de la section est la résolution du problème du découplage régulier soulevé à la section 2.2.

Théorème 2.27 *Le système (f,h) est régulièrement découplable au point N_0 ssi il est régulièrement inversible en N_0.*

De plus, si (f,h) est régulièrement découplable en N_0, il est régulièrement découplable en N_0 par un bouclage endogène en N_0.

Preuve.

($\Rightarrow$) Soit B un bouclage défini sur un voisinage de Q_0 tel que $N_0 = (\pi_x(Q_0), \overline{\alpha}(Q_0))$ et découplant (f,h). Le système bouclé (f_B, h_B), étant découplé, est évidemment régulièrement inversible en Q_0. Par le corrollaire 2.24, (f,h) est régulièrement inversible en N_0 (et B régulièrement inversible en Q_0).

($\Leftarrow$) Soient $H := (h, \dot{h}, \ldots, h_{(n)})$ et $\beta := h_{(n+1)}$; H et β sont analytiques sur un voisinage de N_0. D'après la proposition 2.19, (f,h) réguliérement inversible en N_0 implique que les applications $h, \ldots, h_{(\nu)}$ sont de rang $m(\nu+1)$ en N_0 pour tout ν, et donc indépendantes en N_0. Autrement dit $\overline{h}$, et en particulier H et (H,β), sont surjectives enN_0. De plus

l'application $F(x,\overline{u}) := (x,H(x,\overline{u}))$ est de rang constant $m(\nu+1)+\delta$ (le rang de F en N_0 n'est rien d'autre que la dimension de $E_n(N_0)$, qui est constante par hypothèse), et on peut toujours partitionner X en $X^a \times X^B \subset \mathbb{R}^\delta \times \mathbb{R}^{n-\delta}$ de façon que l'application (π_{x^a},H) soit de rang maximum au point N_0. En appliquant alors le lemme précédent à l'application F, il existe une application analytique σ, définie sur un voisinage de N_0 telle que $\pi_{x^b} = \sigma(\pi_{x^a},H)$. En prolongeant cette relation, on a

$$f^b(x,u) = D\sigma(x^a,H(x,\overline{u})).\begin{pmatrix} f^a(x,u) \\ \dot{H}(x,\overline{u}) \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Posons $\tilde{y}_0 := (\pi_{x^a}(N_0),H(N_0))$, $P_0 := (\tilde{y}_0,\overline{\beta}(N_0))$ et $\psi := (\pi_{x^a},H)$; ψ est analytique sur un voisinage de $\tilde{y}_0$. A partir de σ on construit une application φ analytique sur un voisinage $\tilde{Y}^a \times \tilde{Y}^b \subset \mathbb{R}^\delta \times \mathbb{R}^{m(n+1)}$ de $\tilde{y}_0$ par $\varphi(\tilde{y}) := (\tilde{y}^a,\sigma(\tilde{y}^a,\tilde{y}^b))$. Pour tout $(x,\overline{u})$ dans un voisinage de N_0, on a immédiatement

$$x = \varphi(\psi(x,\overline{u})). \tag{2.13}$$

On réécrit (2.12) en utilisant l'application φ sous la forme:

$$f(x,u) = D\varphi(x^a,\sigma(x^a,H(x,\overline{u}))).\begin{pmatrix} f^a(x,u) \\ \dot{H}(x,\overline{u}) \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

On peut également appliquer le lemme à l'application $G(x,\overline{u}) := (x,H(x,\overline{u}),\beta(x,\overline{u}))$ (son rang est égal à la dimension de E_{n+1}), et il existe une application analytique α, définie sur un voisinage de N_0 telle que $\pi_u = \alpha(\pi_{x^a},H,\beta)$. On en tire immédiatement que, sur un voisinage de N_0,

$$u = \alpha(\psi(x,\overline{u}),\beta(x,\overline{u})). \tag{2.15}$$

Comme $\overline{h}$ est surjective, pour tout point $(\tilde{y},\overline{\tilde{v}})$ dans un voisinage de P_0, il existe un point $(x,\overline{u})$ appartenant à un voisinage de N_0 tel que $\tilde{y} = \psi(x,\overline{u})$ et $\tilde{v} = \beta(x,\overline{u})$. Or, d'après (2.13) et (2.15), $\psi(x,\overline{u}) = \psi(\varphi(\psi(x,\overline{u})),\overline{\alpha}(\psi(x,\overline{u}),\beta(x,\overline{u})))$, ce qui entraine

$$\tilde{y} = \psi(\varphi(\tilde{y}),\overline{\alpha}(\tilde{y},\tilde{v})), \tag{2.16}$$

et par un argument similaire,

$$\tilde{v} = \beta(\varphi(\tilde{y}),\overline{\alpha}(\tilde{y},\tilde{v})). \tag{2.17}$$

Posons pour terminer

$$\tilde{g}(\tilde{y},\tilde{v}) := \begin{pmatrix} f^a(\varphi(\tilde{y}),\overline{\alpha}(\tilde{y},\tilde{v})) \\ A\tilde{y} + B\tilde{v}, \end{pmatrix}$$

où $\dot{\tilde{y}} = A\tilde{y} + B\tilde{v}$ est l'écriture matricielle du système $y_{(\nu+1)} = v$. En utilisant (2.13) et (2.15) dans (2.14), on en déduit que, sur un voisinage de N_0,

$$f(x,u) = D\varphi(\psi(x,\overline{u})).\tilde{g}(\psi(x,\overline{u}),\beta(x,\overline{u})). \tag{2.18}$$

L'existence d'applications analytiques φ,α, définies sur un voisinage de P_0, et ψ,β, définies sur un voisinage de N_0, et vérifiant les relations (2.13) à (2.18) implique que

$\tilde{g}$ est une extension dynamique de f en (N_0,P_0), en utilisant directement la preuve du théorème 2.1.

La deuxième affirmation résulte du fait que le bouclage construit dans la preuve du théorème 2.1 est endogène. ■

Faisons quelques commentaires sur ce résultat: d'après la preuve, le bouclage découplant est forcément régulier en Q_0, et on peut toujours le choisir endogène. Le système bouclé f_B est conjugué à un système de la forme

$$\begin{array}{rcl} \dot{\xi} & = & g(\xi,y,\ldots,y_\nu) \\ \dot{y}_{(\nu)} & = & v, \end{array}$$

où ξ est de dimension δ (cf preuve du theorème 2.1); l'équation de ξ est la "dynamique des zéros" ([6, 28]), et est inobservable par la sortie y. Il est important de remarquer qu'on a obtenu le bouclage découplant et la dynamique des zéros de manière "intrinsèque" sans utiliser les algorithmes habituels; on a simplement choisi des composantes de $\overline{h}$ pour compléter π_x en une application de rang constant. Notons enfin que si (f,h) est régulièrement inversible à droite sans être inversible à gauche, on peut rajouter à h des composantes de u de façon à avoir un système régulièrement inversible; ces composantes de u ne sont en fait pas utilisées par le bouclage découplant.

Comme corollaire immédiat du théorème, on retrouve le résultat bien connu sur le découplage générique. Il est intéressant de remarquer que la démonstration est "intrinsèque" et ne repose pas sur un algorithme d'inversion

Corollaire 2.28 *Le système (f,h) est découplable ssi il inversible.*

Preuve. Il suffit de se placer en un point N_0 (qui est générique) où le théorème s'applique (un tel point est générique). ■

On peut établir plusieurs résultats importants par des démonstrations tout à fait dans l'esprit de celle du théorème précédent. Ces résultats sont le pendant dans le cadre analytique de ceux établis dans le cadre algébrique du chapitre précédent.

Commençons par une caractérisation des systèmes plats plus agréable à manier que la définition 2.5, et qui permet de vérifier concrètement qu'une sortie donnée est plate. On notera que ce résultat était immédiat dans le cadre algébrique.

Théorème 2.29 *Un système f est plat (resp. plat en N_0) ssi il existe une application h telle que le système entrée-sortie (f,h) est inversible (resp. régulièrement inversible en N_0) et de défaut δ (resp. $\delta(N_0)$) nul.*

Preuve. f est plat en N_0 ssi il est linéarisable par bouclage endogène en N_0, i.e. ssi (f,h) est régulièrement inversible en N_0 et de défaut $\delta(N_0)$ nul. ■

Avec des arguments identiques, on obtient un critère permettant de vérifier si un bouclage est endogène:

Théorème 2.30 *Un bouclage B sur le système f est endogène ssi le système entrée-sortie (f_B,α) est inversible et de défaut n.*

Autrement dit $\dim F_\nu = m(\nu+1)+n$ pour ν suffisamment grand. Ceci n'est rien d'autre que l'analogue du théorème 1.4. De même, on montre facilement:

Théorème 2.31 *Soit f_B un système bouclé par un bouclage endogène. Il existe alors un bouclage endogène $\tilde{B}$ en un entier ν tels que $f_{B\tilde{B}} = f_{(\nu)}$.*

C'est la propriété de "réversibilité" des bouclages endogènes (cf corollaire 1.3).

Chapitre 3

Critères de platitude

N.B. Le corps de ce chapitre se compose de deux articles soumis pour publication. Le deuxième article a été écrit avec P. Rouchon.

On se place ici dans le cadre analytique du chapitre 2, et on considère un système classique (I.e. en comportant pas de dérivées d'ordre > 1 de u)

$$\dot{x} = f(x,u),$$

où f est analytique sur un ouvert $X \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$..

D'après la proposition 2.29, f est plat ssi il existe une application $h := (h^1, \ldots, h^m)$ définie sur $X \times \overline{U}$ telle que pour ν suffisamment grand,

$$\dim \operatorname*{span}_{\mathcal{M}}\{d\pi_x, d\pi_u, dh, \ldots, dh_{(\nu)}\} = m(\nu+1)$$

. Vérifier qu'un système est plat est clairement un problème d'intégrabilité d'un système d'équations aux dérivées partielles avec une condition de transversalité; on cherche en effet s'il existe une application h solution de

$$\begin{array}{rcl} d\pi_{x^i} \wedge dh \wedge \ldots \wedge dh_{(\nu)} & = & 0, \quad i = 1, \ldots, n \\ d\pi_{u^j} \wedge dh \wedge \ldots \wedge dh_{(\nu)} & = & 0, \quad j = 1, \ldots, m \\ dh \wedge \ldots \wedge dh_{(\nu)} & \neq & 0, \end{array} \tag{3.1}$$

où on a posé $dh_{(\mu)} := dh^1_{(\mu)} \wedge \ldots \wedge dh^m_{(\nu)}$. Une fois ν fixé, il est en théorie possible de conclure en utilisant un critère calculable très général (cf [39, 5]). L'application d'un tel critère est en pratique très compliquée, mais il n'est pas déraisonnable d'espérer des simplifications dûes à la forme très particulière des équations. Bien sûr, il reste un problème important: on ne sait pas en général borner ν, et il y a donc a priori une infinité de cas de plus en plus compliqués à tester, puisque l'ordre du système (3.1) grandit. Notons que ν est directement relié à l'ordre de la plus grande dérivée de u effectivement présente dans h. Cette façon de procéder conduit cependant à des conditions suffisantes. Remarquons que le sytème (3.1) peut se scinder en plusieurs sous-systèmes correspondant aux diverses structures à l'infini possibles du système (f,h) telles que $\sum_{i=1}^m n_i = n$ (rappelons que d'après la proposition 2.10, $\sum_{i=1}^m n_i = n - \delta$). Dans la première partie, on résoud le cas le plus simple, i.e. on donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe h telle que (f,h) admette $\{1, \ldots, 1, 2\}$ pour structure à l'infini. Ceci fournit donc une condition

suffisante de platitude pour un système à m commandes et $m+1$ états, généralisant ainsi le résultat de [8]. On n'a pas utilisé un critère général d'intégrabilité, mais on s'est inspiré de la démarche pour trouver une condition ad hoc.

La deuxième partie est consacrée aux systèmes sans dérive, c'est à dire de la forme

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u^i,$$

où les f_i sont des champs de vecteurs analytiques sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Grâce à la structure particulière de ces systèmes, on peut obtenir des résultats plus généraux. Le cas $m = 1$ est sans interêt, puisqu'un système sans dérive à une commande n'est pas commandable (sauf si $n = 1$) et donc pas plat. Comme un système sans dérive est linéaire en les commandes, le cas $n = m + 1$ se déduit du résultat de [8] (on en donne cependant une autre démonstration). Le résultat principal est une condition nécessaire et suffisante de platitude dans le cas $m = 2$. C'est une réinterprétation d'un résultat de E. Cartan sur les systèmes de Pfaff de m équations en $m + 2$ variables. Dans le cas $m = 2$,$n = 4$, la condition n'est rien d'autre que la commandabilité. Notons que quand le système est plat, il existe toujours des sorties plates ne dépendant que de x.

A criterion for flatness with structure $\{1, \ldots, 1, 2\}$

Philippe Martin
Centre Automatique et Systèmes, Ecole des Mines de Paris
35 rue Saint-Honoré, 77305 Fontainebleau Cedex, FRANCE

December 1992, submitted to Systems and Control Letters

Abstract: A necessary and sufficient geometric condition for the existence of an output endowing an input-state system with a simple structure at infinity is established. It gives a sufficient condition for a system in m states and $m+1$ controls to be linearizable by dynamic feedback, generalizing a result known for a system linear in the controls.

Key words: Nonlinear control systems, Dynamic feedback linearization, Flatness, Structure at infinity.

1 Introduction

Consider a system S

$$\dot{x} = f(x, u),$$

where f is smooth on an open subset of $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. We assume the commands independent, i.e. $\partial_u f$ has (generic) rank m.

The feedback linearization problem consists in finding a (dynamic) feedback

$$\begin{array}{rcl} \dot{z} & = & a(x, z, v) \\ u & = & \alpha(x, z, v), \end{array}$$

with a and α smooth on an open subset of $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m$, and such that the closed-loop system

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x, \alpha(x, z, v)) \\ \dot{z} & = & a(x, z, v) \end{array}$$

is locally diffeomorphic to a contollable linear system.

Whereas tne static case (i.e. $q = 0$) is now well-understood (cf [10, 9, 11]), there are very few results for the general case (cf [4, 5, 17]).

A somewhat less general problem consists in looking for a m-valued map h such that the input-output system $S(h)$

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x, u) \\ y & = & h(x, u, \dot{u}, \ldots) \end{array}$$

has a zero *input-output defect*, or in other words is decouplable without residual dynamics, which means that S is linearizable (cf [12, 13], and [7, 8, 6] for a differential algebraic approach). Borrowing the terminology from [7, 8], we say that a system enjoying this property is *flat*.

The problem of checking that a given system is flat, though a priori simpler than the general feedback linearization one, appears to be very difficult. A possible way of tackling it is to decompose it by remarking that the defect of $S(h)$ is equal to $n - \sum_{i=1}^{m} n_i$, where $\{n_1, \ldots, n_m\}$ is the structure at infinity of $S(h)$ (cf [13]). The problem is then to seek for a map h such that $S(h)$ has a prescribed structure at infinity with $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$. The idea is that some cases appear more tractable than others, thus giving hope for at least partial solutions to the flatness problem.

In this paper, we solve the simplest case, that is we give a necessary and sufficient condition for the existence of a map h such that $S(h)$ has structure at infinity $\{1, \ldots, 1, 2\}$. Of course, it is only interesting for systems with state dimension $n = (m-1).1+2 = m+1$. The criterion we get retains the geometric "flavor" of [10, 9], in the sense that it is expressed in terms of distributions and Lie derivatives, and relies on Frobenius' theorem. But now, the geometric objects considered are multi-vector fields, instead of vector fields. This is not completely surprising, since dynamic feedback linearization is known to be a multi-input phenomenom (cf [4]). This condition generalizes a result of [4], where it was prooved that controllability implies feedback linearizability for a system with m controls and $m + 1$ states which is linear in the controls.

Here we are not interested in the problem of singularities, but only on structural aspects.

The paper is organized as follows: section 2 sets up some preliminary material; some facts about linearizability and structure at infinity are also restated in our particular case. The criterion is established in section 3, and illustrated by simple examples in section 4. Section 5 contains remarks about how the criterion was obtained.

We suppose $n = m + 1$ everywhere in the sequel, without recalling it explicitely.

2 Basic results

We first introduce some straightforward extensions of standard differential geometric notions suited to control systems, in the spirit of [15]. Let N be an open subset of $\mathbb{R}^n$ and $U, U_1, \ldots, U_k$ be open subsets of $\mathbb{R}^m$. Let also $J_kU := U \times U_1 \times \ldots \times U_k$ be the kth jet space of U, and $TN := N \times \mathbb{R}^n$ be the tangent bundle of N with π_N the projection on N. The integer k has not much imoprtance, and needs only to be large enough (for our purpose $k = 2$ suffices). We call *controlled vector field* any (smooth) map $X : N \times J_kU \to TN$, such that $\pi_N \circ X(x, u, \dot{u}, \ldots, u_{(k)}) = x$. We also call *controlled function* any (smooth) function $h : N \times J_kU \to \mathbb{R}$. These functions clearly form a ring. We call $\Gamma_{J_kU}(TM)$ the set of controlled vector fields, and endow it with an obvious module structure on this ring.

If h is a controlled function and X, Y are controlled vector fields, we set

$$\begin{array}{rcl} h_{,i} & := & \partial_{u^i} h \\ L_X h & := & \partial_x h.X \\ X_{,i} & := & \partial_{u^i} X \\ L_X Y & := & \partial_x Y.X - \partial_x X.Y. \end{array}$$

It is clear that $X_{,i}$ and $L_X Y$ are also any controlled vector fields, and that $h_{,i}$ and$L_X h$ are controlled function. We often denote $L_X Y$ by $[X, Y]$.

Any controlled vector field (resp. function) can be considered in an obvious way as a usual vector field (resp. function) on $N \times J_k U$. Our definitions coincide then with the usual notions of Lie derivative and Lie bracket. Notice that we tnen have $h_{,i} = L_{\partial_{u^i}} h$ and $X_{,i} = L_{\partial_{u^i}}$.

We now get to the heart of the matter:

Definition 1 *Let $\Sigma_\infty := \{n_1, \ldots, n_m\}$ be a list of m increasing integers. A system S is said to have* structure Σ_∞ *if there exists a m-valued map $h : (x, u) \mapsto h(x, u)$ such that Σ_∞ is the structure at infinity of the input-output system $S(h)$.*

The original definition of the structure at infinity of an input-output system can be found in [14, 2]. Here we call structure at infinity the list of orders of zeros at infinity, which amounts exactly eo the same thing. Anyway, as we are only interested in the case $\Sigma_\infty := \{1, \ldots, 1, 2\}$ (i.e. $n_i = 1$ for $i = 1, \ldots, m-1$ and $n_m = 2$), it is enough for our purpose to know this is equivalent to the matrices $\partial_u h$, $\partial_u \dot{h}$ and $\frac{\partial(\dot{h}, \ddot{h})}{\partial(u, \dot{u})}$ having respectively (generic) ranks $0, m-1$ and $2m-1$.

Around any point (x_0, u_0) where $\partial_u f$ has full rank m, we can then use the implicit function theorem to construct a static feedback $u := \alpha(x, \tilde{u})$ such that, up to a reordering of the components of x, the system takes the following "simplified form":

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}^1 & = & \tilde{u}^1 \\ \vdots & & \\ \dot{x}^m & = & \tilde{u}^m \\ \dot{x}^{m+1} & = & a(x, \tilde{u}). \end{array}$$

Proposition 1 *A system with structure $\{1, \ldots, 1, 2\}$ can be put in simplified form with $\partial_{\tilde{u}^m} a = 0$ and $\partial_{x^m} a \neq 0$ by static feedback and diffeomorphism.*

Proof. By definition, there exists a m-valued map h such that the matrices $\partial_u h$, $\partial_u \dot{h}$ and $\frac{\partial(\dot{h}, \ddot{h})}{\partial(u, \dot{u})}$ have respectively ranks $0, m-1$ and $2m-1$. So h only depends on x, and dh has full rank m. Indeed, if dh were of rank $m' < m$, the rank of $(dh, d\dot{h}, d\ddot{h})$ could not exceed $3(m - m')$, thus contradicting the fact that $\frac{\partial(\dot{h}, \ddot{h})}{\partial(u, \dot{u})}$ has rank $2m-1$.

We can then find a function $k : x \mapsto k(x)$ such that $\varphi := (h^1, \ldots, h^{m-1}, k, h^m)^T$ is a local diffeomorphism of $\mathbb{R}^n$. Clearly $\partial_u \dot{\varphi}$ has full rank m, so we can construct a static feedback by setting

$$\tilde{u}^1 := \dot{h}^1(x, u), \ldots, \tilde{u}^{m-1} := \dot{h}^{m-1}(x, u), \tilde{u}^m := \dot{k}(x, u).$$

Since $\partial_u \dot{h}$ has rank $m-1$, $(d\varphi, d\dot{h})$ has rank $n+(m-1) = 2m$. Using the constant rank theorem around a suitable point, there exists a function a such that, up to a reordering of the components of h,

$$\dot{h}^m = a(h^1, \ldots, h^m, k, \dot{h}^1, \ldots, \dot{h}^{m-1}).$$

Clearly $\partial_k a \neq 0$, otherwise $\frac{\partial(\dot{h},\ddot{h})}{\partial(u,\dot{u})}$ could not have rank $2m-1$, and by construction $\partial_{\tilde{u}^m} = 0$. ■

Corollary 2 *A system with structure $\{1, \ldots, 1, 2\}$ is linearizable by a feedback of dimension at most $m-1$.*

Proof. Assume from the previous proposition that the system is in simplified form with $\partial_{\tilde{u}^m} a = 0$ and $\partial_{x^m} a \neq 0$. We build a dynamic feedback of dimension $m-1$ by setting $\dot{z}^1 = v^1, \ldots, \dot{z}^{m-1} = v^{m-1}$ and $\tilde{u}^1 = z^1, \ldots, \tilde{u}^{m-1} = z^{m-1}$. We then have $\dot{x}^m = a(x, z)$ and $\ddot{x}^m = \dot{a}(x, z, v, \tilde{u}^m)$, with $\partial_{\tilde{u}^m} \dot{a} = \partial_{x^m} a \neq 0$. We can thus complete our feedback by setting $v^m = \dot{a}(x, z, v, \tilde{u}^m)$. The resulting closed-loop system is clearly (locally) diffeomorphic to a linear system in Brunovsky canonical form.

Notice that if $\partial_{\tilde{u}^i} a = 0$ for some i between 1 an $m-2$, we don't need the z^i variable, so we can set $\tilde{u}^i = v^i$, giving a feedback of dimension less tnan $m-1$. ■

Proposition 3 *If $f_{,im} = 0$ for $i = 1, \ldots, m$ and $f_{,1}, \ldots, f_{,m}, [f_{,m}, f]$ are independant vector fields, then the system has structure $\{1, \ldots, 1, 2\}$.*

Proof. We consider here $f, f_{,1}, \ldots, f_{,m}$ as vector fields on $N \times U$. The distribution Δ spanned by $\partial_{u^1}, \ldots, \partial_{u^m}, f_{,m}$ has clearly dimension $m+1$ and is by assumption involutive. By Frobenius' theorem there exist $(n+m)-(m+1) = m$ independent functions $h^1, \ldots, h^m$ whose differentials are othogonal to Δ. This means $h := (h^1, \ldots, h^m)^T$ depends only on x, $dh.f_m = 0$ and the $m \times m$ matrix $A := dh.(f_1, \ldots, f_{m-1}, [f, f_{,m}])$ has full rank.

Since h does not depend on u, we have $\partial_{\dot{u}} \dot{h} = 0$ and $\partial_u \dot{h} = \partial_u(dh.f) = dh.\partial_u f = (A_1, \ldots, A_{m-1}, 0)$, where A_i stands for the ith column of A and clearly $\partial_u \dot{h}$ has rank $m-1$. We also have $\partial_{\dot{u}} \ddot{h} = \partial_{\dot{u}}(\partial_x \dot{h}.f + \partial_u \dot{h}.\dot{u}) = dh.\partial_u f$.

On the other hand, using the fact that $\partial_{x^m} = dh.f_{,m} = 0$, we deduce

$$\begin{aligned}
\partial_{u^m} \ddot{h} &= \partial_{u^m}(\partial_x \dot{h}.f + \partial_u \dot{h}.\dot{u}) \\
&= \partial_x \partial_{u^m} \dot{h}.f + \partial_x \dot{h}.\partial_{u^m} f + \partial_u \partial_{u^m} \dot{h}.\dot{u} \\
&= \partial_x (dh.f_{,m}).f + \partial_u (dh.f_{,m}).\dot{u} + d\dot{h}.f_{,m} \\
&= L_{f_{,m}} L_f h \\
&= L_{[f_{,m}, f]} h \\
&= A_m.
\end{aligned}$$

Denoting the $m-1$ first columns of $\partial_u \ddot{h}$ by $B_1, \ldots, B_{m-1}$, it is now evident that the matrix

$$\frac{\partial(\dot{h}, \ddot{h})}{\partial(u, \dot{u})} = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_{m-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ B_1 & \ldots & B_{m-1} & A_m & A_1 & \ldots & A_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

has rank $2m-1$. ■

Of course this condition is not invariant by static feedback and has little interest in itself. It will be used in the next section to prove the main result. Yet, it readily applies to an important particular case, giving back a result of [4]:

Corollary 4 *A controllable affine system* $\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u^i f_i(x)$ *of dimension* $m+1$ *is linearizable.*

Proof. For $i, j = 1, \ldots, m$ we have $f_{,i} = f_i$ and $f_{,ij} = 0$. As the state dimension is $m+1$, controllability implies that $f_1, \ldots, f_m, [f_i, f_j]$ are independent for some integers i, j between 0 and m, and without loss of generality we can assume $j = m$. Since $[f, f_m] = [f_0, f_m] + \sum_{i=1}^m u^i [f_i, f_m]$, the independance of $f_1, \ldots, f_m, [f_i, f_m]$ for some integers i between 0 and m amounts to the independence of $f_1, \ldots, f_m, [f, f_m]$. By proposition 3, the system has structure $\{1, \ldots, 1, 2\}$, and is thus linearizable. ■

3 The criterion

We first generalize our notion of controlled geometric object to multi-vector fields. The reader not familiar with exterior algebra, tensor fields and tensor derivations can refer for instance to [1] for a very good survey. Let $\Lambda^m(TN) := N \times \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$ be the m-alternate bundle of N and π_N be the projection on N. We call *controlled m-vector field* any (smooth) map $\tau : N \times J_k U \to \Lambda^m(TN)$, such that $\pi_N \circ \tau(x, u, \dot{u}, \ldots, u_{(k)}) = x$. Let $\Gamma_U(\Lambda^m(TN))$ be the set of all such fields, considered with its obvious module strucuture. As in the standard case, there is only one way of extending a differential operator acting on the controlled functions and vector fields to a differential operator of the full controlled tensor fields. algebra. Thus, if $X \in \Gamma_U(TN)$ and $\tau \in \Gamma_U(\Lambda^m(TN))$, $\partial_{u^i}\tau$ and $L_X\tau$ are well defined. For computational purposes, it is enough to know how our operators act on decomposable controlled m-vector fields: if $X_0, \ldots, X_m$ be elements of $\Gamma_U(TM)$, we simply have

$$L_{X_0}(\bigwedge_{i=1}^m X_i) = \sum_{i=1}^m (\bigwedge_{j=1}^m g_{ij}),$$

with $g_{ii} := L_{X_0} X_i$ and $g_{ij} := f_j$ for $j \neq i$. For instance, when $m = 3$, it reads

$$L_{X_0}(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) = (L_{X_0} X_1) \wedge X_2 \wedge X_3 + X_1 \wedge (L_{X_0} X_2) \wedge X_3 + X_1 \wedge X_2 \wedge (L_{X_0} X_3).$$

We have similar formulas for the derivation ∂_{u^i}.

Consider now the ascending chain of controlled distributions $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ defined by:

$$\begin{aligned} D_0 &:= \operatorname{span}\{f_{,1} \wedge \ldots \wedge f_{,m}\}, \\ D_{k+1} &:= D_k + \partial_u D_k. \end{aligned}$$

We use the notation $\partial_u \Delta := \operatorname{span}\{\partial_u \tau,\ \tau \in \Delta\}$ for any distribution Δ. It is clear that $D_k = D_m$ when $k \geq m$, and we set $D := D_m$. We are now in position to state the main result:

Theorem 5 *A system has structure* $\{1,\ldots,1,2\}$ *iff* $L_f(f_{,1}\wedge\ldots\wedge f_{,m})\notin D$.

As it is formulated with intrinsic geometric objects, this criterion is naturally invariant by a state diffeomorphism. It is also feedback independant:

Proposition 6 *The criterion is invariant by (invertible) static feedback.*

Proof. Consider a static feedback $u := \alpha(x,\tilde{u})$, and define a map Φ by $\Phi(x,\tilde{u}) := (x,\alpha(x,\tilde{u}))$. To any controlled vector field $X : (x,u) \longmapsto X(x,u)$ we can associate a controlled vector field $\tilde{X} := X\circ\Phi$, and we can do the same for any controlled geometric object (function, m-vector field, distribution,...).

Chain rule differentiation then gives

$$\partial_{\tilde{u}}\tilde{X} = \partial_{\tilde{u}}(X\circ\Phi) = (\partial_u X\circ\Phi).\partial_{\tilde{u}}\alpha, \tag{1}$$

and it is a routine exercise to extend this formula to any m-vector field τ:

$$\partial_{\tilde{u}}\tilde{\tau} = \partial_{\tilde{u}}(\tau\circ\Phi) = (\partial_u\tau\circ\Phi).\partial_{\tilde{u}}\alpha. \tag{2}$$

From (1) we deduce

$$\bigwedge_{i=1}^{m}\tilde{f}_{,i} = |\partial_{\tilde{u}}\alpha|\ (\bigwedge_{i=1}^{m} f_{,i}\circ\Phi),$$

hence $\tilde{D}_0 = D_0\circ\Phi$. From (2), it is clear that for any controlled distribution Δ,

$$\partial_{\tilde{u}}\Delta = (\partial_u\Delta)\circ\Phi,$$

so if $\tilde{D}_k = D_k\circ\Phi$, then $\tilde{D}_{k+1} = D_{k+1}\circ\Phi$. The D_k's are thus invariant by static feedback.

On the other hand, for $i = 1,\ldots,m$

$$\begin{aligned}[\tilde{f},\tilde{f}_{,i}] &= [f\circ\Phi, \sum_{j=1}^{m}\alpha^j_{,i}(f_{,j}\circ\Phi)]\\ &= \sum_{j=1}^{m}\alpha^j_{,i}([f,f_{,i}]\circ\Phi + L_{f\circ\Phi}\alpha^j_{,i}(f_{,j}\circ\Phi)).\end{aligned}$$

This implies

$$L_{\tilde{f}}(\bigwedge_{i=1}^{m}\tilde{f}_{,i}) = |\partial_{\tilde{u}}\alpha|\ (L_f(\bigwedge_{i=1}^{m} f_{,i}))\circ\Phi,$$

which completes the proof. ■

We now prove the theorem:

Proof. (necessity) By propositions 1 and 6 we can assume the system in simplified form, so $f_{,i} = \partial_{x^i} + a_{,i}\partial_{x^{m+1}}$ and $f_{,ij} = a_{,ij}\partial_{x^{m+1}}$. Moreover $a_{,m} = 0$ and $\partial_{x^m}\neq 0$.

Set $\rho_0 := \wedge_{i=1}^m\partial_{x^i}$ and for $i = 1,\ldots,m$, $\rho_i := \wedge_{j=1}^m g_j$, where $g_i := \partial_{x^{m+1}}$ and $g_j := \partial_{x^j}$ if $j\neq i$. Set also $\Delta := \mathrm{span}\{\rho_0,\ldots,\rho_{m-1}\}$. A straightforward computation shows that $\partial_u\Delta\subset\Delta$ and $\wedge_{i=1}^m f_{,i} = \rho_0 + \sum_{i=1}^m\rho_i = \rho_0 + \sum_{i=1}^{m-1}\rho_i$, $a_{,m}$ being zero by assumption. This

implies $D \subset \Delta$. But $[f, f_{,m}] = [f, \partial_{x^m}] = -(\partial_{x^m} a)\partial_{x^{m+1}}$, hence $L_f(\wedge_{i=1}^m f_{,i}) \equiv -(\partial_{x^m} a)\rho_m$ modulo Δ. Since by assumption $(\partial_{x^m} a) \neq 0$, it implies $L_f(\wedge_{i=1}^m f_{,i}) \notin D$.

(sufficiency) The general idea of the proof is to construct a static feedback such that the closed-loop system satisfies the requirements of proposition 3.

(a) By proposition 6, we assume the system in simplified form, so $f_{,i} = \partial_{x^i} + a_{,i}\partial_{x^{m+1}}$ and $f_{,ij} = a_{,ij}\partial_{x^{m+1}}$.

Set $g := \partial_{x^{m+1}}$ and $\tau_0 := \wedge_{i=1}^m f_{,i}$. For $i = 1, \ldots, m$ set also $\tau_i := \wedge_{j=1}^m g_j$, where $g_i := g$ and $g_j := f_{,j}$ if $j \neq i$. By assumption $g, f_{,1}, \ldots, f_{,m}$ form a basis of $\Gamma_U(TN)$, hence $\tau_0, \ldots, \tau_m$ form a basis of $\Gamma_U(\Lambda^m(TN))$. Since for $i, j = 1, \ldots, m$, $f_{,ij}$ is colinear to g,

$$\partial_{u^i}\tau_0 = \sum_{j=1}^m a_{,ij}\tau_j \tag{3}$$

$$\partial_{u^i}\tau_j = 0, \tag{4}$$

If $\dim D = 1$ (i.e. $D = D_0$), then $f_{,ij} = 0$ for $i, j = 1, \ldots, m$, and there is nothing to do. Just set $r := 0, \tilde{f} := f, \tilde{g} := g$ and go directly to (c). Otherwise $D = \mathrm{span}\{\tau_0\} \oplus D'$ where D' is a subdistribution of dimension $r > 0$ of $\mathrm{span}\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$. Up to a reordering of the components of u, we can assume

$$D' = \mathrm{span}\{\tau_i + \sum_{j=1}^{m-r} \sigma_i^j \tau_{r+j},\ i = 1, \ldots, r\},$$

where the σ_i^j's are controlled functions. But, by (3), these functions depend only on x, otherwise D' would be of dimension $r' > r$. On the other hand and still by (3), for $i = 1, \ldots, m$, $\partial_{u^i}\tau_0 \in D'$, that is $D' + \mathrm{span}\{\partial_{u^i}\tau_0\} = D'$. This means the matrices

$$\begin{pmatrix} & a_{,i1} \\ \mathbf{Id}_r & \vdots \\ & a_{,ir} \\ & a_{,i,r+1} \\ \sigma & \ldots \\ & a_{,im} \end{pmatrix}$$

have rank r, where σ is the $(m-r)\times r$ matrix formed with the σ_i^j's. Thus, for $i = 1, \ldots, m$ and $j = 1, \ldots, m-r$ all determinants

$$\Delta_{ij} := \begin{vmatrix} & & & a_{i1} \\ & \mathbf{Id}_r & & \vdots \\ & & & a_{,ir} \\ \sigma_1^j & \ldots & \alpha_r^j & a_{,ij} \end{vmatrix} = a_{,i,j+r} - \sum_{k=1}^r \sigma_k^j a_{,ik}$$

are equal to 0.

(b) We now build a feedback by setting

$$\alpha(x, \tilde{u}) := \begin{pmatrix} \mathbf{Id}_r & -\sigma^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Id}_{m-r} \end{pmatrix} .\tilde{u}$$

Using (1) and the fact that σ depends only on x, we get

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{,i} &= f_{,i} \circ \Phi & i = 1, \ldots, r \\
\tilde{f}_{,r+i} &= f_{,r+i} \circ \Phi - \sum_{k=1}^{r} \sigma_k^i f_{,k} \circ \Phi & i = 1, \ldots, m-r.
\end{aligned}$$

We deduce that for $j = 1, \ldots, m-r$,

$$\begin{aligned}
\partial_{\tilde{u}} \tilde{f}_{,j+r} &= \partial_{\tilde{u}}(f_{,j+r} \circ \Phi) - \sum_{k=1}^{r} \sigma_k^j \partial_{\tilde{u}}(f_{,k} \circ \Phi) \\
&= ((\partial_u f_{,j+r}) \circ \Phi - \sum_{k=1}^{r} \sigma_k^j (\partial_u(f_{,k}) \circ \Phi).\partial_{\tilde{u}} \alpha \\
&= 0,
\end{aligned}$$

because for $j = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned}
(\partial_{u^i} f_{,j+r}) \circ \Phi - \sum_{k=1}^{r} \sigma_k^j ((\partial_{u^i} f_{,k}) \circ \Phi) &= (a_{,i,j+r} g) \circ \Phi - \sum_{k=1}^{r} \sigma_k^j ((a_{,ik} g) \circ \Phi) \\
&= \tilde{\Delta}_{ij}\ \tilde{g} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

where we have set $\tilde{\Delta}_{ij} := a_{,i,j+r} \circ \Phi - \sum_{k=1}^{r} \sigma_k^j (a_{,ik} \circ \Phi)$ and $\tilde{g} := g \circ \Phi$.

(c) Set $\theta_0 := \wedge_{i=1}^m \tilde{f}_{,i}$ and for $i = 1, \ldots, m$, $\theta_i := \wedge_{j=1}^m \tilde{g}_j$, where $\tilde{g}_i := \tilde{g}$ and $\tilde{g}_j := \tilde{f}_{,j}$ if $j \neq i$. As $g, f_{,1}, \ldots, f_{,m}$ iform a basis of $\Gamma_U(TN)$, by (1) $\tilde{g}, \tilde{f}_{,1}, \ldots, \tilde{f}_{,m}$ form a basis of $\Gamma_{\tilde{U}}(TN)$ and $\theta_0, \ldots, \theta_m$ is a basis of $\Gamma_{\tilde{U}}(\Lambda^m(TN))$.

Since $\tilde{f}_{,ij} = 0$ for $i = 1, \ldots, m$ and $j = r+1, \ldots, m$, a simple computation shows that $\tilde{D} = \text{span}\{\tilde{\theta}_0, \ldots, \tilde{\theta}_r\}$. For $i = 1, \ldots, m$, $[\tilde{f}, \tilde{f}_{,i}] \equiv b_i \tilde{g}$ modulo $\text{span}\{\tilde{f}_{,1}, \ldots, \tilde{f}_{,m}\}$, where b_i is a controlled function, hence $L_{\tilde{f}} \theta_0 \equiv \sum_{i=r+1}^m b_i \tilde{\theta}_i$ modulo $\tilde{D}$. So $L_{\tilde{f}} \tau_0 \notin D$ implies there exists an integer i between $r+1$ and m such that $b_i \neq 0$, and without loss of generality, $i = m$.

But $b_m \neq 0$ means $\tilde{f}_{,1}, \ldots, \tilde{f}_{,m}, [\tilde{f}, \tilde{f}_{,m}]$ are independent. On the other hand, $\tilde{f}_{,mi} = 0$ for $i = 1, \ldots, m$. We then use proposition 3. ■

4 Examples

Example 1 Consider the system given by

$$\begin{aligned}
\dot{x}^1 &= x^3 + \frac{(x^1)^2}{2} \\
\dot{x}^2 &= u^1 \\
\dot{x}^3 &= u^1 u^2.
\end{aligned}$$

Straightforward computations give:

$$\begin{aligned} f_{,1} \wedge f_{,2} &= (u^1)^2\ \partial_{x^1} \wedge \partial_{x^3} + u^1\ \partial_{x^2} \wedge \partial_{x^3} \\ \partial_{u^1}(f_{,1} \wedge f_{,2}) &= 2u^1\ \partial_{x^1} \wedge \partial_{x^3} \\ \partial_{u^2}(f_{,1} \wedge f_{,2}) &= 0, \end{aligned}$$

which implies $D = D_1 = \mathrm{span}\{\partial_{x^1} \wedge \partial_{x^3}, \partial_{x^2} \wedge \partial_{x^3}\}$. Since $L_f(f_{,1} \wedge f_{,2}) = u^1\ \partial_{x^1} \wedge \partial_{x^2} - 2u^1u^2\ \partial_{x^1} \wedge \partial_{x^3} \notin D$, the criterion is satisfied. The output $y = (x^1, x^2)$ provides the requested $\{1, 2\}$ structure. □

The next example shows that the criterion is not a necessary condition for flatness.

Example 2 Consider the system given by

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= u^1 \\ \dot{x}^2 &= u^2 \\ \dot{x}^3 &= u^1u^2. \end{aligned}$$

This system has not structure $\{1, 2\}$; indeed, $D = D_1$ is of dimension 3 and can not satisfy the criterion. It is nevertheless flat, because it has structure $\{0, 3\}$, obtained for instance with the output $y := (x^1, x^2u^1 - x^3)$. □

5 Conclusion

We have established a simple sufficient condition for flatness. Although too restrictive to have much practical interest, it gives an idea of what a more general criterion could look like. It is interesting to give some hints on how it was obtained and the possible ways of extending it: we first wrote a system of partial differential equations for a map h to satisfy rank $\partial_u h = 0$, rank $\partial_u \dot{h} = m - 1$ and rank $\frac{\partial(\dot{h},\ddot{h})}{\partial(u,\dot{u})} = 2m - 1$. This system is naturally multilinear and is of order 2. By adding all the compatibility conditions, it can be written as an involutive system of order 1 with a transversality condition. Our criterion is nothing but the fact this condition can be satisfied. Notice that this procedure is very similar in spirit to the one used in [10, 9] for the static feedback case, and is indeed very general. Similar ideas can be used to generalize our simple result: seeking for a map h endowing $S(h)$ with a given structure at infinity, can always be recast as checking the involutivity of a (higher orfer) multilinear PDE system. This problem is tractable in theory, but unfortunately the mathematical tools involved are far more sophisticated than the ones we used (cf [16, 3]), and a fair amount of work is needed to proceed along this line.

References

[1] R. Abraham, J.E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications.* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1983. Second Edition SpringerVerlag 1988.

[2] M.D. Di Benedetto, J.H. Grizzle, and C.H. Moog. Rank invariants of nonlinear systems. *SIAM J. Control & Opt.*, 27:658–672, 1989.

[3] R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt, and P.A. Griffiths. *Exterior Differential Systems*. Springer-Verlag, 1991.

[4] B. Charlet, J. Lévine, and R. Marino. On dynamic feedback linearization. *Systems & Control Letters*, 13:743–151, 1989.

[5] B. Charlet, J. Lévine, and R. Marino. Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization. *SIAM J. Control & Opt.*, 29:38–57, 1991.

[6] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, and P. Rouchon. Défaut d'un système non linéaire et commande haute fréquence. *C.R. Acad. Sc. Paris*, 316(I), 1993.

[7] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, and P. Rouchon. On differentially flat non linear systems. In *Proceedings of IFAC NOLCOS Conf.*, Bordeaux, France, 1992.

[8] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, and P. Rouchon. Sur les systèmes nonlinéaires différentiellement plats. *C.R. Acad. Sc. Paris*, 315(I):619–624, 1992.

[9] L.R. Hunt, R.Su, and G.Meyer. Design for multi-input nonlinear systems. In R. Brockett, R.Millman, and H. Sussman, editors, *Differential Geometric Control Theory*, pages 268–298. Birkhäuser, 1983.

[10] B. Jakubczyk and W. Respondek. On linearization of control systems. *Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math.*, 28,9-10:517–522, 1980.

[11] R. Marino. On the largest feedback linearizable subsystem. *Systems & Control Letters*, 6:345–351, 1986.

[12] Ph. Martin. *Contribution à l'étude des systèmes différentiellement plats*. PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, Paris, France, 1992.

[13] Ph. Martin. An intrinsic condition for regular decoupling, 1993. To appear in Systems and Control Letters.

[14] C.H. Moog. Nonlinear decoupling and structure at infinity. *Math. Control Signals Systems*, 1:275–268, 1988.

[15] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft. Controlled invariance for non linear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 27:904–914, 1982.

[16] J.F. Pommaret. *Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups*. Gordon & Breach, New York, 1978.

[17] W.F. Shadwick. Absolute equivalence and dynamic feedback linearization. *Systems & Control Letters*, 15:35–39, 1990.

Systems without drift and flatness

Ph. MARTIN* P. ROUCHON†

October 1992, submitted to MTNS 93

Abstract

A necessary and sufficient flatness condition for systems without drift having two control variables is given. The proof is based on a result, due to E.Cartan [4], on Pfaffian systems of $n-2$ equations in n variables. This result is illustrated by a nonholonomic system describing a kinematic car with one trailer.

Key words: dynamic feedback linearization, systems without drift, flatness, Pfaffian systems, nonholonomic control systems.

1 Introduction

In [9, 8], a new point of view on full linearization via dynamic feedback [5] was proposed by introducing the notions of flatness and flat output.

Roughly speaking, a control system $\dot{x} = f(x,u)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$) is called flat, if there exits $y = h(x, u, \ldots, u^{(p)})$ ($p \in \mathbb{N}$), $y \in \mathbb{R}^m$, such that the input-output system

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,u) \\ y & = & h(x, u, \ldots, u^{(p)}) \end{array} \right.$$

is invertible [16, 7] and its inverse has no dynamics. Such an y is called a flat output. This means that the entire state x and the control u are functions, A and B, of y and a finite number of its derivatives:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & A(y, \ldots, y^{(q)}) \\ u & = & B(y, \ldots, \ldots, y^{(q+1)}). \end{array} \right. \tag{1}$$

*Centre Automatique et Systèmes, École des Mines de Paris, 35, rue Saint-Honoré, 77305 Fontainebleau Cedex, FRANCE. Tel: 33 (1) 64 69 48 57. E-mail: martin@cas.ensmp.fr

†Centre Automatique et Systèmes, École des Mines de Paris, 60, Bd Saint-Michel, 75272 Paris Cedex 06, FRANCE. Tel: 33 (1) 40 51 91 15. E-mail: rouchon@cas.ensmp.fr

If a system is flat, then all its trajectories can be formally parametrized explicitely without integration of any differential equation. It suffices to give the flat output $t \to y(t)$ to obtain the functions $t \to x(t)$ and $t \to u(t)$ via (1).

A precise definition of this property is given in [8], when all the functions are algebraic. In this note, we use also the term flat when the functions are analytic.

The characterization of flatness for a general system, $\dot{x} = f(x, u)$, by a computable criterion, such as the one given in [13] for static linearization, is an open problem. This paper is a first step towards such a characterization for systems without drift: we give a necessary and sufficient flatness condition when the number of controls is 2. Such systems frequently occur in nonholonomic robotics (see [14]).

In section 2, we recall some basic links between systems without drift (vector fields) and Pfaffian systems (differential 1-forms). Section 3 is devoted to systems in n states and $m = n-1$ controls. In section 4, systems without drift having two controls are considered and the criterion is stated. It is illustrated by the nonholonomic system modelling a kinematic car with a trailer.

All along the paper, the functions, vector fields and 1-forms are assumed analytic although the results can be extended to the smooth case. The ranks of the different vector spaces and modules are thus generic (i.e. maximal) ranks. We concentrate on structural aspects and we do not address here the difficult problem of singularities.

A connected approach using a similar framework can be found in [10].

2 Pfaffian systems and control systems without drift

Standard results in differential geometry (vector fields, differential form and exterior calculus) can be found in [1]. Basic facts on Pfaffian systems are recalled in [2, chapter 2].

Let U be an open connected subset of $\mathbb{R}^n$. A *Pfaffian system* on U is a differential system

$$\alpha^1 = \ldots = \alpha^p = 0,$$

where the α^i's are independent 1-forms on U, that is

$$\alpha^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j dx^j$$

for $i = 1, \ldots, p$, with the a^i_j's functions on U. We denote by I the module $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^p\}$ (over the ring of analytic functions) spanned by $\alpha^1, \ldots, \alpha^p$. Notice that solving a Pfaffian system corresponds to solving a system of partial differential equations, and that two Pfaffian systems spanning the same module have the same solutions. For that reason we call again Pfaffian system any module spanned by 1-forms.

Some properties of the Pfaffian system I can be characterized by a nested sequence of submodules, $I^{(k)} \subset \ldots \subset I^{(1)} \subset I^{(0)} := I$ called the derived flag of I , defined by the following rule: if r_k is the dimension of $I^{(k)}$, then

$$I^{(k+1)} = \{\omega \in I^{(k)} \mid \forall \eta_1, \ldots, \eta_{r_k} \in I^{(k)},\ d\omega \wedge \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_{r_k} = 0\}.$$

A convenient way to compute the wedge product $\wedge$ is as follows: if α is a k-form, β a l-form and e_1,..., e_{k+l} vector fields, then,

$$(\alpha \wedge \beta)(e_1, \ldots, e_{k+l}) = \sum{}' (\text{sign } \sigma)\alpha(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(k)})\ \beta(e_{\sigma(k+1)}, \ldots, e_{\sigma(k+l)}) \tag{2}$$

where $\sum{}'$ denotes the sum over all (k, l) shuffles, that is permutations σ of $\{1, 2, \ldots, k + l\}$ such that $\sigma(1) < \ldots < \sigma(k)$ and $\sigma(k + 1) < \ldots < \sigma(k + l)$.

The exterior derivative $d\omega$ of a 1-form ω is linked to the Lie bracket of two vector fields X and Y by

$$d\omega(X, Y) = L_X(\omega(Y)) - L_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]), \tag{3}$$

where L_X (resp. L_Y) is the Lie derivative along X (resp. Y).

Consider now a control system without drift

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u^i, \tag{4}$$

where the f_i's are independent vector fields on U. The system is called controllable if the Lie algebra spanned by the f_i's has rank n. Since the f_i's are independent, it is routine computation to eliminate the controls u^i in (4) in order to get $s = n - m$ equations of the form

$$\sum_{j=1}^{n} a^i_j(x)\dot{x}^j = 0,$$

where the a^i_j's are functions on U. The $s \times n$ matrix formed with the a^i_j's has obviously full rank s. We then define the *associated Pfaffian system* $\{\alpha^{m+1}, \ldots, \alpha^n\}$ by

$$\alpha^i := \sum_{j=1}^{n} a^i_j dx^j, \quad i = m + 1, \ldots, n.$$

Clearly, this Pfaffian system is uniquely defined by (4). Notice that two control systems which are equivalent by static feedback have the same associated Pfaffian system. To the module of vector fields $\{f_1, \ldots, f_m\}$ is then associated the module of 1-forms $I := \{\alpha^{m+1}, \ldots, \alpha^n\}$. It is possible to complete $(\alpha^{m+1}, \ldots, \alpha^n)$ (resp $(f_1, \ldots, f_m)$) to a basis $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ (resp. $(f_1, \ldots, f_n)$) of the module of 1-forms (resp. vector fields) on U such that $\alpha^i(f_j) = \delta^i_j$ $(i, j = 1, \ldots, n$, δ^i_j is the Kronecker symbol). In other words, the α^i's and f_j's are dual basis. Obviously $I = \{f_1, \ldots, f_m\}^\perp$ and by (2) and (3)

$$I^{(1)} = \{f_1, \ldots, f_m, ([f_i, f_j])_{1 \le i < j \le m}\}^\perp$$

where $\perp$ denotes the orthogonal with respect to the duality between 1-forms and vector fields.

This correspondance shows that $I^{(k)}$ is the orthogonal of the module of vector fields, E_k, spanned by the f_j's and their Lie brackets of length less than or equal to k $(k \ge 0)$. The controllabilty of (4) is equivalent to $I^{(k)} = \{0\}$ for k large enough. When $s = n - m = 1$, the controllability conditions reads $I^{(1)} = 0$, i.e., $d\alpha^n \wedge \alpha^n \neq 0$ which is the early characterization of accessibility of Caratheodory [3]. The general case, $s = n - m \ge 1$, was treated by Chow [6]. The usual formulation in term of Lie algebra of vector fields can be found in [11].

3 Systems without drift of codimension one ($n - m = 1$)

We consider here the case of systems (4) in m controls and $n = m + 1$ states. The associated Pfaffian system I is spanned by a single 1-form α. Following [2, chapter 2], we define the rank r of $\{\alpha\}$ by

$$(d\alpha)^r \wedge \alpha \neq 0, \quad (d\alpha)^{r+1} \wedge \alpha = 0.$$

Necessarily $2r + 1 \leq n$. We will use the classical result:

Theorem [Pfaff normal form] *Suppose α has constant rank r. Then locally, there are coordinates $z = (z^1, \ldots, z^n)$ such that $I = \{dz^1 + z^2 dz^3 + \ldots + z^{2r} dz^{2r+1}\}$.*

This theorem allows to recover, for control systems without drift, a result of [5]:

Theorem 1 *A controllable system without drift of codimension one is flat.*

Proof Set $I := \{\alpha\}$. Controllability implies that $I^{(1)} = \{f_1, \ldots, f_m, ([f_i, f_j])_{1 \leq i < j \leq m}\}^{\perp} = 0$, that is $d\alpha \wedge \alpha \neq 0$. Working around a genereric point where α has constant rank r, we know from the Pfaff normal that $I = \{dz^1 + z^2 dz^3 + \ldots + z^{2r} dz^{2r+1}\}$. In the z coordinates, the control system reads, up to static feedback,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z}^1 & = & -z^2 v^2 - \ldots - z^{2r} v^{2r} \\ \dot{z}^2 & = & v^1 \\ & \vdots & \\ \dot{z}^{m+1} & = & v^m, \end{array} \right.$$

and $(z^1, z^3, z^4, \ldots, z^{m+1})$ is obviously a flat output. ∎

Notice that the Pfaff normal form contains more information than we need. The only thing we use is that it doesn't depend on dz^2.

4 Systems without drift having two control variables

We consider now systems with two control,

$$\dot{x} = f_1(x) u^1 + f_2(x) u^2, \tag{5}$$

where $x = (x^1, \ldots, x^n)$ and f_1, f_2 are analytical vector fields.

In [4], E. Cartan proved the following result.

Theorem [Cartan 1915] *Let I be a Pfaffian system of $s \geq 2$ linearly independant analytic 1-forms with $s+2$ variables, x^1, ..., x^{s+2}. Its general solution can be expressed as a function Φ of an arbitrary function w of the independant variable σ and a finite number of its derivatives,*

$$x = \Phi\left(\sigma, w, \frac{dw}{d\sigma}, \ldots, \frac{d^r w}{d\sigma^r}\right), \tag{6}$$

if, and only if, the derived flag satisfies $\dim I^{(k)} = s - k$, *for* $k = 0, \ldots, s$.

A careful inspection of the proof given by Cartan shows that this result provides necessary and sufficient conditions for I to admit a Goursat normal form (see [2, chapter 2]): there exists a coordinate change $(x^1, \ldots, x^{s+2}) \to (\sigma, w^0, w^1, \ldots, w^s)$ such that

$$I = \{dw^0 - w^1 d\sigma, dw^1 - w^2 d\sigma, \ldots, dw^{s-1} - w^s d\sigma\}, \tag{7}$$

if, and only if, the derived flag of I satisfies the rank conditions of Cartan's theorem.

Theorem 2 *A system without drift in n states and 2 controls ($n \geq 2$), is flat if, and only if, for $k = 0, \ldots, n-2$, the modules E_k spanned by the system vector fields f_1 and f_2 and their Lie brackets of length less than or equal to k, satisfy*

$$\dim E_k = k + 2.$$

Moreover, when the system is flat, the flat output can be chosen as a function of the state only.

This result is related to chained form systems studied in [15].

Proof For $n = 2$ the result is trivial. In the sequel $n > 2$. Since a flat system is controllable, the dimension of $\mathrm{span}\{f_1, f_2\}$ is equal to 2. Thus we can assume, up to feedback transformations for u^1 and u^2, that (5) has the form

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}^1 & = & u^1 \\ \dot{x}^2 & = & u^2 \\ \dot{x}^3 & = & f_1^3(x)u^1 + f_2^3(x)u^2 \\ & \vdots & \\ \dot{x}^n & = & f_1^n(x)u^1 + f_2^n(x)u^2. \end{array}\right.$$

We denote by ω^i the differential 1-form $\omega^i = dx^i - f_1^i(x)dx^1 - f_2^i(x)dx^2$, for $i = 3, \ldots, n$. To the trajectories, solution of the under-determinated system

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}^3 & = & f_1^3(x)\dot{x}^1 + f_2^3(x)\dot{x}^2 \\ & \vdots & \\ \dot{x}^n & = & f_1^n(x)\dot{x}^1 + f_2^n(x)\dot{x}^2, \end{array}\right.$$

correspond the solutions of the Pfaffian system $\omega^3 = 0, \ldots, \omega^n = 0$ which is associated to the module $I := \{\omega^3, \ldots, \omega^n\}$. Using the duality between 1-forms and vector fields (see section 2), the rank conditions of the theorem are nothing but saying that, for $k = 0, \ldots, n$, the dimension of the module $I^{(k)}$ is equal to $n-k-2$. The theorem is just the translation into control language of Cartan's result.

The condition is sufficient: assume that the variables of Cartan's theorem, σ and w, are arbitrary functions of the time and use the rule

$$\frac{dw}{d\sigma} = \frac{\dot{w}}{\dot{\sigma}}, \quad \frac{d^2w}{d\sigma^2} = \frac{\ddot{w}\dot{\sigma} - \dot{w}\ddot{\sigma}}{\dot{\sigma}^3}, \quad \ldots;$$

relation (6) leads to an explicit parametrization (1) of all the system trajectories. Moreover σ and w are functions of x. The system is thus flat.

The condition is necessary: assume that the system is flat; then its general solution can be expressed using the flat output (y_1, y_2),

$$x = A(y_1, \ldots, y_1^{(q)}, y_2, \ldots, y_2^{(q)}); \tag{8}$$

it suffices to set y_1 to a fixed function of time, e.g., $y_1(t) = t$, and $y_2 = w(t)$ where w is an arbitrary function to obtain, up to the identification of σ with t, an explicit parametrization, similar to (6). ∎

For $n = 4$, the result can be directly recover by Engel's normal form [2, chapter 2]. In this case, the condition of theorem is simply equivalent to controllability. Hence, a controllable system without drift having 2 controls and 4 states is flat.

For $n \geq 5$ $(m = 2)$, controllability does not imply flatness any longer, as shown by the following nonflat system,

$$\begin{cases} \dot{x} &= u_1 \\ \dot{\alpha} &= u_2 \\ \dot{\beta} &= \alpha u_1 \\ \dot{z} &= \alpha^2 u_1 \\ \dot{y} &= \beta u_1, \end{cases}$$

derived from the second order Monge equation

$$\frac{dz}{dx} - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$$

studied by Hilbert [12]. Simple computations show that, for this system, $\dim E_0 = 2$, $\dim E_1 = 3 = 2 + 1$ but $\dim E_3 = 5 \neq 2 + 2$.

The kinematic car with one trailer This nonholonomic system, displayed on figure 1, generalizes the car with one trailer considered in [15], since the hitch of the trailer is not

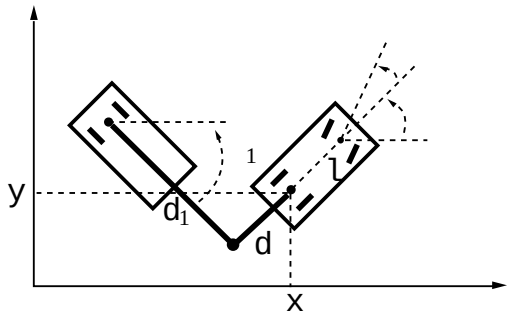


Figure 1: *kinematic model of a car with one trailer; u_1 and u_2 are the velocities of the rear wheels and of steering, respectively.*

attached to the center of the rear axle of the car, but at a distance d. The wheels are aligned with the body of the trailer. The two control inputs are the driving velocity (of the rear wheels of the car) and the steering velocity (of the front wheels of the car). The wheels are allowed to roll and spin, but not to slip. The derivation of the equations is simplified by considering the steering front wheels of the car as a single wheel at the midpoint of the axle. The resulting dynamics is described by the following equations (the notations are summarized on figure 1):

$$\begin{cases} \dot{x} &= \cos\theta\ u_1 \\ \dot{y} &= \sin\theta\ u_1 \\ \dot{\varphi} &= u_2 \\ \dot{\theta} &= \dfrac{1}{l}\tan\varphi\ u_1 \\ \dot{\theta}_1 &= \dfrac{1}{d_1}\left(\sin(\theta_1-\theta) - \dfrac{d}{l}\tan\varphi\cos(\theta_1-\theta)\right)\ u_1 \end{cases}$$

Straightforward computations show that the conditions of theorem 2 are satisfied. This proves that the system is flat and that the flat output can be chosen as a function of $(x, y, \varphi, \theta, \theta_1)$.

5 Concluding remarks

We have shown that results on Pfaffian systems directly provide a criterion of flatness for systems without drift having two controls. There exist many other results on Pfaffian systems and we feel that several of them can be used for control purposes.

Acknowledgements

The authors would like to thank Michel Fliess and Jean Lévine for many useful discussions in the area of flat systems and dynamic feedback linearization.

References

[1] R. Abraham, J.E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications.* Springer Verlag, second edition, 1988.

[2] R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt, and P.A. Griffiths. *Exterior Differential Systems.* Springer-Verlag, 1991.

[3] C. Caratheodory. Untersuchungen über dir Grundlagen der Thermodynamik. *Math. Ann.*, 67:355–386, 1909.

[4] E. Cartan. Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles. *J. für reine und angew. Math.*, 145:86–91, 1915.

[5] B. Charlet, J. Lévine, and R. Marino. On dynamic feedback linearization. *Systems Control Letters*, 13:143–151, 1989.

[6] W.L. Chow. Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. *Math. Ann.*, 117:98–105, 1940.

[7] M. Fliess. A note on the invertibility of nonlinear input-output differential systems. *Systems Control Letters*, 8:147–151, 1987.

[8] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. On differentially flat nonlinear systems. In *Proc. IFAC-Symposium NOLCOS'92, Bordeaux*, june 1992.

[9] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *Comptes Rendus, Académie des Sciences, Paris*, I–315, 1992.

[10] B. Gardner and W.F. Shadwick. The GS algorithm for exact linearization to Brunovsky normal form. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 37:224–230, 1992.

[11] G.W. Haynes and H. Hermes. Nonlinear controllability via Lie theory. *SIAM J. Contr.*, 8:450–460, 1970.

[12] D. Hilbert. Über den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen. *Math. Ann.*, 73:95–108, 1912.

[13] B. Jakubczyk and W. Respondek. On linearization of control systems. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math.*, 28:517–522, 1980.

[14] R.M. Murray and S.S. Sastry. Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids. Technical Report M91/45, Electronics Research Lab., University of California, Berkeley, 1991.

[15] R.M. Murray and S.S. Sastry. Steering nonholonomic systems in chained form. In *IEEE Control and Decision Conference*, pages 1121–1126, 1991.

[16] S.N. Singh. A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 26:595–598, 1981.

Chapitre 4

Application au pilotage d'avion

Introduction

Ce chapitre a pour but de montrer l'interêt des systèmes plats pour un problème concret d'automatique; il ne s'agit pas de faire un simple calcul de bouclage linéarisant, mais plutôt d'examiner les possibilités pratiques de mise en oeuvre. Une partie de ce travail a été effectué pour la société SEXTANT AVIONIQUE dans le cadre d'une étude DRET en cours. L'origine de cette étude est un résultat de [9] montrant qu'un modèle simplifié d'avion est linéarisable par bouclage.

Notons que l'aéronautique est un cadre intéressant pour faire de l'automatique: on dispose d'un bon modèle, et la détermination des paramètres délicats, à savoir les coefficients aérodynamiques fait l'objet de véritables campagnes de mesure en soufflerie. Les avions sont très bien instrumenté et disposent de calculateurs embarqués assez puissants.

La suite de cette introduction rappelle brièvement le rôle d'un pilote automatique d'avion et les problèmes de commande qui se posent; on insiste en particulier sur les limites de lois de bouclage utilisant des techniques linéaires. La section 4.1 présente le modèle utilisé, accompagné de quelques commentaires (la modélisation elle-même figure à l'annexe A). La section 4.2 est consacrée à la construction de la loi de bouclage. Les simulations numériques de la section 4.3 donnent une idée des performances de cette loi. L'avion simulé est un F4, chasseur américain datant d'environ 25 ans, et dont les paramètres numériques sont dans le domaine public. Il est important de noter que l'étude qui suit est de portée générale et peut s'appliquer à la plupart des avions civils ou militaires.

4.0.1 Fonctions de pilotage

Les premiers pilotes automatiques offraient uniquement des fonctions élémentaires du type asservissement autour de consignes fixes: tenue d'altitude, de cap, d'assiette, de pente, de vitesse,... Le pilote devait amener l'avion près des consignes désirées et branchait ensuite le pilote automatique.

Sont apparues ensuite des fonctions plus évoluées, permettant de rallier et de tenir ces mêmes consignes. Si la condition initiale est loin de la consigne, la phase de ralliement permet de s'en approcher sans saturer les actionneurs.

Aujourd'hui, on voudrait qu'un pilote automatique soit en mesure d'assurer des tâches beaucoup plus complexes: manoeuvres d'atterrissage ou d'appontage, suivi de terrain à basse altitude (pour éviter la détection radar), pointage sur une cible éventuellement mobile,... Le point commun à toutes ces nouvelles fonctions est qu'il faut maintenant générer et suivre une trajectoire qui peut être absolument quelconque.

4.0.2 Limites de l'approche linéaire

Pour faire de la commande linéaire classique, il faut un système linéaire stationnaire. La première chose à faire est donc de déterminer les trajectoires de l'avion (i.e. les solutions du système (4.1)-(4.15)) pour lesquelles le linéarisé tangent est stationnaire. Empruntant la terminologie de [45], on appellera ces solutions *trajectoires permanentes*. Notons que les points d'équilibre sont sans intérêt puisqu'ils imposent $V(t) = 0$ (l'avion est immobile). On voit facilement que les seules trajectoires permanentes correpondent au vol en ligne droite à vitesse et altitude constantes: c'est le *vol en palier*. Ceci étant trop restrictif (l'avion ne peut ni tourner, ni changer d'altitude), on est amené à affaiblir un peu les hypothèses en ne considérant pas les variables de position horizontales x et y (que l'on renonce donc à asservir). Ceci permet de considérer des trajectoires où l'avion décrit un cercle à vitesse de rotation et altitude constantes: c'est le *virage stabilisé*. Pour autoriser des mouvements dans le plan vertical, on est obligé de faire une approximation en négligeant l'influence de l'altitude, qui intervient dans les forces et moments aérodynamiques par l'intermédiare de la masse volumique de l'air et du nombre de Mach. Cette approximation n'est pas déraisonable si l'altitude ne varie pas trop (quelques centaines de mètres), surtout en régime subsonique (où les coefficients aérodynamiques sont peu sensibles au Mach) et à basse altitude (où la variation relative de la masse volumique de l'air est la plus faible). Adoptant encore la terminologie de [45], on appellera *pseudo-permanentes* les trajectoires permanentes du système approximé. La trajectoire pseudo-permanente la plus générale est alors une hélice. Quand l'avion ne tourne pas, on peut prendre en compte x et y: toute droite parcourue à vitesse constante est une trajectoire pseudo-permanente: c'est le *vol en ressource*, avec comme cas particulier le vol en palier.

Les fonctions élémentaires de pilotage automatique évoquées dans le paragraphe précédent correspondent à l'asservissement autour des trajectoires pseudo-permanentes. Bien sûr, le système linéaire tangent autour d'une trajectoire pseudo-permanente dépend d'un certain nombre de paramètres de cette trajectoire (à savoir l'altitude $-z$, la vitesse V, la pente γ, l'angle de roulis μ et l'angle de dérapage β). Une technique couramment utilisée pour construire un régulateur fonctionnant en tout point de l'epace de ces paramètres consiste à faire un maillage de cet espace, à régler les gains de régulateurs linéaires en chaque point de ce maillage, puis à interpoler (linéairement) les gains sur l'espace des paramètres, ce qui revient en fait à une sorte de bouclage non linéaire assez complexe.

Les fonctions de pilotage plus évoluées consistent à réguler autour de trajectoires de référence constituées de tronçons de trajectoire pseudo-permanentes. Le problème est qu'il n'est pas possible de raccorder continûment deux telles trajectoires: par exemple, $\mu(t) = 0$ en vol en palier et $\mu(t) =$ constante $\neq 0$ en virage stabilisé; la raison est que le contact entre un cercle et une droite tangente est seulement d'ordre 1: les positions et les vitesses varient continûment, mais pas les accélérations, ce qui induit des Diracs dans les

gouvernes δ_l,δ_m,δ_n. Les méthodes empiriques employées pour surmonter cette difficulté fonctionnent assez bien si les commutations entre les trajectoires pseudo-permanentes ne sont pas trop rapides.

Pour des trajectoires quelconques, variant rapidement et mélangeant des mouvements horizontaux et verticaux (ce qui est typiquement le cas pour le suivi de terrain), ces méthodes sont souvent mises en défaut. De plus, l'absence d'un cadre théorique oblige à se reposer presqu'entièrement sur des simulations numériques pour déterminer des conditions satisfaisantes de fonctionnement.

4.1 Le modèle utilisé

Un avion est un système physique très complexe. On peut cependant en faire une modélisation assez simple qui rend bien compte de son mouvement. On présente ici les hypothèses couramment adoptées pour modéliser un avion en vol (on ne s'intéresse pas aux interactions avec le sol pendant le décollage ou l'atterrissage). Une discussion de la validité de ces hypothèses, ainsi que la totalité des calculs menant aux équations figurent à l'annexe A.

- Un avion est un corps rigide à six degrés de liberté comportant un plan de symétrie.
- La masse et la matrice d'inertie de l'avion sont constantes.
- Les écoulements aérodynamiques sont quasistationnaires.
- L'environnement dans lequel évolue l'avion vérifie les conditions atmosphériques standard et est au repos par rapport à la terre.
- La courbure de la terre est négligée. Le référentiel lié à la terre est galiléen.

L'application du principe fondamental de la dynamique conduit alors à un système de 12 équations du premier ordre. Un modèle de l'atmosphère permet d'exprimer les paramètres atmosphériques uniquement en fonction de l'altitude. Les variables d'état sont x,y,z, coordonnées du centre d'inertie G de l'avion (où z est l'opposé de l'altitude), V,α,β, projections du vecteur vitesse (V est le module de la vitesse, α et β sont des angles d'attitude par rapport à la trajectoire, appelés respectivement incidence et dérapage), γ,χ,μ, angles traduisant l'orientation de l'avion (appelés pente, azimut et roulis), et p,q,r coordonnées du vecteur de rotation. On dispose par ailleurs de 4 entrées: la poussée F des propulseurs, et la positions δ_l,δ_m,δ_n des gouvernes de gauchissement, profondeur et direction.

Sur tous les avions modernes d'une certaine taille, les gouvernes sont actionnées par des servocommandes électro-mécaniques. Ces servocommandes sont en général modelisées par des systèmes linéaires indépendants des 12 variables ci-dessus, et d'ordre 1,2 ou 3. On a retenu ici un modèle très simple du premier ordre, qui représente la partie la plus lente des servocommandes. De même, ll y a une relation dynamique (qui peut être assez complexe) entre la pousseé F et la manette des gaz, qui est la vraie commande; on n'en a pas tenu compte à ce stade de l'étude.

En résumé, on considère le système suivant de 15 équations du premier ordre, commandé par F,$\tilde{\delta}_l$,$\tilde{\delta}_m$,$\tilde{\delta}_n$:

Equations du vol

$$\dot{x} = V\cos\chi\cos\gamma \tag{4.1}$$
$$\dot{y} = V\sin\chi\cos\gamma \tag{4.2}$$
$$\dot{z} = -V\sin\gamma \tag{4.3}$$
$$\dot{V} = -g\sin\gamma + \frac{X}{m} \tag{4.4}$$
$$\dot{\alpha}\cos\beta = \frac{g}{V}\cos\gamma\cos\mu - p\cos\alpha\sin\beta + q\cos\beta - r\sin\alpha\sin\beta + \frac{Z}{mV} \tag{4.5}$$
$$\dot{\beta} = \frac{g}{V}\cos\gamma\sin\mu + p\sin\alpha - r\cos\alpha + \frac{Y}{mV} \tag{4.6}$$
$$\dot{\gamma} = -\frac{g}{V}\cos\gamma - \frac{Y\sin\mu}{mV} - \frac{Z\cos\mu}{mV} \tag{4.7}$$
$$\dot{\chi}\cos\gamma = \frac{Y\cos\mu}{mV} - \frac{Z\sin\mu}{mV} \tag{4.8}$$
$$\begin{aligned}\dot{\mu}\cos\beta &= -\frac{g}{V}\cos\gamma\cos\mu\sin\beta + p\cos\alpha + r\sin\alpha \\ &\quad + \frac{Y\cos\mu\tan\gamma\cos\beta}{mV} - \frac{Z(\sin\mu\tan\gamma\cos\beta + \sin\beta)}{mV}\end{aligned} \tag{4.9}$$
$$I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} = (I_{yy} - I_{zz})qr + I_{xz}pq + L \tag{4.10}$$
$$I_{yy}\dot{q} = (I_{zz} - I_{xx})qr + I_{xz}p(r^2 - p^2) + M \tag{4.11}$$
$$I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} = (I_{xx} - I_{yy})pq + I_{xz}rq + N \tag{4.12}$$

Dynamique des actionneurs

$$\dot{\delta}_l = -a_l\delta_l + \tilde{\delta}_l \tag{4.13}$$
$$\dot{\delta}_m = -a_m\delta_m + \tilde{\delta}_m \tag{4.14}$$
$$\dot{\delta}_n = -a_n\delta_n + \tilde{\delta}_n \tag{4.15}$$

Dans ces équations, X,Y,Z représentent les forces (autre que le poids) agissant sur l'avion (i.e. forces aérodynamiques et de propulsion) et L,M,N leurs moments; ces six termes dépendent de z,V,α,β,F et (linéairement) de $\dot{V}$,$\dot{\alpha}$,$\dot{\beta}$,p,q,r,δ_l,δ_m,δ_n. Une remarque essentielle pour la suite est qu'il possible de considérer comme "négligeable" la dépendance de X,Y,Z par rapport à $\dot{V}$,$\dot{\alpha}$,$\dot{\beta}$,p,q,r et (avec parfois quelques réserves) par rapport à δ_l,δ_m,δ_n; le sens à attribuer au mot "négligeable" est expliqué au paragraphe 4.2.1. L'expression détaillée des forces et des moments est établie à l'annexe A. Notons que la détermination de ces forces est de loin le point le plus délicat de la modélisation.

Quelques remarques sur ces équations:

– les équations (4.10)-(4.12) supposent une symétrie de masse de l'avion (ce qui est pratiquement toujours vérifié). Si ce n'est pas le cas, il faut utiliser les équations

un peu plus compliquées données à l'annexe A. Ceci ne réduit en aucune façon la généralité de cette étude.

- Les forces X,Y,Z et les moments L,M,N peuvent dépendre (linéairement) de $\dot{V}$,$\dot{\alpha}$,$\dot{\beta}$: les équations (4.4)-(4.6) sont donc éventuellement implicites; il est cependant très facile de les réécrire sous forme explicite si besoin est.
- Le système dégénère si $V \cos\beta \cos\gamma = 0$ (certaines équations deviennent des relations non différentielles). Si $V = 0$ ou $\cos\beta = 0$ (cf remarque suivante) sont des situations très improbables, $\cos\gamma = 0$ est plus fréquent (looping par exemple). Dans ce cas χ n'est plus défini: c'est la singularité habituelle d'un paramétrage par les angles d'Euler. En théorie, il faudrait donc décrire l'avion par deux cartes locales. Dans la suite, on supposera simplement qu'on se trouve loin de ces singularités.
- Dans les conditions habituelles de vol (i.e. en dehors des acrobaties aériennes), on demande que l'angle de dérapage β soit (approximativement) nul: la force latérale Y est alors nulle, et l'axe longitudinal de l'avion est colinéaire au vecteur vitesse. Il arrive parfois que l'on veuille voler à β constant non nul, par exemple à l'occasion d'une maneuvre d'atterrissage par fort vent de travers pour aligner l'avion dans l'axe de la piste (maneuvre dite de "décrabe"). Dans tous les cas, une valeur de β dépassant $\pm 15°$ peut être considerée comme "très grande".
  De même l'angle d'incidence α est généralement petit (par exemple environ 2 ou 3° pour le vol en palier). Pour les "très grandes valeurs" de α (environ $\pm 30°$), il se produit d'ailleurs un phénomène de "décrochage" (brusque perte de portance).

4.2 Commande non-linéaire

D'après l'introduction, le problème posé par le pilotage automatique est donc la génération et le suivi de trajectoires. On s'intéressera ici uniquement au problème de suivi, le problème de la génération relevant plutôt de l'optimisation sous contraintes. Notons cependant que les contraintes qui limitent le plus les manoeuvres concrètement possibles sont les accélérations maximales supportables par le pilote et les bornes sur les forces de propulsion (en particulier la poussée est toujours positive: un avion n'a pas de "freins"; la poussée maximale pour un chasseur est de l'ordre de 0.6 fois son poids).

4.2.1 Avion idéal

Rappelons une conclusion essentielle de la modélisation: les forces X,Y,Z dépendent de z,V,α,β,F et (linéairement) de $\dot{V}$,$\dot{\alpha}$,$\dot{\beta}$,p,q,r,δ_l,δ_m,δ_n: cependant, on peut supposer "négligeable" la dépendance par rapport à $\dot{V}$,$\dot{\alpha}$,$\dot{\beta}$,p,q,r et (avec quelques réserves) par rapport à δ_l,δ_m,δ_n. Pour cette raison, on appellera avion *idéal* l'avion décrit par les équations en considérant que X,Y,Z dépendent uniquement de z,V,α,β,F. Cet avion idéal servira à calculer des lois de bouclage linéarisantes, qui seront appliquées à l'avion réel: c'est un *modèle de commande*. L'idée est que l'avion idéal est plat alors que l'avion réel ne l'est en général pas).

On considère donc un système "réel"

$$\Sigma_\varepsilon : \quad \dot{x} = f(x,u) + \varepsilon g(x,u)$$

comme une perturbation d'un système "idéal"

$$\Sigma_0 : \quad \dot{x} = f(x,u),$$

et on espère, si ε est suffisamment petit, qu'une loi de bouclage transformant Σ_0 en

$$\tilde{\Sigma}_0 : \quad \dot{z} = \tilde{f}(z,v)$$

transforme Σ_ε en un système "proche"

$$\tilde{\Sigma}_\varepsilon : \quad \dot{z} = \tilde{f}(z,u) + \varepsilon\tilde{g}(z,v).$$

Autrement dit on demande que la commande soit *robuste*. On n'a pas cherché à établir un résultat général de robustesse pour les bouclages dynamiques linéarisants; dans le cas particulier qui nous intéresse, on pourra se ramener à un bouclage statique et utiliser des résultats existants. A ce stade de l'étude, on n'a pas non plus jugé nécessaire d'estimer la taille de la perturbation entre l'avion réel et l'avion idéal, en vue d'appliquer un résultat précis. Ceci représente un gros travail, et on s'est pour le moment contenté de vérifier la robustesse par des simulations.

Commander un système par une loi calculée pour un modèle idéal n'est bien sûr pas une idée neuve en automatique. Notons cependant que l'approximation faite ici porte sur la *structure* des équations et est valable en tout point de l'espace d'état, contrairement, par exemple, à l'approximation linéaire au premier ordre qui n'est valable que localement.

4.2.2 L'avion idéal est plat

Par hypothèse, les équations (4.1)-(4.9) de l'avion idéal ne dépendent pas de $\delta_l,\delta_m,\delta_n$. Elles peuvent donc être vues comme les équations d'un système d'état $(x,y,z,V,\alpha,\beta,\gamma,\chi,\mu)$ commandé par (p,q,r,F). Les équations (4.10)-(4.12) apparaissent alors comme un bouclage endogène, formé d'intégrateurs purs et d'un bouclage statique, sur ce système. De même, les équations des actionneurs constituent un bouclage endogène sur le système (4.1)-(4.12). Il suffit donc de montrer que le système (4.1)-(4.9) est plat, ce qui en fait démontré dans [9]. Une sortie plate (différente de celle de [9]) est donnée par (x,y,z,β). On peut très facilement vérifier que la structure à l'infini du système (4.1)-(4.9) muni de cette sortie est $\{1,2,3,3\}$, et le défaut est $9-(1+2+3+3)=0$. Pour le système (4.1)-(4.12) muni de la même sortie la structure à l'infini est $\{2,2,4,4\}$, et le défaut est $12-(2+2+4+4)=0$. Avec les actionneurs, la structure à l'infini est $\{2,3,5,5\}$, et le défaut est $15-(2+3+5+5)=0$. On procéderait de même avec des actioneurs décrits par des systèmes d'ordre plus élevé.

On va donner une autre démonstration de la platitude en construisant le bouclage dynamique linéarisant qui sera utilisé par la suite: en dérivant une fois (x,y,z), aucune commande n'apparait (ce sont les équations (4.1)-(4.3)). En dérivant une seconde fois, on trouve naturellement l'équation des forces, où une seule commande,F, est présente:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + \frac{1}{m} M_{R_0/R_a} . \begin{pmatrix} X(z,V,\alpha,\beta,F) \\ Y(z,V,\alpha,\beta,F) \\ Z(z,V,\alpha,\beta,F) \end{pmatrix},$$

où la matrice M_{R_0/R_a} (matrice de passage du trièdre aérodynamique au trièdre terrestre) ne dépend que de γ,χ,μ. En dérivant (x,y,z) une troisième fois, et β une fois, on obtient une expression de la forme:

$$\begin{pmatrix} x_{(3)} \\ y_{(3)} \\ z_{(3)} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = A(z,V,\alpha,\beta,\gamma,\chi,\mu,F) + B(z,V,\alpha,\beta,\gamma,\chi,\mu,F). \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ \tilde{F} \end{pmatrix},$$

où on a posé

$$\tilde{F} := \dot{F} \tag{4.16}$$

(c'est en fait un bouclage dynamique); B matrice carrée inversible. On a trois chaines d'intégrateurs non-linéaires de longueur 3 et une de longueur 1, où n'interviennent que les 10 variables d'état $(x,y,z,V,\alpha,\beta,\gamma,\chi,\mu,F)$, ce qui montre que le système (4.1)-(4.3),(4.16)), qui a pour commandes $u := (p,q,r,\tilde{F})^T$, est linéarisable par le bouclage statique

$$u = B^{-1}(v - A).$$

En dérivant encore une fois toutes les sorties, on obtient une expression de la forme:

$$\begin{pmatrix} x_{(4)} \\ y_{(4)} \\ z_{(4)} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = A_1(z,V,\alpha,\beta,\gamma,\chi,\mu,p,q,r,F,\tilde{F}) + B_1(z,V,\alpha,\beta,\gamma,\chi,\mu,p,q,r,F,\tilde{F}). \begin{pmatrix} \delta_l \\ \delta_m \\ \delta_n \\ \tilde{\tilde{F}} \end{pmatrix}$$

où on a posé

$$\tilde{\tilde{F}} := \dot{\tilde{F}}; \tag{4.17}$$

B_1 est une matrice carrée inversible. Comme prédédemment, on voit que le système (4.1)-(4.3),(4.16),(4.17)), qui a pour commandes $u := (\delta_l,\delta_m,\delta_n,\tilde{\tilde{F}})^T$, est linéarisable par le bouclage statique

$$u = B_1^{-1}(v - A_1)$$

(on a trois chaines de longueur 4 et une de longueur 2 pour un état de dimension $12+2 = 14$).

En réitérant ce processus, on prend facilement en compte les équations des actionneurs.

Terminons ce paragraphe par quelques commentaires: le bouclage proposé est, au moins pour le système commandé par (p,q,r,F), le plus "économique" en termes de dimension; en effet le système n'est pas statiquement linéarisable (cf [9]), mais le devient après ajout d'un seul intégrateur.

Notons aussi que le choix de (x,y,z,β) comme sortie permet d'étendre partout où le bouclage est défini une structure de commande qui est très souvent utilisé autour du vol en palier symétrique. En plaçant les pôles du système linéarisé par bouclage au même endroit que ceux du linéarisé tangent autour de cette trajectoire, la loi de commande linéaire classique apparait alors comme une approximation au premier ordre de la loi non-linéaire.

On n'a rien dit sur la platitude de l'avion réel. Il est possible de montrer par des calculs fastidieux que l'avion réel n'est en général pas plat, sauf peut être si les coefficients aérodynamiques vérifient des relations très particulières; on n'a pas cherché à approfondir cette voie. L'approche suivie, à savoir travailler sur l'avion idéal, est de toute façon intéressante, car elle conduit à des lois de bouclage assez simples.

4.2.3 Problèmes posés par la mise en oeuvre pratique

Les bouclages linéarisants calculés ci-dessus utilisent les dérivées partielles des forces X,Y,Z: les matrices A et B utilisent les dérivées jusqu'à l'ordre 1, les matrices A_1 et B_1 jusqu'à l'ordre 2, etc. Or les coefficients aérodynamiques intervenant dans ces forces sont déterminés expérimentalement et varient rapidement en régime transonique, et l'évaluation de leurs dérivées peut être délicate, et ce d'autant plus que l'ordre de dérivation est élevé. Si on se limite au régime subsonique, où on peut approximer ces coefficients sur tout le domaine de vol par des polynômes de faible degré, ce n'est bien sûr pas un problème.

Par ailleurs, la complexité de la loi de bouclage augmente rapidement avec le nombre d'états considérés. Ceci peut entrainer des volumes de calcul trop importants en temps réel (les ordinateurs embarqués sur un avion ont en effet de nombreuses tâches à effectuer en dehors du pilotage automatique).

Il est donc intéressant de distinguer des échelles de temps dans le système et d'utiliser des techniques de perturbations singulières (cf [31]), ce qui est une démarche très classique en automatique. Notons cependant que s'il est facile de voir qu'un système linéaire a plusieurs échelles de temps, c'est plus difficile en non-linéaire. On s'est pour l'instant contenté de vérifier en simulation la validité du découpage en échelles de temps.

Pour un avion de transport, qui est lourd et auquel on ne demande en général pas de manoeuvres serrées, on peut considérer que les actionneurs sont largement plus rapides que le reste du modèle. Si l'avion est subsonique, on peut utiliser sans problème le bouclage sur le système (4.1)-(4.12), à condition que le calculateur soit suffisamment puissant.

Pour un avion de chasse, auquel cette étude est plutôt destinée, le problème est plus délicat: l'avion est bien sûr supersonique et on cherche à exploiter au maximum ses capacités dans toutes les phases de vol. On a distingué trois échelles de temps: une partie "lente" (équations (4.1)-(4.9)), une partie "rapide" (équations (4.10)-(4.12)), et une partie "très rapide" (équations (4.13)-(4.15)). On a donc supposé le système sous la forme

$$\begin{array}{rcl} \dot{X} & = & f(X,\Omega,F) \\ \varepsilon\dot{\Omega} & = & g(X,\Omega,\delta,F) \\ \varepsilon^2\dot{\delta} & = & -a\delta+\tilde{\delta}, \end{array}$$

avec le paramètre ε "petit"; on a posé $X := (x,y,z,V,\alpha,\beta,\gamma,\chi,\mu)$, $\Omega := (p,q,r)$, $\delta := (\delta_l,\delta_m,\delta_n)$, $\tilde{\delta} := (\tilde{\delta}_l,\tilde{\delta}_m,\tilde{\delta}_n)$ et $a := \mathrm{diag}(a_l,a_m,a_n)$.

Pour pouvoir utiliser des techniques de perturbations singulières en faisant tendre ε vers 0, il faut que le rang de $\frac{\partial g}{\partial \Omega}$ soit égal à 3. Or le déterminant de cette matrice est proche de 0 pour l'avion "nu" (ceci est du au fait que les avions de chasse sont à la limite de l'instabilité en boucle ouverte, de façon à être très maniables); ce n'est cependant pas un problème, car il est possible de modifier ce déterminant par un premier bouclage "petits

gains" sur δ et de mettre ainsi ces équations sous la forme standard des perturbations singulières. Notons d'ailleurs que ce premier bouclage est systématiquement fourni avec l'avion et porte le nom de "commandes de vol": l'avion est sans cela impilotable par un pilote humain. La raison pour laquelle ce bouclage est à "petits gains" est que les gouvernes sont très efficaces (leur action est proportionnelle au carré de la vitesse).

On adopte alors la démarche suivante pour construire une loi de commande: la partie très rapide est stable et on la considère infiniment rapide devant le reste du système; typiquement les valeurs de a_l,a_m,a_n dans les équations (4.13)-(4.15) sont de l'ordre de 25. On linéarise par bouclage la partie rapide en considérant δ comme la commande, et on place les trois pôles de ce système linéaire à -5; d'après la discussion précédente, ce bouclage est bien conditionné (empruntant la terminologie, on l'appellera d'ailleurs "commandes de vol"). Enfin, on linéarise la partie lente en considérant (Ω,F) comme la commande. Les calculs détaillés sont présentés au paragraphe suivant.

Notons que le ε choisi n'est pas "très petit" ($\varepsilon = 1/5$). Ce choix est un compromis entre la séparation des échelles de temps et la rapidité de la reéponse en boucle fermée (pour pouvoir suivre des trajectoires "serrées").

4.2.4 Expression détaillée du bouclage

On a été effectué tous les calculs, puis généré automatiquement les routines Fortran correspondantes à l'aide du logiciel de calcul formel Mathematica. Pour la partie lente, ces calculs sont assez lourds et ont demandé un travail non négligeable pour être mis sous une forme simple.

Bouclage linéarisant la partie lente

On peut factoriser le bouclage sous la forme

$$u = T_1 T_2 \tilde{B}^{-1}(Mv - \tilde{A}), \tag{4.18}$$

avec

$$T_1 := \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T_2 := \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} := \begin{pmatrix} 0 & X_\alpha & X_\beta & X_F \\ -Z & Y_\alpha & Y_\beta & Y_F \\ Y & Z_\alpha & Z_\beta & Z_F \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M := \begin{pmatrix} \cos\chi\cos\gamma & \sin\chi\cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \cos\chi\sin\gamma\sin\mu - \sin\chi\cos\mu & \sin\chi\sin\gamma\sin\mu + \cos\chi\cos\mu & \cos\gamma\sin\mu & 0 \\ \cos\chi\sin\gamma\cos\mu + \sin\chi\sin\mu & \sin\chi\sin\gamma\cos\mu - \cos\chi\sin\mu & \cos\gamma\cos\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} \dot{V}X_V + \dot{\alpha}|_{\vec{\Omega}=0}\,(X_\alpha - Z\cos\beta) + \dot{\beta}|_{\vec{\Omega}=0}\,(X_\beta - Y) - VX_z\sin\gamma \\ \dot{V}Y_V + \dot{\alpha}|_{\vec{\Omega}=0}\,(Y_\alpha + Z\sin\beta) + \dot{\beta}|_{\vec{\Omega}=0}\,(X + Y_\beta) - VY_z\sin\gamma \\ \dot{V}Z_V + \dot{\alpha}|_{\vec{\Omega}=0}\,(Z_\alpha + X\cos\beta - Y\sin\beta) + \dot{\beta}|_{\vec{\Omega}=0}\,Z_\beta - VZ_z\sin\gamma \\ \dot{\beta}|_{\vec{\Omega}=0} \end{pmatrix},$$

où on a posé $X_z := \dfrac{\partial X}{\partial z}(z,V,\alpha,\beta,F)$, etc, et

$$\begin{array}{rcl} \dot{V} & := & -g\sin\gamma + \frac{1}{m}X(z,V,\alpha,\beta,F) \\ \dot{\alpha}|_{\vec{\Omega}=0} & := & \frac{1}{mV\cos\beta}(mg\cos\gamma\cos\mu + Z(z,V,\alpha,\beta,F)) \\ \dot{\beta}|_{\vec{\Omega}=0} & := & \frac{1}{mV}(mg\cos\gamma\sin\mu + Y(z,V,\alpha,\beta,F)). \end{array}$$

Notons que M est formée à partir de la matrice de passage du trièdre terrestre au trièdre aérodynamique, et que T_1T_2 correspond à peu près à la matrice de passage du trièdre aérodynamique au trièdre avion. Ceci permet de donner une interprétation physique de la factorisation (4.18) assez parlante pour les ingénieurs aéronauticiens, qui aiment bien se représenter les phénomènes comme se produisant dans différents repères: les trois premières composantes de v correpondent aux dérivées troisièmes de la position dans le trièdre terrestre; la matrice M les envoie dans le trièdre aérodynamiques; la matrice B, qui "vit" dans le trièdre (car (X,Y,Z) est la projection des forces dans ce trièdre), "redresse" les forces; la matrice T_1T_2 renvoie alors le résultat dans le trièdre avion, ce qui donne l'expression de p,q,r (rappelons que (p,q,r) est la projection du vecteur de rotation dans le trièdre avion).

Le déterminant de $\tilde{B}$ est donné par

$$\det\tilde{B} := (X_FYY_\alpha - X_\alpha YY_F + X_FZZ_\alpha - X_\alpha ZZ_F).$$

Le bouclage explose quand ce déterminant est nul. On n'a pas encore réussi à trouver une interprétation physique de cette condition, qui porte uniquement sur les forces (et ne dépend donc que de z,V,α,β,F). Une rapide étude montre que ce déterminant ne s'annule pas dans des conditions normales de vol symétrique, i.e. $\beta(t) = 0$ (les quelques calculs faits ici reposent sur l'expression détaillée des forces X,Y,Z; cf annexe A): on a en effet $Y = Y_F = Y_\alpha = 0$ et

$$\begin{array}{rcl} \det\tilde{B} & = & Z(X_FZ_\alpha - X_\alpha Z_F) \\ & = & -Z(\frac{1}{2}\rho SV^2(\cos(\alpha+\varepsilon)\frac{\partial C_z}{\partial\alpha} - \sin(\alpha+\varepsilon)\frac{\partial C_x}{\partial\alpha}) + F). \end{array}$$

Sauf cas très particuliers, on a toujours $Z \neq 0$ ($Z = 0$ signifie que la composante verticale de la pousée compense la portance, et donc la seule force exercée verticalement est le poids). Par ailleurs il est exceptionnel qu'α dépasse $\pm 30°$ (en vol en palier α vaut environ 2 ou 3°), et ε est petit On a alors

$$\det\tilde{B} \approx -Z(\frac{1}{2}\rho SV^2\frac{\partial C_z}{\partial\alpha} + F),$$

et le terme entre parenthèses est toujours largement positif.

Quand β est petit, ces conclusions restent valables. La situation est moins claire quand β grandit; on n'a cependant pas rencontré de problèmes particuliers en simulation.

Le difféomorphisme de $\mathbb{R}^{10}$ envoyant le système dans des coordonnées linéaires a pour expression:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ V \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \chi \\ \mu \\ F \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ V\cos\gamma\cos\xi \\ V\cos\gamma\sin\xi \\ -V\sin\gamma \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} + M_{R_0/R_a}.\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \\ \beta \end{pmatrix},$$

où M_{R_0/R_a} ne dépend que de γ,ξ,μ (c'est la matrice de passage du trièdre aérodynamique au trièdre terrestre). Son jacobien est égal à

$$V^2\cos\gamma\det\tilde{B}.$$

Notons que $V=0$ et $\cos\gamma=0$ sont également des singularités de paramétrage du modèle.

Bouclage linéarisant la partie rapide ("commandes de vol")

En posant $\Omega := (p,q,r)^T$, $\delta := (\delta_l,\delta_m,\delta_n)^T$ et en notant I la matrice d'inertie, les équations (4.10)-(4.12) s'écrivent matriciellement (cf annexe A):

$$I\dot{\Omega} + \Omega\wedge I\Omega = C + D\delta,$$

avec $C + D\delta := (L,M,N)^T$ (rappelons que les moments L,M,N sont linéaires en les gouvernes; C er D dépendent de z,V,α,β,γ,μ,p,q,r,F. Le bouclage transformant ces équations en

$$\dot{\Omega} = -\Lambda\Omega + \tilde{\delta}$$

est donné par

$$\delta := G^{-1}(\Omega\wedge I\Omega - F - I^{-1}\Lambda\Omega + I^{-1}\tilde{\delta}),$$

où on a posé $\Lambda := \mathrm{diag}(\lambda_l,\lambda_m,\lambda_n)$ et $\tilde{\delta} := (\tilde{\delta}_l,\tilde{\delta}_m,\tilde{\delta}_n)^T$.

Bouclage sur le système linéarisé lent

Le système linéarisé par bouclage est composé de 3 chaines de 3 integrateurs purs et d'une chaine de 1. On a placé les pôles respectivement en $(-1,-1/2,-1/4)$ et -1, de manière à respecter les échelles de temps en boucle fermée (rappelons que la partie rapide en boucle fermée a ses 3 pôles en -5 et que la partie très rapide a ses 3 pôles en -25). En fait le choix des gains réclamerait une étude beaucoup plus poussée, d'un côté par rapport à

des objectifs de performances, et de l'autre pour vérifier que la commande non linéaire ne "mélange" pas les échelles de temps; on s'est simplement contenté ici de prendre des valeurs raisonnables pour le vol en palier, et de vérifier en simulation que tout se passait bien.

4.3 Simulations numériques

Les simulations ont été effectuées avec le logiciel Matlab/Simulink, en utilisant un algorithme implicite de type Adams-Gear. La figure 4.3 présente le schéma-bloc Simulink réalisé. Chaque bloc contient une routine en langage Matlab, avec un noyau en Fortran pour les plus compliqués.

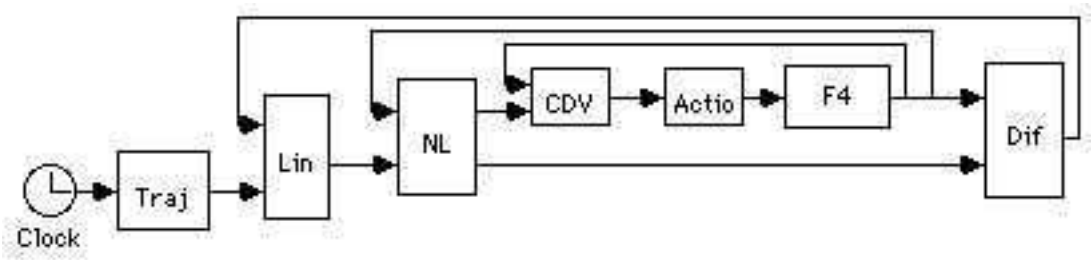


FIG. 4.1 – Schéma-bloc Simulink

On reconnait facilements les différents éléments: "F4" contient les équations de l'avion et "Actio" celles des actionneurs; la loi de commande non-linéaire est composée des commandes de vol "CDV", du bouclage dynamique linéarisant "NL" et du changement de coordonnées "Dif"; "Lin" place les pôles du système lent linéarisé et "Traj" génére les trajectoires de référence.

Expérience: suivi d'une courbe gauche

On veut suivre pendant une minute la trajectoire de référence donnée par (cf figure 4.3):

$$\begin{aligned} x_{ref}(t) &= 200\ t \\ y_{ref}(t) &= 2.375\ t^2 \\ z_{ref}(t) &= -11000 + 1.2\ t^2 \\ \beta_{ref}(t) &= 0. \end{aligned}$$

A $t = 0$, l'avion est en vol en palier symétrique à 11000 mètres d'altitude à la vitesse de 200 m/s le long de l'axe x:

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ z_0 = -11000,\ \beta_0 = 0,\ \dot{x}_0 = 200,\ \dot{y}_0 = 200,\ \dot{z}_0 = 0,$$

et les accélerations sont nulles.

Malgré son apparente simplicité, cette trajectoire comporte des difficultés très sérieuses pour un pilote automatique: ce n'est pas une courbe plane; l'altitude et la vitesse varient

vite et beaucoup (on perd plus de 4300 mètres d'altitude et on passe de 200 à 380 m/s en une minute); de plus, il faut franchir le mur du son (on passe de Mach 0.65 à Mach 1.2). La variation des paramètres atmosphériques et aérodynamiques le long de la trajectoire est très importante. En bref, cette courbe est très loin d'être une trajectoire pseudo-permanente.

Ce genre de courbe gauche peut être utile pour approcher un objectif, tout en étant moins vulnérable aux défenses anti-aériennes. On s'est placé ici a une altitude élevée pour pouvoir passer en régime supersonique avec des valeurs raisonnables de la poussée.

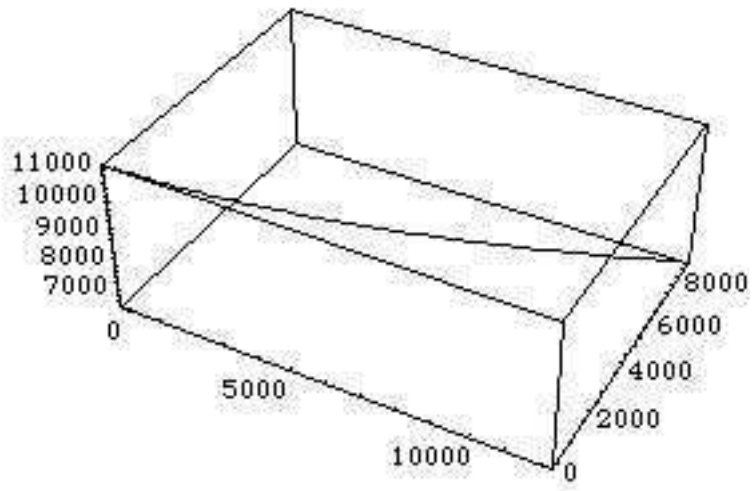
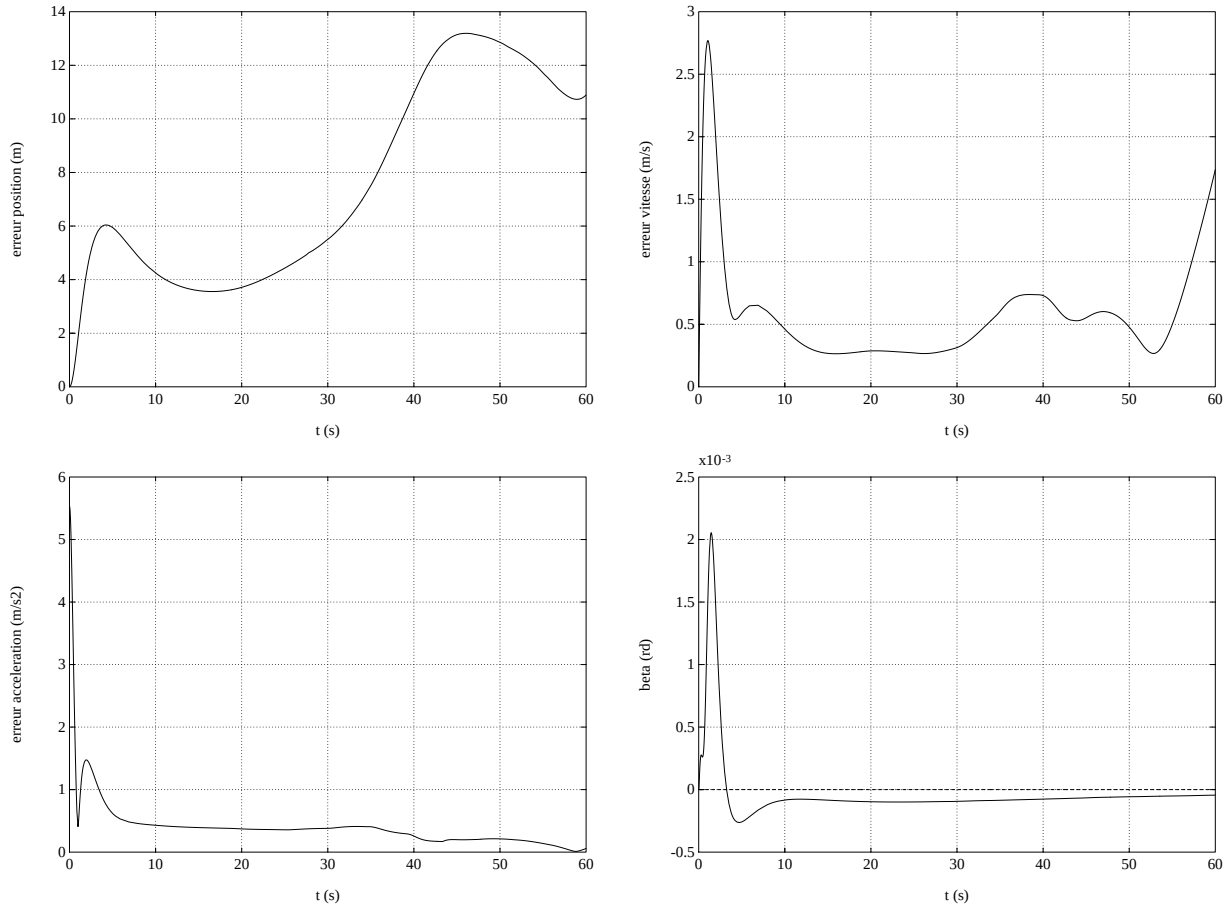
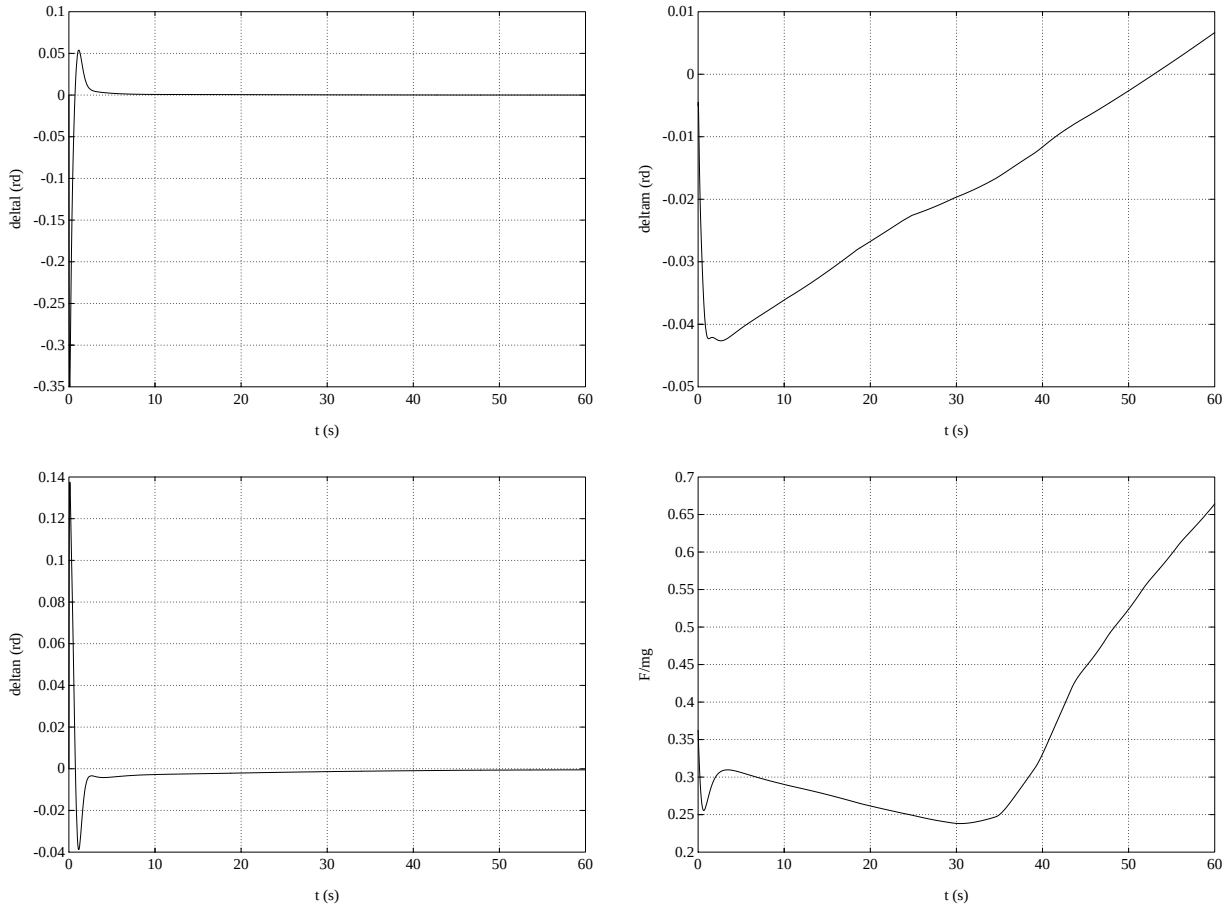


Fig. 4.2 – Courbe gauche

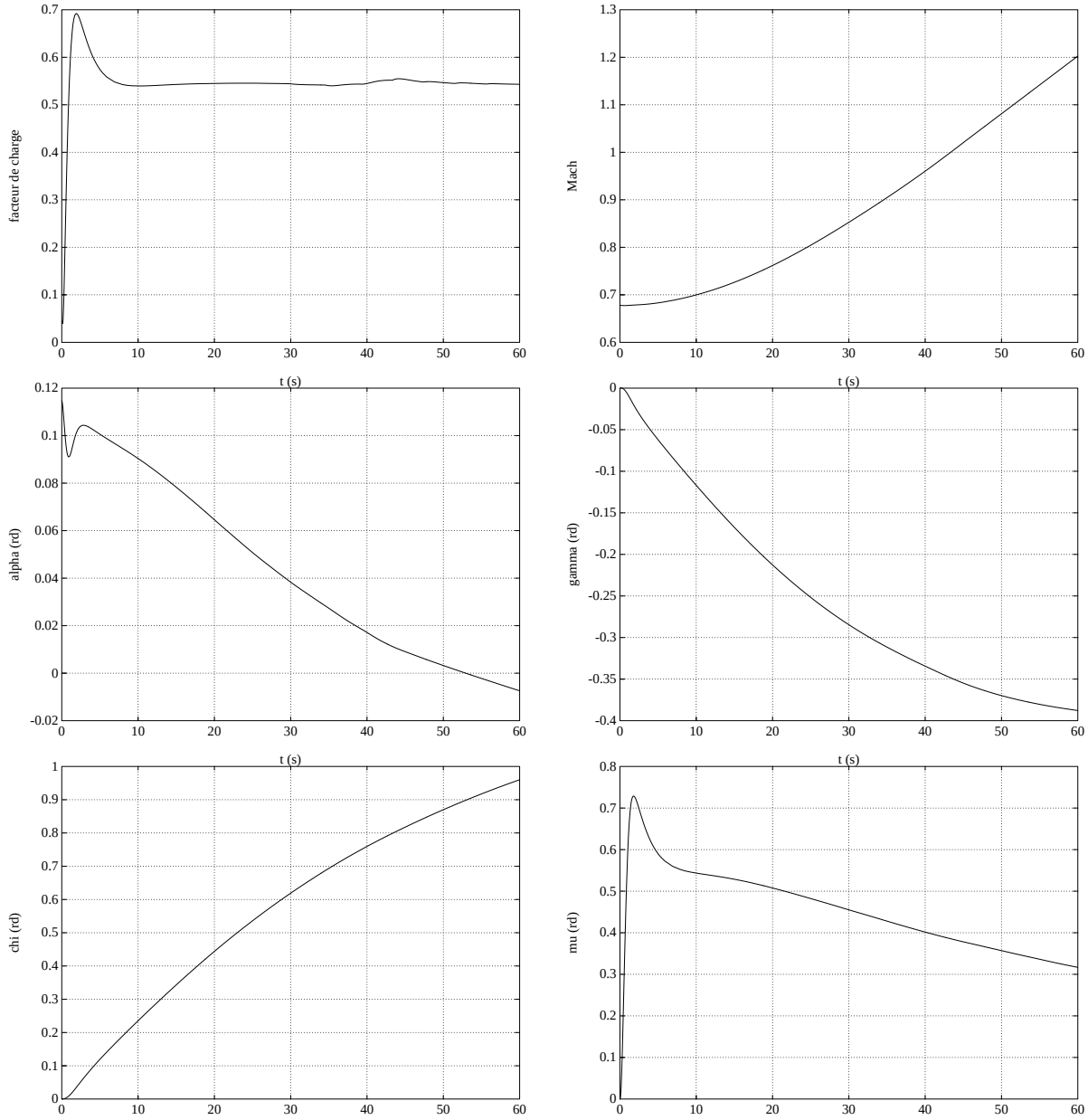


Les trois premiers graphiques donnent la norme de l'erreur absolue en position, vitesse et accélérations par rapport à la trajectoire de référence. Le quatrième montre l'évolution de β. On peut considérer que les résultats sont très bons (une erreur de position de 12 mètres à 350 m/s est insignifiante). Notons la discontinuité d'accélération au départ (le contact entre le vol en palier et la référence est seulement d'ordre 1), qui induit des perturbations sur les autres variables.



Ces quatre graphiques montrent l'évolution des gouvernes δ_l,δ_m,δ_n et de la poussée normalisée (i.e. F/mg). La discontinuité initiale sur les gouvernes est importante.

La poussée n'est plus tout à fait réaliste à la fin de la simulation (de manière générale la pousée maximum d'un chasseur est de l'ordre de 0.6 fois son poids).



Les deux premiers graphiques réprésentent le facteur de charge et le nombre de Mach. Le facteur de charge est la norme de l'accélération rapportée à l'intensité de la pesanteur; c'est à peu de choses près "le nombre de g" ressenti par le pilote. Notons que la trajectoire est à accélération constante. On franchit le mur du son sans problème majeur. L'erreur de position se met à croitre rapidement en régime transonique (i.e. entre Macn 0.8 et Mach 1.2) avec un pic au passage du mur du son, c'est à dire à l'endroit où les dérivées des coefficients aérodynamiques sont connues avec le moins de précision.

Les quatre graphiques suivants (respectivement l'incidence α, la pente γ, l'azimuth χ et le roulis μ) illustrent sous un autre aspect la "complexité" de la trajectoire pour un pilote automatique classique: tous les angles varient en même temps bien au delà du domaine d'approximation linéaire, et de manière couplée.

Annexe A

Modélisation d'un avion

Introduction

Ce chapitre détaille l'ensemble des étapes permettant d'obtenir un modèle d'avion en vue de sa commande par des méthodes non-linéaires. Bien que le sujet soit très classique, il ne semble pas si courant de trouver dans la littérature aéronautique un modèle non-linéaire complet adapté aux besoins de l'automatique.

La section A.1 récapitule et commente les hypothèses de modélisation habituellement adoptées. La section A.2 est consacrée à la mécanique du vol, et la section A.3 décrit le modèle standard de l'atmosphère. On s'est aidé principalement de [45, 44, 14]. Les données numériques du F4, en particulier les tableaux des valeurs des coefficients aérodynamiques, proviennent de [44, chapter 5].

A.1 Hypothèses de modélisation

Un avion est un système mécanique très complexe. On peut cependant en faire une modélisation assez simple qui rend bien compte de ses mouvements. On présente ici les hypothèses couramment utilisées pour modéliser un avion en vol (on ne s'intéresse pas aux interactions avec le sol pendant le décollage ou l'atterrissage), et on discute brièvement de leur validité.

- Un avion est un corps rigide à six degrés de liberté comportant un plan de symétrie.
- La masse et la matrice d'inertie de l'avion sont constantes.
- Les écoulements aérodynamiques sont quasistationnaires.
- L'environnement dans lequel évolue l'avion vérifie les conditions atmosphériques standard et est au repos par rapport à la terre.
- La courbure de la terre est négligée. Le référentiel lié à la terre est galiléen.

Un avion est évidemment composé de plusieurs corps articulés (ailerons, gouvernail,...), mais les éléments mobiles par rapport au corps de l'avion sont comparativement de masse très faible. L'hypothèse de rigidité n'est pas totalement verifiée (déformations élastiques des ailes, et dans certaines configurations, légère flexion longitudinale du fuselage), ce qui peut être source de problèmes pour la commande.

Les variations de masse et d'inertie dues à la consommation de carburant sont loins d'être négligeables au cours d'un vol de plusieurs heures, mais sont lentes vis-à-vis des problèmes considérés de suivi de trajectoire. Pour les avions militaires, des variations rapides peuvent également survenir (bombardement, parachutage,...). Notons qu'en général la symétrie géométrique s'accompagne d'une symétrie massique (un avion comporte ainsi plusieurs réservoirs de carburant, qui sont vidés de manière à préserver cette répartition).

Les hypothèses aérodynamiques et atmosphériques signifient qu'il n'y a ni vent ni turbulences (on peut néanmoins incorporer facilement un vent constant en direction et intensité), et que les conditions climatiques sont "normales": on utilise alors le modèle dit standard de l'atmosphère. Signalons qu'à très faible altitude, des phénomènes turbulents compliqués et assez mal compris peuvent survenir.

A l'echelle des trajectoires que doit suivre un pilote automatique, la courbure de la terre est sans importance. Sur de longues distances, où l'effet de la courbure est sensible, on ne s'intéresse pas en général à l'orientation de l'avion, mais seulement à la position de son centre d'inertie.

A.2 Mécanique du vol

On veut écrire les équations du mouvement sous forme d'état. Avec les hypothèses de modélisation retenues, il suffit d'appliquer le principe fondamental de la dynamique à un solide rigide de répartition massique constante et sans liaisons. Il y aura donc 12 équations différentielles du premier ordre (6 de translation et 6 de rotation) données par

$$\begin{aligned} m\frac{d^{R_0}\vec{V}}{dt} &= \vec{\mathcal{F}}_e \\ \frac{d^{R_0}\vec{\sigma}}{dt} &= \vec{\mathcal{M}}_e, \end{aligned}$$

avec m masse du solide, $\vec{V}$ vitesse de son centre d'inertie G, $\vec{\sigma}$ moment cinétique du solide en G, $\vec{\mathcal{F}}_e$ et $\vec{\mathcal{M}}_e$ résultante et moment en G des forces extérieures agissant sur le solide, et R_0 trièdre fixe par rapport à la terre. La notation $\frac{d^T\vec{U}}{dt}$ sera partout utilisée pour désigner la dérivée temporelle d'un vecteur $\vec{U}$ par rapport à un trièdre de référence T.

On a donc besoin de 12 variables d'état. En mécanique du vol, on utilise classiquement trois trièdres de référence: le trièdre *terrestre* R_0, lié à la terre, le trièdre *avion* R, lié à l'avion et le trièdre *aérodynamique* R_a déterminé par l'avion et sa trajectoire (ces trièdres sont détaillés à la section suivante). Plusieurs choix naturels des variables d'état sont couramment utilisés, dus à la possibilité d'écrire les grandeurs dans les divers trièdres de référence. On présente ici les choix les plus usités:

- 3 variables pour la position du centre d'inertie G: (x,y,z) dites coordonnées géographiques (coordonnées de G dans le trièdre terrestre)
- 3 variables pour la vitesse $\vec{V}$ de G:
  - soit (u,v,w), coordonnées de $\vec{V}$ dans le trièdre avion
  - soit (V,α,β), module de la vitesse, angles de dérapage et d'incidence
- 3 variables d'orientation du type angles d'Euler:
  - soit (Φ,Θ,Ψ), orientation du trièdre avion par rapport au trièdre terrestre
  - soit (χ,γ,μ), orientation du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre terrestre
- 3 variables pour le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}_{R/R_0}$ de l'avion par rapport à la terre:
  - soit (p,q,r), coordonnées de $\vec{\Omega}_{R/R_0}$ dans le trièdre avion
  - soit (p_a,q_a,r_a), coordonnées de $\vec{\Omega}_{R/R_0}$ dans le trièdre aérodynamique. Ces variables sont en général des intermédiaires de calcul et sont rarement utilisées comme variables d'état.

Dans la suite, on utilisera systématiquement les variables $(x,y,z,V,\alpha,\beta,\gamma,\chi,\mu,p,q,r)$, qui s'avèrent bien adaptées aux calculs de bouclages non linéaires. On notera cependant que ce choix n'est pas très courant dans la littérature sur la mécanique du vol.

On dispose par ailleurs de 4 commandes: la poussée F des propulseurs et la position $(\delta_l,\delta_m,\delta_n)$ des gouvernes de gauchissement, profondeur et direction. La façon dont ces commandes interviennent dans l'expression des forces et des moments est décrite dans les sections suivantes.

A.2.1 Trièdres de références

On utilise trois trièdres (orthonormés directs) de référence:

- le trièdre *terrestre* $R_0 := (O,\vec{\imath}_0,\vec{\jmath}_0,\vec{k}_0)$, fixe par rapport à la terre (et donc supposé galiléen). L'origine O est situé au niveau de la mer, et l'axe $\vec{k}_0$ est vertical et pointé vers le bas.
- le trièdre *avion* $R := (G,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, fixe par rapport à l'avion. L'origine est le centre d'inertie. L'axe $\vec{\imath}$ est dans le plan de symétrie de l'avion et pointé vers l'avant. L'axe $\vec{k}$ est également dans le plan de symétrie de l'avion et orienté vers le dessous.
- le trièdre *aérodynamique* $R_a := (G,\vec{\imath}_a,\vec{\jmath}_a,\vec{k}_a)$. L'origine est le centre d'inertie. L'axe $\vec{\imath}_a$ est colinéaire au vecteur vitesse $\vec{V}$ de G. L'axe $\vec{k}_a$ est dans le plan de symétrie de l'avion et orienté vers le dessous. La raison d'être de ce trièdre "hybride" est que les forces aérodynamiques exercées sur l'avion s'y expriment facilement (elles sont déterminées expérimentalement dans ce trièdre).

Pour projeter les équations de la mécanique, on aura besoin de l'expression des matrices de passage entre les trièdres et des vecteurs de rotation. Ces calculs sont regroupés dans les deux paragraphes suivants.

Matrices de passage

On notera $M_{S/T}$ la matrice de passage d'un trièdre T à un trièdre S. L'expression dans S d'un vecteur $\vec{U}$ exprimé dans T s'obtient alors par

$$[\vec{U}]_S = M_{S/T}[\vec{U}]_T.$$

Rappelons que si R,S,T sont trois trièdres, on a $M_{R/S}M_{S/T} = M_{R/T}$, et en particulier $M_{T/S} = M_{S/T}^{-1}$.

– Trièdre avion → trièdre terretre:

$$M_{R_0/R} = \begin{pmatrix} \cos\Psi\cos\Theta & \cos\Psi\sin\Theta\sin\Phi - \sin\Psi\cos\Phi & \cos\Psi\sin\Theta\cos\Phi + \sin\Psi\sin\Phi \\ \sin\Psi\cos\Theta & \sin\Psi\sin\Theta\sin\Phi + \cos\Psi\cos\Phi & \sin\Psi\sin\Theta\cos\Phi - \cos\Psi\sin\Phi \\ -\sin\Theta & \cos\Theta\sin\Phi & \cos\Theta\cos\Phi \end{pmatrix}$$

– Trièdre aérodynamique → trièdre avion:

$$M_{R/R_a} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

– Trièdre aérodynamique → trièdre terretre:

$$M_{R_0/R_a} = \begin{pmatrix} \cos\chi\cos\gamma & \cos\chi\sin\gamma\sin\mu - \sin\chi\cos\mu & \cos\chi\sin\gamma\cos\mu + \sin\chi\sin\mu \\ \sin\chi\cos\gamma & \sin\chi\sin\gamma\sin\mu + \cos\chi\cos\mu & \sin\chi\sin\gamma\cos\mu - \cos\chi\sin\mu \\ -\sin\gamma & \cos\gamma\sin\mu & \cos\gamma\cos\mu \end{pmatrix}$$

On notera que ces matrices sont des produits de matrices de rotation, et donc que leur inverse est égale à leur transposée.

Vecteurs de rotation

Soient S et T deux trièdres. On note $\vec{\Omega}_{T/S}$ le vecteur instantané de rotation de T par rapport à S. En appliquant la relation cinématique

$$\forall\ \vec{U} \text{ fixe dans } T, \quad \frac{d^S\vec{U}}{dt} = \vec{\Omega}_{T/S} \wedge \vec{U}$$

aux trois vecteurs définissant le trièdre T, ce qui donne

$$\frac{d^S}{dt}M_{S/T} = [\vec{\Omega}_{T/S}]_S \wedge M_{S/T}.$$

On en tire l'expression de $\vec{\Omega}_{T/S}$ dans S. On a ainsi:

$$[\vec{\Omega}_{R_a/R}]_{R_a} = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}\sin\beta \\ -\dot{\alpha}\cos\beta \\ \dot{\beta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_a \\ q_a \\ r_a \end{pmatrix} := [\vec{\Omega}_{R_a/R_0}]_{R_a} = \begin{pmatrix} -\dot{\chi}\sin\gamma + \dot{\mu} \\ \dot{\chi}\cos\gamma\sin\mu + \dot{\gamma}\cos\mu \\ \dot{\chi}\cos\gamma\cos\mu - \dot{\gamma}\sin\mu \end{pmatrix}$$

On aura beson d'une autre expression de p_a,q_a,r_a, calculée à partir de

$$\vec{\Omega}_{R_a/R_0} = \vec{\Omega}_{R_a/R} + \vec{\Omega}_{R/R_0}$$

qu'on projette dans R_a:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_a \\ q_a \\ r_a \end{pmatrix} &= [\vec{\Omega}_{R_a/R}]_{R_a} + M_{R_a/R}[\vec{\Omega}_{R/R_0}]_R \\ &= \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}\sin\beta + p\cos\alpha\cos\beta + q\sin\beta + r\sin\alpha\cos\beta \\ -\dot{\alpha}\cos\beta - p\cos\alpha\sin\beta + q\cos\beta - r\sin\alpha\sin\beta \\ \dot{\beta} - p\sin\alpha + r\cos\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où on a posé

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} := [\vec{\Omega}_{R/R_0}]_R.$$

En utilisant ces deux expressions de p_a,q_a,r_a, on tire alors facilement $\dot{\gamma}$,$\dot{\chi}$,$\dot{\mu}$ en fonction de $\dot{\alpha}$,$\dot{\beta}$ et α,β,γ,μ,p,q,r.

A.2.2 Forces et moments

Les forces agissant sur l'avion sont de trois sortes: poids, forces de propulsion et forces aérodynamiques. Leur résultante $\vec{\mathcal{F}}_e$ se décompose donc en

- le poids $m\vec{g}$,
- la résultante des forces de propulsion $\vec{F}$,
- la résultante des forces aérodynamiques $\vec{F}_a$.

Le poids s'écrit immédiatement dans le trièdre terrestre R_0:

$$[m\vec{g}]_{R_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{F}$ des forces de propulsion a pour expression dans le trièdre avion R:

$$[\vec{F}]_R = \begin{pmatrix} F\cos\varepsilon \\ 0 \\ -F\sin\varepsilon \end{pmatrix},$$

où ε est un angle constant (voisin de 0) traduisant le fait que le propulseur n'est pas tout à fait parallèle à l'axe longitudinal de l'avion. Exceptionnellement, les forces de propulsion peuvent aussi être decalées par rapport au plan de symétrie de l'avion, induisant une

composante latérale non nulle (par exemple en cas de panne d'un propulseur sur un avion multipropulseurs).

Les forces aérodynamiques représentent le point le plus délicat dans la modélisation d'un avion. Elles sont déterminées expérimentalement en soufflerie dans le repère R_a sous la forme:

$$[\vec{F}_a]_{R_a} = \frac{1}{2}\rho S V^2 \begin{pmatrix} -C_x \\ C_y \\ -C_z \end{pmatrix},$$

où ρ est la masse volumique de l'air, S est une constante (surface de référence liée à la surface de l'avion) et C_x, C_y et C_z sont des coefficients adimensionnels appelés coefficients de trainée, de force latérale et de portance. Ces coefficients très importants sont étudiés au paragraphe suivant. L'expression de la masse volumique de l'air ρ est détaillée à la section A.3.

Dans la suite, on posera:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} := [\vec{F}_a]_{R_a} + [\vec{F}]_{R_a} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\rho S V^2 C_x + F\cos(\alpha+\varepsilon)\cos\beta \\ +\frac{1}{2}\rho S V^2 C_y + F\cos(\alpha+\varepsilon)\sin\beta \\ -\frac{1}{2}\rho S V^2 C_z - F\sin(\alpha+\varepsilon) \end{pmatrix},$$

où on a utilisé la matrice $M_{R_a/R}$ pour exprimer $\vec{F}$ dans le trièdre aérodynamique.

Passons maintenant à l'étude du vecteur $\vec{\mathcal{M}}_e$ des moments en G. La contribution du poids est évidemment nulle. Celle des forces de propulsion s'écrit

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}} = \vec{GP} \wedge \vec{F},$$

où P est le point d'application de ces forces qui est fixe par rapport à l'avion). On pose $(x_F, y_F, z_F) := [\vec{GP}]_R$. Souvent P est proche de G, et le moment des forces de propulsion est négligeable.

Reste le moment des forces aérodynamiques, qu'on exprime dans le trièdre avion à partir des données expérimentales en soufflerie sous la forme:

$$[\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_a}]_R = \frac{1}{2}\rho S V^2 \begin{pmatrix} aC_l \\ bC_m \\ aC_n \end{pmatrix}.$$

C_l, C_m et C_n sont également des coefficients adimensionnels appelés coefficients de roulis, tangage et lacet; a et b sont des constantes (longueurs de référence liées au foyer aérodynamique et à l'envergure de l'avion).

On posera dans la suite:

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} := [\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_a}]_R + [\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}}]_R.$$

A.2.3 Coefficients aérodynamiques

Classiquement, on considère que les coefficients C_x,C_y,C_z,C_l,C_m,C_n dépendent de la vitesse de translation (i.e. V,α,β), de l'accélération ($\dot{V}$,$\dot{\alpha}$,$\dot{\beta}$), de la vitesse de rotation (p,q,r), de la position des gouvernes (δ_l,δ_m,δ_n), et du nombre de Mach. On suppose de plus qu'ils sont linéaires en ($\dot{V}$,$\dot{\alpha}$,$\dot{\beta}$,p,q,r,δ_l,δ_m,δ_n). Le nombre de Mach est par définition égal à V/c, où c est la vitesse de propagation dans l'air (l'expression de c est étudiée à la section A.3).

On donne ici l'expression de ces coefficients pour un $F4$ (avion de chasse américain datant d'environ 25 ans). On a des expressions similaires pour pratiquement tous les avions.

$$\begin{aligned}
C_x &= C_{x0} + (C_{z0} - C_{z0p} + C_{z\alpha}\alpha)^2 \\
C_y &= C_{y\beta}\beta + C_{yp}\frac{bp}{2V} + C_{yr}\frac{br}{2V} + C_{yn}\delta_n \\
C_z &= C_{z0} + C_{z\alpha}\alpha + C_{z\dot{\alpha}}\frac{a\dot{\alpha}}{2V} + C_{zq}\frac{aq}{2V} + C_{zm}\delta_m \\
C_l &= C_{l\beta}\beta + C_{lp}\frac{bp}{2V} + C_{lr}\frac{br}{2V} + C_{ll}\delta_l + C_{ln}\delta_n \\
C_m &= C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\dot{\alpha}}\frac{a\dot{\alpha}}{2V} + C_{mq}\frac{aq}{2V} + C_{mm}\delta_m \\
C_n &= C_{n\beta}\beta + C_{np}\frac{bp}{2V} + C_{nr}\frac{br}{2V} + C_{nl}\delta_l + C_{nn}\delta_n
\end{aligned} .$$

Les coefficients C_{x0},C_{z0},C_{z0p}, $C_{z\alpha}$,$C_{z\dot{\alpha}}$,C_{zq}, C_{zm},C_{m0},$C_{m\alpha}$,$C_{m\dot{\alpha}}$,C_{mq},C_{mm},$C_{y\beta}$,C_{yr},C_{yn},$C_{n\beta}$, C_{ll},C_{nn},C_{nl} dépendent uniquement du nombre de Mach. C_{yp},$C_{l\beta}$,C_{lp},C_{lr},C_{ln},C_{np},C_{nr} dépendent du nombre de Mach et linéairement de α. Les valeurs de ces coefficients sont regroupés dans l'appendice. Ces coefficients varient très rapidement en régime transonique (i.e. entre Mach 0.8 et Mach 1.3), ce qui explique pourquoi il est difficile de franchir le mur du son; les figures A.2.3 et A.2.3 montre l'allure typique d'un coefficient longitudinal (C_{za}) et d'un coefficcient latéral ($C_{y\beta}$).

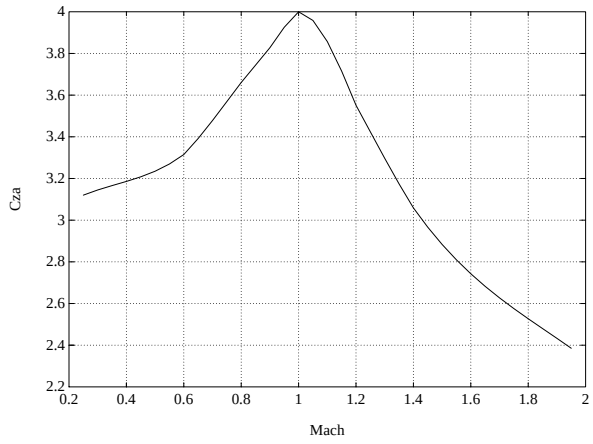


FIG. A.1 – Cza en fonction du Mach

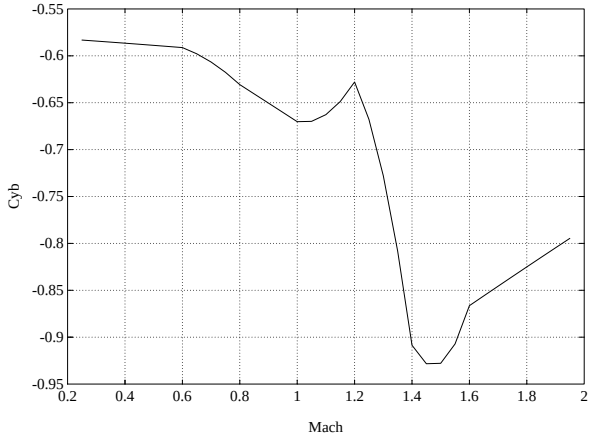


FIG. A.2 – Cyb en fonction du Mach

Remarquons les coefficients des termes en p,q,r,$\dot{\alpha}$ sont très petits par rapport aux autres, à cause du terme en 1/V. Dans le même ordre d'idée les coefficients C_{yn} et C_{zm} sont en général assez petits devant $C_{y\beta}$ et $C_{z\alpha}$ respectivement

A.2.4 Projection des équations de la mécanique

N.B. par commodité, les équations du vol (A.1) à (A.12) ont été regroupés dans le dernier paragraphe.

Equations de translation

On projette l'équation des forces

$$m\frac{d^{R_0}\vec{V}}{dt} = \vec{R}_A + \vec{F} + m\vec{g}$$

dans le repère R_a, en utilisant la relation cinématique

$$\frac{d^{R_0}\vec{V}}{dt} = \frac{d^{R_a}\vec{V}}{dt} + \vec{\Omega}_{R_a/R_0} \wedge \vec{V},$$

ce qui donne

$$[\frac{d^{R_0}\vec{V}}{dt}]_{R_a} = \begin{pmatrix} \dot{V} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_a \\ q_a \\ r_a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{V} \\ Vr_a \\ -Vq_a \end{pmatrix}.$$

En utilisant les expressions de q_a,r_a en fonction de $\dot{\alpha}$,$\dot{\beta}$ établies à la section A.2.1, on obtient les équations (A.5)-(A.7). Le poids a été exprimé dans R_a à l'aide de la matrice de passage $M_{R_a/R}$. Il ne reste plus qu'à relier la position et la vitesse dans le repère terrestre par

$$[\vec{V}]_{R_0} = M_{R/R_a}[\vec{V}]_{R_a},$$

ce qui donne les équations (A.1)-(A.3).

Equations de rotation

On projette l'équation des moments

$$\frac{d^{R_0}\vec{\sigma}}{dt} = \vec{M}_{\vec{F_a}} + \vec{M}_{\vec{F}}$$

dans le repère avion, en utilisant la relation cinématique

$$\frac{d^{R_0}\vec{\sigma}}{dt} = \frac{d^{R_a}\vec{\sigma}}{dt} + \vec{\Omega}_{R/R_0} \wedge \vec{\sigma}.$$

Compte tenu de

$$[\vec{\sigma}]_R = I[\vec{\Omega}_{R/R_0}],$$

où I est la matrice d'inertie de l'avion (donc symétrique definie positive et constante par hypothèse), on a

$$I \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge I \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix}.$$

En supposant pour simplifier que la symétrie géométrique de l'avion s'accompagne d'une symétrie de masse (ce qui est presque toujours le cas), la matrice d'inertie s'écrit

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{pmatrix},$$

ce qui fournit les équations (A.10)-(A.12). Pour finir, on utilise l'expression de $\dot{\gamma}$,$\dot{\chi}$,$\dot{\mu}$ en fonction de $\dot{\alpha}$,$\dot{\beta}$ et α,β,γ,μ,p,q,r qui a été calculée à la section A.2.1. Ceci donne les équations (A.7)-(A.9).

Equations du vol

$$\dot{x} = V\cos\chi\cos\gamma \tag{A.1}$$

$$\dot{y} = V\sin\chi\cos\gamma \tag{A.2}$$

$$\dot{z} = -V\sin\gamma \tag{A.3}$$

$$\dot{V} = -g\sin\gamma + \frac{X}{m} \tag{A.4}$$

$$\dot{\alpha}\cos\beta = \frac{g}{V}\cos\gamma\cos\mu - p\cos\alpha\sin\beta + q\cos\beta - r\sin\alpha\sin\beta + \frac{Z}{mV} \tag{A.5}$$

$$\dot{\beta} = \frac{g}{V}\cos\gamma\sin\mu + p\sin\alpha - r\cos\alpha + \frac{Y}{mV} \tag{A.6}$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{g}{V}\cos\gamma - \frac{Y\sin\mu}{mV} - \frac{Z\cos\mu}{mV} \tag{A.7}$$

$$\dot{\chi}\cos\gamma = \frac{Y\cos\mu}{mV} - \frac{Z\sin\mu}{mV} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mu}\cos\beta = & -\frac{g}{V}\cos\gamma\cos\mu\sin\beta + p\cos\alpha + r\sin\alpha \\ & + \frac{Y\cos\mu\tan\gamma\cos\beta}{mV} - \frac{Z(\sin\mu\tan\gamma\cos\beta + \sin\beta)}{mV} \end{aligned} \tag{A.9}$$

$$I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} = (I_{yy} - I_{zz})qr + I_{xz}pq + L \quad (A.10)$$
$$I_{yy}\dot{q} = (I_{zz} - I_{xx})qr + I_{xz}p(r^2 - p^2) + M \quad (A.11)$$
$$I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} = (I_{xx} - I_{yy})pq + I_{xz}rq + N \quad (A.12)$$

Quelques remarques sur ces équations:

- les équations (A.10)-(A.12) supposent une symétrie de masse de l'avion. Si ce n'est pas le cas, il faut utiliser les équations un peu plus compliquées données au paragraphe précédent.
- Les forces X,Y,Z et les moments L,M,N peuvent dépendre (linéairement) de $\dot{V}$,$\dot{\alpha}$,$\dot{\beta}$: les équations (A.4)-(A.6) sont donc éventuellement implicites; il est cependant très facile de les réécrire sous forme explicite si besoin est.
- Le système dégénère si $V \cos\beta \cos\gamma = 0$ (certaines équations deviennent des relations non différentielles). Si $V = 0$ ou $\cos\beta = 0$ (cf remarque suivante) sont des situations très improbables, $\cos\gamma = 0$ est plus fréquent (looping par exemple). Dans ce cas χ n'est plus défini: c'est la singularité habituelle d'un paramétrage par les angles d'Euler. En théorie, il faudrait donc décrire l'avion par deux cartes locales. Dans la suite, on supposera simplement qu'on se trouve loin de ces singularités.
- Dans les conditions habituelles de vol (i.e. en dehors des acrobaties aériennes), on demande que l'angle de dérapage β soit (approximativement) nul: la force latérale Y est alors nulle, et l'axe longitudinal de l'avion est colinéaire au vecteur vitesse. Il arrive parfois que l'on veuille voler à β constant non nul, par exemple à l'occasion d'une maneuvre d'atterrissage par fort vent de travers pour aligner l'avion dans l'axe de la piste (maneuvre dite de "décrabe"). Dans tous les cas, une valeur de β dépassant $\pm 15°$ peut être considerée comme "très grande".

  De même l'angle d'incidence α est généralement petit (par exemple environ 2 ou 3° pour le vol en palier). Pour les "très grandes valeurs" de α (environ $\pm 30°$), il se produit d'ailleurs un phénomène de "décrochage" (brusque perte de portance).

A.3 Modèle atmosphérique

Les forces exercées sur l'avion dépendent de la masse volumique de l'air et de la vitesse du son. La modélisation usuelle de l'atmosphère en l'absence de turbulences (atmosphère dite standard) permet d'exprimer ces grandeurs comme des fonctions dépendant uniquement de l'altitude $h := -z$. Elle repose sur trois principes physiques:

- la loi des gaz parfaits, qui relie la masse volumique de l'air ρ, la pression p et la température T:
$$p = \rho R T, \quad (A.13)$$
  avec R constante des gaz parfaits ($R = 287.053$),
- la loi de Laplace, exprimant l'équilibre hydrostatique d'une colonne d'air sous l'effet de son poids, qui relie la pression p, la masse volumique ρ, la pesanteur g et l'altitude h:
$$dp = -\rho g dh, \quad (A.14)$$

– une relation empirique exprimant la température T en fonction de l'altitude h:

$$T = T_0 - kh, \tag{A.15}$$

où T_0 est la température au niveau de la mer et k est une constante valant $0.0065K/m$ dans la troposphère ($0 \leq h \leq 11000m$).

On en déduit facilement :

$$\frac{d\rho}{\rho} = (k - \frac{g}{R})\frac{dh}{T_0 - kh},$$

d'où par intégration (en considérant que g est une constante),

$$\rho = \rho_0(1 - \frac{kh}{T_0})^{(\frac{g}{Rk} - 1)}, \tag{A.16}$$

avec ρ_0 masse volumique de l'air au niveau de la mer. En toute rigueur la pesanteur g diminue avec l'altitude, mais son influence sur ρ sera négligée (à $11000m$ l'erreur sur ρ en prenant $g = 9.81$ est inférieure à 10^{-3}). Les valeurs standards de pression et température au niveau de la mer ($p_0 = 101300Pa = 1atm$, $T_0 = 288.15K = 15°C$) donnent alors

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = 1.225.$$

La figure (A.3) montre l'allure de la courbe décrite par (A.16).

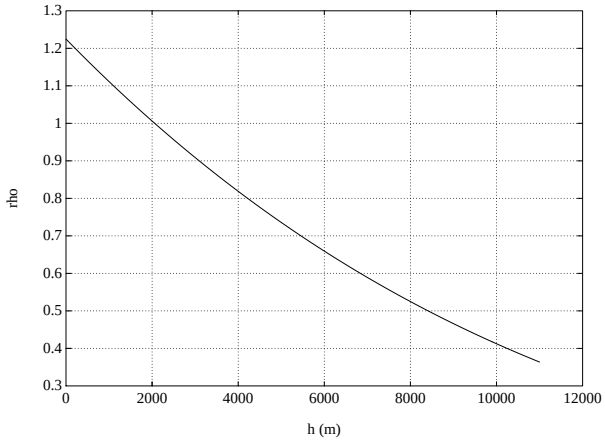


FIG. A.3 – ρ en fonction de l'altitude

Il reste à exprimer la vitesse c du son dans l'air, qui intervient dans le nombre de Mach $M := V/c$. De manière générale, la vitesse de propagation du son dans un fluide est donnée par

$$c = \sqrt{\gamma RT}.$$

Pour l'air, et dans les zones de pression et température considérées, γ est une constante valant 1.4. En utilisant (A.15), on exprime alors c en fonction de l'altitude:

$$c = \sqrt{\gamma R(T_0 - kh)}, \tag{A.17}$$

d'où au niveau de la mer,

$$c = 340.3m/s.$$

Le graphe de c est représenté è la figure A.4.

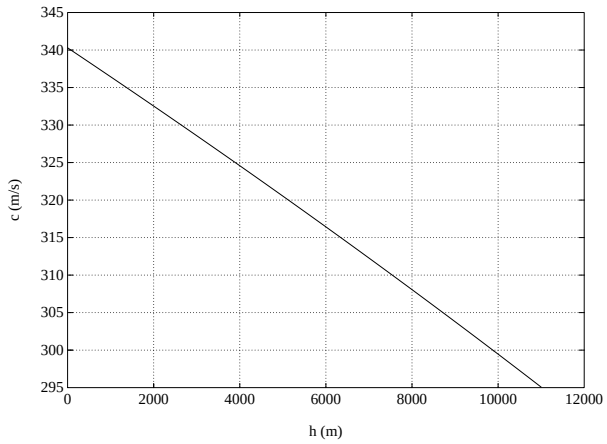


FIG. A.4 – c en fonction de l'altitude

A.4 Ce qu'il faut retenir de cette modélisation

Les équations (A.1) à (A.12) décrivent le mouvement de n'importe quel solide volant. Ce qui distingue un avion d'un autre est uniquement l'expression des forces X,Y,Z et des moments L,M,N, ou plus exactement l'expression (et surtout les valeurs numériques) de leur coefficients aérodynamiques. Ces forces et ces moments dépendent de z,α,β, $\dot{V}$,$\dot{\alpha}$,$\dot{\beta}$, p,q,r, δ_l,δ_m,δ_n,F. Une remarque essentielle pour la commande est que la dépendance de X,Y,Z par rapport à $\dot{V}$,$\dot{\alpha}$,$\dot{\beta}$,p,q,r, et (avec plus de réserves) par rapport à δ_l,δ_m,δ_n est "petite".

Bibliographie

[1] S. El Asmi. *Autour de l'inversion des systèmes entrée-sortie et du concept d'essentialité: une approche algébrique.* PhD thesis, Université Paris XI, Orsay, France, 1992.

[2] S. El Asmi and M. Fliess. Formules d'inversion. In B. Bonnard, B. Bride, J.P. Gauthier, and I. Kupka, editors, *Analysis of Controlled Dynamical Systems*, pages 201–210, Boston, 1991. Birkhäuser.

[3] M.D. Di Benedetto and J.H. Grizzle. Intrinsic notions of regularity for local inversion, output nulling, and dynamic extension of nonsquare systems. *C-TAT*, 6(3):357–381, 1990.

[4] M.D. Di Benedetto, J.H. Grizzle, and C.H. Moog. Rank invariants of nonlinear systems. *SIAM J. Control & Opt.*, 27:658–672, 1989.

[5] R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt, and P.A. Griffiths. *Exterior Differential Systems.* Springer-Verlag, 1991.

[6] C.I. Byrnes and A. Isidori. Local stabilization of minimum-phase nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 11:9–17, 1988.

[7] E. Cartan. Les problèmes d'équivalence. *Selecta*, pages 113–136, 1937. Séminaire de Math., exposé D, 11 Janvier.

[8] B. Charlet, J. Lévine, and R. Marino. On dynamic feedback linearization. *Systems & Control Letters*, 13:743–151, 1989.

[9] B. Charlet, J. Lévine, and R. Marino. Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization. *SIAM J. Control & Opt.*, 29:38–57, 1991.

[10] B. d'Andréa Novel, Ph. Martin, and R. Sépulchre. Full dynamic feedback linearization of a class of mechanical systems. In S. Kimura and H. Kodama, editors, *Recent Advances in Mathematical Theory of Systems, Control, Network and Signal Processing II (MTNS 91, Kobe, Japan)*, pages 327–333, Tokyo, 1992. Mita Press.

[11] E. Delaleau and M. Fliess. An algebraic interpretation of the structure algorithm with an application to feedback decoupling. In *Proceedings of IFAC NOLCOS Conf.*, Bordeaux, France, 1992.

[12] J. Descusse and C.H. Moog. Decoupling with dynamic compensation for strong inverible affine systems. *Int. Journal of Control*, 42:1387–1398, 1985.

[13] J. Descusse and C.H. Moog. Dynamic decoupling for right-invertible systems. *Systems & Control Letters*, 8:345–349, 1987.

[14] B. Etkin. *Dynamics of flight – Stability and control.* John Wiley, New York, 1982. Second edition.

[15] M. Fliess. Some remarks on nonlinear invertibility and dynamic state feedback. *Systems & Control Letters*, 8:147–151, 1986.

[16] M. Fliess. Automatique et corps différentiels. *Forum Math.*, 1:227–238, 1989.

[17] M. Fliess. Generalized controller canonical forms for linear and non linear dynamics. *IEEE Trans. Automat. Control*, 35:994–1001, 1990.

[18] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, and P. Rouchon. On differentially flat non linear systems. In *Proceedings of IFAC NOLCOS Conf.*, Bordeaux, France, 1992.

[19] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, and P. Rouchon. Sur les systèmes nonlinéaires différentiellement plats. *C.R. Acad. Sc. Paris*, 315(I):619–624, 1992.

[20] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, and P. Rouchon. Défaut d'un système non linéaire et commande haute fréquence. *C.R. Acad. Sc. Paris*, 316(I), 1993.

[21] M. Fliess, J. Lévine, and P. Rouchon. Index of a general differential algebraic implicit system. In S. Kimura and H. Kodama, editors, *Recent Advances in Mathematical Theory of Systems, Control, Network and Signal Processing II (MTNS 91, Kobe, Japan)*, pages 289–294, Tokyo, 1992. Mita Press.

[22] J. Hauser, S. Sastry, and G.Meyer. Nonlinear control design for slightly nonminimum phase systems: Application to v/stol aircraft. *Automatica*, 28(4):665–679, 1992.

[23] D. Hilbert. Über den begriff der klasse von differentialgleichungen. *Math. Ann.*, 73:95–108, 1912.

[24] H.J.C. Huijberts. *Dynamic feedback in nonlinear synthesis problems.* PhD thesis, University of Twente, Entschede, 1991.

[25] H.J.C. Huijberts and H. Nijmeijer. Strong dynamic input-output decoupling: from linearity to nonlinearity. In *Proceedings of IFAC NOLCOS Conf.*, Bordeaux, France, 1992.

[26] T.W. Hungerford. *Algebra.* Springer-Verlag, 1974.

[27] L.R. Hunt, R.Su, and G.Meyer. Design for multi-input nonlinear systems. In R. Brockett, R.Millman, and H. Sussman, editors, *Differential Geometric Control Theory*, pages 268–298. Birkhäuser, 1983.

[28] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 1989.

[29] B. Jakubczyk. Remarks on equivalence and linearization of non linear systems. In *Proceedings of IFAC NOLCOS Conf.*, Bordeaux, France, 1992.

[30] B. Jakubczyk and W. Respondek. On linearization of control systems. *Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math.*, 28,9-10:517–522, 1980.

[31] P. Kokotović, H.K. Khalil, and J. O'Reilly. *Singular perturbations methods in control: analysis and design*. Academic Press Press, London, 1986.

[32] E.R. Kolchin. *Differential Algebra and Algebraic Groups*. Academic Press, New York, 1973.

[33] R. Marino. On the largest feedback linearizable subsystem. *Systems & Control Letters*, 6:345–351, 1986.

[34] Ph. Martin. An intrinsic condition for regular decoupling. *Systems & Control Letters*, 20, 1993. To appear.

[35] C.H. Moog. Nonlinear decoupling and structure at infinity. *Math. Control Signals Systems*, 1:275–268, 1988.

[36] R.M. Murray and S.S Sastry. Nonholonomic motion planning: steering with sinusoids. Technical Report M91/45, Electronics Research Lab., University of California, Berkeley, 1991.

[37] H. Nijmeijer. Right-invertibility for a class of nonlinear control systems: a geometric approach. *Systems & Control Letters*, 7:125–132, 1986.

[38] H. Nijmeijer and W. Respondek. Decoupling via dynamic compensation for nonlinear control systems. In *25th Conference on Decision and Control*, pages 192–197, 1986.

[39] J.F. Pommaret. *Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups*. Gordon & Breach, New York, 1978.

[40] W. Respondek. Intrinsic singularities of dynamic extensions. In *Proceedings of IFAC NOLCOS Conf.*, Bordeaux, France, 1992. Oral presentation.

[41] W. Respondek and H. Nijmeijer. On local right-invertibility of nonlinear control systems. *C-TAT*, 4(3):325–328, 1988.

[42] J.F. Ritt. *Differential Algebra*, volume 33. AMS Colloq. Publ., New York, 1950.

[43] S.N. Singh. A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 26:595–598, 1981.

[44] M. Vukobratović and R. Stojić. *Modern Aircraft Flight Control*. Springer–Verlag, Berlin, 1988.

[45] J.C. Wanner. Dynamique du vol et pilotage des avions. Technical report, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 1984.

[46] E.T. Whittaker. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particules and Rigid Bodies (4th edition)*. Cambridge University Press, Cambridge, 1937.

[47] J.C. Willems. Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 36:259–294, 1991.