



Systèmes mécaniques réversibles en dynamique holonome et non-holonome des corps solides rigides

Ioulia Gloukhikh

► To cite this version:

Ioulia Gloukhikh. Systèmes mécaniques réversibles en dynamique holonome et non-holonome des corps solides rigides. Modélisation et simulation. Ecole des Ponts ParisTech, 2003. Français. NNT : . tel-00005724

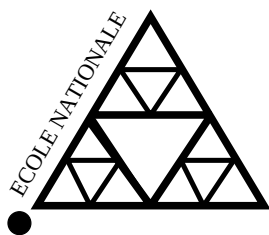
HAL Id: tel-00005724

<https://pastel.hal.science/tel-00005724>

Submitted on 5 Apr 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de Doctorat présentée par

Ioulia Gloukhikh

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET
CHAUSSEES**

Spécialité:

Mathématiques, informatique

sujet:

**Systèmes mécaniques réversibles en
dynamique holonome et non-holonome
des corps solides rigides**

Soutenue le 31 mars 2003 devant le jury composé de

Monsieur	Badaoui Elmabsout	Président
Madame	Madeleine Pascal	Rapporteur
Monsieur	Alexandre Sumbatov	Rapporteur
Monsieur	Dominique Chevallier	Directeur de thèse
Monsieur	Claude Vallée	Examineur

Ma profonde reconnaissance va tout d'abord à Dominique Chevallier qui a dirigé ma thèse. Ses importantes remarques scientifiques m'ont permis de parvenir à ce qu'elle est aujourd'hui. Je le remercie aussi pour sa patience à mon égard pendant ces années.

J'adresse mes remerciements chaleureux à Valentin Tkhai qui a dirigé cette thèse en Russie, m'a aidée et soutenue contre le découragement et a apporté de nombreuses idées sur des problèmes et leur solution.

Madame Madeleine Pascal et Monsieur Alexandre Sumbatov ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Leurs conseils m'ont permis d'améliorer mon travail et je les en remercie.

Je tiens à remercier Monsieur Badaoui Elmabsout et Monsieur Claude Vallée pour avoir accepté de faire partie de mon jury et avoir examiné cette thèse.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées pour son soutien et au Cermics où j'ai séjourné pendant la préparation de cette thèse et dont les membres ont contribué à faciliter et rendre agréables mes séjours en France.

Table des matières

1	Introduction	3
I	Théorie	11
2	Systèmes réversibles	13
2.1	Généralités	13
2.2	Mouvements périodiques symétriques	20
2.3	Méthode de formation des solutions $2\pi k$ -périodiques d'un système réversible	22
2.4	Prolongement d'un mouvement périodique selon un paramètre	24
2.5	Mouvements périodiques d'un système quasi-autonome du deuxième ordre	25
2.6	Système proche d'un système conservatif à un degré de liberté	29
2.7	Méthode de détermination des exposants caractéristiques d'un système périodique réversible linéaire	30
2.8	Résonance paramétrique dans le système réversible du troisième ordre	33
2.9	Stabilité de la position d'équilibre d'un système réversible . .	42
II	Applications	47
3	Rotations permanentes d'un ellipsoïde homogène pesant roulant sans glissement sur un plan horizontal	49
3.1	Equations du mouvement	49
3.2	Ellipsoïde pesant homogène sur un plan	53
3.3	Forme normale	58
3.4	Stabilité des rotations permanentes d'un ellipsoïde homogène pesant roulant sans glissement	62

3.5	Calculs numériques	63
4	Roulement d'un ellipsoïde le long d'une ligne droite	69
4.1	Equations du mouvement	69
4.2	Roulement d'un corps le long d'une droite	75
4.3	Problème de la stabilité du roulement. Equations du mouvement perturbé	80
4.4	Système d'équations aux variations sans dimension	85
4.5	Roulement de l'ellipsoïde proche de l'ellipsoïde de révolution	88
4.6	Résultats et conclusions sur la stabilité	96
5	Oscillations et rotations d'un satellite dans le champ de gravitation de la Terre sous l'influence de l'atmosphère	109
5.1	Equations du mouvement	110
5.2	Oscillations et rotations d'un satellite sur une orbite faiblement elliptique	118
5.3	Rotations périodiques d'un satellite sur une orbite elliptique arbitraire	128
5.4	Rotations rapides d'un satellite sur une orbite elliptique . . .	140
III	Annexe	149
A	Densité de l'atmosphère en fonction de l'altitude	151
B	Code des Programmes	159
	Conclusion générale et perspectives	165
	Références	167

Chapitre 1

Introduction

La présente thèse a pour objet d'étudier des problèmes réversibles dans la dynamique holonome et non-holonome du corps solide.

Dans la thèse sont analysés les rotations permanentes, les oscillations et les mouvements rotatifs d'un ellipsoïde homogène pesant sur un plan absolument rugueux et d'un satellite sur une orbite elliptique; le problème de la stabilité de ces mouvements est également étudié.

Le choix du thème de la thèse à été déterminé, d'une part, par le fait que les principaux modèles de la mécanique classique et céleste sont décrits par des systèmes d'équations différentielles réversibles (Tkhai [64, 65, 80]). D'autre part, par l'élaboration, ces deux dernières décennies, de la théorie de la stabilité des oscillations des systèmes mécaniques réversibles (Tkhai, Devaney, Gloukhikh, Grodman, Ephimov, Zimovshikov [14, 18, 15, 89, 32, 64-86]).

Il est à noter que dans les années 80 on a mis au point la théorie KAM réversible (Devaney, Sevryuk [14, 60-62]). Cette théorie est appliquée pour étudier des problèmes mécaniques et est comparable à la théorie KAM des systèmes hamiltoniens (Kolmogorov, Arnol'd, Moser [4, 31, 50]).

Avant la parution de l'article de Tkhai [64] on n'accordait pas beaucoup d'attention au fait que la plupart des systèmes de la mécanique classique sont réversibles. V.N. Tkhai, dans [80], rappelle, qu'on a toutefois utilisé la symétrie (réversibilité) dans la mécanique céleste depuis L. Euler (pour les orbites périodiques locales construites par L. Euler au voisinage d'un des points colinéaires de libration [16], les orbites périodiques du problème de Hill [27], les orbites périodiques de Poincaré de trois espèces (Arenstorf, Barrar, Poincaré, Uno [3, 7, 53, 87]), le critère de Whittaker pour les orbites périodiques symétriques [88], les orbites en forme de "sabot de cheval" de

A.F. Shanzle dans le problème de trois corps [59]). On utilise la réversibilité dans les récents travaux de recherche fondamentaux (Sarychev, Sazonov, Zlatoustov [56, 58]) sur le problème de V.V. Beletsky [8].

L'article de Tkhai [64] démontre que tout système mécanique holonome limité par une liaison géométrique stationnaire se trouvant uniquement sous l'effet des forces positionnelles est décrit par un système d'équations différentielles réversibles. Cet article n'a trouvé un prolongement qu'en 1991, l'année où a été analysée une série de modèles de la mécanique classique et céleste et où on a démontré que ces modèles forment une classe particulière des systèmes réversibles de la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{cases} \quad (A)$$

$$\mathbf{u} \in \mathbf{R}^l, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n, \quad l \geq n$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{V}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

qui a reçu plus tard le nom de système mécanique réversible (Tkhai [80]).

Le système (A) possède donc une invariance par rapport à la transformation linéaire avec le changement simultané de t en $-t$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \rightarrow (\mathbf{u}, -\mathbf{v}, -t)$$

c'est-à-dire, représente un système linéaire réversible avec l'ensemble des points fixes $\{\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$. Une autre limite, c'est la condition $l \geq n$ pour la dimension des vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Cette condition est toujours vérifiée pour les systèmes mécaniques.

Par exemple, dans un système mécanique évoluant sous l'effet de forces positionnelles $\mathbf{u} = \mathbf{q}$ est un vecteur des coordonnées généralisées, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$ est un vecteur des vitesses généralisées, $l = n$.

L'article de Tkhai [65] a développé la théorie dans les directions suivantes. Premièrement, on a étudié la stabilité des systèmes réversibles en cas de résonance (Tkhai, Kunitsyn, Muratov, Matveyev, [32, 33, 38, 39, 64-67]). Ensuite on a procédé aux recherches sur la stabilité du système réversible dans le cas non-résonnant (Matveyev [40-42]), y compris le cas de l'existence des intégrales premières (Matveyev [43]). Outre cela, on a élaboré (Tkhai, Gloukhikh, Zimovshikov [17, 89, 81]) une méthode constructive pour déterminer les exposants caractéristiques d'un système linéaire périodique réversible et on a proposé un procédé d'étude de la stabilité au sens de

Lyapunov pour la solution obtenue de façon numérique dans un système conservatif réversible à deux degrés de liberté (Ephimov, Tkhai [15]).

L'étude parallèle des problèmes mécaniques concrets (Tkhai, Gloukhikh, Chevallier, Grodman, Ephimov, Zimovshikov [17, 18, 20, 23, 24, 15, 89, 90, 91, 69, 71, 72, 74, 75, 81, 84, 85]) permet d'affirmer que la théorie de la stabilité des systèmes réversibles appliquées dans la mécanique est fondé.

L'autre direction est liée à l'étude des mouvements périodiques (oscillations et rotations) dans les systèmes mécaniques réversibles. Bien que du point de vue théorique l'article de Devaney [14] ait une importance particulière, c'est l'article de Heinbockel et de Struble [26], consacré aux mouvements périodiques d'un système avec symétrie qui a servi de point de départ pour la création de la théorie des oscillations des systèmes mécaniques réversibles. A la suite des recherches on a obtenu une théorie suffisamment complète, comprenant les conditions nécessaires et suffisantes d'existence des mouvements périodiques, une méthode de construction et d'étude de tous les mouvements de ce type, une théorie du prolongement selon un paramètre, une théorie de familles locales de Lyapunov de mouvements périodiques, une théorie pour des systèmes de type particulier, une théorie pour les systèmes proches des systèmes réversibles, des annexes (Tkhai, Gloukhikh, Grikhanova, Buchin, Grodman, Ephimov [18, 21-15, 71-74, 76-80, 82, 83, 86]).

Les problèmes non-holonomes de roulement d'un solide sur un plan ont suscité de nombreuses recherches (Tkhai [75], Karapetyan [30], Markeyev [37], M. Pascal [52] etc). Ces recherches s'appuient sur diverses conditions de symétrie (ou d'asymétrie). Dans la suite, contrairement au problème du type "pierre celtique" on supposera que les axes de l'ellipsoïde roulant sont aussi des axes principaux d'inertie.

De cette façon, on a fait un pas en avant dans l'étude du problème avancé par A.P. Markeyev, problème de la stabilité des rotations permanentes autour de la verticale d'un ellipsoïde pesant homogène sur un plan absolument rugueux. A.P. Markeyev obtient les équations du mouvement dans ce problème comme les équations d'Appell d'un système non-holonyme [35]. Outre cela il remarque l'existence d'une rotation autour d'un axe de l'ellipsoïde coïncidant avec la verticale et élabore les équations aux variations.

L'examen des racines d'une équation caractéristique permet de vérifier l'instabilité de la rotation autour de l'axe moyen. La rotation autour de l'axe minimum est toujours stable à l'approximation linéaire et la rotation autour de l'axe maximum est stable à l'approximation linéaire lorsque la vitesse angulaire est assez grande.

Cependant la question de la stabilité au sens de Lyapunov des rotations

permanentes est restée ouverte. Un progrès dans la solution de ce problème a été accompli avec l'introduction de la réversibilité (Tkhai [65]).

La solution de ce problème est devenue possible à la suite de la démonstration du théorème de la stabilité du système réversible dans le cas général elliptique (Matveyev [40, 43]); les résultats de stabilité sous la condition de résonance du quatrième ordre sont connus depuis 1980 (Tkhai [64]). La solution complète du problème au niveau des résultats théoriques existant aujourd'hui et exposée dans la thèse présente, et est publiée dans (Tkhai, Gloukhikh, Chevallier [19, 20]).

Le corps solide pesant, limité par une surface lisse peut rouler sur le plan de manière qu'un des plans principaux d'inertie coïncide constamment avec un plan vertical immobile. Si l'équation de la surface $F(x, y, z) = 0$ (x, y, z sont des coordonnées du point de contact du corps et de la surface par rapport aux axes liés), alors lorsque la fonction $F'_y(x, y, z)$ est impaire le roulement représente un mouvement périodique symétrique du système réversible (Tkhai [75]). Ce cas se produit pour un ellipsoïde dont le centre de masse coïncide avec le centre géométrique et les axes principaux d'inertie sont dirigés selon les axes de l'ellipsoïde.

J.M. Mindline et G.K. Pojaritzki, dans [47], ont déterminé les conditions de la stabilité d'un corps dynamiquement symétrique, dont l'axe de symétrie dans le mouvement observé est horizontal. L'article (Tkhai [65]) faisait l'étude du problème pour un ellipsoïde de révolution.

La présente thèse considère un autre aspect du problème : un ellipsoïde est censé être creux et on compare les résultats pour un ellipsoïde creux et un ellipsoïde homogène.

On analyse la stabilité du roulement de l'ellipsoïde le long de la ligne droite dans une direction. Pour un corps, proche d'un ellipsoïde révolution, dans ce cas, l'existence d'une résonance paramétrique est possible. Signalons, que le problème de la stabilité du système réversible à une résonance paramétrique est étudié suffisamment bien (Tkhai [70]). La résonance à une seule fréquence $2\omega = p \in \mathbf{N}$, conduit d'habitude à l'instabilité et cette conclusion résulte de l'inégalité à zéro du coefficient de la forme normale qui, sous la condition de résonance, détermine la stabilité. La méthode des formes normales est également assez élaborée (Bruno [12]). Cependant, l'obtention de la forme normale dans un problème concret est accompagnée de certaines difficultés de calcul, surtout quand on analyse le système périodique. C'est pourquoi en cas de résonance paramétrique ce sont les formules finales pour calculer les coefficients de résonance qui présentent de l'intérêt. La thèse propose la solution de ce problème pour un système quasi-autonome linéaire réversible du troisième ordre.

Les mouvements de rotation d'un satellite sur une orbite elliptique sous l'effet des moments de gravitation et aérodynamique sont décrits par un système qui possède une variété intégrale représentant le mouvement d'un satellite sur le plan de l'orbite. Nous avons une équation périodique réversible du deuxième ordre. Pour ce type d'équation la méthode (Tkhai [73, 79]), permettant de construire en principe toutes les oscillations impaires et toutes les rotations et d'examiner leur stabilité est particulièrement efficace. C'est la propriété de symétrie qui a été utilisée et est utilisée (Bruno, Sarychev [13, 57]) pour étudier le problème de V.V. Beletsky (moment aérodynamique égal à zéro), c'est ainsi qu'on a examiné le problème en présence de forces gravitationnelles et de la pression de radiation (Tkhai, Grodman [23, 24]).

N.V. Melnik, dans [44], [45], a étudié les oscillations planes sur l'orbite elliptique. Une analyse complète du mouvement du satellite sur une orbite circulaire a été faite par examen du portrait de phase et les oscillations du satellite sur une orbite elliptique ont ensuite été déterminées numériquement. Notons, que sur l'orbite circulaire, les oscillations entourent les positions d'équilibre relatif correspondantes. Ces équilibres peuvent être triviaux dans le cas où l'un des axes d'inertie du satellite coïncide avec le rayon-vecteur, et obliques – quand cet axe d'inertie forme avec le rayon-vecteur un angle différent de zéro. Pour chaque famille la période d'oscillation T dépend de l'amplitude (de l'énergie h) et $dT(h) \neq 0$. Les oscillations entourant les équilibres triviaux sont symétriques par rapport à $\{(z, \dot{z}) | z = k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. Par conséquent pour le prolongement de tels oscillations on pourra appliquer le théorème de Tkhai [77, 79].

De cette manière, il s'ensuit du comportement de la fonction $T(h)$, que les oscillations $2\pi k$ -périodiques du satellite sur l'orbite circulaire subsistent sur l'orbite faiblement elliptique. Une telle conclusion d'ordre qualitatif ne figurait pas dans les travaux de Melnik [44, 45].

Outre cela on a examiné les rotations rapides du satellite dans le problème de Beletsky et la stabilité des rotations planes dans le problème tridimensionnel. Ces recherches ont été exécutées à l'aide de la méthode de construction de tous les mouvements périodiques du système réversible et d'analyse de leur stabilité (Tkhai [73, 79]).

Telle est la place des recherches de la présente thèse parmi d'autres travaux consacrés à la dynamique du corps solide sur un plan et à la dynamique du mouvement des satellites.

Présentons le résumé de la thèse par chapitres.

Dans le deuxième chapitre on présente les résultats fondamentaux sur les systèmes réversibles.

Dans le troisième chapitre on étudie la stabilité des rotations permanentes d'un ellipsoïde pesant homogène sur un plan horizontal absolument rugueux.

Dans la section 3.1 on peut trouver les équations du mouvement du corps solide pesant roulant sans glissement sur le plan horizontal. Ces équations font partie des équations réversibles. On indique que le système d'équations du mouvement a une solution particulière où le corps effectue des rotations permanentes autour de la verticale.

Dans la section 3.2 on établit les équations du mouvement perturbé au voisinage de la solution particulière pour le corps limité par la surface de l'ellipsoïde. Le système est présenté sous une forme sans dimension.

Dans la section 3.3 on présente un algorithme de normalisation pour un système réversible. La transformation linéaire normalisante est déterminée dans le cas particulier d'un système réversible du quatrième ordre.

Dans la section 3.4 on étudie la stabilité des rotations permanentes.

Dans la section 3.5 on détermine les domaines dans l'espace des paramètres du problème où les rotations permanentes sont stables au sens de Lyapunov et les domaines où la conclusion de stabilité ne s'ensuit pas des résultats théoriques actuels; on a également analysé les courbes de résonance, ce qui a démontré que la résonance 1 : 3 mène à l'instabilité.

Dans le quatrième chapitre on étudie le mouvement de roulement d'un ellipsoïde creux pesant roulant sans glissement sur un plan horizontal le long d'une ligne droite.

Dans la section 4.1 on présente les équations du mouvement pour un corps limité par la surface d'un ellipsoïde.

Dans la section 4.2 on démontre que dans le cas d'un corps limité par la surface de l'ellipsoïde, le système d'équations du mouvement possède une variété intégrale représentant des mouvements pour lesquels l'un des plans principaux coïncide constamment avec le plan vertical immobile contenant le point de contact du corps et du plan horizontal et trace sur ce dernier une ligne droite. On considère les mouvements au cours desquels l'ellipsoïde exécute un roulement dans une direction. Pour étudier ces mouvements et d'autres qui sont proches on passe à une nouvelle variable indépendante – l'angle de rotation de l'ellipsoïde. L'intégrale d'énergie permet la réduction du système.

Dans la section 4.3 on présente le système d'équations aux variations au voisinage du mouvement de roulement examiné. Ce système est un système d'équations différentielles réversibles du troisième ordre à coefficients périodiques.

Dans la section 4.4 on réduit le système d'équations aux variations à la

forme sans dimension.

Dans la section 4.5 on étudie le mouvement de roulement de l'ellipsoïde proche de l'ellipsoïde révolution. Il est prouvé qu'en cas de résonance paramétrique le roulement est instable. Il en résulte, en particulier, que pour un ellipsoïde proche d'une boule, le mouvement de roulement autour de l'axe moyen est instable.

Dans la section 4.6 on étudie la stabilité de roulement en première approximation. Pour déterminer les exposants caractéristiques de Floquet du système d'équations aux variations la réversibilité est utilisée et permet de trouver ces exposants par la formation d'une seule solution du problème de Cauchy. On a déterminé, dans l'espace des paramètres du problème, les domaines où, pour un ellipsoïde arbitraire, les conditions nécessaires de stabilité se réalisent.

Dans le cinquième chapitre on étudie les oscillations et les rotations d'un satellite sur une orbite elliptique sous l'effet des moments gravitationnel et aérodynamique.

Dans la section 5.1 on présente les équations du mouvement du satellite sur une orbite elliptique sous l'effet de ces moments. Le système d'équations est réversible et possède une variété intégrale, qui représente les mouvements sur une orbite elliptique [57].

Dans la section 5.2 il est prouvé que les oscillations $2\pi k$ -périodiques du satellite sur l'orbite circulaire au voisinage des positions d'équilibre subsistent dans le cas d'une orbite faiblement elliptique pour une valeur arbitraire du paramètre aérodynamique.

Dans la section 5.3 on étudie les rotations 2π -périodiques du satellite lorsque, au cours d'une révolution du centre de masse de satellite sur l'orbite, le satellite tourne de 2π autour de l'axe passant par le centre de masse et perpendiculaire au plan de l'orbite. En utilisant la méthode de recherche des solutions $2\pi k$ -périodiques du système réversible du deuxième ordre on a trouvé les valeurs des vitesses initiales pour ces mouvements. On examine ensuite la stabilité au sens de Lyapunov de ces mouvements. Dans l'espace de paramètres du problème on détermine les domaines où les rotations 2π -périodiques trouvées sont stables au sens de Lyapunov.

Dans la section 5.4 on analyse les rotations rapides du satellite dans le problème de Beletsky, c'est-à-dire les mouvements où au cours d'une seule révolution du centre de masse du satellite sur l'orbite le satellite tourne m fois autour de l'axe passant par le centre de masse et perpendiculaire au plan de l'orbite.

Dans l'Annexe 1 on présente une table de la densité de l'atmosphère en fonction de l'altitude utilisée dans les calculs numériques.

Dans l'Annexe 2 on présente le code du programme par 'Maple' permettant la réduction d'un système différentiel réversible à la forme normale en cas de résonances d'ordre inférieur ou égal à quatre.

Première partie

Théorie

Chapitre 2

Systèmes réversibles

De nombreux problèmes de physique sont décrits par des systèmes réversibles (Ioos [28]). Les principaux modèles de la mécanique classique et céleste sont en fait réversibles (Tkhai [80]).

Dans ce chapitre on présente des résultats théoriques principaux sur les systèmes réversibles que l'on utilise dans la thèse.

Nous avons complété ces résultats par la recherche analytique d'un algorithme déterminant la stabilité dans les conditions d'une résonance.

2.1 Généralités

Un système dynamique réversible (Arnol'd [5], Bibikov [9], Devaney [14], Roberts, Quispel [55], Sevryuk [60, 61], Tkhai [65]) est un système dynamique dans un "espace-temps" $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}$ (où le second facteur décrit le temps) et qui possède une symétrie particulière relativement à (au moins) une transformation de la forme

$$(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{G}\mathbf{x}, -t)$$

renversant le sens du temps et où $\mathbf{G}$ est une transformation involutive ($\mathbf{G}^2 = id$, identité). Pour l'équation différentielle

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m \quad (2.1)$$

cela revient à dire que

$$\mathbf{G}\mathbf{X}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}\mathbf{G}\mathbf{x} = 0. \quad (2.2)$$

L'application $\mathbf{G}$ peut être linéaire ou non. L'ensemble $\mathbf{M} = \{\mathbf{x} : \mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{x}\}$ est l'ensemble des points fixes de l'application $\mathbf{G}$ de l'équation réversible

(2.1). Si l'équation (2.1) possède la solution $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ alors elle possède simultanément la solution $\mathbf{x} = \mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}(-t)$. Si l'on a une trajectoire de (2.1) alors il existe une autre trajectoire symétrique par rapport à $\mathbf{M}$ (sur laquelle le mouvement s'effectue en sens inverse). Il peut exister des trajectoires symétriques par rapport à $\mathbf{M}$.

Dans certains cas l'application $\mathbf{G}$ peut être linéaire. Alors, dans l'espace des vecteurs propres de $\mathbf{G}$ le système des équations (2.1),(2.2) a la forme [48] :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^l, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n \end{cases} \quad (2.3)$$

avec

$$\mathbf{U}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{V}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (2.4)$$

Ce système est invariant par l'application $(t, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow (-t, \mathbf{u}, -\mathbf{v})$. Bien plus, le système (2.1), (2.2) a partout la forme (2.3) au voisinage d'une solution constante appartenant à l'ensemble des points fixes [48]. Lorsque $l \geq n$ on dit que le système (2.3), (2.4) est un système mécanique réversible [65].

Les systèmes réversibles peuvent avoir des solutions qui sont des mouvements périodiques non symétriques par rapport à $\mathbf{M}$ [29]. Dans l'espace de phase d'un système réversible il y a deux domaines où le comportement est conservatif et le comportement est dissipatif.

Par exemple, le système dans le plan

$$\dot{u} = uv, \quad \dot{v} = u + \cos v; \quad (-\pi \leq v \leq \pi)$$

est réversible, étant invariant par l'application $(t, u, v) \rightarrow (-t, u, -v)$ [73]. Le champ de vecteurs $\mathbf{X}$ a trois points singuliers : $(-1, 0)$, $(0, \pm\pi/2)$. Le point $(-1, 0)$ appartient à l'ensemble des points fixes $\mathbf{M}$ et ceux-ci sont symétriques par rapport à $\mathbf{M}$ (Figure 1).

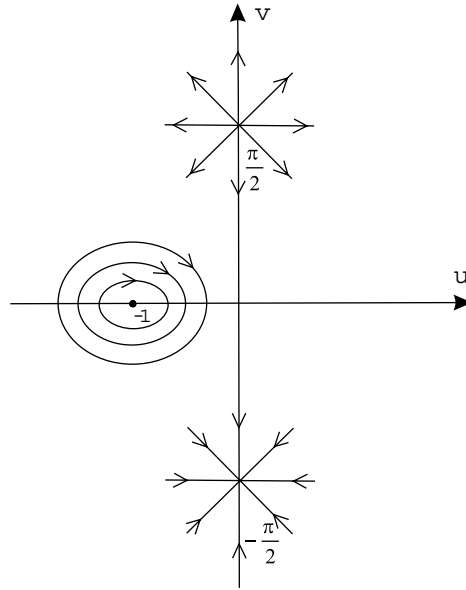


Figure 1

La singularité sur l'axe des abscisses est stable au sens de Lyapunov et c'est un centre de mouvements périodiques, la singularité dans le demi-plan supérieur est instable, la singularité dans le demi-plan inférieur est asymptotiquement stable.

Il existe des systèmes hamiltoniens non réversibles et des systèmes réversibles non hamiltoniens et il existe des systèmes simultanément réversibles et hamiltoniens. La Figure 2 caractérise la relation entre systèmes hamiltoniens et systèmes réversibles.

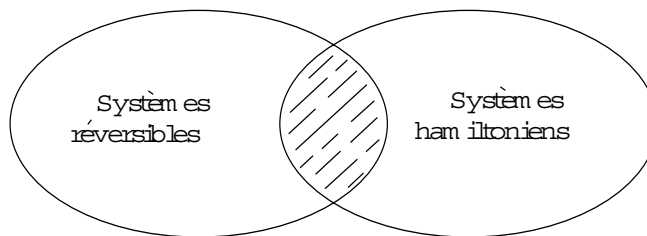


Figure 2 : Relation entre systèmes hamiltoniens et systèmes réversibles

Le comportement conservatif a été bien étudié. On a élaboré la théorie KAM réversible [6, 10, 51, 49, 62] qui est parallèle à la théorie KAM des systèmes hamiltoniens [31, 4, 50]. On remarque que la théorie réversible

étend tous les résultats fondamentaux connus pour les systèmes hamiltoniens. En particulier, on a démontré le théorème sur la stabilité au sens de Lyapunov de la position d'équilibre d'un système réversible [40]. La théorie qui a été la mieux élaborée est la théorie des systèmes décrivant des rotations et des oscillations [18, 15, 89, 32, 64-86, 14]. Elle contient des conditions nécessaires et suffisantes d'existence des mouvements périodiques symétriques par rapport à l'ensemble des points fixes, la méthode de construction et d'étude de ces mouvements, la théorie du prolongement selon un paramètre, la théorie semi-linéaire, la théorie locale, l'étude des mouvements périodiques pour des problèmes pratiques, la théorie de systèmes de type particuliers.

On a utilisé depuis longtemps la réversibilité (symétrie) pour construire et classer des mouvements périodiques symétriques (orbites). Ces orbites (les familles de Lyapunov) ont été construites pour la première fois par Euler [16] dans le problème des trois corps qu'il a introduit. Hill a considéré les orbites symétriques relativement à deux ensembles de points fixes [27]. Les solutions de Poincaré de première, seconde et troisième espèce dans le problème des trois corps sont symétriques [53].

Considérons quelques exemples de systèmes réversibles :

I. Le système conservatif avec un degré de liberté

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (2.5)$$

est invariant par l'application :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } (t, x, \dot{x}) \rightarrow (-t, x, -\dot{x})$$

avec l'ensemble des points fixes $\mathbf{M} = \{x, \dot{x} : \dot{x} = 0\}$.

II. Le problème restreint des trois corps [63] :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$U = \frac{1-\mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} + \frac{(x^2 + y^2)}{2}$$

$$R_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2, \quad R_2^2 = (x + \mu - 1)^2 + y^2$$

où μ est un paramètre sans dimension.

Le système (2.6) est invariant par l'application

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } (t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) \rightarrow (-t, x, -y, -\dot{x}, \dot{y})$$

avec l'ensemble des points fixes $\mathbf{M} = \{x, y, \dot{x}, \dot{y} : y = \dot{x} = 0\}$.

III. Le corps solide pesant avec un point fixe [2]

$$\begin{cases} A \frac{dp}{dt} - (B - C)qr = P(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3) \\ B \frac{dq}{dt} - (C - A)pr = P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1) \\ C \frac{dr}{dt} - (A - B)qp = P(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2) \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q \\ \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r \\ \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p \end{cases}$$

Ici A, B, C sont les moments d'inertie principaux centraux, x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du centre de masse dans les axes liés, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont les cosinus du vecteur de verticale, dirigé vers le haut, $P = mg$ est le produit de la masse du corps par l'accélération de la pesanteur. Les équations d'Euler-Poisson (2.7) forment un système mécanique réversible du type (2.3) avec les vecteurs $u = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$, $v = (p, q, r)^T$ et sont invariants par l'application

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } (t, p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \rightarrow (-t, -p, -q, -r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

avec l'ensemble des points fixes $\mathbf{M} = \{p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : p = q = r = 0\}$ [80]. Dans le cas général il n'existe pas d'autres ensembles de points fixes.

Supposons que $y_0 = 0$. Alors le système (2.7), à côté de l'ensemble des points fixes $\mathbf{M}$, a également l'ensemble des points fixes $\mathbf{M}_1 = \{p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : \gamma_2 = 0, q = 0\}$ et il y a aussi une invariance par l'application

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } (t, p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \rightarrow (-t, p, -q, r, \gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3)$$

Dans ce cas à (2.7) on peut mettre

$$\mathbf{u} = (\gamma_1, \gamma_3, p, r)^T, \quad \mathbf{v} = (\gamma_2, q)^T$$

L'ensemble $\mathbf{M}_1$ contient la position d'équilibre

$$\gamma_1 = \sin \alpha, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = \cos \alpha, p = \omega \sin \alpha, q = 0, r = \omega \cos \alpha$$

$$(A - C)\omega^2 \sin 2\alpha + 2P(z_0 \sin \alpha - x_0 \cos \alpha) = 0, \omega = \text{constante}$$

Dans cette solution les angles d'Euler sont

$$\varphi = \pi/2, \theta = \alpha, \psi = \omega t + \psi_0, \psi_0 = \text{constante}$$

et l'équilibre du système mécanique réversible représente ici une rotation permanente autour de la verticale avec la vitesse angulaire ω . Les mouvements proches de la rotation permanente sont parfaitement décrits par la théorie locale des systèmes mécaniques réversibles.

Tout mouvement d'un corps solide pesant au cours duquel le vecteur de la vitesse angulaire instantanée est nul au moins deux fois, sera périodique et représente une oscillation. Cette conclusion est une des conséquences élémentaires de la réversibilité. Si $y_0 = 0$, la présence dans le système (2.7) de l'ensemble des points fixes $\mathbf{M}_1$ permet l'existence de "mouvements périodiques symétriques nontriviaux". Pour ces mouvements $\gamma_1(t)$, $\gamma_3(t)$, $p(t)$, $r(t)$ seront des fonctions paires du temps, tandis que $\gamma_2(t)$, $q(t)$ seront des fonctions impaires de t . C'est

pourquoi, en représentant ces fonctions par leurs développements de Fourier, on peut construire et classifier tous les mouvements périodiques d'un corps solide, symétriques par rapport à $\mathbf{M}_1$. De tels mouvements sont, par exemple, les précessions régulières dans les cas d'Euler-Poinsot et de Lagrange-Poisson, aussi bien que les précessions régulières de Grioli. Evidemment, le caractère des mouvements proches des précessions régulières, est parfaitement déterminé par le comportement d'un système mécanique réversible au voisinage du mouvement périodique symétrique [80].

A côté du système (2.1) on considère le système réversible périodique de période T

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m, t \in \mathbf{R} \quad (2.8)$$

invariant par rapport à la transformation

$$(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{G}\mathbf{x}, -t)$$

($\mathbf{G}^2 = id$).

Pour ce système l'ensemble des points fixes est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}$ [79]

$$\mathbf{M}_t = \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{x}, t = \frac{kT}{2} \text{ avec } k \text{ entier}\}$$

Dans le cas où l'application $\mathbf{G}$ est linéaire le système (2.8) a la forme [79] :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^l, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (2.9)$$

avec

$$\mathbf{U}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}, -t) = -\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad \mathbf{V}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}, -t) = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)$$

et l'ensemble des points fixes

$$\mathbf{M}_t = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) : \mathbf{v} = \mathbf{0}, t = \frac{kT}{2} \text{ avec } k \text{ entier}\}$$

Dans le cas où le système (2.8) est périodique par rapport aux variables $v_1, \dots, v_s$ ($1 \leq s \leq n$), V.N. Tkhai, dans [79], introduit le système réversible sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^l, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^s \times \mathbf{T}^{n-s}, t \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (2.10)$$

avec

$$\mathbf{U}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}, -t) = -\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t), \quad \mathbf{V}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}, -t) = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t)$$

et l'ensemble des points fixes

$$\mathbf{M}_t = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) : \sin v_i = 0, v_j = 0, i = 1..s, j = s + 1..n, t = \frac{kT}{2} \text{ avec } k \text{ entier}\}$$

Dans le système (2.10) $\mathbf{T}^{n-s}$ est un tore de dimension $n - s$.

2.2 Mouvements périodiques symétriques

Considérons le système (2.8) qui est un système périodique de période T et réversible.

En raison de la réversibilité si $t \rightarrow \boldsymbol{\varphi}(t)$ est une solution du système (2.8), $t \rightarrow \mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}(-t)$ est aussi une solution.

En raison de la périodicité si $t \rightarrow \boldsymbol{\varphi}(t + nT)$ est une solution du système (2.8), $t \rightarrow \mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}(nT - t)$ est aussi une solution ($n \in \mathbf{Z}$).

Soit

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = x_0 \in \mathbf{M}_t$$

$$\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{kT}{2}\right) = x_1 \in \mathbf{M}_t, \quad k \in \mathbf{N}$$

Alors si on pose

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}(kT - t)$$

$$\boldsymbol{\psi}\left(\frac{kT}{2}\right) = \mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}\left(\frac{kT}{2}\right) = x_1$$

$$\boldsymbol{\psi}(kT) = \mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{\varphi}(0) = x_0$$

Donc, on a une solution $\boldsymbol{\xi}(t)$ de période kT telle que

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(t), & 0 \leq t \leq \frac{kT}{2}, \quad k \in \mathbf{N} \\ \mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}(kT - t), & \frac{kT}{2} \leq t \leq kT \end{cases}$$

Théorème 1 [26, 73, 79]. *Pour qu'un système réversible périodique de période T admette une solution périodique de période kT , $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 1$*

et symétrique par rapport à l'ensemble $\mathbf{M}_t$ il faut et il suffit que pour un $x_0 \in \mathbf{M}_t$ la solution telle que $\varphi(0) = x_0$ vérifie $\varphi\left(\frac{kT}{2}\right) \in \mathbf{M}_t$.

Dans le cas où le système est 2π -périodique par rapport aux variables $v_1, \dots, v_s$ ($1 \leq s \leq n$) il convient d'appliquer le théorème 1 dans l'espace $\mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \times \mathbf{T}^{n-s}$. Par conséquent sur le mouvement T -périodique on a $\mathbf{u} = \varphi(t)$, $\mathbf{v} = \psi(t)$, avec cela

$$\varphi(t+T) = \varphi(t), \quad \psi(t+T) = \psi(t) + 2\pi\mathbf{m}, \quad \mathbf{m} \in \mathbf{Z}^n, \quad m_1 = \dots = m_s = 0$$

Si tous les nombres m_j sont nuls, on a une solution périodique dans le sens ordinaire qui décrit un mouvement oscillatoire. Si $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$, la solution n'est pas périodique. De toute façon, elle décrit un processus de type rotatif périodique.

On considère le système (2.1) qui est un système autonome.

En raison de la réversibilité si $t \rightarrow \varphi(t)$ est une solution du système (2.1), $t \rightarrow \mathbf{G}\varphi(-t)$ est aussi une solution.

En raison de l'autonomie si $t \rightarrow \varphi(t)$ est une solution du système (2.1), $t \rightarrow \mathbf{G}\varphi(-t-a)$ est aussi une solution ($n \in \mathbf{N}$).

Soit

$$\varphi(0) = x_0 \in \mathbf{M}$$

$$\varphi(\tau) = x_1 \in \mathbf{M}$$

(τ est un moment d'intersection de l'ensemble $\mathbf{M}$ avec la courbe $\varphi(t)$).

Alors

$$\psi(t) = \mathbf{G}\varphi(-t+a) = \mathbf{G}\varphi(2\tau-t), \quad a = 2\tau$$

$$\psi(\tau) = \mathbf{G}\varphi(\tau) = \varphi(\tau) = x_1$$

$$\psi(\tau+\tau) = \mathbf{G}\varphi(0) = \varphi(0) = x_0$$

C'est-à-dire on a une solution $\xi(t)$ périodique telle que

$$\xi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & 0 \leq t \leq \tau \\ \mathbf{G}\varphi(2\tau-t), & \tau \leq t \leq 2\tau \end{cases}$$

Théorème 1' [26, 73, 79]. *Pour qu'une courbe intégrale d'un système autonome réversible représente un mouvement périodique il faut et il suffit qu'elle coupe l'ensemble $\mathbf{M}$ en deux points distincts.*

Si, comme par exemple dans le problème du mouvement d'un corps solide pesant, le système possède plusieurs propriétés de réversibilité il leur correspond alors plusieurs ensembles de points fixes dont il faut considérer la réunion.

2.3 Méthode de formation des solutions $2\pi k$ -périodiques d'un système réversible

Quand on considère un problème concret il est important de posséder une méthode pour construire les mouvements périodiques. Il s'avère que cette méthode existe [79] et on formulera son contenu pour le système 2π -périodique réversible du deuxième ordre.

Considérons l'équation du deuxième ordre

$$\ddot{\alpha} + f(\alpha, \dot{\alpha}, t) = 0 \quad (2.11)$$

avec $f(\alpha + 2\pi, \dot{\alpha}, t) = f(\alpha, \dot{\alpha}, t)$ et $f(\alpha, \dot{\alpha}, t + 2\pi) = f(\alpha, \dot{\alpha}, t)$ et, de plus, invariante par rapport à la transformation

$$(\alpha, \dot{\alpha}, t) \rightarrow (-\alpha, \dot{\alpha}, -t)$$

Cela veut dire que l'équation (2.11) est réversible avec l'ensemble des points fixes

$$\mathbf{M}_t = \{(\alpha, \dot{\alpha}, t) : \sin \alpha = 0, t = \pi k \text{ avec } k \text{ entier}\}$$

et que

$$f(\alpha, \dot{\alpha}, t) = -f(-\alpha, \dot{\alpha}, -t)$$

On pose la question comment trouver les solutions $2\pi k$ -périodiques de l'équation (2.11) symétriques relativement à l'ensemble $\mathbf{M}_t$.

Cette méthode se base sur le théorème 1 de la section 2.2 qui donne une condition nécessaire et suffisante d'existence des solutions $2\pi k$ -périodiques de l'équation (2.11).

Théorème 2 (Tkhai). *La solution du système (2.11) sera $2\pi k$ -périodique au sens [79] si*

$$\begin{aligned} \alpha(t_0 + 2\pi k) &= \alpha(t_0) + 2\pi m \\ \dot{\alpha}(t_0 + 2\pi k) &= \dot{\alpha}(t_0), \quad k, m \in \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (2.12)$$

(t_0 est un instant initial).

Si

$$t_0 = \pi l, \alpha_0 = \pi n, \quad l, n \in \mathbf{Z}$$

la solution est symétrique relativement à l'ensemble des points fixes $\mathbf{M}_t$.

La condition (2.12) répond à la solution où la fonction $\dot{\alpha}(t)$ est $2\pi k$ -périodique, et la fonction $\alpha(t)$ augmente de $2\pi m$ sur une période.

Si $m = 0$, on a des oscillations et le théorème 2 coïncide avec le théorème de Heinbockel-Struble [73, 26]. Si $m \neq 0$, on a des rotations.

De cette façon, le théorème 2 donne la méthode de construction de tous les mouvements d'oscillation aussi bien que de rotation $2\pi k$ -périodiques.

Pour trouver la vitesse initiale $\dot{\alpha}(0)$ si $\alpha(0) = 0$ pour les rotations (2.12) $2\pi k$ -périodiques on construit une image $\mathbf{M}_0^{\pi k}$ de l'ensemble $\mathbf{M}_0 = \{t, \alpha, \dot{\alpha} : t = 0, \alpha = 0\}$, prescrite par l'équation (2.11). Alors tous les points d'intersection de l'ensemble $\mathbf{M}_0$ avec les droites $\alpha = \pi m$ appartiennent aux mouvements $2\pi k$ -périodiques si $t = \pi k$.

Pour construire l'image $\mathbf{M}_0^{\pi k}$ on résout le problème de Cauchy sur $[0, \pi k]$ pour l'équation (2.11) avec les conditions initiales $\alpha(0) = 0, \dot{\alpha}(0) = v_0$ où $v_0 \in \mathbf{M}_0$ et avec les conditions initiales $\alpha(0) = 0, \dot{\alpha}(0) = v_1$ où $v_1 \in \mathbf{M}_0$.

Si v_0 et v_1 sont tels que $\alpha(0, v_0, \pi k) > \pi m > \alpha(0, v_1, \pi k)$ ou $\alpha(0, v_0, \pi k) < \pi m < \alpha(0, v_1, \pi k)$, d'après le théorème de continuité de la solution d'un problème de Cauchy par rapport aux conditions initiales, il existe un point du segment $]v_0, v_1[$ tel que la solution correspondante vérifie $\alpha(\pi k) = \pi m$. Ce point détermine une solution symétrique périodique au sens de [79].

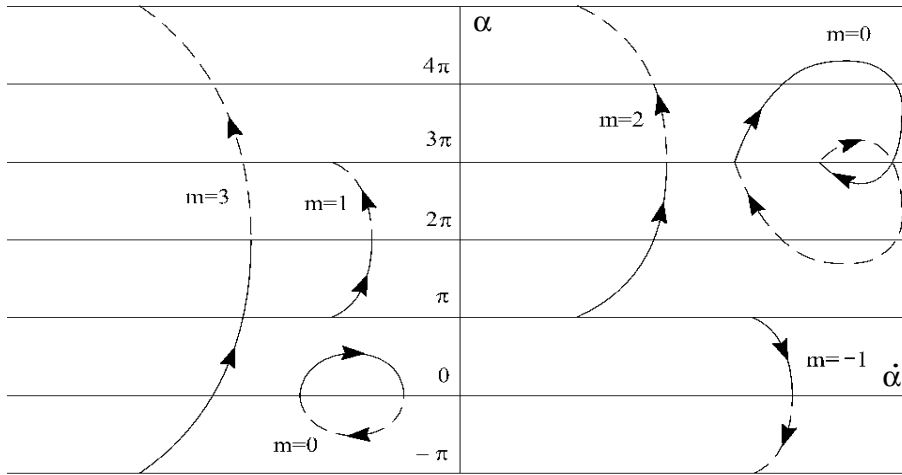


Figure 3 : Solutions périodiques (au sens de [79])

Ainsi l'existence de la solution $2\pi k$ -périodique est établie d'une façon qualitativement exacte. Ensuite la valeur de vitesse initiale $\dot{\alpha}(0) \in]v_0, v_1[$ est précisée si nécessaire par la méthode d'itérations.

Cette méthode sera appliquée dans le chapitre 5 pour construire des mouvements périodiques dans le problème d'un satellite sur un plan d'une orbite elliptique.

2.4 Prolongement d'un mouvement périodique selon un paramètre

Le problème donné est un des principaux problèmes de la théorie du mouvement périodique. C'est Poincaré [53] qui a posé ce problème et a également proposé les méthodes essentielles de sa solution. On considère le système, dépendant du paramètre μ . On admet, que si $\mu = 0$, le système non-perturbé a une solution périodique $p(t)$. Alors se pose la question de l'existence d'une solution périodique pour $\mu \neq 0$, se réduisant à la solution $p(t)$ si $\mu = 0$.

Il est démontré dans [78] (Tkhai) que deux cas doivent être considéré

- le cas dit “grossier” si l'existence de solution périodique pour $\mu \neq 0$ et assez petit n'exige que des propriétés du système non-perturbé
- le cas dit “non-grossier” si cette existence exige à la fois des propriétés du système non-perturbé et des perturbations

Le système non-perturbé peut être conservatif, hamiltonien, stable au sens de Lyapunov etc. Les perturbations conditionnées par la signification $\mu \neq 0$ appartiennent à une classe bien déterminée. Donc en résolvant le problème il est important d'avoir une idée précise du type de système non-perturbé et du genre de perturbations considérées.

Dans le cas où le système non-perturbé est réversible et les perturbations sont considérées comme réversibles on peut affirmer

Théorème 3 (Tkhai [71, 77, 78]). *Dans le cas grossier si un système non-perturbé réversible (resp. un système autonome) a une solution périodique $t \rightarrow p(t)$ il y a aussi une famille à $l-n$ (resp. $l-n+1$) paramètres de solutions périodiques contenant la solution $t \rightarrow p(t)$, cette famille se conserve pour μ voisin de 0 dans la classe de perturbations périodiques réversibles (resp. autonomes).*

Signalons que la condition d'être grossier peut être constructivement vérifiée.

Le problème se résout également dans le cas où le système non-perturbé est réversible et les perturbations sont non-réversibles.

Les cas non-grossiers sont plus variés. Cependant on propose des méthodes pour les étudier et fondées sur une théorie générale.

2.5 Mouvements périodiques d'un système quasi-autonome du deuxième ordre

Lemme (Tkhai, communication particulière). *On considère le système autonome dans $\mathbf{R}^2$*

$$\begin{cases} \dot{u} = U(u, v) \\ \dot{v} = V(u, v) \end{cases} \quad (2.13)$$

que l'on suppose réversible, c'est-à-dire que

$$U(u, -v) = -U(u, v), \quad V(u, -v) = V(u, v)$$

et on suppose que les fonctions U et V sont différentiables à un ordre suffisamment élevé.

Soit $t \mapsto (u(t), v(t))$ une solution du système (2.13) que l'on suppose symétrique par rapport à l'axe Ou , 2π périodique et telle que $v(0) = 0$. De plus, on suppose que la solution considérée n'est pas un équilibre.

Alors on peut en conclure que

$$\left. \frac{d}{dt}v(t) \right|_{t=\pi} \neq 0$$

.

Preuve

Dans la solution symétrique périodique $(u(t), v(t))$ on a

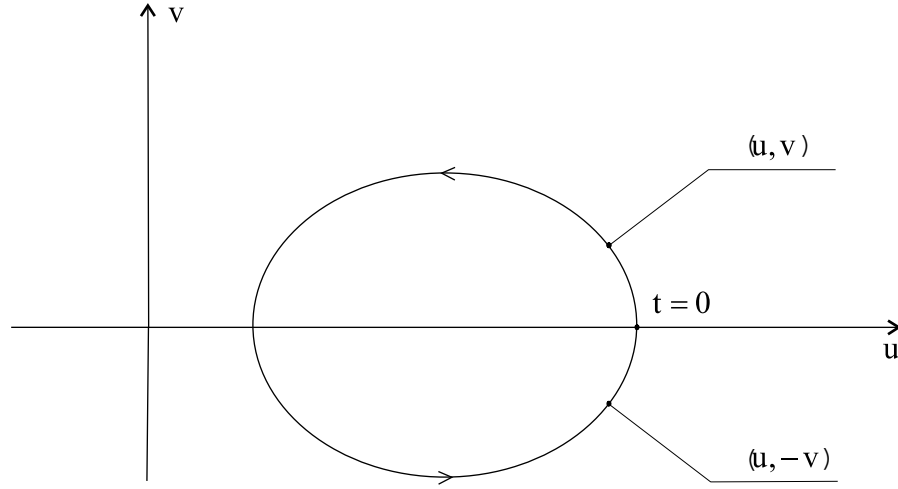


Figure 4

On a $v(0) = 0$. Au point (u, v) (le paramètre t est positif) correspond le point symétrique $(u, -v)$ (le paramètre t est négatif). Par conséquent $u(t)$ est une fonction paire par rapport à t et $v(t)$ est une fonction impaire.

En raison de la réversibilité du système (2.13) le système aux variations est sous la forme

$$\begin{cases} \dot{p} = a_-(t)p + a_+(t)q \\ \dot{q} = b_+(t)p + b_-(t)q \end{cases} \quad (2.14)$$

où les fonctions $a_-(t)$, $b_-(t)$ ($a_+(t)$, $b_+(t)$) sont des fonctions impaires (paires) par rapport à t .

Le système (2.14) est un système linéaire, homogène, réversible et invariant par rapport à chacune des transformations

$$(p, q, t) \rightarrow (-p, q, -t)$$

$$(p, q, t) \rightarrow (p, -q, -t)$$

En raison de l'autonomie du système (2.13)

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{d}{dt}u(t) \\ q(t) &= \frac{d}{dt}v(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

est évidemment une solution du système (2.14). Les fonctions $u(t)$, $v(t)$ représentent une solution symétrique de période 2π (non triviale)

du système (2.13) et $p(t)$ est une fonction impaire ($p(0) = 0$) de période 2π , $q(t)$ est une fonction paire de période 2π . Par conséquent $(p(t), q(t))$ est une solution non triviale de période 2π du système (2.14). On a alors

$$p(\pi) = \frac{d}{dt}u(\pi) = 0$$

$$q(\pi) = \frac{d}{dt}v(\pi) \neq 0$$

Théorème 4 (Tkhai, communication particulière).

On considère le système non-perturbé dans $\mathbf{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{u} = U(u, v) \\ \dot{v} = V(u, v) \end{cases} \quad (2.16)$$

que l'on suppose réversible, c'est-à-dire que

$$U(u, -v) = -U(u, v), \quad V(u, -v) = V(u, v)$$

On suppose que ce système possède une famille à un paramètre h de solutions de périodes $T(h)$ telle que $T(h^) = 2\pi$ où h décrit un intervalle de $\mathbf{R}$ et*

$$\frac{dT}{dh}(h^*) \neq 0,$$

(par exemple h peut être la constante de l'énergie d'un mouvement conservatif).

On considère aussi le système perturbé dans $\mathbf{R}^2$, dépendant du petit paramètre μ

$$\begin{cases} \dot{u} = U(u, v) + \mu U_1(\mu, u, v, t) \\ \dot{v} = V(u, v) + \mu V_1(\mu, u, v, t) \end{cases} \quad (2.17)$$

que l'on suppose aussi réversible (par la même transformation)

$$U(u, -v) = -U(u, v), \quad V(u, -v) = V(u, v)$$

$$U_1(\mu, u, -v, -t) = -U_1(\mu, u, v, t), \quad V_1(\mu, u, -v, -t) = V_1(\mu, u, v, t)$$

On suppose que les perturbations μU_1 , μV_1 sont 2π -périodiques pour le temps t . Si $\mu = 0$, on aura un système non-perturbé (2.16). Pour $|\mu| \neq 0$ et petit on aura un système perturbé, proche d'un système réversible autonome.

Alors on peut en conclure que pour μ assez voisin de 0 le système perturbé (2.17) a une seule solution de période 2π qui se réduit à la solution de

période 2π du système non-perturbé (2.16) pour $\mu = 0$. L'existence de la solution ne dépend pas de la forme concrète des fonctions μU_1 , μV_1 .

Démonstration

Soit

$$u(\mu, u^0, v^0, t), \quad v(\mu, u^0, v^0, t)$$

la solution du système (2.17) avec la valeur initiale (u^0, v^0) pour $t = 0$.

La condition nécessaire et suffisante d'existence de la solution de période 2π est (Théorème 1)

$$v(\mu, u^0, 0, \pi) \equiv v(0, u^0, 0, \pi) + \mu v_1(\mu, u^0, 0, \pi) = 0 \quad (2.18)$$

où $t \mapsto (u(0, u^0, 0, t), v(0, u^0, 0, t))$ est la solution du système non perturbé, qui coupe l'ensemble des points fixe $\mathbf{M} = \{(u, v) : v = 0\}$ pour $t = \pi$.

Lorsque $\mu = 0$ l'équation (2.18) admet la solution $u^0 = u^*$.

Le système non perturbé (2.16) est un système autonome et la condition d'existence d'une solution de période 2τ est (Théorème 1')

$$v(0, u^0, 0, \tau) = 0 \quad (2.19)$$

(τ est un instant où la courbe $t \mapsto (u(0, u^0, 0, t), v(0, u^0, 0, t))$ coupe l'ensemble des points fixes). Par hypothèse, l'équation (2.19) admet une famille de solutions de la forme $u^0 = \phi(h)$, $\tau = T(h)/2$, c'est-à-dire que

$$v(0, \phi(h), 0, T(h)/2) = 0 \quad (2.20)$$

où le paramètre h de la famille décrit un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\phi(h^*) = u^*$, $T(h^*)/2 = \pi$. En dérivant cette relation au point $h = h^*$ on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial u^0}(0, u^*, 0, \pi) \frac{d\phi}{dh}(h^*) + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial t}(0, u^*, 0, \pi) \frac{dT}{dh}(h^*) = 0 \quad (2.21)$$

Par hypothèse $\frac{dT}{dh}(h^*) \neq 0$ et d'après le lemme $\frac{\partial v}{\partial t}(0, u^*, 0, \pi) \neq 0$. Donc, nécessairement

$$\frac{\partial v}{\partial u^0}(0, u^*, 0, \pi) \neq 0$$

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites à la relation (2.18) : il existe un intervalle contenant 0 et une fonction continue unique $\mu \mapsto \psi(\mu)$ définie sur cet intervalle et telle que

$$v(\mu, \psi(\mu), 0, \pi) = 0, \quad \psi(0) = u^*$$

c'est-à-dire que pour $|\mu| \neq 0$ assez petit, la solution du système perturbé telle que $u^0 = \psi(\mu)$ est de période 2π .

Remarque.

On est dans le cas grossier.

2.6 Système proche d'un système conservatif à un degré de liberté

Considérons l'équation

$$\ddot{z} + f(z) = \mu F(\mu, z, \dot{z}, t) \quad (2.22)$$

Etudions le problème de l'existence d'une oscillation, se transformant pour $\mu = 0$ en une oscillation de l'équation non-perturbée, dans le cas d'une équation réversible. Alors on obtient une équation réversible sous l'une ou l'autre des conditions suivantes

$$f(-z) = -f(z), \quad F(\mu, -z, \dot{z}, -t) = -F(\mu, z, \dot{z}, t) \quad (2.23)$$

ou

$$F(\mu, z, -\dot{z}, -t) = F(\mu, z, \dot{z}, t) \quad (2.24)$$

Dans chaque cas (2.23), (2.24) l'équation (2.22) est exprimée sous la forme (2.17).

Si $\mu = 0$, on aura un système conservatif avec un degré de liberté. Une analyse complète de ce système est effectuée par la méthode du portrait de phase. Supposons que le système admette une famille d'oscillations. Ces oscillations sont symétriques par rapport à l'axe $\dot{z}$ dans le cas de (2.23) (Figure 5 a), et à l'axe z dans le cas de (2.24) (Figure 5 b), 5 c))

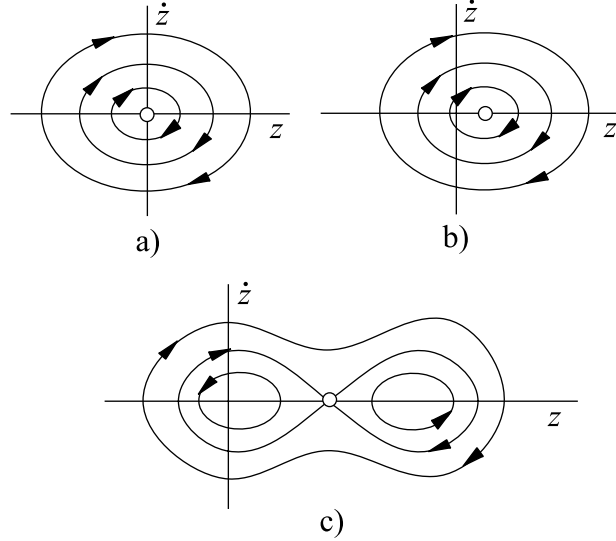


Figure 5 : Oscillations périodiques symétriques du système conservatif avec un degré de liberté

Le système (2.22), (2.23) ou ((2.22), (2.24)) est réversible avec l'ensemble des points fixes $\{z, \dot{z} : z = 0\}$ ou $(\{z, \dot{z} : \dot{z} = 0\})$. Il découle du théorème 3 et du théorème 4 un résultat plus précis pour les systèmes à un degré de liberté.

Théorème 5 (Tkhai [86]). *Soit un système quasi-autonome périodique réversible. Si le système non-perturbé est conservatif et possède une solution $2\pi k$ -périodique symétrique oscillatoire dont la période est $T(h)$ (h est la constante de l'énergie) et si pour une valeur h^* :*

$$T(h^*) = \frac{2\pi k}{m}, \quad k, m \in \mathbf{N}, \quad \frac{dT}{dh}(h^*) \neq 0$$

alors cette solution se conserve par perturbations pour $\mu \neq 0$ (et assez petit).

Ce résultat sera appliqué dans le chapitre 5 au problème des oscillations d'un satellite au voisinage d'une orbite circulaire.

2.7 Méthode de détermination des exposants caractéristiques d'un système périodique réversible linéaire

Le système réversible linéaire avec des coefficients périodiques est de la forme

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}_-(t)\mathbf{u} + \mathbf{A}_+(t)\mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{B}_+(t)\mathbf{u} + \mathbf{B}_-(t)\mathbf{v} \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{u} \in \mathbf{R}^l, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n \quad (l \geq n)$$

où $\mathbf{A}_+(t), \mathbf{B}_+(t)$ ($\mathbf{A}_-(t), \mathbf{B}_-(t)$) sont des matrices dont les composantes représentent des fonctions paires (impaires), le point signifie la dérivation par rapport à t .

Décrivons la méthode de définition des exposants caractéristiques du système (2.25), qui permet de trouver ces exposants en résolvant n fois (et non $n + l$ fois!) le problème de Cauchy pour le système (2.25) [79].

Ce système est invariant par rapport à chacune des transformations :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \rightarrow (-\mathbf{u}, \mathbf{v}, -t)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) \rightarrow (\mathbf{u}, -\mathbf{v}, -t)$$

Supposons que le système d'équations (2.25) ait la solution

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad \mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\psi}(t) \quad (2.26)$$

Alors en raison de réversibilité il existe aussi les solutions

$$1) \quad \mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) + \boldsymbol{\varphi}(-t), \quad \mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\psi}(t) - \boldsymbol{\psi}(-t) \quad (2.27)$$

$$2) \quad \mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\varphi}(-t), \quad \mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\psi}(t) + \boldsymbol{\psi}(-t) \quad (2.28)$$

Dans (2.27) on a $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$ et dans (2.28) on a $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$. De cette façon on peut construire la matrice fondamentale de solutions. A cause de l'unicité de la matrice fondamentale on a

$$\mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^+(t) & \mathbf{U}^-(t) \\ \mathbf{V}^-(t) & \mathbf{V}^+(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(0) = \mathbf{I}$$

où $\mathbf{U}^+$, $\mathbf{V}^+$ ($\mathbf{U}^-$, $\mathbf{V}^-$) sont des matrices dont les composantes sont des fonctions paires (impaires)

$$\mathbf{U}^+(t) = \begin{pmatrix} U_{11}^+(t) & \dots & U_{1l}^+(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{l1}^+(t) & \dots & U_{ll}^+(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^-(t) = \begin{pmatrix} U_{11}^-(t) & \dots & U_{1n}^-(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{l1}^-(t) & \dots & U_{ln}^-(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}^-(t) = \begin{pmatrix} V_{11}^-(t) & \dots & V_{1l}^-(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n1}^-(t) & \dots & V_{nl}^-(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}^+(t) = \begin{pmatrix} V_{11}^+(t) & \dots & V_{1n}^+(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n1}^+(t) & \dots & V_{nn}^+(t) \end{pmatrix}$$

A l'instant T (période du système (2.25))

$$\mathbf{S}(T) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^+(T) & \mathbf{U}^-(T) \\ \mathbf{V}^-(T) & \mathbf{V}^+(T) \end{pmatrix}$$

Alors

$$\mathbf{S}(-T) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^+(T) & -\mathbf{U}^-(T) \\ -\mathbf{V}^-(T) & \mathbf{V}^+(T) \end{pmatrix}$$

Considérons la matrice $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} (\mathbf{S}(T) + \mathbf{S}(-T)) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^+(T) & 0 \\ 0 & \mathbf{V}^+(T) \end{pmatrix}$$

Si ρ est une valeur propre de la matrice $\mathbf{S}(T)$, alors $\frac{1}{\rho}$ est une valeur propre de la matrice $\mathbf{S}(-T)$ donc

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)$$

est une valeur propre de la matrice $\mathbf{P}$.

D'où on définit ρ comme racine d'équation quadratique

$$\rho^2 - 2\beta\rho + 1 = 0$$

Ainsi pour trouver la propre valeur ρ de la matrice $\mathbf{S}(T)$ il faut déterminer la propre valeur β de la matrice $\mathbf{P}$.

Ecrivons :

$$|\mathbf{P} - \beta\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} \mathbf{U}^+(T) - \beta\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{V}^+(T) - \beta\mathbf{I} \end{vmatrix} = \det |\mathbf{U}^+(T) - \beta\mathbf{I}| \cdot \det |\mathbf{V}^+(T) - \beta\mathbf{I}| \quad (2.29)$$

où $\mathbf{U}^+$ est une matrice de taille $l \times l$ et $\mathbf{V}^+$ est une matrice de taille $n \times n$.

Formulons le théorème :

Théorème 6 (Tkhai [79]). *Le système réversible linéaire (2.25) a au moins $l - n$ exposants caractéristiques et les diviseurs élémentaires qui leur correspondent sont simples.*

Donc, parmi les racines de l'équation (2.29) $l - n$ racines sont nulles, le reste des $2n$ racines est réparti en paires ρ et $\frac{1}{\rho}$.

On peut écrire :

$$|\mathbf{P} - \beta\mathbf{I}| = (\beta - 1)^{l-n} \cdot Q_n^2(\beta) = (\beta - 1)^{l-n} \cdot \det |\mathbf{V}^+(T) - \beta\mathbf{I}| = 0$$

où $Q_n(\beta)$ est un polynôme de degré n de β .

β est défini comme la solution d'équation

$$\det |\mathbf{V}^+(T) - \beta\mathbf{I}| = 0 \quad (2.30)$$

Donc, pour trouver les exposants caractéristiques λ_k du système (2.25) il est nécessaire :

- Construire la matrice $\mathbf{V}^+(T)$. Pour cela il faut résoudre n fois le problème de Cauchy sur la période $[0, T]$ pour l'équation (2.25) avec

les conditions initiales

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où le vecteur $\mathbf{v}(0)$ de la j -ième solution du problème de Cauchy représente une colonne comprenant des zéros et une unité qui se trouve en j -ième position.

- Trouver les valeurs propres β de la matrice $\mathbf{V}^+(T)$.
- Vérifier la condition $|\beta| < 1$.

De cette façon est décrite la méthode de détermination des exposants caractéristiques pour un système réversible linéaire avec des coefficients périodiques.

Outre cela on peut exprimer la condition pour que les exposants caractéristiques soient imaginaires.

Si $|\beta| < 1$, alors $|\rho| = 1$ et les exposants caractéristiques sont purement imaginaires et $\lambda_k = \pm \frac{1}{2\pi} i\theta$.

Cette méthode de détermination des exposants caractéristiques sera appliquée dans le chapitre 4 au problème du roulement d'un ellipsoïde creux pesant sur un plan et dans le chapitre 5 au problème d'un satellite sur une orbite elliptique.

2.8 Résonance paramétrique dans le système réversible du troisième ordre

Remarquons que la stabilité de la solution périodique d'un système 2π -périodique par rapport à t et réversible d'équations différentielles du n -ième ordre quasi-autonome a été étudiée dans [70] (Tkhai). De plus on a étudié la stabilité dans le cas de la résonance paramétrique. La résonance paramétrique conduit en principe à l'instabilité, qui découle de l'inégalité à zéro d'un des coefficients de la forme normale du système linéaire. Il est assez problématique de calculer le coefficient mentionné ci-dessus en raison de la normalisation du système périodique et en même temps dépendant du petit paramètre ε . Cependant il suffit de trouver ce coefficient en première approximation par rapport à ε ce qui simplifie le problème. On aura des

formules concrètes permettant de calculer le coefficient dans le cas général du système réversible du troisième ordre.

On considère le système 2π -périodique réversible d'équations différentielles du troisième ordre quasi-autonome

$$\begin{cases} \dot{u}_1 &= U_1^0(u_1, u_2, v) + \varepsilon U_1(\varepsilon, u_1, u_2, v, t) \\ \dot{u}_2 &= U_2^0(u_1, u_2, v) + \varepsilon U_2(\varepsilon, u_1, u_2, v, t) \\ \dot{v} &= V^0(u_1, u_2, v) + \varepsilon V(\varepsilon, u_1, u_2, v, t) \end{cases} \quad (2.31)$$

(ε est un petit paramètre) invariant par substitution $(u_1, u_2, v, t) \rightarrow (u_1, u_2, -v, -t)$. On suppose que le système non-perturbé, obtenu de (2.31) pour $\varepsilon = 0$, admet la solution constante $(u_1^0, u_2^0, 0)$, appartenant à l'ensemble des points fixes $M = \{u_1, u_2, v : v = 0\}$. En raison de la réversibilité du système initial (2.31) les équations aux variations pour cette solution sont de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= b_1^0 y \\ \dot{x}_2 &= b_2^0 y \\ \dot{y} &= a_1^0 x_1 + a_2^0 x_2 \end{cases} \quad (2.32)$$

($a_1^0, a_2^0, b_1^0, b_2^0$ sont des constantes). Si $a_1^0 b_1^0 + a_2^0 b_2^0 \neq -k^2$, $k \in \mathbf{N}$, ou $a_1^0 b_1^0 + a_2^0 b_2^0 = 0$, mais $|a_1^0| + |a_2^0| \neq 0$, le système (2.31) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit admet la solution 2π -périodique [71]

$$u_1^*(\varepsilon, t) = u_1^0 + \varepsilon u_1^1(\varepsilon, t), \quad u_2^*(\varepsilon, t) = u_2^0 + \varepsilon u_2^1(\varepsilon, t), \quad v^*(\varepsilon, t) = \varepsilon v_1(\varepsilon, t) \quad (2.33)$$

symétrique par rapport à l'ensemble M . On suppose que les fonctions $u_1^1(\varepsilon, t)$, $u_2^1(\varepsilon, t)$, $v_1(\varepsilon, t)$ sont analytiques par rapport au paramètre ε .

On formule le problème sur la stabilité de la solution périodique (2.33) du système (2.31) et on considère, d'abord le système à l'approximation linéaire en ε

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \varepsilon \cdot a_{11}(t)x_1 + \varepsilon \cdot a_{12}(t)x_2 + (b_1^0 + \varepsilon \cdot b_1(t))y + \varepsilon^2(\quad) + \dots \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon \cdot a_{21}(t)x_1 + \varepsilon \cdot a_{22}(t)x_2 + (b_2^0 + \varepsilon \cdot b_2(t))y + \varepsilon^2(\quad) + \dots \\ \dot{y} &= (a_1^0 + \varepsilon \cdot a_1(t))x_1 + (a_2^0 + \varepsilon \cdot a_2(t))x_2 + \varepsilon \cdot a_{33}(t)y + \varepsilon^2(\quad) + \dots \end{cases} \quad (2.34)$$

En raison de la réversibilité du système initial (2.31) et de la symétrie de la solution (2.33) les équations (2.34) seront invariantes par rapport à chaque transformation

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, y, t) &\rightarrow (x_1, x_2, -y, -t) \\ (x_1, x_2, y, t) &\rightarrow (-x_1, -x_2, y, -t).\end{aligned}$$

Cela veut dire que dans (2.34) les fonctions $a_{sj}(t)$ sont paires, et les fonctions $b_s(t)$, $a_j(t)$ sont impaires par t . Par conséquent on peut représenter ces fonctions par des développements trigonométriques de Fourier comme ceci

$$\begin{aligned}a_{sj} &= \sum_k a_{sj}^{(k)} \sin kt \\ b_s &= b_s^* + \sum_k b_s^{(k)} \cos kt \\ a_j &= a_j^* + \sum_k a_j^{(k)} \cos kt\end{aligned}\tag{2.35}$$

La partie de droite du système (2.34) dépend du paramètre ε . Si $\varepsilon = 0$, le système (2.34) est autonome et les racines de l'équation caractéristique sont

$$\lambda_1 = \sqrt{a_1^0 b_1^0 + a_2^0 b_2^0}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{a_1^0 b_1^0 + a_2^0 b_2^0}, \quad \lambda_3 = 0$$

Si $a_1^0 b_1^0 + a_2^0 b_2^0 < 0$, on a des racines purement imaginaires $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$.

Le système (2.31) possède toujours un exposant caractéristique égal à zéro [89, 81]. C'est pourquoi, conformément à la théorie de Lyapunov-Floquet le système (2.31) admet l'intégrale première

$$V(x_1, x_2, y, \varepsilon, t) = A_1(\varepsilon, t)x_1 + A_2(\varepsilon, t)x_2 + B(\varepsilon, t)y = h \text{ (constante)}\tag{2.36}$$

avec des coefficients périodiques par rapport à t . Donc, en raison de la réversibilité du système initial (2.31), les fonctions $A_1(\varepsilon, t)$, $A_2(\varepsilon, t)$ seront paires, tandis que la fonction $B(\varepsilon, t)$ sera impaire. Outre cela, il est évident que ces coefficients dépendent du paramètre ε . Admettons que

$$\begin{aligned}A_j(\varepsilon, t) &= \alpha_j^0 + \varepsilon \cdot \alpha_j(\varepsilon, t), \quad j = 1, 2 \\ B(\varepsilon, t) &= \varepsilon \cdot \beta(\varepsilon, t)\end{aligned}\tag{2.37}$$

et calculons la dérivée totale de la fonction V au sens du système (2.31). On a

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} = & (\dot{\alpha}_1^0 + \varepsilon \dot{\alpha}_1) x_1 + (\dot{\alpha}_2^0 + \varepsilon \dot{\alpha}_2) x_2 + (\varepsilon \dot{\beta}) y + \\
& + (\alpha_1^0 + \varepsilon \alpha_1) [\varepsilon a_{11} x_1 + \varepsilon a_{12} x_2 + (b_1^0 + \varepsilon b_1) y + \varepsilon^2(\dots) + \dots] + \\
& + (\alpha_2^0 + \varepsilon \alpha_2) [\varepsilon a_{21} x_1 + \varepsilon a_{22} x_2 + (b_2^0 + \varepsilon b_2) y + \varepsilon^2(\dots) + \dots] + \\
& + \varepsilon \beta [(a_1^0 + \varepsilon a_1) x_1 + (a_2^0 + \varepsilon a_2) x_2 + \varepsilon \cdot a_{33} y + \varepsilon^2(\dots) + \dots]
\end{aligned}$$

La nullité de cette dérivée conduit aux équations que doivent vérifier les fonctions inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \beta$. On identifie les coefficients des mêmes puissances de ε ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0 : \quad & \dot{\alpha}_1^0 = 0, \quad \dot{\alpha}_2^0 = 0, \\
& \alpha_1^0 b_1^0 + \alpha_2^0 b_2^0 = 0
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\varepsilon^1 : \quad \begin{cases} \dot{\alpha}_1(0, t) + \alpha_1^0(0, t) a_{11} + \alpha_2^0(0, t) a_{21} + a_1^0 \beta(0, t) = 0 \\ \dot{\alpha}_2(0, t) + \alpha_1^0(0, t) a_{12} + \alpha_2^0(0, t) a_{22} + a_2^0 \beta(0, t) = 0 \\ \dot{\beta}(0, t) + \alpha_1^0 b_1(t) + \alpha_1(0, t) b_1^0 + \alpha_2^0 b_2(t) + \alpha_2(0, t) b_2^0 = 0 \end{cases} \tag{2.39}$$

$$\varepsilon^2 : \quad \dots$$

La première de ces équations sert à déterminer α_1^0, α_2^0 et laisse une certaine liberté dans leur choix. Admettons que

$$\begin{aligned}
\alpha_j(0, t) &= \alpha_{j0} + \sum_k \alpha_{jk} \cos kt, \quad j = 1, 2 \\
\beta(0, t) &= \sum_k \beta_k \sin kt
\end{aligned}$$

($\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{11}, \alpha_{21}, \beta_1, \beta_2$ sont des constantes) et substituons ces expressions

dans le système (2.39). Il s'ensuit

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_k k \alpha_{1k} \sin kt = a_1^0 \sum_k \beta_k \sin kt + \sum_k (\alpha_1^0 a_{11}^{(k)} + \alpha_2^0 a_{21}^{(k)}) \sin kt \\ \sum_k k \alpha_{2k} \sin kt = a_2^0 \sum_k \beta_k \sin kt + \sum_k (\alpha_1^0 a_{12}^{(k)} + \alpha_2^0 a_{22}^{(k)}) \sin kt \\ - \sum_k k \beta_k \cos kt = b_1^0 (\alpha_{10} + \sum_k \alpha_{1k} \cos kt) + b_2^0 (\alpha_{20} + \sum_k \alpha_{2k} \cos kt) + \\ \alpha_1^0 b_1^* + \alpha_2^0 b_2^* + \sum_k (\alpha_1^0 b_1^{(k)} + \alpha_2^0 b_2^{(k)}) \cos kt \end{array} \right.$$

En égalant des coefficients des harmoniques de Fourier identiques on obtient

$$\begin{aligned} b_1^0 \alpha_{10} + b_2^0 \alpha_{20} + \alpha_1^0 b_1^* + \alpha_2^0 b_2^* &= 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} k \alpha_{1k} = a_1^0 \beta_k + \alpha_1^0 a_{11}^{(k)} + \alpha_2^0 a_{21}^{(k)} \\ k \alpha_{2k} = a_2^0 \beta_k + \alpha_1^0 a_{12}^{(k)} + \alpha_2^0 a_{22}^{(k)} \\ -k \beta_k = b_1^0 \alpha_{1k} + b_2^0 \alpha_{2k} + \alpha_1^0 b_1^{(k)} + \alpha_2^0 b_2^{(k)} \quad k = 1, 2, \dots \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Substituons les valeurs de α_{1k}, α_{2k} dans la troisième équation. Alors on a une équation linéaire pour déterminer β_k

$$\begin{aligned} (a_1^0 b_1^0 + a_2^0 b_2^0 + k^2) \beta_k + k (\alpha_1^0 b_1^{(k)} + \alpha_2^0 b_2^{(k)}) + \\ + \alpha_1^0 (b_1^0 a_{11}^{(k)} + b_2^0 a_{12}^{(k)}) + \alpha_2^0 (b_1^0 a_{21}^{(k)} + b_2^0 a_{22}^{(k)}) = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

avec cela α_1^0, α_2^0 satisfont la condition (2.38).

Si, pour tout entier naturel k , on a

$$\Delta \equiv a_1^0 b_1^0 + a_2^0 b_2^0 + k^2 \neq 0$$

alors tous les β_k , donc α_{1k}, α_{2k} , se définissent d'une seule manière. Cette condition est toujours réalisée en l'absence de résonance paramétrique.

En présence de résonance paramétrique $2\omega = p = 2l - 1$, $l \in \mathbf{N}$, on a

$$a_1^0 b_1^0 + a_2^0 b_2^0 = -(2l - 1)^2 / 4$$

et $\Delta = 0$ si $(2l - 1)^2 = 4k^2$ ce qui est impossible. Par conséquent, si p est impair, la transformation se définit également d'une seule manière.

Dans les cas mentionnés admettons que

$$\alpha_1^0 = b_2^0, \alpha_2^0 = -b_1^0, \alpha_{10} = -b_2^0, \alpha_{20} = b_1^0 - \frac{\alpha_1^0 b_1^* + \alpha_2^0 b_2^*}{b_2^0} \quad (2.42)$$

Alors les coefficients $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \beta_k$ sont calculés par les formules

$$\begin{cases} \alpha_{1k} &= \frac{1}{k}(a_1^0 f_k + b_2^0 a_{11}^{(k)} - b_1^0 a_{21}^{(k)}) \\ \alpha_{2k} &= \frac{1}{k}(a_2^0 f_k + b_2^0 a_{12}^{(k)} - b_1^0 a_{22}^{(k)}) \\ \beta_k &= f_k \end{cases} \quad (2.43)$$

où

$$f_k = -\frac{b_1^0(b_2^0 a_{11}^{(k)} - b_1^0 a_{21}^{(k)}) + b_2^0(b_2^0 a_{12}^{(k)} - b_1^0 a_{22}^{(k)}) + k(b_2^0 b_1^{(k)} - b_1^0 b_2^{(k)})}{b_1^0 a_1^0 + b_2^0 a_2^0 + k^2}$$

Admettons qu'il y a la résonance paramétrique $2\omega = p = 2l$, $l \in \mathbf{N}$. Alors, si $k = l$, on a $\Delta = 0$. Donc, dans ce cas on ne peut pas utiliser les formules (2.43) pour éliminer du système (2.34) une des équations (pour x_1 , ou x_2).

On peut se servir des formules (2.43) y compris dans le cas particulier de résonance paramétrique $\omega = l$, où dans le système (2.34) les premiers l harmoniques sont absents. Dans ce cas les équations (2.41) donnent : $\beta_1 = \dots = \beta_l = 0$, $\beta_{l+1}, \beta_{l+2}, \dots$ sont déterminés d'une seule manière. Avec cela les formules (2.42) gardent toujours leur valeur.

Conclusion 1. *Les coefficients $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \beta_k$ de l'intégrale sont déterminés les formules ((2.42), (2.43)) dans les cas suivants :*

- a) *il n'y a pas de résonance paramétrique ;*
- b) *il y a une résonance paramétrique $2\omega = p = 2l - 1$, $l \in \mathbf{N}$;*
- c) *il y a une résonance paramétrique $\omega = l \in \mathbf{N}$, mais le système (2.34) ne contient pas l premiers harmoniques.*

Pour les cas ci-dessus abaissons l'ordre du système (2.34) à l'aide de l'intégrale V . Pour cela on déduit de (2.36)

$$x_1 = \frac{1}{\alpha_1^0 + \varepsilon \alpha_1} \left(V - (\alpha_2^0 + \varepsilon \alpha_2) x_2 - (\varepsilon \beta) y \right)$$

et on substitut l'expression obtenue dans le système (2.34). On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = \left[\varepsilon a_{21} \left(-\frac{\alpha_2^0 + \varepsilon \alpha_2}{\alpha_1^0 + \varepsilon \alpha_1} \right) + \varepsilon a_{22} \right] x_2 + \\ \quad + \left[\varepsilon a_{21} \left(-\frac{\varepsilon \beta}{\alpha_1^0 + \varepsilon \alpha_1} \right) + b_2^0 + \varepsilon b_2 \right] y + [q(t)]V \\ \dot{y} = \left[(a_1^0 + \varepsilon a_1) \left(-\frac{\alpha_2^0 + \varepsilon \alpha_2}{\alpha_1^0 + \varepsilon \alpha_1} \right) + a_2^0 + \varepsilon a_2 \right] x_2 + \\ \quad + \left[(a_1^0 + \varepsilon a_1) \left(-\frac{\varepsilon \beta}{\alpha_1^0 + \varepsilon \alpha_1} \right) + \varepsilon a_{33} \right] y + [r(t)]V \end{array} \right.$$

(les coefficients $q(t), r(t)$ sont des fonctions 2π -périodiques).

Sur la variété intégrale $V(x_1, x_2, y, \varepsilon, t) = 0$ on a un système du deuxième ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = \eta_1 x_2 + \xi_1 y \\ \dot{y} = \xi_2 x_2 + \eta_2 y, \end{array} \right. \quad (2.44)$$

$$\eta_j = \varepsilon \sum_k \eta_{jk} \sin kt$$

$$\xi_j = \xi_j^0 + \varepsilon(\xi_{j0} + \sum_k \xi_{jk} \cos kt), \quad j = 1, 2$$

On note $\eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2$ en utilisant les coefficients du système (2.34),

imposés par les formules (2.35)

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \varepsilon \left(a_{22} - a_{21} \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} \right) = \varepsilon \sum_k \left(a_{22}^{(k)} - a_{21}^{(k)} \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} \right) \sin kt \\
\eta_2 &= \varepsilon \left(a_{33} - a_1^0 \frac{\beta}{\alpha_1^0} \right) = \varepsilon \sum_k \left(a_{33}^{(k)} - \beta_1 \frac{a_1^0}{\alpha_1^0} \right) \sin kt \\
\xi_1 &= b_2^0 + \varepsilon b_2 = b_2^0 + \varepsilon \left(b_2^* + \sum_k b_2^{(k)} \cos kt \right) \\
\xi_2 &= \left(a_2^0 - a_1^0 \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} + \varepsilon \left(a_2 - a_1 \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} - a_1^0 \frac{\alpha_2 \alpha_1^0 - \alpha_1 \alpha_2^0}{(\alpha_1^0)^2} \right) \right) = \\
&= a_2^0 - a_1^0 \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} + \varepsilon \left(a_2^* - a_1^* \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} - a_1^0 \frac{\alpha_{20} \alpha_1^0 - \alpha_{10} \alpha_2^0}{(\alpha_1^0)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_k \left(a_2^{(k)} - a_1^{(k)} \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} - a_1^0 \frac{\alpha_{21} \alpha_1^0 - \alpha_{11} \alpha_2^0}{(\alpha_1^0)^2} \right) \cos kt \right)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Les valeurs moyennes par période de ces coefficients sont

$$\bar{\eta}_1 = 0; \quad \bar{\eta}_2 = 0; \quad \bar{\xi}_1 = \xi_1^0 + \varepsilon \xi_{10}; \quad \bar{\xi}_2 = \xi_2^0 + \varepsilon \xi_{20}$$

On considère le système qui découle de (2.44) par la prise de la moyenne sur la période des coefficients

$$\begin{cases} \dot{x}_2 &= (\xi_1^0 + \varepsilon \xi_{10}) y \\ \dot{y} &= (\xi_2^0 + \varepsilon \xi_{20}) x_2 \end{cases} \tag{2.46}$$

On définit

$$\Omega_*^2 = -(\xi_1^0 + \varepsilon \xi_{10})(\xi_2^0 + \varepsilon \xi_{20})$$

Ici, Ω_* est la fréquence des oscillations du système moyen (2.46), qui si $\varepsilon = 0$, coïncide avec la fréquence des oscillations du système (2.32), ω .

Par la transformation

$$\begin{aligned}
x_2 &= -\frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{\xi_2^0 + \varepsilon \xi_{20}}} \\
y &= \frac{\tilde{y}}{\sqrt{\xi_1^0 + \varepsilon \xi_{10}}}
\end{aligned}$$

le système (2.46) prend la forme

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_2 &= -\Omega_* \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} &= \Omega_* \tilde{x}_2 \end{cases} \quad (2.47)$$

Maintenant on passe aux variables complexes conjuguées

$$z = \tilde{x}_2 + i\tilde{y}$$

$$\bar{z} = \tilde{x}_2 - i\tilde{y}$$

Alors

$$\tilde{x}_2 = (z + \bar{z})/2$$

$$\tilde{y} = (z - \bar{z})/(2i)$$

et l'équation pour $\dot{z}$ prend la forme

$$\dot{z} = i\Omega_* z$$

On exprime le système (2.44) sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_2 &= -\Omega_* \tilde{y} + \varepsilon \sum_k \eta_{1k} \sin kt \tilde{x}_2 + \sqrt{-\frac{\xi_2^0}{\xi_1^0}} \varepsilon \sum_k \xi_{1k} \cos kt \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} &= \Omega_* \tilde{x}_2 + \sqrt{-\frac{\xi_1^0}{\xi_2^0}} \varepsilon \sum_k \xi_{2k} \cos kt \tilde{x}_2 + \varepsilon \sum_k \eta_{2k} \sin kt \tilde{y} \end{cases} \quad (2.48)$$

Alors l'équation pour z a la forme finale

$$\begin{aligned} \dot{z} = i\Omega_* z + \frac{i}{4}\varepsilon \big(& z \left(\sum_k [F_k^- + G_k^-] e^{ikt} + \sum_k [-F_k^- + G_k^-] e^{-ikt} \right) + \\ & \bar{z} \left(\sum_k [F_k^+ + G_k^+] e^{ikt} + \sum_k [-F_k^+ + G_k^+] e^{-ikt} \right) \big) \end{aligned} \quad (2.49)$$

où

$$F_k^- = -\eta_{1k} - \eta_{2k}, \quad G_k^- = \sqrt{-\frac{\xi_1^0}{\xi_2^0}} \xi_{2k} - \sqrt{-\frac{\xi_2^0}{\xi_1^0}} \xi_{1k}$$

$$F_k^+ = -\eta_{1k} + \eta_{2k}, \quad G_k^+ = \sqrt{-\frac{\xi_1^0}{\xi_2^0}} \xi_{2k} + \sqrt{-\frac{\xi_2^0}{\xi_1^0}} \xi_{1k}$$

Considérons le cas de résonance du deuxième ordre

$$2\omega = p, \quad p \in \mathbf{Z}$$

Dans ce cas le système (2.49) est noté dans la forme

$$\begin{aligned} \dot{z} = i\Omega_* z + \frac{i}{4}\varepsilon \Big(& z \left([F_p^- + G_p^-] e^{ipt} + [-F_p^- + G_p^-] e^{-ipt} \right) + \\ & \bar{z} \left([F_p^+ + G_p^+] e^{ipt} + [-F_p^+ + G_p^+] e^{-ipt} \right) \Big) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Selon les résultats de [70], si dans le système (2.34) le développement des coefficients commence par le p -ième harmonique, la solution (2.33) du système (2.31) sera instable en première approximation [70] lorsque le coefficient de $\bar{z}e^{ipt}$ est différent de 0 dans (2.50), c'est-à-dire lorsque

$$-\eta_{1p} + \eta_{2p} + \sqrt{-\frac{\xi_1^0}{\xi_2^0} \xi_{2p}} + \sqrt{-\frac{\xi_2^0}{\xi_1^0} \xi_{1p}} \neq 0$$

De cette manière on a obtenu une expression du coefficient qui, sous la condition de résonance, détermine la stabilité en cas de résonance paramétrique.

Ce résultat sera appliqué dans le chapitre 4 au problème du roulement d'un ellipsoïde proche d'un ellipsoïde de révolution.

2.9 Stabilité de la position d'équilibre d'un système réversible

Soit un système réversible analytique au voisinage de la singularité $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$) appartenant à l'ensemble des points fixes. En mettant en évidence l'approximation linéaire, on peut écrire

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^l, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n \end{cases} \quad (2.51)$$

et l'équation caractéristique

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda \mathbf{I}_l & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & -\lambda \mathbf{I}_n \end{pmatrix} = 0$$

2.9 Stabilité de la position d'équilibre d'un système réversible 43

a des racines formant des paires opposées. La stabilité au sens de Lyapunov n'est donc possible que lorsque les racines sont purement imaginaires et forment des paires $\lambda = i\omega$ et $\lambda = -i\omega$ ($\omega \in \mathbf{R}$).

Ici

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

et application $\mathbf{G}$ est de la forme

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_l & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_n \end{pmatrix}$$

On étudiera un système de dimension quatre ($l = n = 2$) et λ_1^2, λ_2^2 sont négatifs et distincts. Alors après normalisation linéaire (changement de variables) le système (2.51) a la forme

$$\dot{z}_s = i\omega_s z_s + Z_s(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \quad s = 1, 2 \quad (2.52)$$

plus les équations conjuguées, (ω_s est un nombre réel positif). On remarque, que (2.52) est invariant par la transformation : $(t, \mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \rightarrow (-t, \bar{\mathbf{z}}, \mathbf{z})$, donc les coefficients du développement taylorien des fonctions Z_s sont purement imaginaires [51].

On suppose d'abord que le système (2.52) n'a que des résonances d'un ordre inférieur ou égal à quatre, après normalisation des termes du deuxième et troisième ordres le système a la forme

$$\dot{z}_s = i(\omega_s + A_{s1}\rho_1^2 + A_{s2}\rho_2^2)z_s + Z_s^{(4)}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \quad \rho_s = |\mathbf{z}_s| \quad (2.53)$$

(avec $Z_s^{(4)} = O(\|\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}\|^4)$). En négligeant $Z_s^{(4)}$ on obtient le système modèle en coordonnées polaires ρ et φ : $z_s = \rho_s e^{i\varphi_s}$, $\bar{z}_s = \rho_s e^{-i\varphi_s}$:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_s = 0 \\ \dot{\varphi}_s = \omega_s + A_{s1}\rho_1^2 + A_{s2}\rho_2^2 = \tilde{\omega}_s(\rho), \quad s = 1, 2 \end{cases} \quad (2.54)$$

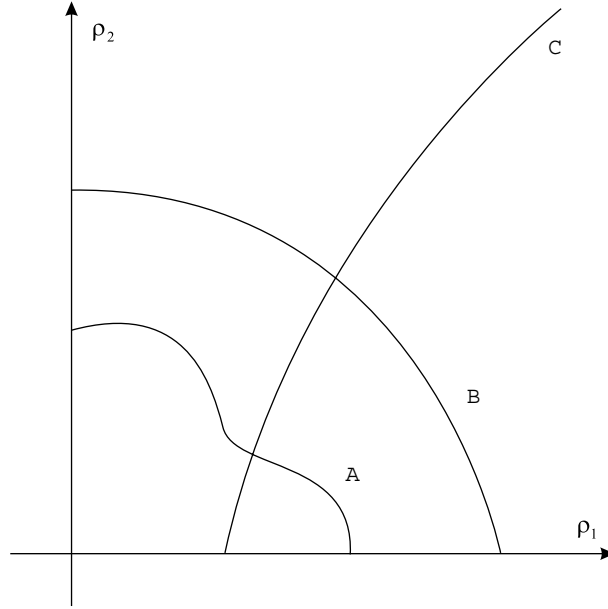


Figure 6 : Projection des tores invariants du système modèle.

Famille A : $\sigma \neq \text{constante}$;

Famille B : $\sigma = \text{constante}$ et la condition (2.55) est vérifiée ;

Famille C : $\sigma = \text{constante}$, mais la condition (2.55) n'est pas vérifiée.

Pour le système modèle (2.54) ρ_1 et ρ_2 sont des intégrales premières, il en résulte que dans le premier quadrangle du plan (ρ_1, ρ_2) les points intérieurs ($\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$) représentent des tores de dimension deux invariants du système, ces tores dégénèrent en des cercles pour $\rho_1 = 0$ ou $\rho_2 = 0$.

Les tores invariants du système modèle se répartissent en deux catégories : les tores résonants pour lesquels $\sigma = \tilde{\omega}_1(\rho)/\tilde{\omega}_2(\rho)$ est un nombre rationnel et les tores non résonants pour lesquels $\sigma = \tilde{\omega}_1(\rho)/\tilde{\omega}_2(\rho)$ est un nombre irrationnel.

A chaque courbe d'équation

$$\frac{\omega_1 + A_{11}\rho_1^2 + A_{12}\rho_2^2}{\omega_2 + A_{21}\rho_1^2 + A_{22}\rho_2^2} = \sigma \text{ (constante)} \quad (2.55)$$

correspond une famille de tores invariants résonants si σ est rationnel et non résonants si σ est irrationnel.

Pour le système modèle il y a stabilité des variables (ρ_1, ρ_2) au voisinage de la solution $z_1 = z_2 = 0$. Pour le système perturbé les tores invariants non résonants sont légèrement déformées et les courbes (2.55) pour lesquelles σ

est rationnel sont elles mêmes légèrement déformées, tandis que les tores résonants sont détruits.

La condition de stabilité de la solution $(0, 0)$ des variables ρ_1 et ρ_2 dans le système perturbé est que les courbes (2.55) (pour σ rationnel) entourent l'origine et puissent être aussi proches de l'origine.

Ces courbes sont des coniques, ce qui conduit à la condition suivante :

$$\left(\frac{A_{11}}{\omega_1} - \frac{A_{21}}{\omega_2} \right) \left(\frac{A_{12}}{\omega_1} - \frac{A_{22}}{\omega_2} \right) > 0 \quad (2.56)$$

On suppose que la condition précédente est simultanément satisfaite avec la condition

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbf{Z}, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbf{Z} \quad (2.57)$$

Dans ce cas on peut prouver [40] en utilisant la théorie de Newton-Kolmogorov la conservation pour le système (2.53) de toute la famille analytique des tores du système modèle (2.54). Outre cela, on monte que la stabilité au sens de Lyapunov résulte de l'existence de telles familles.

Théorème 7 (Matveyev [40]). *Si les conditions (2.56) et (2.57) sont vérifiées pour le système (2.53), alors la solution triviale du système (2.53) est stable au sens de Lyapunov [43].*

Remarque On généralise le théorème 7 pour le cas où $l > n - 2$ ainsi que pour des systèmes réversibles avec des intégrales premières.

On considère un cas résonant $\omega_1 + 3\omega_2 = 0$ ($\omega_1\omega_2 < 0$). La forme normale du système (2.52) est

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= i\omega_1 z_1 + i(A_{11}|z_1|^2 + A_{12}|z_2|^2)z_1 + iB_1 \bar{z}_2^3 + Z_1^{(4)}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \\ \dot{z}_2 &= i\omega_2 z_2 + i(A_{21}|z_1|^2 + A_{22}|z_2|^2)z_2 + iB_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 + Z_2^{(4)}(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Le système modèle de (2.58) (sans les termes $Z_1^{(4)}, Z_2^{(4)}$) en coordonnées polaires $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta} : z_s = \sqrt{\rho_s} e^{i\theta_s}, \bar{z}_s = \sqrt{\rho_s} e^{-i\theta_s}; s = 1, 2$ admet les intégrales premières [65]

$$W_2 \equiv B_2 \rho_1 - B_1 \rho_2 = h_2 \text{ (constante)}$$

$$\begin{aligned} W &\equiv (A_{11} + 3A_{21})B_2 \rho_1^2 + (A_{12} + 3A_{22})B_1 \rho_2^2 + 4B_1 B_2 \rho_1^{1/2} \rho_2^{3/2} \cos \theta = \\ &= h \text{ (constante)} \end{aligned}$$

$(\rho_s = |z_s|, \theta = \theta_1 + 3\theta_2)$.

Si $B_1 B_2 < 0$, alors l'intégrale W_2 est une fonction positive définie ce qui prouve la stabilité du système modèle. Si $B_1 B_2 > 0$ une fonction $V(\boldsymbol{\rho}, \theta) = W_2 + W$ est la fonction positive définie satisfaisant les conditions du théorème de Lyapunov sur la stabilité lorsque la condition suivante est vérifiée

$$|(A_{11} + 3A_{21})B_1 + (A_{12} + 3A_{22})B_2| > 4|B_1|^{1/2}|B_2|^{3/2} \quad (2.59)$$

Si $B_1 B_2 > 0$ et $|(A_{11} + 3A_{21})B_1 + (A_{12} + 3A_{22})B_2| < 4|B_1|^{1/2}|B_2|^{3/2}$, alors le système modèle est instable : il y a une solution (rayon croissant)

$$\rho_1 = k_1 r, \quad \rho_2 = k_2 t, \quad \dot{r} = k r^2$$

(k_1, k_2, k sont des constants positives). On peut prouver que le système complet (2.58) aussi est instable [64].

Théorème 8 (Tkhai [65]). *Si $B_1 \neq 0$ et $B_2 \neq 0$, alors pour la stabilité du système modèle il est nécessaire et suffisant qu'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

$$\begin{cases} a) B_1 B_2 < 0 \\ b) B_1 B_2 > 0 \text{ et la condition (2.59) est satisfaite} \end{cases}$$

Si le signe a (2.59) est opposé et $B_1 B_2 > 0$, la solution nulle du système complet (2.58) alors est instable [64].

Ces théorèmes seront appliqués dans le chapitre 3 au problème de la stabilité des rotations permanentes d'un ellipsoïde homogène pesant.

Deuxième partie

Applications

Chapitre 3

Rotations permanentes d'un ellipsoïde homogène pesant roulant sans glissement sur un plan horizontal

Le problème du mouvement d'un corps solide pesant sur un plan absolument rugueux est un intéressant exemple de système réversible compliqué. On considère le cas où le corps est un ellipsoïde homogène pesant. Dans ce cas on étudie la stabilité de ses rotations permanentes sur le plan autour d'un axe verticale. A.P. Markejev [35] n'avait étudié la stabilité qu'en première approximation. Dans ce chapitre on étudie la stabilité des rotations permanentes en approximation non-linéaire du troisième ordre. On a créé un logiciel, présenté en Annexe B, et permettant de résoudre les calculs compliqués conduisant à la forme normale.

3.1 Equations du mouvement

On étudie le mouvement du corps solide sur un plan absolument rugueux, c'est-à-dire qu'il y a roulement sans glissement du corps sur le plan.

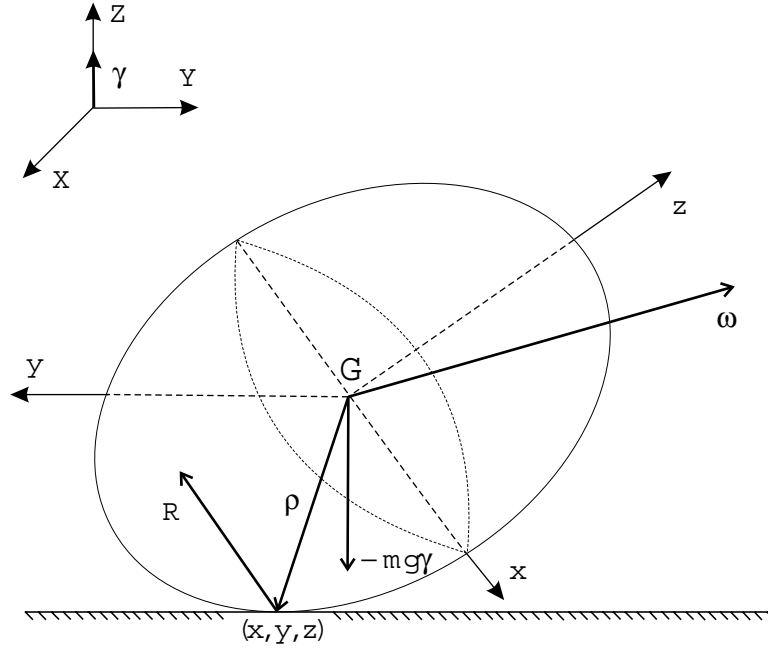


Figure 7 : Corps solide pesant sur un plan absolument rugueux

Ici, $OXYZ$ est un repère immobile, dont l'origine est sur le plan et l'axe Oz coïncide avec le verticale; $Gxyz$ est un repère mobile, lié au corps, dont l'origine est le centre de masse et les axes sont les axes principaux d'inertie.

Les équations qui décrivent les mouvements de ce système écrites dans le repère mobile sont

$$\dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = -g\boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{m}\mathbf{R} \quad (3.1)$$

$$\dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{R} \quad (3.2)$$

et expriment les théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique.

Ici, $\mathbf{V}$ = vitesse du centre de masse, $\boldsymbol{\omega}$ = vitesse angulaire, g = accélération de la gravité, $\boldsymbol{\gamma}$ = vecteur normal au plan, m = masse du corps, $\mathbf{R}$ = réaction du plan, $\mathbf{K}$ = moment cinétique relatif au centre de masse, $\boldsymbol{\rho}$ = rayon vecteur du point de contact.

La vitesse du corps au point de contact (la vitesse de glissement) relativement au repère immobile est égale à zéro

$$\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = 0 \quad (3.3)$$

Le vecteur normal à la surface du corps dirigé vers l'intérieur est constante. Par la formule d'Euler on a donc, dans le repère mobile

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad (3.4)$$

La normale est déterminée par l'équation $F(x, y, z) = 0$ qui décrit la surface du corps :

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\mathbf{grad} F}{|\mathbf{grad} F|} \quad (3.5)$$

(x, y, z sont les coordonnées du point de contact entre le corps et le plan dans le repère mobile).

Ce système mécanique admet deux intégrales premières : l'intégrale de l'énergie et l'intégrale géométrique :

$$\frac{1}{2}m\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) - mg(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\gamma}) = h \text{ (constante)} \quad (3.6)$$

$$F(x, y, z) = 0$$

($\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont les projections de la vitesse angulaire sur les axes du repère mobile, A, B, C sont les moments principaux d'inertie). Eliminons la réaction $\mathbf{R}$ entre les équations (3.1) et (3.2)

$$\dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = m\boldsymbol{\rho} \times (\dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + g\boldsymbol{\gamma})$$

et substituons la valeur de $\mathbf{V}$ tirée de l'équation (3.3) dans le second membre de cette égalité en tenant compte de $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}$ (où $\mathbf{J}$ est la matrice constante d'inertie). Exprimons la normale définie par (3.5) dans l'équation (3.4), nous obtenons la seconde équation vectorielle. Finalement

$$\begin{cases} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = -m\boldsymbol{\rho} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) - g\boldsymbol{\gamma}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{grad} F}{|\mathbf{grad} F|} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{\mathbf{grad} F}{|\mathbf{grad} F|} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Le système d'équations (3.7) est fermé et c'est un système du sixième ordre pour $x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3$. On remarque, que les équations (3.7) décrivent en particulier des effets apparaissant dans le problème de la "pierre celtique" lorsque les axes principaux d'inertie et les axes principaux de l'ellipsoïde géométrique ne coïncident pas [52].

Le système (3.7) est invariant par l'application

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} :$$

$$(t, x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow (-t, x, y, z, -\omega_1, -\omega_2, -\omega_3)$$

avec l'ensemble des points fixes $\mathbf{M} = \{x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3 : \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0\}$.

Si F'_y est une fonction impaire de y , alors il y a une invariance supplémentaire du système (3.7) par l'application

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

$$(t, x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow (-t, x, -y, z, \omega_1, -\omega_2, \omega_3)$$

avec l'ensemble des points fixes $\mathbf{M} = \{x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3 : y = \omega_2 = 0\}$. Mais alors le système (3.7) ne décrit plus les problèmes comme celui de la "pierre celtique".

Dans le cas où $F(x, y, z) = 0$ représente la surface d'un ellipsoïde le système (3.7) possède encore une invariance par rapport à chacune des deux transformations :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

$$(t, x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow (-t, -x, y, z, -\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

avec l'ensemble des points fixes $\mathbf{M} = \{x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3 : x = \omega_1 = 0\}$ et

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} :$$

$$(t, x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow (-t, x, y, -z, \omega_1, \omega_2, -\omega_3)$$

avec l'ensemble des points fixes $\mathbf{M} = \{x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3 : z = \omega_3 = 0\}$.

3.2 Ellipsoïde pesant homogène sur un plan

Considérons le cas de l'ellipsoïde pesant homogène, avec des demi-axes a, b, c , l'équation de la surface est

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

et les moments principaux d'inertie sont

$$A = m(b^2 + c^2)/5, \quad B = m(c^2 + a^2)/5, \quad C = m(a^2 + b^2)/5$$

Pour obtenir les équations explicites les équations (3.7) sont projetées sur des axes mobiles en tenant compte de l'équation de la surface de l'ellipsoïde. Nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{a^2}{b^2} y \omega_3 - \frac{a^2}{c^2} z \omega_2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2 c^2} x^2 z \omega_2 + \frac{b^2 - a^2}{b^2 a^2} x^2 y \omega_3 + \frac{c^2 - b^2}{c^2 b^2} x y z \omega_1 \equiv X \\ \dot{y} = \frac{b^2}{c^2} z \omega_1 - \frac{b^2}{a^2} x \omega_3 + \frac{b^2 - a^2}{b^2 a^2} y^2 x \omega_3 + \frac{c^2 - b^2}{c^2 b^2} y^2 z \omega_1 + \frac{a^2 - c^2}{a^2 c^2} x y z \omega_2 \equiv Y \\ \dot{z} = \frac{c^2}{a^2} x \omega_2 - \frac{c^2}{b^2} y \omega_1 + \frac{c^2 - b^2}{c^2 b^2} z^2 y \omega_1 + \frac{a^2 - c^2}{a^2 c^2} z^2 x \omega_2 + \frac{b^2 - a^2}{b^2 a^2} x y z \omega_3 \equiv Z \\ (A + m(y^2 + z^2)) \dot{\omega}_1 - m x y \dot{\omega}_2 - m x z \dot{\omega}_3 = P \\ (B + m(z^2 + x^2)) \dot{\omega}_2 - m y z \dot{\omega}_3 - m y x \dot{\omega}_1 = Q \\ (C + m(x^2 + y^2)) \dot{\omega}_3 - m z x \dot{\omega}_1 - m z y \dot{\omega}_2 = R \end{array} \right. \quad (3.8)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} P \equiv (B - C) \omega_2 \omega_3 + m (X - y \omega_3 + z \omega_2) (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}) - m \omega_1 (\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) + mg \frac{c^2 - b^2}{c^2 b^2 \Delta} yz \\ Q \equiv (C - A) \omega_3 \omega_1 + m (Y - z \omega_1 + x \omega_3) (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}) - m \omega_2 (\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) + mg \frac{a^2 - c^2}{a^2 c^2 \Delta} zx \\ R \equiv (A - B) \omega_1 \omega_2 + m (Z - x \omega_2 + y \omega_1) (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}) - m \omega_3 (\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) + mg \frac{b^2 - a^2}{b^2 a^2 \Delta} xy \\ \Delta = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T, \quad \boldsymbol{\rho} = (x, y, z)^T, \\ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\rho}) = \omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z, \quad (\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = x \dot{x} + y \dot{y} + z \dot{z} \end{array} \right.$$

Remarquons que les équations (3.8) ont été obtenues pour la première fois par A.P. Markeev [35] en appliquant les équations d'Appell aux systèmes non-holonomes considérés par Chaplygin.

Le système (3.8) admet la solution particulière

$$x = y = 0, z = -c, \omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega \text{ (constante)} \quad (3.9)$$

qui décrit la rotation de l'ellipsoïde à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe z en position verticale (rotations permanentes).

Des conditions nécessaires de stabilité des rotations permanentes sont connues (voir [35]) : à l'approximation linéaire autour du petit axe les rotations sont stables, mais les rotations autour du grand axe ne sont stables que si la vitesse angulaire est assez grande $\omega > \omega_0$, les rotations autour de l'axe moyen sont toujours instables. Dans ce cas l'étude de la stabilité à l'approximation linéaire n'est pas suffisante pour conclure et, dans la suite de la thèse, on envisage la recherche d'une condition suffisante en prenant en compte les termes d'ordre supérieurs.

Nous remarquons aussi que dans le cas de l'ellipsoïde de révolution ($a=c$) les rotations autour d'un axe de l'ellipsoïde (en position verticale) sont instables (voir [69]).

Le système (3.8) possède une invariance : l'invariance par rapport à cha-

cune des quatre transformations avec changement simultané de t en $-t$

$$(x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3, t) \rightarrow \begin{cases} a) & (x, y, z, -\omega_1, -\omega_2, -\omega_3, -t) \\ b) & (-x, y, z, -\omega_1, \omega_2, \omega_3, -t) \\ c) & (x, -y, z, \omega_1, -\omega_2, \omega_3, -t) \\ d) & (x, y, -z, \omega_1, \omega_2, -\omega_3, -t) \end{cases}$$

C'est-à-dire qu'on a un système mécanique réversible dont l'ensemble des points fixes est la réunion de $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3 \cup \mathbf{M}_4$ conformément à

$$\mathbf{M}_1 = \{x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3 : \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0\}$$

$$\mathbf{M}_2 = \{x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3 : x = \omega_1 = 0\}$$

$$\mathbf{M}_3 = \{x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3 : y = \omega_2 = 0\}$$

$$\mathbf{M}_4 = \{x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3 : z = \omega_3 = 0\}$$

La solution particulière (3.9) est alors un mouvement stationnaire appartenant à l'ensemble des points fixes. Pour la recherche de la stabilité cela permet d'utiliser les résultats connus (voir résultats de Matveyev de [40, 43] et résultats de Tkhai de [65] présentés dans la section 2.9). Nous allons exprimer les équations (3.8) sous une forme sans dimension, ce qui permettra de mettre en évidence immédiatement des paramètres essentiels sans dimension et de poursuivre la recherche avec un ordinateur.

Pour cela introduisons de nouvelles variables, le temps $\tau = \omega t$ (avec $\omega \neq 0$) et les paramètres sans dimension

$$\tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{b}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{c}, \quad \tilde{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{\omega}, \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{\omega}, \quad \tilde{\omega}_3 = \frac{\omega_3}{\omega},$$

$$\alpha = \frac{a}{c}, \quad \beta = \frac{b}{c}, \quad \gamma = \frac{g}{\omega^2 c},$$

$$A_1 = \frac{\beta^2 + 1}{5}, \quad B_1 = \frac{\alpha^2 + 1}{5}, \quad C_1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{5}$$

Nous obtenons finalement (en conservant les anciennes notations pour

les variables, le point désigne la dérivation par rapport au temps τ)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{\alpha}{\beta} y \omega_3 - \alpha z \omega_2 + \frac{(\alpha^2 - 1)}{\alpha} x^2 z \omega_2 + \frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{\alpha \beta} x^2 y \omega_3 + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{\beta} x y z \omega_1 \equiv X \\ \dot{y} = \beta z \omega_1 - \frac{\beta}{\alpha} x \omega_3 + \frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{\alpha \beta} y^2 x \omega_3 + \frac{(1 - \beta^2)}{\beta} y^2 z \omega_1 + \frac{(\alpha^2 - 1)}{\alpha} x y z \omega_2 \equiv Y \\ \dot{z} = \frac{1}{\alpha} x \omega_2 - \frac{1}{\beta} y \omega_1 + \frac{(1 - \beta^2)}{\beta} z^2 y \omega_1 + \frac{(\alpha^2 - 1)}{\alpha} z^2 x \omega_2 + \frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{\alpha \beta} x y z \omega_3 \equiv Z \\ (A_1 + \beta^2 y^2 + z^2) \dot{\omega}_1 - \alpha \beta x y \dot{\omega}_2 - \alpha x z \dot{\omega}_3 \equiv P \\ (B_1 + \alpha^2 x^2 + z^2) \dot{\omega}_2 - \beta y z \dot{\omega}_3 - \beta \alpha x y \dot{\omega}_1 \equiv Q \\ (C_1 + \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2) \dot{\omega}_3 - \alpha z x \dot{\omega}_1 - \beta z y \dot{\omega}_2 \equiv R \end{array} \right. \quad (3.10)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} P = (B_1 - C_1) \omega_2 \omega_3 + \alpha (X - \frac{\beta}{\alpha} y \omega_3 + \frac{1}{\alpha} z \omega_2) (\alpha \omega_1 x + \beta \omega_2 y + \omega_3 z) - \\ - \omega_1 (\alpha^2 x \dot{x} + \beta^2 y \dot{y} + z \dot{z}) + \frac{\gamma(1 - \beta^2)}{\beta \Delta} y z \\ Q = (C_1 - A_1) \omega_3 \omega_1 + \beta (Y - \frac{1}{\beta} z \omega_1 + \frac{\alpha}{\beta} x \omega_3) (\alpha \omega_1 x + \beta \omega_2 y + \omega_3 z) - \\ - \omega_2 (\alpha^2 x \dot{x} + \beta^2 y \dot{y} + z \dot{z}) + \frac{\gamma(\alpha^2 - 1)}{\alpha \Delta} x z \\ R = (A_1 - B_1) \omega_1 \omega_2 + (Z - \alpha x \omega_2 + \beta y \omega_1) (\alpha \omega_1 x + \beta \omega_2 y + \omega_3 z) - \\ - \omega_3 (\alpha^2 x \dot{x} + \beta^2 y \dot{y} + z \dot{z}) + \frac{\gamma(\beta^2 - \alpha^2)}{\alpha \beta \Delta} x y \end{array} \right.$$

$$\Delta = \left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + z^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On voit que dans le système sans dimension obtenu il n'y a que trois paramètres essentiels α, β, γ .

Exprimées avec les variables sans dimension, les intégrales sont :

$$\begin{aligned}
 & (\beta y \omega_3 - z \omega_2)^2 + (\alpha x \omega_2 - \beta y \omega_1)^2 + (z \omega_1 - \alpha x \omega_3)^2 + \\
 & + A_1 \omega_1^2 + B_1 \omega_2^2 + C_1 \omega_3^2 + 2\gamma \left[\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + z^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = 2h_1 \text{ (constante)} \\
 & x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

La solution particulière du système d'équation (3.10) est

$$x = y = 0, \quad z = -1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 1$$

Pour former les équations du mouvement perturbé au voisinage de cette solution, introduisons les nouvelles variables

$$x^1 = x, \quad y^1 = y, \quad z^1 = z + 1, \quad \omega_1^1 = \omega_1, \quad \omega_2^1 = \omega_2, \quad \omega_3^1 = \omega_3 - 1$$

Le problème de la stabilité des rotations permanentes se ramène finalement au problème de la stabilité de la solution nulle du système obtenu pour $x^1, y^1, z^1, \omega_1^1, \omega_2^1, \omega_3^1$. Ci-après on conserve les anciennes notations pour les variables (sans indice 1).

Les intégrales (3.11) permettent de réduire le système d'équations du mouvement perturbé à un système du quatrième ordre. Pour cela nous exprimons z de l'intégrale géométrique et ω_3 de l'intégrale d'énergie (on ne considère que des perturbations isoénergétiques)

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{x^2 + y^2}{2} + [\text{troisième ordre}] \\
 \omega_3 &= -\frac{1}{2C_1} (A_1 \omega_1^2 + B_1 \omega_2^2 + (\alpha x + \omega_1)^2 + (\beta y + \omega_2)^2) - \\
 & - \gamma \left(\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) x^2 + \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) y^2 \right) + [\text{troisième ordre}]
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dans les expressions réduites on n'écrit explicitement que les termes du deuxième ordre relativement aux perturbations, ce qui est suffisant pour employer les résultats de [40, 43, 65] (il suffit d'exprimer les termes du troisième ordre du membre de droite des équations du mouvement perturbé).

Ainsi donc, pour obtenir le système du quatrième ordre il faut résoudre la quatrième et la cinquième équations de (3.10) pour $\dot{\omega}_1$ et $\dot{\omega}_2$. Ensuite, il faut développer les membres de droite des expressions pour x, y, ω_1, ω_2 suivant les perturbations et substituer à z et ω_3 leurs valeurs tirées de (3.12).

Finalement, on obtient l'approximation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\alpha}{\beta}y + \alpha\omega_2 + [\text{troisième ordre}] \\ \dot{y} = -\frac{\beta}{\alpha}x - \beta\omega_1 + [\text{troisième ordre}] \\ \dot{\omega}_1 = 5\frac{-\alpha^2 + \beta^2\gamma + \beta^2 - \gamma}{\beta(6 + \beta^2)}y - \frac{5\alpha^2 + \beta^2 - 6}{6 + \beta^2}\omega_2 + [\text{troisième ordre}] \\ \dot{\omega}_2 = 5\frac{\beta^2 - \alpha^2\gamma - \alpha^2 + \gamma}{\alpha(6 + \alpha^2)}x + \frac{5\beta^2 + \alpha^2 - 6}{6 + \alpha^2}\omega_1 + [\text{troisième ordre}] \end{cases} \quad (3.13)$$

Il se trouve que le système d'équations (3.13) ne contient pas de termes du deuxième ordre. L'expression des termes du troisième ordre est compliquée. L'obtention de ces termes et les transformations suivantes ont été réalisées avec le logiciel de programmation symbolique "Maple".

3.3 Forme normale

On considère le système linéaire réversible

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{B}\mathbf{u} \end{cases} \quad (3.14)$$

($\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont des matrices constantes, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$) avec l'ensemble des points fixes $\mathbf{M} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbf{v} = 0\}$. On suppose que l'équation caractéristique

$$\det(\mathbf{C} - \lambda^2\mathbf{I}) = \det(\mathbf{D} - \lambda^2\mathbf{I}) = 0 \quad (3.15)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{A}$$

($\mathbf{I}$ est la matrice identité) a des racines pures imaginaires distincts $\pm\lambda_1, \dots, \pm\lambda_n$. Evidemment les matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ sont inversibles.

Lemme. *Par une transformation non-dégénérée*

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{P}\mathbf{u} + i\mathbf{Q}\mathbf{v}, \quad \bar{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{P}\mathbf{u} - i\mathbf{Q}\mathbf{v} \quad (3.16)$$

on peut réduire le système (3.14) à la forme linéaire réversible (forme normale)

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}, \quad \dot{\bar{\boldsymbol{\eta}}} = -\boldsymbol{\Lambda}\bar{\boldsymbol{\eta}}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1 \dots \lambda_n\} \quad (3.17)$$

avec l'ensemble des points fixes $\mathbf{M} = \{\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\eta} = \bar{\boldsymbol{\eta}}\}$.

Preuve

La non-dégénérescence suit de (3.16) si $\det \mathbf{P} \neq 0$ et $\det \mathbf{Q} \neq 0$. La réversibilité suit de la forme (3.16).

Alors, nous devons avoir de (3.16) en tenant compte du système (3.14)

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{P}\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{Q}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{v} + i\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{u} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{P}\mathbf{u} + i\mathbf{Q}\mathbf{v})$$

On calcule donc $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ avec le système suivant :

$$\mathbf{P}\mathbf{A} = i\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}, \quad i\mathbf{Q}\mathbf{B} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P} \quad (3.18)$$

La validité du lemme résulte de l'existence des matrices non-dégénérées $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ solutions du système (3.18)

Nous avons de (3.18).

$$\mathbf{P}\mathbf{C} = \boldsymbol{\Lambda}^2\mathbf{P}, \quad \mathbf{Q}\mathbf{D} = \boldsymbol{\Lambda}^2\mathbf{Q}, \quad \boldsymbol{\Lambda}^2 = (\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2) \quad (3.19)$$

Selon l'équation (3.15) ces équations sont compatibles et admettent des solutions non-triviales. On calcule, par exemple, $\mathbf{P}$ comme la solution de la première équation (3.19). Alors, on calcule $\mathbf{Q}$ de (3.18) $\mathbf{Q} = i\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{A}$.

$(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$ sont distincts et la non-dégénérescence de $\mathbf{P}$ en découle.

La réversibilité de (3.17) suit de la forme (3.16).

Remarque.

1. La transformation (3.16) n'est pas unique. Dans le cas où $n = 2$ si $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} c_{21} & \lambda_1^2 - c_{11} \\ c_{21} & \lambda_2^2 - c_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = ||c_{ij}||$$

2. La transformation réciproque de (3.16) est

$$\mathbf{u} = \mathbf{P}^{-1} \frac{\boldsymbol{\eta} + \bar{\boldsymbol{\eta}}}{2}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{Q}^{-1} \frac{\boldsymbol{\eta} - \bar{\boldsymbol{\eta}}}{2i}$$

On écrit les équations perturbées du système linéaire

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n \end{cases} \quad (3.20)$$

avec

$$\mathbf{U}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = -\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{V}(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) = \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

On suppose que l'équation caractéristique a des racines imaginaires distinctes et on effectue la transformation linéaire (3.16)

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{P}\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{Q}\dot{\mathbf{v}} =$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) + i\mathbf{Q}(\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) =$$

$$(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{v} + i\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{u}) + \mathbf{P}\mathbf{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + i\mathbf{Q}\mathbf{V}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

finalemt on a

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{P}\mathbf{U}(\mathbf{P}^{-1}\frac{\boldsymbol{\eta} + \bar{\boldsymbol{\eta}}}{2}, \mathbf{Q}^{-1}\frac{\boldsymbol{\eta} - \bar{\boldsymbol{\eta}}}{2i}) + \\ i\mathbf{Q}\mathbf{V}(\mathbf{P}^{-1}\frac{\boldsymbol{\eta} + \bar{\boldsymbol{\eta}}}{2}, \mathbf{Q}^{-1}\frac{\boldsymbol{\eta} - \bar{\boldsymbol{\eta}}}{2i}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

un système réversible avec l'ensemble des points fixes $\mathbf{M} = \{\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\eta} = \bar{\boldsymbol{\eta}}\}$ (on omet d'écrire l'équation conjuguée).

Nous allons faire une normalisation non-linéaire de ce système en exprimant les termes non linéaires de (3.21) sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^m(\boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) = i \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=m} \alpha_{\mathbf{kl}} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{k}} \bar{\boldsymbol{\eta}}^{\mathbf{l}} \\ \alpha_{\mathbf{kl}} = \alpha_{k_1 \dots k_n l_1 \dots l_n}, \\ \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{k}} = \eta_1^{k_1} \dots \eta_n^{k_n}, \quad \bar{\boldsymbol{\eta}}^{\mathbf{l}} = \bar{\eta}_1^{l_1} \dots \bar{\eta}_n^{l_n}, \\ |\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_n, |\mathbf{l}| = l_1 + \dots + l_n \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta} + i \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=m} \alpha_{\mathbf{kl}} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{k}} \bar{\boldsymbol{\eta}}^{\mathbf{l}} + [\text{ordre supérieur}] \quad (3.22)$$

La propriété de réversibilité est conservée dans le changement de variables $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow \boldsymbol{\eta}$. Le système (3.21) étant invariant par la transformation $(t, \boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}}) \rightarrow (-t, \bar{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\eta})$, les coefficients $i\alpha_{\mathbf{kl}}$ sont imaginaires.

Nous utilisons une transformation polynômiale

$$\eta_s = z_s + \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=m} \beta_{s\mathbf{kl}} z^{\mathbf{k}} \bar{z}^{\mathbf{l}}, \quad z^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}, \quad \bar{z}^{\mathbf{l}} = \bar{z}_1^{l_1} \dots \bar{z}_n^{l_n} \quad (3.23)$$

avec des coefficients réels $\beta_{s\mathbf{kl}}$ que l'on doit choisir de façon que les équations exprimées avec les nouvelles variable $z_s, \bar{z}_s$ aient la forme la plus simple possible (forme normale) :

$$\dot{z}_s = \lambda_s z_s + \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=m} \gamma_{s\mathbf{kl}} z^{\mathbf{k}} \bar{z}^{\mathbf{l}} \quad (3.24)$$

(s le numéro de l'équation dans le système (3.22) ; $s = 1, \dots, n$). Cette forme a aussi un ensemble de points fixes [64].

Dérivons (3.23)

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_s = \dot{z}_s + \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=m} \beta_{s\mathbf{kl}} (k_1 z_1^{k_1-1} \dot{z}_1 \dots z_n^{k_n} \bar{z}_1^{l_1} \dots \bar{z}_n^{l_n} + \dots \\ + l_n \bar{z}_n^{l_n-1} \dot{\bar{z}}_n z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \bar{z}_1^{l_1} \dots \bar{z}_{n-1}^{l_{n-1}}) \end{aligned}$$

en utilisant alors l'expression de $\dot{z}_s$ on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_s = \lambda_s z_s + \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=m} \gamma_{s\mathbf{kl}} z^{\mathbf{k}} \bar{z}^{\mathbf{l}} + \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=m} \beta_{s\mathbf{kl}} \langle \mathbf{k} - \mathbf{l}, \lambda \rangle z^{\mathbf{k}} \bar{z}^{\mathbf{l}} + \\ + [\text{ordre supérieur}] \quad (3.25) \\ \langle \mathbf{k} - \mathbf{l}, \lambda \rangle = (k_1 - l_1)\lambda_1 + \dots (k_n - l_n)\lambda_n \end{aligned}$$

D'autre part en tenant compte de (3.23) l'équation (3.22) a la forme

$$\dot{\eta}_s = \lambda_s (z_s + \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=m} \beta_{s\mathbf{kl}} z^{\mathbf{k}} \bar{z}^{\mathbf{l}}) + i \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=m} \alpha_{s\mathbf{kl}} z^{\mathbf{k}} \bar{z}^{\mathbf{l}} + [\text{ordre supérieur}] \quad (3.26)$$

En égalant les membres de droite des équations (3.25) et (3.26) nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=m} \gamma_{s\mathbf{kl}} z^{\mathbf{k}} \bar{z}^{\mathbf{l}} + \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=m} \beta_{s\mathbf{kl}} \langle \mathbf{k} - \mathbf{l}, \lambda \rangle z^{\mathbf{k}} \bar{z}^{\mathbf{l}} = \\ \lambda_s \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=3} \beta_{s\mathbf{kl}} z^{\mathbf{k}} \bar{z}^{\mathbf{l}} + i \sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=m} \alpha_{s\mathbf{kl}} z^{\mathbf{k}} \bar{z}^{\mathbf{l}} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}|=m} (\beta_{s\mathbf{kl}} \langle \mathbf{k} - \mathbf{l}, \lambda \rangle - \lambda_s) + \gamma_{s\mathbf{kl}} - i\alpha_{s\mathbf{kl}} = 0$$

ce qui donne deux possibilités :

1) Système non résonnant : $\langle \mathbf{k} - \mathbf{l}, \lambda \rangle - \lambda_s \neq 0$ pour tous $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ tels que $|\mathbf{k}|+|\mathbf{l}| = m$. Alors dans (3.23) on peut choisir $\beta_{s\mathbf{kl}} = i\alpha_{s\mathbf{kl}} / \langle \mathbf{k} - \mathbf{l}, \lambda \rangle - \lambda_s$ et dans ce cas $\gamma_{s\mathbf{kl}} = 0$.

2) Système résonnant : $\langle \mathbf{k} - \mathbf{l}, \lambda \rangle - \lambda_s = 0$. Alors $\gamma_{s\mathbf{kl}} = i\alpha_{s\mathbf{kl}}$.

Ainsi donc dans le système d'équations pour z_s il ne reste que des termes résonnants. Parmi eux on distingue des termes de résonance identique pour lesquels $k_j = l_j$, $k_s = l_s + 1$; $j = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, n$ et des termes de résonance intérieure.

Nous obtenons une conclusion principale. Pour obtenir la forme normale à la première approximation non-linéaire la transformation polynômiale (3.23) n'est pas utile. Il suffit d'annuler les coefficients des termes non résonnants du système (3.22).

3.4 Stabilité des rotations permanentes d'un ellipsoïde homogène pesant roulant sans glissement

Considérons la forme normale du système (3.13) en utilisant les résultats obtenus dans la section précédente. Ensuite notons les conditions de stabilité (instabilité) de la solutions "nulle" du système obtenu en utilisant les théorèmes 7 et 8 de la section 2.9.

Le système (3.13) comme le système (3.10) est linéairement réversible et invariant par chacune des transformations

$$(t, x, y, p, q) \rightarrow \begin{cases} a) & (-t, -x, y, -p, q) \\ b) & (-t, x, -y, p, -q) \end{cases}$$

L'équation caractéristique de la partie linéaire du système de (3.13) est

$$\lambda^4 + G\lambda^2 + F = 0$$

$$G = 1 + \frac{36(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2) - 5\gamma[(6 + \alpha^2)(1 - \beta^2) + (6 + \beta^2)(1 - \alpha^2)]}{(6 + \alpha^2)(6 + \beta^2)}$$

$$F = \frac{(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)(6 + 5\gamma)^2}{(6 + \alpha^2)(6 + \beta^2)}$$

et, si $G > 2\sqrt{F}$, $G > 0$ et $F > 0$, a quatre racines imaginaires

$$\lambda_1^2 = \frac{-G - \sqrt{G^2 - 4F}}{2}, \quad \lambda_2^2 = \frac{-G + \sqrt{G^2 - 4F}}{2}$$

Lorsque $\alpha > 1$ et $\beta > 1$ l'ellipsoïde effectue des rotations autour du petit axe. Lorsque $\alpha < 1$ et $\beta < 1$ l'ellipsoïde effectue des rotations autour du grand axe, ce qui n'est possible que si

$$\gamma < \frac{1}{5} \left[\frac{\sqrt{(6 + \alpha^2)(6 + \beta^2)} - 6\sqrt{(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)}}{\sqrt{(6 + \alpha^2)(1 - \beta^2)} + \sqrt{(6 + \beta^2)(1 - \alpha^2)}} \right]^2$$

En utilisant les résultats de la section 3.3 et 2.9 nous écrivons la forme normale des équations (3.13) et les conditions de stabilité (instabilité) de la solution nulle de ce système. Dans ce cas $n = 2$ (nombre des équations (3.22)), $m = 3$ (degré de $\mathbf{H}^m$ dans (3.22)). Nous considérons deux cas possibles du problème de l'ellipsoïde en se limitant aux résonances d'ordre inférieur ou égal à quatre .

1. Cas non résonnant $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 + 3\lambda_2 \neq 0$. Alors la forme normale est

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + iz_1(A_{11}|z_1|^2 + A_{12}|z_2|^2) + [\text{quatrième ordre}]$$

$$\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + iz_2(A_{21}|z_1|^2 + A_{22}|z_2|^2) + [\text{quatrième ordre}]$$

Selon le théorème 7 de la section 2.9 : la stabilité au sens de Lyapunov a lieu dans le cas où l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\left(\frac{A_{11}}{|\lambda_1|} - \frac{A_{21}}{|\lambda_2|} \right) \left(\frac{A_{12}}{|\lambda_1|} - \frac{A_{22}}{|\lambda_2|} \right) > 0$$

2. Résonance du quatrième ordre $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$. Dans ce cas la forme normale contient des termes supplémentaires et est

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + iz_1(A_{11}z_1\bar{z}_1 + A_{12}z_2\bar{z}_2) + iB_1\bar{z}_2^3 + \dots$$

$$\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + iz_2(A_{21}z_1\bar{z}_1 + A_{22}z_2\bar{z}_2) + iB_2\bar{z}_1\bar{z}_2^2 + \dots$$

Selon le théorème 8 de la section 2.9 il y a instabilité si la condition suivante est vérifiée

$$\begin{cases} B_1 B_2 > 0 \\ |(A_{11} + 3A_{21})B_1 + (A_{12} + 3A_{22})B_2| < 4|B_1|^{\frac{1}{2}}|B_2|^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Il y a stabilité pour le système modèle dans le cas où

$$B_1 B_2 < 0$$

ou bien

$$\begin{cases} B_1 B_2 > 0 \\ |(A_{11} + 3A_{21})B_1 + (A_{12} + 3A_{22})B_2| > 4|B_1|^{\frac{1}{2}}|B_2|^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

3.5 Calculs numériques

Une recherche a été réalisée, avec mise en oeuvre du logiciel de programmation symbolique "Maple" (voir Annexe 2), pour les équations du mouvement perturbé (3.13) avec les termes du troisième ordre puis de la forme normale sous forme symbolique et une forme explicite de la condition

de stabilité. Des calculs ont été faits selon le schéma suivant : on fixe une valeur de la vitesse angulaire (paramètre $\gamma = 0.0001; 0.5; 2.0; 5.0; 10.0; 40.0$) et on détermine les domaines de la condition (2.56) dans un plan des paramètres (α, β) . Sur les Figures 8-13 le domaine clair (S) correspond à la stabilité. Dans le domaine foncé il est impossible de conclure sur la stabilité par les résultats connus.

Le système du quatrième ordre (3.13) a été obtenu par réduction isoénergétique du système du sixième ordre (3.10) et le théorème 7 ne garantit alors que la stabilité isoénergétique. Cependant les intégrales premières sont des intégrales symétriques du système réversible et dans ce cas on a la stabilité inconditionnelle au sens de Lyapunov si la condition (2.55) est réalisable d'après [43].

Conclusion 2. *Lorsque $(\alpha, \beta) \in S$ les rotations permanentes de l'ellipsoïde pesant homogène avec des demi-axes a, b, c telles que $\alpha = \frac{a}{c}, \beta = \frac{b}{c}$ sur un plan absolument rugueux autour d'un axe principal en position verticale avec la vitesse angulaire donnée ω (paramètre $\gamma = \frac{g}{\omega^2 c}$) sont stables au sens de Lyapunov.*

Remarque.

1. Dans le domaine des paramètres $(\alpha > 1, \beta > 1)$ correspondant aux rotations de l'ellipsoïde autour de l'axe minimum il y a des sous-domaines où il est impossible de conclure sur la stabilité par les résultats connus.
2. Les conclusions sur la stabilité au sens de Lyapunov concordent complètement avec les résultats sur la stabilité à l'approximation linéaire qui ont été obtenus dans [35,37].

Dans la thèse la stabilité dans le cas de résonance a été analysée. Il s'ensuit que la résonance 1 : 3 conduit à l'instabilité.

$$\underline{\gamma = 0.0001}$$

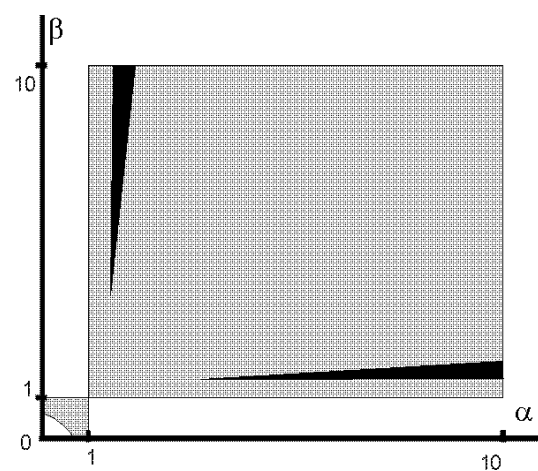


Figure 8

$$\underline{\gamma = 0.5}$$

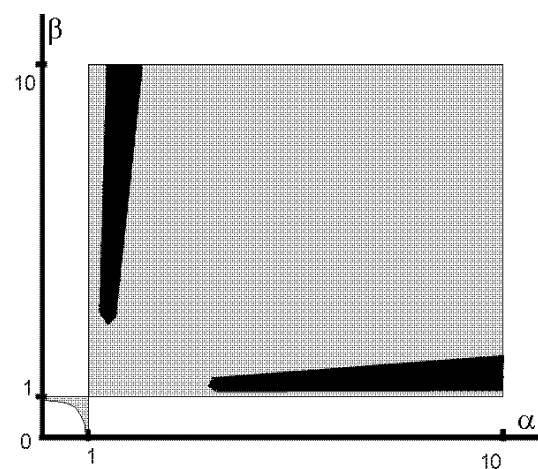


Figure 9

$$\underline{\gamma = 2.0}$$

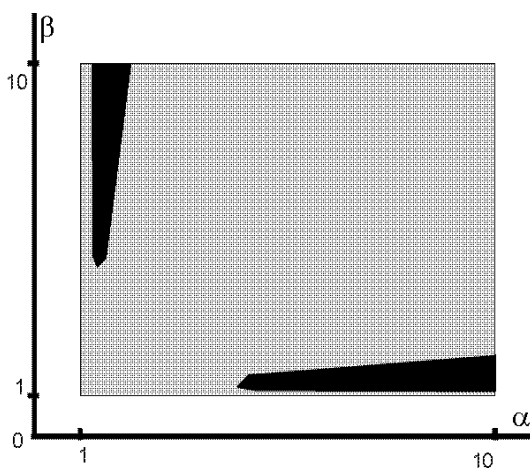


Figure 10

$$\underline{\gamma = 5.0}$$

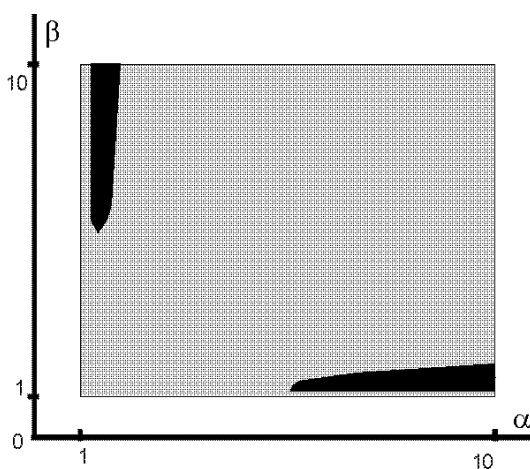


Figure 11

$$\gamma = 10.0$$

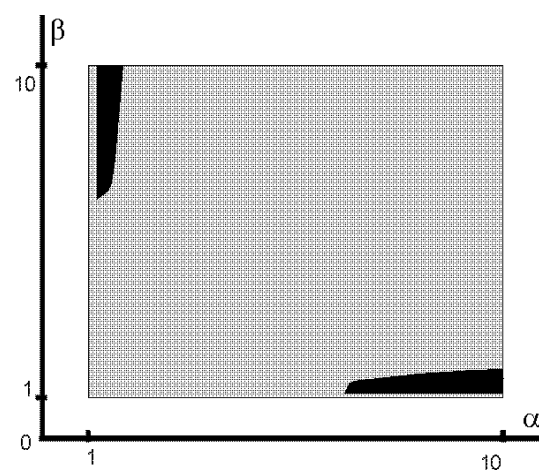


Figure 12

$$\gamma = 40.0$$

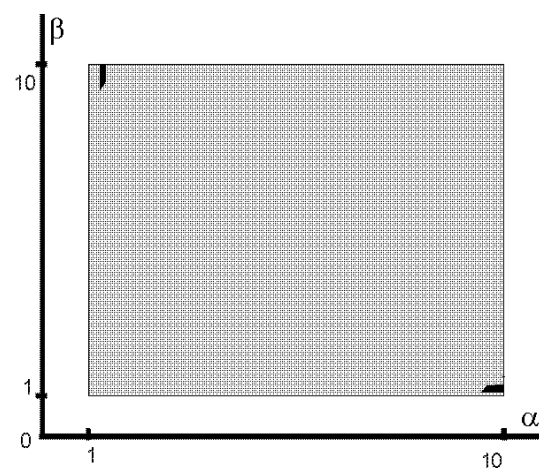


Figure 13

Chapitre 4

Roulement d'un ellipsoïde le long d'une ligne droite

Ce chapitre est consacré à l'étude de la stabilité en première approximation du roulement sans glissement d'un ellipsoïde pesant sur un plan horizontal le long d'une ligne droite. On compare les résultats sur la stabilité pour des inerties différentes correspondant à un ellipsoïde homogène et un ellipsoïde creux (de même masse).

On montre que, pour l'ellipsoïde proche de l'ellipsoïde de révolution, il y a instabilité en cas de résonance.

On montre de plus que le domaine de stabilité de l'ellipsoïde creux est plus grand que pour l'ellipsoïde plein.

4.1 Equations du mouvement

Rappelons les équations vectorielles du mouvement (3.7)

$$\begin{cases} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) = -m\boldsymbol{\rho} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) - g\boldsymbol{\gamma}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{grad} F}{|\mathbf{grad} F|} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{\mathbf{grad} F}{|\mathbf{grad} F|} \right) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

(pour les notations voir dans la section 3.1). Ecrivons les équations du mouvement (4.1) en projection sur les axes du repère rigidement liés au corps. Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ les coordonnées du vecteur de la vitesse angulaire instan-

tanée $\boldsymbol{\omega}$ et soient $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les coordonnées du vecteur unitaire $\boldsymbol{\gamma}$

$$\left\{ \begin{array}{l} A\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(C - B) = mg(y\gamma_3 - z\gamma_2) - m(\dot{\omega}_1y^2 - \dot{\omega}_2xy - \dot{\omega}_3xz + \dot{\omega}_1z^2) - \\ -m(\omega_1\dot{y}y - \omega_2\dot{x}x - \omega_3\dot{z}z + \omega_1\dot{z}z) - \\ -m(\omega_1\omega_3xy - \omega_2^2zy + \omega_2\omega_3y^2 - \omega_3\omega_2z^2 + \omega_3^2yz - \omega_1\omega_2xz) \\ \\ B\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(A - C) = mg(z\gamma_1 - x\gamma_3) - m(\dot{\omega}_2z^2 - \dot{\omega}_3yz - \dot{\omega}_1yx + \dot{\omega}_2x^2) - \\ -m(\omega_2\dot{z}z - \omega_3\dot{y}y - \omega_1\dot{x}x + \omega_2\dot{x}x) - \\ -m(\omega_2\omega_1yz - \omega_3^2xz + \omega_3\omega_1z^2 - \omega_1\omega_3x^2 + \omega_1^2zx - \omega_2\omega_3yx) \\ \\ C\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(B - A) = mg(x\gamma_2 - y\gamma_1) - m(\dot{\omega}_3x^2 - \dot{\omega}_1zx - \dot{\omega}_2zy + \dot{\omega}_3y^2) - \\ -m(\omega_3\dot{x}x - \omega_1\dot{z}z - \omega_2\dot{y}y + \omega_3\dot{y}y) - \\ -m(\omega_3\omega_2zx - \omega_1^2yx + \omega_1\omega_2x^2 - \omega_2\omega_1y^2 + \omega_2^2xy - \omega_3\omega_1zy) \\ \\ \dot{\gamma}_1 + \omega_2 \cdot \gamma_3 - \omega_3 \cdot \gamma_2 = 0 \\ \\ \dot{\gamma}_2 + \omega_3 \cdot \gamma_1 - \omega_1 \cdot \gamma_3 = 0 \\ \\ \dot{\gamma}_3 + \omega_1 \cdot \gamma_2 - \omega_2 \cdot \gamma_1 = 0 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

La relation entre le vecteur $\boldsymbol{\gamma}$ et le vecteur $\boldsymbol{\rho}(x, y, z)$ du point de contact du corps et du plan dans le cas d'un corps limité par la surface de l'ellipsoïde, est déterminée par l'équation (3.5)

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{x}{a^2} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \gamma_2 &= -\frac{y}{b^2} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \gamma_3 &= -\frac{z}{c^2} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ainsi, le mouvement de roulement sans glissement du corps solide pesant sur un plan horizontal immobile est décrit par un système fermé d'équations différentielles scalaires du sixième ordre par rapport à $x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Pour le système (4.2) l'intégrale de l'énergie et l'intégrale géométrique

sont :

$$\begin{aligned}
& m[\omega_1^2(z^2 + y^2) + \omega_2^2(x^2 + z^2) + \omega_3^2(y^2 + x^2) - \\
& 2(\omega_1\omega_2yx + \omega_2\omega_3zy + \omega_3\omega_1xz)] + A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 - \\
& 2mg(x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3) = 2h \text{ (constante)} \\
& \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Signalons, que l'existence des deux intégrales premières permet, en principe, de décrire le problème par un système d'équations différentielles du quatrième ordre. Cependant, une telle réduction présente une certaine difficulté car la première des intégrales contient les projections $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ aussi bien que les coordonnées du point de contact x, y, z : le lien entre ces variables est décrit par les formules assez complexes (4.3).

Le système d'équations (4.2) possède une variété intégrale où

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \gamma_3 = 0 \tag{4.5}$$

et le changement des variables $\gamma_1, \gamma_2, \omega_3$ est déterminé par le système :

$$\begin{aligned}
& [C + m(x^2 + y^2)]\dot{\omega}_3 = m(g(\gamma_2x - \gamma_1y) - \omega_3(x\dot{x} + y\dot{y})) \\
& \dot{\gamma}_1 - \omega_3\gamma_2 = 0, \quad \dot{\gamma}_2 + \omega_3\gamma_1 = 0
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Cette variété correspond au mouvement particulier où le point de contact du corps et du plan vu dans le système mobile reste dans un plan principal, en l'occurrence le plan xGy .

En effet, supposons, dans le système (4.2), que les variables $\omega_1, \omega_2, \gamma_3$ soient nulles. Dans ce cas les première, deuxième et quatrième équations du système se transforment en une identité, donc il reste un système d'équations du troisième ordre (4.6), déterminant $\gamma_1, \gamma_2, \omega_3$.

Le système d'équations (4.2) est invariant avec à la transformation

$$(t, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \rightarrow (-t, -\omega_1, -\omega_2, -\omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

En effet, substituons $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ à $-\omega_1, -\omega_2, -\omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et changeons t en $-t$ dans le système (4.2). On vérifie alors que ce système conserve sa forme. Cela signifie que le système (4.2) est un système réversible avec la transformation linéaire. La propriété de réversibilité permet d'utiliser pour l'étude du système (4.5) les méthodes d'étude des systèmes réversibles [65-80, 82] élaborées ces dernières années.

Effectuons une rotation d'angle φ du repère xyz sur le plan xGy autour de l'axe z . L'écart de l'axe z de la verticale sera caractérisé par l'angle θ . Ceci est obtenu par la transformation, liant les "anciennes" et les "nouvelles" variables suivant les formules :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sin \theta \cos \varphi, & \gamma_2 &= \sin \theta \sin \varphi, & \gamma_3 &= \cos \theta & (0 \leq \theta \leq \pi) \\ \omega_1 &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, & \omega_2 &= p \sin \varphi + q \cos \varphi, & \omega_3 &= r \end{aligned} \quad (4.7)$$

Il est évident que φ est l'angle entre l'axe Gx et l'axe $G\xi$ est la ligne d'intersection du plan xGy et du plan passant par l'axe Gz et la verticale ; θ est l'angle entre l'axe Gz et la verticale (Figure 14).

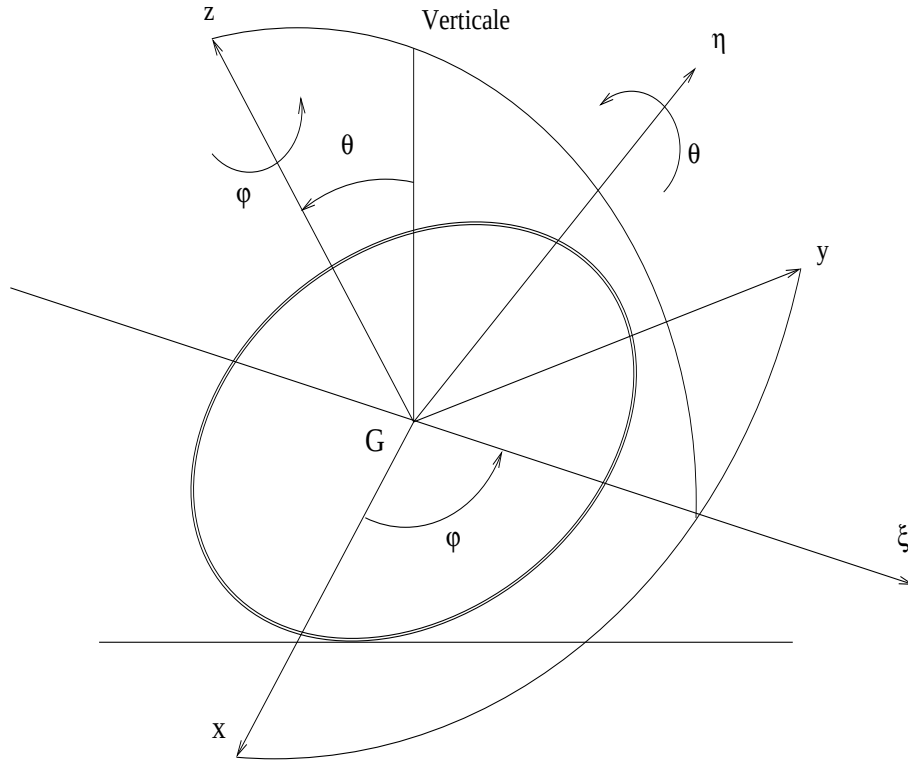


Figure 14 : Rotation du repère xyz sur le plan xGy autour de l'axe z à l'angle φ . L'angle θ caractérise l'écart de l'axe z de la verticale

Notons que le changement de variables (4.7) permet de tenir compte de l'intégrale géométrique. Finalement le problème est décrit par cinq variables indépendantes p, q, r, φ, θ .

Dérivons les expressions pour $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ dans (4.7) et substituons les dans les trois dernières équations (4.2). Alors en utilisant les formules pour $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ dans (4.7), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} - \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi} + p \sin \varphi \cos \theta + q \cos \varphi \cos \theta - r \sin \theta \sin \varphi = 0 \\ \cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi} + r \cos \varphi \sin \theta - p \cos \varphi \cos \theta + q \cos \theta \sin \varphi = 0 \\ -\sin \theta \dot{\theta} + p \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi - q \sin^2 \varphi \sin \theta - p \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi - \\ -q \cos^2 \varphi \sin \theta = 0 \end{array} \right.$$

En réduisant les termes semblables les troisième et deuxième équations deviennent

$$\dot{\theta} = -q, \quad \dot{\varphi} = -r + p \operatorname{ctg} \theta \quad (4.8)$$

En dérivant les expressions ω_1, ω_2 dans (4.7)

$$\dot{\omega}_1 = \dot{p} \cos \varphi - \dot{q} \sin \varphi - \dot{\varphi}(p \sin \varphi + q \cos \varphi)$$

$$\dot{\omega}_2 = \dot{p} \sin \varphi + \dot{q} \cos \varphi + \dot{\varphi}(p \cos \varphi - q \sin \varphi)$$

il en découle $\dot{p}, \dot{q}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = \dot{\omega}_1 \cos \varphi + \dot{\omega}_2 \sin \varphi + \dot{\varphi} q \\ \dot{q} = -\dot{\omega}_1 \sin \varphi + \dot{\omega}_2 \cos \varphi - \dot{\varphi} p \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Maintenant déterminons $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2$ de (4.2) et substituons les dans (4.9). Alors, tenant compte de la possibilité d'obtenir $\omega_3, \dot{\omega}_3$ de (4.4), on a un système

d'équations différentielles du quatrième ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dt} = \\ = S^{-1} \{ [(B + m(x^2 + z^2))(m\dot{\omega}_3 xz + X) + mxy(m\dot{\omega}_3 yz + Y)] \cdot \cos \varphi + \\ + [(A + m(y^2 + z^2))(m\dot{\omega}_3 yz + Y) + mxy(m\dot{\omega}_3 xz + X)] \cdot \sin \varphi \} + q\dot{\varphi} \\ \frac{dq}{dt} = \\ = S^{-1} \{ -[(B + m(x^2 + z^2))(m\dot{\omega}_3 xz + X) + mxy(m\dot{\omega}_3 yz + Y)] \cdot \sin \varphi + \\ + [(A + m(y^2 + z^2))(m\dot{\omega}_3 yz + Y) + mxy(m\dot{\omega}_3 xz + X)] \cdot \cos \varphi \} - p\dot{\varphi} \\ \frac{d\theta}{dt} = -q \\ \frac{d\varphi}{dt} = -r + p \operatorname{ctg} \theta \end{array} \right. \quad (4.10)$$

où

$$S = AB + Am(x^2 + z^2) + Bm(y^2 + z^2) + m^2 z^2 (x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\begin{aligned} X = & (B - C)\omega_2\omega_3 + m \{ g(\gamma_3 y - \gamma_2 z) - \omega_1(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) + \\ & + \dot{x}(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) - \omega_3 y(\omega_1 x + \omega_2 y) + \\ & + \omega_2 z(\omega_3 z + \omega_1 x) + yz(\omega_2^2 - \omega_3^2) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = & (C - A)\omega_3\omega_1 + m \{ g(\gamma_1 z - \gamma_3 x) - \omega_2(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) + \\ & + \dot{y}(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) - \omega_1 z(\omega_2 y + \omega_3 z) + \\ & + \omega_3 x(\omega_1 x + \omega_2 y) + zx(\omega_3^2 - \omega_1^2) \} \end{aligned}$$

et les expressions $\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ en fonction de p, q, θ, φ sont imposées par les formules (4.7).

Dans les parties de droite du système (4.10) il y a également la variable ω_3 qui est déterminée par (4.4).

4.2 Roulement d'un corps le long d'une droite

Dans le système d'équations (4.10) la variété (4.5) est déterminée par la condition

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad p = q = 0, \quad r = -\dot{\varphi} \quad (4.11)$$

et avec cela la dépendance de φ en fonction de t est imposée par la première des équations (4.6)

$$(C + m(x^{*2} + y^{*2}))\ddot{\varphi} + m(g(\gamma_2^* x^* - \gamma_1^* y^*) + \dot{\varphi}(x^* \dot{x}^* + y^* \dot{y}^*)) = 0 \quad (4.12)$$

Ici et dans la suite, l'astérisque '*' signifie que la valeur de la fonction est calculée sur le mouvement (4.11) étudié.

Les coordonnées du point de contact du corps et du plan sont fonctions de l'angle φ .

Ci-dessous on considérera un ellipsoïde creux, c'est-à-dire, un corps limité par la surface de l'ellipsoïde dont les demi-axes sont a, b, c et avec une cavité en forme d'ellipsoïde coaxial homothétique dont les demi-axes sont aD, bD, cD ; $D = 1 - d$ d est un paramètre sans dimension.

Calculons chacun des moments principaux centraux d'inertie A, B, C de l'ellipsoïde creux comme la différence des moments d'inertie correspondants de deux ellipsoïde ayant les demi-axes a, b, c et aD, bD, cD .

Le moment d'inertie de l'ellipsoïde par rapport à l'axe z

$$\begin{aligned} C = J_2 - J_1 &= m_2 \frac{a^2 + b^2}{5} - m_1 \frac{(a^2 + b^2)D^2}{5} = \\ &= V_2 \cdot \rho \frac{a^2 + b^2}{5} - V_1 \cdot \rho \frac{(a^2 + b^2)D^2}{5} = \\ &= \frac{4}{3}\pi abc \cdot \rho \frac{a^2 + b^2}{5} - \frac{4}{3}\pi abc \cdot D^3 \rho \frac{(a^2 + b^2)D^2}{5} = \\ &= \frac{4}{3}\pi abc \cdot \rho \frac{a^2 + b^2}{5} [1 - D^5] \end{aligned}$$

où m_1, m_2 sont les masses des ellipsoïdes, V_1, V_2 sont leurs volumes, ρ leur densité. La masse de l'ellipsoïde creux est égale à

$$m = V \cdot \rho = (V_2 - V_1) \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi abc(1 - D^3) \cdot \rho$$

Ainsi, nous avons

$$C = m \frac{a^2 + b^2}{5} \left[\frac{1 - D^5}{1 - D^3} \right],$$

$$A = m \frac{b^2 + c^2}{5} \left[\frac{1 - D^5}{1 - D^3} \right],$$

$$B = m \frac{a^2 + c^2}{5} \left[\frac{1 - D^5}{1 - D^3} \right]$$

Calculons ensuite les coordonnées du point de contact x^* , y^* .

Sur le mouvement étudié

$$\frac{x^{*2}}{a^2} + \frac{y^{*2}}{b^2} = 1$$

d'où

$$y^{*2} = b^2 \left(1 - \frac{x^{*2}}{a^2} \right)$$

$$x^{*2} = a^2 \left(1 - \frac{y^{*2}}{b^2} \right)$$

En utilisant les formules (4.3) pour $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, calculons

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= -\frac{y^*}{b^2} \left(\frac{x^{*2}}{a^4} + \frac{y^{*2}}{b^4} \right)^{-1/2} = -\frac{y^*}{b^2} \left(\frac{b^2 - y^{*2}}{a^2 b^2} + \frac{y^{*2}}{b^4} \right)^{-1/2} = \\ &= -\frac{y^*}{b^2} \left(\frac{b^4 + y^{*2}(a^2 - b^2)}{a^2 b^4} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

Alors

$$\gamma_2^2 = \frac{y^{*2} a^2}{(b^4 + y^{*2}(a^2 - b^2))}$$

et

$$\begin{aligned} y^{*2} &= \frac{b^4 \gamma_2^2}{a^2 - (a^2 - b^2) \gamma_2^2} \\ y^* &= -\frac{b^2 \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned}$$

De manière analogue

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= -\frac{x^*}{a^2} \left(\frac{x^{*2}}{a^4} + \frac{y^{*2}}{b^4} \right)^{-1/2} = -\frac{x^*}{a^2} \left(\frac{a^2 - x^{*2}}{a^2 b^2} + \frac{x^{*2}}{a^4} \right)^{-1/2} = \\
 &= -\frac{x^*}{a^2} \left(\frac{a^4 + x^{*2}(b^2 - a^2)}{a^4 b^2} \right)^{-1/2} \\
 \gamma_1^2 &= \frac{x^{*2} b^2}{(a^4 + x^{*2}(b^2 - a^2))} \\
 x^{*2} &= \frac{a^4 \gamma_1^2}{b^2 - (a^2 - b^2) \gamma_1^2} \\
 x^* &= -\frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons finalement

$$\begin{aligned}
 x^* &= -\frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \\
 y^* &= -\frac{b^2 \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \\
 \dot{x}^* &= \frac{a^2 b^2 \sin \varphi \dot{\varphi}}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \\
 \dot{y}^* &= -\frac{a^2 b^2 \cos \varphi \dot{\varphi}}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

Après la substitution des expressions obtenues dans (4.12) obtient un système conservatif à un seul degré de liberté. L'analyse complète de ce système peut être faite par l'étude du portrait de phase exposée dans [37].

L'équation (4.12) admet l'intégrale première

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 (C + m(x^{*2} + y^{*2})) - mg(x^* \cos \varphi + y^* \sin \varphi) = h(\text{constante}) \quad (4.13)$$

soit, explicitement

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \left(C + m \frac{a^4 \cos^2 \varphi + b^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \right) + mg \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = h$$

Selon la valeur de la constante de l'énergie h on distingue différents types de mouvements. Pour les classer ci-dessous il est commode de se servir de l'intégrale sans dimension.

On introduit les valeurs caractéristiques suivantes :

l est le plus grand axe de l'ellipsoïde (sans restreindre la généralité, on suppose que $l = a$) ;

$\tau = \sqrt{\frac{g}{l}}t$ est le temps sans dimension.

On obtient alors

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\varphi}{dt}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{l}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{l},$$

$$\tilde{C} = \frac{C}{ml^2}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{mgl}$$

Ici et partout la notation "tilde" signifie la valeur sans dimension.

L'intégrale (4.13) prend maintenant la forme :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \frac{C + m(x^{*2} + y^{*2})}{mgl} - \left(\frac{x^*}{l} \cos \varphi + \frac{y^*}{l} \sin \varphi \right) = \tilde{h}(\text{constante})$$

ou bien

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 (\tilde{C} + \tilde{x}^{*2} + \tilde{y}^{*2}) - (\tilde{x}^* \cos \varphi + \tilde{y}^* \sin \varphi) = \tilde{h}(\text{constante})$$

Dans l'expression ci-dessus on voit les coordonnées sans dimension du point de contact $\tilde{x}^*, \tilde{y}^*$

$$\tilde{x}^* = - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi}}$$

$$\tilde{y}^* = - \frac{\alpha \sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi}}$$

où l'on désigne par $\alpha = b^2/a^2$ un paramètre sans dimension ($\alpha \leq 1$).

Les coordonnées sans dimension du point de contact sont des fonctions périodiques de φ , dépendant également du paramètre sans dimension α .

Compte tenu des calculs précédents l'intégrale d'énergie sans dimension a la forme :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \left(\tilde{C} + \frac{\cos^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi} \right) + \sqrt{\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi} = \tilde{h} \quad (4.14)$$

Ci-dessous on peut voir le portrait de phase du système.

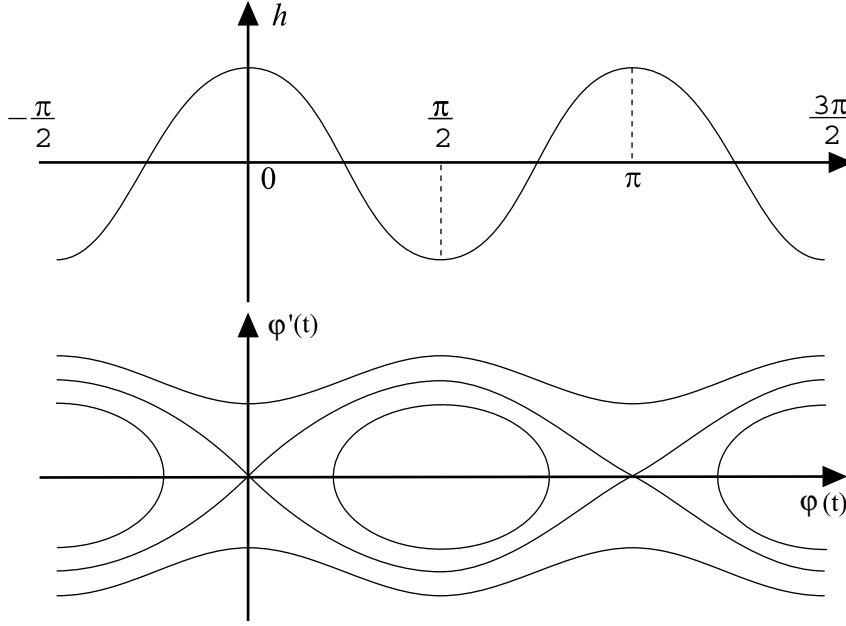


Figure 15 : Portrait de phase du système (4.12)

Selon la valeur de la constante sans dimension $\tilde{h}$ (où h) distingue les cas suivants (Markeyev [37]) :

1. $\tilde{h} < \sqrt{\alpha}$ ($h < mgb$) — le mouvement est impossible.
2. $\sqrt{\alpha} < \tilde{h} < 1$ ($mgb < h < mga$) — l'ellipsoïde effectue des "balancements", où la trace du point de contact sur le plan d'appui est un segment. Selon que h est proche de mgb ou de mga l'amplitude des balancements est proche de 0 ou π . La vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ est égale à une fonction périodique du temps, s'annulant deux fois au cours d'une période du balancement.
3. $\tilde{h} > 1$ — l'ellipsoïde roule le long d'une droite dans une direction avec la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ périodique par rapport au temps.

Dans les cas 2 et 3 la vitesse angulaire est déterminée par l'intégrale d'énergie (4.13)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2(h + mg(x^* \cos \varphi + y^* \sin \varphi))}{(m(x^{*2} + y^{*2}) + C)}} \quad (4.15)$$

4.3 Problème de la stabilité du roulement. Equations du mouvement perturbé

La suite de ce chapitre est consacrée à l'étude de la stabilité du roulement de l'ellipsoïde pesant le long d'une droite dans une direction (troisième cas dans la section précédente). Puisque dans ce cas la vitesse angulaire du roulement de l'ellipsoïde garde son signe (sans restreindre la généralité, on considère le cas pour lequel $\dot{\varphi} > 0$). Pour décrire ces roulements et des roulements qui sont proches on peut prendre φ comme nouvelle variable indépendante. Le système (4.10) prend alors la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{d\varphi} = (-r + p \operatorname{ctg} \theta)^{-1} S^{-1}. \\ \{ [(B + m(x^2 + z^2))(m\dot{r}xz + X) + mxy(m\dot{r}yz + Y)] \cos \varphi + \\ + [(A + m(y^2 + z^2))(m\dot{r}yz + Y) + mxy(m\dot{r}xz + X)] \sin \varphi \} + q \\ \frac{dq}{d\varphi} = (-r + p \operatorname{ctg} \theta)^{-1} S^{-1}. \\ \{ -[(B + m(x^2 + z^2))(m\dot{r}xz + X) + mxy(m\dot{r}yz + Y)] \sin \varphi + \\ + [(A + m(y^2 + z^2))(m\dot{r}yz + Y) + mxy(m\dot{r}xz + X)] \cos \varphi \} - p \\ \frac{d\theta}{d\varphi} = -(-r + p \operatorname{ctg} \theta)^{-1} q \end{array} \right. \quad (4.16)$$

où l'expression $r = \omega_3$ en fonction p, q, θ, φ est déterminée par l'intégrale d'énergie (4.4). Avec cela la fonction $r(p, q, \theta, \varphi, h)$ est une fonction 2π -périodique de θ et φ , dépendant également de la constante d'énergie h .

Le système (4.16) admet la solution particulière

$$p = q = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (4.17)$$

Ainsi donc, le problème de la stabilité du roulement se ramène à l'étude de la stabilité de la solution particulière (4.17) du système du troisième ordre (4.16).

Les membres de droite du système d'équations (4.16) dépendent des variables p, q, θ, φ et du paramètre h et sont des fonctions périodiques de θ et de φ .

Pour former le système d'équations aux variations, écrivons le système (4.16) sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dp}{d\varphi} = \frac{P(p, q, \theta, \varphi, h)}{-r + p \operatorname{ctg} \theta} \\ \frac{dq}{d\varphi} = \frac{Q(p, q, \theta, \varphi, h)}{-r + p \operatorname{ctg} \theta} \\ \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\Theta(p, q, \theta, \varphi, h)}{-r + p \operatorname{ctg} \theta} \end{cases} \quad (4.18)$$

où les fonctions $P(p, q, \theta, \varphi, h)$, $Q(p, q, \theta, \varphi, h)$, $\Theta(p, q, \theta, \varphi, h)$ satisfont aux conditions

$$P(0, 0, \frac{\pi}{2}, \varphi, h) = Q(0, 0, \frac{\pi}{2}, \varphi, h) = \Theta(0, 0, \frac{\pi}{2}, \varphi, h) = 0$$

Calculons les variations des membres de droite du système d'équations (4.18). On a

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{P(p, q, \theta, \varphi, h)}{-r + p \operatorname{ctg} \theta} \right) &= \frac{(-r + p \operatorname{ctg} \theta)^* \delta P(p, q, \theta, \varphi, h) - P^* \delta(-r + p \operatorname{ctg} \theta)}{(-r + p \operatorname{ctg} \theta)^{*2}} = \\ &= \frac{\delta P(p, q, \theta, \varphi, h)}{-r^{*2}(\varphi)} \end{aligned}$$

De manière analogue

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{Q(p, q, \theta, \varphi, h)}{-r + p \operatorname{ctg} \theta} \right) &= \frac{\delta Q(p, q, \theta, \varphi, h)}{-r^{*2}(\varphi)} \\ \delta \left(\frac{\Theta(p, q, \theta, \varphi, h)}{-r + p \operatorname{ctg} \theta} \right) &= \frac{\delta \Theta(p, q, \theta, \varphi, h)}{-r^{*2}(\varphi)} \end{aligned}$$

Ici

$$r^*(\varphi) = r(0, 0, \frac{\pi}{2}, \varphi, h)$$

$$P^* = Q^* = \Theta^* = 0$$

Comme toujours l'astérisque signifie que la valeur de la fonction est calculée sur la solution (4.17) étudiée.

Il découle de l'intégrale d'énergie (4.4)

$$r(p, q, \theta, \varphi, h) = r^*(\varphi) + \dots$$

où $r^*(\varphi)$ détermine par le membre de droite de (4.15)

$$r^*(\varphi) = -\sqrt{\frac{2(h + mg(x^* \cos \varphi + y^* \sin \varphi))}{(m(x^{*2} + y^{*2}) + C)}} \quad (4.19)$$

Le système d'équations aux variations pour le système d'équations (4.16) au voisinage de la solution (4.17) prend alors la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\varphi} \delta p = -\frac{1}{r^*(\varphi) S^*} \cdot \\ \left\{ \left[(B + mx^{*2})(m\dot{r}^*(\varphi)x^*\delta z + \delta X) + mx^*y^*(m\dot{r}^*(\varphi)y^*\delta z + \delta Y) \right] \cos \varphi + \right. \\ \left. + \left[(A + my^{*2})(m\dot{r}^*(\varphi)x^*\delta z + \delta Y) + mx^*y^*(m\dot{r}^*(\varphi)x^*\delta z + \delta X) \right] \sin \varphi \right\} + \\ + \delta q \\ \frac{d}{d\varphi} \delta q = \frac{1}{r^*(\varphi) S^*} \cdot \\ \left\{ \left[(B + mx^{*2})(m\dot{r}^*(\varphi)x^*\delta z + \delta X) + mx^*y^*(m\dot{r}^*(\varphi)y^*\delta z + \delta Y) \right] \sin \varphi - \right. \\ \left. - \left[(A + my^{*2})(m\dot{r}^*(\varphi)x^*\delta z + \delta Y) + mx^*y^*(m\dot{r}^*(\varphi)x^*\delta z + \delta X) \right] \cos \varphi \right\} - \\ - \delta p \\ \frac{d}{d\varphi} \delta \theta = \frac{1}{r^*(\varphi)} \delta q \end{array} \right.$$

Les parties de droite contiennent la variation δz , les variations δX et δY .

On trouve tout d'abord la variation δz . En faisant le développement limité de γ_3 par degrés de x, y, z on a

$$\gamma_3 = -\frac{z}{c^2} \left(\frac{x^{*2}}{a^4} + \frac{y^{*2}}{b^4} \right)^{-1/2} + \dots$$

Par conséquent on obtient

$$z = -c^2 \cos \theta \left(\frac{x^{*2}}{a^4} + \frac{y^{*2}}{b^4} \right)^{1/2} + \dots = -\frac{c^2 \cos \theta}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} + \dots,$$

$$\delta z = \frac{c^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \delta \theta$$

On calcule maintenant les variations δX δY

$$\begin{aligned} \delta X &= \left[r^*(\varphi)((B - C) \sin \varphi - m y^*(x^* \cos \varphi + y^* \sin \varphi)) + \right. \\ &\quad \left. + m y^*(\dot{x}^* \sin \varphi - \dot{y}^* \cos \varphi) \right] \delta p + \left[r^*(\varphi)((B - C) \cos \varphi + \right. \\ &\quad \left. + m y^*(x^* \sin \varphi - y^* \cos \varphi)) + m y^*(\dot{x}^* \cos \varphi + \dot{y}^* \sin \varphi) \right] \delta q + \\ &\quad + \left[m \frac{c^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} (-g \sin \varphi + r^*(\varphi)(\dot{x}^* - y^* r^*(\varphi))) - g y^* \right] \delta \theta \\ \delta Y &= \left[r^*(\varphi)((C - A) \cos \varphi + m x^*(x^* \cos \varphi + y^* \sin \varphi)) - \right. \\ &\quad \left. - m x^*(\dot{x}^* \sin \varphi - \dot{y}^* \cos \varphi) \right] \delta p + \left[r^*(\varphi)((A - C) \sin \varphi - \right. \\ &\quad \left. - m x^*(x^* \sin \varphi - y^* \cos \varphi)) - m x^*(\dot{x}^* \cos \varphi + \dot{y}^* \sin \varphi) \right] \delta q + \\ &\quad + \left[m \frac{c^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} (g \cos \varphi + r^*(\varphi)(\dot{y}^* - x^* r^*(\varphi))) + g x^* \right] \delta \theta \end{aligned}$$

Compte tenu des expressions pour δz , δX , δY le système d'équations aux

variations pour (4.16) a la forme finale suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\varphi} \delta p = - \left[\frac{\cos \varphi}{r^*(\varphi) S^*} d_1 + \frac{\sin \varphi}{r^*(\varphi) S^*} d_2 \right] \delta p - \\ \quad - \left[\frac{\cos \varphi}{r^*(\varphi) S^*} d_3 + \frac{\sin \varphi}{r^*(\varphi) S^*} d_4 - 1 \right] \delta q - \\ \quad - \frac{m}{r^*(\varphi) S^*} [c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi] \delta \theta \\ \frac{d}{d\varphi} \delta q = \left[\frac{\sin \varphi}{r^*(\varphi) S^*} d_1 - \frac{\cos \varphi}{r^*(\varphi) S^*} d_2 - 1 \right] \delta p + \\ \quad + \left[\frac{\sin \varphi}{r^*(\varphi) S^*} d_3 - \frac{\cos \varphi}{r^*(\varphi) S^*} d_4 \right] \delta q + \\ \quad + \frac{m}{r^*(\varphi) S^*} [c_1 \sin \varphi - c_2 \cos \varphi] \delta \theta \\ \frac{d}{d\varphi} \delta \theta = \frac{1}{r^*(\varphi)} \delta q \end{array} \right. \quad (4.20)$$

où

$$\begin{aligned} S^* &= AB + m(Ax^{*2} + By^{*2}), \\ d_1 &= (B + mx^{*2})a_1 + mx^*y^*a_2, \\ d_2 &= mx^*y^*a_1 + (A + my^{*2})a_2, \\ d_3 &= (B + mx^{*2})a_3 + mx^*y^*a_4, \\ d_4 &= mx^*y^*a_3 + (A + my^{*2})a_4, \\ a_1 &= r^*(\varphi) [(B - C) \sin \varphi - my^*(x^* \cos \varphi + y^* \sin \varphi)] + \\ &\quad my^*(\dot{x}^* \sin \varphi - \dot{y}^* \cos \varphi), \\ a_2 &= r^*(\varphi) [(C - A) \cos \varphi + mx^*(x^* \cos \varphi + y^* \sin \varphi)] - \\ &\quad mx^*(\dot{x}^* \sin \varphi - \dot{y}^* \cos \varphi), \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$a_3 = r^*(\varphi) [(B - C) \cos \varphi + my^*(x^* \sin \varphi - y^* \cos \varphi)],$$

$$a_4 = r^*(\varphi) [(A - C) \sin \varphi - mx^*(x^* \sin \varphi - y^* \cos \varphi)],$$

$$c_1 = \frac{\dot{r}^*(\varphi)c^2x^*}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} [B + m(x^{*2} + y^{*2})] + \\ (B + mx^{*2})b_1 + mx^*y^*b_2,$$

$$c_2 = \frac{\dot{r}^*(\varphi)c^2y}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} [A + m(x^{*2} + y^{*2})] + \\ mx^*y^*b_1 + (A + my^{*2})b_2,$$

$$b_1 = \frac{c^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} (\dot{x}^*r^*(\varphi) - r^{*2}(\varphi)y^* - g \sin \varphi) - gy^*,$$

$$b_2 = \frac{c^2}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} (\dot{y}^*r^*(\varphi) + r^{*2}(\varphi)x^* + g \cos \varphi) + gx^*$$

Rappelons, que dans le système obtenu (4.20) la dépendence $r^*(\varphi)$ est imposée par l'expression (4.19).

4.4 Système d'équations aux variations sans dimension

On présente le système (4.20) sous la forme sans dimension. Pour cela, en utilisant le paramètre caractéristique de l'ellipsoïde l et le temps sans dimension τ introduits précédemment, on introduit les variables sans dimension suivantes

$$\tilde{p} = \sqrt{\frac{l}{g}}p, \quad \tilde{q} = \sqrt{\frac{l}{g}}q, \quad \tilde{r} = \sqrt{\frac{l}{g}}r, \quad \tilde{r}' = \frac{l}{g}\dot{r}$$

Dans les nouvelles notations le prime signifie la dérivation par τ .

On note les "moments d'inertie" sans dimension en se servant des

paramètres sans dimension $\alpha = \frac{b^2}{a^2}$ et $\beta = \frac{c^2}{a^2}$.

$$\tilde{A} = \frac{A}{ml^2} = \frac{b^2 + c^2}{5a^2} \lambda = \frac{1}{5}(\alpha + \beta)\lambda,$$

$$\tilde{B} = \frac{B}{ml^2} = \frac{a^2 + c^2}{5a^2} \lambda = \frac{1}{5}(1 + \beta)\lambda,$$

$$\tilde{C} = \frac{C}{ml^2} = \frac{a^2 + b^2}{5a^2} \lambda = \frac{1}{5}(1 + \alpha)\lambda$$

où $\lambda = \frac{1 - D^5}{1 - D^3}$.

Ensuite on calcule $\tilde{x}^{*'}, \tilde{y}^{*'}$:

$$\tilde{x}^{*' } = -\frac{1}{\sqrt{gl}} \frac{a^2 b^2 \sin \varphi r^*(\varphi)}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = -\frac{\alpha \sin \varphi \tilde{r}^*(\varphi)}{(\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi)^{3/2}},$$

$$\tilde{y}^{*' } = \frac{1}{\sqrt{gl}} \frac{a^2 b^2 \cos \varphi r^*(\varphi)}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{\alpha \cos \varphi \tilde{r}^*(\varphi)}{(\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

Il s'ensuit un nouveau système d'équations aux variations en les nouvelles variables

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\varphi} \delta \tilde{p} = -\frac{1}{\tilde{r}^*(\varphi)} \left(\left[\cos \varphi \frac{\tilde{d}_1}{\tilde{S}^*} + \sin \varphi \frac{\tilde{d}_2}{\tilde{S}^*} \right] \delta \tilde{p} + \right. \\ \quad + \left[\cos \varphi \frac{\tilde{d}_3}{\tilde{S}^*} + \sin \varphi \frac{\tilde{d}_4}{\tilde{S}^*} - 1 \right] \delta \tilde{q} + \\ \quad \left. + \left[\cos \varphi \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{S}^*} + \sin \varphi \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{S}^*} \right] \delta \theta \right) \\ \frac{d}{d\varphi} \delta \tilde{q} = \frac{1}{\tilde{r}^*(\varphi)} \left(\left[\sin \varphi \frac{\tilde{d}_1}{\tilde{S}^*} - \cos \varphi \frac{\tilde{d}_2}{\tilde{S}^*} - 1 \right] \delta \tilde{p} + \right. \\ \quad + \left[\sin \varphi \frac{\tilde{d}_3}{\tilde{S}^*} - \cos \varphi \frac{\tilde{d}_4}{\tilde{S}^*} \right] \delta \tilde{q} + \\ \quad \left. + \left[\sin \varphi \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{S}^*} - \cos \varphi \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{S}^*} \right] \delta \theta \right) \\ \frac{d}{d\varphi} \delta \theta = \frac{1}{\tilde{r}^*(\varphi)} \delta \tilde{q} \end{array} \right. \quad (4.22)$$

où

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{d}_1}{\tilde{S}^*} &= \frac{(\tilde{B} + \tilde{x}^{*2})\tilde{a}_1 + \tilde{x}^*\tilde{y}^*\tilde{a}_2}{\tilde{A}\tilde{B} + \tilde{A}\tilde{x}^{*2} + \tilde{B}\tilde{y}^{*2}}, \\
\frac{\tilde{d}_2}{\tilde{S}^*} &= \frac{\tilde{x}^*\tilde{y}^*\tilde{a}_1 + (\tilde{A} + \tilde{y}^{*2})\tilde{a}_2}{\tilde{A}\tilde{B} + \tilde{A}\tilde{x}^{*2} + \tilde{B}\tilde{y}^{*2}}, \\
\frac{\tilde{d}_3}{\tilde{S}^*} &= \frac{(\tilde{B} + \tilde{x}^{*2})\tilde{a}_3 + \tilde{x}^*\tilde{y}^*\tilde{a}_4}{\tilde{A}\tilde{B} + \tilde{A}\tilde{x}^{*2} + \tilde{B}\tilde{y}^{*2}}, \\
\frac{\tilde{d}_4}{\tilde{S}^*} &= \frac{\tilde{x}^*\tilde{y}^*\tilde{a}_3 + (\tilde{A} + \tilde{y}^{*2})\tilde{a}_4}{\tilde{A}\tilde{B} + \tilde{A}\tilde{x}^{*2} + \tilde{B}\tilde{y}^{*2}},
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\tilde{a}_1 = \tilde{r}^*(\varphi) \left[(\tilde{B} - \tilde{C}) \sin \varphi - \tilde{y}^*(\tilde{x}^* \cos \varphi + \tilde{y}^* \sin \varphi) \right] + \tilde{y}^*(\tilde{x}^{*'} \sin \varphi - \tilde{y}^{*'} \cos \varphi),$$

$$\tilde{a}_2 = \tilde{r}^*(\varphi) \left[(\tilde{C} - \tilde{A}) \cos \varphi + \tilde{x}^*(\tilde{x}^* \cos \varphi + \tilde{y}^* \sin \varphi) \right] - \tilde{x}^*(\tilde{x}^{*'} \sin \varphi - \tilde{y}^{*'} \cos \varphi),$$

$$\tilde{a}_3 = \tilde{r}^*(\varphi) \left[(\tilde{B} - \tilde{C}) \cos \varphi + \tilde{y}^*(\tilde{x}^* \sin \varphi - \tilde{y}^* \cos \varphi) \right],$$

$$\tilde{a}_4 = \tilde{r}^*(\varphi) \left[(\tilde{A} - \tilde{C}) \sin \varphi - \tilde{x}^*(\tilde{x}^* \sin \varphi - \tilde{y}^* \cos \varphi) \right],$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{c}_1}{\tilde{S}^*} &= \left[\tilde{r}^{*'}(\varphi) \frac{\beta}{(\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi)^{1/2}} \tilde{x}^*(\tilde{B} + \tilde{x}^{*2} + \tilde{y}^{*2}) + (\tilde{B} + \tilde{x}^{*2})\tilde{b}_1 + \tilde{x}^*\tilde{y}^*\tilde{b}_2 \right] \\
&\quad \left[\tilde{A}\tilde{B} + \tilde{A}\tilde{x}^{*2} + \tilde{B}\tilde{y}^{*2} \right]^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{c}_2}{\tilde{S}^*} &= \left[\tilde{r}^{*'}(\varphi) \frac{\beta}{(\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi)^{1/2}} \tilde{y}^*(\tilde{A} + \tilde{x}^{*2} + \tilde{y}^{*2}) + \tilde{x}^*\tilde{y}^*\tilde{b}_1 + (\tilde{A} + \tilde{y}^{*2})\tilde{b}_2 \right] \\
&\quad \left[\tilde{A}\tilde{B} + \tilde{A}\tilde{x}^{*2} + \tilde{B}\tilde{y}^{*2} \right]^{-1},
\end{aligned}$$

$$\tilde{b}_1 = \frac{\beta}{(\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi)^{1/2}} (\tilde{x}^{*'} \tilde{r}^*(\varphi) - \tilde{r}^{*2}(\varphi) \tilde{y}^* - \sin \varphi) - \tilde{y}^*,$$

$$\tilde{b}_2 = \frac{\beta}{(\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi)^{1/2}} (\tilde{y}^{*'} \tilde{r}^*(\varphi) + \tilde{r}^{*2}(\varphi) \tilde{x}^* + \cos \varphi) + \tilde{x}^*$$

Ici la dépendance $\tilde{r}^*(\varphi)$ est déterminée par (4.19) (sous la forme sans

dimension)

$$\tilde{r}^*(\varphi) = - \sqrt{\frac{2(\tilde{h} - \sqrt{\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi})}{\lambda \frac{(1+\alpha)}{5} + \frac{\cos^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi}}} \quad (4.24)$$

et, par dérivation :

$$\begin{aligned} \tilde{r}^{*'}(\varphi) &= -(1-\alpha) \cos \varphi \sin \varphi \\ &\quad \left(\frac{5\sqrt{\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi}}{\cos^2 \varphi (\lambda(1+\alpha) + 5) + \alpha \sin^2 \varphi (\lambda(1+\alpha) + 5\alpha)} \right) + \\ &\quad + \frac{10\alpha(\tilde{h} - \sqrt{\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi})}{(\cos^2 \varphi (\lambda(1+\alpha) + 5) + \alpha \sin^2 \varphi (\lambda(1+\alpha) + 5\alpha))^2} \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.5 Roulement de l'ellipsoïde proche de l'ellipsoïde de révolution

Dans la suite de ce chapitre la notation "tilde", marquant les valeurs sans dimension, est omise.

Analysons le roulement d'un ellipsoïde voisin d'un ellipsoïde de révolution. Dans ce cas mettons que $b = a\sqrt{1+\varepsilon}$ (ε est le petit paramètre). Si $\varepsilon = 0$, on a un ellipsoïde de révolution, roulant à vitesse angulaire constante, définie par le rapport (4.24)

$$r^*(\varphi) = -\sqrt{\frac{10(h-1)}{2\lambda+5}} = \text{constante}$$

Le paramètre sans dimension α est de la forme

$$\alpha = \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2(1+\varepsilon)}{a^2} = 1 + \varepsilon$$

Le système d'équations aux variations (4.22) pour un ellipsoïde voisin de

4.5 Roulement de l'ellipsoïde proche de l'ellipsoïde de révolution 89

l'ellipsoïde révolution a la forme

$$\begin{cases} \dot{\delta p} &= \frac{2}{(1+\beta)}\delta q \\ \dot{\delta q} &= -\frac{2\lambda+5}{\lambda(1+\beta)+5}\delta p + \frac{5(\beta-1)\sqrt{2\lambda+5}}{(\lambda(1+\beta)+1)\sqrt{10(h-1)}}\delta\theta \\ \dot{\delta\theta} &= -\frac{\sqrt{2\lambda+5}}{\sqrt{10(h-1)}}\delta q \end{cases} \quad (4.26)$$

On calcule les racines de l'équation caractéristique de ce système

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{2\lambda+5}{(\lambda(1+\beta)+5)} \left(\frac{(\beta-1)}{2(h-1)} + \frac{2}{(1+\beta)} \right)}, \quad \lambda_3 = 0$$

D'où on peut constater, que si la condition

$$\beta^2 > 5 - 4h \quad (4.27)$$

est vérifiée, alors les racines $\pm i\omega$

$$\omega = \frac{2\lambda+5}{(\lambda(1+\beta)+5)} \left(\frac{(\beta-1)}{2(h-1)} + \frac{2}{(1+\beta)} \right)$$

de l'équation caractéristique seront purement imaginaires.

Signalons que la condition (4.27) est une condition nécessaire et suffisante de stabilité au sens de Lyapunov du roulement de l'ellipsoïde de révolution [47].

Considérons à présent le roulement de l'ellipsoïde proche de l'ellipsoïde de révolution ($\varepsilon \neq 0$). Pour le faire exprimons le système d'équations aux variations (4.22) au voisinage de ce roulement. Dans ce cas les coefficients du système, déterminés par les formules (4.23), dépendront de ε . Considérons

dans ces formules les termes du première ordre par rapport à ε

$$\begin{aligned}
r^*(\varphi) &= -\sqrt{\frac{10(h-1)}{2\lambda+5}} \left(1 - \varepsilon \frac{2\lambda h + 10h - 5 + \cos^2 \varphi (5 - 2\lambda - 10h)}{4(h-1)(2\lambda+5)} \right) \\
r^{*'}(\varphi) &= -\varepsilon \frac{5(2\lambda + 10h - 5)}{(2\lambda + 5)^2} \sin \varphi \cos \varphi \\
A &= \frac{\lambda}{5}(1 + \beta) + \frac{\lambda}{5}\varepsilon \\
B &= \frac{\lambda}{5}(1 + \beta) \\
C &= \frac{2\lambda}{5} + \frac{\lambda}{5}\varepsilon \\
x^* &= -\cos \varphi (1 - \varepsilon \frac{1}{2} \sin^2 \varphi) \\
y^* &= -\sin \varphi (1 + \varepsilon (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi)) \\
x^{*'} &= -r^*(\varphi) \sin \varphi (1 + \varepsilon (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi)) \\
y^{*'} &= r^*(\varphi) \cos \varphi (1 + \varepsilon (1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi))
\end{aligned}$$

Ensuite substituons ces expressions dans le système (4.22) et désignons les variations $\delta p, \delta q, \delta \theta$ par x_1, y, x_2 . Le système (4.22) aura alors la forme

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{dx_1}{d\varphi} &= (\varepsilon \cdot a_{11}(\varphi) + \dots)x_1 + (\varepsilon \cdot a_{12}(\varphi) + \dots)x_2 + \\
&\quad + (b_1^0 + \varepsilon \cdot b_1(\varphi) + \dots)y \\
\frac{dx_2}{d\varphi} &= (\varepsilon \cdot a_{21}(\varphi) + \dots)x_1 + (\varepsilon \cdot a_{22}(\varphi) + \dots)x_2 + \\
&\quad + (b_2^0 + \varepsilon \cdot b_2(\varphi) + \dots)y \\
\frac{dy}{d\varphi} &= (a_1^0 + \varepsilon \cdot a_1(\varphi) + \dots)x_1 + (a_2^0 + \varepsilon \cdot a_2(\varphi) + \dots)x_2 + \\
&\quad + (\varepsilon \cdot a_{33}(\varphi) + \dots)y
\end{aligned} \right. \quad (4.28)$$

4.5 Roulement de l'ellipsoïde proche de l'ellipsoïde de révolution 91

où

$$\begin{aligned}
 a_{11}(\varphi) &= a_{11}^{(2)} \sin 2\varphi = \frac{\beta(2\lambda + 5)}{2(\beta + 1)(5 + \lambda(\beta + 1))} \sin 2\varphi \\
 a_{12}(\varphi) &= a_{12}^{(2)} \sin 2\varphi = \\
 &= \frac{(30\lambda(1 - \beta) - 25(1 + \beta) + 8\lambda^2 + 20h(5 + \lambda(\beta + 1)))}{\sqrt{h - 1}(2\lambda + 5)^{3/2}(\lambda + 5 + \beta(2.5 + \lambda(\beta + 1)))} \sin 2\varphi \\
 a_{21}(\varphi) &= 0 \\
 a_{22}(\varphi) &= 0 \\
 a_{33}(\varphi) &= a_{33}^{(2)} \sin 2\varphi = -\frac{\beta(\lambda + 5)}{(\beta + 1)(5 + \lambda(\beta + 1))} \sin 2\varphi \\
 b_1^0 &= \frac{2}{\beta + 1} \\
 b_1(\varphi) &= b_1^* + b_1^{(2)} \cos 2\varphi = \frac{\beta}{(1 + \beta)^2} + \frac{\beta}{(1 + \beta)^2} \cos 2\varphi
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
 b_2^0 &= -\sqrt{\frac{2\lambda + 5}{10(h - 1)}} \\
 b_2(\varphi) &= b_2^* + b_2^{(2)} \cos 2\varphi = \\
 &= \frac{(\lambda + 2.5)(1 - 2h)}{4(h - 1)\sqrt{10(h - 1)(2\lambda + 5)}} + \frac{(\lambda - 2.5 + 5h)}{\sqrt{10(h - 1)(2\lambda + 5)}} \cos 2\varphi \\
 a_1^0 &= -\frac{(5 + 2\lambda)}{(5 + \lambda(\beta + 1))} \\
 a_1(\varphi) &= a_1^* + a_1^{(2)} \cos 2\varphi = \\
 &= -\frac{\lambda\beta(\lambda + 2.5)}{(5 + \lambda(\beta + 1))^2} + \frac{(\lambda^2\beta + 7.5\lambda\beta + 5\lambda + 25)}{(5 + \lambda(\beta + 1))^2} \cos 2\varphi
 \end{aligned}$$

$$a_2^0 = \frac{5(\beta - 1)\sqrt{2\lambda + 5}}{(5 + \lambda(\beta + 1))\sqrt{10(h - 1)}}$$

$$a_2(\varphi) = a_2^* + a_2^{(2)} \cos 2\varphi$$

avec

$$\begin{aligned} a_2^* &= -\frac{5\sqrt{2\lambda + 5}}{4(5 + \lambda(\beta + 1))^2\sqrt{10(h - 1)}} \cdot \\ &\quad \left(\lambda\beta^2 + (4\lambda + 15)\beta - \lambda - 5 + \frac{5(1 - 2h)(\beta - 1)\sqrt{2\lambda + 5}}{10(h - 1)} \right) \\ a_2^{(2)} &= \left(\frac{5\beta\sqrt{10(h - 1)}}{(5 + \lambda(1 + \beta))\sqrt{2\lambda + 5}} + \frac{1.25(\lambda\beta^2 + (4\lambda + 15)\beta - \lambda - 5)\sqrt{2\lambda + 5}}{(5 + \lambda(1 + \beta))^2\sqrt{10(h - 1)}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{6.25(1 - \beta)(2\lambda - 5 + 10h)}{(5 + \lambda(1 + \beta))^2(2\lambda + 5)^{1/2}(10(h - 1))^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

En utilisant les transformations (2.42),(2.43) si $k = 2$, abaissons l'ordre du système (4.28). On obtient

$$\begin{cases} \dot{x}_2 &= \eta_1 x_2 + \xi_1 y \\ \dot{y} &= \xi_2 x_2 + \eta_2 y \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \varepsilon \eta_{12} \sin 2\varphi = \varepsilon \left(a_{22}^{(2)} - a_{21}^{(2)} \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} \right) \sin 2\varphi \\ \eta_2 &= \varepsilon \eta_{22} \sin 2\varphi = \varepsilon \left(a_{33}^{(2)} - \beta_2 \frac{a_1^0}{\alpha_1^0} \right) \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\xi_1 = \xi_1^0 + \varepsilon(\xi_{10} + \xi_{12} \cos 2\varphi) = b_2^0 + \varepsilon(b_2^* + b_2^{(2)} \cos 2\varphi)$$

$$\xi_2 = \xi_2^0 + \varepsilon(\xi_{20} + \xi_{22} \cos 2\varphi)$$

4.5 Roulement de l'ellipsoïde proche de l'ellipsoïde de révolution 93

avec

$$\begin{aligned}\xi_2^0 &= a_2^0 - a_1^0 + \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} \\ \xi_{20} &= a_2^* - a_1^* \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} - a_1^0 \frac{\alpha_{20} \alpha_1^0 - \alpha_{10} \alpha_2^0}{(\alpha_1^0)^2} \\ \xi_{22} &= a_2^{(2)} - a_1^{(2)} \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} - a_1^0 \frac{\alpha_{22} \alpha_1^0 - \alpha_{12} \alpha_2^0}{(\alpha_1^0)^2}\end{aligned}$$

$$(\alpha_1^0 = b_2^0, \alpha_2^0 = -b_1^0).$$

Considérons également le système d'équations (4.30) pris en moyenne sur période

$$\begin{cases} \dot{x}_2 &= (\xi_1^0 + \varepsilon \xi_{10}) y \\ \dot{y} &= (\xi_2^0 + \varepsilon \xi_{20}) x_2 \end{cases} \quad (4.32)$$

La fréquence Ω^* du système (4.32) est calculée d'après la formule

$$\Omega_*^2 = -(\xi_1^0 + \varepsilon \xi_{10})(\xi_2^0 + \varepsilon \xi_{20})$$

Conformément aux résultats connus [70], s'il n'y a pas résonance du deuxième ordre (c'est-à-dire que 2ω n'est pas de la forme p avec $p \in \mathbf{Z}$) les exposants caractéristiques du système (4.30) coïncident avec les exposants caractéristiques $\pm i\Omega_*$ du système pris en moyenne avec une précision d'ordre $O(\varepsilon^2)$ et si la condition (4.27) est réalisée, elles seront purement imaginaires.

Considérons la résonance du deuxième ordre $\omega = 1$ ($p = 2$).

La condition de résonance du deuxième ordre a la forme explicite

$$\frac{(2\lambda + 5)}{(\lambda(1 + \beta) + 5)} \left(\frac{\beta - 1}{2(h - 1)} + \frac{2}{\beta + 1} \right) = 1 \quad (4.33)$$

Pour calculer les exposants caractéristiques du système (4.30) dans ce cas il est nécessaire de normaliser le système (4.30). On a

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\Omega_* z + \frac{i}{4}\varepsilon \left[z \left([F_2^- + G_2^-] e^{i2t} + [-F_2^- + G_2^-] e^{-i2t} \right) + \right. \\ &\quad \left. \bar{z} \left([F_2^+ + G_2^+] e^{i2t} + [-F_2^+ + G_2^+] e^{-i2t} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

où

$$\begin{aligned} F_2^- &= -\eta_{12} - \eta_{22}, & G_2^- &= \sqrt{-\frac{\xi_1^0}{\xi_2^0}} \xi_{22} - \sqrt{-\frac{\xi_2^0}{\xi_1^0}} \xi_{12} \\ F_2^+ &= -\eta_{12} + \eta_{22}, & G_2^+ &= \sqrt{-\frac{\xi_1^0}{\xi_2^0}} \xi_{22} + \sqrt{-\frac{\xi_2^0}{\xi_1^0}} \xi_{12} \end{aligned}$$

On a fait observer dans la section 2.8 que si le coefficient de $\bar{z}e^{i2\varphi} \neq 0$, les racines de l'équation caractéristique du système d'équations (4.30) ont des parties réelles non nulles et que le roulement analysé de l'ellipsoïde, proche de l'ellipsoïde de révolution, sera instable.

Trouvons ce coefficient d'après les formules (4.31)

$$\begin{aligned}
 & - \eta_{12} + \eta_{22} + \frac{1}{2}\xi_{22} + 2\xi_{12} = \\
 & = a_{33}^{(2)} - \beta_2 \frac{a_1^0}{\alpha_1^0} + 2b_2^{(2)} + \frac{1}{2}(a_2^{(2)} - a_1^{(2)} \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} - \frac{a_1^0}{(\alpha_1^0)^2} (\alpha_1^0 \alpha_{22} - \alpha_2^0 \alpha_{12}))
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

où $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \beta^2, \alpha_1^0, \alpha_2^0$ sont déterminés par les coefficients (4.29) à l'aide des formules (2.42)-(2.43) si $k = 2$:

$$\alpha_{10} = -b_2^0, \quad \alpha_{20} = b_1^0 - \frac{\alpha_1^0 b_1^* + \alpha_2^0 b_2^*}{b_2^0}$$

$$\begin{cases} \alpha_{12} &= \frac{1}{2}(a_1^0 f_2 + b_2^0 a_{11}^{(2)} - b_1^0 a_{21}^{(2)}) \\ \alpha_{22} &= \frac{1}{2}(a_2^0 f_2 + b_2^0 a_{12}^{(2)} - b_1^0 a_{22}^{(2)}) \\ \beta_2 &= f_2 \end{cases}$$

où

$$f_2 = - \frac{b_1^0(b_2^0 a_{11}^{(2)} - b_1^0 a_{21}^{(2)}) + b_2^0(b_2^0 a_{12}^{(2)} - b_1^0 a_{22}^{(2)}) + k(b_2^0 b_1^{(2)} - b_1^0 b_2^{(2)})}{b_1^0 a_1^0 + b_2^0 a_2^0 + 4}$$

Revenons maintenant à la relation de résonance (4.33). Il est évident que pour n'importe quel h , si $\beta = 1$ (cas d'une sphère) cette relation est vérifiée. Par conséquent pour un ellipsoïde, proche d'une sphère, le roulement est toujours accompagné de résonance paramétrique. La droite horizontale correspond à la sphère (Figure 16).

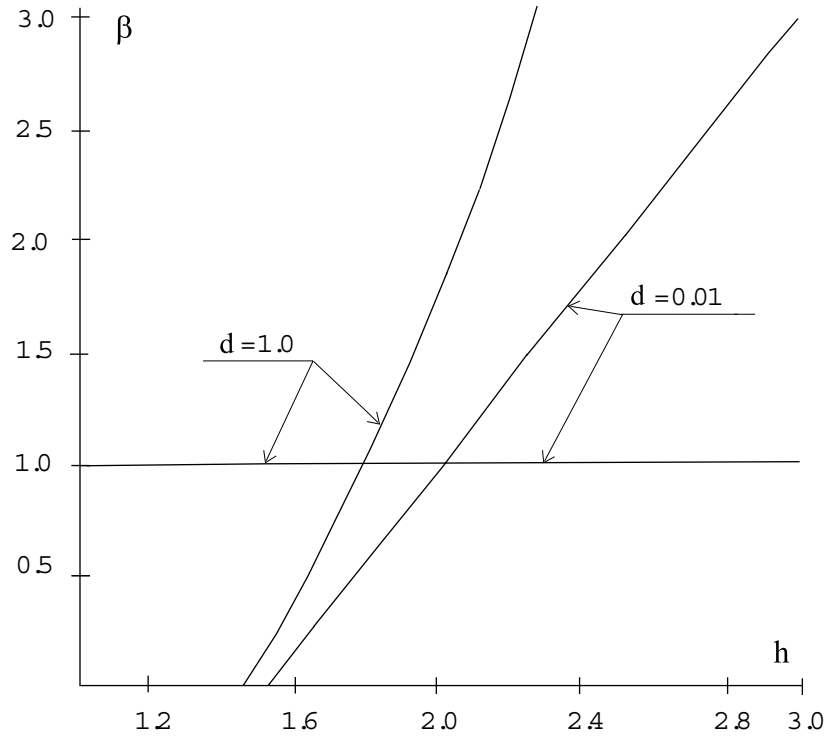


Figure 16 : Courbes de résonance du deuxième ordre $\omega = 1$

Si $\beta \neq 1$ la relation (4.33) impose encore une courbe $\beta = \beta(h)$ correspondant à la résonance. Il en résulte que chaque ellipsoïde proche de l'ellipsoïde de révolution a sa propre vitesse angulaire de résonance "individuelle" (paramètre h). Ce phénomène est signalé ici pour la première fois.

Sur la Figure 16 les courbes $\beta = \beta(h)$ sont données pour $d = 0.01$ (l'ellipsoïde à paroi mince) et $d = 1.0$ (l'ellipsoïde homogène). Les masses des ellipsoïdes sont les mêmes.

Les recherches suivantes s'effectuent de façon numérique. On a vérifié les conditions d'instabilité sur les courbes résonantes (4.33) d'après les formules (2.41).

Conclusion 3. *La résonance paramétrique conduit à l'instabilité du roulement de l'ellipsoïde, proche de l'ellipsoïde de révolution.*

4.6 Résultats et conclusions sur la stabilité

Calculons les exposants caractéristiques dans le cas de l'ellipsoïde arbitraire.

Le système d'équations aux variations (4.22) avec les coefficients 2π -périodiques par rapport à φ est invariant par rapport à chacune des substitutions

$$(\varphi, \delta p, \delta q, \delta \theta) \rightarrow (-\varphi, -\delta p, \delta q, -\delta \theta)$$

$$(\varphi, \delta p, \delta q, \delta \theta) \rightarrow (-\varphi, \delta p, -\delta q, \delta \theta)$$

c'est-à-dire est un système linéaire réversible. On peut trouver les exposants caractéristiques pour ce système par la méthode, décrite dans la section 2.3.

Construisons une solution du problème de Cauchy du système (4.22) sur un segment $[0, 2\pi]$ avec les données initiales

$$\delta p(0) = 0, \quad \delta \theta(0) = 0, \quad \delta q(0) = 1$$

Alors, si $|\delta q(2\pi)| < 1$, les exposants caractéristiques du système (4.22) seront purement imaginaires [80].

Les résultats des études numériques sont présentés sur les Figures 17-26 et sont comparés pour des ellipsoïdes creux et homogène. La rotation s'effectue autour de l'axe c .

Le paramètre $\alpha = \frac{b^2}{a^2}$ est porté en abscisse et le paramètre $\beta = \frac{c^2}{a^2}$ en ordonnée. Admettons que $a > b$ ($0 < \alpha \leq 1$). Les domaines où sont vérifiées les conditions nécessaires de stabilité, sont marqués en noir.

Sur les figures du haut sont exposés les résultats pour l'ellipsoïde homogène (paramètre $d = 1.0$), sur les figures du bas sont exposés les résultats pour l'ellipsoïde creux (paramètre $d = 0.01$). Pour chaque figure sont comparés les résultats pour la même vitesse angulaire (paramètre h).

L'évolution des domaines de stabilité sous l'effet du changement de la vitesse angulaire du roulement est parfaitement bien observée à travers toute la série de figures.

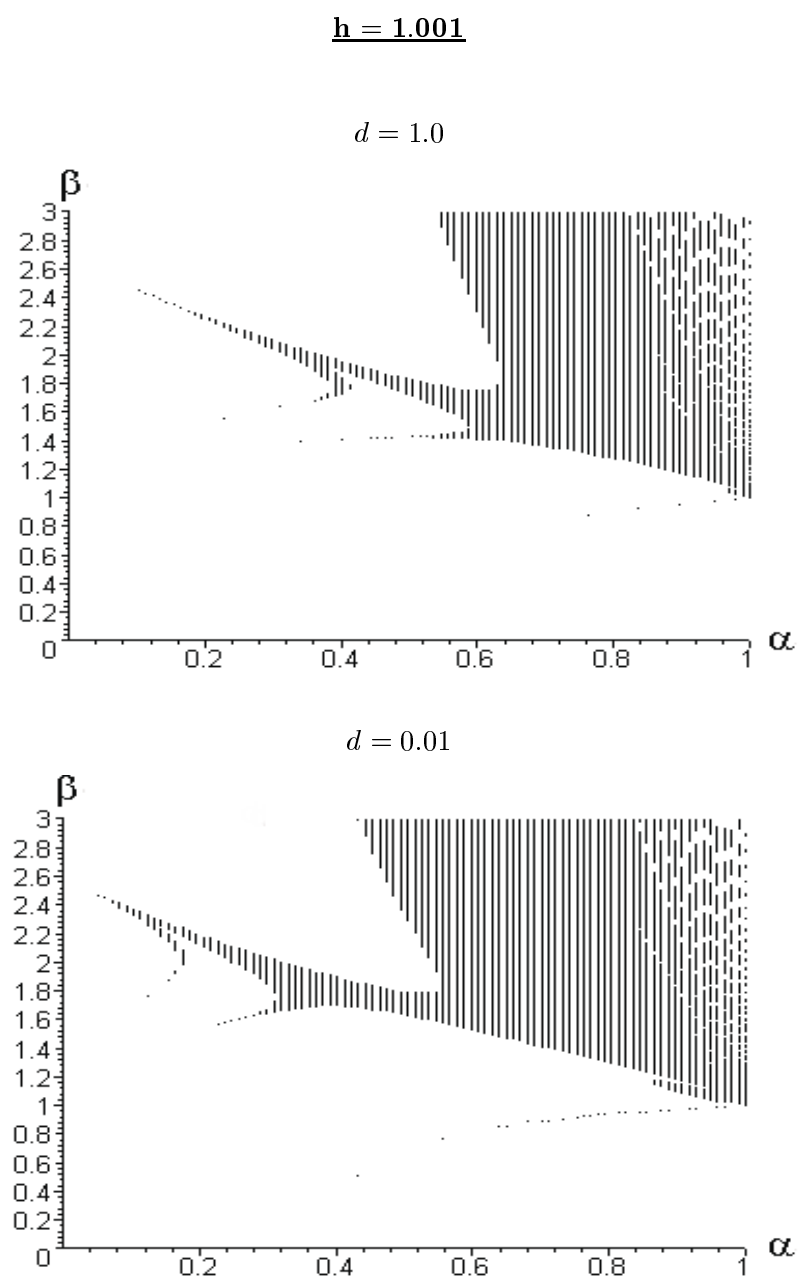
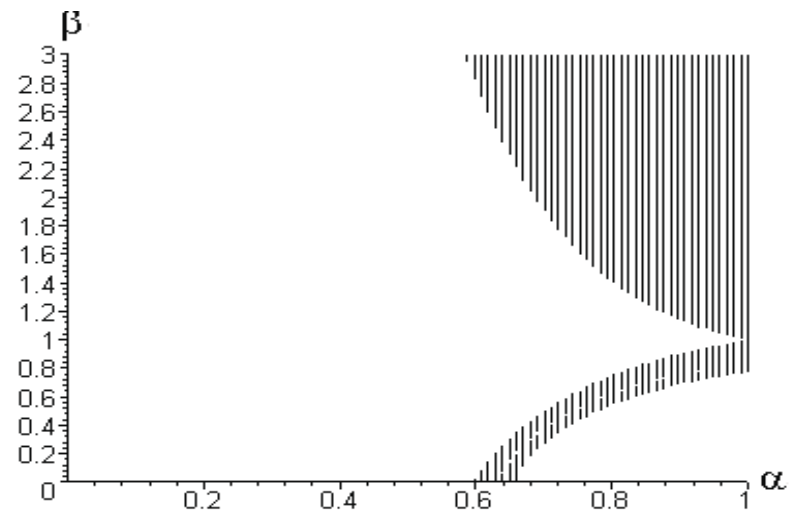


Figure 17

$$\underline{h = 1.1}$$

$$d = 1.0$$



$$d = 0.01$$

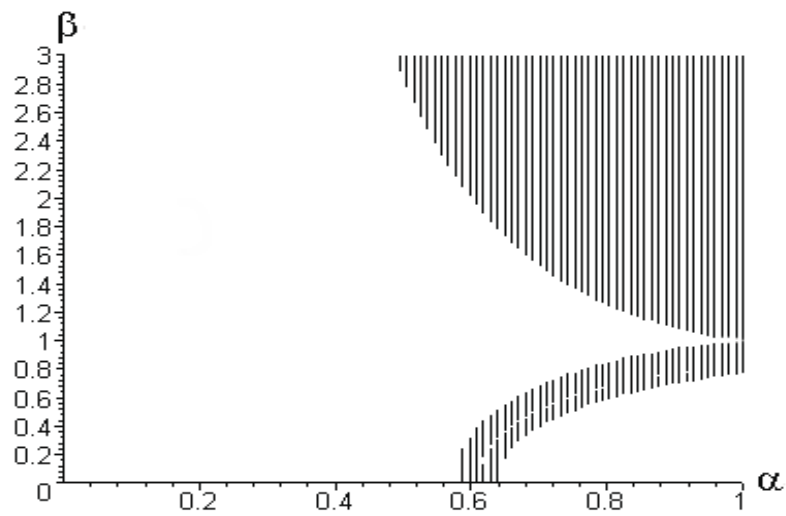


Figure 18

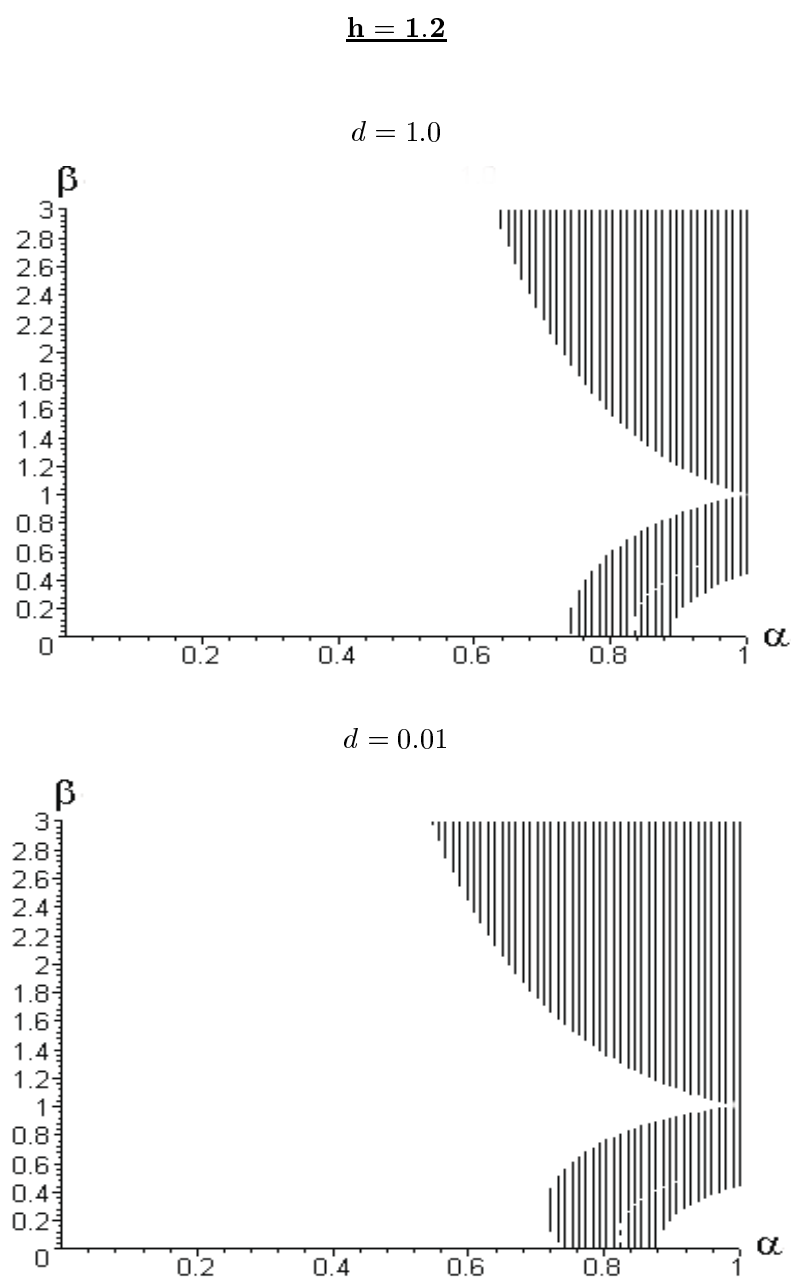
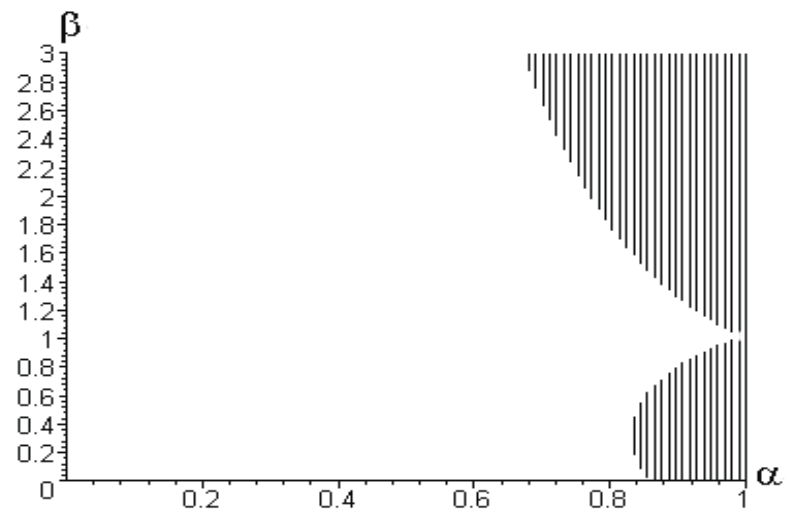


Figure 19

$$\underline{h = 1.3}$$

$$d = 1.0$$



$$d = 0.01$$

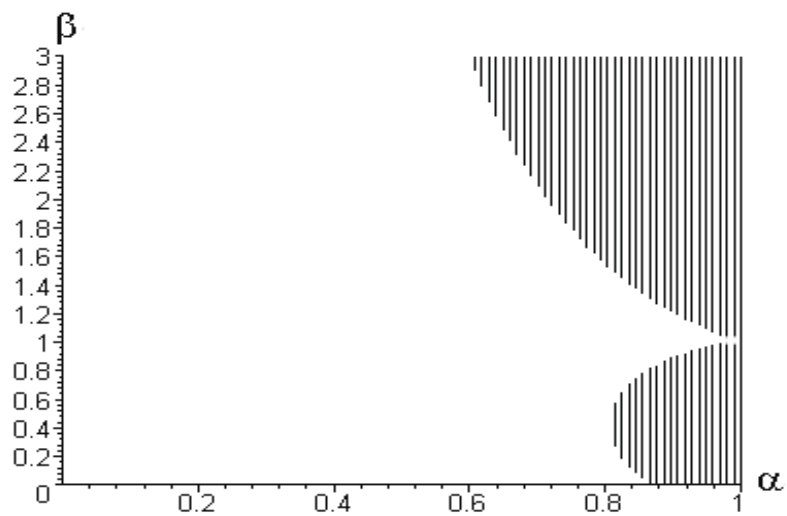


Figure 20

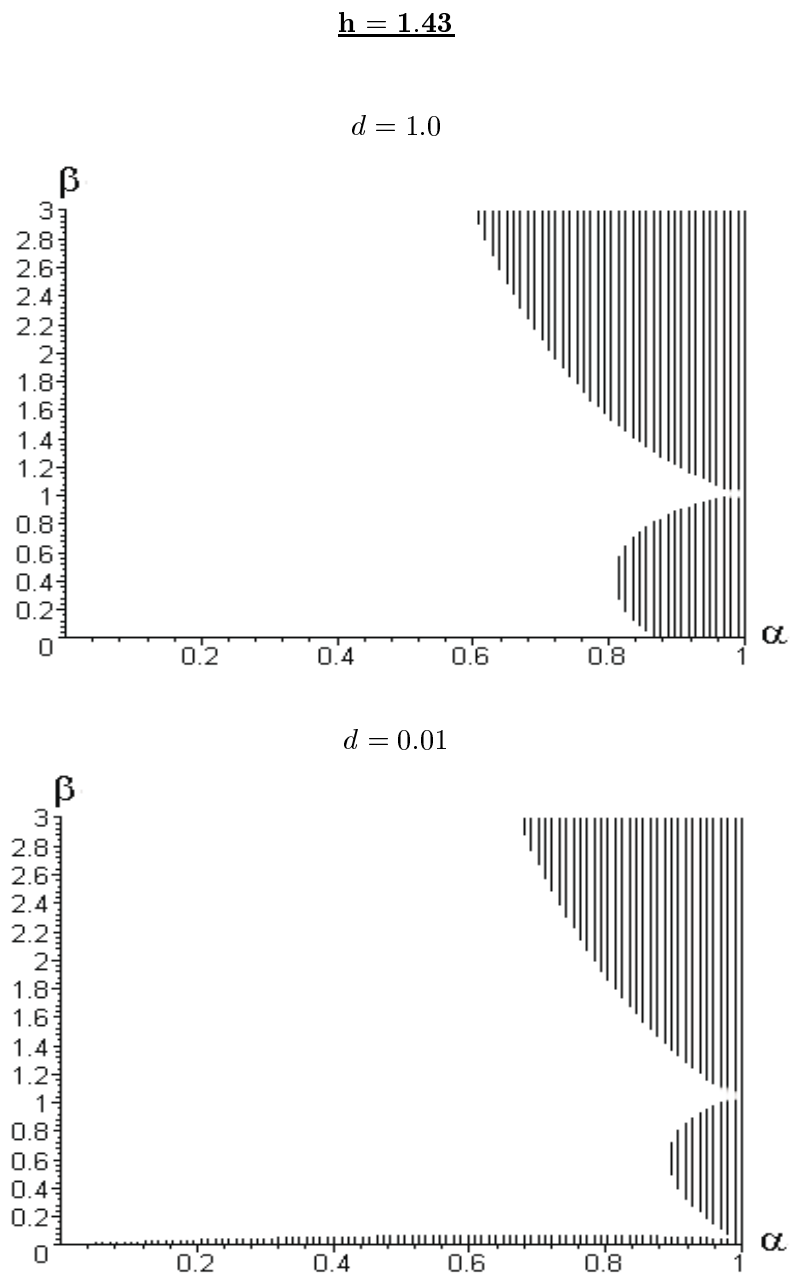
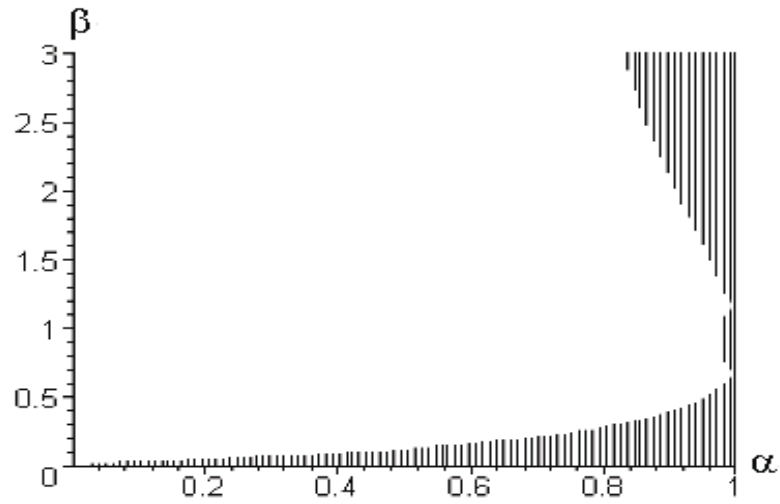


Figure 21

$$\underline{h = 1.7}$$

$$d = 1.0$$



$$d = 0.01$$

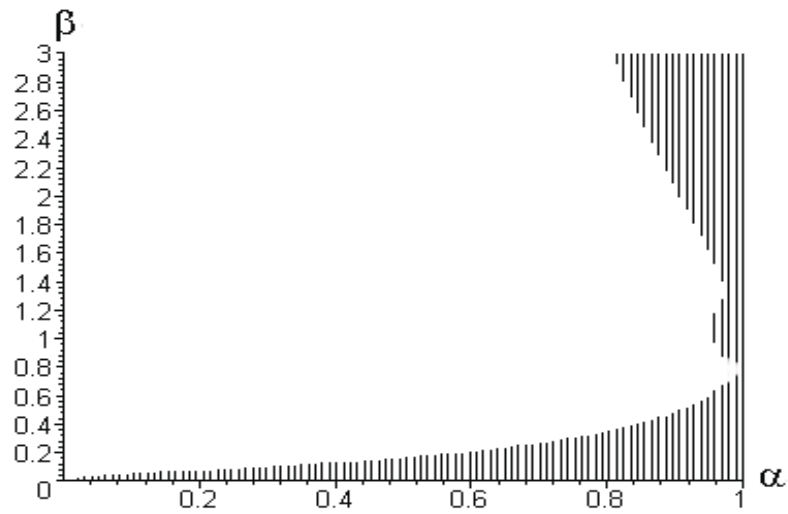


Figure 22

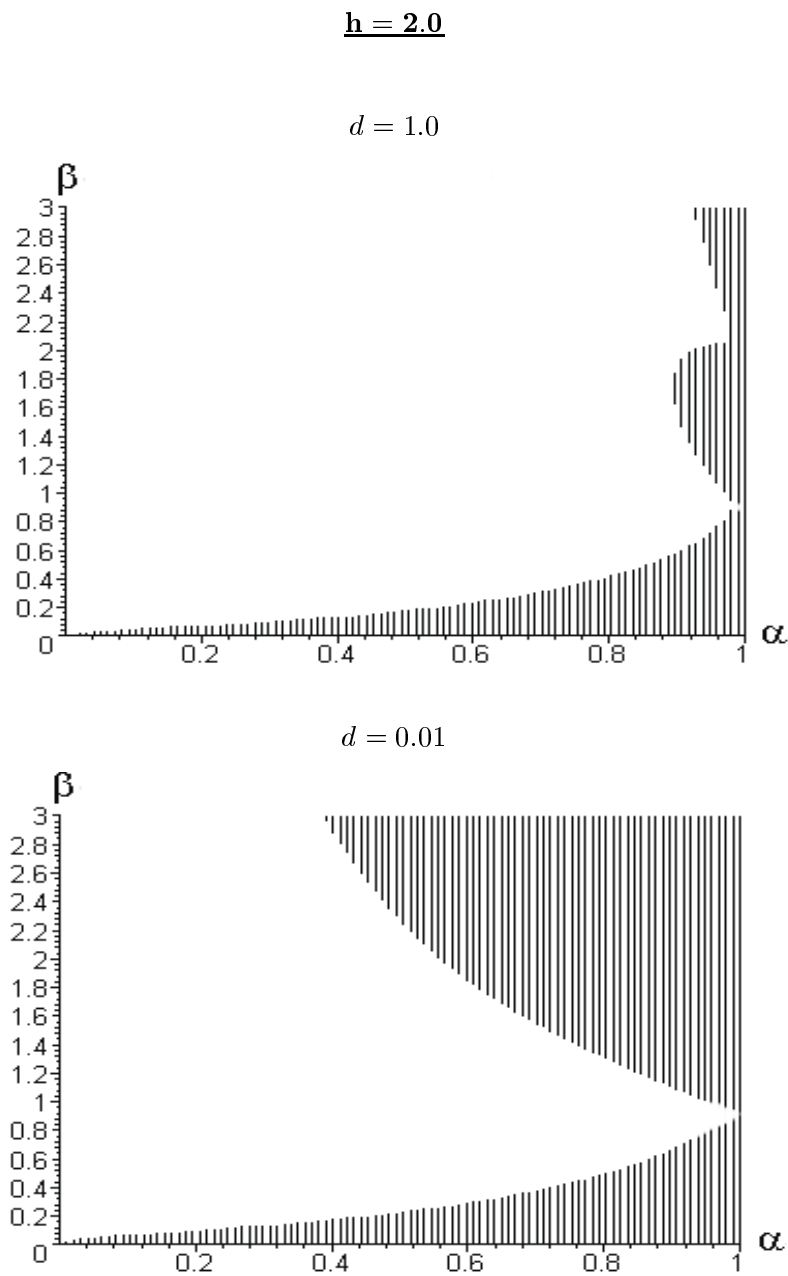
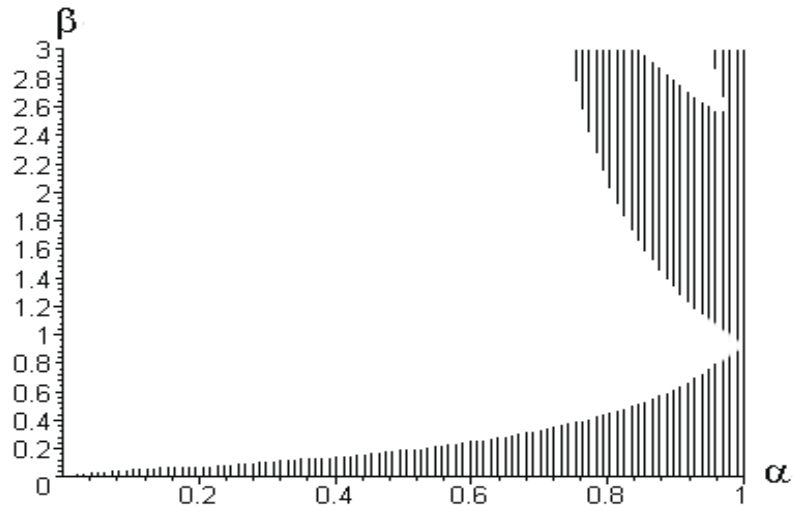


Figure 23

$$\underline{h = 2.1}$$

$$d = 1.0$$



$$d = 0.01$$

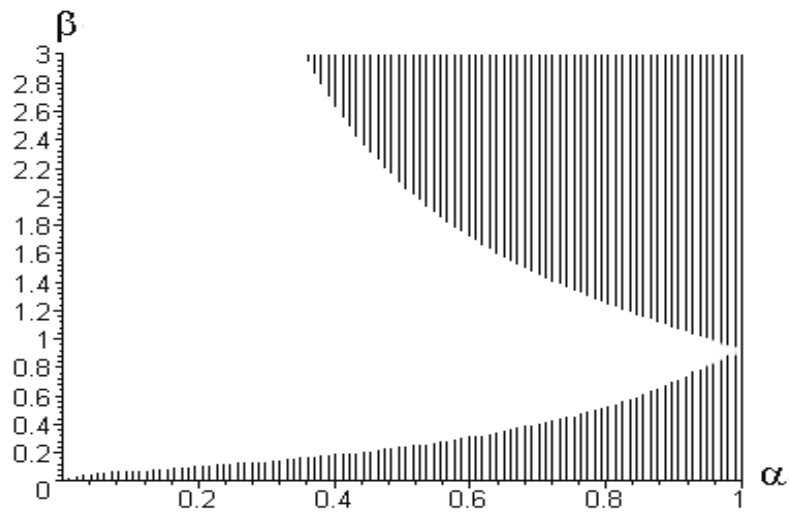


Figure 24

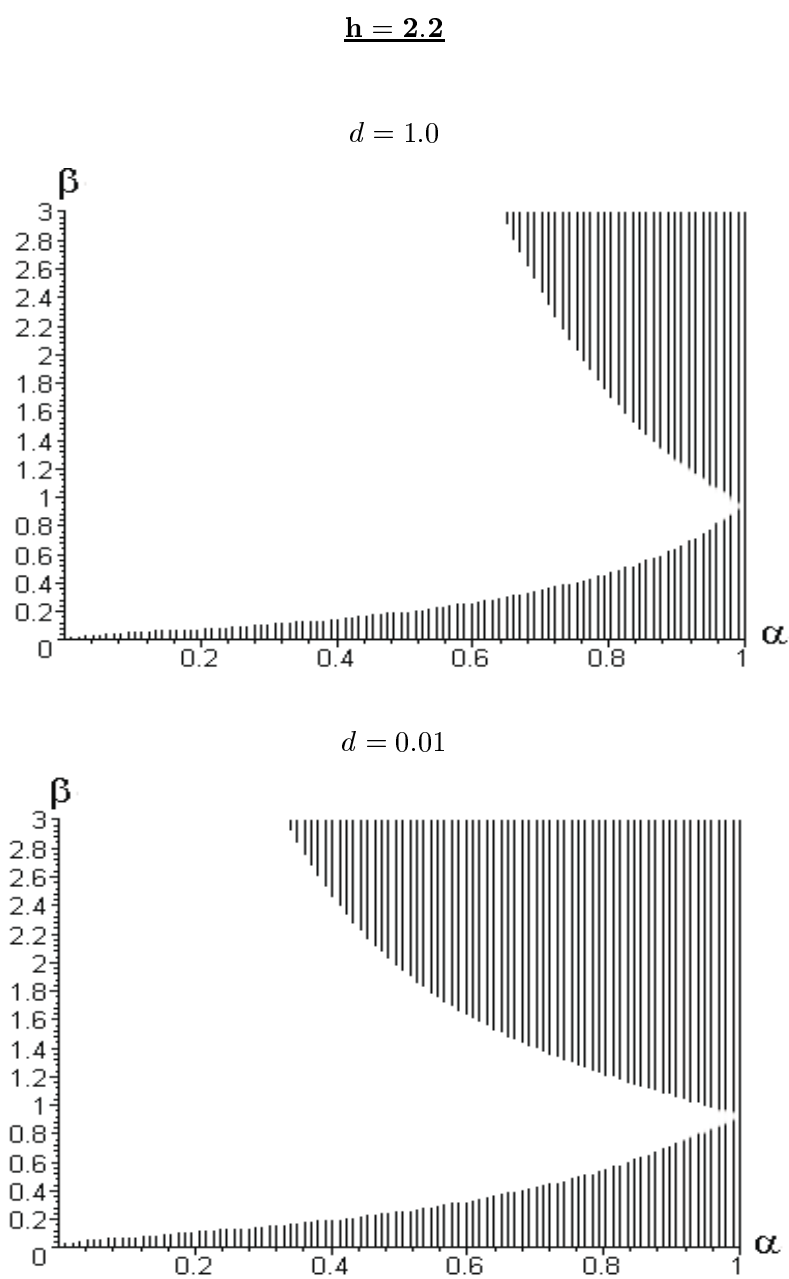


Figure 25

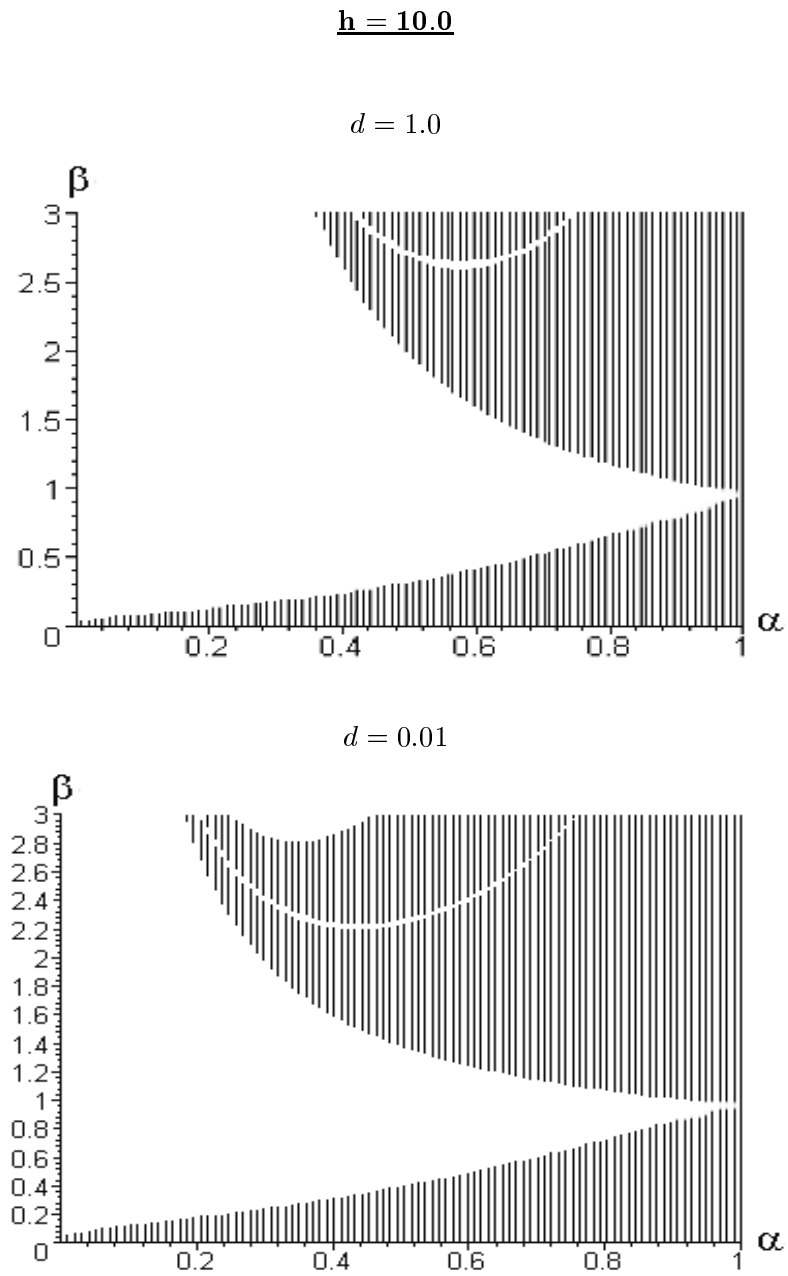


Figure 26

L'analyse des résultats numériques obtenus conduit à la conclusion suivante :

Conclusion 4. *Le roulement de l'ellipsoïde arbitraire autour de l'axe moyen ($a > c > b$) est toujours instable ; le roulement de l'ellipsoïde autour du petit axe ($a > b > c$) devient stable si la vitesse angulaire augmente ; le domaine où se réalisent les conditions nécessaires de stabilité de roulement de l'ellipsoïde autour du grand axe s'accroît avec l'augmentation de la vitesse angulaire. Avec cela le roulement de l'ellipsoïde creux autour du plus grand axe est plus stable que le roulement de l'ellipsoïde homogène autour du plus grand axe.*

Le roulement de l'ellipsoïde de révolution ($a = b$) autour du plus grand axe ($c > a$) est stable ; le roulement autour du plus petit axe ($c < a$) est stable si la vitesse angulaire est suffisamment grande. Ces résultats sont complètement en accord avec les conclusions obtenues dans [47].

Par ces résultats on peut également constater, que les points de résonance paramétrique $\alpha = 1, \beta = 1$ et $\alpha = 1, \beta = \beta(h)$ sont toujours adhérents aux domaines d'instabilité déterminés en première approximation. Ces résultats sont aussi en accord avec les conclusions sur la stabilité en cas de résonance paramétrique obtenues dans la section précédente.

Chapitre 5

Oscillations et rotations d'un satellite dans le champ de gravitation de la Terre sous l'influence de l'atmosphère

Dans ce chapitre on étudie les mouvements d'un satellite évoluant sur une orbite elliptique en présence de forces aérodynamiques. On suppose que le mouvement du centre de masse n'est pas perturbé par les mouvements d'orientation et est donné (mouvement keplerien). Les rotations du satellite autour de son centre de masse résultent alors des moments causés par le gradient de gravitation et la poussée aérodynamique.

Sarychev [57] et son élève Melnik [44] ont considéré les mouvements d'oscillation périodiques d'un satellite sur une orbite circulaire en présence de forces aérodynamiques ($e = 0$, $\kappa_0 \in (0, \infty)$) (avec les notations de ce chapitre). Ils ont montré, dans [45], que lorsque les forces aérodynamiques sont faibles ces oscillations existent aussi pour les orbites de petite excentricité ($e \ll 1$, $\kappa_0 \ll 1$). Melnik a également étudié des oscillations sur des orbites d'excentricité quelconque ($e \in [0, 1)$, $\kappa_0 \in [0, \infty)$).

Dans cette étude on envisage encore des orbites de faible excentricité mais on traite le cas d'efforts aérodynamiques quelconques. On détermine les oscillations du satellite sur lui-même lorsque il évolue sur une orbite circulaire et l'on démontre que ces oscillations se conservent pour des orbites de faible excentricité.

On entreprend également l'étude des rotations propres du satellite sur des orbites d'excentricité quelconque et on donne une méthode de calcul

pour déterminer les rotations propres de période 2π par rapport à l'anomalie vraie. Ces études s'appuient sur les propriétés de réversibilité des équations dynamiques.

5.1 Equations du mouvement

Pour exprimer les équations du mouvement du satellite sur le plan d'une orbite elliptique on introduit deux systèmes de coordonnées orthonormées — le système orbital $OXYZ$ et le système lié au satellite $Oxyz$. L'axe OZ sera dirigé le long du rayon vecteur, reliant les centres de masse de la Terre et du satellite. L'axe OX est dans le plan de l'orbite et l'axe OY est perpendiculaire à ce plan. On oriente les axes du repère lié $Oxyz$ selon les axes principaux d'inertie du satellite. Alors la matrice de transition entre les systèmes de référence introduits est définie par les relations (voir Figure 27)

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \cos \alpha \cos \beta \\
 a_{12} &= \sin \alpha \sin \gamma - \cos \gamma \cos \alpha \sin \beta \\
 a_{13} &= \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\
 a_{21} &= \sin \beta \\
 a_{22} &= \cos \beta \cos \gamma \\
 a_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma \\
 a_{31} &= -\sin \alpha \cos \beta \\
 a_{32} &= \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\
 a_{33} &= \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma
 \end{aligned}$$

où α, β, γ sont des angles de tangage, de louvoiement et d'inclinaison, déterminant l'orientation du repère Ox, Oy, Oz , lié avec le satellite, par rapport au repère orbital $OXYZ$.

α – rotation autour de l'axe Y ; β – rotation autour de l'axe Z
 γ – rotation autour de l'axe X

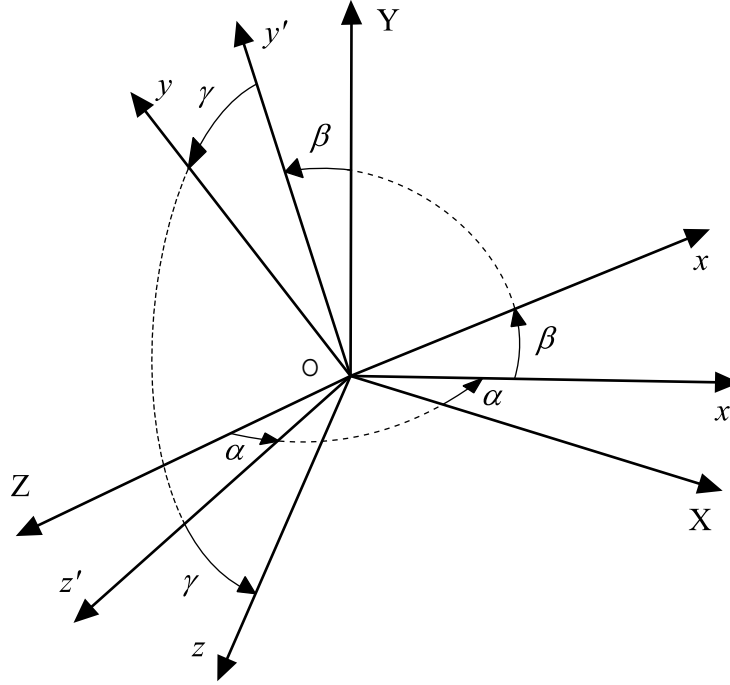


Figure 27 : Système orbital $OXYZ$ et système lié au satellite $Ox'yz'$

Considérons le mouvement du satellite dans le champ gravitationnel de la Terre en présence de la résistance de l'atmosphère.

Les équations dynamiques d'Euler sont

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = M_x^g + M_x^a \\ B\dot{q} + (A - C)rp = M_y^g + M_y^a \\ C\dot{r} + (B - A)pq = M_z^g + M_z^a \end{cases} \quad (5.1)$$

où

M_x^g, M_y^g, M_z^g sont les projections du moment gravitationnel sur les axes du repère $Oxyz$ rigidement liés au corps ;

M_x^a, M_y^a, M_z^a sont les projections du moment aérodynamique sur les axes du repère $Oxyz$;

B est le moment d'inertie du satellite par rapport à son axe principal d'inertie central Oy , perpendiculaire au plan de l'orbite;

A, C sont les moments d'inertie du satellite par rapport aux axes principaux centraux Ox et Oz se trouvant dans le plan d'orbite;

p, q, r sont des projections de la vitesse angulaire sur les axes Ox, Oy, Oz .

Pour fermer le système d'équations (5.1) on ajoute le système d'équations cinématiques

$$\begin{cases} p = P(\alpha, \beta, \gamma, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}) \\ q = Q(\alpha, \beta, \gamma, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}) \\ r = R(\alpha, \beta, \gamma, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}) \end{cases} \quad (5.2)$$

où P, Q, R sont des fonctions connues.

On suppose que le mouvement de rotation du satellite n'influe pas sur le mouvement de son centre de masse. Dans ce cas les projections du moment gravitationnel sur les axes liés au satellite sont de la forme

$$\begin{aligned} M_x^g &= 3\frac{K}{\rho^3}(C - B)a_{32}a_{33} \\ M_y^g &= 3\frac{K}{\rho^3}(A - C)a_{33}a_{31} \\ M_z^g &= 3\frac{K}{\rho^3}(B - A)a_{31}a_{32} \end{aligned} \quad (5.3)$$

et

$$\begin{aligned} p &= (\dot{\alpha} + \omega)a_{21} + \dot{\gamma} \\ q &= (\dot{\alpha} + \omega)a_{22} + \dot{\beta} \sin \gamma \\ r &= (\dot{\alpha} + \omega)a_{23} + \dot{\beta} \cos \gamma \end{aligned} \quad (5.4)$$

où

$K = fM_0$;

f est la constante gravitationnelle;

M_0 est la masse de la Terre;

ρ est le rayon-vecteur du centre de masse du satellite;

v est l'anomalie vraie;

$\omega = \frac{dv}{dt}$.

L'équation de l'orbite elliptique en coordonnées polaires est de la forme

$$\rho(1 + e \cos v) = p_*$$

où

$p_* = h_\pi(1 + e)$ est le paramètre de l'orbite ;

e est l'excentricité de l'orbite ;

h_π est l'altitude du périégée de l'orbite.

La loi des aires détermine la relation entre l'anomalie vraie v et le temps t

$$\frac{dv}{dt} = \omega_0(1 + e \cos v)^2 \quad (5.5)$$

où ω_0 est une constante.

Éliminons le temps t des équations (5.1) et (5.2) par (5.5) en tenant compte de (5.3), (5.4) et de

$$\frac{K}{\rho^3} = \omega_0^2(1 + e \cos v)^3$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{p_*^3}$$

Finalement on a

$$\begin{cases} Ap'_1 + (C - B)q_1r_1 = \frac{3(C - B)a_{32}a_{33} + 2Ae \sin v p_1}{(1 + e \cos v)} + M_x^a \\ Bq'_1 + (A - C)r_1p_1 = \frac{3(A - C)a_{33}a_{31} + 2Be \sin v q_1}{(1 + e \cos v)} + M_y^a \\ Cr'_1 + (B - A)p_1q_1 = \frac{3(B - A)a_{31}a_{32} + 2Ce \sin v r_1}{(1 + e \cos v)} + M_z^a \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\begin{cases} p_1 = (\alpha' + 1)a_{21} + \gamma' \\ q_1 = (\alpha' + 1)a_{22} + \beta' \sin \gamma \\ r_1 = (\alpha' + 1)a_{23} + \beta' \cos \gamma \end{cases} \quad (5.7)$$

$$(p_1 = \frac{p}{\omega_1}, q_1 = \frac{q}{\omega_2}, r_1 = \frac{r}{\omega_3}).$$

Dans les nouvelles notations p_1, q_1, r_1 sont des projections sans dimension de la vitesse angulaire et le prime signifie la dérivation par rapport à v . On suppose que

- 1) L'atmosphère suit le mouvement de la Terre¹.
- 2) L'atmosphère agit sur le satellite par une force de résistance dont le point d'application est le centre de pression qui se trouve sur l'axe Ox .
- 3) L'influence de l'atmosphère sur le mouvement de translation du satellite est supposée négligeable et réduite à un moment par rapport au centre d'inertie.

Dans ce cas les projections du moment aérodynamique sur les axes du repère $Oxyz$ sont de la forme

$$\begin{aligned} M_x^a &= 0 \\ M_y^a &= Qa_d \left(\frac{V_x}{V} a_{13} + \frac{V_z}{V} a_{33} \right) \\ M_z^a &= Qa_d \left(\frac{V_x}{V} a_{12} + \frac{V_z}{V} a_{32} \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

où

a_d est la coordonnée du centre de poussée aérodynamique du satellite sur l'axe Ox .

$Q = \frac{1}{2} \rho^* V^2 S c_x$ est la force de la résistance ;

ρ^* est la densité de l'atmosphère ;

$V^2 = V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2$;

V_X, V_Y, V_Z sont les projections sur les axes du repère orbitale $OXYZ$ de la vitesse du centre de masse par rapport à l'air ;

$V_X = \omega_0 (1 + e \cos v) (R_0 + h_\pi)$;

$V_Y = 0$;

$V_Z = \omega_0 e \sin v (R_0 + h_\pi)$;

S est la surface caractéristique du satellite ;

c_x est une coefficient de résistance ;

R_0 est un rayon équatorial de la Terre ;

Ce modèle a été introduit par Sarychev [57].

Avec (5.8) les équations d'Euler (5.6) et les équations cinématiques (5.7) déterminent le mouvement du satellite autour de son centre de masse

¹En pratique, dans les équations du mouvement du satellite, dont la vitesse orbitale est grande par rapport à l'effet de la rotation de la Terre. On calcule les efforts aérodynamiques avec la vitesse "absolue".

(décrivant une orbite elliptique). On obtient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_1}{dv} + \frac{C-B}{A} q_1 r_1 = \frac{3(C-B)}{A} \frac{a_{32} a_{33}}{1+e \cos v} + \frac{2e \sin v}{1+e \cos v} p_1 \\ \frac{dq_1}{dv} + \frac{A-C}{B} r_1 p_1 = 3 \frac{A-C}{B} \frac{a_{33} a_{31}}{1+e \cos v} + \frac{2e \sin v}{1+e \cos v} q_1 - \\ \quad - \left(\kappa_0 \frac{\rho^*}{\rho_\pi^*} \frac{(1+e)^2 \sqrt{1+2e \cos v + e^2}}{(1+e \cos v)^4} \right) \cdot \\ \quad \quad \quad ((1+e \cos v) a_{13} + a_{33} e \sin v) \\ \frac{dr_1}{dv} + \frac{B-A}{C} p_1 q_1 = \frac{3(B-A)}{C} \frac{a_{31} a_{32}}{1+e \cos v} + \frac{2e \sin v}{1+e \cos v} r_1 - \\ \quad - \left(\frac{B}{C} \kappa_0 \frac{\rho^*}{\rho_\pi^*} \frac{(1+e)^2 \sqrt{1+2e \cos v + e^2}}{(1+e \cos v)^4} \right) \cdot \\ \quad \quad \quad ((1+e \cos v) a_{12} + a_{32} e \sin v) \end{array} \right. \quad (5.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \left(\frac{d\alpha}{dv} + 1 \right) a_{21} + \frac{d\gamma}{dv} \\ q_1 = \left(\frac{d\alpha}{dv} + 1 \right) a_{22} + \frac{d\beta}{dv} \sin \gamma \\ r_1 = \left(\frac{d\alpha}{dv} + 1 \right) a_{23} + \frac{d\beta}{dv} \cos \gamma \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Où

ρ_π^* est la densité de l'atmosphère au périégée ;

κ_0 est un paramètre aérodynamique, défini par la relation

$$\kappa_0 = -\rho_\pi^* (R_0 + h_\pi)^2 \frac{a_d S c_x}{2B}$$

Introduisons les paramètres d'inertie μ et μ_1 :

$$\mu = 3 \frac{A-C}{B}, \quad \mu_1 = 3 \frac{C-B}{A}$$

Alors les équations du système (5.9)-(5.10) dépendent des paramètres e, μ, μ_1, κ_0 et h_π ; les valeurs des paramètres physiquement admissibles étant dans la bande

$$0 \leq e < 1, \quad -3 \leq \mu \leq 3, \quad -3 \leq \mu_1 \leq 3$$

Le satellite sera stable du point de vue aérodynamique si $\kappa_0 \geq 0$. Ce sont ces valeurs κ_0 qui sont considérées ci-dessous.

Calculons

$$p_* = h_\pi(1 + e)$$

La distance radiale du centre de masse du satellite au centre d'attraction est aussi définie par la formule

$$\rho = \frac{(R_0 + h_\pi)(1 + e)}{1 + e \cos v}$$

Dans la suite, pour les calculs numériques, on étudiera le cas où $h_\pi = 120$ km. Pour un satellite effectuant un mouvement sur l'orbite elliptique à l'altitude de plus de 500 km l'influence de l'atmosphère est petite. Mais l'influence de la pression solaire, qu'on ne prend pas en considération dans le système d'équations (5.9), (5.10), est grande.

Les équations (5.9), (5.10) contiennent la fonction $f(H) = \frac{\rho^*}{\rho_\pi^*}$, caractérisant la dépendance de la densité de l'atmosphère en fonction de l'altitude H . Dans cette thèse, pour les calculs numériques, on utilisera la fonction $f(H)$ définie par le Tableau de l'Annexe 1. Pour étudier les équations du mouvement relatif (5.9), (5.10) il est nécessaire d'avoir l'expression ρ^* sous la forme analytique. C'est pourquoi pour un bouclage complet du système d'équations (5.9), (5.10) la fonction $f(H)$ a été interpolée par un polynôme de Lagrange (voir Annexe 1).

Les équations (5.9) et (5.10) constituent un système réversible. En effet si on substitue $(-\alpha, \beta, -\gamma, p_1, q_1, -r_1, -v)$ ou bien $(-\alpha, -\beta, \gamma, -p_1, q_1, r_1, -v)$ à $(\alpha, \beta, \gamma, p_1, q_1, r_1, v)$ le système ne change pas de forme. Cette particularité sera utilisée substantiellement dans les analyses qui suivent.

Une autre circonstance importante est que le système (5.9), (5.10), dans cette hypothèse, a une variété intégrale telle que

$$\beta = \gamma = 0, \quad p_1 = r_1 = 0, \quad q_1 = \dot{\alpha} + 1, \quad \alpha = \alpha(v) \quad (5.11)$$

où la fonction $\alpha(v)$ est définie par l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{dv^2} + \mu \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + e \cos v} - 2 \left(1 + \frac{d\alpha}{dv} \right) \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} + \\ + \kappa_0 (1 + e)^2 \frac{\rho^*}{\rho_\pi^*} \frac{\sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}}{(1 + e \cos v)^4} [\sin \alpha + e \sin(\alpha + v)] = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Ici α est l'angle entre le rayon-vecteur du centre de masse du satellite et son axe d'inertie, par rapport auquel le moment d'inertie est égal à C .

L'équation (5.12) décrit le mouvement de rotation et d'oscillation du satellite autour de l'axe Oy orthogonal au plan de l'orbite sur une orbite elliptique et sous l'action des forces gravitationnelles en présence de la résistance de l'atmosphère.

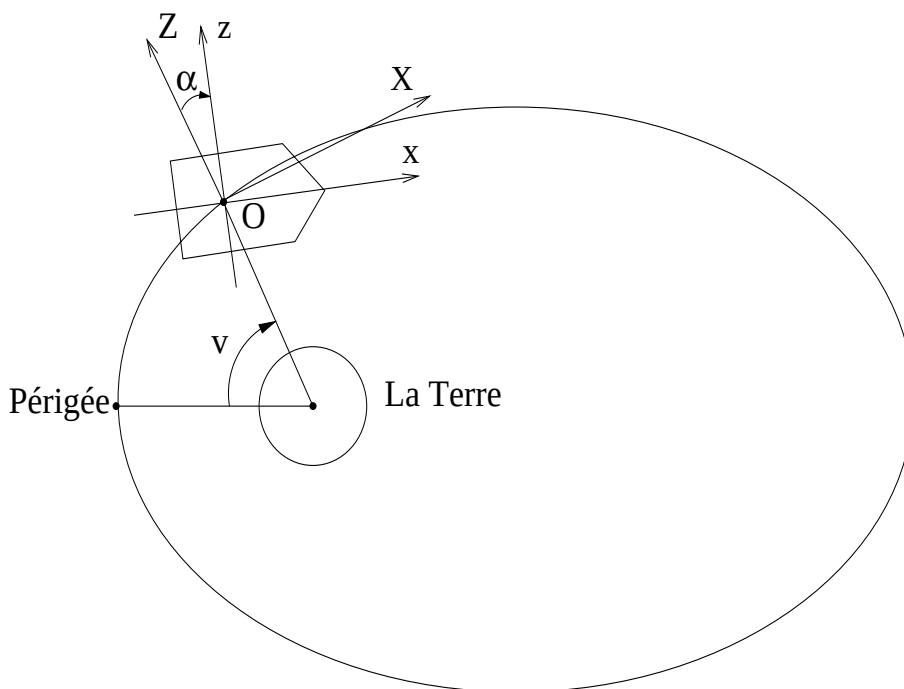


Figure 28 : Satellite sur une orbite elliptique

L'équation (5.12), aussi bien que les équations (5.9), (5.10), est réversible, ce qui s'exprime par l'invariance par rapport à la transformation

$$(\alpha, \dot{\alpha}, v) \rightarrow (-\alpha, \dot{\alpha}, -v)$$

Le principal problème, résolu dans ce chapitre, consiste en l'étude systématique des mouvements de rotation 2π -périodiques sur le plan de l'orbite et décrits par l'équation (5.12). Au cours d'une révolution du centre de masse du satellite sur l'orbite, le satellite peut effectuer m révolutions autour de l'axe Oy passant par son centre de masse et perpendiculaires au plan de l'orbite. On analysera les rotations directes ($m > 0$) aussi bien que les rotations indirectes ($m < 0$).

5.2 Oscillations et rotations d'un satellite sur une orbite faiblement elliptique

Si $e = 0$, l'équation (5.12) décrit le mouvement du satellite sur une orbite circulaire et sera de la forme

$$\frac{d^2\alpha}{dv^2} + \mu \sin \alpha \cos \alpha + \kappa_0 \sin \alpha = 0 \quad (5.13)$$

On a un système conservatif à un degré de liberté avec l'intégrale d'énergie

$$\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + P(\alpha) = h \text{ (constante)}, \quad P(\alpha) = \mu \sin^2 \alpha - 2\kappa_0 \cos \alpha \quad (5.14)$$

($P(\alpha)$ est la fonction énergie potentielle dans ce mouvement).

L'analyse complète de l'équation (5.13) se fait par examen du portrait de phase.

Analysons dans le plan de phase la carte du mouvement du satellite dans le cas de différentes relations entre les paramètres inertiel μ et aérodynamique κ_0 . Trois cas sont possibles :

1. $\mu > \kappa_0$
2. $|\mu| < \kappa_0$
3. $\mu < -\kappa_0$

Les portraits de phase pour ces cas sont représentés sur les Figures 29, 32, 34, où il est aisé à voir que les points

$$\alpha_n = \pi n, \alpha_l = \pi l \pm \arccos\left(-\frac{\kappa_0}{\mu}\right), \quad n, l \in \mathbf{Z}$$

sont les solutions stationnaires de l'équation (5.13). Avec cela

$$P(\alpha_{2n}) = -2\kappa_0, \quad P(\alpha_{2n+1}) = 2\kappa_0, \quad P(\alpha_l) = \mu + \frac{\kappa_0^2}{\mu}$$

La solution $\alpha_{2n} = 2\pi n$ correspond au mouvement où l'axe Oz du satellite coïncide avec la direction du rayon-vecteur OZ de l'orbite. La solution $\alpha_{2n+1} = (2n+1)\pi$ se ramène à la solution $\alpha_{2n} = 2\pi n$ par l'inversion du sens de l'axe Oz . La solution $\alpha_l = \pi l \pm \arccos\left(-\frac{\kappa_0}{\mu}\right)$ correspond à une position d'équilibre oblique. Lorsque $\left|\frac{\kappa_0}{\mu}\right| \rightarrow 1$, cette solution devient $\alpha_l = \pi l$, où $l = 2\pi n$ ou bien $l = (2n+1)\pi$.

On voit sur les figures selon les relations entre le paramètre d'inertie μ et le paramètre aérodynamique κ_0 les solutions stationnaires peuvent être stables aussi bien qu'instables. Par exemple, le points $\alpha_{2n} = 2\pi n$ si $\mu > \kappa_0$ est une position d'équilibre stable, mais si $\mu < -\kappa_0$ cette position d'équilibre est instable.

Les positions d'équilibre stables sont entourées des courbes fermées qui représentent des mouvements périodiques. Calculons les périodes d'oscillations.

De (5.14) on déduit

$$T = 2 \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \frac{d\alpha}{\sqrt{h - \mu \sin^2 \alpha + 2\kappa_0 \cos \alpha}} \quad (5.15)$$

où α_{min} , α_{max} sont les valeurs maximales et minimales des angles du mouvement d'oscillation observé.

Calculons l'intégrale (5.15) pour les $\alpha_n = \pi n$. On a

$$T = 4 \int_0^{\alpha_{max}} \frac{d\alpha}{\sqrt{h - \mu \sin^2 \alpha + 2\kappa_0 \cos \alpha}}$$

Posons

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = su, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha_{max}}{2} = s$$

$$\sin \alpha = \frac{2su}{1+s^2u^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1-s^2u^2}{1+s^2u^2}, \quad d\alpha = \frac{2sdu}{1+s^2u^2}$$

Ensuite on déduit l'expression pour h de (5.14)

$$h = \mu \sin^2 \alpha_{max} - 2\kappa_0 \cos \alpha_{max} = 2 \frac{2\mu s^2 - \kappa_0 + \kappa_0 s^4}{(1+s^2)^2} \quad (5.16)$$

Il s'ensuit

$$T = 4 \int_0^1 \frac{(1+s^2)du}{\sqrt{1-u^2} \sqrt{\mu + \kappa_0(s^2+1) + s^2(\kappa_0 + s^2(\kappa_0 - \mu))u^2}}$$

Si on pose que $u = \sin \theta$, on obtient l'intégrale définie suivante

$$T = 4(1+s^2) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\mu + \kappa_0(s^2+1) + s^2(\kappa_0 + s^2(\kappa_0 - \mu)) \sin^2 \theta}} \quad (5.17)$$

Considérons le cas 1. $\mu > \kappa_0$.

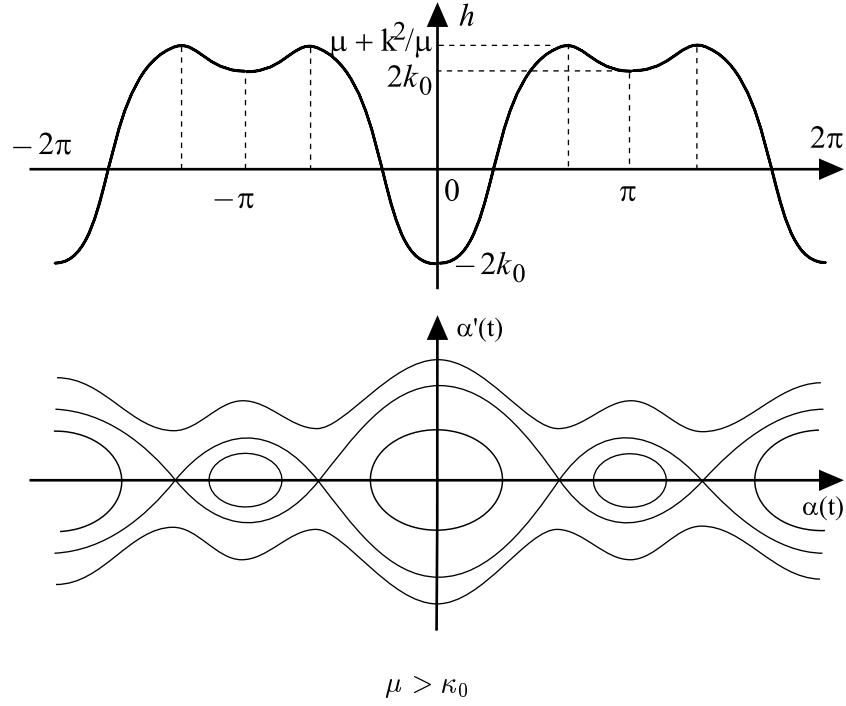


Figure 29

Les oscillations au voisinage de la solution $\alpha_{2n} = 2\pi n$ sont possibles si $h \in (-2\kappa_0, 2\kappa_0)$. La période de ces oscillations est définie par (5.17)

$$T = 4(1 + s^2) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{M(s) + L(s) \sin^2 \theta}} \quad (5.18)$$

avec

$$M(s) = \mu + \kappa_0(s^2 + 1) \quad (5.19)$$

$$L(s) = s^2(\kappa_0 + s^2(\kappa_0 - \mu)) \quad (5.20)$$

où s est défini en fonction de h par :

$$s^2 = \frac{1-c}{1+c} \quad (5.21)$$

$$c = -\frac{\kappa_0}{\mu} + \sqrt{\left(\frac{\kappa_0}{\mu}\right)^2 + 1 - \frac{h}{\mu}}$$

L'amplitude des oscillations est telle que

$$\cos \alpha_{max} = c$$

où

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_{\max}}{2} = s$$

La fonction $h \rightarrow s^2$ définie par (5.21) est croissante strictement.

Etudions ensuite les propriétés des fonctions $s \rightarrow M(s)$ et $s \rightarrow L(s)$ apparaissant dans (5.18).

La fonction $M(s)$ est croissante. Pour

$$-2\kappa_0 < h < 2\kappa_0$$

on a

$$0 < s^2 < \frac{\kappa_0}{\mu - \kappa_0}$$

$$0 < \kappa_0 + s^2(\kappa_0 - \mu) < \kappa_0$$

Par conséquent $L(s) > 0$.

L'intégrale (5.18) se ramène à une intégrale elliptique de Legendre

$$T(s) = 4A_1(s) \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}$$

avec

$$\varphi = \pi/2 - \theta$$

$$A_1(s) = \sqrt{\frac{s^2 + 1}{(\kappa_0 - \mu)s^2 + \kappa_0 + \mu}}$$

$$k_1^2 = \frac{L(s)}{L(s) + M(s)} = \frac{s^2}{1 + s^2} \frac{(\mu - \kappa_0)s^2 - \kappa_0}{(\kappa_0 - \mu)s^2 + \kappa_0 + \mu}$$

Alors la fonction $h \rightarrow k_1^2$ est croissante strictement.

Donc, la fonction $h \rightarrow T(s)$ est croissante strictement et $\frac{dT}{dh} > 0$. En introduisant le paramètre $\beta = \frac{\kappa_0}{\mu}$ on a

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} T^*(s)$$

où la fonction $h \rightarrow T^*(s)$ est croissante strictement et représente une intégrale elliptique

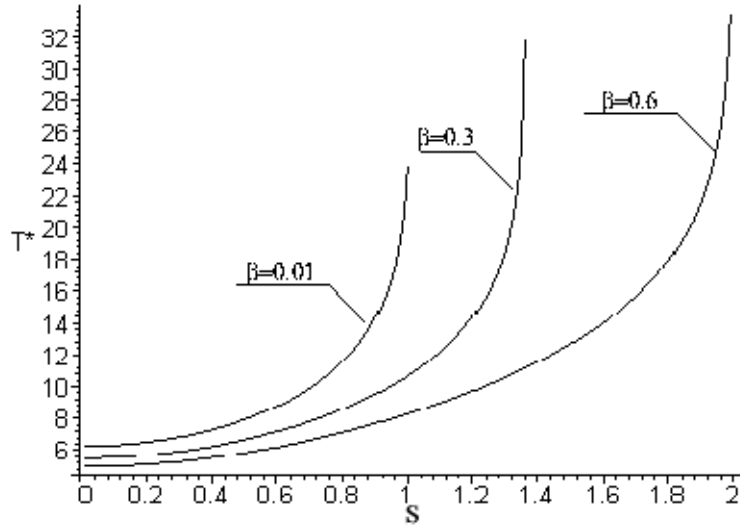


Figure 30

Lorsque $2\kappa_0 < h < \frac{\mu^2 + \kappa_0^2}{\mu}$ selon la valeur initiale de α le satellite oscille au voisinage de $\alpha_{2n} = 2\pi n$ ou de $\alpha_{2n+1} = (2n+1)\pi$. Posons

$$c = -\frac{\kappa_0}{\mu} + \sqrt{\left(\frac{\kappa_0}{\mu}\right)^2 + 1 - \frac{h}{\mu}}$$

$$c' = -\frac{\kappa_0}{\mu} - \sqrt{\left(\frac{\kappa_0}{\mu}\right)^2 + 1 - \frac{h}{\mu}}$$

Lorsque $\cos \alpha_0 \geq c$ le satellite oscille autour de $\alpha = 2\pi n$ avec la période définie par (5.18)-(5.21).

Lorsque $\cos \alpha_0 \leq c$ le satellite oscille autour de $\alpha = (2n+1)\pi$ avec une période définie par :

$$T'(s) = 4(1+s^2) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{M'(s) + L'(s) \sin^2 \theta}}$$

avec

$$M'(s) = \mu - \kappa_0(s^2 + 1)$$

$$L'(s) = s^2(-\mu s^2 + \kappa_0(1 + s^2))$$

$$s^2 = \frac{1+c'}{1-c'}$$

L'amplitude des oscillations est telle que

$$\pi - \cos \alpha_{max} = c$$

où

$$\text{ctg} \frac{\alpha_{max}}{2} = s$$

Dans ce cas l'intégrale elliptique de Legendre (5.18) est sous la forme

$$T(s) = 4A_2(s) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \theta}}$$

avec

$$A_2(s) = \sqrt{1 + s^2} \sqrt{\frac{s^2 + 1}{\kappa_0 s^2 + \kappa_0 + \mu}}$$

$$k_2^2 = \frac{L(s)}{M(s)} = s^2 \frac{(\mu - \kappa_0)s^2 - \kappa_0}{\kappa_0 s^2 + \mu + \kappa_0}$$

Alors la fonction $h \rightarrow k_2^2$ est croissante strictement.

Donc, la fonction $h \rightarrow T(s)$ est croissante strictement et $\frac{dT}{dh} > 0$. On a

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} T^*(s)$$

où la fonction $h \rightarrow T^*(s)$ est croissante strictement et représente une intégrale elliptique

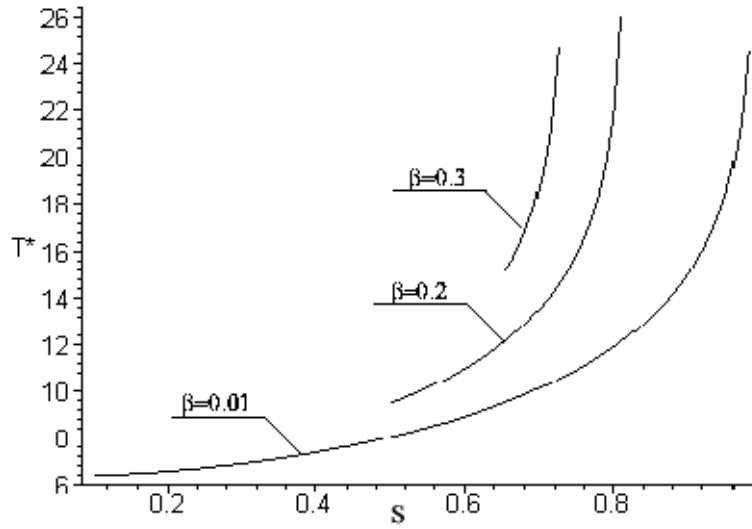


Figure 31

Considérons le cas 2. $\kappa_0 > |\mu|$.

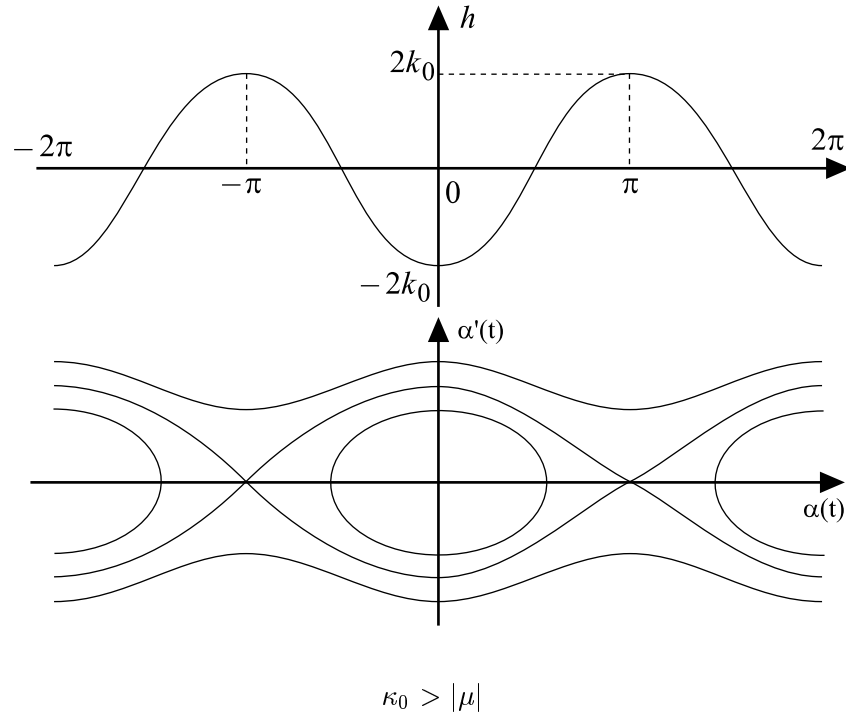


Figure 32

Sur la Figure 32 on peut observer que les positions d'équilibre stables correspondent aux points $\alpha_{2n} = 2\pi n$, les positions d'équilibre instables correspondent aux points $\alpha_{2n+1} = (2n+1)\pi$.

Le satellite oscille toujours autour de $\alpha_{2n} = 2\pi n$ avec une période définie par les formules (5.18)-(5.21). Ces oscillations sont possibles si $h \in (-2\kappa_0, 2\kappa_0)$. Dans ce cas on peut montrer par la même façon, que la période des oscillations est une fonction croissante strictement et $\frac{dT}{dh} > 0$. En introduisant le paramètre $\beta = \frac{\mu}{\kappa_0}$ on a

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} T^*(s)$$

où la fonction $h \rightarrow T^*(s)$ est croissante strictement et représente une intégrale elliptique

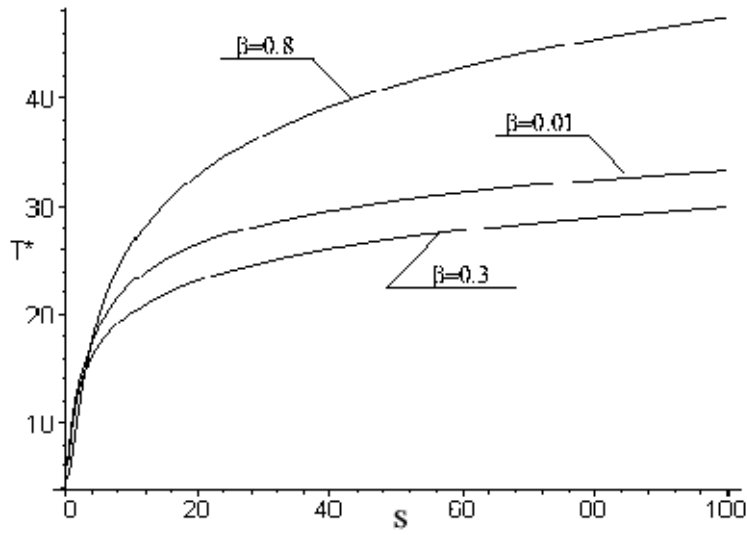


Figure 33

Considérons le cas 3. $\mu < -\kappa_0$.

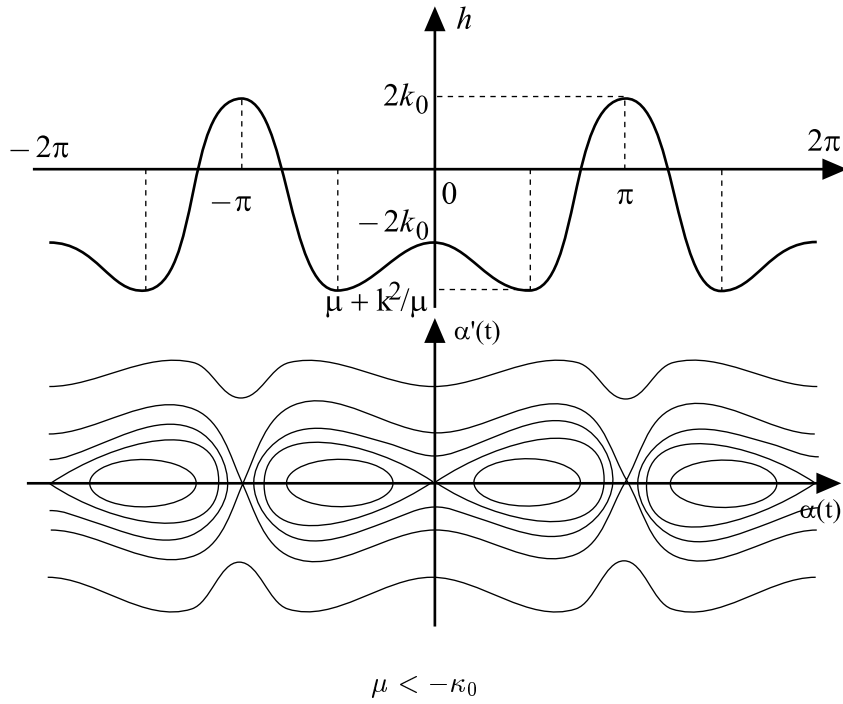


Figure 34

Dans la Figure 34 on observe que les points $\alpha_n = \pi n$ correspondent aux positions d'équilibre instables, les points $\alpha_{2l} = 2\pi l \pm \arccos\left(-\frac{\kappa_0}{\mu}\right)$ correspondent aux positions d'équilibre stables autour desquelles il y a des mouvements périodiques. Ces mouvements sont possibles si $\frac{\mu^2 + \kappa_0}{\mu} < h < -2\kappa_0$. Dans ce cas le satellite oscille avec une période définie par (5.15) qui peut aussi être ramenée à une intégrale elliptique de Legendre (mais le calcul est compliqué et ne fait pas avancer l'étude de la période).

Outre cela dans ce cas il existe des oscillations, embrassant trois positions d'équilibre : $\alpha_{2n} = 2\pi n$ et $\alpha_{2l} = 2\pi l \pm \arccos\left(-\frac{\kappa_0}{\mu}\right)$. Ces mouvements périodiques sont possibles si $h \in (-2\kappa_0, 2\kappa_0)$. La période est définie selon les formules (5.18)-(5.21). En introduisant le paramètre $\beta = \frac{\kappa_0}{|\mu|}$ on calcule cette période

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{|\mu|}} T^*(s),$$

$$T^*(s) = 4(1+s^2) \int_0^{\pi/2} \frac{\varphi}{\sqrt{-1 + \beta(s^2 + 1) + s^2(\beta + s^2(\beta + 1)) \sin^2 \varphi}} d\varphi \quad (5.22)$$

où $s \in \left(\sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}, \infty\right)$, $\beta \in (0, 1)$. Comme il n'est pas possible dans ce cas de conclure par un raisonnement analytique comme précédemment, calculons, donc l'intégrale elliptique (5.22) de façon numérique

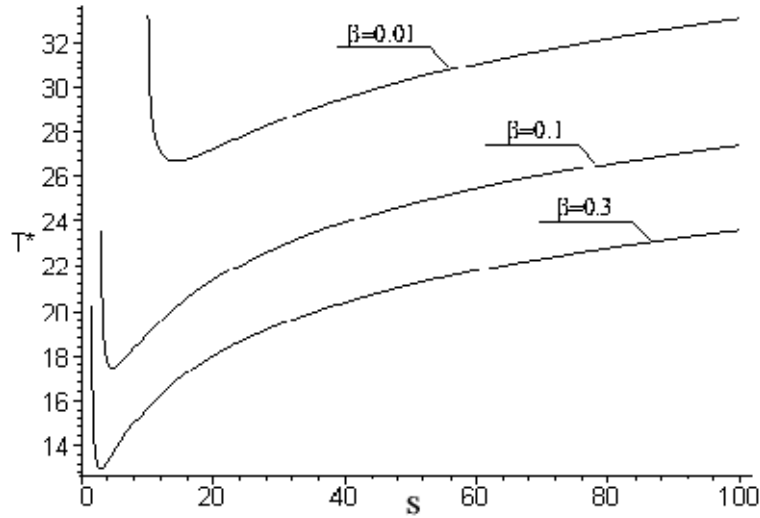


Figure 35

Il découle du théorème 5 de la section 2.6 un résultat important.

Théorème 9. *Les oscillations $2\pi k$ -périodiques du satellite sur l'orbite circulaire sont conservées pour les orbites faiblement elliptiques.*

Passons à la détermination des vitesses initiales $\dot{\alpha}(0)$ pour les rotations $2\pi k$ -périodiques du satellite sur l'orbite circulaire. La condition de la $2\pi k$ -périodicité de solution est de la forme [79] :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{h - p(\alpha)}} = \frac{2\pi k}{|m|} \quad (m \in \mathbf{Z}/\{0\}, k \in \mathbf{N}) \quad (5.23)$$

La valeur h qui aboutit à l'égalité (5.23), détermine la valeur de la vitesse initiale $\dot{\alpha}(0)$ pour le mouvement de rotation.

$$\dot{\alpha}(0) = \pm \sqrt{h + 2\kappa_0}$$

Ci-dessous sont étudiées les rotations 2π -périodiques pour lesquelles $k = 1$, $m = \pm 1$. Les rotations peuvent être directes ($\dot{\alpha}(0) > 0$, $m = 1$) aussi bien qu'indirectes ($\dot{\alpha}(0) < 0$, $m = -1$). C'est-à-dire lors d'une révolution du centre de masse de satellite sur l'orbite le satellite tourne de 2π ou bien de -2π (pour les rotations indirectes) autour de l'axe passant par le centre de masse et perpendiculaire au plan de l'orbite.

La valeur de la constante d'énergie h , satisfaisant à l'égalité (5.23), est déterminée de façon numérique pour différentes valeurs des paramètres μ et κ_0 . Le résultat est donné dans la Figure 36, où on peut voir les dépendances de la valeur initiale de la vitesse $\dot{\alpha}(0)$ des paramètres μ et κ_0 pour les rotations directes. Pour les rotations indirectes il faut changer $\dot{\alpha}(0)$ en $-\dot{\alpha}(0)$.

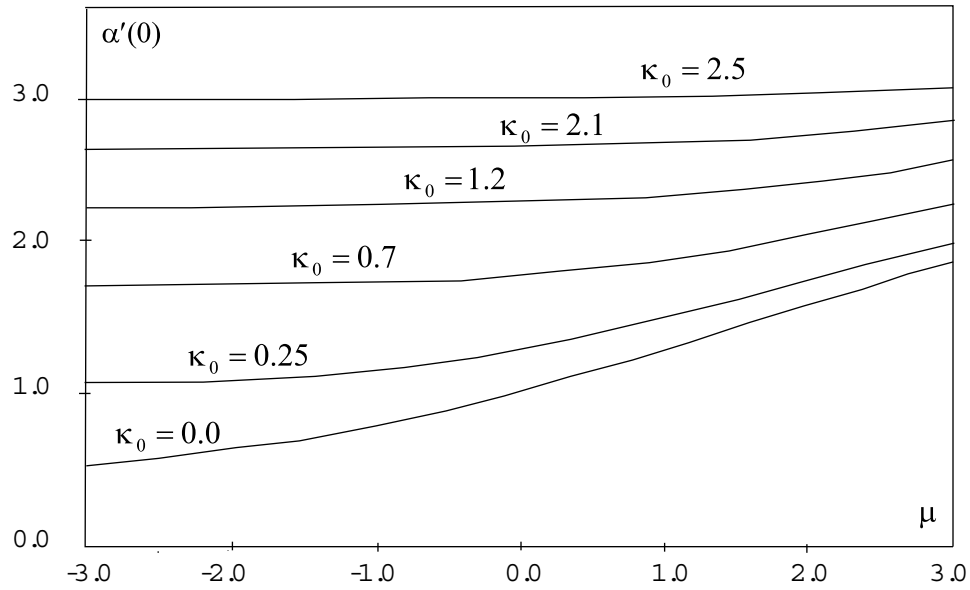


Figure 36

D'où il résulte que les rotations observées du satellite sur l'orbite circulaire existent pour toutes les valeurs admissibles du paramètre μ .

5.3 Rotations périodiques d'un satellite sur une orbite elliptique arbitraire

Supposons que le centre de masse du satellite décrive une orbite elliptique avec la valeur arbitraire de l'excentricité $e \in [0, 1)$, et posons le problème de la construction de toutes les rotations planes 2π -périodiques avec analyse de leur stabilité au sens de Lyapunov. La particularité de réversibilité permet d'avoir une solution de principe sur la base d'une méthode élaborée dans [73, 79] et décrite pour le cas d'une équation du deuxième ordre dans la section 2.3. Indiquons que cette méthode a fait preuve d'une grande efficacité dans l'étude d'une série de problème de mécanique classique et de mécanique céleste [17, 18, 22-15].

Actuellement on a quelques logiciels de programmation de la méthode. Ces logiciels réalisés dans les langages de programmation différents (C++, Delphi, Fortran), se distinguent par leur degré d'automatisation. Dans la thèse présente on utilise le logiciel C++ [25].

Appliquant la méthode à l'équation (5.12) on résout numériquement les problèmes suivants. Le problème de Cauchy se résout sur le segment $[0, \pi]$

avec des points initiaux, appartenant à l'ensemble $\mathbf{M}_0 = \{v, \alpha, \dot{\alpha} : v = 0, \alpha = 0\}$ et on construit l'image $\mathbf{M}_0^\pi$ de l'ensemble $\mathbf{M}_0$ lorsque v varie de 0 à π . Ensuite on détermine les intersections des ensembles $\mathbf{M}_0^\pi$ et $\mathbf{M}^{\pm\pi} = \{v, \alpha, \dot{\alpha} : v = \pi, \alpha = \pm\pi\}$. Ces points définissent les rotations 2π -périodiques cherchées ; ceux de $\mathbf{M}_0^\pi \cap \mathbf{M}^\pi$ correspondent aux rotations en sens direct et ceux de $\mathbf{M}_0^\pi \cap \mathbf{M}^{-\pi}$ aux rotations en sens indirect.

L'intégration numérique est effectuée par la méthode d'Adams-Bachfort-Moulton [1]. Le problème de Cauchy est résolu avec un pas h' de la vitesse initiale. Si pour deux solutions "voisines" du problème de Cauchy avec des vitesses initiales $\dot{\alpha}(0) = v_0$ et $\dot{\alpha}(0) = v_1$ ($v_1 = v_0 + h'$) on a

$$[\alpha(0, 0, v_0, \pi) - \pi][\alpha(0, 0, v_1, \pi) - \pi] < 0$$

alors il existe un point v^* du segment $]v_0, v_1[$ tel que la solution correspondante vérifie $\alpha(\pi k) = \pi m$. Ensuite la valeur de vitesse initiale $\dot{\alpha}(0) \in]v_0, v_1[$ est précisée par une méthode d'itération.

La vitesse initiale pour la rotation 2π -périodique $\alpha^*(v)$ est ainsi déterminée (par une méthode de dichotomie améliorée [1]).

Etudions la stabilité de cette rotation. Pour cela on construit l'équation aux variations au voisinage du mouvement étudié

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\alpha} - \frac{2e \sin v}{1 + e \cos v} \delta\dot{\alpha} + \mu \frac{\cos 2\alpha^*(v)}{1 + e \cos v} \delta\alpha + \\ + \left[\kappa_0 (1 + e)^2 \frac{\rho^*}{\rho_\pi^*} \frac{\sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}}{(1 + e \cos v)^4} (\cos \alpha^*(v) + e \cos(\alpha^*(v) + v)) \right] \delta\alpha = \\ = 0 \end{aligned} \tag{5.24}$$

($\delta\alpha$ est une variation).

L'équation (5.24) hérite de (5.12) la particularité de réversibilité. En effet, compte tenu de l'imparité de fonction $\alpha^*(v)$ il est aisé de vérifier l'invariance de l'équation (5.24) par rapport à la substitution

$$(\delta\alpha, \delta\dot{\alpha}, v) \rightarrow (\delta\alpha, -\delta\dot{\alpha}, -v)$$

Déterminons les exposants caractéristiques de cette équation. La méthode de détermination des exposants caractéristiques des équations périodiques réversibles, élaborée par Tkhai [89, 79] et a été présentée dans la section 2.7. On résout ce problème de façon numérique.

La particularité de réversibilité permet de trouver les exposants caractéristiques par la formation sur le segment $[0, 2\pi]$ d'une seule solution

(et non deux solutions) particulière de l'équation (5.24) avec les données initiales

$$\delta\alpha(0) = 1, \quad \delta\dot{\alpha}(0) = 0$$

Pour former la solution de l'équation (5.24) il est nécessaire de connaître la fonction α^* , décrivant la rotation périodique. Mais on ne connaît que la valeur de la vitesse initiale $\dot{\alpha}(0)$ pour ce mouvement. C'est pourquoi ci-dessous pour étudier la stabilité on a recours à la méthode suivante. On observe le système, composé des équations (5.12) et (5.24) et on forme la solution sur $[0, 2\pi]$ avec les valeurs initiales

$$\alpha(0) = 0, \quad \dot{\alpha}(0) = v^*, \quad \delta\alpha(0) = 1, \delta\dot{\alpha}(0) = 0$$

où v^* est une valeur de vitesse initiale pour la rotation considérée. De cette façon on rétablit la rotation $\alpha^*(v)$ 2π -périodique et on détermine à la fois la variation $\delta\alpha(2\pi)$, nécessaire pour juger de la stabilité.

Si $|\delta\alpha(2\pi)| \leq 1$, on a des exposants caractéristiques purement imaginaires, de plus, en cas d'égalité, les exposants sont multiples de i . Par conséquent, la condition $|\delta\alpha(2\pi)| \leq 1$ détermine le domaine des conditions nécessaires de stabilité en fonction des paramètres e , μ , κ_0 . Au sein de ce domaine $|\delta\alpha(2\pi)| < 1$ et tous les exposants sont purement imaginaires et égalent

$$\kappa = \pm i \frac{1}{2\pi} \ln \delta\alpha(2\pi)$$

Le logiciel de la méthode de construction des mouvements de rotation et d'analyse de leur stabilité est utilisé pour faire des recherches numériques. On voit les résultats de ces recherches sur les Figures 37-44.

Dans l'espace des paramètres du problème (e, μ, κ_0) les valeurs trouvées des vitesses initiales pour les rotations 2π -périodiques du satellite sont données. On considère les rotations directes (Figures 37-40), aussi bien qu'indirectes (Figures 41-44). On a observé les cas avec $\kappa_0 = 0.25, 0.7, 1.2, 2.5$.

Sur les figures dans le plan $(e, \dot{\alpha}(0))$ sont désignées (en noir) les courbes qui ont un paramètre d'inertie $\mu = \text{constante}$. Ces courbes imposent les valeurs des vitesses initiales $\dot{\alpha}(0)$ aux rotations pour le satellite ($\mu = \text{constante}$). On constate qu'en fonction de l'excentricité de l'orbite e chaque satellite peut avoir une, deux, ou trois rotations périodiques. Les domaines correspondant à la stabilité au sens de Lyapunov sont indiqués par un fond foncé.

Les domaines de stabilité en projection sur le plan (e, μ) se trouvent sur les figures du bas.

La solution périodique est décrite par la fonction impaire $\alpha^*(v)$. L'équation (5.12) est réversible. Donc l'équation du mouvement perturbé,

établie pour $\alpha^*(v)$, hérite de la particularité de réversibilité. Il en découle qu'en cas d'exposants purement imaginaires, la solution est stable au sens de Lyapunov si il n'y ait pas de résonance jusqu'au quatrième ordre $2\kappa = i p$, $3\kappa = i p$, $4\kappa = i p$ et la condition de non-dégénérescence devant être réalisée [10].

De cette façon presque tous les points dans l'espace des paramètres appartenant au domaine $|\delta\alpha(2\pi)| < 1$, correspondent aux rotations stables au sens de Lyapunov (les sous-domaines correspondants foncés).

Conclusion 5. *Les vitesses initiales $\dot{\alpha}(0)$ pour les rotations 2π -périodiques du satellite appartiennent aux domaines, désignés sur les Figures 37-40 (rotations directes) et les Figures 41-44 (rotations indirectes) par le fond foncé. Il est à signaler que presque toutes les rotations aux vitesses initiales prises dans ces domaines sont stables au sens de Lyapunov par rapport aux variables α et $\dot{\alpha}$.*

Rotations directes

$$\kappa_0 = 0.25$$

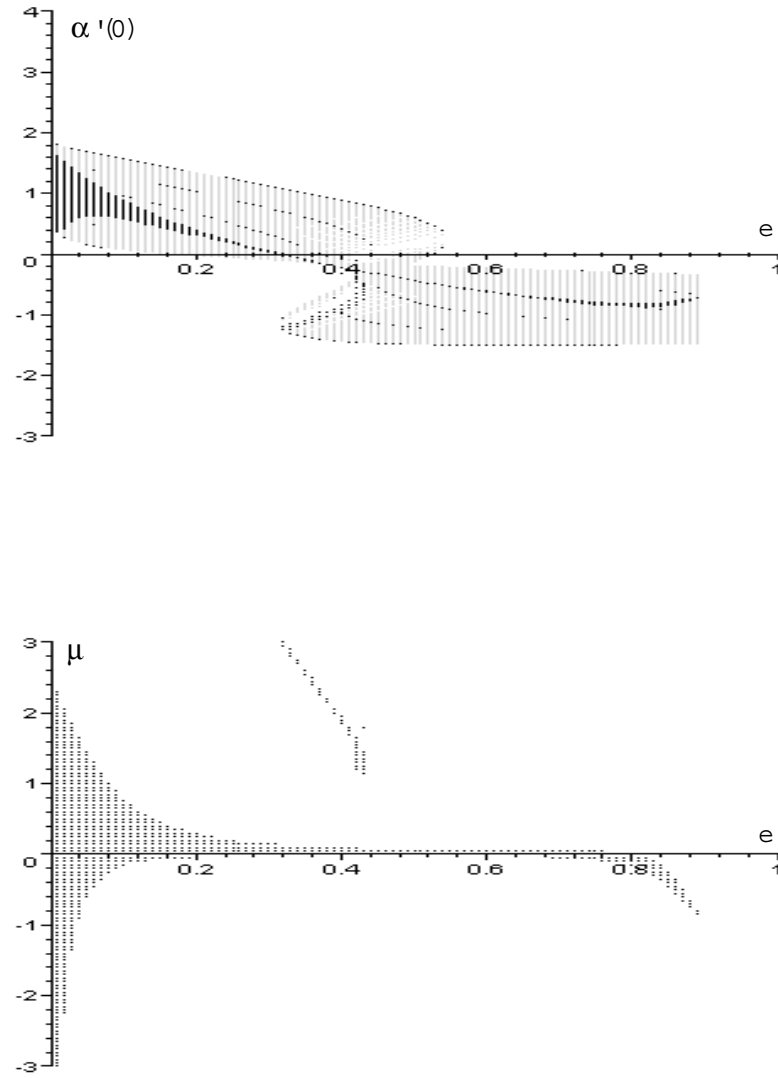


Figure 37

Rotations directes

$$\kappa_0 = 0.7$$

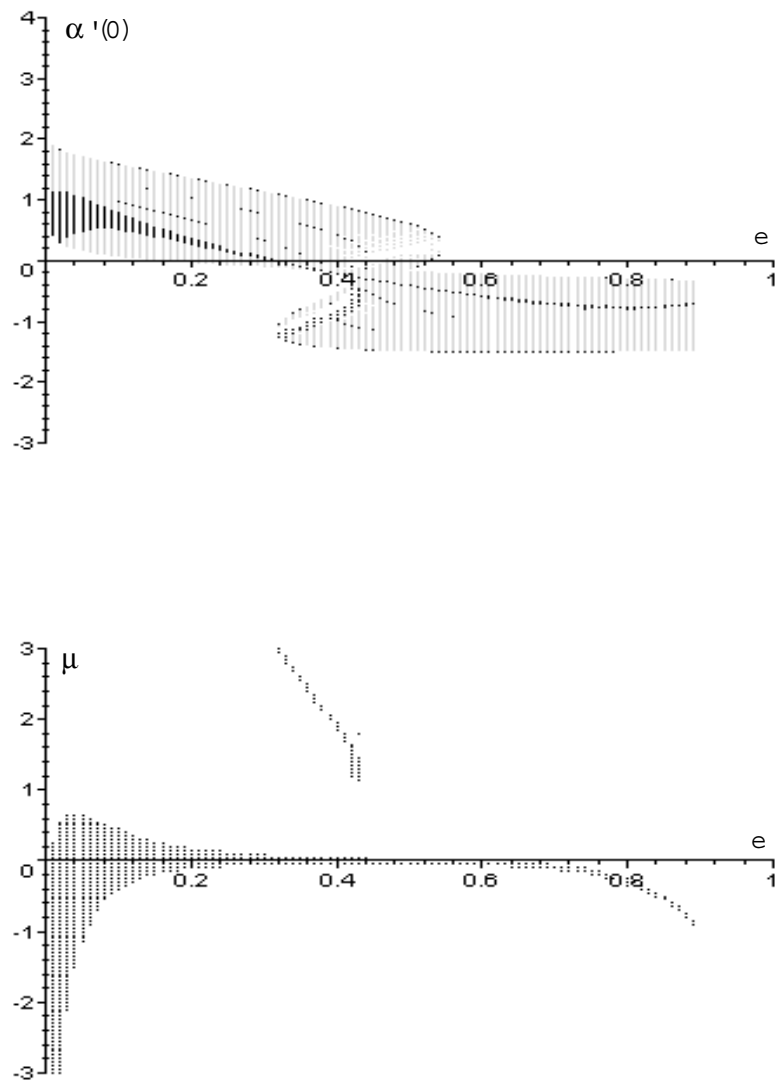


Figure 38

Rotations directes

$$\kappa_0 = 1.2$$

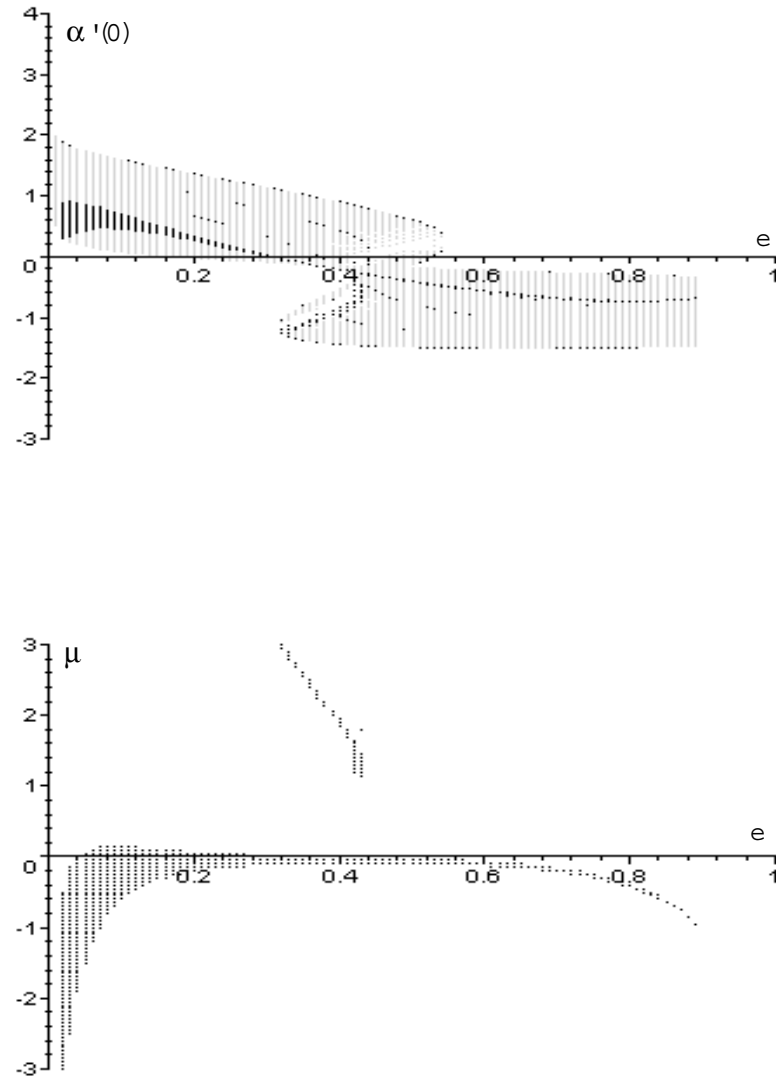


Figure 39

Rotations directes

$$\kappa_0 = 2.5$$

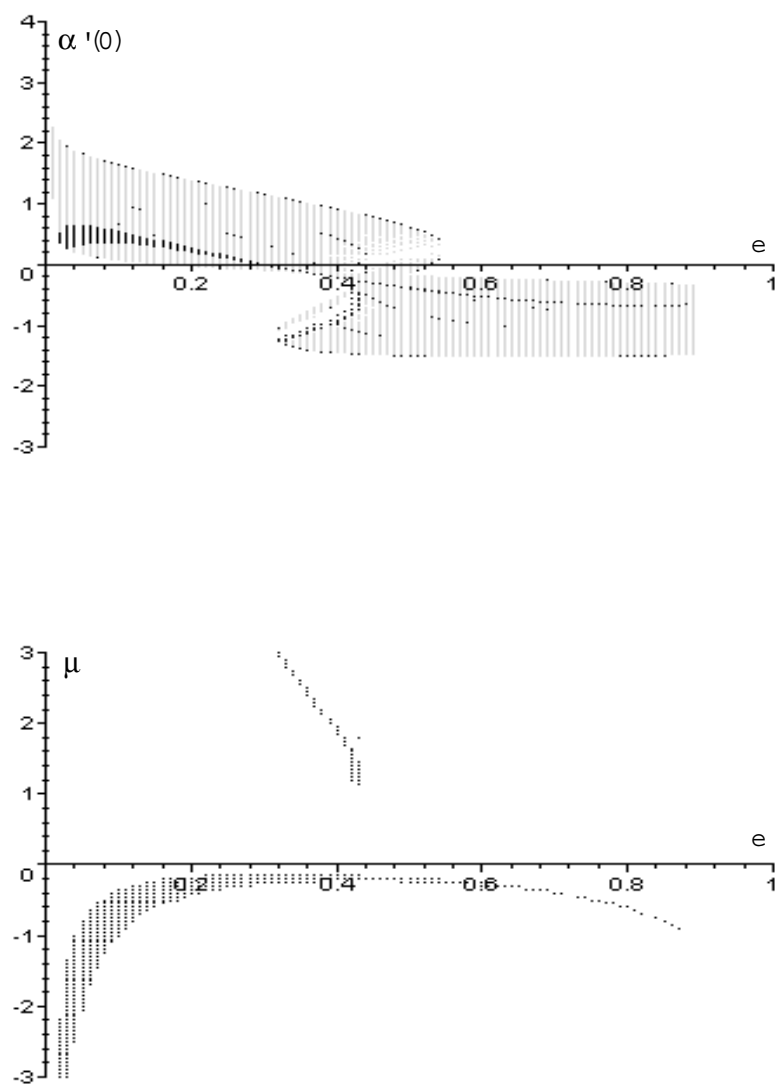


Figure 40

Rotations indirectes

$$\kappa_0 = 0.25$$

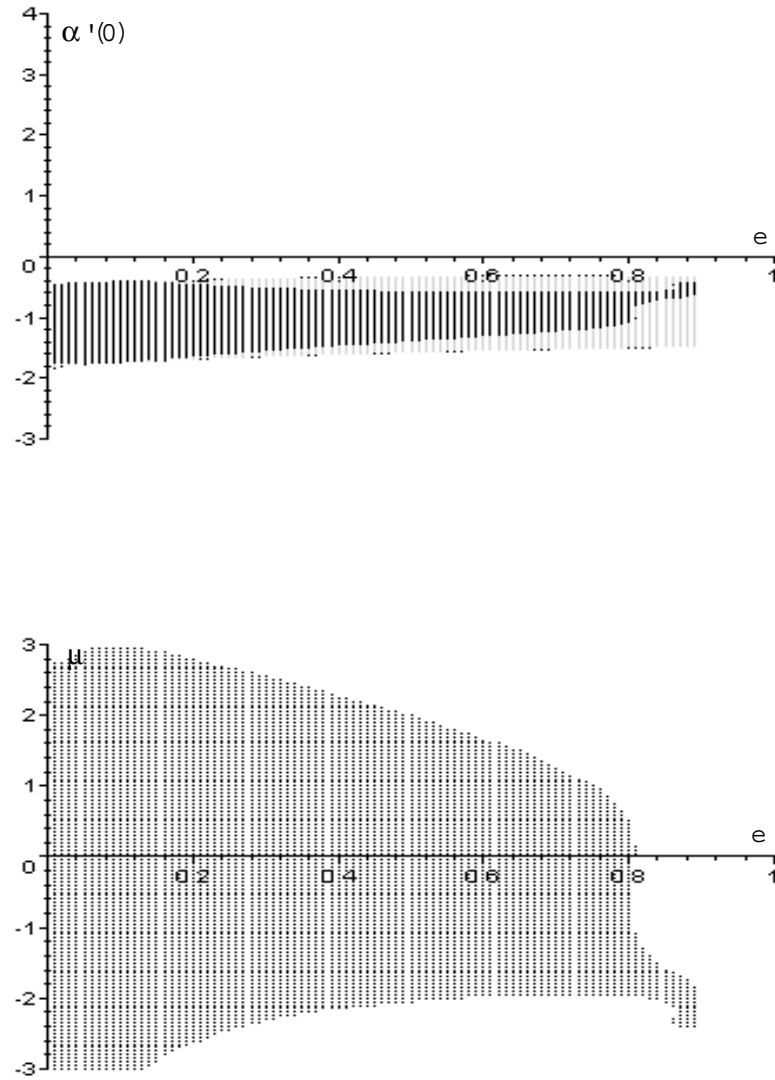


Figure 41

Rotations indirectes

$$\kappa_0 = 0.7$$

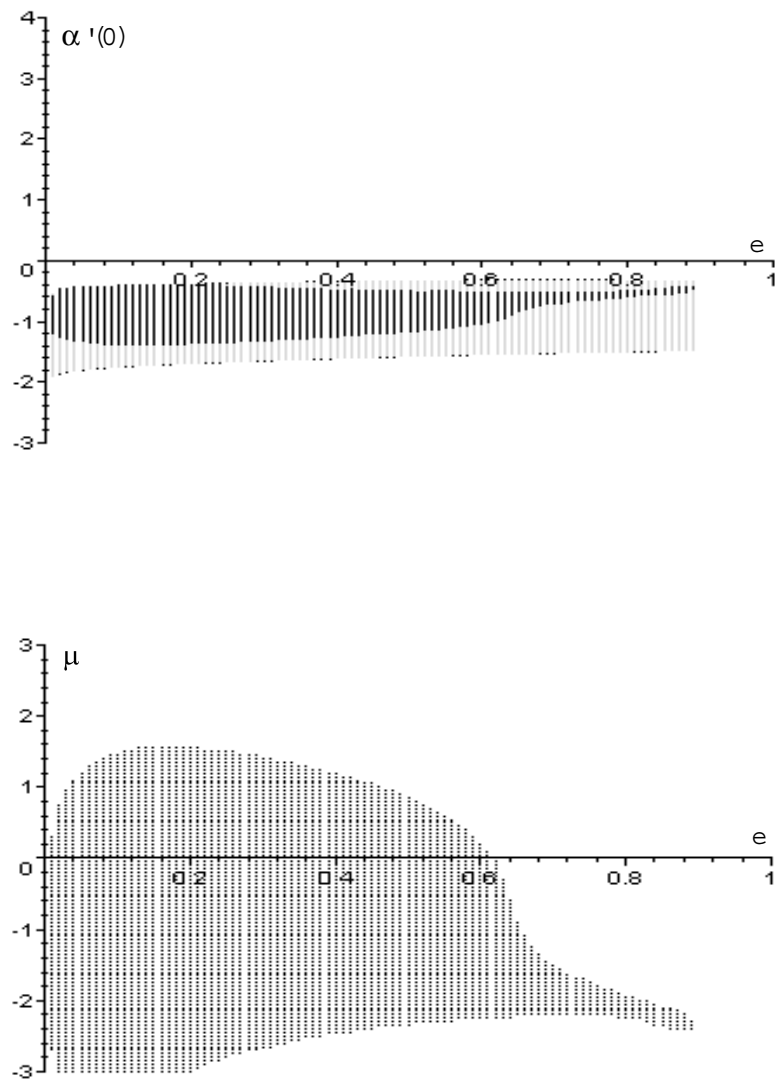


Figure 42

Rotations indirectes

$$\kappa_0 = 1.2$$

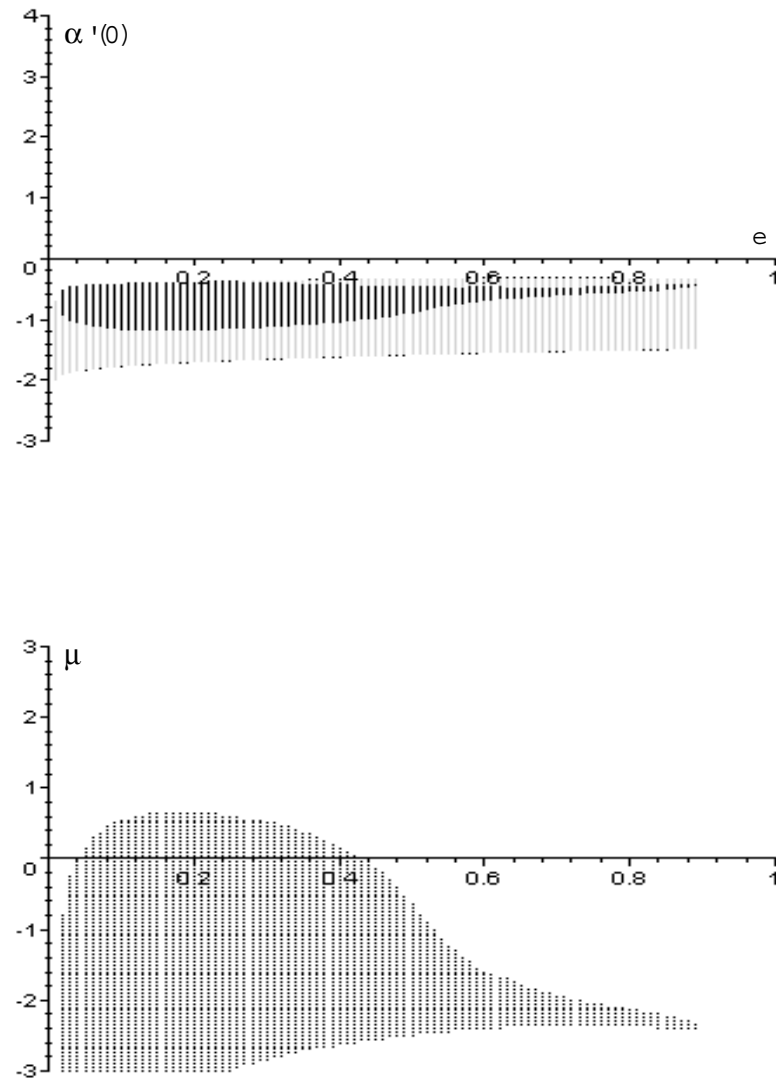


Figure 43

Rotations indirectes

$$\kappa_0 = 2.5$$

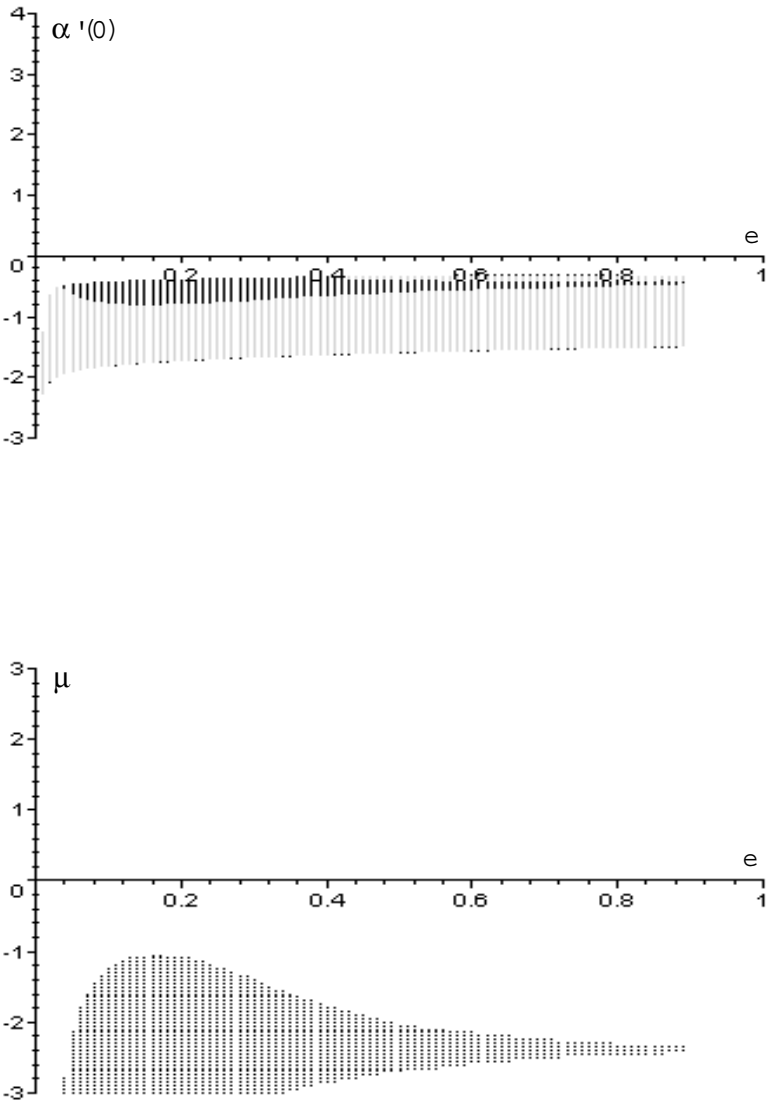


Figure 44

5.4 Rotations rapides d'un satellite sur une orbite elliptique

Considérons le problème des mouvements rapides du satellite sur une orbite elliptique où, au cours d'une révolution du centre de masse sur l'orbite, le satellite exécute m révolutions autour de l'axe Oy passant par son centre de masse et perpendiculaire au plan de l'orbite.

Dans ce problème ce qui nous intéresse essentiellement est l'influence du paramètre d'inertie μ . Donc ci-dessous dans ce paragraphe on observera un satellite sous l'action des seules forces gravitationnelles sans prendre en considération la résistance de l'atmosphère ($\kappa_0 = 0$).

On analysera également la stabilité des solutions obtenues.

L'équation (5.12), si $\kappa_0 = 0$, sera de la forme

$$\frac{d^2\alpha}{dv^2} + \mu \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + e \cos v} - 2 \left(1 + \frac{d\alpha}{dv} \right) \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} = 0 \quad (5.25)$$

Pour construire les rotations symétriques on aura également recours à la méthode, décrite dans la section 2.3.

Trouvons l'intersection des ensembles $M_0^{m\pi}$ et M_0 , où $M^{m\pi} = \{v, \alpha, \dot{\alpha} : v = \pi, \alpha = m\pi\}$. Alors, les points d'intersection de l'image M_0^π avec les droites $\alpha = m\pi$ définissent les rotations 2π -périodiques du satellite.

Analysons la stabilité des rotations trouvées à l'approximation linéaire. Le système d'équations aux variations au voisinage de la rotation $\alpha^*(v)$ 2π -périodique a la forme

$$\delta\ddot{\alpha} - \frac{2e \sin v}{1 + e \cos v} \delta\dot{\alpha} + \mu \frac{\cos 2\alpha^*(v)}{1 + e \cos v} \delta\alpha = 0 \quad (5.26)$$

On détermine les exposants caractéristiques par la formation d'une seule solution particulière du système d'équations (5.25), (5.26) avec les conditions initiales

$$\alpha(0) = 0, \quad \dot{\alpha}(0) = v^*, \quad \delta\alpha(0) = 1, \quad \delta\dot{\alpha}(0) = 0$$

Si $|\delta(2\pi)| \leq 1$, les exposants caractéristiques seront purement imaginaires et cette condition est également suffisante pour que la solution $\alpha^*(v)$ soit stable au sens de Lyapunov en l'absence des résonances jusqu'au quatrième ordre [10].

Dans la présente thèse on a considéré les rotations pour $m = 1, 2, \dots, 20$.

On voit les résultats des recherches numériques sur les Figures 45-51. On constate qu'avec l'augmentation du nombre de révolutions m le domaine des valeurs de bifurcation e (pour lesquelles il existe deux mouvements périodiques) se déplace vers les plus grandes valeurs d'excentricité e

et de plus les domaines des valeurs des vitesses initiales ne dépendent pas du paramètre d'inertie μ .

En conclusion de ce chapitre la méthode de construction des mouvements périodiques est un instrument efficace d'étude du problème de type de (5.25).

$$m = 1$$

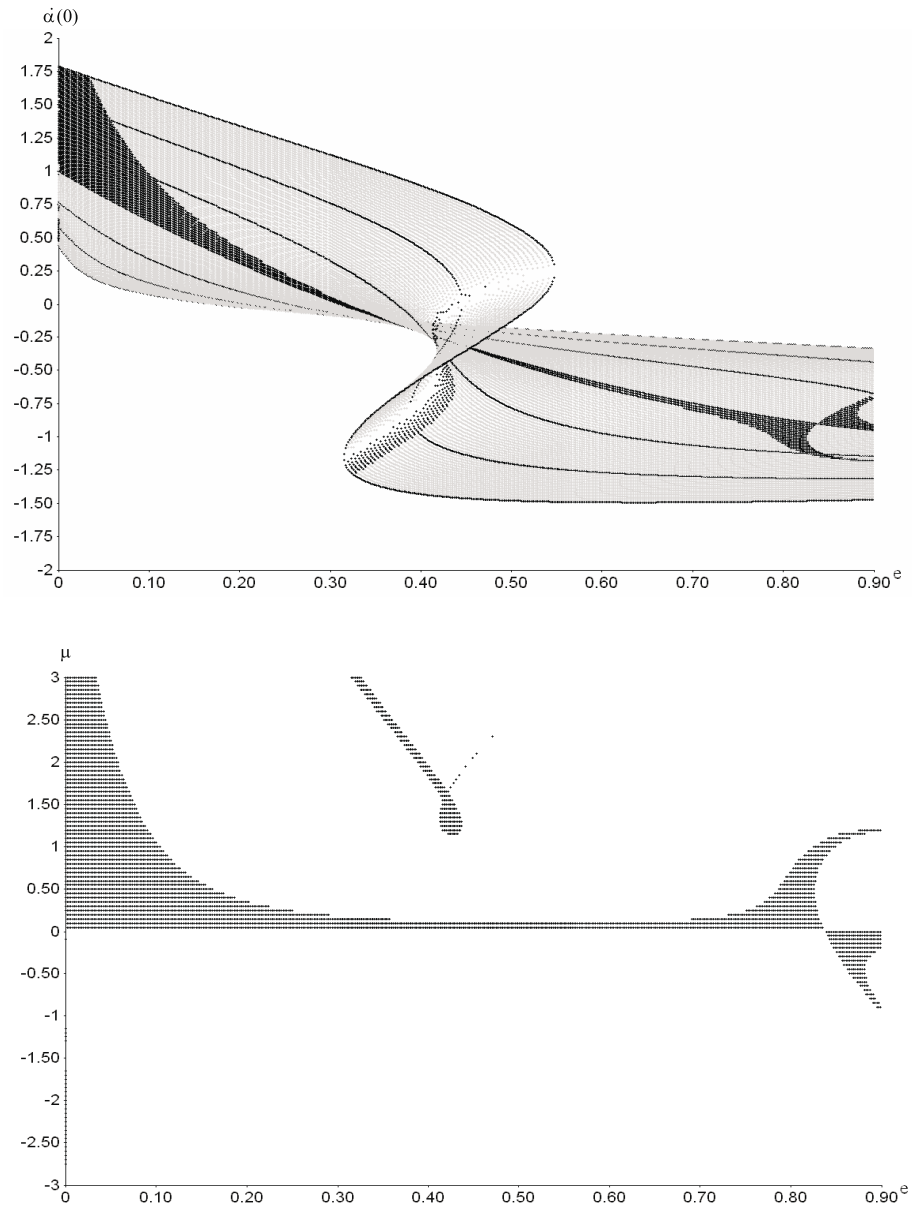


Figure 45

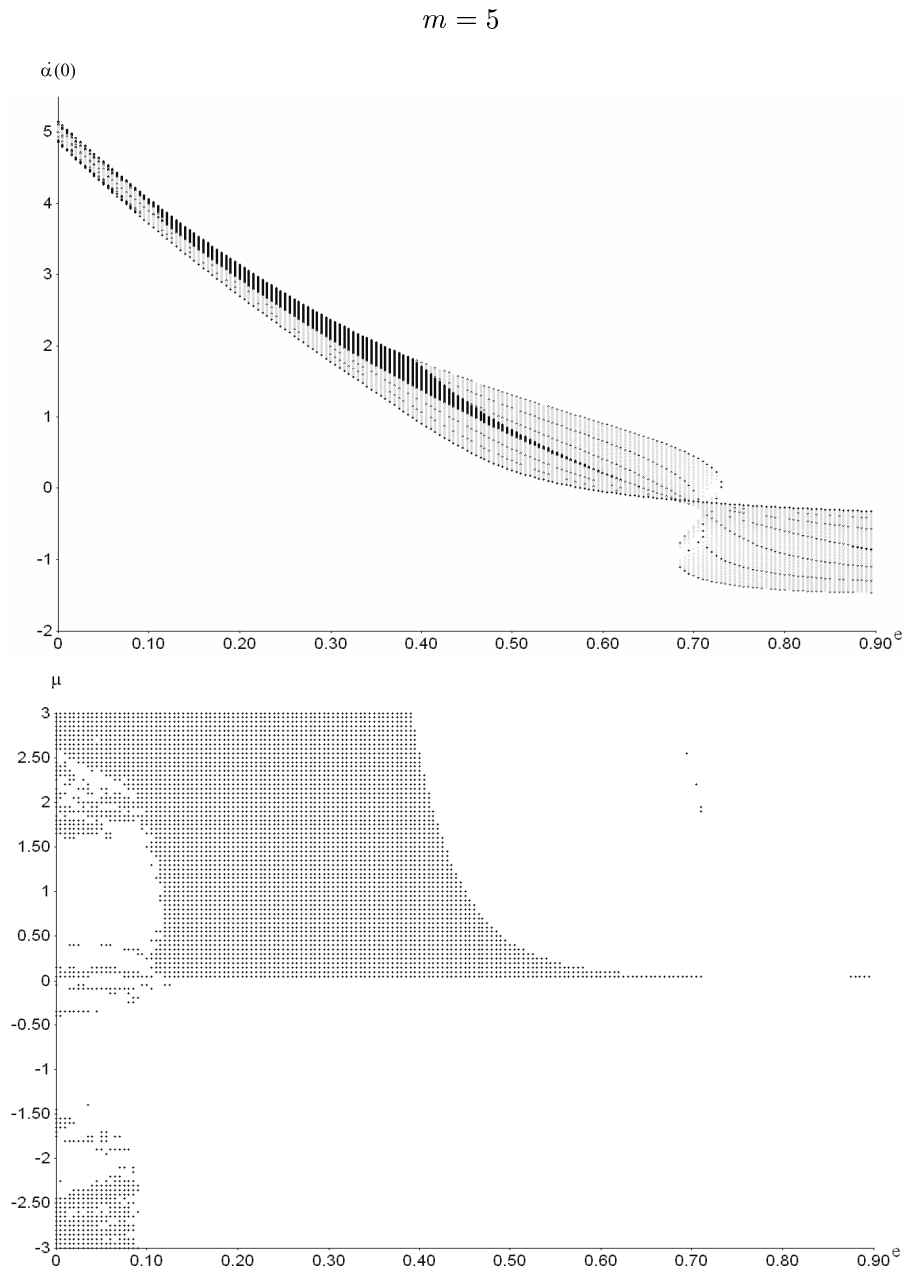


Figure 46

$$m = 10$$

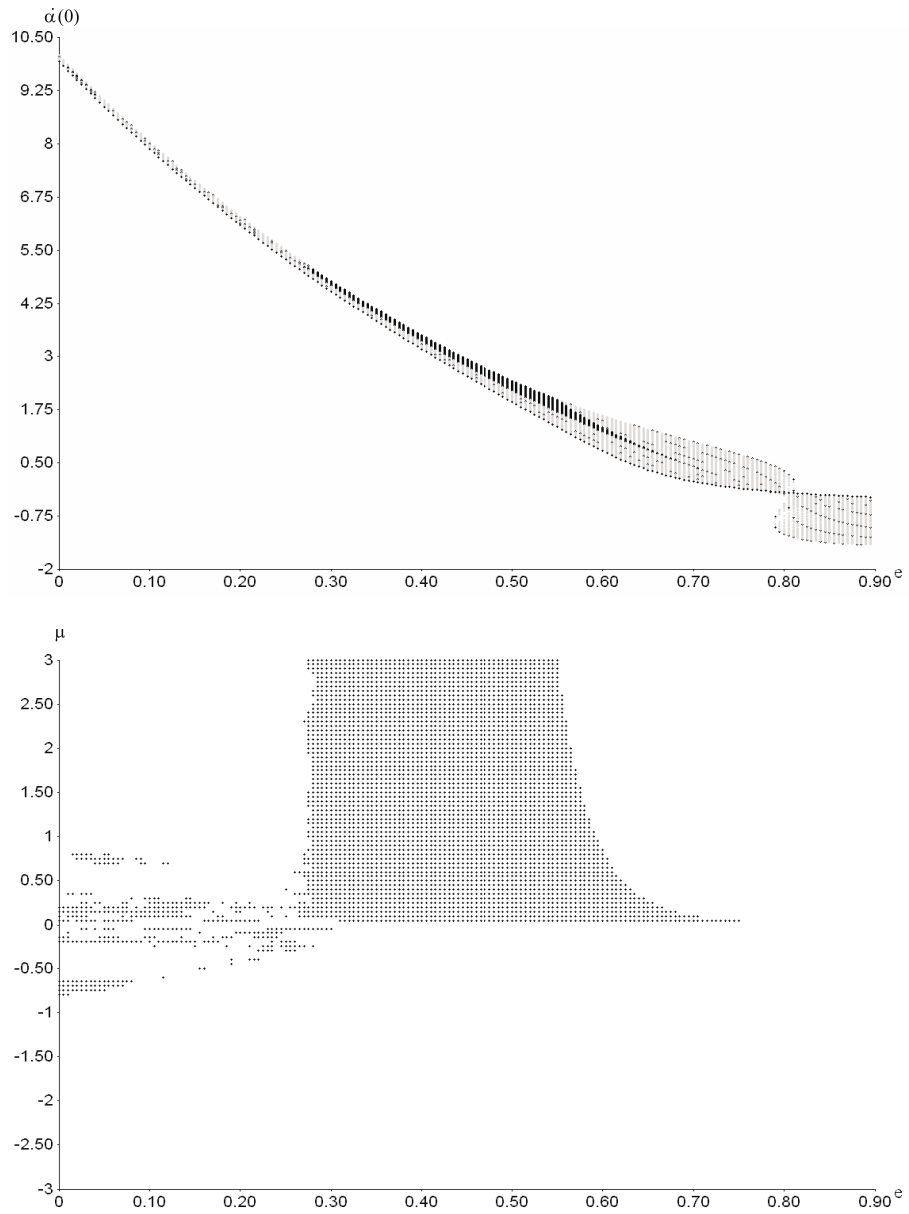


Figure 47

$$m = 13$$

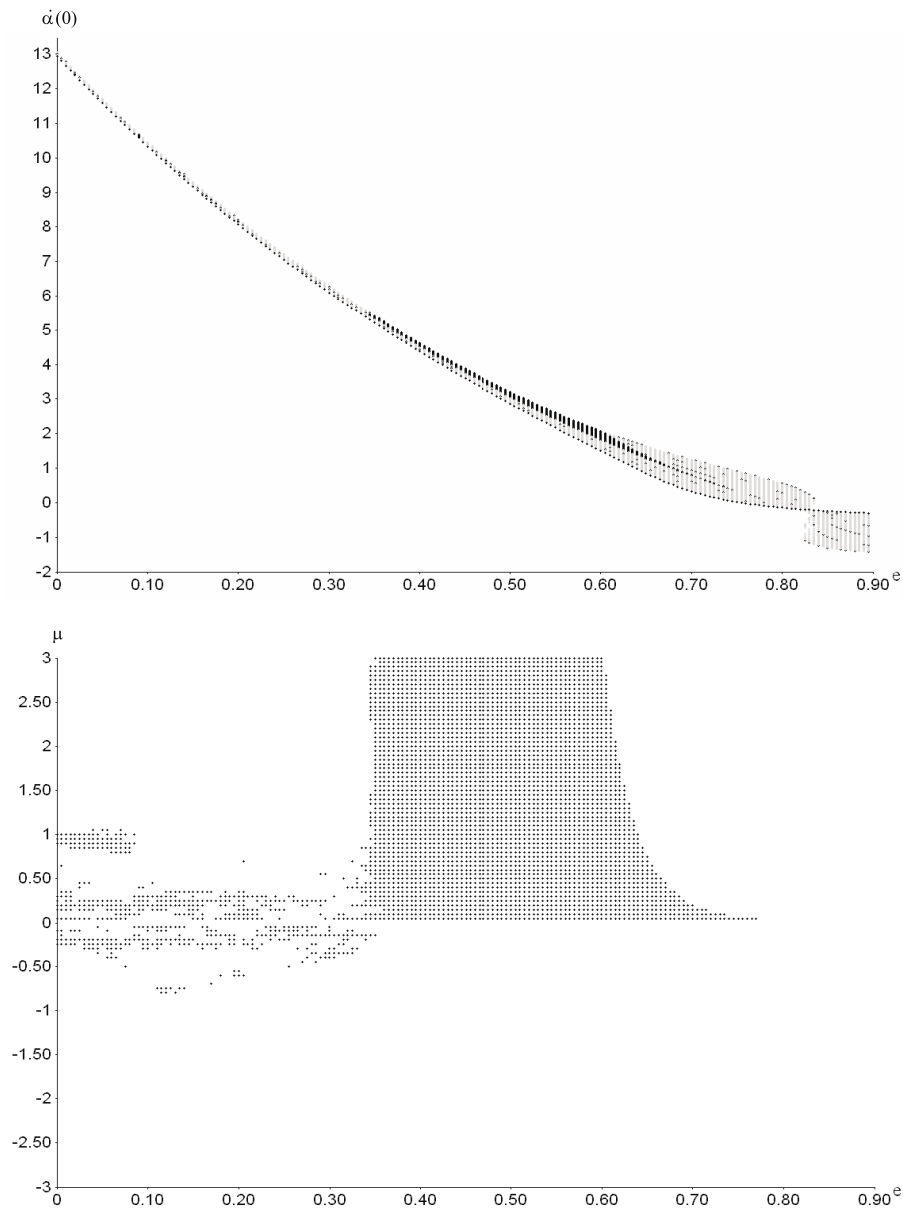


Figure 48

$$m = 16$$

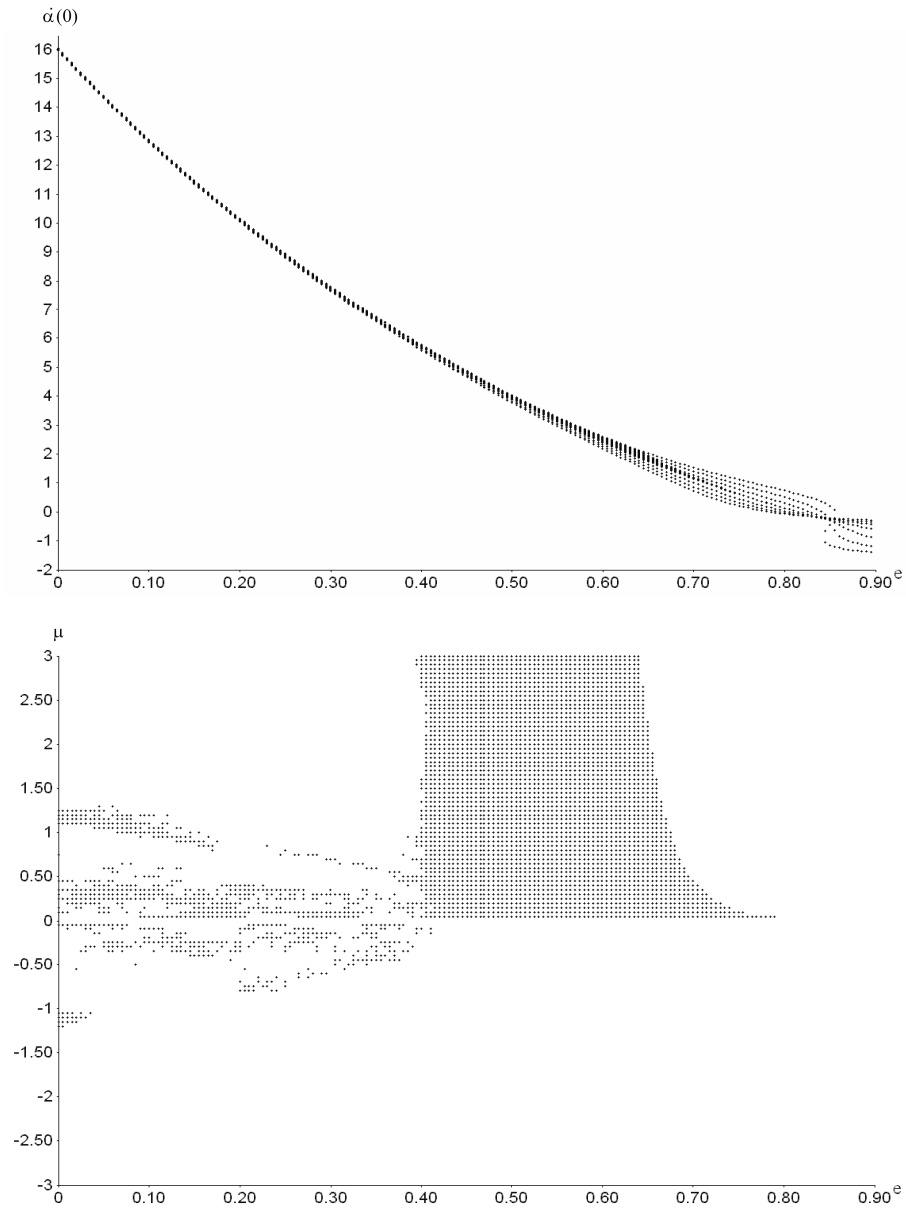


Figure 49

$$m = 18$$

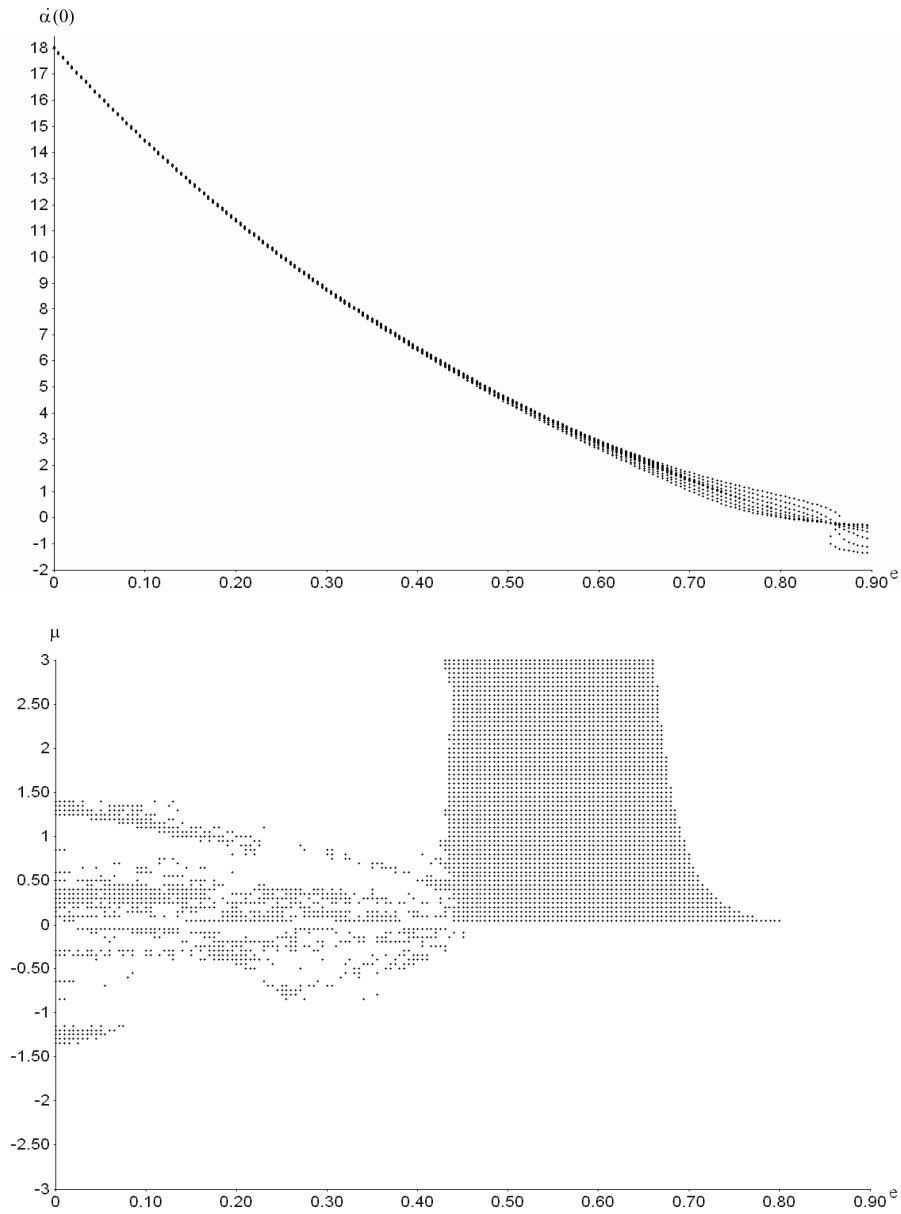


Figure 50

$$m = 20$$

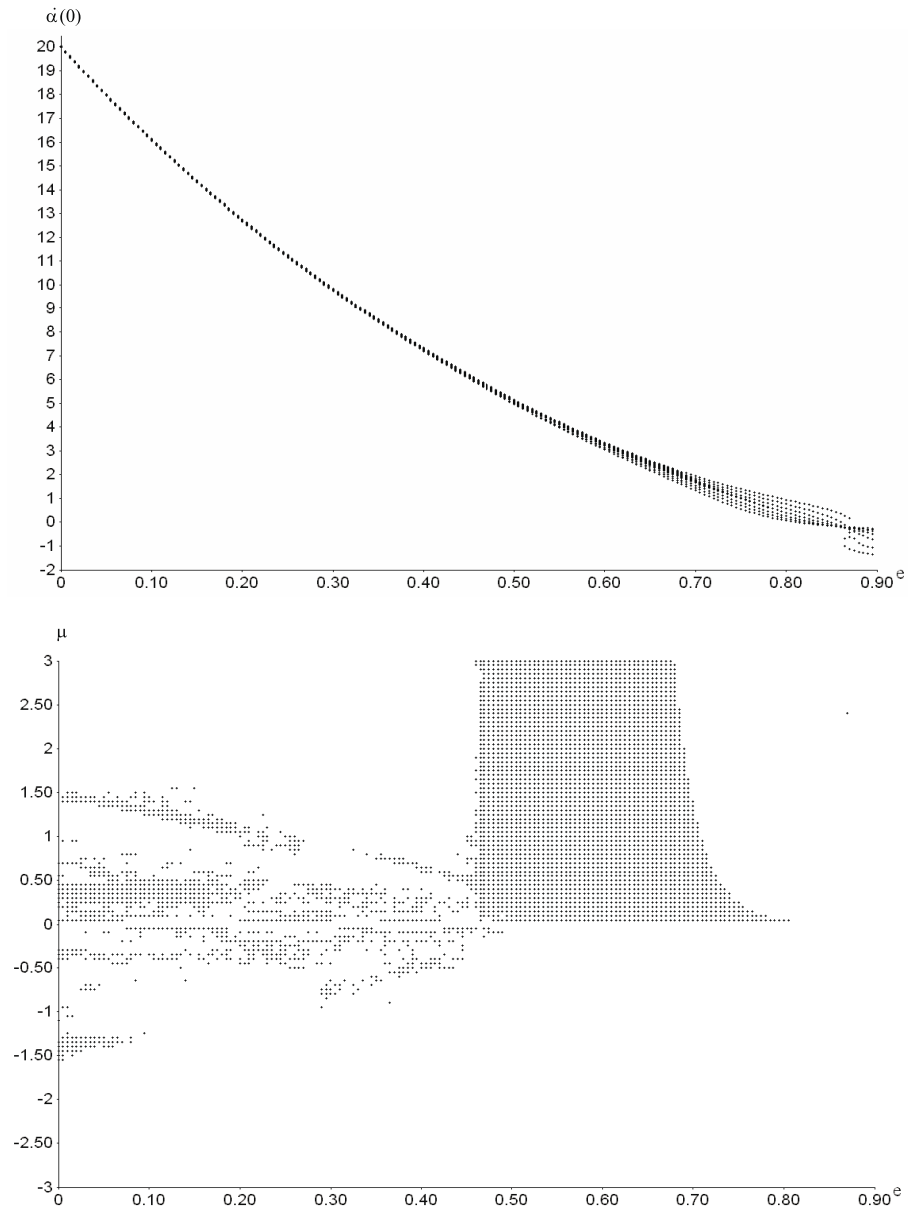


Figure 51

Troisième partie

Annexe

Annexe A

Densité de l'atmosphère en fonction de l'altitude

voir *CIRA. 1972. North Holland. Amsterdam COSPAR International Reference Atmosphere. 450 p.*

altitude (H)	densité (ρ^*)
120	2.440E-08
121	2.162E-08
122	1.924E-08
123	1.717E-08
124	1.538E-08
125	1.382E-08
126	1.246E-08
127	1.127E-08
128	1.022E-08
129	9.300E-09
130	8.484E-09
131	7.759E-09
132	7.115E-09
133	6.540E-09
134	6.025E-09
135	5.563E-09
136	5.147E-09
137	4.772E-09
138	4.432E-09

altitude (H)	densité (ρ^*)
139	4.125E-09
140	3.845E-09
141	3.591E-09
142	3.359E-09
143	3.147E-09
144	2.952E-09
145	2.774E-09
146	2.609E-09
147	2.458E-09
148	2.318E-09
149	2.189E-09
150	2.070E-09
151	1.959E-09
152	1.856E-09
153	1.760E-09
154	1.670E-09
155	1.587E-09
156	1.509E-09
157	1.436E-09
158	1.368E-09
159	1.304E-09
160	1.244E-09
161	1.188E-09
162	1.134E-09
163	1.084E-09
164	1.037E-09
165	9.927E-10
166	9.507E-10
167	9.110E-10
168	8.734E-10
169	8.378E-10
170	8.040E-10
171	7.720E-10
172	7.417E-10
173	7.128E-10
174	6.854E-10

altitude (H)	densité (ρ^*)
175	6.593E-10
176	6.345E-10
177	6.109E-10
178	5.883E-10
179	5.669E-10
180	5.464E-10
181	5.268E-10
182	5.081E-10
183	4.903E-10
184	4.732E-10
185	4.568E-10
186	4.412E-10
187	4.262E-10
188	4.119E-10
189	3.982E-10
190	3.850E-10
191	3.724E-10
192	3.602E-10
193	3.486E-10
194	3.374E-10
195	3.267E-10
196	3.164E-10
197	3.065E-10
198	2.969E-10
199	2.878E-10
200	2.789E-10
202	2.622E-10
204	2.468E-10
206	2.324E-10
208	2.190E-10
210	2.066E-10
212	1.950E-10
214	1.842E-10
216	1.741E-10
218	1.646E-10

altitude (H)	densité (ρ^*)
220	1.558E-10
222	1.475E-10
224	1.398E-10
226	1.325E-10
228	1.257E-10
230	1.192E-10
232	1.132E-10
234	1.076E-10
236	1.022E-10
238	9.720E-11
240	9.246E-11
242	8.799E-11
244	8.378E-11
246	7.979E-11
248	7.603E-11
250	7.248E-11
252	6.911E-11
254	6.593E-11
256	6.292E-11
258	6.006E-11
260	5.735E-11
262	5.478E-11
264	5.235E-11
266	5.004E-11
268	4.784E-11
270	4.576E-11
272	4.378E-11
274	4.189E-11
276	4.010E-11
278	3.839E-11
280	3.677E-11
282	3.522E-11
284	3.375E-11
286	3.235E-11
288	3.101E-11

altitude (H)	densité (ρ^*)
290	2.974E-11
292	2.852E-11
294	2.736E-11
296	2.625E-11
298	2.519E-11
300	2.418E-11
302	2.321E-11
304	2.229E-11
306	2.141E-11
308	2.056E-11
310	1.976E-11
312	1.899E-11
314	1.825E-11
316	1.754E-11
318	1.686E-11
320	1.621E-11
322	1.559E-11
324	1.500E-11
326	1.443E-11
328	1.388E-11
330	1.336E-11
332	1.286E-11
334	1.237E-11
336	1.191E-11
338	1.147E-11
340	1.104E-11
344	1.024E-11
346	9.866E-12
348	9.505E-12
350	9.158E-12
352	8.824E-12
354	8.503E-12
356	8.195E-12
358	7.899E-12
360	7.615E-12

altitude (H)	densité (ρ^*)
362	7.341E-12
364	7.078E-12
366	6.825E-12
368	6.582E-12
370	6.348E-12
372	6.123E-12
374	5.906E-12
376	5.698E-12
378	5.497E-12
380	5.304E-12
382	5.118E-12
384	4.939E-12
386	4.767E-12
388	4.600E-12
390	4.441E-12
392	4.287E-12
394	4.138E-12
396	3.995E-12
398	3.858E-12
400	3.725E-12
402	3.597E-12
404	3.474E-12
406	3.355E-12
408	3.241E-12
410	3.130E-12
412	3.024E-12
414	2.921E-12
416	2.822E-12
418	2.727E-12
420	2.635E-12
422	2.546E-12
424	2.460E-12
426	2.377E-12
428	2.298E-12
430	2.221E-12

altitude (H)	densité (ρ^*)
432	2.147E-12
434	2.075E-12
436	2.006E-12
438	1.939E-12
440	1.875E-12
442	1.813E-12
444	1.753E-12
446	1.695E-12
448	1.639E-12
450	1.585E-12
452	1.533E-12
454	1.482E-12
456	1.434E-12
458	1.387E-12
460	1.341E-12
462	1.297E-12
464	1.255E-12
466	1.214E-12
468	1.175E-12
470	1.137E-12
472	1.100E-12
474	1.064E-12
476	1.030E-12
478	9.965E-13
480	9.644E-13
482	9.333E-13
484	9.033E-13
486	8.743E-13
488	8.463E-13
490	8.192E-13
492	7.930E-13
494	7.677E-13
496	7.432E-13
498	7.196E-13
500	6.967E-13

Dans la Figure 52 on peut voir les courbes des polynômes interpolants la fonction $f(H)$ avec une quantité différente de nœuds d'interpolation n . La précision nécessaire est obtenue si le degré du polynôme est égal à 20.

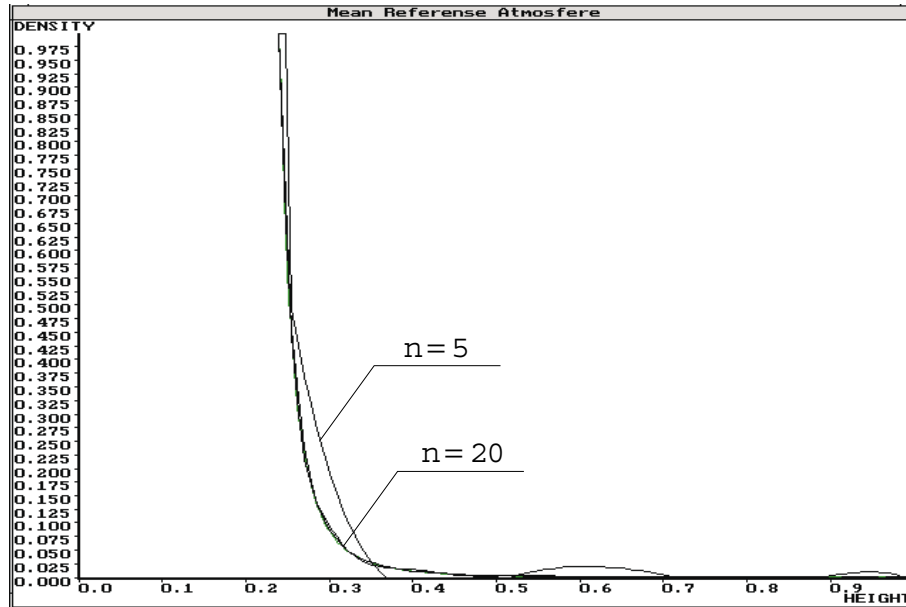


Figure 52 : Courbes des polynômes interpolants de la fonction $f(H)$, caractérisant la dépendance de la densité de l'atmosphère en fonction de l'altitude H

Annexe B

Code des Programmes

```
> restart;
> readlib(mtaylor):
      Système initial des équations différentielles
> A1:=(beta^2+1)/5:B1:=(1+alpha^2)/5:C1:=
> (alpha^2+beta^2)/5:
> x1.''':=alpha*y1*r/beta-alpha*z1*q+
> (alpha^2-1)*x1^2*z1*q/alpha+(beta^2-alpha^2)*
> x1^2*y1*r/alpha/beta+(alpha^2-beta^2)*
> x1*y1*z1*p/beta:
> y1.''':=beta*z1*p-beta*x1*r/alpha+
> (beta^2-alpha^2)*y1^2*x1*r/
> alpha/beta+(1-beta^2)*y1^2*z1*p/beta+
> (alpha^2-1)*x1*y1*z1*q/alpha:
> z1.''':=x1*q/alpha-y1*p/beta+
> (1-beta^2)*z1^2*y1*p/beta+(alpha^2-1)*z1^2*x1*
> q/alpha+(beta^2-alpha^2)*x1*y1*z1*r/alpha/beta:
> X1:=x1.'':Y1:=y1.'':Z1:=z1.'':
> P1:=(B1-C1)*q*r+alpha*(X1-beta*y1*r/alpha+
> z1*q/alpha)*(alpha*p*x1+beta*q*y1+r*z1)-
> p*(alpha^2*x1*x1.'''+beta^2*y1*y1.'''+z1*z1.'')-
> gamma*(1-beta^2)*y1*z1/beta/(x1^2/alpha^2+y1^2/beta^2+
> z1^2)^(1/2):
```

```

> Q1:=(C1-A1)*r*p+beta*(Y1-z1*p/beta+alpha*x1*r/beta)*
> (alpha*p*x1+beta*q*y1+r*z1)-q*(alpha^2*x1*x1.''+
> beta^2*y1*y1.''+z1*z1.'')-gamma*(alpha^2-1)*x1*
> z1/alpha/(x1^2/alpha^2+y1^2/beta^2+z1^2)^(1/2):
> R1:=(A1-B1)*p*q+(Z1-alpha*x1*q+beta*y1*p)*
> (alpha*p*x1+beta*q*y1+r*z1)-r*(alpha^2*x1*
> x1.''+beta^2*y1*y1.''+z1*z1.'')-gamma*
> (beta^2-alpha^2)*x1*y1/alpha/beta/
> (x1^2/alpha^2+y1^2/beta^2+z1^2)^(1/2):
> ur2:=(B1+alpha^2*x1^2+z1^2)*q.''-beta*y1*z1*r.''-
> beta*alpha*x1*y1*p.''-Q1:
> ur1:=(A1+beta^2*y1^2+z1^2)*p.''-alpha*beta*x1*
> y1*q.''-alpha*x1*z1*r.''-P1:
> sol:=solve({ur1,ur2},{p.'',q.''}):
> assign(sol):

```

Perturbations : $r = r + 1$, $z = z1 - 1$

```

> r:=r1+1;z1:=z-1:r.'':=r1.'':z.'':=z1.'':

```

Réduction du système initial du 6-ième ordre

```

> z:=(x1^2+y1^2)/2:
> r1:=- (A1*p^2+B1*q^2+(beta*y1+q)^2+
> (p+alpha*x1)^2)/(2*C1)-gamma*
> ((1-1/alpha^2)*x1^2+(1-1/beta^2)*y1^2):
> -(A1*p*p.''+B1*q*q.''+(beta*y1+q)*
> (beta*y1.''+q.''))+
> (alpha*x1+p)*(alpha*x1.''+p.'')/C1-
> 2*gamma*((1-1/alpha^2)*
> x1*x1.''+(1-1/beta^2)*y1*y1.''):
> dr1:=mtaylor(%,[x1,y1,p,q,r1.''],3):

```

Système des équations perturbés du 4-ième ordre

```

> mtaylor(x1.','','[p,q,x1,y1],4):
> x1_3. ''':collect(%,[x1,y1,p,q],distributed):
> mtaylor(y1.','','[p,q,x1,y1],4):
> y1_3. ''':collect(%,[x1,y1,p,q],distributed):
> subs(r1. '''=dr1,p. '''):
> mtaylor(%,[x1,y1,p,q],4):
> p_3. ''':collect(%,[x1,y1,p,q],distributed):
> subs(r1. '''=dr1,q. '''):
> mtaylor(%,[x1,y1,p,q],4):
> q_3. ''':collect(%,[x1,y1,p,q],distributed):

> with(linalg):

```

Coefficients du système perturbé

```

> A:=matrix(2,2,[]):
> B:=matrix(2,2,[]):
> convert(x1_3. '',polynom):
> coeff_dx:=coeffs(%,{x1,y1,p,q},'var_dx'):
> convert(y1_3. '',polynom):
> coeff_dy:=coeffs(%,{x1,y1,p,q},'var_dy'):
> convert(p_3. '',polynom):
> coeff_dp:=coeffs(%,{x1,y1,p,q},'var_dp'):
> convert(q_3. '',polynom):
> coeff_dq:=coeffs(%,{x1,y1,p,q},'var_dq'):
> s_dx:=0:s_dy:=0:
> for i to 9 do
>   s_dx:=s_dx+factor(coeff_dx[i])*var_dx[i]:
>   s_dy:=s_dy+factor(coeff_dy[i])*var_dy[i]:
>   if var_dx[i]=y1 then A[1,1]:=coeff_dx[i]
>   fi:
>   if var_dx[i]=q then A[1,2]:=coeff_dx[i]
>   fi:
>   if var_dy[i]=x1 then B[1,1]:=coeff_dy[i]
>   fi:
>   if var_dy[i]=p then B[1,2]:=coeff_dy[i]
>   fi:

```

```

> od:
> dx:=s_dx:dy:=s_dy:
> s_dp:=0:s_dq:=0:
> for j to 12 do
> s_dp:=s_dp+factor(coeff_dp[j])*var_dp[j]:
> s_dq:=s_dq+factor(coeff_dq[j])*var_dq[j]:
> if var_dp[j]=y1 then
> A[2,1]:=factor(coeff_dp[j]) fi:
> if var_dp[j]=q then
> A[2,2]:=factor(coeff_dp[j]) fi:
> if var_dq[j]=x1 then
> B[2,1]:=factor(coeff_dq[j]) fi:
> if var_dq[j]=p then
> B[2,2]:=factor(coeff_dq[j]) fi:
> od:
> dp:=s_dp:dq:=s_dq:

```

Normalisation du système des équations perturbés

```

> C_:=evalm(B&*A):
> C:=evalm(A&*B):
> charpoly(C,lambda):
> ur:=collect(%,lambda):
> l_2:=factor(coeff(ur,lambda,2)):
> l_1:=factor(coeff(ur,lambda,1)):
> l_0:=factor(coeff(ur,lambda,0)):
> xor:=l_2*lambda^2+l_1*lambda^1+l_0:
> jk:=solve(ur,lambda):
> lambda1:=sqrt(jk[1]):lambda2:=sqrt(jk[2]):
> P:=matrix(2,2,[C[2,1],lambda1^2-C[1,1],C[2,1],
> lambda2^2-C[1,1]]):
> Q:=matrix(2,2,[C_[2,1],lambda1^2-C_[1,1],C_[2,1],
> lambda2^2-C_[1,1]]):
> P_:=inverse(P):
> Q_:=inverse(Q):
> p_eta:=(P_[2,1]*(eta1+conjugate(eta1))+P_[2,2]*
> (eta2+conjugate(eta2)))/2:

```

```

> y_eta:=(Q_[1,1]*(eta1-conjugate(eta1))+Q_[1,2]*
> (eta2-conjugate(eta2)))/2/I:
> q_eta:=(Q_[2,1]*(eta1-conjugate(eta1))+Q_[2,2]*
> (eta2-conjugate(eta2)))/2/I:
> x_eta:=(P_[1,1]*(eta1+conjugate(eta1))+P_[1,2]*
> (eta2+conjugate(eta2)))/2:
> dx-A[1,1]*y1-A[1,2]*q:
> X_3:=subs(x1=x_eta,y1=y_eta,p=p_eta,q=q_eta,%):
> dy-B[1,1]*x1-B[1,2]*p:
> Y_3:=subs(x1=x_eta,y1=y_eta,p=p_eta,q=q_eta,%):
> dp-A[2,1]*y1-A[2,2]*q:
> P_3:=subs(x1=x_eta,y1=y_eta,p=p_eta,q=q_eta,%):
> dq-B[2,1]*x1-B[2,2]*p:
> Q_3:=subs(x1=x_eta,y1=y_eta,p=p_eta,q=q_eta,%):
> lambda1*eta1+C[2,1]*X_3+(lambda1^2-C[1,1])*P_3+
> I*(C_[2,1]*Y_3+(lambda1^2-C_[1,1])*Q_3):
> collect(%,[eta1,conjugate(eta1),eta2,conjugate(eta2)],
> distributed):
> eta1.``:=convert(%,'polynom'):
> lambda2*eta2+C[2,1]*X_3+(lambda2^2-C[1,1])*P_3+
> I*(C_[2,1]*Y_3+(lambda2^2-C_[1,1])*Q_3):
> collect(%,[eta1,conjugate(eta1),eta2,conjugate(eta2)],
> distributed):
> eta2.``:=convert(%,'polynom'):
> koeff_eta1:=coeffs(eta1.``,
> {eta1,conjugate(eta1),eta2,
> conjugate(eta2)},'var_eta1'):
> koeff_eta2:=coeffs(eta2.``,
> {eta1,conjugate(eta1),eta2,
> conjugate(eta2)},'var_eta2'):

```

Obtention des coefficients résonantes de la forme normale

$(A_{11} = w_{11}, A_{12} = w_{12}, A_{21} = w_{21}, A_{22} = w_{22}, B_1 = B_1, B_2 = B_2)$

```
> for k from 1 by 1 to 20 do
> if var_eta1[k]/(eta1^2*conjugate(eta1))=1
> then
> W[1,1]:=coeff_eta1[k]/I fi:
> if var_eta1[k]/(eta1*eta2*conjugate(eta2))=1
> then
> W[1,2]:=
> coeff_eta1[k]/I fi:
> if var_eta2[k]/(eta1*eta2*conjugate(eta1))=1
> then
> W[2,1]:=
> coeff_eta2[k]/I fi:
> if var_eta2[k]/(eta2^2*conjugate(eta2))=1
> then
> W[2,2]:=coeff_eta2[k]/I fi:
> od:
> ksi1.'':=lambda1*ksi1+I*ksi1*(W[1,1]*abs(ksi1)^2+
> W[1,2]*abs(ksi2)^2):
> ksi2.'':=lambda2*ksi2+I*ksi1*(W[2,1]*abs(ksi1)^2+
> W[2,2]*abs(ksi2)^2):
> detP:=det(P):
> save detP, 'detP.txt':
> detQ:=det(Q):
> save detQ, 'detQ.txt':
> save lambda1, 'l1.txt':
> save lambda2, 'l2.txt':
> w11:=W[1,1]:
> save w11, 'w11.txt':
> w12:=W[1,2]:
> save w12, 'w12.txt':
> w21:=W[2,1]:
> save w21, 'w21.txt':
> w22:=W[2,2]:
> save w22, 'w22.txt':
```

Conclusion générale et perspectives

Les recherches présentées dans cette thèse démontrent l'efficacité des méthodes fondées sur les propriétés de réversibilité des systèmes mécaniques, propriété dont l'usage est essentiel dans tous les résultats obtenus.

Les publications concernant les applications de la réversibilité aux problèmes de dynamique du corps solide ont, à ce jour, été peu nombreuses. Dans cette thèse on a abordé deux principaux problèmes : les oscillations et les rotations d'un corps solide roulant sans glissement sur un plan ou d'un satellite sur orbite. Les résultats obtenus concernent :

- L'étude de la stabilité des rotations autour de l'axe vertical de l'ellipsoïde pesant homogène sur le plan horizontal. Au niveau actuel des études il reste des domaines pour lesquels des travaux ultérieurs seront nécessaires pour discuter complètement la stabilité.
- L'étude de la stabilité des mouvements de roulement sans glissement d'un ellipsoïde creux pesant le long de la ligne droite sur le plan horizontal : conclusion sur l'instabilité causée par la résonance paramétrique et conditions nécessaires de stabilité, obtenues par calcul numérique.
- L'expression détaillée du coefficient de résonance en cas de résonance paramétrique pour les systèmes réversibles du troisième ordre (et la réalisation du code de calcul correspondant).
- La conservation des oscillations $2\pi k$ -périodiques du satellite sur l'orbite circulaire sous l'effet des moments gravitationnel et aérodynamique dans le cas de l'orbite faiblement elliptique.
- L'existence des rotations 2π -périodiques du satellite sur l'orbite elliptique arbitraire sous l'effet des moments gravitationnel et aérodynamique (détermination des vitesses initiales pour les rotations, étude de leur stabilité).

- La détermination des rotations rapides dans le problème de V.V. Beletsky (le satellite étant soumis aux seules forces gravitationnelles sans prendre en considération la résistance de l'atmosphère) et l'étude de leur stabilité.

Ces résultats sont nouveaux et recourent ceux déjà établis dans des cas plus particuliers.

D'autres problèmes restent ouverts :

- Le développement de la théorie des systèmes réversibles conservatifs à deux degrés de liberté et des systèmes qui en sont proches.
- L'étude de la stabilité des oscillations et des rotations d'un satellite dans le plan d'une orbite elliptique variable dans l'espace.
- L'étude de l'existence des mouvements périodiques d'un satellite dans l'espace voisins des mouvements plans.
- L'étude numérique des oscillations et des rotations du satellite dans l'espace.

Références

1. *Amosov A.A., Doubinsky Yu.A., Kopchenova N.V.* Les méthodes de calcul. Moscou, Vischaya. shkola, 1994. 544 P. (en russe)
2. *Appell P.* Cours de mécanique de la faculté des sciences. Traité de mécanique rationnelle. Sixième édition. Tome deuxième. Dynamique des systèmes mécanique analytique, Paris Gauthier-Villars, Editeur 1953.
3. *Arenstorf R.F.* Periodic solutions of the restricted three body problem representing analytic continuations of the Keplerian elliptic motions // Amer. J. Math. 1963. Vol. 85. N1. P.27-35.
4. *Arnol'd V.I.* Small denominators and problems of stability of motions in classical and celestial mechanics // Russian Math. Surveys. 1968. V. 23. N. 6. P. 85-191 (in russian)
5. *Arnol'd V.I.* Reversible systems // Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, ed. R.Z. Sagdeev. Harwood, Chur, N.Y. 1984. V. 3. P. 1161-1174.
6. *Arnol'd V.I. and Sevryuk M.B.* Oscillations and bifurcations in reversible systems. In : Nonlinear phenomena in Plasma Physics and Hydrodynamics, ed. R.Z. Sagdeev. Moscou, Mir. 1986. P. 31-64. (in Russian)
7. *Barrar R.B.* Existence of the periodic orbits of the second kind in the restricted problem of three bodies // Astron. J. 1965. Vol. 70. N1. P. 3-4.
8. *Beletsky V.V.* Sur la libration d'un satellite // Sbornik "Iskustvennie sputniki Zemli". 1959. N 3. 13-31. (en russe)
9. *Bibikov Yu.N.* Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations // Lect. Notes Math. V. 702. Berlin : Springer, 1979.
10. *Bibikov Yu.N.* Multifrequency nonlinear oscillations and their bifurcations. Leningrad : Leningrad Univ. Press. 1991. 144 P. (in russian)

11. *Bruno A.D.* La forme analytique des équations différentielles // Tr. Mosk. Mat. o-va. 1971. V. 25. P. 119-262 ; 1972. V.26. P. 199-239. (en russe)
12. *Bruno A.D.* Méthode local d'analyse non-linéaire des équations différentielles. Moscou, Nauka, 1979, 253 p. (en russe)
13. *Bruno A.D.* La famille de solutions périodiques de l'équation de Beletsky // Preprint Inst. Prikl. Mat. im. Keldicha. 2000. N 52. 36 P. (en russe)
14. *Devaney R.L.* Reversible diffeomorphisms and flows // Trans. Am. Math. Soc. 1976. V. 218. P. 89-113.
15. *Ephimov I.L., Tkhai V.N.* Stability of the periodic orbits in the Hill problem // Zadachi issledovaniya ustoychivosti i stabilizatsii dvizheniya. Moscou, Izd-vo Computing Center of Russia Acad. Sci., 1999. P. 45-60. (in russian)
16. *Euler L.* Théorie nouvelle du mouvements de la Lune. Leningrad : Editions AS. USSR, 1934. 208 p. (en russe).
17. *Gloukhikh Io.D., Tkhai V.N.* Periodic rotational motions of the satellite under the action of aerodynamic and gravitational forces // Modelirovaniye. i issledovaniye slozhnykh system. Part. 3. Moscou, Izd-vo Mosk. Gos. Akad. Priborostroeniya i informatiki. 1998. P. 363-375. (in russian)
18. *Gloukhikh Io.D., Tkhai V.N.* Periodic motions of the mechanical system with one degree of freedom // Zadachi issledovaniya ustoychivosti i stabilizatsii dvizheniya. Moscou, Izd-vo Computing Center of Russia Acad. Sci., 1999. P. 100-112. (in russian)
19. *Gloukhikh Io.D., Tkhai V.N., Chevallier D.P.* The stability of permanent rotations of a homogenous ellipsoid on a rough plane // Vtorie Poliaxovskie chteniya. Izd-vo Nauchn. issl. inst. Khimii St-Peterburg Univ., St-Peterburg, 2000. P. 115-127. (in russian)
20. *Gloukhikh Io.D., Tkhai V.N., Chevallier D.P.* On the stability of permanent rotations of a homogenous ellipsoid on a rough // Zadachi issledovaniya ustoychivosti i stabilizatsii dvizheniya. Moscou, Izd-vo Computing Center of Russia Acad. Sci., 2000. Part. 1. P. 87-104. (in russian)
21. *Gloukhikh Io.D., Grikhanova T.V.* Sur la stabilité des rotations de période 2π d'un satellite sur un plan d'une orbite elliptique // Zadachi

-
- issledovaniya ustoychivosti i stabilizatsii dvizheniya. Moscou, Izd-vo Center de Calcules de RAS, 2000. Part. 2. P. 142-148. (en russe)
22. *Gloukhikh Io.D., Bouchin V.O.* Recherches sur les rotations d'un satellite sur un plan d'une orbite elliptique // Zadachi issledovaniya ustoychivosti i stabilizatsii dvizheniya. Moscou, Izd-vo Center de Calcules de RAS, 2001. P. 140-146. (en russe)
 23. *Grodman D.L., Tkhai V.N.* Numerical investigation of the periodic motions on satellite on a elliptic orbits under action of the gravity and solar radiatin pressure // Zadachi issledovaniya ustoychivosti i stabilizatsii dvizheniya. Moscou, Izd-vo Computing Center of Russia Acad. Sci., 1998. P. 107-116. (in russian)
 24. *Grodman D.L., Tkhai V.N.* The rotations of dynamical symmetric satellite under the action of gravitational forces and solar radiation pressure // Modelirovaniye i issledovaniye slozhnikh system. Part. 3. Moscou, Izd-vo Mosk. Gos. Akad. Priborostroeniya i informatiki. 1998. P. 376-385. (in russian)
 25. *Hanson Tony L.* The C++ answer book language. Addison-Wesley, 1990.
 26. *Heinbockel J.H., Struble R.A.* Periodic solutions for differential systems with symmetries // J.Societ. Indust. Appl. Math. 1965. V. 13. N 2. P. 425-440.
 27. *Hill G.W.* Researches in the lunar theory // Amer. J. Math. 1878. V.1. P. 5-26, P. 129-147, P. 245-360.
 28. *Iooss G. and Adelmeyer M.* Topics in bifurcation theory. in : Advanced series in nonlinear dynamics. Vol. 3. (Singapore, World Scientific, 1992).
 29. *Karapetyan A.V.* Bifurcation de Hopf dans le problème du mouvement d'un corps solide pesant sur un plan rugueux. // Izvest. RAS. Mekh. Tverdogo Tela. 1985. N 2. P. 19-24. (en russe)
 30. *Karapetyan A.V.* La stabilité des mouvements stationnaires. Moscou, Editorial URSS, 1998. 165 P. (en russe)
 31. *Kolmogorov A.N.* On the persistence of conditionally periodic motions under a small change of the Hamilton function. // Dokl. Akad. Sci. of USSR. 1954. V. 98. P. 527-530. (in russian)
 32. *Krasil'nikov P.S., Tkhai V.N.* Reversible system. Stability at 1 :1 resonance // J. Appl. Math. Mech. (PMM) V. 56. N 4. P. 570-579.

33. *Kunitsyn A.L., Muratov A.S.* Sur la stabilité d'une classe d'équations quasiautonomes dans le cas de la résonance intérieure // Prikl. Mat. Mekh. (PMM) 1993. V. 57. N 2. P. 31-39. (en russe)
34. *Malkin I.G.* Théorie de la stabilité du mouvement. Moscou, Nauka, 1966. 530 P. (en russe)
35. *Markeyev A.P.* Sur l'interprétation géométrique de Poincaré du mouvement d'un corps solide dans le cas d'Euler. Problèmes de mécanique du mouvement contrôlé. Perm' : Editions de l'Université de Perm', 1982. P. 125-131 (en russe)
36. *Markeyev A.P.* Mécanique théorique. Moscou, Nauka, 1990. 414 P. (en russe)
37. *Markeyev A.P.* Dynamique du corps en contact avec une surface solide. Moscou, Nauka, 1992. 336 P. (en russe)
38. *Matveyev M.V., Tkhai V.N.* Sur la stabilité des systèmes réversibles dans le cas des plusieurs résonances // Mat. Model. nestats. protsesov i avtom. system. Moscou, Izd-vo Mosk. Instit. priborost., 1992. P. 37-41. (en russe)
39. *Matveyev M.V., Tkhai V.N.* On the stability of periodic reversible systems // J. Appl. Mech. Mech. (PMM) 1993. V. 57. N 1. P. 1-10.
40. *Matveyev M.V.* Lyapunov stability of equilibrium states of reversible systems. // Math. Notes. 1995. V. 57. N 1. P. 63-72.
41. *Matveyev M.V.* La stabilité des systèmes réversibles avec deux degrés de liberté. Moscou, Dep. v VINITI N 1226-13.94. 1990. 30 p. (en russe)
42. *Matveyev M.V.* La stabilité des systèmes réversibles non-linéaires. Thèse du candidat ès sciences. Moscou, MAI, 1995. (en russe)
43. *Matveyev M.V.* Reversible systems with first integrals // Physica D. 1998. V. 112. P. 148-157.
44. *Mel'nik N.V.* Oscillations périodiques d'un satellite dans le plan d'une orbite circulaire compte tenue de l'influence atmosphérique // Preprint Inst. Prikl. Mat. AS USSR. 1976. N 97. 37 P. (en russe)
45. *Mel'nik N.V.* Oscillations de période 2π d'un satellite sur le plan d'une orbite elliptique compte tenue de l'influence atmosphérique // Preprint Inst. Prikl. Mat. AS USSR. 1976. N 119. 45 P.
46. *Mindlin I.M.* Sur la stabilité du mouvement d'un corps solide pesant de révolution sur un plan horizontal // Inzhenerniy jurnal. 1964. V. 4. N 2. P. 225-230. (en russe)

47. *Mindlin I.M., Pogaritsky G.K.* Sur la stabilité des mouvements stationnaires d'un corps solide pesant de révolution sur un plan horizontale absolument rugueux // Prikl. Mat. Mekh. (PMM) 1965. V. 29. N 4. P. 742-745. (en russe)
48. *Montgomery D. and Zippin L.* Topological transformation groups. N.Y. : Interscience, 1955.
49. *Moser J.* Convergent series expansions for quasi-periodic motions // Math. Ann. 1967. V.169. N 1. P. 136-176.
50. *Moser J.* Lecture on Hamiltonian systems // Mem. Amer. Math. Soc. 1968. V. 81. P. 1-60, P. 136-176.
51. *Moser J.* Stable and random motions in dynamical systems // Ann. Math. Stud. 1973. V. 77. Princeton : Princeton Univ. Press.
52. *Pascal M.* Solution asymptotique des équations du mouvements de la "pierre celtique" // J. Appl. Math. Mech. (PMM) 1983. V. 46. N 2. P. 321-329.
53. *Poincaré H.* Oeuvre de Henri Poincaré. Gauthier-Villars, Paris, 1916-1956.
54. *Rauss E. D.* Dynamique du système de corps solides. V. 2. Moscou, Nauka, 1983. 544 P. (en russe)
55. *Roberts J.A.G., Quispel G.R.W.* Chaos and time-reversal symmetry // Phys. Reports. 1992. V. 216. N 2-3. P. 63-177.
56. *Sarychev V.A., Sazonov V.V., Zlatoustov V.A.* Oscillations périodiques d'un satellite sur un plan d'une orbite elliptique // Kosmicheskie issledovaniya. 1976. V. 15. N 6. P. 809-834. (en russe)
57. *Sarychev V.A.* Sur les questions de l'orientation des satellites artificiels // Itogi nauki i tekhn. Issledovanie kosmicheskogo prostranstva. 1978. V. 11. 223 P. (en russe)
58. *Sarychev V.A., Sazonov V.V., Zlatoustov V.A.* Oscillations périodiques d'un satellite sur un plan d'une orbite elliptique // Kosmicheskie issledovaniya. 1979. V. 17. N 2. P. 190-207. (en russe)
59. *Schanzle A.F.* Horseshoe-shaped orbits in the Jupiter-Sun restricted problem // Astron. J. 1967. Vol. 72 N 2. P. 149-157.
60. *Sevryuk M.B.* Reversible systems // Lect. Notes Math. V. 1211. Berlin : Springer, 1986
61. *Sevryuk M.B.* Lower-dimensional tori in reversible systems // Chaos. 1991. V. 1. N 2. P. 160-167.

62. *Sevryuk M.B.* New cases of quasi periodic motions in reversible systems // *Chaos*. 1993. V. 3. N 2. P. 211-214.
63. *Szebehely V.* Théorie des orbites. Moscou, Nauka, 1982. 665 p. (en russe)
64. *Tkhai V.N.* On the stability of mechanical systems subjected by positional forces // *Prikl. Mat. Mekh. (PMM)* 1980. V. 44. N. 1. P. 40-48.
65. *Tkhai V.N.* The reversibility of mechanical systems // *Prikl. Mat. Mekh. (PMM)* 1991. V. 55. N. 4. P. 578-586.
66. *Tkhai V.N.* On the Behavior of the reversible system on the boundary of the stability region // *Prikl. Mat. Mekh. (PMM)* 1991. V. 55. N. 5. P. 707-712.
67. *Tkhai V.N.* The qualitative investigation of the reversible system at 1 : 3 Resonance // *Nekotorie zadachi dinamiki mekh. syst.*, Moscou, MAI. 1991. P. 50-56. (in russian)
68. *Tkhai V.N.* Periodic motions of the homogeneous ellipsoid on the rough plane // *Izvest. Russia Acad. Sci. Mekh. Tverdogo Tela*. 1991. N 6. P. 24-30. (in russian)
69. *Tkhai V.N.* On instability of permanent rotations of the heavy homogeneous ellipsoid on absolute rough plane // *Izvest. Russia Acad. Sci. Mekh. Tverdogo Tela*. 1992. N 2. P. 25-30. (in russian)
70. *Tkhai V.N.* Some Problems of the stability of a reversible systems with a small parameter // *J. Appl. Math. Mech. (PMM)* 1994. V. 58. N 1. P. 1-10.
71. *Tkhai V.N.* Non-linear oscillations of reversible system // *J. Appl. Math. Mech. (PMM)* 1995. V. 59. N 1. P. 35-45.
72. *Tkhai V.N.* Symmetric periodic orbits of the many-body problem. Resonance and parade of planets // *J. Appl. Math. Mech. (PMM)* 1995. V. 59. N 3. P. 333-342.
73. *Tkhai V.N.* Invariant sets and symmetric periodic motions of reversible mechanical systems // *J. Appl. Math. Mech. (PMM)* 1996. V. 60. N 6. P. 941-952.
74. *Tkhai V.N.* Etude qualitative des systèmes mécaniques réversibles. Thèse de doctorat, Moscou, Université de Moscou Lomonosov, 1995. (en russe)
75. *Tkhai V.N.* On the stability of the rolling heavy symmetric ellipsoid on a rough plane // *Izvest. Russia Acad. Sci. Mekh. Tverdogo Tela*. 1996. N 1. P. 11-16. (in russian)

76. *Tkhai V.N.* Orbites symétriques périodiques dans le problème de trois corps // Kosmicheskie issledovaniya. 1997. V. 55. N 2. P. 164-171 (en russe).
77. *Tkhai V.N.* Continuation of periodic motions of a reversible system in non-structually stable cases. Application to the N-planet problem // J. Appl. Math. Mech. 1998. V. 62. N 1. P. 51-65.
78. *Tkhai V.N.* The Lyapunov-Poincaré method in the theory of periodic motions // J. Appl. Math. Mech. (PMM) 1998. V. 62. N 3. P. 325-339.
79. *Tkhai V.N.* The rotational motions of mechanical systems // J. Appl. Math. Mech. (PMM) 1999. V. 63. N 2. P. 173-188.
80. *Tkhai V.N.* Reversible mechanical systems. In the Second Polyakhov Lectures Selected Papers. Izd. Nauchn. Issled. Inst. Khimii St Peterburg Univ., St Peterburg, 2000, P. 115-127. (in russian)
81. *Tkhai V.N.* The stability of regular Grioli precessions // J. Appl. Math. Mech. 2000. V. 64. N 5. P. 811-819.
82. *Tkhai V.N.* Lyapunov families of periodic motions in a reversible system // J. Appl. Math. Mech. (PMM) 2000. V. 64. N 1. P. 41-52.
83. *Tkhai V.N.* On the periodic motions close to the Grioly regular precessions of the rigid body with one fixed point // Zadachi issledovaniya ustoychivosti i stabilizatsii dvizheniya. Moscou, Izd-vo Computing Center of Russia Acad. Sci., 2000. Part. 1. P. 60-67. (in russian)
84. *Tkhai V.N.* Résonance paramétrique dans le problème de la stabilité des points colinéaires de libration du problème des trois corps avec photogravitation// Zadachi issledovaniya ustoychivosti i stabilizatsii dvizheniya. Moscou, Izd-vo Computing Center of Russia Acad. Sci., 2000. Part. 2. P. 108-117. (en russe)
85. *Tkhai V.N., Shvygin A.L.* Sur la stabilité des rotations d'un corps solide pesant avec un point fixe // Zadachi issledovaniya ustoychivosti i stabilizatsii dvizheniya. Moscou, Izd-vo Computing Center of Russia Acad. Sci., 2000. Part. 2. P. 114-121.
86. *Tkhai V.N.* Periodic motions of a system close to an autonomous reversible system // J. Appl. Math. Mech. (PMM) 2001. V. 65. N 4. P. 647-664.
87. *Uno T.* Recherches sur les solutions périodiques dans le problème restreint des trois corps // Jap. J. Astron. and Geophys. 1937. Vol. 15. N1/2. P. 149-191.

88. *Whittaker E.T.* Dynamique analytique. Igevsck : Izdatel'sky dom "Udmurtsky universitet", 1999, 588 P. (en russe)
89. *Zimovchikov A.S., Tkhai V.N.* On the stability of triangular solutions of unrestricted three body problem // *Zadachi issledovaniya ustoychivosti i stabilizatsii dvizheniya*. Moscou, Izd-vo Computing Center of Russia Acad. Sci., 1998. P. 117-130. (in russian)
90. *Zimovchikov A.S., Tkhai V.N.* Sur la stabilité des points collinares de libration du problème photogravitationnel restreint des trois corps avec deux corps rayonnant // Moscou, Izd-vo Center de Calcules de RAS, 1999. P. 121-129. (en russe)
91. *Zimovchikov A.S., Tkhai V.N.* Sur la stabilité des points triangulaires de libration du problème photogravitationnel restreint des trois corps avec deux corps rayonnant // *Zadachi issledovaniya ustoychivosti i stabilizatsii dvizheniya*. Moscou, Izd-vo Center de Calcules de RAS, 2000. Part. 1. P. 68-77. (en russe)