



**HAL**  
open science

# Théorie de dégradation du béton et développement d'un nouveau modèle d'endommagement en formulation incrémentale tangente. Calcul à la rupture et application au cas des chevilles de fixation ancrées dans le béton

Hung Ung Quoc

## ► To cite this version:

Hung Ung Quoc. Théorie de dégradation du béton et développement d'un nouveau modèle d'endommagement en formulation incrémentale tangente. Calcul à la rupture et application au cas des chevilles de fixation ancrées dans le béton. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole des Ponts ParisTech, 2003. Français. NNT: . tel-00005760

**HAL Id: tel-00005760**

**<https://pastel.hal.science/tel-00005760>**

Submitted on 5 Apr 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THESE**  
Pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR**  
**DE**  
**L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES**

Spécialité : *Structures et Matériaux*

présentée par

**Hung UNG QUOC**

**Sujet de la thèse :**

**THEORIE DE DEGRADATION DU BETON ET DEVELOPPEMENT D'UN  
NOUVEAU MODELE D'ENDOMMAGEMENT EN FORMULATION  
INCREMENTALE TANGENTE.  
CALCUL A LA RUPTURE APPLIQUE AU CAS DES CHEVILLES DE FIXATION  
ANCRES DANS LE BETON**

soutenue le 4 décembre 2003  
devant le jury composé de

Présidente :	<b>F. LENE</b>
Rapporteurs :	<b>A. MILLARD</b> <b>R. ELIGEHAUSEN</b>
Examineurs :	<b>P. ACKER</b> <b>C. LABORDERIE</b>
Directeurs de thèse :	<b>P. de BUHAN</b> <b>G. MOUNAJED</b>

*A mes parents*

## REMERCIEMENTS

Une page ne peut en aucun cas refléter totalement mes reconnaissances durant les années de thèse. J'espère n'oublier personne.

J'adresse tout d'abord mes remerciements les plus respectueux à Françoise LENE qui ma fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Mes plus vifs remerciements sont également adressés à Rolf ELIGEHAUSEN et Alain MILLARD pour leur lecture et leur lourde tâche de rapporteurs.

Je remercie aussi Paul ACKER et Christian LABORDERIE qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être mes examinateurs. Leurs idées me seront sans nul doute très utiles pour la suite de cette recherche.

J'exprime toutes mes profondes reconnaissances à Ghassan MOUNAJED pour son accueil et sa direction scientifique au sein du laboratoire MODélisation, CALcul et Développment - CSTB. Il m'a fait confiance pour un tel travail de recherche, m'a témoigné sa compétence scientifique, ses expériences, son dévouement et m'a offert une grande disponibilité durant toute ma thèse. Sans lui, la thèse n'aurait sûrement pas vu le jour.

J'ai l'honneur d'être dirigé par Patrick de BUHAN dans la partie Calcul à la Rupture. J'ai bénéficié, grâce à lui, d'un professeur vrai, non seulement sur le plan scientifique, mais aussi sur le plan humain. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude pour l'aide et le temps précieux qu'il m'a apportés.

Mes professeurs à l'École Nationale Supérieure de Génie Civil de Hanoi m'ont transmis, pendant des années universitaires, les connaissances du français, du métier de génie civil et la passion de la recherche. Ils m'ont aussi apporté leur soutien et leurs encouragements, au-delà de mon parcours scolaire. Qu'ils en soient remerciés !

À ces remerciements, je souhaite associer Hocine BOUSSA pour sa gentillesse, pour tous ses conseils et sa forte volonté quant aux discussions scientifiques.

Un grand merci à tous mes collègues MOCADiens et du CSTB : permanents, ingénieurs, chercheurs, thésards, stagiaires avec qui j'ai vécu des moments inoubliables de ma jeunesse, dans une superbe ambiance de recherche. Je remercie tout particulièrement Abdellah MENOUE pour tous les moments que nous avons traversés ensemble pendant ces trois ans de thèse.

Je tiens à exprimer tout au fond de mon cœur mes reconnaissances à ma famille qui m'offre toujours un appui sûr par son soutien et son encouragement, malgré la distance. C'est grâce à son amour éternel que je peux franchir les obstacles les plus difficiles. Mes plus vifs remerciements vont également à tous mes amis qui sont toujours disponibles pour partager avec moi les moments difficiles et heureux. Merci Automne pour sa patience, sa compréhension et son encouragement.

# Théories de dégradation du béton et développement d'un nouveau modèle d'endommagement déviatorique en formulation incrémentale tangente. Calcul à la rupture appliqué au cas des chevilles de fixation

---

## Résumé

Cette recherche s'inscrit dans le cadre général de l'étude du comportement du béton. Elle a pour objectif le développement de nouveau modèle de comportement répondant aux exigences particulières requises pour une exploitation industrielle. Après une analyse des différents modèles proposés, un premier développement a concerné les modèles basés sur la théorie de la fissuration distribuée. Une nouvelle formulation de la théorie a permis de résoudre le problème de blocage de contraintes. Cependant, l'analyse menée a montré des limites inertes à cette théorie malgré l'amélioration effectuée.

Ensuite, une analyse des mécanismes physiques de dégradation du béton a été menée et a permis de développer le nouveau modèle d'endommagement MODEV. Ce modèle se base sur la théorie de la thermodynamique appliquée au cas des matériaux hétérogènes et fragiles. Le modèle MODEV introduit deux modes d'endommagement: extension et glissement. Il considère également que le glissement relatif entre les lèvres des microfissures est responsable de l'irréversibilité de déformation. Cette déformation devient fonction de l'endommagement et de l'indice d'hétérogénéité du matériau. L'effet unilatéral est pris en compte selon un processus de durcissement/adoucissement élastique lié à la re-fermeture/re-ouverture des fissures. Le modèle est écrit dans le cadre des matériaux non standard généralisés en formulation incrémentale tangente et implémenté dans le code de calcul général aux éléments finis SYMPHONIE. La validation du modèle a été effectuée sur la base de plusieurs essais issus de la littérature.

La deuxième partie de cette recherche a concerné l'élaboration du logiciel CHEVILAB pour l'évaluation de la capacité portante des chevilles de fixation. Cet outil est basé sur l'approche cinématique par l'extérieur de la théorie du calcul à la rupture. La solution est obtenue en prenant le minimum des majorations du chargement ultime données par cette approche en considérant plusieurs classes de mécanismes de ruine. CHEVILAB a été ensuite validée par comparaison avec des résultats d'essais et des simulations par E.F.

**Mots clés :** Béton, endommagement, fissuration, modélisation, éléments finis, calcul à la rupture, analyse limite, cheville de fixation, ancrage.

## Abstract

This research is achieved in the general frame work of the study of the concrete behaviour. It has for objective the development of a new behaviour model satisfying to the particular requirements for an industrial exploitation. After the analysis of different existent models, a first development has concerned models based on the smeared crack theory. A new formulation of the theory permitted to overcome the stress locking problem. However, the analysis showed the persistence of some limits inert to this approach in spite of this improvement.

Then, an analysis of the physical mechanisms of the concrete degradation has been achieved and permitted to develop the new damage model MODEV. The general formulation of this model is based on the theory of the thermodynamics and applied to the case of the heterogeneous and brittle materials.

The MODEV model considers two damage mechanisms: extension and sliding. The model considers also that the relative tangent displacement between micro cracks lips is responsible of the strain irreversibility. Thus, the rate of inelastic strain becomes function of the damage and the heterogeneity index of the material. The unilateral effect is taken in account as an elastic hardening or softening process according to re-closing or re-opening of cracks. The model is written within the framework of non standard generalised materials in incremental tangent formulation and implemented in the general finite element code SYMPHONIE. The validation of the model has been achieved on the basis of several tests issued from the literature.

The second part of this research has concerned the development of the CHEVILAB software. This simulation tool based on the limit analysis approach permit the evaluation of the ultimate load capacity of anchors bolts. The kinematics approach of the limit analysis has been adapted to the problem of anchors while considering several specific failure mechanisms. This approach has been validated then by comparison with the experimental and F.E. simulations results.

**Key words:** Concrete, damage, cracking, modelling, Numerical simulation, Finite Elements, limit analysis, anchorage.

---



---

**TABLE DES MATIERES**

TABLE DES MATIERES .....	1
INTRODUCTION GENERALE.....	5
PREMIERE PARTIE : DEVELOPPEMENT DE NOUVEAUX MODELES DE COMPORTEMENT DU BETON.....	9
CHAPITRE I: ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE – ANALYSE DES MODELES THEORIQUES EXISTANTS POUR LE BETON.....	11
I.1. Introduction.....	12
I.2. Modèles de fissuration .....	13
I.2.1. Généralités.....	13
I.2.2. Méthode classique de fissuration .....	13
I.2.3. Méthode d’une seule fissuration discrète.....	15
I.2.4. Théorie de la fissuration distribuée .....	16
I.2.5. Diverses approches basées sur la théorie de la fissuration distribuée.....	21
I.3. Classe de modèles élastoplastiques.....	26
I.3.1. Modèle de Reynouard (1974).....	26
I.3.2. Modèle de Frantzeskakis (1987) .....	26
I.3.3. Modèle d’endommagement – plasticité sans dégradation de rigidité .....	27
I.4. Classe de modèles d’endommagement .....	29
I.4.1. Généralités.....	29
I.4.2. Théorie de l’endommagement classique [Ref. 69].....	29
I.4.3. Modèle de Mazars (1984) [Ref. 72, Ref. 74] .....	31
I.4.4. Modèle de La Borderie (1991) [Ref. 66].....	33
I.4.5. Modèle d’endommagement de Lubliner, Olivier et al. (1989) [Ref. 70].....	34
I.4.6. Modèle de Simo et al. (1995) [Ref. 117].....	35
I.4.7. Modèle de Ramtani (1990) [Ref. 111] .....	36
I.4.8. Théorie de J.W. Ju (1989) [Ref. 60].....	37
I.5. Les autres classes de modèles .....	40
I.5.1. Modèle microplan .....	40
I.5.2. Modèle de fissuration intégrée .....	41
I.6. Conclusions .....	46
CHAPITRE II: DEVELOPPEMENT D’UN MODELE AMELIORE BASE SUR LA THEORIE DE LA FISSURATION DISTRIBUEE.....	47
II.1. Introduction.....	48
II.2. Nouvelle loi locale de la fissure .....	49
II.2.1. Expression de la nouvelle loi .....	49
II.2.2. Discussion .....	50
II.3. Traitement simultané de plusieurs fissures .....	52
II.3.1. Loi générale de comportement du matériau fissuré .....	52
II.3.2. Les cas particuliers.....	53
II.4. Implantation du modèle et validation.....	55
II.4.1. Problème de Willam et al. [Ref. 124].....	55
II.4.2. Algorithme de traitement simultané de plusieurs fissures : MULTIFISS.....	57
II.5. Conclusion.....	61

CHAPITRE III: ELABORATION D'UN MODELE D'ENDOMMAGEMENT	
DEVIATORIQUE (MODEV) POUR LE COMPORTEMENT DU BETON.....	63
III.1. Introduction .....	64
III.2. Bases théoriques du modèle .....	65
III.3. Modèle élastique endommageable .....	68
III.3.1. Approche thermodynamique du modèle d'endommagement .....	68
III.3.2. Critère d'endommagement .....	70
III.3.3. Loi d'évolution des variables d'endommagement .....	72
III.3.4. Matériau non standard généralisé.....	75
III.3.5. Modélisation du comportement unilatéral.....	77
III.3.6. Formulations totale sécante et incrémentale tangente.....	78
III.3.7. Remarques pour le nouveau modèle élastique endommageable (MODEV)....	80
III.4. Modèle d'endommagement avec effet anélastique .....	82
III.4.1. Principe.....	82
III.4.2. Cas d'un matériau standard généralisé.....	83
III.4.3. Matériau non standard généralisé.....	85
III.4.4. Effet unilatéral.....	87
III.4.5. Effet cinématique de l'endommagement.....	89
III.4.6. Formulation tangente incrémentale.....	90
III.5. Conclusions .....	94
CHAPITRE IV: IDENTIFICATION ET VALIDATION DU MODELE MODEV..... 95	
IV.1. Introduction .....	96
IV.2. Identification des paramètres du modèle MODEV .....	97
IV.2.1. Les paramètres du modèle.....	97
IV.2.2. Identification .....	100
IV.3. Validation théorique du modèle MODEV .....	103
IV.3.1. Continuité du modèle .....	103
IV.3.2. Comportement uniaxial cyclique du béton.....	104
IV.4. Validation pratique du modèle MODEV .....	106
IV.4.1. Cas test A du projet MECA : Elément soumis à un chargement uniaxial cyclique	106
IV.4.2. Cas test B du projet MECA : Elément soumis à la traction puis au cisaillement.	108
IV.4.3. Cas test C du projet MECA : Poutre en béton armé en flexion .....	111
IV.4.4. Cas test D du projet MECA : Boite de cisaillement.....	117
IV.4.5. Poutre en flexion cyclique.....	121
IV.4.6. Poutre entaillée soumise à un effort de cisaillement.....	123
IV.4.7. Application industrielle au cas 3D de cheville de fixation.....	124
IV.5. Conclusions .....	128
DEUXIEME PARTIE : ELABORATION D'UN OUTIL DE CALCUL APPLIQUE A LA	
TENUE DE CHEVILLES DE FIXATION .....	
129	
CHAPITRE V: TECHNIQUE DE FIXATION ET PROBLEMATIQUES..... 131	
V.1. Système de fixation dans le béton .....	132
V.1.1. Chevilles à expansion.....	132
V.1.2. Chevilles à verrouillage de forme ou à chambre (under – cut).....	133
V.1.3. Chevilles à scellement.....	134
V.1.4. Chevilles plastiques.....	134

V.2.	Expérimentation et méthode empirique .....	136
V.2.1.	Divers modes de rupture .....	136
V.2.2.	Méthode empirique .....	137
V.3.	Modélisations des ancrages par la méthode des éléments finis .....	139
V.4.	Conclusion.....	140
<b>CHAPITRE VI: ELABORATION D'UN OUTIL NUMERIQUE CHEVILAB POUR LES PROBLEMES DE FIXATION BASE SUR L'APPROCHE DE CALCUL A LA RUPTURE</b>		
141		
VI.1.	Introduction.....	142
VI.2.	Principe de l'approche « Calcul à la rupture ».....	143
VI.2.1.	Domaine $K$ des chargements potentiellement supportables.....	143
VI.2.2.	Approche statique par l'intérieur.....	143
VI.2.3.	Approche cinématique par l'extérieur.....	144
VI.3.	Tenue d'une cheville de fixation dans le béton : Position du problème.....	146
VI.4.	Cas de la sollicitation axiale.....	148
VI.4.1.	Utilisation d'un mécanisme de cône en translation.....	148
VI.4.2.	Optimisation la surface de discontinuité .....	150
VI.5.	Cheville sous traction et cisaillement au centre .....	156
VI.5.1.	Mécanisme de cône incliné en translation.....	156
VI.5.2.	Optimisation de la surface de discontinuité .....	158
VI.5.3.	Résultats .....	159
VI.6.	Cheville sous traction et cisaillement à proximité du bord .....	162
VI.6.1.	Mécanisme 1 .....	163
VI.6.2.	Mécanisme 2 .....	164
VI.6.3.	Mécanisme 3 .....	167
VI.7.	Elaboration l'outil de calcul CHEVILAB.....	170
VI.8.	Conclusion.....	172
<b>CHAPITRE VII: VALIDATION DE L'OUTIL NUMERIQUE CHEVILAB.....</b>		
173		
VII.1.	Introduction.....	174
VII.2.	Validation théorique du logiciel CHEVILAB.....	175
VII.3.	Validation expérimental du logiciel CHEVILAB.....	177
VII.3.1.	Domaine d'application du logiciel.....	177
VII.3.2.	Calibration et validation.....	177
VII.4.	Comparaison MODEV - CHEVILAB - Essai.....	182
VII.5.	Conclusions .....	184
<b>CHAPITRE VIII: DISCUSSION SCIENTIFIQUE.....</b>		
185		
VIII.1.	Introduction .....	186
VIII.2.	Modèle d'endommagement MODEV.....	187
VIII.2.1.	Généralités sur les théories et les modèles pour le béton :.....	187
VIII.2.2.	MODEV et les autres modèles d'endommagement .....	188
VIII.3.	Logiciel CHEVILAB .....	190
VIII.3.1.	Rappel sur les méthodes empiriques existantes [Ref. 77].....	190
VIII.3.2.	Pourquoi utiliser le logiciel CHEVILAB ? .....	191
VIII.3.3.	De la théorie du calcul à la rupture au logiciel CHEVILAB .....	191
<b>CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.....</b>		
193		
Conclusions.....		194

Perspectives.....	195
ANNEXES.....	197
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	209

## **INTRODUCTION GENERALE**

Les qualités mécaniques et le coût relativement peu élevé du béton en font le matériau de construction le plus utilisé dans le Génie Civil. Ainsi, les techniques d'assemblage entre le béton et l'acier se sont développées tout au long de l'histoire de la construction : béton armé, constructions mixtes...

Outre ses qualités intrinsèques, le béton courant présente des propriétés spécifiques liées notamment à l'hétérogénéité de ce matériau: faible résistance en traction, faible déformation à la rupture, sensibilité aux effets du gel, faible résistance aux produits chimiques.... Les ingénieurs, qui connaissent bien ces inconvénients, peuvent, pour des cas courants, y remédier pour concevoir des ouvrages fiables. La première étape vers une exploitation optimisée de ce matériau hétérogène passe par une connaissance fine de son comportement vis-à-vis des différentes sollicitations d'origine thermique, mécanique, hydrique ou chimique. Les travaux de recherche engagés au sein du pôle Modélisation Calcul et Développement (MOCAD) du CSTB<sup>1</sup> sont principalement axés sur cette problématique. Un effort important a été engagé sur cet axe majeur de recherche depuis plusieurs années afin d'établir une base scientifique et un ensemble d'outils avancés permettant la modélisation et la simulation des structures et des ouvrages en béton armé. Ces efforts concernent notamment le lancement de plusieurs recherches dans le domaine du couplage thermo-hygro-mécanique [Ref. 97, Ref. 98], de la fissuration [Ref. 36, Ref. 37] et du comportement au feu du béton.

Nous nous limiterons ici à l'analyse du comportement du béton sous sollicitations mécaniques et à l'étude des différents mécanismes de dégradation. L'objectif est l'élaboration d'un modèle de comportement adapté à ce matériau hétérogène.

Le béton a un comportement complexe difficile à représenter par une seule loi macroscopique homogène. Cette difficulté est liée notamment à la forte hétérogénéité du béton qui est un matériau composite constitué de granulats de différentes tailles, d'une matrice cimentaire et de cavités. A cela s'ajoutent des microfissures distribuées de manière aléatoire et présentes même à l'état dit vierge, c'est-à-dire avant toute sollicitation externe [Ref. 111]. Selon la nature et l'intensité de la sollicitation, le béton se déforme de manière complexe en faisant intervenir une ou plusieurs combinaisons de mécanismes élémentaires : élasticité, endommagement, glissement, frottement, fissuration... Des recherches ont été lancées depuis le début du XX<sup>e</sup> siècle sur le comportement mécanique du béton dans l'espoir de mieux comprendre les mécanismes de dégradation de ce matériau. Plusieurs théories appliquées à des matériaux tel que le béton ont été développées. On peut citer l'approche locale de fissuration, la mécanique de la rupture [Ref. 20], la théorie de la plasticité, la théorie de l'endommagement, la méthode de la fissuration distribuée, l'approche par homogénéisation... Ceci a conduit à l'élaboration de plusieurs modèles spécifiques aux bétons. Nous pouvons citer les modèles d'endommagement isotropes de Mazars [Ref. 72], de La Borderie [Ref. 66], les modèles anisotropes de Simo et Ju [Ref. 117] et de Ramtani [Ref. 111], les modèles de fissuration multiple, fixe ou tournante [Ref. 114, Ref. 115, Ref. 105], le modèle des micro – plans d'Olzolt, de Bazant... [Ref. 102, Ref. 105, Ref. 4], les modèles basés sur la théorie de plasticité [Ref. 113]... Tous ces modèles, intégrés dans les codes de calcul, permettent de modéliser le comportement du béton par l'approche des éléments finis, et sont utilisés actuellement. Cependant, la modélisation du comportement mécanique du béton n'est pas complètement résolue et reste encore une question ouverte. Ceci est confirmé entre autre par la multiplicité des modèles proposés. En effet, la difficulté majeure réside dans l'élaboration d'un modèle suffisamment fiable pour bien représenter le comportement complexe du béton et relativement simple pour qu'il soit exploité dans un contexte industriel.

---

<sup>1</sup>. Centre Scientifique et Technique du Bâtiment

Pour établir un tel modèle, nous devons partir des observations expérimentales à l'échelle mésoscopique et microscopique afin d'identifier les différents mécanismes élémentaires à l'origine de la dégradation du béton. En plus de ces considérations, nous devons prendre en compte également les autres phénomènes propres aux bétons comme l'effet unilatéral, l'apparition de la déformation résiduelle, le comportement cyclique... Ceci devrait conduire à l'établissement d'un modèle théorique général du comportement applicable aux matériaux fragiles et hétérogènes et plus particulièrement aux bétons.

Outre ces considérations théoriques, il faut garder comme objectif l'exploitation industrielle de ce nouveau modèle en adoptant les critères suivants :

- Les paramètres doivent être limités en nombre et facilement identifiables par des expériences simples (par exemple : traction simple, compression simple).
- Le modèle doit être numériquement robuste et doit assurer une convergence rapide.
- Le modèle doit être facilement intégrable en 2D et 3D dans un code de calcul aux éléments finis.

En matière d'assemblage, le premier code européen sur l'utilisation des chevilles a été présenté en annexe du guide UEAtc en juin 1992<sup>2</sup>. Il a été ensuite repris et développé dans le guide d'Agrément Technique Européen terminé en Juin 1997<sup>3</sup> et accepté en octobre 1997 par la commission européenne. Entre temps, un nombre important de travaux de recherche a été mené partout dans le monde, en particulier à l'IWB de Stuttgart en Allemagne, au CSTB en France, à Austin en Texas, en Floride et au Japon. Par ailleurs, des essais ont été réalisés en grand nombre sur la base de ce guide, principalement en Allemagne et en France (CSTB) en vue de la délivrance d'agréments nationaux. Ces essais et les études statistiques ou analytiques associées ont permis de valider les méthodes et les modèles du guide sur les milliers d'ancrages, sur différents types de fixation, dans différentes compositions de béton et de nombreuses configurations.

Toutefois, si les modèles décrivant le comportement en traction des ancrages peuvent être considérés comme fiables, quelques études ont montré qu'il n'en est pas de même pour les modèles décrivant le comportement des ancrages soumis à des sollicitations tangentes situées dans un plan normal à l'axe des fixations. En outre, les modèles actuellement disponibles sont semi-empiriques et basés sur une approche statistique. Ils ne sont prédictifs que sur un domaine restreint des paramètres et au prix de l'introduction de certains facteurs d'influence. Aussi, est-il apparu nécessaire de reprendre l'étude du comportement des ancrages soumis à des sollicitations tangentes sur des bases purement scientifiques. Les études expérimentales ont montré que les modèles proposés dans le guide ATE pour des chevilles soumises à des efforts de traction sont fiables dans le cas où la rupture se produirait par arrachement d'un cône de béton. Par contre, ils ne le sont pas toujours pour des chevilles soumises à des sollicitations tangentes.

La présente recherche a pour but de donner des éléments de réponse face à ces deux problématiques relatives au matériau béton et à la structure des fixations.

Dans un premier temps, il s'agit d'élaborer un modèle de comportement du béton prédictif et simple. Pour atteindre cet objectif, nous avons mené une étude bibliographique sur les

---

<sup>2</sup> UEAtc. Guide technique UEAtc relatif aux chevilles de fixation pour le béton fissuré et non fissuré. Cahiers du CSTB, 1992.

<sup>3</sup> EOTA. ETAG. Guidline for European Technical Approval of Anchors (metal anchors) for use in concrete. Annexe C : Design Methods for anchorages, 1997.

modèles existants. Cette étude a été complétée par une analyse physique visant à construire les idées de base pour la conception du nouveau modèle. Le modèle a été développé dans le cadre de la théorie de la thermodynamique des milieux continus en tenant compte des non-linéarités liées au matériau. Ce modèle a été intégré dans le code de calcul aux éléments finis SYMPHONIE après identification des paramètres influents. Par ailleurs, le modèle a fait l'objet d'une validation théorique et expérimentale sur des corps d'épreuve en béton, et sur des ancrages constitués d'une cheville métallique ancrée dans le béton.

Le deuxième axe de cette recherche a concerné le développement d'un outil de calcul simplifié pour les fixations métalliques ancrées dans un massif en béton. Cet outil, fondé sur l'approche calcul à la rupture, permet d'évaluer la charge ultime et le mode de rupture correspondant. Cette étude a permis de montrer la possibilité d'adaptation de l'approche cinématique par l'extérieur au cas de cheville de fixation. Les premiers résultats analytiques sont obtenus sur des mécanismes simples de ruptures. Pour des mécanismes relativement complexes, une mise en œuvre numérique a été effectuée afin d'obtenir une estimation des charges ultimes et des modes de rupture les plus probables. Finalement, l'outil a été validé par comparaison avec des résultats d'essais et des calculs aux éléments finis.

Ainsi, la thèse est constituée des deux parties :

La première est consacrée au développement de nouveaux modèles de comportement du béton. Elle débute par une synthèse bibliographique (chapitre I). On tentera de classer les modèles : Modèles de fissuration, modèle par analogie avec la plasticité, modèles de type d'endommagement... Aussi, la description en détail de quelques modèles permet d'en comprendre la conception pour traiter les phénomènes non-linéaires de fissuration et de rupture et d'avoir une connaissance générale sur le comportement du béton. Le chapitre II vise à une amélioration du modèle de la fissuration distribuée permettant une description plus fidèle du comportement mécanique du béton. Cependant, pour des applications plus évoluées, cette méthode apparaît encore non satisfaisante. Au chapitre III, un nouveau modèle d'endommagement est élaboré en tenant compte des non-linéarités du béton : endommagement, dissymétrie, unilatéralité, anélasticité... Ce modèle, intitulé MODEV, est construit sur la base d'analyses physiques de plusieurs mécanismes de dégradation et est formulé dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. Le chapitre IV présente dans un premier temps l'identification des paramètres du modèle par des essais élémentaires. Dans un second temps, une validation théorique et expérimentale du modèle est effectuée par comparaison avec les résultats expérimentaux et aussi avec les résultats issus des autres modèles.

La deuxième partie concerne l'élaboration d'un outil de calcul appliqué à la tenue des chevilles de fixation. Le chapitre V porte sur les techniques de fixation, les méthodes de calcul proposées et les problématiques existantes concernant le manque de méthode scientifique simplifiée pour les fixations et la modélisation mécanique pour le matériau béton. Puis, au chapitre VI, on élabore un outil numérique, d'évaluation de la résistance mécanique d'une fixation en utilisant l'approche calcul à la rupture. Le logiciel CHEVILAB est ainsi développé en tenant en compte de plusieurs mécanismes de rupture. Il permet de fournir une estimation de la charge ultime et du mode de rupture correspondant. Le chapitre VII décrit la validation du logiciel CHEVILAB par comparaison avec les résultats expérimentaux et des résultats de simulations numériques.

Le chapitre VIII ouvre une discussion scientifique sur plusieurs aspects du modèle MODEV et du logiciel CHEVILAB. Enfin, la thèse se termine par des conclusions et des perspectives.

---

**PREMIERE PARTIE :**  
**DEVELOPPEMENT DE NOUVEAUX MODELES DE**  
**COMPORTEMENT DU BETON**



**CHAPITRE I:  
ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE – ANALYSE DES MODELES  
THEORIQUES EXISTANTS POUR LE BETON**

## **I.1. Introduction**

Le béton, largement utilisé dans la construction, présente un comportement mécanique très complexe dû à son caractère hétérogène et fragile. Cette hétérogénéité favorise le développement de divers modes de rupture et de propagation de fissures. Ceci rend difficile de trouver un modèle physique respectant ces modes d'une manière fiable tout en restant simple d'utilisation.

Plusieurs recherches expérimentales contribuent à mieux comprendre le comportement mécanique de ce matériau surtout avec l'apparition des fissurations et de la phase de rupture [Ref. 111, Ref. 96, Ref. 44...]. Si l'on considère un échantillon de béton sous chargement monotone croissant, par exemple en traction simple, on observe d'abord une microfissuration qui se propage dans toutes les directions. La continuité de ces microfissures engendre l'amorce et la propagation d'une macrofissure perpendiculaire à la direction de la contrainte principale majeure avant la rupture. Pendant cette phase, le béton présente un comportement adoucissant et anisotrope.

A ce phénomène s'ajoute le comportement dissymétrique en traction et en compression. La résistance en compression est beaucoup plus élevée que celle en traction. De plus, un béton préalablement fissuré en traction récupère sa rigidité quand on le comprime. Ce phénomène est dû à la refermeture des fissures.

Les études expérimentales menées sur la loi de comportement du béton montrent également l'existence de déformations anélastiques.

Face à la complexité du comportement du béton (hétérogénéité, aspect multiphasique, fissuration, anisotropie, unilatéralité avec déformation permanente...) plusieurs modèles mécaniques ont été proposés. Nous citerons :

- Les modèles de la fissuration distribuée,
- Les modèles microscopiques,
- Les modèles de plasticité
- Les modèles locaux, non locaux,
- Les modèles d'endommagement...

Ce chapitre est consacré à l'analyse des divers modèles existants. L'objectif est de mieux connaître l'état de l'art et d'en tirer les conclusions utiles pour notre recherche.

## I.2. Modèles de fissuration

### I.2.1. Généralités

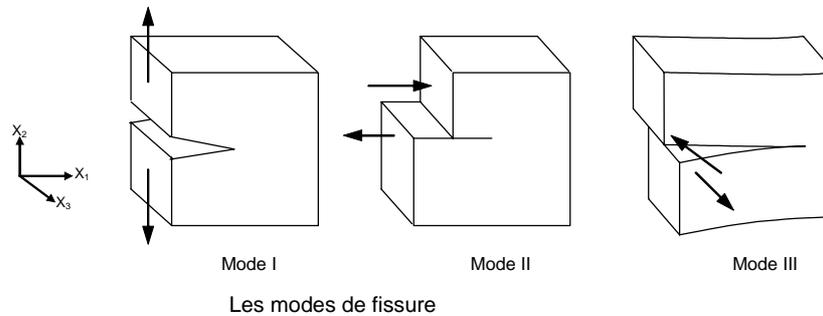
A nos jours, la modélisation complète du comportement du béton pose encore des problèmes, surtout en présence de la fissuration. Plusieurs modèles locaux ou non, basés sur mécanique de la rupture ou la mécanique d'endommagement ont été proposés. Cette première partie de l'étude bibliographique est consacrée à analyse des différents modèles basés su la théorie de fissurations du béton.

### I.2.2. Méthode classique de fissuration

#### I.2.2.1. Mécanique linéaire de la rupture

Cette méthode est décrite par Lemaître J., Chaboche J.L [Ref. 69].

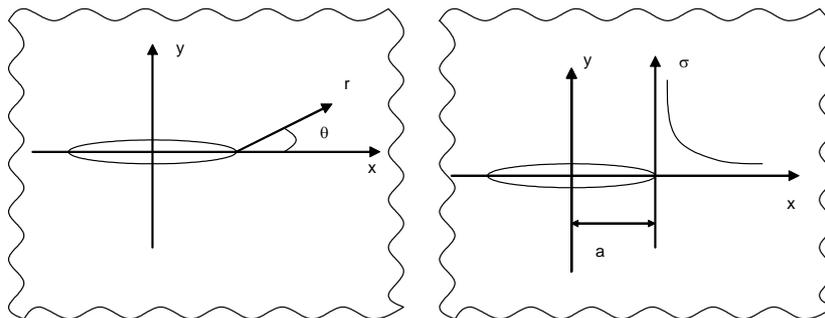
Selon la direction de la sollicitation par rapport à celle de la fissuration, on distingue trois modes de fissuration :



Mode I : mode d'ouverture

Mode II : mode de cisaillement plan

Mode III : mode de cisaillement antiplan.



Coordonnées polaires et distribution de contrainte au voisinage de la pointe de fissuration pour le Mode I

Ce mécanisme s'applique dans l'hypothèse d'un matériau élastique linéaire. La solution du problème asymptotique au voisinage de la pointe de la fissure où le champ de contraintes est singulier est traitée par Westergaard :

Pour le Mode I :

$$\sigma_{22} = K_I(a, \sigma_{22}^{\infty}) \cdot f_I(r, \theta) \quad (I.1)$$

Pour le Mode II

$$\sigma_{12} = K_{II}(a, \sigma_{12}^{\infty}).f_{II}(r, \theta) \quad (I.2)$$

Pour le Mode III

$$\sigma_{13} = K_{III}(a, \sigma_{13}^{\infty}).f_{III}(r, \theta) \quad (I.3)$$

Où  $a$  est la demie - longueur de la fissuration,  $K$  sont des facteurs d'intensité qui dépend du mode de chargement, de la longueur de fissure et de la géométrie de structure.

Selon la solution de Muskhelishvili, l'expression générale des facteurs d'intensité s'écrit :

$$K = \sigma^{\infty} \sqrt{\pi a}.f \quad (I.4)$$

Où  $f$  est une fonction de la géométrie de structure, de fissure et type de chargement.

Lorsque la valeur de facteur d'intensité dépasse un seuil  $K_C$ , la fissuration commence à propager.  $K_C$  est une caractéristique du matériau.

Energiquement, si une fissure se propage, il y a une dissipation de l'énergie potentielle. Le taux de restitution d'énergie de fissuration  $G$  présente une quantité d'énergie disponible qui peut être utilisée pour créer le mécanisme de décohésion entre les deux lèvres de fissure. On introduit aussi  $G_C$  la valeur seuil d'énergie (qui est en fonction de l'énergie dissipée par une unité de surface de propagation de fissuration  $\gamma$ ), à partir de laquelle la fissure commence à se propager ( $G$  et  $G_C$  ne sont utilisées que pour le mode I de fissuration).  $\gamma$  est une constante caractéristique du matériau. Pour ce qui concerne le facteur d'intensité, on a la relation :

$$\begin{aligned} K_I &= \sqrt{E.G} \text{ en contraintes planes} \\ K_I &= \sqrt{EG(1-\nu^2)} \text{ en déformations planes} \end{aligned} \quad (I.5)$$

Il existe d'autres méthodes pour caractériser la singularité du champ de contraintes au voisinage de la pointe des fissures est l'étude de certains intégraux de contour. Ce sont l'intégral J de Rice et l'intégral I de Bui [Ref. 20].

### I.2.2.2. Mécanique non-linéaire de la rupture

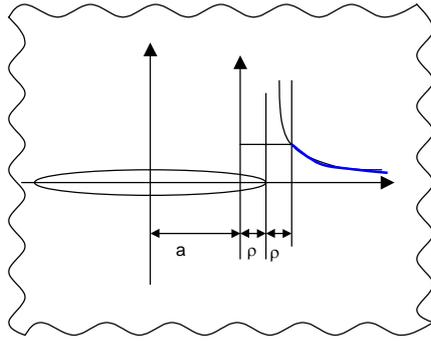
La mécanique linéaire de la rupture n'est applicable que pour les matériaux quasi élastiques fragiles. Il s'agit ici d'un modèle applicable pour le comportement non-linéaire. Il existe deux approches : zone plastique au pointe de la fissure et analyse élastique non-linéaire.

L'essentiel de la première approche est d'estimer cette zone plastique non-linéaire et de prendre en compte l'énergie dissipée par micro fissure au voisinage de la pointe de fissure.

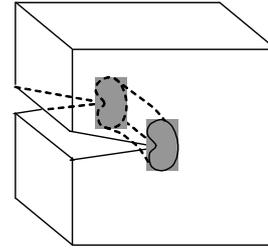
Selon Irwin, pour le mode I, la longueur de la zone plastique  $\rho$  intervient sur l'expression du facteur d'intensité :

$$K = \sigma^{\infty} \sqrt{\pi(a + \rho)}.f \quad (I.6)$$

Par conséquent, le champ des contraintes est corrigé selon la zone plastique (voir la figure).



Distribution modifiée de contrainte avec la zone plastifiée



Exemple de zone plastique à la pointe de fissuration

Dugdale-Barenblatt introduit la notion de forces de cohésion ce qui conduit à une solution complète en plasticité plane avec le critère de Tresca :

$$\rho = \frac{\pi K_I^2}{16 \sigma_Y^2} \quad (I.7)$$

Où,  $\sigma_Y$  est le seuil d'élasticité du critère de Tresca.

Pour l'analyse élastique non-linéaire, la non-linéarité est traitée par une approche de type élasticité non-linéaire. Donc, cette approche n'est applicable qu'au cas de chargement monotone proportionnel. En supposant une loi d'écrouissage :

$$\sigma \sim \varepsilon^{1/M} \quad (I.8)$$

On a l'expression de l'intégral Rice :

$$J_p = h(a, M) \sigma_\infty^M \quad (I.9)$$

Où,  $h$  est une fonction de la longueur de la fissuration  $a$  et l'exposant d'écrouissage  $M$ .

Cette méthode de fissuration considère la structure comme un milieu discontinu (avec des fissures existantes) et traite localement l'évolution des macrofissures. De ce fait, elle ne correspond pas à l'objectif de la présente recherche qui vise à étudier le comportement du béton de l'état sain à l'état fissuré et de ruine appliqué à l'échelle de la structure.

### I.2.3. Méthode d'une seule fissuration discrète

Il s'agit d'une méthode utilisée pour modéliser la fissuration avec la méthode des éléments finis (Ngo-Scordelis en 1967, Nilson en 1968) [Ref. 92, Ref. 95]. Selon cette méthode, la fissuration est simulée par la séparation des arrêtes des éléments voisins.

L'équation constitutive qui contrôle l'ouverture de la fissuration donne la relation entre la traction et le déplacement relatif à travers la fissure de façon incrémentale:

$$\Delta t^f = C^f \Delta u^f \quad (I.10)$$

Où  $C^f$  est le module d'adoucissement.

Ce modèle simple pour une modélisation par éléments finis possède des problèmes liés à l'approche adoptée :

- Il y a un changement continu de la connexion nodale qui n'est pas compatible avec la nature de la méthode des éléments finis.
- La fissuration est obligée de suivre une ligne prédéfinie selon la distribution géométrique des éléments finis.

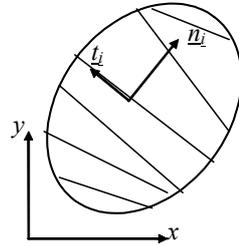
Des techniques spéciales sont utilisées pour remédier à ces inconvénients comme le remaillage et la création de la fissure au sein de l'élément. Cependant, ce type d'approche reste très dépendant du maillage et des techniques numériques utilisées et n'assure pas donc l'objectivité vis-à-vis du maillage.

#### I.2.4. Théorie de la fissuration distribuée

Cette théorie est initialisée par Rashid (1968) [Ref. 112] et puis développée par plusieurs auteurs : Willam, Crisfield, Bazant [Ref. 29, Ref. 124, Ref. 8...]

On présentera dans ce paragraphe cette théorie avec une réécriture tensorielle plus conforme à l'interprétation la généralité de la théorie que l'écriture matricielle souvent utilisée dans le cadre de cette approche.

On se place dans le cadre de l'hypothèse de petites perturbations et en considérant une cellule représentative de béton fissuré.



Domaine fissuré

La déformation totale  $\underline{\underline{\Delta \varepsilon}}$  est décomposée en deux composantes : la déformation de la fissuration  $\underline{\underline{\Delta \varepsilon}}^f$  et celle du béton sain entre fissures  $\underline{\underline{\Delta \varepsilon}}^b$  :

$$\underline{\underline{\Delta \varepsilon}} = \underline{\underline{\Delta \varepsilon}}^b + \underline{\underline{\Delta \varepsilon}}^f \quad (\text{I.11})$$

Chaque famille de fissures est caractérisée par la même direction, c'est à dire le même vecteur normal  $\underline{n}_i$ . On peut considérer que la cellule est soumise à des sauts de déplacement  $[\underline{\xi}]_i$  de chaque famille de fissures. Au cours de chargement, nous avons :

$$\underline{\underline{\Delta [\xi]}} = \sum_{i=1}^n \underline{\underline{\Delta [\xi]}}_i = \sum_{i=1}^n (\underline{\underline{\Delta [\xi]}}_{ni} \underline{n}_i + \underline{\underline{\Delta [\xi]}}_{ti} \underline{t}_i) \quad (\text{I.12})$$

Où  $\underline{n}_i$  et  $\underline{t}_i$  sont des vecteurs normaux et tangents de la fissuration,  $n$  est nombre de famille de fissures.

Par analogie avec les travaux de De Buhan et al. [Ref. 71] pour les roches fissurées, en désignant  $V$  le volume représentatif de la cellule et  $s_i$  la surface de chaque famille de fissures, on a :

$$\underline{\underline{\Delta \varepsilon}}^f = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \int_{s_i} [\underline{\xi}]^s \otimes \underline{n}_i dS = \sum_{i=1}^n \underline{n}_i \otimes^s \underline{\underline{\Delta e}}_i^f \quad (\text{I.13})$$

Ici,  $s$  désigne la partie symétrique du produit tensoriel et  $\underline{\underline{\Delta e}}_i^f$  dit la déformation de discontinuité.

Parallèlement, pour la contrainte de fissures dans leurs coordonnées propres, nous avons le vecteur :

$$\Delta \underline{s}^f = \sum_{i=1}^n \Delta s_i^f = \sum_{i=1}^n (\Delta s_{n_i}^f \underline{n}_i + \Delta s_{t_i}^f \underline{t}_i) \quad (\text{I.14})$$

et sa relation statique avec les contraintes globales :

$$\Delta \underline{s}_i^f = \underline{\underline{D}} \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_i \quad (\text{I.15})$$

L'équation constitutive du béton entre fissures a la forme :

$$\underline{\underline{D}} \underline{\sigma} = \underline{\underline{D}}^b : \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon}^b \quad (\text{I.16})$$

Où  $\underline{\underline{D}}^b$  est le tenseur de rigidité du matériau béton sain.

Tandis que l'équation constitutive de la fissure est :

$$\Delta s_i^f = \underline{\underline{D}}^f \cdot \Delta \underline{e}_i^f \quad (\text{I.17})$$

Où  $\underline{\underline{D}}^f$  est le tenseur de rigidité de la fissure considérée dans son plan.

A partir de (I.11) et (I.16), nous avons :

$$\underline{\underline{D}} \underline{\sigma} = \underline{\underline{D}}^b : (\underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon} - \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon}^f) \quad (\text{I.18})$$

En liaison avec les équations (I.14), (I.18) et (I.16), nous pouvons écrire :

$$\underline{\underline{D}} \underline{\sigma} = \underline{\underline{D}}^b : \left( \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon} - \sum_{i=1}^n \underline{n}_i \otimes \underline{\underline{D}}^{f-1} \cdot \Delta \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_i \right) \quad (\text{I.19})$$

Nous pouvons ainsi démontrer que :

$$\underline{n} \otimes \underline{\underline{D}}^{f-1} \cdot \Delta \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{n} \otimes \left[ \underline{\underline{D}}^{f-1} \otimes \underline{n} : \Delta \underline{\sigma} \right] = \left[ \underline{n} \otimes \underline{\underline{D}}^{f-1} \otimes \underline{n} \right] : \Delta \underline{\sigma} \quad (\text{I.20})$$

Ce qui nous conduit à :

$$\underline{\underline{D}} \underline{\sigma} = \underline{\underline{D}}^b : \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon} - \underline{\underline{D}}^b : \sum_{i=1}^n \underline{n}_i \otimes \underline{\underline{D}}^{f-1} \otimes \underline{n}_i : \Delta \underline{\sigma} \quad (\text{I.21})$$

Enfin, nous arrivons à la loi de comportement du béton fissuré :

$$\underline{\underline{D}} \underline{\sigma} = \left[ \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{D}}^b : \sum_{i=1}^n \underline{n}_i \otimes \underline{\underline{D}}^{f-1} \otimes \underline{n}_i \right]^{-1} : \underline{\underline{D}}^b : \underline{\underline{D}} \underline{\varepsilon} \quad (\text{I.22})$$

On peut encore écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}}^{bf} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{I.23})$$

$$\text{Avec : } \underline{\underline{D}}^{bf} = \left[ \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{D}}^b : \sum_{i=1}^n \underline{n}_i \otimes \underline{\underline{D}}^{f-1} \otimes \underline{n}_i \right]^{-1} : \underline{\underline{D}}^b \quad (\text{I.24})$$

Pour un problème plan, sous forme matricielle, s'il n'y a qu'une seule fissure, la loi de comportement du béton fissuré devient :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{bf} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{I.25})$$

$$\text{Avec : } \mathbf{D}^{bf} = \mathbf{D}^b - \mathbf{D}^b \mathbf{N} (\mathbf{D}^f + \mathbf{N}^T \mathbf{D}^b \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D}^b \quad (\text{I.26})$$

Loi de comportement de la fissuration

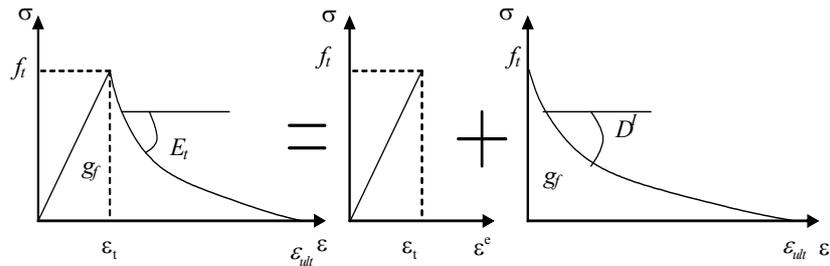
$$\begin{Bmatrix} s_n \\ s_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^I & 0 \\ 0 & D^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_n \\ e_t \end{Bmatrix} \quad (\text{I.27})$$

Où  $D^I$  est le module de rigidité de la fissuration et  $D^{II}$  est le module de cisaillement de la fissuration. Cette loi de comportement de la fissure est sécante, cependant la même loi est utilisée dans la théorie comme la loi incrémentale. C'est-à-dire :

$$\begin{Bmatrix} \Delta s_n \\ \Delta s_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^I & 0 \\ 0 & D^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta e_n \\ \Delta e_t \end{Bmatrix}$$

Or, ceci n'est valable que si  $D^I$  et  $D^{II}$  sont constants.

On peut déterminer le module de rigidité en se basant sur l'énergie de fissuration  $G_f$  à travers la loi de comportement à la traction simple :



Décomposition de déformation pour la traction pure

Supposons :  $g_f = G_f/w_c$  où  $w_c$  est la largeur de la bande de fissuration (selon Bazant) [Ref. 10], on a :

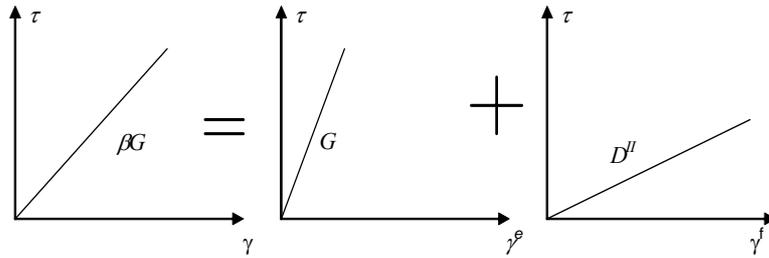
$$g_f = \int_{\sigma=f_t}^0 \sigma d\varepsilon^f = \frac{1}{k} D^I \varepsilon_{ult}^2 \quad (\text{I.28})$$

avec  $k$  le coefficient caractérisé de la forme de la courbe adoucissante déformation – contrainte. Par exemple  $k=2$  pour une courbe linéaire.

Finalement, on a l'expression :

$$D^I = -\frac{1}{k} \frac{f_t^2 w_c}{G_f} \quad (\text{I.29})$$

Quant au module de cisaillement, le problème est plus délicat. En effet, on admet un coefficient de conservation de cisaillement résiduel  $\beta$  qui caractérise la capacité résiduelle portante en cisaillement du béton fissuré:



Comportement au cisaillement du matériau fissuré

$$D'' = \frac{\beta G}{1 - \beta} \quad (I.30)$$

Le coefficient de conservation du cisaillement est inférieur à 1. On peut le prendre comme une constante (par exemple 0,1) ou une fonction de l'ouverture de la fissure de telle sorte que ce coefficient tend vers 0 quand la fissure est complètement ouverte en utilisant par exemple l'expression suivante :

$$\beta = \left[ 1 - \frac{\varepsilon_n^f}{\varepsilon_{ult}} \right]^p \quad (I.31)$$

On remarque que cette théorie n'est pas basée sur la thermodynamique des processus irréversibles. De ce fait, elle n'assure pas forcément la stabilité, ni la convergence de la solution notamment pour des cas de chargements relativement complexes. En effet, on rencontre sur le plan numérique, une surestimation de rigidité et un problème de blocage des contraintes. Par ailleurs, la détermination du coefficient de conservation de cisaillement reste arbitraire. Ces deux problèmes seront analysés en détails dans les paragraphes suivants. Nous proposons dans la suite une nouvelle formulation d'un modèle de fissuration multiple permettant de surmonter ces problèmes.

#### I.2.4.1. Modèle d'une seule fissure fixe

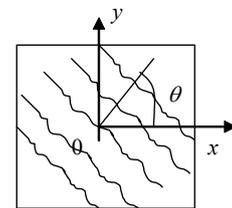
C'est le modèle le plus simple de la méthode de la fissuration distribuée. Dans ce modèle, on ne considère qu'une seule fissure fixe une fois la contrainte majeure principale à la traction atteint la résistance  $f_{ct}$ . Le comportement incrémental du matériau fissuré devient :

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}^{bf} \dot{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \mathbf{D}^{bf} = \mathbf{D}^b - \mathbf{D}^b \mathbf{N} (\mathbf{D}^f + \mathbf{N}^T \mathbf{D}^b \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{D}^b \quad (I.32)$$

Et  $\mathbf{N}$  est la matrice de passage de dimension 3x2 pour un problème 2D :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (I.33)$$

$\theta$  est l'angle entre la normale de la fissure et l'axe  $0x$  du système des coordonnées global.



Un élément fissuré

Le coefficient de conservation du cisaillement peut être une constante ou une fonction variable comme on a mentionné ci haut.

Ce modèle est applicable pour des cas de chargement monotone (c'est à dire la direction principale des contraintes et déformations ne change pas au cours de résolution). Malheureusement, il s'agit d'un cas particulier qui n'est pas généralisable au cas des structures sous chargement complexe.

### I.2.4.2. Modèle de fissure multiple

Pour simplifier, on ne considère toujours qu'une seule fissure. Mais dans ce modèle, on introduit des critères de l'apparition de nouvelle fissure. Une fois la nouvelle fissure se forme, on considère les anciennes fissures comme inactives mais en gardant leur direction (pour vérifier si elles sont réactivées ou non) et la quantité d'énergie dissipée par fissure. L'élément est complètement rompu quand la somme des énergies dissipées de toutes les fissures est égale une dissipation d'énergie critique qui conduit à la rupture.

Si une fissure se forme, le matériau devient orthotrope, la direction principale des déformations et des contraintes ne se coïncident pas en général. Ces directions peuvent aussi tourner quand le coefficient de conservation du cisaillement est non nul. La nouvelle contrainte majeure principale inclinée peut dépasser la résistance à la traction et crée ainsi une nouvelle fissure. Pour ce dernier, Rots [Ref. 114] donne un critère de formation de nouvelle fissure : Soit la condition de résistance est violée (c'est à dire la contrainte principale majeure est égale à  $f_t$ ), soit l'angle entre la direction principale des contraintes et celle de la fissure active atteint un angle seuil  $\alpha$  quelconque (par exemple  $\alpha=15^\circ$ ).

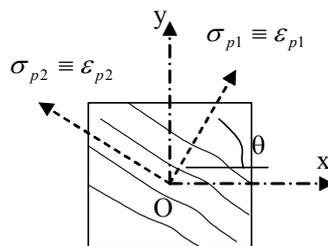
Le coefficient de conservation de cisaillement est pris soit comme une constante, soit comme une fonction de la déformation principale majeure  $\varepsilon_1^f$  des déformations de fissures  $\varepsilon^f$  et de la déformation de rupture  $\varepsilon_{ult}$  :

$$\beta = \left[ 1 - \frac{\varepsilon_1^f}{\varepsilon_{ult}} \right]^p \quad (I.34)$$

Ce modèle permet de traiter l'élément au cas où le chargement n'est pas proportionnel, mais le critère d'apparition de la nouvelle fissure reste arbitraire et ne se base pas sur une hypothèse valide.

### I.2.4.3. Modèle de fissuration tournante

La méthode de fissuration tournante est un cas particulier de la méthode de la fissuration distribuée avec l'angle seuil  $\alpha$  égal à  $0^\circ$ . Elle consiste en particulier à efforcer la coaxialité des directions principales de déformations et celles de contraintes.



L'hypothèse de coaxialité

En effet, le modèle suppose une rotation continue de la direction de fissure, c'est-à-dire de la matrice de transformation  $\mathbf{N}$ , la direction principale des contraintes et des déformations est toujours confondue avec la normale à la fissure.

Pour chaque incrément de déformations la condition de coaxialité entre la direction de contraintes et de déformation impose ainsi la valeur du module de cisaillement du béton fissuré qui se déduit par l'expression suivante:

$$G^{bf} = \frac{\sigma_{ii} - \sigma_{jj}}{2(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj})} = \beta G \quad (I.35)$$

Ce modèle impose donc une forme particulière du coefficient de cisaillement résiduel qui se déduit par l'expression suivante :

$$\beta = \frac{\sigma_{ii} - \sigma_{jj}}{2(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj})} \frac{1}{G} \quad (I.36)$$

Par conséquent, le module du cisaillement de la fissuration devient :

$$D^{II} = \frac{(\sigma_{ii} - \sigma_{jj})G}{2(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj})G - (\sigma_{ii} - \sigma_{jj})} \quad (I.37)$$

Où,  $i$  et  $j$  représentent les directions principales initiales de chaque incrément.

Ce modèle se base sur l'hypothèse de coaxialité sans apporter une justification théorique ou expérimentale. Cependant, cette hypothèse permet de surmonter les problèmes de blocage des contraintes et de la surestimation de la rigidité. Ceci est assuré par le coefficient de conservation de cisaillement qui devient une fonction prédéfinie par (I.36) et qui peut atteindre des valeurs négatives.

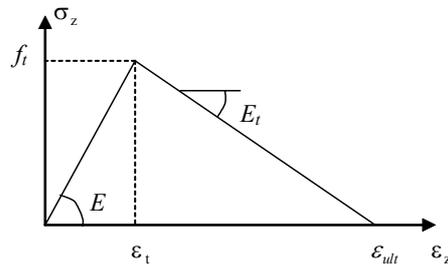
Finalement, parmi les modèles de la théorie de la fissuration distribuée, ce modèle est bien apprécié pour sa simplicité. Plusieurs auteurs ont adopté ce modèle en proposant des améliorations, on peut citer Jirasek et Zimmermann [Ref. 56, Ref. 59].

## I.2.5. Diverses approches basées sur la théorie de la fissuration distribuée

### I.2.5.1. Théorie de la bande de fissuration

Bazant et Oh [Ref. 10] proposent cette théorie en se basant sur l'hypothèse d'existence d'une bande de fissuration d'une certaine largeur au sein du milieu fissuré. Cette hypothèse est justifiée du point de vue physique des matériaux hétérogènes.

La multitude des microfissures fait apparaître cette bande de largeur  $w_c$ . On suppose une distribution uniforme de déformations  $\varepsilon^f$ .



Comportement à la traction simple

Considérons une fissure de normale  $Oz$  dans le repère principal  $Oxyz$  :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon^f \end{Bmatrix} \quad (I.38)$$

On accepte une relation linéaire entre  $\varepsilon^f$  et la contrainte normale  $\sigma_z$

$$\varepsilon^f = \frac{1}{C_f}(f_t - \sigma_z) \quad (\text{I.39})$$

On a

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{-1} & -\nu E^{-1} & -\nu E^{-1} \\ & E^{-1} & -\nu E^{-1} \\ Sym & & E_t^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{ult} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.40})$$

$$\text{Où } \frac{1}{E_t} = \frac{1}{E} - \frac{1}{C_f}$$

Finalement, la loi de comportement dans le repère de la fissuration s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ & C_{22} & C_{23} \\ Sym & & \mu^{-1} C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (\text{I.41})$$

Où  $C_{ij}$  sont des composantes de la matrice de complaisance du matériau sain et :

$$\mu^{-1} = \frac{E}{-E_t} \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_{ult} - \varepsilon_z} \quad (\text{I.42})$$

Pour déterminer  $C_f$ , Bazant [Ref. 10] introduit en plus une propriété du matériau, c'est la largeur de la bande de fissuration  $w_c$ . Donc, les propriétés de rupture du matériau ne sont caractérisées que par trois paramètres : énergie de rupture, limite de résistance uniaxiale et largeur de la bande de fissuration. Plusieurs de recherches et expériences ont été effectuées pour déterminer cette caractéristique du béton, on peut citer Olivier (1989) [Ref. 100], Bazant et al. (1989) [Ref. 11], Fokwa et Berthaud (1993) [Ref. 45] Le module de d'adoucissement étant une fonction de ces trois paramètres :

$$C_f = \frac{f_t^2 w_c}{2G_f} \quad (\text{I.43})$$

Les valeurs des trois paramètres de matériau en jeu sont déterminées d'après les résultats d'essais, celle optimale pour la largeur de bande de fissuration est environ  $3d_a$  ( $d_a$  est dimension d'un granulat).

### Approche non locale :

La théorie de bande de fissuration suppose un saut brusque de déformation aux lèvres extrêmes de la bande. En réalité, il y a une distribution continue de déplacement à travers cette bande. A ce titre, on adopte une conception du milieu continu non locale introduite par Kröner (1960) et développée par Krumhansl, Kunin, Levin [Ref. 63, Ref. 64, Ref. 65] puis adaptée au béton par Pijaudier-Cabot et al. [Ref. 109]

L'hypothèse de base : La contrainte en un point est une fonction de la distribution de déformation sur un certain volume caractérisé centré par ce point :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{V} \int_V \varepsilon(x) \alpha(x) dV \text{ avec } \alpha(x) \text{ est le coefficient de poids} \\ \sigma(x) &= F(\bar{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

$V$  est défini à partir de la longueur caractéristique du matériau.

En se basant sur cette relation clé, on établit des équations de base de mouvement (ou de l'équilibre) :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{V} \int_V \varepsilon(x) \alpha(x) dV = H \varepsilon \\ (1-c)(H\sigma_{ij})_{,j} + c\tau_{ij,j} &= \rho \ddot{u}_i \\ H &= 1 + \lambda^2 \nabla^2 \end{aligned} \quad (I.45)$$

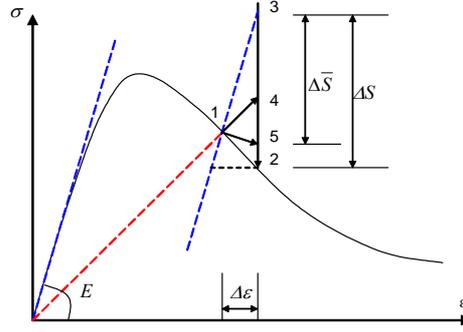
Où  $c$  est un coefficient expérimental,  $c=0$  formule purement non locale,  $c=1$  formule purement locale.

$\lambda^2 \nabla^2$  est l'opérateur de Laplace à travers un volume représentatif de dimension  $l$  et  $\lambda$  est la longueur caractéristique du matériau.

Vis à vis à la méthode des éléments finis, on applique une technique des couches des éléments de la taille  $l$ . Par conséquent, il y a de changement dans la propriété de connexion nodale et la numération des nœuds (Bazant et al.) [Ref. 9].

### I.2.5.2. Modèle d'interaction des microfissures

Pour le béton, il existe une multiplicité des microfissures qui se développent dans la zone de fissuration avant qu'une fissure ne se produise. L'interaction desquelles est prise en compte dans ce modèle établi par Ozbolt et Bazant en 1996 [Ref. 105, Ref. 5].



Influence de l'interaction des microfissures

Selon ce principe, on divise chaque incrément de chargement en deux sous-incréments :

- Incrément pur élastique, représenté par le point 3. Les microfissures sont capables de transmettre parfaitement les contraintes
- Incrément où les contraintes se relaxent, en quelque sorte comme on applique une pression sur la surface de fissure.

Dans la figure, si on traite le problème de façon élastoplastique, on a l'incrément de contrainte  $\Delta S$  anélastique local résultant d'un incrément de déformation  $\Delta \varepsilon$  :  $\Delta S = \bar{32}$ . Mais en tenant compte de l'interaction des microfissures, l'incrément de contrainte devient par exemple  $\Delta \bar{S} = \bar{35}$  selon la figure.

Désignons  $\Delta \underline{S}_{\underline{\mu}}$  l'incrément de contrainte anélastique à la position de la microfissure numéro  $\mu$  et  $\underline{n}_{\mu}$  est la normale à cette microfissure. La contrainte normale locale s'écrit alors :

$$\Delta \underline{p}_{\underline{\mu}} = \underline{n}_{\mu} \Delta \underline{S}_{\underline{\mu}} \underline{n}_{\mu}$$

Selon Kachanov [Ref. 61], la contrainte non locale est de la forme :

$$\Delta \underline{\underline{p}}_{\mu} = \left\langle \Delta \underline{\underline{p}}_{\mu} \right\rangle + \sum_{\nu=1}^N \Lambda_{\mu\nu} \Delta \underline{\underline{p}}_{\nu} \quad (\text{I.46})$$

Où :

Le signe  $\langle \rangle$  signifie un moyen sur la longueur de fissure.

$N$  est nombre total des microfissures.

$\Lambda_{\mu\nu}$  est le coefficient d'interaction de deux microfissures numéro  $\mu$  et  $\nu$ . On a  $\Lambda_{\mu\mu} = 0$ .

Nous avons donc la contrainte normale à une microfissure selon l'incrément de contraintes :

$$\Delta \left( \underline{\underline{n}}_{\mu} \underline{\underline{S}}_{\mu} \underline{\underline{n}}_{\mu} \right) = \left\langle \Delta \left( \underline{\underline{n}}_{\mu} \underline{\underline{S}}_{\mu} \underline{\underline{n}}_{\mu} \right) \right\rangle + \sum_{\nu=1}^N \Lambda_{\mu\nu} \Delta \left( \underline{\underline{n}}_{\nu} \underline{\underline{S}}_{\nu} \underline{\underline{n}}_{\nu} \right) \quad (\text{I.47})$$

Dans la quelle, Bazant [Ref. 5] introduit quelques hypothèses en vue de simplifier le problème

L'influence de la microfissure à un point  $\xi$  de la macrostructure sur une microfissure à un point  $x$  est déterminée par la direction dominante de fissure à chaque point.

Au lieu de travailler avec la traction normale pour chaque fissure, on travaille avec la traction principale au niveau macroscopique.

$$\Delta \underline{\underline{S}}_{\mu}^{(1)}(x) = \left\langle \Delta \underline{\underline{S}}_{\mu}^{(1)}(x) \right\rangle + \int_V \Lambda(x, \xi) \Delta \underline{\underline{S}}_{\mu}(\xi) dV(\xi) \quad (\text{I.48})$$

$\Delta \underline{\underline{S}}_{\mu}^{(1)}(x); \Delta \underline{\underline{S}}_{\mu}^{(1)}(x)$  sont des incréments des contraintes anélastiques non locales et locales qui sont normales à la direction dominante de la microfissure.

$\Lambda(x, \xi)$  est la fonction d'influence des fissures, dépendant de l'état des contraintes et la géométrie de structure. Pour simplifier, cette fonction est utilisée dans certaine zone autour de la microfissure considérée.

En modélisant par la méthode des éléments finis, on utilise l'intégration numérique pour tous les éléments:

$$\Delta \underline{\underline{S}}_{\mu}^{(1)} = \left\langle \Delta \underline{\underline{S}}_{\mu}^{(1)} \right\rangle + \sum_{\nu=1}^N \Lambda_{\mu\nu} \Delta \underline{\underline{S}}_{\nu} \Delta V_{\nu} \quad (\text{I.49})$$

$\mu, \nu$  sont des points d'intégration.

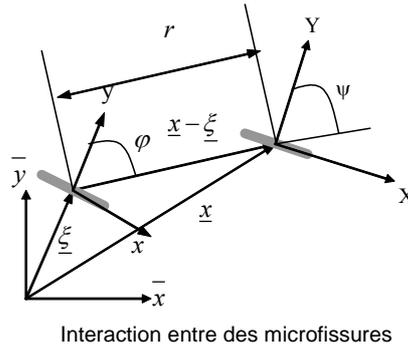
$\Delta V_{\nu}$  est le volume de l'élément correspondant au point d'intégration  $\nu$ .

La contrainte moyenne est calculée sur la zone de microfissure :

$$\left\langle \Delta \underline{\underline{S}}_{\mu}^{(1)} \right\rangle = \frac{1}{V_{\mu}} \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\mu\nu} \Delta \underline{\underline{S}}_{\nu}^{(1)} \Delta V_{\nu} \quad (\text{I.50})$$

$$V_{\mu} = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\mu\nu} \Delta V_{\nu} \quad (\text{I.51})$$

Où  $V_{\mu}$  est le volume local normalisé,  $\nu$  point d'intégration à l'intérieur de ce volume,  $n$  est nombre total de points d'intégration dans ce volume et  $\alpha_{\mu\nu}$  coefficients de poids.



Interaction entre des microfissures

Quant à la fonction d'influence des microfissures :

$$\Lambda(x, \xi) = k(r) f(\varphi) \quad (I.52)$$

$r$  et  $\varphi$  sont des coordonnées polaires dont l'origine est le centre de la microfissure (voir la figure ci-dessus).

Ce modèle local et sophistiqué tient en compte l'interaction entre les microfissures. Cependant, il pose des problèmes difficiles concernant la détermination le nombre de microfissures existantes et les coefficients d'interaction des microfissures. Du point de vue de l'application pratique, ce modèle serait très lourd, d'abord par rapport à la détection des microfissures dans l'élément, puis, vis-à-vis de l'interaction entre les fissures avec différentes directions, qui doit s'effectuer pour chaque incrément de chargement.

### I.3. Classe de modèles élastoplastiques

Il s'agit de considérer le comportement du béton comme élastoplastique adapté. Cette approche simple est facilement intégrable dans une méthode numérique de type éléments finis. Dû au comportement dissymétrique du béton en compression et en traction, on décompose le traitement selon ces deux cas :

En traction : La déformation à la rupture étant très faible (faible résistance et fragilité) on adopte souvent de modèle de fissuration élastique avec les critères de fissuration de Rankine, Ottosen

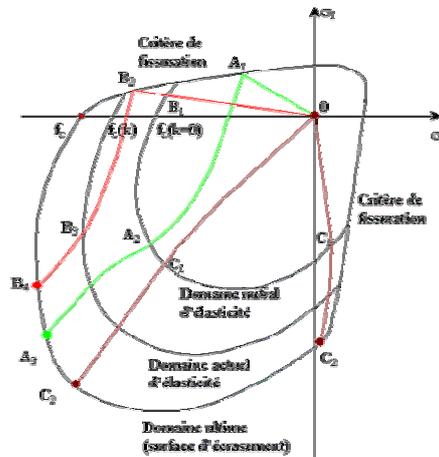
En compression, le comportement est quelque peu plus ductile, l'approche élastoplastique est adoptée. Plusieurs critères sont utilisés pour le béton comme le critère de Mohr Coulomb, Dracker-Prager, Nadai...

#### I.3.1. Modèle de Reynouard (1974)

Reynouard [Ref. 113] a établi un modèle de comportement du béton élastique jusqu'à la rupture en traction et élastoplastique écrouissable associé en compression. S'il y a une fissure dans un élément, la rigidité devient nulle dans la direction perpendiculaire à la fissure. Le critère de ruine en déformation est appliqué.

#### I.3.2. Modèle de Frantzeskakis (1987)

Frantzeskakis C. [Ref. 46] considère que le béton est élastique-fragile en traction et élastoplastique écrouissable en compression.



Surface de charge et trajets de sollicitation dans le comportement du béton

Pour la surface de charge, cet auteur accepte un isotrope écrouissage qui s'écrit en choisissant une fonction de type Drucker-Prager :

$$F = \frac{c\sqrt{J_2} + d.I_1}{f_c(k)} - 1 = 0 \quad (I.53)$$

Tandis que la surface d'écoulement a la forme (aussi de type Drucker-Prager) :

$$G = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - K \quad (I.54)$$

Où  $c$ ,  $d$  et  $\alpha$  sont des paramètres du modèle dépendant des caractéristiques mécaniques du béton,  $f_c(k)$  représente le seuil d'élasticité actuel.

La matrice tangente de rigidité  $\mathbf{D}^{ep}$  s'écrit dans le cas plasticité non associée:

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{\mathbf{D}^e \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e}{h + \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}^e \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (\text{I.55})$$

Quant à la rupture en compression, Frantzeskakis admet une rupture appelée : «écrasement» quand la surface de charge coïncide avec la surface ultime au cours de l'évolution de l'écrasement.

Pour la rupture en traction, une surface immobile de fissuration est établie en se basant sur le critère de fissuration proposé par Ottosen [Ref. 101] en fonction des invariants du tenseur de contraintes:

$$a \frac{J_2}{f_c^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + b \frac{I_1}{f_c} - 1 = 0 \quad (\text{I.56})$$

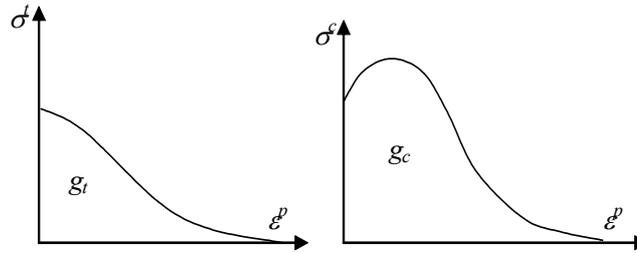
Où  $a$ ,  $b$  et  $\lambda$  sont des paramètres du modèle à identifier.

### I.3.3. Modèle d'endommagement – plasticité sans dégradation de rigidité

Lublinter, Olivier et al. (1989) [Ref. 70] ont établi un modèle élastoplastique associé avec l'énergie en introduisant la variable plasticité - endommagement  $\kappa$ :

$\kappa=0$  : Matériau non endommagé et  $c=c_0$ , qui est la cohésion initiale du matériau.

$\kappa=1$  : Matériau totalement endommagé et  $c=0$ , c'est-à-dire le perte totale de cohésion.



Aspect énergétique dans la loi de comportement

Du point de vue énergétique, dans le cas unidimensionnel, on a :

$$\begin{aligned} G_t &= g_t l \\ \kappa_t &= \frac{1}{g_t} \int_0^{\hat{\epsilon}^p} \sigma d\epsilon^p \\ G_c &= g_c l \\ \kappa_c &= \frac{1}{g_c} \int_0^{\hat{\epsilon}^p} \sigma d\epsilon^p \end{aligned} \quad (\text{I.57})$$

Où  $l$  est la longueur caractéristique du matériau.

La variable  $\kappa$  présente énergétiquement la loi de comportement adoucissant. Il est nécessaire de lier cette variable et la cohésion  $c$  afin de bien achever le modèle.

La relation entre  $c$ - $\kappa$  est donc établie comme une relation de couplage plasticité et endommagement.

En résumé, les équations constitutives du modèle sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\varepsilon}} &= \underline{\underline{D}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \\ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p &= \dot{\lambda} \underline{\underline{g}} \quad (\text{loi d'écoulement } \underline{\underline{g}} = \partial_{\underline{\underline{\sigma}}} G) \\ \underline{\underline{\dot{\kappa}}} &= \underline{\underline{h}}^T(\underline{\underline{\sigma}}, c, \kappa) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p \\ \dot{c} &= k(\underline{\underline{\sigma}}, c, \kappa) \dot{\kappa}\end{aligned}\tag{I.58}$$

$G$  est la surface d'écoulement, choisi dans ce modèle comme celui Mohr-Coulomb.

La loi de comportement dans le cas général de matériau non associé est exprimée :

$$\underline{\underline{D}}^{ep} = \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}} \frac{\underline{\underline{g}} : \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{f}}}{\underline{\underline{H}} + \underline{\underline{f}} : \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{g}}} \quad \text{avec } \underline{\underline{H}} = k \underline{\underline{h}} : \underline{\underline{g}}\tag{I.59}$$

Où  $\underline{\underline{f}} = \partial_{\underline{\underline{\sigma}}} F$ , et  $F(\underline{\underline{\sigma}}) = c$  selon le critère de Drucker-Prager.

En fait, ce modèle ne tient pas compte de la diminution de la rigidité, mais l'introduction de la variable  $\kappa$  énergétiquement déterminée par le comportement élastoplastique avec la perte de cohésion (comme un écrouissage négatif). Elle est donc comprise comme « endommagement » du matériau. La prise en compte de la dégradation du béton est ainsi développée par ces auteurs, elle sera décrite dans la partie consacrée aux modèles de type endommagement.

L'approche élastoplastique facilite numériquement les calculs et largement utilisée pour le béton comme le modèle de l'INSA – URGC structure, l'Université de Colorado à Boulder [Ref. 48]... Cependant, cette approche ne représente que l'aspect non-linéaire et la partie résiduelle de déformation du comportement du béton. Ces modèles ne tiennent pas compte la dégradation du béton, et sont difficilement adaptés au béton. De plus, nous pouvons s'interroger sur la pertinence de considérer un seul mécanisme de plastification pour expliquer la loi de comportement complexe d'un matériau hétérogène comme le béton. L'utilisation des paramètres d'écrouissage pour carrelar ces modèles avec les essais uniaxiaux en traction et en compression sur le béton n'est pas suffisante pour assurer la prédictibilité de ces modèles en cas de chargement complexe. Cette difficulté se manifeste notamment en cas de chargement cyclique où ont lieu autres processus non-linéaires du comportement du béton : dégradation, unilatéralité...

## I.4. Classe de modèles d'endommagement

### I.4.1. Généralités

Il s'agit d'une autre approche très utilisée pour modéliser le comportement du béton. Cette approche se base sur la théorie de la thermodynamique des processus irréversibles. De nombreux modèles d'endommagement associés avec les autres phénomènes non-linéaires ont été élaborés afin de traiter les différents phénomènes liés au comportement complexe du béton déjà mentionnés au début de ce chapitre. Parmi ces modèles, on peut citer le travail de Lemaître et Chaboche [Ref. 69], Mazars [Ref. 72], La Borderie [Ref. 66]...

Dans ce paragraphe, on analysera les modèles sur les aspects suivants :

- La définition des variables d'état (variables observables et variables internes)
- Le choix de l'énergie libre, pour obtenir les lois d'état
- Détermination du potentiel de dissipation afin d'obtenir les lois complémentaires

A ce stade, il importe de noter que, pour un modèle stable, le potentiel de dissipation et sa fonction duale doivent être convexes, positifs et nuls à l'origine.

### I.4.2. Théorie de l'endommagement classique [Ref. 69]

#### I.4.2.1. Une théorie de l'endommagement isotrope

L'expression du potentiel thermodynamique énergie libre est établie en découplant la partie d'endommagement et celle de plasticité.

$$\psi = \psi_e(\varepsilon^e, T, D) + \psi_p(T, V_k) \quad (I.60)$$

Où  $d$  est la variable scalaire d'endommagement.  $d=0$  pour l'état vierge,  $d=1$  pour l'état d'endommagement total.

$$\text{Où } \rho\psi_e = \frac{1}{2}(1-d)\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad (I.61)$$

On remarque que l'endommagement se traduit par une diminution de la rigidité du matériau. Dans ce cas, cette diminution affecte le milieu dans toutes les directions, autrement dit, c'est un modèle d'endommagement isotrope.

Les lois d'état s'écrivent de façon classique :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} = (1-d)\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \\ Y &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial d} = -\frac{1}{2}\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \text{ d'autre part nous avons } -Y = \frac{1}{2} \frac{\partial w_e}{\partial D} \Big|_{\sigma, T=cte} \end{aligned} \quad (I.62)$$

$Y$  est le taux de restitution de l'énergie élastique qui donne la dissipation due à l'endommagement pour une évolution à contrainte constante. Selon l'analyse menée par Mazars [Ref. 72], cette quantité est en relation physique avec l'énergie de la fissuration. Le potentiel de dissipation dans le cas d'un découplage entre la dissipation due à la plasticité et à celle due à l'endommagement :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - A_k V_k \geq 0 \text{ et } -Y \dot{d} \geq 0 \quad (I.63)$$

Le potentiel de dissipation  $\varphi$  est une fonction des variables d'état, sa fonction duale  $\varphi^*$  est établie grâce à transformation Legendre-Fenchel. Nous obtenons ainsi la loi d'évolution en se basant sur le principe de maximale dissipation:

$$\dot{d} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial Y} \geq 0 \quad (\text{I.64})$$

$\varphi^*$  est la fonction indicatrice de la surface seuil d'endommagement :

$$f_D(\underline{\underline{\sigma}}, d) = 0$$

Avec :

$f_D < 0 \rightarrow$  Il n'y a pas évolution de l'endommagement

$f_D \geq 0 \rightarrow$  Il y a évolution de l'endommagement.

On peut ainsi employer une surface exprimée en déformation :

$$f_D(\underline{\underline{\varepsilon}}, d) = 0$$

C'est la théorie la plus simple qui présente une démarche type pour établir un modèle d'endommagement.

#### I.4.2.2. Une théorie de l'endommagement anisotrope

L'expression du potentiel thermodynamique énergie libre est la même :

$$\psi = \psi_e(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, T, \underline{\underline{d}}) + \psi_p(T, V_k) \quad (\text{I.65})$$

Cependant, la variable d'endommagement n'est plus un scalaire, mais un tenseur d'ordre 4. L'endommagement peut être différent selon la direction. Nous pouvons ainsi écrire :

$$\rho \psi_e = \frac{1}{2} (1 - \underline{\underline{d}}) : \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad (\text{I.66})$$

Les lois d'état sont déduites :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} = (1 - \underline{\underline{d}}) : \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \tilde{\underline{\underline{D}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad \text{et la contrainte effective: } \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} = (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}})^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} \\ \underline{\underline{Y}} &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{d}}} = -\frac{1}{2} (\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e) : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \end{aligned} \quad (\text{I.67})$$

Le potentiel de dissipation possède deux termes liés respectivement à la plasticité et à l'endommagement, sa fonction duale s'écrit sous forme :

$$\varphi^* = \varphi_p^*(\underline{\underline{\sigma}}, A_k; V_k, T) + \varphi_d^*(\underline{\underline{Y}}; \underline{\underline{\varepsilon}}^e, T, \underline{\underline{d}}) \quad (\text{I.68})$$

Pour simplifier, en introduisant le tenseur d'anisotropie de l'endommagement  $\underline{\underline{Q}}$ , supposons :

$$\varphi_d^* = -F(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, T, \underline{\underline{d}}) \underline{\underline{Q}} :: \underline{\underline{Y}} \quad (\text{I.69})$$

Par conséquent, la loi d'évolution s'écrit :

$$\underline{\underline{\dot{d}}} = \underline{\underline{Q}} F(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, T, \underline{\underline{d}}) \quad (I.70)$$

Afin de simplifier le problème, on introduit la loi d'évolution de l'endommagement scalaire  $d$  avec  $\underline{\underline{d}} = c Tr(\underline{\underline{d}}) = c \underline{\underline{d}} :: \underline{\underline{I}}$  ;  $Y = Tr(\underline{\underline{Y}})$  ;  $c = 1/Tr(\underline{\underline{Q}})$ , nous avons :

$$\underline{\underline{\dot{d}}} = c Tr(\underline{\underline{\dot{d}}}) = -c Tr \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{\underline{Y}}} \right) = -c \frac{\partial \varphi^*}{\partial Y} = F(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, T, \underline{\underline{d}}) \quad (I.71)$$

Autrement exprimée par :

$$\underline{\underline{\dot{d}}} = G(\underline{\underline{\sigma}}, T, \underline{\underline{d}}) \text{ et } \underline{\underline{\dot{d}}} = \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{d}} \quad (I.72)$$

Une surface seuil d'endommagement est ainsi construite dépendant de la nature du matériau.

**Remarques :**

Cette théorie présente une bonne démarche mais elle ne tient pas compte de couplage entre la plasticité et l'endommagement. Cette théorie nécessite l'identification de plusieurs paramètres, notamment les lois d'évolution car le tenseur  $\underline{\underline{Q}}$  varie dans des cas de chargement non radical.

Pour traiter en même temps l'endommagement et la plasticité, on introduit classiquement l'énergie libre en découplant les deux phénomènes. Le potentiel de dissipation se compose :

$$\begin{aligned} f(\underline{\underline{\sigma}}, X, R) &\text{ pour la plasticité} \\ \varphi_D^*(Y; \underline{\underline{\varepsilon}}^e \dots) &\text{ pour l'endommagement} \end{aligned} \quad (I.73)$$

Où  $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{1-d}$  est la contrainte effective (selon le principe d'équivalence en déformation). Les lois d'évolution se déduisent :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \text{ et } \underline{\underline{\dot{d}}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \varphi_D^*}{\partial Y} \quad (I.74)$$

**I.4.3. Modèle de Mazars (1984) [Ref. 72, Ref. 74]**

Le point particulier de ce modèle est d'utiliser le critère en déformation en introduisant la notion de déformation équivalente. Le modèle prend en compte la dissymétrie du comportement du béton. Cependant, ce modèle ne tient pas compte des autres phénomènes liés au comportement du béton comme l'irréversibilité de la déformation, l'anisotropie et l'effet unilatéral.

On peut résumer ce modèle comme suit :

L'expression de l'énergie libre spécifique est de la forme :

$$\rho \psi = \frac{1}{2} (1-d) \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (I.75)$$

D'où on déduit les lois d'état :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} = (1-d) \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad (I.76)$$

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial d} = -\frac{1}{2} \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \text{ d'autre part nous avons } -Y = \frac{1}{2} \frac{\partial w_e}{\partial D} \Big|_{\sigma, T=cte}$$

Le potentiel de dissipation en fonction de déformation est adopté dans le modèle :

$$\varphi^* = \varphi^*(\varepsilon_{ij}, d) \quad (I.77)$$

Par conséquent, la surface seuil d'endommagement s'écrit :

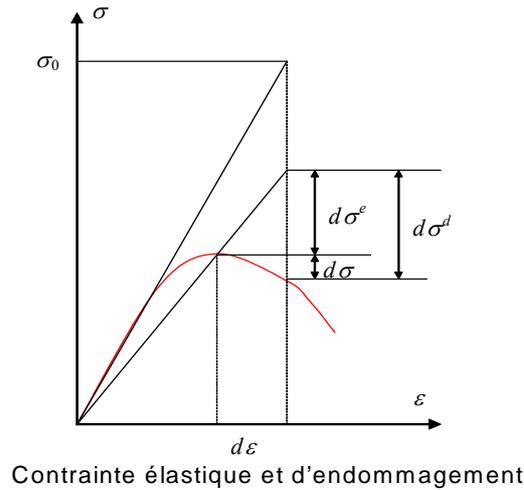
$$f(\underline{\underline{\varepsilon}}, K) = \tilde{\varepsilon} - K(D) = 0 \quad (I.78)$$

Où l'expression de la déformation équivalente :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (I.79)$$

Avec  $\varepsilon_i$  est la déformation principale dans la direction  $i$ , et :

$$\langle \bullet \rangle = \frac{\bullet + |\bullet|}{2}$$



D'où, la loi d'évolution se traduit :

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^d = \dot{\lambda}_D \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (I.80)$$

$$\dot{d} = \frac{\dot{\lambda}_D}{\sqrt{Tr(\underline{\underline{\sigma}})_0^2}} \quad (I.81)$$

Pour le comportement dissymétrique du béton, Mazars propose deux modes d'endommagement  $d_T$  de traction et  $d_C$  de compression. La combinaison linéaire de ces deux endommagements donne l'endommagement global isotrope :

$$d = \alpha_T d_T + (1 - \alpha_T) d_C \quad (I.82)$$

La détermination de  $\alpha_T$  est effectuée en distinguant les extensions dues à des contraintes positives et celles dues à des contraintes négatives.

L'évolution de  $d_T$  et  $d_C$  est de la forme :

$$d = 1 - \frac{\varepsilon_{D0}(1-A)}{\tilde{\varepsilon}_M} - \frac{A}{\exp[B(\tilde{\varepsilon}_M - \varepsilon_{D0})]} \quad (I.83)$$

Où  $A, B$  sont des caractéristiques du matériau ;  $\varepsilon_{D0}$  est le seuil d'endommagement et  $\tilde{\varepsilon}_M$  est la déformation équivalente maximale atteinte.

Ce modèle basé sur la thermodynamique des processus irréversibles possède une surface seuil convexe. Malgré l'isotropie de l'endommagement, ce modèle tient compte de d'un endommagement différent en traction et en compression.

Cependant, ce modèle ne tient pas compte, des déformations permanentes ni de l'effet unilatéral. Le fait de prendre  $\alpha_T$  constante limite le domaine d'application du modèle. Il n'est donc valable que dans les cas de chargement proportionnel.

L'introduction de l'expression de déformation équivalente conduit à une condition stricte : L'endommagement se produit si et seulement s'il y a au moins une extension dans le repère principal de déformation.

#### I.4.4. Modèle de La Borderie (1991) [Ref. 66]

Le point particulier de ce modèle est l'utilisation de l'énergie Gibbs comme le potentiel. Après des analyses de continuité de la loi de comportement et la vérification de convexité du potentiel, le modèle adopte :

$$\begin{aligned} 2\chi_e &= \frac{\underline{\underline{\sigma}}^+ : \underline{\underline{\sigma}}^+}{E(1-d_1)} + \frac{\underline{\underline{\sigma}}^- : \underline{\underline{\sigma}}^-}{E(1-d_2)} + \frac{\nu}{E} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} - tr \underline{\underline{\sigma}}^2) \\ 2\chi_{an} &= \frac{\beta_1 d_1}{E(1-d_1)} f(tr \underline{\underline{\sigma}}) + \frac{\beta_2 d_2}{E(1-d_2)} tr \underline{\underline{\sigma}} \end{aligned} \quad (I.84)$$

Où  $d_1$  et  $d_2$  sont deux scalaires d'endommagement relatif à deux modes de dégradation, la fonction  $f(tr \underline{\underline{\sigma}})$  assure la processus de l'unilatéralité. La décomposition du tenseur de contraintes est définie selon l'expression de Ju (1989) [Ref. 60]. Les forces thermodynamiques  $Y_1, Y_2$  sont trouvées par la dérivation du potentiel.

La loi d'évolution de l'endommagement se déduit en fonction de l'évolution de la force thermodynamique associée pour chaque mode.

Ce modèle étant isotrope avec deux scalaires d'endommagement permet d'introduire l'effet unilatéral selon le changement de signe de contrainte et la partie anélastique de déformation. Les potentiels ainsi que les surfaces de charge sont continus et convexes ce qui assure une stabilité numérique. Cependant, le tenseur de déformation anélastique reste toujours sphérique dû au choix de  $\chi_{an}$ . Cela implique, la déformation résiduelle ne dépend pas du cisaillement. Ceci peut constituer une limitation du modèle, dans la mesure où le rôle de cisaillement peut être prépondérant dans la génération des déformations irréversibles. De ce fait, le modèle risque de conduire à une interprétation peu fidèle dans des cas dominés par le cisaillement.

#### I.4.5. Modèle d'endommagement de Lubliner, Olivier et al. (1989) [Ref. 70]

Les auteurs choisissent un critère de type Mohr-Coulomb et Drucker-Prager pour les matériaux granulaires :

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = c \quad (\text{I.85})$$

L'endommagement total correspond à une perte totale de la cohésion  $c$ .

Dans ce modèle, on tient en compte de la diminution de la rigidité du matériau. Celle-ci est influencée par deux types de variable de dégradation : élastique et plastique.

La variable « élastique » de dégradation dépend de l'évolution de la déformation totale et celle plastique dépend de l'évolution de déformation plastique :

$$\dot{d}_i = \Phi_i \langle \mathbf{k}_i^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \quad \text{et} \quad \dot{\delta}_j = \mathbf{l}_j^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (\text{I.86})$$

Où  $\mathbf{k}_i$  et  $\mathbf{l}_j$  sont les vecteurs présentant l'évolution de l'endommagement dans cette direction sous un chargement quelconque.

La loi de comportement du matériau endommagé s'exprime :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(d_1, d_2, \dots; \delta_1, \delta_2, \dots)(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (\text{I.87})$$

Ce qui aboutit à la loi incrémentale de comportement :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \dot{\mathbf{D}}\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \\ \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{D}_p \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \end{aligned} \quad (\text{I.88})$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_i \phi_i \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial d_i} \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \langle \mathbf{k}_i^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \\ \mathbf{D}_p &= \mathbf{D} - \sum_j \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \delta_j} \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{l}_j^T \end{aligned} \quad (\text{I.89})$$

En associant avec la théorie de plasticité, on trouve  $\dot{\lambda} = \frac{\langle \mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle}{H + \mathbf{f}^T \mathbf{D}_p \mathbf{g}}$ , et déduit ensuite la loi de comportement :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{D}_p \mathbf{g} \frac{\langle \mathbf{f}^T \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle}{H + \mathbf{f}^T \mathbf{D}_p \mathbf{g}} \quad (\text{I.90})$$

Ce modèle isotrope utilise soit une variable scalaire  $d$ , soit deux scalaires  $d_1$  (associé au module hydrostatique  $K$ ) et  $d_2$  (associé au module de cisaillement  $G$ ) et une variable scalaire  $\delta$  liée directement à la cohésion.

Ce modèle se base sur la théorie de plasticité associée avec l'endommagement et l'aspect énergétique. Cependant, ses paramètres sont difficilement identifiables par des expériences. Ceci concerne notamment l'identification de la relation  $c$ - $\kappa$  et la distinction de la dégradation « plastique » de la déformation « élastique ».

#### I.4.6. Modèle de Simo et al. (1995) [Ref. 117]

Ce modèle consiste à utiliser plusieurs surfaces d'endommagement afin de tenir en compte de différents modes de dégradation. Le domaine d'élasticité est donné par  $M$  fonctions de l'endommagement :

$$E_\sigma = \left\{ \underline{\underline{\sigma}} \in S \mid \Phi_k(\sigma, q) \leq 0, (k=1, 2, \dots, M) \right\} \quad (I.91)$$

L'expression de l'énergie libre s'écrit :

$$\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{D}}, \alpha) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + S(\alpha) \quad (I.92)$$

Les lois d'état sont donc trouvées :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \quad \text{et} \quad q = -\frac{\partial S}{\partial \alpha} \quad (I.93)$$

La dissipation s'écrit :

$$D = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \dot{\psi} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{D}}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} + q \dot{\alpha} \geq 0 \quad (I.94)$$

En se basant sur le principe de dissipation maximale, on applique le théorème de Lagrange :

$$\begin{aligned} L(\underline{\underline{\sigma}}, q) &= -D + \sum_{k=1}^M \gamma_k \Phi_k \quad \text{qui doit être maximum} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} &= 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \end{aligned} \quad (I.95)$$

Par conséquent, la loi d'évolution s'écrit :

$$\underline{\underline{\dot{D}}}^{-1} = \sum_{k=1}^M \gamma_k \frac{\partial_\sigma \Phi_k \otimes \partial_\sigma \Phi_k}{\partial_\sigma \Phi_k : \underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{et} \quad \dot{\alpha} = \sum_k \gamma_k \partial_q \Phi_k \quad (I.96)$$

Les conditions de Kuhn-Tucker doivent être vérifiées :

$$\phi_k \leq 0, \quad \gamma_k \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^M \gamma_k \phi_k = 0 \quad (I.97)$$

Enfin, la loi de comportement a la forme :

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{D}} : \left( \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \sum_{k=1}^M \gamma_k \partial_\sigma \Phi_k \right) \quad (I.98)$$

Ce modèle apparaît simple et ne tient pas compte de l'effet anélastique. L'idée principale d'utiliser plusieurs surfaces seuils actives ou non. Ceci permet de tenir compte différents modes de fissuration et leurs influences portées sur la loi de comportement global. Les auteurs postulent 3 surfaces relatives à la fissuration dans le repère local  $\underline{n}$ ,  $\underline{m}$ ,  $\underline{l}$  :

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \underline{S}_1 : \underline{\sigma} - fn + k_n q & \underline{S}_1 &= \underline{n} \otimes \underline{n} \\
 \Phi_2 &= \left| \underline{S}_2 : \underline{\sigma} \right| - f_s + k_s q & \underline{S}_2 &= \frac{1}{2} (\underline{n} \otimes \underline{m} + \underline{m} \otimes \underline{n}) \\
 \Phi_3 &= \left| \underline{S}_3 : \underline{\sigma} \right| - f_s + k_s q & \underline{S}_3 &= \frac{1}{2} (\underline{n} \otimes \underline{l} + \underline{l} \otimes \underline{n})
 \end{aligned} \tag{I.99}$$

#### I.4.7. Modèle de Ramtani (1990) [Ref. 111]

Dans ce modèle, Ramtani utilise deux tenseurs de deuxième ordre pour décrire l'endommagement en traction et en compression et avec un scalaire pour l'endommagement volumique, l'énergie libre s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \rho \psi &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &2\mu \text{tr} \left[ \left( \underline{1} - \underline{d} \right)^{1/2} \cdot \langle \underline{\varepsilon}^e \rangle_+ \cdot \left( \underline{1} - \underline{d} \right)^{1/2} \cdot \langle \underline{\varepsilon}^e \rangle_+ \right] \\ &+ 2\mu \text{tr} \left[ \left( \underline{1} - \underline{d}^* \right)^{1/2} \cdot \langle \underline{\varepsilon}^e \rangle_- \cdot \left( \underline{1} - \underline{d}^* \right)^{1/2} \cdot \langle \underline{\varepsilon}^e \rangle_- \right] + \lambda (1 - \delta) \text{tr}^2 \left[ \underline{\varepsilon}^e \right] \end{aligned} \right\} \\
 \underline{\varepsilon}^e &= \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{an} \\
 \underline{\varepsilon}^{an} &= \frac{1}{2} \left\{ \beta \underline{d} \cdot \left( \underline{1} - \underline{d} \right)^{-1} \cdot \underline{d} + \beta^* \underline{d}^* \cdot \left( \underline{1} - \underline{d}^* \right)^{-1} \cdot \underline{d}^* + \gamma \frac{\delta^2}{1 - \delta} \right\}
 \end{aligned} \tag{I.100}$$

Dans ces expressions,  $\underline{d}$  est le tenseur d'endommagement relatif au mode d'ouverture de fissure,  $\underline{d}^*$  au mode de refermeture de fissure et  $\delta$  à l'évolution des microcavités. Ainsi ces tenseurs traduisent l'anisotropie et le comportement dissymétrique en traction et compression. La décomposition du tenseur de déformation en deux parties « positive » et « négative » est définie comme Ju (1989) [Ref. 60].

Comme il est difficile d'expliciter les forces thermodynamiques associées  $\underline{Y}$ ,  $\underline{Y}^*$  à cause de la difficulté de la dérivée selon  $\left( \underline{1} - \underline{d} \right)^{1/2}$ , Ramtani utilise trois surfaces d'endommagement en se basant sur la déformation :

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{1}{2} \langle \underline{\varepsilon} \rangle_+ : \langle \underline{\varepsilon} \rangle_+ - K(\underline{d}) \leq 0 \\
 g^* &= \frac{1}{2} \langle \underline{\varepsilon} \rangle_- : \langle \underline{\varepsilon} \rangle_- - K(\underline{d}^*) \leq 0 \\
 g_\delta &= \frac{1}{2} (\text{tr} \underline{\varepsilon})^2 - K(\delta) \leq 0
 \end{aligned} \tag{I.101}$$

Ces trois surfaces d'endommagement peuvent être indépendamment ou simultanément activées selon l'état de déformations.

En résumé, ce modèle est capable d'introduire l'anisotropie, le comportement dissymétrique en traction et compression. L'unilatéralité ici est affectée non seulement sur la partie de l'endommagement mais ainsi sur la partie anélastique. Les surfaces d'endommagement sont convexes et continues. Cependant, le majeur inconvénient de ce modèle est que le tenseur sécant de rigidité n'est pas toujours symétrique [Ref. 22].

### I.4.8. Théorie de J.W. Ju (1989) [Ref. 60]

#### I.4.8.1. Modèle isotrope élastoplastique

La décomposition de déformation s'effectue de manière classique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (\text{I.102})$$

L'énergie libre s'écrit sous forme :

$$\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{q}, d) = (1-d)\psi^0(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{q}) \quad (\text{I.103})$$

D'où les lois d'état sont :

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1-d) \frac{\partial \psi^0}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} \quad \text{et} \quad -Y = \psi^0(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, \underline{q}) \quad (\text{I.104})$$

Où, le vecteur  $\underline{q}$  présente des variables plastiques,  $d$  est la variable d'endommagement.

Le point particulier ici est que la surface seuil d'endommagement est coïncidente avec le potentiel d'énergie :

$$\xi_0 = \psi^0(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, \underline{q}) \quad (\text{I.105})$$

L'état d'endommagement du matériau est caractérisé par le critère suivant :

$$g(\xi_t, r_t) = \xi_t - r_t \leq 0 \quad (\text{I.106})$$

D'où, les lois d'évolution sont de forme:

$$\begin{aligned} \dot{d}_t &= \dot{\mu} H(\xi_t, d_t, s, a, p..) \quad H \text{ est une fonction phénoménologique} \\ \dot{r}_t &= \dot{\mu} \end{aligned} \quad (\text{I.107})$$

En respectant des conditions Kuhn-Tucker, on a:

$$g(\xi_t, r_t) \leq 0, \quad \dot{\mu} \geq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\mu} g(\xi_t, r_t) = 0$$

Le domaine d'élasticité exprimé en fonction de la contrainte effective qui caractérise le comportement élastoplastique :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{q}) \leq 0 \quad (\text{I.108})$$

Et les lois d'évolution en sont déduites :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{et} \quad \dot{\underline{q}} = \dot{\lambda} \underline{h}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{q}) \quad (\text{I.109})$$

On a:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{e2}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^e = \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{e2}} : (\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}) \quad (\text{I.110})$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{e2}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{e2}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} - \frac{\partial f}{\partial \underline{q}} \underline{h}} \quad (\text{I.111})$$

On a aussi  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{D}}^{ep} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$

Avec :

$$\underline{\underline{D}}^{ep} = \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{e2}} - \frac{\left[ \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{e2}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right] \otimes \left[ \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{e2}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right]}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{e2}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} - \frac{\partial f}{\partial q} h} \quad (\text{I.112})$$

La loi de comportement s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{D}}^{ep} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \quad (\text{I.113})$$

$$\underline{\underline{D}}^{ep} = (1-d) \underline{\underline{D}}^{ep} - H \left[ \underline{\underline{\sigma}} \otimes \underline{\underline{\sigma}} \right] + \frac{H \left( \underline{\underline{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} - \frac{\partial \psi^0}{\partial q} h \right)}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{e2}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} - \frac{\partial f}{\partial q} h} \left[ \underline{\underline{\sigma}} \otimes \left( \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{e2}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right) \right] \quad (\text{I.114})$$

#### I.4.8.2. Modèle anisotrope élastoplastique

L'endommagement est présenté par un tenseur d'ordre quatre :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{I.115})$$

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{I}} - d \quad \text{et} \quad \underline{\underline{D}} = (\underline{\underline{I}} - d) : \underline{\underline{D}}^0 \quad (\text{I.116})$$

Où  $\underline{\underline{D}}^0; \underline{\underline{D}}$  sont les tenseurs de rigidité du matériau vierge et endommagé.

Energie libre s'écrit avec la participation de l'endommagement et la plasticité :

$$\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, q, \underline{\underline{d}}) = (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{d}}) \psi^0(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, q, \underline{\underline{d}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \psi_{pd}(q, \underline{\underline{D}}) \quad (\text{I.117})$$

Les lois d'état en sont déduites, noter que Ju a choisi le tenseur de rigidité (qui se varie bien sûr) comme variable interne :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} = \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^e \\ -\underline{\underline{Y}} &= \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{D}}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^e \otimes \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \psi_{pd}}{\partial \underline{\underline{D}}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^e \otimes \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \tilde{\psi}_p^0(q) \underline{\underline{D}}^{0-1} \end{aligned} \quad (\text{I.118})$$

Avec une simplification  $\frac{\partial \psi_{pd}}{\partial \underline{\underline{D}}} = \tilde{\psi}_p^0(q) \underline{\underline{D}}^{0-1}$

On adopte la surface seuil d'endommagement

$$g = \hat{G}(-\underline{\underline{Y}}, \dots) - r_t \leq 0 \quad (\text{I.119})$$

qui donne la loi d'évolution :

$$\dot{\underline{\underline{D}}} = -\dot{\mu} \frac{\partial g}{\partial(-\underline{\underline{Y}})} \quad (\text{I.120})$$

En posant :

$$\xi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^e : \underline{\underline{D}}^0 : \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \tilde{\psi}_p^0 \left\{ \frac{2}{3} \frac{G-K}{9KG} I : \left[ \underline{\underline{P}}^+ \underline{\underline{D}}^0 \underline{\underline{P}}^+ \right] : I + \frac{1}{2G} \sum_{i=1}^9 \underline{\underline{e}}_{\underline{\underline{i}}} : \left[ \underline{\underline{P}}^+ \underline{\underline{D}}^0 \underline{\underline{P}}^+ \right] : \underline{\underline{e}}_{\underline{\underline{i}}} \right\} \quad (\text{I.121})$$

le seuil d'endommagement et les lois d'évolution peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} g &= \tilde{G}(\xi, \dots) - r_i \leq 0 \\ H &= \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \xi} \\ \dot{r}_i &= \dot{\mu} H \quad \text{et} \quad \dot{\underline{\underline{D}}} = -\dot{\xi} H \underline{\underline{P}}^+ : \underline{\underline{D}}^0 : \underline{\underline{P}}^+ \end{aligned} \quad (\text{I.122})$$

Où  $K$  est module de compression hydrostatique,  $G$  module de cisaillement

$\underline{\underline{e}}_{\underline{\underline{i}}}$  est l' $i$ -ème tenseur de base d'unité du tenseur d'identité  $I$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Q}} &= \sum_{i=1}^3 \underline{\underline{p}}_i \otimes \underline{\underline{p}}_i \quad ; \quad \underline{\underline{Q}}^+ = \sum_{i=1}^3 H(\varepsilon_i) \underline{\underline{p}}_i \otimes \underline{\underline{p}}_i \\ \underline{\underline{P}}_{ijkl}^+ &= \underline{\underline{Q}}_{ia}^+ \underline{\underline{Q}}_{jb}^+ \underline{\underline{Q}}_{ka} \underline{\underline{Q}}_{lb} \quad ; \quad \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_+ = \underline{\underline{P}}^+ : \underline{\underline{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (\text{I.123})$$

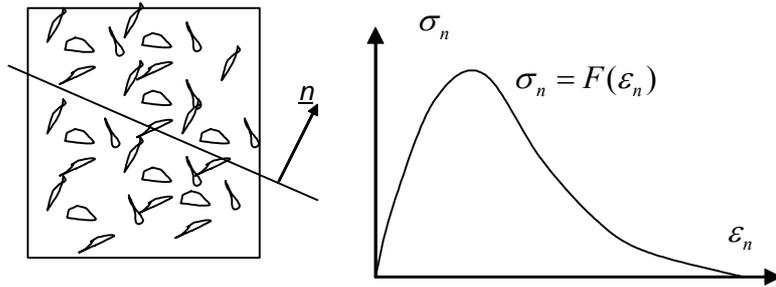
Avec  $\underline{\underline{p}}_i$  est l' $i$ -ème vecteur de base de la direction principale. Le dernier terme dans cette équation s'agit la composante « positive » du tenseur de déformations au sens de Ju.

Ce modèle tient compte à la fois de l'anisotropie, de l'endommagement et des déformations permanentes. Cependant, l'anisotropie n'est pas suffisamment interprétée et il n'y a pas de continuité en relation contraintes-déformations (selon Chaboche [Ref. 22]). Sur le plan pratique, l'utilisation du tenseur quatrième ordre de l'endommagement est difficile numériquement. D'autre part, la fonction phénoménologique  $H$  n'est pas encore bien définie.

## I.5. Les autres classes de modèles

### I.5.1. Modèle microplan

Il s'agit d'établir une relation de type déformation-contrainte dans chaque plan. L'origine de cette idée vient G.I Taylor (1938) [Ref. 119], elle a été utilisée pour la théorie de glissement dans les modèles de plasticité pour les métaux (Badorf et Boudiaski 1949) [Ref. 3]. D'autres approches basées sur cette idée ont été appliquées par la suite au cas des sols et aux roches par Zienkiewicz et Pande (1977-1982) [Ref. 128] et au cas des bétons par Bazant et Oh (1985) [Ref. 10].



Un microplan et la relation déformation-contrainte

Pour chaque « microplan » d'une inclinaison quelconque, on a une relation entre la déformation et la contrainte. Celles ci sont ensuite superposées pour obtenir des tenseurs macroscopiques de déformations et de contraintes.

La matrice de rigidité macroscopique s'obtient selon la condition d'égalité entre la vitesse de dissipation exprimée en terme microscopique et exprimée en terme macroscopique.

Pour simplifier, on accepte dans la microstructure des chargements de type cinématique, c'est à dire les déformations sur un microplan sont déduites du tenseur des déformations globales.

$$\varepsilon_n = n_i n_j \varepsilon_{ij} \quad (\text{I.124})$$

Où  $n_i$  est composante cosinus de la normale à chaque microplan.

$\varepsilon_n$  est la composant normale des déformations pour chaque plan.

$\varepsilon_{ij}$  sont des composantes du tenseur global des déformations.

La relation-clé entre la contrainte normale et la déformation normale pour chaque plan s'exprime (à noter que cette loi peut être linéaire, non-linéaire, croissante ou adoucissante...):

$$\sigma_n = F(\varepsilon_n) \quad (\text{I.125})$$

La loi de comportement incrémentale s'écrit:

$$d\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} : d\underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{I.126})$$

Où, sous forme indicielle :

$$D_{ijkl} = \int n_i n_j n_k n_l f(\underline{n}) F'(\varepsilon_n) dS \quad (\text{I.127})$$

Dans cette expression, la fonction  $f(\underline{n})$  présente la densité de microfissure selon des directions, il s'agit en fait de prendre en compte l'effet d'anisotropie du béton.

Par rapport à l'approche numérique selon de la méthode des éléments finis, on peut obtenir la matrice tangente par la méthode d'intégration numérique. Ceci est effectuée par l'intégration sur une unitaire hémisphère.

En comparaison avec les méthodes macroscopiques, on tire :

- Ce modèle est sophistiqué et peut décrire la propagation de fissure selon les directions à un point matériel au cours de chargement.
- Les modèles macroscopiques ne fournissent pas suffisamment des informations concernant le développement des fissures. On peut utiliser le modèle microplan pour déterminer les paramètres du matériau (longueur caractéristique ou largeur de la bande de fissuration).

Cependant, et vu de sa complexité, il est important de souligner l'existence de certaines difficultés liées à utilisation de ce modèle pour simuler le comportement globale à l'échelle de la structure. A ce titre, Bazant 1986 [Ref. 8], recommande d'utiliser ce modèle pour déterminer les paramètres caractéristiques du matériau.

### I.5.2. Modèle de fissuration intégrée

Ce modèle est établi par Milan Jirasek et Thomas Zimmermann [Ref. 57, Ref. 58]. Les équations constitutives sont élaborées par la loi de traction-séparation en se basant sur l'endommagement pour éliminer le phénomène de blocage des contraintes. Les auteurs introduisent ainsi des éléments finis avec un saut de déplacement afin de simuler la fissuration.

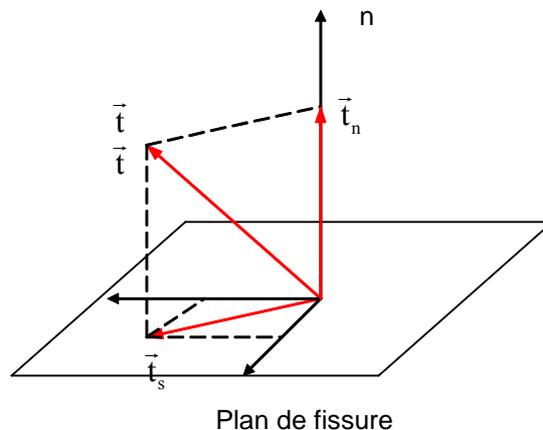
On se limite au cas de 2D où nous désignons :

$\underline{e}$  : vecteur de séparation (vecteur saut de déplacement)

$\gamma$  : paramètre de complaisance qui varie de 1 à l'infini (comme variable d'endommagement).

$\hat{\underline{D}}$  le tenseur de rigidité de deuxième ordre (correspondant à  $\gamma=1$ )

L'énergie libre est choisie comme suit :



$$\Psi(\underline{e}, \gamma) = \frac{1}{2\gamma} \underline{e} \hat{\underline{D}} \underline{e} \quad (\text{I.128})$$

Si  $\underline{t}$  étant la traction transmise par la fissure (discontinuité) est la variable associée à  $\underline{e}$ , la vitesse de dissipation par une surface unitaire s'écrit :

$$D = \underline{t}\dot{\underline{e}} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (\text{I.129})$$

Selon la théorie thermodynamique, nous avons des équations d'état :

$$\begin{aligned} \underline{t} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{e}} = \frac{1}{\gamma} \underline{\hat{D}} \underline{e} \\ \Gamma &= -\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} = \frac{1}{2\gamma^2} \underline{e} \underline{\hat{D}} \underline{e} \end{aligned} \quad (\text{I.130})$$

Où  $\Gamma$  est la force thermodynamique associée à  $\gamma$ .

On peut déduire :

$$D = \underline{t}\dot{\underline{e}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{e}} \dot{\underline{e}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \dot{\gamma} = \Gamma \dot{\gamma} \quad (\text{I.131})$$

Le tenseur  $\underline{\hat{D}}$  est assumé défini positif, donc :

$$\Gamma \geq 0 \text{ et } \dot{\gamma} \geq 0 \quad (\text{I.132})$$

Considérons le tenseur de rigidité dans le repère local de la fissure dont le premier axe se confond avec la normale de la fissure :

$$\underline{\hat{D}} = \begin{bmatrix} D_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & D_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & D_{ss} \end{bmatrix} \quad (\text{I.133})$$

La loi de traction – séparation :

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{D_{nn}}{\gamma} e_n = g(n) \\ t_s &= \frac{D_{ss}}{\gamma} e_s \end{aligned} \quad (\text{I.134})$$

En ce qui concerne la fonction de charge, on utilise la norme Euclidienne en introduisant la séparation équivalente :

$$\tilde{e} = \sqrt{e_n^2 + \frac{D_{ss}}{D_{nn}} e_s^2} = \sqrt{\frac{\underline{e} \underline{\hat{D}} \underline{e}}{D_{nn}}} \quad (\text{I.135})$$

Par exemple, si on accepte une loi exponentielle :

$$t_n = g(e_n) = f_t \exp\left(-\frac{e_n}{e_f}\right) \quad (\text{I.136})$$

Où  $f_t$  est la résistance à la traction.

$e_f = G_f / f_t$  avec  $G_f$  est l'énergie de fissuration en mode I.

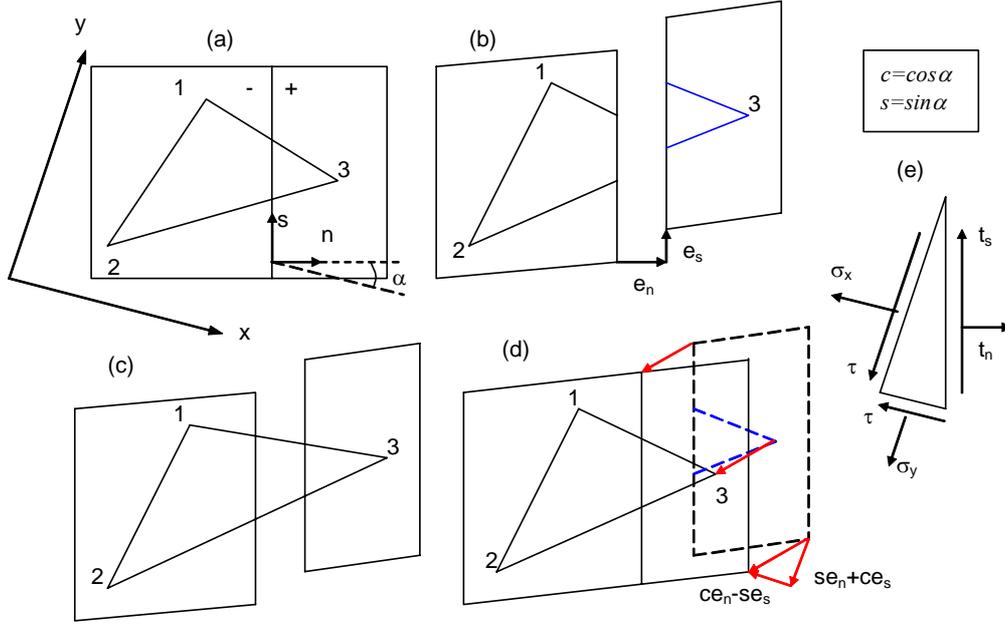
La fonction de charge est donc :

$$f(\tilde{\epsilon}, \gamma) = F - \gamma = \frac{D_{nn} \tilde{\epsilon}}{f_t} \exp\left(\frac{\tilde{\epsilon}}{e_f}\right) - \gamma \quad (\text{I.137})$$

Avec des conditions :

$$\dot{\gamma} \geq 0; \quad f \leq 0; \quad \dot{\gamma} f = 0 \quad (\text{I.138})$$

Le modèle considère qu'il y a un saut de déplacement au sein de chaque élément fissuré. Afin d'établir une formulation de la loi de comportement, on conçoit un élément convenable avec une discontinuité. On travaille ensuite avec l'élément triangulaire à trois nœuds.



Principe du modèle de fissuration intégrée

La partie du matériau est supposée élastique.

Désignons le vecteur de déplacement nodal :

$$\underline{d} = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3\}^T \quad (\text{I.139})$$

Nous avons l'équation cinématique :

$$\underline{\epsilon}^e = [B](\underline{d} - [H]\underline{e}) \quad (\text{I.140})$$

Où  $[B]$  est la matrice de déformation-déplacement classique.

Et  $[H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}^T$  (figure (d))

Où  $c$  et  $s$  sont définis sur la figure (e).

L'équation statique est obtenue en considérant la continuité du champ des contraintes :

$$[P]^T \underline{\sigma} = \underline{t} \quad (\text{I.141})$$

Avec

$$[P] = \begin{bmatrix} c^2 & -cs \\ s^2 & cs \\ 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.142})$$

La loi de comportement du béton s'écrit classiquement :

$$\underline{\sigma} = \underline{D}_e \underline{\varepsilon}^e \quad (\text{I.143})$$

La loi de comportement de la fissure est comme on a mentionnée :

$$\underline{t} = \frac{1}{\gamma} \hat{D} \underline{e} \quad (\text{I.144})$$

Remplacer (I.140) dans (I.143), on a :

$$\underline{\sigma} = \underline{D}_e [B] (\underline{d} - H \underline{e}) \quad (\text{I.145})$$

Avec (I.141) et (I.145) :

$$\underline{t} = [P]^T \underline{D}_e [B] (\underline{d} - [H] \underline{e}) \quad (\text{I.146})$$

En remplaçant le membre gauche avec l'expression dans (I.144), on a :

$$\frac{1}{\gamma} \hat{D} \underline{e} = [P]^T \underline{D}_e [B] (\underline{d} - [H] \underline{e}) \quad (\text{I.147})$$

Finalement, la forme de la loi de comportement s'écrit :

$$\left( \hat{D} + \gamma [A] [H] \right) \underline{e} - \gamma [A] \underline{d} = 0 \quad (\text{I.148})$$

Où  $[A] = [P]^T \underline{D}_e [B]$

Il s'agit d'un modèle appartenant à la classe fissuration-d'endommagement. La fissuration est représentée par la loi locale de comportement de la fissure, quant à l'endommagement, il est représenté par le paramètre  $\gamma$  qui permet de résoudre le problème de blocage de contraintes. Cependant, l'exploitation de ce modèle impose le développement d'un nouveau type d'élément fini. De plus, on trouve avec ce modèle les mêmes difficultés rencontrées avec les modèles basés sur la théorie de la fissuration distribuée. Ceci concerne notamment la prise en compte des phénomènes non-linéaires (unilatéralité, anélasticité...) et le traitement des chargements complexes.

Le tableau suivant récapitule l'ensemble des modèles analysés :

**Tableau récapitulatif des modèles existants pour le béton**

Classe	Modèle	Description	Remarques
<b>Modèles de fissuration</b>	Mécanique linéaire de la rupture	Etat de contraintes à la pointe de la fissure.	Applicable pour décrire la propagation de la fissure au niveau local.
	Mécanique non-linéaire de la rupture	Etat de contraintes à la pointe de la fissure avec la zone plastifiée.	Applicable pour décrire la propagation de la fissure au niveau local.
	Méthode d'une seule fissure fixe.	Définir la loi de comportement si il y a une fissure.	Simple, dépendant du maillage, non applicable aux chargements complexes.
	Théorie de la fissuration distribuée	Définir la loi comportement d'un milieu fissuré. Prise en compte de l'effet anisotrope.	Blocage de contraintes. Non objectif à la taille de maillage, difficile à coupler avec les autres non-linéarités.
<b>Modèles élastoplastiques</b>	Modèle de Reynouard	Elastique, rupture en traction ; élastoplastique associée en compression.	Non prise en compte de l'endommagement. Pas de phase adoucissante en traction.
	Modèle de Frantzeskakis	Elastique-Fragile en traction. Elastoplastique non associée en compression.	Pas de l'endommagement. Pas de phase adoucissante en traction.
	Modèle de Lubliner et al.	Elastoplasticité liée avec l'énergie de rupture.	Pas de l'endommagement.
<b>Modèles d'endommagement</b>	Modèle de Mazars	Isotrope, critère en déformation équivalente. Extension est la seule responsable de l'endommagement.	Pas d'effet anélastique, unilatéral. Applicable aux cas de chargement proportionnel.
	Modèle de La Borderie	Isotrope, deux mode indépendant de l'endommagement, traitement de l'effet unilatéral, anélastique.	Partie anélastique est toujours sphérique.
	Modèle de Lubliner et al.	Isotrope, couplage endommagement - plasticité lié avec l'énergie de rupture.	Difficile à identifier les paramètres.
	Modèle de Simo et al.	Utilisation plusieurs surfaces seuils actives ou non avec l'hypothèse de dissipation maximale.	Pas prise en compte l'effet anélastique.
	Modèle de Ramtani	Anisotrope, trois surface d'endommagement en déformation. Effet unilatéral, anélastique.	Tenseur d'endommagement de 2 <sup>e</sup> ordre. La matrice de rigidité sécante n'est pas toujours symétrique.
	Théorie de Ju	Anisotrope, effet unilatéral, anélastique.	Tenseur d'endommagement de 4 <sup>e</sup> ordre. Compliqué et non continu.
<b>Autres classes de modèles</b>	Modèle microplan	Construire la loi de comportement global à partir des lois de comportement dans les plans de différentes directions.	Complexe, difficile à appliquer dans les calculs de structures.
	Modèle de fissuration intégrée	Intégration d'un élément de fissuration au sein un élément du matériau. Introduction d'une variable d'endommagement.	Besoin de nouveau type d'élément. Lié à la théorie de la fissuration distribué, difficile à coupler avec des phénomènes non-linéaires du béton.

## **I.6. Conclusions**

Dans ce chapitre, on a présenté plusieurs classes de modèles de comportement du béton.

Les modèles de la fissuration distribuée représentent bien le comportement adoucissant et l'effet anisotrope du béton. Cependant, cette approche ne se base pas sur la théorie de la thermodynamique des milieux continus. Par conséquent, il est difficile d'intégrer la déformation permanente ainsi que d'autres phénomènes non-linéaires du comportement du béton. De plus, cette théorie ne permet pas d'obtenir des résultats fiables si ce n'est dans le cas de configurations simples dominées par le mode I de fissure. Sur le plan de la résolution numérique, on rencontre des problèmes d'instabilité. Par exemple le traitement simultané de plusieurs fissures dans la théorie de la fissuration distribuée, l'erreur cumulée dans le modèle de fissuration tournante... D'autre part, l'objectivité vis à vis de la taille des éléments et l'effet de blocage des contraintes constituent aussi des problèmes de fond dans le cadre de cette théorie.

L'approche élastoplastique est une méthode très utilisée pour des calculs des structures. On néglige souvent le comportement adoucissant en traction et on considère le comportement en compression par l'analogie de plasticité en utilisant des critères adaptés : Mohr-Coulomb, Drucker-Prager...

La théorie continue d'endommagement est ainsi très utilisée pour le béton. Plusieurs classes de modèles ont été développés: les modèles isotropes [Ref. 74, Ref. 66], les modèles anisotropes [Ref. 60, Ref. 111], les modèles d'ordre élevé de l'endommagement [Ref. 91]... Ces modèles se basent sur la théorie de la thermodynamique des milieux continus. L'effet anélastique de déformation est introduite soit par couplage avec la plasticité soit en postulant une expression du potentiel anélastique. Cependant, à nos jours, quels que soient les modèles plus ou moins sophistiqués, il n'existe aucun code qui soit capable de décrire de façon fiable et simple le comportement du béton, surtout lorsque l'on veut prendre en compte l'anisotropie, le comportement unilatéral et les déformations permanentes.

Les méthodes microscopiques ne peuvent pas refléter le comportement global et le modèle d'interaction des microfissures a besoin d'un nombre très grand de paramètres à identifier... Les problèmes rencontrés ont pour l'origine de la combinaison de différents phénomènes qui caractérisent le comportement du béton, tels que fissuration, endommagement, anélasticité, etc.

Il est donc nécessaire de poursuivre les recherches sur le comportement du béton. La présente étude vise à développer des modèles simples et prédictifs du comportement du béton afin de les intégrer dans le code de calcul SYMPHONIE [Ref. 82] et de l'appliquer aux cas de structures en béton. Nous nous proposons dans ce qui suit une amélioration de la théorie de la fissuration distribuée (au chapitre II) et un développement d'un nouveau modèle d'endommagement (au chapitre III).

**CHAPITRE II:  
DEVELOPPEMENT D'UN MODELE AMELIORE BASE SUR LA  
THEORIE DE LA FISSURATION DISTRIBUEE**

## **II.1. Introduction**

Nous avons vu au chapitre I que le modèle de la fissuration distribuée avec une fissure fixe conduit généralement au phénomène de blocage des contraintes. Ce blocage conduit par suite à un comportement rigidifiant de la structure, dû à la non dissipation des contraintes de cisaillement résiduelles malgré l'ouverture complète de la fissure. Le fait de choisir le coefficient de conservation de cisaillement constant n'est pas la seule cause de ce phénomène. Même si ce coefficient diminue avec l'ouverture de la fissure, le problème n'est pas résolu car l'écriture proposée ne tient pas compte correctement des règles de dérivation. Sur le plan physique, la fissure doit perdre totalement sa rigidité au cisaillement quand la contrainte normale à cette fissure tend vers 0. La loi locale sécante de la fissuration vérifie cette propriété, mais le fait de prendre cette même loi sécante dans une formulation incrémentale cumule les erreurs et conduit souvent à des résultats non prédictifs (voir la formule I.27 du chapitre I). Autrement dit, la théorie de la fissuration distribuée propose un couplage entre traction et cisaillement non adapté à une formulation incrémentale de la loi locale utilisée.

L'autre difficulté de la théorie de la fissuration distribuée concerne le traitement simultané de plusieurs fissures en un point matériel. La méthode de fissuration multiple ou de fissuration tournante ne considère comme active qu'une seule fissure. Tandis que dans la réalité, plusieurs fissures peuvent exister en même temps et dans de différentes directions. De plus, le découplage entre les fissures n'est pas très réaliste car il existe probablement des interactions entre ces différentes fissures. Ces interactions influencent sur le comportement global de l'élément. En effet, sous chargements complexes, de nouvelles fissures peuvent s'initier alors que les fissures existantes continuent à évoluer en se propageant, se refermant ou en s'ouvrant. Le comportement devient anisotrope avec des changements de rigidité selon les états et le nombre de fissures.

Dans ce chapitre, on présente une amélioration des modèles de la fissuration distribuée existants, obtenue en réécrivant la loi incrémentale locale de la fissure. Dans la nouvelle formulation du modèle on va prendre en compte explicitement le couplage traction et cisaillement dans la loi de comportement locale. Pour ce qui concerne l'aspect multi fissures, un algorithme spécifique sera proposé pour la résolution de ce type de problème.

## II.2. Nouvelle loi locale de la fissure

### II.2.1. Expression de la nouvelle loi

Il s'agit d'établir la nouvelle loi de comportement de la fissuration en réécrivant les équations constitutives de la loi de comportement local d'une fissure  $D^f$ .

La méthode de la fissuration distribuée accepte la même relation de comportement sécant qu'incrémental de la fissure. Ceci n'est vrai que si la matrice de rigidité de la fissure est constante au cours de sa propagation. Le fait de choisir un coefficient de conservation de cisaillement constant conduit à un blocage des contraintes car la contrainte tangente de la fissure ne diminue jamais au cours d'ouverture de la fissure. Par contre, si ce coefficient est une fonction décroissante de l'ouverture de fissuration, la matrice de rigidité tangente n'est plus constante mais on continue à cumuler les erreurs, faute d'utilisation de la loi sécante à la place de la loi incrémentale. Par conséquent, on accumule avec les incréments des rigidités résiduelles même si la fissure est complètement ouverte.

Se plaçant dans le repère local lié à une fissure, le travail à effectuer consiste à trouver la relation entre l'incrément de contrainte dans le milieu fissuré et l'incrément de déformation correspondante.

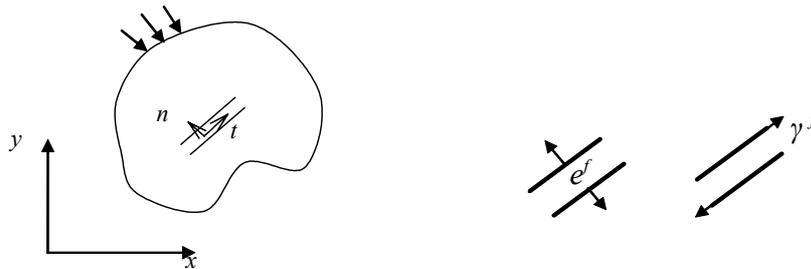


Figure II-1. Domaine fissuré et l'état de déformation de la fissure

Pour la contrainte normale à la fissure, on garde la même relation classique (Figure II-2) :

$$\Delta s_n^f = D^f \cdot \Delta e_n^f \quad (\text{II.1})$$

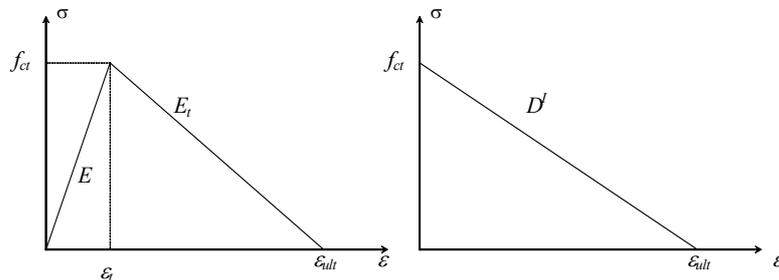


Figure II-2. Loi de comportement en traction uniaxiale du béton.

où,  $D^f$  est la pente adoucissante de comportement de mode I de la fissure :

$$D^f = \frac{EE_t}{E - E_t} \quad (\text{II.2})$$

A l'initiation de la fissure selon le critère de Rankine par exemple (contrainte majeure de traction), dans le repère local de fissure, nous avons :

$$\gamma^f = 0 \text{ et par conséquent } t^f = 0 \quad (\text{II.3})$$

Nous cherchons alors une loi de comportement du type :

$$t^f = A\gamma^f \quad (\text{II.4})$$

Où  $A$  est une fonction à identifier.

Au cours de l'ouverture de la fissure, le module de cisaillement diminue.  $A$  est donc une fonction de la déformation normale de la fissure :

$$A = Bf(e_n^f) \quad (\text{II.5})$$

Dans cette relation,  $B$  est une constante proportionnelle au module de cisaillement du béton sain  $G$ .

Quand la fissure est complètement ouverte, c'est à dire que  $e_n^f$  est égale à la déformation ultime  $e_{ult}$ , la fissure ne transmet plus de contrainte de cisaillement, la contrainte tangente s'annule. Nous pouvons alors écrire :

$$A = B \left( 1 - \left( \frac{e_n^f}{e_{ult}} \right)^p \right) \quad (\text{II.6})$$

ou encore:

$$t^f = G\gamma^f \left( 1 - \frac{e_n^f}{e_{ult}} \right) \quad (\text{II.7})$$

La différentiation de cette relation donne :

$$\Delta t^f = -\frac{G\gamma^f}{e_{ult}} \Delta e_n^f + G \left( 1 - \frac{e_n^f}{e_{ult}} \right) \Delta \gamma^f \quad (\text{II.8})$$

A partir de (II.1) et (II.8), on déduit la loi de comportement locale pour la fissuration qui fait apparaître un nouveau terme de couplage entre l'ouverture de la fissure et le glissement en plus des termes diagonaux :

$$\begin{Bmatrix} \Delta S_n^f \\ \Delta t^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^I & 0 \\ -\frac{G\gamma^f}{e_{ult}} & G \left( 1 - \frac{e_n^f}{e_{ult}} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta e_n^f \\ \Delta \gamma^f \end{Bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Si la fissure est complètement ouverte la contrainte tangentielle est nulle

Nous remarquons que ce terme prend une valeur négative.

## II.2.2. Discussion

La nouvelle loi de comportement local de fissuration, sous forme incrémentale, prend en compte explicitement le couplage traction – cisaillement. L'incrément de contrainte de cisaillement est une fonction non seulement de l'incrément de déformation en traction, en cisaillement mais aussi de l'état de déformation et de contrainte. Par contre, l'incrément de contrainte normale n'est pas influencé par l'incrément de déformation de cisaillement.

Cette loi, développée selon une démarche mathématique rigoureuse, conduit à des contraintes locales nulles dès que la fissure est complètement ouverte. Elle supprime donc le problème de rigidification dû à l'augmentation indéfinie des contraintes de cisaillement.

Cependant, avec cette nouvelle loi, la matrice tangente de rigidité n'est plus symétrique. Néanmoins, nous avons adapté la résolution de ce système avec un solveur de système d'équations spécifique aux systèmes non symétriques couplés avec un processus itératif [Ref. 28, Ref. 83].

## II.3. Traitement simultané de plusieurs fissures

### II.3.1. Loi générale de comportement du matériau fissuré

Pour des raisons de simplicité, le modèle sera présenté en 2D, une extension en 3D se fait d'une manière naturelle, sachant que les modes de rupture II et III jouent des rôles identiques.

On va écrire sous forme générale matricielle le comportement du béton avec la présence active de  $n$  fissures dans  $n$  différentes directions.

Se plaçant dans l'hypothèse des petites perturbations, la déformation totale  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  est décomposée en deux composantes : la déformation de la fissuration  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^f$  et celle du béton sain entre fissures  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e$  :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^b + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^f \quad (\text{II.10})$$

La déformation de la fissure  $i$  dans ses coordonnées propres s'exprime sous la forme :

$$\Delta\mathbf{e}_i^f = \langle \Delta e_{ni}^f \quad \Delta\gamma_i^f \rangle \quad (\text{II.11})$$

Cette déformation est reliée à celle exprimée dans les coordonnées globales par la matrice de passage  $\mathbf{N}_i$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i^f = \mathbf{N}_i \Delta\mathbf{e}_i^f \quad (\text{II.12})$$

Nous avons ensuite la relation cinématique :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^f = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \Delta\mathbf{e}_i^f \quad (\text{II.13})$$

Parallèlement, pour la contrainte de fissure  $i$  dans son repère propre, on a le vecteur :

$$\Delta\mathbf{s}_i^f = \langle \Delta s_{ni}^f \quad \Delta t_i^f \rangle \quad (\text{II.14})$$

Et la relation avec les contraintes globales est donnée par :

$$\Delta\mathbf{s}_i^f = \mathbf{N}_i^T \Delta\boldsymbol{\sigma} \quad (\text{II.15})$$

Pour la partie non fissurée, on a la loi de comportement élastique :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^b \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^b \quad (\text{II.16})$$

Avec :

$$\mathbf{D}^b = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

Où,  $E$  et  $\nu$  sont le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau. Tandis que l'équation constitutive de la fissure  $i$  est donnée par :

$$\Delta\mathbf{s}_i^f = \mathbf{D}_i^f \Delta\mathbf{e}_i^f \quad (\text{II.18})$$

$$\Delta\mathbf{e}_i^f = [\mathbf{D}_i^f]^{-1} \Delta\mathbf{s}_i^f \quad (\text{II.19})$$

A partir de (II.10) et (II.16), nous pouvons écrire :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^b \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^b = \mathbf{D}^b (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^f) \quad (\text{II.20})$$

En remplaçant la partie de déformation de fissure par la relation (II.13), nous avons :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^b (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \Delta\mathbf{e}_i^f) = \mathbf{D}^b (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i [\mathbf{D}_i^f]^{-1} \Delta\mathbf{s}_i^f) \quad (\text{II.21})$$

Et en prenant en compte de (II.15), on obtient :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^b (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i [\mathbf{D}_i^f]^{-1} \mathbf{N}_i^T \Delta\boldsymbol{\sigma}) \quad (\text{II.22})$$

Ou encore :

$$\left( \mathbf{I} + \mathbf{D}^b \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i [\mathbf{D}_i^f]^{-1} \mathbf{N}_i^T \right) \Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^b \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II.23})$$

Ce qui aboutit à la loi de comportement du béton fissuré :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{D}^b \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i [\mathbf{D}_i^f]^{-1} \mathbf{N}_i^T \right)^{-1} \mathbf{D}^b \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II.24})$$

Donc :

$$\mathbf{D}^{bf} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{D}^b \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i [\mathbf{D}_i^f]^{-1} \mathbf{N}_i^T \right)^{-1} \mathbf{D}^b \quad (\text{II.25})$$

### II.3.2. Les cas particuliers

#### Cas particulier d'une fissure complètement ouverte :

Considérons le cas particulier d'une seule fissure complètement ouverte. La matrice locale  $\mathbf{D}^f$  s'annule, on ne peut plus appliquer la loi globale. Le matériau perd sa rigidité dans la direction normale à la fissure.

En se basant sur la compatibilité cinématique, dans le repère local de la fissure, la loi de comportement devient :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{local} = \mathbf{D}_{local}^b * \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{local} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{local} \quad (\text{II.26})$$

La transformation de la loi de comportement dans le repère global est alors faite au moyen de la matrice de passage  $\mathbf{T}(3 \times 3)$  qui est en fonction de la direction de la fissure :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{local} = \mathbf{T}^T \Delta\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{local} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II.27})$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{T}^{-1})^T \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}^{-1} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_*^b \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II.28})$$

**Cas particulier de 2 fissures complètement ouvertes :**

Maintenant, on considère le cas où il y a deux fissures complètement ouvertes, à partir de la relation statique (II.15), on a :

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{s}_1^f &= \Delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{0} \\ \Delta\mathbf{s}_2^f &= \Delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

D'où :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (\text{II.30})$$

Donc, le matériau perd totalement sa rigidité :

$$\mathbf{D}^{bf} = \mathbf{0} \quad (\text{II.31})$$

**Cas particulier de  $n$  fissures existantes avec une seule fissure complètement ouverte :**

On considère le matériau avec la rigidité initiale  $\mathbf{D}_*^b$  et contenant  $(n-1)$  fissures. La loi de comportement (II.25) s'écrit :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{D}_*^b \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{N}_i [\mathbf{D}_i^f]^{-1} \mathbf{N}_i^T \right)^{-1} \mathbf{D}_*^b \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II.32})$$

Alors, on peut écrire comme la loi de comportement du béton fissuré sous la forme générale :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{D}^* \sum_{i=1}^{n-nbfo} \mathbf{N}_i [\mathbf{D}_i^f]^{-1} \mathbf{N}_i^T \right)^{-1} \mathbf{D}^* \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II.33})$$

Où  $nbfo$  : est nombre de fissures complètement ouvertes.

Et :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^* &= \mathbf{D}^b \text{ si } nbfo = 0 \\ \mathbf{D}^* &= \mathbf{D}_*^b \text{ si } nbfo = 1 \\ \mathbf{D}^* &= \mathbf{0} \text{ si } nbfo = 2 \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

## II.4. Implantation du modèle et validation

### II.4.1. Problème de Willam et al. [Ref. 124]

Pour illustrer le problème de blocage des contraintes avec les modèles de la fissuration distribuée, Willam et al. [Ref. 124] ont proposé un cas de figure élémentaire : celui d'un vomule sollicité de façon homogène en traction – cisaillement (Figure II-3). L'exemple consiste à prendre un seul élément et à appliquer les sollicitations suivantes:

- Traction simple :  $\Delta\varepsilon_{xx} : \Delta\varepsilon_{yy} : \Delta\gamma_{xy}=1 : -\nu : 0$  jusqu'à l'initiation de la première fissure.
- Puis bi traction+ cisaillement : l'état de chargement est alors proportionnel à  $\Delta\varepsilon_{xx} : \Delta\varepsilon_{yy} : \Delta\gamma_{xy}=0,5 : 0,75 : 1,00$

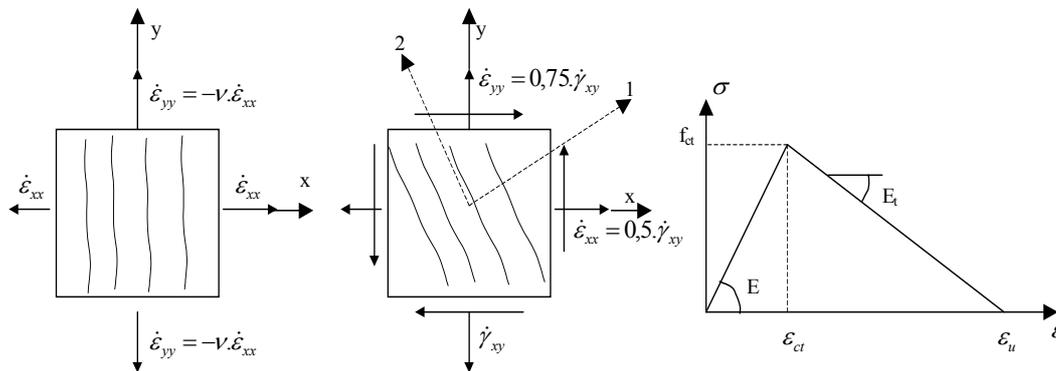


Figure II-3. Exemple élémentaire de Willam et al. [Ref. 124]

Les caractéristiques du béton sont les suivantes :

Module d'Young :  $E=10\ 000\text{N/mm}^2$

Coefficient de Poisson :  $\nu=0,2$

Résistance à la traction :  $f_{ct}=1\text{N/mm}^2$

Déformation ultime à contrainte nulle :  $\varepsilon_{ult}=0,0003$

Nous avons calculé la réponse des trois modèles classiques de la fissuration distribuée :

Méthode d'une seule fissure fixe ;

Méthode de fissuration tournante ;

Méthode de fissuration multiple ;

Dans les graphiques suivants on a noté :

*MSFF*: Modèle d'une seule fissure fixe (classique) ;

*MFT* : Modèle de fissuration tournante ;

*MFMM* : Modèle de fissuration multiple (classique) avec un angle seuil de  $15^\circ$  ;

*MSFF2* : nouveau modèle avec une seule fissure fixe ;

*MFMM2* : nouveau modèle de fissuration multiple avec l'angle seuil de  $15^\circ$ .

Dans les modèles classiques, on prend le coefficient de conservation de cisaillement :

$$\beta = \left(1 - \frac{\varepsilon^f}{\varepsilon_u}\right)^2 \quad (\text{II.35})$$

pour les modèles *MSFF* et *MFM*

et :

$$\beta = \frac{(\sigma_{p1} - \sigma_{p2})}{2G(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})} \quad (\text{II.36})$$

pour le modèle *MFT*.

Tandis que pour les calculs avec *MSFF2* et *MFM2*, on a appliqué la nouvelle loi de fissuration formulée au paragraphe précédent.

### Résultats et commentaires :

La Figure II-7 montre l'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la déformation tangentielle. La comparaison avec les résultats de la littérature montre que le comportement rigide signalé par de nombreux auteurs (Willam et al. [Ref. 124] de Rots et De Borst [Ref. 115], Rots et Blauwendraad [Ref. 114]) n'existe plus, pour la nouvelle loi locale, le cisaillement s'annule quand la fissure est complètement ouverte. Le résultat est remarquable car cette propriété est atteinte même avec le modèle à une seule fissure fixe.

La réponse contrainte - déformation dans le repère principal est tracée sur la Figure II-4. Le phénomène de ré augmentation de la contrainte principale après fissuration est clairement mis en évidence. Cette augmentation se produit même pour une fonction décroissante du facteur de conservation du cisaillement. Cela dû au fait qu'on ne permet qu'à une seule fissure de propager, la contrainte principale diminuant dans un premier temps avant d'augmenter à nouveau puis de dépasser largement la limite élastique de 1 MPa du matériau. En comparant le modèle classique à sa version améliorée, on voit que le comportement correspondant à cette dernière est moins rigidifiant que dans le cas du premier modèle. La Figure II-7 montre que le comportement du modèle fissuration distribuée dans sa nouvelle formulation « *fissuration multiple MFM2* » ne rencontre pas le blocage des contraintes. Les courbes obtenues par la nouvelle loi locale de fissure montre que l'on a pu assurer le retour à 0 de la contrainte de cisaillement et donc limiter considérablement l'effet de blocage des contraintes.

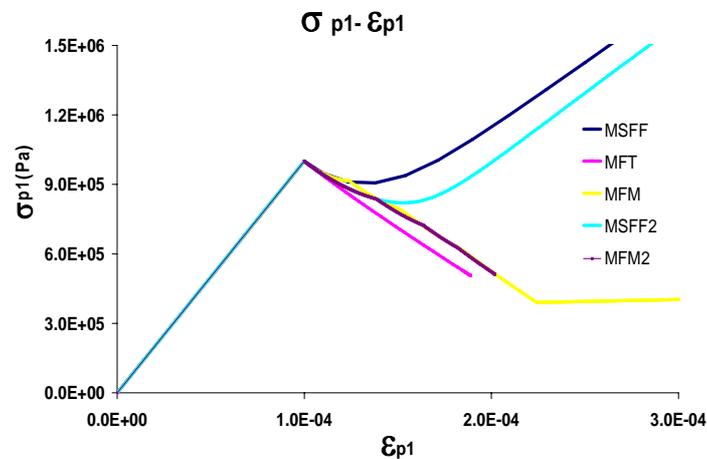


Figure II-4 : Contrainte principale- déformation principale, illustration du blocage des contraintes

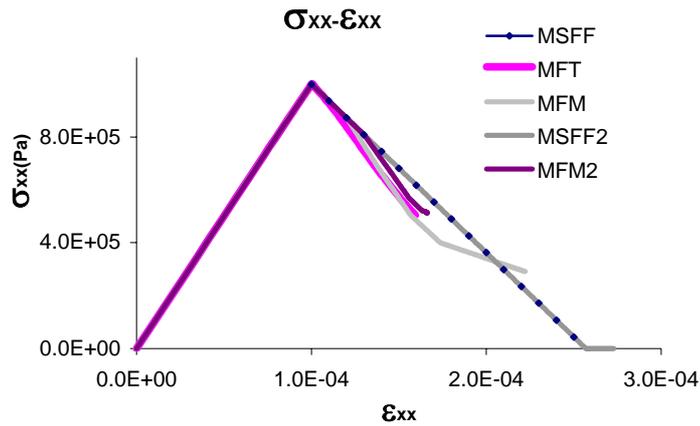


Figure II-5 : Contrainte  $xx$ - déformation  $xx$  pour les différents modèles

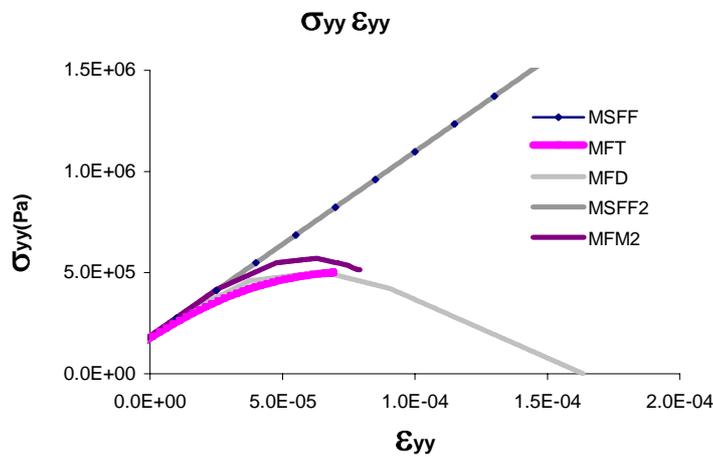


Figure II-6 : Contrainte  $yy$  - déformation  $yy$  pour les différents modèles

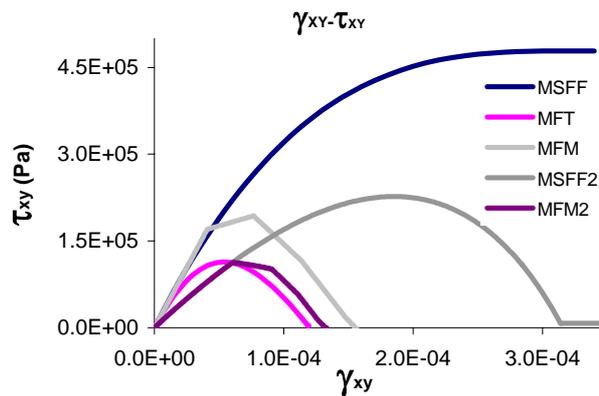


Figure II-7 : Courbes cisaillement- glissement pour les différents modèles

#### II.4.2. Algorithme de traitement simultané de plusieurs fissures : MULTIFISS

Pour le traitement de plusieurs fissures, nous avons utilisé un critère de fissuration basé sur la contrainte principale majeure de traction. C'est-à-dire que, l'initiation de la fissure se fait

quand la contrainte normale majeure atteint la résistance à la traction  $f_{ct}$ , la normale à la nouvelle fissure étant donnée par la direction de cette contrainte principale.

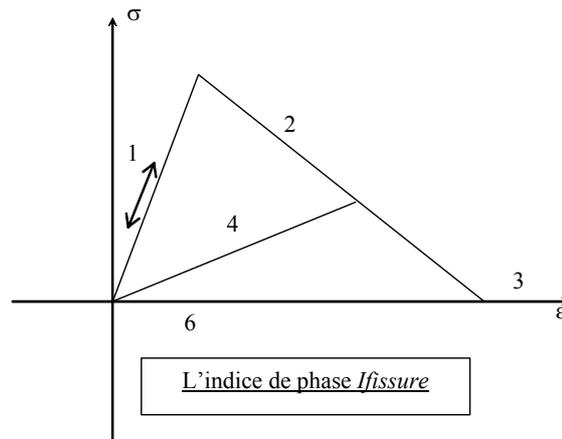


Figure II-8. Les phases de la fissure.

Au cours de chargement, les fissures peuvent « changer de phase », par exemple en passant de la phase d'adoucissante à la phase de décharge. Chaque fissure est donc caractérisée non seulement par l'état de contrainte et de déformation, mais aussi par la possibilité de changement de phase. Ainsi, la phase courante de chaque fissure est gardée en mémoire et notée par un indice  $I_{fissure}$  (Figure II-8).

Dans un incrément de déformation, on doit vérifier l'initiation de la nouvelle fissure et ainsi de contrôler le changement de phase pour les  $n$  fissures existantes. Cette opération est réalisée au moyen d'une série des coefficients  $cof(i)$  ( $i=1 \dots n$ ,  $n$  étant le nombre de fissures existantes dans l'élément), l'indice pour lequel on prévoit le changement de phase. Il est ainsi nécessaire de subdiviser l'incrément de déformation en utilisant  $n$  sous-incréments où chaque sous-incrément correspond à un changement de phase d'une fissure. Ainsi, le calcul du nombre de sous-incréments est effectué en fonction de nombre de fissures qui changement de phase et du coefficient multiplicateur de l'incrément de déformation requis pour initier le changement de phase ou pour initier une nouvelle fissure. Le traitement de chaque fissure est effectué lors de chaque sous-incrément.

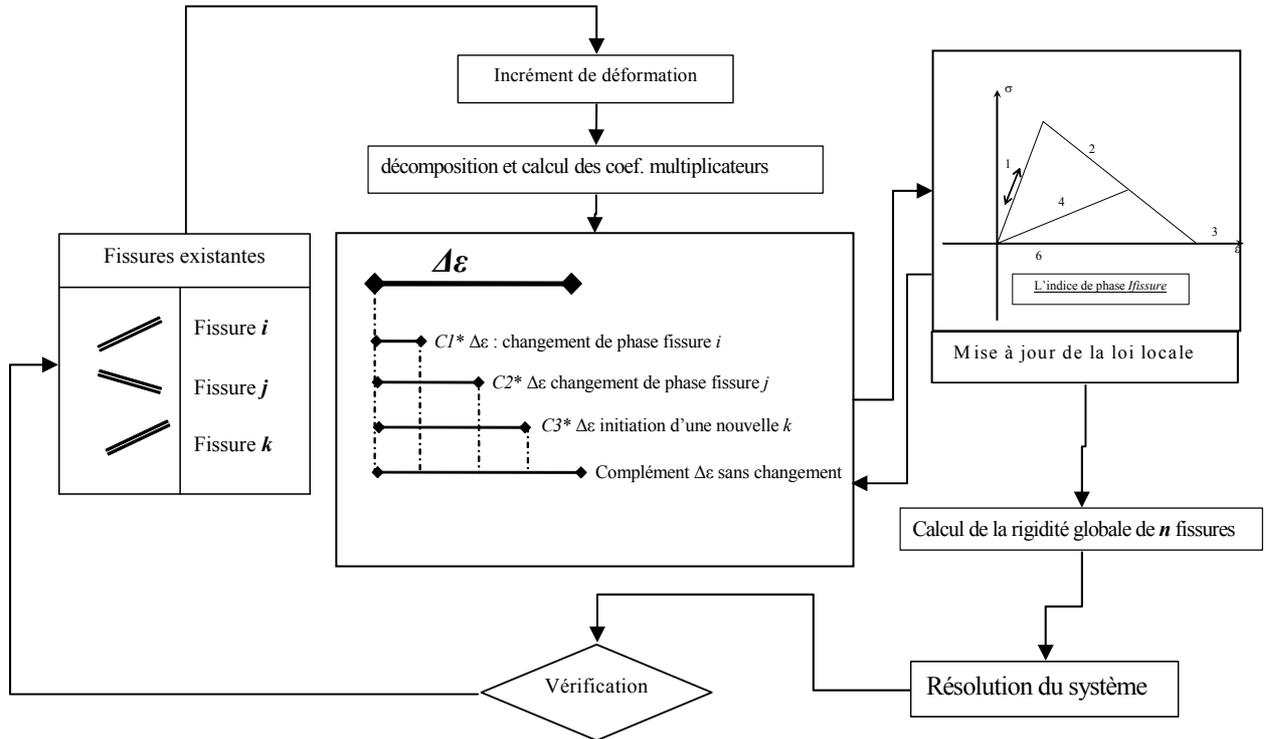


Figure II-9. Schéma de traitement multifissures

L'algorithme est résumé par l'organigramme suivant :

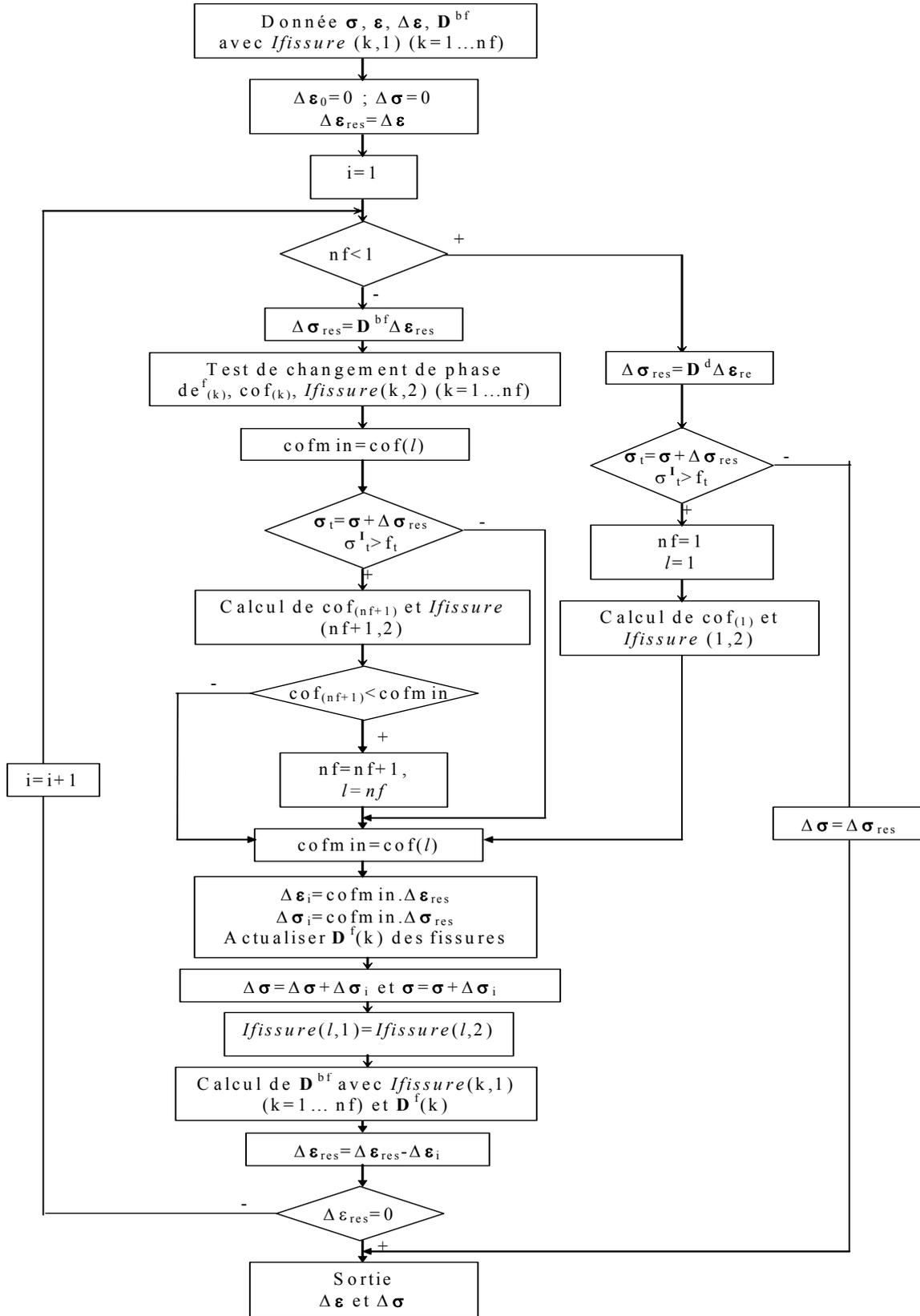


Figure II-10. Algorithme MULTIFISS

## **II.5. Conclusion**

La nouvelle loi incrémentale de comportement de la fissuration, développée dans ce chapitre, est fondée sur une démarche mathématiquement cohérente qui assure bien la dissipation totale de l'énergie quand la fissure est complètement ouverte. Cette nouvelle loi remédie au phénomène de blocage des contraintes dû à la surestimation des contraintes tangentes au niveau de la fissuration. Les résultats obtenus par résolution du problème de Willam [Ref. 124] montrent bien la pertinence de cette nouvelle loi locale de fissure.

Une formulation a ainsi été établie pour le cas général de comportement du matériau en présence de plusieurs fissures placées dans des directions différentes. Une méthode de calcul adaptée à ce problème a été ainsi développée. Cette nouvelle méthode tient compte de l'influence de chaque fissure sur le comportement global du matériau fissuré, notamment en ce qui concerne les fissures complètement ouvertes. La perte totale de rigidité d'un élément est due à l'ouverture complète de deux fissures dans deux directions différentes.

Le traitement l'ensemble de la fissuration se fait par l'intégration de l'algorithme MULTIFISS, dans lequel, chaque fissure est associée à un indice de phase qui indique l'état cette dernière. On détermine ainsi la loi de comportement locale de chaque fissure afin de calculer la rigidité globale. Le changement de phase d'une fissure est détecté par l'état de déformation locale.

Cependant, on observe des instabilités dans la procédure de résolution numérique. Ces instabilités numériques peuvent provenir de la formulation du problème et de la théorie même de la fissuration distribuée (voir le chapitre I). Une des causes majeures est qu'on n'a considéré que l'influence locale de chaque fissure sur la loi globale, et qu'on n'a pas évalué l'interaction des fissures entre elles. D'autre part, la méthode de la fissuration distribuée, étant un modèle macroscopique, ne se base pas sur la théorie de la thermodynamique des processus irréversibles. Le couplage avec d'autres phénomènes non-linéaires est difficile à réaliser.

Dans la suite de cette étude, on élaborera un nouveau modèle de comportement du béton en se basant sur la théorie de l'endommagement.



**CHAPITRE III:  
ELABORATION D'UN MODELE D'ENDOMMAGEMENT  
DEVIATORIQUE (MODEV) POUR LE COMPORTEMENT DU BETON.**

### **III.1. Introduction**

La synthèse bibliographique réalisée dans le chapitre I montre que l'approche continue basée sur la théorie de l'endommagement est couramment utilisée pour modéliser le comportement macroscopique du béton. Cette approche s'appuie sur un cadre scientifique solide basé sur la thermodynamique des milieux continus. Elle permet de construire des modèles d'endommagement non-linéaires et de les coupler avec d'autres phénomènes.

Il s'agit, dans ce chapitre, de développer un modèle de type endommagement, adapté au comportement des bétons. Ce modèle doit être simple, suffisamment représentatif du comportement du béton, et répondre aux besoins des calculs des structures tridimensionnelles en béton telles que de chevilles de fixations métalliques dans le béton.

Pour établir un tel modèle, nous sommes partis des observations expérimentales à l'échelle mésoscopique et microscopique afin d'identifier les différents mécanismes élémentaires à l'origine de la dégradation du béton. En outre, nous devons prendre en compte d'autres phénomènes propres aux bétons comme l'effet unilatéral, l'apparition de la déformation résiduelle, le comportement cyclique... Ceci devrait conduire à l'établissement d'un modèle théorique général du comportement applicable aux matériaux fragiles et hétérogènes et plus particulièrement aux bétons.

En plus de ces considérations théoriques, nous gardons comme objectif l'exploitation industrielle de ce nouveau modèle en adoptant les critères suivants :

- Les paramètres doivent être limités en nombre et facilement identifiables à partir expériences simples (par exemple : traction simple, compression simple).
- Le modèle doit être numériquement robuste et doit assurer une convergence rapide.
- Le modèle doit être facilement intégrable en 2D et 3D dans un code de calcul aux éléments finis.

Ce nouveau modèle devrait contribuer à la compréhension de processus physiques majeurs qui gouvernent les mécanismes de dégradation du béton.

### III.2. Bases théoriques du modèle

Le béton a un comportement complexe difficile à représenter par une seule loi macroscopique homogène. Cette difficulté vient notamment de sa forte hétérogénéité d'une part et d'un aspect composite du à l'existence des granulats, du ciment et de vides d'autre part. A cela s'ajoute un état aléatoire de présence de microfissures même à l'état dit vierge, c'est-à-dire préalablement à toute sollicitation. Son comportement ne peut donc être représentée par un seul mécanisme de déformation. Selon la nature et l'intensité de la sollicitation, la déformation du béton s'effectue d'une manière complexe, faisant intervenir une ou plusieurs combinaisons de mécanismes élémentaires : élasticité, endommagement, glissement, frottement, fissuration...

Si nous schématisons le béton par ses trois constituants principaux : la pâte du ciment, les granulats, les cavités et microfissures, il est facile de démontrer qu'une simple sollicitation unidirectionnelle de traction engendre un état complexe de contrainte au sein du « matériau » et notamment des concentrations de contraintes dues principalement au contraste de rigidité entre les granulats et le ciment et à la présence des microfissures et cavités. De ce fait la loi de comportement à la traction obtenue par des essais de traction simple ne peut pas être attribuée à un simple mécanisme de déformation de la fissure comme le postule la théorie de la fissuration distribuée [Ref. 52]. En effet, à cette représentation simplifiée d'ouverture de fissure, il convient d'ajouter des phénomènes tels que le glissement et le frottement entre les lèvres des microfissures, ou bien encore celui de l'endommagement.

Du point de vue microscopique, ce sont les microfissures et les microvides qui sont principalement responsables des mécanismes d'endommagement et irréversibilité de déformation. Les défauts du réseau ou les accidents géométriques dus à la forte hétérogénéité du béton engendrent des concentrations de contraintes locales et jouent un rôle essentiel dans l'amorçage du processus de fissuration. Sous l'effet de sollicitations mécaniques, ces contraintes localisées pourront augmenter et initier la croissance des microfissures au sein du matériau, d'où l'évolution de l'endommagement.

Cette phase de croissance des microfissures peut être représentée par le mécanisme suivant :

Schématiquement, les microfissures ont tendance à s'orienter perpendiculairement à la direction d'extension ce qui correspond souvent au franchissement du premier grain. Ensuite elles progressent à travers l'auréole de transition ou à plus rarement à travers les grains successifs. Lorsque la taille d'une fissure devient importante, et que cette fissure a pris une direction bien définie, elle se développe de façon préférentielle, déchargeant partiellement les autres microfissures et engendrant une forte concentration de déformation sur son front, on dit alors qu'il y a amorçage macroscopique.

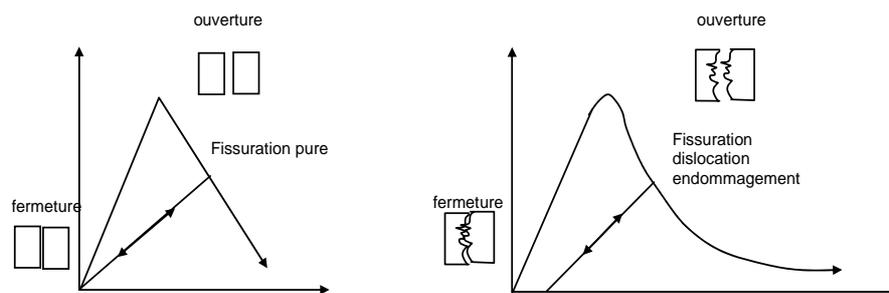


Figure III-1 a) : rupture par fissuration b) essai type de traction simple sur un béton

En effet, les études expérimentales montrent que, pour le comportement à la traction uniaxiale, la courbe présente deux phases distinctes :

Le comportement avant le pic peut être considéré comme un comportement élastique linéaire avec une légère non-linéarité à l'approche du pic correspondant à la décohésion de quelques liaisons à l'interface pâte- granulats et à la progression de quelques microfissures dans la pâte de ciment. [Ref. 111, Ref. 120].

Le comportement adoucissant post-pic suivi d'une chute importante de la raideur et de l'apparition de déformation résiduelle. La chute de raideur est due essentiellement au processus de décohésion du béton soumis à une extension. La déformation résiduelle est due à la nature hétérogène du matériau qui se traduit par une multitude de microfissures autour de la fissure principale lors de la rupture. Durant cette phase, les microfissures bifurquent dans la pâte de ciment et se propagent pour former une fissure principale perpendiculaire à la direction de chargement.

Plus généralement, dans le cas où il y aurait au moins une extension (du point de vue de la déformation), le béton se fissure selon le mode I. C'est le mode de dégradation le plus couramment rencontré pour le béton. L'endommagement dû aux extensions est donc naturellement pris en compte.

En étudiant ensuite le comportement résultant obtenu par Bertacchi et Belotti [Ref. 14] sur un échantillon cubique en béton soumis à un chargement hydrostatique ( $\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}$ ) puis à une évolution de  $\sigma_{11}$  après blocage de  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  à 29,3 MPa (Figure III-2), on distingue trois phases de comportement : phase OA : élasticité et consolidation par l'effet hydrostatique. Il n'y a pas d'endommagement ; phase AB : il n'y a pas d'extension, mais l'endommagement se développe en raison d'une diffusion des microfissures selon le mode II ou III ; phase BC : extension possible, la rupture se produit en mode I ou en mode mixte si l'on continue à augmenter la charge. La phase AB montre que même s'il n'y a pas d'extension, l'endommagement évolue. Dans ce cas là, la partie déviatorique de déformations pourrait être responsable de l'endommagement. Ainsi, la phase BC conduit à la rupture en mode I ou en mode mixte, et met ainsi en évidence l'existence simultanée de 2 modes d'endommagement : «mode d'extension» et «mode de glissement».

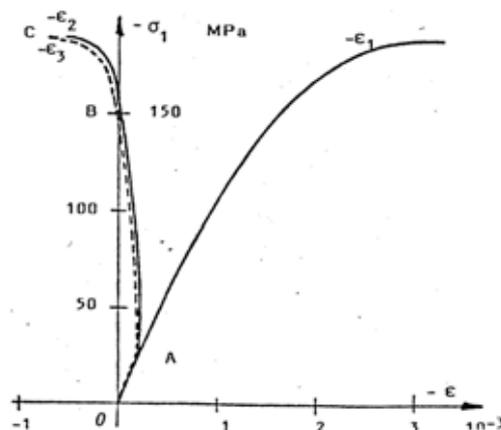


Figure III-2. Courbe expérimentale de Bertacchi et Belotti [Ref. 14]

Les bases du modèle peuvent être présentées comme suit :

Dans ce nouveau modèle, nous considérons que le béton présente 2 modes d'endommagement possibles : un endommagement par extension « sphérique » et un endommagement par

déformation « déviatorique ». On postule également que l'endommagement est non seulement responsable des modifications du comportement élastique mais aussi générateur des déformations permanentes.

En effet, en raison de la forte hétérogénéité du béton, son endommagement est accompagné des déformations irréversibles. On postule pour le nouveau modèle d'endommagement déviatorique que ces déformations anélastiques sont dues au glissement entre les lèvres des microfissures. Ce le glissement est également à l'origine d'un endommagement supplémentaire du matériau (en plus de l'endommagement dû aux extensions hydrostatiques) des microfissures. Nous décomposons donc le tenseur de déformation totale en une partie sphérique et une partie déviatorique. Chacune est responsable d'un type d'endommagement particulier, un endommagement « sphérique » pour le tenseur de déformation sphérique et un endommagement « déviatorique » pour la partie déviatorique du tenseur:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\varepsilon}} &= \underline{\underline{\varepsilon}}^s + \underline{\underline{\varepsilon}}^d \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^s &= \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^d &= \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^s\end{aligned}\tag{III.1}$$

L'endommagement « sphérique » est activé si et seulement si il y a extension. Dans ce modèle, cet endommagement évolue quand il y a évolution de la déformation hydrostatique positive. Tandis que l'endommagement « déviatorique » est considéré comme « permanent ». Contrairement à l'endommagement sphérique, l'endommagement déviatorique existe à la fois en extension et en confinement. A partir de ces considérations, on peut alors traduire l'effet unilatéral en activant les deux modes d'endommagement en traction et en désactivant la contribution du mode d'extension en compression. L'état de traction ou de compression pourra être détecté en fonctions de l'état sphérique de déformations.

Une analyse de la partie anélastique de la déformation est aussi incorporée dans ce nouveau modèle. Si l'on considère des microfissures préalablement soumises à des glissements entre leurs lèvres, on peut dire que lors de la décharge, la rugosité de ces dernières empêche la refermeture totale des fissures (Figure III-1). Dans le modèle, on postule que le glissement entre les lèvres des microfissures est à l'origine de la déformation irréversible.

Ainsi, une formulation « cinématique » est adoptée pour tenir en compte du comportement du béton sous charges cycliques.

Pour formuler un critère d'endommagement, on postulera que le mécanisme de l'endommagement est gouverné par des expressions équivalentes en déformation et des seuils correspondants.

### III.3. Modèle élastique endommageable

#### III.3.1. Approche thermodynamique du modèle d'endommagement

Le modèle est basé sur la mécanique de l'endommagement et la thermodynamique des processus irréversibles [Ref. 69, Ref. 16]. Ce modèle est formulé dans le cadre d'une transformation isotherme, un couplage endommagement-élasticité entre les deux modes de fissure ayant été pris en compte. Les différentes variables sont classées dans le tableau suivant :

Variables observables	Variables associées	Variables internes
	Y	d
$\underline{\underline{\varepsilon}}^e$	$\underline{\underline{\sigma}}$	Y : variable thermodynamique associée à d.
T	S : l'entropie du système	
	B	$\beta$

L'énergie libre spécifique dans le cas isotherme s'exprime sous la forme :

$$\rho\psi = \rho\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, d, T) = \frac{1}{2}(1-d)\underline{\underline{D}}:\underline{\underline{\varepsilon}}:\underline{\underline{\varepsilon}} + \varphi(\beta) \quad (\text{III.2})$$

où  $\underline{\underline{D}}$  est le tenseur de rigidité du béton sain, et  $\beta$  est la variable d'érouissage de l'endommagement.

On en déduit alors les lois d'états :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = (1-d)\underline{\underline{D}}:\underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{III.3})$$

$$S = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (\text{III.4})$$

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial d} = -\frac{1}{2}\underline{\underline{D}}:\underline{\underline{\varepsilon}}:\underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{III.5})$$

$$B = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \quad (\text{III.6})$$

La dissipation thermique est nulle car la température est constante. Le 2<sup>ème</sup> principe de la thermodynamique et l'inégalité de Clausius-Duhem imposent la positivité de la dissipation intrinsèque qui s'écrit sous la forme :

$$-Y \cdot \dot{d} - B \cdot \dot{\beta} \geq 0 \quad (\text{III.7})$$

L'utilisation d'un pseudo-potential de dissipation conduit à introduire l'hypothèse de normalité généralisée, et à respecter la positivité de la dissipation.

Classiquement, il est commode de travailler avec un potentiel dual  $\phi^*$  qui est une fonction des variables associées à  $Y$ , dual de  $\phi$ , obtenue par une transformation de Legendre – Fenchel [Ref. 69, Ref. 16] :

$$\phi^*(\underline{\underline{\sigma}}, Y, B; \underline{\underline{\varepsilon}}, d, \beta) = \dot{\lambda}_D f(\underline{\underline{\sigma}}, Y, B; \underline{\underline{\varepsilon}}, d, \beta) \quad (\text{III.8})$$

La loi d'évolution est dérivée à partir de l'hypothèse de normalité (ou bien l'hypothèse de dissipation maximale). Un matériau qui vérifie cette hypothèse est appelé matériau standard généralisé :

$$\dot{d} = \dot{\lambda}_D \frac{\partial f}{\partial Y} \quad \dot{\beta} = -\dot{\lambda}_D \frac{\partial f}{\partial B} \quad (\text{III.9})$$

$\dot{\lambda}_D$  : est le multiplicateur d'endommagement et  $f$  : est la fonction seuil d'endommagement.

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_D = 0 & \text{si } f < 0 \text{ ou } f = 0 \text{ et } \dot{f} < 0 \\ \dot{\lambda}_D > 0 & \text{si } f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Une condition suffisante pour assurer la positivité de la dissipation s'écrit :

$$\dot{d} \geq 0 \quad \dot{\beta} \geq 0 \quad (\text{III.11})$$

Dans le nouveau modèle, nous avons postulé l'existence de deux modes d'endommagement, chaque mode étant représenté par une variable scalaire :  $d_s$  pour le mode d'extension et  $d_d$  pour le mode de glissement. L'endommagement total est obtenu par combinaison de ces deux endommagements :

$$\rho\psi = \rho\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, d_s, d_d) = \frac{1}{2}(1-d_s)(1-d_d)\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \varphi_s(\beta_s) + \varphi_d(\beta_d) \quad (\text{III.12})$$

Par conséquent, les lois d'état s'écrivent :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = (1-d_s)(1-d_d)\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{III.13})$$

$$Y_s = \rho \frac{\partial \psi}{\partial d_s} = -\frac{1}{2}(1-d_d)\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$Y_d = \rho \frac{\partial \psi}{\partial d_d} = -\frac{1}{2}(1-d_s)\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{III.14})$$

$$B_s = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \beta_s} = \rho \frac{\partial \varphi_s}{\partial \beta_s}$$

$$B_d = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \beta_d} = \rho \frac{\partial \varphi_d}{\partial \beta_d}$$

Avec cette combinaison, sans aller plus loin dans la loi d'évolution de l'endommagement et sans savoir si l'on peut appliquer l'hypothèse de normalité, on assure la positivité de la dissipation intrinsèque si les conditions (III.11) sont satisfaites pour chaque mode d'endommagement:

$$\phi = -Y_s \cdot \dot{d}_s - Y_d \cdot \dot{d}_d - B_s \cdot \dot{\beta}_s - B_d \cdot \dot{\beta}_d \geq 0 \quad (\text{III.15})$$

Nous allons étudier par la suite le critère d'endommagement et les lois d'évolution.

### III.3.2. Critère d'endommagement

Il s'agit d'identifier les variables des lois d'évolution de l'endommagement et de formuler des critères pour chaque type d'endommagement.

Classiquement, le critère s'écrit sous la forme :

$$f(Y, K) = Y - B(\beta) = 0 \quad (\text{III.16})$$

La loi d'évolution de la variable d'endommagement est obtenue avec l'hypothèse de normalité (l'hypothèse de dissipation maximale). Cette hypothèse est vérifiée dans le cas des matériaux dits standard généralisés.

Mais en pratique, on élargit cette notion par une fonction formulée soit en contraintes soit en déformations :

$$f_D(\sigma, d) = 0 \text{ ou bien } f_D(\underline{\underline{\varepsilon}}, d) \quad (\text{III.17})$$

Ainsi, la loi d'évolution peut être trouvée à partir de l'hypothèse de normalité ou non. Mais dans tous les cas, la dissipation doit être positive.

Les critères d'endommagement ou de fissuration en contraintes sont très utilisés. Pour le béton, on a par exemple le critère de Rankine portant la contrainte principale maximale ou des critères combinant traction et cisaillement (comme celui de Mohr-Coulomb), ou encore des critères qui font intervenir les invariants du tenseur de contraintes (Drucker-Prager, Coulomb, Nádai...)

Cependant, le choix de critère en déformation a des avantages propres, car l'endommagement est lié directement à l'état de déformation. D'autre part, ce type de critère est plus pratique pour une résolution par la méthode des éléments finis. Dans la littérature, on peut trouver Dougill (1976) [Ref. 35], utilisant pour la première fois ce type de critère, puis Bazant et Kim (1979) [Ref. 6] avec la combinaison sphérique et déviatorique du tenseur de déformation, et ensuite Mazars (1984) [Ref. 72] avec l'expression équivalente ainsi que Ramtani (1990) [Ref. 111] avec dissociation de la déformation positive, négative et sphérique.

Pour notre modèle, nous avons choisi d'utiliser un critère non symétrique en déformations. Par analogie avec la déformation équivalente au sens de Mazars [Ref. 72], nous introduisons deux nouvelles expressions de déformation équivalente traduisant respectivement le glissement local des microfissures et l'état d'extension hydrostatique. Elles sont respectivement formulées en fonction des tenseurs de déformations déviatoriques et sphériques. Les deux variables d'endommagement, correspondant respectivement à chacun des deux mécanismes de dégradations possèdent leur propre loi d'évolution exprimée en fonction des déformations équivalentes. Pour chaque état d'endommagement donné, le seuil d'évolution est exprimé par une fonction de charge :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^d + \underline{\underline{\varepsilon}}^s = \underline{\underline{\varepsilon}}^d + \varepsilon^H \underline{\underline{I}} \quad (\text{III.18})$$

$$f_s(\underline{\underline{\varepsilon}}, B_s) = \tilde{\varepsilon}^s - B_s(\beta_s) = 0 \quad (\text{III.19})$$

$$f_d(\underline{\underline{\varepsilon}}, B_d) = \tilde{\varepsilon}^d - B_d(\beta_d) = 0 \quad (\text{III.20})$$

Les variables d'évolution  $\beta_s, \beta_d$  varient de 0 et 1 en fonction de l'endommagement correspondant. La déformation sphérique équivalente  $\tilde{\varepsilon}^s$  et la déformation déviatorique

équivalente  $\tilde{\varepsilon}^d$ , traduisant l'état local de glissement du matériau, sont définies de la manière suivante :

$$\tilde{\varepsilon}^d = \sqrt{\underline{\underline{\varepsilon}}^d : \underline{\underline{\varepsilon}}^d} + \alpha \varepsilon^H \quad (\text{III.21})$$

$$\tilde{\varepsilon}^s = \langle \varepsilon^H \rangle \quad (\text{III.22})$$

Où  $\underline{\underline{\varepsilon}}^d$  est le tenseur déviatorique de déformations ;  $\alpha$  est coefficient de couplage sphérique – déviatorique et  $\langle X \rangle = \frac{X + |X|}{2}$

On remarque ici, grâce à l'introduction du coefficient  $\alpha$ , qu'il y a une influence directe de la partie sphérique sur l'endommagement déviatorique. Ceci est physiquement correct car mettant en évidence la différence entre le glissement en traction et en compression vis-à-vis de l'évolution de l'endommagement. La dissymétrie du comportement du béton est présente sur les deux aspects : le mode I n'existe qu'en traction, et les seuils de mode II s'activent de façon différente en traction et en compression.

Le seuil initial d'endommagement pour chaque type d'endommagement est identifié à partir des cas simples en traction uniaxiale et en cisaillement pur.

$$\tilde{\varepsilon}_0^s = B_{0s}(\beta_s = 0) = \frac{f_{ct}}{3E} (1 - 2\nu) \quad (\text{III.23})$$

$$\tilde{\varepsilon}_0^d = B_{0d}(\beta_d = 0) = \frac{\sqrt{2}f_{cis}}{2G} = \frac{\sqrt{2}f_{cis}}{E} (1 + \nu) \quad (\text{III.24})$$

où  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$  sont respectivement le module d'Young, module de cisaillement et le coefficient de Poisson tandis que  $f_{cis}$  est la résistance en cisaillement pur du matériau.

Afin d'obtenir à une solution continue et respectant les principes de la thermodynamique, la surface seuil doit être convexe et contenant l'origine. Le critère adopté dans le modèle s'exprime en fonction des invariants du tenseur de déformation, en dissociant la partie sphérique et déviatorique. Un tel choix présente l'avantage que si la surface seuil (ou limite d'élasticité) est convexe et contient l'origine en déformation, il en est également pour la surface en contrainte. Un tel critère, tracé dans l'espace principal des déformations, dans le plan  $\varepsilon_3 = 0$  (Figure III-3), montre la convexité et la continuité de la surface.

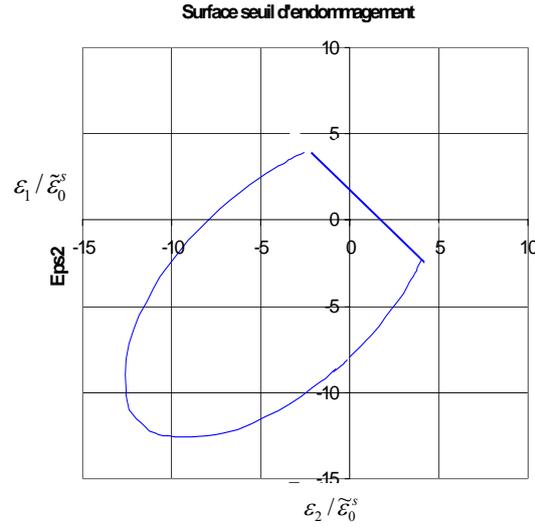


Figure III-3. Surface seuil d'endommagement

### III.3.3. Loi d'évolution des variables d'endommagement

Il s'agit dans ce paragraphe, en premier lieu d'étudier les lois d'évolution des variables d'endommagement d'un matériau standard généralisé. Par suite, une extension au cas d'un matériau non standard permet d'élaborer les lois d'évolutions utilisées dans le nouveau modèle.

On s'intéresse à la loi de comportement du matériau endommageable, qui selon notre modèle, s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = (1-d_s)(1-d_d) \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{III.25})$$

ou sous forme incrémentale :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{d}{dt} \left[ (1-d_s)(1-d_d) \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right] = (1-d_s)(1-d_d) \underline{\underline{D}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \dot{d}_s (1-d_d) \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \dot{d}_d (1-d_s) \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\text{III.26})$$

A partir de (III.26), nous pouvons décomposer la contrainte sous la forme suivante :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^e - \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^d = \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^e - \left( \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^{ds} + \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^{dd} \right) \quad (\text{III.27})$$

où,  $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^e; \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^{ds}; \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^{dd}$  sont les incréments de contrainte dus à l'évolution de la déformation, à l'évolution de l'endommagement par extension et à l'évolution de l'endommagement par glissement, respectivement :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^e &= (1-d_s)(1-d_d) \underline{\underline{D}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \\ \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^{ds} &= (1-d_d) \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \dot{d}_s \\ \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^{dd} &= (1-d_s) \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \dot{d}_d \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

L'inégalité de Clausius-Duhem peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} (1-d_d) \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \dot{d}_s &\geq 0 \\ (1-d_s) \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \dot{d}_d &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

ou bien :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{ds} : \underline{\underline{\varepsilon}} &\geq 0 \\ \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{dd} : \underline{\underline{\varepsilon}} &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

Pour un matériau « standard généralisé », le choix d'une fonction de charge permet d'obtenir un loi complémentaire d'évolution, qui est de la forme :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{ds} &= \lambda_s \frac{\partial f_s(\underline{\underline{\varepsilon}}, d_s)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} (1-d_d) \\ \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{dd} &= \lambda_d \frac{\partial f_d(\underline{\underline{\varepsilon}}, d_d)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} (1-d_s) \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Où  $f_s$  et  $f_d$  doivent être convexe et contenir l'origine ;  $\lambda_s, \lambda_d$  sont des multiplicateurs Lagrange. Comme l'évolution de l'endommagement est attachée à celle de la déformation équivalente correspondante et si l'on prend les variables d'évolution égales aux variables d'endommagement correspondant, on peut postuler la surface de charge suivante :

$$f_s(\underline{\underline{\varepsilon}}, d_s) = \tilde{\varepsilon}^s - B_s(d_s) = 0 \quad (\text{III.32})$$

$$f_d(\underline{\underline{\varepsilon}}, d_d) = \tilde{\varepsilon}^d - B_d(d_d) = 0 \quad (\text{III.33})$$

Pour simplifier l'écriture des équations, tout en conservant la généralité du problème, on se place dans le repère principal. L'expression des lois d'évolution devient alors :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i^{ds} &= \lambda_s \frac{\partial f_s(\underline{\underline{\varepsilon}}, d_s)}{\partial \varepsilon_i} (1-d_d) = \lambda_s \frac{\partial f_s(\underline{\underline{\varepsilon}}, d_s)}{\partial \tilde{\varepsilon}^s} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}^s}{\partial \varepsilon_i} (1-d_d) \\ \dot{\sigma}_i^{dd} &= \lambda_d \frac{\partial f_d(\underline{\underline{\varepsilon}}, d_d)}{\partial \varepsilon_i} (1-d_s) = \lambda_d \frac{\partial f_d(\underline{\underline{\varepsilon}}, d_d)}{\partial \tilde{\varepsilon}^d} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}^d}{\partial \varepsilon_i} (1-d_s) \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Où  $i$  (=1, 2, 3) direction  $i$  du repère principal. La loi d'évolution des variables d'endommagement définit la variation de la surface seuil d'endommagement qui est en fonction des déformations équivalentes suivantes :

$$\tilde{\varepsilon}^d = \sqrt{(\varepsilon_1^d)^2 + (\varepsilon_2^d)^2 + (\varepsilon_3^d)^2} + \alpha \varepsilon^H \quad (\text{III.35})$$

$$\tilde{\varepsilon}^s = \langle \varepsilon^H \rangle \quad (\text{III.36})$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i^{ds} &= \lambda_s \frac{1}{3} (1-d_d) \\ \dot{\sigma}_i^{dd} &= \lambda_d \left[ \frac{\varepsilon_i^d}{\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^d : \underline{\underline{\varepsilon}}^d)} + \frac{1}{3} \alpha \right] (1-d_s) \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

En sommant sur  $i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} Tr(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{ds}) &= \lambda_s(1-d_d) \\ Tr(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{dd}) &= \lambda_d\alpha(1-d_s) \end{aligned} \quad (III.38)$$

Par combinaison avec (III.28) et en notant la contrainte élastique  $\underline{\underline{\sigma}}_0 = \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$ , on a :

$$\begin{aligned} Tr(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{ds}) &= \dot{d}_s(1-d_d)tr(\underline{\underline{\sigma}}_0) = \lambda_s(1-d_d) \\ Tr(\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{dd}) &= \dot{d}_d(1-d_s)tr(\underline{\underline{\sigma}}_0) = \lambda_d\alpha(1-d_s) \end{aligned} \quad (III.39)$$

soit :

$$\begin{aligned} \dot{d}_s &= \frac{\lambda_s}{tr(\underline{\underline{\sigma}}_0)} \\ \dot{d}_d &= \frac{\alpha\lambda_d}{tr(\underline{\underline{\sigma}}_0)} \end{aligned} \quad (III.40)$$

Si l'on écrit la condition de consistance, dans l'hypothèse où les deux modes d'endommagement sont activés, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^s - \frac{\partial B_s(d_s)}{\partial d_s} \dot{d}_s &= 0 \\ \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^d - \frac{\partial B_d(d_d)}{\partial d_d} \dot{d}_d &= 0 \end{aligned} \quad (III.41)$$

Bien sûr, l'évolution des déformations équivalentes doit être positive afin d'assurer la condition de charge, c'est-à-dire l'évolution des endommagements.

En posant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_s(d_s)}{\partial d_s} &= M_s \\ \frac{\partial B_d(d_d)}{\partial d_d} &= M_d \end{aligned} \quad (III.42)$$

où,  $M_s$ ,  $M_d$  sont respectivement les modules de dégradation liés à chaque mode d'endommagement.

A partir de (III.40) et (III.41), on trouve facilement les multiplicateurs d'endommagement :

$$\begin{aligned} \lambda_s &= \frac{1}{M_s} tr(\underline{\underline{\sigma}}_0) \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^s \\ \lambda_d &= \frac{1}{\alpha M_d} tr(\underline{\underline{\sigma}}_0) \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^d \end{aligned} \quad (III.43)$$

En rapportant l'expression des multiplicateurs dans l'équation (III.37), on peut écrire :

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_i^{ds} &= \frac{1}{3} \frac{1}{M_s} tr(\underline{\underline{\sigma}}_0)(1-d_d)\dot{\tilde{\varepsilon}}^s \\ \dot{\sigma}_i^{dd} &= \frac{1}{\alpha M_d} tr(\underline{\underline{\sigma}}_0) \left[ \frac{\varepsilon_i^d}{tr(\underline{\underline{\varepsilon}}^d : \underline{\underline{\varepsilon}}^d)} + \frac{1}{3} \alpha \right] (1-d_s)\dot{\tilde{\varepsilon}}^d\end{aligned}\quad (III.44)$$

La loi d'évolution de contrainte d'endommagement dans le cas de matériau standard généralisé est donc obtenue par sommation :

$$\dot{\sigma}^d = \dot{\sigma}^{ds} + \dot{\sigma}^{dd} \quad (III.45)$$

avec pour le mode d'endommagement par extension (ou sphérique) :

$$\dot{\sigma}_i^{ds} = \begin{cases} 0 & \text{si } f_s=0 \text{ et } \dot{f}_s < 0 \\ \frac{1}{3} \frac{1}{M_s} tr(\underline{\underline{\sigma}}_0)(1-d_d)\dot{\tilde{\varepsilon}}^s & \text{si } f_s=0 \text{ et } \dot{f}_s = 0 \end{cases} \quad (III.46)$$

et pour le mode d'endommagement par glissement (ou déviatorique) :

$$\dot{\sigma}_i^{dd} = \begin{cases} 0 & \text{si } f_d=0 \text{ et } \dot{f}_d < 0 \\ \frac{1}{\alpha M_d} tr(\underline{\underline{\sigma}}_0) \left[ \frac{\varepsilon_i^d}{tr(\underline{\underline{\varepsilon}}^d : \underline{\underline{\varepsilon}}^d)} + \frac{1}{3} \alpha \right] (1-d_s)\dot{\tilde{\varepsilon}}^d & \text{si } f_d=0 \text{ et } \dot{f}_d = 0 \end{cases} \quad (III.47)$$

### III.3.4. Matériau non standard généralisé

Ce résultat issu de l'hypothèse de matériau standard généralisé rencontre quelques limites par rapport au comportement des matériaux fragiles, notamment pour le béton (selon [Ref. 72]).

Pour passer au cas le plus général d'un « matériau non standard généralisé », il faut donc éliminer l'hypothèse de normalité dans l'équation (III.31). Cependant, il faut absolument respecter la positivité de la dissipation. Si l'on garde la même expression pour la surface de charge, on peut formuler les conditions dans le cas d'un « matériau non standard généralisé » :

Pour le mode sphérique :

$$\dot{\sigma}_i^{ds} = \begin{cases} 0 & \text{si } f_s=0 \text{ et } \dot{f}_s < 0 \text{ (c'est à dire } \dot{\tilde{\varepsilon}}^s < 0) \\ \text{non nul} & \text{si } f_s=0 \text{ et } \dot{f}_s = 0 \text{ (c'est à dire } \dot{\tilde{\varepsilon}}^s > 0) \end{cases} \quad (III.48)$$

Parallèlement pour le mode déviatorique :

$$\dot{\sigma}_i^{dd} = \begin{cases} 0 & \text{si } f_d=0 \text{ et } \dot{f}_d < 0 \text{ (c'est à dire } \dot{\tilde{\varepsilon}}^d < 0) \\ \text{non nul} & \text{si } f_d=0 \text{ et } \dot{f}_d = 0 \text{ (c'est à dire } \dot{\tilde{\varepsilon}}^d > 0) \end{cases} \quad (III.49)$$

Cela signifie que le taux de contrainte d'endommagement pour chaque type est non nul s'il y a accroissement de la déformation équivalente correspondante. En associant la relation entre le taux de contrainte d'endommagement et la contrainte élastique présentée par (III.28), on adopte des lois d'évolution complémentaires suivantes dans le cas de charge :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{ds} &= (1-d_d)\underline{\underline{\sigma}}_0 G(\tilde{\varepsilon}^s)\dot{\tilde{\varepsilon}}^s \\ \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{dd} &= (1-d_s)\underline{\underline{\sigma}}_0 H(\tilde{\varepsilon}^d)\dot{\tilde{\varepsilon}}^d\end{aligned}\quad (III.50)$$

Les équations (III.28) et (III.50) donnent la loi d'évolution pour chaque type d'endommagement :

$$\begin{aligned} \dot{d}_s &= G(\tilde{\varepsilon}^s) \dot{\tilde{\varepsilon}}^s \\ \dot{d}_d &= H(\tilde{\varepsilon}^d) \dot{\tilde{\varepsilon}}^d \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

Pour assurer l'inégalité de Clausius-Duhem (la positivité de la dissipation), on doit vérifier les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{d}_s &\geq 0; & \dot{d}_d &\geq 0 \\ d_s &\leq 1; & d_d &\leq 1 \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

C'est pour cette raison que les fonctions  $G(\tilde{\varepsilon}^s)$  et  $H(\tilde{\varepsilon}^d)$  doivent être continues et positives.

On peut donc déterminer directement non seulement l'évolution de la contrainte d'endommagement mais aussi celle de chaque variable d'endommagement. Par rapport au cas du matériau standard généralisé, on a des conditions moins contraignantes. En effet, le taux des contraintes d'endommagement n'est pas nécessairement perpendiculaire à la surface de charge. Ceci permet donc de surmonter les limitations imposées pour la formulation des lois standard généralisée [Ref. 72]. De plus, les fonctions  $G(\tilde{\varepsilon}^s)$  et  $H(\tilde{\varepsilon}^d)$  sont facilement identifiable expérimentalement par des essais élémentaires.

Dans notre modèle, on choisit les lois d'évolutions complémentaires dans le cadre d'un matériau non standard généralisé.

Nous apportons les modifications sur les lois proposées par Mazars [Ref. 72], en les adaptant aux caractéristiques de notre modèle :

$$d_s = 1 - \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_0^s}{\tilde{\varepsilon}^s} \right)^n \exp \left[ -B_t (\tilde{\varepsilon}^s - \tilde{\varepsilon}_0^s) \right] \quad (\text{III.53})$$

$$d_d = 1 - A_C \exp \left[ -B_C (\tilde{\varepsilon}^d - \tilde{\varepsilon}_0^d) \right] - (1 - A_C) \frac{\tilde{\varepsilon}_0^d}{\tilde{\varepsilon}^d} \quad (\text{III.54})$$

où  $B_t$ ,  $A_C$ ,  $B_C$ , sont des coefficients de l'endommagement caractéristiques du matériau.

$B_t$ , coefficient de l'endommagement sphérique, est considéré comme un paramètre lié à l'énergie de fissuration afin d'assurer une objectivité vis-à-vis à la taille des éléments du maillage lors d'un calcul numérique.

Pour obtenir des résultats objectifs par rapport au maillage, la méthode de Hillerborg a été adoptée [Ref. 52, Ref. 53]. Cette méthode consiste à introduire l'énergie de fissuration  $G_f$  dans le calcul éléments finis en calculant la branche descendante de la loi de traction  $E_t$  en fonction de la taille des éléments  $l$  de telle sorte que l'énergie de fissuration dans une bande d'éléments soit indépendante de la taille des mailles :

$$G_f = k. l. f_t^2 / E \quad (\text{III.55})$$

$$B_t = f(l, f_b, G_f) \quad (\text{III.56})$$

où :  $E$  est le module d'Young [Pa] ;  $f_t$  est la contrainte de traction au pic [Pa] ;  $G_f$  est l'énergie de fissuration par unité de surface [ $J/m^2$ ] ;  $l$  est la taille caractéristique des éléments. En calcul 3D la longueur caractéristique des éléments est estimée à  $\sqrt[3]{V}$  où  $V$  est le volume des éléments.

L'énergie de fissuration  $G_f$ , quant à elle, a fait l'objet de plusieurs études, notamment celles d'Olivier en 1989 [Ref. 100] à Belhame et al. (2002) [Ref. 13], Mounajed et al. (2002, 2003) [Ref. 84, Ref. 81, Ref. 80], ou bien encore Menou (2004) [Ref. 75].

### III.3.5. Modélisation du comportement unilatéral

L'observation des essais met en évidence une restauration de la raideur du matériau en compression préalablement endommagé en traction. Cet effet unilatéral se manifeste d'abord par une phase transitoire non-linéaire due à la refermeture des fissures lors du changement de signe de la contrainte et puis la restauration de la raideur en compression.

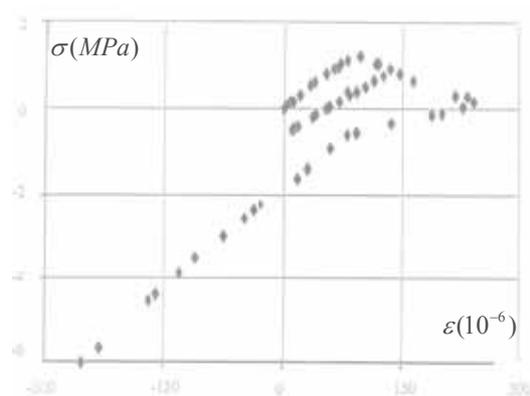


Figure III-4. Effet unilatéral dans l'essai uniaxial traction compression de Ramtani [Ref. 111]

Dans le modèle de Mazars (1984) [Ref. 72], l'effet unilatéral n'est pas pris en compte car il est formulé avec une seule variable scalaire d'endommagement. Le travail de Ramtani [Ref. 111] a permis de modéliser cet effet en dissociant les cas selon le signe de déformation et en introduisant deux tenseurs d'endommagement indépendants. La Borderie [Ref. 66] a travaillé sur la décomposition du tenseur de contrainte et deux variables scalaires d'endommagement indépendants en traction et en compression. Il a également modélisé la phase transitoire en fonction de signe des contraintes.

Comme nous l'avons mentionné auparavant, le nouveau modèle suppose deux modes d'endommagement : mode par extension et mode par glissement. Le premier mode, par analogie avec la fissuration, est en fait le mode I, et il n'existe que s'il y a extension. Dans ce modèle, cet état est défini par le signe positif du tenseur sphérique de déformation :

$$\varepsilon^H > 0 \quad (\text{III.57})$$

Tandis que pour le deuxième mode de glissement qui correspond aux modes II et III de fissuration. L'un des concepts de base du modèle consiste à considérer ce mode comme « permanent ». Ceci implique que cet endommagement peut évoluer aussi bien en traction qu'en confinement. Cet aspect explique que quand le béton est suffisamment endommagé en traction (par exemple traction simple) où il y a deux modes d'endommagement qui s'activent simultanément, il ne peut pas récupérer totalement la rigidité en compression (par exemple compression simple) (voir la Figure III-5).

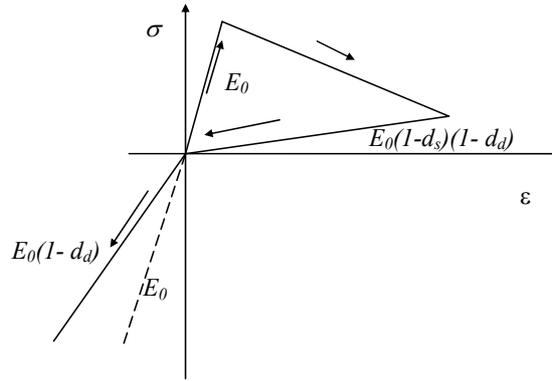


Figure III-5. Effet unilatéral de traction vers compression

Parallèlement, quand on décharge uniaxialement pour passer de la compression à la traction après avoir suffisamment endommagé le matériau, l'endommagement dans ce cas est le glissement qui s'exerce ensuite sur le béton en traction (puisque'il est permanent). Cette caractéristique du modèle est physiquement cohérente et remédie aux défauts des modèles existants (Figure III-6).

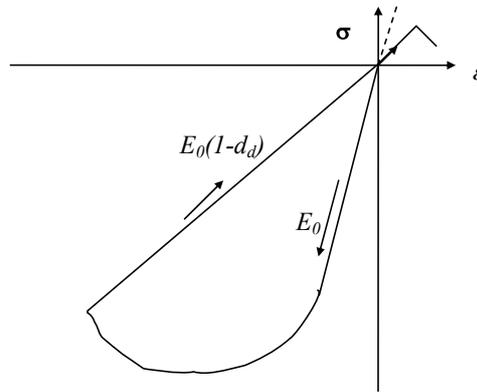


Figure III-6. Effet unilatéral de compression vers traction

L'effet unilatéral affecte la loi de comportement de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= (1-d_s)(1-d_d)\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}} & \text{si } \varepsilon^H > 0 \\ \underline{\underline{\sigma}} &= (1-d_d)\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\varepsilon}} & \text{si } \varepsilon^H \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{III.58})$$

Pour assurer la condition de positivité de la dissipation, on généralise alors la condition :

$$\dot{d}_s \geq 0; \quad \dot{d}_d \geq 0 \quad (\text{III.59})$$

### III.3.6. Formulations totale sécante et incrémentale tangente

Nous nous proposons, avec les critères établis et les lois d'évolution de l'endommagement, d'établir une formulation incrémentale tangente de la loi de comportement du béton. Cette loi, permet d'obtenir une relation entre l'incrément de déformation et l'incrément de contrainte en fonction de l'histoire de chargement. De plus, cette formulation incrémentale permet la résolution simultanée d'autres problèmes non-linéaires fonction également de l'histoire de chargement et couplés à l'endommagement. Nous pouvons citer à titre d'exemple les problèmes d'élastoplasticité...

Pour des raisons de simplicité, et pour faire correspondre l'écriture à celle de la méthode des éléments finis, nous proposons dans la suite d'écrire les équations sous forme matricielle.

La loi de comportement d'endommagement du béton devient ainsi l'opérateur sécant :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d_s)(1 - d_d) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{III.60})$$

En dérivant cette relation de comportement, on a :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d_s)(1 - d_d) \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left[ \dot{d}_s(1 - d_d) + \dot{d}_d(1 - d_s) \right] \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{III.61})$$

Les lois d'évolution d'endommagement adoptées sont :

$$d_s = 1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_0^s}{\tilde{\varepsilon}^s} \exp \left[ -B_t (\tilde{\varepsilon}^s - \tilde{\varepsilon}_0^s) \right] \quad (\text{III.62})$$

$$d_d = 1 - \exp \left[ -B_C (\tilde{\varepsilon}^d - \tilde{\varepsilon}_0^d) \right] \quad (\text{III.63})$$

L'évolution de l'endommagement sphérique et déviatorique est détectée si :

$$\dot{d}_s = (1 - d_s) \left( B_t + \frac{n}{\tilde{\varepsilon}^s} \right) \dot{\tilde{\varepsilon}}^s \geq 0 \quad (\text{III.64})$$

$$\dot{d}_d = B_C (1 - d_d) \dot{\tilde{\varepsilon}}^d \geq 0$$

Supposant que les deux modes d'endommagement évoluent simultanément, c'est-à-dire qu'il se trouve dans le cas de charge pour les deux modes de dégradation (mode sphérique et mode déviatorique). En remplaçant les expressions de  $\dot{d}_s$  et  $\dot{d}_d$  dans la loi incrémentale de comportement, nous obtenons la relation incrémentale suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d_s)(1 - d_d) \left[ \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \left[ \left( B_t + \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^s} \right) \dot{\tilde{\varepsilon}}^s + B_C \dot{\tilde{\varepsilon}}^d \right] \right] \quad (\text{III.65})$$

Le choix de l'expression de déformation équivalente selon chaque mode de dégradation est effectué en décomposant le tenseur de déformation en deux parties sphérique et déviatorique :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^d + \boldsymbol{\varepsilon}^s = \boldsymbol{\varepsilon}^d + \varepsilon^H \mathbf{I} \quad (\text{III.66})$$

$$\tilde{\varepsilon}^s = \varepsilon^H \quad (\text{III.67})$$

$$\tilde{\varepsilon}^d = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d} + \alpha \varepsilon^H \quad (\text{III.68})$$

Ceci aboutit aux expressions incrémentales suivantes :

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^s = \mathbf{B} [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] \geq 0 \quad (\text{III.69})$$

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^d = \left( 1 / \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d} \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B} \right) [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] \geq 0 \quad (\text{III.70})$$

où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont des vecteurs lignes définis par :

$$\mathbf{A} = \left[ \varepsilon_{11}^d \quad \varepsilon_{22}^d \quad \varepsilon_{33}^d \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{31} \right] \quad (\text{III.71})$$

$$\mathbf{B} = [1/3 \quad 1/3 \quad 1/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (\text{III.72})$$

Avec cette définition, nous obtenons enfin la relation directe entre l'incrément de contrainte et l'incrément de déformation :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d_s)(1-d_d) \left[ \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \left[ \left( B_t + \frac{1}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^S} \right) \mathbf{B}[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] + B_c \left( 1/\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d} \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B} \right) [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] \right] \right] \quad (\text{III.73})$$

Si on définit ensuite les deux opérateurs sphérique et déviatorique  $\mathbf{M}_S$ ,  $\mathbf{M}_D$  :

$$\mathbf{M}_S = \left( B_t + \frac{1}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^S} \right) \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{B} \quad (\text{III.74})$$

$$\mathbf{M}_D = B_c \boldsymbol{\varepsilon} \left( 1/\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d} \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B} \right)$$

l'équation (III.73) peut être écrite sous une forme condensée:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d_s)(1-d_d) \mathbf{D}[\mathbf{I} - \mathbf{M}_S - \mathbf{M}_D] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{III.75})$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice d'identité.

Nous pouvons remarquer que cette écriture ressemble à l'écriture sécante (III.60), mais intègre en plus deux matrices  $\mathbf{M}_S$  et  $\mathbf{M}_D$ . Ces dernières traduisent l'influence de l'endommagement sphérique et de l'endommagement déviatorique sur la rigidité du béton. Comme les lois d'évolution des endommagements sont non-linéaires, la variation de la rigidité tangente l'est aussi.

Dans le cas de la décharge en mode I – mode sphérique, on peut écrire :

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^S} = \mathbf{B}[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] < 0 \text{ on a donc } \mathbf{M}_S = \mathbf{0} \quad (\text{III.76})$$

Parallèlement, si on est en cas de la décharge en mode II (mode déviatorique)

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^d} = \left( 1/\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^d : \boldsymbol{\varepsilon}^d} \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B} \right) [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] < 0, \text{ donc } \mathbf{M}_D = \mathbf{0} \quad (\text{III.77})$$

### III.3.7. Remarques pour le nouveau modèle élastique endommageable (MODEV)

#### Corrections apportées aux modèles classiques :

Le modèle d'endommagement classique de Mazars considère toujours que la rupture est due aux extensions. Son caractère prédictif a été bien démontré pour des cas simples de chargement : traction – compression. Cependant, la modélisation des structures complexes, telles les ancrages soumis à des efforts de cisaillement, nécessite la prise en compte du glissement entre les lèvres des fissures. Deux types d'endommagement extension–glissement ont été développés dans notre modèle MODEV afin de répondre à cette nécessité. Ce modèle introduit l'effet unilatéral de façon physique, simple et applicable aux cas de chargements complexes.

La validation expérimentale du nouveau modèle d'endommagement MODEV devrait permettre de juger sur ces capacités à corriger certains défauts des modèles classiques de la fissuration distribuée ou d'endommagement. Le modèle MODEV a été implémenté en 2D et 3D dans le code de calcul général aux éléments finis SYMPHONIE [Ref. 82]. Des simulations numériques sur des cas de figures en 2D et 3D ont été menées à l'aide de ce modèle dans SYMPHONIE (au chapitre IV). Ces simulations ont montré une bonne stabilité

et une convergence rapide de la solution. Ceci est probablement dû à la cohérence théorique du modèle par rapport aux modèles de fissuration car il est basé sur la théorie de la thermodynamique des processus irréversibles.

Le modèle permet également de surmonter les défauts inhérents aux modèles de type fissuration distribuée tels que le problème de blocage des contraintes ou même la non objectivité vis-à-vis du maillage. En effet, l'expérience numérique montre une dépendance des résultats de calcul vis-à-vis du maillage qui se traduit par la localisation de l'endommagement. Ce problème est partiellement résolu en prenant en compte de l'aspect énergétique dans l'expression de l'endommagement sphérique.

Nous développons dans le paragraphe suivant le modèle en prenant en compte les déformations irréversibles observées expérimentalement.

### III.4. Modèle d'endommagement avec effet anélastique

#### III.4.1. Principe

Les essais cycliques menés sur le béton montrent que l'endommagement s'accompagne de déformations permanentes.

Dans la littérature, plusieurs modèles cherchent à introduire cet effet anélastique. L'analogie avec la plasticité est souvent utilisée. Certains modèles proposent un potentiel anélastique et en déduisent les lois d'état supplémentaire (voir le chapitre I).

Nous considérons que la nature de cette dernière n'est pas plastique mais plutôt due à l'hétérogénéité et la fragilité du matériau. Sous chargement, à cause du caractère hétérogène qu'il a, les microfissures se forment en premier temps dans toutes directions avant qu'il n'y ait coalescence en une seule macrofissure dans une direction privilégiée. Lors de la décharge, les fissures ont tendance à se refermer. Cependant les lèvres des fissures préalablement soumises à des déplacements relatifs dus au glissement ne peuvent pas revenir à leur position initiale à cause de la rugosité de leurs surfaces. De plus, la multitude des microfissures réparties dans toutes les directions empêchent la refermeture totale des fissures et causent l'effet irréversible de déformation dans le comportement du béton. Ces effets sont d'autant plus importants que l'endommagement évolue.

A partir de ce constat, on arrive à expliquer l'existence de la déformation anélastique observée lors d'un essai de traction simple. Nous considérons deux origines possibles de la déformation anélastique :

##### 1. Effet déviatorique au niveau macroscopique

En traction simple, la partie déviatorique du chargement est non nulle. Celle-ci s'exerce sur le réseau initial des microfissures réparties dans toutes les directions et engendre des déplacements relatifs de glissement entre leurs lèvres. Ce déplacement relatif est par nature irréversible. Il est accentué par la rugosité des surfaces de contact entre les lèvres des fissures.

##### 2. Effet sphérique au niveau microscopique

A cause de l'hétérogénéité du matériau, même sous un chargement macroscopique purement sphérique, le béton est soumis à un champ de contraintes et de déformations non homogène. L'état local du tenseur de déformation en un point fait apparaître une partie déviatorique non nulle. Cette dernière conduit à l'échelle microscopique au même mécanisme de glissement irréversible décrit ci haut. Cet effet local est mis en évidence avec le modèle Béton numérique développé ultérieurement par Mounajed [Ref. 85]. La figure suivante montre la localisation des contraintes et des déformations dans un béton sollicité en traction simple et simulé à l'aide de SYMPHONIE avec le modèle « béton numérique ».

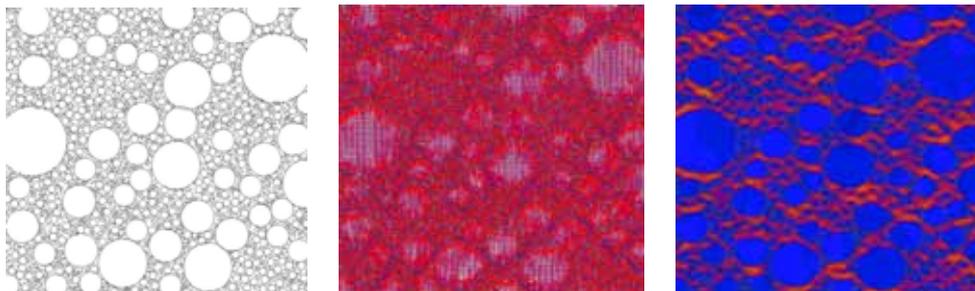


Figure III-7. Localisation des contraintes et déformations dans le béton sous traction [Ref. 85]

Nous postulons que, la partie anélastique est due principalement au caractère hétérogène du matériau et au glissement relatif des lèvres de fissure. Dans le nouveau modèle, nous supposons que la partie déviatorique de déformation (à l'échelle microscopique et macroscopique) est directement responsable du glissement. Cette déformation anélastique est d'autant plus importante que le matériau est hétérogène et que le matériau est endommagé.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse dans un premier temps à introduire l'effet anélastique dans le modèle d'endommagement pour un matériau standard généralisé classique. Puis, dans le cadre du développement du nouveau modèle, où le béton est considéré comme un matériau non standard, on étudie un potentiel anélastique compatible avec la conception de base du modèle. C'est-à-dire que nous décomposons la déformation anélastique en deux parties : une partie sphérique par l'effet sphérique au niveau microscopique liée à l'endommagement par extension et une partie déviatorique par l'effet déviatorique macroscopique liée directement à l'endommagement par glissement. L'évolution de l'endommagement et de la déformation anélastique est simultanée.

### III.4.2. Cas d'un matériau standard généralisé

On considère maintenant une loi de comportement générale en introduisant la partie anélastique de la déformation :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}} = (1-d_s)(1-d_d) \underline{\underline{\underline{D}}} : (\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{an}) = \underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{ed} - \underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{ad} \quad (III.78)$$

Avec la décomposition du tenseur de contrainte :  $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{ed}$  contrainte élastique et  $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{ad}$  contrainte anélastique qui lie directement l'endommagement :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{ed} &= (1-d_s)(1-d_d) \underline{\underline{\underline{D}}} : \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \\ \underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{ad} &= (1-d_s)(1-d_d) \underline{\underline{\underline{D}}} : \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{an} \end{aligned} \quad (III.79)$$

En écriture incrémentale, on peut facilement obtenir :

$$\underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}} = \frac{d}{dt} \left[ (1-d_s)(1-d_d) \underline{\underline{\underline{D}}} : (\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{an}) \right] = \underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}^d - \underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}^e - \underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}^{an} \quad (III.80)$$

où  $\underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}^d; \underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}^e; \underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}^{an}$  sont les incréments de contrainte dus à l'évolution de l'endommagement, l'évolution de la déformation totale (incrément de contrainte élastique) et l'évolution de la déformation anélastique (incrément de contrainte anélastique) respectivement :

$$\underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}^d = -(1-d_d) \underline{\underline{\underline{D}}} : (\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{an}) \dot{d}_s - (1-d_s) \underline{\underline{\underline{D}}} : (\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{an}) \dot{d}_d \quad (III.81)$$

$$\underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}^e = (1-d_s)(1-d_d) \underline{\underline{\underline{D}}} : \dot{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}} \quad (III.82)$$

$$\underline{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}^{an} = (1-d_s)(1-d_d) \underline{\underline{\underline{D}}} : \dot{\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}}^{an} \quad (III.83)$$

Dans le cas d'un matériau standard généralisé, et en postulant une surface de charge sous forme d'une fonction linéaire du deuxième invariant du tenseur de déformation (donc convexe et contenant l'origine), on peut écrire:

$$f = \sqrt{\frac{3}{2} tr(\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^d : \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^d) - K(\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{an})} \quad (III.84)$$

et en appliquant ensuite l'hypothèse de normalité, on a :

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{an} = \lambda_{an} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{3}{2} \lambda_{an} \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}^d}{\sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^d : \underline{\underline{\varepsilon}}^d)}} (1-d_s)(1-d_d) \quad (\text{III.85})$$

De plus, en tenant compte de l'expression de  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{an}$  donnée par (III.83), on a :

$$\frac{3}{2} \lambda_{an} \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}^d}{\sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^d : \underline{\underline{\varepsilon}}^d)}} = \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an} \quad (\text{III.86})$$

Le membre de droite de l'équation ci-dessus est purement déviatorique. Par conséquent,  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an}$  est également déviatorique. On peut écrire :

$$\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an} = 2G \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an} \quad (\text{III.87})$$

où  $G$  est le module de cisaillement du matériau sain. Alors, (III.86) devient :

$$\frac{3}{4G} \lambda_{an} \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}^d}{\sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^d : \underline{\underline{\varepsilon}}^d)}} = \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an} \quad (\text{III.88})$$

Si l'on considère en plus la condition de consistance :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \frac{\partial K(\underline{\underline{\varepsilon}}^{an})}{\underline{\underline{\varepsilon}}^{an}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an} = 0 \quad (\text{III.89})$$

En introduisant le module d'écrouissage  $\frac{\partial K(\underline{\underline{\varepsilon}}^{an})}{\underline{\underline{\varepsilon}}^{an}} = \underline{\underline{M}}_{an}$  et en observant que  $\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}$  est un tenseur déviatorique, on peut écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^d - \underline{\underline{M}}_{an} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an} = 0 \quad (\text{III.90})$$

Donc, avec (III.85), on trouve une nouvelle expression du multiplicateur :

$$\lambda_{an} = \frac{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{an} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^d}{\underline{\underline{M}}_{an} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an}} \quad (\text{III.91})$$

et en combinaison avec (III.83), il vient :

$$\lambda_{an} = \frac{(1-d_s)(1-d_d) \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^d}{\underline{\underline{M}}_{an} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an}} \quad (\text{III.92})$$

(III.92) devient alors :

$$\lambda_{an} = \frac{(1-d_s)(1-d_d) \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^d : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^d}{\underline{\underline{M}}_{an} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^d} \quad (\text{III.93})$$

En résumé, dans le cas d'un matériau standard généralisé, on obtient les lois d'évolution complémentaires suivantes :

$$\underline{\dot{\sigma}}^{an} = \begin{cases} 0 & \text{si } f=0 \text{ et } \dot{f}<0 \\ \frac{(1-d_s)(1-d_d)\underline{\underline{D}}:\underline{\underline{\varepsilon}}^d:\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^d}{\underline{\underline{M}}^{an}:\underline{\underline{\varepsilon}}^d} \frac{3}{2\sqrt{\frac{3}{2}Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}^d:\underline{\underline{\varepsilon}}^d)}} \underline{\underline{\varepsilon}}^d & \text{si } f=0 \text{ et } \dot{f}=0 \end{cases} \quad (\text{III.94})$$

Cette formulation est en effet analogue à la plasticité de Von Mises. On peut ainsi postuler un critère de type Drucker-Prager pour tenir en compte de l'effet sphérique sur la déformation anélastique.

Selon la conception du modèle, l'une des origines de l'effet anélastique est la partie déviatorique du tenseur de déformation comme le reflète bien le critère de Von Mises. Cependant, il n'est pas suffisant pour décrire toutes les origines de l'effet anélastique, à noter l'hétérogénéité et l'effet indépendant des parties sphérique et déviatorique, et reste donc non applicable pour le béton. De plus, on a conclu que l'évolution de cette partie anélastique se produit simultanément à celle de l'endommagement. Alors que l'évolution de la partie déviatorique n'entraîne pas nécessairement une évolution de l'endommagement (voir le critère dans l'équation (III.20)). Ainsi, l'analogie avec la plasticité associée ne correspond pas à la nature du béton et ne paraît pas très compatible avec le comportement anélastique du béton. Par suite, on propose d'étudier dans le cadre du nouveau modèle le critère et l'évolution de la partie anélastique de la déformation en la reliant avec l'évolution de l'endommagement, applicable au matériau non standard généralisé.

### III.4.3. Matériau non standard généralisé

Dans le cadre du nouveau modèle, la loi d'évolution de la partie anélastique de la déformation doit être fonction de l'état de déformation, de l'hétérogénéité du matériau et se produire simultanément avec l'évolution de l'endommagement. En ce qui concerne les aspects thermodynamiques, la convexité du potentiel et la positivité de la dissipation doivent être assurées. Nous considérons ainsi le potentiel :

$$\rho\psi = \rho\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, d, T) = \frac{1}{2}(1-d_s)(1-d_d)\underline{\underline{D}}:(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{an}):(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{an}) + \varphi_s(\beta_s) + \varphi_d(\beta_d) + \varphi_{ans}(p_s) + \varphi_{and}(p_d) \quad (\text{III.95})$$

où  $p_s$  et  $p_d$  sont les variables d'évolution anélastique.

La loi de comportement s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = (1-d_s)(1-d_d)\underline{\underline{D}}:(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{an}) \quad (\text{III.96})$$

Où  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{an} = f(\underline{\underline{\varepsilon}}, d_s, d_d)$

On obtient ainsi l'expression des forces thermodynamique associées aux endommagements :

$$Y_s = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial d_s} = \frac{1}{2}(1-d_d)\underline{\underline{D}}:(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{an}):(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{an}) \geq 0$$

$$Y_d = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial d_d} = \frac{1}{2}(1-d_s)\underline{\underline{D}}:(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{an}):(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{an}) \geq 0 \quad (\text{III.97})$$

La positivité de la dissipation intrinsèque due à l'endommagement est bien vérifiée avec la condition classique :

$$\begin{aligned} \dot{d}_s &\geq 0 \\ \dot{d}_d &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{III.98})$$

La convexité du potentiel est donc bien respectée vis-à-vis des variables d'endommagement car le potentiel en est une fonction linéaire.

Cependant, pour les cas de chargement plus généraux, on doit assurer encore la positivité de la dissipation anélastique, c'est-à-dire :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an} \geq 0 \quad (\text{III.99})$$

Pour la partie sphérique de la déformation anélastique, on postule la loi d'évolution :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an}_s = H(\dot{d}_s) \cdot \mu_1 \cdot f(d_s) \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^s \quad (\text{III.100})$$

qui correspond à la fonction de charge suivante :

$$f_s = \frac{I_\sigma}{(1-d_s)(1-d_d)} - \kappa(p^s) \quad (\text{III.101})$$

où  $H(x)=1$  si  $x>0$  et  $H(x)=0$  si non.

Avec ce choix, on assure l'hypothèse de puissance anélastique maximale, et donc la positivité de la dissipation :

$$\underline{\underline{\sigma}}^s : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an}_s \geq 0 \quad (\text{III.102})$$

Dans l'équation (III.100), la fonction  $f(d_s)$  représente l'influence de l'endommagement par extension sur l'évolution de la déformation anélastique, c'est une fonction croissante en  $d_s$  qui prend des valeurs comprises entre 0 et 1.

Conformément au concept du modèle, l'origine de l'effet anélastique est du à l'état hétérogène du matériau. Un chargement hydrostatique peut entraîner non seulement les fissurations en mode I, mais aussi en modes II et III à l'échelle locale, engendrées par les dislocations et le glissement. Ce glissement, irréversible par définition, engendre au niveau global une partie de déformation anélastique sphérique. L'endommagement par extension facilite le glissement relatif entre les lèvres des microfissures. Donc, la déformation anélastique sphérique est en fonction de l'endommagement par extension à travers le coefficient  $\mu_1$  ( $0 \leq \mu_1 \leq 1$ ). Le coefficient  $\mu_1$  est une caractéristique intrinsèque du matériau, il représente le degré d'hétérogénéité de ce dernier. Par exemple pour les matériaux relativement plus homogènes que le béton (comme les verres), leur degré d'hétérogénéité est plus faible que celui du béton.

Quant à la partie déviatorique de la déformation anélastique, celle-ci n'évolue que s'il y a déjà évolution de l'endommagement déviatorique par glissement. En terme de couplage entre l'endommagement et l'effet anélastique, on postule ici la fonction de charge et la loi d'évolution suivantes :

$$\begin{aligned} f_d &= \frac{J_\sigma}{(1-d_d)(1-d_s)} - \kappa(p^d) \\ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{an}_d &= H(\dot{d}_d) \cdot \mu_2 \cdot f(d_d) \cdot \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^d \end{aligned} \quad (\text{III.103})$$

Par rapport au matériau standard généralisé, la règle de normalité n'est pas vérifiée. Par contre, avec ces lois d'évolution, on trouve que l'incrément de la déformation anélastique est une partie de l'incrément de la déformation déviatorique totale. Où  $f(d_d)$  est une fonction croissante de l'endommagement, elle a pour valeur comprise entre 0 et 1. Plus l'endommagement par glissement est important, plus la vitesse de la déformation anélastique est importante une fois il y a un écoulement anélastique. On retrouve ainsi un nouveau coefficient  $\mu_2$  dont la valeur se trouve dans l'intervalle  $[0 ; 1]$ . Ce coefficient représente également le degré d'hétérogénéité du matériau.

La positivité de la dissipation est automatiquement assurée :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^d : \underline{\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}^{an} = H(\dot{d}_d) \mu_2 (1 - d_s)(1 - d_d) \cdot f(d_d) \cdot \underline{\underline{\underline{D}}} : (\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}^d - \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}_d^{an}) : \underline{\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}}^d \geq 0 \text{ par définition de } f_d \quad (\text{III.104})$$

Il est important de noter que avec ces lois d'évolution de la déformation anélastique, on définit implicitement les fonctions  $\kappa(p_s)$  et  $\kappa(p_d)$  si on l'applique les conditions de charge et décharge.

Les paramètres introduits dans ce modèle, tels que  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , peuvent être identifiés pour un béton donné, soit par le biais d'une procédure expérimentale, soit à travers une procédure d'homogénéisation sur le volume élémentaire représentatif du matériau sous des chargements déviatorique et sphérique, en utilisant le modèle béton numérique de Mounajed (2002) [Ref. 85]. Par ailleurs, une étude de sensibilité sur l'influence de ces paramètres sur le comportement du béton sera présentée dans le chapitre suivant de la présente recherche.

#### III.4.4. Effet unilatéral

L'effet unilatéral est automatiquement pris en compte grâce au concept physique du modèle. En effet, lors de compression, l'endommagement  $d_s$  disparaît. L'état de compression est défini d'une manière plus générale par :

$$\text{Tr}(\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}_s^{an}) < 0 \quad (\text{III.105})$$

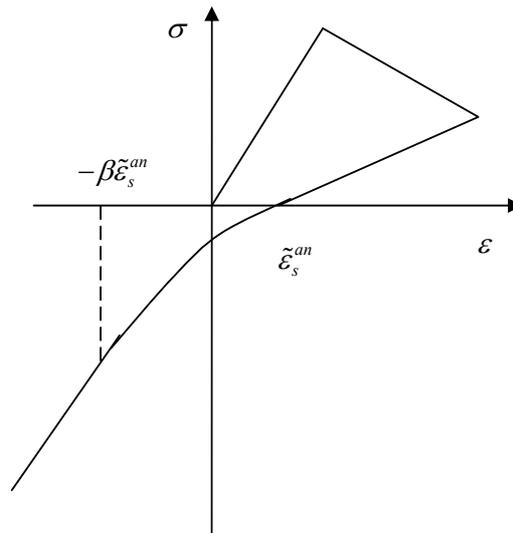


Figure III-8. Schéma de l'effet unilatéral

Pour assurer la continuité du modèle, lors du passage d'un état de traction à un état de compression, on introduit en plus une caractéristique du matériau, notée  $\beta$  que nous pouvons

l'appeler coefficient de rigidification élastique lors de refermeture des fissures (Figure III-8), telle que :

Pour  $\tilde{\varepsilon}_s^{an} \geq \tilde{\varepsilon}_s \geq -\beta\tilde{\varepsilon}_s^{an}$  :

$$d_{s\_ac} = d_s^{\max} \frac{\tilde{\varepsilon}_s + \beta\tilde{\varepsilon}_s^{an}}{\tilde{\varepsilon}_s^{an} + \beta\tilde{\varepsilon}_s^{an}} \quad (III.106)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{s\_ac}^{an} = \tilde{\varepsilon}_s^{an} \frac{\tilde{\varepsilon}_s + \beta\tilde{\varepsilon}_s^{an}}{\tilde{\varepsilon}_s^{an} + \beta\tilde{\varepsilon}_s^{an}}$$

où  $d_s^{\max}$  est l'endommagement maximal atteint et :  $\tilde{\varepsilon}_s^{an} = \max(Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}_s^{an}))$

Pour  $\tilde{\varepsilon}_s \leq -\beta\tilde{\varepsilon}_s^{an}$  :

$$d_{s\_ac} = 0 \quad (III.107)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{s\_ac}^{an} = 0$$

$d_{s\_ac}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{s\_ac}^{an}$  représentent respectivement la valeur actuelle de la variable d'endommagement par extension et la déformation anélastique sphérique équivalente.

Ici, on adopte une loi de diminution linéaire de l'endommagement par extension et de la déformation sphérique anélastique. Il s'agit en fait d'un état de transition. Après le déchargement, le matériau atteint l'état compression pure, où l'endommagement par extension disparaît ainsi que la déformation anélastique.

De même, si on passe de l'état de compression à l'état de traction, on a une restitution linéaire de l'endommagement par extension et de la partie sphérique de la déformation anélastique.

Ce processus est réversible. On peut le considérer comme dans le cas de l'élasticité non-linéaire car il s'agit en fait d'un changement de la rigidité élastique en fonction de l'endommagement par extension et de la déformation :

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1 - d_s)(1 - d_d) \underline{\underline{D}}(d_s, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_s^s) : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{an}) \quad (III.108)$$

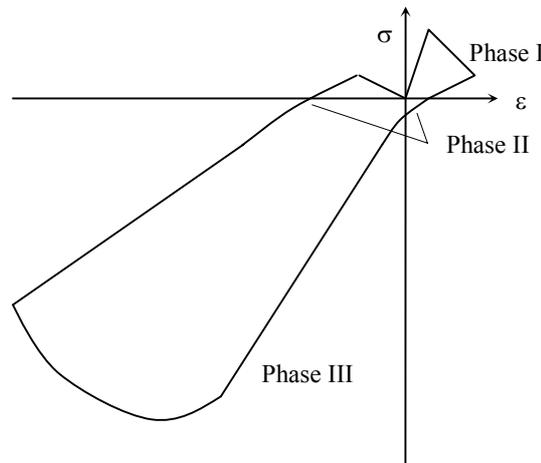


Figure III-9. Effet unilatéral dans le comportement uniaxial

En résumé, le comportement du béton peut être décomposé en trois phases :

Phase I : Quand  $\tilde{\varepsilon}_s \geq \tilde{\varepsilon}_s^{an}$ , on se situe dans le cas de l'endommagement avec les deux modes possibles : extension et glissement.

Phase II : Quand  $\tilde{\varepsilon}_s^{an} \geq \tilde{\varepsilon}_s \geq -\beta\tilde{\varepsilon}_s^{an}$ , on se trouve dans la phase transitoire de l'unilatéralité représentée par une loi élastique non-linéaire.

Phase III : Quand  $\tilde{\varepsilon}_s \leq -\beta\tilde{\varepsilon}_s^{an}$ , on applique le modèle de l'endommagement avec un seul mode de glissement.

### III.4.5. Effet cinématique de l'endommagement

Comme cela a été mentionné auparavant, le mode d'endommagement par glissement est dit « permanent », car il s'exerce sur le matériau en état d'extension ainsi qu'en état de confinement. Son critère actuel est basé sur l'expression de la déformation totale :

$$f_d(\underline{\varepsilon}, d_d) = \tilde{\varepsilon}^d - B_d(d_d) = 0 \quad (III.109)$$

$$\text{Où } \tilde{\varepsilon}^d = \sqrt{\underline{\varepsilon}^d : \underline{\varepsilon}^d} + \alpha\varepsilon^H \quad (III.110)$$

Avec la prise en compte de l'effet anélastique de la déformation, on peut alors se heurter à un problème de surestimation de la contrainte.

Pour surmonter cette difficulté, nous nous proposons d'étudier le cas où le matériau est soumis à un chargement cyclique en cisaillement pur. Dans un tel cas de chargement, la partie sphérique de la déformation est nulle. Après avoir créé de l'endommagement, à la valeur  $\gamma = \gamma_1$ , où  $\tau = \tau_1$ , on décharge. De la même manière que le critère d'endommagement est basé sur la déformation totale, l'endommagement s'active à partir de  $\gamma = -\gamma_1$  correspondant à  $\tau = \tau_1$ . Avec la présence de la partie irréversible en déformation, il est clair que  $|\tau_1'| > |\tau_1|$ , d'où une surestimation de contrainte. On pourrait rencontrer, en poursuivant le chargement cyclique, une situation où la contrainte actuelle est plus grande que la contrainte  $\tau_{\max}$  ultime.

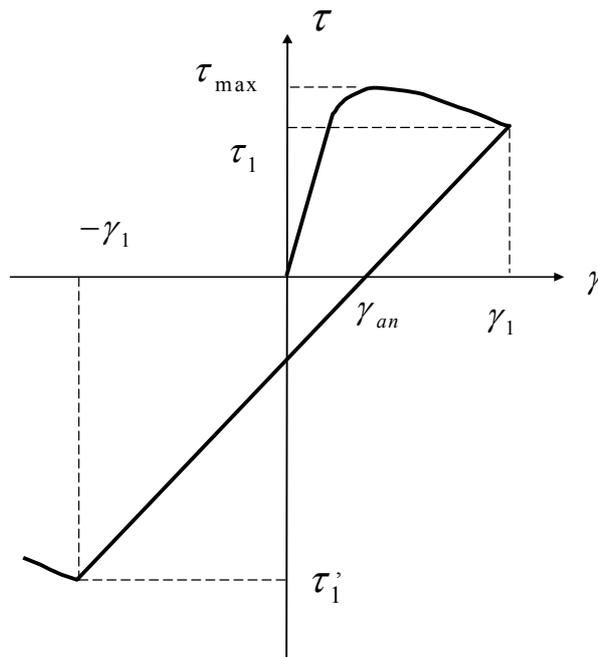


Figure III-10. Critère en déformation totale

Pour éviter ce phénomène, il est nécessaire d'établir une autre formulation du critère d'endommagement. Nous proposons pour cela un critère de type « cinématique » :

$$\tilde{\varepsilon}^d = \sqrt{(\underline{\underline{\varepsilon}}^d - \underline{\underline{\varepsilon}}^{an}) : (\underline{\underline{\varepsilon}}^d - \underline{\underline{\varepsilon}}^{an})} + \alpha \varepsilon^H \quad (\text{III.111})$$

Ce critère possède en effet une analogie avec le déviateur de contrainte si l'effet sphérique est nul. Sa surface seuil initiale est la même que celle exprimée à travers l'équation (III.110). Pendant la phase d'écrouissage de l'endommagement, cette surface seuil est toujours convexe par définition de la loi d'évolution de  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{an}$  (voir l'équation (III.103)).

Revenant au cas d'un chargement cyclique en cisaillement, un tel critère évite l'effet de surestimation de contrainte, et donne la courbe contrainte - déformation qui suit :

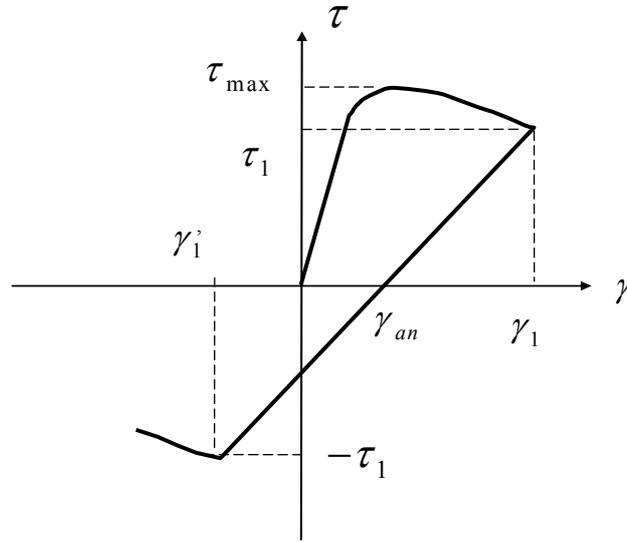


Figure III-11 . Critère de type « cinématique » en déformation

### III.4.6. Formulation tangente incrémentale

Il s'agit dans ce paragraphe d'établir la loi incrémentale de comportement.

Pour des raisons de compatibilité avec la méthode des éléments finis, nous allons travailler avec des notations matricielles. En présence de la déformation anélastique, la loi de comportement en formulation totale est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d_s)(1 - d_d) \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{an}) \quad (\text{III.112})$$

La dérivation de la loi de comportement donne la relation :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d_s)(1 - d_d) \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{an}) - [\dot{d}_s(1 - d_d) + \dot{d}_d(1 - d_s)] \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{an}) \quad (\text{III.113})$$

Le taux de contrainte est dépendant de l'évolution des variables d'endommagement, de l'évolution de la déformation totale, déformation anélastique et ainsi que de l'état actuel de contraintes, de déformations et de l'endommagement.

S'il n'y a pas d'évolution de l'endommagement, la loi incrémentale devient :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d_s)(1 - d_d) \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{III.114})$$

Dans le cas où il y a l'évolution de deux endommagements, nous avons :

$$\begin{aligned}\dot{d}_s &= (1-d_s) \left( B_t + \frac{n}{\tilde{\varepsilon}^S} \right) \dot{\varepsilon}^S \geq 0 \\ \dot{d}_d &= B_C (1-d_d) \dot{\varepsilon}^d \geq 0\end{aligned}\quad (\text{III.115})$$

Où, avec la déformation équivalente proposée, on peut écrire :

$$\dot{\varepsilon}^S = \mathbf{B} \dot{\varepsilon} \geq 0 \quad (\text{III.116})$$

$$\dot{\varepsilon}^d = \left( (1-\mu_2 f(d_d)) / \sqrt{(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_d^{an}) : (\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_d^{an})} \right) (\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_d^{an}) \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B} \dot{\varepsilon} \geq 0 \quad (\text{III.117})$$

puisque  $\dot{\varepsilon}_d^{an} = \mu_2 \cdot f(d_d) \cdot \dot{\varepsilon}^d$ .

Où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont des vecteurs lignes :

$$\mathbf{A} = \left[ \varepsilon_{11}^d - \varepsilon_{11d}^{an} \quad \varepsilon_{22}^d - \varepsilon_{22d}^{an} \quad \varepsilon_{33}^d - \varepsilon_{33d}^{an} \quad \gamma_{12} - \gamma_{12an}^d \quad \gamma_{23} - \gamma_{23an}^d \quad \gamma_{31} - \gamma_{31an}^d \right] \quad (\text{III.118})$$

$$\mathbf{B} = [1/3 \quad 1/3 \quad 1/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (\text{III.119})$$

A partir de ces deux vecteurs, on définit ensuite les opérateurs  $\mathbf{M}_S$ ,  $\mathbf{M}_D$  matriciels :

$$\mathbf{M}_S = \left( B_t + \frac{n}{\tilde{\varepsilon}^S} \right) \{ \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{an} \} \mathbf{B} \quad (\text{III.120})$$

$$\mathbf{M}_D = B_C \{ \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{an} \} \left( (1-\mu_2 f(d_d)) / \sqrt{(\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_d^{an}) : (\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_d^{an})} \right) (\boldsymbol{\varepsilon}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_d^{an}) \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}$$

A la différence des relations (III.74), ces deux dernières relations font intervenir la déformation anélastique dans la loi de comportement :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_s^{an} &= \mu_1 f(d_s) \dot{\varepsilon}^s \\ \dot{\varepsilon}_d^{an} &= \mu_2 f(d_d) \dot{\varepsilon}^d\end{aligned}\quad (\text{III.121})$$

Posant :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}^s &= \mathbf{E}_S \dot{\varepsilon} \\ \dot{\varepsilon}^d &= \mathbf{E}_D \dot{\varepsilon}\end{aligned}\quad (\text{III.122})$$

avec :

$$\mathbf{E}_S = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.123})$$

$\mathbf{E}_D = \mathbf{I} - \mathbf{E}_S$ ; avec  $\mathbf{I}$  est une matrice d'identité 6x6

il vient :

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^{an} &= \mu_1 f(d_s) \mathbf{E}_S [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \mathbf{A}_S \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^{an} &= \mu_2 f(d_d) \mathbf{E}_D [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}] = \mathbf{A}_D \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\end{aligned}\quad (\text{III.124})$$

En remplaçant les termes matriciels introduits ci-dessus dans la loi incrémentale de comportement, on obtient un opérateur tangent de la forme :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d_s)(1-d_d) \mathbf{D} [\mathbf{I} - \mathbf{M}_S - \mathbf{M}_D - \mathbf{A}_S - \mathbf{A}_D] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{III.125})$$

Dans cette expression, outre l'influence de l'endommagement représentée par les matrices  $\mathbf{M}_S$ ,  $\mathbf{M}_D$ , apparaissent les opérateurs  $\mathbf{A}_S$ ,  $\mathbf{A}_D$  qui représentent l'influence de l'effet anélastique sur la rigidité tangente du matériau.

Quand il y a l'effet unilatéral, on a l'endommagement maximal par extension  $d_s^{\max}$ , ainsi que la déformation anélastique sphérique équivalente correspondante :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^{an} = \max \left[ \text{Tr}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^{an}) \right] \quad (\text{III.126})$$

Conformément au processus unilatéral du nouveau modèle, on a :

$$\begin{aligned}\dot{d}_s &= \frac{d_s^{\max}}{(1-\beta)\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^{an}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^s = \frac{d_s^{\max}}{(1-\beta)\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^{an}} \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^{an} &= \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^s}{1-\beta} = \frac{1}{1-\beta} \mathbf{E}_S \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\end{aligned}\quad (\text{III.127})$$

En posant :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{S\_uni} &= \frac{d_s^{\max}}{(1-d_s)(1-\beta)\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^{an}} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{an}) \mathbf{B} \\ \mathbf{A}_{S\_uni} &= \frac{1}{1-\beta} \mathbf{E}_S\end{aligned}\quad (\text{III.128})$$

la loi de comportement incrémentale dans ce cas devient :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d_s)(1-d_d) \mathbf{D} [\mathbf{I} - \mathbf{M}_{S\_uni} - \mathbf{M}_D - \mathbf{A}_{S\_uni} - \mathbf{A}_D] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{III.129})$$

Cette loi a une forme équivalente à (III.125), où  $\mathbf{M}_S$  et  $\mathbf{A}_S$  sont remplacés par  $\mathbf{M}_{S\_uni}$ ,  $\mathbf{A}_{S\_uni}$ . Ces dernières représentent l'influence de l'effet unilatéral sur la loi de comportement du béton.

En résumé, la loi incrémentale de comportement du béton peut présenter dans les différentes phases d'une manière suivante :

Phase I :

Quand  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_s \geq \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^{an}$ , on se situe dans le cas de l'endommagement avec les deux modes éventuellement : par extension et par glissement :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d_s)(1-d_d) \mathbf{D} [\mathbf{I} - \mathbf{M}_S - \mathbf{M}_D - \mathbf{A}_S - \mathbf{A}_D] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Dans cet incrément de déformation, s'il n'y a pas d'évolution de l'endommagement par extension, nous avons :  $\mathbf{M}_S = \mathbf{A}_S = \mathbf{0}$ . De même, s'il n'y a pas d'évolution de l'endommagement par glissement :  $\mathbf{M}_D = \mathbf{A}_D = \mathbf{0}$ .

Phase II :

Quand  $\tilde{\varepsilon}_s^{an} \geq \tilde{\varepsilon}_s \geq -\beta\tilde{\varepsilon}_s^{an}$ , on se trouve dans la phase transitoire de l'unilatéralité représentée par une loi élastique non-linéaire :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d_s)(1-d_d)\mathbf{D}[\mathbf{I} - \mathbf{M}_{S\_uni} - \mathbf{M}_D - \mathbf{A}_{S\_uni} - \mathbf{A}_D]\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Noter que, dans cette phase, l'endommagement par glissement peut évoluer en accompagnant l'évolution de déformation anélastique déviatorique, c'est-à-dire que  $\mathbf{M}_D$  et  $\mathbf{A}_D$  peuvent être non nulles.

Phase III :

Quand  $\tilde{\varepsilon}_s \leq -\beta\tilde{\varepsilon}_s^{an}$ , l'endommagement par extension et la déformation anélastique sphérique disparaissent, on applique le modèle de l'endommagement avec un seul mode de glissement :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d_d)\mathbf{D}[\mathbf{I} - \mathbf{M}_D - \mathbf{A}_D]\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

### **III.5. Conclusions**

Nous avons proposé dans ce chapitre un nouveau modèle d'endommagement, dénommé MODEV, basé sur la théorie de l'endommagement et sur la thermodynamique des processus irréversibles.

Selon la nature de sollicitations exercées, plusieurs types d'endommagement peuvent apparaître de manière simultanée. Le nouveau modèle proposé, basé sur des analyses physiques et sur des observations expérimentales, introduit la notion de déformation déviatorique équivalente responsable de l'endommagement par glissement qui s'ajoute à l'endommagement par extension. Ces deux types de dégradation (endommagement par extension et par glissement) sont considérés simultanément avec leurs propres lois d'évolutions respectives. Le modèle prend également en compte également l'effet unilatéral et les déformations anélastiques. L'unilatéralité est considérée comme une rigidification élastique qui intervient lors de changement de l'état du matériau, de la traction à la compression. De même, cette unilatéralité se manifeste comme un adoucissement élastique lors du passage de l'état de compression à l'état de traction (si le matériau est préalablement endommagé par extension), tout en assurant la continuité du modèle. L'effet anélastique, traduit par le glissement irréversible des microfissures, se présente au niveau global en une partie sphérique et une partie déviatorique des déformations. Ainsi, l'anélasticité est influencée par l'endommagement et par le degré d'hétérogénéité du matériau. Cette analyse permet de définir un cadre théorique et physique aidant d'expliquer l'origine des déformations irréversibles. En plus de la formulation sécante, le modèle MODEV donne lieu à une formulation tangente incrémentale. Ceci permet d'adapter le modèle aux processus de résolution numérique itératif et aux autres comportements non-linéaires des matériaux tels que la plasticité ou le fluage...

Ce nouveau modèle comporte un nombre limité des paramètres qui sont interprétables en terme de propriétés physiques ou mécaniques du matériau.

Dans la suite de cette étude, nous identifions ces paramètres à l'aide d'essais élémentaires disponibles menés sur le béton. Ce nouveau modèle sera ensuite validé théoriquement et expérimentalement.

**CHAPITRE IV:  
IDENTIFICATION ET VALIDATION DU MODELE MODEV**

## **IV.1. Introduction**

Lors de la conception du nouveau modèle d'endommagement, nous avons fixé des exigences concernant les paramètres du modèle. Ses paramètres doivent avoir une signification physique, être de nombres limités et facilement mesurables. Le présent chapitre est consacré dans un premier temps à l'identification physique et expérimentale des paramètres du modèle MODEV.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la validation théorique et expérimentale du nouveau modèle. Pour ce qui concerne la validation théorique, une étude de la continuité du modèle sur un cas de chargement 3D complexe et une simulation de traction - compression cyclique ont été réalisées.

La validation expérimentale du modèle a été effectuée dans le cadre projet MECA [Ref. 48]. Il s'agit d'un projet de Benchmark des modèles existants de comportement non-linéaire pour le béton (par exemples : Abaqus, modèle IWB de l'université Stuttgart, modèle du LMT de Mazars et de La Boderie...) mené à l'échelle nationale et européenne.

Nous avons également validé le modèle sur la base de essais trouvée dans la littérature. Ceci concerne notamment le comportement sous charges cycliques des poutres en béton.

## IV.2. Identification des paramètres du modèle MODEV

### IV.2.1. Les paramètres du modèle

Pour ce qui concerne le mode d'extension, la déformation équivalente est bien définie. Pourtant, dans l'expression de la déformation équivalente de glissement, il y a un coefficient  $\alpha$  à déterminer. Ce coefficient permet de tenir en compte l'influence de la pression hydrostatique sur le glissement du matériau. Physiquement, nous pouvons définir cette influence de manière analogue à l'expression du mécanisme décrit pour le critère de Drucker - Prager :

$$\kappa I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (IV.1)$$

Où :

$$I_1 = Tr(\underline{\underline{\sigma}}); \quad J_2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}^d : \underline{\underline{\sigma}}^d; \quad \kappa = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \quad (IV.2)$$

Nous avons défini, quand il n'y a pas de déformation anélastique :

$$\tilde{\varepsilon}^d = \sqrt{\underline{\underline{\varepsilon}}^d : \underline{\underline{\varepsilon}}^d} - \alpha \varepsilon^H \quad (IV.3)$$

Donc, le coefficient de couplage sphérique – déviatorique  $\alpha$  peut être défini en utilisant la relation élastique :

$$\begin{aligned} \varepsilon_H &= \frac{1-2\nu}{E} \sigma_H \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^d &= \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}}^d \end{aligned} \quad (IV.4)$$

Ainsi, nous pouvons prendre la valeur approximative de  $\alpha$  selon l'expression suivante:

$$\alpha = \frac{6\sqrt{2} \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \quad (IV.5)$$

Pour le béton, vu l'angle de frottement interne  $\phi$  est environ  $37^\circ$  et une partie sphérique a été prise en compte dans l'expression de l'endommagement par extension, nous prenons :

$$\alpha = 2,1 \quad (IV.6)$$

Pour ce qui concerne la loi d'évolution de l'endommagement par extension, nous avons adopté:

$$d_s = 1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_0^s}{\tilde{\varepsilon}^s} \exp\left[-B_t (\tilde{\varepsilon}^s - \tilde{\varepsilon}_0^s)\right] \quad (IV.7)$$

$$d_d = 1 - \exp\left[-B_c (\tilde{\varepsilon}^d - \tilde{\varepsilon}_0^d)\right] \quad (IV.8)$$

Nous pouvons donc considérer les deux modes d'endommagement avec les paramètres associés :

1- Endommagement par extension, les paramètres sont  $B_t$ ,  $\mu_1$  : Coefficient de l'endommagement et indice d'hétérogénéité pour le mode sphérique.

2- Endommagement par glissement, les coefficients sont  $B_C$ ,  $\mu_2$  : Coefficient de l'endommagement et indice d'hétérogénéité pour le mode déviatorique.

Pour ce qui concerne l'effet unilatéral, nous avons  $\beta$  : coefficient de rigidification élastique lors de refermeture des fissures.

Le tableau suivant récapitule l'ensemble des paramètres du modèle :

Effet	Paramètre	Signification	Méthode possible d'indentification
Unilatéralité	$\beta$	Limite de refermeture des fissures	- Essai unilatéral
Endommagement sphérique	$B_t$	Evolution de l'endommagement	- Essai de traction simple
	$\mu_1$	Degré d'hétérogénéité	- Essai de traction simple - Tenseur de localisation par calcul d'homogénéisation numérique.
Endommagement déviatorique	$\alpha$	Couplage sphérique-déviatorique	- Par analogie au critère Drucker-Prager
	$B_c$	Evolution de l'endommagement	- Essai de compression simple
	$\mu_2$	Degré d'hétérogénéité	- Essai de traction simple - Tenseur de localisation par calcul d'homogénéisation numérique.

Tableau des paramètres du modèle MODEV

Nous proposons dans la suite d'effectuer une étude de sensibilité des paramètres. Les courbes suivantes montrent l'influence de ces paramètres sur le comportement du matériau :

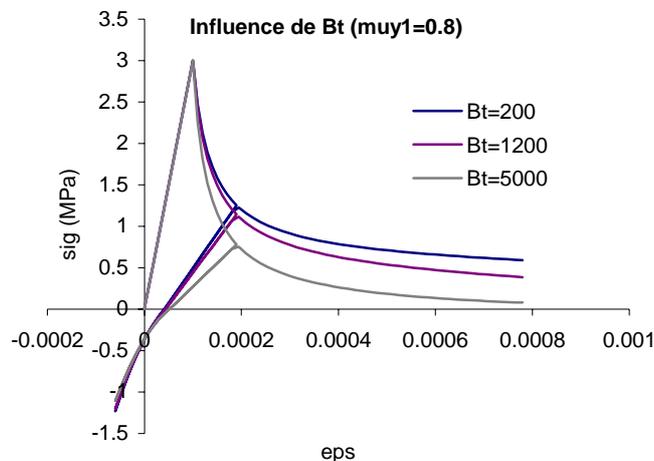


Figure IV-1. Influence de  $B_t$

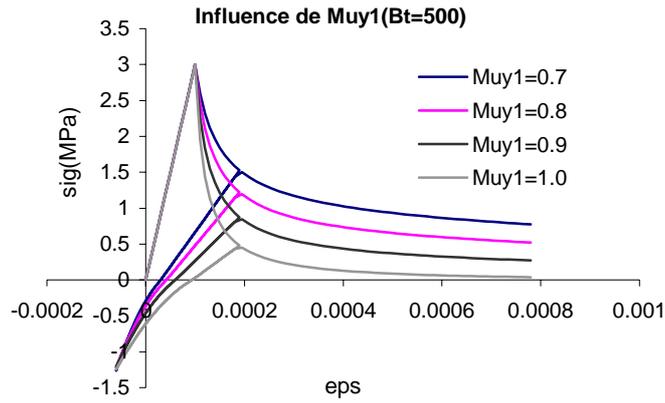


Figure IV-2. Influence de  $\mu_1$

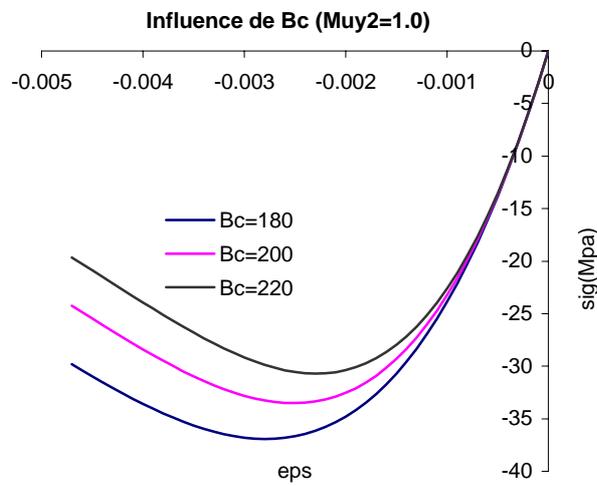


Figure IV-3. Influence de  $B_C$

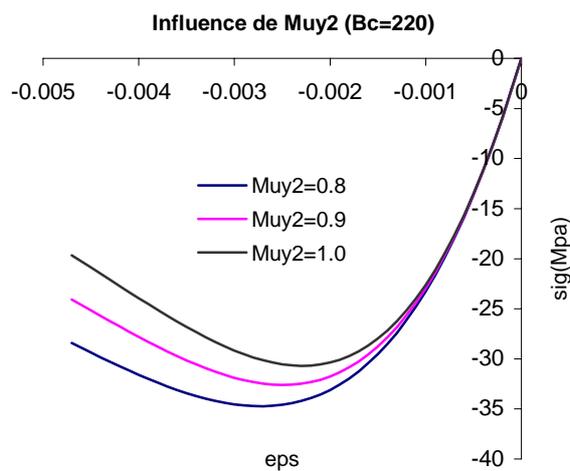


Figure IV-4. Influence de  $\mu_2$

### IV.2.2. Identification

Suite à l'étude de synthèse sur les modèles de comportement du béton (au chapitre I), nous avons pris comme objectif de développer un modèle représentant finement le comportement des bétons tout en maintenant sa simplicité notamment en matière de nombre de paramètres, de leur sens physique ainsi au niveau de l'accessibilité de leur identification expérimentale.

Ainsi, le modèle MODEV possède un nombre limité des paramètres dont leur identification expérimentale peut être réalisée par des simples essais de traction et compression uniaxiale.

Nous avons adopté les essais de Ramtani et Terrien [Ref. 111, Ref. 120], en titre illustratif, pour l'identification des paramètres du modèle MODEV.

On identifie d'abord avec l'essai de compression de Ramtani [Ref. 111] où il n'y a que l'endommagement par glissement, la partie anélastique de la déformation est ainsi déviatorique.

On utilise la méthode des moindres carrés pour trouver la valeur de chaque variable. Par exemple pour  $B_C$ , on trouve la valeur 511

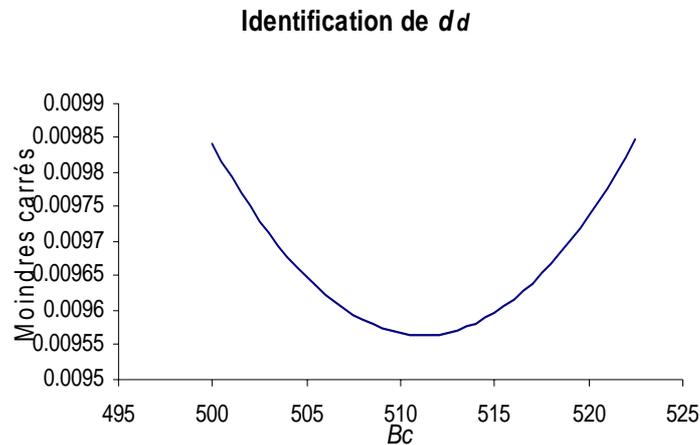


Figure IV-5. Identification de coefficient de l'endommagement déviatorique  $B_c$  par la méthode des moindres carrés

De même façon, on a  $\mu_2=0.80$

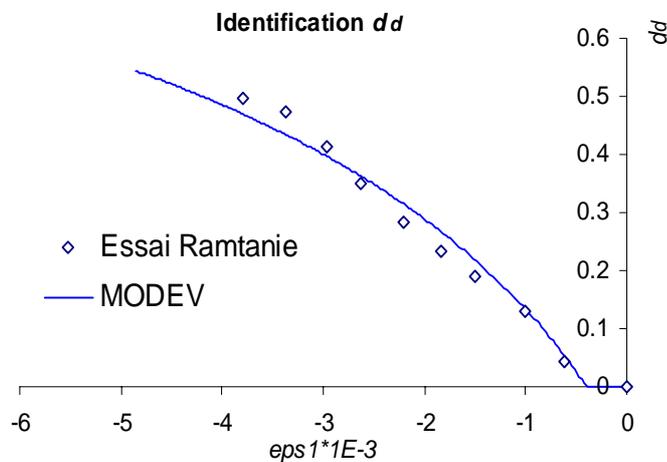


Figure IV-6. Identification de la variable d'endommagement déviatorique  $d_d$

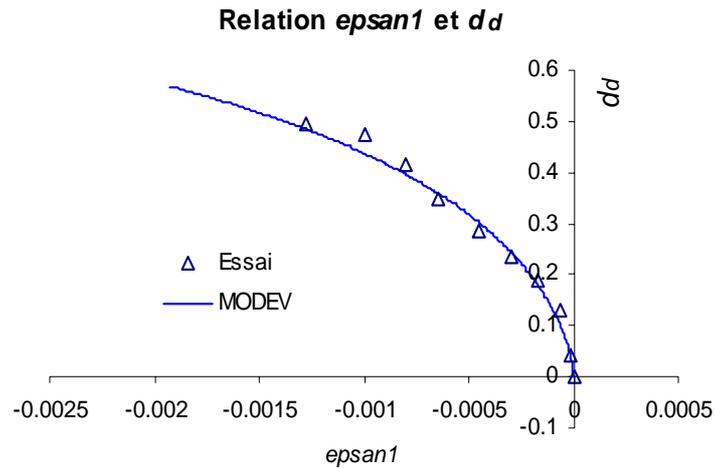


Figure IV-7. Identification de la variable d'endommagement déviatorique  $d_d$

Une fois qu'on a déterminé les paramètres de l'endommagement et d'hétérogénéité déviatorique, on identifie les paramètres de l'endommagement et d'hétérogénéité sphérique. On choisit l'essai de Terrien [Ref. 120].

Les valeurs identifiées sont  $B_t=236,2$  et  $\mu_2=0,97$ .

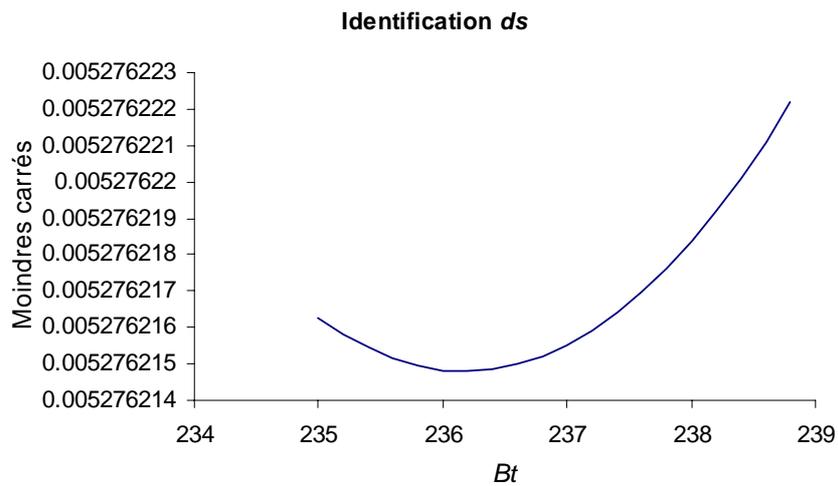


Figure IV-8. Identification du coefficient d'endommagement sphérique  $B_t$  par la méthode des moindres carrés

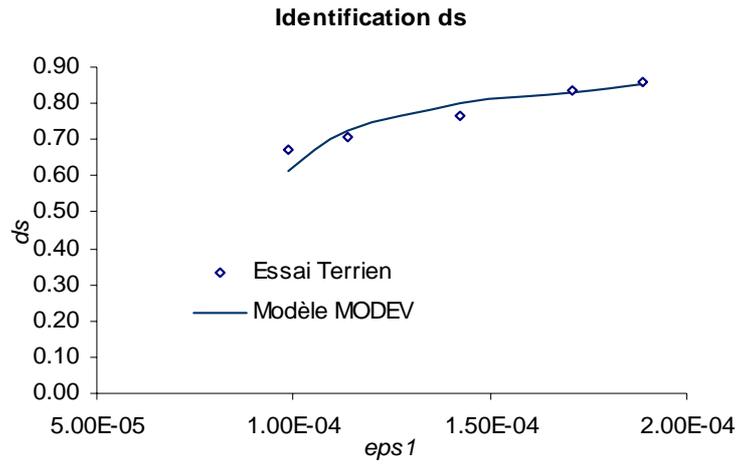


Figure IV-9. Identification de la variable d'endommagement  $d_s$

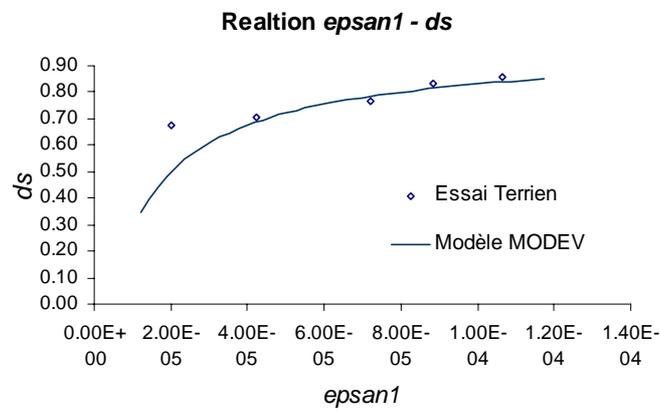


Figure IV-10. Identification de la variable d'endommagement sphérique  $d_s$

En ce qui concerne l'endommagement par extension, une approche énergétique est mise en œuvre dans le but d'avoir l'objectivité vis-à-vis du maillage. Nous présentons cette approche dans l'annexe E.

### IV.3. Validation théorique du modèle MODEV

#### IV.3.1. Continuité du modèle

Le nouveau modèle tient en compte de l'unilatéralité et des effets anélastiques avec plusieurs modes de l'endommagement. Le principe du modèle est compatible avec la théorie de la thermodynamique des milieux continus.

Cependant, lors de la modélisation, sous des chargements relativement complexes, la discontinuité au niveau de la loi de comportement pourrait se produire notamment lors du processus unilatéral et la combinaison simultanée de plusieurs phénomènes non-linéaires du caractère hétérogène du béton. Cette discontinuité est alors difficile à contrôler théoriquement.

Afin de démontrer la continuité du modèle, on prend un cas de chargement triaxial en imposant les déformations principales  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$  qui forme un loxodrome. Tous les trajets se situent sur une demi-sphère de rayon 0.0004 (Figure IV-11, Figure IV-12)

La réponse de la loi de comportement  $\sigma_1$ - $\epsilon_1$  (Figure IV-13) et la réponse  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  dans le plan  $\sigma_3=0$  (Figure IV-14) nous montrent un comportement non symétrique entre l'état de traction et celui de compression et surtout une continuité complète du modèle.

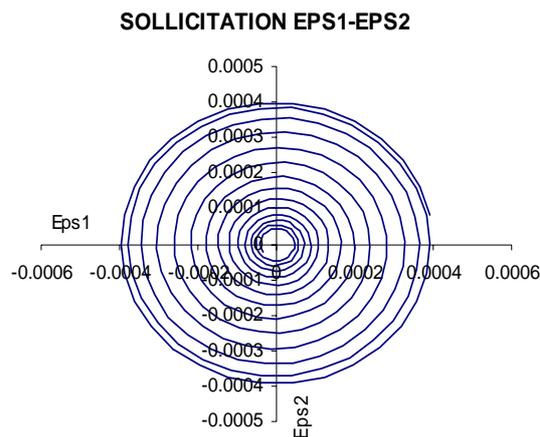


Figure IV-11. Dans le plan  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$

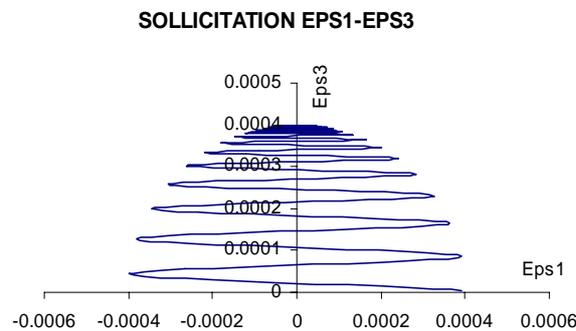


Figure IV-12. Relation  $\epsilon_1$ - $\epsilon_3$

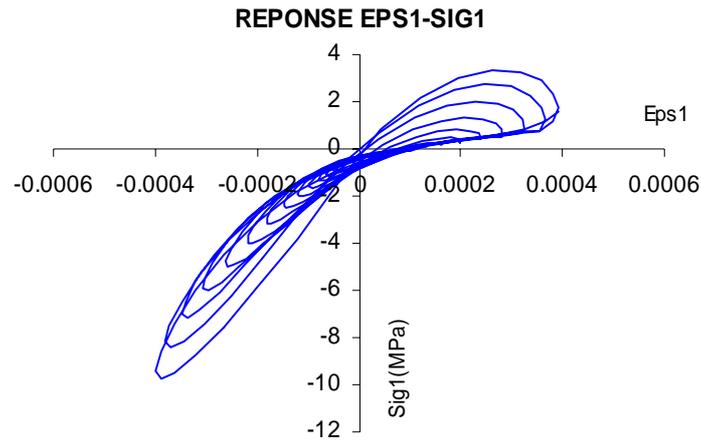


Figure IV-13. Réponse eps1-sig1

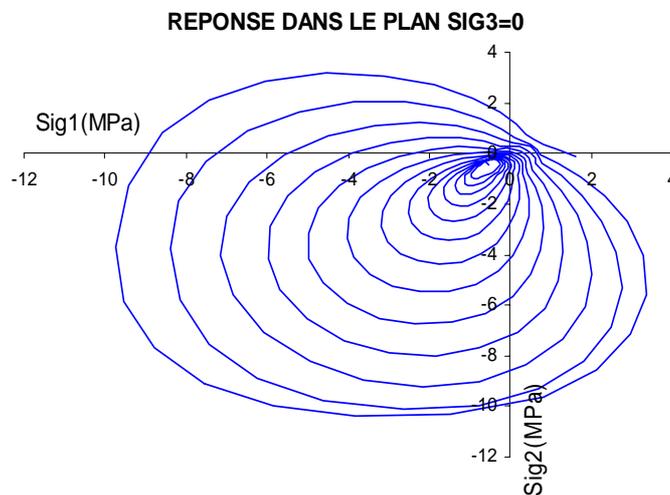


Figure IV-14. Réponse sig1-sig2

### IV.3.2. Comportement uniaxial cyclique du béton

On travaille sur un élément soumis à un chargement uniaxial alterné traction et compression. Les caractéristiques du matériau :

Module d'Young : 339000Mpa ; résistance en traction 4,5Mpa ; résistance en compression 45Mpa ; coefficient de Poisson 0.2.

La réponse est indiquée dans (Figure IV-15)

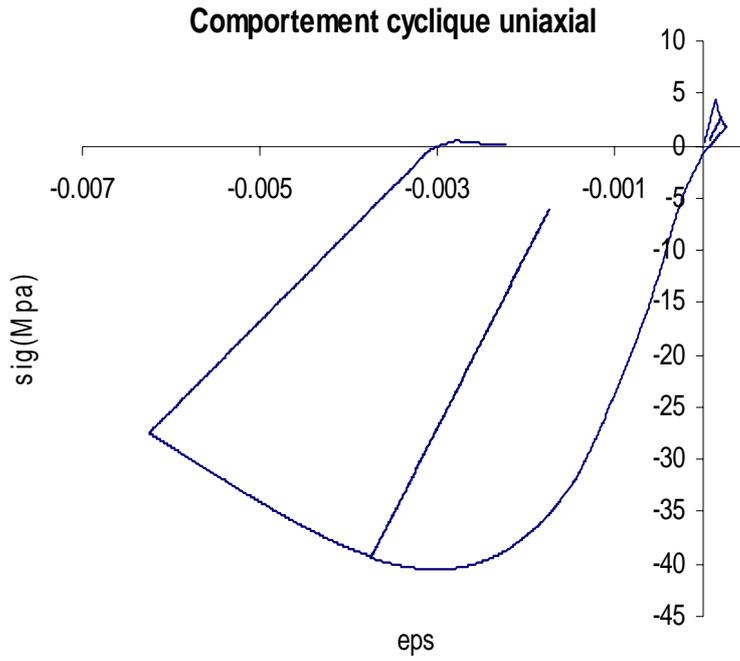


Figure IV-15. Comportement cyclique uniaxial avec l'opérateur tangent

## IV.4. Validation pratique du modèle MODEV

### IV.4.1. Cas test A du projet MECA : Élément soumis à un chargement uniaxial cyclique

Ce cas test a pour but de déterminer la loi de comportement uniaxial cyclique du modèle. Ce calcul vérifie la continuité du modèle, l'effet anélastique et particulièrement le traitement de l'effet unilatéral. Le test est effectué avec un échantillon cube de dimension  $560 \times 560 \times 560 \text{ mm}^3$  divisé en 1000 éléments. Le schéma de maillage et les conditions aux limites sont présentés dans la Figure IV-16.

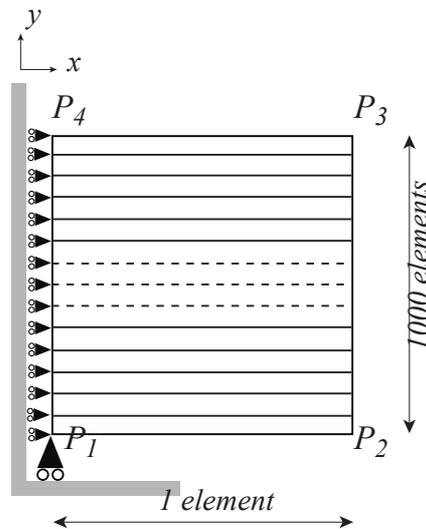


Figure IV-16. Cas test A

Les caractéristiques du béton sont les suivantes:

Module d'élasticité	$E$	32 000 MPa
Coefficient de Poisson		0,2
Résistance à la traction	$f_{ct}$	3 MPa
Résistance à la compression	$f_c$	38,3 MPa
Energie de fissuration	$G_f$	110 J/m <sup>2</sup>

Le chargement est appliqué en déplacement imposé à tous les nœuds dans la frontière P2 et P3 dans la direction  $Ox$ . Les cycles de chargement peuvent se présenter comme suit :

Chargement

1. traction  $\epsilon_{xx} = 1.4 \cdot 10^{-4}$
2. déchargement (retour à  $\sigma_{xx} = 0$ )
3. traction  $\epsilon_{xx} = 1.0 \cdot 10^{-3}$
4. compression  $\epsilon_{xx} = -4.0 \cdot 10^{-3}$
5. déchargement (retour à  $\sigma_{xx} = 0$ )
6. compression  $\epsilon_{xx} = -5.0 \cdot 10^{-3}$
7. traction  $\epsilon_{xx} = 0.0$

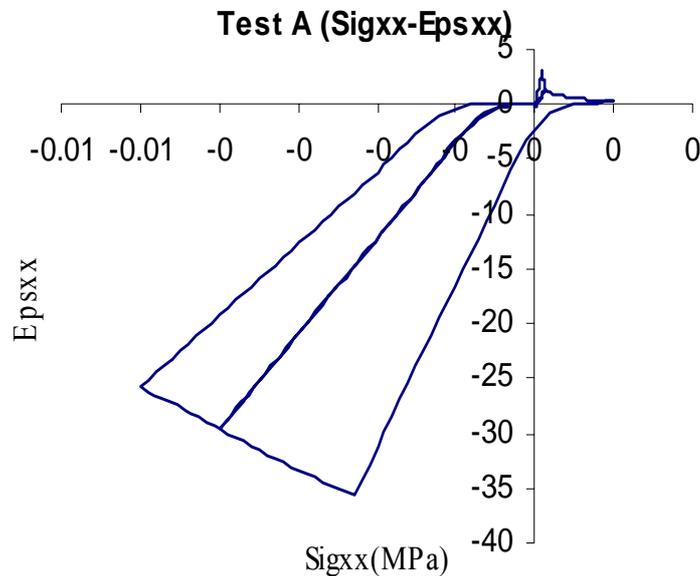
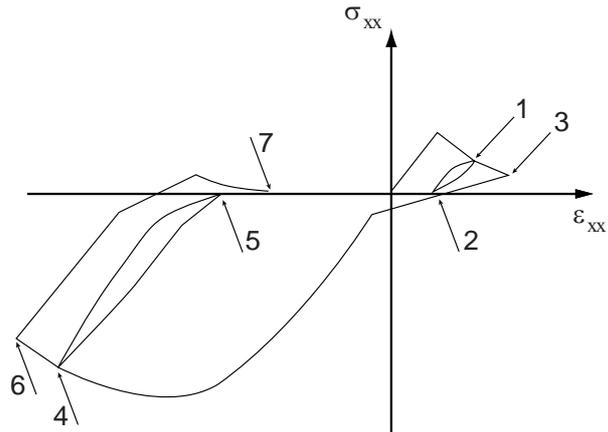


Figure IV-17. Courbe  $\sigma_{xx} - \epsilon_{xx}$  du cas test A

A travers de la loi de comportement cyclique uniaxial du modèle, on peut remarquer que le modèle MODEV est continu et capable de prendre en compte l'effet unilatéral ainsi que l'effet anélastique.

A titre de comparaison avec les autres modèles sur le même cas test, nous présentons quelques résultats :

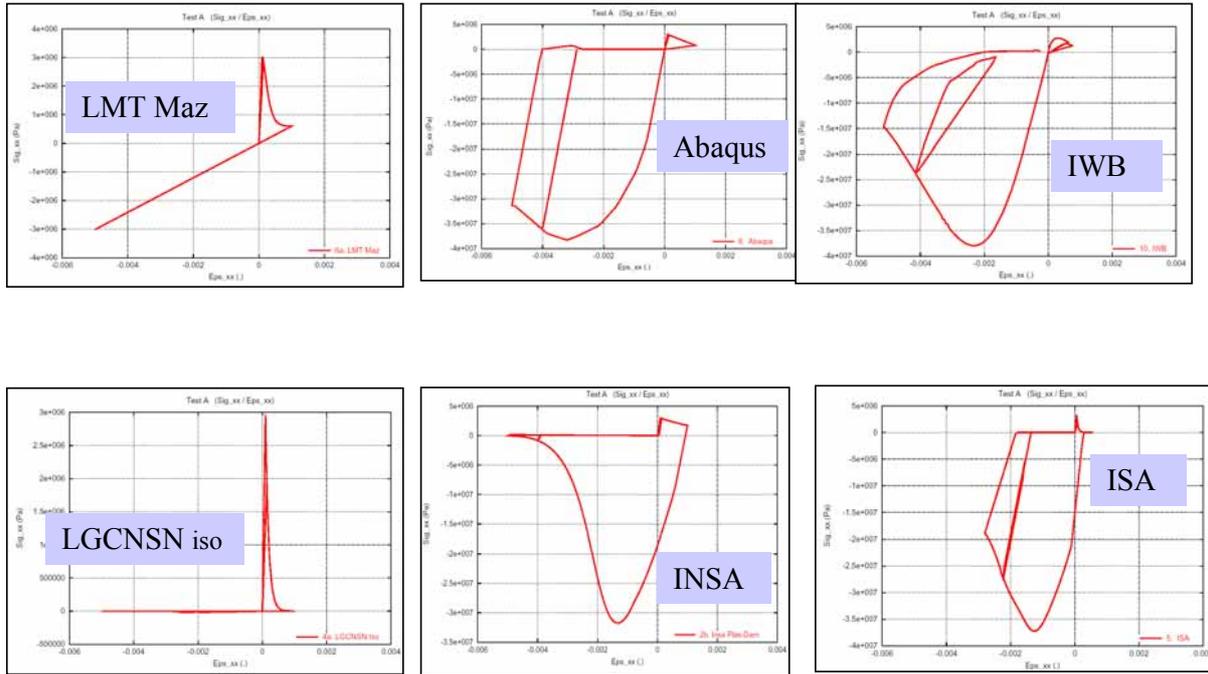


Figure IV-18. Résultat des autres modèles [Ref. 48]

#### IV.4.2. Cas test B du projet MECA : Élément soumis à la traction puis au cisaillement.

Pour mettre en évidence le comportement du modèle au niveau local on a simulé un problème élémentaire homogène de traction cisaillement. Ce test est effectué en contraintes planes.

##### IV.4.2.1. Conditions limites, chargement et maillage

Un volume élémentaire est chargé, tout d'abord en traction uniaxiale jusqu'au pic puis est soumis au cisaillement couplé à la traction biaxiale ce qui implique la rotation de direction des déformations principales après fissuration. Ce cas test est inspiré des travaux de Willam et al. [Ref. 124] (voir la Figure IV-19).

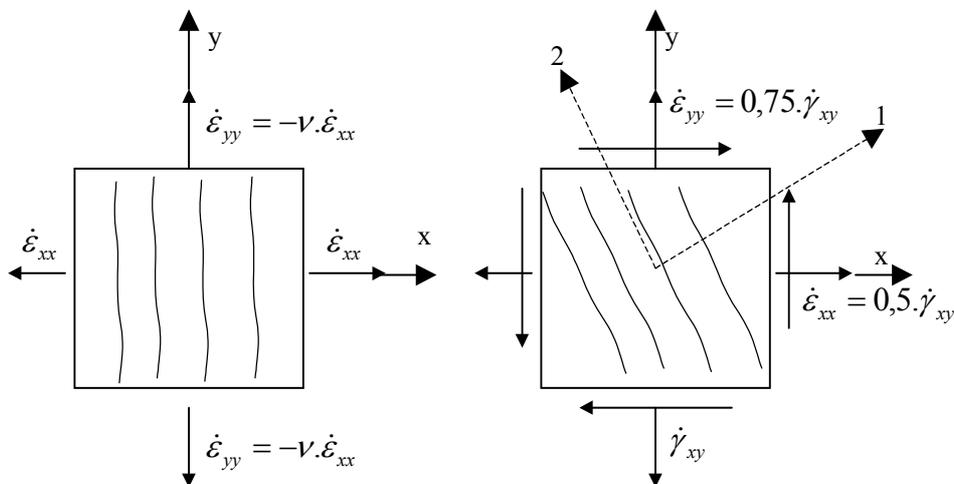


Figure IV-19. Problème élémentaire de traction cisaillement

Les valeurs numériques utilisées pour le cas test sont les suivantes :

Module d'Young $E$	32 GPa
Coefficient de Poisson $\nu$	0,2
Résistance à la traction $f_{ct}$	3 MPa
Résistance à la compression $f_c$	38,3 MPa
Energie de fissuration $G_f$	110 J/m <sup>2</sup>

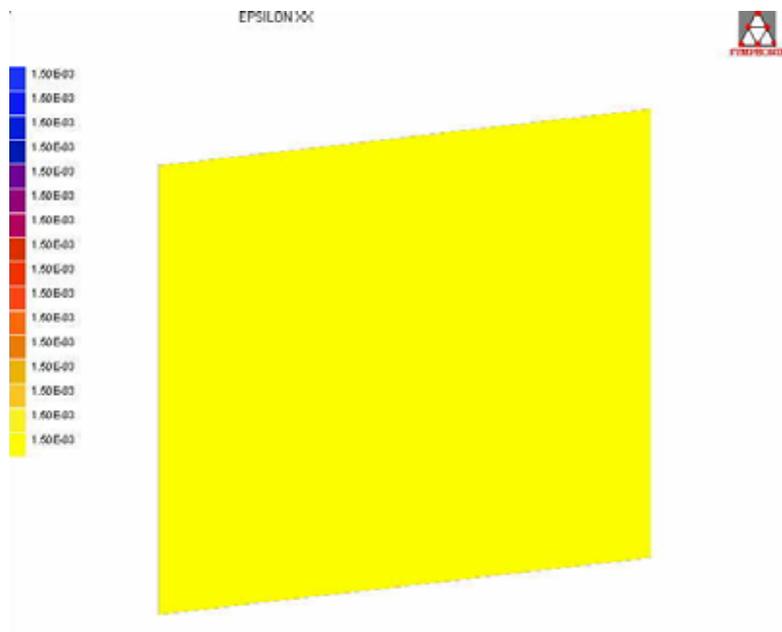
En ce qui concerne le chargement on a :

- Traction selon  $x$  :  $\Delta\varepsilon_{xx} : 1$ ,  $\Delta\varepsilon_{yy} : -\nu$  et  $\Delta\varepsilon_{xy} : 0$ .

- Puis cisaillement + traction bi axiale :  $\Delta\varepsilon_{xx} : 1$  ;  $\Delta\varepsilon_{yy} : 1,5$  et  $\Delta\varepsilon_{xy} : 1$  jusqu'à  $\varepsilon_{xx}=1.5 \cdot 10^{-3}$ .

#### IV.4.2.2. Résultats

La déformée, et la réponse contrainte déformation selon  $xx$  et  $yy$  et  $xy$  sont respectivement tracées sur les figures suivantes



Déformée (x50) du cas test homogène

**Test B (Sig\_xx/Eps\_xx)**

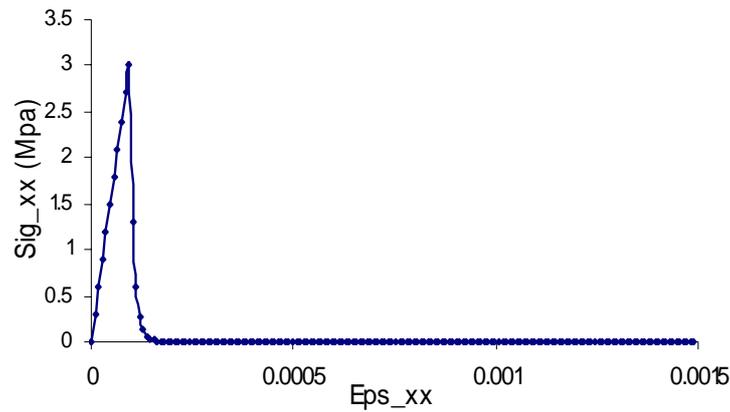


Figure IV-20. Courbe contrainte  $\sigma_{xx}$  versus  $\epsilon_{xx}$

**Test B (Sig\_yy/Eps\_yy)**

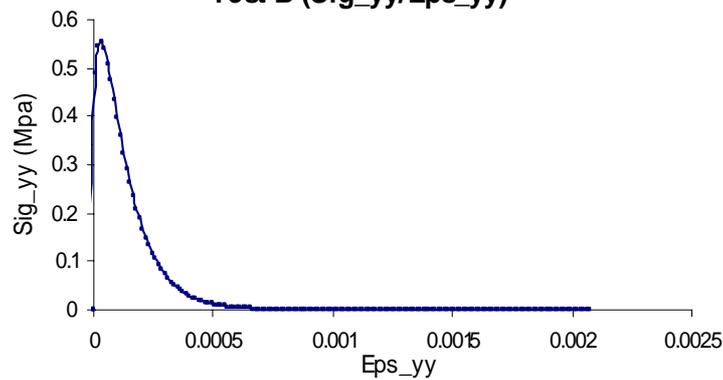


Figure IV-21. Courbe contrainte  $\sigma_{yy}$  versus  $\epsilon_{yy}$

**Test B (Sig\_xy/Eps\_xy)**

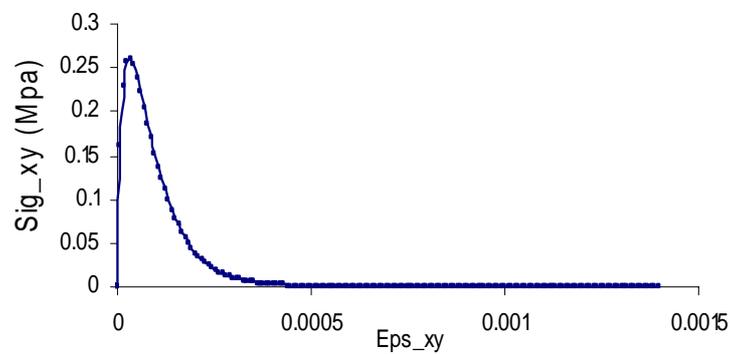


Figure IV-22. Courbe contrainte  $\sigma_{xy}$  versus  $\epsilon_{xy}$

Les résultats présentent bien le comportement élastique au début, puis endommageable avec la phase adoucissante et la rupture reflétée par un palier à contrainte nulle. En effet, les

modèles d'endommagement ne rencontrent des problèmes de blocage des contraintes que rencontrent les modèles de la fissuration distribuée (voir le chapitre II).

Dans ce test, le chargement n'est pas proportionnel, l'axe des déformations principales tournent ce qui provoque deux types d'endommagement : endommagement par fissuration en mode I qui s'initie dans un premier temps puis, endommagement causé par fissuration en mode II (glissement) dans un second temps. Les résultats obtenus montrent que le modèle MODEV qui se base sur deux types de dégradation : extension et glissement, permet de traiter un tel chargement relativement complexe et de sortir des résultats cohérents au terme de courbe contrainte - déformation dans les différentes directions.

### IV.4.3. Cas test C du projet MECA : Poutre en béton armé en flexion

#### IV.4.3.1. Introduction

On propose de simuler l'essai classique de la poutre en béton armé soumise à la flexion simple. Cet essai est simulé en 3D avec cadres transversaux puis sans les cadres transversaux. Ce cas test est très intéressant car il permet de mesurer les performances du modèle et surtout en présence de deux matériaux de différentes natures : Plasticité pour l'acier et endommagement pour le béton. A titre de validation, nous présentons ici le cas simulé avec la présence des cadres transversaux. Il s'agit d'un calcul tridimensionnel nécessitant un maillage fin et en nombre important d'éléments de différents types.

#### IV.4.3.2. Géométrie, conditions limites, maillage

Les dimensions de la poutre sont  $5000 \times 500 \times 200 \text{ mm}^3$ . La distance entre les supports est de 5 m, la charge est appliquée à mi-travée. La Figure IV-23 décrit les conditions limites et le chargement de la structure.

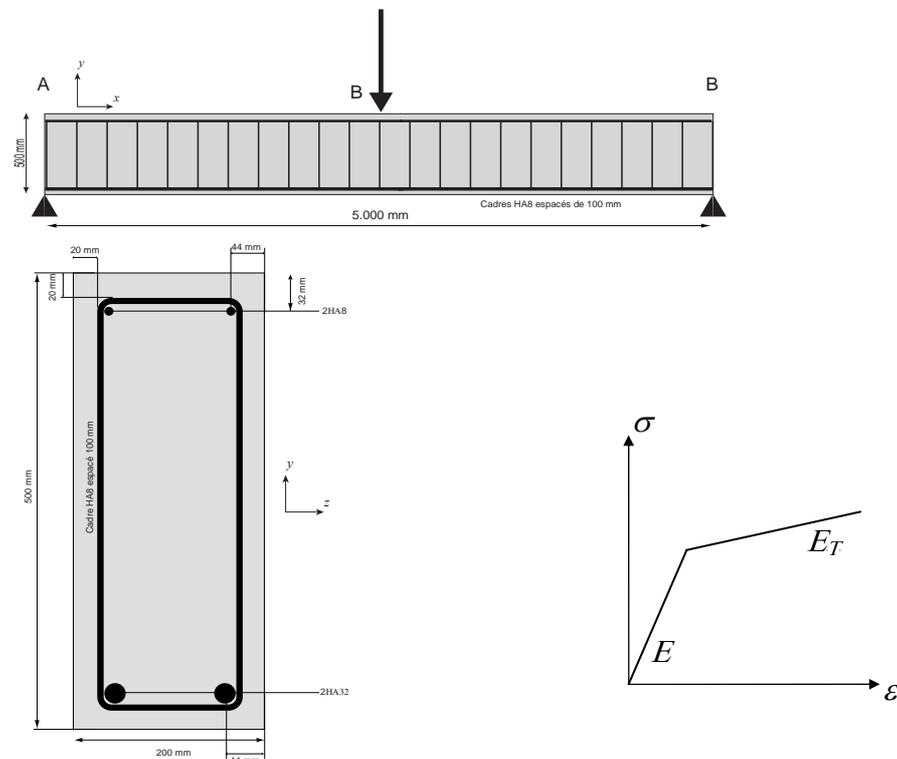


Figure IV-23. Poutre en béton armé en flexion 3 points

Les caractéristiques du béton sont les suivantes :

Résistance en traction	3,9 MPa
Résistance en compression	38,3 MPa
Module d'Young	37,272 GPa
Coefficient de Poisson	0,2
Energie de fissuration $G_f$	110 J/m <sup>2</sup>

Les caractéristiques de l'armature sont les suivantes :

Seuil de plasticité	400 MPa
Module d'Young	200 000 MPa
Coefficient de Poisson	0,0
Module plastique tangent	3 245 MPa

L'éprouvette est discrétisée au moyen d'éléments Hexaédriques à 8 nœuds HEXA8 pour la partie béton. Des éléments linéiques sont utilisés pour les barres longitudinales et les cadres transversaux. Pour des raisons de symétrie seul un quart de la poutre est discrétisé

Maillage en 3D :

- 1800 éléments Hexa8 pour la partie en béton
- 50 éléments barres 3 D pour les barres inférieures
- 50 éléments barres 3 D pour les barres supérieures
- 36 éléments HEXA8 pour les parties infiniment rigides

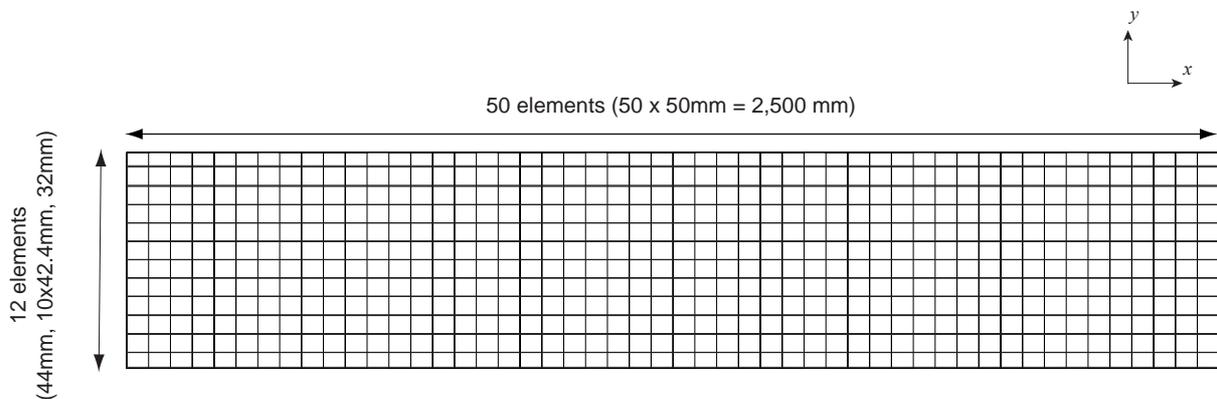


Figure IV-24. Profil de maillage de la poutre

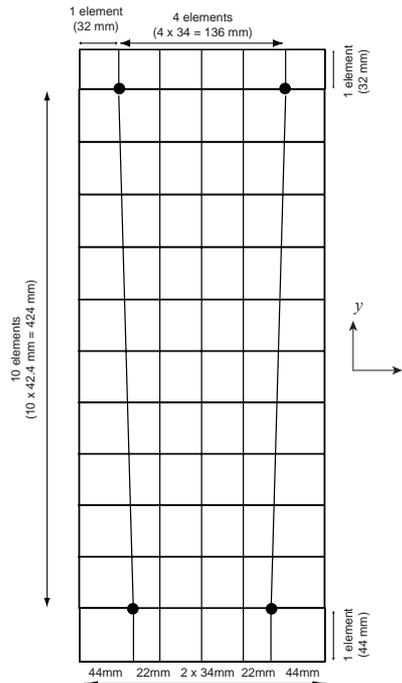


Figure IV-25. Coupe transversale : position des armatures

#### IV.4.3.3. Résultat en cas avec les cadres transversaux

L'endommagement dans la poutre en flexion est engendré en général par fissuration dans les zones tendues des fibres inférieures. Grâce aux armatures, on évite une localisation d'endommagement (qui aboutit en général à une rupture brusque). Dans ce cas, les essais montrent qu'il y a une diffusion stable des fissures. Elles commencent au milieu de la fibre inférieure de la poutre, et se propagent tout le long de celle-ci. La Figure IV-26 présente le profil d'endommagement de la poutre. Dans la coupe au milieu de la poutre, on remarque ainsi que le béton autour de l'armature transversale s'endommage moins qu'ailleurs. Le mode de ruine obtenu par modèle MODEV visualisé à l'aide du profil de l'endommagement est donc comme on pouvait s'y attendre.

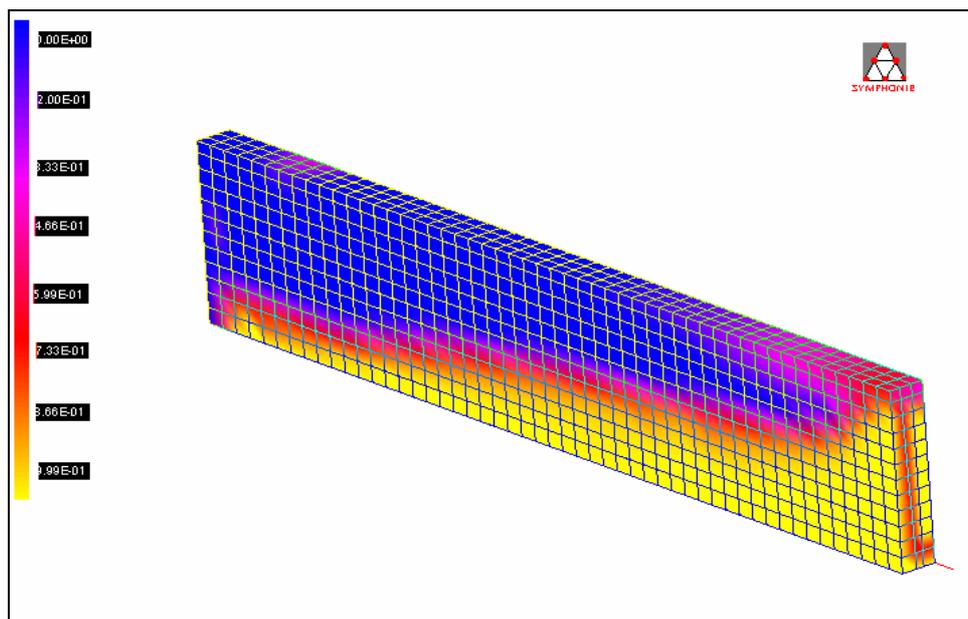


Figure IV-26. Endommagement avec cadres

La figure ci-dessous donne les iso - valeurs de la déformation  $\varepsilon_{xx}$ . Comme le mode I de fissuration prend l'avantage, on voit que  $\varepsilon_{xx}$  dans les fibres inférieures de la poutre est positive et atteint la valeur la plus grande à la mi poutre. Celle-ci, vu le principe du modèle MODEV, cause l'endommagement.

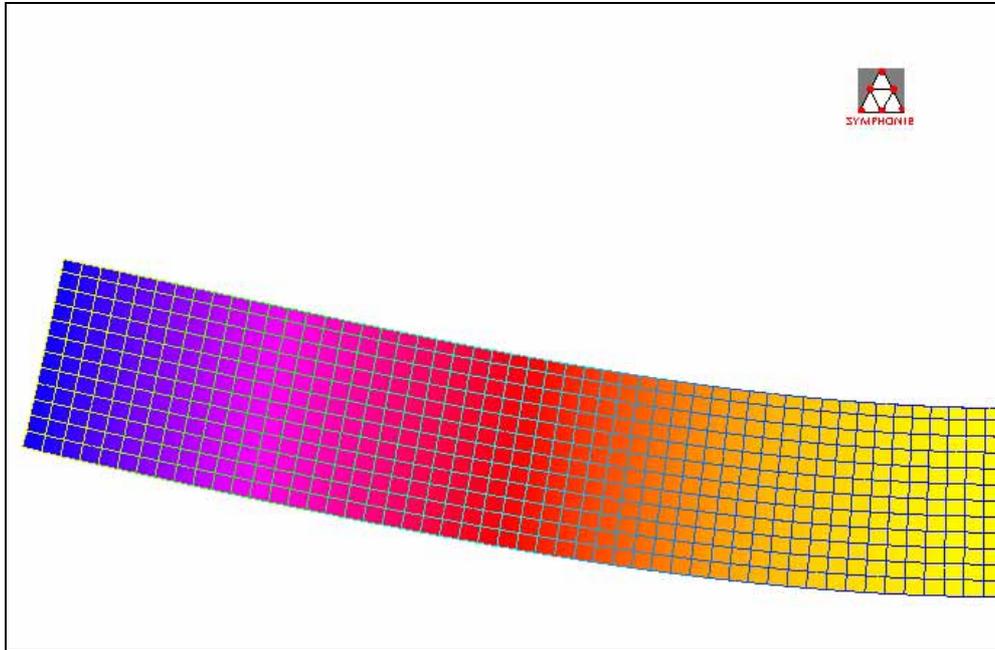


Figure IV-27. Déformée  $\varepsilon_{xx}$  avec cadres

La Figure IV-28 présente la courbe force – déplacement. Il n'y a pas de rupture brusque caractérisée par une phase descendante plus ou moins brusque comme le cas de la poutre en béton simple. Avec la présence des armatures longitudinales, après la fissuration de béton, les armatures reprennent des forces et se plastifient. Une telle courbe est cohérente avec des essais.

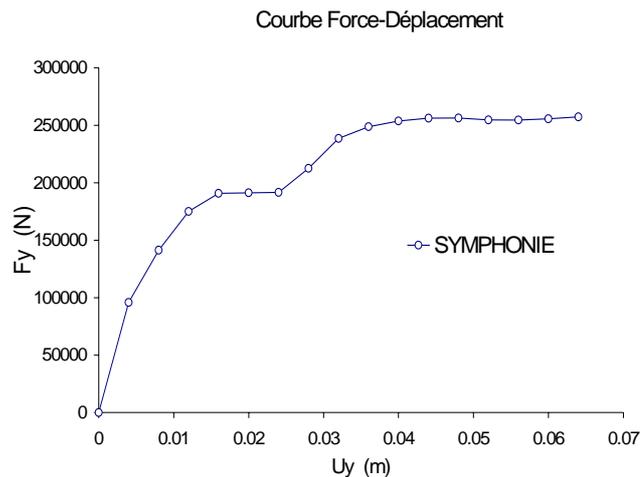


Figure IV-28. Courbe  $F_y - U_y$

Ainsi, les figures ci-dessous présentent respectivement la relation entre la flèche  $U_y$  et la déformation  $\varepsilon_{xx}$  de l'armature longitudinale inférieure à la mi-poutre (Figure IV-29), le profil de la contrainte  $\sigma_{xx}$  (Figure IV-30) et le profil de la déformation  $\varepsilon_{xx}$  dans la barre inférieure

d'acier (Figure IV-31) de l'appuis à mi portée. La dernière montre qu'il y a des points de concentration de déplacement longitudinal, ces points en effet se trouvent dans les positions où le béton est endommagé et par conséquent l'armature reprend les charges.

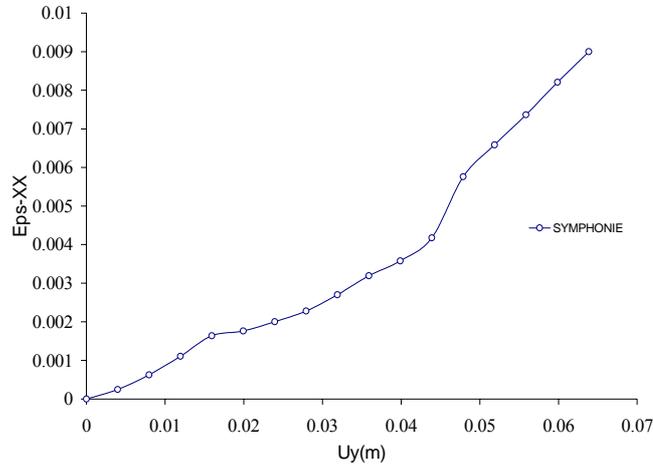


Figure IV-29. Courbe  $\epsilon_{xx}$  – déplacement  $U_y$

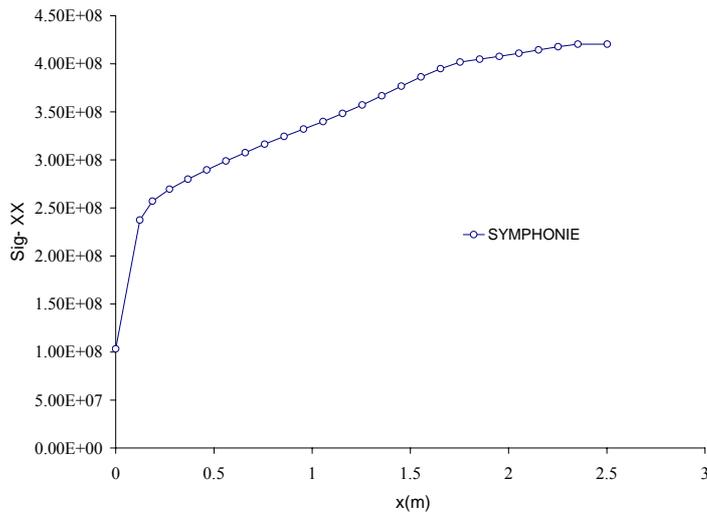


Figure IV-30. Evolution de la contrainte  $\sigma_{xx}$  le long de la barre inférieure

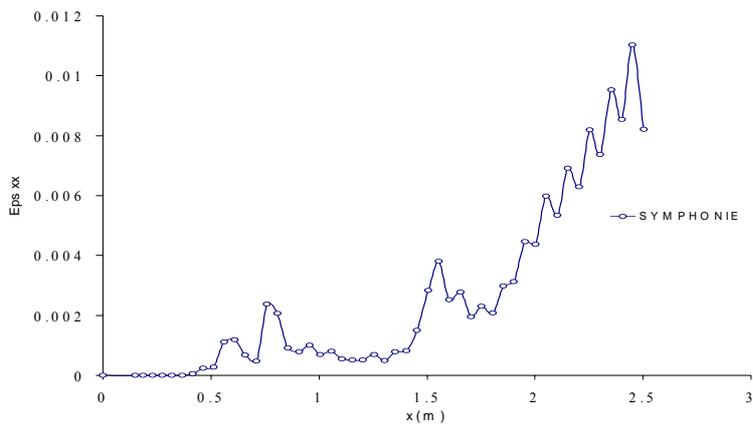


Figure IV-31. Evolution de la déformation longitudinale  $\varepsilon_{xx}$  dans la barre inférieure d'acier  
 En titre de comparaison avec le résultat d'essai et des autres modèles, on extrait des courbes dans le projet MECA :

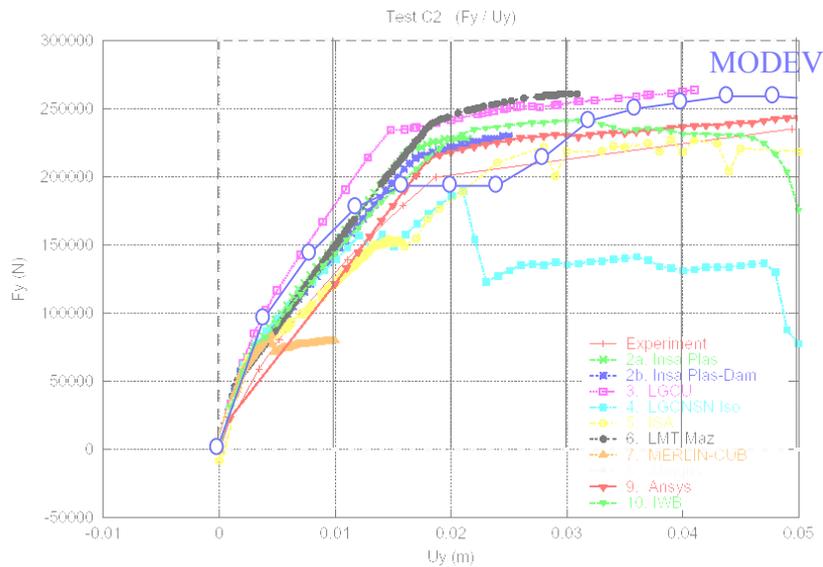


Figure IV-32. Courbe Charge-Déplacement  $F_y-U_y$  des différents modèles [Ref. 48]

#### IV.4.4. Cas test D du projet MECA : Boite de cisaillement

L'intérêt de ce cas test réside dans sa capacité à mettre en évidence la validité du modèle en mode mixte de fissuration. Une éprouvette carrée de dimension 200x200mm<sup>2</sup> et d'épaisseur 50mm est entaillée de chaque côté. Cette éprouvette a été soumise aux 4 trajets de chargement 1a, 1b, 2a, 2b. Ce benchmark est tiré des essais de fissuration par mode mixte réalisés par Nooru-Mohamed [Ref. 96]. Le montage expérimental est donné sur la figure suivante :

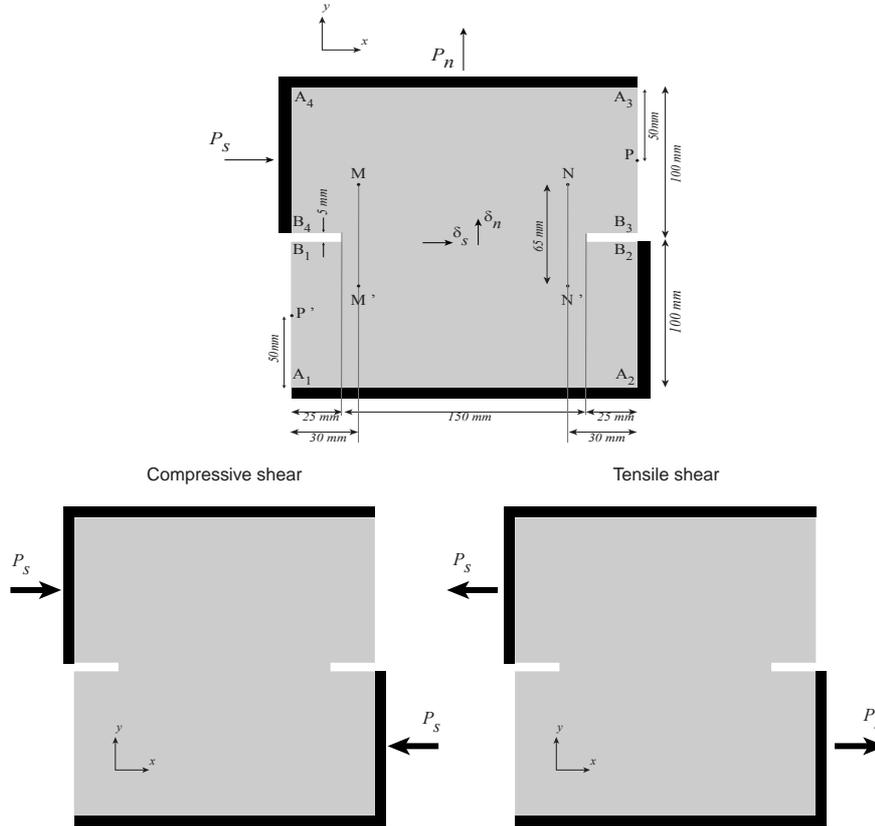


Figure IV-33. Dispositif expérimental

##### IV.4.4.1. Chargement, caractéristiques et maillage

Selon le trajet de chargement envisagé, une force de cisaillement  $P_s$  et une force de tension  $P_n$  sont appliquées, simultanément ou d'une manière séquentielle, sur l'éprouvette. L'action du montage est modélisée par un mouvement de corps rigide. Ces forces sont contrôlées par les déplacements tangentiel et normal relatifs à la zone fissurée  $\delta_n$  et  $\delta_s$  :

$$\delta_s = \delta_s^P - \delta_s^{P'}$$

$$\delta_n = (\delta_s^M - \delta_s^{M'} + \delta_s^N - \delta_s^{N'}) / 2$$

Les cas de chargement considérés sont les suivants :

*Trajet 1a - Cisaillement tractif à l'effort axial nul :*

L'éprouvette est en premier temps soumise à un déplacement imposé jusqu'à  $\delta_n=0,2\text{mm}$  pendant que  $P_s$  reste nulle. Puis, on décharge jusqu'à  $P_n=0\text{KN}$ . Ensuite, on maintient  $P_n=0\text{KN}$  et augmente le cisaillement  $P_s$  jusqu'on atteint un déplacement  $\delta_s=0,15\text{mm}$ .

*Trajet 1b – Cisaillement compressif à effort axial constant de compression:*

L'éprouvette est d'abord soumise à un déplacement axial contrôlé jusqu'à  $\delta n=0,2\text{mm}$ . Puis, on décharge axialement jusqu'à  $Pn=-1\text{KN}$ . Puis, on exerce un effort de cisaillement compressif  $Ps$ , qui pendant deux phases précédentes reste nul, jusqu'on atteint un déplacement  $\delta s=0,15\text{mm}$ . Notant que  $Pn$  est maintenu à  $-1\text{KN}$ .

*Trajet 2a – Effort axial de traction à effort de cisaillement compressif constant  $Ps=-5\text{KN}$  :*

L'éprouvette est soumise en premier temps à un cisaillement compressif jusqu'à  $Ps=-5\text{KN}$  pendant que  $Pn=0$ . Puis, on maintient  $Ps$  constant et on charge axialement jusqu'à  $\delta n=0,15\text{mm}$ .

*Trajet 2b – Effort axial de traction à effort de cisaillement compressif constant  $Ps=-10\text{KN}$ :*

Comme le trajet 2a mais  $Ps=-10\text{KN}$ .

Les caractéristiques du béton sont les suivantes :

Résistance en traction $f_{ct}$	3 MPa
Résistance en compression $f_c$	35,8MPa
Module d'Young $E$	32,8 GPa
Coefficient de Poisson	0,2
Energie de fissuration $G_f$	100 J/m <sup>2</sup>

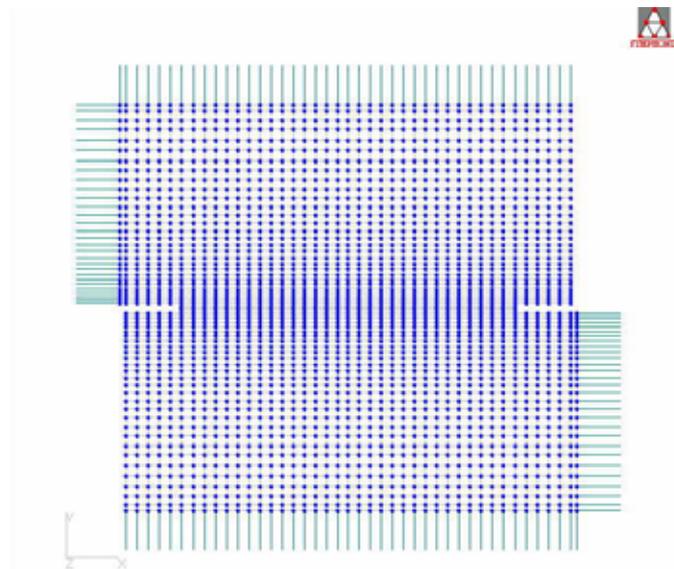


Figure IV-34. Maillage, conditions limites

L'éprouvette est discrétisée au moyen d'éléments quadrilatéraux à 4 nœuds QUAD4. Une plus grande densité d'éléments a été mise dans la partie centrale zone de développement supposé de la fissure. Le maillage est représenté à la Figure IV-34.

Maillage :

2280 éléments pour la partie béton

136 éléments pour les éléments infiniment rigides

Dans le cadre de ce travail, nous ne présentons que les résultats de simulation de la boîte de cisaillement sous le cas de chargement 2b.

#### IV.4.4.2. Trajet de chargement 2b

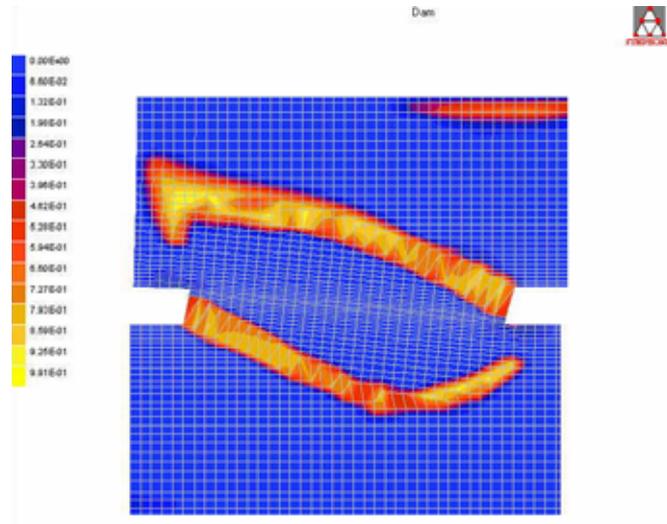


Figure IV-35. Déformée (x80) et endommagement final (trajet D2b)

La figure ci-dessus montre le profil d'endommagement obtenu par le modèle. Ce mode de rupture est très proche de celui observé pendant l'essai. Une comparaison de mode de rupture entre l'essai, MODEV et quelques modèles est présentée par la figure suivante.



Figure IV-36. Modes de rupture issus de l'essai et des calculs

La figure suivante montre la courbe  $P_s - \delta_s$ , il s'agit d'un chargement de cisaillement maintenant à -10KN :

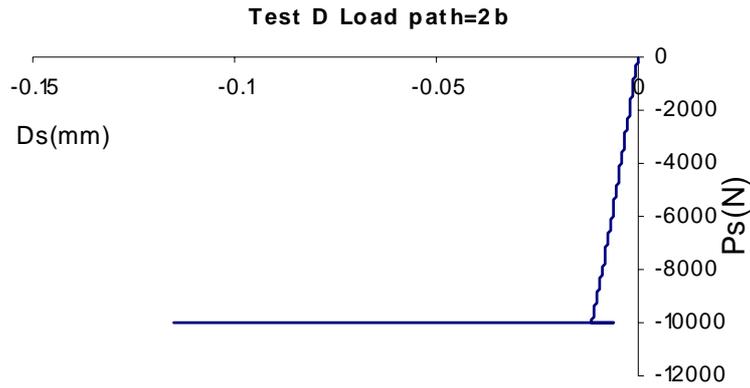


Figure IV-37. Courbe charge de cisaillement  $P_s$  - Déplacement horizontal  $\delta_s$  pour le trajet 2b  
 Ainsi, on trouve ci-après la comparaison de résultats entre le modèle MODEV et les autres modèles ainsi que le résultat d'essai.

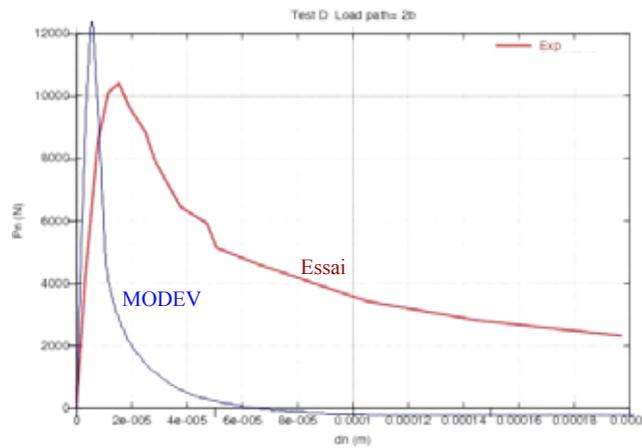


Figure IV-38. Courbe charge axiale  $P_n$  - Déplacement vertical  $\delta_n$  pour le trajet 2b

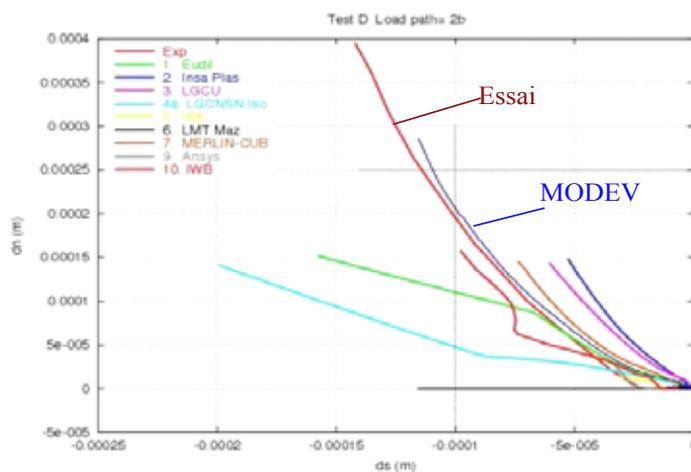


Figure IV-39. Courbe charge déplacement vertical  $\delta_n$  - déplacement horizontal  $\delta_s$  pour le trajet 2b

#### IV.4.5. Poutre en flexion cyclique

Il s'agit d'une poutre en béton qui est soumise à une flexion cyclique. Cet essai a été effectué par La Borderie en 1991 [Ref. 66]. Le schéma de la structure est présenté par la figure ci-dessous.



Figure IV-40. Poutre en flexion

On a simulé la moitié de la poutre avec les conditions aux limites comme présente la Figure IV-41

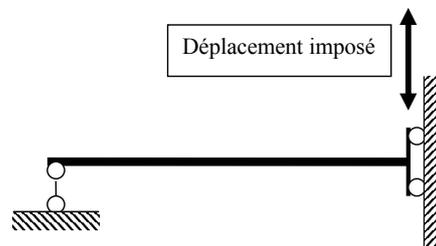


Figure IV-41. Schéma de calcul.

Le maillage et les conditions aux limites sont présentés dans la Figure IV-42 :

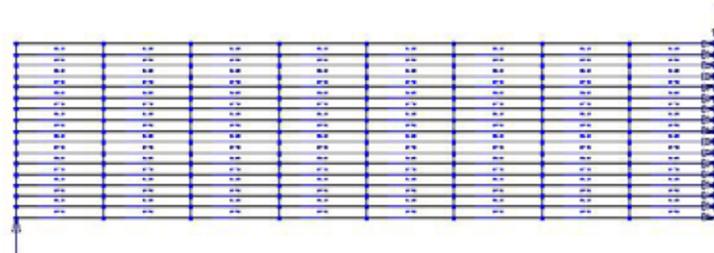


Figure IV-42. Maillage et conditions aux limites

Les caractéristiques du béton sont les suivantes :

Module d'élasticité $E$	33 500 MPa
Coefficient de Poisson $\nu$	0,2
Résistance à la traction $f_{ct}$	4,5 MPa
Résistance à la compression $f_c$	35 MPa
Energie de fissuration $G_f$	150 J/m <sup>2</sup>

Le chargement en flèche se compose en 3 cycles dont l'amplitude est de 3,2mm, dans le processus de chargement, il y a des sauts brusques, le déplacement imposé à la mi-poutre est indiqué dans la figure suivante :

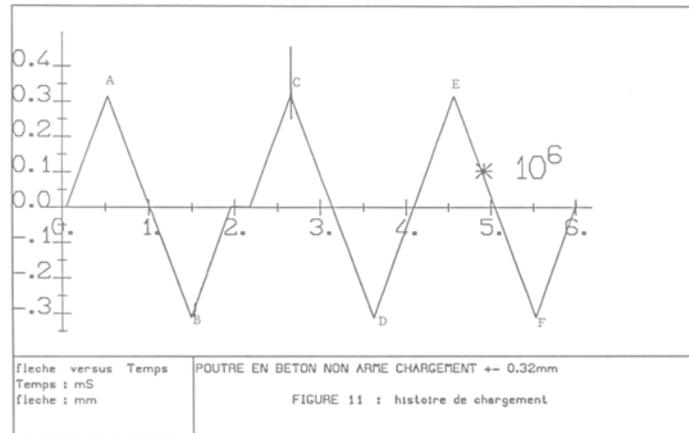


Figure IV-43. Chargement en déplacement imposé [Ref. 66]

La simulation est effectuée en contrainte plane. Chaque cycle est discrétisé en 100 incréments ce qui donne 300 incréments en total.

La figure ci-dessous présente le profil d'endommagement sphérique à l'incrément 123, c'est-à-dire avant le point C dans le schéma de chargement :

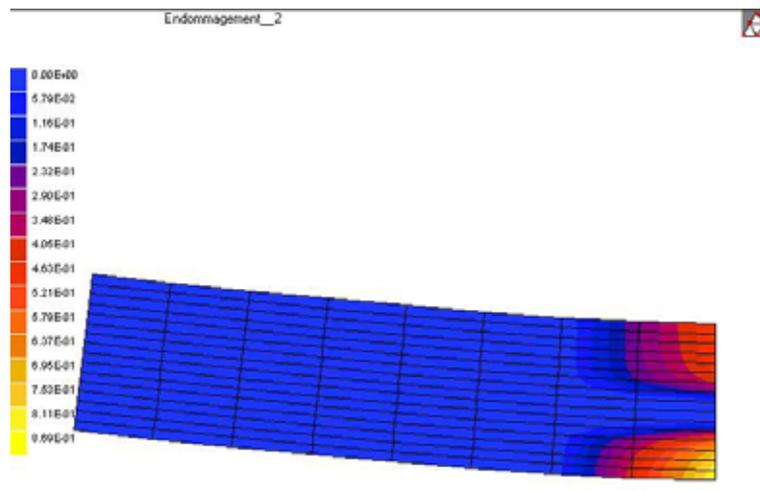


Figure IV-44. Profil d'endommagement à l'incrément 123

Selon la direction de déplacement imposé, l'endommagement peut apparaître dans les fibres inférieures ou supérieures au mi porté de la poutre. Dans la figure, au deuxième cycle, l'endommagement se concentre à la fois dans les fibres inférieures et supérieures. Si l'endommagement diffuse progressivement, ces deux zones endommagées sont coïncidées. Il faut noter qu'il y a la refermeture et réouverture de fissurations quand on change la direction de chargement. C'est-à-dire, l'effet unilatéral qui empêche partiellement la tendance de coïncidence entre les zones endommagées.

La Figure IV-45 présente le résultat Charge – Flèche :

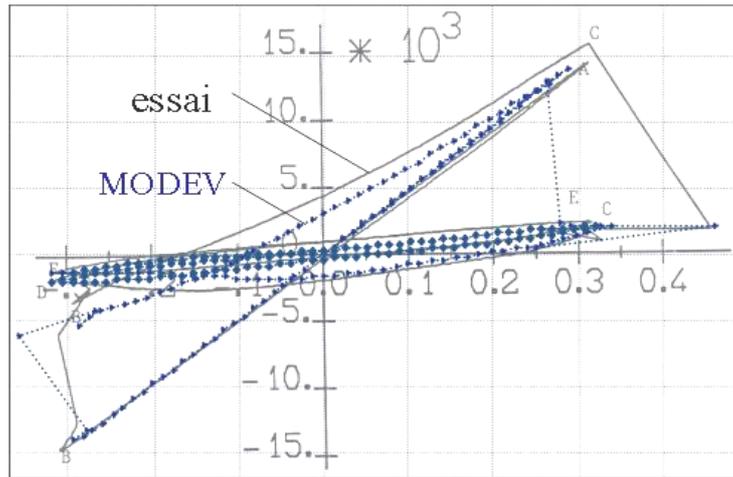


Figure IV-45. Courbe Charge(N) - Déplacement(mm)

On voit qu'il y a des sauts dans le résultat, cause des sauts brusques dans le schéma de chargement. Le résultat du modèle est comparable avec celui d'essai.

#### IV.4.6. Poutre entaillée soumise à un effort de cisaillement

Ce type de problème permet d'analyser la fissuration due à un mode mixte avec cisaillement. Cet essai a été simulé par plusieurs auteurs [Ref. 44, Ref. 56, Ref. 59, Ref. 114, Ref. 115]. La difficulté réside dans la reproduction numérique du profil de fissuration expérimental ce qui rend l'essai très intéressant.

Les caractéristiques du béton sont les suivantes :

Module d'élasticité $E$	24,800 GPa
Coefficient de Poisson $\nu$	0.18
Résistance à la traction $f_t$	3 MPa
Résistance à la compression $f_c$	30 MPa
Energie de fissuration $G_f$	120 J/m <sup>2</sup>

La Figure IV-46 montre le maillage et les conditions aux limites de la simulation dans SYMPHONIE.

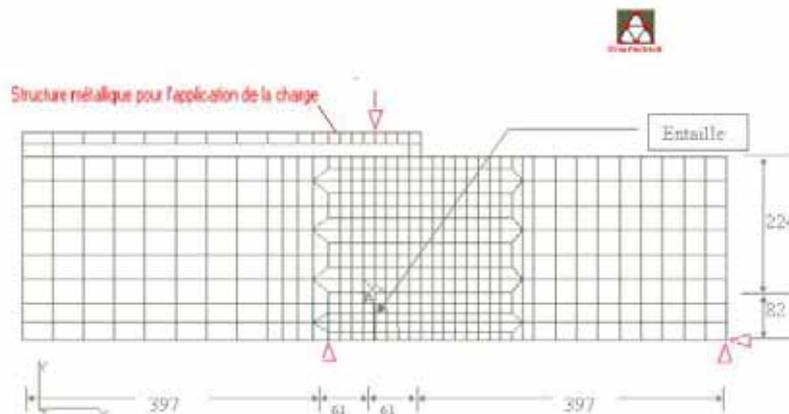


Figure IV-46. Maillage et condition aux limites

Les résultats obtenus s'accordent bien avec les résultats expérimentaux. Les figures suivantes montrent la propagation des fissures. Celle ci est ainsi observée pendant des essais.

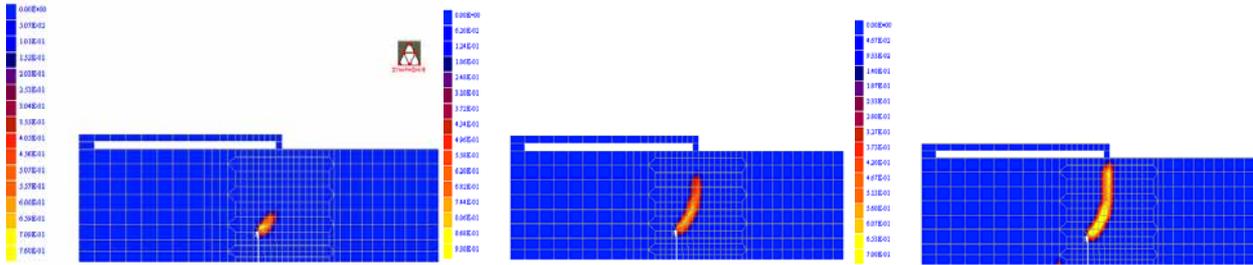


Figure IV-47. Progression de zones d'endommagement

La figure suivante présente la configuration finale de la déformée de la poutre et la courbe charge - déplacement. On observe ainsi, au niveau de la relation charge - déplacement, une bonne cohérence avec les résultats expérimentaux.

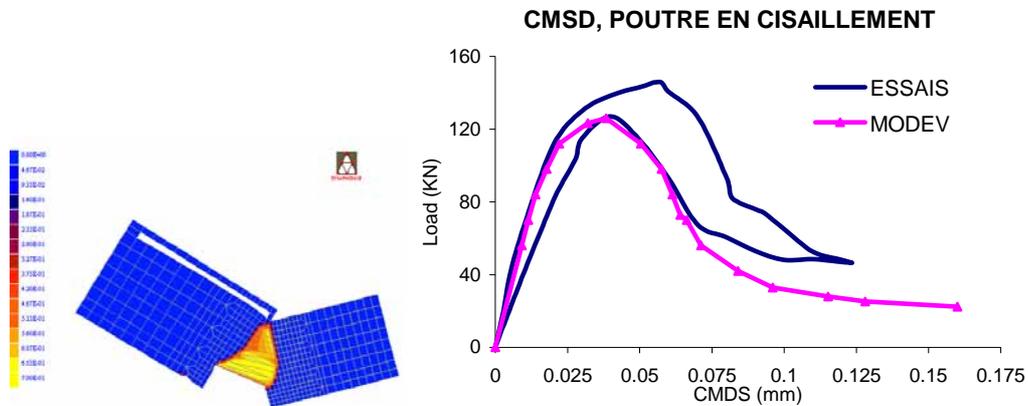


Figure IV-48. Mode de rupture final et courbe charge - déplacement relatif de l'entaille

#### IV.4.7. Application industrielle au cas 3D de cheville de fixation

Cette validation sera exploitée plus tard dans le chapitre VII pour la comparaison avec l'outil CHEIVLAB développé sur la base de la théorie du calcul à la rupture.

Nous proposons d'étudier le comportement d'une cheville de fixation ancrée à 100 mm du bord d'une dalle en béton comme le cas 3 dans le paragraphe précédent. La distance considérée est celle qui correspond à la valeur minimale préconisée pour ce type de chevilles.

La cheville et le béton ont été maillés avec des éléments hexaédriques linéaires à 8 nœuds. Le maillage de l'ensemble est constitué de 4325 éléments et de 5749 nœuds.

Le chargement appliqué et les conditions limites sont : déplacement horizontal de 12 mm appliqué sur la tête de la cheville selon l'axe  $Ox$  ; condition de symétrie selon le plan ; blocages de la dalle en béton selon  $x$ ,  $y$  et  $z$  ;

Les caractéristiques du béton prises dans la simulation sont les suivantes :

Résistance traction	Module d'Young	Coef. Poisson	Energie fissuration
$f_{ct}=3 \text{ Mpa}$	$E=30 \text{ Gpa}$	$\nu=0,20$	$Gf=100\text{N/m}$

Et pour la cheville métallique :

Limite élasticité	Limite de ductilité	Module d'Young	Coefficient de Poisson
640 MPa	840 MPa	$E = 210 \text{ GPa}$	$\nu = 0,28$

Une loi élastoplastique avec écrouissage positif a été utilisée pour modéliser l'acier en traction et en compression (critère de Von Mises).

Les dimensions de la cheville de fixation sont les suivantes :

Profond. effective	$\varnothing$ cône d'expansion	Angle du cône
$h_{ef} = 125 \text{ mm.}$	22,35 mm	$30^\circ$

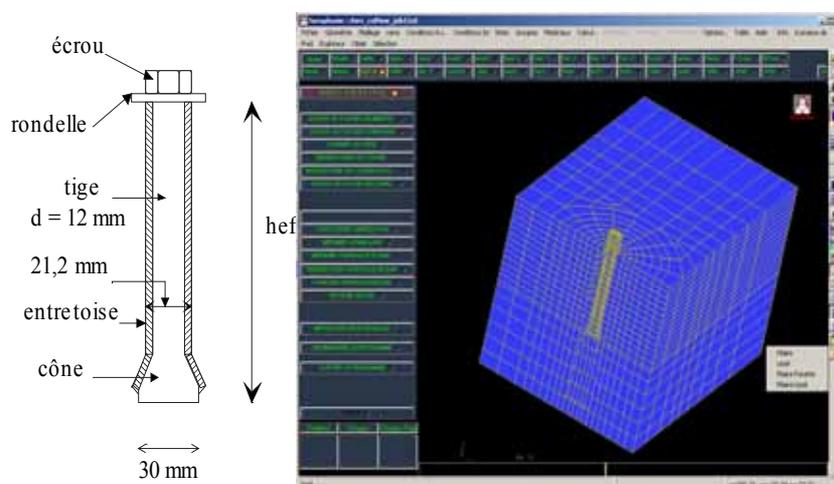


Figure IV-49. Représentation schématique de la cheville utilisée dans les essais et vue d'ensemble du maillage de la cheville métallique et du béton.

Le mode de rupture obtenu par essais est montré par la Figure IV-50. Une apparition simultanée de deux prismes de rupture a été constatée.

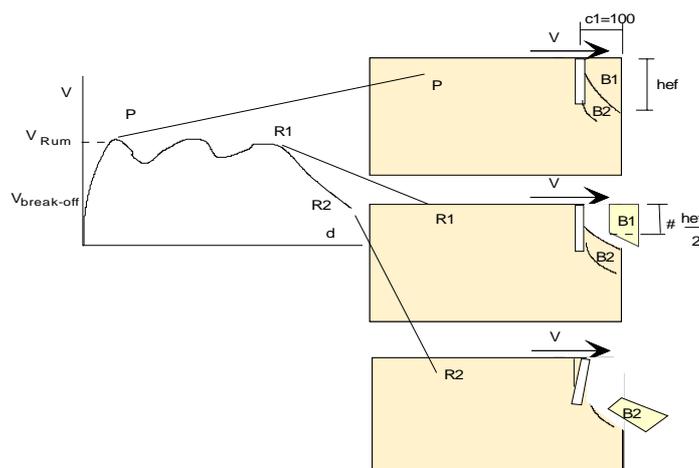


Figure IV-50. Schéma de rupture d'une cheville au bord ( $C_1 = 100 \text{ mm}$ ). [Ref. 18, Ref. 37].

La courbe effort – déplacement obtenue par les essais présente une rigidification après le pic. Elle est présentée dans la Figure IV-53. Après le pic (P), la charge décroît dans les essais à cause d'une rupture partielle dans le béton (bloc B1). La hauteur de ce bloc B1 est presque

égale à la moitié de la profondeur d'ancrage. Après sa ruine, la cheville reste ancrée, seulement avec sa partie basse, dans une profondeur de béton égale à  $h_{ef}/2$ . N'étant plus ancrée dans le béton, la partie haute de la cheville devient libre de tourner sous l'action du moment fléchissant dû à l'effort tangentiel appliqué. Aussi, la charge peut-elle croître de nouveau jusqu'à la rupture du deuxième bloc de béton B2. [Ref. 18, Ref. 37]

Prise d'une manière isolée, une étude expérimentale ne permet pas d'expliquer la distribution des contraintes dans l'ancrage. Ce n'est qu'avec la modélisation numérique qu'on a pu comprendre les phénomènes qui ont eu lieu dans un tel cas. L'explication a été donnée en se basant sur les deux formes de rupture obtenues dans les simulations (Figure IV-51). La Figure IV-52 présente le mode de rupture final par les simulations et une comparaison avec les résultats d'essais.

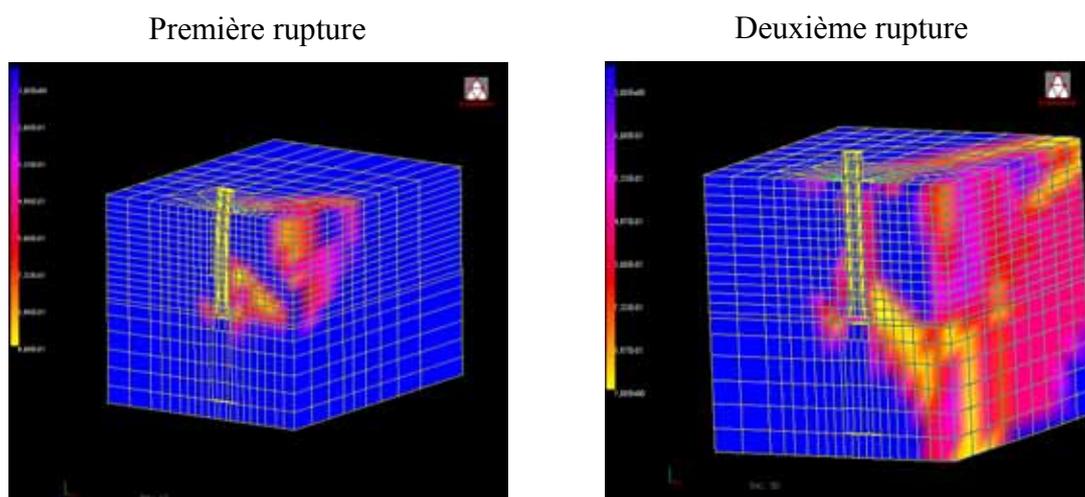


Figure IV-51. Mécanisme de rupture du modèle

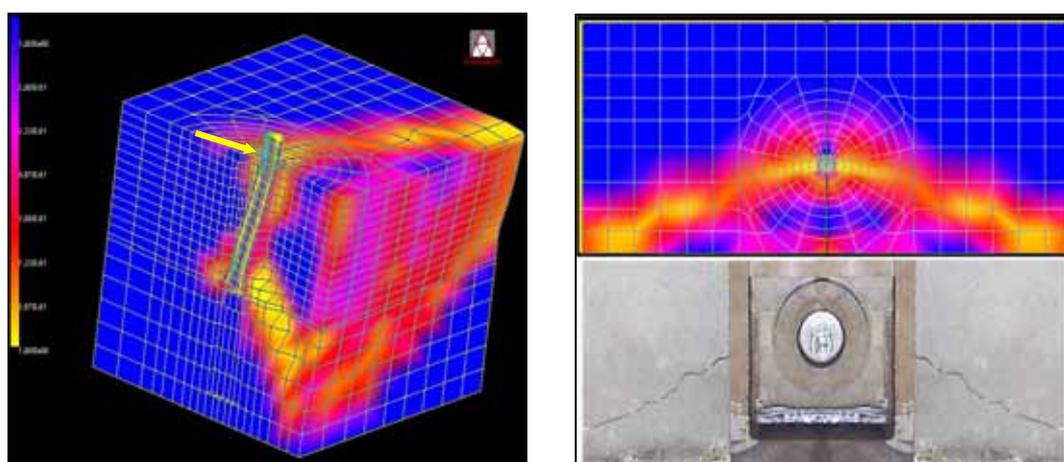


Figure IV-52. Configuration déformée et iso-valeurs de l'endommagement

La Figure IV-53 présente les courbes effort – déplacement résultant des essais du CSTB et des simulations. On constate une bonne concordance des résultats, particulièrement pour les forces et déplacements au pic.

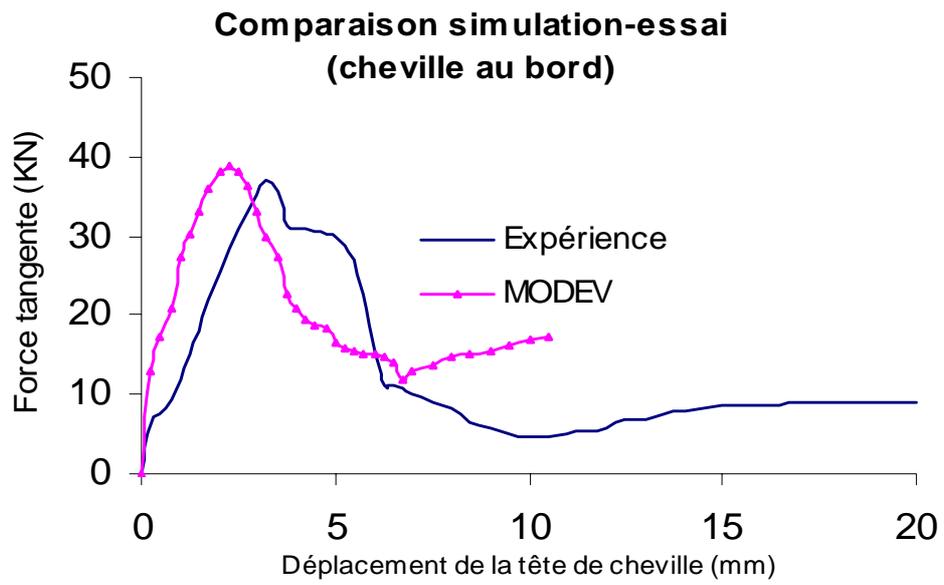


Figure IV-53. Courbe charge - déplacement

## **IV.5. Conclusions**

Le modèle MODEV comporte un nombre limité des paramètres qui ont tous une signification physique et sont identifiable par voie expérimentale et numérique. Sur le plan théorique, ce modèle est continu et est capable de traiter des cas de chargement complexe et cyclique.

MODEV, à travers des cas tests du projet MECA, permet de modéliser les structures en béton 1D, 2D et 3D. Les deux types d'endommagement permettent de traiter les modes de dégradation en extension (mode I) et en glissement (mode II et III). Les modules sécant et tangent sont intégrés dans le code de calcul aux éléments finis et supportent plusieurs types d'éléments. Par conséquent, MODEV dans SYMPHONIE est capable d'effectuer des calculs sur des structures constituées de plusieurs matériaux avec des comportements différents. C'est le cas, par exemple, des structures en béton armé très utilisées dans le Génie Civil. Ce modèle peut être utilisé dans des cas de chargement cyclique. A travers les calculs, on trouve que le modèle MODEV prédit correctement les modes de rupture présentés par le profil d'endommagement. Ainsi, les relations force – déplacement reflètent bien le comportement de la structure. Au point de vue numérique, le modèle est stable et assure une bonne convergence.

---

**DEUXIEME PARTIE :**  
**ELABORATION D'UN OUTIL DE CALCUL APPLIQUE A LA**  
**TENUE DE CHEVILLES DE FIXATION**



**CHAPITRE V:  
TECHNIQUE DE FIXATION ET PROBLEMATIQUES**

## V.1. Système de fixation dans le béton

Les systèmes de fixation dans le béton servent à transmettre les efforts d'une structure extérieure ou d'un équipement (câble, poteau, plancher...) au bloc de béton. La cheville joue donc le rôle de connexion entre deux parties de l'ouvrage et doit assurer un bon fonctionnement de ces deux parties. Généralement, une fixation se compose de :

- L'élément à attacher qui est la partie de l'ouvrage que l'on veut fixer au bloc de béton.
- La pièce à fixer qui est en contact avec le béton.
- Les fixations elles-mêmes qui attachent l'élément à fixer au support en béton.
- Le scellement qui désigne la zone d'ancrage du béton dans laquelle la fixation est insérée.

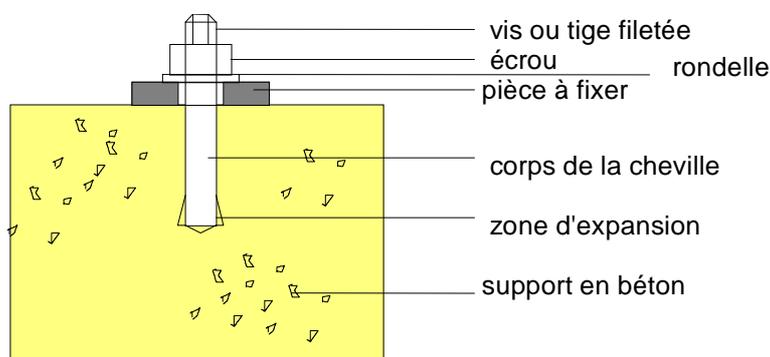


Figure V-1. Constitution d'une fixation.

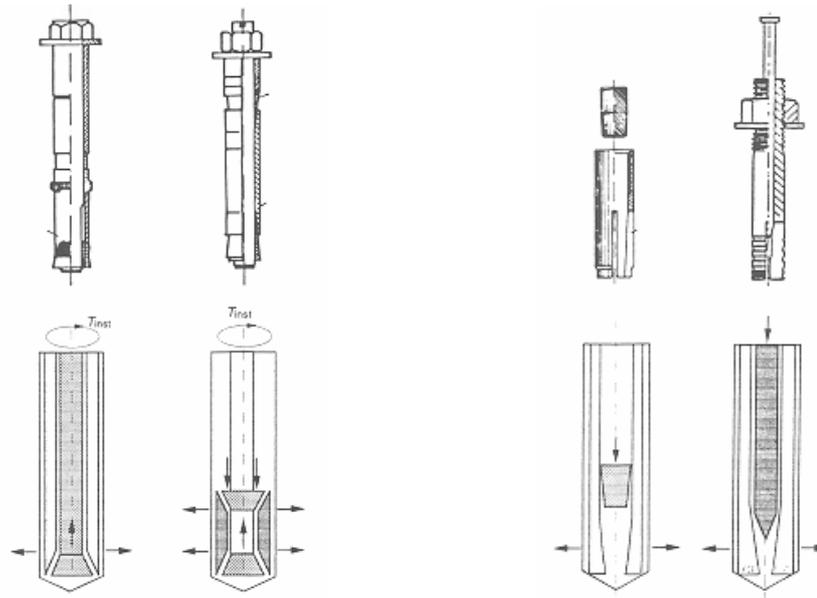
Plusieurs types de fixation sont largement utilisés, on peut citer : les chevilles à expansion, les chevilles à verrouillage de forme, les chevilles à scellement, les chevilles plastiques,... On décrit, par la suite, leur comportement pendant et après l'installation

### V.1.1. Chevilles à expansion

Les chevilles à expansion peuvent être classées en deux familles principales : les chevilles à expansion à couple contrôlé et les chevilles à expansion à déformation contrôlée.

Dans le premier cas, l'expansion est due à un couple de serrage appliqué à l'écrou ou à la vis. Ce couple permet de faire remonter un élément conique qui pénètre entre les éléments de la bague d'expansion appelés segments. Ces derniers s'écartent et sont poussés sur la paroi du trou foré dans le béton créant ainsi le blocage de l'extrémité de la bague.

Dans le second cas, l'expansion est créée par énergie d'impact provoquant la pénétration d'un cône entre les segments de la cheville. Les charges extérieures sont transmises directement de la cheville au béton. C'est donc le frottement entre l'acier du corps de la cheville et le béton qui conditionne le comportement sous chargement de la fixation.



Expansion à couple contrôlé

Expansion à déformation contrôlée

Figure V-2. Cheville à expansion.

Ainsi, les chevilles à expansion transmettent-elles l'effort de traction au béton principalement par frottement et dans une moindre mesure par blocage mécanique.

### V.1.2. Chevilles à verrouillage de forme ou à chambre (under – cut)

Les chevilles à verrouillage de forme ou à chambre transmettent les charges de traction au béton par un verrouillage mécanique. Elles sont mises en place par frappe ou par couple de serrage. Elles ne génèrent, lors du vissage, que de faibles contraintes radiales dans le béton (forces d'expansion).

Les chevilles à verrouillage de forme nécessitent la création d'un trou cylindrique foré par un foret à béton puis la formation d'une chambre tronconique en partie inférieure. Le trou est réalisé à l'avance pour permettre l'expansion des éléments de la cheville. Certaines chevilles créent elles-mêmes la chambre au moment de la pose. Les segments sont munis d'arêtes tranchantes qui taillent le béton ou encore de plaquettes au carbone de tungstène. L'angle du cône d'expansion est généralement assez grand (de l'ordre de 30°) pour permettre un évasement significatif des segments. Le blocage mécanique ne requiert pas de couple de serrage particulier.

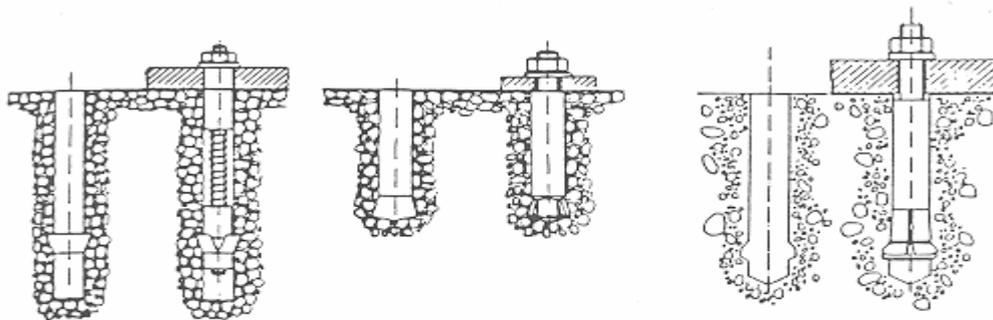


Figure V-3. Cheville à chambre.

### V.1.3. Chevilles à scellement

Les chevilles à scellement se distinguent par la nature du liant ou polymère. On distingue également le type de conditionnement et de mise en œuvre. On distingue principalement : les chevilles de type capsule et les chevilles de type injection.

Durant leur installation, aucune force d'expansion n'est générée, mais la charge appliquée entraîne la formation de bulbes de contraintes à la base du matériau. Ceux-ci peuvent induire, au cours du temps, des contraintes radiales comme dans le cas des chevilles à expansion. Toutefois, les contraintes ainsi créées restent inférieures à celles générées par le frottement pour le cas des chevilles à expansion.

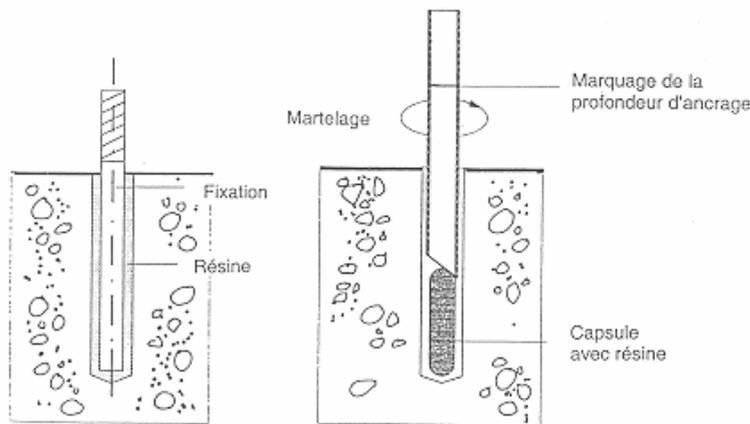


Figure V-4. Cheville à scellement

### V.1.4. Chevilles plastiques

Les chevilles plastiques sont formées d'un élément qui crée l'expansion (généralement une vis ou un clou torsadé) et d'une douille en polymère pouvant subir une expansion sous l'action de la vis ou du clou. L'extrémité expansive de cette douille possède des ergots devant empêcher la rotation de la cheville pendant la mise en place.

La douille subit une expansion lors de l'installation de la vis qui peut former ou couper un filetage dans le plastique et pousser la douille vers la surface du trou foré.

La transmission des charges de traction dans les corps pleins (béton, terre cuite, silico-calcaire) s'effectue alors par verrouillage mécanique entre la vis et la douille et par frottement entre la douille et la surface du trou foré.

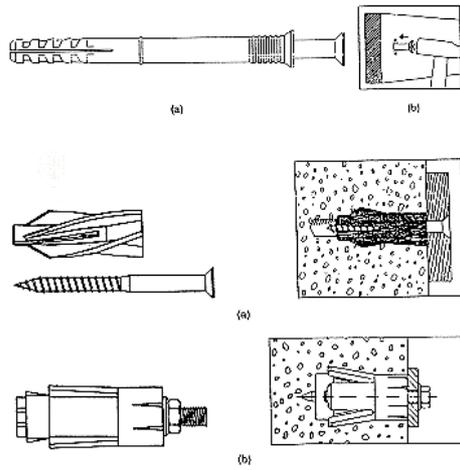


Figure V-5. Cheville plastique

## V.2. Expérimentation et méthode empirique

### V.2.1. Divers modes de rupture

Dans le cas où la cheville se trouve au centre d'un massif en béton, étant soumise à une traction pure, la forme de rupture présente un arrachement de cône en béton ou tout simplement un glissement latéral autour de la cheville par rapport au béton.

Si la cheville est soumise à des efforts de cisaillements. Ceux ci provoquent généralement des déplacements plus grands que ceux dus à l'effort de traction. Ce phénomène s'explique par la mise en flexion de la vis ou de la partie filetée de la cheville et par la dégradation locale du béton dans la direction de l'effort, cette dégradation qui accentue encore la flexion. Le jeu entre la pièce à fixer et la cheville peut également expliquer la valeur élevée du déplacement. Plusieurs recherches ont été portées sur les observations et analyses des modes de ruine [Ref. 51, Ref. 40, Ref. 99].

Les différents modes de rupture observés lorsque l'ancrage est soumis à un effort tangent sont :

- La rupture de l'acier.
- La rupture du béton par effet de bras de levier (pry-out).
- La rupture du béton en bord de dalle.

#### V.2.1.1. La rupture de l'acier

Une cheville placée loin du bord et soumise à un effort tangent périclame couramment par plastification de l'acier sous une contrainte ultime de cisaillement. Ce mode de rupture est fréquent dans le cas d'une cheville dont la profondeur d'ancrage est grande. Le mécanisme de rupture est caractérisé par la rupture de la cheville dans le plan de la sollicitation tangente. Il est généralement accompagné par de grands déplacements relatifs, provoquant une flexion dans le corps. En se déformant, la cheville se met en butée contre le béton et produit un endommagement de surface appelé écaillage.

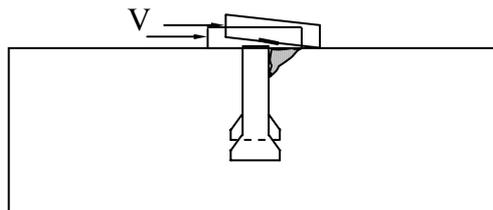


Figure V-6. Rupture de l'acier

#### V.2.1.2. Rupture du béton sous l'effet de bras de levier

Ce mode de rupture est fréquent dans le cas des chevilles rigides et de faible profondeur d'ancrage. L'effort de cisaillement provoque une butée à la base de la cheville entraînant la rupture du béton suivant une forme conique dans le sens opposé à l'effort appliqué.

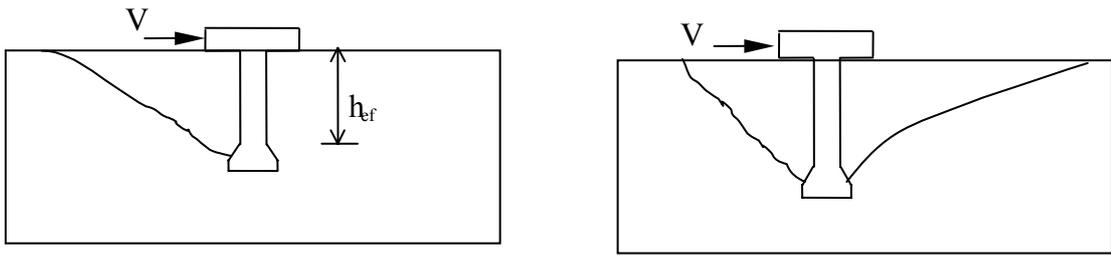


Figure V-7. Rupture sous l'effet de bras de levier.

### V.2.1.3. Rupture du béton en bord de la dalle

Ce type de rupture se manifeste par la rupture d'un prisme de béton ayant comme base la surface du bord libre. Plusieurs modes de rupture sont envisagés suivant la direction de l'effort appliqué, le nombre de chevilles sollicitées et les distances aux bords.

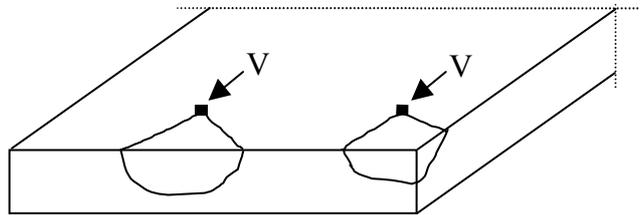


Figure V-8. Rupture au bord et en coin.

Dans le cas d'un groupe de chevilles, ce sont les chevilles les plus proches du bord qui déterminent la résistance caractéristique du béton. Mais, si ces chevilles sont très proches du bord, on peut réaliser un trou oblong dans la pièce à fixer afin que la transmission de l'effort tangent se fasse uniquement, du moins à l'état limite de service, par les chevilles les plus éloignées du bord.

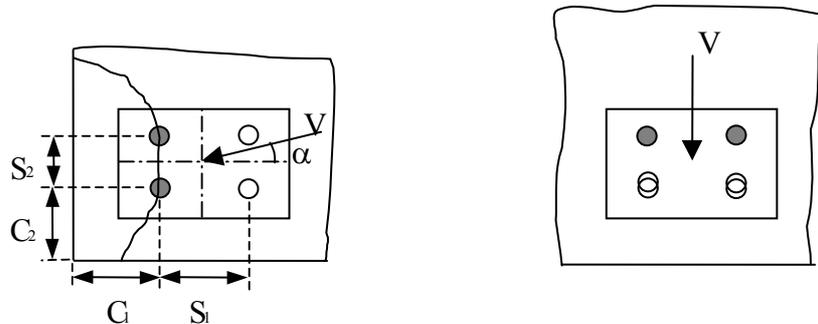


Figure V-9. Effet de groupe.

## V.2.2. Méthode empirique

Plusieurs travaux de recherche ont été effectués afin d'évaluer la résistance mécanique d'une fixation. Ainsi la méthode semi empirique basée sur l'approche statistique à travers une multitude d'essais sur différents cas de chargement et sur différentes configurations géométriques a été établie. Nous pouvons citer notamment les formulations d'Eligehausen [Ref. 38], Hawkins [Ref. 51], ...et récemment les recherches continues conduisent à établir du guide de calcul ATE [Ref. 41]

Pour les chevilles soumises à un effort de traction, les méthodes empiriques de calcul proposées par ATE [Ref. 41] reste prédictive [Ref. 78].

Cependant, dans le cas où la cheville est sollicitée en traction - cisaillement, le problème n'est plus simple. Plusieurs facteurs sont mis en jeu. En plus des caractéristiques du béton qui influencent sur la capacité portante de la structure, la rupture en cisaillement est conditionnée principalement par les distances aux bords libres, la profondeur d'ancrage, le rapport entre le traction et le cisaillement, et la rigidité de la cheville. Les méthodes empiriques, d'une manière générale, ne sont plus prédictives.

### V.3. Modélisations des ancrages par la méthode des éléments finis

Plusieurs modélisations ont été réalisées pour étudier le comportement des chevilles. Deux aspects principaux sont considérés : le contact entre la cheville et le béton et le modèle de comportement du béton. Le contact peut être considéré comme parfait ou avec le frottement local. Les modèles utilisés pour le béton sont ceux de classe de la théorie des fissurations distribuées, de microplans ou d'endommagement. Cependant, les modélisations sont lourdes et confrontent encore des problèmes concernant la pertinence des modèles de comportement du béton. Le tableau suivant montre un aperçu global de différentes modélisations des chevilles :

Année	Modélisation	Modèle	Contact	Résultats	Commentaire
1992 [Ref. 34]	axisymétrique	fissure fixe distribuée [Ref. 10]	parfait	rupture d'un cône de béton	
1996 [Ref. 110]	contraintes planes	fissure fixe distribuée	parfait	rupture par fendage du béton	
1997 [Ref. 99]	axisymétrique et contraintes planes	fissure fictive [Ref. 53]	frottement local entre la base de la cheville et le béton	écart entre les valeurs du modèle et les essais (rupture par fendage)	l'écart est attribué au changement probable de la direction de la fissure
1997 [Ref. 103]	Tridimensionnelle	microplan non local [Ref. 102]	la cheville n'est pas simulée	rupture par fendage de béton	la résistance augmente avec la surface d'expansion
1999 [Ref. 104]	tridimensionnelle	formulation mixte non locale du modèle microplan [Ref. 105]	la cheville n'est pas simulée	rupture par fendage de béton	influence de la géométrie de l'ancrage sur la rupture
1999 [Ref. 39]	axisymétrique	fissuration distribuée couplée à la formulation mixte du modèle microplan	frottement local entre la base de la cheville et le béton	rupture d'un cône de béton	influence de la géométrie de l'ancrage sur la rupture
2000 [Ref. 36]	tridimensionnelle	Fissuration distribuée	Méthode des nœuds contraints	Rupture en cisaillement	

Tableau : Modélisations numériques [Ref. 36]

#### **V.4. Conclusion**

Dans ce chapitre, on a présenté les techniques de fixation et les problématiques liées au dimensionnement de ce type de structure.

La première problématique est liée à la méthode empirique qui n'est pas généralement prédictive lorsque les chevilles sont sollicitées en cisaillement et en traction -cisaillement.

La deuxième problématique concerne la simulation des fixations par la méthode des éléments finis : la difficulté de traiter le comportement du béton, le coût élevé des calculs.

Dans le chapitre qui suit, nous établissons une méthode simplifiée basant sur l'approche calcul à la rupture afin de trouver une estimation du chargement de ruine et du mode de rupture d'une tenue de la cheville de fixation.

**CHAPITRE VI:  
ELABORATION D'UN OUTIL NUMERIQUE CHEVILAB POUR LES  
PROBLEMES DE FIXATION BASE SUR L'APPROCHE DE CALCUL A  
LA RUPTURE**

## **VI.1. Introduction**

L'approche calcul à la rupture comporte deux méthodes respectivement qualifiées de statique par l'intérieur et de cinématique par l'extérieur, qui permettent d'évaluer le chargement de ruine d'une structure. Elle repose sur la donnée de critères de résistance des matériaux constitutifs, faisant abstraction des autres aspects de leur loi de comportement.

Cette approche est applicable à une grande variété de problèmes de génie civil : Calcul d'ossatures dans le domaine des constructions métalliques [Ref. 33], analyse de la capacité portante de fondations superficielles [Ref. 33, Ref. 94], de la stabilité de murs de soutènement [Ref. 33, Ref. 94], ou de tunnels [Ref. 68] dans le domaine de la géotechnique, dimensionnement à la ruine de structures en béton armé [Ref. 94, Ref. 2, Ref. 24, Ref. 93].

C'est dans ce contexte que nous nous proposons d'appliquer cette approche au problème de la tenue des chevilles des fixations ancrées dans le béton. Se fondant sur la méthode cinématique plusieurs classes de mécanismes seront envisagées en vue d'obtenir le meilleur majorant possible de la charge de ruine selon le chargement appliqué (traction, traction – cisaillement) ainsi que la position de la cheville par rapport au bord de la dalle en béton. Un logiciel de calcul (CHEVILAB) a ainsi été mis au point qui permet de fournir un diagnostic rapide pour la tenue des chevilles de fixation.

## VI.2. Principe de l'approche « Calcul à la rupture »

Nous rappelons ici brièvement le principe du raisonnement de calcul à la rupture ainsi que des méthodes statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur auxquelles il donne lieu. On se rapporte à [Ref. 116] et [Ref. 33] pour une présentation détaillée de ces méthodes et de leurs applications dans le domaine du Génie Civil.

### VI.2.1. Domaine $K$ des chargements potentiellement supportables

On se donne une structure occupant dans l'espace un domaine géométrique  $\Omega$ , soumise à un chargement à  $n$  paramètres représentés par un vecteur  $\underline{Q}$ . On désigne par  $G(x)$  le domaine de résistance du matériau constitutif au point  $\underline{x}$  de cette structure, défini comme l'ensemble des états de contrainte  $\underline{\sigma}(x)$  admissibles. Le domaine  $K$  des chargements potentiellement supportables par la structure est alors désigné comme l'ensemble de chargements  $\underline{Q}$  pour lesquels il est possible de mettre en évidence un champs de contrainte  $\underline{\sigma}$  dans la structure, statiquement admissible (S.A) avec  $\underline{Q}$ , respectant en tout point le critère de résistance du matériau :

$$K = \{ \underline{Q}; \exists \underline{\sigma} \text{ S.A avec } \underline{Q}, \underline{\sigma}(x) \in G(x), \forall x \in \Omega, \} \quad (\text{VI.1})$$

Il importe d'obtenir que la détermination du domaine  $K$  repose uniquement sur un raisonnement de compatibilité entre l'équilibre de la structure sous le chargement appliqué et la résistance des matériaux constitutifs. Le qualificatif de « potentiellement » signifie qu'en toute rigueur les chargements  $\underline{Q}$  appartenant au domaine  $K$  ne sont effectivement supportés par la structure que si le matériau est suffisamment ductile, c'est-à-dire si son critère de résistance n'est autre qu'un critère de plasticité parfaite avec règle d'écoulement plastique associée. Si cette dernière condition est bien vérifiée pour l'acier qui constitue la cheville de fixation, il convient d'être beaucoup plus prudent en ce qui concerne le béton dont qu'on sait qu'il présente une certaine fragilité vis-à-vis des sollicitations de traction. Les résultats obtenus par le calcul à la rupture devront donc être interprétés en conséquence. On peut toutefois observer que tout chargement  $\underline{Q}$  situé à l'extérieur du domaine  $K$  conduira à la ruine certaine de la structure.

### VI.2.2. Approche statique par l'intérieur

Cette approche consiste tout simplement à mettre en oeuvre la définition (VI.1) du domaine  $K$  en explorant, par voie analytique ou numérique des champs de contrainte vérifiant simultanément les conditions d'équilibre et de résistance.

De façon plus précise, on peut par exemple procéder par trajets de chargement « radicaux » comme l'indiqué sur la Figure VI-1. Etant donné un chargement  $\underline{Q}^*$  équilibré par un champ de contrainte  $\underline{\sigma}^*$ , le chargement extrême, situé sur la frontière de  $K$  et proportionnel à  $\underline{Q}^*$  est défini par :

$$\underline{Q}^+ = \lambda^+ \underline{Q}^* \quad (\text{VI.2})$$

avec  $\lambda^+ = \sup \{ \lambda; \lambda \underline{Q}^* \in K \}$

Il apparaît alors immédiatement que la valeur de  $\lambda$  définie par :

$$\lambda^s = \sup \left\{ \lambda; \forall \underline{x} \in \Omega \quad \lambda \underline{\sigma}^*(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \right\} \quad (\text{VI.3})$$

constitue un minorant de  $\lambda^+$  :

$$\lambda^s \leq \lambda^+ \quad (\text{VI.4})$$

d'où la dénomination d'approche statique par l'intérieur de  $K$ .

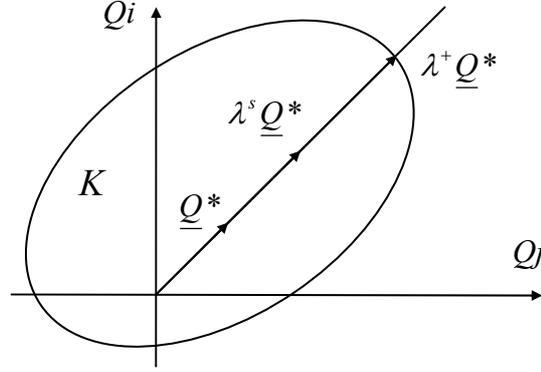


Figure VI-1. Approche statique par l'intérieur de  $K$ , par trajets de chargements radicaux.

### VI.2.3. Approche cinématique par l'extérieur

Cette approche repose sur le principe des Puissances Virtuelles qui exprime sous forme dualisée l'équilibre de la structure. Plus précisément, étant donné un champ de vitesse virtuelle  $\hat{U}$ , ce principe stipule que la puissance virtuelle des effets extérieurs qui dans le cas d'un mode de chargement à  $n$  paramètres s'écrit :

$$P_{ext}(\hat{U}) = \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\hat{U}) \quad (\text{VI.5})$$

où  $\underline{\dot{q}}(\hat{U})$  est le vecteur vitesse généralisée, est égale à la puissance virtuelle de déformation :

$$P_{ext}(\hat{U}) = P_d(\hat{U}) = \int_{\Omega} (\underline{\sigma} : \underline{\hat{d}}) d\Omega \quad (\text{VI.6})$$

où  $\underline{\hat{d}}$  est le taux de déformation virtuelle :

$$\underline{\hat{d}} = \frac{1}{2} (\underline{grad} \hat{U} + \underline{grad}^T \hat{U}) \quad (\text{VI.7})$$

Il apparaît alors qu'une condition nécessaire pour qu'un chargement  $\underline{Q}$  soit potentiellement supportable s'écrit :

$$\underline{Q} \in K \Rightarrow \forall \hat{U} \quad \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\hat{U}) \leq P_{rm}(\hat{U}) \quad (\text{VI.8})$$

où  $P_{rm}(\hat{U})$  représente la puissance résistante maximale définie par :

$$P_{rm}(\hat{U}) = \int_{\Omega} \pi(\underline{\hat{d}}) d\Omega \quad (\text{VI.9})$$

avec  $\pi(\underline{\hat{d}}) = \sup \left\{ \underline{\sigma} : \underline{\hat{d}}; \underline{\sigma} \in G \right\}$

Dans le cas où le champ de vitesse comporte des discontinuités  $\llbracket \hat{U} \rrbracket$  à travers des surfaces  $\Sigma$  de normale  $\underline{n}$ , l'expression (VI.9) de la puissance résistante maximale doit être modifiée en y ajoutant le terme :

$$\int_{\Sigma} \pi(\underline{n}; \llbracket \hat{U} \rrbracket) d\Sigma$$

avec  $\pi(\underline{n}; \llbracket \hat{U} \rrbracket) = \sup \{ (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \llbracket \hat{U} \rrbracket, \underline{\sigma} \in G \}$ .

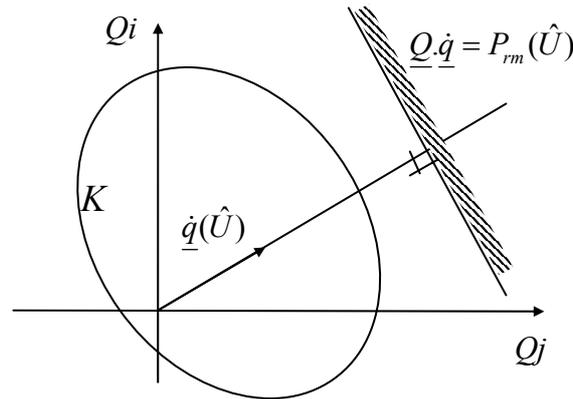


Figure VI-2. Interprétation géométrique de l'approche cinématique par l'extérieur

L'inégalité (VI.8) peut géométriquement s'interpréter dans l'espace des paramètres de chargement (Figure VI-2) : Le domaine  $K$  est en effet inclus dans le demi espace délimité par le plan d'équation  $\underline{Q} \cdot \underline{q}(\hat{U}) = P_{rm}(\hat{U})$  qui contient l'origine.

### VI.3. Tenue d'une cheville de fixation dans le béton : Position du problème.

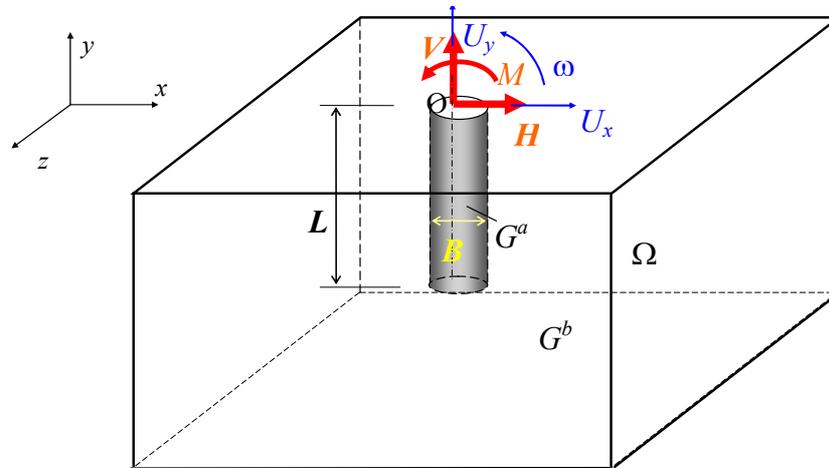


Figure VI-3. Cheville de fixation ancrée dans le béton : données du problème

On s'intéresse à la tenue d'une cheville de fixation ayant la forme d'un cylindrique circulaire de longueur  $L$  et diamètre  $B$  ancrée dans un massif de béton  $\Omega$  et soumise à des efforts appliqués à son extrémité supérieure caractérisés par une résultante de composante horizontale  $H$  selon  $Ox$  et verticale  $V$  selon  $Oy$ , et un moment  $M$  par rapport à l'axe  $Oz$ , comme indiqué sur la Figure VI-3. Aucun autre effort extérieur n'est appliqué à la structure, le poids volumique des matériaux étant négligé.

Le matériau constituant la cheville étant acier provisoirement considéré comme infiniment résistant ( $G_a$ ), la résistance du béton sera modélisée par un critère de Mohr-Coulomb particulièrement tronqué en traction, comme cela a été proposé par divers auteurs [Ref. 116, Ref. 94, Ref. 2]. Un tel critère fait intervenir les trois caractéristiques suivantes :

- La résistance en traction simple du béton, notée  $\sigma_T$
- Sa résistance en compression simple, notée  $\sigma_C$
- Son angle de frottement interne  $\phi$

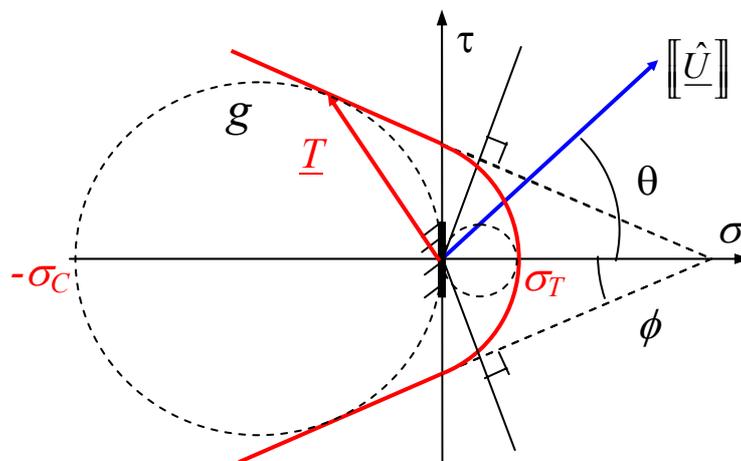


Figure VI-4. Critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction pour le béton

Un tel critère peut être représenté classiquement dans le plan de Mohr par une courbe intrinsèque délimitant le domaine  $g$  des contraintes admissible  $(\sigma, \tau)$  sur une facette quelconque (Figure VI-4). En d'autres termes, un tel critère peut s'écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in G^b \Leftrightarrow \forall \underline{n}; \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \in g \quad (\text{VI.10})$$

Nous supposons en outre pour simplifier qu'il y a adhérence totale entre la cheville métallique et le béton.

Dans ces conditions, le domaine  $K$  des chargements  $(H, V, M)$  potentiellement supportables est défini par :

$$K = \{(H, V, M); \exists \underline{\underline{\sigma}} \text{ S.A avec } (H, V, M), \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G^b \forall \underline{x} \in \Omega\} \quad (\text{VI.11})$$

L'expression de la puissance virtuelle des efforts extérieurs, nécessaire à l'application de l'approche cinématique par l'extérieur, s'écrit :

$$P_{ext}(\hat{U}) = H \cdot \hat{U}_x + V \cdot \hat{U}_y + M \cdot \hat{\omega} \quad (\text{VI.12})$$

où  $\hat{U}_x$  et  $\hat{U}_y$  désignent les composantes selon  $Ox$  et  $Oy$  de la vitesse de la cheville au point  $O$ , tandis que  $\hat{\omega}$  est le taux de rotation virtuel de la cheville autour de l'axe  $Oz$ .

Nous ne considérons par la suite que des champs de vitesse par « blocs » en translation ou en rotation, ne comportant que des surfaces de discontinuité de vitesse entre ces blocs. Il convient donc de disposer de l'expression générale de la fonction  $\pi$  relative à une telle discontinuité de vitesse  $\llbracket \hat{U} \rrbracket$  à la traversée de la surface dans le béton en suivant la normale unitaire  $\underline{n}$  :

$$\pi(\underline{n}; \llbracket \hat{U} \rrbracket) = \sup \{ (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \llbracket \hat{U} \rrbracket, \underline{\underline{\sigma}} \in G^b \} \quad (\text{VI.13})$$

Compte tenu de (VI.10) :

$$\pi(\underline{n}; \llbracket \hat{U} \rrbracket) = \sup \{ \underline{T} \cdot \llbracket \hat{U} \rrbracket, \underline{T} \in g \} \quad (\text{VI.14})$$

c'est-à-dire que cette fonction est égale au maximum de produit scalaire du vecteur discontinuité de vitesse avec un vecteur-contrainte dont l'extrémité est astreinte à demeurer dans le domaine  $g$  délimité par la courbe intrinsèque du béton. On obtient ainsi, tous calculs faits :

$$\pi(\underline{n}; \llbracket \hat{U} \rrbracket) = \begin{cases} \llbracket \hat{U} \rrbracket \left[ \frac{\sigma_c}{2} (1 - \cos \theta) + \frac{\sigma_T}{1 - \sin \phi} (\cos \theta - \sin \phi) \right] & \text{si } |\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \phi \\ \pm \infty & \text{si non} \end{cases} \quad (\text{VI.15})$$

où  $\theta$  désigne l'angle formé par la discontinuité de vitesse avec la normale  $\underline{n}$ . la condition  $|\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \phi$ , qui signifie que le vecteur discontinuité de vitesse doit appartenir du cône des normales extérieures à  $g$ , s'appelle condition de pertinence. Une telle condition est nécessaire pour pouvoir calculer la fonction  $\pi$  et donc la puissance résistante maximale, faute de quoi, cette dernière prend une valeur infinie.

## VI.4. Cas de la sollicitation axiale

Nous nous intéressons dans un premier temps au cas où la cheville scellée dans un massif de béton que l'on peut considérer comme occupant le demi espace  $y \leq 0$  est soumise à une traction purement verticale :

$$V \geq 0; H = M = 0 \quad (\text{VI.16})$$

Le problème associé peut être dès lors traité comme un problème axisymétrique autour de l'axe vertical  $Oy$ . On se propose de calculer un majorant du chargement extrême  $V^+$  (résistance à l'arrachement) grâce à la mise en oeuvre de l'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture.

### VI.4.1. Utilisation d'un mécanisme de cône en translation

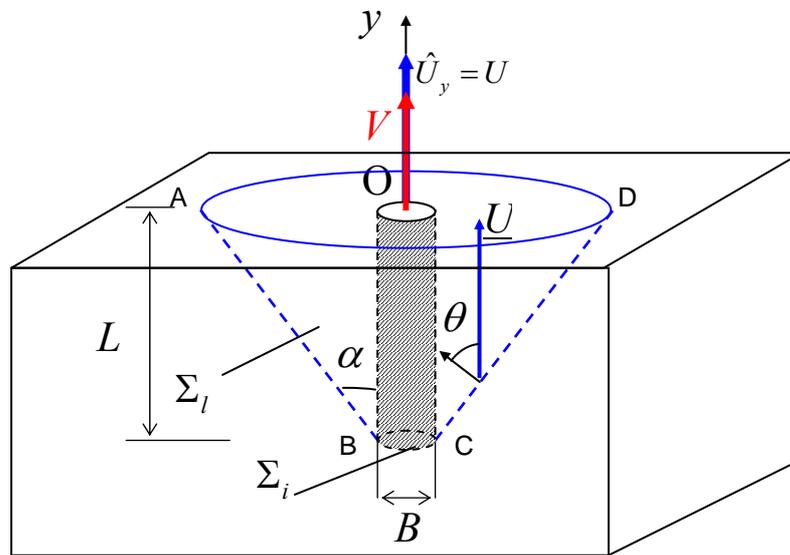


Figure VI-5. Mécanisme de cône

Le mécanisme considéré est constitué d'un bloc conique en translation verticale de demi-ouverture égale à  $\alpha$  et d'axe  $Oy$ , débouchant en surface et délimité en partie inférieure par l'extrémité  $\Sigma_i$  de la cheville, comme schématisé sur la Figure VI-5.

La puissance des efforts extérieurs (réduits ici à la seule composante  $V$ ) s'écrit alors :

$$P_{ext}(\hat{U}) = V.U \quad (\text{VI.17})$$

où  $U \geq 0$  désigne la vitesse verticale du bloc.

Par ailleurs, la condition de pertinence écrite sur la surface latérale  $\Sigma_l$  du bloc impose que le demi-angle d'ouverture soit supérieur ou égal à l'angle de frottement :

$$\phi \leq \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (< \frac{\pi}{2}) \quad (\text{VI.18})$$

Cette condition est automatiquement satisfaite sur la partie  $\Sigma_i$  de la surface de discontinuité coïncidant avec l'extrémité inférieure de la cheville, puisque  $\theta = 0$ . Le calcul de la puissance résistante maximale développé dans un tel mécanisme donne alors, puisque  $\hat{d} = 0$  :

$$P_{rm}(\hat{U}) = \int_{\Sigma_i U \Sigma_i} \pi(n, [\hat{U}]) d\Sigma = \int_{\Sigma_i} \left[ \frac{\sigma_c U}{2} (1 - \sin \alpha) + \frac{\sigma_T U}{1 - \sin \phi} (\sin \alpha - \sin \phi) \right] d\Sigma$$

$$+ \int_{\Sigma_i} \left[ \frac{\sigma_c U}{2} (1 - \cos 0) + \frac{\sigma_T U}{1 - \sin \phi} (\cos 0 - \sin \phi) \right] d\Sigma$$

Ou bien :

$$P_{rm}(\hat{U}) = |\Sigma_i| U \left[ \frac{\sigma_c}{2} (1 - \sin \alpha) + \frac{\sigma_T}{1 - \sin \phi} (\sin \alpha - \sin \phi) \right] + |\Sigma_i| U \sigma_T \quad (VI.19)$$

Avec :

$$\Sigma_i = \Sigma_i(\text{c\^one}AD) - \Sigma_i(\text{c\^one}BC)$$

$$\Sigma_i = \pi \left( \frac{L}{\cos \alpha} + \frac{B}{2 \sin \alpha} \right)^2 \sin \alpha - \pi \left( \frac{B}{2 \sin \alpha} \right)^2 \sin \alpha = \frac{\pi L}{\cos \alpha} (L \tan \alpha + B)$$

$$\Sigma_i = \pi \frac{B^2}{4}$$

d'où finalement :

$$P_{rm} = \frac{\pi L U}{\cos \alpha} (L \tan \alpha + B) \left[ \frac{\sigma_c}{2} + \frac{\sigma_T (\sin \alpha - \sin \phi)}{1 - \sin \phi} \right] + \sigma_T U \pi B^2 / 4 \quad (VI.20)$$

L'implication (VI.8) donne alors, si l'on désigne par  $V^+$  le chargement extrême :

$$V \leq V^+ \Rightarrow \forall U > 0 \forall \alpha \in [\phi; \pi/2[ \quad VU \leq P_{rm}(\hat{U}) \quad (VI.21)$$

d'où en simplifiant par  $U$  l'obtention d'un majorant de  $V^+$  :

$$\alpha \in [\phi; \pi/2[$$

$$V^+ \leq \frac{\pi L}{\cos \alpha} (L \tan \alpha + B) \left[ \frac{\sigma_c (1 - \sin \alpha)}{2} + \frac{\sigma_T (\sin \alpha - \sin \phi)}{1 - \sin \phi} \right] + \sigma_T \pi B^2 / 4 \quad (VI.22)$$

Le membre de droite de l'inégalité (VI.22) étant une fonction décroissante de  $\alpha$ , la meilleure majoration est obtenue pour  $\alpha = \phi$ , soit :

$$V^+ \leq \sigma_c \pi L \frac{(L \tan \phi + B)(1 - \sin \phi)}{2 \cos \phi} + \sigma_T \pi B^2 / 4 \quad (VI.23)$$

Ou encore :

$$V^+ \leq \sigma_c \pi B^2 \left[ \frac{l(l \tan \phi + 1)(1 - \sin \phi)}{2 \cos \phi} + \frac{k}{4} \right] = V_1^c \quad (VI.24)$$

Où l'on a posé :

$$l = L/B \text{ et } k = \sigma_T / \sigma_c$$

Une application numérique nous donne avec ce mécanisme :

$$\phi = 37^\circ; l = 5, k = 0.1 \Rightarrow V^+ \leq 59.6802 \pi \sigma_T B^2$$

## VI.4.2. Optimisation la surface de discontinuité

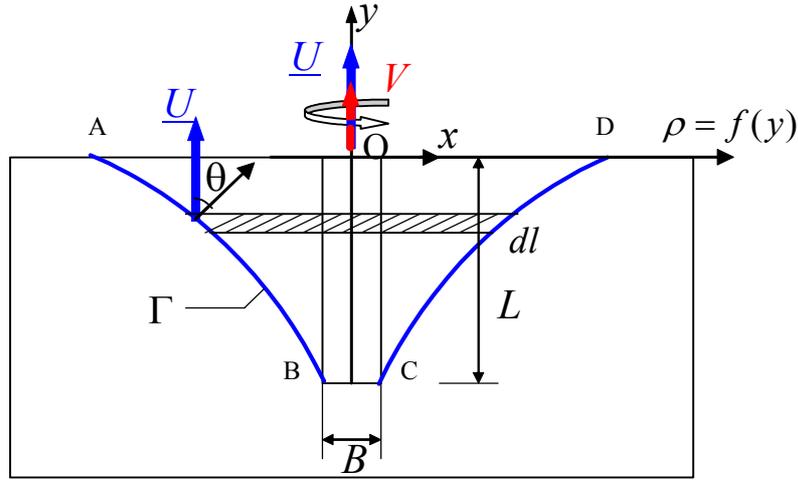


Figure VI-6. Mécanisme de bloc en translation avec optimisation de la surface de discontinuité

Nous nous proposons d'améliorer la borne (VI.24) en optimisant la forme de la surface latérale  $\Sigma_l$  caractérisée par la courbe  $\Gamma$  (Figure VI-6) définie par l'équation :

$$\rho = f(y) \text{ avec } f(-L) = B/2 \quad (\text{VI.25})$$

Nous nous inspirons dans ce qui suit de Nielsen [Ref. 94] qui a traité le problème de poinçonnement d'une dalle en béton.

La puissance virtuelle des efforts extérieurs étant égale à  $VU$ , c'est-à-dire indépendante de la forme  $\Gamma$ , la recherche du majorant minimale de  $V^+$  équivaut à celle du minimum de la puissance résistante maximale.

Celle-ci a pour expression :

$$\begin{aligned} P_{rm}(\hat{U}) &= \frac{\sigma_c U}{2} \int_{\Sigma_l} [1 - \cos \theta] ds + \frac{\sigma_T U}{1 - \sin \phi} \int_{\Sigma_l} [\cos \theta - \sin \phi] d\Sigma + \frac{\sigma_T U}{1 - \sin \phi} \int_{\Sigma_l} [1 - \sin \phi] d\Sigma \\ &= \sigma_c \pi U \int_{-L}^0 f \left[ \left( 1 - \frac{2k \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) (1 + (f')^2)^{1/2} - \left( 1 - \frac{2k}{1 - \sin \phi} \right) f' \right] dy + \frac{\sigma_T \pi B^2}{4} \end{aligned} \quad (\text{VI.26})$$

avec  $k = \sigma_T / \sigma_c$ ,  $f' = \frac{df}{dy} = \tan \alpha = 1 / \tan \theta$  et sous la condition de pertinence :

$$f'(y) \geq \tan \phi \quad y \in [-L; 0] \quad (\text{VI.27})$$

On obtient enfin de compte la majoration optimale suivante de la charge de ruine :

$$V^+ \leq V_2^c = \text{Min}_f \left\{ \frac{\sigma_T \pi B^2}{4} + \pi \sigma_c \int_{-L}^0 F(f, f') dy; f(-L) = B/2 \quad f' \geq \tan \phi \right\} \quad (\text{VI.28})$$

avec :

$$F(f, f') = f \left[ \left( 1 - \frac{2k \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) (1 + (f')^2)^{1/2} - \left( 1 - \frac{2k}{1 - \sin \phi} \right) f' \right] \quad (\text{VI.29})$$

La fonction  $f$  rendant minimale l'intégrale de  $F(f, f')$  sur l'intervalle  $[-L ; 0]$ , en l'absence de la condition pertinence (VI.27) vérifie l'équation suivante (voir la méthode de calcul des variations [Ref. 79] et l'annexe D) :

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \left( \frac{\partial F}{\partial f'} \right)' = 0$$

ou encore :

$$F - f' \frac{\partial F}{\partial f'} = cte \quad (\text{VI.30})$$

En rapportant l'expression (VI.29) de  $f$  dans cette équation, on aboutit finalement à l'équation différentielle suivante portant sur  $f$  :

$$1 + f'^2 = f^2 / a^2 \Rightarrow f'' = f / a^2 \quad (\text{VI.31})$$

dont la solution générale est :

$$f(y) = me^{y/a} + ne^{-y/a} \quad (\text{VI.32})$$

Le passage de (VI.30) à (VI.31) est décrit ultérieurement en détail dans l'annexe D.

En reportant l'équation (VI.32) dans la première expression de (VI.31) on trouvera :

$$a = 2\sqrt{m.n} \quad (\text{VI.33})$$

Nous nous proposons dans en premier temps d'effectuer un calcul sur la fonction  $f(y)$  en imposant tout simplement la condition:

$$f'(-L) = \tan \phi \quad (\text{VI.34})$$

En résolvant le système fourni par la condition (VI.34) et les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} f(-L) &= me^{-L/a} + ne^{L/a} = B/2 \\ f'(-L) &= \frac{m}{a} e^{-L/a} - \frac{n}{a} e^{L/a} = \tan \phi \\ a &= 2\sqrt{m.n} \end{aligned} \quad (\text{VI.35})$$

on obtient :

$$\begin{aligned} m &= \frac{B}{4} (1 + \sin \phi) e^{2L/B \cos \phi} \\ n &= \frac{B}{4} (1 - \sin \phi) e^{-2L/B \cos \phi} \\ a &= B \cos \phi / 2 \end{aligned} \quad (\text{VI.36})$$

Sans aller plus loin dans le calcul du majorant de ce cas, on obtient tout de suite la valeur de  $f(0)$ , c'est-à-dire le rayon du cône en surface de la dalle de béton  $f(0) = m + n$ . En titre d'illustration, pour  $\phi = 37^\circ; l = 5$ , on a  $f(0) = 21955,2525L$ .

Un tel résultat n'est pas réaliste, et il convient donc de limiter le rayon du cône en surface à une valeur maximale  $d$  plus raisonnable. La courbe  $f(y)$  est alors nécessairement composée de deux tronçons : un segment partant du bas de la cheville et incliné d'un angle  $\phi$  prolongé par un arc d'équation (VI.32) :

$$f = \begin{cases} f_1 = \frac{B}{2} + y \tan \phi & \text{avec } -L \leq y < -L_0 \\ f_2 = me^{y/a} + ne^{-y/a} & \text{avec } -L_0 \leq y \leq 0 \end{cases} \quad (\text{VI.37})$$

Les conditions de pertinence et aux limites s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} f(0) &= m + n = d \\ f(-L + L_0) &= me^{(-L+L_0)/a} + ne^{-(L-L_0)/a} = B/2 + L_0 \tan \phi \\ f'(-L + L_0) &= \frac{m}{a} e^{(-L+L_0)/a} - \frac{n}{a} e^{-(L-L_0)/a} = \tan \chi \geq \tan \phi \\ a &= 2\sqrt{m.n} \end{aligned} \quad (\text{VI.38})$$

où  $L_0$  est la hauteur de la partie du cône dont la génératrice est linéaire. La fonction  $f(y)$  est alors entièrement connue si l'on se fixe  $L_0$  et  $d$ .

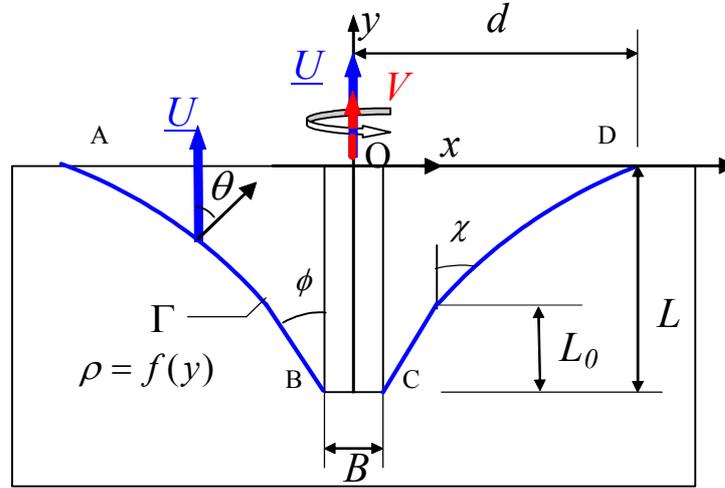


Figure VI-7. La surface de ruine optimisée par rapport à  $d$

Pour résoudre un tel problème, la démarche suivante est adoptée :

D'abord, on donne une valeur fixe de  $d$  (par exemple :  $d=3L$ ).

Puis, on donne des valeurs  $L_0$  de  $\theta$  à  $L$ , avec les valeurs de  $\chi \geq \phi$ , d'où l'on peut calculer les valeurs de  $m$  et  $n$  et éventuellement de  $a$  :

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} \left( L_0 \tan \phi + \frac{B}{2} \right) (1 + \sin \chi) e^{(L-L_0)/a} \\ n &= \frac{1}{2} \left( L_0 \tan \phi + \frac{B}{2} \right) (1 - \sin \chi) e^{-(L-L_0)/a} \\ a &= \left( L_0 \tan \phi + \frac{B}{2} \right) \cos \chi \end{aligned} \quad (\text{VI.39})$$

Ensuite on vérifie si  $m+n$  est suffisamment proche de  $d$ . Si c'est le cas, on retrouve  $L_0$  et  $\chi$  correspondants pour le calcul du majorant de  $V^+$ .

Ce dernier, c'est-à-dire le calcul de  $V_2^c$ , se fait ainsi :

$$V_2^c = V_1^+ + V_2^+ \quad (\text{VI.40})$$

$$\text{Avec : } V_1^+ = \sigma_c \pi L_0 \frac{(L_0 \tan \phi + B)(1 - \sin \phi)}{2 \cos \phi} + \sigma_T \pi B^2 / 4 \quad (\text{VI.41})$$

$$\text{Et } V_2^+ = \pi \sigma_c \left[ -\frac{D+E}{2} n^2 \left( 1 - e^{-\frac{2(-L+L_0)}{a}} \right) + \frac{Da}{2} (L-L_0) + \frac{D-E}{2} m^2 \left( 1 - e^{-\frac{2(-L+L_0)}{a}} \right) \right] \quad (\text{VI.42})$$

Où :

$$D = 1 - \frac{2k \sin \phi}{1 - \sin \phi} \quad \text{et} \quad E = 1 - \frac{2k}{1 - \sin \phi} \quad (\text{VI.43})$$

**Comparaison des résultats obtenus à l'aide des deux mécanismes :**

Tout en suivant cette démarche, on effectue des calculs avec différents cas de géométrie et compare les résultats de ces deux mécanismes. Ceux-ci sont présentés dans le tableau présenté ci-dessous qui appelle les commentaires suivants :

- En ce qui concerne le premier mécanisme, le paramètre  $k$  n'a d'influence que sur la contribution dû au fond de la cheville (voir l'équation (VI.24)).
- Le rôle joué par ce même paramètre  $k$  est plus important en ce qui concerne le second mécanisme. Le majorant correspondant est d'autant plus faible que  $k$  est petit, la forme du cône ayant tendance à s'aplatir.
- La différence relative entre les deux majorations varie entre 0% (par  $k$  relativement grand) et 32% (par des valeurs de  $k$  faibles, c'est-à-dire lorsque l'on s'approche à la situation où le béton ne résiste pas à la traction)
- La valeur défavorable de  $d$  est de  $3L$ , ou  $2L$  qui donne un majorant relativement plus petit que d'autres.

D'où, on met en évidence la meilleure approximation atteinte en utilisant le mécanisme optimisé.

L/B	d/L	k	L <sub>0</sub> /L	m/B	n/B	χ	V <sub>1</sub> <sup>c</sup> / B <sup>2</sup> σ <sub>c</sub>	V <sub>2</sub> <sup>c</sup> / B <sup>2</sup> σ <sub>c</sub>	%
10	2	1/10	1.000	0.000	0.000		66.926	66.926	0.000
10	2	1/50	0.444	19.685	0.116	38.34	66.864	65.115	2.616
10	2	1/100	0.444	19.685	0.116	38.34	66.856	54.100	19.079
10	2	1/300	0.433	19.884	0.114	37.00	66.850	46.699	30.144
10	3	1/10	1.000	0.000	0.000		66.926	66.926	0.000
10	3	1/50	1.000	0.000	0.000		66.864	66.864	0.000
10	3	1/100	0.368	29.644	0.057	37.19	66.856	64.629	3.330
10	3	1/300	0.368	29.644	0.057	37.19	66.850	46.920	29.814
10	4	1/10	1.000	0.000	0.000		66.926	66.926	0.000
10	4	1/50	1.000	0.000	0.000		66.864	66.864	0.000
10	4	1/100	1.000	0.000	0.000		66.856	66.856	0.000

10	4	1/300	0.345	39.564	0.036	39.69	66.850	51.317	23.236
10	5	1/10	1.000	0.000	0.000		66.926	66.926	0.000
10	5	1/50	1.000	0.000	0.000		66.864	66.864	0.000
10	5	1/100	1.000	0.000	0.000		66.856	66.856	0.000
10	5	1/300	0.321	49.475	0.025	39.82	66.850	58.695	12.200
8	2	1/10	1.000	0.000	0.000		44.114	44.114	0.000
8	2	1/50	0.457	15.744	0.096	40.90	44.051	42.543	3.423
8	2	1/100	0.430	15.745	0.097	37.10	44.044	35.521	19.351
8	2	1/300	0.428	15.850	0.095	37.00	44.038	30.811	30.035
8	3	1/10	1.000	0.000	0.000		44.114	44.114	0.000
8	3	1/50	1.000	0.000	0.000		44.051	44.051	0.000
8	3	1/100	0.369	23.714	0.048	38.63	44.044	42.125	4.357
8	3	1/300	0.369	23.714	0.048	38.63	44.038	30.806	30.048
8	4	1/10	1.000	0.000	0.000		44.114	44.114	0.000
8	4	1/50	1.000	0.000	0.000		44.051	44.051	0.000
8	4	1/100	1.000	0.000	0.000		44.044	44.044	0.000
8	4	1/300	0.341	31.651	0.030	40.42	44.038	33.547	23.823
8	5	1/10	1.000	0.000	0.000		44.114	44.114	0.000
8	5	1/50	1.000	0.000	0.000		44.051	44.051	0.000
8	5	1/100	1.000	0.000	0.000		44.044	44.044	0.000
8	5	1/300	0.304	39.582	0.021	38.31	44.038	38.222	13.208
5	2	1/10	1.000	0.000	0.000		18.748	18.748	0.000
5	2	1/50	0.427	9.832	0.069	38.89	18.686	17.638	5.606
5	2	1/100	0.427	9.832	0.069	38.89	18.678	14.928	20.074
5	2	1/300	0.411	9.926	0.067	37.00	18.672	13.102	29.835
5	3	1/10	1.000	0.000	0.000		18.748	18.748	0.000
5	3	1/50	1.000	0.000	0.000		18.686	18.686	0.000
5	3	1/100	0.344	14.817	0.034	38.15	18.678	17.341	7.159
5	3	1/300	0.344	14.817	0.034	38.15	18.672	12.938	30.711
5	4	1/10	1.000	0.000	0.000		18.748	18.748	0.000
5	4	1/50	1.000	0.000	0.000		18.686	18.686	0.000
5	4	1/100	1.000	0.000	0.000		18.678	18.678	0.000

5	4	1/300	0.303	19.779	0.021	38.18	18.672	13.918	25.465
5	5	1/10	1.000	0.000	0.000		18.748	18.748	0.000
5	5	1/50	1.000	0.000	0.000		18.686	18.686	0.000
5	5	1/100	1.000	0.000	0.000		18.678	18.678	0.000
5	5	1/300	0.280	24.736	0.015	38.86	18.672	15.685	16.001

Tableau de comparaison les deux résultats obtenus à l'aide de deux mécanismes

## VI.5. Cheville sous traction et cisaillement au centre

On se propose dans ce paragraphe de calculer par l'approche cinématique par l'extérieur un majorant du chargement extrême dans le cas où, en plus de la traction, s'ajoute un effort de cisaillement :

$$V \geq 0; \quad H \geq 0; \quad M = 0$$

Par contre, le massif de béton est toujours considéré comme occupant du demi espace  $y \leq 0$ .

### VI.5.1. Mécanisme de cône incliné en translation

Le mécanisme est schématisé sur la Figure VI-8. Il s'agit d'une translation d'un cône incliné de base circulaire caractérisée par la vitesse  $\underline{U}$  dirigée selon l'axe du cône et inclinée d'un angle  $\beta$  par rapport au plan  $y=0$ . Ce tronc de cône de demi-ouverture  $\alpha$ , est délimité en bas par le plan  $y=-L$  et en haut par  $y=0$ . Les surfaces d'intersection entre le cône et ces plans, sont elliptiques :  $\Sigma_i$  (ellipse BC dans le plan  $y=-L$ ) circonscrit le fond de la cheville dont le grand axe est égal à BC et le petit axe égal à B ; ellipse (ellipse DE dans le plan  $y=0$ ) dont le grand axe DE qui est semblable à  $\Sigma_i$ .

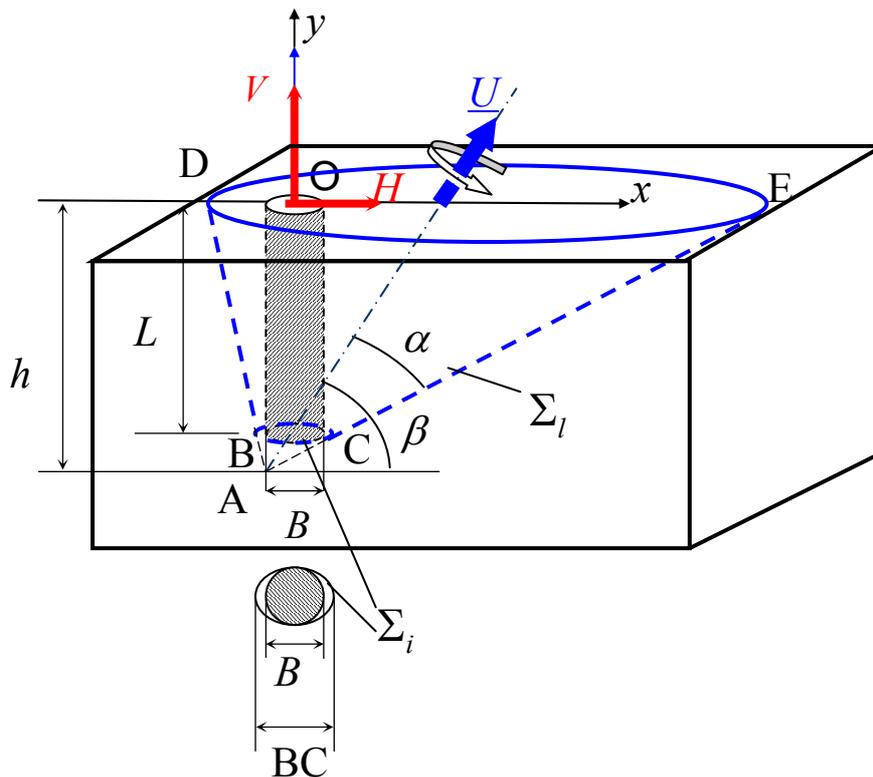


Figure VI-8. Mécanisme de cône incliné en translation.

La puissance des efforts extérieurs s'écrit alors:

$$P_{ext}(\underline{U}) = \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} = VU \sin \beta + HU \cos \beta = VU(\sin \beta + n \cos \beta) \quad (VI.44)$$

En notant que  $H$  et  $V$  sont positifs et en supposant que  $H = nV$ . D'ailleurs, la condition de pertinence sur la surface de discontinuité  $\Sigma_i$  où  $\theta = \pi/2 - \beta$  et celle sur la surface latérale du cône  $\Sigma_l$  où  $\theta = \pi/2 - \alpha$ , en associant avec des compatibilités géométrique s'écrivent :

$$\phi \leq \alpha < \beta \leq \pi/2 \quad (\text{VI.45})$$

Puisque  $\underline{\hat{d}} = 0$ , la puissance résistante maximale a pour l'expression :

$$\begin{aligned} P_{rm}(\hat{U}) &= \int_{\Sigma_i U \Sigma_i} \pi(\underline{n}, \llbracket \hat{U} \rrbracket) d\Sigma = \int_{\Sigma_i} \left[ \frac{\sigma_c \cdot U}{2} (1 - \sin \alpha) + \frac{\sigma_T U}{1 - \sin \phi} (\sin \alpha - \sin \phi) \right] d\Sigma \\ &+ \int_{\Sigma_i} \left[ \frac{\sigma_c \cdot U}{2} (1 - \sin \beta) + \frac{\sigma_T U}{1 - \sin \phi} (\sin \beta - \sin \phi) \right] d\Sigma = P_{rm1} + P_{rm2} \end{aligned} \quad (\text{VI.46})$$

avec :

$$\begin{aligned} P_{rm1} &= \int_{\Sigma_i} \left[ \frac{\sigma_c \cdot U}{2} (1 - \sin \alpha) + \frac{\sigma_T U}{1 - \sin \phi} (\sin \alpha - \sin \phi) \right] d\Sigma \\ P_{rm2} &= \int_{\Sigma_i} \left[ \frac{\sigma_c \cdot U}{2} (1 - \sin \beta) + \frac{\sigma_T U}{1 - \sin \phi} (\sin \beta - \sin \phi) \right] d\Sigma \end{aligned} \quad (\text{VI.47})$$

Pour obtenir la puissance résistante maximale, il est nécessaire de calculer l'aire de l'ellipse BC ( $\Sigma_i$ ) et l'aire latérale de la surface de discontinuité  $\Sigma_i$  (du cône incliné tronqué).

On obtient:

$$\Sigma_i = \frac{\pi B \cdot BC}{4} = \frac{\pi B(h-L)}{4} \left( \frac{1}{\tan(\beta - \alpha)} - \frac{1}{\tan(\beta + \alpha)} \right) \quad (\text{VI.48})$$

$$\text{avec: } BC = (h-L) \left( \frac{1}{\tan(\beta - \alpha)} - \frac{1}{\tan(\beta + \alpha)} \right)$$

En ce qui concerne l'aire latérale du cône tronqué par un plan d'intersection, on a mis en évidence une relation entre cette surface latérale et celle de l'interface (voir annexe A). Il est donc nécessaire de calculer l'aire de l'ellipse DE, semblable à l'ellipse BC, soit :

$$S_{\text{EllipseDE}} = \left( \frac{h}{h-L} \right)^2 \Sigma_i = \frac{\pi B \cdot BC}{4} \left( \frac{h}{h-L} \right)^2 = \frac{\pi B h^2}{4(h-L)} \left( \frac{1}{\tan(\beta - \alpha)} - \frac{1}{\tan(\beta + \alpha)} \right) \quad (\text{VI.49})$$

L'aire de la surface latérale du cône incliné tronqué est ensuite calculée:

$$\Sigma_l = S_{\text{latérale1}} - S_{\text{latérale2}} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} (S_{\text{EllipseDE}} - S_{\text{EllipseBC}}) \quad (\text{VI.50})$$

Où  $S_{\text{latérale1}}$ ,  $S_{\text{latérale2}}$  sont les aires latérales respectives des cônes ADE et ABC. Ce qui donne :

$$\Sigma_l = \frac{\pi B L (2h-L)}{4(h-L)} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \left( \frac{1}{\tan(\beta - \alpha)} - \frac{1}{\tan(\beta + \alpha)} \right) \quad (\text{VI.51})$$

On peut par ailleurs montrer que (voir annexe B avec  $a=BC$ ,  $b=B$ ):

$$h = \frac{B \sqrt{\sin(\beta - \alpha) \sin(\beta + \alpha)}}{2 \sin \alpha} + L \quad (\text{VI.52})$$

En remplaçant cette équation dans l'expression de  $\Sigma_i$  et  $\Sigma_l$ , on obtient finalement:

$$\Sigma_i = \frac{\pi B^2 \cos \alpha}{4\sqrt{\sin(\beta - \alpha)\sin(\beta + \alpha)}} \quad (\text{VI.53})$$

$$\Sigma_l = \frac{\pi L \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\beta - \alpha)\sin(\beta + \alpha)} \left( B + \frac{L \sin \alpha}{\sqrt{\sin(\beta - \alpha)\sin(\beta + \alpha)}} \right) \quad (\text{VI.54})$$

Par conséquent, la puissance résistante maximale a pour expression :

$$P_{rm1} = \left[ \frac{\sigma_c(1 - \sin \alpha)}{2} + \frac{\sigma_T(\sin \alpha - \sin \phi)}{1 - \sin \phi} \right] \frac{U \pi L \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\beta - \alpha)\sin(\beta + \alpha)} \left( B + \frac{L \sin \alpha}{\sqrt{\sin(\beta - \alpha)\sin(\beta + \alpha)}} \right) \quad (\text{VI.55})$$

$$P_{rm2} = \left[ \frac{\sigma_c(1 - \sin \beta)}{2} + \frac{\sigma_T(\sin \beta - \sin \phi)}{1 - \sin \phi} \right] \frac{U \pi B^2 \cos \alpha}{4\sqrt{\sin(\beta - \alpha)\sin(\beta + \alpha)}} \quad (\text{VI.56})$$

L'inégalité relative à l'approche cinématique s'écrit :

$$P_{ext} \leq P_{rm1} + P_{rm2} = P_{rm} \quad (\text{VI.57})$$

D'où l'obtention de la majoration suivante :

$$V^+ \leq \frac{P_{rm1} + P_{rm2}}{U(\sin \beta + n \cos \beta)} \quad \text{et} \quad H^+ = nV^+ \quad (\text{VI.58})$$

### VI.5.2. Optimisation de la surface de discontinuité

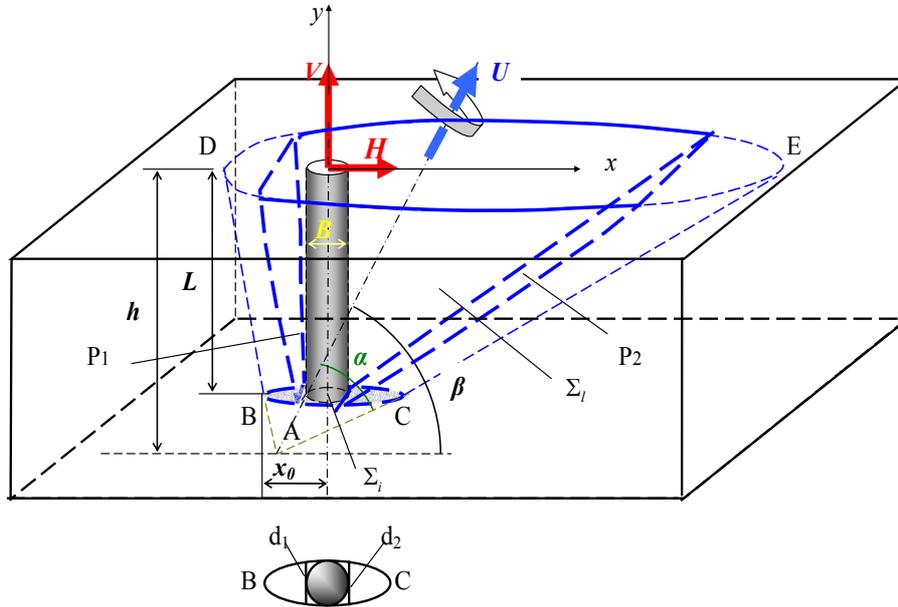


Figure VI-9. Optimisation de la surface de discontinuité en tronquant le cône par des plans « paraboliques » P<sup>1</sup> et P<sup>2</sup>.

On se propose d'améliorer la borne (VI.58) en considérant un mécanisme mettant en œuvre le même cône en translation que celui utilisé au paragraphe VI.5.1 que l'on veut tronquer par deux plans parallèles P<sup>1</sup> et P<sup>2</sup> (dont l'intersection avec le cône a forme parabolique) à ces génératrices comme indiqué sur la Figure VI-9.

On peut constater, par rapport au cas précédent au paragraphe VI.5.1, qu'il y a une réduction de  $P_{rm1}$  ainsi que de  $P_{rm2}$ , d'où, une majoration plus réaliste.

Pour l'expression de  $P_{rm1}$ , la sur face de discontinuité  $\Sigma_l$  devient, l'aire latérale de la partie du cône contenant la cheville et débouchant en haut et en bas par deux plan  $y=0$  et  $y=-L$ , et latéralement par deux plans « paraboliques »  $P^1$  et  $P^2$  (y compris l'aire de ces deux plans). Sachant que, pour le mécanisme précédent,  $\Sigma_l$  est l'aire latérale de tout le cône délimité par les plans  $y=0$  et  $y=-L$ .

Pour l'expression de  $P_{rm2}$ , au lieu de tenir en compte toute la section de l'ellipse BC en bas, on ne calcule que la partie qui contient le fond de la cheville délimitée par deux droites  $d_1$  et  $d_2$ .

Pour effectuer des calculs de la puissance résistante maximale, il est nécessaire de calculer de l'aire latérale du cône tronqué par deux plans ainsi que l'aire d'une surface conique (elliptique, hyperbolique, parabolique) délimitée par deux droites. Ces calculs sont présentés dans les annexes A et B.

A partir de ces points, on peut trouver les expressions de  $P_{rm1}$ ,  $P_{rm2}$  et le majorant correspondant.

### VI.5.3. Résultats

On désigne respectivement par « mécanisme de base » et « mécanisme amélioré » les mécanismes de cône non tronqué (en VI.5.1) et tronqué (en VI.5.2) par deux plans.

#### VI.5.3.1. Mécanisme de base

On observe que l'axe du cône, et donc l'angle  $\beta$  étant fixé, la puissance résistante maximale est une fonction croissante de son ouverture  $\alpha$ . Compte tenu de la condition de pertinence, la valeur minimale de cette puissance résistante maximale et donc du majorant du chargement extrême, est obtenue pour  $\alpha = \phi$ . Il reste alors de rechercher le minimum de ce majorant par rapport à  $\beta$ .

Posant  $n=H/V$ ,  $k=\sigma_T/\sigma_C$ ,  $L=l.B$ , l'inégalité (VI.58) devient :

$$V^+ \leq \frac{\pi B^2 \sigma_T \cos \phi}{2k(\sin \beta + n \cos \beta)} \left[ \frac{D - E \sin \beta}{4\sqrt{A}} + \frac{l \sin \beta}{A} \left( 1 + \frac{l \sin \phi}{\sqrt{A}} \right) (D - E \sin \phi) \right] \quad (\text{VI.59})$$

$$\text{où } A = \sin(\beta - \phi) \sin(\beta + \phi); D = 1 - \frac{2k \sin \phi}{1 - \sin \phi} \text{ et } E = 1 - \frac{2k}{1 - \sin \phi} \quad (\text{VI.60})$$

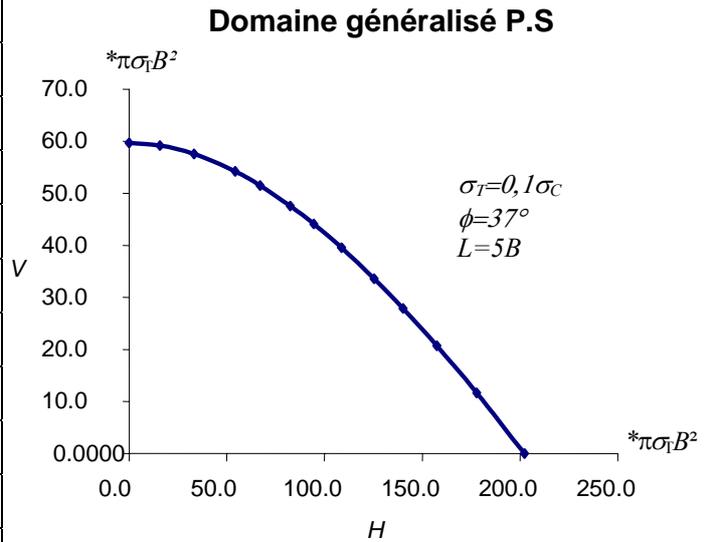
Pour illustrer, on prend un calcul avec traction pure  $n=0$ ,  $\phi=37^\circ$ ,  $k=1/10$ ,  $l=5$  : on trouve que la valeur minimale de puissance résistante maximale est obtenue quand  $\beta=90^\circ$ , et la borne supérieure vaut alors:

$$V^+ \leq \pi \sigma_T B^2 \left[ \frac{l(l \tan \phi + 1)(1 - \sin \phi)}{2k \cos \phi} + \frac{1}{4} \right] = 59.6802 \pi \sigma_T B^2 \quad (\text{VI.61})$$

On retrouve ainsi le résultat de la traction simple (voir le paragraphe VI.4.1).

Avec les mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques, on effectue le calcul pour différentes valeurs de  $n=H/V$ , les résultats sont donnés sur la Figure VI-10:

n=H/V	$\beta(^{\circ})$	H	V
0.0000	90.0000	0.0000	59.6802
0.2679	86.5510	15.8621	59.1981
0.5774	82.9356	33.2505	57.5915
1.0000	79.0223	54.2418	54.2418
1.3032	76.8967	67.1066	51.4927
1.7321	74.6220	82.4356	47.5942
2.1445	73.0177	94.5320	44.0810
2.7475	71.3447	108.6391	39.5414
3.7321	69.5800	125.3764	33.5945
5.0273	68.2049	140.1673	27.8810
7.5958	66.7840	157.4235	20.7252
15.2571	65.3057	177.8194	11.6549
3.5E+15	63.7817	202.2794	0.0000



Domaine généralisé de résistance

Figure VI-10. Approche par l'extérieur du domaine des chargements potentiellement supportables dans le plan (H, V)

### VI.5.3.2. Mécanisme amélioré

On constate également que la minimisation de la puissance résistante maximale conduit à  $\alpha=\phi$  tout en respectant la condition de pertinence et de géométrie.

Dans le cas de traction pure, on trouve :

$$V^+ \leq \pi\sigma_T B^2 \left[ \frac{l(l \tan \phi + 1)(1 - \sin \phi)}{2k \cos \phi} + \frac{1}{4} \right] = 59.6802\pi\sigma_T B^2 \quad (VI.62)$$

La solution dans ce cas coïncide avec celle donnée par le mécanisme de base. Ce qui est logique.

Afin de montrer l'amélioration apportée par ce mécanisme par rapport à celui de base, on effectue le même calcul (avec  $\phi=37^{\circ}$ ,  $k=1/10$ ,  $l=5$  et différentes valeurs de  $n$ ).

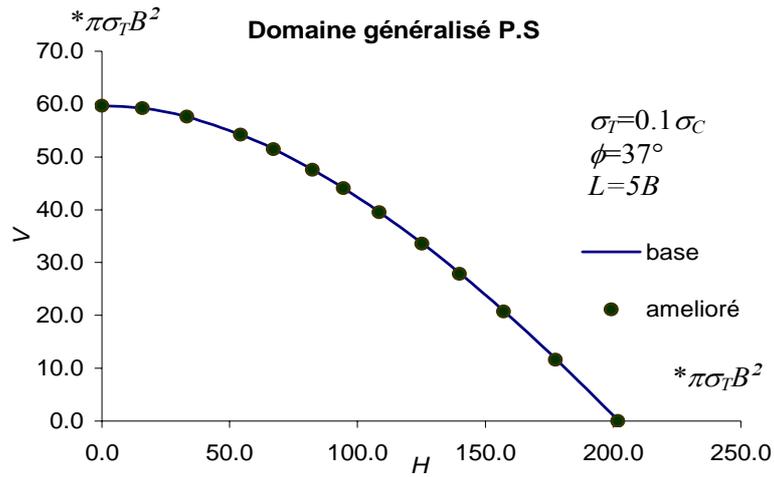


Figure VI-11. Le domaine potentiellement supportable de mécanisme de base et amélioré

On constate que le domaine généralisé potentiellement supportable est un domaine convexe et contient l'origine. Le mécanisme amélioré donne une charge de ruine légèrement plus faible par rapport aux résultats pour le mécanisme de base.

Pour les autres caractéristiques mécaniques ( $k$ ,  $\phi$ ) et géométrique ( $l$ ), on effectue le même calcul afin d'avoir ce domaine.

### VI.6. Cheville sous traction et cisaillement à proximité du bord

On s'intéresse maintenant au cas où la cheville est soumise à la traction  $V$  et au cisaillement  $H$  et qu'elle se situe près d'un bord libre, à une distance notée  $b$ . On suppose encore que le vecteur force  $\underline{H}$  est perpendiculaire à ce bord libre.

$$H \geq 0 \quad V \geq 0 \quad \text{et} \quad M = 0$$

Ce qui donne pour la puissance des efforts extérieurs :

$$P_{ext}(\underline{U}) = \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} = VU \sin \beta + HU \cos \beta = VU(\sin \beta + n \cos \beta)$$

Avec :  $H = nV$  .

On peut considérer que le massif de béton occupe un quart d'espace contenant la cheville, et délimité par deux plans  $y=0$  et  $x=b$ .

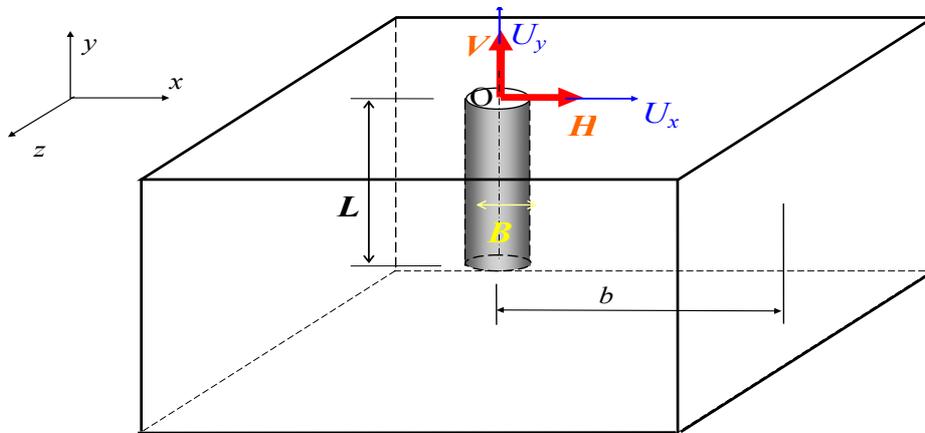


Figure VI-12. Une cheville au bord.

Le mécanisme de rupture considéré est toujours la translation d'une partie de cône en béton contenant la cheville. Ce cône est de demi-ouverture  $\alpha$  et d'axe incliné d'un angle  $\beta$  par rapport au plan  $y=-L$ . La condition de pertinence écrite pour la surface latérale du cône (où  $\theta = \pi/2 - \alpha$ ) est :

$$\phi \leq \alpha \leq \pi/2$$

Selon les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  et avec différentes manières de tronquer le cône, plusieurs mécanismes de rupture basés sur la translation du cône peuvent être pris en compte afin de trouver la meilleure approximation de la borne supérieure du chargement.

### VI.6.1. Mécanisme 1

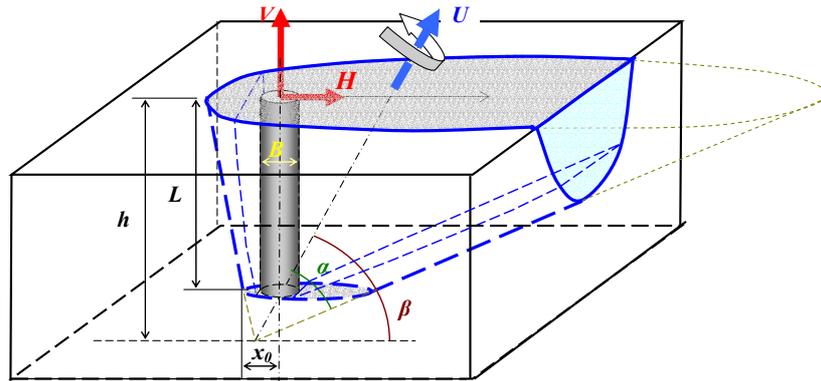


Figure VI-13. Mécanisme 1

Il s'agit d'un cône de base circulaire dont l'intersection avec les plans horizontaux est une surface de type « elliptique ». Les conditions géométriques et de pertinence s'écrivent :

$$\begin{aligned} \phi &\leq \alpha \leq \beta \leq \pi/2 \\ \alpha + \beta &\geq \pi/2 \\ L + \frac{B\sqrt{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)}}{2\sin\alpha} &\leq h \leq L + \frac{B}{2\tan\alpha} \end{aligned} \quad (\text{VI.63})$$

L'intersection avec le plan horizontal contenant le fond de la cheville est une ellipse. Cette ellipse circonscrit le cercle de fond de la cheville. La position de ce dernier est caractérisée par la valeur de  $x_0$ , distance entre le centre du fond de la cheville et le point extrême de l'ellipse qui le contient.

Le calcul de la puissance résistante maximale est effectué selon trois modes suivants :

#### Mode 1

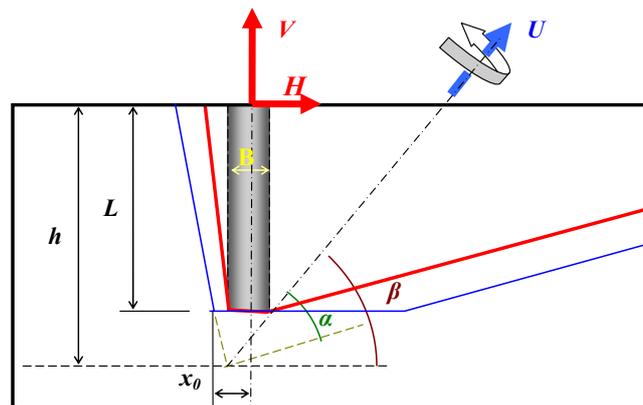


Figure VI-14. Mode 1 du mécanisme 1

Le cône est tronqué en haut et en bas par deux plans horizontaux contenant respectivement le sommet ( $y=0$ ) et le fond circulaire de la cheville ( $y=-L$ ), latéralement, par deux plans paraboliques et le plan du bord de la dalle ( $x=b$ ).

#### Mode 2

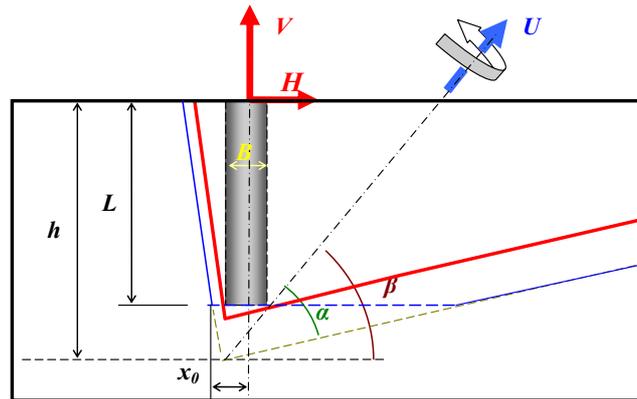


Figure VI-15. Mode 2 du mécanisme 1

Le cône est tronqué en haut par le plan horizontal de surface de la dalle, latéralement par deux plans « paraboliques » et le plan du bord.

### Mode 3

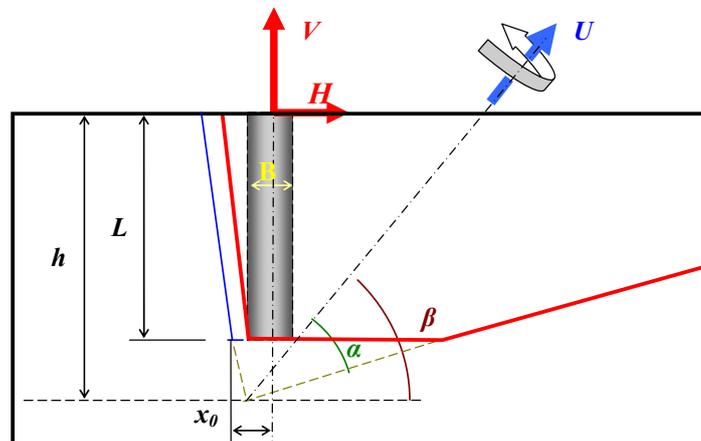


Figure VI-16. Mode 3 du mécanisme 1

Le cône est tronqué par deux plans horizontaux en haut et en bas, latéralement par le plan « parabolique » à gauche et le plan du bord.

### VI.6.2. Mécanisme 2

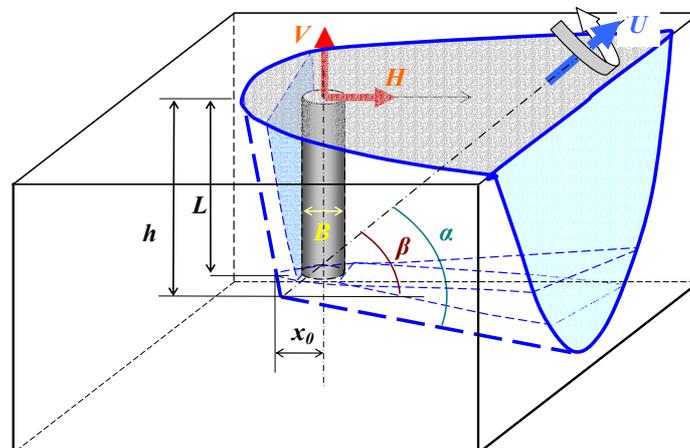


Figure VI-17. Mécanisme 2

Ce mécanisme paraît plus prédictif, c'est-à-dire débouchant sur une meilleure majoration dans le cas où la cheville est très proche du bord. Il est caractérisé par des conditions (géométrique et de pertinence) suivantes:

$$\begin{aligned} \pi/4 &\leq \alpha \leq \pi/2 \\ \alpha &\geq \phi \quad \text{et} \quad \alpha \geq \beta \\ \alpha + \beta &\geq \pi/2 \\ L &\leq h \leq L + \frac{B}{2 \tan \alpha} \end{aligned} \quad (\text{VI.64})$$

On peut constater que l'intersection entre le cône et des plans horizontaux forme une hyperbole. La hyperbole de l'intersection entre le cône et le plan horizontal contenant le fond de la cheville est circonscrite ce dernier. La position de la cheville par rapport le cône est donnée par  $x_0$ . Trois modes différents sont également à considérer.

### Mode 1

Etant donnée la condition de pertinence, ce mode de rupture ne se produit que si  $\beta \geq \phi$

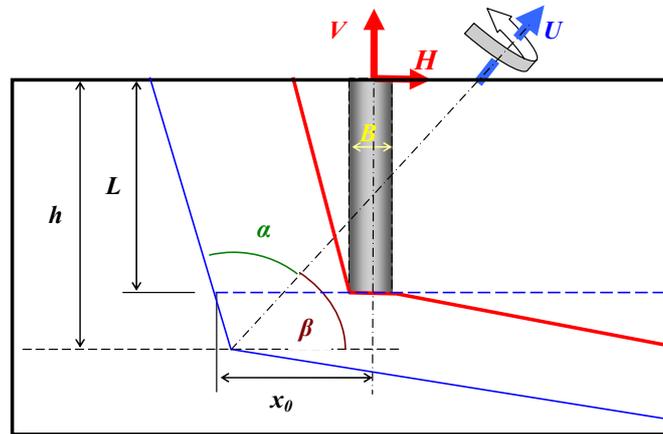


Figure VI-18. Mode 1 du mécanisme 2

Le cône est tronqué sur deux cotés de son axe par deux plans « paraboliques » (représentés par les lignes rouges), en haut et en bas par deux plans horizontaux contenant le sommet et le fond de la cheville. Bien évidemment, ce cône est limité par le plan du bord.

### Mode 2

Le cône dans ce mode de rupture est tronqué par deux plans paraboliques à deux cotés de son axe, en haut par la surface de la dalle et le plan du bord.

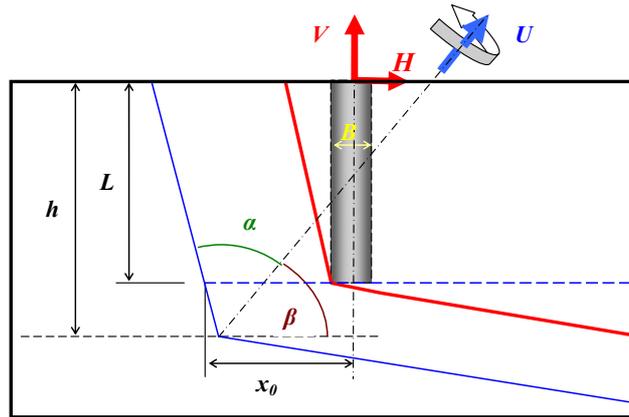


Figure VI-19. Mode 2 du mécanisme 2

### Mode 3

Comme le mode 1, il n'est à considérer que si la condition de pertinence  $\beta \geq \phi$  est bien vérifiée.

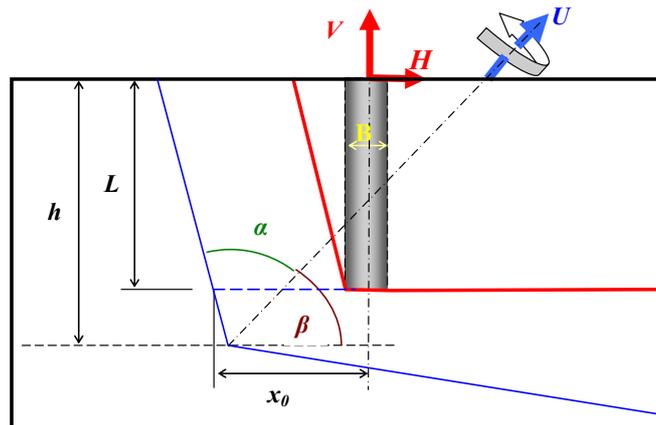


Figure VI-20. Mode 3 du mécanisme 2

Le cône est tronqué à gauche par un plan « parabolique », deux plans horizontaux en haut et en bas de la cheville et le plan du bord.

VI.6.3. Mécanisme 3

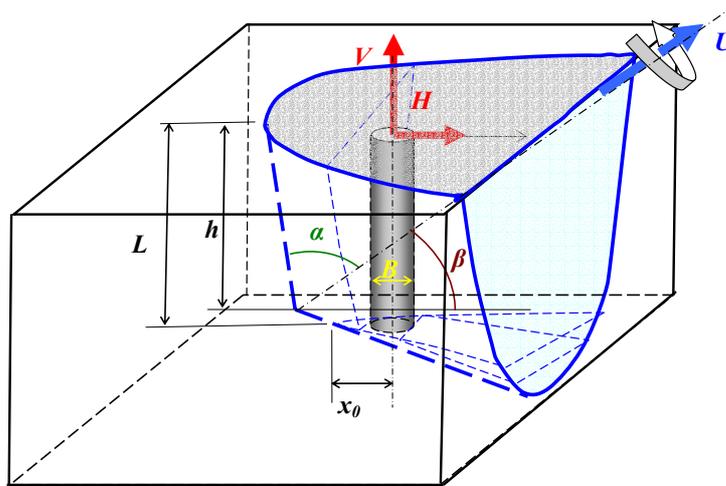


Figure VI-21. Mécanisme 3

Ce mécanisme s'adresse ainsi au calcul de cheville près du bord. Il est défini par des conditions :

$$\begin{aligned}
 \pi/4 &\leq \alpha \leq \pi/2 \\
 \alpha &\geq \phi \text{ et } \alpha \geq \beta \\
 \alpha + \beta &\geq \pi/2 \\
 L - \frac{B}{2 \tan \alpha} &\leq h \leq L
 \end{aligned}
 \tag{VI.65}$$

Dans ce mécanisme, le sommet du cône se trouve à une profondeur  $h$  plus faible que la longueur de la cheville  $L$ . L'intersection entre ce cône et les plans verticaux et horizontaux forme une hyperbole. Ainsi, le fond de la cheville est conscrit dans la hyperbole horizontale d'intersection. En introduisant les deux plans paraboliques de deux côtés de l'axe du cône, on a trois modes de rupture différents.

**Mode 1**

Ce mode de rupture ne se produit que si  $\beta \geq \phi$ . Le cône est tronqué par deux plans en horizontaux en bas et en haut de la cheville, deux plans « paraboliques » de deux cotés de l'axe du cône et évidemment le plan du bord.

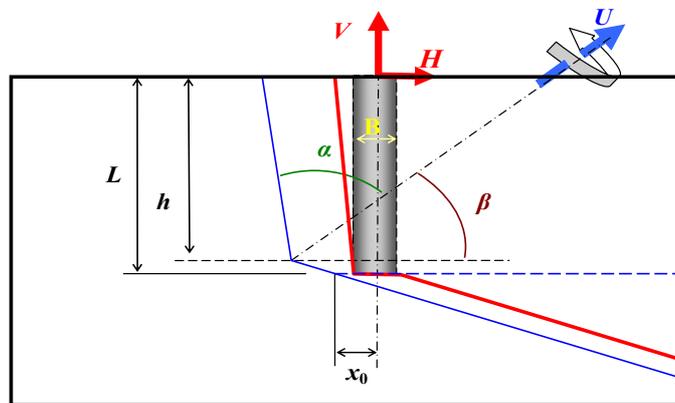


Figure VI-22. Mode 1 du mécanisme 3

**Mode 2**

Ce mode de rupture consiste à tronquer le cône par deux plans paraboliques à deux cotés de son axe, en haut par la surface de la dalle et le plan du bord.

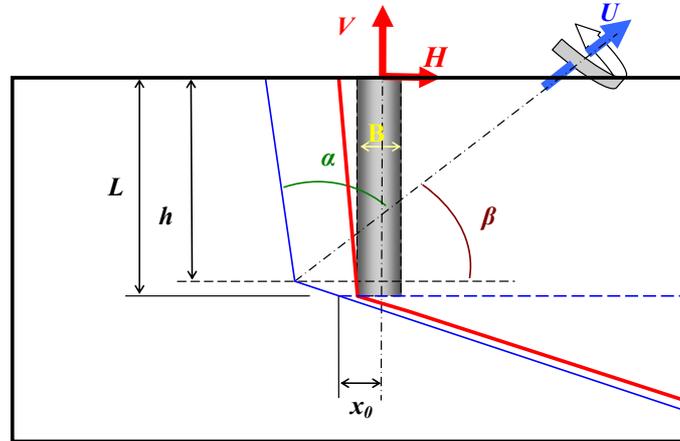


Figure VI-23. Mode 2 du mécanisme 3

**Mode 3**

Comme le mode 1, il ne se produit que si la condition de pertinence  $\beta \geq \phi$  est bien vérifiée.

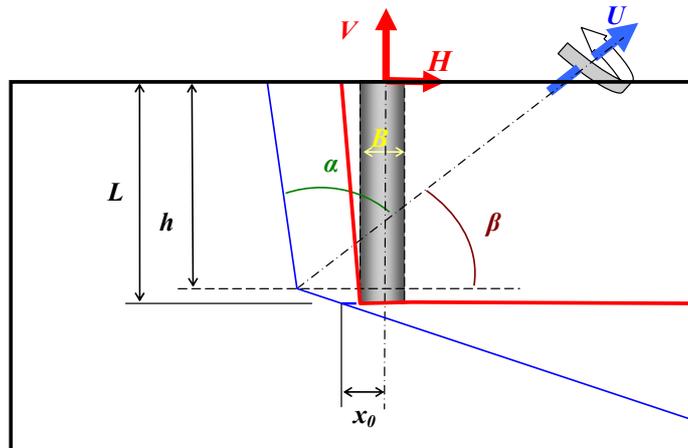


Figure VI-24. Mode 3 du mécanisme 3

En résumé, sur les mécanismes et les modes considérés, le cône est tronqué à gauche par un plan « parabolique », deux plans horizontaux en haut et en bas de la cheville et le plan du bord.

Il existe en définition neuf modes de ruine différents. Pour une configuration mécanique et géométrique donnée, un de ces modes prend d'avantage et donne le plus faible charge de ruine (donc le meilleur majorant du chargement de ruine). Les calculs analytiques élémentaires (l'équation des coniques, l'aire latérale du cône tronqué...) sont présentés dans les annexes A, B et C.

Le problème consiste à minimiser la puissance résistante maximale par rapport à 3 paramètres :

$h$  : La profondeur du sommet du cône

$\alpha$  : L'angle d'ouverture du cône

$\beta$  : L'angle d'inclinaison de l'axe du cône.

Les données géométriques sont  $L, B, b$ , et les données mécaniques sont  $\sigma_T, \sigma_C, \phi$ .

La stratégie de résolution est présentée dans l'algorithme suivant :

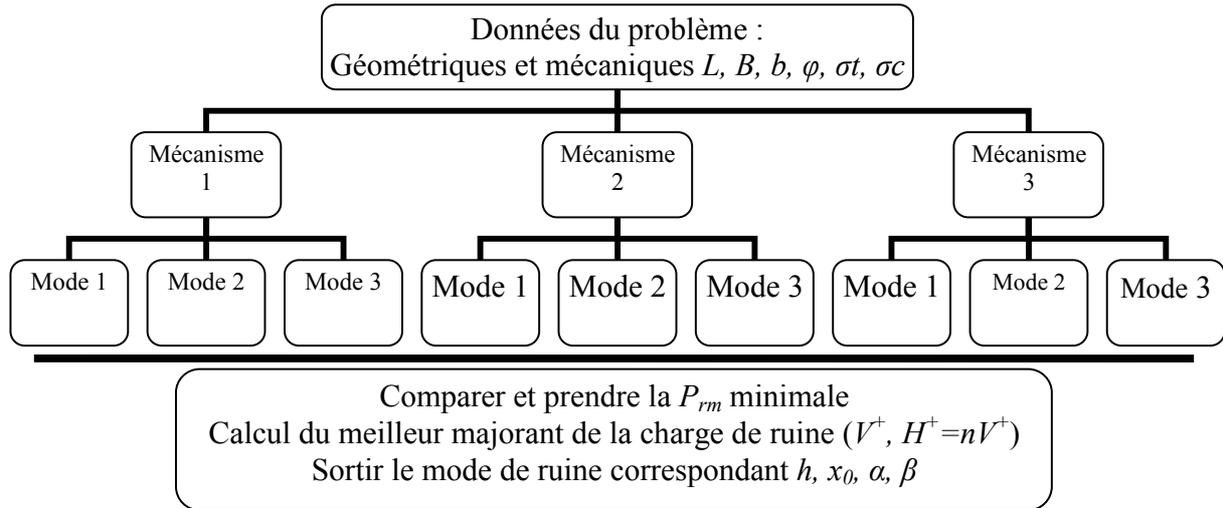


Figure VI-25. Algorithme de calcul du meilleur majorant de la charge de ruine.

## VI.7. Elaboration l'outil de calcul CHEVILAB

Un outil de calcul du problème a été élaboré permettant de traiter le cas général d'une cheville ancrée au centre ou à un bord d'un bloc en béton. Ce programme, appelé CHEVILAB, est établi dans l'environnement de Visual Fortran et Visual Basic, qui permet d'obtenir un majorant de la charge de ruine et de visualiser le mode de rupture correspondant.

La stratégie de calcul consiste à rechercher la valeur minimale du majorant de la charge de ruine calculé pour chacune des 10 classes de mécanismes considérés (9 modes au bord et 1 mode au centre). En raison de l'existence de minimums locaux, qui interdit l'utilisation de méthodes de type gradient, on procède par balayage systématique des paramètres de minimisation géométriques. Le programme donne ensuite la valeur minimale du majorant optimisé dans chaque classe de mécanisme.

L'utilisation d'un tel logiciel est simple et conviviale. L'introduction des données géométriques et mécaniques du problème se fait à partir d'une fenêtre d'entrée, sur laquelle un schéma de principe rappelle la signification de ces données (Figure VI-26). De même les résultats de calcul sont présentés dans une fenêtre spécifique : Meilleure majoration du chargement de ruine et visualisation du mécanisme de cône optimale associé à cette valeur (Figure VI-27).

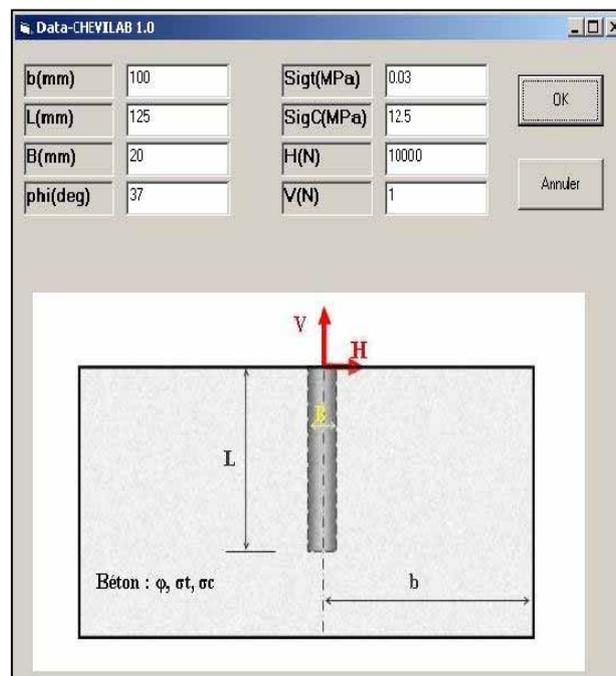


Figure VI-26. La fenêtre des données.

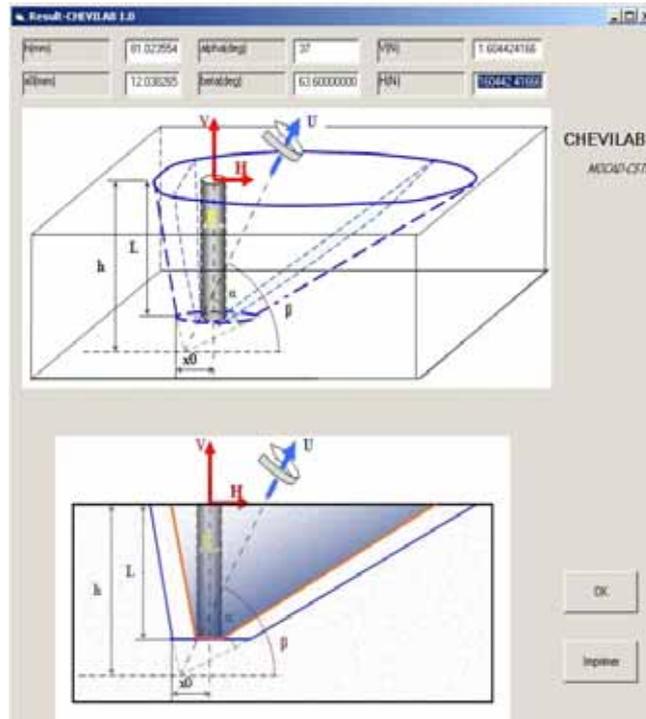


Figure VI-27. La fenêtre des résultats.

Le temps de calcul est d'environ quelques minutes pour une configuration donnée.

## **VI.8. Conclusion**

L'analyse du problème de la tenue de chevilles de fixation ancrées dans le béton à l'aide de l'approche calcul à la rupture s'est révélée féconde, car elle a permis d'aboutir à l'élaboration d'un outil de calcul simple et rapide d'utilisation destiné aux ingénieurs.

Ce dernier a pour vocation non seulement d'évaluer les capacités de résistance de dispositifs de fixations existants, mais également d'optimiser le dimensionnement de ces fixations dans le cadre du développement de produits nouveaux. Une première validation de cet outil par comparaison avec des résultats expérimentaux d'une part, des simulations à l'aide du modèle MODEV dans le code de calcul SYPHONIE d'autre part est faite au chapitre VII.

Des améliorations sont susceptibles d'être apportées à cette première version du logiciel. Elles concernent la prise en compte d'une résistance limitée de l'acier constituant la cheville, supposée jusqu'à présent infiniment résistante, ainsi que l'extension de l'approche cinématique à des mécanismes plus élaborés que les mécanismes de blocs en translation considérés dans l'analyse précédente. On prendra garde toutefois à ne pas étendre l'approche à des schémas de ruine trop sophistiqués, pouvant donner lieu à des calculs très lourds, incompatibles avec la nécessité de disposer d'un outil de calcul facile d'emploi. Un développement de cet outil est effectué ultérieurement dans le cadre de stage de DEA au sein de laboratoire MOCAD-CSTB qui permet de traiter les chevilles en coin [Ref. 126].

**CHAPITRE VII:  
VALIDATION DE L'OUTIL NUMERIQUE CHEVILAB**

## **VII.1. Introduction**

On a vu dans le chapitre précédent, le développement au plan théorique l'outil de calcul de fixation CHEVILAB qui se base sur la théorie du calcul à la rupture. Dans ce chapitre, la validation de cet outil sera présentée.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à une validation théorique du logiciel. Pour cela, une étude de sensibilité des données du problème a été menée.

Dans un second temps, une validation expérimentale sera effectuée par comparaison avec des résultats d'essais et ceux issus du guide de calcul ATE.

Ainsi, une comparaison entre MODEV, CHEVILAB et l'essai sur une configuration de cheville au bord sera effectuée pour mettre en valeur les deux approches développées.

## VII.2. Validation théorique du logiciel CHEVILAB

On donne ci-après les résultats fournis par le logiciel CHEVILAB pour le jeu de données suivantes :

$k=10$ ,  $\phi=37^\circ$ ,  $L=5B$  et  $b=5B$ ,  $7B$  et infini.

sous la forme d'une courbe délimitant dans le plan  $(H / \pi\sigma_T B^2; V / \pi\sigma_T B^2)$ , une approche par l'extérieur du domaine des chargements potentiellement supportables par la cheville.

La Figure VII-1 présente les trois courbes correspondant à différentes distances de la cheville par rapport au bord. On observe que la proximité de la cheville par rapport à ce bord diminue très sensiblement les capacités de résistance de cette dernière notamment sous sollicitation de cisaillement, comme le montre la Figure VII-2 qui donne la valeur du majorant du chargement de ruine sous cisaillement pur ( $V=0$ ) en fonction de la distance relative  $b/B$ .

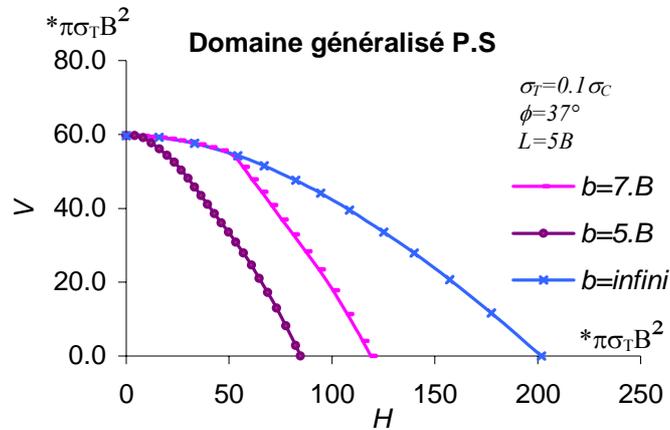


Figure VII-1. Influence de  $b$  sur le domaine potentiellement supportable.

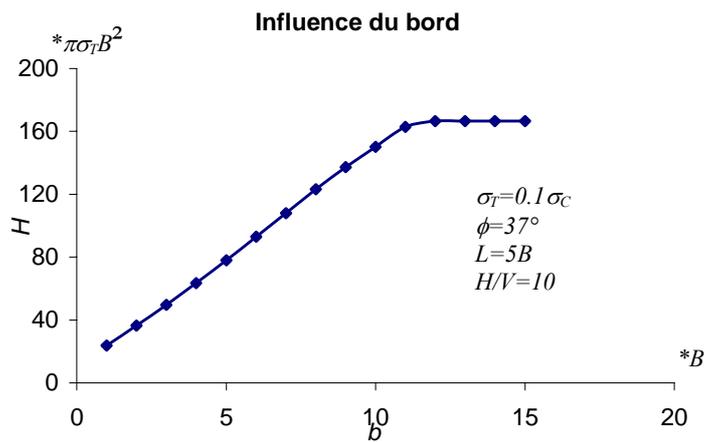


Figure VII-2. Influence de  $b$  sur le chargement de ruine

Enfin, la Figure VII-3 décrit l'influence de la longueur de la cheville sur sa capacité de résistance. On observe, comme on pouvait s'y attendre, que la résistance de la cheville augmente avec sa longueur quelle que soit l'inclinaison du chargement.

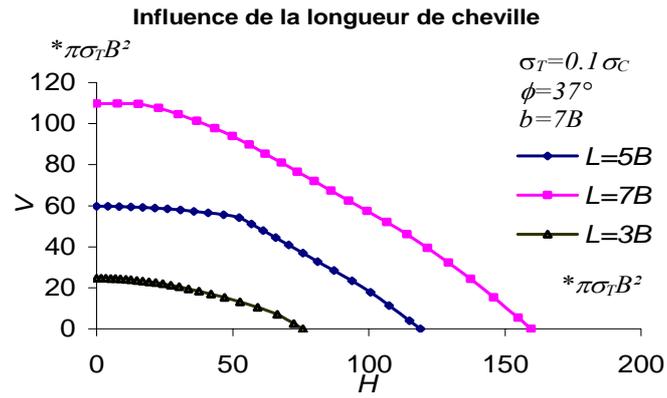


Figure VII-3. Influence de  $L$  sur le domaine potentiellement supportable.

### VII.3. Validation expérimental du logiciel CHEVILAB

#### VII.3.1. Domaine d'application du logiciel

La première version du logiciel CHEVILAB élaborée dans ce travail repose sur la considération de mécanismes de type bloc conique en translation ne mettant en jeu que la rupture du béton, à l'exclusion de celle de la cheville métallique. Les observations expérimentales montrent que ce type de mécanisme de ruine apparaît soit dans le cas d'une cheville située loin du bord soumise à une traction pure, soit dans le cas d'une cheville située à proximité d'un bord ( $b/L \leq 3$ ) et sollicitée en traction et cisaillement, la composante du cisaillement étant orientée vers le bord.

Nous nous limitons donc dans ce qui suit à une comparaison entre les résultats fournis par le calcul à la rupture à travers le logiciel CHEVILAB et les données expérimentales dans ces situations, c'est-à-dire les chevilles loin du bord ou près à un bord, sous l'action simultanée traction – cisaillement où la composante du cisaillement étant perpendiculaire au bord. L'extension du domaine d'application du logiciel à d'autres situations (cheville à proximité d'un coin, groupe de cheville, etc.) exige de considérer d'autres mécanismes plus représentatifs de ces diverses situations.

#### VII.3.2. Calibration et validation

L'approche calcul à la rupture appliquée au problème de fixation avec les hypothèses simplifiées met en jeu les paramètres mécaniques du béton : angle de frottement interne, résistances à la traction et à la compression. Or il importe de noter que l'approche calcul à la rupture ne s'applique en toute rigueur qu'à des structures constituées de matériaux élastiques parfaitement plastiques, c'est-à-dire manifestant une ductilité suffisante (capacité à se déformer sous sollicitation constante). Dans ce cas en effet tout chargement potentiellement supportable au sens du calcul à la rupture est effectivement supporté. L'application directe des résultats du calcul à la rupture est alors possible sans autre précaution supplémentaire, hormis le fait qu'il faut tenir compte de leur caractère de majorants de la charge de ruine.

C'est le cas de la cheville de fixation, constituée d'un matériau ductile (acier), mais pas celui de la dalle constituée d'un béton qui se révèle avoir un comportement fragile, notamment en traction. Une façon de tenir compte de cet écart de la loi de comportement réelle des matériaux par rapport à la situation idéale de l'élastoplasticité parfaite, consiste à adopter des coefficients réducteurs, notés  $\nu$ , par lesquels on multiplie les caractéristiques de résistance nominale du béton.

Ainsi, en ce qui concerne la résistance en compression simple, dont la valeur nominale est notée  $f_c$ , diverses formules ont été proposées à partir de la comparaison entre les résultats fournis par le calcul à la rupture et ceux issus de l'expérience pour différents types de structures :

$$\begin{aligned}\nu &= 0,7 - \frac{f_c}{200} \text{ pour les poutres en cisaillement} \\ \nu &= 0,98 - \frac{f_c}{500} \text{ pour les poutres en flexion} \quad [\text{Ref. 94}] \quad (\text{VII.1}) \\ \nu &= \frac{4,22}{\sqrt{f_c}} \text{ pour les problèmes de poinçonnement}\end{aligned}$$

Où  $\nu$  est le coefficient d'efficacité, et  $f_c$  est la résistance en compression « nominale » du béton (en MPa).

Ce choix d'un tel coefficient est encore plus délicat en ce qui concerne la résistance en traction du béton. Les calculs fondés sur l'approche cinématique par l'extérieur montre qu'une valeur faible, voire nulle, de cette résistance peut être retenue afin de prédire le chargement de ruine. Nielsen (1984) [Ref. 94] par exemple choisit une résistance en traction égale à 1/400 de celle en compression pour le problème de poinçonnement, nulles pour d'autres problèmes tels que l'analyse de poutre en cisaillement ou en flexion, et encore celui de cisaillement des joints. En ce qui concerne notre problème d'arrachement d'une cheville de fixation, l'adoption d'une résistance en traction nulle conduit à des mécanismes optimaux pour lesquels la surface de rupture tend à être perpendiculaire à la sollicitation, c'est-à-dire à des mécanismes peu réalistes.

Nous nous proposons tout d'abord dans ce qui suit de caler un tel coefficient d'efficacité par comparaison entre les prévisions données par le calcul à la rupture (approche cinématique) et les résultats expérimentaux d'Eligehausen (1987) [Ref. 47] relatifs à des essais en traction simple. Dans ces essais, la longueur de la cheville pouvait varier entre 20 et 150mm ; la résistance en compression nominale du béton étant 20MPa. Le calage a été fait à partir du sous-ensemble de résultats correspondant à des chevilles de longueurs comprises entre 20 et 50mm. Nous avons obtenu :

$$\begin{aligned}\sigma_c &= \nu f_c \\ \sigma_T &= \frac{\sigma_c}{380} \\ \nu &= 0.70 - \frac{f_c}{200}\end{aligned}\tag{VII.2}$$

Adoptant ces valeurs, la comparaison a été faite avec d'autres résultats expérimentaux. Ainsi, la Figure VII-4 illustre une telle comparaison avec l'ensemble des essais d'Eligehausen, c'est-à-dire sur tout l'intervalle de longueur [20mm, 150mm]. On observe sur cette figure que la courbe théorique passe notamment au dessus de la courbe moyenne du nuage de points expérimentaux, ce qui est conforme au fait que les résultats théoriques constituent en toute rigueur des majorants de la charge de ruine. Cependant, pour des chevilles de grande longueur ( $L > 120$ mm) les évaluations données par le calcul semblent s'écarter notablement des valeurs expérimentales. On peut expliquer que le cône en translation du béton ne commence pas à partir du fond de la cheville (c'est-à-dire la hauteur du bloc de cône est plus faible que la longueur de la cheville. En effet, par observation des essais, pour une cheville de longueur 125mm, le cône en béton contient 90% la longueur de la cheville. Pour application plus large de cet outil dans le cas de rupture au centre, il n'est nécessaire ainsi d'ajustement la hauteur du cône par rapport à la longueur des chevilles.

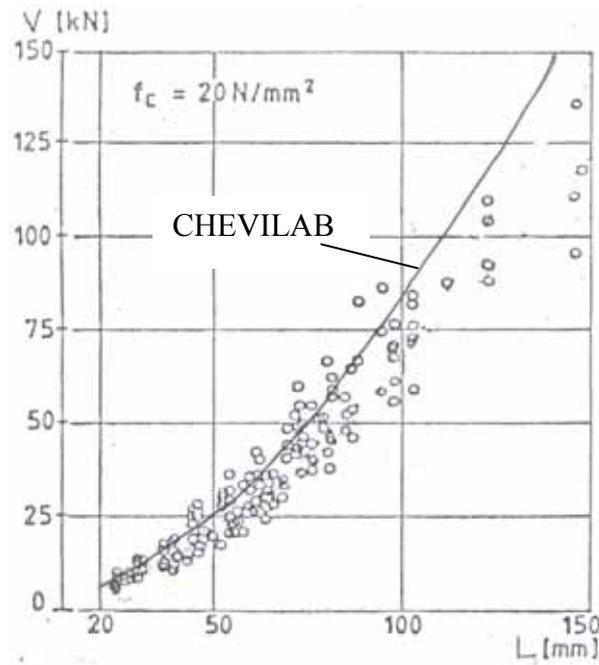


Figure VII-4. Comparaison calcul - résultats expérimentaux dans le cas d'une cheville en traction au centre

La validation du logiciel CHEVILAB a ensuite été effectuée par comparaison avec des résultats d'essais de chevilles sollicitées en cisaillement réalisés par l'équipe CSTB [Ref. 37]. Trois configurations ont été analysées :

Cas 1 : Cheville de longueur  $L=63$  mm et de diamètre  $B=22$ mm ancrée à une distance  $b=500$ mm du bord, c'est-à-dire loin de ce dernier. La résistance en compression du béton  $f_c=20$  MPa. La charge de ruine moyenne des essais étant égale à  $H=121,03$ KN, l'estimation théorique donnée par CHEVILAB est  $H=136,95$ KN. Sachant que le mécanisme de rupture du cône de béton en translation au centre du calcul n'est pas compatible à celui de rupture réelle de type « pry out » observé expérimentalement. Le résultat donné par le guide ATE :  $H=23,55$ KN en tenant compte des coefficients partiels de sécurité,  $H=50,86$ KN sans en tenir compte, c'est-à-dire une estimation bien inférieure au résultat expérimental.

Cas 2 : Cheville de longueur  $L=125$ mm et de diamètre  $B=22$ mm placée à une distance  $b=190$ mm du bord, la résistance en compression du béton étant  $f_c=22,2$  MPa. La valeur moyenne des résultats expérimentaux ( $H=93,45$ KN) est très proche de celle trouvée par le calcul ( $94,10$ KN). Le mode ruine est optimal est le mode 2 du mécanisme 3, que l'on observe d'ailleurs expérimentalement. Le calcul du guide ATE donne  $H=20,58$ KN et  $H=37,04$ KN selon que l'on prenne ou non en compte les coefficients partiels de sécurité.

Cas 3 : Cheville de longueur  $L=125$  mm et de diamètre  $B=22$ mm située à une distance  $b=100$ mm du bord, la résistance en compression étant  $f_c=22,2$  MPa. La valeur donnée par le calcul est de  $41,76$ KN, à comparer avec la valeur expérimentales égale à  $H=36,67$ KN, tandis que le guide ATE donne les valeurs de  $H=7,86$ KN et  $H=14,14$ KN selon la prise en compte ou non des coefficients partiels de sécurité.

Le tableau et la figure ci-dessous donnent la synthèse des résultats précédents (valeur de  $H$  en KN) :

	Cas 1	Cas 2	Cas 3
--	-------	-------	-------

Essais	121,03	93,45	36,67
CHEVILAB	136,95	94,10	41,76
ATE	23,55	20,58	7,86
ATE en ôtant les coefficients de sécurité	50,86	37,04	14,14

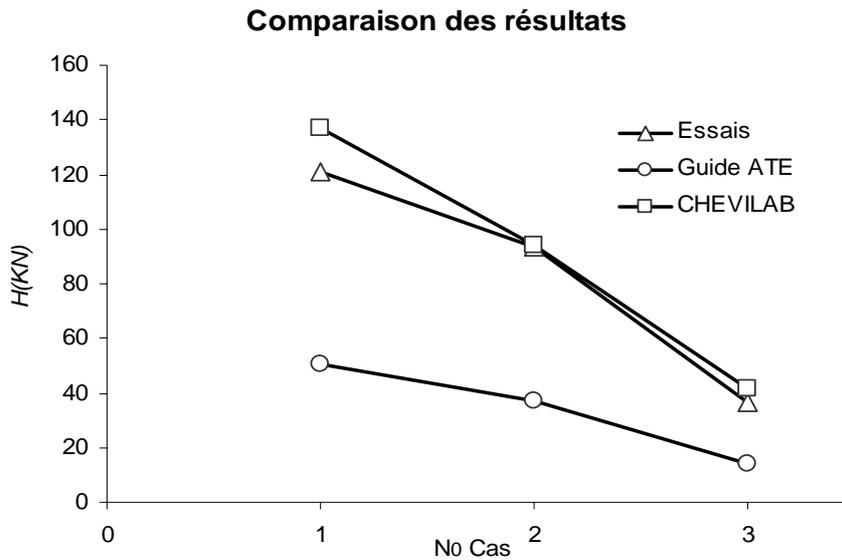


Figure VII-5. Comparaison CHEVILAB – Essai - ATE dans le cas de cheville sous cisaillement pur.

Il apparaît au vu de ces comparaisons que les résultats donnés par CHEVILAB sont en bon accord avec les résultats expérimentaux, tandis que les valeurs fournies par le guide ATE sous-estiment considérablement ces derniers.

L'utilisation du logiciel CHEVILAB nous permet de tracer dans le plan ( $V - H$ ) les courbes d'interaction des chevilles sous sollicitations combinées de traction-cisaillement. Ces Figure VII-6 et Figure VII-7 montrent de telles courbes dans le cas d'une cheville placée loin ou à proximité du bord.

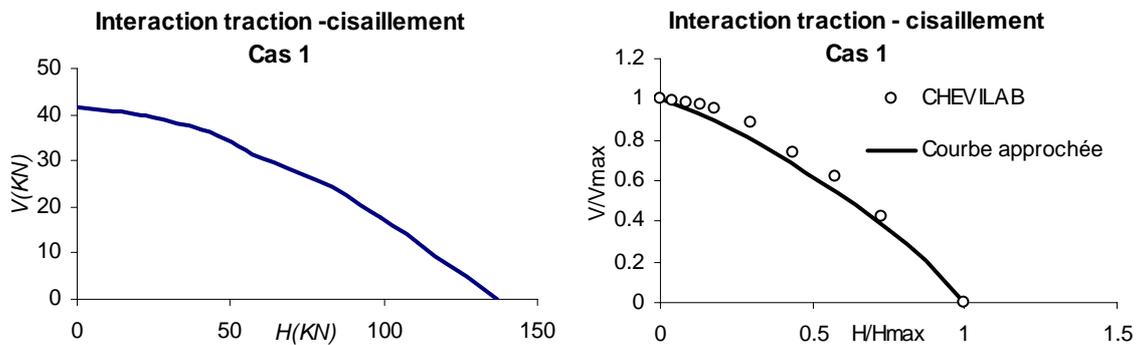


Figure VII-6. Courbe d'interaction « traction – cisaillement » d'une cheville au centre.

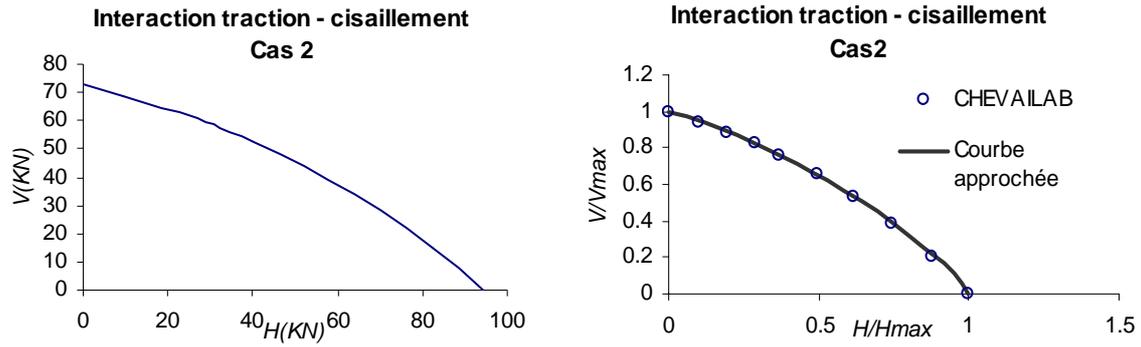


Figure VII-7. Courbe d'interaction « traction – cisaillement » d'une cheville au bord.

De telles courbes peuvent être approximées par une équation de type :

$$\left(\frac{H}{H_{\max}}\right)^{\lambda} + \left(\frac{V}{V_{\max}}\right)^{\lambda} = 1 \text{ avec } \lambda = 1, 2 \quad (\text{VII.3})$$

comme cela est montré sur les Figure VII-6 et Figure VII-7.

Où  $H_{\max}$  et  $V_{\max}$  sont les chargements de ruine respectivement aux cas de cisaillement pur et traction simple.

Cette formulation pourrait être utilisée pour le calcul simplifié de l'interaction quand on connaît la résistance en traction simple et en cisaillement seul.

#### VII.4. Comparaison MODEV - CHEVILAB - Essai

En utilisant le logiciel CHEVILAB, on obtient ainsi une rupture au bord (mode 2 du mécanisme 3), ce qui est cohérent avec l'essai et le modèle MODEV. La charge de ruine est 41,76KN est aussi acceptable. Les données et les résultats sont présentés dans la Figure VII-8.

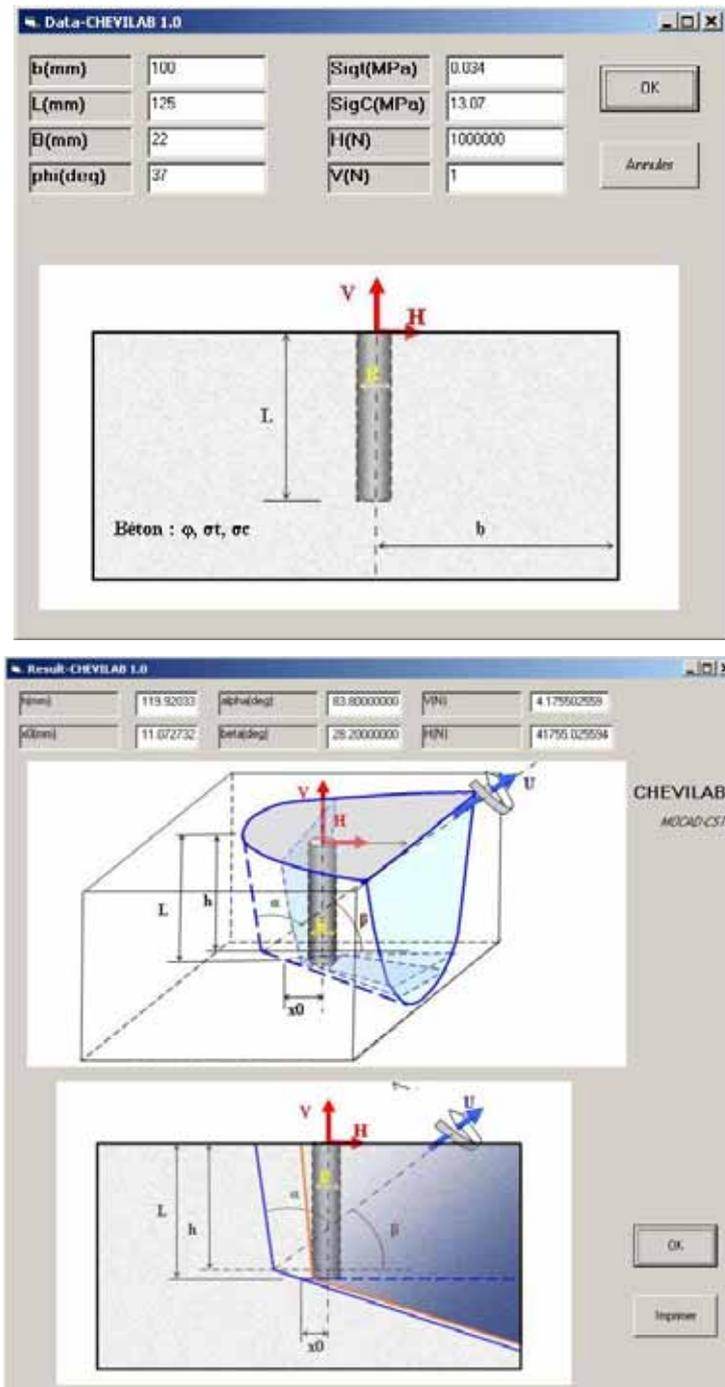
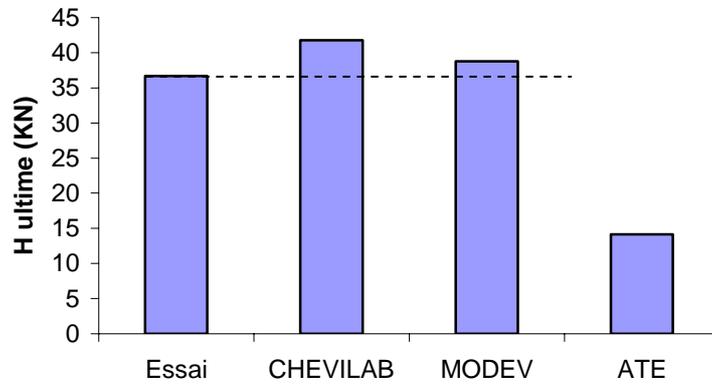


Figure VII-8. Résultat obtenu par CHEVILAB

Pour le même cas de figure, le calcul de chargement ultime selon le guide ATE donne un résultat très faible :  $H=7,86\text{KN}$  ou  $H=14,14\text{KN}$  avec ou sans les coefficients de sécurité.

Les résultats sont présentés dans le graphique et tableau ci-dessous :

**Comparaison des différentes méthodes  
d'évaluation**



	Essai	CHEVILAB	MODEV	ATE
<i>H</i> ultime (KN)	36,67	41,76	38,75	7,86 (ou 14,14)
Mode de rupture	Au bord	Au bord	Au bord	Au bord

## **VII.5. Conclusions**

Dans ce chapitre, nous avons validé le logiciel CHEVILAB.

Le logiciel CHEVILAB, avec le mécanisme général de rupture de cône en translation, permet d'évaluer la capacité portante d'une fixation ainsi que d'obtenir le mode de rupture. Cependant, un calage sur les caractéristiques mécaniques du béton est nécessaire afin de comparer avec les résultats d'essai. Les calculs étant faits pour le cas de traction - cisaillement au centre et au bord, montrent des résultats encourageants vis-à-vis des essais. Ainsi, on peut exploiter cet outil pour le dimensionnement des fixations, dans les études de sensibilité pour chaque paramètre géométrique ou mécanique...

Un cas de figure sur la modélisation d'une fixation au bord a été effectué à la fois avec le modèle MODEV et le logiciel CHEVILAB. Les résultats obtenus par les deux outils, c'est-à-dire le chargement ultime et le mode de rupture sont cohérents entre eux et par comparaison avec l'essai.

**CHAPITRE VIII:  
DISCUSSION SCIENTIFIQUE**

### **VIII.1. Introduction**

Dans ce chapitre, une discussion scientifique sur les aspects principaux de la thèse est présentée. Elle concerne le modèle d'endommagement MODEV et l'outil de calcul des fixations CHEVILAB.

Cette discussion concerne d'abord sur les classes de modèles existants qui aboutit au choix du modèle de type endommagement pour le matériau et les structures en béton. Puis une analyse sur le principe du modèle MODEV et la position de ce modèle dans la famille des modèles d'endommagement sera présentée. Les apports et les limites du modèle MODEV sont également abordés.

Pour ce qui concerne les fixations, un état de l'art sur les méthodes empiriques de calcul des ancrages est présenté. On justifiera, par une analyse des méthodes de calcul, le choix du calcul à la rupture pour traiter le dimensionnement des ancrages par chevilles de fixation implantées dans le béton. Ainsi, l'utilisation et le potentiel du logiciel CHEVILAB sont abordés.

## VIII.2. Modèle d'endommagement MODEV

### VIII.2.1. Généralités sur les théories et les modèles pour le béton :

Plusieurs théories mécaniques ont été établies pour décrire le comportement des matériaux fragiles et hétérogènes comme le béton.

La théorie des fissurations se trouve dans le cadre de la mécanique de la rupture [Ref. 20]. Elle permet de connaître l'état de contrainte et de déformation à la pointe de la fissure. Cette méthode considère le matériau comme un milieu discontinu avec les fissurations et permet de suivre la diffusion de celles-ci. En plus de la théorie de fissurations linéaires classiques, l'effet plastique non-linéaire a été intégré. Cette méthode est néanmoins réservée au calcul local à proximité de la fissure. Actuellement avec les techniques d'auto-maillage, cette méthode est utilisée pour décrire la rupture fragile et la diffusion des fissures [Ref. 23, Ref. 67...]. En particulier, l'approche locale récemment utilisée pour décrire la transition ductile – fragile constitue un outil de laboratoire parfaitement adapté à la compréhension des phénomènes complexes sous l'action des températures, de vitesse de sollicitations... au niveau local des éléments [Ref. 15, Ref. 17].

La théorie de la fissuration distribuée considère que l'élément fissuré devient orthotrope après fissuration. Lors de la fissuration, le matériau est traité comme un composite contenant la partie saine du matériau d'une part et la fissure d'autre part. La formulation est établie en décomposant les déformations et en postulant les lois de comportement propres de chaque composant (matériau sain et fissure). Plusieurs modèles basés sur cette théorie sont développés : Modèle de fissuration tournante, modèle de fissuration fixe, modèle de fissuration multiple. Cependant, ces modèles génèrent des problèmes de blocage des contraintes, d'objectivité vis-à-vis du maillage, d'imprécision due à des paramètres comme l'angle seuil et le coefficient de conservation du cisaillement (voir le chapitre I sur la description de la méthode)... C'est pourquoi, des mesures physiques et mathématiques ont été introduites afin de mieux explorer cette méthode, notamment la théorie de bande de fissure [Ref. 10], l'introduction de la longueur caractéristique, l'approche non local [Ref. 105], l'utilisation des couches d'éléments (imbricate finite element system)[Ref. 8]. Dans cette étude, nous avons également amélioré cette méthode en postulant une nouvelle loi locale de comportement de la fissure (voir le chapitre II). Ceci a permis d'avoir un cadre théorique plus cohérent au plan physique et de remédier aux problèmes de blocage des contraintes. La méthode de la fissuration est prédictive dans les cas de chargement simple et radical. Par contre, à part les défauts mentionnés ci avant, il est difficile de tenir compte de l'activation de plusieurs fissures à la fois, sous des chargements relativement complexes. De plus, il est difficile d'introduire dans cette méthode d'autres phénomènes non-linéaires liés au caractère hétérogène du béton comme l'effet anélastique, l'unilatéralité... Il semble que cette méthode rencontre encore des instabilités numériques et parfois des pertes de convergence. Cela pourrait être la conséquence d'un manque de la consistance du modèle au niveau de la résolution et d'unicité de la solution.

Pendant ces trois récentes décennies, la mécanique continue d'endommagement a été développée et devient une approche très utilisée pour décrire le comportement du béton. Dans cette théorie de l'endommagement, le matériau est considéré comme un milieu continu même s'il y a endommagement, à cause de la diffusion des fissures à l'échelle microscopique. Cette approche a été développée dans le cadre de la théorie de la thermodynamique des milieux continus et des processus irréversibles en introduisant, dans la loi de comportement, des

variables d'endommagement. Ces variables sont intégrées dans la loi de comportement dans le concept de contrainte/déformation effective ou équivalence d'énergie [Ref. 69], [Ref. 61].

Une telle théorie cohérente avec les principes de la thermodynamique, est capable de traiter les couplages avec d'autres phénomènes non-linéaires associés au matériau. Les recherches ont été menées afin d'introduire dans le modèle d'endommagement l'effet unilatéral, la dissymétrie traction-compression, l'effet anélastique et l'effet anisotrope du comportement du béton.

En général, pour traiter les problèmes de structures en béton, on utilise les approches macroscopiques. Des modèles de type endommagement qui se basé sur la théorie de la thermodynamique, sont plus cohérents par rapport aux modèles de la fissuration distribuée. Cette approche est donc riche de promesse. C'est pour cette raison que nous avons choisi de développer un nouveau modèle d'endommagement dans le contexte et selon les objectifs scientifiques et pratiques mentionnés dans le chapitre III.

### **VIII.2.2. MODEV et les autres modèles d'endommagement**

Plusieurs modèles d'endommagement existent actuellement.

Le modèle de Mazars (1984) [Ref. 72] est un des premiers modèles d'endommagement appliqués aux bétons. Cependant, ce modèle n'a introduit qu'un seul scalaire comme variable d'endommagement. Le modèle ne considère non plus l'effet unilatéral, anélastique. Il suppose que l'endommagement ne se produit que s'il y a une extension. C'est pour quoi, ce modèle est applicable dans un champ limité de chargement monotone et radical. Cependant, ce modèle a le mérite d'être l'un des premiers modèles d'endommagement pour le béton, nous adressons un grand remerciement à Mazars pour ce qu'il a contribué à la recherche scientifique avec ce modèle et ses expressions équivalentes en déformation.

Certains modèles d'endommagement incorporent deux scalaires représentant deux modes d'endommagement en traction et en compression. Ces deux variables affectent la loi de comportement d'une manière indépendante afin de tenir en compte de l'unilatéralité et la dissymétrie en traction et compression. Le critère d'activation de chaque mode se base sur le changement signe de contrainte ou de déformation. Cependant, l'effet unilatéral n'est pas complètement interprété. En effet, lors de passage de la traction à la compression, l'endommagement en traction est désactivé et le matériau récupère la rigidité en compression. Mais inversement, lors de passage de la compression à la traction, l'endommagement en compression disparaît et le matériau se rigidifie également en traction. Cet aspect n'est pas physiquement consistant pour le comportement du béton car il ne s'agit pas ici d'un phénomène de rigidification par refermeture des fissures et l'endommagement en traction aurait du être affecté au matériau même s'il est sous traction.

Dans une révision des modèles d'endommagement, Chaboche [Ref. 22] a analysé trois modèles types utilisant deux scalaires [Ref. 74], tenseur d'endommagement de deuxième ordre [Ref. 111], de quatrième ordre [Ref. 117]. Le modèle isotrope à deux variables scalaires possède une surface de charge non convexe. Le modèle anisotrope avec tenseur de deuxième ordre traite l'effet unilatéral mais sa matrice de rigidité sécante n'est pas symétrique. Et le modèle utilisant un tenseur d'endommagement de quatrième ordre ne donne pas une réponse continue en contrainte-déformation lors de traitement de l'unilatéralité. En résumé, il n'existe pas encore actuellement de modèle d'endommagement universel permettant d'introduire simultanément l'anisotropie, l'unilatéralité et l'effet anélastique.

Le modèle d'endommagement MODEV se trouve dans la classe de modèles d'endommagement isotropes et qui prend en compte deux modes de dégradations : mode

sphérique et déviatorique représentant les trois modes de fissuration. De nouvelles expressions de déformations équivalentes basées sur la décomposition du tenseur de déformation en deux parties sphérique et déviatorique avec un coefficient de couplage entre ces deux composantes sont introduites dans le modèle. Elles traduisent les deux modes d'endommagement. Cette décomposition est pertinente pour les matériaux granulaires. Il existe une liaison implicite avec les critères antérieurement utilisés pour le béton (celui de Mohr-Coulomb, de Nadai, de Drucker-Prager...). Ainsi, la surface seuil est-elle convexe et elle contient l'origine. L'effet unilatéral est introduit comme un durcissement/adoucissement élastique lors du changement de l'état confinement/extension. Les déformations irréversibles dans le cas des bétons sont considérées comme à l'origine des glissements locaux relatifs entre les lèvres des microfissures. Ces déformations sont et en fonction de l'endommagement et du degré d'hétérogénéité du matériau. Elles se manifestent à l'échelle macroscopique en deux parties sphérique et déviatorique. La dissipation d'énergie par endommagement et par effet anélastique est positive conformément aux principes de la thermodynamique.

D'un point de vue théorique, le modèle MODEV permet d'introduire de manière cohérente plusieurs mécanismes de dégradation, l'effet unilatéral, le comportement dissymétrique en traction/compression, l'effet anélastique. Ainsi, une continuité en réponse contrainte-déformation est-elle mise en évidence dans le chapitre IV. Le modèle se base sur le comportement réel du béton. Les paramètres sont définis physiquement et pourront être généralisés pour des matériaux fragiles et hétérogènes autres que le béton. En plus de la loi de comportement sécante, une formulation incrémentale et tangente a été établie. Elle permet d'élargir le champ d'application du modèle.

D'un point de vue pratique, le modèle fait intervenir un nombre limité des paramètres qui sont identifiables grâce à des essais élémentaires relativement simples. L'implémentation numérique du modèle dans le code de calcul SYMPHONIE est effectuée pour les différentes classes d'éléments finis. Les différentes modélisations menées en 1D, 2D et 3D montrent une bonne stabilité et une convergence rapide lors de la résolution numérique. La validation du modèle a été effectuée par comparaison essais - simulations sur différents cas de figure. Cette validation confirme la prédictivité du modèle sur le plan qualitatif (mode de rupture) et le plan quantitatif (courbe charge - déplacement).

Le modèle MODEV reste pour le moment isotrope. L'extension du modèle au cas d'anisotropie demande une étude approfondie afin de garder les objectifs sur la simplicité, la fiabilité et l'exploitation industrielle. Une des grandes difficultés lors de l'établissement d'un tel modèle universel est la combinaison de deux effets : anisotropie et unilatéralité. Jusqu'à présent, aucun modèle à nos jours ne peut traiter avec succès simultanément ces deux effets. Des recherches scientifiques poursuivies devraient être envisagées dans ce sens afin d'améliorer encore la prédictivité des modèles d'endommagement pour le béton.

### VIII.3. Logiciel CHEVILAB

#### VIII.3.1. Rappel sur les méthodes empiriques existantes [Ref. 77]

Jusqu'à une époque très récente, les assemblages étaient décrits dans les règlements relatifs à une technique de construction. Ainsi, les assemblages par boulonnage et rivetage étaient-ils décrits dans les règlements nationaux ou européens (Eurocode 3<sup>4</sup>) de construction métallique, les liaisons par scellement de barres métalliques dans le béton dans les règlements nationaux (BAEL en France) ou européen (Code CEB 90<sup>5</sup>, Eurocode 2<sup>6</sup>) de béton armé. Les fixations pour le béton et la maçonnerie ne faisaient quant à elles, l'objet d'aucun code de calcul ou de guide technique compatible avec les autres grands codes structuraux et avec l'Eurocode 1<sup>7</sup>.

Cette situation pouvait durer tant que les fixations étaient utilisées pour des équipements secondaires et des charges légères. A partir du moment où elles ont pu être employées, dans le bâtiment et le génie civil, dans des applications pour lesquelles la rupture de l'ancrage pourrait entraîner des conséquences graves pour la stabilité de l'ouvrage ou pour la vie humaine ou encore des conséquences économiques importantes, il est apparu indispensable de disposer d'un code de calcul fiable, fondé sur les principes de sécurité décrits dans l'Eurocode 1 d'une part et sur les principes de la résistance des matériaux d'autre part.

Un premier code européen, inspiré de méthodes employées en Allemagne a vu le jour et a été présenté en annexe du guide UEAtc<sup>8</sup>, publié en juin 1992. Les éléments novateurs de ce guide étaient les suivants :

- 1- prise en compte des principes de l'Eurocode 1 (résistance caractéristique, coefficients partiels de sécurité, etc.)
- 2- prise en compte de l'influence de l'état du béton sur la performance mécanique des chevilles de fixation (état tendu fissuré, état comprimé non fissuré),
- 3- prise en compte d'essais d'aptitude à l'emploi qui permettent de mettre en évidence le bon comportement des fixations lorsqu'elles sont soumises à des sollicitations ou lorsqu'elles sont mises en place dans des conditions qui s'écartent des conditions normales ,
- 4- prise en compte de l'expérience acquise dans ce domaine (« current experience ») et utilisation de modèles analytiques déduits, par régression multiple non-linéaire, d'un très grand nombre d'essais réalisés,
- 5- description de l'ensemble des modes de rupture observés.

Les travaux de ce guide ont été repris et poursuivis par l'EOTA<sup>9</sup> et présentés dans le guide d'Agrément Technique Européen sur les chevilles métalliques pour béton<sup>10</sup> publié en 1997.

---

<sup>4</sup> Eurocode 3, ENV 1993-1-1, Calcul des structures en acier, CEN/TC250, 24 avril 1992

<sup>5</sup> CEB-FIP MODEL CODE 1990- Final Draft, Bulletins d'information n°203,204 et 205 du Comité Euro-International du Béton 1991

<sup>6</sup> Eurocode 2, ENV 1992-1-1, Calcul des structures en béton, CEN/TC250, 27 décembre 1991

<sup>7</sup> Eurocode 1, ENV 1991-1, Basis of design and actions on structures, CEN/TC250, 15 March 1993, 6th draft

<sup>8</sup> Guide technique UEAtc relatif aux chevilles de fixation pour béton fissuré et non fissuré, juin 1992

<sup>9</sup> European Organisation for Technical Approval

<sup>10</sup> Guide EOTA pour l'agrément technique des chevilles métalliques pour le béton, juin 1997

Des travaux de recherche sont menés dans le monde (en Europe, aux USA et en Asie) afin de codifier le calcul des ancrages dans le béton utilisant des chevilles de fixation. Une norme américaine, ACI 355.2, publiée en janvier 2003, reprend une partie très importante du guide d'ATE.

Revenons en Europe : le guide d'ATE est presque achevé et couvrir fin 2003, début 2004 les types principaux de chevilles métallique pour béton : chevilles à expansion par vissage, à frappe, à verrouillage de forme et chevilles à scellement (dites chevilles chimiques) ainsi que les mortiers de scellement pour scellement d'armatures. Ce guide vise la qualification des produits. Parallèlement, un groupe du CEN est en train de rédiger une norme sur le calcul des ancrages (design of fastenings) utilisant, entre autres, les produits de fixation couverts par ATE et normes européennes.

### **VIII.3.2. Pourquoi utiliser le logiciel CHEVILAB ?**

Les méthodes de calcul réglementaire (Annexe C du guide d'ATE [Ref. 41] 001, projet de norme CEN, design of fastenings, modèle code CEB-fib, ect) ont montré leurs limites notamment en cisaillement et plus particulièrement en présence de bords et lorsque la direction de la charge est quelconque. Un calcul aux éléments finis avec modèle d'endommagement permet de prédire l'ensemble de la réponse charge-déplacement d'un ancrage ainsi que le mode de rupture. Toutefois, un tel calcul est lourd, coûteux en temps et reste comme affaire d'ingénieur de bureau d'étude disposant de codes de calcul évolués.

Or, dans la majorité des cas, on pourrait se contenter d'estimer le mode et la charge de rupture à condition que le calcul soit rapide et facile à mettre en œuvre. C'est dans cette optique qu'un logiciel simplifié pourrait être utilisé par les ingénieurs qui ont des ancrages à dimensionner et qui, pour certaines configurations particulières, ne peuvent pas utiliser les méthodes réglementaires.

### **VIII.3.3. De la théorie du calcul à la rupture au logiciel CHEVILAB**

On a montré l'existence d'un chargement limite pour un système élastique/parfaitement plastique [Ref. 116]. Dans ce contexte, l'analyse limite postule deux théorèmes qui forment les deux approches : statique par l'intérieur et cinématique par l'extérieur et permet la détermination directe de chargement ultime résultant d'une compatibilité entre l'équilibre mécanique et l'écoulement parfait plastique. La structure est donc considérée comme idéale dans le sens où la déformation de la structure augmente sans limite alors que le chargement reste constant. Dans cette méthode, on n'adopte ni un écrouissage plastique ni un changement important géométrique de la structure. Cependant, les résultats issus de l'analyse limite montrent une bonne approximation du chargement limite de la structure réelle correspondante.

Plus généralement, l'approche calcul à la rupture a pour l'objectif (comme l'analyse limite) d'estimer de manière directe la charge ultime pour chaque système. Dans cette méthode, la condition de plasticité parfaite est remplacée de façon plus générale par le concept de condition de résistance pour chaque point matériel du système. Cette condition de résistance est définie en donnant un domaine convexe assigné au tenseur des contraintes, ou plus généralement aux efforts inférieurs. On élargit ainsi l'application du calcul à la rupture en l'adaptant aux structures non seulement constitués des matériaux élastiques plastiques mais aussi d'autres matériaux de différente nature, homogène ou non.

Le calcul à la rupture comporte deux approches l'une statique et l'autre cinématique en donnant l'intervalle du chargement ultime réel. Les données nécessaires du calcul à la rupture

sont la géométrie de la structure, le chargement appliqué et la résistance des matériaux constitutifs. Les résultats apportés par le calcul à la rupture sont indépendants de la connaissance de la loi de comportement du matériau constitutif à l'intérieur du domaine de résistance et de l'état d'autocontrainte initial du système et l'histoire de chargement qui lui est imposée.

Dans la pratique, l'approche calcul à la rupture est applicable dans des systèmes soumis à des charges caractérisées par un nombre limité de  $n$  paramètres. Plusieurs structures : poutres, ossatures, fondations superficielle, mur de soutènement... sont traitées dans la cadre de la théorie du calcul à la rupture et validées par l'expérience. La théorie du calcul à la rupture est le fondement du calcul aux Etats Limites Ultimes dans les euros codes.

Nous avons choisi la méthode du calcul à la rupture comme la base scientifique de l'outil de calcul de la résistance mécanique des chevilles de fixation CHEVILAB. Sachant qu'une telle structure comporte deux types de matériaux : l'acier et le béton dont les critères de résistance sont disponibles: Critère de Tresca, de Von Mises ou de Mohr-Coulomb. Le chargement qui lui est imposé est caractérisé par un effort de traction, un effort de cisaillement et éventuellement un moment. Nous avons une bonne connaissance des mécanismes de rupture à travers des essais. Ce sont des données importantes que nous avons utilisées pour l'adaptation de l'approche cinématique par l'extérieur à la tenue d'une cheville. Les premiers calculs disponibles dans CHEVILAB sont mis en œuvre en traitant le cas d'une cheville au centre ou au bord d'une dalle sous l'action simultanée d'un effort de traction et d'un effort de cisaillement en trouvant un majorant du chargement ultime et le mode de ruine correspondant parmi 10 modes possibles résultant de 4 mécanismes de rupture considérés. Les résultats analytiques et numériques trouvés sont cohérents entre eux.d'un point de vue de la physique. Cet outil original est actuellement une des rares applications en 3D du calcul à la rupture dans le domaine de génie civil.

Vu de la nature du calcul à la rupture, les éléments de la structure doivent manifester une ductilité suffisante. Or le béton est un matériau fragile en traction. C'est pour cette raison que nous avons choisi le critère de résistance Mohr-Coulomb tronqué en traction. En effet, lors du calcul d'une cheville au bord de dalle, la réponse est très sensible à la résistance en traction du béton. Aussi, est-il nécessaire de calibrer le système à partir des caractéristiques mécaniques du matériau si l'on veut obtenir des résultats pertinents.

Cet outil est un outil « ouvert » et l'on peut intégrer des autres mécanismes de rupture comme le glissement entre la cheville et le béton, le mode « pry out »... Des études supplémentaires seront nécessaires pour tester d'autres configurations complexes (implantation de la cheville à l'angle de dalle par exemple)

On pourra tenir en compte des effets thermique, chimique ou d'endommagement préalable du béton. Pour cela, il faut identifier l'action de ces phénomènes vis-à-vis du critère de résistance pris en compte pour le béton. Dans la même démarche, on pourrait modéliser éventuellement le béton armé en utilisant l'approche d'homogénéisation.

Bien évidemment, tous les résultats obtenus grâce au logiciel devront faire l'objet d'une validation expérimentale. Une étude approfondie serait nécessaire pour étudier la sensibilité des paramètres pour chaque configuration retenue.

## **CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES**

## Conclusions

Les deux principaux résultats qui ressortent de ce travail de recherche concernent :

- L'élaboration et l'intégration numérique d'un nouveau modèle d'endommagement (MODEV) pour la simulation de structures en béton.
- La mise au point d'un outil de calcul, CHEVILAB, fondé sur la théorie du calcul à la rupture et destiné à évaluer la résistance de chevilles de fixation.

### Le modèle MODEV :

Le nouveau modèle d'endommagement met en considération deux mécanismes de dégradations : extension et glissement conforme à des modes I, II, III de fissuration. De plus, on pense que l'apparition de l'irréversibilité de déformations est due au glissement relatif entre les lèvres des microfissures, l'évolution des déformations anélastiques dépend de l'état de dégradation et d'hétérogénéité du matériau. Le modèle MODEV est construit sur la base de la théorie de la thermodynamique des processus irréversibles où les critères d'endommagement sont formulés avec les expressions équivalentes en déformation. Le modèle MODEV permet de tenir en compte de plusieurs phénomènes complexes de comportement du béton : Comportement dissymétrique en traction et en compression, effet unilatéral, déformation permanente et fait intervenir des paramètres à la fois physiques et faciles à identifier. Ce modèle, étant continu et respectant des principes de la thermodynamique, est intégré dans le code de calcul SYPHONIE et supporte plusieurs classes d'éléments finis. En plus d'une écriture totale en formulation sécante, une formulation incrémentale tangente de la loi de comportement a été établie.

Le modèle MODEV est capable de traiter les problèmes en 1D, 2D ou 3D sous l'action des sollicitations mécaniques complexes, y compris les chargements cycliques.

Le modèle est validé avec plusieurs problèmes en comparaison avec les résultats expérimentaux trouvés dans la littérature : comportement cyclique uniaxial, poutre en flexion, boîte de cisaillement, fixation 3D.... Cette validation a montré la prédictivité du modèle sur le plan qualitatif (mode de rupture) et quantitatif (courbe charge - déplacement).

### Le logiciel CHEVILAB :

Cet outil a été développé dans le but d'obtenir une évaluation rapide de la charge de ruine d'une cheville de fixation, sans avoir à recourir à des outils plus sophistiqués. Il est de ce fait compatible avec une utilisation courante par les ingénieurs de bureau d'étude. L'élaboration de cet outil repose sur la théorie du calcul à la rupture, et plus particulièrement sur l'approche cinématique par l'extérieur qui fournit une majoration de la charge de rupture.

Guidés par les observations expérimentales relatives à des mécanismes de ruine réels, ainsi par le souci de ne pas trop alourdir les calculs, l'approche cinématique a été dans un premier temps limitée à la considération de mécanismes de blocs en translation, la surface de rupture passant exclusivement dans le béton, dont la résistance a été modélisée par un critère de Coulomb tronqué partiellement en traction. Plusieurs familles de mécanismes dérivés de ce schéma ont été explorées, puis optimisées par rapport à un petit nombre de paramètres géométriques (inclinaison, ouverture de la surface conique, la profondeur du sommet de la surface). La meilleure majoration étant obtenue en prenant le minimum des majorations calculées pour chaque famille de mécanisme. Une telle procédure de calcul a été implantée numériquement, sous l'environnement de Visual Basic et Fortran, débouchant sur la mise au point du logiciel CHEVILAB.

Les différentes simulations effectuées à l'aide de ce logiciel montrent une forte sensibilité des résultats à la résistance du béton notamment en traction. Compte tenu de la fragilité de ce dernier, il convient d'adopter des coefficients réducteurs affectés à ces caractéristiques de résistance nominales. Ayant calibré de tels coefficients à partir de quelques résultats expérimentaux, la comparaison entre le calcul et l'expérience est apparue satisfaisante, notamment dans le cas de chevilles placées à proximité d'un bord et sollicitées par un effort horizontal orienté vers ce bord.

## **Perspectives**

Dans la suite, une extension du modèle MODEV pourra être effectuée pour tenir en compte de phénomène d'anisotropie du béton induite par la fissuration du matériau.

Le modèle pourra être adapté aux différents matériaux hétérogènes fragiles par exemple des roches ou d'autres matériaux à base de liant hydraulique.

Des études de couplages entre l'endommagement mécanique et les phénomènes thermique, chimique ou par fatigue pourront être explorées avec le modèle MODEV.

Le logiciel CHEVILAB est un outil ouvert, dans le sens où il est possible d'y intégrer d'autres mécanismes de rupture que les mécanismes de cônes en translation explorés jusqu'à présent. On peut notamment penser à des mécanismes de bloc en rotation, analogues aux mécanismes de type « pry-out », que l'on observe expérimentalement dans certaines situations. L'extension à de tels mécanismes devrait permettre d'élargir le champ d'application d'un tel outil de calcul à des configurations plus complexes : chevilles en coin, groupe de chevilles sous l'action combinée d'effort de traction et de cisaillement et d'un moment. De même, il est possible d'intégrer dans un tel logiciel l'influence sur les capacités de résistance du béton des effets thermique ou chimique...

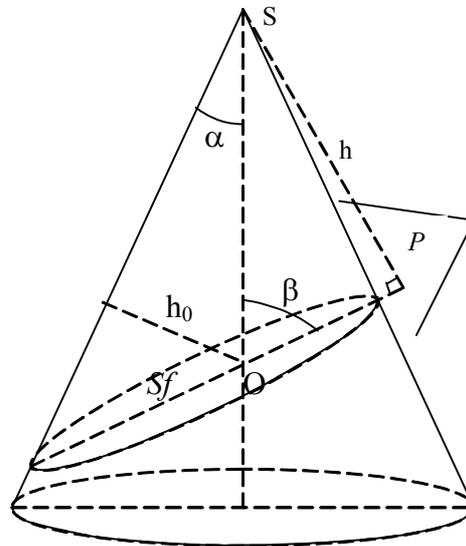


**ANNEXES**

---



---

**ANNEXE A: AIRE LATÉRALE DU CÔNE TRONQUÉ**
**A1. Aire latérale du cône tronqué par un plan**

Soit à considérer un cône de base circulaire coupé par un plan incliné P. Ce plan fait un angle  $\beta$  avec l'axe du cône en point O. La distance  $h_0$  de O à la surface latérale du cône qui ne change pas. Par conséquent, le volume du cône tronqué par le plan P s'écrit :

$$V = \frac{1}{3} h_0 S_l = \frac{1}{3} h S_f$$

Où  $S_l$  est la surface latérale du cône tronqué,  $h$  est la distance du sommet S sur le plan P et  $S_f$  est l'aire de l'ellipse –fond du cône tronqué.

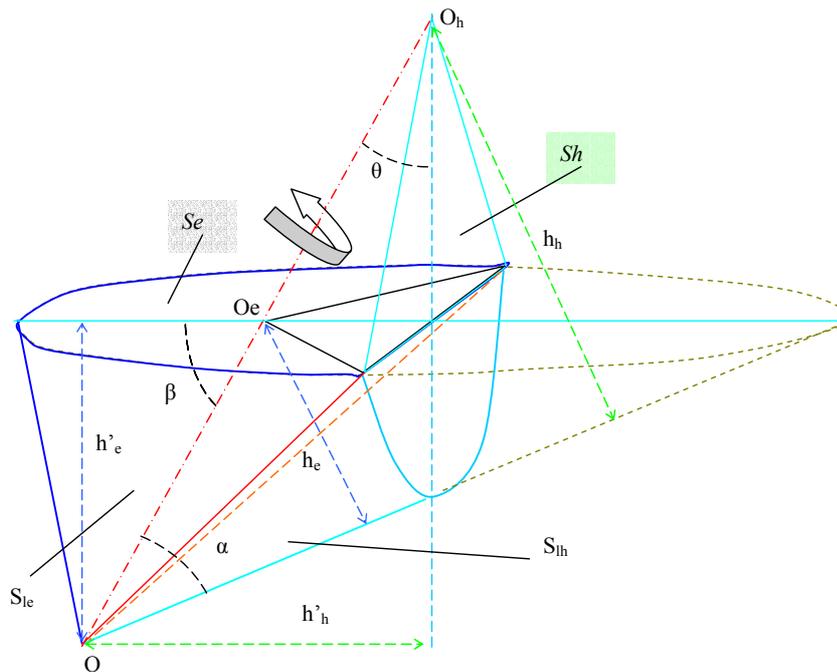
Géométriquement, entre  $h_0$  et  $h$ , on a la relation :

$$\frac{h_0}{\sin \alpha} = \frac{h}{\sin \beta}$$

Et alors :

$$S_l = \frac{S_f \sin \beta}{\sin \alpha}$$

**A2. Aire latérale du cône tronqué par deux plans**



On se demande de calculer l'aire latérale d'un cône tronqué par deux plans  $O_h S_h$  et  $O_e S_e$ . Ces deux plans divisent l'aire latérale du cône tronqué par deux parties :  $S_{le}$  et  $S_{lh}$ . Considérons maintenant deux blocs de volume de sommet  $O$  et de base respectivement  $S_e, S_h$ .

Pour le bloc  $OS_e$  :

$$V_1 = \frac{1}{3} h'_e S_e = \frac{1}{3} h_e S_{le}$$

Parallèlement :

$$V_1 = \frac{1}{3} h'_h S_h = \frac{1}{3} h_h S_{lh}$$

D'autre part, on a ainsi des relations

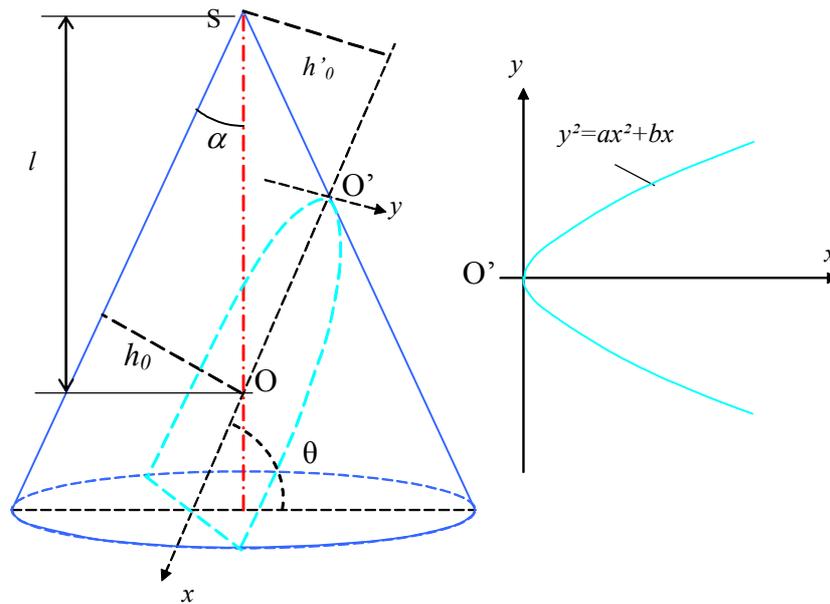
$$\frac{h'_e}{h_e} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad \text{et} \quad \frac{h'_h}{h_h} = \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}$$

Et par conséquent, l'aire latérale à trouver s'écrit :

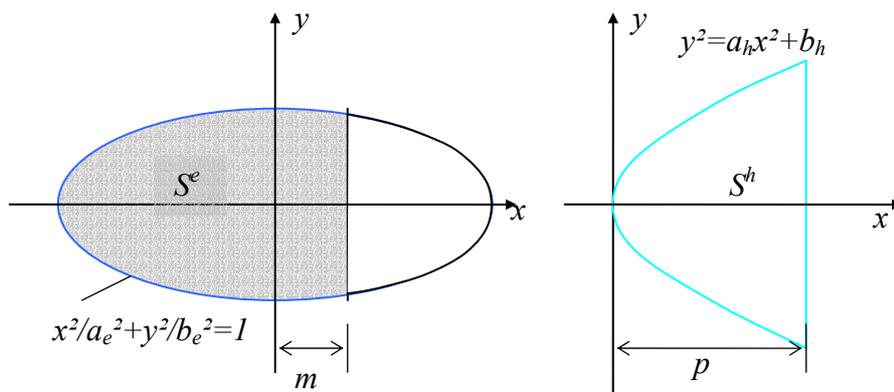
$$S_l = S_{le} + S_{lh} = S_e \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + S_h \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}$$



Et elle devient une parabole si  $a=0$ , donc  $\theta = \pi/2 - \alpha$ .



### B3. L'aire d'une courbe conique



En cas d'une ellipse, l'aire comprise dans l'intervalle de  $x$   $(-a_e, m)$  s'écrit :

$$S^e = a_e b_e \left( \frac{\pi}{2} + \frac{m}{a_e^2} \sqrt{a_e^2 - m^2} + \arctan \frac{m}{\sqrt{a_e^2 - m^2}} \right)$$

En cas d'une hyperbole, l'aire comprise dans l'intervalle de  $x$   $(0, p)$  est :

$$S^h = \frac{(2a_h p + b_h) \sqrt{a_h p^2 + b_h}}{2a_h} - \frac{b_h^2}{4\sqrt{a_h^3}} \ln \left( \frac{2a_h p + b_h}{2\sqrt{a_h}} + \sqrt{a_h p^2 + b_h} \right) + \frac{b_h^2}{4\sqrt{a_h^3}} \ln \left( \frac{b_h}{2\sqrt{a_h}} \right)$$

En cas d'une parabole avec  $a_h=0$ , on a :

$$S^h = 3\sqrt{b_h p^3}$$

---



---

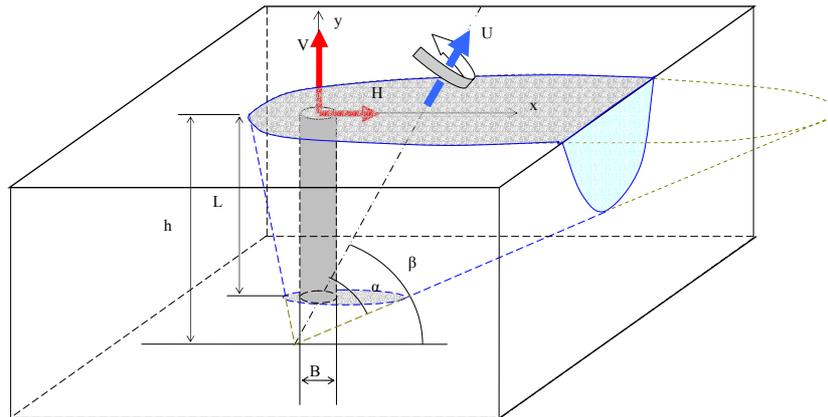
**ANNEXE C : MECANISMES DE RUPTURE AU BORD DE LA FIXATION**
**C1. Mécanisme 1 de rupture**

Ce mécanisme de rupture donne un mouvement rigidifiant d'un cône tronqué par trois plans :

Le plan « elliptique » horizontal en haut.

Le plan « elliptique » horizontal en bas qui contient la base de la cheville.

Le plan « hyperbolique » verticalement.



Ce mécanisme de rupture est représenté par les conditions suivantes :

$$\phi \leq \alpha \leq \beta \leq \pi / 2$$

$$\alpha + \beta \geq \pi / 2$$

$$L + \frac{B \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}}{2 \sin \alpha} \leq h \leq L + \frac{B}{2 \tan \alpha}$$

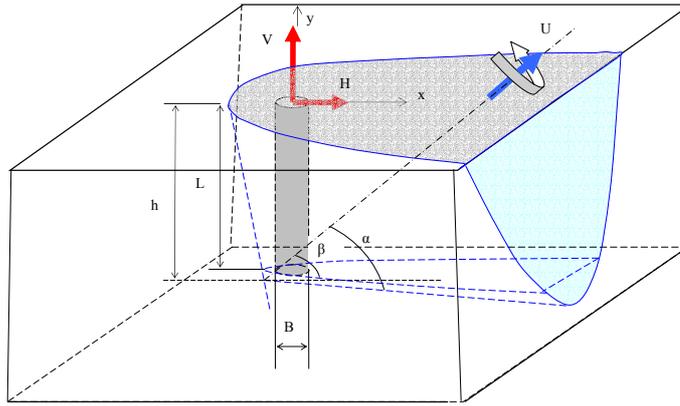
**C2. Mécanisme 2 de rupture**

Ce mécanisme de rupture donne en mouvement rigidifiant d'un cône tronqué par trois plans :

Le plan « hyperbolique » horizontal en haut.

Le plan « hyperbolique » horizontal en bas qui contient la base de la cheville.

Le plan « hyperbolique » verticalement.



Les conditions à respecter pour ce mécanisme :

$$\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/2$$

$$\alpha \geq \phi \text{ et } \alpha \geq \beta$$

$$\alpha + \beta \geq \pi/2$$

$$L \leq h \leq L + \frac{B}{2 \tan \alpha}$$

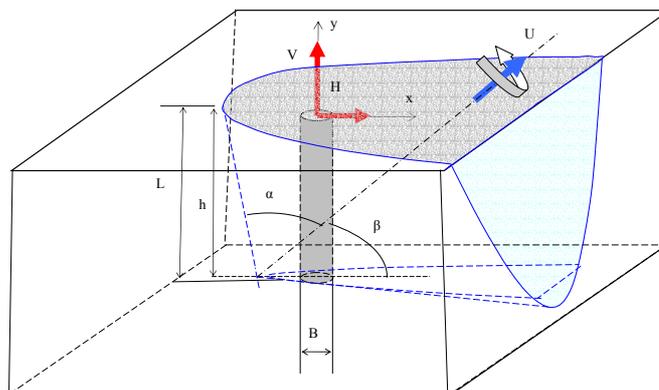
### C3. Mécanisme 3 de rupture

Ce mécanisme de rupture donne en mouvement rigidifiant d'un cône tronqué par trois plans :

Le plan « hyperbolique » horizontal en haut.

Le plan « hyperbolique » horizontal en bas qui contient la base de la cheville.

Le plan « hyperbolique » verticalement.



Les conditions à respecter pour ce mécanisme :

$$\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/2$$

$$\alpha \geq \phi \text{ et } \alpha \geq \beta$$

$$\alpha + \beta \geq \pi/2$$

$$L - \frac{B}{2 \tan \alpha} \leq h \leq L$$

---



---

**ANNEXE D : METHODE DE CALCUL DES VARIATIONS**
**D1. Méthode de calcul des variations**

La méthode consiste à trouver la fonctions  $y(x)$  qui minimise ou maximise la fonctions suivante :

$$F(x) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx \quad (1)$$

Adoptons  $y_0(x)$  est la solution.

On donne à  $y(x)$  une variation  $\delta y(x)$  autour de  $y_0(x)$  telle que :

$$y(x) = y_0(x) + \delta y(x) \quad (2)$$

avec les conditions :

$$\delta y^{(k)}(x_1) = \delta y^{(k)}(x_2) = 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (3)$$

En développant la série de Taylor avec  $f(x)$  autour de la valeur  $y_0(x)$  et en négligeant les valeurs faibles de haut ordre (pour simplifier l'écriture on adopte  $y^{(k)}, \delta y^{(k)}$  au lieu de  $y^{(k)}(x), \delta y^{(k)}(x)$ ) :

$$\begin{aligned} f(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) &= f(y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n)}(x)) \\ &+ \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_0(x)} \delta y + \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{y_0(x)} \delta y' + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_{y_0(x)} \delta y^{(n)} \end{aligned} \quad (4)$$

On a la variation de la fonction  $F(x)$  :

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(y_0(x), y_0'(x), \dots, y_0^{(n)}(x)) dx \quad (5)$$

En associant avec (4)

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_0(x)} \delta y dx + \int_{x_1}^{x_2} \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{y_0(x)} \delta y' dx + \dots + \int_{x_1}^{x_2} \left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_{y_0(x)} \delta y^{(n)} dx \quad (6)$$

Comme  $y_0(x)$  est la solution :

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_0(x)} \delta y dx + \int_{x_1}^{x_2} \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \right|_{y_0(x)} \delta y' dx + \dots + \int_{x_1}^{x_2} \left. \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right|_{y_0(x)} \delta y^{(n)} dx = 0 \quad (7)$$

D'autre part,  $\delta y(x)$  respecte les conditions (3), en appliquant l'intégral par partie, on obtient :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_0(x)} \delta y dx = \int_{x_1}^{x_2} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_0(x)} \delta y dx \quad (8)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{y_0(x)} \delta y' dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{y_0(x)} \right) \delta y dx \quad (9)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \Big|_{y_0(x)} \delta y^{(k)} dx = (-1)^k \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx^{(k)}} \left( \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \Big|_{y_0(x)} \right) \delta y dx \quad (10)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \Big|_{y_0(x)} \delta y^{(n)} dx = (-1)^n \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx^{(n)}} \left( \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \Big|_{y_0(x)} \right) \delta y dx \quad (11)$$

Donc, la fameuse équation d'Euler s'est écrite :

$$\delta F = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d}{dx^{(k)}} \left( \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \Big|_{y_0(x)} \right) = 0 \quad (12)$$

La solution est trouvée en résolvant cette équation différentielle d'ordre  $n$  en  $x$ .

Par exemple, pour  $n=1$ , on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{Avec } y(x) = y_0(x) \quad (13)$$

On obtient ainsi :

$$f - y' \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = a \quad \text{Avec } y(x) = y_0(x), a \text{ est une constante} \quad (14)$$

## D2. Application au passage de (VI.30) à (VI.31) dans le chapitre VI

L'équation de (VI.30) est l'équation d'Euler sous forme de (14)

$$F - \dot{f} \frac{\partial F}{\partial \dot{f}} =$$

$$f \left[ \left( 1 - \frac{2k \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) \sqrt{1 + (\dot{f})^2} - \left( 1 - \frac{2k}{1 - \sin \phi} \right) \dot{f} \right] - \dot{f} \left[ \left( 1 - \frac{2k \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) \frac{\dot{f}}{\sqrt{1 + (\dot{f})^2}} - \left( 1 - \frac{2k}{1 - \sin \phi} \right) \right] = b$$

où  $b$  est une constante

qui est équivalent à :

$$f \left[ \left( 1 - \frac{2k \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) \sqrt{1 + (\dot{f})^2} \right] - \dot{f} \left[ \left( 1 - \frac{2k \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right) \frac{\dot{f}}{\sqrt{1 + (\dot{f})^2}} \right] = b$$

où  $b$  est une constante

Ou bien

$$f \left[ \sqrt{1+(\dot{f})^2} \right] - \ddot{f} \left[ \frac{\dot{f}}{\sqrt{1+(\dot{f})^2}} \right] = \frac{b}{\left( 1 - \frac{2k \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right)}$$

où  $b$  est une constante

et encore

$$\frac{f}{\sqrt{1+(\dot{f})^2}} = \frac{b}{\left( 1 - \frac{2k \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right)} = a$$

où  $a$  est une constante

Finalement, on aboutit à l'équation (VI.31) :

$$1+(\dot{f})^2 = \left( \frac{f}{a} \right)^2$$

En dérivant par rapport à  $x$ , on a :

$$\ddot{f} = \frac{f}{a^2}$$

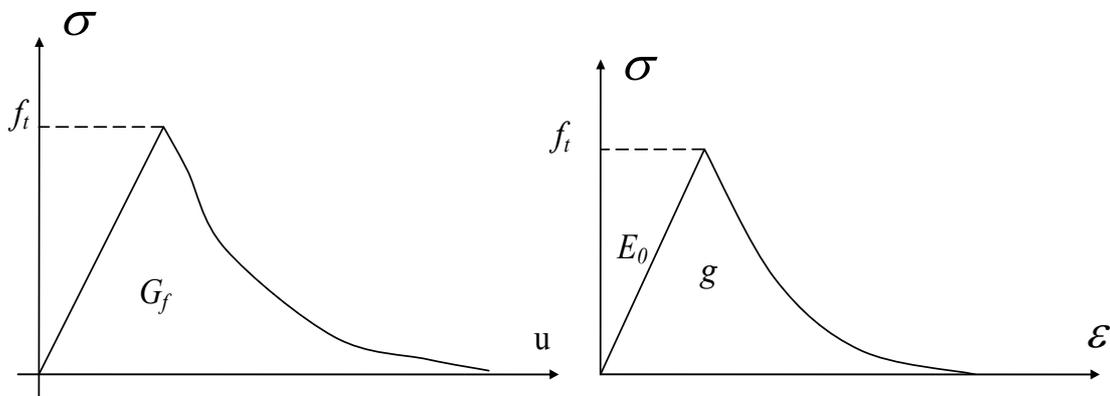
## ANNEXE E: APROCHE ENERGETIQUE POUR L'IDENTIFICATION DES PARAMETRES D'ENDOMMAGEMENT

Pour avoir l'objectivité vis-à-vis à la taille des maillages, une approche liée à l'énergie de fissuration  $G_f$  a été adoptée. Dans laquelle, on a introduit une longueur caractéristique  $h$  de telle façon que :

$$g = \frac{G_f}{h} \quad (1)$$

Où  $G_f$  et  $g$  sont déterminées comme la dissipation de l'essai de traction simple de la manière suivante :

$$G_f = \int \sigma du \quad g = \int \sigma d\varepsilon \quad (2)$$



Supposons :

$$g_0 = \frac{f_t^2}{2E_0} \quad (3)$$

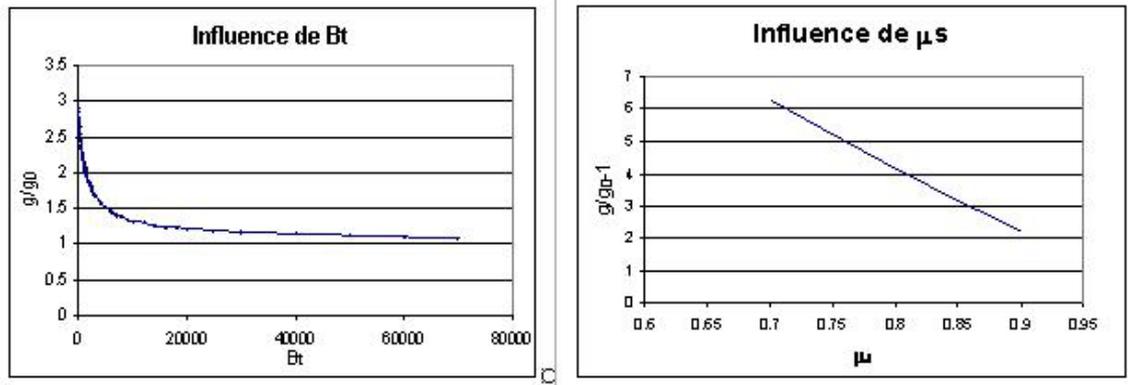
Où  $E_0$  est le module d'Young et  $f_t$  est la résistance à la traction simple du béton.  $g_0$  représente une rupture très brusquement juste après atteint le pic. Elle est ainsi la valeur minimale de  $g$ .

En pratique,  $h$  est la largeur de bande de fissure qui est égale à quelques fois de diamètre des granulaires. Dans l'approche d'éléments finis, celle-ci est définie en fonction de la taille de chaque élément :

$$h = \sqrt[3]{V} \text{ où } V \text{ est le volume de l'élément.} \quad (4)$$

Il s'agit dans cette annexe l'identification de  $B_t$  (coefficient de l'endommagement sphérique) en fonction de l'énergie de fissuration et les autres paramètres du modèle MODEV.

Pour cela, nous nous intéressons à faire la connaissance de  $g/g_0$  en fonction de  $B_t$  et  $\mu_1$ .



D'où nous pouvons dire que  $g/g_0$  dépend non-linéairement à  $B_t$  et linéairement de  $\mu_1$  de manière approximative. Nous postulons ensuite une relation :

$$\frac{g}{g_0} = f_1(\mu_1) \cdot f_2(B_t) + 1,1 \quad (5)$$

En utilisant la méthode des moindres carrés pour déterminer les fonctions  $f_1(\mu_1)$  et  $f_2(B_t)$ , nous avons approximativement :

$$\frac{g}{g_0} = (-20,3\mu_1 + 21,1) \cdot \frac{1,8}{0,0008B_t + 1} + 1,1 \quad (6)$$

Et d'où, en regardant (1), nous avons :

$$B_t = \frac{1}{0,0008} \left[ \frac{1,8(-20,3\mu_1 + 21,1)}{\frac{G_f}{hg_0} - 1,1} - 1 \right] \quad (7)$$

Donc, pour chaque taille élément, on a une valeur de  $B_t$  qui lui est conforme énergétiquement.

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- Ref. 1 Abou-Ezzi N. E. "Modélisation du comportement non-linéaire du béton par la mécanique de l'endommagement", Thèse de doctorat, ENPC, 1989
- Ref. 2 Averbuch D. « Approche du dimensionnement des structures en béton armé par le calcul à la rupture », Thèse doctorale ENPC, 1999
- Ref. 3 Batdorf S. B., Budianski S. "A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip", NACA Tech Note TN, 1949.
- Ref. 4 Bazant Z. P. "Microplane model for strain controlled inelastic behaviour". Mechanics of engineering materials, Desai C.S. et al., John Wiley Ed, Chichester. NY. 45-59. 1984
- Ref. 5 Bazant Z. P. "Nonlocal damage theory based on micromechanics of crack interaction", J. ENG. Mech. ASCE 120, 593-617, 1994.
- Ref. 6 Bazant Z. P. & Kim S. S. "Plastic Fracturing theory of concrete", J. of the Eng. Mechanics Division, pp 407-428, June 1979.
- Ref. 7 Bazant Z. P. « Concrete Fracture Models : testing and practice », Eng. Fracture Mech. 69 (165-205), 2002.
- Ref. 8 Bazant Z. P. « Mechanics of distributed cracking », Appl Mech rev, N°5, May 1986
- Ref. 9 Bazant Z. P., Cedolin L. « Finite element modelling of crack band propagation », Journal of structure Engineering, Vol 109, N°1, January 1983
- Ref. 10 Bazant Z. P., Oh B.H., "Crack band theory for fracture of concrete", Matériaux et Constructions, 16, 93, 1983.
- Ref. 11 Bazant Z. P., Pijaudier-Cabot G. "Measurement of characteristic length of non local continuum", J. Engng. Mech., Vol 115, no 4, 1989.
- Ref. 12 Bazant Z. P., Sang-Sik-Kim "Plastic-Fracturing Theory for Concrete", Journal of the Engineering Mechanics Division, EM3, p.407-428, June, 1979.
- Ref. 13 Belhamel F., Hosham K., Kharchi F. "Méthode expérimentale de détermination de l'énergie de rupture des bétons ordinaires", Materials and Structures/ Matériaux et Constructions, Vol. 35, pp. 183-188, April 2002.
- Ref. 14 Bertacchi P., Belotti R. « Experimental research on deformation and failure of concrete under triaxial loads », Proceeding Int. Symposium RILEM, pp. 35-38, Cannes, 1972.
- Ref. 15 Besson J. "Modèle de rupture ductile", Cours : Modélisation et Simulation de la Fissuration dans les Structures Métalliques, IPSI, Paris 2002.
- Ref. 16 Besson J., Cailletaud G., Chaboche J. L., Forest S. « Mécanique non-linéaire des matériaux », Hermes Science Europe Ltd, Paris, 2001.
- Ref. 17 Besson J., Chapuliot S. "Modélisation de transition ductile - fragile. Approche locale - Approche globale", Cours : Modélisation et Simulation de la Fissuration dans les Structures Métalliques, IPSI, Paris 2002.
- Ref. 18 Boussa H., Mounajed G., Mesreur B. & Heck J. V.. « Three Dimensional Modelling of an Anchorage Made of Metal Anchor Bolts in Concrete ». Rilem SYMPOSIUM "Connection between steel and concrete", 9th-12th. RILEM Proceedings PRO 21. Volume 1. Pp 637-646. RILEM Publications, 2001.

- Ref. 19 Brencich A., Gambarotta L. « Isotropic damage model with different tensile-compressive response for brittle materials », *Int. J. Solids Structures* 38, 5865-5892, 2001.
- Ref. 20 Bui H. D. "Mécanique de la rupture fragile", Masson (1978)
- Ref. 21 Chaboche J. L. "Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage", *Int. J. of Damage mechanics*. Vol. 2, October, 1993.
- Ref. 22 Chaboche J. L. "On the description of damage induced anisotropy and active/passive effect", ASME, winter annual meeting, Dallas, 1993.
- Ref. 23 Chapuliot S. "Maillage et calcul des structures fissures par éléments finis", Cours : Modélisation et Simulation de la Fissuration dans les Structures Métalliques, IPSI, Paris 2002.
- Ref. 24 Chen W.F., Han D.J, « Plasticité for Structural Engineers », Springer-Verlag New York Inc, 1988.
- Ref. 25 Chow C. L., Lu T.J. "A normative representation of stress and strain for continuum damage mechanics". *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 12, 161-187, 1989.
- Ref. 26 Comi C., Perego U. « Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete ». *Int. J. Solids Structures* 38, 6427-6454, 2001.
- Ref. 27 Cordebois J. P., Sidoroff F. "Anisotropie élastique induite par endommagement", *EuroMech*. 115, Grenoble, Edition du CNRS, no 295, 1982.
- Ref. 28 Crisfield M. A. « Non linear Finite Elements analysis of Solids and Structures. Volume 1: Essentials », John Wiley & Sons 2000.
- Ref. 29 Crisfield M.A. , Wills J. "Analysis of R/C panels using different concrete models", *J. Engrg. Mech. ASCE*, 115(3), 578-597, 1989
- Ref. 30 CSTB. Rapport d'essai n° 41114 concernant les chevilles de fixations, 1996
- Ref. 31 De Borst R. « Fracture in quasi-brittle materials : a review of continuum damage-based approaches », *Eng. Fracture Mechanics* 69, 95-112, 2002.
- Ref. 32 De Borst R., Nauta P. "Nonorthogonal cracks in a smeared finite element model", *Eng. Comput.*, Vol, 2, March 1985
- Ref. 33 De Buhan P. « Cours de calcul anélastique des ouvrages », ENPC, 2000.
- Ref. 34 Di Nucci P. « Modélisation des essais d'arrachement d'une cheville dans le béton », Rapport de stage du DEA. Università degli studi di Roma, Tor Vergata, 1992.
- Ref. 35 Dougill J.W. « On stable progressively fracturing solids », *ZAMP* 27 (4), pp. 423-437, 1976.
- Ref. 36 El Dalati R. "Modélisation numérique du comportement à la rupture des ancrages soumis à des efforts de cisaillement", thèse doctorale, ENPC-CSTB, 1999.
- Ref. 37 El Dalati R., Berthaud Y., Mesureur B. & Mounajed G., « Three dimensional modelling of anchorage subjected to shear loads ». Accepted to publication in *ACI Structural Engineering* on July, 1999.
- Ref. 38 Eligehausen R., Lehr B. "Shear capacity of anchors placed in non cracked concrete with large edge distance", Report n° 10/20E-93/11E University of Stuttgart, 1993.

- Ref. 39 Eligehausen R., Ozbolt J., "Size effect in design of fastenings. Mechanics of quasi-brittle materials and structures". HERMES Science Publications, Paris, pp. 95-118, 1999.
- Ref. 40 Eligehausen R., Vagra R. "Study of governing failure mode on anchors under shear load", Report n° 12/26-93-10, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, 1994.
- Ref. 41 ETAG. "Guideline for European technical Approval of Anchors (metal anchor) for use in concrete. Annexe C: Design Methods for anchorages", 1997
- Ref. 42 Eurocode I, ENV 1991-1, Basis of design and actions on structures, CEN/TC 250, 6th draft, 1993.
- Ref. 43 Feenstra H., De Borst R. "A composite plasticity model for concrete", Int. J. Solids Structure, Vol, 33, No, 5, pp. 707-730, 1996
- Ref. 44 Fichant S. « Endommagement et Anisotropie induite du béton de structures. Modélisations Approchées », Thèse doctorale, Ecole Normale de Cachan, 1996.
- Ref. 45 Fokwa D., Berthaud Y. "Matériaux hétérogènes: Analyse expérimentale de la localisation et de l'influence de la taille des hétérogénéités sur le comportement en traction", Materials and Structures, 26, 136-143, 1993.
- Ref. 46 Frantzeskakis C. « Contribution à la modélisation des structures en béton armé par la méthodes des éléments finis ». Thèse de doctorat, ENPC, 1987.
- Ref. 47 Gerard G. Hasselwander., "Anchorage to Concrete" (315p), ACI, SP-103, 1988.
- Ref. 48 Ghavamian S. « MECA project benchmark: Three dimensional non linear constitutive models of fractured concrete. Evaluation-Comparison-Adaptation », Edited by EDF R&D, 2001
- Ref. 49 Govindjee S., Kay G. J. and Simo J. C. "Anisotropic modelling and numerical simulation of brittle damage in concrete", Int. J. Num. Meth. Engeer., Vol. 38, 3611-3633, 1995
- Ref. 50 Grondin F. « Développement des modèles élastoplastiques dans SYMPHONIE et Application au cas des bétons ». Rapport DEA (Encadré par Mounajed G. et Ung Quoc H.), CSTB-Paris 6, 2002.
- Ref. 51 Hawkins N. « Strength in shear and tension of cast-in-place anchor bolt. Anchorage to concrete", American concrete institute, SP 103, pp. 233-257, 1987.
- Ref. 52 Hillerborg A. « Analysis of one single crack". Fracture mechanics of concrete, edited by Wittmann F. H. Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam, pp. 223-249, 1983.
- Ref. 53 Hillerborg A., Modeer M. & Petersson P.G. "Analysis of crack formation and crack growth in means by fracture mechanics and finite elements", Ciment and concrete research, Vol. 6, pp. 773-786, 1976.
- Ref. 54 International Symposium on Connections between Steel and Concrete, Stuttgart Germany, Sept. 2001
- Ref. 55 Jirasek M. "Modelling of Localized Damage and Fracture in Quasibrittle Materials", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 121, No 1, 1999.
- Ref. 56 Jirasek M., Zimmermann T. "Analyse or rotating crack model", Journal of Engineering Mechanics, August 1998.

- Ref. 57 Jirasek M., Zimmermann T. "Embedded crack model. Part I", *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2001; 50: 1269-1290.
- Ref. 58 Jirasek M., Zimmermann T. "Embedded crack model. Part II", *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2001; 50: 1291-1305.
- Ref. 59 Jirasek M., Zimmermann T. "Rotating crack model with transition to scalar damage", *Journal of Engineering Mechanics*, March 1998
- Ref. 60 Ju J. W., "On energy-based coupled elastoplastic damage theory: Constitutive modelling and computational aspects", *Int. J. Solids Structures*. Vol 25, N° 7, pp. 803-833, 1989
- Ref. 61 Kachanov L. M. « Time of the rupture process under creep conditions ». *Izv. Akad. Nauk. S.S.R Otd Tekh Naut*, N°8, pp. 26-31, 1958.
- Ref. 62 Krajcinovic D. « Damage mechanics », Elsevier, 1996.
- Ref. 63 Kröner E. "Interrelations between various branches of continuum mechanics", *Mechanics of generalized continua*, E Kröner, Ed, Springer-verlag, W Berlin, W Germany, pp 330-340, 1968
- Ref. 64 Krumhansi J. A. "Some considerations of the relation between solid state physics and generalized continuum mechanics ", *Mechanics of generalized continua*, E Kröner, Ed, Springer-verlag, W Berlin, W Germany, pp 298-331, 1968
- Ref. 65 Kunin I. A. "The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocations", *Mechanics of generalized continua*, E Kröner, Ed, Springer-verlag, W Berlin, W Germany, pp 321-328, 1968
- Ref. 66 La Borderie C. "Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : Modélisation et Application à l'analyse des structures en béton", Thèse doctorale, Paris 6, 1991.
- Ref. 67 Laiarinandrasana L. "Calcul des paramètres K, J et C\* par éléments finis", Cours : Modélisation et Simulation de la Fissuration dans les Structures Métalliques, IPSI, Paris 2002.
- Ref. 68 Leca E. et Dormieux L. "Upper and lower bound solutions for the face stability of shallow circular tunnels in friction material". *Géotechnique* 40, N° 4, 581-60, 1990.
- Ref. 69 Lemaître J., Chaboche J.-L. « Mécanique des matériaux solides », Dunod-1988.
- Ref. 70 Lubliner J., Olivier J., Oller S. and Onate E. "A plastic-damage model for concrete", *Int. J. Solids structures*. Vol. 25, N° 3, pp. 299-326, 1989
- Ref. 71 Maghous S., De Buhan P., Dormieux L., Garnier D. "Comportement élastoplastique homogénéisé d'un milieu rocheux fracture", *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 328, Série Iib, P. 701-708, 2000.
- Ref. 72 Mazars J. "Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non-linéaire et à la rupture du béton de structure", Thèse de Doctorat d'Etat, Paris 6, 1984.
- Ref. 73 Mazars J., Bazant Z. P. "Cracking and Damage", Elsevier, 1989.
- Ref. 74 Mazars J., Pijaudier-Cabot G. "Continuum damage theory – Application to concrete", *J. of Engrg. Mech.*, 115(2), 345-365, 1989

- Ref. 75 Menou A. « Etude du comportement thermomécanique des bétons à haute température : Approche multi échelles de l'endommagement thermique ». Thèse Doctorale de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour - UPPA , en cours.
- Ref. 76 Meschke G., Lackner R. and Mang H. A. "An anisotropic elastoplastic-Damage model for plain concrete", *Int. J. Num. Meth. Engeer.*, Vol. 42, 703-727, 1998
- Ref. 77 Mesureur B., David E., "Etude de la sécurité des liaisons semi rigides par fixation dans le BTP sous sollicitations accidentelles", *Rapport de CSTB*, 2003.
- Ref. 78 Mesureur B., Mounajed G., El Dalati R. « Etude de la capacité résistante des ancrages avec chevilles de fixation soumis à des sollicitations tangentes », *Rapport confidentiel CSTB*, 1998
- Ref. 79 Methode de calcul des variations. Issue Internet
- Ref. 80 Mounajed & al. « Multi-scale approach of Thermal damage: Applications to concrete at high temperature ». *FRAMCOS Conference 2003 (accepted)*.
- Ref. 81 Mounajed G. & al. « Comportement au feu des bétons. Approche multi échelles de l'endommagement thermique et identification expérimentale des paramètres », *Revue Française de Génie Civil*, 2003
- Ref. 82 Mounajed G., « Code EF SYMPHONIE. SYMPHONIE, Code de calcul général aux éléments finis », *CSTB*, 1991.
- Ref. 83 Mounajed G., Aoudia N., "Développement des méthodes de résolutions itératives de type gradient conjugué dans le code Symphonie ». *Rapport de recherche RD2, CSTB-France*, 2001.
- Ref. 84 Mounajed G., Boussa H., Menou A. « Thermal mechanical damage of concrete exposed to high temperature ». *First International Conference on Applications of Porous Media Jerba, Tunisia, June 02-08, 2002*, p: 271-282.
- Ref. 85 Mounajed G., Elaboration du nouveau modèle « Béton numérique » dans Symphonie, Concept, homogénéisation du comportement thermomécanique des BHP et simulation de l'endommagement thermique. *Cahiers du CSTB 3421, septembre 2002*.
- Ref. 86 Mounajed G., Ung Quoc H. & Boussa H. « Elaboration d'un nouveau modèle d'endommagement dans le code de calcul SYMPHONIE-CSTB », *Numéro spécial de Revue Française de Génie Civil, Edition Hermes*, 2003.
- Ref. 87 Mounajed G., Ung Quoc H. & Boussa H. « Elaboration of a new model of damage for concrete. Application to the modelling of metal anchors », *First International Conference on Applications of Porous Media Jerba, Tunisia, June 02-08, 2002*
- Ref. 88 Mounajed G., Ung Quoc H. & Mesureur B. « New tangent formulation of the concrete damage model MODEV », *Befestigungstechnik Bewehrungstechnik und...*, Rolf Eliehausen zum 60. Geburtstag, pp. 671-684, Herausgeber: Werner F., Hans-Wolf R., Edition ibidem, 2002.
- Ref. 89 Mounajed G., Ung Quoc H., Boussa H. « Théories de dégradation du béton, application à la modélisation numérique des ancrages », *Rapport interne PP 177, 2001 France, CSTB, France*. octobre 2001.
- Ref. 90 Mounajed, G., Ung Quoc, H. & Boussa, H., « Development of a new concrete damage model in SYMPHONIE-CSTB. Application to metallic anchor bolts. »

- Second Biot International Conference on Poromechanics, Grenoble France, August 26-28, 2002.
- Ref. 91 Nedjar B. "Mécanique de l'endommagement. Théorie du premier gradient et application au béton", Thèse de doctorat, ENPC, 1995.
- Ref. 92 Ngo D., Scordelis A.C. "Finite elements analysis of reinforced concrete beams", J. Am. Concrete Inst. 64(14), 152-163, 1967
- Ref. 93 Nielsen M.P, Braestrup M.W, Jensen B.C, Finn Bach, "Concrete plasticity. Beam shear-Shear in joints-Punching shear", Specialpublikation udgivet af Dansk Selskab for Bygningsstatik, lyngby, oktober 1978.
- Ref. 94 Nielsen M.P. "Limit analysis and concrete plasticity". Prentice-Hall, 1984
- Ref. 95 Nilson A.H. "Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method", J. Am. Concrete Inst. 65(9), 757-766, 1968
- Ref. 96 Nooru-Mohamed A., "Mixed mode fracture of concrete: an experimental approach". Dissertation, Delft University of Technology, The Neithelands, 1992.
- Ref. 97 Obeid W. and Mounajed G., « Simulation of thermal-hygro-mechnaical behavior of concretes at high temperature », International Conference on Building Envelope Systems and Tecnologies ICBEST, Ottawa, Canada, June 2001.
- Ref. 98 Obeid W., Mounajed G. & Alliche A., « Mathematical formulation of thermo-hygro-mechanical coupling problem in non saturated porous media », 'Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering' Juillet 2001, Vol 190/39, pp 5105-5122.
- Ref. 99 Ohlsson U., Olofsson T. "Mixed mode fracture and anchor bolts in concrete. Analysis with Inner Softeninif bands", J. Engrng. Mech., pp. 1027-1033, 1997.
- Ref. 100 Olivier J. "A consistent characteristic length for smeared cracking models", Int.J. Num. Methods Eng. Vol. 28, 461-478, 1989.
- Ref. 101 Ottosen S. N. « A failure criterion for concrete », J. Engrng Mech., Vol 103, n° EM4, pp. 527-535, 1977.
- Ref. 102 Ozbolt J. "Microplane Model for Quasibrittle Materials - Part I – Theory". Universität Stuttgart. Universität Stuttgart. Institut für Werkstoffe im Bauwesen. Bericht Nr. 96-1a/AF, 1996.
- Ref. 103 Ozbolt J., Asmus J. & Jebara J., "Dreidimensionale Finite Elemente Analyse zur Versagensart Spalten durch Befestigungsmitted", Universität Stuttgart. Institut für Werkstoffe im Bauwesen. Bericht Nr. 16/22-97/23. 1997.
- Ref. 104 Ozbolt J., Asmus J. & Jebara, J., "Splitting of concrete block caused by inside pressure-failure mechanism and size effect". Mechanics of quasi-brittle materials and structures. HERMES Science Publications. Paris, pp. 271-288, 1999.
- Ref. 105 Ozbolt J., Bzant Z.P., "Numerical smeared fracture analysis : Non local microcrack interaction approach", IJNME, 39, 4, pp. 635-661, 1996.
- Ref. 106 Papa E., Taliercio A. « Anisotropic model for the multixial static and fatigue behaviour of plain concrete", Eng. Fracture Mechanics, Vol. 55, N°2, pp. 163-179, 1996.
- Ref. 107 Petersson P. E. « Fracture energy of concrete: practical performance and experimental results », Cement and Concrete Research, Vol. 10, pp 91-101, 1980.

- Ref. 108 Pijaudier-Cabot G., Bittnar Z., Gerard B. "Mechanics of Quasi-Brittle Materials and Structures", Hermes, 1999.
- Ref. 109 Pijaudier-Cabot G., Bazant Z. P. "Nonlocal damage theory", J. Engrng. Mech., Vol 113, no 10, 1987.
- Ref. 110 Pukl R., Asmus J., Eligehausen R., "F.E.M. investigation of test setup influence on splitting failure load". Universität Stuttgart. Institut für Werkstoffe im Bauwesen, 1996.
- Ref. 111 Ramtani S. "Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral", Thèse de Doctorat d'Etat, Paris 6, 1990.
- Ref. 112 Rasid Y. R. "Analysis prestressed concrete pressure vessels", Nuclear Engng. and design 7(4), 334-344, 1968.
- Ref. 113 Reynouard J.-M. « Structures planes en béton armé. Elaboration d'un modèle du comportement jusqu'à la ruine et résolution numérique », Thèse de Doctorat, Univ. Claude-Bernard de Lyon, 1974.
- Ref. 114 Rots J. G., Blaauwendraad J. "Crack models for concrete: Discrete or smeared? Fixed, Multi - directional or rotating?", HERON Vol,34, no.1, 1989
- Ref. 115 Rots J. G., De Borst R. "Analysis of Mixed-Mode fracture in concrete", Journal of engineering Mechanics, Vol. 113, No, 11, November 1987.
- Ref. 116 Salençon J. « Calcul à la rupture et analyse limite », Presses de l'ENPC, Paris, 1988
- Ref. 117 Simo J. C., Ju J. W. "Strain and stress based continuum damage models I - Formulation", Int. J. Solids structures, 23(7): 821-840, 1987
- Ref. 118 Singh U. K. « A continuum damage model for simulation of the progressive failure of brittle rocks », Int. J. Solids structures, Vol. 25, N°6, pp. 647-663, 1989.
- Ref. 119 Taylor G. I. "Plastic strain in metals", J. Inst Metals, London 62, 307-324, 1938.
- Ref. 120 Terrien M. « Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction », Bulletin de liaison Ponts et Chaussées, N° 105, pp. 65-72, 1980.
- Ref. 121 Ulm F.-J. "Modélisation élastoplastique avec endommagement du béton de structures. Application aux calculs statiques et dynamiques des structures en béton armé et béton précontraint", Thèse de doctorat, ENPC et Paris 1, 1994
- Ref. 122 Walter H., « Modélisation 3D par éléments finis du contact avec frottement et de l'endommagement du béton : Application à l'étude de fixations ancrées dans une structure en béton ». Thèse doctorale, INSA de Lyon, 1999.
- Ref. 123 Walter H., Baillet L., Brunet M. "Modélisation 3D par éléments finis de fixations ancrées dans une structure en béton", Revue française de génie civil. Volume4-n° juillet-août, 2000
- Ref. 124 Willam K., Pramono E., Sture S., "Fundamental issues of smeared crack models", Proc. SEMRILEM Int. Conf. on Fracture of concrete and rock, S.P. Shad and S.E. Swartz (EDs.), SEM, Bethel, 192-207, 1987.
- Ref. 125 Yamamoto Taira, Vecchio Frank J. "Analysis of Reinforced Concrete Shells for Transverse Shear and Torsion", ACI Structural Journal, Title N° 98-S19

- Ref. 126 Zang Y., “Modélisation et simulation du comportement mécanique non-linéaire des chevilles de fixation”, Rapport de DEA encadré par Mounajed G. et Ung Quoc H., CSTB-ENPC, 2003.
- Ref. 127 Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. « The Finite Elements Method », McGraw-Hill Book Company Europe, 1989.
- Ref. 128 Zienkiewicz O. C., Pandre C. N. "Time-dependant multi-laminate model of rocks – A numerical study of deformation and failure of rock masses", Int. J. Anal. Methods Gemech 1, 219-247, 1977.