HAL
open science

Etude théorique et numérique des instabilités Rayleigh-Taylor en plasmas magnétisés

Andrey Ivanov

To cite this version:

Andrey Ivanov. Etude théorique et numérique des instabilités Rayleigh-Taylor en plasmas magnétisés. Physique mathématique [math-ph]. Ecole Polytechnique X, 2001. Français. NNT : . tel-00005775

HAL Id: tel-00005775

https://pastel.hal.science/tel-00005775v1

Submitted on 5 Apr 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité :

Physique des plasmas

Par :

Andrei A. Ivanov

Titre :

Etude théorique et numérique des instabilités Rayleigh-Taylor en plasmas magnétisés

Soutenue le 14 juin 2001,

Devant le jury composé de :

M. **Claude DEUTSCH,** président du jury
Directeur de Recherche au CNRS, Université Paris XI, Orsay
Jean-Max BUZZI, directeur de thèse,
Directeur de Recherche au CNRS, Ecole Polytechnique
Alexander KINGSEP, co-directeur de thèse,
Professeur à l'Institut Kourchatov, Moscou
Thierry LEHNER, rapporteur
Chargé de Recherche au CNRS, Observatoire de Meudon
Alain BOURDIER, rapporteur
Ingénieur au CEA, CEA/DAM/DPTA, Bruyères-le-Châtel
Guy LAVAL,
Directeur de Recherche au CNRS, Ecole Polytechnique
Jean-François LUCIANI,
Directeur de Recherche au CNRS, Ecole Polytechnique

Etude théorique et numérique des instabilités Rayleigh-Taylor en plasmas magnétisés

A. IVANOV

REMERCIEMENTS

J'exprime ma reconnaissance à mes co-directeurs de thèse M. Jean-Max Buzzi et M. Alexander Kingsep, d'avoir dirigé ma thèse. Je remercie M. Alexandre Chuvatin de m'avoir encadré pendant ces années. Les échanges que nous avons pu avoir ont été riches en idées nouvelles. Je suis aussi très reconnaissant à M. Guy Laval qui a proposé le sujet de la thèse en co-tutelle.

Je remercie Monsieur Claude Deutsch d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse. J'ai eu grand bénéfice à profiter de ses conseils, savoir et expérience. J'exprime toute ma gratitude aux membres du jury M. Jean-François Luciani et M. Guy Laval. Je remercie plus particulièrement Messieurs Thierry Lehner et Alain Bourdier qui ont accepté le rôle de rapporteurs.

Je remercie M. Jean–Marcel Rax de m'avoir accueilli au Laboratoire de Physique et Technologie des Plasmas.

Mes remerciements vont aussi à l'ensemble des chercheurs de l'équipe « Plasmas magnétisés à haute densité d'énergie » : Jean Larour et Jean Rous, prêts à discuter ou répondre à mes questions et pour toute leur aide, Philippe Auvray, pour mille service en informatique rendu, Guy Dontevieux, pour son humour persistant, Claude Rouillé, Pierre Loiseleur, Serena Bastiani, Frederic Girard.

Je remercie mon père pour son appui, les discussions intéressantes, riches en idées inattendues.

Toute ma gratitude va aussi à Isabelle Taquin, Catherine Peinturier, Arlette Millard, Annie Stéphan, Marie-Françoise Lecomte et Malika Lang pour leur efficacité, leurs qualités professionnelles et humaines, et pour les mille services rendus.

Je tiens à remercier tous mes amis qui m'ont soutenu, encouragé et aidé pendant ces années : Olga Leontchik, Elena Kron, Nadejda Orlova, Ekaterina Vassilieva, Alla Popova, Andriy Kharchenko, Bogdan Tomchuk, Pavel Emelianov, Dmitry Kouznetsov, Pavel Bulkin, Dmitry Tarassov, Kostya Serebrennikov, Boris Yakovlev, Fedor Matveyev, Dmitry Cheloukhine, Alexander Semenov.

Je remercie toutes les personnes, qui peut-être n'ont pas été mentionnées ici, et avec qui j'ai eu des contacts pendant ces années.

RESUME

La thèse est consacrée aux instabilités de type Rayleigh-Taylor. Elle est inspirée par les progrès récents dans la physique de la compression des plasmas, surtout avec des dispositifs comme les Z-pinches. L'instabilité Rayleigh-Taylor (*IRT*) joue un rôle important dans l'évolution des plasmas magnétisés dans les expériences, aussi bien que dans les étoiles et dans les fluides classiques. Dans les phénomènes plasmas associés à la fusion thermonucléaire, l'IRT est souvent le phénomène qui limite les possibilités de compression. On essaie d'étudier des particularités de ces instabilités afin d'en profiter et d'éliminer leurs effets nuisibles. Dans ce travail on étudie aussi bien le cas général de l'instabilité Rayleigh-Taylor « classique » (*dans les fluides incompressibles*) que les cas plus spécifiques des instabilités de type Rayleigh-Taylor dans les plasmas magnétisés, dans les implosions des coquilles à fils etc.

On a étudié l'influence de la diffusion Hall du champ magnétique sur le taux de croissance de l'instabilité. On a obtenu des solutions auto-similaires pour l'élargissement du profil initial et pour l'onde de pénétration du champ magnétique. Puis, on a étudié l'évolution postérieure du champ magnétique dans les commutateurs à ouverture de plasmas (*COP*) et on a montré la possibilité d'existence d'une onde de raréfaction forte, dans les cas avec et sans collisions. Cette onde peut expliquer le phénomène d'ouverture de COP.

Le phénomène de suppression de l'IRT par des oscillations forcées de la frontière entre deux fluides permet de proposer quelques idées pour les expériences de fusion inertielle. On considère le cas général de l'instabilité, c'est-à-dire deux fluides incompressibles visqueux dans un champ de gravitation. On obtient l'expression précise analytique du taux de croissance et on analyse l'influence des paramètres de « pompage » du système sur l'instabilité. Les résultats peuvent être appliqués à une grande diversité de situations, à partir de l'hydrodynamique classique, jusqu'aux plasmas astrophysiques.

Le schéma des coquilles à fils est récemment devenu une méthode très populaire d'obtention de rayonnement haute puissance ou d'implosion de haute qualité dans le domaine des Z-pinches (*plasmas de striction magnétique*). Il se trouve que les résultats expérimentaux sont bien meilleurs dans le cas d'une implosion de fils fins multiples situés sur un cylindre que dans le cas du schéma ordinaire du « liner ». On a examiné un problème modélisant la stabilisation de IRT dans ce cas due aux modulations régulières de la surface de séparation entre le plasma et le champ magnétique. Ce type de modulation peut apparaître grâce aux explosions initiales et à l'évolution postérieure des fils solides. On a montré que le couplage des modes de l'instabilité en présence du champ magnétique peut effectivement réduire le taux de croissance.

Mots-clés : *instabilité, Rayleigh-Taylor, suppression des instabilités, oscillation de l'interface, modulation de l'interface, plasma magnétisé, solutions auto-similaires, stabilisation dynamique, plasmas de type Hall, coquille à fils, onde de raréfaction.*

ABSTRACT

The instabilities of Rayleigh-Taylor type are considered in the thesis. The topic of the thesis was inspired by recent advances in the physics of plasma compression, especially with the aid of systems like Z-pinch. Rayleigh-Taylor instability (RTI) plays an important role in the evolution of magnetized plasmas in these experiments, as well as in stellar plasmas and classic fluids. For the phenomena concerning the nuclear fusion the RTI is very often the factor limiting the possibility of compression. In the current work we try to examine in detail the characteristic features of the instabilities of this type in order to eliminate their detrimental influence. In this thesis we're studying both the general case of the "classic" Rayleigh-Taylor instability (*in incompressible fluids*) and more specific cases of the instabilities of Rayleigh-Taylor type in magnetized plasmas, in the liners or wire array implosions etc.

We have studied the influence of the Hall diffusion of magnetic field on the growth rate of the instability. We have obtained in this work a self-similar solution for the widening of the initial profile of the magnetic field and for the wave of the penetration of magnetic field. After that the subsequent evolution of the magnetic field in plasma opening switches (POS) has been examined. We have shown the possibility of the existence of a strong rarefaction wave for collisional and non-collisional cases. This wave can explain the phenomenon of the opening of POS.

The effect of the suppression of Rayleigh-Taylor instability by forced oscillations of the boundary between two fluids permits us to propose some ideas for the experiments of inertial fusion. We have considered the general case of the instability, in other words – two incompressible viscous superposed fluids in a gravitational field. We have obtained an exact analytical expression for the growth rate and then we have analyzed the influence of the parameters of external "pumping" on the instability. These results can be applied to a wide range of systems, starting from classic hydrodynamics and up to astrophysical plasmas.

The scheme of wire arrays has become recently a very popular method to obtain a high power X-radiation or for a high quality implosion in Z-pinches. The experimental studies have demonstrated that the results of implosion are much better for the case of multiple thin wires situated cylindrically than in a usual liner scheme. We have examined the problem modeling the stabilization of Rayleigh-Taylor instability for a wire array system. The reason for instability suppression is the regular spatial modulation of the surface plasma-magnetic field (in the vacuum). This modulation is created by the explosions of solid wires and by subsequent plasma evolution. We have also examined the coupling of the instability modes that takes place in the presence of the magnetic field and this study shows that the spatial surface modulation can effectively diminish the growth rate of the considered instability.

Key words: *instability, Rayleigh-Taylor, instability suppression, surface oscillations, modulation of the interface, magnetized plasma, self-similar solutions, dynamic stabilization, Hall type plasma, wire array, rarefaction wave.*

NOTATIONS

Sigles

IRT – instabilité Rayleigh-Taylor

COP – commutateur à ouverture de plasma

Variables

$\mathbf{B}$	–	champ magnétique
$\mathbf{B_0}$	–	champ magnétique initial
$\langle \mathbf{B} \rangle$	–	valeur moyennée du champ magnétique
$\mathbf{j}$	–	courant
n , n_e	–	densité des électrons
e	–	charge d'électron
t	–	temps
σ	–	conductivité ; tension de surface
m , m_e	–	masse d'électron
τ_e	–	temps collisionnel électron-ion
$\mathbf{u_c}$	–	vitesse du courant
ω_{pe}	–	fréquence électronique de plasma
ω_{pi}	–	fréquence ionique de plasma
c	–	vitesse de la lumière
n_i	–	densité des ions
τ	–	échelle caractéristique temporelle d'un problème
l_0	–	largeur initiale du profil de champ magnétique
L , l_x	–	échelle caractéristique spatiale d'un problème
$\mathbf{v_i}$	–	vitesse des ions
$\mathbf{v_e}$	–	vitesse des électrons
ω	–	fréquence
M , M_i	–	masse d'ion
k_0	–	nombre d'onde des perturbations initiales

$\mathbf{k}$	–	vecteur d'onde
V_A	–	vitesse d'Alfven
γ	–	taux de croissance
δn, $\tilde{n}$	–	perturbations de la densité
ω_{ci}, ω_{Bi}	–	fréquence ionique cyclotronique
ω_{ce}, ω_{Be}	–	fréquence électronique cyclotronique
β	–	paramètre de Hall, $\omega_{Be}\tau_e$; courbure de cylindre original
$\mathbf{\Phi}$	–	phase
$B(x,t)$	–	champ magnétique lisse
$\tilde{B}$	–	perturbation du champ magnétique
$\mathbf{E}$	–	champ électrique
ξ	–	coordonnée adimensionnelle ; déplacement d'une surface
b	–	champ magnétique adimensionnel
ξ_0	–	coordonnée du front de l'onde, amplitude des oscillations forcées
ψ	–	variable adimensionelle
$\mathbf{\Psi}$	–	dérivée logarithmique de la phase
N	–	densité adimensionnelle
C, C_1, C_2	–	constantes arbitraires dans les solutions
D_{eff}	–	coefficient effectif de diffusion
φ	–	angle dans la géométrie cylindrique
κ	–	nombre d'onde caractéristique du probleme
η	–	coordonnée adimensionnelle ; viscosité dynamique
u	–	vitesse d'une onde
p	–	pression
$T_{e,i}$	–	température électronique (ionique)
g	–	accélération de pesanteur
a	–	amplitude des oscillations forcées
$\mathbf{\Omega}$	–	fréquence des oscillations forcées
D, D_1	–	déterminant infini
$\mathbf{g_{osc}}$	–	pesanteur effective oscillante supplémentaire
$\mathbf{v}$	–	vitesse
$\triangle$	–	laplacien

$\mathbf{v_0}$, p_0	–	valeurs des variables dans l'état d'équilibre
$\mathbf{n}$	–	vecteur unitaire
Π_0	–	pression dans un fluide infiniment léger
σ_{ik}	–	tenseur des tensions
ρ, ρ_1, ρ_2	–	densités des fluides
p_1, $\mathbf{v_1}$	–	perturbations du premier ordre
$F(\omega)$	–	fonction de Masters
$p_{n,k}, v_{n,k}$	–	composantes de série Fourier et Floquet
q_n	–	taux de décroissance spatiale
ζ	–	déplacement des particules de fluide
ω_v, k_v	–	paramètres d'adimensionalisation
x_s, y_s	–	coordonnées de l'interface vide-plasma
$y_{s\max}$	–	amplitude des modulations de l'interface vide-plasma
α	–	champ magnétique modulant
ψ	–	potentiel du champ magnétique
$\mathbf{B_i}$	–	champ magnétique à l'intérieure du plasma
$\mathbf{B_e}$	–	champ magnétique à l'extérieure du plasma
$\mathbf{g_{eff}}$	–	pesanteur effective
$\tilde{p}$	–	perturbations de la pression
R	–	rayon du cylindre de plasma
$\mathbf{u_{KMC}}$	–	vitesse d'une onde KMC
$\mathbf{E_H}$	–	champ électrique de Hall
$\varepsilon = m / M$	–	rapport entre la masse des ions et des électrons
n_m	–	valeur maximale de la densité
B_m	–	valeur maximale du champ magnétique
Δ	–	distance entre les électrodes
h	–	longueur du système
δ	–	largeur de la couche du courant
h_2	–	échelle spatiale de changement du champ magnétique
h_1	–	échelle spatiale de changement de la densité
$\beta(z), \gamma(z)$	–	paramètres adimensionels de l'onde de raréfaction
$u_{\max}$	–	vitesse maximale de l'onde de raréfaction
$u(z)$	–	vitesse de l'onde de raréfaction

$g(b)$	–	fonction spéciale du champ magnétique
ν_c	–	fréquence des collisions
$\chi(z)$	–	fonction d'ajustement
λ	–	longueur d'onde
$Y(b)$	–	dérivée adimensionelle du champ magnetique

INTRODUCTION

Motivation de la thèse

La thèse est consacrée aux instabilités de type Rayleigh-Taylor. Elle est inspirée par les progrès récents dans la physique de la compression de plasma, plus particulièrement avec des dispositifs comme les Z-pinches. On utilise souvent les Z-pinches afin d'obtenir un fort rayonnement X ou comme un moyen de fusion inertielle. Les dernières expériences utilisent souvent les schémas de coquilles à fils qui implosent. Dans ces conditions la compression est beaucoup plus efficace. L'instabilité Rayleigh-Taylor (*IRT*) joue un rôle important dans l'évolution des plasmas magnétisés dans ces expériences, aussi bien que dans les étoiles et dans les fluides classiques. Dans les phénomènes plasmas associés à la fusion thermonucléaire, l'IRT est souvent le phénomène qui limite les possibilités de compression.

On essaie d'étudier des particularités de ces instabilités afin d'en profiter et d'éliminer leurs effets nuisibles. Dans ce travail on étudie aussi bien le cas général de l'instabilité Rayleigh-Taylor « classique » (*dans les fluides incompressibles*) que les cas plus spécifiques des instabilités de type Rayleigh-Taylor dans les plasmas magnétisés, dans les implosions des coquilles à fils etc.

Pour mieux comprendre l'instabilité Rayleigh-Taylor et déterminer la position des problèmes abordés dans cette thèse par rapport aux études d'autres auteurs considérons maintenant quelques questions générales liées à ces instabilités.

Phénoménologie de l'IRT

L'instabilité classique de Rayleigh-Taylor est une instabilité de l'interface qui a lieu quand un fluide lourd se trouve au-dessus d'un fluide léger. Les deux travaux fondamentaux qui introduisent cette instabilité sont les articles de lord Rayleigh [1] et de G.I. Taylor [2]. Les expériences classiques ont été effectuées par D.J. Lewis [12] et J.C. Allred et al. [3].

Pour faire une démonstration simple de l'instabilité Rayleigh-Taylor prenons l'exemple de D.H. Sharp [4]. Imaginons sous le plafond d'une salle et au-desssus de l'air une couche d'eau d'épaisseur 1m. (*Fig.1*). La couche d'eau va tomber. Ce n'est pas à cause d'un manque de soutien d'air que l'eau tombe. Comme l'on sait, la pression atmosphérique est équivalente à la pression d'une colonne d'eau de hauteur 10m, ce qui est très suffisant pour tenir l'eau qui est au plafond. Mais l'atmosphère n'est pas un support idéal pour l'eau. Elle échoue à maintenir la platitude de l'interface entre l'eau et l'air et à réduire des petites fluctuations de cette surface. Peu importe si l'interface initiale était parfaitement plate ou non, elle va dévier de sa platitude. Les petites portions du fluide qui sont situées plus haut par rapport au niveau moyen perçoivent plus de pression qu'il ne faudrait pour les supporter. Elles commencent à monter en se frayant un passage à travers l'eau. La portion voisine du fluide, où la surface est située un peu plus bas que le niveau moyen, requiert plus de pression pour son soutien, alors elle commence à tomber. Ainsi, l'amplitude des irrégularités initiales augmente d'une façon exponentielle. Cela représente l'étape linéaire de l'instabilité Rayleigh-Taylor. Ensuite l'eau bouge en bas en formant des « piquants » et l'air monte en produisant des « bulles ». Enfin, l'eau tombe sur le sol.

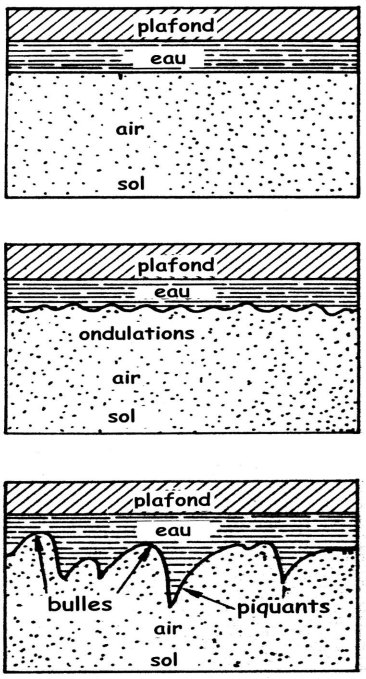

Fig. 1. Démonstration générale de l'IRT.

La même couche d'eau sur le sol serait parfaitement stable et les irrégularités sont amorties. Donc, l'interface est stable si un fluide lourd supporte un fluide léger. Au contraire, si un fluide léger supporte un fluide lourd, la surface est instable et on a un cas classique de l'instabilité Rayleigh-Taylor.

L'instabilité que l'on considère se déclare très souvent dans des situations diverses. Parmi eux, par exemple :

A. Phénomènes naturels

i) renversement de la partie extérieure d'un noyau implosé d'une étoile massive – L.Smarr et al. [5]

ii) la formation des « jet » jumeaux de haute luminosité dans les nuages tournant des gaz dans un potentiel gravitationnel externe – M.L. Norman et al. [6]

iii) d'autres phénomènes d'astrophysique, hydrodynamique classique.

B. Applications technologiques

i) implosion de type laser des cibles à fusion deutérium-tritium W.C. Mead, R.L. McCrory et al., R.G. Evans et al., M.H. Emery et al. [7, 8, 9, 10 etc.]

ii) l'implosion magnétique des coquilles à fils ou à gaz (R.A. Gerwin [11]) et d'autres applications de fusion inertielle

Il y a une phénoménologie complexe associée à l'évolution de l'interface pendant le développement de l'instabilité Rayleigh-Taylor. Elle comporte la génération de piquants, bouclettes, bulles, le développement de l'instabilité Helmholtz, la compétition entre les bulles, la formation des gouttelettes, mixage turbulent et enfin une limite chaotique avec l'interface de type fractale.

Il est utile de regrouper la description de croissance de l'instabilité en plusieurs étapes. On peut le faire de la manière suivante D.J. Lewis, G. Birkoff [12, 13] :

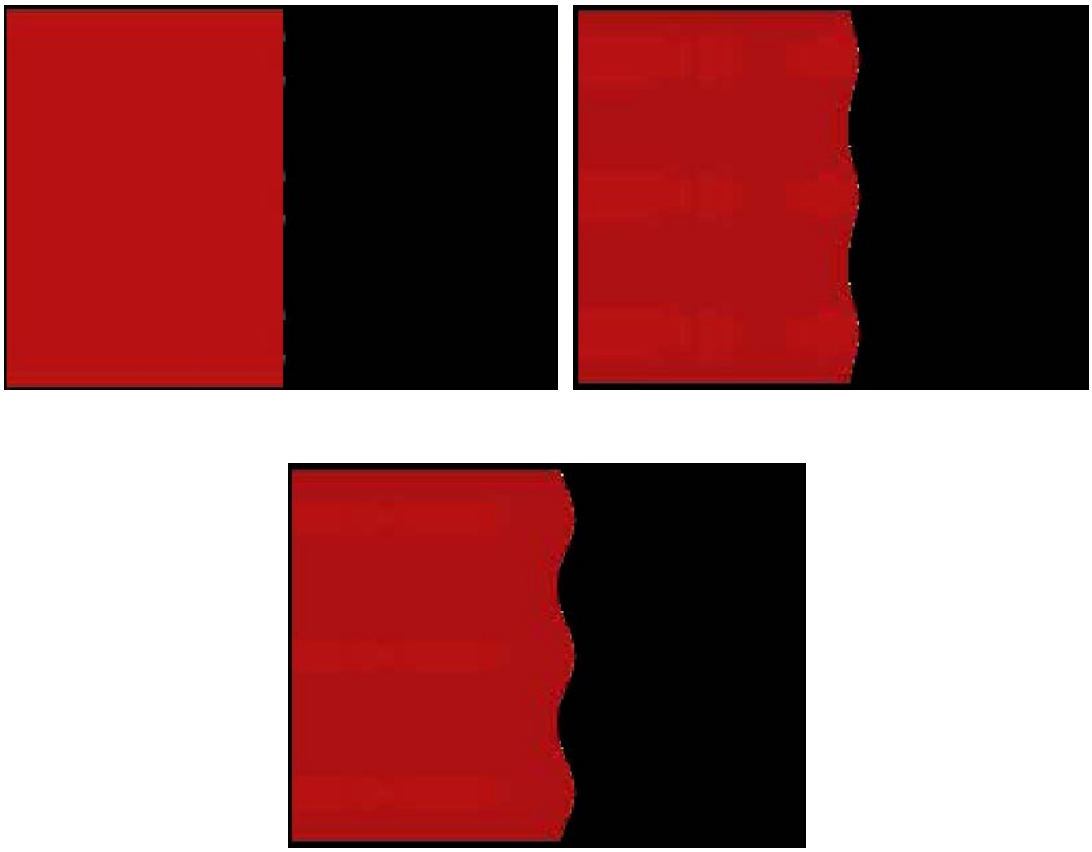

Fig 2a. Etape 1 de l'IRT.

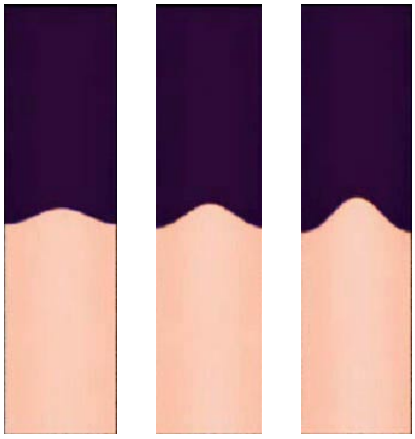

Fig 2b. Etape 1 de l'IRT.

Etape 1. (Fig2a,b) Les perturbations initiales de l'interface ou de la vitesse sont extrêmement faibles, les premières étapes de la croissance de l'instabilité peuvent être analysées en utilisant la forme linéaire des équations de la dynamique des fluides. Le résultat est un développement exponentiel de l'instabilité. Quand l'amplitude des fluctuations initiales devient de l'ordre de 0.1λ à 0.4λ (λ *est la longueur d'onde de l'instabilité*), on peut observer les déviations substantielle de la théorie linéaire. Dans cette thèse on présente en général l'approche linéaire. La raison est simple : ce travail est consacré grosso modo à la suppression de l'instabilité Rayleigh Taylor, donc il est inutile d'étudier les étapes non-linéaires si on supprime l'instabilité au cour de l'étape linéaire.

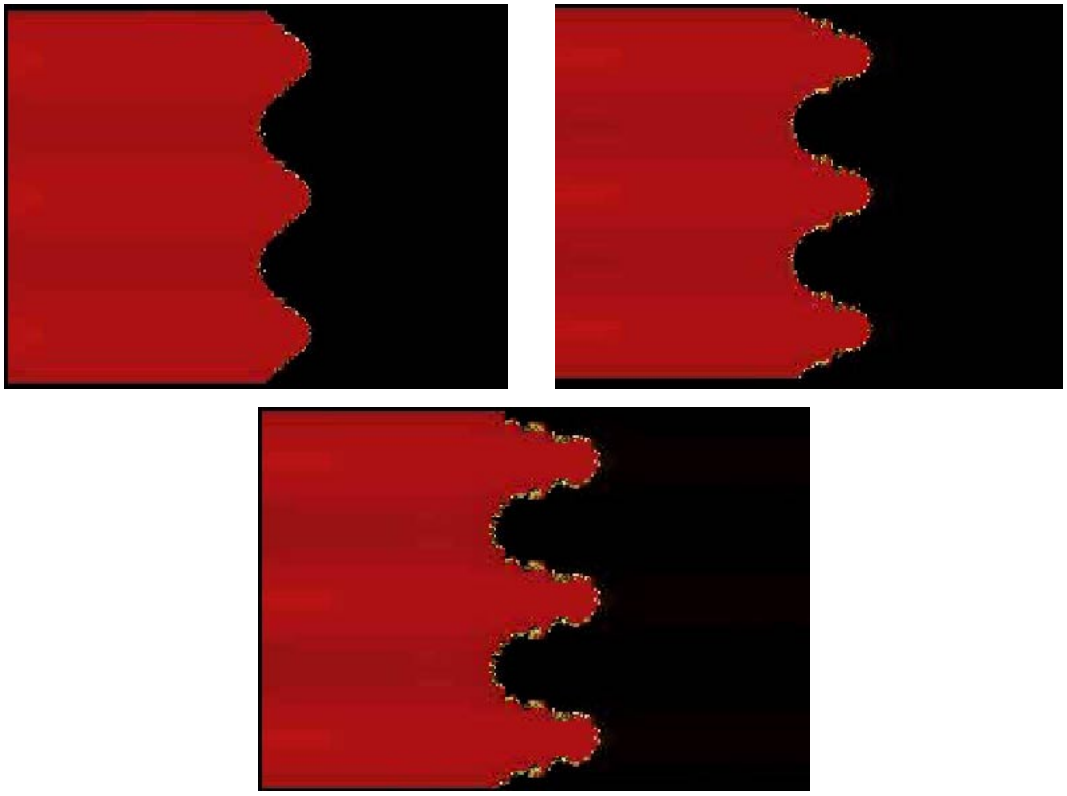

Fig 3a. Etape 2 de l'IRT.

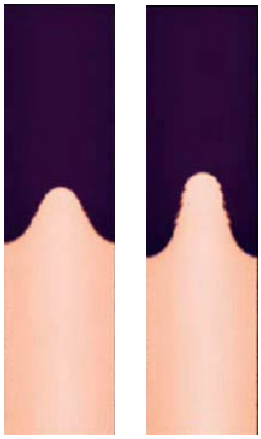

Fig. 3b. Etape 2 de l'IRT.

Etape 2 (Fig 3a,b). Pendant la deuxième phase, lorsque l'amplitude des perturbations s'accroît d'une façon non-linéaire jusqu'à λ, le développement de l'instabilité est fortement influencée par des effets 3D et par la valeur du nombre d'Atwood $A = (\rho_H - \rho_L)/(\rho_H + \rho_L)$. Ici ρ_H est la densité du fluide lourd et ρ_L est celle du fluide léger.

Si $A \sim 1$, le fluide léger pénètre dans le fluide lourd sous la forme de bulles rondes avec une section efficace ronde. Remarquons que les bulles 2D (*plane*) sont instables par rapport aux perturbations selon l'axe perpendiculaire au plan de la bulle, donc ces bulles « plane » vont se désagréger en bulles 3D. Le fluide lourd produit des « piquants » et des « cloisons » ou des « bouclettes » entre ces bulles ainsi que la section horizontale représente des hexagones multiples.

Si $A \sim 0$ on retrouve simplement une sorte de deux ensemble des bulles qui pénètrent l'un dans l'autre.

Il faut noter que ces images sont très différentes de ce que nous imaginons dans 2 dimensions.

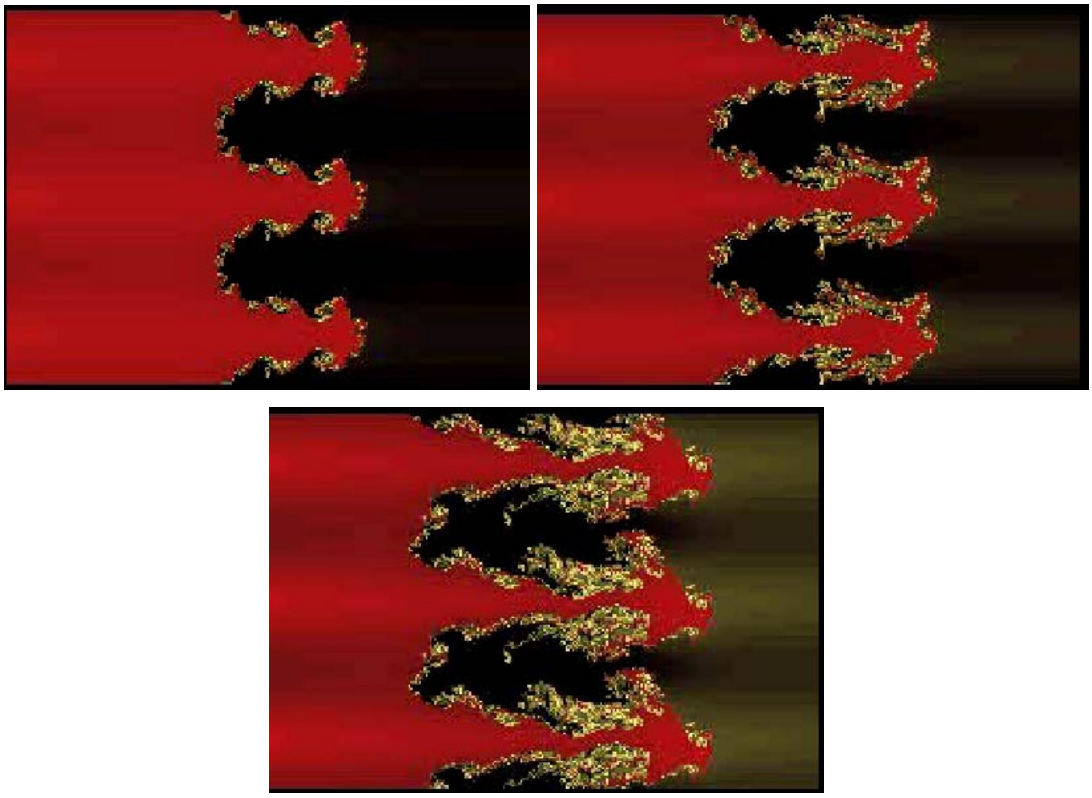

Fig 4a. Etape 3 de l'IRT.

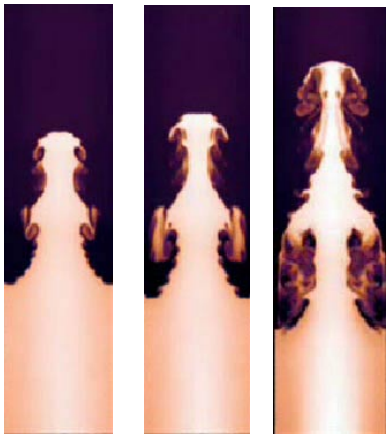

Fig 4b. Etape 3 de l'IRT.

Etape 3 (Fig. 4 a,b). L'étape suivante est caractérisée par le développement des structures fines sur les piquants et par les interactions entre les bulles. Ces phénomènes sont conditionnés par plusieurs raisons. Il y a, par exemple, une interaction non-linéaire

entre les fluctuations initiales de fréquences différentes. L'instabilité Helmhotz qui apparaît le long d'un piquant peut le convertir en champignon. Ce phénomène-là est plus fréquent quand le paramètre A est assez faible. Il y a aussi une confirmation expérimentale des effets d'absorption de petites bulles par les grandes bulles, ce qui entraîne la rapide croissance et la grande vitesse des grandes bulles.

D'ailleurs, la présence d'inhomogénéités des valeurs physiques peut modifier essentiellement la forme et la vitesse des « bulles » et des « piquants ».

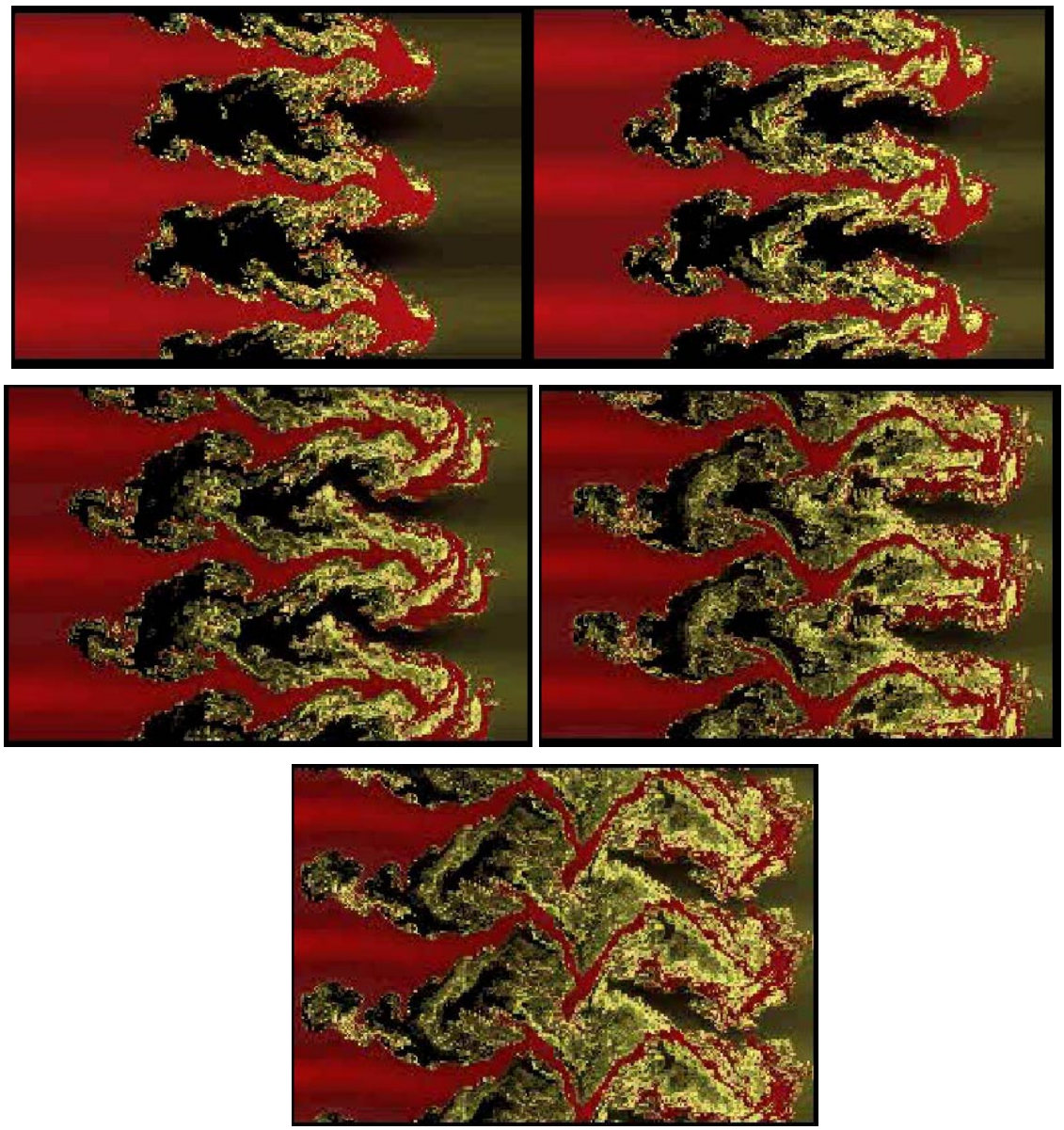

Fig 5a. Etape 4 de l'IRT.

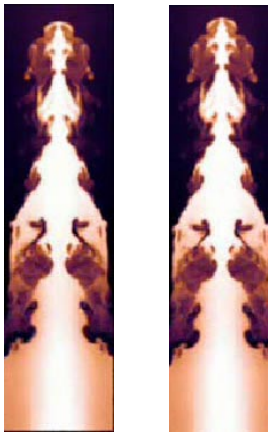

Fig 5 b. Etape 4 de l'IRT.

Etape 4 (Fig 5a,b). Pendant la phase finale on peut observer la rupture des piquants par l'intermédiaire des mécanismes divers : la pénétration d'une bulle au travers d'une couche de fluide d'une épaisseur finie, et par d'autres types de comportement compliqués. Tous ces effets mènent au régime du mélange chaotique et turbulent.

Au cours des 3ème et 4ème étapes on peut estimer la vitesse v des bulles D.H. Sharp [4] : $\mathrm{v} \approx \alpha g_{eff} t$ où $\alpha \sim 0.01 \div 0.05$, g_{eff} est l'accélération de gravité effective.

Les figures 2-5 a) viennent de l'« ESS Project Annual Report » de la NASA, http://sdcd.gsfc.nasa.gov/ESS/annual.reports/ess95contents/app.inhouse.fryxell.html.

Les figures 2-5 b) sont les images de « 3D Rayleigh-Taylor AMR representation », David Bock, NCSA Visualization and Virtual Environments, November, 1999 (http://woodall.ncsa.uiuc.edu/dbock/projects/3drt/).

Jusqu'ici, on n'a fait q'une ébauche de l'évolution de l'instabilité Rayleigh-Taylor. Il y a de nombreux facteurs supplémentaires qui influencent le développement de l'instabilité et le fait de son existence même (*voir Table I*) : tension de surface, viscosité, compressibilité, les effets de géométrie convergente, les phénomènes 3D, dépendance temporelle d'accélération effective, des chocs, et toute la diversité des inhomogénéités.

Facteur	Echelle caractéristique de l'effet (paramètre adimensionnel)	Influence sur l'instabilité
Ratio des densités	ρ_H / ρ_L ou le nombre d'Atwood $A = (\rho_H - \rho_L)/(\rho_H + \rho_L)$	Le facteur clé qui définie le taux de croissance des instabilites Rayleigh-Taylor ou Kelvin-Helmholtz pour les faibles perturbations de longueur d'onde λ.
Tension de surface	Nombre de Weber $2\sigma/(\rho_H - \rho_L)g\lambda^2$	Dans la théorie linéaire il stabilise toutes les ondes avec la longueur d'onde $\lambda < \lambda_{cr} = \sqrt{\sigma / g(\rho_H - \rho_L)}$. Au final il subsiste l'onde la plus instable, donc le problème devient plus strict et correct dans le sens mathématique.
Viscosité	Le nombre de Reynolds $R = \nu t / \lambda^2$	Diminue le taux de croissance, apparition de l'onde la plus instable.
Compressibilité	$\gamma_{compr} = g / kc^2 =$ $\frac{(\text{la vitesse de phase des ondes de gravité})^2}{(\text{la vitesse de son})^{-2}}$	Réduit le taux de croissance des perturbations de grandes longueurs d'onde, diminue le volume actif du fluide.
Hétérogénéité	$\Delta L / \lambda, \Delta v / v$ etc.	Excitation du 2ème, 3ème harmoniques des diverses longueurs d'onde.

Table I. Des facteurs importants dans l'évolution de l'instabilité Rayleigh-Taylor.

Equations de base de l'IRT classique

La thèse visant à l'étude de la suppression des IRT dans leurs phases initiales. Donc appliquons nos efforts d'abord à l'analyse linéaire de cette instabilité. Le traitement linéaire du cas le plus simple (*cf. ci-dessous*) peut très bien être généralisé afin d'incorporer d'autres phénomènes physiques tels que la compressibilité (M. Mitchner et al., M.S. Plesset et al. [14, 15]), des accélérations non-uniformes (G.H Wolf [16]), des chocs (R.D. Richtmyer [17]), des gradients de la densité (S. Chandrasekhar, R. Lelevier et al. [18, 19]), une géométrie spéciale (J.N. Hunt [20]) etc. L'analyse profonde du rôle de la viscosité est disponible dans R. Menikoff et al., S. Chandrasekhar [21, 18, 22]. Enfin, on peut traiter le cas de conditions initiales arbitraires (R. Menikoff et al., R.A. Axford [22, 23]). Les solutions des équations linearisées satisfaisants des conditions initiales générales sont présentées dans les termes des transformations Fourier-Laplace des variables hydrodynamiques.

Pour mieux comprendre l'instabilité on va montrer en bref le traitement typique linéaire pour le cas le plus simple : l'instabilité Rayleigh-Taylor de la surface entre un fluide idéal incompressible et un fluide incompressible avec la densité $\rho = 0$ (*Fig. 6*).

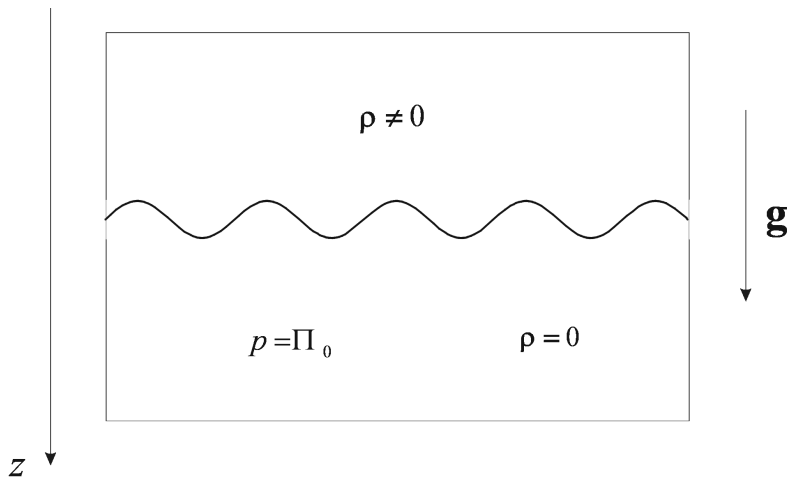

Fig. 6. Schéma du problème.

Les équations hydrodynamiques s'écrivent comme suit :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} \tag{1}$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

La conditions aux limites (*autrement dit, sur la surface*) :

$$p\big|_{surface} = \Pi_0 \tag{3}$$

Ici Π_0 est la pression dans le fluide avec $\rho = 0$. Supposons que l'axe z est perpendiculaire à la surface et dirigé suivant $\mathbf{e_z}$ avec $\mathbf{g} = g\mathbf{e_z}$. Notamment, cela signifie que le fluide avec $\rho \neq 0$ se trouve dans la région $z < 0$.
L'état d'équilibre est défini par $\mathbf{v} = 0$, donc

$$p_0 = \rho g z + \Pi_0,\ z < 0. \tag{4}$$

En prenant la divergence de (1) et en utilisant (2) on déduit

$$\Delta p = 0 \tag{5}$$

On va utiliser l'approche linéaire, donc on va considérer les perturbations du premier ordre p_1, v_1. On peut développer la fonction en intégrale de Fourrier. Les composantes de Fourier seront, selon (5) :

$$p_{1k\omega} = \alpha e^{kz} e^{ikx} e^{-i\omega t} \tag{6}$$

$$v_{1zk} = -i\frac{\alpha k}{\rho\omega} e^{kz} e^{ikx} e^{-i\omega t} \tag{7}$$

$$v_{1xk} = \frac{\alpha k}{\rho\omega} e^{kz} e^{ikx} e^{-i\omega t} \tag{8}$$

On suppose ici que le vecteur d'onde de l'instabilité est $\mathbf{k} = k\mathbf{e_x}$. Le signe devant kz dans les expressions (6), (7), (8) est choisi de façon que les perturbations disparaissent dans le fluide quand $z \to -\infty$. Il est intéressant de remarquer que les particules bougent selon les trajectoires circulaires : $v_{1zk} = -iv_{1xk}$. Introduisons maintenant le déplacement $\boldsymbol{\xi}$ des particules du fluide par rapport à leur position initiale. Evidemment, $\mathbf{v} = d\boldsymbol{\xi}/dt$. La condition aux limites pour les perturbations est toujours l'équation (3), qu'il faut la recalculer sur la surface perturbée :

$$p_{surf.pert.k} \approx p_{1k} + \frac{\partial p_0}{\partial z}\xi_{zk}\Big|_{z\approx 0} + p_0\Big|_{z=0} = \alpha e^{-kz}e^{ikx}e^{-i\omega t} + \rho g \xi_{zk} + \Pi_0 = \Pi_0 \quad (9)$$

On va calculer la dérivée de l'équation (9) par rapport au temps tout en se rappelant que $v_{z1} = \partial\xi_z/\partial t$:

$$-i\omega\alpha + \rho g\left(-i\frac{\alpha k}{\rho\omega}\right) = 0 \text{ ou : } \omega^2 = -gk. \quad (10)$$

Ainsi, on obtient le taux de croissance linéaire de l'instabilité Rayleigh-Taylor.

L'IRT dans les plasmas avec champ magnétique

L'instabilité Rayleigh-Taylor joue un rôle très important dans les applications de fusion inertielle. En fait, l'instabilité Rayleigh-Taylor dans les plasmas et surtout dans les plasmas magnétisés représente une branche très importante de physique des plasmas. Au lieu de la gravité $\mathbf{g}$, dans les plasmas on a soit l'accélération effective (*par exemple, dans les cas d'ablation par laser*), soit la courbure des lignes du champ magnétique $\mathbf{g_{eff}} = (\mathbf{B}\nabla\mathbf{B})/4\pi\rho$.

De nombreux articles sont consacrés à l'étude de l'instabilité Rayleigh-Taylor dans les plasmas (J.D. Huba et al., A.L. Velikovich, A.B. Bud'ko et al., S.Sen et al., S.M.

Gol'berg et al., V.V. Bychkov et al. [24, 25, 26, 27, 28, 29]). Un tel intérêt est conditionné par le rôle de cette instabilité en astrophysique, dans les expériences de génération du rayonnement X, dans l'ablation de type laser, dans les Z-pinches, la fusion inertielle etc. Certains travaux se concentrent sur l'étude des particularités de l'instabilité et d'autres proposent les méthodes de suppression de l'instabilité.

Il a été propose de supprimer l'instabilité Rayleigh-Taylor, par exemple, par le cisaillement (« *shear* ») du champ magnétique (A.B. Bud'ko et al. [26]). Autrement dit, si l'on ajoute un certain champ magnétique axial dans la géométrie d'un Z-pinch, le taux de croissance de l'instabilité va diminuer.

Un autre instrument de suppression de l'instabilité est le mécanisme du « chasse-neige » (S.M. Gol'berg et al. [28]). Quand une coquille commence à se serrer, elle collecte pendant son trajet de la matière et devient plus épaisse. En résultat la compression est beaucoup plus stable. Notamment, c'est ce phénomène qui est à la base de l'amélioration de la compression dans les schémas de coquilles multiples.

L'instabilité Rayleigh-Taylor pendant l'ablation (*par laser*) a ses propres spécificités. Le taux de croissance dans ce cas est plus faible que dans le cas classique : $\gamma_{ablation} \approx 0.9\sqrt{g_{eff}k} - 3uk$, u est la vitesse d'onde d'ablation dans la matière. Cette formule est presque phénoménologique. V.V. Bychkov et al. [29] l'ont utilisée dans une approche auto-cohérente afin d'obtenir une solution quasi-analytique.

S. Sen et al. [27] proposent d'utiliser le « shear » de la vitesse $V'(r)$ ou la courbure $V''(r)$ afin de supprimer les instabilités de basse fréquence ($\omega < \omega_{Bi}$). En particulier, ils étudient l'instabilité Rayleigh-Taylor et ils montrent que le signe de la courbure $V''(r)$ définit soit l'excitation soit la suppression de l'instabilité.

Il est intéressant d'étudier les problèmes dans les plasmas magnétisés où le gradient de la densité ∇n à travers la surface est fini, i.e. $\nabla n \neq \infty$. A.L. Velikovich [25] a utilisé la distribution modèle de la densité $n \sim z^m$ et ils ont obtenu la solution analytique pour le taux de croissance. Le profil continu de densité mène à la réduction du taux de croissance.

L'influence du rayon de Larmor fini sur l'évolution de l'instabilité Rayleigh-Taylor a été étudiée dans S.Sen et al. [27]. Le rayon fini change essentiellement le taux de croissance, principalement dans le sens de sa réduction.

Organisation de la thèse

Dans le premier chapitre il s'agit de décrire l'instabilité de type Rayleigh-Taylor dans les plasmas magnétisés. On étudie l'influence de la diffusion Hall du champ magnétique sur le taux de croissance de l'instabilité. On obtient des solutions auto-similaires pour l'élargissement du profil initial et pour l'onde de pénétration du champ magnétique.

Le chapitre 2 est consacré à la méthode de suppression de l'instabilité Rayleigh-Taylor par des oscillations externes du système. On considère le cas général de l'instabilité, c'est-à-dire deux fluides incompressibles visqueux dans le champ de gravitation. On obtient l'expression précise analytique du taux de croissance et on analyse l'influence des paramètres de « pompage » du système sur l'instabilité. Les résultats de ce chapitre peuvent être appliqués à une grande diversité de situations, en hydrodynamique classique, jusqu'aux plasmas astrophysiques.

Le chapitre 3 représente une tentative de comprendre l'effet de stabilité améliorée observée dans certaines expériences. Il se trouve que les implosions des coquilles à fils beaucoup plus efficace que les implosions des coquilles classiques (*gaz puff, liners etc.)* (T.W.L. Sanford et al., C.Deeney et al., R.B. Spielman et al. [30, 31, 32]). En utilisant un modèle simplifié de la surface gaufrée entre le plasma et le champ magnétique on résout le problème et on montre que le couplage des modes de l'instabilité en présence du champ magnétique peut effectivement réduire le taux de croissance. En concordance avec les expériences la stabilisation augmente au fur et à mesure que le nombre des fils croît.

Le chapitre 4 représente, en fait, une évolution du plasma dans un COP après les phénomènes décrits dans le chapitre 1. Autrement dit, on s'intéresse à la dynamique du plasma après la pénétration du champ magnétique dans le système. On montré la

possibilité d'existence d'une onde de raréfaction forte dans les cas avec et sans collisions. Cette onde se manifeste grâce à l'accélération des ions par le champ électrique Hall dans la couche de courant près de la cathode. Puis elle se propage à travers le plasma quasi-neutre vers l'anode et elle peut créer une chute de la densité derrière le front de plus d'un ordre de grandeur. C'est le phénomène de la rupture de plasma et de l'ouverture d'un COP. Le niveau de l'inhomogénéité du plasma peut être suffisamment bas afin de supporter la raréfaction qui est déjà forte. On a étudié l'exemple de l'onde la plus rapide existante pour certains profils de la densité du plasma et du champ magnétique.

Références

1. Lord Rayleigh, Scientific Papers, Vol.II (Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, 1900), p.200.
2. G.I. Taylor, Proc. R. Soc. London Ser. A 201 (1950) 192.
3. J.C. Allred, G.H. Blount, "Experimental studies of Taylor instability", Los Alamos National Laboratory report LA-1600 (1953).
4. D.H. Sharp, Physica 12D (1984) 3-18.
5. L. Smarr, J.R. Wilson, M.D. Smith, Ap. J. 246 (1981) 515.
6. M.L. Norman, L.Smarr, J.R. Wilson et al., Ap. J. 247 (1981) 52.
7. W.C. Mead, Phys. Rev. Lett. 34 (1975) 1273.
8. R.L. McCrory, L. Montierth, R.L. Morse et al., Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 336.
9. R.G. Evans, A.J. Benett et al., Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 1639.
10. M.H. Emery, J.H. Gardner et al., Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 677.
11. R.A. Gerwin, R.C. Malone, Nucl. Fusion 19 (1979) 155.
12. D.J. Lewis, Proc. R. Soc. London Ser. A 202 (1950) 81.
13. G. Birkoff, "Taylor Instability and Laminar Mixing", Los Alamos National Laboratory report LA-1862 (1955).
14. M. Mitchner, R.K.M. Landshoff, Phys. Fluids 7 (1964) 862.
15. M.S. Plesset, D.-Y. Hsieh, Phys. Fluids 7 (1964) 1099.
16. G.H. Wolf, Z.Physik 227 (1969) 291.
17. R.D. Richtmyer, Comm. Pure and Appl. Math. 13 (1960) 297.
18. S. Chandrasekhar, Hydrodynamics and Hydromagnetic stability (Oxforf Univ. Press, 1961), Chap.X.
19. R. LeLevier, G.J. Lasher, F. Bjorklund, "Effect of a Density Gradient on Taylor Instability", Lawrence Livermore Laboratory report UCRL-4459 (1955).
20. J.N. Hunt, Appl. Sci. Res. A 10 (1961) 45.
21. R. Menikoff, R.C. Mjolsness, .H. Sharp, C. Zemach, Phys. Fluids 20 (1977) 2000.
22. R. Menikoff, , R.C. Mjolsness et al., Phys. Fluids 21 (1978) 1674.
23. R.A. Axford, "Initial Value Problems of the Rayleigh-Taylor Instability Type", Los Alamos National Laboratory report LA-1321 (1951).

24. J.D. Huba, A.B. Hassam, P.Satyanarayana, Phys. Fluids B **1** (4), p. 931, 1989

25. A.L. Velikovich, Phys Fluids B **3** (2), p.492, 1991.

26. A.B. Bud'ko, M.A. Liberman, A.L. Velikovich, Phys. Fluids B **2** (6), p. 1159, 1990.

27. S. Sen, R.G. Storer, Phys. Plasmas **4** (10), p. 3731, 1997.

28. S.M. Gol'berg, A.L. Velikovich, Phys. Fluids B **5** (4)**,** p. 1164, 1993.

29. V.V. Bychkov, S.M. Golberg, M.A. Liberman, Phys. Plasmas **1** (9), p.2976, 1994.

30. T.W.L. Sanford, G.O. Allshouse, B.M. Marder et al., Phys.Rev.Lett. **77**, 5063 (1996).

31. C. Deeney, T.J. Nash, R.B. Spielman et al., Phys.Rev. E **56**, 5945 (1997).

32. R.B. Spielman, C. Deeney, G.A. Chandler et al., Phys. Plasmas, **5**, 2105 (1998).

CHAPITRE 1. PENETRATION AUTO-COHERENTE DU CHAMP MAGNETIQUE DANS LES PLASMAS.

Introduction

On étudie la dynamique du champ magnétique dominée par l'effet d'Hall. L'évolution de B dans le problème qui suit est essentiellement influencée par des fluctuations de la densité du plasma créées par ∇B^2. Deux problèmes sont considérés : l'onde auto-similaire non-linéaire de pénétration du champ magnétique et la fuite d'une petite onde–précurseur de l'onde convective.

L'un des phénomènes les plus remarquables et caractéristiques de l'EMHD (« *electronic magnetohydrodynamics* ») est la convection rapide du champ magnétique par le courant K.V. Chukbar et al., A.V. Gordeev et al., A.Fruchtman [1, 2, 3], décrite par les équations :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\frac{\mathbf{j}}{ne} \times \mathbf{B}) + \nabla \times \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = 0 \qquad (1)$$

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}, \ \sigma = \frac{ne^2}{m} \tau_e, \ \ \mathbf{j} = -en\mathbf{v_e} + Zen_i \mathbf{v_i} = -en\mathbf{u_c}$$

Les équations (1) sont obtenues à partir des équations MHD générales avec le terme Hall inclus et dans le cadre des approximations suivantes : la vitesse du courant u_c est très supérieure à la vitesse Alfven, les échelles caractéristiques du problème sont entre c/ω_{pe} et c/ω_{pi}, le plasma est quasineutre et les températures des ions et électrons sont assez faibles pour négliger la pression.

Les problèmes correspondants sont habituellement traités en considérant une distribution d'ions immobiles $n_i(\mathbf{r})$. Toutefois le phénomène en lui-même est extrêmement sensible au profil de variation de densité du plasma parce que c'est ce

profil qui détermine le mécanisme principal d'EMHD – la valeur du champ électrique d'Hall (*deuxième terme de l'équation (1)*). Cette dépendance forte est aussi à l'origine de toute une classe d'instabilités « rapides » des plasmas U.A. Igitkhanov et al, O.M. Drozdova et al., A.V. Gordeev et al. [4, 5, 6]. La distribution extrêmement inhomogène du courant dans les plasmas de densité variable mène à la croissance des perturbations initiales de la densité à cause de l'intensité de la force magnétique $\mathbf{j}\times\mathbf{B}$ qui est proportionnelle au champ $\mathbf{E}_{Hall}$.

Les deux remarques que nous venons de faire nous signalent qu'il est très important de prendre une approche auto-cohérente du problème, où le champ magnétique évolue et pénètre dans le plasma sur fond de perturbations de la densité créées par ce champ lui-même (*donc non-stationnaires*). Dans ce chapitre, on examinera ce processus dans le cadre de la géométrie plane (*Fig.1*):

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z, \quad \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0 .$$

Après avoir fait cette simplification, on peut réécrire l'équation (1) comme suit K.V. Chukbar et al., A.V. Gordeev et al. [1, 2] :

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{c}{8\pi e}\left\{B^2, \frac{1}{n}\right\} - \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta B = 0 . \tag{2}$$

Ici $\sigma = const$, la conductivité de plasma est supposée constante, $\{\ \}$ sont les crochets de Poisson sur x, y. On ajoute aux équations précédentes l'équation de continuité et l'équation du mouvement pour les ions (*le plasma est quasineutre*) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\mathbf{v}) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{nM_i}{Z_i}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\frac{B^2}{8\pi} . \tag{4}$$

Soit k le nombre d'onde des perturbations et l_x l'échelle caractéristique de variation spatiale moyenne du champ magnétique. On peut facilement voir que le système (2) – (4) avec les conditions {densité initiale $n = const$, champ magnétique $B = B(x)$ ($\mathbf{j}$ *parallèle* $\mathbf{e}_\mathrm{y}$) }, donne par une analyse de Fourier, dans la limite quasi-classique $kl_x \gg 1$, la relation de dispersion suivante A.V. Gordeev et al. [2, 6] :

$$\omega + \frac{V_A{}^2 k^2}{\omega^2}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u_c}) + i\frac{c^2k^2}{4\pi\sigma} = 0. \tag{5}$$

Ici $V_A \equiv B/\sqrt{4\pi n M_i / Z_i}$ est la vitesse d'Alfven et $u_c \equiv c/4\pi ne \cdot \partial B/\partial x$ est la vitesse du courant suivant $\mathbf{e}_\mathrm{y}$. L'équation (5) est valide si les inégalités suivantes sont vérifiées:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{u} >> \omega,\ \ k << \frac{\omega_{pe}}{c}.$$

La dernière de ces inégalités nous permet de négliger le terme $\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})/c$ de l'équation (1) (*il est évident que nous pouvons le faire puisque* $u_c \gg V_A$ *ou* $l_x \ll c/\omega_{pi}$ *comme nous l'avons dit ci-dessus*) et en plus d'éliminer l'inertie des électrons.

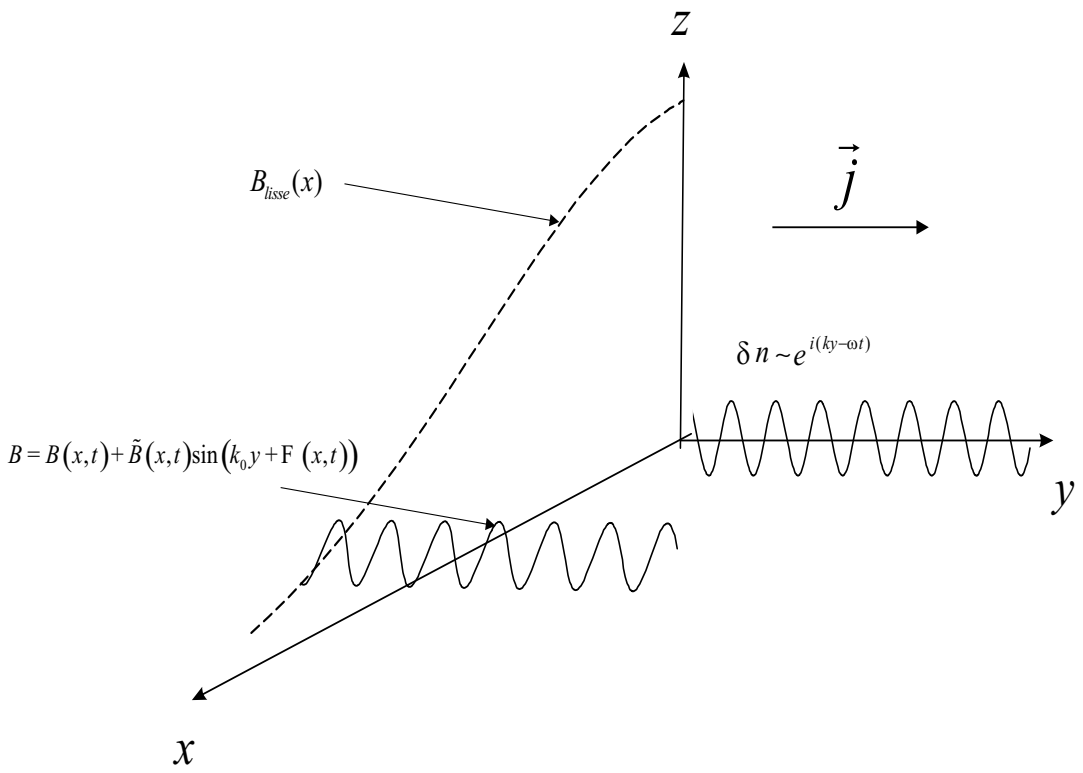

Fig.1. Géométrie générale du problème.

Si on évalue le taux de croissance γ donné par l'équation (5), il croît avec k – d'abord selon $\gamma \sim k$, puis selon $\gamma \sim \sqrt{k}$ (*à* $k \to \infty$) (*Fig.2*). C'est ce dernier cas, qui correspond à négliger le premier terme dans (5), qui fera l'objet de ce chapitre. Nous avons choisi ce cas premièrement parce que nous nous intéressons à l'effet de l'instabilité la plus rapide. De plus, ce cas est réalisé dans la limite où la diffusion du champ (*le dernier terme dans (5)*) a suffisamment de temps pour «connecter» ou bien «homogénéiser» le champ magnétique dans les régions dont la densité varie de δn. Par conséquent, au bout du compte nous avons une évolution unie macroscopique, contrairement aux cas considérés dans les travaux de L.I. Rudakov et al., A. Fruchtman et al., A.V. Gordeev [7, 8, 9].

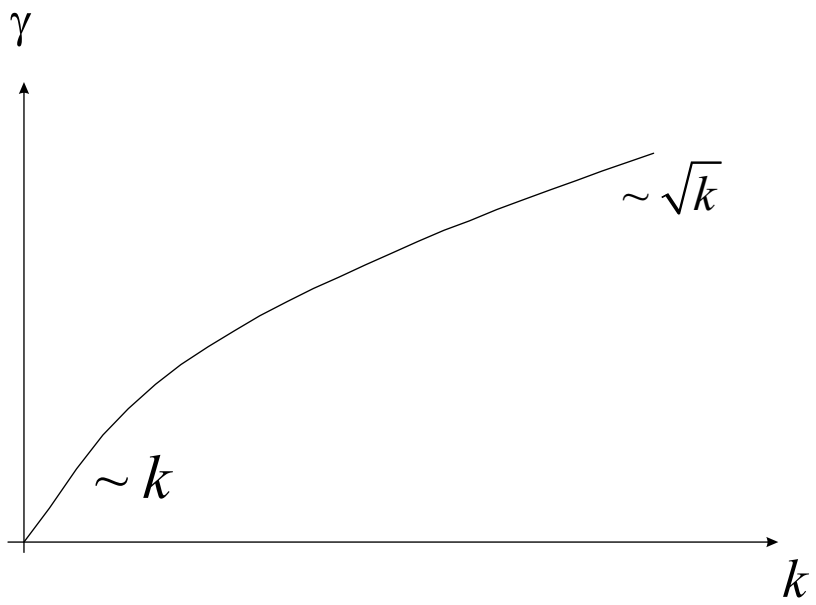

Fig.2. Taux de croissance de l'instabilité.

D'après (5), le taux de croissance est maximal pour $\mathbf{k}$ parallèle à $<\mathbf{j}>$ ($<\mathbf{j}>$ *est la moyenne spatiale de* $\mathbf{j}$) , c'est-à-dire que les perturbations croissantes de la densité dépendent principalement de la coordonnée y ($\delta n \propto \cos(ky)$). Dans un tel système la dynamique macroscopique du champ magnétique (*soit la dynamique moyennée sur une petite échelle* k^{-1} *le long de l'axe* y) selon x se trouve être celle de diffusion.

Notons que le coefficient de diffusion est différent du coefficient ordinaire ($c^2/4\pi\sigma$) – il est augmenté par le facteur $(\beta\,\delta n/n)^2$ K.V. Chukbar et al. [1] ($\beta \equiv \sigma B/nec = \omega_{Be}\tau$ *est le paramètre d'Hall*). Cette augmentation est due au grand terme $j_x \propto \beta\,\delta n/n\; j_y$, qui fluctue proportionnellement à $\cos(ky)$ ($j_y = \langle \mathbf{j} \rangle$). Donc δn augmente à cause de l'instabilité, ce qui provoque à son tour la croissance de la diffusion du champ magnétique et entraîne la diminution de la densité du courant moyen ($\partial\langle B\rangle/\partial x$). Parce que $\partial\langle B\rangle/\partial x$ est le terme qui détermine la valeur du taux de croissance de l'instabilité (*cf. éq.(5)*), au bout du compte on a une rétroaction et la loi exponentielle d'évolution de l'instabilité est remplacée, comme nous le montrerons, par une évolution plus lente (*dépendance de type* t^{α}). Ainsi, la dynamique auto-cohérente

que nous examinerons ici peut être considérée comme une suppression des instabilités de type Hall (*ou de type Rayleigh-Taylor*).

Afin d'éviter les malentendus il faut noter que l'on étudie l'influence de la diffusion auto-cohérente sur l'instabilité, contrairement au travail de N.F. Roderick et al. [10] où les auteurs ont examiné l'effet de la viscosité magnétique. La valeur de la diffusion auto-cohérente dans notre cas dépend principalement du niveau de perturbation de densité, c'est cette même dépendance qui en constitue la contribution-clef.

L'analyse détaillée du problème est facilitée du fait de la grande valeur du paramètre d'Hall β (*le plasma est fortement magnétisé*). La grande valeur β permet à la rétroaction sus-citée d'être importante malgré la petitesse de l'amplitude des fluctuations de la densité : $\delta n/n \ll 1$. C'est pourquoi on peut se contenter de rester dans l'approximation où les équations hydrodynamiques (3), (4) sont linéarisables.

Ainsi qu'habituellement dans le cadre de l'EMHD, la non-linéarité du champ magnétique ne complique pas excessivement l'analyse.

Cependant la résolution du système (2)–(4) n'est pas triviale : le système d'équations initial est formellement incorrect du point de vue mathématique car le taux de croissance $\gamma|_{k\to\infty} \to \infty$ S.V. Vladimirov [11]. Cela signifie que seules les fluctuations à grands k survivront après l'évolution du spectre initial des petites perturbations δn. Les perturbations à petits k n'auront pas assez de temps pour se développer.

Néanmoins, la recherche des solutions de ce système est assez importante pour des raisons physiques. Ainsi que pour des raisons de méthode, les exemples de solution d'équations EMHD auto-cohérentes sont très rares. De fait, le problème devient formellement correct lorsque l'on prend en compte l'inertie des électrons A.V. Gordeev et al. [2, 6] – il existe donc une limite naturelle haute de k ($k_{\max} \sim \omega_{pe}/c$) au spectre possible des fluctuations.

Au final, si l'on admet l'existence d'un $k_{\max}$, il n'y aura qu'un mode qui décrira le comportement asymptotique du système. L'existence de $k_{\max}$ n'a aucune raison mathématique. Il faudra donc toujours la justifier par les raisons physiques.

La suite du chapitre est composé des section suivantes :

Section 2 : «Modèle théorique», on propose un modèle physique et on décrit l'ensemble des équations utilisées tout au long de ce chapitre.

Section 3 : «Solutions auto-similaires», on propose une approche auto-similaire permettant d'obtenir une solution du problème en tenant compte des conditions initiales.

Section 4 : «Onde convective auto-cohérente», contrairement à la section III, les équations sont résolues pour un problème de conditions aux limites fixes.

Section 5 : conclusions et discussion par rapport aux données expérimentales des solutions obtenues.

Modèle théorique

Si l'on considère les fluctuations de la densité comme une fonction oscillante, il faut nécessairement prendre en compte la phase Φ. En effet, selon la relation de dispersion Eq. (5), à l'origine $\mathrm{Re}(\omega) \sim \mathrm{Im}(\omega)$. De plus, c'est grâce au changement de cette phase que l'instabilité est supprimée – les perturbations de la densité pendant l'étape non-linéaire ne sont plus en résonance avec les perturbations du champ magnétique.

Ainsi, les fluctuations de la densité peuvent être exprimées comme suit :

$$\delta n = \tilde{n}(x,t)\cos(k_0 y + \Phi(x,t)), \qquad l_x >> k_0^{-1}, \qquad \tilde{n} << n = \mathrm{const} \tag{6}$$

Ce type de dépendance mène à la division du champ magnétique au cours de son évolution en deux parties : celle décrivant les grandes échelles et celle décrivant des petites échelles (*oscillante sur* y) K.V. Chukbar et al. [1, 12] :

$$B_{total} = B(x,t) + \tilde{B}(x,t)\sin(k_0 y + \Phi(x,t))$$

Le champ magnétique de ce type est représenté sur la Fig. 3.

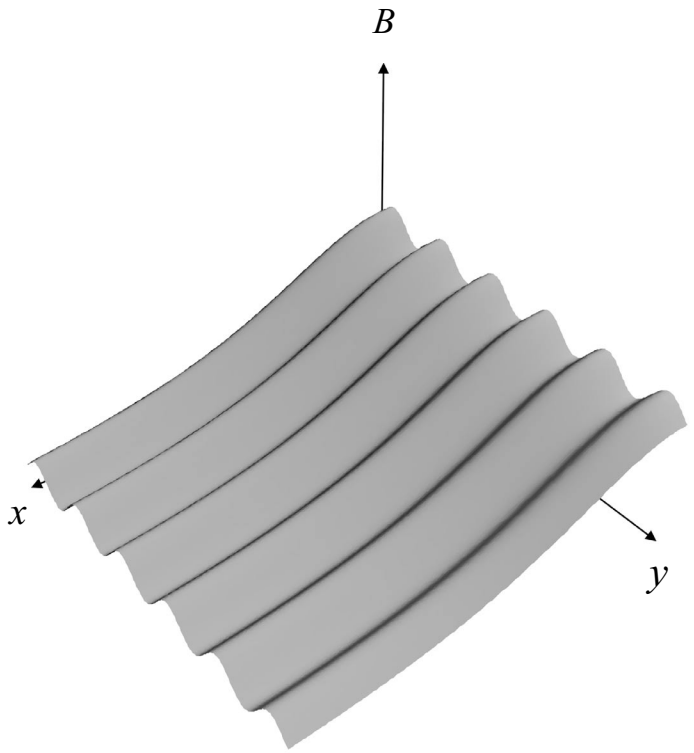

Fig. 3. Représentation simplifiée des deux échelles spatiales du problème : la grande échelle correspond aux variables « lisses » et la petite échelle aux variables oscillantes.

Après avoir substitué cette expression de B_{total} dans l'équation (2) on obtient pour les parties oscillantes et « lisses » ($\langle \cos^2 \rangle = \langle \sin^2 \rangle = 1/2$)

$$\tilde{B} = \frac{\tilde{n}}{n} \frac{\beta}{k_0} \frac{\partial B}{\partial x}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{c^2}{8\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta \tilde{n}}{n} \right)^2 \frac{\partial B}{\partial x}, \tag{8}$$

où le paramètre de Hall, $\beta \equiv \sigma B / nec$, est calculé à partir du champ lisse $B(x,t)$, ainsi, comme on le verra plus loin, que les vitesses du courant et d'Alfven.

Dans l'équation (7) on a négligé le terme $\partial/\partial t$ par rapport au terme $c^2k_0^2/4\pi\sigma$ (*ce qui correspond au choix* $\omega \ll \mathbf{k}\cdot\mathbf{u_c}$). On peut démontrer que cette approximation est vérifiée lorsque l'échelle de temps caractéristique du problème (*par exemple,* ω^{-1} *pour le cas linéaire*) se conforme à l'inégalité

$$\tau >> \frac{4\pi\sigma}{c^2k_0^2}.$$

Dans le cas où cette inégalité est satisfaite la diffusion du champ magnétique suivant y est suffisamment rapide pour faire en sorte que la dynamique du champ soit «homogène» le long de l'axe x. La condition $\tilde{B} \ll B_{total}$ que l'on a utilisée pour obtenir (8) est alors satisfaite automatiquement K.V. Chukbar et al. [1, 12]. De surcroît, comme le paramètre $\beta\tilde{n}/n >> 1$ est grand, le terme ordinaire de diffusion ($\frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta B$) a été omis. Ce terme n'est essentiel qu'aux fronts d'ondes examinées plus loin dans ce chapitre. Sa présence mène à la formation d'une légère traîne exponentielle sur le profil de B dans la région où $B \to 0$ sans changer la solution dans le domaine principal Ya. Zeldovich et al. [13].

Le système d'équations hydrodynamiques (3), (4) se ramène à une équation linéaire en δn :

$$\frac{\partial^2\delta n}{\partial t^2} + V_A^2\frac{\sigma}{nec}\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial\delta n}{\partial y} = 0. \qquad (9)$$

On a négligé ici le mouvement du plasma selon x, ce qui est possible pour $\mathrm{v}_x << l_x/\tau$. Cette inégalité est toujours vérifiée car $l_x \sim V_A\tau(\beta k_0 l_x)$ (*cf. éq. (9)*) et d'ailleurs, dans les régimes considérés $\beta \gg 1$, $k_0 l_x \gg 1$. On ramène l'équation Eq. (9) à deux équations – une pour les termes proportionnels à $\cos(k_0 t + \Phi(x,t))$ et une pour les termes proportionnels à $\sin(k_0 t + \Phi(x,t))$. De cette manière, le système

d'équations (8)-(9) détermine complètement les trois fonctions inconnues – B, $\tilde{n}$ et Φ. Dans les paragraphes suivants, on cherchera les solutions de ce système dans une hypothèse auto-similaire. Notre choix est conditionné par le fait (*mis à part une simplification substantielle du problème*) que les solutions auto-similaires sont attractrices pour les équations du type diffusion Ya. Zeldovich et al. [13]. On peut donc s'attendre à ce qu'elles se réalisent (*du fait de la présence de l'équation (8) dans le système*) pour une classe assez large de conditions initiales. En même temps il faut veiller à ce que toutes les restrictions et hypothèses que l'on a utilisées soient valides. En particulier, la condition de quasi-neutralité peut s'exprimer sous la forme $\nabla \mathbf{E}_{Hall} \sim k_0 j_x B/(nec) << \tilde{n}e$ ou bien

$$l_x >> \left(\frac{B}{ne}\right)^2 \beta k_0 . \tag{10}$$

Solutions auto-similaires

La solution auto-similaire la plus connue pour une seule équation de diffusion est la solution avec une source ponctuelle Ya. Zeldovich et al. [13]. Dans notre problème une telle solution correspond à l'existence au moment $t = 0$ d'un certain profil du $B(x)$ dans un plasma infini. Ce profil possède une certaine largeur caractéristique l_0 et $\int_{-\infty}^{+\infty} B dx \neq 0$ (*l'intégrale de l'équation* (8)). La solution que l'on examinera plus loin se forme après élargissement du profil l_0 ($l_x(t) >> l_0$) (*Fig.4, 5*). Cette affirmation est strictement applicable à une seule équation de diffusion, c'est-à-dire à l'équation (8) avec une fonction $\tilde{n}(x,t)$ donnée. Pour le système auto-cohérent (8)-(9) cette hypothèse paraît aussi très raisonnable. Autrement dit, on cherche une solution asymptotique (*à* $t \to \infty$) du système (8)-(9) avec δn défini par l'équation (6). Elle doit être symétrique (*pour* B) selon x et être conforme à la condition supplémentaire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B(x,t)dx = A \tag{11}$$

(*soit* $A > 0$).

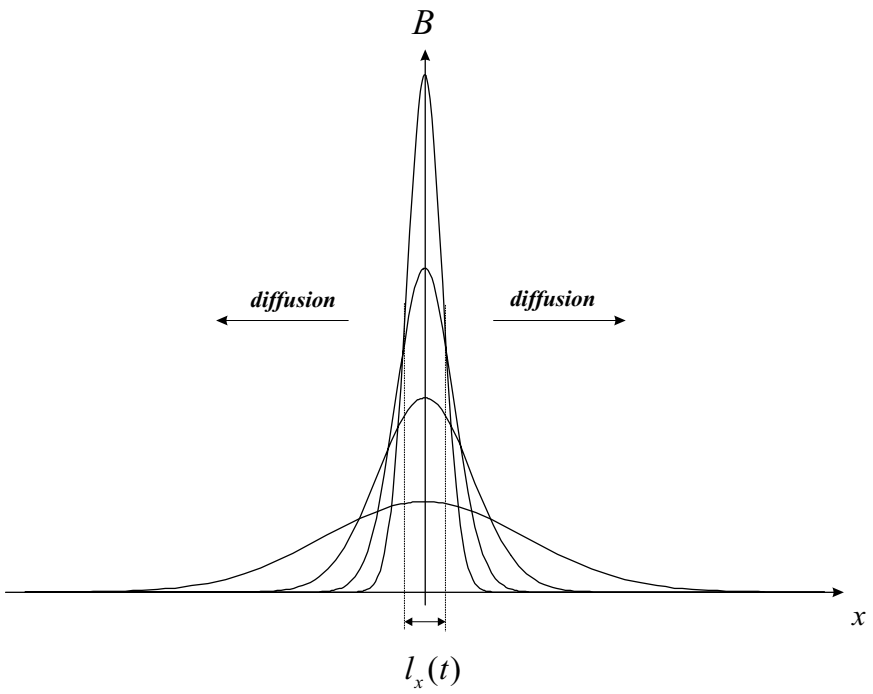

Fig.4. Evolution du champ magnétique.

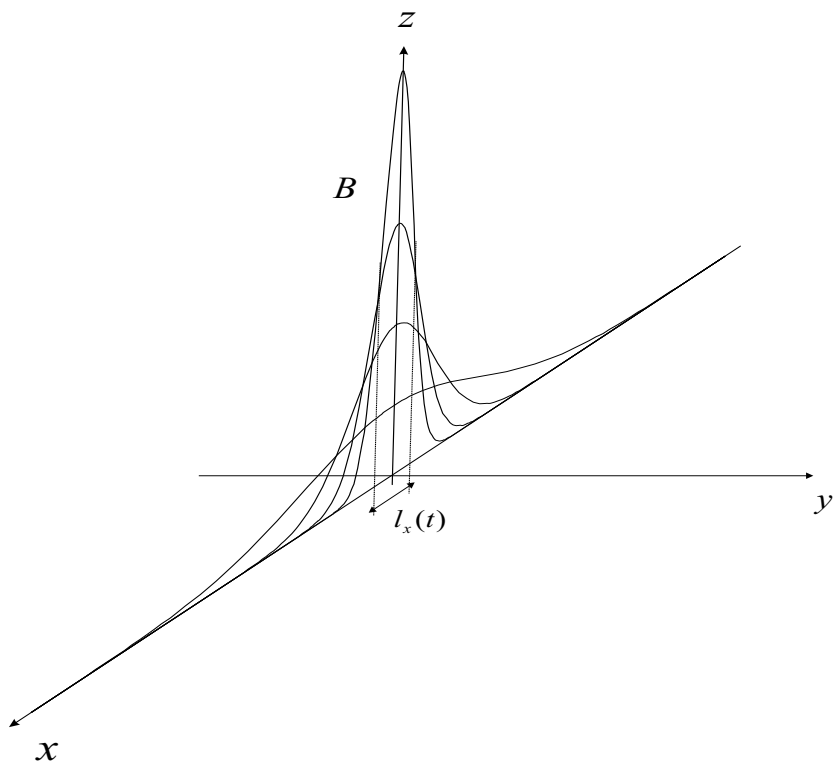

Fig. 5. Evolution du champ magnétique dans l'espace 3D.

On établit l'aspect général des variables auto-similaires en effectuant de simples estimations dimensionnelles. D'après (11), $B \propto l_x^{-1}$. D'un autre côté, l'équation (9) montre que la stabilisation de l'instabilité (*dont la croissance est de type fonction de puissance* t^{α}) se produit pour $B^3/l_x \propto t^{-2}$, ou bien $l_x \propto t^{1/2}$, tandis que $l_x^2 \propto B^2 \tilde{n} t$ (*éq. (8)*). On en conclut que $\tilde{n} \propto t^{1/2}$. Si on réitère les calculs en tenant compte de tous les coefficients on obtient les fonctions recherchées exprimées dans les termes de variables auto-similaires :

$$B = \frac{B_0}{k_0 l_x} b(\xi), \qquad \tilde{n} = n\left(2\frac{\omega_{pi}}{k_0 c}\frac{1}{\beta_0^{1/2}}\right)^{1/2} k_0 l_x N(\xi), \quad \Phi = \Phi(\xi)$$

$$B_0 = Ak_0, \quad \xi = \frac{x}{l_x}, \quad k_0 l_x = (V_{A0}\beta_0^{1/2} k_0 t)^{1/2} \tag{12}$$

Tous les paramètres avec l'indice 0 (β_0, V_{A0} *etc.*) sont déterminés à partir de B_0.

Le système (8)-(9) ($F' = \dfrac{dF}{d\xi}$) se transforme en :

$$-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b'\xi = (N^2 b^2 b')',$$

$$(\Phi'\xi)'\xi' + \frac{2N'\xi}{N}\Phi'\xi + 4b^2 b' = 0,$$

$$(N'\xi)'\xi - N(1 + (\Phi'\xi)^2) = 0.$$

La solution exacte n'a pu être trouvée que numériquement. Nous avons obtenu des solutions numérique en utilisant le logiciel Mathematica version 2.2. Le profil résultant de la solution $b(\xi)$ (*cf. Fig.6*) est typique des équations non-linéaires : $b(\xi) \equiv 0$ à $|\xi| > \xi_0$, où ξ_0 est la coordonnée du front de l'onde. En prenant en compte cette particularité, on peut simplifier quelque peu le système initial - intégrer partiellement les deux premières équations, puis il faut mettre le flux de diffusion $N^2 b^2 b'$ au front à zéro (*il n'y a pas de source ou de fuite de ce flux à* ξ_0). Introduisons la dérivée logarithmique de la phase $\Psi = \Phi'\xi$. Elle aussi doit être égale à zéro au front de l'onde (*pour la même raison*). On a déjà remarqué que $b(\xi)$ est une fonction symétrique ; $N(\xi)$ peut être aussi bien symétrique qu'antisymétrique (*par sa linéarité, l'équation (9) n'est pas sensible au signe de* N); Ψ, elle, est nécessairement antisymétrique (*les termes* $\partial B / \partial x$ *aux éqs.(5), (9) car l'incrément dépend bu signe de* $\partial B / \partial x$). Donc, on obtient enfin la solution dans la région $\xi > 0$

$$N^2 (b^2)' = -\xi \tag{13}$$

$$\Psi = \frac{1}{N^2}\int_{\xi}^{\xi_0}\frac{4N^2b^2}{\xi}b'd\xi = -\frac{2}{N^2}\int_{\xi}^{\xi_0}bd\xi \tag{14}$$

$$(N'\xi)'\xi - N(1+\Psi^2) = 0 \tag{15}$$

La valeur de ξ_0 est déterminée par la normalisation

$$\int_0^{\xi_0} b(\xi)d\xi = \frac{1}{2} \tag{16}$$

Il est aisé de déterminer les asymptotes des solutions (13)–(16). Pour $\xi > \xi_0$, l'équation (15) nous donne

$$N = C_1\xi + C_2\xi^{-1}$$

Cette expression correspond à l'évolution des perturbations initiales d'une manière «inertielle» ($\tilde{n} \propto C_1 + C_2 t$, *cf. (9) quand* $B = 0$). Dans ce problème on devrait logiquement avoir $\tilde{n} \to 0$ pour $x \to \infty$, par conséquent $C_1 = 0$. Quant à C_2, on peut poser $C_2 = 1$ sans réduire le problème (*des valeurs de* C_2 *différentes ne mènent qu'au changement de facteur d'échelle dans (12)*) . Ainsi, les asymptotes près du front sont:

$$N = \frac{1}{\xi}, \qquad b = \frac{1}{2}(\xi_0^4 - \xi^4)^{1/2}, \qquad \Psi = -\frac{8}{3}\xi_0^{7/2}(\xi_0 - \xi)^{3/2}$$

Dans la région $\xi \to 0$ le profil $b(\xi)$ s'aplatit et l'influence du champ magnétique sur la dynamique de la densité devient à nouveau très faible. Pour cette raison, le comportement de δn dans cette région est analogue au cas examiné précédemment. On

déduit de l'équation (15) que la fonction $N(\xi)$ est monotone sur tout l'intervalle $\xi > 0$. Alors pour la région $\xi \to 0$, $\xi > 0$

$$N = \frac{C}{\xi}, \quad b^2 = b^2(0) - \frac{1}{4}\frac{\xi^4}{C^2}, \quad \Psi = -\frac{2}{C^2}\xi^2, \quad C > 1$$

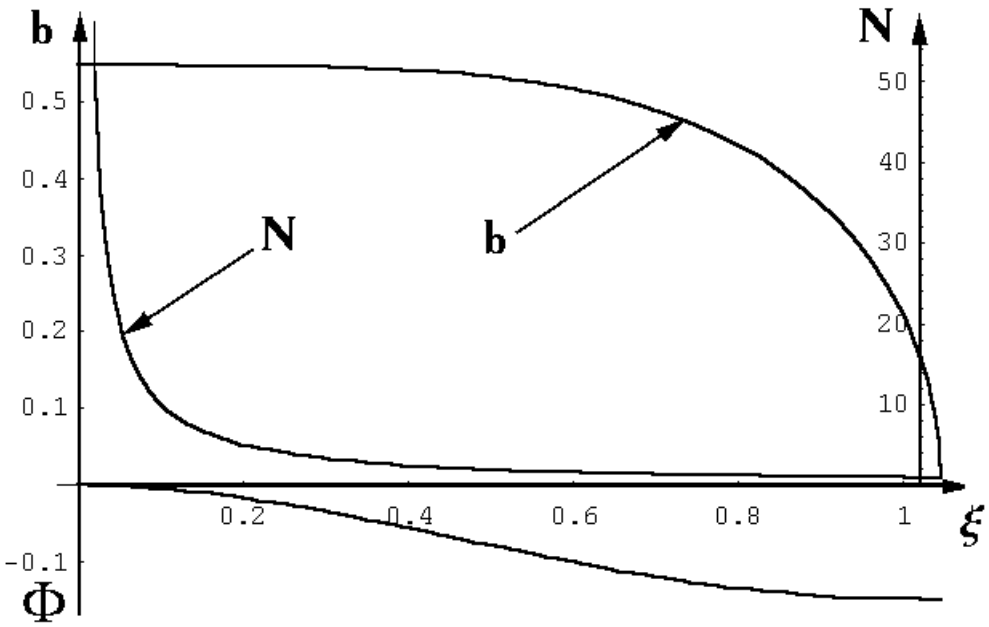

Fig. 6. Solution auto-similaire. Les paramètres sont :

$\xi_0 = 1{,}046, \quad C = 1{,}0065, \quad b(0) = 0{,}547, \quad \Psi(\xi_0) = -0{,}15$.

Bien entendu, en réalité ces solutions sont perturbées d'une façon non-autosimilaire sur le front et près de $\xi \to 0$. Notamment, au niveau du front, l'influence de la diffusion linéaire est prépondérante et donc il existe une traîne exponentielle de $b(\xi)$ (*Il est remarquable que, dans ce seul cas particulier, cette traîne–est tout de même autosimilaire*). Il n'y a pas de croissance infinie de $N(\xi)$ dans le voisinage de $\xi = 0$

non plus, car elle est limitée par des instabilités hydrodynamiques. Néanmoins si l'étendue des paramètres de réalisation est suffisante (*cf. ci-dessous*), ces modifications n'empêchent pas la formation des asymptotes obtenues, et encore moins n'affectent-elles la solution dans la région principale, où les perturbations de la densité augmentent et l'instabilité se stabilise. Par conséquent, l'image de la diffusion auto-cohérente du champ magnétique est proche de celle trouvée.

Il ne reste plus qu'à vérifier la validité des suppositions utilisées en transformant le système original. Ce sont justement les paramètres de réalisation nécessaires sus-cités. Pour cela il faut mettre les « scalings » de (12) aux inégalités cf. plus haut. Dans la région principale $b(\xi) \sim N(\xi) \sim \Phi(\xi) \sim 1$, l'échelle caractéristique τ est de l'ordre de t. La condition de « homogénéisation » du champ magnétique ($\tau \gg 4\pi\sigma / c^2 k_0^2$) dans des régions de δn différents, et la condition de linéarité des fluctuations de la densité ($\tilde{n} \ll n$) impliquent que:

$$1 << \frac{k_0^2 c^2}{\sigma} t << \left(\frac{k_0 c}{\omega_{pi}}\right)^2 \frac{1}{\beta_0} \text{ ou } \beta_0^{3/2} \frac{\omega_{pi}}{k_0 c} << (k_0 l_x)^2 << \beta_0^{3/2} \frac{k_0 c}{\omega_{pi}}. \tag{17}$$

La condition de prédominance de la diffusion autosimilaire non-linéaire ($\beta \tilde{n} / n \gg 1$) et la possibilité de négliger v_y dans (1), (2) ($u_c >> (k_0 t)^{-1}$) impliquent :

$$\beta_0^{1/2} << \frac{k_0 c}{\omega_{pi}} << \beta_0^{3/2} \tag{18}$$

Il est évident que l'inégalité (18) ne peut être vérifiée que si $\beta_0 \gg 1$. La partie gauche de (18) (*conditionnée par* v_y) laisse une assez large « fenêtre» de paramètres. La condition de quasi- neutralité (10) est toujours vérifiée pour (17) si

$$\omega_{pi}\tau_e >> \left(\frac{k_0 c}{\omega_{pe}}\right)^2 . \tag{19}$$

Il existe d'autres types de solutions autosimilaires pour des conditions initiales différentes de celles que l'on a déjà examinées.

A titre d'exemple on peut prendre un profil initial antisymétrique du champ magnétique ($B(x) = -B(-x)$) (*Fig. 7*). Dans ce cas $A = 0$ (*cf. eq. (11)*) et au lieu de A on a une autre grandeur P.

La quantité P est conservée pour les deux moitiés du profil :

$$\int_0^\infty xB(x,t)dx = P .$$

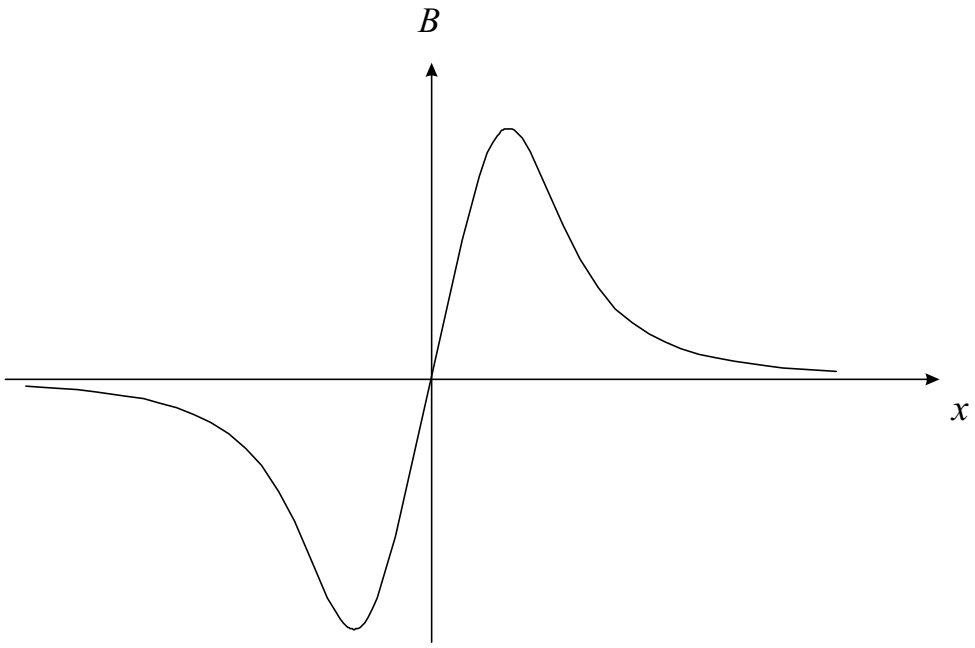

Fig. 7. Exemple d'un profil initial antisymétrique du champ magnetique.

Au bout du compte cette situation évoluera vers une solution asymptotique de type dipôle Ya. Zeldovich et al. [13]. La répartition des variables auto-similaires pour ce problème sera

$$B_x \propto l_x^{-2}, \quad l_x \propto t^{2/7}, \quad \tilde{n} \propto t^{5/14} \text{ (cf. (12)).}$$

La solution ressemble à celle représentée sur la Fig.6 mis à part la chute brutale du profil $b(\xi)$ vers zéro quand $\xi \to 0$ (*la solution est antisymétrique*). Il existe un échange entre les moitiés droite et gauche de ce profil, donc le flux de diffusion au point $\xi = 0$ n'est pas nul (*contrairement au point* $\xi \to \xi_0$). Dans chaque moitié du profil d'après les scalings cf. plus haut

$$\int_0^\infty B dx \propto t^{-2/7} .$$

D'autres types de solutions auto-similaires existent, toutefois ils ont tous un défaut : dans tous ces cas, le champ magnétique se propage sur un fond déjà préparé. Même dans la région où $B \equiv 0$ le profil de la densité est auto-similaire, bien que les perturbations n'y soient pas encore parvenues. Cependant, grâce aux propriétés des équations de diffusion sus-citées on peut espérer que l'abandon de cette restriction n'amène qu'une transformation minime de la solution autour du front d'onde sans modifier la région la plus intéressante du point de vue physique – là ou la valeur de ∇B^2 est grande.

Néanmoins, il est utile d'examiner les systèmes exempts de ce défaut, ce que l'on se propose de faire dans la section suivante.

Onde convective auto-cohérente

Dans cette section on va examiner le problème avec gradient de densité de plasma. Cela se traduit par le fait que les électrons transportant le courant se resserrent au cours du mouvement ($\langle \mathbf{j} \rangle \cdot \nabla n > 0$). Il est bien connu K.V. Chukbar et al., A.V. Gordeev et al., A.Fruchtman [1,2,3] que dans le cadre d'EMHD se forme alors une onde convective de pénétration du champ magnétique (*Fig.8*). Cette onde se propage dans un plasma

avec une vitesse constante qui dépend de la valeur du gradient. En géométrie cylindrique ($\mathbf{B} = B\mathbf{e}_\varphi, \quad \partial/\partial\varphi \equiv 0$) les crochets de Poisson (2) contiennent nr^2 au lieu de n et donc cet effet a lieu même si $n = \text{const}$.

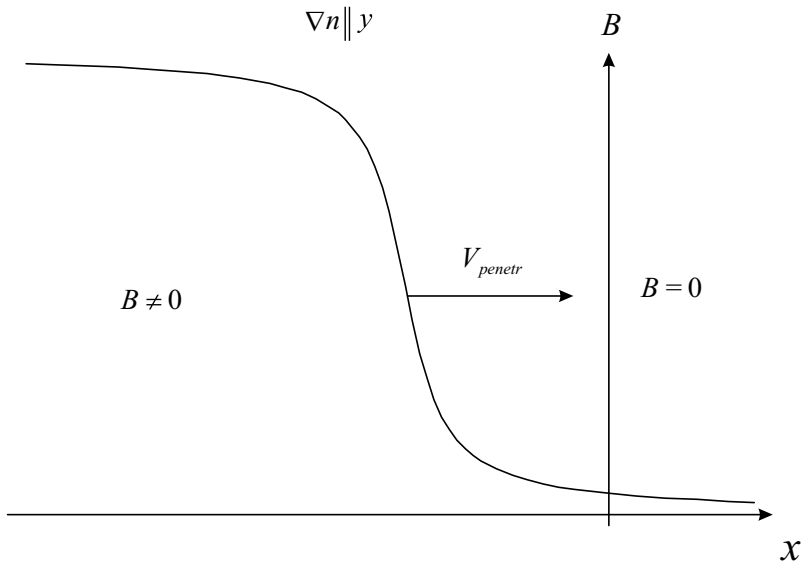

Fig 8. L'onde convective de pénétration du champ magnétique (KMC).

Cela signifie que dans ce cas précis, contrairement au paragraphe précédent, c'est non pas le problème principal, mais le problème aux limites (*dans le sens mathématique du terme*) qui passe au premier plan. C'est le problème de la translation du champ magnétique B_0 dans un milieu depuis la frontière.

Dans cette situation, l'instabilité rapide de petite échelle ne doit pas avoir le temps d'influencer le profil lisse $n(y)$. Elle provoque seulement l'augmentation du coefficient de la diffusion de la composante lisse du champ magnétique. Elle ne doit par conséquent pas modifier la vitesse de l'onde de pénétration, mais agir sur la forme et la largeur du front de l'onde seulement. Les études analytiques présentées dans cette section confirment cette conclusion dans ses grands traits, mais découvrent à la fois des particularités non négligeables liées à la rapide croissance du coefficient de diffusion

$D_{eff} \propto B^2 \left\langle (\delta n)^2 \right\rangle$ sur le front. Cette croissance est le résultat de l'évolution auto-cohérente de l'instabilité.

Ainsi, si l'on utilise dans l'éq. (2) l'expression suivante pour n

$$n = n(y) + \tilde{n}\cos(k_0 y + \Phi),$$

et si on réitère tous les calculs de la section précédente, les éq. (7) et (9) se conservent ; en revanche, l'équation (8) devient

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \kappa \frac{\partial B^2}{\partial x} = \frac{c^2}{8\pi\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta\tilde{n}}{n}\right)^2 \frac{\partial B}{\partial x} \tag{20}$$

$$\kappa = \frac{c}{8\pi e}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{n}.$$

Supposons que le profil de la densité n est assez lisse, alors $\kappa(y) = \text{const}$ et $\partial(1/n)/\partial y = 1/(nL)$ (*cela est possible pour* $L \gg l_x$). Ecrivons les fonctions inconnues en notation autocohérente :

$$B = B_0 b(\eta), \quad \tilde{n} = n\left(\frac{l}{L}\frac{1}{\beta_0}\right)^{1/2} N(\eta), \quad \Phi = \Phi(\eta),$$

$$\eta = \frac{x - ut}{l}, \quad k_0 l = \frac{1}{4}\left(\frac{c}{\omega_{pi}L}\right)^2 \frac{1}{\beta_0}, \quad u = \kappa B_0 = \frac{V_{A0}}{2}\frac{c}{\omega_{pi}L}. \tag{21}$$

Dans ces expressions n est déjà considérée constante, b varie le long de l'onde de l'unité 1 quand $\eta \to -\infty$ à zéro. Apres avoir résolu les équations (20) , (9) on obtient

$$-b' + (b^2)' = (b^2 N^2 b')',$$

$$\Phi'' + \frac{2N'}{N}\Phi' + b^2 b' = 0,$$

$$N'' - N\Phi'^2 = 0.$$

Puisque le cas examiné est un cas de diffusion non-linéaire (*comme celui représenté sur Fig.6*), $b \equiv 0$ devant le front de l'onde (*placé à* $\eta = 0$ *pour des raisons de simplicité*). En intégrant partiellement à nouveau ce système on obtient ($\psi = \Phi'$, *cf. (13)-(15)*)

$$b^2 N^2 b' = b^2 - b, \tag{22}$$

$$\psi = \frac{1}{N^2}\int_{\eta}^{0} (b^2 - b)d\eta, \tag{23}$$

$$N'' - N\psi^2 = 0. \tag{24}$$

Ces équations décrivent alors l'onde convective du champ magnétique qui pénètre dans un plasma avec des perturbations initiales données de la densité N_0 (*c.à.d.,* $N \equiv N_0$ *lorsque* $\eta > 0$) . Le niveau de ces perturbations initiales est un paramètre primordial du problème.

Premièrement, on va considérer le cas $N_0 \ll 1$. Selon les équations (5) ou (9), le taux de croissance de l'instabilité $\gamma \sim l_x^{-1/2}$ (l_x *ici est la largeur du front, et* $l_x \propto D_{eff}$, le coefficient de diffusion non-linéaire $D_{eff} \propto N_0^2 b^2(\eta) \Rightarrow l_x \propto N_0^2$), le temps caractéristique du processus est de l'ordre de l_x / u. Donc, même si l'on ne prend pas en compte la stabilisation, l'exposant exponentiel (*de l'expression* $e^{\int \gamma dt}$) est $\int \gamma dt \propto l_x^{1/2} \propto N_0$. Dans ce cas l'instabilité n'a pas le temps de se développer (*c'est-à-dire* $N \simeq N_0$ *partout*) et le profil de l'onde est globalement similaire à celui de l'onde

ordinaire (K.V. Chukbar et al., A.V. Gordeev et al., A.Fruchtman [1,2,3]) (*avec le coefficient de diffusion non-linéaire* $D_{eff} \sim N_0^2 b^2(\eta)$.

Si, au contraire, $N_0 \gg 1$, la situation est radicalement différente. A cause de la croissance rapide des fluctuations l'onde s'étend et donne enfin naissance à un précurseur d'amplitude $b \ll 1$. Ce précurseur se propage avec beaucoup d'avance sur la partie où le champ magnétique est $b \sim 1$ (*l'onde principale*). Ce phénomène est présenté schématiquement sur la Fig. 9.

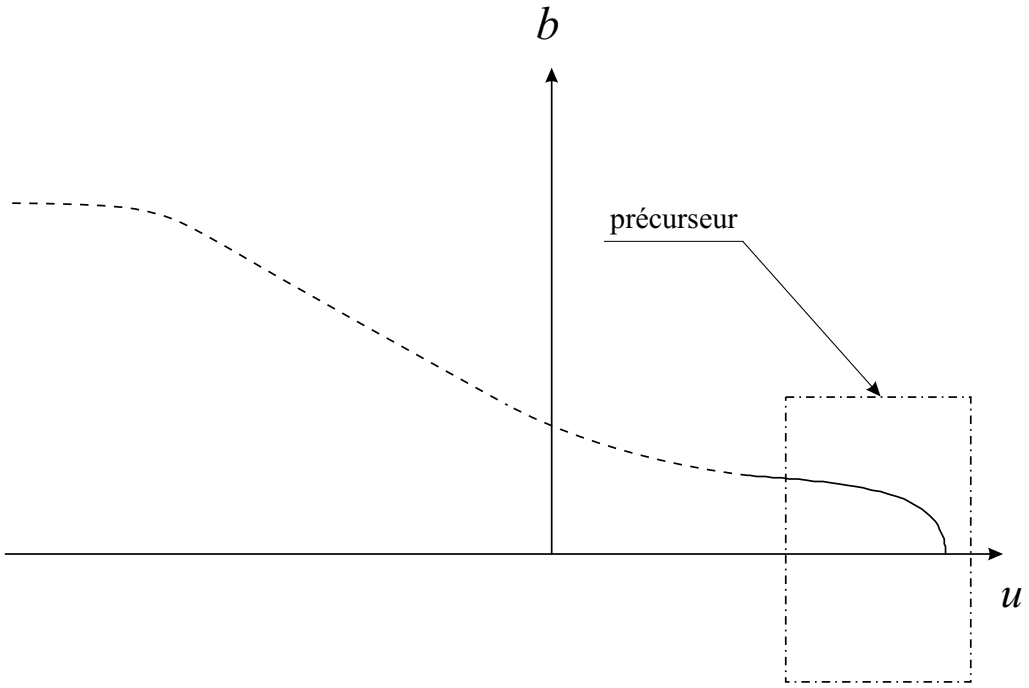

Fig. 9. Le précurseur et l'onde principale.

On va examiner le précurseur dans les deux régions asymptotiques : $\eta \to 0$ et $\eta \to -\infty$. Dans la première région, près du front de l'onde ($\eta \to 0$), le champ magnétique $b \to 0$ et $N \simeq N_0$. Les équations (22), (23) donnent :

$$b = \frac{2|\eta|^{1/2}}{N_0}, \qquad \psi = -\frac{(2|\eta|)^{3/2}}{3N_0^3}.$$

L'expression (24) permet de déterminer le domaine d'existence de ce régime. N commence à différer substantiellement de sa valeur initiale N_0 quand $|\psi\eta| \sim 1$, autrement dit, lorsque

$$\eta \sim -N_0^{6/5}, \qquad b \sim N_0^{-2/5},$$

ce qui assure en effet l'inégalité $b \ll 1$ à condition que $N_0 \gg 1$.

La deuxième région à étudier est $\eta \to -\infty$ (*en fait,* $|\eta| \gg N_0^{6/5}$), et se caractérise par : $b \to b_0 = KN_0^{-2/5}$ $(K \sim 1)$. Le flux de diffusion, selon (22), ne tend pas vers zéro :

$$b_0^2 N_0^2 b' = -b_0 = \text{const}.$$

Cela signifie que le précurseur est « nourri » à travers le flux par le champ magnétique principal. Les asymptotes ici sont :

$$\psi = \frac{b_0\eta}{N^2}, \quad N = -(2b_0)^{1/2}\eta \ln^{1/4}|\eta|, \quad b = b_0 + \frac{1}{2b_0^2}\frac{1}{\eta \ln^{1/2}|\eta|}.$$

Ces formules montrent que l'instabilité dans cette région est saturée, que la vitesse de courant et le gradient du champ magnétique sont petits, et que les fluctuations augmentent selon la loi balistique ($\tilde{n} \propto t$). On peut en conclure que dans un problème convectif et auto-cohérent l'instabilité se manifeste par un saut brusque du fond initial de la densité (*à l'échelle de* $N_0^{6/5} l$). La solution numérique du problème est représentée sur Fig.10. Selon les calculs numériques, $K \simeq 1{,}8$.

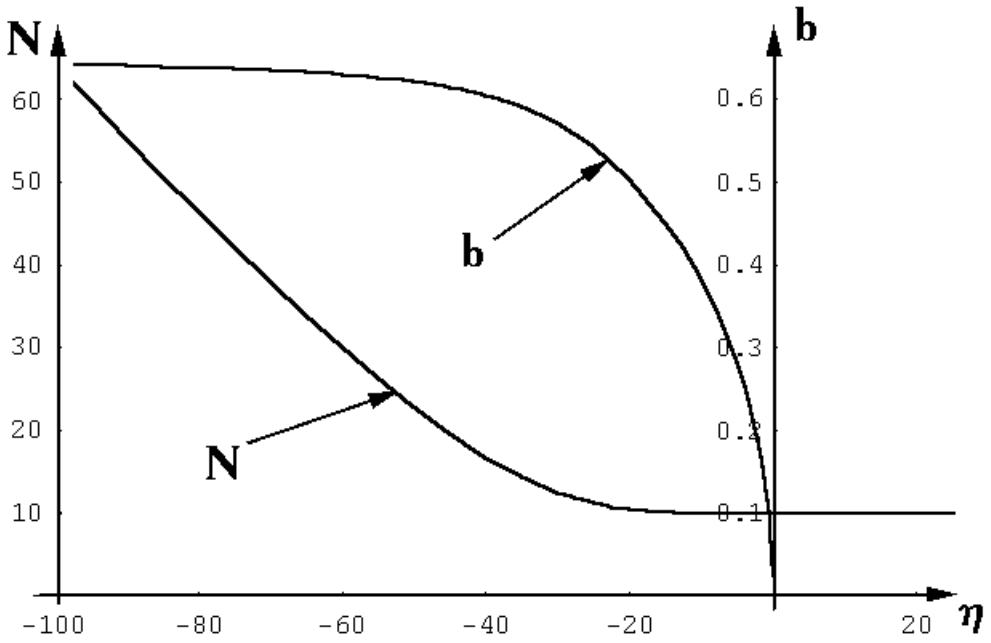

Fig. 10. Solution avec $\nabla n_0 \neq 0$.

Cette distinction frappante entre le cas ordinaire d'une onde non-linéaire (*où* $b \to 1$ *quand* $\eta \to -\infty$) et notre résultat est conditionnée par la rapide croissance de diffusion du champ magnétique dans la région $N \to \infty$. Puisque la largeur du front de l'onde est proportionnelle à D_{eff} (K.V. Chukbar et al., A.V. Gordeev et al., A.Fruchtman [1,2,3]), cette croissance rapide empêche que le front soit formé entièrement. Du point de vue mathématique tout se ramène à la convergence rapide de l'intégrale $\int_{\eta}^{0} D_{eff}^{-1} d\eta$ quand $\eta \to -\infty$. Si la valeur D_{eff} est limitée, cette intégrale diverge. Cette divergence assure le retour du champ magnétique vers sa valeur «normale» , 1, et l'annulation du flux de diffusion pour $\eta \to -\infty$.

En réalité, des phénomènes physiques (*tels que les instabilités hydrodynamiques non-linéaires*) limitent la croissance de D_{eff}. Grâce à ces phénomènes $b \to 1$ quand $\eta \to -\infty$, mais cette transition a lieu en-dehors de la région décrite par les équations (9) ((22)–(24)). L'instabilité examinée n'existe plus dans cette région, inutile donc de l'étudier.

Déterminons les limitations des solutions d'une manière explicite ; pour cela, il faut tenir compte des relations existantes dans le régime que l'on étudie : $b \sim b_0 << 1, \quad N \sim N_0, \quad \tau \sim l_x/u, \quad l_x \sim N_0^{6/5} l$. La « homogénéisation » du champ magnétique et la linéarité des fluctuations de la densité impliquent :

$$\frac{\beta_0}{N_0^{3/5}}(k_0 L)^{1/2} << \frac{k_0 c}{\omega_{pi}} << \frac{\beta_0}{N_0}(k_0 L)^{3/2}. \tag{25}$$

La possibilité de négliger v_y dans l'équation (2) s'écrit :

$$k_0 L >> N_0^{2/5}. \tag{26}$$

Il existe une « fenêtre » de paramètres où les inégalités (25) et (26) sont valides. La dominance de la diffusion non-linéaire et la condition de négligence de la dépendance en y dans l'éq. (20) s'écrivent

$$\frac{(k_0 L)^{3/2}}{N_0^{3/5}} << \frac{k_0 c}{\omega_{pi}} << \frac{(k_0 L)^{3/2}}{N_0^{3/5}}\beta_0, \tag{27}$$

ce qui est n'est, encore une fois, possible que si $\beta_0 \gg 1$. Enfin, la condition (10) se transforme en

$$\frac{k_0 c}{\omega_{pi}} >> \frac{B_0}{ne}\frac{k_0 \beta_0}{N_0^{3/5}} \text{ ou } \omega_{pi}\tau_e << \frac{1}{N_0^{3/5}}\left(\frac{B_0}{nmc^2}\right)^2.$$

Cette inégalité ne rétrécit pas la « fenêtre » (25) si

$$k_0 L >> \left(\frac{B_0 k_0}{ne}\right)^2. \tag{28}$$

Il existe une « fenêtre » de paramètres où les inégalités (25) et (27) sont valides. Il existe encore une limitation de la réalisation pratique, spécifique de l'onde convective. Cette limitation est liée au choix même du type de solution auto-similaire ($(x-ut)$), c'est-à-dire au rôle physique du gradient moyenné de la densité ($\kappa \neq 0, \quad L \neq \infty$!)K.V. Chukbar et al., A.V. Gordeev et al. [1, 2]. La comparaison directe des résultats de la section 3 (*où* $\kappa = 0$) et de la section 4 est impossible à cause des différences essentielles de la formulation du problème. Ces différences sont abordées au début de la section 4. La formation de l'onde de translation est finie (*or, l'onde devient auto-similaire*) quand cette onde s'est déplacée de sa propre largeur ($\sim lN_0^{6/5}$) à partir de la frontière vers l'intérieur du plasma. Cette remarque impose encore une condition sur le temps de réalisation du régime auto-similaire (*présenté sur la Fig. 10*) : pour un niveau fixé des perturbations initiales $\tilde{n}_0 / n$, le parcours de l'onde $ut >> lN_0^{6/5}$ s'écrit

$$\omega_{Bi} t >> \beta_0^{1/5} \left(\frac{\omega_{pi}}{k_0 c} \right)^{2/5} \left(\frac{\omega_{pi} L}{c} \right)^{4/5} \left(\frac{\tilde{n}_0}{n} \right)^{6/5} . \tag{29}$$

L'expression (29) rend impossible la transition vers la limite $L \to \infty$ dans la présente solution.

Conclusion

Le résultat principal de ce chapitre est la démonstration de la possibilité de résoudre les problèmes auto-cohérents EMHD en présence d'inhomogénéités créées par l'évolution du système lui-même. Il s'agit aussi de l'influence de la dynamique auto-cohérente sur l'instabilité de type Rayleigh-Taylor. Notamment, la prise en compte du fait que le problème est auto-cohérent entraîne la stabilisation de cette instabilité. L'utilisation de paramètres faibles appropriés (*les inégalités (25) - (29)*) nous permet d'avancer dans la description analytique de situations pratiques, suffisamment pour

décrire des phénomènes non-triviaux tels que l'onde non-linéaire autosimilaire ou la fuite d'un précurseur à faible amplitude à partir de l'onde principale.

Nous pouvons essayer de comparer nos résultats directement aux données expérimentales sur les commutateurs à ouverture de plasmas (*COP*) ou «plasma opening switches» (S. Alexiou et al., A. Chuvatin et al. [14, 15]). Dans ces expériences les limites de validité d'EMHD sont déjà bien connues, néanmoins nous ne disposons que d'une description imprécise des phénomènes. Le problème est l'absence de données, très importantes pour la théorie des propriétés des plasmas. Par exemple, le paramètre d'Hall β n'est jamais connu de manière précise parce que l'on ne peut maîtriser les effets anormaux dans la résistance de plasma (*c'est-à-dire dans* τ_e). De même pour les mesures des fluctuations de la densité, surtout celles de petite échelle. Le rôle vague du chauffage des électrons dans la dynamique EMHD auto-cohérente du champ magnétique, contribue à aggraver encore les incertitudes mentionnées ci-dessus. Formellement, la dissipation d'énergie électromagnétique j^2/σ doit être accompagnée par la transformation de cette l'énergie dissipée en énergie thermique de chauffage des électrons. En conséquence, la pression s'écrit $p = nT_e \sim B^2$, ce qui à son tour requiert la prise en compte des termes supplémentaires dans l'équation (1). Cependant ces termes ne sont généralement pas inclus dans le système d'équation EMHD car les températures ne sont pas aussi élevées dans les expériences de COPS, Alexiou et al., A. Chuvatin et al. [14, 15]. On explique habituellement ce désaccord par un refroidissement par rayonnement des électrons et par la fuite des électrons le long de l'axe $\mathbf{B}$. D'ailleurs, une analyse plus profonde A.S. Kingsep et al. [16] montre que même s'il n'y a pas de refroidissement, la valeur de p ne dépasse pas $1/3$ de $B^2/8\pi$. Par conséquent, l'image EMHD du phénomène est très peu modifiée alors que l'avantage qu'on a à travailler avec l'ensemble des équations simplifiées est considérable.

Malgré les difficultés rencontrées, l'image du phénomène (*bien que simplifiée*) obtenue dans ce chapitre promet d'être très intéressante. Par exemple, nous avons une indication de croissance forte du coefficient de la diffusion (*la première inégalité dans (18)*) du champ magnétique même dans les plasmas avec perturbation initiale δn

petite. Mais les résultats les plus intéressants sont ceux liés à l'onde convective. Cette onde est bien observée dans les expériences de COP. La formation du précurseur d'une petite amplitude (*si le niveau initial des perturbations de la densité de petite échelle est suffisant*) peut influencer l'évolution du déclenchement de plasma dans un COP. En fait, ce processus peut même expliquer l'absence de chauffage fort mentionné ci-dessus : l'énergie électromagnétique transportée à travers le milieu est très inférieure à l'énergie initiale $B_0^2/(8\pi)$.

Références

1. Chukbar K.V., Kingsep A.S., Yankov V.V., Reviews of Plasma Physics, ed. by Kadomtsev B.B. (Consultants Bureau, New York 1990), **16**, 243.
2. Gordeev A.V., Kingsep A.S., Rudakov L.I., Phys. Rep. 1994, **243**,215
3. Fruchtman A., Phys. Fluids B 1991, **3**, 1908.
4. Igitkhanov U.A., Kadomtsev B.B., Sov. Phys. Doklady 1970, **191**, 1018.
5. Drozdova O.M., Gordeev A.V., Grechikha A.V., Gulin A.V., Fizika Plazmy (in Russian) 1991, **17**, 650.
6. Gordeev A.V., Grechikha A.V., Fizika Plasmy (in Russian) 1992, **18**, 3.
7. Rudakov L.I., Seyler C.E., Sudan R.N. Phys. and Contr.Fusion, 1991, vol. 14, p.171.
8. Fruchtman A., Rudakov L.I., Phys.Rev.Lett., 1992, vol. 69, p.2070.
9. Gordeev A.V.,Fizika Plasmy (in Russian), 1994, **20**, 955.
10. Roderick N.F., Hassey T.W., J. Appl.Phys., 1986, vol. 59, p. 662.
11. Vladimirov S.V., Uravnenija matematicheskoj physiki, M.: Nauka, 1981.
12. Chukbar K.V., Jankov V.V., Sov.Phys.Tech, 1988, vol. 33, p.1293.
13. Zel'dovich Ya., Raizer Yu.P., Physics of Shock Waves and High – Temperature Hydrodynamic Phenomena Vol.1 and 2 (Academic Press, New York, 1966).
14. Alexiou S., Krasik Ya., Maron Y., Sarfaty M., Weingarten A., Phys.Rev.Lett. 1995, **75**, 3126
15. Chuvatin A., Choi P., Etlisher B., Phys. Rev. Lett., 1996, **76**, pp. 2282-2285.
16. Kingsep A.S., Sevastianov A.A., Fizika Plazmy (en russe), 1991, **17**, 205.

CHAPITRE 2. STABILISATION DYNAMIQUE DE L'INSTABILITE RAYLEIGH-TAYLOR DANS UN FLUIDE VISQUEUX

Introduction, phénomène, analogies

Ce chapitre fait l'énoncé d'une méthode qui permet de diminuer d'une manière significative le taux de croissance de l'instabilité Rayleigh-Taylor dans le domaine des longueurs d'ondes intermédiaires. Pour bien illustrer le phénomène abordé, nous partons d'un cas trivial – le problème de la stabilité d'un fluide non-compressible soumis à un champ de gravité.

Remarquons d'abord que le mouvement des particules d'un fluide au cours de l'évolution de l'instabilité Rayleigh-Taylor est semblable au mouvement d'un pendule renversé. Dans ce chapitre on définit un pendule renversé comme un système mécanique composé d'un segment rigide de masse négligeable, et d'une masse ponctuelle au bout. Le système est dans l'état d'équilibre instable (*la masse ponctuelle est dans sa position la plus élevée (voir Fig.1)*).

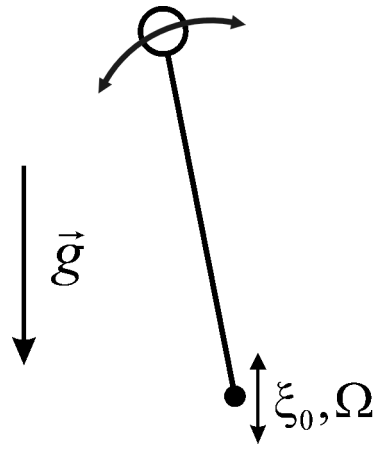

Fig.1.Pendule renversé dans l'état d'équilibre instable.

On peut appeler l'instabilité Rayleigh-Taylor dans les fluides incompressibles « instabilité de remplacement ». Prenons en effet l'analogie du mouvement d'un fluide incompressible reposant sur un autre volume fluide incompressible très léger (*cas limite : infiniment léger*), soumis au champ gravitationnel. Le fluide lourd et le fluide léger vont échanger leurs places. Ce comportement est similaire aux oscillations d'un pendule. De plus, les formules de la fréquence caractéristique de l'instabilité Rayleigh-Taylor et celle d'un pendule se ressemblent : les valeurs correspondantes sont $\gamma \sim \sqrt{gk}$ pour le taux de croissance Rayleigh-Taylor (k *est le vecteur d'onde*) et $\omega = \sqrt{g/l}$ pour un système de type pendule (l *est la longueur du pendule*).

L'expérience classique bien connue où un pendule renversé est retenu dans l'équilibre instable a été analysée, notamment par Kapitsa [1]. Le principe de cette expérience consiste à faire osciller le point d'attachement du pendule avec une amplitude a très petite par rapport à sa longueur mais avec une fréquence très élevée Ω (*par rapport à la fréquence caractéristique du pendule* $\omega = \sqrt{g/l}$). L'astuce ici est de produire une pesanteur effective oscillante $g_{osc} = a\Omega^2$ supérieure à la pesanteur originale $|\mathbf{g}|$. Les oscillations externes de ce type appliquées sur le système (*plus précisément, sur le point d'attachement du pendule*) empêchent le pendule de retomber, le retenant ainsi dans l'état d'équilibre instable. En développant plus profondément l'analogie entre le pendule de longueur fixée et l'instabilité Rayleigh-Taylor de longueur d'onde correspondante, on peut s'attendre à un phénomène similaire dans le cas de deux fluides incompressibles.

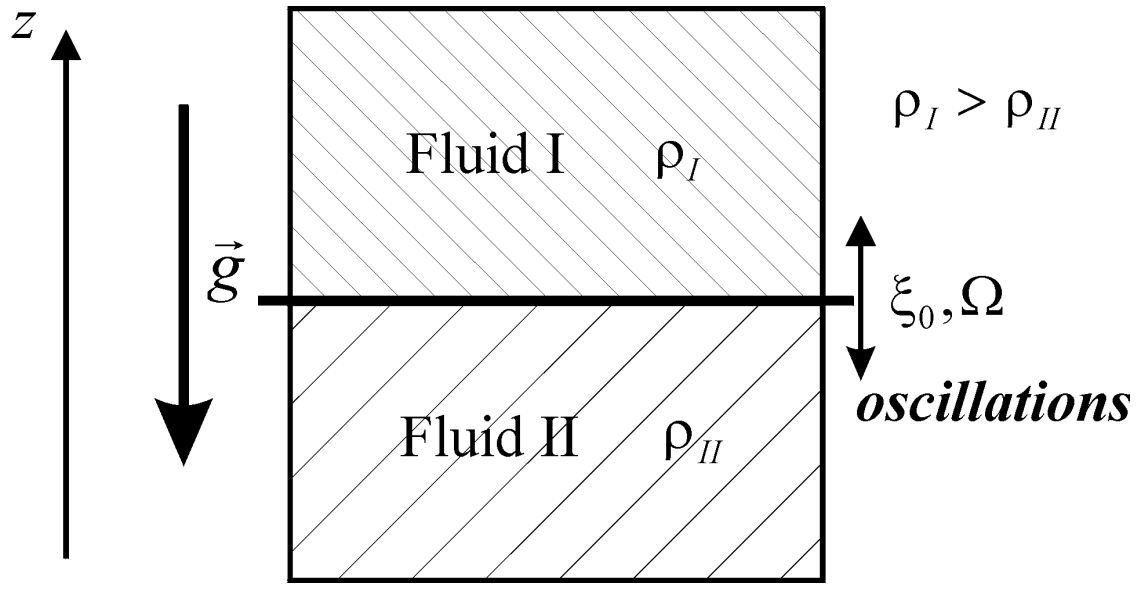

Fig. 2. Schéma général du problème.

Afin de créer un effet de stabilisation similaire à celui du pendule dans un système de deux fluides incompressibles, il faut faire osciller conjointement ces fluides ainsi que la frontière entre eux dans la direction de la pesanteur (*voir Fig. 2*). La vérification expérimentale de ce phénomène a été réalisée, notamment, dans le travail de G.H.Wolf [2]. Puisque les fluides sont incompressibles, les variations de la pression se propagent dans le milieu instantanément. En particulier, cela signifie que les changements des paramètres dans l'état d'équilibre variable (*si l'arrangement relatif des particules des fluides est constant*) provoqués par la variation temporelle de la pesanteur effective s'installent instantanément aussi. En résumé, les fluides dans le système de coordonnées lié à la frontière restent immobiles et les changement de la pression compensent instantanément les variations de $\mathbf{g}$. Grâce à cette particularité, il est possible de créer les oscillations voulues en plaçant par exemple les deux fluides dans un cylindre aux parois rigides et en le faisant vibrer dans la direction de $\mathbf{g}$ (*Fig. 3*).

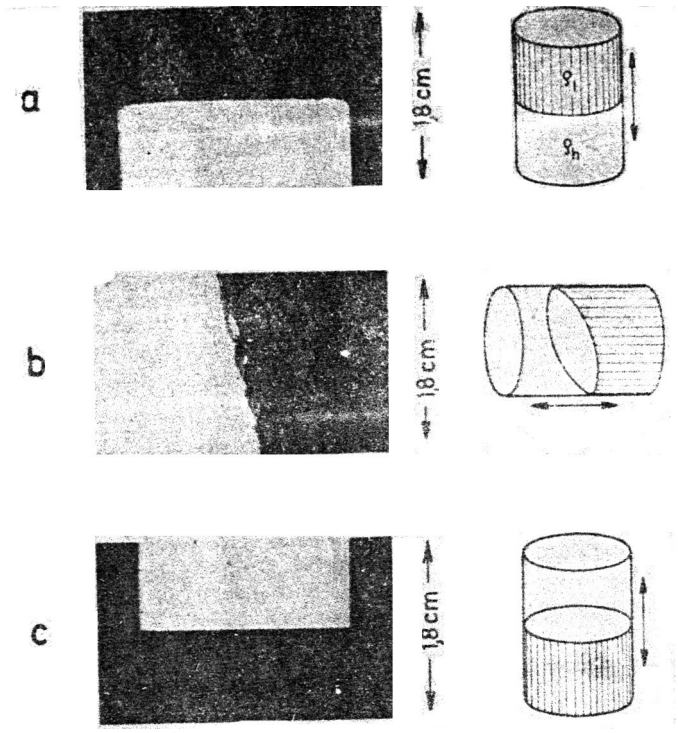

Fig. 3. Schéma des expériences effectuées par G.H. Wolf [2]. D'abord on met deux fluide dans l'état d'équilibre stable ($\rho_h > \rho_l$, (a)), on le fait osciller et tourner (b) et enfin on arrive à stabiliser l'instabilité (c).

Modélisation mathématique, cas du fluide visqueux

Les problèmes de ce type sont généralement examinés dans le système de coordonnées non-inertiel. On introduit les coordonnées liées au point d'attachement du pendule ou bien à la surface de séparation pour le cas de deux fluides. Dans notre problème, ce type d'approche permet de simplifier le système d'équations. Désormais nous allons utiliser le système de coordonnées non-inertiel qui oscille avec les fluides. Soit une amplitude des oscillations de la surface de séparation égale à ξ_0, et une fréquence d'oscillation égale à Ω. Supposons aussi pour plus de simplicité ces oscillations harmoniques. Les équations de dynamique de chaque fluide dans le nouveau système seront alors

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{g}_{\mathbf{osc}} \tag{1}$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

Ici v est la vitesse du fluide dans le nouveau système non-inertiel, ρ est la densité de ce fluide, p est sa pression, $\mathbf{g}$ est le vecteur de la pesanteur, $\mathbf{g}_{\mathbf{osc}}$ représente la pesanteur effective qui se produit en relation avec le passage vers le nouveau système de coordonnées, $|\mathbf{g}_{\mathbf{osc}}| = \xi_0 \Omega^2 \cos(\Omega t)$.

Il est maintenant nécessaire d'aborder deux questions primordiales, dont la première porte sur les conditions initiales, et la seconde sur les conditions aux limites. La condition initiale pour les équations (1) et (2) est l'état d'équilibre dans le système de coordonnées non-inertiel, c'est-à-dire à $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Cette condition signifie que la pression compense les changements temporels de $\mathbf{g}_{\mathbf{osc}}$, et qu'un observateur lié au système de coordonnée initial (*et inertiel*), voit les deux fluides oscillant ensemble comme un seul milieu selon l'axe du vecteur champ gravitationnel. De même, les conditions aux limites s'expriment de façon logique et simple : la pression doit être ininterrompue sur la surface de séparation, de même que la composante normale de la vitesse des fluides.

Afin de concentrer notre attention sur le phénomène en lui-même et d'éviter des calculs volumineux, nous allons étudier le cas d'un fluide lourd qui se trouve au-dessus d'un fluide infiniment léger et incompressible dans le champ de gravité. Une telle approche simplifie substantiellement les calculs analytiques sans changer les étapes principales de l'énoncé. Un problème avec deux fluides de densités différentes aura le même résultat à ceci près que les expressions finales comporteront en plus le nombre d'Atkins $A = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$.

Les simplifications citées ci-dessus entraînent la réduction du système (1) – (2) à deux équations (*pour le fluide dont la densité* $\rho \neq 0$). De plus, nous pouvons ne plus tenir compte de la condition aux limites qui requiert la continuité de la composante de la vitesse normale à la surface de séparation. La condition aux limites pour la pression se simplifie également (*puisque la pression est constante dans un fluide dont la densité* est

nulle, $\rho = 0$). Il en résulte que le système complet est composé par les équations (1) – (2) et

$$p\big|_{surface} = \Pi_0 \tag{3}$$

Ici Π_0 est la pression dans le fluide léger.

Ainsi donc, il faut trouver le taux de croissance de l'instabilité des petites fluctuations dans le système (1) – (3). Il va de soi que les perturbations les plus importantes sont celles dont le taux de croissance est grand (*de fait, les fluctuations avec un vecteur d'onde* k *grand*). Si le taux de croissance γ est suffisamment grand, il peut excéder la fréquence des fluctuations externes du système Ω, et dans ce cas, les oscillations forcées ne sont qu'une modification effective de la gravité (*si* $\gamma \gg \Omega$, la modification est une augmentation). Cette augmentation, à son tour, mène à une forte croissance des perturbations de hautes fréquences. Ainsi, l'influence des oscillations forcées externes consiste en une suppression des ondes longues et intermédiaires mais il peut aussi arriver que le taux de croissance des ondes courtes (*avec un grand* k) augmente. L'augmentation infinie du taux de croissance lorsque $k \to \infty$ est toujours bloquée par des phénomènes physiques naturels qui imposent une limite haute à γ. C'est pourquoi on n'observe pas de croissance forte des perturbations à longueurs d'onde courtes. On introduit la viscosité comme facteur limitant. Ce choix n'est pas décisif – nous pouvons choisir n'importe quel autre phénomène physique (*par exemple, la tension superficielle*) pour facteur limitant. Dorénavant, le fluide étudié sera considéré visqueux.

Lors de la prise en compte de la viscosité, il faut ajuster les équations et les conditions initiales et aux limites. Dans le cas d'un fluide visqueux avec surface libre, la condition habituelle L.D. Landau et al. [3] est $\sigma_{ik} n_k = 0$. Ici $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$ est le tenseur des tensions, n_i est le vecteur unitaire

perpendiculaire à la surface ($|\mathbf{n}| = 1$), η est la viscosité dynamique, $\nu = \eta / \rho$. L'équation (1) est modifiée de la même façon :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{g}_{\mathbf{osc}} + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v} \tag{4}$$

Introduisons maintenant le système de coordonnées suivant. Soit l'axe z normal à la surface du fluide, les axes x et y étant dans le plan de cette surface-frontière (*Fig.2*), $\mathbf{g} = g\mathbf{e_z}$. Nous pouvons alors réécrire les conditions aux limites de la façon suivante ($\mathbf{n} = \mathbf{e_z}$):

$$\left(-p + 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\Big|_{surface} = -p_{ext} \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\Big|_{surface} = 0\,,\ \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\Big|_{surface} = 0 \tag{6}$$

Finalement la formulation précise du problème est : il faut trouver le taux de croissance des petites perturbations du système décrit par les équations (2), (4) et les conditions aux limites (5), (6) dans l'approximation linéaire.

L'état d'équilibre d'un tel système sera alors

$$\mathbf{v_0} = \mathbf{0},\ p_0 = \rho(g + \xi_0\Omega^2\cos(\Omega t))z + p_{ext} \tag{7}$$

L'étape suivante consiste à introduire les perturbations d'ordre 1 $p_1, \mathbf{v_1}$ dans les équations d'équilibre:

$$\frac{\partial \mathbf{v_1}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p_1 + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v_1} \tag{8}$$

$$\nabla\mathbf{v_1} = 0 \tag{9}$$

En prenant la divergence de l'équation (8) , nous obtenons (*prenant en compte l'éq. (9)*)

$$\Delta p_1 = 0 \tag{10}$$

Le système dans l'état d'équilibre est homogène dans le plan (x, y), nous pouvons donc effectuer la transformation de Fourier selon ces variables. Nous obtiendrons au final les composantes de Fourier correspondantes, avec le vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$. Dans le but de faciliter davantage les calculs et ceci sans réduire le problème, prenons les axes x, y de manière à ce que $\mathbf{k} = k\mathbf{e_x}, k = |\mathbf{k}|$. En d'autres mots, supprimons la variable y redondante.

De même, on pourrait effectuer la transformation de Fourier de toutes les variables selon t s'il n'y avait pas d'oscillations forcées externes. Cette force oscillatoire de la fréquence Ω est pourtant bien entrée en jeu, en conséquence nous allons chercher les solutions du système perturbé sous la forme de séries de Floquet. Prenant en compte toutes les remarques et hypothèses mentionnées ci-dessus :

$$\mathbf{v_1} = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} \mathbf{v_{n,k}}(z) e^{ikx} \tag{11}$$

$$p_1 = e^{-i\omega t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\Omega t} p_{m,k}(z) e^{ikx} \tag{12}$$

Selon l'éq. (10) $p_{m,k}(z) = p_{m,k} e^{kz} (z < 0)$ et pour la composante de la vitesse v_x on déduit de l'éq. (8):

$$(-i\omega + in\Omega) v_{x,n,k}(z) = -\frac{1}{\rho} ikp_{n,k} e^{kz} + \frac{\eta}{\rho}(-k^2 v_{x,n,k}(z) + \frac{\partial^2 v_{x,n,k}(z)}{\partial z^2}) \tag{13}$$

La solution générale de (13) se présente de la façon suivante :

$$v_{x,n,k}(z) = v_{x,n,k} e^{q_n z} + p_{n,k} \frac{k}{\rho} \frac{e^{kz}}{\omega - n\Omega} \tag{14}$$

$$q_n = \sqrt{k^2 + i\rho \frac{(n\Omega - \omega)}{\eta}}\ ,\ \mathrm{Re}\, q_n > 0 \tag{15}$$

La condition supplémentaire $\mathrm{Re}\, q_n > 0$ est indispensable, elle garantit la disparition des perturbations dans la région où $z \to -\infty$.

On réitère les mêmes calculs pour v_z et on arrive à

$$v_{z,n,k}(z) = v_{z,n,k} e^{q_n z} - i p_{n,k} \frac{k}{\rho} \frac{e^{kz}}{\omega - n\Omega} \tag{16}$$

En résumé, toutes les expressions pour la pression et pour les composantes de la vitesse sont présentées ci-dessous :

$$p_1 = e^{-i\omega t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\Omega t} p_{m,k} e^{ikx+kz} \tag{17}$$

$$v_{1x} = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} \left(v_{x,n,k} e^{ikx+q_n z} + p_{n,k} \frac{k}{\rho} \frac{1}{\omega - n\Omega} e^{ikx+kz} \right) \tag{18}$$

$$v_{1z} = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} \left(v_{z,n,k} e^{ikx+q_n z} - i p_{n,k} \frac{k}{\rho} \frac{1}{\omega - n\Omega} e^{ikx+kz} \right) \tag{19}$$

En substituant (18) et (19) dans (9), on déduit $v_{x,n,k} = (iq_n / k) v_{z,n,k}$ et pour la composante x

$$v_{1x} = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} \left(i \frac{q_n}{k} v_{z,n,k} e^{ikx+q_n z} + p_{n,k} \frac{k}{\rho} \frac{1}{\omega - n\Omega} e^{ikx+kz} \right) \tag{20}$$

Pour avancer, il faut prendre en compte les conditions aux limites (5) et (6). On suppose que l'amplitude des perturbations est suffisamment petite par rapport à la longueur d'onde de ces perturbations, donc dans la condition aux limites (6) on peut substituer $z = 0$ et on aboutit à

$$p_{n,k} = i\frac{(n\Omega - \omega)\left(2 + i\dfrac{n\Omega - \omega}{\nu k^2}\right)}{2k}\rho v_{z,n,k} \tag{21}$$

La condition (5), dans la même hypothèse de petitesse de l'amplitude, peut être réécrite dans l'approximation linéaire :

$$-p_0\big|_{z=\zeta} - p_1\big|_{z\approx 0} + 2\eta\left.\frac{\partial v_{1z}}{\partial z}\right|_{z\approx 0} = -p_0\big|_{z=0} \tag{22}$$

Ici ζ est le déplacement du fluide le long de l'axe z. En utilisant (21) on peut transformer (22) en

$$0 = -e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} i\frac{(n\Omega - \omega)\left(2 + i\dfrac{n\Omega - \omega}{\nu k^2}\right)}{2k}\rho v_{z,n,k} e^{ikx} +$$

$$+2\eta e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} q_n v_{z,n,k} e^{ikx} - \tag{23}$$

$$-2\eta i e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} i\frac{(n\Omega - \omega)\left(2 + i\dfrac{n\Omega - \omega}{\nu k^2}\right)}{2k}\rho v_{z,n,k}\frac{k^2}{\rho}\frac{1}{\omega - n\Omega} e^{ikx} -$$

$$-\rho(g + \xi_0\Omega^2\cos(\Omega t))\zeta$$

Ensuite, rappelons-nous que la composante de vitesse $v_{1z} = d\zeta / dt \simeq \partial\zeta / \partial t$ et qu'à proximité de la surface $z = 0$ les équations se transforment en

$$v_{1z} = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} e^{ikx} i\rho \frac{\omega - n\Omega}{2\eta k^2} v_{z,n,k}$$

$$\zeta = -e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\Omega t} e^{ikx} \rho \frac{v_{z,n,k}}{2\eta k^2} = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\Omega t} e^{ikx} \zeta_{n,k} \tag{24}$$

$$v_{z,n,k} = -2\frac{\eta}{\rho} k^2 \zeta_{n,k} \tag{25}$$

On substitue (24) et (25) dans (23) et l'expression finale est

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(2 + i\rho \frac{(n\Omega - \omega)}{\eta k^2} \right)^2 - 4\sqrt{1 + i\rho \frac{n\Omega - \omega}{\eta k^2}} - \frac{g\rho^2}{\eta^2 k^3} \right] \zeta_{n,k} e^{in\Omega t} = \tag{26}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\Omega t} \frac{\xi_0 \Omega^2 \rho^2}{\eta^2 k^3} \cos(\Omega t) \zeta_{n,k}$$

On définit F par

$$F(\omega - n\Omega) = \left(2 + i\rho \frac{(n\Omega - \omega)}{\eta k^2} \right)^2 - 4\sqrt{1 + i\rho \frac{(n\Omega - \omega)}{\eta k^2}} - \frac{g\rho^2}{\eta^2 k^3}, \tag{27}$$

et avec cette fonction F l'expression (26) devient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\Omega t} F(\omega - n\Omega) \zeta_{n,k} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\Omega t} \frac{\xi_0 \Omega^2 \rho}{\eta^2 k^3} \frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2} \zeta_{n,k} = 0 \tag{28}$$

Après renumérotation des indices

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\Omega t}\left(F(\omega-n\Omega)\zeta_{n,k}-\frac{\xi_0\Omega^2\rho^2}{2\eta^2k^3}\left(\zeta_{n-1,k}+\zeta_{n+1,k}\right)\right)=0 \qquad (29)$$

C'est l'expression que nous recherchions. Autrement dit, afin de trouver l'équation de dispersion, il faut calculer le déterminant infini :

$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . \\ -\frac{\xi_0\Omega^2\rho^2}{2\eta^2k^3} & F(\omega-2\Omega) & -\frac{\xi_0\Omega^2\rho^2}{2\eta^2k^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\xi_0\Omega^2\rho^2}{2\eta^2k^3} & F(\omega-\Omega) & -\frac{\xi_0\Omega^2\rho^2}{2\eta^2k^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\xi_0\Omega^2\rho^2}{2\eta^2k^3} & F(\omega) & -\frac{\xi_0\Omega^2\rho^2}{2\eta^2k^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\xi_0\Omega^2\rho^2}{2\eta^2k^3} & F(\omega+\Omega) & -\frac{\xi_0\Omega^2\rho^2}{2\eta^2k^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\xi_0\Omega^2\rho^2}{2\eta^2k^3} & F(\omega+2\Omega) & -\frac{\xi_0\Omega^2\rho^2}{2\eta^2k^3} \\ . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}=0 . \qquad (30)$$

Ce déterminant a été obtenu (*sous une forme un peu différente*) dans l'ouvrage [4]. K.Kumar et al. [4] l'ont ensuite utilisé directement pour trouver le seuil de l'instabilité. Ils ont substitué dans (30) la valeur fixée du taux de croissance $\omega=0$. Ce chapitre aboutit à une expression analytique pour toute la courbe de dispersion, au-delà des calculs numériques du seuil. La présentation de solution de type (30) présente un sérieux défaut – la fréquence ω que l'on cherche entre d'une manière non-triviale dans chaque ligne du déterminant infini. C'est pourquoi la résolution directe en vue d'obtenir la courbe de dispersion est liée aux nombreuses difficultés de calcul numérique.

Solutions approximatives de l'équation de dispersion

En qualité de première approximation on utilisera la condition de petitesse de la fréquence propre (*ou bien du taux de croissance*) ω par rapport à la fréquence de la force externe, c'est-à-dire $|\omega| \ll \Omega$. Si par ailleurs on requiert $|\xi_0| k \ll 1$, le résultat approximatif peut être obtenu en utilisant seulement trois lignes centrales du déterminant (30). Ceci est possible parce que, si les deux conditions ci-dessus sont vérifiées, nous avons $|F(\omega + n\Omega)| \gg \dfrac{|\xi_0| \Omega^2 \rho^2}{2\eta^2 k^3}$.

La solution approximative que nous cherchons doit donc satisfaire à l'équation suivante :

$$Det\begin{bmatrix} F(\omega-\Omega) & -\dfrac{\xi_0\Omega^2\rho^2}{2\eta^2k^3} & 0 \\ -\dfrac{\xi_0\Omega^2\rho^2}{2\eta^2k^3} & F(\omega) & -\dfrac{\xi_0\Omega^2\rho^2}{2\eta^2k^3} \\ 0 & -\dfrac{\xi_0\Omega^2\rho^2}{2\eta^2k^3} & F(\omega+\Omega) \end{bmatrix} = F(\omega-\Omega)F(\omega+\Omega)\times$$
$$\times\left(F(\omega) - \left(\frac{\xi_0\Omega^2\rho^2}{2\eta^2k^3}\right)^2 \left(\frac{1}{F(\omega+\Omega)} + \frac{1}{F(\omega-\Omega)}\right)\right) = 0 \tag{31}$$

Pour les oscillations forcées de petite amplitude ($|\xi_0| k \ll 1$) la valeur approximative de la fonction (27) est

$$F(\omega \pm \Omega) \approx F(\pm\Omega) \approx -\Omega^2\rho^2 / (\eta^2 k^4) \tag{32}$$

Les équations (31) et (32) donnent ainsi, après quelques transformations, l'expression de la courbe de dispersion approximative :

$$\left(2-\frac{i\omega\rho}{\eta k^2}\right)^2-4\sqrt{1-\frac{i\omega\rho}{\eta k^2}}-\frac{g\rho^2}{\eta^2k^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{\xi_0\Omega\rho}{\eta k}\right)^2=0 \tag{33}$$

Ecrivons les variables en notation adimensionnelle :

$$\gamma=-i\frac{\omega}{\omega_\nu},\quad \kappa=\frac{k}{k_\nu} \tag{34}$$

$$\omega_\nu=\left(\frac{g^2\rho}{\eta}\right)^{1/3},\ k_\nu=\left(\frac{g\rho^2}{\eta^2}\right)^{1/3},$$

Grâce aux nouvelles variables (34) on peut écrire (33) sous la forme suivante:

$$\left(2+\frac{\gamma}{\kappa^2}\right)^2-4\sqrt{1+\frac{\gamma}{\kappa^2}}-\frac{1}{\kappa^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{\xi_0\Omega}{\nu^{1/3}g^{1/3}}\right)^2\frac{1}{\kappa^2}=0 \tag{35}$$

La fonction $\gamma(\kappa)$ (*taux de croissance de l'instabilité en fonction du vecteur d'onde*) est présentée sur Fig.4 pour quelques valeurs de l'expression $\xi_0\Omega\rho^{1/3}/(\eta^{1/3}g^{1/3})$. Remarquons que l'équation (35) a une racine supplémentaire à partir de $\kappa=1$. Cette branche ne présente pas d'instabilité, donc nous ne nous y intéresserons pas. Pour les petites valeurs de κ (*plus précisément*, $\kappa\ll g/(\xi_0\Omega^2)\cdot 1/(\xi_0k_\nu)$, $\kappa\ll 1$) il est possible de trouver l'expression asymptotique suivante pour γ:

$$\gamma\approx\sqrt{\kappa\left(1-\frac{\kappa}{2}\frac{\xi_0\Omega^2}{g}\xi_0k_\nu\right)} \tag{36}$$

La comparaison de la solution « exacte » (35) avec la solution approchée (36) est présentée sur la Fig. 4a.

La figure 4 présente les racines les plus instables parmi plusieurs racines de l'équation (35). Ceci explique le caractère discontinu de la courbe $\gamma(\kappa)$.

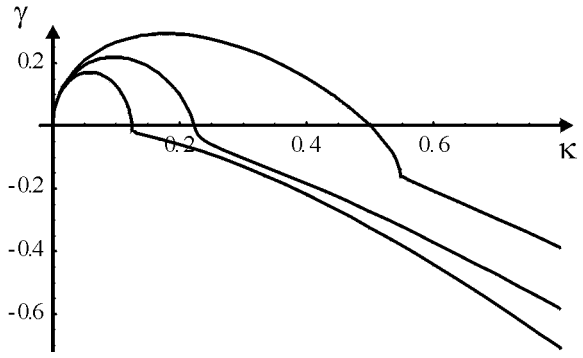

Fig. 4. Courbes de taux de croissance $\gamma(\kappa)$ pour quelques valeurs du paramètre $\xi_0\Omega\rho^{1/3}/(\eta^{1/3}g^{1/3})$, obtenues à partir de l'équation (35) (en variables adimensionnelles).

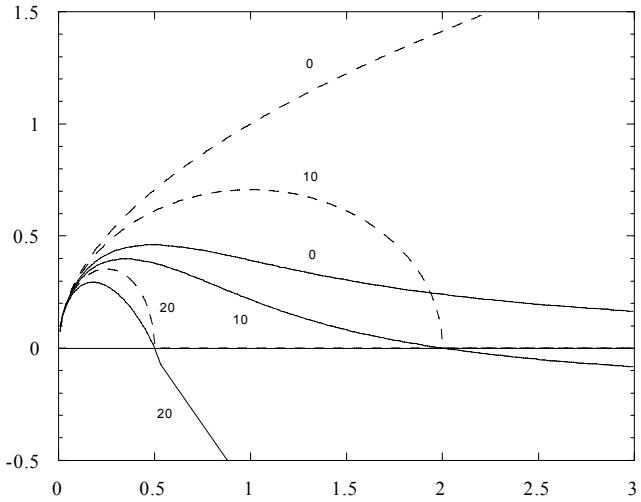

Fig. 4a. Un exemple de la fonction $\gamma(\kappa)$ pour une limite de petite amplitude et grande fréquence, le nombre d'onde est petit. Ici $\xi_0 k_\nu = 0.1$ ($(\xi_0 k)_{\max} = 0.3$). Les lignes solides représentent les solutions de l'équation (36), lignes en pointillées sont les solution de l'équation (37). Les nombres correspondent aux différentes valeurs de Ω/ω_ν.

Comme on le voit sur la Fig.4, le taux de croissance décroît dans la région des valeurs intermédiaires du nombre d'onde κ. Rappelons-nous que les résultats (35) et même (31) sont valables seulement à la condition que $|\xi_0|k \ll 1$ et $|\omega| \ll \Omega$. Par conséquent, on ne peut examiner directement le domaine des grandes valeurs de k. Pour obtenir la solution exacte, il faut résoudre entièrement le déterminant infini (30), puis l'équation correspondante.

Solution exacte de l'équation de dispersion

Avant toute chose, notons que l'équation $F(\omega_0) = 0$ donne comme solution l'expression du taux de croissance de l'instabilité Rayleigh-Taylor dans un fluide visqueux et incompressible L.D. Landau et al. [5], S. Chandrasekhar [6]. Cette solution $\mathrm{Im}[\omega_0(\kappa)]$ est représentée sur la Fig.5 (*variables en notation adimensionnelle*). Pour $\kappa < 1$ nous n'avons qu'une seule solution ; en revanche, quand $\kappa \geq 1$ une autre branche apparaît ; néanmoins cette autre branche n'est pas instable.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons résoudre l'équation (30) et obtenir la solution pour n'importe quelles valeurs de k, ξ_0 et ω. Le calcul du déterminant infini se basera sur la méthode proposée dans les travaux de A.V. Baitin et al.[7, 8] utilisant la méthode de Hill [9].

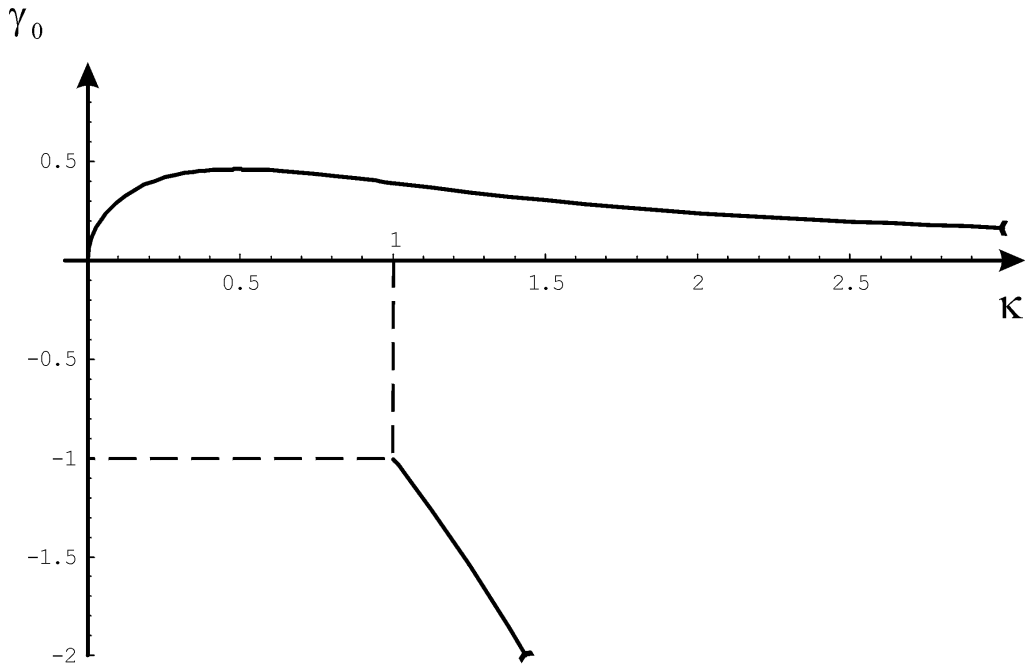

Fig.5. Courbe de dispersion de l'instabilité classique Rayleigh-Taylor dans un fluide visqueux et incompressible (en variables adimensionnelles).

Il a été mentionné précédemment que l'équation $F(\omega_0) = 0$ conduit au taux de croissance de l'instabilité Rayleigh-Taylor dans un fluide visqueux. Si d'autres effets externes, tels que des oscillations forcées du système, apparaissent, nous aurons une racine différente ($\gamma|_{\Omega=0} \neq \gamma|_{\Omega\neq 0}$), d'où $F(\omega_{solution}) \neq 0$. De même, on suppose que $\omega \neq n\Omega + \omega_0$ (*sauf, peut-être, pour quelques valeurs fixées du* k). Résumons : si ω_{sol} est la solution de (30), $F(\omega_{sol} + n\Omega) \neq 0$, par conséquent nous pouvons diviser chaque ligne dans (30) par une quantité non nulle $F(\omega + n\Omega)$. Tous les membres diagonaux de la matrice seront alors des unités.

$$D(\omega) = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . \\ \frac{\psi}{F(\omega-2\Omega)} & 1 & \frac{\psi}{F(\omega-2\Omega)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\psi}{F(\omega-\Omega)} & 1 & \frac{\psi}{F(\omega-\Omega)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\psi}{F(\omega)} & 1 & \frac{\psi}{F(\omega)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\psi}{F(\omega+\Omega)} & 1 & \frac{\psi}{F(\omega+\Omega)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\psi}{F(\omega+2\Omega)} & 1 & \frac{\psi}{F(\omega+2\Omega)} \\ . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \quad (37)$$

Ici $\psi = -\dfrac{\xi_0 \Omega^2}{2(\eta/\rho)^2 k^3}$. Tous les membres diagonaux égalent 1, les membres adjacents diminuent selon (27) proportionnellement à $1/n^2$. C'est pourquoi le déterminant (37) est convergent.

Nous allons maintenant effectuer des transformations suivant le théorème Mittag-Lefler [9] concernant le développement des fonctions méromorphes en série. Considérons le déterminant (37) comme une fonction de la variable complexe ω. On a déjà démontré que le déterminant converge, cette fonction est alors analytique. Les zéros de la fonction $F(\omega + n\Omega) = 0$ déterminent les pôles du $D(\omega)$. Utilisons ces propriétés du déterminant pour obtenir une expression analytique de la fonction $D(\omega)$. Il faut pour cela sommer tous les pôles correspondants aux termes $1/F(\omega + n\Omega)$. On somme en deux étapes : d'abord sur toutes les racines ω_0 de la fonction $F(\omega)$ ($F(\omega_0) = 0$) et puis sur toutes les lignes de la matrice infinie :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\omega_0} \frac{\psi}{\left.\dfrac{\partial F(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_0} (\omega - (\omega_0 - n\Omega))} D_1(\omega_0),$$

$$D_1(\omega_0) = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . \\ \frac{\psi}{F(\omega_0-2\Omega)} & 1 & \frac{\psi}{F(\omega_0-2\Omega)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\psi}{F(\omega_0-\Omega)} & 1 & \frac{\psi}{F(\omega_0-\Omega)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\psi}{F(\omega_0+\Omega)} & 1 & \frac{\psi}{F(\omega_0+\Omega)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\psi}{F(\omega_0+2\Omega)} & 1 & \frac{\psi}{F(\omega_0+2\Omega)} \\ . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \tag{38}$$

En plus de la somme des pôles, il faut ajouter à l'expression obtenue une fonction analytique telle qu'elle n'ait pas de pôle dans tout le plan complexe. De plus, cette fonction tend vers l'unité lorsque $\omega \to \infty$ (*conséquence de* $D(\omega) \to 1$ *quand* $\omega \to \infty$). Selon le théorème de Liouville, cette fonction inconnue est strictement égale à 1 partout sur le plan complexe.

Pour faire la sommation sur n dans l'équation (38) nous allons utiliser la relation suivante :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega-(\omega_0-n\Omega)} = \frac{1}{\omega-\omega_0} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\omega-(\omega_0-n\Omega)} + \frac{1}{\omega-(\omega_0+n\Omega)}\right) =$$
$$= \frac{\pi}{\Omega}\mathrm{ctg}(\pi\frac{\omega-\omega_0}{\Omega})$$

Ainsi obtenons l'expression finale pour (37).

$$D(\omega) = 1 + \sum_{\omega_0} \frac{1}{\partial F(\omega)/\partial\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0} \psi\frac{\pi}{\Omega}\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi(\omega-\omega_0)}{\Omega}\right) D_1(\omega_0) = 0 \tag{39}$$

On voit (*cf. éq.* (39)) que la fréquence ω que nous cherchons représente maintenant un argument d'une fonction géométrique simple, cotangente. C'est un pas en avant important par rapport à l'équation (30) où la fréquence inconnue ω est présente dans chaque ligne d'un déterminant infini. En utilisant l' éq. (39) il est aisé de

trouver la fréquence (*taux de croissance*) ω pour une valeur k donnée, quelle qu'elle soit.

Profitons de la normalisation (34) pour rédiger l'éq. (39) sous la forme :

$$1-\sum_{\gamma_0}\frac{1}{\partial f(\gamma)/\partial\gamma}\bigg|_{\gamma=\gamma_0}\frac{\xi_0\Omega^2}{2g}\frac{\pi}{\Omega/\omega_\nu}\frac{1}{\kappa^3}\operatorname{cth}\left(\frac{\pi(\gamma-\gamma_0)}{\Omega/\omega_\nu}\right)D_1(\gamma_0)=0, \qquad (40)$$

$$f(\gamma)=F(\omega).$$

Si la valeur absolue $|\psi/F(\omega_0\pm\Omega)|\ll 1$ ($\xi_0\kappa\ll 1, |\omega_0|\ll\Omega$ ou $\kappa\gg\Omega/\omega_\nu$, $|\omega_0|\ll\Omega$), on peut se rapprocher de $D_1(\omega)$ par un déterminant composé de trois lignes centrales. Supposons d'ailleurs que $|\gamma-\gamma_0|\ll\Omega/\omega_\nu$, et de plus, que l'influence de la seconde racine soit négligeable. La seconde racine $f(\gamma_0)=0$ apparaît lorsque $\kappa\geq 1$ et sa valeur est de l'ordre de $\gamma_0\approx -0.912\,\kappa^2$, cf. Fig.5., l'influence de cette racine est donc négligeable si $\kappa<1$ ou $\kappa\gg 1$. Dans ce cas on peut réécrire (40) comme suit:

$$1-\frac{\gamma-\gamma_0}{f(\gamma)}\frac{\xi_0\Omega^2}{2g}\frac{\pi}{\Omega/\omega_\nu}\frac{1}{\kappa^3}\frac{\Omega/\omega_\nu}{\pi(\gamma-\gamma_0)}\left(-\frac{\psi}{F(\omega_0+\Omega)}-\frac{\psi}{F(\omega_0-\Omega)}\right)=0$$

ou

$$1-\frac{1}{F(\omega)}\psi^2\left(\frac{1}{F(\omega_0+\Omega)}+\frac{1}{F(\omega_0-\Omega)}\right)=0,$$

Cette expression est identique à (31). Ce résultat est naturel pour les petites valeurs de κ, mais beaucoup moins trivial pour les grands κ. Pour $|\omega_0|\ll\Omega$, $\kappa\gg\Omega/\omega_\nu$ le développement est le suivant :

$$\gamma \approx \frac{1}{2\kappa}\left(1-\frac{3}{16}\frac{\xi_0^2\Omega^4}{g^2}\frac{1}{\kappa^3}-\frac{3}{8}\frac{1}{\kappa^3}\right) \tag{41}$$

De cette manière, nous voyons que dans certaines régions de longueurs d'ondes, la conséquence des oscillations externes forcées est une diminution perceptible du taux de croissance. Le taux de croissance pour les valeurs de κ intermédiaires est calculé numériquement selon l'équation (40), il est présenté sur Fig.6 pour quelques valeurs du paramètre Ω avec la valeur de ξ_0 fixée. Les Fig.6 et 7 présentent des courbes de dispersion pour la fréquence externe Ω fixée et l'amplitude variable ξ_0 des oscillations externes.

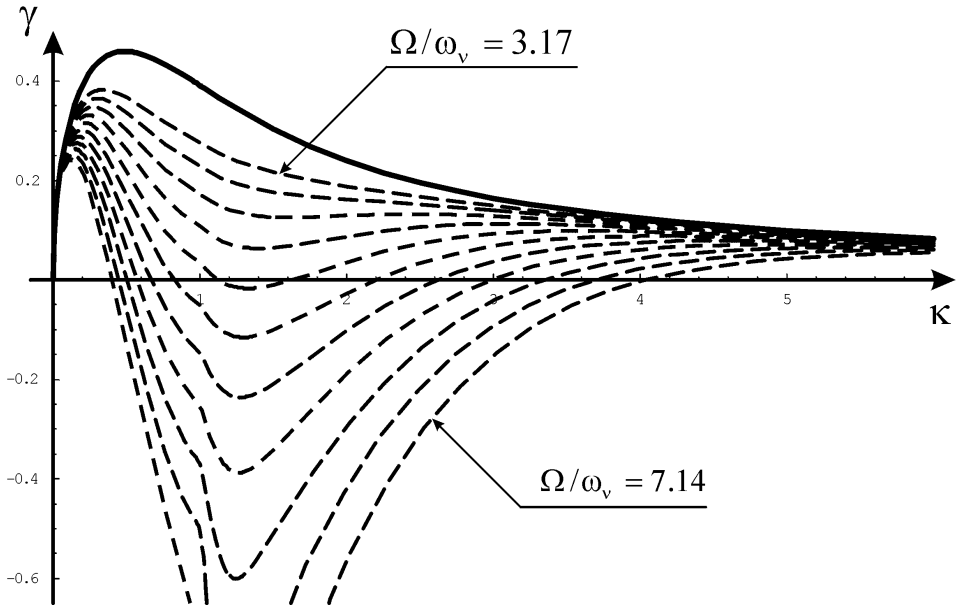

Fig.6. Courbes de dispersion de l'instabilité Rayleigh-Taylor pour différentes valeurs de Ω/ω_ν variants de 3.17 à 7.14, le pas étant de 0.4. $\xi_0 k_\nu = const = 0.4$

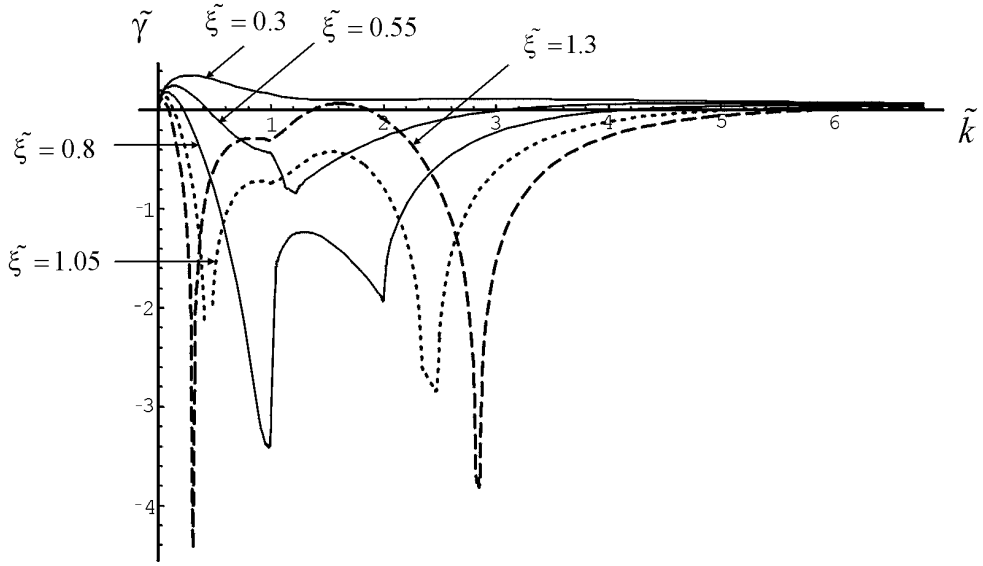

Fig.7. Courbes de dispersion de l'instabilité Rayleigh-Taylor pour différentes valeurs du paramètre $\tilde{\xi} = \xi_0 k_\nu$ de 0.3 à 1.3, la fréquence $\Omega = const$, $\Omega / \omega_\nu = 5$.

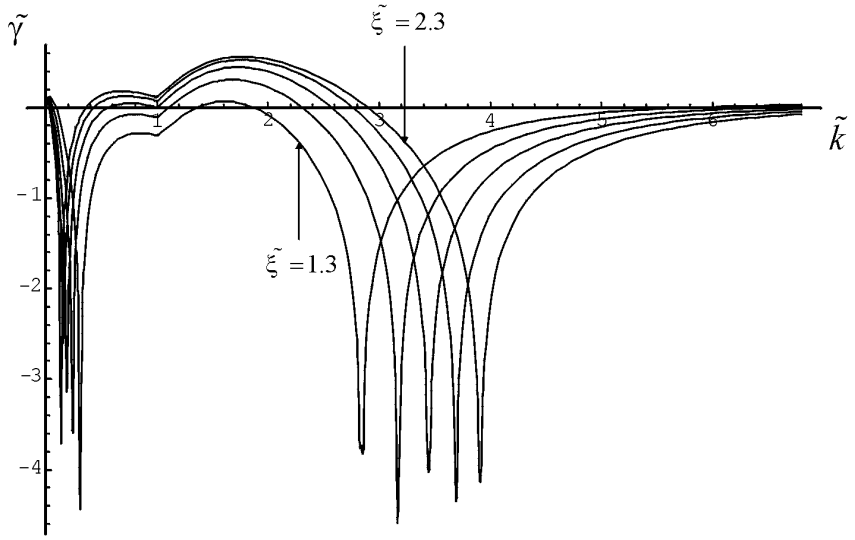

Fig.11. Courbes de dispersion de l'instabilité Rayleigh-Taylor pour différentes valeurs du paramètre $\tilde{\xi} = \xi_0 k_\nu$ variant de 1.3 à 2.3, la fréquence $\Omega = const$, $\Omega / \omega_\nu = 5$.

Nous pouvons maintenant comparer la solution obtenue avec l'approximation (31) et aussi avec la courbe de dispersion de l'instabilité Rayleigh-Taylor ordinaire dans un fluide visqueux (*Fig.5*). Les résultats de la comparaison sont présentés sur Fig.9. Il est aisé de voir que l'équation (31) donne une approximation satisfaisante de la solution exacte dans les régions des toutes petites et très grandes valeurs de κ, ce qui correspond parfaitement à la discussion ci-dessus.

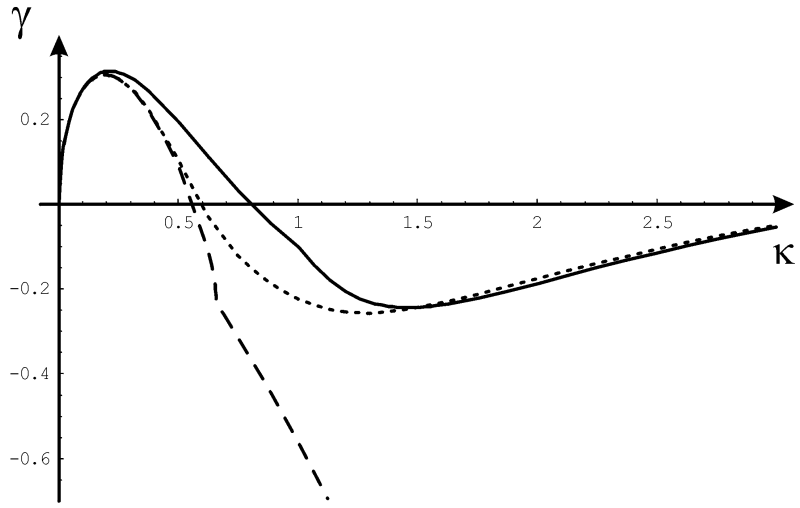

Fig.9. Courbes de dispersion de l'instabilité Rayleigh-Taylor : exacte (ligne solide); approximée selon l'équation (31) (ligne en pointillé rapproché) ; approximée selon l'équation (35) (ligne en pointillé espacé). $\xi_0 k_\nu \approx 0.18$, $\Omega / \omega_\nu = 10.6$.

Après obtention de la solution analytique exacte (40) nous pouvons analyser l'influence de différents paramètres sur la forme de la courbe de dispersion. Examinons l'impact de la modification de la fréquence externe Ω et du paramètre $\xi_0 k_\nu$. Fig.6 présente un exemple de l'effet d'augmentation de la fréquence externe sur la solution originale ($\Omega = 0$). On voit qu'au fur et à mesure de l'augmentation de la fréquence externe Ω, la courbe de dispersion acquiert une forme de plus en plus creusée, le taux de croissance devient négatif, supprimant ainsi l'instabilité dans une région de plus en plus vaste. Cependant pour une augmentation forte de Ω des pics supplémentaires apparaissent, excédant parfois le taux de croissance de l'instabilité d'origine

($\gamma(\Omega) > \gamma(\Omega = 0)$). C'est pourquoi lors du choix du régime de stabilisation il faut sélectionner les valeurs de Ω suffisamment- mais pas trop- grandes. On peut se faire une idée plus complète de l'influence de la fréquence Ω en s'adressant à la représentation tridimensionnelle de $\gamma(\Omega, \kappa)$ - voir Fig.10.

Le deuxième paramètre concerné est l'amplitude des oscillations externes ξ_0, ou bien, en notation adimensionnelle, $\xi_0 k_\nu$. Tout d'abord il y a un domaine de stabilité qui élargit au fur et à mesure que $\xi_0 k_\nu$ augmente, puis quand $\xi_0 k_\nu$ devient très grand, on observe les mêmes pics sur la courbe de dispersion (*Fig. 7, 8*).

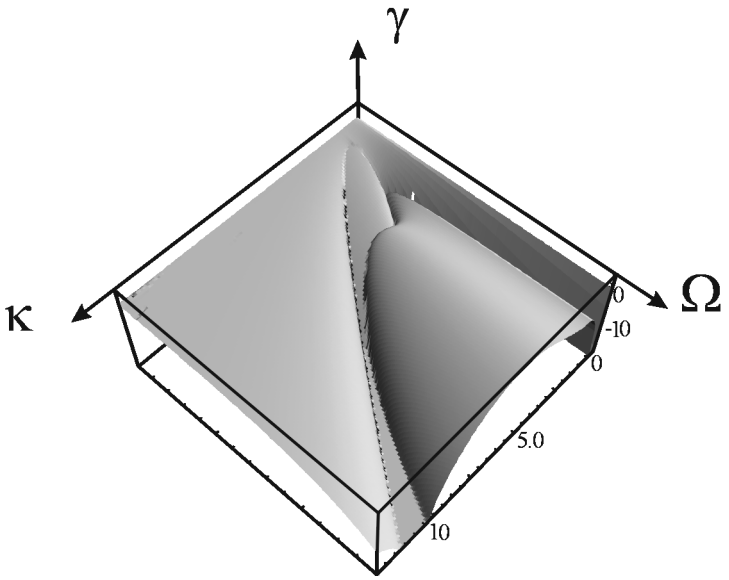

Fig.10. Taux de croissance $\gamma(\Omega, \kappa)$.

On peut obtenir aussi des régions de stabilité pour certaines valeurs du paramètre adimensionnel $\xi_0 k_\nu$, à savoir, 0.1, 1 et 3 (*Fig. 11-13*).

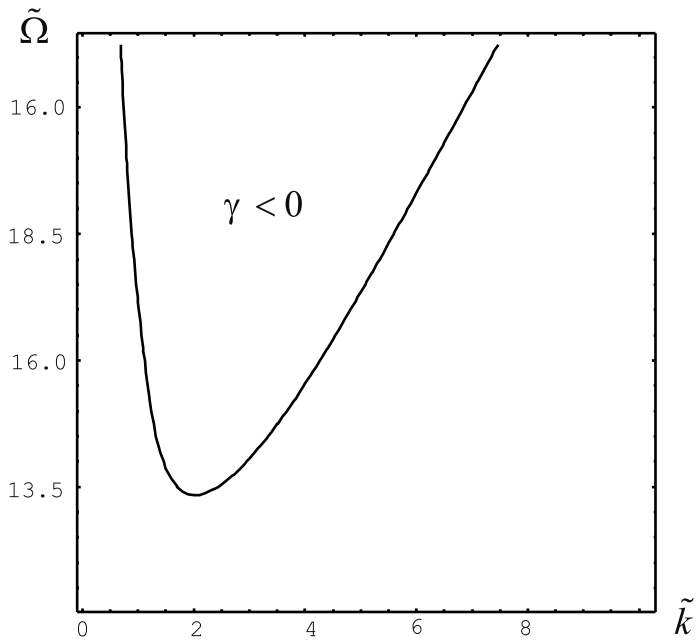

Fig 11. Les régions de stabilité pour les différentes valeurs du paramètre $\tilde{\xi}_0 = \xi_0 \kappa_\nu$ ($\tilde{k} = \kappa$, $\tilde{\Omega} = \Omega / \omega_\nu$): a) $\tilde{\xi}_0 = 0.1$.

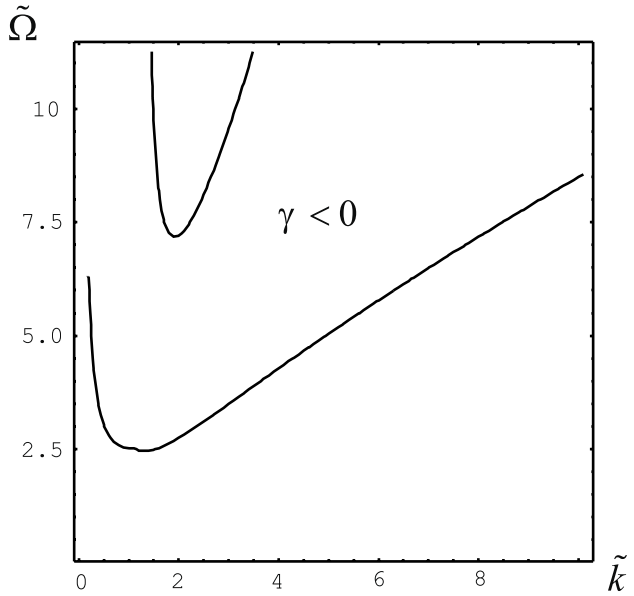

Fig 12. Les régions de stabilité pour les différentes valeurs du paramètre $\tilde{\xi}_0 = \xi_0 \kappa_\nu$ ($\tilde{k} = \kappa$, $\tilde{\Omega} = \Omega / \omega_\nu$): b) $\tilde{\xi}_0 = 1$.

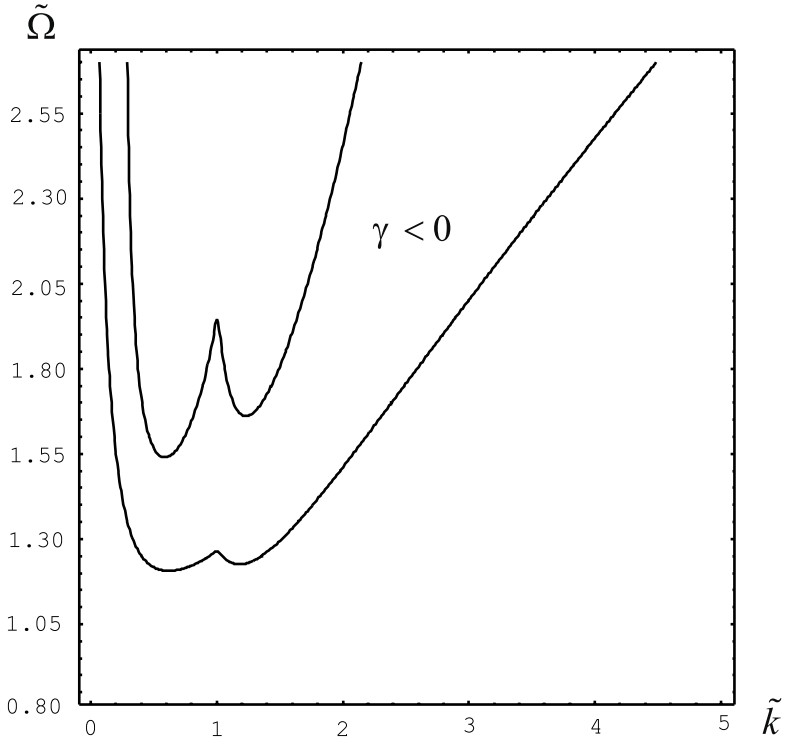

Fig 13. . Les régions de stabilité pour les différentes valeurs du paramètre $\tilde{\xi}_0 = \xi_0 \kappa_\nu$ ($\tilde{k} = \kappa$, $\tilde{\Omega} = \Omega / \omega_\nu$): c) $\tilde{\xi}_0 = 3.0$.

Cas du fluide idéal

Il est intéressant d'effectuer une transition vers le cas du fluide non-visqueux, (*autrement dit,* $\eta \to 0$). Si l'on garde le rapport Ω / ω_ν constant, cette transition correspond à $\Omega \to \infty$. Ce nouveau problème peut être examiné avec les méthodes mentionnées ci-dessus. On réitère tous les calculs des paragraphes précédents, ainsi l'équation finale s'écrit comme suit :

$$\left(\sin\left(\pi \frac{\omega}{\Omega}\right)\right)^2 - \left(\sin\left(\pi \frac{i\sqrt{kg}}{\Omega}\right)\right)^2 - i\frac{\pi}{4}\frac{\xi_0 \Omega^2}{g}\frac{\sqrt{kg}}{\Omega} D_1^*(i\sqrt{kg})\sin(2i\pi \frac{\sqrt{kg}}{\Omega}) = 0 \quad (42)$$

Ici

$$D_1^*(\alpha) = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . \\ \frac{\psi}{F(\alpha-2\Omega)} & 1 & \frac{\psi}{F(\alpha-2\Omega)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\psi}{F(\alpha-\Omega)} & 1 & \frac{\psi}{F(\alpha-\Omega)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\psi}{F(\alpha+\Omega)} & 1 & \frac{\psi}{F(\alpha+\Omega)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\psi}{F(\alpha+2\Omega)} & 1 & \frac{\psi}{F(\alpha+2\Omega)} \\ . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix},$$

$$F(\omega) = 1 + \frac{\omega^2}{kg}, \quad \psi = \frac{\xi_0 \Omega^2}{g}.$$

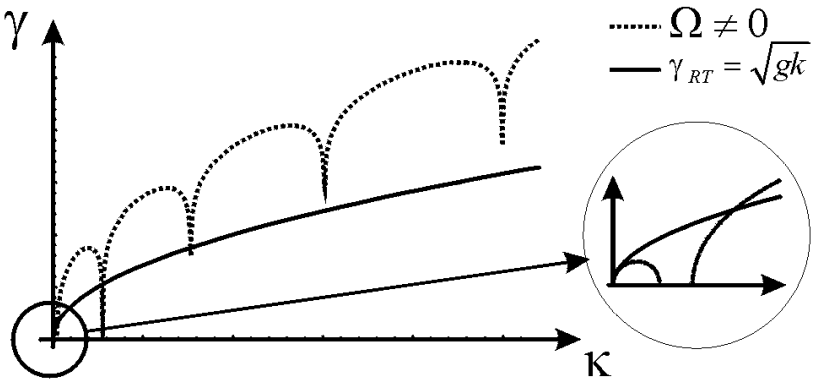

Fig.11. Courbe de dispersion de l'instabilité Rayleigh-Taylor pour un fluide incompressible sans stabilisation (ligne solide) et avec stabilisation dynamique (ligne pointillée).

La courbe de dispersion correspondante est présentée sur Fig. 11. Pour $\xi_0 \Omega^2 / g > 1$, la forme de la courbe montre que dans un premier temps le taux de croissance est plus petit que celui de l'instabilité «pure», ensuite $\mathrm{Re}(\gamma) = 0$, et enfin pour les grands κ le taux de croissance est supérieur à celui de l'instabilité d'origine. On peut reformuler ce problème comme celui du pendule de Kapitsa. On aura ainsi une solution exacte pour une amplitude arbitraire des oscillations du point d'attachement du pendule, et plus seulement pour les amplitudes petites par rapport à la longueur du pendule (*comme dans la solution du problème classique*).

Conclusion

Résumons: effectivement, l'effet d'oscillation forcée de la frontière entre deux fluides peut être utilisé dans le but de supprimer l'instabilité dans une certaine région des longueurs d'ondes. Cependant il faut soigneusement choisir les paramètres des oscillations pour que nous n'ayons pas l'effet inverse, soit une augmentation de l'instabilité.

Ce travail représente un avancement essentiel par rapport aux récents travaux, par exemple, K.Kumar et al. [4]. Pour la première fois on a réussi à calculer d'une manière analytique le déterminant infini (30) et ainsi obtenir une expression simple et compacte pour la courbe de dispersion. Avec le schéma des calculs élaboré dans ce chapitre on peut obtenir non seulement le seuil d'instabilité mais aussi toute la dépendance $\omega(k)$ pour n'importe quelles amplitudes et fréquences des oscillations externes.

Quant aux applications pratiques concernant la fusion inertielle, on peut a priori supposer la possibilité de réalisation d'un tel effet dans les lasers en fabriquant, par exemple, des cibles multicouches. L'accélération, créée par l'ablation qui sert de g effectif dans ces problèmes, sera modulée selon t, ce qui est requis pour la méthode de suppression examinée ci-dessus. En ce qui concerne les Z-pinches, on pourrait essayer d'atteindre les conditions nécessaires en produisant les oscillations de haute fréquence du courant sur fond de l'impulsion initiale. Si le champ magnétique, par exemple, est figé dans la matière, ces oscillations du courant entraînent nécessairement l'oscillation de la frontière entre le plasma et le vide pourvu de champ magnétique. Le phénomène de stabilisation des cascades des coquilles par rapport à une seule coquille est aussi influencé, notamment, par un effet de même provenance – quand les coquilles entrent en collision, l'accélération effective de la frontière change brusquement en effectuant de cette façon une modulation selon le temps.

Références

1. L.D. Landau, E.M. Lifchitz, Physique Théorique, Vol.1, Mécanique, (Mir, Moscow, 1988), ch.5, pp. 123-125.

2. G.H.Wolf, Zeitscrift fur Physic, 1969, vol. 227, p. 291.

3. L.D. Landau, E.M. Lifchitz, Course of theoretical physics, Vol.6., Hydrodynamics, M. «Nauka», 1988, p. 76.

4. K.Kumar, L.S. Tuckerman, J. Fluid Mech., 1994, vol. 279, pp.49-68.

5. L.D. Landau, E.M. Lifchitz, Course of theoretical physics, Vol.6., Hydrodynamics, M. «Nauka», 1988, p. 136.

6. S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford University Press, 1961, pp.428-477.

7. A.V. Baitin, A.A. Ivanov, Soviet JETP Lett., 1994, vol. 59.

8. A. V. Baitin, A. A. Ivanov, Plasma Phys. Rep., 1995, vol. 21, p. 479.

9. E.T. Whittaker, G. N. Watson "Course of modern mathematical analysis" , parts1-2, Moscow, Gostekhizdat, 1934.

CHAPITRE 3. INFLUENCE DE MODULATION DE LA SURFACE SUR L'INSTABILITE RAYLEIGH-TAYLOR DANS LES PLASMAS MAGNETISES

Introduction.

Le schéma des coquilles à fils est devenu récemment une méthode très courante d'obtention de rayonnement haute puissance ou bien d'implosion de haute qualité dans le domaine des Z-pinches (*plasmas de striction magnétique*). Il se trouve que les résultats expérimentaux sont bien meilleurs dans le cas d'une implosion de fils fins multiples situés sur un cylindre (*Fig.1, 3*) que dans le cas du schéma ordinaire du liner (T.W.L. Sanford et al., C.Deeney et al. [1, 2]). Généralement, plus on a de fils, plus l'implosion est stable (R.B. Spielman et al., C.Deeney et al. [3, 2]). On propose dans ce chapitre un mécanisme de stabilisation lié à la présence de fils et à l'augmentation de leur nombre, ce qui contribue à la suppression de l'instabilité Rayleigh-Taylor, et par conséquent mène à une compression plus homogène. L'instabilité la plus dangereuse dans ce cas est justement l'instabilité Rayleigh-Taylor (C.Deeney et al., D.L. Peterson et al. [2, 4]). De nombreux travaux expérimentaux sont consacrés aux problèmes d'implosion des coquilles à fils (C.Deeney et al., D.B. Sinars et al. [2, 5, 6, 7]).

Nous allons soigneusement examiner un problème modélisant la stabilisation de l'instabilité Rayleigh-Taylor due aux modulations régulières de la surface de séparation entre le plasma et le champ magnétique. Ce type de modulation peut apparaître grâce aux explosions initiales et à l'évolution ultérieure des fils solides. La situation réelle n'est pas aussi simple que cela. Cependant notre modèle est suffisamment adéquat pour mettre en évidence le phénomène et obtenir quelques estimations. Pour une raison de simplicité, nous résoudrons le problème dans une géométrie plane (*2D*) comme cas limite de la géométrie cylindrique (*Fig.2*) lorsque le rayon du pinch $R \to \infty$.

Supposons que le plasma est un milieu incompressible de grande conductivité. Supposons également que la couche de transition entre le vide, siège du champ magnétique, et le plasma, est très mince (*autrement dit, beaucoup plus petite que*

l'amplitude de modulation de la surface). Comme l'interface plasma/vide n'est pas plane, le champ magnétique dans l'état d'équilibre est aussi modulé. Les relations de correspondance entre notre géométrie plane $\{x, y, z\}$, et les coordonnées cylindriques de référence sont les suivantes : $x \to \varphi, y \to r, z \to z$. La section suivante de ce chapitre aborde la question de la distribution d'équilibre (*i.e. la distribution initiale*) du champ magnétique et celle de la forme initiale de l'interface surfacique.

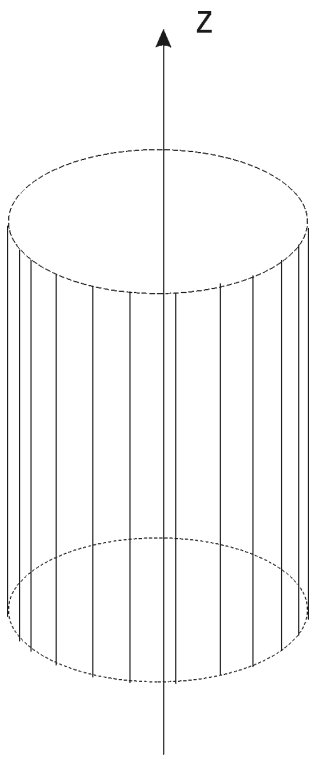

Fig.1. Représentation schématique des expériences des implosions de coquilles à fils.

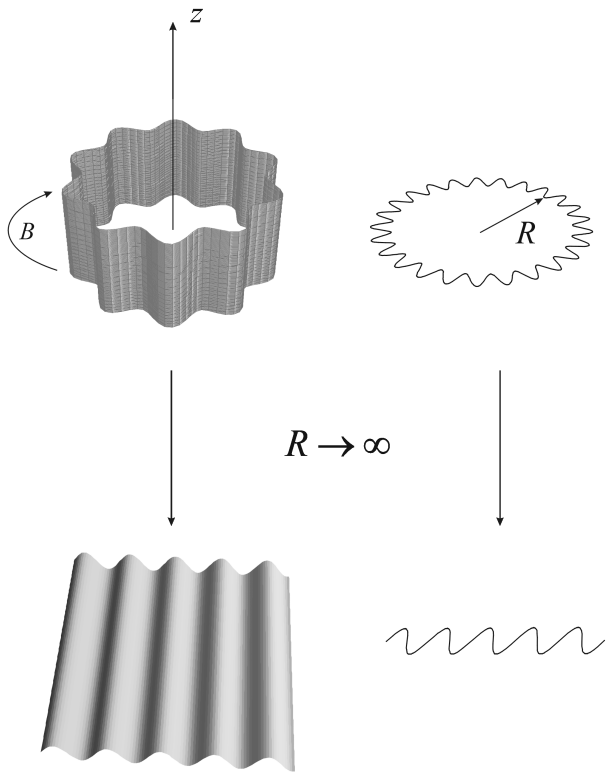

Fig. 2. Transition de la géométrie cylindrique (expérimentale) à la géométrie plane.

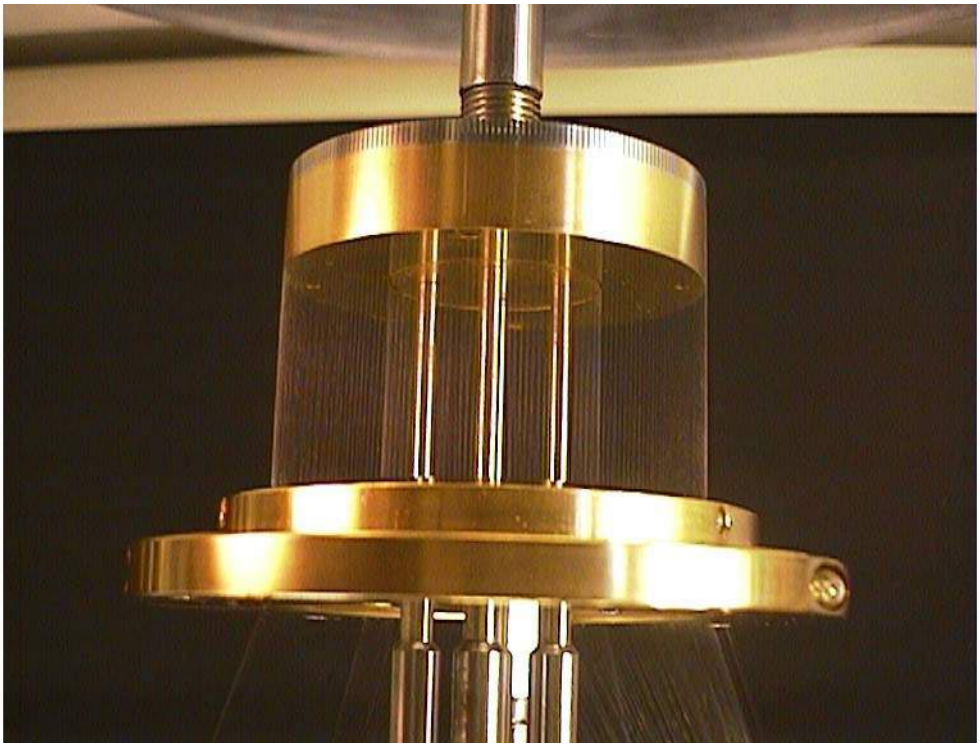

Fig. 3. Un dispositif expérimental (Sandia).

Etat d'équilibre.

Nous nous attacherons à examiner les effets d'un possible couplage des modes d'instabilité causé par des perturbations régulières de l'interface, créées avant que l'instabilité ne se développe. Le taux de croissance de l'instabilité Rayleigh-Taylor est fortement influencé par la direction de son vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Si la projection de ce vecteur sur le champ magnétique est $\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}\neq 0$, le taux de croissance de l'instabilité est considérablement diminué (cf. S.Chandrasekhar [8]), les modes les plus dangereux sont donc ceux pour lesquels $\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}=0$.

L'état d'équilibre considéré est le suivant (*cf. Fig. 4*): l'axe y est perpendiculaire à la surface placée entre le plasma et le champ magnétique dans le vide, la distribution du champ magnétique n'admet que deux composantes – selon les directions x et y, $B_y \ll B_x$. Il a déjà été mentionné que la conductivité du plasma est suffisamment grande pour que l'épaisseur de peau soit négligeable. Le champ magnétique dans le plasma est nul. Le champ magnétique dans le vide est décrit par une formule simple (*le champ en dehors du plasma,* $y>0, y\to+\infty$) :

$$B_{0ex} = B_0 + \alpha\sin(\kappa x)e^{-\kappa y} \tag{1}$$

$$B_{0ey} = \alpha\cos(\kappa x)e^{-\kappa y} \tag{2}$$

Ici le paramètre $\alpha/B_0 \ll 1$. La modulation du champ magnétique ($\alpha\cos(\kappa x)e^{-\kappa y}$) se réduit exponentiellement lorsque $y\to+\infty$. Il est aisé de constater que $\nabla\times\mathbf{B}_0=\mathbf{0}$ et $\nabla\cdot\mathbf{B_0}=0$, donc il n'y a pas de courant externe en dehors du plasma. Il est évident que l'interface correspondante, entre le plasma et le champ magnétique, est une ligne de champ de la configuration du champ magnétique désignée par les équations (1)–(2):

$$x_s = -\frac{1}{\kappa}\mathrm{Arcsin}(e^{\kappa y_s}(1-\frac{\kappa B_0}{\alpha}y_s)) \tag{3}$$

Notamment, cette expression signifie que la surface d'équilibre est « modulée » avec la « fréquence » κ selon x, l'amplitude de cette modulation selon y est $y_{s\max} \approx \frac{2}{\kappa}\frac{\alpha}{B_0} \ll \frac{1}{\kappa}$ (*Fig.4*). Cette modulation est similaire aux inhomogénéités de la surface présentes dans le plasma après les explosions et la redistribution de la matière et du champ dans les coquilles à fils. Il faut noter que ce n'est qu'un modèle qualitatif de cette surface.

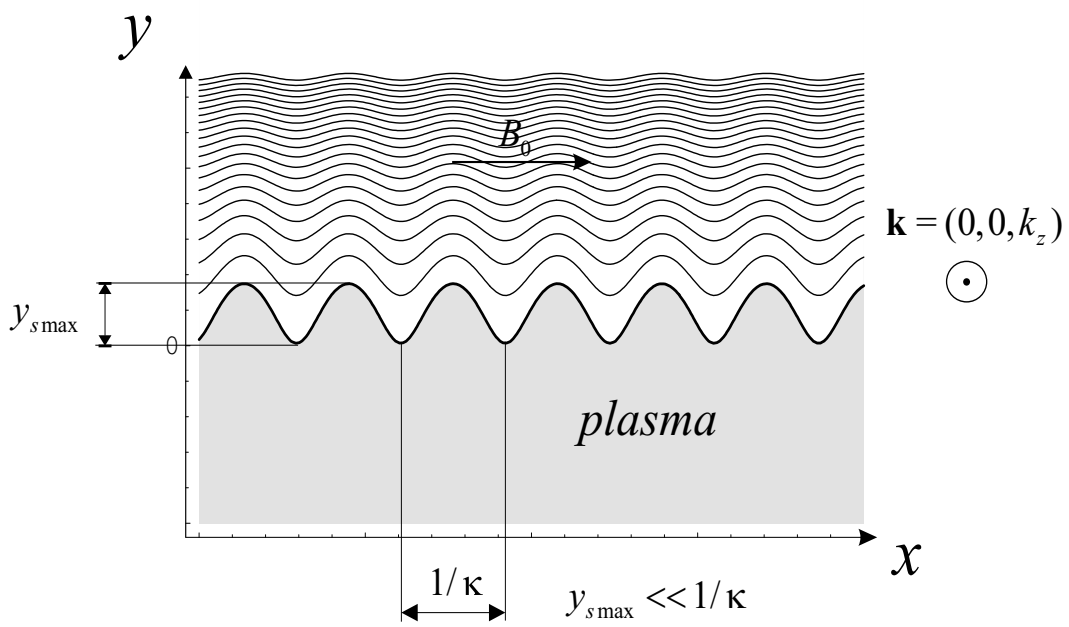

Fig.4. Lignes de champ magnétique, géométrie du problème.

Perturbations initiales de l'instabilité.

Après avoir décrit l'état d'équilibre, l'étape suivante est d'introduire dans le système les petites perturbations qui évoluent en donnant l'instabilité Rayleigh-Taylor. Comme cité précédemment, les modes les plus dangereux sont ceux pour lesquels $\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}=0$. Ces modes-ci doivent être impérativement examinés. Par conséquent, le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est choisi tel que $\mathbf{k}=(0,0,k_z)=(0,0,k)$. La condition supplémentaire qui permettra de faciliter les transformations des formules est $k \ll \kappa$. Le plasma est un fluide incompressible de grande conductivité, donc le champ magnétique perturbé dans le plasma est toujours nul (*le champ perturbé à l'intérieur est* $\tilde{\mathbf{B}}_\mathbf{i}=\nabla\times(\xi\times\mathbf{B}_\mathbf{i0})=0$ *(B. Kadomtsev [9]) parce que* $\mathbf{B}_\mathbf{i0}=0$). Les équations hydrodynamiques pour l'évolution du plasma sont alors les suivantes :

$$\nabla\tilde{p}=\omega^2\rho\xi \tag{4}$$

$$\Delta p=\omega^2\rho\nabla\xi=0 \tag{5}$$

Ici ξ est le déplacement des particules depuis leur emplacement initial causé par les perturbations initiales, et $\tilde{p}$ est la perturbation de la pression.

Quant à la perturbation du champ magnétique externe, on peut l'exprimer comme $\mathbf{B}_\mathbf{e}=\nabla\psi$, $\Delta\psi=0$. Ce type de présentation est possible grâce à l'absence des courants externes, d'où $\nabla\times\mathbf{B}_e=\mathbf{0}$ et $\nabla\cdot\mathbf{B}_\mathbf{e}=0$.

Les perturbations $\tilde{p}$ et ξ doivent disparaître quand $y\to-\infty$ (*dans le plasma loin de l'interface*). La perturbation du champ magnétique externe $\mathbf{B}_\mathbf{e}\to\mathbf{0}$ lorsque $y\to+\infty$ (*dans le vide loin de l'interface*).

En prenant en compte le fait que notre système est modulé selon x avec la « fréquence » κ, on peut développer les perturbations $\tilde{p}$, ξ et ψ en série de Floquet (*le vecteur d'onde des perturbations s'écrit* $\mathbf{k}=(0,0,k)$):

$$\tilde{p} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n e^{\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}\,y} e^{ikz} e^{in\kappa x} \tag{6}$$

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_n e^{-\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}\,y} e^{ikz} e^{in\kappa x} \tag{7}$$

On déduit de l'éq. (4) les autres variables :

$$\xi_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{in\kappa}{\omega^2\rho} p_n e^{\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}\,y} e^{ikz} e^{in\kappa x} \tag{8}$$

$$\xi_y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}}{\omega^2\rho} p_n e^{\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}\,y} e^{ikz} e^{in\kappa x} \tag{9}$$

$$\xi_z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{ik}{\omega^2\rho} p_n e^{\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}\,y} e^{ikz} e^{in\kappa x} \tag{10}$$

et pour le champ magnétique

$$B_{ex} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} in\kappa\psi_n e^{-\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}\,y} e^{ikz} e^{in\kappa x} \tag{11}$$

$$B_{ey} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}\,\psi_n e^{-\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}\,y} e^{ikz} e^{in\kappa x} \tag{12}$$

$$B_{ez} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ik\psi_n e^{-\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}\,y} e^{ikz} e^{in\kappa x} \tag{13}$$

Les modes stabilisants (*ceux avec* $n \neq 0$) sont couplés avec le mode $n = 0$ (*l'instabilité Rayleigh-Taylor sans modulation de l'interface*), d'où la diminution du taux de croissance.

Système d'équations.

L'obtention de la relation de dispersion nécessite deux équations supplémentaires. Elles découlent directement des conditions aux limites de B. Kadomtsev [10] :

$$\tilde{p} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{B_{0e}} \cdot \mathbf{B_e} + \frac{1}{8\pi}\xi_n \frac{\partial B_{0e}^2}{\partial n} \tag{14}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B_e} = \mathbf{n} \cdot (\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B_{0e}})) \tag{15}$$

Ces deux relations doivent être vérifiées sur la surface initiale modulée (*surface d'équilibre*). En substituant les équations (6)–(13) dans (14)–(15) on obtient la relation de dispersion. Au cours des transformations des équations (14), (15), il est nécessaire de faire certaines suppositions supplémentaires pour obtenir, après calcul, une expression analytique acceptable.

Premièrement, l'interface initiale n'est pas plane, il est donc nécessaire de trouver une méthode pour traiter le terme exponentiel $e^{\pm\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}y}$. Comme mentionné ci-dessus, $\alpha / B_0 \ll 1$. De cette inégalité il s'ensuit que $y_{s\max}\kappa \sim \alpha / B_0$ (*cf.* (3)) et le terme exponentiel dans les formules (1) – (2) ne peut ajouter que des quantités de l'ordre de $(\alpha / B_0)^2$. Cependant, tous les termes à n grand dans les équations (6)–(13) sont exponentiellement petits, il n'est donc pas nécessaire d'effectuer la sommation pour $|n| \geq B_0 / \alpha$. Désormais les calculs seront effectués à la précision α / B_0 et pour les petites valeurs de n seulement ; autrement dit, on néglige les termes de l'ordre de $(\alpha / B_0)^2$.

Il y a une autre précision à faire. Si l'on se place dans une géométrie cylindrique et que l'on considère l'instabilité de Rayleigh-Taylor fabriquée par la compression provoquée par le champ magnétique, la gravité effective $\mathbf{g_{eff}}$ est créée par la courbure des lignes de champ, soit $\mathbf{(B\nabla)B}$. La géométrie plane est ici le cas limite de la géométrie cylindrique pour le rayon correspondant $R \to \infty$. En deux dimensions, pour

introduire la gravité $\mathbf{g_{eff}}$ il faut ajouter le terme correspondant à $\mathbf{(B\nabla)B}$, soit $\partial B_0^2 / \partial y = 8\pi\rho g_{eff}$ (*cf. éq.* (1)). Une autre façon d'introduire g_{eff} est de modifier légèrement les équations (1)–(2) :

$$B_{0ex} = B_0(1-\beta y) + \alpha \sin(\kappa x) e^{-\kappa y} \tag{16}$$

$$B_{0ey} = \alpha \cos(\kappa x) e^{-\kappa y} - B_0 \beta x \tag{17}$$

Ici $\beta = 1/R; x, y \ll (\alpha / B_0)R$ est la courbure du cylindre « d'origine », qui est maintenant traité comme une surface plane, $g_{eff} = g_0 = \beta B_0^{\ 2} / (4\pi\rho)$. Ce changement n'influence que le dernier terme dans (14). Afin d'éviter la prise en compte des termes $\sim g_{eff}\alpha$ par rapport à α / B_0, il faut imposer la limitation suivante :

$$\frac{\beta}{\kappa} \ll \frac{\alpha}{B_0} \text{ ou } \kappa R \gg \frac{B_0}{\alpha} \tag{18}$$

Enfin, la dernière hypothèse simplifiant les calculs et les transformations de l'équation (15) est la suivante :

$$\sqrt{\frac{\alpha}{B_0}} \ll \frac{k}{\kappa} \ll 1 . \tag{19}$$

Solution.

Ainsi, nous transformons (14), (15) à l'aide des séries (6)–(13) tout en prenant en compte les approximations (18), (19). Le calcul est effectué avec la précision $(\alpha / B_0)^2$

et pour $|n| \ll B_0 / \alpha$. Il est très volumineux, par conséquent les détails du calcul sont présentés dans l'appendice A. Les transformations aboutissent à l'équation suivante :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\omega^2\rho}(-3in^3\kappa^3\alpha B_0 \frac{\cos(\kappa x)}{\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}} + \alpha B_0 n^2\kappa^3 \frac{\sin(\kappa x)}{\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}} + B_0^2 n^2\kappa^2 +$$

$$+2\alpha B_0 n^2\kappa^2 \sin(\kappa x) + iB_0 n\kappa\alpha\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}\cos(\kappa x) - \alpha B_0\kappa\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}\sin(\kappa x) -$$

$$-4\pi g\rho\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}) \qquad (20)$$

Prenons maintenant en compte le fait que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n f(n)\cos(\kappa x)e^{in\kappa x} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n f(n)(e^{i(n+1)\kappa x} + e^{i(n-1)\kappa x}) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_{n-1} f(n-1)e^{in\kappa x} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_{n+1} f(n+1)e^{in\kappa x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(p_{n+1}f(n+1) + p_{n-1}f(n-1))}{2} e^{in\kappa x}$$

et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n f(n)\sin(\kappa x)e^{in\kappa x} = i\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(p_{n+1}f(n+1) - p_{n-1}f(n-1))}{2} e^{in\kappa x}$,

donc rédigeons maintenant (20) de la façon suivante :

$$c_{n-1}p_{n-1} + p_n(\omega^2 - V_A^2 n^2\kappa^2 + g\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}) + c_{n+1}p_{n+1} = 0 \qquad (21)$$

Dans cette relation

$$c_{n-1} = \frac{i}{2}\frac{\alpha}{B_0}V_A^2\kappa^3 \frac{(3(n-1)^3 + (n-1)^2)}{\sqrt{k^2+(n-1)^2\kappa^2}} + i\frac{\alpha}{B_0}V_A^2\kappa^2(n-1)^2 -$$

$$-\frac{i}{2}\frac{\alpha}{B_0}V_A^2\kappa n\sqrt{k^2+(n-1)^2\kappa^2}\,) \tag{22}$$

$$c_{n+1}=\frac{i}{2}\frac{\alpha}{B_0}V_A^2\kappa^3\frac{(3(n+1)^3-(n+1)^2)}{\sqrt{k^2+(n+1)^2\kappa^2}}-i\frac{\alpha}{B_0}V_A^2\kappa^2(n+1)^2-$$

$$-\frac{i}{2}\frac{\alpha}{B_0}V_A^2\kappa n\sqrt{k^2+(n+1)^2\kappa^2}\,) \tag{23}$$

La vitesse d'Alfven $V_A^2=B_0^2/(4\pi\rho)$ dans les équations ci-dessus est calculée pour le champ magnétique B_0.

Formellement, afin d'obtenir la courbe de dispersion nous devons résoudre l'équation contenant le déterminant infini avec les coefficients (21). Mais grâce aux suppositions et approximations faites ci-dessus, nous pouvons nous limiter à trois ou cinq lignes de ce déterminant afin d'obtenir une solution approximative. L'équation correspondante pour trois lignes s'écrit alors :

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \omega^2-V_A^2\kappa^2+g(\kappa+\frac{k^2}{2\kappa}) & \frac{i}{2}V_A^2\frac{\alpha}{B_0}\kappa k & 0 \\ \frac{i}{2}V_A^2\frac{\alpha}{B_0}k^2 & \omega^2+gk & -\frac{i}{2}V_A^2\frac{\alpha}{B_0}k^2 \\ 0 & -\frac{i}{2}V_A^2\frac{\alpha}{B_0}\kappa k & \omega^2-V_A^2\kappa^2+g(\kappa+\frac{k^2}{2\kappa}) \end{pmatrix}=0 \tag{24}$$

Résultats.

De l'équation (24) nous pouvons déduire une relation de dispersion, dont les racines donnent la fréquence ou bien le taux de croissance de l'instabilité. Une branche de courbe de dispersion est donnée par l'équation

$$\omega^2 = V_A^2\kappa^2 - g(\kappa + \frac{k^2}{2\kappa}) \tag{25}$$

l'autre branche de la courbe est une branche d'instabilité:

$$(\omega^2 + gk)(\omega^2 - V_A^2\kappa^2 + \kappa g + \frac{gk^2}{2\kappa}) + \frac{1}{2}V_A^4\left(\frac{\alpha}{B_0}\right)^2 \kappa k^3 = 0 \tag{26}$$

L'équation (25) représente une fréquence d'onde d'Alfven $\omega = V_A\kappa$ pour la longueur d'onde de modulation κ. Elle est légèrement modifiée par la gravité effective. En revanche, l'équation (26) est exactement la relation de dispersion recherchée – celle de l'instabilité Rayleigh-Taylor. Rappelons-nous que $\kappa \gg \beta, k$ et réécrivons l'équation (26) de la façon suivante :

$$\omega^2 = -(g - \frac{1}{2}V_A^2\left(\frac{\alpha}{B_0}\right)^2 \frac{1}{\kappa}k^2)k \tag{27}$$

Cela signifie que la nouvelle accélération effective qui « pilote » l'instabilité est

$$g^* = g_0 - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{4\pi\rho}\frac{k}{\kappa}k = g_0 - \frac{1}{8}V_A^2\kappa y_{s\max}^2 k^2 \tag{28}$$

Ici $y_{s\max}$ est l'amplitude dimensionnelle des modulations de l'interface. La dépendance correspondante du taux de croissance de l'instabilité de nombre d'onde k est présentée sur la Fig.5.

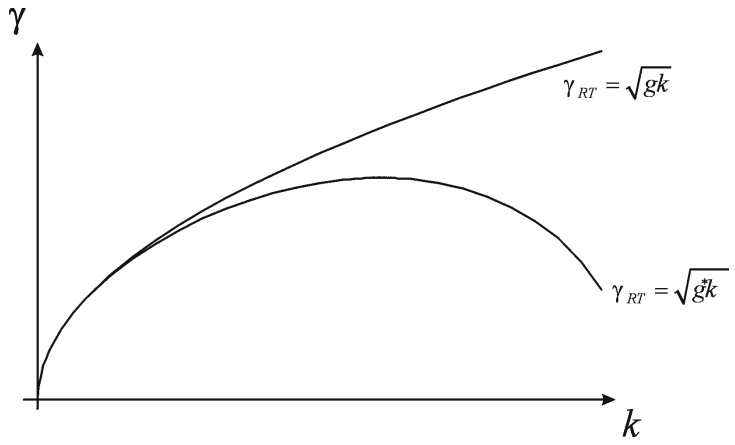

Fig.5. Le taux de croissance de l'instabilité Rayleigh-Taylor ordinaire $\gamma = \sqrt{gk}$ et celui de l'instabilité supprimée selon (27).

Si nous augmentons le nombre des lignes prises en compte dans le déterminant (24), nous aurons dans les expressions finales des termes supplémentaires qui sont inférieurs aux termes originaux de facteurs de $\kappa V_A^2 / g = \kappa / \beta \gg 1$ ou $k / \kappa \ll 1$. Pour d'encore plus grandes valeurs de n, les termes correspondants diminuent exponentiellement.

A titre d'exemple, nous avons calculé le déterminant (24) avec 5 lignes. Le calcul n'est pas présenté ici mais les termes supplémentaires obtenus sont proportionnels à k^2. Ils sont inférieurs au dernier terme de l'équation (28) de facteurs $\sim \left(\frac{\beta B_0}{\kappa \alpha} \right)^2 \ll 1$ (*cf. (18)*) et $\sim \frac{\beta}{\kappa} \ll \frac{\alpha}{B_0} \ll 1$.

Ainsi, dans le cadre de nos approximations, (28) est le résultat final. Il est commode d'introduire la nouvelle variable $\chi = k / \kappa$ (*cf. (19)*). Avec cette nouvelle variable l'équation (28) devient plus compacte:

$$g^* = g_0 - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{4\pi\rho} \kappa \chi^2, \sqrt{\frac{\alpha}{B_0}} \ll \chi \ll 1 \qquad (29)$$

Nous pouvons maintenant analyser l'influence de divers paramètres sur le processus de stabilisation. Selon l'équation (28), si nous fixons le vecteur d'onde de l'instabilité k, l'effet est proportionnel à la « fréquence » de modulation κ et à l'amplitude du carré de la modulation $y_{s\max}^2$. Si nous fixons maintenant le rapport $\chi = k/\kappa$, selon (29) l'intensité de stabilisation augmente toujours au fur et à mesure que κ grandit et l'effet est proportionnel au carré de l'amplitude de la modulation initiale du champ magnétique α^2.

Le sens physique de l'équation (29) est clair – la courbure additionnelle de la surface modulée produit la gravité effective oscillante dans l'espace $g_{osc} \sim \frac{1}{4\pi\rho}\alpha\kappa\alpha$. Ce champ gravitationnel supplémentaire influence l'instabilité à peut près de la même façon que les oscillations gravitationnelles créées par les oscillations temporelles imposées de l'extérieur G.H Wolf, K.Kumar et al., A.Ivanov et al. [11, 12, 13].

Le seuil de stabilisation pour une valeur fixée du paramètre $\chi = \chi_0$ est défini par $g^* = 0$ ou bien

$$\kappa_{\min} = 2\beta \frac{B_0^2}{\alpha^2}\frac{1}{\chi_0^2} \tag{30}$$

On peut vérifier que si l'équation (30) est valide, toutes nos hypothèses et approximations *(*$\frac{\alpha}{B_0} \ll 1$*, (18) , (19))* sont vérifiées.

Conclusion.

Cette étude a donc démontré que la surface d'équilibre modulée (« *gaufrée* ») (*et, par conséquent, le champ magnétique modulé*) influence directement les modes d'instabilité Rayleigh-Taylor avec le vecteur d'onde perpendiculaire au champ magnétique (*dans une géométrie cylindrique le vecteur d'onde est parallèle à l'axe du système*). Nous avons résolu le problème modèle et nous avons ainsi obtenu quelques

estimations. Les résultats analytiques ont le même comportement qualitatif que les résultats expérimentaux. A savoir, il s'agit de la croissance de la stabilisation avec l'augmentation du nombre des fils (*ou, d'une manière équivalente*, κ) – cf. éqs. (27)–(30). Nous avons obtenu les expressions du taux de croissance de l'instabilité Rayleigh-Taylor, prenant en compte les modulations de l'interface et du champ magnétique.

Le problème examiné contient beaucoup de simplifications – ainsi la géométrie bidimensionnelle ou l'état d'équilibre initial, qui n'est pas normalement stationnaire dans les systèmes d'implosion réels. Par conséquent, il est légitime de se demander si ce phénomène est réellement le facteur primordial de suppression dans les configurations des coquilles à fils. Il peut néanmoins jouer un rôle considérable dans le processus de stabilisation.

Appendice A.

Dans le cadre des approximations mentionnées ci-dessus, le vecteur $\mathbf{n}$, normal à la surface est le suivant :

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\alpha}{B_0}\cos(\kappa x) \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{31}$$

Si nous comparons les composantes du vecteur $\mathbf{n}$ selon x et selon y, nous pouvons en déduire que pour calculer (15) nous avons besoin de calculer la composante x de l'expression $\nabla\times(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}_{\mathbf{0e}})$ avec la précision $O(\alpha/B_0)$ et la composante y doit être calculée plus précisément – jusqu'aux termes de l'ordre de $o(\alpha/B_0)$. Donc,

$$\nabla\times(\xi\times\mathbf{B_{0e}}))_x = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\frac{n^2\kappa^2}{\omega^2\rho}p_nB_0e^{\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}y}e^{ikz}e^{i\kappa nx}+O(\frac{\alpha}{B_0})) \tag{32}$$

$$\nabla\times(\xi\times\mathbf{B_{0e}}))_y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\frac{p_n}{\omega^2\rho}e^{\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}y}e^{ikz}e^{i\kappa nx}(n^2\kappa^2\alpha\cos(\kappa x)+in\kappa^2\alpha\sin(\kappa x)+$$

$$+in\kappa\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}(B_0+\alpha\sin(\kappa x))+\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}\kappa\alpha\cos(\kappa x))+o(\frac{\alpha}{B_0})) \tag{33}$$

Nous avons profité de la relation (19) pour simplifier la partie droite de (15) et d'obtenir (32) et (33). L'équation (15) entière se transforme en

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}p_ne^{\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}y}e^{ikz}e^{in\kappa x}(2\alpha\cos(\kappa x)n^2\kappa^2+i\alpha\sin(\kappa x)n\kappa^2+iB_0n\kappa\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}+$$

$$+i\alpha n\kappa\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}\sin(\kappa x)+\alpha\kappa\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}\cos(\kappa x))=$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\omega^2\rho\psi_ne^{-\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}y}e^{ikz}e^{in\kappa x}(\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}+in\kappa\frac{\alpha}{B_0}\cos(\kappa x)) \tag{34}$$

La seconde équation pour les inconnues p_n et ψ_n, est l'équation (14):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}p_ne^{\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}y}e^{ikz}e^{in\kappa x}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\psi_ne^{-\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}y}e^{ikz}e^{in\kappa x}(in\kappa(B_0+\alpha\sin(\kappa x))-\alpha\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}\cos(\kappa x))+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{p_n}{\omega^2\rho}e^{\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}y}e^{ikz}e^{in\kappa x}(in\kappa\alpha B_0\kappa\cos(\kappa x)+$$

$$+\sqrt{k^2+n^2\kappa^2}(-\beta B_0^2-\alpha B_0\kappa\sin(\kappa x))) \tag{35}$$

Les équations (34) et (35) doivent être vérifiées sur l'interface initiale (3) – non-perturbée mais modulée. Des équations (34) et (35) on déduit finalement l 'équation (20).

Références

1. T.W.L. Sanford, G.O. Allshouse, B.M. Marder et al., Phys.Rev.Lett. **77**, 5063 (1996).

2. C. Deeney, T.J. Nash, R.B. Spielman et al., Phys.Rev. E **56**, 5945 (1997).

3. R.B. Spielman, C. Deeney, G.A. Chandler et al., Phys. Plasmas, **5**, 2105 (1998).

4. D.L. Peterson, R.l. Bowers, K.D. McLenithan et al., Phys. Plasmas **3**, 368 (1996).

5. D.B. Sinars, T.A. Shelkovenko, S.A. Pikuz et al., Phys. Plasmas**, 7,**1555 (2000).

6. D.B. Sinars, Min Hu, K.M. Chandler et al., Phys. Plasmas, **8,** 216 (2001)**.**

7. Bulletin of the American Physical Society, Vol. 44, No.7, 1999.

8. S. Chandrasekhar , "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Oxford univ. press 1961, p. 466.

9. Kadomtsev B., "Hydromagnetic stability of a plasma", Rev. of Plasma Physics, Vol.2., p. 176, Cons. Bureau, NY, 1966.

10. Kadomtsev B., "Hydromagnetic stability of a plasma", Rev. of Plasma Physics, Vol.2., p. 157, Cons. Bureau, NY, 1966.

11. G.H.Wolf, Zeitschrift fur Physic, **227**, p. 291, (1969).

12. K.Kumar, L.S. Tuckerman, "Parametric instability of the interface between two fluids", J.Fluid Mech., **278**, pp. 49-68 (1994).

13. A. Ivanov, A. Chuvatin, Phys. Rev. E., March 2001.

CHAPITRE 4. ONDE DE RAREFACTION DANS LES PLASMAS MAGNETISES DE TYPE HALL

Introduction

A.S. Kingsep et al. [1] ont montré que la loi du champ magnétique gelé dans un plasma peut entraîner une pénétration rapide du champ magnétique. Cette pénétration est beaucoup plus rapide que la pénétration de type diffusion et elle n'est pas accompagnée par une compression du plasma. Si l'on a un gradient initial de la densité, cette pénétration se manifeste sous la forme d'une onde de choc du champ magnétique avec la vitesse

$$\mathbf{u}_{KMC} = -\left(c/8\pi e n_e\right)(\mathbf{B}\times\nabla \ln n_e) \tag{1}$$

Ici B est le champ magnétique, n_e est la densité des électrons, c est la vitesse de lumière, e est la charge d'électron. Le résultat (1) était soutenu par les mesures expérimentales de B.V. Weber et al. [2] et par des études théoriques intensives. La pénétration en question a été généralisée à des plasmas initialement homogènes (A.Fruchtman et al. [3]), pour la géométrie 3D (J. Kalda [4]) et pour un taux de collisions arbitraire (K. Chukbar et al. [5]). La compression du plasma, la structure du front et la distribution d'énergie ont été aussi abordées. Les plasmas considérés dans ces travaux et dans d'autres études s'appellent habituellement des plasmas de type Hall. La condition primordiale dans ces cas-là est la magnétisation des électrons, les ions ne sont pas magnétisés et le champ électrique de Hall $\mathbf{E_H} = -(\mathbf{v_e}\times\mathbf{B})/c$ est pris en compte dans la loi d'Ohm.

Dans les ondes de choc rapides ($u_{KMC} \gg V_A$, V_A *est la vitesse d'Alfvèn*) la compression du plasma est suffisamment faible, parce que les ions ne sont influencés par $\mathbf{E_H}$ que pendant une période de temps très courte (A Fruchtman et al., A.S. Chuvatin et al. [6, 7]). Par contre, dans la région du plasma derrière le front de l'onde de choc, le champ magnétique peut accélérer les ions jusqu'à ce qu'ils sortent du système,

créant ainsi des conditions pour la raréfaction locale du plasma. La possibilité d'un tel processus a été indiquée auparavant par L.I. Rudakov [8]. Ce phénomène peut être essentiel pour certains commutateurs à ouverture de plasma qui sont un des éléments très importants de la technologie des générateurs de très fort courant (~10 MA) à temps de montée très rapide ($\leq$100 ns) utilisés dans les expériences de Z-pinches par exemple. Dans ce chapitre on se base sur l'hypothèse que ce phénomène a effectivement lieu et qu'il prend la forme d'une onde stationnaire.

Géométrie du problème, équations de base

On va examiner le problème dans le cadre de géométrie présentée sur la Fig.1. Le plasma est déjà magnétisé après le processus de pénétration de l'onde de champ magnétique suivant l'équation (1). Pour des raisons de simplicité on va négliger les effets liés à la courbure des lignes de champ magnétique.

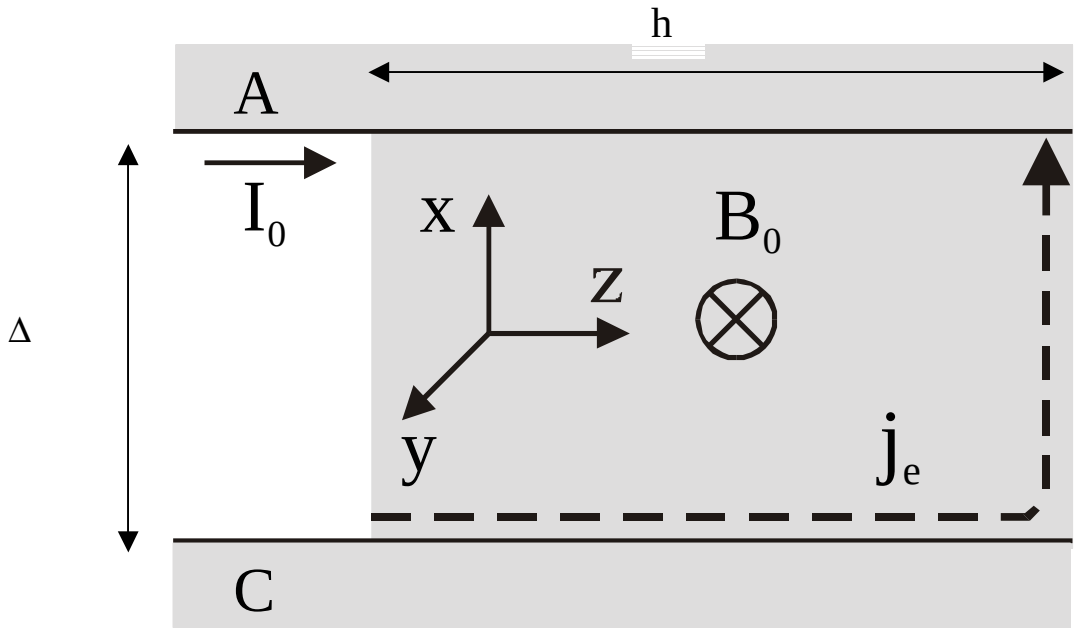

Fig.1 Schéma général du problème. C – cathode, A – anode.

Les échelles caractéristiques du plasma sont : Δ selon la direction x et h selon z. Dans ce système de référence cartésien on a les composantes suivantes pour les variables en question : $\mathbf{B}=(0,-B,0)$, $B>0$, $\mathbf{E}=(E_x,0,E_z)$ les champs et $\mathbf{v_i}=(V_x,0,V_z)$, $\mathbf{v}_e=(v_x,0,v_z)$ pour les vitesses des ions et des électrons.

La particularité importante dans la formulation de ce problème est la présence d'une faible dépendance spatiale du champ magnétique initial $B=B_0(z)$. Normalement, c'est une fonction monotone décroissante. Cette hypothèse est valide dans la région du plasma où la densité diminue avec z (*voir (1)*), par exemple, la densité décroît vers la frontière « aval » du plasma vers le vide. Pour cette raison on va utiliser les valeurs normalisées par rapport aux valeurs initiales maximales dans le plasma non-perturbé. Soit ces valeurs maximales B_m et n_m pour le champ magnétique et pour la densité du plasma : $b=B/B_m$ et $n=n_e/n_m$. Puis, on va normaliser le temps par la fréquence de cyclotron ionique $\omega_{ci}^{-1}=Mc/qB_m$. On normalise les coordonnées par l'épaisseur de peau des ions sans collisions, c/ω_{pi}, ω_{pi} est la fréquence de plasma pour les ions calculée en se basant sur n_m. Les vitesses sont normalisées par la vitesse d'Alfvèn $V_A=B_m/(4\pi n_m M)^{1/2}$. Le champ électrique – par la valeur $B_m V_A/c$. La fréquence des collisions ν_c est normalisée par la fréquence électronique cyclotronique ω_{ce}. $\varepsilon=m/M$ est le rapport entre la masse des ions et des électrons. On suppose aussi que $\Delta \ll h$, donc $\partial/\partial z \sim 1/h \ll \partial/\partial x$. Comme d'habitude dans le cadre de magnétohydrodynamique de type Hall on suppose que les pressions cinétiques peuvent être négligées par rapport à la pression du champ magnétique.

On a déjà mentionné que le champ électrique accélère les ions vers la cathode (*C sur la Fig.1*), donc $V_x \gg V_z$ et l'équation pour la quantité de mouvement des ions est

$$n\frac{dV_x}{dt}=-b\frac{\partial b}{\partial x} \tag{2}$$

Maintenant on va tenir compte de quasineutralité du plasma. Selon la loi d'Ampere et l'équation de continuité

$$\frac{\partial b}{\partial z} = n(V_x - v_x), \ \frac{\partial b}{\partial x} = n v_z \tag{3}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(n V_x\right) = 0 \tag{4}$$

Supposons maintenant qu'une onde se propage dans le plasma. La vitesse de son front est $u(z) > 0$, donc $\partial / \partial t = -u \partial / \partial x$. Dans le système de référence qui se déplace avec le front de l'onde, le flux des particules est conservé, $n V_x = n_0 u$. Après intégration les équations (2) et (4) donnent :

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n_0} + \frac{b_0^{\ 2} - b^2}{2 n_0^{\ 2} u^2}, \ V_x = \frac{b^2 - b_0^{\ 2}}{2 n_0 u}. \tag{5}$$

A la différence de l'ensemble des équations utilisées par A. Fruhtman et al. [6] on suppose que $b = b_0(z)$, $n = n_0(z)$ dans un plasma initial magnétisé non-perturbé. D'ailleurs, on va chercher une solution avec $u > 0$ et $V_x < 0$, où $n < n_0$ et $b < b_0$ derrière le front de l'onde. L'équation (5) ne répond toujours pas à la question concernant le caractère de l'onde de choc (*est-ce que c'est une compression ou bien une raréfaction).* Pour cette raison on va procéder à l'analyse de la loi d'Ohm généralisée :

$$0 = -E_x - v_z b, \ \varepsilon \frac{d v_z}{dt} = -E_z + v_x b - \nu v_z. \tag{6}$$

Dans ces équations, on a supposé que $v_z \gg V_z$, mais on a gardé les deux composantes de vitesse des électrons dans la deuxième équation. Ceci est nécessaire parce que le problème a un petit paramètre $\delta \ll \Delta \ll h$ où δ est la largeur de la couche du courant. L'ensemble des équations est fermé par la loi de Faraday :

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}. \tag{7}$$

Solution du problème

On va étudier le cas d'une onde de raréfaction forte, $u \ll 1$ ($n \ll n_0$, $b \ll b_0$). Cette présomption permettra de raccourcir les calculs sans limiter la généralité des conclusions finales. En intégrant l'équation (7) au travers du front de l'onde et en utilisant (5) on déduit $-E_z + v_x b \equiv F_0(b)$ où $F_0(b) \equiv -F(b)/(2n_0 u)$ est la somme des forces qui affectent le fluide des électrons dans (6) ;

$$F(b) = \left(b_0^{\,2} - b^2\right)b + \beta\left(b_0^{\,2} - b^2\right)^2 - \gamma\left(b_0^{\,2} - b^2\right), \tag{8}$$

$$\beta \equiv -\frac{1}{2n_0^{\,2}u^2}\frac{dn_0 u}{dz},\ \gamma \equiv -\frac{1}{2n_0 u}\frac{db_0^{\,2}}{dz}. \tag{9}$$

Ici les variables β et γ sont toutes les deux positives. Pendant l'intégration on a tenu compte de la condition au limite $F_0(b_0) = 0$ dans le plasma non-perturbé près de l'anode. De l'équation (3) et la loi d'Ohm (6) on déduit :

$$\varepsilon\frac{n_0 u}{n}\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{n}\{b, v_z\} - \frac{\nu}{n}\frac{\partial b}{\partial x} + F_0(b) = 0, \tag{10}$$

$$\{b, v_z\} \equiv \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial x}. \tag{11}$$

On cherche la solution de (10) sous la forme $b(x,z,t) = b(z,\xi)$. Ici $\xi = (x - u(z)t)\,f(z)$. Après quelques transformations cette équation devient :

$$\frac{\varepsilon f^2 n_0 u}{n}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{n}\frac{db}{d\xi}\right)+\frac{\varepsilon f^2 n_0 u}{n^2}g(b)\left(\frac{db}{d\xi}\right)^2-\frac{\nu_c f}{n}\frac{db}{d\xi}+F_0(b)=0\,, \qquad (12)$$

$$g(b)=\frac{2\gamma}{b_0{}^2-b^2+2n_0u^2}-\frac{4\beta\left(b_0{}^2-b^2\right)}{b_0{}^2-b^2+2n_0u^2}+\chi(z)\,, \qquad (13)$$

$$\chi(z)\equiv-\frac{1}{n_0(z)u}\frac{d\ln f(z)}{dz}\,. \qquad (14)$$

Dans le cas sans collisions avec les ions ($\nu_c \to 0$) l'équation (12) représente une conséquence de la loi de conservation de la quantité de mouvement généralisée des électrons le long de ces trajectoires. L'équation de ce type a été étudiée analytiquement par L.I. Rudakov [8] et puis numériquement par A.Fruhtman et al. [6]. A. Fruhtman et L.I. Rudakov [6, 8] ont cherché à vérifier l'existence des ondes de choc avec compression. Notre cas est différent, le signe de u est différent ce qui peut être très important dans le cas des collisions fortes. Si l'on néglige le terme inertiel, l'onde de raréfaction forte (*c'est-à-dire* $u \ll 1$) ne peut exister que grâce à l'inhomogénéité forte initiale du plasma ($\gamma \gg \beta$ *dans l'équation (8)).* En effet, le profil stationnaire du champ magnétique s'installe en résultant de la compétition entre la diffusion du champ (*le terme* $-\frac{\nu_c f}{n}\frac{db}{d\xi}$ *dans (12)*) et la convection avec compression du champ magnétique (*le premier terme du premier membre de l'équation (12)*). Dans l'onde de raréfaction ($u > 0$) ces deux flux sont dans le même sens.

Afin de trouver la solution analytique de l'équation (12) on introduit une nouvelle fonction :

$$Y(b)\equiv\frac{db}{d\zeta}\,. \qquad (15)$$

Ici $d\zeta = d\xi n/(n_0 u f\sqrt{\varepsilon})$ et l'équation principale se transforme en :

$$\frac{dY^2}{db} + 2g(b)Y^2 - 2\eta Y = F(b). \tag{16}$$

Limitons-nous maintenant au cas sans collisions, autrement dit, $\eta \equiv \nu_c / \sqrt{\varepsilon} \to 0$. Dans ce cas (16) a une solution satisfaisant à la condition au limite sur la cathode $Y^2(b_{\min}) = 0$:

$$Y^2(b) = e^{-G(b)} \int_{b_{\min}}^{b} F(b')e^{G(b')}db' \tag{17}$$

où $G(b) = \int 2g(b)db$. Dans une région suffisamment éloignée de l'anode, $b_0^{\,2} - b^2 \gg n_0 u^2$ et on déduit de (13)

$$G(b) = -2\left(4\beta + \frac{1}{n_0 u}\frac{d\ln f}{dz}\right)b + \frac{2\gamma}{b_0}\ln\left(\frac{b_0 + b}{b_0 - b}\right). \tag{18}$$

Ainsi, $G(b) \approx \alpha b + C$ et l'intégrale (17) peut être calculée facilement. Le résultat représente alors la solution analytique du problème. Puisque l'expression finale a une forme très encombrante, on ne la présente pas ici.

Analyse de solutions, exemples de distribution initiale

Heureusement, on peut analyser le comportement de la fonction $Y(b)$ sans calculer directement l'intégrale (17). Le profil d'onde stationnaire que l'on recherche doit satisfaire les conditions suivantes. Premièrement, la somme des forces $F(b)$ dans l'équation (6) doit être égale à zéro aux électrodes, puisque l'on considère que les électrodes sont parfaitement conductibles. Il faut satisfaire à cette condition, sinon le courant j_z croîtrait infiniment. De plus, (2) signifie que $Y(b)|_{C,A} = db/d\zeta = 0$ et de

l'équation (16) on déduit $dY^2/db|_{C,A} = 2d^2b/d\zeta^2 = 0$. La fonction $Y(b)$ augmente près de la cathode ($db/d\zeta|_C > 0$, *voir équation (3))* et par conséquent elle a un maximum à l'intérieur de l'intervalle entre la cathode et l'anode. Si toutes ces conditions sont vérifiées le champ magnétique a un minimum $b_c = b_{\min}$ sur la cathode et puis croit jusqu'à son maximum $b = b_0$ sur l'anode.

Selon l'équation (17) les considérations ci-dessus signifient que la fonction $F(b)$ vaut zéro sur la cathode, puis elle change son signe de positif à négatif et enfin elle s'annule à nouveau sur l'anode. L'équation (8) qui est une équation de 4ème degré a 3 racines positives :

$$b = b_0,\ b = b_{1,2} = \frac{1}{2\beta} \pm \left(\frac{1}{4\beta^2} - \frac{\gamma}{\beta} + b_0^{\ 2} \right)^{1/2} \tag{19}$$

La condition $b_0 > b_1 > b_2 = b_{\min} > 0$ est équivalente ($\beta > 0$) à

$$\beta b_0^{\ 2} < \gamma < \beta b_0^{\ 2} + \frac{1}{4\beta},\ \gamma > b_0,\ \beta > \frac{1}{2b_0}. \tag{20}$$

Considérons maintenant deux exemples de distribution initiale de la densité et du champ magnétique. En regardant les équations (16), (19) et (20) on peut logiquement choisir deux types de solutions : celles avec la vitesse de l'onde $u(z) = \text{const}$ et celles avec les paramètres $\gamma(z), \beta(z) = \text{const}$.

a) le cas de $\gamma(z), \beta(z) = \text{const}$, $u(z) \neq \text{const}$

D'abord, on va examiner l'ensemble des solutions dans le cas de $\gamma, \beta = const$ Afin de trouver les solutions correspondantes, on va noter $N = n_0 u$. Ainsi on peut transformer les expressions (9) pour β, γ de la manière suivante:

$$\beta = -\frac{1}{2N^2}\frac{dN}{dz}, \tag{21}$$

$$\gamma = -\frac{1}{2N}\frac{db_0^2}{dz}. \tag{22}$$

Puis, on peut résoudre directement les équations (21) et (22). Les résultats sont

$$N = n_0 u = \frac{1}{2\beta z + C}, \tag{23}$$

$$b_0^2(z) = 1 - \frac{\gamma}{\beta}\ln(2\beta z + C). \tag{24}$$

Ici C est une constante arbitraire. La première des conditions (20) devient

$$\frac{\beta}{\gamma} - \ln(2\beta z + C) < 1 < \frac{\beta}{\gamma} - \ln(2\beta z + C) + \frac{1}{4\beta\gamma} \quad \forall z \tag{25}$$

Des deux côtés de l'expression (25) il y a des fonctions monotones, donc afin de vérifier la validité de cette condition il ne faut vérifier que si elle est valide pour $z = 0, h$. Autrement dit,

$$\gamma > \beta,\ \gamma < \beta + \frac{1}{4\beta},\ C > \frac{2\beta h}{\exp(\frac{1}{\gamma}(\beta + \frac{1}{4\beta}) - 1) - 1} \tag{26}$$

D'ailleurs, selon (20)

$$\gamma > 1, \beta > 1/(2b_0(h)) \tag{27}$$

Donc la plus large région des valeurs (β, γ) permises est comme suit:

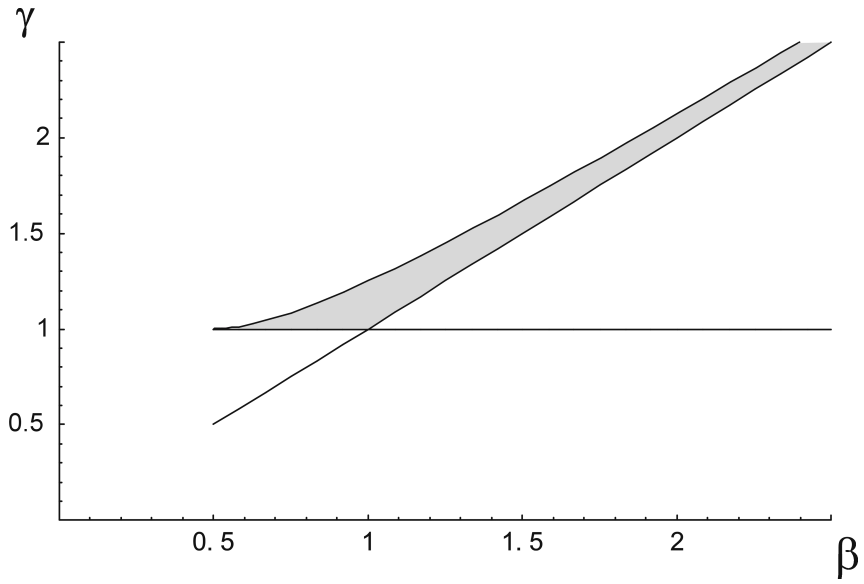

Fig.2. La région de valeurs (β,γ) permises dans le cas $\gamma,\beta=\text{const}$ (zone grisée).

On étudie l'expression (26) afin de trouver la valeur minimale de C. Pour chaque valeur de $\gamma>1$ fixée la valeur pour $C_{\min}$ (26) diminue lorsque $\beta\in(\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}}{2},\gamma)$. Donc la constante C atteint sa valeur minimale (*ce qui correspond à la vitesse maximale* $u_{\max}$) lorsque $\gamma,\beta\to 1$. Donc, on peut calculer la constante C pour $\gamma=1,\beta=1$:

$$C_{\min}=\frac{2h}{e^{1/4}-1}\approx 7h \text{ et } u_{\max}(z=0)=\frac{1}{C_{\min}}=\frac{e^{1/4}-1}{2}\frac{1}{h}\approx\frac{1}{7h}. \qquad (28)$$

Quant à la densité, on peut choisir n'importe quelle fonction monotone décroissante pour $n(z)$, par exemple, une fonction linéaire : $n=1-0.05z$. Pour les calculs ultérieurs de ce cas on prend les variables sous la forme :

$$\beta(z)=1.01,\ \gamma(z)=1.02,\ 0<z<10$$

$$n = 1 - 0.05z\,,\ b_0(z) = \sqrt{1 - \frac{\gamma}{\beta}\ln(1 + 2\frac{\beta}{77.04}z)}\,, \tag{29}$$

$$u(z) = \frac{1}{2\beta z + 77.04}\frac{1}{n(z)} \Rightarrow u(0) \approx 0.013,\ u(10) \approx 0.021.$$

b) le cas de $u(z) = \text{const}$**,** $\gamma(z), \beta(z) \neq \text{const}$

La solution la plus simple est de supposer que la vitesse de l'onde de choc $u(z) \approx \text{const}$ et que les profils de toutes les autres grandeurs sont linéaires, soit

$$n_0(z) = 1 - z/h_1\,,\ b_0(z) = 1 - z/h_2\,,\ u(z) = \text{const} \tag{30}$$

Les inégalités (20) dans ce cas sont effectivement vérifiées pour certains profils décroissants de la densité $n_0(z)$ et $b_0(z)$ donnés par (30). Pour chaque longueur de plasma h on peut trouver certaines régions de valeurs u, h_1 et h_2 satisfaisant aux inégalités (20) pour toute l'intervalle de $z \in (0, h)$. On va choisir les paramètres de façon que la vitesse d'érosion soit maximale $u_{\max}$ pour la longueur donnée h du système. Donc, pour le cas de distribution (30) dans la limite de validité des inégalités (20) on peu obtenir les estimations suivantes :

$$h_1^{\min} \approx 2h\,,\ h_2^{\min} \approx 3h\,,\ u_{\max} \approx \frac{1}{3h} \tag{31}$$

Par exemple, pour $h = 10$ et pour les calculs ultérieurs on a pris les fonctions sous la forme suivante :

$$0 < z < 10\,,$$

$$n = 1 - \frac{z}{21}\,,\ b_0(z) = 1 - \frac{z}{31.7}\,,$$

$$u(z) = \frac{1}{32} \approx 0.031.$$

Il est simple de vérifier les inégalités (20) pour ces fonctions.

Remarquons que pour les cas a) et b) la vitesse maximale de l'onde n'est pas si différente – elle est de l'ordre de $u_{\max} \sim (1/3 \div 1/6)1/h$.

Calcul de fonction d'ajustement $\chi(z)$ (cf. l'équation (12)-(14))

Quant au choix des conditions aux limites, on utilise l'analogue de l'équation (16) et son intégrale avec l'équation du mouvement d'une particule dans le potentiel quasi-1D, $\Delta\Phi = Y^2(b)$ (R.Z. Sagdeev [9]). Les variables ζ et b jouent les rôles du temps et de l'espace. Si une particule commence à tomber dans un puits partant du point $b_a = b_0$ avec une vitesse très petite, elle remonte sur la paroi opposée arrivant au point $b_{\min} = b_2$ avec une vitesse presque nulle, $db/d\zeta \to 0$, le temps de cette oscillation peut être exponentiellement grand. Cette situation a lieu si $Y^2(b_{\min}) \to 0$ et $\partial\Delta\Phi/\partial b(b_{\min}) \to 0$. La première de ces deux conditions est vérifiée automatiquement dans l'intégrale (17) ; la deuxième correspond à la condition $F(b_{\min}) = 0$ dans l'équation (8). De l'autre coté, le choix adéquat du paramètre libre $f(z)$ dans la fonction $g(b)$ permet de satisfaire la condition $Y^2(b) = 0$ dans (17) pour $b \to b_0$. On a effectué cette procédure pour les profils initiaux indiqués par l'équation (29), (30).

Pour chaque valeur de la coordonnée $z \in (0,h)$ on doit calculer la valeur correspondante de $f(z)$ (*ou* $\chi(z) = -\frac{1}{n_0(z)u(z)}\frac{d\ln f(z)}{dz}$) ainsi que la fonction $Y(b)$ (*cf. (17)*) satisfaisant aux conditions aux limites $Y(b_0) = Y'(b_0) = 0$

($Y(b_{\min}) = Y'(b_{\min}) = 0$ par la définition (17) de $Y(b)$) . Il faut aussi s'assurer que $Y^2(b) \geq 0$ pour $b_{\min} < b < b_0, b_{\min} = \frac{1}{2\beta(z)} - \sqrt{\frac{1}{(2\beta(z))^2} - \frac{\gamma(z)}{\beta(z)} + b_0^{\,2}(z)}$.

Si on prend des valeurs trop petites de $\chi(z)$, on peut arriver à une fonction $Y^2(b) < 0$ pour certaines b comme le montre la figure 3.

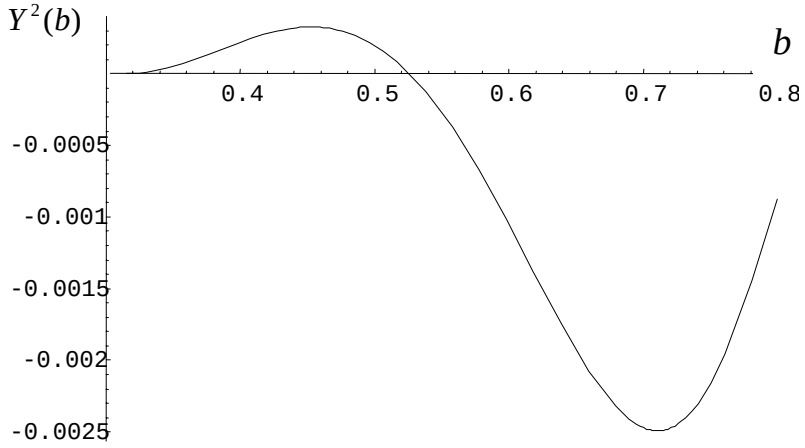

Fig.3. Une exemple de fonction $Y^2(b)$ calculée pour $\chi(z) = 0$.

Les résultats des calculs numériques de la fonction $\chi(z) = -\frac{1}{n_0(z)u(z)} \frac{d \ln f(z)}{dz}$ pour les cas a) et b) sont présentés sur les Fig.4a) et 4b) respectivement.

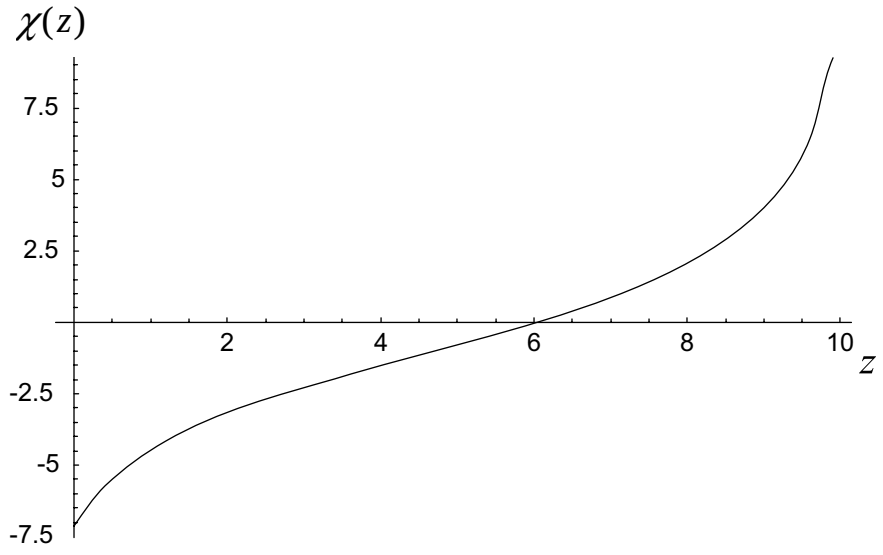

Fig 4a. La dépendance de $\chi(z)$ vs. z pour le cas a).

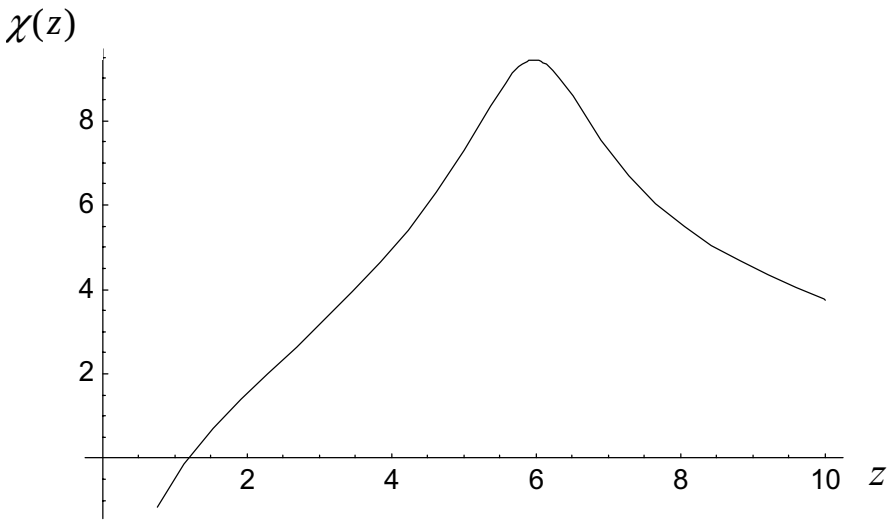

Fig 4b. La dépendance de $\chi(z)$ vs. z pour le cas b).

Les courbes typiques de $Y^2(b)$ sont présentées sur les Fig. 5 a) et b).

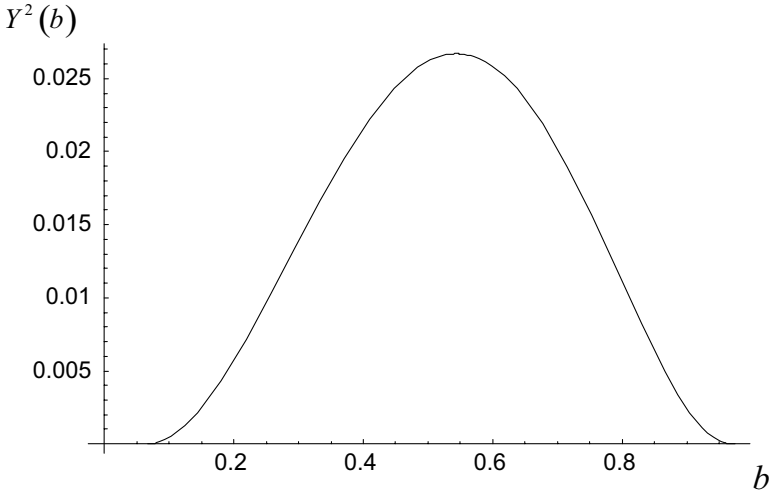

Fig 5a. $Y^2(b)$ **pour le cas a);** $z = 2$, $\chi(z) \approx -3.15$.

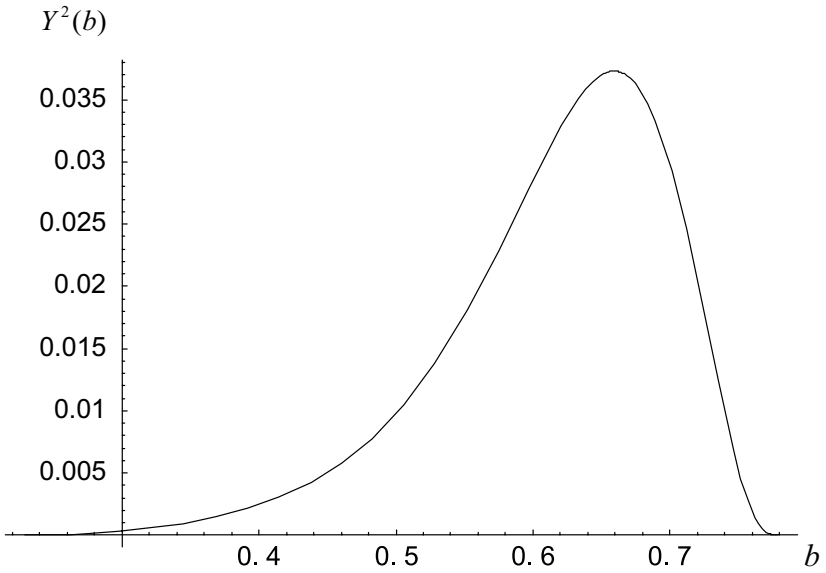

Fig.5b. $Y^2(b)$ **pour le cas b) ;** $z = 7$, $\chi(z) \approx 7.3$.

Donc, on a montré que par le choix adéquat de la fonction $f(z)$ on peut en effet obtenir une solution correcte des équations originales satisfaisant à toutes les conditions et inégalités nécessaires. La valeur maximale de la vitesse du front de l'onde est de

l'ordre de $u_{\max} \sim \dfrac{1}{z_{\max} = h}$ ou bien $0.02 \div 0.03$ pour $z_{\max} = 10$. On peut aussi estimer la contribution relative de $\chi(z)$ dans $g(z)$. Selon les calculs ci-dessus $|\chi(z)| \le 1/(n_0 u)$. Cependant le premier terme dans l'équation (13) est de l'ordre de $\sim 1/(n_0 u^2)$. Puisque $u(z) \ll 1$, généralement $|\chi(z)| \ll |g(z)|$.

Limites de la solution ($\nu_c \neq 0$)

Maintenant on va étudier les limites de la fonction $Y(b)$ dans les régions $b \to b_{\min}$ et $b \to b_0$. L'équation pour $Y(b)$ avec collisions ($\eta \neq 0$) est (*cf. (16)*)

$$2Y(b)\frac{dY(b)}{db} + 2g(b)Y^2(b) - 2\eta Y(b) = F(b) \tag{32}$$

On peut développer la fonction $F(b) = (b_0{}^2 - b^2)(b + \beta(b_0{}^2 - b^2) - \gamma)$ (*cf. (8)*) en série près des points $b = b_0, b_{\min}$:

$$F(b) \approx A_1(b - b_{\min}), b \to b_{\min}, A_1 > 0$$
$$F(b) \approx A_2(b - b_0), b \to b_0, A_2 > 0$$

Lorsque $b = b_0, b_{\min}$ la fonction $Y(b) \to 0$, donc on va aussi développer en série la fonction inconnue $Y(b)$. Les solutions asymptotiques de l'équation (32) sont alors:

$$Y(b) \approx \frac{\eta + \sqrt{\eta^2 + 2A_1}}{2}(b - b_{\min}), b \to b_{\min}$$
$$Y(b) \approx \frac{\eta - \sqrt{\eta^2 + 2A_2}}{2}(b - b_0), b \to b_0$$

Ce comportement asymptotique de la fonction $Y(b)$ entraîne les expressions suivantes pour le champ magnétique $b(\zeta), b \to b_0, b_{\min}$:

$$b = b_{\min} + D_1 e^{\frac{\eta+\sqrt{\eta^2+2A_1}}{2}\zeta}, b \to b_{\min}, D_1 = \text{const}$$

$$b = b_0 - D_2 e^{\frac{\eta-\sqrt{\eta^2+2A_2}}{2}\zeta}, b \to b_0,\ D_2 = \text{const}$$

Solutions exactes avec collisions ($\nu_c \neq 0$)

Les expressions asymptotiques ci-dessus ainsi que celles de $Y(b)$ nous permettent d'obtenir les solutions numériques de l'équation (32) avec $\eta \neq 0$. Les calculs numériques de la forme du front de l'onde $b(\zeta)$ ont été effectués pour les mêmes cas a) et b) sus-cités ($\gamma, \beta = \text{const}$ *ou* $u = \text{const}$). Afin d'examiner l'influence du paramètre η sur la forme du front on a fait des calculs pour plusieurs valeurs de η. Le front de l'onde a été calculé par l'intégration numérique de :

$$\zeta = \int_{b_{ini}}^{b(\zeta)} \frac{db}{Y(b)} + const,\ b_{ini} > b_{\min}.$$

Ici b_{ini} est une constante arbitraire. Cela ne pose aucun problème parce que nous ne nous intéressons qu'au changement de la forme et de la largeur du front de l'onde de choc avec le changement de η. Les figures présentées ci-dessous montrent les fonctions $Y(b)$ et $\zeta(b)$ pour différentes valeurs de η.

Les figures 6a) – d) représentent le cas a) (*celui des variables* $\gamma(z) = \text{const}$, $\beta(z) = \text{const}$). Les figures 7a) – e) sont calculées dans l'hypothèse de $u_0(z) = \text{const}$, autrement dit, le cas b) ci-dessus. La ligne pointillée signifie la position

du front de l'onde, c'est-à-dire, le point où la dérivée $db/d\zeta$ est maximale (*rappelons-nous que* ζ *est la coordonnée généralisée*).

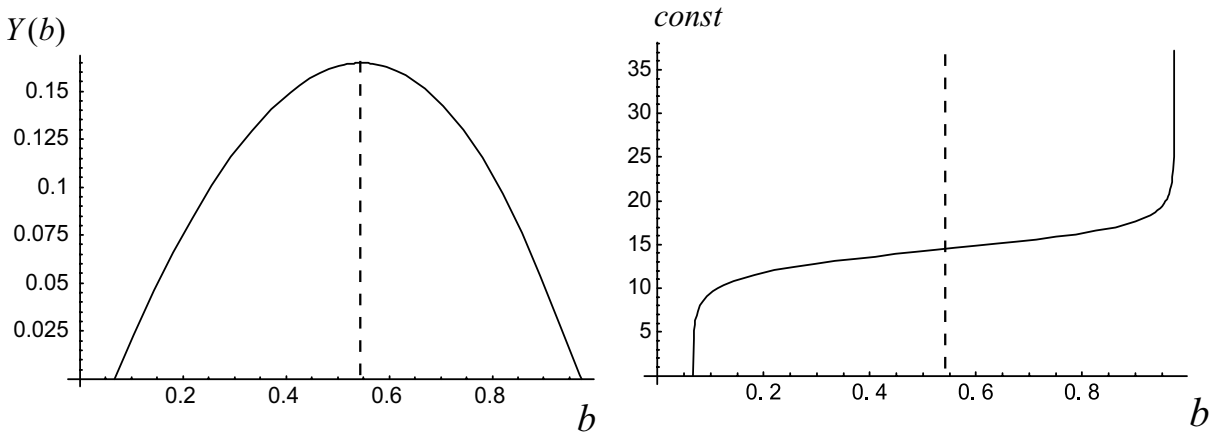

Fig. 6a) $\eta = 0$.

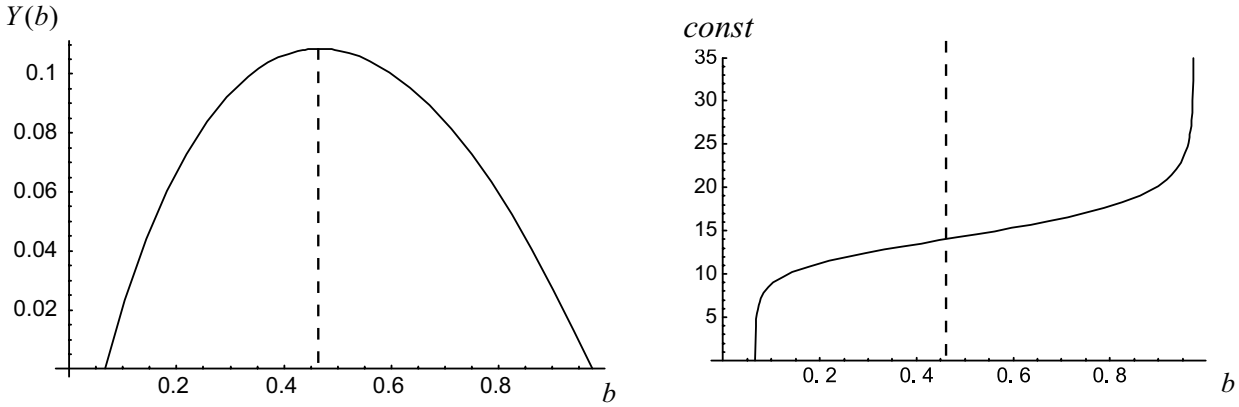

Fig 6b) $\eta = 0.1$.

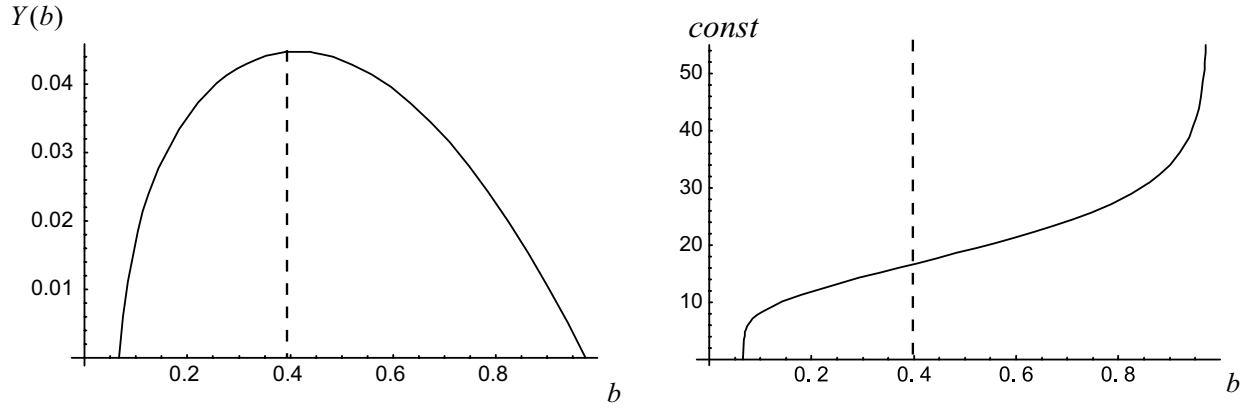

Fig 6c) $\eta = 0.3$.

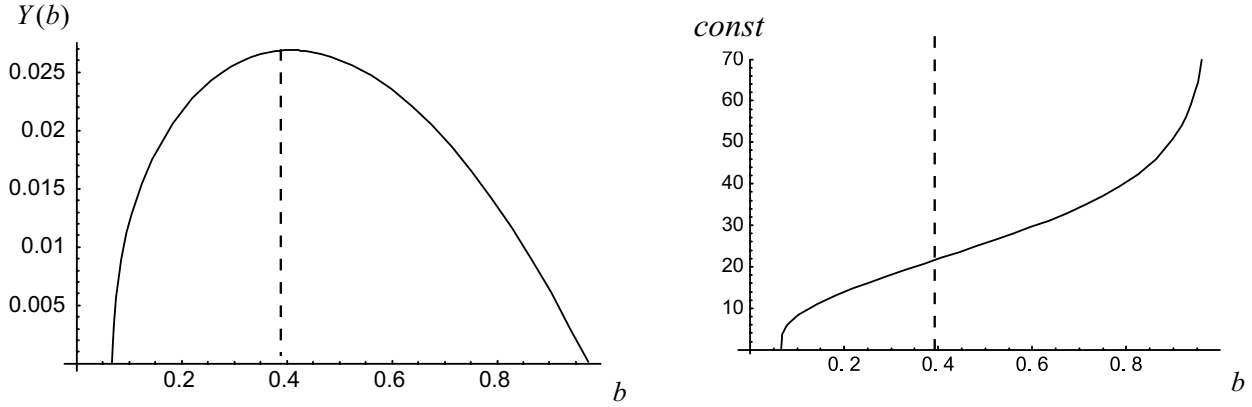

Fig 6d) $\eta = 0.5$.

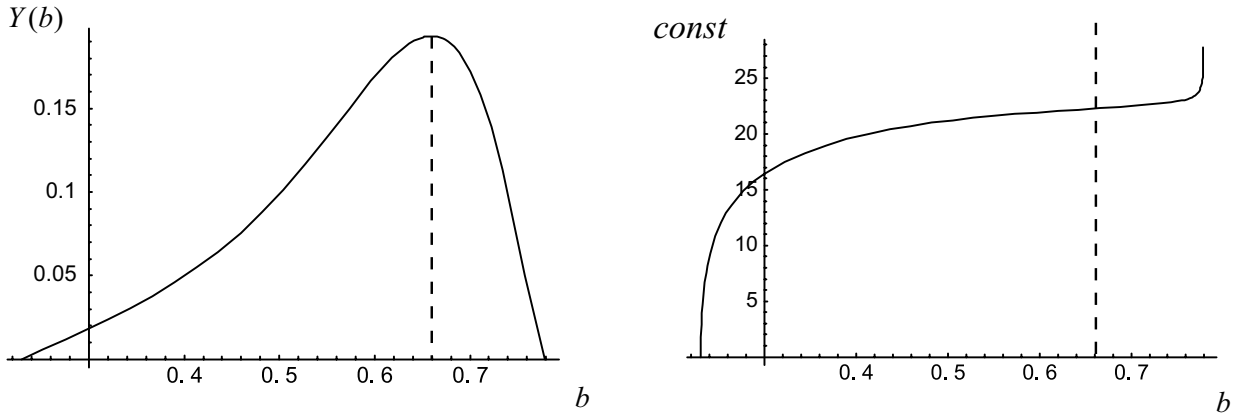

Fig 7a) $\eta = 0$.

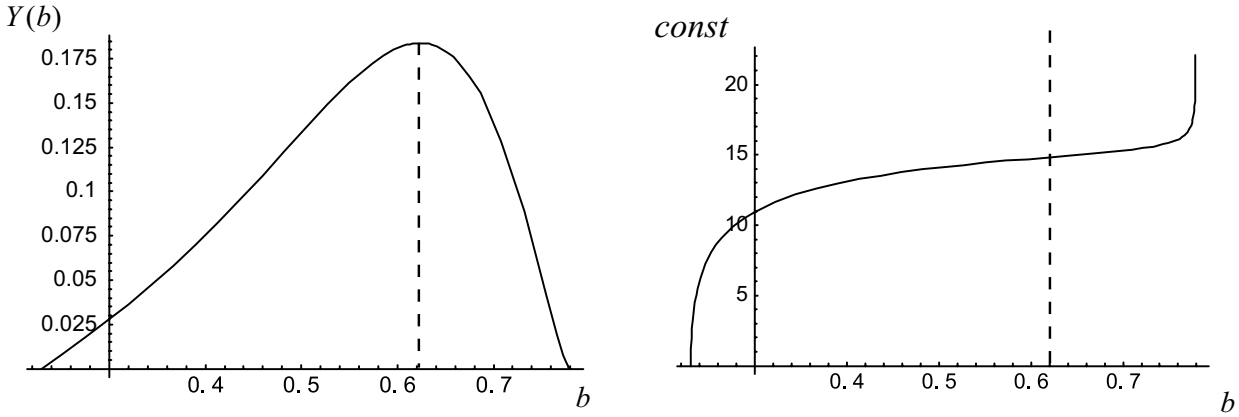

Fig 7b) $\eta = 0.2$.

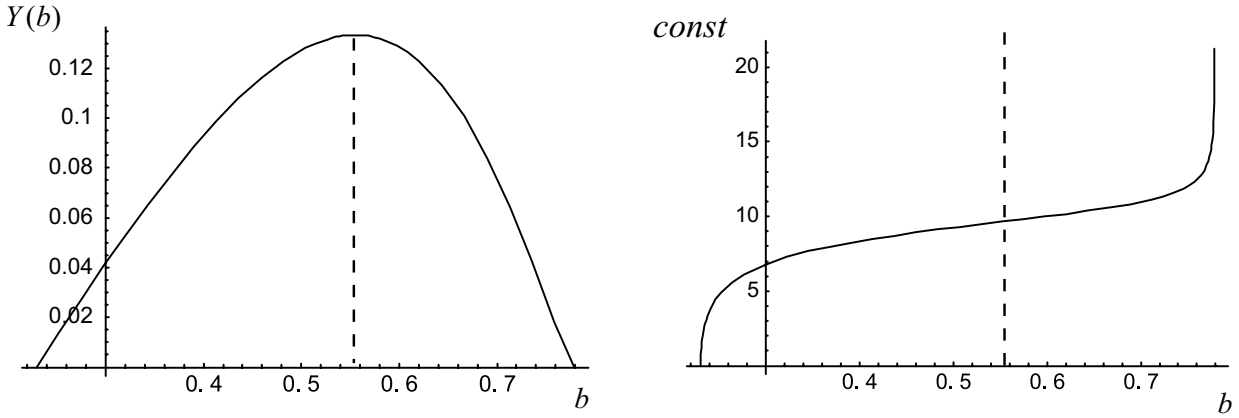

Fig 7c) $\eta = 0.5$.

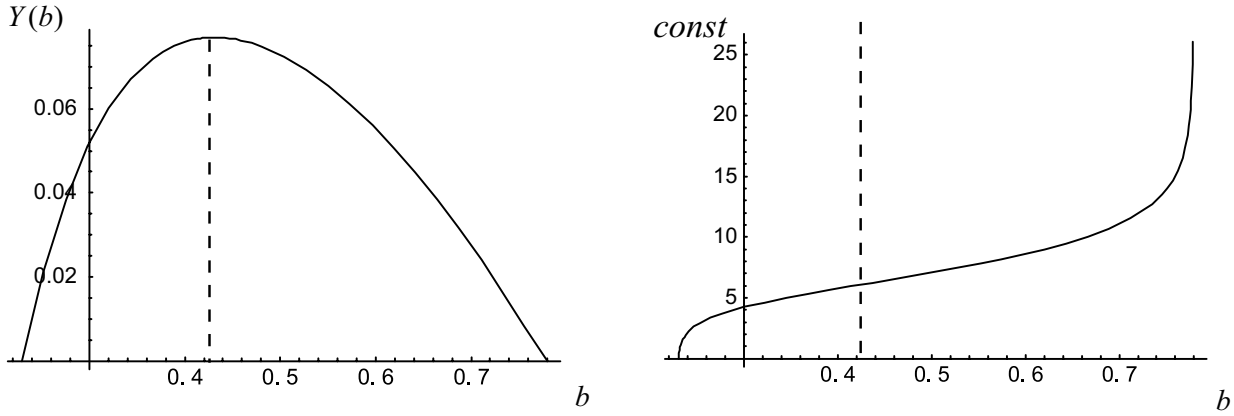

Fig 7d) $\eta = 1.0$.

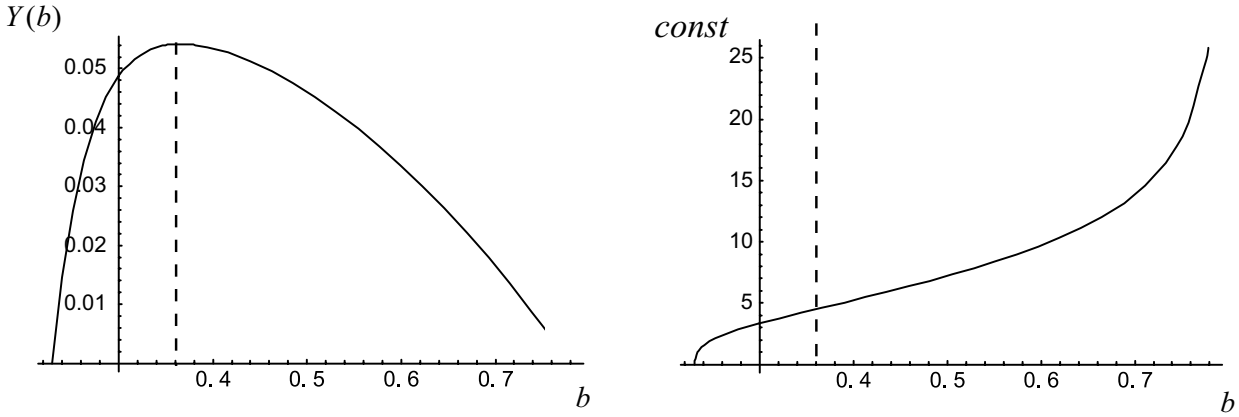

Fig 7e) $\eta = 1.5$.

En regardant les figures 6-7 on peut voir que l'augmentation des collisions (paramètre η) amène à un déplacement du front de l'onde vers les valeurs plus basses du champ magnétique b et évidemment à l'élargissement du front. La raison formelle de cet élargissement et la diminution du maximum de la fonction $Y(b)$ avec la croissance de η.

L'influence des collisions (*du paramètre* η) devient appréciable lorsque le dernier terme de l'équation (32) est de l'ordre du deuxième terme au point du front, c'est-à-dire lorsque $\left|g(b)Y(b)\right|_{\max} \le \eta$. Dans le cas sans collisions on trouve que $\Delta x \sim \sqrt{\varepsilon / n}$ à l'échelle de $\delta \sim c/\omega_{pe}$ (*avec les variables normalisées*). Autrement dit, cette échelle est définie par l'inertie des électrons, exactement comme il faut. Les collisions commencent à dominer et à définir la largeur du front au moment où le deuxième et le troisième terme du premier membre de l'équation (16) sont comparables.

Conclusion

Pour conclure, on a montré la possibilité d'existence de l'onde de raréfaction forte pour les cas avec et sans collisions. Cette onde se manifeste grâce à l'accélération des ions par le champ électrique Hall dans la couche de courant près de la cathode. Puis elle

se propage à travers le plasma quasi-neutre vers l'anode et elle peut créer une chute de la densité derrière le front de plus d'un ordre de grandeur. Le niveau de l'inhomogénéité du plasma peut être suffisamment bas afin de supporter la raréfaction qui est déjà forte (*cf. l'équation (31)*). On a étudié l'exemple de l'onde la plus rapide existante pour certains profils de la densité du plasma et du champ magnétique.

Nos conclusions et résultats sont limités aux cas d'un plasma inhomogène et initialement magnétisé, où $c/\omega_{pe} \ll c/\omega_{pi} \leq \Delta \ll h$ (*voir la Fig. 1 et le texte correspondant*). Les suppositions $\mathrm{v_e} \gg \mathrm{V_i}$ et $V_x \gg V_z$ impliquent qu'initialement le champ magnétique pénètre à la distance h sans compression appréciable du plasma. Ces conditions sont très typiques pour des dispositifs à courte impulsion tels que des diodes remplies de plasma ou les commutateurs à ouverture de plasma (B.V. Weber [2]). La théorie développée dans ce chapitre peut aider à comprendre les données expérimentales où la chute locale de la densité a été mesurée peu après la pénétration du champ magnétique (A.S. Chuvatin et al., D.D. Hinshelwood et al. [7, 10]). On a expliqué auparavant ces phénomènes par la violation locale de quasineutralité (B.V. Weber et al. [11]). Notre modèle ne requiert pas cette assomption, mais cette hypothèse pourrait mieux expliquer les résultats sur des temps ultérieur où la raréfaction est arrivée vers l'anode et les ions sont éliminés de tout l'intervalle interélectrodes.

Références

1. A.S.Kingsep, Yu.V.Mokhov, and K.V.Chukbar, *Sov. J. Plasma Phys.* **10**, 495 (1984).

2. B.V.Weber, R.J.Commisso, R.A.Meger, et al, *Appl. Phys. Lett.* **45**, 1043 (1984).

3. A.Fruchtman and L.I.Rudakov, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2070 (1992).

4. J. Kalda, *Phys. Fluids B* **5**, 4327 (1993).

5. Chukbar K.V., Kingsep A.S., Yankov V.V., Reviews of Plasma Physics, ed. by Kadomtsev B.B. (Consultants Bureau, New York 1990), **16**, 243.

6. A.Fruhtman and L.I.Rudakov, *Phys. Rev. E*, **50**, 2997 (1994).

7. A.S.Chuvatin and B.Etlicher, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2965 (1995).

8. L.I.Rudakov, *Sov. J. Plasma Phys.*, **19**, 835 (1993).

9. R.Z.Sagdeev, in *Reviews of Plasma Physics*, edited by M.A.Leontovich (Consultant Bureau, New York, 1966), Vol. 4, p.23.

10. D.D.Hinshelwood, B.V.Weber, J.M.Grossmann, and R.J.Commisso, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3567 (1992).

11. B.V.Weber, P.J.Commisso, G.Cooperstein, et al, *IEEE Trans. on Plasma Sci.*, **15**, 635 (1987).

CONCLUSION

Le résultat principal du premier chapitre est la démonstration de la possibilité de résoudre les problèmes auto-cohérents hydrodynamiques en présence d'inhomogénéités créées par l'évolution du système lui-même. Il s'agit aussi de l'influence de la dynamique auto-cohérente sur l'instabilité de type Rayleigh-Taylor. Notamment, la prise en compte du fait que le problème est auto-cohérent entraîne la stabilisation de cette instabilité. L'utilisation de paramètres faibles appropriés nous permet d'avancer dans la description analytique de situations pratiques, suffisamment pour décrire des phénomènes non-triviaux tels que l'onde non-linéaire autosimilaire ou la fuite d'un précurseur à faible amplitude à partir de l'onde principale.

Nous pouvons essayer de comparer nos résultats directement aux données expérimentales sur les commutateurs à ouverture de plasmas (*COP*) ou «plasma opening switches». Par exemple, nous avons une indication de croissance forte du coefficient de la diffusion du champ magnétique même dans les plasmas avec perturbation initiale δn petite. Mais les résultats les plus intéressants sont ceux liés à l'onde convective. Cette onde est bien observée dans les expériences de COP. La formation du précurseur d'une petite amplitude peut influencer l'évolution du déclenchement de plasma dans un COP. En fait, ce processus peut même expliquer l'absence de chauffage fort mentionné ci-dessus : l'énergie électromagnétique transportée à travers le milieu est très inférieure à l'énergie initiale $B_0^2/(8\pi)$.

Les résultats du premier article sont publiés dans [1].

Dans le chapitre 2 on montre que l'effet d'oscillation forcée de la frontière entre deux fluides peut être utilisé dans le but de supprimer l'IRT dans une certaine région des longueurs d'ondes. Cependant il faut soigneusement choisir les paramètres des oscillations pour que nous n'ayons pas de l'effet inverse – une augmentation de l'instabilité.

Ce travail représente un avancement essentiel par rapport aux récents travaux (par exemple, [2]. Pour la première fois on a réussi à calculer d'une manière analytique un déterminant infini et ainsi obtenir une expression simple et compacte pour la courbe de

dispersion. Avec le schéma des calculs élaboré dans ce chapitre on peut obtenir non seulement le seuil d'instabilité mais aussi toute la dépendance $\omega(k)$ pour n'importe quelles amplitudes et fréquences des oscillations externes.

On peut utiliser les résultats de ce chapitre afin de mesurer la viscosité dynamique et la tension de surface dans un système liquide-vapeur [2]. Quant aux applications pratiques concernant la fusion inertielle, on peut a priori supposer la possibilité de réalisation d'un tel effet dans les lasers en fabriquant, par exemple, des cibles multicouches. En ce qui concerne les Z-pinches, on pourrait essayer d'atteindre les conditions nécessaires en produisant les oscillations de haute fréquence du courant sur fond de l'impulsion initiale. Si le champ magnétique, par exemple, est figé dans la matière, ces oscillations du courant entraînent nécessairement l'oscillation de la frontière entre le plasma et le vide pourvu de champ magnétique. Le phénomène de stabilisation des cascades des coquilles par rapport à une seule coquille est aussi influencé, notamment, par un effet de même provenance – quand les coquilles entrent en collision, l'accélération effective de la frontière change brusquement en effectuant de cette façon une modulation selon le temps.

Les résultats de deuxième chapitre ont été publiés dans [3, 4].

Le chapitre 3 est le développement logique de l'idée présentée dans le chapitre 2. On étudie l'influence des modulations régulières de la surface plasma-vide dans un plasma magnétisé sur l'IRT. Notre étude a démontré que la surface d'équilibre modulée (« *gaufrée* ») (*et, par conséquent, le champ magnétique modulé*) influence directement les modes d'instabilité Rayleigh-Taylor avec le vecteur d'onde perpendiculaire au champ magnétique (*dans une géométrie cylindrique le vecteur d'onde est parallèle à l'axe du système*). Nous avons résolu le problème modèle et nous avons ainsi obtenu quelques estimations. Les résultats analytiques ont le même comportement qualitatif que les résultats expérimentaux. Nous avons obtenu les expressions du taux de croissance de l'instabilité Rayleigh-Taylor, prenant en compte les modulations de l'interface et du champ magnétique.

Cette étude a été inspirée par les expériences avec le schéma des coquilles à fils qui est récemment devenu une méthode très populaire d'obtention de rayonnement haute puissance et d'implosion de haute qualité dans le domaine des Z-pinches (*plasmas de*

striction magnétique). Il se trouve que les résultats expérimentaux sont bien meilleurs dans le cas d'une implosion de fils fins multiples situés sur un cylindre que dans le cas du schéma ordinaire du « liner ».

Le problème examiné contient beaucoup de simplifications – ainsi la géométrie bidimensionnelle ou l'état d'équilibre initial, qui n'est pas normalement stationnaire dans les systèmes d'implosion réels. Par conséquent, il est légitime de se demander si ce phénomène est réellement le facteur primordial de suppression dans les configurations des coquilles à fils. Il peut néanmoins jouer un rôle considérable dans le processus de stabilisation.

Les résultats de ce chapitre ont été soumis à « Physics of Plasmas ».

Dans le chapitre 4 on discute l'évolution du plasma après la pénétration du champ magnétique dans un COP ou un système identique, c'est-à-dire l'évolution postérieure à celle décrite dans le chapitre 1. Pour la première fois on a montré la possibilité d'existence de l'onde de raréfaction forte pour les cas avec et sans collisions. Cette onde se manifeste grâce à l'accélération des ions par le champ électrique Hall dans la couche de courant près de la cathode. Puis elle se propage à travers le plasma quasi-neutre vers l'anode et elle peut créer une chute de la densité derrière le front de plus d'un ordre de grandeur. Cette onde peut expliquer le phénomène de l'ouverture de COP. Le niveau de l'inhomogénéité du plasma peut être suffisamment bas afin de supporter la raréfaction qui est déjà forte. On a étudié l'exemple de l'onde la plus rapide existant pour certains profils de la densité du plasma et du champ magnétique. La théorie développée dans ce chapitre peut aider à comprendre les données expérimentales où la chute locale de la densité a été mesurée peu après la pénétration du champ magnétique. On a expliqué auparavant ces phénomènes par la violation locale de quasineutralité. Notre modèle ne requiert pas cette assomption, mais cette hypothèse pourrait mieux expliquer les résultats sur des temps ultérieur où la raréfaction est arrivée vers l'anode et les ions sont éliminés de tout l'intervalle interélectrodes.

L'article avec le matériel de ce chapitre a été soumis à « Phys. Rev. Lett. ».

Les perspectives de prolongement de travail sont très nombreux : le problème de suppression de l'instabilité Rayleigh-Taylor par oscillation peut être généralisé en incluant (mis à part la viscosité) d'autres phénomènes importants, tels que la tension de surface dans les fluides et/ou le champ magnétique dans les plasmas, la géométrie plus

réaliste, la compressibilité etc. ; le modèle de l'implosion des coquilles à fils est très simplifié, il faut comprendre le rôle des explosions de fils et décrire la structure de plasma après ces explosions, incorporer la conductivité finie de plasma, on peut aussi réunir les deux effets « modulant » – les oscillations temporelles et spatiales. Dans les chapitres concernant l'évolution du plasma dans les systèmes magnétisés à haute densité d'énergie (*à savoir, les chapitres 1 et 4*), il faut noter l'importance de l'effet Hall et des non-linéarités. Les recherches dans le domaine des instabilités Rayleigh-Taylor peuvent être poursuivies dans la direction d'incorporation de la diffusion du champ magnétique dans les équations. Parmi les nouveaux schémas de génération des pulsions de haute puissance il est intéressant de développer la théorie de la compression lente pour les expériences avec compression de flux et d'analyser le schéma inductif. Il paraît probable qu'il existe une solution auto-similaire du processus d'éjection du champ magnétique dans ce schéma.

Références

1. Chukbar K.V., Ivanov A.A., Smirnov V.V., “Self-consistent EMHD penetration of magnetic field into a plasma”, J. Plasma Physics, 1998, **60**, 761-773.

2. K.Kumar, L.S. Tuckerman, J. Fluid Mech., 1994, vol. 279, pp.49-68.

3. Ivanov A., Chuvatin A., “Stability of a viscous fluid in an oscillating gravitational field”, Phys. Rev. E, **63**, 2001

4. Ivanov A., Zakharov S., Chuvatin S. “Mechanisms of Rayleigh-Taylor instabillity attenuation”, Bullettin of The American Physical Society, **44**(7), 177 (1999).

Table des matières

Résumé…… 5

Notations……. 9

Introduction…… 13
Motivation de la thèse……. 13
Phénoménologie de l'IRT……... 13
Equations de base de l'IRT classique……. 23
L'IRT dans les plasmas avec champ magnétique……... 25
Organisation de la thèse…….. 27
Références……... 29

Chapitre 1. Pénétration auto-cohérente du champ magnétique dans les plasmas…….. 31
Introduction……. 31
Modèle théorique……..... 37
Solutions auto-similaires……..... 40
Onde convective auto-cohérente…… 48
Conclusion……... 56
Références……... 59

Chapitre 2. Stabilisation Dynamique de l'IRT dans un fluide visqueux……. 61
Introduction, phénomène, analogies……... 61
Modélisation mathématique, cas du fluide visqueux…….. 64
Solutions approximatives de l'équation de dispersion…… 73
Solution exacte de l'équation de dispersion…… 76
Cas du fluide idéal……... 86
Conclusion……... 88
Références…… 89

Chapitre 3. Influence de modulation de la surface sur l'IRT dans les plasmas magnétisés……... 91
Introduction……. 91
Etat d'équilibre…… 94
Perturbations initiales de l'instabilité…….. 96
Système d'équations…… 98
Solution…… 99
Résultats……... 101
Conclusion……... 104
Appendice A…… 105
Références…… 108

Chapitre 4. Onde de raréfaction dans les plasmas magnétisés de type Hall……. 109
Introduction……. 109
Géométrie du problème, équations de base……. 110
Solution du problème……... 113

Analyse de solutions, exemples de distribution initiale…….. 115
a) le cas de $\gamma(z), \beta(z) = \text{const}$, $u(z) \neq \text{const}$ …….. 116
b) le cas de $u(z) = \text{const}$, $\gamma(z), \beta(z) \neq \text{const}$ …….. 119
Calcul de fonction d'ajustement $\chi(z)$ …….. 120
Limites de la solution ($\nu_c \neq 0$)…… 124
Solutions exactes avec collisions ($\nu_c \neq 0$)…….. 125
Conclusion……... 129
Références…… 131

Conclusion …….. 133
Références…… 137