



**HAL**  
open science

# Analyse numérique des options américaines dans un modèle de diffusion avec sauts

Xiaolan Zhang

► **To cite this version:**

Xiaolan Zhang. Analyse numérique des options américaines dans un modèle de diffusion avec sauts. Mathématiques [math]. Ecole des Ponts ParisTech, 1994. Français. NNT: . tel-00006407

**HAL Id: tel-00006407**

**<https://pastel.hal.science/tel-00006407>**

Submitted on 7 Jul 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Analyse Numérique des Options Américaines dans un Modèle  
de Diffusion avec des Sauts

Xiaolan ZHANG  
CERMA–Ecole Nationale des Ponts et Chaussées  
email : zhang@clio.enpc.fr

23, Avril 1994

# Table des Matières

<b>Résumé</b>	<b>3</b>
<b>Summary</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Modèle</b>	<b>11</b>
1.1 Le Modèle . . . . .	11
1.2 Probabilité minimale . . . . .	13
1.3 L'égalité $V_t = u^*$ . . . . .	21
<b>2 Put perpétuel</b>	<b>29</b>
<b>3 Inéquation Variationnelle</b>	<b>43</b>
3.1 Le générateur infinitésimal d'une diffusion . . . . .	44
3.2 Formulation variationnelle et propriétés des opérateurs $A$ et $B$ . . . . .	46
3.2.1 Propriétés des $A$ et $B$ . . . . .	46
3.2.2 Formulation Variationnelle . . . . .	49
3.3 L'existence et L'unicité de la solution du problème . . . . .	50
3.3.1 Le problème pénalisé . . . . .	50
3.3.2 Démonstration du Théorème d'existence et l'unicité . . . . .	55
3.3.3 Lemmes de monotonie et de continuité $L^\infty$ . . . . .	58
3.4 Théorème de régularité . . . . .	59
3.5 L'égalité $u^* = u$ . . . . .	65
3.6 Smooth fit . . . . .	76
<b>4 Localisation, Discrétisation et Convergence</b>	<b>83</b>
4.1 Localisation du problème . . . . .	83
4.2 L'égalité $u_i^* = u_i$ . . . . .	86
4.2.1 L'existence, l'unicité et la régularité du problème localisé . . . . .	86
4.2.2 L'égalité $u_i^* = u_i$ . . . . .	89
4.3 Discrétisation du problème . . . . .	95

4.3.1	Approximation de $a(\cdot, \cdot)$ , $\mathcal{K}$ et $\bar{\psi}$ . . . . .	100
4.3.2	Approximation de l'opérateur $\bar{B}^i$ et de $f$ . . . . .	101
4.3.3	Discrétisation du temps . . . . .	102
4.4	Convergence de la solution du problème discrétisé . . . . .	107
4.4.1	Étude des propriétés des $B_h$ et $A_h$ . . . . .	107
4.4.2	Théorème de convergence . . . . .	113
4.4.3	Monotonie de la solution discrétisée . . . . .	132
4.4.4	Affaiblissement de l'hypothèse sur $\psi$ . . . . .	137
<b>5</b>	<b>Formules d'approximations quasi-explicites</b> . . . . .	<b>149</b>
5.1	Approximation de Mac-Millan . . . . .	149
5.2	Une forme approchée du prix du put américain . . . . .	157
<b>6</b>	<b>Résultats Numériques</b> . . . . .	<b>161</b>
6.1	Volatilité implicite . . . . .	161
6.2	Résolution du problème discrétisé . . . . .	165
6.2.1	Problème de Complémentarité Linéaire . . . . .	165
6.2.2	L'algorithme de Cryer . . . . .	166
6.2.3	L'algorithme de Brennan-Schwartz . . . . .	169
6.3	Mise en œuvre des algorithmes de Brennan-Schwartz et Cryer pour le put américain . . . . .	171
6.4	Put européen . . . . .	174
6.5	L'algorithme du put perpétuel et de Mac-Millan . . . . .	176
6.5.1	Put perpétuel . . . . .	176
6.5.2	L'algorithme de Mac-millan . . . . .	177
6.6	Comparaisons du modèle de Black-Scholes et du modèle avec sauts . . . . .	179
6.7	Prix en fonction du temps . . . . .	182
<b>Annex A</b>		<b>185</b>

# Résumé

Le but principal de cette thèse est de traiter l'évaluation des options américaines dans un modèle de diffusion avec des sauts et de développer les méthodes numériques permettant de calculer des prix. Elle comprend d'abord une présentation de ce modèle et des discussions des formules de prix. Puis une formule quasi-explicite d'évaluation du prix dans le cas où l'échéance est infinie (i.e : "put perpétuel") est établie. Le chapitre 3 et le chapitre 4 présentent une méthode de calcul du prix du put américain fondée sur les inéquations variationnelles (I.V.). Nous montrons que le prix de l'option américaine coïncide avec la solution d'une I.V. Nous nous intéressons aux problèmes de l'existence, de l'unicité et des propriétés de régularité de la solution de l'I.V. Nous étudions ensuite l'approximation de la solution de l'I.V. En localisant le problème, nous nous ramenons à une I.V. définie dans un intervalle borné de  $\mathbf{R}$ , qui est ensuite discrétisée par la méthode des différences finies. Dans un cadre général, R. Glowinsky, J. L. Lions et R. Trémoilières ont étudié les schémas de discrétisation des inéquations variationnelles et montré des théorèmes de convergence sous une hypothèse de coercivité assez forte. Cette hypothèse n'est pas vérifiée dans notre problème et le principal résultat de ce chapitre est un théorème de convergence forte, qui semble nouveau, même dans le cas d'un modèle sans sauts. Dans le chapitre 5, nous proposons des formules approchées quasi-explicites s'inspirant de travaux sur le modèle de Black-Scholes. Dans un premier temps, nous généralisons la méthode de Mac Millan, puis nous donnons une formule exprimant le prix du put américain à l'aide du prix critique. Enfin, le dernier chapitre présente les courbes de volatilité, les algorithmes de résolution du problème discrétisé, l'implémentation des méthodes d'approximation et des résultats numériques.



# Summary

The aim of this thesis is to deal with the problem of American options pricing in a jump-diffusion model and to develop some numerical methods which allow us to calculate the price. Its first part consists of a presentation of this model and some discussions about the price formulas. Then a quasi-explicit formula for the prices of American options with infinite maturity has been established. The third and fourth chapters present a method to calculate the price of an American option with the help of the variational inequalities (V.I.). We show that the price of an American option is the solution of a variational inequality. We are interested in the problem of existence, uniqueness and some regularities of the variational inequality's solution. Then we study the approximation of the solution of V.I. In a general case, R. Glowinsky, J. L. Lions et R. Trémolières have studied the approximation schemes for variational inequalities and have proved the convergence theorem under a coercive hypothesis which is rather strong. This hypothesis is not satisfied in our case and the principal result in this chapter is a strong convergence theorem, which seems new even in the model without jumps. In the fifth chapter, we propose two quasi-explicit formulas for the price of American options with finite maturity in this model. At first, we generalize the Mac Millan method. And then we give an approximated formula for the American put's value with the help of the critical price. In the last chapter, we present some volatility curves, some algorithms of resolution for the discretized problem, and implementation of the approximation methods. We give also some numerical results.





# Introduction

Avec le développement des marchés financiers, l'étude des options n'a pas cessé de prendre de l'importance.

Une *option* d'achat ou de vente (i.e call ou put ) est un titre financier conditionnel qui donne le droit, mais non l'obligation d'acheter ou de vendre un actif déterminé à un prix convenu à l'avance -le *prix d'exercice*  $K$ - à ou avant (selon qu'il s'agit d'une option *européenne* ou *américaine*) une date d'échéance déterminée  $T$  -appelé la *maturité* ou l'*échéance*-.

Pour obtenir ce droit d'acheter ou de vendre l'actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance, l'acheteur paie immédiatement au vendeur la valeur de l'option, souvent appelée la *prime*. La question de la détermination de la prime est le problème du pricing : à quel prix vendre l'option à sa naissance ( $t = 0$ ), ainsi qu'à l'importe quel moment dans sa vie ( $0 \leq t \leq T$ ). Il faut donc pouvoir déterminer la prime à tout instant. Pour ce faire, on a besoin d'une modélisation mathématiques des marchés financiers.

La plupart des modèles d'évaluation d'option sont basés sur le modèle de Black et Scholes. Dans ce modèle, le prix de l'actif risqué est une fonction continue du temps  $t$ . Plus précisément, il est donné par la solution  $(S_t)_{t \geq 0}$  d'une équation différentielle stochastique de la forme :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

où  $\mu$  et  $\sigma$  sont des constantes et  $(W_t)_{t \geq 0}$  un mouvement Brownien standard. Une propriété essentielle du modèle de Black-Scholes (et peut-être la raison de son succès) est que les formules de prix et de couverture qu'il fournit ne dépendent que du seul paramètre  $\sigma$ , appelé "volatilité" par les praticiens. En fait, on distingue, en pratique, deux types de "volatilité" correspondant à deux méthodes d'estimation de  $\sigma$  :

- la volatilité historique est obtenue à partir des données historiques concernant le cours du sous-jacent, par des méthodes statistiques.
- la volatilité implicite est obtenue en inversant la formule de prix, c'est à dire qu'à un prix d'option et à un niveau de cours donnés, on associe la valeur de  $\sigma$  qui, introduite dans la formule de Black et Scholes, avec le cours observé du sous-jacent, donne comme prix de l'option celui observé sur le marché.

On observe que ces deux mesures de la volatilité donnent des résultats très différents et que la volatilité implicite varie d'une option à l'autre : on peut, par exemple, tracer une courbe de volatilité donnant la volatilité implicite en fonction du prix d'exercice et on constate que cette courbe n'est pas une droite horizontale, ce qui est en contradiction avec le modèle de Black-Scholes.

Le modèle que nous allons étudier permet, d'une part, d'introduire des processus à trajectoires discontinues pour modéliser l'évolution des cours, ce qui permet de rendre compte de variations brutales dues à des événements rares (publications de chiffres économiques, événements politiques), et, d'autre part, de fournir des formules de prix dépendant de plusieurs paramètres, dont l'ajustement permet de "coller" davantage aux données de marché. Il a été introduit par Merton [32] en 1976. Dans [32] Merton propose des formules de prix pour les options européennes dans un modèle de diffusion avec sauts. Le but principal de cette thèse est de traiter l'évaluation des options américaines dans ce type de modèle et de développer les méthodes numériques permettant de calculer des prix. Notre travail comprend six chapitres. Les résultats principaux de cette thèse sont mentionnés dans [42].

Nous consacrons *le premier chapitre* à une présentation du ce modèle et des formules de prix. Contrairement au modèle de Black-Scholes, le modèle de diffusion avec sauts de Merton n'est pas un modèle de marché complet. Autrement dit, il existe des actifs conditionnels non simulables, pour lesquels il n'y a pas de couverture parfaite. Les techniques de pricing par construction d'un portefeuille simulant l'option ne sont donc pas applicables. Les formules de prix que nous adoptons correspondent à la construction de stratégies minimisant le risque quadratique (cf. [21], [7]) ou localement minimisantes au sens de Schweizer (cf. [39], [40]). Pour ces dernières stratégies, on peut utiliser la notion de probabilité minimale introduite par Föllmer et Schweizer dans (cf. [20], [41]). Nous discutons de l'existence d'une probabilité minimale pour le modèle étudié et nous montrons que lorsque la probabilité minimale  $\hat{\mathbf{P}}$  existe, le modèle reste, sous  $\hat{\mathbf{P}}$ , un modèle de diffusion avec sauts.

*Le deuxième chapitre* consiste à établir une formule quasi-explicite d'évaluation du prix dans le cas où l'échéance est infinie (i.e : "put perpétuel").

*Le chapitre 3 et le chapitre 4* présentent une méthode de calcul du prix du put américain fondée sur les inéquations variationnelles.

Dans *le chapitre 3*, nous montrons que le prix de l'option américaine coïncide avec la solution d'une I.V. Les difficultés viennent des termes de sauts qui font apparaître un opérateur intégral dans l'inéquation parabolique. Nous commençons par expliciter pourquoi les opérateurs qui vont apparaître dans cette inéquation interviennent de façon naturelle dans notre modèle. Nous nous intéressons ensuite aux problèmes de l'existence, de l'unicité et des

propriétés de régularité de la solution de l'I.V. Les résultats obtenus étendent ceux de [24].

Dans le *chapitre 4*, nous étudions l'approximation de la solution de l'I.V. En localisant le problème, nous nous ramenons à une I.V. définie dans un intervalle borné de  $\mathbf{R}$ , qui est ensuite discrétisée par la méthode des différences finies. Dans un cadre général, R. Glowinsky, J. L. Lions et R. Trémoières ont étudié les schémas de discrétisation des inéquations variationnelles (cf. [22]) et montré des théorèmes de convergence sous une hypothèse de coercivité assez forte. Cette hypothèse n'est pas vérifiée dans notre problème et le principal résultat de ce chapitre est un théorème de convergence forte, qui semble nouveau, même dans le cas d'un modèle sans sauts (la démonstration de [24] se référant simplement à [22]).

Dans le *chapitre 5*, nous proposons des formules approchées quasi-explicites s'inspirant de travaux sur le modèle de Black-Scholes. Dans un premier temps, nous généralisons la méthode de Mac Millan [30], puis nous donnons une formule exprimant le prix du put américain à l'aide du prix critique (cf. [34] corollaire 3.1).

Le *chapitre 6* présente les courbes de volatilité, les algorithmes de résolution du problème discrétisé, l'implémentation des méthodes d'approximation et des résultats numériques.



# Chapitre 1

## Modèle

### 1.1 Le Modèle

Dans le modèle d'évaluation des options de Black et Scholes [5], le prix de l'actif risqué est une fonction continue du temps. En 1976, Merton a introduit un modèle dans lequel des discontinuités interviennent et il a proposé des formules facilement calculables pour le prix des options européennes dans ce cadre (cf. [32], [28], [6]). L'objet de notre travail est de développer des méthodes numériques permettant de calculer les formules analogues pour les options américaines.

Nous considérons des options sur un actif dont le prix est un processus stochastique  $(S_t)_{t \geq 0}$  solution de l'équation :

$$\begin{cases} S_0 &= y \\ \frac{dS_t}{S_{t-}} &= \mu dt + \sigma dB_t + d\left(\sum_{j=1}^{N_t} U_j\right) \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $y$  est le "prix spot" à l'instant 0,  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement Brownien standard à valeurs dans  $\mathbf{R}$ ,  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ ,  $(U_j)_{j \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées, à valeurs dans  $] -1, +\infty[$ , de carré intégrable,  $\mu, \sigma$  deux constantes, avec  $\sigma > 0$ . Les  $U_j$  représentent les valeurs relatives des sauts. Le paramètre  $\lambda$  représente la fréquence des sauts.

Nous supposons les tribus engendrées respectivement par  $(B_t)_{t \geq 0}$ ,  $(N_t)_{t \geq 0}$ ,  $(U_j)_{j \geq 1}$  indépendantes. On note  $\mathcal{F}_t$  la tribu engendrée par les variables aléatoires  $B_s, N_s, U_j \mathbf{1}_{\{j \leq N_s\}}$  pour  $s \leq t$  et  $j \geq 1$ .

Nous supposons de plus que le taux d'intérêt  $r$  est une constante strictement positive et que l'on a la relation :

$$\mu = r - \lambda \mathbf{E}U_1$$

Cette égalité entraîne que le prix actualisé  $(e^{-rt} S_t)_{t \geq 0}$  est une martingale de carré intégrable par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)$ .

Contrairement au modèle de Black-Scholes, ce modèle n'est pas un modèle de marché complet et le prix des options ne peut pas être déterminé par construction d'un portefeuille de réplication. Cependant, lorsque le prix actualisé de l'actif risqué est une martingale de carré intégrable, on peut définir des stratégies de couverture minimisant le risque quadratique (cf. [7], [21], [39]). Si on considère une option européenne d'échéance  $T$  définie par une variable aléatoire positive  $h$ ,  $\mathcal{F}_T$ -mesurable et de carré intégrable, la valeur à l'instant  $t$  d'un portefeuille de couverture minimisant le risque quadratique est donnée par :

$$V_t^e = \mathbf{E}(e^{-r(T-t)}h | \mathcal{F}_t)$$

C'est cette quantité que nous prendrons comme définition du prix de l'option à la date  $t$ . De plus, nous verrons dans la partie numérique que ce prix nous donne des courbe "smile" sur la volatilité implicite dans le modèle avec des sauts où les variables aléatoires  $U_j + 1$  suivent une loi Log-normal. Ce phénomène rapporte deux avantages.

- Premièrement, il est cohérent avec le point qu'on a déjà indiqué dans l'introduction : sur la marché réel, la courbe de volatilité sur une même action n'est plus une droite horizontale, elle varie avec le prix d'exercice.
- Deuxièmement, ce phénomène nous permet d'expliquer la surestimation (resp. sous-estimation) de la prime réelle (supposons le marché entre dans le cadre de ce modèle avec sauts) en terme de surestimation (resp. sous-estimation) de la volatilité Brownienne (Voir le chapitre 6).

Notons que Merton [32] ne fait pas l'hypothèse que  $\mu = r - \lambda \mathbf{E}U_1$ , mais ses formules de prix peuvent s'écrire comme des espérances conditionnelles par rapport à une probabilité  $\mathbf{P}^*$  équivalente à la probabilité initiale  $\mathbf{P}$  du modèle, telle que, sous  $\mathbf{P}^*$ ,  $(S_t)$  est solution d'une équation du même type que (1.1), mais avec  $\mu = r - \lambda \mathbf{E}U_1$ . Du point de vue des calculs, on est donc ramené à la situation dans laquelle nous nous plaçons.

Considérons maintenant une option américaine d'échéance  $T$ , permettant un profit de la forme  $h(S_t)$  quand elle exercée à l'instant  $t$ . (Pour un put :  $h(y) = (K - y)_+$ , pour un call :  $h(y) = (y - K)_+$ , où  $K$  est le prix d'exercice). Par analogie avec le cas européen, nous prendrons pour valeur de l'option américaine à la date  $t$ , la quantité  $V_t$ , avec

$$V_t = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-r(\tau-t)}h(S_\tau) | \mathcal{F}_t) \quad (1.2)$$

où  $\mathcal{T}_{t,T}$  est l'ensemble des temps d'arrêt de la filtration  $(\mathcal{F}_s)_{s \geq 0}$  à valeurs dans  $[t, T]$  et  $(S_s)_{s \geq 0}$  est le processus défini par :

$$S_s = ye^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma B_s} \prod_{j=1}^{N_s} (1 + U_j)$$

Le prix d'option américaine  $V_t$  défini par (1.2) est plus grand que le prix européen  $V_t^e$ . Ceci est naturel, parce que dans le cas américain, on doit payer en plus, par rapport à une option

européenne pour le droit d'exercer de manière anticipée. Moralement, si l'on fait le choix d'une maturité aléatoire dans  $[0, T]$  (i.e. le temps d'arrêt), selon la raisonnement précédente, le prix d'option à l'instant  $t$  doit être :

$$\mathbf{E}(e^{-r(\tau-t)}h(S_\tau) \mid \mathcal{F}_t)$$

En revenant à la définition d'une option américaine, il est assez naturelle de prendre le "sup" de tous ces valeurs comme le prix d'option américaine. (cf. [2], [16], [25], [39]).

Comme il n'existe pas de formule explicite pour calculer le prix d'une option américaine, on doit avoir recours à des méthodes d'approximation numérique. Le but principal de cette thèse est l'étude de ces méthodes.

## 1.2 Probabilité minimale

Avant étudier les méthodes pour chercher le prix  $V_t$  d'une option américaine, nous faisons une remarque sur la notion de probabilité minimale (cf. [20], [39], [41], [40]) pour ce modèle. Quand la relation  $\mu = r - \lambda \mathbf{E}U_1$  n'est pas vérifiée,  $(e^{-rt}S_t)_{t \geq 0}$  est seulement une semi-martingale. Föllmer et Schweizer (cf. [20], [39]) ont étudié les problèmes de couverture dans les modèles de marchés incomplets définis par des semi-martingales. En général, il n'y a pas de stratégie de couverture minimisant le risque quadratique. Mais il y a une notion de stratégie "localement de risque minimum" et de probabilité minimale introduites par Föllmer et Schweizer (cf. [20], [39], [40], [41]). Il est à noter que Colwell et Elliott ont introduit une "pricing mesure" [10] qui coïncide avec la mesure minimale de Föllmer et Schweizer [41].

Maintenant, nous considérons un espace probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ . On suppose que le processus de prix  $\xi_t$  est une semi-martingale de la forme :

$$\xi_t = \xi_0 + M_t + A_t$$

où  $M_t$  est une martingale de carrée intégrable,  $A_t$  est un processus à variation finie, absolument continue par rapport à  $\langle M \rangle_t$ , i.e  $A_t = \int_0^t \alpha_s d \langle M \rangle_s$  où  $\alpha$  est un processus prévisible  $d \langle M \rangle$  intégrable. Schweizer définit (cf. [41]) une probabilité minimale  $\hat{\mathbf{P}}$  de la façon suivante :

- i).  $\hat{\mathbf{P}}$  est une probabilité équivalente à  $\mathbf{P}$ .
- ii).  $\xi_t$  est une martingale sous  $\hat{\mathbf{P}}$ .
- iii).  $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}$  sur  $\mathcal{F}_0$ .
- iv). Toute martingale de carré intégrable et orthogonale à  $M_t$  sous  $\mathbf{P}$  est encore une martingale sous  $\hat{\mathbf{P}}$ .

Il montre que  $\hat{\mathbf{P}}$  existe si et seulement si la solution de l'EDS :

$$G_t = 1 - \int_0^t G_{s-} \alpha_s dM_s$$

est une martingale de carré intégrable strictement positive. Dans ce cas,  $\hat{\mathbf{P}}$  est donné par :

$$\left. \frac{d\hat{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = G_t \quad (1.3)$$

D'autre part, si  $(H_t^0, H_t)$  dénote une stratégie vérifiant la condition d'intégrabilité :

$$\mathbf{E} \left( \int_0^T H_u^2 d\langle M \rangle_u + \left( \int_0^T |H_u| \cdot d|A|_u \right)^2 \right) < \infty \quad (1.4)$$

Alors la valeur de cette portefeuille à l'instant  $t$  :<sup>1</sup>

$$V_t = H_t^0 + H_t \xi_t \quad (0 \leq t \leq T)$$

et son processus de coût est :

$$C_t = V_t - \int_0^t H_u d\xi_u$$

La définition d'une stratégie "localement de risque minimum" est donnée par Schweizer (cf. [40]). Nous rappelons qu'une stratégie est dite "optimale" si son processus de coût  $C_t$  est une martingale de carré intégrable et orthogonale à  $M_t$  sous  $\mathbf{P}$ . Schweizer (cf. [41]) montre que les trois conditions suivants sont équivalents.

- Il existe une stratégie "optimal" pour l'actif conditionnel  $h$ .
- Il existe une stratégie "localement de risque minimum" pour l'actif conditionnel  $h$ .
- L'actif conditionnel  $h$  admet une décomposition :

$$h = h_0 + \int_0^T H_u^h d\xi_u + L_T^h$$

avec  $h_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P})$ , et  $H_u^h$  vérifiant (1.4) et  $L^h$  est une martingale de carré intégrable et orthogonale à  $M_t$  sous  $\mathbf{P}$ .

Sous une de ces trois conditions, la stratégie optimal coïncide avec la stratégie "localement de risque minimum". Elle est donné par :

$$H = H^h, \quad H^0 = V - H \cdot \xi$$

et

$$V_t = h_0 + \int_0^t H_u^h \cdot d\xi_u + L_t^h \quad (0 \leq t \leq T)$$

---

<sup>1</sup>Pour simplifier les notations, nous supposons que l'actualisation est égal à 1 dans cette partie de rappel.



De plus, il montre que la valeur à l'instant  $t$  de cette stratégie peut s'écrire comme l'espérance conditionnelle sous la probabilité minimale donnée au-dessus, i.e :

$$V_t = \hat{\mathbf{E}}(h | \mathcal{F}_t)$$

Naturellement, deux problèmes se posent dans notre cas :

- Y a-t-il une probabilité minimale  $\Gamma$
- Quelle est la loi du processus  $(S_t)$  sous cette probabilité quand elle existe  $\Gamma$  En particulier, sous cette probabilité minimale, est-ce que  $S_t$  est encore solution d'une E.D.S du type :

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \hat{\mu}dt + \hat{\sigma}dW_t + d\left(\sum_{j=1}^{\hat{N}_t} \hat{U}_j\right)$$

où  $W_t$ ,  $\hat{N}_t$  et  $\hat{U}_j$  ont les mêmes propriétés que  $B_t$ ,  $N_t$  et  $U_j$ , mais sous la probabilité  $\hat{\mathbf{P}}$   $\Gamma$

On verra, d'abord, que l'existence d'une probabilité minimale entraîne des conditions restrictives sur  $\mu$ ,  $r$ ,  $\lambda$  et la loi des  $U_j$ .

**Proposition 1.1** *Si le support de  $U_j$  est  $] -1, +\infty[$ , alors l'existence de la probabilité minimal  $\hat{\mathbf{P}}$  équivaut à la condition suivante :*

$$-1 \leq \eta \leq 0 \tag{1.5}$$

avec :

$$\eta = \frac{\mu + \lambda \mathbf{E}U_1 - r}{\sigma^2 + \lambda \mathbf{E}U_1^2}.$$

**Démonstration :** Considérons le prix actualisé  $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ , on a, en utilisant la formule d'Ito et (1.1),

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-}(\mu - r + \lambda \mathbf{E}U_1)dt + \sigma \tilde{S}_{t-}dB_t + \tilde{S}_{t-}d\left(\sum_{j=1}^{N_t} U_j - \lambda t \mathbf{E}U_1\right) \tag{1.6}$$

Il est clair que  $\tilde{S}_t$  admet la décomposition :

$$\tilde{S}_t = S_0 + M_t + A_t$$

avec :

$$A_t = \int_0^t \tilde{S}_{s-}(\mu - r + \lambda \mathbf{E}U_1)ds$$

$$M_t = \int_0^t \sigma \tilde{S}_{s-}dB_s + \int_0^t \tilde{S}_{s-}d\left(\sum_{j=1}^{N_s} U_j - \lambda s \mathbf{E}U_1\right)$$

et :

$$\alpha_s = \frac{dA_s}{d \langle M \rangle_s} = \frac{\tilde{S}_{s-}(\mu - r + \lambda \mathbf{E}U_1)}{(\tilde{S}_{s-})^2(\sigma^2 + \lambda \mathbf{E}U_1^2)} = \frac{\eta}{\tilde{S}_{s-}}$$

D'après les résultats de Schweizer énoncés avant, nous avons la probabilité minimale  $\hat{\mathbf{P}}$  donné par (1.3) si et seulement si la solution de l'E.D.S.

$$G_t = 1 - \int_0^t G_{s-} \alpha_s dM_s$$

est une martingale de carré intégrable strictement positive.

Donc, il suffit de montrer que la solution de l'E.D.S. ci-dessus est une martingale de carré intégrable strictement positive équivalent à la condition (1.5). Maintenant, notons :

$$\tilde{M}_s = -(\sigma B_s + (\sum_{j=1}^{N_s} U_j - \lambda s \mathbf{E}U_1))\eta$$

on peut écrire :

$$G_t = 1 + \int_0^t G_{s-} d\tilde{M}_s$$

Il est facile de voir que  $\tilde{M}_s$  est une martingale sous  $\mathbf{P}$ , et  $\tilde{M}_{0-} = 0$ . En utilisant "l'exponentielle de Doléans-Dade" (cf. [15], [19] le théorème 13.5, ou [36] le théorème 36 page 77), on a :

$$G_t = \exp(-\eta\sigma B_t - \eta(\sum_{j=1}^{N_t} U_j - \lambda t \mathbf{E}U_1) - \frac{1}{2}\eta^2\sigma^2 t) \prod_{0 \leq s \leq t} (1 + \Delta\tilde{M}_s) e^{-\Delta\tilde{M}_s}$$

On peut écrire :

$$\prod_{0 \leq s \leq t} (1 + \Delta\tilde{M}_s) e^{-\Delta\tilde{M}_s} = \prod_{j=1}^{N_t} (1 - \eta U_j) e^{\eta U_j}$$

ce qui entraîne :

$$G_t = \exp(-\eta\sigma B_t - \frac{1}{2}\eta^2\sigma^2 t) \prod_{j=1}^{N_t} (1 - \eta U_j) e^{\eta \lambda t \mathbf{E}U_1} \quad (1.7)$$

D'autre part, puisque  $\tilde{M}_s$  est une martingale, de  $dG_t = G_{s-} d\tilde{M}_s$ , on voit facilement que  $G_t$  est une martingale. Par ailleurs, il n'est pas difficile de voir que  $G_t$  est strictement positive équivalent à la condition suivante :

$$1 - \eta \cdot U_j > 0 \quad \text{p.s.} \quad (1.8)$$

Pour conclure la démonstration de cette proposition, il nous reste à montrer que cette condition (1.8) est équivalente à la condition (1.5).

La raisonnement est le suivant :

- Supposons  $-1 \leq \eta \leq 0$ .

- Quand  $\eta = 0$ , il est clair qu'on a (1.8).
- Quand  $-1 \leq \eta < 0$ , on a :

$$\{1 - \eta U_j \leq 0\} = \{U_j \leq \frac{1}{\eta}\} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\eta} \leq -1$$

Or rappelons que les  $U_j$  sont i.i.d et à valeurs dans  $] - 1, +\infty[$ , on déduit :

$$\mathbf{P}(U_j \leq -1) = 0$$

Ce qui entraîne :

$$1 - \eta U_j > 0 \quad p.s.$$

- D'autre part, supposons que  $\eta < -1$  ou  $\eta > 0$ , on voit que la condition (1.8) ne peut jamais être vérifiée. Parce que,

- dans le premier cas, comme  $\{\eta < -1\} = \{\frac{1}{\eta} > -1\}$ , et en tenant compte du fait que le support de  $U_j$  est  $] - 1, \infty[$ , on voit que  $\mathbf{P}(U_j \leq \frac{1}{\eta}) > 0$ . Or  $\{1 - \eta U_j \leq 0\} = \{U_j \leq \frac{1}{\eta}\}$ , donc :

$$\mathbf{P}(1 - \eta U_j \leq 0) > 0$$

ce qui entraîne qu'on n'a pas (1.8).

- dans le deuxième cas, on a :

$$\mathbf{P}(U_1 > \frac{1}{\eta}) > 0 \quad \forall \eta$$

ce qui implique aussi qu'on n'a pas (1.8).

■

Par ailleurs, rappelons que  $\eta = \frac{\mu - r + \lambda \mathbf{E}U_1}{\sigma^2 + \lambda \mathbf{E}U_1^2}$ , il est à noter qu' une fois les paramètres  $r$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\mathbf{E}U_1$ , et  $\mathbf{E}U_1^2$  sont fixés,  $\eta$  est une constante. Il est clair qu'on peut toujours bien choisir les valeurs de ces paramètres tel que la condition  $-1 \leq \eta \leq 0$  soit vérifiée. Par exemple, on peut prendre  $\mathbf{E}U_1 = 0$ , et choisir les restes tel qu'ils vérifient :

$$r - \sigma^2 - \lambda \mathbf{E}U_1^2 \leq \mu \leq r$$

ceci nous permet de déduire  $-1 \leq \eta \leq 0$ .

En conclusion, la condition (1.8) est une condition raisonnable, qui est vérifiée si et seulement si  $-1 \leq \eta \leq 0$ .

Maintenant, si l'on note  $\bar{\sigma} = \sigma^2 + \lambda \mathbf{E}U_1^2$ ,  $\bar{\sigma}$  est la variance du processus  $(\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$  (voir la chapitre 6). Avec cette notion, la condition (1.8) devient :

$$(\mu - r + \lambda \mathbf{E}U_1)U_j < \bar{\sigma}^2$$

Sous cette condition, on sait que  $G_t$  est une martingale positive. Ce qui nous donne l'existence de la probabilité minimale sous cette condition restrictive (1.8).

Ensuite, pour voir la loi du processus  $(\tilde{S}_t)$  sous  $\hat{\mathbf{P}}$ , nous posons :  $W_t = B_t + \eta\sigma t$ , alors (1.6) devient :

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-} \lambda (\eta \mathbf{E}U_1^2 - \mathbf{E}U_1) dt + \sigma \tilde{S}_{t-} dW_t + \tilde{S}_{t-} d\left(\sum_{j=1}^{N_t} U_j\right)$$

La proposition suivante nous permet de répondre à la deuxième question énoncé au-dessus.

**Proposition 1.2** *Soit  $\tilde{\mathbf{P}}$  une probabilité sous laquelle*

- 1).  $W_t$  est un mouvement Brownien,
- 2).  $N_t$  est un processus de Poisson d'intensité  $\hat{\lambda} = \lambda(1 - \eta \mathbf{E}U_1)$ ,
- 3). les  $U_j$  sont i.i.d et  $d\tilde{\mathbf{P}}_{U_1}(x) = \frac{1-\eta x}{1-\eta \mathbf{E}U_1} d\mathbf{P}_{U_1}(x)$ ,
- 4).  $(W_t)_{t \geq 0}$ ,  $(N_t)_{t \geq 0}$ ,  $(U_j)_{j \geq 1}$  sont indépendants,

alors, on a :

$$\hat{\mathbf{P}}|_{\mathcal{F}_T} = \tilde{\mathbf{P}}|_{\mathcal{F}_T}$$

**Démonstration :**

- Pour montrer que  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un mouvement Brownien sous  $\hat{\mathbf{P}}$ , il suffit de montrer que :  $\forall \beta \in \mathbf{R}$ ,

$$L_t \stackrel{\text{def}}{=} \exp(i\beta W_t + \frac{1}{2}\beta^2 t)$$

est une martingale sous  $\hat{\mathbf{P}}$ . Par (1.3), cela revient à montrer que  $L_t G_t$  est une martingale sous  $\mathbf{P}$ .

Partons de la définition de  $G_t$ , remarquons  $W_t = B_t + \eta\sigma t$ , on a :

$$\begin{aligned} L_t G_t &= \exp(i\beta W_t + \frac{1}{2}\beta^2 t) \cdot \exp(-\eta\sigma B_t - \frac{1}{2}\eta^2 \sigma^2 t) \prod_{j=1}^{N_t} (1 - \eta U_j) e^{\eta\lambda t \mathbf{E}U_1} \\ &= \exp((i\beta - \eta\sigma)B_t - \frac{1}{2}(i\beta - \eta\sigma)^2 t) \prod_{j=1}^{N_t} (1 - \eta U_j) e^{\eta\lambda t \mathbf{E}U_1} \end{aligned}$$

Pour  $s \geq t$ , on a :

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left(\prod_{j=1}^{N_s} (1 - \eta U_j) e^{\eta\lambda s \mathbf{E}U_1} \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\prod_{j=1}^{N_s - N_t} (1 - \eta U_j) e^{\eta\lambda(s-t) \mathbf{E}U_1} \cdot \prod_{j=1}^{N_t} (1 - \eta U_j) e^{\eta\lambda t \mathbf{E}U_1} \mid \mathcal{F}_t\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{j=1}^{N_t} (1 - \eta U_j) e^{\eta \lambda t \mathbf{E} U_1} \cdot \mathbf{E} \left( \prod_{j=1}^{N_s - N_t} (1 - \eta U_j) e^{\eta \lambda (s-t) \mathbf{E} U_1} \right) \\
&= \prod_{j=1}^{N_t} (1 - \eta U_j) e^{\eta \lambda t \mathbf{E} U_1}
\end{aligned}$$

D'où  $\prod_{j=1}^{N_t} (1 - \eta U_j) e^{\eta \lambda t \mathbf{E} U_1}$  est une martingale sous  $\mathbf{P}$ .

D'autre part, le fait que  $B_t$  est un mouvement Brownien sous  $\mathbf{P}$  entraîne que  $\exp((i\beta - \eta\sigma)B_t - \frac{1}{2}(i\beta - \eta\sigma)^2 t)$  est une martingale sous  $\mathbf{P}$ . Donc, on déduit que  $L_t G_t$  est une  $\mathbf{P}$ -martingale. D'où  $W_t$  est un mouvement Brownien sous  $\hat{\mathbf{P}}$ .

- Pour vérifier que  $(N_t)_{0 \leq t \leq T}$  est encore un processus de Poisson sous  $\hat{\mathbf{P}}$ , il suffit de montrer l'égalité suivante, pour  $s \leq t$ ,  $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_k \leq s$ , et  $u > 0$ ,

$$\hat{\mathbf{E}}(u^{N_t - N_s} \varphi(N_{s_1}, N_{s_2}, \dots, N_{s_k})) = \exp[\hat{\lambda}(t-s)(u-1)] \cdot \hat{\mathbf{E}}(\varphi(N_{s_1}, N_{s_2}, \dots, N_{s_k})) \quad (1.9)$$

où  $\varphi$  est une fonction borélienne, positive.

Rappelons la définition de la probabilité  $\hat{\mathbf{P}}$  (voir (1.3) et (1.7)), et remarquons les hypothèses sur  $(B_t)_{t \geq 0}$ ,  $(N_t)_{t \geq 0}$  et  $(U_j)_{j \geq 1}$ , on déduit :

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{E}}(u^{N_t - N_s} \varphi(N_{s_1}, N_{s_2}, \dots, N_{s_k})) \\
&= \mathbf{E} \left( u^{N_t - N_s} \varphi(N_{s_1}, N_{s_2}, \dots, N_{s_k}) \cdot \exp(-\eta\sigma B_t - \frac{1}{2}\eta^2 \sigma^2 t) \prod_{j=1}^{N_t} (1 - \eta U_j) e^{\eta \lambda t \mathbf{E} U_1} \right) \\
&= \mathbf{E} \exp(-\eta\sigma B_t - \frac{1}{2}\eta^2 \sigma^2 t) \cdot \mathbf{E} \left( u^{N_t - N_s} \varphi(N_{s_1}, N_{s_2}, \dots, N_{s_k}) \prod_{j=1}^{N_t} (1 - \eta U_j) e^{\eta \lambda t \mathbf{E} U_1} \right)
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E} \left( u^{N_t - N_s} \varphi(N_{s_1}, N_{s_2}, \dots, N_{s_k}) \prod_{j=1}^{N_t} (1 - \eta U_j) e^{\eta \lambda t \mathbf{E} U_1} \right) \\
&= \mathbf{E} \left( u^{N_t - N_s} \varphi(N_{s_1}, N_{s_2}, \dots, N_{s_k}) e^{\eta \lambda t \mathbf{E} U_1} \cdot \mathbf{E} \left[ \prod_{j=1}^{N_t} (1 - \eta U_j) \mid N_t \right] \right) \\
&= \mathbf{E} \left( u^{N_t - N_s} \varphi(N_{s_1}, N_{s_2}, \dots, N_{s_k}) e^{\eta \lambda t \mathbf{E} U_1} (1 - \eta \mathbf{E} U_j)^{N_t} \right) \\
&= \mathbf{E} \left( u^{N_t - N_s} (1 - \eta \mathbf{E} U_j)^{N_t - N_s} \right) \cdot \mathbf{E} \left( \varphi(N_{s_1}, N_{s_2}, \dots, N_{s_k}) (1 - \eta \mathbf{E} U_j)^{N_s} \right) e^{\eta \lambda t \mathbf{E} U_1} \\
&= e^{\lambda(t-s)[u(1-\eta \mathbf{E} U_1)-1]} e^{\eta \lambda (t-s) \mathbf{E} U_1} \cdot \\
&\quad \mathbf{E}(\varphi(N_{s_1}, N_{s_2}, \dots, N_{s_k}) (1 - \eta \mathbf{E} U_j)^{N_s}) e^{\eta \lambda s \mathbf{E} U_1} \\
&= \exp[\lambda(t-s)(1 - \eta \mathbf{E} U_1)(u-1)] \cdot \mathbf{E} \left( \varphi(N_{s_1}, N_{s_2}, \dots, N_{s_k}) (1 - \eta \mathbf{E} U_j)^{N_s} e^{\eta \lambda s \mathbf{E} U_1} \right)
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que  $\mathbf{E}(v^{N_t}) = \exp(\lambda t(v-1))$ . Comme  $\hat{\lambda} = \lambda(1 - \eta \mathbf{E} U_1)$  et en remarquant (1.3), (1.7), on obtient (1.9).

- Il est facile de voir l'indépendance entre  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  et  $\sigma(N_t, U_j \mathbf{1}_{\{j \leq N_T\}})$  sous  $\hat{\mathbf{P}}$ . Maintenant, pour achever la démonstration, il suffit de montrer que : pour  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_l \leq T$ , on a l'égalité :

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{E}}(\varphi(U_1, U_2, \dots, U_k) \cdot \mathbf{1}_{\{N_T \geq k\}} \psi(N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_l})) \\ &= \tilde{\mathbf{E}}(\varphi(U_1, U_2, \dots, U_k) \cdot \mathbf{1}_{\{N_T \geq k\}} \psi(N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_l})) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Or, par (1.3), (1.7), et les hypothèses sur  $(B_t)_{t \geq 0}$ ,  $(N_t)_{t \geq 0}$  et  $(U_j)_{j \geq 1}$ , on a :

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{E}}(\varphi(U_1, U_2, \dots, U_k) \cdot \mathbf{1}_{\{N_T \geq k\}} \psi(N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_l})) \\ &= \mathbf{E}(\exp(-\eta\sigma B_t - \frac{1}{2}\eta^2\sigma^2 t)) \cdot \\ & \quad \mathbf{E} \left( \varphi(U_1, U_2, \dots, U_k) \mathbf{1}_{\{N_T \geq k\}} \psi(N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_l}) \prod_{j=1}^{N_t} (1 - \eta U_j) e^{\eta\lambda T \mathbf{E}U_1} \right) \\ &= \mathbf{E}(\exp(-\eta\sigma B_t - \frac{1}{2}\eta^2\sigma^2 t)) \cdot \mathbf{E} \left( \varphi(U_1, U_2, \dots, U_k) \prod_{j=1}^k (1 - \eta U_j) \right) \cdot \\ & \quad \mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{\{N_T \geq k\}} \psi(N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_l}) \prod_{j=k+1}^{N_T} (1 - \eta U_j) e^{\eta\lambda T \mathbf{E}U_1} \right) \\ &= \mathbf{E} \left( \varphi(U_1, U_2, \dots, U_k) \frac{\prod_{j=1}^k (1 - \eta U_j)}{(1 - \eta \mathbf{E}U_1)^k} \right) \cdot \mathbf{E}(\exp(-\eta\sigma B_t - \frac{1}{2}\eta^2\sigma^2 t)) \cdot \\ & \quad \mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{\{N_T \geq k\}} \psi(N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_l}) (1 - \mathbf{E}U_1)^{N_T} e^{\eta\lambda T \mathbf{E}U_1} \right) \\ &= \mathbf{E}(\varphi(V_1, V_2, \dots, V_k)) \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{1}_{\{N_T \geq k\}} \psi(N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_l})) \end{aligned}$$

où  $V_j$  a pour loi :

$$d\mathbf{P}_{V_j}(X) = \frac{1 - \eta U_j}{1 - \eta \mathbf{E}U_1} d\mathbf{P}_{U_j}(X)$$

D'où (1.10).

L'égalité (1.10) a prouvé aussi que, sous  $\hat{\mathbf{P}}$ ,  $\sigma(N_t, t \geq T)$  et  $\sigma(U_j, j \geq N_T)$  sont indépendants.

Ce qui conclut la démonstration. ■

En résumé, dans notre cadre, sous la condition restrictive (1.8), il existe une probabilité minimale  $\hat{\mathbf{P}}$ . De plus, sous cette probabilité minimale  $\hat{\mathbf{P}}$ ,  $S_t$  est encore solution d'une E.D.S du même type que (1.1).

Comme on se trouve dans un cadre de marchés incomplets, le prix d'option n'est pas unique. Les formules de prix que nous adoptons correspondent à la construction de stratégies

minimisant le risque quadratique (cf. [21], [7]) ou localement minimisantes au sens de Schweizer (cf. [39], [40]). C'est un prix possible, mais ce n'est pas le seul prix. Pour les autres prix possible, nous renvoyons aux travaux de N. El Karoui et M.C. Quenez ([17], [37]). Il est à noter que les prix qu'on propose ici sont encadrés par le prix maximal et le prix minimal de [17], [37].

### 1.3 L'égalité $V_t = u^*$

Nous revenons à la section 1.1, et nous faisons le changement de variable en posant :  $X_t = \log S_t$ , alors (1.1) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} X_0 &= x \\ dX_t &= (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dB_t + d(\sum_{j=1}^{N_t} Z_j) \end{cases}$$

avec  $Z_j = \ln(1 + U_j)$  et  $x = \ln y$ . De plus, on pose :  $\psi(x) = h(e^x)$ .

On note  $(X_s^{t,x}(\omega))$  l'unique solution de l'équation différentielle stochastique (1.11) :

$$\begin{cases} X_t^x &= x \\ dX_s &= (\mu - \frac{\sigma^2}{2})ds + \sigma dB_s + d(\sum_{j=1}^{N_s} Z_j) \quad \text{pour } s \geq t \end{cases} \quad (1.11)$$

Elle peut être explicité de la façon suivante :

$$X_s^{t,x} = x + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(s - t) + \sigma(B_s - B_t) + \sum_{j=N_t+1}^{N_s} Z_j$$

On rappelle que, généralement, si l'application  $(t, s, x) \mapsto X_s^{t,x}(\omega)$  est continue pour presque tout  $\omega$ , on dit que  $(X_s^{t,x})$  est une version continue du flot de (1.11).

**Proposition 1.3** *Supposons  $\psi(x)$  est une fonction continue sur  $\mathbf{R}$  telle que :  $|\psi(x)| \leq Me^{M|x|}$  où  $M$  est une constante positive. Soit :*

$$u^*(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau^{t,x}))$$

et

$$V(t) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau) | \mathcal{F}_t)$$

alors  $u^*$  est fonction continue sur  $[0, T] \times \mathbf{R}$ , et :

$$V(t) = u^*(t, X_t) \quad p.s.$$

La difficulté de cette démonstration vient du fait que les temps d'arrêt de  $\mathcal{T}_{t,T}$  peuvent dépendre du passé. Donc, on introduit, d'abord, des notations suivantes :

$\bar{\mathcal{T}}_{t,T}$  : L'ensemble des temps d'arrêt de la filtration  $(\mathcal{F}_{t,s})_{t \leq s \leq T}$  où  $\mathcal{F}_{t,s}$  est la tribu engendrée par les accroissements  $B_u - B_t$ ,  $N_u - N_t$ ,  $t \leq u \leq s$  et  $U_j \mathbf{1}_{\{N_t < j \leq N_s\}}$  ;

$\hat{\mathcal{T}}_{t,T}$  : L'ensemble des éléments de  $\mathcal{T}_{t,T}$  qui peuvent être écrits sous la forme  $\tau = \sum_n \mathbf{1}_{A_n} \tau_n$  où  $(A_n)$  est une suite d'événements  $\mathcal{F}_t$ -mesurables deux à deux disjoints et  $\tau_n \in \bar{\mathcal{T}}_{t,T}$ .

De plus, ils ont les propriétés suivants :

- (i). Les tribus  $\mathcal{F}_t$  et  $\mathcal{F}_{t,s}$  sont indépendantes.
- (ii). Pour  $s \in [t, T]$ , on a  $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_{t,s}$ .
- (iii). On a de plus les inclusions :  $\bar{\mathcal{T}}_{t,T} \subset \hat{\mathcal{T}}_{t,T} \subset \mathcal{T}_{t,T}$ .

Avant de montrer la proposition 1.3, on aura besoin du lemmme suivant :

**Lemme 1.4** *Pour tout  $\tau$  appartenant à  $\mathcal{T}_{t,T}$ , il existe une suite  $(\tau_n)$  d'éléments de  $\hat{\mathcal{T}}_{t,T}$  telle que :*

$$\tau_n \xrightarrow{p.s} \tau \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Pour montrer ce lemme, il faut utiliser le résultat suivant qui peut être trouvé dans le livre de Neveu [35] (Voir Ex I-5-1 ).

**Remarque 1.5** *Si  $A \in \mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ , alors  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe une partition  $A_1, \dots, A_p$  de  $\Omega$  formée d'éléments de  $\mathcal{F}$  et  $B_1, \dots, B_p \in \mathcal{G}$  tels que :*

$$\mathbf{P}(A \Delta (A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_p B_p)) < \varepsilon$$

Maintenant, on commence à montrer le lemme 1.4.

**Démonstration : (Démonstration du lemme 1.4)**

Il suffit en fait de démontrer la convergence en probabilité, qui entraîne la convergence presque sure d'une sous-suite.

Pour un élément quelconque  $\tau$  appartient à  $\mathcal{T}_{t,T}$ , on peut supposer que  $\tau$  est de la forme :

$$\tau = \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{A_j} t_j \tag{1.12}$$

avec  $t \leq t_1 < \dots < t_N \leq T$  et  $A_j$  deux à deux disjoint et  $A_j \in \mathcal{F}_{t_j}$ . En effet, on peut toujours approcher  $\tau$  par :

$$\tau^m = \sum_k \mathbf{1}_{\{\frac{k}{2^m} < \tau \leq \frac{k+1}{2^m}\}} \frac{k+1}{2^m}$$

D'autre part, remarquant que les tribus  $\mathcal{F}_t$  et  $\mathcal{F}_{t,t_j}$  sont indépendantes et  $\mathcal{F}_{t_j} = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_{t,t_j}$ , et utilisant la remarque 1.5, on sait que pour  $n$  quelconque, on peut trouver une partition



de  $\Omega$  formé d'éléments  $A_1^0, A_2^0, \dots, A_p^0 \in \mathcal{F}_t$  et pour chaque  $j$ , des événements  $B_1^j, B_2^j, \dots, B_p^j \in \mathcal{F}_{t,t_j}$  tels que : <sup>2</sup>

$$\mathbf{P}(A_j \Delta (A_1^0 B_1^j \cup A_2^0 B_2^j \cup \dots \cup A_p^0 B_p^j)) < \frac{1}{n} \quad (1.13)$$

Maintenant, on introduit  $\tau_n$  de la façon suivante :

$$\tau_n = \sum_{k=1}^p \mathbf{1}_{A_k^0} \vartheta_k \quad (1.14)$$

avec  $\vartheta_k$  défini par :

$$\vartheta_k = t_1 \mathbf{1}_{B_k^1} + t_2 \mathbf{1}_{(B_k^1)^c \cap B_k^2} + \dots + t_N \mathbf{1}_{(B_k^1)^c \dots \cap (B_k^{N-1})^c B_k^N} + T \mathbf{1}_{(B_k^1)^c \dots (B_k^N)^c} \quad (1.15)$$

Évidemment,  $\tau_n$  appartient à  $\tilde{\mathcal{T}}_{t,T}$ . Donc, il suffit de montrer que  $\tau_n$  donné par (1.14) converge vers  $\tau$  en probabilité. A partir de (1.12) et (1.14), on a :

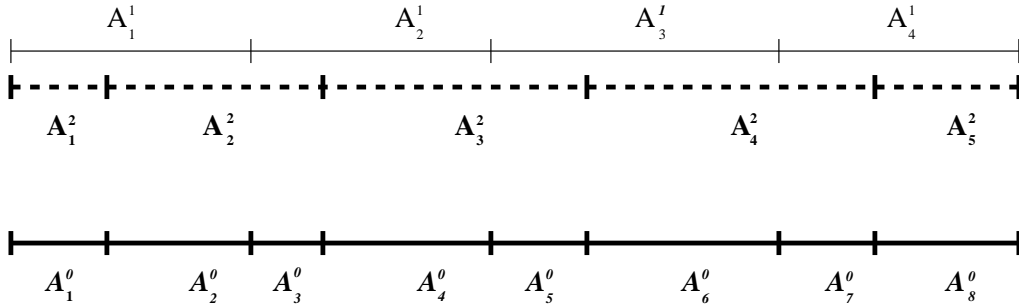
$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau \neq \tau_n) &= \sum_{j=1}^N \mathbf{P}(A_j \cap \{\tau_n \neq t_j\}) \\ &= \sum_{j=1}^N \mathbf{P}(A_j \cap (\cup_{k=1}^p (A_k^0 \cap \{\vartheta_k \neq t_j\}))) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Or la définition de  $\vartheta_k$  (1.15) entraîne que :

$$\{\vartheta_k \neq t_j\} = \cup_{l < j} B_k^l \cup (B_k^j)^c \quad (1.17)$$

<sup>2</sup>Normalement, selon la remarque 1.5, on sait que la partition  $A_1^0, A_2^0, \dots, A_p^0$  dépend de  $j$ , alors, pourquoi peut-on parler d'une partition indépendante de  $j$  ?

On prend ici un exemple pour expliquer concrètement. Supposons  $j = 1$ ,  $\mathcal{F}_{t_1} = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_{t,t_1}$ , on a une partition  $A_1^1, A_2^1, A_3^1, A_4^1$ ;  $j = 2$ ,  $\mathcal{F}_{t_2} = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_{t,t_2}$ , on a une partition  $A_1^2, A_2^2, A_3^2, A_4^2, A_5^2$ ; Alors, on reconstruit, de la façon suivante, une nouvelle partition  $A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0, A_5^0, A_6^0, A_7^0, A_8^0$  qui ne dépend pas de  $j$ .



Donc, si  $j$  est un nombre fini, par cette méthode, on peut toujours choisir une partition  $A_1^0, A_2^0, \dots, A_p^0$  indépendante de  $j$ . D'autre part, pour chaque  $j$ , d'après la remarque 1.5, on a  $B_1^j, B_2^j, \dots, B_m^j \in \mathcal{F}_{t,t_j}$  où  $m \leq p$ , mais  $m$  n'est pas forcément égale à  $p$ . On peut, cependant, couper  $B_i^j$  tel que  $m = p$ . Pour l'exemple au-dessus, on sait que, pour  $j = 1$ , on a  $B_1^1, B_2^1, B_3^1, B_4^1$ , mais on peut diviser  $B_i^1$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) tel qu'on a une nouvelle partition  $\tilde{B}_1^1, \tilde{B}_2^1, \tilde{B}_3^1, \tilde{B}_4^1, \tilde{B}_5^1, \tilde{B}_6^1, \tilde{B}_7^1, \tilde{B}_8^1$ . Même chose pour  $j = 2$ .

En effet :

$$\{\vartheta_k \neq t_j\} = \{\vartheta_k = t_j\}^c = (\cap_{l < j} (B_k^l)^c \cap B_k^j)^c = \cup_{l < j} B_k^l \cup (B_k^j)^c$$

De plus, comme  $A_1^0, A_2^0, \dots, A_p^0$  sont deux à deux disjoints, de (1.16) et (1.17), et puis en utilisant aussi les faits que :

- $A_j \subset A_l^c \quad \forall l < j$ .
- $\cup_{k=1}^p (A_k^0 (B_k^j)^c) \subset \cap_{k=1}^p ((A_k^0)^c \cup (B_k^j)^c) = (\cup_{k=1}^p A_k^0 B_k^j)^c$

on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau \neq \tau_n) &= \sum_{j=1}^N \mathbf{P}(A_j \cap \{\cup_{k=1}^p [A_k^0 \cap (\cup_{l < j} B_k^l \cup (B_k^j)^c)]\}) \\ &\leq \sum_{j=1}^N \sum_{l < j} \mathbf{P}(A_j \cap (\cup_{k=1}^p A_k^0 B_k^l)) + \sum_{j=1}^N \mathbf{P}(A_j \cap (\cup_{k=1}^p A_k^0 (B_k^j)^c)) \\ &\leq \sum_{j=1}^N \sum_{l < j} \mathbf{P}(A_l^c \cap (\cup_{k=1}^p A_k^0 B_k^l)) + \sum_{j=1}^N \mathbf{P}(A_j \cap (\cup_{k=1}^p A_k^0 B_k^j)^c) \end{aligned}$$

Maintenant, revenant à la définition de “ $\Delta$ ” et utilisant (1.13), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau \neq \tau_n) &\leq \sum_{j=1}^N \sum_{l < j} \mathbf{P}(A_l \Delta (\cup_{k=1}^p A_k^0 B_k^l)) + \sum_{j=1}^N \mathbf{P}(A_j \Delta (\cup_{k=1}^p A_k^0 B_k^j)) \\ &\leq \frac{N(N+1)}{2} \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que  $\tau_n$  converge vers  $\tau$  en probabilité quand  $n$  tend vers  $\infty$ . ■

### Démonstration : (Démonstration de la proposition 1.3)

À partir des définitions de  $V(t)$  et  $u^*(t, x)$ , on sait que :

$$\begin{aligned} V(t) &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau) | \mathcal{F}_t) \\ u^*(t, x) &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau^{t,x})) \end{aligned}$$

Puis en utilisant le lemme 1.4, et compte tenu des hypothèses sur  $\psi$ , on peut écrire que :

$$\begin{aligned} V(t) &= \sup_{\tau \in \hat{\mathcal{T}}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau) | \mathcal{F}_t) \\ u^*(t, x) &= \sup_{\tau \in \hat{\mathcal{T}}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau^{t,x})) \end{aligned}$$

Soit un élément  $\tau \in \hat{\mathcal{T}}_{t,T}$  qui peut être écrit de la façon suivante :  $\tau = \sum_n \mathbf{1}_{A_n} \tau_n$  avec  $A_1, \dots, A_n$   $\mathcal{F}_t$ -mesurables, deux à deux disjoints et  $\tau_n \in \bar{\mathcal{T}}_{t,T}$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau) | \mathcal{F}_t) &= \sum \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_n} \cdot e^{-(\tau_n-t)r} \psi(X_{\tau_n}) | \mathcal{F}_t) \\ &= \sum_n \mathbf{1}_{A_n} \mathbf{E}(e^{-(\tau_n-t)r} \psi(X_{\tau_n}) | \mathcal{F}_t) \\ &\leq \sup_n \mathbf{E}(e^{-(\tau_n-t)r} \psi(X_{\tau_n}) | \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant l'indépendance des  $\tau_n$  et de  $\mathcal{F}_t$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau^{t,x})) &= \sum (\mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_n} \cdot e^{-(\tau_n-t)r} \psi(X_{\tau_n}^{t,x})) \\ &= \sum \mathbf{P}(A_n) \cdot \mathbf{E}(e^{-(\tau_n-t)r} \psi(X_{\tau_n}^{t,x})) \\ &\leq \sup_n \mathbf{E}(e^{-(\tau_n-t)r} \psi(X_{\tau_n}^{t,x})) \sum_n \mathbf{P}(A_n) \\ &\leq \sup_n \mathbf{E}(e^{-(\tau_n-t)r} \psi(X_{\tau_n}^{t,x})) \end{aligned}$$

Or :

$$\bar{\mathcal{T}}_{t,T} \subset \hat{\mathcal{T}}_{t,T} \subset \mathcal{T}_{t,T}$$

On a, donc :

$$\begin{aligned} V(t) &= \sup_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau) | \mathcal{F}_t) \\ u^*(t, x) &= \sup_{\tau \in \hat{\mathcal{T}}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau^{t,x})) \end{aligned}$$

Comme le processus  $(X_t)$  est la solution de l'équation (1.11), on a, alors :

$$X_s = X_s^{t, X_t} \quad \text{pour } s \geq t$$

ce qui donne, pour tout temps d'arrêt  $\tau \in \mathcal{T}_{t,T}$ ,

$$\mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau) | \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau^{t, X_t}) | \mathcal{F}_t)$$

De plus, si  $\tau \in \bar{\mathcal{T}}_{t,T}$ , utilisant l'indépendance de  $\tau$  et  $\mathcal{F}_t$ , on a :

$$\mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau^{t, X_t}) | \mathcal{F}_t) = F^{t, X_t}(\tau)$$

avec

$$F^{t,x}(\tau) = \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau^{t,x}))$$

D'où :

$$V(t) = \sup_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}_{t,T}} F^{t, X_t}(\tau)$$

Or  $u^*(t, x) = \sup_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}_{t,T}} F^{t,x}(\tau)$ , pour achève la démonstration, il suffit de montrer le supess s'identifie au sup. Pour cela, on regarde :

$$\begin{aligned} |F^{t,x}(\tau) - F^{t,y}(\tau)| &\leq \mathbf{E}|e^{-(\tau-t)r}(\psi(X_\tau^{t,x}) - \psi(X_\tau^{t,y}))| \\ &\leq \mathbf{E}|\psi(X_\tau^{t,x}) - \psi(X_\tau^{t,y})| \\ &\leq \mathbf{E}\left(\sup_{t \leq s < T} |\psi(X_s^{t,x}) - \psi(X_s^{t,y})|\right) \end{aligned}$$

or :

$$\begin{aligned} X_s^{t,x} &= x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(s-t) + \sigma(B_s - B_t) + \sum_{j=N_t+1}^{N_s} Z_j \\ X_s^{t,y} &= y + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(s-t) + \sigma(B_s - B_t) + \sum_{j=N_t+1}^{N_s} Z_j \end{aligned}$$

et  $x \mapsto \psi(x)$  est une fonction continue, on a, alors, que : pour  $t$  fixé, la famille de fonction  $x \mapsto F^{t,x}(\tau)$  est équicontinue. D'autre part, puisque  $|\psi(x)| \leq Me^{M|x|}$ , on déduit :

$$\sup_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau^{t,x})) \leq M \sup_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}_{t,T}} \mathbf{E}e^{M|X_\tau^{t,x}|} < \infty$$

En utilisant le lemme 1.6 [23] suivant, et remarquant que :

$$u^*(t, x) = \sup_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}_{t,T}} F^{t,X_t}(\tau)$$

on sait que  $x \mapsto u^*(t, x)$  est continue et qu'il existe une partie dénombrable  $\mathcal{T}_0$  de  $\bar{\mathcal{T}}_{t,T}$  telle que :

$$u^*(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} F^{t,X_t}(\tau) = \supess_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}_{t,T}} F^{t,X_t}(\tau) = V(t)$$

La continuité de  $u^*$  peut être obtenue par la même technique que dans le cas sans sauts (Voir [24]). ■

**Lemme 1.6** Soit  $(\varphi_j)_{j \in J}$  une famille équicontinue de fonction de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}$ , telle que  $\sup_{j \in J} \varphi_j(x) < \infty$  pour tout  $x$ . Alors la fonction définie par  $\phi(x) = \sup_{j \in J} \varphi_j(x)$  est continue. De plus, il existe une partie dénombrable  $J_0$  de  $J$  telle que  $\phi(x) = \sup_{j \in J_0} \varphi_j(x)$  pour tout  $x$ .

Avant de terminer ce chapitre, on énonce un corollaire de la proposition 1.3, qui se sert dans le chapitre de Put perpétuel. Notons  $\mathcal{T}_{0,\infty}$  l'ensemble de tous les temps d'arrêt de la filtration de  $\mathcal{F}_t$  définie dans la section 1.1.  $\bar{\mathcal{T}}_{t,\infty}$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{T}_{0,\infty}$  à valeurs supérieures à  $t$  (pour  $t \geq 0$ ).

**Corollaire 1.7** Sous les mêmes hypothèses que la proposition 1.3, et de plus supposons  $\psi$  est une fonction bornée. Soit :

$$\begin{aligned} V^\infty &= \supess_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}_{t,\infty}} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} \psi(X_\tau) | \mathcal{F}_t) \\ U^\infty(x) &= \sup_{\tau \in \bar{\mathcal{T}}_{0,\infty}} \mathbf{E}(e^{-\tau r} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} \psi(X_\tau^{0,x})) \end{aligned}$$

Alors,

$$V^\infty = U^\infty(X_t)$$

**Démonstration :** Tout d'abord, il n'est pas difficile de voir que :

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,\infty}} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} \psi(X_\tau^{t,x}))$$

a une valeur indépendante de  $t$ . On peut donc écrire :

$$U^\infty(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,\infty}} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} \psi(X_\tau^{t,x}))$$

Grâce à la proposition 1.3, on sait que :

$$V(t) = u^*(t, X_t)$$

avec :

$$\begin{aligned} V(t) &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau) | \mathcal{F}_t) \\ u^*(t, x) &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau^{t,x})) \end{aligned}$$

pour quelconque  $t$  fixé. Posons :

$$\begin{aligned} \tilde{V}(T, t) &= V(t) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau) | \mathcal{F}_t) \\ \tilde{U}(T, t, X_t) &= u^*(t, X_t) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-(\tau-t)r} \psi(X_\tau^{t,x}))|_{x=X_t} \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de voir que  $\tilde{V}(T, t)$ ,  $\tilde{U}(T, t, x)$  sont des fonctions croissantes de  $T$  respectivement et  $\forall T$ , on a :

$$\tilde{V}(T, t) \leq V^\infty, \quad \tilde{U}(T, t, X_t) \leq U^\infty(X_t)$$

D'autre part, soit  $\tau \in \mathcal{F}_{t,\infty}$ , puisque  $\psi$  est bornée, on a :

$$\mathbf{E}(e^{-r(\tau-t)} \mathbf{1}_{\{\tau=\infty\}} \psi(X_\tau^{t,x})) = 0$$

Ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}(e^{-r(\tau-t)} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} \psi(X_\tau^{t,x})) \\ &= \mathbf{E}(e^{-r(\tau-t)} \psi(X_\tau^{t,x})) \\ &= \mathbf{E}(e^{-r(\tau \wedge T - t)} \psi(X_{\tau \wedge T}^{t,x}) \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}) + \mathbf{E}(e^{-r(\tau-t)} \psi(X_\tau^{t,x}) \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}) \\ &= \mathbf{E}(e^{-r(\tau \wedge T - t)} \psi(X_{\tau \wedge T}^{t,x})) + \mathbf{E}(e^{-r(\tau-t)} \psi(X_\tau^{t,x}) - e^{-r(\tau \wedge T - t)} \psi(X_{\tau \wedge T}^{t,x})) \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \end{aligned}$$

A partir des définitions de  $\tilde{U}(\cdot, \cdot, \cdot)$  et  $U^\infty(\cdot)$ , et remarquons que  $\psi$  est borné, on déduit, alors,

$$U^\infty(X_t) \leq \tilde{U}(T, t, X_t) + Ce^{-rT} \quad \forall T$$

D'où :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{U}(T, t, X_t) = U^\infty(X_t)$$

De même, on peut montrer que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{V}(T, t) = V^\infty$$

Or :

$$\tilde{V}(T, t) = \tilde{U}(T, t, X_t)$$

donc, on a :

$$V^\infty = U^\infty(X_t)$$

■

En résumé, après les analyses qu'on a fait dans cette section, on sait que, pour calculer le prix  $V_t$  d'une option américaine dans ce modèle, il suffit de déterminer la fonction  $u^*$  définie dans la proposition 1.3.

## Chapitre 2

# Put perpétuel

Ce chapitre est une version détail de [43]. Le but de cette section est d'établir une formule quasi-explicite pour calculer le prix d'un put "perpétuel" dans ce modèle. Cette formule est une généralisation de celle de Merton ([31] page 173-174). Nous rappelons qu'un put "perpétuel" signifie que nous pouvons exercer l'option à tout moment sans limite d'échéance. C'est à dire que la date d'échéance  $T$  est égale à l'infini.

Il n'est pas difficile de voir que l'expression suivante :

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,\infty}} \mathbf{E}[e^{-r(\tau-t)}(K - ye^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(\tau-t) + \sigma(B_\tau - B_t)}) \prod_{j=N_t+1}^{N_\tau} (1 + U_j))_+ \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}]$$

a une valeur indépendante de  $t$ . Notons :

$$V^\infty(y) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,\infty}} \mathbf{E}[e^{-r\tau}(K - ye^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma B_\tau}) \prod_{j=1}^{N_\tau} (1 + U_j))_+ \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}]$$

$V^\infty(S_t)$  s'interprète naturellement comme le prix d'un put "perpétuel" à l'instant  $t$ , avec le prix d'exercice  $K$ .

Le but de ce paragraphe est d'expliciter la fonction  $V^\infty(y)$ . On verra, (dans le lemme 2.5) qu'il est commode de faire le changement de variable :  $x = \ln y$ . Dans le cas du put, rappelons que :  $\psi(x) = (K - e^x)_+$ , et si l'on note :

$$u^\infty(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,\infty}} \mathbf{E}[e^{-r\tau} \psi(x + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma B_\tau + \sum_{j=1}^{N_\tau} Z_j) \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] \quad (2.1)$$

avec  $Z_j = \ln(1 + U_j)$ , il est évident que :  $V^\infty(y) = u^\infty(\ln y) = u^\infty(x)$ . Maintenant, il suffit d'expliciter la fonction  $u^\infty(x)$ . Pour cela, on introduit, d'abord, le système (2.2) ci-dessous,

(dans lequel  $x^*$  est inconnue) :

$$\left\{ \begin{array}{l} Au + Bu = 0 \quad \text{pour } x > x^* \\ u(x) = K - e^x \quad \text{pour } x \leq x^* \\ u(x) \text{ est continue en } x^* \\ \frac{du(x)}{dx} \text{ est continue en } x^* \\ Au = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{du}{dx} - ru \\ Bu = \lambda \int (u(x+z) - u(x)) \nu(dz) \\ x^* \leq \ln K \end{array} \right. \quad (2.2)$$

où  $\nu$  est la loi de  $Z_1$ . On cherche une solution du système (2.2) ci-dessus, sous la forme :

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} K - e^x & \text{si } x \leq x^* \\ \beta e^{\eta x} & \text{si } x > x^* \end{cases}$$

où  $\eta$ ,  $\beta$ ,  $x^*$  sont des constantes à préciser. Supposons que  $\mathbf{E}e^{\eta Z_1} < \infty$ , on verra, dans la proposition 2.1, que cette solution  $\bar{u}$  a une forme quasi-explicite. De plus, elle est égale, en fait, à la valeur de  $u^\infty(x)$ . (Voir le théorème 2.3).

**Proposition 2.1** Une solution de (2.2) est donnée par les formules suivantes :

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} K - e^x & \text{si } x \leq x^* \\ (K - e^{x^*}) e^{\eta(x-x^*)} & \text{si } x > x^* \end{cases} \quad (2.3)$$

avec

$$x^* = \ln\left(\frac{-\eta K}{1-\eta}\right)$$

et  $\eta$  est l'unique solution négative de l'équation suivante :

$$\frac{\sigma^2}{2} \eta^2 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \eta - (r + \lambda) + \lambda \mathbf{E}(e^{\eta Z_1}) = 0 \quad (2.4)$$

**Démonstration :**

- Tout abord, on doit montrer que l'équation (2.4) a une et une seule racine négative. En effet, posons :

$$\phi(\eta) = \frac{\sigma^2}{2} \eta^2 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \eta - (r + \lambda) + \lambda \mathbf{E}(e^{\eta Z_1})$$

On voit que :

$$\begin{aligned} \phi'(\eta) &= \sigma^2 \eta + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \lambda \mathbf{E}(e^{\eta Z_1} Z_1) \\ \phi''(\eta) &= \sigma^2 + \lambda \mathbf{E}(e^{\eta Z_1} Z_1^2) \geq \sigma^2 > 0 \end{aligned}$$

ce qui entraîne que la fonction  $\eta \mapsto \phi(\eta)$  est une fonction convexe. Or  $\phi(0) = -r$  est strictement négative, et  $\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \phi(\eta) = +\infty$ , on peut donc dire que (2.4) a une et une seule racine négative.

Maintenant, on commence à montrer notre formule.



- **Détermination de  $\eta$ .**

Puisque l'on cherche une solution du (2.2) de la forme suivante :

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} K - e^x & \text{si } x \leq x^* \\ \beta e^{\eta x} & \text{si } x > x^* \end{cases}$$

En remplaçant  $\bar{u}(x)$  par  $\beta e^{\eta x}$  dans la première équation de (2.2), on obtient :

$$\frac{\sigma^2}{2} \beta \eta^2 e^{\eta x} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \beta \eta e^{\eta x} - r e^{\eta x} + \lambda \beta \int (e^{\eta(x+z)} - e^{\eta x}) \nu(dz) = 0 \quad \text{pour } x > x^*$$

D'où :

$$\frac{\sigma^2}{2} \eta^2 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \eta - (r + \lambda) + \lambda \mathbf{E} e^{\eta Z_1} = 0$$

Selon la première partie de cette démonstration, on sait déjà que cette équation a une et une seule racine négative. On la note  $\eta$ .

- **Détermination de  $\beta$  et  $x^*$ .**

D'autre part, puisque  $u(x)$  est continue en  $x^*$ ,  $\frac{du(x)}{dx}$  est continue en  $x^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \beta e^{\eta x^*} &= K - e^{x^*} \\ \beta \eta e^{\eta x^*} &= -e^{x^*} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{K - e^{x^*}}{e^{\eta x^*}} \\ x^* &= \ln\left(\frac{-\eta K}{1 - \eta}\right) \end{aligned}$$

De plus, comme  $\eta$  est négative,  $x^* \leq \ln K$  et  $\beta \geq 0$ . On obtient finalement les résultats énoncés dans la proposition. ■

**Proposition 2.2** *La fonction  $\bar{u}(x)$  donnée par (2.3) vérifie :*

$$\begin{cases} A\bar{u} + B\bar{u} \leq 0 \\ \bar{u} \geq \psi \\ (A\bar{u} + B\bar{u})(\bar{u} - \psi) = 0 \end{cases}$$

**Démonstration :** On vérifie, d'abord, que :  $A\bar{u} + B\bar{u} \leq 0$ . A partir de la forme explicite de  $\bar{u}(x)$  (voir (2.3)), on sait que :

- si  $x \leq x^*$ ,  $\bar{u}(x) = K - e^x$ , en revenant aux définitions des opérateurs  $A$  et  $B$ , on a :

$$\begin{aligned} A\bar{u} &= -\frac{\sigma^2}{2}e^x - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)e^x - r(K - e^x) \\ &= -(\mu - r)e^x - rK \\ B\bar{u} &= \lambda \int (K - e^{x+z} - K + e^x)\nu(dz) \\ &= \lambda e^x \int (1 - e^z)\nu(dz) \\ &= -\lambda e^x \mathbf{E}U_1 \end{aligned}$$

D'où, en utilisant la relation  $\mu - r + \lambda \mathbf{E}U_1 = 0$ ,

$$\begin{aligned} A\bar{u} + B\bar{u} &= -(\mu - r + \lambda \mathbf{E}U_1)e^x - rK \\ &= -rK \leq 0 \end{aligned}$$

- Si  $x > x^*$ ,  $\bar{u}(x) = \beta e^{\eta x}$  avec  $\beta = \frac{K - e^{x^*}}{e^{\eta x^*}}$ , en revenant, de nouveau, aux définitions des opérateurs  $A$  et  $B$ , on a :

$$\begin{aligned} A\bar{u} &= \beta \left( \frac{\sigma^2}{2} \eta^2 e^{\eta x} + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \eta e^{\eta x} - r e^{\eta x} \right) \\ &= \beta e^{\eta x} \left( \frac{\sigma^2}{2} \eta^2 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \eta - r \right) \\ B\bar{u} &= \lambda \beta \int (e^{\eta(x+z)} - e^{\eta x}) \nu(dz) \\ &= \lambda \beta e^{\eta x} \mathbf{E}(e^{\eta Z} - 1) \end{aligned}$$

D'où, en remarquant (2.4),

$$\begin{aligned} A\bar{u} + B\bar{u} &= \beta e^{\eta x} \left( \frac{\sigma^2}{2} \eta^2 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \eta - r - \lambda + \mathbf{E}e^{\eta Z_1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui implique  $A\bar{u} + B\bar{u} \leq 0$ .

Maintenant, il nous reste à vérifier  $\bar{u}(x) \geq \psi(x)$ . A partir de la définition de  $\bar{u}(x)$ , on sait que :

- si  $x \leq x^*$ ,  $\bar{u}(x) = K - e^x = \psi(x)$  ;
- si  $x > x^*$ ,  $\bar{u}(x) = \beta e^{\eta x}$  avec  $\beta = \frac{K - e^{x^*}}{e^{\eta x^*}} \geq 0$ , on a aussi  $\bar{u}(x) \geq \psi(x)$ . En effet, pour  $x > \ln K$ ,  $\psi(x) = 0$ , on déduit :

$$\bar{u}(x) = \beta e^{\eta x} \geq 0 = \psi(x)$$

Il, donc, reste à vérifier le cas où  $x^* < x < \ln K$ . Si l'on note :

$$\Phi(x) = \beta e^{\eta x} - (K - e^x)$$

On voit que :

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \beta\eta e^{\eta x} + e^x \\ \Phi''(x) &= \beta\eta^2 e^{\eta x} + e^x \geq 0\end{aligned}$$

Ce qui implique que  $\Phi'(x)$  est une fonction croissante dans  $[x^*, \ln K]$ , et de plus, comme la fonction  $\frac{d\bar{u}(x)}{dx}$  est continue en  $x^*$ , on a :

$$\beta\eta e^{\eta x^*} = -e^{x^*}$$

D'où :  $\Phi'(x^*) = 0$ . Ce qui entraîne que  $\Phi'(x) \geq 0$  pour  $[x^*, \ln K]$ . On déduit donc que  $\Phi(x)$  est une fonction croissante dans  $[x^*, \ln K]$ . Or  $\Phi(x^*) = \beta e^{\eta x^*} - (K - e^{x^*}) = 0$  à cause de la continuité de  $\bar{u}(x)$  en  $x^*$ . D'où  $\Phi(x) \geq 0$ , ce qui dit, pour  $x^* < x < \ln K$ , on a aussi :

$$\bar{u}(x) \geq \psi(x)$$

■

**Théorème 2.3** Soit  $u^\infty(x)$  la fonction définie par (2.1), on a alors :

$$u^\infty(x) = \bar{u}(x)$$

où  $\bar{u}(x)$  est donné par (2.3).

Ce théorème peut être montré par les méthodes de [3], [4], [23]. Le point essentiel de la démonstration de ce théorème est de montrer :

$$e^{-rt}\bar{u}(X_t^x) - \int_0^t e^{-rs}(A\bar{u} + B\bar{u})(X_s^x)ds$$

est une martingale. Pour cela, on aura besoin utiliser la formule d'Ito.

Il est clair que la fonction  $\bar{u}$  donnée par (2.3) n'est pas de classe  $C^2$ , mais on a :

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \begin{cases} -e^x & \text{pour } x \leq x^* \\ \eta(K - e^{x^*})e^{\eta(x-x^*)} & \text{pour } x > x^* \end{cases}$$

et

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} = \begin{cases} -e^x & \text{pour } x \leq x^* \\ \eta^2(K - e^{x^*})e^{\eta(x-x^*)} & \text{pour } x > x^* \end{cases}$$

au sens des distributions. En plus, par calcul, il n'est pas difficile de vérifier que  $\bar{u}$  donnée par (2.3) appartient à  $W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , pour  $\alpha \geq 0$ , où  $W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R}) = \{f \in L^2(\mathbf{R}, e^{-\alpha|x|}dx) \mid f^{(j)} \in L^2(\mathbf{R}, e^{-\alpha|x|}dx) \ j = 1, 2\}$  (pour la définition plus général de cet espace, voir la section 3.2.1).

On a donc :

$$|\bar{u}(x)| \leq Ce^{\frac{\alpha}{2}|x|} \quad (2.5)$$

par conséquent de la remarque 3.21. En plus, la fonction  $\bar{u}$  a les propriétés suivant :

$$0 \leq \bar{u}(x) \leq K \quad \left| \frac{d\bar{u}(x)}{dx} \right| \leq e^{x^*} \quad \left| \frac{d^2\bar{u}(x)}{dx^2} \right| \leq C \quad (2.6)$$

où  $C = \max\{e^{x^*}, -\eta e^{x^*}\}$ . Pour vérifier (2.6), il suffit de remarquer les faits  $\beta \geq 0$ ,  $\eta$  négative et les relations entre  $\beta$ ,  $\eta$  et  $x^*$  (Voir les processus pour obtenir les valeurs de  $\beta$ ,  $\eta$  dans la démonstration de la proposition 2.1). Avant de commencer à montrer la théorème 2.3, on introduit, d'abord, deux lemmes suivants.

**Lemme 2.4** *Soit  $u(x)$  une fonction de classe  $C^2$  bornée ainsi que ses dérivées et  $X_t$  une solution de*

$$\begin{cases} X_0 &= x \\ dX_t &= (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dB_t + d \sum_{j=1}^{N_t} Z_j \end{cases}$$

alors, le processus

$$M_t = e^{-rt} u(X_t^x) - \int_0^t e^{-rs} (Au + Bu)(X_s^x) ds$$

est une martingale.

**Démonstration :** Ce lemme est un résultat classique. On donne ici seulement des grandes lignes dans sa démonstration.

En utilisant la formule d'Ito et en remarquant les définitions des opérateurs  $A$  et  $B$ , on peut écrire :

$$M_t = u(x) + \sigma \int_0^t e^{-rs} \frac{\partial u}{\partial x} dB_s + L_t$$

où :

$$L_t = \sum_{j=1}^{N_t} [e^{-e\tau_j} (u(X_{\tau_j}) - u(X_{\tau_j}^-))] - \lambda \int_0^t e^{-rs} \int \nu(dz) (u(x+z) - u(x))$$

Par l'hypothèse du lemme, il n'est pas difficile de voir que :

$$\mathbf{E} \left( \int_0^t \sigma^2 e^{-2rs} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 ds \right) < \infty$$

ce qui entraîne que :  $u(x) + \sigma \int_0^t e^{-rs} \frac{\partial u}{\partial x} dB_s$  est une martingale. D'autre part, comme  $u(x)$  est bornée, on déduit :

$$\mathbf{E} \left( \int_0^t ds \int \nu(dz) (e^{-rs} (u(x+z) - u(x))^2) \right) < \infty$$

En appliquant le lemme 2-2 Chapitre 7 dans [28], on voit que  $L_t$  est une martingale. ■

Le lemme suivant nous donne une estimation et qui se sert dans la démonstration du théorème 2.3 quand nous faisons passer à la limite. Mais avant de le montrer, rappelons, d'abord, que  $X_s$  est le flot de l'équation différentielle stochastique (1.11) :

$$\begin{cases} X_t &= x_0 \\ dX_s &= (\mu - \frac{\sigma^2}{2})ds + \sigma dB_s + d(\sum_{j=1}^{N_s} Z_j) \quad \text{pour } s \geq t \end{cases}$$

Soient  $p(t, x_0; s, x)$  la densité du flot  $X_s$  et  $g(t, x_0; s, x)$  la densité de la variable aléatoire  $x_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(s - t) + \sigma(B_s - B_t)$ , alors, on a :

- la fonction de la densité  $g(t, x_0; s, x)$  est donné par :

$$g(t, x_0; s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(s-t)\sigma} \exp\left(-\frac{(x - [x_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(s-t)])^2}{2(s-t)\sigma^2}\right) \quad (2.7)$$

- D'après l'indépendance entre  $(B_s)_{s \geq 0}$ ,  $(N_s)_{s \geq 0}$  et  $(U_j)_{j \geq 1}$ , on peut écrire la densité du flot  $X_s$  sous la forme :

$$\begin{aligned} p(t, x_0; s, x) &= \int g(t, x_0; s, x - y) \nu_{t,s}(dy) \\ &= (\nu_{t,s} * g(t, x_0; s, \cdot))(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

où  $\nu_{t,s}$  est la loi de la variable aléatoire  $\sum_{j=N_t+1}^{N_s} Z_j$

**Lemme 2.5** Soit  $\varphi \in L^2_{loc}(\mathbf{R})$ , et soit pour  $R > 0$ ,  $\tau_R$  le temps de sortie de l'intervalle ouvert  $\mathcal{O}_R = ]-R, +R[$  :

$$\tau_R = \inf\{s \geq 0 \mid X_s \notin \mathcal{O}_R\}$$

On a alors :

$$\mathbf{E} \left[ \int_0^{\tau_R} e^{-rs} |\varphi(X_s)| ds \right] \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathcal{O}_R)}$$

où  $C$  est une constante ne dépendant ni de  $\varphi$  ni de  $R$ .

**Démonstration :** A partir de la définition de  $\tau_R$  et la fonction  $p(0, x_0; s, x)$ , il est facile de voir que :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \int_0^{\tau_R} e^{-rs} |\varphi(X_s)| ds \right) &\leq \mathbf{E} \int_0^{\infty} e^{-rs} |\varphi(X_s)| \mathbf{1}_{\{|X_s| \leq R\}} ds \\ &= \int_0^{\infty} ds \int_{\mathcal{O}_R} dx \cdot e^{-rs} |\varphi(x)| \cdot p(0, x_0; s, x) \end{aligned}$$

De plus, en utilisant l'inégalité de Hölder et (2.8),

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \int_0^{\tau_R} e^{-rs} |\varphi(X_s)| ds \right) &\leq \left( \int_0^\infty e^{-rs} ds \|\varphi\|_{L^2(\mathcal{O}_R)}^2 \right)^{1/2} \left( \int_0^\infty ds \int_{\mathcal{O}_R} e^{-rs} (p(0, x_0; s, x))^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq r^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(\mathcal{O}_R)} \left( \int_0^\infty e^{-rs} \|\nu_{0,s} * g(0, x_0; s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds \right)^{1/2} \end{aligned}$$

puisque  $\nu_{0,s}$  est une mesure de probabilité, on déduit :

$$\begin{aligned} \|\nu_{0,s} * g(0, x_0; s, \cdot)\|_{L^2} &= \left\| \int g(0, x_0; s, \cdot - y) \nu_{0,s}(dy) \right\|_{L^2} \\ &\leq \int \|g(0, x_0; s, \cdot - y)\|_{L^2} \nu_{0,s}(dy) \\ &= \|g\|_{L^2} \end{aligned}$$

En utilisant (2.7), on a :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-rs} \|g\|_{L^2}^2 ds &= \int_0^\infty ds e^{-rs} \int dy \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{s}} \exp\left(-\frac{[y - (y_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})s)]^2}{2\sigma^2 s}\right) \right)^2 \\ &= \int_0^\infty ds e^{-rs} \int dz \cdot \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{s}}\right)^2 e^{-\frac{z^2}{\sigma^2 s}} \\ &= \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}} e^{-rs} \int dz \cdot \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^2 e^{-\frac{z^2}{\sigma^2}} \\ &\leq C \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbf{E} \left[ \int_0^{\tau_R} e^{-rs} |\varphi(X_s)| ds \right] \leq C \|\varphi\|_{L^2(\mathcal{O}_R)}$$

■

Maintenant, on va montrer le théorème 2.3.

### Démonstration : ( Démonstration du théorème 2.3 )

On le fait en deux étapes :

1). Le point essentiel est de montrer l'égalité :

$$\mathbf{E}(e^{-r\tau} \bar{u}(X_\tau)) = \mathbf{E}\bar{u}(X_0) + \mathbf{E}\left(\int_0^\tau (A\bar{u} + B\bar{u})e^{-rs} ds\right) \quad (2.9)$$

pour tout temps d'arrêt  $\tau$  à valeur dans  $[0, \infty[$ .

Il n'est pas difficile de voir que la fonction définie par :

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} K - e^x & \text{pour } x \leq x^* \\ (K - e^{x^*})e^{\eta(x-x^*)} & \text{pour } x > x^* \end{cases}$$

est une fonction uniformément continue sur  $\mathbf{R}$ . De plus, par (2.6), on sait que  $\bar{u}|_{\mathcal{O}_R} \in W^{2,2}(\mathcal{O}_R)$ , pour tout  $R > 0$ .

Maintenant, soit  $(\rho_m)$  une suite de fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}$  à support compact,  $\rho_m \geq 0$  et  $\int \rho_m dx = 1$  avec  $\text{supp } \rho_m \subset ]-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}[$ . On pose :  $u_m = \bar{u} * \rho_m$ , alors  $u_m$  appartient à  $C^\infty(\mathbf{R})$ ,  $u_m$  converge uniformément vers  $\bar{u}$  sur  $\mathbf{R}$ .  $Au_m$  converge vers  $A\bar{u}$  dans  $L^2(\mathcal{O}_R)$  du fait que  $\bar{u} \in W^{2,2}(\mathcal{O}_R)$  et lemme 3.22, et en plus, on peut déduire que  $Bu_m$  converge vers  $B\bar{u}$  dans  $L^2(\mathcal{O}_R)$ . En effet, puisque :

$$\begin{aligned} |Bu_m - B\bar{u}| &= |\lambda \int [u_m(x+z) - u(x+z)]\nu(dz) - \lambda[u_m(x) - u(x)]| \\ &\leq \lambda \left( \int \|u_m - u\|_{L^\infty} \nu(dz) + \lambda \|u_m - u\|_{L^\infty} \right) \\ &\leq 2\lambda \|u_m - u\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|Bu_m - B\bar{u}\|_{L^2(\mathcal{O}_R)}^2 &= \int_{\mathcal{O}_R} |Bu_m - B\bar{u}|^2 dx \\ &\leq 4\lambda^2 \text{mes}(\mathcal{O}_R) \|u_m - u\|_{L^\infty}^2 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $u_m$  converge vers  $u$  uniformément sur  $\mathbf{R}$ , on obtient  $Bu_m$  converge vers  $B\bar{u}$  dans  $L^2(\mathcal{O}_R)$ .

Par ailleurs, comme  $u_m = \bar{u} * \rho_m = \int \bar{u}(x-y)\rho_m(y)dy$ , d'où :

$$|u_m| \leq |\bar{u}|_{L^\infty} \int \rho_m(y)dy = |\bar{u}|_{L^\infty} \leq C$$

par conséquent des faits que  $\int \rho_m dy = 1$  et  $0 \leq \bar{u} \leq K$ ,  $C$  est une constante indépendant de  $m$ .

Maintenant, pour montrer (2.9), on remarque que  $u_m \in C^\infty(\mathbf{R})$ , ce qui permet d'utiliser le lemme 2.4, on a donc :

$$M_t = e^{-t(t \wedge \tau_R)} u_m(X_{t \wedge \tau_R}) - \int_0^{t \wedge \tau_R} e^{-rs} (Au_m + Bu_m)(X_s) ds$$

est une martingale. D'où, par le théorème d'arrêt, pour tout temps d'arrêt  $\tau$  à valeur  $[0, \infty[$ ,

$$\mathbf{E}(e^{-\tau(\tau \wedge \tau_R)} u_m(X_{\tau \wedge \tau_R})) = \mathbf{E}(u_m(X_0)) + \mathbf{E}\left(\int_0^{\tau \wedge \tau_R} e^{-rs} (Au_m + Bu_m)(X_s) ds\right) \quad (2.10)$$

En utilisant le lemme 2.5 et remarquant les faits que  $Au_m$  converge vers  $A\bar{u}$  dans  $L^2(\mathcal{O}_R)$  et  $Bu_m$  converge vers  $B\bar{u}$  dans  $L^2(\mathcal{O}_R)$ , on a :

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left[\int_0^{\tau \wedge \tau_R} e^{-rs} (Au_m + Bu_m)(X_s) ds - \int_0^{\tau \wedge \tau_R} e^{-rs} (A\bar{u} + B\bar{u})(X_s) ds\right] \\ &\leq C \|Au_m + Bu_m - A\bar{u} - B\bar{u}\|_{L^2(\mathcal{O}_R)} \\ &\rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

De plus, puisque  $u_m$  converge uniformément vers  $\bar{u}$  sur  $\mathbf{R}$ , d'où :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(e^{-r(\tau \wedge \tau_R)} u_m(X_{\tau \wedge \tau_R})) &\longrightarrow \mathbf{E}(e^{-r(\tau \wedge \tau_R)} u(X_{\tau \wedge \tau_R})) \\ \mathbf{E}(u_m(X_0)) &\longrightarrow \mathbf{E}(u(X_0))\end{aligned}$$

On obtient (2.10) pour  $u$  au lieu de  $u_m$ .

Pour obtenir (2.9), il faut faire tendre  $R$  vers l'infini. Remarquons la proposition 2.2, on sait que  $A\bar{u} + B\bar{u} \leq 0$ , alors  $\int_0^{\tau \wedge \tau_R} e^{-rs} (A\bar{u} + B\bar{u})(X_s) ds$  est décroissant en  $R$ . On a, donc,

$$\mathbf{E} \int_0^{\tau \wedge \tau_R} e^{-rs} (A\bar{u} + B\bar{u})(X_s) ds \longrightarrow \mathbf{E} \int_0^{\tau} e^{-rs} (A\bar{u} + B\bar{u})(X_s) ds$$

en appliquant le théorème de convergence monotone. D'autre part, on a aussi :

$$\mathbf{E}(e^{-r(\tau \wedge \tau_R)} u(X_{\tau \wedge \tau_R})) \longrightarrow \mathbf{E}(e^{-r\tau} u(X_\tau))$$

à cause de (2.6) et le théorème de Lebesgue. D'où (2.9).

- 2). Selon la proposition 2.2, on sait que  $A\bar{u} + B\bar{u} \leq 0$ . De plus, en tenant compte de l'égalité (2.9), on déduit que  $e^{-rt}\bar{u}(X_t)$  est une sur-martingale. D'autre part, en remarquant, de nouveau, la proposition 2.2, on voit que  $\bar{u}$  majore  $\psi$ . D'où :

$$\bar{u}(X_t) \geq u^\infty(X_t) \quad p.s \text{ pour } t \in [0, \infty[$$

En effet, pour  $t$  quelconque fixé dans  $[0, \infty[$ , on a :

$$\begin{aligned}e^{-rt}\bar{u}(X_t) &\geq \mathbf{E}(e^{-r\tau}\bar{u}(X_\tau)|\mathcal{F}_t) \\ &\geq \mathbf{E}(e^{-r\tau}\psi(X_\tau)|\mathcal{F}_t)\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\bar{u}(X_t) &\geq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,\infty}} \mathbf{E}(e^{-r(\tau-t)} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} \psi(X_\tau) | \mathcal{F}_t) \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,\infty}} \mathbf{E}(e^{-r(\tau-t)} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} \psi(X_\tau^{t,x})) \\ &= u^\infty(X_t)\end{aligned}$$

Par ailleurs, si on pose :

$$\begin{aligned}\tau_t &= \inf\{s \geq t \mid \psi(X_s) = \bar{u}(X_s)\} \\ &= \inf\{s \geq t \mid X_s \leq x^*\} \\ \tau_t &= \infty \quad \text{si l'ensemble est vide}\end{aligned}$$



Alors, on a :

$$(A\bar{u} + B\bar{u})(X_s) = 0 \quad p.s \text{ sur } \{s < \tau_t\}$$

puisque

$$\forall x > x^* \quad (A\bar{u} + B\bar{u})(x) = 0$$

Ce qui donne :

$$\int_t^\tau e^{-rs} (A\bar{u} + B\bar{u}) ds = 0 \quad p.s$$

D'où, on conclut :

$$\mathbf{E}(e^{-rt}\bar{u}(X_t)) = \mathbf{E}(e^{-r\tau_t}\mathbf{1}_{\{\tau_t < \infty\}}\bar{u}(X_{\tau_t}))$$

Par ailleurs, de (2.6) et les inégalités  $0 \leq \bar{u} \leq K$ ,  $0 \leq \psi(x) = (K - e^x)_+ \leq K$ , on a alors :

$$0 \leq \mathbf{E}(e^{-r\tau_t}\mathbf{1}_{\{\tau_t = \infty\}}\bar{u}(X_{\tau_t})) \leq K\mathbf{E}(e^{-r\tau_t}\mathbf{1}_{\{\tau_t = \infty\}}) = 0$$

avec la convention  $e^{-r\infty} = 0$ . D'où :

$$\mathbf{E}(e^{-r\tau_t}\mathbf{1}_{\{\tau_t = \infty\}}\bar{u}(X_{\tau_t})) = 0$$

De même :

$$\mathbf{E}(e^{-r\tau_t}\mathbf{1}_{\{\tau_t = \infty\}}\bar{\psi}(X_{\tau_t})) = 0$$

Maintenant, en utilisant le fait que  $\bar{u}(X_{\tau_t}) = \psi(X_{\tau_t})$  et le corollaire 1.7, on déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{-rt}\bar{u}(X_t)) &= \mathbf{E}(e^{-r\tau_t}\bar{u}(X_{\tau_t})) \\ &= \mathbf{E}(e^{-r\tau_t}\psi(X_{\tau_t})) \\ &= \mathbf{E}(e^{-r\tau_t}\mathbf{1}_{\{\tau_t < \infty\}}\psi(X_{\tau_t})) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(e^{-r\tau_t}\mathbf{1}_{\{\tau_t < \infty\}}\psi(X_{\tau_t})|\mathcal{F}_t)) \\ &\leq \mathbf{E}e^{-rt}u^\infty(X_t) \end{aligned}$$

D'où :

$$\bar{u}(X_t) \leq u^\infty(X_t) \quad p.s$$

Par conséquent :

$$\bar{u}(X_t) = u^\infty(X_t) \quad p.s$$

Ce qui donne,  $\bar{u}$  et  $u^\infty$  étant continue :

$$\bar{u}(x) = u^\infty(x)$$

■

Le théorème 2.3 donne une majoration du prix d'un put américain d'échéance finie. Puisque le prix du put américain est donné par :

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t, T}} \mathbf{E} \left( e^{-r(\tau-t)} (K - x e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(\tau-t) + \sigma(B_\tau - B_t)}) \prod_{j=N_t+1}^{N_\tau} (1 + U_j) \right)_+ \\ &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t, \infty}} \mathbf{E} \left( e^{-r(\tau-t)} (K - x e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(\tau-t) + \sigma(B_\tau - B_t)}) \prod_{j=N_t+1}^{N_\tau} (1 + U_j) \right)_+ \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} \end{aligned}$$

On verra, dans le chapitre 6, les résultats numériques sont coïncide avec cet inégalité.

D'autre part, il est clair que ce théorème nous permet de calculer numériquement le prix d'un put "perpétuel". Évidemment, le calcul essentiel est de résoudre l'équation (2.4), ce qui peut se faire, par exemple, par la méthode de Newton.

On note encore la fonction  $\phi(\eta)$  égale au membre gauche de (2.4), on sait que  $\phi(0) < 0$ ,  $\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \phi(\eta) > 0$  et la dérivée second  $\phi''(\eta)$  est strictement positive, en plus, on a  $\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \phi'(\eta) < 0$ , on peut donc choisir une valeur initial  $\eta_0$  telle que  $\phi'(\eta_0) < 0$  et prendre :

$$\eta_{m+1} = \eta_m - \frac{\phi(\eta_m)}{\phi'(\eta_m)}$$

En plus, on verra qu'on peut expliciter la valeur de  $\eta$  dans certains cas spéciaux :

- On suppose que  $U_1$  a même loi que  $e^g - 1$  où  $g$  est la loi exponentielle de paramètre  $\lambda_0$ . C'est à dire de loi  $\mathbf{1}_{\{x>0\}} \lambda_0 e^{-\lambda_0 x} dx$ . Comme  $Z_1 = \ln(1 + U_1)$ , d'où  $Z_1$  a pour loi  $\mathbf{1}_{\{x>0\}} \lambda_0 e^{-\lambda_0 x} dx$ . On calcule :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{\eta Z_1}) &= \lambda_0 \int_{x>0} e^{\eta x} \cdot e^{-\lambda_0 x} dx \\ &= -\frac{\lambda_0}{\eta - \lambda_0} \quad \text{si } \eta < \lambda_0 \end{aligned}$$

Alors l'équation (2.4) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\sigma^2}{2} \eta^2 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \eta - (r + \lambda) - \frac{\lambda \lambda_0}{\eta - \lambda_0} = 0$$

Par un petit arrangement, l'équation précédente peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\sigma^2}{2} \eta^3 + (\mu - (1 + \lambda_0) \frac{\sigma^2}{2}) \eta^2 - (r + \lambda + \lambda_0 (\mu - \frac{\sigma^2}{2})) \eta + r \lambda_0 = 0 \quad (2.11)$$

Posant :

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{\sigma^2}{2} > 0 \\ a_2 &= \mu - (1 + \lambda_0) \frac{\sigma^2}{2} \\ a_1 &= -(r + \lambda + \lambda_0 (\mu - \frac{\sigma^2}{2})) \\ a_0 &= r \lambda_0 \end{aligned}$$

En divisant par  $a_3$  dans l'équation (2.11) et en posant  $y = \eta + \frac{a_2}{3a_3}$ , on obtient :

$$y^3 + py + q = 0 \quad (2.12)$$

où :

$$\begin{aligned} p &= -\frac{a_2^2}{3a_3^2} + \frac{a_1}{a_3} = -\frac{1}{3a_3^2}(a_2^2 - 3a_1a_3) \\ q &= \frac{2a_2^3}{27a_3^3} - \frac{a_2a_1}{3a_3^2} + \frac{a_0}{a_3} = \frac{1}{27a_3^3}(2a_2^3 + 27a_0a_3^2 - 9a_1a_2a_3) \end{aligned}$$

Les trois solutions de (2.12) sont alors données par :

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ y_2 &= w \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + w^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ y_3 &= w^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + w \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned}$$

où :

$$w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad w^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \quad (i^2 = -1)$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= y_1 - \frac{a_2}{3a_3} \\ \eta_2 &= y_2 - \frac{a_2}{3a_3} \\ \eta_3 &= y_3 - \frac{a_2}{3a_3} \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de voir que  $\eta_1$  est la solution cherchée.

- On suppose que  $U_1$  a même loi que  $e^g - 1$  où  $g$  est la loi de  $\chi^2$  à  $n$  degré de liberté, c'est à dire de loi  $\mathbf{1}_{\{x>0\}} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$ . On étudie deux cas spéciaux :  $n = 2$  et  $n = 4$ . Quand  $n = 2$ , c'est un cas particulier du cas précédent.

Quand  $n = 4$ ,

$$\mathbf{E}(e^{\eta Z_1}) = \frac{1}{4\Gamma(2)} \int_{\{x>0\}} x e^{\eta x - \frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{4\Gamma(2)(\eta - \frac{1}{2})^2} \quad \text{si } \eta < \frac{1}{2}$$

alors, l'équation (2.4) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\sigma^2}{2}\eta^2 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\eta - (r + \lambda) + \frac{1}{4\Gamma(2)(\eta - \frac{1}{2})^2} = 0$$

i.e :

$$\frac{\sigma^2}{2}\eta^4 + (\mu - \sigma^2)\eta^3 + \left(\frac{5}{8}\sigma^2 - \mu - r - \lambda\right)\eta^2 + \left(\frac{1}{4}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + r + \lambda\right)\eta - \frac{1}{4}\left(r + \lambda - \frac{1}{\Gamma(2)}\right) = 0 \quad (2.13)$$

Posant :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sigma^2}{2} \\ b &= \mu - \sigma^2 \\ c &= \frac{5}{8}\sigma^2 - \mu - r - \lambda \\ d &= \frac{1}{4}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + r + \lambda \\ e &= -\frac{1}{4}\left(r + \lambda - \frac{1}{\Gamma(2)}\right) \end{aligned}$$

On peut écrire (2.13) par :

$$a\eta^4 + b\eta^3 + c\eta^2 + d\eta + e = 0$$

C'est un équation d'ordre 4, on peut bien sûr expliciter ses racines.

## Chapitre 3

# Inéquation Variationnelle

Selon la proposition 1.3, le calcul du prix d'une option américaine  $V_t$  se ramène au calcul de la fonction  $u^*(t, x)$ . Le lien entre le problème d'arrêt optimal et les inéquations variationnelles a été dégagé par A. Bensoussan et J.-L. Lions (cf. [3], [4]), et ces méthodes ont été appliquées aux options américaines pour les modèles de diffusion dans [24]. Dans ce chapitre, nous utilisons la méthode des inéquations variationnelles pour chercher une valeur approchée de  $u^*(t, x)$ . Et on montrera  $u^*(t, x)$  est la solution unique de l'inéquation parabolique suivante, sous certains hypothèses de régularité à préciser.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu \leq 0 \\ u \geq \psi \\ (\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu)(\psi - u) = 0 \\ u(T, \cdot) = \psi \end{array} \right\} \text{ p.p. dans } [0, T] \times \mathbf{R} \quad (3.1)$$

On peut l'écrire sous une forme plus simple suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max\{\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu, \psi - u\} = 0 \quad \text{dans } [0, T] \times \mathbf{R} \\ u(T, \cdot) = \psi \end{array} \right. \quad (3.2)$$

où

$$Au = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{\partial u}{\partial x} - ru$$

$$Bu = \lambda \int (u(t, x + z) - u(t, x)) \nu(dz)$$

où  $\nu$  est la loi de variable aléatoire  $Z_1 = \ln(1 + U_1)$ .

Le travail qu'on va faire sera en deux parties en suivant les méthodes de [3], [4], [24].

1. Montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1) (voir la section 3.3).
2. Montrer que la solution de (3.1) est égale à  $u^*(t, x)$  sous certaines hypothèses.

Les difficultés viennent des termes de sauts qui font apparaître un opérateur intégral dans l'inéquation parabolique. Avant d'étudier le problème (3.1), (3.2), nous expliquons pourquoi les opérateurs  $A$  et  $B$  interviennent de façon naturelle dans notre modèle.

### 3.1 Le générateur infinitésimal d'une diffusion

Comme dans le chapitre 1, on note  $(X_t)_{t \geq 0}$  la solution de l'équation différentielle stochastique (1.11). Maintenant, on calcule son générateur infinitésimal.

**Proposition 3.1** *Le générateur infinitésimal de  $(X_t)_{t \geq 0}$  est donnée par :*

$$(A + B)f(x) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \int (f(x+z) - f(x)) \nu(dz)$$

pour toute fonction  $f$  bornée ainsi que ses dérivées.

**Démonstration :** D'après la définition du générateur infinitésimal, on voit qu'il suffit de calculer  $\left. \frac{d}{dt} \mathbf{E}(f(X_t^x)) \right|_{t=0}$ . Comme  $X_t$  est une solution de (1.11), on a :

$$\mathbf{E}(f(X_t^x)) = \mathbf{E}\left(f\left(x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + \sum_{j=1}^{N_t} Z_j\right)\right)$$

alors, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f(X_t^x) - f(X_0^x)) &= \mathbf{E}(f(X_t^x) - f(x)) \\ &= \mathbf{E}\left(\left(f\left(x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right) - f(x)\right) \mathbf{1}_{\{N_t=0\}}\right) \\ &\quad + \mathbf{E}\left(\left(f\left(x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + Z_1\right) - f(x)\right) \mathbf{1}_{\{N_t=1\}}\right) \\ &\quad + \mathbf{E}\left(\left(f\left(x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + \sum_{j=1}^{N_t} Z_j\right) - f(x)\right) \mathbf{1}_{\{N_t \geq 2\}}\right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

et

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{E}(f(X_t^x)) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_1 + I_2 + I_3}{t}$$

Puisque les processus  $(B_t)_{t \geq 0}$ ,  $(N_t)_{t \geq 0}$  et  $(U_j)_{j \geq 1}$  sont indépendants, et  $\mathbf{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$ , on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_1}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} e^{-\lambda t} \mathbf{E} \frac{f\left(x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{E} \frac{f\left(x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right) - f(x)}{t} \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

D'autre part, comme  $\mathbf{P}(N_t = 1) = \lambda t e^{-\lambda t}$  et qu'il y a indépendance entre  $(B_t)_{t \geq 0}$ ,  $(N_t)_{t \geq 0}$  et  $(U_j)_{j \geq 1}$ , on voit que :

$$I_2 = \lambda t e^{-\lambda t} \mathbf{E} \left( f \left( x + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t + Z_1 \right) - f(x) \right)$$

Or  $f$  est bornée, par le théorème de Lebesgue, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_2}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \lambda e^{-\lambda t} \mathbf{E} \left( f \left( x + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t + Z_1 \right) - f(x) \right) \\ &= \lambda \mathbf{E} \left( f(x + Z_1) - f(x) \right) \\ &= \lambda \int (f(x + z) - f(x)) \nu(dz) \end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que  $\mathbf{P}(N_t \geq 2) = o(t)$ . En effet :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_t \geq 2) &= \sum_{j=2}^{\infty} \mathbf{P}(N_t = j) \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \\ &= t^2 \sum_{j=2}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-2}}{j!} \\ &= O(t^2) \end{aligned}$$

On a, donc, en utilisant le fait que  $f$  est bornée :

$$\begin{aligned} |I_3| &= \left| \mathbf{E} \left( f \left( x + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t + \sum_{j=1}^{N_t} Z_j \right) - f(x) \right) \mathbf{1}_{\{N_t \geq 2\}} \right| \\ &\leq 2|f|_{\infty} \mathbf{P}(N_t \geq 2) \\ &= o(t) \end{aligned}$$

On obtient, finalement :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \mathbf{E} (f(X_t^x)) \right|_{t=0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I_1 + I_2 + I_3}{t} \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \int (f(x + z) - f(x)) \nu(dz) \end{aligned}$$

■

## 3.2 Formulation variationnelle et propriétés des opérateurs $A$ et $B$

### 3.2.1 Propriétés des $A$ et $B$

Nous étudions l'inéquation parabolique souvent à partir de sa formulation variationnelle. Or pour l'écrire, on introduit les espaces  $H_\alpha, V_\alpha, W^{m,p,\alpha}(\mathbf{R})$  pour  $\alpha \geq 0$  avec :

$$\begin{aligned} H_\alpha &= L^2(\mathbf{R}, e^{-\alpha|x|}dx) \\ V_\alpha &= \{f \in H_\alpha \mid \frac{\partial f}{\partial x} \in H_\alpha\} \\ W^{m,p,\alpha}(\mathbf{R}) &= \{f \in L^p(\mathbf{R}, e^{-\alpha|x|}dx) \mid \text{pour } j \leq m, f^{(j)} \in L^p(\mathbf{R}, e^{-\alpha|x|}dx)\} \end{aligned}$$

Noter que  $H_\alpha = W^{0,2,\alpha}(\mathbf{R})$  et  $V_\alpha = W^{1,2,\alpha}(\mathbf{R})$ . On note  $(\cdot, \cdot)_\alpha$  le produit scalaire de  $H_\alpha$  et  $\|\cdot\|_\alpha, |\cdot|_\alpha$  les normes respectives de  $V_\alpha$  et  $H_\alpha$ . On énonce, d'abord, un résultat classique, qui est un conséquence du théorème de Rellich.

**Lemme 3.2** *Si  $\alpha < \gamma$ , l'injection canonique de  $V_\alpha$  dans  $H_\gamma$  est compact.*

**Démonstration :** Supposons que  $\gamma = \alpha + \beta$ . Comme  $\alpha < \gamma$ , d'où  $\beta > 0$ . Il n'est pas difficile de voir qu'une suite bornée dans  $V_\alpha$  reste encore bornée dans  $V_\gamma$ .

Maintenant, on prend une suite  $f_n$  bornée dans  $V_\alpha$  qui converge faiblement vers 0 dans  $H_\gamma$ . Alors, il suffit de montrer que  $f_n$  converge fortement vers 0 dans  $H_\gamma$ .

Soit  $R > 0$ , on regarde :

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{H_\gamma}^2 &= \int (f_n(x))^2 e^{-\gamma|x|} dx \\ &= \int_{-R}^R (f_n(x))^2 e^{-\gamma|x|} dx + \int_{|x|>R} (f_n(x))^2 e^{-\gamma|x|} dx \end{aligned}$$

Puisque  $\gamma = \alpha + \beta$ , d'où :

$$\begin{aligned} \int_{|x|>R} (f_n(x))^2 e^{-\gamma|x|} dx &= \int_{|x|>R} (f_n(x))^2 e^{-\alpha|x|} e^{-\beta|x|} dx \\ &\leq e^{-\beta R} \cdot \int_{|x|>R} (f_n(x))^2 e^{-\alpha|x|} dx \\ &\leq e^{-\beta R} \|f_n\|_{V_\alpha}^2 \\ &\leq C e^{-\beta R} \end{aligned}$$

D'autre part, pour  $R$  fixé,  $f_n|_{]-R, R[}$  reste bornée dans  $W^{1,2}(\cdot)$ , en utilisant le théorème de Rellich, on déduit :

$$\limsup \|f_n\|_{H_\gamma}^2 \leq C e^{-\beta R} \quad \forall R$$

En faisant tendre  $R$  vers l'infini, on obtient  $f_n$  converge fortement vers 0.



■

Posons :

$$\begin{aligned} a^\alpha(u, v) &= \frac{\sigma^2}{2} \int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} e^{-\alpha|x|} dx + r \int u v e^{-\alpha|x|} dx \\ &\quad - \int \left( \frac{\sigma^2 \alpha}{2} \operatorname{sgn}(x) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) v e^{-\alpha|x|} dx \\ b^\alpha(u, v) &= - \int (Bu) \cdot v e^{-\alpha|x|} dx \end{aligned}$$

Alors, on peut écrire, par une intégration par parties, que :

$$\begin{aligned} (Au, v)_\alpha &= -a^\alpha(u, v) \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \\ (Bu, v)_\alpha &= -b^\alpha(u, v) \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \end{aligned}$$

Il est clair que  $a^\alpha(u, v)$  est une forme bilinéaire continue sur  $V_\alpha$  et que l'on a :

$$|a^\alpha(u, v)| \leq C \|u\|_\alpha \|v\|_\alpha$$

avec  $C$  ne dépendant pas de  $u$  et  $v$ . Le lemme suivant nous permet de dire que  $B$  est un opérateur linéaire continu de  $H_\alpha$  à  $H_\alpha$  et qu'on a :

$$|b^\alpha(u, v)| \leq C |u|_\alpha |v|_\alpha$$

Nous supposons l'hypothèse suivante :

$$(\mathbf{H}) : \mathbf{E} e^{\alpha|Z|} < \infty \text{ pour tout } \alpha.$$

**Lemme 3.3** *Sous (H), alors, on a :*

$$\forall u \in H_\alpha, \quad |Bu|_\alpha \leq C |u|_\alpha$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $u$ .

**Démonstration :** A partir de la définition de l'opérateur  $B$ , on peut écrire, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le fait  $(a - b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , que :

$$\begin{aligned} |Bu|_\alpha^2 &= \int (Bu)^2 e^{-\alpha|x|} dx \\ &\leq \lambda^2 \int dx e^{-\alpha|x|} \cdot \int (u(x+z) - u(x))^2 \nu(dz) \cdot \int 1^2 \nu(dz) \\ &\leq \lambda^2 \int dx e^{-\alpha|x|} \cdot \int 2(u^2(x+y) + u^2(x)) \nu(dz) \end{aligned}$$

D'après le théorème du Fubini et le fait que  $e^{-\alpha|x|} \leq e^{-\alpha|x+z|+\alpha|z|}$ , on déduit :

$$\begin{aligned}
|Bu|_\alpha^2 &\leq 2\lambda^2 \int \nu(dz) \cdot \int (u^2(x+z) + u^2(x))e^{-\alpha|x|} dx \\
&\leq 2\lambda^2 \int \nu(dz) \cdot \left( \int u^2(x+z)e^{-\alpha|x+z|} \cdot e^{\alpha|z|} dx + \int u^2(x) \cdot e^{-\alpha|x|} dx \right) \\
&= 2\lambda^2 \int \nu(dz) \cdot (|u|_\alpha^2 \cdot e^{\alpha|z|} + |u|_\alpha^2) \\
&= 2\lambda^2 |u|_\alpha^2 \cdot (\mathbf{E} e^{\alpha|Z_1|} + 1)
\end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{E} e^{\alpha|Z_1|} \leq \infty$ , d'où :

$$|Bu|_\alpha \leq C|u|_\alpha$$

Par ailleurs, il est facile de voir que :

$$B \in \mathcal{L}(H_\alpha, H_\alpha)$$

■

On remarque que : si  $\alpha = 0$ , on a  $B \in \mathcal{L}(L^2, L^2)$  et  $|Bu|_{L^2} \leq C|u|_{L^2}$ .

**Lemme 3.4** Si  $(\mathbf{H})$  est vérifié, alors il existe deux réels strictement positifs  $\rho$  et  $\gamma$  tel que :  $\forall u \in V_\alpha$

$$a^\alpha(u, u) + b^\alpha(u, u) + \rho|u|_\alpha^2 \geq \gamma\|u\|_\alpha^2$$

**Démonstration :** D'après les définitions de  $a^\alpha(u, u)$  et  $b^\alpha(u, u)$ , et le lemme 3.3 et  $r \geq 0$ , on a :

$$\begin{aligned}
&a^\alpha(u, u) + b^\alpha(u, u) \\
&\geq \frac{\sigma^2}{2} (\|u\|_\alpha^2 - |u|_\alpha^2) - \left( \frac{\sigma^2 \alpha}{2} + \left| \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right| \right) \cdot \|u\|_\alpha \cdot |u|_\alpha - C|u|_\alpha^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{2} \|u\|_\alpha^2 - \left( \frac{\sigma^2 \alpha}{2} + \left| \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right| \right) \cdot \|u\|_\alpha \cdot |u|_\alpha - \left( \frac{\sigma^2}{2} + C \right) |u|_\alpha^2
\end{aligned}$$

En posant :

$$\beta = \frac{\sigma^2 \alpha}{2} + \left| \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right|$$

et  $\eta = \frac{\sigma^2}{2} > 0$ , on a :

$$a^\alpha(u, u) + b^\alpha(u, u) \geq \eta\|u\|_\alpha^2 - \beta\|u\|_\alpha |u|_\alpha - (\eta + C)|u|_\alpha^2$$

D'où, pour tout  $\rho > 0$

$$a^\alpha(u, u) + b^\alpha(u, u) + \rho|u|_\alpha^2 \geq \eta\|u\|_\alpha^2 - \beta\|u\|_\alpha |u|_\alpha + (\rho - \eta - C)|u|_\alpha^2$$

et il suffit de choisir  $\gamma = \frac{\eta}{2}$  et  $\rho$  tel que la forme quadratique :

$$(x, y) \rightarrow \frac{\eta}{2}x^2 - \beta xy + (\rho - \eta - C)y^2$$

soit positive. On voit facilement que ce  $\rho$  existe. En effet, on utilise la relation classique  $ab < \frac{\theta}{2}a^2 + \frac{1}{2\theta}b^2$ . D'où :

$$\frac{\eta}{2}x^2 - \beta xy + (\rho - \eta - C)y^2 \geq \frac{\eta - \theta\beta}{2}x^2 + (\rho - \eta - C - \frac{\beta}{2\theta})y^2$$

En prenant  $\theta = \frac{\eta}{\beta}$  (car  $\beta > 0$ ), et  $\rho$  assez grand tel que  $\rho - \eta - C - \frac{\beta^2}{2\eta}$  soit positive, on obtient :

$$\frac{\eta}{2}x^2 - \beta xy + (\rho - \eta - C)y^2 \geq (\rho - \eta - C - \frac{\beta^2}{2\eta})y^2 \geq 0$$

■

### 3.2.2 Formulation Variationnelle

Avec les notations précédentes, la formulation variationnelle du problème (3.1) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(T, \cdot) = \psi \quad p.p. \text{ dans } \mathbf{R} \\ u \geq \psi \quad p.p. \text{ dans } [0, T] \times \mathbf{R} \\ \forall v \in V_\alpha, \quad v \geq \psi, \quad \text{on a :} \\ -(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u)_\alpha + a^\alpha(u, v - u) + b^\alpha(u, v - u) \geq 0 \quad p.p. \text{ dans } [0, T] \end{array} \right. \quad (3.3)$$

La proposition 3.5, qui peut être montré par la même méthode que la proposition 1.6 dans [23] P76, dira la relation entre la solution de l'inéquation parabolique et celui de sa formulation variationnelle sous certains condition de régularité.

**Proposition 3.5** *Supposons  $\psi \in V_\alpha$ . Soit  $u$  une fonction de  $[0, T] \times \mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  telle que :*

$$u \in L^2([0, T]; W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; H_\alpha)$$

*Alors,  $u$  est solution de (3.3) si et seulement si  $u$  vérifie (3.1) :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu \leq 0 \\ u \geq \psi \\ (\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu)(\psi - u) = 0 \\ u(T, \cdot) = \psi \end{array} \right\} \quad p.p. \text{ dans } [0, T] \times \mathbf{R}$$

Pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution de l'inéquation parabolique (3.1), on aura besoin de résultats de régularité de  $u$  qu'on parlera dans la section 3.4.

### 3.3 L'existence et L'unicité de la solution du problème

**Théorème 3.6** *Sous (H), et soit  $\psi \in V_\alpha$ , alors il existe une et une seule fonction  $u$  vérifiant :*

$$u \in L^2([0, T]; V_\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; H_\alpha)$$

et le problème (3.3).

De plus, la fonction  $u$  est dans  $L^\infty([0, T]; V_\alpha)$ .

La démonstration de l'unicité de ce théorème peut être faite en suivant exactement le même raisonnement que [23] P77 . Et on utilisera le méthode de pénalisation pour prouver son existence .

#### 3.3.1 Le problème pénalisé

Selon le méthode de pénalisation, on commence l'étude par le " problème pénalisé " : pour  $\varepsilon > 0$ , trouver  $u_\varepsilon$  tel que :

$$\begin{cases} u_\varepsilon(T) = \psi \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + Au_\varepsilon + Bu_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = 0 \end{cases}$$

où :

$$\beta(\cdot) = -(\psi - \cdot)_+$$

**Théorème 3.7** *Soit  $\psi \in V_\alpha$  et soit  $\varepsilon \geq 0$ , de plus, si (H) est vérifié, alors, le problème :*

$$\begin{cases} u_\varepsilon(T) = \psi \\ -(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v)_\alpha + a^\alpha(u_\varepsilon, v) + b^\alpha(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), v)_\alpha = 0 \quad \forall v \in V_\alpha \end{cases}$$

a une et une seule solution  $u_\varepsilon$  vérifiant :

$$u_\varepsilon \in L^2([0, T]; V_\alpha); \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^2([0, T]; H_\alpha)$$

On a de plus les estimations suivantes :

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty([0, T]; V_\alpha)} \leq C \tag{3.4}$$

$$\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\|_{L^2([0, T]; H_\alpha)} \leq C \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|(\psi - u_\varepsilon)_+\|_{L^\infty([0, T]; H_\alpha)} \leq C \tag{3.6}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ .

Le terme non linéaire  $\beta(\cdot)$  a la propriété de monotonie :  $(\beta(x) - \beta(y))(x - y) \geq 0$  pour tous réels  $x$  et  $y$ . Cela nous permet de prouver l'unicité dans le théorème 3.7 en suivant exactement le même raisonnement que pour le théorème 3.6. (Voir [23]). On obtiendra l'existence de la solution de l'inéquation variationnelle du théorème 3.6 en utilisant, de nouveau, la monotonie de  $\beta(\cdot)$  et puis en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0.

Les estimations (3.4) - (3.6) nous permettent de passer à la limite dans la démonstration du théorème 3.6.

**Démonstration : (Démonstration de l'existence dans le théorème 3.7)**

La preuve de l'existence de  $u_\varepsilon$  comporte les étapes suivantes :

- Construction d'une suite de solutions approchées  $(u_m)$ .
- Estimations à priori sur les  $u_m$  et  $\frac{du_m}{dt}$ .
- Passage à la limite sur  $m$ .

(a). *Problème approché*

On utilise une méthode d'approximation interne, qui consiste à introduire une suite croissante de sous espaces  $V_m$  de  $V_\alpha$  telle que :

- $\dim V_m < \infty$  pour tout  $m$ .
- pour tout  $v \in V_\alpha$ , il existe une suite  $(v_m)$  telle que :

$$v_m \in V_m \quad \forall m \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|v - v_m\|_\alpha = 0$$

Le problème approché est alors : trouver une fonction  $u_m(t)$ , de  $[0, T]$  dans  $V_m$ , telle que :

$$\begin{cases} u_m(T) = \psi_m \\ -\left(\frac{du_m}{dt}, v\right)_\alpha + a^\alpha(u_m, v) + b^\alpha(u_m, v) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_m), v)_\alpha = 0 \quad \forall v \in V_m \end{cases}$$

où  $\psi_m \in V_m$  vérifie :  $\psi_m \rightarrow \psi$  dans  $V_\alpha$ .

Il est clair que ce problème s'interprète comme une équation différentielle ordinaire en  $u_m$  dans  $V_m$ . Et on en déduit facilement l'existence et l'unicité de  $u_m$ , continue de  $[0, T]$  dans  $V_m$ , presque partout différentiable, à dérivée bornée et vérifiant l'équation approchée.

- (b). *Estimations à priori sur les  $u_m$  et  $\frac{du_m}{dt}$*

Prenant  $v = \frac{du_m}{dt}$  dans le problème approché, on obtient :

$$-\left(\frac{du_m}{dt}, \frac{du_m}{dt}\right)_\alpha + a^\alpha(u_m, \frac{du_m}{dt}) + b^\alpha(u_m, \frac{du_m}{dt}) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_m), \frac{du_m}{dt})_\alpha = 0$$

Notons :

$$u'_m = \frac{du_m}{dt}$$

$$a_0(u, v) = \frac{\sigma^2}{2} \int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} e^{-\alpha|x|} dx + (u, v)_\alpha \quad (3.7)$$

$$a_1(u, v) = a^\alpha(u, v) - a_0(u, v)$$

$$= (r-1)(u, v)_\alpha + \int \left(\frac{\sigma^2 \alpha}{2} \operatorname{sgn}(x) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right) \frac{\partial u}{\partial x} v e^{-\alpha|x|} dx \quad (3.8)$$

D'où :

$$a_0(u, u) \geq \delta \|u\|_\alpha^2 \quad (3.9)$$

avec  $\delta = \min\{\frac{\sigma^2}{2}, 1\}$ .

De plus, en utilisant le lemme 3.3, on a :

$$|a_1(u, v)| + |b^\alpha(u, v)| \leq C \|u\|_\alpha \|v\|_\alpha \quad (3.10)$$

Avec ces notations, on a :

$$-|u'_m(t)|_\alpha^2 + a_0(u_m, u'_m) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_m), u'_m)_\alpha = -a_1(u_m, u'_m) - b^\alpha(u_m, u'_m) \quad (3.11)$$

or :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_0(u_m, u_m) &= 2 \cdot \frac{\sigma^2}{2} \int \frac{\partial u_m}{\partial x} \frac{\partial u'_m}{\partial x} e^{-\alpha|x|} dx + 2(u'_m, u_m)_\alpha \\ &= 2 \cdot a_0(u_m, u'_m) \end{aligned}$$

Par ailleurs, car  $\psi$  ne dépend pas de  $t$ , on a

$$(\beta(u_m), u'_m)_\alpha = ((\psi - u_m)_+, \frac{d}{dt}(\psi - u_m))_\alpha = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |(\psi - u_m)_+|_\alpha^2$$

L'égalité (3.11) peut donc s'écrire :

$$|u'_m(t)|_\alpha^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a_0(u_m, u_m) - \frac{1}{2\varepsilon} \frac{d}{dt} |(\psi - u_m)_+|_\alpha^2 = a_1(u_m, u'_m) + b^\alpha(u_m, u'_m) \quad (3.12)$$

D'où, en intégrant (3.12) entre  $t$  et  $T$ , et en remarquant que  $u_m(T) = \psi_m$ ,

$$\begin{aligned} &\int_t^T |u'_m(s)|_\alpha^2 ds + \frac{1}{2} a_0(u_m(t), u_m(t)) + \frac{1}{2\varepsilon} |(\psi - u_m(t))_+|_\alpha^2 \\ &= \frac{1}{2} a_0(\psi_m, \psi_m) + \frac{1}{2\varepsilon} |(\psi - \psi_m)_+|_\alpha^2 + \int_t^T (a_1(u_m(s), u'_m(s)) + b^\alpha(u_m(s), u'_m(s))) ds \end{aligned}$$

D'après (3.9) et (3.10), on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_t^T |u'_m(s)|_\alpha^2 ds + \frac{\delta}{2} \|u_m(t)\|_\alpha^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |(\psi - u_m(t))_+|_\alpha^2 \\ &\leq C(\|\psi_m\|_\alpha^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |(\psi - \psi_m)_+|_\alpha^2) + \int_t^T \|u_m(s)\|_\alpha |u'_m(s)|_\alpha ds \end{aligned} \quad (3.13)$$

où  $C$  et  $\delta$  sont deux constantes strictement positives ne dépendant ni de  $m$ , ni de  $\varepsilon$ , ni de  $t$ .

En utilisant la relation élémentaire  $ab \leq \frac{\theta}{2}a^2 + \frac{1}{2\theta}b^2$ , de l'inégalité (3.13), on déduit, pour tout  $\theta > 0$ ,

$$\begin{aligned} &\int_t^T |u'_m(s)|_\alpha^2 ds + \frac{\delta}{2} \|u_m(t)\|_\alpha^2 \\ &\leq C(\|\psi_m\|_\alpha^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |(\psi - \psi_m)_+|_\alpha^2) + \frac{\theta}{2} \int_t^T \|u_m(s)\|_\alpha^2 ds + \frac{1}{2\theta} \int_t^T |u'_m(s)|_\alpha^2 ds \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} &(1 - \frac{C}{2\theta}) \int_t^T |u'_m(s)|_\alpha^2 ds + \frac{\delta}{2} \|u_m(t)\|_\alpha^2 \\ &\leq C(\|\psi_m\|_\alpha^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |(\psi - \psi_m)_+|_\alpha^2) + \frac{\theta}{2} \int_t^T \|u_m(s)\|_\alpha^2 ds \end{aligned} \quad (3.14)$$

Choissant  $\theta$  assez grand pour avoir  $1 - \frac{C}{2\theta} > 0$ , on déduit d'abord de (3.14),

$$\frac{\delta}{2} \|u_m(t)\|_\alpha^2 \leq C(\|\psi_m\|_\alpha^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |(\psi - \psi_m)_+|_\alpha^2) + \frac{\theta}{2} \int_t^T \|u_m(s)\|_\alpha^2 ds$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\|u_m(t)\|_\alpha^2 \leq C_1(\|\psi_m\|_\alpha^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |(\psi - \psi_m)_+|_\alpha^2) \quad (3.15)$$

où  $C_1$  est une constante qui ne dépend pas de  $m$ , ni de  $\varepsilon$ , ni de  $t$ , mais dépend de  $T$ .

Maintenant, on revient à l'inégalité (3.14) et compte tenu de (3.15), on obtient :

$$\int_0^T |u'_m(s)|_\alpha^2 ds \leq C_2(\|\psi_m\|_\alpha^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |(\psi - \psi_m)_+|_\alpha^2) \quad (3.16)$$

où  $C_1$  est une autre constante ne dépendant pas de  $m$ , ni de  $t$ .

(c). *Passage à la limite sur  $m$*

Par l'estimation (3.16), on peut suppose, quitte à extraire une sous-suite, que :

$$u'_m \rightarrow u'_\varepsilon \quad \text{faiblement dans } L^2([0, T]; H_\alpha) \quad (3.17)$$

or  $u_m(t) = \psi_m - \int_t^T u'_m(s)ds$  et  $\psi_m \rightarrow \psi$  dans  $V_\alpha$ , on en déduit que, pour chaque  $t$ ,

$$u_m \rightarrow u_\varepsilon \quad \text{faiblement dans } H_\alpha$$

où  $u_\varepsilon = \psi - \int_t^T u'_\varepsilon(s)ds$ .

Par ailleurs, d'après (3.15), la suite  $u_m(t)$  est bornée dans  $V_\alpha$ , ce qui entraîne

$$u_m(t) \rightarrow u_\varepsilon(t) \quad \text{faiblement dans } V_\alpha \quad (3.18)$$

D'où, en utilisant le lemme 3.2,

$$u_m(t) \rightarrow u_\varepsilon(t) \quad \text{fortement dans } H_\gamma \text{ pour } \gamma > \alpha.$$

on en déduit :

$$\beta(u_m(t)) \rightarrow \beta(u_\varepsilon(t)) \quad \text{fortement dans } H_\gamma \text{ pour } \gamma > \alpha.$$

or d'après (3.13), (3.15) et (3.16), on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon} |\beta(u_m(t))|_\alpha^2 &= \frac{1}{2\varepsilon} |-(\psi - u_m(t))_+|_\alpha^2 \\ &\leq C(\|\psi_m\|_\alpha^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |(\psi - \psi_m)_+|_\alpha^2) \end{aligned} \quad (3.19)$$

où  $C$  est une nouvelle constante ne dépendant pas de  $m$ , ni de  $\varepsilon$ .

D'où :

$$\beta(u_m(t)) \rightarrow \beta(u_\varepsilon(t)) \quad \text{faiblement dans } H_\alpha \text{ quand } m \rightarrow \infty \quad (3.20)$$

Par ailleurs, grâce à (3.18) et au lemme 3.3, on obtient :

$$Bu_m \rightarrow Bu_\varepsilon \quad \text{faiblement dans } H_\alpha \text{ quand } m \rightarrow \infty$$

on peut donc facilement déduire que :

$$a^\alpha(u_m, v) \rightarrow a^\alpha(u_\varepsilon, v) \quad (3.21)$$

$$b^\alpha(u_m, v) \rightarrow b^\alpha(u_\varepsilon, v) \quad (3.22)$$

En faisant tendre  $m$  vers l'infini dans le problème approché et en remarquant (3.17), (3.20) et (3.21), (3.22), on voit finalement que  $u_\varepsilon$  est la solution du problème pénalisé.



Pour achever la démonstration du théorème 3.7, en faisant tendre  $m$  vers l'infini dans (3.15), (3.16) et (3.19) et en remarquant que  $\psi_m \rightarrow \psi$  dans  $V_\alpha$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{L^\infty([0,T];V_\alpha)} &\leq C \\ \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2([0,T];H_\alpha)} &\leq C \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|(\psi - u_\varepsilon)_+\|_{L^\infty([0,T];H_\alpha)} &\leq C \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ . ■

### 3.3.2 Démonstration du Théorème d'existence et l'unicité

On obtient la solution  $u$  de l'inéquation variationnelle en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0. Mais on verra qu'on aura besoin la convergence forte, de  $u_\varepsilon$  dans  $H_\alpha$  pour passer à la limite directement dans l'équation suivant :

$$-\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v - u_\varepsilon\right)_\alpha + a^\alpha(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + b^\alpha(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)_\alpha = 0 \quad \forall v \in V_\alpha$$

or on ne l'a pas. En revanche, on pourra l'avoir pour  $\gamma$  en utilisant le lemme 3.2, si l'on commence la démonstration pour  $\gamma$  au lieu de  $\alpha$ , où  $\gamma > \alpha$ . Donc, la démonstration consiste en deux étapes :

1. Montrer les résultats dans le théorème 3.6 pour  $\gamma$  au lieu de  $\alpha$ .
2. Faire tendre  $\gamma$  vers  $\alpha$  pour avoir le théorème 3.6.

**Démonstration :** D'après le théorème 3.7,  $u_\varepsilon$  est la solution du problème pénalisé associé à  $\alpha$  :

$$-\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v\right)_\alpha + a^\alpha(u_\varepsilon, v) + b^\alpha(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), v)_\alpha = 0 \quad \forall v \in V_\alpha \quad (3.23)$$

Pour  $\gamma > \alpha$ , posons  $\gamma = \alpha + \eta$ , où  $\eta > 0$ . Pour tout  $w$  appartenant à  $V_\gamma$ , il est facile de voir que  $we^{-\eta|x|}$  appartient à  $V_\alpha$ . En prenant  $v = we^{-\eta|x|}$  dans (3.23) et en remarquant que :

$$\begin{aligned} a^\alpha(u_\varepsilon, we^{-\eta|x|}) &= a^\gamma(u_\varepsilon, w) \\ b^\alpha(u_\varepsilon, we^{-\eta|x|}) &= b^\gamma(u_\varepsilon, w) \\ -\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, we^{-\eta|x|}\right)_\alpha &= -\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, w\right)_\gamma \\ \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), we^{-\eta|x|})_\alpha &= \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), w)_\gamma, \end{aligned}$$

on voit que  $u_\varepsilon$  est la solution du problème pénalisé associé à  $\gamma$ , pour tout  $\gamma > \alpha$ . i.e :

$$\begin{cases} u_\varepsilon(T) = \psi \\ -\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, w\right)_\gamma + a^\gamma(u_\varepsilon, w) + b^\gamma(u_\varepsilon, w) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), w)_\gamma = 0 \quad \forall w \in V_\gamma \end{cases}$$

D'après (3.5), on peut supposer, quitte à extraire une sous suite, que :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \rightarrow u' \quad \text{faiblement dans } L^2([0, T]; H_\alpha) \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

Or  $u_\varepsilon(t) = \psi - \int_t^T u'_\varepsilon(s) ds$ , on en déduit de (3.4) que, pour tout  $t$ ,

$$u_\varepsilon(t) \rightarrow u(t) \quad \text{faiblement dans } V_\alpha \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

où  $u(t) = \psi - \int_t^T u'(s) ds$ . Le lemme 3.2 nous donne :

$$u_\varepsilon(t) \rightarrow u(t) \quad \text{fortement dans } H_\gamma \quad \text{pour } \gamma > \alpha$$

Par ailleurs, il est facile de voir que :

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty([0, T]; V_\gamma)} \leq \|u_\varepsilon\|_{L^\infty([0, T]; V_\alpha)} \leq C \quad (3.24)$$

$$\left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2([0, T]; H_\gamma)} \leq \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2([0, T]; H_\alpha)} \leq C \quad (3.25)$$

Donc, on obtient :

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; H_\gamma) \quad (3.26)$$

$$u_\varepsilon \rightarrow u \quad *-\text{ faiblement dans } L^\infty([0, T]; V_\gamma) \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{faiblement dans } L^2([0, T]; H_\gamma) \quad (3.28)$$

De plus, d'après le lemme 3.3,  $B$  est un opérateur linéaire de  $H_\gamma$  à  $H_\gamma$ , cela entraîne :

$$Bu_\varepsilon \rightarrow Bu \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; H_\gamma) \quad (3.29)$$

Maintenant, soit  $v \in V_\alpha$ , vérifiant  $v \geq \psi$ , évidemment  $v \in V_\gamma$ , on a alors :

$$-\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v - u_\varepsilon\right)_\gamma + a^\gamma(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + b^\gamma(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)_\gamma = 0 \quad \forall v \in V_\gamma$$

Or  $\beta(v) = -(\psi - v)_+ = 0$ , donc, en tenant compte de la propriété monotonie de  $\beta(\cdot)$ ,

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v - u_\varepsilon\right)_\gamma + a^\gamma(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + b^\gamma(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon}(\beta(v) - \beta(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon)_\gamma \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

D'où, pour  $t < t'$ , en utilisant les notations de (3.7) et (3.8),

$$\begin{aligned} & \int_t^{t'} \left( -\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial s}, v - u_\varepsilon\right)_\gamma + a^\gamma(u_\varepsilon, v) + b^\gamma(u_\varepsilon, v) \right) ds \\ & \geq \int_t^{t'} a_0^\gamma(u_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)) ds + \int_t^{t'} a_1^\gamma(u_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)) ds + \int_t^{t'} b^\gamma(u_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)) ds \end{aligned}$$

En utilisant (3.26), (3.27), (3.28), et (3.29), on sait que :

$$\begin{aligned} & \int_t^{t'} \left( -\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial s}, v - u_\varepsilon\right)_\gamma + a^\gamma(u_\varepsilon, v) + b^\gamma(u_\varepsilon, v) \right) ds \\ & \longrightarrow \int_t^{t'} \left( -\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u\right)_\gamma + a^\gamma(u, v) + b^\gamma(u, v) \right) ds \end{aligned}$$

D'autre part, comme :

$$\begin{aligned} & \left| \int_t^{t'} a_1^\gamma(u_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)) ds - \int_t^{t'} a_1^\gamma(u(s), u(s)) ds \right| \\ & \leq \left| \int_t^{t'} a_1^\gamma(u_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s) - u(s)) ds \right| + \left| \int_t^{t'} a_1^\gamma(u_\varepsilon(s) - u(s), u(s)) ds \right| \end{aligned}$$

revenant à la définition (3.8) de  $a_1(u, v)$ , il est facile de voir que :

$$\begin{aligned} \left| \int_t^{t'} a_1^\gamma(u_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s) - u(s)) ds \right| & \leq C \int_t^{t'} \|u_\varepsilon\|_\gamma \cdot |u_\varepsilon - u|_\gamma ds \\ & \rightarrow 0 \quad \text{à cause de (3.26) et (3.24)} \end{aligned}$$

De plus, par (3.27),

$$\int_t^{t'} a_1^\gamma(u_\varepsilon(s) - u(s), u(s)) ds \rightarrow 0$$

On a, donc :

$$\int_t^{t'} a_1^\gamma(u_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)) ds \rightarrow \int_t^{t'} a_1^\gamma(u(s), u(s)) ds$$

De même, on a aussi :

$$\int_t^{t'} b^\gamma(u_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)) ds \rightarrow \int_t^{t'} b^\gamma(u(s), u(s)) ds$$

Par ailleurs, car  $u \rightarrow \int_0^T a_0^\gamma(u(s), u(s)) ds$  définit une norme équivalente sur  $L^2([0, T]; V_\gamma)$ , on a :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_t^{t'} a_0^\gamma(u_\varepsilon(s), u_\varepsilon(s)) ds \geq \int_t^{t'} a_0^\gamma(u(s), u(s)) ds$$

D'où, finalement,

$$\int_t^{t'} \left( -\left(\frac{\partial u}{\partial s}, v - u\right)_\gamma + a^\gamma(u, v - u) + b^\gamma(u, v - u) \right) ds \geq 0$$

et, par conséquent,

$$- \left( \frac{\partial u}{\partial s}, v - u \right)_\gamma + a^\gamma(u, v - u) + b^\gamma(u, v - u) \geq 0 \quad (3.30)$$

Vu (3.26) à (3.28), on a de plus :

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty([0, T]; V_\gamma) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &\in L^2([0, T]; H_\gamma) \\ u(T) &= \psi \end{aligned}$$

D'après (3.6), on a :

$$\| -\beta(u_\varepsilon) \|_{L^\infty([0, T]; H_\gamma)} \leq C\sqrt{\varepsilon}$$

Ce qui implique que :

$$\beta(u_\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^\infty([0, T]; H_\gamma)$$

or :

$$\beta(u_\varepsilon) \rightarrow \beta(u) \quad \text{dans } L^2([0, T]; H_\gamma)$$

D'où :

$$\beta(u) = 0$$

i.e :

$$\psi \leq u$$

En faisant tendre  $\gamma \rightarrow \alpha$  dans (3.30), on obtient le théorème 3.6. ■

### 3.3.3 Lemmes de monotonie et de continuité $L^\infty$

Les deux lemmes suivants permettent de contrôler la dépendance de la solution  $u$  de l'inéquation variationnelle par rapport à la fonction  $\psi$ . Ils se démontrent comme le lemme 1.9 et le lemme 1.10 dans [23].

**Lemme 3.8** *Soient  $\psi$  et  $\hat{\psi}$  appartenant à  $V_\alpha$  et vérifiant :  $\psi \leq \hat{\psi}$ . Alors les solutions  $u$  et  $\hat{u}$  des inéquations variationnelle associées respectivement à  $\psi$  et  $\hat{\psi}$  (voir (3.3)) vérifient :  $u \leq \hat{u}$ . En particulier, si  $\psi \geq 0$ , on a  $u \geq 0$ .*

**Lemme 3.9** *Soient  $\psi \in V_\alpha$ ,  $\hat{\psi} \in V_\alpha$  et  $\psi - \hat{\psi} \in L^\infty(\mathbf{R})$ , alors,*

$$u - \hat{u} \in L^\infty([0, T] \times \mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \|u - \hat{u}\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbf{R})} \leq \|\psi - \hat{\psi}\|_{L^\infty(\mathbf{R})}$$

On en aura besoin pour montrer l'égalité  $u = u^*$  sous les hypothèses plus faiblement sur  $\psi$ , dans la section suivante.

### 3.4 Théorème de régularité

Dans la section 3.3, on a déjà montré que l'inéquation variationnelle (3.3) a une et une seule solution. On aura besoin de la condition de régularité :  $u$  appartient à  $L^2([0, T]; W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R}))$  pour revenir à l'inéquation parabolique (3.1) et établir l'égalité  $u = u^*$  sous l'hypothèse  $\psi$  appartient à  $W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ .

Maintenant, on étudie les résultats de régularité.

**Théorème 3.10** *Soit  $\psi$  appartenant à  $W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , alors la solution  $u$  de l'inéquation variationnelle (3.3) vérifie :*

$$u \in L^2([0, T]; W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R}))$$

Dans la démonstration du théorème 3.10, on va utiliser le lemme suivant adapté de [3] (P87-P89).

**Lemme 3.11** *Si  $u \in V_\alpha$  vérifie :*

$$a^\alpha(u, v) + b^\alpha(u, v) = (f, v)_\alpha \quad \forall v \in V_\alpha$$

où :

$$\begin{aligned} a^\alpha(u, v) &= \frac{\sigma^2}{2} \int \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} e^{-\alpha|x|} dx + r \int u v e^{-\alpha|x|} dx \\ &\quad - \int \left( \frac{\sigma^2 \alpha}{2} \operatorname{sgn}(x) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \frac{\partial u}{\partial x} v e^{-\alpha|x|} dx \\ b^\alpha(u, v) &= - \int (Bu) v e^{-\alpha|x|} dx \end{aligned}$$

et :

$$f \in L^2(\mathbf{R}, e^{-\alpha|x|} dx)$$

alors :

$$u \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \|u\|_{W^{2,2,\alpha}} \leq C(\|u\|_\alpha + |f|_\alpha)$$

où  $C$  est une constante indépendant de  $u$  et de  $f$ .

**Démonstration :** On écrit l'hypothèse du lemme :  $u \in V_\alpha$  et vérifie :

$$\begin{aligned} &\int \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} e^{-\alpha|x|} dx + \int r u v e^{-\alpha|x|} dx \\ &- \int \left( \frac{\sigma^2 \alpha}{2} \operatorname{sgn}(x) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \frac{\partial u}{\partial x} v e^{-\alpha|x|} dx - \int (Bu) v e^{-\alpha|x|} dx \\ &= \int f v e^{-\alpha|x|} dx \quad \forall v \in V_\alpha \end{aligned} \tag{3.31}$$

Pour montrer le lemme, on utilise la méthode des quotients différentiels. Soit  $\varphi$  une fonction sur  $\mathbf{R}$ . Posons :

$$\tau_h \varphi = \varphi(x + h)$$

Notons que :

$$(\tau_h \varphi, \Psi)_{L^2(\mathbf{R})} = (\varphi, \tau_{-h} \Psi)_{L^2(\mathbf{R})}$$

On peut choisir  $h$  positif et assez petit ( par exemple :  $0 < h < 1$  ), pour tout  $\varphi \in V_\alpha$ , à partir de la définition de  $\tau_h \varphi$ , et puis en faisant un changement de variable, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\tau_h \varphi - \varphi}{h} \right|_\alpha^2 &= \frac{1}{h^2} \int dx e^{-\alpha|x|} \left( \int_x^{x+h} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y) dy \right)^2 \\ &= \frac{1}{h^2} \int dx e^{-\alpha|x|} \left( \int_0^h \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x+y) dy \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{h^2} \int dx e^{-\alpha|x|} \int_0^h \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x+y) \right)^2 dy \cdot \int_0^h 1^2 dy \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz. D'où, d'après le fait que  $e^{-\alpha|x|} \leq e^{-\alpha|x+y|} \cdot e^{\alpha|y|}$  et par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\tau_h \varphi - \varphi}{h} \right|_\alpha^2 &\leq \frac{1}{h} \int_0^h dy e^{\alpha|y|} \cdot \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x+y) \right)^2 e^{-\alpha|x+y|} dx \\ &\leq e^{\alpha h} \|\varphi\|_\alpha^2 \\ &\leq C \|\varphi\|_\alpha^2 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\left| \frac{\tau_h \varphi - \varphi}{h} \right|_\alpha^2 \leq C \|\varphi\|_\alpha^2 \quad \forall \varphi \in V_\alpha \quad (3.32)$$

De même

$$\left| \frac{\tau_{-h} \varphi - \varphi}{h} \right|_\alpha^2 \leq C \|\varphi\|_\alpha^2 \quad \forall \varphi \in V_\alpha \quad (3.33)$$

Maintenant, revenant à (3.31), pour tout  $w$  appartenant à  $V_\alpha$ , remarquant que  $(\tau_{-h} w)e^{-\alpha|x-h|+\alpha|x|}$  appartient à  $V_\alpha$ , et

$$(u, (\tau_{-h} w)e^{-\alpha|x-h|+\alpha|x|})_\alpha = (\tau_h u, w)_\alpha$$

Prenant  $v = (\tau_{-h} w)e^{-\alpha|x-h|+\alpha|x|}$  dans (3.31) et notant que :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(\tau_{-h} w)}{\partial x} e^{-\alpha|x-h|+\alpha|x|} + \alpha(\tau_{-h} w) e^{-\alpha|x-h|+\alpha|x|} \left( -\frac{x-h}{|x-h|} + \frac{x}{|x|} \right)$$

on obtient, donc, en utilisant  $(\tau_h \varphi, \Psi)_{L^2(\mathbf{R})} = (\varphi, \tau_{-h} \Psi)_{L^2(\mathbf{R})}$ ,

$$\begin{aligned} &\int \left( \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_h u) \frac{\partial w}{\partial x} e^{-\alpha|x|} + \frac{\sigma^2 \alpha}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_h u) w \left( -\frac{x}{|x|} + \frac{x+h}{|x+h|} \right) e^{-\alpha|x|} \right) dx + \int r(\tau_h u) w e^{-\alpha|x|} dx \\ &- \int \left( \frac{\sigma^2 \alpha}{2} \frac{x+h}{|x+h|} + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x} (\tau_h u) w e^{-\alpha|x|} dx - \int (B \tau_h u) w e^{-\alpha|x|} dx \\ &= \int f \cdot (\tau_{-h} w) e^{-\alpha|x-h|+\alpha|x|} e^{-\alpha|x|} dx \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\tau_h u) \frac{\partial w}{\partial x} e^{-\alpha|x|} dx + \int r(\tau_h u) w e^{-\alpha|x|} dx \\
& - \int \left( \frac{\sigma^2 \alpha}{2} \operatorname{sgn}(x) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x} (\tau_h u) w e^{-\alpha|x|} dx - \int (B \tau_h u) w e^{-\alpha|x|} dx \\
& = \int f \cdot (\tau_{-h} w) e^{-\alpha|x-h|+\alpha|x|} e^{-\alpha|x|} dx
\end{aligned}$$

Par soustraction avec (3.31) appliqué à  $w$  au lieu de  $v$ , on obtient (après division par  $h$ ) :

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_h u - u}{h} \frac{\partial w}{\partial x} e^{-\alpha|x|} dx + r \int \frac{\tau_h u - u}{h} w e^{-\alpha|x|} dx \\
& = \int \left( \frac{\sigma^2 \alpha}{2} \operatorname{sgn}(x) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_h u - u}{h} w e^{-\alpha|x|} dx \\
& + \int B \frac{\tau_h u - u}{h} w e^{-\alpha|x|} dx + \int f \cdot \frac{(\tau_{-h} w) e^{-\alpha|x-h|+\alpha|x|} - w}{h} e^{-\alpha|x|} dx
\end{aligned} \tag{3.34}$$

En remarquant que :

$$C_1 < e^{-\alpha h} < e^{-\alpha|x-h|+\alpha|x|} < e^{\alpha h} < C_2$$

et

$$C_3 < \frac{e^{-\alpha h} - 1}{h} < \frac{e^{-\alpha|x-h|+\alpha|x|} - 1}{h} < \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} < C_4$$

où  $C_1, C_2, C_3, C_4$  sont des constantes indépendantes de  $h$ , pour  $h$  appartenant à  $[0, 1]$ , et en utilisant le fait que  $f$  appartient à  $L^2(\mathbf{R}, e^{-\alpha|x|} dx)$  et (3.33), on voit facilement que :

$$\begin{aligned}
& \left| \int f \cdot \frac{(\tau_{-h} w) e^{-\alpha|x-h|+\alpha|x|} - w}{h} e^{-\alpha|x|} dx \right| \\
& = \left| \int f \cdot \left( \frac{(\tau_{-h} w) - w}{h} e^{-\alpha|x-h|+\alpha|x|} + w \frac{e^{-\alpha|x-h|+\alpha|x|} - 1}{h} \right) e^{-\alpha|x|} dx \right| \\
& \leq C |f|_\alpha \left( \left| \frac{(\tau_{-h} w) - w}{h} \right|_\alpha + |w|_\alpha \right) \\
& \leq C \|w\|_\alpha \cdot |f|_\alpha
\end{aligned}$$

De plus, en prenant  $w = \frac{\tau_h u - u}{h}$  dans (3.34), et en utilisant l'inégalité de Schwartz, (3.32) et le fait que  $u$  appartient à  $V_\alpha$ , on a :

$$\begin{aligned}
\left| \int \left( \frac{\sigma^2 \alpha}{2} \operatorname{sgn}(x) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_h u - u}{h} w e^{-\alpha|x|} dx \right| & \leq C \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_h u - u}{h} \right|_\alpha \cdot \left| \frac{\tau_h u - u}{h} \right|_\alpha \\
& \leq C \|u\|_\alpha \cdot \left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_h u - u}{h} \right|_\alpha \\
& \leq C \left\| \frac{\tau_h u - u}{h} \right\|_\alpha \cdot \|u\|_\alpha
\end{aligned}$$

De même, en utilisant le lemme 3.3, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \int B \frac{\tau_h u - u}{h} w e^{-\alpha|x|} dx \right| & \leq C \left\| B \frac{\tau_h u - u}{h} \right\|_\alpha \cdot \left| \frac{\tau_h u - u}{h} \right|_\alpha \\
& \leq C \left\| \frac{\tau_h u - u}{h} \right\|_\alpha \cdot \left| \frac{\tau_h u - u}{h} \right|_\alpha \\
& \leq C \left\| \frac{\tau_h u - u}{h} \right\|_\alpha \cdot \|u\|_\alpha
\end{aligned}$$

Donc, il est clair que le membre de droite de l'égalité (3.34) est plus petit que  $C\|\frac{\tau_h u - u}{h}\|_\alpha$ . D'autre part, la gauche de l'égalité (3.34) peut s'écrire que :

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_h u - u}{h} \frac{\partial w}{\partial x} e^{-\alpha|x|} dx + r \int \frac{\tau_h u - u}{h} w e^{-\alpha|x|} dx \\ &= \int \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau_h u - u}{h} \right)^2 e^{-\alpha|x|} dx + r \int \left( \frac{\tau_h u - u}{h} \right)^2 e^{-\alpha|x|} dx \\ &\geq C' \left\| \frac{\tau_h u - u}{h} \right\|_\alpha^2 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\left\| \frac{\tau_h u - u}{h} \right\|_\alpha \leq C(\|u\|_\alpha + |f|_\alpha)$$

Ce qui permet d'extraire une sous suite  $h_i$  telle que  $\frac{\tau_{h_i} u - u}{h_i}$  converge faiblement dans  $V_\alpha$ , mais  $\frac{\tau_{h_i} u - u}{h_i}$  converge vers  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , Donc, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \in V_\alpha \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_\alpha \leq C(\|u\|_\alpha + |f|_\alpha)$$

D'où :

$$\|u\|_{W^{2,2,\alpha}} \leq C(\|u\|_\alpha + |f|_\alpha)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $u$  et  $f$ , ce qui donne le résultat annoncé. ■

### Démonstration : (Démonstration du théorème 3.10)

Il suffit de montrer l'estimation :

$$\int_0^T (a^\alpha(u, v) + b^\alpha(u, v)) ds \leq C \|v\|_{L^2([0, T]; H_\alpha)} \quad (3.35)$$

Parce que (3.35), en fait, signifie que :

$$(A + B)u(s, x) \in L^2([0, T]; H_\alpha)$$

Par le théorème de représentation de Riesz, on sait qu'il existe une fonction  $F(s)$ , appartient à  $L^2([0, T]; H_\alpha)$  telle que :

$$a^\alpha(u(s), v(s)) + b^\alpha(u(s), v(s)) = (F(s), v(s))_\alpha \quad ds \text{ p.p}$$

pour tout élément  $v$  de  $L^2([0, T]; V_\alpha)$ . Cela entraîne le résultat annoncé en appliquant le lemme 3.11.

Maintenant, on commence à montrer (3.35). En partant du problème pénalisé :

$$-\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v\right)_\alpha + a^\alpha(u_\varepsilon, v) + b^\alpha(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), v)_\alpha = 0 \quad \forall v \in V_\alpha$$



en prenant  $v = \beta(u_\varepsilon) = -(\psi - u_\varepsilon)_+$  et en remarquant que  $\psi$  ne dépend pas de  $t$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\partial}{\partial t}(-(\psi - u_\varepsilon)), \beta(u_\varepsilon)\right)_\alpha + a^\alpha(-(\psi - u_\varepsilon), \beta(u_\varepsilon)) + b^\alpha(-(\psi - u_\varepsilon), \beta(u_\varepsilon)) \\ & + \frac{1}{\varepsilon}|\beta(u_\varepsilon)|_\alpha^2 + a^\alpha(\psi, \beta(u_\varepsilon)) + b^\alpha(\psi, \beta(u_\varepsilon)) = 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|(\psi - u_\varepsilon)_+|_\alpha^2 + a^\alpha(\beta(u_\varepsilon), \beta(u_\varepsilon)) + b^\alpha(\beta(u_\varepsilon), \beta(u_\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon}|\beta(u_\varepsilon)|_\alpha^2 \\ & = -a^\alpha(\psi, \beta(u_\varepsilon)) - b^\alpha(\psi, \beta(u_\varepsilon)) \end{aligned}$$

et, en intégrant de 0 à  $T$ , car  $\beta(u_\varepsilon)(T) = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}|\beta(u_\varepsilon)(0)|_\alpha^2 + \int_0^T (a^\alpha(\beta(u_\varepsilon), \beta(u_\varepsilon)) + b^\alpha(\beta(u_\varepsilon), \beta(u_\varepsilon)))ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T |\beta(u_\varepsilon)|_\alpha^2 ds \\ & = - \int_0^T (a^\alpha(\psi, \beta(u_\varepsilon)) + b^\alpha(\psi, \beta(u_\varepsilon)))ds \end{aligned}$$

Par le lemme 3.4 et en prenant  $\varepsilon < \frac{1}{\rho}$ , on a :

$$\frac{1}{2}|\beta(u_\varepsilon)(0)|^2 - \rho \int_0^T |\beta(u_\varepsilon)|_\alpha^2 ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T |\beta(u_\varepsilon)|_\alpha^2 ds \leq - \int_0^T (a^\alpha(\psi, \beta(u_\varepsilon)) + b^\alpha(\psi, \beta(u_\varepsilon)))ds$$

D'où :

$$\begin{aligned} 0 & \leq (1 - \varepsilon\rho) \int_0^T |\beta(u_\varepsilon)|_\alpha^2 ds \\ & \leq \varepsilon \left[ -\frac{1}{2}|\beta(u_\varepsilon)(0)|^2 - \int_0^T (a^\alpha(\psi, \beta(u_\varepsilon)) + b^\alpha(\psi, \beta(u_\varepsilon)))ds \right] \\ & \leq \varepsilon \left[ - \int_0^T (a^\alpha(\psi, \beta(u_\varepsilon)) + b^\alpha(\psi, \beta(u_\varepsilon)))ds \right] \end{aligned}$$

Remarquons les propriétés de  $a^\alpha(\cdot, \cdot)$  et  $b^\alpha(\cdot, \cdot)$  indiqués au début de la section 3.2.1, et utilisons l'inégalité de Schwartz et le fait que  $\psi$  appartient à  $W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^T |\beta(u_\varepsilon)|_\alpha^2 ds & \leq \frac{\varepsilon C}{1 - \varepsilon\rho} \int_0^T \|\psi\|_{W^{2,2,\alpha}} \cdot |\beta(u_\varepsilon)|_\alpha ds \\ & \leq \frac{\varepsilon\rho}{1 - \varepsilon\rho} T^{\frac{1}{2}} \|\psi\|_{W^{2,2,\alpha}} \left( \int_0^T |\beta(u_\varepsilon)|_\alpha^2 ds \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Prenant  $\varepsilon$  assez petit, on a :

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \beta(u_\varepsilon) \right\|_{L^2([0,T]; H_\alpha)} \leq C \quad (3.36)$$

avec  $C$  indépendant de  $\varepsilon$ .

A partir du problème pénalisé et puis en utilisant l'estimation (3.5) :

$$\left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2([0,T]; H_\alpha)} \leq C$$

et (3.36), on déduit :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^T (a^\alpha(u_\varepsilon, v) + b^\alpha(u_\varepsilon, v)) ds \right| &= \left| \int_0^T \left( -\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v\right)_\alpha + \frac{1}{\varepsilon} (\beta(u_\varepsilon), v)_\alpha \right) ds \right| \\
&\leq C \|v\|_{L^2([0, T]; H_\alpha)}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

avec  $C$  indépendant de  $\varepsilon$ . Cela implique (3.35) en faisant passer à la limite dans (3.37). ■

**Remarque 3.12** *En combinant les résultats de la proposition 3.5 et ceux du théorème 3.6 et du théorème 3.10, on peut maintenant énoncer que l'inéquation parabolique (3.1) a une et une seule solution  $u$  sous la condition  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ . cela signifie qu'on a déjà accompli la première partie de notre travail.*

Avant d'entrer la deuxième partie de notre travail, on rappelle d'abord un résultat classique, qui résulte du théorème de plongement entre espaces de Sobolev (cf. [1] P107-P108 lemme 5.15, [9] P166 théorème IX.12 ).

**Lemme 3.13** *Si  $p > \frac{n}{2}$ , et soit  $\varphi(t, x)$  est une fonction vérifiant :*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^p(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n) \quad \text{et} \quad \varphi \in L^p(\mathbf{R}; W^{2,p}(\mathbf{R}^n))$$

*Alors  $\varphi(t, x)$  est borné et on a :*

$$\|\varphi(t, x)\|_{L^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)} \leq C (\|\varphi\|_{L^p(\mathbf{R}; W^{2,p}(\mathbf{R}^n))} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{L^p(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)})$$

La corollaire 3.14 résulte du lemme 3.13.

**Corollaire 3.14** *Si  $n = 1$ ,  $p = 2$  et  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , alors, la solution  $u$  de (3.1) a une version continue sur  $[0, T] \times \mathbf{R}$  et il existe une constante  $C$  telle que :*

$$|u(t, x)| \leq C \exp\left(\frac{\alpha}{2}|x|\right)$$

*pour tout  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}$ .*

En effet, rappelons, d'abord, quelques résultats qu'on a déjà eus avant : Si  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , alors il existe une unique fonction  $u$  sur  $[0, T] \times \mathbf{R}$  telle que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; W^{0,2,\alpha}(\mathbf{R})) \quad u \in L^2([0, T]; W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R}))$$

et vérifie l'inéquation parabolique (3.1). Alors  $v = u \exp(-\frac{\alpha}{2}(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}})$  vérifie :

$$v \in L^2(\mathbf{R}; W^{2,2}(\mathbf{R})) \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$$

En utilisant le lemme 3.13, on a donc :  $|u(t, x)| \leq C \exp(\frac{\alpha}{2}|x|)$ .

D'autre part, en posant  $v_m = v * \rho_m$  où  $\rho_m$  est une suite régularisantes (voir la démonstration du théorème 3.20), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_m}{\partial t} &\longrightarrow \frac{\partial v}{\partial t} && \text{dans } L^2([0, T]; W^{0,2}(\mathbf{R})) \\ v_m &\longrightarrow v && \text{dans } L^2([0, T]; W^{2,2}(\mathbf{R})) \end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant le lemme 3.13, on voit que :

$$\begin{aligned} \|v_m - v\|_{L^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R})} &\leq C(\|v_m - v\|_{L^2(\mathbf{R}; W^{2,2}(\mathbf{R}))} + \|\frac{\partial v_m}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t}\|_{L^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R})}) \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{quand } m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

ce qui implique que  $v_m$  converge uniformément vers  $v$ . D'où  $v$  est une fonction continue. On obtient, finalement, que  $u$  a une version continue.

### 3.5 L'égalité $u^* = u$

Dans cette section, on montrera d'abord que la solution  $u$  de l'inéquation parabolique (3.1) est égale à  $u^*$  si  $\psi$  appartient à  $W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$  (théorème 3.20). Or, dans le cas pratique, par exemple le put américain  $\psi(x) = (K - e^x)_+$  n'appartient pas à  $W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , on devra donc affaiblir l'hypothèse sur  $\psi$ . Cela sera fait par le théorème 3.26 à la fin de la section 3.5.

Maintenant, on introduit d'abord deux lemmes, qui seront utiles dans la démonstration du théorème 3.20. En revenant au lemme 2.5, on voit qu'on a le lemme analogue suivant si  $T$  est fini.

**Lemme 3.15** Soit  $\varphi \in L^2([0, T]; L^2_{loc}(\mathbf{R}))$ , soit pour  $R > 0$ ,  $\tau_R$  le temps de sortie de l'intervalle  $\mathcal{O}_R = ]-R, R[$  :

$$\tau_R = \inf\{s \geq 0 \mid X_s^{x_0} \notin \mathcal{O}_R\}$$

On a alors :

$$\mathbf{E} \left( \int_0^{T \wedge \tau_R} |\varphi(s, X_s^{x_0})| ds \right) \leq C \|\varphi\|_{L^2([0, T] \times \mathcal{O}_R)}$$

où  $C$  est une constante ne dépendant ni de  $\varphi$  ni de  $R$ .

**Démonstration :** Rappelons que la fonction  $p(t, x_0; s, x)$  est la densité du flot  $X_s$ , on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \int_0^{T \wedge \tau_R} |\varphi(s, X_s^{x_0})| ds \right) &\leq \mathbf{E} \int_0^T (|\varphi(s, X_s^{x_0})| \mathbf{1}_{\{|X_s| \leq R\}}) ds \\ &= \int_0^T ds \int_{\mathcal{O}_R} dx |\varphi(s, x)| \cdot p(0, x_0; s, x) \end{aligned}$$

Et, en utilisant l'inégalité de Hölder et (2.8) :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left( \int_0^{T \wedge \tau_R} |\varphi(s, X_s^{x_0})| ds \right) \\ & \leq \|\varphi\|_{L^2([0, T] \times \mathcal{O}_R)} \left( \int_0^T ds \int_{\mathcal{O}_R} (p(0, x_0, s, x))^2 dx \right)^{1/2} \\ & \leq \|\varphi\|_{L^2([0, T] \times \mathcal{O}_R)} \left( \int_0^T \|\nu_{0,s} * g(0, x_0; s, \cdot)\|_{L^2}^2 ds \right)^{1/2} \end{aligned}$$

puisque  $\nu_{0,s}$  est une mesure de probabilité, on déduit :

$$\begin{aligned} \|\nu_{0,s} * g(0, x_0; s, \cdot)\|_{L^2}^2 &= \left\| \int g(0, x_0; s, \cdot - y) \nu_{0,s}(dy) \right\|_{L^2}^2 \\ &\leq \int \|g(0, x_0; s, \cdot - y)\|_{L^2}^2 \nu_{0,s}(dy) \\ &= \|g\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

D'après (2.7) et on notons  $C_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ ,  $C_2 = \frac{1}{2\sigma^2}$ , on a :

$$\begin{aligned} & \|g\|_{L^2([0, T] \times \mathbf{R})} \\ &= \left[ \int_0^T ds \cdot \int dy \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma s^{\frac{1}{2}}}} \exp\left(-\frac{y - (y_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})s)^2}{2\sigma^2 s}\right) \right)^2 \right]^{1/2} \\ &\leq C_1 \left[ \int_0^T ds \cdot \int dy (s^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{4}} \exp(-C_2 y^2))^2 \right]^{1/2} \\ &= \left( \int_0^T \frac{ds}{\sqrt{s}} \right)^{1/2} \cdot \left( \int \exp(-2C_2 y^2) dy \right)^{1/2} \\ &\leq C \end{aligned} \tag{3.38}$$

on obtient, donc :

$$\mathbf{E} \left( \int_0^{T \wedge \tau_R} |\varphi(s, X_s)| ds \right) \leq C \|\varphi\|_{L^2([0, T] \times \mathcal{O}_R)}$$

où  $C$  est une constante ne dépendant ni de  $\varphi$  ni de  $R$ . ■

**Remarque 3.16** 1. Il résulte du lemme 3.15 que : si  $\varphi = \varphi'$  presque partout sur  $[0, T] \times \mathbf{R}$ , on a alors :

$$\mathbf{E} \left( \int_0^{\theta \wedge \tau_R} \varphi(s, X_s) ds \right) = \mathbf{E} \left( \int_0^{\theta \wedge \tau_R} \varphi'(s, X_s) ds \right)$$

pour tout temps d'arrêt  $\theta$ .

2. On montrerait de même que : si  $\tau_R^{t,x} = \inf\{s \geq t \mid X_s^{t,x} \notin \mathcal{O}_R\}$ , on a :

$$\mathbf{E} \left( \int_0^{T \wedge \tau_R^{t,x}} |\varphi(s, X_s)| ds \right) \leq C \|\varphi\|_{L^2([0, T] \times \mathcal{O}_R)}$$

où  $C$  est une constante ne dépendant ni de  $\varphi$  ni de  $R$ .

Le lemme 3.17, qui peut être montré en suivant exactement le même raisonnement que celui dans le lemme 2-2 Ch 7 [28], est une généralisation du lemme 2-2 Ch 7 [28] (voir Annex A). Il sera utile dans la démonstration du lemme 3.18.

**Lemme 3.17** Soit  $\Phi(t, y, z)$  une fonction mesurable de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ , telle que pour tout réel  $t$ ,  $z$  la fonction  $y \mapsto \Phi(t, y, z)$  soit continue sur  $\mathbf{R}^d$ , et soit  $(Y_t)_{t \geq 0}$  un processus continu à gauche, à valeur dans  $\mathbf{R}^d$ , adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , de plus  $\Phi(t, y, z)$  est une fonction continue en  $t$ . On suppose que, pour tout  $t > 0$ ,

$$\mathbf{E} \left( \int_0^t ds \int \nu(dz) \Phi^2(s, y, z) \right) < +\infty$$

Alors le processus  $M_t$  définie par :

$$M_t = \sum_{j=1}^{N_t} \Phi(\tau_j, Y_{\tau_j}, U_j) - \lambda \int_0^t ds \int \nu(dz) \Phi(s, Y_s, z)$$

est une martingale de carré intégrable.

**Lemme 3.18** Soit  $u(t, x)$  une fonction de classe  $C^2$  à dérivée bornée en  $x$  et vérifiant :

$$|u(t, x)| \leq C \exp\left(\frac{\alpha}{2}|x|\right)$$

$X_t$  est une solution de (1.11) :

$$\begin{cases} X_0 & = x_0 \\ dX_t & = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB_t + d\left(\sum_{j=1}^{N_t} Z_j\right) \end{cases}$$

Si l'hypothèse **(H)** est vérifiée, alors, le processus :

$$M_t = e^{-rt} u(t, X_t^x) - \int_0^t e^{-rs} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + Au + Bu \right)(s, X_s^x) ds$$

est une martingale, où  $A, B$  sont les opérateurs définis dans le problème (3.2).

**Démonstration :** La formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} e^{-rt} u(t, X_t^x) &= u(0, x_0) + \int_0^t e^{-rs} \left( \frac{\partial u}{\partial s} - ru \right) ds + \int_0^t e^{-rs} \frac{\partial u}{\partial x} \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \sigma dB_s \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t e^{-rs} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ds + \sum_{j=1}^{N_t} \left( e^{-r\tau_j} (u(\tau_j, X_{\tau_j}) - u(\tau_j, X_{\tau_j}^-)) \right) \end{aligned}$$

où les  $\tau_j$  sont les temps de sauts du processus de Poisson.

En appliquant les définitions de l'opérateur  $A$  et l'opérateur  $B$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} e^{-rt}u(t, X_t^x) &= u(0, x_0) + \int_0^t e^{-rs} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + Au + Bu \right)(s, X_s^x) ds \\ &\quad + \sigma \int_0^t e^{-rs} \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s^x) dB_s + \sum_{j=1}^{N_t} [e^{-r\tau_j} (u(\tau_j, X_{\tau_j}) - u(\tau_j, X_{\tau_j^-}))] \\ &\quad - \lambda \int_0^t ds e^{-rs} \cdot \int \nu(dz) (u(s, X_s + z) - u(s, X_s)) \end{aligned}$$

Notant :

$$L_t = \sum_{j=1}^{N_t} [e^{-r\tau_j} (u(\tau_j, X_{\tau_j}) - u(\tau_j, X_{\tau_j^-}))] - \lambda \int_0^t ds e^{-rs} \cdot \int \nu(dz) (u(s, X_s + z) - u(s, X_s))$$

on a :

$$M_t = u(0, x_0) + \sigma \int_0^t e^{-rs} \frac{\partial u}{\partial x} dB_s + L_t$$

De plus, par l'hypothèse du lemme, il n'est pas difficile de voir que :

$$\mathbf{E} \left( \int_0^t e^{-2rs} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 ds \right) < +\infty$$

ce qui entraîne que  $u(0, x_0) + \sigma \int_0^t e^{-rs} \frac{\partial u}{\partial x} dB_s$  est une martingale. On voit, donc, que pour montrer que  $M_t$  est une martingale, il suffit de montrer que  $L_t$  est une martingale. En effet, posons :

$$\Phi(s, X_s, z) = e^{-rs} (u(s, X_s + z) - u(s, X_s))$$

On peut alors écrire :

$$L_t = \sum_{j=1}^{N_t} \Phi(\tau_j, X_{\tau_j^-}, z) - \lambda \int_0^t ds \int \nu(dz) \Phi(s, X_{s^-}, z)$$

Par ailleurs, puisque  $|u(t, x)| \leq \exp \frac{\alpha}{2} |x|$ , on résulte que :

$$\begin{aligned} |u(s, X_s + z) - u(s, X_s)|^2 &\leq 2(|u(s, X_s + z)|^2 + |u(s, X_s)|^2) \\ &\leq 2C(\exp(\alpha|X_s + z|) + \exp(\alpha|X_s|)) \\ &\leq 2C \exp(\alpha|X_s|) \cdot (\exp(\alpha|z|) + 1) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \int_0^t ds \int \nu(dz) \Phi^2(s, X_{s^-}, z) \right) &= \mathbf{E} \left( \int_0^t ds \int \nu(dz) \Phi^2(s, X_s, z) \right) \\ &\leq C \mathbf{E} \left[ \int_0^t ds e^{-2rs} \cdot \int \nu(dz) e^{\alpha|X_s|} (e^{\alpha|z|} + 1) \right] \\ &= C \mathbf{E} \left[ \int_0^t ds e^{-2rs} \cdot e^{\alpha|X_s|} (\mathbf{E} e^{\alpha|z|} + 1) \right] \\ &= C (\mathbf{E} e^{\alpha|z|} + 1) \left( \int_0^t e^{-2rs} \mathbf{E} e^{\alpha|X_s|} ds \right) \\ &\leq C' (\mathbf{E} e^{\alpha|z|} + 1) \mathbf{E} (\exp \alpha \sup_{s \in [0, T]} |X_s|) \end{aligned} \quad (3.39)$$

où  $C, C'$  sont des constantes. Or, remarquons que  $(N_s)_{s \geq 0}$  est un processus croissant en  $s$  et utilisons l'indépendance entre le processus  $(N_t)_{t \geq 0}$  et  $(U_j)_{j \geq 1}$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp \alpha \sup_{s \in [0, T]} \left| \sum_{j=1}^{N_s} Z_j \right| &\leq \mathbf{E} \exp \alpha \sum_{j=1}^{N_T} |Z_j| = \mathbf{E} \prod_{j=1}^{N_T} e^{\alpha |Z_j|} \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(N_T = k) \mathbf{E} \left( \prod_{j=1}^k e^{\alpha |Z_j|} \right) \\ &= \exp(\lambda T (\mathbf{E} e^{\alpha |Z|} - 1)) \end{aligned} \quad (3.40)$$

D'où, d'après **(H)** :

$$\mathbf{E} \exp \alpha \sup_{s \in [0, T]} \left| \sum_{j=1}^{N_s} Z_j \right| < +\infty$$

D'autre part, il est facile de voir que :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \exp \alpha \sup_{s \in [0, T]} \left| x_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) s + \sigma B_s \right| \right) &\leq \mathbf{E} \left[ \exp \left( \alpha \left( |x_0| + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sup_{s \in [0, T]} |B_s| \right) \right) \right] \\ &\leq \exp \left( \alpha \left( |x_0| + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right) \right) \mathbf{E} \left( \exp \left( \alpha \sigma \sup_{s \in [0, T]} |B_s| \right) \right) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

On peut donc obtenir, en utilisant l'indépendance entre  $(B_t)_{t \geq 0}$ ,  $(N_t)_{t \geq 0}$  et  $(U_j)_{j \geq 1}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \exp \alpha \sup_{s \in [0, T]} |X_s| \right) &= \mathbf{E} \left( \exp \alpha \sup_{s \in [0, T]} \left| x_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) s + \sigma B_s + \sum_{j=1}^{N_s} Z_j \right| \right) \\ &\leq \mathbf{E} \left( \exp \alpha \sup_{s \in [0, T]} \left| x_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) s + \sigma B_s \right| \right) \mathbf{E} \left( \exp \alpha \sup_{s \in [0, T]} \left| \sum_{j=1}^{N_s} Z_j \right| \right) \\ &< +\infty \end{aligned} \quad (3.41)$$

D'après (3.39) et (3.41) et en utilisant le **(H)**, on a :

$$\mathbf{E} \left( \int_0^t ds \int \nu(dz) \Phi^2(s, X_{s-}, z) \right) < +\infty$$

par le lemme 3.17, cela implique que le processus  $L_t$  est une martingale. On obtient finalement le résultat énoncé.  $\blacksquare$

**Remarque 3.19** Si  $X_s^{t,x}$  est la solution de (1.11)

$$\begin{cases} X_t &= x \\ dX_s &= \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \sigma dB_s + d \left( \sum_{j=1}^{N_s} Z_j \right) \quad \text{pour } s \geq t \end{cases}$$

alors, le processus

$$M_\beta = e^{-r(\beta-t)}u(\beta, X_\beta^{t,x}) - \int_t^\beta e^{-r(s-t)}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu\right)(s, X_s^{t,x})ds, \quad \beta \geq t$$

est une martingale.

Maintenant, on peut énoncer le théorème principal dans cette section.

**Théorème 3.20** *Si  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , et  $(\mathbf{H})$  est vérifiée, alors la solution  $u$  de l'inéquation parabolique (3.1) vérifie :*

$$u(t, x) = u^*(t, x) \quad \text{sur} \quad [0, T] \times \mathbf{R}$$

où  $u^*(t, x)$  est définie par :

$$u^*(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{I}_{t,T}} \mathbf{E} (e^{-r(\tau-t)}\psi(X_\tau^{t,x}))$$

Avant de commencer la démonstration du théorème 3.20, nous ferons, d'abord, une remarque sur la fonction obstacle  $\psi$ .

**Remarque 3.21** *Si  $\psi \in W^{2,p,\alpha}(\mathbf{R})$ , on a  $\psi e^{-\frac{\alpha}{p}(1+|x|^2)^{1/2}} \in W^{2,p}(\mathbf{R})$ . Par le corollaire IX 13 P169 dans le livre de Brezis (cf. [9]), on sait que :  $W^{2,p}(\mathbf{R}^n) \subset L^\infty(\mathbf{R}^n)$  si  $p > \frac{n}{2}$ . Particulièrement, si  $n = 1$ ,  $p = 2$  on obtient :*

$$|\psi(x)| \leq C \exp\left(\frac{\alpha}{2}|x|\right)$$

D'autre part, on introduit quelques résultats qui est résulte du théorème IV 22 dans le livre de Brezis (cf. [9]) et qui seront utiles dans la démonstration du théorème 3.20.

**Lemme 3.22** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné, et soit  $f$  appartenant à  $L^2(\Omega)$ , et supposons que  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  est une suite régularisante (i.e une suite qui vérifie :  $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ ,  $\text{supp}\rho_n \subset ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ ,  $\int \rho_n = 1$ ,  $\rho_n \geq 0$ ), alors :*

$$\rho_n * f \rightarrow f \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)$$

**Lemme 3.23** *Soit  $f$  appartenant à  $H_\alpha$ , alors :*

$$\rho_n * f \rightarrow f \quad \text{dans} \quad H_\alpha$$

De plus, on donne une remarque

**Remarque 3.24** 1. *Soit  $f \in H_\alpha$ , alors  $f \in L^2(\Omega)$ .*



2. Si  $|f(x)| \leq C \exp(\alpha|x|)$ , alors  $f_n (= \rho_n * f)$  vérifie :  $|f_n(x)| \leq C \exp(\alpha|x|)$

En effet :

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \left| \int f(x-y)\rho_n(y)dy \right| = \left| \int \rho_n(dy)f(x-y) \right| \\ &\leq \int \rho_n(dy)|f(x-y)| \leq C \int \rho_n(dy)e^{\alpha|x-y|} \\ &\leq Ce^{\alpha|x|} \int \rho_n(dy)e^{\alpha|y|} = Ce^{\alpha|x|} \int e^{\alpha|y|}\rho_n(y)dy \\ &\leq C \exp(\alpha|x|) \end{aligned}$$

Maintenant, on met l'accent sur la démonstration du théorème 3.20. En effet, le point essentiel est de montrer :

$$\mathbf{E}(e^{-r\theta}u(\theta, X_\theta)) = \mathbf{E}u(0, x_0) + \mathbf{E} \int_0^\theta e^{-rs} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu \right)(s, X_s) ds \quad (3.42)$$

pour tout temps d'arrêt  $\theta$  à valeurs dans  $[0, T]$ .

On pense naturellement à utiliser le lemme 3.18, mais les problèmes se posent à cause des faits que :

1.  $u(t, x)$  n'est pas forcément une fonction à dérivée bornée en  $x$ .
2.  $u(t, x)$  n'est pas de classe  $C^2$ .

En réalité, on utilisera la méthode d'approximation. Pour se ramener aux conditions du lemme 3.18, on doit introduire le temps de sortie de l'intervalle  $\mathcal{O}_R = ]-R, R[$ , on prouvera d'abord l'égalité (3.42) pour  $\theta \wedge \tau_R$  au lieu de  $\theta$ , puis, on fera tendre  $R$  vers l'infini pour obtenir (3.42).

### Démonstration : (Démonstration du théorème 3.20)

La démonstration sera faite en deux parties

1. *Première étape :*

Comme  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , d'après les résultats dans la section précédente, on sait qu'il existe une unique fonction continue  $u$  sur  $[0, T] \times \mathbf{R}$  telle que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; W^{0,2,\alpha}(\mathbf{R})) \quad \text{et} \quad u \in L^2([0, T]; W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R}))$$

et  $u$  vérifie l'inéquation parabolique (3.1) et l'estimation  $|u(t, x)| \leq C \exp(\alpha|x|)$ .

Notons :

$$\tilde{u}(t, x) = \begin{cases} u(0, x) & \text{pour } t < 0 \text{ et } x \in \mathbf{R} \\ u(T, x) & \text{pour } t > T \text{ et } x \in \mathbf{R} \\ u(t, x) & \text{pour } (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R} \end{cases}$$

Il est clair que  $\tilde{u}(t, x)$  est une fonction continue sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ . D'où

$$\tilde{u}(t, x) \in L^1_{loc}(\mathbf{R}, L^1_{loc}(\mathbf{R}))$$

Soient  $(\rho_m)_{m \geq 1}$  (resp.  $(\tilde{\rho}_m)_{m \geq 1}$ ) deux suites de fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}$  (resp.  $\mathbf{R}$ ) à support compact,  $\rho_m \geq 0$  et  $\int \rho_m = 1$  avec  $\text{supp} \rho_m \subset ]-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}[$ , (resp.  $\tilde{\rho}_m \geq 0$  et  $\int \tilde{\rho}_m = 1$  avec  $\text{supp} \tilde{\rho}_m \subset ]-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}[$ ). On pose :

$$\begin{aligned} u_m(t, x) &= \tilde{u} * (\rho_m \otimes \tilde{\rho}_m)(t, x) \\ &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \tilde{u}(t-s, x-y) \rho_m(y) \tilde{\rho}_m(s) dy ds \end{aligned}$$

D'où :

$$u_m(t, x) \in C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$$

Par conséquent, en remarquant la définition de  $\tilde{u}(t, x)$ ,

$$u_m(t, x) \text{ converge uniformément vers } u(t, x) \text{ sur le compact } [0, T] \times [-R, R]. \quad (3.43)$$

Par ailleurs, puisque  $u \in L^2([0, T]; W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R}))$  et  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; H_\alpha)$ , par le lemme 3.23, on obtient :

$$\begin{aligned} u_m &\longrightarrow u \text{ dans } L^2([0, T]; W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})) \\ \frac{\partial u_m}{\partial t} &\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \text{ dans } L^2([0, T]; H_\alpha) \end{aligned}$$

D'où :

$$u_m \in L^2([0, T]; W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_m}{\partial t} \in L^2([0, T]; H_\alpha)$$

Ce qui entraîne, par le lemme 3.13 :

$$|u_m(t, x)| \leq C \exp(\alpha|x|) \quad (3.44)$$

D'autre part, par la remarque 3.24 et le lemme 3.22, il n'est pas difficile de voir que :

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + Au_m \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + Au \text{ dans } L^2([0, T]; L^2(\mathcal{O}_R)) \quad (3.45)$$

et de plus, on a :

$$Bu_m \longrightarrow Bu \text{ dans } L^2([0, T]; L^2(\mathcal{O}_R)) \quad (3.46)$$

En effet :

$$\begin{aligned} |Bu_m - Bu|_{L^2([0, T]; L^2(\mathcal{O}_R))}^2 &= \int_{[0, T]} ds \int_{\mathcal{O}_R} (Bu_m - Bu)^2 e^{-\alpha|x|} e^{\alpha|x|} dx \\ &\leq e^{\alpha|R|} \int_{[0, T]} ds |Bu_m - Bu|_\alpha^2 \\ &\leq e^{\alpha|R|} |u_m - u|_{L^2([0, T]; L^2(\mathcal{O}_R))}^2 \quad \text{d'après le lemme 3.3} \end{aligned}$$

Par le lemme 3.18, on déduit que :

$$M_{t \wedge \tau_R} = e^{-r(t \wedge \tau_R)} u_m(t \wedge \tau_R, X_{t \wedge \tau_R}^x) - \int_0^{t \wedge \tau_R} e^{-rs} \left( \frac{\partial u_m}{\partial t} + Au_m + Bu_m \right)(s, X_s) ds \quad (3.47)$$

est une martingale. D'où, par le théorème d'arrêt, pour tout temps d'arrêt  $\theta$  à valeurs  $[0, T]$ , on a :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} e^{-r(\theta \wedge \tau_R)} u_m(\theta \wedge \tau_R, X_{\theta \wedge \tau_R}^x) \\ &= u_m(0, x) + \mathbf{E} \int_0^{\theta \wedge \tau_R} e^{-rs} \left( \frac{\partial u_m}{\partial t} + Au_m + Bu_m \right)(s, X_s) ds \end{aligned} \quad (3.48)$$

Comme  $u_m$  converge uniformément vers  $u$  sur  $[0, T] \times [-R, R]$ , on voit que :

$$u_m(0, x) \longrightarrow u(0, x) \quad \text{si } m \rightarrow \infty$$

Par ailleurs, d'après (3.44), on a :

$$|u_m(\theta \wedge \tau_R, X_{\theta \wedge \tau_R}^x)| \leq C \exp(\alpha |X_{\theta \wedge \tau_R}^x|) \leq \exp(\alpha \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|)$$

or  $\mathbf{E} \exp(\alpha \sup_t |X_t|) < \infty$  (voir (3.41)), par ailleurs, comme  $u_m$  converge vers  $u$  dans  $L^2([0, T]; W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R}))$ , il existe une sous suite, encore noté  $u_m$ , tel que  $u_m$  converge vers  $u$  presque sûrement dans  $\mathbf{R}$ , on déduit, donc, par le théorème de Lebesgue,

$$\mathbf{E} e^{-r(\theta \wedge \tau_R)} u_m(\theta \wedge \tau_R, X_{\theta \wedge \tau_R}^x) \longrightarrow \mathbf{E} e^{-r(\theta \wedge \tau_R)} u(\theta \wedge \tau_R, X_{\theta \wedge \tau_R}^x)$$

D'autre part, en utilisant le lemme 3.15 et en tenant compte (3.45) et (3.46),

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + Au_m + Bu_m \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu \quad \text{dans } L^2([0, T]; L^2(\mathcal{O}_R))$$

On a :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \int_0^{\theta \wedge \tau_R} e^{-rs} \left( \frac{\partial u_m}{\partial t} + Au_m + Bu_m \right)(s, X_s) ds \\ & \longrightarrow \mathbf{E} \int_0^{\theta \wedge \tau_R} e^{-rs} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu \right)(s, X_s) ds \quad m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

ce qui donne, en faisant tendre  $m$  vers l'infini dans (3.48),

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} (e^{-r(\theta \wedge \tau_R)} u(\theta \wedge \tau_R, X_{\theta \wedge \tau_R}^x)) \\ &= u(0, x) + \mathbf{E} \int_0^{\theta \wedge \tau_R} e^{-rs} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + Au + Bu \right)(s, X_s) ds \end{aligned} \quad (3.49)$$

Maintenant, on fera tendre  $R$  vers l'infini dans (3.49) pour obtenir (3.42). Mais, d'abord, en remarquant :

$$u(\theta \wedge \tau_R, X_{\theta \wedge \tau_R}^x) \leq C \exp(\alpha |X_{\theta \wedge \tau_R}|) \leq C \exp(\alpha \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|)$$

et en utilisant, de nouveau, le fait que : ( voir (3.41)),

$$\mathbf{E} \exp(\alpha \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|) < +\infty$$

on déduit, par le théorème du Lebesgue, que :

$$\mathbf{E} (e^{-r(\theta \wedge \tau_R)} u(\theta \wedge \tau_R, X_{\theta \wedge \tau_R}^x)) \longrightarrow \mathbf{E} (e^{-r\theta} u(\theta, X_\theta^x)) \quad \text{si } R \rightarrow \infty$$

D'autre part, comme  $\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu \leq 0$ , d'où  $\int_0^{\theta \wedge \tau_R} e^{-rs} (\frac{\partial u}{\partial s} + Au + Bu)(s, X_s) ds$  est décroissant en  $R$ , on a alors

$$\mathbf{E} \int_0^{\theta \wedge \tau_R} e^{-rs} (\frac{\partial u}{\partial s} + Au + Bu)(s, X_s) ds \longrightarrow \mathbf{E} \int_0^\theta e^{-rs} (\frac{\partial u}{\partial s} + Au + Bu)(s, X_s) ds$$

en appliquant le théorème de convergence monotone. Ce qui implique finalement (3.42).

## 2. Deuxième étape

Comme  $\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu \leq 0$  presque sûrement sur  $[0, T] \times \mathbf{R}$ , on déduit de l'égalité (3.42) que  $e^{-rt} u(t, X_t)$  est une sur-martingale. Pour  $t$  quelconque fixé dans  $[0, T]$ , puisque  $u$  majore  $\psi$ , on a :

$$\begin{aligned} e^{-rt} u(t, X_t) &\geq \mathbf{E} (e^{-r\tau} u(\tau, X_\tau) | \mathcal{F}_t) \\ &\geq \mathbf{E} (e^{-r\tau} \psi(X_\tau) | \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

D'où, par la proposition 1.3,

$$\begin{aligned} u(t, X_t) &\geq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E} (e^{-r(\tau-t)} \psi(X_\tau) | \mathcal{F}_t) \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E} (e^{-r(\tau-t)} \psi(X_\tau^{t,x})) |_{x=X_t} \\ &= u^*(t, X_t) \end{aligned}$$

Par ailleurs, posons :

$$\tau_t = \inf\{s \geq t \mid \psi(X_s) = u(s, X_s)\}$$

alors, pour  $t \leq s < \tau_t$ , on a :  $\psi(X_s) < u(s, X_s)$ . D'autre part, par les propriétés de  $u$  et l'existence d'une densité pour le flot, on a :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu\right)(s, X_s) = 0 \quad ds \, d\mathbf{P} \quad \text{presque partout sur } \{s < \tau_t\} \quad (3.50)$$

En effet, comme  $\left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu\right)(\psi - u) = 0 \quad dt \, dx$  presque partout, on peut écrire que :

$$dt \, dx \{ (t, x) \mid \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu\right)(\psi - u) \neq 0 \} = 0$$

où  $dt, dx$  désignent les mesures. Pour  $dt$ -presque tout  $t$ , on a :

$$dx \{ x \mid \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu\right)(\psi - u) \neq 0 \} = 0$$

or  $X_s$  a une densité, donc la loi de  $X_s$  est continue par rapport de la mesure  $dx$ , d'où :

$$\mathbf{P}_{X_t}\{x \mid (\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu)(\psi - u) \neq 0\} = 0$$

On a :

$$(\psi - u)(\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu)(t, X_t) = 0 \quad dt \, d\mathbf{P} \text{ presque sûrement}$$

ce qui donne (3.50).

Maintenant, travaillant plutôt avec le temps initial  $t$  au lieu de 0, et en utilisant la remarque 3.19 et la remarque 3.16 2) et en raisonnant de la même façon que pour obtenir (3.42), on obtient :

$$\mathbf{E}(e^{-r(\tau_t-t)}u(\tau_t, X_{\tau_t})) = \mathbf{E}u(t, X_t) + \mathbf{E} \int_t^{\tau_t} e^{-r(s-t)}(\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu)(s, X_s)ds$$

D'où, par (3.50),

$$\mathbf{E}(e^{-r\tau_t}u(\tau_t, X_{\tau_t})) = \mathbf{E}(e^{-rt}u(t, X_t))$$

et, comme  $u(\tau_t, X_{\tau_t}) = \psi(X_{\tau_t})$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{-rt}u(t, X_t)) &= \mathbf{E}(e^{-r\tau_t}\psi(X_{\tau_t})) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(e^{-r\tau_t}\psi(X_{\tau_t})|\mathcal{F}_t)) \end{aligned}$$

D'où, par la proposition 1.3,

$$\begin{aligned} u(t, X_t) &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-r(\tau-t)}\psi(X_\tau)|\mathcal{F}_t) \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-r(\tau-t)}\psi(X_\tau^{t,x})) \\ &= u^*(t, X_t) \end{aligned}$$

On a, alors,

$$u(t, X_t) = u^*(t, X_t) \quad p.s$$

D'où

$$u(0, x) = u^*(0, x)$$

En travaillant avec le flot plutôt qu'avec  $(X_t)$ , on obtiendrait de la même façon :

$$u(t, x) = u^*(t, x) \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}$$

■

Mais dans le cas du put américain,  $\psi(x) = (K - e^x)_+ \in W^{1,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , n'appartient pas à  $W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ . On doit donc établir l'égalité  $u = u^*$  sous des hypothèses plus faibles pour  $\psi$ , compatibles avec l'hypothèse qu'on a déjà faite sur  $\psi$ . On rappelle le lemme qui est montré dans le [24] (voir le lemme 3.3 [24]).

**Lemme 3.25** Si  $\psi \in W^{1,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , alors il existe  $\nu > 0$  et une suite  $\psi_m$  d'éléments de  $W^{2,2,\nu}(\mathbf{R})$  qui converge uniformément vers  $\psi$ .

En suivant exactement le même raisonnement que [24] et en utilisant le lemme 3.25, on obtient le théorème suivant :

**Théorème 3.26** Supposons  $\psi$  appartient à  $W^{1,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , Alors, la solution  $u$  de l'inéquation variationnelle (3.3) coïncide avec la fonction  $u^*(t, x)$  définie par :

$$u^*(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E} (e^{-r(\tau-t)} \psi(X_\tau^{t,x}))$$

### 3.6 Smooth fit

Dans le cas du put américain,  $\psi(x) = (K - e^x)_+$ , et il est clair que  $\psi(\cdot)$  a les propriétés suivantes :

1.  $|\psi| \leq K$  et  $\psi'(x) = -e^x \mathbf{1}_{\{K > e^x\}}$  ce qui entraîne que :  $|\psi'(x)| \leq K$
2.  $\psi(x) \in W^{1,2,\alpha}(\mathbf{R})$
3. La fonction  $x \rightarrow \psi(\log x) = (K - x)_+$  est convexe sur  $]0, \infty[$ .

En appliquant le théorème 3.26, on a :

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u^*(t, x) \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E} (e^{-r(\tau-t)} \psi(X_\tau^{t,x})) \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E} (e^{-r(\tau-t)} \psi(x + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(\tau - t) + \sigma(B_\tau - B_t) + \sum_{j=N_t+1}^{N_\tau} Z_j)) \end{aligned} \quad (3.51)$$

où  $u$  est la solution de l'inéquation variationnelle (3.3).

Dans cette partie, on montrera directement que, dans le cas du put américain, la fonction  $u(t, x)$  vérifie l'inéquation parabolique. Pour obtenir des propriétés de régularité de  $u$ , on prouvera d'abord, trois lemmes :

**Lemme 3.27** Si  $x \rightarrow \psi(\log x)$  est convexe, alors, la fonction  $x \rightarrow u(t, \log x)$  est convexe sur  $]0, \infty[$ , pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Démonstration :** D'après (3.51),

$$u(t, \log x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E} (e^{-r(\tau-t)} \psi(\log x + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(\tau - t) + \sigma(B_\tau - B_t) + \sum_{j=N_t+1}^{N_\tau} Z_j))$$

or  $x \rightarrow \psi(\log x)$  est convexe, ce qui donne le lemme 3.27 ■

**Remarque 3.28** Si  $x \rightarrow \psi(\log x)$  est décroissante, alors, la fonction  $x \rightarrow u(t, \log x)$  est décroissante sur  $]0, \infty[$ , pour tout  $t \in [0, T]$ .

Maintenant, on peut montrer le lemme 3.29 qui sera utile dans l'étude des propriétés de  $\frac{\partial u}{\partial t}$ .

**Lemme 3.29** Supposons  $\psi(x)$  est une fonction continue sur  $\mathbf{R}$  telle que :  $|\psi(x)| \leq Me^{M|x|}$  où  $M$  est une constant positive, on a :

$$u(t, x) = \sup_{\vartheta \in \mathcal{T}_{0,1}} \mathbf{E} \left( e^{-r(T-t)\vartheta} \psi \left( x + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)\vartheta + \sigma \sqrt{T-t} B_\vartheta + \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-t)} Z_j \right) \right)$$

**Démonstration :** D'après (3.51), on a :

$$u(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E} \left( e^{-r(\tau-t)} \psi \left( x + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (\tau-t) + \sigma (B_\tau - B_t) + \sum_{j=N_t+1}^{N_\tau} Z_j \right) \right)$$

Rappelons la démonstration de la proposition 1.3, et remarquons que  $\psi$  vérifie les même hypothèses que celui dans la proposition 1.3, on sait qu'on a la même égalité avec  $\tilde{\mathcal{T}}_{t,T}$  au lieu de  $\mathcal{T}_{t,T}$ . De plus, si l'on réussit à vérifier :

$$((B_s - B_t)_{s \geq t}, (N_s - N_t)_{s \geq t}, (U_{N_t+j})_{j \geq 1}) \sim^1 ((B_t)_{t \geq 0}, (N_t)_{t \geq 0}, (U_j)_{j \geq 1}) \quad (3.52)$$

On peut donc écrire (3.51) sous la forme suivante :

$$u(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T-t}} \mathbf{E} \left( e^{-r\tau} \psi \left( x + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau + \sigma B_\tau + \sum_{j=1}^{N_\tau} Z_j \right) \right)$$

Il est aisé de voir que  $\tau$  appartient  $\mathcal{T}_{0,T-t}$  si et seulement si  $\tau$  est de la forme :  $\tau = \vartheta(T-t)$  où  $\vartheta$  est un temps d'arrêt de la filtration  $(\mathcal{H})_{s \geq 0}$  à valeur dans  $[0, 1]$ ; où  $\mathcal{H}_s$  est la tribu engendrée par les variables aléatoires  $B_\beta(T-t)$ ,  $N_\beta(T-t)$ ,  $\beta \leq s$  et  $U_j \mathbf{1}_{\{j \leq N_s(T-t)\}}$ . Remarquant le fait que le processus  $(B_\beta(T-t))_{\beta \geq 0}$  a même loi que le processus  $(\sqrt{T-t} B_\beta)_{\beta \geq 0}$ , on obtient que :

$$u(t, x) = \sup_{\vartheta \in \mathcal{T}_{0,1}} \mathbf{E} \left( e^{-r(T-t)\vartheta} \psi \left( x + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t)\vartheta + \sigma \sqrt{T-t} B_\vartheta + \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-t)} Z_j \right) \right)$$

Il reste donc à montrer (3.52). En effet, on vérifie, d'abord, la suite  $(U_{N_t+j})_{j \geq 1}$  a même loi que la suite  $(U_j)_{j \geq 1}$ . Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout  $p \geq 0$  et pour toute fonction borélienne positive sur  $\mathbf{R}^p$ ,

$$\mathbf{E} (f(U_{N_t+1}, U_{N_t+2}, \dots, U_{N_t+p})) = \mathbf{E} (f(U_1, U_2, \dots, U_p)) \quad (3.53)$$

---

<sup>1''</sup>  $\sim''$  signifie avoir la même loi

Or, si l'on note le premier membre dans (3.53) par  $I$ , en utilisant l'indépendance de  $(N_t)_{t \geq 0}$  et  $(U_j)_{j \geq 1}$ , on a alors :

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E} (\mathbf{1}_{\{N_t=j\}} f(U_{j+1}, U_{j+2}, \dots, U_{j+p})) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P} (N_t = j) \mathbf{E} f(U_{j+1}, U_{j+2}, \dots, U_{j+p}) \\ &= \mathbf{E} (f(U_1, U_2, \dots, U_p)) \end{aligned}$$

à cause du fait que  $(U_{j+1}, U_{j+2}, \dots, U_{j+p})$  a même loi que  $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ .

D'autre part, comme le processus  $(B_s - B_t)_{s \geq t}$  ( resp.  $(N_s - N_t)_{s \geq t}$ ) a même loi que le processus  $(B_{s-t})_{s \geq t}$  ( resp.  $(N_{s-t})_{s \geq t}$ ), de plus, en utilisant l'indépendance entre les processus  $(B_t)_{t \geq 0}$ ,  $(N_t)_{t \geq 0}$ ,  $(U_j)_{j \geq 1}$ , on obtient (3.52). ■

Le lemme classique suivant sera utile pour étudier la continuité de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  ( cf [26], Chapitre II, lemme 3.1).

**Lemme 3.30** *Soit  $u(t, x)$  une fonction de  $\mathbf{R}^2$  dans  $\mathbf{R}$ , ayant des dérivées partielles  $\frac{\partial u}{\partial t}$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  uniformément bornées sur  $\mathbf{R}^2$ . Alors,  $\frac{\partial u}{\partial x}$  vérifie une condition de Hölder d'ordre  $\frac{1}{2}$  en  $t$ , uniformément par rapport à  $x$ .*

Maintenant, on va montrer le théorème principal de cette section. Il est une généralisation du théorème 3.6 de [24]. La méthode de démonstration est analogue à celle de [24]. Les termes de sauts sont traités par des techniques de martingales.

**Théorème 3.31** *Supposons qu'on a  $(\mathbf{H})$ , si la fonction  $\psi$  est lipschitzienne et  $x \mapsto \psi(\log(x))$  est convexe, alors la fonction  $u$  ( définie par (3.51)) admet des dérivées partielles  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  localement bornées sur  $[0, T[ \times \mathbf{R}$  et vérifie :*

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu &\leq 0 \\ u &\geq \psi \\ \left( \frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu \right) (\psi - u) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ p.p dans } [0, T[ \times \mathbf{R}$$

De plus, la fonction  $\frac{\partial u}{\partial x}$  est continue sur  $[0, T[ \times \mathbf{R}$ .

**Remarque 3.32** *D'après les propriétés sur  $\psi$  d'un put américain énoncé au début de cette section, il n'est pas difficile de voir que ce  $\psi$  vérifie les hypothèses du théorème 3.31.*

**Démonstration :**



- Puisque  $\psi$  est lipschitzienne, on sait, alors, que  $\psi$  appartient à  $W^{1,2,\alpha}(\mathbf{R})$  pour tout  $\alpha > 0$ , en utilisant le théorème 3.6, on sait qu'il existe une et une seule fonction  $u$  vérifiant :

$$u \in L^2([0, T]; V_\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; H_\alpha)$$

et pour tout élément  $v$  appartient à  $V_\alpha$  et vérifiant  $v \geq \psi$ , on a :

$$\begin{aligned} - \left( \frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right)_\alpha + a^\alpha(u, v - u) + b^\alpha(u, v - u) &\geq 0 \\ u &\geq \psi \end{aligned} \quad (3.54)$$

Prenant  $v(x) = u(x) + \varphi(x)e^{\alpha|x|}$  où  $\varphi(x)$  est une fonction positive indéfiniment dérivable à support compact, de sorte que  $v(x)$  appartient à  $V_\alpha$ , et  $v \geq \psi$ , on obtient :

$$- \left( \frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu, \varphi(x)e^{\alpha|x|} \right)_\alpha \geq 0$$

Par conséquent  $-(\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu)$  définit une mesure positive sur  $]0, T[ \times \mathbf{R}$ . D'autre part, comme  $x \mapsto \psi(\log(x))$  est convexe, si l'on note :  $g(x) = u(t, \log x)$ , le lemme 3.27 entraîne que :  $\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x}) \geq 0$ , ce qui signifie que  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x}$  est une mesure positive sur  $]0, T[ \times \mathbf{R}$ . On a donc, au sens de distribution,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - ru + Bu &\leq 0 \quad \text{dans} \quad ]0, T[ \times \mathbf{R} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} &\geq 0 \quad \text{dans} \quad ]0, T[ \times \mathbf{R} \end{aligned}$$

D'où :

$$0 \leq \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \leq ru - \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial u}{\partial x} - Bu \quad (3.55)$$

cela implique que  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x}$  appartient à  $L^2([0, T]; H_\alpha)$ . D'où :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2([0, T]; H_\alpha)$$

De plus, (3.55) nous permet de déduire la bornitude locale de  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  de celle de  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $Bu$ . D'autre part, en prenant  $v = \psi$  dans (3.54), il n'est pas difficile de vérifier :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu \right) (\psi - u) = 0 \quad \text{dans} \quad [0, T[ \times \mathbf{R}$$

- Montrons la bornitude locale de  $\frac{\partial u}{\partial x}$

Fixons  $x, y \in \mathbf{R}$ , utilisant le fait que  $\psi$  est lipschitzienne, on peut écrire que, pour tout  $\tau \in \mathcal{T}_{t, T}$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \psi \left( x + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (\tau - t) + \sigma (B_\tau - B_t) + \sum_{j=N_t+1}^{N_\tau} Z_j \right) \right. \\ & \quad \left. - \psi \left( y + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (\tau - t) + \sigma (B_\tau - B_t) + \sum_{j=N_t+1}^{N_\tau} Z_j \right) \right| \\ & \leq C|x - y| \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante. On en déduit facilement par (3.51) l'estimation :

$$|u(t, x) - u(t, y)| \leq C|x - y|$$

Comme  $C$  est une constante ne dépendant ni de  $t$ , ni de  $(x, y)$ ,  $u$  est lipschitzienne en  $x$ , uniformément par rapport à  $t$ , et donc  $\frac{\partial u}{\partial x}$  est borné sur  $[0, T] \times \mathbf{R}$ .

- *Montrons la bornitude de  $Bu$*

On part de la définition de l'opérateur  $B$  ( cf. (3.2)), i.e :  $Bu = \lambda \int (u(t, x + z) - u(t, x))\nu(dz)$ . De l'inégalité :

$$|u(t, x + z) - u(t, x)| \leq C|z|$$

on déduit :

$$\begin{aligned} |Bu| &\leq \int |u(t, x + z) - u(t, x)|\nu(dz) \\ &\leq C\mathbf{E}|Z_1| \\ &< +\infty, \quad \text{car } \mathbf{E}|Z_1| \leq \frac{1}{\alpha}\mathbf{E}e^{\alpha|Z_1|} < \infty \end{aligned}$$

ce qui donne la bornitude de  $Bu$  sur  $[0, T] \times \mathbf{R}$ .

- *Montrons la bornitude locale de  $\frac{\partial u}{\partial t}$*

Pour cela, on utilise le lemme 3.29. Fixons  $t, s \in [0, T]$ , avec  $t < s$ . Pour tout  $\vartheta$  appartenant à  $\mathcal{T}_{0,1}$ , on a :

$$\begin{aligned} &|e^{-r(T-t)\vartheta} \psi(x + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\vartheta + \sigma\sqrt{T-t}B_\vartheta + \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-t)} Z_j) \\ &- e^{-r(T-s)\vartheta} \psi(x + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-s)\vartheta + \sigma\sqrt{T-s}B_\vartheta + \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-s)} Z_j)| \\ &\leq |e^{-r(T-t)\vartheta} - e^{-r(T-s)\vartheta}| |\psi(x + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\vartheta + \sigma\sqrt{T-t}B_\vartheta + \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-t)} Z_j)| \\ &+ e^{-r(T-s)\vartheta} |\psi(x + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\vartheta + \sigma\sqrt{T-t}B_\vartheta + \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-t)} Z_j) \\ &- \psi(x + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-s)\vartheta + \sigma\sqrt{T-s}B_\vartheta + \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-s)} Z_j)| \end{aligned} \quad (3.56)$$

or :

$$\begin{aligned} |e^{-r(T-t)\vartheta} - e^{-r(T-s)\vartheta}| &= |1 - e^{-r(t-s)\vartheta}| e^{-r(T-t)\vartheta} \\ &\leq C|t-s| e^{-r(T-t)\vartheta} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Par ailleurs, puisque  $\psi$  est lipschitzienne, on sait que :

$$\begin{aligned}
& \left| \psi\left(x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\vartheta + \sigma\sqrt{T-t}B_\vartheta + \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-t)} Z_j\right) \right. \\
& \quad \left. - \psi\left(x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-s)\vartheta + \sigma\sqrt{T-s}B_\vartheta + \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-s)} Z_j\right) \right| \\
& \leq C\left|\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(s-t)\vartheta + \sigma(\sqrt{T-t} - \sqrt{T-s})B_\vartheta\right| \\
& \quad + \left| \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-t)} Z_j - \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-s)} Z_j \right| \tag{3.58}
\end{aligned}$$

En prenant les espérances et en utilisant le lemme 3.29, on déduit de (3.56), (3.57) et (3.58),

$$\begin{aligned}
|u(t, x) - u(s, x)| & \leq C|t - s||u(t, x)| \\
& + C \sup_{\vartheta \in \mathcal{T}_{0,1}} \mathbf{E} \left( e^{-r(T-s)\vartheta} \left| \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(s-t)\vartheta \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left| \sigma(\sqrt{T-t} - \sqrt{T-s})B_\vartheta \right| + \left| \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-t)} Z_j - \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-s)} Z_j \right| \right) \tag{3.59}
\end{aligned}$$

En remarquant que  $t < s$ , on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-t)} Z_j - \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-s)} Z_j \right| & = \left| \sum_{j=N_\vartheta(T-s)+1}^{N_\vartheta(T-t)} Z_j \right| \leq \sum_{j=N_\vartheta(T-s)+1}^{N_\vartheta(T-t)} |Z_j| \\
& = \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-t)} |Z_j| - \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-s)} |Z_j|
\end{aligned}$$

Notant :

$$M_t = \sum_{j=1}^{N_t} |Z_j| - \lambda t \mathbf{E}(|Z_1|)$$

On sait que  $M_t$  est une martingale de carré intégrable, puisque  $\mathbf{E}|Z_1|^2 \leq \frac{2}{\alpha^2} \mathbf{E}e^{\alpha|Z|} < \infty$ , d'après l'hypothèse **(H)**. Cela permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left| \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-t)} Z_j - \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-s)} Z_j \right| & \leq \mathbf{E} \left( \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-t)} |Z_j| - \sum_{j=1}^{N_\vartheta(T-s)} |Z_j| \right) \\
& = \mathbf{E} (+\lambda\vartheta(T-t)\mathbf{E}|Z_1| - \lambda\vartheta(T-s)\mathbf{E}|Z_1|) \\
& = \lambda(s-t)\mathbf{E}|Z_1|\mathbf{E}\vartheta \\
& \leq C(s-t) \tag{3.60}
\end{aligned}$$

où  $C$  est une constante ne dépendant ni de  $t$ , ni de  $s$ , ni de  $x$ . Par ailleurs,

$$\mathbf{E} |B_{\vartheta}| \leq \mathbf{E} |B_1| < +\infty \quad (3.61)$$

à cause du fait que  $|B_t|$  est une sous-martingale. On déduit alors de (3.59), (3.60) et (3.61) et du fait que  $t \rightarrow \sqrt{T-t}$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, T[$ ,

$$|u(t, x) - u(s, x)| \leq C|t - s|(u(t, x) + 1)$$

ce qui entraîne que  $\frac{\partial u}{\partial t}$  est localement borné sur  $[0, T[ \times \mathbf{R}$ .

- *La bornitude locale de  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$*

Elle est obtenue par la bornitude locale de  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $Bu$  et (3.55). Cela donne la continuité de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  sur  $[0, T[ \times \mathbf{R}$  d'après le lemme 3.30.

■

## Chapitre 4

# Localisation, Discrétisation et Convergence

Nous avons déjà montré que le prix d'une option américaine dans ce modèle avec des sauts est la solution de l'inéquation variationnelle (3.3), si  $\psi$  appartient à  $W^{1,2,\alpha}(\mathbf{R})$ .

Pratiquement, pour calculer le prix  $u^*$ , nous nous ramenons, donc, à chercher une solution numérique de (3.3). Cela se fait en trois étapes :

1. Localisation du problème ( C'est à dire que nous nous ramènerons à un ouvert borné de  $\mathbf{R}$  du type  $\{x \in \mathbf{R}, |x| < l\}$  où  $l$  est une constante positive).
2. Discrétisation de (3.3) sur cet ensemble borné et étude de la convergence.
3. Résolution du problème discrétisé par certains algorithmes. Ce point sera traité dans le chapitre 6.

### 4.1 Localisation du problème

On note, comme précédemment,  $X_s^{t,x}$  le flot associé à l'équation différentielle stochastique (1.11), i.e :

$$\begin{cases} X_t &= x \\ dX_s &= (\mu - \frac{\sigma^2}{2})ds + \sigma dB_s + d(\sum_{j=1}^{N_s} Z_j) \end{cases} \quad \text{pour } s \geq t$$

On a la forme explicite :

$$X_s^{t,x} = x + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(s - t) + \sigma(B_s - B_t) + \sum_{j=N_t+1}^{N_s} Z_j$$

Pour localiser le problème, on introduit d'abord :

$$T_l^{t,x} = \inf\{s > t; |X_s^{t,x}| > l\} \tag{4.1}$$

et on note :

$$u_i^*(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E} [e^{-r(\tau \wedge T_i^{t,x} - t)} \psi(X_{\tau \wedge T_i^{t,x}}^{t,x})] \quad (4.2)$$

Par ailleurs, dans le chapitre 1, on a déjà vu que le prix d'une option américaine est donné par :

$$u^*(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E} (e^{-r(\tau - t)} \psi(X_\tau^{t,x}))$$

La proposition 4.1 dira que pour calculer  $u^*(t, x)$ , il suffit de calculer  $u_i^*(t, x)$ .

**Proposition 4.1** *Si l'on a l'hypothèse (H), et de plus, si  $\psi(x) \in W^{1,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , alors  $u_i^*$  converge uniformément vers  $u^*$  sur tout compact, i.e :*

$$\forall R > 0, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{(t,x) \in [0,T] \times [-R,+R]} |u^*(t, x) - u_i^*(t, x)| = 0$$

**Démonstration :** A partir des définitions des fonctions  $u^*(t, x)$  et  $u_i^*(t, x)$ , on a :

$$\begin{aligned} & |u^*(t, x) - u_i^*(t, x)| \\ & \leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E} [|e^{-r(\tau - t)} \psi(X_\tau^{t,x}) - e^{-r(\tau \wedge T_i^{t,x} - t)} \psi(X_{\tau \wedge T_i^{t,x}}^{t,x})| \mathbf{1}_{\{T_i^{t,x} < \tau\}}] \\ & \leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E} [(e^{-r(\tau - t)} |\psi(X_\tau^{t,x})| + e^{-r(\tau \wedge T_i^{t,x} - t)} |\psi(X_{\tau \wedge T_i^{t,x}}^{t,x})|) \mathbf{1}_{\{T_i^{t,x} < \tau\}}] \\ & \leq \mathbf{E} [2 \sup_{s \in [t,T]} |\psi(X_s^{t,x})| \mathbf{1}_{\{T_i^{t,x} < T\}}] \\ & \leq 2M \sqrt{\mathbf{E} \exp(2M \sup_{[t,T]} |X_s^{t,x}|)} \cdot \sqrt{\mathbf{P}(T_i^{t,x} < T)} \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et  $|\psi(x)| \leq M e^{M|x|}$ .

Puisque  $\mathbf{E} e^{\alpha|Z_1|} < +\infty$ , par (3.41), il n'est pas difficile de voir que :

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times [-R,R]} \mathbf{E} (\exp(2M \sup_{s \in [t,T]} |X_s^{t,x}|)) \leq C_1 < +\infty$$

où  $C_1$  est une constante indépendante de  $l$ . On a, donc :

$$\sup_{(t,x) \in [0,T] \times [-R,R]} |u^*(t, x) - u_i^*(t, x)| \leq 2M \sqrt{C_1} \sup_{(t,x) \in [0,T] \times \{x \in \mathbf{R}, |x| \leq R\}} \sqrt{\mathbf{P}(T_i^{t,x} < T)}$$

Pour en déduire le résultat énoncé dans la proposition, il suffit de montrer que :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{(t,x) \in [0,T] \times [-R,R]} \mathbf{P}(T_i^{t,x} < T) = 0$$

En effet, à partir de la définition de  $T_i^{t,x}$ , on sait que :

$$\{T_i^{t,x} < T\} = \left\{ \sup_{s \in [t,T]} |X_s^{t,x}| > l \right\}$$

or :

$$X_s^{t,x} = x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(s-t) + \sigma(B_s - B_t) + \sum_{j=N_t+1}^{N_s} Z_j$$

Donc :

$$\left\{ \sup_{s \in [t, T]} |X_s^{t,x}| > l \right\} \subset \left\{ \sup_{s \in [t, T]} |\sigma(B_s - B_t) + \sum_{j=N_t+1}^{N_s} Z_j| > l - \left|\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right|T - R \right\}$$

D'où, en utilisant (3.52),

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \leq s \leq T} |X_s^{t,x}| > l \right\} \\ & \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T-t} |\sigma B_s + \sum_{j=1}^{N_s} Z_j| > l - \left|\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right|T - R \right\} \\ & \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} |\sigma B_s + \sum_{j=1}^{N_s} Z_j| > l - \left|\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right|T - R \right\} \\ & \leq \mathbf{P} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} |\sigma B_s| > \frac{l - \left|\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right|T - R}{2} \right) + \mathbf{P} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} \sum_{j=1}^{N_s} |Z_j| > \frac{l - \left|\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right|T - R}{2} \right) \end{aligned}$$

en tenant compte du fait que  $\{|a| + |b| > M\} \subset \{|a| > \frac{M}{2}\} \cup \{|b| > \frac{M}{2}\}$ . Or, en utilisant l'inégalité  $\mathbf{P}(Y_t > a) \leq e^{-a} \mathbf{E}(e^{Y_t})$ , on a :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} \sum_{j=1}^{N_s} |Z_j| > \frac{l - R - \left|\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right|T}{2} \right) \\ & \leq \mathbf{P} \left( \sum_{j=1}^{N_T} |Z_j| > \frac{l - R - \left|\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right|T}{2} \right) \\ & \leq e^{-\frac{l - R - \left|\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right|T}{2}} \mathbf{E} \exp \left( \sum_{j=1}^{N_T} |Z_j| \right) \\ & \leq e^{-\frac{l - R - \left|\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right|T}{2}} \exp(\lambda T (\mathbf{E} e^{|Z_1|} - 1)) \end{aligned}$$

en remarquant le fait que  $\mathbf{E} \left( \exp \left( \sum_{j=1}^{N_T} |Z_j| \right) \right) = \exp(\lambda T (\mathbf{E} e^{|Z_1|} - 1))$  (Voir (3.40)). Par ailleurs,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} |\sigma B_s| > \frac{l - R - \left|\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right|T}{2} \right) \\ & \leq \mathbf{P} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} \sigma B_s > \frac{l - R - \left|\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right|T}{2} \right) + \mathbf{P} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} -\sigma B_s > \frac{l - R - \left|\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right|T}{2} \right) \end{aligned}$$

Comme  $(-B_s)_{s \geq 0}$  est encore un mouvement Brownien et en utilisant l'inégalité :  $\mathbf{P}(\sup_{0 \leq s \leq T} B_s \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{T}}$  (cf. [28] Chapitre V, la section 2.1), on a :

$$\mathbf{P} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} |\sigma B_s| > \frac{l - R - \left|\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right|T}{2} \right) \leq 2e^{-\frac{(l - R - \left|\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right|T)^2}{4\sigma^2 T}}$$

On obtient, finalement,

$$\begin{aligned} & |u^*(t, x) - u_i^*(t, x)| \\ & \leq 2M\sqrt{C_1} \left( 2e^{-\frac{(l-R-|\mu-\frac{\sigma^2}{2}|T)^2}{4\sigma^2 T}} + C_2 e^{-\frac{l-R-|\mu-\frac{\sigma^2}{2}|T}{2}} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

où  $C_2 = \exp(\lambda T(\mathbf{E} e^{|Z_1|} - 1))$ , ce qui entraîne la proposition.  $\blacksquare$

## 4.2 L'égalité $u_i^* = u_i$

### 4.2.1 L'existence, l'unicité et la régularité du problème localisé

Pour le calcul de  $u_i^*$ , on introduit les notations suivants :

$$\begin{aligned} \Omega_l &= \{x \in \mathbf{R}, |x| < l\} = ]-l, l[ \\ \partial\Omega_l &= \{x \in \mathbf{R}, |x| = l\} \\ H_l &= L^2(\Omega_l) \\ V_l &= \{f \in H_l, \frac{\partial f}{\partial x} \in H_l\} = W^{1,2}(\Omega_l) \\ W^{m,p}(\Omega_l) &= \{f \in L^p(\Omega_l) \mid \text{pour } j \leq m, f^{(j)} \in L^p(\Omega_l)\} \end{aligned}$$

Le théorème 4.6, qui sera montré par une méthode analogue à celle du chapitre 3, mais dans le cas d'un ouvert borné, nous permettra de dire que  $u_i^*$  est la solution de l'inéquation parabolique suivante, si  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$  :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u_i \in L^2([0, T]; W^{2,2}(\Omega_l)) \quad \text{tel que } \frac{\partial u_i}{\partial t} \in L^2([0, T]; L^2(\Omega_l)) \quad \text{et} \\ \begin{cases} \max\{\frac{\partial u_i}{\partial t} + Au_i + B^l u_i, \psi - u_i\} = 0 & \text{dans } [0, T] \times \Omega_l \\ u_i(t, x) = \psi(x) & \text{si } x \in \partial\Omega_l \\ u_i(T, x) = \psi(x) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

où :

$$\begin{aligned} Au_i &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u_i}{\partial x} - ru_i \\ B^l u_i &= \lambda \int_{z, z+x \in \Omega_l} (u_i(t, x+z) - u_i(t, x)) \nu(dz) + \lambda \int_{z, z+x \notin \Omega_l} (\psi(x+z) - u_i(t, x)) \nu(dz) \end{aligned}$$

Remarquons que, maintenant, l'opérateur  $B^l$  n'est plus linéaire, par ailleurs, la solution  $u_i$  du problème (4.4) est une fonction définie sur  $\Omega_l$ .

Évidemment, on doit d'abord montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.4). La seule difficulté vient du fait que l'opérateur  $B^l \notin \mathcal{L}(L^2(\Omega_l), L^2(\Omega_l))$ . Pour l'éviter,



on introduit un opérateur  $\tilde{B}^i$  qui est définie par :

$$\begin{aligned}\tilde{B}^i u_i &= \lambda \int_{z, z+x \in \Omega_i} (u_i(t, x+z) - u_i(t, x)) \nu(dz) + \lambda \int_{z, z+x \notin \Omega_i} (0 - u_i(t, x)) \nu(dz) \\ &= \lambda \left[ \int_{z, z+x \in \Omega_i} u_i(t, x+z) \nu(dz) - u_i(t, x) \right]\end{aligned}\quad (4.5)$$

Alors, le problème (4.4) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\text{Trouver } u_i \in L^2([0, T]; W^{2,2}(\Omega_i)) \quad \text{tel que } \frac{\partial u_i}{\partial t} \in L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \quad \text{et} \\ \begin{cases} \max\left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + Au_i + \tilde{B}^i u_i + f, \psi - u_i \right\} = 0 & \text{dans } [0, T] \times \Omega_i \\ u_i(t, x) = \psi(x) & \text{si } x \in \partial\Omega_i \\ u_i(T, x) = \psi(x) \end{cases}\end{aligned}\quad (4.6)$$

avec :

$$f = \lambda \int_{z, z+x \notin \Omega_i} \psi(x+z) \nu(dz)$$

Posons :

$$\begin{aligned}a(u, v) &= \int_{\Omega_i} \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \int_{\Omega_i} r u v dx - \int_{\Omega_i} \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} v dx \\ b(u, v) &= - \int_{\Omega_i} (\tilde{B}^i u) v dx\end{aligned}$$

On a évidemment, par une intégration par parties, que :

$$\begin{aligned}(Au, v)_i &= -a(u, v) \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(\Omega_i) \\ (\tilde{B}^i u, v)_i &= -b(u, v) \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(\Omega_i)\end{aligned}$$

où  $(\cdot, \cdot)_i$  désigne le produit scalaire de  $H_i$ .

La formulation variationnelle du problème (4.6) peut, alors, être écrite :

$$\begin{aligned}\text{Trouver } u_i \in L^2([0, T]; V_i) \quad \text{tel que } \frac{\partial u_i}{\partial t} \in L^2([0, T]; H_i) \quad \text{et} \\ \begin{cases} u_i(T, \cdot) = \psi \\ u_i \geq \psi & \text{p.p. dans } [0, T] \times \Omega_i \\ u_i(t, x) = \psi(x) & \text{si } x \in \partial\Omega_i \\ \forall v_i \in V_i, \quad v_i \geq \psi, \quad \text{on a :} \\ - \left( \frac{\partial u_i}{\partial t}, v_i - u_i \right)_i + a(u_i, v_i - u_i) + b(u_i, v_i - u_i) - (f, v_i - u_i)_i \geq 0 \end{cases}\end{aligned}\quad (4.7)$$

En reprenant les démonstrations du chapitre 3, on peut obtenir l'équivalence entre le problème (4.6) et (4.7) sous certain condition de régularité, et de plus, l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.7), si l'on réussit à montrer que  $\tilde{B}^i \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_i), L^2(\Omega_i))$ .

**Proposition 4.2** *Supposons  $\psi \in V_\alpha$  et  $f \in H_1$ . Et soit  $u$  une fonction de  $[0, T] \times \Omega_i$  dans  $\mathbf{R}$  tel que :  $u_i \in L^2([0, T]; W^{2,2}(\Omega_i))$  et  $\frac{\partial u_i}{\partial t} \in L^2([0, T]; H_1)$ . Alors, les problèmes (4.6) et (4.7) sont équivalentes.*

**Théorème 4.3** *Soit  $\psi \in V_\alpha$ , et supposons  $f \in L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$ . Alors, il existe une et une seule fonction  $u_i \in L^2([0, T]; V_i)$  telle que  $\frac{\partial u_i}{\partial t} \in L^2([0, T]; H_1)$  et  $u_i$  vérifie (4.7). De plus, la fonction  $u_i$  est dans  $L^\infty([0, T]; V_i)$ .*

Il suffit, donc, de montrer le lemme suivant :

**Lemme 4.4** *L'opérateur  $\tilde{B}^i$  défini par (4.5) est un opérateur linéaire borné sur  $L^2(\Omega_i)$ .*

**Démonstration :** A partir de la définition de l'opérateur  $\tilde{B}^i$ , on a :

$$\begin{aligned} |\tilde{B}^i u_i|_{L^2(\Omega_i)}^2 &= \int_{\Omega_i} (\tilde{B}^i u_i)^2 dx \\ &= \lambda^2 \int_{\Omega_i} dx \left[ \int_{z, x+z \in \Omega_i} u_i(t, x+z) \nu(dz) - u_i(t, x) \right]^2 \\ &\leq 2\lambda^2 \int_{\Omega_i} dx \left[ \int_{z, x+z \in \Omega_i} u_i^2(t, x+z) \nu(dz) + u_i^2(t, x) \right] \end{aligned}$$

en utilisant les faits que :  $(a - b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  et  $(\int f \nu(dz))^2 \leq \int f^2 \nu(dz)$ . De plus, par le théorème de Fubini, on déduit :

$$\begin{aligned} |\tilde{B}^i u_i|_{L^2(\Omega_i)}^2 &\leq 2\lambda^2 \left[ \int \nu(dz) \int_{z, x+z \in \Omega_i} u_i^2(t, x+z) dx + |u_i|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right] \\ &\leq 4\lambda^2 |u_i|_{L^2(\Omega_i)}^2 \end{aligned}$$

D'autre part, revenant à la définition de  $\tilde{B}^i$ , il est facile de voir que l'opérateur  $\tilde{B}^i$  est linéaire. D'où  $\tilde{B}^i \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_i), L^2(\Omega_i))$ . ■

Pour revenir à l'inéquation parabolique (4.4), d'après la proposition 4.2, on aura besoin du théorème de régularité sur l'ouvert borné  $\Omega_i$ . C'est le théorème 4.5 suivant, qui peut être montré en suivant exactement la même méthode que dans le théorème 3.10.

**Théorème 4.5** *Supposons  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$  et  $f \in L^2([0, T]; H_1)$ , la solution  $u_i$  de l'inéquation variationnelle (4.7) vérifie :*

$$u_i \in L^2([0, T]; W^{2,2}(\Omega_i))$$

### 4.2.2 L'égalité $u_i^* = u_i$

Dans la section 4.2.1, on a déjà prouvé que : si  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , alors, il existe une fonction unique  $u_i(t, x)$  appartient à  $L^2([0, T]; W^{2,2}(\Omega_i))$  tel que  $\frac{\partial u_i}{\partial t} \in L^2([0, T]; H_i)$  et vérifiant l'inéquation parabolique (4.4). Maintenant, on va montrer que cette fonction coïncide avec la fonction  $u_i^*(t, x)$  définie par (4.2), si la fonction  $\psi$  est, de plus, uniformément continue sur  $\mathbf{R}$ . On voit que, dans le cas qui nous intéresse, par exemple, le put américain, la fonction  $\psi$  vérifie cette condition.

**Théorème 4.6** *Supposons que  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$  et  $\psi$  est une fonction uniformément continue sur  $\mathbf{R}$ . On a, alors,*

$$u_i^*(t, x) = u_i(t, x) \quad \text{sur } [0, T] \times \Omega_i$$

où  $u_i^*(t, x)$  est défini par (4.2) et  $u_i(t, x)$  est la solution unique du problème (4.4).

On remarque, tout d'abord, qu'il nous faut montrer que :

$$e^{-r(t \wedge T_i^x)} u(t \wedge T_i^x, X_{t \wedge T_i^x}^x) - \int_0^{t \wedge T_i^x} e^{-rs} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + Au + B^l u \right) (s, X_s) ds$$

est une martingale. Néanmoins, la difficulté vient du fait que  $u \notin C^2$  et qu'on ne peut pas a priori utiliser la formule d'Ito avec sauts. En réalité, on le fait par approximation. D'autre part, les termes de sauts peuvent poser des difficultés quand on localise le problème. La démonstration se fera en deux étapes.

#### Démonstration : (Démonstration du théorème 4.6)

##### 1. Première étape :

Comme  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , d'après les résultats de la section précédente, on sait qu'il existe une unique fonction  $u_i$  sur  $[0, T] \times \Omega_i$  telle que  $\frac{\partial u_i}{\partial t}$  appartient à  $L^2([0, T]; H_i)$  et  $u_i$  appartient à  $L^2([0, T]; W^{2,2}(\Omega_i))$  et vérifie l'inéquation parabolique (4.4).

Notons :

$$\bar{u}(t, x) = \begin{cases} u_i(t, x) & \text{pour } (t, x) \in [0, T] \times \Omega_i \\ u_i(0, x) & \text{pour } (t, x) \in (-\infty, 0) \times \Omega_i \\ \psi(x) & \text{Sinon} \end{cases}$$

Puisque  $u_i(T, x) = \psi(x)$ , et  $u_i(t, x) = \psi(x)$  si  $x \in \partial\Omega_i$ , il est clair que  $\bar{u}_i(t, x)$  est une fonction continue sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ . D'où :

$$\bar{u}_i(t, x) \in L_{loc}^1(\mathbf{R}; L_{loc}^1(\mathbf{R}))$$

Soient  $(\rho_m)_{m \geq 1}$  (resp.  $(\bar{\rho}_m)_{m \geq 1}$ ) deux suites de fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}$  (resp.  $\mathbf{R}$ ) à support compact,  $\rho_m \geq 0$  et  $\int \rho_m = 1$  avec  $\text{supp} \rho_m \subset ]-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}[$  (resp.  $\bar{\rho}_m \geq 0$  et  $\int \bar{\rho}_m =$

1 avec  $\text{supp } \bar{\rho}_m \subset ]-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}[$ , on pose :

$$\begin{aligned} u_m(t, x) &= \bar{u} * (\rho_m \otimes \bar{\rho}_m)(t, x) \\ &= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \bar{u}(t-s, x-y) \rho_m(y) \bar{\rho}_m(s) dy ds \end{aligned}$$

D'où :

$$u_m(t, x) \in C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$$

Par conséquent, en remarquant la définition de  $\bar{u}(t, x)$  et le fait que  $u_i$  est continue sur  $[0, T] \times \Omega_i$  et  $\psi$  uniformément continue,

$$u_m(t, x) \text{ converge uniformément vers } \bar{u}(t, x) \text{ sur } [0, T] \times \mathbf{R}. \quad (4.8)$$

Par ailleurs, puisque  $u_i \in L^2([0, T]; W^{2,2}(\Omega_i))$  et  $\frac{\partial u_i}{\partial t} \in L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$ , par le lemme 3.22, on obtient :

$$\begin{aligned} u_m &\longrightarrow u_i \text{ dans } L^2([0, T]; W^{2,2}(\Omega_i)) \\ \frac{\partial u_m}{\partial t} &\longrightarrow \frac{\partial u_i}{\partial t} \text{ dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + Au_m \longrightarrow \frac{\partial u_i}{\partial t} + Au_i \text{ dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \quad (4.9)$$

De plus, on a :

$$Bu_m \longrightarrow B^l u_i \text{ dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \quad (4.10)$$

En effet : Pour  $(t, x)$  quelconque fixée dans  $[0, T] \times \Omega_i$ ,

$$Bu_m = \int u_m(t, x+z) \nu(dz) - u_m(t, x)$$

$$\begin{aligned} B^l u_i &= \int_{z, x+z \in \Omega_i} u_i(t, x+z) \nu(dz) + \int_{z, x+z \notin \Omega_i} \psi(x+z) \nu(dz) - u_i(t, x) \\ &= \int \bar{u}(t, x+z) \nu(dz) - u_i(t, x) \end{aligned}$$

$$|Bu_m - B^l u_i| \leq \int |u_m(t, x+z) - \bar{u}(t, x+z)| \nu(dz) + |u_m(t, x) - u_i(t, x)|$$

D'où :

$$\begin{aligned} &|Bu_m - B^l u_i|_{L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))}^2 \\ &= \int_{[0, T]} ds \int_{\Omega_i} |Bu_m - B^l u_i|^2 dx \\ &\leq 2 \int_{[0, T]} ds \int_{\Omega_i} dx \cdot (|u_m - \bar{u}|_{L^\infty([0, T] \times \mathbf{R})}^2 + |u_m - u_i|_{L^\infty([0, T] \times \Omega_i)}^2) \\ &= 4T \text{mes}(\Omega_i) \cdot |u_m - \bar{u}|_{L^\infty([0, T] \times \mathbf{R})}^2 \\ &\rightarrow 0 \quad \text{en utilisant (4.8)} \end{aligned}$$

D'autre part, par la remarque 3.21, on a :  $|\psi(x)| \leq C \exp(\frac{\alpha}{2}|x|)$  car  $\psi$  appartient à  $W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ . Or  $u_i$  est une fonction continue sur  $[0, T] \times \Omega_i$ , en revenant à la définition de  $\bar{u}(t, x)$ , on déduit facilement que :

$$|\bar{u}(t, x)| \leq C \exp(\alpha|x|) \quad \text{sur } [0, T] \times \mathbf{R}$$

Ce qui entraîne, par la remarque 3.24 2),

$$|u_m(t, x)| \leq C \exp(\alpha|x|) \quad \text{sur } [0, T] \times \mathbf{R} \quad (4.11)$$

Maintenant, grâce au fait que  $u_m \in C^\infty([0, T] \times \mathbf{R})$  et (4.11), on peut utiliser le lemme 3.18 ( plutôt la remarque 3.19 ), cela nous donne que :

$$\begin{aligned} M_{\beta \wedge T_i^{t,x}} &= e^{-r(\beta \wedge T_i^{t,x} - t)} u_m(\beta \wedge T_i^{t,x}, X_{\beta \wedge T_i^{t,x}}^x) \\ &- \int_t^{\beta \wedge T_i^{t,x}} e^{-r(s-t)} \left( \frac{\partial u_m}{\partial s} + Au_m + Bu_m \right)(s, X_s) ds \end{aligned} \quad (4.12)$$

est une martingale, où  $T_i^{t,x} = \inf\{s \geq t \mid X_s^{t,x} \notin \Omega_i\}$ . D'où, par le théorème d'arrêt, pour tout temps d'arrêt  $\tau$  à valeurs  $[t, T]$ ,

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} e^{-r(\tau \wedge T_i^{t,x} - t)} u_m(\tau \wedge T_i^{t,x}, X_{\tau \wedge T_i^{t,x}}^x) \\ &= u_m(t, x) + \mathbf{E} \int_t^{\tau \wedge T_i^{t,x}} e^{-r(s-t)} \left( \frac{\partial u_m}{\partial s} + Au_m + Bu_m \right)(s, X_s) ds \end{aligned}$$

Puisque  $u_m$  converge vers  $\bar{u}$  uniformément sur  $[0, T] \times \mathbf{R}$  ( Voir (4.8) ), d'où :

$$u_m(t, x) \longrightarrow \bar{u}(t, x) \quad \text{si } m \rightarrow \infty$$

$$\mathbf{E} e^{-r(\tau \wedge T_i^{t,x} - t)} u_m(\tau \wedge T_i^{t,x}, X_{\tau \wedge T_i^{t,x}}^x) \longrightarrow \mathbf{E} e^{-r(\tau \wedge T_i^{t,x} - t)} \bar{u}(\tau \wedge T_i^{t,x}, X_{\tau \wedge T_i^{t,x}}^x)$$

De plus, en tenant compte des (4.9), (4.10) et remarquant que  $T_i^{t,x}$  est la même chose que  $\tau_R^{t,x}$  dans la remarque 3.16 2), donc, en utilisant la remarque 3.16 2), on a :

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \int_t^{\tau \wedge T_i^{t,x}} e^{-r(s-t)} \left( \frac{\partial u_m}{\partial s} + Au_m + Bu_m \right)(s, X_s^{t,x}) ds \\ &\longrightarrow \mathbf{E} \int_t^{\tau \wedge T_i^{t,x}} e^{-r(s-t)} \left( \frac{\partial u_i}{\partial s} + Au_i + B^l u_i \right)(s, X_s^{t,x}) ds \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} e^{-r(\tau \wedge T_i^{t,x} - t)} \bar{u}(\tau \wedge T_i^{t,x}, X_{\tau \wedge T_i^{t,x}}^x) \\ &= \bar{u}(t, x) + \mathbf{E} \int_t^{\tau \wedge T_i^{t,x}} e^{-r(s-t)} \left( \frac{\partial u_i}{\partial s} + Au_i + B^l u_i \right)(s, X_s) ds \end{aligned} \quad (4.13)$$

## 2. Deuxième étape :

Comme  $\frac{\partial u_i}{\partial t} + Au_i + Bu_i \leq 0$  p.p sur  $[0, T] \times \Omega_i$ , on déduit de l'égalité (4.13) que  $e^{-r(\beta \wedge T_i^{t,x} - t)} \bar{u}(\beta \wedge T_i^{t,x}, X_{\beta \wedge T_i^{t,x}}^x)$  est une sur-martingale. Puisque  $u_i \geq \psi$  p.p sur  $[0, T] \times \Omega_i$  et  $\bar{u} = \psi$  en dehors de  $\Omega_i$ , d'où  $\bar{u} \geq \psi$  p.p sur  $[0, T] \times \mathbf{R}$ . Par ailleurs, pour  $t$  quelconque fixé dans  $[0, t]$ , on a,  $\forall \tau \in \mathcal{T}_{t,T}$ ,

$$\begin{aligned} e^{-r(t \wedge T_i^{t,x} - t)} \bar{u}(t \wedge T_i^{t,x}, X_{t \wedge T_i^{t,x}}^x) &\geq \mathbf{E}(e^{-r(\tau \wedge T_i^{t,x} - t)} \bar{u}(\tau \wedge T_i^{t,x}, X_{\tau \wedge T_i^{t,x}}^x) | \mathcal{F}_t) \\ &\geq \mathbf{E}(e^{-r(\tau \wedge T_i^{t,x} - t)} \psi(X_{\tau \wedge T_i^{t,x}}) | \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

D'où, puisque  $T_i^{t,x} \geq t$ ,

$$\begin{aligned} u_i(t, X_t) &\geq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-r(\tau \wedge T_i^{t,x} - t)} \psi(X_{\tau \wedge T_i^{t,x}}) | \mathcal{F}_t) \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-r(\tau \wedge T_i^{t,x} - t)} \psi(X_{\tau \wedge T_i^{t,x}}^{t,x})) |_{x=X_t} \\ &= u_i^*(t, X_t) \quad \text{par (4.2)} \end{aligned}$$

D'autre part, posons :

$$\tau_t = \inf\{T_i^{t,x} \geq s \geq t \mid \psi(X_s) = \bar{u}(s, X_s)\}$$

Il n'est pas difficile de voir l'existence de  $\tau_t$ . En effet : Pour  $|X_{T_i^{t,x}}| > l$ , par la définition de la fonction  $\bar{u}$ , on sait que  $\bar{u}(T_i^{t,x}, X_{T_i^{t,x}}) = \psi(X_{T_i^{t,x}})$ . Donc, pour  $t \leq s < \tau_t < T_i^{t,x}$ , on a :

$$\psi(X_s) < \bar{u}(s, X_s) = u_i(s, X_s)$$

De plus, par les propriétés de  $u_i$  et l'existence d'une densité pour le flot, on a :

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial s} + Au_i + B^l u_i\right)(s, X_s) = 0 \quad ds \, d\mathbf{P} \quad \text{presque partout sur } \{s < \tau_t\}$$

En effet : puisque  $u_i$  vérifie :

$$(u_i - \psi) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + Au_i + B^l u_i\right) = 0 \quad dt \, dx \quad \text{presque partout}$$

On peut, alors, écrire :

$$dt \, dx[\{(t, x) \mid (\psi - u_i) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + Au_i + B^l u_i\right) \neq 0\}] = 0$$

où  $dt, dx$  désignent les mesures de Lebesgue respectivement sur  $[0, T]$  et sur  $] - l, l[$ .

Pour  $dt$ -presque tout  $t$ , on a :

$$dx[\{x \mid (\psi - u_i) \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + Au_i + B^l u_i\right) \neq 0\}] = 0$$

Or  $X_s$  a une densité, donc la loi de  $X_s$  est continue par rapport à la mesure  $dx$ . D'où :

$$\mathbf{P}_{X_t}[\{x \mid (\psi - u_i)\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + Au_i + B^i u_i\right) \neq 0\}] = 0$$

Donc :

$$(\psi - u_i)\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + Au_i + B^i u_i\right) = 0 \quad dt \, d\mathbf{P} \, p.s$$

Or, sur  $\{s < \tau_t\}$ , on a  $\psi(X_s) < u_i(s, X_s) \, dt \, d\mathbf{P} \, p.s$ , ce qui donne  $\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + Au_i + B^i u_i\right) = 0 \, dt \, d\mathbf{P} \, p.s$  sur  $\{s < \tau_t\}$ .

D'autre part, remarquant que  $M_{\beta \wedge T_i^{t,x}}$  ( Voir (4.12) ) est une martingale, en suivant le même raisonnement pour obtenir (4.13), mais, en utilisant le théorème d'arrêt pour  $\tau_t$  et  $t$  au lieu de  $\tau$  et  $t$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{-r(\tau_t \wedge T_i^{t,x} - t)} \bar{u}(\tau_t \wedge T_i^{t,x}, X_{\tau_t \wedge T_i^{t,x}}^x) &= \mathbf{E} e^{-r(t \wedge T_i^{t,x} - t)} \bar{u}(t \wedge T_i^{t,x}, X_{t \wedge T_i^{t,x}}^x) \\ &= \mathbf{E} u_i(t, X_t) \end{aligned}$$

Par la définition de  $\tau_t$ , on a :

$$\bar{u}(\tau_t \wedge T_i^{t,x}, X_{\tau_t \wedge T_i^{t,x}}^x) = \psi(X_{\tau_t \wedge T_i^{t,x}}^x)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} u_i(t, X_t) &= \mathbf{E} e^{-r(\tau_t \wedge T_i^{t,x} - t)} \psi(X_{\tau_t \wedge T_i^{t,x}}^x) \\ &= \mathbf{E} (\mathbf{E} (e^{-r(\tau_t \wedge T_i^{t,x} - t)} \psi(X_{\tau_t \wedge T_i^{t,x}}^x) | \mathcal{F}_t)) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} u_i(t, X_t) &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E} e^{-r(\tau \wedge T_i^{t,x} - t)} \psi(X_{\tau \wedge T_i^{t,x}}^x) | \mathcal{F}_t \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E} (e^{-r(\tau \wedge T_i^{t,x} - t)} \psi(X_{\tau \wedge T_i^{t,x}}^x)) |_{x=X_t} \\ &= u_i^*(t, X_t) \quad \text{par (4.2)} \end{aligned}$$

On a, alors,

$$u_i(t, X_t) = u_i^*(t, X_t) \quad p.s$$

D'où :

$$u_i(t, x) = u_i^*(t, x) \quad \text{pour } (t, x) \in [0, T] \times \Omega_i$$

■

De plus, en adaptant la démonstration du lemme 1.10 de [23] au cas d'un ouvert borné  $\Omega_i$ , on a le lemme de continuité  $L^\infty$ .

**Lemme 4.7** Si  $\psi$  et  $\hat{\psi}$  sont des fonctions dans  $W^{1,2,\alpha}(\mathbf{R})$  et si  $\psi - \hat{\psi} \in L^\infty(\Omega_i)$ , alors les solutions  $u_i$  ( resp.  $\hat{u}_i$  ) de l'inéquation variationnelle (4.7) associée à  $\psi$  ( resp.  $\hat{\psi}$  ) vérifient :

$$u_i - \hat{u}_i \in L^\infty([0, T] \times \Omega_i)$$

et

$$\|u_i - \hat{u}_i\|_{L^\infty([0, T] \times \Omega_i)} \leq \|\psi - \hat{\psi}\|_{L^\infty(\Omega_i)}$$

**Démonstration :** Supposons  $u_\varepsilon$  ( resp.  $\hat{u}_\varepsilon$  ) est la solution du problème pénalisé de (4.7) associé à  $\psi$  ( resp.  $\hat{\psi}$  ) :

$$-\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v\right)_i + a(u_\varepsilon, v) + b(u_\varepsilon, v) - (f, v)_i + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), v)_i = 0 \quad \forall v \in V_i$$

avec :  $\beta(\cdot) = -(\psi - \cdot)_+$  et  $f = \lambda \int_{z, x+z \notin \Omega_i} \psi(x+z) \nu(dz)$  ( resp.  $\hat{f} = \lambda \int_{z, x+z \notin \Omega_i} \hat{\psi}(x+z) \nu(dz)$  ).  
Posons :  $w = (u_\varepsilon - \hat{u}_\varepsilon - K)_+$  avec  $K = \|\psi - \hat{\psi}\|_{L^\infty(\Omega_i)}$ , on a, en prenant  $v = w$  :

$$-\left(\frac{\partial w}{\partial t}, w\right)_i + a(w, w) + b(w, w) + a(K, w) + b(K, w) - (f - \hat{f}, w)_i + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon) - \beta(\hat{u}_\varepsilon), w)_i = 0 \quad (4.14)$$

Or :

$$b(K, w) - (f - \hat{f}, w) = \left(\lambda \int_{z, x+z \notin \Omega_i} (K - (\psi - \hat{\psi})) \nu(dz), w\right)$$

et compte tenu du fait que  $K - (\psi - \hat{\psi}) \geq 0$ , on voit que  $b(K, w) - (f - \hat{f}, w)$  est positive. Par ailleurs,  $a(K, w) = Kr \int w dx > 0$  et remarquons :

$$(\beta(u_\varepsilon) - \beta(\hat{u}_\varepsilon), w)_i \geq 0$$

on déduit, de (4.14),

$$-\left(\frac{\partial w}{\partial t}, w\right)_i + a(w, w) + b(w, w) \leq 0 \quad (4.15)$$

En suivant la même raisonnement du lemme 3.4, on peut montrer qu'il existe deux réels strictement positifs  $\rho$  et  $\gamma$  tel que :

$$a(w, w) + b(w, w) + \rho|w|_{H_i}^2 \geq \gamma\|w\|_{V_i}^2$$

ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|_{H_i}^2 &\leq -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|_{H_i}^2 + \gamma\|w\|_{V_i}^2 \\ &\leq -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w|_{H_i}^2 + a(w, w) + b(w, w) + \rho|w|_{H_i}^2 \\ &\leq \rho|w|_{H_i}^2 \end{aligned}$$

en utilisant (4.15). On a :

$$\frac{d}{dt} (|w|_{H_i}^2 e^{2\rho t}) \geq 0$$



Cela implique que  $|w|_{H_1}^2 e^{2\rho t}$  est une fonction croissante en  $t$ . Or  $w(T) = 0$ , d'où :  $w = 0$ . On obtient finalement les résultats énoncés en faisant passer à la limite. ■

En utilisant la proposition 3.25, on peut montrer le théorème 4.8 par la même méthode que pour le théorème 3.26.

**Théorème 4.8** *Supposons que  $\psi \in W^{1,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , alors la solution  $u_i$  de l'inéquation variationnelle (4.7) associée à  $\psi$  égale à  $u_i^*(t, x)$  qui est défini par (4.2).*

Selon les résultats précédents, nous savons que le calcul du prix d'une option américaine se ramène à la résolution de l'inéquation variationnelle (4.7). La discrétisation de ce problème fait l'objet de la prochaine section.

### 4.3 Discrétisation du problème

Nous nous intéressons maintenant au cas où  $Z_1$  admet une densité  $g$  (i.e :  $\nu(dz) = g(z)dz$ ). Nous supposons de plus que cette fonction de densité  $g$  est de classe  $C^1$ . Un exemple important de cette situation est le cas où  $U_1 + 1$  suit une loi log-normale, car on a alors des formules simples pour le prix des options européennes (cf. [32]).

Pour discrétiser (4.7) par la méthode des différences finies, on le transforme, d'abord, en un problème homogène. Supposons qu'on ait une fonction  $\tilde{\psi}$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  vérifiant :

- $\tilde{\psi}$  est régulière dans  $\mathbf{R}$  (de classe  $C^2$ ).
- $\tilde{\psi} = \psi$  dans un voisinage ouvert de  $\partial\Omega_i$ .

Il n'est pas difficile de voir que ceci est possible pour tous les cas pratiques d'obstacle  $\psi$  que nous traitons. On voit facilement que le problème (4.7) est équivalent au problème homogène suivant, après changement de variable,  $\tilde{u}_i = u_i - \tilde{\psi}$ ,

Trouver  $u_i \in L^2([0, T]; V_i)$  tel que  $\frac{\partial u_i}{\partial t} \in L^2([0, T]; H_i)$  et

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(T, \cdot) = \tilde{\psi} \\ u_i \geq \tilde{\psi} \quad \text{p.p. dans } [0, T] \times \Omega_i \\ u_i(t, x) = 0 \quad \text{si } x \in \partial\Omega_i \\ \forall v_i \in V_i, \quad v_i \geq \tilde{\psi}, \quad \text{on a :} \\ -\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}, v_i - u_i\right)_i + a(u_i, v_i - u_i) + b(u_i, v_i - u_i) - (\tilde{f}, v_i - u_i)_i \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.16)$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= A\tilde{\psi} + \tilde{B}^l\tilde{\psi} + f, \quad f = \lambda \int_{z, z+x \notin \Omega_i} \psi(x+z)\nu(dz) \\ \tilde{\psi} &= \psi - \tilde{\psi} \end{aligned}$$

Désormais, pour alléger l'écriture, on peut noter  $\tilde{u}_i$  par un nouveau  $u_i$ ,  $\tilde{f}$  par un nouveau  $f$  dans (4.16). Comme  $\tilde{\psi}$  est une fonction assez régulière, on voit que la fonction  $\tilde{\psi}$  a au moins la même régularité que  $\psi$ . D'autre part, il est clair que, si  $\psi$  appartient à  $V_\alpha$ , sous la condition **(H)** :  $\mathbf{E}e^{\alpha|Z_1|} < +\infty$ , la fonction  $f$  donnée au dessus est au moins dans  $H_\alpha$ . En effet, comme :

$$f = A\tilde{\psi} + \tilde{B}^i\tilde{\psi} + \lambda \int_{z, z+x \notin \Omega_i} \psi(x+z)\nu(dz),$$

on voit qu'il suffit de vérifier que  $\int_{z, z+x \notin \Omega_i} \psi(x+z)\nu(dz) \in H_\alpha$ . Or, en utilisant le théorème de Fubini et le fait que  $e^{-\alpha|x|} \leq e^{\alpha|z|} \cdot e^{-\alpha|x+z|}$ , on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_{z, z+x \notin \Omega_i} \psi(x+z)\nu(dz) \right|_\alpha^2 &\leq \int dx \int_{x+z \notin \Omega_i} \psi^2(x+z)\nu(dz) \cdot e^{-\alpha|x|} \\ &\leq \int \nu(dz) \cdot e^{\alpha|z|} \cdot \int \psi^2(x+z)e^{-\alpha|x+z|} dx \\ &\leq \mathbf{E}e^{\alpha|Z_1|} |\psi|_\alpha^2 \end{aligned}$$

Avant de discrétiser le problème, on introduit les notations :

$$\begin{aligned} K &= \{v \mid v \in V_i, v \geq \bar{\psi} \text{ p.p sur } \Omega_i\} \\ W(0, T) &= \{v \mid v \in L^2([0, T]; V_i), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2([0, T]; H_i)\} \\ \mathcal{K} &= \{v \mid v \in W(0, T), v(t) \in K, \text{ p.p. } t \in [0, T]\} \\ \mathcal{K}_0 &= \{v \mid v \in \mathcal{K}, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i, v(T) = \bar{\psi}\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$(4.18)$$

(4.16) peut être écrit de la façon suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{K}_0 \text{ tel que :} \\ (u' + Au + \tilde{B}^i u + f, v - u) \leq 0 \text{ p.p } t \in [0, T] \quad \forall v \in \mathcal{K} \end{cases} \quad (4.19)$$

En effet, (4.19) est une forme instantanée équivalente de l'inéquation suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{K}_0 \text{ tel que :} \\ \int_0^T (u' + Au + \tilde{B}^i u + f, v - u) dt \leq 0 \quad \forall v \in \mathcal{K} \end{cases} \quad (4.20)$$

Nous traitons, d'abord, le cas où  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , ce qui implique  $\bar{\psi} \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$  et  $f \in H_i$ . Nous affaiblissons ensuite l'hypothèse sur  $\psi$  en prenant  $\psi \in W^{1,2,\alpha}(\mathbf{R})$  (voir la section 4.4.4). Dans ce cas, nous avons  $\bar{\psi} \in W^{1,2,\alpha}(\mathbf{R})$  et  $f \in H_i$ .

Le problème (4.19) va être discrétisé par la méthode des différences finies exposée dans [22]. Précisément, soit  $h \in \mathbf{R}$ ,  $h > 0$ ,  $h$  destiné à tendre vers 0, et :

$$R_h = \{M \mid M = mh, m \in \mathbf{Z}\}$$

A chaque  $M$  dans  $R_h$ , on associe l'intervalle :

$$W_h^0(M) = ](m - \frac{1}{2})h, (m + \frac{1}{2})h[$$

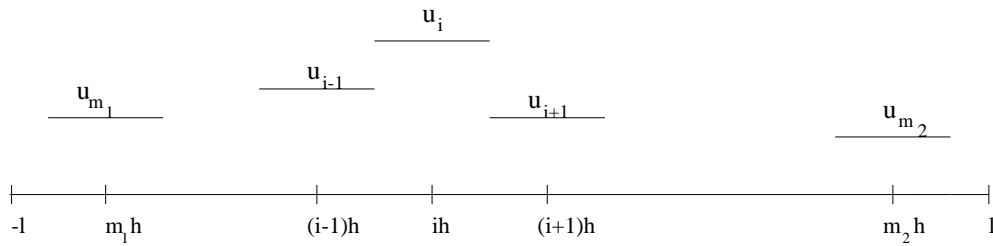
On pose, alors :

$$\begin{aligned}\Omega_h &= \{M \in R_h, W_h^0(M) \subset \Omega_i\} \\ m_1 &= \inf\{m \mid mh \in \Omega_h\} \\ m_2 &= \sup\{m \mid mh \in \Omega_h\}\end{aligned}$$

et nous notons  $V_h$  l'espace engendré par les fonctions  $\chi_h^M$  où  $\chi_h^M$  est la fonction indicatrice de  $W_h^0(M)$  et  $M \in \Omega_h$ . Un élément  $u_h$  de  $V_h$  est de la forme :

$$u_h(x) = \sum_{j=m_1}^{m_2} u_j \mathbf{1}_{(j-\frac{1}{2})h, (j+\frac{1}{2})h]}(x)$$

La fonction  $u_h$  peut être représentée par la figure suivante :



De plus, on approche les dérivées par des quotients différentiels :

$$\delta\varphi(x) = \frac{1}{h}[\varphi(x + \frac{h}{2}) - \varphi(x - \frac{h}{2})] \quad (4.21)$$

Définissons :

$$(u_h, v_h)_h = \int_{\Omega_i} u_h v_h dx \quad \forall u_h, v_h \in V_h$$

et

$$\begin{aligned}|v_h|_h &= \sqrt{(v_h, v_h)_h} = |v_h|_{L^2(\Omega_i)} \\ \|v_h\|_h &= [ |v_h|_{L^2(\Omega_i)}^2 + |\delta v_h|_{L^2(\Omega_i)}^2 ]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Il est facile de voir que ces normes vérifient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}|v_h|_h &\leq \|v_h\|_h \quad \forall v_h \in V_h \\ \|v_h\|_h &\leq \frac{C_0}{h} |v_h|_h \quad \forall v_h \in V_h\end{aligned} \quad (4.22)$$

où  $C_0 = \sqrt{5}$  quand  $h < 1$ . Le deuxième inégalité résulte des faits suivants : partant de la définition de l'opérateur  $\delta$  et remarquant que  $v_h$  est nul en dehors de  $[(m_1 - \frac{1}{2})h, (m_2 + \frac{1}{2})h]$ , on a :

$$\begin{aligned} |\delta v_h|_{L^2(\Omega_i)}^2 &= \left| \frac{v_h(\cdot + \frac{h}{2}) - v_h(\cdot - \frac{h}{2})}{h} \right|_{L^2(\Omega_i)}^2 \\ &= \int_{\Omega_i} \frac{1}{h^2} \cdot \left( v_h(x + \frac{h}{2}) - v_h(x - \frac{h}{2}) \right)^2 dx \\ &\leq \frac{2}{h^2} \left( \int_{\Omega_i + \frac{h}{2}} v_h^2(y) dy + \int_{\Omega_i - \frac{h}{2}} v_h^2(y) dy \right) \\ &\leq \frac{4}{h^2} |v_h|_{L^2(\Omega_i)}^2 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \|v_h\|_h &= \left[ |v_h|_{L^2(\Omega_i)}^2 + |\delta v_h|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[ |v_h|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \frac{4}{h^2} |v_h|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{4}{h^2}} |v_h|_{L^2(\Omega_i)} \end{aligned}$$

Si l'on prend  $0 < h \leq 1$ , on obtient (4.22) avec  $C_0 = \sqrt{5}$ .

De plus, on a le lemme suivant.

**Lemme 4.9** *Soit  $(u_h)_{h>0}$  une famille de fonctions telles que  $u_h \in V_h$  pour tout  $h$ . Si  $u_h$  converge vers  $u$  faiblement dans  $L^2(\Omega_i)$  quand  $h$  tend vers 0 et  $\delta u_h$  est borné dans  $L^2(\Omega_i)$ . Alors, on a :*

$$u_h \longrightarrow u \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega_i)$$

**Remarque 4.10** *Le lemme 4.9 équivaut à dire que : si les conditions du lemme 4.9 sont vérifiées, alors,  $u_h$  est relativement compact dans  $L^2(\Omega_i)$ .*

**Démonstration :** On va introduire une variable intermédiaire  $\bar{u}_h$ . Si l'on montre qu'elle vérifie les conditions suivantes :

- 1)  $|u_h - \bar{u}_h|_{L^2(\Omega_i)} \longrightarrow 0$  si  $h \rightarrow 0$
- 2)  $|\frac{\partial \bar{u}_h}{\partial x}|_{L^2(\Omega_i)} \leq C$   $|\bar{u}_h|_{L^2(\Omega_i)} \leq C$

alors, comme  $u_h$  converge vers  $u$  faiblement dans  $L^2(\Omega_i)$ , 1) entraîne que  $\bar{u}_h$  converge vers  $u$  faiblement dans  $L^2(\Omega_i)$ . De plus, par 2), on sait qu'il existe une sous suite de  $\bar{u}_h$ , (notée encore  $\bar{u}_h$ ), qui converge fortement. D'où  $\bar{u}_h$  converge fortement vers  $u$ . Comme :

$$|u_h - u|_{L^2(\Omega_i)} \leq |u_h - \bar{u}_h|_{L^2(\Omega_i)} + |\bar{u}_h - u|_{L^2(\Omega_i)},$$

on obtient le résultat énoncé en utilisant de nouveau 1).

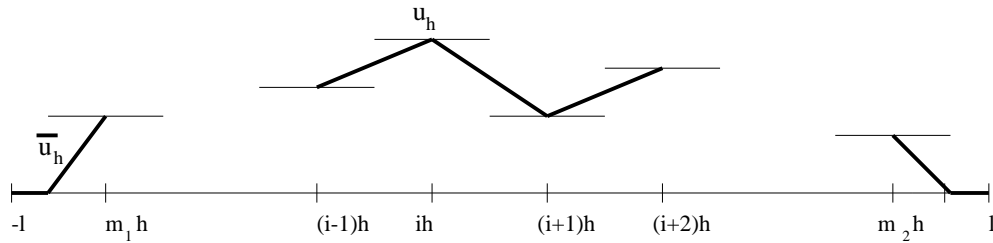
Maintenant, le problème est comment construire  $\bar{u}_h \Gamma$

Notons :

$$\bar{u}_h = (\bar{u}_i) \quad m_1 - 1 \leq i \leq m_2; \quad e_i = [ih, (i+1)h[ \quad m_1 \leq i < m_2$$

A partir de la définition de  $V_h$ , il n'est pas difficile de voir que  $u_h$  est nul sur les ensembles  $] (m_2 + \frac{1}{2})h, l[$  et  $] -l, (m_1 - \frac{1}{2})h[$ . Notons :  $u_i = u_h(ih)$  pour  $m_1 \leq i \leq m_2$ , on construit la fonction  $\bar{u}_h$ , qui est définie sur  $\Omega_i = ] -l, l[$ , de la façon suivante : (voir la figure suivante )

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(x) &= \frac{u_{i+1} - u_i}{h}(x - ih) + u_i && \text{si } x \in e_i \\ \bar{u}_{m_1-1}(x) &= \begin{cases} \frac{u_{m_1}}{\frac{1}{2}h}(x - (m_1 - \frac{1}{2})h) & \text{si } x \in [(m_1 - \frac{1}{2})h, m_1h[ \\ 0 & \text{si } x \in ] -l, (m_1 - \frac{1}{2})h[ \end{cases} \\ \bar{u}_{m_2}(x) &= \begin{cases} -\frac{u_{m_2}}{\frac{1}{2}h}(x - (m_2 + \frac{1}{2})h) & \text{si } x \in [m_2h, (m_2 + \frac{1}{2})h[ \\ 0 & \text{si } x \in ] (m_2 + \frac{1}{2})h, l[ \end{cases} \end{aligned}$$



Il suffit de montrer que  $\bar{u}_h$  vérifie les deux points énoncés au début de la démonstration. Pour cela, notons :

$$\begin{aligned} e_{1i} &= [ih, (i + \frac{1}{2})h[ && m_1 \leq i < m_2 \\ e_{2i} &= [(i + \frac{1}{2})h, (i+1)h[ && m_1 \leq i < m_2 \\ e_{m_1-1} &= [(m_1 - \frac{1}{2})h, m_1h[ \\ e_{m_2} &= [m_2h, (m_2 + \frac{1}{2})h[ \end{aligned}$$

Évidemment :  $e_{1i} \cup e_{2i} = e_i$ . A partir de la définition de  $u_h$  et  $\bar{u}_h$ , on a :

$$\|u_h - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega_i)}^2 = \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \left[ \int_{e_{1i}} (u_i - \bar{u}_i(x))^2 dx + \int_{e_{2i}} (u_{i+1} - \bar{u}_i(x))^2 dx \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{e_{m_1-1}} (u_{m_1} - \bar{u}_{m_1-1}(x))^2 dx + \int_{e_{m_2}} (u_{m_2} - \bar{u}_{m_2}(x))^2 dx \\
& = \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \left[ \int_{e_{1i}} \left( -\frac{u_{i+1} - u_i}{h} (x - ih) \right)^2 dx + \int_{e_{2i}} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{h} (x - (i+1)h) \right)^2 dx \right. \\
& + 2 \int_{e_{m_1-1}} \left( \frac{u_{m_1}}{h} (m_1 h - x) \right)^2 dx + 2 \int_{e_{m_2}} \left( \frac{u_{m_2}}{h} (x - m_2 h) \right)^2 dx \\
& \leq 2 \left[ \sum_{i=m_1}^{m_2-1} h^3 \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right)^2 + h^3 \left( \frac{u_{m_1}}{h} \right)^2 + h^3 \left( \frac{u_{m_2}}{h} \right)^2 \right] \\
& \leq Ch^2 |\delta u_h|_h^2
\end{aligned}$$

Or par l'hypothèse du lemme 4.9, on sait que  $\delta u_h$  est borné dans  $L^2(\Omega_i)$ . Donc, on obtient que :

$$|u_h - \bar{u}_h|_{L^2(\Omega_i)} \rightarrow 0 \quad \text{si } h \rightarrow 0$$

i.e  $\bar{u}_h$  vérifie 1).

Par ailleurs, dérivant par rapport à  $x$  dans la définition de  $\bar{u}_h$ , on a :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial \bar{u}_h}{\partial x} \right|_{L^2(\Omega_i)}^2 & = \sum_{i=m_1}^{m_2-1} \int_{e_i} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right)^2 dx + \int_{e_{m_1-1}} \left( \frac{u_{m_1}}{\frac{1}{2}h} \right)^2 dx + \int_{e_{m_2}} \left( \frac{u_{m_2}}{\frac{1}{2}h} \right)^2 dx \\
& \leq |\delta u_h|_h^2 \\
& \leq C
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$|\bar{u}_h|_{L^2(\Omega_i)} \leq |u_h|_{L^2(\Omega_i)} + |u_h - \bar{u}_h|_{L^2(\Omega_i)}$$

Or  $u_h$  est borné dans  $L^2(\Omega_i)$  grâce au fait que  $u_h$  converge vers  $u$  faiblement dans  $L^2(\Omega_i)$  et remarquons 1), on déduit que  $\bar{u}_h$  est borné dans  $L^2(\Omega_i)$ . ■

### 4.3.1 Approximation de $a(\cdot, \cdot)$ , $\mathcal{K}$ et $\bar{\psi}$

Nous approximations la fonction  $\psi$  par  $\psi_h = \sum_{M \in \Omega_h} \psi_h(M) \chi_h^M$  où  $\psi_h(M) = \frac{1}{h} \int_{W_h^0(M)} \psi(x) dx$ .

<sup>1</sup> Même chose pour la fonction  $\bar{\psi}$ . Comme  $\bar{\psi} = \psi - \tilde{\psi}$ , d'où la fonction approchée de  $\bar{\psi}$  est  $\bar{\psi}_h = \psi_h - \tilde{\psi}_h$ . Notons :  $u_j = u_h(jh)$  pour  $m_1 \leq j \leq m_2$ ,  $\bar{\psi}_s = \bar{\psi}_h(sh)$  pour  $s \in \mathbf{Z}$ . Nous définissons, pour  $u_h \in V_h$  et  $m_1 \leq j \leq m_2$  :

$$\begin{aligned}
a_h(u_h, v_h) & = \int_{\Omega_i} \frac{\sigma^2}{2} \delta u_h \delta v_h dx + \int_{\Omega_i} r u_h v_h dx - \int_{\Omega_i} \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \delta u_h v_h dx \\
a_h(u_h, v_h) & = -(A_h u_h, v_h)
\end{aligned}$$

<sup>1</sup>Dans la pratique, nous prenons  $\psi_h = \sum_{M \in \Omega_h} \psi(M) \chi_h^M$ . Nous verrons ce point à la fin de ce chapitre.

On obtient un opérateur  $A_h : V_h \rightarrow V_h$  défini par :

$$A_h u_h = \sum_{j=m_1}^{m_2} (A_h u_h)_j \mathbf{1}_{(j-\frac{1}{2})h, (j+\frac{1}{2})h]}$$

où :

$$(A_h u_h)_j = \frac{\sigma^2}{2h^2} (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - r u_j \quad (4.23)$$

Par ailleurs, on approche  $K$  ( défini page 96 ) par :

$$\mathcal{K}_h = \{v_h \in V_h, \quad v_h(M) \geq \bar{\psi}_h(M) \quad M \in \Omega_h\}$$

Il n'est pas difficile de voir que  $\mathcal{K}_h$  est un sous espace convexe fermé de  $V_h$  et non vide ( Par exemple :  $\bar{\psi}_h \in \mathcal{K}_h$  ).

### 4.3.2 Approximation de l'opérateur $\tilde{B}^l$ et de $f$

Pour traiter l'opérateur  $\tilde{B}^l$ , on rappelle, d'abord,  $\nu(dz) = g(z)dz$  (Voir la section 4.3). Comme l'opérateur  $\tilde{B}^l$  peut être écrit sous la forme suivante :

$$\tilde{B}^l u = \lambda \left[ \int_{z, x+z \in \Omega_l} u(t, x+z) g(z) dz - u(t, x) \right]$$

On introduit alors l'opérateur  $B_h : V_h \rightarrow V_h$  défini par :

$$B_h u_h = \sum_{j=m_1}^{m_2} (B_h u_h)_j \mathbf{1}_{(j-\frac{1}{2})h, (j+\frac{1}{2})h]}$$

avec :

$$(B_h u_h)_j = \lambda \left( \sum_{i=m_1-j}^{m_2-j} u_{i+j} g_i h - u_j \right) \quad m_1 \leq j \leq m_2 \quad g_i = g(ih) \quad (4.24)$$

Il est clair de voir que  $i$  varie entre  $-(m_2 - m_1)$  et  $m_2 - m_1$ . D'où  $[g_i]$  est un vecteur de dimension au moins de  $2(m_2 - m_1) + 1$ . On définit :

$$b_h(u_h, v_h) = -(B_h u_h, v_h)$$

Par ailleurs, rappelons que  $f = A\tilde{\psi} + \tilde{B}^l \tilde{\psi} + \lambda \int_{z, z+x \notin \Omega_l} \psi(x+z) \nu(dz)$ , on l'approche par  $f_h = \sum f_j \mathbf{1}_{(j-\frac{1}{2})h, (j+\frac{1}{2})h]}$  avec :

$$f_j = (A_h \tilde{\psi}_h)_j + (B_h \tilde{\psi}_h)_j + \lambda \sum_{\substack{i+j > m_2 \\ i+j < m_1}} \psi_{i+j} g_i h \quad (4.25)$$

### 4.3.3 Discrétisation du temps

Supposons que  $k$  est le pas de discrétisation en temps. Posons :

$$N = \left\lceil \frac{T}{k} \right\rceil \quad \text{et} \quad v_{h,k}(t, x) = \sum_{i=0}^N v_h^i(x) \mathbf{1}_{](i-1)k, ik]}(t)$$

Pour  $x$  fixé dans  $\Omega_i$ ,  $t \mapsto v_{h,k}(t, x)$  est, éventuellement, une fonction définie sur l'intervalle  $] -k, T]$ .

On approche l'opérateur de dérivation par rapport au temps en posant :

$$\bar{\delta} v_{h,k}(t) = \frac{v_{h,k}(t+k) - v_{h,k}(t)}{k} \quad (4.26)$$

Le schéma d'approximation du problème (4.19) est alors le suivant. On cherche une solution approchée de la forme :

$$u_{h,k}(t, x) = \sum_{i=0}^N u_h^i(x) \mathbf{1}_{](i-1)k, ik]}(t)$$

où  $u_h^0, \dots, u_h^N$  sont des éléments de  $V_h$  vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} u_h^N = \bar{\psi}_h, \\ \forall i \in \{0, \dots, N\}, u_h^i \in \mathcal{K}_h \text{ et } u_h^i(m_1 h) = u_h^i(m_2 h) = 0, \\ \forall i \in \{0, \dots, N\}, \forall v_h \in \mathcal{K}_h \\ \left( \frac{u_h^i - u_h^{i-1}}{k} + A_h u_h^{i-\theta} + B_h u_h^{i-\bar{\theta}} + f_h, v_h - u_h^{i-1} \right)_h \leq 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

avec  $\theta$  et  $\bar{\theta}$  fixés dans  $[0, 1]$  et :

$$\begin{aligned} u_h^{i-\theta} &= u_h^i + \theta(u_h^{i-1} - u_h^i) \\ u_h^{i-\bar{\theta}} &= u_h^i + \bar{\theta}(u_h^{i-1} - u_h^i), \end{aligned}$$

les opérateurs  $A_h$  et  $B_h$  et la fonction  $f_h$  étant définis par (4.23), (4.24) et (4.25) respectivement. Le système (4.27) donne une relation de récurrence entre  $u_h^{i-1}$  et  $u_h^i$  et se résout de proche en proche à partir de la condition terminale  $u_h^N = \bar{\psi}_h$ . Si on note :

$$\begin{aligned} u_{h,k}^\theta(t) &= \sum_{i=0}^N u_h^{i+1-\theta}(x) \mathbf{1}_{](i-1)k, ik]}(t) \\ &= u_{h,k}(t+k) + \theta(u_{h,k}(t) - u_{h,k}(t+k)), \end{aligned} \quad (4.28)$$

on voit que pour toute fonction  $v_{h,k}$  de la forme :

$$v_{h,k}(t, x) = \sum_{i=0}^N v_h^i(x) \mathbf{1}_{](i-1)k, ik]}(t),$$

avec  $v_h^i \in \mathcal{K}_h$ , pour tout  $i = 0, \dots, N$ , on a :

$$\int_0^{T-k} (\bar{\delta} u_{h,k} + A_h u_{h,k}^\theta + B_h u_{h,k}^{\bar{\theta}} + f_h, v_{h,k} - u_{h,k}) dt \leq 0 \quad (4.29)$$

Pour  $\theta = 1$  (resp.  $\theta = 0$ ), (4.27) s'agit du schéma implicite (resp. explicite)



Avant d'étudier la convergence de la solution du problème discrétisé, on montre le lemme suivant, qui joue un rôle important dans la démonstration du théorème de convergence.

**Lemme 4.11** *Soit une famille de fonctions  $u_{h,k}$  de la forme :  $u_{h,k}(t, x) = \sum_{i=0}^N u_h^i(x) \mathbf{1}_{[(i-1)k, ik]}(t)$  avec  $u_h^i \in V_h$ . On suppose que  $u_{h,k}$  vérifie les conditions suivantes :*

$$i). \quad |\bar{\delta} u_{h,k}|_{L^\infty([0, T]; L^2(\Omega_i))} \leq C \quad \text{et} \quad |u_{h,k}|_{L^\infty([0, T]; L^2(\Omega_i))} \leq C$$

ii). *Il existe une fonction  $u$  vérifiant  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$  et  $|u|_{L^\infty([0, T]; L^2(\Omega_i))} \leq C$  telle que, quand  $h$  et  $k$  tendent vers 0 :*

$$\begin{aligned} u_{h,k} &\longrightarrow u && \text{faiblement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \\ \delta u_{h,k} &\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} && \text{faiblement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$u_{h,k} \longrightarrow u \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$$

**Démonstration :** Il résulte de la définition de  $\bar{\delta}$  que la condition  $|\bar{\delta} u_{h,k}|_{L^\infty([0, T]; L^2(\Omega_i))} \leq C$  entraîne :

$$|u_{h,k}(t+k, \cdot) - u_{h,k}(t, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)} \leq Ck \quad (4.30)$$

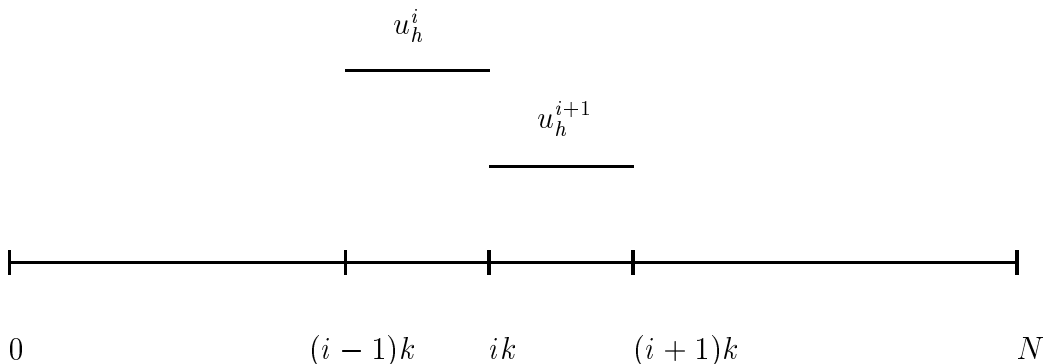
où  $C$  est constante ne dépendant ni de  $t$ , ni de  $k$ , ni de  $h$ . On montre, d'abord, l'inégalité suivante :

$$|u_{h,k}(t, \cdot) - u_{h,k}(s, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)} \leq C(|t-s| \vee k) \quad \forall t, s \in [0, T] \quad (4.31)$$

Cela se fait en deux étapes :

- 1). Si  $|t-s| < k$ ,  $|u_{h,k}(t, \cdot) - u_{h,k}(s, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)} \leq Ck$ .
- 2). Si  $|t-s| \geq k$ ,  $|u_{h,k}(t, \cdot) - u_{h,k}(s, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)} \leq C|t-s|$ .

Pour nous donner une idée précise de la fonction  $u_{h,k}$ , nous la représentons par la figure suivante en partant de sa définition  $u_{h,k} = \sum_{i=0}^N u_h^i \mathbf{1}_{[(i-1)k, ik]}(t)$  :



Supposons  $s \geq t$ . On commence à vérifier le premier point 1). Si  $|t - s| < k$ , il est clair qu'on a deux cas :

- Soit  $t, s$  se trouvent dans le même intervalle, par exemple, dans  $](i-1)k, ik]$ . Dans ce cas,  $u_{h,k}(t, x) = u_{h,k}(s, x) = u_h^i$ . On a évidemment l'inégalité (4.31).
- Soit  $t, s$  se trouvent dans deux intervalles adjacents, par exemple,  $t \in ](i-1)k, ik]$ ,  $s \in ]ik, (i+1)k]$ . Comme la valeur de  $u_{h,k}$  reste toujours égale à  $u_h^{i+1}$  pour tout  $s \in ]ik, (i+1)k]$ , on peut, donc, s'arranger de telle sorte que :

$$|u_{h,k}(s, \cdot) - u_{h,k}(t, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)} = |u_{h,k}(t+k, \cdot) - u_{h,k}(t, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)} \leq Ck$$

Pour vérifier le deuxième point, il suffit de remarquer qu'il existe un entier  $n$ ,  $1 \leq n \leq N$ , un réel  $s_1$ ,  $0 \leq s_1 \leq k$  tel que  $s = t + nk + s_1$ , et :

$$\begin{aligned} & |u_{h,k}(s, \cdot) - u_{h,k}(t, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)} \\ &= |u_{h,k}(t + nk + s_1, \cdot) - u_{h,k}(t, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)} \\ &\leq |u_{h,k}(t + nk + s_1, \cdot) - u_{h,k}(t + nk, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)} \\ &+ |u_{h,k}(t + nk, \cdot) - u_{h,k}(t + (n-1)k, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)} + \dots \\ &+ |u_{h,k}(t + k, \cdot) - u_{h,k}(t, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)} \end{aligned}$$

En utilisant le premier point 1) et (4.30), on obtient :

$$\begin{aligned} |u_{h,k}(s, \cdot) - u_{h,k}(t, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)} &\leq Ck + Cnk \\ &\leq 2C(s - t) \end{aligned}$$

à cause des faits que  $k \leq s - t$ ,  $nk \leq s - t$ .

Maintenant, on commence la démonstration principale de ce lemme. Notons :

$$Y_{h,k}(t) = |u_{h,k}(t, \cdot) - u(t, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)}^2$$

Pour montrer le lemme 4.11, il suffit de vérifier que :

$$\int_{[0, T]} Y_{h,k}(t) dt \longrightarrow 0 \quad h, k \rightarrow 0$$

Pour cela, il suffit de montrer les deux points suivants :

- Pour  $t$  quelconque fixé dans  $[0, T[$ ,  $Y_{h,k}(t) \longrightarrow 0$  ;
- Il existe une fonction  $g \in L^1$  telle que  $|Y_{h,k}(t)| \leq g(t)$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

On commence par vérifier ii). Cela résulte de l'inégalité :

$$\begin{aligned} |Y_{h,k}(t)| &= |u_{h,k}(t, \cdot) - u(t, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)}^2 \\ &\leq 2|u_{h,k}(t, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)}^2 + 2|u(t, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)}^2 \end{aligned}$$

et du fait que  $|u_{h,k}|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega_i))} \leq C$  et  $|u|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega_i))} \leq C$ .

Maintenant, on commence à montrer i). Soit  $\rho > 0$ , pour  $t$  quelconque fixé dans  $[0, T[$ , on considère le terme  $\frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u_{h,k}(s, x) ds$ . Puisque :

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u(s, x) ds - u(t, x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} (u(s, x) - u(t, x)) ds \right| \\
&= \left| \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} \left( \int_t^s \frac{\partial u}{\partial s}(\xi, x) d\xi \right) ds \right| \\
&\leq \frac{C}{\rho} \left( \int_t^{t+\rho} \left[ \int_t^s \left( \frac{\partial u}{\partial s}(\xi, x) \right)^2 ds \right]^{1/2} \cdot \left( \int_t^{t+\rho} 1^2 ds \right)^{1/2} \right) \\
&= \frac{C}{\sqrt{\rho}} \left( \int_t^{t+\rho} \left[ \int_t^s \left( \frac{\partial u}{\partial s}(\xi, x) \right)^2 d\xi \right] \cdot [s - t] ds \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

en utilisant deux fois l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Par ailleurs, en utilisant le théorème de Fubini, et en remarquant que  $\frac{\partial u}{\partial t}$  appartient à  $L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u(s, \cdot) ds - u(t, \cdot) \right|_{L^2(\Omega_i)} \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{\rho}} \left| \left( \int_t^{t+\rho} \left[ \int_t^s \left( \frac{\partial u}{\partial s}(\xi, \cdot) \right)^2 d\xi \right] \cdot [s - t] ds \right)^{1/2} \right|_{L^2(\Omega_i)} \\
&= \frac{C}{\sqrt{\rho}} \left( \int_{\Omega_i} dx \cdot \int_t^{t+\rho} \left[ \int_t^s \left( \frac{\partial u}{\partial s}(\xi, x) \right)^2 d\xi \right] \cdot [s - t] ds \right)^{1/2} \\
&= \frac{C}{\sqrt{\rho}} \left( \int_t^{t+\rho} ds \cdot (s - t) \int_t^s d\xi \int_{\Omega_i} \left( \frac{\partial u}{\partial s}(\xi, x) \right)^2 dx \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{\rho}} \left( \int_t^{t+\rho} (s - t) ds \right)^{1/2} \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{L^2([0,T];L^2(\Omega_i))} \\
&\leq C \sqrt{\rho} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{L^2([0,T];L^2(\Omega_i))} \\
&\leq C \sqrt{\rho}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Ce qui entraîne que :

$$\frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u(s, x) ds \longrightarrow u(t, x) \quad \text{dans } L^2(\Omega_i) \quad \text{si } \rho \rightarrow 0 \tag{4.33}$$

D'autre part, en utilisant (4.31), on a :

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u_{h,k}(s, \cdot) ds - u_{h,k}(t, \cdot) \right|_{L^2(\Omega_i)} \\
&= \left| \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} (u_{h,k}(s, \cdot) - u_{h,k}(t, \cdot)) ds \right|_{L^2(\Omega_i)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} |u_{h,k}(s, \cdot) - u_{h,k}(t, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)} ds \\
&\leq \frac{C}{\rho} \int_t^{t+\rho} (|t-s| \vee k) ds \\
&\leq C(\rho \vee k)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

On a par ailleurs, pour  $t \in [0, T[$  fixé et  $\rho > 0$  :

$$\begin{aligned}
(Y_{h,k}(t))^{1/2} &= |u_{h,k}(t, \cdot) - u(t, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)} \\
&\leq |u_{h,k}(t, \cdot) - \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u_{h,k}(s, \cdot) ds|_{L^2(\Omega_i)} \\
&+ \left| \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u_{h,k}(s, \cdot) ds - \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u(s, \cdot) ds \right|_{L^2(\Omega_i)} \\
&+ \left| \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u(s, \cdot) ds - u(t, \cdot) \right|_{L^2(\Omega_i)} \\
&\leq C(k \vee \rho) + C\sqrt{\rho} + \left| \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u_{h,k}(s, \cdot) ds - \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u(s, \cdot) ds \right|_{L^2(\Omega_i)}
\end{aligned}$$

d'après (4.34) et (4.32).

On a donc, pour chaque  $\rho > 0$  :

$$\limsup_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (Y_{h,k}(t))^{1/2} \leq C\sqrt{\rho} + \limsup_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u_{h,k}(s, \cdot) ds - \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u(s, \cdot) ds \right|_{L^2(\Omega_i)}$$

Pour avoir  $\lim Y_{h,k}(t) = 0$ , il suffit donc de montrer que, pour tout  $\rho > 0$

$$\frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u_{h,k}(s, \cdot) ds \longrightarrow \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u(s, \cdot) ds \tag{4.35}$$

fortement dans  $L^2(\Omega_i)$  quand  $h, k \rightarrow 0$ . Or la convergence faible de  $u_{h,k}$  vers  $u$  dans  $L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$  entraîne :

$$\frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u_{h,k}(s, x) ds \longrightarrow \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u(s, x) ds \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega_i)$$

D'autre part, comme :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} \delta(u_{h,k}(s, \cdot)) ds \right|_{L^2(\Omega_i)} &\leq \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} |\delta(u_{h,k}(s, \cdot))|_{L^2(\Omega_i)} ds \\
&\leq \left( \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} |\delta(u_{h,k}(s, \cdot))|_{L^2(\Omega_i)}^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq \left( \frac{C}{\rho} \right)^{1/2} \quad \text{par suite des hypothèses du lemme}
\end{aligned}$$

On déduit, du lemme 4.9, que :

$$\frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u_{h,k}(s, x) ds \longrightarrow \frac{1}{\rho} \int_t^{t+\rho} u(s, x) ds \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega_i)$$

■

## 4.4 Convergence de la solution du problème discrétisé

### 4.4.1 Étude des propriétés des $B_h$ et $A_h$

Prenant les même notations qu'avant, on va démontrer le lemme suivant qui dira que l'opérateur  $B_h$  est continu dans  $V_h$ .

**Lemme 4.12** *Pour l'opérateur  $B_h$  défini par (4.24), on a :*

$$|B_h u_h|_{L^2(\Omega_t)} \leq C_b |u_h|_{L^2(\Omega_t)} \quad \forall u_h \in V_h$$

où  $C_b$  est une constante.

**Démonstration :** A partir de la définition de  $B_h$  ( Vu (4.24) ), on voit, du fait  $(a - b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , que :

$$\begin{aligned} |B_h u_h|_{L^2(\Omega_t)}^2 &= \sum_{j=m_1}^{m_2} h (B_h u_h)_j^2 \\ &= \lambda^2 \sum_{j=m_1}^{m_2} h \left( \sum_{i=m_1-j}^{m_2-j} u_{i+j} g_i h - u_j \right)^2 \\ &\leq 2\lambda^2 h^3 \sum_{j=m_1}^{m_2} \left( \sum_{i=m_1}^{m_2} u_i g_{i-j} \right)^2 + 2\lambda^2 \sum_{j=m_1}^{m_2} h u_j^2 \end{aligned}$$

Grâce au fait que  $g$  est une fonction positive de classe  $C^1$  telle que  $\int g(z) dz = 1$ , on peut dire que  $\sum_{i=m_1-m_2}^{m_2-m_1} g_i h \leq C_g$  où  $C_g$  est une constante (En effet, on peut prendre  $h$  assez petite telle que  $C_g \leq 2$ ), et puis en utilisant la relation suivante  $(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2 b_i) (\sum b_i)$  si  $b_i \geq 0$ , on obtient, en prenant  $a_i = u_i$ ,  $b_i = g_{i-j}$ ,

$$\begin{aligned} |B_h u_h|_{L^2(\Omega_t)}^2 &\leq 2\lambda^2 h^3 \left[ \sum_{j=m_1}^{m_2} \left( \sum_{i=m_1}^{m_2} u_i^2 g_{i-j} \right) \left( \sum_{i=m_1}^{m_2} g_{i-j} \right) \right] + 2\lambda^2 \sum_{j=m_1}^{m_2} h u_j^2 \\ &\leq 2\lambda^2 h^2 C_g \sum_{i=m_1}^{m_2} u_i^2 \sum_{j=m_1}^{m_2} g_{i-j} + 2\lambda^2 \sum_{j=m_1}^{m_2} u_j^2 h \end{aligned}$$

en changeant l'ordre d'indice  $i$  et  $j$ . Comme  $|u_h|_{L^2(\Omega_t)}^2 = \sum_{j=m_1}^{m_2} u_j^2 h$ , on a, alors :

$$\begin{aligned} |B_h u_h|_{L^2(\Omega_t)}^2 &\leq 2\lambda^2 C_g^2 |u_h|_{L^2(\Omega_t)}^2 + 2\lambda^2 |u_h|_{L^2(\Omega_t)}^2 \\ &\leq 2\lambda^2 (C_g^2 + 1) |u_h|_{L^2(\Omega_t)}^2 \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat énoncé avec  $C_b = \lambda \sqrt{2(C_g^2 + 1)} \simeq \lambda \sqrt{10}$ . ■

**Lemme 4.13** Les opérateurs  $B_h$  et  $\tilde{B}^l$  vérifient l'inégalité suivante :

$$|B_h u_h - \tilde{B}^l u_h|_{L^2(\Omega_i)} \leq C\sqrt{h}|u_h|_{L^2(\Omega_i)} \quad \forall u_h \in V_h$$

**Démonstration :** Notant  $e_i = ](i - \frac{1}{2})h, (i + \frac{1}{2})h[$ , et à partir de la définition de  $V_h$ , on sait que  $u_h$  est nul dehors de l'intervalle  $](m_1 - \frac{1}{2})h, (m_2 + \frac{1}{2})h[$  et on peut écrire, de la définition de  $\tilde{B}^l$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{B}^l u_h(x) &= \lambda \left[ \int_{z, x+z \in \Omega_i} u_h(x+z)g(z)dz - u_h(x) \right] \\ &= \sum_{j=m_1}^{m_2} \lambda \left[ \int_{z, x+z \in \Omega_i} u_h(x+z)g(z)dz - u_h(x) \right] \mathbf{1}_{e_j}(x) \\ &= \sum_{j=m_1}^{m_2} \lambda \left[ \sum_{i=m_1}^{m_2} \int_{e_i-x} u_h(x+z)g(z)dz - u_h(x) \right] \mathbf{1}_{e_j}(x) \\ &= \sum_{j=m_1}^{m_2} \lambda \left[ \sum_{i=m_1}^{m_2} u_i \int_{e_i-x} g(z)dz - u_j \right] \mathbf{1}_{e_j}(x) \end{aligned}$$

En revenant à la définition de  $B_h$ ,

$$B_h u_h(x) = \sum_{j=m_1}^{m_2} \lambda \left( \sum_{i=m_1-j}^{m_2-j} u_{i+j} g_i h - u_j \right) \mathbf{1}_{e_j}(x)$$

on déduit, si l'on note  $I_i(x) = \int_{e_i-x} [g((i-j)h) - g(z)]dz$  :

$$\begin{aligned} (B_h u_h - \tilde{B}^l u_h)(x) &= \sum_{j=m_1}^{m_2} \lambda \left[ \sum_{i=m_1}^{m_2} u_i (g_{i-j} h - \int_{e_i-x} g(z)dz) \right] \mathbf{1}_{e_j}(x) \\ &= \sum_{j=m_1}^{m_2} \lambda \left( \sum_{i=m_1}^{m_2} u_i I_i(x) \right) \cdot \mathbf{1}_{e_j}(x) \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme  $g$  est une fonction de classe  $C^1$  et  $g_i = g(ih)$ , en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que :

$$\begin{aligned} |I_i(x)| &\leq \int_{e_i-x} \left| \int_z^{(i-j)h} \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi) d\xi \right| dz \\ &\leq C \int_{e_i-x} \left( \sqrt{\left| \int_z^{(i-j)h} \left( \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi) \right)^2 d\xi \right|} \cdot \sqrt{|(i-j)h - z|} \right) dz \\ &\leq C \|g\| \cdot h^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

à cause du fait que  $|(i-j)h - z| < h^2$ . D'où :

$$|B_h u_h - \tilde{B}^l u_h|_{L^2(\Omega_i)}^2 \leq C\lambda^2 \sum_{j=m_1}^{m_2} h \cdot \left( \sum_{i=m_1}^{m_2} |u_i| h^{\frac{3}{2}} \right)^2$$

En utilisant de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2 |b_i|)(\sum |b_i|)$  avec  $a_i = |u_i|$ ,  $b_i = h$ , on obtient :

$$\begin{aligned} |B_h u_h - \tilde{B}^l u_h|_{L^2(\Omega_i)}^2 &\leq C\lambda^2 h \sum_{j=m_1}^{m_2} h \cdot \left( \sum_{i=m_1}^{m_2} |u_i|^2 h \right) \cdot \left( \sum_{i=m_1}^{m_2} h \right) \\ &\leq C\lambda^2 h |u_h|_{L^2(\Omega_i)}^2 \end{aligned}$$

ce qui entraîne la relation suivante :

$$|B_h u_h - \tilde{B}^l u_h|_{L^2(\Omega_i)} \leq C\sqrt{h} |u_h|_{L^2(\Omega_i)} \quad \forall u_h \in V_h$$

■

**Remarque 4.14** Si les hypothèses du lemme 4.11 sont vérifiées, on a, alors :

$$B_h u_{h,k} \longrightarrow \tilde{B}^l u \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$$

En effet, remarque, d'abord, que :

$$\begin{aligned} &|B_h u_{h,k} - \tilde{B}^l u|_{L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))} \\ &\leq |B_h u_{h,k} - \tilde{B}^l u_{h,k}|_{L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))} + |\tilde{B}^l u_{h,k} - \tilde{B}^l u|_{L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))} \\ &\leq C\sqrt{h} \left( \int_0^T |u_{h,k}(t, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + C \left( \int_0^T |u_{h,k}(t, \cdot) - u(t, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

par suites des lemmes 4.13 et 4.4. Par ailleurs, par les hypothèses et le lemme 4.11, on sait que  $\int_0^T |u_{h,k}(t)|^2 dt$  est borné et  $u_{h,k}$  converge vers  $u$  fortement dans  $L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$ , ce qui entraîne le résultat énoncé.

Maintenant, on va étudier des propriétés de l'opérateur  $A_h$  et  $a_h(u_h, v_h)$ . Il est facile de voir, par la définition de  $a_h(\cdot, \cdot)$ , que :

$$|a_h(u_h, v_h)|_h \leq C_a \|u_h\|_h \cdot \|v_h\|_h \quad \forall u_h, v_h \in V_h \quad (4.36)$$

<sup>2</sup>Quand  $x \in e_j$  et  $z \in e_i - x$ , on a  $(j - \frac{1}{2})h \leq x \leq (j + \frac{1}{2})h$  et  $(i - \frac{1}{2})h - x \leq z \leq (i + \frac{1}{2})h - x$ . D'où :

$$(i-j)h - h \leq z \leq (i-j)h + h$$

ce qui nous donne  $|(i-j)h - z| < h$

avec  $C_a = 3(\sigma^2 + |\mu| + r)$ . En effet, à partir de la définition de  $a_h(\cdot, \cdot)$ , et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarze, on a :

$$\begin{aligned} |a_h(u_h, v_h)| &\leq \frac{\sigma^2}{2} |\delta u_h|_h \cdot |\delta v_h|_h + r |u_h|_h \cdot |v_h|_h + (|\mu| + \frac{\sigma^2}{2}) |\delta u_h|_h \cdot |v_h|_h \\ &\leq 3(\sigma^2 + |\mu| + r) \|u_h\|_h \cdot \|v_h\|_h \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a le lemme suivant.

**Lemme 4.15** *Si  $u_{h,k}$  converge vers  $u$  faiblement dans  $L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$  et  $\delta u_{h,k}$  converge vers  $\frac{\partial u}{\partial x}$  faiblement dans  $L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$ , et si, de plus, la fonction  $u$  est nul sur le bord  $\partial\Omega_i$ . Alors, on a :*

$$\limsup_{h,k \rightarrow 0} \int_0^T (A_h u_{h,k}, u_{h,k}) dt \leq \int_0^T (Au, u) dt$$

**Démonstration :** A partir de la définition de  $a_h(\cdot, \cdot)$ , on sait que :

$$\begin{aligned} \int_0^T (A_h u_{h,k}, u_{h,k}) dt &= - \int_0^T a_h(u_{h,k}, u_{h,k}) dt \\ &= - \int_0^T a_h^0(u_{h,k}, u_{h,k}) dt + \int_0^T a_h^1(u_{h,k}, u_{h,k}) dt \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_h^0(w, v) &= \int_{\Omega_i} \frac{\sigma^2}{2} \delta w \cdot \delta v dx + r \int_{\Omega_i} w v dx \\ a_h^1(w, v) &= \int_{\Omega_i} (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \delta w \cdot v dx \end{aligned}$$

Puisque  $u_{h,k}$  converge vers  $u$  faiblement dans  $L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$  et  $\delta u_{h,k}$  converge vers  $\frac{\partial u}{\partial x}$  faiblement dans  $L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$ , on a, alors :

$$\liminf \int_0^T a_h^0(u_{h,k}, u_{h,k}) dt \geq \int_0^T a^0(u, u) dt$$

avec

$$a^0(w, v) = \int_{\Omega_i} \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + r \int_{\Omega_i} w v dx$$

( car  $u \longrightarrow \int_0^T a^0(u, u) ds$  définit une norme équivalente sur  $L^2([0, T]; V)$  )

Remarque que :

$$\begin{aligned} (Au, u) &= -a(u, u) \\ &= a^0(u, u) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial x} u dx \end{aligned}$$

Donc, pour achever la démonstration de ce lemme, il suffit de vérifier si :

$$1. \int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial x} u dx = 0.$$



$$2. \int_0^T a_h^1(u_{h,k}, u_{h,k}) dt = 0.$$

Il est facile de voir que le premier point vient du fait que  $u = 0$  sur  $\partial\Omega_l$ , puisque :

$$\int_{\Omega_l} \frac{\partial u}{\partial x} u dx = \frac{1}{2} u^2 |_{\partial\Omega_l} = 0$$

Maintenant, il reste le deuxième point à vérifier. A partir de la définition de  $V_h$ , il n'est pas difficile de voir que  $u_{h,k}$  est nul en dehors de l'intervalle  $[(m_1 - \frac{1}{2})h, (m_2 + \frac{1}{2})h] \subset ]-l, l[$ . Remarquons la définition de  $\delta u_{h,k}$  ( Voir (4.21) ), on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_l} \delta u_{h,k} \cdot u_{h,k} dx \\ &= \frac{1}{h} \int_{\Omega_l} (u_{h,k}(x + \frac{h}{2}) - u_{h,k}(x - \frac{h}{2})) u_{h,k}(x) dx \\ &= \frac{1}{h} \left( \int_{-l}^l u_{h,k}(x + \frac{h}{2}) u_{h,k}(x) dx - \int_{-l}^l u_{h,k}(x - \frac{h}{2}) u_{h,k}(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{h} \left( \int_{-l}^l u_{h,k}(x + \frac{h}{2}) u_{h,k}(x) dx - \int_{-l-\frac{h}{2}}^{l-\frac{h}{2}} u_{h,k}(x) u_{h,k}(x + \frac{h}{2}) dx \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui implique, par la définition de  $a_h^1(\cdot, \cdot)$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^T a_h^1(u_{h,k}, u_{h,k}) dt &= \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \int_0^T dt \int_{\Omega_l} \delta u_{h,k} \cdot u_{h,k} dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\limsup \int_0^T (A_h u_{h,k}, u_{h,k}) dt \leq \int_0^T (Au, u) dt$$

■

On introduit le lemme 4.16, il nous permet de montrer l'existence et l'unicité de la solution  $u_h^{i-1}$  du problème discrétisé (4.27), et sera utile dans la démonstration du théorème de convergence. Pour alléger l'écriture, on notera  $|\cdot|$  au lieu de  $|\cdot|_h$ ,  $\|\cdot\|$  au lieu de  $\|\cdot\|_h$ ,  $(\cdot, \cdot)$  au lieu de  $(\cdot, \cdot)_h$ . Dans les endroits où il y a des ambiguïtés, on les indiquera.

**Lemme 4.16** *Il existe un réel  $\rho$  strictement positif indépendant de  $h$  tel que :*

$$a_h(u_h, u_h) + \rho |u_h|^2 \geq \gamma_0 \|u_h\|^2 \quad \forall u_h \in V_h$$

avec  $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{4}$ .

**Démonstration :** La démonstration est analogue à celle du lemme 3.4. En effet, par la définition de  $a_h(\cdot, \cdot)$  et le fait que  $r > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} a_h(u_h, u_h) &= \int_{\Omega_i} \frac{\sigma^2}{2} (\delta u_h)^2 dx + \int_{\Omega_i} r u_h^2 dx - \int_{\Omega_i} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \delta u_h \cdot u_h dx \\ &\geq \frac{\sigma^2}{2} (\|u_h\|^2 - |u_h|^2) - \left|\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right| \cdot \|u_h\| \cdot |u_h| \end{aligned}$$

En prenant  $\beta = \left|\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right|$  et  $\eta = \frac{\sigma^2}{2}$ , pour  $\rho > 0$ , on a :

$$a_h(u_h, u_h) + \rho |u_h|^2 \geq \eta \|u_h\|^2 - \beta |u_h| \cdot \|u_h\| + (\rho - \eta) |u_h|^2$$

et il suffit de choisir  $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{4}$  et  $\rho$  tel que  $(x, y) \rightarrow \frac{\eta}{2} x^2 - \beta xy + (\rho - \eta) y^2$  soit positive. ■

Comme  $a_h(u_h, v_h) = -(A_h u_h, v_h)$ ,  $b_h(u_h, v_h) = -(B_h u_h, v_h)$  en utilisant le lemme 4.16 et le lemme 4.12, on a :

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{1}{k}I - \theta A_h - \bar{\theta} B_h\right)u_h, u_h\right) &= \frac{1}{k}(u_h, u_h) + \theta a_h(u_h, u_h) + \bar{\theta} b_h(u_h, u_h) \\ &\geq \frac{1}{k}|u_h|^2 - \theta \rho |u_h|^2 + \theta \gamma_0 \|u_h\|^2 - \bar{\theta} C_b |u_h|^2 \\ &= \left(\frac{1}{k} - \theta \rho - \bar{\theta} C_b\right) |u_h|^2 + \theta \gamma_0 \|u_h\|^2 \end{aligned}$$

Pour  $k$  est assez petit tel que  $\frac{1}{k} - \theta \rho - \bar{\theta} C_b$  soit positive, et par ((4.22)), on obtient :

$$\left(\left(\frac{1}{k}I - \theta A_h - \bar{\theta} B_h\right)u_h, u_h\right) \geq \left(\left(\frac{1}{k} - \theta \rho - \bar{\theta} C_b\right) \frac{h^2}{C_0^2} + \theta \gamma_0\right) \|u_h\|^2 > 0$$

ce qui veut dire que l'opérateur  $\left(\frac{1}{k}I - A_h - \bar{B}_h\right)$  est coercif.

**Remarque 4.17** En revenant au schéma (4.27), il n'est pas difficile de voir que : si  $u_h^i$  est donné, pour tout  $\theta$  appartient à  $[0, 1]$  et tout  $\bar{\theta}$  appartient à  $[0, 1]$ , l'inéquation (4.27) a une unique solution  $u_h^{i-1}$  à cause du fait que  $\left(\frac{1}{k}I - \theta A_h - \bar{\theta} B_h\right)$  est coercif. ( cf : “Analyse numérique des inéquations variationnelles”. Chapitre I, Théorème 2.1 et 2.2 [22]).

En effet, (4.27) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\left(\left(\frac{1}{k}I - \theta A_h - \bar{\theta} B_h\right)u_h^{i-1}, v_h - u_h^{i-1}\right) \geq \left(\bar{f}_h^{i-1}, v_h - u_h^{i-1}\right)$$

avec :

$$\bar{f}_h^{i-1} = \left(\frac{1}{k}I + (1 - \theta)A_h + (1 - \bar{\theta})B_h\right)u_h^i - f_h$$

### 4.4.2 Théorème de convergence

R. Glowinsky, J. L. Lions et R. Trémoières ont étudié les schémas de discrétisation des inéquations variationnelles dans [22] et montré des théorèmes de convergence sous une hypothèse de coercivité assez forte. Cette hypothèse n'est pas vérifiée dans notre problème et les résultats de [22] ne s'appliquent pas directement. L'objet de cette section est de montrer que, dans notre cadre, la solution approchée  $u_{h,k}$  converge fortement vers la solution  $u$  du problème (4.19), si  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$  et sous certaines conditions de stabilité.

D'après les résultats précédents (Voir le théorème 4.3 et la section 4.3), on sait déjà que, si  $\psi \in V_\alpha$ , le problème (4.20) a une unique solution. D'autre part, si  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , en revenant aux définitions de  $\bar{\psi}$ ,  $f$  (voir le page 95), il n'est pas difficile de voir que  $f - A\bar{\psi} - \tilde{B}^l \bar{\psi} \in H_l$ . Selon les résultats de [22], on sait que (4.20) est équivalent au problème suivant (4.37) (cf. [22] Ch. 6 la remarque 2.3 et le page 179), qui est une formulation "faible" du problème (4.20) :

<sup>3</sup>Trouver  $u \in \mathcal{K}_f$  tel que  $u(T, \cdot) = \bar{\psi}$  et :

$$\begin{cases} \int_0^T (v' + Au + \tilde{B}^l u + f, v - u) dt \leq 0 & \forall v \in \mathcal{K}_0 \\ \text{avec } \mathcal{K}_f = \{v \mid v \in L^2([0, T]; V_l), v(t) \in K, \text{ p.p. } t \in [0, T]\} \end{cases} \quad (4.37)$$

Avant de montrer le théorème de convergence, on prouvera d'abord quelques lemmes. La remarque 4.19, qui est une conséquence du lemme 4.18, expliquera la relation entre l'inéquation discrète "faible" et l'inéquation discrète "forte".

**Lemme 4.18** Soit  $w_{h,k} = \sum_{i=1}^N w_h^i \mathbf{1}_{[(i-1)k, ik]}(t)$ , et  $w_{h,k}(T) = 0$ . Alors, on a :

$$\int_0^{T-k} (\bar{\delta} w_{h,k}(t), w_{h,k}(t)) dt \leq 0$$

**Démonstration :** Remarquons la définition de  $\bar{\delta}$  (cf. (4.26) page 102), on a :

$$\int_0^{T-k} (\bar{\delta} w_{h,k}(t), w_{h,k}(t)) dt = \frac{1}{k} \int_0^{T-k} (w_{h,k}(t+k) - w_{h,k}(t), w_{h,k}(t)) dt$$

Et en utilisant la relation élémentaire  $(b - a, a) = \frac{1}{2}|b|^2 - \frac{1}{2}|a|^2 - \frac{1}{2}|a - b|^2$ , en prenant  $b = w_{h,k}(t+k)$ ,  $a = w_{h,k}(t)$ , on en déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^{T-k} (\bar{\delta} w_{h,k}(t), w_{h,k}(t)) dt &= \frac{1}{2k} \int_0^{T-k} (|w_{h,k}(t+k)|^2 - |w_{h,k}(t)|^2 - |w_{h,k}(t+k) - w_{h,k}(t)|^2) dt \\ &\leq \frac{1}{2k} \int_0^{T-k} (|w_{h,k}(t+k)|^2 - |w_{h,k}(t)|^2) dt \\ &= \frac{1}{2k} \left( \int_k^T |w_{h,k}(t)|^2 dt - \int_0^{T-k} |w_{h,k}(t)|^2 dt \right) \\ &= \frac{1}{2k} \left( \int_{T-k}^T |w_{h,k}(t)|^2 dt - \int_0^k |w_{h,k}(t)|^2 dt \right) \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Comme l'on considère une formulation "faible" du problème, on introduit la notation  $\mathcal{K}_f$ .

Comme  $w_{h,k}(T) = 0$ , et  $w_{h,k} = \sum_{i=1}^N w_h^i \mathbf{1}_{(i-1)k, ik]}(t)$ , on voit que  $w_{h,k}(t) = 0$  sur l'intervalle  $]T - k, T]$ . D'où :

$$\int_0^{T-k} (\bar{\delta} w_{h,k}(t), w_{h,k}(t)) dt \leq 0$$

■

**Remarque 4.19** Soient  $v_{h,k} = \sum_{i=1}^N v_h^i \mathbf{1}_{(i-1)k, ik]}(t)$ ,  $u_{h,k} = \sum_{i=1}^N u_h^i \mathbf{1}_{(i-1)k, ik]}(t)$  et  $v_{h,k}(T) = u_{h,k}(T)$ . Si l'on a :

$$\int_0^{T-k} (\bar{\delta} u_{h,k} + A_h u_{h,k}^\theta + B_h u_{h,k}^{\bar{\theta}} + f_h, v_{h,k} - u_{h,k}) dt \leq 0$$

alors, on a aussi :

$$\int_0^{T-k} (\bar{\delta} v_{h,k} + A_h u_{h,k}^\theta + B_h u_{h,k}^{\bar{\theta}} + f_h, v_{h,k} - u_{h,k}) dt \leq 0 \quad (4.38)$$

où  $\bar{\delta}$  est défini par (4.26) et  $u_{h,k}^\theta$ ,  $u_{h,k}^{\bar{\theta}}$  sont définis par (4.28) dans la section 4.3.3.

Cette remarque résulte directement du lemme 4.18. En effet, en prenant  $w_{h,k} = v_{h,k} - u_{h,k}$ , comme  $v_{h,k}(T) = u_{h,k}(T)$ , d'où  $w_{h,k}(T) = 0$ . Par le lemme 4.18, on voit que :

$$\int_0^{T-k} (\bar{\delta} (v_{h,k} - u_{h,k}), v_{h,k} - u_{h,k}) dt \leq 0$$

On obtient :

$$\int_0^T (\bar{\delta} u_{h,k}, v_{h,k} - u_{h,k}) dt \geq \int_0^T (\bar{\delta} v_{h,k}, v_{h,k} - u_{h,k}) dt$$

ce qui entraîne le résultat énoncé en ajoutant le terme  $(A_h u_{h,k}^\theta + B_h u_{h,k}^{\bar{\theta}} + f_h, v_{h,k} - u_{h,k})$  de chaque côté et en utilisant l'hypothèse.

Le lemme 4.20 et lemme 4.22 nous donneront des estimations de la solution du problème discrétisé sous des hypothèses de stabilité convenables. i.e il existe deux constantes  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$  tel que :

$$1 - (1 - \theta) \frac{8C_0^2 C_a^2 k}{\sigma^2 h^2} \geq \beta_1 > 0 \quad (4.39)$$

$$1 - \bar{\theta} C_b k - \theta C_a \frac{k}{h^2} \geq \beta_2 > 0 \quad (4.40)$$

où  $C_0$ ,  $C_a$ ,  $C_b$  sont des constantes données dans (4.22), (4.36) et le lemme 4.12 respectivement.

**Lemme 4.20** On suppose  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ . Soit  $u_{h,k}$  la solution du problème discrétisé (4.27), on a alors, si l'hypothèse de stabilité (4.39) est vérifiée :

$$\|u_{h,k}\|_{L^\infty([0,T]; L^2(\Omega_t))} \leq C \quad (4.41)$$

$$\int_0^T |\delta(u_{h,k}(s, \cdot))|_{L^2(\Omega_i)}^2 ds \leq C \quad (4.42)$$

$$\sum_{i=1}^N |u_h^i - u_h^{i-1}|_h^2 \leq C \quad (4.43)$$

**Démonstration :** Comme  $\bar{\psi}_h \in \mathcal{K}_h$ , en prenant  $v_h = \bar{\psi}_h$  dans (4.27) et en remarquant que  $(A_h u_h, v_h) = -a_h(u_h, v_h)$ , on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} (u_h^{i-1} - u_h^i, u_h^{i-1} - \bar{\psi}_h) + a_h(u_h^{i-\theta}, u_h^{i-1}) \\ & \leq a_h(u_h^{i-\theta}, \bar{\psi}_h) + (B_h u_h^{i-\bar{\theta}}, u_h^{i-1} - \bar{\psi}_h) + (f_h, u_h^{i-1} - \bar{\psi}_h) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Or :

$$u_h^{i-\theta} = \theta u_h^{i-1} + (1 - \theta) u_h^i$$

D'où :

$$a_h(u_h^{i-\theta}, u_h^{i-1}) = \theta a_h(u_h^{i-1}, u_h^{i-1}) + (1 - \theta) a_h(u_h^i, u_h^i) + (1 - \theta) a_h(u_h^i, u_h^{i-1} - u_h^i) \quad (4.45)$$

Remplaçant  $a_h(u_h^{i-\theta}, u_h^{i-1})$  par (4.45) dans (4.44) et utilisant le lemme 4.16, on sait qu'il existe deux réels  $\rho_1, \rho_2$  strictement positifs indépendant de  $\theta, \bar{\theta}$  et tel que :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} (u_h^{i-1} - u_h^i, u_h^{i-1} - \bar{\psi}_h) + \gamma_0 [\theta \|u_h^{i-1}\|_h^2 + (1 - \theta) \|u_h^i\|_h^2] \\ & - \rho_1 \theta |u_h^{i-1}|_h^2 - \rho_2 (1 - \theta) |u_h^i|_h^2 + (1 - \theta) a_h(u_h^i, u_h^{i-1} - u_h^i) \\ & \leq a_h(u_h^{i-\theta}, \bar{\psi}_h) + (B_h u_h^{i-\bar{\theta}}, u_h^{i-1} - \bar{\psi}_h) + (f_h, u_h^{i-1} - \bar{\psi}_h) \end{aligned} \quad (4.46)$$

où  $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{4}$ . En utilisant la relation élémentaire :

$$(a - b, a) = \frac{1}{2} |a|_h^2 - \frac{1}{2} |b|_h^2 + \frac{1}{2} |a - b|_h^2$$

pour le premier terme du membre de gauche dans l'inégalité précédente (4.46) avec  $a = u_h^{i-1} - \bar{\psi}_h$  et  $b = u_h^i - \bar{\psi}_h$  et en multipliant par  $2k$  de chaque coté de (4.46), On obtient :

$$\begin{aligned} & |u_h^{i-1} - \bar{\psi}_h|_h^2 - |u_h^i - \bar{\psi}_h|_h^2 + |u_h^{i-1} - u_h^i|_h^2 \\ & + 2k\gamma_0 [\theta \|u_h^{i-1}\|_h^2 + (1 - \theta) \|u_h^i\|_h^2] \\ & \leq 2k[\rho_1 \theta |u_h^{i-1}|_h^2 + \rho_2 (1 - \theta) |u_h^i|_h^2] \\ & - 2k(1 - \theta) a_h(u_h^i, u_h^{i-1} - u_h^i) + 2k a_h(u_h^{i-\theta}, \bar{\psi}_h) \\ & - 2k(B_h u_h^{i-\bar{\theta}}, u_h^{i-1} - \bar{\psi}_h) + 2k(f_h, u_h^{i-1} - \bar{\psi}_h) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Pour majorer le membre droite de (4.47), on l'estime terme par terme en utilisant la relation classique :  $2(a, b) \leq \epsilon|a|^2 + \frac{1}{\epsilon}|b|^2 \quad \forall \epsilon > 0$ . D'où :

$$\begin{aligned} |2a_h(u_h^i, u_h^{i-1} - u_h^i)| &\leq 2C_a \|u_h^i\|_h \cdot \|u_h^{i-1} - u_h^i\|_h \\ &\leq \frac{\gamma_0}{2} \|u_h^i\|_h^2 + \frac{2C_a^2}{\gamma_0} \|u_h^{i-1} - u_h^i\|_h^2 \quad (\epsilon = \frac{\gamma_0}{2}) \\ &\leq \frac{\gamma_0}{2} \|u_h^i\|_h^2 + \frac{2C_0^2 C_a^2}{\gamma_0 h^2} |u_h^{i-1} - u_h^i|_h^2 \quad \text{par (4.22)} \end{aligned}$$

Comme  $u_h^{i-\theta} = \theta u_h^{i-1} + (1-\theta)u_h^i$ , on déduit :

$$\begin{aligned} |2a_h(u_h^{i-\theta}, \bar{\psi}_h)| &= |2\theta a_h(u_h^{i-1}, \bar{\psi}_h) + 2(1-\theta)a_h(u_h^i, \bar{\psi}_h)| \\ &\leq 2\theta C_a \|u_h^{i-1}\|_h \cdot \|\bar{\psi}_h\|_h + 2(1-\theta)C_a \|u_h^i\|_h \cdot \|\bar{\psi}_h\|_h \\ &\leq \gamma_0 \theta \|u_h^{i-1}\|_h^2 + \frac{\theta C_a^2}{\gamma_0} \|\bar{\psi}_h\|_h^2 + (1-\theta) \frac{\gamma_0}{2} \|u_h^i\|_h^2 + (1-\theta) \frac{2C_a^2}{\gamma_0} \|\bar{\psi}_h\|_h^2 \\ &= \gamma_0 \theta \|u_h^{i-1}\|_h^2 + (1-\theta) \frac{\gamma_0}{2} \|u_h^i\|_h^2 + \frac{C_a^2}{\gamma_0} (2-\theta) \|\bar{\psi}_h\|_h^2 \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant le lemme 4.12, et en remarquant  $u_h^{i-\bar{\theta}} = \bar{\theta} u_h^{i-1} + (1-\bar{\theta})u_h^i$ , on a :

$$\begin{aligned} |2(B_h u_h^{i-\bar{\theta}}, u_h^{i-1} - \bar{\psi}_h)| &= |2\bar{\theta}(B_h u_h^{i-1}, u_h^{i-1} - \bar{\psi}_h) + 2(1-\bar{\theta})(B_h u_h^i, u_h^{i-1} - \bar{\psi}_h)| \\ &\leq 2\bar{\theta} C_b |u_h^{i-1}|_h \cdot (|u_h^{i-1}|_h + |\bar{\psi}_h|_h) + 2(1-\bar{\theta}) C_b |u_h^i|_h \cdot (|u_h^{i-1}|_h + |\bar{\psi}_h|_h) \\ &\leq C_b (3\bar{\theta} |u_h^{i-1}|_h^2 + \bar{\theta} |\bar{\psi}_h|_h^2 + 2(1-\bar{\theta}) |u_h^i|_h^2 + (1-\bar{\theta}) |u_h^{i-1}|_h^2 + (1-\bar{\theta}) |\bar{\psi}_h|_h^2) \\ &= C_b (1+2\bar{\theta}) |u_h^{i-1}|_h^2 + 2C_b (1-\bar{\theta}) |u_h^i|_h^2 + C_b |\bar{\psi}_h|_h^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |2(f_h, u_h^{i-1} - \bar{\psi}_h)| &\leq 2|f_h|_h (|u_h^{i-1}|_h + |\bar{\psi}_h|_h) \\ &\leq 2|f_h|_h^2 + |u_h^{i-1}|_h^2 + |\bar{\psi}_h|_h^2 \end{aligned}$$

ce qui entraîne, après un arrangement, que :

$$\begin{aligned} &|u_h^{i-1} - \bar{\psi}_h|_h^2 - |u_h^i - \bar{\psi}_h|_h^2 + |u_h^{i-1} - u_h^i|_h^2 + k\gamma_0 [\theta \|u_h^{i-1}\|_h^2 + (1-\theta) \|u_h^i\|_h^2] \\ &\leq k(2\rho_1 \theta + (1+2\bar{\theta})C_b + 1) |u_h^{i-1}|_h^2 + k(2\rho_2(1-\theta) + 2(1-\bar{\theta})C_b) |u_h^i|_h^2 \\ &+ (2-\theta) \frac{C_a^2 k}{\gamma_0} \|\bar{\psi}_h\|_h^2 + (C_b + 1)k |\bar{\psi}_h|_h^2 + 2k |f_h|_h^2 \\ &+ (1-\theta) \frac{2C_0^2 C_a^2}{\gamma_0} \cdot \frac{k}{h^2} |u_h^{i-1} - u_h^i|_h^2 \end{aligned}$$

puisque  $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{4}$ , d'après l'hypothèse de stabilité (4.39), on sait qu'il existe une constante  $\beta_1 > 0$  tel que :

$$1 - \frac{8C_0^2 C_a^2 k}{\sigma^2 h^2} (1-\theta) \geq \beta_1 > 0$$

et de plus, notant  $\rho_3 = 2\rho_1\theta + (1 + 2\bar{\theta})C_b + 1 > 0$ ,  $\rho_4 = 2\rho_2(1 - \theta) + 2(1 - \bar{\theta})C_b > 0$ , on a alors :

$$\begin{aligned} & |u_h^{i-1} - \bar{\psi}_h|_h^2 - |u_h^i - \bar{\psi}_h|_h^2 + \beta_1 |u_h^{i-1} - u_h^i|_h^2 + k\gamma_0 [\theta \|u_h^{i-1}\|_h^2 + (1 - \theta) \|u_h^i\|_h^2] \\ & \leq k(\rho_3 |u_h^{i-1}|_h^2 + \rho_4 |u_h^i|_h^2) + C_1 k \|\bar{\psi}_h\|_h^2 + C_2 k |\bar{\psi}_h|_h^2 + 2k |f_h|_h^2 \end{aligned} \quad (4.48)$$

avec  $C_1 = \frac{(2-\theta)C_a^2}{\gamma_0}$  et  $C_2 = 1 + C_b$ . En sommant (4.48) de  $i = n + 1 \geq 0$  à  $N$  et remarquant  $u_h^N = u_{h,T} = \bar{\psi}_h$  et les faits que :  $\sum_{i=n+1}^N k |f_h|_h^2 \leq C$  et  $\sum_{i=n+1}^N k \|\bar{\psi}_h\|_h^2 \leq C$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & |u_h^n - \bar{\psi}_h|_h^2 - |u_h^N - \bar{\psi}_h|_h^2 + \beta_1 \sum_{i=n+1}^N |u_h^{i-1} - u_h^i|_h^2 \\ & + k\gamma_0 \sum_{i=n+1}^N [\theta \|u_h^{i-1}\|_h^2 + (1 - \theta) \|u_h^i\|_h^2] \\ & \leq C + k \sum_{i=n+1}^N (\rho_3 |u_h^{i-1}|_h^2 + \rho_4 |u_h^i|_h^2) \\ & \leq C + 2 \max\{\rho_3, \rho_4\} \sum_{i=n}^N k |u_h^i|_h^2 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Par la relation élémentaire  $\frac{1}{2}|a|_h^2 - |b|_h^2 \leq |a - b|_h^2$  avec  $a = u_h^n$ ,  $b = \bar{\psi}_h$ , on déduit, de (4.49)

$$|u_h^n|_h^2 \leq 2|\bar{\psi}_h|_h^2 + 2C + C' \sum_{i=n}^N k |u_h^i|_h^2 \quad (4.50)$$

Comme  $u_{h,k}(t) = \sum_{i=1}^N u_h^i \mathbf{1}_{[(i-1)k, ik]}(t)$ , par conséquent : si  $t \in ](n-1)k, nk]$ , alors,

$$u_{h,k}(t) = u_h^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=n}^N k |u_h^i|_h^2 = \int_{(n-1)k}^T |u_{h,k}(s)|_h^2 ds$$

Or, pour  $t \in ](n-1)k, nk]$ ,

$$\begin{aligned} \int_{(n-1)k}^T |u_{h,k}(s)|_h^2 ds &= \int_t^T |u_{h,k}(s)|_h^2 ds + \int_{(n-1)k}^t |u_{h,k}(s)|_h^2 ds \\ &= \int_t^T |u_{h,k}(s)|_h^2 ds + (t - (n-1)k) |u_{h,k}(t)|_h^2 \\ &\leq \int_t^T |u_{h,k}(s)|_h^2 ds + k |u_{h,k}(t)|_h^2 \end{aligned}$$

Revenant à (4.50), on a :

$$|u_{h,k}(t)|_h^2 \leq C' \int_t^T |u_{h,k}(s)|_h^2 ds + 2C + 2|\bar{\psi}_h|_h^2 + C' k |u_{h,k}(t)|_h^2$$

Pour  $k$  assez petit tel que  $1 - C'k > 0$ , par le lemme de Gronwall, on obtient :

$$|u_{h,k}(t)|_h \leq C \quad p.p \quad t \in ](n-1)k, nk]$$

ce qui donne (4.41). Par ailleurs, on déduit, remarquant  $u_h^N = \bar{\psi}_h$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=n+1}^N k(\theta \|u_h^{i-1}\|_h^2 + (1-\theta) \|u_h^i\|_h^2) \\
&= k(\theta \|u_h^n\|_h^2 + \sum_{i=n+1}^N \|u_h^i\|_h^2 - \theta \|\bar{\psi}_h\|_h^2) \\
&\geq \sum_{i=n+1}^N k \|u_h^i\|_h^2 - k\theta \|\bar{\psi}_h\|_h^2 \\
&= \int_{nk}^T \|u_{h,k}(s)\|_h^2 ds - \theta k \|\bar{\psi}_h\|_h^2
\end{aligned}$$

En revenant à (4.49) et utilisant (4.41), on a  $\int_{nk}^T \|u_{h,k}(s)\|_h^2 ds \leq C$ , ce qui donne (4.42). Il est facile de montrer (4.43) à partir de (4.49).  $\blacksquare$

**Remarque 4.21** *On voit clairement, de la démonstration du lemme 4.20, qu'on a encore les estimations (4.41), (4.42) et (4.43) même dans le cas où  $\psi \in W^{1,2,\alpha}(\mathbf{R})$ .*

Avant de montrer le lemme suivant, il n'est pas difficile de voir que (4.27) est équivalent à la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h^{i-1} \in V_h \text{ tel que :} \\ \frac{u_h^i - u_h^{i-1}}{k} + A_h u_h^{i-\theta} + B_h u_h^{i-\bar{\theta}} + f_h \leq 0 \\ u_h^{i-1} \geq \bar{\psi}_h \\ \left( \frac{u_h^i - u_h^{i-1}}{k} + A_h u_h^{i-\theta} + B_h u_h^{i-\bar{\theta}} + f_h \right) (\bar{\psi}_h - u_h^{i-1}) = 0 \\ u_h^N = \bar{\psi}_h \\ u_h^i(m_1 h) = u_h^i(m_2 h) = 0 \end{array} \right. \quad (4.51)$$

où :

$$f_j = (A_h \bar{\psi}_h)_j + (B_h \bar{\psi}_h)_j + \lambda \sum_{\substack{i+j > m_2 \\ i+j < m_1}} \psi_{i+j} g_i h$$

$$(B_h u_h)_j = \lambda \left( \sum_{i=m_1-j}^{m_2-j} u_{i+j} g_i h - u_j \right)$$

et  $A_h$ ,  $u_h^{i-\theta}$ ,  $u_h^{i-\bar{\theta}}$  ont les mêmes formes que celles dans (4.27).

**Lemme 4.22** *Sous les hypothèses du lemme 4.20 et si, de plus l'hypothèse de stabilité (4.40) est vérifiée, alors on a :*

$$\|\bar{\delta} u_{h,k}\|_{L^\infty([0,T]; L^2(\Omega_t))} \leq C \quad (4.52)$$



$$\|\delta u_{h,k}\|_{L^\infty([0,T];L^2(\Omega_i))} \leq C \quad (4.53)$$

$$\int_0^T \|\bar{\delta} u_{h,k}\|_h^2 ds \leq C \quad (4.54)$$

$$\sum_{i=1}^N |\bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i|_h^2 \leq C \quad (4.55)$$

où :

$$\bar{\delta}^{i-1} = \frac{u_h^i - u_h^{i-1}}{k}$$

**Démonstration :** D'après le schéma (4.27), on a :

$$(\bar{\delta}^{i-1} + A_h u_h^{i-\theta} + B_h u_h^{i-\bar{\theta}} + f_h, v_h - u_h^{i-1}) \leq 0 \quad \forall v_h \in \mathcal{K}_h \quad (4.56)$$

$$(\bar{\delta}^i + A_h u_h^{i+1-\theta} + B_h u_h^{i+1-\bar{\theta}} + f_h, v_h - u_h^i) \leq 0 \quad \forall v_h \in \mathcal{K}_h \quad (4.57)$$

Prenant  $v_h = u_h^i$  dans (4.56) et  $v_h = u_h^{i-1}$  dans (4.57)

$$(\bar{\delta}^{i-1} + A_h u_h^{i-\theta} + B_h u_h^{i-\bar{\theta}} + f_h, u_h^i - u_h^{i-1}) \leq 0$$

$$(-\bar{\delta}^i - A_h u_h^{i+1-\theta} - B_h u_h^{i+1-\bar{\theta}} - f_h, u_h^i - u_h^{i-1}) \leq 0$$

En ajoutant et puis en divisant par  $k$ , on a :

$$(\bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i - A_h(u_h^{i+1-\theta} - u_h^{i-\theta}) - B_h(u_h^{i+1-\bar{\theta}} - u_h^{i-\bar{\theta}}), \bar{\delta}^{i-1}) \leq 0$$

Remarquant le fait que  $a_h(u_h, v_h) = -(A_h u_h, v_h)$ , on peut écrire :

$$(\bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i, \bar{\delta}^{i-1}) + a_h(u_h^{i+1-\theta} - u_h^{i-\theta}, \bar{\delta}^{i-1}) \leq (B_h(u_h^{i+1-\bar{\theta}} - u_h^{i-\bar{\theta}}), \bar{\delta}^{i-1}) \quad (4.58)$$

Puisque :

$$u_h^{i+1-\theta} - u_h^{i-\theta} = k(\bar{\delta}^i + \theta(\bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i)) = k\theta\bar{\delta}^{i-1} + k(1-\theta)\bar{\delta}^i$$

D'où :

$$a_h(u_h^{i+1-\theta} - u_h^{i-\theta}, \bar{\delta}^{i-1}) = k[\theta a_h(\bar{\delta}^{i-1}, \bar{\delta}^{i-1}) + (1-\theta)a_h(\bar{\delta}^i, \bar{\delta}^i) + (1-\theta)a_h(\bar{\delta}^i, \bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i)] \quad (4.59)$$

Remplaçant  $a_h(u_h^{i+1-\theta} - u_h^{i-\theta}, \bar{\delta}^{i-1})$  par (4.59) dans (4.58) et utilisant le lemme 4.16, on sait qu'il existe deux réels  $\rho_1, \rho_2$  strictement positifs indépendants de  $\theta$  tels que :

$$\begin{aligned} & (\bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i, \bar{\delta}^{i-1}) \\ & + k\gamma_0(\theta\|\bar{\delta}^{i-1}\|_h^2 + (1-\theta)\|\bar{\delta}^i\|_h^2) \\ & - k(\rho_1\theta|\bar{\delta}^{i-1}|_h^2 + \rho_2(1-\theta)|\bar{\delta}^i|_h^2) \\ & + k(1-\theta)a_h(\bar{\delta}^i, \bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i) \\ & \leq (B_h(u_h^{i+1-\bar{\theta}} - u_h^{i-\bar{\theta}}), \bar{\delta}^{i-1}) \end{aligned} \quad (4.60)$$

où  $\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{4} > 0$ . En utilisant la relation élémentaire :  $(a - b, a) = \frac{1}{2}|a|_h^2 - \frac{1}{2}|b|_h^2 + \frac{1}{2}|a - b|_h^2$  pour le premier terme du membre de gauche dans l'inégalité précédente (4.60) avec  $a = \bar{\delta}^{i-1}$ ,  $b = \bar{\delta}^i$  et en multipliant par 2 de chaque côté de (4.60). On obtient :

$$\begin{aligned} & |\bar{\delta}^{i-1}|_h^2 - |\bar{\delta}^i|_h^2 + |\bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i|_h^2 \\ & + 2k\gamma_0(\theta\|\bar{\delta}^{i-1}\|_h^2 + (1-\theta)\|\bar{\delta}^i\|_h^2) \\ & \leq 2k(\rho_1\theta|\bar{\delta}^{i-1}|_h^2 + \rho_2(1-\theta)|\bar{\delta}^i|_h^2) \\ & - 2k(1-\theta)a_h(\bar{\delta}^i, \bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i) \\ & + 2k(B_h(u_h^{i+1-\bar{\theta}} - u_h^{i-\bar{\theta}}), \bar{\delta}^{i-1}) \end{aligned}$$

En utilisant la relation classique :  $\forall \epsilon > 0, \quad 2(a, b) \leq \epsilon|a|_h^2 + \frac{1}{\epsilon}|b|_h^2$ , on a :

$$\begin{aligned} |2a_h(\bar{\delta}^i, \bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i)| & \leq C_a\|\bar{\delta}^i\|_h \cdot \|\bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i\|_h \\ & \leq \frac{\gamma_0}{2}\|\bar{\delta}^i\|_h^2 + \frac{2C_a^2}{\gamma_0}\|\bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i\|_h^2 \quad (\epsilon = \frac{\gamma_0}{2}) \\ & \leq \frac{\gamma_0}{2}\|\bar{\delta}^i\|_h^2 + \frac{8C_0^2C_a^2}{\sigma^2h^2}|\bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i|_h^2 \quad \text{par (4.22)} \end{aligned}$$

D'autre part, comme :

$$u_h^{i+1-\bar{\theta}} - u_h^{i-\bar{\theta}} = k(\bar{\delta}^i + \bar{\theta}(\bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i)) = k\bar{\theta}\bar{\delta}^{i-1} + k(1-\bar{\theta})\bar{\delta}^i$$

et en utilisant le lemme 4.12, on déduit :

$$\begin{aligned} |2(B_h(u_h^{i+1-\bar{\theta}} - u_h^{i-\bar{\theta}}), \bar{\delta}^{i-1})| & = |2k\bar{\theta}(B_h\bar{\delta}^{i-1}, \bar{\delta}^{i-1}) + 2k(1-\bar{\theta})(B_h\bar{\delta}^i, \bar{\delta}^{i-1})| \\ & \leq 2k\bar{\theta}C_b|\bar{\delta}^{i-1}|_h^2 + k(1-\bar{\theta})C_b(|\bar{\delta}^i|_h^2 + |\bar{\delta}^{i-1}|_h^2) \\ & = (1+\bar{\theta})C_bk|\bar{\delta}^{i-1}|_h^2 + (1-\bar{\theta})C_bk|\bar{\delta}^i|_h^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & |\bar{\delta}^{i-1}|_h^2 - |\bar{\delta}^i|_h^2 + |\bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i|_h^2 + 2k\gamma_0\theta\|\bar{\delta}^{i-1}\|_h^2 + \frac{3}{2}k\gamma_0(1-\theta)\|\bar{\delta}^i\|_h^2 \\ & \leq k(2\rho_1\theta + (1+\bar{\theta})C_b)|\bar{\delta}^{i-1}|_h^2 + k(2\rho_2(1-\theta) + (1-\bar{\theta})C_b)|\bar{\delta}^i|_h^2 \\ & + (1-\theta)\frac{8C_0^2C_a^2}{\sigma^2}\frac{k}{h^2}|\bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i|_h^2 \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de stabilité (4.39), on sait qu'il existe une constante  $\beta_1 > 0$  tel que :

$$1 - (1-\theta)\frac{8C_0^2C_a^2}{\sigma^2} \cdot \frac{k}{h^2} \geq \beta_1 > 0$$

De plus, notons :  $\rho_3 = 2\rho_1\theta + (1+\bar{\theta})C_b$  et  $\rho_4 = 2\rho_2(1-\theta) + (1-\bar{\theta})C_b$ , on a alors :

$$\begin{aligned} & |\bar{\delta}^{i-1}|_h^2 - |\bar{\delta}^i|_h^2 + \beta_1|\bar{\delta}^{i-1} - \bar{\delta}^i|_h^2 + 2k\gamma_0\theta\|\bar{\delta}^{i-1}\|_h^2 + \frac{3}{2}k\gamma_0(1-\theta)\|\bar{\delta}^i\|_h^2 \\ & \leq k(\rho_3|\bar{\delta}^{i-1}|_h^2 + \rho_4|\bar{\delta}^i|_h^2) \end{aligned} \quad (4.61)$$

En sommant (4.61) de  $i = n + 1 \geq 0$  à  $N - 1$  et en remarquant  $u_h^N = \bar{\psi}_h$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& |\bar{\delta}_h^n|^2 - |\bar{\delta}_h^{N-1}|^2 + \beta_1 \sum_{i=n+1}^{N-1} |\bar{\delta}_h^{i-1} - \bar{\delta}_h^i|^2 \\
& + 2\gamma_0\theta \sum_{i=n+1}^{N-1} k \|\bar{\delta}_h^{i-1}\|_h^2 + \frac{3}{2}\gamma_0(1-\theta) \sum_{i=n+1}^{N-1} k \|\bar{\delta}_h^i\|_h^2 \\
& \leq \max\{\rho_3, \rho_4\} \sum_{i=n+1}^{N-1} k (|\bar{\delta}_h^{i-1}|_h^2 + |\bar{\delta}_h^i|_h^2) \\
& \leq C \sum_{i=n}^{N-1} k |\bar{\delta}_h^i|_h^2 \tag{4.62}
\end{aligned}$$

Si l'on réussit à montrer  $|\bar{\delta}_{N-1}|_h^2 \leq C$ , en utilisant la même technique que dans le lemme 4.20, on peut déduire, par le lemme de Gronwall :

$$\left| \frac{u_{h,k}(t+k) - u_{h,k}(t)}{k} \right|_h \leq C \quad p.p \quad t \in ](n-1)k, nk]$$

ce qui donne (4.52). Maintenant, il reste à montrer que :

$$|\bar{\delta}_h^{N-1}|_h \leq C$$

En effet, à partir du schéma (4.51) en prenant  $i = N - 1$ , on a :

$$\begin{cases} \bar{\delta}_h^{N-1} + A_h u_h^{N-\theta} + B_h u_h^{N-\bar{\theta}} + f_h \leq 0 \\ u_h^{N-1} \geq \bar{\psi}_h \\ (\bar{\delta}_h^{N-1} + A_h u_h^{N-\theta} + B_h u_h^{N-\bar{\theta}} + f_h)(\bar{\psi}_h - u_h^{N-1}) = 0 \\ u_h^N = \bar{\psi}_h \end{cases}$$

Pour  $j$  quelconque appartenant à  $[m_1, m_2]$ , on n'a que deux cas :

**-A).** soit :

$$\begin{aligned}
\frac{u_j^N - u_j^{N-1}}{k} + (A_h u_h^{N-\theta})_j + (B_h u_h^{N-\bar{\theta}})_j + f_j &\leq 0 \\
u_j^{N-1} &= \bar{\psi}_j
\end{aligned}$$

D'où :

$$\bar{\delta}_j^{N-1} = 0$$

**-B).** Soit :

$$\begin{aligned}
\frac{u_j^N - u_j^{N-1}}{k} + (A_h u_h^{N-\theta})_j + (B_h u_h^{N-\bar{\theta}})_j + f_j &= 0 \\
u_j^{N-1} &\geq \bar{\psi}_j
\end{aligned}$$

D'où :

$$\bar{\delta}_j^{N-1} = -(A_h u_h^{N-\theta})_j - (B_h u_h^{N-\bar{\theta}})_j - f_j$$

On peut donc écrire :

$$|\bar{\delta}^{N-1}|_h \leq |A_h u_h^{N-\theta}|_h + |B_h u_h^{N-\bar{\theta}}|_h + |f_h|_h$$

or :

$$\begin{aligned} u_h^{N-\theta} &= u_h^N + \theta(u_h^{N-1} - u_h^N) = \bar{\psi}_h - k\theta\bar{\delta}^{N-1} \\ u_h^{N-\bar{\theta}} &= u_h^N + \bar{\theta}(u_h^{N-1} - u_h^N) = \bar{\psi}_h - k\bar{\theta}\bar{\delta}^{N-1} \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.12, on a :

$$\begin{aligned} |\bar{\delta}^{N-1}|_h &\leq |A_h \bar{\psi}_h|_h + k\theta|A_h \bar{\delta}^{N-1}|_h + |B_h \bar{\psi}_h|_h + k\bar{\theta}|B_h \bar{\delta}^{N-1}|_h + |f_h|_h \\ &\leq |A_h \bar{\psi}_h|_h + k\theta|A_h \delta^{N-1}|_h + C_b |\bar{\psi}_h|_h + k\bar{\theta}C_b |\bar{\delta}^{N-1}|_h + |f_h|_h \end{aligned}$$

Or, en remarquant la définition de  $A_h$ , on voit que :

$$\begin{aligned} |A_h \bar{\delta}^{N-1}|_h &\leq \frac{2\sigma^2}{h^2} |\bar{\delta}^{N-1}|_h + \frac{|\mu - \frac{\sigma^2}{2}|}{h} |\bar{\delta}^{N-1}|_h + r |\bar{\delta}^{N-1}|_h \\ &\leq \frac{C'_a}{h^2} |\bar{\delta}^{N-1}|_h \end{aligned}$$

avec  $C'_a = 2\sigma^2 + |\mu - \frac{\sigma^2}{2}|h + rh^2 \leq 3(\sigma^2 + |\mu| + r) = C_a$ , quand  $h < 1$ . D'où :

$$|\bar{\delta}^{N-1}|_h \leq |A_h \bar{\psi}_h|_h + \frac{k\theta C_a}{h^2} |\bar{\delta}^{N-1}|_h + C_b |\bar{\psi}_h|_h + k\bar{\theta}C_b |\bar{\delta}^{N-1}|_h + |f_h|_h$$

On obtient :

$$(1 - C_a \theta \frac{k}{h^2} - C_b \bar{\theta} k) |\bar{\delta}^{N-1}|_h \leq |A_h \bar{\psi}_h|_h + C_b |\bar{\psi}_h|_h + |f_h|_h$$

Puisque  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , d'où  $\bar{\psi}$  l'est aussi, on a donc :  $|A_h \bar{\psi}_h|_h \leq C$ . D'autre part, comme :

$$\begin{aligned} |f_h|_h &\leq |A_h \tilde{\psi}_h|_h + |B_h \tilde{\psi}_h|_h + \lambda \sum_{\substack{i+j > m_2 \\ i+j < m_1}} \psi_{i+j} g_i h \\ &\leq |A_h \tilde{\psi}_h|_h + |B_h \tilde{\psi}_h|_h + C\lambda (\sum \psi_{i+j}^2 h) \cdot (\sum g_i^2 h) \end{aligned}$$

En tenant compte des faits que  $\tilde{\psi}$  est assez régulière et  $\|\psi_h\|_h \leq C$  et  $\|g\|_h \leq C$ , on a :  $|f_h|_h \leq C$ . Et remarquons (4.40), on déduit :

$$|\bar{\delta}^{N-1}|_h \leq C$$

Pour avoir (4.54) et (4.55), il suffit de partir de (4.62) et utiliser la même technique dans le lemme 4.20. Par ailleurs, (4.53) est une conséquence immédiate de (4.54). Puisque :

$$\begin{aligned} u_h^n &= u_h^N - \sum_{i=n}^{N-1} k \bar{\delta} u_h^i \\ &= \bar{\psi}_h - \sum_{i=n}^{N-1} k \bar{\delta} u_h^i \end{aligned}$$

Or  $\|\bar{\psi}_h\|_h \leq C$ , et par (4.54), on obtient (4.53). Cela achève la démonstration du lemme. ■

**Remarque 4.23** Si  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$  et si les conditions de stabilité (4.39), (4.40) sont vérifiées, à partir des (4.41), (4.42), (4.52) et remarquant que les résultats dans “Analyse numérique des inéquations variationnelles” Chapitre I (5.18), (5.19) et (5.20), (cf. [22]), on sait qu’il existe une fonction  $u$ , pour des suites extraites, encore notée  $u_{h,k}$ , tel que  $u_{h,k}$  converge faiblement vers  $u$  dans  $L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$ ,  $\delta u_{h,k}$  converge faiblement vers  $\frac{\partial u}{\partial x}$  dans  $L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$  et  $\bar{\delta} u_{h,k}$  converge faiblement vers  $\frac{\partial u}{\partial t}$  dans  $L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$ . D’où :  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$ . Par le lemme 4.11, on a  $u_{h,k}$  converge vers  $u$  fortement dans  $L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$ . Le lemme 4.25 nous permettra de dire que cette  $u$  est une solution du (4.37).

On introduit maintenant un opérateur  $\gamma_h$ , qui servira dans les démonstrations du lemme 4.25 et du théorème 4.26,

$$\gamma_h v = \sum_{M \in \Omega_h} \frac{1}{h} (v, \chi_h^M) \chi_h^M \quad (4.63)$$

Avant d’énoncer le lemme 4.25, on montre, d’abord, le lemme suivant.

**Lemme 4.24** Soient  $v \in W(0, T)$  et  $v_{h,k} = \sum_{i=1}^N v_h^i(x) \mathbf{1}_{(i-1)k, ik]}(t)$  avec  $v_h^i(x) = \gamma_h v(ik, x)$ . On a alors :

$$v_{h,k} \longrightarrow v \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$$

De plus, si  $\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2([0, T]; V_1)$  on a :

$$\delta v_{h,k} \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$$

### Démonstration :

- Notons  $e_i = ](i-1)k, ik]$ . A partir de la définition de  $v_{h,k}$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} (v_{h,k} - v)(t, x) &= \sum_{i=1}^N (v_h^i(x) - v(t, x)) \mathbf{1}_{e_i}(t) \\ &= \sum_{i=1}^N (\gamma_h v(ik, x) - v(t, x)) \mathbf{1}_{e_i}(t) \\ &= \sum_{i=1}^N (\gamma_h v(ik, x) - v(ik, x)) \mathbf{1}_{e_i}(t) + \sum_{i=1}^N (v(ik, x) - v(t, x)) \mathbf{1}_{e_i}(t) \end{aligned}$$

On note le premier terme ( resp. le deuxième terme ) à droite par  $Y_1$  ( resp.  $Y_2$  ). Posons :  $I_i(t, x) = v(ik, x) - v(t, x)$ , alors, pour  $t \in e_i$ , on a :  $ik - t \leq k$ , d'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |I_i(t, x)| &= \left| \int_t^{ik} \frac{\partial v}{\partial s}(s, x) ds \right| \\ &\leq \sqrt{ik - t} \cdot \left( \int_t^{ik} \left( \frac{\partial v}{\partial s}(s, x) \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq k^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_t^{ik} \left( \frac{\partial v}{\partial s}(s, x) \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} |Y_2| &= \left| \sum_{i=1}^N I_i(t, x) \mathbf{1}_{e_i}(t) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^N |I_i(t, x)| \mathbf{1}_{e_i}(t) \\ &\leq k^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^N \left( \int_t^{ik} \left( \frac{\partial v}{\partial s}(s, x) \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{1}_{e_i}(t) \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini et en remarquant  $\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$ , on a :

$$\begin{aligned} |Y_2|_{L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))} &\leq k^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^N k \int_{\Omega_i} \int_t^{ik} \left( \frac{\partial v}{\partial s}(s, x) \right)^2 ds dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq k^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^N k \cdot \left| \frac{\partial v}{\partial s} \right|_{L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq Ck^{\frac{1}{2}} \\ &\longrightarrow 0 \quad k \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Maintenant, pour  $k$  fixé, on va montrer que  $|Y_1|_{L^2([0,T];L^2(\Omega_i))} \rightarrow 0$  quand  $h$  tend vers zéro. En effet, il n'est pas difficile de vérifier (cf. [22] Ch. 1) que, pour  $t$  quelconque fixé dans  $[0, T]$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_h v &\longrightarrow v \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega_i) \\ \delta\gamma_h v &\longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega_i) \end{aligned}$$

ce qui veut dire que, pour  $1 \leq i \leq N$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $h_i > 0$  tel que, pour tout  $h \in [0, h_i]$ , on a :

$$|\gamma_h v(ik, \cdot) - v(ik, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)} \leq \varepsilon$$

Prenons  $h_0 = \min\{h_1, \dots, h_N\}$ , pour tout  $h \in [0, h_0]$ , on déduit :

$$|Y_1|_{L^2([0,T];L^2(\Omega_i))} = \left( \sum_{i=1}^N k |\gamma_h v(ik, \cdot) - v(ik, \cdot)|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

Par ailleurs, comme :

$$|v_{h,k} - v|_{L^2([0,T];L^2(\Omega_i))} \leq |Y_1|_{L^2([0,T];L^2(\Omega_i))} + |Y_2|_{L^2([0,T];L^2(\Omega_i))}$$

On obtient, finalement,  $v_{h,k}$  converge vers  $v$  fortement dans  $L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$ .

- De même, on a :

$$\begin{aligned} &(\delta v_{h,k} - \frac{\partial v}{\partial x})(t, x) \\ &= \sum_{i=1}^N (\delta\gamma_h v(ik, x) - \frac{\partial v}{\partial x}(ik, x)) \cdot \mathbf{1}_{e_i}(t) + \sum_{i=1}^N (\frac{\partial v}{\partial x}(ik, x) - \frac{\partial v}{\partial x}(t, x)) \cdot \mathbf{1}_{e_i}(t) \end{aligned}$$

On note le premier terme ( resp. le deuxième terme ) à droite par  $Z_1$  ( resp.  $Z_2$  ). Posons :  $J_i(t, x) = \frac{\partial v}{\partial x}(ik, x) - \frac{\partial v}{\partial x}(t, x)$ , en suivant le même méthode que le première partie, on déduit, pour  $t \in e_i$ , que :

$$\begin{aligned} |J_i(t, x)| &= \left| \int_t^{ik} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial x}(s, x) ds \right| \\ &\leq k^{\frac{1}{2}} \left( \int_t^{ik} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial x}(s, x) \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$|Z_2| \leq k^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^N \left( \int_t^{ik} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial x}(s, x) \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{1}_{e_i}(t)$$

Puisque  $\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial x} \in L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$ , on a :

$$\begin{aligned} |Z_2|_{L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))} &\leq k^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^N k \int_{\Omega_i} \int_t^{ik} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial x}(s, x) \right)^2 ds dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq k^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial x} \right\|_{L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))} \\ &\longrightarrow 0 \quad k \rightarrow 0 \end{aligned}$$

D'autre part, puisque :

$$\delta \gamma_h v \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega_i)$$

en suivant le même raisonnement que la premier partie, on a :

$$|Z_1|_{L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))} \longrightarrow 0$$

D'où le résultat. ■

**Lemme 4.25** *Supposons que  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , que  $u_{h,k}$  est la solution du problème discrétisé (4.27), et qu'il existe une fonction  $u$  tel que :*

$$u_{h,k} \rightarrow u \quad \text{faiblement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)),$$

$$\delta u_{h,k} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{faiblement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)),$$

et

$$\bar{\delta} u_{h,k} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{faiblement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)).$$

On suppose de plus,  $\frac{k}{h^2} \leq \beta$  où  $\beta$  est une constante assez petite pour que les conditions de stabilité (4.39) et (4.40) soient vérifiées. Alors,  $u$  est une solution du problème (4.37). C'est à dire que :

$$\begin{cases} u \in \mathcal{K}_f \\ \int_0^T (v' + Au + \tilde{B}^l u + f, v - u) dt \leq 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}_0 \end{cases}$$

**Démonstration :**  $\forall v \in \mathcal{K}_0$ , définissons :  $v_{h,k} = \sum_{i=1}^N v_h^i(x) \mathbf{1}_{](i-1)k, ik]}(t)$  avec  $v_h^i(x) = \gamma_h v(ik, x)$ . Remarquons la définition de  $\mathcal{K}_0$ , on sait que  $v \in W(0, T)$ . Utilisons le lemme 4.24, on a :

$$v_{h,k} \longrightarrow v \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$$

D'autre part, compte tenu des définitions de  $\mathcal{K}_0$ ,  $\bar{\psi}_h$  et  $\mathcal{K}_h$  (cf. (4.18) et la section 4.3.1), il n'est pas difficile de vérifier que  $\gamma_h v \in \mathcal{K}_h$ . Par ailleurs, puisque  $v \in \mathcal{K}_0$ , d'où  $v(T, x) = \bar{\psi}(x)$ ,



et en tenant compte de nouveau de la définition de  $\bar{\psi}_h$  et le fait que  $u_{h,k}(T) = \bar{\psi}_h$ , on déduit que  $v_{h,k}(T, x) = u_{h,k}(T, x)$ .

Par ailleurs, en portant  $v_{h,k}$  dans le problème discrétisé (4.27), on a :

$$\int_0^{T-k} (\bar{\delta} u_{h,k} + A_h u_{h,k}^\theta + B_h u_{h,k}^{\bar{\theta}} + f_h, v_{h,k} - u_{h,k}) dt \leq 0$$

Par la remarque 4.19, on a :

$$\int_0^{T-k} (\bar{\delta} v_{h,k} + A_h u_{h,k}^\theta + B_h u_{h,k}^{\bar{\theta}} + f_h, v_{h,k} - u_{h,k}) dt \leq 0$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \int_0^{T-k} (\bar{\delta} v_{h,k} + A_h u_{h,k}^\theta + B_h u_{h,k}^{\bar{\theta}} + f_h, v_{h,k}) dt \\ & \leq \int_0^{T-k} (\bar{\delta} v_{h,k}, u_{h,k}) dt + \int_0^{T-k} A_h(u_{h,k}^\theta, u_{h,k}^\theta) dt \\ & + \int_0^{T-k} (B_h u_{h,k}^{\bar{\theta}}, u_{h,k}) dt + \int_0^{T-k} (f_h, u_{h,k}) dt + \int_0^{T-k} (A_h u_{h,k}^\theta, u_{h,k} - u_{h,k}^\theta) dt \end{aligned} \quad (4.64)$$

Par les hypothèse de ce lemme et les définitions de  $u_{h,k}^\theta$  et  $u_{h,k}^{\bar{\theta}}$ , il est facile de voir que :

$$u_{h,k}^\theta \longrightarrow u \quad \text{faiblement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \quad (4.65)$$

$$\delta u_{h,k}^\theta \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{faiblement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \quad (4.66)$$

Évidemment, (4.65), (4.66) sont encore vrai pour  $\bar{\theta}$  au lieu de  $\theta$ . En combinant les résultats dans les lemmes 4.20 et 4.22 et en utilisant le lemme 4.15 et la remarque 4.14, on a :

$$\limsup \int_0^{T-k} (A_h(u_{h,k}, u_{h,k}) dt \leq \int_0^T (Au, u) dt$$

$$B_h u_{h,k}^{\bar{\theta}} \longrightarrow \tilde{B}^l u \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$$

En passant à la limite dans (4.64), on obtient :

$$\int_0^T (v' + Au + \tilde{B}^l u + f, v - u) dt \leq \limsup \int_0^{T-k} (A_h u_{h,k}^\theta, u_{h,k} - u_{h,k}^\theta) dt$$

Il suffit de montrer que le second membre est plus petit que zéro. En utilisant la même technique que “Analyse Numérique des inéquations variationnelle” P178 (cf. [22]) et en remarquant les définitions de  $u_{h,k}^\theta$ ,  $u_{h,k}$  (cf. page 102), on écrit :

$$\begin{aligned} I_{h,k} &= \left| \int_0^{T-k} (A_h u_{h,k}^\theta, u_{h,k} - u_{h,k}^\theta) dt \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{N-1} \int_{(i-1)k}^{ik} (A_h u_{h,k}^\theta, u_{h,k} - u_{h,k}^\theta) dt \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{i=1}^{N-1} k(A_h u_h^{i+1-\theta}, u_h^i - u_h^{i+1-\theta}) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N-1} k(1-\theta) |(A_h u_h^{i+1-\theta}, u_h^i - u_h^{i+1})| \\
&\leq \sqrt{k}(1-\theta) C_a \sum_{i=1}^{N-1} \sqrt{k} \|u_h^{i+1-\theta}\|_h \cdot \|u_h^i - u_h^{i+1}\|_h \\
&\leq \frac{\sqrt{k} C_0 C_a}{h} (1-\theta) \left( \sum_{i=1}^{N-1} k \|u_h^{i+1-\theta}\|_h^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{i=1}^{N-1} |u_h^i - u_h^{i+1}|_h^2 \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

en utilisant (4.22). Or, puisque  $|\bar{\delta}u_{h,k}|_{L^2([0,T];L^2(\Omega_i))} \leq C$ ,

$$\left( \sum_{i=1}^{N-1} |u_h^{i+1} - u_h^i|_h^2 \right)^{1/2} = \left( k \sum_{i=1}^{N-1} k \left| \frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k} \right|_h^2 \right)^{1/2} \leq Ck^{1/2}$$

Par (4.41) et (4.42) et les hypothèses du lemme, on a alors :

$$I_{h,k} \leq Ck^{1/2} \rightarrow 0$$

Ce qui entraîne :

$$\int_0^T (v' + Au + \bar{B}^l u + f, v - u) dt \leq 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}_0$$

Par ailleurs, comme  $u_h^i \in \mathcal{K}_h$  et  $u_{h,k}(t, x) = \sum_{i=1}^N u_h^i(x) \mathbf{1}_{(i-1)k, ik]}(t)$ , d'où  $u_{h,k} \geq \bar{\psi}_h$ . Or  $\bar{\psi}_h$  converge vers  $\bar{\psi}$  fortement dans  $L^2(\Omega_t)$ ,  $u_{h,k}$  converge vers  $u$  fortement dans  $L^2([0, T]; L^2(\Omega_t))$ , on obtient  $u \geq \bar{\psi}$ . D'autre part, puisque  $\delta u_{h,k}$  converge vers  $\frac{\partial u}{\partial x}$  faiblement dans  $L^2([0, T]; L^2(\Omega_t))$ , on voit que  $u \in L^2([0, T]; V_l)$ , d'où  $u \in K$ , ce qui donne  $u \in \mathcal{K}_f$ . D'où,  $u$  est la solution du problème (4.37). ■

Maintenant, on énonce le théorème de convergence.

**Théorème 4.26** *Soit  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ . On suppose que  $u_{h,k}(t, x) = \sum_{i=1}^N u_h^i(x) \mathbf{1}_{(i-1)k, ik]}(t)$  est la solution du problème discrétisé (4.27) et  $u$  est la solution du problème (4.19). Si  $\theta \in [0, 1]$ ,  $\bar{\theta} \in [0, 1]$ ,  $h, k$  tendent vers zéro, et de plus, si  $\frac{k}{h^2} \leq \beta$  où  $\beta$  est une constante assez petite pour que les conditions de stabilité (4.39) et (4.40) soient vérifiées. On a alors :*

$$\begin{aligned}
u_{h,k} &\longrightarrow u \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_t)) \\
\delta u_{h,k} &\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_t))
\end{aligned}$$

**Démonstration :** D'après les hypothèses dans le théorème, en combinant les résultats dans

le lemme 4.20, 4.22, la remarque 4.23 et le lemme 4.25, on sait qu'il existe une fonction  $\tilde{u}$  vérifiant :

$$\begin{aligned} u_{h,k} &\longrightarrow \tilde{u} && \text{faiblement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \\ \delta u_{h,k} &\longrightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} && \text{faiblement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \\ \bar{\delta} u_{h,k} &\longrightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} && \text{faiblement dans } L^2([0, T]; V_i) \end{aligned}$$

et  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}$  appartient à  $L^2([0, T]; V_i)$ ,  $\tilde{u}$  est la solution du problème (4.37). De plus,

$$u_{h,k} \longrightarrow \tilde{u} \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i))$$

D'autre part, en prenant au début de la section 4.4.2, on sait que le problème (4.20) est équivalente au problème (4.37). Cela dit que  $\tilde{u}$  coïncide avec la fonction  $u$  qui est la solution du problème (4.20). D'où :

$$\begin{aligned} u_{h,k} &\longrightarrow u && \text{faiblement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \\ \delta u_{h,k} &\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} && \text{faiblement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \\ \bar{\delta} u_{h,k} &\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} && \text{faiblement dans } L^2([0, T]; V_i) \end{aligned}$$

et  $\frac{\partial u}{\partial t}$  appartient à  $L^2([0, T]; V_i)$ . Cela dit qu'on a obtenu la convergence faible. De plus, on a aussi :

$$u_{h,k} \longrightarrow u \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \quad (4.67)$$

Maintenant, il reste à montrer  $\delta u_{h,k}$  converge fortement vers  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Pour cela, on va utiliser lemme 4.16.

Prenant  $\tilde{u}_{h,k} = \sum_{i=1}^N \tilde{u}_h^i(x) \mathbf{1}_{(i-1)k, ik]}(t)$  avec  $\tilde{u}_h^i(x) = \gamma_h u(ik, x)$  où  $\gamma_h$  est défini par (4.63), comme  $\frac{\partial u}{\partial t}$  appartient à  $L^2([0, T]; V_i)$ , par le lemme 4.24, on a :

$$\tilde{u}_{h,k} \longrightarrow u \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \quad (4.68)$$

$$\delta \tilde{u}_{h,k} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \quad (4.69)$$

Or :

$$\|u_{h,k} - u\| \leq \|u_{h,k} - \tilde{u}_{h,k}\| + \|\tilde{u}_{h,k} - u\|$$

Il suffit de montrer que :

$$\int_0^T \|u_{h,k} - \tilde{u}_{h,k}\|^2 ds \longrightarrow 0 \quad \text{quand } h, k \rightarrow 0 \quad (4.70)$$

Notant :

$$Y_{h,k} = - \int_0^{T-k} (A_h u_{h,k} - A_h \tilde{u}_{h,k}, u_{h,k} - \tilde{u}_{h,k}) dt$$

En utilisant le lemme 4.16 et compte tenu de (4.67), (4.68), il n'est pas difficile de voir qu'il suffit de montrer que :

$$\limsup Y_{h,k} \leq 0$$

Cela peut être obtenu en appliquant les méthodes analogues que [22] et en utilisant les techniques pour traiter  $I_{h,k}$  dans la démonstration du lemme 4.25. En effet, on récrit, d'abord,  $Y_{h,k}$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} Y_{h,k} &= - \int_0^T (A_h u_{h,k}, u_{h,k}) dt + \int_0^{T-k} (A_h u_{h,k}, \tilde{u}_{h,k}) dt \\ &\quad - \int_0^{T-k} (A_h \tilde{u}_{h,k}, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k}) dt \end{aligned} \quad (4.71)$$

Or, par (4.28) :

$$u_{h,k}^\theta(t) = u_{h,k}(t+k) + \theta(u_{h,k}(t) - u_{h,k}(t+k))$$

D'où :

$$A_h u_{h,k}(t) = A_h u_{h,k}^\theta(t) - (\theta - 1)A_h(u_{h,k}(t) - u_{h,k}(t+k)) \quad (4.72)$$

En remplaçant  $A_h u_{h,k}$  par (4.72) dans le premier terme à droite de (4.71), on a :

$$\begin{aligned} Y_{h,k} &= - \int_0^{T-k} (A_h u_{h,k}^\theta, u_{h,k}) dt \\ &\quad + (\theta - 1) \int_0^{T-k} (A_h(u_{h,k}(t) - u_{h,k}(t+k)), u_{h,k}) dt \\ &\quad + \int_0^{T-k} (A_h u_{h,k}, \tilde{u}_{h,k}) dt - \int_0^{T-k} (A_h \tilde{u}_{h,k}, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k}) dt \end{aligned} \quad (4.73)$$

D'autre part, puisque  $u$  est la solution du problème (4.20),  $u \in \mathcal{K}_0$ . Remarquons la construction de la fonction  $\tilde{u}_{h,k}$  et la définition de l'opérateur  $\gamma_0$  (cf. (4.63), il n'est pas difficile de voir que  $\tilde{u}_h^i \in \mathcal{K}_h$  et  $\tilde{u}_{h,k}(T) = \bar{\psi}_h = u_{h,k}(T)$ . En prenant  $v_{h,k} = \tilde{u}_{h,k}$  dans (4.38), comme  $v_{h,k}(T) = \tilde{u}_{h,k}(T) = u_{h,k}(T)$ , d'après la remarque 4.19, on déduit :

$$\begin{aligned} - \int_0^{T-k} (A_h u_{h,k}^\theta, u_{h,k}) dt &\leq - \int_0^{T-k} (\bar{\delta} \tilde{u}_{h,k}, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k}) dt \\ &\quad - \int_0^{T-k} (A_h u_{h,k}^\theta, \tilde{u}_{h,k}) dt \\ &\quad - \int_0^{T-k} (f_h, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k}) dt \end{aligned} \quad (4.74)$$

En appliquant (4.74) et en faisant un arrangement, (4.73) donne :

$$\begin{aligned} Y_{h,k} &\leq - \int_0^{T-k} (\bar{\delta} \tilde{u}_{h,k}, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k}) dt - \int_0^{T-k} (f_h, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k}) dt \\ &\quad - \int_0^{T-k} (A_h \tilde{u}_{h,k}, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k}) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\theta - 1) \int_0^{T-k} (A_h(u_{h,k}(t) - u_{h,k}(t+k)), u_{h,k}) dt \\
& + \int_0^{T-k} (A_h u_{h,k}, \tilde{u}_{h,k}) dt - \int_0^{T-k} (A_h u_{h,k}^\theta, \tilde{u}_{h,k}) dt \\
\leq & - \int_0^{T-k} (\delta \tilde{u}_{h,k} + A_h \tilde{u}_{h,k} + f_h, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k}) dt \\
& +(\theta - 1) \int_0^{T-k} (A_h(u_{h,k}(t) - u_{h,k}(t+k)), u_{h,k}) dt \\
& + \int_0^{T-k} (A_h(u_{h,k} - u_{h,k}^\theta), \tilde{u}_{h,k}) dt
\end{aligned}$$

Par (4.72),

$$Y_{h,k} \leq - \int_0^{T-k} (\delta \tilde{u}_{h,k} + A_h \tilde{u}_{h,k} + f_h, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k}) dt + Z_{h,k}$$

avec :

$$Z_{h,k} = (1 - \theta) \int_0^{T-k} (A_h(u_{h,k}(t) - u_{h,k}(t+k)), \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k}) dt$$

Or :

$$\begin{aligned}
|Z_{h,k}| &= |(1 - \theta) \sum_{i=1}^{N-1} k (A_h(u_h^i - u_h^{i+1}), \tilde{u}_h^i - u_h^i)| \\
&\leq (1 - \theta) \frac{C_0 \sqrt{k}}{h} \left( \sum_{i=1}^{N-1} |u_h^i - u_h^{i+1}|_h^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^{N-1} k \|\tilde{u}_h^i - u_h^i\|_h^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

en utilisant (4.22). Puisque :  $|\delta u_{h,k}|_{L^2([0,T];L^2(\Omega_i))} \leq C$ , on a :

$$\left( \sum_{i=1}^{N-1} |u_h^i - u_h^{i+1}|^2 \right)^{1/2} = \left( k \sum_{i=1}^{N-1} k \left| \frac{u_h^i - u_h^{i+1}}{k} \right|^2 \right)^{1/2} \leq C k^{1/2}$$

Par (4.42), (4.43) et les faits que  $\tilde{u}_{h,k}$ ,  $\delta \tilde{u}_{h,k}$  restent borné dans  $L^2([0,T];L^2(\Omega_i))$ , et les hypothèses du théorème, on déduit :

$$|Z_{h,k}| \leq C \sqrt{k} \longrightarrow 0 \quad \text{si } k \rightarrow 0$$

D'autre part, il n'est pas difficile de voir que  $-\int_0^{T-k} (\delta \tilde{u}_{h,k} + A_h \tilde{u}_{h,k} + B_h \tilde{u}_{h,k} + f_{h,k}, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k}) dt$  tend vers zéro à cause de (4.67), (4.68) et (4.69). Donc, on obtient, finalement :

$$\limsup Y_{h,k} \longrightarrow 0$$

ce qui achève notre démonstration. ■

**Remarque 4.27** Dans leur théorème de convergence, R. Glowinsky, J. L. Lions et R. Trémolières [22] ont indiqué que, contrairement au cas des équations, la stabilité n'entraîne pas nécessairement la convergence (cf. [22] page 179). Ils imposent donc une condition de convergence, i.e :

$$(1 - \theta) \frac{C_0^2 k}{h^2} \longrightarrow 0,$$

condition qui est vide pour  $\theta = 1$ . Or, ici, nous avons montré que les conditions de stabilités (4.39), (4.40) :

$$\begin{aligned} 1 - (1 - \theta) \frac{8C_0^2 C_a^2 k}{\sigma^2 h^2} &\geq \beta_1 > 0 \\ 1 - \bar{\theta} C_b k - \theta C_a \frac{k}{h^2} &\geq \beta_2 > 0 \end{aligned}$$

peuvent entraîner directement la convergence. Ces conditions sont un peu plus faibles que celle de R. Glowinsky, J. L. Lions et R. Trémolières [22] pour  $\theta \neq 1$ , mais il faut noter que la deuxième condition n'est pas vide pour  $\theta = 1$ .

Maintenant, nous verrons les conditions de stabilités plus précise. En prenant  $h < 1$ , on a :  $C_0 = \sqrt{5}$ ,  $C_a = 3(\sigma^2 + |\mu| + r)$  et  $C_b = \lambda\sqrt{10}$  (cf. (4.22), (4.36) et le lemme 4.12). Si de plus l'on prend  $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$ , les conditions ci-dessus peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} (1 - \theta) \frac{k}{h^2} &\leq \frac{\sigma^2}{90C_a^2} \\ \theta \frac{k}{h^2} &\leq \frac{1 - 2C_b \bar{\theta} k}{2C_a} \end{aligned}$$

#### 4.4.3 Monotonie de la solution discrétisée

Dans cette section, notre but est de montrer que la solution discrétisée du problème (4.27)  $t \mapsto u_{h,k}(t)$  est décroissante. Mais avant de le faire, nous introduirons quelques propriétés des inéquations variationnelles en dimension finie, qui ont été montrées dans le livre [22] "Analyse Numérique des inéquations variationnelles", chapitre I, 3.1 et [24].

Nous noterons  $(u, v)$  le produit scalaire de deux vecteur  $u$  et  $v$  de  $\mathbf{R}^n$ , et  $u \geq v$  si  $\forall i \in \{1, \dots, n\} u_i \geq v_i$ . Par ailleurs, nous dirons qu'une matrice  $M$  est coercive s'il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout vecteur  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $(Mx, x) \geq C|x|^2$ ,  $|x|$  désignant la norme euclidienne. Nous énonçons, d'abord, un résultat élémentaire [23].

**Proposition 4.28** Soit  $M$  une matrice carrée réelle d'ordre  $n$ , pour tous vecteurs  $u, q, \varphi$  de  $\mathbf{R}^n$ , les deux systèmes suivants sont équivalents :

$$\begin{cases} Mu \geq q \\ u \geq \varphi \\ (Mu - q, \varphi - u) = 0 \end{cases} \quad (4.75)$$

et

$$\begin{cases} u \geq \varphi \\ (Mu, v - u) \geq (q, v - u) \end{cases} \quad \text{pour tout vecteur } v \geq \varphi \quad (4.76)$$

La proposition suivante nous permettra de montrer la décroissance de  $u_{h,k}(t)$  en  $t$ . Pour la démonstration de cette proposition, nous renvoyons à [24].

**Proposition 4.29** *Si la matrice coercive  $M$  a des coefficients non diagonaux négatifs ou nul, la solution du système (4.75) est le plus petit vecteur  $u$  vérifiant :  $Mu \geq q$ , et  $u \geq \varphi$ .*

Maintenant, nous commençons nos études sur la monotonie de la solution discrétisé. Les outils essentiels est a'appliquer la proposition 4.29. Pour que nous puissions utiliser la proposition 4.29, nous devons mettre le schéma (4.27) à la forme (4.75). Mais, d'abord, rappelons que (4.27) peut être écrit sous la forme équivalente (4.51) page 118.

Supposons que  $u(t, x)$  est la solution du problème (4.19), on approche le vecteur  $(u(i\Delta t, j\Delta x))_{0 \leq i \leq N, m_1 \leq j \leq m_2}$  par le vecteur  $[\bar{u}_j^{i-1}]$  qui est la solution du système suivant venant du (4.51), après un calcul :

$$\bar{u}_{m_1}^{i-1} = 0, \quad \bar{u}_{m_2}^{i-1} = 0 \quad 1 \leq i \leq N$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_j^N = \bar{\psi}_j \quad m_1 \leq j \leq m_2 \\ \theta a \bar{u}_{j-1}^{i-1} + (1 + \theta b) \bar{u}_j^{i-1} + \theta c \bar{u}_{j+1}^{i-1} + \bar{s}_j^{i-1} \geq \bar{q}_j^i \\ \bar{u}_j^{i-1} \geq \bar{\psi}_j \\ (\theta a \bar{u}_{j-1}^{i-1} + (1 + \theta b) \bar{u}_j^{i-1} + \theta c \bar{u}_{j+1}^{i-1} + \bar{s}_j^{i-1} - \bar{q}_j^i) (\bar{\psi}_j - \bar{u}_j^{i-1}) = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq N \\ m_1 + 1 \leq j \leq m_2 - 1 \end{array} \quad (4.77)$$

où, si l'on pose :  $\beta = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{k\sigma^2}{2h^2} + \frac{\beta k}{2h} \\ b = \frac{k\sigma^2}{h^2} + rk \\ c = -\frac{k\sigma^2}{2h^2} - \frac{\beta k}{2h} \end{array} \right. \quad (4.78)$$

$$\bar{s}_j^{i-1} = -\lambda k \bar{\theta} \left( \sum_{l=m_1-j}^{m_2-j} \bar{u}_{l+j}^{i-1} g_l h - \bar{u}_j^{i-1} \right) \quad (4.79)$$

$$\bar{q}_j^i = \bar{u}_j^i - (1 - \theta)(a \bar{u}_{j-1}^i + b \bar{u}_j^i + c \bar{u}_{j+1}^i) + \lambda k (1 - \bar{\theta}) \left( \sum_{l=m_1-j}^{m_2-j} \bar{u}_{l+j}^i g_l h - \bar{u}_j^i \right) + k f_j \quad (4.80)$$

avec :

$$f_j = (A_h \bar{\psi}_h)_j + (B_h \bar{\psi}_h)_j + \lambda \sum_{\substack{l+j > m_2 \\ l+j < m_1}} \psi_{l+j} g_l h$$

Supposons  $\beta < \frac{\sigma^2}{h}$ , on a, alors :  $a < 0$ ,  $c < 0$ . De plus, il est évident que :  $1 + \theta b > 0$ . Posons :  $m = m_2 - m_1 - 1$  et notons  $u^i$ ,  $q^i$ ,  $\varphi$ ,  $F$  les vecteurs de  $\mathbf{R}^m$  de composantes de :

$$\begin{array}{ll} u_j^i &= \bar{u}_{j+m_1}^i \quad 1 \leq j \leq m \\ q_j^i &= \bar{q}_{j+m_1}^i \quad 1 \leq j \leq m \\ \varphi_j &= \bar{\psi}_{j+m_1} \quad 1 \leq j \leq m \\ F_j &= \bar{f}_{j+m_1} \quad 1 \leq j \leq m \end{array}$$

$\dot{v}$  désigne, pour tout vecteur  $v$ , le vecteur de composantes de : <sup>4</sup>

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_1 - \theta a \bar{u}_{m_1} + y_1 \\ \dot{v}_m = v_m - \theta c \bar{u}_{m_2} + y_m \\ \dot{v}_j = v_j + y_j \quad 2 \leq j \leq m-1 \end{cases} \quad (4.81)$$

où le vecteur  $[y_j]$  est donné par :

$$y_j = \lambda \bar{\theta} k h g_{-j} \bar{u}_{m_1} + \lambda \bar{\theta} k h g_{m-j+1} \bar{u}_{m_2} \quad 1 \leq j \leq m \quad (4.82)$$

A partir de cette définition, il est clair de voir que le vecteur  $\dot{v}$  a la propriété :

$$v \geq \hat{v} \implies \dot{v} \geq \dot{\hat{v}}$$

Avec ces notations, le système (4.77) est équivalent au système suivant :

$$\bar{u}_{m_1}^{i-1} = 0, \quad \bar{u}_{m_2}^{i-1} = 0, \quad 1 \leq i \leq N$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} u^N = \varphi \\ M u^{i-1} \geq \dot{q}^i, \quad u^{i-1} \geq \varphi \\ (M u^{i-1} - \dot{q}^i, \varphi - u^{i-1}) = 0 \end{array} \right\} \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.83)$$

où :

$$q_j^i = u_j^i - (1 - \theta)(a u_{j-1}^i + b u_j^i + c u_{j+1}^i) + \lambda k (1 - \bar{\theta}) \left( \sum_{l+j=0}^{m+1} u_{l+j}^i g_l h - u_j^i \right) + k F_j \quad (4.84)$$

avec la convention  $u_0 = \bar{u}_{m_1} = 0$ ,  $u_{m+1} = \bar{u}_{m_2} = 0$ .

Notant :  $d = -\lambda \bar{\theta} k$ ,  $d < 0$ , alors, la matrice  $M$  d'ordre  $m$  peut s'écrire sous la forme suivant :

$$M = \tilde{M} + G \quad (4.85)$$

où :

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 + \theta b & \theta c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \theta a & 1 + \theta b & \theta c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \theta a & 1 + \theta b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \theta a & 1 + \theta b \end{pmatrix}_{m \times m}$$

et

$$G = \begin{pmatrix} -(1 - g_0 h) d & g_1 h d & g_2 h d & \cdots & g_{m-1} h d \\ g_{-1} h d & -(1 - g_0 h) d & g_1 h d & \cdots & g_{m-2} h d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{1-m} h d & g_{2-m} h d & g_{3-m} h d & \cdots & -(1 - g_0 h) d \end{pmatrix}_{m \times m}$$

<sup>4</sup>On note  $\bar{u}_{m_1} = \bar{u}_{m_1}^i$  et  $\bar{u}_{m_2} = \bar{u}_{m_2}^i$  pour tout  $0 \leq i \leq N$ . Dans cette section, comme les conditions aux bords sont nul, i.e  $\bar{u}_{m_1} = \bar{u}_{m_2} = 0$ , on a en effet  $\dot{v}_j = v_j$  pour tout  $0 \leq j \leq N$ . Ici, nous donnons une forme plus générale, qui se servira pour traiter le cas où les conditions aux bords ne sont pas nul, dans la section suivante. A ce moment là, on a  $\bar{u}_{m_1} = \psi(m_1 h)$  et  $\bar{u}_{m_2} = \psi(m_2 h)$ .



i.e  $\tilde{M} = (\tilde{m}_{ij})$  avec :

$$\begin{aligned}\tilde{m}_{ii} &= 1 + \theta b & i = 1, \dots, m \\ \tilde{m}_{i-1,i} &= \theta c & i = 2, \dots, m \\ \tilde{m}_{i+1,i} &= \theta a & i = 1, \dots, m-1 \\ \tilde{m}_{i,j} &= 0 & \text{sinon}\end{aligned}$$

et  $G = (g_{ij})$  où :

$$g_{ii} = -(1 - g_0 h)d \quad \text{et} \quad g_{ij} = g_{j-i} h d \quad \text{si } i \neq j$$

Posons :  $M = (m_{i,j})$ , alors elle vérifie :

$$m_{ii} > 0 \quad \text{et} \quad m_{ij} \leq 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (4.86)$$

En effet :

Il est facile de voir que  $1 - g_0 h > 0$  pour  $h$  assez petite. Par ailleurs, puisque  $b > 0$ ,  $d < 0$ , on en déduit alors :  $m_{ii} = 1 + \theta b - (1 - g_0 h)d > 0$ . D'autre part, si  $i \neq j$ ,  $m_{ij} = \tilde{m}_{ij} + g_{j-i} h d < 0$  par conséquence du fait que  $a, c, d$  sont négatifs et  $g_l \geq 0$  pour  $l = m_1, \dots, m_2$ . De plus, la matrice  $M$  a la propriété suivante.

**Lemme 4.30** Soit  $M = (m_{ij})$  la matrice qui est défini par (4.85), pour  $h$  assez petit, on a alors :

$$\begin{aligned}m_{ii} &> \sum_{j \neq i} |m_{ij}| \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m \\ m_{jj} &> \sum_{i \neq j} |m_{ij}| \quad \text{pour } 1 \leq j \leq m\end{aligned}$$

**Démonstration :** Pour montrer ce lemme, il suffit de vérifier que  $\tilde{M}, G$  ont les inégalités analogues.

- A partir de la définition de  $a, b, c$ , il est facile de voir que :  $|\theta a| + |\theta c| = \frac{\theta k \sigma^2}{h^2} < 1 + \theta b$ .  
D'où :  $\tilde{m}_{ii} > \sum_{j \neq i} |\tilde{m}_{ij}|$  et  $\tilde{m}_{jj} > \sum_{i \neq j} |\tilde{m}_{ij}|$ .
- Puisque  $g$  est la fonction positive de classe  $C^1$  telle que  $\int g(z) dz = 1$ , il est facile de voir que, pour  $h$  assez petite :

$$\begin{aligned}\sum_{j \neq i} |g_{ij}| &= - \sum_{j \neq i} g_{j-i} h d \\ &= -d \left( \sum_{j=1}^m g_{j-i} h - g_0 h \right) \\ &\leq g_{ii}\end{aligned}$$

$$\text{De même, } \sum_{i \neq j} |g_{ji}| = - \sum_{i \neq j} g_{i-j} h d \leq -d \left( \sum_{l=-m}^m g_l h - g_0 h \right) \leq g_{jj}.$$

Ce qui entraîne le résultat annoncé. ■

**Lemme 4.31** *Soit  $M$  une matrice d'ordre  $m$  vérifiant :*

$$\begin{aligned} m_{ii} &> \sum_{j \neq i} |m_{ij}| \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m \\ m_{jj} &> \sum_{i \neq j} |m_{ij}| \quad \text{pour } 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

alors  $M$  est coercive.

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} (Mx, x) &= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m m_{ij} x_j \right) x_i \\ &= \sum_{i=1}^m m_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m m_{ij} x_i x_j \\ &\geq \sum_{i=1}^m m_{ii} x_i^2 - \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |m_{ij}| \left( \frac{x_i^2 + x_j^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^m (m_{ii} x_i^2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |m_{ij}| x_i^2) \right) + \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^m (m_{jj} x_j^2 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m |m_{ij}| x_j^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (m_{ii} - \sum_{j \neq i} |m_{ij}|) x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (m_{jj} - \sum_{i \neq j} |m_{ij}|) x_j^2 \end{aligned}$$

Revenant aux hypothèses, on sait qu'il existe  $\alpha_1, \alpha_2$  deux constantes positives, tel que : pour tout  $i$ ,  $m_{ii} - \sum_{j \neq i} |m_{ij}| \geq \alpha_1 > 0$ , et pour tout  $j$ ,  $m_{jj} - \sum_{i \neq j} |m_{ij}| \geq \alpha_2 > 0$ . Ce qui entraîne  $(Mx, x) \geq (\alpha_1 + \alpha_2) \sum_{i=1}^m x_i^2$ . ■

**Remarque 4.32** *Grâce aux lemmes 4.30 et 4.31, on a la coercivité de la matrice  $M$  qui est définie par (4.85). De plus, par (4.86), on sait que cette matrice a des coefficients non diagonaux négatifs ou nul, et des coefficients diagonaux positifs. C'est à dire que cette matrice vérifie tous les hypothèses de la proposition 4.29.*

La proposition suivante parlera de la monotonie de la solution discrétisé.

**Proposition 4.33** *Si l'hypothèse de stabilité suivante :*

$$1 - (\lambda(1 - \bar{\theta}) + r(1 - \theta))k - (1 - \theta)\sigma^2 \frac{k}{h^2} > 0 \quad (4.87)$$

est vérifié, et supposons que les vecteurs  $u^0, u^1, \dots, u^N$  sont les solutions du problème (4.83), alors, ils ont les propriétés suivante :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad u^i \leq u^{i-1} \quad (4.88)$$

**Démonstration :** On montre, d'abord, le fait que :

$$\text{si } u^{i-1} \geq u^i \implies q^{i-1} \geq q^i$$

En effet, a partir de la définition de  $q$  (Vu (4.84)), on déduit :

$$\begin{aligned} q_j^{i-1} &= -(1-\theta)(au_{j-1}^{i-1} + cu_{j+1}^{i-1}) + \lambda k(1-\bar{\theta}) \left( \sum_{l+j=0}^{m+1} u_{l+j}^{i-1} g_l h \right) \\ &\quad + (1 - (1-\theta)b - \lambda k(1-\bar{\theta}))u_j^{i-1} + kF_j \end{aligned}$$

Remarquons que  $b = \frac{\sigma^2 k}{h^2} + rk$ , et l'hypothèse de stabilité, on sait que :  $1 - (1-\theta)(\frac{\sigma^2 k}{h^2} + rk) - \lambda(1-\bar{\theta})k > 0$ . De plus, comme  $a < 0, c < 0, \theta \in [0, 1], \bar{\theta} \in [0, 1], \lambda > 0$  et  $g_l \geq 0$  pour  $l = m_1, \dots, m_2$ , on peut déduire, en utilisant  $u^{i-1} \geq u^i$ ,

$$\begin{aligned} q_j^{i-1} &\geq -(1-\theta)(au_{j-1}^i + cu_{j+1}^i) + \lambda k(1-\bar{\theta}) \left( \sum_{l+j=0}^{m+1} u_{l+j}^i g_l h \right) \\ &\quad + (1 - (1-\theta)b - \lambda k(1-\bar{\theta}))u_j^i + kF_j \\ &= q_j^i \end{aligned}$$

maintenant, on commence à montrer le résultat énoncé dans la proposition, ça se fait par récurrence sur  $i$ . Il est clair que l'on a  $u^{N-1} \geq u^N$ , grâce au fait que  $u^N = \varphi$ . Supposons l'inégalité  $u^{i-1} \geq u^i$  acquise, ce qui donne  $q^{i-1} \geq q^i$  d'après ce qui précède. Revenant à la définition de  $\dot{q}$  (Vu (4.81)), il est évident que :  $q^{i-1} \geq q^i \implies \dot{q}^{i-1} \geq \dot{q}^i$ . D'où  $Mu^{i-2} \geq \dot{q}^{i-1} \geq \dot{q}^i$ . Or  $u^{i-2} \geq \varphi$ , de plus, remarquant les faits que : la matrice  $M$  est coercive et a des coefficients non diagonaux négatifs ou nul, on a alors  $u^{i-2} \geq u^{i-1}$  par la proposition 4.29. ■

#### 4.4.4 Affaiblissement de l'hypothèse sur $\psi$

Dans cette section, nous reprenons les notations introduites à la section 4.3, i.e.  $\tilde{u} = u - \tilde{\psi}$  où  $\tilde{u}$  est la solution de (4.19) et  $u$  est la solution de (4.4). Si l'on note  $\tilde{u}_{h,k}$  la solution du problème discrétisé homogène (4.27), et  $\tilde{u}$  la solution du problème homogène (4.19), d'après le théorème 4.26, on a déjà montré que si  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , on a :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{h,k} &\longrightarrow \tilde{u} \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \\ \delta \tilde{u}_{h,k} &\longrightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \quad \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \end{aligned}$$

Dans cette section, on va montrer qu'on a encore le théorème de convergence sous une condition plus faible sur  $\psi$  (i.e :  $\psi \in W^{1,2,\alpha}(\mathbf{R})$ ). Pour cela, on aura besoin d'une estimation du genre :

$$|\tilde{u}_{h,k} - \hat{u}_{h,k}|_{L^\infty([0,T] \times \Omega_i)} \leq C|\psi_h - \hat{\psi}_h|_{L^\infty(\Omega_i)}$$

où  $\tilde{u}_{h,k}$  (resp.  $\hat{u}_{h,k}$ ) est la solution du problème (4.27) associée à  $\psi_h$  (resp.  $\hat{\psi}_h$ ).

Par ailleurs, en revenant à la section 4.3, il est facile de voir que la solution du problème de départ (4.4) est donnée par :

$$u = \tilde{u} + \tilde{\psi}$$

et que :

$$u_{h,k} = \tilde{u}_{h,k} + \tilde{\psi}_h$$

est la solution du problème discrétisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h^{i-1} \in V_h \text{ tel que :} \\ \frac{u_h^i - u_h^{i-1}}{k} + A_h u_h^{i-\theta} + B_h u_h^{i-\bar{\theta}} + f_h \leq 0 \\ u_h^{i-1} \geq \psi_h \\ \left( \frac{u_h^i - u_h^{i-1}}{k} + A_h u_h^{i-\theta} + B_h u_h^{i-\bar{\theta}} \right) (\psi_h - u_h^{i-1}) = 0 \\ u_h^N = \psi_h \\ u_h^i(m_1 h) = \psi_h(m_1 h), \quad u_h^i(m_2 h) = \psi_h(m_2 h) \end{array} \right. \quad (4.89)$$

avec

$$f_j = \lambda \sum_{\substack{l+j > m+1 \\ l+j < 0}} \phi_{l+j} g_l h$$

où  $\phi_j = \psi((m_1 + j)\Delta x)$  pour  $1 \leq j \leq m$ . De plus, remarquons l'hypothèse de régularité sur  $\tilde{\psi}$  (voir page 95), il n'est pas difficile de voir que si  $\psi \in W^{2,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , on a :

$$\begin{aligned} u_{h,k} &\longrightarrow u \text{ fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_t)) \\ \delta u_{h,k} &\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \text{ fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_t)) \end{aligned}$$

On verra, dans la démonstration du lemme 4.34, qu'il est commode de prouver, tout d'abord, deux lemmes qui préciseront la dépendance de la solution approchée  $u_{h,k}$  du schéma (4.89) par rapport à  $\psi_h$ . En fait, ces deux lemmes sont analogues aux lemmes de monotonie et de continuité  $L^\infty$ . (Voir lemme 3.8, lemme 3.9).

Avant de les montrer, en suivant la même méthode que dans la section 4.4.3, on écrit le schéma (4.89) sous la forme suivante :

$$u_0^{i-1} = \psi(m_1 h), \quad u_{m+1}^{i-1} = \psi(m_2 h), \quad 1 \leq i \leq N$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} u^N = \phi \\ M u^{i-1} \geq \dot{q}^i, \quad u^{i-1} \geq \phi \\ (M u^{i-1} - \dot{q}^i, \phi - u^{i-1}) = 0 \end{array} \right\} \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.90)$$

où :

$$\begin{aligned} q_j^i &= u_j^i - (1 - \theta)(au_{j-1}^i + bu_j^i + cu_{j+1}^i) \\ &+ \lambda k(1 - \bar{\theta}) \left( \sum_{l+j=0}^{m+1} u_{l+j}^i g_l h - u_j^i \right) + \lambda k \sum_{\substack{l+j > m+1 \\ l+j < 0}} \phi_{l+j} g_l h \end{aligned} \quad (4.91)$$

où la matrice  $M$  est défini comme dans (4.85) et le vecteur  $\hat{q}$  est défini comme dans (4.81) et (4.82).<sup>5</sup>

Maintenant, on peut énoncer le lemme suivant :

**Lemme 4.34** Soient  $\psi_h$  et  $\hat{\psi}_h$  appartient à  $V_h$  et vérifient  $\psi_h \leq \hat{\psi}_h$ , et de plus, si l'hypothèse de stabilité (4.87) est vérifiée. Alors, les solutions  $u_{h,k}$  et  $\hat{u}_{h,k}$  du schéma (4.90) associées vérifient :

$$u_{h,k} \leq \hat{u}_{h,k}$$

**Démonstration :** Nous utilisons une méthode analogue à celle de la proposition 4.33. Cela se fait en deux étapes.

1). Nous montrons le fait que :

$$\text{si } u_h^i \leq \hat{u}_h^i \xrightarrow{(a)} q^i \leq \hat{q}^i \xrightarrow{(b)} \dot{q}^i \leq \dot{\hat{q}}^i$$

En effet, pour montrer (a), nous partons de la définition de  $q$  (Voir (4.91)), on déduit :

$$\begin{aligned} q_j^i &= -(1 - \theta)(au_{j-1}^i + cu_{j+1}^i) + \lambda k(1 - \bar{\theta}) \left( \sum_{l+j=0}^{m+1} u_{l+j}^i g_l h \right) \\ &+ (1 - (1 - \theta)b - \lambda k(1 - \bar{\theta}))u_j^i + \lambda k \sum_{\substack{l+j > m+1 \\ l+j < 0}} \phi_{l+j} g_l h \end{aligned}$$

remarquons que  $b = \frac{\sigma^2 k}{h^2} + rk$  (Voir (4.78)), et que sous l'hypothèse de stabilité (4.87) :

$$1 - (1 - \theta)b - \lambda k(1 - \bar{\theta}) > 0$$

De plus, comme  $a < 0$ ,  $c < 0$ ,  $\theta \in [0, 1]$ ,  $\bar{\theta} \in [0, 1]$ ,  $\lambda > 0$  et  $g_l \geq 0$  pour  $l = m_1, \dots, m_2$ , on peut déduire<sup>6</sup>, en utilisant  $u_h^i \leq \hat{u}_h^i$ ,  $\psi_h \leq \hat{\psi}_h$ ,

$$q_j^i \leq -(1 - \theta)(a\hat{u}_{j-1}^i + c\hat{u}_{j+1}^i) + \lambda k(1 - \bar{\theta}) \left( \sum_{l+j=0}^{m+1} \hat{u}_{l+j}^i g_l h \right)$$

<sup>5</sup>En effet, on écrit  $\psi(m_1 h)$  au lieu de  $\bar{u}_{m_1}$ ,  $\psi(m_2 h)$  au lieu de  $\bar{u}_{m_2}$  dans (4.81) et (4.82) à cause des conditions aux bords.

<sup>6</sup>Si l'on part directement du problème homogène (4.19) et son problème discrétisé (4.27), dans la membre droite de  $q_j^i$  (voir (4.84)), on aura un terme plus  $kF_j$  avec :

$$F_j = (A_h \tilde{\psi}_h)_{j+m_1} + (B_h \tilde{\psi}_h)_{j+m_1} + \lambda k \sum_{\substack{l+j > m+1 \\ l+j < 0}} \phi_{l+j} g_l h$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - (1 - \theta)b - \lambda k(1 - \bar{\theta}))\hat{u}_j^i + \lambda k \sum_{\substack{l+j>m+1 \\ l+j<0}} \hat{\phi}_{l+j}g_l h \\
& = \hat{q}_j^i
\end{aligned}$$

De plus, pour montrer (b), en revenant à la définition de  $\dot{v}$  (Voir (4.81) et (4.82)), dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= q_1 - \theta a \psi(m_1 h) + y_1 & \dot{\hat{q}}_1 &= \hat{q}_1 - \theta a \hat{\psi}(m_1 h) + \hat{y}_1 \\
\dot{q}_m &= q_m - \theta c \psi(m_2 h) + y_m & \dot{\hat{q}}_m &= \hat{q}_m - \theta c \hat{\psi}(m_2 h) + \hat{y}_m \\
\dot{q}_j &= q_j + y_j \quad 2 \leq j \leq m-1 & \dot{\hat{q}}_j &= \hat{q}_j + \hat{y}_j \quad 2 \leq j \leq m-1
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
y_j &= \lambda \bar{\theta} k h g_{-j} \psi(m_1 h) + \lambda \bar{\theta} k h g_{m-j+1} \psi(m_2 h) \\
\hat{y}_j &= \lambda \bar{\theta} k h g_{-j} \hat{\psi}(m_1 h) + \lambda \bar{\theta} k h g_{m-j+1} \hat{\psi}(m_2 h)
\end{aligned}$$

comme  $\psi_h \leq \hat{\psi}_h$ , et  $a < 0$ ,  $c < 0$ ,  $g_l > 0$ , si  $q^i \leq \hat{q}^i$ , on peut affirmer que :

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &\leq \dot{\hat{q}}_1 \\
\dot{q}_m &\leq \dot{\hat{q}}_m \\
\dot{q}_j &\leq \dot{\hat{q}}_j \quad \text{pour } 2 \leq j \leq m-1
\end{aligned}$$

D'où :

$$\dot{q}^i \leq \dot{\hat{q}}^i$$

2). Nous utilisons une méthode de récurrence sur  $i$  pour montrer le résultat énoncé dans le lemme. Pour  $i = N$ , comme  $u_h^N = \phi_h$ ,  $\hat{u}_h^N = \hat{\phi}_h$ , or  $\psi_h \leq \hat{\psi}_h$  et  $\phi_j = \psi((m_1 + j)\Delta x)$ , d'où  $\phi_h \leq \hat{\phi}_h$ . On a  $u^N \leq \hat{u}_h^N$ .

Maintenant, supposons l'inégalité  $u_h^i \leq \hat{u}_h^i$  acquise. Cela entraîne, par la première partie, que :

$$\dot{q}^i \leq \dot{\hat{q}}^i$$

D'où :

$$M \hat{u}^{i-1} \geq \dot{\hat{q}}^i \geq \dot{q}^i$$

Or  $\hat{u}^{i-1} \geq \hat{\phi} \geq \phi$ , de plus, remarquant les faits que : la matrice  $M$  est coercive et a des coefficients non diagonaux négatifs ou nul, on a alors, par la proposition 4.29,

$$u_h^{i-1} \leq \hat{u}_h^{i-1}$$

---

quand  $\psi \leq \hat{\psi}$ , si l'on note  $\tilde{\psi}_h$  (resp.  $\hat{\tilde{\psi}}_h$ ) la fonction approchée de  $\tilde{\psi}$  (resp.  $\hat{\tilde{\psi}}$ ), à partir de la définition de  $\tilde{\psi}$  (voir la section 4.3), on n'a pas forcément la relation suivante :

$$(A_h \tilde{\psi}_h)_{j+m_1} + (B_h \tilde{\psi}_h)_{j+m_1} \leq (A_h \hat{\tilde{\psi}}_h)_{j+m_1} + (B_h \hat{\tilde{\psi}}_h)_{j+m_1}$$

ce qui veut dire qu'on n'a pas forcément  $q_j^i \leq \hat{q}_j^i$  comme ici. C'est la raison pour laquelle on revient, d'abord, au problème original.

On obtient finalement :

$$u_{h,k} \leq \hat{u}_{h,k}$$

■

**Lemme 4.35** Si  $\psi_h \in V_h$ ,  $\hat{\psi}_h \in V_h$  et  $\psi_h - \hat{\psi}_h \in L^\infty(\Omega_i)$ , et si de plus la condition de stabilité (4.87) est vérifiée. Alors :

$$u_{h,k} - \hat{u}_{h,k} \in L^\infty([0, T] \times \Omega_i)$$

et

$$|u_{h,k} - \hat{u}_{h,k}|_{L^\infty([0, T] \times \Omega_i)} \leq |\psi_h - \hat{\psi}_h|_{L^\infty(\Omega_i)}$$

**Démonstration :** On voit que pour avoir le résultat énoncé, il suffit de montrer que :

$$-|\psi_h - \hat{\psi}_h|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq u_{h,k} - \hat{u}_{h,k} \leq |\psi_h - \hat{\psi}_h|_{L^\infty(\Omega_i)} \quad (4.92)$$

Posons :  $K = |\psi_h - \hat{\psi}_h|_{L^\infty(\Omega_i)}$  et notons  $v_{h,k}$  la solution du problème discrétisé (4.90) associé  $\hat{\psi}_h + K$ . On commence par montrer l'inégalité :

$$u_{h,k} \leq \hat{u}_{h,k} + K$$

Cela se fait en deux étapes.

- montrer :  $u_{h,k} \leq v_{h,k}$
- montrer :  $v_{h,k} \leq \hat{u}_{h,k} + K$

- 1). Remarquant que  $u_{h,k}$  (resp.  $v_{h,k}$ ) est la solution du problème discrétisé (4.90) associée  $\psi_h$  (resp.  $\hat{\psi}_h + K$ ), et le fait que  $\psi_h - \hat{\psi}_h \leq K$ , d'où  $\psi_h \leq \hat{\psi}_h + K$ , il résulte du lemme 4.34 que :

$$u_{h,k} \leq v_{h,k}$$

- 2) On introduit d'abord quelques notations. Les vecteurs  $\Phi$ ,  $\hat{\phi}$  sont définies par :

$$\begin{aligned} \Phi_j &= \hat{\psi}((m_1 + j)\Delta x) + K \\ \hat{\phi}_j &= \hat{\psi}((m_1 + j)\Delta x) \end{aligned}$$

Le vecteur  $Q$  (resp.  $\hat{q}$ ) est défini par (4.91) pour  $v_h^i$  (resp.  $\hat{u}_h^i$ ) au lieu de  $u_h^i$ , et  $\Phi_j$  (resp.  $\hat{\phi}_j$ ) au lieu de  $\phi_j$ . Et de plus,

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 &= Q_1 - \theta a(\hat{\psi}_h(m_1 h) + K) + y_1 \\ \dot{Q}_m &= Q_m - \theta c(\hat{\psi}_h(m_2 h) + K) + y_m \\ \dot{Q}_j &= Q_j + y_j \quad \text{pour } 2 \leq j \leq m-1 \end{cases} \quad (4.93)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{q}}_1 &= \hat{q}_1 - \theta a \hat{\psi}_h(m_1 h) + \hat{y}_1 \\ \dot{\hat{q}}_m &= \hat{q}_m - \theta c \hat{\psi}_h(m_2 h) + \hat{y}_m \\ \dot{\hat{q}}_j &= \hat{q}_j + \hat{y}_j \quad \text{pour } 2 \leq j \leq m-1 \end{cases} \quad (4.94)$$

avec (voir (4.82))

$$\begin{aligned} y_j &= \lambda \bar{\theta} k h g_{-j} (\hat{\psi}(m_1 h) + K) + \lambda \bar{\theta} k h g_{m-j+1} (\hat{\psi}(m_2 h) + K) \quad 1 \leq j \leq m \\ \hat{y}_j &= \lambda \bar{\theta} k h g_{-j} \hat{\psi}(m_1 h) + \lambda \bar{\theta} k h g_{m-j+1} \hat{\psi}(m_2 h) \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

D'où :

$$y_j = \hat{y}_j + \lambda \bar{\theta} k h K (g_{-j} + g_{m-j+1}) \quad 1 \leq j \leq m \quad (4.95)$$

Par un calcul, on voit que  $v_{h,k}$  vérifie :

$$\begin{cases} v^N = \Phi \\ Mv^{i-1} \geq \dot{Q}^i & 1 \leq i \leq N \\ v^{i-1} \geq \Phi & 1 \leq i \leq N \\ (Mv^{i-1} - \dot{Q}^i, \Phi - v^{i-1}) = 0 & 1 \leq i \leq N \end{cases}$$

et  $\hat{u}_{h,k}$  vérifie :

$$\begin{cases} \hat{u}^N = \hat{\phi} \\ M\hat{u}^{i-1} \geq \dot{\hat{q}}^i & 1 \leq i \leq N \\ \hat{u}^{i-1} \geq \hat{\phi} & 1 \leq i \leq N \\ (M\hat{u}^{i-1} - \dot{\hat{q}}^i, \hat{\phi} - \hat{u}^{i-1}) = 0 & 1 \leq i \leq N \end{cases}$$

Maintenant, il faut montrer que :

$$v_{h,k} \leq \hat{u}_{h,k} + K \quad (4.96)$$

Pour cela, on utilisera une méthode analogue à celle utilisée dans le lemme 4.34. On procède en deux étapes.

- Pour  $i$  fixé, si  $v_h^i \leq \hat{u}_k^i + K$ , alors  $\dot{Q}^i \leq \dot{\hat{q}}^i + MK$ .
- Une méthode récurrence sur  $i$  pour obtenir (4.96).

Pour obtenir a), partons de la définition de  $Q$  (Voir (4.91)), on peut écrire :

$$\begin{aligned} Q_j^i &= v_j^i - (1 - \theta)(av_{j-1}^i + bv_j^i + cv_{j+1}^i) \\ &+ \lambda k(1 - \bar{\theta}) \left( \sum_{l+j=0}^{m+1} v_{l+j}^i g_l h - v_j^i \right) + \lambda k \sum_{\substack{l+j > m+1 \\ l+j < 0}} \Phi_{l+j} g_l h \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} Q_j^i &= -(1 - \theta)(av_{j-1}^i + cv_{j+1}^i) + \lambda k(1 - \bar{\theta}) \left( \sum_{l+j=0}^{m+1} v_{l+j}^i g_l h \right) \\ &+ (1 - (1 - \theta)b - \lambda k(1 - \bar{\theta}))v_j^i + \lambda k \sum_{\substack{l+j > m+1 \\ l+j < 0}} \Phi_{l+j} g_l h \end{aligned}$$



en tenant compte du fait que  $b = \frac{\sigma^2 k}{h^2} + rk$  et l'hypothèse de stabilité, on sait que :

$$1 - (1 - \theta)b - \lambda k(1 - \bar{\theta}) > 0$$

De plus, comme  $a < 0$ ,  $c < 0$ ,  $\theta \in [0, 1]$ ,  $\bar{\theta} \in [0, 1]$ ,  $\lambda > 0$  et  $g_l \geq 0$ , on peut déduire, en utilisant  $v_h^i \leq \hat{u}_h^i + K$ , et  $\Phi_j = \hat{\phi}_j + K$ ,

$$\begin{aligned} Q_j^i &\leq -(1 - \theta)(a(\hat{u}_{j-1}^i + K) + c(\hat{u}_{j+1}^i + K)) + \lambda k(1 - \bar{\theta}) \left( \sum_{l+j=0}^{m+1} (\hat{u}_{l+j}^i + K) g_l h \right) \\ &\quad + (1 - (1 - \theta)b - \lambda k(1 - \bar{\theta}))(\hat{u}_j^i + K) + \lambda k \sum_{\substack{l+j > m+1 \\ l+j < 0}} \Phi_{l+j} g_l h \\ &= \hat{u}_j^i - (1 - \theta)(a\hat{u}_{j-1}^i + b\hat{u}_j^i + c\hat{u}_{j+1}^i) + \lambda k(1 - \bar{\theta}) \left( \sum_{l+j=0}^{m+1} \hat{u}_{l+j}^i g_l h - \hat{u}_j^i \right) \\ &\quad + \lambda k \sum_{\substack{l+j > m+1 \\ l+j < 0}} \hat{\phi}_{l+j} g_l h + \lambda k K \sum_{\substack{l+j > m+1 \\ l+j < 0}} g_l h \\ &\quad + K - (1 - \theta)K(a + b + c) + \lambda k(1 - \bar{\theta})K \left( \sum_{l+j=0}^{m+1} g_l h - 1 \right) \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que  $g$  est une fonction positive de classe  $C^1$  telle que  $\int g(z) dz = 1$ , il est facile de voir que  $\lambda k(\sum_{l+j=0}^{m+1} g_l h + \sum_{\substack{l+j > m+1 \\ l+j < 0}} g_l h - 1) - rk < 0$ . D'autre part, en remarquant la définition de  $\hat{q}$  et  $a + b + c = rk$ ,  $r$  est positive, on peut déduire que :

$$\begin{aligned} Q_j^i &\leq \hat{q}_j^i + K + \theta K(a + b + c) - \lambda k \bar{\theta} K \left( \sum_{l+j=0}^{m+1} g_l h - 1 \right) \\ &\quad - K(a + b + c) + \lambda k K \left( \sum_{l+j=0}^{m+1} g_l h + \sum_{\substack{l+j > m+1 \\ l+j < 0}} g_l h - 1 \right) \\ &\leq \hat{q}_j^i + (\theta a + (1 + \theta b) + \theta c)K - \lambda k \bar{\theta} K \left( \sum_{l+j=0}^{m+1} g_l h - 1 \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, à partir de la définition de la matrice  $M$  (Voir (4.85)), on voit que :

$$\begin{aligned} (MK)_1 &= ((1 + \theta b) + \theta c)K - \lambda k \bar{\theta} K \left( \sum_{l=0}^{m-1} g_l h - 1 \right) \\ (MK)_m &= (\theta a + (1 + \theta b))K - \lambda k \bar{\theta} K \left( \sum_{l=1-m}^0 g_l h - 1 \right) \\ (MK)_j &= (\theta a + (1 + \theta b) + \theta c)K - \lambda k \bar{\theta} K \left( \sum_{l+j=1}^m g_l h - 1 \right) \quad \text{pour } 2 \leq j \leq m-1 \end{aligned}$$

D'où, si l'on note :  $x_j = \lambda kh\bar{\theta}K(g_{-j} + g_{m-j+1})$

$$\begin{aligned} Q_1^i &\leq \hat{q}_1^i + (MK)_1 + \theta aK - x_1 \\ Q_m^i &\leq \hat{q}_m^i + (MK)_m + \theta cK - x_m \\ Q_j^i &\leq \hat{q}_j^i + (MK)_j - x_j \quad \text{pour } 2 \leq j \leq m-1 \end{aligned}$$

D'autre part, en revenant à (4.93), (4.94) et (4.95), on a :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1^i &= Q_1^i - \theta a(\hat{\psi}_h(m_1h) + K) + y_1 \\ &\leq \hat{q}_1^i + (MK)_1 + \theta aK - \theta aK - \theta a\hat{\psi}_h(m_1h) + \hat{y}_1 \\ &= \hat{q}_1^i - \theta a\hat{\psi}_h(m_1h) + (MK)_1 + \hat{y}_1 \\ &= \dot{\hat{q}}_1^i + (MK)_1 \end{aligned}$$

De même,

$$\dot{Q}_m^i \leq \dot{\hat{q}}_m^i + (MK)_m$$

et

$$\begin{aligned} \dot{Q}_j^i &= Q_j^i + y_j \\ &= Q_j^i + \hat{y}_j + x_j \\ &\leq \hat{q}_j^i + (MK)_j + \hat{y}_j \\ &= \dot{\hat{q}}_j^i + (MK)_j \quad \text{pour } m-1 \geq j \geq 2 \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\dot{Q}^i \leq \dot{\hat{q}}^i + MK$$

D'où a).

Pour montrer b), on raisonne par récurrence sur  $i$  pour montrer (4.96). Pour  $i = N$ , comme  $v_h^N = \Phi_h = \hat{\psi}_h + K$ ,  $\hat{u}_h^N = \hat{\psi}_h$ , on a  $v_h^N = \hat{u}_h^N + K$ . Supposons que l'on a  $v_h^i \leq \hat{u}_h^i + K$ , en utilisant a), on a :

$$\dot{Q}^i \leq \dot{\hat{q}}^i + MK$$

Or :

$$M\hat{u}^{i-1} \geq \dot{\hat{q}}^i$$

D'où :

$$M(\hat{u}^{i-1} + K) \geq \dot{\hat{q}}^i + MK \geq \dot{Q}^i$$

Par ailleurs,  $\hat{u}^{i-1} \geq \hat{\psi}_h$ , d'où :

$$\hat{u}^{i-1} + K \geq \hat{\psi}_h + K = \Phi_h$$

Ce qui entraîne, par la proposition 4.29, que :

$$v_h^{i-1} \leq \hat{u}_h^{i-1} + K$$

D'où :

$$v_{h,k} \leq \hat{u}_{h,k} + K$$

On obtient finalement :

$$u_{h,k} \leq v_{h,k} \leq \hat{u}_{h,k} + K$$

ce qui donne :

$$u_{h,k} - \hat{u}_{h,k} \leq K$$

De même, on peut montrer que  $\hat{u}_{h,k} - u_{h,k} \leq K$ , ce qui donne  $-K \leq u_{h,k} - \hat{u}_{h,k} \leq K$ .

D'où :

$$u_{h,k} - \hat{u}_{h,k} \in L^\infty([0, T] \times \Omega_i)$$

et

$$|u_{h,k} - \hat{u}_{h,k}|_{L^\infty([0, T] \times \Omega_i)} \leq K = |\psi_h - \hat{\psi}_h|_{L^\infty(\Omega_i)}$$

■

Si l'on note, de plus,  $\hat{u}_{h,k}$  est la solution du problème (4.27) associé à  $\hat{\psi}_h$ , on a, alors :

$$\begin{aligned} u_{h,k} &= \tilde{u}_{h,k} + \tilde{\psi}_h \\ \hat{u}_{h,k} &= \hat{u}_{h,k} + \hat{\psi}_h \end{aligned}$$

où  $u_{h,k}$  (resp.  $\hat{u}_{h,k}$ ) est la solution de (4.89) associée à  $\psi_h$  (resp.  $\hat{\psi}_h$ ) et  $\tilde{u}_{h,k}$  est la solution de (4.27) associé à  $\psi_h$ . Et  $\tilde{\psi}_h$  (resp.  $\hat{\psi}_h$ ) est la fonction approchée de  $\tilde{\psi}$  (resp.  $\hat{\psi}$ ).

**Corollaire 4.36** *Si les conditions du lemme 4.35 sont vérifiées, alors, on a :*

$$|\tilde{u}_{h,k} - \hat{u}_{h,k}|_{L^\infty([0, T] \times \Omega_i)} \leq |\tilde{\psi}_h - \hat{\psi}_h|_{L^\infty(\Omega_i)} + |\psi_h - \hat{\psi}_h|_{L^\infty(\Omega_i)}$$

En effet,

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_{h,k} - \hat{u}_{h,k}|_{L^\infty([0, T] \times \Omega_i)} &= |u_{h,k} - \tilde{\psi}_h - \hat{u}_{h,k} + \hat{\psi}_h|_{L^\infty([0, T] \times \Omega_i)} \\ &\leq |u_{h,k} - \hat{u}_{h,k}|_{L^\infty([0, T] \times \Omega_i)} + |\tilde{\psi}_h - \hat{\psi}_h|_{L^\infty([0, T] \times \Omega_i)} \\ &\leq |\psi_h - \hat{\psi}_h|_{L^\infty(\Omega_i)} + |\tilde{\psi}_h - \hat{\psi}_h|_{L^\infty(\Omega_i)} \end{aligned}$$

par le lemme 4.35.

Maintenant, on peut énoncer le théorème principal de cette partie.

**Théorème 4.37** Soit  $\psi \in W^{1,2,\alpha}(\mathbf{R})$ . On suppose que  $\tilde{u}_{h,k}(t, x) = \sum_{i=1}^N \tilde{u}_h^i(x) \mathbf{1}_{(i-1)k, ik]}(t)$  est la solution du problème discrétisé (4.27) et  $\tilde{u}$  est la solution du problème (4.19). Si  $\theta \in [0, 1]$ ,  $\bar{\theta} \in [0, 1]$ ,  $h, k$  tendent vers zéro, et de plus, si  $\frac{k}{h^2} \leq \beta$  où  $\beta$  est une constante assez petit tel que les conditions de stabilité (4.87), (4.39) et (4.40) sont vérifiées. On a alors :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{h,k} &\longrightarrow \tilde{u} && \text{fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \\ \delta \tilde{u}_{h,k} &\longrightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} && \text{faiblement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \end{aligned}$$

**Démonstration :**

- Puisque  $\psi \in W^{1,2,\alpha}(\mathbf{R})$ , d'où  $\psi|_{\Omega_i}$ <sup>7</sup>  $\in W^{1,2}(\Omega_i) \subset C(\Omega_i)$ , par la convolution, on sait qu'il existe une suite  $\psi_m$  d'éléments de  $W^{2,2}(\Omega_i)$  qui converge uniformément vers  $\psi$ . Par ailleurs, si l'on suppose  $\tilde{u}_m$  est la solution du problème (4.19) associée à  $\psi_m$ , d'après le lemme 4.7, on a :

$$|\tilde{u} - \tilde{u}_m|_{L^\infty([0, T] \times \Omega_i)} \leq |\psi - \psi_m|_{L^\infty(\Omega_i)} + |\tilde{\psi} - \tilde{\psi}_m|_{L^\infty(\Omega_i)} \quad (4.97)$$

- Supposons que  $\psi_h$  (resp.  $\psi_{h,m}$ ) est la fonction approchée de  $\psi$  (resp.  $\psi_m$ ),  $\tilde{u}_{h,k,m}$  est la solution discrétisé associé à  $\psi_{h,m}$ . Par le corollaire 4.36, on a alors :

$$|\tilde{u}_{h,k} - \tilde{u}_{h,k,m}|_{L^\infty([0, T] \times \Omega_i)} \leq |\psi_h - \psi_{h,m}|_{L^\infty(\Omega_i)} + |\tilde{\psi}_h - \tilde{\psi}_{h,m}|_{L^\infty(\Omega_i)} \quad (4.98)$$

- On a par ailleurs, d'après (4.98),

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_{h,k} - \tilde{u}|_{L^2([0, T] \times \Omega_i)} &\leq |\tilde{u}_{h,k} - \tilde{u}_{h,k,m}|_{L^2([0, T] \times \Omega_i)} \\ &\quad + |\tilde{u}_{h,k,m} - \tilde{u}_m|_{L^2([0, T] \times \Omega_i)} + |\tilde{u}_m - \tilde{u}|_{L^2([0, T] \times \Omega_i)} \\ &\leq C(|\psi_h - \psi_{h,m}|_{L^\infty(\Omega_i)} + |\tilde{\psi}_h - \tilde{\psi}_{h,m}|_{L^\infty(\Omega_i)}) \\ &\quad + |\tilde{u}_{h,k,m} - \tilde{u}_m|_{L^2([0, T] \times \Omega_i)} + |\tilde{u}_m - \tilde{u}|_{L^2([0, T] \times \Omega_i)} \end{aligned} \quad (4.99)$$

Or, puisque  $\psi_m \in W^{2,2}(\Omega_i)$ , d'après le théorème 4.26, on sait que :

$$\tilde{u}_{h,k,m} \rightarrow \tilde{u}_m \text{ fortement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)) \text{ quand } h, k \rightarrow 0$$

D'autre part, comme :

$$|\psi_h - \psi_{h,m}|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq |\psi_h - \psi|_{L^\infty(\Omega_i)} + |\psi - \psi_m|_{L^\infty(\Omega_i)} + |\psi_m - \psi_{h,m}|_{L^\infty(\Omega_i)}$$

et

$$|\tilde{\psi}_h - \tilde{\psi}_{h,m}|_{L^\infty(\Omega_i)} \leq |\tilde{\psi}_h - \tilde{\psi}|_{L^\infty(\Omega_i)} + |\tilde{\psi} - \tilde{\psi}_m|_{L^\infty(\Omega_i)} + |\tilde{\psi}_m - \tilde{\psi}_{h,m}|_{L^\infty(\Omega_i)}$$

---

<sup>7</sup> $\psi|_{\Omega_i}$  désigne la restriction de  $\psi$  à  $\Omega_i$

en utilisant les faits que  $\psi_h$  (resp.  $\tilde{\psi}_h$ ) converge vers  $\psi$  (resp.  $\tilde{\psi}$ ) et  $\psi_{h,m}$  (resp.  $\tilde{\psi}_{h,m}$ ) converge vers  $\psi_m$  (resp.  $\tilde{\psi}_m$ ) quand  $h$  tend vers 0, on en déduit, pour chaque  $m$ ,

$$\begin{aligned} & \limsup_{h,k \rightarrow 0} |\tilde{u}_{h,k} - \tilde{u}|_{L^2([0,T] \times \Omega_i)} \\ & \leq C(|\psi - \psi_m|_{L^\infty(\Omega_i)} + |\tilde{\psi} - \tilde{\psi}_m|_{L^\infty(\Omega_i)} + |\tilde{u}_m - \tilde{u}|_{L^2([0,T] \times \Omega_i)}) \\ & \leq C'(|\psi - \psi_m|_{L^\infty(\Omega_i)} + |\tilde{\psi} - \tilde{\psi}_m|_{L^\infty(\Omega_i)}) \end{aligned} \quad (4.100)$$

d'après (4.97), et  $C'$  est une autre constante.

Comme (4.100) est vrai pour tout  $m$ , en faisant tendre  $m$  vers l'infini, on obtient finalement le résultat énoncé.

- En remarquant la remarque 4.21, on en déduit :

$$\delta \tilde{u}_{h,k} \rightharpoonup \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \quad \text{faiblement dans } L^2([0, T]; L^2(\Omega_i)).$$

■

Pratiquement, pour calculer le prix d'un put américain dans ce modèle, nous prenons  $\psi_h^p = \sum_{M \in \Omega_h} \psi(M) \chi_h^M$  comme la fonction approchée de  $\psi$ . Ceci est basé sur les raisonnements suivants : Premièrement, dans ce cas,  $\psi$  est une fonction uniformément continue sur  $\Omega_i$ , donc, on a :

$$\begin{aligned} \psi_h^p & \rightarrow \psi \quad \text{uniformément sur } \Omega_i \\ \psi_h & \rightarrow \psi \quad \text{uniformément sur } \Omega_i \end{aligned}$$

Supposons que  $u_{h,k}^p$  la solution discrétisée associée à  $\psi_h^p$ , d'après le lemme 4.35, on a :

$$|u_{h,k} - u_{h,k}^p|_{L^\infty([0,T] \times \Omega_i)} \leq |\psi_h - \psi_h^p|_{L^\infty(\Omega_i)}$$

Or :

$$\begin{aligned} |\psi_h - \psi_h^p|_{L^\infty(\Omega_i)} & \leq |\psi_h - \psi|_{L^\infty(\Omega_i)} + |\psi_h^p - \psi|_{L^\infty(\Omega_i)} \\ & \rightarrow 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} |u_{h,k} - u_{h,k}^p|_{L^2([0,T] \times \Omega_i)} & \leq |u_{h,k} - u_{h,k}^p|_{L^\infty([0,T] \times \Omega_i)} \\ & \rightarrow 0 \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant le théorème 4.37, on a :

$$\begin{aligned} |u_{h,k}^p - u|_{L^2([0,T] \times \Omega_i)} & \leq |u_{h,k} - u_{h,k}^p|_{L^2([0,T] \times \Omega_i)} + |u_{h,k} - u|_{L^2([0,T] \times \Omega_i)} \\ & \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ce qui entraîne que :

$$u_{h,k}^p \longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^2([0, T] \times \Omega_i).$$

## Chapitre 5

# Formules d'approximations quasi-explicites

### 5.1 Approximation de Mac-Millan

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté la méthode des inéquations variationnelles pour calculer le prix d'une option américaine dans ce modèle. Le but de ce chapitre est de donner une autre méthode analytique qui nous permet de donner une valeur approchée du prix du put américain faisant intervenir le prix du put européen. C'est une généralisation de l'algorithme de MacMillan (cf. [30] [27]). Cette méthode nous donne des valeurs assez précises, et en plus, est facile à programmer.

Nous rappelons que le prix d'un put américain, après un changement de la variable, est donné par :

$$u^*(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t, T}} \mathbf{E}([e^{-r(\tau-t)} \psi(X_\tau^{t, x})])$$

avec  $\psi(x) = (K - e^x)_+$  et :

$$X_s^{t, x} = x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(s - t) + \sigma(B_s - B_t) + \sum_{j=N_t+1}^{N_s} Z_j$$

D'après le chapitre 3,  $u^*(t, x)$  est égal à la solution  $u(t, x)$  de l'inéquation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu \leq 0 & p.p \text{ dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ u(t, x) \geq \psi(x) & p.p \text{ dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au + Bu\right)(\psi - u) = 0 & p.p \text{ dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ u(T, x) = \psi(x) \end{cases}$$

où les opérateurs  $A$  et  $B$  sont définis par :

$$Au = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} - ru$$

$$Bu = \lambda \int (u(t, x+z) - u(t, x))\nu(dz)$$

Pour avoir un lien entre le prix d'un put américain avant la changement de la variable et la solution d'une inéquation variationnelle, nous posons :  $y = e^x$ . Si l'on note le prix spot à l'instant 0 par  $y$  et la fonction  $v(t, y) = u(t, \ln y) = u(t, x)$ , après un calcul, on peut déduire que le prix d'un put américain :

$$v^*(t, y) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}[e^{-r(\tau-t)}(K - ye^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(\tau-t) + \sigma(B_\tau - B_t)}) \prod_{j=N_t+1}^{N_\tau} (1 + U_j)]_+$$

est égal à la fonction  $v(t, y)$  où  $v(t, y)$  vérifie l'inéquation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{A}v + \bar{B}v \leq 0 & p.p \text{ dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ v(t, y) \geq h(y) & p.p \text{ dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{A}v + \bar{B}v \right)(h - v) = 0 & p.p \text{ dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ v(T, y) = h(y) \end{cases} \quad (5.1)$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{A}v &= \frac{\sigma^2 y^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu y \frac{\partial v}{\partial y} - rv \\ \bar{B}v &= \lambda \int (v(t, y(1+z)) - v(t, y))\nu(dz) \\ h(y) &= (K - y)_+ \end{aligned}$$

A partir de la définition du prix d'un put, on sait que  $\lim_{y \rightarrow \infty} v^*(t, y) = 0$ , cela nous permet d'écrire :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} v(t, y) = 0 \quad (5.2)$$

D'autre part, il n'est pas difficile de vérifier que le prix d'un put européen  $v_e$  dans ce modèle est solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_e}{\partial t} + \bar{A}v_e + \bar{B}v_e = 0 & p.p \text{ dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ v_e(T, y) = h(y) \end{cases} \quad (5.3)$$

Posons :  $w = v - v_e$ . De (5.1), (5.3), on déduit que  $w$  vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \bar{A}w + \bar{B}w \leq 0 & p.p \text{ dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ w(t, y) \geq h(y) - v_e(t, y) & p.p \text{ dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \bar{A}w + \bar{B}w \right)(w - h + v_e(t, y)) = 0 & p.p \text{ dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ w(T, y) = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Notre but est de chercher une solution approchée de (5.1). Pour cela, il suffit d'approximer la solution  $w = v - v_e$  de (5.4). On discrétise l'inéquation (5.4) uniquement en temps. Puis si l'on prend un seul pas en temps, et en suivant une méthode totalement implicite et notons :

$$\tilde{h}(y) = h(y) - v_e(0, y)$$



$$w^1 = w(T, y) = 0, \quad w^0 = w(0, y)$$

le schéma d'approximation du problème (5.4) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{w^1 - w^0}{T} + \bar{A}w^0 + \bar{B}w^0 \leq 0 \\ w^0 \geq \tilde{h}(y) \\ (w^0 - \tilde{h})(\frac{w^1 - w^0}{T} + \bar{A}w^0 + \bar{B}w^0) = 0 \\ w^1 = 0 \end{cases}$$

Si l'on note  $w^0 = \tilde{w}(y)$ , le schéma précédente devient :

$$\begin{cases} -\tilde{w} + T(\bar{A}\tilde{w} + \bar{B}\tilde{w}) \leq 0 \\ \tilde{w}(y) \geq \tilde{h}(y) \\ (\tilde{w} - \tilde{h})(-\tilde{w} + T(\bar{A}\tilde{w} + \bar{B}\tilde{w})) = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Maintenant on introduit le système suivant :

$$\begin{cases} -\tilde{w} + T(\bar{A}\tilde{w} + \bar{B}\tilde{w}) = 0 & \text{pour } y > y^* \\ \tilde{w}(y) = \tilde{h}(y) & \text{pour } y \leq y^* \\ \tilde{w}(y) \text{ est continue en } y^* \\ \frac{d\tilde{w}(y)}{dy} \text{ est continue en } y^* \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{w}(y) = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

On cherche une solution  $\tilde{w}$  de (5.6) sous la forme :

$$\tilde{w}(y) = \begin{cases} \beta y^\eta & y > y^* \\ \tilde{h}(y) & y \leq y^* \end{cases}$$

où  $\beta, \eta, y^*$  sont des constantes à préciser.

Avant d'énoncer la proposition suivante, on introduit deux notations en posant :  $v' = \frac{\partial v}{\partial y}$  et  $v'' = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ .

**Proposition 5.1** *La solution de (5.6) sous la forme précédente est donnée par les formules suivantes :*

$$\tilde{w}(y) = \begin{cases} \beta y^\eta & y > y^* \\ K - y - v_e(0, y) & y \leq y^* \end{cases} \quad (5.7)$$

où :

$$\beta = \frac{K - y^* - v_e(0, y^*)}{y^{*\eta}} \geq 0,$$

$\eta$  est l'unique solution négative de l'équation :

$$\frac{\sigma^2}{2}\eta^2 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\eta - (r + \lambda + \frac{1}{T}) + \lambda \mathbf{E}(1 + U_1)^\eta = 0 \quad (5.8)$$

et  $y^*$  est la solution unique de l'équation :

$$f(y) = y \quad \text{dans } [0, K] \quad (5.9)$$

où :

$$f(y) = |\eta| \frac{K - v_e(0, y)}{v'_e(0, y) + 1 + |\eta|} \quad (5.10)$$

Avant de montrer cette proposition, on étudie quelques propriétés du prix d'un put européen  $v_e(t, y)$ . D'après le chapitre 7 3.3 du livre [27], on sait que le prix d'un put européen  $v_e$  est donné par :

$$v_e(t, y) = \mathbf{E}[e^{-r(T-t)} h(y e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma B_{T-t}} \prod_{j=1}^{N_{T-t}} (1 + U_j))]$$

avec  $h(y) = (K - y)_+$ . D'où :

- a).  $v_e(0, 0) = e^{-rT} K < K$
- b).  $\lim_{y \rightarrow \infty} v_e(0, y) = 0$
- c).  $v_e(t, y) \geq 0$
- d). et  $y \mapsto v_e(t, y)$  est une fonction convexe à cause du fait que  $y \mapsto h(y) = (K - y)_+$  est convexe, donc,  $v_e''(t, y)$  est positive.
- e). c), d), a) entraînent que  $v_e(0, y)$  est strictement plus petit que  $K$ .
- f).  $1 + v_e'(0, y) \geq 0$

La dernière propriété f) résulte du fait suivant :

En effet, si l'on note :  $V_T = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma B_T} \prod_{j=1}^{N_T} (1 + U_j)$ , alors  $S_T = yV_T$ , et

$$\begin{aligned} v_e(0, y) &= \mathbf{E}(e^{-rT} (K - S_T)_+) \\ &= \mathbf{E}(e^{-rT} (K - yV_T)_+) \\ v_e'(0, y) &= -\mathbf{E}(e^{-rT} V_T) \mathbf{1}_{\{y < K/V_T\}} \\ &\geq -\mathbf{E}(e^{-rT} V_T) \\ &= -e^{-rT} \mathbf{E}(V_T) \end{aligned}$$

Puisque le prix actualisé  $(e^{-rt} S_t)_{t \geq 0}$  est une martingale, d'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(V_T) &= e^{rT} \mathbf{E}(e^{-rT} V_T) \\ &= e^{rT} \mathbf{E}(V_0) \\ &= e^{rT} \end{aligned}$$

D'où f).

#### Démonstration : (Démonstration de la proposition 5.1)

- On va, d'abord, montrer que l'équation (5.8) a une et une seule racine négative. En effet, posons :

$$\phi(\eta) = \frac{\sigma^2}{2} \eta^2 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \eta - (r + \lambda + \frac{1}{T}) + \lambda \mathbf{E}(1 + U_1)^\eta$$

puisque  $U_1$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $] - 1, \infty[$ ,

$$\begin{aligned}\phi'(\eta) &= \sigma^2 \eta + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \lambda \mathbf{E}(1 + U_1)^\eta \ln(1 + U_1) \\ \phi''(\eta) &= \sigma^2 + \lambda \mathbf{E}(1 + U_1)^\eta \ln^2(1 + U_1) \geq \sigma^2 > 0\end{aligned}$$

D'où, la fonction  $\eta \mapsto \phi(\eta)$  est une fonction convexe. Par ailleurs, comme  $1 + U_1 > 0$ , alors, pour tout  $\eta$  appartenant à l'intervalle  $] - \infty, \infty[$ , on a  $\mathbf{E}(1 + U_1)^\eta \geq 0$ . D'où :  $\lim_{\eta \rightarrow -\infty} \phi(\eta) = +\infty$ . D'autre part, on sait que  $\phi(0) = -(r + \frac{1}{T}) < 0$ , on peut alors énoncer que (5.8) a une et une seule racine négative.

Maintenant, on commence à vérifier notre formule.

• **Détermination de  $\eta$**

Pour préciser la valeur de  $\eta$ , on remplace  $\tilde{w}(y)$  par  $\beta y^\eta$  dans la première équation de (5.6), on obtient :

$$\frac{\sigma^2}{2} \eta^2 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \eta - \left(r + \lambda + \frac{1}{T}\right) + \lambda \mathbf{E}(1 + U_1)^\eta = 0$$

D'après la première étape de cette démonstration, on sait que cette équation a une et une seule racine négative, on la note  $\eta$ .

• **Détermination de  $\beta$  et  $y^*$**

Puisque  $\tilde{w}(y)$  est continue en  $y^*$ ,  $\frac{d\tilde{w}(y)}{dy}$  est continue en  $y^*$ , on a :

$$\begin{aligned}\beta y^{*\eta} &= (K - y^*) - v_e(0, y^*) \\ \eta \beta y^{*(\eta-1)} &= -1 - v_e'(0, y^*)\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{K - y^* - v_e(0, y^*)}{y^{*\eta}} \\ \frac{y^*}{|\eta|} &= \frac{K - y^* - v_e(0, y^*)}{1 + v_e'(0, y^*)}\end{aligned}$$

Par calcul, on voit que  $y^*$  est la solution de  $f(y) = y$  où  $f(y) = |\eta| \frac{K - v_e(0, y)}{v_e'(0, y) + 1 + |\eta|}$ .

D'autre part, en tenant compte des faits que  $1 + v_e'(0, y) \geq 0$ ,  $v_e(t, y) \geq 0$ , et  $v_e(0, y) < K$ , on sait que :

$$0 \leq |\eta| \frac{K - v_e(0, y^*)}{1 + v_e'(0, y^*) + |\eta|} \leq K - v_e(0, y^*) \leq K$$

D'où :

$$\begin{aligned}y^* &\leq K - v_e(0, y^*) \\ 0 &\leq y^* \leq K\end{aligned}$$

On a alors :

$$\beta = \frac{K - y^* - v_e(0, y^*)}{y^{*\eta}} \geq 0$$

Il reste à montrer que  $y = f(y)$  a une seule solution dans  $[0, K]$ . On va, d'abord, montrer que  $f(y) - y$  est une fonction décroissante. Comme :

$$\begin{aligned} f(y) &= |\eta| \frac{K - v_e(0, y)}{v'_e(0, y) + 1 + |\eta|} \\ f'(y) &= -|\eta| \left[ \frac{v'_e(0, y)}{v'_e(0, y) + 1 + |\eta|} + \frac{(K - v_e(0, y))v''_e(0, y)}{(v'_e(0, y) + 1 + |\eta|)^2} \right] \end{aligned}$$

En utilisant les faits que  $K - v_e(0, y) > 0$ , et  $v''_e(0, y) > 0$ , d'où :

$$f'(y) - 1 < 0$$

Cela entraîne que  $f(y) - y$  est une fonction strictement décroissante. D'autre part, puisque  $v_e(0, 0) = e^{-rT}K$  et  $v'_e(0, 0) + 1 > 0$ , alors,

$$f(0) = |\eta| \frac{K - v_e(0, 0)}{v'_e(0, 0) + 1 + |\eta|} = |\eta| \frac{K - e^{-rT}K}{v'_e(0, 0) + 1 + |\eta|} > 0$$

Par ailleurs, à cause des faits  $v'_e(0, K) + 1 \geq 0$ , et  $v_e(0, K) > 0$ , on a évidemment que :

$$-|\eta|v_e(0, K) < K(v'_e(0, K) + 1)$$

Donc :

$$|\eta|K - |\eta|v_e(0, K) < |\eta|K + K(v'_e(0, K) + 1)$$

D'où :

$$f(K) = |\eta| \frac{K - v_e(0, K)}{v'_e(0, K) + 1 + |\eta|} < K$$

Il en résulte que  $y = f(y)$  a une solution unique dans  $[0, K]$ , or  $y^*$  s'il existe est une solution de cet équation dans  $[0, K]$ . Donc,  $y^*$  est la seule solution de  $y = f(y)$  dans  $[0, K]$ . ■

La proposition suivante nous permettra de calculer le prix d'un put américain  $v(t, y)$ .

**Proposition 5.2** *La fonction  $\tilde{w}(y)$  définie par (5.7) est une solution de (5.5).*

**Démonstration :** Comme (5.7) est une solution de (5.6), pour montrer la proposition 5.2, il suffit de vérifier les deux points suivants.

- 1).  $\tilde{w}(y) = K - y - v_e(0, y) = \tilde{h}(y)$  (quand  $y < y^*$ ) satisfait la première inéquation dans (5.5).
- 2).  $\tilde{w}(y) = \beta y^\eta$  (quand  $y \geq y^*$ ) satisfait la deuxième inéquation dans (5.5).

Pour montrer 1), on note :

$$\varphi(y) = -\tilde{h}(y) + T(\bar{A}\tilde{h} + \bar{B}\tilde{h}) \quad \text{pour } y < y^*$$

Remarquons  $\tilde{h}(y) = h(y) - v_e(0, y)$ , d'où  $\tilde{h}(y) = K - y - v_e(0, y)$  pour  $y \leq y^* < K$ . On a donc :

$$\varphi(y) = -(K - y) + v_e(0, y) + T(\bar{A}(K - y) + \bar{B}(K - y)) - T(\bar{A}v_e(0, y) + \bar{B}v_e(0, y))$$

A partir des définitions des opérateurs  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ , et utilisons la relation  $\mu - r + \lambda \mathbf{E}U_1 = 0$ , on déduit :

$$\begin{aligned} \bar{A}(K - y) + \bar{B}(K - y) &= -\mu y - r(K - y) + \lambda \int (K - y(1 + z) - (K - y))\nu(dz) \\ &= -rK - (\mu - r)y - \lambda y \mathbf{E}U_1 \\ &= -rK \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque  $v_e''(0, y) \geq 0$ ,  $1 + v_e'(0, y) \geq 0$ , et  $r, y$  sont positifs, et en remarquant, de nouveau,  $\mu - r + \lambda \mathbf{E}U_1 = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \bar{A}v_e &= \frac{\sigma^2 y^2}{2} \frac{\partial^2 v_e}{\partial y^2} + \mu y \frac{\partial v_e}{\partial x} - r v_e \\ &= \frac{\sigma^2 y^2}{2} v_e'' + r y v_e' - \lambda y v_e' \mathbf{E}U_1 - r v_e \\ &\geq -r y - r v_e - \lambda y v_e' \mathbf{E}U_1 \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \varphi(y) &\leq -(K - y) + v_e(0, y) - rTK + rTy + rTv_e + \lambda T y v_e' \mathbf{E}U_1 - T\bar{B}v_e \\ &= (1 + rT)(v_e - (K - y)) - \lambda T \int (v_e(0, y(1 + z)) - v_e(0, y) - yz \frac{\partial v_e}{\partial y}(0, y))\nu(dz) \end{aligned}$$

Comme la fonction  $y \mapsto v_e(0, y)$  est convexe, alors :

$$v_e(0, y(1 + z)) - v_e(0, y) \geq yz \frac{\partial v_e}{\partial y}(0, y)$$

D'où :

$$\varphi(y) \leq (1 + rT)(v_e - (K - y))$$

Posons  $\bar{\varphi}(y) = (1 + rT)(v_e - (K - y))$ , maintenant, il reste à montrer  $\bar{\varphi}(y) \leq 0$  pour  $y \leq y^*$ . Puisque  $(K - y^*) - v_e(0, y^*) = \beta y^{*\eta}$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(y^*) &= -\beta(1 + rT)y^{*\eta} \\ &\leq 0 \quad \text{car } \beta > 0, \quad y^* \geq 0 \end{aligned}$$

Or :

$$\bar{\varphi}'(y) = (1 + rT)(v_e' + 1) \geq 0$$

Il en résulte que  $\bar{\varphi}(y)$  est une fonction croissante de  $y$ . D'où pour  $y \leq y^*$ , on a  $\bar{\varphi}(y) \leq \bar{\varphi}(y^*) \leq 0$ .

Maintenant, il reste à vérifier 2). Montrons d'abord l'inégalité pour  $y^* \leq y \leq K$ , on a :  $\tilde{h}(y) = K - y - v_e(0, y)$ . Posons :

$$\hat{\varphi}(y) = \tilde{w}(y) - \tilde{h}(y) = \beta y^\eta - K + y + v_e(0, y)$$

On voit qu'il suffit de montrer  $\hat{\varphi}(y) \geq 0$ . Puisque :

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}'(y) &= \beta \eta y^{\eta-1} + 1 + v_e'(0, y) \\ \hat{\varphi}''(y) &= \beta \eta (\eta - 1) y^{\eta-2} + v_e''(0, y)\end{aligned}$$

et  $\eta < 0$ ,  $v_e''(0, y) \geq 0$ , d'où :

$$\hat{\varphi}''(y) > 0 \quad \text{dans} \quad [y^*, K]$$

Ce qui implique  $\hat{\varphi}'(y)$  est une fonction croissante dans  $[y^*, K]$ . Et, de plus, comme la fonction  $\frac{d\tilde{w}(y)}{dy}$  est continue en  $y^*$ , on a :

$$\hat{\varphi}'(y^*) = \beta \eta y^{*(\eta-1)} + 1 + v_e'(0, y^*) = 0$$

d'où  $\hat{\varphi}'(y) \geq 0$  pour  $[y^*, K]$ . On en déduit, donc,  $\hat{\varphi}(y)$  est une fonction croissante dans  $[y^*, K]$ .

Or :

$$\hat{\varphi}(y^*) = \beta y^{*\eta} - K + y^* + v_e(0, y^*) = 0$$

à cause du fait que la fonction  $\tilde{w}(y)$  est continue en  $y^*$ . D'où  $\hat{\varphi}(y) \geq 0$  sur  $[y^*, K]$ , i.e :  $\tilde{w}(y) \geq \tilde{h}(y)$  sur  $[y^*, K]$ .

Par ailleurs, pour  $y^* < K \leq y$ , on a  $\tilde{h}(y) = (K - y)_+ - v_e(0, y) = -v_e(0, y) \leq 0$ . Or  $\tilde{w}(y) = \beta y^\eta > 0$  à cause du fait que  $\beta$  est strictement positif et  $y \geq K > y^* > 0$ . D'où  $\tilde{w}(y) = \beta y^\eta > \tilde{h}(y)$  pour  $y \geq K$ . On a donc  $\tilde{w}(y) = \beta y^\eta \geq \tilde{h}(y)$  pour  $y \geq y^*$ . ■

Une approximation du prix d'un put américain est donnée par :

$$v(0, y) = \begin{cases} v_e(0, y) + \beta y^\eta & \text{si } y > y^* \\ K - y & \text{si } y \leq y^* \end{cases}$$

Évidemment, on a :  $v(0, y) \geq v_e(0, y)$ .

Dans un cas spécial où la variable aléatoire  $Z_1 = \ln(1 + U_1)$  suit une loi que la loi exponentielle de paramètre  $\lambda_0 > 1$ , on peut calculer la valeur de  $\eta$  et le prix d'un put

européen  $v_e(t, y)$  explicitement, cela peut faciliter le calcul du prix d'un put américain. En effet : comme  $Z_1 = \ln(1 + U_1)$ ,

$$\mathbf{E}(1 + U_1)^\eta = \mathbf{E}e^{\eta Z_1} = \lambda_0 \int_{y>0} e^{\eta y} e^{-\lambda_0 y} dy = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \eta} \quad \text{si } \eta < \lambda_0$$

alors, l'équation (5.8) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\sigma^2}{2} \eta^2 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \eta - (r + \lambda + \frac{1}{T}) + \frac{\lambda \lambda_0}{\lambda_0 - \eta} = 0$$

i.e :

$$\frac{\sigma^2}{2} \eta^3 + (\mu - (1 + \lambda_0) \frac{\sigma^2}{2}) \eta^2 - (r + \lambda + \frac{1}{T} + \lambda_0 (\mu - \frac{\sigma^2}{2})) \eta + (r + \frac{1}{T}) \lambda_0 = 0$$

C'est une équation d'ordre trois. Elle a une racine négative. Il existe une formule explicite pour résoudre cet équation. (voir le cas d'un put perpétuel).

## 5.2 Une forme approchée du prix du put américain

Le but de cette section est de montrer que, dans ce modèle avec des sauts, le prix d'un put américain peut être écrit comme le prix d'un put européen plus un terme d'intégrale qui contient le prix critique. (Dans le cas sans sauts, voir le papier de Myneni [34]).

On utilise les mêmes notations qu'avant. Le prix d'un put américain  $v(t, y)$  peut être écrit sous la forme suivante :

$$v(t, y) = \sup_{\tau \in \mathcal{F}_{t,T}} \mathbf{E}(e^{-r(\tau-t)} (K - ye^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(\tau-t) + \sigma(B_\tau - B_t)}) \prod_{j=N_t+1}^{N_\tau} (1 + U_j))_+)$$

et le prix d'un put européen est :

$$v_e(t, y) = \mathbf{E}(e^{-r(T-t)} (K - ye^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(B_T - B_t)}) \prod_{j=N_t+1}^{N_T} (1 + U_j))_+)$$

On rappelle que  $v(t, y)$  est la solution de l'inéquation aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{A}v + \bar{B}v \leq 0 & p.p \text{ dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ v(t, y) \geq h(y) & p.p \text{ dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ (\frac{\partial v}{\partial t} + \bar{A}v + \bar{B}v)(h - v) = 0 & p.p \text{ dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ v(T, y) = h(y) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{A}v &= \frac{\sigma^2 y^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu y \frac{\partial v}{\partial y} - rv \\ \bar{B}v &= \lambda \int (v(t, y(1+z)) - v(t, y)) \nu(dz) \\ h(y) &= (K - y)_+ \end{aligned}$$

Maintenant, on définit le prix critique  $s^*(t)$  de la façon suivante :

$$s^*(t) = \sup\{y \mid v(t, y) = (K - y)_+\}$$

Financièrement, il signifie qu'on doit exercer l'option dès que le prix du cours devient plus petit que  $s^*(t)$ . C'est la raison pour laquelle l'on lui donne le nom de "prix critique".

**Proposition 5.3** *On a :*

$$v(t, y) = v_e(t, y) + rK \int_0^{T-t} e^{-r\theta} \mathbf{P}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma B_\theta + \sum_{j=1}^{N_\theta} \ln(1 + U_j) \leq \log \frac{s^*(\theta + t)}{y}\right) d\theta$$

**Démonstration :** D'après le théorème 3.31, on sait que, dans le cas du put américain, la fonction  $v(t, y)$  admet des dérivées partielles  $\frac{\partial v}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$  localement bornées sur  $[0, T[ \times \mathbf{R}$ . Comme  $v$  n'appartient pas à  $C^2$ , donc, on ne peut pas utiliser la formule d'Ito directement à  $e^{-rt}v(t, S_t)$ . Cependant, on peut se débrouiller à l'aide de la méthode d'approximation (cf. la démonstration du théorème 3.20). Nous définissons  $v_m$  de la même façon que celui dans le théorème 3.20 (i.e, en utilisant le technique de la convolution), alors  $v_m \in C^\infty$ . En appliquant la formule d'Ito à  $e^{-rt}v_m(t, S_t)$ , on a :

$$\begin{aligned} e^{-rt}v_m(t, S_t) - v_m(0, S_0) &= \int_0^t e^{-r\theta} \left(\frac{\partial v_m}{\partial \theta} - rv_m\right) d\theta + \int_0^t e^{-r\theta} \frac{\partial v_m}{\partial y} (\mu S_\theta d\theta + \sigma S_\theta dB_\theta) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t S_\theta^2 \sigma^2 e^{-r\theta} \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} d\theta + \sum_{j=1}^{N_t} [e^{-r\tau_j} (v_m(\tau_j, S_{\tau_j}) - v_m(\tau_j, S_{\tau_j^-}))] \end{aligned}$$

où les  $\tau_j$  sont les temps de sauts du processus de Poisson.

$$\begin{aligned} &e^{-rt}v_m(t, S_t) - v_m(0, S_0) \\ &= \int_0^t e^{-r\theta} \left(\frac{\partial v_m}{\partial \theta} + \bar{A}v_m + \bar{B}v_m\right)(\theta, S_\theta) d\theta + \int_0^t e^{-r\theta} S_\theta \sigma \frac{\partial v_m}{\partial y} dB_\theta \\ &+ \sum_{j=1}^{N_t} [e^{-r\tau_j} (v_m(\tau_j, S_{\tau_j}) - v_m(\tau_j, S_{\tau_j^-}))] - \lambda \int_0^t d\theta \cdot e^{-r\theta} \int \nu(dz) (v_m(\theta, S_\theta(1+z)) - v_m(\theta, S_\theta)) \end{aligned}$$

Notant :

$$M_t = \int_0^t e^{-r\theta} S_\theta \sigma \frac{\partial v_m}{\partial y} dB_\theta$$

$$L_t = \sum_{j=1}^{N_t} [e^{-r\tau_j} (v_m(\tau_j, S_{\tau_j}) - v_m(\tau_j, S_{\tau_j^-}))] - \lambda \int_0^t d\theta \cdot e^{-r\theta} \int \nu(dz) (v_m(\theta, S_\theta(1+z)) - v_m(\theta, S_\theta))$$

On a :

$$\begin{aligned} &e^{-rt}v_m(t, S_t) - v_m(0, S_0) \\ &= \int_0^t e^{-r\theta} \left(\frac{\partial v_m}{\partial \theta} + \bar{A}v_m + \bar{B}v_m\right)(\theta, S_\theta) d\theta + M_t + L_t \end{aligned} \quad (5.11)$$



En suivant le même raisonnement que dans le théorème 3.18, on peut montrer que  $M_{t \wedge \tau_R} + L_{t \wedge \tau_R}$  est une martingale où  $\tau_R$  est défini de la même façon que le lemme 3.15. En faisant  $t = T$  dans (5.11) et en prenant l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}e^{-rT \wedge \tau_R} v_m(T \wedge \tau_R, S_{T \wedge \tau_R}) - v_m(0, S_0) \\ &= \mathbf{E} \int_0^{T \wedge \tau_R} e^{-r\theta} \left( \frac{\partial v_m}{\partial \theta} + \bar{A}v_m + \bar{B}v_m \right) (\theta, S_\theta) d\theta + \mathbf{E}(M_{T \wedge \tau_R} + L_{T \wedge \tau_R}) \\ &= \mathbf{E} \int_0^{T \wedge \tau_R} e^{-r\theta} \left( \frac{\partial v_m}{\partial \theta} + \bar{A}v_m + \bar{B}v_m \right) (\theta, S_\theta) d\theta \end{aligned} \quad (5.12)$$

Nous faisons passer à la limite en appliquant les même technique que celui dans le théorème 3.20. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}e^{-rT} v(T, S_T) - v(0, S_0) \\ &= \mathbf{E} \int_0^T e^{-r\theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + \bar{A}v + \bar{B}v \right) (\theta, S_\theta) d\theta \end{aligned}$$

D'autre part, à partir de la définition du prix critique, on voit facilement que :

$$\left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + \bar{A}v + \bar{B}v \right) (\theta, S_\theta) = 0 \quad \text{sur } \{y > s^*(t)\}$$

D'où :

$$\mathbf{E}(e^{-rT} v(T, S_T)) - v(0, S_0) = \mathbf{E} \int_0^T e^{-r\theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + \bar{A}v + \bar{B}v \right) \mathbf{1}_{\{S_\theta \leq s^*(\theta)\}} d\theta \quad (5.13)$$

mais sur  $\{S_\theta \leq s^*(\theta)\}$ , on a  $v(t, y) = (K - y)_+ = K - y$ . Par calcul, en tenant compte du fait que  $r - \mu - \lambda \mathbf{E}U_1 = 0$ , on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \bar{A}v + \bar{B}v &= \frac{\sigma^2 y^2}{2} \cdot 0 + \mu y(-1) - r(K - y) + \lambda \int [(K - y(1 + z)) - (K - y)] \nu(dz) \\ &= -\mu y + ry - rK + \lambda \int (-yz) \nu(dz) \\ &= (r - \mu - \lambda \mathbf{E}U_1)y - rK \\ &= -rK \end{aligned}$$

ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{-rT} v(T, S_T)) - v(0, S_0) &= \mathbf{E} \int_0^T e^{-r\theta} (-rK) \mathbf{1}_{\{S_\theta \leq s^*(\theta)\}} d\theta \\ &= -rK \int_0^T e^{-r\theta} \mathbf{P}(S_\theta \leq s^*(\theta)) d\theta \end{aligned}$$

D'où :

$$v(0, S_0) = \mathbf{E}(e^{-rT} (K - S_T)_+) + rK \int_0^T e^{-r\theta} \mathbf{P}(S_\theta \leq s^*(\theta)) d\theta$$

Or, si l'on note  $S_0 = y$ ,  $S_\theta = y \prod_{j=1}^{N_\theta} (1 + U_j) e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\theta + \sigma B_\theta}$ , remarquons :

$$v_e(0, y) = \mathbf{E}(e^{-rT} (K - S_T)_+)$$

on obtient :

$$v(0, y) = v_e(0, y) + rK \int_0^T e^{-r\theta} \mathbf{P}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma B_\theta + \sum_{j=1}^{N_\theta} \ln(1 + U_j) \leq \log \frac{s^*(\theta)}{y}\right) d\theta$$

Plus généralement, pour  $t$  quelconque, on a :

$$v(t, y) = v_e(t, y) + rK \int_0^{T-t} e^{-r\theta} \mathbf{P}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma B_\theta + \sum_{j=1}^{N_\theta} \ln(1 + U_j) \leq \log \frac{s^*(\theta + t)}{y}\right) d\theta$$

■

Ce chapitre est une version détaillée de [43].

## Chapitre 6

# Résultats Numériques

Les programmes réalisant les différents algorithmes présentés dans cette thèse sont écrits en langage “Pascal” et effectués sur station de travail SUN.

Dans cette partie numérique, nous supposons que les variables aléatoires  $1 + U_j$  suivent une loi lognormale.

### 6.1 Volatilité implicite

Dans cette section, on va présenter quelques courbes de volatilité implicite (CdV).

Nous rappelons que le prix risque  $S_t$  est contrôlé par l’E.D.S :

$$\frac{dS_t}{S_{t^-}} = \mu dt + \sigma dB_t + \sum_{j=1}^{N_t} U_j$$

et sous la condition  $\mu = r - \lambda \mathbf{E}U_1$ , le prix actualisé  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$  est une martingale. Il est clair que sa variation quadratique est :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{S}_t, \tilde{S}_t \rangle &= \int_0^t \tilde{S}_u^2 (\sigma^2 + \lambda \mathbf{E}U_1^2) du \\ &= \bar{\sigma}^2 \int_0^t \tilde{S}_u^2 du \end{aligned}$$

avec :

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 + \lambda \mathbf{E}U_1^2 \tag{6.1}$$

Or on sait que dans le modèle de Black et Scholes, la variation quadratique de  $\tilde{S}_t$  est égale à  $\sigma^2 \int_0^t \tilde{S}_u^2 du$ . Il est clair que la présence des sauts modifie la volatilité observable du processus  $(\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$  et la volatilité purement Brownienne  $\sigma$  n’est plus observable. Si le nombre moyen de sauts annuel  $\lambda = 0$ , on retrouve le modèle de Black et Scholes avec  $\bar{\sigma} = \sigma$ . Dans la suite, on introduit un paramètre  $p$  qui contrôle les sauts, en posant  $p = \frac{\sigma^2}{\bar{\sigma}^2}$ , (6.1) devient :

$$p + \frac{\lambda}{\bar{\sigma}^2} \mathbf{E}U_1^2 = 1$$

On fait varier les valeurs de  $p$  de 0 à 1. Alors,  $p = 1$  correspond du cas sans sauts (i.e le modèle de Black et Scholes), et  $p = 0$  correspond le cas où on n'a que des sauts et  $p < 1$  correspond au modèle avec des sauts.

Nous supposons dans un premier temps qu'on a un marché financier suivant le modèle de Black et Scholes. Nous calculons la prime (noté  $P$ ) dans ce modèle.  $P$  doit être une fonction de  $x$ ,  $s$ ,  $K$ ,  $r$  et  $\sigma$ . Notons :

$$P = \phi(x, s, K, r, \sigma) \quad (6.2)$$

où  $x$  est le prix du sous-jacent,  $s$  est la maturité résiduelle,  $K$  le prix d'exercice,  $r$  le taux d'intérêt,  $\sigma$  la volatilité.

Remarquons que dans le cas européen,  $\phi$  a une forme explicite. Or dans le cas américain, elle n'a pas de formule explicite, mais il existe des méthodes numériques pour calculer  $P$ .

Maintenant, supposons que le taux d'intérêt  $r$ , le prix d'exercice  $K$  sont connus, et le cours est observé sur le marché, on peut toujours inverser (6.2) pour avoir une valeur approchée de  $\sigma$  (Par exemple par la méthode de Newton). C'est la volatilité implicite Brownienne. Si l'on considère plusieurs options écrites sur le même sous-jacent, mais avec des prix d'exercice différents, en observant les cours sur le marché et en utilisant la méthode précédente, on peut avoir une courbe de volatilité implicite (CdV) en fonction du prix d'exercice.

Si on interprète le marché par le modèle de Black et Scholes, on aura une CdV plate. (Voir la figure 3,  $p = 1$ ).

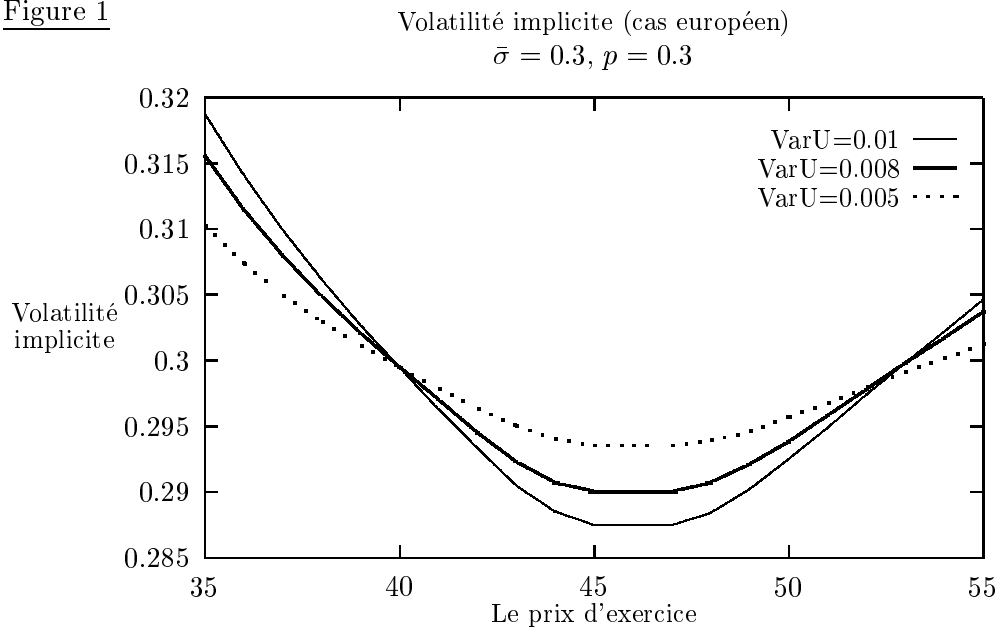
Maintenant, si l'on suppose que le "bon" modèle correspondant au marché est le modèle avec sauts, on calcule la prime en utilisant la 'formule' de valorisation dans notre modèle avec la volatilité historique  $\bar{\sigma} = 0.3$  pour la figure 1. Admettons que les autres paramètres sont fixés, on inverse (6.2) avec cette prime pour avoir une volatilité implicite. Cette volatilité implicite nous permet d'égaliser la prime de Black et Scholes à la prime observée sur le marché.

Nous étudions l'allure des CdV et leurs déformations en fonction de la variance de  $U$ , de  $\sigma$  et de  $p$ .

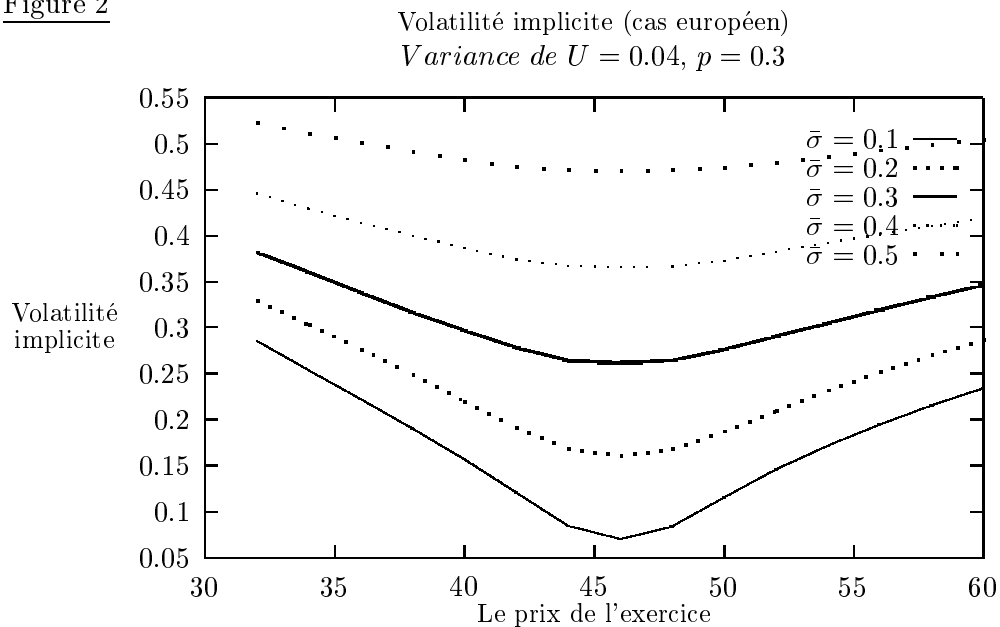
Nous prenons les paramètres de la façon suivante :

- Le taux d'intérêt sans risque :  $r = 9\%$ .
- Le prix du sous-jacent :  $x = 45FF$ .
- L'espérance de  $U_1$  :  $\mathbf{E}U_1 = 0$ .
- La maturité résiduelle  $s = T - t = 30$  jours.

Dans un premier temps, on fixe les valeurs de  $p$  et la volatilité historique  $\bar{\sigma}$ , et on fait varier la variance de  $U_1$ . On a alors les courbes suivantes.

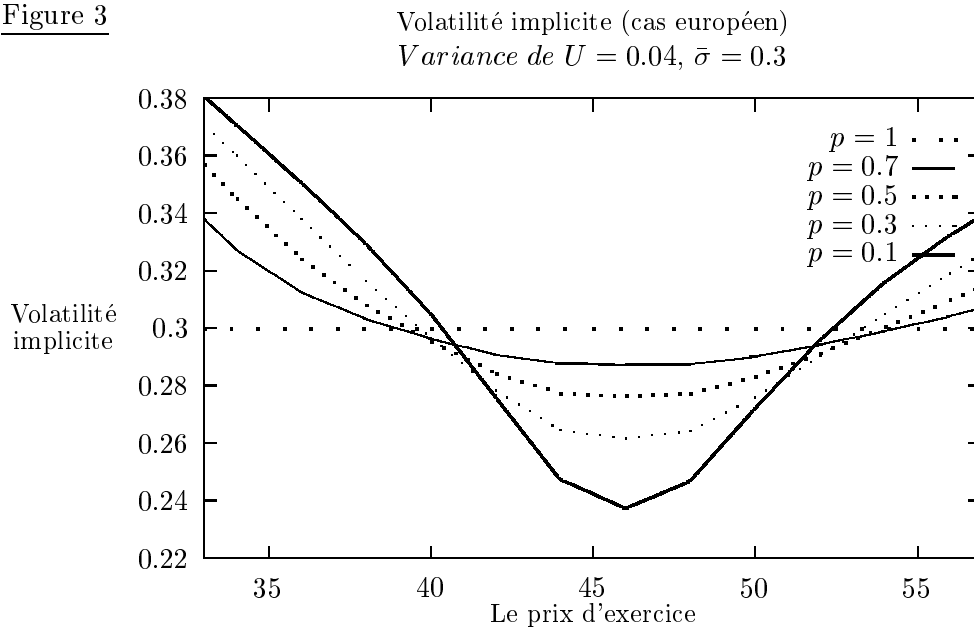
Cas européen :Figure 1

Cette figure présente différentes CdV pour différentes amplitudes des sauts. Lorsque l'amplitude des sauts devient grande, le niveau d'inflexion de CdV devient "fort". Ce sont les sauts qui l'emportent. Lorsque l'amplitude des sauts tend vers 0, CdV tend vers celui de Black et Scholes (de plus en plus proche d'une droite).

Figure 2

En faisant varier les valeurs de volatilité historique  $\bar{\sigma}$  de 0.1 à 0.5, on a trouvé les mêmes phénomènes qu'avant. Lorsque  $\bar{\sigma}$  décroît, c'est la partie des sauts qui l'emportent, on a une CdV où l'inflexion est très "forte". Or, pour  $\bar{\sigma}$  grand, on a une CdV plus proche d'une droite (CdV de Black et Scholes).

Figure 3



Cette figure présente les différentes CdV pour les différentes valeurs de  $p$ . Rappelons que  $p$  est un paramètre qui représente le niveau des sauts intervenu. Lorsque  $p$  décroît, les sauts l'emportent, et le CdV devient plus convexe. Or pour  $p = 1$ , c'est à dire dans le cas où il n'y a pas de sauts, on a retrouvé la CdV de Black et Scholes.

On rappelle qu'une option de vente est dans la monnaie ('in-the-money' en Anglais) si le prix du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice, ce qui correspond au fait qu'elle sera exercée. Au contraire, une option de vente est hors de la monnaie ('out-of-the money' en Anglais) si le prix du sous-jacent est supérieur au prix d'exercice. De plus, on dira qu'une option est à la monnaie ('at-the-money' en Anglais) dans le cas où il y a égalité entre le prix du sous-jacent et le prix d'exercice.

En utilisant cette notion de CdV, on peut aussi donner une interprétation complémentaire pour comparer les deux modèles. Supposons que la volatilité observé sur le marché est  $\bar{\sigma} = 0.3$ . D'après la figure 3, lorsque l'option est très fortement hors de la monnaie, la volatilité implicite  $\sigma$  est plus grande que la volatilité observé  $\bar{\sigma}$ . Si les financiers considèrent  $\bar{\sigma}$  comme la volatilité Brownienne, c'est à dire qu'ils ont pris une volatilité plus faible, alors la prime de Black et Scholes est plus faible que la prime dans le modèle avec sauts.

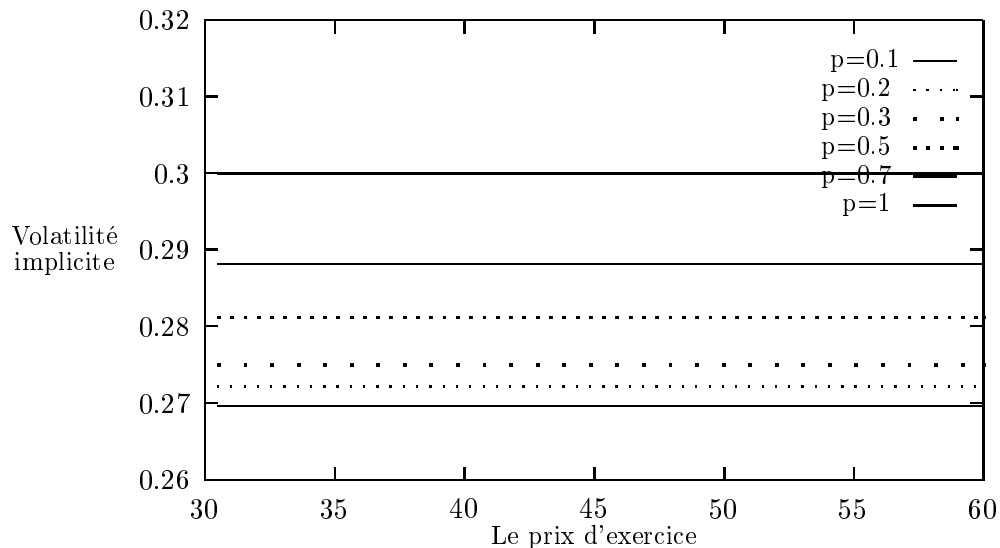
Au contraire, quand on est à la monnaie, la volatilité brownienne  $\sigma$  est plus faible que la volatilité observé  $\bar{\sigma}$ . Si les financiers prennent  $\bar{\sigma}$  comme la volatilité Brownienne, ils ont fait

une sur-estimation, ce qui entraîne que la prime de Black et Scholes est plus grande que la prime du modèle avec sauts.

Cas put perpétuel :

Figure 4

Volatilité implicite (put perpétuel)  
 $\bar{\sigma} = 0.3$ ,  $EU = 0$ ,  $varU = 0.04$



Pour le put perpétuel, supposons la volatilité observée sur la marché est  $\bar{\sigma} = 0.3$ , on voit que, par le figure 4, tous les CdV se trouvent au-dessous de  $\bar{\sigma} = 0.3$ . Ce qui veut dire que si l'on considère  $\bar{\sigma}$  comme la volatilité Brownienne, on a fait une sur-estimation. La prime donnée par le modèle de Black et Scholes est alors supérieur à celle donnée par le modèle avec sauts.

## 6.2 Résolution du problème discrétisé

En pratique, pour calculer le prix d'un put américain, nous suivons le schéma correspondant à  $\theta = 1$  et  $\bar{\theta} = 0$ . Pour résoudre (4.89), nous nous ramenons, à chaque pas de temps, à un "problème de complémentarité linéaire". Les algorithmes de ce problème ont été étudiés. Notre objet est de chercher un algorithme efficace compte tenu des propriétés particulières de notre problème. Maintenant, nous rappelons, d'abord, quelques propriétés du problème de complémentarité linéaire. Pour en savoir plus, nous renvoyons aux livres de Murty [33] et de Cottle, Pang et Stone [11].

### 6.2.1 Problème de Complémentarité Linéaire

Beaucoup de problèmes en mécanique structurels, en physique, en économie etc peuvent être interprétés comme des problèmes de complémentarité. Un problème de complémentarité se présente sous la forme suivante :

Trouver  $Z \in \mathbf{R}^n$  tel que :

$$\begin{cases} W = f(Z) \\ W \geq 0, \quad Z \geq 0 \\ W^T Z = 0 \end{cases}$$

où  $f : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$  et  $W \in \mathbf{R}^n$ .

Si  $f$  est affine, de la forme :  $f(Z) = q + MZ$  où  $q \in \mathbf{R}^n$  et  $M$  est une matrice de  $n \times n$ , on parle de problème de complémentarité linéaire (P.C.L). La résolution de ce problème est bien étudiée. Les algorithmes numériques, comme celui de Lemke [29] et celui de Saigal [38], existent.

Nous verrons que le calcul du prix d'une option américaine peut se ramener à un cas spécial de P.C.L où la matrice  $M$  est une matrice de Minkowski tri-diagonales. On rappelle que la matrice de Minkowski est une matrice ayant des coefficients diagonaux positives, des non diagonaux négatives ou nuls et des mineurs principaux positives. Le but de cette paragraphe est de suggérer deux algorithmes efficaces, i.e : celui de Cryer (cf. [14]) et celui de Brennan-Schwartz (cf. [24], [8]) en tenant compte des propriétés particulières de notre problème.

### 6.2.2 L'algorithme de Cryer

L'algorithme de Cryer est une modification de l'algorithme de Saigal (cf. [38]). Il possède deux caractéristiques :

- Les données sont balayées alternativement entre le 'forward passes' et 'backward passes'.
- Le nombre d'opérations effectués par étape est  $O(n)$ .

Nous allons présenter cet algorithme. Rappelons que le problème est de trouver les vecteurs  $W = (W_i)$  et  $Z = (Z_i)$  dans  $\mathbf{R}^n$  tel que :

$$\begin{cases} W = q + MZ & (6.3.1) \\ W \geq 0, \quad Z \geq 0 & (6.3.2) \\ W^T Z = 0 & (6.3.3) \end{cases} \quad (6.3)$$

où  $M = (m_{ij}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ ,  $q = (q_i) \in \mathbf{R}^n$ . Notons :  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , si  $J \subset N$ ,

- $|J|$  désigne le nombre d'éléments dans  $J$ .
- $N \setminus J$  désigne le complémentaire de  $J$  par rapport à  $N$ .
- $MZ + q|J \geq 0$  signifie le système de  $|J|$  inégalités obtenu en supprimant les lignes et les colonnes d'indice n'appartenant pas à  $J$ .



L'idée principale de cet algorithme est de : choisir la valeur initiale tel qu'elle vérifie (6.3.1) et (6.3.3), garder ces deux conditions pendant toutes les étapes de l'algorithme, et faire vérifier, au fur et à mesure, la condition de non-négative (6.3.2). On obtient, finalement, la solution du problème.

On rappelle que si  $M$  est une matrice de Minkowski, alors,  $M|J$  l'est aussi, et  $M^{-1} \geq 0$ . L'algorithme peut alors être décrit par le schéma suivant :

**étape 0 :**

Choisir  $Z^0 \geq 0$ , tel que :

$$MZ^0 + q|J^0 = 0,$$

où  $J^0 = \{i \in N : Z_i^0 > 0\}$ . On peut supposer que :<sup>3</sup>

$$J^0 \supset Q = \{i \in N : q_i^0 < 0\}$$

Posons  $p := 0$ .

**1<sup>ère</sup>-étape :**

Notons :

$$W^p = MZ^p + q, \quad I^p = \{i \in N \mid W_i^p < 0\}$$

- Si  $I^p = \phi$ , stop.  $(W^p, Z^p)$  est la solution du problème.
- Sinon, Choisir  $i^p \in I^p$  et poser :

$$J^{p+1} = J^p \cup \{i^p\}$$

Calculer  $Z^{p+1}$  tel que :

$$MZ^{p+1} + q|J^{p+1} = 0, \quad Z^{p+1}|N \setminus J^{p+1} = 0$$

Poser :  $p = p + 1$  et répéter.

Il est évident que cet algorithme se terminera après  $n$  étapes au maximum. Pour la justification de l'algorithme, nous renvoyons à [14].

Jusqu'à présent, ce qu'on a utilisé, c'est que  $M$  est une matrice de Minkowski. On n'a pas utilisé le fait que  $M$  est le tri-diagonale. C'est à dire que l'algorithme qu'on a énoncé avant est valable pour toute matrice de Minkowski. Le calcul principal de cet algorithme est basé sur la résolution du système et le process pour ajouter  $i^p$ . Théoriquement, chaque fois qu'on fait une extension de  $J^p$ , on doit résoudre, de nouveau, le système. Mais dans notre cas spécial où  $M$  est une matrice de Minkowski tri-diagonale, il existe une façon plus efficace pour réaliser

<sup>3</sup>Au moins, par exemple, on peut prendre  $J^0 = Q$ , il est facile de voir que,  $MZ^0|Q = -q|Q > 0$ , or remarquons que  $M$  est une Minkowski matrice, il n'est pas difficile de voir que :  $Z^0|Q > 0$ .

cet algorithme. Le point essentiel est que : les données sont balayées alternativement entre le 'forward passes' et 'backward passes'.

Supposons que  $t$  est le nombre de signes changés dans les composants du vecteur  $q$ , et l'ensemble  $J^p$  est écrit par la façon suivante :

$$J^p = \bigcup_{k \in \alpha^p} B_k^p$$

où  $\alpha^p \subset \{i \in N : 1 \leq i \leq 1+t\}$ . Et chaque bloc  $B_k$  est non vide et est composé d'une suite d'entier sans interruption. De plus, les blocs sont disjoints, non continus, et avec un ordre croissant. Cela veut dire que : si  $i \in B_k^p$ ,  $j \in B_r^p$ , et  $k < r$ , alors,  $i+1 < j$ . Maintenant, on va utiliser le fait que  $M$  est une matrice tri-diagonale. Ayant cette propriété, et remarquant  $J^p = \bigcup_{k \in \alpha^p} B_k^p$ , il n'est pas difficile de voir que :  $MZ^p + q|J^p = 0$  est équivalent à  $MZ^p + q|B_k^p = 0$  pour  $k \in \alpha^p$ . Donc, il suffit de considérer le système :

$$MZ^p + q|B_k^p = 0$$

où  $B_k = \{i \in N : f \leq i \leq l\}$  avec  $f$  (resp.  $l$ ) le plus petit (resp. le plus grand) entier dans le bloc. Nous utilisons la méthode de Gauss pour le résoudre. Si l'on note :

$$m_{i,i-1} = a_i \quad m_{i,i} = b_i \quad m_{i,i+1} = c_i$$

et  $\theta = -q$ , on peut exprimer la méthode de Gausse par la façon suivante :

Forward Élimination :

$$\begin{cases} \tilde{b}_f = b_f \\ \tilde{b}_i = b_i - \frac{a_i}{\tilde{b}_{i-1}} c_{i-1} \text{ pour } f+1 \leq i \leq l \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{\theta}_f = \theta_f \\ \tilde{\theta}_i = \theta_i - \frac{a_i}{\tilde{b}_{i-1}} \tilde{\theta}_{i-1} \text{ pour } f+1 \leq i \leq l \end{cases}$$

Calcul  $Z_l^p$  :

$$Z_l^p = \frac{\tilde{\theta}_l}{\tilde{b}_l}$$

Back substitution :

$$Z_i^p = \frac{1}{\tilde{b}_i} (\tilde{\theta}_i - c_i Z_{i+1}^p) \quad f \leq i \leq l-1$$

Il n'est pas difficile de voir que : si  $\tilde{p} > p$  et  $B_k^{\tilde{p}} = B_k^p \cup \{l+1\}$ , il n'est pas nécessaire de refaire le calcul de forward élimination qu'on a déjà fait pour  $B_k^p$ . Pour calculer  $Z_{l+1}^{\tilde{p}}$ , il suffit de faire :

$$\tilde{b}_{l+1} = b_{l+1} - \frac{a_{l+1}}{\tilde{b}_l} c_l; \quad \tilde{\theta}_{l+1} = \theta_{l+1} - \frac{a_{l+1}}{\tilde{b}_l} \tilde{\theta}_l$$

et

$$Z_{l+1}^{\tilde{p}} = \frac{\tilde{\theta}_{l+1}}{\tilde{b}_{l+1}}$$

Bien sûr, si on a besoin de toutes les valeurs de  $Z_l^{\tilde{p}}, \dots, Z_f^{\tilde{p}}$ , on devrait faire back substitution. Il paraît que, selon la schéma principal,  $Z^{p+1}$  doit être recalculé après chaque choix de  $i^p$ .

Mais, en réalité, ce n'est pas le cas, parce que Cryer [14] a montré que si  $I^p \neq \phi$ , alors  $J^{p+1}$  est obtenu de  $J^p$  en ajoutant un adjacent point  $i^p$  à un des blocs  $B_k^p$ . C'est à dire que nous calculons seulement un composant de  $Z^p$  si l'on en a besoin pour déterminer  $i^p$ . En plus, les composants non nuls de  $Z^p$ , dont on a besoin pour déterminer  $i^p$ , correspondent à des bouts de blocs. Donc, ce n'est pas la peine d'avoir toutes les valeurs de  $Z_i^p, \dots, Z_f^p$  dans chaque étape, la seule valeur dont on a besoin pour tester le signe de  $W_i^p$ , c'est  $Z_{i+1}^p$  (ou.  $Z_{f-1}^p$ ). Il peut, donc, être calculé en utilisant forward (ou backward) élimination sans backward (ou forward) substitution.

*Le point essentiel de ce nouveau algorithme est :* On utilise alternativement 'forward pass' et 'backward pass' pendant l'implémentation.

**Remarque 6.1** *Théoriquement, on ajoute un indice  $i^{p+1}$  par étape pour élargir le bloc. Mais, en pratique, l'extension de ce bloc  $B_k^p$  est fait en ajoutant tous les points possibles suivant le bloc courant. Dans le cas où  $Q$  a seulement un bloc contenant 1 (ou  $n$ ), l'erreur de calcul de cette algorithme est moins que :*

$$2n \text{ divisions} + 4n \text{ opérations}$$

où une opération signifie une soustraction plus une multiplication.

Avant de terminer cette section, on rappelle encore un résultat.

**Remarque 6.2** *Cotte et Sacher (cf. [12] P327 et P335) et Elliott et Ockendon (cf. [18] P117) ont montré que si le vecteur  $q$  dans (6.3) a la propriété suivant :*

$$q_i < 0 \quad 1 \leq i \leq k_0 \quad q_i \geq 0 \quad k_0 < i \leq n$$

alors, il existe  $k \geq k_0$  tel que :

$$z_i > 0 \quad 1 \leq i \leq k \quad z_i = 0 \quad k < i \leq n$$

Dans ce cas, l'algorithme de Cryer se réduit à l'algorithme de Elliott et Ockendon. Il est clair que la remarque 6.1 s'applique dans ce cas.

### 6.2.3 L'algorithme de Brennan-Schwartz

L'objet de cette section est de rappeler l'algorithme de Brennan-Schwartz, un algorithme assez efficace pour résoudre un cas spécial de P.C.L qui nous intéresse. Pour plus de détails sur cet algorithme, nous renvoyons à [8], [24].

Nous considérons le problème suivant : trouver les vecteurs  $u = (u_i) \in \mathbf{R}^n$  tel que :

$$\begin{cases} Mu \geq \theta \\ u \geq \varphi \\ (Mu - \theta, \varphi - u) = 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

où  $\theta, \varphi \in \mathbf{R}^n$  et  $M$  est une matrice de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & b_n \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Les deux propositions suivantes ont été montrées dans [24].

**Proposition 6.3** *Si  $c_i = 0$  pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  et  $b_i > 0$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , alors la solution unique de (6.4) est donnée par :*

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\theta_1}{b_1} \vee \varphi_1 \\ u_j &= \left[ \frac{1}{b_j} (\theta_j - a_j u_{j-1}) \right] \vee \varphi_j \quad 2 \leq j \leq n \end{aligned}$$

De plus, si l'on introduit les notations suivantes :

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & \tilde{b}_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \tilde{b}_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{b}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & \tilde{b}_n \end{pmatrix}$$

avec  $\tilde{b}_n = b_n$ ,  $\tilde{b}_{i-1} = b_{i-1} - \frac{c_{i-1}}{b_i} a_i$  pour  $i \in \{2, \dots, n\}$  et  $\tilde{\theta}_n = \theta_n$ ,  $\tilde{\theta}_{i-1} = \theta_{i-1} - \frac{c_{i-1}}{b_i} \tilde{\theta}_i$  pour  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Nous avons la deuxième proposition.

**Proposition 6.4** *On suppose que la matrice  $M$  coercive et de la forme (6.5), avec  $c_j \leq 0$  pour  $j = 1, \dots, n-1$ . Si la solution  $u$  du système (6.4) vérifie :  $u_i = \varphi_i$  pour  $1 \leq i \leq k$  et  $u_i > \varphi_i$  si  $i > k$ , avec  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , alors  $u$  est aussi solution du système :*

$$\begin{cases} \tilde{M}u \geq \tilde{\theta} \\ u \geq \varphi \\ (\tilde{M}u - \tilde{\theta}, \varphi - u) = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

La difficulté d'utiliser cet algorithme vient de la vérification de la propriété portant sur  $u$ . Dans [24], il a été montré que cet algorithme est valable pour le modèle de Black-Scholes. Nous n'avons pas pu donner une justification rigoureuse analogue pour le modèle avec des sauts, mais, numériquement, cet algorithme semble également valide (voir les courbes dans la section suivante).

### 6.3 Mise en œuvre des algorithmes de Brennan-Schwartz et Cryer pour le put américain

Nous considérons le put Américain. En tenant compte de ce qui précède, pour calculer le prix d'une option américaine dans ce modèle, il suffit de chercher une solution approchée de (4.4). Après le changement de variable  $t \rightarrow T - t$ , (4.4) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial t} + Au + B^l u \leq 0 \\ u \geq \psi \\ (-\frac{\partial u}{\partial t} + Au + B^l u)(\psi - u) = 0 \\ u(t, x) = \psi(x) \quad \text{si } x \in \partial\Omega \\ u(0, x) = \psi(x) \end{cases}$$

où :

$$\begin{aligned} Au_l &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u_l}{\partial x} - ru_l \\ B^l u_l &= \lambda \int_{z, z+x \in \Omega_l} (u_l(t, x+z) - u_l(t, x)) \nu(dz) + \lambda \int_{z, z+x \notin \Omega_l} (\psi(x+z) - u_l(t, x)) \nu(dz) \\ \psi(x) &= (K - e^x)_+ \end{aligned}$$

Nous suivons le schéma analogue à (4.89), mais correspondant au problème ci-dessus (i.e, après le changement de variable  $t \rightarrow T - t$ ), en prenant  $\theta = 1$ ,  $\bar{\theta} = 0$ . Précisément, nous approchons le vecteur  $(u(i\Delta t, j\Delta x))_{0 \leq i \leq n, m_1 \leq j \leq m_2}$  par le vecteur  $[\bar{u}_j^i]$  solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_j^0 = \psi_j \quad m_1 \leq j \leq m_2 \\ a\bar{u}_{j-1}^i + (1+b)\bar{u}_j^i + c\bar{u}_{j+1}^i \geq \bar{q}_j^{i-1} \\ \bar{u}_j^i \geq \psi_j \\ (a\bar{u}_{j-1}^i + (1+b)\bar{u}_j^i + c\bar{u}_{j+1}^i - \bar{q}_j^{i-1})(\psi_j - \bar{u}_j^i) = 0 \\ \bar{u}_{m_1}^i = \psi(m_1 h), \quad \bar{u}_{m_2}^i = \psi(m_2 h) \quad 1 \leq i \leq n \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ m_1 + 1 \leq j \leq m_2 - 1 \end{array}$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont donnés par (4.78) et  $\bar{q}$  est donné :

$$\bar{q}_j^{i-1} = \bar{u}_j^{i-1} + \lambda k h \sum_{l=m_1-j}^{m_2-j} \bar{u}_{l+j}^{i-1} g_l + \lambda k h \sum_{\substack{l+j > m_2 \\ l+j < m_1}} \psi_{l+j} g_l - \lambda k \bar{u}_j^{i-1}$$

Introduisons les mêmes notations que dans la section 4.4.3, i.e :  $m = m_2 - m_1 - 1$ , pour  $1 \leq j \leq m$ ,  $u_j = \bar{u}_{j+m_1}$ ,  $\varphi_j = \psi_{j+m_1}$ , et  $q_j = \bar{q}_{j+m_1}$ , le système ci-dessus peut être écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_j^0 = \varphi_j \quad 1 \leq j \leq m \\ au_{j-1}^i + (1+b)u_j^i + cu_{j+1}^i \geq q_j^{i-1} \\ u_j^i \geq \psi_j \\ (au_{j-1}^i + (1+b)u_j^i + cu_{j+1}^i - q_j^{i-1})(\psi_j - u_j^i) = 0 \\ u_0^i = \bar{u}_{m_1}^i = \psi(m_1 h), \quad u_{m+1}^i = \bar{u}_{m_2}^i = \psi(m_2 h) = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \\ 0 \leq i \leq n \end{array}$$

et

$$q_j^{i-1} = u_j^{i-1} + \lambda kh \sum_{l=-j}^{m+1-j} u_{l+j}^{i-1} g_l + \lambda kh \sum_{\substack{l+j > m+1 \\ l+j < 0}} \varphi_{l+j} g_l - \lambda k u_j^{i-1}$$

En suivant le même raisonnement que dans la section 4.4.3, ce système est équivalent au problème de complémentarité linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^0 = \varphi \\ Mu^i \geq \tilde{q}^{i-1}, \quad u^i \geq \varphi \\ (Mu^i - \tilde{q}^{i-1})(u^i - \varphi) = 0 \end{array} \right\} \quad 1 \leq i \leq n$$

et  $M$  est donnée par (4.85) avec  $\theta = 1$  et  $G = 0$ , i.e :

$$M = \begin{pmatrix} 1+b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 1+b & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1+b \end{pmatrix}_{m \times m}$$

et le vecteur  $\tilde{q}$  est donné par (4.81) avec  $\theta = 1$  et  $\bar{\theta} = 0$  et  $\psi_{m_2} = 0$ , i.e :

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= q_1 - a\psi_{m_1} \\ \dot{v}_j &= q_j \quad 2 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Si l'on note  $b_i = 1 + b$  pour  $1 \leq i \leq m$ , alors l'algorithme de Brennan-Schwartz peut être décrit de la façon suivante :

- 1). Donner les valeurs initiales :  $u_j^0 = \varphi_j \quad 0 \leq j \leq m+1$
- 2). En partant de  $(u_j^{i-1})_{0 \leq j \leq m+1}$ , on calcule  $(u_j^i)_{0 \leq j \leq m+1}$  par le schéma de récurrence suivant :

$$\begin{aligned} u_0^i &= \psi(m_1 h) \\ u_1^i &= \frac{q_1^{i-1}}{b_1} \vee \varphi_1 \\ u_j^i &= \left[ \frac{1}{\tilde{b}_j} (\tilde{q}_j^{i-1} - a u_{j-1}^{i-1}) \right] \vee \varphi_j \quad 2 \leq j \leq m \\ u_{m+1}^i &= \psi(m_2 h) = 0 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{b}_m &= b_m & \tilde{q}_m^{i-1} &= q_m^{i-1} \\ \tilde{b}_{j-1} &= b_{j-1} - \frac{c}{b_j} a & \tilde{q}_{j-1}^{i-1} &= q_{j-1}^{i-1} - \frac{c}{b_j} \tilde{q}_j^{i-1} \end{aligned}$$

Pour appliquer l'algorithme de Cryer, on fait le changement de variable :  $Z = u^i - \varphi$ ,  $Q = M\varphi - \dot{q}^{i-1}$ , alors le problème ci-dessus peut être ramené à la forme de (6.3).

$$\begin{cases} W = Q + MZ \\ W \geq 0, \quad Z \geq 0 \\ W^T Z = 0 \end{cases}$$

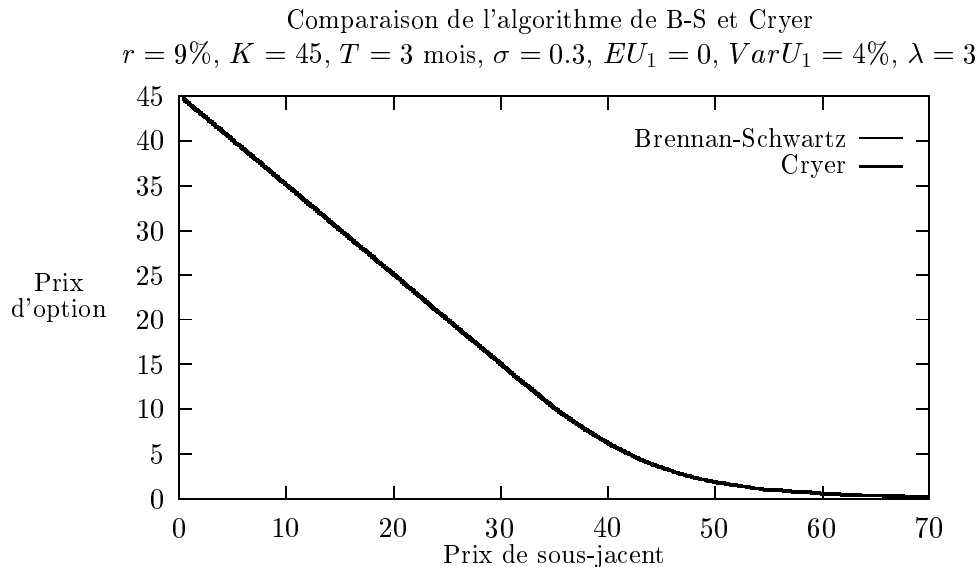
Maintenant, nous allons fixer dans un premier temps certains paramètres pour les calculs. Nous prenons :

- Le taux d'intérêt sans risque :  $r = 9\%$ .
- Le prix d'exercice :  $K = 45FF$ .
- L'espérance de  $U_1$  :  $\mathbf{E}U_1 = 0$ .
- La variance de  $U_1$  :  $VarU_1 = 0.04$ .

Comme  $U = \frac{S_t - S_{t-}}{S_{t-}}$ , la variable aléatoire  $U$  représente l'amplitude relative de sauts.

Nous intéressons d'abord aux courbes du prix de l'option américaine en fonction du cours. Nous prenons l'échéance de l'option égale à trois mois, et la fréquence moyenne des sauts annuelle  $\lambda T = 3$ , et la volatilité brownienne  $\sigma = 0.3$ .

Figure 5



D'après la figure 5, nous voyons que les résultats obtenus par les deux algorithmes sont pratiquement les mêmes. Or, nous savons bien que, théoriquement, l'algorithme de Cryer est valide. Donc, bien que nous n'ayons pas pu donner de justification rigoureuse pour l'algorithme de Brennan-Schwartz, on peut, au moins dire qu'il marche numériquement. L'avantage de l'algorithme de Brennan-Schwartz est sa facilité de programmation.

## 6.4 Put européen

Nous rappelons que le prix d'un put européen dans le modèle avec des sauts est donné par :

$$\begin{aligned}
u_e(t, x) &= \mathbf{E}(e^{-r(T-t)} (K - xe^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(B_T - B_t)} \prod_{j=N_t+1}^{N_T} (1 + U_j)_+)) \\
&= \mathbf{E}(e^{-r(T-t)} K - xe^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - r)(T-t) + \sigma B_{T-t}} \prod_{j=1}^{N_{T-t}} (1 + U_j)_+) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} (\lambda(T-t))^n}{n!} \mathbf{E}(e^{-r(T-t)} K - xe^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - r)(T-t) + \sigma B_{T-t}} \prod_{j=1}^n (1 + U_j)_+)
\end{aligned}$$

Dans le cas où  $U_1$  a même loi que  $e^g - 1$  où  $g$  est une gaussienne de moyenne  $m$  et de variance  $\delta^2$ , on a une formule explicite (cf. [7], [32]), si l'on note  $\tau = T - t$  :

$$u_e(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1 + \mathbf{E}U_1)\tau)^n}{n!} e^{-\lambda(1 + \mathbf{E}U_1)\tau} K_n(t, x) \quad (6.7)$$

où :

$$\begin{aligned}
K_n(t, x) &= \mathbf{E}(K e^{-r_n \tau} - x \exp(\sigma_n B_\tau - \frac{\sigma_n^2}{2} \tau))_+ \\
&= K e^{-r_n \tau} \mathcal{N}(-d_2) - x \mathcal{N}(-d_1)
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\log \frac{x}{K} + (r_n + \frac{\sigma_n^2}{2})\tau}{\sigma_n \sqrt{\tau}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma_n \sqrt{\tau} \\
\sigma_n^2 &= \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{\tau} \\
r_n &= r - \lambda \mathbf{E}U_1 + \frac{n}{\tau} \ln(1 + \mathbf{E}U_1)
\end{aligned}$$

De plus, sa dérivée par rapport à  $x$  (appelée "delta" par les financiers) est donnée par :

$$\frac{\partial u_e}{\partial x} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1 + \mathbf{E}U_1)\tau)^n}{n!} e^{-\lambda(1 + \mathbf{E}U_1)\tau} \mathcal{N}(-d_1)$$

Par ailleurs, comme  $\mathcal{N}(-d_1) + \mathcal{N}(d_1) = 1$ , on a :

$$1 + \frac{\partial u_e}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1 + \mathbf{E}U_1)\tau)^n}{n!} e^{-\lambda(1 + \mathbf{E}U_1)\tau} \mathcal{N}(d_1)$$

Cette formule sera utilisée dans la programmation de l'algorithme de Mac-Millan.



D'autre part, il n'est pas difficile de voir que :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(1 + U_1) &= e^{m + \frac{\delta^2}{2}} \\ \mathbf{E}(1 + U_1)^2 &= e^{2m + 2\delta^2}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\delta^2 &= \ln[\mathbf{E}(1 + U_1)^2] - 2 \ln(1 + \mathbf{E}U_1) \\ m &= 2 \ln(1 + \mathbf{E}U_1) - \frac{1}{2} \ln[\mathbf{E}(1 + U_1)^2]\end{aligned}$$

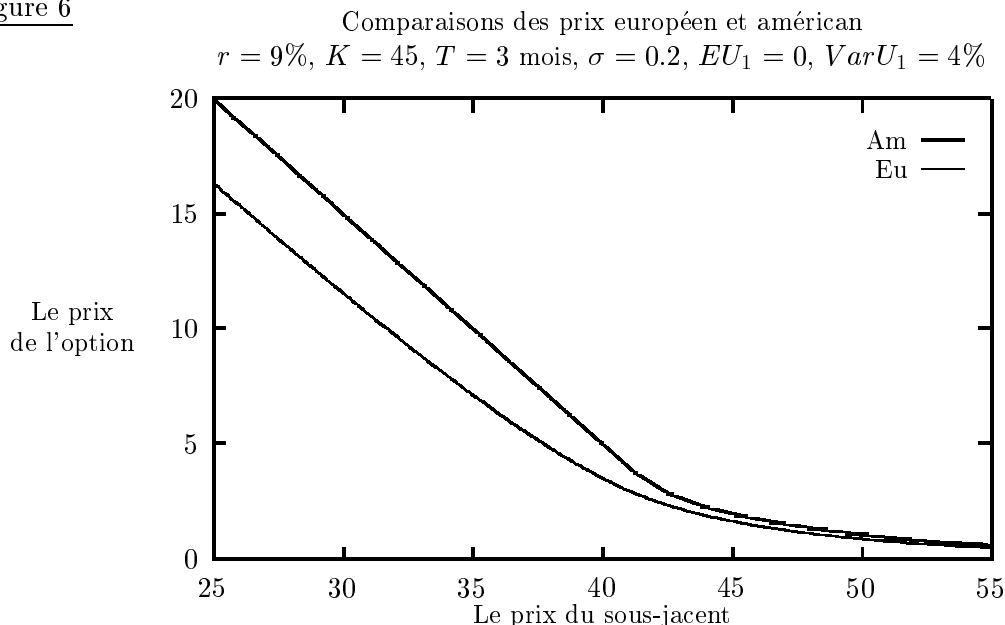
Il est clair que, lorsqu'on connaît l'espérance et la variance de  $U_1$ , on peut calculer  $m$  et  $\delta^2$ , ce qui nous permet d'achever le calcul du prix d'option. Dans les exemples qu'on va traiter après, on suppose  $\mathbf{E}U_1 = 0$ . Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}\delta^2 &= \ln(1 + \mathbf{E}U_1^2) = \ln(1 + \text{Var}U_1) \\ m &= -\frac{1}{2} \ln(1 + \mathbf{E}U_1^2) = -\frac{1}{2} \ln(1 + \text{Var}U_1)\end{aligned}$$

En résumé, une fois qu'on connaît les valeurs de  $x$ ,  $r$ ,  $K$ ,  $T$ ,  $\lambda$ , et  $\text{Var}U_1$  (la variance de  $U_1$ ), on peut calculer la prime dans ce modèle.

Nous comparons les prix du put américain et du put européen. La figure 6 présente les courbes de la prime de ce modèle dans les cas européen et américain respectivement.

Figure 6



Une option américaine peut être exercée à tout moment avant l'échéance. Alors qu'une option européenne, elle, peut être exercé seulement à l'échéance, ce qui veut dire que l'option américaine donne plus de droit que l'option européenne. Il est donc normal que le prix d'une option américaine soit plus élevé que le prix européen.

## 6.5 L'algorithme du put perpétuel et de Mac-Millan

### 6.5.1 Put perpétuel

L'objet de cette section est de réaliser les algorithmes de put perpétuel et de Mac-Millan présentés respectivement dans le chapitre 2 et 5. Comme la variable  $U_j + 1$  suit une loi de log-normale et :  $\ln(1 + U_j) \sim \mathcal{N}(m, \delta^2)$ , on peut écrire :

$$\mathbf{E}(1 + U_j)^\alpha = \mathbf{E}e^{\alpha \ln(1+U_1)} = e^{\frac{\alpha^2 \delta^2}{2} + \alpha m}$$

Le calcul d'un put perpétuel contient trois étapes :

- 1). Calcul de la solution approchée (noté  $\tilde{\eta}$ ) de l'équation

$$\frac{\sigma^2}{2} \eta^2 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \eta - (r + \lambda) + \lambda e^{\frac{\eta^2 \delta^2}{2} + \eta m} = 0$$

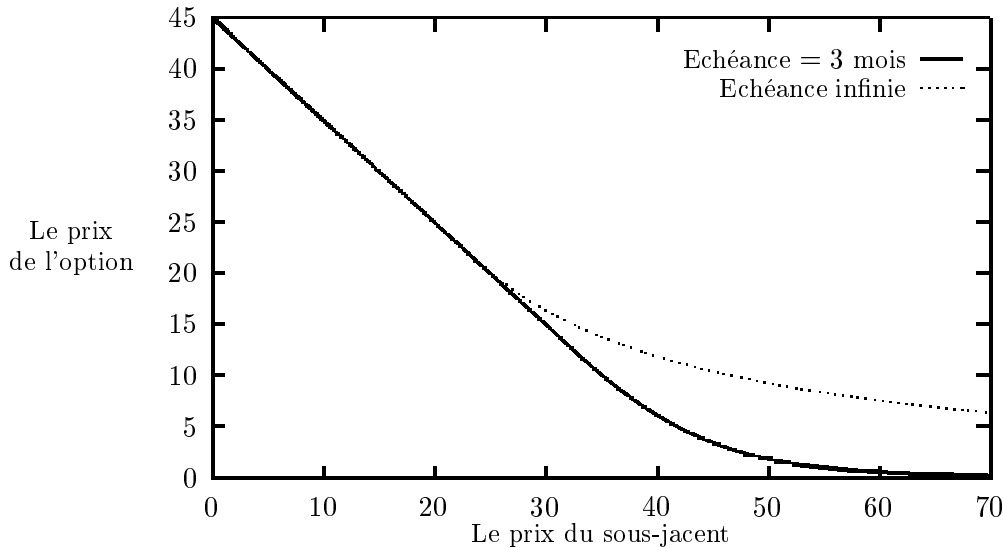
par la méthode de dichotomie.

- 2). Calcul du prix critique  $x^* = \frac{-\tilde{\eta}K}{1-\tilde{\eta}}$ .
- 3). Calcul du prix du put perpétuel :

$$u(x) = \begin{cases} K - x & \text{si } x < x^* \\ (K - x^*) \left(\frac{x}{x^*}\right)^\beta & \text{si } x \geq x^* \end{cases}$$

Figure 7

Les prix d'un put américain avec échéance finie et infinie  
 $r = 9\%$ ,  $K = 45$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $EU_1 = 0$ ,  $VarU_1 = 4\%$ ,  $\lambda = 3$

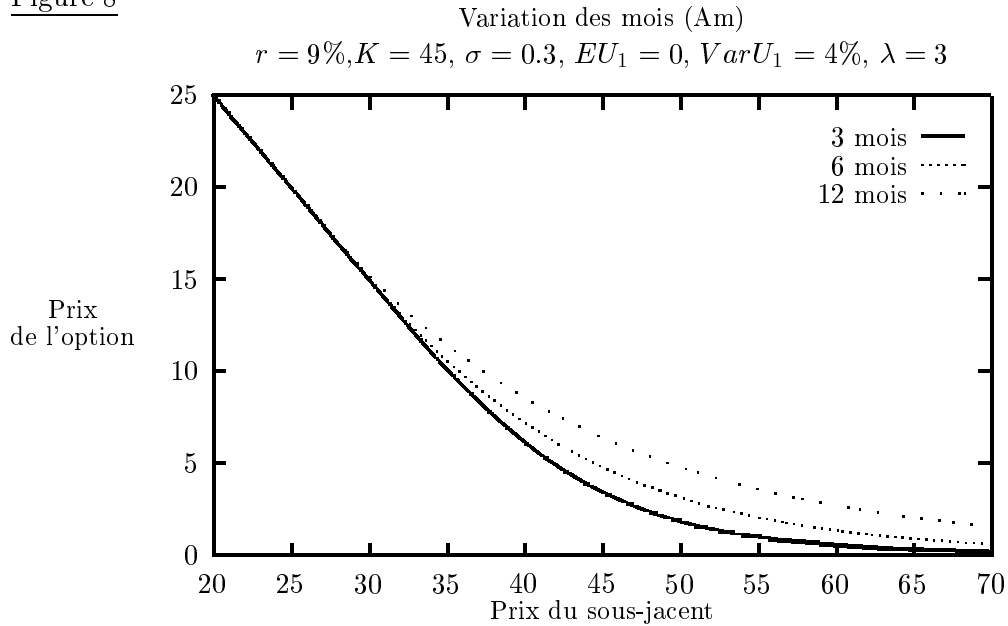


Nous comparons le prix d'un put américain d'échéance 3 mois avec le prix d'un put perpétuel (Les restes des données sont prises comme avant). Il est clair que le prix d'un

put perpétuel est plus élevé qu'un put américain d'échéance fini. Parce que le détenteur du premier titre peut exercer l'option à tout moment, or l'échéance du second titre est limitée à 3 mois, ce qui veut dire que le détenteur du premier titre aura plus de droit que le deuxième.

D'autre part, en revenant à l'algorithme de Brennan-Schwartz, et en faisant varier l'échéance, on voit que les prix d'options américaines sont augmentés en fonction de l'échéance. L'interprétation est analogue au cas précédent.

Figure 8



### 6.5.2 L'algorithme de Mac-millan

Si l'on note :

$$\phi(\alpha) = \frac{\sigma^2}{2}\alpha^2 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\alpha - \left(r + \lambda + \frac{1}{T}\right) + \lambda e^{\frac{\alpha^2\delta^2}{2} + \alpha m}$$

on a :

$$\phi'(\alpha) = \sigma^2\alpha + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \lambda(\delta^2\alpha + m)e^{\frac{\alpha^2\delta^2}{2} + \alpha m}$$

L'algorithme de Mac-Millan peut être décrit par :

- 1). Calcul du prix d'option européenne  $u_e(0, x)$  et son dérivé  $\frac{\partial u_e}{\partial x}$ .
- 2). Calcul de la solution approchée (noté  $\tilde{\eta}$ ) de l'équation  $\phi(\eta) = 0$  à l'aide de la méthode de Newton.
- 3). Calcul du prix critique  $x^*$ , solution de l'équation  $f(x) = x$  où  $f(x) = |\tilde{\eta}| \frac{K - u_e(0, x)}{u'_e(0, x) + 1 + |\tilde{\eta}|}$ , par la méthode de dichotomie.
- 4). Calcul de  $\beta = \frac{K - x^* - u_e(0, x^*)}{x^* \tilde{\eta}}$

5). Calcul du prix du put américain :

$$\tilde{u}(0, x) = \begin{cases} u_e(0, x) + \beta x^\eta & \text{si } x > x^* \\ K - x & \text{si } x \leq x^* \end{cases}$$

Figure 9

Comparaison de l'algorithme de B-S et MacMillan  
 $r = 9\%$ ,  $K = 45$ ,  $T = 3$  m,  $\sigma = 0.3$ ,  $EU_1 = 0$ ,  $VarU_1 = 4\%$ ,  $\lambda = 3$

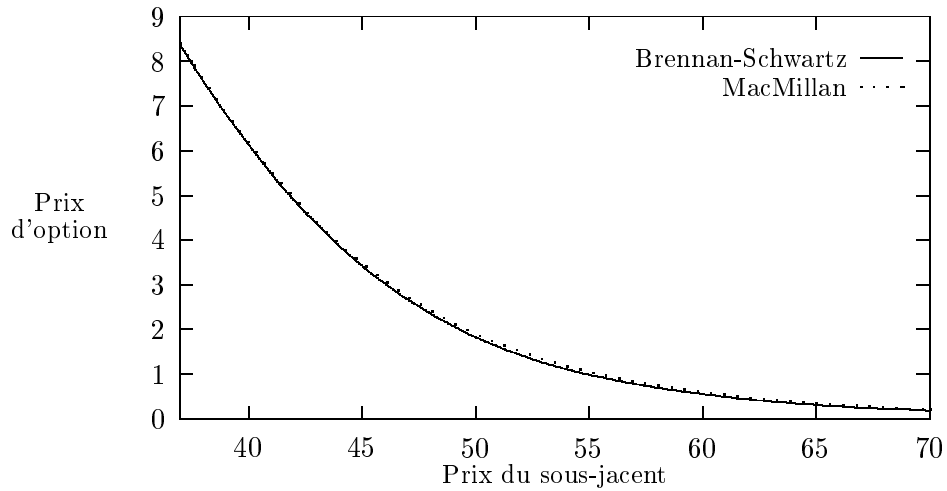
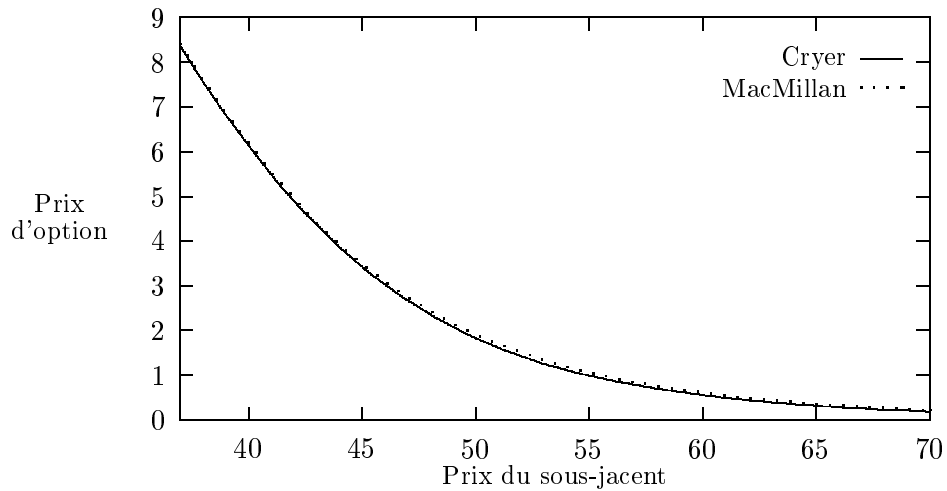


Figure 10

Comparaison de l'algorithme de Cryer et MacMillan  
 $r = 9\%$ ,  $K = 45$ ,  $T = 3$  m,  $\sigma = 0.3$ ,  $EU_1 = 0$ ,  $VarU_1 = 4\%$ ,  $\lambda = 3$



Nous prenons les mêmes données qu'avant pour comparer les algorithmes de Brennan-Schwartz, de Cryer, et de Mac-Millan. Nous voyons, sur les figures 9 et 10, qu'il n'y a pas des différences significatives entre les résultats obtenus par ces trois algorithmes. Au niveau de rapidité, l'algorithme de Mac-Millan est le plus rapide. Mais, il est limité aux échéances courtes.

## 6.6 Comparaisons du modèle de Black-Scholes et du modèle avec sauts

Rappelons que  $\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 + \lambda \mathbf{E}U_1^2$  et  $p = \frac{\sigma^2}{\bar{\sigma}^2}$ . Comme  $\bar{\sigma}$  est la volatilité observée sur le marché, pour comparer les deux modèles, il est donc indispensable de prendre  $\bar{\sigma}$  comme la volatilité dans les deux modèles. Nous rappelons que dans le modèle de diffusion avec des sauts  $\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 + \lambda \mathbf{E}U_1^2$ , et dans le modèle de Black et Scholes  $\bar{\sigma}^2 = \sigma^2$ .

On compare les deux modèles dans les cas européen et américain. La figure 12 ci-dessous est la même que la figure 11, sauf que l'échelle y est augmentée.

Cas européen :

Figure 11

Comparaison du modèle de B-S et du modèle avec sauts (Eu)  
 $r = 9\%$ ,  $K = 45$ ,  $T = 1$  an,  $\bar{\sigma} = 0.2$ ,  $\mathbf{E}U_1 = 0$ ,  $\mathbf{Var}U_1 = 0.04$

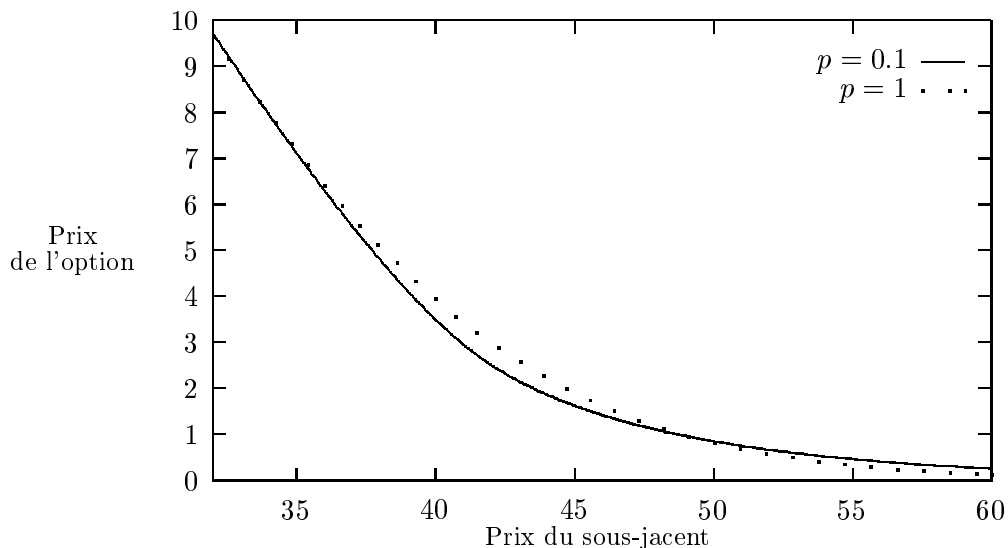
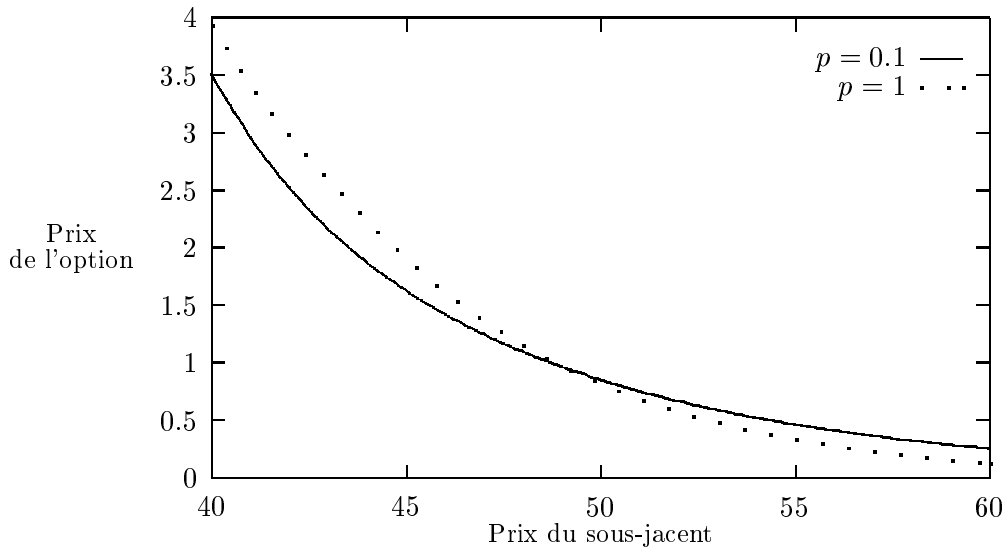


Figure 12

Comparaison du modèle de B-S et du modèle avec sauts (Eu)  
 $r = 9\%$ ,  $K = 45$ ,  $T = 1$  an,  $\bar{\sigma} = 0.2$ ,  $EU_1 = 0$ ,  $VarU_1 = 0.04$



On voit clairement qu'on a les mêmes phénomènes dans le cas américain que dans le cas européen.

Cas américain :

Figure 13

Comparaison du modèle de B-S et du modèle avec sauts (Am)  
 $r = 9\%$ ,  $K = 45$ ,  $T = 1$  an,  $\bar{\sigma} = 0.2$ ,  $EU_1 = 0$ ,  $VarU_1 = 0.04$

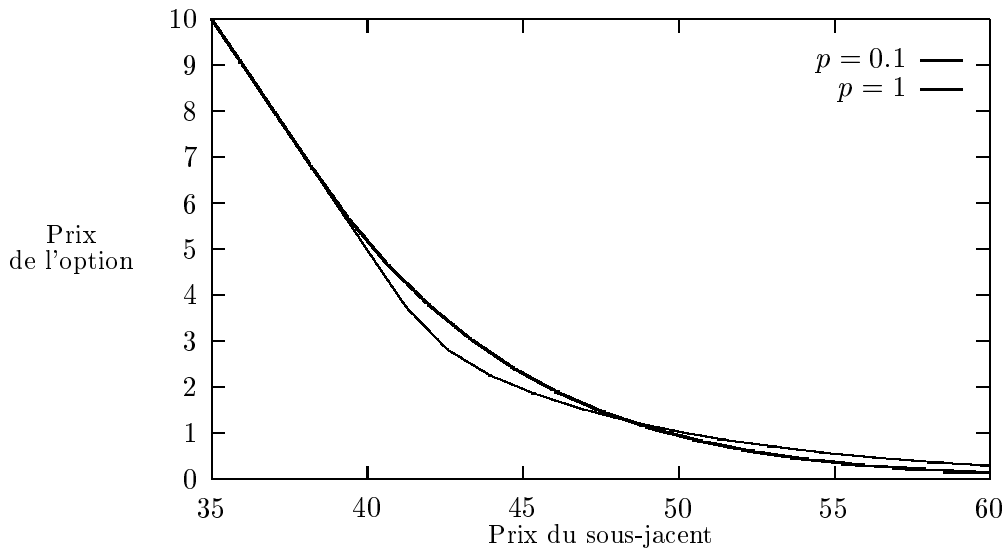
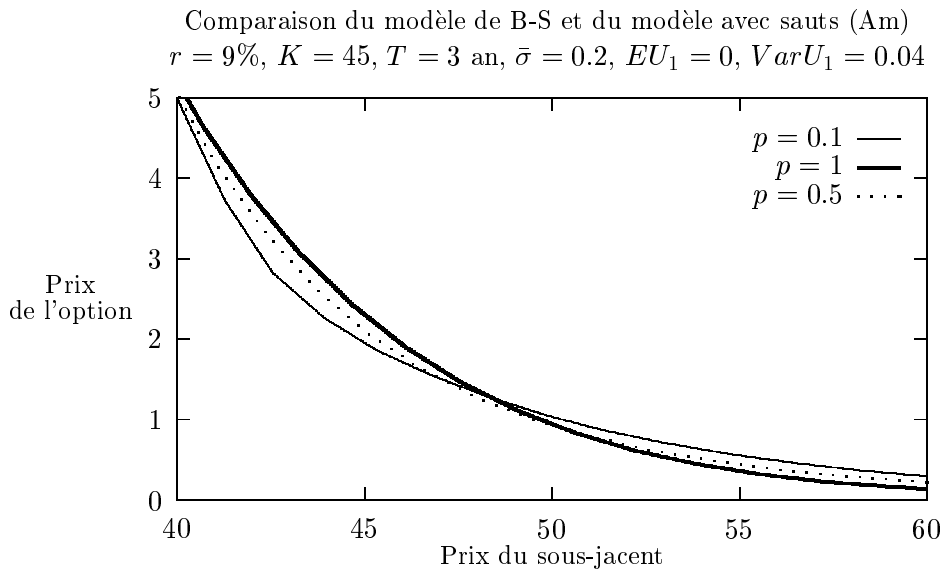


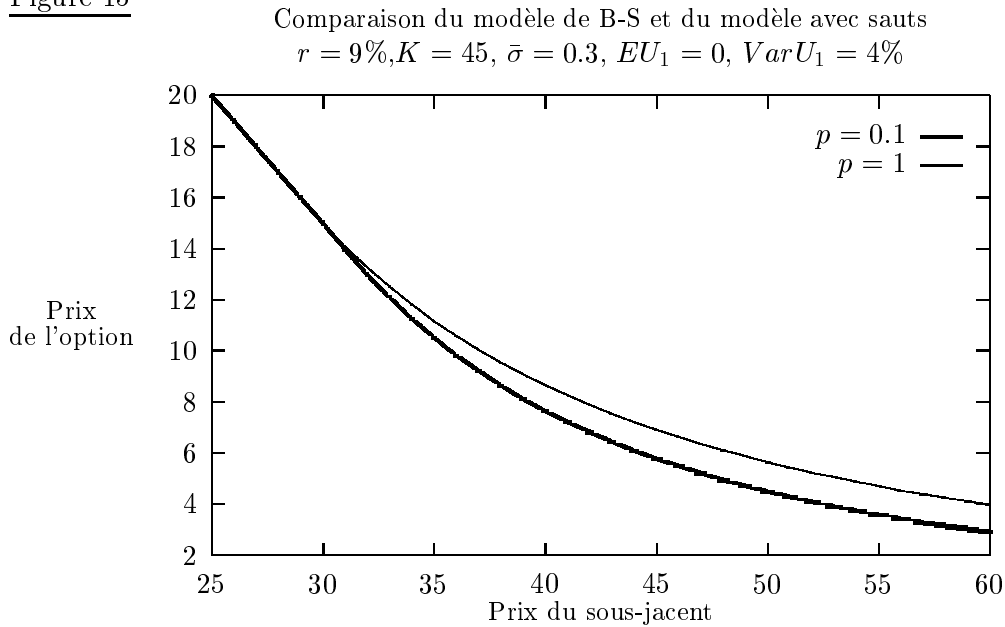
Figure 14



Nous rappelons que l'amplitude de sauts  $U_1$  est une variable aléatoire à valeurs à  $] -1, +\infty[$  tel que  $1 + U_1$  suit une loi lognormale. Donc, les sauts dans ce modèle peuvent être positifs ou négatifs. D'autre part, la prime est reliée directement au risque d'exercer de l'option. Plus la prime est élevée, plus on a de chance d'exercer l'option.

Ici on décrit seulement les phénomènes (figure 13 et 14 ) dans le cas américain :

- Si on note le prix du sous-jacent par  $S_t$ , quand on est très fortement dans la monnaie, alors la prime d'option va être  $K - S_t$ .
- Quand on est très fortement hors de la monnaie, la prime dans le modèle avec sauts est plus élevée que le modèle de Black et Scholes.
- Quand on est autour de la monnaie, la prime dans le modèle de Black et Scholes est plus élevée que dans le modèle avec sauts.

Put perpétuelFigure 15

De cette figure, on voit que, dans le cas d'un put perpétuel, la prime dans le modèle de Black et Scholes est plus élevée que dans le modèle avec sauts.

## 6.7 Prix en fonction du temps

Les allures des courbes suivantes sont cohérentes avec les courbes européennes dans le modèle de Black et Scholes données dans le livre de Cox et Rubinstein (cf. [13] Figure 5-9 P220 , voir le cas où  $p = 1$  à la figure 16).

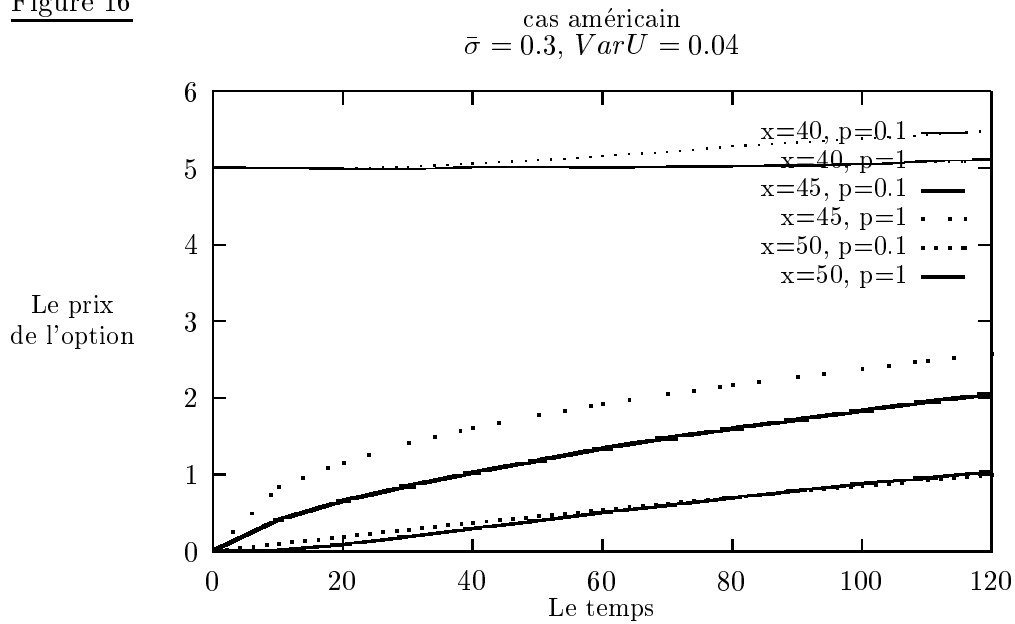
On prend le prix d'exercice  $K = 45FF$ ,  $r = 9\%$ , l'espérance de  $U$  égale à 0, la variance de  $U$  égale à 0.04, la volatilité historique  $\bar{\sigma} = 0.3$ . L'axe du temps représente :  $T - t$ . Autrement dit, quand on approche de 0, on approche de la maturité. On considère dans un premier temps un put américain. Les six courbes tracées dans la figure 16 orrespondent aux trois cas suivants :

- 1). le prix du sous-jacent  $x$  est égal à 40, c'est à dire que on est dans la monnaie.
- 2). le prix du sous-jacent  $x$  est égal à 45, c'est à dire que on est à la monnaie.
- 3). le prix du sous-jacent  $x$  est égal à 50, c'est à dire que on est hors de la monnaie.

Par le figure 16, on voit que quand on approche de l'échéance, la prime tends vers 5, 0, 0 respectivement.

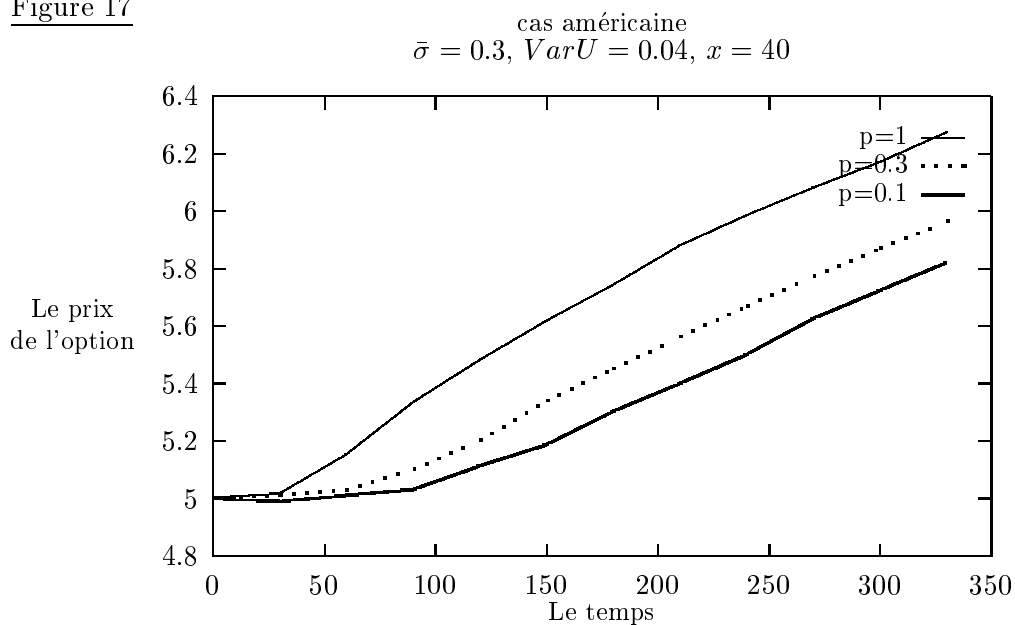


Figure 16



Maintenant, on traite le cas où le prix du sous-jacent  $x = 40$  (dans la monnaie). Les autres paramètres sont pris comme avant. Rappelons que  $p$  est un paramètre qui contrôle les sauts, en faisant varier les valeurs de  $p$ , on voit que quand  $p$  augmente, la courbe de la prime est plus proche de celle de Black et Scholes ( $p = 1$ ).

Figure 17



### Conclusion

Nous avons comparé le modèle de Black et Scholes avec le modèle avec sauts (ici, on précise le  $1 + U_1$  suit une loi lognormale). On a trouvé, dans le cas européen et le cas américain, qu'on a presque les mêmes phénomènes.

- Supposons que le prix du sous-jacent est  $S_t$ . Lorsque l'option est fortement dans la monnaie, l'existence de sauts est insuffisante pour que l'on puisse "espérer" que le spot passe en dessus du prix d'exercice  $K$ , l'option sera "à peu près sûr" d'être exercée. On trouve, donc, dans les deux modèles que, la prime d'option européenne est à peu près égale à  $e^{-rt}K - S_t$ ; la prime d'une option américaine est égale à  $K - S_t$ .
- Lorsque l'option est fortement hors de la monnaie, la prime d'option dans le modèle avec sauts est supérieure à la prime dans le modèle de Black et Scholes.
- Lorsque l'option est à la monnaie, la prime d'option dans le modèle avec sauts est inférieure à la prime dans le modèle de Black et Scholes.

# Annexe A

## Démonstration du lemme 3.17

La démonstration de ce lemme est exactement la même que celle du lemme 2-2 Ch 7 [28]. Ici, nous donnons sa démonstration suivante, seulement pour compléter la lecture.

**Démonstration :** On suppose d'abord que  $\Phi$  est bornée et on pose :

$$C = \sup_{(t,y,z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}} |\Phi(t, y, z)|$$

On a alors :

$$\left| \sum_{j=1}^{N_t} \Phi(\tau_j, Y_{\tau_j}, U_j) \right| \leq CN_t \quad \text{et} \quad \left| \int_0^t ds \int \nu(dz) \Phi(s, Y_s, z) \right| \leq Ct$$

Donc,  $M_t$  est de carré intégrable. Fixons  $s$  et  $t$ , avec  $s < t$ , et posons :

$$Z = \sum_{j=N_s+1}^{N_t} \Phi(\tau_j, Y_{\tau_j}, U_j)$$

Une subdivision  $\rho = (s_0 = s < s_1 < \dots < s_m = t)$  de l'intervalle  $[s, t]$  associons :

$$Z^\rho = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=N_{s_i}+1}^{N_{s_{i+1}}} \Phi(s_i, Y_{s_i}, U_j) \quad (.8)$$

La continuité à gauche de  $(Y_t)_{t \geq 0}$ , la continuité de  $\Phi$  par rapport à  $y$  et la continuité de  $\Phi$  par rapport à  $t$  impliquent que  $Z^\rho$  converge presque sûrement vers  $Z$  quand le pas de la subdivision  $\rho$  tend vers 0. On a de plus  $|Z^\rho| \leq C(N_t - N_s)$ , ce qui entraîne que la convergence a lieu aussi dans  $L^1$  et même dans  $L^2$ . On a :

$$\mathbf{E}(Z^\rho | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E} \left( \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{E}(Z_{i+1} | \mathcal{F}_{s_i}) | \mathcal{F}_s \right)$$

en posant :

$$Z_{i+1} = \sum_{j=N_{s_i}+1}^{N_{s_{i+1}}} \Phi(s_i, Y_{s_i}, U_j) = \sum_{j=1}^{N_{s_{i+1}}-N_{s_i}} \Phi(s_i, Y_{s_i}, U_{N_{s_i}+j})$$

En utilisant le lemme 2.1 dans [28], et le fait que  $Y_{s_i}$  est  $\mathcal{F}_{s_i}$ -mesurable, on voit que :

$$\mathbf{E}(Z_{i+1}|\mathcal{F}_{s_i}) = \bar{\Phi}_i(s_i, Y_{s_i})$$

où  $\bar{\Phi}_i(s_i, y)$  est définie par :

$$\bar{\Phi}_i(s_i, y) = \mathbf{E} \left( \sum_{j=1}^{N_{s_{i+1}} - N_{s_i}} \Phi(s_i, y, U_{N_{s_i}+j}) \right)$$

La quantité  $\bar{\Phi}_i(s, y)$  est donc l'espérance d'une somme aléatoire et, d'après l'exercice 38 [28] :

$$\bar{\Phi}_i(s_i, y) = \lambda(s_{i+1} - s_i) \int \nu(dz) \Phi(s_i, y, z)$$

En revenant à l'équation (.8), on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z^\rho|\mathcal{F}_s) &= \mathbf{E} \left( \sum_{i=0}^{m-1} \bar{\Phi}_i(s_i, Y_{s_i}) | \mathcal{F}_s \right) \\ &= \mathbf{E} \left( \sum_{i=0}^{m-1} \lambda(s_{i+1} - s_i) \int \nu(dz) \Phi(s_i, Y_{s_i}, z) | \mathcal{F}_s \right) \end{aligned}$$

En faisant tendre le pas de  $\rho$  vers 0, on obtient :

$$\mathbf{E} \left( \sum_{j=N_s+1}^{N_t} \Phi(\tau_j, Y_{\tau_j}, U_j) | \mathcal{F}_s \right) = \mathbf{E} \left( \lambda \int_s^t du \int \nu(dz) \Phi(u, Y_u, z) | \mathcal{F}_s \right)$$

ce qui prouve que  $M_t$  est une martingale.

Si l'on ne suppose plus  $\Phi$  bornée, mais  $\mathbf{E}(\int_0^t ds \int \nu(dz) \Phi^2(x, y, z)) < +\infty$  pour tout  $t$ , on peut introduire les fonctions (bornées)  $\Phi^n$  définies par :

$$\Phi^n(t, y, z) = \inf(n, \sup(-n, \Phi(t, y, z)))$$

les martingales  $(M_t^n)_{t \geq 0}$  définies par :

$$M_t^n = \sum_{j=1}^{N_t} \Phi^n(\tau_j, Y_{\tau_j}, U_j) - \lambda \int_0^t ds \int \nu(dz) \Phi^n(s, Y_s, z)$$

On voit facilement que :  $\mathbf{E}(\int_0^t ds \int \nu(dz) (\Phi^n(s, Y_s, z) - \Phi(s, Y_s, z))^2)$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Il en résulte que la suite  $(M_t^n)_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy dans  $L^2$  et comme  $M_t^n$  tend vers  $M_t$  p.s.,  $M_t$  est de carré intégrable et par passage à la limite, le lemme est vérifié pour  $\Phi$ . ■

# Bibliographie

- [1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] A. Bensoussan. On the theory of option. *Acta applicandae mathematicae*, 2 :139–158, 1984.
- [3] A. Bensoussan and J.L Lions. *Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique*. Dunod, paris, 1978.
- [4] A. Bensoussan and J.L Lions. *Contrôle impulsif et inéquations quasi variationnelles*. Dunod, paris, 1982.
- [5] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 :635–654, 1973.
- [6] H. Bonnaz, P. Micottis, L. Tollie, A. Vanney, and G. Vinaver. Valorisation et couverture d'options sur actifs avec sauts poissoniens. Groupe de Travail animé par G. Pagès, ENSAE - 3ème année, 1989-1990.
- [7] N. Bouleau and D. Lamberton. Residual risks and hedging strategies in markovian markets. *Stoch. Proc. and Appl.*, 33 :131–150, 1989.
- [8] M.J. Brennan and E.S. Schwartz. The valuation of american put options. *Journal of finance*, 32 :449–462, 1977.
- [9] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, paris, 1983.
- [10] David B. Colwell and Robert J. Elliott. Martingale representation and non-attainable contingent claims. preprint.
- [11] R. W. Cottle, J. S. Pang, and R. E. Stone. *The Linear Complementarity Problem*. Academic Press, NewYork, 1992.
- [12] R. W. Cottle and R. S. Sacher. On the solution of large structured linear complementarity problems : The tridiagonal case. *Appl. Math. Optim.*, 3 :321–340, 1977.
- [13] John C. Cox and Mark Rubinstein. *Options Markets*. Prentice-Hall, London, 1985.

- 
- [14] C. W. Cryer. The efficient solution of linear complementarity problems for tridiagonal minkowski matrices. *ACM Trans. Math. Software*, pages 199–214, 9 1983.
- [15] C. Doléans-Dade. Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semimartingales. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 16 1970.
- [16] N. EL Karoui. Analyse financière et probabilités. Cours du D.E.A de probabilité Paris 6.
- [17] N. El Karoui and M.C. Quenez. Dynamic programming and pricing of contingent claims in incomplete market. *Siam J. of Control and Opti.*, 1991.
- [18] C. M. Elliott and J. R. Ockendon. *Weak and Variational Methods for Moving Boundary Problems*. Pitman, Boston, 1982.
- [19] Robert J. Elliott. *Stochastic Calculus and Applications*. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1982.
- [20] H. Föllmer and M. Schweizer. Hedging of contingent claims under incomplete information. Gordon and Breach, London, 1990.
- [21] H. Föllmer and D. Sondermann. Hedging of non redundant contingent claims. In W. Hillebrand and A. Mas-Colell, editors, *Contributions to Mathematical Economics in Honor of Gerard Debreu*, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [22] R. Glowinski, J. L. Lions, and R. Trémolières. *Analyse numérique des inéquations variationnelles*. Dunod, 1976.
- [23] P. Jaillet, D. Lamberton, and B. Lapeyre. Analyse numérique des options américaines. *Cahier du CERMA*, No. 9 :66–126, 1988.
- [24] P. Jaillet, D. Lamberton, and B. Lapeyre. Variationnal inequalities and the pricing of american options. *Acta Applicandae Mathematicae*, 21 :263–289, 1990.
- [25] I. Karatzas. On the pricing of american options. *Applied Math. Optimization*, 1987.
- [26] O.A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Uralceva. Linear and quasilinear equations of parabolic type. *Translations of mathematical monographs*, 23, AMS, 1968.
- [27] D. Lamberton and B. Lapeyre. Probabilités numériques et théorie des options. In N. Bouleau and D. Talay, editors, *Probabilités Numériques*. Collection Didactique de l'INRIA, 1991.
- [28] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*. Ellipses-Edition Marketing, 1992.

- 
- [29] C. E. Lemke. Bimatrix equilibrium points and mathematical programming. *Management Science*, 11 :681–689, 1965.
- [30] L. MacMillan. Analytic approximation for the american put option. *Advances in Futures and Options Research*, 1 :119–139, 1986.
- [31] R.C. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell J. of Econom. and Management Sci.*, pages 141–183, 4 1973.
- [32] R.C. Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *J. of Financial Economics*, pages 125–144, 3 1976.
- [33] K. Murty. *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*. Number 3 in Sigma Series in Applied Mathematics. Heldermann Verlag Berlin, 1988.
- [34] R. Myneni. The price of the american option. *Annals of Applied Probability*, 1992.
- [35] J. Neveu. *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*. Masson, 1964.
- [36] P. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Number 21 in Applications of Mathematics. Springer-Verlag, 1990.
- [37] M.C. Quenez. *Méthodes de contrôle stochastique en Finance*. Thèse de l’université de Paris VI, 1993.
- [38] R. Saigal. A note on a special linear complementary problem. *Opsearch*, 7 :175–183, 1970.
- [39] M. Schweizer. *Hedging Of Options In A General Semimartingale Model*. Thesis Of Swiss Federal Institute Of Technology Zurich, 1988.
- [40] M. Schweizer. Option hedging for semi-martingales. *Stochastic Processes and their Applications*, 37 :339–363, 1991.
- [41] M. Schweizer. Some remarks on hedging under incomplete information. preprint.
- [42] X.L. Zhang. Options américaines et modèles de diffusion avec saut. *Note aux Comptes Rendus de l’Académie des Sciences, Paris, Série I*,(317) :857–862, 1993.
- [43] X.L. Zhang. Formules quasi-explicites pour les options américaines dans un modèle de diffusion avec sauts. In *Actes du Colloque Probabilités Numériques*. à paraître, Paris, Mars 1993.