



**HAL**  
open science

# Simulation de l'influence de la propulsion plasmique sur la charge électrostatique d'un satellite en milieu magnétosphorique

Olivier Chanrion

► **To cite this version:**

Olivier Chanrion. Simulation de l'influence de la propulsion plasmique sur la charge électrostatique d'un satellite en milieu magnétosphorique. Modélisation et simulation. Ecole des Ponts ParisTech, 2001. Français. NNT: . tel-00006481

**HAL Id: tel-00006481**

**<https://pastel.hal.science/tel-00006481>**

Submitted on 16 Jul 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

présentée à

L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Simulation de l'influence de la propulsion  
plasmique sur la charge électrostatique d'un  
satellite en milieu magnétosphérique

par Olivier Chanrion

Soutenue le 17 décembre 2001 devant la commission composée de MM. :

Pierre	DEGOND	Rapporteur
Thierry	DARGENT	
Thierry	GOUDON	
Serge	PIPERNO	
Frédéric	POUPAUD	
Eric	SONNENDRUCKER	Rapporteur



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Description des phénomènes physiques de charges</b>	<b>15</b>
2.1	Mécanisme de charges en milieu plasmique . . . . .	15
2.1.1	Définition sommaire d'un plasma . . . . .	15
2.1.1.1	Interactions collectives . . . . .	15
2.1.1.2	Interactions individuelles . . . . .	15
2.1.1.3	Caractérisation de leurs influences respectives	16
2.1.2	Environnement plasmique . . . . .	21
2.1.2.1	Plasma d'orbite géostationnaire . . . . .	21
2.1.2.2	Plasma issu du propulseur <i>SPT-100</i> . . . . .	22
2.1.3	Interactions aux surfaces . . . . .	24
2.1.3.1	Charge électrostatique et conductivité . . . . .	24
2.1.3.2	Réémissions aux parois . . . . .	29
2.1.3.3	Emission secondaire électronique . . . . .	29
2.1.3.4	Emission secondaire ionique . . . . .	32
2.1.3.5	Photoémission . . . . .	32
2.2	Modélisation mathématique . . . . .	32
2.2.1	Le système de Vlasov-Poisson . . . . .	32
2.2.1.1	Cadre général . . . . .	32
2.2.1.2	Résultats d'existence et d'unicité . . . . .	33
2.2.2	Plasma d'orbite géostationnaire . . . . .	34
2.2.2.1	Adimensionnement du problème . . . . .	35
2.2.2.2	Approximation pour le plasma d'orbite géostationnaire . . . . .	37
2.2.3	Plasma issu du propulseur <i>SPT – 100</i> . . . . .	39
2.2.3.1	Adimensionnement du problème . . . . .	41
2.2.3.2	Approximation pour le plasma issu du pro- pulsEUR . . . . .	44

<b>3</b>	<b>Modélisations simplifiées unidimensionnelles</b>	<b>47</b>
3.1	Un modèle 1D simplifié . . . . .	47
3.1.1	Dérivation du modèle . . . . .	47
3.1.1.1	Le système de Vlasov-Poisson unidimensionnel	47
3.1.1.2	Modélisation des électrons . . . . .	49
3.1.1.3	Modélisation des ions . . . . .	50
3.1.1.4	Evolution de la charge surfacique de la plaque	51
3.1.1.5	Equation de Poisson . . . . .	52
3.1.1.6	Le modèle final . . . . .	53
3.1.2	Approximation numérique par différences finies . . . . .	53
3.1.2.1	Schéma pour les ions : . . . . .	54
3.1.2.2	Schéma pour la charge surfacique : . . . . .	54
3.1.2.3	Schéma pour le potentiel : . . . . .	54
3.1.3	Résultats Numériques . . . . .	55
3.1.4	Cas du conducteur recouvert de diélectrique . . . . .	62
3.1.4.1	Modèle Capacitif résistif . . . . .	62
3.1.4.2	Approximation numérique . . . . .	63
3.1.4.3	Résultats numériques . . . . .	64
3.2	Modèle stationnaire de Vlasov Poisson . . . . .	67
3.2.1	Réduction du problème . . . . .	68
3.2.2	Récupération de la neutralité à l'infini . . . . .	74
3.2.3	Résultats numériques . . . . .	78
3.2.4	Résultat mathématique d'existence . . . . .	80
3.3	Modèle stationnaire de charge d'une sphère . . . . .	90
3.3.1	Modélisation et adimensionnement du problème . . . . .	91
3.3.1.1	Calcul des densités et courants par la méthode des caractéristiques . . . . .	92
3.3.1.2	Résolution numérique . . . . .	98
3.3.1.3	Résultats numériques . . . . .	99
3.4	Comparaison des modèles 1D . . . . .	102
3.4.1	Tableau récapitulatif . . . . .	102
3.5	Modélisation fluide . . . . .	102
3.5.1	Le système d'Euler-Poisson . . . . .	103
3.5.1.1	Modélisation des ions . . . . .	103
3.5.1.2	Modélisation pour les électrons . . . . .	104
3.5.1.3	Evolution de la charge surfacique de la plaque	105
3.5.1.4	Equation de Poisson . . . . .	105
3.5.1.5	Système d'Euler-Poisson / Résultats théoriques	106
3.5.1.6	Adimensionnement du problème . . . . .	106
3.5.2	Rappel sur le système d'Euler isotherme . . . . .	108
3.5.2.1	Le problème de Riemann. . . . .	108

3.5.2.2	Construction des ondes de choc . . . . .	110
3.5.2.3	Construction des ondes de raréfaction . . . . .	110
3.5.2.4	Construction d'une solution au problème de Riemann . . . . .	111
3.5.3	Approximation numérique du système d'Euler Isotherme	113
3.5.3.1	Approximation par volumes-finis . . . . .	114
3.5.3.2	Schémas d'ordre élevé . . . . .	115
3.5.3.3	Traitement des conditions limites . . . . .	116
3.5.3.4	Résultats numériques . . . . .	116
3.5.4	Modèle unidimensionnel . . . . .	118
3.5.4.1	Adimensionnement du problème . . . . .	118
3.5.4.2	Approximation numérique . . . . .	119
3.5.4.3	Résultats numériques . . . . .	121
3.5.5	Modèle sphérique . . . . .	125
3.5.5.1	Adimensionnement du problème . . . . .	125
3.5.5.2	Approximation numérique . . . . .	126
3.5.5.3	Résultats numériques . . . . .	128
3.5.6	Conclusion . . . . .	130
<b>4</b>	<b>Mesures Expérimentales</b>	<b>131</b>
4.1	Objectifs . . . . .	131
4.2	Moyens expérimentaux . . . . .	132
4.2.1	Schéma électrique . . . . .	133
4.2.2	Archivage des données . . . . .	133
4.2.3	Automatisation des instruments . . . . .	134
4.3	Théorie succincte des sondes de Langmuir . . . . .	134
4.4	Résultats . . . . .	136
4.4.1	Dépouillement . . . . .	138
4.4.2	Interpolation des résultats . . . . .	142
4.5	Conclusion . . . . .	148
4.6	Annexe 1 : Archivage des résultats . . . . .	149
4.6.1	Format des fichiers de mesure . . . . .	149
4.6.1.1	Entête de fichier . . . . .	150
4.6.1.2	Données supplémentaires . . . . .	151
4.6.2	Arborescence des mesures . . . . .	152
4.6.2.1	Nom des répertoires de débit . . . . .	153
4.6.2.2	Nom des répertoires de tension de décharge .	153
4.6.2.3	Nom des répertoires d'inclinaison de la rampe	153
4.6.2.4	Nom des fichiers de mesures . . . . .	153
4.6.3	Chemin d'accès . . . . .	154
4.7	Annexe 2 : Automatisation des instruments . . . . .	155

4.7.1	Manipulation . . . . .	155
4.7.2	Bras manipulateur . . . . .	156
4.7.3	Sondes . . . . .	158
4.7.4	Sauvegarde . . . . .	159
4.8	Annexe 3 : données dépouillées . . . . .	163
<b>5</b>	<b>Modélisation 2D axisymétrique du milieu magnétosphérique.</b>	<b>177</b>
5.1	Simplification des équations . . . . .	177
5.1.1	Rappel des équations . . . . .	177
5.1.2	Adimensionnement des équations . . . . .	179
5.1.3	Passage à la limite formel . . . . .	181
5.2	Approximation numérique . . . . .	182
5.2.1	Equation de Laplace . . . . .	182
5.2.1.1	Formulation variationnelle. . . . .	182
5.2.1.2	Passage en axisymétrique . . . . .	183
5.2.1.3	Eléments finis . . . . .	185
5.2.1.4	Eléments infinis . . . . .	187
5.2.1.5	Résolution matricielle . . . . .	189
5.2.1.6	Amélioration du conditionnement du système	192
5.2.2	Calcul des courants incidents au surface . . . . .	193
5.2.2.1	Mise en équation . . . . .	193
5.2.2.2	Passage en axisymétrique . . . . .	194
5.2.2.3	Approximation numérique . . . . .	196
5.2.2.4	Algorithme général . . . . .	199
5.3	Résultats numériques . . . . .	200
5.3.1	Cas test de la sphère . . . . .	200
5.3.1.1	Validation de la prise en compte des diélectriques	203
5.3.2	Cas test plus réaliste : un cylindre . . . . .	204
<b>6</b>	<b>Modélisation 2D axisymétrique du propulseur.</b>	<b>207</b>
6.1	Simplification des équations . . . . .	208
6.1.1	Rappel des équations . . . . .	208
6.1.2	Adimensionnement des équations . . . . .	209
6.1.3	Passage à la limite formel . . . . .	211
6.2	Approximation numérique . . . . .	212
6.2.1	Densité de particules . . . . .	212
6.2.1.1	Passage en axisymétrique . . . . .	212
6.2.1.2	Méthode particulière . . . . .	214
6.2.1.3	Choix des poids $w_k$ . . . . .	218
6.2.1.4	Formule d'interpolation . . . . .	218
6.2.1.5	Pas de temps variable . . . . .	220

6.2.1.6	Densité électronique . . . . .	220
6.2.2	Equation de Poisson . . . . .	220
6.2.2.1	Formulation variationnelle . . . . .	220
6.2.2.2	Eléments finis . . . . .	221
6.2.2.3	Algorithme de Newton . . . . .	222
6.3	Résultats numériques . . . . .	222
6.3.1	Cas du SPT-50 . . . . .	222
6.3.2	Comparaison avec les mesures expérimentales . . . . .	226
<b>7</b>	<b>Couplage des modèles</b>	<b>229</b>
7.1	Introduction . . . . .	229
7.1.1	But . . . . .	229
7.1.2	Stratégie . . . . .	229
7.2	Approximation numérique . . . . .	230
7.2.1	Magnétosphère . . . . .	230
7.2.2	Propulseur <i>SPT</i> – 100 . . . . .	230
7.2.3	Calcul des potentiels . . . . .	231
7.2.4	Algorithme général . . . . .	232
7.3	Résultats numériques . . . . .	233
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>235</b>



# Chapitre 1

## Introduction

Depuis que l'homme envoie des satellites dans l'espace, plusieurs anomalies liées à la présence de charges électrostatiques ont été rencontrées. Ces anomalies de fonctionnement consistent généralement en commutations intempestives, changements de mode imprévus ou, plus rarement, des pannes par destruction de composants semi-conducteurs. Ces anomalies sont au minimum sans réelle conséquence sur le fonctionnement du satellite, mais il est arrivé qu'elles entraînent la perte de la mission ; le satellite étant rendu inutilisable. On pourra citer, pour exemple, les satellites TDF-1 et TDF-2, TELECOM-1B, la sonde *Viking Lander 1* ou le satellite *Intelsat 511*, et pour plus de détails l'enquête menée par la *NASA* ([21]) et ([36]).

Les satellites en orbite baignent dans un mélange de particules chargées avec éventuellement des neutres qui constituent l'environnement spatial. Les satellites subissent alors des perturbations induites par cet environnement. On distingue généralement trois types d'interactions avec les particules chargées : Les phénomènes de charge de surface, la charge interne et les événements singuliers dus principalement aux protons de très fortes énergies ou aux ions lourds. En ce qui concerne la charge de surface, les satellites étant recouverts de matériaux diélectriques pour des raisons d'isolation thermique, les électrons et les ions issus du plasma spatial interagissent avec les surfaces externes du satellite et modifient leurs charges électrostatiques.

Les différences de charges électrostatiques stockées par les surfaces génèrent des différences de potentiel entre les surfaces ou entre les surfaces et la masse électrique du satellite. Lorsque le champ électrique dépasse un certain seuil, une décharge électrostatique apparaît. Cette impulsion de courant électrique peut perturber les équipements électroniques par couplage électromagnétique.

Les phénomènes de charges et de décharges électrostatiques (ESD) sont étudiés depuis longtemps (années 1970). Des règles de design et des méthodes de conception ont été mises en place pour se prémunir des risques ESD.

Cependant, de par leur fonctionnement, des équipements embarqués tels que les propulseurs plasmiques, génèrent un environnement chargeant. Les propulseurs plasmiques éjectent un plasma artificiel qui peut modifier l'environnement naturel du satellite. Il est donc nécessaire d'étudier l'impact de ces propulseurs sur les risques de charges électrostatiques.

C'est dans ce cadre que s'inscrit cette thèse. On travaillera avec des satellites en orbite géostationnaire, utilisant un moteur électrique à effets Hall ( de type *SPT-100* ) pour réaliser la mise et le maintien à poste par exemple.

Le but est de comprendre les mécanismes de charges électrostatiques en environnement plasmique. Ce problème est crucial pour prévenir les risques d'apparition de décharges. On pourra se référer à la thèse de François Severin pour ces phénomènes [34].

L'utilisation des propulseurs à effets Hall est relativement récente, elle permet de réduire considérablement les coûts par rapport à des types de propulsions classiques en réduisant considérablement la masse de 'combustible' embarquée.

Le plasma environnant le satellite peut donc provenir de deux sources. D'une part, un vent de particules chargées ( ions  $H^+$  et électrons ) hautement énergétiques, provient du soleil et forme différentes couches autour de la terre pour constituer la magnétosphère. D'autre part, les propulseurs plasmiques éjectent un plasma pour générer la poussée. Plus précisément, dans un SPT le gaz combustible (xénon) est ionisé dans le canal de décharge (anode). Un champ électrostatique est alors utilisé pour accélérer les ions positifs de xénon afin de produire la poussée demandée. Ce jet d'ions est neutralisé par les électrons émis par la cathode. Le jet de plasma éjecté est neutre, dense, froid et directif. De plus, les collisions d'échanges de charges entre ions rapides et neutres génèrent un plasma dit secondaire. Celui-ci relativement dense et de faible énergie, peut être très largement influencé sous l'effet des champs électriques entourant le satellite. Nous verrons que ce plasma secondaire est susceptible de retourner vers les surfaces du satellite pour générer des courants supplémentaires.

Pour comprendre et modéliser numériquement ces phénomènes, nous allons commencer par décrire les phénomènes physiques décrivant les mécanismes de charges électrostatiques en milieu plasmique et introduire une description mathématique. Ceci fera l'objet du chapitre II. Dans la première section, nous commencerons par une description physique d'un plasma. Nous détaillerons les interactions régnant en son sein (interactions collectives et individuelles). Nous introduirons les grandeurs physiques qualitativement importantes pour décrire et dimensionner le problème. Par la suite, nous donnerons ces grandeurs caractéristiques pour le plasma magnétosphérique et pour le plasma issu d'un propulseur  $SPT - 100$ . Nous décrirons ensuite les mécanismes de charges électrostatiques des surfaces en milieu plasmique. Dans la deuxième section, nous introduirons un modèle mathématique permettant de décrire ces plasmas, ce sera le système de Vlasov-Poisson. Nous commencerons par présenter les équations constituant le système et donner des références quant à son étude. Puis, pour le cas de la magnétosphère et pour le cas du propulseur  $SPT - 100$ , nous donnerons un adimensionnement de celle-ci, ainsi que les simplifications que chacun apporte.

Dans un second temps, nous introduirons des modèles mathématiques et les étudierons dans un cadre unidimensionnel. Seul le cas de la magnétosphère sera traité pour nous fournir les ordres de grandeur et des cas tests de validation pour le passage en dimension supérieure. Ceci fera l'objet du chapitre III. Lors de la première section, nous commencerons par traiter un modèle simplifié introduit par G.Akoun (EADS). Nous décrirons ce modèle et le résoudrons numériquement. En deuxième section, nous introduirons un modèle unidimensionnel, basé sur les équations de Vlasov-Poisson. Nous mettrons en évidence les limitations provoquées par le cadre unidimensionnel et proposerons une modification permettant de s'en dégager. Ce cas sera résolu numériquement et un résultat mathématique d'existence sera démontré. En troisième section, nous introduirons un modèle sphérique. Celui-ci sera résolu numériquement et validé par des résultats de Laframboise. Enfin, en dernière section, nous introduirons un modèle différent pour la description du plasma, nous utiliserons une approche fluide : le système d'Euler isotherme-Poisson. Nous ferons un rappel sur le système d'Euler isotherme et introduirons les méthodes numériques permettant de le résoudre. Puis, nous décrirons un modèle de charge unidimensionnel pour lequel nous retrouverons des limitations dues à ce cadre, et un modèle sphérique permettant de s'en dégager. Le plasma magnétosphérique étant non-collisionnel, ce type de modèle sera abandonné par la suite. Un tableau récapitulatif des résultats obtenus pour ces différents modèles sera finalement donné pour fournir les ordres de grandeurs souhaités.

Toujours dans le but de fournir des ordres de grandeurs, nous effectuerons dans le chapitre IV des mesures expérimentales permettant de caractériser le plasma issu d'un propulseur de type *SPT* – 50. Dans les deux premières sections, nous introduirons le but de la campagne de mesures effectuée au laboratoire *LPMI* de l'école Polytechnique et effectuerons une description des moyens expérimentaux mis à disposition. En troisième section nous présenterons comment accéder aux grandeurs caractéristiques du plasma grâce aux sondes de Langmuir. Nous présenterons le dépouillement des données, et les résultats obtenus. En dernière section, nous conclurons sur les ordres de grandeurs obtenus.

Dans le chapitre V, nous allons introduire un modèle mathématique et numérique pour la prise de charge en milieu magnétosphérique seul. Celui-ci sera bidimensionnel et axisymétrique. Nous commencerons, en première section par rappeler le modèle et les simplifications apportées aux équations. Nous introduirons en seconde section, les approximations numériques utilisées pour résoudre l'équation de Laplace. Nous utiliserons une approximation éléments finis volumiques couplés avec des éléments infinis et avec la prise en compte des fines couches de diélectriques. Puis, nous introduirons les approximations utilisées pour calculer les courants reçus par les surfaces. Nous utiliserons une méthode de caractéristiques en remontant les trajectoires. En dernière section, nous donnerons les résultats obtenus pour le cas test de la sphère. Cela nous permettra de valider le calcul des courants, le calcul du potentiel spatial et la prise en compte des diélectriques. Nous donnerons un dernier cas test pour une forme de satellite plus réaliste : un cylindre.

Dans le chapitre VI, nous ferons de même pour l'expansion du jet de plasma issu d'un propulseur *SPT*. Un modèle bidimensionnel et axisymétrique sera introduit. Nous commencerons, en première section par rappeler le modèle et les simplifications apportées aux équations. Nous introduirons en seconde section, les approximations numériques utilisées pour calculer les densités et les courants de particules. Nous utiliserons une approximation particulière ( 'Particle in Cell' ) avec prise en compte des collisions avec échange de charge. Puis, nous introduirons les approximations numériques utilisées pour résoudre le potentiel électrostatique. Dans une première zone, où la neutralité peut être imposée, nous utiliserons une formule explicite. Dans une seconde zone où l'hypothèse de neutralité n'est plus valable, nous utiliserons des éléments finis volumiques avec prise en compte de la charge d'espace. De plus, pour traiter les non-linéarités imposées dans cette zone, nous utiliserons un algorithme de Newton. En dernière section, nous donnerons les résultats

obtenus pour un cas test du *SPT* – 50 permettant de les comparer avec les mesures expérimentales. Nous mettrons en évidence les bons ordres de grandeurs du calcul ainsi que le retour d’ions lents sur le satellite.

Finalement, dans le chapitre VII, nous couplerons ces deux modèles pour obtenir un modèle bidimensionnel et axisymétrique permettant de calculer la charge électrostatique d’un satellite en milieu magnétosphérique et l’influence de la propulsion plasmique sur celle-ci.



# Chapitre 2

## Description des phénomènes physiques de charges

### 2.1 Mécanisme de charges en milieu plasmique

#### 2.1.1 Définition sommaire d'un plasma

Le terme plasma a été introduit en astrophysique, pour désigner un état dilué de la matière. Il est formé d'un ensemble de particules pouvant être chargées ou non, analogue à un gaz globalement neutre. Compte tenu de sa nature physique, les processus susceptibles de se produire en son sein peuvent être de deux ordres, des interactions de types collectives ou individuelles.

##### 2.1.1.1 Interactions collectives

Les interactions collectives proviennent de la nature propre des particules. Du fait que celles-ci peuvent être chargées, il apparaît au sein du plasma des forces d'interaction à longue portée. Ainsi, un écart du plasma à sa neutralité va engendrer des forces électrostatiques influençant un grand nombre de particules du plasma. Aussi, si le mouvement des particules chargées est macroscopiquement différent, l'apparition de courant induira un champ magnétique influençant lui aussi un grand nombre de particules. Bien entendu, la création artificielle de telles forces électromagnétiques influence de la même manière le plasma.

##### 2.1.1.2 Interactions individuelles

Les interactions individuelles, proviennent de la nature microscopique des particules composant le plasma ; celles-ci peuvent se classer sous le terme

général de 'collisions'.

Les collisions binaires élastiques conservent le nombre des particules, la quantité de mouvement et l'énergie du système. La nature de ces collisions dépend essentiellement de la nature de la force d'interaction qui lie les particules. S'il y a collision entre deux particules chargées, se sont les forces coulombiennes, si l'une des deux particules n'est pas chargée, nous parlerons d'interactions dues au mécanisme dit du dipôle induit, si les deux particules sont neutres nous utiliserons le modèle des sphères dures.

Les collisions inélastiques conduisent quant à elles à la création ou à la disparition de particules au sein du plasma. Parmi celles-ci, on citera en exemple, l'ionisation, la recombinaison ou l'échange de charges entre ions et neutres. Les deux premières interactions jouent un rôle important dans la création ou destruction des plasmas, et pour la dernière, affecte la mobilité des ions.

### 2.1.1.3 Caractérisation de leurs influences respectives

Les interactions précédemment décrites jouent un rôle plus ou moins important dans la compréhension des phénomènes à considérer. Pour chacune de ces interactions, on peut introduire un temps caractéristique d'interaction, ou de manière équivalente ( compte tenu des vitesses caractéristiques des particules ) une longueur d'interaction caractéristique. Celles-ci dépendent des paramètres du plasma, telle que la densité (  $n_\alpha$  ) des particules ( ici indicé par  $\alpha$  ), ainsi que leur température (  $T_\alpha$  ). ( Nous ferons ultérieurement l'amalgame avec  $kT_\alpha$  où  $k$  est la constante de Boltzmann. )

Pour les collisions, le temps caractéristique ou de relaxation apparaît plus souvent sous la forme de fréquence de collisions, la longueur caractéristique porte le nom de libre parcours moyen (  $\lambda_{\alpha\beta}$  pour une particule  $\alpha$  en collision avec une particule  $\beta$  ).

Pour les interactions de type électrostatiques, nous parlerons de longueur de Debye et pour celles de type magnétique de rayon de Larmor.

**Interactions électrostatiques.** La longueur de Debye apparaît comme la longueur critique d'interactions collectives. Sous l'action d'un champ extérieur ayant pour but d'écarter le plasma de sa neutralité naturelle, le plasma fera

écran à celui-ci. L'action de ce champ ne se ressentira que sur une distance de l'ordre de la longueur de Debye. De même si on observe l'action électrostatique d'un ion sur l'ensemble des électrons qui l'entourent, le rayon de la sphère d'influence est donné par cette même longueur. Cette grandeur apparaît comme la longueur caractéristique d'interactions collectives électrostatique ; nous verrons que son ordre de grandeur devant la taille du système à étudier joue un rôle important, tant dans le choix du modèle, que numériquement. Son expression est donnée par :

$$\lambda_d = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T_e}{n_e e^2}}$$

où

- $\epsilon_0$  est la perméabilité électrique du vide,
- $e$  est la charge électrique élémentaire,
- $kT_e$  est la température électronique,
- $n_e$  est la densité électronique.

On introduit de plus le nombre de Debye, permettant de comparer cette distance avec la longueur caractéristique du système d'étude ( $L$ ) :

$$N_D = \frac{\lambda_d}{L}.$$

$L$  sera par exemple une grandeur caractéristique du satellite.

**Interactions d'ordre magnétique.** La dimension caractéristique du plasma permettant de juger de l'influence d'un champ magnétique extérieur au coeur du plasma est donnée par le rayon de Larmor ; cette longueur est définie comme le rayon de courbure des trajectoires des particules sous l'action d'un champ magnétique :

$$\rho_{L\alpha} = m_\alpha \frac{v_{\perp\alpha}}{eB}$$

où

- $B$  est le champ magnétique,
- $v_{\perp\alpha}$  est la vitesse perpendiculaire à celui-ci,  
( ou la vitesse thermique soit  $\sqrt{kT/m}$  pour un plasma maxwellien )

On pourra introduire aussi le nombre de Larmor :

$$N_L = \frac{\rho_L}{L}.$$

Les phénomènes d'induction de champs magnétiques seront négligés dans la mesure où les particules ont une vitesse relativement faible.

**Collisions binaires élastiques entre deux particules chargées.** Les collisions ions-électrons, ions-ions ou électrons-électrons sont basées sur les interactions coulombiennes. Pour définir leurs fréquences, on commence par faire le calcul théorique de leurs sections efficaces de transfert de quantité de mouvement ( $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^c$ ) :

En partant de la section efficace différentielle de Rutherford,

$$\sigma_{\alpha\beta}(\chi) = \left( \frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{8\pi\epsilon_0 \mu g^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\chi)}$$

où

- $\chi$  est l'angle de déviation,
- $g$  est la vitesse relative initiale des deux particules,
- $Z_\alpha$  le nombre de charge de la particule,
- $\mu$  la masse réduite des deux particules :  $\mu = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}$ ,
- $m_\alpha$  est la masse de la particule  $\alpha$ .

On a :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^c &= 2\pi \int_{\chi_{min}}^{\pi} (1 - \cos(\chi)) \sin(\chi) \sigma(\chi) d\chi \\ &= 4\pi \left( \frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu \bar{g}^2} \right)^2 \ln(\Lambda) \end{aligned}$$

où

- $\ln(\Lambda)$  est le logarithme coulombien défini par :  $\Lambda = \frac{4\pi\lambda_d\epsilon_0\mu\bar{g}^2}{Z_\alpha Z_\beta e^2}$ ,
- $\chi_{min}$  est la déviation minimale pour laquelle on a coupure de Debye,
- $\bar{g}$  est la vitesse relative moyenne des 2 particules.

La fréquence caractéristique des collisions est alors donnée par :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \max(n_\alpha, n_\beta) \bar{g} \sigma_{\alpha\beta}^c$$

Pour avoir la longueur caractéristique des collisions relativement au phénomène à observer, on divise la vitesse caractéristique ( $V$ ) des particules à observer par cette fréquence.

$$L_{\alpha\beta} = V/\gamma_{\alpha\beta}$$

Le vrai libre parcours moyen est donné par :

$$\lambda_{\alpha\beta} = \frac{\bar{g}}{\gamma_{\alpha\beta}} = \frac{1}{\max(n_\alpha, n_\beta)\sigma_{\alpha\beta}^c}$$

On pourra se référer à [10] pour le détail des calculs.

Pour achever les calculs, on doit émettre une hypothèse sur les fonctions de distribution des particules pour calculer  $\bar{g}^2$ . On supposera ici qu'elles sont maxwelliennes. On a alors :

$$\bar{g}^2 = 2 \left( \frac{kT_\alpha}{m_\alpha} + \frac{kT_\beta}{m_\beta} \right).$$

– Pour les collisions électrons-électrons, on a alors :

$$\begin{aligned} \mu &= m_e/2, \\ \bar{g}^2 &= 4 \frac{kT_e}{m_e}. \end{aligned}$$

– Pour les collisions ions-ions :

$$\begin{aligned} \mu &= m_i/2, \\ \bar{g}^2 &= 4 \frac{kT_i}{m_i}. \end{aligned}$$

– Pour les collisions électrons-ions :

$$\begin{aligned} \mu &= m_e, \\ \bar{g}^2 &= 2 \frac{kT_e}{m_e}. \end{aligned}$$

car  $m_i \gg m_e$ .

### **Collisions binaires élastiques avec au moins une particule neutre.**

Les collisions élastiques entre deux particules neutres ou entre un ion et un neutre sont décrites ici par le modèle des sphères dures :

Les calculs des sections efficaces sont beaucoup plus simples dans ce cas :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{sd} = \pi D^2.$$

où  $D$  est le diamètre moléculaire (identique) des deux particules. Par exemple pour le Xénon, on a :  $D = 3.42 \times 10^{-10}$ .

Et nous avons les mêmes définitions que précédemment pour les définitions des fréquences et des longueurs caractéristiques de collisions.

**Collisions binaires élastiques entre un électron et un neutre** Ce type de collisions est basé sur le principe du dipôle induit : au passage d'un électron, un neutre se polarise et crée autour de lui un moment dipolaire. En introduisant la polarisabilité du neutre Xénon ( $\psi = 4.044 \times 10^{-24} \text{cm}^3$ ) le potentiel d'interaction est donné par :

$$-\frac{\psi e^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}.$$

La section efficace intégrée pour des électrons de température  $2eV$  est donnée dans [10] :  $\sigma_{ne}^{dip} = 1 \times 10^{-20} \text{m}^{-3}$ .

**Collisions binaires inélastiques entre un ion et un neutre** Pour les collisions inélastiques d'échange de charges, nous utilisons un modèle simplifié, et nous négligeons l'échange d'énergie nécessaire à l'arrachage d'un électron, et nous considérons que lorsque les deux particules collisionnent, elle échangent leurs rôle. Microscopiquement cela correspond à échanger leurs vecteurs vitesses. Ce type de collision affecte grandement la mobilité des ions, et peut être considéré comme un terme créant des ions lents. La section efficace différentielle de collisions nous est donnée dans [25] pour les collisions dans un plasma de Xénon.

- Pour les collisions entre un atome ( $Xe$ ) et un ion ( $Xe^+$ ), Rapp & Francis [30] donnent :

$$\sigma_{ei}^{CEX} = (k1 \ln(g) + k2)^2 \times 10^{-20} \text{m}^2$$

où

$$k1 = -0.8821,$$

$$k2 = 15.1262.$$

- Pour les collisions entre un atome ( $Xe$ ) et un ion ( $Xe^{++}$ ), des mesures expérimentales ([25]) donnent :

$$\sigma_{ei}^{CEX} = (k1 \ln(g) + k2)^2 \times 10^{-20} \text{m}^2$$

où

$$\begin{aligned}k1 &= -2.7038, \\k2 &= 0.34069.\end{aligned}$$

Les autres collisions seront négligées.

## 2.1.2 Environnement plasmique

### 2.1.2.1 Plasma d'orbite géostationnaire

Selon son altitude, l'activité géomagnétique ou sa position orbitale, un satellite peut baigner dans des plasmas de caractéristiques très différentes. Sur l'orbite géostationnaire, dans le secteur nuit ou en période de sous orage, le plasma est peu dense (moins d'une particule par centimètre-cube) et très chaud (quelques dizaines de milliers d'électron-volts). Sur des orbites basses ou en période calme le plasma est dense (quelques milliers de particules par centimètre-cube) et froid (moins d'un électron-volt). Un grand nombre de situations intermédiaires peuvent être néanmoins rencontrées.

Dans le cadre de cette thèse nous nous limiterons au cadre géostationnaire. On considère que c'est un plasma globalement neutre de densité  $n_0$  à l'équilibre thermodynamique et composé essentiellement d'ions  $H^+$  et d'électrons, de températures voisines  $kT$ . Les caractéristiques typiques du plasma sont les suivantes :

$n(m^{-3})$	$1 \times 10^6$
$kT(eV)$	$1.2 \times 10^4$
$\lambda_d(m)$	$8.14 \times 10^2$
$\lambda_{ee}(m)$	$4.21 \times 10^{17}$
$\lambda_{ei}(m)$	$5.95 \times 10^{17}$
$\lambda_{ii}(m)$	$4.21 \times 10^{17}$
$\rho_{Le}(m)$	$3.36 \times 10^2$
$\rho_{Li}(m)$	$1.44 \times 10^4$

Les nombres de Knudsen, de Debye et de Larmor peuvent être calculés en prenant comme longueur caractéristique celle typique d'un satellite, soit  $10m$ .

Compte tenu du tableau précédent, on constate que les nombres de Knudsen sont suffisamment grands, les interactions entre particules seront négligées. On ne tiendra donc pas compte des collisions. De même, le nombre de Larmor est suffisamment grand au voisinage du satellite pour que les effets de champ

magnétique soient négligeables. Nous verrons ultérieurement ce qu'implique la grande longueur de Debye.

De plus, nous considérerons que suffisamment loin du satellite, le plasma n'est pas perturbé ; la fonction de répartition des particules peut être approchée par une maxwellienne :

$$g_{\alpha}(v) = n_0 \left( \frac{m_{\alpha}}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{\frac{1}{2}m_{\alpha}v^2}{kT_{\alpha}} \right) \text{ pour } \| x \| \geq L \quad (2.1)$$

où  $\alpha$  désigne l'espèce des particules considérées,  $x$ ,  $v$ ,  $m_{\alpha}$  et  $T_{\alpha}$  sont les positions, vitesses, masses et températures des particules  $\alpha$ .  $n_0$  est la densité de chaque espèce et  $k$  la constante de Boltzmann.

### 2.1.2.2 Plasma issu du propulseur *SPT-100*.

L'utilisation de la propulsion électrique est en forte progression en utilisation commerciale des satellites. Principalement, cela est dû à son importante impulsion spécifique. Celle-ci permet de réduire la masse de carburant embarquée, et ainsi, en la préservant pour une autre utilisation, d'améliorer les performances globales du satellite.

Généralement les plasmas issus de propulseurs électriques sont beaucoup plus denses que le plasma géostationnaire (quelques millions de particules par centimètre carré) mais beaucoup plus froids (quelques électrons-volts).

Dans cette thèse, nous nous limiterons au cas du *SPT-100*. Celui-ci fonctionne au gaz de Xénon, qui, par un processus complexe d'ionisation puis d'accélération dans des champs électriques et magnétiques croisés, expulse à grande vitesse ( $\sim 20000m/s$ ) un plasma. Ce plasma est composé d'ions  $Xe^+$  et  $Xe^{++}$ , de neutres (beaucoup plus lents) et d'électrons. Les caractéristiques typiques du plasma sont les suivantes ( les données proviennent de [23] excepté pour les neutres, de [25] ) :

	$0.31m$	$2m$	$4m$
$n_e(m^{-3})$	$1.5 \times 10^{16}$	$5.1 \times 10^{14}$	$2 \times 10^{14}$
$n_i(X_e^+)$	$1.5 \times 10^{16}$	$5.1 \times 10^{14}$	$2 \times 10^{14}$
$n_i(Xe^{++})$	$1.5 \times 10^{15}$	$4.1 \times 10^{13}$	$2 \times 10^{13}$
$n_n$	$2.9 \times 10^{15}$	$6.9 \times 10^{13}$	$1.7 \times 10^{13}$
$kT_e(eV)$	2	2	2
$kT_i$	2	2	2
$kT_n$	$8.6 \times 10^{-2}$	$8.6 \times 10^{-2}$	$8.6 \times 10^{-2}$
$\lambda_d(m)$	$8.6 \times 10^{-5}$	$4.7 \times 10^{-4}$	$7.4 \times 10^{-4}$
$\rho_{Le}$	$4.8 \times 10^{-2}$	$4.8 \times 10^{-1}$	4.8
$\rho_{Li}$	$2.8 \times 10^2$	$2.8 \times 10^3$	$2.8 \times 10^4$
$L_{ee}^c$	$5.9 \times 10^{-2}$	1.5	3.7
$L_{ei}^c$	$8.3 \times 10^{-2}$	2.1	5.3
$L_{ii}^c$	$2.9 \times 10^1$	$7.4 \times 10^2$	$1.8 \times 10^3$
$L_{nn}^{sd}$	$8.2 \times 10^3$	$3.4 \times 10^5$	$1.4 \times 10^6$
$L_{ni}^{sd}$	$1.6 \times 10^3$	$4.6 \times 10^4$	$1.2 \times 10^5$
$L_{ne}^{dip}$	$1.7 \times 10^2$	$4.9 \times 10^3$	$1.3 \times 10^4$
$L_{in}^{CEX}$	$1.6 \times 10^2$	$4.9 \times 10^3$	$1.2 \times 10^4$

Nous avons fait l'hypothèse que les électrons étaient isothermes, ce qui correspond aux mesures effectuées dans le propulseur par Manzella [23]. Quant aux ions, nous avons supposé qu'ils étaient à la même température. Nous avons aussi pris comme température des neutres  $1000K$  en sortie de propulseur.

Compte tenu du fait que nous nous focalisons sur les ions issus du plasma, nous prenons leur vitesse d'éjection ( $V = 2.2 \times 10^4$  m/s) comme vitesse caractéristique pour calculer les longueurs caractéristiques de collisions ( $L$ ). De plus, les neutres n'étant pas accélérés par le champ électrique du propulseur, on a une vitesse correspondant à une détente, soit  $\sim 500m/s$ .

On constate que la longueur caractéristique pour les collisions électroniques est la plus faible. Toujours en calculant le nombre de Knudsen avec une dimension caractéristique de  $10m$ , une approximation fluide pourra se justifier en sortie de propulseur.

Pour les collisions affectant les neutres, nous pouvons constater qu'elles pourront toutes être négligées excepté les collisions avec échange de charges. Néanmoins le rôle des neutres étant nul dans les mécanismes de charges, nous

pourrons les négliger.

Pour les collisions affectant les ions, on négligera les collisions coulombiennes n'affectant pas beaucoup leur mobilité. Les collisions prépondérantes seront les collisions avec échanges de charges, qui auront pour effet de créer une population d'ions lents.

### 2.1.3 Interactions aux surfaces

Nous considérerons le satellite comme une 'boite' métallique (assimilé à un conducteur parfait) recouverte de diélectrique. A cause du plasma de son environnement extérieur, le satellite reçoit un flot de particules chargées sous la forme d'un courant. Des particules s'implantent en surface, d'autres sont réémises et d'autres sont dirigées vers le conducteur parfait par conductivité. Le bilan de charges reçues n'étant nul uniquement qu'à l'équilibre, la charge électrostatique du satellite s'en trouve affectée.

#### 2.1.3.1 Charge électrostatique et conductivité

Les équations de Maxwell nous permettent de comprendre les mécanismes de prises de charge et de conductivité. Nous les rappelons ici :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial D}{\partial t} + \operatorname{rot} H &= J, \\ \operatorname{div} D &= \rho, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{rot} E &= 0, \\ \operatorname{div} B &= 0, \\ D &= \epsilon E, B = \mu H. \end{aligned}$$

Ces équations sont à considérer au sens des distributions de  $\mathbb{R}^3$ .

$E$  et  $H$  désignent les champs électriques et magnétiques,  $D$  et  $B$  les déplacements électriques et magnétiques.  $J$  et  $\rho$  sont les densités volumiques de courants et de charges électriques.  $\epsilon$  et  $\mu$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité électrique et sont constantes pour chaque diélectrique.

D'après la section précédente, nous pourrons négliger les phénomènes d'induction, nous avons  $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$ .

On a donc,  $\text{rot}E = 0$  et  $E$  dérive d'un potentiel ( électrostatique )  $\Phi$  ;  $E = -\nabla\Phi$ . Et les équations de Maxwell sont équivalentes à :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial D}{\partial t} + \text{rot}H_0 &= J, \\ \text{div}D &= \rho, \\ E &= -\nabla\Phi, \\ B(t=0) &= B_0; \text{div}B_0 = 0, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= 0, \\ D &= \epsilon E, B = \mu H. \end{aligned}$$

où  $H_0$  est le champ magnétique constant correspondant au déplacement  $B_0$  constant vérifiant  $\text{div}B_0 = 0$ . Finalement, en prenant la divergence de la première équation, on obtient le système équivalent :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \text{div}D &= \text{div}J, \\ \text{div}D &= \rho, \\ E &= -\nabla\Phi, \\ B(t=0) &= B_0; \text{div}B_0 = 0, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= 0, \\ D &= \epsilon E, B = \mu H. \end{aligned}$$

En conservant en mémoire que le champ magnétique constant n'intervient plus et que le champ électrique dérive d'un potentiel, nous ne conserverons par la suite que les 2 premières équations écrites sous la forme :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \text{div}D &= \text{div}J, \\ -\text{div}\epsilon\nabla\Phi &= \rho. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Notre satellite est composé d'un conducteur parfait que nous représenterons par l'ouvert  $\Omega_0$  recouvert d'un nombre  $N_d$  finis de diélectriques, représentés

par les ouverts  $(\Omega_k)_{k=1..N_d}$ . On notera  $\Omega = \overline{\bigcup_{k=0..n} \Omega_k}$  l'ouvert représentant le satellite et  $\Omega^c$  l'extérieur de celui-ci. Pour chaque diélectrique on notera  $\epsilon_k$  et  $\sigma_k$  la permittivité et la conductivité électrique. On introduit de plus :

- $\Gamma = \bigcup_{k=0..N_d} \partial\Omega_k$  les interfaces entre chaque sous domaines,
- $\Gamma_{c-v} = \Gamma \setminus \bigcap_{k=1..N_d} \partial\Omega_k$  l'interface entre le conducteur et le vide,
- $\Gamma_{c-d} = \partial\Omega_0 \setminus \Gamma_{c-v}$  l'interface entre le conducteur et les diélectriques,
- $\Gamma_{d-v} = \partial\Omega \setminus \Gamma_{c-v}$  l'interface entre les diélectriques et le vide,
- $\Gamma_{d-d} = \Gamma \setminus (\partial\Omega_0 \cup \partial\Omega)$  les interfaces entre 2 diélectriques voisins.

On introduit  $J_{ext}$  le courant total issu du plasma extérieur. Pour le choix de l'orientation des normales ( $n$ ), nous prendrons toujours les normales pointant vers l'intérieur du satellite et du conducteur parfait.

De plus, on considère que les diélectriques sont suffisamment fins pour que les charges ne s'accumulent pas en volume. Un courant de fuite existe néanmoins par conductivité vers le conducteur parfait. On l'écrit sous la forme :  $J_k = \sigma_k E_k$ . De plus nous négligerons la conductivité surfacique entre deux diélectriques. La propriété fondamentale des conducteurs parfaits nous donne que le champ  $E$  est nul dans le conducteur. De plus il existe à la surface de celui-ci un courant surfacique tangentiel  $J_\Gamma$ .

On suppose que les charges implantées sur les interfaces ont une régularité  $H^{-1/2}$ , que la charge a une régularité  $L^2$  dans  $\Omega^c$ . De plus, nous supposons que  $D$  est suffisamment régulier dans  $\Omega^c$  et dans chaque  $\Omega^k$ . Celui-ci peut cependant avoir des discontinuités entre ces domaines.

En réécrivant  $\text{div}D$  au sens des distributions, on a :

$$\begin{aligned}
& \forall \Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \\
& \int_{\mathbb{R}^3} \text{div}D \Psi dx \\
& = - \int_{\mathbb{R}^3} D \cdot \nabla \Psi dx \\
& = - \int_{\Omega^c} D \cdot \nabla \Psi dx - \sum_k \int_{\Omega_k} D \cdot \nabla \Psi dx \\
& = \int_{\Omega^c} \text{div}D \cdot \Psi dx + \sum_k \int_{\Omega_k} \text{div}D \cdot \Psi dx - \int_{\Gamma} [D \cdot n] \Psi d\gamma.
\end{aligned}$$

où  $[\bullet]$  est le saut de la grandeur  $\bullet$  à travers la surface considérée.

et, du fait que les diélectriques sont fins, nous considérons qu'il n'y a pas de charge dans ceux-ci.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} D &= 0 \text{ dans chaque } \Omega_k, \\ \operatorname{div} D &= \left[ \epsilon_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] \delta_\Gamma \text{ sur } \Gamma. \end{aligned}$$

où  $\delta_\Gamma$  est la mesure de surface portée par  $\Gamma$ .

Nous procédons de même pour  $J = J_{ext} + J_\Gamma \delta_\Gamma$ . Avec  $J_{ext}$  représentant la densité de courant à l'extérieur du satellite, qui est régulier dans  $\Omega^c$  et dans chaque  $\Omega_k$  ( nul dans  $\Omega_0$  ). Celui-ci peut cependant avoir des discontinuités entre ces domaines.  $J_\Gamma$  est une densité de courants surfaciques qui est tangent à  $\Gamma$ .  $J_\Gamma$  est nul en dehors de  $\delta\Omega$ .

$\forall \Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div} J \Psi dx &= - \int_{\mathbb{R}^3} J \nabla \Psi d\gamma \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} J_{ext} \cdot \nabla \Psi dx - \int_{\delta\Omega_0} J_\Gamma \cdot \nabla \Psi d\gamma \\ &= - \int_{\Omega^c} J_{ext} \cdot \nabla \Psi dx - \sum_k \int_{\Omega_k} J \cdot \nabla \Psi dx - \int_{\delta\Omega_0} J_\Gamma \cdot \nabla \Psi d\gamma \\ &= \int_{\Omega^c} \operatorname{div} J_{ext} \cdot \Psi dx + \sum_k \int_{\Omega_k} \operatorname{div} J \cdot \Psi dx + \int_\Gamma [J_{ext} \cdot n] d\gamma + \int_{\delta\Omega_0} \operatorname{div}_\Gamma J_\Gamma \cdot \Psi d\gamma. \end{aligned}$$

$\operatorname{div}_\Gamma J_\Gamma$  est la divergence surfacique de la densité de courant  $J_\Gamma$ .

On a alors en utilisant la relation  $J_k = \sigma_k \nabla \cdot \Phi$  dans  $\Omega_k$  et  $J = 0$  dans  $\Omega_0$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{div} J &= [J_k \cdot n] \delta_{\Gamma_{d-d}} = \left[ \sigma_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] \delta_{\Gamma_{d-d}}. \\ \operatorname{div} J &= (\operatorname{div} J_\Gamma - J_{ext} \cdot n) \delta_{\Gamma_{c-v}}. \\ \operatorname{div} J &= (J_k \cdot n - J_{ext} \cdot n \delta_{\Gamma_{d-v}}) = \left( \sigma_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} - J_{ext} \cdot n \right) \delta_{\Gamma_{d-v}}. \\ \operatorname{div} J &= (\operatorname{div} J_\Gamma - J_k \cdot n) \delta_{\Gamma_{c-d}} = \left( \operatorname{div} J_\Gamma - \sigma_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \delta_{\Gamma_{c-d}}. \end{aligned}$$

De plus, par définition, sachant que la surface du conducteur ( $\Omega_0$ ) est fermée, le courant  $J_\Gamma$  vérifie :

$$\int_{\partial\Omega_0} \operatorname{div} J_\Gamma = 0.$$

L'équation  $-\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} D = \operatorname{div} J$ , devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \epsilon_{k'} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) + \sigma_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \sigma_{k'} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{d-d}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) + \sigma_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} - J_{ext} \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_{d-v}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) + \operatorname{div} J_\Gamma - J_{ext} \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_{c-v}, \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div} J_\Gamma d\gamma + \frac{\partial}{\partial t} \left( -\epsilon_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) - \sigma_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\gamma = 0, \quad (2.6)$$

$$(2.7)$$

Ces équations font état de la prise de charge par le satellite.

En intégrant les équations (2.5) et (2.6), pour éliminer  $\int_{\partial\Omega_0} \operatorname{div} J_\Gamma$  en remarquant que  $\int_{\partial\Gamma_0} \operatorname{div}_\Gamma J_\Gamma = 0$  on a :

$$\int_{\Gamma_{c-v}} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) - J_{ext} \cdot n d\gamma + \int_{\Gamma_{c-d}} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\epsilon_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) - \sigma_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\gamma = 0.$$

Nous rapellons l'équation de Poisson :

$$-\epsilon_0 \Delta \Phi = \rho \text{ dans } \Omega^c, \quad (2.8)$$

$$\Phi = \Phi_c = \text{Cst sur } \partial\Omega_0. \quad (2.9)$$

L'équation (2.8) est l'équation de Poisson Elle traduit les interactions collectives électrostatiques.

La dernière équation (2.9) traduit le fait que la surface du conducteur est équipotentielle.

Pour la clarté de l'exposé nous supposons maintenant que le satellite n'est recouvert que par une seule couche de diélectrique. Les équations à résoudre pour le potentiel sont :

$$\begin{aligned}
& -\epsilon_0 \Delta \Phi = \rho \text{ dans } \Omega^c, \\
& \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) + \sigma_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} - J_{ext} \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_{d-v}, \\
& \int_{\Gamma_{c-v}} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) - J_{ext} \cdot n d\gamma + \int_{\Gamma_{c-d}} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\epsilon_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) - \sigma_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\gamma = 0, \\
& \Phi = \Phi_c \text{ sur } \partial\Omega_0, \\
& \Phi \rightarrow 0 \text{ à l'infini}.
\end{aligned}$$

En introduisant un opérateur de capacité  $\mathcal{C}$  :

$$\Phi \rightarrow \left| \begin{array}{l} \epsilon_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \\ \int_{\Gamma_{c-v}} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) d\gamma, \end{array} \right. \text{ sur } \Gamma_{d-v}$$

un opérateur de conductivité  $\mathcal{K}$  :

$$\Phi \rightarrow \left| \begin{array}{l} \sigma_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} \\ \int_{\Gamma_{c-v}} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\sigma_k \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) d\gamma, \end{array} \right. \text{ sur } \Gamma_{d-v}$$

et  $\mathcal{J}$  représentant le courant total extérieur reçu :

$$\mathcal{J} = \left| \begin{array}{l} J_{ext} \cdot n \\ \int_{\Gamma_{c-v}} J_{ext} \cdot n d\gamma. \end{array} \right. \text{ sur } \Gamma_{d-v}$$

Le système s'écrit :

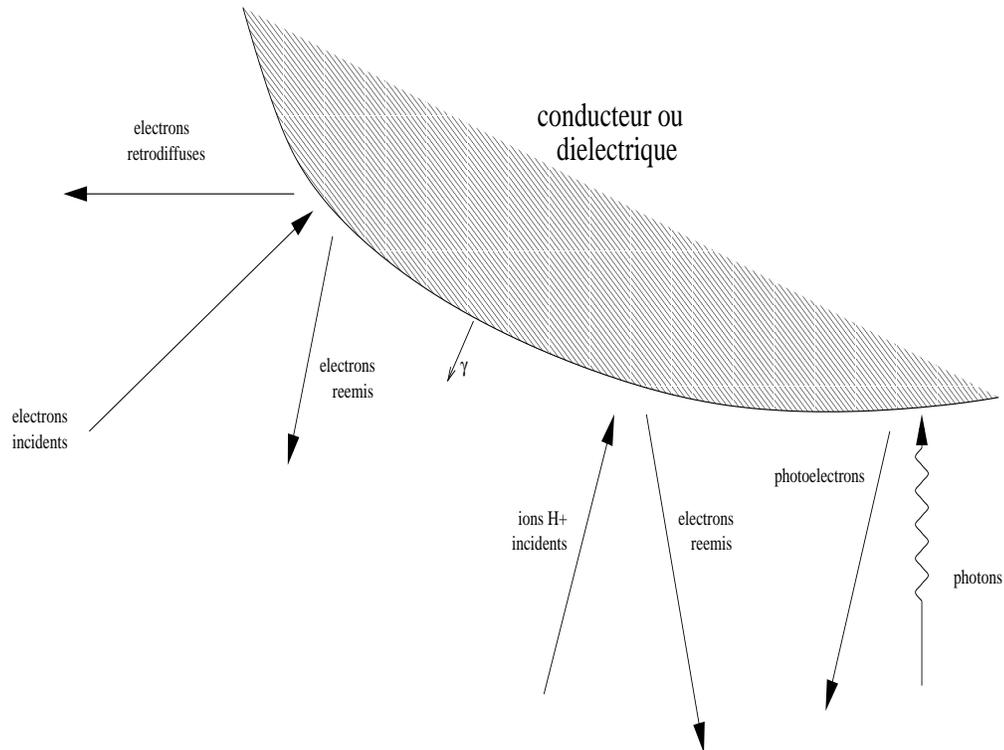
$$\begin{aligned}
& -\epsilon_0 \Delta \Phi = \rho \text{ dans } \Omega^c, \\
& \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{C} \Phi + \mathcal{K} \Phi = \mathcal{J} \text{ sur } \Gamma, \\
& \Phi = \Phi_c \text{ sur } \partial\Omega_0, \\
& \Phi \rightarrow 0 \text{ à l'infini}.
\end{aligned}$$

Nous verrons ultérieurement comment se résout la partie  $-\epsilon_0 \Delta \Phi = \rho$  à l'extérieur du satellite.

### 2.1.3.2 Réémissions aux parois

### 2.1.3.3 Emission secondaire électronique

Sous l'impact d'électrons incidents, des électrons dits secondaires sont réémis par la surface (diélectrique ou conductrice). On distingue généralement



deux sortes de réémissions. Dans la première, les électrons sont diffusés de manière élastique ( “backscattering” ) et possèdent une énergie proche de celle des électrons incidents; ce sont des électrons rétrodiffusés. Dans la deuxième, des électrons secondaires sont vraiment réémis par la surface. Ces derniers sont d’énergie faible (quelques  $eV$ ) et correspondent aux électrons arrachés à la surface.

Les taux d’émissions secondaires, noté ici  $\delta_{back}$  pour les électrons rétrodiffusés et  $\delta_{sec}$  pour ceux vraiment réémis, sont définis par les rapports des courants réémis sur le courant incident en considérant leur vitesse et leur angle d’incidence constant. Ces taux dépendent aussi de paramètres liés à la surface (type de matériau, état de surface, etc. ...)

En considérant un courant d’électrons monocinétiques  $j_{inc}$  de vitesse  $v_{inc}$  frappant une surface de normale  $\gamma$ , et en notant  $j_{back}$  et  $j_{sec}$  les courants réémis, on a :

$$\begin{aligned}\delta_{sec}(v_{inc}) &= \frac{j_{sec}}{j_{inc}}, \\ \delta_{back}(v_{inc}) &= \frac{j_{back}}{j_{inc}}.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Précisément, on a :

$$\delta_{sec}(v_{inc}) = e^2 \delta_m \frac{E_c}{E_m} \exp(-2\sqrt{\frac{E_c}{E_m}}) \exp(\beta_{sec}(E_c)(1 - \cos(\theta))) \quad (2.11)$$

où

$$\begin{aligned}E_c &= \frac{m_e v_{inc}^2}{2}, \\ \theta &= \langle v_{inc}, \gamma \rangle, \\ \beta_{sec}(E_c) &= \exp(\xi(E_c) - \sqrt{(\xi(E_c))^2 + 0.0228}), \\ \text{et } \xi(E_c) &= 0.2755(\ln(\frac{E_c}{E_m}) - 1.658).\end{aligned}$$

où  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  est le produit scalaire.

$E_m$  désigne le niveau d'énergie cinétique pour lequel le taux  $\delta_{sec}$  est maximal (noté alors  $\delta_m$ ).

De façon analogue, on a pour le taux  $\delta_{back}$  :

$$\delta_{back}(v_{inc}) = (A - B \exp(-C.E_c)) \exp(\beta_{back}(Z)(1 - \cos(\theta))) \quad (2.12)$$

où

$$\begin{aligned}E_c &= \frac{m_e v_{inc}^2}{2}, \\ \theta &= \langle v_{inc}, \gamma \rangle, \\ \beta_{back}(Z) &= e^2 Z^{-0.56875}.\end{aligned}$$

et  $Z$  est le numéro atomique du matériau composant la surface.  $A, B$  et  $C$  sont des constantes dépendant du matériau.

On se référera à [19] pour plus de détails sur ces coefficients. Néanmoins ces coefficients ne sont pas les plus précis, comme le remarque C.Berthou dans [2], et on préférera utiliser dans le futur ceux donnés dans [9].

Dans le cadre non monocinétique, pour récupérer le courant total réémis, il suffit d'intégrer suivant la distribution d'électrons incidents,  $f_{inc}(v_{inc})$  :

$$J_{sec,back} = \int_{v_{inc}} j_{sec,back}(v_{inc}) f_{inc}(v_{inc}) dv_{inc}. \quad (2.13)$$

On peut considérer que les réémissions sont de type spéculaire pour les électrons rétrodiffusés. On considèrera donc que l'angle d'incidence est le même que l'angle de réflexion. Pour les vraies émissions secondaires, on considèrera que celles-ci suivent une maxwellienne.

#### 2.1.3.4 Emission secondaire ionique

La loi d'émission d'électrons secondaires due à l'impact d'ions est similaire à celles données précédemment en négligeant cependant la dépendance angulaire.

$$\delta_{prosec}(v_{inc}) = \frac{2\delta_{im}\sqrt{\frac{Ec}{E_{im}}}}{1 + \frac{Ec}{E_{im}}}. \quad (2.14)$$

$\delta_{im}$  et  $E_{im}$  sont des constantes définie de façon analogue à l'émission secondaire électronique en 2.1.3.3.

On trouvera l'expression des coefficients dans [22]

#### 2.1.3.5 Photoémission

Exposées au rayonnement solaire, les surfaces émettent aussi des électrons ( appelés photoélectrons ) de faible énergie (  $\simeq 2 eV$  ). Cette réémission est responsable d'un courant secondaire qu'il faudra considérer car il joue un rôle important dans le mécanisme de charge.

## 2.2 Modélisation mathématique

### 2.2.1 Le système de Vlasov-Poisson

#### 2.2.1.1 Cadre général

On considère dans cette section le cas où la dynamique des particules (ions et électrons) obéit à une équation de Vlasov et où le potentiel électrostatique est donné par l'équation de Poisson.

Plus précisément, nous nous plaçons dans l'ouvert  $O = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  où  $\bar{\Omega}$  est le fermé représentant le satellite.

Et on notera  $\partial\Omega$  la surface délimitant  $\Omega$ . On introduit de plus  $\gamma_\Omega$  la normale extérieure à  $\partial\Omega$ .

Le plasma est supposé non collisionnel et non magnétisé, les ions et les électrons sont simplement transportés par le champ électrique  $E$ , dérivant du potentiel  $\Phi$  ( $E(t, x) = -\nabla\Phi(t, x)$ ). Les fonctions de distribution des ions et des électrons  $f_\alpha$  sont solutions de l'équation de Vlasov :

$$\forall x \in O, \forall v \in \mathbb{R}^3, \forall t \geq 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f_\alpha(t, x, v) - \kappa_\alpha \frac{e \nabla_x \Phi(t, x)}{m_\alpha} \cdot \nabla_v f_\alpha(t, x, v) = 0,$$

où  $\kappa_e = -1$  et  $\kappa_i = +1$ .

Les conditions limites seront précisées ultérieurement.

Le potentiel électrostatique  $\Phi$  vérifie l'équation de Poisson :

$$-\Delta\Phi(t, x) = \frac{e}{\epsilon_0}(n_i(t, x) - n_e(t, x)), \quad (2.16)$$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \Phi(t, x) = 0.$$

où

$$n_\alpha(t, x) = \int_{v \in \mathbb{R}^3} f_\alpha(t, x, v) dv,$$

et où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide.

Le potentiel électrostatique introduit un couplage entre les équations de Vlasov et de Poisson.

### 2.2.1.2 Résultats d'existence et d'unicité

La littérature contient de nombreux résultats sur les équations de Vlasov-Poisson. Dans [16], P.Greengard et P.A. Raviart ont démontré des résultats d'existence et d'unicité, en une dimension d'espace, avec une seule espèce, dans le cas stationnaire. En dimension quelconque, toujours dans le cas stationnaire, F.Poupaud dans [28] a démontré l'existence de solution.

Pour le cas de la dimension 3 et dans le cas instationnaire R. DiPerna et P-L Lions ont démontré dans [12] l'existence de solutions faibles globales. K. Pfaffelmoser, a également montré dans [26] l'existence de solutions globales régulières au système de Vlasov-Poisson instationnaire en dimension 3 d'espace.

### 2.2.2 Plasma d'orbite géostationnaire

Nous rappelons les équations de Vlasov :

$$\forall x \in O, \forall v \in \mathbb{R}^3, \forall t \geq 0,$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f_\alpha(t, x, v) - \kappa_\alpha \frac{e \nabla_x \Phi(t, x)}{m_\alpha} \cdot \nabla_v f_\alpha(t, x, v) = 0,$$

où  $\kappa_e = -1$  et  $\kappa_i = +1$ .

Pour laquelle, dans le cadre géostationnaire, on veut imposer

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f_\alpha(t, x, v) = g_\alpha(v),$$

où  $g_\alpha$  est la maxwellienne donnée par (2.1)

La condition limite sur la surface du satellite est donnée par :

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall v \in \mathbb{R}^3; v \cdot \gamma_\Omega > 0,$$

$$f_e(t, x, v) = \delta_{back}(v - 2(v \cdot \gamma_\Omega) \gamma_\Omega) f_e(t, x, v - 2(v \cdot \gamma_\Omega) \gamma_\Omega) \\ + f_{sec}(t, x, v) + f_{phot}(t, x, v),$$

où

$$f_{sec}(t, x, v) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{m_e}{kT_{sec}} \right)^2 \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}m_e v^2}{kT_{sec}}\right) j_{sec}(t, x),$$

avec

$$j_{sec}(t, x) = \int_{v; v \cdot \gamma_\Omega > 0} \delta_{sec}(v) f_e(t, x, v) v \cdot \gamma_\Omega dv,$$

et

$$f_{phot}(t, x, v) = j_{phot}(t, x) \frac{1}{2\pi} \left( \frac{m_e}{kT_{phot}} \right)^2 \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}m_e v^2}{kT_{phot}}\right).$$

Le potentiel électrostatique  $\Phi$  vérifie l'équation de Poisson :

$$-\Delta \Phi(t, x) = \frac{e}{\epsilon_0} (n_i(t, x) - n_e(t, x)),$$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \Phi(t, x) = 0.$$

Les conditions limites pour le potentiel sur la surface du satellite seront précisées ultérieurement. Pour simplifier l'exposé nous nous plaçons dans le cas d'un satellite composé exclusivement de conducteur, on a :

$$\int_{\partial\Omega} \nabla\Phi(t, x) \cdot \gamma_{\Omega} d\sigma(x) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\rho_s(t, x)}{\epsilon_0} d\sigma(x)$$

$$\Phi = \Phi_c = \text{Cst sur } \partial\Omega$$

où  $d\sigma(x)$  est la mesure de surface sur  $\partial\Omega$ .

L'évolution de la charge surfacique est donnée par l'équation de conservation de la charge  $\rho_s$  accumulée en surface, on a :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\rho_s(t, x)}{\partial t} d\sigma(x) = \int_{\partial\Omega} J_i(t, x) + J_e(t, x) d\sigma(x)$$

où  $J_e$  et  $J_i$  sont les courants incidents à la surface du satellite, définis par :

$$J_{\alpha}(t, x) = \int_{v \in \mathbb{R}^3; v \cdot \gamma_{\Omega} \geq 0} \kappa_{\alpha} e v f_{\alpha}(t, x, v) d^3v$$

### 2.2.2.1 Adimensionnement du problème

On considère un satellite composé exclusivement de conducteur parfait. La charge du satellite est contrôlée principalement par les particules les plus rapides, soit par les électrons. Les potentiels de surface seront de l'ordre de grandeur du potentiel thermique des électrons, soit :

$$\Phi_e^{th} = \frac{m_e \cdot (V_e^{th})^2}{e}.$$

où  $V_e^{th}$  est la vitesse thermique des électrons, soit  $\sqrt{\frac{kT}{m_e}}$ .

Ces potentiel et vitesse seront choisis comme grandeurs d'adimensionnement.

On introduit  $D$  la grandeur caractéristique du satellite,  $T$  le temps caractéristique correspondant,  $\rho$  la charge surfacique caractéristique (  $\rho = en_0 V_e^{th} T$  ) et  $J$  le courant caractéristique (  $J = en_0 V_e^{th}$  ).

On choisit  $n_0$ ,  $f_0 = \frac{n_0}{(V_e^{th})^3}$ ,  $D$ ,  $T$ ,  $\rho$  et  $J$  pour adimensionner les densités, fonctions de distribution, positions, temps, charges surfaciques et courants

respectivement.

Le choix du temps caractéristique en fonction des autres grandeurs nous est donné par l'équation donnant la condition limite sur le potentiel :

$$\nabla\Phi(t, x) \cdot \gamma_\Omega = -\frac{\rho_s(t, x)}{\epsilon_0}.$$

Donne  $\frac{kTe}{eD} = \frac{en_0\sqrt{kTe}}{\sqrt{m_e}\epsilon_0}T$

Soit  $T = \frac{\lambda_d^2}{DV_e}$  alors  $\rho = \frac{\epsilon_0\Phi_e^{th}}{D}$

On introduit ainsi les variables et inconnues adimensionnées :

$$\begin{aligned} \tilde{t} = \frac{t}{T}, \tilde{x} = \frac{x}{D}, \tilde{v} = \frac{v}{V_e^{th}}, \tilde{f}_\alpha(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) &= \frac{f_\alpha(t, x, v)}{f_0}, \tilde{g}_\alpha(\tilde{v}) = \frac{g_\alpha(v)}{f_0}, \\ \tilde{n}_\alpha(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{n_\alpha(t, x)}{n_0}, \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \frac{\Phi(t, x)}{\Phi_e^{th}}, \text{ et } \tilde{\rho}_s(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{\rho_s(t, x)}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ainsi que les constantes sans dimension :

$$\mu = \frac{m_e}{m_i}, \text{ et } \eta = \frac{\lambda_d}{D}.$$

Où  $\lambda_d$  est la longueur de Debye électronique définie par :

$$\lambda_d = \sqrt{\frac{\epsilon_0 KT_e}{n_0 e^2}}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \tilde{g}_e(\tilde{v}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\tilde{v}^2}{2}\right), \\ \tilde{g}_i(\tilde{v}) &= \left(\frac{1}{2\pi\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\tilde{v}^2}{2\mu}\right). \end{aligned}$$

Et les domaines deviennent :

$$\begin{aligned} \tilde{O} &= \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^3; \tilde{x}D \in O\}, \\ \tilde{\Omega} &= \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^3; \tilde{x}D \in \Omega\}. \end{aligned}$$

Le système de Vlasov-Poisson adimensionné s'écrit :

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v})}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) - \mu \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} \tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = 0 \quad , \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0$$

$$\lim_{\|\tilde{x}\| \rightarrow +\infty} \tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = \tilde{g}_i(\tilde{v}) \quad , \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0$$

$$\tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = 0 \quad , \forall \tilde{x} \in \partial \tilde{\Omega}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_{\tilde{\Omega}} > 0, \forall \tilde{t} \geq 0$$

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v})}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) + \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = 0 \quad , \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0$$

$$\lim_{\|\tilde{x}\| \rightarrow +\infty} \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = \tilde{g}_e(\tilde{v}) \quad , \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0$$

$$\tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = \tilde{\delta}_{back}(\tilde{v} - 2\gamma_{\tilde{\Omega}}(\tilde{v} \cdot \gamma_{\tilde{\Omega}}), \theta) \cdot \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v} - 2\gamma_{\tilde{\Omega}}(\tilde{v} \cdot \gamma_{\tilde{\Omega}}))$$

$$+ \tilde{f}_{sec}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) + \tilde{f}_{phot}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) \quad , \forall \tilde{x} \in \partial \tilde{\Omega}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_{\tilde{\Omega}} > 0$$

$$-\Delta_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{1}{\eta^2} (\tilde{n}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) - \tilde{n}_e(\tilde{t}, \tilde{x})) \quad , \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{t} \geq 0$$

$$\lim_{\|\tilde{x}\| \rightarrow +\infty} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) = 0 \quad \forall \tilde{t} \geq 0$$

$$\int_{\partial \tilde{\Omega}} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) \cdot \gamma_{\tilde{\Omega}} d\sigma(x) = - \int_{\partial \tilde{\Omega}} \tilde{\rho}_s(\tilde{t}, \tilde{x}) d\sigma(x) \quad , \forall \tilde{x} \in \partial \tilde{\Omega}, \forall \tilde{t} \geq 0$$

$$\int_{\partial \tilde{\Omega}} \frac{\partial \tilde{\rho}_s(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial \tilde{t}} d\sigma(x) = \int_{\partial \tilde{\Omega}} \tilde{J}_e(\tilde{t}, \tilde{x}) + \tilde{J}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) d\sigma(x) \quad , \forall \tilde{x} \in \partial \tilde{\Omega}, \forall \tilde{t} \geq 0$$

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_c = \text{Cst sur } \partial \tilde{\Omega}$$

Avec

$$\tilde{n}_\alpha(\tilde{t}, \tilde{x}) = \int_{\tilde{v} \in \mathbb{R}^3} \tilde{f}_\alpha(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) d^3 \tilde{v}$$

$$\tilde{J}_\alpha(\tilde{t}, \tilde{x}) = \int_{\tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \tilde{\gamma}_{\tilde{\Omega}}} \kappa_\alpha \tilde{v} \tilde{f}_\alpha(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) d^3 \tilde{v}$$

### 2.2.2.2 Approximation pour le plasma d'orbite géostationnaire

Nous avons vu au 2.1.2, que pour le plasma magnétosphérique, en orbite géostationnaire, la longueur de Debye est grande devant les dimensions du satellite (  $\lambda_d \gg D$  ). Formellement, on écrit le système obtenu lorsque le paramètre  $\frac{1}{\eta}$  tend vers zéro :

$$\tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) - \mu \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} f_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = 0, \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{\|\tilde{x}\| \rightarrow +\infty} \tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) &= \tilde{g}_i(\tilde{v}), \quad \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0 \\ \tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) &= 0, \quad \forall \tilde{x} \in \partial\tilde{\Omega}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_{\tilde{\Omega}} > 0, \forall \tilde{t} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) + \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} f_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = 0, \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{\|\tilde{x}\| \rightarrow +\infty} \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) &= \tilde{g}_e(\tilde{v}), \quad \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0 \\ \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) &= \tilde{\delta}_{back}(\tilde{v} - 2\gamma_{\tilde{\Omega}}(\tilde{v} \cdot \gamma_{\tilde{\Omega}}), \theta) \cdot \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v} - 2\gamma_{\tilde{\Omega}}(\tilde{v} \cdot \gamma_{\tilde{\Omega}})) \\ &+ \tilde{f}_{sec}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) + \tilde{f}_{phot}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}), \quad \forall \tilde{x} \in \partial\tilde{\Omega}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_{\tilde{\Omega}} > 0 \end{aligned}$$

$$-\Delta_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) = 0, \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{t} \geq 0$$

$$\lim_{\|\tilde{x}\| \rightarrow +\infty} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) = 0 \quad \forall \tilde{t} \geq 0$$

$$\int_{\partial\tilde{\Omega}} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) d\sigma(x) = - \int_{\partial\tilde{\Omega}} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\rho}_s(\tilde{t}, \tilde{x}) d\sigma(x), \quad \forall \tilde{x} \in \partial\tilde{\Omega}, \forall \tilde{t} \geq 0$$

$$\int_{\partial\tilde{\Omega}} \frac{\partial \tilde{\rho}_s(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial \tilde{t}} d\sigma(x) = \int_{\partial\tilde{\Omega}} \tilde{J}_e(\tilde{t}, \tilde{x}) + \tilde{J}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) d\sigma(x), \quad \forall \tilde{x} \in \partial\tilde{\Omega}, \forall \tilde{t} \geq 0$$

(2.18)

On constate que l'on obtient le système de Vlasov-Poisson stationnaire pour les ions et les électrons et que la charge d'espace est négligée. C'est ce problème que le logiciel ESCAPE [27] résout. Néanmoins, pour ramener la condition à l'infini sur des distances de l'ordre de  $D$ , il est supposé dans ce logiciel que les distributions de particules suivent une distribution de Maxwell-Boltzmann à l'extérieur du domaine de calcul.

Soit :

$$\begin{aligned} \forall v_x \in \mathbb{R}^+, \\ f_\alpha(x, v_x) = n_0 \left( \frac{m_e}{2\pi k T_e} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( - \frac{\frac{1}{2} m_e v_x^2 + e\Phi(d)}{k T_e} \right) \neq 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

### 2.2.3 Plasma issu du propulseur *SPT* – 100

Le gaz de Xénon est ionisé dans la chambre du propulseur, les ions résultants ( que l'on notera  $i_{Xe^+}$  ) sont accélérés par la tension de décharge  $U_{dech} = 300V$ . Pour décrire le mouvement de ces ions de Xénon rapides, l'équation de Vlasov sera utilisée. Comme nous l'avons vu en introduction, nous ne tiendrons pas compte des collisions élastiques. Les collisions inélastiques, collisions dites d'échange de charge ne ralentissent qu'un faible nombre d'ions rapides, du point de vue de ceux-ci, nous les négligerons aussi.

Par contre, la modélisation des ions lents joue un rôle important dans les mécanismes de charge du satellite, car ils sont susceptibles de revenir sur les surfaces du satellite et d'engendrer un courant. Leur taux de création est donnée par :

$$q_{Xe_i^{+ent}} = n_{Xe^+} n_{Xe} \|V_{Xe^+}\| \sigma_{CEX}(V_{Xe^+}).$$

où  $n_{Xe^+}$ , est la densité d'ions rapides,  $n_{Xe}$  la densité de neutre qui sera prise à 150% de celle des ions rapides,  $V_{Xe^+}$  la vitesse des ions rapides, et  $\sigma_{CEX}(V_{Xe^+})$  la section efficace de collisions inélastiques, donnée par :

$$\sigma^{CEX}(V_{Xe^+}) = (k1 \ln (\|V_{Xe^+}\|) + k2)^2 \times 10^{-20} m^2$$

Soit, en notant  $\tau_{Xe} = 1.5$ , on a :

$$q_{Xe_i^{+ent}} = \tau_{Xe} n_{Xe^+}^2 \|V_{Xe^+}\| \sigma_{CEX}(V_{Xe^+}).$$

Pour décrire le mouvement de ces ions lents, on utilisera aussi une équation de Vlasov.

#### •Ions rapides :

L'équation de Vlasov pour les ions rapides s'écrit :

$$\forall x \in O, \forall v \in \mathbb{R}^3, \forall t \geq 0$$

$$\frac{\partial f_{Xe^+}}{\partial t}(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f_{Xe^+}(t, x, v) - \frac{e \nabla_x \Phi(t, x)}{m_{Xe}} \cdot \nabla_v f_{Xe^+}(t, x, v) = 0$$

La condition limite d'injection de particules en sortie de moteur est donnée par :

$$\forall x \in \Gamma_{sort}, \forall v \in \mathbb{R}^3; v \cdot \gamma_{sort} > 0, f_{Xe^+}(t, x, v) = g_{Xe^+}^{SPT}(x, v)$$

où  $g_{ir}^{SPT}$  est la distribution des ions dans le plan de sortie du propulseur  $\Gamma_{sort}$  de normale  $\gamma_{sort}$ .

La condition limite sur les surfaces du satellite est toujours donnée par :

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall v \in \mathbb{R}^3; v \cdot \gamma_\Omega > 0,$$

$$f_{Xe^+}(t, x, v) = 0.$$

De plus, en considérant que la vitesse d'éjection est grande devant la vitesse thermique des ions, nous considérerons ceux-ci comme monocinétiques. En supposant que les trajectoires issues du moteur ne se coupent pas nous avons :

$$f_{Xe^+}(t, x, v) = n_{Xe^+}(t, x) \delta(v - v_{Xe^+}(t, x)).$$

#### •Ions lents :

Pour les ions lents, les collisions interviennent, nous avons alors la même équation de Vlasov avec un terme source représentant la création de particules :

$$\begin{aligned} \forall x \in O, \forall v \in \mathbb{R}^3, \forall t \geq 0, \\ \frac{\partial f_{Xe_{lents}^+}}{\partial t}(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f_{Xe_{lents}^+}(t, x, v) - \frac{e \nabla_x \Phi(t, x)}{m_{Xe}} \cdot \nabla_v f_{Xe_{lents}^+}(t, x, v) \\ = q_{Xe_{lents}^+}(t, x) \left( \frac{m_{Xe}}{2\pi kT_n} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left( -\frac{\frac{1}{2}m_{Xe}v^2}{kT_n} \right). \end{aligned}$$

où  $kT_n$  est la température des neutres. (nous verrons ultérieurement que cette température est suffisamment faible pour les considérer monocinétiques)

#### •Electrons :

Pour les électrons, nous les considérons à l'équilibre électrostatique de manière analogue à 3.5.1.2, suivant une distribution de Maxwell-Boltzman. En prenant densité et potentiel de référence  $n_{ref}$  et  $\Phi_{ref}$  en sortie de propulseur :

$$n_e(x, v) = n_{ref} \exp\left( \frac{e(\Phi(x) - \Phi_{ref})}{kT_e^{SPT}} \right).$$

Par la suite, nous noterons  $\Delta\Phi(x) = \Phi(x) - \Phi_{ref}$ .

Le choix de  $\Phi_{ref}$  est crucial, en particulier pour le couplage des modèles. Ce choix n'est pas clair. Il faudrait pour cela avoir aussi un modèle pour le plasma du moteur lui-même. Une des possibilité est de relier  $\Phi_{ref}$  au potentiel du satellite  $\Phi_c$ . Le choix le plus simple proposé dans [38] est de considérer  $\Phi_{ref} - \Phi_c$  constant, où  $\Phi_c$  est le potentiel du conducteur représentant la masse électrique du satellite. Correspondant aux mesures prises en vol dans [38] nous prendrons environ  $d\Phi = \Phi_{ref} - \Phi_c = 40V$ .

### •Potentiel :

Pour le couplage par les équations de Maxwell, nous nous reportons à la section 2.1.3. En considérant que le potentiel du satellite est fixé en surface par  $\Phi_s$  ( celui-ci sera par la suite celui du au plasma magnétosphérique ) :

$$\begin{aligned} -\epsilon_0 \Delta_x \Phi(t, x) &= e \left( n_{Xe^+}(t, x) + n_{Xe_{lent}^+}(t, x) - n_e(t, x) \right) \text{ dans } \Omega^c \\ \Phi(t, x) &= \Phi_s(x) \text{ sur } \Gamma_{d-v} \cup \Gamma_{c-d} \\ \Phi &\rightarrow 0 \text{ à l'infini .} \end{aligned}$$

Nous allons voir, qu'après adimensionnement des équations, une des simplifications majeures de la modélisation dans le coeur du jet consiste à imposer la neutralité.

#### 2.2.3.1 Adimensionnement du problème

Nous procédons de manière analogue qu'en section précédente. Néanmoins, les grandeurs d'adimensionnement sont différentes. Pour adimensionner les vitesses des ions rapides nous utiliserons la tension  $U_{dech}$  par laquelle ils sont accélérés pour leur procurer une vitesse caractéristique  $\sqrt{\frac{2eU_{dech}}{m_{Xe}}}$

Pour les ions rapides, on prend :

$$\tilde{t} = \frac{t}{T_{SPT}}, \tilde{x} = \frac{x}{D}, \tilde{v} = \frac{v}{\sqrt{\frac{2eU_{dech}}{m_{Xe}}}},$$

où  $U_{dech}$  est la tension de décharge du propulseur servant à l'accélération des ions rapides.

Pour les ions lents le choix de la vitesse d'adimensionnement est différent, on prends :

$$v_{Xe_{lent}^+} = \frac{v_{Xe_{lent}^+}}{\sqrt{\frac{2kT_e}{m_{Xe}}}}$$

Aussi,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) &= \frac{f_{Xe^+}(t, x, v)}{f_{ref}} e t \tilde{g}_{Xe^+}(\tilde{v}) = \frac{g_{Xe^+}(v)}{f_{ref}}, \\ \tilde{f}_{Xe_{lent}^+}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) &= \frac{f_{Xe_{lent}^+}(t, x, v)}{f_{ref}}, \\ \tilde{n}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \frac{n_{Xe^+}(t, x)}{n_{ref}}, \tilde{n}_{Xe_{lent}^+}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{n_{Xe_{lent}^+}(t, x)}{n_{ref}}, \Delta\tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{e\Delta\Phi(t, x)}{kT_e} \end{aligned}$$

On adimensionne aussi la section efficace de collision inélastique :

$$\sigma(\tilde{v}) = \frac{\sigma(v)}{A}$$

où  $A$  vaut 1 Angstrom.

On introduit les constantes sans dimension :

$$\gamma_{SPT} = \frac{n_0}{n_{ref}} \frac{\lambda_d^2}{D^2}, \eta_{SPT} = \frac{\lambda_D^{SPT}}{D}, \kappa = A n_{ref} D, \Upsilon_p = \frac{eU}{kT_e^{SPT}}, \text{ et } \mathcal{T}_n = \frac{kT_e^{SPT}}{kT_n}$$

Où :

$$\lambda_d^{SPT} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT_e}{n_{ref} e^2}} \text{ et } f_{ref} = n_{ref} \sqrt{\frac{2eU_{dech}}{m_{Xe}}}$$

Pour calculer le temps caractéristique  $T_{SPT}$  nécessaire à modifier la charge surfacique du satellite, nous écrivons que la charge provenant du propulseur pendant ce temps est du même ordre de grandeur que celle provenant de la magnétosphère. On a alors :

$$T_{SPT} = \gamma_{SPT} \frac{D}{\sqrt{\frac{2eU_{dech}}{m_{Xe}}}}$$

En comparant le temps caractéristique pour le propulseur et celui obtenu pour la magnétosphère, on a :

$$\frac{T_{SPT}}{T} = \frac{n_0 \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}}}{n_{ref} \sqrt{\frac{2eU_{dech}}{m_{Xe}}}}$$

soit si l'on se réfère aux grandeurs présentées en 2.1.2,  $\frac{T_{SPT}}{T}$  est de l'ordre de  $1 \times 10^{-9}$ . Les ordres de grandeur sont très différents.

Comme  $T_{SPT} \ll T$ , pour coupler les 2 modèles en vue d'atteindre un état d'équilibre nous utiliserons une approche stationnaire pour le propulseur. Les équations de Valsov décrivant les particules seront donc stationnaires.

Les équations deviennent alors :

•Ions rapides :

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0 \\ \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) - \frac{1}{\Upsilon_p} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = 0 \end{aligned}$$

Avec :

$$\forall \tilde{x} \in \partial\Omega, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_{\Omega} > 0,$$

$$\forall \tilde{x} \in \tilde{\Gamma}_{sort}, \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = 0$$

$$\forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_{sort} > 0; \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = \tilde{g}_{Xe^+}^{SPT}(\tilde{x}, \tilde{v})$$

Et :

$$\tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = \tilde{n}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}) \delta(\tilde{v} - \tilde{v}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}))$$

•Ions lents :

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0 \\ \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) - \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = \\ \kappa \tilde{q}_{Xe^+_{lent}}(\tilde{t}, \tilde{x}) \left( \frac{\mathcal{T}_n}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\mathcal{T}_n \tilde{v}^2) \end{aligned}$$

•Electrons :

$$\tilde{n}_e(\tilde{x}, \tilde{v}) = \exp\left(\tilde{\Delta}\Phi(\tilde{x})\right)$$

•Potentiel :

$$-\eta_{SPT}^2 \Delta_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}_{\tilde{x}} = \tilde{n}_{Xe^+}(\tilde{x}) + \tilde{n}_{Xe^+_{lent}}(\tilde{x}) - \exp\left(\tilde{\Delta}\Phi(\tilde{x})\right) \text{ dans } \tilde{\Omega}^c$$

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_s \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{d-v} \cup \tilde{\Gamma}_{c-d}$$

$$\tilde{\Phi} \rightarrow 0 \text{ à l'infini .}$$

### 2.2.3.2 Approximation pour le plasma issu du propulseur

Au cœur du propulseur, les paramètres  $\gamma$  et  $\eta$  sont très petits ( resp.  $2.52 \times 10^{-6}$  et  $8.66 \times 10^{-16}$ ); de plus, on considèrera le paramètre  $\mathcal{T}$  suffisamment grand ( 24 ). Pour simplifier les équations, nous passons donc formellement à la limite lorsque  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\gamma \rightarrow 0$  et  $\mathcal{T} \rightarrow +\infty$ .

Nous obtenons alors :

•**Ions rapides :**

$$\forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3$$

$$\tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{x}, \tilde{v}) - \frac{1}{\Upsilon_p} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(x) \cdot \nabla_{\tilde{v}} \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{x}, \tilde{v}) = 0$$

Avec :

$$\forall \tilde{x} \in \partial\Omega, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_\Omega > 0,$$

$$\forall \tilde{x} \in \tilde{\Gamma}_{sort}, \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{x}, \tilde{v}) = 0$$

$$\forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_{sort} > 0, \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{x}, \tilde{v}) = \tilde{g}_{Xe^+}^{SPT}(\tilde{x}, \tilde{v})$$

Et :

$$\tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{x}, \tilde{v}) = \tilde{n}_{Xe^+}(\tilde{x}) \delta(\tilde{v} - \tilde{v}_{Xe^+}(x))$$

•**Ions lents :**

$$\forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3$$

$$\tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_{Xe_{lent}^+}(\tilde{x}, \tilde{v}) - \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} \tilde{f}_{Xe_{lent}^+}(\tilde{x}, \tilde{v}) = \kappa \tilde{q}_{Xe_{lent}^+}(\tilde{x}) \delta(v)$$

Nous constatons que le terme source devient un Dirac, et donc correspond à des émissions à vitesse nulle. Si le champ électrique accélérant les particules est supposé axisymétrique autour d'un axe ( $Oz$ ), alors les particules auront un flot axisymétrique.

•**Electrons :**

$$\tilde{n}_e(x, v) = \exp\left(\tilde{\Delta}\Phi(x)\right)$$

•**Potentiel :**

$$\tilde{n}_{Xe^+}(\tilde{x}) + \tilde{n}_{Xe_{lent}^+}(\tilde{x}) - \exp\left(\tilde{\Delta}\Phi(\tilde{x})\right) = 0 \text{ dans } \Omega^c$$

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}) = \tilde{\Phi}_s(\tilde{x}) \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{d-v} \cup \tilde{\Gamma}_{c-d}$$

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}) \rightarrow 0 \text{ à l'infini .}$$

Cette équation signifie que la neutralité peut être imposée dans le coeur du jet. Nous pouvons alors calculer le potentiel en fonction de la densité électronique :

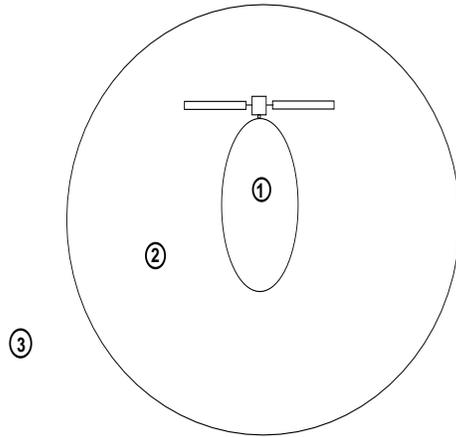
$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}) = \Phi_{ref} + \log \left( \tilde{n}_{Xe^+}(\tilde{x}) + \tilde{n}_{Xe_{lent}^+}(\tilde{x}) \right)$$

Néanmoins, ceci n'est valable que dans les zones où la densité est suffisamment importante pour que la longueur de Debye soit suffisamment faible. Dans les zones où la densité ionique est faible, nous ne ferons plus cette hypothèse et résoudrons l'équation de Poisson avec charge d'espace :

$$\begin{aligned} -\eta_{SPT}^2 \Delta_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{x}) &= \tilde{n}_{Xe^+} + \tilde{n}_{Xe_{lent}^+} - \exp \left( \tilde{\Delta} \tilde{\Phi}(\tilde{x}) \right) \text{ dans } \Omega^c \\ \tilde{\Phi} &= \tilde{\Phi}_s \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{d-v} \cup \tilde{\Gamma}_{c-d} \\ \tilde{\Phi} &\rightarrow 0 \text{ à l'infini .} \end{aligned}$$

Les deux zones différentes seront déterminées par un critère sur le nombre de Debye. Lorsque la longueur de Debye est suffisamment faible nous imposons la neutralité, sinon nous résoudrons l'équation de Poisson.

Nous donnons ici, un schéma représentant ces différentes zones :



La zone 1 correspond au cœur du jet où la neutralité du plasma sera imposée, la zone 2 à une zone où le plasma issu du propulseur est encore

présent mais où la neutralité ne peut être imposée. La zone 3 correspond à des longueurs de Debye très grandes. La charge d'espace peut être alors négligée. Nous renvoyons au paragraphe 2.2.2.1 pour sa modélisation. Le problème qui reste à traiter est de trouver des méthodes numériques pour résoudre numériquement les modèles dans les différentes zones. Il faut ensuite proposer des mécanismes de couplage entre ces modèles. Ce sera l'objet des chapitre 5, 6, et 7. Avant de s'attaquer à ce problème complexe nous allons valider les adimensionnements choisis en étudiant des modèles unidimensionnels au chapitre 3 et en réalisant des mesures expérimentales au chapitre 4. Ceux-ci nous fourniront l'ordre de grandeur des quantités physiques intéressantes.

# Chapitre 3

## Modélisations simplifiées unidimensionnelles

### 3.1 Un modèle 1D simplifié

Dans ce modèle, proposé par Gilles Akoun ( EADS - CCR ), on considère que les électrons sont à l'équilibre et que les ions sont monocinétiques.

Deux cas sont étudiés, on commencera par décrire le cas d'un conducteur plan parfait, puis celui d'un conducteur recouvert d'une fine couche de diélectrique.

Pour des considérations numériques, l'infini est ramené à une distance  $L$  suffisamment grande. Le plasma supportant un écart de neutralité sur des distances de quelques longueurs de Debye, on prendra  $L$  de cet ordre de grandeur.

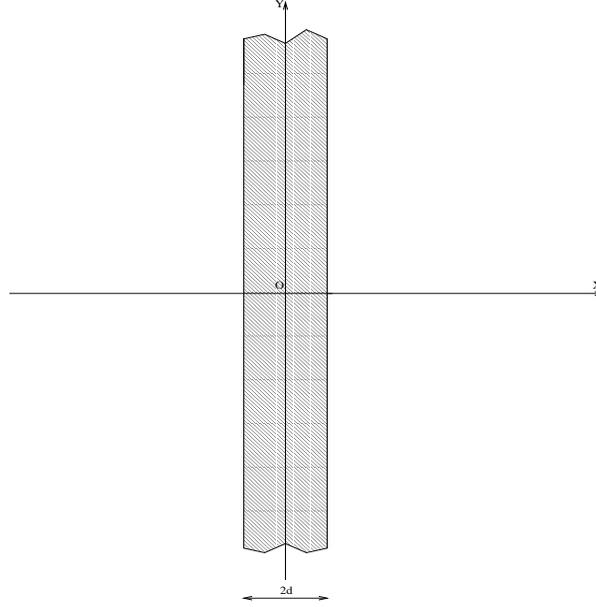
#### 3.1.1 Dérivation du modèle

Nous commençons par réécrire le système de Vlasov-Poisson unidimensionnel.

##### 3.1.1.1 Le système de Vlasov-Poisson unidimensionnel

Nous nous intéressons à la charge d'une surface composée d'un conducteur d'épaisseur  $2d$  dans la direction  $(Ox)$  et infini dans les directions  $(Oy)$  et  $(Oz)$ . On négligera les densités de particules réémises par la surface.

La configuration est :



La symétrie du problème nous permet de supposer que le potentiel ne dépend que de  $x$  et que les distributions de particules ne dépendent que de  $x$  et de  $v_x$ . De plus, la symétrie par rapport au plan  $(Oyz)$  nous permet de considérer que toutes les fonctions de  $x$  sont paires et de raisonner uniquement pour les  $x > 0$ . En intégrant en  $v_y$  et  $v_z$  les équations de Vlasov, on retrouve le cas monodimensionnel :

$$\forall x \in ]d, +\infty[, \forall v_x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}(t, x, v_x) + v_x \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(t, x, v_x) - \kappa_\alpha \frac{e}{m_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, x) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_x}(t, x, v_x) = 0. \quad (3.1)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f_\alpha(x, v_x) = g_\alpha(v_x), \forall v_x \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

$$f_\alpha(d, v_x) = 0, \forall v_x \in \mathbb{R}^+. \quad (3.3)$$

où

$$g_\alpha(v_x) = n_0 \left( \frac{m_\alpha}{2\pi kT_\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left( -\frac{\frac{1}{2}m_\alpha v_x^2}{kT_\alpha} \right). \quad (3.4)$$

En notant  $\rho_s$  la charge implantée en surface, l'équation de Poisson s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \Phi(t, x)}{\partial x^2} &= \frac{e}{\epsilon_0} (n_i(t, x) - n_e(t, x)), \forall x \in ]d, +\infty[, \\ \frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x}(d) &= -\frac{\rho_s}{\epsilon_0}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

où

$$n_\alpha(t, x) = \int_{v_x \in \mathbb{R}} f_\alpha(t, x, v_x) dv_x.$$

Nous verrons dans le modèle stationnaire que la condition limite (3.2) est délicate à imposer. Nous allons maintenant faire des hypothèses simplificatrices qui conduisent au modèle proposé par G.Akoun. Certaines peuvent se justifier au moins formellement à partir du système de Vlasov-Poisson. D'autres seront plus phénoménologiques.

### 3.1.1.2 Modélisation des électrons

On considère que les électrons sont à chaque instant à l'équilibre suivant une distribution de Maxwell-Boltzmann :

$$f_e(t, x, v_x) = n_0 \left( \frac{m_e}{2\pi k T_e} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( \frac{-\frac{1}{2} m_e v_x^2 + e \Phi(t, x)}{k T_e} \right). \quad (3.6)$$

Cette distribution est bien solution de l'équation de Vlasov quasi-stationnaire vérifiant les conditions aux limites à l'infini :

$$\begin{aligned} &\forall x \in ]d, +\infty[, \forall v_x \in \mathbb{R}, \\ v_x \cdot \frac{\partial f_e}{\partial x}(t, x, v_x) + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, x) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial v_x}(t, x, v_x) &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_e(t, x, v_x) = g_e(v_x), \forall v_x \in \mathbb{R}$$

On a donc négligé le terme  $\partial_t f_e$  dans l'équation de Vlasov. La distribution  $f_e$  dépend cependant du temps car le potentiel en dépend.

Mais la distribution  $f_e$  ne vérifie pas les conditions limites imposées sur la plaque.

En effet on a :

$$\forall v_x \in \mathbb{R}^+; \quad f_e(t, d, v_x) = n_0 \left( \frac{m_e}{2\pi kT_e} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{\frac{1}{2}m_e v_x^2 + e\Phi(t, d)}{kT_e} \right) \neq 0 \quad (3.7)$$

Cependant, nous verrons que, pour vérifier cette condition aux limites, la modélisation unidimensionnelle par l'équation de Vlasov stationnaire nous impose une demi-maxwellienne à l'infini. ( i.e. en  $x = L$  )

### 3.1.1.3 Modélisation des ions

Les ions sont, quant à eux, supposés monocinétiques. De plus la variation en temps de leur vitesse étant négligée, leur distribution est alors donnée par :

$$f_i(t, x, v_x) = n_i(t, x)\delta(v_x - v_i(t, x))$$

En prenant les moments d'ordre 0 et 1 de l'équation de Vlasov, on obtient le système équivalent à l'équation de Vlasov sous l'hypothèse monocinétique :

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial n_i v_i}{\partial x} = 0 \quad (3.8a)$$

$$\frac{\partial n_i v_i}{\partial t} + \frac{\partial n_i v_i^2}{\partial x} = -\frac{e}{m_i} n_i \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (3.8b)$$

Avec les conditions limites (suggérées par G. Akoun) :

$$\begin{aligned} n_i(t, L) &= n_0 \\ n_i(t, L)v_i(L) &= j_e \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} n_0 &= \int_{v_x \in \mathbb{R}} g_i(L, v_x) = \\ j_e &= \int_{v_x \in \mathbb{R}^-} v_x g_i(L, v_x) = -n_0 \sqrt{\frac{kT_i}{2\pi m_i}} \end{aligned}$$

Ces conditions limites correspondent, au niveau cinétique, à prendre une maxwellienne en  $x = L$  pour la concentration. Par contre, pour le flux,

que l'on ne peut avoir nul, correspond à une demi-maxwellienne. Ces conditions limites semblent délicates à justifier par une analyse asymptotique de l'équation de Vlasov. De plus, on va négliger le terme d'accélération des ions :  $\frac{\partial v_i}{\partial t}(t, x) \simeq 0$ . En injectant alors (3.8a) dans (3.8b) et en simplifiant par  $n_i$  le système se réécrit :

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial n_i v_i}{\partial x} = 0, \quad (3.9a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 + e\Phi \right) = 0. \quad (3.9b)$$

Cette dernière équation exprime la conservation de l'énergie totale (électrostatique et cinétique).

Compte tenu des conditions aux limites en  $L$  on obtient :

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 + e\Phi = \frac{kT_i}{4\pi},$$

et en supposant que  $\Phi$  est négatif, on a :

$$\forall x > d, v_i(t, x) = -\sqrt{\frac{kT_i}{2\pi m_i} - 2\frac{e}{m_i}\Phi(t, x)}.$$

En injectant cette dernière relation dans (3.8a), on obtient l'équation décrivant l'évolution de la densité ionique :

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( n_i \sqrt{\frac{kT_i}{2\pi m_i} - 2\frac{e}{m_i}\Phi(t, x)} \right) = 0.$$

### 3.1.1.4 Evolution de la charge surfacique de la plaque

L'évolution de la charge surfacique est donnée par l'équation de continuité de la charge  $\rho_s$  accumulée en surface s'écrit, i.e. :

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = J_i + J_e + J_{sec} + J_{back},$$

où  $J_\beta$  sont les courants d'électrons, d'ions et de particules réémises. Nous ferons l'hypothèse que la densité des particules correspondant aux réémission est négligeable.

On prendra pour les électrons :

$$\begin{aligned} J_e &= -e \int_0^{+\infty} f_e(t, d, v_x) v_x dv_x, \\ &= -en_0 \exp\left(\frac{e\Phi(t, d)}{m_e}\right) \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}}. \end{aligned}$$

Et pour les ions :

$$J_i = en_i(t, d) \sqrt{\frac{kT_i}{2\pi m_i} - 2\frac{e}{m}\Phi(t, d)}.$$

De plus, en utilisant l'expression de la densité électronique (3.7) et la formule (2.13), les courants réémis se mettent sous la forme :

$$J_{back,sec} = -g_{back,sec} J_e$$

Les coefficients  $g_{back}$  et  $g_{sec}$  sont des constantes que l'on calcule grâce aux formules :

$$g_{back} = \left(\frac{m_e}{kT_e}\right) \left(\frac{\exp(\beta_{back}(Z)) - 1 - \beta_{back}(Z)}{\beta_{back}^2(Z)}\right) \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{m_e u^2}{kT_e}\right) \delta_{back}(u^2, 0) u^3 du,$$

et

$$g_{sec} = \left(\frac{m_e}{kT_e}\right) \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{m_e u^2}{kT_e}\right) \left(\frac{\exp(\beta(u^2)) - 1 - \beta_{sec}(u^2)}{\beta_{sec}^2(u^2)}\right) \delta_{sec}(u^2, 0) u^3 du.$$

### 3.1.1.5 Equation de Poisson

La densité électronique étant connue en fonction du potentiel, on obtient :

$$n_e(t, x) = n_0 \exp\left(\frac{e\Phi(t, x)}{kT_e}\right)$$

Le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Poisson non linéaire :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dx^2} &= -\frac{e}{\epsilon_0} \left( n_i(t, x) - n_0 \exp\left(\frac{e\Phi(t, x)}{kT_e}\right) \right), \quad \forall x > d, \\ \Phi(L) &= 0, \\ \frac{d\Phi}{dx}(t, d) &= -\frac{\rho_s(t)}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

### 3.1.1.6 Le modèle final

Les équations précédentes nous permettent de nous ramener aux seules inconnues,  $\Phi(t, x)$ ,  $n_i(t, x)$  et  $\rho_s(t)$ , solutions des équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left( n_i(t, x) \sqrt{V_i^{th2} - \frac{2e}{m_i} \Phi(t, x)} \right) &= 0, \\ \forall t > 0, n_i(t, L) &= n_0, \\ \forall x > d, n_i(0, x) &= n_0, \end{aligned} \quad (3.10a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_s}{\partial t}(t) &= e \left( n_i(t, d) \sqrt{V_i^{th2} - \frac{2e}{m_i} \Phi(t, d)} \right. \\ &\quad \left. - n_0 \exp \left( \frac{e\Phi(t, d)}{m_e} \right) V_e^{th} (1 - g_{back} - g_{sec}) \right), \\ \rho_s(0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.10b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(t, x) &= -\frac{e}{\epsilon_0} (n_i(x) - n_0 \exp \left( \frac{e\Phi(t, x)}{m_e} \right)), \\ \Phi(L) &= 0, \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial x}(d) &= \frac{\rho_s(t)}{\epsilon_0}, \end{aligned} \quad (3.10c)$$

où  $V_\alpha^{th}$  est la vitesse thermique des particules  $\alpha$ .

### 3.1.2 Approximation numérique par différences finies

On considère la discrétisation de l'intervalle  $]d, L[$  en  $N_x$  points :

$$\forall j \in \{0..N_x\}, x_j = d + j\Delta x$$

où

$$\Delta x = \frac{L - d}{N_x}.$$

On introduit la discrétisation en temps :

$$\forall j \in \mathbb{N}, t_j = j\Delta t.$$

Les grandeurs  $n_j^k, \Phi_j^k, \rho_s^k$  désignent les approximations des grandeurs physiques,  $n_i(t_k, x_j), \Phi(t_k, x_j), \rho_s(t_k)$ .

$$\begin{aligned} n_j^k &= n_i(t_k, x_j), \\ \Phi_j^k &= \Phi(t_k, x_j), \\ \rho_s^k &= \rho_s(t_k). \end{aligned}$$

### 3.1.2.1 Schéma pour les ions :

Pour l'équation de continuité donnant la densité des ions, l'équation est résolue par un schéma aux différences finies décentré d'ordre un en temps et en espace. Celui-ci s'écrit :

$$\forall j = 1..N_x - 1, n_j^{k+1} = n_j^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( n_{j+1}^k \sqrt{V_i^{th2} - \frac{2\Phi_{j+1}^k}{m_i}} - n_j^k \sqrt{V_i^{th2} - \frac{2\Phi_j^k}{m_i}} \right)$$

$$n_{N_x}^{k+1} = n_0$$

### 3.1.2.2 Schéma pour la charge surfacique :

La charge surfacique est recalculée à chaque pas de temps par le schéma d'ordre un en temps :

$$\rho_s^{k+1} = \rho_s^k + \Delta t \left( en_i^k \sqrt{V_i^{th2} - \frac{2e\Phi_1^k}{m_i}} - n_0 V_e^{th} \exp\left(\frac{e\Phi_1^k}{kTe}\right) (1 - g_{sec} - g_{back}) \right).$$

### 3.1.2.3 Schéma pour le potentiel :

Le potentiel est recalculé à chaque pas de temps par un algorithme de Newton construit à partir de la discrétisation de l'équation de Poisson par différences finies centrées suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_1^{k+1} - \Phi_2^{k+1} &= \frac{\Delta x}{\epsilon_0} \rho_s^{k+1}, \\ \Phi_{i+1}^{k+1} - 2\Phi_i^{k+1} + \Phi_{i-1}^{k+1} &= \frac{\Delta x^2}{\epsilon_0} e \left( n_0 \exp\left(\frac{e\Phi_i^{k+1}}{kTe}\right) - n_i^{k+1} \right), \\ \Phi_{N_x}^{k+1} &= 0. \end{aligned}$$

Ce schéma se réécrit sous la forme matricielle :

$$A.\Phi^{k+1} = B(\Phi^{k+1}),$$

où  $A$  est la matrice de masse,  $\Phi^{k+1}$  le vecteur des  $(\Phi_i^{k+1})_{i \in \{1..Nx\}}$  et  $B(\Phi^{k+1})$  le vecteur de terme général :

$$\frac{\Delta x^2}{\epsilon_0} e \left( n_0 \exp \left( \frac{e\Phi_i^{k+1}}{kTe} \right) - n_i^{k+1} \right).$$

La résolution par l'algorithme de Newton d'itérées indicées par  $l$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} A.(\Psi_{l+1} - \Psi_l) &= B(\Psi_l) + B'(\Psi_l)(\Psi_{l+1} - \Psi_l)\Psi_{l+1} \\ &= \Psi_l - (A - B'(\Psi_l))^{-1}.(A\Psi_l - B(\Psi_l)), \end{aligned}$$

où  $B'(\Psi_k)$  est la matrice diagonale de terme :

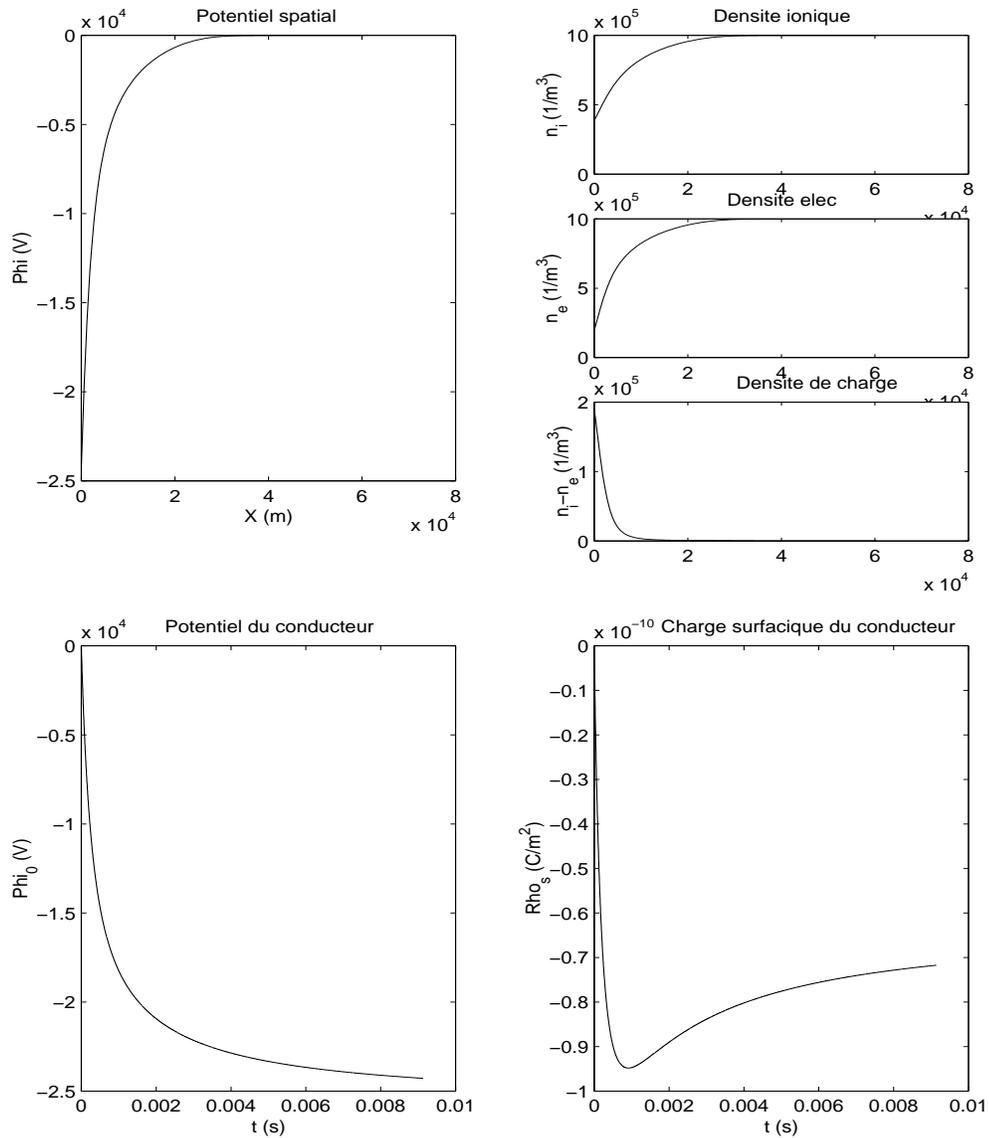
$$(B'(\Psi_l))_{i,i} = \frac{\Delta x^2}{kTe\epsilon_0} e^2 \left( n_0 \exp \left( \frac{e\Phi_i^{k+1}}{kTe} \right) \right).$$

On arrête les itérations lorsque  $\| A.\Psi_k - B(\Psi_k) \|_{l^2}$  est suffisamment petit.

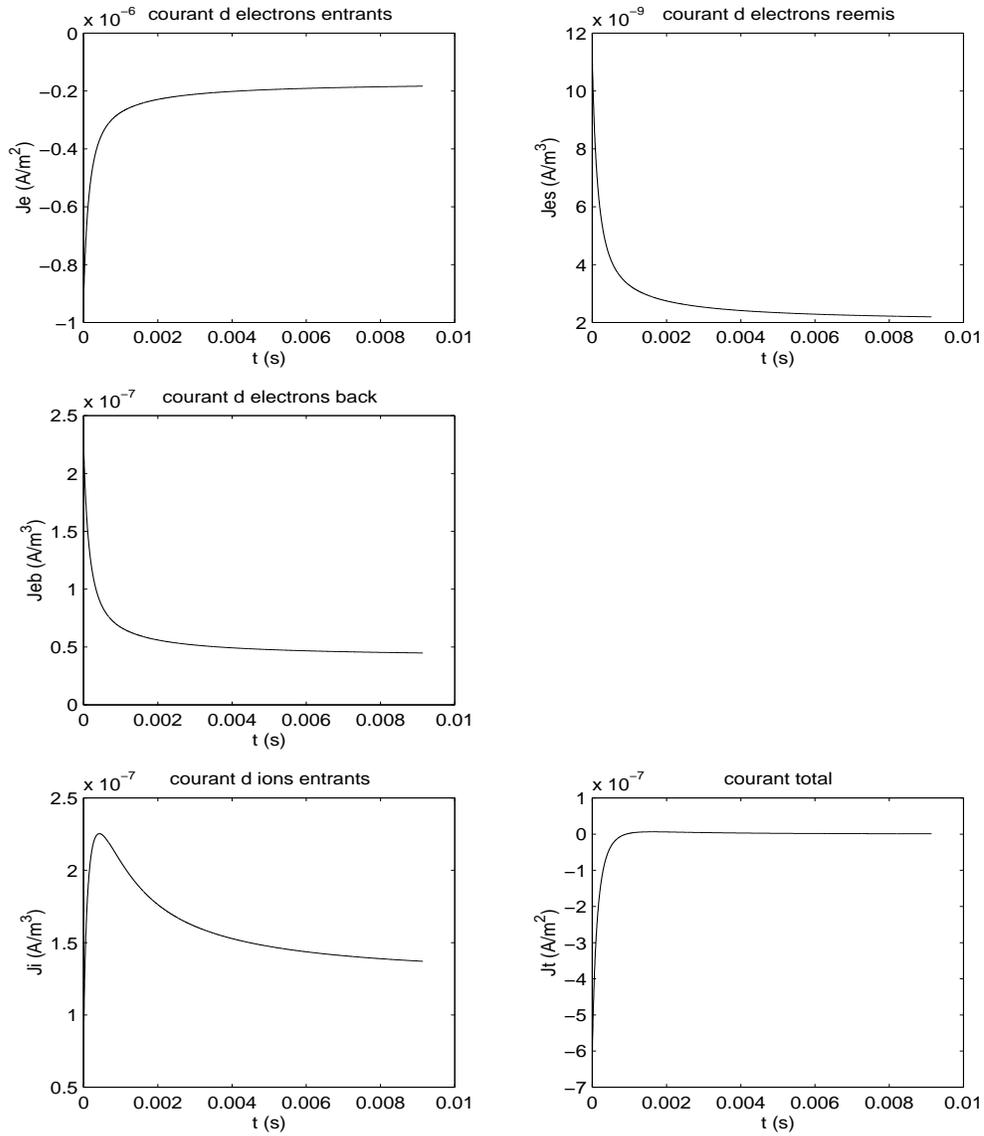
Pour initialiser l'algorithme, on utilise la valeur  $\psi_0 = \Phi^k$  (ou le vecteur nul à l'instant initial).

### 3.1.3 Résultats Numériques

On donne ici les résultats obtenus pour une plaque en aluminium plongé dans un plasma neutre de densité  $n_0 = 1e6 \text{ m}^{-3}$  et de température  $kT_e = kT_i = 15keV$  ( les coefficients de réémission seront trouvés dans [19]).

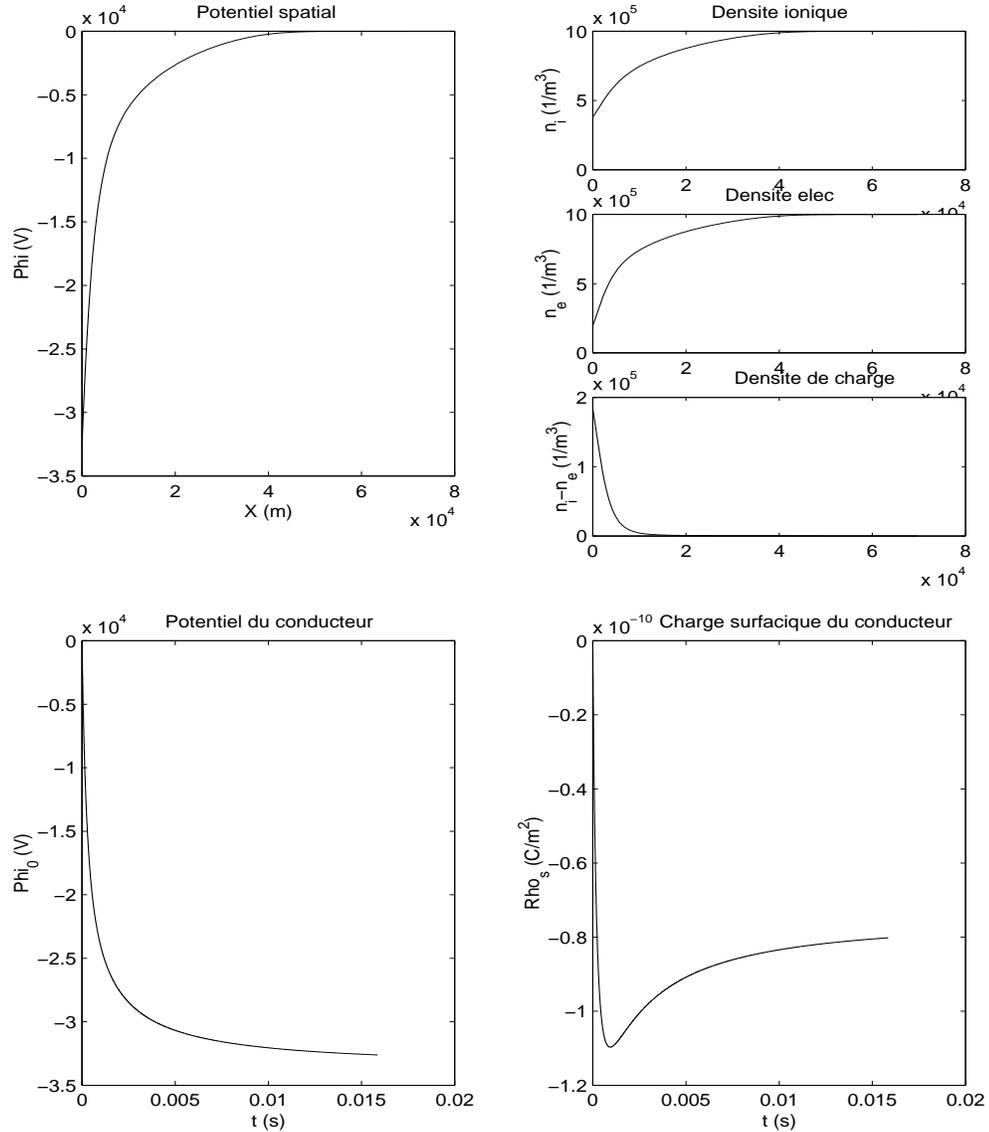


Les figures de la partie supérieure représentent le potentiel et les densités de charge à l'équilibre. Les figures de la partie inférieure représentent les évolutions temporelles du potentiel et de la charge surfacique du conducteur. Nous constatons sur le potentiel une bonne convergence du modèle, nous obtenons l'équilibre pour une valeur de  $-24kV$  (quelque fois la température électronique), en conséquence nous constatons sur la densité de charge, une densité d'ions plus importante relativement aux électrons au voisinage de la plaque.

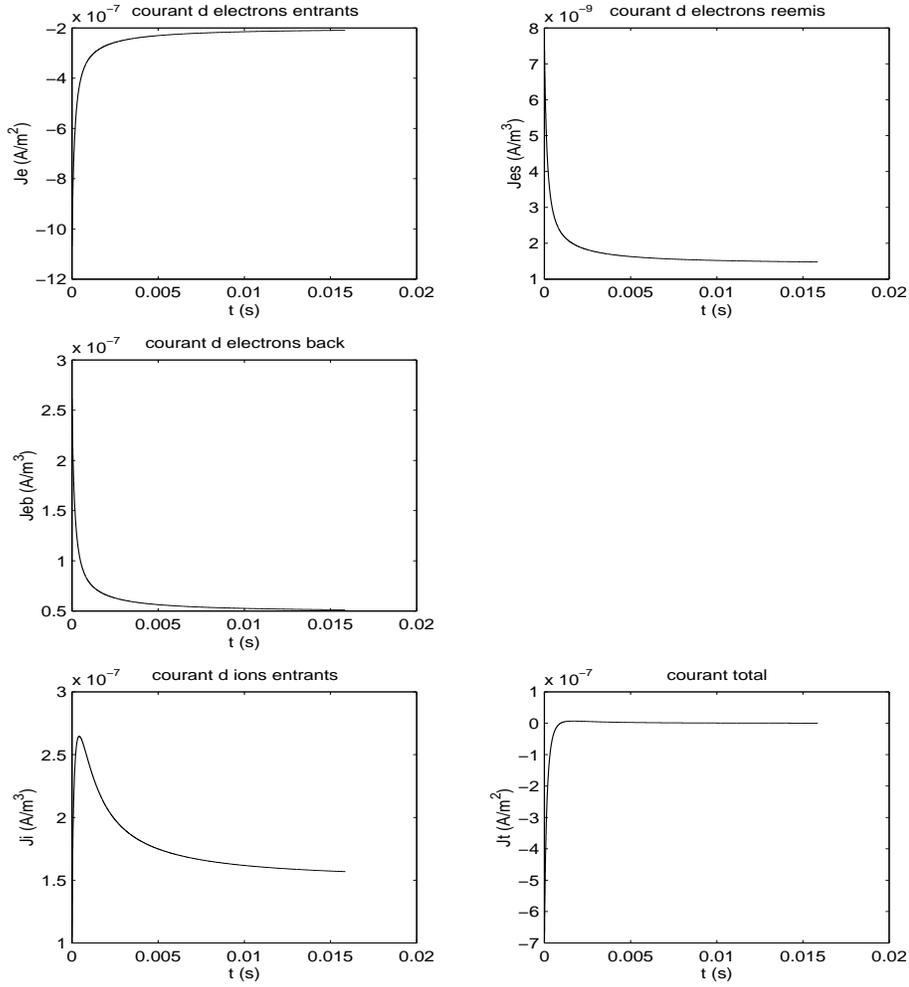


Les figures représentent les évolutions temporelles des courants reçus par la plaque. Respectivement, de haut en bas et de gauche à droite, nous avons le courant d'électrons incident, le courant d'électrons réémis par émission secondaire, le courant d'électrons réémis par 'backscattering', le courant d'ions incident et le courant total. Nous constatons qu'à l'équilibre le courant total s'annule, en accord avec les équations.

De même, on donne les résultats obtenus pour une plaque en aluminium plongée dans un plasma neutre de densité  $n_0 = 1e6m^{-3}$  et de température  $kT_e = 20keV$  et  $kT_i = 28keV$ .

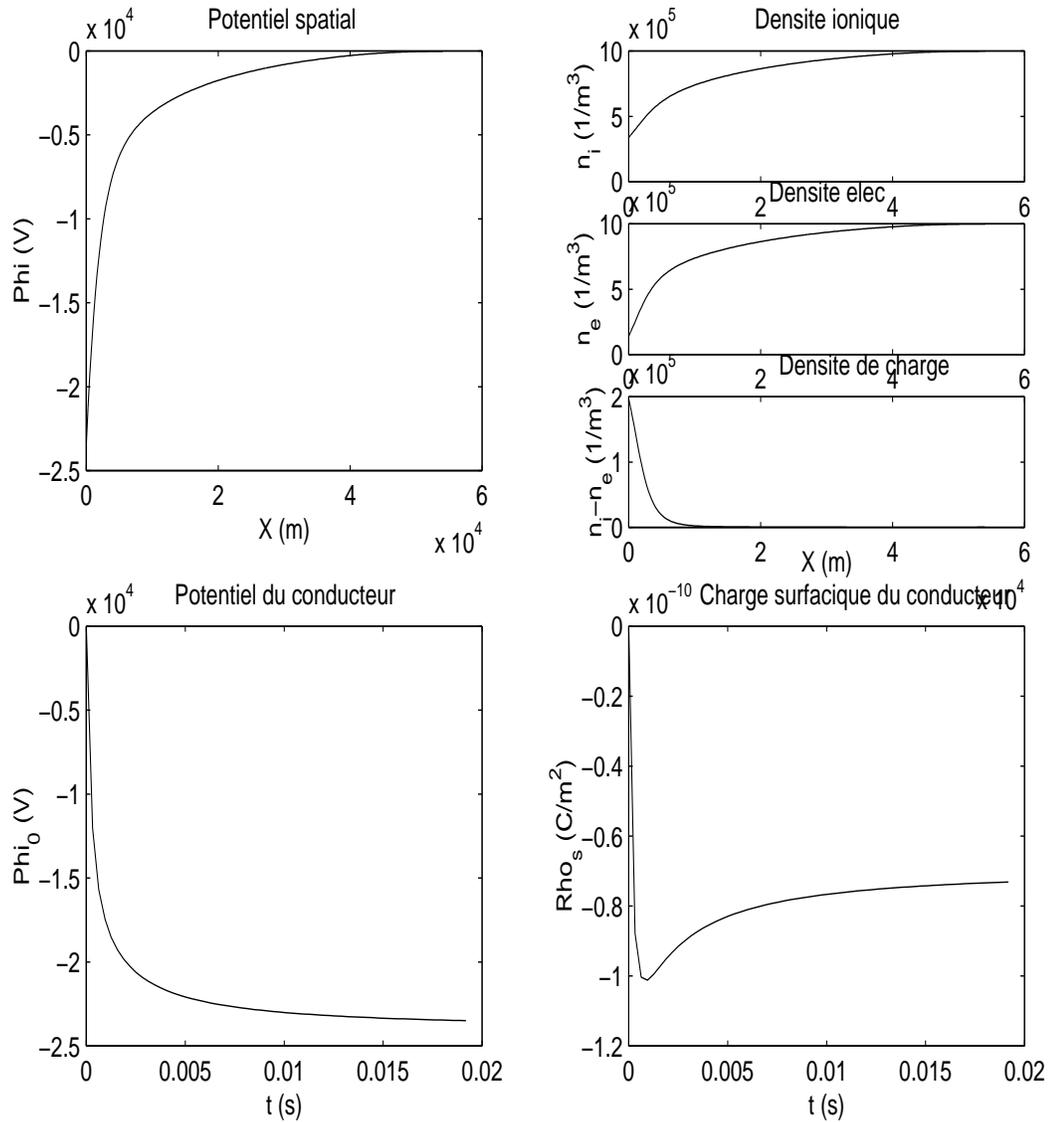


Toujours, nous constatons une bonne convergence du modèle numérique, au bout de temps  $t > .02s$  le potentiel et la charge surfacique du conducteur n'évoluent plus. La valeur d'équilibre du potentiel du conducteur est de  $-3.2 \times 10^4V$ , elle correspond à quelque fois la température électronique et donc bien à l'ordre de grandeur attendu et nous renseigne déjà sur la validité de l'adimensionnement du système.

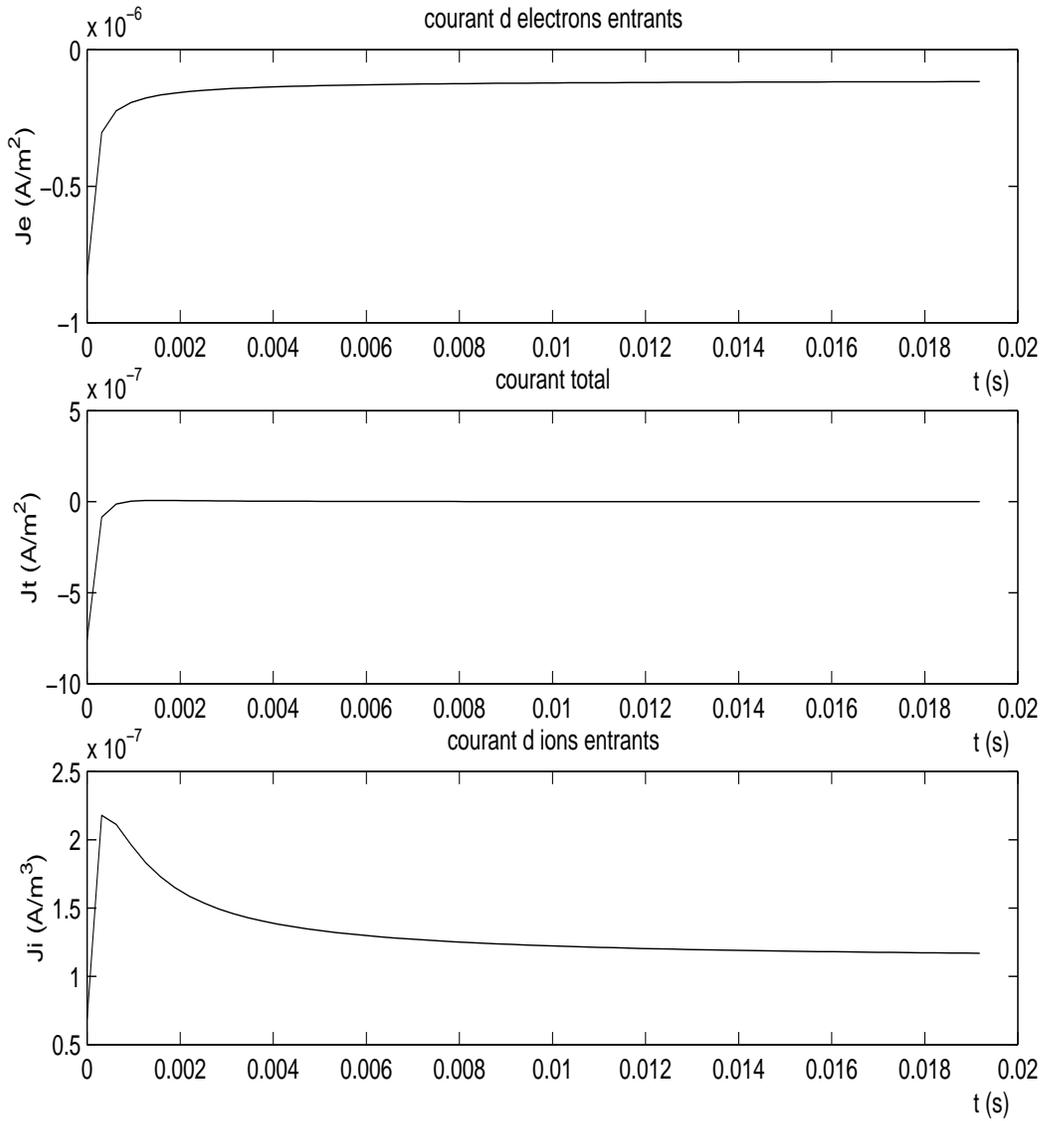


Nous retrouvons le fait que le courant total s'annule lorsque l'équilibre est atteint. Nous pouvons aussi constater qu'à mesure que le potentiel diminue le courant d'ions augmente et le courant d'électrons augmente.

Dans le but ultérieur de comparer les modèles numériques nous donnons ici un cas test obtenu en absence de réémissions.



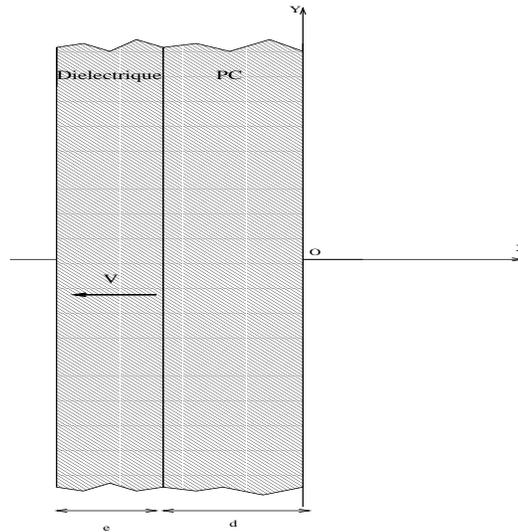
Nous constatons que l'absence de réémissions n'a pas d'effets importants sur le potentiel d'équilibre. La littérature [19] mentionnent que cela est faux en présence de photoémission, ce qui n'a pas été testé ici.



Nous constatons une bonne convergence du modèle, les courants d'ions et d'électrons sont en adéquation avec l'évolution du potentiel. Nous constatons, que le courant d'électrons contrôle les phénomènes de charge avant l'équilibre, le courant d'ions restant négligeable.

### 3.1.4 Cas du conducteur recouvert de diélectrique

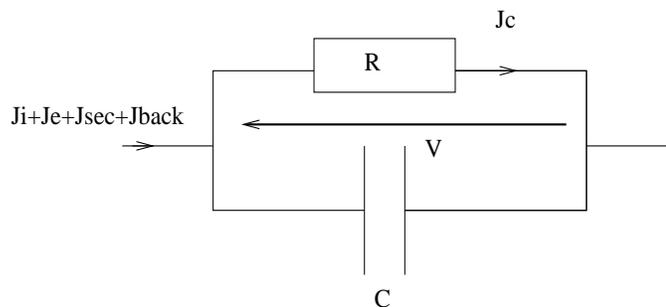
On considère ici un conducteur d'épaisseur  $d$  dans la direction  $(Ox)$  et infini dans les directions  $(Oy)$  et  $(Oz)$  recouvert d'une fine couche de diélectrique d'épaisseur  $e$ .



La perte de symétrie nous impose le calcul des densités de particules et du potentiel de chaque coté de notre plaque. La modélisation est analogue au cas précédent, seules les conditions aux limites pour le potentiel seront modifiées.

#### 3.1.4.1 Modèle Capacitif résistif

Dans ce modèle, présenté dans [22], on assimile le diélectrique à un condensateur  $C$  en parallèle avec une résistance  $R$  de fuite permettant de modéliser le courant de conduction  $J_{cond}$  vers le conducteur.



$R$  et  $C$  sont les grandeurs exprimées par unité de surface et sont données par :

$$\begin{aligned} R &= \frac{\varepsilon}{\sigma} \\ C &= \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{e} \end{aligned}$$

où  $\sigma$  est la résistivité surfacique du diélectrique et  $\varepsilon_r$  sa permittivité relative.

On introduit de plus  $V$  la différence de potentiel régnant à l'intérieur du diélectrique. Soit la différence de potentiel entre  $-d$  et  $-e - d$ . Ainsi que  $J_i$  le courant de conduction à l'intérieur du diélectrique.  $\Phi_{diel}(x)$  est le potentiel régnant à l'intérieur du diélectrique. Le potentiel du conducteur est  $\Phi_{PC}$ , il est constant à l'intérieur de celui-ci. On a  $V = \Phi_{diel}(-e - d) - \Phi_{PC}$ .

L'équation permettant de décrire l'évolution de la différence de potentiel du condensateur s'écrit :

$$C \frac{\partial V}{\partial t} = J_i^{diel} + J_e^{diel} + J_{sec}^{diel} + J_{back}^{diel} - J_{cond}$$

où  $J_\beta^{diel}$  sont les courants d'électrons, d'ions et de particules réémises côté diélectrique. Le courant est donné par la relation  $J_{cond} = RV$ .

Pour la charge surfacique de la plaque métallique, on a :

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = J_i^{cond} + J_e^{cond} + J_{sec}^{cond} + J_{back}^{cond} + J_{cond}$$

où  $J_\beta^{cond}$  sont les courants d'électrons, d'ions et de particules réémises côté du conducteur.

Les conditions limites pour le potentiel sur les surfaces s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(-e - d) &= -\frac{\rho_s^{cond}}{\varepsilon_0}, \\ \Phi(-e) &= \Phi_{PC}, \\ \Phi^{diel}(0) &= V + \Phi^{PC}. \end{aligned}$$

### 3.1.4.2 Approximation numérique

Le schéma numérique de résolution est identique au cas du conducteur parfait pour le calcul des densités spatiales ainsi que des courants provenant de la magnétosphère. Néanmoins le travail doit être fait de chaque côté de la plaque. La résolution des équations décrivant l'évolution de la charge en surface est aussi faite par différences finies de manière analogue à 3.1.2.

On introduit  $V^k$  la différence de potentiel  $V$  au temps  $t_k$ ,  $V^{k+1}$  et  $\rho_s^{k+1}$  sont calculées par :

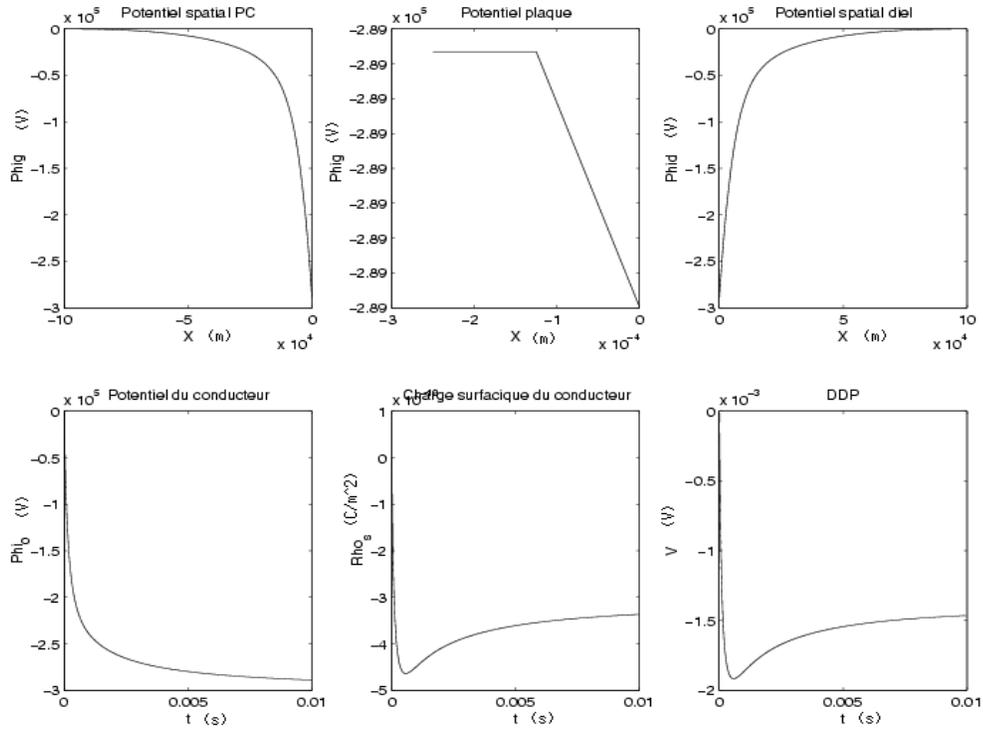
$$V^{k+1} = V^k + C\Delta t \left( J_i^{diel} + J_e^{diel} + J_{sec}^{diel} + J_{back}^{diel} - \frac{V^k}{R} \right)$$

$$\rho_s^{k+1} = \rho_s^k + \Delta t \left( J_i^{PC} + J_e^{PC} + J_{sec}^{PC} + J_{back}^{PC} + \frac{V^k}{R} \right)$$

Pour la résolution de l'équation de Poisson, il faut, à chaque pas de temps, commencer par calculer le potentiel spatial du côté du conducteur puis le potentiel surfacique de celui-ci. On peut alors déterminer la condition limite du côté du diélectrique.

### 3.1.4.3 Résultats numériques

On donne les résultats obtenus pour une plaque en aluminium recouverte de Kapton d'épaisseur  $125\mu m$  plongée dans un plasma neutre de densité  $n_0 = 1e6m^{-3}$  et de température  $kT_e = kT_i = 10keV$ . La conductivité du Kapton est  $\sigma = 10^{-16} \Omega^{-3}$  et sa permittivité relative  $\epsilon_r = 3.5$  ( les coefficients de réémissions seront trouvés dans [19])

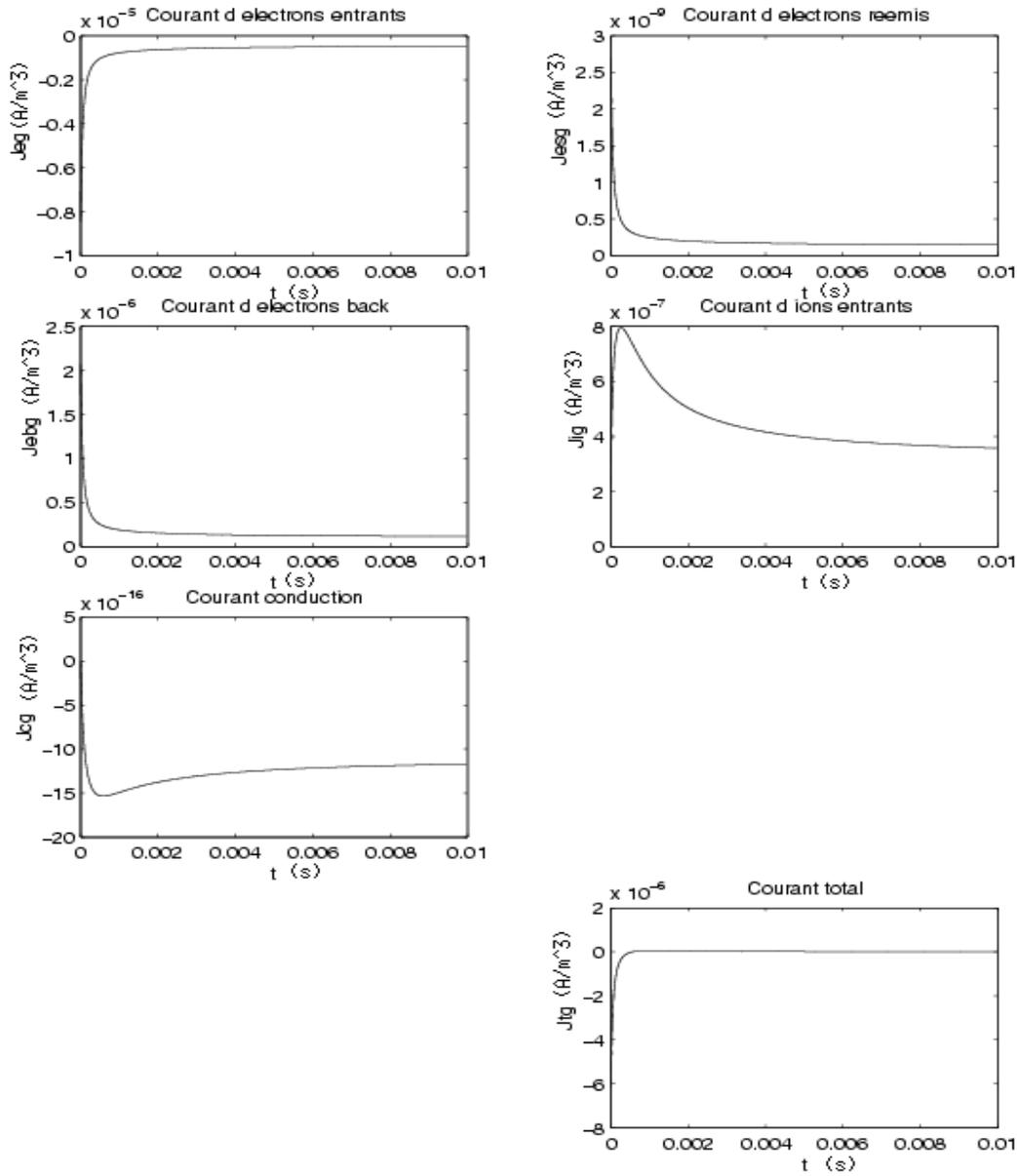


Nous donnons ci-dessus respectivement en haut, les évolutions spatiales du potentiel, à gauche du conducteur, dans le diélectrique, et à droite de celui-ci, et en bas les évolutions temporelles du potentiel du conducteur, de la

charge surfacique et de la différence de potentiel régnant dans le diélectrique. Nous constatons toujours convergence du modèle de chaque côté du diélectrique. De plus le potentiel du conducteur et celui du diélectrique sont très proches.

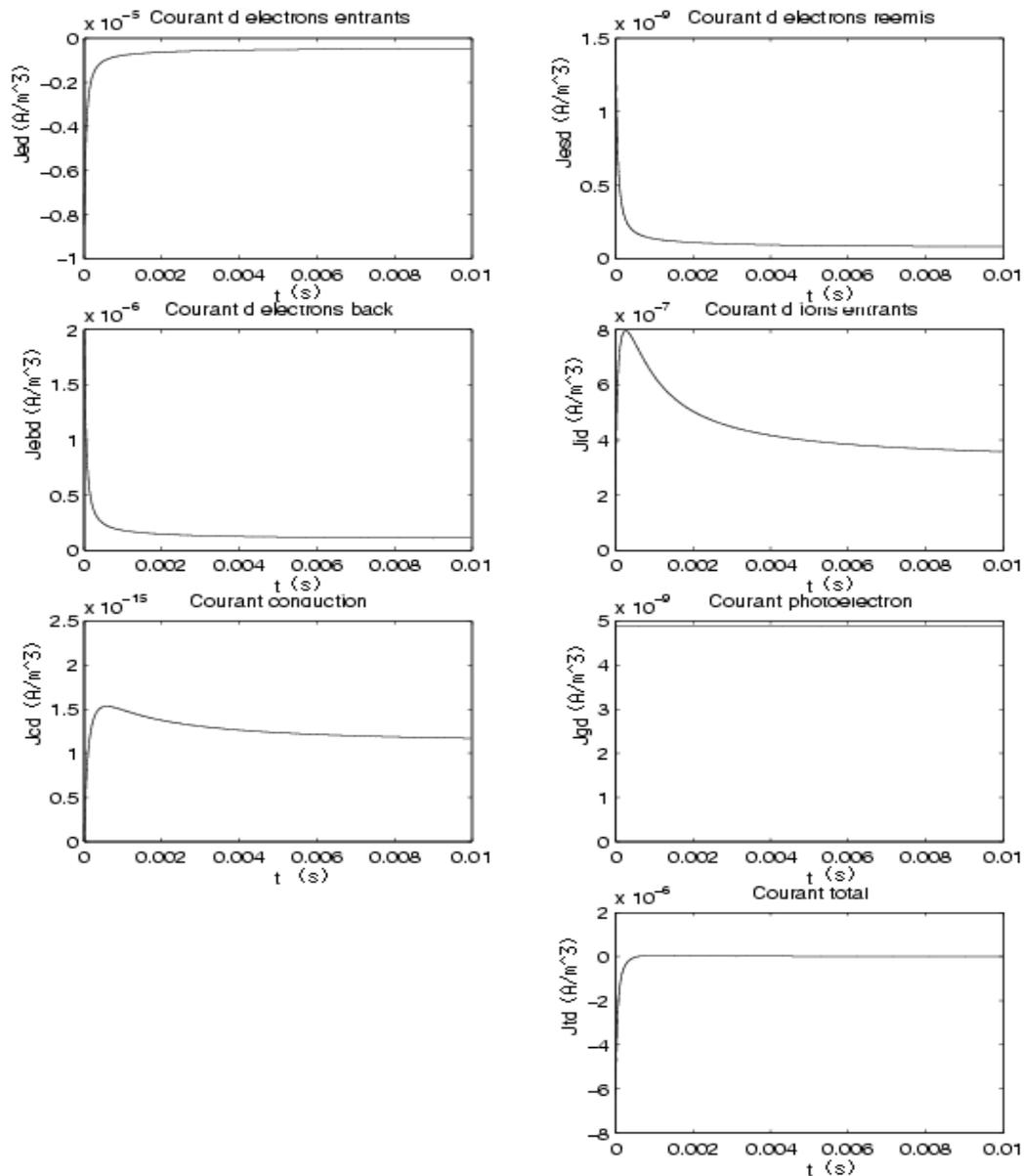
Nous donnons ici, le courants coté conducteur, de manière analogue au cas du conducteur seul. Nous avons ajouté le courant de conduction dans le diélectrique.

### Courant incident côté conducteur



Nous constatons une nouvelle fois que le courant total s'annule à l'équilibre, et que nous avons un très faible courant de conduction. Celui-ci est proportionnel à la différence de potentiel entre le conducteur et le diélectrique qui est aussi très faible.

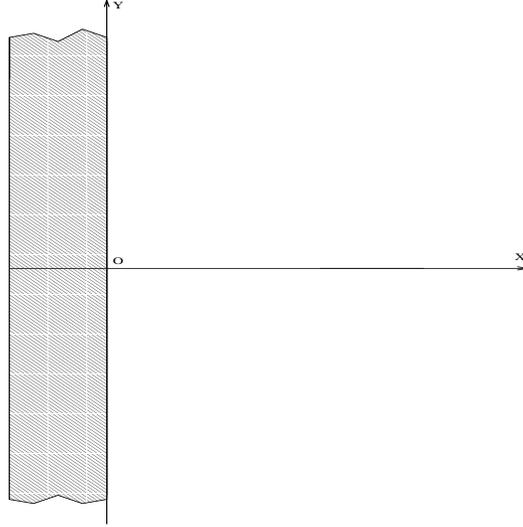
### Courant incident côté diélectrique



Côté diélectrique, nous faisons les mêmes constatations.

## 3.2 Modèle stationnaire de Vlasov Poisson

Nous nous intéressons à l'état d'équilibre d'un conducteur plan infini dans les directions  $(Oy)$  et  $(Oz)$ , dans les conditions de charge décrites précédemment.



On négligera les densités de particules réémises par la surface. Nous chercherons de plus l'état stationnaire, les équations ne dépendront plus du temps.

L'équation de Vlasov stationnaire s'écrit :

$$\forall x \in ]0, L[, \forall v_x \in \mathbb{R}, \quad v_x \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(x, v_x) - \kappa_\alpha \frac{e}{m_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_x}(x, v_x) = 0 \quad (3.11)$$

Avec les conditions aux limites :

$$f_\alpha(L, -v_x) = g_\alpha(L, -v_x), \forall v_x \in \mathbb{R}^+ \quad (3.12)$$

$$f_\alpha(0, v_x) = 0, \forall v_x \in \mathbb{R}^+$$

où

$$g_\alpha(x, v_x) = n_0 \left( \frac{m_\alpha}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{\frac{1}{2} m_\alpha v_x^2}{kT} \right) \quad (3.13)$$

On choisit pour potentiel de référence, le potentiel à l'infini. Pratiquement, on impose  $\Phi(L) = 0$ . La surface du satellite sera à un potentiel d'équilibre  $\Phi_0$  négatif. On va chercher une solution où le potentiel spatial est croissant. On a,

$$\begin{aligned} -\frac{d^2\Phi}{dx^2} &= \frac{e}{\epsilon_0}(n_i(x) - n_e(x)), \forall x \in ]0, L[, \\ \Phi(0) &= \Phi_0, \\ \Phi(L) &= 0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

où

$$n_\alpha(x) = \int_{v_x \in \mathbb{R}} f_\alpha(x, v_x) dv_x.$$

L'équilibre étant atteint, la somme des courants sur la surface est nul. On a :

$$e \int_{v_x \in \mathbb{R}} v_x f_i(0, v_x) dv_x - e \int_{v_x \in \mathbb{R}} v_x f_e(0, v_x) dv_x = 0. \tag{3.15}$$

### 3.2.1 Réduction du problème

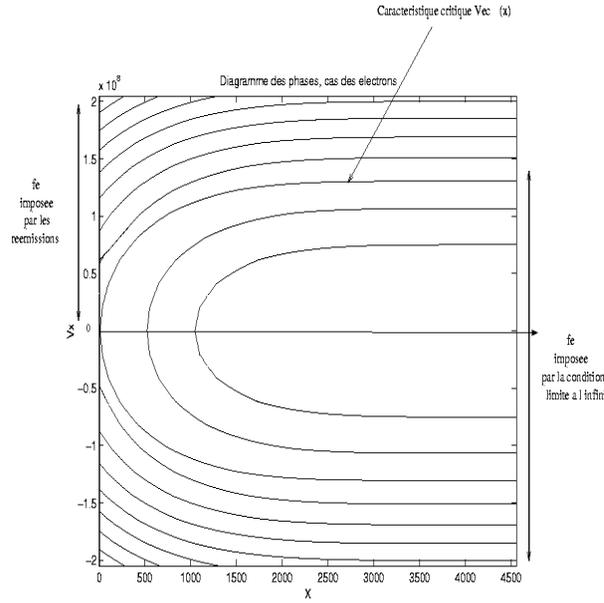
Nous allons voir que les équations de Vlasov (3.11) munies de leurs conditions aux limites (3.12) permettent de calculer entièrement les densités  $n_\alpha$ .

De plus, celles-ci avec la condition d'équilibre sur les courants (3.15) permet de calculer le potentiel  $\Phi_0$ .

Ainsi on se ramènera à la résolution d'un problème elliptique non linéaire donné par l'équation de Poisson.

- Cas des électrons :

Le potentiel étant supposé croissant, le diagramme des phases est alors :



En résolvant le problème par la méthode des caractéristiques, on a :

$$f_e(x, v_x) = \begin{cases} n_0 \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k T_e}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_e v_x^2}{k T_e} + \frac{e\Phi(x)}{k T_e}\right) & \text{si } v_x < \sqrt{\frac{2e}{m_e}(\Phi(x) - \Phi_0)}, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \quad (3.16)$$

Cela nous permet de calculer la densité d'électrons :

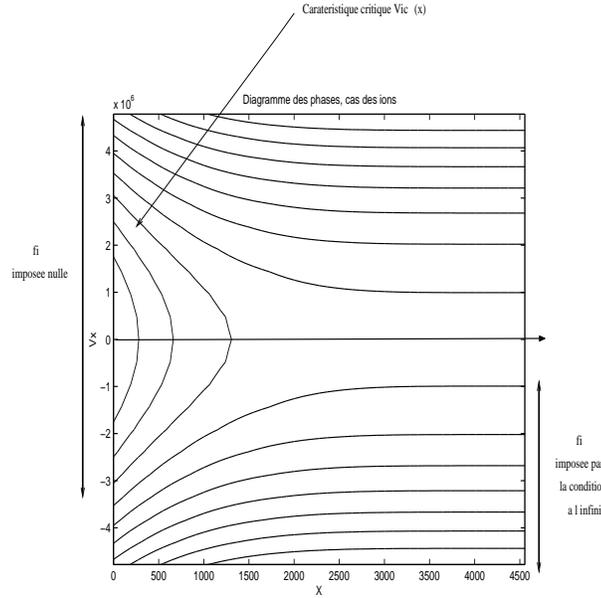
$$\begin{aligned} n_e(x) &= n_0 \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k T_e}} \exp\left(\frac{e\Phi(x)}{k T_e}\right) \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{2e}{m_e}(\Phi(x) - \Phi_0)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_e v_x^2}{k T_e}\right) dv_x, \\ &= \frac{n_0}{2} \exp\left(\frac{e\Phi(x)}{k T_e}\right) \left(1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{e(\Phi(x) - \Phi_0)}{k T_e}}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ainsi que le courant électronique incident à la plaque :

$$\begin{aligned} J_e &= en_0 \sqrt{\frac{m_e}{2\pi kT_e}} \exp\left(\frac{e\Phi_0}{kT_e}\right) \int_{-\infty}^0 v_x \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_e v_x^2}{kT_e}\right) dv_x, \\ &= -en_0 \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} \exp\left(\frac{e\Phi_0}{kT_e}\right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

• Cas des ions :

De même que pour les électrons, le diagramme des phases pour les ions est :



On a :

$$f_i(x, v_x) = \begin{cases} n_0 \sqrt{\frac{m_i}{2\pi kT_i}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_i v_x^2}{kT_i} - \frac{e\Phi(x)}{kT_i}\right) & \text{si } v_x < -\sqrt{-\frac{2e}{m_i} \Phi(x)}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.19)$$

Cela nous permet de calculer la densité d'ions :

$$\begin{aligned}
 n_i(x) &= n_0 \sqrt{\frac{m_i}{2\pi kT_i}} \exp\left(\frac{-e\Phi(x)}{kT_i}\right) \int_{-\infty}^{-\sqrt{-\frac{2e}{m_i}\Phi(x)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_i v_x^2}{kT_i}\right) dv_x, \\
 &= \frac{n_0}{2} \exp\left(-\frac{e\Phi(x)}{kT_i}\right) \left(1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{-\frac{e\Phi(x)}{kT_i}}\right)\right),
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

ainsi que le courant ionique incident à la plaque :

$$\begin{aligned}
 J_i &= -en_0 \sqrt{\frac{m_i}{2\pi kT_i}} \exp\left(-\frac{e\Phi_0}{kT_i}\right) \int_{-\infty}^{-\sqrt{-\frac{2e}{m_i}(\Phi_0)}} v_x \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_i v_x^2}{kT_i}\right) dv_x, \\
 &= en_0 \sqrt{\frac{kT_i}{2\pi m_i}}.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

- Calcul de  $\Phi_0$

L'équation (3.15), ainsi que les expressions des courants (3.21) et (3.18) permettent de calculer  $\Phi_0$  :

$$\Phi_0 = -\frac{kT_e}{e} \ln\left(\sqrt{\frac{kT_e m_i}{kT_i m_e}}\right). \tag{3.22}$$

- Problème réduit :

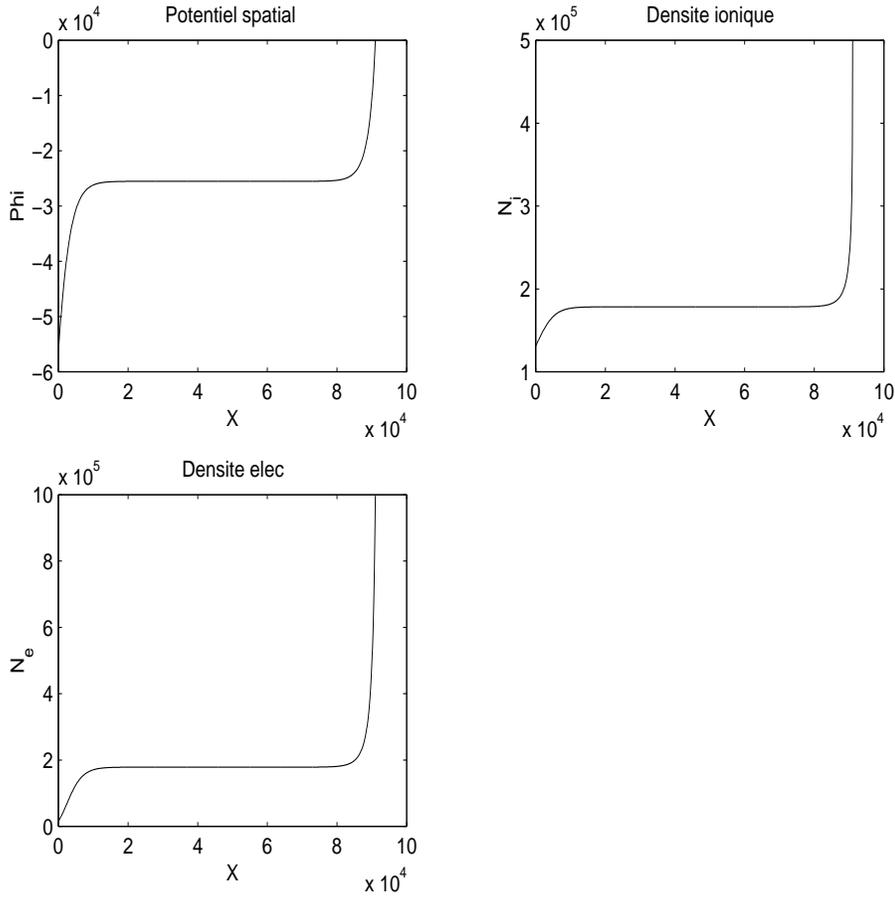
Nous nous sommes ramenés à la seule inconnue  $\Phi$ , solution croissante de l'équation de Poisson non linéaire :

$$\begin{aligned}
 -\frac{d^2\Phi}{dx^2} &= \frac{en_0}{2\epsilon_0} \left( \exp\left(-\frac{e\Phi(x)}{kT_i}\right) \left(1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{-\frac{e\Phi(x)}{kT_i}}\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. - \exp\left(\frac{e\Phi(x)}{kT_e}\right) \left(1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{e(\Phi(x) - \Phi_0)}{kT_e}}\right)\right) \right), \forall x \in ]0, L[, \quad (3.23) \\
 \Phi(0) &= \Phi_0, \\
 \Phi(L) &= 0.
 \end{aligned}$$

Même si on peut résoudre ce problème par un algorithme de Newton, on constate que l'on a perdu la neutralité à l'infini. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
 n_e(L) &= \frac{n_0}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{-e\Phi_0}{kT_e}}\right)\right), \\
 n_i(L) &= \frac{n_0}{2}, \\
 \text{et} \\
 n_e(L) - n_i(L) &= \frac{n_0}{2} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{-e\Phi_0}{kT_e}}\right), \\
 &= \frac{n_0}{2} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\ln\left(\sqrt{\frac{kT_e m_i}{kT_i m_e}}\right)}\right) \neq 0.
 \end{aligned}$$

Nous donnons une tentative de résolution numérique pour un plasma de densité  $1 \times 10^6 m^{-3}$  et de température  $20 keV$ .



Les résultats numériques montrent que cette perte de neutralité ne permet pas d'imposer le potentiel nul en  $L$ . Cela est fortement lié à la modélisation unidimensionnelle, la surface supposée infinie écrantant toutes les particules qui proviennent de l'arrière de celle-ci. Nous allons néanmoins introduire un nouveau modèle permettant de récupérer la neutralité à l'infini en ajoutant ces particules manquantes.

### 3.2.2 Récupération de la neutralité à l'infini

Dans le modèle précédent, nous avons vu que, le fait d'imposer une fonction de répartition nulle sur les caractéristiques provenant de la plaque, conduisait à perdre la neutralité à l'infini. Pour tenir compte des particules provenant de l'arrière de la plaque, on considère que sur les trajectoires issues de la plaque la distribution des particules est de la forme :

$$f_\alpha(x, v_x) = n_0 C_\alpha(x) \left( \frac{m_\alpha}{2\pi k T_\alpha} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{m_\alpha v_x^2}{k T_\alpha} - \kappa_\alpha \frac{e\Phi(x)}{k T_\alpha} \right)$$

où  $C_\alpha(x)$  est un coefficient dépendant de la géométrie de notre plaque, représentant un taux de récupération de neutralité. De plus, nous le supposons indépendant du potentiel.

D'après l'étude des caractéristiques précédentes, les distributions des particules sont données par :

- Pour les électrons :

$$f_e(x, v_x) = \begin{cases} n_0 \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k T_e}} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{m_e v_x^2}{k T_e} + \frac{e\Phi(x)}{k T_e} \right) & \text{si } v_x < \sqrt{\frac{2e}{m_e} (\Phi(x) - \Phi_0)}, \\ n_0 C_e(x) \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k T_e}} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{m_e v_x^2}{k T_e} + \frac{e\Phi(x)}{k T_e} \right) & \text{sinon .} \end{cases} \quad (3.24)$$

- Pour les ions :

$$f_i(x, v_x) = \begin{cases} n_0 \sqrt{\frac{m_i}{2\pi k T_i}} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{m_i v_x^2}{k T_i} - \frac{e\Phi(x)}{k T_i} \right) & \text{si } v_x < -\sqrt{-\frac{2e}{m_i} \Phi(x)} \\ n_0 C_i(x) \sqrt{\frac{m_i}{2\pi k T_i}} \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{m_i v_x^2}{k T_i} - \frac{e\Phi(x)}{k T_i} \right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.25)$$

- Calcul de  $C_\alpha$  :

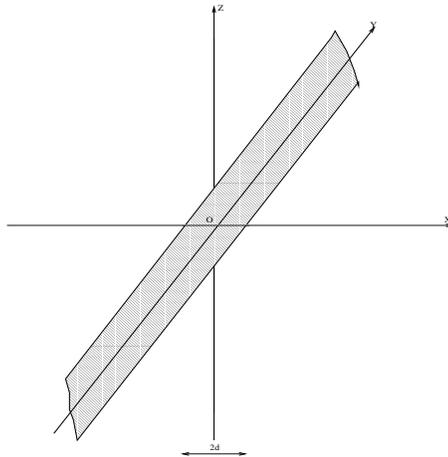
Nous avons supposés que  $C_\alpha$  était indépendant du potentiel. Pour le calcul de  $C_\alpha$ , nous le prenons donc nul. Pour ce faire nous allons calculer les densités de particules données par notre modèle unidimensionnel. Nous faisons ensuite un calcul en tridimensionnel en tenant compte de la géométrie de la plaque. En identifiant les expressions, nous aurons  $C_\alpha$ .

- Pour notre modèle unidimensionnel, nous avons :

$$\begin{aligned}
 n_\alpha &= \int_0^{+\infty} f_\alpha(x, v_x) dv_x + \int_{-\infty}^0 f_\alpha(x, v_x) dv_x \\
 &= n_0 \sqrt{\frac{m_i}{2\pi kT_i}} \left( C_\alpha(x) \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_i v_x^2}{kT_i}\right) dv_x + \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_i v_x^2}{kT_i}\right) dv_x \right) \\
 &= \frac{n_0}{2} (1 + C_\alpha(x))
 \end{aligned}$$

- Calcul en dimension 3 d'espace :

On considère un conducteur plan infini dans la direction  $(Oy)$  et de hauteur  $2d$  dans la direction  $(Oz)$ . Nous resterons dans le cadre monodimensionnel.



Le potentiel  $\Phi$  est supposé nul. Les caractéristiques pour l'équation de Vlasov tridimensionnelle, sont des droites. Compte tenu de la géométrie de la plaque, sur l'axe  $(Ox)$ , l'ensemble des vitesses provenant de la plaque est alors donné par :

$$v_x > 0, v_y \in \mathbb{R}, v_z > v_x \frac{d}{x} \text{ ou } v_z < -v_x \frac{d}{x}.$$

La fonction de distribution est alors donnée sur l'axe ( $Ox$ ) par :

$$f_{\alpha}^{3d}(x, v_x) = \begin{cases} 0 & \text{si } v_x > 0, v_y \in \mathbb{R}, \|v_z\| > v_x \frac{d}{x}, \\ n_0 \left( \frac{m_e}{2\pi k T_e} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_e v_x^2}{k T_e}\right) & \text{sinon .} \end{cases}$$

Les densités  $n_{\alpha}^{3d}$  se calculent aisément par :

$$\begin{aligned} n_{\alpha}^{3d} &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{v_x \frac{d}{x}}^{+\infty} f_{\alpha}(x, v_x, v_y, v_z) dv_z + \int_{-\infty}^{-v_x \frac{d}{x}} f_{\alpha}(x, v_x, v_y, v_z) dv_z \right) dv_y dv_x \\ &= n_0 \left( 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \left( \frac{d}{x} \right) \right) \end{aligned}$$

En identifiant  $n_{\alpha}$  et  $n_{\alpha}^{3d}$ , on a alors :

$$C_{\alpha}(x) = \left( 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{atan} \left( \frac{d}{x} \right) \right).$$

On remarque que l'on a  $C_{\alpha}(0) = 0$  et  $C_{\alpha}(+\infty) = 1$ . En reportant cette expression dans les équations (3.2.2) et (3.25), on calcule aisément les densités spatiales et les courants des particules :

- Pour les ions

$$\begin{aligned} n_i(x) &= n_0 \exp\left(-\frac{e\Phi(x)}{kT_i}\right) \left[ \sqrt{\frac{m_i}{2\pi k T_i}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{-\frac{2e}{m_e}\Phi(x)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_i v_x^2}{k T_i}\right) dv_x \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{atan} \left( \frac{d}{x} \right) \right) \left( 1 - \sqrt{\frac{m_i}{2\pi k T_i}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{-\frac{2e}{m_e}\Phi(x)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_i v_x^2}{k T_i}\right) dv_x \right) \right] \\ &= n_0 \exp\left(-\frac{e\Phi(x)}{kT_i}\right) \left[ \left( 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \left( \frac{d}{x} \right) \right) - \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \left( \frac{d}{x} \right) \operatorname{erf} \left( \sqrt{-\frac{e\Phi(x)}{kT_i}} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_i &= e n_0 \sqrt{\frac{m_i}{2\pi k T_i}} \exp\left(-\frac{e\Phi_0}{kT_i}\right) \int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{2e}{m_i}(-\Phi_0)}} v_x \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_i v_x^2}{k T_i}\right) dv_x \\ &= e n_0 \sqrt{\frac{k T_i}{2\pi m_i}}. \end{aligned}$$

• Pour les électrons :

$$\begin{aligned}
n_e(x) &= n_0 \exp\left(\frac{e\Phi(x)}{kT_e}\right) \left[ \sqrt{\frac{m_e}{2\pi kT_e}} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{2e}{m_e}(\Phi(x)-\Phi_0)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_e v_x^2}{kT_e}\right) dv_x \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{d}{x}\right)\right) \left(1 - \sqrt{\frac{m_e}{2\pi kT_e}} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{2e}{m_e}(\Phi(x)-\Phi_0)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_e v_x^2}{kT_e}\right) dv_x \right) \right] \\
&= n_0 \exp\left(\frac{e\Phi(x)}{kT_e}\right) \left[ \left(1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{d}{x}\right)\right) + \frac{1}{\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{d}{x}\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{e(\Phi(x)-\Phi_0)}{kT_e}}\right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_e &= en_0 \sqrt{\frac{m_e}{2\pi kT_e}} \exp\left(\frac{e\Phi_0}{kT_e}\right) \int_{-\infty}^0 v_x \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{m_e v_x^2}{kT_e}\right) dv_x \\
&= -en_0 \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} \exp\left(\frac{e\Phi_0}{kT_e}\right).
\end{aligned}$$

On a bien dans les deux cas :

$$\lim_{x \rightarrow L} n_\alpha(x) = n_0,$$

et l'on retrouve bien un plasma neutre à l'infini.

En imposant  $kT_i = kT_e = kT$ , la charge totale est donnée par :

$$\begin{aligned}
eN(x, \Phi(x)) &= e(n_i(x) - n_e(x)) = \\
&\quad - en_0 \left[ 2 \left(1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{d}{x}\right)\right) \operatorname{sh}\left(\frac{e\Phi(x)}{kT}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{d}{x}\right) \left( \exp\left(\frac{-e\Phi(x)}{kT}\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{-e\Phi(x)}{kT}}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \exp\left(\frac{e\Phi(x)}{kT}\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{e(\Phi(x)-\Phi_0)}{kT}}\right) \right) \right]
\end{aligned}$$

Le problème se ramène alors à une équation de Poisson non linéaire :

$$-\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{e}{\epsilon_0} N(x, \Phi(x)), \forall x \in ]0, L[$$

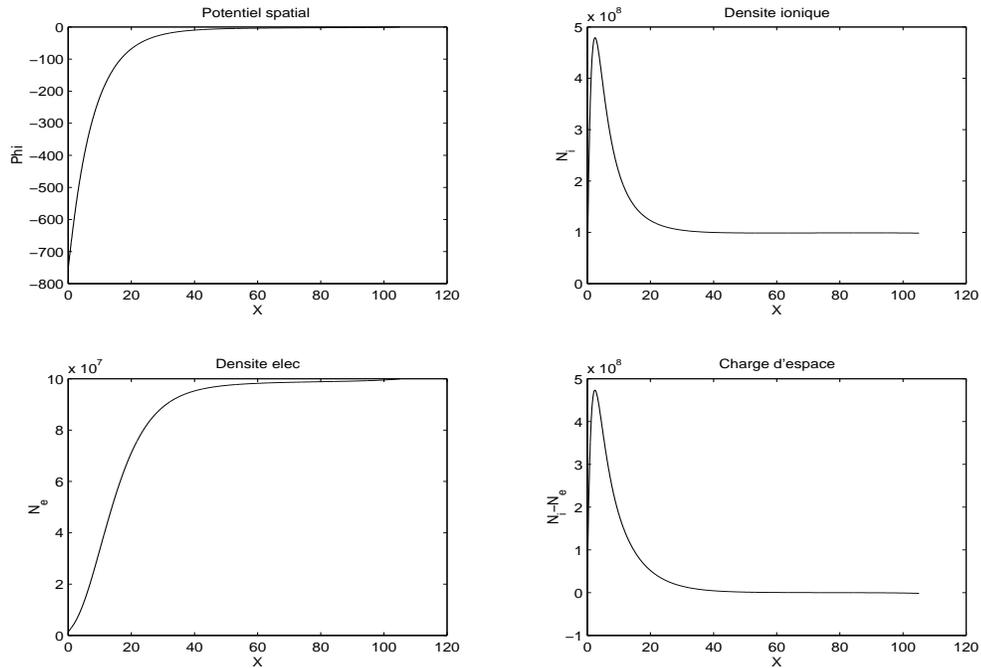
$$\Phi(0) = \Phi_0 = -\frac{kT_e}{e} \ln \left( \sqrt{\frac{kT_e m_i}{kT_i m_e}} \right) \quad (3.26)$$

$$\Phi(L) = 0$$

Numériquement on utilise un algorithme de Newton basé sur une discrétisation par différences finies de l'équation (3.26), de manière analogue qu'en 3.1.2.

### 3.2.3 Résultats numériques

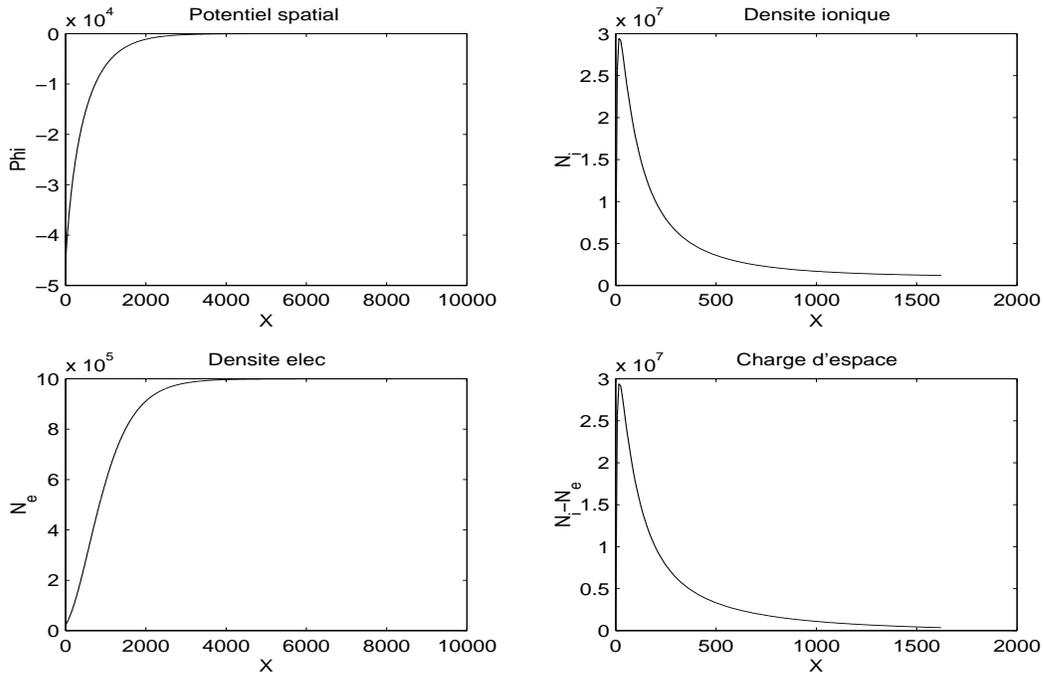
On donne ici les résultats obtenus pour une portion de plan baignant dans un plasma de densité  $n_0 = 1 * 10^8 m^{-3}$  et de température  $kT_i = kT_e = 200eV$ .



Nous pouvons constater que nous avons bien réussi à imposer la neutralité à l'infini et que cela nous a permis d'obtenir un algorithme convergent. Le potentiel d'équilibre étant négatif, nous constatons sur les densités de particules, que la plaque repousse bien les électrons et attire les ions.

L'équation (3.26) nous donne  $\Phi_0 = -751V$ , la charge surfacique est donnée par :  $\rho_s = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(0) = -9.68 * 10^{12} Cm^{-2}$ .

Dans le but d'une comparaison des modèles  $1D$  nous donnons les résultats obtenus pour une portion de plan baignant dans un plasma proche des conditions magnétosphériques, soit de densité  $n_0 = 1 * 10^6 m^{-3}$  et de température  $kT_i = kT_e = 12000eV$ .



L'équation (3.26) nous donne  $\Phi_0 = -45090V$ .

Dans chacun des deux cas tests, après convergence de notre algorithme de Newton, nous constatons une allure de potentiel satisfaisante. Les formules explicites pour les densités ioniques et électroniques, permettent d'obtenir ces densités. Le potentiel d'équilibre est environ de 3.75 fois la température électronique prise en  $eV$ , ce qui est donné explicitement et de l'ordre de grandeur attendu, soit quelque fois la température électronique.

### 3.2.4 Résultat mathématique d'existence

En introduisant la fonction  $N$  :

$$\begin{aligned} N : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \phi, \psi) &\longmapsto N_i(\phi)n_i(x, \psi) + N_e(\phi)n_e(x, \psi) \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} n_i : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \psi) &\longmapsto \left(1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \left(\frac{d}{x}\right)\right) - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{d}{x}\right) \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{-e\psi}{kTi} \mathbb{I}_{\{\psi \leq 0\}}}\right) \\ n_e : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \psi) &\longmapsto \left(1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \left(\frac{d}{x}\right)\right) + \frac{1}{\pi} \operatorname{atan} \left(\frac{d}{x}\right) \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{e(\psi - \Phi_0)}{kTe} \mathbb{I}_{\{\psi \geq \Phi_0\}}}\right) \\ N_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \frac{en_0}{\epsilon_0} \exp\left(-\frac{e\phi}{kTi}\right) \\ N_e : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto -\frac{en_0}{\epsilon_0} \exp\left(\frac{e\phi}{kTe}\right) \end{aligned} \tag{3.27}$$

On s'intéresse à la résolution du problème :

$$(\mathcal{P} :) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta\Phi(x) = N(x, \Phi(x), \Phi(x)) \\ \Phi(0) = \Phi_0 \\ \Phi(L) = 0 \end{array} \right.$$

Remarquons que la fonction  $\Phi \rightarrow N(x, \Phi(x), \Phi(x))$  n'est pas convexe. Nous ne pouvons utiliser des arguments classique de minimisation convexe. Pour obtenir un résultat d'existence nous allons utiliser le théorème de Schauder :

**Théorème de Schauder ( cf. [4] ).** *Soit  $B$  un espace de Banach et  $C$  une parti convexe fermée non vide et  $T : C \rightarrow C$  continue, telle que  $T(C)$  soit relativement compact. Alors  $T$  admet un point fixe.*

Il suffit alors de trouver l'application  $T$  et la partie  $C$  convexe fermée non-vide  $C$ .

On commence par établir le résultat suivant :

**Lemme 1.** Soit  $\alpha_i, \alpha_e \in C^0([0, L])$  qui vérifient  $\forall x \in [0, L] \left| \begin{array}{l} 0 \leq \alpha_i(x) \leq 1 \\ 0 \leq \alpha_e(x) \leq 1 \end{array} \right.$

$$\exists \Phi \in C^0([0, L]); \left| \begin{array}{l} -\Delta \Phi(x) = \alpha_i(x)N_i(\Phi(x)) + \alpha_e(x)N_e(\Phi(x)) \\ \quad = M(x, \Phi(x)) \text{ dans } D'([0, 1[) \\ \Phi(0) = \Phi_0 \\ \Phi(L) = 0 \end{array} \right.$$

*Démonstration.* Nous allons montrer tout d'abord que ce problème est équivalent à un problème de minimisation convexe. Des arguments en théorie de l'optimisation nous donneront alors les résultats.

En introduisant  $\tilde{\Phi}$  la fonction définie par  $x \mapsto \frac{\Phi_0}{L}(L-x)$  et  $U$  par  $\Phi - \tilde{\Phi}$ , nous commençons à montrer par une technique de relèvement que le problème est équivalent à la formulation variationnelle posée dans  $H_0^1([0, L[)$  :

$$(\mathcal{P}^{f.v.}) : \left| \begin{array}{l} \exists U \in H_0^1([0, L[); \forall V \in H_0^1([0, L[) \\ \int_0^L \nabla U(x) \cdot \nabla V(x) dx - \int_0^L M(x, U(x) + \tilde{\Phi})V(x) dx = 0 \end{array} \right.$$

La continuité de  $U$  puis de  $\Phi$  s'obtient par injection de Sobolev de  $H_0^1([0, L[)$  dans  $C^0([0, L])$ .

On introduit la fonction  $\mathcal{V}$  :

$$(x, y) \longmapsto \mathcal{V}(x, y) = - \int_0^y M(x, t + \tilde{\Phi}(x)) dt$$

Du fait que  $\forall x \in [0, L], t \mapsto -M(x, t + \tilde{\Phi}(x))$  est croissante,  $\forall x \in [0, L], t \mapsto \mathcal{V}(x, t)$  est convexe.

**Lemme 2.** La formulation variationnelle  $\mathcal{P}^{f.v.}$  est équivalente au problème de minisation :

$$\mathcal{P}^{min} : \left| \begin{array}{l} \exists U \in H_0^1([0, L[); \\ J(U) = \text{Inf}_{V \in H_0^1([0, L[)} J(V), \end{array} \right.$$

avec la fonctionnelle  $J$  :

$$J(U) = \frac{1}{2} \int_0^L |\nabla U(x)|^2 dx + \int_0^L \mathcal{V}(x, U(x)) dx.$$

Ce problème a une solution unique.

*Démonstration.* Soit  $U \in H_0^1(]0, L[)$ , solution de  $\mathcal{P}^{f.v.}$  alors  $\forall V \in H_0^1(]0, L[)$  ;

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L \nabla U(x) \cdot \nabla (V(x) - U(x)) dx - \int_0^L M(x, U(x) + \tilde{\Phi}(x)) \cdot (V(x) - U(x)) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^L \|\nabla U(x)\|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L \|\nabla V(x)\|^2 dx + \int_0^L \mathcal{V}(x, U(x)) dx - \int_0^L \mathcal{V}(x, V(x)) dx, \end{aligned}$$

par convexité de  $t \rightarrow t^2/2$  et de  $t \mapsto \mathcal{V}(x, t)$ .

Donc,  $\forall V \in H_0^1(]0, L[)$ ,  $J(U) \leq J(V)$ .

Et  $U$  est bien solution de  $\mathcal{P}^{min}$ .

□

*Réciproquement.* On a tout d'abord facilement,  $U \mapsto J(U)$  convexe.

On écrit  $J$  sous la forme  $J_1 + J_2$  avec :

$$\begin{aligned} J_1 : U &\mapsto \frac{1}{2} \int_0^L \|\nabla U(x)\|^2 dx \\ J_2 : U &\mapsto \int_0^L \mathcal{V}(x, U(x)) dx \end{aligned}$$

$J_1$  est une norme hermitienne équivalente à la norme  $H_0^1(]0, L[)$  donc  $J_1$  est continue. De plus

$$J_1(U + tV) - J_1(U) = t \int_0^L \nabla U(x) \cdot \nabla V(x) dx + \frac{t^2}{2} \int_0^L \nabla V(x) \cdot \nabla V(x) dx.$$

Donc  $J_1$  est 2 fois Gateau-différentiable avec :

$$\begin{aligned} J_1'(U) \cdot V &= \int_0^L \nabla U(x) \cdot \nabla V(x) dx, \\ J_1''(U) \cdot V \cdot W &= \int_0^L \nabla V(x) \cdot \nabla W(x) dx. \end{aligned}$$

De plus,  $\|J_1''(U) \cdot V \cdot V\| = \|V\|_{H_0^1(]0, L[)}^2$  donc  $J_1$  est  $\alpha$ -convexe, Gateau-différentiable et continue.

Montrons maintenant que  $J_2$  est continue :

Soit  $(U_n)$  une suite tendant vers  $U$  dans  $H_0^1(]0, L[)$ , il existe  $(U_{n_k})$  une sous-suite extraite de  $(U_n)$  telle que :  $U_{n_k} \xrightarrow{p.p.} U$ .

Comme  $M(., .)$  est continue sur  $[0, L] \times \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{V}(., .)$  est continue sur  $[0, L] \times \mathbb{R}$  et  $\mathcal{V}(., U_{n_k}(\cdot)) \xrightarrow{p.p.} \mathcal{V}(., U(\cdot))$ .

Par injection de Sobolev  $U \in C^0([0, L])$ . Et au moins à partir d'un certain rang  $(U_{n_k})$  est bornée ( par  $K$ ).

Et,

$$\begin{aligned} |\mathcal{V}(x, U_{n_k}(x))| &\leq \int_0^K \left| M(x, t + \tilde{\Phi}) \right| dt \\ &\leq \int_0^K \left| N_i(t + \tilde{\Phi}) \right| + \left| N_e(t + \tilde{\Phi}) \right| dt \\ &\quad \text{car } \alpha_i, \alpha_e \in [0, 1] \\ &\leq K' \in L^1([0, 1]), \\ &\quad \text{car } (t, x) \rightarrow N_{i,e}(t + \tilde{\Phi}(x)) \text{ est continue sur } [0, K] \times [0, L]. \end{aligned}$$

Donc par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,  $J_2(U_{n_k}) \rightarrow J_2(U)$ . Et on a en fait convergence pour toute la suite.

Donc  $J_2$  est continue.

Montrons maintenant que  $J_2$  est Gateau-différentiable :

Soit  $U, h \in H_0^1(]0, L[)$ , comme  $M(., .)$  est continue sur  $[0, L] \times \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{V}(., .)$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, L] \times \mathbb{R}$ . Et

$$\frac{1}{t} \mathcal{V}(., U(\cdot) + t h(\cdot)) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{p.p.} -M(., U(\cdot) + \tilde{\Phi}(\cdot)).h(\cdot).$$

De plus,  $U$  et  $h$  sont de classe  $C^0$  par injection de Sobolev, donc bornées.

On note  $m_u \leq U \leq M_u$  et  $m_h \leq h \leq M_h$ . On a donc :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{t} (\mathcal{V}(x, U(x) + t.h(x)) - \mathcal{V}(x, U(x))) \right| \\ & \leq \frac{1}{t} \int_{m_u}^{M_u + tM_h} |M(x, t + \tilde{\Phi}(x))| dt \\ & \leq \left( \frac{M_u - m_u}{t} + M_h \right) K \in L^1([0, L]). \end{aligned}$$

Et toujours par le théorème de Lebesgue,

$$\frac{1}{t} (J_2(U + t.h) - J_2(U)) \rightarrow - \int_0^L M(U(x) + \tilde{\Phi}) . h(x) dx.$$

Et  $J_2$  est continue, convexe et Gateau-différentiable de dérivée.

$$J_2'(U) . h = - \int_0^L M(U(x) + \tilde{\Phi}) . h(x) dx.$$

Donc  $J = J_1 + J_2$  est  $\alpha$ -convexe continue et Gateau-différentiable sur  $H_0^1(]0, L[)$  car c'est la somme de fonctions convexes continues et Gateau-différentiables dont l'une est  $\alpha$ -convexe. Donc  $J$  admet donc un minimum unique  $U \in H_0^1(]0, L[)$  vérifiant :

$$\forall V \in H_0^1(]0, L[), J'(U) . (V - U) \geq 0.$$

Donc,

$$\begin{aligned} & \exists ! U \in H_0^1(]0, L[); J'(U) . V = 0 \\ & = \int_0^L \nabla U(x) \nabla V(x) - \int_0^L M(x, U(x) + \tilde{\Phi}) V(x) dx = 0 \Rightarrow \mathcal{P}^{f.v.} \end{aligned}$$

□

On a donc  $\mathcal{P}^{f.v.} \Leftrightarrow \mathcal{P}^{min}$ , ainsi que l'existence et l'unicité d'une solution.

Et on a montré au passage que  $\mathcal{P}^{min}$  admet une solution unique  $U$  qui est dans  $C^0([0, L])$  par injection de Sobolev.

Et  $\Phi = U + \tilde{\Phi}$  est l'unique solution de classe  $C^0([0, L])$  vérifiant :

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta \Phi(x) = M(x, \Phi(x)) \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, 1[), \\ \Phi(0) = \Phi_0, \\ \Phi(L) = 0. \end{array} \right.$$

Ce qui termine la démonstration.

□

On introduit maintenant  $\Phi_e$  et  $\Phi_i$  les solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\Phi_\alpha = N_\alpha(\Phi_\alpha) \\ \Phi_\alpha(0) = 0 \\ \Phi_\alpha(L) = 0 \end{array} \right.$$

D'après le lemme 1, on a leur existence et unicité. ( Il suffit de prendre  $\alpha_e \equiv 1$  et  $\alpha_i \equiv 0$  pour  $\Phi_e$  et  $\alpha_i \equiv 1$  et  $\alpha_e \equiv 0$  pour  $\Phi_i$ ). Celles-ci sont de plus de classe  $C^1([0, 1])$ . De plus,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\Phi_i \geq 0 \geq -\Delta\Phi_e \\ \Phi_i(0) = \Phi_e(0) \\ \Phi_i(L) = \Phi_e(L) \end{array} \right.$$

Donc par le principe du maximum,  $\forall x \in [0, L], \Phi_i(x) \geq \Phi_e(x)$ . On notera  $I_e = \text{Inf}(\Phi_e)$  et  $S_i = \text{Sup}(\Phi_i)$ .

**Lemme 3.** Soit  $\Phi \in C^0([0, L])$  vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\Phi(x) \leq N_i(\Phi(x)) \\ \Phi(0) = \Phi_0 \\ \Phi(L) = 0 \end{array} \right.$$

alors,  $\Phi \leq \Phi_i$ .

*Démonstration.* On utilise la méthode de Stampacchia :

On introduit

$$G \in C^\infty(\mathbb{R}); G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ > 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ et } G \text{ croissante.}$$

On a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^L \nabla^2(\Phi(x) - \Phi_i(x)).G'(\Phi(x) - \Phi_i(x))dx \\ &= - \int_0^L \Delta(\Phi(x) - \Phi_i(x)).G(\Phi(x) - \Phi_i(x))dx \\ &\leq \int_0^L (N_i(\Phi(x)) - N_i(\Phi_i(x))).G(\Phi(x) - \Phi_i(x))dx \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^L (N_i(\Phi(x)) - N_i(\Phi_i(x))).G(\Phi(x) - \Phi_i(x))dx = 0$$

Et comme,  $\Phi_i(x), \Phi(x) \in C^0([0, L])$

$$(N_i(\Phi(x)) - N_i(\Phi_i(x))).G(\Phi(x) - \Phi_i(x)) \in C^0([0, L])$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0, L], G(\Phi(x) - \Phi_i(x)) = 0 \text{ ou } \Phi(x) = \Phi_i(x)$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0, L], \Phi(x) \geq \Phi_i(x)$$

□

**Lemme 4.** Soit  $\Phi \in C^0([0, L])$  vérifiant

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta\Phi(x) \geq N_e(\Phi(x)) \\ \Phi(0) = \Phi_0 \\ \Phi(L) = 0 \end{array} \right.$$

alors  $\Phi \geq \Phi_e$ .

*Démonstration.* On procède de même que précédemment :

$$\begin{aligned} 0 &\geq - \int_0^L \nabla^2(\Phi(x) - \Phi_e(x))G'(\Phi_e(x) - \Phi(x))dx \\ &= - \int_0^L \Delta(\Phi(x) - \Phi_e(x)).G(\Phi_e(x) - \Phi(x))dx \\ &\geq \int_0^L (N_e(\Phi(x)) - N_e(\Phi_e(x))).G(\Phi_e(x) - \Phi(x))dx \\ &\geq 0 \\ \text{Donc } &\int_0^L (N_e(\Phi) - N_e(\Phi_e)).G(\Phi_e(x) - \Phi(x)) = 0 \end{aligned}$$

Et  $\forall x \in [0, L], \Phi(x) \geq \Phi_e(x)$

□

On introduit alors l'ensemble  $\mathcal{C} = \{\Phi \in C^0([0, L]); \Phi_e \leq \Phi \leq \Phi_i\}$

*Remarque 1.* Si  $\Phi, \Psi \in C^0([0, L])$ , trivialement  $N(\cdot, \Psi(\cdot), \Phi(\cdot)) \in C^0([0, L])$ .  
Et  $\forall x \in [0, L], N_e(\Phi(x)) \leq N(x, \Psi(x), \Phi(x)) \leq N_i(\Phi(x))$

Ce deuxième point vient du fait que :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, L], \\ 0 &\leq \operatorname{erf} \left( \sqrt{-\frac{e\Psi(x)}{kTi} \mathbb{I}_{\{\Psi(x) \leq 0\}}} \right) \leq 1 \\ 0 &\leq \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{e(\Psi(x) - \Phi_0)}{kTi} \mathbb{I}_{\{\Psi(x) \geq \Phi_0\}}} \right) \leq 1 \\ \text{Et } 0 &\leq \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{d}{x} \right) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors annoncer le lemme permettant de construire l'application pour le point fixe.

**Lemme 5.** *Soit  $\Psi \in \mathcal{C}$ , alors  $\exists! \Phi \in \mathcal{C}$  solution de :*

$$(\mathcal{P}^{p.f.}) \left\{ \begin{array}{l} -\Delta \Phi(x) = N(x, \Phi(x), \Psi(x)), \\ \Phi(0) = \Phi_0, \\ \Phi(L) = 0. \end{array} \right.$$

*Démonstration.* Grâce à la remarque précédente et en appliquant le lemme 1 avec

$$\begin{aligned} \alpha_i(\cdot) &= n_i(\cdot, \Psi(\cdot)) \in C^0([0, L]), \\ \alpha_e(\cdot) &= n_e(\cdot, \Psi(\cdot)) \in C^0([0, L]). \end{aligned}$$

On a :

$$\exists! \Phi \in C^0([0, L]) \text{ solution de : } (\mathcal{P}^{p.f.}).$$

Et d'après la remarque 1,

$$N_e(\Phi(x)) \leq -\Delta \Phi(x) \leq N_i(\Phi(x)).$$

Donc d'après les lemmes 3 et 4  $\Phi_e \leq \Phi \leq \Phi_i$  et  $\Phi \in \mathcal{C}$ .

□

On est alors en mesure d'introduire l'opérateur  $\mathcal{L}$  permettant de réaliser le point fixe :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ \Psi &\mapsto \mathcal{L}(\Psi) = \Phi \text{ solution unique de } \mathcal{P}^{p.f.}. \end{aligned}$$

**Lemme 6.**  $\mathcal{L}$  est continue de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}$  pour la topologie  $C^0([0, L])$ .

*Démonstration.* Trivialement,  $N(., ., .)$  est continue sur  $[O, L] \times [I_e, S_i] \times [I_e, S_i]$  donc est uniformément continue, et :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0; \forall x, y, \forall z, z'; |z - z'| < \alpha, |N(x, y, z) - N(x', y', z')| \leq \epsilon.$$

Soit  $\Psi_n \xrightarrow{\mathcal{C}} \Psi$  et soit  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} & \exists N > 0; \forall n > N; \forall x \in [O, L]; |\Psi_n(x) - \Psi(x)| \leq \alpha \\ \Rightarrow & \exists N > 0; \forall n > N; \forall x \in [O, L]; |N(x, \Phi(x), \Psi_n(x)) - N(x, \Phi(x), \Psi(x))| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Donc  $\Psi \rightarrow N(., \Phi(.), \Psi(.))$  est continue de  $\mathcal{C}$  dans  $C^0([0, L])$ .

Soit  $(\Psi_n)$  une suite tendant vers  $\Psi$  dans  $\mathcal{C}$ . On a :

$$\begin{aligned} N(x, \Phi(x), \Psi_n(x)) & \xrightarrow{L^2} N(x, \Phi(x), \Psi(x)) \\ \text{et } \mathcal{L}(\Psi_n) & \xrightarrow{H^1([0, L])} \mathcal{L}(\Psi). \end{aligned}$$

D'après la continuité de l'inverse du laplacien. Et par injection compacte de Sobolev, il existe une sous-suite extraite  $(\Psi_{n_k})$  de  $(\Psi_n)$  telle que  $\mathcal{L}(\Psi_{n_k}) \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathcal{L}(\Psi)$ . La limite étant unique, on a en fait convergence pour toute la suite.

Et,  $\mathcal{L}$  est donc continue de  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . □

**Lemme 7.**  $\mathcal{L}(\mathcal{C})$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}$ .

*Démonstration.* Nous utilisons le théorème d'Ascoli, que nous rappelons ici :

**Théorème d'Ascoli ( cf. [4] ).** Soit  $K$  un espace métrique compact et soit  $H$  un sous-ensemble borné de  $C(K)$ . On suppose que  $H$  est uniformément équicontinu. Alors  $H$  est relativement compacte dans  $C(K)$ .

Pour montrer que  $\mathcal{L}(\mathcal{C})$  est borné et uniformément équicontinué, on procède de manière analogue à Greengard et Raviard dans [16] :

$N(., ., .)$  étant continue sur  $[0, L] \times [I_e, S_i] \times [I_e, S_i]$ , elle est bornée, on notera  $\|N\|_\infty$  sa norme.

En utilisant la représentation intégrale de  $\mathcal{L}(\Psi)$  on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Psi)(x) &= \frac{\Phi_0}{L}(L - x) - \int_0^L G(x, y)N(y, \Phi(y), \Psi(y))dx \\ \text{avec } G(x, y) &= \begin{cases} x(1 - \frac{y}{L}) & \text{si } 0 \leq x \leq y, \\ y(1 - \frac{x}{L}) & \text{si } y \leq x \leq L. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $\forall x \in [0, L]$

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\Psi)(x)| &\leq \frac{\Phi_0}{L}(L-x) + \|N\|_\infty \int_0^L G(x,y)dy \\ &= \frac{\Phi_0}{L}(L-x) + \|N\|_\infty \frac{1}{2}(x-L)^2 + \frac{LX}{2} \leq K. \end{aligned}$$

Et  $\mathcal{L}(\mathcal{C})$  est bornée dans  $\mathcal{C}$ .

De plus  $\forall x \in [0, L]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{L}(\Psi)(x)) &= -\frac{\Phi_0}{L} - \int_0^L \frac{\partial G}{\partial x}(x,y)N(y, \Phi(y), \Psi(y))dy \\ \Rightarrow \left| \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{L}(\Psi)(x)) \right| &\leq \frac{\Phi_0}{L} + \|N\|_\infty (x - \frac{L}{2}) \leq K'. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall \Phi \in \mathcal{C}, \forall \Psi \in \mathcal{C}, \forall x, y \in [0, L]; |\mathcal{L}(\Phi)(x) - \mathcal{L}(\Psi)(y)K'| \leq |x - y|.$$

Et  $\mathcal{L}(\mathcal{C})$  est uniformément équicontinue.

Donc par le théorème d'Ascoli  $\mathcal{L}(\mathcal{C})$  est uniformément compact dans  $\mathcal{C}$ .  $\square$

Nous sommes alors en mesure d'annoncer le théorème d'existence :

**Théorème 1.** *Il existe au moins une solution  $\Phi$  de :*

$$(\mathcal{P} :) \left\{ \begin{array}{l} -\Delta \Phi(x) = N(x, \Phi(x), \Phi(x)) \\ \Phi(0) = \Phi_0 \\ \Phi(L) = 0 \end{array} \right.$$

où  $N(x, \Phi(x), \Phi(x))$  est défini par (3.27)

*Démonstration.* Il reste à s'assurer que  $\mathcal{C}$  est une partie convexe non-vide du Banach  $C^0([0, L])$  pour pouvoir appliquer le théorème 3.2.4. Cela étant trivial les lemmes 6 et 7 fournissant le reste des hypothèses.  $\square$

### 3.3 Modèle stationnaire de charge d'une sphère

On s'intéresse au modèle de charge d'une sphère de rayon  $R$  de conducteur parfait baignant dans un plasma neutre et maxwellien.

Nous nous plaçons dans l'ouvert  $O$  défini par :

$$O = \mathbb{R}^3 \setminus B(0, R)$$

Et on notera  $\Gamma_R = S(0, R)$  de normale extérieure  $\gamma_R = \frac{x}{|x|}$ .

En indexant par  $\alpha$  ( $= i$  pour les ions et  $e$  pour les électrons), le modèle mathématique décrivant l'état stationnaire des particules est alors donné par l'équation de Vlasov :

$$\forall x \in O, \forall v \in \mathbb{R}^3, \quad v \cdot \nabla_x f_\alpha(x, v) - \kappa_\alpha \frac{e \nabla_x \Phi(x)}{m_\alpha} \cdot \nabla_v f_\alpha(x, v) = 0 \quad (3.28)$$

où  $\alpha = i$  ou  $e$ .

Les conditions limites proviennent, pour cette équation, d'une part de la neutralité à l'infini :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 ; \quad \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f_\alpha(x, v) = g(v) \quad (3.29)$$

et d'autre part des conditions sur la sphère : ( Pour les réémissions, nous ne considérons uniquement les électrons rétrodiffusés et ces réémissions seront supposées spéculaires, cf. 2.1.3.3 )

$$\forall x; \|x\| = R, \forall v \in \mathbb{R}^3; v \cdot \gamma_R > 0, \quad f_e(R, v) = -\delta_{back}(v^2, \theta) \cdot f_e(R, v - 2\gamma_R(v \cdot \gamma_R)) f_i(R, v) = 0 \quad (3.30)$$

De plus, la charge surfacique de la sphère étant constante, on veut imposer sur celle-ci la nullité du courant total. Soit :

$$\forall x; \|x\| = R; \quad \int_{v \in \mathbb{R}^3} (f_i(x, v) - f_e(x, v)) v \cdot \gamma_R d^3v = 0 \quad (3.31)$$

En introduisant les densités des ions et des électrons,  $n_i(x)$  et  $n_e(x)$  définies par :

$$n_\alpha = \int_v f_\alpha(x, v) dv$$

les équations de Vlasov sont couplées à l'équation de Poisson, donnant le potentiel électrostatique  $\Phi$ .

$$\begin{aligned} -\Delta\Phi &= \frac{e}{\epsilon_0} (n_i(x) - n_e(x)), \\ \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \Phi(x) &= 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide.

Dans la prévision de l'approximation numérique nous ramènerons la condition limite à l'infini à une distance de l'ordre de quelque longueur de Debye, soit  $p\lambda_d$ .

La condition limite devient alors :

$$\forall x \in \Gamma_{p\lambda_d} \Phi(x) = 0$$

### 3.3.1 Modélisation et adimensionnement du problème

L'adimensionnement se fait de manière analogue à la sous-section 2.2.2.1.

Le système de Vlasov-Poisson stationnaire adimensionné s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x} \in \tilde{\Omega}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \\ \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_i(\tilde{x}, \tilde{v}) - \mu \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} \tilde{f}_i(\tilde{x}, \tilde{v}) &= 0, \\ \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_e(\tilde{x}, \tilde{v}) + \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} \tilde{f}_e(\tilde{x}, \tilde{v}) &= 0, \\ -\eta^2 \Delta_{\tilde{x}} \tilde{\Phi} = \tilde{n}_i - \tilde{n}_e, \tilde{n}_\alpha &= \int_{\tilde{v} \in \mathbb{R}^3} \tilde{f}_\alpha(\tilde{x}, \tilde{v}) d^3 \tilde{v}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

où :

$$\mu = \frac{m_e}{m_i}, \text{ et } \eta = \frac{\lambda_d}{D}.$$

Avec les conditions limites :

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x} \in \Gamma_{p\eta}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_{p\eta} > 0, \\ \tilde{f}_\alpha(\tilde{x}, \tilde{v}) = \tilde{g}_\alpha(\tilde{x}, \tilde{v}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x} \in \Gamma_1, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma > 0, \\ \tilde{f}_e(\tilde{x}, \tilde{v}) = -\delta_{back}(\tilde{v}^2, \theta) \cdot \tilde{f}_e(1, \tilde{v} - 2\gamma(\tilde{v} \cdot \gamma)) \\ \tilde{f}_\alpha(\tilde{x}, \tilde{v}) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x} \in S(0, 1), \\ \int_{\tilde{v} \in \mathbb{R}^3} (\tilde{f}_i(\tilde{x}, \tilde{v}) - \tilde{f}_e(\tilde{x}, \tilde{v})) \tilde{v} \cdot \gamma. \end{aligned}$$

$$\forall \tilde{x} \in \Gamma_{p\eta} \tilde{\Phi}(\tilde{x}) = 0.$$

Par la suite, on notera  $X$  les grandeurs adimensionnées  $\tilde{X}$ .

### 3.3.1.1 Calcul des densités et courants par la méthode des caractéristiques

Nous présentons ici un moyen de calculer, pour un potentiel fixé donné, les densités de particules.

En passant en coordonnées sphériques, la symétrie du problème permet d'écrire que  $f_\alpha$  ne dépend que de  $r, v_r, v_\perp$  et que  $\Phi$  ne dépend que de  $r$ , où  $r = \|x\|$ ,  $v_r = v \cdot x/r$  et  $v_\perp = v - v_r x/r$ .

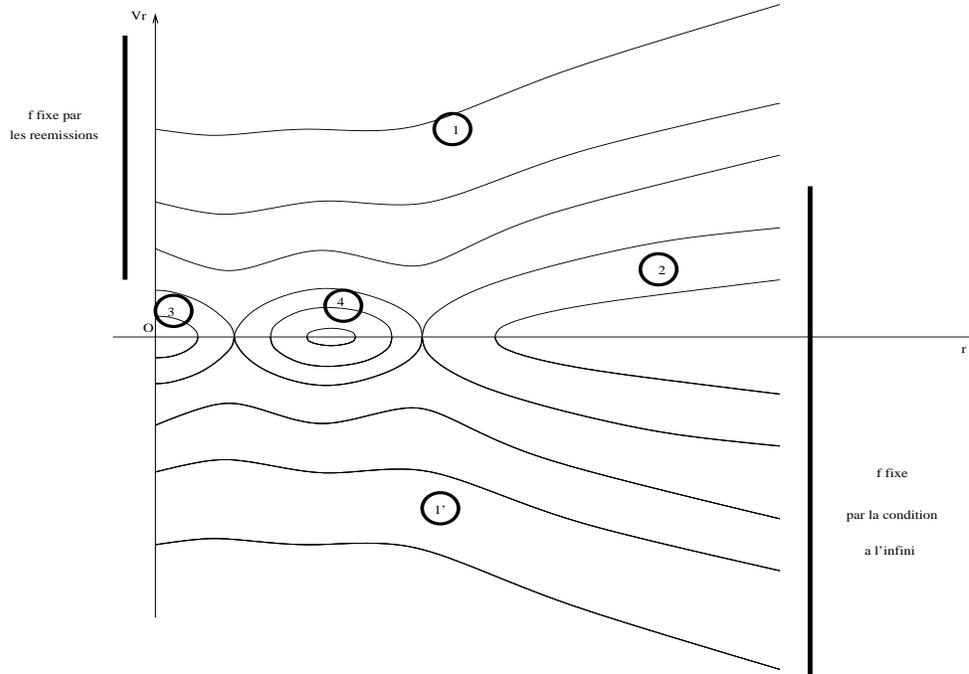
Les fonctions de répartition sont constantes sur les trajectoires des particules définies par la conservation de l'énergie totale et du moment cinétique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(v_r^2 + v_\perp^2) + C_\alpha \Phi(r) = E \\ r v_\perp = J \end{aligned} \quad (3.34)$$

où  $C_e = -1$  pour les électrons et  $C_i = \mu$  pour les ions.  $E$  et  $J$  sont constants.

En un point donné  $(r_0, v_{r0}, v_{\perp 0})$  pour déterminer la valeur de  $f_\alpha$  on doit déterminer si la caractéristique provient de l'infini ou de la boule. En notant  $(r, v_r, v_\perp)$  le point mobile de cette caractéristique, on a :

$$\begin{aligned} v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2 + 2C_\alpha \Phi(r_0) = v_r^2 + v_\perp^2 + 2C_\alpha \Phi(r) = E \\ r_0 \cdot v_{\perp 0} = r \cdot v_\perp = J \end{aligned} \quad (3.35)$$



En admettant une régularité suffisante sur le potentiel, on admettra que :

- Si  $v_r^2$  ne s'annule ni pour  $r < r_0$ , ni pour  $r > r_0$ , la caractéristique vient de la boule pour rejoindre l'infini pour les valeurs de  $v_r$  positives (zone 1). Elle vient de l'infini et atteint la boule pour les valeurs de  $v_r$  négatives (zone 1').
- Si  $v_r$  s'annule uniquement pour  $r < r_0$ , la caractéristique est issue de l'infini et va vers l'infini ( zone 2 ).
- Si  $v_r$  s'annule uniquement pour  $r > r_0$ , la caractéristique est issue de la boule et se retourne sur la boule ( zone 3 ).
- Si  $v_r$  s'annule à la fois pour  $r > r_0$  et pour  $r < r_0$ , la caractéristique est refermée. Elle n'atteint ni la boule ni l'infini ( zone 4 ).

On a :

$$v_r^2 = v_{r_0}^2 + v_{\perp 0}^2 \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right) + 2C_\alpha(\Phi(r_0) - \Phi(r)). \quad (3.36)$$

Pour déterminer dans quelle zone se trouve la caractéristique passant par  $r_0$ , on introduit :

$$\Psi_\alpha(r) = -v_\perp^2 \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right) - 2C_\alpha(\Phi(r_0) - \Phi(r)) \quad (3.37)$$

Et

$$V_\alpha^d(r_0, v_\perp) = \text{Sup}_{r > r_0}(\Psi_\alpha(r), 0)$$

$$V_\alpha^g(r_0, v_\perp) = \text{Sup}_{r < r_0}(\Psi_\alpha(r), 0)$$

Si  $v_{r_0}^2 > V_\alpha^d(r_0, v_\perp)$ ,  $\forall r > r_0, v_r^2 = v_{r_0}^2 + \Psi_\alpha(r) > 0$  Alors la caractéristique atteint l'infini.

Si  $v_{r_0}^2 < V_\alpha^d(r_0, v_\perp)$ ,  $\exists r > r_0, v_r^2 = v_{r_0}^2 + \Psi_\alpha(r) = 0$  Alors la caractéristique n'atteint pas l'infini.

De même, si  $v_{r_0}^2 > V_\alpha^g(r_0, v_\perp)$ , alors la caractéristique provient de la boule.

Et si  $v_{r_0}^2 < V_\alpha^g(r_0, v_\perp)$ , alors la caractéristique ne provient pas de la boule.

Donc, si  $v_{r_0}^2 > V_\alpha^d(r_0, v_\perp)$  et  $v_{r_0}^2 > V_\alpha^g(r_0, v_\perp)$ , pour les valeurs de  $v_{r_0} < 0$ , nous sommes dans la zone 1',  $f$  est imposé par la condition à l'infini, soit :

$$f_\alpha(r, v_{r_0}, v_\perp) = g_\alpha(v_{r_0}^2 + v_\perp^2 + 2C_\alpha\Phi(r_0))$$

et si  $v_{r_0} > 0$ , nous sommes dans la zone 1,  $f$  est imposé par les réémissions, soit :

$$f_e(r_0, v_{r_0}, v_\perp) = \delta_{back}(v_{r_0}^2 + v_\perp^2(1 - r_0^2), \cos(\theta)) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{v_{r_0}^2 + v_\perp^2}{2} + \Phi(r_0)\right)$$

$$f_i(r_0, v_{r_0}, v_\perp) = 0$$

où  $\theta$  est l'angle d'impact des particules sur la sphère, on a

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{v_r^2}{v_r^2 + v_\perp^2}} = \sqrt{\frac{v_{r_0}^2 + v_\perp^2(1 - r_0^2) + 2(\Phi(r_0) - \Phi(1))}{v_{r_0}^2 + v_\perp^2 + 2(\Phi(r_0) - \Phi(1))}}$$

Si  $v_{r_0}^2 > V_\alpha^d(r_0, v_\perp)$  et  $v_{r_0}^2 < V_\alpha^g(r_0, v_\perp)$ , nous sommes dans la zone 2, pour les valeurs de  $v_{r_0} < 0$  et  $v_{r_0} > 0$ ,  $f$  est imposé par la condition à l'infini.

$$f_\alpha(r_0, v_{r_0}, v_\perp) = g_\alpha(v_{r_0}^2 + v_\perp^2 + 2C_\alpha\Phi(r_0))$$

Sinon nous sommes dans la zone 3 ou 4 et  $f$  est nul.

On calcule les densités en intégrant sur l'ensemble des vitesses par :

$$n_\alpha(r_0) = \int_0^{2\pi} \int_{v_{\perp 0} \geq 0} \int_{v_{r0} \in \mathbb{R}} v_{\perp 0} f_\alpha(v_{r0}, v_{\perp 0}) dv_{r0} dv_{\perp 0} d\psi \quad (3.38)$$

En notant

$$\begin{aligned} V_{m1} &= \text{Max}(\sqrt{V_\alpha^d(r_0, v_{\perp 0})}, \sqrt{V_\alpha^g(r_0, v_{\perp 0})}) \\ V_{m2} &= \sqrt{V_\alpha^d(r_0, v_{\perp 0})} \\ V_M &= \sqrt{V_\alpha^g(r_0, v_{\perp 0})} \end{aligned}$$

On a pour les électrons :

$$\begin{aligned} n_e &= 2\pi \exp(\Phi(r_0)) \cdot \\ &\int_{v_{\perp 0} \geq 0} v_{\perp 0} \left( \int_{v_{r0} > V_{m1}} \exp\left(-\frac{v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2}{2}\right) (1 + \delta_{back}(v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2(1 - r_0^2), \cos(\theta))) dv_{r0} \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{v_{r0} = V_{m2}}^{V_M} \exp\left(-\frac{v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2}{2}\right) dv_{r0} \right) dv_{\perp 0} \\ &= 2\pi \exp(\Phi(r_0)) \\ &\quad \left( \int_{v_{\perp 0} \geq 0} v_{\perp 0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{v_{\perp 0}^2}{2}\right) \left(1 - \text{erf}\left(\frac{V_{m1}}{\sqrt{2}}\right) + \text{erf}\left(\frac{V_M}{\sqrt{2}}\right) - \text{erf}\left(\frac{V_{m2}}{\sqrt{2}}\right)\right) dv_{\perp 0} \right. \\ &\quad \left. + \int_{v_{\perp 0} \geq 0} \int_{v_{r0} > V_{m1}} v_{\perp 0} \exp\left(-\frac{v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2}{2}\right) \delta_{back}(v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2(1 - r_0^2), \cos(\theta)) dv_{r0} dv_{\perp 0} \right) \end{aligned}$$

Et pour les ions :

$$\begin{aligned} n_i &= 2\pi \exp(-\Phi(r_0)) \cdot \\ &\int_{v_{\perp 0} \geq 0} v_{\perp 0} \left( \int_{v_{r0} > V_{m1}} \exp\left(-\frac{v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2}{2\mu}\right) dv_{r0} \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{v_{r0} = V_{m2}}^{V_M} \exp\left(-\frac{v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2}{2\mu}\right) dv_{r0} \right) \\ &= 2\pi \exp(-\Phi(r_0)) \\ &\quad \left( \int_{v_{\perp 0} \geq 0} v_{\perp 0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{v_{\perp 0}^2}{2\mu}\right) \left(1 - \text{erf}\left(\frac{V_{m1}}{\sqrt{2\mu}}\right) + \text{erf}\left(\frac{V_M}{\sqrt{2\mu}}\right) - \text{erf}\left(\frac{V_{m2}}{\sqrt{2\mu}}\right)\right) dv_{\perp 0} \right) \end{aligned}$$

De même, on calcule les courants incidents à la sphère, en intégrant sur l'ensemble des vitesses déterminé à  $r_0 = 1$  :

$$J_\alpha = \kappa_\alpha \int_0^{2\pi} \int_{v_{\perp 0} \geq 0} \int_{v_{r0} \geq 0} v_{\perp 0} v_{r0} f_\alpha(v_{r0}, v_{\perp 0}) dv_{r0} dv_{\perp 0} d\psi \quad (3.39)$$

On a pour les électrons :

$$\begin{aligned} J_e &= -2\pi \exp(\Phi(r_0)) \\ &\int_{v_{\perp 0} \geq 0} v_{\perp 0} \int_{v_{r0} > V_{m1}} v_{r0} \exp\left(-\frac{v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2}{2}\right) (1 - \delta_{back}(v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2(1 - r_0^2), \cos(\theta))) dv_{r0} dv_{\perp 0} \\ &= -2\pi \exp(\Phi(r_0)) \int_{v_{\perp 0} \geq 0} v_{\perp 0} \exp\left(-\frac{V_{m1}^2 + v_{\perp 0}^2}{2}\right) dv_{\perp 0} \\ &- \int_{v_{\perp 0} \geq 0} \int_{v_{r0} > V_{m1}} v_{\perp 0} v_{r0} \exp\left(-\frac{v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2}{2}\right) \delta_{back}(v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2(1 - r_0^2), \cos(\theta)) dv_{r0} dv_{\perp 0} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Et pour les ions :

$$\begin{aligned} J_i &= 2\pi \exp(-\Phi(r_0)) \\ &\int_{v_{\perp 0} \geq 0} v_{\perp 0} \int_{v_{r0} > V_{m1}} v_{r0} \exp\left(-\frac{v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2}{2\mu}\right) dv_{r0} dv_{\perp 0} \\ &= 2\pi \exp(-\Phi(r_0)) \int_{v_{\perp 0} \geq 0} v_{\perp 0} \exp\left(-\frac{V_{m1}^2 + v_{\perp 0}^2}{2\mu}\right) dv_{\perp 0} \end{aligned} \quad (3.41)$$

• **Remarque** Pour les électrons, dans l'hypothèse où  $\Phi$  est croissante, la fonction  $\Psi_e$ , donnée par (3.37), est décroissante. On a alors :

$$V_e^d = 0, \quad V_e^g = -v_{\perp 0}^2(1 - r_0^2) + 2(\Phi(r_0) - \Phi(1))$$

Et, en notant  $\Delta\Phi = \Phi(r_0) - \Phi(1)$ , et en négligeant les réémissions :

$$\begin{aligned}
n_e(r_0) &= 2\pi \exp(\Phi(r_0)) \int_{v_{\perp 0} \geq 0} \left( \int_{v_{r0} > \sqrt{v_{\perp 0}^2(r_0^2-1)+2\Delta\Phi}} v_{\perp 0} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2}{2}\right) dv_{r0} \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_{v_{r0}=0}^{\sqrt{v_{\perp 0}^2(r_0^2-1)+2\Delta\Phi}} v_{\perp 0} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2}{2}\right) dv_{r0} \right) dv_{\perp 0} \\
&= \exp(\Phi(r_0)) \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{v_{\perp 0} > 0} \int_{v_{r0} > \sqrt{v_{\perp 0}^2(r_0^2-1)+2\Delta\Phi}} v_{\perp 0} \exp\left(-\frac{v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2}{2}\right) dv_{r0} dv_{\perp 0} \right) \\
&= \exp(\Phi(r_0)) \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{v_{r0} > \sqrt{2\Delta\Phi}} \int_{v_{\perp 0} < \sqrt{\frac{v_{r0}^2+2\Delta\Phi}{r_0^2-1}}} v_{\perp 0} \exp\left(-\frac{v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2}{2}\right) dv_{\perp 0} dv_{r0} \right) \\
&= \frac{\exp(\Phi(r_0))}{2} \left( 1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\Delta\Phi}\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{\Delta\Phi}{r_0^2-1}}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{r_0^2}} \left( 1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\Delta\Phi}{1 - \frac{1}{r_0^2}}}\right) \right) \right)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
J_e &= - \int_0^{2\pi} \int_{v_{\perp 0} \geq 0} \int_{v_{r0} \geq 0} v_{\perp 0} v_{r0} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2}{2}\right) dv_{r0} dv_{\perp 0} d\psi \\
&= - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\Phi(1))
\end{aligned}$$

Nous voulons alors trouver  $\Phi$  vérifiant (3.31) et (3.32). Dans le but de résoudre ce problème numériquement. Nous allons résoudre le problème de manière pseudo-stationnaire en discrétisant l'équation de conservation de la charge surfacique du satellite :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_s = J_e + J_i$$

Si la convergence est atteinte, nous aurons à l'équilibre :

$$J_e + J_i = 0$$

Nous rappelons alors, les équations que nous devons résoudre pour le potentiel :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r^2} (r^2 \Phi(r)) &= (n_i(r) - n_e(r)) \\
\frac{d\Phi}{dr}(1) &= -\rho_s \\
\Phi(p\eta) &= 0
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
n_e &= 2\pi \exp(\Phi(r_0)) \\
&\quad \left( \int_{v_{\perp 0} \geq 0} v_{\perp 0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{v_{\perp 0}^2}{2}\right) \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{V_{m1}}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{V_M}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{V_{m2}}{\sqrt{2}}\right)\right) dv_{\perp 0} \right. \\
&\quad \left. + \int_{v_{\perp 0} \geq 0} \int_{v_{r0} > V_{m1}} v_{\perp 0} \exp\left(-\frac{v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2}{2}\right) \delta_{back}(v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2(1 - r_0^2), \cos(\theta)) dv_{r0} dv_{\perp 0} \right) \\
n_i &= 2\pi \exp(-\Phi(r_0)) \\
&\quad \left( \int_{v_{\perp 0} \geq 0} v_{\perp 0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{v_{\perp 0}^2}{2\mu}\right) \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{V_{m1}}{\sqrt{2\mu}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{V_M}{\sqrt{2\mu}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{V_{m2}}{\sqrt{2\mu}}\right)\right) dv_{\perp 0} \right) \\
J_e &= -2\pi \exp(\Phi(r_0)) \int_{v_{\perp 0} \geq 0} v_{\perp 0} \exp\left(-\frac{V_{m1}^2 + v_{\perp 0}^2}{2}\right) dv_{\perp 0} \\
&\quad - \int_{v_{\perp 0} \geq 0} \int_{v_{r0} > V_{m1}} v_{\perp 0} v_{r0} \exp\left(-\frac{v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2}{2}\right) \delta_{back}(v_{r0}^2 + v_{\perp 0}^2(1 - r_0^2), \cos(\theta)) dv_{r0} dv_{\perp 0} \\
J_i &= 2\pi \exp(-\Phi(r_0)) \int_{v_{\perp 0} \geq 0} v_{\perp 0} \exp\left(-\frac{V_{m1}^2 + v_{\perp 0}^2}{2\mu}\right) dv_{\perp 0}
\end{aligned}$$

### 3.3.1.2 Résolution numérique

Dans la sous-section précédente, nous avons exprimé densité et courants en fonction du potentiel. Pour calculer numériquement ceux-ci, il faut calculer les intégrales (3.38) et (3.39) sur une discrétisation spatiale de  $[1, +\infty[$ . De même qu'en 3.1.1.1 on se ramène à l'intervalle  $[1, L]$  où  $L$  représente quelques longueurs de Debye.

On définit  $(r_j)_{j \in [1, N_x]}$   $N_x$  points de discrétisation de l'intervalle  $[1, +\infty[$ . Pour calculer les densités et courants on utilise une méthode d'intégration numérique classique. Par exemple, pour la densité ionique :

$$\begin{aligned}
n_i(r_j) &= 2\pi \exp(-\Phi(r_j)) \\
&\quad \left( \int_{v_{\perp 0} \geq 0} v_{\perp 0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{v_{\perp 0}^2}{2\mu}\right) \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{V_{m1}}{\sqrt{2\mu}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{V_M}{\sqrt{2\mu}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{V_{m2}}{\sqrt{2\mu}}\right)\right) dv_{\perp 0} \right) \\
&\simeq 2\pi \exp(\Phi(r_j)) \\
&\quad \left( \sum_{k=1}^N v_{k0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{v_{k0}^2}{2\mu}\right) \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{V_{m1k}}{\sqrt{2\mu}}\right) + 2 \left(\operatorname{erf}\left(\frac{V_{Mk}}{\sqrt{2\mu}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{V_{m2k}}{\sqrt{2\mu}}\right)\right)\right) \Delta v_{k0} \right)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} V_{m1} &= \text{Max}(\sqrt{V_{i\ k}^d(r_0, v_{\perp 0})}, \sqrt{V_{i\ k}^g(r_0, v_{\perp 0})}) \\ V_{m2} &= \sqrt{V_{i\ k}^d(r_0, v_{\perp 0})} \\ V_M &= \sqrt{V_{i\ k}^g(r_0, v_{\perp 0})} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} V_{i\ k}^d &= \text{Max}_{k' > k}(\Psi_i(r_k), 0) \\ V_{i\ k}^g &= \text{Max}_{k' < k}(\Psi_i(r_k), 0) \end{aligned}$$

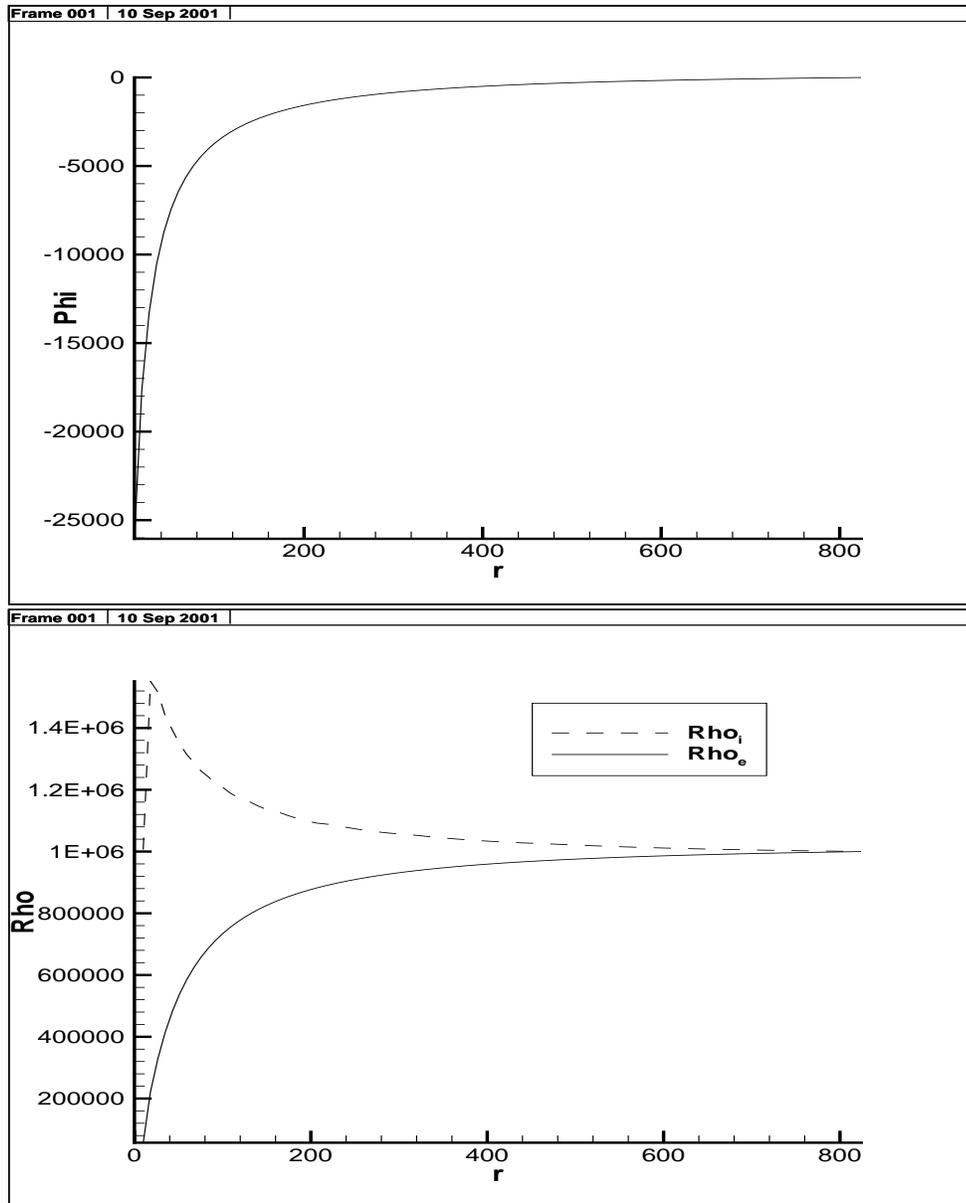
Cela nous permettra alors de résoudre l'équation de Poisson avec une condition limite de Neumann par différences finies, de manière analogue à 3.1.2.

Connaissant le potentiel spatial  $\Phi$ , on calcule les densités et les courants incidents par intégration numérique. Les courants nous permettent alors de calculer l'incrément de charge surfacique  $\rho_s$  répartie sur la sphère par la discrétisation de l'équation de continuité.

Ainsi, nous obtenons  $\Phi$  qui nous permet d'itérer successivement jusqu'à l'obtention de l'équilibre où (3.31) et (3.32) sont vérifiées.

### 3.3.1.3 Résultats numériques

Nous donnons ici les résultats obtenus sur une sphère de rayon  $10m$  plongée dans un plasma de densité  $10^6 m^{-3}$  et de température  $10keV$ .

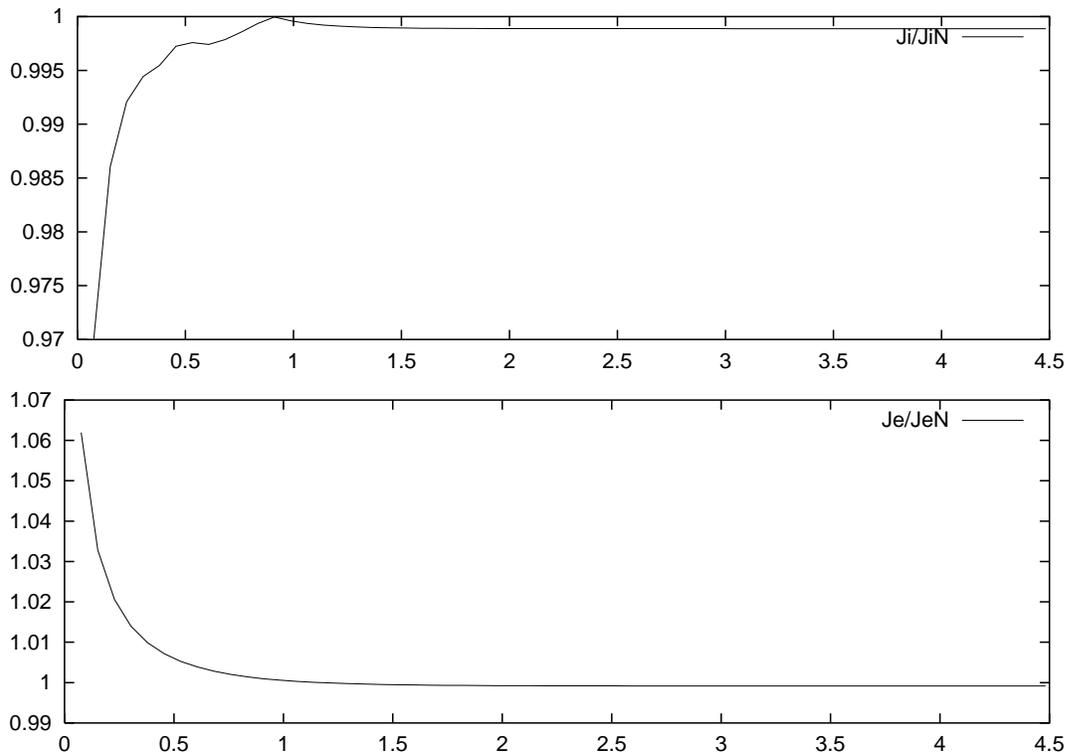


Ces résultats sont obtenus après convergence de notre algorithme pseudo-stationnaire. Le potentiel d'équilibre est d'environ  $-25000V$ . Nous retrouvons quelque fois la température électronique et son influence sur les densités de particules. Des calculs numériques effectués par Laframboise [18] donnent les expressions des courants collectés par une sonde sphérique à un potentiel négatif, dans le cadre de gaine infinie  $R \ll \lambda_d$  non collisionnelle :

$$J_e = -en_0 \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} \exp\left(\frac{e\Phi(x)}{kT_e}\right)$$

$$J_i = en_0 \sqrt{\frac{kT_i}{2\pi m_i}} \left(1 - \frac{e\Phi(x)}{kT_i}\right)$$

Ces expressions sont celles utilisées par les anciennes versions du logiciel NASCAP ( cf [9] ). Pour le courant électronique, la remarque précédente dans le cadre de l'hypothèse où  $\Phi$  est croissante nous donne la même expression. Nous n'avons néanmoins pas poussé les calculs et approximations suffisamment loin pour retrouver l'expression du courant d'ions. Néanmoins, nous comparons sur la figure suivante les courants calculés par Laframboise dans ce cas et nos approximations numériques (  $J_{iN}$  et  $J_{eN}$  ).



Nous donnons ci-dessus les courants calculés par notre modèle divisés par ceux de Laframboise. Nous constatons de bonnes approximations. De plus, en résolvant l'équation  $J_e + J_i = 0$ , nous retrouvons le potentiel d'équilibre

obtenu : environ  $-25000V$ .

## 3.4 Comparaison des modèles 1D

### 3.4.1 Tableau récapitulatif

On donne ici la comparaison des différents modèles, celui de G.Akoun, le modèle de Vlasov-Poisson unidimensionnel avec récupération de neutralité, le cas sphérique. On indique les potentiels et les charges surfaciques adimensionnées obtenu dans chaque cas à l'équilibre, et pour différentes valeurs du paramètre  $L/\lambda_d$ .  $L$  vaudra soit 1 dans le cas du modèle de Gilles Akoun, soit  $D$  la largeur de la plaque pour le modèle 1D avec récupération de neutralité, soit  $R$  le rayon de la boule pour le modèle sphérique. Dans tous les cas, les grandeurs d'adimensionnement  $\Phi_e^{th}$  et  $\rho$  sont respectivement  $\frac{kT_e}{e}$  et  $\frac{\epsilon_0\Phi_e^{th}}{L}$ , et l'on néglige l'effet des réémissions.

	Akoun		1D plan		1D sphérique	
$\lambda_d/L$	$\Phi_0/\Phi_e^{th}$	$\rho_s/\rho$	$\Phi_0/\Phi_e^{th}$	$\rho_s/\rho$	$\Phi_0/\Phi_e^{th}$	$\rho_s/\rho$
5	-1.99	-0.54	-3.76	-5.11	-2.51	-3.78
10	-1.99	-0.54	-3.76	-6.40	-2.51	-3.96
100	-1.99	-0.54	-3.76	-8.30	-2.51	-4.44

On constate que les résultats dépendent fortement du modèle considéré néanmoins l'adimensionnement du modèle présenté en 2.2.2.1 est cohérent.

Une autre modélisation pour la dynamique des ions est intéressante à étudier : c'est le modèle fluide isotherme. C'est l'objet de la section suivante.

## 3.5 Modélisation fluide

Dans le cadre de la charge en milieu plasmique, on introduit ici un nouveau modèle. Dans cette partie nous considérons un modèle de type fluide pour décrire le mouvement des ions ; on supposera pour cela que le plasma d'ions est suffisamment collisionnel. Les électrons seront toujours supposés à chaque instant à l'équilibre. Nous considérerons 2 géométries ramenées au

cadre unidimensionnel, la première correspondant à la charge d'une plaque infinie, la seconde à la charge d'une sphère. Plaçons-nous tout d'abord dans un cadre général.

### 3.5.1 Le système d'Euler-Poisson

Nous nous plaçons dans l'ouvert  $O = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$  où  $\Omega$  est le fermé représentant le satellite. Et on notera  $\partial\Omega$  la surface délimitant  $\Omega$ .

#### 3.5.1.1 Modélisation des ions

Le modèle fluide utilisé pour décrire l'évolution des ions est le système d'Euler isotherme. On considère pour cela que le plasma d'ions est assimilable à un gaz parfait à température constante. Sa loi d'état est donnée par :

$$p_i = n_i k T_i$$

où  $p_i$  est la pression du gaz,  $n_i$  sa densité volumique,  $T_i$  sa température imposée constante et  $k$  la constante de Boltzmann.

Celui-ci est obtenu à partir de l'équation de Vlasov 'collisionnelle' :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f_i(t, x, v) - \frac{e}{m_i} \nabla_x \Phi(t, x) \cdot \nabla_v f_i(t, x, v) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \quad (3.42)$$

où  $x, v, m_i, f_i$  sont position, vitesse, masse et fonction de répartition des ions,  $t$  est le temps et  $\Phi$  le potentiel électrostatique.

$\left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{\text{coll}}$  est l'opérateur de collisions qui conserve la masse et la quantité de mouvement des particules, on a :

$$\begin{aligned} \int_v \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{\text{coll}} &= 0 \\ \text{et } \int_v v \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{\text{coll}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

On pourra se référer à [5] pour plus de détail sur celui-ci.

On introduit :

- la densité volumique :

$$n_i(t, x) = \int_v f_i(t, x, v) dv$$

- la quantité de mouvement :

$$n_i u_i(t, x) = \int_v v f_i(t, x, v) dv$$

où  $u_i$  est la vitesse moyenne des ions.

- le tenseur de pression :

$$P_i(t, x) = m_i \int_v (v - u_i) \otimes (v - u_i) f_i(t, x, v) dv$$

Pour lequel on fait l'hypothèse :

$$P_i(t, x) = m_i p_i Id = m_i n_i k T_i$$

On calcule les deux premiers moments de l'équation de Vlasov collisionnelle, compte tenu des relations de conservations du terme de collisions (3.43), on obtient le système d'Euler isotherme avec second membre détaillé dans [31] :

$$\begin{aligned} \partial_t n_i + \nabla_x \cdot (n_i u_i) &= 0 \\ \partial_t (n_i u_i) + \nabla_x \cdot (n_i u_i \otimes u_i) + \nabla_x n_i \frac{k T_i}{m_i} &= -\frac{q}{m_i} n_i \nabla_x \Phi \end{aligned} \quad (3.44)$$

On voudra retrouver à l'infini un état correspondant à un état maxwellien, sur  $\partial\Omega$ , on voudra exprimer le fait que les ions sont absorbés par la plaque. Nous verrons ultérieurement comment imposer ces conditions.

### 3.5.1.2 Modélisation pour les électrons

Les électrons sont supposés à chaque instant à l'équilibre. Leur fonction de distribution sera supposée connue. On choisira une distribution de type Maxwell-Boltzmann, correspondant à un plasma d'électrons collisionnel en équilibre :

$$f_e(x, v) = n_0 \left( \frac{k T_e}{2\pi m_e} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( \frac{\frac{1}{2} m_e v^2 + e\Phi(x)}{k T_e} \right)$$

Cela nous permet de calculer leur densité spatiale ainsi que le courant incident aux surfaces en fonction du potentiel électrostatique :

$$n_e(x) = \int_{v \in \mathbb{R}^3} f_e(x, v) dv = n_0 \exp\left(\frac{e\Phi(x)}{kT_e}\right)$$

$$\forall x \in \partial\Omega, j_e(x) = -e \int_{v \in \mathbb{R}^3; v \cdot \gamma > 0} v \cdot f_e(x, v) dv = -en_0 \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} \exp\left(\frac{e\Phi(x)}{kT_e}\right)$$

### 3.5.1.3 Evolution de la charge surfacique de la plaque

L'évolution de la charge surfacique est donnée par l'équation de conservation de la charge  $\rho_s$  accumulée en surface, on a :

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall t > 0$$

$$\frac{\partial \rho_s(t, x)}{\partial t} = j_i(t, x) + j_e(t, x)$$

où  $j_e$  et  $j_i$  sont les courants incidents à la surface du satellite, définis par :

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall t > 0,$$

$$j_i(t, x) = en_i u_i(t, x)$$

$$j_e(t, x) = -en_0 \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} \exp\left(\frac{e\Phi(t, x)}{kT_e}\right)$$

### 3.5.1.4 Equation de Poisson

Le potentiel électrostatique  $\Phi$  vérifie l'équation de Poisson :

$$-\Delta\Phi(t, x) = \frac{e}{\epsilon_0} \left( n_i(t, x) - n_0 \exp\left(\frac{e\Phi}{kT_e}\right) \right)$$

$$\nabla\Phi \cdot \gamma_\Omega = \rho_s \text{ sur } \Gamma_\Omega$$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \Phi(t, x) = 0$$
(3.45)

où

$$n_e(t, x) = n_0 \exp\left(\frac{e\Phi(t, x)}{kT_e}\right)$$

### 3.5.1.5 Système d'Euler-Poisson / Résultats théoriques

Le système global obtenu est celui d'Euler Isotherme-Poisson pour les ions avec un terme non linéaire dans l'équation de Poisson, provenant de la densité électronique.

**Rappel du système global** On redonne ici l'ensemble des équations formant le problème à résoudre :

$$\forall x \in \Omega, \forall t > 0,$$

$$\partial_t n_i + \nabla_x \cdot (n_i u_i) = 0,$$

$$\partial_t (n_i u_i) + \nabla_x \cdot (n_i u_i \otimes u_i) + \nabla_x n_i \frac{kT_i}{m_i} = -\frac{q}{m_i} n_i \nabla_x \Phi,$$

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall t > 0,$$

$$\frac{\partial \rho_s(t, x)}{\partial t} = e n_i u_i(t, x) - e n_0 \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} \exp\left(\frac{e\Phi(t, x)}{kT_e}\right),$$

$$\forall x \in \Omega, \forall t > 0,$$

$$-\Delta \Phi(t, x) = \frac{e}{\epsilon_0} \left( n_i(t, x) - n_0 \exp\left(\frac{e\Phi}{kT_e}\right) \right),$$

$$\nabla \Phi \cdot \gamma_\Omega = \rho_s, \text{ sur } \Gamma_\Omega,$$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \Phi(t, x) = 0.$$

Il existe des résultats d'existence dans la littérature pour le problème d'Euler Isotherme-Poisson. F.Poupaud, M. Rasclé et J.P. Vila ont démontré dans [29] l'existence de solution faible globale, dans le contexte des semi-conducteurs en une dimension d'espace, pour une seule espèce de particule dans un fond neutralisant. La même méthode a été employée par S. Cordier dans [8] pour démontrer l'existence d'une solution au problème d'Euler Isotherme-Poisson dans le cas de d'ions et d'électrons, toujours en une dimension d'espace.

### 3.5.1.6 Adimensionnement du problème

On considère un satellite composé exclusivement de conducteur parfait. La charge du satellite est contrôlée principalement par les particules les plus rapides, soit par les électrons. Les potentiels de surface seront de l'ordre de grandeur du potentiel thermique des électrons, soit :

$$\Phi_e^{th} = \frac{m_e \cdot (V_e^{th})^2}{e}$$

où  $V_e^{th}$  est la vitesse thermique des électrons, soit  $\sqrt{\frac{kT}{m_e}}$ .

Ces potentiel et vitesse seront choisis comme grandeur d'adimensionnement.

On introduit  $D$  la grandeur caractéristique du problème,  $T$  le temps caractéristique correspondant ( $T = D/V_e^{th}$ ),  $\rho$  la charge surfacique caractéristique ( $\rho = en_0 V_e^{th} T$ ) et  $J$  le courant caractéristique ( $J = en_0 V_e^{th}$ ). On choisit  $n_0$ ,  $D$ ,  $\rho$  et  $J$  pour adimensionner densité, position, charge surfacique et courants respectivement.

On introduit les variables et inconnues adimensionnées :

$$\begin{aligned} \tilde{t} = \frac{t}{T}, \tilde{x} = \frac{x}{D}, \tilde{u}_i = \frac{u_i}{V_e^{th}}, \tilde{n}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{n_i(t, x)}{n_0}, \tilde{n}_e(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{n_e(t, x)}{n_0}, \\ \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{\Phi_e^{th}(t, x)}{\Phi_e^{th}}, \text{ et } \tilde{\rho}_s(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{\rho_s(t, x)}{\rho}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Ainsi que les constantes sans dimension :

$$\alpha = \frac{m_e}{m_i}, \text{ et } \eta = \frac{\lambda_d}{D}.$$

Le problème se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{t}} \tilde{n}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) + \nabla_{\tilde{x}} \cdot (\tilde{n}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) \tilde{u}_i(\tilde{t}, \tilde{x})) &= 0, \\ \partial_{\tilde{t}} (\tilde{n}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) \tilde{u}_i(\tilde{t}, \tilde{x})) + \nabla_{\tilde{x}} \cdot (\tilde{n}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) \tilde{u}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) \otimes \tilde{u}_i(\tilde{t}, \tilde{x})) + \alpha \nabla_{\tilde{x}} \tilde{n}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \\ -\alpha \tilde{n}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}), \\ -\Delta_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{1}{\eta^2} \left( \tilde{n}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) - \exp(\tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x})) \right), \\ \lim_{\|\tilde{x}\| \rightarrow +\infty} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= 0, \\ \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) = -\frac{1}{\eta^2} \tilde{\rho}_s(\tilde{t}, \tilde{x}), \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_s(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x})) + \tilde{n}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) \tilde{u}_i(\tilde{t}, \tilde{x}), \quad \forall \tilde{x} \in \partial\Omega, \forall \tilde{t} \geq 0.$$

### 3.5.2 Rappel sur le système d'Euler isotherme

Nous nous plaçons ici dans le cadre monodimensionnel. En prenant les notations de [20], le système d'Euler isotherme s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}W + \frac{\partial}{\partial x}F(W) = 0. \quad (3.48)$$

$W$  vérifiant certaines conditions initiales et limites

avec

$$W := \begin{pmatrix} n_i \\ q_i \end{pmatrix}$$

avec  $q_i = n_i u_i$  et

$$F(W) := \begin{pmatrix} q_i \\ n_i \left( \alpha^2 + \left( \frac{q_i}{n_i} \right)^2 \right) \end{pmatrix}.$$

En posant  $A$  la matrice jacobienne de  $F$ , on a :

$$A(W) = \frac{\partial F(W)}{\partial W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 - \left( \frac{q_i}{n_i} \right)^2 & 2 \frac{q_i}{n_i} \end{bmatrix}.$$

La matrice  $A$  est diagonalisable, pour toute valeurs de  $W$  et ces valeurs propres sont réelles, le système est donc strictement hyperbolique, les valeurs propres sont données par :

$$\lambda_1(W) = \frac{q_i}{n_i} - \alpha, \quad \lambda_2(W) = \frac{q_i}{n_i} + \alpha.$$

Leurs vecteurs propres associés sont :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{q_i}{n_i} - \alpha \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{q_i}{n_i} + \alpha \end{pmatrix}.$$

#### 3.5.2.1 Le problème de Riemann.

On s'intéresse à la résolution du problème de Riemann suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}W + \frac{\partial}{\partial x}F(W) &= 0, \\ W(0, x) &= \begin{cases} Wg & \text{si } x < 0, \\ Wd & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.49)$$

où  $W_d$  et  $W_g$  sont deux états distincts.

Nous allons construire une solution faible exacte à ce problème. Cela nous permettra par la suite de valider les résultats numériques. Pour plus de détail sur la méthode employée on se référera à [20]. Pour alléger les notations, on omettra par la suite les indices  $i$ .

Tout d'abord, on remarquera que les champs associés aux deux valeurs propres sont vraiment non linéaires. C'est à dire qu'ils vérifient

$$\forall k \in 1..2, \forall W \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \nabla_W \lambda_k(W) \cdot \tau_k(W) \neq 0.$$

En effet,

$$\nabla_W \lambda_k(W) \cdot \tau_k(W) = \pm \frac{\alpha}{n}.$$

On appellera solution faible autosimilaire au problème de Riemann, une solution  $W \in L^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$  tel qu'il existe une fonction  $\tilde{W} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$  de la forme  $W(t, x) = \tilde{W}\left(\frac{x}{t}\right)$ .

On appellera onde de raréfaction (ou de détente) associée à la valeur propre  $\lambda_k$  ( k-raréfaction ) une solution de classe  $C^1$  autosimilaire séparant les états  $W_g$  et  $W_d$  défini sur  $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  ;  $\lambda_k(W_g) < \frac{x}{t} < \lambda_k(W_d)$ .

On appellera onde de choc associée à la valeur propre  $\lambda_k$  ( k-choc ) une solution séparant les états  $W_g$  et  $W_d$  par une discontinuité se propageant à la vitesse  $s$ . Ce choc doit vérifier les conditions de Rankine-Hugoniot :

$$F(W_g) - F(W_d) = s(W_g - W_d)$$

Soit :

$$\begin{aligned} q_g - q_d &= s(n_g - n_d) \\ \frac{q_g^2}{n_g} + \alpha^2 n_g - \frac{q_d^2}{n_d} - \alpha^2 n_d &= s(q_g - q_d) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Ainsi que les conditions d'admissibilité entropique de Lax :

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Si } k = 1, s < \lambda_1(W_g) \text{ et } \lambda_1(W_d) < s < \lambda_2(W_d) \\ \bullet \text{ Si } k = 2, \lambda_1(W_g) < s < \lambda_2(W_g) \text{ et } \lambda_2(W_d) < s \end{aligned} \quad (3.51)$$

On a alors le théorème donnant l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Riemann suivant :

Pour deux états  $W_d$  et  $W_g$  suffisamment proches, le problème de Riemann (3.49) à une solution. Cette solution est autosimilaire et constituée

de 3 états constants.  $W_g$  et  $W_m$  sont séparés par un 1-choc entropique ou une 1-raréfaction,  $W_m$  et  $W_d$  sont séparés par un 2-choc entropique ou une 2-raréfaction. Cette solution est de plus unique dans cette classe de solutions.

Pour la formulation plus générale ainsi qu'une démonstration de ce théorème on pourra se référer à [15].

### 3.5.2.2 Construction des ondes de choc

On s'intéresse aux conditions nécessaires pour que deux états  $W_g$  et  $W_d$  soient reliés par un  $k$ -choc.

On notera  $\epsilon_k = -1$  si  $k = 1$  et  $\epsilon_k = 1$  si  $k = 2$ . Les conditions de Rankine-Hugoniot (3.50) sont vérifiées ainsi que les conditions d'entropie (3.51) si et seulement si :

$$\frac{q_g}{n_g} + \epsilon_k \alpha > \frac{q_g}{n_g} + \epsilon_k \alpha \sqrt{\frac{n_d}{n_g}} = s = \frac{q_d}{n_d} + \epsilon_k \alpha \sqrt{\frac{n_g}{n_d}} > \frac{q_d}{n_d} + \epsilon_k \alpha.$$

On a alors un 1-choc entropique si

$$u_d < u_g \text{ et } n_g < n_d,$$

et un 2-choc entropique si

$$u_d < u_g \text{ et } n_d < n_g.$$

### 3.5.2.3 Construction des ondes de raréfaction

On s'intéresse aux conditions nécessaires pour que 2 états  $W_g$  et  $W_d$  soient reliés par une  $k$ -onde de raréfaction.

Il est démontré dans [20] que  $W_g$  et  $W_d$  sont séparés par une onde de raréfaction si  $W_d$  est sur la courbe intégrale du  $k^{\text{ième}}$  champ passant par  $W_g$  définit par :

$$\forall s > 0, \frac{d}{ds} \tilde{W}(s) = \tau_k(\tilde{W}(s)), \\ \tilde{W}(0) = W_g.$$

De plus cette courbe intégrale a pour équation :

$$\begin{aligned} \forall s > 0, \\ n_d(s) &= n_g + \epsilon_k s, \\ q_d(s) &= \frac{q_g(n_g + \epsilon_k s)}{n_g} + \epsilon_k \alpha (n_g + \epsilon_k s) \log \left( \frac{n_g + \epsilon_k s}{n_g} \right). \end{aligned}$$

on réécrit cette expression :

$$u_d = u_g + \epsilon_k \alpha \log \left( \frac{n_d}{n_g} \right).$$

On a alors une 1-raréfaction si

$$u_d \geq u_g \text{ et } n_d \leq n_g,$$

et une 2-raréfaction si

$$u_d \geq u_g \text{ et } n_g \leq n_d.$$

On remarquera que la quantité  $u - \epsilon_k \alpha \log(n)$  est constante le long de cette courbe intégrale, on l'appelle le  $k^{\text{ième}}$  invariant de Riemann.

### 3.5.2.4 Construction d'une solution au problème de Riemann

D'après le théorème (3.5.2.1) nous devons trouver 3 états,  $W_g$ ,  $W_m$  et  $W_d$  constants,  $W_g$  et  $W_m$  sont séparés par une 1-onde,  $W_m$  et  $W_d$  étant séparés par une 2-onde.

Nous avons donc 4 types de solutions :

- $W_g$  et  $W_m$  sont séparés par un 1-choc.  $W_m$  et  $W_d$  sont séparés par un 2-choc. ( 1C-2C )

On a :

$$\begin{aligned} u_d < u_m < u_g, \quad n_g < n_m \text{ et } n_d < n_m, \\ n_m &= \frac{1}{4\alpha^2} \frac{n_g n_d}{(\sqrt{n_d} + \sqrt{n_g})^2} \left( (u_g - u_d) + \sqrt{(u_g - u_d)^2 + 4\alpha^2 \frac{(\sqrt{n_d} + \sqrt{n_g})^2}{\sqrt{n_g n_d}}} \right)^2, \\ u_m &= \frac{\sqrt{n_g} u_g + \sqrt{n_d} u_d}{\sqrt{n_g} + \sqrt{n_d}} + \frac{2\alpha^2 (n_g - n_d)}{\sqrt{n_g n_d} \left( (u_g - u_d) + \sqrt{(u_g - u_d)^2 + 4\alpha^2 \frac{(\sqrt{n_d} + \sqrt{n_g})^2}{\sqrt{n_g n_d}}} \right)}. \end{aligned}$$

•  $W_g$  et  $W_m$  sont séparés par une 1-raréfaction.  $W_m$  et  $W_g$  sont séparés par une 2-raréfaction. ( 1D-2D )

On a :

$$\begin{aligned} u_g &\leq u_m \leq u_d, \quad n_m \leq n_g \text{ et } n_m \leq n_d, \\ n_m &= \sqrt{n_d n_g} \exp \frac{u_g - u_d}{2\alpha}, \\ u_m &= \frac{u_g + u_d}{2} - \alpha \log \left( \sqrt{\frac{n_d}{n_g}} \right). \end{aligned}$$

•  $W_g$  et  $W_m$  sont séparés par une 1-raréfaction.  $W_m$  et  $W_g$  sont séparés par un 2-choc. (1D-2C )

On a :

$$\begin{aligned} u_m &\geq u_g, \quad u_m > u_d \text{ et } n_d < n_m \leq n_g, \\ u_m &= u_g - \alpha \log \left( \frac{n_m}{n_g} \right), \\ u_m &= u_d + \alpha \left(1 - \frac{n_d}{n_m}\right) \sqrt{\frac{n_m}{n_d}}. \end{aligned}$$

•  $W_g$  et  $W_m$  sont séparés par un 1-choc.  $W_m$  et  $W_g$  sont séparés par une 2-raréfaction. ( 1C-2D )

On a :

$$\begin{aligned} u_m &< u_g, \quad u_d \geq u_m \text{ et } n_d \geq n_m > n_g, \\ u_m &= u_g - \alpha \left(1 - \frac{n_g}{n_m}\right) \sqrt{\frac{n_m}{n_g}}, \\ u_m &= u_d + \alpha \log \left( \frac{n_m}{n_d} \right). \end{aligned}$$

Pour les deux dernières l'état intermédiaire  $W_m$  ne peut être calculé explicitement, on utilisera un algorithme de Newton.

Finalement,

• Si  $u_g \leq u_d$ ,

- Si  $n_g > n_d$ , on a une 1-raréfaction suivie d'une 2-raréfaction ou une 1-raréfaction suivie d'un 2-choc.

- Si  $n_g < n_d$ , on a une 1-raréfaction suivie d'une 2-raréfaction ou un 1-choc suivie d'une 2-raréfaction.
- Si  $n_g = n_d$ , on a une 1-raréfaction suivie d'une 2-raréfaction.

- Si  $u_g > u_d$ ,

- Si  $n_g > n_d$ , on a un 1-choc suivi d'un 2-choc ou une 1-raréfaction suivie d'un 2-choc.
- Si  $n_g < n_d$ , on a un 1-choc suivi d'un 2-choc ou un 1-choc suivi d'une 2-raréfaction.
- Si  $n_g = n_d$ , on a un 1-choc suivi d'un 2-choc.

#### Cas particulier $u_d = u_g = 0$

Dans ce cas on ne peut avoir une solution constituée de 2 détente, car on devrait avoir dans ce cas  $n_m = \sqrt{n_g n_d}$ , avec  $n_m > n_g$  et  $n_m > n_d$  ce qui est impossible car  $2\sqrt{n_d n_g} \leq n_d + n_g$ .

Nous avons donc 2 types de solutions :

- Un 1-choc suivi d'une 2-raréfaction, si  $n_d > n_g$ ,

$n_m$  est solution de l'équation :

$$\left(1 - \frac{n_g}{n_m}\right) \sqrt{\frac{n_m}{n_g}} + \log\left(\frac{n_m}{n_d}\right) = 0.$$

- Une 1-raréfaction suivie d'un 2-choc, si  $n_d < n_g$ ,

$n_m$  est solution de l'équation :

$$\left(1 - \frac{n_d}{n_m}\right) \sqrt{\frac{n_m}{n_d}} + \log\left(\frac{n_m}{n_g}\right) = 0.$$

La solution est stationnaire si  $n_d = n_g$ .

### 3.5.3 Approximation numérique du système d'Euler Isotherme

On utilise une approximation de type volumes finis pour calculer numériquement la solution du système d'Euler isotherme ; plus précisément on utilisera un schéma de Roe. On reste toujours dans le cadre monodimensionnel.

On se place sur un intervalle  $[l, L]$ , discrétisé en  $N_p + 1$  cellules de contrôle  $C_j$  définies par :

$$\begin{aligned} C_j &= ]l + \left(j - \frac{1}{2}\right) \Delta x, l + \left(j + \frac{1}{2}\right) \Delta x[ , \forall j \in \{1 \dots N_p - 1\}, \\ C_0 &= ]l, l + \frac{\Delta x}{2}[, \\ C_{N_p} &= ]L - \frac{\Delta x}{2}, L[. \end{aligned}$$

avec  $\Delta x = \frac{L}{N_p}$ .

### 3.5.3.1 Approximation par volumes-finis

En appelant  $x_{j-\frac{1}{2}}$  et  $x_{j+\frac{1}{2}}$  les extrémités de la cellule  $C_j$ , on peut écrire la relation de conservation pour cette cellule sous la forme :

$$\begin{aligned} & \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} W(x, t + \Delta t) - \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} W(x, t) = \\ & - \int_t^{t+\Delta t} F(W(x_{j+\frac{1}{2}}, s)) ds + \int_t^{t+\Delta t} F(W(x_{j-\frac{1}{2}}, s)) ds. \end{aligned}$$

L'approximation par volumes finis de cette relation repose sur les approximations :

$$\begin{aligned} W_j^n &\simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} W(y, t^n) dy, \\ \Psi_{j+\frac{1}{2}}^n &= \Psi(W_j^n, W_{j+1}^n) \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(W(x_{j+\frac{1}{2}}, s)) ds, \end{aligned}$$

où  $\Psi_{j+\frac{1}{2}}$  est le flux numérique entre les cellules  $C_j$  et  $C_{j+1}$ .

Le schéma volumes finis conservatif s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{W_j^{n+1} - W_j^n}{\Delta t} + \frac{\Psi_{j+\frac{1}{2}} - \Psi_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0.$$

Nous choisissons ici, d'utiliser le flux de Roe :

$$\Psi_{j+\frac{1}{2}} = \frac{F(W_{j+1}) + F(W_j)}{2} - \frac{1}{2} |A(\tilde{W}_{j+\frac{1}{2}})| (W_{j+1} - W_j),$$

où,  $A$  est la jacobienne de  $F$  :

$$A(W) = \frac{\partial F(W)}{\partial W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 + u^2 & 2u \end{bmatrix}.$$

$\tilde{W}_{j+\frac{1}{2}}$  est l'état moyen de vitesse moyenne définie par :

$$\tilde{u}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{n_{j+1}}u_{j+1} + \sqrt{n_j}u_j}{\sqrt{n_{j+1}} + \sqrt{n_j}}.$$

Le schéma se réécrit alors :

$$\frac{W_j^{n+1} - W_j^n}{\Delta t} + \frac{A^-(\tilde{W}_{j+\frac{1}{2}})(W_{j+1} - W_j) + A^+(\tilde{W}_{j-\frac{1}{2}})(W_j - W_{j-1})}{\Delta x} = 0.$$

### 3.5.3.2 Schémas d'ordre élevé

L'extension du schéma aux ordres supérieurs se fait en utilisant la méthode MUSCL ( Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws ) en conservant la même fonction de flux numérique  $\Psi(W_j, W_{j+1})$  mais en modifiant ces arguments par les états interpolés aux frontières de deux cellules. On considère maintenant les flux :

$$\Psi_{j+\frac{1}{2}} = \Psi(W_{j+\frac{1}{2}}^-, W_{j+\frac{1}{2}}^+),$$

où  $W_{j+\frac{1}{2}}^-$  et  $W_{j+\frac{1}{2}}^+$  sont obtenus à l'aide d'un  $\beta$ -schéma, on se référera à [11] pour plus de détails sur les  $\beta$ -schéma :

$$\begin{aligned} W_{j+\frac{1}{2}}^+ &= W_{j+1} - \frac{1}{2}[(1 - \beta)(W_{j+1} - W_j) + \beta(W_j - W_{j-1})], \\ W_{j+\frac{1}{2}}^- &= W_j + \frac{1}{2}[(1 - \beta)(W_{j+1} - W_j) + \beta(W_j - W_{j-1})]. \end{aligned}$$

Avec  $\beta \in [0, 1]$ , le schéma est au moins d'ordre 2 en espace, et d'ordre 3 si  $\beta = \frac{1}{3}$ .

En conséquence, nous voulons des intégrations temporelles, d'ordre 2 ou 3, nous utilisons pour cela des schémas de types Runge-Kutta d'ordre  $k \in [1..3]$  :

$$\begin{aligned} W_0 &= W^n \\ W_l &= W_0 - \Delta t \sum_{j=1}^k \alpha_{j,l} D(W_{j-1}) \\ W^{n+1} &= W_k \end{aligned}$$

où  $D(W_j)$  représente le flux total,  $\Psi_{i+\frac{1}{2}} - \Psi_{i-\frac{1}{2}}$  calculé avec la valeur  $W_j$ . Les coefficients  $(\alpha_{j,l})_{j,l \in 1..k}$  sont :

$$(\alpha_{j,l})_{k=2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\alpha_{j,l})_{k=3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Pour les schémas d'ordre élevé les  $\beta$ -schémas peuvent créer ou amplifier des oscillations parasites. On utilisera des limiteurs de flux basés sur la moyenne de Van Albada, pour corriger ces oscillations.

### 3.5.3.3 Traitement des conditions limites

Nous sommes amenés à traiter 2 sortes de conditions limites en  $L$  et  $r$ .

La première en  $L$  permet d'imposer les échanges avec le milieu extérieur, la seconde, permet de d'imposer que la plaque absorbe les ions.

- Conditions limites à l'infini

Pour traiter les échanges avec le milieu extérieur, on utilise une décomposition du flux de type Steger-Warming :

$$\Psi(W_{Np}, W_\infty) = A^+(W_{Np})W_{Np} + A^-(W_{Np})W_\infty.$$

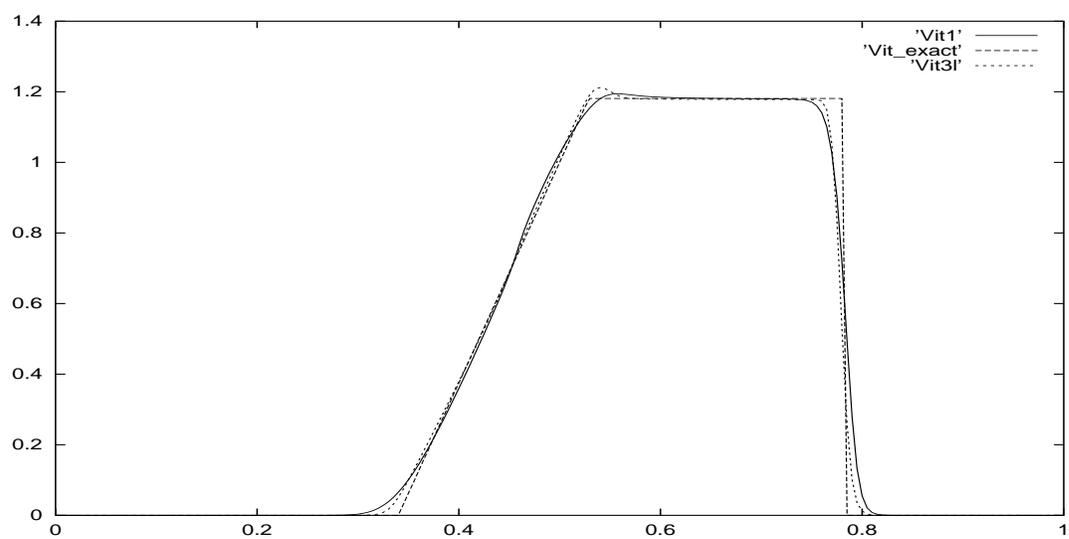
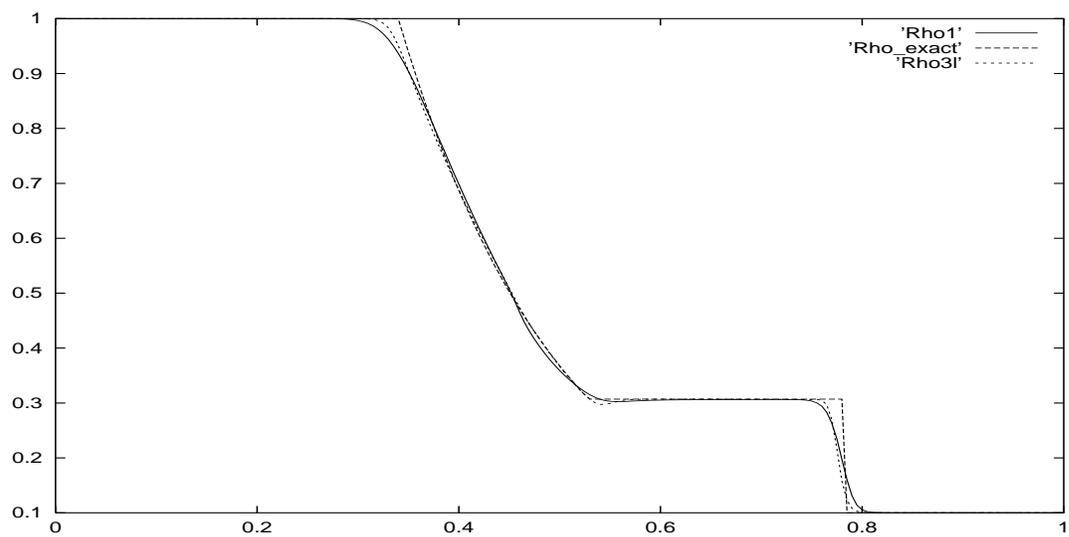
- Conditions limites sur la plaque

Pour traiter le fait que la plaque absorbe les particules, on impose qu'aucune information ne provient de la plaque, en fixant  $A^+(W_0) = 0$ . Le flux s'écrit :

$$\Psi(W_0, W_1) = A^-(W_1)W_1.$$

### 3.5.3.4 Résultats numériques

On donne ici la comparaison entre les résultats obtenus par le schéma numérique ( ordre 1 et 3 ) et la solution exacte. Le cas test est celui du tube à choc, on prend un état à gauche donné par  $n_g = 1$  et  $u_g = 0$  et un état à droite donné par  $n_d = 0.1$  et  $u_d = 0$  ( on travaille ici directement en grandeurs adimensionnées ).

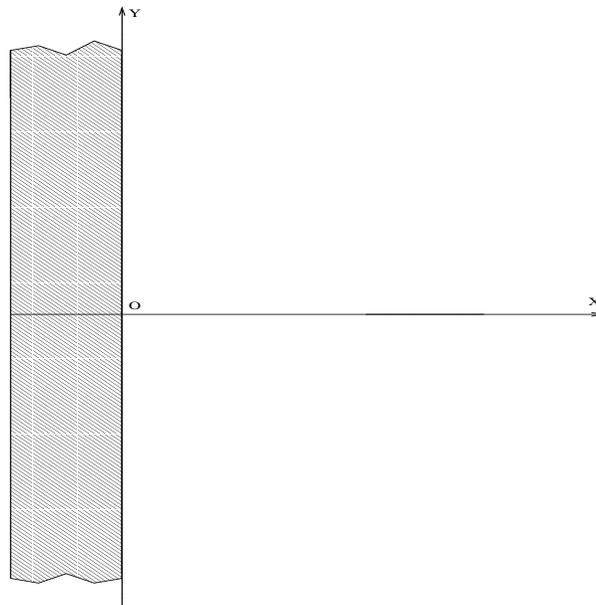


Nous constatons des résultats satisfaisants.

Le modèle numérique pour le système d'Euler isotherme étant explicité, nous allons maintenant l'utiliser pour résoudre un modèle unidimensionnel fluide de prise de charge.

### 3.5.4 Modèle unidimensionnel

Nous nous intéressons à la charge d'un conducteur plan infini dans les directions  $(Oy)$  et  $(Oz)$ , dans les conditions de charge et de modélisation fluide décrite précédemment. On négligera les densités de particules réémises par la surface.



La symétrie du problème nous permet de supposer que le potentiel ne dépend que de  $x$  et que les densités et flux de particules ne dépendent que de  $x$  et de  $v_x$ . De plus, la symétrie par rapport au plan  $(Oyz)$  nous permet de considérer que toutes les fonctions de  $x$  sont paires et de raisonner uniquement pour les  $x > 0$ .

#### 3.5.4.1 Adimensionnement du problème

Nous rappelons l'adimensionnement de la section 3.5.1.6.

$$\begin{aligned}
& \partial_t n_i(t, x) + \partial_x \cdot (n_i(t, x) u_i(t, x)) = 0, \\
& \partial_t (n_i(t, x) u_i(t, x)) + \partial_x \cdot (n_i(t, x) (u_i^2(t, x) + 1)) = \\
& \quad -n_i(t, x) \partial_x \Phi(t, x), \\
& -\Delta_x \Phi(t, x) = (n_i(t, x) - \exp(\Phi(t, x)))(t, x), \\
& \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(t, x) = 0, \\
& \quad \partial_x \Phi(t, 0) = -\rho_s(t), \\
& \frac{\partial \rho_s(t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp(\Phi(t, x)) + n_i(t, x) u_i(t, x).
\end{aligned} \tag{3.52}$$

### 3.5.4.2 Approximation numérique

On se place sur un intervalle  $]0, L[$ , où  $L$  est pris suffisamment grand pour s'assurer avoir retrouver la neutralité du plasma, typiquement on prendra quelques longueurs de Debye. Cet intervalle est discrétisé en cellules comme en 3.5.3 .

On se place sur un intervalle  $[1, L]$ , discrétisé en  $N_p + 1$  cellules de contrôle  $C_j$  définit par :

$$\begin{aligned}
& ]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[ , \forall j \in 1 \dots N_p - 1, \\
& C_0 = ]0, \frac{\Delta x}{2}[, \\
& C_{N_p} = ]L - \frac{\Delta x}{2}, L[,
\end{aligned}$$

avec  $\Delta x = \frac{L}{N_p}$ , et  $x_{j+\frac{1}{2}} = (j + \frac{1}{2})\Delta x$ .

On introduit une discrétisation en temps  $t^n = n\Delta t$ , on notera  $n_j^n$  et  $u_j^n$ , les approximations des densités et vitesses des ions dans les cellules  $C_j$  au temps  $t^n$ . De plus, on notera  $\Phi_j^n$  la valeur du potentiel électrostatique au point  $x_j$  et au temps  $t^n$ . Enfin, on notera  $\rho_s^n$  la valeur de  $\rho_s$  au temps  $t^n$ .

Les schémas utilisés seront écrits directement en grandeurs adimensionnées.

L'approximation de la partie Euler se fait par un schéma de Roe décrit en 3.5.3.1, le terme source provenant du potentiel est calculé par une approxi-

mation du gradient de type différences finies. Le calcul par volumes finis est décomposé en deux parties pour permettre d'impliciter ce terme source. On pourra se référer à [31] pour plus de détails.

On considèrera des conditions limites absorbantes à la plaque pour les ions. Pour imposer la condition limite à l'infini on suppose que l'état est maxwellien en  $L$ . La fonction de distribution des ions est donc :

$$f_i(v) = n_0 \left( \frac{m_i}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{\frac{1}{2}m_i v^2}{kT} \right).$$

Nous imposons la densité  $n_0$  ( 1 après adimensionnement ) et la vitesse correspondante à la vitesse moyenne des vitesses entrantes dans notre domaine, soit  $\sqrt{\frac{kT}{2\pi m_i}}$  ( $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$  après adimensionnement ).

En supposant toutes les grandeurs connues au temps  $n$ , on commence par calculer la charge surfacique au temps  $t^{n+1}$ .

- Schéma pour la charge surfacique .

La charge surfacique est calculée par un schéma de type différences finies :

$$\rho_s^{n+1} = \rho_s^n + \Delta t \left( n_0^n u_0^n - \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp(\Phi_0^n) \right).$$

On prendra  $\rho_s^0 = 0$  pour condition initiale.

- Schéma pour la densité ionique :

$$n_j^{n+1} = n_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \left( \Psi_{j+\frac{1}{2}}^n \right)_1 - \left( \Psi_{j-\frac{1}{2}}^n \right)_1 \right)$$

où  $\left( \Psi_{j-\frac{1}{2}}^n \right)_1$  représente les premières coordonnées du flux.

On prendra 1 comme condition initiale pour la densité ionique, correspondant après adimensionnement à la densité du plasma neutre.

Les densités ioniques étant connues au temps  $t^{n+1}$  on peut alors calculer le potentiel électrostatique au temps  $t^{n+1}$ .

- Schéma pour le potentiel électrostatique

Le potentiel est calculé à partir de la discrétisation de l'équation de Poisson par différences finies centrées.

On impose comme conditions limites  $\Phi^{n+1}(L) = 0$  et  $\partial_x \Phi^{n+1}(0) = \rho_s$ .

On a :

$$\Phi_1^{n+1} - \Phi_2^{n+1} = \Delta x \rho_s^{n+1},$$

$$\Phi_{i+1}^{n+1} - 2\Phi_i^{n+1} + \Phi_{i-1}^{n+1} = \Delta x^2 (\exp(\Phi_i^{n+1}) - n_i^{n+1}),$$

$$\Phi_{N_x}^n = 0.$$

Cette équation non linéaire en  $\Phi^{n+1}$  est résolue par un algorithme de Newton de manière analogue à 3.1.2.

On peut maintenant calculer les courants d'ions avec le terme source implicite :

- Schéma pour le courant ionique :

$$u_j^{n+1} n_j^{n+1} = u_j^n n_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \left( \Psi_{j+\frac{1}{2}}^n \right)_2 - \left( \Psi_{j-\frac{1}{2}}^n \right)_2 \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} n_j^{n+1} (\Phi_{j+1}^{n+1} - \Phi_j^{n+1}),$$

où  $\left( \Psi_{j-\frac{1}{2}}^n \right)_2$  représente les deuxièmes coordonnées du flux.

On itère successivement jusqu'à atteindre l'équilibre.

On notera qu'à l'équilibre on doit avoir :

$$\partial_x (n_i u_i) = 0.$$

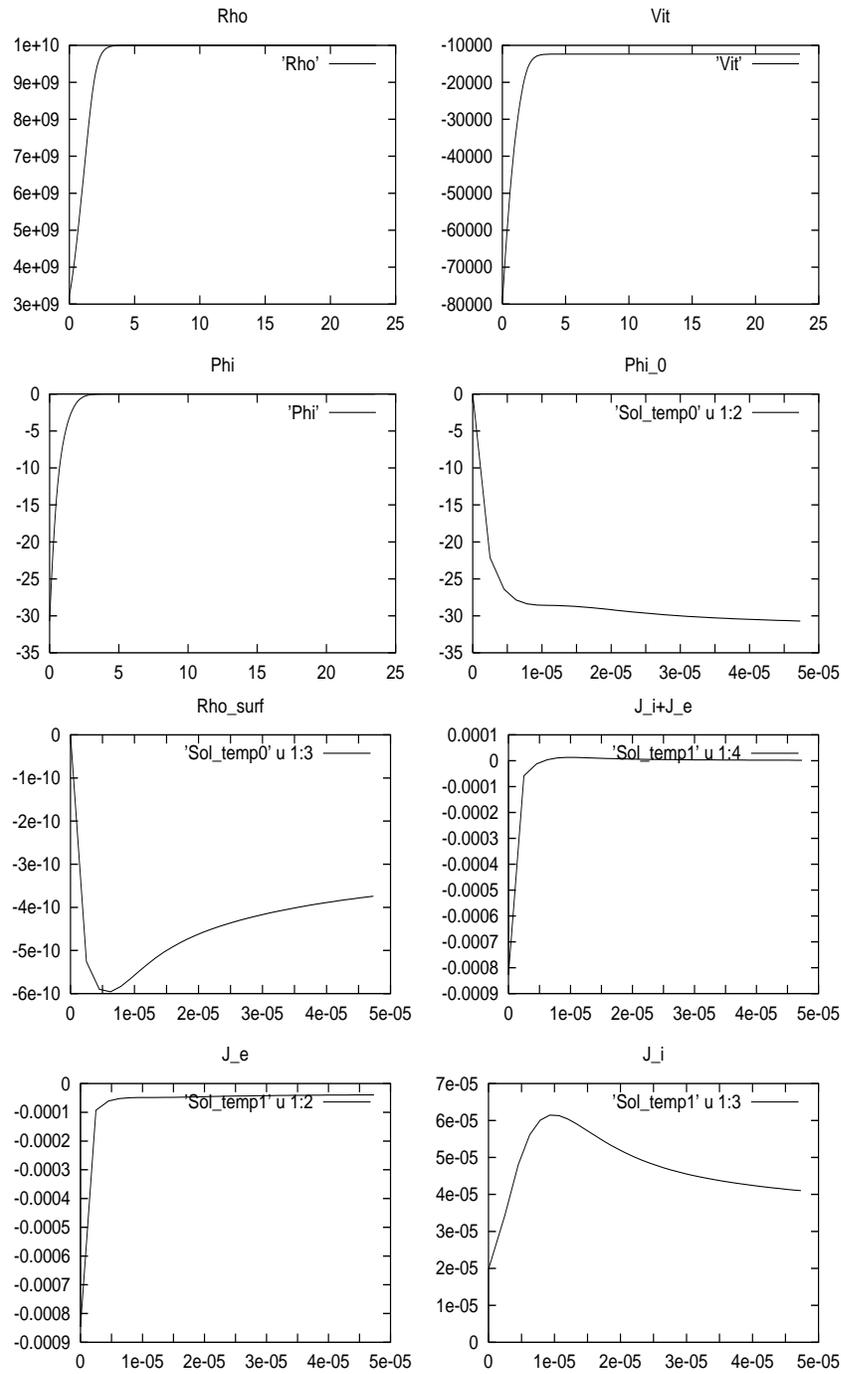
$$\text{Cela donne } j_i = e n_0 \sqrt{\frac{kT_i}{2\pi m_i}},$$

$$\text{et } j_e = j_i.$$

$$\text{On obtient } \Phi_0 = -\frac{kT_e}{m_e} \log \left( \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \right).$$

### 3.5.4.3 Résultats numériques

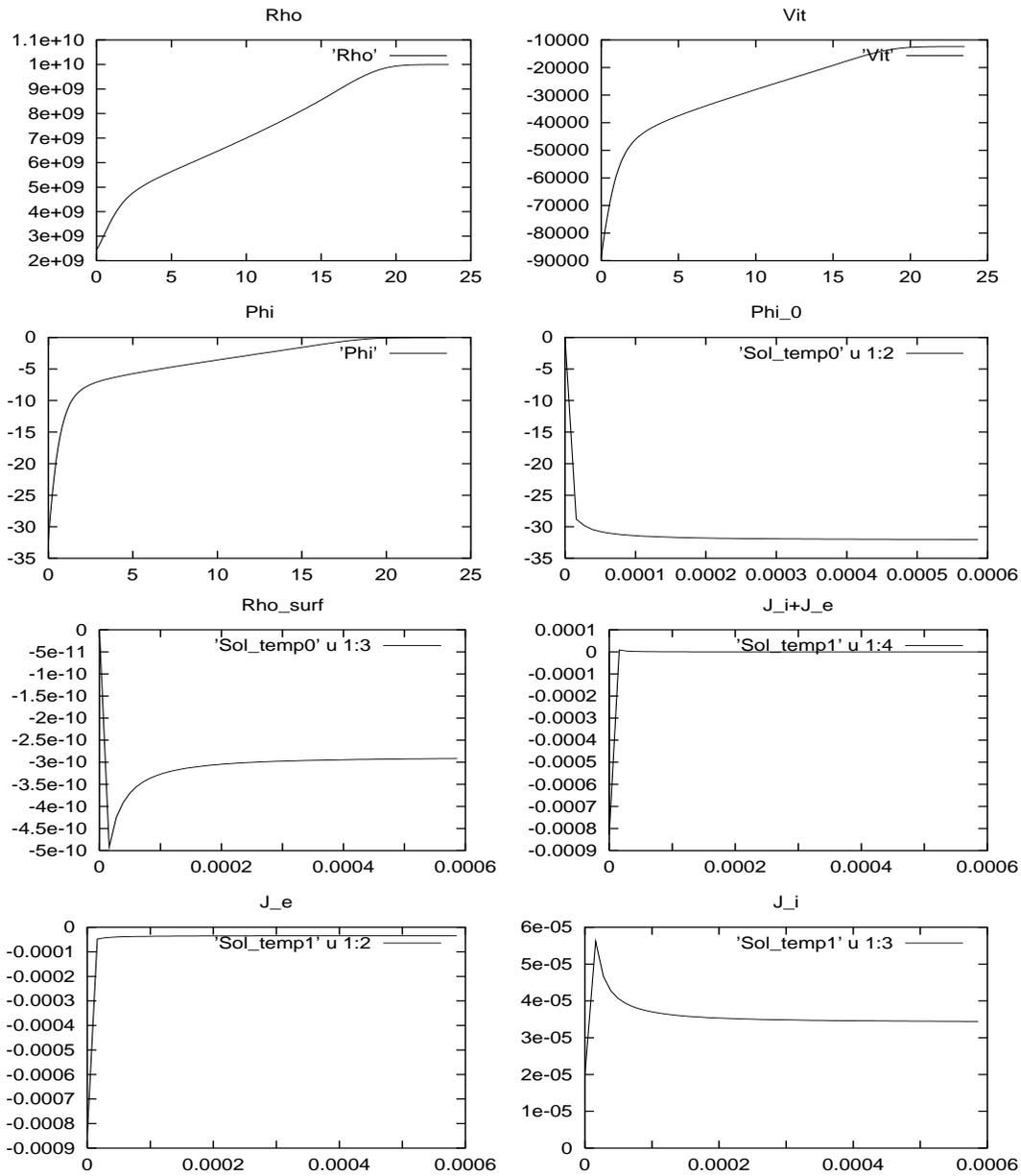
On donne ici les résultats avant convergence obtenus pour une plaque de conducteur parfait plongée dans un plasma neutre de densité  $n_0 = 1e10m^{-3}$  et de température  $kT_e = kT_i = 10eV$ .



Nous avons, respectivement, de bas en haut, et de gauche à droite, la densité spatiale, la vitesse moyenne, le potentiel spatial, l'évolution temporelle du potentiel de la plaque, de sa charge surfacique, du courant total reçu, des courants d'électrons et d'ions. Les résultats avant convergence paraissent

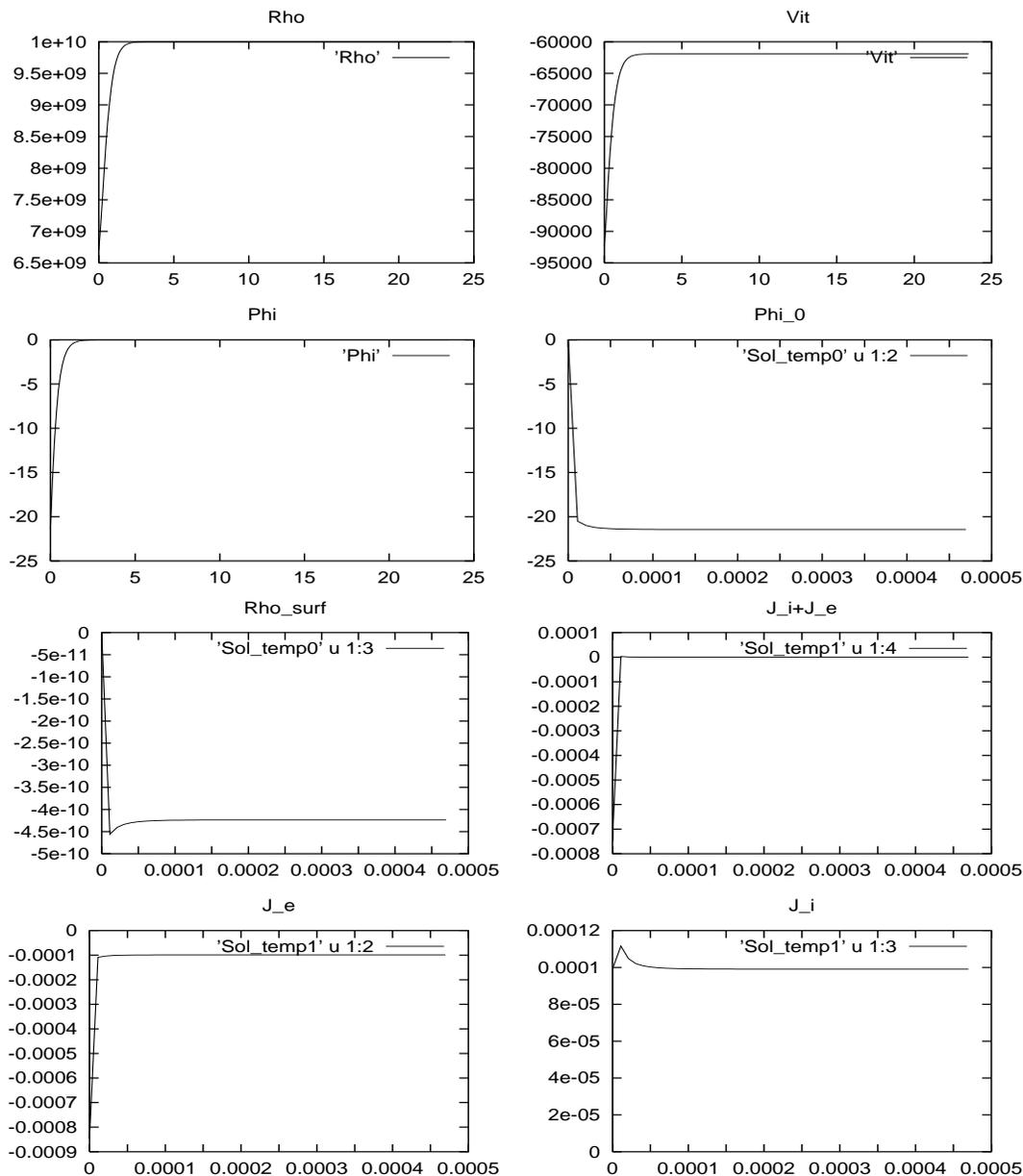
acceptables.

Malheureusement les résultats pour un temps plus long montrent que l'on n'atteindra pas un état d'équilibre :



On pense que les conditions limites à la plaque empêche cette convergence à l'équilibre. Il paraît en effet difficile d'imposer des conditions limites subsoniques à l'infini et des conditions absorbantes sur la plaque en une dimension d'espace. En quelque sorte, nous retrouvons ce qui a déjà été rencontré pour le modèle unidimensionnel.

Le cas test suivant, dans lequel nous imposons à l'infini une vitesse supersonique ( $2\frac{kT_i}{m_i}$ ), converge, ce qui nous conforte dans cette idée. Néanmoins, on s'écarte ainsi de la réalité physique.



Pour relaxer ces conditions limites, on a choisi de passer en dimension supérieure par l'étude d'un modèle sphérique, ce qui est l'objet de la section suivante.

### 3.5.5 Modèle sphérique

Nous nous intéressons maintenant à la charge d'une sphère de rayon  $R$ , toujours dans les mêmes conditions de modélisation. La symétrie du problème nous permet de supposer que le potentiel ne dépend que de  $r$ , ainsi les densités et flux de particules ne dépendent que de  $r$ , et donc les vitesses des ions seront radiales.

#### 3.5.5.1 Adimensionnement du problème

Nous partons des équations d'Euler isothermes tridimensionnelles, en effectuant le changement de variable en coordonnées sphériques, en imposant  $u_\theta = u_\phi = 0$ , et en multipliant par  $r^2$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t r^2 n_i + \partial_r (r^2 n_i u_i) &= 0, \\ \partial_t (r^2 n_i u_i) + \partial_r (r^2 n_i u_i^2) + r^2 \frac{kT_i}{m_i} \partial_r n_i &= -q n_i r^2 \partial_r \Phi, \end{aligned} \quad (3.53)$$

où  $n_i$  et  $u_i$  représentent la densité et la composante radiale de la vitesse.

Ceci se réécrit sous la forme conservative :

$$\begin{aligned} \partial_t r^2 n_i + \partial_r (r^2 n_i u_i) &= 0, \\ \partial_t (r^2 n_i u_i) + \partial_r \left( r^2 n_i \left( u_i^2 + \frac{kT_i}{m_i} \right) \right) &= n_i \left( 2r \frac{kT_i}{m_i} - \frac{q}{m_i} r^2 \partial_r \Phi \right). \end{aligned}$$

Le modèle s'adimensionne comme en 2.2.2.1 ( on prendra directement la longueur de Debye comme grandeur d'adimensionnement ). Les équations se réécrivent alors, en notant  $n$  la grandeur  $r^2 n_i$  et  $u$ ,  $u_i$ .

$$\begin{aligned}
& \partial_t n(t, r) + \partial_r \cdot (n(t, r)u(t, r)) = 0, \\
& \partial_t (n(t, r)u(t, r)) + \partial_r \cdot (n(t, r) (u^2(t, r) + 1)) = \\
& \quad n(t, r) \left( \frac{2}{r} - \partial_r \Phi(t, r) \right), \\
& -\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi(t, r)) = (n(t, r) - \exp(\Phi(t, x))), \\
& \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi(t, r) = 0, \\
& \quad \partial_r \Phi(t, R) = -\rho_s(t), \\
& \partial_t \rho_s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp(\Phi(t, r)) + n(t, r)u(t, r).
\end{aligned}$$

On constate que l'on retrouve les équations d'Euler isothermes unidimensionnelles 'classiques' avec un terme source supplémentaire de pression dû au passage en coordonnées sphériques.

### 3.5.5.2 Approximation numérique

De manière analogue à 3.5.4.2, l'approximation se fait par discrétisation de type Volumes-Finis des équations d'Euler. Ici on implicitera toujours le terme source dépendant du potentiel mais pas celui dépendant de la pression. Ce terme, provenant des flux, est pris au même instant que ceux-ci.

On considèrera toujours des conditions limites absorbantes sur la sphère pour les ions. Pour imposer la condition à l'infini, on suppose que l'état est maxwellien en  $L$ , soit que la fonction de distribution des ions est :

$$f_i(v) = n_0 \left( \frac{m_i}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{\frac{1}{2} m_i v^2}{kT} \right)$$

Nous imposons la densité  $n_0$  ( 1 après adimensionnement ) et la vitesse correspondante à la vitesse moyenne des vitesses entrantes dans notre domaine, soit  $\sqrt{\frac{kT}{2\pi m_i}}$  (  $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$  après adimensionnement )

En supposant toutes les grandeurs connues au temps  $n$ , on commence par calculer la charge surfacique au temps  $t^{n+1}$ .

- Schéma pour la charge surfacique.

La charge surfacique est calculée par un schéma de type différences finies :

$$\rho_s^{n+1} = \rho_s^n + \Delta t \left( n_0^n u_0^n - \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \exp(\Phi_0^n) \right).$$

On prendra  $\rho_s^0 = 0$  pour condition initiale.

- Schéma pour la densité  $n$ .

Le schéma pour la charge surfacique s'écrit :

$$n_j^{n+1} = n_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta r} \left( \left( \Psi_{j+\frac{1}{2}}^n \right)_1 - \left( \Psi_{j-\frac{1}{2}}^n \right)_1 \right),$$

où  $\left( \Psi_{j-\frac{1}{2}}^n \right)_1$  représente les premières coordonnées du flux.

On prendra 1 comme condition initiale pour la densité ionique, correspondant après adimensionnement à la densité du plasma neutre.

Les densités ioniques étant connues au temps  $t^{n+1}$  on peut alors calculer le potentiel électrostatique au temps  $t^{n+1}$ .

- Schéma pour le potentiel électrostatique

On impose comme conditions limites  $\Phi^{n+1}(L) = 0$  et  $\partial_x \Phi^{n+1}(0) = \rho_s$

Le potentiel est calculé à partir de la discrétisation de l'équation de Poisson par différences finies centrées

$$\Phi_1^{n+1} - \Phi_2^{n+1} = \Delta r \rho_s^{n+1},$$

$$\Phi_{i+1}^{n+1} - 2\Phi_i^{n+1} + \Phi_{i-1}^{n+1} + \frac{2\Delta r}{r_i} (\Phi_i^{n+1} - \Phi_{i-1}^{n+1}) = \Delta x^2 (\exp(\Phi_i^{n+1}) - n_i^{n+1}),$$

$$\Phi_{Nx}^n = 0.$$

Cette équation non linéaire en  $\Phi^n$  est résolue par un algorithme de Newton de manière analogue qu'en 3.1.2.

On peut alors calculer les courants d'ions avec le terme source implicité .

- Schéma pour le courant ionique.

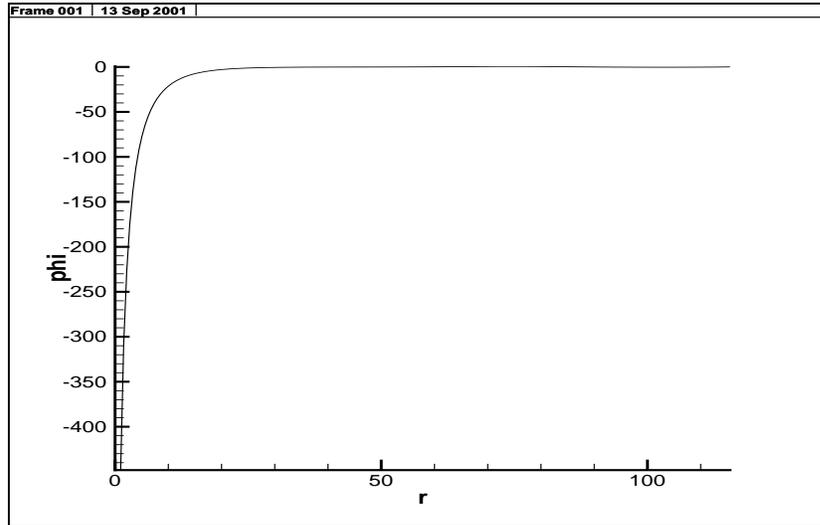
Le schéma s'écrit :

$$u_j^{n+1} n_j^{n+1} = u_j^n n_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta r} \left( \left( \Psi_{j+\frac{1}{2}}^n \right)_2 - \left( \Psi_{j-\frac{1}{2}}^n \right)_2 \right) - \frac{\Delta t}{\Delta r} n_j^{n+1} (\Phi_{j+1}^{n+1} - \Phi_j^{n+1}) - \Delta t \frac{2}{r_j} n_j^n$$

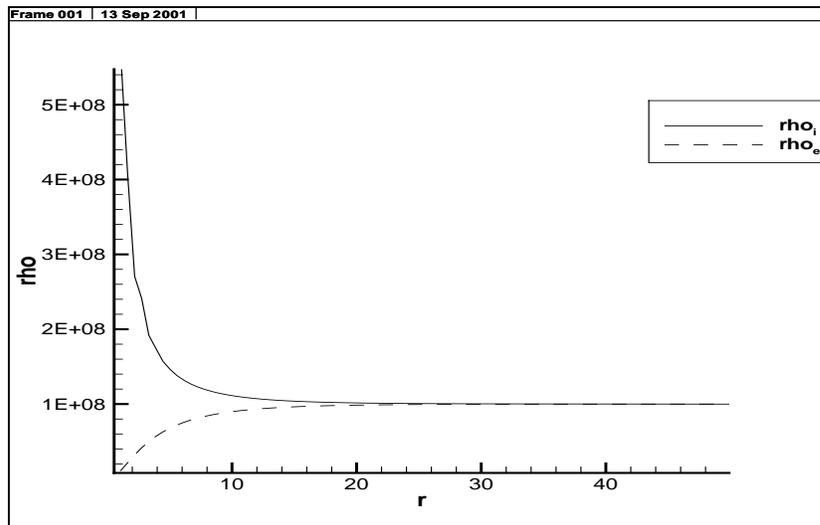
où  $\left( \Psi_{j-\frac{1}{2}}^n \right)_2$  représente les deuxièmes coordonnées du flux.

### 3.5.5.3 Résultats numériques

Nous donnons ici les résultats obtenus sur une sphère de rayon  $1m$  plongée dans un plasma de densité  $10^6 m^{-3}$  et de température  $200eV$ .

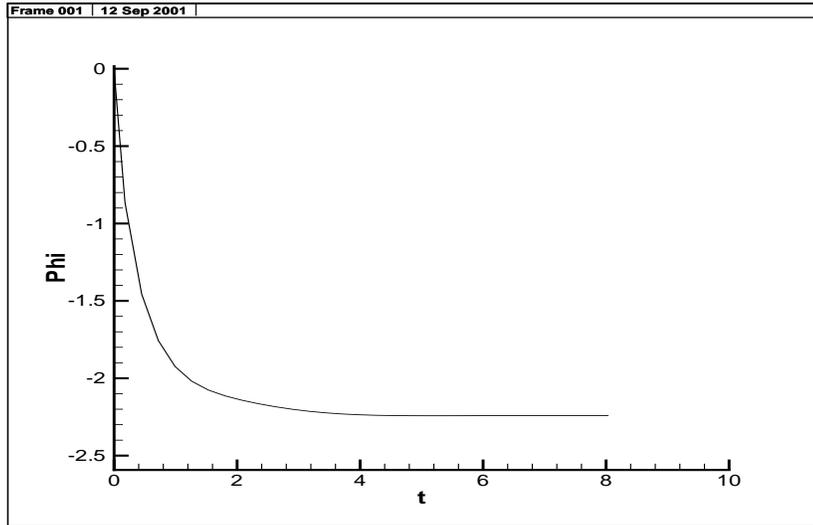


La courbe du potentiel à l'équilibre est acceptable, nous obtenons comme potentiel d'équilibre  $-448V$ , ce qui représente quelque fois la température électronique exprimée en  $eV$ .

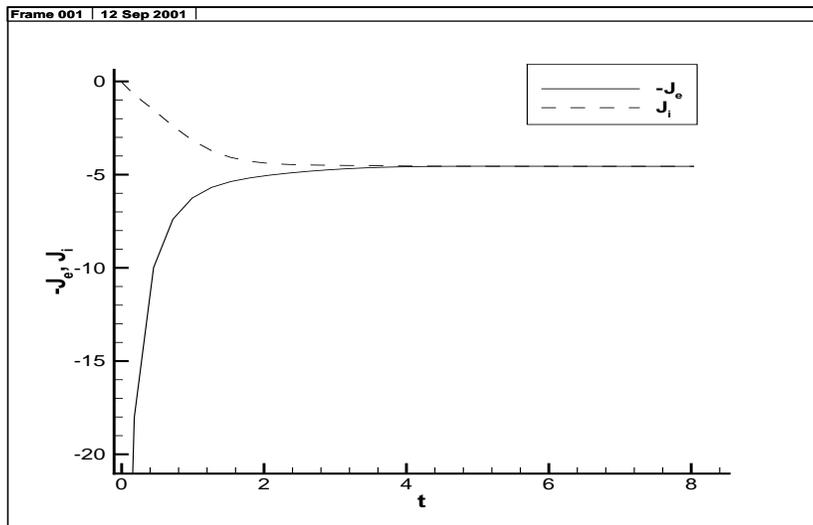


Pour les densités électroniques on retrouve le fait que la plaque, chargée négativement, attire les ions et repousse les électrons.

Nous donnons, de plus, les évolutions temporelles du potentiel et des courants reçus ( $J_i$  et  $-J_e$ ) le tout, en grandeurs adimensionnées :



On observe que le potentiel tend vers une valeur constante et, sur la figure suivante que le courant total s'annule. Nous constatons une bonne convergence du modèle.



Ce modèle fournit des résultats acceptables, néanmoins, dans un cadre non collisionnel, comme celui de la magnétosphère, l'utilisation d'un modèle fluide est difficilement justifiable.

### 3.5.6 Conclusion

Nous avons présenté dans cette section quelques modèles de plasmas régis par des systèmes de Vlasov-Poisson stationnaires en configuration monodimensionnelle et sphérique. On rappelle que le but de l'étude est l'analyse et la simulation du mécanisme de charge d'un satellite placé dans un environnement plasmique peu dense chaud et complètement ionisé. Les modèles étudiés ici, basés sur le système de Vlasov-Poisson, permettent de rendre compte qualitativement des phénomènes de charge dans le milieu considéré. En effet, on observe bien le comportement des potentiels et courants sur l'obstacle ainsi que la condition de neutralité à l'infini. (i.e. suffisamment loin de la surface du satellite). Néanmoins, on a dû modifier le modèle de Vlasov-Poisson stationnaire pour fixer cette condition. Nous sommes convaincus que ce défaut provient essentiellement du caractère monodimensionnel du modèle ( i.e. surface supposée infinie dans 2 directions ), ceci se retrouve par ailleurs pour le modèle fluide. Le modèle fluide sera abandonné par la suite. Bien que les modèles *Vlasov – Poisson* nous fournissent les ordres de grandeurs des potentiels de surface de notre satellite, nous devrons par la suite passer en dimensions supérieures pour prendre en compte des géométries plus réalistes.

# Chapitre 4

## Mesures Expérimentales

### 4.1 Objectifs

L'utilisation de la propulsion électrique sur les satellites nécessite de maîtriser les interactions du plasma généré par ce type de propulseur avec les différentes fonctions du satellite. Une des perturbations est l'influence du jet sur l'évolution et la répartition spatiale des potentiels électrostatiques à la surface du satellite.

La présence du plasma propulseur, constitué de particules chargées, en venant modifier l'environnement électrique du satellite, nécessite la mise au point d'un outil de simulation adapté capable de prédire la modification des potentiels lors du fonctionnement du propulseur. Dans le but de valider ce modèle numérique, l'objectif de ces mesures est de caractériser le plasma issu du propulseur par la détermination des densités de courant ionique et densités électroniques, de la température du plasma et de son potentiel.

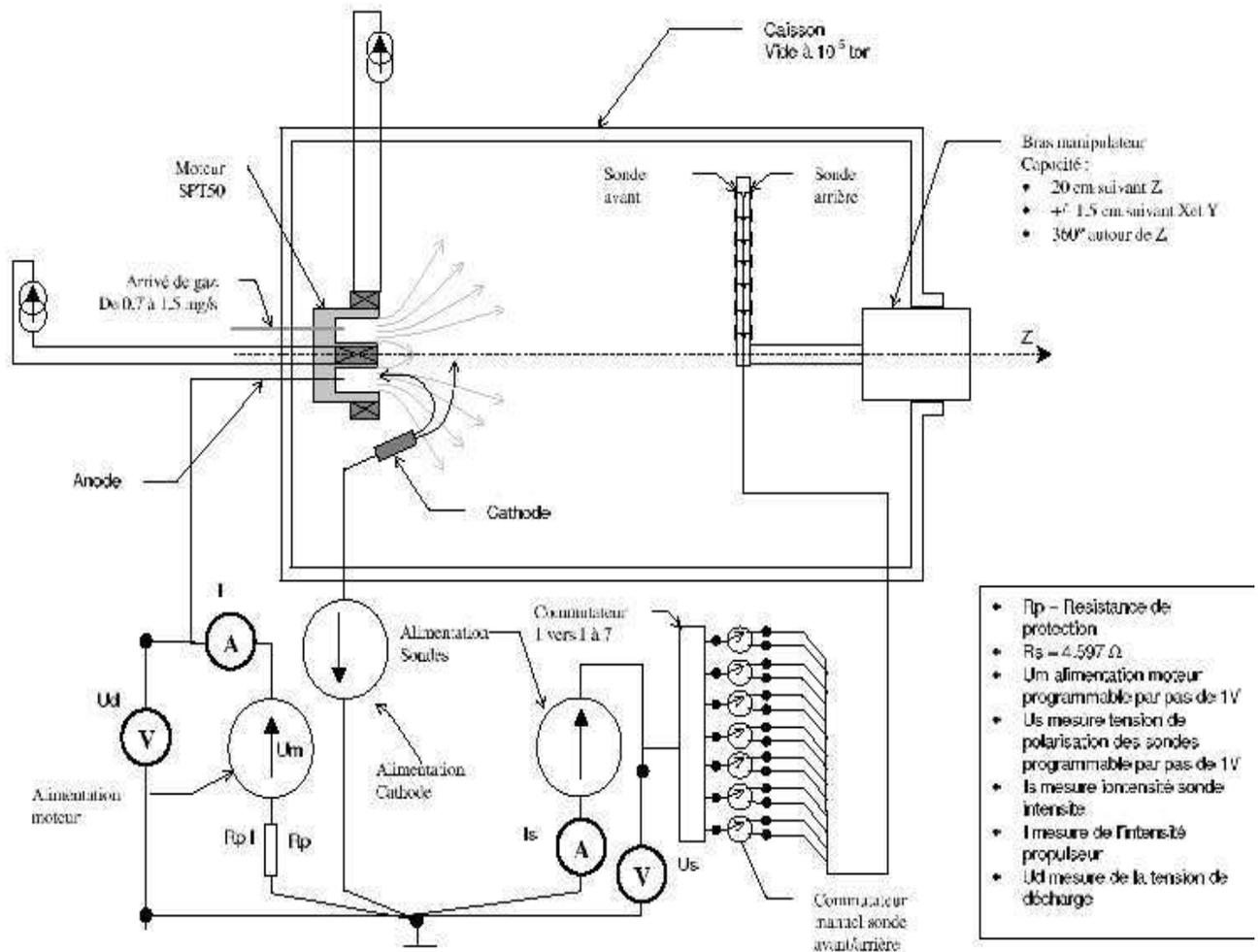
Des mesures expérimentales ont déjà été effectuées par le passé, on pourra citer par exemple [23]. Dans cet article nous trouvons des données mesurées à une distance fixe pour un  $SPT - 100$ . Ici, nous tenterons d'obtenir une cartographie plus complète dans le cœur du jet en prenant des points de mesures sur un domaine bi-dimensionnel discrétisé mais avec un  $SPT - 50$ .

## 4.2 Moyens expérimentaux

Pour réaliser les mesures on utilise les moyens expérimentaux dont dispose le laboratoire PMI de l'école Polytechnique :

- Un propulseur de type SPT-50.
- Une bouteille de Xenon, nécessaire à l'alimentation du propulseur, une dérivation qui permet d'alimenter la cathode et l'anode.
- Deux régulateurs de pression Schaffer permettant d'imposer et de contrôler les débits de gaz injecté.
- Un caisson à vide, de longueur 2m et de diamètre 80cm.
- Un système de pompage permettant de descendre dans la gamme des  $10^{-8}$  mbar.
- Un bras manipulateur de type MECA-2000, permettant 20 cm de déplacement, sur l'axe horizontal, 32mm dans un carré vertical, et 360 degrés de rotation. ( Celui-ci est possède une interface GPIB permettant de le commander par ordinateur ).
- Une rampe de sonde fabriquée sur place, composée de 7 sondes planes ( carre de 5mm de cote ) séparées de 2 cm situés à l'avant et 7 sondes arrières.
- Trois ampèremètre-voltemètre de type Helwlett-Packard 34401A commandable par interface GPIB.
- Un oscilloscope de type Helwlett-Packard 54602B commandable par interface GPIB.
- Un multiplexeur 7 voies commandable par interface GPIB.
- Un boîtier de commutation.
- Deux alimentations stabilisées, de type ETAT SK-600-0,5.
- Une alimentation stabilisée de type ETAT SK-500-5.
- Un ordinateur de type Power-Machintosh 8200/120 Power-PC.
- Le logiciel Labview.

### 4.2.1 Schéma électrique



### 4.2.2 Archivage des données

Dans le but de respecter les demandes pour la réalisation des mesures, ( variation des différents paramètres : débit de cathode, tension d'alimentation du moteur, position de sondes et inclinaison, soit 60000 fichiers), on a procédé de manière efficace pour stocker les données correspondant aux caractéristiques de sondes. Nous avons réalisé des drivers sous Labview permettant de construire une arborescence et d'inclure des en-têtes aux fichiers de manière à les retrouver facilement. La procédure utilisée est détaillée en 4.6. Dans la pratique, la durée consacrée aux mesures n'a pas permis de faire varier tous les paramètres comme il était prévu initialement. Nous n'avons donc pas pu exploiter ces possibilités dans leur intégralité.

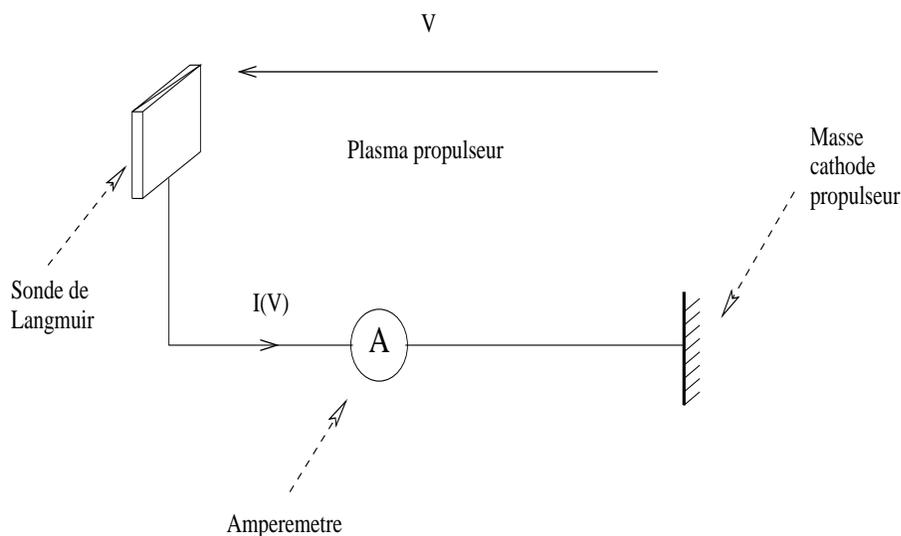
### 4.2.3 Automatisation des instruments

Pour réaliser la prise de mesures de manière automatisée, on utilise le logiciel LabView installé sur un Power Macintosh (8200/120). Par le biais d'interface GPIB, celui-ci contrôle les déplacements du bras, la tension d'alimentation de la rampe de sondes et le multiplexeur. Pour récupérer les mesures, il contrôle de plus les multimètres et permet de construire la procédure d'archivage. Pour plus de détails concernant le développement des drivers LABVIEW, on pourra se référer à l'annexe 4.7. De manière analogue à l'archivage des données, nous avons commencé à développer les drivers pour respecter les demandes ; néanmoins après avoir constaté que la procédure pour avoir une caractéristique de sonde nécessitait d'une à cinq minutes, nous avons abandonné l'idée d'en avoir 60000. Les variations sur les paramètres débit de Xénon à la cathode, tension de décharge, ainsi que les multiples rotations de la rampe de sonde, ont été supprimées.

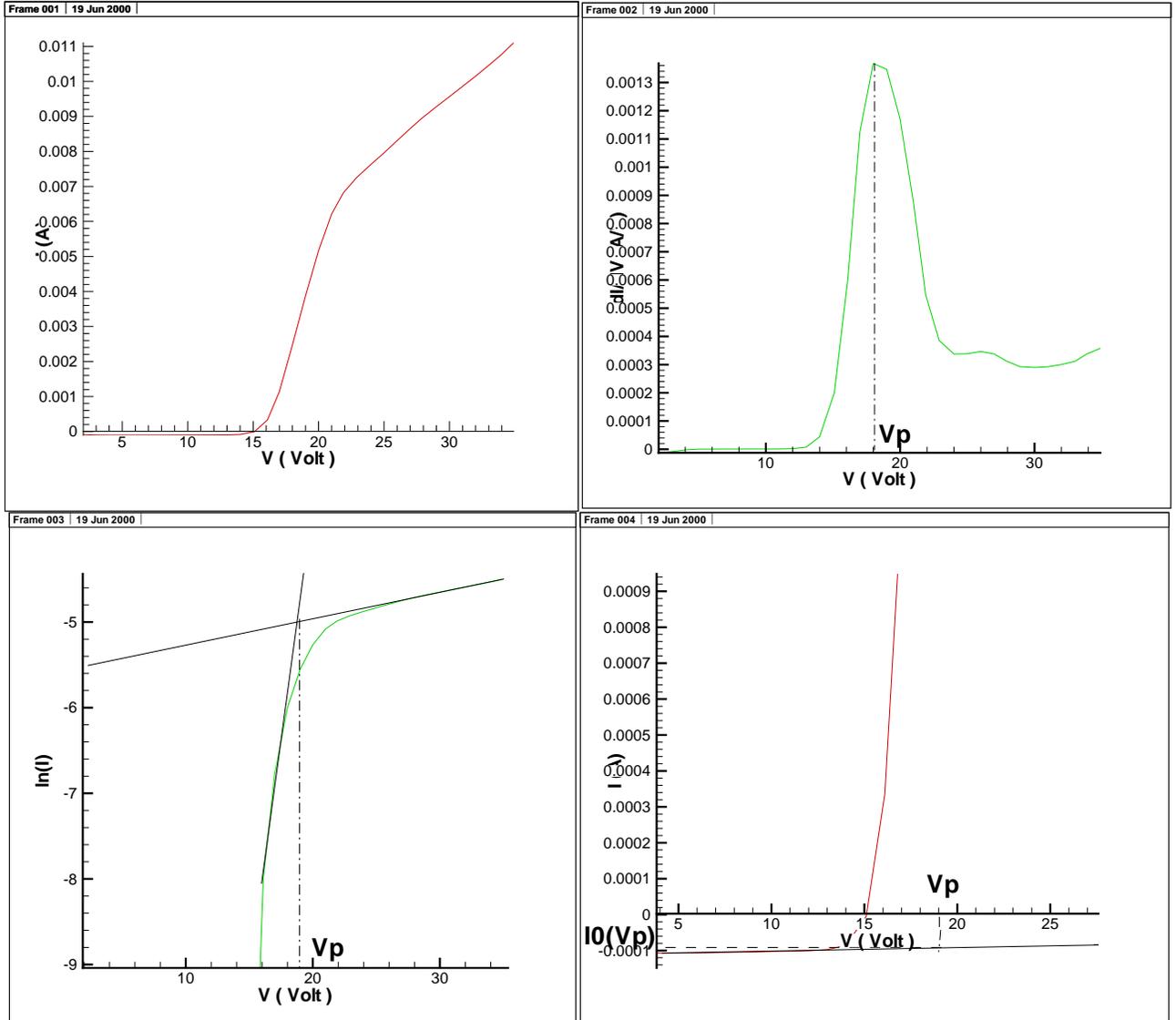
## 4.3 Théorie succincte des sondes de Langmuir

Pour accéder au potentiel plasma  $V_p$  (potentiel électrostatique au point de plasma auquel la sonde se trouve), température  $kT_e$  et densité électronique  $n_e$  ainsi que le courant ionique, on analyse la caractéristique Volt-Ampère de sondes de Langmuir planes placées dans le jet.

Nous donnons un schéma simplifié de sonde :



Nous donnons sur la figure suivante une caractéristique de sonde obtenue dans le jet du propulseur. (Cf. Frame 001, nous faisons varier la tension  $V$  pour tracer l'intensité en fonction de celle-ci.) Nous constatons que la courbe est constituée d'une partie linéaire de saturation ionique suivie d'une partie exponentielle donnant le courant électronique sous la forme :  $I(V) = I_{e0}(V) \exp(\frac{e(V-V_p)}{kT_e})$  ( avec  $I_{e0} = en_e S \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}}$ ,  $S$  étant la surface de la sonde ), puis d'une branche de saturation électronique peu prononcée.



On détermine

- le potentiel plasma,  $V_p$ . On utilise deux méthodes différentes : la première méthode consiste à trouver le point d'inflexion de la courbe ( atteint en un point voisin du potentiel plasma avec une précision de l'ordre de  $\frac{kT_e}{e}$  ). On trace la dérivée première de la courbe et on prend le maximum. ( Cf. Frame 002. ) La deuxième méthode consiste à tracer la caractéristique en échelle logarithmique, ( cf Frame 003 ) puis on interpole linéairement la partie exponentielle et la partie de saturation électronique. Le potentiel plasma est proche de l'intersection entre ces deux droites. Pour choisir le potentiel plasma, on choisit celui qui permet la meilleure précision en fonction de la forme de la courbe ( plus ou moins bruitée ). Néanmoins on constate que les deux méthodes donnent des résultats très proches ( 1 à 2 V d'écart ).
- $kT_e$ , la température électronique. On trace la caractéristique en échelle logarithmique, ( cf Frame 003 ) puis on interpole linéairement la droite résultant de la partie exponentielle de la courbe, on récupère ainsi la pente :  $\frac{e}{kT_e}$ .
- $n_e$ , la densité électronique. On relève la valeur du courant au potentiel plasma :  $en_e S \sqrt{\left(\frac{kT_e}{2\pi m_e}\right)}$ .
- $I0$ , la densité de courant ionique collecté par la sonde. On interpole la branche de saturation ionique de la caractéristique et on prend la valeur au potentiel plasma ( cf Frame 004 ).

## 4.4 Résultats

Le démarrage de la manipulation a commencé réellement après 2 semaines de développement et correction des drivers, de mise en place et de résolution de problèmes techniques. L'assistance de Yann Dantal et de Michel Tanguy m'a été d'un grand secours. Pour des raisons de sécurité, il était impossible de maintenir le vide pendant la nuit. Chaque matin, il était nécessaire de réaliser le vide à l'intérieur du caisson ( 3-4 h ). Le démarrage du propulseur ne pouvait commencer qu'en début d'après-midi. Les résultats de la manipulation sont entachés de beaucoup d'ennui concernant le bon fonctionnement du propulseur. Celui-ci est équipé d'une cathode froide, qui malheureuse-

ment n'était pas en bon état. Les paramètres de celle-ci ont dû être adaptés bien souvent par Michel Tanguy en s'écartant du régime nominal spécifié. Le débit d'injection de Xénon sur celle-ci a dû être augmenté pour la forcer à produire suffisamment d'électrons. Le fonctionnement du propulseur était de ce fait bien capricieux, il changeait de régime relativement souvent. Le plasma généré a donc pu fortement être modifié. Concernant l'influence de l'augmentation de débit sur la présence d'ions lents dans le plasma, cela n'est pas gênant, car le rôle des sondes arrières est précisément de les supprimer. Par contre, on risque d'augmenter ainsi le taux de neutres dans le plasma (neutres non ionisés par la cathode). Ceux-ci sont bien sur transparents vus des sondes.

L'évolution dans le temps de la série de positions est indiquée par le tableau suivant :

$Z / \Phi$	0°	90°	180°	270°
953	26/04 Essai MC 7 S.AV 27/04 7 S.AR			
853	26/04 Essai MC			
753	27/04 7 S.AV			
553	28/04 7 S.AV 2 S.AR 05/05 7 S.AR	10/05 7 S.AV 7 S.AR	05/05 7 S.AV 7 S.AR	10/05 7 S.AV 7 S.AR
353	28/04 4 S.AV 02/05 7 S.AV 7 S.AR	10/05 7 S.AV 7 S.AR	05/05 7 S.AV 7 S.AR	10/05 7 S.AV 7 S.AR
303	02/05 7 S.AV 7 S.AR		04/05 7 S.AV 7 S.AR	
253	02/05 7 S.AV 7 S.AR		04/05 7 S.AV 7 S.AR	
203	03/05 7 S.AV 7 S.AR		04/05 7 S.AV 7 S.AR	
153	03/05 7 S.AV 7 S.AR		04/05 7 S.AV 7 S.AR	

- $Z$  indique la position de la rampe par rapport à la sortie du propulseur ( cf 4.2.1 ).
- $\Phi$  indique l'angle de rotation de la rampe par rapport à l'axe  $Z$  ( cf 4.2.1 ).
- Dans chaque case on trouve

- La date.
- Les mesures réalisées.
  - Essai MC indique les premiers essais avec la masse des sondes reliée au caisson.
  - S. AV ou S. AR indique que la mesure est réalisée sur les sondes avants ou arrières précédés par le nombre de sondes effectuées.

#### 4.4.1 Dépouillement

Pour réaliser le dépouillement, on utilise le logiciel 'glove'. Des filtres programmés en *C* permettent de créer le fichier exploitable directement par *glove* en traçant la caractéristique, celle-ci en log ainsi que sa dérivée. Le logiciel *glove* permet ensuite de réaliser les régressions linéaires, intersections, recherches de maximum facilement. Une fois ce traitement réalisé, les données sont stockées directement sous Excel. Le tableau ainsi construit est indiqué ci-après en annexe 4.8. On y a ajouté en correspondance les données du propulseur relevées à la main.

On donne quelques figures donnant les courbes en fonction des sondes. On compare aussi les résultats, sondes avants, sondes arrières. Les résultats sont donnés sans traitement ni interpolation, directement depuis Excel. Les données correspondent à la rampe de sondes situées à 130cm de la sortie du propulseur ( axe *Z* sur le schéma 4.2.1 ). Sur l'axe des abscisses est représenté la position horizontale de la sonde ( axe *X* sur le schéma 4.2.1 ). Les sondes avants sont représentées en traits pleins et les sondes arrières en traits pointillés.

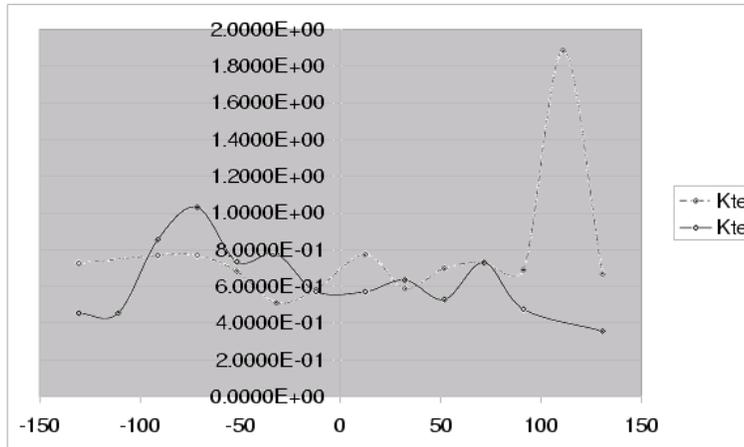


FIG. 4.1 – Température (eV)

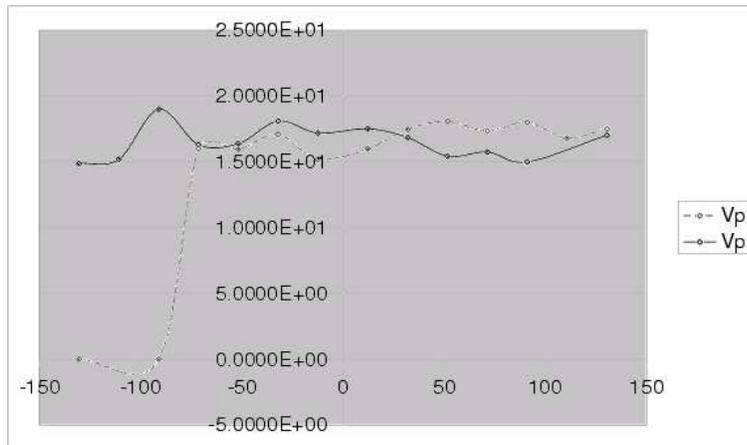


FIG. 4.2 – Potentiel plasma ( V )

La température électronique et le potentiel plasma sont très chahutés. Comme on le retrouvera plus tard, cela provient de la cathode défectueuse. On constate que les résultats pour les sondes avant et arrière sont relativement proches.

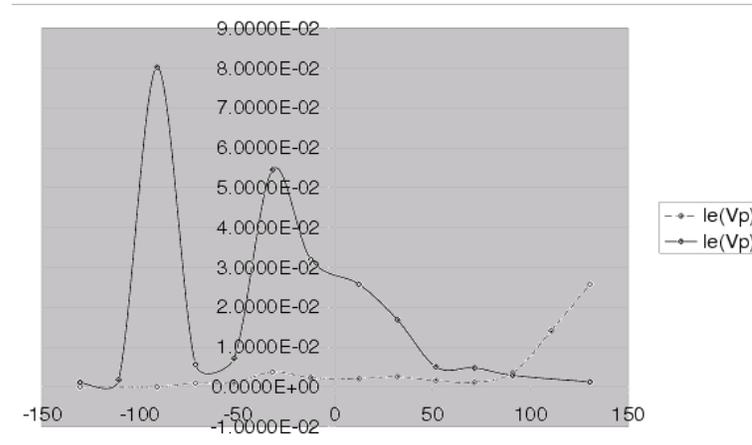


FIG. 4.3 – Courant électronique

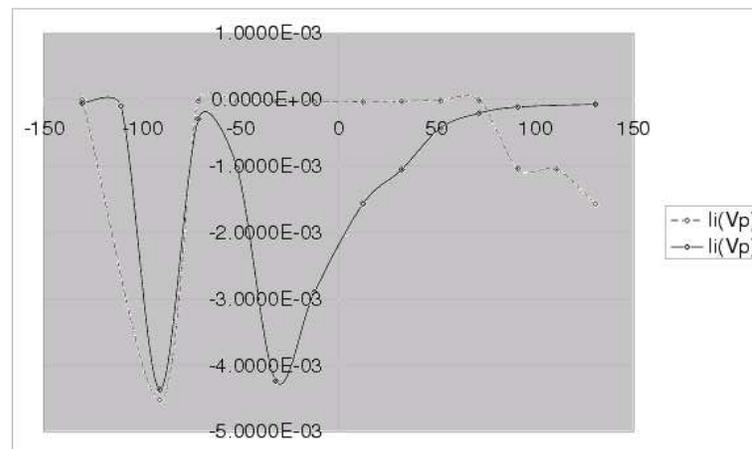


FIG. 4.4 – Courant ionique

On constate sur les courants électronique et ionique que le courant reçu par les sondes arrières est très faible devant celui des sondes avant, cela provient essentiellement du fait que les sondes arrières sont écartées par les sondes avant.

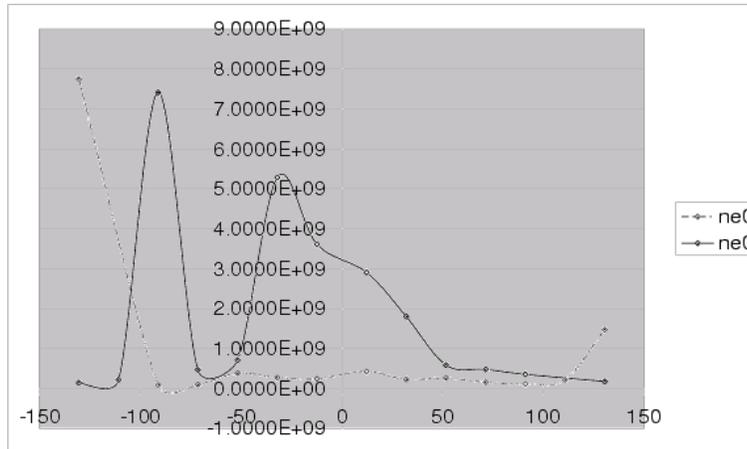


FIG. 4.5 – Densité électronique

Cette même constatation peut être faite pour la densité électronique. Pour ceux-ci cela paraît plus étonnant, du fait de leur faible poids ; on peut supposer qu'ils se mettent instantanément à l'équilibre selon une distribution de Maxwell-Boltzmann, soit isotrope. Néanmoins le plasma ayant une très faible longueur de Debye, la neutralité s'impose d'elle-même dans celui-ci. Sur les sondes arrières, du fait que les ions sont écrantés par les sondes avant, le manque d'ions se retrouve sur un manque d'électrons. Malheureusement cette expérience ne permet pas de confirmer l'isotropie des d'électrons.

On donne aussi, ici les variations suivants l'axe  $Z$  des courants mesurés sur une sonde avant :

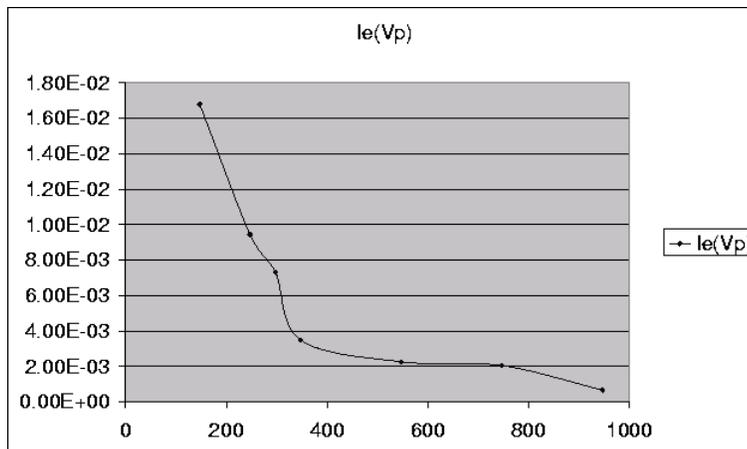


FIG. 4.6 – Courant ionique

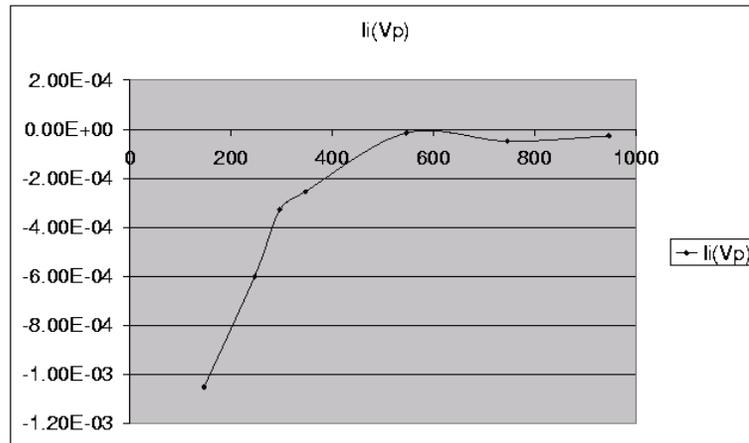


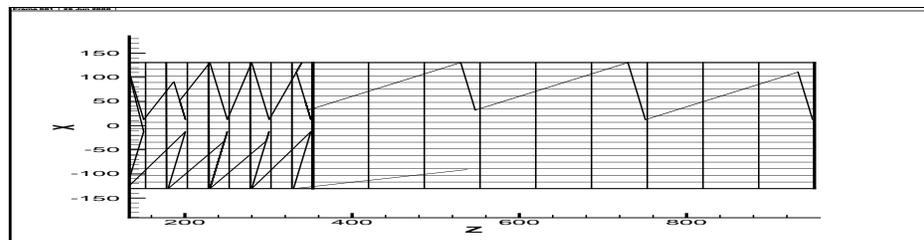
FIG. 4.7 – Courant électronique

On retrouve sur ces figures la décroissance du courant en fonction de la sortie du propulseur.

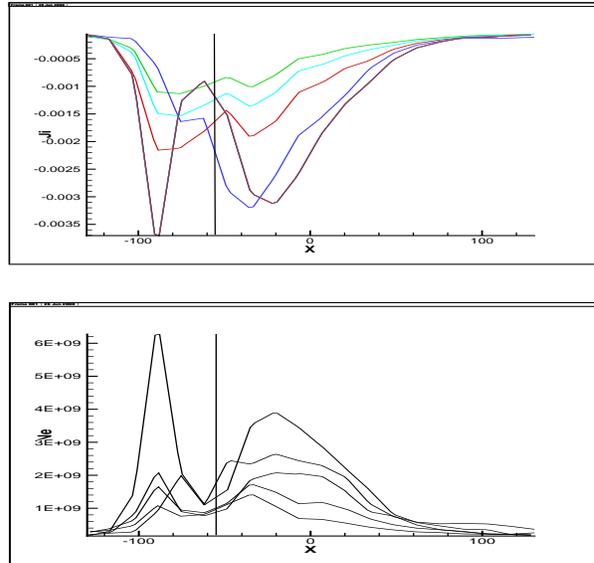
Finalement, 261 caractéristiques ont été mesurées et dépouillées. Les résultats sont difficilement interprétables compte tenu du faible nombre de points obtenus. De plus la rampe de sonde est inclinée de  $10^\circ$ . Il est donc nécessaire de corriger le courant ionique et d'interpoler les résultats.

#### 4.4.2 Interpolation des résultats

Compte tenu du faible nombre de points obtenus, il est nécessaire d'utiliser un outil d'interpolation pour obtenir une cartographie suffisamment fournie. Pour cela on utilise le logiciel TecPlot. Compte tenu de l'inclinaison de la rampe de sonde ( $10^\circ$  par rapport au plan perpendiculaire à l'axe) on interpole une première fois sur une grille cartésienne contenant les données.



Pour déterminer la position de l'axe du propulseur on réalise alors des coupes à  $Z$  constant, et l'on trace l'évolution du courant ionique en  $X$  et des densités électroniques ( cf figure ci-après ).



On trouve alors le centre du jet en  $X = -55\text{cm}$ . En raison de ce décalage, la majorité des points de mesure est située du même côté du jet. Pour récupérer l'autre partie, on conserve les points situés pour les  $X > -55\text{cm}$ , on les translate pour les recentrer et on symétrise les données. Pour deux plans de mesure, des données ont été prises en  $Y$  dans l'intention de procéder de la même façon ; néanmoins, le signal récupéré est trop faible pour en déduire le centre de symétrie, ces plans ont été pris trop loin. On suppose donc que le jet est centré en  $Y = 0$ . Le réglage a été effectué en observant par un hublot du caisson. Avec le propulseur en fonctionnement, il était facile de constater son bon alignement avec l'axe du bras manipulateur. Malgré cela, nous n'avons pu obtenir une meilleure précision.

Concernant le courant d'ions, on a pu constater que le courant récolté sur les faces arrières était toujours négligeable devant celui récolté par les faces avants. On ne fera donc pas de soustraction pour supprimer le courant provenant des ions lents.

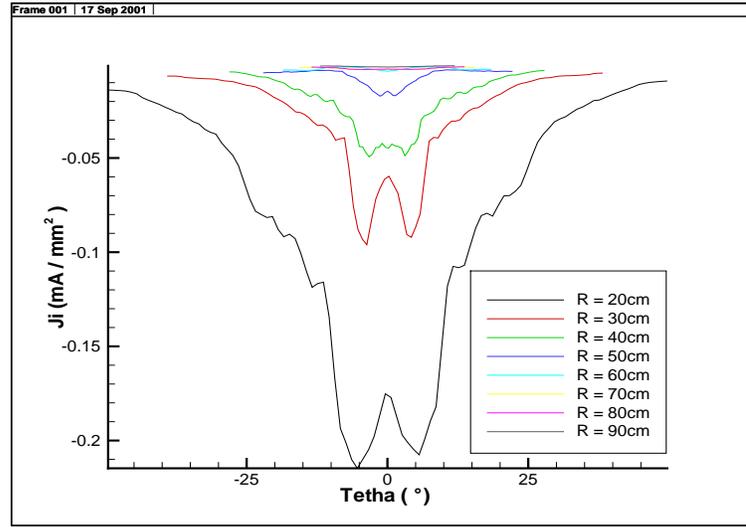
De plus, pour le courant ionique, on effectue une correction venant du fait que la rampe de sonde est inclinée de  $10^\circ$  et que les ions sont directifs. Pour ce faire, on considère que le jet est conique (le cône est supposé centré sur la

sortie du propulseur) et que le courant d'ions  $j$  est radial. Le courant ionique  $j_n$  collecté par la sonde est la projection de celui-ci selon la normale à la sonde.

On a donc :

$$j = j_n \frac{\sqrt{Z^2 + X^2}}{Z \cos(10^\circ) + X \sin(10^\circ)}$$

Les coupes suivant des cercles de rayons variables sont données sur la figure suivante :



On constate que le jet est presque conique. Le cône est d'angle environ  $7^\circ$  et va en rétrécissant. Néanmoins, l'hypothèse a été suggérée par le calcul permettant de corriger le courant ionique. Le courant tracé est le courant radial. Cette hypothèse peut être rapidement accréditée par la décroissance du signal en  $\frac{1}{r^2}$  imposé par la conservation du courant total. En effet, en supposant le courant radial, de vitesse radiale et que le courant ne dépend que de  $r$ , la conservation du courant donne :

$$\nabla \cdot (n_i v_i) = 0$$

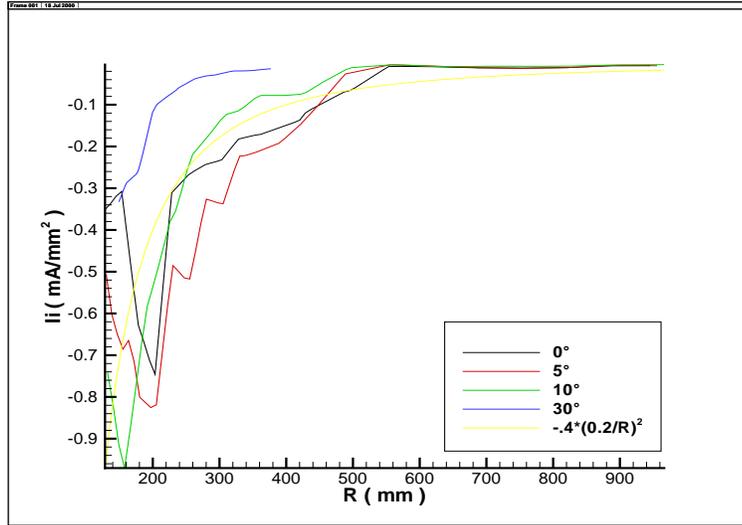
En intégrant sur une sphère de rayon  $r$  on a :

$$\partial_r \left( \frac{4}{3} \pi r^2 n_i v_i \right) = 0$$

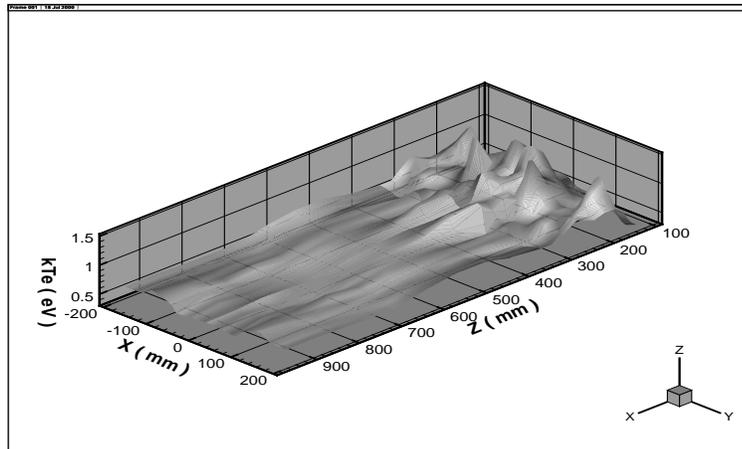
Donc

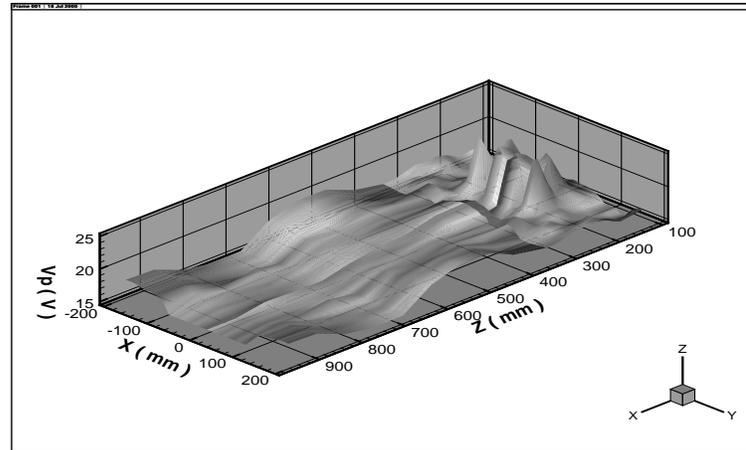
$$n_i v_i = \frac{Cst}{r^2}$$

On donne ici le tracé du courant d'ions en fonction de  $r$  pour différents angles d'ouverture, que l'on compare avec une courbe en  $\frac{1}{r^2}$ .



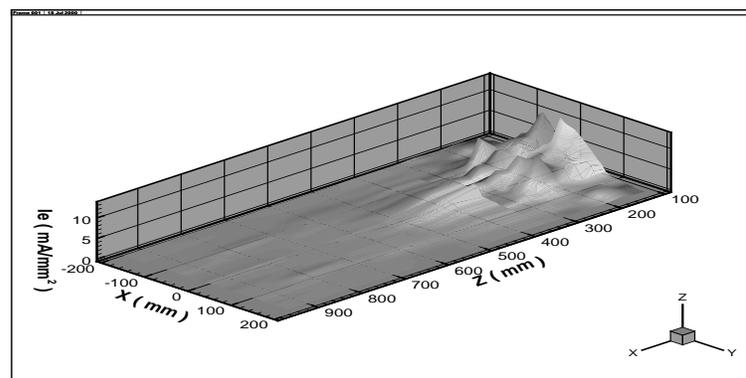
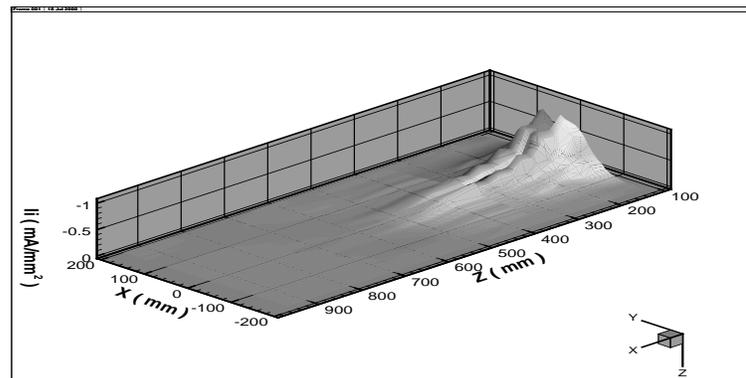
Par la suite, toujours grâce à ce logiciel, on interpole sur une grille beaucoup plus fine. Ci-après, on indique les vues 3D résultant de cette manipulation, pour la température électronique, le potentiel plasma, ainsi que la densité électronique, le tout uniquement sur les sondes avants.



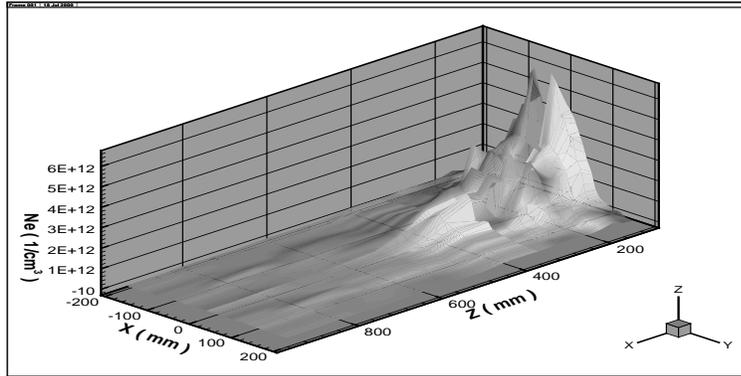


On constate que température électronique et potentiel plasma sont très chahutés : cela proviendrait du manque de stabilité du propulseur provoqué par la cathode. La température varie entre  $0.5eV$  et  $1.5eV$ . Le potentiel plasma entre  $18V$  et  $25V$ .

Nous donnons, de même les courants ionique et électronique

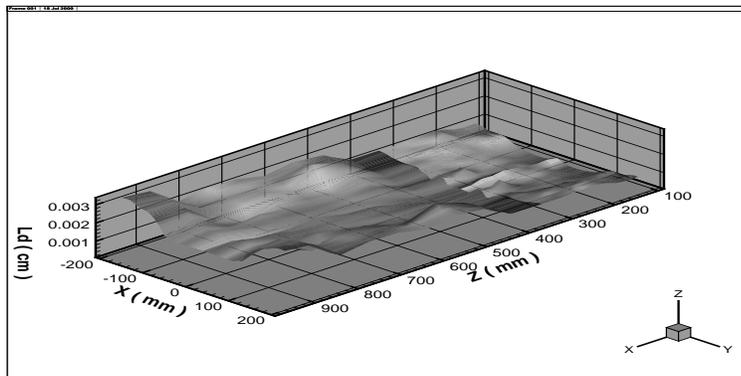


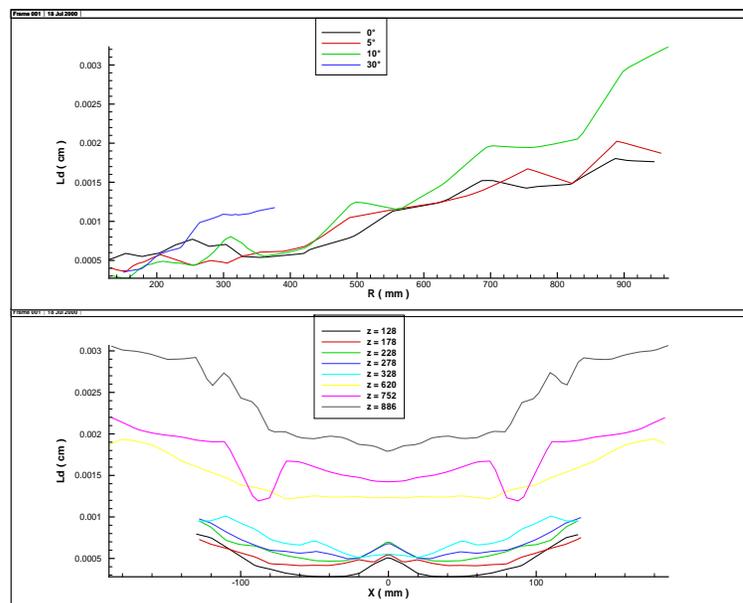
Puis, la densité électronique :



On constate que les données de courant ionique et de densité électronique sont beaucoup plus fiables. Pour le courant ionique, on retrouve une allure déjà rencontrée dans la littérature [23], mais cette forme est rencontrée beaucoup trop loin. Par contre, les interpolations sont construites à partir de points très proches du centre, ( en  $X$  les points ne dépassent pas  $13\text{ cm}$  ) : on ne peut constater suffisamment sur les vues  $3D$  l'aspect conique du jet du fait du manque de points loin de l'axe en  $Z$ .

Une autre grandeur très intéressante pour le choix du modèle est la longueur de Debye. Cette grandeur caractérise la distance à laquelle jouent les interactions électrostatiques. Nous indiquons ici, une vue  $3D$  ainsi que des coupes à différentes distances du propulseur, et l'évolution en  $Z$  pour différents angles.





Nous pouvons constater que même relativement loin du propulseur la longueur de Debye reste très faible. Dans le choix du modèle, cela pourra nous permettre d'imposer la neutralité du plasma.

## 4.5 Conclusion

Cette manipulation a conduit à des résultats relativement satisfaisants. Nous n'avons pu obtenir le nombre de mesures demandées, peu réaliste étant donné le temps imparti et les problèmes techniques rencontrés. Les résultats obtenus sont néanmoins suffisamment fournis pour permettre des interpolations convenables. Les résultats nécessitant une grande stabilité du propulseur sont relativement difficiles à interpréter. On obtient une température électronique oscillante autour de  $1eV$  avec une amplitude relativement grande ( $1eV$ ). Cette valeur est proche des données trouvées dans la littérature mais manque de précision. Pour le potentiel plasma, on retrouve ces mêmes constatations. Pour le courant ionique, les résultats sont beaucoup plus stables. Nous retrouvons quasiment la conservation du courant, mais ne pouvant obtenir suffisamment de précision, il nous est impossible de quantifier les pertes pouvant provenir des collisions, le jet n'étant pas conique ou l'influence du système de pompage ayant de l'influence. Pour le courant et la densité électronique, les résultats sont aussi assez corrects.

## 4.6 Annexe 1 : Archivage des résultats

Lorsque l'on réalise des mesures en très grand nombre, il faut absolument se poser la question de la manière d'archiver ces données pour pouvoir les récupérer dans leur ensemble facilement. Ceci pour deux raisons principales :

- Il doit être possible de retrouver facilement un fichier de mesure, en connaissant ses caractéristiques principales. Cela permettra de mettre en place des programmes ( on les appelle souvent de 'moulinettes' ) capables de synthétiser un ensemble de fichiers de mesure. Par exemple, un programme doit pouvoir récupérer des fichiers de mesures représentant des vecteurs, tous de même taille, pris à des positions différentes, pour constituer une matrice dont les colonnes seront ces mêmes vecteurs. Un autre exemple, sur le même thème des vecteurs de données, est un programme pouvant lire ces vecteurs, calculer leurs valeurs moyennes, et recréer un vecteur de valeurs moyennes aux différentes positions de mesures. Il est sûr que, s'il n'existe pas une manière simple de retrouver ces fichiers en fonctions de caractéristiques élémentaires, on ne pourra pas effectuer de telles opérations.

La deuxième question à se poser est le format de fichier à employer. Il est intéressant d'organiser ces fichiers de manière à ce que les données soient compréhensibles au premier coup d'œil, encore une fois pour deux raisons simples :

- Un utilisateur ne connaissant pas le format de fichier doit pouvoir rapidement comprendre les données qui y sont enfermées.
- Il doit exister des manières simples d'extraire les données pour que d'autres programmes puissent les interpréter.

Cela passe par deux étapes. D'une part la création d'une stratégie de sauvegarde, c'est-à-dire une arborescence de fichier logique en fonction des critères recherchés. Deuxièmement, un document doit expliquer la méthode employée pour qu'elle puisse rapidement être comprise par tout le monde. Nous allons dans la suite de ce chapitre expliquer ces méthodes.

### 4.6.1 Format des fichiers de mesure

Beaucoup de fichiers ne contiennent que des données, mais je pense que ce n'est pas suffisant. Il est intéressant d'inclure dans le fichier la manière de lire ces données. L'expérience montre que cela n'alourdit nullement l'écriture

du fichier tout en le rendant nettement plus lisible.

Pour cela, nous utilisons plusieurs méthodes :

- Systématiquement, nous utilisons le format texte qui permet à un utilisateur non-initié d'ouvrir n'importe lequel de ces fichiers pour avoir une idée de ce qu'il contient. On peut objecter que, pour certaines représentations de données, comme de grosses matrices, la représentation texte des nombres peut devenir lourde. On peut tout de même utiliser la représentation binaire de données numériques, à condition qu'une ligne de commentaires vienne expliquer qu'à sa suite on change de représentation des données en passant d'un format texte à un format binaire.
- Nous utilisons des lignes de commentaires qui ne contiennent pas de données mais seulement des explications simples de ce que contient la ligne ou les lignes suivant le commentaire. Nous utilisons la même notation que le langage C en mettant nos commentaires sous la forme :  
/\*commentaires\*/
- Un fichier peut contenir des informations supplémentaires aux données principales. Par exemple, un fichier de mesures expérimentales peut contenir des conditions expérimentales de la mesure qu'il est intéressant de fournir en même temps que la mesure. Un autre exemple est, lors de la représentation d'un vecteur, de fournir en en-tête la taille de ce vecteur afin de faciliter la lecture du fichier de mesure.
- Le début de chacun des fichiers contient systématiquement un code de 4 caractères suivi d'un saut de ligne. Cela peut permettre à un programme en lisant ce code de reconnaître le type de fichier qu'il est en train de parcourir et d'appliquer une tactique de lecture de données spécifiques.

Dans la suite de cette section, nous allons détailler spécifiquement le format de fichier que nous avons employé.

#### 4.6.1.1 Entête de fichier

Tous les fichiers de mesure commencent par le code 'ALCA' (notez en majuscule) suivi d'un saut de ligne. La lecture des quatre premières lettres peut permettre de connaître le type de données que nous avons sauvegardé et la manière de le faire.

### 4.6.1.2 Données supplémentaires

Les fichiers sauvegardés contiennent des informations supplémentaires aux données principales que nous décrivons ici. Chacune de ces données est précédée par un commentaire qui tient la place d'une ligne et d'une seule. On ne doit pas trouver de saut de ligne sur ce commentaire. Par contre le commentaire peut contenir ce qu'il veut. Il doit pourtant être suffisamment explicite.

– **La position de mesure :**

Cette donnée indique la position suivant l'axe  $z$  (axe du propulseur) et  $x$  direction orthogonale à l'axe du propulseur de la mesure. Elle est exprimée en  $cm$  par deux nombres séparés par un unique blanc. Puis un saut de ligne suit ces deux données. Les nombres sont des réels, il faut donc essayer de lire des réels.

Nous donnons l'exemple suivant :

0.75 54

– **Le débit de gaz :**

Cette donnée indique le débit de gaz anode employé dans le propulseur pendant son fonctionnement. C'est un nombre réel suivi d'un saut de ligne. Il faut donc essayer de lire un réel. Ce débit est exprimé en  $mg/s$ .

Nous donnons l'exemple suivant :

1.1

– **La tension de décharge :**

Cette donnée représente la tension de décharge du propulseur c'est-à-dire la tension qui règne entre sa cathode et son anode. C'est un nombre réel même si on le représente toujours en nombre entier. Ce nombre est suivi par un saut de ligne. Nous vous conseillons donc d'essayer de lire un nombre réel. Cette tension est exprimée en *Volt*.

Nous donnons l'exemple suivant :

200

– **La date :**

Il s'agit de la date de l'expérience. Il s'agit de trois nombres entiers séparés par un blanc et suivis par un saut de ligne. Il faut donc lire des entiers. Le premier nombre représente un jour, le second un mois et le troisième une année.

Nous donnons l'exemple suivant :

02 05 2000

– **La température :**

Cette donnée représente la température d'un point de mesure du propulseur. Elle est exprimée en  $K^{\circ}$ . Il s'agit d'un nombre réel suivi par

un saut de ligne.

Nous donnons l'exemple suivant :

360

– **L'angle par rapport un plan vertical :**

Il s'agit de l'angle que fait la sonde par rapport à un plan vertical. Il est exprimé en radian. C'est un nombre réel.

Nous donnons l'exemple suivant :

3.14

– **Le nombre de données :**

Il s'agit du nombre de lignes de données de la mesure. Les mesures effectuées sont des caractéristiques de sondes que l'on caractérise par un vecteur double dont chaque élément est constitué de deux nombres réels séparés par un blanc et suivis d'un saut de ligne. Le nombre de lignes indique donc la taille de ce vecteur. Il s'agit d'un nombre entier séparé par un blanc et suivi par un saut de ligne.

Nous donnons l'exemple suivant :

100

– **Les données :**

Les données sont un vecteur dont chaque élément est constitué de deux nombres réels séparés par un blanc et suivis par un saut de ligne. Le premier nombre est exprimé en *Volt* et le second est exprimé en *Ampères*.

Nous donnons l'exemple suivant :

```
0.000000e+00 6.416115e-01
3.000000e-04 3.198083e+00
4.500000e-04 6.375064e+00
6.000000e-04 1.078834e+01
7.500000e-04 1.640398e+01
9.000000e-04 2.317909e+01
1.050000e-03 3.106243e+01
1.200000e-03 3.999503e+01
1.350000e-03 4.991096e+01
```

## 4.6.2 Arborescence des mesures

Nous allons maintenant décrire la manière dont sont placés les fichiers de mesure et donc la manière de les retrouver ou de les ranger. Cette position de sauvegarde dépend en fait des caractéristiques de la mesure qui sont au nombre de 7 :

- Le débit de gaz.
- La tension de décharge.
- L'inclinaison de la rampe de sondes.

- La position suivant  $z$ .
- La position suivant  $y$ .
- La position suivant  $x$ .
- S'agit t'il d'une mesure sur la face avant ou sur la face arrière.

C'est exactement dans cet ordre qu'est organisée l'arborescence de sauvegarde. On part tout d'abord d'un répertoire père dont le nom n'a pas d'importance.

#### 4.6.2.1 Nom des répertoires de débit

Dans ce répertoire père, on trouve les répertoires qui vont indiquer le débit de gaz auquel on effectue ces mesures.

- Le nom du répertoire commence par '*Debit*' suivi d'un blanc souligné.
- Il suit un nombre réel immédiatement suivi de la chaîne de caractère '*mg\_s*'. Vous vous en doutez ce nombre indique le débit de gaz.

Nous donnons ici un nom de répertoire type : *Debit\_0.7mg\_s*

#### 4.6.2.2 Nom des répertoires de tension de décharge

Dans ces répertoires, on en trouve d'autres qui eux vont indiquer la tension de décharge à laquelle on effectue ces mesures.

- Un entier qui indique la tension de décharge
- Il suit la chaîne de caractère '*Volt*'.

Nous donnons ici un nom de répertoire type : *150Volt*

#### 4.6.2.3 Nom des répertoires d'inclinaison de la rampe

Dans ces répertoires, on en trouve d'autres qui eux vont indiquer l'angle d'inclinaison de la rampe de sondes. Le nom de ces répertoires a la syntaxe :

- La chaîne de caractères '*Inclin*' suivi d'un blanc souligné.
- Il suit un nombre entier qui indique l'angle d'inclinaison de la rampe
- Puis la chaîne de caractère '*deg*'.

Nous donnons ici un nom de répertoire type : *Inclin\_0deg*.

Dans ces répertoires, on trouve enfin les fichiers de mesures dont le nom respecte la syntaxe suivante :

#### 4.6.2.4 Nom des fichiers de mesures

- Le nom du fichier commence par '*X*'.
- Il suit un nombre entier.
- Il est immédiatement suivi par '*Y*'.
- Il suit un nombre entier.

- Il vient ensuite 'Z'.
- Il suit un nombre entier
- On trouve alors soit la chaîne de caractère 'F' (Front) soit la chaîne de caractère 'R' (Rear).

Nous donnons ici un nom de fichier type : *X1Y1Z10R*

### 4.6.3 Chemin d'accès

Dans la pratique, la durée consacrée aux mesures n'a pas permis de faire varier tous les paramètres (débit, tension, inclinaison) comme prévue initialement. Ceux-ci sont restés fixés à 1 *mg/s* pour le débit cathode, 200 *Volt* pour la tension et 10 *deg* pour l'inclinaison.

Le chemin d'accès à un fichier qui résulte de cet archivage, est sous la forme :

```
./Debit_0.7mg_s/200Volt/Inclin_-10deg/X1Y1Z10R
```

## 4.7 Annexe 2 : Automatisation des instruments

Différentes interfaces logicielles ont été développées sur ce logiciel pour automatiser les séquences de mesures à effectuer. Chacune reçoit des données en entrée et renvoie leurs résultats après avoir effectué une série d'opérations.

### 4.7.1 Manipulation

Deux interfaces ont été développées pour commander la manipulation. La première permet de commander les déplacements du bras de manière automatisée par des séries de déplacements et rotations d'intervalle constant, la seconde permet d'imposer manuellement les déplacements du bras.

#### 1. Manip :

Données :

- Chemin père de sauvegarde.
- Données de paramétrage de déplacement du bras.
- Données de la rampe de sondes.
- Donnée de paramétrage du propulseur.
- Indicateur test de déplacement du bras ou manip complète.

Description :

Cette interface appelle 'Init Bras', calcule une suite de déplacement du bras et appelle 'Tableau Bras'. Et pour chacun d'entres eux appelle 'Sonde'. Les déplacements sont effectués de la manière suivante :

- On recale le bras sur l'origine.
- On se déplace suivant z ( on démarre d'un z d'origine et on avance par pas constant ).
- Pour chaque z on choisit un angle par rapport à l'axe,  $0^\circ$  ou  $180^\circ$
- Pour chacun de ces angles on se déplace suivant x pour décrire l'espace inter sondes.

Pour chacune des axes de déplacement, un indicateur permet de choisir si le déplacement se fait par les moteurs du bras ou manuellement (dans ce cas le programme demande le déplacement à effectuer). De plus, on

calcule la position de la rampe de sonde grâce à des offsets :

$$\begin{aligned} X_{rampe} &= X_{offset} + X_{bras} \\ Y_{rampe} &= Y_{offset} + Y_{bras} \\ Z_{rampe} &= Z_{offset} - Z_{bras} \end{aligned}$$

## 2. Manip Manuelle :

Données :

- Chemin père de sauvegarde.
- Données de paramétrage de déplacement du bras.
- Données de la rampe de sondes.
- Donnée de paramétrage du propulseur.
- Indicateur test de déplacement du bras ou manip complète.

Description :

Cette interface appelle 'Init Bras', puis boucle sur une suite de demandes de déplacement du bras à effectuer et appelle 'Tableau Bras'. Et pour chacun d'entres eux appelle 'Sonde'. Les déplacements sont effectués de la manière suivante :

- On recale le bras sur l'origine.
- On se déplace suivant z ( on démarre d'un z d'origine et on avance par pas constant ).
- Pour chaque z on choisit un angle par rapport à l'axe,  $0^\circ$  ou  $180^\circ$
- Pour chacun de ces angles on se déplace suivant x pour décrire l'espace inter sondes.

Pour chacun des axes de déplacement, un indicateur permet de choisir si le déplacement se fait par les moteurs du bras ou manuellement (dans ce cas le programme demande le déplacement à effectuer).

### 4.7.2 Bras manipulateur

On décrit ici, les drivers permettant de commander le bras manipulateur. Ces modules ont été développés initialement par Lionel Menetrier et, pour certains, modifiés par nos soins.

## 1. Init Bras :

Entrée :

- Données de déplacement du bras.

Description :

En fonction des indicateurs booléens de déplacement manuel ou non, recale le bras à l'origine. Appelle Liaison RS485-RS232.

## 2. Tableau Bras :

Entrée (utilisées) :

- Vecteur des positions X,Y,Z et r d'arrivée (en mm, et degré).
- Vecteur des positions X,Y,Z et r de départ ( en pas de moteur ).
- Indicateur booléen d axe de déplacement à effectuer ou non.

Sortie :

- Vecteur des positions X,Y,Z et r d'arrivée ( en pas de moteur ).
- Indicateur booléen d axe de déplacement effectuer correctement ou non.

Description :

Connaissant sa position actuelle, déplace le bras selon les axes souhaités jusqu'à la position désirée. Appelle Liaison RS485-RS232.

## 3. Liaison RS485-RS232 :

Entrée :

- Code à envoyer au moteur du bras.

Description :

Envoie un code permettant d'actionner ou de paramétrer un moteur du bras, et attend le code de réponse du bras envoyé après chaque

déplacement. Les codes sont décrits dans le rapport de stage de Lionel Menetrier. Ce programme a provoqué des blocages des interfaces GPIB, visiblement des complications ont été rendues nécessaire pour intercepter les messages du bras qui ne sont pas de taille constante.

### 4.7.3 Sondes

On décrit ici, les drivers permettant de relever les mesures de sondes.

#### 1. Sonde :

Entrée :

- Chemin d'accès parent de sauvegarde.
- Données caractéristiques de la rampe de sonde.
- Données de paramétrage du propulseur.
- Donnée de réalisation de caractéristique de sonde.
- Position de la rampe de sonde.

Description :

Parcours les 14 sondes de la rampe, en appelant 'multiplexeur' et en demandant d'actionner le switcher sondes avant sondes arrière. Il calcule la position de la sonde et appelle 'caractéristique'. Permet en outre de visualiser le parcours des sondes.

#### 2. Caractéristique

Entrée :

- Chemin d'accès parent de sauvegarde.
- Position et inclinaison de la sonde.
- Données de réalisation de caractéristique de sonde.
- Données propulseur.

Description :

Réalise la caractéristique en appelant 'Rampe tension' et sauvegarde le résultat.

### 3. Rampe Tension

Entrée :

- Données de réalisation de caractéristique de sonde.

Sortie :

- Tableau des mesures de la caractéristique.

Description :

Commande les alimentations et le système des mesures pour réaliser la caractéristique Tension-Intensité. Permet en outre de visualiser la caractéristique en cours de construction.

#### 4.7.4 Sauvegarde

On décrit ici les modules permettant de préparer et d'effectuer les sauvegardes.

##### 1. Access dir :

Entrée :

- nom du répertoire parent
- données de position des sondes
- données de paramétrage du propulseur

Description :

En fonction des données on crée et concatène une série de chaînes de caractères pour former et créer le répertoire de sauvegarde suivant la procédure décrite précédemment.

## 2. Access path :

Entrée :

- nom du répertoire parent
- données de position des sondes
- données de paramétrage du propulseur

Sortie :

- chemin d'accès du fichier de sauvegarde

Description :

En fonction des données on crée et concatène une série de chaînes de caractères pour former le chemin de sauvegarde suivant la procédure décrite précédemment.

## 3. Chaîne :

Entrée :

- données de position des sondes
- données de paramétrage du propulseur
- tableau de mesures d'une caractéristique

Sortie :

- chaîne de caractère correspondant au contenu du fichier à sauver

Description :

En fonction des données on crée et concatène une série de chaînes de caractères pour former le contenu du fichier de sauvegarde suivant la procédure décrite précédemment.

4. Save string :

Entrée :

- chemin d'accès du fichier de sauvegarde
- chaîne de caractère correspondant au fichier à sauver

Sortie :

- Indicateur d'erreur

Description :

Écrit sur le disque le fichier de sauvegarde.



## 4.8 Annexe 3 : données dépouillées

Dans le tableau suivant, on trouve sur la page de gauche toutes les informations relatives à la prise de mesures sur les sondes et leur dépouillement ( Nom du fichier contenant les données de la caractéristique, date et heure de prise de mesure, sonde avant ou arrière, position selon  $Z$ ,  $X$  et  $Y$ , température électronique ( en  $eV$  ), potentiel plasma ( en  $V$  ), courant électronique et ionique ( en  $A/m^2$  ) et densité électronique ( en  $m^{-3}$  ). En correspondance sur la page de droite on a les données d'alimentation du propulseur.



























# Chapitre 5

## Modélisation 2D axisymétrique du milieu magnétosphérique.

Nous nous intéressons ici à une modélisation bidimensionnelle de la prise de charge électrostatique en milieu magnétosphérique. Des travaux dans ce domaine ont déjà été effectués. On pourra citer, par exemple les développements de l'équipe américaine de I.Katz [17] qui ont construit depuis 20 ans un logiciel de charge électrostatique : NASCAP.

Nous pouvons aussi citer les développements du Laboratoire de Moscou, le RIAME, qui ont construit le logiciel ESCAPE [27] pour lequel nous avons apporté une attention toute particulière à leur méthode 'backtrajectories'.

Pour les travaux français, nous citons la thèse de Damien Clementz [7] qui a construit un code tridimensionnel utilisant la méthode des équations intégrales pour inverser l'équation de Poisson.

### 5.1 Simplification des équations

#### 5.1.1 Rappel des équations

Nous rappelons ici les équations de Vlasov présentées en section 2.2.2 munis de leurs conditions limites :

$$\forall x \in O, \forall v \in \mathbb{R}^3, \forall t \geq 0, \quad \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f_\alpha(t, x, v) - \kappa_\alpha \frac{e \nabla_x \Phi(t, x)}{m_\alpha} \cdot \nabla_v f_\alpha(t, x, v) = 0, \quad (5.1)$$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f_\alpha(t, x, v) = g_\alpha(v).$$

où  $g_\alpha$  est la maxwellienne donnée par (2.1).

En négligeant les effets des réémissions, la condition limite sur les surfaces du satellite est donnée par :

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall v \in \mathbb{R}^3; v \cdot \gamma_\Omega > 0,$$

$$f_\alpha(t, x, v) = 0.$$

Pour le couplage par les équations de Maxwell nous nous reportons à la section 2.1.3. En considérant que le satellite n'est recouvert que par, au plus, une couche de diélectrique, nous obtenons :

$$\begin{aligned} -\epsilon_0 \Delta \Phi &= \rho \text{ dans } \Omega^c, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_k \frac{\partial \Phi^{diel}}{\partial n} - \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) + \sigma_k \frac{\partial \Phi^{diel}}{\partial n} - J_{ext} \cdot n &= 0 \text{ sur } \Gamma_{d-v}, \\ \int_{\Gamma_{c-v}} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) - J_{ext} \cdot n d\gamma + \int_{\Gamma_{c-d}} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\epsilon_k \frac{\partial \Phi^{diel}}{\partial n} \right) - \sigma_k \frac{\partial \Phi^{diel}}{\partial n} d\gamma &= 0, \\ \Phi &= \Phi_c \text{ sur } \partial\Omega_0, \\ \Phi &\rightarrow 0 \text{ à l'infini.} \end{aligned}$$

Nous allons voir qu'après adimensionnement des équations, une des simplifications majeures de la modélisation en orbite géostationnaire consiste à négliger la charge d'espace.

### 5.1.2 Adimensionnement des équations

Nous procédons de manière analogue qu'en section 2.2.2, avec quelques modifications dues à la présence des diélectriques. Leur épaisseur, permittivité et conductivité caractéristique sont respectivement :  $d, \epsilon_0$  et  $\sigma$ .

On introduit ainsi les variables et inconnues adimensionnées :

$$\begin{aligned} \tilde{t} = \frac{t}{T}, \tilde{x} = \frac{x}{D}, \tilde{v} = \frac{v}{V_e^{th}}, \tilde{f}_\alpha(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) &= \frac{f_\alpha(t, x, v)}{f_0}, \tilde{g}_\alpha(\tilde{v}) = \frac{g_\alpha(v)}{f_0}, \\ \tilde{n}_\alpha(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \frac{n_\alpha(t, x)}{n_0}, \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{e\Phi(t, x)}{kT_e}, \\ \tilde{d}_k &= \frac{d_k}{d}, \tilde{\epsilon}_k = \frac{\epsilon_k}{\epsilon_0}, \tilde{\sigma}_k = \frac{\sigma_k}{\sigma}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

On introduit les constantes sans dimension :

$$\mu = \frac{m_e}{m_i}, \eta = \frac{\lambda_d}{D}, \nu = \frac{D}{d} \text{ et } \tau = \frac{\sigma T}{\epsilon_0}.$$

Où :

$$\lambda_d = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT_e}{n_0 e^2}}, T = \eta^2 \frac{D}{V_e^{th}} \text{ et } V_e^{th} = \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}}.$$

De plus, les termes  $\frac{\partial \Phi^{diel}}{\partial n}$  correspondent au champ électrique régnant à l'intérieur des diélectriques d'épaisseur fine caractéristique  $d$ . Compte tenu des hypothèses sur celui-ci, on a :  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\Phi_e - \Phi}{d_k}$ .

Les équations deviennent alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v})}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) - \mu \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} \tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) &= 0, \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0, \\ \lim_{\|\tilde{x}\| \rightarrow +\infty} \tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) &= \tilde{g}_i(\tilde{v}), \quad \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0, \\ \tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) &= 0, \quad \forall \tilde{x} \in \partial \tilde{\Omega}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_{\tilde{\Omega}} > 0, \forall \tilde{t} \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v})}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) + \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) &= 0, \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0, \\ \lim_{\|\tilde{x}\| \rightarrow +\infty} \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) &= \tilde{g}_e(\tilde{v}), \quad \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0, \\ \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) &= 0, \quad \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_{\tilde{\Omega}} > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\Delta_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \frac{1}{\eta^2} (\tilde{n}_i(\tilde{t}, \tilde{x}) - \tilde{n}_e(\tilde{t}, \tilde{x})), \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{t} \geq 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left( \nu \tilde{\epsilon}_k \frac{\tilde{\Phi}_c - \tilde{\Phi}}{\tilde{d}_k} - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} \right) + \nu \tau \tilde{\sigma}_k \frac{\tilde{\Phi}_c - \tilde{\Phi}}{\tilde{d}_k} - \tilde{J}_{ext} \cdot n &= 0 \quad \forall \tilde{x} \in \Gamma_{\tilde{d}-v}, \forall \tilde{t} \geq 0, \\ \int_{\tilde{\Gamma}_{c-v}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left( -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} \right) - \tilde{J}_{ext} \cdot n d\gamma + \int_{\tilde{\Gamma}_{c-d}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left( -\nu \tilde{\epsilon}_k \frac{\tilde{\Phi}_c - \tilde{\Phi}}{\tilde{d}_k} \right) - \nu \tau \tilde{\sigma}_k \frac{\tilde{\Phi}_c - \tilde{\Phi}}{\tilde{d}_k} d\gamma &= 0, \\ \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \tilde{\Phi}_c(\tilde{t}) \quad \forall \tilde{x} \in \partial \tilde{\Omega}_0, \forall \tilde{t} \geq 0, \\ \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) &\rightarrow 0, \quad \forall \tilde{x}; \|\tilde{x}\| \rightarrow +\infty, \forall \tilde{t} \geq 0. \end{aligned}$$

(5.3)

### 5.1.3 Passage à la limite formel

En orbite géostationnaire le paramètre  $\eta$  est relativement grand ( environ 80 ) si l'on se réfère au tableau de la section 2.1.2 ). Pour simplifier les équations nous passons donc formellement à la limite lorsque  $\eta^2 \rightarrow +\infty$ . Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
& \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) - \mu \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} f_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = 0, \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0, \\
& \lim_{\|\tilde{x}\| \rightarrow +\infty} \tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = \tilde{g}_i(\tilde{v}), \quad \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0, \\
& \tilde{f}_i(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = 0, \quad \forall \tilde{x} \in \partial \tilde{\Omega}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_{\tilde{\Omega}} > 0, \forall \tilde{t} \geq 0, \\
\\
& \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) + \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} f_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = 0, \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0, \\
& \lim_{\|\tilde{x}\| \rightarrow +\infty} \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = \tilde{g}_e(\tilde{v}), \quad \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0, \\
& \tilde{f}_e(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = 0, \quad \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_{\tilde{\Omega}} > 0, \\
\\
& -\Delta_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) = 0, \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{t} \geq 0, \\
\\
& \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left( \nu \tilde{\epsilon}_k \frac{\tilde{\Phi}_c - \tilde{\Phi}}{\tilde{d}_k} - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} \right) + \nu \tau \tilde{\sigma}_k \frac{\tilde{\Phi}_c - \tilde{\Phi}}{\tilde{d}_k} - \tilde{J}_{ext} \cdot n = 0 \quad \forall \tilde{x} \in \Gamma_{d-v}, \forall \tilde{t} \geq 0, \\
& \int_{\tilde{\Gamma}_{c-v}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left( -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} \right) - \tilde{J}_{ext} \cdot n d\gamma + \int_{\tilde{\Gamma}_{c-d}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left( -\nu \tilde{\epsilon}_k \frac{\tilde{\Phi}_c - \tilde{\Phi}}{\tilde{d}_k} \right) - \nu \tau \tilde{\sigma}_k \frac{\tilde{\Phi}_c - \tilde{\Phi}}{\tilde{d}_k} d\gamma = 0, \\
& \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \tilde{\Phi}_c(\tilde{t}) \quad \forall \tilde{x} \in \partial \tilde{\Omega}_0, \forall \tilde{t} \geq 0, \\
& \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) \rightarrow 0, \quad \forall \tilde{x}; \|\tilde{x}\| \rightarrow +\infty, \forall \tilde{t} \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Ces équations traduisent en particulier le fait que la charge d'espace puisse être négligée. Pour le potentiel électrostatique, nous devons donc résoudre l'équation de Laplace, les conditions limites pour le potentiel restant inchangées. D'autre part, le temps caractéristique de charge du satellite est suffisamment grand devant les temps caractéristiques des particules. Pour le mouvement des particules, nous devons donc résoudre les équations de Vlasov mais en régime stationnaire.

## 5.2 Approximation numérique

### 5.2.1 Equation de Laplace

Pour résoudre cette équation, plusieurs travaux ont déjà été faits. Nous pouvons citer par exemple le laboratoire Riame de Moscou [27], ou les travaux de thèse de Damien Clementz [7] effectué pour Matra. Pour ces travaux l'approche utilisée est celle des équations intégrales. Cette méthode est bien adaptée à l'équation de Laplace. Dans notre cas de figure, nous devons prévoir la prise en compte du propulseur pour lequel nous ne pouvons négliger les phénomènes de charge d'espace. Nous allons donc raisonner par éléments finis volumiques. Pour ce faire nous introduisons donc la formulation variationnelle nécessitée par cette méthode.

#### 5.2.1.1 Formulation variationnelle.

Pour plus de clarté, nous supprimons à présent la notation  $\tilde{\bullet}$ , mais nous conserverons à l'esprit que toutes les grandeurs physiques sont adimensionnées.

Nous nous plaçons dans  $C = \{\Phi \in H^1(O); \frac{\Phi(x)}{(1+\|x\|^2)^{\frac{1}{2}}} \in L^2(O); \Phi = \text{Cste} = \Phi_c \text{ sur } \Gamma_c\}$ .

Munie de la norme :

$$\|u\|_C = \int_O u(x)^2 dx + \int_O (\nabla u(x))^2 dx.$$

La formulation variationnelle de l'équation de Laplace présentée précédemment s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_O \nabla \Phi(x, t) \cdot \nabla \Psi(x) dx + \int_{\Gamma_{d-v}} \nu \frac{\epsilon_k}{d_k} (\Phi(x, t) - \Phi_c(t)) (\Psi(x) - \Psi_c) d\gamma \right) = \\ & - \int_{\Gamma_{c-v}} J_{ext} \cdot n \Psi_c d\gamma - \int_{\Gamma_{d-v}} J_{ext} \cdot n \Psi(x) d\gamma - \int_{\Gamma_{d-v}} \nu \tau \frac{\sigma_k}{d_k} (\Phi(x, t) - \Phi_c) (\Psi(x) - \Psi_c) d\gamma. \end{aligned}$$

D'après les résultats démontrés dans [24] la forme bilinéaire contenue dans la dérivée en temps est continue et coercive.

Cette formulation variationnelle nous servira pour discrétiser le problème numériquement par une méthode de Galerkin. Nous nous plaçons en  $2D$ -axisymétrique et introduisons un maillage triangulaire. Se pose alors le problème de la condition à l'infini. Le potentiel doit tendre vers 0 au moins aussi vite que  $1/r$ . Normalement, dans le plasma, le potentiel doit tendre vers 0 sur des distances de l'ordre de la longueur de Debye. Comme celle-ci est très grande devant les dimensions du satellite, nous ne pouvons mailler jusqu'à l'atteindre. Nous allons donc introduire une surface fictive notée  $\Gamma_s$  beaucoup plus proche du satellite. Celle-ci nous servira à traduire cette condition à l'infini. Plutôt que d'utiliser du couplage éléments finis-équations intégrales, nous utilisons pour ce faire des éléments infinis.

Nous introduisons donc un ouvert noté  $O$  délimité par les surfaces représentant notre satellite et une sphère de rayon  $R$  définissant  $\Gamma_s$ , et l'ouvert représentant le volume extérieur à cette sphère noté  $O^c$ .

### 5.2.1.2 Passage en axisymétrique

Nous considérons ici le cas de géométries axisymétriques, nous devons donc réécrire les équations précédentes dans ce cadre. Les coordonnées seront notées  $(r, \theta, z)$ .

La représentation du volume  $O$ , en  $2D$ -axisymétrique, est une surface délimitée par la courbe représentant la surface du satellite, l'axe de symétrie et le demi-cercle représentant la sphère.

Toutes les dénominations d'éléments de géométrie seront conservées.

Nous donnons directement la formulation variationnelle en coordonnées axisymétriques.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi(r, z, t) \cdot \nabla_{r,z} \Psi(r, z) dr dz + \right. \\ & \quad \left. \int_{\Gamma_{d-v}} \nu r \frac{\epsilon_k}{d_k} (\Phi(r, z, t) - \Phi_c(t)) (\Psi(r, z) - \Psi_c) d\gamma \right) = \\ & - \int_{\Gamma_{c-v}} r J_{ext} \cdot n \Psi_c d\gamma - \int_{\Gamma_{d-v}} r J_{ext} \cdot n \Psi(r, z) d\gamma \\ & - \int_{\Gamma_{d-v}} \nu \tau r \frac{\sigma_k}{d_k} (\Phi(r, z, t) - \Phi_c) (\Psi(r, z) - \Psi_c) d\gamma. \end{aligned}$$

Nous introduisons la forme bilinéaire symétrique :

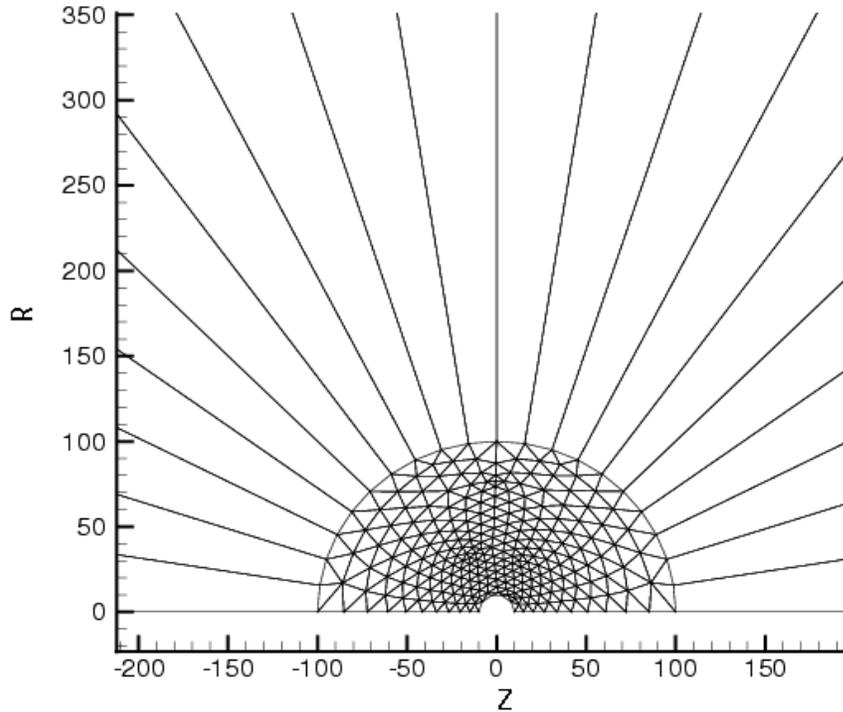
$$\mathcal{A}_{FV}^{cyl}(\Phi(r, z), \Psi(r, z)) = \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi(r, z) \cdot \nabla_{r,z} \Psi(r, z) dr dz + \int_{\Gamma_{d-v}} \nu r \frac{\epsilon_k}{d_k} (\Phi(r, z) - \Phi_c(r, z)) (\Psi(r, z) - \Psi_c(r, z)) d\gamma \right).$$

En nous plaçant dans l'espace dans  $C^{cyl} = \{ \Phi \in H^1(O); \frac{\Phi(x)}{(1+r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \in L^2(O); \Phi = \text{Cste} = \Phi_c \text{ sur } \Gamma_c \}$ , munie de la norme :

$$\|u\|_{C^{cyl}} = \int_O r u(r, z)^2 dr dz + \int_O r (\nabla_{r,z} u(r, z))^2 dr dz.$$

Cette formulation reste symétrique et coercive.

Nous maillerons la surface  $\Omega$  par des triangles. Pour créer le support des éléments infinis, nous utilisons les segments frontières de la sphère que nous prolongerons radialement jusqu'à l'infini. Nous donnons ici un exemple de maillage :



### 5.2.1.3 Éléments finis

Bien que le calcul des trajectoires des particules, présentés ultérieurement, nécessite une régularité du champ électrique  $W^{1,\infty}$ . Nous utilisons, pour raison de simplicité, des éléments finis standard d'ordre 1 pour calculer le potentiel. Le champ électrique dont le potentiel dérive sera donc d'ordre 0 et nous devons le régulariser après coup.

Pour chaque nœud du maillage  $\tau_h$ , les fonctions de base sont donc des fonctions valant 1 au nœud considéré, 0 sur tous les nœuds voisins et sont des polynômes d'ordre 1 sur les triangles. Pour chaque triangle, la valeur de la fonction de base associée à un nœud en un point dans ce triangle est donné par la valeur de la coordonnée barycentrique associée à ce nœud de ce point. Celle-ci est alors donnée par les polynômes de Legendre :

$$\lambda_1^T = \begin{cases} \frac{(z_2 - z_3)(r - r_3) - (r_2 - r_3)(z - z_3)}{(z_2 - z_3)(r_1 - r_3) - (r_2 - r_3)(z_1 - z_3)}, \forall (r, z) \in T, \\ 0, \forall (r, z) \notin T, \end{cases}$$

$$\lambda_2^T = \begin{cases} \frac{(z_3 - z_1)(r - r_1) - (r_3 - r_1)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(r_3 - r_1) - (r_3 - r_1)(z_2 - z_1)}, \forall (r, z) \in T, \\ 0, \forall (r, z) \notin T, \end{cases}$$

$$\lambda_3^T = \begin{cases} \frac{(z_1 - z_2)(r - r_2) - (r_1 - r_2)(z - z_2)}{(z_1 - z_2)(r_3 - r_2) - (r_1 - r_2)(z_3 - z_2)}, \forall (r, z) \in T, \\ 0, \forall (r, z) \notin T. \end{cases}$$

Où nous utilisons la numérotation locale des nœuds du triangle de coordonnées  $(r_i, z_i)$ . Nous introduisons de plus un opérateur  $Num_T$  qui, à un numéro local du triangle  $T$ , lui associe le numéro global correspondant dans le maillage.

Pour un nœud  $i$  du maillage de  $\Omega$ , qui n'est pas sur la sphère extérieure  $\Gamma_s$ , ni sur une surface du satellite en conducteur, l'expression de la fonction de base  $\Phi_i$  est alors donnée par :

$$\Phi_i(r, z) = \sum_{T \in \tau_h; i \in T} \lambda_{Num_T^{-1}(i)(r, z)}^T.$$

Pour imposer que le potentiel reste constant sur les surfaces en conducteur parfait, nous introduisons une nouvelle fonction de base :

$$\Phi_c(r, z) = \sum_{i \in \Gamma_{c-v} \cup \Gamma_{d-v}} \sum_{T \in \tau_h; i \in T} \lambda_{Num_T^{-1}(i)}(r, z).$$

L'expression de l'approximation de la solution par éléments finis dans le domaine  $\Omega$  est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi_h(r, z, t) &= \sum_{i \in \Omega \setminus \Gamma_s \setminus \Gamma_{c-v} \setminus \Gamma_{d-v}} \phi_i(t) \Phi_i(r, z) + \\ &\quad \sum_{i \in \Gamma_{d-v}} (\phi_i(t) - \phi_c(t)) \Phi_i(r, z) + \phi_c(t) \Phi_c(r, z, t) \\ &= \sum_{j \in \tau_h} \phi_j \sum_{T \in \tau_h; j \in T} \lambda_{Num_T^{-1}(i)}(r, z). \end{aligned}$$

Pour plus de détails sur la méthode des éléments finis, on pourra se référer à [6].

Ceci n'est pas encore l'expression de l'approximation globale. Il nous reste encore à introduire les fonctions de bases associées aux éléments infinis.

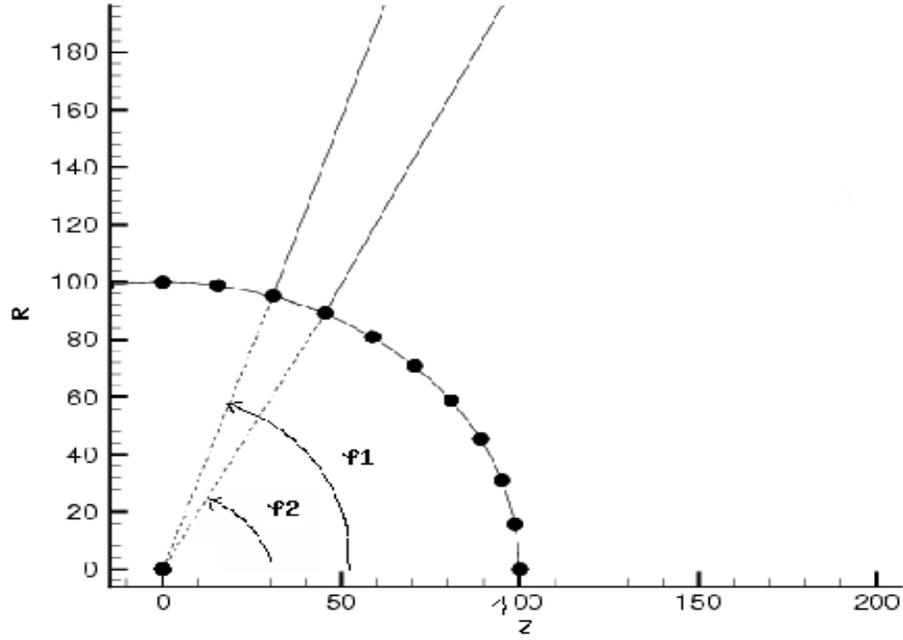
#### 5.2.1.4 Éléments infinis

Pour réaliser le couplage avec la condition limite à l'infini, nous avons introduit la géométrie des éléments infinis. Pour construire les fonctions de base, nous rappelons que nous voulons une fonction qui décroisse au plus en  $1/r_s$  ou  $r_s$  est la distance au centre de la sphère. Des travaux sur les éléments infinis ont déjà été effectués pour résoudre l'équation de Laplace à l'extérieur d'une sphère, nous citerons par exemple [14]. Notre approche consiste à utiliser les fonctions de bases linéiques associés aux segments de notre sphère que nous multiplions par  $\frac{R}{r}$ .

Nous introduisons l'ensemble des éléments infinis  $\tau_h^{inf}$ , ils seront exprimés cette fois-ci en coordonnées sphériques  $(r_s = \sqrt{r^2 + z^2}, \theta, \zeta)$  :

Un élément infini  $T_{inf}$  porté par les noeuds locaux 1 et 2 est défini par :

$$\begin{aligned} r &> R, \\ \theta &= 0, \\ \zeta_1 &\leq \zeta \leq \zeta_2. \end{aligned}$$



Les fonctions de base associées aux noeuds locaux, 1 et 2 valent respectivement dans cet élément :

$$\lambda_1^{T_{inf}}(r_s, \zeta) = \frac{R}{r_s} \left( \frac{\zeta_2 - \zeta}{\zeta_2 - \zeta_1} \right) \forall r_s \geq R; \forall \zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2,$$

$$\lambda_2^{T_{inf}}(r_s, \zeta) = \frac{R}{r_s} \left( \frac{\zeta_1 - \zeta}{\zeta_1 - \zeta_2} \right) \forall r_s \geq R; \forall \zeta_2 \leq \zeta \leq \zeta_1.$$

Pour un noeud  $i$  de la sphère extérieure, l'expression de la fonction de base  $\Phi$  est alors :

$$\Phi_i^{inf}(r, z) = \sum_{T \in \tau_h; j \in T} \lambda_{Num_T^{-1}(i)}(r, z) + \sum_{T_{inf} \in \tau_h^{inf}; j \in T_{inf}} \lambda_{Num_{T_{inf}}^{-1}(i)}^{T_{inf}}(r_s, \zeta).$$

Nous sommes donc en mesure d'écrire l'expression de l'approximation de la solution par éléments finis dans le domaine extérieur au satellite :

$$\begin{aligned}
\Phi_h(r, z, t) &= \sum_{i \in \Omega \setminus \Gamma_s \setminus \Gamma_{c-v} \setminus \Gamma_{d-v}} \phi_i(t) \Phi_i(r, z) + \sum_{i \in \Gamma_s} \phi_i(t) \Phi_i^{inf}(r, z) + \\
&\quad \sum_{i \in \Gamma_{d-v}} (\phi_i(t) - \phi_c(t)) \Phi_i(r, z) + \phi_c(t) \Phi_c \\
&= \sum_{i \in \Omega \setminus \Gamma_s \setminus \Gamma_{c-d} \setminus \Gamma_{d-v}} \phi_i \sum_{T \in \tau_h; i \in T} \lambda_{Num_{Tinf}^{-1}(i)}(r, z) \\
&\quad \sum_{i \in \Gamma_{d-v}} (\phi_i(t) - \phi_c(t)) \sum_{T \in \tau_h; i \in T} \lambda_{Num_T^{-1}(i)}(r, z) \\
&\quad + \sum_{i \in \Gamma_s} \phi_i(t) \sum_{T^{inf} \in \tau^{inf}; i \in T^{inf}} \lambda_{Num_{Tinf}^{-1}(i)}^{inf}(r, z) \\
&\quad + \phi_c(t) \sum_{i \in \Gamma_{c-v} \cup \Gamma_{d-v}} \sum_{T \in \tau_h; i \in T} \lambda_{Num_T^{-1}(i)}(r, z).
\end{aligned}$$

Par la suite, nous noterons  $\delta_i(t) = \phi_i(t) - \phi_c(t)$ .

### 5.2.1.5 Résolution matricielle

Nous présentons, ici la méthode de Galerkin permettant d'arriver à un système matriciel. En appliquant la formulation variationnelle à une approximation numérique d'une fonction que l'on teste avec chaque fonction de base associée à tous les nœuds du maillage, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\forall i \in \Omega \setminus \Gamma_{c-v} \setminus \Gamma_s, \\
&\frac{\partial}{\partial t} \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_h(r, z, t) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_i(r, z) dr dz \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Gamma_{d-v}} \nu r \frac{\epsilon_k}{d_k} (\Phi_h(r, z, t) - \phi_c(t) \Phi_c(r, z)) \Phi_i(r, z) d\gamma \right) \\
&= - \int_{\Gamma_{d-v}} r J_{ext} \cdot n \Phi_i(r, z) d\gamma \\
&\quad - \int_{\Gamma_{d-v}} \nu \tau r \frac{\sigma_k}{d_k} (\Phi_h(r, z, t) - \phi_c(t) \Phi_c(r, z)) \Phi_i(r, z) d\gamma,
\end{aligned}$$

$$\forall i \in \Gamma_s,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_h(r, z, t) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_i^{inf}(r, z) dr dz \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_h(r, z, t) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_c(r, z) dr dz \right) \\ &= - \int_{\Gamma_{c-v}} r J_{ext} \cdot n \Phi_c(r, z) d\gamma - \int_{\Gamma_{d-v}} r J_{ext} \cdot n \Phi_c(r, z) d\gamma. \end{aligned}$$

Soit :

$$\forall i \in \Omega \setminus \Gamma_{c-v} \setminus \Gamma_{d-v} \setminus \Gamma_s,$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \Omega \setminus \Gamma_s \setminus \Gamma_{c-v} \setminus \Gamma_{d-v}} \frac{\partial}{\partial t} \phi_j(t) \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_j(r, z) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_i(r, z) dr dz \right) \\ &+ \sum_{j \in \Gamma_{d-v}} \frac{\partial}{\partial t} \delta_j(t) \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_j(r, z) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_i(r, z) dr dz \right) \\ &+ \sum_{j \in \Gamma_s} \frac{\partial}{\partial t} \phi_j(t) \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_j^{inf}(r, z) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_i(r, z) dr dz \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \phi_c(t) \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_c(r, z) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_i(r, z) dr dz \right) = \\ &- \int_{\Gamma_{c-v}} r J_{ext} \cdot n \Phi_i(r, z) d\gamma - \int_{\Gamma_{d-v}} r J_{ext} \cdot n \Phi_i(r, z) d\gamma, \end{aligned}$$

$$\forall i \in \Gamma_{d-v},$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \Omega \setminus \Gamma_s \setminus \Gamma_{c-v} \setminus \Gamma_{d-v}} \frac{\partial}{\partial t} \phi_j(t) \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_j(r, z) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_i(r, z) dr dz \right) \\ & \sum_{j \in \Gamma_{d-v}} \frac{\partial}{\partial t} \delta_j(t) \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_j(r, z) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_i(r, z) dr dz \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_{d-v}} \nu r \frac{\epsilon_k}{d_k} \Phi_j(r, z) \Phi_i(r, z) d\gamma \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \phi_c(t) \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_c(r, z) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_i(r, z) dr dz \right) = \\ &- \int_{\Gamma_{d-v}} r J_{ext} \cdot n \Phi_i(r, z) d\gamma \\ &- \sum_{j \in \Gamma_{d-v}} \delta_j(t) \int_{\Gamma_{d-v}} \nu \tau r \frac{\sigma_k}{d_k} \Phi_j(r, z) \Phi_i(r, z) d\gamma \Big), \end{aligned}$$

$\forall i \in \Gamma_s,$

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \Omega \setminus \Gamma_s \setminus \Gamma_{c-v}} \frac{\partial}{\partial t} \phi_j(t) \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_j(r, z) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_i^{inf}(r, z) dr dz \right) \\ & + \sum_{j \in \Gamma_s} \frac{\partial}{\partial t} \phi_j(t) \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_j^{inf}(r, z) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_i^{inf}(r, z) dr dz \right) = 0 \\ & \sum_{j \in \Omega \setminus \Gamma_s \setminus \Gamma_{c-v} \setminus \Gamma_{d-v}} \frac{\partial}{\partial t} \phi_j(t) \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_j(r, z) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_c(r, z) dr dz \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \phi_c(t) \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_c(r, z) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_c(r, z) dr dz \right) = \\ & - \int_{\Gamma_{c-v}} r J_{ext} \cdot n \Phi_c(r, z) d\gamma - \int_{\Gamma_{d-v}} r J_{ext} \cdot n \Phi_c(r, z) d\gamma. \end{aligned}$$

Pour introduire la notation matricielle, nous introduisons  $\phi(t)$  le vecteur  $[(\phi_i(t))_{i \in \Omega \setminus \Gamma_{d-v}}, (\delta_i(t))_{i \in \Gamma_{d-v}}, \phi_c(t)]$ .

Le système global devient.

$$\frac{\partial}{\partial t} (A_h \phi(t)) = B(\phi(t)).$$

Pour le résoudre nous utiliserons un schéma d'Euler explicite classique :

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ \phi^0 &\text{ choisi,} \\ \forall n \in \mathbb{N}; t_{n+1} &= t_n + \Delta t, \\ A_h \phi^{n+1} - A_h \phi^n &= \Delta t B(\phi^n), \\ \text{Soit : } \phi^{n+1} &= \phi^n + \Delta t A_h^{-1} B(\phi^n). \end{aligned}$$

Les premiers calculs réalisés avec cette matrice conduisent à de mauvais résultats : la matrice  $A_h$  est difficile à inverser à cause de son mauvais conditionnement. Nous constatons que le paramètre  $\nu$  est très grand en raison de la faible épaisseur des diélectriques. Dans la matrice de masse  $A_h$ , les termes capacitifs sont alors très mal conditionnés. Nous allons donc introduire un redimensionnement des inconnues et fonctions de bases sur les diélectriques, ce qui nous permettra d'améliorer le conditionnement de  $A_h$ .

### 5.2.1.6 Amélioration du conditionnement du système

Nous introduisons les nouvelles fonctions de bases et inconnues sur les diélectriques :

$$\begin{aligned} \forall i \in \Gamma_{d-v}, \\ \bar{\Phi}_i(r, z, t) &= \frac{\Phi_i(r, z, t)}{\sqrt{\nu}}, \\ \bar{\delta}_i &= \sqrt{\mu}\delta_i. \end{aligned}$$

Une solution s'écrit alors dans cette nouvelle base :

$$\begin{aligned} \Phi_h(r, z, t) &= \sum_{i \in \Omega \setminus \Gamma_s \setminus \Gamma_{c-v} \setminus \Gamma_{d-v}} \phi_i(t) \Phi_i(r, z) + \sum_{i \in \Gamma_s} \phi_i(t) \Phi_i^{inf}(r, z) + \\ &\quad \sum_{i \in \Gamma_{d-v}} \bar{\delta}_i \bar{\Phi}_i(r, z) + \phi_c(t) \Phi_c. \end{aligned}$$

Exprimée dans ces nouvelles variables et inconnues, la formulation variationnelle est identique. Il suffit juste de modifier la notation pour les degrés, de liberté et fonction test appartenant aux diélectriques. Néanmoins, on a :

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \Gamma_{d-v} \\ \bar{\delta}_j \int_{\Gamma_{d-v}} \nu r \frac{\epsilon_k}{d_k} \bar{\Phi}_j(r, z) \bar{\Phi}_i(r, z) d\gamma \\ = \delta_j \int_{\Gamma_{d-v}} r \frac{\epsilon_k}{d_k} \Phi_j(r, z) \Phi_i(r, z) d\gamma, \end{aligned}$$

Ce qui nous conduit à un meilleur conditionnement du système. Pour résoudre le problème, nous utilisons le même algorithme de Newton que celui décrit précédemment.

La forme bilinéaire associée à la matrice de masse, étant symétrique et coercive, la matrice résultant de la discrétisation par éléments finis est symétrique et définie positive. Pour inverser le système, nous utilisons la méthode de Choleski qui permet de factoriser la matrice sous la forme  $L.L^t$ , où  $L$  est triangulaire inférieure. L'inversion demande alors l'inversion de deux systèmes triangulaires, ce qui est très rapide. La matrice est stockée sous la forme 'Skyline' qui permet de préserver la place mémoire, et qui a pour gros avantage de préserver le masque lors de la factorisation.

Pour achever la description de la résolution, nous devons calculer les courants incidents aux surfaces  $J_{ext}$  présents dans la formulation variationnelle. Pour ce faire nous devons résoudre les équations de Vlasov stationnaires présentées précédemment.

## 5.2.2 Calcul des courants incidents au surface

### 5.2.2.1 Mise en équation

Nous allons décrire ici, une méthode inspirée des travaux du RIAME [27], le calcul des courants par 'back-trajectories'.

La théorie de l'équation de Vlasov nous indique que les fonctions de distribution d'ions et d'électrons sont constantes le long des trajectoires des particules. Une trajectoire étant définie par la position  $X$  et la vitesse  $V$ , vérifie en grandeurs adimensionnées les équations :

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R}^+ ; \\ \frac{\partial X(s)}{\partial s} &= V(s), \\ \frac{\partial V(s)}{\partial s} &= \mathcal{K}_\alpha \nabla_x \Phi, \\ X(0) &= X_0 \text{ et } V(0) = V_0. \end{aligned}$$

avec

- $\mathcal{K}_e = 1$  pour les électrons.
- $\mathcal{K}_i = -\mu$  pour les ions.

Nous définissons  $\mathcal{T}_\alpha^{direct}(X_0, V_0)$ , cette trajectoire de pied  $X(0) = X_0$  et  $V(0) = V_0$ .

Nous définissons aussi les trajectoires  $\mathcal{T}_\alpha^{back}(X_f, V_f)$  arrivant au point final  $X_f, V_f$  par :

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R}^+ ; \\ \frac{\partial X(s)}{\partial s} &= -V(s), \\ \frac{\partial V(s)}{\partial s} &= -\mathcal{K}_\alpha \nabla_x \Phi, \\ X(0) &= X_f \text{ et } V(0) = V_f. \end{aligned}$$

C'est en fait une trajectoire parcourue en sens inverse.

La théorie des équations de Vlasov nous donne alors que la fonction de distribution des particules est une maxwellienne sur toutes les trajectoires qui rejoignent le satellite, et 0 ailleurs :

$$f_\alpha(X_f, V_f) = \begin{cases} g_\alpha(\sqrt{V_f^2 - 2\mathcal{K}_\alpha \Phi(X_f)}) & \text{si } \lim_{s \rightarrow \infty; X(s) \in \mathcal{T}_\alpha^{back}(X_f, V_f)} \|X(s)\| = +\infty, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous noterons  $\mathcal{V}_\alpha^{inf}(X_f)$  l'ensemble des vitesses  $V_f$  telle que

$$\lim_{s \rightarrow \infty; X(s) \in \mathcal{T}_\alpha^{back}(X_f, V_f)} \|X(s)\| = +\infty$$

pour un  $X_f$  donné.

Donc, si l'on considère un point  $X_f$  d'une surface de normale  $\gamma$  de notre satellite, le courant adimensionné reçu est alors :

$$\begin{aligned} J_e(X_f) &= - \int_{V_f \in \mathbb{R}^3; V_f \cdot \gamma < 0} V_f \cdot \gamma f_e(X_f, V_f) d^3 V_f \\ &= - \int_{V_f \in \mathcal{V}_e^{inf}(X_f)} V_f \cdot \gamma \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{V_f^2}{2} + \Phi(X_f)\right) d^3 V_f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_i(X_f) &= \int_{V_f \in \mathbb{R}^3; V_f \cdot \gamma < 0} V_f \cdot \gamma f_i(X_f, V_f) d^3 V_f \\ &= \int_{V_f \in \mathcal{V}_i^{inf}(X_f)} V_f \cdot \gamma \left( \frac{1}{2\pi\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{V_f^2}{2\mu} - \Phi(X_f)\right) d^3 V_f. \end{aligned}$$

La charge d'espace étant, de part le modèle nulle, nous n'avons pas besoin de la calculer. La seule nécessité réside dans le calcul des courants surfaciques ; nous nous servirons alors de ces expressions pour les calculer.

### 5.2.2.2 Passage en axisymétrie

Pour passer les équations en axisymétrie, nous avons uniquement à réécrire les trajectoires, ainsi que les intégrales définissant les courants.

- **Trajectoires :**

Les équations définissant les trajectoires de  $\mathcal{T}_\alpha^{back}(X, V)$  arrivant en  $(r, 0, z), (V_r, V_\theta, V_z)$  s'écrivent :

$$\forall s \in \mathbb{R}^+ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \begin{array}{c} r(s) \\ z(s) \end{array} \right) = - \begin{array}{c} V_r(s) \\ V_z(s) \end{array},$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \begin{array}{c} V_r(s) \\ V_\theta(s) \\ V_z(s) \end{array} \right) = - \begin{array}{c} \mathcal{K}_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{V_\theta^2}{r} \\ -\frac{V_r V_\theta}{r} \\ \mathcal{K}_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{array},$$

$$\begin{array}{c} r(0) \\ \theta(0) \\ z(0) \end{array} = \begin{array}{c} r \\ 0 \\ z \end{array} ; \quad \begin{array}{c} V_r(0) \\ V_\theta(0) \\ V_z(0) \end{array} = \begin{array}{c} V_r \\ V_\theta \\ V_z \end{array} .$$

Les ensembles  $\mathcal{V}_\alpha^{inf}(r, z)$  seront définis comme précédemment.

- **Courants incidents**

Pour écrire facilement les intégrales des courants incidents, nous écrivons les vitesses en fonction de leur module  $V_\gamma$  et des angles  $\theta_\gamma$  et  $\phi_\gamma$  qu'elles font avec la normale  $\gamma$  à la surface :

$$\begin{array}{c} V_r \\ V_\theta \\ V_z \end{array} = V_\gamma \begin{array}{c} \cos(\theta_\gamma)\gamma_r - \sin(\theta_\gamma)\cos(\phi_\gamma)\gamma_z, \\ \sin(\theta_\gamma)\sin(\phi_\gamma)\gamma_r, \\ \sin(\theta_\gamma)\cos(\phi_\gamma)\gamma_r - \cos(\theta_\gamma)\gamma_z. \end{array}$$

avec  $\theta_\gamma$  et  $\phi_\gamma$  variant dans  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .

Dans ce système de coordonnées, les intégrales valent :

$$\begin{aligned}
J_e(r, z) &= -\exp(\Phi(r, z)) \int_0^{+\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V_\gamma^3 \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \cos(\theta_\gamma) |\sin(\theta_\gamma)| \\
&\quad \exp\left(-\frac{V_\gamma^2}{2}\right) \mathbb{I}_{V(V_\gamma, \theta_\gamma, \phi_\gamma) \in \mathcal{V}_e^{inf}(r, v)} dV_\gamma d\theta_\gamma d\phi_\gamma, \\
&= -\exp(\Phi(r, z)) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V_\gamma^3 \cos(\theta_\gamma) |\sin(\theta_\gamma)| \\
&\quad \exp\left(-\frac{V_\gamma^2}{2}\right) \mathbb{I}_{V(V_\gamma, \theta_\gamma, \phi_\gamma) \in \mathcal{V}_e^{inf}(r, v)} dV_\gamma d\theta_\gamma d\phi_\gamma, \\
J_i(r, z) &= \exp(-\Phi(r, z)) \int_0^{+\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V_\gamma^3 \left(\frac{1}{2\pi\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \cos(\theta_\gamma) |\sin(\theta_\gamma)| \\
&\quad \exp\left(-\frac{V_\gamma^2}{2\mu}\right) \mathbb{I}_{V(V_\gamma, \theta_\gamma, \phi_\gamma) \in \mathcal{V}_i^{inf}(r, v)} dV_\gamma d\theta_\gamma d\phi_\gamma \\
&= \exp(-\Phi(r, z)) \left(\frac{1}{2\pi\mu}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V_\gamma^3 \cos(\theta_\gamma) |\sin(\theta_\gamma)| \\
&\quad \exp\left(-\frac{V_\gamma^2}{2\mu}\right) \mathbb{I}_{V \in \mathcal{V}_i^{inf}(r, v)} dV_\gamma d\theta_\gamma d\phi_\gamma,
\end{aligned}$$

où  $\mathbb{I}_{V \in \mathcal{V}_\alpha^{inf}(r, v)}$  est la fonction indicatrice valant 1 si  $V \in \mathcal{V}_\alpha^{inf}(r, v)$  et 0 sinon.

Le caractère axisymétrique n'intervient alors uniquement à travers l'expression de  $\mathcal{V}_\alpha^{inf}(r, z)$ , et donc des trajectoires des particules.

Nous allons maintenant décrire l'approximation numérique permettant de calculer ces intégrales.

### 5.2.2.3 Approximation numérique

- Courants incidents

Nous allons exposer ici, le calcul du courant d'ions uniquement, le calcul du courant d'électrons étant identique.

Nous commençons par limiter la borne supérieure de l'intégrale en  $V_\gamma$  par  $V_\gamma^{max}$ .

En un point  $(r, z)$  d'un segment représentant une surface de notre satellite, on a :

$$\begin{aligned}
J_i(r, z) &\simeq \exp(-\Phi(r, z)) \left( \frac{1}{2\pi\mu} \right)^{\frac{3}{2}} \sum_{i_r=1}^{N_r} \sum_{i_\theta=1}^{N_\theta} \sum_{i_\phi=1}^{N_\phi} \int_{\frac{i_r-1}{N_r} V_\gamma^{max}}^{\frac{i_r}{N_r} V_\gamma^{max}} \int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{i_\theta-1}{N_\theta} \pi}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{i_\theta}{N_\theta} \pi} \int_{-\frac{\pi}{2} + \frac{i_\phi-1}{N_\phi} \pi}^{-\frac{\pi}{2} + \frac{i_\phi}{N_\phi} \pi} V_\gamma^3 \\
&\quad \cos(\theta_\gamma) |\sin(\theta_\gamma)| \exp\left(-\frac{V_\gamma^2}{2\mu}\right) \mathbb{I}_{V(V_\gamma, \theta_\gamma, \phi_\gamma) \in \mathcal{V}_i^{inf}(r, v)} dV_\gamma d\theta_\gamma dV d\phi_\gamma \\
&\simeq \exp(-\Phi(r, z)) \left( \frac{1}{2\pi\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i_r=1}^{N_r} \sum_{i_\theta=1}^{N_\theta} \sum_{i_\phi=1}^{N_\phi} \frac{\pi}{N_\phi} \left( \mathcal{C}_i\left(\frac{i_r}{N_r} V_\gamma^{max}\right) - \mathcal{C}_i\left(\frac{i_r-1}{N_r} V_\gamma^{max}\right) \right) \\
&\quad \left( \cos^2\left(\frac{i_\theta}{N_\theta} \pi\right) - \cos^2\left(\frac{i_\theta-1}{N_\theta} \pi\right) \right) \mathbb{I}_{V\left(\frac{2i_r-1}{2N_r} V_\gamma^{max}, -\frac{\pi}{2} + \frac{2i_\theta-1}{2N_\theta} \pi, -\frac{\pi}{2} + \frac{2i_\phi-1}{2N_\phi} \pi\right) \in \mathcal{V}_i^{inf}(r, v)},
\end{aligned}$$

où  $\mathcal{C}_i(V) = -\frac{V^2+2\mu}{4} \exp\left(-\frac{V^2}{2\mu}\right)$  et  $V(V_\gamma, \theta_\gamma, \phi_\gamma)$  la vitesse de norme  $V_\gamma$ , et d'angle  $\theta_\gamma$  et  $\phi_\gamma$  par rapport à la normale  $\gamma$ .

Cette expression nous permet d'expliciter le calcul numérique des courants. Pour chaque terme de la somme nous devons évaluer le terme

$\mathbb{I}_{V(V_\gamma, \theta_\gamma, \phi_\gamma) \in \mathcal{V}_i^{inf}(r, v)}$ . Pour ce faire nous suivons numériquement la trajectoire  $\mathcal{V}_i^{inf}(r, v)$  jusqu'à ce que celle-ci sorte du domaine de calcul. Si celle-ci sort par la frontière  $\Gamma_s$  nous considérons que cette trajectoire provient de l'infini et

$\mathbb{I}_{V(V_\gamma, \theta_\gamma, \phi_\gamma) \in \mathcal{V}_i^{inf}(r, v)} = 1$ . Et si celle-ci provient d'une frontière du satellite,

$\mathbb{I}_{V(V_\gamma, \theta_\gamma, \phi_\gamma) \in \mathcal{V}_i^{inf}(r, v)} = 0$ . Pour les électrons, on a de même :

$$\begin{aligned}
J_e(r, z) &\simeq \exp(\Phi(r, z)) \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i_r=1}^{N_r} \sum_{i_\theta=1}^{N_\theta} \sum_{i_\phi=1}^{N_\phi} \frac{\pi}{N_\phi} \left( \mathcal{C}_e\left(\frac{i_r}{N_r} V_\gamma^{max}\right) - \mathcal{C}_e\left(\frac{i_r-1}{N_r} V_\gamma^{max}\right) \right) \\
&\quad \left( \cos^2\left(\frac{i_\theta}{N_\theta} \pi\right) - \cos^2\left(\frac{i_\theta-1}{N_\theta} \pi\right) \right) \mathbb{I}_{V\left(\frac{2i_r-1}{2N_r} V_\gamma^{max}, -\frac{\pi}{2} + \frac{2i_\theta-1}{2N_\theta} \pi, -\frac{\pi}{2} + \frac{2i_\phi-1}{2N_\phi} \pi\right) \in \mathcal{V}_e^{inf}(r, v)},
\end{aligned}$$

où  $\mathcal{C}_e(V) = -\frac{V^2+2}{4} \exp\left(-\frac{V^2}{2}\right)$ .

Et le courant nécessaire au calcul du potentiel est :

$$J_{ext}(r, v) = J_i(r, v) + J_e(r, v).$$

Le courant pouvant être calculé en chaque point d'un segment, pour avoir une approximation  $P_0$  sur ce segment  $\Gamma_j$  nous prendrons plusieurs points de ce segment de noeuds  $i_1$  et  $i_2$  :

$$J_{ext}^{\Gamma_j} = \sum_i^{N_{\Gamma_j}} J_{ext}.$$

Pour achever la description du calcul, il nous reste à décrire la méthode numérique permettant de parcourir les trajectoires.

### • Trajectoires

En indiquant le temps par  $n$  et en introduisant un pas de temps  $\Delta t$ , le schéma numérique permettant de calculer les trajectoires s'écrit :

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n - \Delta t V_{r_n}, \\ z_{n+1} &= z_n - \Delta t V_{z_n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{r_{n+1}} &= V_{r_n} - \Delta t \left( \mathcal{K}_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{V_{\theta_n}^2}{r_n} \right), \\ V_{\theta_{n+1}} &= V_{\theta_n} - \Delta t \left( -\frac{V_{r_n} V_{\theta_n}}{r_n} \right), \\ V_{z_{n+1}} &= V_{z_n} - \Delta t \left( \mathcal{K}_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_0 &= r & ; & & V_{r_0} &= V_r \\ z_0 &= z & & & V_{\theta_0} &= V_\theta \\ & & & & V_{z_0} &= V_z. \end{aligned}$$

Nous rappelons que ce suivi de trajectoire est réalisé sur un maillage triangulaire. Sur ce maillage, nous avons une approximation  $P_1$  du potentiel électrique. Le champ électrique dérivé de celui-ci est donc une approximation d'ordre  $P_0$ . Nous avons choisi de le régulariser, le champ électrique au nœud  $i$  s'écrit :

$$E_i = -\nabla_{r,z} \cdot \Phi(r, z) = \sum_{T \in \tau_n, i \in T} \sum_{j \in T} \phi_j \left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} \Phi_j(r, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} \Phi_j(r, z) \end{array} \right. .$$

En un point d'une trajectoire  $(r, z)$  inclus dans le triangle  $T$ , le champ électrique vaut donc :

$$E(r, z) = \sum_{j \in T} \lambda_j(r, z) E_j.$$

De plus, en suivant numériquement les trajectoires, nous constatons qu'elles évoluent d'un triangle à un autre, et que nous devons connaître le triangle dans lequel le point de la trajectoire se trouve. Pour ce faire, il suffit de savoir faire passer une trajectoire d'un triangle à un autre. Après avoir déplacé le point, nous calculons les coordonnées barycentriques associées au triangle de départ. Si au moins une des coordonnées est négative, nous sortons du triangle, et le point se trouve du côté du segment opposé au nœud correspondant. Connaissant le triangle voisin par ce segment, nous nous plaçons alors dans celui-ci et réitérons la recherche jusqu'à tomber dans le triangle dans lequel le point se trouve.

#### 5.2.2.4 Algorithme général

Nous donnons ici l'algorithme général de calcul.

- Initialisation.
  - Assemblage de la matrice de masse  $A_h$ .
  - Factorisation de celle-ci par Choleski.
  - $\Phi^0 = 0$  en chaque nœud.
  - Calcul de  $E^0$ .
  - Calcul des courants  $J_{ext}$ .
  - Assemblage du second membre du système :  $\Phi^0 + \Delta_t B_h(\Phi^0)$ .
- Itération en temps.
  - Calcul de  $\Phi^{n+1}$  en inversant les système triangulaire.
  - Calcul de  $E^{n+1}$ .
  - Calcul des courants  $J_{ext}$ .
  - Assemblage du second membre du système :  $\Phi^{n+1} + \Delta_t B_h(\Phi^{n+1})$ .
  - Calcul du résidu  $\|B_h(\Phi^{n+1})\|$  pour effectuer un test d'arrêt.

## 5.3 Résultats numériques

### 5.3.1 Cas test de la sphère

Le cas test d'une sphère de conducteur parfait, traité par Laframboise [18] et numériquement à la section 3.3, nous permettra de valider le potentiel spatial à l'équilibre avec sa forme analytique :

$$\Phi(r) = \frac{-2.5 \times 10^4}{r}.$$

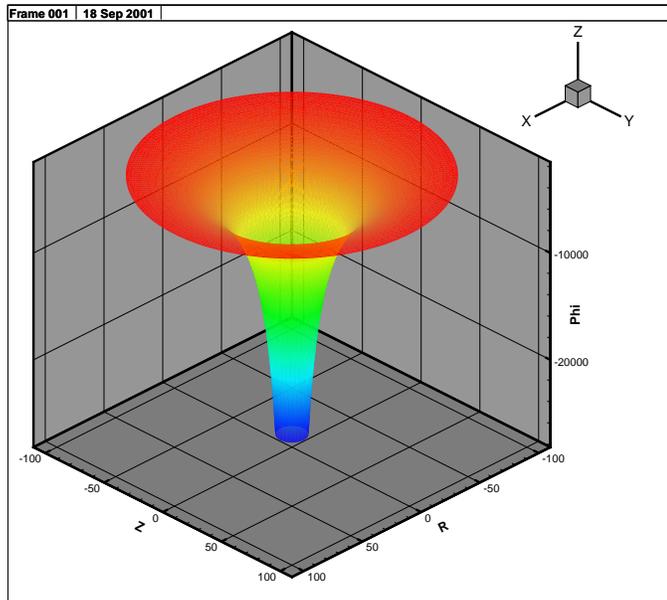
et le calcul des courants avec ceux de Laframboise :

$$J_e = -en_0 \sqrt{\frac{kT_e}{2\pi m_e}} \exp\left(\frac{e\Phi(x)}{kT_e}\right),$$

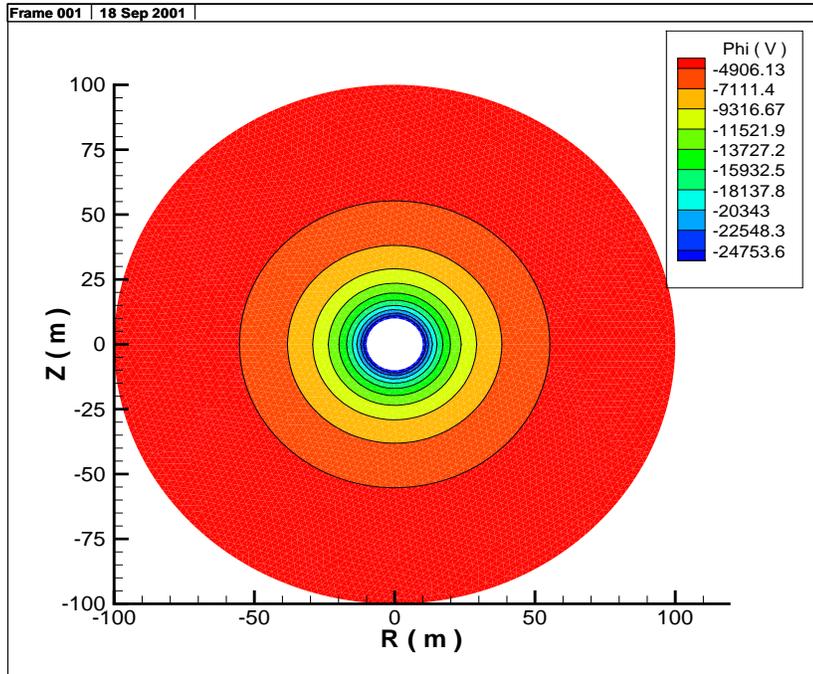
$$J_i = en_0 \sqrt{\frac{kT_i}{2\pi m_i}} \left(1 - \frac{e\Phi(x)}{kT_i}\right).$$

Celle ci est plongée dans un plasma neutre de densité  $n_0 = 1e6m^{-3}$  et de température  $kT_e = kT_i = 10keV$ .

Nous donnons d'abord la cartographie du potentiel, une fois l'équilibre atteint :

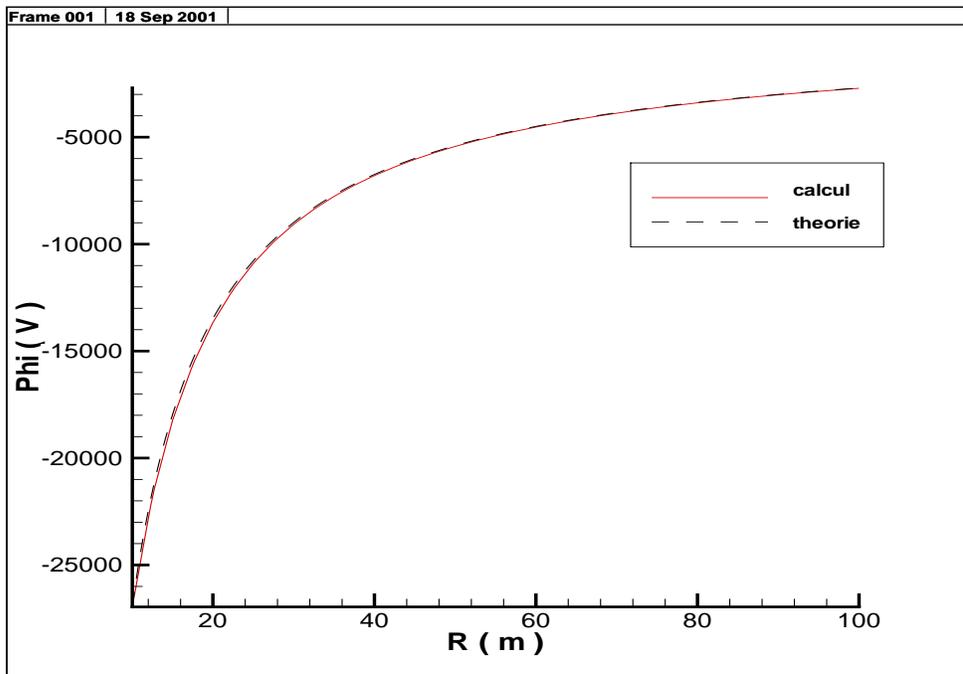


On retrouve bien un potentiel se comportant en  $1/r$ . Ce graphique n'étant pas suffisamment explicite, nous donnons une vue en coupe :

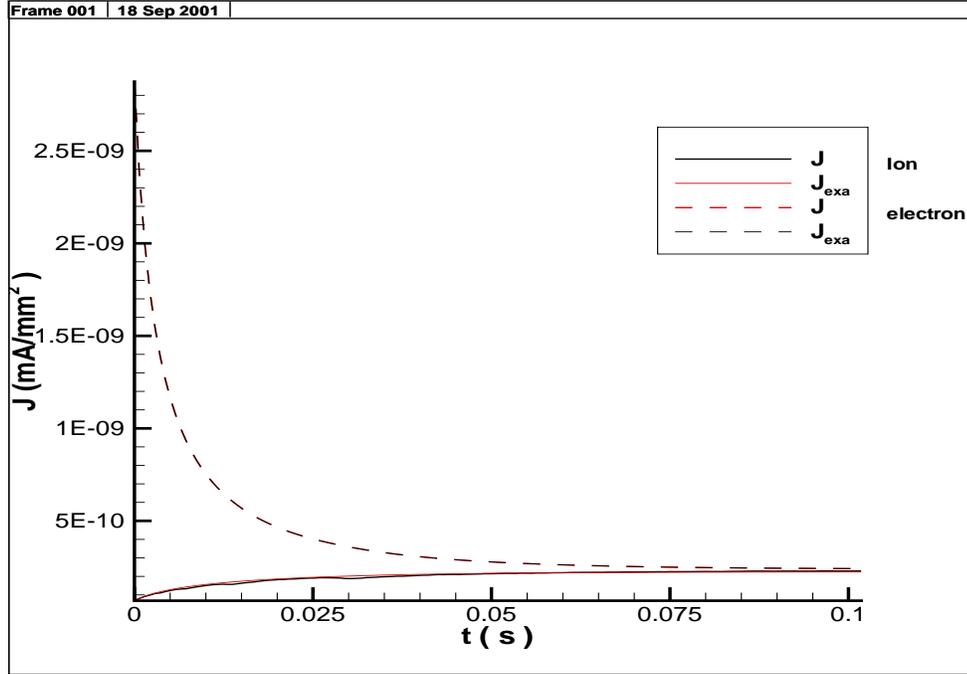


Nous retrouvons le fait que l'équilibre est atteint lorsque le potentiel vaut quelques fois la température électronique exprimée en  $eV$ .

Nous donnons les comparaisons avec les résultats analytiques :



On constate une bonne représentation du potentiel, on constate aussi peu d'imperfection au niveau du bord de notre zone de calcul, ce qui nous rassure dans le choix des éléments infinis.



Les courants sont aussi en bonne correspondance avec les courants calculés par Laframboise [18]. En outre, nous avons pu constater que l'indicatrice

$$\mathbb{I}_{V\left(\frac{2i_r-1}{2N_r}V_\gamma^{max}, -\frac{\pi}{2} + \frac{2i_\theta-1}{2N_\theta}\pi, -\frac{\pi}{2} + \frac{2i_\phi-1}{2N_\phi}\pi\right) \in \mathcal{V}_e^{inf}(r, v)}$$

des approximations d'intégrales de la sous section 5.2.2.3 vaut toujours 1 pour les électrons. Les trajectoires touchant le satellite sortent toutes de notre boîte de calcul. Le calcul donne alors exactement l'expression analytique de Laframboise.

### 5.3.1.1 Validation de la prise en compte des diélectriques

Nous donnons maintenant un cas test permettant de valider la prise en compte des diélectriques :

Nous considérons une sphère de rayon  $10m$  recouverte de diélectrique de permittivité  $\epsilon = 3\epsilon_0$ , de perméabilité  $\sigma = 1 \times 10^{-14} \text{ siemens/m}$  et d'épaisseur  $d = 10\mu m$ .

Nous ne la placerons pas dans un plasma mais dans le vide, et nous imposerons comme condition initiale pour le conducteur parfait un potentiel de  $-1V$  et de  $0V$  pour les faces extérieures du diélectrique. Une différence de potentiel de  $1V$  règne donc à l'état initial dans le diélectrique.

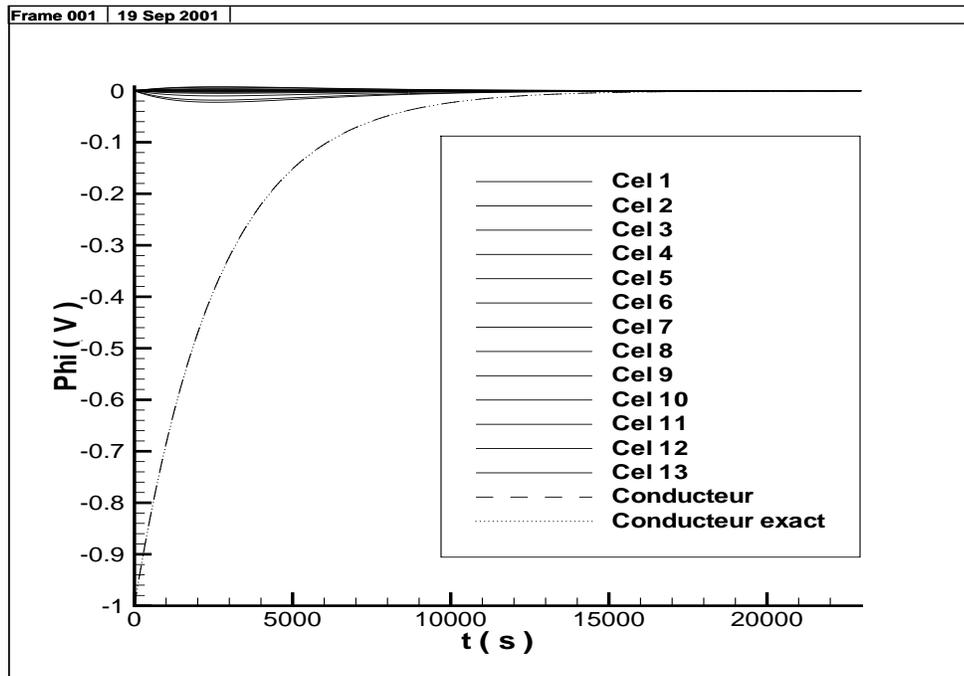
La symétrie sphérique et l'absence de courant extérieur nous permettent de résoudre analytiquement le problème. Les équations présentées en 2.1.3 se réduisent considérablement à 2 équations régissant le potentiel de la surface diélectrique  $\Phi_{diel}(t)$  et celui du conducteur  $\Phi_{cond}(t)$  en fonction du temps  $t$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{diel}(t) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon}{d} \Phi_{cond}(t) \right) + \frac{\sigma}{d} \Phi_{cond} &= 0. \end{aligned}$$

qui se résolvent aisément :

$$\begin{aligned} \Phi_{diel}(t) &= 0, \\ \Phi_{cond}(t) &= \exp \left( -\frac{t}{\epsilon/\sigma} \right). \end{aligned}$$

Nous donnons alors le résultat numérique obtenu en traçant le potentiel de chaque cellule de diélectrique ( *Cel<sub>n</sub>* ) et du conducteur :

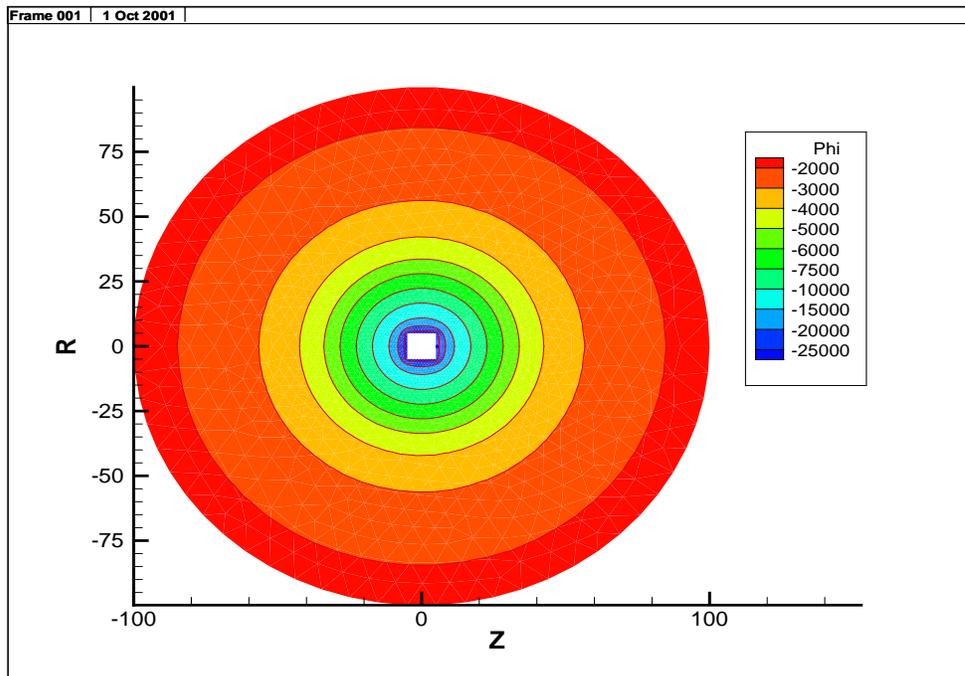


On constate que, les potentiels des diélectriques sont presque nuls, malgré quelques imperfections négligeables, et que le potentiel du conducteur coïncide avec l'expressions exacte. Nos potentiels sont en bonne adéquation avec les résultats théoriques.

### 5.3.2 Cas test plus réaliste : un cylindre

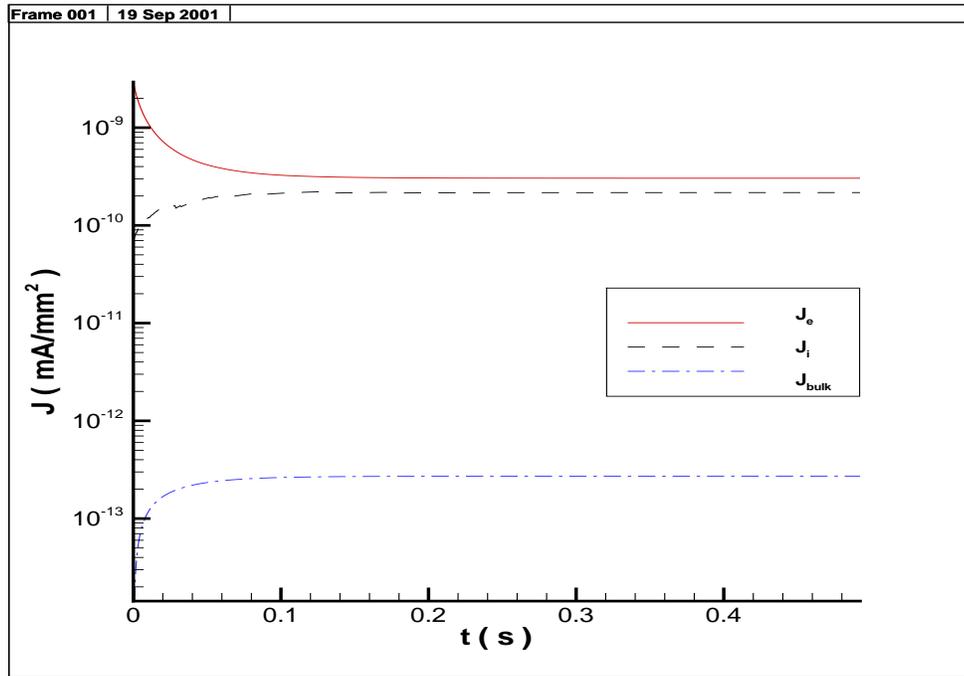
Nous donnons ici, un cas test de géométrie plus réaliste : un cylindre. Celui-ci sera recouvert de diélectrique de permittivité  $\epsilon = 3\epsilon_0$ , de perméabilité  $\sigma = 1 \times 10^{-14}$  siemens/m et d'épaisseur  $d = 10\mu\text{m}$ .

Nous donnons la carte de potentiel autour du satellite, à l'équilibre.



La cartographie du potentiel est très proche de celle donnée pour la sphère, hormis, bien sûr, au voisinage de l'objet représentant le satellite. La surface extérieure de la sphère est donc placée suffisamment loin de notre satellite. Le choix de maillage triangulaire nous permet de construire des géométries plus compliquées, et l'architecture du programme nous permet de prendre en compte plusieurs types de diélectrique différents.

Aussi les courants reçus par une surface du satellite :



Nous constatons une bonne convergence des courants, mais un très faible courant de conduction. Le potentiel du conducteur et celui du diélectrique restent très proches.

# Chapitre 6

## Modélisation $2D$ axisymétrique du propulseur.

Nous nous intéressons ici à la modélisation bidimensionnelle d'un propulseur de type *SPT*, Beaucoup de travaux ont déjà été effectués dans le domaine. nous citerons par exemple, Samantha Roy et Daniel Hasting [32] du Massachusetts Institute of Technology, qui ont construit un modèle de plume hybride. Les ions sont traités de manière particulaire, les électrons suivent une distribution de Boltzmann, et les ions lents sont créés avec un opérateur de collision de type Monte-Carlo (MCC). Puis, plus tard Daniel Hasting et David Oh [25] ont construit un modèle similaire mais en modifiant le traitement des collisions, la méthode DSMC (Direct Simulation Monte Carlo) est utilisée. Un autre modèle similaire a été construit par J. Wang and J. Brophy [38] du Jet Propulsion Laboratory. M. Tajmar [35] du centre de recherche autrichien Seibersdorf, a aussi construit un modèle particulaire hybride. Pour les modèles français, nous citerons J. Bareilles, L. Guarrigues et J.P Boeuf [1] qui ont eux aussi développé un modèle hybride fluide Pic-MCC. Parmi les travaux russes, nous citerons A.M. Bishaev, V.K. Kalashnikov et A.V. Shavkyna [3] qui ont développé un logiciel JET basé sur un modèle similaire mais utilisant cette fois-ci, un modèle B.G.K. pour traiter les collisions. Nous citerons aussi les travaux russes du TsNIIMASH [13], ou un modèle fluide pour le plasma primaire et particulaire pour les ions lents a été développé.

## 6.1 Simplification des équations

### 6.1.1 Rappel des équations

Nous rappelons les équations de Vlasov présentées en section 2.2.3 munis de leurs conditions limites :

•Ions rapides :

$$\forall x \in O, \forall v \in \mathbb{R}^3, \forall t \geq 0,$$

$$\frac{\partial f_{Xe^+}}{\partial t}(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f_{Xe^+}(t, x, v) - \frac{e \nabla_x \Phi(t, x)}{m_{Xe}} \cdot \nabla_v f_{Xe^+}(t, x, v) = 0.$$

Avec :

$$\forall x \in \Gamma_{sort}, \forall v \in \mathbb{R}^3; v \cdot \gamma_{sort} > 0,$$

$$f_{Xe^+}(t, x, v) = g_{Xe^+}^{SPT}(x, v),$$

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall v \in \mathbb{R}^3; v \cdot \gamma_\Omega > 0,$$

$$f_{Xe^+}(t, x, v) = 0.$$

•Ions lents :

$$\forall x \in O, \forall v \in \mathbb{R}^3, \forall t \geq 0,$$

$$\frac{\partial f_{Xe_{lent}^+}}{\partial t}(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f_{Xe_{lent}^+}(t, x, v) - \frac{e \nabla_x \Phi(t, x)}{m_{Xe}} \cdot \nabla_v f_{Xe_{lent}^+}(t, x, v),$$

$$= q_{Xe_{lent}^+}(t, x) \left( \frac{m_{Xe}}{2\pi k T_n} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{\frac{1}{2} m_{Xe} v^2}{k T_n} \right)$$

Avec :

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall v \in \mathbb{R}^3; v \cdot \gamma_\Omega > 0,$$

$$f_{Xe_{lent}^+}(t, x, v) = 0.$$

$$\text{Et } q_{Xe_{lent}^+} = n_{Xe^+} n_{Xe} \|V_{Xe^+}\| \sigma_{CEX}(V_{Xe^+}).$$

•**Electrons :**

$$n_e(x, v) = n_{ref} \exp\left(\frac{e\Delta\Phi(x)}{kT_e^{SPT}}\right).$$

•**Potentiel :**

$$\begin{aligned} -\epsilon_0\Delta_x\Phi(t, x) &= e(n_{Xe^+}(t, x) + n_{Xe^+}^{lent}(t, x) - n_e(t, x)) \text{ dans } \Omega^c, \\ \Phi(t, x) &= \Phi_s(t, x) \text{ sur } \Gamma_{d-v} \cup \Gamma_{c-d}, \\ \Phi &\rightarrow 0 \text{ à l'infini.} \end{aligned}$$

### 6.1.2 Adimensionnement des équations

Nous procédons de manière analogue qu'en section 2.2.3.

Nous rappelons les variables d'adimensionnement :

$$\begin{aligned} t_{SPT} &= \frac{t_{SPT}}{T_{SPT}}, \tilde{x} = \frac{x}{D}, v_{\tilde{X}e^+} = \frac{v_{Xe^+}}{\sqrt{\frac{2eU_{dech}}{m_{Xe}}}}, \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = \frac{f_{Xe^+}(t, x, v)}{f_{ref}}, \\ \tilde{g}_{Xe^+}(\tilde{v}) &= \frac{g_{Xe^+}(v)}{f_{ref}}, v_{\tilde{X}e^+}^{lent} = \frac{v_{Xe^+}^{lent}}{\sqrt{\frac{2kT_e}{m_{Xe}}}}, \tilde{f}_{Xe^+}^{lent}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = \frac{f_{Xe^+}^{lent}(t, x, v)}{f_{ref}}, \tilde{g}_{Xe^+}^{lent}(\tilde{v}) = \frac{g_{Xe^+}^{lent}(v)}{f_{ref}}, \\ \tilde{n}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \frac{n_{Xe^+}(t, x)}{n_{ref}}, \Delta\tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{e\Delta\Phi(t, x)}{kT_e}, \\ \tilde{d}_k &= \frac{d_k}{d}, \sigma(\tilde{v}) = \frac{\sigma(v)}{A}. \end{aligned}$$

On introduit les constantes sans dimension :

$$\gamma = \frac{n_0}{n_{ref}} \frac{\lambda_d^2}{D^2}, \eta = \frac{\lambda_D^{SPT}}{D}, \kappa = A \overset{\circ}{n}_{ref} D, \Upsilon_p = \frac{eU}{kT_e^{SPT}}, \text{ et } \mathcal{T}_n = \frac{kT_e^{SPT}}{kT_n}.$$

Où :

$$\lambda_d^{SPT} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT_e}{n_{ref} e^2}}, T_{SPT} = \eta^2 \frac{D}{\sqrt{\frac{2eU_{dech}}{m_{Xe}}}} \text{ et } f_{ref} = n_{ref} \sqrt{\frac{2eU_{dech}}{m_{Xe}}}$$

Avec comme temps caractéristique  $T_{SPT}$  :

$$T_{SPT} = \gamma \frac{D}{\sqrt{\frac{2eU_{dech}}{m_{Xe}}}}.$$

Et de même qu'en 2.2.3 les équations de Valsov décrivant les particules seront stationnaires.

Les équations deviennent alors :

•Ions rapides :

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0, \\ \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) - \frac{1}{\Upsilon_p} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(t, x) \cdot \nabla_{\tilde{v}} \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = 0. \end{aligned}$$

Avec :

$$\forall \tilde{x} \in \partial\Omega, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_{\Omega} > 0,$$

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x} \in \tilde{\Gamma}_{sort}, \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = 0, \\ \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_{sort} > 0; \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = \tilde{g}_{Xe^+}^{SPT}(\tilde{x}, \tilde{v}). \end{aligned}$$

•Ions lents :

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \forall \tilde{t} \geq 0, \\ \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) - \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{t}, \tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{v}) = \\ \kappa \tau_{Xe} \tilde{n}_{Xe^+}^2(\tilde{t}, \tilde{x}) \|v\| \tilde{\sigma}_{CEX}(v) \cdot \left(\frac{\mathcal{T}_n}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\mathcal{T}_n \tilde{v}^2). \end{aligned}$$

Avec :

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall v \in \mathbb{R}^3; v \cdot \gamma_{\Omega} > 0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{Xe^+_{lent}}(t, x, v) = 0, \\ \tau_{Xe} = 1.5, \\ \text{et, } \sigma^{CEX}(v) = (k1 \ln(\|v\|) + k2)^2 \times 10^{-20} m^2 \end{aligned}$$

•**Electrons** :

$$\tilde{n}_e(\tilde{x}, \tilde{v}) = \exp\left(\tilde{\Delta}\Phi(\tilde{x})\right).$$

•**Potentiel** :

$$\begin{aligned} -\eta^2 \Delta_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}_{\tilde{x}} &= \tilde{n}_{Xe^+}(\tilde{x}) + \tilde{n}_{Xe_{lent}^+}(\tilde{x}) - \exp\left(\tilde{\Delta}\Phi(\tilde{x})\right) \text{ dans } \tilde{\Omega}^c, \\ \tilde{\Phi} &= \tilde{\Phi}_s \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{d-v} \cup \tilde{\Gamma}_{c-d}, \\ \tilde{\Phi} &\rightarrow 0 \text{ à l'infini.} \end{aligned}$$

### 6.1.3 Passage à la limite formel

Pour simplifier les équations, nous passons donc formellement à la limite lorsque  $\gamma \rightarrow 0$  et  $\mathcal{T} \rightarrow +\infty$ . Nous obtenons alors :

•**Ions rapides** :

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \\ \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{x}, \tilde{v}) - \frac{1}{\Upsilon_p} \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{x}, \tilde{v}) = 0. \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x} \in \partial\tilde{\Omega}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_{\Omega} > 0, \\ \forall \tilde{x} \in \tilde{\Gamma}_{sort}, \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{x}, \tilde{v}) = 0, \\ \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3; \tilde{v} \cdot \gamma_{sort} > 0, \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{x}, \tilde{v}) = \tilde{g}_{Xe^+}^{SPT}(\tilde{x}, \tilde{v}) \end{aligned}$$

•**Ions lents** :

$$\begin{aligned} \forall \tilde{x} \in \tilde{O}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^3, \\ \tilde{v} \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{x}, \tilde{v}) - \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{x}) \cdot \nabla_{\tilde{v}} \tilde{f}_{Xe^+}(\tilde{x}, \tilde{v}) = \kappa \tau_{Xe} \tilde{n}_{Xe^+}^2(\tilde{t}, \tilde{x}) \|v\| \tilde{\sigma}_{CEX}(v). \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \forall x \in \partial\Omega, \forall v \in \mathbb{R}^3; v \cdot \gamma_{\Omega} > 0, \\ \tilde{f}_{Xe_{lent}^+}(t, x, v) = 0, \end{aligned}$$

•**Electrons :**

$$\tilde{n}_e(x, v) = \exp \left( \tilde{\Delta}\Phi(x) \right).$$

•**Potentiel :**

Pour la zone, en sortie proche du propulseur où la neutralité peut être imposée :

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}) = \Phi_{cond} + d\Phi + \log \left( \tilde{n}_{Xe^+}(\tilde{x}) + \tilde{n}_{Xe_{lent}^+}(\tilde{x}) \right).$$

Pour la zone où la neutralité ne peut plus être imposée :

$$\begin{aligned} -\eta^2 \Delta_{\tilde{x}} \tilde{\Phi}(\tilde{x}) &= \tilde{n}_{Xe^+} + \tilde{n}_{Xe_{lent}^+} - \exp \left( \tilde{\Delta}\Phi(\tilde{x}) \right) \text{ dans } \Omega^c, \\ \tilde{\Phi} &= \tilde{\Phi}_s \text{ sur } \tilde{\Gamma}_{d-v} \cup \tilde{\Gamma}_{c-d}, \\ \tilde{\Phi} &\rightarrow 0 \text{ à l'infini.} \end{aligned}$$

Pour déterminer les différentes zones, nous utiliserons un critère sur le nombre de Debye, lorsque celui-ci dépassera 1, par exemple, nous n'imposons plus la neutralité.

Dorénavant, nous supprimerons la notation  $\tilde{\bullet}$ , les grandeurs restant adimensionnées.

## 6.2 Approximation numérique

### 6.2.1 Densité de particules

#### 6.2.1.1 Passage en axisymétrie

Nous réécrivons les équations en axisymétrie. Nous remarquons que pour les ions, l'approximation monocinétique permet d'affirmer qu'aucune particule n'a de vitesses perpendiculaires au plan ( $rOz$ ) :

$$f_{Xe^+}(r, z, v_r, v_\theta, v_z) = n_{Xe^+}(r, z) \delta(v_r - v_{r_{Xe^+}}(r, z)) \delta(v_z - v_{z_{Xe^+}}(r, z)) \delta(v_\theta),$$

$$f_{Xe_{lent}^+}(r, z, v_r, v_\theta, v_z) = n_{Xe_{lent}^+}(r, z) \delta(v_r - v_{r_{Xe_{lent}^+}}(r, z)) \delta(v_z - v_{z_{Xe_{lent}^+}}(r, z)) \delta(v_\theta).$$

Nous procédons alors comme dans [33], les équations deviennent :

•**Ions rapides :**

$$\forall r, z \in O, \forall v_r, v_z \in \mathbb{R}^3, \forall t \geq 0,$$

$$\left| \begin{array}{l} v_r \\ v_z \end{array} \right. \cdot \nabla_{r,z} [rf_{Xe^+}](r, z, v_r, v_z) - \frac{1}{\Upsilon_p} \nabla_{r,z} \Phi(r, z) \cdot \nabla_{v_r, v_z} [rf_{Xe^+}](r, z, v_r, v_z) = 0.$$

Avec :

$$\forall r, z \in \partial\Omega, \forall v_r, v_z \in \mathbb{R}^3; \left| \begin{array}{l} v_r \\ v_z \end{array} \right. \cdot \gamma_\Omega > 0,$$

$$[rf_{Xe^+}](r, z, v_r, v_z) = 0 \forall r, z \in \Gamma_{sort},$$

$$\forall v_r, v_z \in \mathbb{R}^3; \left| \begin{array}{l} v_r \\ v_z \end{array} \right. \cdot \gamma_{sort} [rf_{Xe^+}](r, z, v_r, v_z) = [rg_{Xe^+}^{SPT}](r, z, v_r, v_z).$$

•**Ions lents :**

$$\forall (r, z) \in O, \forall (v_r, v_z) \in \mathbb{R}^2, \forall t \geq 0,$$

$$\left| \begin{array}{l} v_r \\ v_z \end{array} \right. \cdot \nabla_{r,z} [rf_{Xe^+}](r, z, v_r, v_z) - \nabla_{r,z} \Phi(r, z) \cdot \nabla_{v_r, v_z} [rf_{Xe^+}](r, z, v_r, v_z) = \kappa q_{Xe^+ lent}(r, z) \delta(v_r) \delta(v_z).$$

Nous constatons donc que nous devons résoudre pour les 2 espèces d'ions, l'équation de Vlasov bidimensionnelle. Néanmoins, la grandeur transportée est  $(rf)$ .

•**Electrons :**

$$n_e(r, z, v_r, v_z) = \exp(\Delta\Phi(r, z)).$$

La densité des électrons étant uniquement, fonction du potentiel, son calcul sera trivial sur un maillage sur lequel le potentiel est connu.

### 6.2.1.2 Méthode particulière

Nous allons utiliser une méthode particulière déterministe pour résoudre les équations de Vlasov stationnaires. Cette méthode est plus connue sous le nom *PIC*, 'Particle In Cell'. Pour commencer nous introduisons les trajectoires issues d'un point  $x$  du bord  $\partial O$  avec une vitesse  $v$  entrante dans  $O$ .

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial X(s, x, v)}{\partial s} &= V(s, x, v), \\ \frac{\partial V(s, x, v)}{\partial s} &= -\frac{1}{\Upsilon} \nabla_x \Phi, \\ X(0) &= x \text{ et } V(0) = v. \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Upsilon &= 1 \text{ pour les ions lents,} \\ \Upsilon &= \Upsilon_p \text{ pour les ions rapides.} \end{aligned}$$

Nous introduisons aussi le temps de sortie du domaine  $O$  de cette trajectoire :  $\mathcal{T}(x, v)$ .

Nous rappelons que nous sommes en axysymétrie, que  $X = (r, z)$  et  $V = (V_r, V_z)$ , et que la grandeur transportée par l'équation de Vlasov stationnaire est  $[rf_{X_e^+}]$ .

Nous allons procéder comme dans la thèse de Bruno Salanon [33] pour introduire la méthode numérique.

#### •Ions rapides :

La théorie sur l'équation de Vlasov nous donne que la fonction de distribution des ions est constante le long des trajectoires, on a alors :

$$[rf](X(t, x, v), V(t, x, v)) = [rg_{X_e^+}^{SPT}](x, v). \quad (6.1)$$

Donc, en nous plaçant en un point  $(X', V')$  de  $O \times \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} [rf](X', V') &= \int_{X(t, x, v)} \int_{V(t, x, v)} [rf](X(t, x, v), V(t, x, v)) \delta(X' - X(t, x, v)) \\ &\quad \delta(V' - V(t, x, v)) dX(t, x, v) dV(t, x, v). \end{aligned}$$

En utilisant la formule de changement de variable

$$dX(t, x, v)dV(t, x, v) = |v \cdot \gamma(x)| dv d\gamma(x) dt,$$

et en utilisant (6.1), on a :

$$\begin{aligned} [rf](X', V') &= \int_0^t \int_v \int_{\Gamma_{sort}} [rg_{Xe^+}^{SPT}](x, v) \\ &\delta(X' - X(t, x, v)) \delta(V' - V(t, x, v)) v \cdot \gamma(x) dv d\gamma(x) dt. \end{aligned} \quad (6.2)$$

• **Ions lents :**

Nous procédons de même que précédemment, les spécificités viennent ici du fait que nous avons un terme source pour l'équation de Vlasov et aucune condition d'injection.

$$[rf](x, v) = \int_{-\infty}^0 \kappa [rq_{Xe^+}^{lent}](X(s, x, v)) \delta(V(s, x, v)) ds. \quad (6.3)$$

Donc, en nous plaçant en un point  $(X', V')$  de  $O \times \mathbb{R}^2$ .

$$[rf](X', V') = \int_x \int_v [rf](x, v) \delta(X' - x) \delta(V' - v) dx dv.$$

Or, en posant,  $y = X(s, x, v)$ ,  $w = V(s, x, v)$  et  $t = -s$ , on a  $x = X(t, y, w)$ ,  $v = V(t, y, w)$  et  $dx dv ds = -dy dw dt$ , puis en utilisant (6.3), on a :

$$\begin{aligned} [rf](X', V') &= \int_y \int_w \int_0^{+\infty} \kappa [rq_{Xe^+}^{lent}](y) \delta(w) \\ &\delta(X' - X(t, y, w)) \delta(V' - V(t, y, w)) dy dw dt. \end{aligned} \quad (6.4)$$

• **Approximation des fonctions de distributions :**

La résolution par la méthode particulaire consiste à approcher les grandeurs,  $rf(t, \cdot, \cdot)$  par une somme de masses de Dirac :

$$[rf](s, x, v) = \sum_{k=1}^{Np} w_k \delta(x - x_k(s)) \delta(v - v_k(s)).$$

Où  $Np$  est le nombre de particules,  $w_k$  est le poids associé à la particule  $k$ , et  $x_k(s), v_k(s)$ , ses coordonnées dans l'espace et dans l'espace des phases.

Et  $r_k(s)$  et  $z_k(s)$  sont sur les trajectoires définies par :

$$\frac{dx}{ds} = \left| \begin{array}{l} \frac{dr}{ds}(s) \\ \frac{dz}{ds}(s) \end{array} \right. = v(s) = \left| \begin{array}{l} v_r(s) \\ v_z(s) \end{array} \right.$$

$$\frac{dv}{ds} = \left| \begin{array}{l} \frac{dv_r}{ds} \\ \frac{dv_z}{ds} \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{\Upsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, z) \\ -\frac{1}{\Upsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(r, z) \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} \Upsilon &= 1 \text{ pour les ions lents,} \\ \Upsilon &= \Upsilon_p \text{ pour les ions rapides.} \end{aligned}$$

Pour résoudre ces trajectoires nous utilisons le schéma de Newton classique :

$$\begin{aligned} r^{n+1} &= r^n + \Delta s v_r^n \\ z^{n+1} &= z^n + \Delta s v_z^n, \end{aligned}$$

$$v_r^{n+1} = v_r^n - \frac{\Delta s}{\Upsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r^n, z^n)$$

$$v_z^{n+1} = v_z^n - \frac{\Delta s}{\Upsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(r^n, z^n).$$

Nous avons déjà vu au chapitre précédant comment suivre ce type de trajectoires sur un maillage non structuré triangulaire.

L'approximation des fonctions de distribution  $rf$  s'obtient en utilisant une approximation du terme d'injection pour les ions rapides et du terme source pour les ions lents :

•**Ions rapides :**

En utilisant :

$$[rg_{Xe^+}^{SPT}](x, v) \simeq \sum_k [rg_{Xe^+}^{SPT}](x_k(0), v_k(0)) \delta(x - x_k(0)) \delta(v - v_k(0)) \Delta x_k(0),$$

où  $\Delta x_k$  est un élément de surface.

et en remplaçant dans l'équation (6.2), nous avons :

$$\begin{aligned} [rf](X', V') &\simeq \int_0^t \int_v \int_{\Gamma_{sort}} \sum_k [rg_{Xe^+}^{SPT}](x_k(0), v_k(0)) \delta(x - x_k(0)) \delta(v - v_k(0)) \Delta x_k(0) \\ &\quad \delta(X' - x_k(t)) \delta(V' - v_k(t)) v \cdot \gamma(x) dv d\gamma(x) dt \\ &\simeq \int_0^t \sum_k [rg_{Xe^+}^{SPT}](x_k(0), v_k(0)) \\ &\quad \delta(X' - x_k(s)) \delta(V' - v_k(s)) v_k(0) \cdot \gamma(x_k(0)) \Delta x_k(0) dt \\ &\simeq \sum_n \sum_k [rg_{Xe^+}^{SPT}](x_k^0, v_k^0) \delta(X' - x_k^n) \delta(V' - v_k^n) v_k(0) \cdot \gamma(x_k^0) \Delta x_k^0 \Delta t. \end{aligned}$$

•**Ions lents :**

En utilisant :

$$[rq_{Xe^+}^{lent}](x) \simeq \sum_k [rq_{Xe^+}^{lent}](x_k(0)) \delta(x - x_k(0)) \Delta x_k(0),$$

et en remplaçant dans l'équation (6.4) avec  $v_k(0) = 0$ , nous avons :

$$\begin{aligned} [rf](X', V') &\simeq \int_0^{+\infty} \int_v \sum_k \kappa [rq_{Xe^+}^{lent}](x_k(0)) (x - x_k(0)) \Delta x_k(0) \delta(v) \delta(X' - x_k(s)) \delta(V' - v_k(s)) dt \\ &\simeq \sum_n \sum_k \kappa [rq_{Xe^+}^{lent}](x_k^0) \delta(X' - x_k^n) \delta(V' - v_k^n) \Delta x_k^0 \Delta t. \end{aligned}$$

Avec  $q_{Xe^+}^{lent} = \tau_{Xe} n_{Xe^+}^2 \|V_{Xe^+}\| \sigma_{CEX}(V_{Xe^+})$ , où  $n_{Xe^+}$  et  $V_{Xe^+}$  sont les grandeurs macroscopiques calculées pour les ions rapides.

Les grandeurs intéressantes sont les grandeurs macroscopiques. Nous avons donc besoin de formules d'interpolation pour calculer les densités d'ions rapides et lents.

Nous déterminons alors les poids  $w_k$  pour chacune des espèces d'ions.

### 6.2.1.3 Choix des poids $w_k$

#### •Ions rapides :

Pour les ions rapides nous sommes dans le cas d'une surface émettrice  $\Gamma_{sort}$  de normale  $\gamma_{sort}$ . Celle-ci est découpée en  $N_p$  points de coordonnées  $(r_k(0), z_k(0))$  séparée par des intervalles constants de taille  $\Delta x$ . La distribution étant supposée connue et monocinétique, la vitesse en ce point est connue et vaut  $(v_{rk}(0), v_{zk}(0))$ . Les poids sont donnés par :

$$w_k = [rg_{Xe^+}^{SPT}](x_k^0, v_k^0) \begin{vmatrix} v_{rk}^0 \\ v_{zk}^0 \end{vmatrix} \cdot \gamma_{sort} \Delta t \Delta x_k^0.$$

#### •Ions lents :

Pour les ions lents, nous sommes dans le cas d'émission en volume. Pour chaque triangle de notre maillage dans lequel des ions lents sont créés nous introduisons les 3 points de Gauss desquels nous injecterons des particules. Au total, nous aurons donc  $N_p$  points de coordonnées  $(r_k(0), z_k(0))$ . La vitesse d'émission est nulle. Le nombre de particules créées pendant un pas  $\Delta s$  de temps étant connue. Les poids sont donnés par :

$$w_k = [rq_{Xe^+}^{lent}](x_k^0) \Delta x_k^0 \Delta t.$$

### 6.2.1.4 Formule d'interpolation

En utilisant les définitions de la densité de charge  $n_i$  et de la densité de courant  $en_i v_i$ , ainsi que l'expression de la fonction de distribution, on a :

$$\begin{aligned}
rn_i(r, z) &= \sum_{n=0}^{N_s} \sum_{k=0}^{N_p} w_k \delta(r - r_k(n\Delta s)) \delta(z - z_k(n\Delta s)), \\
ern_i(r, z)v_{r_i}(r, z) &= \sum_{n=0}^{N_s} \sum_{k=0}^{N_p} w_k v_{r_k}(n\Delta s) \delta(r - r_k(n\Delta s)) \delta(z - z_k(n\Delta s)), \\
ern_i(r, z)v_{z_i}(r, z) &= \sum_{n=0}^{N_s} \sum_{k=0}^{N_p} w_k v_{z_k}(n\Delta s) \delta(r - r_k(n\Delta s)) \delta(z - z_k(n\Delta s)).
\end{aligned}$$

Pour pouvoir résoudre l'équation de Poisson, nous avons néanmoins besoin d'une approximation éléments finis de  $rn_i$  en chaque noeud du maillage  $i$ , soit :

$$\begin{aligned}
(rn_i)_i &= \sum_{T; i \in T} \int_T rn_i(r, z) \phi_i^T(r, z) \\
&= \sum_{T; i \in T} \frac{1}{|T|} \sum_{n=0}^{N_s} \sum_{k=0}^{N_p} w_k \phi_i^T(r_k(n\Delta s), z_k(n\Delta s)),
\end{aligned}$$

où  $|T|$  correspond à l'aire du triangle  $T$

Nous avons de même pour la densité de courant :

$$\begin{aligned}
(rn_i v_{r_i})_i &= \sum_{T; i \in T} \int_T rn_i(r, z) v_r(r, z) \phi_i^T(r, z) \\
&= \sum_{T; i \in T} \frac{1}{|T|} \sum_{n=0}^{N_s} \sum_{k=0}^{N_p} w_k v_{r_k} \phi_i^T(r_k(n\Delta s), z_k(n\Delta s)), \\
(rn_i v_{z_i})_i &= \sum_{T; i \in T} \int_T rn_i(r, z) v_z(r, z) \phi_i^T(r, z) \\
&= \sum_{T; i \in T} \frac{1}{|T|} \sum_{n=0}^{N_s} \sum_{k=0}^{N_p} w_k v_{z_k} \phi_i^T(r_k(n\Delta s), z_k(n\Delta s)).
\end{aligned}$$

### 6.2.1.5 Pas de temps variable

Dans la plupart des cas le maillage devra être raffiné près de la sortie du propulseur et beaucoup moins loin du satellite. Le pas de temps initial dépendant de la taille des triangles, il est très intéressant de prendre un pas de temps variable pour parcourir les trajectoires. Si nous prenons un pas de temps recalculé à chaque itération, nous devons alors modifier les formules des poids et d'interpolation, en exemple nous les donnons pour les ions rapides :

$$w_k = r_k(0) g_{i_{Xe^+}}^{SPT}(r_k(0), z_k(0)) \begin{vmatrix} v_{rk}(0) \\ v_{zk}(0) \end{vmatrix} \cdot \gamma_{sort} \Delta s \Delta x$$

$$= \sum_{T:i \in T} \frac{1}{|T|} \sum_{k=1}^N \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{N_s} \sum_{k=0}^{N_p} w_k \phi_i^T(r_k(n\Delta^n s), z_k(n\Delta^n s) \Delta^n s).$$

### 6.2.1.6 Densité électronique

Nous avons donc décrit comment calculer la densité ionique. Nous devons introduire maintenant la densité électronique. Dans le coeur du jet, où, nous l'avons vu, la neutralité peut être imposée, on a  $n_e = n_{i_{Xe^+}} + n_{i_{Xe^+ lent}}$ . A l'extérieur de cette zone nous rajouterons des électrons en chaque noeud du maillage pour lequel la densité ionique n'est pas nulle sur au moins un de ces voisins. Ceci nous détermine une deuxième zone  $\Omega_{charg}$ . Dans celle-ci la densité électronique est donnée par :

$$n_e = \exp(\Phi - \Phi_{ref})$$

Et son approximation éléments finis s'écrit :

$$n_e = \sum_{i \in \Omega_{charg}} \exp(\phi_i - \phi_{ref}) \Phi_i$$

## 6.2.2 Equation de Poisson

### 6.2.2.1 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle se construit de manière analogue au chapitre précédent. Néanmoins, le domaine de résolution est modifié du fait que le potentiel est fixé dans la zone  $O_{neu}$  où la neutralité est imposée. De plus, dans la zone  $O_{charg}$  où la charge d'espace n'est pas nulle et où la neutralité ne peut être imposée nous devons prendre en compte cette charge dans le terme source. La formulation variationnelle, directement en axisymétrie,

s'écrit :

Nous nous plaçons dans  $C = \{\Phi \in H^1(O); \Phi \sim \frac{1}{r}; \Phi = \Phi_s \text{ sur } \Gamma_{c-v} \cup \Gamma_{d-v}\}$ .

$$\int \int_{O \setminus O_{neu}} r \nabla_{r,z} \Phi(r, z) \cdot \nabla_{r,z} \Psi(r, z) dr dz = \int \int_{O_{charg}} r \cdot \left( n_{i_{Xe^+}}(r, z) + n_{i_{Xe^+}^{lent}}(r, z) - \exp(\Delta \Phi(r, z)) \right) \Psi(r, z) dr dz$$

Nous raisonnons comme précédemment par éléments finis.

### 6.2.2.2 Eléments finis

Nous donnons ici, directement l'expression des équations menant à la résolution matricielle.

$$\begin{aligned} \forall i \in \Omega \setminus \Gamma_{c-v} \setminus \Gamma_{d-v} \setminus \Gamma_s \\ \sum_{j \in \Omega \setminus \Gamma_s \setminus \Gamma_{c-v} \setminus \Gamma_{d-v}} \phi_j \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_j(r, z) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_i(r, z) dr dz \right) = \\ \int \int_{O_{charg}} r \cdot \left( n_{i_{Xe^+}}(r, z) + n_{i_{Xe^+}^{lent}}(r, z) \right) \Phi_i(r, z) dr dz \\ - \sum_{j \in \Omega_{charg} \setminus \Gamma_s \setminus \Gamma_{c-v} \setminus \Gamma_{d-v}} \exp(\Delta \phi_j) \int \int_{O_{charg}} r \Phi_j(r, z) \Phi_i(r, z) dr dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall i \in \Gamma_s \\ \sum_{j \in \Omega \setminus \Gamma_s \setminus \Gamma_{c-v}} \phi_j \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_j(r, z) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_i^{inf}(r, z) dr dz \right) \\ + \sum_{j \in \Gamma_s} \phi_j \left( \int \int_O r \nabla_{r,z} \Phi_j^{inf}(r, z) \cdot \nabla_{r,z} \Phi_i^{inf}(r, z) dr dz \right) = \\ \int \int_{O_{charg}} r \cdot \left( n_{i_{Xe^+}}(r, z) + n_{i_{Xe^+}^{lent}}(r, z) \right) \Phi_i(r, z) dr dz \\ - \sum_{j \in O_{charg} \setminus \Gamma_s \setminus \Gamma_{c-v} \setminus \Gamma_{d-v}} \exp(\Delta \phi_j) \int \int_{O_{charg}} r \Phi_j(r, z) \Phi_i^{inf}(r, z) dr dz \\ - \sum_{j \in O_{charg} \cap \Gamma_s} \exp(\Delta \phi_j) \int \int_{O_{charg}} r \Phi_j^{inf}(r, z) \Phi_i^{inf}(r, z) dr dz \end{aligned}$$

Nous constatons que le système matriciel auquel ces équations aboutissent est non-linéaire. Cela vient du fait que les inconnues sont les valeurs du potentiel aux noeuds et que la densité électronique en dépend. Profitant de la convexité de la fonction exponentielle, pour le résoudre nous utiliserons une méthode de Newton.

### 6.2.2.3 Algorithme de Newton

Nous introduisons ici, une méthode itérative permettant de résoudre le système précédant. Si nous notons  $A_h$  la matrice du système précédant et  $B(\phi)$  le second membre, nous introduisons le processus itératif :

$$\begin{aligned} \phi_0 \text{ fixé} \\ (A_h - B'(\phi_n))\phi_{n+1} = B(\phi_n) + B'(\phi_n) \cdot (\phi_{n+1} - \phi_n) \end{aligned}$$

Formulé ainsi, la matrice  $B'(\phi_n)$  est non-symétrique, les termes sont de la forme :

$$B'(\phi_n)_{i,j} = \exp(\Delta\phi_j^n) \int \int r \Phi_j(r, z) \Phi_i^{inf}(r, z) dr dz$$

Comme la formulation continue est symétrique, nous allons symétriser la matrice discrète de force, pour ce faire nous utiliserons une méthode de condensation de masse, en utilisant l'approximation :

$$\exp(\Delta\phi_j^n) \int \int r \Phi_j(r, z) \Phi_i^{inf}(r, z) dr dz \simeq \sum_{T \in \mathcal{T}_h; i \in T} |T| r_j \exp(\Delta\phi_j^n) \delta_{i,j}$$

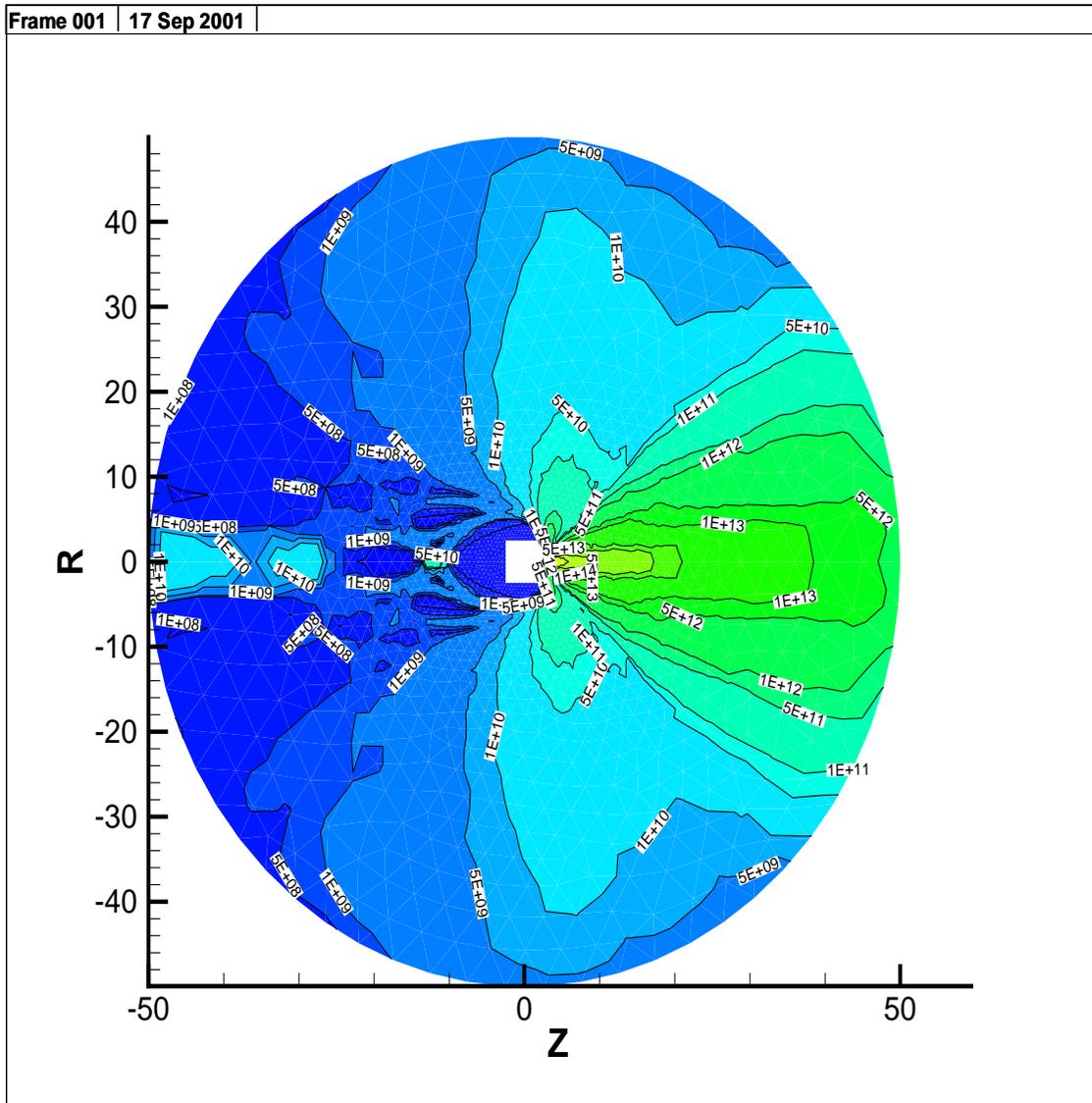
Nous utiliserons pour résoudre, ce système, toujours une méthode de Choleski. Néanmoins dans ce cadre celui-ci est très coûteux puisque nous devons factoriser la matrice à chaque itération. Nous arrêterons le calcul lorsque  $\|\phi_{n+1} - \phi_n\|$  sera suffisamment faible.

## 6.3 Résultats numériques

### 6.3.1 Cas du SPT-50

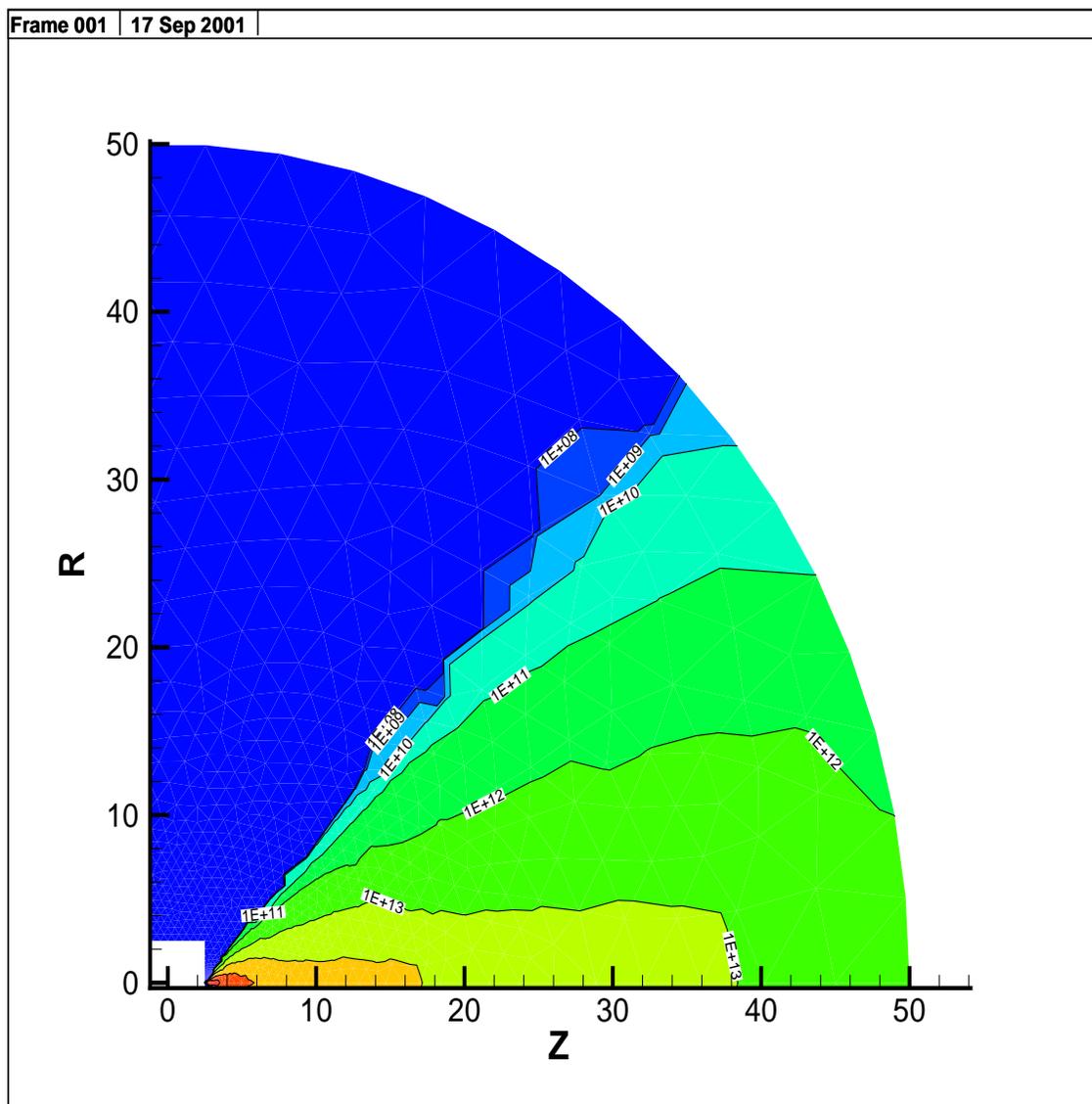
Nous donnons ici, les résultats d'un calcul fait pour un  $SPT - 50$ , celui-ci est identique au  $SPT - 100$  mais de taille réduite.

Nous donnons tout d'abord la densité ionique, dans le domaine de calcul extérieur au satellite.



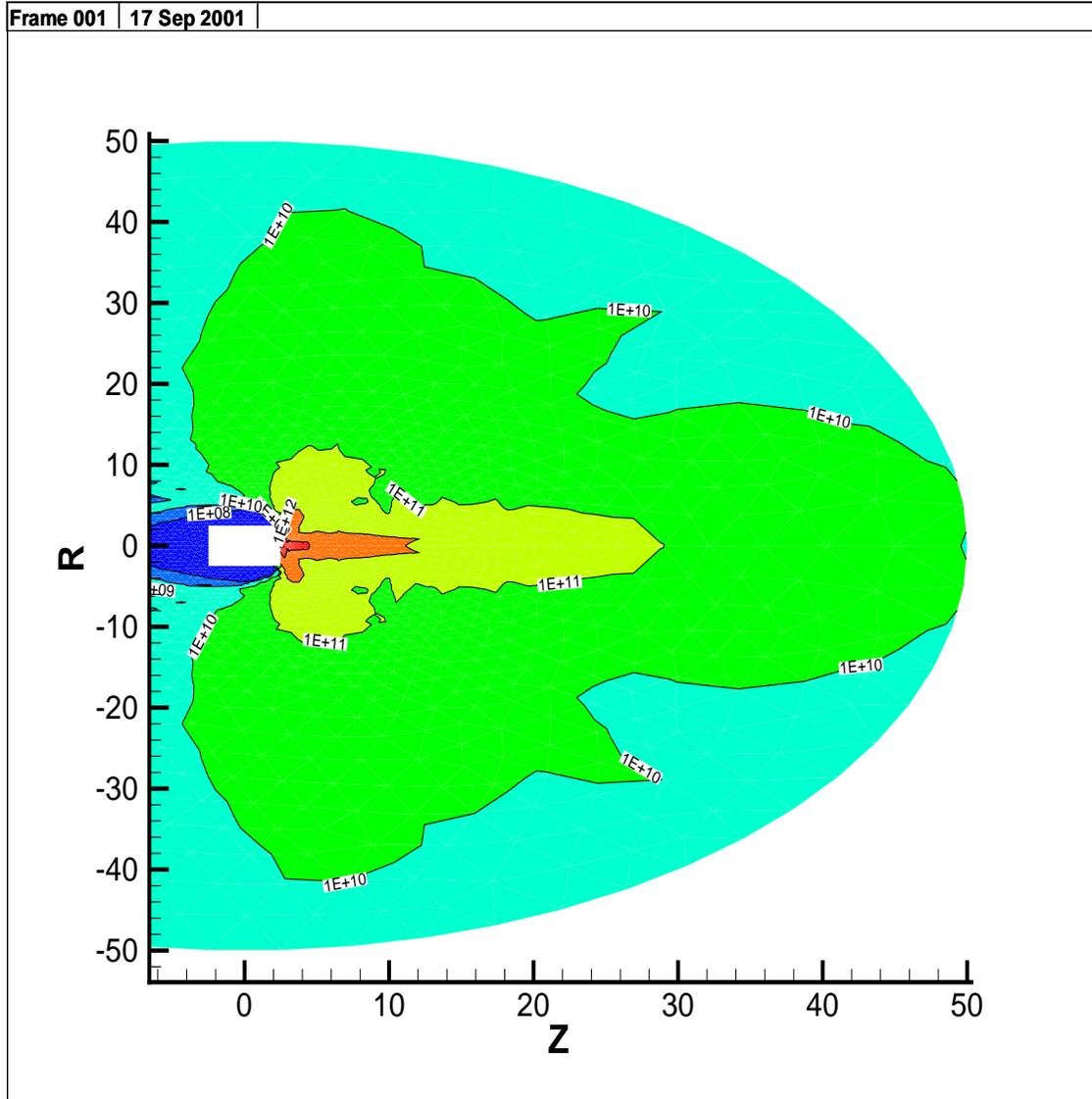
Pour commenter ces résultats nous décomposons cette densité en densité d'ions lents et densité d'ions rapides :

Pour les ions rapides, nous avons :



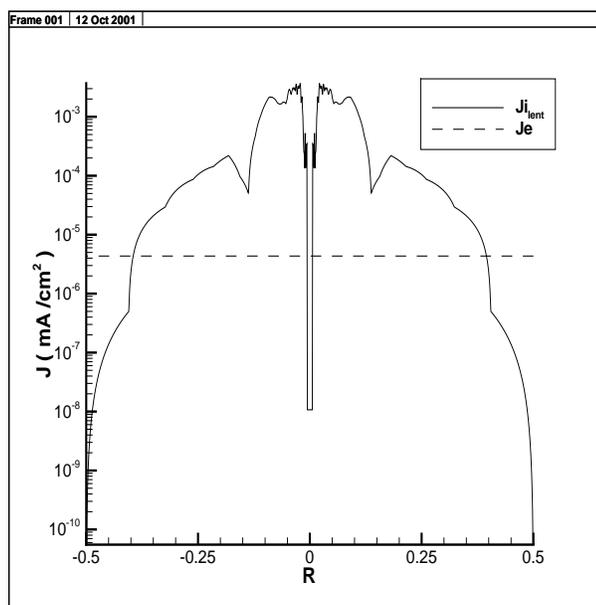
Cela correspond bien à une expansion de jet, nous retrouvons la diffusion radiale provoquée par le champ électrique, ainsi que la décroissance le long de l'axe. Nous constatons, que contrairement au modèle 'ESCAPE' [27], qu'aucun ion rapide ne retourne sur le satellite. Cela est dû à leur forte accélération dans le canal du propulseur (accélération par un champ de 200V. La neutralité du plasma dans lequel ils évoluent n'implique qu'un faible champ électrique (dizaines de Volts de différence de potentiel), pas assez important pour les dévier.

Pour les ions lents, nous avons :



Sur les ions lents, nous constatons une forme particulière, correspondant à une population d'ions lents se propageant le long de l'axe et à une population diffusant sur les bords du jet. Nous portons maintenant notre attention sur ces ions lents. Ceux-ci sont créés à une vitesse très faible. Ils subissent alors le champ électrique, qui contrairement aux ions rapides est alors suffisant. Nous avons d'ailleurs affirmé qu'ils étaient susceptibles de retourner sur le satellite et de créer un courant ionique positif.

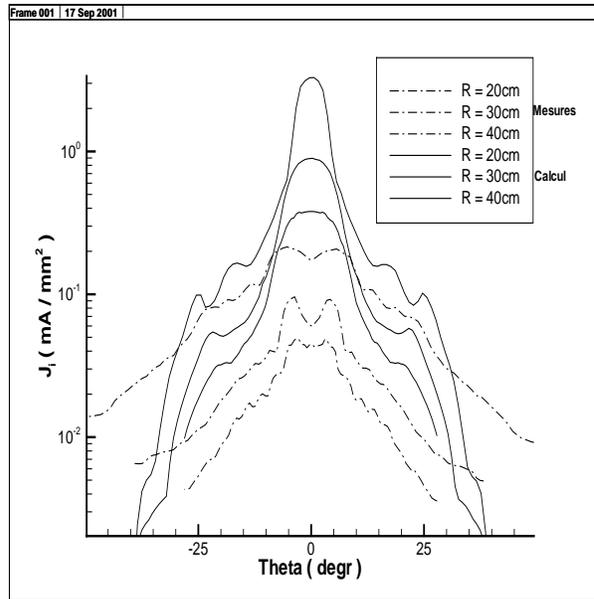
Nous donnons ici le courant reçu par les surfaces situées juste en arrière du propulseur. (  $Z = 2.5m$  sur la figure )



La courbe du courant reçu par les faces arrières manque de régularité, cela provient probablement de la méthode particulière utilisée. Il serait bon, d'augmenter dans le futur le nombre de particules, ou d'ajouter des collisions entre ions lents ou entre ion lent et neutre.

### 6.3.2 Comparaison avec les mesures expérimentales

Pour comparer les résultats obtenus avec les mesures nous donnons ici uniquement la comparaison avec le courant ionique, tracé sur des cercles centrés sur la sortie du propulseur pour différents rayons. Les courants sont indiqués sur une échelle logarithmique.



Le résultat obtenu nous donne un profil calculé beaucoup moins diffus et a une plus grande amplitude que pour les mesures. Nous devons rappeler les conditions dans lesquelles se sont faites les mesures. Le caisson était de taille relativement faible. De plus, le fait d'avoir augmenté le débit de la cathode pour maintenir le propulseur allumé a ajouté une proportion de neutre importante dans le caisson. La pression résiduelle en résultant a pu provoquer davantage de diffusion par collision non prise en compte dans le modèle numérique.



# Chapitre 7

## Couplage des modèles

### 7.1 Introduction

Nous allons présenter dans ce chapitre, une tentative de couplage des 2 modèles précédents. Le but sera de modifier les potentiels du satellite lors de l'allumage du propulseur. Des travaux ont déjà été effectués pour tenter de résoudre le problème couplé. Par exemple, nous citerons les travaux du RIAME de Moscou [27], qui utilisent un modèle de propulseur pour lequel les effets de charge d'espace sont négligés. Nous pourrions aussi citer les travaux de J. Wang et D.E. Brinza [37] qui ont raisonné à potentiel de satellite fixé.

#### 7.1.1 But

Dans les deux chapitres précédents, nous avons décrit le mécanisme de charge en environnement magnétosphérique et l'expansion du jet de plasma d'un propulseur à effet Hall de type *SPT*. Pour chacun d'entre eux, nous avons proposé un modèle physique et numérique permettant de les calculer. Dans le but de comprendre l'influence de la propulsion plasmique sur la charge électrostatique d'un satellite nous devons donc coupler ces deux modèles. C'est l'objet de ce chapitre qui fera fortement référence aux deux précédents.

#### 7.1.2 Stratégie

Dans un premier temps, le satellite est chargé par la magnétosphère. A un temps noté  $T_a$  le propulseur est allumé, nous pourrions choisir pour celui-ci, le temps auquel l'équilibre est atteint. Des ions lents vont être attirés par le satellite et créer des courants sur celui-ci pour ainsi modifier sa carte de

potentiels. Pour les temps inférieurs à  $T_a$ , nous utiliseront le modèle et l'algorithme de résolution présentée en 5 sans aucune modification. Au temps  $T_a$ , nous bénéficions alors d'une carte de potentiel sur le satellite. Nous calculerons alors à  $T_a$  l'expansion du jet de plasma en utilisant le modèle et l'algorithme de résolution présenté en 6. Nous l'utilisons en gelant les potentiels sur le satellite pour fournir une condition limite sur son bord de Dirichlet. Une fois la plume calculée nous avons à notre disposition les courants incidents provenant du propulseur. Nous devons alors trouver la nouvelle carte de potentiel visant à annuler le courant total reçu par le satellite.

## 7.2 Approximation numérique

Les approximations numériques utilisées pour le couplage font fortement référence aux 2 chapitres précédents, nous présenterons ici uniquement les spécificités apportées par le couplage des 2 modèles.

### 7.2.1 Magnétosphère

Nous sommes ici à des temps inférieurs à  $T_a$ , le propulseur étant éteint seul la partie correspondant à la magnétosphère joue un rôle. Aucun couplage n'est nécessaire et cette section fait entièrement référence au chapitre 5. Au temps  $T_a$  nous arrivons à une carte de potentiel sûr le satellite donné par :

$$\Phi(T_a, x) = \Phi_{T_a}(x) \forall x \in \Gamma_v$$

où  $\Gamma_v$  est la surface extérieure au satellite, soit si l'on reprend les notations de 2.1.3  $\Gamma_v = \Gamma_{d-v} \cup \Gamma_{c-v}$ . Les courants provenant de la magnétosphère, reçues sur les surfaces seront notées  $J_i$  pour les ions et  $J_e$  pour les électrons.

### 7.2.2 Propulseur *SPT* – 100

Au temps  $T_a$ , les potentiels sont connus en surface du satellite. Dans un premier temps, nous calculons l'état stationnaire de la plume compte tenu de cette carte de potentiel. Nous utilisons directement l'algorithme décrit au chapitre 6 en n'utilisant qu'une seule itération de l'algorithme de Newton. Nous avons vu que des surfaces du satellite recevaient un courant d'ions lents que nous noterons  $J_i^{lent}$ . De plus, compte tenu de la présence d'électrons maxwelliens dans le jet du propulseur, un courant d'électrons est aussi présent sur certaines surfaces, il est alors de la forme :

$$J_e^{SPT} = -en_{ref} \sqrt{\frac{kT_e^{SPT}}{2\pi m_e}} \exp\left(\frac{e(\Phi(x) - \Phi_{cond} - d\Phi)}{kT_e^{SPT}}\right)$$

Pour modifier la charge électrostatique du satellite nous devons intégrer ces courants. Pour ce faire, nous chercherons à équilibrer le courant total reçu. C'est l'objet de la section suivante.

### 7.2.3 Calcul des potentiels

Pour équilibrer le courant total reçu nous allons construire un algorithme pseudo-stationnaire construit autour de l'équation de Laplace présenté en 2.2.2 que nous donnons directement sous forme adimensionnée, pour le même dimensionnement :

$$\begin{aligned} -\Delta_x \Phi(t, x) &= 0, \forall x \in O, \forall t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \nu \epsilon_k \frac{\Phi_c - \Phi}{d_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) + \nu \tau \sigma_k \frac{\Phi_c - \Phi}{d_k} - J_{ext} \cdot n &= 0 \forall x \in \Gamma_{d-v}, \forall t \geq 0 \\ \int_{\Gamma_{c-v}} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) - J_{ext} \cdot n d\gamma + \int_{\Gamma_{c-d}} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nu \epsilon_k \frac{\Phi_c - \Phi}{d_k} \right) - \nu \tau \sigma_k \frac{\Phi_c - \Phi}{d_k} d\gamma &= 0 \\ \Phi(t, x) &= \Phi_c(t) \forall x \in \partial\Omega_0, \forall t \geq 0 \\ \Phi(t, x) &\rightarrow 0, \forall x; \|x\| \rightarrow +\infty, \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

avec

$$J_{ext} = J_e + J_i + (J_e^{SPT} + J_i^{lent}) \frac{T^{SPT}}{T}$$

le paramètre  $\frac{T^{SPT}}{T}$  provient des différences d'adimensionnement entre les équations de la magnétosphère et celle du propulseur.

Ces équations seront résolues de manière analogue qu'au chapitre 6.

Néanmoins, à chaque itération en temps, nous devons recalculer la plume en refaisant une itération de Newton. Les courants provenant de la magnétosphère devront aussi être recalculés. Le courant  $J_{ext}$  pourra alors être recalculé ainsi qu'une nouvelle carte de potentiel. En réitérant plusieurs fois nous pourrions atteindre un nouvel équilibre dû à la présence de la plume.

### 7.2.4 Algorithme général

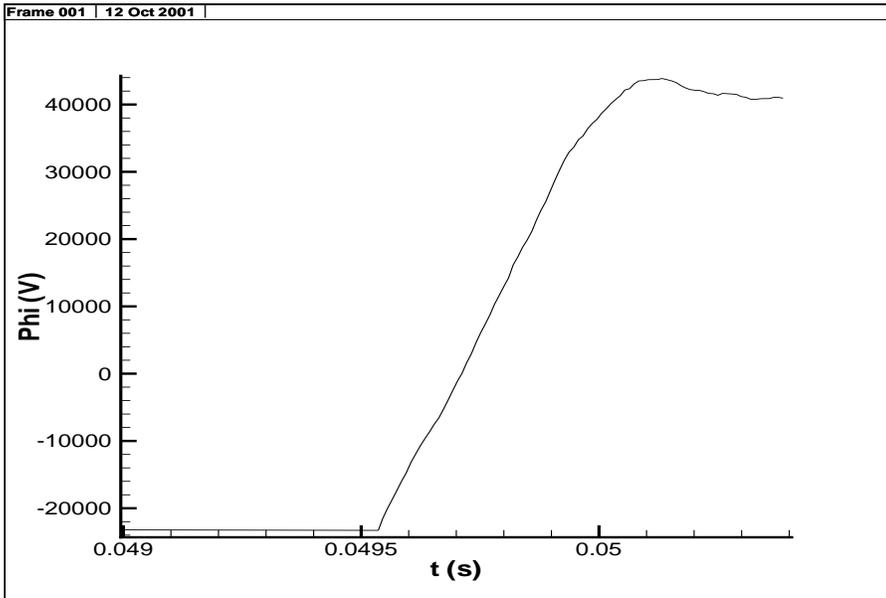
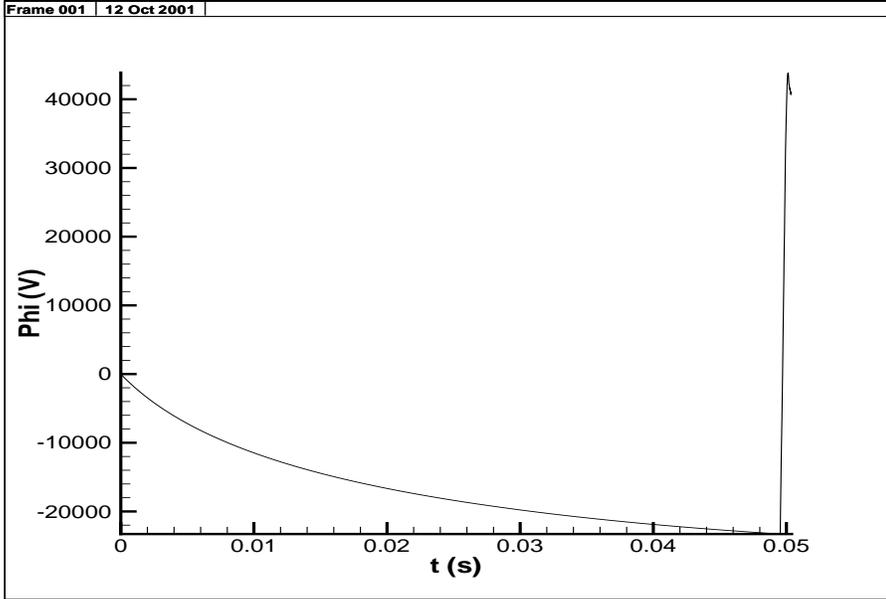
Nous donnons ici l'algorithme général de calcul.

$t < T_a$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Initialisation.               <ul style="list-style-type: none"> <li>→ Assemblage de la matrice de masse <math>A_h</math>.</li> <li>→ Factorisation de celle-ci par Choleski.</li> <li>→ <math>\Phi^0 = 0</math> en chaque noeud.</li> <li>→ Calcul de <math>E^0</math>.</li> <li>→ Calcul des courants <math>J_{ext}</math>.</li> <li>→ Assemblage du second membre du système : <math>\Phi^0 + \Delta_t B_h(\Phi^0)</math></li> </ul> </li> <li>• Itération en temps.               <ul style="list-style-type: none"> <li>→ Calcul de <math>\Phi^{n+1}</math> en inversant les système triangulaire.</li> <li>→ Calcul de <math>E^{n+1}</math>.</li> <li>→ Calcul des courants magnétosphériques <math>J_{ext}</math>.</li> <li>→ Assemblage du second membre du système : <math>\Phi^n + \Delta_t B_h(\Phi^n)</math></li> </ul> </li> </ul>
$t \geq T_a$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Itération en temps.               <ul style="list-style-type: none"> <li>→ Calcul des densité d'ions rapides.</li> <li>→ Calcul des densité d'ions lents.</li> <li>→ Définition de la zone neutre.</li> </ul> </li> <li>• Itération de Newton.               <ul style="list-style-type: none"> <li>→ Assemblage de la matrice de masse (<math>A_h - B'(p h_i^k)</math>).</li> <li>→ Factorisation de celle-ci par Choleski.</li> <li>→ Assemblage du second membre du système : <math>B(\phi_k) - B'(\phi_k) \cdot \phi_k</math></li> <li>→ Calcul de <math>\phi_{k+1}</math>.</li> </ul> </li> <li>→ Calcul des courants magnétosphériques.</li> <li>→ Calcul des courants issus du propulseur <math>J_{ext}</math>.</li> <li>→ Assemblage de la matrice de masse <math>A_h</math>.</li> <li>→ Factorisation de celle-ci par Choleski.</li> <li>→ Assemblage du second membre du système : <math>\Phi^n + \Delta_t B_h(\Phi^n)</math></li> <li>→ Calcul de <math>\Phi_{n+1}</math>.</li> <li>→ Calcul de <math>E^{n+1}</math>.</li> </ul>

## 7.3 Résultats numériques

Nous donnons ici, le résultat obtenu pour un satellite cylindrique composé essentiellement de diélectrique. Celui-ci est plongé dans un plasma neutre de densité  $n_0 = 1e6m^{-3}$  et de température  $kT_e = kT_i = 10keV$ .

Le propulseur est allumé à partir d'un temps  $T_a$  proche de l'équilibre. Nous donnons la courbe du potentiel absolu (potentiel du conducteur parfait relativement à l'infini) en fonction du temps :



Nous constatons une neutralisation du potentiel absolu important et très rapide. Nous constatons un potentiel absolu d'équilibre de l'ordre de  $40kV$ , ce qui est beaucoup trop important pour être acceptable. Nous devons donc soulever ici un point important, la quantité de courant d'ions et d'électrons provenant du propulseur dépend fortement du potentiel plasma de la plume relativement au potentiel des surfaces. Donc du choix du potentiel de référence  $\Phi_{ref}$ . Dans ce modèle, celui-ci a été choisi à  $40V + \Phi_{cond}$ . Les courants dépendent donc fortement de ces  $40V$  qui restent constants. L'unique moyen d'équilibrer le phénomène de neutralisation provient alors des électrons de la magnétosphère. Pour équilibrer le courant d'ions lents par un courant provenant de la magnétosphère nous devons avoir une valeur de potentiel de l'ordre de quelques fois la température du plasma magnétosphérique. Celle-ci étant de  $12keV$  la valeur trouvée est raisonnable compte tenu du modèle. Nous rappelons qu'aucune description du câblage électrique du propulseur n'a été construite. Ce modèle permettrait de relier le potentiel du conducteur aux courants reçus provenant du propulseur. Ici, le modèle de plume du propulseur *SPT* apparaît trop fortement comme une source extérieure au satellite.

# Chapitre 8

## Conclusion

La présence d'un plasma entourant un satellite engendre des phénomènes de charge électrostatique sur celui-ci. Un satellite évoluant en orbite géostationnaire est entouré par un plasma de type de magnétosphérique, peu dense et chaud. La présence de celui-ci va donc entraîner des effets sur la charge électrostatique. L'utilisation d'un propulseur électrique à effet Hall vient modifier le plasma et donc ces effets. Nous avons cherché au cours de cette étude à simuler la prise de charge électrostatique d'un satellite en orbite géostationnaire ainsi que l'influence de la propulsion électrique sur celle-ci.

Pour chacun des deux environnements plasmiques, nous avons dû étudier leur physique et construire un modèle mathématique et numérique. Le but a été d'évaluer l'influence de la propulsion électrique sur la charge électrostatique d'un satellite.

Cette thèse est décomposée en plusieurs parties. Nous avons commencé par décrire la physique des phénomènes plasmiques pouvant influencer la charge électrostatique d'un satellite. Nous y avons extrait les grandeurs caractéristiques physiques permettant de dimensionner notre problème. Nous avons introduit les modèles mathématiques basés sur le système de Vlasov-Poisson. Ces équations ont été adimensionnées et simplifiées en conséquence, ceci pour le cas de la magnétosphère et pour le cas du propulseur *SPT* – 100.

Par la suite, nous avons eu besoin de fournir des ordres de grandeurs physiques et des cas tests de validations pour chacun des deux plasmas.

Pour le cas du plasma magnétosphérique, nous ont étudié différents modèles dans un cadre unidimensionnel et introduit des modèles unidimensionnels basés sur les équations de Vlasov-Poisson. Les cas traités sont des cas stric-

tement unidimensionnels et des cas sphériques ramenés au cadre unidimensionnel. Pour l'un d'entre eux nous avons démontré un résultat mathématique d'existence. Nous avons aussi introduit un modèle différent pour la description du plasma par une approche fluide : le système d'Euler isotherme-Poisson. Ce type de modèle plus éloigné de la réalité physique a été abandonné par la suite.

Pour le cas du propulseur, nous avons effectué des mesures expérimentales permettant de caractériser le plasma issu d'un moteur de type *SPT* – 50.

Renforcés par ces résultats, nous avons développé des modèles bidimensionnels axi-symétriques pour chacun des deux plasmas.

Pour le cas du plasma magnétosphérique, nous avons décrit des méthodes permettant de résoudre l'équation de Laplace et de calculer les courants de particules incidents aux surfaces. Pour l'équation de Laplace, nous avons utilisé une approximation éléments finis volumiques couplés avec des éléments infinis et avec prise en compte des fines couches de diélectrique. Pour le calcul des courants reçus par les surfaces, nous avons utilisé une méthode de caractéristiques en remontant les trajectoires. Les résultats obtenus ont été fournis ainsi que des cas de validation.

Pour le cas du propulseur, nous avons décrit des méthodes permettant de calculer l'expansion du jet de plasma issu d'un propulseur *SPT*. Nous avons utilisé une approximation particulaire ( 'Particle in Cell' ) avec prise en compte des collisions avec échange de charge. Pour résoudre le potentiel électrostatique, dans une première zone, où la neutralité peut être imposée, nous avons utilisé une formule explicite. Dans une seconde zone où l'hypothèse de neutralité n'est plus valable, nous avons utilisé des éléments finis volumiques avec prise en compte de la charge d'espace. De plus, pour traiter les non-linéarités imposées dans cette zone, nous avons utilisé un algorithme de Newton.

Finalement, nous avons couplé ces deux modèles pour obtenir un modèle bidimensionnel et axi-symétrique permettant de calculer la charge électrostatique d'un satellite en milieu magnétosphérique et l'influence de la propulsion plasmique sur celle-ci.

Dans l'objectif du couplage, le rôle du paramètre permettant de relier le potentiel plasma dans la plume du propulseur au potentiel de surface n'a pu être suffisamment étudié. La plume est apparue dès lors comme une source

extérieure d'ions lents. L'étude d'un modèle électrique du câblage du propulseur devra être envisagée pour tenter de corriger cela.

Pour parfaire le modèle nous rappelons que les effets de gaine aux surfaces ne sont pas suffisamment pris en compte. Pour le plasma réémis par les surfaces, nous avons vu que celles-ci engendraient un plasma froid qui risque de rester localisé près des surfaces. D'autre part, une attention particulière devra être apportée pour les gaines créées par la présence du plasma issu du propulseur près des surfaces. Enfin, pour prendre en compte des configurations plus réalistes, un modèle tridimensionnel devra être envisagé.



# Bibliographie

- [1] J. Bareilles, L. Guarrigues, and J.P. Boeuf. Modelling of the plume of a stationary plasma thruster. *Centre de physique des plasma et Application de Toulouse, UMR 5002*, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse, Cedex 4, France.
- [2] C. Berthou. Analyse de charge électrostatique. méthode de résolution utilisée par nascalp. Note interne, ASPI, 1998.
- [3] A.M. Bishaaev, V.K. Kalashnikov, and A.V. Shavkyna. Report on the jet program. *RIAME, Research Institute of Applied Mechanics and Electrodynamics, Moscou*, Nov 1994.
- [4] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [5] C. Cercignani. *The Boltzmann Equation and its Applications*. Springer-Verlag, 1988.
- [6] P-G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1978.
- [7] D. Clementz. *Simulation de la prise de charge d'un satellite soumis aux effets du plasma géostationnaire*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1994.
- [8] S. Cordier. Global solutions to isothermal euler-poisson plasma model. Rapport interne cmap, Ecole Polytechnique.
- [9] V.A. Davis and L. W. Duncan. Spacecraft surface charging handbook. Technical Report PL-TR-92-2232, Phillips Laboratory Directorate of Geophysics, Air Force. Material Command., 1992.
- [10] J. Delcroix and A. Bers. *Physique des plasmas*, volume 1 et 2. interéditions / CNRS éditions, Paris, 1994.
- [11] S. Deypere. *Etude de schéma d'ordre élevé en volumes finis pour des problèmes hyperboliques. Application aux équations de Maxwell, d'Euler et aux écoulement diphasiques dispersés*. Thèse de doctorat, ENPC, 1997.

- [12] R. DiPerna and P.L. Lions. Solutions globales d'équations du type vlasov-poisson. *C.R. Acad. Sci. Paris*, No. 307-1 :P. 655–658, 1990.
- [13] F.F. Gabdullin, A.G. Korsun, and E.M. Tverdokhlebova. Estimation of the ions backflows of a ep exhaust plume coming on sc surface. *Central Research of machine Building, TsNIIMASH, Moscou*, 2000.
- [14] K. Gerdes and Demkowicz L. Solution of 3d-laplace and helmholtz equation in exterior domains using hp infinite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, No. 137 :P. 239–274, 1996.
- [15] E. Godlewski and P.A. Raviart. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws.*, volume 118. Springer-Verlag, Applied Mathematical Science, 1996.
- [16] C. Greengard and P.A. Raviard. A boundary value problem for the stationary vlasov-poisson equations : the plane diode. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, No. 43-4, 1990.
- [17] I. Katz, M. Mandell, J. Hilton, B. Gardner, D.L. Cooke, and J. Minor. Nascap 2k : A spacecraft charging for the new millenium. *7th spacecraft charging tecnology conférence, European Space Agency, ESTEC Conference Centre, Noordwijk, The Netherlands, 23-27 April 2001.*
- [18] J.G. Laframboise. Theory of spherical and cylindrical langmuir probes in a collisionless, maxwellian plasma at rest. Technical Report UTIAS report n° 100, Institute for aerospace studies, University of Tonroto, Canada, 1966.
- [19] J.G. Laframboise and M. Kamitsuma. Multiple floating potentials, 'threshold-temperature' effects and 'barrier' effects in high-voltage charging of exposed surfaces on spacecraft. Technical report, Physics Department & Center for Research in Experimental Space Science, York University, Tonroto, Canada.
- [20] B. Larrouturou. Modélisation mathématiques et numérique pour les sciences de l'ingénieur, problèmes hyperboliques. Technical report, Notes de cours de l'école polytechnique., 1995.
- [21] R-D. Leach and M-B. Alexander. Failures and anomalies atributed to spacecraft charging. Technical Report RP-1375, NASA Marshall space flight center, Alabama Computer Sciences Corporation, Huntsville, 1995.
- [22] L. Levy, D. Sarrail, and J-M Siguier. Conductivity and secondary emission properties of dielectrics as required by nascap. Technical report, Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse. Département Technologie Spatiale.

- [23] D.H. Manzella. Hall thruster ion beam characterization. Technical report, AIAA, Joint Propulsion Conference and Exhibit, San Diego, July 1995.
- [24] J-L. Nédélec. Ondes acoustiques et électromagnétiques. equations intégrales. Cours de DEA, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1996.
- [25] D. Oh, D. Hasting, C. Malleen, J. Haas, and A. Gallimore. Modeling of stationary plasma thruster plumes and implications for satellite design. *Journal of propulsion and power*, No. 15-2 :P. 345–357, 1999.
- [26] K. Pfaffelmoser. Global classical solutions of the vlasov-poisson system in three dimension for general initial data. *Journal of Differential Equation*, No. 95-1 :P. 281–303, 1992.
- [27] A.P. Plokhikh, V.G. Malko, and V.A. Semenov. Escape software modeling for the electrostatic charging with electric propulsion in the ionosphere of earth. Manuel d'utilisation v-1, Research Institute of Applied Mechanics and Electrodynamics, Moscou, 1998.
- [28] F. Poupaud. Solutions stationnaires des équation de vlasov-poisson. *C.R. Acad. Sci. Paris*, No. 311-1 :P. 307–312, 1990.
- [29] F. Poupaud, M. Rascle, and J.P. Vila. Global solutions to the isothermal euler-poisson system with large arbitrary data. *Journal of Differential Equation*, No. 123-1 :P. 93–121, 1995.
- [30] D. Rapp and W.E. Francis. Charge exchange between gaseous ions and atom. *Journal of Physical Physics*, No. 37-11 :P. 2631–2645, 1962.
- [31] P.A. Raviard. Note de cours.
- [32] S. Roy and D. Hasting. Modeling of ion thruster plume contamination. *AIAA/SAE/ASME/ASEE, 29th joint Propulsion Conference and exhibit*, June 28-30, 1993, Monterey, CA.
- [33] B. Salanon. *Stabilité des solutions des équations de transport. Application à la résolution numérique du système de Vlasov-Poisson*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia-Antipolis, UFR Faculté des sciences, 1992.
- [34] F. Severin. *Etude théorique et simulation numérique d'une décharge électrostatique dans le vide*. Thèse de doctorat, ENPC, 1998.
- [35] M. Tajmar, J. Gonzales, D. Estublier, and G. Saccoccia. Modelling and experimental verification of hall and thusters at estec. *Electric Propulsion Section, Directorate of technology and operation support*, ESA/ESTEC, P.O. Box, 2200 AG Noordwijk, The Netherlands.
- [36] W.W. Vaughan and M.B. Niehuss. Failures and anomalies attributed to spacecraft charging. Technical Report RP-1375, NASA Marshall space flight center, Alabama & Univ. of Alabama in Huntsville, 1995.

- [37] J. Wang, D.E. Brinza, J.E. Polk, and M.D. Henry. Deep space one investigations of ion propulsion plasma environment : Initial result. *AIAA, 31th Plasmadynamics and Lasers Conference, Denver*, No. 307-1 :P. 655–658, June 2000.
- [38] J. Wang and J. Brophy. 3-d monte carlo particle-in-cell simulations of ion thruster plasma interactions. *31st AIAA/ASME/SAE/ASEE, Joint propulsion Conference and Exhibit*, July 10-12, 1995, San Diego.