



Contrôle de réacteurs de polymérisation, Observateur et Invariance

Nasradine Aghannan

► To cite this version:

Nasradine Aghannan. Contrôle de réacteurs de polymérisation, Observateur et Invariance. Automatique / Robotique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2003. Français. NNT: . tel-00006598

HAL Id: tel-00006598

<https://pastel.hal.science/tel-00006598>

Submitted on 27 Jul 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE DES MINES
DE PARIS

N° attribué par la bibliothèque

□□□□□□□□□□

T H E S E

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Ecole des Mines de Paris
Spécialité “Mathématiques et Automatique”

présentée et soutenue publiquement par
Nasradine AGHANNAN

le 13 novembre 2003

CONTRÔLE de REACTEURS DE POLYMERISATION, OBSERVATEUR ET INVARIANCE
--

Directeur de thèse : Pierre ROUCHON

Jury

M. Hassan HAMMOURI
M. Georges BASTIN
M. Witold RESPONDEK
M. Emmanuel TRELAT
M. Marc WEINBERG

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examinateur
Examinateur

NASRADINE AGHANNAN

CONTRÔLE DE RÉACTEURS DE
POLYMÉRISATION, OBSERVATEUR
ET INVARIANCE

NASRADINE AGHANNAN

École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Centre Automatique et Systèmes,
60, Bd. Saint-Michel, 75272 Paris Cedex 06, France.

E-mail : aghannan@cas.ensmp.fr, nasradine.aghannan@polytechnique.org

Mots clefs. — Contrôle en génie des procédés, Polymérisation, Observateur asymptotique, Groupe de transformation, Invariant, Méthode du repère mobile, Symétrie, Contraction, Structure Riemannienne, Systèmes Lagrangiens, Systèmes mécaniques.

13 Novembre 2003

À mes parents,

CONTRÔLE DE RÉACTEURS DE POLYMÉRISATION, OBSERVATEUR ET INVARIANCE

NASRADINE AGHANNAN

Résumé. — Cette thèse s'est construite avec une approche double, à la fois théorique et pratique. D'un côté, nous avons mené un travail de régulation sur des réacteurs de polymérisation de la société ATOFINA. De l'autre, nous avons développé des observateurs asymptotiques pour des systèmes nonlinéaires présentant des symétries.

Le travail de régulation concernait des réacteurs tubulaires en boucle, fonctionnant en phase liquide. Nous avons à partir des lois de conservation de masse et d'énergie, établis des modèles. Ces derniers étant nonlinéaires, nous avons utilisé des techniques de contrôle (linéarisation par bouclage) et d'observateur (contraction) nonlinéaires, que nous avons installées sur les unités.

Ce projet nous a amené à réfléchir sur la manière dont on peut tenir compte des symétries d'un système pour élaborer des observateurs. Nous avons considéré le cas de systèmes invariants sous l'action de groupe de transformations : notre contribution réside dans la définition de la notion d'erreur invariante, ingrédient important dans la conception d'observateurs invariants. Nous décrivons ensuite un observateur asymptotique, localement convergent pour une classe de système Lagrangiens, qui a la propriété d'être intrinsèque tout comme le sont les équations d'Euler-Lagrange. Ces deux études remettent ainsi en perspective la notion d'erreur pour les systèmes nonlinéaires, en tenant compte de la géométrie qui structure ces systèmes.

SUMMARY

Key words : Process control, Continuous stirred reactor, asymptotic observer, Transformation group, Invariant, Moving frame method, Symmetry, Contraction, Intrinsic equations, Riemannian structure, Lagrangian systems, Mechanical systems.

This thesis is composed of two parts : an industrial application and an academic work. On one side, we have developed controllers for polymerization reactors belonging to the ATOFINA company. On the other, we have worked on the design of asymptotic observers for nonlinear systems with symmetries.

This document is thus organized in two parties : the first one deals with the regulation work for ATOFINA, the second one concerns the work on the asymptotic observer design.

Part I : Control of polymerization reactors. — The ATOFINA project concerns the reactor PP2 (polypropylene) on the petrochemical plant of Feluy (Belgium), and the reactors C and D (polyethylene) on the petrochemical plant of Anvers. The objectives consist in both cases in increasing the productivity while maintaining a better stability for the polymer quality. In this order, we have developed new regulators to control better the principal variables defining the reactors content, which are at the heart of these production plants. First, our task was to establish a model to represent the reactors working behaviour, and then from this model we have designed soft sensors to estimate the key variables and designed the controller laws. Our contribution is not a new control method : the control laws we have used are designed by feedback linearization of the model equations. This was possible because we had a model representing the reactors working behaviour well enough. Our contribution is this model. From the mass and energy conservation laws, and from some simplifying hypothesis, we have built a model adapted to our control objectives. In

Feluy, the project has been finished : the controller final version is working since February 2003, and the process engineers have already noticed a better stability for the reactor. In Anvers, the soft sensor is working since November 2001.

In **chapters 1** and **2**, we present the process and the model we have designed, respectively, for the reactors PP2 and PE. In **chapter 3**, we describe the observer controller we have designed.

While working on this project, we faced the question concerning the choice of the units in which we had to write the equations. We were concerned by writing algorithms independent from this choice as the reactors behaviour is. This questioning is at the origin of the academic work presented in this thesis, and which has been published in [3] and [4].

Partie II : Observer and invariance. — Indeed we have considered nonlinear systems with symmetries and we have designed asymptotic observers invariant with respect to this symmetries, as it is done in [50] where the invariant tracking problem is addressed. We have first looked at systems with dynamics invariant under the action of group transformations with a finite number of parameters. Then we have considered the mechanical systems that preset the important propriety to have intrinsic equations, that is to say equations independent from the choice of a particular set of configuration coordinates.

Chapter 4 : On invariant asymptotic observers

For dynamics $\dot{x} = f(x)$ with output $y = h(x)$ invariant with respect to a transformation group G , we define invariant asymptotic observer of the form $\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, y)$ where $y = h(x)$ is the measured output and $\hat{x}$ an estimation of the unmeasured state x . Such a definition is motivated by a class of chemical reactors, treated in details, when the transformation group corresponds to unit changes and the output y to ratio of concentrations. We propose a constructive method that guaranties automatically the observer invariance $\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, y)$: it is based on invariant vector fields and scalar functions, called invariant estimation errors, that can be computed via the Cartan moving frame method. The observer convergence remains, in the general case, an open problem. But for the class of chemical reactors considered here, the invariant observer convergence is proved by showing that, in a Killing metric associated to the action of G , the symmetric part of the Jacobian matrix $\partial \hat{f} / \partial \hat{x}$ is definite negative (contraction).

Chapter 5 : An intrinsic observer for a class of Lagrangian systems

We propose a new design method of asymptotic observers for a class of nonlinear mechanical systems : Lagrangian systems with configuration (position) measurements. Our

main contribution is to introduce a state (position and velocity) observer that is invariant under any changes of the configuration coordinates. The observer dynamics equations, as the Euler-Lagrange equations, are intrinsic. The design method uses the Riemannian structure defined by the kinetic energy on the configuration manifold. The local convergence is proved by showing that the Jacobian of the observer dynamics is negative definite (contraction) for a particular metric defined on the state space, a metric derived from the kinetic energy and the observer gains. From a practical point of view, such intrinsic observers can be approximated, when the estimated configuration is close to the true one, by an explicit set of differential equations involving the Riemannian curvature tensor. These equations can be automatically generated via symbolic differentiations of the metric and potential up to order 2. Numerical simulations for the ball and beam system, an example where the scalar curvature is always negative, show the effectiveness of such approximation when the measured positions are noisy or include high frequency neglected dynamics.

REMERCIEMENTS

Je remercie Hassan Hammouri président du jury, Georges Bastin et Witold Respondek rapporteurs de ma thèse ainsi que Emmanuel Trélat et Marc Weinberg qui ont été examinateurs.

Je tiens à remercier tout particulièrement Pierre Rouchon qui a été mon directeur de thèse, pour tout ce qu'il m'a apporté et notamment pour son enseignement, ses conseils et sa disponibilité.

Je remercie François Chapelais, Jean Levine, Philippe Martin, Nicolas Petit et Laurent Praly pour toutes les discussions que nous avons pu avoir et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je remercie également Madame Legallic pour la gentillesse avec laquelle elle s'est occupée de tous mes déplacements et autres problèmes administratifs.

Je remercie Marc Souche et les membres de son équipe, Frédéric Guérin et Céline Lambert, du centre technique ATOFINA de Lyon. Je remercie tout particulièrement Céline Lambert pour sa patience lors de notre collaboration.

Je remercie Denis Mignon, Renaud Oreins et Guy Van ACKER du site pétrochimique FINA de Feluy et Pierre Van Grambezen du site pétrochimique FINA d'Anvers, pour la confiance qu'ils m'ont accordée pour le développement des programmes de contrôle avancé. Je remercie les équipes d'opérateurs des deux sites pour m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions.

TABLE DES MATIÈRES

Summary	vii
Remerciements	xi
Introduction Générale	1
Partie I. Commande de réacteurs de polymérisation	3
1. Réacteur PP2 à Feluy	7
1.1. Description du procédé	8
1.2. Equations de la dynamique	10
2. Réacteur PE à Anvers	17
2.1. Description du procédé	18
2.2. Equations de la dynamique	20
3. Observateur contrôleur	27
3.1. Deux modèles similaires	27
3.2. Observateur	28
3.3. Contrôleur	36
Conclusion première partie	41
Bilan du projet mené chez ATOFINA	41
Invariance du modèle, observateur invariant et contraction	41
Partie II. Observateur et Invariance	45
4. Observateur et groupe de transformations	49
Introduction	49

4.1. Groupe de transformations et invariance	51
4.2. Erreur d'estimation invariante	54
4.3. Exemple 1 : Une classe de réacteurs chimiques	56
4.4. Exemple 2 : Voiture non-holonyme	59
4.5. Exemple 3 : Les systèmes linéaires stationnaires	61
4.6. Critère différentiel d'invariance	63
Conclusion	65
5. Observateur intrinsèque pour une classe de systèmes Lagrangiens	67
Introduction	67
5.1. Système Lagrangien et métrique Riemanienne	69
5.2. Un observateur intrinsèque	70
5.3. Convergence de l'observateur	76
5.4. Exemple : ball and beam	84
5.5. Système Lagrangien avec un terme de frottement	89
Conclusion	92
Conclusion seconde partie	95
Partie III. Annexes	97
A. Méthode du repère mobile de Cartan	99
Un exemple dans $\mathbb{R}^3$	99
Le cas général	101
B. Interprétation de la contraction	103
C. Estimation invariante du flot optique	105
Introduction	105
C.1. Une mesure invariante	106
C.2. Application au calcul du flot optique	109
Conclusion	110
D. Dérivée covariante	113
E. Equation de Jacobi	115
Bibliographie	117

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Cette thèse s'est construite avec une approche double, à la fois théorique et pratique. D'un côté, nous avons mené un travail de régulation sur des réacteurs de polymérisation de la société ATOFINA. De l'autre, nous avons développé des observateurs asymptotiques pour des systèmes nonlinéaires présentant des symétries.

Le projet chez ATOFINA concernait le réacteur PP2 (polypropylène) situé à Feluy en Belgique, et le réacteur D du PE (polyéthylène) situé à Anvers. L'objectif était dans les deux cas d'augmenter la productivité de l'unité tout en assurant une meilleure stabilité de la qualité du polymère formé. Nous avons pour cela développé de nouvelles régulations pour mieux contrôler les principales variables définissant le contenu des réacteurs, qui sont au coeur de ces unités de production. Notre tâche a d'abord été d'établir un modèle pour représenter le fonctionnement de ces réacteurs, à partir duquel nous avons élaboré des capteurs logiciels pour reconstruire les variables clés et établis les lois de commande. Notre contribution ne réside pas dans la conception d'une nouvelle méthode de régulation : les lois de commandes ont été obtenues par linéarisation exacte par bouclage, à partir des équations du modèle. Cela a été possible parce que nous avons un modèle qui représentait suffisamment bien le fonctionnement des réacteurs. Notre contribution réside ainsi dans cette modélisation. A partir des lois de conservation de masses et d'énergie, et d'hypothèses simplificatrices, nous avons obtenu un modèle adapté à l'objectif de contrôle. A Feluy, le projet a pu être mené au bout : la version finale du régulateur est en fonctionnement depuis février 2003, et la direction a déjà noté une meilleure stabilité du réacteur. A Anvers, le capteur logiciel est en fonctionnement depuis novembre 2001. Depuis des problèmes de calendrier ont remis à plus tard notre travail.

A l'occasion de ce travail, la question du choix des unités dans laquelle écrire les équations s'est posé à nous. Notre souci était d'écrire des algorithmes indépendants de ce choix étant

donné que le fonctionnement des réacteurs l'est. Cette réflexion est à l'origine du travail théorique présenté dans ce mémoire et qui a fait l'objet des publications [3] et [4].

Nous avons en effet considéré des systèmes nonlinéaires présentant des symétries et nous avons cherché à construire des observateurs asymptotiques respectant ces symétries, à l'image de ce qui est fait dans [50] où est considéré le problème de tracking invariant. Nous avons examiné d'abord des systèmes dont les dynamiques sont invariantes sous l'action d'un groupe de transformations avec un nombre fini de paramètres. Notre contribution consiste en la définition de la notion d'erreur invariante, qui nous a permis pour une classe de réacteurs chimiques, invariants sous l'action du groupe des homothéties, d'obtenir un observateur globalement asymptotique, également invariant. Puis nous avons considéré le cas des systèmes mécaniques qui présente la propriété importante d'avoir des équations intrinsèques, c'est à dire indépendantes du choix d'un système particulier de coordonnées sur la variété de configuration. Nous avons construit un observateur asymptotique intrinsèque, localement convergent, qui permet à partir de la mesure bruitée des positions de reconstruire les vitesses. Dans les deux cas, la convergence est démontrée en utilisant un argument de contraction [44].

Notre mémoire s'organise donc en deux parties : la première traite du travail de régulation pour ATOFINA, la seconde de la construction d'observateurs asymptotiques respectant les symétries.

Partie I : Commande de réacteurs de polymérisation. — Dans les chapitres 1 et 2, nous présentons le procédé et le modèle que nous avons développé, respectivement, pour le réacteur PP2 et PE. Dans le chapitre 3, nous décrivons l'observateur contrôleur que nous avons élaboré.

Partie II : Observateur et invariance. — Dans le chapitre 4, nous présentons le travail concernant les systèmes invariants sous l'action de groupe de transformation. Dans le chapitre 5, nous décrivons un observateur asymptotique intrinsèque pour une classe de systèmes Lagrangiens.

PARTIE I

COMMANDE DE RÉACTEURS DE POLYMÉRISATION

Dans cette première partie, nous présentons le travail de régulation que nous avons effectué sur des réacteurs de polymérisation appartenant à la société ATOFINA : ces réacteurs représentent le coeur des unités de production. Le but des projets est le même à chaque fois : augmenter la production tout en assurant un meilleur contrôle de la qualité du polymère. Le chapitre 1 est consacré au réacteur PP2 (polypropylène) du site de Feluy (Belgique). Le chapitre suivant présente le réacteur D situé à Anvers où ATOFINA produit du polyéthylène (PE).

Ce travail est le fruit d'une collaboration avec :

Frédéric GUERIN	ATOFINA Lyon
Céline LAMBERT	ATOFINA Lyon
Marc SOUCHE	ATOFINA Lyon
Denis MIGNON	ATOFINA Feluy
Renaud OREINS	ATOFINA Feluy
Marc WEINBERG	ATOFINA Feluy
L'équipe d'Opérateurs de PP2	ATOFINA Feluy
Dr. Ir. Pierre VAN GRAMBEZEN	ATOFINA Anvers
L'équipe d'Opérateurs de PE	ATOFINA Anvers
Guy VAN ACKER	HONEYWELL

Cette étude s'inscrit dans la méthodologie de travail du CAS qui associe applications industrielles et travail "théorique". Comme nous le verrons dans cette partie, le travail plus "académique" présenté dans la partie II trouve son origine dans une réflexion menée pour la conception d'observateur, ou capteur logiciel, pour les réacteurs PP2 et PE. Pour les deux réacteurs, nous avons ainsi élaboré un capteur logiciel et un contrôleur utilisant cet estimateur. Nous sommes partis d'une modélisation des réacteurs qui tient compte des échelles de temps et d'espace : nous avons ainsi considéré un modèle adapté à nos objectifs de contrôle. Les modèles étant non linéaires, nous avons utilisé des techniques d'observateur et de commande non linéaires : observateur contractant et linéarisation par bouclage avec ajout d'un effet intégral.

Le travail a pu être mené au bout pour le réacteur PP2 où la version finale du contrôleur est en fonctionnement depuis février 2003 : la direction a noté depuis une meilleure stabilité du réacteur, d'où une qualité mieux contrôlée pour le polypropylène. Pour l'unité d'Anvers, un capteur logiciel est en fonctionnement depuis Novembre 2001. Depuis, des problèmes de calendrier ont remis à plus tard notre travail.

L'installation des capteurs logiciels et des contrôleurs a nécessité de nombreux déplacements dans les usines. Ces visites avaient pour objectif le réglage du programme ; elles ont

permis aussi d'expliquer aux opérateurs le fonctionnement de notre contrôleur. Le résultat est concluant notamment pour le site de Feluy où la nouvelle régulation a été acceptée : le taux de bouclage est supérieur à 95%. Il est prévu d'installer la même régulation sur une nouvelle unité PP3 (démarrée en Mars 2002) : il s'agit du réacteur au second plan sur la Figure 1. Son installation sur une unité pilote a également débuté sur le site de Feluy.

Cette partie est structurée de la façon suivante. Les chapitres 1 et 2 sont respectivement consacrés à la description des procédés et des modèles pour les réacteurs PP2 et PE. Dans le chapitre 3, nous décrivons l'observateur-contrôleur que nous avons développé pour les deux réacteurs et présentons les résultats obtenus sur les deux sites.

Références Bibliographiques. — Pour le travail de modélisation, nous avons consulté principalement les trois ouvrages suivant [70], [43] et [2], ainsi que des articles des “Techniques de l'Ingénieur” : [10], [26], [29], [65] et [68].

Pour l'élaboration de l'observateur-contrôleur, nous avons consulté : [7], [37], [44], [8] et [57].

L'observateur-contrôleur que nous avons développé pour les réacteur PP2 et PE constituent des algorithmes relativement simples, comparés aux techniques que l'on trouve dans la littérature : essentiellement du contrôle prédictif ([63],[73]), avec l'utilisation de réseau de neurones comme dans [69], ou de filtre de Kalman étendu [64], pour estimer l'état. Ces dernières techniques s'avèrent être coûteuses en puissance de calcul. Comme nous étions sur l'unité PP2 limité par rapport à la taille du code, notre approche plus simple pouvait être implémenté.

CHAPITRE 1

RÉACTEUR PP2 À FELUY



FIGURE 1. Réacteur PP2 Feluy (au premier plan, le réacteur concerné par ce projet)

Nous décrivons dans ce chapitre le procédé PP2 du site ATOFINA de Feluy : sa capacité de production est de 250 kT par an, pour un marché européen de 10000 kT en 2002. Le coeur de l'unité est constitué d'une série de réacteurs tubulaires en boucle et polymérisant du propylène. Afin d'atteindre l'objectif du projet (augmentation de la production et

meilleur contrôle de la qualité), nous avons mis en place cinq régulateurs qui stabilisent les principales variables définissant le fonctionnement du réacteur : densité, concentration en hydrogène et production. Cela permet aujourd'hui aux opérateurs de conduire le réacteur plus près de ses limites de fonctionnement.

Dans la section 1.1, nous présentons le procédé. Puis dans la section 1.2, nous donnons un modèle pour la dynamique des principales variables caractérisant le fonctionnement du réacteur. Ce modèle est adapté à notre objectif de contrôle et représente correctement le fonctionnement des réacteurs : il est fondé sur les lois de conservation de masse et d'énergie. Nous aborderons le calcul de l'observateur-contrôleur dans le chapitre 3, où nous présentons également les résultats obtenus sur le site.

1.1. Description du procédé

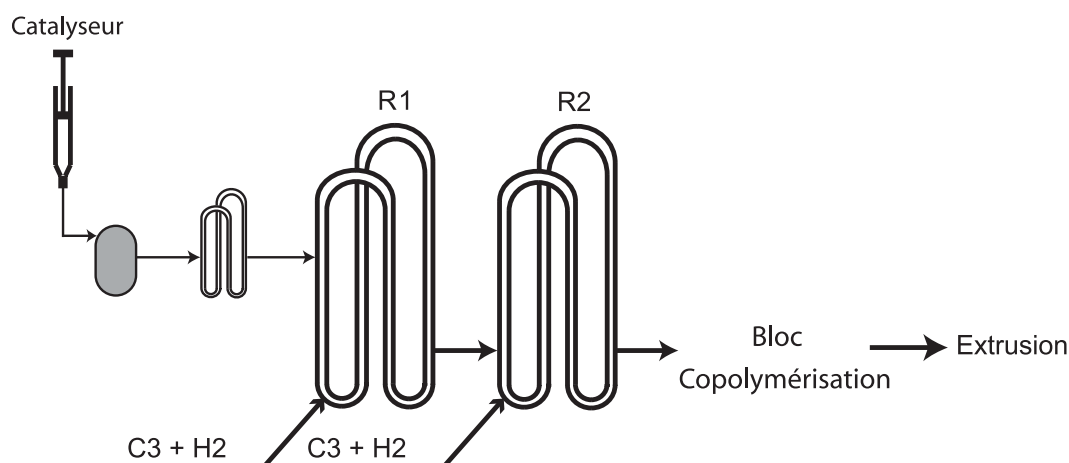


FIGURE 2. Schématisation d'un procédé type Feluy.

L'unité. — L'usine PP2 à Feluy produit du polypropylène à partir de monomère de propylène C3 dans une réaction exothermique activée par un catalyseur Ziegler-Natta. La qualité du produit est contrôlée par une alimentation en hydrogène qui détermine le Melt Index du produit formé : c'est à dire sa viscosité. La partie du procédé sur laquelle nous avons travaillée a été schématisée, comme indiqué sur la figure 2 :

- une zone de préparation du catalyseur
- et deux réacteurs tubulaires en boucle, R1 et R2.

Le polymère est envoyé à la sortie du réacteur R2 vers un réacteur phase gaz (zone de copolymérisation) avant de terminer dans la zone d'extrusion, où des additifs peuvent être ajoutés pour obtenir le produit final.

Dans la zone de préparation, le catalyseur est mis en suspension. Il est conditionné en vue des propriétés chimiques et mécaniques souhaitées pour le produit final. Le mélange catalytique appelé "mud", préparé dans le petit récipient présenté dans la figure 2, est envoyé vers un petit réacteur boucle, qui est aussi alimenté par du propylène : la réaction est alors activée. Ce mélange est ensuite envoyé vers le réacteur R1 qui reçoit également une alimentation en propylène et hydrogène. Le contenu de ce réacteur R1 se déverse entièrement dans le réacteur R2. Ce dernier reçoit sa propre alimentation en propylène et en hydrogène. Cette structure permet d'augmenter le temps de séjour du catalyseur et ainsi sa productivité, tout en utilisant des réacteurs de taille "réduite". Étant donné que la réaction de polymérisation est exothermique, les réacteurs R1 et R2 sont entourés par des jaquettes où de l'eau circule pour assurer le refroidissement.

5 entrées , 5 sorties. — Le mélange réactionnel est constitué par le propylène liquide dans lequel le polypropylène sous forme de poudre est en suspension. Pour éviter que le réacteur ne prenne en masse, il est important de réguler la fraction massique en poudre ou taux de solide, ce qui revient à réguler la densité du mélange réactionnel.

La qualité du produit est déterminée par son Melt Index qui est fonction de la longueur moyenne des chaînes de polymère formées. L'hydrogène agit sur la terminaison des chaînes et donc influe sur le Melt Index. Il est donc aussi important de réguler la concentration de l'hydrogène dans chaque réacteur.

Enfin, le tonnage produit est déterminé par la quantité de catalyseur utilisée.

Pour notre système, nous nous intéressons donc aux 5 sorties suivantes :

- x_1 et x_2 : la fraction massique du polypropylène respectivement dans les réacteurs R1 et R2.
- y_1 et y_2 : la concentration en hydrogène respectivement dans les réacteurs R1 et R2.
- $P = P_1 + P_2$: le débit de production instantanée égal à la somme des débits de production respectifs, P_1 et P_2 , des réacteurs R1 et R2.

5 entrées correspondent à ces sorties :

- x_1 et x_2 sont régulés respectivement par les débits, $FC3_1$ et $FC3_2$, de propylène entrant respectivement dans les réacteurs R1 et R2.

- y_1 et y_2 sont régulés respectivement par les débits, $FH2_1$ et $FH2_2$, d’hydrogène alimentant les réacteurs R1 et R2.
- P est régulé par le débit de catalyseur $FCata$ entrant uniquement dans le R1, après avoir traversé la zone de préparation du catalyseur.

1.2. Equations de la dynamique

1.2.1. Hypothèse de modélisation. — Bien que les réacteurs soient tubulaires, comme les pompes de circulation des produits assurent une rotation rapide du mélange, propylène liquide + polypropylène poudre (ou “slurry”), l’hypothèse de réacteur parfaitement mélangé s’est avérée bien adaptée à notre système : les résultats obtenus pour notre estimateur le confirment. Nous considérons donc que le contenu des réacteurs est homogène et que ce qui quitte un réacteur a la même composition que le contenu du réacteur.

Le modèle s’appuie sur des bilans matière et énergie. Il s’appuie aussi sur l’hypothèse de volume constant des réacteurs : cette dernière permet de calculer le débit à la sortie des réacteurs, en tenant compte des effets de contraction, due aux différences de densité entre le propylène dans la phase liquide et dans la poudre.

Nous n’avons pas écrit de modèle cinétique pour les termes de production. Le bilan thermique était suffisant pour estimer la quantité instantanée de polypropylène produite dans chacun des réacteurs. Nous nous sommes appuyés pour cela sur le fait que la dynamique de la température dans les réacteurs est très rapide comparée à celle des sorties décrites dans la section précédente.

Avant de décrire les équations régissant la dynamique, nous précisons nos notations dans la section suivante.

1.2.2. Notations. — Nous décrivons dans le tableau 1 les notations utilisées pour décrire les équations régissant la dynamique du réacteur.

1.2.3. Bilan de masse. — Pour calculer nos commandes, nous avons cherché à connaître les équations régissant la dynamique des sorties qui nous intéressent. Pour cela, nous sommes partis des bilans de masse et d’énergie établis pour chacun des réacteurs.

Le bilan massique s’écrit

<i>Variable</i>	<i>Description</i>
M_{Pi}	Masse de propylène dans le réacteur R_i
M_{PPi}	Masse de polypropylène dans le réacteur R_i
M_{H2Ri}	Masse d'hydrogène dans le réacteur R_i
M_{Catai}	Masse de catalyseur dans le réacteur R_i
M_{toti}	Masse totale dans le réacteur R_i
$FC3_i$	Débit massique de propylène entrant dans le réacteur R_i
$FH2_i$	Débit massique d'hydrogène entrant dans le réacteur R_i
$F_{i,sortie}$	Débit massique à la sortie du réacteur R_i
$FCata$	Débit massique de catalyseur entrant dans le premier réacteur
$FH20_i$	Débit massique de l'eau circulant dans la jaquette du réacteur R_i
x_i	Fraction massique du polypropylène dans le réacteur R_i
y_i	Fraction massique de l'hydrogène dans le réacteur R_i
P_i	Terme de production dans le réacteur R_i
P	Terme de production total
A_i	Activité du catalyseur dans le réacteur R_i
q_i	Paramètres associés à l'hydrogène dans le réacteur R_i
J_i	Puissance de la pompe de circulation du réacteur R_i
$\dot{Q}_i$	Puissance échangée avec la jaquette du réacteur R_i
T_i	Température du réacteur R_i
T_e	Température de l'alimentation en propylène
ΔT_i	Différence de température de l'eau de refroidissement entre la sortie et l'entrée de la jaquette
V	Volume des réacteurs
ρ_P	Densité du propylène
ρ_{PP}	Densité du polypropylène
ΔH	Enthalpie de polymérisation
C_{pP}	Capacité calorifique du propylène
C_{pPP}	Capacité calorifique du polypropylène
C_{pH20}	Capacité calorifique de l'eau
h_P	Enthalpie du propylène
h_{PP}	Enthalpie du polypropylène

TABLE 1. Notations du Modèle réacteur PP2 Feluy

– pour le propylène et le polypropylène :

$$\frac{d}{dt}M_{PP1} = P_1 - F_{1,sortie}x_1 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}M_{P1} = FC3_1 - F_{1,sortie}(1 - x_1) - P_1 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}M_{PP2} = P_2 + x_1F_{1,sortie} - F_{2,sortie}x_2 \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}M_{P2} = FC3_2 + (1 - x_1)F_{1,sortie} - F_{2,sortie}(1 - x_2) - P_2 \quad (4)$$

– pour le catalyseur :

$$\frac{d}{dt}M_{Cata1} = FCata - \frac{M_{Cata1}}{M_{tot1}}F_{1,sortie} \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt}M_{Cata2} = \frac{M_{Cata1}}{M_{tot1}}F_{1,sortie} - \frac{M_{Cata2}}{M_{tot2}}F_{2,sortie} \quad (6)$$

– et pour l'hydrogène :

$$\frac{d}{dt}M_{H2R1} = FH2_1 - \frac{M_{H2R1}}{M_{tot1}}F_{1,sortie} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt}M_{H2R2} = FH2_2 + \frac{M_{H2R1}}{M_{tot1}}F_{1,sortie} - \frac{M_{H2R2}}{M_{tot2}}F_{2,sortie} \quad (8)$$

Comme il n'y a pas de débitmètres à la sortie des deux réacteurs, mais seulement à l'entrée pour mesurer les débits $FC3_1$ et $FC3_2$, il est nécessaire de déterminer les débits de sortie $F_{1,sortie}$ et $F_{2,sortie}$. Pour cela nous allons exploiter le fait que le volume réactionnel est constant dans les deux réacteurs. Par exemple, nous obtenons pour le premier réacteur :

$$V = \frac{M_{P1}}{\rho_P} + \frac{M_{PP1}}{\rho_{PP}} \quad (9)$$

Nous avons négligé la masse représentée par le catalyseur et l'hydrogène. En dérivant (9), nous obtenons en utilisant les équations du bilan massique :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 0 \\ &= \frac{\dot{\overline{M_{P1}}}}{\rho_P} + \frac{\dot{\overline{M_{PP1}}}}{\rho_{PP}} \\ &= \frac{FC3_1 - F_{1,sortie}(1 - x_1) - P_1}{\rho_P} + \frac{P_1 - F_{1,sortie}x_1}{\rho_{PP}} \end{aligned}$$

Il suffit alors de réorganiser les termes de la dernière ligne :

$$F_{1,sortie} = \left(\frac{FC3_1}{\rho_P} + P_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right) \right) \frac{1}{\frac{1}{\rho_P} + x_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)}.$$

Avec la même démarche, on obtient le débit de sortie du second réacteur :

$$F_{2,sortie} = \left(\frac{FC3_2 + F_{1,sortie}}{\rho_P} + (P_2 + x_1 F_{1,sortie}) \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right) \right) \frac{1}{\frac{1}{\rho_P} + x_2 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)}.$$

1.2.4. Bilan d'énergie. — Pour exprimer les termes de production P_1 et P_2 , nous allons établir un bilan thermique en considérant que la dynamique régissant la température dans les réacteurs est rapide, étant donné le temps de séjour dans les réacteurs. Nous n'avons donc pas développé de modèle cinétique.

Le bilan d'énergie s'écrit pour le premier réacteur :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(M_{P1}h_P(T_1) + M_{PP1}h_{PP}(T_1)) &= FC3_1h_P(T_e) \\ &\quad - F_{1,sortie}(1 - x_1)h_P(T_1) \\ &\quad - F_{1,sortie}x_1h_{PP}(T_1) + J_1 - \dot{Q}_1. \end{aligned}$$

en négligeant les termes d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. Comme nous supposons que la dynamique de la température est très rapide, nous allons donc considérer que la température dans le réacteur est constante. Ainsi

$$\frac{d}{dt}(M_{P1}h_P(T_1) + M_{PP1}h_{PP}(T_1)) = h_P(T_1)\frac{d}{dt}M_{P1} + h_{PP}(T_1)\frac{d}{dt}M_{PP1}.$$

On utilise alors les équations de bilan de masse (1) et (2)

$$\begin{aligned} &(FC3_1 - P_1 - (1 - x_1)F_{1,sortie})h_P(T_1) + (P_1 - x_1F_{1,sortie})h_{PP}(T_1) \\ &= FC3_1h_P(T_e) - F_{1,sortie}(1 - x_1)h_P(T_1) - F_{1,sortie}x_1h_{PP}(T_1) \\ &\quad + J_1 - \dot{Q}_1. \end{aligned}$$

Après simplification, cela conduit à

$$P_1(h_{PP}(T_1) - h_P(T_1)) = FC3_1(h_P(T_e) - h_P(T_1)) + J_1 - \dot{Q}_1.$$

Nous obtenons ainsi l'expression du terme de production P_1 dans le premier réacteur :

$$P_1 = \frac{FC3_1Cp_P(T_1 - T_e) + \dot{Q}_1 - J_1}{\Delta H} \quad (10)$$

Une démarche analogue pour le second réacteur conduit à

$$P_2 = \frac{FC3_2 C_{pP}(T_2 - T_e) + F_{1,sortie}(x_1 C_{pPP} + (1 - x_1) C_{pP})(T_2 - T_1) + \dot{Q}_2 - J_2}{\Delta H} \quad (11)$$

1.2.5. Dynamique des 5 sorties. — A partir des équations de bilan massique, nous en déduisons la dynamique des sorties qui nous intéressent.

Dynamique de x_1 , x_2 , y_1 et y_2 . — Les calculs permettant de déterminer la dynamique de x_1 , x_2 , y_1 et y_2 sont analogues. Pour obtenir la dynamique du taux de solide x_1 dans le premier réacteur, il suffit de revenir à sa définition :

$$M_{PP1} = x_1 M_{tot1} \quad \text{avec} \quad M_{tot1} = M_{P1} + M_{PP1}$$

La masse du catalyseur et de l'hydrogène sont en pratique négligeables . Par dérivation, nous obtenons alors :

$$\frac{d}{dt} M_{PP1} = x_1 \frac{d}{dt} M_{tot1} + M_{tot1} \dot{x}_1$$

soit

$$P_1 - F_{1,sortie} x_1 = x_1 (FC3_1 - F_{1,sortie}) + M_{tot1} \dot{x}_1$$

d'où

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{V} \left(\frac{1}{\rho_P} + x_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right) \right) \left(-FC3_1 x_1 + P_1 \right)$$

puisque

$$M_{tot1} = \frac{V}{\frac{1}{\rho_P} + x_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)}.$$

Dynamique de P . — Pour établir le modèle pour la production totale, nous avons introduit le modèle cinétique simplifié suivant :

$$P_1 = A_1 M_{Cata1} \quad \text{et} \quad P_2 = A_2 M_{Cata2}$$

où les paramètres d'activité A_1 et A_2 pour le catalyseur sont calculés à partir de la mesure de réaction par bilan thermique, c'est à dire :

$$A_1 = \frac{P_1 \text{ mesuré}}{M_{Cata1}} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{P_2 \text{ mesuré}}{M_{Cata2}}.$$

Pour obtenir la dynamique de $P = P_1 + P_2$, nous avons négligé la dynamique des paramètres d'activité, car en pratique ils varient lentement. Ainsi, en tenant compte de (5) et de (6) :

$$\begin{aligned}\dot{P} &= A_1 \frac{d}{dt} M_{Cata1} + A_2 \frac{d}{dt} M_{Cata2} \\ &= A_1 \left(FCata - \frac{M_{Cata1}}{M_{tot1}} F_{1,sortie} \right) + A_2 \left(\frac{M_{Cata1}}{M_{tot1}} F_{1,sortie} - \frac{M_{Cata2}}{M_{tot2}} F_{2,sortie} \right).\end{aligned}$$

Modèle retenu. — Finalement, le modèle retenu est le suivant :

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{M_{tot1}} \left(-FC3_1 x_1 + P_1 \right) \quad (12)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{M_{tot2}} \left(- (FC3_2 + F_{1,sortie}) x_2 + P_2 + x_1 F_{1,sortie} \right) \quad (13)$$

$$\dot{y}_1 = \frac{1}{M_{tot1}} \left(FH2_1 - FC3_1 y_1 \right) \quad (14)$$

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{M_{tot2}} \left(FH2_2 - FC3_2 y_2 + F_{1,sortie} (y_1 - y_2) \right) \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} M_{Cata1} = FCata - \frac{M_{Cata1}}{M_{tot1}} F_{1,sortie} \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} M_{Cata2} = \frac{M_{Cata1}}{M_{tot1}} F_{1,sortie} - \frac{M_{Cata2}}{M_{tot2}} F_{2,sortie} \quad (17)$$

$$\dot{P} = A_1 \left(FCata - \frac{M_{Cata1}}{M_{tot1}} F_{1,sortie} \right) + A_2 \left(\frac{M_{Cata1}}{M_{tot1}} F_{1,sortie} - \frac{M_{Cata2}}{M_{tot2}} F_{2,sortie} \right). \quad (18)$$

Les variables intermédiaires sont définies par :

$$\begin{aligned}
 M_{tot1} &= \frac{V}{\frac{1}{\rho_P} + x_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)} \\
 M_{tot2} &= \frac{V}{\frac{1}{\rho_P} + x_2 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)} \\
 F_{1,sortie} &= \frac{\frac{FC3_1}{\rho_P} + P_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)}{\frac{1}{\rho_P} + x_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)} \\
 F_{2,sortie} &= \left(\frac{FC3_2 + F_{1,sortie}}{\rho_P} + (P_2 + x_1 F_{1,sortie}) \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right) \right) \frac{1}{\frac{1}{\rho_P} + x_2 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)}.
 \end{aligned}$$

CHAPITRE 2

RÉACTEUR PE À ANVERS



FIGURE 1. Site ATOFINA d'ANVERS en Belgique

Nous décrivons dans ce chapitre le procédé PE HD du site ATOFINA d'Anvers : sa capacité de production est de 500 kT par an, la production européenne étant de 4000 kT en 2001. Le coeur de l'unité est schématisé par un réacteur tubulaire en boucle (réacteur D) où est réalisé la polymérisation de l'éthylène en phase liquide. Les principales différences avec le procédé PP2 sont les suivantes :

- Nous ne prendrons dans ce cas-ci qu'un seul réacteur.
- La réaction se fait dans un solvant : l'isobutane.
- Il s'agit d'une réaction de copolymérisation.

Afin d'atteindre l'objectif du projet (augmentation de la production et meilleur contrôle de la qualité), nous avons développé un observateur-contrôleur pour stabiliser les principales variables définissant le fonctionnement du réacteur : densité, concentration en éthylène et hexène, et production.

Jusqu'à aujourd'hui, seul le capteur logiciel a pu être installé : les résultats obtenus par cet estimateur peuvent remplacer les mesures données par le chromatographe placé à la sortie du réacteur (voir Figure 2). Étant donné l'intérêt des résultats obtenus par l'observateur et l'analogie entre la structure des équations des réacteurs PP2 et PE, il est raisonnable de penser qu'un contrôleur similaire à celui de PP2, fondé sur la même technique, devrait fournir un résultat très satisfaisant.

Dans la section 2.1, nous décrivons l'unité. Puis dans la section 2.2, nous donnons un modèle pour la dynamique des principales variables caractérisant le fonctionnement du réacteur. Nous aborderons le calcul du contrôleur dans le chapitre 3 et nous y présenterons les résultats obtenus sur le site.

2.1. Description du procédé

L'unité. — L'usine PE à Anvers produit du polyéthylène HD à partir du monomère d'éthylène C2 et d'un comonomère, l'hexène C6. Cette réaction exothermique est activée par différents types de catalyseur, en fonction de la qualité du produit recherchée. La réaction se produit dans de l'isobutane C4 qui joue le rôle de solvant pour l'éthylène et l'hexène et de diluant pour le polyéthylène solide, en suspension dans le mélange réactionnel. Deux paramètres déterminent la qualité du polymère : sa densité et son melt index.

La Figure 2 fournit un schéma du procédé. Le coeur de l'unité est constitué d'un réacteur tubulaire en boucle, alimenté par les réactifs C2, C6 et H₂, le solvant C4 et le catalyseur. A la sortie du réacteur, la poudre est séparée du reste dans un flash et le gaz de sortie (Off Gaz) est récupéré pour être analysé et recyclé. Étant donné que la réaction de polymérisation est exothermique, le réacteur est entouré par une jaquette où de l'eau circule pour assurer le refroidissement.

4 entrées , 4 sorties. — Le mélange réactionnel est constitué par l'isobutane liquide dans lequel sont dissous l'éthylène et l'hexène, avec en suspension le polyéthylène qui est sous forme de poudre. Pour éviter que le réacteur ne prenne en masse, il est important de

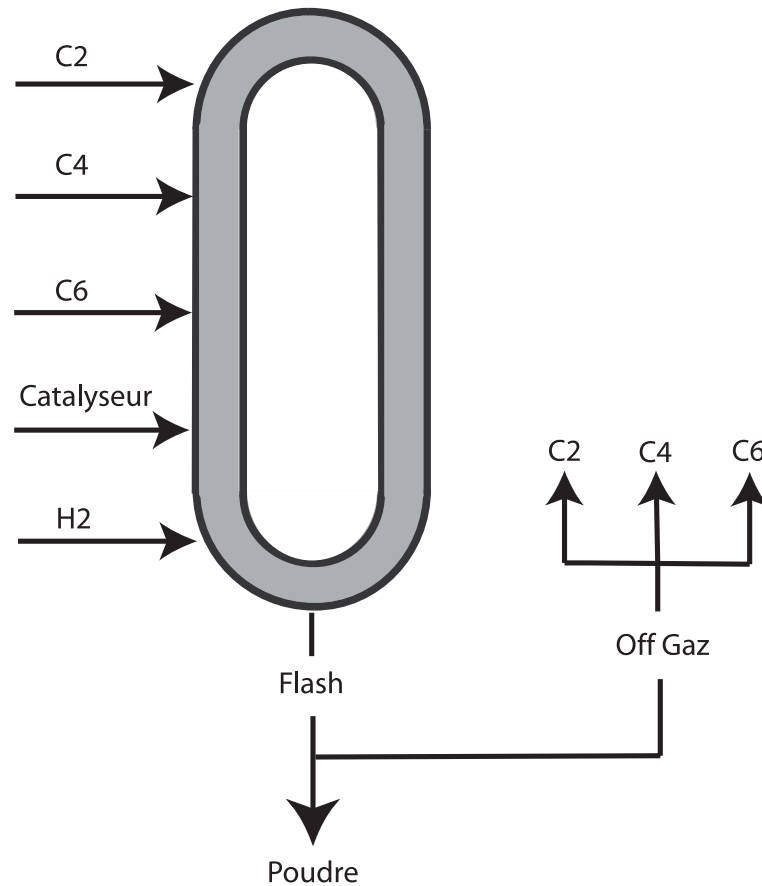


FIGURE 2. Schématisation d'un procédé type PE HD Anvers.

réguler la fraction massique en poudre ou taux de solide, ce qui revient à réguler la densité du mélange réactionnel.

La qualité du produit est déterminée par son Melt Index et sa densité qui sont fonction de la fraction massique dans la phase liquide de l'éthylène et de l'hexène, et de la température de réaction.

Enfin, le tonnage produit est déterminé par la quantité de catalyseur utilisée.

Pour notre système, nous nous intéressons donc aux 4 sorties suivantes :

- x : le taux de solide ou fraction massique du polyéthylène dans le réacteur.
- y_{C2} et y_{C6} : les fractions massiques respectives de l'éthylène et de l'hexène dans la phase liquide du milieu réactionnel.

- P : le débit de production.

4 entrées correspondent à ces sorties :

- x est régulé par le débit d'isobutane $FC4$.
- y_{C2} et y_{C6} sont régulés respectivement par les débits, $FC2$ et $FC6$, d'éthylène et d'hexène alimentant le réacteur.
- P est régulé par le débit de catalyseur $FCata$.

2.2. Equations de la dynamique

2.2.1. Hypothèse de modélisation. — Bien que le réacteur soit tubulaire, comme la pompe de circulation des produits assure une rotation rapide du mélange réactionnel, l'hypothèse de réacteur parfaitement mélangé s'est avérée bien adaptée à notre système : les résultats obtenus pour notre estimateur le confirment. Nous considérons donc que le contenu des réacteurs est homogène et que ce qui quitte un réacteur a la même composition que le contenu du réacteur.

Le modèle s'appuie sur des bilans matière et énergie. Il s'appuie aussi sur l'hypothèse de volume constant dans le réacteur : cette dernière permet de calculer le débit à la sortie des réacteurs, en tenant compte des effets de contraction, dus aux différences de densité entre l'éthylène dans la phase liquide et dans la poudre.

Nous n'avons pas écrit de modèle cinétique pour le terme de production. Le bilan thermique était suffisant pour estimer la quantité instantanée de polyéthylène produite. Nous nous sommes appuyés pour cela sur le fait que la dynamique de la température dans le réacteur est très rapide comparée à celle des sorties décrites dans la section précédente.

Avant de décrire les équations régissant la dynamique, nous précisons nos notations dans la section suivante.

2.2.2. Notations. — Nous décrivons dans le tableau 1 les notations utilisées pour décrire les équations régissant la dynamique du réacteur.

2.2.3. Bilan de masse. — Pour calculer nos commandes, nous avons cherché à connaître les équations régissant la dynamique des sorties x , y_{C2} , y_{C6} et P . Nous allons plus précisément écrire la dynamique de x , x_{C2} , x_{C6} et P . Pour cela, nous sommes partis des bilans de masse et d'énergie.

Le bilan massique s'écrit

<i>Variable</i>	<i>Description</i>
M_{C2}	Masse d 'éthylène dans le réacteur
M_{C4}	Masse d'isobutane dans le réacteur
M_{C6}	Masse d'hexène dans le réacteur
M_{PE}	Masse de polyéthylène dans le réacteur
M_{Cata}	Masse de catalyseur dans le réacteur
M_{tot}	Masse totale dans le réacteur
Fe	Débit massique total à l'entrée du réacteur
$FC2$	Débit massique d'éthylène entrant dans le réacteur
$FC4$	Débit massique d'isobutane entrant dans le réacteur
$FC6$	Débit massique d'hexène entrant dans le réacteur
$FCata$	Débit massique de catalyseur entrant dans le réacteur
F_{sortie}	Débit massique à la sortie du réacteur
$FH20$	Débit massique de l'eau circulant dans la jaquette du réacteur
x	Fraction massique du polyéthylène dans le réacteur
x_{C2}	Fraction massique de l'éthylène dans le réacteur
x_{C4}	Fraction massique de l'isobutane dans le réacteur
x_{C6}	Fraction massique de l'hexène dans le réacteur
y_{C2}	Fraction massique de l'éthylène dans la phase liquide
y_{C6}	Fraction massique de l'hexène dans la phase liquide
P	Terme de production total
P_{C2}	Terme de consommation de l'éthylène
P_{C6}	Terme de consommation de l'hexène
A	Activité du catalyseur dans le réacteur
J	Puissance de la pompe de circulation du réacteur
$\dot{Q}$	Puissance échangée avec la jaquette du réacteur
T	Température du réacteur
T_e	Température de l'alimentation en réactif et solvant
ΔT	Différence de température de l'eau de refroidissement entre la sortie et l'entrée de la jaquette
V	Volume du réacteur
ρ_{Mel}	Densité de la partie liquide
ρ_{PE}	Densité du polyéthylène
ΔH	Enthalpie de polymérisation
C_{pMel}	Capacité calorifique de la partie liquide
C_{pPE}	Capacité calorifique du polyéthylène
C_{pH20}	Capacité calorifique de l'eau
h_{C2}	Enthalpie de l'éthylène
h_{C4}	Enthalpie de l'isobutane
h_{C6}	Enthalpie de l'hexène
h_{PE}	Enthalpie du polyéthylène

TABLE 1. Notations du Modèle réacteur PE Anvers

– pour les réactifs, le solvant et le polyéthylène :

$$\frac{d}{dt}M_{PE} = P - xF_{sortie} \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt}M_{C4} = FC4 - x_{C4}F_{sortie} \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt}M_{C2} = FC2 - x_{C2}F_{sortie} - P_{C2} \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt}M_{C6} = FC6 - x_{C6}F_{sortie} - P_{C6} \quad (22)$$

– pour le catalyseur :

$$\frac{d}{dt}M_{Cata} = FCata - \frac{M_{Cata}}{M_{tot}}F_{sortie} \quad (23)$$

Pour déterminer le débit de sortie F_{sortie} , nous allons exploiter le fait que le volume réactionnel est constant dans le réacteur. Nous négligeons dans la masse totale, la masse du catalyseur. Nous considérons que le mélange réactionnel est composé d'une partie liquide de densité ρ_{Mel} et d'une partie solide le polyéthylène. Ainsi le volume du réacteur peut s'exprimer de la façon suivante :

$$V = \frac{M_{Mel}}{\rho_{Mel}} + \frac{M_{PE}}{\rho_{PE}} \quad (24)$$

En dérivant (24), nous obtenons en utilisant les équations du bilan massique :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 0 \\ &= \frac{\dot{M}_{Mel}}{\rho_{Mel}} + \frac{\dot{M}_{PE}}{\rho_{PE}} \\ &= \frac{Fe - (1 - x)F_{sortie} - P}{\rho_{Mel}} + \frac{P - xF_{sortie}}{\rho_{PE}} \end{aligned}$$

Il suffit alors de réorganiser les termes de la dernière ligne :

$$F_{sortie} = \left(\frac{Fe}{\rho_{Mel}} + P \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right) \right) \frac{1}{\frac{1}{\rho_{Mel}} + x \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right)}.$$

2.2.4. Bilan d'énergie. — Pour exprimer le terme de production P , nous allons établir un bilan thermique en considérant que la dynamique régissant la température dans le réacteur est rapide, comparée au temps de séjour dans le réacteur.

Terme de production P . — Le bilan d'énergie s'écrit pour le réacteur :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(M_{C2} h_{C2}(T) + M_{C4} h_{C4}(T) + M_{C6} h_{C6}(T) + M_{PE} h_{PE}(T) \right) \\ &= FC2 h_{C2}(T_e) + FC4 h_{C4}(T_e) + FC6 h_{C6}(T_e) \\ & \quad - x_{C2} F_{sortie} h_{C2}(T) - x_{C4} F_{sortie} h_{C4}(T) - x_{C6} F_{sortie} h_{C6}(T) \\ & \quad - x F_{sortie} h_{PE}(T) + J - FH2O C_{pH2O} \Delta T \end{aligned}$$

en négligeant les termes d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. Comme nous supposons que la dynamique de la température est très rapide, nous allons donc considérer que la température dans le réacteur est constante. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(M_{C2} h_{C2}(T) + M_{C4} h_{C4}(T) + M_{C6} h_{C6}(T) + M_{PE} h_{PE}(T) \right) \\ &= h_{C2}(T) \frac{d}{dt} M_{C2} + h_{C4}(T) \frac{d}{dt} M_{C4} + h_{C6}(T) \frac{d}{dt} M_{C6} + h_{PE}(T) \frac{d}{dt} M_{PE} \end{aligned}$$

On utilise alors les équations de bilan de masse (19) à (22) :

$$\begin{aligned} & (FC2 - x_{C2} F_{sortie} - P_{C2}) h_{C2}(T) + (FC4 - x_{C4} F_{sortie}) h_{C4}(T) \\ & \quad + (FC6 - x_{C6} F_{sortie} - P_{C6}) h_{C6}(T) + (P - x F_{sortie}) h_{PE}(T) \\ &= FC2 h_{C2}(T_e) + FC4 h_{C4}(T_e) + FC6 h_{C6}(T_e) \\ & \quad - x_{C2} F_{sortie} h_{C2}(T) - x_{C4} F_{sortie} h_{C4}(T) - x_{C6} F_{sortie} h_{C6}(T) \\ & \quad - x F_{sortie} h_{PE}(T) + J - FH2O C_{pH2O} \Delta T \end{aligned}$$

Après simplification, cela conduit à

$$\begin{aligned} & P h_{PE}(T) - P_{C2} h_{C2}(T) - P_{C6} h_{C6}(T) \\ &= FC2 (h_{C2}(T_e) - h_{C2}(T)) + FC4 (h_{C4}(T_e) - h_{C4}(T)) \\ & \quad + FC6 (h_{C6}(T_e) - h_{C6}(T)) \\ & \quad + J - FH2O C_{pH2O} \Delta T \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} -P\Delta H &= (FC2 C_{pC2} + FC4 C_{pC4} + FC6 C_{pC6})(T_e - T) \\ & \quad + J - FH2O C_{pH2O} \Delta T \end{aligned}$$

D'où l'expression du terme de production :

$$P = \frac{(FC2 C_{pC2} + FC4 C_{pC4} + FC6 C_{pC6})(T_e - T) + FH2O C_{pH2O} \Delta T - J}{\Delta H}$$

Termes de consommation P_{C2} et P_{C6} . — P_{C2} et P_{C6} correspondent respectivement aux débits auxquels sont consommés l'éthylène et l'hexène pour assurer le taux de production de polyéthylène P . Ces deux termes dépendent de la réactivité de chacun des réactifs en présence du catalyseur :

$$P_{C2} = \text{“réactivité C2” } M_{Cata} \frac{x_{C2}^{mol}}{x_{C2}^{mol} + x_{C4}^{mol} + x_{C6}^{mol}}$$

$$P_{C6} = \text{“réactivité C6” } M_{Cata} \frac{x_{C6}^{mol}}{x_{C2}^{mol} + x_{C4}^{mol} + x_{C6}^{mol}}$$

Nous avons supposé ici que la cinétique est du premier ordre : les résultats obtenus par le capteur logiciel montrent que cette approximation est suffisante : nous n'avons donc pas cherché à développer de modèle cinétique plus précis. L'exposant “mol” indique que nous travaillons avec les fractions molaires. Ainsi nous avons le système d'équations suivant pour déterminer (P_{C2}, P_{C6}) :

$$P = P_{C2} + P_{C6}$$

$$P_{C6} = P_{C2} \frac{\text{“réactivité C6” } x_{C6}^{mol}}{\text{“réactivité C2” } x_{C2}^{mol}}$$

Nous obtenons alors :

$$P_{C2} = \frac{x_{C2}}{x_{C2} + kx_{C6}} P$$

$$P_{C6} = \frac{kx_{C6}}{x_{C2} + kx_{C6}} P$$

où le paramètre k est donné par :

$$k = \frac{\text{“réactivité C6” } \text{Masse Molaire C2}}{\text{“réactivité C2” } \text{Masse Molaire C6}} = \frac{1}{3} \frac{\text{“réactivité C6”}}{\text{“réactivité C2”}}$$

Avec un coefficient $k > 1$, on interprète cette répartition, comme une fraction massique apparente pour l'hexène, plus réactif, plus importante que la fraction massique réelle.

2.2.5. Dynamique des 4 sorties. — A partir des équations de bilan massique et d'énergie, nous allons déterminer la dynamique des sorties qui nous intéressent.

Dynamique de x , x_{C2} et x_{C6} . — Les calculs permettant de déterminer la dynamique de x , x_{C2} et x_{C6} sont analogues. Pour obtenir la dynamique du taux de solide x dans le premier réacteur, il suffit de revenir à sa définition :

$$M_{PE} = x M_{tot} \quad \text{avec} \quad M_{tot} = M_{PE} + M_{C2} + M_{C4} + M_{C6}$$

La masse du catalyseur est en pratique négligeable. Par dérivation, nous obtenons alors :

$$\frac{d}{dt} M_{PE} = x \frac{d}{dt} M_{tot} + M_{tot} \dot{x}$$

soit

$$P - x F_{sortie} = x (F_e - F_{sortie}) + M_{tot} \dot{x}$$

d'où

$$\dot{x} = \frac{1}{M_{tot}} \left(-x F_e + P \right)$$

avec

$$M_{tot} = \frac{V}{\frac{1}{\rho_{Mel}} + x \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right)}.$$

Dynamique de P . — Pour établir le modèle pour la production totale, nous avons introduit le modèle cinétique simplifié suivant :

$$P = A M_{Cata}$$

où le paramètre d'activité A pour le catalyseur est calculé à partir de la mesure de réaction par bilan thermique, c'est à dire :

$$A = \frac{P \text{ mesuré}}{M_{Cata}}.$$

Pour obtenir la dynamique de P , nous avons négligé la dynamique du paramètre d'activité, car en pratique il varie lentement. Ainsi, en tenant compte de (23) :

$$\begin{aligned} \dot{P} &= A \frac{d}{dt} M_{Cata} \\ &= A \left(F_{Cata} - \frac{M_{Cata}}{M_{tot}} F_{sortie} \right). \end{aligned}$$

Modèle retenu. — Finalement, le modèle retenu est le suivant :

$$\dot{x} = \frac{1}{M_{tot}} \left(-xFe + P \right) \quad (25)$$

$$\dot{x}_{C2} = \frac{1}{M_{tot}} \left(-x_{C2}Fe + FC2 - \frac{x_{C2}}{x_{C2} + kx_{C6}} P \right) \quad (26)$$

$$\dot{x}_{C6} = \frac{1}{M_{tot}} \left(-x_{C6}Fe + FC6 - \frac{kx_{C6}}{x_{C2} + kx_{C6}} P \right) \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} M_{Cata} = FCata - \frac{M_{Cata}}{M_{tot}} F_{sortie} \quad (28)$$

$$\dot{P} = A \left(FCata - \frac{M_{Cata}}{M_{tot}} F_{sortie} \right) \quad (29)$$

$$y_{C2} = \frac{x_{C2}}{1 - x} \quad (30)$$

$$y_{C6} = \frac{x_{C6}}{1 - x} \quad (31)$$

Les variables intermédiaires sont définies par :

$$M_{tot} = \frac{V}{\frac{1}{\rho_{Mel}} + x \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right)}$$

$$F_{sortie} = \frac{\frac{Fe}{\rho_{Mel}} + P \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right)}{\frac{1}{\rho_{Mel}} + x \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right)}$$

$$P = \frac{\left(FC2 C_{p_{C2}} + FC4 C_{p_{C4}} + FC6 C_{p_{C6}} \right) (T_e - T) + FH2O C_{p_{H2O}} \Delta T - J}{\Delta H}$$

$$A = \frac{P \text{ mesuré}}{M_{Cata}}.$$

CHAPITRE 3

OBSERVATEUR CONTRÔLEUR

Dans ce chapitre, nous décrivons l'observateur-contrôleur que nous avons développé pour les réacteurs PP2 et PE. L'observateur s'appuie sur une propriété forte du modèle : dans une métrique que nous préciserons, les dynamiques de PP2 et PE sont contractantes. Pour le contrôleur, nous nous sommes appuyés sur la structure triangulaire des modèles pour appliquer la technique de linéarisation par bouclage : les deux modèles représentent, comme nous allons le voir, suffisamment bien la dynamique des réacteurs.

Nous revenons sur la similitude des modèles PP2 et PE dans la section 3.1. Puis nous exposons successivement l'observateur et le contrôleur dans les sections 3.2 et 3.3.

3.1. Deux modèles similaires

Malgré la différence entre les procédés PP2 et PE, nous avons obtenu des modèles de structure similaire. Les lois de conservation de masse et d'énergie, ainsi que l'hypothèse de volume constant, nous ont conduit dans les deux cas à un système algébro-différentiel, avec des équations différentielles du premier ordre pour décrire la dynamique des différentes espèces présentes dans les réacteurs, ainsi que des équations algébriques à partir desquelles nous avons pu déterminer les débits de sortie en tenant compte des effets de contraction, due aux différences de densité entre le monomère et le polymère. Nous avons donc à faire dans les deux cas à des systèmes d'index deux.

Il est raisonnable de penser que toute réaction de polymérisation en phase liquide, ou liquide-solide, peut se décrire avec des équations de structure très similaire à celles que nous avons obtenues. Il suffit pour cela de se baser sur les lois de conservation.

Pour les deux procédés, un bilan thermique s'est avéré suffisant pour représenter la réaction, ce qui nous a évité d'avoir à déterminer un modèle cinétique pour chacun des procédés.

3.2. Observateur

Pour les deux réacteurs, nous disposons

- des mesures de débit et de température pour tous les produits en entrée,
- des mesures de température et de densité du milieu réactionnel,
- et des mesures de débit et de température du liquide circulant dans les jaquettes.

Nous avons donc mis en place un observateur, ou capteur logiciel, pour reconstruire la concentration des différentes espèces présentes dans le milieu réactionnel. Pour cela nous nous sommes basés sur une propriété importante du modèle : dans les deux cas, PP2 et PE, la dynamique est contractante.

3.2.1. Un modèle contractant. — Nous montrons ici que les deux modèles que nous avons considérés sont contractants au sens de [44, 35].

Réacteur PP2. — Pour le réacteur PP2, nous allons montrer que cette propriété est vraie pour le premier réacteur. Le modèle de ce dernier s'écrit d'après les paragraphes précédents :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{M_{tot1}} \left(-FC3_1x_1 + P_1 \right) \\ \dot{y}_1 &= \frac{1}{M_{tot1}} \left(FH2_1 - FC3_1y_1 \right) \\ \frac{d}{dt}M_{Cata1} &= FCata - \frac{M_{Cata1}}{M_{tot1}}F_{1,sortie} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} M_{tot1} &= \frac{V}{\frac{1}{\rho_P} + x_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)} \\ F_{1,sortie} &= \frac{\frac{FC3_1}{\rho_P} + P_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)}{\frac{1}{\rho_P} + x_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)}. \end{aligned}$$

P_1 est ici une mesure, une entrée du modèle.

Pour montrer que ce système est contractant, considérant le changement de variable suivant pour le taux de solide x_1 :

$$\xi_1 = \log \left(\frac{1}{\rho_P} + x_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right) \right)$$

Le modèle se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{1}{V} \left(-FC3_1 \left(\exp(\xi_1) - \frac{1}{\rho_P} \right) + P_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right) \right) \\ \dot{y}_1 &= \frac{\exp(\xi_1)}{V} \left(FH2_1 - FC3_1 y_1 \right) \\ \frac{d}{dt} M_{Cata1} &= FCata - \frac{M_{Cata1}}{V} \left(\frac{FC3_1}{\rho_P} + P_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right) \right) \end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\exp(\xi_1) - \frac{1}{\rho_P}}{\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P}} \\ M_{tot1} &= V \exp(-\xi_1) \\ F_{1,sortie} &= \exp(-\xi_1) \left(\frac{FC3_1}{\rho_P} + P_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right) \right). \end{aligned}$$

La matrice Jacobienne du système vaut :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -FC3_1 \frac{\exp(\xi_1)}{V} & 0 & 0 \\ \frac{\exp(\xi_1)}{V} \left(FH2_1 - FC3_1 y_1 \right) & -FC3_1 \frac{\exp(\xi_1)}{V} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{V} \left(\frac{FC3_1}{\rho_P} + P_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right) \right) \end{pmatrix}$$

Sa partie symétrique vaut :

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} -FC3_1 \frac{\exp(\xi_1)}{V} & \frac{\exp(\xi_1)}{2V} \left(FH2_1 - FC3_1 y_1 \right) & 0 \\ \frac{\exp(\xi_1)}{2V} \left(FH2_1 - FC3_1 y_1 \right) & -FC3_1 \frac{\exp(\xi_1)}{V} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{V} \left(\frac{FC3_1}{\rho_P} + P_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right) \right) \end{pmatrix}$$

Etant donné sa structure, $\mathcal{S}$ est une matrice définie négative si et seulement si le déterminant suivant est strictement positif :

$$\mathcal{D} = \det \begin{pmatrix} -FC3_1 \frac{\exp(\xi_1)}{V} & \frac{\exp(\xi_1)}{2V} (FH2_1 - FC3_1 y_1) \\ \frac{\exp(\xi_1)}{2V} (FH2_1 - FC3_1 y_1) & -FC3_1 \frac{\exp(\xi_1)}{V} \end{pmatrix}$$

Or

$$\mathcal{D} = (FC3_1)^2 \frac{\exp(2\xi_1)}{V^2} \left(1 - \frac{1}{4} \left(\frac{FH2_1}{FC3_1} - y_1 \right)^2 \right)$$

Donc $\mathcal{D} > 0$, puisque $0 \leq \frac{FH2_1}{FC3_1} \leq 1$ et $0 \leq y_1 \leq 1$. Ainsi la dynamique de notre modèle pour le réacteur $R1$ est une contraction. La métrique associée est définie par :

$$\begin{aligned} ds^2 &= (d\xi_1)^2 + (dy_1)^2 + (dM_{Cata1})^2 \\ &= \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)^2 \frac{(dx_1)^2}{\left(\frac{1}{\rho_P} + x_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right) \right)^2} + (dy_1)^2 + (dM_{Cata1})^2 \end{aligned}$$

Réacteur PE. — Pour le réacteur PE, nous adoptons une démarche analogue. Le modèle s'écrit d'après les équations (25) à (28) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{V} \left(\frac{1}{\rho_{Mel}} + x \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right) \right) \left(-xFe + P \right) \\ \dot{x}_{C2} &= \frac{1}{V} \left(\frac{1}{\rho_{Mel}} + x \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right) \right) \left(-x_{C2}Fe + FC2 - \frac{x_{C2}}{x_{C2} + kx_{C6}} P \right) \\ \dot{x}_{C6} &= \frac{1}{V} \left(\frac{1}{\rho_{Mel}} + x \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right) \right) \left(-x_{C6}Fe + FC6 - \frac{kx_{C6}}{x_{C2} + kx_{C6}} P \right) \\ \frac{d}{dt} M_{Cata} &= FCata - \frac{M_{Cata}}{V} \left(\frac{Fe}{\rho_{Mel}} + P \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right) \right) \end{aligned}$$

Appliquons le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \xi &= \log \left(\frac{1}{\rho_{Mel}} + x \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right) \right) \\ \psi &= x_{C2} + x_{C6} \\ x_{C6} &= x_{C6} \\ M_{Cata} &= M_{Cata} \end{aligned}$$

Les équations précédentes deviennent :

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \frac{1}{V} \left(-Fe \left(\exp(\xi) - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right) + P \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right) \right) \\ \dot{\psi} &= \frac{\exp(\xi)}{V} \left(-\psi Fe + (FC2 + FC6) - P \right) \\ \dot{x}_{C6} &= \frac{\exp(\xi)}{V} \left(-x_{C6} Fe + FC6 - \frac{kx_{C6}}{\psi + (k-1)x_{C6}} P \right) \\ \frac{d}{dt} M_{Cata} &= FCata - \frac{M_{Cata}}{V} \left(\frac{Fe}{\rho_{Mel}} + P \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right) \right)\end{aligned}$$

La matrice Jacobienne du système dans ces coordonnées s'écrit :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} -Fe \frac{\exp(\xi)}{V} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & -Fe \frac{\exp(\xi)}{V} & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \frac{\exp(\xi)}{V} \left(-Fe - \frac{k\psi}{(\psi + (k-1)x_{C6})^2} P \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{V} \left(\frac{Fe}{\rho_{Mel}} + P \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right) \right) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{\exp(\xi)}{V} \left(-\psi Fe + (FC2 + FC6) - P \right) \\ \alpha_2 &= \frac{\exp(\xi)}{V} \left(-x_{C6} Fe + FC6 - \frac{kx_{C6}}{\psi + (k-1)x_{C6}} P \right) \\ \alpha_3 &= \frac{\exp(\xi)}{V} \frac{kx_{C6}}{(\psi + (k-1)x_{C6})^2} P\end{aligned}$$

Cette matrice Jacobienne a une structure triangulaire avec des termes diagonaux strictement négatifs : en phase de fonctionnement normal du réacteur, on peut les majorer par une constante strictement négative. Comme les termes en dehors de la diagonale, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, sont bornés dans les conditions de fonctionnement du réacteur, on en déduit que le système est contractant. On peut trouver une métrique de matrice M dans ces coordonnées, ne dépendant pas de l'état, tel que $\mathcal{J}^T M + M \mathcal{J}$ soit définie négative, A^T désignant la transposée de la matrice A .

3.2.2. Dynamique de l'observateur. — Au vu de ces résultats, nous avons choisi comme dynamique pour les observateurs une simple recopie des équations représentant la dynamique des réacteurs PP2 et PE. On obtient

– pour PP2, en notant $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{M}_{Cata1}, \hat{M}_{Cata2})$ l'estimée de l'état :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \frac{1}{M_{tot1}} \left(-FC3_1 \hat{x}_1 + P_1 \right) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{1}{M_{tot2}} \left(- (FC3_2 + F_{1,sortie}) \hat{x}_2 + P_2 + \hat{x}_1 F_{1,sortie} \right) \\ \dot{\hat{y}}_1 &= \frac{1}{M_{tot1}} \left(FH2_1 - FC3_1 \hat{y}_1 \right) \\ \dot{\hat{y}}_2 &= \frac{1}{M_{tot2}} \left(FH2_2 - FC3_2 \hat{y}_2 + F_{1,sortie} (\hat{y}_1 - \hat{y}_2) \right) \\ \frac{d}{dt} \hat{M}_{Cata1} &= FCata - \frac{\hat{M}_{Cata1}}{M_{tot1}} F_{1,sortie} \\ \frac{d}{dt} \hat{M}_{Cata2} &= \frac{\hat{M}_{Cata1}}{M_{tot1}} F_{1,sortie} - \frac{\hat{M}_{Cata2}}{M_{tot2}} F_{2,sortie}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}M_{tot1} &= \frac{V}{\frac{1}{\rho_P} + \hat{x}_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)} \\ M_{tot2} &= \frac{V}{\frac{1}{\rho_P} + \hat{x}_2 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)} \\ F_{1,sortie} &= \frac{\frac{FC3_1}{\rho_P} + P_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)}{\frac{1}{\rho_P} + \hat{x}_1 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)} \\ F_{2,sortie} &= \left(\frac{FC3_2 + F_{1,sortie}}{\rho_P} + (P_2 + \hat{x}_1 F_{1,sortie}) \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right) \right) \frac{1}{\frac{1}{\rho_P} + \hat{x}_2 \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)}.\end{aligned}$$

– pour PE, en notant $(\hat{x}, \hat{x}_{C2}, \hat{x}_{C6}, \hat{M}_{Cata}, \hat{y}_{C2}, \hat{y}_{C6})$ l'estimée de l'état :

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}} &= \frac{1}{M_{tot}} \left(-\hat{x}Fe + P \right) \\
\dot{\hat{x}}_{C2} &= \frac{1}{M_{tot}} \left(-\hat{x}_{C2}Fe + FC2 - \frac{\hat{x}_{C2}}{\hat{x}_{C2} + k\hat{x}_{C6}} P \right) \\
\dot{\hat{x}}_{C6} &= \frac{1}{M_{tot}} \left(-\hat{x}_{C6}Fe + FC6 - \frac{k\hat{x}_{C6}}{\hat{x}_{C2} + k\hat{x}_{C6}} P \right) \\
\frac{d}{dt}\hat{M}_{Cata} &= FCata - \frac{\hat{M}_{Cata}}{M_{tot}} F_{sortie} \\
\hat{y}_{C2} &= \frac{\hat{x}_{C2}}{1 - \hat{x}} \\
\hat{y}_{C6} &= \frac{\hat{x}_{C6}}{1 - \hat{x}}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
M_{tot} &= \frac{V}{\frac{1}{\rho_{Mel}} + \hat{x} \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right)} \\
F_{sortie} &= \frac{\frac{Fe}{\rho_{Mel}} + P \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right)}{\frac{1}{\rho_{Mel}} + \hat{x} \left(\frac{1}{\rho_{PE}} - \frac{1}{\rho_{Mel}} \right)}
\end{aligned}$$

3.2.3. Résultats capteur logiciel : PP2 et PE. — Nous présentons maintenant le résultat obtenu par ces observateurs, dans les deux sites.

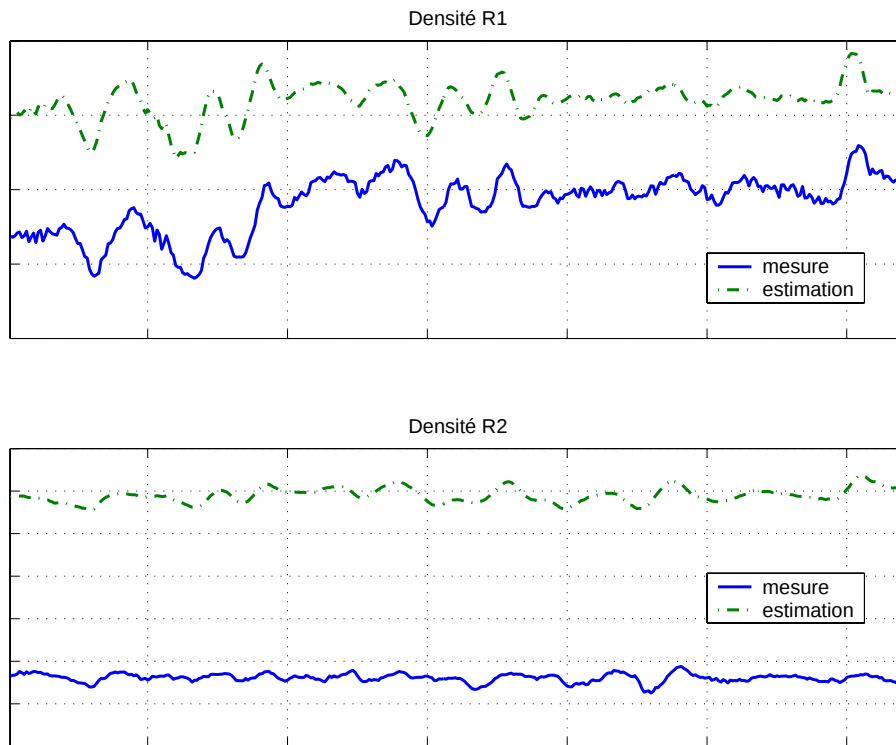


FIGURE 1. Exemple de résultat obtenu par l'estimateur des densités PP2 : 1 jour de fonctionnement.

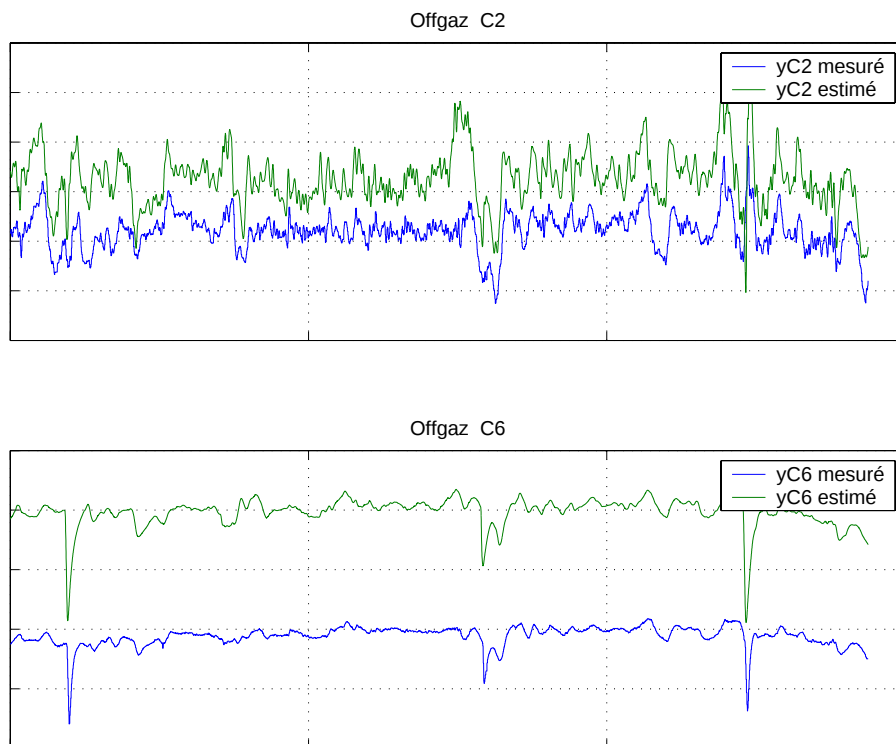


FIGURE 2. Exemple de résultat obtenu par l'estimateur pour la composition de l'offgaz PE : 6 jours de fonctionnement

Dans la Figure 1, nous comparons les densités mesurées et estimées dans chacun des réacteurs de l'unité PP2. Malgré l'existence d'un biais, le comportement dynamique est bien reproduit par l'estimateur. On peut même noter que l'estimateur présente une avance sur le densimètre : cela donne à notre régulateur une anticipation qu'un simple PID sur les densimètres ne permet pas.

Dans la Figure 2, nous donnons une illustration du résultat obtenu pour l'unité d'Anvers. Nous voyons que nous arrivons à reconstruire la composition de l'offgaz. La mesure de la composition est faite à l'usine par un chromatographe : appareil qui est très sensible aux pannes.

La qualité de ces résultats permet de valider notre modélisation et donne confiance dans le contrôle envisagé.

3.3. Contrôleur

3.3.1. Loi de commandes. — Les deux modèles présentent une structure triangulaire par rapport aux contrôles. En considérant l'exemple du réacteur PP2, les équations régissant la dynamique des sorties peuvent en effet être réécrites sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_{x_1}(X) & + g_{x_1}(X)FC3_1 \\ \dot{x}_2 &= f_{x_2}(X, FC3_1) & + g_{x_2}(X)FC3_2 \\ \dot{y}_1 &= f_{y_1}(X, FC3_1) & + g_{y_1}(X)FH2_1 \\ \dot{y}_2 &= f_{y_2}(X, FC3_1, FC3_2) & + g_{y_2}(X)FH2_2 \\ \dot{P} &= f_P(X, FC3_1, FC3_2) & + g_P(X)FCata.\end{aligned}$$

avec $X = (x_1, x_2, y_1, y_2, P)$. Les fonctions g en facteur des commandes, ne s'annulent pas. On procède ainsi par linéarisation exacte (voir [37]) pour déterminer les lois de commandes. Comme chacune des sorties $\xi \in \{x_1, x_2, y_1, y_2, P\}$ a une dynamique affine par rapport à la commande u_ξ qui lui est associée :

$$\dot{\xi} = f_\xi + g_\xi u_\xi$$

la commande est donnée par :

$$u_\xi = \frac{1}{g_\xi} \left(-f_\xi + K_p(\xi_r - \xi) + K_i \int (\xi_r - \xi) \right)$$

puisque le facteur g_ξ ne s'annule pas. ξ_r désigne la consigne (référence) à suivre par la sortie ξ , et (K_p, K_i) les gains du régulateurs.

Remarques. — Les réacteurs sont équipés de densimètres. Ainsi, nous avons le choix pour x_1 et x_2 , entre la valeur estimée par l'observateur et la mesure du densimètre. La densité D du mélange réactionnel est en effet liée au taux de solide X par la relation suivante :

$$D = \frac{1}{\frac{1}{\rho_P} + X \left(\frac{1}{\rho_{PP}} - \frac{1}{\rho_P} \right)}.$$

Comme le montre la Figure 1, il existe un biais, qui varie lentement dans le temps, entre notre estimateur et la mesure de densité. Comme les opérateurs étaient accoutumés à des références de densité exprimé par rapport à leur densimètre, nous avons adopté la structure suivante pour la régulation des taux de solides $x \in \{x_1, x_2\}$:

$$u_x = \frac{1}{g_x} \left(-f_x + K_p(x_r - x_{\text{Observateur}}) + K_i \int (x_r - x_{\text{Densimètre}}) \right).$$

On a pu ainsi profiter des avantages de la quantité $x_{\text{Observateur}}$: grandeur filtrée et non perturbée par les éléments qui faussent parfois le capteur de densité (petite variation de température dans le réacteur). Le terme intégral dans le contrôle permet alors classiquement d'assurer la convergence de $x_{\text{Densimètre}}$ vers x_r .

Pour le contrôle des concentrations en hydrogène et de la production, nous n'avions pas de mesures disponibles. Dans la loi de commande, nous avons donc utilisé les estimations fournies par l'observateur.

3.3.2. Résultats contrôleur : PP2. — Nous présentons maintenant les résultats obtenus par notre observateur-contrôleur pour le réacteur PP2. L'installation du contrôleur à Anvers pour des raisons de calendrier n'a pas encore pu être faite.

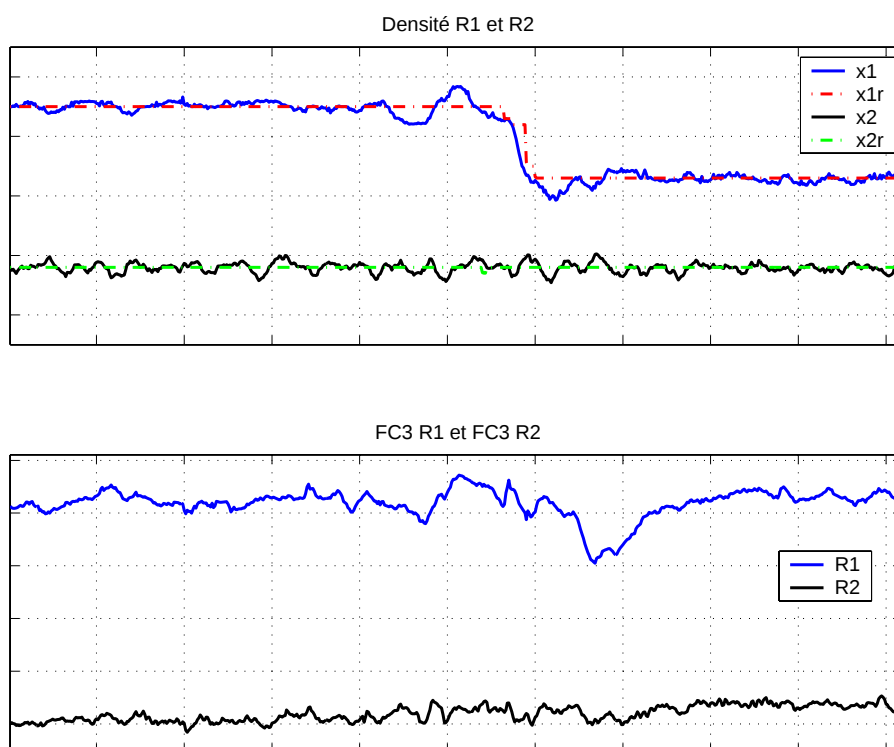


FIGURE 3. Exemple de régulation des densités : 2 jours de fonctionnement

Régulation de la densité. — Dans la Figure 3, nous donnons un exemple de la régulation densité sur une période de deux jours. Pendant la première journée, la consigne est fixe.

Elle est modifiée ensuite seulement dans le premier réacteur. Nous pouvons ainsi constater l'efficacité du contrôleur, puisque la consigne est réalisée suffisamment rapidement dans le premier réacteur, tandis que le second absorbe correctement cette perturbation.

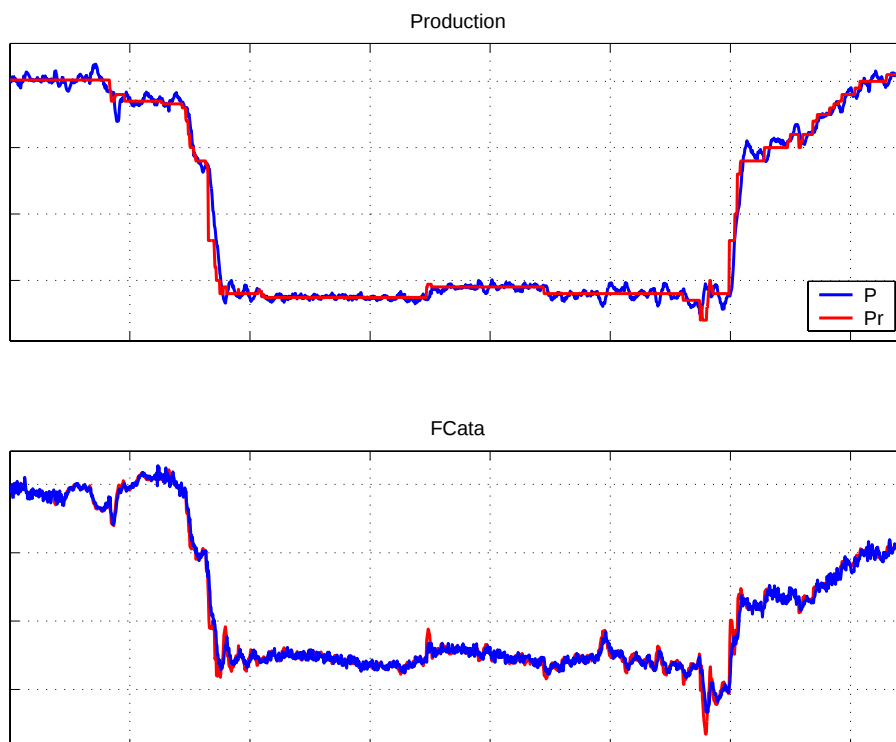


FIGURE 4. Exemple de régulation de la Production : 7 jours de fonctionnement

Régulation de la production. — Dans la Figure 4, nous montrons un exemple de régulation de la production sur une période de 7 jours. On y observe un important changement de consigne correspondant à une réduction du tonnage par deux : cette baisse de production importante fait suite à des soucis techniques dans la zone d'extrusion. Dans la Figure 5, nous montrons comment le régulateur de la densité dans le premier réacteur absorbe cette perturbation, en réduisant l'alimentation en C3 d'un facteur deux environ.

Régulation de l'hydrogène. — Dans la Figure 6, nous montrons un exemple de régulation de l'hydrogène sur une période d'une journée, correspondant à une transition (changement de qualité de produit) importante. Le changement de consigne est fait progressivement pour tenir compte des capacités de refroidissement du réacteur. En effet,

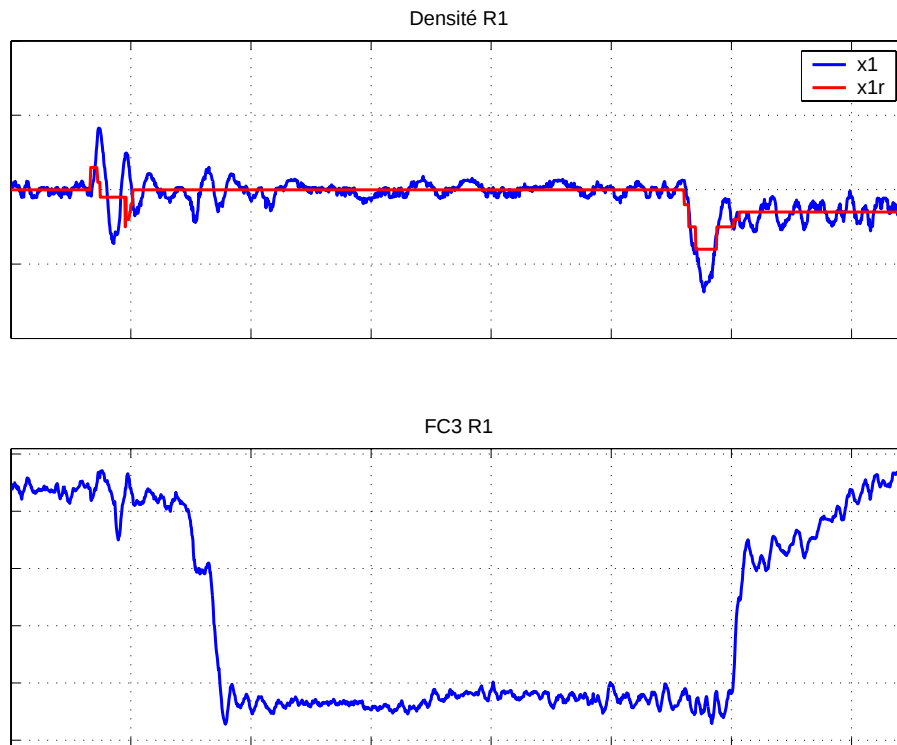


FIGURE 5. Exemple de rejet de perturbation pour les densités : 7 jours de fonctionnement

l'hydrogène accroît l'activité du catalyseur : ces précautions sont nécessaires pour éviter un emballement de la réaction.

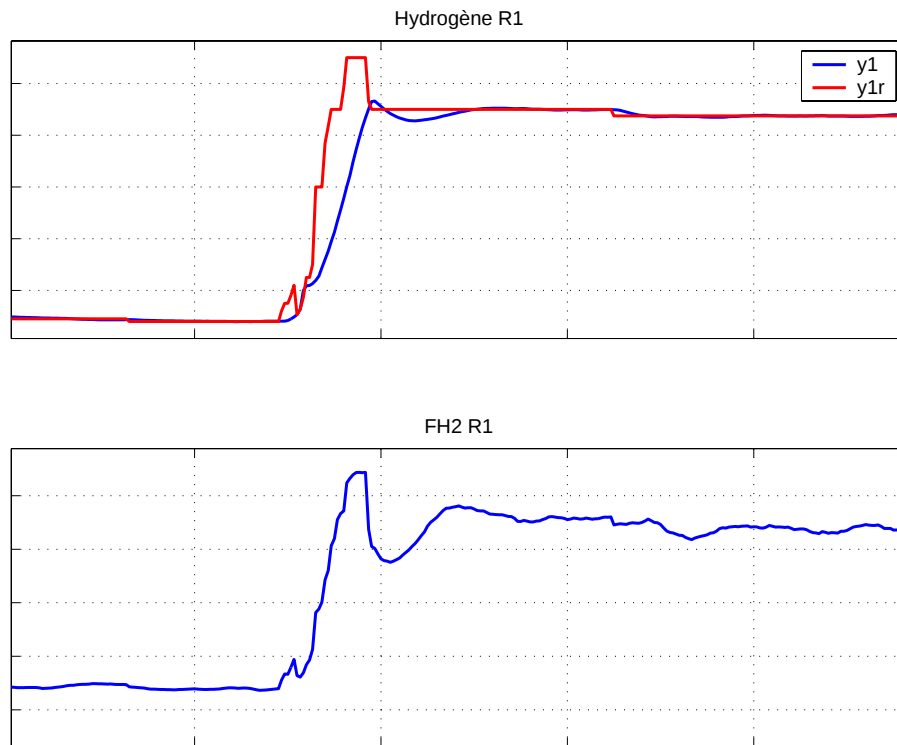


FIGURE 6. Exemple de régulation Hydrogène : 1 jour de fonctionnement

CONCLUSION PREMIÈRE PARTIE

Bilan du projet mené chez ATOFINA

Ce travail sur ces deux procédés nous a permis de réfléchir à la notion de modèles adaptés aux objectifs de contrôle : nous n'avons pas en effet cherché à déterminer l'ensemble de la dynamique du fluide circulant dans les réacteurs. Nous avons pris des hypothèses simplificatrices qui à partir des lois de conservation de masse et d'énergie, ont permis d'élaborer des capteurs logiciels et des régulateurs qui actuellement tournent en ligne sur les unités. A Feluy, le régulateur assure aujourd'hui une plus grande stabilité du milieu réactionnel, facilitant ainsi la tâche des opérateurs dans leur recherche d'une productivité maximum.

Invariance du modèle, observateur invariant et contraction

Au moment d'écrire les modèles, il s'est posé à nous la question du choix des unités pour les variables pour lesquelles nous cherchions à modéliser la dynamique : massique, molaire ou volumique par exemple. Pour l'auteur, le choix de grandeurs massiques a rendu l'écriture des équations plus simples. En pratique, cela ne devrait pas avoir d'importance puisque le fonctionnement des réacteurs est indépendant de ce choix. L'idée est alors d'écrire des algorithmes indépendants également de ce choix d'unité.

Un modèle invariant. — Afin d'illustrer cette remarque, considérons la dynamique (12) du taux de solide dans le premier réacteur de PP2 et récrivons la sans préciser l'unité choisie pour exprimer les quantités intervenant dans l'équation. Soient ψ_P et ψ_{PP} les quantités de propylène et de polypropylène présentes dans le réacteur R_1 . On suppose seulement que ces quantités s'obtiennent à partir des grandeurs massiques par action du

groupe des homothéties :

$$\psi_P = \alpha_P M_P \quad \text{et} \quad \psi_{PP} = \alpha_{PP} M_{PP}$$

avec α_P et α_{PP} deux réels strictement positifs.

Le bilan s'écrit avec ces variables :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi_P &= F_P - (1 - \chi) F_{\text{sortie}} - P_P \\ \frac{d}{dt} \psi_{PP} &= P_{PP} - \chi F_{\text{sortie}}. \end{aligned}$$

F_P et F_{sortie} désignent respectivement les débits d'entrée et de sortie du réacteur, exprimés dans les unités associées à ψ_P et ψ_{PP} . La fraction χ est définie par :

$$\chi = \frac{\psi_{PP}}{\psi_P + \psi_{PP}}.$$

P_P représente la quantité de propylène consommé par la réaction et P_{PP} celle de polypropylène formé.

En procédant comme au chapitre 1, on obtient la dynamique suivante pour la fraction de solide χ :

$$\dot{\chi} = \frac{1}{V} \left(\frac{1}{\mu_P} + \chi \left(\frac{1}{\mu_{PP}} - \frac{1}{\mu_P} \right) \right) (-\chi(F_P + P_{PP} - P_P) + P_{PP}) \quad (32)$$

avec $\mu_P = \alpha_P \rho_P$ et $\mu_{PP} = \alpha_{PP} \rho_{PP}$, les densités obtenues par application de l'homothétie définie précédemment.

Dans le cas où l'on travaille avec des grandeurs massiques, on retrouve bien évidemment l'équation (12) puisque l'on a alors $\alpha_P = \alpha_{PP} = 1$ et $P_{PP} = P_P$. Dans ce cas particulier, l'équation se simplifie.

L'équation (32) est dite invariante sous l'action du groupe des homothéties $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$. Lorsque l'on fait agir ce groupe sur les variables de quantité ψ_P et ψ_{PP} , ainsi que sur les différents termes intervenant dans la dynamique (densité, débits...), on obtient exactement la même équation dans le nouveau jeu de coordonnées.

Mesure d'erreur invariante. — Cette invariance n'est pas si triviale, puisque la restriction de cette action de groupe à la fraction de solide conduit à une transformation homographique. En effet si

$$x = \frac{M_{PP}}{M_P + M_{PP}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \psi_P &= \alpha_P M_P \\ \psi_{PP} &= \alpha_{PP} M_{PP} \end{cases}$$

alors

$$\chi = \frac{\psi_{PP}}{\psi_P + \psi_{PP}} = \frac{\alpha_{PP} M_{PP}}{\alpha_P M_P + \alpha_{PP} M_{PP}} = \frac{x}{x + \frac{\alpha_P}{\alpha_{PP}}(1-x)}.$$

Ainsi si dans l'écriture d'un observateur pour la fraction solide, on utilise un terme d'erreur classique du type $(x - \hat{x})$, pour mesurer la distance entre l'estimée $\hat{x}$ et la mesure x , on perd l'invariance du modèle (32). En effet, $(x - \hat{x})$, après action du groupe d'homothétie, devient :

$$\frac{\chi}{\chi + \frac{\alpha_{PP}}{\alpha_P}(1-\chi)} - \frac{\hat{\chi}}{\hat{\chi} + \frac{\alpha_{PP}}{\alpha_P}(1-\hat{\chi})}$$

et non $(\chi - \hat{\chi})$, en définissant $\hat{\chi}$ par :

$$\hat{\chi} = \frac{\hat{x}}{\hat{x} + \frac{\alpha_P}{\alpha_{PP}}(1-\hat{x})}.$$

Considérons maintenant l'observateur de la fraction solide suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\chi}} = \frac{1}{V} & \left(\frac{1}{\mu_P} + \hat{\chi} \left(\frac{1}{\mu_{PP}} - \frac{1}{\mu_P} \right) \right) \\ & \left(-\hat{\chi}(F_P + P_{PP} - P_P) + P_{PP} - k H \left(\frac{1-\hat{\chi}}{\hat{\chi}} \frac{\chi}{1-\chi} \right) \right) \end{aligned} \quad (33)$$

où k est un paramètre réel qui constitue le gain de l'observateur, et H une fonction scalaire réelle strictement croissante et régulière ($\mathcal{C}^1$ par exemple), s'annulant en 1. $\hat{\chi}$ désigne l'estimée de χ . Cet observateur est invariant comme l'est l'équation (32), sous l'action du groupe des homothéties. On a en effet, en s'inspirant des travaux sur le tracking invariant [50] :

$$\frac{1-\hat{\chi}}{\hat{\chi}} \frac{\chi}{1-\chi} = \frac{1-\hat{x}}{\hat{x}} \frac{x}{1-x}.$$

Nous montrons dans le prochain paragraphe qu'en choisissant le gain k positif, on obtient un observateur convergent. Il est à noter ici que le terme de correction de l'observateur est non trivial :

$$\text{Terme de correction} = -\frac{k}{V} \left(\frac{1}{\mu_P} + \hat{\chi} \left(\frac{1}{\mu_{PP}} - \frac{1}{\mu_P} \right) \right) H \left(\frac{1-\hat{\chi}}{\hat{\chi}} \frac{\chi}{1-\chi} \right).$$

Un observateur contractant. — Pour montrer que cet observateur est convergent, nous allons montrer que sa dynamique est contractante (voir B) : puisque χ est aussi solution de (33), on obtiendra ainsi le résultat de convergence. Pour cela, appliquons le changement de variable

$$\xi = \log \left(\frac{1}{\mu_P} + \hat{\chi} \left(\frac{1}{\mu_{PP}} - \frac{1}{\mu_P} \right) \right)$$

qui conduit à la dynamique

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}} = \frac{1}{V} \Bigg\{ & - \left(\exp(\hat{\xi}) - \frac{1}{\mu_P} \right) (F_P + P_{PP} - P_P) + P_{PP} \left(\frac{1}{\mu_{PP}} - \frac{1}{\mu_P} \right) \\ & + kH \left(\left(\frac{\frac{1}{\mu_{PP}} - \frac{1}{\mu_P}}{\exp(\hat{\xi}) - \frac{1}{\mu_P}} - 1 \right) \frac{\chi}{1 - \chi} \right) \left(\frac{1}{\mu_{PP}} - \frac{1}{\mu_P} \right) \Bigg\} \end{aligned}$$

dont le Jacobien $\mathcal{J}$ est donné par :

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{V} \exp(\hat{\xi}) \left\{ (F_P + P_{PP} - P_P) + k \frac{H' \left(\frac{1-\chi}{\hat{\chi}} \frac{\chi}{1-\chi} \right)}{\left(\exp(\hat{\xi}) - \frac{1}{\mu_P} \right)^2} \left(\frac{1}{\mu_{PP}} - \frac{1}{\mu_P} \right)^2 \frac{\chi}{1 - \chi} \right\}.$$

Il est strictement négatif puisque

- le terme $(F_P + P_{PP} - P_P)$ est positif : $F_P - P_P = \alpha_P(F_{massique} - P_{massique}) > 0$ (dans les conditions de fonctionnement du réacteur) et $P_{PP} \geq 0$,
- il suffit de prendre le gain $k > 0$,
- et la dérivée H' de la fonction scalaire strictement croissante H est strictement positive.

Ceci prouve la contraction de la dynamique de l'observateur (33).

Cette réflexion sur le lien entre observateur et symétrie par le biais du choix d'un terme d'erreur invariant est à l'origine du travail présenté dans la partie II, où l'on examine plus en détail cette idée.

PARTIE II

OBSERVATEUR ET INVARIANCE

Dans cette partie, nous reprenons l'idée d'invariance évoquée dans la partie précédente pour l'approfondir. Nous allons considérer en effet deux types de symétries que peuvent présenter des systèmes et nous allons voir comment concevoir alors des observateurs qui demeurent invariants vis à vis de ces mêmes symétries. Le mot symétrie est ici utilisé avec un sens assez large. Nous allons d'abord considérer, dans le chapitre 4, des systèmes invariants sous l'action de groupe de transformations : pour les réacteurs, le groupe évoqué était celui des homothéties. Ensuite, dans le chapitre 5, nous considérons le cas particulier mais important des systèmes Lagrangiens.

Nous résumons ci-dessous le contenu de cette partie.

Observateurs et groupe de transformations. — Pour une dynamique $\dot{x} = f(x)$ avec pour sortie $y = h(x)$ invariante sous l'action du groupe de transformations G , nous définissons un observateur invariant asymptotique de la forme $\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, y)$ avec $y = h(x)$ la sortie mesurée et $\hat{x}$ une estimation de l'état non mesuré x . Une telle définition est notamment motivée par une classe de réacteurs chimiques, traitées en détails, quand le groupe de transformations correspond au changement d'unité et la sortie y à un rapport de concentrations. Nous proposons une méthode constructive qui garantit automatiquement l'invariance de l'observateur $\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, y)$: elle est basée sur des champs de vecteurs invariants et sur des fonctions scalaires, que l'on nomme des erreurs d'estimation invariantes, qui sont calculées via la méthode du repère mobile de Cartan. La convergence de l'observateur, dans le cas général, demeure un problème ouvert. Mais pour la classe de réacteurs chimiques considérés ici, la convergence de l'observateur invariant est prouvée en montrant que, au sens d'une métrique de Killing associé à l'action de G , la partie symétrique de la matrice Jacobienne $\partial \hat{f} / \partial \hat{x}$ est définie négative (contraction).

Observateur intrinsèque pour une classe de systèmes Lagrangiens. — Dans le chapitre 5, nous proposons une nouvelle méthode de construction d'observateurs asymptotiques pour une classe de système mécanique nonlinéaire : les systèmes Lagrangiens pour lesquels on mesure toutes les positions (ou configurations). Notre contribution principale est d'introduire un observateur d'état (position et vitesse) qui est invariant par rapport à tout changement de coordonnées de configuration. Les équations régissant la dynamique de cet observateur, tout comme les équations d'Euler-Lagrange, sont intrinsèques. La méthode s'appuie sur la structure Riemannienne définie par l'énergie cinétique sur l'espace des configurations. Pour prouver la convergence locale, nous montrons que la matrice Jacobienne

de la dynamique de l'observateur est défini négative (contraction) pour une métrique particulière définie sur l'espace des phases, métrique construite à partir de la matrice d'inertie et des gains de l'observateur. D'un point de vue pratique, un tel observateur intrinsèque peut être approximé, lorsque la configuration estimée est proche de celle du vrai système, par un ensemble d'équations différentielles explicites impliquant le tenseur de courbure de Riemann. Ces équations peuvent être générées automatiquement par différentiation symbolique de la métrique et de l'énergie potentielle à l'ordre 2. Une simulation numérique pour le système du Ball and Beam, un exemple pour lequel la courbure scalaire est toujours négative, montrent l'efficacité d'une telle approximation lorsque les positions mesurées sont bruitées ou incluent des dynamiques hautes fréquences négligées.

CHAPITRE 4

OBSERVATEUR ET GROUPE DE TRANSFORMATIONS

Le résultat présenté dans ce chapitre a fait l'objet d'une communication [3].

Introduction

Dans ce chapitre, nous montrons comment exploiter les symétries d'un système nonlinéaire pour la conception d'un observateur asymptotique. La contribution principale est l'introduction de la notion d'erreur d'estimation invariante et leur construction via la méthode du repère mobile de Cartan. Bien que nous n'ayons pas de résultats généraux sur la convergence de tels observateurs invariants, nous pouvons prouver pour une classe particulière de réacteurs chimiques un résultat de convergence globale asymptotique.

Considérons d'abord l'exemple simple d'un réacteur parfaitement agité de volume V avec deux espèces de concentrations c_1 et c_2 et une sortie mesurée y :

$$\begin{aligned} V \frac{d}{dt} c_1 &= F(c_1^{in} - c_1) \\ V \frac{d}{dt} c_2 &= F(c_2^{in} - c_2) \\ y &= \frac{c_1}{c_1 + c_2}. \end{aligned} \tag{34}$$

F est le débit d'entrée, et (c_1^{in}, c_2^{in}) les concentrations en entrée. Ce système est invariant sous l'action du groupe des homothéties. Ces équations de bilan ne dépendent pas en effet du fait que les concentrations (c_1, c_2) soient exprimées en g/L ou en mol/L . Cela signifie que pour toutes constantes positives M_1 et M_2 et tout mise à l'échelle, $C_1 = M_1 c_1$, $C_2 = M_2 c_2$,

$C_1^{in} = M_1 c_1^{in}$ et $C_2^{in} = M_2 c_2^{in}$, les équations demeurent inchangées :

$$\begin{aligned} V \frac{d}{dt} C_1 &= F(C_1^{in} - C_1) \\ V \frac{d}{dt} C_2 &= F(C_2^{in} - C_2). \end{aligned}$$

Notons que cette mise à l'échelle conduit pour la sortie y à une transformation homographique :

$$Y = C_1 / (C_1 + C_2) = y / (y + \frac{M_2}{M_1} (1 - y)).$$

Considérons l'observateur suivant où $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$ et $\hat{y}$ sont les estimées respectives de c_1 , c_2 et y , et k le gain de l'observateur :

$$\begin{aligned} V \frac{d}{dt} \hat{c}_1 &= F(c_1^{in} - \hat{c}_1) - k \hat{c}_1 \log \left(\frac{\hat{y}}{1 - \hat{y}} \frac{1 - y}{y} \right) \\ V \frac{d}{dt} \hat{c}_2 &= F(c_2^{in} - \hat{c}_2) - k \hat{c}_2 \log \left(\frac{1 - \hat{y}}{\hat{y}} \frac{y}{1 - y} \right) \\ \hat{y} &= \frac{\hat{c}_1}{\hat{c}_1 + \hat{c}_2}. \end{aligned} \tag{35}$$

Un calcul simple montre que cette dynamique est aussi invariante sous l'action du même groupe d'homothétie, puisque le terme d'erreur devient

$$\frac{\hat{Y}}{1 - \hat{Y}} \frac{1 - Y}{Y} = \frac{\hat{C}_1}{\hat{C}_2} \frac{C_2}{C_1} = \frac{\hat{c}_1}{\hat{c}_2} \frac{c_2}{c_1} = \frac{\hat{y}}{1 - \hat{y}} \frac{1 - y}{y}.$$

Si, à la place de $\log \left(\frac{\hat{y}}{1 - \hat{y}} \frac{1 - y}{y} \right)$, nous utilisons un terme d'erreur de la forme $(\hat{y} - y)$, alors on perd l'invariance. Cette observation a motivé ce chapitre. En effet, le terme d'erreur $(\hat{y} - y)$ n'a pas de sens physique puisque nous comparons deux fractions molaires ou massiques : on peut comprendre alors pourquoi l'invariance est perdue avec ce terme d'erreur. Pour les systèmes nonlinéaires, les méthodes de conception classique (comme celles décrites dans [56]) ou plus récentes (comme celles décrites dans [51]), reposent essentiellement sur le terme d'erreur $(\hat{y} - y)$. Ce premier chapitre est une première tentative d'écriture d'un observateur asymptotique avec des termes d'erreur nonlinéaires dérivant des symétries du système. Comme nous le verrons dans la section 4.3, nous obtenons, pour notre exemple (34), un observateur asymptotique globalement convergent pour k positif : on prouve que la dynamique de l'observateur est strictement contractante pour la métrique $ds^2 = \frac{(dc_1)^2}{(c_1)^2} + \frac{(dc_2)^2}{(c_2)^2}$ au sens de [44].

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 4.1, nous rappelons quelques résultats sur les groupes de transformations, nous définissons les observateurs invariants, et proposons une méthode pour la construction de tels observateurs. Cette méthode s'appuie sur des erreurs d'estimation invariantes qui, pour une sortie G -invariante, peuvent être calculée, comme décrit dans la section 4.2, via la méthode du repère mobile de Cartan rappelée dans l'annexe A. Nous illustrons alors cette démarche avec trois exemples d'observateur invariant : pour une classe de réacteur chimique dans la section 4.3, pour un système mécanique dans la section 4.4 et pour les systèmes linéaires dans la section 4.5. Une autre illustration pour cette notion d'erreur invariante est donnée dans l'annexe C, où l'on considère le problème d'estimation du flot optique dans une séquence vidéo. Le second ingrédient pour la construction d'observateur invariant est donné par les champs de vecteurs invariants sous l'action du groupe de transformations : nous donnons ainsi un critère différentiel qui les caractérise dans la dernière section 4.6.

Ce chapitre est d'une certaine façon la contre-partie de [50] où le problème de tracking invariant est examiné.

4.1. Groupe de transformations et invariance

Nous utilisons ici des notions sur les groupes de transformations qui sont décrites en détail dans [54]. Après avoir rappelé quelques éléments de définition d'une action de groupe, nous considérons des systèmes dynamiques invariants sous l'action de groupe de transformations et nous proposons une définition d'observateur également invariant sous l'action de ces groupes. Nous utiliserons dans ce chapitre l'adjectif "régulier" au sens du mot "analytique". L'objectif de ce chapitre est avant tout de présenter une nouvelle approche pour la construction d'observateur. Il est possible de proposer des définitions avec des conditions de régularité plus faible ($\mathcal{C}^k, k \in \mathbb{N}$ par exemple).

4.1.1. Groupe de transformations. — On se donne un ensemble $\mathcal{X}$ qui peut être plus ou moins structuré : par exemple un ensemble fini, $\mathbb{R}^n$, un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, ou une variété. On s'intéresse alors à l'ensemble $\mathbb{G}(\mathcal{X})$ des applications bijectives de $\mathcal{X}$ dans lui-même : muni de la loi de composition de fonction, cet ensemble $(\mathbb{G}(\mathcal{X}), o)$ a une structure de groupe. On dit que $\mathbb{G}(\mathcal{X})$ agit sur l'ensemble $\mathcal{X}$.

Si maintenant, l'ensemble $\mathcal{X}$ a une structure particulière, il peut s'avérer plus intéressant de se limiter à un sous groupe de $\mathbb{G}(\mathcal{X})$. Par exemple si $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, on peut se limiter au sous groupe des transformations inversibles continues de $\mathcal{X}$ dans lui-même.

Définition 1 (Action d'un groupe de transformations). — *Un groupe de transformations agissant sur un ensemble $\mathcal{X}$ est défini par un morphisme de groupe*

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{G}(\mathcal{X})$$

qui envoie un groupe quelconque $(G, \cdot)$ sur un sous ensemble de l'ensemble des applications inversibles de $\mathcal{X}$ dans lui même. Pour chaque élément g de G , on associe une application inversible sur $\mathcal{X}$ notée φ_g :

$$\varphi_{g_1 \cdot g_2}(x) = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(x) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)) \quad \forall g_1, g_2 \in G, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

On utilisera dans ce mémoire une des notations suivantes pour noter l'action du groupe de transformations :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall g \in G, \varphi_g(x) = g.x = w(g, x).$$

Les deux exemples que nous traitons dans les sections 4.3 et 4.4 illustrent l'intérêt de cette définition. Un sous-groupe de $\mathbb{G}(\mathcal{X})$ peut en effet parfois se résumer à une famille d'applications paramétrées par un nombre fini de paramètres. G représente alors le groupe où sont définis ces paramètres, et décrit comment se composent les applications du sous groupe de $\mathbb{G}(\mathcal{X})$ ainsi considéré. On parle alors de groupe de dimension finie.

4.1.2. Dynamique G -invariante. — Considérons une dynamique régulière

$$\dot{x} = f(x) \tag{36}$$

où l'état x appartient à un sous-ensemble ouvert $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^n$. Soit G un groupe de transformations local agissant sur $\mathcal{X}$ selon

$$X = \varphi_g(x), \quad g \in G,$$

où φ_g est un difféomorphisme local. Dire que G un groupe de transformations local sur $\mathcal{X}$ signifie que pour un $x \in \mathcal{X}$ donné, l'application $\varphi_g(x)$ peut n'être définie que pour des éléments $g \in G$ proches de l'identité. En outre, nous supposons la dépendance par rapport à g , régulière. Notons r la dimension du groupe G .

Définition 2 (dynamique G -invariante). — *La dynamique (36) est dite G -invariante si pour tout $g \in G$, nous avons $\forall x \in \mathcal{X}$*

$$f(\varphi_g(x)) = \frac{\partial \varphi_g}{\partial x}(x) \cdot f(x).$$

On dit alors que G est un groupe de symétrie pour le système. La définition équivaut à dire que pour tout $g \in G$, nous avons $\dot{X} = f(X)$, c'est à dire que la représentation du système demeure inchangée sous l'action du groupe de transformations.

Pour (34), le groupe de transformations G est de dimension $r = 2$, dépend de deux paramètres positifs $M_1 > 0$ et $M_2 > 0$, et son action est donnée par

$$(C_1, C_2) = \varphi_{(M_1, M_2)}(c_1, c_2) = (M_1 c_1, M_2 c_2)$$

où nous avons noté $\varphi_{(M_1, M_2)}$ l'élément de G associé aux paramètres (M_1, M_2) . Notons que les concentrations (c_1^{in}, c_2^{in}) sont aussi transformées selon $(C_1^{in}, C_2^{in}) = (M_1 c_1^{in}, M_2 c_2^{in})$. Cela revient donc à étendre l'état en y ajoutant les constantes (c_1^{in}, c_2^{in}) : c'est une extension naturelle, néanmoins nous ne considérerons pas leur dynamique $\frac{d}{dt}c_1^{in} = 0$ et $\frac{d}{dt}c_2^{in} = 0$ dans la construction de l'observateur. Si les paramètres ne sont pas constants, ou si le modèle inclue un contrôle ou des perturbations, il faut alors préciser la définition en précisant comment le groupe de transformations agit sur ces éléments, dont on n'a pas voulu tenir compte dans la définition 2.

4.1.3. Observateur G -invariant. — Considérons maintenant une application de sortie régulière $h : x \mapsto y = h(x)$ sur $\mathcal{X}$. La sortie y est définie sur un sous ensemble ouvert $\mathcal{Y}$ de $\mathbb{R}^m$ ($\dim y = m$).

Définition 3 (Observateur G -invariant). — *Considérons une dynamique G -invariante $\dot{x} = f(x)$ avec une sortie mesurée $y = h(x)$ (pas nécessairement G -invariante). L'observateur asymptotique*

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = \hat{f}(\hat{x}, h(x))$$

est dit G -invariant si et seulement si, pour tout $g \in G$, pour tout état estimé $\hat{x}$ et tout état x , nous avons

$$\frac{\partial \varphi_g}{\partial x}(\hat{x}) \cdot \hat{f}(\hat{x}, h(x)) = \hat{f}(\varphi_g(\hat{x}), h(\varphi_g(x))).$$

Cette définition signifie simplement que les équations de l'observateur demeurent inchangées

$$\frac{d}{dt}\hat{X} = \hat{f}(\hat{X}, h(X))$$

avec $\hat{X} = \varphi_g(\hat{x})$ (on suppose que $\hat{x} \in \mathcal{X}$) et $X = \varphi_g(x)$. L'observateur (35) présenté en introduction constitue un exemple d'observateur G -invariant. Dire que l'observateur est

asymptotique signifie que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{x}(t) = x(t).$$

Comment construire un observateur G -invariant ?— Une méthode consiste à utiliser deux ingrédients clés :

- **des champs de vecteurs invariants** : supposons que nous ayons un ensemble de p champs de vecteur $w_i(x)$, $i = 1, \dots, p$, définis sur l'espace d'état, invariants vis à vis de G :

$$\forall g \in G, \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad w_i(\varphi_g(x)) = \frac{\partial \varphi_g}{\partial x}(x) \cdot w_i(x).$$

- **et des fonctions scalaires invariantes** : de la forme $J_i(\hat{x}, h(x))$, $i \in \{1, \dots, p\}$, qui vérifient pour tout $g \in G$, tout $\hat{x}$ et tout x

$$J_i(\varphi_g(\hat{x}), h(\varphi_g(x))) = J_i(\hat{x}, h(x)), \quad i \in \{1, \dots, p\}.$$

Alors le système suivant

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^p (J_i(\hat{x}, y) - J_i(\hat{x}, \hat{y})) w_i(\hat{x}) \quad (37)$$

est un observateur invariant. C'est une application directe de la définition. Notons que nous n'avons pas examiné ici la convergence de $\hat{x}$ vers x . Nous avons seulement considéré la question de l'invariance.

4.2. Erreur d'estimation invariante

Nous revenons dans cette section sur le calcul de fonction scalaire invariante, via la méthode du repère mobile de Cartan. Ces fonctions permettent de construire des termes d'erreur d'estimation invariants sous l'action du groupe de transformations.

Définition 4 (Erreur d'estimation invariante). — Supposons que la dynamique régulière $\dot{x} = f(x)$ soit G -invariante. Prenons une sortie $y = h(x)$ de dimension m . Une erreur d'estimation invariante est un ensemble de m fonctions régulières dépendant de l'état estimé $\hat{x}$ et de la sortie mesurée y , $I(\hat{x}, y) = (I_1(\hat{x}, y), \dots, I_m(\hat{x}, y))$, telles que :

1. pour tout $g \in G$, pour tout $\hat{x}$ et tout x ,

$$I(\varphi_g(\hat{x}), h(\varphi_g(x))) = I(\hat{x}, h(x))$$

2. et pour tout $\hat{x}$, l'application $y \mapsto I(\hat{x}, y)$ définit un difféomorphisme s'annulant lorsque $h(x) = h(\hat{x})$:

$$I(\hat{x}, h(\hat{x})) = 0.$$

Voyons maintenant comment construire de telles fonctions invariantes I . Nous avons d'abord besoin de la définition suivante.

Définition 5 (Sortie G -invariante). — Supposons que la dynamique régulière $\dot{x} = f(x)$ soit G -invariante. Alors la sortie $\mathcal{Y} \ni y = h(x)$ est G -invariante si l'action de G sur x admet une restriction bien définie sur $\mathcal{Y}$, c'est à dire, pour $g \in G$, il existe une transformation de sortie ϱ_g sur $\mathcal{Y}$ telle que $h \circ \varphi_g = \varrho_g \circ h$.

Si $X = \varphi_g(x)$ et si l'on pose $Y = h(X)$, dire que la sortie est G -invariante signifie que Y peut se calculer à partir de y . La sortie y de (34) est G -invariante puisque $\varphi_{(M_1, M_2)}$ conduit à

$$Y = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{M_1 c_1}{M_1 c_1 + M_2 c_2} = \frac{y}{y + \frac{M_2}{M_1}(1 - y)}$$

qui définit l'action de G sur l'espace de sortie. Cette définition signifie donc que l'action de G sur l'espace d'état et l'application sortie h doivent être compatibles. Seules des applications h particulières fournissent des sorties G -invariantes : pour l'exemple (34), l'application $h(c_1, c_2) = c_1 + c_2$ ne définit pas une sortie G -invariante. En effet, $Y = C_1 + C_2$ ne peut pas se définir comme une fonction de $y = c_1 + c_2$ seulement (sauf cas particulier où $M_1 = M_2$), mais comme une fonction de y et de l'état (c_1, c_2) . D'un point de vue pratique, lorsque l'on change d'unité, on peut déterminer la valeur de l'appareil de mesure (sortie Y) à partir uniquement de sa valeur précédente (sortie y).

Théorème 1 (Existence d'erreur d'estimation invariante)

Prenons une dynamique G -invariante $\dot{x} = f(x)$ et une sortie G -invariante $y = h(x)$. Supposons que pour un x_0 , l'application régulière

$$G \ni g \mapsto \varphi_g(x)$$

soit de rang $r = \dim G$ autour de $g = Id$ avec $r \leq n = \dim x$. Alors, localement autour de x_0 il existe $m = \dim y$ fonctions invariantes régulières $I_i(\hat{x}, y)$, $i = 1 \dots m$, qui constituent une erreur d'estimation invariante.

Les hypothèses sur l'action de G impliquent que G agit effectivement (c'est à dire que le groupe d'isotropie est trivial ou discret). Cela ne constitue pas réellement une limitation. Le caractère local de ce résultat ne constitue pas une grande restriction non plus. Lorsque G est

un groupe analytique connexe avec une action analytique, les fonctions I_i sont analytiques dès que h l'est.

Preuve du théorème :

Nous utilisons ici la méthode du repère mobile rappelée dans l'annexe A, avec les notations qui y sont décrites. Dans notre cas la variété Σ correspond à l'espace dans lequel est défini $(\hat{x}, y)$ et les coordonnées locales ξ aux composantes de $(\hat{x}, y)$. L'action de G sur cet espace est bien définie puisque y est une sortie G -invariante. A tout élément $g \in G$ correspond la transformation suivante

$$(\hat{x}, y) \mapsto (\varphi_g(\hat{x}), \varrho_g(y)).$$

L'hypothèse de rang constant implique que les éléments de G proches de l'identité agissent régulièrement autour de (x_0, y) . Les coordonnées de la fibre ξ_f peuvent être formées à partir d'un sous ensemble des coordonnées de $\hat{x}$. Puisque $a = \psi_f(\hat{x}, \Xi_f)$, cela signifie que la transformation $Y = \varrho(y, a)$, correspondant à $g \in G$ associé au paramètre a , s'écrit

$$Y = \varrho(y, \psi_f(\hat{x}, \Xi_f)) := \Upsilon(y, \hat{x}, \Xi_f).$$

Il est évident que pour toute normalisation Ξ_f^0 , les m fonctions scalaires dans

$$\Upsilon(y, \hat{x}, \Xi_f^0)$$

sont invariantes. Deplus, le rang de Υ par rapport à y est maximal et égal à m . On pourra utiliser

$$I(y, \hat{x}) = \Upsilon(y, \hat{x}, \Xi_f^0) - \Upsilon(\hat{y}, \hat{x}, \Xi_f^0)$$

pour obtenir une erreur d'estimation invariante. ■

Pour l'exemple (34), l'erreur d'estimation invariante est

$$I(\hat{x}, y) = \log \left(\frac{\hat{y}}{1 - \hat{y}} \frac{1 - y}{y} \right).$$

4.3. Exemple 1 : Une classe de réacteurs chimiques

4.3.1. Le système. — Nous considérons un réacteur parfaitement agité de volume V avec n espèces de concentrations $(c_1, \dots, c_n)$:

$$\begin{aligned} V \frac{d}{dt} c_i &= F(c_i^{in} - c_i) + r_i(c_1, \dots, c_n) \\ y_i &= \frac{c_i}{\sum_{h=1}^n c_h}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

F est le débit d'entrée, et $(c_1^{in}, \dots, c_n^{in})$ sont les concentrations des espèces dans l'entrée. Les n espèces réagissent selon les termes de réaction $r_i(c_1, \dots, c_n)$: ces n fonctions sont supposées être homogènes de degré un. Nous mesurons les fractions y_i et nous cherchons à reconstruire l'état $(c_1, \dots, c_n)$.

L'exemple (34) appartient à cette classe de réacteur chimique : nous avons dans ce cas $n = 2$ et pas de termes de réactions $r \equiv 0$.

4.3.2. Groupe de transformations. — En reprenant les notations des paragraphes précédents, l'état du système $x = (c_1, \dots, c_n)$ est défini dans $\mathcal{X} = (\mathbb{R}^+)^n \subset \mathbb{R}^n$. La sortie $y = (y_1, \dots, y_n)$ prend ses valeurs dans $\mathcal{Y} = [0, 1]^n$. L'action du groupe des homothéties agissant sur l'état du système est définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad G = ((\mathbb{R}_*^+)^n, \cdot) &\longrightarrow \mathbb{G}(\mathcal{X}) & \varphi_g : \quad \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{X} \\ g = (M_1, \dots, M_n) &\longmapsto \varphi_g & (c_1, \dots, c_n) &\longmapsto (M_1 c_1, \dots, M_n c_n). \end{aligned}$$

Quant à sa restriction à $\mathcal{Y}$, elle est donnée par :

$$\begin{aligned} \rho_g : \quad \mathcal{Y} &\longrightarrow \mathcal{Y} \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto \left(\frac{M_1 y_1}{\sum_{i=1}^n M_i y_i}, \dots, \frac{M_n y_n}{\sum_{i=1}^n M_i y_i} \right). \end{aligned}$$

4.3.3. Fonction invariante. — Ce système n'est pas strictement invariant au sens de la définition 2. Pour être invariant au sens de cette définition, nous devons aussi considérer l'action du groupe des homothéties sur les concentrations en entrée c_i^{in} , et sur les paramètres cachés dans les cinétiques chimiques r_i . Avec une telle extension naturelle, nous pouvons dire qu'un tel système est invariant sous l'action du groupe des homothéties définie dans le paragraphe précédent.

Pour construire l'observateur, nous considérons les fonctions invariantes du groupe de transformations agissant sur l'espace des $((\widehat{c}_i), (y_j))$. Les équations de normalisation s'écrivent :

$$C_i^o = M_i \widehat{c}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

et la solution est donnée par

$$M_i = \frac{C_i^o}{\widehat{c}_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

où (C_i^o) est notre référence.

Comme l'action du groupe sur l'espace des sorties est donnée par

$$Y_i = \frac{M_i y_i}{\sum_{h=1}^n M_h y_h}, \quad i = 1, \dots, n$$

nous obtenons les fonctions invariantes suivantes :

$$H_i(\hat{c}, y) = \frac{\frac{C_i^o}{\hat{c}_i} y_i}{\sum_{h=1}^n \frac{C_h^o}{\hat{c}_h} y_h}, \quad i = 1, \dots, n$$

où $\hat{c} = (\hat{c}_i)$ et $y = (y_i)$. Une combinaison simple de ces fonctions invariantes conduit aux suivantes (plus symétriques) :

$$I_{ij}(\hat{c}, y) = \log \left(\frac{\hat{y}_i y_j}{\hat{y}_j y_i} \right)$$

qui donnent des termes d'erreur d'estimation invariants, pour tout i et j dans $\{1 \dots n\}$.

4.3.4. Un observateur invariant. — Pour construire l'observateur, nous utilisons les termes d'erreur d'estimation invariants I_{ij} et les n générateurs infinitésimaux de l'action de groupe agissant sur l'espace d'état :

$$v_i(c_1, \dots, c_n) = c_i \frac{\partial}{\partial c_i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

puisque ces champs de vecteur sont ici invariants. Nous obtenons alors l'observateur suivant ($k > 0$ est un paramètre de réglage) :

$$V \frac{d}{dt} \hat{c}_i = F(c_i^{in} - \hat{c}_i) + \hat{c}_i r_i \left(\left(\frac{y_j}{y_i} \right)_{1 \leq j \leq n} \right) - k \hat{c}_i \log \left(\prod_{h=1, h \neq i}^n \frac{\hat{y}_i y_h}{\hat{y}_h y_i} \right) \quad (38)$$

$$\hat{y}_i = \frac{\hat{c}_i}{\sum_{h=1}^n \hat{c}_h}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

qui est invariant sous l'action du groupe des homothéties. Notons que lorsque $\hat{c}_i = c_i$, nous retrouvons la dynamique originale, $\frac{d}{dt} \hat{c}_i = \frac{d}{dt} c_i$. Nous avons exploité la propriété d'homogénéité des termes de réaction r_i :

$$r_i(c_1, \dots, c_n) = c_i r_i \left(\frac{c_1}{c_i}, \dots, \frac{c_n}{c_i} \right) = c_i r_i \left(\frac{y_1}{y_i}, \dots, \frac{y_n}{y_i} \right).$$

4.3.5. Convergence de l'observateur. — Pour prouver la convergence, nous réalisons un changement de coordonnée :

$$\hat{\xi}_i = \log(\hat{c}_i) \quad i = 1, \dots, n$$

Les équations de l'observateur deviennent :

$$V \frac{d}{dt} \hat{\xi}_i = F(c_i^{in} \exp(-\hat{\xi}_i) - 1) + r_i \left(\left(\frac{y_j}{y_i} \right)_{1 \leq j \leq n} \right) - k \left(\sum_{h=1, h \neq i}^n (\hat{\xi}_i - \hat{\xi}_h) + \log \left(\prod_{h=1, h \neq i}^n \frac{y_h}{y_i} \right) \right)$$

La partie symétrique de la matrice Jacobienne (par rapport à $\widehat{\xi}_i$ seulement) est égale à :

$$A = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -Fc_1^{in} \exp(-\widehat{\xi}_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & -Fc_n^{in} \exp(-\widehat{\xi}_n) \end{pmatrix} + \frac{1}{V} \begin{pmatrix} -(n-1)k & k & \cdots & k \\ k & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & k \\ k & \cdots & k & -(n-1)k \end{pmatrix}$$

La seconde matrice est négative : elle admet $-nk$ comme valeur propre de multiplicité $n-1$, et 0 comme valeur propre associé au vecteur propre dont toutes les composantes sont égales à 1.

La première matrice est négative. Soit J l'ensemble des indices $\{i_1, \dots, i_r\}$ tel que pour tout $k \in J$, $c_k^{in} = 0$. Soit $\mathbf{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme la seconde matrice est définie négative sur le sous espace engendré par $\{e_k, k \in J\}$, nous pouvons conclure que A est une matrice définie négative. Ce résultat montre que l'observateur est globalement contractant (au sens de [44]) ce qui prouve la convergence globale. L'observateur (38) est donc un observateur globalement asymptotique invariant.

Pour résumer : On a montré que l'observateur est une contraction lorsque les équations sont écrites dans les coordonnées $(\widehat{\xi}_i)$ et nous avons employé la métrique Euclidienne pour exprimer la partie symétrique de la matrice Jacobienne. Il est équivalent de dire que l'observateur (38) est une contraction vis à vis de la métrique :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dc_i}{c_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n (d\xi_i)^2$$

c'est à dire la métrique de Killing du groupe de transformations agissant sur l'espace d'état du système.

4.4. Exemple 2 : Voiture non-holonome

4.4.1. Le système. — On considère maintenant l'exemple de la voiture non holonome dont la dynamique est régie par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \cos(\theta) \\ \dot{y} &= u \sin(\theta) \\ \dot{\theta} &= \frac{u}{L} \tan(\varphi). \end{aligned}$$

Comme indiqué sur la Figure 4.4, $P = (x, y)$ représente la position du milieu de l'essieu arrière, u la vitesse du véhicule, et φ l'angle avec lequel les roues sont braquées. Dans le

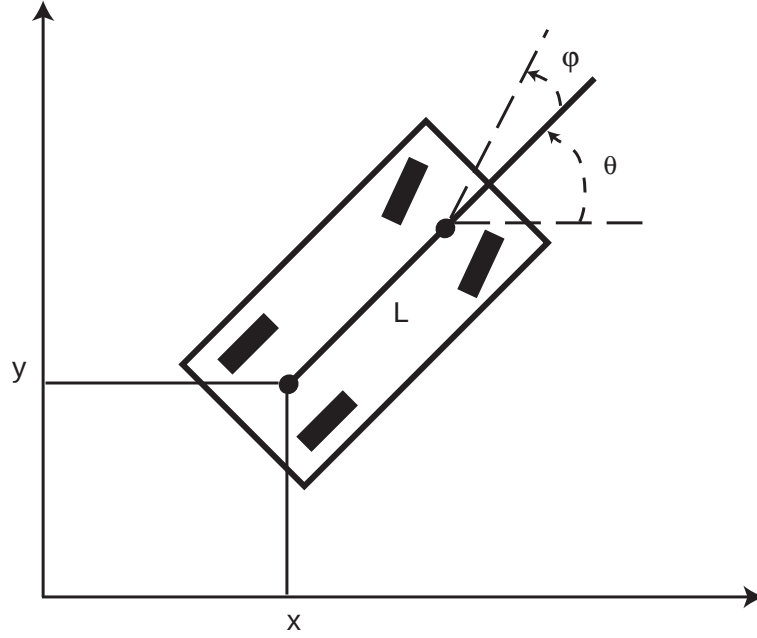


FIGURE 1. Voiture : notations

repère de Frenet, les équations peuvent se réécrire :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{P}} &= u \vec{\tau} \\ \dot{\vec{\tau}} &= \frac{u}{L} \tan(\varphi) \vec{\nu}\end{aligned}$$

avec

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\nu} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

4.4.2. Groupe de transformations. — L'état (x, y, θ) du système est défini dans l'espace $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. On suppose les commandes u et φ connues.

Ici le système est invariant par translation et rotation du système : c'est l'action du groupe $SE(2)$. Cela correspond d'une certaine façon au changement d'unité du réacteur chimique. L'action du groupe $SE(2)$ s'écrit plus précisément :

$$\begin{array}{lll} \psi : & G = SE(2) & \longrightarrow \mathbb{G}(\mathcal{X}) \\ & g = (rot_\alpha, T_{\vec{a}}) & \longmapsto \psi_g \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{lll} \psi_g : & \mathcal{X} & \longrightarrow \mathcal{X} \\ & (\vec{P}, \vec{\tau}) & \longmapsto (rot_\alpha(\vec{P} + \vec{a}), rot_\alpha(\vec{\tau})). \end{array}$$

rot_α désigne la rotation d'angle α de centre l'origine du repère et $T_{\vec{a}}$ la translation de vecteur $\vec{a}$. Il s'agit donc d'un groupe de transformations à trois paramètres.

Pour la voiture, si on applique une rotation et une translation à tout le système, les équations de la dynamique demeurent inchangées. L'invariance des équations est obtenue ici en les exprimant dans le repère de Frenet.

4.4.3. Un observateur invariant. — Nous décrivons maintenant l'observateur construit pour la voiture par les auteurs de [32]. Pour ce système, on mesure la position $\vec{P} = (x, y)$ et on cherche à reconstruire $\vec{\tau}$ soit θ . Les auteurs citent un article [59], dans lequel est décrit un observateur de type filtre de Kalman étendu, qui peut s'appliquer à la voiture. Cet observateur n'est cependant pas invariant sous l'action du groupe SE(2).

Venons en à l'observateur des auteurs de [32]. Il est donné par le système d'équations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\lambda} &= u \frac{\tan \varphi}{L} \hat{\nu} + \frac{u}{a} (\hat{\lambda} - \frac{1}{a} (\vec{P} - \vec{P}_r)) \\ \hat{\tau} &= \hat{\lambda} - \frac{1}{a} (\vec{P} - \vec{P}_r)\end{aligned}$$

où $\hat{\nu}$ est le vecteur normal à $\hat{\tau}$.

Il a été obtenu en copiant la dynamique de la variable auxiliaire $\vec{\lambda} = \vec{\tau} + \frac{1}{a}\vec{P}$, où $\vec{P}_r$ définit une position de référence.

Les auteurs démontrent que l'observateur est convergent en prenant pour le paramètre a un réel strictement négatif. Cet observateur est bien invariant :

- L'invariance par rapport aux translations est assurée par le terme $(\vec{P} - \vec{P}_r)$.
- L'invariance par rapport aux rotations est assurée par le fait que l'on travaille dans le repère de Frenet.

Contrairement à l'exemple du réacteur chimique traité dans la section 4.3, les auteurs ne rajoutent pas de terme d'erreur dans l'observateur. Comme la dynamique de $\vec{\lambda}$ est invariante sous l'action du groupe SE(2), celle de $\hat{\lambda}$ l'est aussi.

4.5. Exemple 3 : Les systèmes linéaires stationnaires

Cet exemple a pour origine une discussion avec M. Witold RESPONDEK.

4.5.1. Le système. — On considère maintenant le cas particulier des systèmes linéaires stationnaires :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax \\ y &= Cx\end{aligned}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $C \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$.

4.5.2. Groupe de transformations. — L'état x du système est défini dans $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. La sortie y est définie dans $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^p$. On considère dans la propriété de linéarité l'action du groupe de transformations suivant :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : G = (R^*, \cdot) & \longrightarrow & \mathbb{G}(\mathcal{X}) \\ g = \lambda & \longmapsto & \varphi_g \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \varphi_g : \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ x & \longmapsto & \lambda x. \end{array}$$

Quant à sa restriction à $\mathcal{Y}$, elle est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \rho_g : \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{Y} \\ y & \longmapsto & \lambda y. \end{array}$$

4.5.3. Erreur invariante. — Pour construire l'erreur d'estimation invariante, on considère l'action du groupe de transformations agissant sur l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Les équations de normalisation s'écrivent :

$$\begin{aligned}x^o &= \lambda \hat{x}, & \hat{x} &\in \mathcal{X} \\ y^o &= \lambda \hat{y}, & y &\in \mathcal{Y}\end{aligned}$$

avec $(x^o, y^o) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ la référence considérée par la technique du repère mobile de Cartan. La solution est donnée par $\lambda = \frac{x^o}{\hat{x}^i}$, pour i quelconque pris dans $\{1, \dots, n\}$. En réinjectant dans les équations de normalisation concernant la sortie, on obtient la famille suivante de fonctions invariantes :

$$H_{ij}(\hat{x}, y) = \frac{y^j}{\hat{x}^i}$$

Pour obtenir des termes d'erreur invariants, on peut considérer notamment les combinaisons suivantes :

$$e_{i,j}(y, \hat{x}) = \frac{y^j}{\hat{x}^i} - \frac{\hat{y}^j}{\hat{x}^i}$$

où $\hat{y}$ est défini par $\hat{y} = C\hat{x}$.

4.5.4. Un observateur invariant. — On construit un observateur invariant pour le système linéaire que nous considérons en utilisant les n champs de vecteurs invariants suivants :

$$v_i(\hat{x}) = \hat{x}^i \frac{\partial}{\partial \hat{x}^i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

On obtient alors l'observateur :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p k_{ij} e_{i,j}(y, \hat{x}) \right) v_i(\hat{x}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned}$$

qui se réécrit :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + K(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned}$$

avec $K = (k_{ij}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ une matrice de gain. Si (A, C) est observable (au sens du critère de rang de Kalman), alors on peut choisir K de manière à obtenir un observateur convergent. Cette analyse de la linéarité sous l'angle des groupes de transformation nous permet de retrouver l'écriture classique d'un observateur pour un système linéaire stationnaire.

4.6. Critère différentiel d'invariance

4.6.1. Champ de vecteur G -invariant. — La méthode du repère de mobile de Cartan fournit une méthode de calcul d'erreur d'estimation invariante. Le second ingrédient dans la construction d'observateur invariant, comme nous l'avons vu dans la section 4.1, est l'utilisation de champs de vecteur G -invariant. La détermination de ces champs pour un groupe de transformations donné demeure une question difficile comme cela est décrit notamment dans [54] et [55]. Cependant il existe des critères les caractérisant. Dans [55], le théorème suivant est donné :

Théorème 2 (Critère différentiel d'invariance pour un champ de vecteur)

Soit G un groupe de transformations connexe agissant sur la variété $\mathcal{X}$. Un champ de vecteur f défini sur $\mathcal{X}$ est dit G -invariant si et seulement si (crochet de Lie) $[v, f] = 0$ pour tout générateur infinitésimal v du groupe.

4.6.2. Critère différentiel d'invariance pour un observateur. — Nous allons déduire du théorème précédent un critère différentiel caractérisant les observateurs invariants. Nous nous limitons aux observateurs construits comme des systèmes dynamiques de même dimension que le système initiale dont on cherche à reconstruire l'état. En reprenant les notations des paragraphes précédents, la dynamique de l'observateur peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} = F(x, \hat{x}) = F_1(x, \hat{x}) + F_2(x, \hat{x})$$

avec

$$F_1(x, \hat{x}) = \begin{pmatrix} f(x) \\ f(\hat{x}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_2(x, \hat{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ W(h(x), \hat{x}) \end{pmatrix}.$$

On étend l'action du groupe de transformations G sur l'espace $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ où est défini l'état $(x, \hat{x})$:

$$\begin{aligned} \tilde{w} : G \times (\mathcal{X} \times \mathcal{X}) &\longrightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X} \\ (g, x, \hat{x}) &\longmapsto (w(g, x), w(g, \hat{x})) \end{aligned}$$

où w désigne l'application correspondant à l'action de G sur $\mathcal{X}$. Les générateurs infinitésimaux de l'action de G sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ sont de la forme :

$$V(x, \hat{x}) = \begin{pmatrix} v(x) \\ v(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

où v est un générateur infinitésimal de l'action de G sur $\mathcal{X}$.

Le critère d'invariance pour l'observateur s'écrit donc : pour tout générateur infinitésimal V de l'action de G sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, le champ de vecteur F définissant l'observateur doit vérifier $[V, F] = 0$.

Développons le crochet de Lie

$$[V, F] = [V, F_1] + [V, F_2].$$

Comme

$$\begin{aligned} V &= v(x) \frac{\partial}{\partial x} + v(\hat{x}) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \\ F_1 &= f(x) \frac{\partial}{\partial x} + f(\hat{x}) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \\ F_2 &= W(h(x), \hat{x}) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
[V, F_1] = & \left(v(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x} - f(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\
& + \left(v(\hat{x}) \frac{\partial f(x)}{\partial \hat{x}} - f(\hat{x}) \frac{\partial v(x)}{\partial \hat{x}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\
& + \left(v(x) \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x} - f(x) \frac{\partial v(\hat{x})}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \\
& + \left(v(\hat{x}) \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial \hat{x}} - f(\hat{x}) \frac{\partial v(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \right) \frac{\partial}{\partial \hat{x}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $[V, F_1] = 0$: le premier et le dernier terme de la somme sont nuls (invariance de f sous l'action de G sur $\mathcal{X}$), ainsi que les deux termes du milieu (x et $\hat{x}$ sont deux variables indépendantes). Donc la condition $[V, F] = 0$ se réduit à $[V, F_2] = 0$. On a

$$\begin{aligned}
[V, F_2] = & \left(v(\hat{x}) \frac{\partial W(h(x), \hat{x})}{\partial \hat{x}} - W(h(x), \hat{x}) \frac{\partial v(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \right) \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \\
& + v(x) \frac{\partial W(h(x), \hat{x})}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - W(h(x), \hat{x}) \frac{\partial v(x)}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned}$$

Cela conduit à la proposition suivante : (en reprenant les notations utilisées dans la définition de l'observateur invariant)

Proposition 1 (Critère d'invariance pour un observateur)

Un observateur est invariant sous l'action du groupe G sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ si et seulement si, pour tout générateur infinitésimal v de l'action de G sur $\mathcal{X}$, on a

$$[v(\hat{x}), W(h(x), \hat{x})]_{|x} + \frac{\partial W}{\partial y} L_v h(x) = 0$$

où $L_v h(x)$ est la dérivée de Lie de h selon v et où $[\cdot, \cdot]_{|x}$ signifie que dans le crochet, on considère x constant.

Conclusion

Considérer les groupes de transformations agissant sur le système dans l'optique de construire un observateur est une démarche raisonnable puisqu'elle permet d'une certaine manière de tenir compte de la physique du système dans la dynamique de l'observateur. On utilise alors non seulement les mesures mais aussi des informations sur la structure particulière des équations du système.

Notre contribution ici est surtout de poser le problème et de définir quelques notions qui semblent être importantes dans la conception de tels observateurs invariants, comme les erreurs d'estimation invariantes, que l'on peut calculer notamment via la méthode du repère mobile de Cartan.

La question de la convergence demeure un problème ouvert : tous les observateurs invariants ne sont pas convergents. Néanmoins, pour la classe de réacteurs chimiques que nous avons considérée, nous avons pu obtenir une preuve de convergence globale par un argument de contraction. Un lien semble exister entre la convergence d'un observateur invariant et le fait qu'il définisse une contraction pour la métrique de Killing, c'est à dire la métrique pour laquelle les transformations du groupe constituent des isométries.

CHAPITRE 5

OBSERVATEUR INTRINSÈQUE POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES LAGRANGIENS

Le résultat présenté dans ce chapitre a fait l'objet d'une publication [4].

Introduction

Les observateurs pour les systèmes nonlinéaires ont été largement étudiés ces dernières décennies, et de réels progrès ont été réalisés pendant cette période (voir par exemple, [51, 30]). Pour le contrôle de systèmes mécaniques, les symétries jouent un rôle important (voir [48, 14, 39]). Dans ce chapitre, nous montrons comment exploiter les “symétries” (comme nous l'avons déjà fait pour les systèmes chimiques considérés au chapitre 4) pour la construction d'observateurs asymptotiques pour une classe de système nonlinéaire : les systèmes Lagrangiens dont on mesure toutes les positions. Les équations d'Euler-Lagrange sont en effet intrinsèques : leur expression ne dépendent pas du choix d'un ensemble particulier de coordonnées dans l'espace des configurations. Cela représente la “symétrie” que nous allons traiter ici. Ce genre d'invariance a déjà été pleinement utilisée pour le contrôle optimal (cf., e.g., [67]) et pour l'élaboration de contrôleurs intrinsèques pour les systèmes mécaniques complètement actionnés (cf., e.g., [17]). L'observateur présenté dans ce chapitre a été construit de manière à préserver cette invariance. Tout comme dans l'article [17], notre méthode s'appuie sur la structure Riemannienne de l'espace des configurations et les outils (distance géodésique, dérivation covariante, courbure, voir pour plus de détails [27, 66]) définis par l'énergie cinétique. Des travaux importants dans la théorie du contrôle des systèmes mécaniques s'appuient déjà sur la géométrie Riemannienne. Cela inclut des travaux sur la contrôlabilité [42, 18], la planification de trajectoire [18, 19, 20], le contrôle optimal [52, 41] et la stabilisation de systèmes sous-actionnés [72, 15, 21, 12].

La preuve de la convergence locale est basée sur deux points clés :

- des calculs intrinsèques utilisant la dérivée covariante pour écrire la première variation de la dynamique de l'observateur. Ces calculs sont liés à l'équation de Jacobi dans laquelle les termes de courbure apparaissent naturellement.
- une propriété de contraction [44, 35] pour une métrique bien choisie dans l'espace des phases. Cette métrique est une extension, dans l'espace des phases, de la structure Riemannienne définie seulement sur l'espace des configuration. Cette extension dépend des gains de l'observateur. Cette métrique est étroitement liée à la métrique de Sasaki [61, 62].

Afin d'expliquer l'idée principale, considérons dans un premier temps le cas simple pour lequel la dynamique du système se réduit à celle des géodésiques (c'est à dire, pas d'énergie potentielle et pas de forces extérieures).

Dans un espace de configuration Euclidien (pas de courbure), l'équation des géodésiques s'écrit $\ddot{q} = 0$ où q sont les coordonnées Euclidiennes. En général, l'équation s'écrit $\nabla_{\dot{q}}\dot{q} = 0$ où ∇ désigne la connection Riemannienne. On suppose que la configuration q est mesurée. On cherche à construire une estimation sans bruit $\hat{q}$ et $\hat{v}$ de la position q et de la vitesse $\dot{q} = v$. Lorsque $\ddot{q} = 0$, ceci est très simple. Il suffit de considérer l'observateur de Luenberger suivant

$$\dot{\hat{q}} = \hat{v} - \alpha(\hat{q} - q), \quad \dot{\hat{v}} = -\beta(\hat{q} - q)$$

avec α et β deux constantes positives pour assurer la convergence exponentielle. Dans le cas où $\nabla_{\dot{q}}\dot{q} = 0$, on remplace le terme d'erreur $\hat{q} - q$ par un terme d'erreur intrinsèque : le gradient $\text{grad}_{\hat{q}}F$, où $F(\hat{q}, q)$ représente la moitié du carré de la distance géodésique entre $\hat{q}$ et q . On est ainsi conduit à penser qu'un bon candidat pour $\nabla_{\dot{q}}\dot{q} = 0$ pourrait être l'observateur suivant

$$\dot{\hat{q}} = \hat{v} - \alpha \text{grad}_{\hat{q}}F, \quad \nabla_{\dot{\hat{q}}}\dot{\hat{v}} = -\beta \text{grad}_{\hat{q}}F.$$

Il est invariant par rapport à tout changement de coordonnées sur q . Cet observateur est bien défini lorsque $\hat{q}$ est proche de q , puisque $\text{grad}_{\hat{q}}F$ appartient à l'espace tangent à $\hat{q}$ et comme le vecteur $\hat{v}$ est défini le long de la courbe $t \mapsto \hat{q}(t)$, sa dérivation covariante $\nabla_{\dot{\hat{q}}}\dot{\hat{v}}$ est géométriquement bien définie le long de cette courbe. Néanmoins, cela n'assure pas la convergence pour tout α et β positifs. Il est bien connu que la courbure négative impliquent des instabilités exponentielles du flot géodésique (voir, e.g., les résultats ergodiques d'Anosov sur les variétés compactes de courbure négative [6]). Ainsi il est nécessaire de compenser au moins ce type d'instabilité par l'emploi de termes d'erreur astucieux. Par suite, notre observateur convergent diffère quelque peu de celui écrit ci-dessus par l'introduction d'un terme de courbure

$$\dot{\hat{q}} = \hat{v} - \alpha \operatorname{grad}_{\hat{q}} F, \quad \nabla_{\dot{\hat{q}}} \hat{v} = -\beta \operatorname{grad}_{\hat{q}} F + R(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}} F) \hat{v}$$

où R représente le tenseur de courbure de Riemann. Puisque $R(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}} F) \hat{v}$ a une dépendance linéaire par rapport à $\operatorname{grad}_{\hat{q}} F$ et quadratique par rapport à $\hat{v}$, on obtient ainsi un réglage automatique des gains en fonction de la vitesse. De tels gains sont là pour compenser la divergence ou les oscillations dues aux effets de courbure (termes gyroscopiques).

On prouve à l'aide d'arguments de contraction [44, 35] que, pour tout α et β positifs, un tel observateur est exponentiellement convergent localement autour de toute trajectoire $t \mapsto q(t)$. En effet, lorsque $\hat{q}$ est proche de q , la première variation de la dynamique de l'observateur s'écrit :

$$\nabla_{\dot{\hat{q}}} \xi = \zeta - \alpha \xi, \quad \nabla_{\dot{\hat{q}}} \zeta = -\beta \xi$$

où $\xi = \hat{q} - q$. Cela correspond exactement à la dynamique classique d'erreur dans le cas Euclidien ($\ddot{q} = 0$) :

$$\dot{\tilde{q}} = \tilde{v} - \alpha \tilde{q}, \quad \dot{\tilde{v}} = -\beta \tilde{q}$$

avec $\tilde{q} = \hat{q} - q$ et $\tilde{v} = \hat{v} - v$. Lorsque $R = 0$, la dérivation covariante $\nabla_{\dot{\hat{q}}}$ coïncide avec l'opérateur standard d/dt dans les coordonnées Euclidiennes. L'ajout d'un potentiel ou de forces extérieures modifient légèrement la dynamique de l'observateur et requiert l'emploi de transport parallèle (voir (40)).

Ce chapitre est organisé comme suit. La section 5.1 est dédiée aux notations et définitions générales. Dans la section 5.2, nous décrivons la dynamique de l'observateur intrinsèque dans le cas général, et nous illustrons l'invariance sur un exemple simple dans lequel sont présentes des forces extérieures. Dans la section 5.3, nous prouvons la stabilité exponentielle locale (contraction) autour de toute trajectoire (convergence locale). Nous illustrons, sur le système du Ball and Beam, l'efficacité de cette méthode avec une simulation numérique décrite dans la section 5.4. Dans l'annexe B, nous explicitons la propriété de contraction.

5.1. Système Lagrangien et métrique Riemannienne

On considère un système mécanique Lagrangien avec une variété de configuration de dimension n munie d'une métrique Riemannienne (voir [27]). Les coordonnées locales de $q \in M$ sont notées $(q^i)_{i=1\dots n}$. Le Lagrangien est donné par :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j - U(q)$$

où la matrice définie positive $g(q) = (g_{ij}(q))_{i=1\dots n, j=1\dots n}$ définit la métrique (matrice d'inertie) et la fonction scalaire $U(q)$ l'énergie potentielle. Les équations d'Euler-Lagrange sont, dans les coordonnées locales,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \mathcal{L} \right) = \frac{\partial}{\partial q^i} \mathcal{L} + u^i(q, t), \quad i = 1, \dots, n$$

où $u(q, t) = (u^i(q, t))_{i=1, \dots, n}$ est une fonction connue de t et q , qui correspond en général à des entrées connues. La formulation Riemannienne des équations d'Euler-Lagrange est

$$\nabla_{\dot{q}} \dot{q} = -\text{grad}_q U(q) + g(q)^{-1} u(q, t) \equiv S(q, t)$$

où ∇ , grad_q et $g(q)^{-1}$ sont respectivement, la connection de Levi-Civita, l'opérateur gradient associé à la structure Riemannienne et l'inverse de la matrice de la métrique $g(q)$. Comme la position q est mesurée, le terme source $S(q, t)$ est un champ de vecteur sur M dépendant du temps et connu. Dans les coordonnées locales, les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent :

$$\ddot{q}^i = -\Gamma_{jk}^i(q) \dot{q}^j \dot{q}^k + S^i(q, t) \quad (39)$$

où les termes de connection Γ_{jk}^i (symboles de Christoffel) sont donnés par

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l} \right)$$

avec g^{il} les composantes de la matrice g^{-1} . Nous utilisons ici la convention de sommation : quand un indice apparaît à la fois en exposant et en indice, cela signifie que la sommation selon cet indice doit être faite.

Rappelons que $\nabla_{\dot{q}} v$ est la dérivée covariante du champ de vecteur v le long de $\dot{q}$. Dans les coordonnées locales, on obtient

$$\{\nabla_{\dot{q}} v\}^i = \dot{v}^i + \Gamma_{jk}^i(q) v^j \dot{q}^k$$

où $\{ \}^i$ signifie coordonnée i .

5.2. Un observateur intrinsèque

Dans cette section, nous définissons un observateur intrinsèque pour le système Lagrangien défini dans la section précédente. Comme les équations d'Euler-Lagrange sont indépendantes du système de coordonnée choisi (elles sont intrinsèques), nous avons construit la dynamique de l'observateur avec pour objectif la préservation de cette propriété. Après

avoir donné la définition de la dynamique de l'observateur, nous vérifierons que son expression est bien intrinsèque et nous en donnerons une illustration sur un exemple simple. La convergence de cet observateur sera considérée dans la section 5.3.

5.2.1. Dynamique de l'observateur. — On suppose que l'on mesure les positions (c'est à dire , les q^i) et que l'on ne mesure pas les vitesses (c'est à dire les $\dot{q}^i = v^i$). Notons $\hat{q}$ et $\hat{v}$ les estimations de la position q et la vitesse v . Elles sont définies par la dynamique suivante indépendante du choix d'un système de coordonnées :

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\hat{q}}} \left(\dot{\hat{q}} + \alpha \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) \right) &= \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} S(q, t) - \beta \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) \\ &+ R \left(\left(\dot{\hat{q}} + \alpha \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) \right), \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) \right) \left(\dot{\hat{q}} + \alpha \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) \right) \end{aligned}$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned} \dot{\hat{q}} &= \hat{v} - \alpha \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) \\ \nabla_{\dot{\hat{q}}} \hat{v} &= \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} S(q, t) - \beta \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) + R(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q)) \hat{v} \end{aligned} \quad (40)$$

où

- α et β sont des paramètres positifs.
- $F(\hat{q}, q)$ est la moitié du carré de la distance géodésique entre q et $\hat{q}$. Cette fonction est bien définie et régulière lorsque $\hat{q}$ et q sont suffisamment proches.
- $\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}$ est le transport parallèle de q vers $\hat{q}$ le long de la géodésique joignant q à $\hat{q}$. C'est une isométrie linéaire de l'espace tangent à q vers l'espace tangent à $\hat{q}$. Comme pour F , cet opérateur est bien défini pour q et $\hat{q}$ suffisamment proches.
- R est le tenseur de courbure de Riemann.

Dans les coordonnées locales (q^i), la dynamique de l'observateur s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\hat{q}}^i &= \hat{v}^i - \alpha \left\{ \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) \right\}^i \\ \dot{\hat{v}}^i &= -\Gamma_{jk}^i(\hat{q}) \hat{v}^j \dot{\hat{q}}^k + \left\{ \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} S(q, t) - \beta \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) + R(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q)) \hat{v} \right\}^i. \end{aligned}$$

Cet observateur ne dépend pas d'un choix particulier de système de coordonnées pour q : la connection ∇ , la fonction F , l'opérateur $\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}$ et le tenseur R sont des objets intrinsèques attachés à la structure Riemannienne sur M .

La Figure 1 illustre la dynamique de l'observateur (40). Comme l'espace des configurations M a une structure Riemannienne, on ne peut pas comparer des vecteurs appartenant à des espaces tangents en différents points de M , comme il est habituel de le faire pour les espaces Euclidiens. En effet, nous devons prendre en compte la courbure introduite

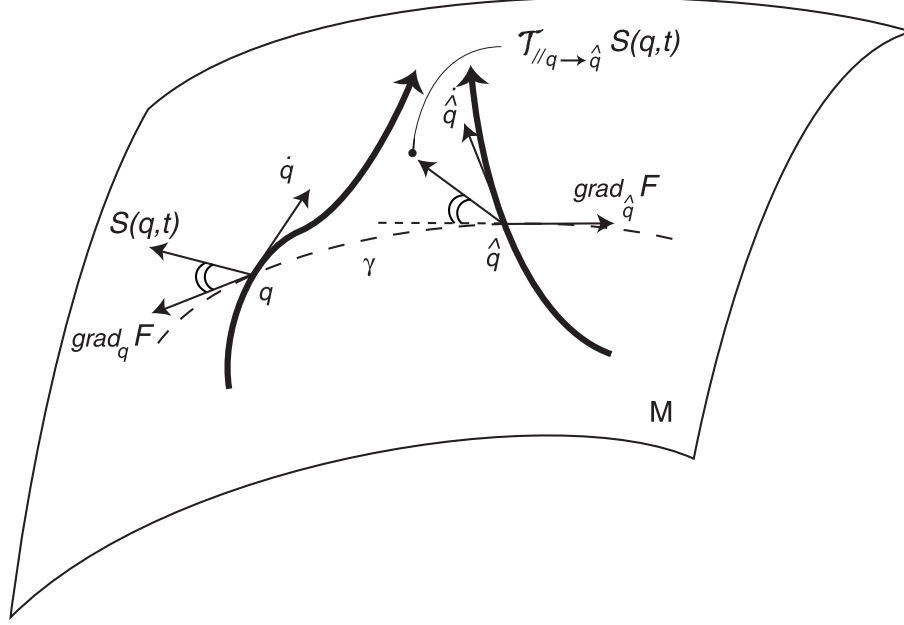


FIGURE 1. Transport parallèle du terme source $S(q, t)$ de l'espace tangent à q vers l'espace tangent à $\hat{q}$, le long de la géodésique γ .

par la métrique : le terme d'injection de sortie $\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} S(q, t)$ appartient à l'espace tangent $T_{\hat{q}} M$, alors que $S(q, t)$ appartient à $T_q M$ et ne peut donc être combiné avec $\nabla_{\dot{\hat{q}}} \hat{v} \in T_{\hat{q}} M$. Nous remplaçons aussi le terme d'erreur souvent utilisé $(\hat{q} - q)$ par $\text{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q)$ pour tenir compte de la courbure puisque il donne la direction dans laquelle on peut joindre q depuis $\hat{q}$ en suivant le chemin le plus court. Le terme $-\beta \text{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q)$ peut être interprété comme un terme de ressort si l'on considère sa contrepartie dans le cas Euclidien comme décrit en introduction. Le terme $R(\hat{v}, \text{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q))\hat{v}$ est aussi un terme de ressort, avec une raideur quadratique par rapport à la vitesse, qui représente le terme de compensation minimum nécessaire pour éliminer les possibles effets d'instabilité liés à la courbure (voir [6]). Dans la Figure 1, nous représentons l'opération de transport parallèle le long de la géodésique γ qui joint la position du système q à son estimée $\hat{q}$ sur la variété M . On peut voir par exemple que l'angle entre $S(q, t)$ et $\text{grad}_q F(\hat{q}, q)$ est le même que celui entre leurs transportés par parallélisme $\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} S(q, t)$ et $\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} \text{grad}_q F(\hat{q}, q) = -\text{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q)$.

5.2.2. Invariance sur un exemple pédagogique. — Il s'agit de montrer qu'une fois les gains α et β choisis, l'équation (40) définit un unique observateur indépendant du choix d'un système particulier de coordonnées sur la variété des configurations M .

Dynamique dans les coordonnées q . — On considère le système mécanique à un degré de liberté dont le Lagrangien est donné par :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}q^2$$

qui représente la dynamique de l'oscillateur standard avec $q \in \mathbb{R} : \ddot{q} = -q$. Pour ce système, comme l'espace des configurations est Euclidien, l'équation de l'observateur intrinsèque (40) s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{q}} &= \hat{v} - \alpha(\hat{q} - q) \\ \dot{\hat{v}} &= -q - \beta(\hat{q} - q)\end{aligned}\tag{41}$$

Si les gains α et β sont choisis positifs, la convergence de $\hat{q}$ et $\hat{v}$ vers respectivement q et $\dot{q}$ est assurée.

Dynamique dans les coordonnées r . — Considérons maintenant le changement de coordonnée suivant $r = \exp(q)$. Le Lagrangien devient

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}) = \frac{1}{2} \frac{\dot{r}^2}{r^2} - \frac{1}{2}(\ln r)^2$$

et la dynamique du système s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\dot{r} &= w \\ \dot{w} &= \frac{w^2}{r} - r \ln r\end{aligned}\quad \text{pour } r \in]0, +\infty[.$$

Ecrivons maintenant les équations de l'observateur (40) :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{r}} &= \hat{w} - \alpha \operatorname{grad}_{\hat{r}} F(r, \hat{r}) \\ \dot{\hat{w}} &= \frac{\hat{w} \hat{r}}{\hat{r}} + \mathcal{T}_{//r \rightarrow \hat{r}}(-r \ln r) - \beta \operatorname{grad}_{\hat{r}} F(r, \hat{r}) + R(\hat{w}, \operatorname{grad}_{\hat{r}} F(\hat{r}, r))\hat{w}.\end{aligned}\tag{42}$$

La métrique est donnée par $g = g_{11}$ avec $g_{11}(r) = \frac{1}{r^2}$. Le symbole de Christoffel vaut $\Gamma_{11}^1(r) = -\frac{1}{r}$. L'équation de la géodésique qui joint r_1 et r_2 est

$$\gamma(s) = \exp \left(\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) s + \ln r_1 \right)$$

avec $\gamma(0) = r_1$ et $\gamma(1) = r_2$. Ainsi la distance géodésique entre r_1 et r_2 vaut

$$d_g(r_1, r_2) = \int_0^1 \sqrt{g(\gamma(s))(\gamma'(s))^2} ds = |\ln r_2 - \ln r_1|$$

où ' signifie d/ds . Le terme $F(\hat{r}, r)$ est alors donné par

$$F(r, \hat{r}) = \frac{1}{2}(\ln r - \ln \hat{r})^2$$

et son gradient par

$$\text{grad}_{\hat{r}} F(r, \hat{r}) = \hat{r}^2 \frac{(\ln \hat{r} - \ln r)}{\hat{r}} = \hat{r}(\ln \hat{r} - \ln r).$$

L'équation du transport parallèle le long de la géodésique

$$s \mapsto \gamma(s) = \exp \left(\ln \left(\frac{\hat{r}}{r} \right) s + \ln r \right)$$

qui joint r en $s = 0$ et $\hat{r}$ en $s = 1$ s'écrit :

$$\begin{aligned} u' - \frac{1}{\gamma(s)} \gamma'(s) u &= 0 \\ u(0) &= -r \ln r \end{aligned}$$

et admet pour solution :

$$u(s) = -r \ln r \exp((\ln \hat{r} - \ln r)s).$$

Nous avons alors

$$\mathcal{T}_{//r \rightarrow \hat{r}}(-r \ln r) = u(1) = -\hat{r} \ln r.$$

Ainsi (40) dans les coordonnées r donne :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= \hat{w} - \alpha \hat{r}(\ln \hat{r} - \ln r) \\ \dot{\hat{w}} &= \frac{\hat{w} \dot{\hat{r}}}{\hat{r}} - \hat{r} \ln r - \beta \hat{r}(\ln \hat{r} - \ln r) \end{aligned}$$

Notons que le terme de courbure est ici nul. Cette annulation est indépendante du choix d'un système de coordonnées pour les configurations, alors que cela est faux pour les symboles de Christoffel.

Dans ce système de coordonnées, nous constatons que l'expression de l'observateur n'est plus si intuitive : le terme d'erreur $\hat{r}(\ln \hat{r} - \ln r)$ est nonlinéaire et diffère du terme d'erreur habituel $\hat{r} - r$. Par contre la convergence est claire puisque l'on peut vérifier qu'il s'agit juste de l'expression de (41) dans les coordonnées r . Lorsque la composante de la métrique g vaut $g_{11}(q) = 1$, nous avons en effet

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\hat{q}} F(q, \hat{q}) &= \hat{q} - q \\ \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} S(q, t) &= \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(-q) = -q \\ R(\hat{v}, \text{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q)) \hat{v} &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi la dynamique des observateurs (41) et (42) sont deux expressions du même observateur, écrit dans deux systèmes de coordonnées différents.

5.2.3. Approximation au premier ordre. — En général, nous n'avons pas de formules explicites pour F et $\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}$ pour une métrique donnée. Néanmoins, les termes de courbure sont explicites, puisque

$$\left\{ R(\hat{v}, \text{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q)) \hat{v} \right\}^i = R_{jkl}^i \hat{v}^k \{ \text{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) \}^j \hat{v}^l$$

avec R_{jkl}^i les composantes du tenseur de courbure :

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial q^j} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial q^k} + \Gamma_{pj}^i \Gamma_{kl}^p - \Gamma_{pk}^i \Gamma_{jl}^p.$$

Cependant lorsque $\hat{q}$ est proche de q , F et $\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}$ admettent les approximations suivantes

$$2F = g_{ij}(q)(\hat{q}^i - q^i)(\hat{q}^j - q^j) + O(\|\hat{q} - q\|^3) \quad (43)$$

$$\{ \text{grad}_{\hat{q}} F \}^i = \hat{q}^i - q^i + O(\|\hat{q} - q\|^2) \quad (44)$$

$$\{ \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} w \}^i = w^i - \Gamma_{jl}^i(q) w^j (\hat{q}^l - q^l) + O(\|\hat{q} - q\|^2) \quad (45)$$

pour tout w appartenant à l'espace tangent en q à M . La première égalité vient de la définition de la distance géodésique. La seconde dérive de la définition du gradient pour une fonction scalaire. La dernière vient de l'expression du transport parallèle (voir [66, 6] pour plus de précisions). Notons que les termes négligés gardent leurs formes lorsque les coordonnées sont changées de manière différentiable.

Ainsi nous pouvons construire une approximation explicite à l'ordre 2 de (40), qui dans les coordonnées locales, peut être intégrée numériquement :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{q}}^i &= \hat{v}^i - \alpha(\hat{q}^i - q^i) \\ \dot{\hat{v}}^i &= -\Gamma_{jk}^i(\hat{q}) \hat{v}^j \dot{\hat{q}}^k + S^i(q, t) - \Gamma_{jl}^i(q) S^j(q, t) (\hat{q}^l - q^l) \\ &\quad - \beta(\hat{q}^i - q^i) + R_{jkl}^i(q) \hat{v}^k (\hat{q}^j - q^j) \hat{v}^l. \end{aligned} \quad (46)$$

Dans le terme $\Gamma_{jk}^i(\hat{q}) \hat{v}^j \dot{\hat{q}}^k$, il est important de considérer $\Gamma_{jk}^i(\hat{q})$ au lieu de $\Gamma_{jk}^i(q)$ puisque c'est un terme de la dérivée covariante de $\hat{v}$ par rapport à $\hat{q}$. Néanmoins dans les termes $\Gamma_{jl}^i(q) S^j(q, t) (\hat{q}^l - q^l)$ et $R_{jkl}^i(q) \hat{v}^k (\hat{q}^j - q^j) \hat{v}^l$, nous pouvons utiliser $\Gamma_{jk}^i(\hat{q})$ et $R_{jkl}^i(\hat{q})$, puisqu'il s'agit de perturbations du second ordre. L'intérêt de (46) repose sur deux points :

- Les gains sont explicites et peuvent être calculés via la matrice d'inertie (g_{ij}) et ses dérivées par rapport à q jusqu'à l'ordre 2.
- Nous prouvons dans la suite la convergence locale de (46) dès que α et β sont strictement positifs.

5.3. Convergence de l'observateur

La dynamique de l'observateur (40) est localement ($\hat{q} \approx q$) contractante dans le sens défini par [44, 35] : quelques explications sur cette notion sont données dans l'annexe B. Comme la dynamique du système (39) est une solution de (40), on prouve ainsi la convergence locale.

Plus précisément, nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 3. — *Considérons le système défini par la dynamique (39) sur le fibré tangent TM . Considérons un sous-ensemble compacte K de TM et deux paramètres positifs α et β (les gains de l'observateur).*

Alors il existe $\varepsilon > 0$ (fonction seulement de K , α et β), $\mu > 0$ et une métrique Riemannienne G sur TM (fonction seulement de α et β) telle que, pour toute solution de (39) restant dans K ,

$$[0, T[\ni t \mapsto X(t) = (q(t), \dot{q}(t)) \in K$$

avec $T \leq +\infty$, la solution de (40), $t \mapsto \hat{X}(t) = (\hat{q}(t), \hat{v}(t))$ avec $\hat{X}(0)$ vérifiant $d_G(\hat{X}(0), X(0)) \leq \varepsilon$, est définie pour tout $t \in [0, T[$ et de plus, $\forall t \in [0, T[$

$$d_G(\hat{X}(t), X(t)) \leq d_G(\hat{X}(0), X(0)) \exp(-\mu t).$$

Ici d_G désigne la distance géodésique associé à la métrique G sur TM .

La métrique G est en fait une version modifiée de la métrique de Sasaki [61], c'est à dire, l'extension de la métrique définie par l'énergie cinétique à TM . Les gains de l'observateur α et β sont utilisés dans la définition de G dans le but d'obtenir l'estimation de convergence et le fait que, localement, la distance géodésique $d_G(\hat{X}(t), X(t))$ est une fonction décroissante de t .

La démonstration se fait en deux étapes :

- Première étape : pour tout q , on détermine de manière intrinsèque (comme pour la première variation des géodésiques) la première variation par rapport à $\hat{q}$ et $\hat{v}$ de (40). Si on note $(\hat{q} + \delta\hat{q}, \hat{v} + \delta\hat{v})$ un point défini dans le voisinage de $(\hat{q}, \hat{v})$, nous cherchons à déterminer la formulation intrinsèque de la dynamique de $(\delta\hat{q}, \delta\hat{v})$.
- Seconde étape : on déduira de cette formulation intrinsèque, une métrique G sur le fibré tangent TM pour laquelle la dynamique de l'observateur (40) est une contraction lorsque $\hat{q}$ est proche de q .

5.3.1. Première étape : première variation de la dynamique de l'observateur.

— Nous allons mimer la méthode qui a été utilisé pour obtenir l'équation de Jacobi [27], c'est à dire la première variation de l'équation des géodésiques $\nabla_{\dot{q}}\dot{q} = 0$ (voir annexe E). Tous les calculs présentés ici sont faits dans un système de coordonnées particuliers (q^i) , mais la formulation du résultat final est intrinsèque. Comme la première variation $\delta\hat{v}$ n'est pas un terme intrinsèque, nous allons définir son équivalent intrinsèque ζ qui appartient à l'espace tangent en $\hat{q}$ à M . Puis nous allons déterminer la dynamique du couple de vecteurs $(\xi = \delta\hat{q}, \zeta)$ associé à $(\delta\hat{q}, \delta\hat{v})$.

5.3.1.1. *Les vecteurs intrinsèques ξ et ζ .* — Nous introduisons un autre jeu de coordonnées ("intrinsèques") :

$$\begin{aligned}\xi^i &= \delta\hat{q}^i \\ \zeta^i &= \delta\hat{v}^i + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\delta\hat{q}^k\hat{v}^j, \quad i = 1, \dots, n\end{aligned}\tag{47}$$

On peut vérifier que ξ^i ainsi que ζ^i correspondent aux coordonnées de deux vecteurs ξ et ζ appartenant au même espace linéaire, l'espace tangent en $\hat{q}$ à M . En effet nous avons en négligeant les termes du second ordre :

- $\xi = \epsilon\dot{\gamma}(0)$, pour tout petit réel $\epsilon > 0$ avec γ une géodésique qui joint les points $\gamma(0) = \hat{q}$ et $\gamma(\epsilon) = \hat{q} + \delta\hat{q}$,
- et $\zeta = \mathcal{T}_{/\hat{q}+\delta\hat{q}\rightarrow\hat{q}}(\hat{v} + \delta\hat{v}) - \hat{v}$.

Les vecteurs tangents ξ and ζ sont définis le long de la courbe $t \mapsto \hat{q}(t)$. Nous pouvons donc considérer leur dérivations covariantes $\nabla_{\dot{q}}\xi$ et $\nabla_{\dot{q}}\zeta$ qui appartiennent aussi à l'espace tangent en $\hat{q}$ à M .

Notons que la première variation de (40) donne :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\delta\hat{q}^i) &= \delta\hat{v}^i - \alpha \left\{ \delta(\text{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q)) \right\}^i \\ \frac{d}{dt}(\delta\hat{v}^i) &= -\delta(\Gamma_{jk}^i(\hat{q})\hat{v}^j\dot{\hat{q}}^k) \\ &\quad + \left\{ \delta(\mathcal{T}_{/q\rightarrow\hat{q}}S(q, t)) - \beta \delta(\text{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q)) + \delta(R(\hat{v}, \text{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q))\hat{v}) \right\}^i\end{aligned}\tag{48}$$

5.3.1.2. *Calcul de $\nabla_{\dot{\hat{q}}}\xi$.* — Dans les coordonnées locales, nous avons pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \left\{ \nabla_{\dot{\hat{q}}}\xi \right\}^i &= \dot{\xi}^i + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\dot{\hat{q}}^k\xi^j \\ &= \delta\hat{v}^i - \alpha \left\{ \delta \left(\text{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q) \right) \right\}^i + \Gamma_{jk}^i(\hat{q}) \left(\hat{v}^k - \alpha \{ \text{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q) \}^k \right) \xi^j \\ &= \delta\hat{v}^i + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\hat{v}^k\xi^j - \alpha \left(\left\{ \delta \left(\text{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q) \right) \right\}^i + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\{ \text{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q) \}^k\xi^j \right). \end{aligned}$$

Nous obtenons alors :

$$\nabla_{\dot{\hat{q}}}\xi = \zeta - \alpha \nabla_{\xi}\text{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q)$$

avec

$$\left\{ \nabla_{\xi}\text{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q) \right\}^i = \left\{ \delta \left(\text{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q) \right) \right\}^i + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\{ \text{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q) \}^k\xi^j.$$

5.3.1.3. *Calcul de $\nabla_{\dot{\hat{q}}}\zeta$.* — la dérivée covariant de ζ est donnée par :

$$\left\{ \nabla_{\dot{\hat{q}}}\zeta \right\}^i = \dot{\zeta}^i + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\dot{\hat{q}}^k\zeta^j. \quad (49)$$

D'après (48) et (47), nous avons

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}^i &= \frac{d}{dt}(\delta\hat{v}^i) + \frac{d}{dt}(\Gamma_{jk}^i(\hat{q})\hat{v}^j\xi^k) \\ &= -\delta(\Gamma_{jk}^i(\hat{q})\hat{v}^j\dot{\hat{q}}^k) \\ &\quad + \left\{ \delta \left(\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}S(q, t) - \beta \text{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q) + R(\hat{v}, \text{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q))\hat{v} \right) \right\}^i \\ &\quad + \frac{d}{dt}(\Gamma_{jk}^i(\hat{q})\hat{v}^j\xi^k) \end{aligned}$$

Ainsi en ne conservant que les termes du premier ordre en $\delta\hat{q}$ et $\delta\hat{v}$:

$$\begin{aligned}\delta\left(\Gamma_{jk}^i(\hat{q})\hat{v}^j\dot{\hat{q}}^k\right) &= \frac{\partial\Gamma_{jk}^i(\hat{q})}{\partial\hat{q}^c}\xi^c\hat{v}^j\dot{\hat{q}}^k + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\delta\hat{v}^j\dot{\hat{q}}^k + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\hat{v}^j\dot{\xi}^k \\ &= \frac{\partial\Gamma_{jk}^i(\hat{q})}{\partial\hat{q}^c}\xi^c\hat{v}^j\dot{\hat{q}}^k \\ &\quad + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\zeta^j\dot{\hat{q}}^k - \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\Gamma_{pc}^j(\hat{q})\hat{v}^p\xi^c\dot{\hat{q}}^k \\ &\quad + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\hat{v}^j\dot{\xi}^k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\Gamma_{jk}^i(\hat{q})\hat{v}^j\xi^k\right) &= \frac{\partial\Gamma_{jk}^i(\hat{q})}{\partial\hat{q}^c}\dot{\hat{q}}^c\xi^k\hat{v}^j + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\xi^k\dot{\hat{v}}^j + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\dot{\xi}^k\hat{v}^j \\ &= \frac{\partial\Gamma_{jk}^i(\hat{q})}{\partial\hat{q}^c}\dot{\hat{q}}^c\xi^k\hat{v}^j \\ &\quad - \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\Gamma_{pc}^j(\hat{q})\xi^k\dot{\hat{q}}^c\hat{v}^p \\ &\quad + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\xi^k\left\{\mathcal{T}_{//q\rightarrow\hat{q}}S(q,t) - \beta \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q},q) + R(\hat{v},\operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q},q))\hat{v}\right\}^j \\ &\quad + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\dot{\xi}^k\hat{v}^j\end{aligned}$$

On rassemble les deux précédentes équations :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\Gamma_{jk}^i(\hat{q})\hat{v}^j\xi^k\right) - \delta\left(\Gamma_{jk}^i(\hat{q})\hat{v}^j\dot{\hat{q}}^k\right) &= -\Gamma_{jk}^i(\hat{q})\zeta^j\dot{\hat{q}}^k \\ &\quad + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\xi^k\left\{\mathcal{T}_{//q\rightarrow\hat{q}}S(q,t) - \beta \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q},q) + R(\hat{v},\operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q},q))\hat{v}\right\}^j \\ &\quad + \xi^k\dot{\hat{q}}^c\hat{v}^p\left(\frac{\partial\Gamma_{pk}^i(\hat{q})}{\partial\hat{q}^c} - \frac{\partial\Gamma_{pc}^i(\hat{q})}{\partial\hat{q}^k} + \Gamma_{jc}^i(\hat{q})\Gamma_{pk}^j(\hat{q}) - \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\Gamma_{pc}^j(\hat{q})\right)\end{aligned}$$

On obtient alors pour $\dot{\zeta}^i$:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}^i &= -\Gamma_{jk}^i(\hat{q})\dot{\zeta}^j\dot{q}^k \\ &+ \left\{ \delta\left(\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}S(q, t) - \beta \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q) + R(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q))\hat{v} \right) \right\}^i \\ &+ \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\xi^k \left\{ \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}S(q, t) - \beta \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q) + R(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q))\hat{v} \right\}^j \\ &- \xi^k \dot{q}^c \hat{v}^p R_{kcp}^i(\hat{q})\end{aligned}$$

ce qui donne l'expression "semi-intrinsèque" suivante :

$$\nabla_{\dot{\hat{q}}} \dot{\zeta} = -R(\dot{\hat{q}}, \xi)\hat{v} + \nabla_{\xi} \left(\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}S(q, t) \right) - \beta \nabla_{\xi} \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q) + \text{"}\nabla_{\xi}\text{"} \left(R(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q))\hat{v} \right)$$

où

$$\left\{ \nabla_{\xi} \left(\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}S(q, t) \right) \right\}^i = \left\{ \delta\left(\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}S(q, t) \right) \right\}^i + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\xi^k \left\{ \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}S(q, t) \right\}^j$$

et

$$\left\{ \text{"}\nabla_{\xi}\text{"} \left(R(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q))\hat{v} \right) \right\}^i = \left\{ \delta\left(R(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q))\hat{v} \right) \right\}^i + \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\xi^k \left\{ R(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q))\hat{v} \right\}^j$$

Pour le terme de courbure nous utilisons $\text{"}\nabla_{\xi}\text{"}$ au lieu de ∇_{ξ} puisqu'il ne s'agit pas d'une vraie dérivation covariante par rapport à ξ : le vecteur $R(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q))\hat{v}$ est seulement défini le long de la courbe $t \mapsto \hat{q}(t)$. Ainsi on ne peut pas définir correctement sa dérivée covariante dans une direction ξ qui n'est pas colinéaire à $\dot{\hat{q}}$.

Exprimons maintenant le terme $\text{"}\nabla_{\xi}\text{"}$ de manière intrinsèque. Puisque

$$\begin{aligned}\delta \hat{v}^i &= \zeta^i - \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\delta \hat{q}^k \hat{v}^j \\ \left\{ \delta\left(\operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q) \right) \right\}^i &= \left\{ \nabla_{\xi} \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q) \right\}^i - \Gamma_{jk}^i(\hat{q})\delta \hat{q}^k \left\{ \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q) \right\}^j\end{aligned}$$

des calculs élémentaires fournissent l'expression intrinsèque suivante :

$$\begin{aligned}\text{"}\nabla_{\xi}\text{"} \left(R(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q))\hat{v} \right) &= (\nabla_{\xi}R)(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q))\hat{v} + R(\hat{v}, \nabla_{\xi} \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q))\hat{v} \\ &+ R(\zeta, \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q))\hat{v} + R(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}}F(\hat{q}, q))\zeta.\end{aligned}$$

où $\nabla_{\xi}R$ désigne la dérivée covariante du tenseur de courbure le long de ξ .

Finalement, nous obtenons la formulation intrinsèque suivante pour la première variation de (40) par rapport à $\hat{q}$ et $\hat{v}$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\hat{q}}} \xi &= \zeta - \alpha \nabla_{\xi} \text{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) \\ \nabla_{\dot{\hat{q}}} \zeta &= -R(\dot{\hat{q}}, \xi) \hat{v} + \nabla_{\xi} (\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} S(q, t)) - \beta \nabla_{\xi} \text{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) \\ &\quad + (\nabla_{\xi} R)(\hat{v}, \text{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q)) \hat{v} + R(\hat{v}, \nabla_{\xi} \text{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q)) \hat{v} \\ &\quad + R(\zeta, \text{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q)) \hat{v} + R(\hat{v}, \text{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q)) \zeta \end{aligned} \quad (50)$$

où ξ correspond à la première variation de $\hat{q}$. Quand $S = 0$ et $F = 0$, on retrouve l'équation classique de Jacobi :

$$\frac{D^2 \xi}{Dt^2} = -R(\dot{\hat{q}}, \xi) \dot{\hat{q}}$$

avec $D/Dt = \nabla_{\dot{\hat{q}}}$.

5.3.1.4. Première variation pour $\hat{q}$ proche de q . — Supposons que $\hat{q}$ est proche de q (on ne suppose pas ici que $\hat{v}$ est proche de v). Alors l'équation de la première variation devient beaucoup plus simple puisque en ne gardant que les termes du premier ordre en $\hat{q} - q$:

$$\text{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) = 0, \quad \nabla_{\xi} \text{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) = \xi \quad \text{et} \quad \dot{\hat{q}} = \hat{v}.$$

Deplus

$$\left\{ \nabla_{\xi} (\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} S(q, t)) \right\}^i = \left\{ \delta (\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} S(q, t)) \right\}^i + \Gamma_{jk}^i(\hat{q}) \{ \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} S(q, t) \}^k \xi^j$$

Comme

$$\left\{ \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} S(q, t) \right\}^i = S(q, t)^i - \Gamma_{jk}^i(q) (\hat{q}^j - q^j) S(q, t)^k$$

Pour q proche de $\hat{q}$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} \left\{ \delta (\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} S(q, t)) \right\}^i &= -\Gamma_{jk}^i(q) \xi^j S(q, t)^k \\ \Gamma_{jk}^i(\hat{q}) \{ \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} S(q, t) \}^k \xi^j &= \Gamma_{jk}^i(q) \xi^j S(q, t)^k \end{aligned}$$

à des termes du second ordre près en $(\hat{q} - q)$. Ainsi

$$\nabla_{\xi} (\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} S(q, t)) = 0.$$

Donc, pour $q = \hat{q}$, (50) devient

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla_{\dot{\hat{q}}} \xi &= \zeta - \alpha \xi \\ \nabla_{\dot{\hat{q}}} \zeta &= -\beta \xi\end{aligned}} \quad (51)$$

D'une certaine manière, nous retrouvons le cas Euclidien avec l'observateur classique de Luenberger décrit en introduction. Cela résulte de la compensation des termes de courbure.

5.3.2. Seconde étape : analyse des propriétés de contraction. — A partir de (51), nous montrons d'abord que la dynamique de l'observateur est strictement contractante lorsque $\hat{q} = q$. Des arguments élémentaires de continuité permettent ensuite de garantir la propriété de contraction lorsque $\hat{q}$ reste proche de q : cette démarche explique la contrainte imposée à la condition initiale pour la dynamique de l'observateur. Pour parler de contraction, nous devons d'abord définir une métrique sur l'espace d'état de l'observateur, c'est à dire, sur le fibré tangent TM .

5.3.2.1. Structure Riemannienne sur le fibré tangent TM . — Puisque les gains des observateurs α et β sont positifs, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

est Hurwitz et il existe une matrice symétrique définie positive Q telle que

$$A^t Q + Q A = -I$$

Soit

$$Q = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

et considérons la quantité

$$V(\xi, \zeta) = \frac{a}{2} \langle \xi, \xi \rangle + c \langle \xi, \zeta \rangle + \frac{b}{2} \langle \zeta, \zeta \rangle \quad (52)$$

où $\langle, \rangle$ désigne le produit scalaire associé à la métrique g déduit à partir de l'énergie cinétique. Cette quantité munit TM d'une métrique, puisque Q est définie positive : dans les coordonnées locales (q^i, v^i) , la longueur du petit vecteur $(\delta q^i, \delta v^i)$ tangent en (q, v) à

TM est

$$\begin{aligned} V\left(\delta q, (\delta v^i + \Gamma_{kl}^i(q)v^k\delta q^l)_{i=1\dots n}\right) &= \frac{a}{2} g_{ij} \delta q^i \delta q^j \\ &\quad + c g_{ij} (\delta v^i + \Gamma_{kl}^i(q)v^k\delta q^l) \delta q^j \\ &\quad + \frac{b}{2} g_{ij} (\delta v^i + \Gamma_{kl}^i(q)v^k\delta q^l) (\delta v^j + \Gamma_{kl}^j(q)v^k\delta q^l) \end{aligned}$$

Dans les coordonnées locales (q^i, v^i) , la métrique est une matrice $2n \times 2n$ dont les composantes sont des fonctions scalaires de q et v . En notant $X = (q, v)$, on désignera par $G(X)$ la matrice définissant cette métrique sur TM . Il s'agit d'une version légèrement modifiée de la métrique de Sasaki sur TM (voir [61, 62]) : on obtient la métrique de Sasaki avec $(a, b, c) = (2, 2, 0)$.

5.3.2.2. Analyse de la convergence. — Lorsque ξ et ζ vérifient (51), un calcul simple conduit à

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= a\langle \nabla_{\dot{q}} \xi, \xi \rangle + c\langle \nabla_{\dot{q}} \xi, \zeta \rangle + c\langle \nabla_{\dot{q}} \zeta, \xi \rangle + b\langle \nabla_{\dot{q}} \zeta, \zeta \rangle \\ &= -\frac{1}{2}(\langle \xi, \xi \rangle + \langle \zeta, \zeta \rangle). \end{aligned}$$

Ainsi il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\frac{dV}{dt} \leq -\lambda V.$$

Cela signifie que la dynamique de l'observateur (40) est une stricte contraction pour la métrique $G(X)$ lorsque $\hat{q} = q$ quelque soit la valeur de $\hat{v}$.

Afin de le reformuler, notons $\dot{X} = \Upsilon(X, \hat{X})$ l'observateur (40). Par construction, $\dot{X} = \Upsilon(X, X)$ correspond à la vraie dynamique (39). L'inégalité $\frac{dV}{dt} \leq -\lambda V$ signifie seulement que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\left. \frac{\partial G}{\partial X} \right|_{\hat{X}} \Upsilon(X, \hat{X}) + \left(\left. \frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{X}} \right|_{(X, \hat{X})} \right)^t G(\hat{X}) + G(\hat{X}) \left(\left. \frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{X}} \right|_{(X, \hat{X})} \right) \leq -\lambda G(\hat{X}) \quad (53)$$

pour $X = (q, v)$ et $\hat{X} = (q, \hat{v})$ avec q, v et $\hat{v}$ arbitraires. G est définie positive et la dépendance de (53) par rapport à X et $\hat{X}$ est régulière. Ainsi, pour tout $0 < \rho < \lambda$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout X dans le compact K et tout $\hat{X}$ vérifiant $d_G(X, \hat{X}) \leq \varepsilon$, nous avons

$$\left. \frac{\partial G}{\partial X} \right|_{\hat{X}} \Upsilon(X, \hat{X}) + \left(\left. \frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{X}} \right|_{(X, \hat{X})} \right)^t G(\hat{X}) + G(\hat{X}) \left(\left. \frac{\partial \Upsilon}{\partial \hat{X}} \right|_{(X, \hat{X})} \right) \leq -\rho G(\hat{X}).$$

Supposons que $\hat{X}(0)$ est suffisamment proche de $X(0)$, c'est à dire, $d_G(X(0), \hat{X}(0)) \leq \varepsilon$. D'après l'annexe B, nous avons pour $t > 0$ petit,

$$d_G(\hat{X}(t), X(t)) \leq d_G(\hat{X}(0), X(0)) \exp(-\frac{\rho}{2}t).$$

Ainsi, comme décrit dans la Figure 2, pour tout temps $t \in [0, T[$, $d_G(\hat{X}(t), X(t)) \leq \varepsilon$ et $\hat{X}(t)$ demeure dans la région de contraction. Par ailleurs nous avons une convergence exponentielle avec $\mu = \rho/2$. la preuve du théorème 3 est ainsi achevée.

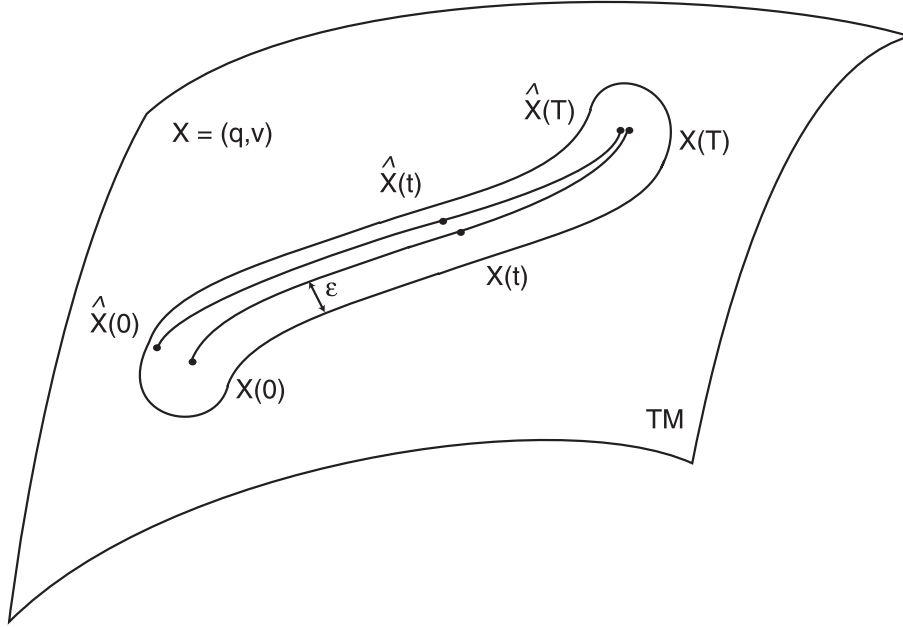


FIGURE 2. Tube de contraction

5.4. Exemple : ball and beam

Nous avons choisi de traiter l'exemple classique du Ball and Beam [38] parce que la courbure scalaire de la métrique donnée par sa matrice d'inertie est strictement négative. Les résultats obtenus en simulation montrent l'intérêt de l'observateur asymptotique intrinsèque : on peut en effet choisir des gains petits afin de rejeter le bruit tout en annulant les effets négatifs dus à la courbure.

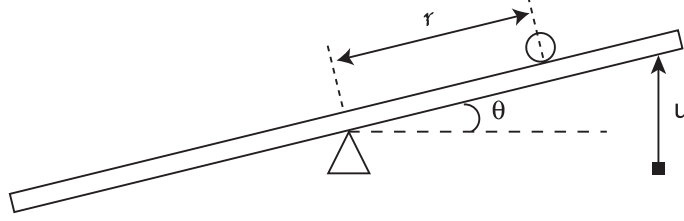


FIGURE 3. Ball and Beam

5.4.1. Dynamique du système. — nous considérons une version normalisée du système ball and beam (bille sur un rail), comme montré dans la Figure 3, avec r la distance de la balle au centre de la planche, et θ l'angle de la planche avec l'horizontale. Un couple u est appliqué pour contrôler le système.

L'énergie cinétique est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + (1 + r^2) \dot{\theta}^2 \right)$$

et l'énergie potentielle de gravitation par :

$$U = r \sin \theta.$$

Nous obtenons alors la dynamique réduite suivante :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v_r \\ \dot{\theta} &= v_\theta \\ \dot{v}_r &= r v_\theta^2 - \sin \theta \\ \dot{v}_\theta &= \frac{-2r}{1 + r^2} v_r v_\theta + \frac{u - r \cos \theta}{1 + r^2} \end{aligned} \tag{54}$$

5.4.2. L'observateur intrinsèque. —

Éléments de métrique. — La matrice des composantes de la métrique g définie par l'énergie cinétique s'écrit dans ces coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + r^2 \end{pmatrix}$$

Les symboles de Christoffel non nuls sont :

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -r \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{12}^2 = \frac{r}{1 + r^2} \end{aligned}$$

Les composantes non nulles du tenseur de courbure de Riemann sont :

$$\begin{aligned} R_{122}^1 &= -\frac{1}{1+r^2} \\ R_{212}^1 &= +\frac{1}{1+r^2} \\ R_{121}^2 &= +\frac{1}{(1+r^2)^2} \\ R_{211}^2 &= -\frac{1}{(1+r^2)^2} \end{aligned}$$

La courbure scalaire est alors :

$$Rs = g^{li} R_{pli}^p = \frac{-2}{(1+r^2)^2}$$

Le ball and beam a une courbure scalaire strictement négative.

Expression de l'observateur. — Nous considérons l'observateur intrinsèque approximé (46) :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= \hat{v}_r - \alpha(\hat{r} - r) \\ \dot{\hat{\theta}} &= \hat{v}_\theta - \alpha(\hat{\theta} - \theta) \\ \dot{\hat{v}}_r &= \hat{r}\dot{\hat{\theta}}\hat{v}_\theta + \left(-\sin\theta + \hat{r}(\hat{\theta} - \theta)\frac{u - r\cos\theta}{1+r^2} \right) \\ &\quad - \beta(\hat{r} - r) + \left(\frac{-1}{1+\hat{r}^2}\hat{v}_r\hat{v}_\theta(\hat{\theta} - \theta) + \frac{1}{1+\hat{r}^2}\hat{v}_\theta^2(\hat{r} - r) \right) \\ \dot{\hat{v}}_\theta &= \frac{-\hat{r}}{1+\hat{r}^2}(\dot{\hat{r}}\hat{v}_\theta + \hat{v}_r\dot{\hat{\theta}}) \\ &\quad + \left(\frac{u - r\cos\theta}{1+r^2} - \frac{\hat{r}}{1+\hat{r}^2} \left((\hat{r} - r)\frac{u - r\cos\theta}{1+r^2} + (\hat{\theta} - \theta)(-\sin\theta) \right) \right) \\ &\quad - \beta(\hat{\theta} - \theta) + \left(\frac{1}{(1+\hat{r}^2)^2}\hat{v}_r^2(\hat{\theta} - \theta) + \frac{-1}{(1+\hat{r}^2)^2}\hat{v}_r\hat{v}_\theta(\hat{r} - r) \right) \end{aligned} \tag{55}$$

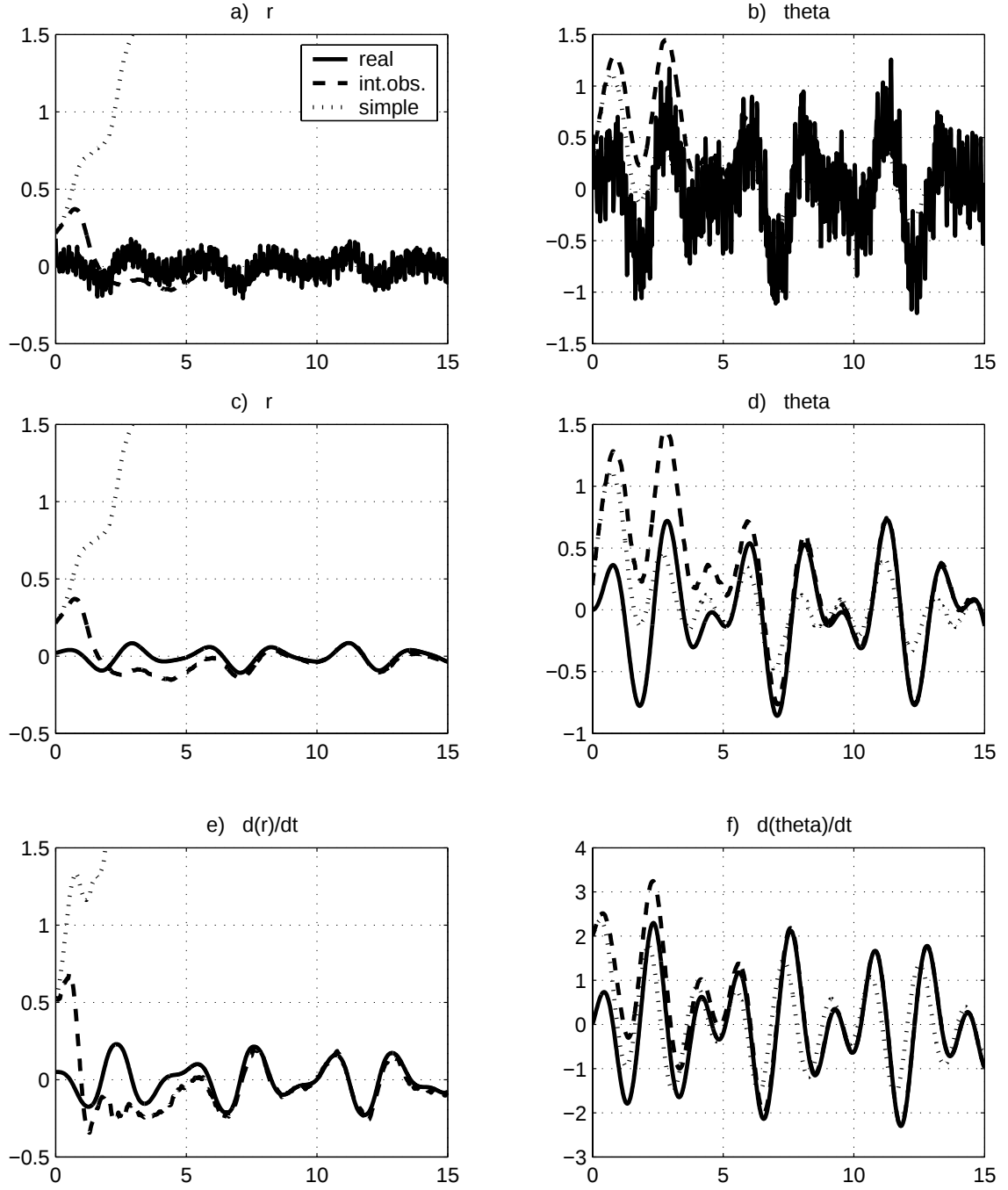


FIGURE 4. Simulation de l'observateur pour le ball and beam : real = vrai système (54) , int obs = observateur intrinsèque (55), simple = observateur (56).

5.4.3. Simulation numérique. — Nous avons choisi pour la simulation présentée dans la Figure 4, un contrôle qui maintient la balle en oscillation près du point d'équilibre instable ($r = 0, \theta = 0, v_r = 0, v_\theta = 0$) : $u = -20 \theta + 101 r$. Comme r reste petit, la courbure scalaire garde une valeur proche de -2 . Deplus, nous avons rajouté des signaux hautes fréquences b_r et b_θ respectivement aux mesures r et θ pour simuler des imperfections des capteurs et des dynamiques hautes fréquences négligées.

Pour montrer l'importance du transport parallèle et de la compensation de courbure, nous avons comparé l'observateur intrinsèque (55), avec le suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{r}} &= \hat{v}_r - \alpha(\hat{r} - r) \\ \dot{\hat{\theta}} &= \hat{v}_\theta - \alpha(\hat{\theta} - \theta) \\ \dot{\hat{v}}_r &= \hat{r}\hat{v}_\theta^2 - \sin \theta - \beta(\hat{r} - r) \\ \dot{\hat{v}}_\theta &= \frac{-2\hat{r}}{1 + \hat{r}^2}\hat{v}_r\hat{v}_\theta - \frac{r \cos \theta - u}{1 + r^2} - \beta(\hat{\theta} - \theta)\end{aligned}\tag{56}$$

C'est un observateur standard avec un terme d'injection de sortie pour r et θ . Il est convergent pour des gains suffisamment grands en supposant que les vitesses restent bornées. Cet observateur est très efficace pour les basses vitesses où les termes gyroscopiques ne sont pas trop grands.

Les conditions initiales pour la simulation sont :

	Vrai Système	Observateurs (55) et (56)
r	0.02	0.021
v_r	0.05	0.525
θ	0	0.2
v_θ	0	2

Si les gains α et β sont choisis suffisamment grands, les observateurs (55) et (56) sont alors tous les deux convergents. Néanmoins, les signaux hautes fréquences b_r et b_θ ne sont alors pas filtrés.

Pour la simulation présentée dans la Figure 4, nous avons choisi les valeurs suivantes pour les gains :

$$\begin{aligned}\omega_o &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \alpha &= 2\omega_o \\ \beta &= \omega_o^2\end{aligned}$$

puisque en valeur absolue, la courbure scalaire a un maximum de valeur 2.

Dans la Figure 4, les graphes c et d sont des copies des graphes a et b, où la position réelle du système r et θ sont représentés sans les signaux hautes fréquences b_r et b_θ introduits par les capteurs. Nous pouvons ainsi voir que l'observateur (56) ne converge pas : le paramètre β n'est pas assez grand pour compenser les effets de la courbure négative. Cependant l'observateur intrinsèque (55) est convergent. Cela montre l'importance du terme de courbure, qui est quadratique par rapport aux vitesses, dans l'expression de l'observateur.

5.5. Système Lagrangien avec un terme de frottement

Cette section représente un complément à la publication [4].

5.5.1. Dynamique de l'observateur intrinsèque. — Nous reprenons les systèmes Lagrangiens introduits à la section 5.1, en ajoutant un terme de frottement à la dynamique :

$$\begin{aligned}\dot{q} &= v \\ \nabla_{\dot{q}} v &= S(q, t) - A(q)\dot{q}.\end{aligned}$$

$A(q)$ est une matrice dont la partie symétrique est définie positive, au sens de la métrique donnée par la matrice d'inertie sur la variété de configuration.

Nous supposons toujours que nous mesurons la configuration q et nous cherchons à estimer la vitesse $\dot{q}$. Considérons l'observateur intrinsèque suivant :

$$\begin{aligned}\hat{\dot{q}} &= \hat{v} - \alpha \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) \\ \nabla_{\hat{\dot{q}}} \hat{v} &= \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} S(q, t) - \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} (A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \hat{\dot{q}}) \\ &\quad - \beta \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) + R(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q)) \hat{v}\end{aligned}\tag{57}$$

5.5.2. Première variation de l'équation de l'observateur (57). — En reprenant les calculs faits dans les sections précédentes, la première variation de la dynamique (57) s'écrit

$$\begin{aligned}\nabla_{\hat{\dot{q}}} \xi &= \zeta - \alpha \nabla_{\xi} \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) \\ \nabla_{\hat{\dot{q}}} \zeta &= -R(\hat{\dot{q}}, \xi) \hat{v} + \nabla_{\xi} (\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} S(q, t)) - \nabla_{\xi} (\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} (A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \hat{\dot{q}})) \\ &\quad - \beta \nabla_{\xi} \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q) + (\nabla_{\xi} R)(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q)) \hat{v} + R(\hat{v}, \nabla_{\xi} \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q)) \hat{v} \\ &\quad + R(\zeta, \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q)) \hat{v} + R(\hat{v}, \operatorname{grad}_{\hat{q}} F(\hat{q}, q)) \zeta\end{aligned}\tag{58}$$

avec

$$\left\{ \nabla_{\xi} \left(\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{\hat{q}}) \right) \right\}^i = \left\{ \delta \left(\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{\hat{q}}) \right) \right\}^i + \Gamma_{jk}^i(\hat{q}) \xi^k \left\{ \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{\hat{q}}) \right\}^j.$$

Première variation pour $q = \hat{q}$. — Nous procédons comme dans les sections précédentes pour montrer la convergence locale de cet observateur :

1. nous montrons d'abord que l'observateur (57) est contractant pour $\hat{q} = q$,
2. puis nous utilisons des arguments de continuité, pour prouver que le résultat est préservé pour $\hat{q}$ proche de q .

Nous déterminons maintenant l'expression de cette première variation (58) pour $q = \hat{q}$. Il nous manque donc à déterminer l'expression de $\nabla_{\xi} \left(\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{\hat{q}}) \right)$.

Expression dans des coordonnées locales de $\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{\hat{q}})$. —

$$\left\{ \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{\hat{q}}) \right\}^i = \left\{ A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{\hat{q}} \right\}^i - \Gamma_{jk}^i(q) (\hat{q}^j - q^j) \left\{ A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{\hat{q}} \right\}^k$$

d'où

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{\hat{q}}) \right\}^i &= A(q)_j^i (\hat{q}^j + \Gamma_{mc}^j(q) (\hat{q}^m - q^m) \dot{\hat{q}}^c) \\ &\quad - \Gamma_{jk}^i(q) (\hat{q}^j - q^j) \left(A(q)_h^k (\hat{q}^h + \Gamma_{mc}^h(q) (\hat{q}^m - q^m) \dot{\hat{q}}^c) \right). \end{aligned}$$

Si l'on ne conserve que les termes du premier ordre en $\hat{q} - q$

$$\left\{ \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{\hat{q}}) \right\}^i = A(q)_j^i \dot{\hat{q}}^j + A(q)_j^i \Gamma_{mc}^j(q) (\hat{q}^m - q^m) \dot{\hat{q}}^c - \Gamma_{jk}^i(q) (\hat{q}^j - q^j) A(q)_h^k \dot{\hat{q}}^h.$$

Calcul du premier terme $\delta \left(\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{\hat{q}}) \right)$:—

$$\begin{aligned} \left\{ \delta \left(\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{\hat{q}}) \right) \right\}^i &= \delta \left(A(q)_j^i \dot{\hat{q}}^j + A(q)_j^i \Gamma_{mc}^j(q) (\hat{q}^m - q^m) \dot{\hat{q}}^c \right. \\ &\quad \left. - \Gamma_{jk}^i(q) (\hat{q}^j - q^j) A(q)_h^k \dot{\hat{q}}^h \right) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left\{ \delta \left(\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{\hat{q}}) \right) \right\}^i &= A(q)_j^i \dot{\xi}^j \\ &\quad + A(q)_j^i \Gamma_{mc}^j(q) \xi^m \dot{\hat{q}}^c + A(q)_j^i \Gamma_{mc}^j(q) (\hat{q}^m - q^m) \dot{\xi}^c \\ &\quad - \Gamma_{jk}^i(q) \xi^j A(q)_h^k \dot{\hat{q}}^h - \Gamma_{jk}^i(q) (\hat{q}^j - q^j) A(q)_h^k \dot{\xi}^h. \end{aligned}$$

Comme

$$\xi^i = \{\nabla_{\dot{q}} \xi\}^i - \Gamma_{jk}^i(\hat{q}) \xi^j \dot{q}^k$$

et, comme ξ et $(\hat{q} - q)$ sont petits :

$$\xi^i = \{\nabla_{\dot{q}} \xi\}^i - \Gamma_{jk}^i(q) \xi^j \dot{q}^k.$$

On obtient en ne conservant que les termes du premier ordre en ξ et $(\hat{q} - q)$:

$$\begin{aligned} \left\{ \delta \left(\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{q}) \right) \right\}^i &= A(q)_j^i \{\nabla_{\dot{q}} \xi\}^j - A(q)_j^i \Gamma_{mc}^j(q) \xi^m \dot{q}^c \\ &\quad + A(q)_j^i \Gamma_{mc}^j(q) \xi^m \dot{q}^c + A(q)_j^i \Gamma_{mc}^j(q) (\hat{q}^m - q^m) \{\nabla_{\dot{q}} \xi\}^c \\ &\quad - \Gamma_{jk}^i(q) \xi^j A(q)_h^k \dot{q}^h - \Gamma_{jk}^i(q) (\hat{q}^j - q^j) A(q)_h^k \{\nabla_{\dot{q}} \xi\}^h \end{aligned}$$

qui se simplifie :

$$\begin{aligned} \left\{ \delta \left(\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{q}) \right) \right\}^i &= \left\{ \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \nabla_{\dot{q}} \xi) \right\}^i \\ &\quad - \Gamma_{jk}^i(q) \xi^j A(q)_h^k \dot{q}^h. \end{aligned} \quad (59)$$

Traitement du second terme $\Gamma_{jk}^i(\hat{q}) \xi^k \left\{ \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{q}) \right\}^j$:— au premier ordre en ξ et en $q - \hat{q}$:

$$\Gamma_{jk}^i(\hat{q}) \xi^k \left\{ \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{q}) \right\}^j = \Gamma_{jk}^i(\hat{q}) \xi^k A(q)_h^j \dot{q}^h \quad (60)$$

D'où l'expression de $\nabla_{\xi} \left(\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{q}) \right)$ pour q proche de $\hat{q}$. — En rassemblant les résultats précédents (59) et (60), on obtient :

$$\nabla_{\xi} \left(\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{q}) \right) = \mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \nabla_{\dot{q}} \xi).$$

Lorsque $\hat{q} = q$, nous avons donc $\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}} = Id_{T_q(M)} = \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q}$ et :

$$\nabla_{\xi} \left(\mathcal{T}_{//q \rightarrow \hat{q}}(A(q) \mathcal{T}_{//\hat{q} \rightarrow q} \dot{q}) \right) = A(\hat{q}) \nabla_{\dot{q}} \xi.$$

L'équation de première variation pour (57), s'écrit pour $\hat{q} = q$

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{q}} \xi &= \zeta - \alpha \xi \\ \nabla_{\dot{q}} \zeta &= -\beta \xi - A(\hat{q})(\zeta - \alpha \xi) \end{aligned}$$

(61)

5.5.3. Analyse des propriétés de contraction. — Examinons maintenant les propriétés de contraction de (61). Introduisons le changement de variable

$$\psi = \zeta - \alpha\xi.$$

L'équation (61) se réécrit dans les coordonnées (ξ, ψ)

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\hat{q}}} \xi &= \psi \\ \nabla_{\dot{\hat{q}}} \psi &= -\beta\xi - (A(\hat{q}) + \alpha I_n)\psi\end{aligned}\tag{62}$$

où I_n désigne la matrice identité de taille n .

Nous supposons les paramètres α et β strictement positifs. Considérons maintenant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\xi, \psi) = \frac{\beta}{2} \langle \xi, \xi \rangle_{g(\hat{q})} + \frac{1}{2} \langle \psi, \psi \rangle_{g(\hat{q})}.$$

Sa dérivée vaut :

$$\dot{V} = -\langle \psi, (A(\hat{q}) + \alpha I_n)\psi \rangle_{g(\hat{q})} \leq 0.$$

La dérivée $\dot{V}$ est seulement semi-définie négative ce qui ne permet pas d'obtenir un résultat de contraction : mais cette fonction V permet de voir que la matrice A a un effet qui va dans le même sens que celui du paramètre α . En effet, le terme $-\langle \psi, A(\hat{q})\psi \rangle_{g(\hat{q})}$ est négatif puisqu'il résulte d'un terme de frottement. Il semble donc raisonnable de penser qu'il existe une métrique W (dépendant de $\hat{q}$) pour laquelle la dérivée $\dot{W}$ est définie négative, quitte à rajouter des hypothèses supplémentaires sur la matrice A . Nous n'avons pas su pour l'instant déterminer cette métrique. Si on peut trouver une telle métrique, on pourra alors conclure à la convergence locale de (57).

Conclusion

Les résultats obtenus en simulation (pour l'exemple du ball and beam notamment, que nous avons traité dans la section 5.4) tendent à montrer que la région de convergence de notre observateur intrinsèque (40) est assez large. Cela peut être lié au fait que nous avons obtenu un résultat de contraction lorsque la position estimée $\hat{q}$ est proche de la position réelle q , même si alors l'erreur faite pour l'estimation de la vitesse est importante. Dans notre analyse de la convergence, nous n'avons pas complètement exploité cette propriété non locale. Il est possible, qu'en présence de structure additionnelle, comme par exemple dans le cas où M serait un groupe de Lie munie d'une métrique invariante à droite, on puisse démontrer un résultat de convergence plus fort. L'observateur (40) a une expression indépendante des coordonnées et pourrait donc, au moins formellement, être appliqué à

des systèmes mécaniques de dimension infinie comme les fluides parfaits incompressibles pour lesquels le tenseur de courbure défini dans [6, 5] est explicitement donné dans [60].

CONCLUSION SECONDE PARTIE

Dans cette partie, nous avons mis en perspective la notion d'erreur, en considérant le problème de la synthèse d'observateur pour des systèmes nonlinéaires. Ces systèmes présentent en effet des invariances qui les structurent, et notre démarche a consisté à écrire des observateurs avec les mêmes invariances. Ainsi, dans le chapitre 4, les systèmes considérés sont invariants sous l'action de groupe de transformations, tandis que dans le chapitre 5, la dynamique des systèmes Lagrangiens est invariante à tout changement de coordonnées de configuration. Nous avons dans les deux cas écrit des observateurs avec des termes d'erreur qui préservent l'invariance du système initial.

Cette démarche qui consiste à tenir compte des invariances ne garantit en rien la convergence des observateurs. Cependant c'est une démarche raisonnable qui est généralement adoptée, en pratique, notamment par les ingénieurs. Ils sont amenés à faire des choix qui peuvent être arbitraires pour les unités et les coordonnées dans lesquelles formuler leur problème. Reformuler ensuite le problème sous forme adimensionnelle constitue souvent l'étape suivante dans leur travail : cela représente une première méthode pour limiter l'influence des choix arbitraires qu'ils ont pu faire.

Après avoir considéré des systèmes chimiques et mécaniques, nous examinons dans l'annexe C un problème d'identification de paramètres, considéré en traitement d'images : l'estimation du flot optique dans une séquence vidéo. Ce problème est indépendant de la définition du contraste, et nous donnons une méthode pour mesurer la distance entre deux images également invariante au changement de contraste. Ce troisième domaine d'application montre que l'idée de termes d'erreur invariants peut être assez générale. En outre, cette approche semble nouvelle dans le cadre de la théorie des observateurs.

PARTIE III

ANNEXES

APPENDICE A

MÉTHODE DU REPÈRE MOBILE DE CARTAN

Nous présentons dans cette annexe, la technique de normalisation que nous avons utilisée pour calculer les fonctions invariantes qui interviennent au chapitre 4 dans la construction d'observateurs invariants. Il s'agit de la méthode du repère mobile de Darboux Cartan : une très bonne présentation en est faite dans le chapitre 8 de [55]. Nous reprenons les notations du chapitre 4.

Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

L'idée de base est simple, comme nous allons le voir, lorsque la variété Σ correspond à $\mathbb{R}^3$, lorsque le groupe de transformation G agissant sur Σ admet deux paramètres et lorsque les orbites sont des plans. La technique de normalisation repose sur l'idée suivante. Sous de bonnes conditions de régularité du groupe de transformation, nous pouvons définir un jeu de coordonnées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) tel que, comme indiqué sur la Figure 1, les directions $\xi_f = (\xi_1, \xi_2)$ permettent de parcourir une orbite, tandis que la direction transverse $\xi_b = \xi_3$ détermine sur quelle orbite on se trouve. Ainsi, pour savoir si deux points P et S sont sur la même orbite, c'est à dire, s'il existe un élément g de G tel que $S = \varphi_g(P)$, il suffit de vérifier que les deux points ont la même coordonnée ξ_3 : ξ_3 est une fonction invariante. Tout autre fonction scalaire invariante est une fonction de ξ_3 .

Maintenant, nous supposons que nous ne connaissons pas ce jeu de coordonnée. Notons (p_1, p_2, p_3) (respectivement (s_1, s_2, s_3) , (r_1, r_2, r_3)) les coordonnées d'un point P (respectivement S , R) dans un référentiel donné. Si P et S appartiennent à la même orbite, il existe

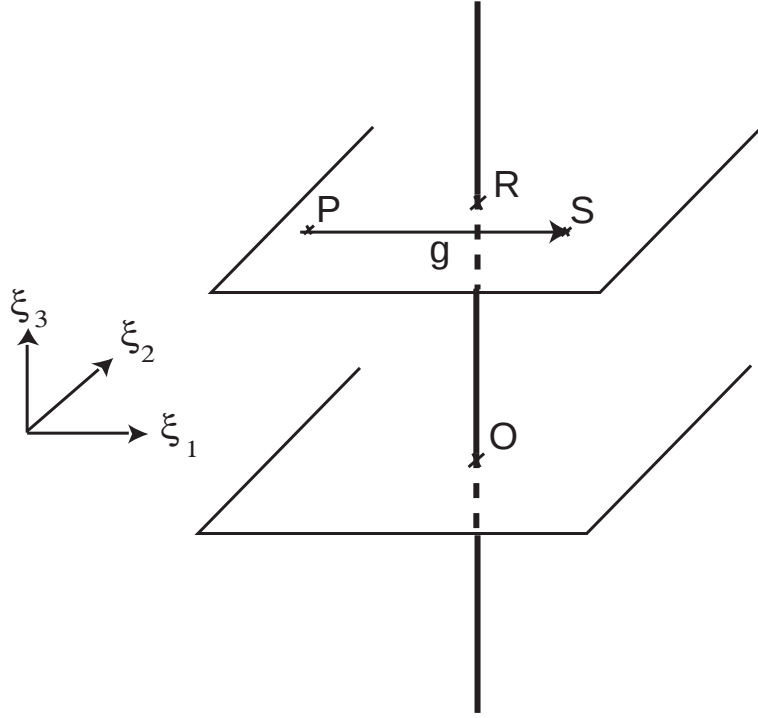


FIGURE 1. Orbites du groupe de transformation G agissant sur Σ dans les coordonnées du redressement

un élément $g \in G$ tel que (en coordonnées) :

$$s_1 = (\varphi_g(P))_1$$

$$s_2 = (\varphi_g(P))_2$$

$$s_3 = (\varphi_g(P))_3$$

Le problème ici est la dépendance des trois coordonnées de S vis à vis d'un jeu particulier des paramètres du groupe. Pour trouver les fonctions invariantes, nous devons éliminer les deux paramètres associés à g . Nous introduisons un troisième point R sur la même orbite que nous allons prendre comme référence. On peut alors déterminer l'élément $g(P)$ du groupe vérifiant $R = \varphi_{g(P)}(P)$. Cet élément est solution du système d'équations suivant

(équations de normalisation) :

$$\begin{aligned} r_1 &= (\varphi_g(P))_1 \\ r_2 &= (\varphi_g(P))_2 \end{aligned}$$

Si le théorème des fonction implicites s'appliquent (le rang de ce système par rapport aux deux paramètres associés à G doit être 2), nous avons alors :

$$g(P) = \gamma(P, r_1, r_2)$$

La fonction invariante est alors :

$$I(P) = (\varphi_{\gamma(P, r_1, r_2)}(P))_3$$

En effet, $I(P) = r_3$ et comme R et S sont sur la même orbite, nous avons aussi : $I(S) = r_3 = I(P)$, puisque $\varphi_{\gamma(S, r_1, r_2)}(S) = R$.

Le cas général

Considérons un groupe G agissant régulièrement sur une variété Σ de dimension σ avec des orbites de dimension r , $r < \sigma$. Dans les coordonnées locales ξ sur Σ , notons $\Xi = \varphi(\xi, a)$ la transformation associée à l'élément de G de paramètres a . Alors les équations de l'orbite (qui constitue un ensemble d'invariants fondamentaux) sont obtenues par élimination de a une fois les coordonnées $\xi = (\xi_b, \xi_f)$ décomposées suivant les coordonnées de base, ξ_b , de dimension $\sigma - r$ et les coordonnées de la fibre, ξ_f , de dimension r . La transformation $\Xi = \varphi(\xi, a)$ se lit alors

$$\begin{aligned} \Xi_b &= \varphi_b(\xi, a) \\ \Xi_f &= \varphi_f(\xi, a) \end{aligned}$$

avec $a \mapsto \varphi_f(\xi, a)$ une application inversible pour tout ξ . Si nous notons $\psi_f(\xi, \Xi_f)$ l'application inverse ($\varphi_f(\xi, \psi_f(\xi, \Xi_f)) \equiv \Xi_f$), nous obtenons

$$\Xi_b = \varphi_b(\xi, \psi_f(\xi, \Xi_f)) := \psi_b(\xi, \Xi_f).$$

Supposons que ζ et ξ sont sur la même orbite. Alors ils ont les mêmes coordonnées de base. Cela signifie qu' une fois que la coordonnée Ξ_f est fixée, à Ξ_f^0 par exemple (normalisation), on a

$$\psi_b(\xi, \Xi_f^0) = \psi_b(\zeta, \Xi_f^0).$$

En d'autres termes, les $\sigma - r$ fonctions scalaires indépendantes $\xi \mapsto \psi_b(\xi, \Xi_f^0)$ sont invariantes, i.e., pour toute transformation $\Xi = \varphi(\xi, a)$, nous avons

$$\psi_b(\xi, \Xi_f^0) \equiv \psi_b(\varphi(\xi, a), \Xi_f^0).$$

APPENDICE B

INTERPRÉTATION DE LA CONTRACTION

La notion de contraction [44, 35] pour un système, avec une dynamique $\dot{x} = f(x, t)$, peut être interprétée comme la décroissance exponentielle, avec le temps, de la longueur de tout segment de conditions initiales transporté par le flot.

Définition 6 (Contraction Stricte). — Soit un système dynamique $\dot{x} = f(x, t)$ régulier ($\mathcal{C}^1$ par exemple) défini sur une variété M régulière. Soit g une métrique sur M . Soit $U \subset M$ un sous ensemble de M . La dynamique f est dite strictement contractante sur U au sens de la métrique g , si la partie symétrique de sa matrice Jacobienne est une matrice définie négative, c'est à dire, s'il existe $\lambda > 0$ tel que, dans des coordonnées locales x sur U , nous avons pour tout t ,

$$\frac{\partial f^T}{\partial x} g(x) + g(x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} f(x, t) \leq -\lambda g(x).$$

Nous avons le résultat suivant qui justifie cette définition et cette terminologie.

Théorème 4. — Soit un système dynamique $\dot{x} = f(x, t)$ régulier défini sur une variété M régulière. Soit $g(x)$ une métrique sur M . Soit $X(x, t)$ le flot associé à f

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X(x, t) &= f(X(x, t), t) \quad \forall t \in [0, T[\quad \text{avec} \quad T \leq +\infty. \\ X(x, 0) &= x \end{aligned}$$

Considérons deux points x_0 and x_1 dans M et une géodésique $\gamma(s)$ qui joint $x_0 = \gamma(0)$ et $x_1 = \gamma(1)$. Si

- f est une stricte contraction sur un sous ensemble $U \subset M$, avec λ la constante présente dans la définition 6,
- et si $X(\gamma(s), t)$ appartient à U pour tout $s \in [0, 1]$ et pour tout $t \in [0, T[$.

alors

$$d_g(X(x_0, t), X(x_1, t)) \leq e^{-\frac{\lambda}{2}t} d_g(x_0, x_1) \quad \forall t \in [0, T[$$

où d_g est la distance géodésique associée à la métrique g .

Preuve. — Cette preuve s'inspire de calculs faits par Laurent Praly (communication privée). Soit $l(t)$ la longueur de la courbe $(X(\gamma(s), t), s \in [0, 1])$ au sens de la métrique g

$$l(t) = \int_0^1 \sqrt{\frac{dX(\gamma(s), t)^T}{ds} g(X(\gamma(s), t)) \frac{dX(\gamma(s), t)}{ds}} ds.$$

Nous avons alors

$$\frac{d}{dt} l(t) = \int_0^1 \frac{\frac{d}{dt} \left\{ \frac{dX(\gamma(s), t)^T}{ds} g(X(\gamma(s), t)) \frac{dX(\gamma(s), t)}{ds} \right\}}{2 \sqrt{\frac{dX(\gamma(s), t)^T}{ds} g(X(\gamma(s), t)) \frac{dX(\gamma(s), t)}{ds}}} ds.$$

Comme

$$\frac{d}{dt} \frac{dX(\gamma(s), t)}{ds} = \frac{d}{ds} f(X(\gamma(s), t), t) = \frac{\partial}{\partial X} f(X(\gamma(s), t), t) \frac{d}{ds} X(\gamma(s), t)$$

nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{dX(\gamma(s), t)^T}{ds} g(X(\gamma(s), t)) \frac{dX(\gamma(s), t)}{ds} \right\} = \frac{dX(\gamma(s), t)^T}{ds} P(s, t) \frac{dX(\gamma(s), t)}{ds}$$

avec

$$P(s, t) = \frac{\partial f(X)}{\partial X}^T g(X) + g(X) \frac{\partial f(X)}{\partial X} + \frac{\partial g(X)}{\partial X} f(X, t)$$

et

$$X = X(\gamma(s), t).$$

Puisque f est une contraction sur U , il existe $\lambda > 0$ tel que

$$P(s, t) \leq -\lambda g(X(\gamma(s), t)).$$

On obtient alors l'inégalité suivante pour la dérivée $\frac{d}{dt} l(t)$

$$\frac{d}{dt} l(t) \leq -\frac{\lambda}{2} l(t)$$

qui conduit à

$$l(t) \leq l(0) e^{-\frac{\lambda}{2}t} \quad \forall t \in [0, T[.$$

Puisque $d_g(X(x_0, t), X(x_1, t)) \leq l(t)$ et $l(0) = d_g(x_0, x_1)$ (en effet γ est la géodésique qui joint les deux points x_0 et x_1), le théorème est démontré.

APPENDICE C

ESTIMATION INVARIANTE DU FLOT OPTIQUE

Nous présentons une application possible de l'idée de mesure invariante, présentée dans le chapitre 4. Nous considérons le problème d'estimation du flot optique entre les images successives d'une séquence vidéo. Nous proposons une fonction pour mesurer la distance entre deux images, invariante par rapport à tout changement de contraste.

Introduction

Le calcul du flot optique pour une séquence vidéo a fait l'objet de nombreuses études ces deux dernières décennies. Il a pour but l'estimation du champ de vitesse pour le mouvement entre deux images successives dans une séquence vidéo. Presque toutes les méthodes s'appuient sur une hypothèse de luminosité constante : si (x, y) représente la position d'un pixel dans une image, et t son temps d'apparition, nous avons

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial x}u + \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial y}v = 0 \quad (63)$$

où (u, v) désigne les composantes du champs de vitesse et I la fonction donnant l'intensité lumineuse. Cela signifie simplement que $I(x + u, y + v, t + 1) = I(x, y, t)$.

La relation (63) ne fournit qu'une seule contrainte alors que nous avons à déterminer deux valeurs u et v : en effet, cette équation ne donne des informations sur le champ de vitesse que dans la direction du gradient de l'intensité $\nabla I = (\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y})$. Ainsi toutes les méthodes développées repose au moins sur une seconde hypothèse pour estimer le flot : essentiellement une contrainte de régularité pour le champ de vitesse. Les principales méthodes se répartissent en trois familles :

- Des méthodes différentielles [36, 71] fondées sur l'optimisation de critères définis à partir de deux termes : la contrainte donnée par (63) et une norme sur les vitesses

dans un espace de Hilbert donné

$$(u, v) = \operatorname{argmin} \left\{ \iint \left(\frac{\partial I}{\partial t} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \nabla I \right)^2 dx dy + \lambda \|v\|^2 \right\} \quad (64)$$

- Des méthodes de corrélation ou d'identification par blocs basées sur le critère suivant :

$$\iint (I(x + u, y + v, t + 1) - I(x, y, t))^2 dx dy \quad (65)$$

sur une fenêtre locale ou globale définie autour de chaque point, où le flot optique est supposé être constant.

- Des méthodes fréquentielles [1, 11] qui s'appuie sur des décompositions en fréquence que ce soit en espace ou en temps.

L'article [9], écrit en 1996, présente une vue plus exhaustive des différentes méthodes développées à cette date.

Dans cette annexe, nous ne présentons pas une nouvelle méthode d'estimation du flot optique. Notre contribution réside dans une nouvelle définition du critère à optimiser. L'idée est de définir un terme d'erreur qui soit invariant par rapport aux changements de contraste. En effet, si l'intensité I est solution de l'équation du flot optique (63), alors $J = \phi(I)$ est aussi solution de cette equation lorsque ϕ est un difféomorphisme qui définit le changement de contraste. Notre contribution est donc de donner une expression invariante aux méthodes existantes. Cette approche est donc dans le prolongement du travail présenté au chapitre 4, puisque le groupe de transformation considéré ici est le groupe des difféomorphismes définissant le changement de contraste.

Dans la section C.1, nous donnons un exemple de mesure de distance entre deux images d'une séquence, indépendante du contraste. Dans la section C.2, nous utilisons cette mesure de distance associée à une technique d'identification par blocs pour estimer le flot optique.

C.1. Une mesure invariante

Invariance de l'équation du flot optique. — On considère une séquence vidéo composée d'images en noir et blanc, d'intensités données, au temps t , et au pixel (x, y) , par $I(x, y, t)$. L'équation du flot optique (63) est l'expression de l'hypothèse d'illumination constante. Si $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ représente la vitesse du mouvement suivi par le pixel (x, y) dans la séquence vidéo, nous avons alors

$$I(x + u, y + v, t + 1) = I(x, y, t)$$

qui s'exprime aussi par

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \nabla I = 0 \quad (66)$$

avec ∇I le gradient spatial de l'intensité.

Cette équation de flot optique est invariante par rapport aux changements de contraste. En effet, si I est une solution de (66), alors pour tout difféomorphisme ϕ qui représente le changement de contraste, $\phi(I)$ est aussi une solution. En effet, nous avons

$$\frac{d\phi(I)}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial I} \frac{dI}{dt} = 0.$$

Les critères d'optimisation classiques ne sont pas invariants. — Les critères décrits en introduction ne sont pas invariants par rapport à un changement de contraste :

- Le critère des méthodes différentielles (64) n'est pas invariant puisqu'un changement de contraste de la fonction intensité I vers $\phi(I)$ fait apparaître dans le terme

$$\iint \left(\frac{\partial I}{\partial t} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \nabla I \right)^2 dx dy$$

la matrice Jacobienne du difféomorphisme ϕ . Il s'en suit immédiatement que le paramètre de gain λ dépend de la définition du contraste.

- Pour les mêmes raisons, le critère (65) n'est pas invariant. En effet, un difféomorphisme ϕ modifie le poids de l'erreur à chaque pixel (x, y) par un facteur égal au déterminant de la matrice Jacobienne de ϕ en ce point.

Un terme d'erreur invariant. — L'idée est alors de définir un terme d'erreur qui soit invariant par rapport aux changements de contraste, pour que les algorithmes qui sont basés sur de tels termes d'erreur aient des performances indépendantes du contraste. Le flot optique ne dépend pas de la définition du contraste. Il semble alors raisonnable de rendre son estimation indépendante vis à vis de ce facteur.

Soit $\Sigma(I) \subset \mathbb{Z}^2$ l'ensemble fini qui définit les coordonnées des pixels dans l'image I . Considérons maintenant les fonctions $\sigma_{\leq}^I(a)$ et $\sigma_{\geq}^I(a)$ définies respectivement par

$$\sigma_{\leq}^I(a) = \frac{\text{card}\{(x, y) \in \Sigma(I) \text{ vérifiant } I(x, y) \leq a\}}{\text{card}\Sigma(I)}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

et

$$\sigma_{\geq}^I(a) = \frac{\text{card}\{(x, y) \in \Sigma(I) \text{ vérifiant } I(x, y) \geq a\}}{\text{card}\Sigma(I)}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Considérons ensuite la fonction d'erreur suivante

$$E_{I_r}(I_1(x_1, y_1), I_2(x_2, y_2)) = \left| \sigma_{\leq}^{I_r}(I_2(x_2, y_2)) - \sigma_{\leq}^{I_r}(I_1(x_1, y_1)) \right| \\ + \left| \sigma_{\geq}^{I_r}(I_2(x_2, y_2)) - \sigma_{\geq}^{I_r}(I_1(x_1, y_1)) \right|$$

qui représente une mesure de la distance entre l'intensité au pixel (x_1, y_1) dans la première image de fonction d'intensité I_1 , avec l'intensité au pixel (x_2, y_2) dans une seconde image avec la fonction d'intensité I_2 . I_r est une image de la séquence vidéo, utilisée comme référence. On peut vérifier que les axiomes de définition d'une distance sont vérifiés.

Montrons que ce terme d'erreur ne dépend pas de la définition du contraste. Soit ϕ un difféomorphisme définissant le changement de contraste. Nous avons

$$\sigma_{\leq}^{\phi(I)}(\phi(J)(x_o, y_o)) = \frac{\text{card}\{(x, y) \in \Sigma(I) \text{ vérifiant } \phi(I)(x, y) \leq \phi(J)(x_o, y_o)\}}{\text{card}\Sigma(I)}$$

et

$$\sigma_{\geq}^{\phi(I)}(\phi(J)(x_o, y_o)) = \frac{\text{card}\{(x, y) \in \Sigma(I) \text{ vérifiant } \phi(I)(x, y) \geq \phi(J)(x_o, y_o)\}}{\text{card}\Sigma(I)}.$$

Nous obtenons alors deux résultats différents suivant la monotonie de ϕ :

– Si ϕ est une fonction croissante, alors

$$\sigma_{\leq}^{\phi(I)}(\phi(J)(x_o, y_o)) = \sigma_{\leq}^I(J(x_o, y_o))$$

et

$$\sigma_{\geq}^{\phi(I)}(\phi(J)(x_o, y_o)) = \sigma_{\geq}^I(J(x_o, y_o))$$

– sinon, nous obtenons

$$\sigma_{\leq}^{\phi(I)}(\phi(J)(x_o, y_o)) = \sigma_{\geq}^I(J(x_o, y_o))$$

et

$$\sigma_{\geq}^{\phi(I)}(\phi(J)(x_o, y_o)) = \sigma_{\leq}^I(J(x_o, y_o)).$$

Cela donne le résultat d'invariance :

$$E_{\phi(I_r)}(\phi(I_1)(x_1, y_1), \phi(I_2)(x_2, y_2)) = E_{I_r}(I_1(x_1, y_1), I_2(x_2, y_2)).$$

C.2. Application au calcul du flot optique

Méthode d'identification par blocs avec un terme d'erreur invariant. — Nous utilisons une méthode d'identification par bloc pour estimer le flot optique entre deux images successives dans la séquence vidéo. Nous ne traitons pas les effets de bord : nous considérons seulement le centre de chaque image de sorte que durant le mouvement d'une image à l'autre, le pixel où l'on détermine le flot optique demeure dans l'image. Le but est juste de tester le terme d'erreur invariant et non d'implémenter une méthode d'estimation complète.

Pour estimer le flot optique au pixel (x_o, y_o) , nous considérons le critère d'erreur suivant :

$$J(u, v) = \iint_{W(x_o, y_o, t)} \left(E_{I_r}(I(x, y, t), I(x + u, y + v, t + 1)) \right)^2 dx dy$$

où $W(x_o, y_o, t)$ est une fenêtre centrée au pixel (x_o, y_o) dans l'image à l'instant t , dans laquelle nous supposons que le champ de vitesse est constant : ceci représente la contrainte de régularité supplémentaire. L'image I_r , utilisée comme référence, constitue un degré de liberté : nous pouvons par exemple choisir $I_r = I(\cdot, \cdot, t)$ ou $I_r = I(x, y, t)|_{(x, y) \in W_r}$ où W_r est une fenêtre centrée en (x_o, y_o) plus petite que l'image entière (l'idée est d'avoir une référence adaptée à chaque partie de l'image lorsque l'illumination n'est pas uniforme sur l'image).

Le champ de vitesse du mouvement (u, v) dans la fenêtre $W(x_o, y_o)$ est estimée par la méthode du gradient

$$\begin{aligned} u(t + 1) &= \lambda u(t) + \alpha \operatorname{grad}_x J(u, v) \\ v(t + 1) &= \lambda v(t) + \alpha \operatorname{grad}_y J(u, v) \end{aligned}$$

où λ est un facteur de mémoire et α le gain de la méthode du gradient. L'avantage de ce terme d'erreur est de rendre ce gain indépendant de la taille de l'image et de la définition du contraste.

Résultats des simulations. — Nous avons essayé cette méthode sur des séquences vidéo classiques : "taxi" dans la Figure 1, "trees" dans la Figure 2 et "rubic" dans la Figure 3. On constate que la méthode fonctionne, même si l'on n'obtient pas nécessairement un résultat d'une aussi bonne qualité que ce que l'on peut trouver dans la littérature : par exemple, on peut voir des effets de bords sur l'estimation du flot pour le "Taxi". Cela est simplement dû à notre façon naïve d'appliquer la méthode de gradient.

Dans les Figures 4 et 5, nous présentons une séquence plus simple : deux disques sont comprimés dans la direction verticale. Nous avons choisi des niveaux de gris différents

pour les deux disques, de façon à tester l'indépendance vis à vis du contraste : on observe qu'avec le terme d'erreur invariant, on obtient une estimation du flot identique pour les deux disques.

Pour toutes les séquences, nous avons pris pour $W(x_o, y_o, t)$ une fenêtre de taille 8×8 pixels. La fenêtre de référence W_r , de taille 72×72 pixels, est centrée en (x_o, y_o) . Notamment, cette taille pour W_r a permis de tester l'indépendance par rapport au changement de contraste pour la séquence avec les disques.

Conclusion

L'intérêt de cette annexe est de montrer que les idées développées au chapitre 4 peuvent s'appliquer à des domaines très variés : aux systèmes chimiques et aux systèmes mécaniques comme présenté au chapitre 4, mais aussi au traitement d'image. Le but est avant tout d'inciter le lecteur à remettre en cause la définition des termes d'erreur.

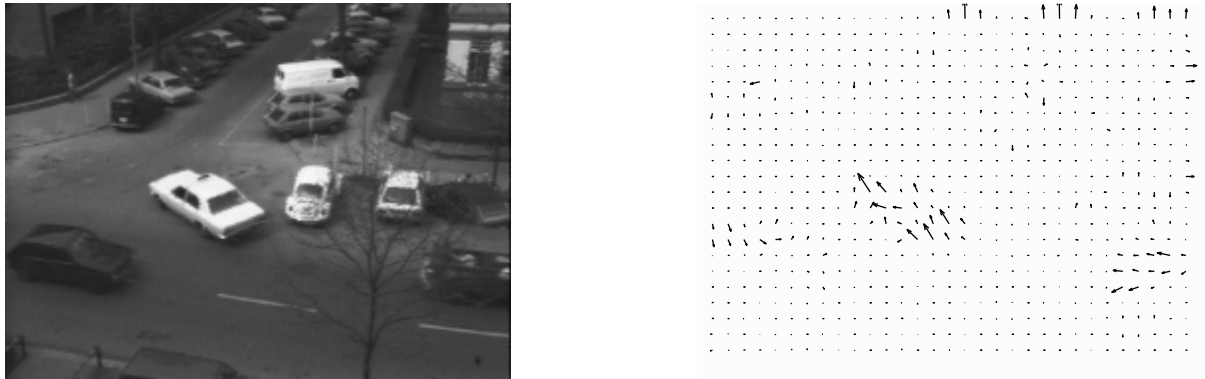


FIGURE 1. Séquence “Taxi” (190×256) et son flot optique

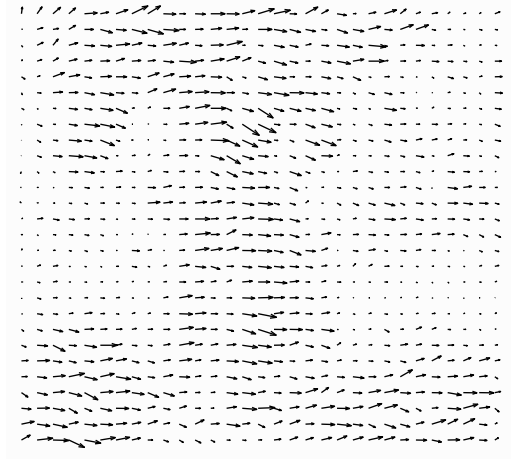


FIGURE 2. Séquence “Trees” (233×256) et son flot optique

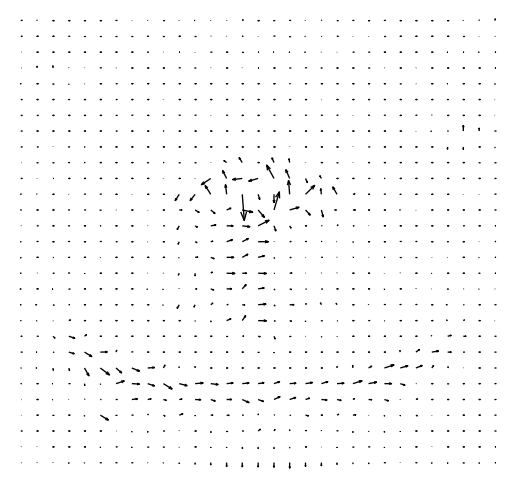
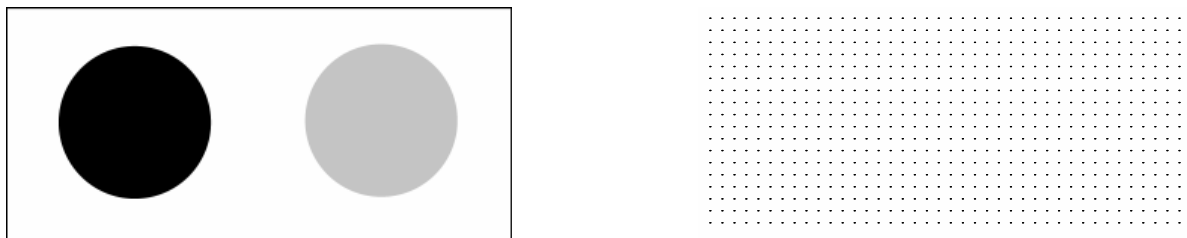
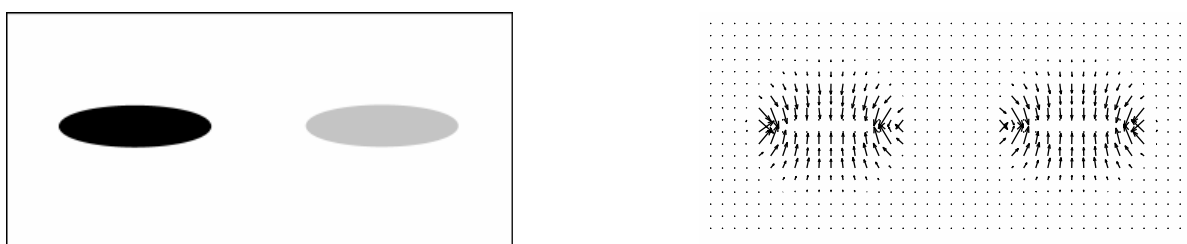


FIGURE 3. Séquence “Rubic” (240×256) et son flot optique

FIGURE 4. Séquence “Disque” (157×336) et son flot optique : position initialeFIGURE 5. Séquence “Disque” (157×336) et son flot optique : position après 10 images

APPENDICE D

DÉRIVÉE COVARIANTE

Dans cette annexe, nous présentons une illustration de la notion de dérivée covariante, destinée aux lecteurs pour qui cette notion n'est pas familière. Ils peuvent trouver une définition plus rigoureuse dans [27] ou [66] par exemple.

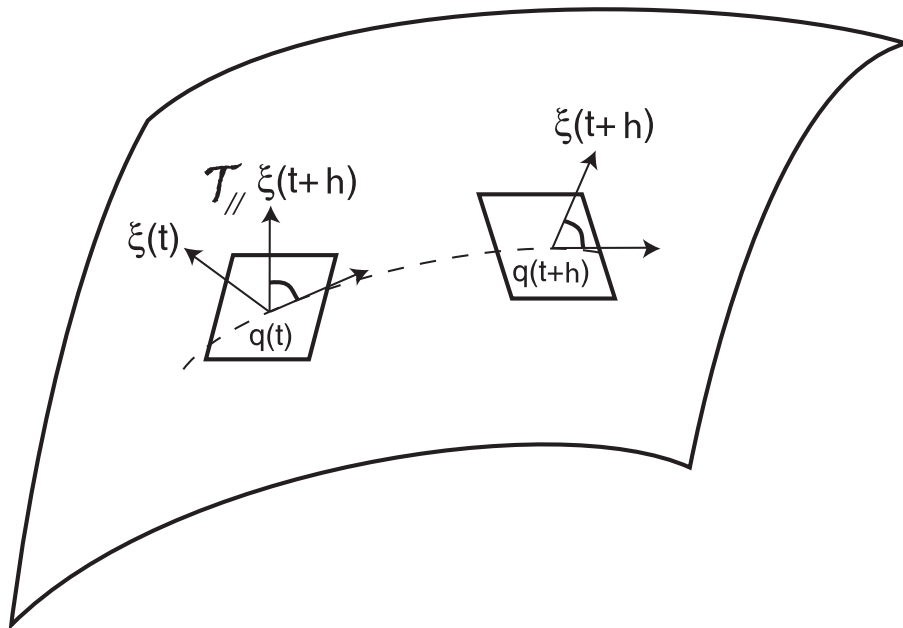


FIGURE 1. Taux d'accroissement sur une variété Riemannienne

Considérons une courbe $q(t)$, paramétrée par le temps t , et définie sur une variété Riemannienne M . On considère un champ de vecteur ξ défini le long de la courbe $q(t)$ sur M .

On s'intéresse à la dérivée par rapport au temps de $\xi(t) = \xi(q(t)) \in T_q M : T_q M$ désignant l'espace tangent à M au point q .

La dérivée s'obtient en prenant la limite du taux d'accroissement de cette grandeur. Il faut prendre garde cependant à ne comparer que des vecteurs appartenant au même espace tangent. Ainsi, cet accroissement peut s'écrire pour $h \neq 0$:

$$\Delta(h) = \frac{1}{h} (\mathcal{T}_{//q(t+h) \rightarrow q(t)}(\xi(t+h)) - \xi(t))$$

et non

$$\Delta(h) = \frac{1}{h} (\xi(t+h) - \xi(t))$$

puisque $\xi(t+h)$ appartient à $T_{q(t+h)} M \neq T_{q(t)} M$ (voir Figure 1). $\mathcal{T}_{//q(t+h) \rightarrow q(t)}$ est l'opérateur de transport parallèle depuis $T_{q(t+h)} M$ vers $T_{q(t)} M$: nous ne précisons pas la courbe suivant laquelle nous effectuons ce transport puisque la dépendance vis à vis de cette courbe disparaît lorsque l'on passe à la limite pour h .

En reprenant la relation (45) pour le transport parallèle, on obtient dans des coordonnées locales l'expression suivante au premier ordre en h :

$$\begin{aligned} \{\Delta(h)\}^i &= \frac{1}{h} (\xi^i(t+h) - \Gamma_{j,k}^i(q(t))(q^j(t) - q^j(t+h))\xi^k(t+h) - \xi^i(t)) \\ &= \frac{\xi^i(t+h) - \xi^i(t)}{h} + \Gamma_{j,k}^i(q(t)) \frac{q^j(t+h) - q^j(t)}{h} \xi^k(t+h) \end{aligned}$$

On obtient en passant à la limite pour h

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{\Delta(h)\}^i = \dot{\xi}^i + \Gamma_{j,k}^i(q) \dot{q}^j \xi^k$$

soit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta(h) = \nabla_{\dot{q}} \xi.$$

Ainsi, la dérivée covariante $\nabla_{\dot{q}}$ pour un champ de vecteur ξ défini le long de la courbe $q(t)$ est la notion de dérivée adaptée à la structure Riemannienne liée à la variété. Lorsque la métrique est de courbure nulle, alors dans les coordonnées Euclidiennes, cette dérivée s'identifie avec la simple dérivation par rapport au temps : $\nabla_{\dot{q}} = \frac{d}{dt}$. En effet, dans ces coordonnées Euclidiennes, les symboles de Christoffel s'annulent.

APPENDICE E

EQUATION DE JACOBI

Nous reprenons dans cette annexe un résultat très bien décrit dans [6], pages 309 à 313. Il permet de bien comprendre le rôle joué par le terme de courbure dans l'expression de l'observateur intrinsèque décrit au chapitre 5.

La courbure Riemannienne sur une variété est étroitement liée au comportement de ces géodésiques. Considérons une géodésique passant par un point donné dans une direction donnée et modifions légèrement les conditions initiales, c'est à dire, le point initial et la direction initiale. Autour de l'origine, cette géodésique diffère peu par rapport à la géodésique d'origine. Pour étudier la divergence, linéarisons l'équation différentielle des géodésiques autour de la géodésique initiale. L'équation différentielle linéaire du second ordre ainsi obtenue est appelée "équation de Jacobi".

Notons $x(t)$ un point en mouvement le long d'une géodésique sur une variété M , avec une vitesse (d'amplitude constante) $v(t) \in T_{x(t)}M$ (l'espace tangent à M au point $x(t)$). Si les conditions initiales ont une dépendance régulière par rapport à un paramètre α , alors la géodésique dépend aussi de manière régulière de ce paramètre. Nous considérons maintenant le mouvement correspondant à une valeur donnée de α : notons $x(t, \alpha) \in M$ la position du point courant à l'instant t . Nous supposons que la géodésique initiale correspond à la valeur nulle du paramètre α : $x(t, 0) = x(t)$.

Le champ de vecteur définissant la variation de la géodésique $\xi(t) \in T_{x(t)}M$ a pour valeur au point $x(t)$:

$$\xi(t) = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} x(t, \alpha)$$

Ce champ de vecteur vérifie l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$\frac{D^2\xi}{Dt^2} = -R(v, \xi)v \quad (67)$$

où R est le tenseur de courbure et $v = v(t)$ la vecteur vitesse du mouvement le long de la géodésique initiale. L'opérateur de dérivation $\frac{D}{Dt}$ correspond à la dérivation covariante ∇_v . L'équation (67) constitue l'équation de Jacobi.

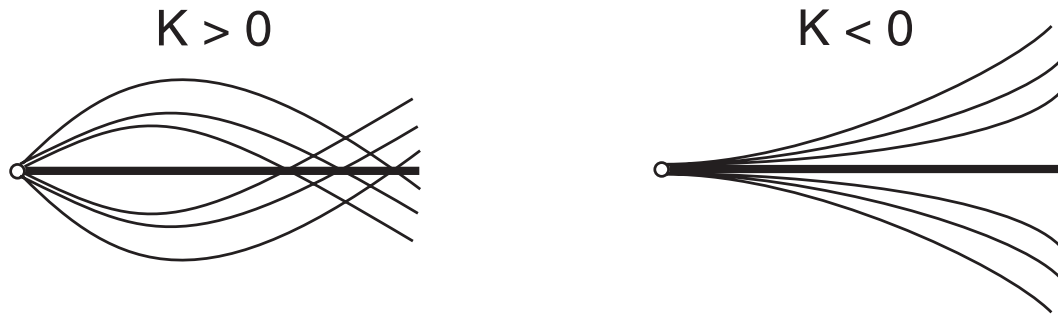


FIGURE 1. Variation des géodésiques sur des variétés de courbure positive et négative

Considérons le cas particulier où la variété M est une surface. Soit $y(t)$ l'amplitude de la composante du vecteur $\xi(t)$ dans la direction orthogonale à la géodésique initiale et supposons que le vecteur $v(t)$ soit de norme 1. Alors y vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{y} = -Ky,$$

où $K = K(t)$ désigne la courbure Riemannienne au point $x(t)$. La Figure 1 illustre le comportement des géodésiques suite à une perturbation des conditions initiales, dans le cas d'une variété de courbure positive puis négative.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E.H. Adelson & J.R. Bergen. *Spatiotemporal energy models for the perception of motion*. J. Opt. Soc. Amer., A/Vol.2 : 284–299, Février 1985.
- [2] JF. Agassant, P. Avenas, JPh. Sergent & P.J. Carreau. *Polymer Processing, Principles and Modeling*. HANSER Publishers, 1991.
- [3] N. Aghannan & P. Rouchon. *On invariant asymptotic observers*. Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, vol. 2, pp. 1479–1484, Décembre 2002.
- [4] N. Aghannan & P. Rouchon. *An intrinsic observer for a class of Lagrangian systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 48(6) : 936–945, Juin 2003.
- [5] V.I. Arnold. *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*. Ann. Inst. Fourier, 16 : 319–361, 1966.
- [6] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer Verlag, Second edition, 1989.
- [7] K.J. Åström & T. Hägglund. *PID Controllers : Theory, Design and Tuning*. Instrumentation System, Second edition, 1995.
- [8] G. Bastin & D. Dochain. *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*. Elsevier, 1990.
- [9] S.S. Beauchemin & J.L. Barron. *The Computation of Optical Flow*. ACM Computing surveys, 27(3) : 433–467, 1995.
- [10] JM. Béchet. *Polypropylènes*. Techniques de l'ingénieur, J6545.

- [11] C. Bernard. *Wavelets and ill posed problems : optic flow and scattered data interpolation*. PHD Thesis, Ecole Polytechnique Paris France, October, 1999.
- [12] G. Blankenstein, R. Ortega & A.J. Van Der Schaft. *The matching conditions of controlled Lagrangians and interconnection and damping assignment passivity based control*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 75(9) : 645–665, 2002.
- [13] A.M. Bloch & P.E. Crouch. *Nonholonomic control systems on Riemannian manifolds*. SIAM Journal on Control and Optimization, 33(1) : 126–148, Janvier 1995.
- [14] A.M. Bloch, P.S. Krishnaprasad, J.E. Marsden & R. Murray. *Nonholonomic Mechanical Systems with Symmetry*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 136(1) : 21–99, 1996.
- [15] A.M. Bloch, N.E. Leonard & J.E. Marsden. *Controlled Lagrangians and the Stabilization of Mechanical Systems I : The First Matching Theorem*. IEEE Transactions on Automatic Control, 45(12) : 2253–2270, Décembre 2000.
- [16] W.M. Boothby. *An introduction to differential manifolds and Riemannian geometry*. Academic Press, Inc, Second edition, 1986.
- [17] F. Bullo & R.M. Murray. *Tracking for Fully Actuated Mechanical Systems : A Geometric Framework*. Automatica, 35(1) : 17–34, 1999.
- [18] F. Bullo, N.E. Leonard & A.D. Lewis. *Controllability and Motion Algorithms for Underactuated Lagrangian Systems on Lie Groups*. IEEE Transactions on Automatic Control, 45(8) : 1437–1454, Août 2000.
- [19] F. Bullo. *Series expansions for the evolution of mechanical control systems*. SIAM Journal on Control and Optimization, 40(1) : 166–190, 2001.
- [20] F. Bullo & K.M. Lynch. *Kinematic Controllability for Decoupled Trajectory Planning in Underactuated Mechanical Systems*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 17(4) : 402–412, Août 2001.
- [21] F. Bullo. *Averaging and vibrational control of mechanical systems*. SIAM journal on Control and Optimization, 41(2) : 542–562, 2002.
- [22] W.M. Chan, P.E. Gloor & A.E. Hamielec. *A Kinetic Model for Olefin Polymerization in High-Pressure Autoclave Reactors*. AIChE Journal, 39(1) : 111–126, Janvier 1993.

- [23] K.Y. Choi, S. Tang & A. Sihori. *Estimation of Kinetic Parameters in Transition-Metal-Catalyzed Gas-Phase Olefin Copolymerization Processes*. Ind. Eng. Chem. Res., 36 : 1095–1102, 1997.
- [24] JP. Corriou. *Commande des procédés*. Lavoisier TEC & DOC, 1996.
- [25] R. Dhib & N. Al-Nidawy. *Modelling of free radical polymerisation of ethylene using difunctional initiators*. Chemical Engineering Science, 57 : 2735–2746, 2002.
- [26] R. Dossogne. *Polyéthylène haute densité PE-HD*. Techniques de l'ingénieur, A3315.
- [27] B. Doubrovine, S. Novikov, & A. Fomenko. *Géométrie Contemporaine Méthodes et Applications*. Edition Mir, Moscou, 1982.
- [28] J. École & A. Calefas. *La stabilisation des polymères*. Nouvelle Librairie SA, 1987.
- [29] S. Füzeséry. *Polypropylènes*. Techniques de l'ingénieur, A3320.
- [30] JP. Gauthier & I. Kupka. *Deterministic Observation Theory and Applications*. Cambridge University Press, 2001.
- [31] P. Ghosh, B. Chattopadhyay & A.K. Sen. *Modification of low density polyethylene (LPDE) by graft copolymerisation with some acrylic monomers*. Polymer, 39(1) : 193–201, 1998.
- [32] D. Guillaume, P. Rouchon, *Observation and control of a simplified car*, Thèse de l'Ecole des Mines de Paris, Mathématique et automatique, Contribution à l'étude des observateurs non linéaires, p 97–103, 1998.
- [33] A. Guyot. *Polymérisation*. Les Techniques de l'Ingénieur, J5830.
- [34] H. Hammouri & J.P. Gauthier. *Global time-varying linearization up to output injection*. SIAM journal on Control and Optimization, 30 : 1295–1310, Novembre 1992.
- [35] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations, Second Edition*. Birkhäuser Boston, 1982.
- [36] B.K.P. Horn & B.G. Schunk. *Determining optical flow*. Artificial Intelligence, 17 : 185–203, 1981.
- [37] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, Second edition, 1989.

- [38] N.H. Jo & J.H. Seo. *A State Observer for Nonlinear Systems and its Application to Ball and Beam System*. IEEE transactions on Automatic Control, 45(5) : 968–973, Mai 2000.
- [39] W.S. Koon & J.E. Marsden. *Optimal Control for Holonomic and Nonholonomic Mechanical Systems with Symmetry and Lagrangian Reduction*. SIAM journal on Control and Optimization, 35(3) : 901–929, 1997.
- [40] A.J. Krener & W. Respondek. *Nonlinear observers with linearizable error dynamics*. SIAM journal on Control and Optimization, 23(2) : 197–216, 1985.
- [41] F.S. Leite, M. Camarinha & P. Crouch. *Elastic Curves as Solutions of Riemannian and Sub-Riemannian Control Problems*. Mathematics of Control, Signals, and Systems, 13(2) : 140–155, 2000.
- [42] A.D. Lewis & R.M. Murray. *Configuration Controllability of Simple Mechanical Control Systems*. SIAM Journal on Control and Optimization, 35(3) : 766–790, 1997.
- [43] J. Lieto. *Le génie chimique à l’usage des chimistes*. Lavoisier TEC & DOC , 1997.
- [44] W. Lohmiller & J.J.E. Slotine. *On Contraction Analysis for Nonlinear Systems*. Automatica, 34(6) : 683–696, 1998.
- [45] M.P. Do Carmo. *Riemannian geometry*. Birkhäuser Boston, Second edition, 1992.
- [46] E. Maréchal. *Synthèse des polymères*. Techniques de l’ingénieur, J5830 et J5831.
- [47] F. Morgan. *Riemannian Geometry, a beginner’s guide*. Jones and Bartlett Publishers, 1993.
- [48] J.E. Marsden & T. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer-Verlag, 1994.
- [49] L. Marini & C. Georgakis. *Low-Density Polyethylene Vessel Reactors*. AIChE Journal, Vol. 30, No. 3, Ma. 1984.
- [50] Ph. Martin, P. Rouchon & J. Rudolph. *Invariant tracking*. ESAIM : COCV 2003, à paraître.
- [51] H. Nijmeijer & T.I. Fossen. *New Directions in Nonlinear Observer Design*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 244, Springer Verlag, 1999.

- [52] L. Noakes, G. Heinzinger & B. Paden. *Cubic Splines on Curved Spaces*. Institute of Mathematics and its Applications. Journal of Mathematical Control and Information, 6(4) : 465–473, 1989.
- [53] G. Odian. *La Polymérisation, Principes et applications*. John Wiley & Sons, Inc, POLYTECHNICA, Third edition, 1994.
- [54] P.J. Olver. *Equivalence, Invariants and Symmetry*. Cambridge University Press, 1995.
- [55] P.J. Olver. *Classical Invariant Theory*. Cambridge University Press, 1999.
- [56] A. Robertsson. *On Observer-Based Control of Nonlinear Systems*, pages 52-73. PHD report, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, 1999.
- [57] W.L. Luyben, B.D. Tyréus & M.L. Luyben. *Plantwide Process Control*. McGraw-Hill Professional, 1998.
- [58] M. Pons. *Polymérisation Radicalaire de L'éthylène sous haute pression, Expérience en réacteur pilote, Modélisation, Identification des paramètres cinétiques et de ségrégation partielle*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de LORRAINE, 25 Juin 1984.
- [59] M. Ribo, S. Brahim-Belhouari & L. Pronzato. *Motion planning for the precise location of a mobile robot*. Proceedings ECC, 1997.
- [60] P. Rouchon. *Jacobi Equation, Riemannian Curvature and the Motion of a Perfect Incompressible Fluid*. European Journal of Mechanics /B Fluids, 11 : 317–336, 1992.
- [61] S. Sasaki. *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds*. The Tôhoku Mathematical Journal. Second Series, 10, pp. 338–354, 1958.
- [62] S. Sasaki. *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds II*. The Tôhoku Mathematical Journal. Second series, 14, pp. 146–155, 1962.
- [63] H. Seki, M. Ogawa, S. Ooyama, K. Akamatsu, M. Ohshima & W. Yang. *Industrial application of a nonlinear model predictive control to polymerization reactors*. Control Engineering Practice, 9 : 819–828, 2001.
- [64] D. Semino, M. Morretta & C. Scali. *Parameters estimation in extended Kalman filters for quality control in polymerisation reactors*. Computers chemical engineering, Vol 20, pp. 913–918, 1996.

- [65] T. Senninger. *Catalyse de polymérisation*. Techniques de l'ingénieur, J1260.
- [66] J.J. Stoker. *Differential Geometry*. Wiley Classics Edition, 1989.
- [67] H.J. Sussmann. *Geometry and Optimal Control*. from the book "Mathematical Control Theory" by J. Baillieul & J.C. Willems, Springer-Verlag, pp. 140–198, October, 1998.
- [68] P. Trambouze. *Réacteurs chimiques*. Techniques de l'ingénieur, J4020.
- [69] M.P. Vega & E.L. Lima & J.C. Pinto. *Modeling and Control of Tubular Solution Polymerisation Reactors*. Computers chemical engineering, Vol 21, pp. 1049–1054, 1997.
- [70] J. Villermaux. *Génie de la réaction chimique : conception et fonctionnement des réacteurs*. Lavoisier TEC & DOC, Second edition, 1993.
- [71] J. Weber & J. Malik. *Robust Computation of Optical Flow in a Multi-Scale Differential Framework*. International Journal of Computer Vision, 2 : 5–19, 1994.
- [72] S.P. Weibel & J. Baillieul. *Averaging and energy methods for robust open-loop control of mechanical systems*. In Essays on Mathematical Robotics, (Mineapolis, MN, 1993), volume 104 of the IMA Volumes in Mathematics and its Applications, pp. 203–269, Springer-Verlag, 1998.
- [73] S. De Wolf, R.L.E. Cuypers, L.C. Zullo, B.J. Vos & B.J. Bax. *Model predictive control of a slurry Polymerisation reactor*. Computers chemical engineering, Vol 20, pp. 955–961, 1996.
- [74] K. Yano & S. Ishihara. *Tangent and Cotangent Bundles : differential geometry*. Number 16 in Pure and Applied Mathematics, Dekker Marcel Dekker, New York, 1973.
- [75] M.J. Young, W.S. Chang & C.C.M. Ma. *Polymerization kinetics and modeling of a metallocene cyclic olefin copolymer system*. European Polymer Journal, Vol. 39, pp. 165–171, 2003.
- [76] H. Xiao, R. Pelton & A. Hamielec. *Preparation and kinetic characterization of copolymers of acrylamide and poly(ethylene glycol) (meth)acrylate macromonomers*. Polymer, Vol. 37, No. 7, pp. 1201–1209, 1996.
- [77] S.X. Zhang, N.K. Read & W.H. Ray. *Runaway Phenomena in Low-Density Polyethylene Autoclave Reactors*. AIChE Journal, Vol. 42, No. 10, October 1996.