HAL
open science

Injection d'harmonique dans un Tube à Ondes Progressives : amélioration de la puissance de sortie

Juliette Plouin

To cite this version:

Juliette Plouin. Injection d'harmonique dans un Tube à Ondes Progressives : amélioration de la puissance de sortie. Matière Condensée [cond-mat]. Ecole Polytechnique X, 2004. Français. NNT : . tel-00007146

HAL Id: tel-00007146

https://pastel.hal.science/tel-00007146v1

Submitted on 19 Oct 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité :

Physique : Tubes Hyperfréquences

Présentée par :

Juliette PLOUIN

pour obtenir le grade de docteur de l'Ecole Polytechnique.

Injection d'harmonique dans un Tube à Ondes Progressives : amélioration de la puissance de sortie

Thèse soutenue le 10 juin 2004, devant le jury composé de :

Fabrice DOVEIL	**Président et rapporteur, Directeur de Recherches CNRS (Université de Provence)**
Christian RUMELHARD	**Rapporteur, Professeur au CNAM**
Jean-Marcel RAX	**Directeur de thèse, Professeur à l'Université d'Orsay**
Georges FAILLON	**Ingénieur Thales (Vélizy)**
Yves THALER	**Ingénieur Thales (Vélizy)**
Philippe GOUARD	**Ingénieur CEA (Bruyères-le-Châtel)**

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Jean-Marcel Rax, mon directeur de thèse, qui m'a accueillie au Laboratoire de Physique et Technologie des Plasmas de l'Ecole Polytechnique ; il m'a permis de mener ce travail dans des conditions privilégiées, et il m'a soutenue tout au long de ma thèse en me manifestant toute sa confiance.

Georges Faillon a initié cette thèse, et il m'a fait partager son enthousiasme pour la physique des tubes hyperfréquences ; il m'a été d'une grande aide, notamment durant les derniers mois de ma thèse, et je l'en remercie chaleureusement.

Je remercie Fabrice Doveil et Christian Rumelhard, qui ont accepté d'être rapporteurs, ainsi que Philippe Gouard, qui a accepté de faire partie du jury ; tous se sont plongés dans mon manuscrit et ont contribué à son amélioration.

J'ai mené une large partie de mon travail sur le site de Thales Electron Devices à Vélizy, où j'ai effectué simulations numériques et mesures. J'ai eu l'occasion d'y travailler avec un grand nombre de personnes, ponctuellement ou durablement, et toutes ont fait preuve d'une disponibilité que je tiens à souligner. Je remercie particulièrement Yves Thaler, Frédéric André et Philippe Thouvenin, qui m'ont encadrée pendant ces trois années, ainsi que Jean-François David et Alain Leclair, les spécialistes des calculs numériques, Thierry Beck, Pascal Taphanel, Racine N'dour et tous ceux avec qui j'ai eu l'occasion de travailler à Thales.

J'adresse bien évidemment toute ma reconnaissance aux membres du Laboratoire de Physique et Technologie des Plasmas, au sein duquel j'ai passé des années très agréables, en commençant par Isabelle Taquin, Cathy Peinturier et Malika Lang, pour leur efficacité et leur soutien. Je remercie aussi Jean-Luc Raimbault, pour ses conseils avisés et sa disponibilité. Enfin, et bien sûr, je m'adresse à tous les doctorants, ou jeunes docteurs, avec qui j'ai partagé ces années de thèse : Hana, Bassima, Richard, Nicolas B., Sébastien, Nicolas P., Amélie, Pierre, Nicolas L., Olivier, Cormac et Jérôme.

Table des matières

1 Les tubes hyperfréquences **11**

1.1 Généralités sur les tubes hyperfréquences 11

1.1.1 Pourquoi des tubes hyperfréquences 11

1.1.2 Principes de fonctionnement des tubes HF 12

1.1.3 Principales caractéristiques des amplificateurs de puissance 19

1.2 L'injection d'harmonique 19

2 Formalismes décrivant un Tube à Ondes Progressives **23**

2.1 Modèles et codes de calculs pour un TOP 23

2.2 Modèle de Pierce : gain fort, petit signal 25

2.2.1 Cas du TOP sans charge d'espace et sans pertes 25

2.2.2 Influence du désynchronisme 31

2.2.3 Influence des pertes 32

2.2.4 Influence de la charge d'espace 33

2.3 Modèle "FEL" : gain faible, grand signal 35

2.3.1 Equation du mouvement d'un électron plongé dans un champ sinusoïdal d'amplitude constante 36

2.3.2 Expression du gain du système 38

2.3.3 Résolution de l'équation du mouvement lorsque $\dot{y}_0^2 \gg \frac{2eE_0}{mk}$ 38

2.3.4 Résolution de l'équation du mouvement dans le cas du grand signal 40

2.3.5 Comportement du faisceau dans le cas du grand signal 43

2.4 Modèle de Rowe : gain fort, grand signal 46

2.4.1 Présentation du modèle de Rowe 46

2.4.2 Correspondance avec le modèle FEL 50

2.4.3 Correspondance avec le modèle de Pierce 51

2.4.4 Modélisation du modèle de Rowe sur Mathematica 55

2.5 Conclusion 57

3 Origine et correction des non-linéarités dans un TOP **59**

3.1 Origine de la saturation et des non-linéarités dans un TOP 59

3.1.1 Non-linéarités dans un TOP 59

3.1.2 Description de la saturation inertielle 61

3.1.3 Le rôle de la charge d'espace sur la saturation de la puissance de sortie . . . 63

3.1.4 Génération d'harmoniques dans le modèle eulérien 64

3.1.5 Cohérence entre les différents points de vue sur la saturation 66

3.2 Comment limiter la non-linéarité dans un TOP 67

3.2.1 Les méthodes couramment utilisées 67

3.2.2 Transformation de la forme du signal d'entrée 68
3.2.3 Courant de modulation dans le cas d'un signal multi-harmoniques : le cas du klystron 69
3.2.4 Courant de modulation dans le cas d'un signal multi-harmoniques : le cas du TOP 74
3.2.5 Comparaison klystron/TOP 77
3.3 Injection de seconde harmonique dans le cas du petit signal 80
3.3.1 Couplage du faisceau d'électrons et du circuit dans un TOP, pour les fréquences ω et 2ω 80
3.3.2 Simplification du système d'équations différentielles 83
3.3.3 Recherche de solutions analytiques pour $A_1(y)$ et $A_2(y)$ 85
3.3.4 Expression analytique de l'énergie totale de chaque onde, pour les grandes valeurs de y 86
3.3.5 Comparaison entre les résultats numériques et les solutions analytiques . . 87
3.3.6 Conclusions sur les expressions analytiques 89

4 Injection de seconde harmonique dans un TOP : simulations 95
4.1 Injection d'harmonique dans une "hélice magique" 95
4.1.1 Choix des paramètres de l'hélice 95
4.1.2 Effet de l'injection d'harmonique 96
4.1.3 Influence du déphasage et du niveau de puissance en entrée 98
4.2 Variation de la vitesse de phase et de la résistance de couplage 100
4.2.1 Variation de la résistance de couplage à 16 GHz 100
4.2.2 Variation de la vitesse de phase à 16 GHz 101
4.2.3 Conclusion 102
4.3 Injection d'harmonique dans un tube industriel 104
4.3.1 Simulation TUBH sur le tube TH1 104
4.3.2 Simulation TUBH sur le tube TH2 104
4.4 Injection d'harmonique avec le code LMSuite 107

5 Mesure de l'effet de l'harmonique sur des tubes industriels 111
5.1 Mesures sur un tube large bande 111
5.1.1 Montage expérimental 111
5.1.2 Conditions expérimentales 114
5.1.3 Recherche de la tension de gain max 114
5.1.4 Saturation avec la fondamentale seule 115
5.1.5 Saturation avec injection d'harmonique 115
5.1.6 Phénomène d'oscillation dans le tube 119
5.2 Comparaison avec la simulation pour le tube large bande 120
5.2.1 Prise en compte des harmoniques 120
5.2.2 Prise en compte du TOS 121
5.2.3 Comparaison des tensions de gain max 122
5.2.4 Comparaison des puissances de saturation 122
5.2.5 Comparaison pour l'injection d'harmonique 123
5.2.6 Bilan des comparaisons mesures/simulations 125
5.3 Conclusions sur le tube large bande 125
5.4 Mesures sur des tubes spatiaux 127

5.4.1 Mesures sur une série de tubes TH4765C 127
5.4.2 Mesures sur un tube 175W Ku 129
5.5 Comparaison avec la simulation pour les tubes spatiaux 132
5.5.1 Simulations sur les tubes TH4765C 132
5.5.2 Simulations sur le tube 175W Ku 135
5.6 Conclusions sur les tubes spatiaux 138

Conclusion **139**

A expression de $< (\dot{y} - \dot{y}_0)|_2 >$ **145**

B Solutions exactes de l'équation du pendule **147**

Introduction

Les tubes hyperfréquences, famille à laquelle appartiennent les Tubes à Ondes Progressives (TOP), forment aujourd'hui un élément essentiel dans les télécommunications. Ce sont des amplificateurs de puissance, ou des sources, oeuvrant dans le domaine des hyperfréquences (HF), c'est à dire entre 300 MHz et 300 GHz. Ils sont nés de la nécéssité d'amplifier des signaux HF transmis ou captés, et du besoin de sources de puissances HF. Leur principe de base est l'amplification -ou la création- d'un champ HF dont l'énergie provient d'un faisceau d'électrons qui lui est couplé.

En 1895 a eu lieu la première transmission radio-électrique sans fil, effectuée par Marconi, qui initiait ainsi l'aventure des télécommunications. La triode, le premier dispositif capable d'amplifier les signaux électriques, a été inventée en 1906 par De Forest, et a permis la naissance de l'électronique. Son fonctionnement repose sur l'amplification d'un signal électrique via un faisceau d'électrons modulé, ce qui en fait l'ancêtre des tubes hyperfréquences.

C'est dans les années 30-40, alors que les télécommunications connaissaient un vaste développement, et nécessitaient en conséquence des dispositifs capables d'amplifier les signaux transmis, que les deux grandes familles d'amplificateurs de puissance ont été mises au point : les tubes hyperfréquences, avec le klystron en 1937, le magnétron qui, découvert en 1921, a été développé douze ans plus tard et le TOP en 1946. Le gyrotron vint plus tard, puisque son principe fut expliqué en 1959, et que les premières expériences furent réalisées dans les années 70 et 80.

L'autre grande famille concerne les dispositifs à état solide, dont l'élément de base, le transistor, a été inventé en 1948. Alors que dans les tubes hyperfréquences, les électrons se propagent dans le vide, dans les transistors, ils se déplacent dans un semi-conducteur. La petite taille des transistors, leur grande linéarité et la limitation de leur puissance les ont mis en situation de dominer l'électronique des basses puissances, et d'être l'élément de base des circuits intégrés et des microprocesseurs, donc de l'électronique et de l'informatique.

Les tubes hyperfréquences ont conquis le domaine des applications à haute fréquence et à haute puissance. On les retrouve dans les radars et dans les télécommunications terrestres -transfert de données, télévision- qui sont le domaine des klystrons. Ces derniers sont aussi utilisé comme source d'énergie pour les accélérateurs de particules, en particulier dans les sources de rayons X à usage médical. Les gyrotrons, qui sont parmi les tubes ceux qui permettent de monter le plus haut en fréquence et en puissance, sont utilisés pour le chauffage industriel et pour le chauffage de plasmas.

Les tubes à ondes progressives, outre leurs applications radar, équipent actuellement l'ensemble des satellites de télécommunications. Leur histoire est profondément reliée à celle des satellites, puisque le premier satellite de télécommunications, Telstar I, put effectuer en 1962 les premières transmissions transatlantiques de télévision grâce à un tube à ondes progressives 2W qui amplifiait le signal reçu avant de le réenvoyer vers la terre. Les TOP présentent d'excellentes qualités de résistance, de fiabilité et de durée de vie, indispensables pour équiper un satellite dont on attend un bon fonctionnement, dans l'espace, pendant 10 ou 20 ans. Ils possèdent par ailleurs une large bande passante qui permet d'amplifier plusieurs canaux de transmissions, et offrent des puissances

de sortie assez élevées.

Depuis plus de cinquante ans, les performances des tubes n'ont cessé d'augmenter, en particulier en terme de puissance, de fréquence et de bande passante, mais aussi en technologie, en fiabilité, en résistance à la température...

Alors que la quantité d'informations qui s'échange à travers le monde ne cesse de croître, la recherche d'une grande linéarité dans les amplificateurs se fait de plus en plus ressentir. Les signaux sont sur des multi-porteuses, avec des fréquences rapprochées les unes des autres, et tant au niveau de la transmission, de l'amplification que de la réception, il est nécessaire de s'affranchir des phénomènes de distorsion et de mélange de fréquences.

Les tubes à ondes progressives, comme tous les amplificateurs de puissance, présentent un comportement non-linéaire, qui a pour principaux effets de limiter la puissance de sortie, et de distordre le signal amplifié. Comprendre la non-linéarité, la maîtriser, et en limiter les effets est un des enjeux de la recherche sur les TOP.

Différentes solutions ont été étudiées et utilisées dans ce but, comme l'adjonction au tube d'un linéariseur, qui compense en partie la non-linéarité du tube, ou la modification d'éléments du tube, en particulier de l'hélice qui en forme la ligne d'interaction, dans le but d'optimiser le transfert d'énergie des électrons vers le champ HF.

La solution que nous présentons dans cette thèse, consiste à optimiser ce transfert d'énergie en transformant la forme du signal d'entrée, en lui ajoutant une harmonique : on injecte dans le tube, en plus du signal fondamental porté par une fréquence F, sa seconde harmonique de fréquence 2F.

Ce travail, qui a été mené en partenariat avec Thales Electron Devices (TED), la branche tubes électroniques de Thales, qui est un des leaders mondiaux dans les tubes hyperfréquences, a d'abord consisté en une étude approfondie des causes de la non-linéarité de l'interaction dans un TOP. Nous avons mis en avant la non-linéarité intrinsèque de l'interaction onde/électrons. Une étude théorique, utilisant différentes représentations d'un tube, a ensuite permis de mettre en évidence et de comprendre comment l'injection de seconde harmonique dans un TOP pouvait augmenter sensiblement la puissance de sortie sur fondamentale. Ces résultats ont été mis en application lors de mesures sur des tubes industriels, mesures menées à l'usine de Vélizy de TED.

Les résultats ont été concluants puisqu'on a mesuré une augmentation jusqu'à + 2.7 dB sur la puissance fondamentale en sortie d'un tube avec injection d'harmonique, ce qui correspond à une augmentation de 86 % en puissance.

Par ailleurs, cette étude a permis de mieux comprendre et maîtriser le rôle de l'harmonique dans l'interaction.

Ce manuscrit est divisé en cinq parties. La première partie donne une vue d'ensemble du principe des tubes hyperfréquences, et de l'état de l'art de l'injection d'harmonique dans les TOP. Dans la seconde partie, nous présentons différents formalismes décrivant les TOP, selon le régime dans lequel on se place : gain fort/petit signal, gain faible/grand signal puis gain fort/grand signal. Dans la troisième partie, nous abordons le problème des non-linéarités dans les TOP, de leur origine et de leurs conséquences sur le fonctionnement des tubes, puis nous montrons comment on peut les réduire en injectant de l'harmonique en entrée de tube ; la même démonstration est faite dans le cas des klystrons. La quatrième partie est consacrée à une étude approfondie du rôle des différents paramètres d'injection d'harmonique sur la puissance de sortie des tubes, menée avec le code de simulation TUBH. Enfin, la cinquième partie présente le travail expérimental mené sur des TOP à l'usine Thales de Vélizy, ainsi que les résultats obtenus.

Chapitre 1

Les tubes hyperfréquences

1.1 Généralités sur les tubes hyperfréquences

1.1.1 Pourquoi des tubes hyperfréquences

Les hyperfréquences couvrent la gamme de 300 MHz à 300 GHz, entre les ondes radio (fréquences plus basses), et le début de la bande infrarouge, qui s'étend jusqu'au spectre du visible, autour de $5 * 10^5$ GHz. Lorsque les télécommunications par voie hertzienne ont commencé de se développer, à la fin du 19e siècle, les fréquences utilisées étaient celles des ondes radio, que l'on utilise toujours aujourd'hui : concernant les radios domestiques, les Ondes Moyennes pour la modulation d'amplitude sont comprises entre 522 et 1620 kHz et les Ondes Courtes, pour la modulation de fréquence, sont entre 87.8 et 108 MHz. Les fréquences radio plus hautes sont utilisées dans l'aéronautique.

La naissance des télécommunications a été possible grâce à l'invention d'un amplificateur de puissance pour les ondes radio : la triode, mise au point en 1906. La triode est un tube à grille, qui est l'ancêtre des tubes HF ; les triodes sont toujours énormément utilisées aux basses fréquences, pour l'amplification audio, TV et dans l'industrie.

Avec le vaste développement des télécommunications on s'est tourné vers la gamme des hyperfréquences (HF), qui permettent de transporter des signaux sur de plus grandes distances, notamment entre la terre et les satellites, et qui ont permis d'élargir considérablement les bandes de fréquences utilisables, ce qui est une nécessité lorsque la quantité d'informations échangées augmente sans cesse, et que la concurrence pour l'utilisation de fréquences est rude. Avec le développement des télécommunications HF s'est imposé le besoin de systèmes adaptés, pour la production, la transmission et la réception des signaux. Lors de la transmission, la puissance des ondes émises diminue au cours de la propagation, ce qui rend nécessaire l'amplification de signaux à différents relais, notamment dans les stations terrestres, les satellites, les antennes radio...

Les tubes hyperfréquences, principalement apparus entre les années trente et quarante, forment la famille de dispositifs qui se sont imposés comme amplificateurs de puissance HF. Les klystrons et les Tubes à Ondes Progressives équipent ainsi la plupart des stations terrestres, pour les premiers, et des satellites, pour les seconds. Les TOP sont aussi utilisés pour amplifier les champs HF envoyés par les radars et les systèmes de contre-mesures.

Les hyperfréquences ont également trouvé un vaste domaine d'application dans le chauffage, industriel et ménager. On sait que les ondes hyperfréquences, également appelées micro-ondes du fait de leur longueur d'onde, ont la propriété d'agiter les molécules d'eau contenues dans les aliments, et de les chauffer. La production de ces micro-ondes, dans un four ménager, est assurée par un magnétron, qui peut fournir à cet usage 1 à 2 kW de puissance, avec une taille assez compacte.

Par ailleurs, les magnétrons peuvent servir de source HF pour les radars.

Le chauffage industriel, ainsi que la puissance fournie pour des applications de fusion thermonucléaire font appel à des puissances très élevées, fournies par des klystrons de puissance. Les gyrotrons sont utilisés pour le chauffage et le contrôle de plasmas, et d'autres applications (chauffage spécifique industriel, radars, trajectographie) sont envisagées.

Enfin, les klystrons sont une source de puissance utilisée pour les accélérateurs de particules, aussi bien pour les applications scientifiques (CERN, SLAC), que médicales : les klystrons alimentent les accélérateurs utilisés pour les sources de rayons gamma ou X utilisées pour la radiothérapie.

Les tubes hyperfréquences, qui sont essentiellement métalliques et sans matériaux sensibles, ont de bonnes qualités de résistance, notamment aux faibles et hautes températures. Ils ont également une très longue durée de vie (jusqu'à 15 ans) ; ces deux qualités sont primordiales dans les applications spatiales et militaires.

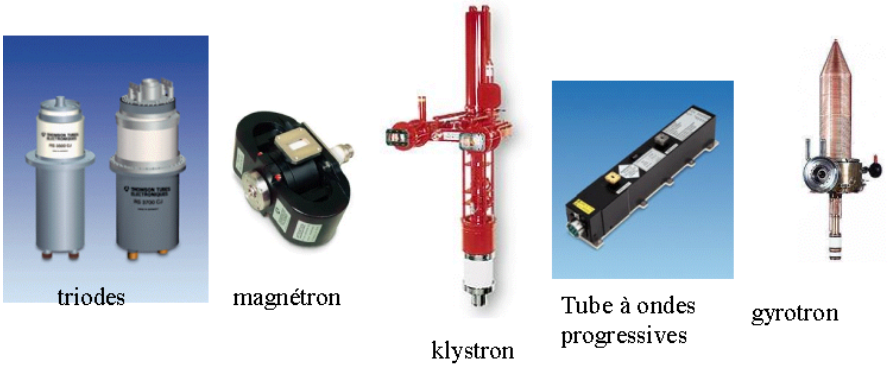


FIG. 1.1 – Photos des différents tubes hyperfréquences

On ne peut parler des tubes hyperfréquences sans citer l'autre grande famille d'amplificateurs HF : les dispositifs à état solide dominent toute l'électronique des basses puissances. Avec les circuits intégrés (1960) et les microprocesseurs (1970) ils ont permis le développement explosif de l'informatique et de l'électronique des circuits logiques.

Dans le domaine des hautes puissances, leur sensibilité élevée à la température (semi-conducteurs) et leur rendement limité les rendent moins efficaces que les tubes. De plus, dans le domaine des hautes fréquences, ils sont limités par les difficultés de réalisation des jonctions de faible épaisseur nécessaires. Ils sont également plus fragiles que les tubes. Par contre ils sont en général moins coûteux et peuvent avoir des dimensions très petites.

Aujourd'hui, les deux familles de composants actifs se sont ainsi spécialisées : les dispositifs à l'état solide dominent le domaine des basses puissances : récepteurs, traitement du signal, informatique ; les tubes dominent le domaine des hautes puissances et des hautes fréquences : génération et amplification de puissance. Le diagramme de la figure 1.2 résume les différents types d'applications des tubes et des dispositifs à état solide : on remarque notamment les applications de fortes puissances ($\approx 10^7 W$) comme la fusion nucléaire. Les basses puissances sont plutôt utilisées dans les télécommunications : spatiales ($\approx 10W$) et terrestres ($\approx 100W$).

1.1.2 Principes de fonctionnement des tubes HF

En faisant interagir un champ électromagnétique avec des électrons, accélérés par une tension électrique sur une distance de l'ordre de plusieurs longueurs d'onde, il est possible d'obtenir un

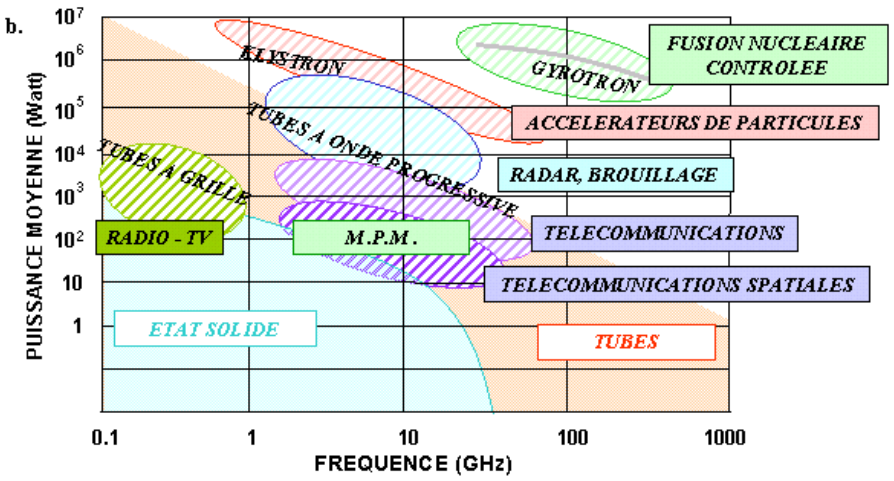


FIG. 1.2 – Amplificateurs de puissances : situation dans le diagramme fréquence/puissance et applications

transfert d'énergie entre les électrons et le champ. Dans le cas des amplificateurs de puissance, le transfert se fait des électrons vers le champ, c'est à dire que le champ ralentit les électrons qui lui cèdent une partie de leur énergie, ce qui donne lieu à une amplification du champ. C'est le principe de base de l'ensemble des tubes hyperfréquences.

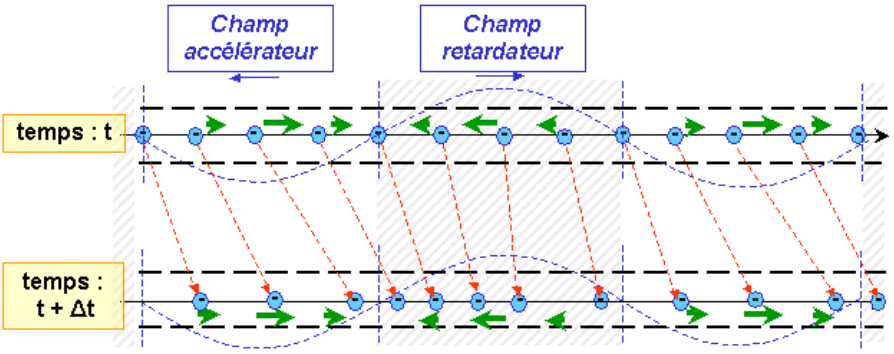


FIG. 1.3 – Interaction entre un faisceau d'électrons et une onde HF.

La figure 1.3 schématise un faisceau d'électrons qui interagit avec un champ HF. Le faisceau et l'onde se déplacent dans la même direction, et l'amplitude de la composante axiale du champ est représentée en pointillé. Pour que l'interaction puisse avoir lieu, il faut que les électrons se déplacent à une vitesse proche de celle de l'onde. Le schéma présente la position des électrons à deux instants successifs, dans le référentiel de l'onde : selon qu'ils sont dans des zones où la composante axiale du champ est positive ou négative, les électrons sont ralentis ou accélérés par le champ, si bien qu'il se forme des zones plus ou moins concentrées en électrons : c'est ce qu'on appelle le bunching des électrons. Il se forme ainsi une modulation de charge, et un courant résultant qui a la même vitesse et la même fréquence que l'onde HF : un transfert d'électrons est possible entre les deux.

Si la vitesse initiale des électrons est légèrement supérieure à celle de l'onde, il y a plus d'électrons ralentis que d'électrons accélérés, si bien que le faisceau est ralenti en moyenne : les électrons cèdent une partie de leur énergie à l'onde HF, et le champ est amplifié.

Si la vitesse initiale des électrons est légèrement inférieure à celle de l'onde, alors le faisceau est accéléré en moyenne. Dans ce cas, c'est le champ HF qui cède une partie de son énergie au faisceau. Au lieu de constituer un amplificateur HF, le dispositif est un accélérateur d'électrons.

Ce que nous venons de décrire est le principe commun à tous les tubes hyperfréquences. Ce qui constitue l'originalité de chaque type de tube est la manière dont ce couplage est rendu possible.

L'ancêtre : la triode

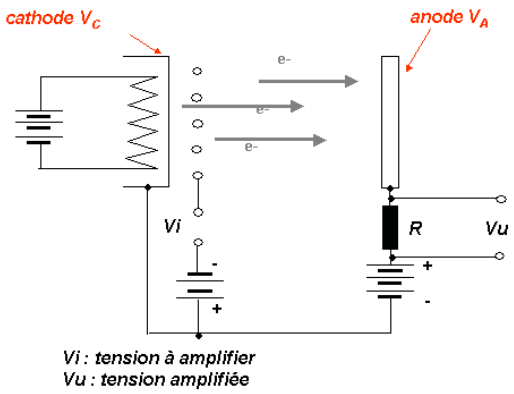


FIG. 1.4 – Triode : schéma d'une triode)

Dans une triode, les électrons sont accélérés entre la cathode et l'anode, entre lesquelles est placée une grille métallique. Le principe de fonctionnement est le suivant (figure 1.4). On chauffe la cathode qui libère alors des électrons, et on fixe $V_A > V_C$.

* quand $V_i \ll 0$, les électrons sont repoussés par la grille et le courant ne passe pas,
* quand $V_i < 0$, une partie des électrons passe : l'intensité du courant est proportionnelle à V_i, ainsi que la tension V_u développée dans la résistance R : c'est le régime d'amplification dont le gain est V_u/V_i
* quand $V_i > 0$, tous les électrons passent et il n'y a plus d'amplification.

Lorsque l'anode est chargée négativement, le courant ne passe pas.

Le magnétron

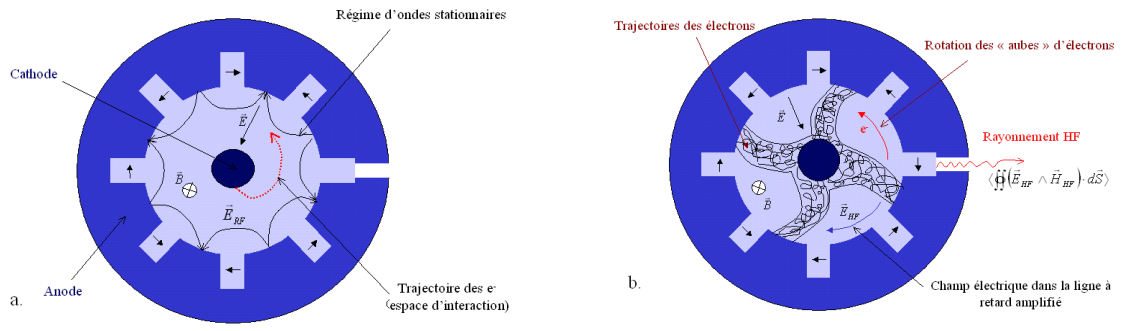


FIG. 1.5 – Cavité d'un magnétron. Représentation des différentes pièces et champs électromagnétiques (a) et de la formation des aubes d'énergie ainsi que de la création de l'onde HF (b).

Un magnétron se présente sous la forme d'une cavité cylindrique composée d'une cathode et d'une anode circulaires. Les électrons sont émis par la cathode sous l'effet d'un champ électrique radial $\vec{E}$ dans la cavité. Ils sont également soumis à un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire (ce qui range les magnétrons dans la catégorie des tubes à champs croisés). Sous l'effet de ces deux champs, les électrons adoptent une trajectoire circulaire indiquée sur la figure 1.5 (a). Le mouvement des électrons crée un courant qui crée un champ électrique résultant $\vec{E_{RF}}$. Le champ électrique résultant doit être couplé à la cavité du magnétron. Il interagit avec les électrons et extrait une partie de l'énergie sous forme d'énergie potentielle : le cylindre extérieur de la cavité (l'anode) est découpé de manière à diminuer la vitesse de l'onde électromagnétique (sur la figure, il s'agit d'un crénelage), afin de la faire coïncider avec celle des électrons. Dans ces conditions, les trajectoires des électrons se groupent, formant les aubes d'une roue qui tourne à la vitesse de rotation du mode résonnant (figure(1.5)b.). Le courant, résultant de la circulation des électrons dans ces aubes, est alors couplé au champ du mode tournant auquel une partie importante de l'énergie est alors transférée. En résultat, on peut extraire de la cavité un champ hyperfréquence ($\vec{E_{RF}}$, $\vec{B_{RF}}$). La fréquence de ce champ HF est déterminée par la géométrie de la cavité. La source d'énergie du magnétron est la tension appliquée entre les électrodes. On retrouve donc le transfert d'énergie d'une tension appliquée à un faisceau d'électron vers une onde hyperfréquence.

Le klystron

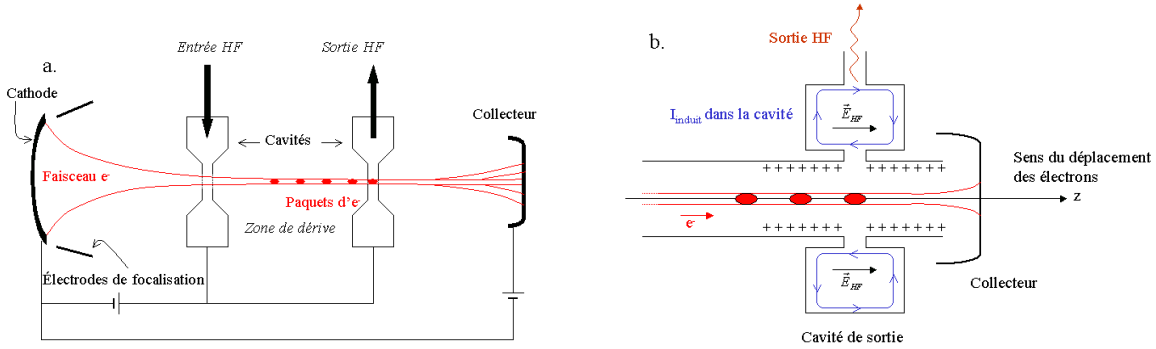


FIG. 1.6 – Principe de fonctionnement d'un klystron : schéma général (a) et cavité de sortie (b).

Le klystron est un amplificateur de puissance HF. Son fonctionnement, dans le cas d'un klystron simple à deux cavités, est représenté figure 1.6 (a) :

* un faisceau d'électrons est émis par la cathode chauffée, focalisé par des électrodes, puis accéléré par une tension d'accélération. Les électrons se déplacent donc tous initialement à la même vitesse, selon l'axe du klystron.

* Le faisceau traverse la première cavité résonante (annulaire). L'onde hyperfréquence que l'on souhaite amplifier est injectée par l'entrée HF, et oscille dans cette cavité (qui est choisie de manière à être accordée avec l'onde HF). Le mode de résonance de l'onde dans la cavité est choisi de manière à ce que le champ électrique ait une composante longitudinale agissant sur le faisceau. Ainsi, le faisceau pénétrant dans la cavité est soumis à un champ sinusoïdal, et il est successivement accéléré puis ralenti. Lorsqu'il sort de la cavité d'entrée, il est modulé en vitesse.

* Les électrons traversent alors une zone de dérive, où ils ne sont soumis à aucun champ HF. La modulation de vitesse se transforme en modulation de charge, les électrons se regroupant par

paquets (le bunching). Il se crée donc finalement un courant d'électrons dont la fréquence est imposée par celle de la cavité d'entrée.

* La cavité de sortie est accordée sur la même fréquence que la cavité d'entrée, donc sur celle du courant induit. Celui-ci développe une tension dans la cavité, c'est à dire un champ hyperfréquence, adapté à la cavité de sortie (figure 1.6b.). Ce champ est récupéré par la ligne de sortie de la cavité. Il a les mêmes caractéristiques que le champ injecté, mais une amplitude largement augmentée. L'énergie cédée à l'onde HF provient d'une perte d'énergie cinétique des électrons qui sont en moyenne ralentis.
* Après cette seconde cavité les électrons sont captés par le collecteur, qui dissipe leur énergie cinétique résiduelle.

L'interaction entre l'onde hyperfréquence et le faisceau d'électrons se fait uniquement au niveau des cavités. Le klystron est un amplificateur de puissance HF qui permet d'atteindre de forts rendements (puissance de sortie/puissance fournie par la cathode) et de grandes puissances. Par contre une cavité de klystron est associée à une seule fréquence HF : le klystron a une faible bande passante. Il existe des klystrons multicavités, destinés à augmenter le rendement en amplifiant l'onde HF à plusieurs reprises. Il existe aussi des klystrons multi-faisceaux.

Le tube à ondes progressives

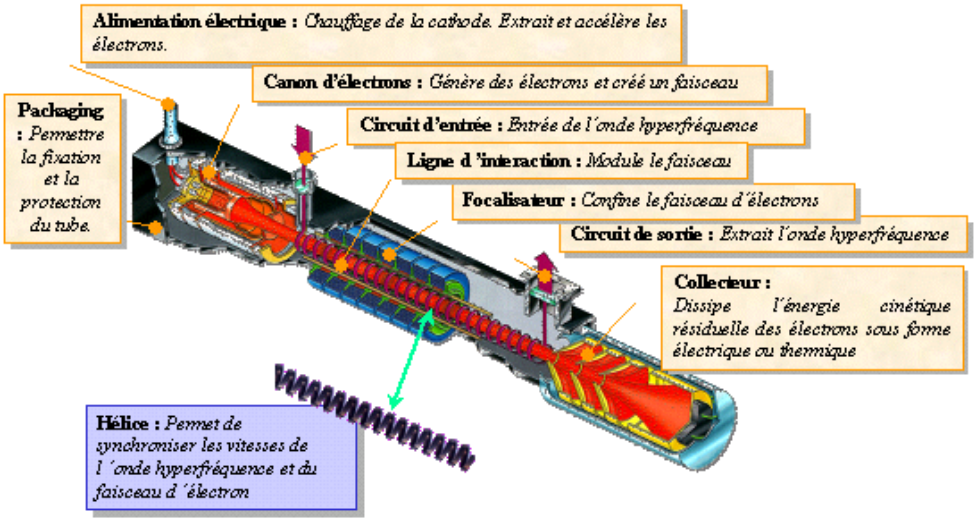


FIG. 1.7 – Vue en coupe d'un Tube à Ondes Progressives

Le tube à ondes progressives est une structure à onde lente, ce qui signifie que l'onde hyperfréquence qui est amplifiée est ralentie par une structure adaptée, appelée "ligne à retard", de manière à ce qu'elle se propage à la même vitesse que les électrons.

* Le faisceau d'électrons est généré par un canon d'électrons, constitué d'une cathode chauffée (entre 900° et 1200°C) et d'un système de focalisation. Tout au long de la ligne d'interaction, le faisceau est maintenu confiné par le champ magnétique axial d'un focalisateur à aimants permanents.
* L'onde hyperfréquence est injectée dans le circuit par un câble coaxial. Elle se propage dans un guide d'onde constitué d'un fourreau contenant une hélice, qui diminue la composante longitudinale de sa vitesse. Les électrons se déplacent au centre de l'hélice avec une vitesse proche de celle de la propagation longitudinale de l'onde.

∗ C'est dans la ligne à retard que se produit le couplage entre les électrons et l'onde HF, et que le faisceau cède une partie de son énergie à l'onde. Tout au long de la ligne d'interaction, les électrons sont soumis à un champ sinusoïdal qui se déplace avec eux. Selon la zone de champ dans laquelle ils se trouvent, les électrons sont accélérés ou ralentis par le champ. Cette modulation de vitesse entraîne une modulation de position : on observe comme dans le cas du klystron la formation de paquets d'électrons (bunching), et donc d'un courant de modulation.

Pour que le champ soit amplifié, il faut que la vitesse initiale des électrons soit légèrement supérieure à celle de l'onde : il y a alors plus d'électrons ralentis que d'électrons accélérés, si bien que le faisceau est ralenti en moyenne : alors les électrons cèdent une partie de leur énergie cinétique à l'onde HF, et le couplage permet l'amplification du champ.

Le couplage entre l'onde HF injectée et le courant de modulation produit dans le TOP un champ HF de plus en plus fort au cours de la propagation.

∗ Le champ hyperfréquence résultant de l'interaction est extrait par le circuit de sortie. Les électrons, dont la vitesse moyenne a été réduite puisqu'ils ont cédé une partie de leur énergie cinétique à l'onde, sont captés sur le collecteur.

Contrairement au cas du klystron, l'interaction entre le champ HF et le faisceau se produit tout au long de la ligne à retard du TOP. Il n'y a pas de cavité résonante, et la bande passante des fréquences susceptibles d'être amplifiées par le TOP est fixée par les paramètres de la ligne à retard. D'une manière générale, la bande passante des TOP est beaucoup plus grande que celle des klystrons. Une excellente description de tous les aspects d'un TOP fait l'objet de l'ouvrage de Gilmour "Principles of Traveling Wave Tubes" [Gilmour, 1994].

Le gyrotron

Le gyrotron fonctionne lui aussi par cession d'énergie d'un faisceau à une onde HF, mais une onde rapide, en utilisant la relativité, ce qui permet d'atteindre des fréquences élevées, et en travaillant avec des champs inhomogènes. Le principe de fonctionnement du gyrotron, illustré sur la figure 1.8, est le suivant : le canon à électron, immergé dans un fort champ magnétique, permet

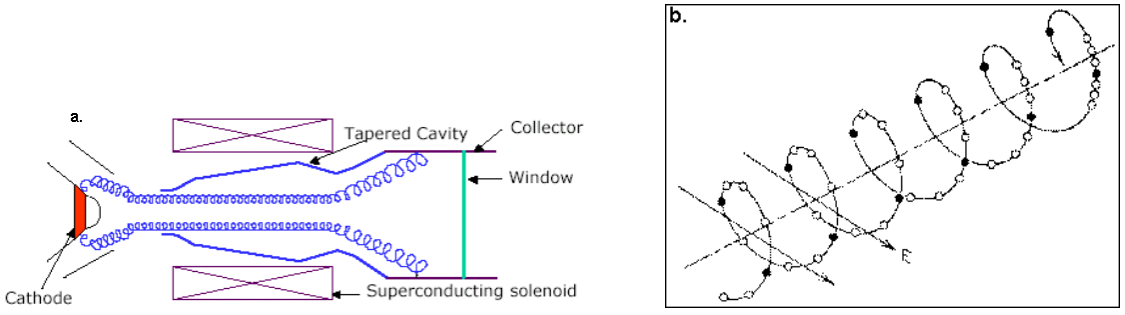


FIG. 1.8 – Schéma d'un gyrotron(a) et bunching hélicoïdal des électrons (b).

d'obtenir un faisceau creux, de forte densité, où les électrons tournent suivant des trajectoires en forme de spirale avec une vitesse angulaire voisine de la fréquence d'amplification, pour interagir avec l'onde rapide. Ce faisceau traverse une cavité résonnante surmodée et ouverte, débouchant sur un guide d'onde. L'interaction se fait avec les composantes transversales du champ électrique, à chaque rotation des électrons, et provoque la formation de paquets, comme dans le cas du klystron, avec la différence qu'il s'agit non plus d'un bunching longitudinal, mais azimutal, comme illustré sur la figure 1.8 (b). Les électrons fournissent ainsi une grande partie de leur énergie au champ, avant d'être récupérés par le collecteur. Le gyrotron est habituellement utilisé comme oscillateur,

donc comme source de puissance HF, mais il peut aussi être utilisé comme amplificateur, en utilisant plusieurs cavités comme dans les klystrons ou un guide d'onde surdimensionné jouant le rôle de la ligne à retard des TOP. Les puissances fournies par les gyrotrons sont de 100 à 1000 fois plus élevées que celles que peuvent fournir, aux mêmes fréquences, les tubes hyperfréquences classiques.

Fonctionnement d'un transistor n-MOS

Il existe un grand nombre de types de transistors, qui ont chacun des modes de fonctionnement et des caractéristiques spécifiques. Nous présentons ici le principe d'un type de transistor, le transistor MOS, afin d'illustrer le mode de fonctionnement des dispositifs à état solide, ce qui est très loin d'être exhaustif. Les transistors MOS sont les plus utilisés pour les basses fréquences. Pour les applications aux hyperfréquences, ce sont principalement les transistors FET (à effet de champ) qui sont utilisés. Un transistor n-MOS (MetalOxyde Semiconducteur), est constitué d'un substrat (le silicium par exemple), dopé positivement (par du bore par exemple), comme indiqué sur la figure 1.9(a). Ce substrat a donc un surplus de "trous" d'électrons disponibles. La source et le drain sont au contraire dopés négativement (par de l'arsenic, par exemple), et sont donc susceptibles de céder des électrons. (Dans les transistors p-MOS, c'est l'inverse : le substrat est dopé négativement, la source et le drain positivement).

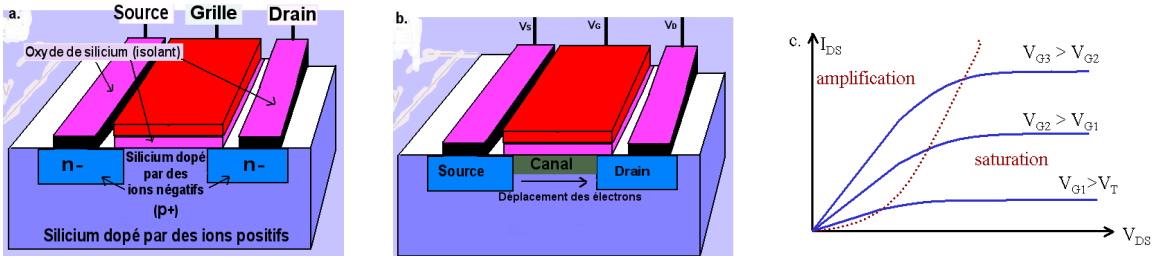


FIG. 1.9 – Exemple d'un transistor N-MOS : schéma en coupe (a), principe de fonctionnement (b) et courbe de caractérisation I_{DS}/V_{DS}

Lorsque à la grille est appliquée une tension V_G négative, celle-ci attire les "trous" p^+ si bien la partie du substrat $p+$ placée proche de la grille est fortement positive. On a entre la source et le drain une double jonction n-p p-n qui se comporte comme deux diodes tête-bêche : le courant ne peut pas passer. Lorsque V_G devient positive, mais reste inférieure à une tension seuil V_T, cette région se charge négativement, mais reste enrichie en "'trous"' (type p), si bien qu'on a toujours une jonction n-p p-n, et pas de courant entre la source et le drain. A la tension V_T se produit une inversion : la couche du substrat la plus proche de la grille s'enrichit en électrons libres. Pour $V_G > V_T$ on a une double jonction n-n n-n qui permet le passage du courant entre la source et le drain : autrement dit, cela ouvre un "canal" électronique, canal dont la profondeur dépend de la tension V_G (figure 1.9b.). Si l'on applique alors une tension V_{DS} positive entre le drain et la source, des électrons de la source traversent le canal pour rejoindre le drain. On crée ainsi un courant I_{DS}, dont l'amplitude dépend de la largeur du canal, donc de la tension de grille V_G. La courbe de caractérisation du transistor est représentée sur la figure (1.9c.) et montre comment l'amplification du courant I_{DS} en fonction de la tension V_{DS} est commandée par la tension de grille.

Dans un transistor, un signal porté par une tension V_G est amplifié par un faisceau d'électrons. La différence fondamentale avec les tubes hyperfréquences est le milieu où se propage ce faisceau : dans un solide au lieu du vide.

1.1.3 Principales caractéristiques des amplificateurs de puissance

Dans le tableau suivant, nous présentons les principales caractéristiques, en fréquence et en puissance, de différents amplificateurs de puissance. Ce tableau n'est pas exhaustif, d'autant plus que les performances de ces différents dispositifs sont constamment en train d'évoluer. De plus, il ne tient pas compte de l'interdépendance entre les différents paramètres (par exemple, les TOP n'ont pas les mêmes puissances de sortie à 5 et à 50 GHz. Mais il permet de juger des performances respectives de chaque sorte de dispositif. Les dispositifs à état solide sont notés SSPA (Solid State Power Amplifier).

Type de dispositif	**Triode**	**Magnétron**	**Klystron**
fréquence	jusqu'à 200 MHz	1 à 15 GHz	1 à 20 GHz
bande passante	1 %	oscillateur	quelques %
gain petit signal	13 dB	oscillateur	45-60 dB
puissance de sortie	qques centaines de kW	6 kW en chauffage	20-150 kW continu
		1 MW en radar	5-50 MW pulsé
rendement global	50%	50 à 70 %	40 à 60 %
TOP	**Gyrotron-oscil**	**Gyrotron ampli (labo)**	**SSPA**
5 à 50 GHz	8 à 170 GHz	8 à 250 GHz	1 à 30GHz
jusqu'à 10 GHz	oscillateur	quelques %	quelques %
45-60 dB	oscillateur	25 dB	30-50 dB
30 W à 30 kW	jusqu'au MW (3s)	10 kW continu	qques W à 400 W
		100 kW pulsé	
30 à 70 %	40 %	25 à 35 %	10 à 40 %

Il apparaît que les tubes qui permettent de travailler aux plus hautes fréquences sont les gyrotrons. Ils produisent de plus des puissances considérables, ainsi que les magnétrons, à des fréquences plus faibles. Ils ont cependant un rendement moins élevé que les autres tubes, donc ils sont plus coûteux en énergie, et les valeurs en MW indiquées dans le tableau sont celles d'une puissance crête, qui n'est atteinte que pendant des temps assez courts : jusqu'à 3s. Leur technologie les rend également très coûteux à la production. Dans le domaine des tubes amplificateurs, les plus utilisés sont le klystron et le TOP. Le klystron présente des plus grandes puissances de sortie. Par contre, il ne monte pas à d'aussi hautes fréquences que le TOP, et surtout, il possède une faible bande passante, ce qui provient du fait que l'amplification se fait dans une cavité. L'hélice des TOP permet au contraire une bande passante beaucoup plus large : certains modèles de TOP fonctionnent sur plus d'une, voire deux octaves (entre 6 et 18 GHz par exemple). Enfin, la comparaison entre ces deux types de tubes et les dispositifs SSPA montre que ces derniers fonctionnent dans les mêmes gammes de fréquences, même s'ils n'atteignent pas forcément les plus hautes fréquences des TOP et que leur bande passante n'égale pas celle des TOP. Leur rendement reste inférieur à celui des tubes, et surtout leurs puissances de sortie sont beaucoup plus faibles.

1.2 L'injection d'harmonique

Tous ces types d'amplificateurs présentent un comportement non-linéaire lorsqu'on les utilise avec des niveaux de puissance élevés, ce qui en limite les performances : saturation de la puissance de sortie, distorsion du signal en sortie, production de fréquences harmoniques, ou de signaux d'intermodulation dans le cas de multiporteuses.

La cause de ces non-linéarités, et la manière dont ces différents aspects sont reliés entre eux, fait l'objet de la première partie du chapitre 3.

De nombreuses voies ont été explorées, et largement utilisées pour en compenser les effets, ce qui est expliqué dans la deuxième partie du chapitre 3.

Le travail que nous présentons a porté sur l'injection d'harmonique, et ce que nous allons décrire ici est l'état de l'art dans ce domaine, dans les TOP puis dans les klystrons.

Injecter de l'harmonique dans un tube pour en diminuer la non-linéarité n'est pas une technique nouvelle. Elle a été utilisée par de nombreux tubistes, notamment à l'usine de Vélizy de Thales Electron Devices, dans les années 80, et on en trouve quelques traces dans la littérature [X, 1976].

Ce qui est récent est l'étude plus approfondie des possibilités ouvertes par cette méthode et des mécanismes impliqués. Le développement des codes de calculs, directement lié à celui de l'informatique, permet d'accéder à des résultats qui n'étaient pas à la portée des ingénieurs et des scientifiques il y a plusieurs décennies.

Deux équipes en particulier ont travaillé durant les cinq dernières années sur la génération et l'injection d'harmonique dans les TOP : l'équipe de Datta *et al.*, du Microwave Tube Research and Development Centre (Bangalore), et du Centre of Research in Microwave Tubes (Varanasi), en Inde ; l'équipe de Wöhlbier et Booske à l'université du Wisconsin (Madison) aux Etats-Unis.

Datta *et al.* ont mené une étude sur l'analyse de la génération d'harmonique dans les TOP. Ils ont travaillé avec un modèle eulérien, et ont identifié le rôle de différents paramètres sur la croissance de la seconde harmonique, en particulier celui de la dispersion en vitesse entre fondamentale et harmonique, c'est à dire l'écart entre leurs vitesses de phase [Datta et al., 1999]. Ils ont montré comment le taux d'harmonique décroissait avec le niveau de dispersion, que celle-ci soit positive ou négative, résultat que nous mettons également en avant au chapitre 4. Ils ont également étudié avec un modèle d'interaction eulérien le rôle de l'injection d'harmonique dans un TOP, sur les produits d'intermodulation d'ordre 3 : lorsque deux fréquences proches f_1 et f_2 sont injectées dans un tube, elles sont parasitées par les produits d'intermodulation d'ordre 3 (IM3) $2f_2 - f_1$ et $2f_1 - f_2$. En injectant l'harmonique 2 f_1 (resp. f_2) il est possible de réduire fortement la production de $2f_2 - f_1$ (resp. $2f_1 - f_2$), à condition de lui imposer les bonnes conditions de phase et d'amplitude [Datta et al., 2001].

L'équipe de Wöhlbier *et al.* a également effectué un large travail sur la suppression d'IM3 par injection de seconde harmonique, avec des simulations sur leur code MUSE [Wöhlbier et al., 2002b], et avec des mesures [Wirth et al., 2002].

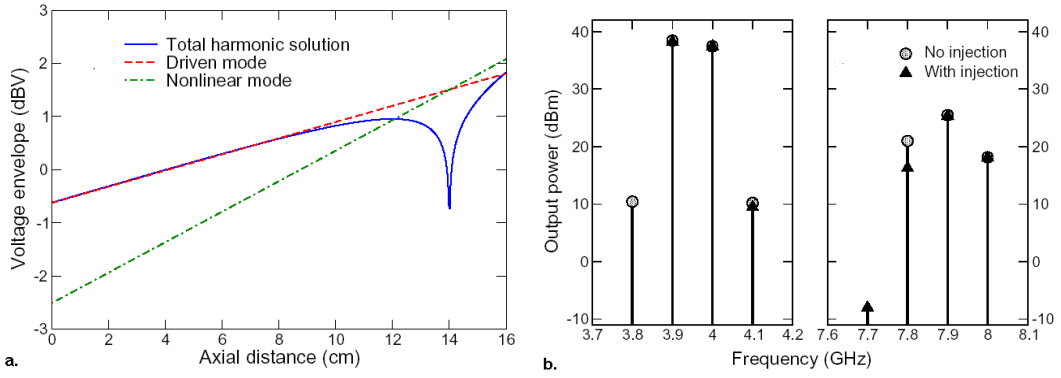


FIG. 1.10 – Harmonique 2 en fonction de la distance avec un point d'annulation (a) . Suppression d'un produit d'intermodulation d'ordre 3 (b). (Wöhlbier *et al*

Ils ont également étudié comment l'injection de seconde harmonique pouvait réduire le taux de

seconde harmonique en sortie de tube. Ils ont en particulier montré que l'harmonique 2 résultante était la somme de l'harmonique injectée et de l'harmonique créée par la fondamentale, si bien que lorsque ces deux composantes se compensent, on peut annuler l'harmonique en sortie. Ceci est illustré sur la figure 1.10 (a), tirée de leur publication [Wöhlbier et al., 2004], comme la figure 1.10 (b), qui montre la suppression du produit d'intermodulation d'ordre 3 à 3.8 GHz, pour des fréquences fondamentales 3.9 GHz et 4 GHz, avec l'injection de l'harmonique 2 à 7.8 GHz. Ils ont aussi mis en avant l'augmentation de puissance sur fondamentale obtenue avec l'injection d'harmonique 2.

L'étude de la distorsion dans les TOP, de l'injection d'harmonique pour la réduire, ont fait l'objet de la thèse de J.G. Wöhlbier [Wöhlbier, 2003].

Nous avons mené une collaboration avec cette équipe, en particulier sur le code LMSuite, qui modélise l'interaction 1D dans un TOP [1]. Cette collaboration a mené à une publication commune lors de la conférence IVEC 2003 [Wöhlbier et al., 2003].

Enfin, nous citons ici également le travail qui a été mené par l'équipe de Lau sur la génération d'harmonique dans les klystrons [Lau, 2000], et sur la suppression des produits d'intermodulation d'ordre 3 dans les klystrons par injection d'harmonique 3 [Bhattacharjee et al., 2003]

[1] LMSuite est disponible sur le site www.lmsuite.org

Chapitre 2

Formalismes décrivant un Tube à Ondes Progressives

2.1 Modèles et codes de calculs pour un TOP

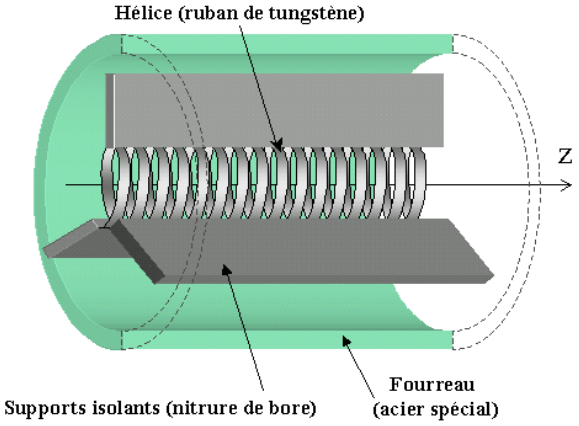


FIG. 2.1 – Coupe d'une hélice dans son fourreau

Dans un Tube à Ondes Progressives (TOP), les ondes se propagent dans une structure constituée d'un guide cylindrique (fourreau) au milieu duquel est placée une hélice, maintenue par des supports diélectriques, comme cela est représenté sur la figure 2.1. La structure périodique de l'hélice transforme la forme des différentes modes qui se propagent dans le guide. Leur vitesse de progation est diminuée, d'autant plus que le pas de l'hélice est serré : l'hélice intervient comme une ligne à retard. La figure 2.2 illustre comment la présence de l'hélice transforme la forme du champ électrique. Lorsque le coeur du guide cylindrique est constitué d'un simple fil (guide coaxial) les lignes de champ électrique sont perpendiculaires au fil à sa surface, et se courbent en s'éloignant. Les lignes de champ magnétique, qui ne sont pas représentées car le champ magnétique est beaucoup plus faible que le champ électrique, sont contenues dans le plan perpendiculaire à la figure : on reconnait un mode TM (Transverse Magnétique). La période spatiale dépend du mode considéré, et de la fréquence de l'onde. Lorsqu'on place une hélice au lieu du fil, la période spatiale du champ est diminuée, en rapport avec le pas de l'hélice ; de plus les lignes de champ électrique sont modifiées à proximité de l'hélice, où leur composante principale se trouve être axiale, parallèle à la direction

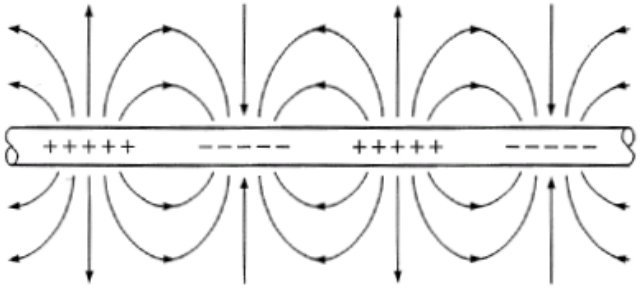


Figure 1-6 RF charge and electric field patterns for a single-wire transmission line above a ground plane.

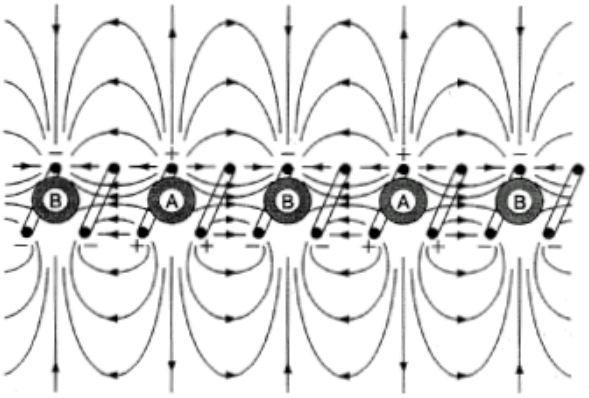


Figure 1-7 RF charge and electric field patterns for a helix.

FIG. 2.2 – Influence de l'hélice sur la forme du champ électrique. Tiré de [Gilmour, 1994]

de propagation. Il s'agit toujours d'un mode TM.

Le faisceau d'électrons se déplace à l'intérieur de l'hélice suivant la direction de propagation z. L'interaction champ/faisceau doit avoir pour effet de ralentir en moyenne le faisceau d'électrons, afin qu'il cède une partie de son énergie cinétique au champ. Il faut donc que les électrons soit soumis à une composante axiale du champ ce qui est réalisé grâce à l'hélice. Il faut aussi que la vitesse réduite de l'onde soit proche de celle du faisceau (mais légèrement supérieure).

L'interaction entre les électrons et l'onde, à l'origine de l'amplification du champ, est déterminée par les équations de Maxwell dans le faisceau et par la relation fondamentale de la dynamique appliquée à chaque électron en tenant compte de la répulsion entre eux ; ces équations, dont certaines sont non-linéaires, nécessitent pour être résolues de tenir compte de la structure de l'hélice, du fourreau dans lequel elle est insérée et des différents éléments et matériaux qui composent le tube.

Autrement dit, le calcul exact des grandeurs résultant de l'interaction dans un TOP est une opération qui nécessite un très grand nombre de paramètres et de calculs.

Les calculs les plus élaborés sont réalisés par des codes de simulations sur ordinateur : un grand nombre de codes modélisant les tubes hyperfréquences ont été conçus depuis l'ère de l'informatique. La référence [Antonsen et al., 1999] propose une revue de la modélisation informatique des tubes, telle qu'elle se présentait en 1999. Les codes de calculs utilisent différents formalismes : codes eulériens, lagrangien ou PIC (Particle In Cell), et ils travaillent à 1, 2 ou 3 dimensions. Citons par exemple le code CHRISTINE, du Naval Research Laboratory de Washington, qui existe dans des versions 1-D et 3-D, utilise un formalisme lagrangien et donne de bons résultats comparés aux

mesures [Abe et al., 2000], [Chernin et al., 2001]. Nous retrouverons dans le chapitre 4 le code TUBH, et dans le chapitre 5 le code MVTRAD, développés à Thales, que nous avons largement utilisés durant cette thèse : le premier est un code 1-D et le second un code 3-D et tous deux utilisent le formalisme lagrangien, où le faisceau d'électrons est représenté par des disques, de rayon éventuellement variable. Nous reparlerons également du code eulérien unidimensionnel MUSE, de l'université de Madison (Wisconsin) [Wöhlbier et al., 2002a].

Plus la modélisation est précise, et plus les temps de calcul sont longs, ce qui est une des raisons pour lesquelles il existe de nombreux codes différents : selon le type de résultats désirés, le compromis entre durée de calcul et précision est choisi par les utilisateurs.

Avant l'ère de l'informatique, les ingénieurs s'étaient appliqués à trouver des modèles simples permettant de calculer plus ou moins simplement le champ amplifié à la sortie d'un TOP. Ils l'ont fait avec assez de succès pour trouver des résultats cohérents avec les mesures expérimentales à condition de rester dans certaines conditions. La conception de Tubes à Ondes Progressives a pu réellement se développer lorsque Pierce en décrivit la théorie avec un modèle assez simple en 1950, qui fait l'objet de la deuxième partie de ce chapitre.

L'objet du présent chapitre est de présenter plusieurs de ces modèles. Une de leurs caractéristiques communes est de travailler sur une seule dimension, celle de la propagation : on considérera que le champ électrique auquel est soumis le faisceau n'a qu'une composante E_z, selon l'axe de propagation ; de même, on ne prendra en compte que les mouvements des électrons selon z.

Il y a essentiellement deux manières de représenter un faisceau d'électrons :

- le formalisme eulérien, qui ne s'attache pas à chaque électron et considère le faisceau comme un fluide. C'est le formalisme utilisé pour le modèle de Pierce.
- le formalisme lagrangien qui traite le faisceau en suivant le mouvement d'un électron (ou d'un groupe d'électrons) le long du tube. Le modèle de type FEL, ainsi que le modèle de Rowe, se placent dans ce formalisme.

Enfin, selon les cas, on se place dans les régimes de grand/petit signal et de gain fort/faible. Les caractéristiques de ces régimes sont présentées dans le tableau suivant :

	PETIT SIGNAL	GRAND SIGNAL
GAIN FAIBLE	Onde non amplifiée, électrons peu perturbés par l'onde.	Onde non amplifiée, électrons fortement perturbés par l'onde. **Modèle FEL**
GAIN FORT	Onde amplifiée en $e^{-\Gamma z}$, électrons peu perturbés par l'onde. **Modèle de Pierce**	Onde amplifiée, électrons fortement perturbés par l'onde. **Modèle de Rowe**

2.2 Modèle de Pierce : gain fort, petit signal

2.2.1 Cas du TOP sans charge d'espace et sans pertes

Le modèle de Pierce représente le faisceau d'électrons comme un écoulement : c'est un modèle eulérien dans lequel les grandeurs comme la vitesse sont calculées en un point z du faisceau et à un instant t. Il a été formulé par J.R. Pierce, qui est un des pionniers des TOP, dans son ouvrage "Traveling Wave Tubes" [Pierce, 1950]. Par ailleurs c'est un modèle en petit signal : on considère

les grandeurs du faisceau comme peu perturbées par la présence de l'onde. C'est un modèle à une harmonique : toutes les grandeurs dépendantes du temps sont en $e^{j\omega t}$. Enfin, on considère le faisceau et le circuit comme étant unidimensionnels, en ne travaillant que sur les grandeurs projetées sur l'axe z de la propagation. La variation spatiale n'est prise en compte que selon z.

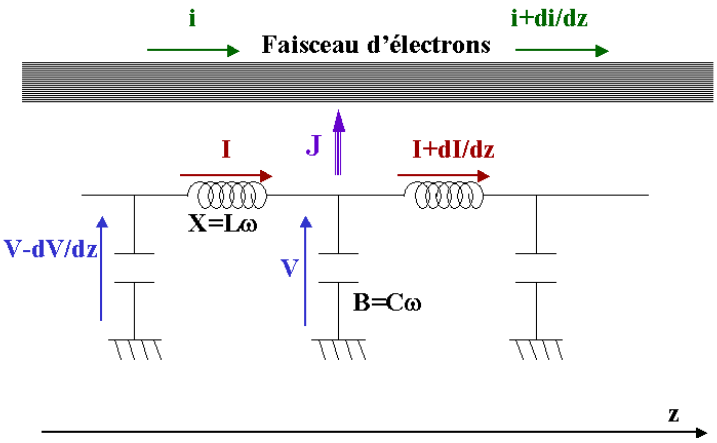


FIG. 2.3 – Circuit équivalent d'un tube à ondes progressives dans le modèle de Pierce

Le guide d'onde (fourreau + hélice + supports isolants) est représenté par un circuit équivalent en interaction avec le faisceau d'électrons, comme représenté sur le schéma de la figure 2.3 : le courant J sortant du circuit à chaque unité de longueur est entièrement cédé au faisceau d'électrons. La capacité par unité de longueur C et l'inductance par unité de longueur L sont déterminées par les paramètres à froid du circuit, c'est à dire par la forme des différents éléments du guide d'onde.

Equation de circuit

On écrit les relations entre courant et tension dans le circuit électronique :

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -jBV - J \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -jXI \tag{2.2}$$

Le calcul de Pierce se fait en considérant que toutes les grandeurs résultant de l'interaction varient avec la distance en $e^{-\Gamma z}$; en utilisant $J = \frac{\partial i}{\partial z}$, les équations précédentes deviennent alors

$$-\Gamma I = -jBV + \Gamma i \tag{2.3}$$

$$-\Gamma V = -jXI \tag{2.4}$$

Des deux équations précédentes on élimine I pour exprimer i en fonction de V :

$$\Gamma i = -\frac{\Gamma^2 + BX}{jX} V \tag{2.5}$$

En l'absence de faisceau d'électrons, donc de courant i, l'équation précédente implique $\Gamma^2 + BX = 0$, qui est l'équation de propagation du champ dans la ligne seule. Sans faisceau, la constante de propagation du champ dans la ligne est donc $\Gamma_c = j\sqrt{BX}$: l'onde qui se propage dans cette ligne seule varie avec la distance en $e^{-\Gamma_c z}$. L'impédance caractéristique de la ligne est : $K = \sqrt{\frac{X}{B}}$, ce

qui permet de réécrire l'équation (2.5) :

$$V = -\frac{K\Gamma\Gamma_c}{\Gamma^2 - \Gamma_c^2} i \tag{2.6}$$

La constante de propagation et l'impédance caractéristique d'un TOP en l'absence de faisceau sont deux grandeurs que l'on sait mesurer directement sur un tube, ce qui n'est pas le cas des capacités et inductances.

Courant du faisceau

La vitesse du faisceau d'électrons u(z,t) est reliée au champ de circuit V par l'équation du mouvement, exprimant l'effet du champ électrique $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$:

$$\frac{du}{dt} = \eta . \frac{\partial V}{\partial z} \tag{2.7}$$

où $\eta = \frac{e}{m}$ est le rapport charge sur masse d'un électron. La variation temporelle de la vitesse se décompose en dérivées partielles : $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$. En notant $u(z,t) = u_0 + v(z,t)$ la vitesse des électrons, u_0 étant la vitesse moyenne initiale du faisceau et v étant la modulation induite par l'interaction en $e^{j\omega t - \Gamma z}$, puis en négligeant v devant u_0 (petit signal), on a finalement l'équation :

$$(j\omega - u_0\Gamma)v = -\eta\Gamma V \tag{2.8}$$

ou bien, β_e étant la "'constante de propagation du faisceau"', $\beta_e = \frac{\omega}{u_0}$:

$$v = \frac{-\eta\Gamma V}{u_0(j\beta_e - \Gamma)} \tag{2.9}$$

Par ailleurs, la conservation de la charge dans le faisceau permet d'exprimer la densité de courant j_c en fonction de la densité volumique de charge ρ

$$\frac{\partial j_c}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.10}$$

autrement dit

$$-\Gamma j_c = -j\omega\rho \tag{2.11}$$

Enfin, la densité de courant total dans le faisceau s'écrit comme le produit de la vitesse et de la charge :

$$j_0 + j_c = (u_0 + v)(\rho_0 + \rho) \tag{2.12}$$

La composante constante du courant j_0 est égale à $u_0\rho_0$; on élimine le terme de second ordre ρv, et on obtient :

$$j_c = \rho_0 v + u_0\rho \tag{2.13}$$

Des équations (2.11) et (2.13) on tire la relation entre j_c et v :

$$j_c = j\frac{\rho_0\beta_e}{j\beta_e - \Gamma} v \tag{2.14}$$

et en utilisant la relation (2.9) entre v et V :

$$j_c = -\frac{j\rho_0\beta_e\Gamma\eta}{(j\beta_e - \Gamma)^2 u_0}V \tag{2.15}$$

Simplifions cette relation en rappelant que l'énergie cinétique du faisceau $\frac{1}{2}mu_0^2$ est égale à eV_0 où V_0 est la tension appliquée à la cathode, et que $j_0 = u_0\rho_0$. Par ailleurs, nous pouvons remplacer les densités de courant par les courants de chaque côté de l'équation. On obtient donc :

$$i = -j\beta_e\frac{I_0\Gamma}{2V_0(j\beta_e - \Gamma)^2}V \tag{2.16}$$

Equation de propagation dans le circuit en présence du faisceau

En combinant les équations (2.6) de circuit et (2.16) de faisceau, on obtient l'équation de propagation qui détermine les valeurs de Γ associées aux ondes qui peuvent se propager dans la ligne d'interaction :

$$\frac{-jKI_0\beta_e\Gamma^2\Gamma_c}{2V_0(\Gamma_c^2 - \Gamma^2)(j\beta_e - \Gamma)^2} = 1 \tag{2.17}$$

Il s'agit d'une équation du quatrième degré, ce qui implique qu'il y a quatre modes de propagation possibles. Dans un circuit sans faisceau, on aurait deux solutions, ce qui est cohérent avec le fait qu'on peut choisir indépendamment les valeurs des tensions en entrée et sortie de tube, donc qu'on peut choisir deux conditions aux limites. Dans le circuit avec faisceau, on peut fixer deux autres conditions aux limites : la vitesse et le courant initiaux u_0 et I_0, ce qui explique que l'on ait quatre solutions possibles pour l'onde. Nous nous intéressons particulièrement aux ondes qui se propagent dans la direction du faisceau, avec une vitesse à peu près égale à u_0, dont celle qui produit le gain du TOP. Nous considérons pour la trouver que la vitesse des électrons est égale à la vitesse de l'onde en l'absence de faisceau, c'est à dire que :

$$-\Gamma_c = -j\beta_e \tag{2.18}$$

Par ailleurs, nous recherchons une onde se propageant en présence du faisceau avec une vitesse proche de celui-ci, donc une onde dont la constante de propagation diffère de β_e d'une petite différence ξ, de telle manière que :

$$-\Gamma = -j\beta_e + \xi = -\Gamma_c + \xi \tag{2.19}$$

En réécrivant l'équation (2.17), on obtient ainsi :

$$\frac{-KI_0\beta_e^2(-\beta_e^2 - 2j\beta_e\xi + \xi^2)}{2V_0(2j\beta_e\xi - \xi^2)(\xi^2)} = 1 \tag{2.20}$$

Dans les TOP, la différence ξ est petite devant β_e, si bien qu'on peut négliger les termes en $\beta_e\xi$ et en ξ^2 devant β_e au numérateur, et le terme en ξ^2 devant celui en $\beta_e\xi$ au dénominateur. On obtient alors l'équation du troisième degré en ξ :

$$\xi^3 = -j\beta_e^3\frac{KI_0}{4V_0} \tag{2.21}$$

Pierce introduit le facteur C défini par :

$$C^3 = \frac{KI_0}{4V_0} \tag{2.22}$$

En remplaçant ξ par $\beta_e C\delta$, on a l'équation suivante :

$$\delta = (-j)^{\frac{1}{3}} \tag{2.23}$$

dont les trois racines sont :

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{j}{2} = -j\epsilon_1 \\
\delta_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{j}{2} = -j\epsilon_2 \\
\delta_3 &= j = -j\epsilon_3
\end{aligned}$$

Les grandeurs ϵ_k sont : $\epsilon_1 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\epsilon_2 = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\epsilon_3 = -1$. On a donc trouvé 3 solutions à l'équation (2.17) ; la quatrième solution, qui ne correspond pas à l'approximation précédente est $\Gamma = -j\beta_e(1 - \frac{C^3}{4})$.

Solutions de l'équation de propagation

Nous avons donc les quatre constantes de propagation des quatre ondes se propageant dans la ligne d'interaction du TOP :

$$\Gamma_1 = j\beta_e(1 + \frac{C}{2}) - \beta_e C\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{2.24}$$

$$\Gamma_2 = j\beta_e(1 + \frac{C}{2}) + \beta_e C\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{2.25}$$

$$\Gamma_3 = j\beta_e(1 - C) \tag{2.26}$$

$$\Gamma_4 = -j\beta_e(1 - \frac{C^3}{4}) \tag{2.27}$$

Le potentiel correspondant à chacune de ces ondes est $V_k(z,t) = V_k(0,t)e^{j\omega t - \Gamma_k z}$ L'onde Γ_1 est une onde croissante qui se propage un peu plus lentement que les électrons ; l'onde Γ_2 est une onde décroissante qui se propage un peu plus lentement que les électrons ; l'onde Γ_3 est une onde d'amplitude constante qui se propage un peu plus vite que les électrons ; l'onde Γ_4 est une onde d'amplitude constante qui se propage dans le sens inverse des électrons. La figure (2.4) représente les quatre ondes. En résolvant l'équation de propagation dans un TOP nous retrouvons ainsi la condition que nous avions énoncée dans le chapitre 1, en décrivant le fonctionnement d'un TOP : pour qu'une onde se propage et soit amplifiée, elle doit avoir une vitesse légèrement inférieure à celle du faisceau d'électrons,

Conditions initiales

Pour déterminer les amplitudes relatives des différentes ondes, il faut déterminer les conditions initiales en début de tube. Les trois ondes avant s'ajoutent, en termes de champ, de vitesse et de

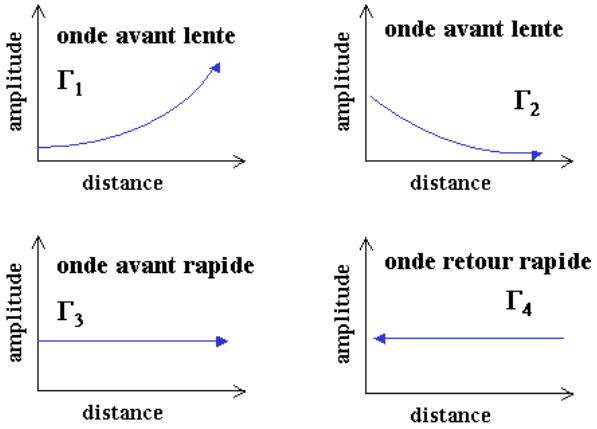


FIG. 2.4 – Schéma des quatre ondes se propageant dans un TOP

courant, c'est à dire qu'on doit avoir :

$$E_1 + E_2 + E_3 = E_{in} \tag{2.28}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 = v_{in} \tag{2.29}$$

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_{in} \tag{2.30}$$

Le champ s'exprime en fonction de celle de la tension V par : $E = \Gamma V$. En exprimant la vitesse et le courant en fonction du champ à partir des équations (2.9) et (2.16), et en remarquant que les modulations de vitesse et de courant sont nulles à l'entrée du tube, on aboutit au système :

$$E_1 + E_2 + E_3 = E_{in} \tag{2.31}$$

$$\frac{E_1}{\epsilon_1} + \frac{E_2}{\epsilon_2} + \frac{E_3}{\epsilon_3} = 0 \tag{2.32}$$

$$\frac{E_1}{\epsilon_1^2} + \frac{E_2}{\epsilon_2^2} + \frac{E_3}{\epsilon_3^2} = 0 \tag{2.33}$$

ce qui amène à $E_1 = E_2 = E_3 = \frac{E_{in}}{3}$. E_{in} est l'amplitude du champ injecté en début de tube (le champ qu'on cherche à amplifier).

Expression du gain en puissance

Le champ total qui se propage dans la direction de z est donc :

$$E_z = \frac{1}{3} E_{in} (e^{-\Gamma_1 z} + e^{-\Gamma_2 z} + e^{-\Gamma_3 z}) \tag{2.34}$$

Le gain en puissance du TOP s'écrit $10 \log |\frac{E_z}{E_{in}}|^2$. Lorsque l'onde amplifiée devient prépondérante, le gain devient proportionnel à

$$10 \log |e^{\frac{\sqrt{3}}{2} C \beta_e z}|^2 = 10\sqrt{3} C \beta_e z * \log(e) \tag{2.35}$$

La figure (2.5) représente le gain en puissance dans un TOP en fonction de $\beta_e C z$; la droite représente le gain en puissance de l'onde amplifiée seule, c'est l'asymptote pour les grandes distances du gain total.

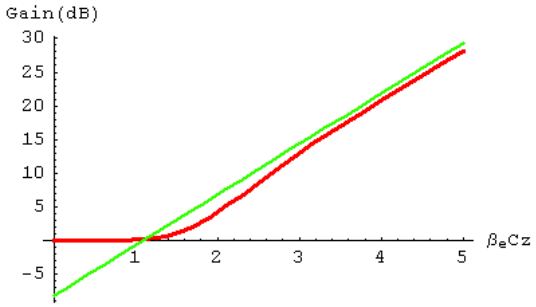


FIG. 2.5 – Gain en puissance pour un TOP dans le modèle de Pierce. La droite représente l'asymptote aux grandes valeurs de z

Puissance transportée par l'onde

Pierce exprime la puissance transportée par l'onde en fonction de l'impédance du circuit par :

$$P = \frac{|V|^2}{2K} \tag{2.36}$$

Dans l'approximation où Γ est proche de $j\beta_e$, la puissance peut s'écrire :

$$P = \frac{|E|^2}{2\beta_e^2 K} \tag{2.37}$$

On peut alors réécrire le facteur C^3 de Pierce :

$$C^3 = \frac{2K}{8V_0/I_0} = \frac{E^2/\beta_e^2 P}{8V_0/I_0} \tag{2.38}$$

C^3 est égal à $\frac{1}{4}$ de l'impédance du circuit (K) divisé par l'impédance du faisceau ($\frac{V_0}{I_0}$).

2.2.2 Influence du désynchronisme

Nous avons considéré le cas où il y avait un parfait synchronisme entre la vitesse des électrons et celle de l'onde à froid, c'est à dire où $\Gamma_c = j\beta_e$. Prenons maintenant en compte un léger désynchronisme en introduisant b tel que $\Gamma_c = j\beta_e(1 + Cb)$; on peut aussi définir b par rapport à la vitesse de l'onde à froid, v_p et la vitesse initiale du faisceau u_0 : $u_0 = v_p(1 + Cb)$. Une valeur positive pour b signifie que les électrons se déplacent plus vite que l'onde à froid. En réécrivant l'équation (2.17) en posant $\Gamma = j\beta_e - \beta_e C\delta$, l'équation (2.23) en δ est remplacée par :

$$\delta^2(\delta + jb) = -j \tag{2.39}$$

δ est développé en parties réelle et imaginaire : $\delta = x + iy$; x représente l'atténuation ou l'amplification de l'onde, tandis que y représente la propagation.

La figure (2.6) représente l'influence du paramètre de désynchronisme b sur les parties réelle et imaginaire de δ, calculées numériquement pour les trois ondes se propageant dans le sens des électrons. Pour $b < \frac{3}{2} \times 2^{\frac{1}{3}}$, on a une onde amplifiée (x_1, y_1) et une onde atténuée (x_2, y_2) se propageant avec la même vitesse, inférieure à celle des électrons, ainsi qu'une onde d'amplitude constante y_3. Lorsque $b > \frac{3}{2} \times 2^{\frac{1}{3}}$ on a trois ondes d'amplitudes constantes se propageant à différentes vitesses.

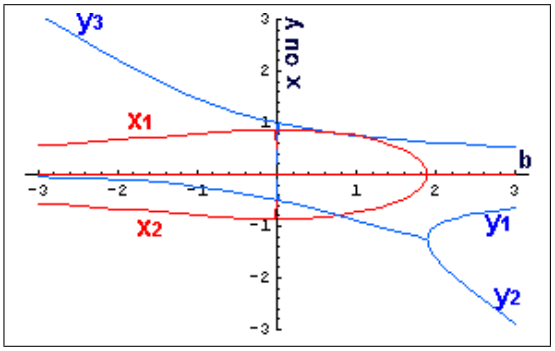


FIG. 2.6 – Evolution des parties réelles et imaginaires des constantes de propagation en fonction du paramètre b

Le cas précedent, sans désynchronisme, correspond à $b = 0$, et l'on voit qu'en s'éloignant de $b = 0$, on diminue le coefficient d'amplification de l'onde (x_1, y_1).

2.2.3 Influence des pertes

Le circuit RF formé par la ligne d'interaction du TOP introduit des pertes sur l'onde qui se propage, pertes que nous avons négligées dans le calcul précédent. Une manière d'introduire l'influence des pertes est de rajouter un terme réel atténuateur dans l'expression de Γ_c :

$$\Gamma_c = j\beta_e(1 + Cb) + \beta_e Cd \tag{2.40}$$

L'équation en δ s'écrit cette fois :

$$\delta^2(\delta + jb + d) = -j \tag{2.41}$$

L'influence des pertes est illustrée sur la figure (2.7), qui représente l'évolution des coefficients x et y en fonction du paramètre b ; on a fixé le coefficient de pertes à $d = 0.5$. La prise en compte

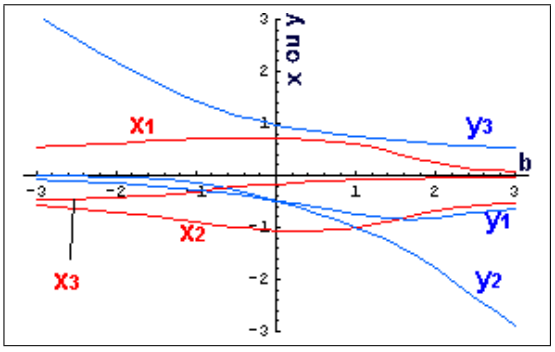


FIG. 2.7 – Variation des coefficients x et y avec un coefficient de pertes $d = 0.5$.

des pertes a pour effet d'élargir la zone en b pour laquelle on a deux ondes, une atténuée et une amplifiée. Elle transforme également la troisième onde (x_3, y_3) en onde atténuée. Enfin, elle diminue la valeur maximale, en $b = 0$, du coefficient d'amplification de l'onde amplifiée.

2.2.4 Influence de la charge d'espace

Jusqu'ici nous n'avons pas pris en compte le champ de charge d'espace créé par le faisceau. En réalité, le champ E_z qui agit sur le faisceau selon l'équation du mouvement est la somme de deux termes : le champ de circuit E_{zc} que nous avons déjà défini grâce à l'équation (2.6) :

$$E_{zc} = -\frac{\partial V}{\partial z} = \Gamma V = \frac{K\Gamma^2\Gamma_c}{\Gamma^2 - \Gamma_c^2} i \tag{2.42}$$

et le champ de charge d'espace E_{zs} défini par l'équation de Maxwell :

$$\frac{\partial E_{zs}}{\partial z} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.43}$$

De la conservation de la charge exprimée par l'équation (2.11), on tire la relation entre le champ de charge d'espace E_{zs} et la densité de courant, puis le courant :

$$E_{zs} = -\frac{j}{\omega\epsilon_0} j_c = -\frac{j}{\omega\epsilon_0 A} i \tag{2.44}$$

A étant l'aire de la section du faisceau. Ainsi la relation entre le champ E_z et le courant i devient :

$$E_z = \left[\frac{\Gamma^2\Gamma_c K}{\Gamma^2 - \Gamma_c^2} - \frac{j}{\omega\epsilon_0 A}\right] i = \Gamma V \tag{2.45}$$

Couplée à l'équation (2.16) qui n'a pas changé, on obtient l'équation de propagation modifiée :

$$-j\left[\frac{\Gamma^2\Gamma_c K}{\Gamma^2 - \Gamma_c^2} - \frac{j}{\omega\epsilon_0 A}\right]\left[\frac{\beta_e I_0}{2V_0(j\beta_e - \Gamma)^2}\right] = 1 \tag{2.46}$$

qui se transforme en :

$$\frac{-j\beta_e}{(j\beta_e - \Gamma)^2}\left[2\frac{\Gamma^2\Gamma_c}{\Gamma^2 - \Gamma_1^2} C^3 - j\frac{\beta_p^2}{\beta_e}\right] = 1 \tag{2.47}$$

où $\beta_p^2 = \beta_e \frac{I_0}{2V_0\omega\epsilon_0 A}$. β_p est associée à une pulsation $\omega_p = \frac{u_0}{\beta_p}$, qui est la pulsation de plasma du faisceau. Cette fois l'équation en δ devient :

$$\delta^2 = \frac{1}{j\delta - b + jd} - \left[\frac{\beta_p}{C\beta_e}\right]^2 \tag{2.48}$$

$$= \frac{1}{j\delta - b + jd} - 4QC \tag{2.49}$$

où l'on introduit ce que Pierce appelle le paramètre de charge d'espace : Q. La figure (2.8 a) correspond encore à l'évolution des paramètres x et y en fonction de b, en ne prenant pas en compte les pertes ($d = 0$), mais en incluant l'influence de la charge d'espace : le facteur QC est fixé à 0.25. Le domaine où l'on a une onde amplifiée est réduit à un intervalle de valeurs de b autour de 0. La figure (2.8 b) représente les valeurs de x_1 de l'onde amplifiée pour différentes valeurs de QC.

Lorsque l'effet de la charge d'espace, donc le facteur QC, augmente :

- le domaine de b où il y a amplification du champ se restreint,
- le coefficient d'amplification diminue (donc le gain aussi),
- la valeur optimale de b augmente, donc il faut augmenter la vitesse des électrons par rapport à l'onde.

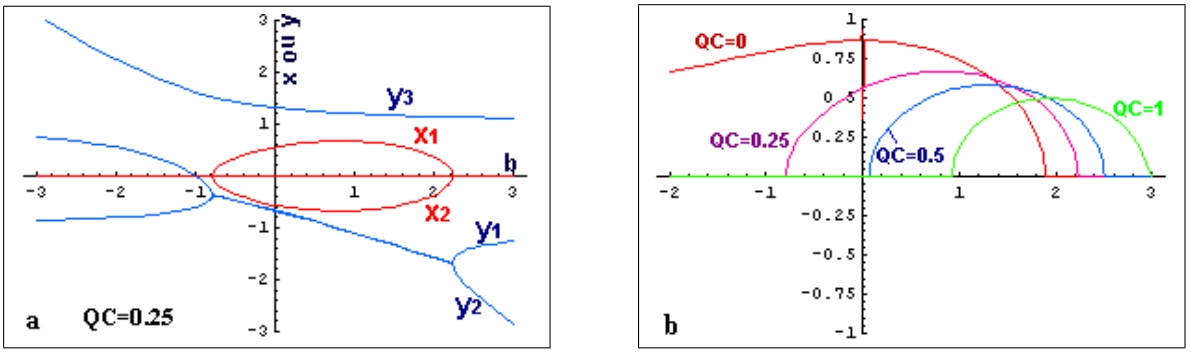


FIG. 2.8 – Influence de la charge d'espace

Ce que nous observons est cohérent : le champ de charge d'espace créé par le faisceau a tendance à s'opposer à la modulation de charge du faisceau d'électrons, essentielle dans le processus d'amplification du champ : il a donc tendance à diminuer le gain du TOP.

2.3 Modèle "FEL" : gain faible, grand signal

A l'inverse du modèle de Pierce, qui décrivait un TOP dans le régime de gain fort et de petit signal, le modèle présenté dans cette section décrit l'interaction d'un faisceau d'électrons et d'un champ hyperfréquence dans le régime de gain faible et de grand signal défini de la manière suivante :

- gain faible ⇒ l'amplitude du champ est considérée comme constante,
- grand signal ⇒ le mouvement des électrons est fortement affecté par la présence du champ.

C'est ce type de modèle qui est souvent utilisé pour les lasers à électrons libres (Free-Electron Lasers : FEL), dont le principe est le suivant : un faisceau d'électrons est soumis à un champ statique périodique, créé par une succession d'aimants de polarités inversées, et à une onde électromagnétique de fréquence ω. L'interférence entre le champ statique et l'onde ω donne lieu à un champ nommé pondéromoteur dont le vecteur d'onde est la somme des vecteurs d'ondes du champ statique et de l'onde ω. Le champ pondéromoteur est alors une onde de fréquence ω, de vecteur d'onde plus grand que l'onde initiale, donc de vitesse plus petite, que l'on peut rendre très proche de celle du faisceau d'électrons, de manière à rendre possible une forte interaction entre les deux. On conçoit alors l'analogie qui existe entre un laser à électrons libres et un tube à onde progressives, puisque dans les deux cas, il s'agit de "ralentir" une onde ω, afin qu'elle interagisse avec un faisceau d'électrons, et qu'elle soit amplifiée en extrayant de la puissance à ce faisceau.

Dans l'ouvrage "Free Electron Lasers", de la référence [Marshall, 1985], l'auteur transforme les différentes équations en jeu lors de l'interaction jusqu'à obtenir une équation sur la phase de l'onde amplifiée Ψ, contenant les amplitudes du champ pondéromoteur et de l'onde ω (qui est alors considérée comme constante ⇒ gain faible) dans le paramètre Ω_L, et impliquant la phase à la résonance Ψ_r :

$$\frac{d^2\Psi}{dz^2} = -\Omega_L^2(\sin\Psi - \sin\Psi_r) \tag{2.50}$$

On reconnait là l'équation du pendule pesant, soumis à un champ gravitationnel. Pour décrire le modèle qui constitue la suite de ce chapitre, nous nous sommes inspirés des raisonnements et des figures qui sont présentées dans "Free Electron Lasers", et c'est pourquoi nous avons appelé ce modèle "FEL".

En considérant constante l'amplitude du champ, on considère que l'énergie extraite du faisceau d'électrons n'est pas transmise à l'onde : le modèle en gain faible ne considère que l'action du champ sur le faisceau, et pas l'action du faisceau sur le champ. Ce n'est pas un modèle auto-cohérent, contrairement au modèle de Pierce. Par ailleurs, comme précédemment, le mouvement est unidimensionnel selon l'axe de propagation z. On ne prend en compte que la composante E_z du champ sur l'hélice, considérée comme purement sinusoïdale ; l'onde, ralentie par l'hélice, se propage avec une vitesse constante v_p selon z. Dans ce chapitre, le champ ne contient qu'une harmonique, de pulsation ω, et sa constante de propagation est $k = \frac{\omega}{v_p}$. L'onde ralentie par l'hélice, ainsi que le faisceau d'électrons, sont illustrés sur la figure 2.9.

Enfin, nous ne tiendrons pas compte des forces de charge d'espace : chaque électron se comporte comme s'il était isolé, sous la seule influence du champ.

Ce modèle utilise d'autre part le formalisme lagrangien, qui décrit le faisceau comme un ensemble d'électrons : on étudie le mouvement de chaque électron à l'instant t, puis on fait une moyenne sur l'ensemble des électrons.

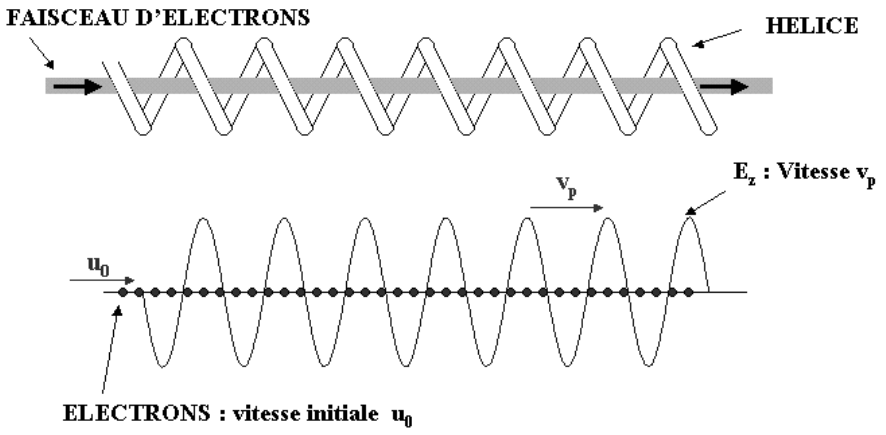


FIG. 2.9 – Faisceau d'électrons soumis au champ sinusoïdal dans une l'hélice

2.3.1 Equation du mouvement d'un électron plongé dans un champ sinusoïdal d'amplitude constante

Un faisceau d'électrons, de vitesse intiale u_0 se déplace dans le champ $E_z = E_0 \sin(kz - \omega t)$. L'équation du mouvement d'un électron du faisceau, régie par la relation fondamentale de la dynamique, s'écrit :

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -eE_0 \sin(kz - \omega t) \tag{2.51}$$

Effectuons le changement de variable : $y = z - \frac{\omega}{k}t = z - v_p t$. L'équation précédente se transforme à t fixé :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-eE_0}{m} \sin ky \tag{2.52}$$

Cela revient à se placer dans le référentiel qui se déplace à la vitesse v_p, dans lequel l'onde est immobile. La figure 2.10 montre les zones accélératrices et décélatrices du champ pour les électrons, selon le signe de E_z.

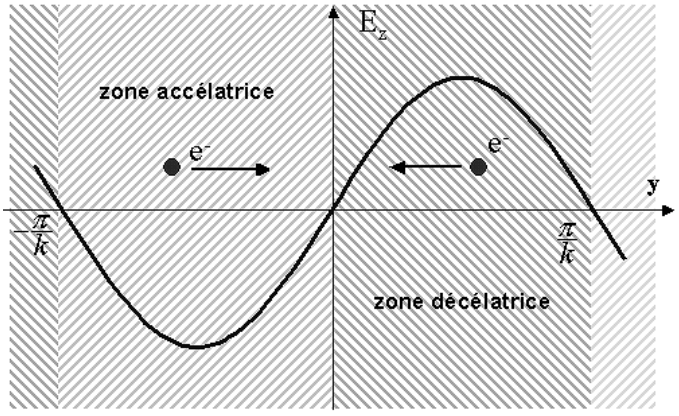


FIG. 2.10 – Electrons sous l'effet d'un champ sinusoïdal

Nous pouvons exprimer l'intégrale première de l'équation (2.52) selon t :

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}\dot{y}_0^2 = \frac{eE_0}{mk}(\cos ky - \cos ky_0) \tag{2.53}$$

soit :

$$\dot{y}^2 = \dot{y}_0^2 + \frac{2eE_0}{mk}(\cos ky - \cos ky_0) \tag{2.54}$$

où $\dot{y}_0$ et y_0 sont les conditions initiales de l'électron considéré :

- $\dot{y}_0 = \dot{z}_0 - v_p = u_0 - v_p$, tous les électrons ayant la vitesse initiale u_0. $\dot{y}_0$ est la vitesse initiale des électrons **dans le référentiel de l'onde**.
- $y_0 = z_0$: c'est la position de l'électron considéré à l'instant 0.

Il s'agit d'une équation du premier ordre non-linéaire, du même type que celle qui régit le mouvement d'un pendule sous l'effet de son poids. Nous exprimerons un peu plus loin les solutions analytiques de ce type d'équations, et nous expliquerons comment la non-linéarité de cette équation est au coeur du phénomène de saturation des TOP. Contentons-nous ici de les représenter dans un diagramme portant la position y en abscisse et la vitesse $\dot{y}$ en ordonnée, c'est à dire un diagramme position/vitesse, illustré sur la figure 2.11. Chaque ligne représente la trajectoire d'un électron

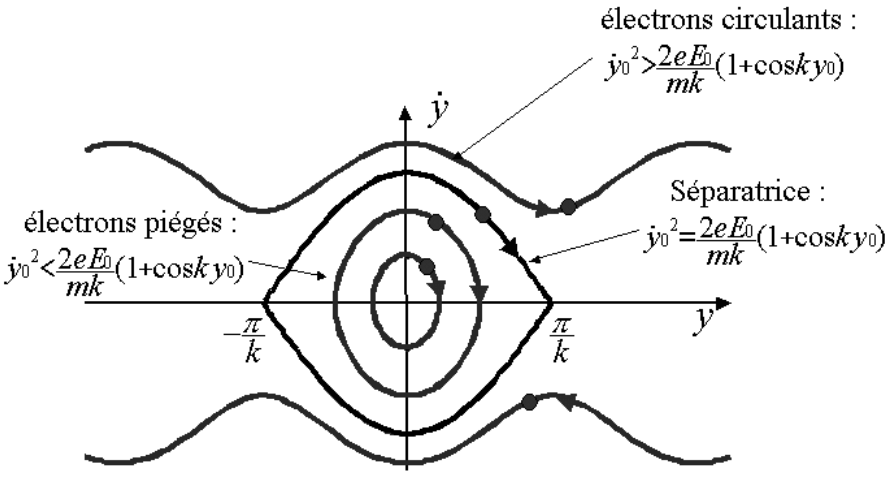


FIG. 2.11 – Représentation des électrons (points) dans un diagramme position/vitesse

déterminé par ses conditions initiales (y_0, $\dot{y}_0$) et dont la position y et la vitesse $\dot{y}$ sont reliées par la relation (2.54). Selon les valeurs (y_0, $\dot{y}_0$), les électrons peuvent se trouver dans deux situations :

- lorsque $\dot{y}_0^2 < \frac{2eE_0}{mk}(1 + \cos ky_0)$, les électrons sont piégés par le champ : ils oscillent dans le référentiel du champ entre deux positions extrêmes (pendule oscillant dans l'analogie du pendule pesant)
- lorsque $\dot{y}_0^2 > \frac{2eE_0}{mk}(1 + \cos ky_0)$ les électrons circulent dans le référentiel du champ, vers les y positifs lorsque $\dot{y}_0 > 0$, et vers les y négatifs lorsque $\dot{y}_0 < 0$ (pendule tournant autour de son axe en faisant des tours complets toujours dans le même sens dans l'analogie du pendule pesant)

La séparatrice $\dot{y}_0^2 = \frac{2eE_0}{mk}(1 + \cos ky_0)$ sépare les deux domaines. La hauteur dans le diagramme position/vitesse de la zone piégeante, "l'oeil" est déterminée par l'amplitude du champ E_0 : la vitesse maximale atteinte par un électron sur la séparatrice vaut $\sqrt{\frac{4eE_0}{mk}}$.

Il est intéressant de montrer à quoi correspond le modèle de Pierce, du paragraphe 2.2 dans ce diagramme position/vitesse.

Le modèle de Pierce correspond au cas du petit signal : les électrons sont faiblement perturbés par le champ. Cela se traduit par la condition qui a été décrite au paragraphe 2.2.1 : toutes les grandeurs résultant de l'interaction, notamment la modulation de vitesse des électrons v, et le champ E, varient avec la distance en $e^{-\Gamma z}$, c'est à dire, si on considère uniquement l'onde amplifiée (équation 2.24), en $e^{(-j\beta_e(1+\frac{C}{2})+\beta_e C\frac{\sqrt{3}}{2})z}$. Autrement dit :

- l'amplitude de E est exponentielle : la hauteur de l'"oeil" représenté par la séparatrice grandit au fur et à mesure de l'interaction,
- la variation de v est sinusoïdale (une sinusoïde dont l'amplitude augmente) : les électrons sont circulants et l'on est très au dessus de l'"oeil" : $\dot{y}_0 \gg \sqrt{\frac{4eE_0}{mk}}$.

Nous soulignons ici comment les deux premiers modèles exposés dans ce chapitre, le modèle de Pierce, et le modèle FEL, correspondent à deux cas limites de la représentation d'un TOP, et décrivent des aspects différents du comportement du champ et du faisceau. Le modèle FEL laisse de côté l'amplification du champ, mais décrit le piégeage des électrons par le champ : nous verrons au chapitre 3 que c'est un aspect essentiel de la non-linéarité de l'interaction. Le modèle de Pierce décrit un faisceau d'électrons circulants, ce qui exclut cet aspect de la non-linéarité ; par contre il décrit l'amplification du champ hyperfréquence.

2.3.2 Expression du gain du système

Le modèle du TOP en gain faible n'est pas un modèle auto-cohérent, si bien qu'il n'y a pas en réalité de cession d'énergie du faisceau vers l'onde. Cependant, nous explicitons quand-même un gain pour le système, qui correspond à la perte d'énergie cinétique du faisceau d'électrons : dans un TOP, l'énergie fournie à l'onde est effectivement l'énergie cinétique cédée par le faisceau. Dans le référentiel du laboratoire, la vitesse $\dot{z}$ d'un électron est égale à $\dot{z}(t) = v_p + \dot{y}(t)$, et sa différence d'énergie cinétique entre l'instant t et l'instant initial est :

$$\Delta E = \frac{1}{2}m(\dot{z}(t)^2 - \dot{z}_0^2) \tag{2.55}$$

Nous travaillons dans un domaine où la vitesse de l'électron reste assez proche de la vitesse de l'onde pour pouvoir négliger les termes en $\dot{y}(t)^2$ et $\dot{y}_0^2$ dans le développement suivant :

$$\dot{z}(t)^2 - \dot{z}_0^2 = v_p^2 + 2v_p * \dot{y}(t) + \dot{y}(t)^2 - v_p^2 - 2v_p * \dot{y}_0 - \dot{y}_0(t)^2 \tag{2.56}$$

ce qui permet d'exprimer ΔE par :

$$\Delta E = mv_p(\dot{y}(t) - \dot{y}_0) \tag{2.57}$$

L'énergie cédée par le faisceau à l'onde est la moyenne sur l'ensemble des électrons de l'opposé de cette valeur :

$$E_{cédée} = mv_p < \dot{y}_0 - \dot{y}(t) > \tag{2.58}$$

2.3.3 Résolution de l'équation du mouvement lorsque $\dot{y}_0^2 \gg \frac{2eE_0}{mk}$

Si l'on considère que $\dot{y}_0^2 \gg \frac{2eE_0}{mk}$, il est possible de calculer l'énergie cédée par un faisceau d'électrons, autrement dit le gain du système. Les électrons sont alors très au dessus de l'"oeil",

ils sont circulants. On repart de l'équation 2.54, dans laquelle on pose $U_0 = \frac{2eE_0}{mk}$, puis on exprime $\dot{y}$, en considérant que $\dot{y}$ est positif (ce qui est valable dans la mesure où on est très au dessus de l'oeil).

$$\dot{y} = \sqrt{\dot{y}_0^2 + U_0(\cos ky - \cos ky_0)} \tag{2.59}$$

$$= \dot{y}_0\sqrt{1 + \frac{U_0}{\dot{y}_0^2}(\cos ky - \cos ky_0)} \tag{2.60}$$

On exprime alors la différence de vitesse $\dot{y} - \dot{y}_0$ en faisant un développement limité de la racine carrée à l'ordre 2, avec $\frac{U_0}{\dot{y}_0^2} \ll 1$:

$$\dot{y} - \dot{y}_0 = \frac{U_0}{2\dot{y}_0}(\cos ky - \cos ky_0) - \frac{1}{8}\frac{U_0^2}{\dot{y}_0^3}(\cos ky - \cos ky_0)^2 \tag{2.61}$$

En développant y à l'ordre 1 en $y = y_0 + \dot{y}_0 t$, on obtient pour $\dot{y}$ au premier ordre :

$$(\dot{y} - \dot{y}_0)|_1 = \frac{U_0}{2\dot{y}_0}(\cos k(y_0 + \dot{y}_0 t) - \cos ky_0) = -\frac{U_0}{\dot{y}_0}\sin(\frac{k\dot{y}_0}{2}t + ky_0)\sin(\frac{k\dot{y}_0}{2}t) \tag{2.62}$$

Pour avoir l'expression de la différence de vitesse moyenne du faisceau, il faut faire une moyenne de $\dot{y} - \dot{y}_0$ pour l'ensemble des électrons. Comme l'expression de $\dot{y} - \dot{y}_0$ est périodique en k (équation 2.60), il suffit de faire une moyenne sur les électrons dont les positions initiales sont comprises entre $y_0 = 0$ et $y_0 = \frac{2\pi}{k}$. Par ailleurs, la vitesse initiale de tous les électrons est la même, égale à $\dot{y}_0$.

$$< \dot{y} - \dot{y}_0 >= \frac{k}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{k}} (\dot{y} - \dot{y}_0)dy_0 \tag{2.63}$$

Au premier ordre, la moyenne de $(\dot{y} - \dot{y}_0)|_1$, obtenue en intégrant l'équation 2.62, est nulle :

$$< (\dot{y} - \dot{y}_0)|_1 >= 0 \tag{2.64}$$

Le calcul aboutissant au terme de deuxième ordre est donné en annexe A. La moyenne de $\dot{y} - \dot{y}_0$ au deuxième ordre s'exprime par :

$$< (\dot{y} - \dot{y}_0)|_2 >= \frac{U_0^2}{4\dot{y}_0^3}(\frac{k\dot{y}_0 t}{2}\sin k\dot{y}_0 t + \cos k\dot{y}_0 t - 1) \tag{2.65}$$

La variation de la vitesse moyenne d'un faisceau d'électrons de vitesse initiale $\dot{y}_0$ calculée en allant à l'ordre 2 est donc égale à $< (\dot{y} - \dot{y}_0)|_2 >$, et le gain du système est proportionnel à $E_{cédée} = mv_p < (\dot{y}_0 - \dot{y})|_2 >$. Il est positif lorsque la vitesse moyenne du faisceau a diminué (ie $< (\dot{y} - \dot{y}_0)|_2 >< 0$). La figure 2.12 (a) représente l'évolution de $(1 - \frac{k\dot{y}_0 t}{2}\sin k\dot{y}_0 t - \cos k\dot{y}_0 t)$ en fonction de kt, pour différentes valeurs de $\dot{y}_0$. Le gain commence par augmenter lorsque le temps d'interaction t augmente ; il atteint un maximum, puis diminue. On remarque qu'à chaque valeur de kt correspond une valeur optimale de $\dot{y}_0$. Sur la figure 2.12 (b) on a fixé kt à 2, et on a fait varier le gain en fonction de $\dot{y}_0$. On remarque que :

- le gain est positif lorsque $\dot{y}_0 > 0$, et négatif lorsque $\dot{y}_0 < 0$. Nous retrouvons ici par le calcul la condition pour qu'un faisceau d'électrons soumis à un champ sinusoïdal cède de l'énergie cinétique : il faut que sa vitesse initiale soit plus grande que celle du champ. Dans le cas inverse, il gagne de l'énergie cinétique.
- pour une durée d'interaction donnée (c'est à dire pour une longueur de tube donnée dans le

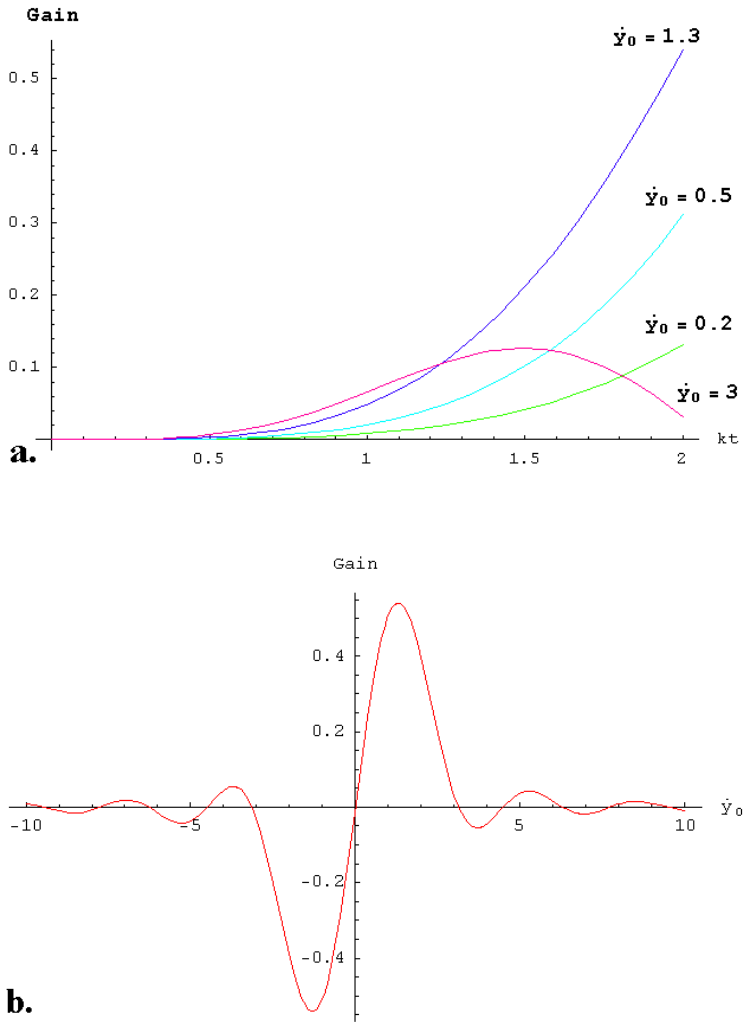


FIG. 2.12 – Gain en fonction de kt pour différentes valeurs de $\dot{y}_0$ (a), et Gain en fonction de $\dot{y}_0$ pour $kt = 2$ (b).

cas d'un TOP), il existe une valeur optimale de $\dot{y}_0$, pour laquelle le gain est maximal.

Dans un tube, il est donc primordial de fixer de manière optimale la différence de vitesse entre l'onde HF et le faisceau d'électrons. D'un point de vue pratique la vitesse d'une onde ω est imposée par la géométrie du tube ; la vitesse des électrons est ajustée en faisant varier la tension de cathode V_0, qui est reliée à la vitesse initiale du faisceau u_0 par la relation $\frac{1}{2}mv_0^2 = eV_0$. La méthode consiste à mesurer le gain entre l'entrée et la sortie du tube pour l'onde ω, et d'ajuster V_0 pour avoir un gain maximal.

2.3.4 Résolution de l'équation du mouvement dans le cas du grand signal

En régime de grand signal, on ne peut pas faire d'approximations sur la vitesse des électrons. Nous allons d'abord exprimer les solutions analytiques de l'équation 2.54, puis nous ferons une analyse qualitative du phénomène.

Dans un premier temps, nous allons transformer cette équation en changeant de système

d'unités. Notons $x = ky$ la coordonnée adimensionnée de l'électron, l'équation 2.54 devient :

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{eE_0k}{m}(\cos x - \cos x_0) + \frac{\dot{x}_0^2}{2} \tag{2.66}$$

Il est possible de changer de base d'unités dans le système MKSA (Mètre, Kilogramme, Seconde, Ampère) en prenant par exemple :

unité de masse : $m = 1$

unité de longueur $\frac{1}{k} = 1$

unité de charge $e = 1$

unité de champ $E_0 = 1$

Cette transformation est autorisée car ces quatre unités sont nécessaires et suffisantes pour exprimer toutes les unités du système MKSA : elles forment une base d'unités. Par exemple une unité de temps dans cette base correspond à $\sqrt{\frac{m}{keE_0}}$ secondes.

On a donc :

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \cos x = \underbrace{\frac{\dot{x}_0^2}{2} - \cos x_0}_{H} \tag{2.67}$$

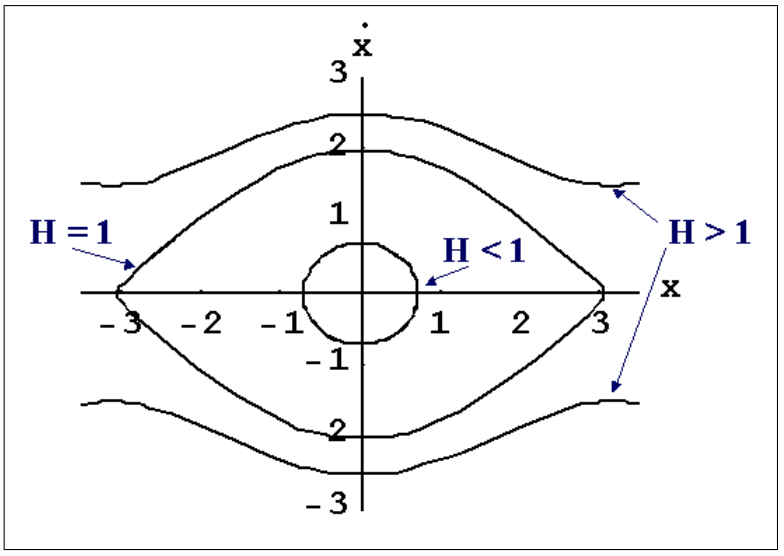


FIG. 2.13 – Caractérisation du paramètre H dans un diagramme position/vitesse

En représentant x et $\dot{x}$ dans un diagramme position/vitesse comme sur la figure 2.13, on remarque que $H > 1$ correspond aux électrons circulants, $H < 1$ aux électrons piégés et $H = 1$ à la séparatrice. On note que H est toujours plus grand que -1. On introduit également le paramètre m_0 : $m_0 = \sqrt{\frac{H+1}{2}}$.

L'expression de la vitesse d'un électron déterminée par les conditions initiales $\dot{x}_0$ et x_0 est alors donnée par :

$$\dot{x}(t) = 2m_0 * cn(t + t_1, m_0) \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned} où \quad t_1 &= F(\arccos \tfrac{\dot{x}_0}{2m_0}, m_0) \qquad lorsque\ x_0 > 0 \\ t_1 &= F(-\arccos \tfrac{\dot{x}_0}{2m_0}, m_0) \qquad lorsque\ x_0 < 0 \end{aligned}$$

La fonction $cn(t, m_0)$ est le cosinus elliptique de t et de m_0 ; $F(\phi, m_0)$ est l'intégrale elliptique de première espèce de ϕ et de m_0. Ces fonctions sont définies de la manière suivante :

$$F(\phi, m_0) = \int_0^{\phi} \frac{du}{(1 - m_0^2 \sin^2 u)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.69}$$

$$cn(t, m_0) = \cos\phi \tag{2.70}$$

ϕ étant l'amplitude de Jacobi de t et de m_0, définie par l'expression :

$$t = \int_0^{\phi} \frac{du}{(1 - m_0^2 \sin^2 u)^{\frac{1}{2}}} = F(\phi, m_0)$$

Le calcul permettant de trouver ces résultats à partir de l'équation 2.67 est donné en annexe B.

L'expression (2.68) donne de manière exacte l'évolution de la vitesse d'un électron se déplaçant sur une des lignes de la figure (2.13). La fonction cosinus elliptique est périodique, avec une période réelle T qui dépend du paramètre m_0 donc des conditions initiales :

$$T = 4 * F(\frac{\pi}{2}, m_0) \qquad lorsque\ m_0 < 1 \tag{2.71}$$

$$T = 2 * \left(F(\frac{\pi}{2}, m_0) + jF(\frac{\pi}{2}, j\sqrt{m_0^2 - 1}) \right) \qquad lorsque\ m_0 > 1 \tag{2.72}$$

$$T = \infty \qquad lorsque\ m_0 = 1 \tag{2.73}$$

Ceci signifie que chaque électron a une période temporelle propre, qui est déterminée par ses conditions initiales (x_0, $\dot{x}_0$) : pour un électron piégé ($m_0 < 1$), la période T est la durée qu'il lui faut pour parcourir une fois l'ensemble de la ligne fermée sur laquelle il se déplace dans le diagramme position/vitesse ; pour un électron circulant ($m_0 > 1$), il s'agit de la durée nécessaire pour parcourir une distance de 2π sur l'axe position. Ainsi, si chaque électron a un mouvement périodique, ce n'est pas vrai de l'ensemble des électrons : ils ne retrouvent pas leurs positions initiales au même instant. Sur la figure 2.14 est présenté le graphe de la période réelle T en fonction du paramètre m_0 : Il est intéressant de remarquer que lorsque m_0 tend vers 0, la période T se rapproche de 2π, qui est la fréquence "'harmonique"' du pendule. A l'autre extrémité, les électrons circulants voient leur fréquence augmenter lorsque l'on augmente m_0, autrement dit lorsqu'ils ont une grande vitesse. Enfin, le graphe 2.14 met en évidence le fait que les électrons se déplacent sur le diagramme 2.13 avec des périodes temporelles différentes. L'allure du déplacement d'électrons dans un diagramme position/vitesse est illustré dans le paragraphe suivant, où est aussi présentée une analyse qualitative de la perte d'énergie des électrons. Retenons de la résolution de l'équation du mouvement que :

- ★ la vitesse des électrons s'exprime à l'aide d'un cosinus elliptique, qui est une fonction dont les propriétés sont connues,
- ★ les électrons ont tous une période temporelle différente : il y a une dispersion en fréquence du mouvement des électrons. De plus, même s'ils sont tous partis avec la même vitesse initiale (c'est le cas pour les électrons de la figure 2.15), ils acquièrent rapidement des vitesses

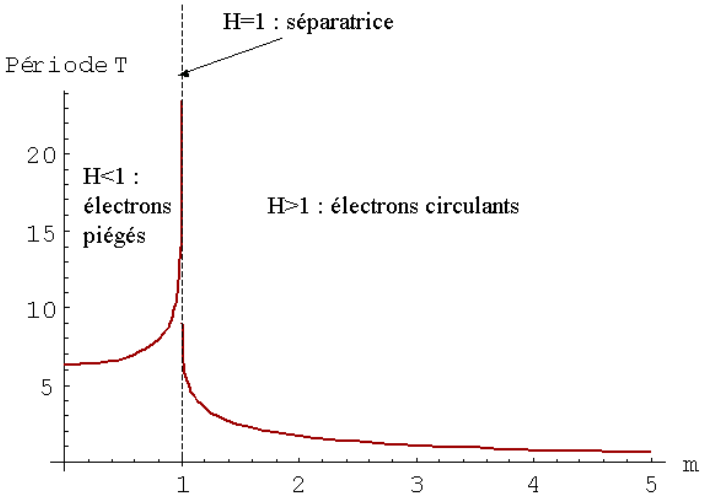


FIG. 2.14 – Période de la vitesse en fonction du paramètre m_0.

différentes, selon la ligne sur laquelle ils se trouvent dans le diagramme position/vitesse. La dispersion en fréquence, ainsi que la dispersion en vitesse - qui s'accroît au cours du temps - sont une source de non-linéarité du mouvement des électrons sous l'effet d'un champ sinusoïdal. L'explication de la non-linéarité de l'interaction champ/faisceau dans un TOP fera l'objet du chapitre 3. Les propriétés du mouvement des électrons dans un champ électrique d'amplitude constante, font déjà apparaître ici une source de non-linéarité, sur laquelle nous reviendrons.

2.3.5 Comportement du faisceau dans le cas du grand signal

Les électrons sont fortements perturbés par l'onde. La figure 2.15 présente l'évolution au cours de l'interaction d'un faisceau d'électrons soumis à un champ sinusoïdal, pour trois situations différentes : la vitesse initiale $\dot{y}_0$, à $t = 0$, du faisceau dans le référentiel de l'onde, marquée par un trait horizontal est commune à tous les électrons. Dans la première colonne, elle est positive, dans la seconde colonne elle est nulle et négative dans la troisième colonne. Nous avons tracé cette figure à l'aide du logiciel Mathematica, qui connait les fonctions elliptiques. Un nombre fini d'électrons est représenté, dans une seule période du champ, leur mouvement étant spatialement périodique. Une majorité d'électrons se trouve dans le domaine du diagramme $(y, \dot{y})$ où ils sont piégés. Selon qu'ils sont dans la partie où le champ est positif ou négatif, les électrons sont initialement accélérés ou ralentis par rapport à l'onde, et ils acquièrent différentes vitesses. Dans le cas où $\dot{y}_0$ est positif, il y a au début de l'interaction ($t = 1$) à peu près autant d'électrons au dessus et au dessous de la vitesse initiale, mais après un peu de temps ($t = 4$), la plupart des électrons possèdent une vitesse bien inférieure à leur vitesse initiale. Aussi, la vitesse moyenne du faisceau à cet instant est inférieure à la vitesse initiale $\dot{y}_0$. Le faisceau a perdu de l'énergie cinétique.

La première colonne de la figure 2.15 illustre bien comment on extrait de l'énergie cinétique à un faisceau d'électrons soumis à un champ de forte amplitude, à condition de lui imposer une vitesse initiale supérieure à celle de l'onde. Par ailleurs on y retrouve la dispersion en vitesse, ainsi que la dispersion en fréquence : si on regarde les électrons piégés, on remarque qu'à $t = 4$, l'électron le plus proche de l'origine a accompli presque trois-quart de tours, tandis que ceux qui sont le plus près de la séparatrice ont accompli moins d'un demi-tour. On ne retrouvera plus les électrons

alignés comme à l'instant $t = 0$.

Dans la deuxième colonne de la figure 2.15 $\dot{y}_0$ est nul : tout au long de l'interaction, la figure représentant le mouvement des électrons dans le diagramme position/vitesse reste symétrique par rapport à 0, si bien que la vitesse moyenne du faisceau reste nulle : le faisceau d'électrons conserve toujours la même énergie.

Dans la troisième colonne, la vitesse initiale $\dot{y}_0$ est négative, et le faisceau d'électrons se comporte de manière symétrique au cas de la première colonne : il gagne de l'énergie au cours de l'interaction. On retrouve ainsi le principe de l'accélérateur de particules, dispositif dans lequel un faisceau d'électrons est accéléré en utilisant l'énergie fournie par un champ hyperfréquence.

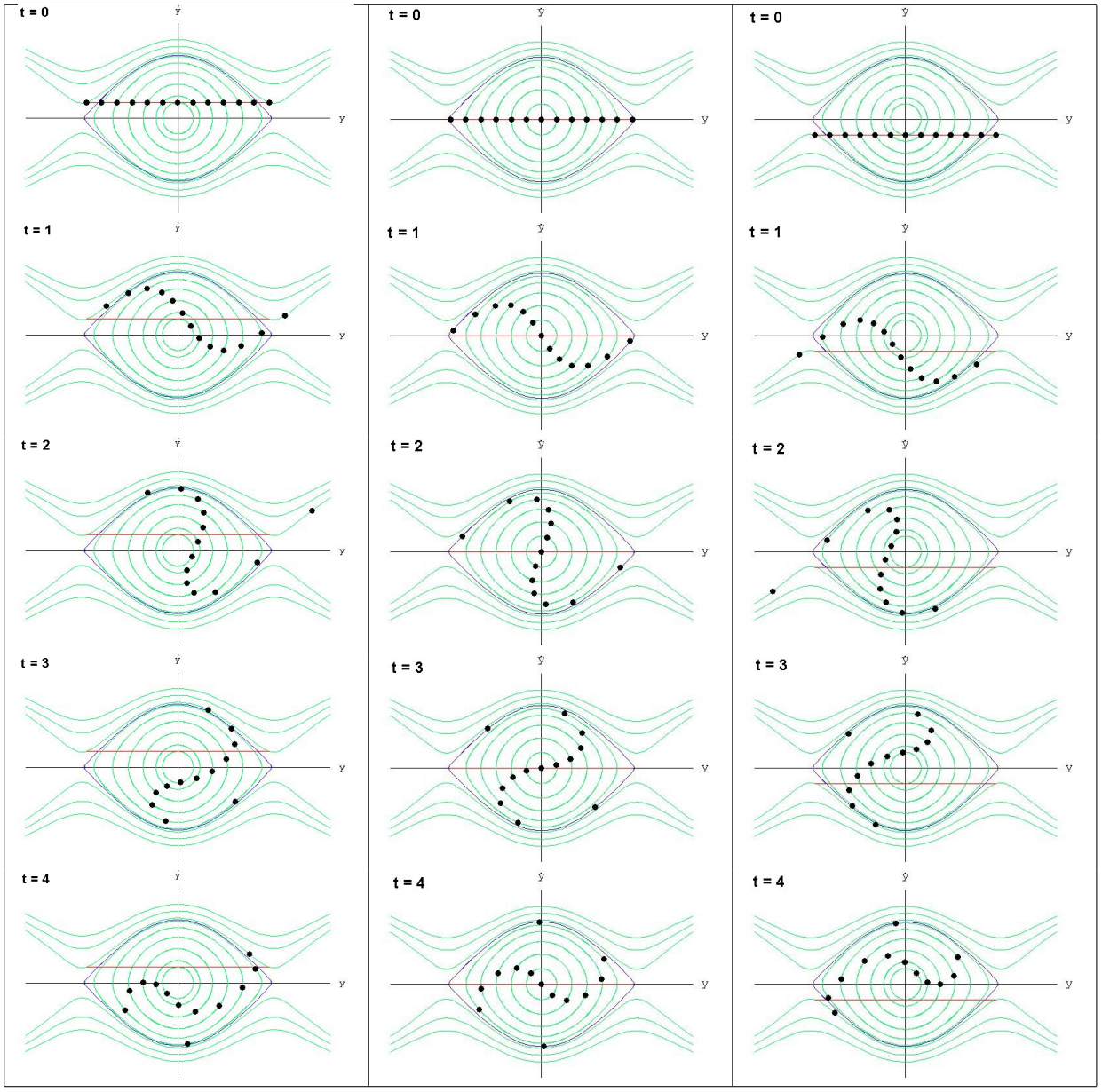


FIG. 2.15 – Régime de grand signal : Comportement d'un faisceau d'électrons injectés avec la même vitesse initiale $\dot{y}_0$ dans un champ sinusoïdal. Représentation dans un diagramme position/vitesse. $\dot{y}_0 > 0$ (première colonne, $\dot{y}_0 = 0$ (deuxième colonne) et $\dot{y}_0 < 0$ (troisième colonne)

2.4 Modèle de Rowe : gain fort, grand signal

2.4.1 Présentation du modèle de Rowe

Le modèle de Rowe est un modèle lagrangien, à une dimension, décrivant l'interaction onde-particule dans un Tube à Onde Progressive. Il a été décrit par Nordsieck [Nordsieck, 1953], en 1953, et il est détaillé dans le chapitre VI de l'ouvrage de J.E. Rowe "Nonlinear Electron-Wave Interaction Phenomena" [Rowe, 1965]. Les grandeurs propres au faisceau sont repérées par deux variables définissant un électron : sa position et sa phase initiale.

C'est un modèle à la fois en gain fort et en grand signal :

- gain fort ⇒ contrairement au modèle de type FEL, on prend en compte l'amplification du champ par le faisceau. C'est un modèle auto-cohérent.
- grand signal ⇒ contrairement au modèle de Pierce, on tient compte du cas où les électrons sont fortement perturbés par l'onde ; la modulation de vitesse n'est pas forcément sinusoïdale.

Ce modèle contient les deux modèles précédents, ce que mettrons en évidence au cours de sa description. Nous verrons aussi qu'il donne une représentation assez conforme à la réalité, et notamment qu'il fait apparaître la saturation de la puissance dans le tube.

Equations de base d'un TOP

On considère dans ce modèle un TOP sans charge d'espace et sans pertes. Les équations de circuit en formalisme eulérien ont déjà été explicitées au paragraphe 2.2 qui décrit le modèle de Pierce à partir du schéma de circuit de la figure 2.3. Les grandeurs L_0 et C_0 représentent l'inductance et la capacité par unité de longueur du circuit, et nous les utiliserons au lieu d'utiliser les grandeurs de Pierce, $B = C_0\omega$ et $X = L_0\omega$, de manière à respecter les notations de Rowe. $V(z,t)$ est le potentiel de l'onde, et $i(z,t)$ le courant d'électrons dans le faisceau :

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = -C_0\frac{\partial V(z,t)}{\partial t} - \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} \tag{2.74}$$

$$\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -L_0\frac{\partial I(z,t)}{\partial t} \tag{2.75}$$

Elles se tranforment en une équation en faisant disparaître I, puis en utilisant l'équation de conservation de la charge : $\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho(z,t)}{\partial t}$:

$$\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2} - L_0C_0\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial t^2} = L_0\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t\partial z} = -L_0\frac{\partial^2 \rho(z,t)}{\partial t^2} \tag{2.76}$$

$$\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial t^2} = -\frac{Z_0}{v_0}\frac{\partial^2 \rho(z,t)}{\partial t^2} \tag{2.77}$$

Z_0 est l'impédance caractéristique de la ligne : $Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$. C'est la même grandeur que celle que nous avions notée $K = \sqrt{\frac{X}{B}} = \sqrt{\frac{\omega L_0}{\omega C_0}}$ dans le modèle de Pierce. De même, nous avions alors noté $\Gamma_c = j\sqrt{BX} = j\omega\sqrt{L_0C_0}$ la constante de propagation de la ligne sans faisceau, ce qui permet de déterminer la vitesse de l'onde sans faisceau par $v_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$.

Par ailleurs, l'équation du mouvement s'écrit, en notant η le rapport charge sur masse d'un électron :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = |\eta|\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} \tag{2.78}$$

La conservation de la charge peut s'écrire en considérant un petit élément de faisceau contenu

dans l'élement de distance dz_0 à l'instant initial :

$$\rho(z,t)dz = \rho(z_0,0)dz_0 \tag{2.79}$$

.

Rowe transforme ses équations :

- ➢ d'une part en posant $y = (C\omega/u_0)z$, ce qui n'est qu'un changement de variable, u_0 étant la vitesse initiale du faisceau, et C le paramètre de couplage de Pierce défini par : $C^3 = \frac{Z_0 I_0}{4V_0}$
- ➢ en repérant un électron par sa position y et sa phase initiale : $\phi_0 = \omega t_0$, t_0 étant l'instant de passage à $y = 0$ de l'électron.

Il passe donc d'un modèle eulérien, où les grandeurs dépendent de la position et du temps, à un modèle lagrangien, où les variables dépendent de la position, et de la phase initiale d'un électron considéré à cette position. En fait le temps lui-même devient une fonction de y et de ϕ_0 : $t(y,\phi_0)$ est l'instant auquel l'électron parti avec la phase initiale ϕ_0 arrive à la position y. Rowe définit ensuite la vitesse totale d'un électron $u_t(y,\phi_0)$ par :

$$u_t(y,\phi_0) = \frac{u_0}{C\omega}\frac{dy}{dt} = u_0(1 + 2Cu(y,\phi_0)) \tag{2.80}$$

ce qui fait apparaître la grandeur adimensionnée $u(y,\phi_0)$ qui décrit la modulation de vitesse d'un électron par rapport à sa vitesse initiale.

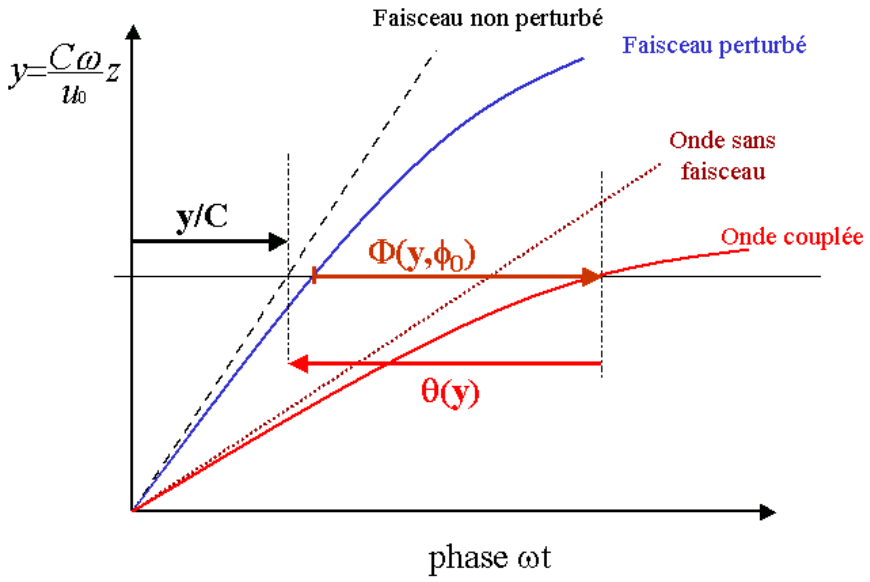


FIG. 2.16 – diagramme de phase

Le faisceau et l'onde hyperfréquence sont définis selon qu'ils sont couplés ou non :

- ➢ faisceau non perturbé : faisceau en l'absence d'onde HF
- ➢ faisceau perturbé : faisceau modulé par le couplage avec l'onde HF
- ➢ onde sans faisceau : onde se propageant dans le tube en l'absence de faisceau
- ➢ onde couplée : onde couplée au faisceau

Sur la figure 2.16, on a représenté pour chacun des cas la position y en fonction du temps t : ce qui décrit la propagation de chacune des entités considérées. On vérifie que le faisceau non perturbé se

déplace avec la vitesse u_0. L'onde sans faisceau se déplace avec la vitesse v_0. Celle-ci est reliée à la vitesse initiale du faisceau par la relation :

$$v_0 = \frac{u_0}{1 + Cb} \tag{2.81}$$

où b est le paramètre de detuning. Sur la figure 2.16, le faisceau initial est représenté avec une vitesse plus grande que celle de l'onde sans faisceau, ce qui correspond à une valeur positive de b. On retrouve par ailleurs ce fait que le faisceau perturbé se déplace plus vite que l'onde : ce n'est pas un hasard, nous avons déjà insisté sur le fait que l'amplification d'une onde HF dans un TOP n'était possible que si la vitesse du faisceau était plus grande que celle de l'onde

Rowe définit les variables $\theta(y)$ - le décalage de phase entre l'onde couplée et le faisceau non perturbé -, et $\phi(y, \phi_0)$ - le déphasage entre l'onde couplée et le faisceau perturbé -. Ces variables, qui sont représentées sur la figure 2.16, seront utiles dans la suite du calcul.

Il est alors possible d'exprimer la phase d'un électron du faisceau perturbé ωt, qui s'écrit dans le formalisme lagrangien $\omega t(y, \phi_0)$, ϕ_0 étant la phase initiale de l'électron, et y la distance qu'il a parcourue au bout du temps t. En utilisant le diagramme 2.16 nous pouvons écrire :

$$\omega t = \frac{y}{C} - \theta(y) - \phi(y, \phi_0) \tag{2.82}$$

Enfin, Rowe définit l'amplitude normalisée A(y) de l'onde à partir du potentiel par :

$$V(y, \phi) = \Re(\frac{Z_0 I_0}{C} A(y) e^{-i\phi}) \tag{2.83}$$

Equations d'un TOP en formalisme lagrangien

Il s'agit alors de transformer l'équation de circuit (2.77). Remarquons pour ce faire que dans le système de coordonnées eulériennes (z, t) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{C\omega}{u_0} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{C\omega}{u_0} \left(\frac{1}{C} - \frac{d\theta(y)}{dy} \right), \qquad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\omega \tag{2.84}$$

On obtient alors en utilisant la nouvelle expression de V :

équation de circuit :

$$\begin{aligned} &-C(\frac{\omega}{1+Cb})^2 Z_0 I_0 [\frac{d^2 A(y)}{dy^2} - A(y)(\frac{1}{C} - \frac{d\theta(y)}{dy})^2 - (\frac{1+Cb}{C})^2] \cos\phi(y, \phi_0) \\ &+[(\frac{1}{C} - \frac{d\theta(y)}{dy})(-2\frac{dA(y)}{dy}) + A(y)\frac{d^2\theta(y)}{dy^2}] \sin\phi(y, \phi_0) = v_0 Z_0 [\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}] \end{aligned} \tag{2.85}$$

L'équation du mouvement (2.78) est également transformée :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \eta \frac{Z_0 I_0\ \omega}{u_0} \left[\frac{dA(y)}{dy} \cos\phi(y, \phi_0) - A(y) \sin\phi(y, \phi_0)(\frac{1}{C} - \frac{d\theta(y)}{dy}) \right] \tag{2.86}$$

Et l'expression de $\frac{d^2 y}{dt^2}$ est exprimée grâce à la relation (2.80)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 2Cu_0 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2C^2 u_0 \omega [1 + 2Cu(y, \phi_0)] \frac{\partial u(y, \phi_0)}{\partial y} \tag{2.87}$$

Ainsi, l'équation du mouvement s'écrit finalement, en remarquant que $u_0^2 = 2\eta V_0$, autrement dit que la vitesse initiale des électrons est imposée par la tension en entrée de tube V_0 :

équation du mouvement :

$$[1+2Cu(y,\phi_0)]\frac{\partial u(y,\phi_0)}{\partial y} = -A(y)[1-C\frac{d\theta(y)}{dy}]\sin\phi(y,\phi_0) + C\frac{dA(y)}{dy}\cos\phi(y,\phi_0) \tag{2.88}$$

Enfin, on a une dernière équation provenant de la relation (2.82) : en dérivant celle-ci par rapport à y dans le système de coordonnées lagrangiennes (y,ϕ_0) on obtient :

équation de définition :

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{d\theta(y)}{dy} = \frac{1}{C} - \underbrace{\frac{1}{C}\frac{1}{1+2Cu(y,\phi_0)}}_{\omega dt/dy} \tag{2.89}$$

Approximation à une harmonique

Rowe transforme le second terme de l'équation (2.85) en développant ρ en série de Fourier et en faisant l'approximation de ne garder que les termes correspondant à la fréquence ω. Cela revient à remplacer ρ par ρ_1 :

$$\rho_1(y,\phi_0) = \frac{I_0}{u_0\pi}(\rho_{1c}(y)\cos\phi(y,\phi_0) + \rho_{1s}(y)\sin\phi(y,\phi_0)) \tag{2.90}$$

Les termes ρ_{1c} et ρ_{1s} sont sans dimension. De la conservation de la charge (équation (2.79)) Rowe tire :

$$\rho(z,t) = \frac{I_0}{u_0}\left|\frac{\partial z_0/\partial t}{\partial z/\partial t}\right| \tag{2.91}$$

qu'il transforme en

$$\rho(y,\phi) = \frac{I_0}{u_0}\left|\frac{\partial\phi_0}{\partial\phi}\right|\frac{1}{1+2Cu(y,\phi_0)} \tag{2.92}$$

Il en tire les coefficients de Fourier ρ_{1c} et ρ_{1s} :

$$\rho_{1c}(y) = \int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi(y,\phi_0)}{1+2Cu(y,\phi_0)}\,d\phi_0, \quad \rho_{1s}(y) = \int_0^{2\pi}\frac{\sin\phi(y,\phi_0)}{1+2Cu(y,\phi_0)}\,d\phi_0 \tag{2.93}$$

Pour exprimer le second terme de l'équation (2.85) il faut calculer $\frac{\partial^2\rho_1}{\partial t^2}$:

$$\frac{\partial^2\rho_1}{\partial t^2} = \frac{\partial\rho_1}{\partial\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + (\frac{\partial\phi}{\partial t})^2\frac{\partial^2\rho_1}{\partial\phi^2} \tag{2.94}$$

Or d'après l'équation (2.82), $\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\omega$ et $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$. Enfin, d'après (2.90) $\frac{\partial^2\rho_1}{\partial\phi^2} = -\rho_1$. On a donc :

$$\frac{\partial^2\rho_1}{\partial t^2} = -\omega^2\rho_1 \tag{2.95}$$

.

Système final

Rowe transforme l'équation (2.85) en remplaçant $\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}$ par $-\omega^2\rho_1$ et en projetant l'équation sur $\cos\phi$ et sur $\sin\phi$. Ce qui donne un système de quatre équations portant sur quatre inconnues : $A(y)$ et $\theta(y)$, grandeurs propres à l'onde, dépendantes uniquement de la position y ; $u(y,\phi_0)$ et $\phi(y,\phi_0)$, grandeurs qui concernent le faisceau, et dépendent de y et de ϕ_0.

équations de circuit

$$C^2\frac{d^2A(y)}{dy^2} - A(y)[(1-C\frac{d\theta(y)}{dy})^2 - (1+Cb)^2] = \frac{-C(1+Cb)}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi(y,\phi_0)}{1+2Cu(y,\phi_0)}\,d\phi_0 \quad (2.96)$$

$$C^2A(y)\frac{d^2\theta(y)}{dy^2} + 2C\frac{dA(y)}{dy}(C\frac{d\theta(y)}{dy} - 1) = \frac{-C(1+Cb)}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\phi(y,\phi_0)}{1+2Cu(y,\phi_0)}\,d\phi_0 \quad (2.97)$$

équation du mouvement

$$(1+2Cu(y,\phi_0))\frac{\partial u(y,\phi_0)}{\partial y} = -A(y)[1-C\frac{d\theta(y)}{dy}]\sin\phi(y,\phi_0) + C\frac{dA(y)}{dy}\cos\phi(y,\phi_0) \quad (2.98)$$

équation de définition

$$\frac{\partial\phi(y,\phi_0)}{\partial y} + \frac{d\theta(y)}{dy} = \frac{1}{C} - \frac{1}{C}.\frac{1}{1+2Cu(y,\phi_0)} \quad (2.99)$$

Approximations effectuées

Jusqu'ici nous avons décrit le modèle de Rowe tel qu'il le développe dans son ouvrage [Rowe, 1965]. Dans la suite de ce chapitre, nous continuons au delà du travail de Rowe et nous transformons le système (2.96-2.99) avec plusieurs objectifs : y retrouver les cas particuliers des modèles "FEL", dans le régime de gain faible, puis de Pierce, dans le régime de petit signal. Modéliser le modèle de Rowe avec Mathematica, de manière à comparer ses résultats avec le code de simulation TUBH, de Thales.

Nous considérons que la modulation de vitesse $2Cu(y,\phi_0)$ reste petite devant 1. En conséquence,

- dans le premier membre de l'équation (2.98), nous négligeons $2Cu(y,\phi_0)$ devant 1,
- dans le second membre de l'équation (2.99) nous remplaçons $\frac{1}{1+2Cu(y,\phi_0)}$ par $1-2Cu(y,\phi_0)$. Ainsi, l'équation (2.99) est remplacée par :

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{d\theta(y)}{dy} + 2u(y,\phi_0) \quad (2.100)$$

2.4.2 Correspondance avec le modèle FEL

Le modèle de type Lasers à Electrons Libres (FEL), qui a été décrit au chapitre (2.3), n'est pas self-consistant, ce qui signifie qu'il ne faut prendre en compte que l'équation de mouvement du faisceau (éq. (2.98)), ainsi que l'équation constitutive (éq. (2.99)). Par ailleurs, le fait que l'onde ne soit pas affectée au cours de la propagation se traduit par $A(y) = A_0$ et $\theta(y) = \theta_0$. Dans ce modèle, et avec les approximations explicitées au (2.4.1), le système de Rowe devient :

$$\frac{\partial u(y,\phi_0)}{\partial y} = -A_0\sin\phi(y,\phi_0) \quad (2.101)$$

$$\frac{\partial\phi(y,\phi_0)}{\partial y} = 2u(y,\phi_0) \quad (2.102)$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial^2\phi(y,\phi_0)}{\partial y^2} = -2A_0\sin\phi(y,\phi_0) \quad (2.103)$$

On reconnait donc l'équation (2.52) du modèle FEL, qui s'applique ici sur la phase d'un électron déterminé par sa phase initiale ϕ_0.

Ceci permet de vérifier que malgré les approximations effectuées jusqu'ici, on n'a pas fait disparaître la non-linéarité du mouvement des électrons existant dans le régime de grand signal.

2.4.3 Correspondance avec le modèle de Pierce

Transformation du modèle de Rowe

Nous poursuivons la transformation du système (2.96-2.99) obtenu par Rowe, afin de vérifier sa validité dans les conditions de Pierce.

Expression de la vitesse en fonction de la charge

Jusqu'ici nous avons travaillé avec des grandeurs réelles. Ici, pour des raisons de commodité, nous allons utiliser les grandeurs complexes :

$$\underline{\rho_1}(y,\phi_0) = \frac{I_0}{u_0\pi}(\rho_{1c}(y) + i\rho_{1s}(y))e^{-i\phi(y,\phi_0)}, \quad \rho_1(y,\phi_0) = \Re(\underline{\rho_1}(y,\phi_0)) \tag{2.104}$$

Autrement dit,

$$\underline{\rho_1}(y,\phi_0) = \frac{I_0}{u_0\pi}e^{-i\phi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\phi(y,\phi_0)}}{1+2Cu(y,\phi_0)}\,d\phi_0 \tag{2.105}$$

Dans l'approximation où $2Cu(y,\phi_0) \ll 1$, l'expression précédente peut s'écrire, grâce à un développement limité :

$$\underline{\rho_1}(y,\phi_0) = \frac{I_0}{u_0\pi}e^{-i\phi}\int_0^{2\pi} e^{i\phi(y,\phi_0)}(1-2Cu(y,\phi_0))\,d\phi_0 \tag{2.106}$$

Dérivons l'équation (2.106) par rapport à y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\underline{\rho_1}(y,\phi_0)}{\partial y}\frac{u_0\pi}{I_0} &= -i(\frac{\partial\phi}{\partial y})e^{-i\phi}\int_0^{2\pi} e^{i\phi(y,\phi_0)}(1-2Cu(y,\phi_0))\,d\phi_0 \\ &\quad +e^{-i\phi}\int_0^{2\pi} e^{i\phi(y,\phi_0)}(i\frac{\partial\phi}{\partial y}(1-2Cu(y,\phi_0)) - 2C\frac{\partial u}{\partial y})\,d\phi_0\end{aligned} \tag{2.107}$$

Dans (2.107) on remplace $\frac{\partial\phi}{\partial y}$ par sa valeur tirée de l'équation (2.100), puis on simplifie et on élimine les termes en $2Cu(y,\phi_0)$ devant 1 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\underline{\rho_1}(y,\phi_0)}{\partial y}\frac{u_0\pi}{I_0} &= -i(2u(y,\phi_0))e^{-i\phi}\int_0^{2\pi} e^{i\phi(y,\phi_0)}\,d\phi_0 \\ &\quad +e^{-i\phi}\int_0^{2\pi} e^{i\phi(y,\phi_0)}i(2u(y,\phi_0))\,d\phi_0\end{aligned} \tag{2.108}$$

Nous faisons à présent deux nouvelles hypothèses :

$$\begin{aligned} &i. \quad \phi(y,\phi_0) = \varphi(y) + \phi_0 \\ &ii. \quad u(y,\phi_0) = U(y)\cos\phi(y,\phi_0)\end{aligned}$$

Ces hypothèses vont nous permettre de calculer les intégrales dans l'expression (2.108).

L'équation (2.108) devient alors :

$$\frac{\partial\underline{\rho_1}(y,\phi_0)}{\partial y}\frac{u_0\pi}{I_0} = 2iU(y)e^{-i\phi}\int_0^{2\pi} e^{i\phi(y,\phi_0)}\cos\phi(y,\phi_0)\,d\phi_0 \tag{2.109}$$

L'intégrale devient : $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(e^{2i\phi(y,\phi_0)}+1)\,d\phi_0=\pi$. Donc :

$$\frac{\partial\underline{\rho_1}(y,\phi_0)}{\partial y}\frac{u_0\pi}{I_0}=2i\pi U(y)e^{-i\phi}=2i\pi\underline{u}(y,\phi_0) \tag{2.110}$$

Retenons cette expression de la grandeur complexe $\underline{u}(y,\phi_0)$ de la vitesse :

$$\underline{u}(y,\phi_0)=-i\frac{u_0}{2I_0}\frac{\partial\underline{\rho_1}(y,\phi_0)}{\partial y} \tag{2.111}$$

En remplaçant $\underline{\rho_1}$ par sa valeur dans (2.111) et en dérivant par rapport à y, on obtient :

$$2\pi\underline{u}(y,\phi_0)=(-i\rho'_{1c}(y)+\rho'_{1s}(y))e^{-i\phi}-\frac{\partial\phi}{\partial y}(\rho_{1c}(y)+i\rho_{1s}(y))e^{-i\phi} \tag{2.112}$$

Ce qui donne en réel :

$$2\pi u(y,\phi_0)=(\rho'_{1s}(y)-\rho_{1c}(y)\frac{\partial\phi}{\partial y})\cos\phi-(\rho'_{1c}(y)+\rho_{1s}(y)\frac{\partial\phi}{\partial y})\sin\phi \tag{2.113}$$

On réécrit le système complet (2.96-2.99) en remplaçant les intégrales par $\rho_{1c}(y)$ et $\rho_{1s}(y)$, et en modifiant les deux dernières équations suite aux approximations effectuées en (2.4.1) :

$$C^2\frac{d^2A(y)}{dy^2}-A(y)[(1-C\frac{d\theta(y)}{dy})^2-(1+Cb)^2] = \frac{-C(1+Cb)}{\pi}\rho_{1c}(y) \tag{2.114}$$

$$C^2A(y)\frac{d^2\theta(y)}{dy^2}+2C\frac{dA(y)}{dy}(C\frac{d\theta(y)}{dy}-1) = \frac{-C(1+Cb)}{\pi}\rho_{1s}(y) \tag{2.115}$$

$$\frac{\partial u(y,\phi_0)}{\partial y}=-A(y)[1-C\frac{d\theta(y)}{dy}]\sin\phi(y,\phi_0) + C\frac{dA(y)}{dy}\cos\phi(y,\phi_0) \tag{2.116}$$

$$\frac{\partial\phi(y,\phi_0)}{\partial y}+\frac{d\theta(y)}{dy} = 2u(y,\phi_0) \tag{2.117}$$

A présent on remplace $u(y,\phi_0)$ et $\frac{\partial u(y,\phi_0)}{\partial y}$ par leur expression en fonction de ρ_{1c} et ρ_{1s} grâce à l'équation (2.113). De plus on décompose la nouvelle équation (2.116) sur $\cos\phi$ et sur $\sin\phi$.

Le système devient alors :

$$C^2\frac{d^2A(y)}{dy^2}-A(y)[(1-C\frac{d\theta(y)}{dy})^2-(1+Cb)^2]=\frac{-C(1+Cb)}{\pi}\rho_{1c}(y) \tag{2.118}$$

$$C^2A(y)\frac{d^2\theta(y)}{dy^2}+2C\frac{dA(y)}{dy}(C\frac{d\theta(y)}{dy}-1)=\frac{-C(1+Cb)}{\pi}\rho_{1s}(y) \tag{2.119}$$

$$\frac{1}{2\pi}[\rho''_{1s}(y)-2\frac{\partial\phi}{\partial y}\rho'_{1c}(y)-\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\rho_{1c}(y)-(\frac{\partial\phi}{\partial y})^2\rho_{1s}(y)]=C\frac{dA(y)}{dy} \tag{2.120}$$

$$\frac{1}{2\pi}[-\rho''_{1c}(y)-2\frac{\partial\phi}{\partial y}\rho'_{1s}(y)-\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\rho_{1s}(y)+(\frac{\partial\phi}{\partial y})^2\rho_{1c}(y)]=-A(y)[1-C\frac{d\theta(y)}{dy}] \tag{2.121}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{d\theta(y)}{dy}=\frac{1}{\pi}[(\rho'_{1s}(y)-\rho_{1c}(y)\frac{\partial\phi}{\partial y})\cos\phi-(\rho'_{1c}(y)+\rho_{1s}(y)\frac{\partial\phi}{\partial y})\sin\phi] \tag{2.122}$$

La suite du calcul consiste à extraire $\frac{d\theta(y)}{dy}$ et $\frac{d^2\theta(y)}{dy^2}$ de l'équation (2.122) et à les remplacer dans les quatre autres équations. On a alors un système Σ de quatre équations différentielles, à quatre inconnues : $A(y)$, $\rho_{1c}(y)$, $\rho_{1s}(y)$ et $\phi(y,\phi_0)$.

système Σ

$$C^2\frac{d^2A(y)}{dy^2} - A(y)[(1 - C(((\rho'_{1s} - \rho_{1c} * \phi')\cos\phi)$$
$$+(-\rho'_{1c} - \rho_{1s} * \phi')\sin\phi)/\pi - \phi'))^2 - (1 + Cb)^2] = \frac{-C(1 + Cb)}{\pi}\rho_{1c}(y) \tag{2.123}$$
$$C^2A(y)(((\rho''_{1s} - 2\rho'_{1c}\phi' - \rho_{1c}\phi'' - \rho_{1s}(\phi')^2)\cos\phi$$
$$+(-\rho''_{1c} - 2\rho'_{1s}\phi' - \rho_{1s}\phi'' + \rho_{1c}(\phi')^2)\sin\phi)/\pi - \phi'')$$
$$+2C\frac{dA(y)}{dy}(C(((\rho'_{1s} - \rho_{1c} * \phi')\cos\phi + (-\rho'_{1c} - \rho_{1s} * \phi')\sin\phi)/\pi - \phi') - 1)$$
$$= \frac{-C(1 + Cb)}{\pi}\rho_{1s}(y) \tag{2.124}$$
$$\frac{1}{2\pi}[\rho''_{1s}(y) - 2\frac{\partial\phi}{\partial y}\rho'_{1c}(y) - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\rho_{1c}(y) - (\frac{\partial\phi}{\partial y})^2\rho_{1s}(y)] = C\frac{dA(y)}{dy} \tag{2.125}$$
$$\frac{1}{2\pi}[-\rho''_{1c}(y) - 2\frac{\partial\phi}{\partial y}\rho'_{1s}(y) - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\rho_{1s}(y) + (\frac{\partial\phi}{\partial y})^2\rho_{1c}(y)]$$
$$= -A(y)[1 - C(((\rho'_{1s} - \rho_{1c} * \phi')\cos\phi + (-\rho'_{1c} - \rho_{1s} * \phi')\sin\phi)/\pi - \phi')] \tag{2.126}$$

Comme on le voit, les trois premières inconnues ne sont des variables que de y, tandis que la quatrième dépend également de ϕ_0. Cela signifie en fait qu'on a autant de systèmes de quatre équations différentielles en y que de valeurs possibles de ϕ_0. Donc les solutions de ces systèmes dépendent toutes de ϕ_0.

En réalité, pour avoir les vraies valeurs de $A(y)$, $\rho_{1c}(y)$ et $\rho_{1s}(y)$, il faut prendre la moyenne de leur valeur, dépendant de ϕ_0 sur le domaine de variation de ϕ_0, c'est à dire $[0, 2\pi]$.

hypothèses du modèle de Pierce

Le modèle de Pierce est un modèle de petit signal, qui suppose que toutes les grandeurs engendrées par l'interaction onde-faisceau ont la même variation selon y. Il faut repasser au modèle eulérien dans lequel leur expression vérifie :

$$\frac{\partial G(y,t)}{\partial y} = -\Gamma G(y,t) \tag{2.127}$$

De plus, le faisceau est suffisamment peu modulé pour que l'équation (2.100) devienne : $\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{d\theta(y)}{dy} = 0$. Cela signifie que $\phi(y, \phi_0) = -\theta(y) + \phi_0$, donc que les électrons se déplacent avec l'onde, sans se déphaser les uns par rapport aux autres (donc pas de bunching).

Notre onde a donc un potentiel $V(y,t) = \frac{Z_0 I_0}{C}A(y)e^{i(\theta(y) - \frac{y}{C})}e^{i\omega t}$, qui doit vérifier

$$\frac{\partial V(y,t)}{\partial y} = -\Gamma V(y,t) \tag{2.128}$$

En posant $\Gamma = -\gamma + i(\frac{1}{C} + \alpha)$, en dérivant V(y,t) :

$$V(y,t) = \frac{Z_0 I_0}{C}\frac{\partial V(y)}{\partial y} = (\frac{dA(y)}{dy} + i(\frac{d\theta(y)}{dy} - \frac{1}{C}))e^{i(\theta(y) - \frac{y}{C})e^{i\omega t}}$$

, et en identifiant avec $-\Gamma V(y,t)$, on a :

$$\frac{dA(y)}{dy} = \gamma A(y), \quad et \quad \frac{d\theta(y)}{dy} = -\alpha\theta(y) \tag{2.129}$$

On peut donc réécrire les équations (2.96-2.98) en négligeant $2Cu(y,\phi_0)$ devant 1, et en remplaçant les intégrales par ρ_{1c} et ρ_{1s}, on obtient :

$$[C^2\gamma^2 - [(1+C\alpha)^2 - (1+Cb)^2]]A(y) = \frac{-C(1+Cb)}{\pi}\rho_{1c}(y) \tag{2.130}$$

$$-2\gamma C(C\alpha+1)A(y) = \frac{-C(1+Cb)}{\pi}\rho_{1s}(y) \tag{2.131}$$

$$\frac{\partial u(y,\phi_0)}{\partial y} = ((1+C\alpha)\sin\phi + C\gamma\cos\phi)A(y) \tag{2.132}$$

On transforme ces équations en complexe en ajoutant (2.130) + i(2.131) et en multipliant à gauche et à droite par $e^{-i\phi}$, ainsi qu'en utilisant la forme complexe $\underline{u}(y,\phi_0)$:

$$[C^2\gamma^2 - [(1+C\alpha)^2 - (1+Cb)^2] - 2iC\gamma(C\alpha+1)]A(y)e^{-i\phi} = \frac{-C(1+Cb)}{\pi}\frac{u_0\pi}{I_0}\underline{\rho_1}(y,\phi_0) \tag{2.133}$$

$$\frac{\partial \underline{u}(y,\phi_0)}{\partial y} = (-i(1+C\alpha)+C\gamma)A(y)e^{-i\phi} \tag{2.134}$$

Ce qui donne en posant $\Gamma_c = i(b+\frac{1}{C})$:

$$C^2(\Gamma^2 - \Gamma_1^2)A(y)e^{-i\phi} = iC^2\frac{u_0}{I_0}\Gamma_c\underline{\rho_1}(y,\phi_0) \tag{2.135}$$

$$\frac{\partial \underline{u}(y,\phi_0)}{\partial y} = -\Gamma CA(y)e^{-i\phi} \tag{2.136}$$

Chez Pierce, les modulations de charge et de vitesse varient comme une grandeur G : $\frac{\partial G(y,t)}{\partial y} = -\Gamma G(y,t)$. Pour passer du formalisme eulérien au formalisme lagrangien, on écrit alors :

$$\frac{\partial G(y,\phi_0)}{\partial y} = \frac{\partial G(y,t)}{\partial y} + \frac{\partial G(y,t)}{\partial t}\frac{\partial t(y,\phi_0)}{\partial y} \tag{2.137}$$

Or on a déjà vu que $\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{(1+2Cu(y,phi_0))C\omega} \simeq \frac{1}{C\omega}$

Donc, comme $\frac{\partial G(y,t)}{\partial t} = j\omega G(y,t)$, on a finalement :

$$\frac{\partial G(y,\phi_0)}{\partial y} = (-\Gamma + \frac{j}{C})G(y,\phi_0) \tag{2.138}$$

Cette équation est vérifiée par $\underline{u}$ et $\underline{\rho}$.

En remplaçant $\underline{u}$ par son expression en fonction de $\underline{\rho}$, les équations deviennent alors :

$$(\Gamma^2 - \Gamma_c^2)A(y)e^{-i\phi} = i\frac{u_0}{I_0}\Gamma_c\underline{\rho_1}(y,\phi_0) \tag{2.139}$$

$$-(-\Gamma + \frac{j}{C})^2 i\frac{u_0}{2I_0}\underline{\rho_1}(y,\phi_0) = -\Gamma CA(y)e^{-i\phi} \tag{2.140}$$

Ce système impose :

$$(\Gamma^2 - \Gamma_1^2)(-\Gamma + \frac{j}{C})^2 = 2\Gamma\Gamma_1 C \tag{2.141}$$

On reconnaît déjà une équation de propagation semblable à celle de Pierce (les différences résident dans les unités utilisées ainsi que dans l'ordre des approximations réalisées). On continue les approximations de Pierce en supposant que

1. $\Gamma_1 \simeq \frac{i}{C}$
2. dans Γ, $\alpha, \gamma \ll \frac{1}{C}$

On a alors

$$(-\gamma + i\alpha)^3 = i \tag{2.142}$$

Cette équation du troisième degré possède trois couples de racines

$$\begin{array}{ll} i. & \alpha = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ ii. & \alpha = \frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ iii. & \alpha = -1, \quad \gamma = 0 \end{array}$$

qui correspondent bien aux racines de l'équation de propation de Pierce, -on rappelle que $\Gamma = -\gamma + i(\frac{1}{C} + \alpha)$ et que $y = C\beta_e z$- la première solution correspondant à l'onde amplifiée, la deuxième à l'onde atténuée, et la troisième à l'onde d'amplitude constante. De plus, si on pose $\Gamma = -\frac{i}{C} + \xi$, on trouve la quatrième solution de l'équation de propagation : $\Gamma = \frac{-i}{C} + i\frac{C^2}{4}$

Ainsi, on retrouve bien les résultats du modèle de Pierce en partant du modèle de Rowe, en se plaçant dans les conditions de petit signal, et en repassant du formalisme lagrangien au formalisme eulérien.

Le modèle de Rowe contient à la fois le modèle gain fort (puisqu'il permet de retrouver les résultats de Pierce), et le modèle grand signal (puisqu'il permet de retomber sur l'équation de base du modèle type FEL).

2.4.4 Modélisation du modèle de Rowe sur Mathematica

Détermination des valeurs numériques

Nous avons effectué une résolution numérique du système de quatre équations Σ de la page 53, en imposant des valeurs numériques et des conditions initiales tirées des simulations de TUBH, qui est un code de simulation des TOP développé par Thales. TUBH est un code lagrangien numérique, qui contient toutes les équations du TOP, et qui les intégre sur toute la longueur du tube. Il décrit de manière satisfaisante les résultats expérimentaux, si bien que nous le traitons ici comme une référence, à laquelle nous confrontons les résultats obtenus avec un modèle analytique, le modèle de Rowe.

Les conditions initiales pour TUBH étaient :

$$\begin{array}{rc} courant\ initial\ du\ faisceau : & I_0 = 0.07A \\ tension\ initiale\ du\ faisceau : & V_0 = 5700V \\ puissance\ initiale\ de\ l'onde : & P_0 = 10^{-5}W \\ fréquence\ de\ l'onde : & F_0 = 12GHz \\ vitesse\ initiale\ du\ faisceau : & v_0 = 45 * 10^6\ m/s \\ impédance\ del'onde\ 12GHz : & Z_0 = 44\ Ohms \end{array}$$

La valeur du vecteur d'onde est déterminée par les paramètres à froid : $\beta_e = 1.7mm^{-1}$

La valeur du paramètre $C = \sqrt[3]{\frac{Z_0 I_0}{4V_0}}$ est calculée : $C = 0.052$.

Valeur initiale de A

Le système Σ permet de calculer les amplitudes des trois ondes progressives qui se propagent dans le TOP. On ne cherche ici qu'à calculer l'amplitude de l'onde amplifiée, indexée 1. On a vu dans le modèle de Pierce que la puissance initiale se répartissait équitablement entre les trois ondes progressives. Donc la puissance initiale de l'onde amplifiée est $P_1(0) = \frac{1}{3}P_0$. Par ailleurs on a, par définition de $A(y)$: $A_1(0) = \frac{C}{Z_0 I_0}V_1(0)$ d'une part, et $P_1(0) = \frac{V_1(0)^2}{2Z_0}$, ce qui permet d'écrire la

valeur initiale $A_1(0)$:

$$A_1(0) = \frac{C}{I_0}\sqrt{\frac{2P_0}{3Z_0}} \tag{2.143}$$

Pour notre valeur de $P_0 = 10^{-5}W$ on a donc $A_1(0) = 2.9 * 10^{-4}$ (nombre sans dimension).

Valeur initiale de ρ_{1c} et ρ_{1s}

Pour calculer les valeurs initiales -en début de tube-, il est justifié de se placer dans l'approximation de Pierce du paragraphe 2.4.3, qui correspond au cas du petit signal, c'est à dire aux faibles valeurs de puissances en début de tube. En utilisant la formule 2.140, dans laquelle on remplace Γ par sa valeur pour l'onde croissante, on arrive à :

$$\underline{\rho_1}(y, \phi_0) = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{2I_0}{u_0}A(y)e^{-i\phi} \tag{2.144}$$

ce qui, par définition des grandeurs ρ_{1c} et ρ_{1s} donne pour les petites valeurs de y :

$$\rho_{1c}(y) = \pi A(y) \qquad \rho_{1s}(y) = \pi\sqrt{3}A(y) \tag{2.145}$$

En particulier, $\rho_{1c}(0) = \pi * A_1(0)$ et $\rho_{1s}(0) = \pi\sqrt{3} * A_1(0)$.

Valeur initiale de $\phi(y, \phi_0)$

Dans l'approximation de Pierce, $\phi(y, \phi_0) = -\theta(y) + \phi_0$, $\theta(y)$ étant nul à l'origine, si bien que $\phi(y, \phi_0) = \phi_0$

Valeur initiale des dérivées

Pour les dérivées également, on utilise l'approximation du modèle de Pierce, si bien que

$$\frac{dA(y)}{dy}(0) = \gamma_1 A_1(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}A_1(0)$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\rho_{1c}(y)}{dy}(0) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}A_1(0) \ et \ \frac{d\rho_{1s}(y)}{dy}(0) = \frac{3\pi}{2}A_1(0)$$

De même

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{d\theta}{dy}(0) = -0.5 * \theta(0) = 0$$

.

Résultats obtenus avec Mathematica

Avec ces valeurs initiales et les valeurs numériques issues de TUBH, nous avons calculé, avec Mathematica, la puissance de l'onde pour différentes valeurs de ϕ_0, uniformément réparties entre 0 et 2π, puis nous avons pris une moyenne sur l'ensemble de ces valeurs, de manière à avoir la valeur de la puissance en fonction de la distance. Nous avons tracé la courbe obtenue en fonction de z tel que $y = C\beta_e z = 0.088z$, pour la puissance en dBm, soit :

$$GdBm = 30 + 10\log\left[\left(\frac{I_0 A(C\beta_e z)}{C}\right)^2 \frac{Z_0}{2}\right] \tag{2.146}$$

Le résultat est présenté sur la figure 2.17 , qui comporte aussi le résultat de la puissance en dBm obtenu avec TUBH.

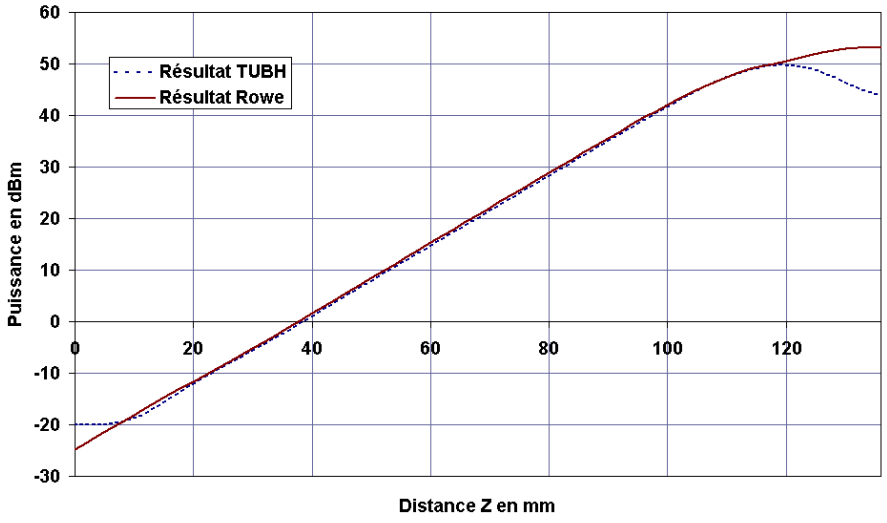


FIG. 2.17 – Puissance en fonction de la distance, pour Tubh et pour le modèle de Rowe

Les résultats obtenus pour TUBH et pour le modèle de Rowe coïncident sur une large portion du tube. Pour les petites valeurs de z, la différence provient uniquement de ce que TUBH calcule la puissance totale, c'est à dire la somme des trois ondes progressives, tandis que nous n'avons calculé que la puissance de l'onde amplifiée avec le modèle de Rowe. Ensuite, les deux modèles coïncident bien jusqu'à la saturation, qui apparaît à la même distance pour les deux, puis ils s'éloignent.

Ainsi le modèle de Rowe décrit de manière satisfaisante l'interaction dans le tube dans toute la partie qui nous intéresse le plus, c'est à dire jusqu'à la saturation.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté trois modèles analytiques décrivant un tube à ondes progressives. Les deux premiers modèles correspondent à des situations aux limites de la réalité : pour le modèle de Pierce, qui est un modèle de petit signal, on modélise l'amplification du champ couplé à un faisceau d'électrons, en supposant que le faisceau est peu affecté par la présence du champ. Ce modèle prévoit de manière juste l'évolution de la puissance de l'onde, tant que l'on reste dans le régime de petit signal, c'est à dire loin de la saturation. Le modèle de Pierce sert de référence à une grande quantité de codes de calculs ; il permet d'appréhender le principe d'un TOP et de faire des calculs simples. Par contre il est incapable de prévoir la saturation : la puissance de l'onde amplifiée y croît de manière exponentielle sans limite.

Le modèle FEL prend justement en compte l'aspect qui échappe au modèle de Pierce : la non-linéarité du mouvement d'un faisceau d'électrons. Nous reviendrons sur cet aspect au chapitre 3.1.2, où nous introduirons la notion de "saturation inertielle", qui provient de cette non-linéarité. Nous avons déjà mis en évidence la dispersion en fréquence et en vitesse du mouvement des électrons dans ce modèle, qui sont sources de non-linéarité. Le modèle FEL s'attache ainsi à décrire le mouvement d'un faisceau d'électrons dans un champ sinusoïdal, mais il ne prend pas en compte l'effet du mouvement des électrons sur ce champ : le champ est considéré comme ayant une amplitude et une vitesse de phase constante, on est en régime de gain faible. On ne voit pas comment l'onde est amplifiée, ce n'est pas un modèle auto-cohérent.

Le modèle de Rowe reste, comme les deux autres, un modèle analytique, contrairement aux codes de calcul, comme TUBH, qui décrivent plus fidèlement la réalité, mais dans lesquels la physique des équations régissant le phénomène n'est plus apparente. Nous avons transformé ce modèle, à partir de la description qui est donnée par Rowe, afin de retrouver le modèle de Pierce (ce qui a nécéssité de passer du formalisme lagrangien au formalisme eulérien) et le modèle "FEL". Nous avons ainsi vérifié qu'il contenait ces deux modèles : il est auto-cohérent et contient l'aspect non-linéaire du mouvement des électrons.

Par ailleurs, nous avons transformé le modèle de Rowe de manière à le modéliser sur Mathematica ; nous avons ainsi vérifié, en le comparant avec TUBH, qu'il donnait une bonne représentation de la réalité d'un tube dans le domaine linéaire, et que la saturation y apparaissait, comme dans un tube réel, et à la même distance. Rappelons que ce modèle ne contient pas la charge d'espace du faisceau, qui est par contre contenue dans TUBH ; cela permet ainsi de vérifier que ce n'est pas à cause de la charge d'espace que les TOP saturent. Le rôle de la charge d'espace est étudié plus en détail au chapitre 3.1.3.

Une des limites du modèle de Rowe tel qu'il a été présenté puis transformé dans ce chapitre, est qu'il ne prend en compte qu'une seule fréquence : lorsque l'expression de la charge a été développée en série de Fourier, nous n'avons gardé que les termes en ω (équation 2.90). Il pourrait être réécrit en gardant les termes d'harmonique 2 en 2ω, ce qui permettrait d'y modéliser l'injection de seconde harmonique.

Chapitre 3

Origine et correction des non-linéarités dans un TOP

3.1 Origine de la saturation et des non-linéarités dans un TOP

3.1.1 Non-linéarités dans un TOP

Saturation de la puissance de sortie

Les Tubes à Ondes Progressives, utilisés dans les télécommunications servent à amplifier fortement des signaux contenant des informations, en particulier dans les satellites et les stations terriennes. Il est donc nécessaire d'avoir des tubes capables de transmettre des signaux amplifiés avec un minimum de distorsion. Or les TOP ont un comportement non-linéaire, en particulier lorsque l'on approche de leur domaine de saturation.

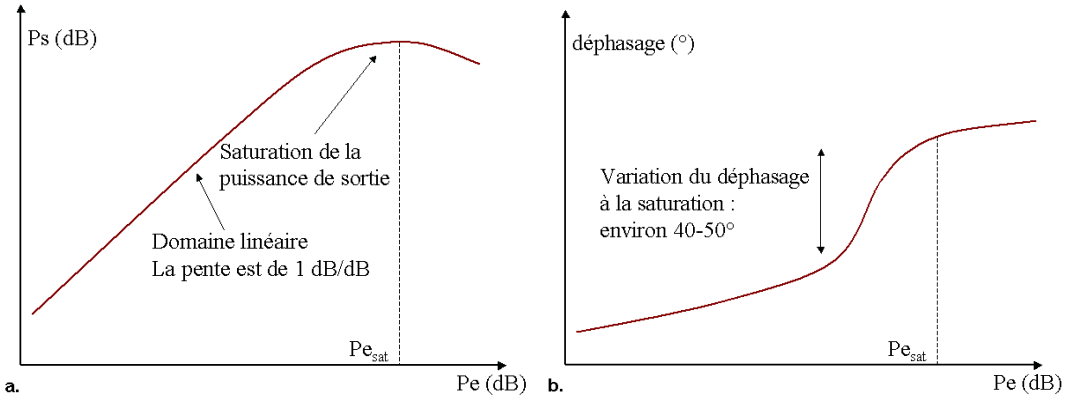


FIG. 3.1 – Diagramme Pe (dB)/Ps (dB)(a.) et Pe(dB)/phase relative (b.) pour un TOP. Domaine linéaire et saturation.

Dans le domaine linéaire d'un Tube à Ondes Progressives, la puissance de sortie en fin de tube est proportionnelle à la puissance d'entrée. La saturation apparaît lorsque la puissance de sortie n'augmente plus linéairement avec la puissance d'entrée. La figure 3.1 a. représente la puissance de sortie en fonction de la puissance d'entrée, en dB, dans un TOP ; la pente est égale à 1 dans le domaine de linéarité. On voit apparaître la saturation de la puissance de sortie.

Distorsion du déphasage de l'onde amplifiée

La saturation de la puissance de sortie va de pair avec un changement important de la phase de l'onde. La figure 3.1 b. représente le déphasage de l'onde amplifiée, entre l'entrée et la sortie du tube. Lorsque l'on reste dans le domaine linéaire, la variation du déphasage avec la puissance d'entrée reste faible, mais lorsque l'on s'approche de la saturation, donc du maximum de puissance que l'on peut extraire, la pente du déphasage augmente fortement. Cette variation du déphasage est due en partie au ralentissement des électrons à la saturation, lorsqu'ils cèdent de l'énergie cinétique. La cause principale de la distorsion de phase provient cependant de la génération d'harmoniques dans le courant du faisceau d'électrons, et de phénomènes d'intermodulations qui concernent la fondamentale [Wöhlbier and Booske, 2004]

Outre le fait qu'elle limite la puissance qui peut être extraite, la saturation du tube aux grandes valeurs de P_e entraîne donc un comportement non-linéaire de la puissance de sortie et du déphasage de l'onde. Lorsque le signal que l'on cherche à amplifier contient des informations qui sont codées en modulation d'amplitude et/ou de phase, le comportement non-linéaire du gain en puissance et du déphasage introduits par le tube causent des distorsions dans le signal.

Production d'harmoniques

A proximité de la saturation, la dispersion en vitesse des électrons augmente considérablement du fait de leur mise en paquets, si bien que le courant dans le tube est riche en harmoniques. Ainsi, lorsqu'on amplifie une onde de fréquence f_1, l'interaction dans le tube produit des fréquences harmoniques : $2f_1$, $3f_1$.., dans une proportion qui n'est pas nécessairement négligeable. Dans un tube de large bande, capable d'amplifier à la fois f_1 et $2f_1$, l'harmonique $2f_1$ créée par un signal f_1 peut entrer en concurrence avec un signal $2f_1$ que l'on chercherait à amplifier en même temps.

Produits d'intermodulation

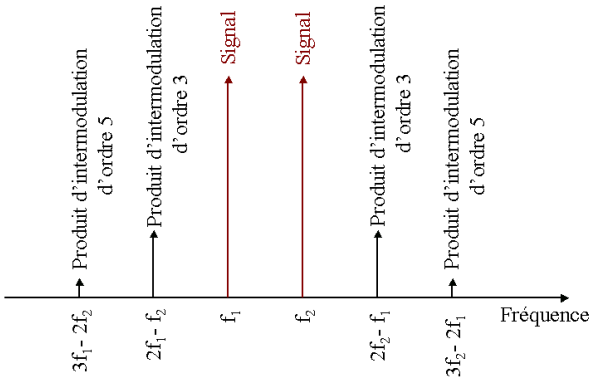


FIG. 3.2 – Produits d'intermodulation

Lorsqu'on amplifie plusieurs signaux portés par les fréquences proches f_1 et f_2, il apparaît avec la saturation, en plus des harmoniques $2f_1$, $2f_2$, $3f_1$..., les produits d'intermodulation représentés sur la figure 3.2. Au troisième ordre, on trouve donc des fréquences : $2f_1 - f_2$ et $2f_2 - f_1$, qui sont très proches des fréquences porteuses, avec lesquelles elles peuvent interférer.

Comprendre l'origine et le processus de la non-linéarité dans les TOP afin de trouver des solutions pour en réduire ou compenser les effets : c'est un enjeu important dans l'étude et le développement des tubes.

3.1.2 Description de la saturation inertielle

Nous allons commencer par expliquer comment le mouvement d'un faisceau d'électrons dans un champ sinusoïdal contient une cause fondamentale de la saturation dans un TOP. Cet aspect de la saturation a été décrit en particulier par Cutler [Cutler, 1956], en 1956, qui décrivait le mouvement des électrons à la saturation. Nous allons reprendre la description du TOP en gain faible de type FEL, du chapitre 2.3. Rappelons que ce modèle est monodimensionnel, que les effets de charge d'espace ne sont pas pris en compte, que le champ E_z auquel est soumis le faisceau d'électrons a une amplitude constante et qu'il est mono-fréquentiel. Lorsqu'on se place dans le référentiel qui se déplace à la vitesse v_p -supposée constante- de l'onde, le mouvement d'un électron est déterminé par la relation entre sa vitesse $\dot{y}$ et sa position y par :

$$\dot{y}^2 = \dot{y}_0^2 + \frac{2eE_0}{mk}(\cos ky - \cos ky_0) \tag{3.1}$$

où k est le vecteur d'onde du champ, e et m sont la charge et la masse d'un électron et E_0 l'amplitude du champ E_z. Nous avons considéré que l'énergie cédée par le faisceau -donc le gain du système- était proportionnelle à la différence de vitesse moyenne des électrons (cf éq. 2.58) :

$$E_{cédée} = 2v_p < \dot{y}_0 - \dot{y}(t) > \tag{3.2}$$

Nous avions fait un changement d'unités dans le paragraphe 2.3.4, qui permettait de transformer (3.1) en :

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \cos x = \frac{\dot{x}_0^2}{2} - \cos x_0 \tag{3.3}$$

et de représenter, dans le paragraphe 2.3.5 l'évolution d'un faisceau d'électrons sous l'influence du champ, dans un diagramme position/vitesse, afin d'illustrer l'évolution de l'énergie cinétique moyenne des électrons.

Nous avons repris ces diagrammes, sur la figure 3.3 (a), mais en allant à des temps plus grands. Dans le nouveau système d'unité, une unité de temps t correspond à $\sqrt{\frac{m}{keE_0}}$ secondes. Jusqu'à $t = 4$, la vitesse moyenne du faisceau diminue : on voit la plupart des électrons passer sous l'axe $\dot{y} = 0$. Sur la figure 3.3 (b), nous avons représenté l'évolution de $< \dot{y}_0 - \dot{y}(t) >$ en fonction du temps, et cette courbe atteint son maximum à $t = 4$. Le gain est alors à son maximum. Lorsque l'on va jusqu'à $t = 6$, on voit dans le diagramme position/vitesse que la plupart des électrons sont dans la zone où ils sont accélérés. La vitesse d'une partie d'entre eux repasse au dessus de la vitesse initiale v_0, ce qui se traduit sur la figure 3.3 (b) par la diminution de $< \dot{y}_0 - \dot{y}(t) >$, donc du gain du système.

Ainsi la description du mouvement d'un faisceau d'électrons dans un champ sinusoïdal fait clairement apparaître la saturation dans un système dont le gain provient de l'interaction onde/électrons. C'est donc dans la nature de cette interaction, régie par l'équation non-linéaire (3.1) que se trouve une cause fondamentale de la saturation d'un Tube à Ondes Progressives, que nous appelons **saturation inertielle**, puisqu'elle provient de l'équation du mouvement des électrons.

Par ailleurs, nous avons vu au chapitre 2.3.4 que dans le domaine où les électrons sont piégés, la vitesse de chacun d'entre eux a une fréquence temporelle différente. Les électrons adoptent une importante dispersion en vitesse.

Nous pouvons estimer comment la saturation inertielle intervient dans un "vrai" tube, où l'interaction est auto-cohérente : régime de grand signal et de gain fort. Le champ est alors amplifié au fur et à mesure que le faisceau lui cède une partie de son énergie. Si on raisonne dans un diagramme

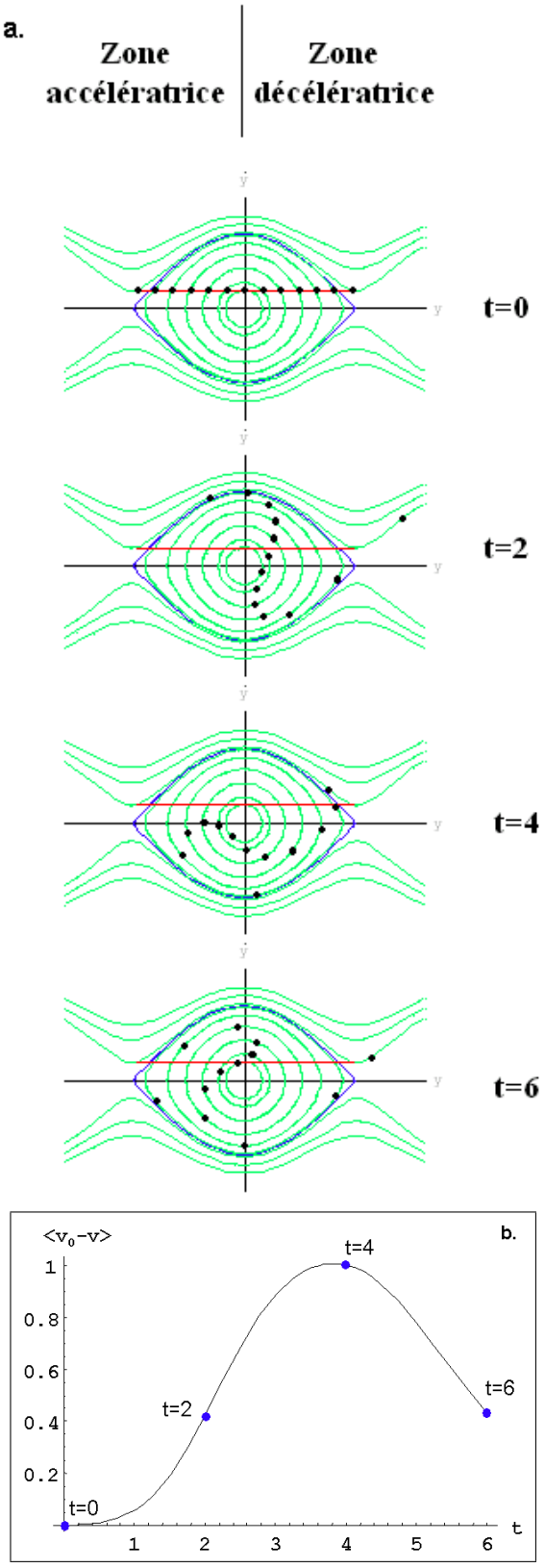


FIG. 3.3 – Mouvement d'un faisceau d'électrons dans un champ sinusoïdal d'amplitude constante : diagramme position/vitesse (a), évolution de $< v_0 - v >$ en fonction du temps (b).

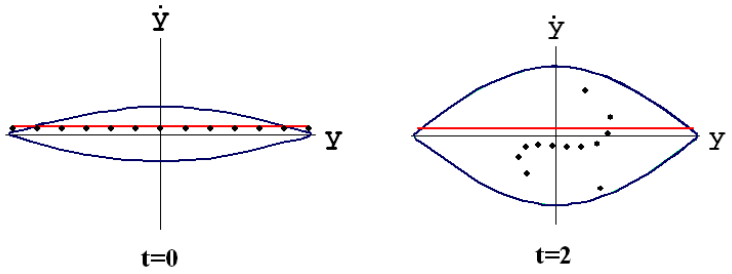


FIG. 3.4 – Faisceau d'électrons soumis à un champ sinusoïdal d'amplitude exponentielle.

position/vitesse, cela signifie que la hauteur de l'"oeil" représenté par la séparatrice, qui sépare les électrons piégés des électrons circulants, grandit au fur et à mesure de l'interaction. Ainsi soumis à un champ d'amplitude croissante, les électrons initialement circulants sont progressivement piégés si bien que dans un TOP, plus le champ est amplifié, plus la saturation arrive vite. Ceci est illustré sur la figure 3.4, où l'on a représenté un faisceau d'électrons soumis à un champ d'amplitude exponentielle (cette forme correspond à l'amplification en régime de Pierce). On remarque qu'à $t = 2$ les électrons sont déjà à leur minimum de vitesse, alors qu'il fallait attendre $t = 4$ sur la figure 3.3.

3.1.3 Le rôle de la charge d'espace sur la saturation de la puissance de sortie

Au fur et à mesure de l'interaction, dans un TOP, la vitesse des électrons est modulée, ce qui entraîne une modulation de position, donc de charge. Les électrons se regroupent, ils forment des "bunches" dans les zones décélératrices du champ, et cèdent ainsi une partie de leur énergie cinétique à l'onde. Mais la modulation de charge crée elle-même un champ électromagnétique, qui a tendance à s'opposer au regroupement des électrons : c'est le champ de charge d'espace qui limite de cette manière l'extraction d'énergie aux électrons, donc le gain de l'interaction. On s'attend donc à ce que l'effet du champ de charge d'espace contribue à limiter le gain maximum, donc contribue à la saturation. Il est intéressant de mesurer quelle est l'influence du champ de charge d'espace sur la saturation d'un Tube à Ondes Progressives : la charge d'espace a souvent été considérée comme la principale cause de saturation des TOP.

Pour cela, une solution est de comparer les résultats de simulations obtenus sur un tube avec et sans charge d'espace. Le code TUBH de Thales, dont nous parlerons au chapitre 4 prend généralement en compte le champ de charge d'espace, mais il a été possible de le supprimer temporairement. Nous avons donc modélisé un tube simple (sans tapering et sans pertes), dont les paramètres à froid à la fréquence de travail de 12 GHz, ainsi que les courant et tension appliqués, sont :

$$\begin{aligned} R_c &= 85.47\Omega & \frac{c}{v} &= 7.31 \\ I_0 &= 0.07A & V_0 &= 5700V \end{aligned}$$

R_c est la résistance de couplage du TOP à 12 GHz : c'est l'impédance caractéristique du circuit constitué par le guide d'onde et l'hélice. Le paramètre $\frac{c}{v}$ détermine la vitesse v de propagation de l'onde 12 GHz dans le circuit, c étant la vitesse de la lumière. La figure 3.5 présente l'évolution de la puissance de l'onde directe en fonction de la distance d'interaction z, avec et sans les effets de charge d'espace.

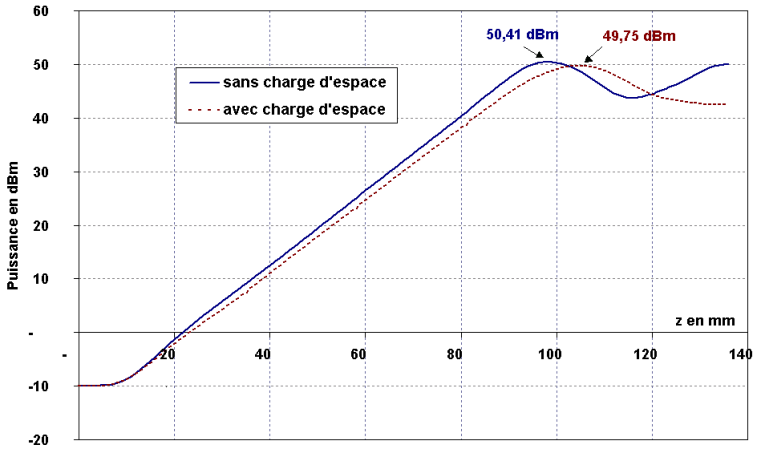


FIG. 3.5 – Puissance du tube au cours de la propagation, avec et sans charge d'espace

On observe les résultats suivants :

- ✶ La saturation apparaît plus tôt, et la pente de la puissance en dBm est plus grande de 4% lorsqu'il n'y a pas de charge d'espace. Cela montre comment la charge d'espace ralentit le bunching des électrons.
- ✶ La puissance maximale est plus grande sans charge d'espace : 50.41 dBm au lieu de 49.75 dBm, soit une augmentation de 16% en Watts : la charge d'espace diminue la puissance maximale que peut extraire l'onde au faisceau.
- ✶ la compression de gain est plus grande avec la charge d'espace : 5.8 dB au lieu de 2.8 dB.

(La compression de gain est la différence entre la puissance qu'aurait le tube à z_{sat} avec un gain linéaire, et la valeur effective de la puissance à la saturation). La charge d'espace a donc l'effet attendu de limiter la puissance que l'on peut extraire d'un faisceau, donc de participer à la saturation d'un tube. Mais elle n'a qu'un effet de second ordre par rapport à la saturation inertielle.

3.1.4 Génération d'harmoniques dans le modèle eulérien

Au chapitre suivant nous présenterons un calcul complet du couplage entre harmoniques dans un TOP représenté dans le formalisme eulérien. Pour expliquer comment l'interaction onde/faisceau génére des harmoniques dans un TOP, nous allons ici nous contenter de reprendre le système "MUSE" de J.G. Wöhlbier *et al.* tel qu'il est présenté de manière simplifiée dans la référence [Wöhlbier et al., 2001]. C'est un modèle à une dimension, dans lequel les équations de circuit ainsi que l'équation du mouvement sont écrites en décomposant toutes les grandeurs du système sur les harmoniques de la manière suivante, k étant le vecteur d'onde de la fréquence fondamentale que l'on cherche à amplifier dans le tube :

$$G(y) = \sum_l \tilde{G}_l(y) e^{-ilky} \tag{3.4}$$

On effectue ensuite l'approximation de l'enveloppe lentement variable (SVEA pour Slow Variation Envelop Approximation), qui consiste à considérer que la variation de l'enveloppe est petite devant

la fréquence spatiale :

$$\frac{d\tilde{G}(y)}{dy} << k\tilde{G}(y) \tag{3.5}$$

Si $A_l(y)e^{if_l y}$, $B_l(y)e^{if_l y}$ et $v_l(y)e^{if_l y}$ sont les grandeurs normalisées représentant respectivement la tension dans le tube, la densité de charge et la vitesse du faisceau, pour la $l^{ième}$ fréquence à la distance normalisée y, alors les équations vérifiées par les enveloppes de ces grandeurs sont :

$$\frac{dA_l}{dy} = -if_l B_l + i\delta f_l A_l \tag{3.6}$$

$$\frac{dB_l}{dy} = -if_l v_l - if_l \sum_{\substack{m,n \\ f_m+f_n=f_l}} B_m v_n \tag{3.7}$$

$$\frac{dv_l}{dy} = -if_l A_l - i \sum_{\substack{m,n \\ f_m+f_n=f_l}} f_m v_m v_n \tag{3.8}$$

On voit que lorsque l'on prend en compte N harmoniques, il y a $3N$ équations. On remarque que la non-linéarité de l'équation de conservation de la charge est présente dans l'équation (3.7), tandis que la non-linéarité de l'équation du mouvement est présente dans l'équation (3.8). Ce système montre clairement comment le couplage entre fréquences fait apparaître d'autres fréquences. Afin d'illustrer la génération d'harmoniques, nous avons utilisé le programme MUSE associé au système précédent [Wöhlbier et al., 2002a], en prenant en compte trois fréquences : la fondamentale $f_1 = 8$ GHz, ainsi que les deuxième et troisième harmoniques $f_2 = 16$ GHz et $f_3 = 24$ GHz. L'onde injectée en début de tube ne contient que f_1, avec une puissance initiale de -10 dBm.

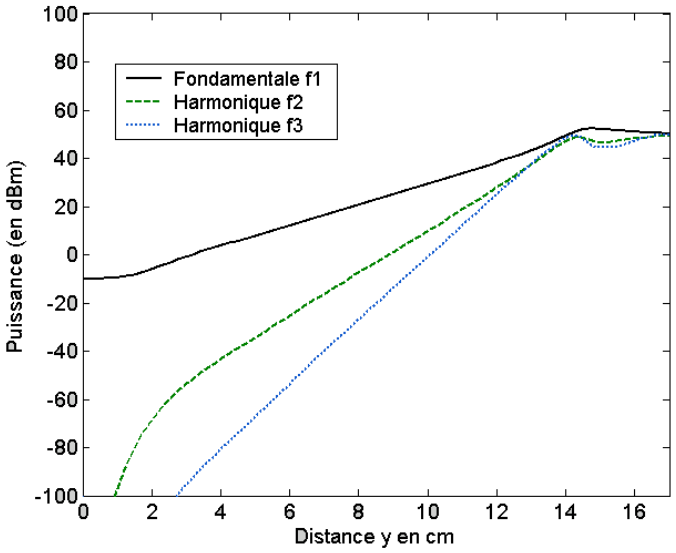


FIG. 3.6 – Modèle MUSE : puissance vs distance pour la fondamentale et ses deux harmoniques

La puissance de chaque harmonique évolue avec la distance dans le tube comme présenté sur la figure 3.6. Les harmoniques apparaissent puis grandissent jusqu'à arriver à un niveau du même ordre que celui de la fondamentale ; une autre manière d'expliquer la saturation est ainsi de constater que la fondamentale cède une partie de sa puissance à ses harmoniques : nous retrouverons cet aspect au chapitre, 4.1 p.100. .

3.1.5 Cohérence entre les différents points de vue sur la saturation

Nous avons donc présenté deux aspects prépondérants dans le mécanisme de saturation d'un Tube à Ondes Progressives : la saturation inertielle dans un modèle lagrangien et la création d'harmoniques d'un modèle eulérien. Si ces deux aspects ont été présentés de manière séparée, il ne faut pas perdre de vue qu'ils correspondent à une même réalité. D'ailleurs dans les deux cas, on retrouve la non-linéarité dans l'équation du mouvement. De plus, si la formation d'harmoniques est explicite dans le modèle eulérien, elle est également contenue dans la saturation inertielle : en effet, le courant de modulation résultant de la modulation du faisceau contient des harmoniques du fait de la dispersion en vitesse et en position des électrons.

Production d'harmoniques et saturation de la puissance de sortie sont deux aspects, couplés, d'un même phénomène : l'interaction **non-linéaire** d'un faisceau et d'une onde hyperfréquence.

3.2 Comment limiter la non-linéarité dans un TOP

3.2.1 Les méthodes couramment utilisées

Compensation avec un linéariseur

La non-linéarité en sortie d'un Tube à Ondes Progressives peut être compensée par l'adjonction d'un linéariseur [Katz, 2001], c'est à dire d'un dispositif qui forme une boucle entre l'entrée et la sortie du tube. Il existe de nombreux types de linéariseurs ; un exemple est le linéariseur à prédistorsion : ce dispositif pilote le TOP, et génère des non-linéarités inverses de celles du tube. L'ensemble est alors très linéaire : la courbe de puissance de sortie en fonction de la puissance d'entrée est plus droite, comme présenté sur la figure 3.7. Le déphasage est largement diminué, jusqu'à être réduit à zéro dans le cas idéal. On obtient alors des valeurs de facteur signal sur bruit beaucoup plus grandes. Avec le TOP linéarisé, on peut atteindre des puissances de sortie, en

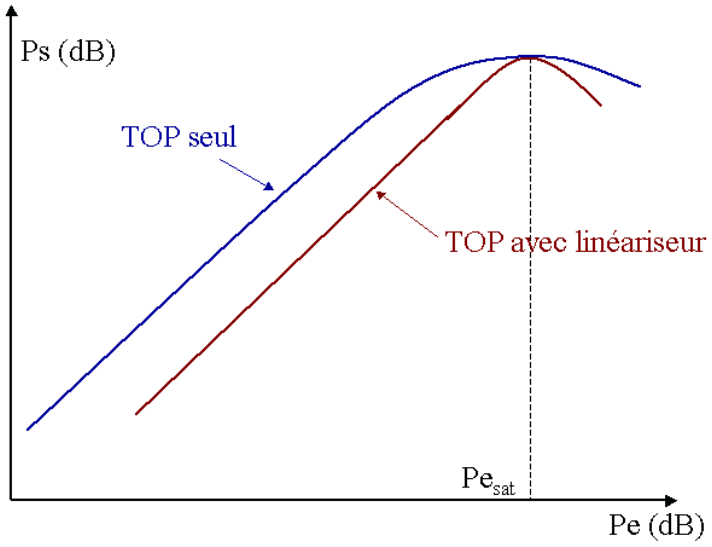


FIG. 3.7 – Courbe Pe/Ps pour un TOP avec linéariseur

restant dans le domaine linéaire, plus grandes qu'avec le TOP seul : l'avantage est donc de pouvoir exploiter au maximum la puissance délivrée par un tube. Par contre, ce système ne joue pas sur la puissance maximum qui peut sortir d'un tube, et il réduit le gain.

Modification du pas de l'hélice : le tapering

Il est possible d'augmenter la puissance en sortie d'un tube, en modifiant sa géométrie. On obtient ainsi des tubes de plus forte puissance, donc plus performants, ce qui augmente d'autant le domaine de linéarité exploitable. Rappelons que l'onde se déplace dans une hélice, et que sa vitesse axiale est d'autant plus petite que le pas de l'hélice est petit.

Dans la plupart des TOP, on utilise ainsi une hélice de pas variable, qu'on appelle un "taper". Le profil typique d'une telle hélice est illustré sur la figure 3.8.

La première partie du tube correspond au régime de petit signal (zone 1). On cherche dans cette région a avoir le taux de croissance le plus grand possible pour la puissance : le pas de l'hélice est optimisé pour avoir le maximum de gain petit signal. C'est dans la deuxième partie, notée 2 sur la figure, que se produit le maximum de bunching sur les électrons : pour accroître ce bunching, on augmente la vitesse de phase pour capturer le maximum d'électrons. Enfin, dans la dernière

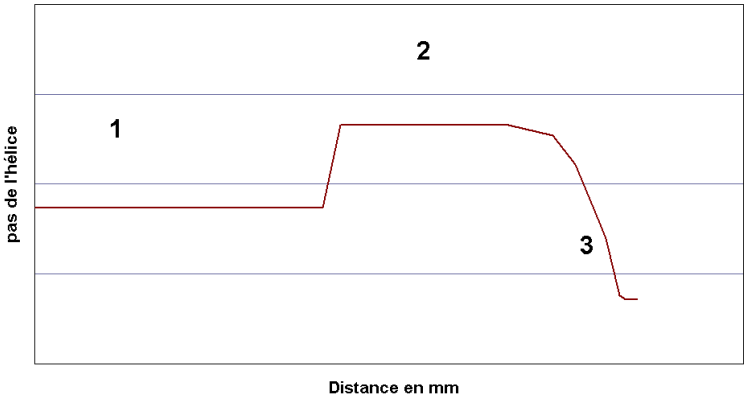


FIG. 3.8 – Profil de pas d'une hélice de TOP.

partie du tube (zone 3), l'énergie est extraite des électrons, ceux-ci ayant atteint le maximum de bunching. On diminue alors la vitesse de l'onde de manière à la synchroniser avec celle des électrons, qui diminue au fur et à mesure qu'ils cèdent de l'énergie cinétique.

Ceci est expliqué en détail dans les travaux de R.O. Jenkins et R.G. Carter, qui ont par ailleurs étudié l'influence du profil de pas d'hélice sur les performances d'un TOP [Jenkins and Carter, 2001] [Jenkins and Carter, 2002].

3.2.2 Transformation de la forme du signal d'entrée

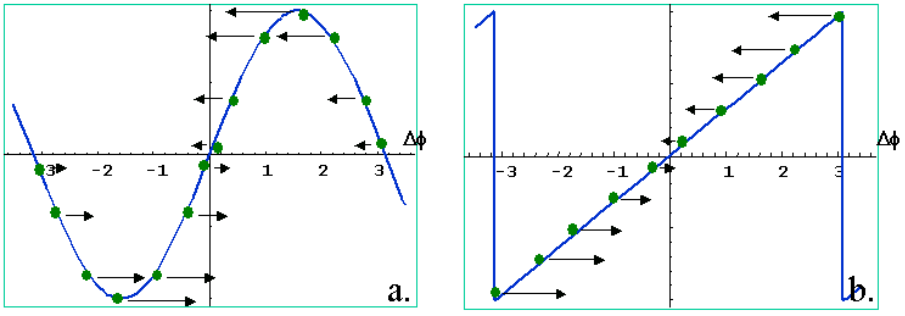


FIG. 3.9 – Effet de la forme du champ sur le bunching des électrons : champ sinusoïdal (a.) et champ en dent de scie (b.)

En modifiant le pas de l'hélice, il est donc possible de d'optimiser le couplage onde/électrons en adaptant la vitesse de l'onde. Mais si le synchronisme entre l'onde et le faisceau est un paramètre important dans le bunching, la forme de l'onde a également un rôle crucial. La figure 3.9 a. rappelle le bunching sous l'effet d'un champ sinusoïdal : accélérés lorsque le champ est négatif, et décélérés lorsque le champ est positif, les électrons se regroupent vers un "noeud". La taille des flèches sur la figure est proportionnelle au champ électrique auquel sont soumis les électrons : on remarque que les électrons les plus éloignés du noeud, ceux correspondant à $\Delta\phi = \pm\pi$, sont soumis à une force plus faible que ceux qui se situent à mi chemin ($\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2}$), alors qu'ils ont une plus grande distance à parcourir pour arriver au noeud. Il apparaît donc que le bunching n'est pas optimal sous l'effet d'un champ sinusoïdal pur. La figure 3.9 b représente le bunching sous l'effet d'un champ en dent de scie, qui semble plus efficace puisque la force qui pousse les électrons vers un noeud est

proportionnelle à leur éloignement.

En pratique, les signaux que l'on cherche à amplifier à l'aide d'un tube à ondes progressives ne sont pas en dent de scie. L'information est portée par une onde électromagnétique qui pour se propager doit avoir une forme sinusoïdale. Ceci dit, en additionnant une onde sinusoïdale et différentes de ses harmoniques, il est possible de se rapprocher de la forme "dent de scie", notamment en remarquant que le développement en série de Fourier d'un signal en dent de scie de période T, noté $scie(t)$ est :

$$scie(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{n\pi} \sin(\frac{2\pi nt}{T}) \tag{3.9}$$

En ajoutant son harmonique 2 à une onde de fréquence $\omega = \frac{2\pi}{T}$, on peut donc espérer améliorer un peu le bunching, notamment si la somme des deux ondes est de la forme :

$$\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \tag{3.10}$$

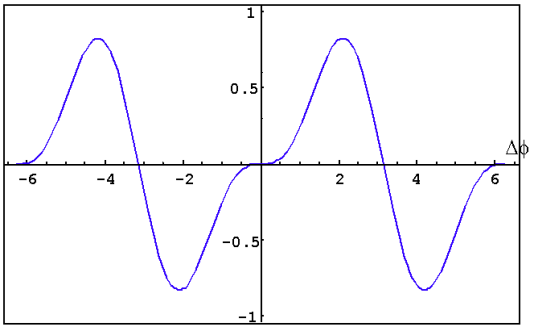


FIG. 3.10 – Forme du champ correspondant aux deux premiers termes du développement du signal en dent de scie

qui correspond aux deux premiers termes du développement en série de Fourier d'un signal en dent de scie, et qui est représentée sur la figure 3.10. On remarque de fait que la forme de ce champ s'est rapprochée de la dent de scie (raidissement de la pente autour de $-\pi$ et π. Nous allons vérifier comment il est possible d'optimiser l'extraction d'énergie à un faisceau en commençant par le cas du klystron.

3.2.3 Courant de modulation dans le cas d'un signal multi-harmoniques : le cas du klystron

Rappel sur le fonctionnement d'un klystron à 2 cavités

La figure 3.11 représente un klystron à deux cavités (entrée et sortie). Nous allons calculer le courant de modulation qui résulte de la modulation en vitesse introduite par la cavité d'entrée sur le faisceau, puis la tension induite dans la cavité de sortie. Nous utilisons un modèle unidimensionnel, où la cavité est représentée par un circuit R,L,C avec une résonance dominante. Nous donnons ici les grandes lignes du calcul dont les différentes étapes sont explicitées dans la référence [Lau, 2000], qui traite de l'intermodulation dans un klystron. Les résultats obtenus grâce à ce calcul nous permettrons de mesurer l'effet de l'injection d'harmonique dans un klystron. De plus, ce

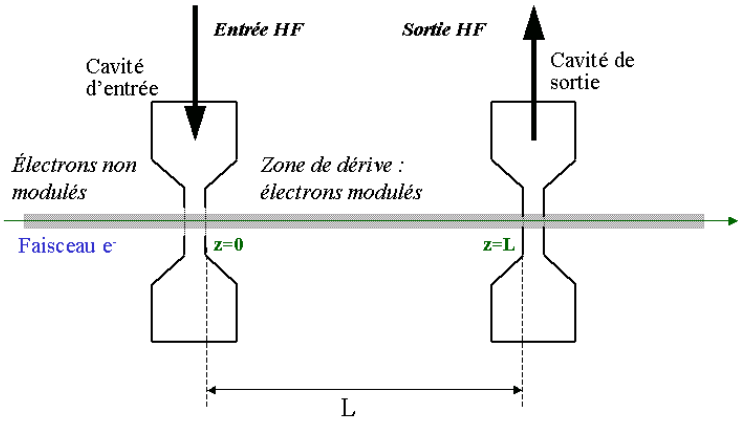


FIG. 3.11 – Schéma d'un klystron à deux cavités

calcul développé par Y.Y. Lau pour le klystron nous a servi de modèle pour développer un calcul semblable dans le cas du TOP, calcul développé au paragraphe 3.2.4.

En l'absence de modulation du faisceau, la position d'un électron, de vitesse v_0 sorti de la cavité ($z = 0$) à l'instant t_0 est donnée par :

$$z(t) = v_0 * (t - t_0) \tag{3.11}$$

Lorsqu'une onde HF est injectée dans la cavité d'entrée, elle impose au faisceau d'électron une modulation de son énergie cinétique, que nous représentons par une impulsion instantanée reçue en sortie de la cavité d'entrée ($z = 0$). Si $\xi(t, t_0)$ est le déplacement de l'électron par rapport à sa position sans modulation, l'impulsion d'énergie cinétique est décrite par :

$$\begin{aligned} \xi(t, t_0) &= 0 \\ \tfrac{\partial \xi(t,t_0)}{\partial t} &= \tfrac{v_0}{2}\epsilon(t_0) \quad \grave{a}\ t = t_0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

où $\epsilon(t_0)$ qui est la fonction décrivant la modulation de vitesse à l'instant t_0 de l'impulsion, est proportionnelle à l'onde injectée.

Dans la zone de glissement, entre les deux cavités, les électrons ne sont soumis qu'aux forces de charge d'espace, si bien que l'équation sur $\xi(t, t_0)$ s'écrit avec la fréquence plasma ω_p :

$$\frac{\partial^2 \xi(t, t_0)}{\partial t^2} = \omega_p^2 \xi(t, t_0) \tag{3.13}$$

La solution de cette équation, en tenant compte des conditions initiales 3.12, est alors :

$$\xi(t, t_0) = \frac{v_0}{2\omega_p}\epsilon(t_0)\sin[\omega_p(t - t_0)] \tag{3.14}$$

L'électron qui a quitté la cavité d'entrée à l'instant t_0 arrive à la cavité de sortie ($z = L$) à l'instant t_1 correspondant à $v_0(t_1 - t_0) + \xi(t_1, t_0) = L$. En remplaçant $\xi(t, t_0)$ par sa valeur, d'après 3.14, dans cette équation, on obtient la relation suivante entre l'instant de départ t_0 et l'instant d'arrivée dans la cavité de sortie t_1 :

$$t_1 - t_0 = \frac{L}{v_0} - \frac{1}{2\omega_p}\epsilon(t_0)\sin[\omega_p(t_1 - t_0)] \tag{3.15}$$

En appliquant le théorème du point fixe, on peut résoudre cette équation de manière itérative en t_1, en s'arrêtant à l'ordre d'intermodulation que l'on souhaite calculer :

$$t_1^{(k)} - t_0 = \frac{L}{v_0} - \frac{1}{2\omega_p}\epsilon(t_0)\sin[\omega_p(t_1^{(k-1)} - t_0)] \tag{3.16}$$

$$t_1^{(0)} - t_0 = \frac{L}{v_0} \tag{3.17}$$

Si bien qu'à chaque ordre d'itération choisi il existe une fonction τ_1 qui permet d'exprimer t_1 en fonction de t_0 de la façon suivante :

$$t_1 - t_0 = \frac{L}{v_0} - \tau_1(t_0) \tag{3.18}$$

La conservation du courant entre $z = 0$ et $z = L$ implique : $I(t_1)dt_1 = I(t_0)dt_0$. L'expression du courant à l'instant t_1 s'exprime alors :

$$I_1(t_1) = I_0\frac{dt_0}{dt_1} = I_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt_1^n}\left(\left[\tau_1(t_1 - \frac{L}{v_0})\right]^n\right) \tag{3.19}$$

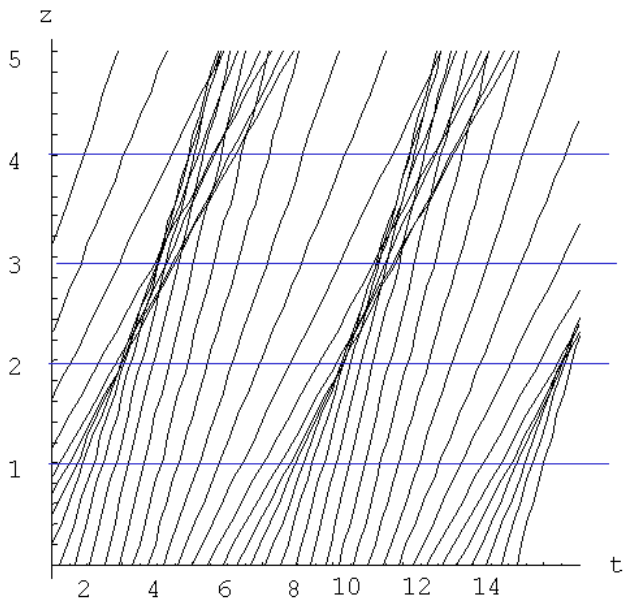


FIG. 3.12 – Diagramme d'Applegate d'un faisceau modulé (z en fonction de t)

La figure 3.12 représente le diagramme d'Applegate, qui porte la distance z de chaque électron entre 0 et L, en fonction du temps t, et ce dans le cas où l'impulsion $\epsilon(t_0)$ est purement sinusoïdale. Chaque ligne représente un électron, ayant quitté la cavité d'entrée à un instant t_0 dont la vitesse a été imposée par l'impulsion $\epsilon(t_0)$. On observe la formation de zones où la densité de charge est plus

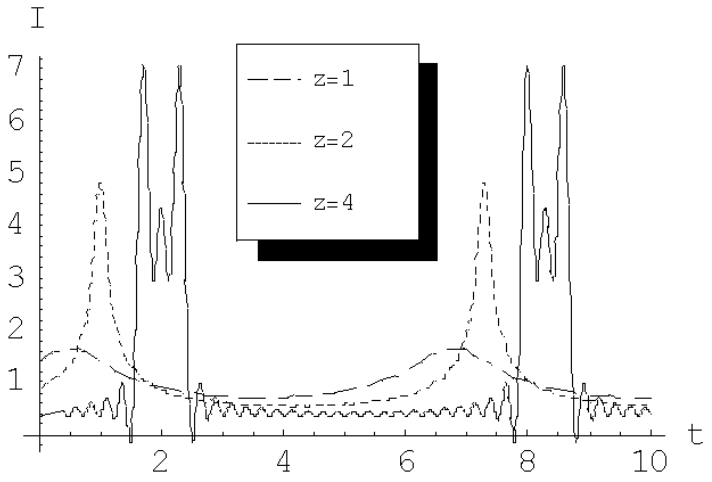


FIG. 3.13 – Densité de courant en fonction du temps, pour un faisceau modulé, à différentes distances z.

forte, et la densité de courant qui en résulte est présentée sur la figure 3.13, à différentes distances, en fonction du temps t (le calcul a été mené avec Mathematica).

Lorsque le signal en entrée du klystron est multi-harmoniques, la modulation de vitesse $\epsilon(t_0)$ imposée dans le cavité d'entrée est une somme de sinus de périodes ω_1, ω_2.. qui sont multiples d'une fréquence de base ω_0 : $\omega_1 = N_1\omega_0$, $\omega_2 = N_2\omega_0$

$$\epsilon(t_0) = \epsilon_1 \sin(\omega_1 t_0 + \theta_1) + \epsilon_2 \sin(\omega_2 t_0 + \theta_2) + ... \tag{3.20}$$

La fonction τ_1 est alors périodique de période $\frac{2\pi}{\omega_0}$, il en est de même de $I_1(t_1)$ qui peut être décomposé en série de Fourier :

$$I_1(t_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{I}_1(n) e^{in\omega_0 t_1} \tag{3.21}$$

les coefficients étant donnés par :

$$\tilde{I}_1(n) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} dt_1 I_1(t_1) e^{-in\omega_0 t_1} \tag{3.22}$$

qu'il est commode de transformer en fonction de t_0 :

$$\tilde{I}_1(n) = I_0 e^{-in\omega_0 \frac{L}{v_0}} c_1(n) \tag{3.23}$$

$$c_1(n) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} dt_0 e^{-in\omega_0 t_0 + in\omega_0 \tau_1(t_0)} \tag{3.24}$$

Lorsque le faisceau d'électrons arrive dans la cavité de sortie, il induit une tension $V_1(t_1)$ définie par l'équation du circuit représenté sur la figure 3.14 :

$$\frac{d^2 V_1(t_1)}{dt_1^2} + \frac{\Omega_1}{Q_1} \frac{dV_1(t_1)}{dt_1} + \Omega_1^2 V_1(t_1) = Z_1 \Omega_1 \frac{dI_1(t_1)}{dt_1} \tag{3.25}$$

Ω_1, Q_1 et Z_1 étant respectivement la fréquence dominante, le facteur de qualité et l'impédance

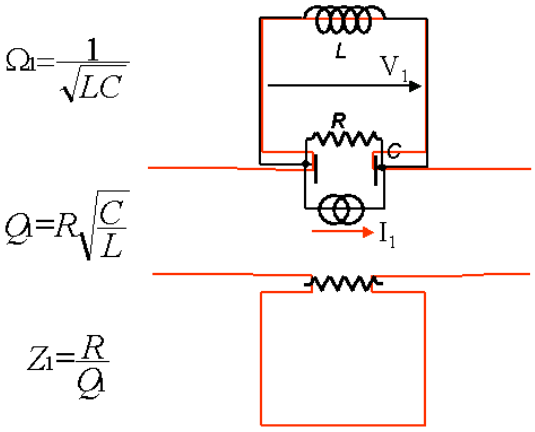


FIG. 3.14 – Circuit équivalent de la cavité de sortie d'un klystron.

caractéristique de la cavité de sortie. La tension induite dans la cavité, résultat de cette équation, est alors :

$$V_1(t_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Z_1\Omega_1 in\omega_0}{-(n\omega_0)^2 + in\omega_0\Omega_1/Q_1 + \Omega_1^2} \tilde{I}_1(n) e^{in\omega_0 t_1} \tag{3.26}$$

L'injection de seconde harmonique dans un klystron

L'objet de ce chapitre étant d'évaluer les effets de l'injection d'harmonique dans le but d'amplifier un signal donné, nous allons nous limiter aux fréquences ω (fondamentale) et 2ω (harmonique). La modulation de vitesse est alors $\epsilon(t_0) = \epsilon_1 \sin(\omega t_0) + \epsilon_2 \sin(2\omega t_0 + \theta)$. Les paramètres importants pour estimer le rôle de l'harmonique sont le taux d'harmonique injectée $\alpha = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$ et le déphasage initial θ. Par ailleurs, nous négligerons désormais les effets de charge d'espace, donc la fréquence ω_p, ce qui revient à remplacer 3.15 par :

$$t_1 - t_0 = \frac{L}{v_0} - \frac{\epsilon(t_0)}{2}(t_1 - t_0) \tag{3.27}$$

(rappelons que L est la distance entre les deux cavités du klystron et v_0 la vitesse initiale des électrons) qui peut être transformée en :

$$t_1 - t_0 = \frac{L}{v_0} - \frac{\frac{\epsilon(t_0)}{2}}{1 + \frac{\epsilon(t_0)}{2}} \frac{L}{v_0} \tag{3.28}$$

Si bien que

$$\tau_1(t_0) = \frac{L}{v_0} \frac{\frac{\epsilon(t_0)}{2}}{1 + \frac{\epsilon(t_0)}{2}} = \frac{L}{v_0} \frac{\epsilon_1 \sin(\omega t_0) + \epsilon_2 \sin(2\omega t_0 + \theta)}{2 + \epsilon_1 \sin(\omega t_0) + \epsilon_2 \sin(2\omega t_0 + \theta)} \tag{3.29}$$

Enfin, nous considérerons que la modulation du faisceau après la cavité d'entrée reste un effet de second ordre, c'est à dire que : $\epsilon_{1,2} \ll 1$. Si bien que $c_1(n)$ s'écrit après avoir fait le changement

de variable $u = \omega t_0$:

$$c_1(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inu + in\frac{\omega L}{2v_0}(\epsilon_1 \sin u + \epsilon_2 \sin(2u+\theta))} du \tag{3.30}$$

Pour estimer l'effet de l'injection d'harmonique sur la puissance fondamentale extraite du klystron, nous calculons la puissance dans la cavité de sortie sur l'harmonique ω. La puissance de sortie totale s'écrit $I_1(t_1)V_1^*(t_1) + I_1^*(t_1)V_1(t_1)$: d'après l'expression (3.26) la puissance de sortie sur l'harmonique ω est proportionnelle à la grandeur $||\tilde{I}_1(1)||^2$, qui est elle-même proportionnelle à $||c_1(1)||^2$.

Sur la figure 3.15 nous avons représenté l'évolution du facteur $||c_1(1)||^2$, calculé par Mathematica avec l'expression (3.30) en fonction de la distance entre les cavités du klystron L pour différentes valeurs du taux d'harmonique α lorsque le déphasage $\theta = \pi$. Sur la figure 3.16, nous avons fixé α à 1, et tracé $||c_1(1)||^2$ en fonction de L pour différentes valeurs du déphasage θ.

Les figures 3.15 et 3.16 illustrent comment l'injection d'harmonique 2ω permet d'augmenter ou de réduire la puissance sur fondamentale extraite dans un klystron, et comment interviennent le rapport d'amplitude α et le déphasage θ, entre l'harmonique et sa fondamentale.

On remarque sur la figure 3.15 que la valeur optimale de α dépend de la distance L. Par contre, la valeur optimale pour le déphasage est indépendante de L : elle est toujours égale à $\theta = \pi$.

La figure 3.17 représente l'évolution de $||c_1(1)||^2$ en fonction de θ pour la longueur $L = 40$, et pour une valeur α égale à 1.6, qui est la valeur optimale de α pour cette longueur. Cette figure met en évidence le rôle crucial joué par le déphasage (que nous aurons l'occasion de retrouver dans le cas du TOP), puisque la puissance est multipliée par plus de 6 lorsque θ passe de 0 à π.

On peut donc optimiser l'extraction d'énergie dans un klystron en remplaçant l'onde injectée $\epsilon_1 \sin(\omega t_0)$ par la somme $\epsilon_1[\sin(\omega t_0) - \alpha \sin(2\omega t_0)]$, et en adaptant α en fonction de la valeur du klystron. A $L = 40$, la valeur optimale de α est 1.6. En fixant θ à π on a alors une puissance de 0.087 au lieu de 0.059 sans harmonique.

Les premiers termes du développement en série de Fourier du signal en dent de scie présenté en 3.2.2 correspondaient à $E = E_0[\sin(\omega t_0) - 0.5 \sin(2\omega t_0)]$; on retrouve donc le même déphasage optimal de π entre les deux ondes ; par contre la valeur optimale de α dépend de la longueur du klystron. Ceci confirme et précise le raisonnement du paragraphe 3.2.2 sur la forme du signal qui optimise le regroupement des électrons.

3.2.4 Courant de modulation dans le cas d'un signal multi-harmoniques : le cas du TOP

Pour calculer le courant de modulation dans un TOP, nous travaillons dans l'approximation grand signal/gain faible, qui correspond au modèle Laser à Electrons Libres (FEL) explicité dans le chapitre 2.3. Rappelons qu'un faisceau d'électrons de vitesse initiale v_0 est soumis à un champ d'amplitude constante qui se déplace à la vitesse $v_p = \frac{\omega}{k}$. Dans le référentiel du laboratoire, la position z d'un électron dont la position initiale, à l'instant 0, était z_0, est déterminée par l'équation du mouvement :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{e}{m} E(z,t) \tag{3.31}$$

où $E(z,t)$ est la forme du champ. Lorsque le champ ne contient que l'onde fondamentale de fréquence ω, $E(z,t) = E_0 \sin(kz - \omega t)$. Nous cherchons le courant de modulation dans le cas

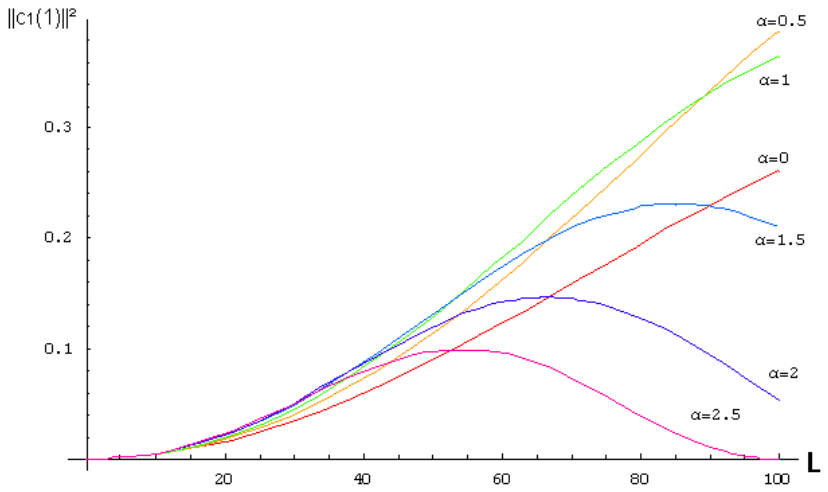


FIG. 3.15 – $||c_1(1)||^2$ en fonction de L pour différents α et $\theta = \pi$.

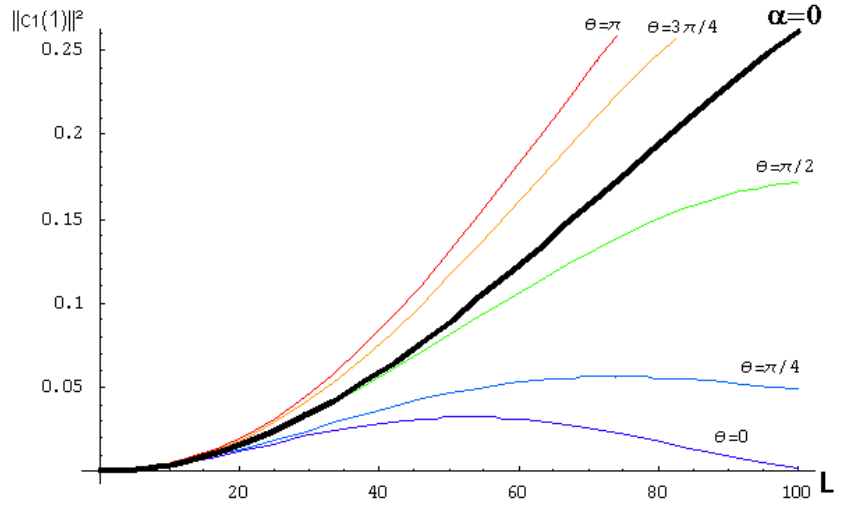


FIG. 3.16 – $||c_1(1)||^2$ en fonction de L pour différents θ et $\alpha = 1$.

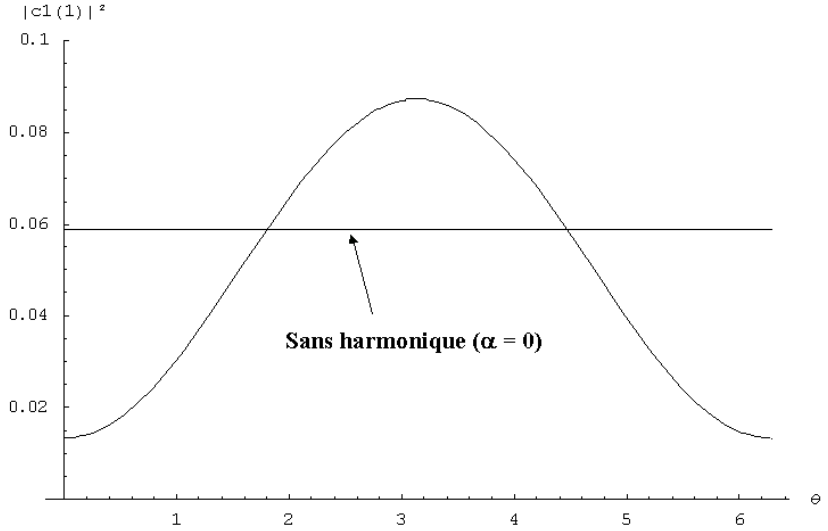


FIG. 3.17 – $||c_1(1)||^2$ en fonction de θ pour $L = 40$ et $\alpha = 1.6$

où le champ contient la fondamentale et son harmonique 2, déphasée de θ :

$$E(z,t) = E_0[\sin(kz - \omega t) + \alpha \sin(2kz - 2\omega t + \theta))] \tag{3.32}$$

En écrivant cette expression du champ $E(z,t)$, nous avons implicitement fait une hypothèse : l'onde fondamentale et son harmonique se propagent à la même vitesse $v_p = \frac{\omega}{k}$. Nous retrouverons cette hypothèse dans le chapitre 4, en modélisant une "hélice magique", dans laquelle fondamentale et harmonique ont la même vitesse, puis nous y ferons varier la vitesse de l'harmonique.

Pour mener ce calcul de courant de modulation dans un TOP, nous nous sommes inspirés du calcul mené pour les klystrons par Y.Y. Lau [Lau, 2000] et explicité au paragraphe 3.2.3. Contrairement au cas du klystron, les conditions initiales sur les électrons sont données à l'instant initial $t = 0$, et non à l'abscisse initiale $z = 0$. Autrement dit, les électrons sont uniformément répartis en position à $t = 0$, instant auquel le champ leur est appliqué. Ils sont modulés en vitesse et en position au fur et à mesure du temps, tout en se déplaçant collectivement dans un champ spatialement périodique. En conséquence, le courant de modulation $I(z,t)$ qui découle de ce mouvement est périodique dans l'espace, de période $\frac{2\pi}{k}$. Il se décompose alors de la manière suivante :

$$I(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(t) e^{in(kz-\omega t)} \tag{3.33}$$

où :

$$I_n(t) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{k}} I(z,t) e^{-in(kz-\omega t)} dz \tag{3.34}$$

Nous pouvons exprimer le courant en fonction du flux de charge : $I(z,t) = \frac{dq}{dt}(z,t)$, que nous décomposons, en supposant assez faible la modulation de vitesse des électrons, en : $\frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{dq}{dz} v_0$. Autrement dit :

$$I_n(t) = \frac{kv_0}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{k}} \frac{dq}{dz}(z,t) e^{-in(kz-\omega t)} dz \tag{3.35}$$

Le terme $\frac{dq}{dz}(z,t)$ représente la densité linéique de charge, qu'il est possible d'exprimer avec la distribution de Dirac :

$$\frac{dq}{dz}(z,t) = \sum_{z_0} (-e)\delta(Z - z(t,z_0)) \tag{3.36}$$

Ainsi la composante $I_n(t)$ du courant s'écrit :

$$I_n(t) = \frac{kv_0}{2\pi} \sum_{z_0} \int_{-\frac{\pi}{k}}^{\frac{\pi}{k}} (-e)\delta(Z - z(t,z_0)) e^{-in(kZ-\omega t)} dZ \tag{3.37}$$

$$= \frac{kv_0}{2\pi} \sum_{z_0} (-e) e^{-in(kz(t,z_0)-\omega t)} \tag{3.38}$$

En notant y la position d'un électron dans le référentiel qui se déplace à la vitesse de l'onde v_p,

$$ky = kz - kv_p t = kz - \omega t$$

$I_n(t)$ devient :

$$I_n(t) = (-e)\frac{kv_0}{2\pi}\sum_{z_0} e^{-inky(t,z_0)} \tag{3.39}$$

Pour mesurer l'effet d'injection d'harmonique sur la composante n du courant de modulation, nous calculons $||I_n(t)||^2$. La configuration optimale, pour laquelle on extrait un maximum de puissance sur fondamentale, correspond à la valeur maximale de $||I_1(t)||^2$.

Nous avons utilisé Mathematica pour calculer la grandeur sans dimension $I_n^2 = ||\sum_{z_0} e^{-inky(t,z_0)}||^2$ à t = 15, pour les harmoniques 1 et 2, en sommant sur un nombre fini de z_0, uniformément répartis entre 0 et 2π. Les résultats sont portés sous la forme de I_1^2 et I_2^2 en fonction du déphasage θ (figure 3.18), et de I_1^2 et I_2^2 en fonction du rapport d'amplitude initial des champs α (figure 3.19).

Sur la figure 3.18 on retrouve, comme dans le cas du klystron, la forte dépendance des courants de modulation vis à vis du déphasage θ, puisque I_1^2 et I_2^2 varient du simple au triple, ou au quadruple, selon la valeur de θ. On remarque que le maximum de I_1^2 correspond au minimum de I_2^2, et vice-versa. L'amplitude du courant de modulation I_1^2 est maximale lorsque θ est aux alentours de π.

Sur la figure 3.19, on s'est donc placé à $\theta = \pi$ et on a fait varier α : on remarque là aussi que le maximum de I_1^2 correspond au minimum de I_2^2, et vice-versa. Le maximum pour I_1^2 est atteint pour une valeur α proche de 0.75 ; on reste dans une configuration favorable lorsque α varie un peu autour de cette valeur.

Il apparaît ainsi que la configuration optimale pour extraire de l'énergie sur la fréquence ω correspond aux valeurs $\alpha = 0.75$, $\theta = \pi$.

On est donc proche de la forme du champ correspondant aux premiers termes du développement de Fourier du champ en dent de scie :

$$E(z,t) = E_0[\sin(kz - \omega t) + \frac{1}{2}\sin(2kz - 2\omega t + \pi))] \tag{3.40}$$

Dans ce paragraphe, nous avons identifié la forme du champ favorable à la création d'un fort courant de modulation sur fondamentale dans le faisceau d'électrons, c'est à dire d'une bonne mise en paquets. Nous donnons également une bonne image du comportement d'un faisceau d'électrons dans un champ sinusoïdal composé d'une fondamentale et de son harmonique .

3.2.5 Comparaison klystron/TOP

Dans le cas du klystron, nous avons calculé un coefficient $||c_1(1)||^2$ égal à 0.059 pour un champ ne comprenant pas d'harmonique. Dans la configuration la plus favorable avec injection d'harmonique, la valeur de $||c_1(1)||^2$ est passée à 0.087, soit une augmentation de 47 %.

Pour le Tube à Ondes Progressives, nous avons calculé un coefficient I_1^2 égal à 0.49 sans injection d'harmonique, et égal à 0.57 dans la meilleure configuration : ceci correspond à une augmentation de 16 %.

Les valeurs absolues de ces coefficients ne peuvent pas être comparées du klystron au TOP, puisqu'elles sont adimensionnées, mais on peut tout de même conclure que dans le cadre de ce calcul de courant de modulation, l'injection d'harmonique est plus favorable encore au klystron qu'au TOP.

Nous avons donc montré ici qu'on pouvait augmenter l'énergie extraite d'un faisceau d'électrons en injectant de la seconde harmonique, et nous trouvons une augmentation de 16 % dans le cas du TOP. Ce résultat valide le raisonnement que nous avions fait au paragraphe 3.2.2, en expli-

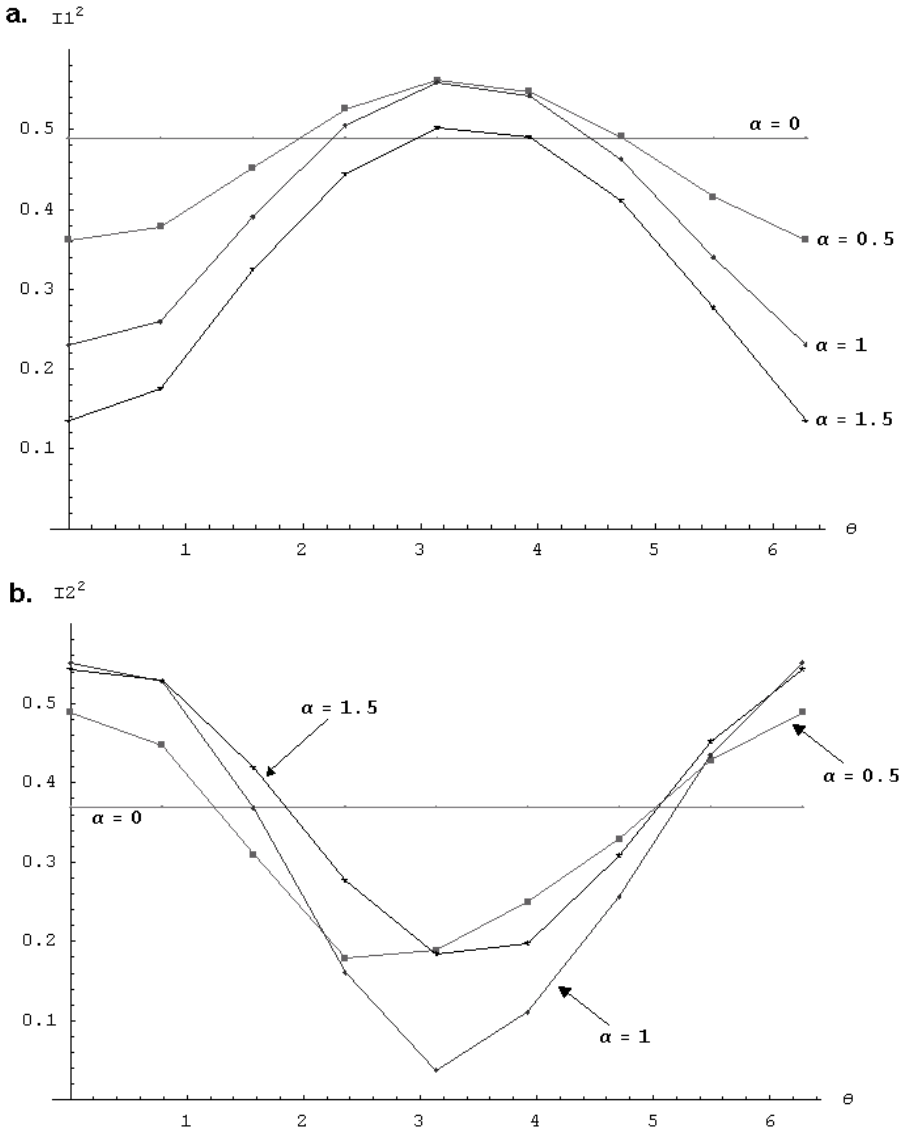


FIG. 3.18 – Amplitudes I_1^2 (a) et I_2^2 (b) en fonction du déphasage θ, pour différentes valeurs de α.

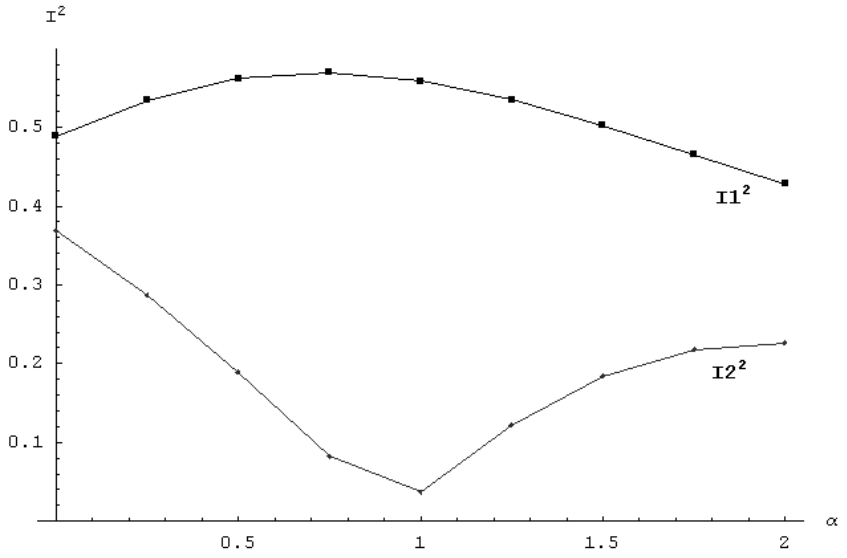


FIG. 3.19 – Amplitudes I_1^2 et I_2^2 en fonction de α, pour $\theta = \pi$.

quant qu'on pouvait améliorer le regroupement des électrons et favoriser l'extraction d'énergie à un faisceau en transformant la forme du champ électrique. Cependant, le modèle que nous venons d'exposer ne prend pas en compte tous les aspects de l'interaction, et en particulier il n'est pas auto-cohérent. Nous verrons dans les chapitres 4 puis 5 que la puissance extraite par une onde en injectant sa seconde harmonique peut être améliorée de manière bien plus notable encore, avec une représentation auto-cohérente du tube, puis lors de mesures.

3.3 Injection de seconde harmonique dans le cas du petit signal

Dans le paragraphe précédent, nous avons calculé le courant de modulation créé par un faisceau d'électrons sous l'effet d'un champ électrique contenant deux harmoniques, dans le but d'évaluer l'effet de l'injection d'harmonique dans un TOP. Les résultats que nous y avons présentés ne sont valables que dans le cas où le champ a une amplitude constante : nous avons travaillé avec le modèle de type "FEL", dont nous avons expliqué au paragraphe 2.3 qu'il n'était pas auto-cohérent.

Dans ce paragraphe, nous allons de nouveau évaluer l'effet de l'injection d'harmonique dans un TOP, en utilisant un modèle eulérien ; là encore, nous ne prendrons pas en compte toute la réalité de l'interaction onde/faisceau, puisque le formalisme eulérien ne permet pas de décrire les mouvements individuels des électrons, notamment leur aspect non-linéaire décrit au paragraphe 3.1.2. Par contre ce modèle est auto-cohérent, et il décrit l'amplification du champ. Il nous permettra d'écrire une expression analytique des puissances fondamentale et harmonique résultant de l'interaction avec injection d'harmonique, et de mesurer le rôle de paramètres tels que l'amplitude et la phase initiales de l'harmonique.

3.3.1 Couplage du faisceau d'électrons et du circuit dans un TOP, pour les fréquences ω et 2ω

La modélisation du TOP qui est proposée dans ce chapitre correspond au formalisme eulérien d'un faisceau d'électrons soumis à un champ électrique. Il s'agit d'un modèle unidimensionnel. Le couplage entre le faisceau et le champ est décrit par un circuit L, C : c'est la modélisation de Pierce [Pierce, 1950].

Recherche des modes propres du faisceau seul

Voici les quatre équations portant sur : la vitesse du faisceau $v(z,t)$, le champ électrique axial existant dans le faisceau $E(z,t)$ et la charge du faisceau $\rho(z,t)$ qui doivent être vérifiées dans un faisceau d'électrons seul.

$$Equation\,du\,mouvement: \quad v\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{e}{m}E \tag{3.41}$$

$$Conservation\,de\,la\,charge: \quad \frac{\partial \rho v}{\partial z}+\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{3.42}$$

$$Equation\,de\,Maxwell: \quad \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho v \tag{3.43}$$

La troisième équation provient du caractère unidimensionnel du faisceau : si on considère que le faisceau, qui se propage selon z, est invariant en x et y, l'équation de Maxwell $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ devient :

$$\frac{\partial E(z,t)}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Couplée à l'équation (3.42), cette équation aboutit à l'équation (3.43).

Les trois fonctions variables de z et t : ρ, v, et E se décomposent en fréquence sur ω, la pulsation fondamentale et sur toutes ses harmoniques $n\omega$. Dans la mesure où nous n'étudions ici que le rôle de la seconde harmonique, nous ne décomposons ces fonctions que sur ω et sur 2ω. G représente

n'importe laquelle de ces trois grandeurs.

$$G(z,t) = G_0 + G_1(z)e^{j\omega t} + \overline{G_1}(z)e^{-j\omega t} + G_2(z)e^{2j\omega t} + \overline{G_2}(z)e^{-2j\omega t} \tag{3.44}$$

Nous négligeons donc les termes d'harmoniques supérieures, ce qui constitue une approximation importante, que nous choisissons de faire pour la réalisation du calcul.

On en tire les valeurs de ρv et de v^2, en négligeant les termes d'harmonique supérieure à deux :

$$\begin{aligned}
v^2(z,t) &= v_0^2 + |v_1(z)|^2 + |v_2(z)|^2 + 2(v_0 v_1(z) + v_2(z)\overline{v_1}(z))e^{j\omega t} + 2(v_0\overline{v_1}(z) + \overline{v_2}(z)v_1(z))e^{-j\omega t} \\
&\quad +(2v_0 v_2(z) + v_1(z)^2)e^{2j\omega t} + (2v_0\overline{v_2}(z) + \overline{v_1}(z)^2)e^{-2j\omega t} \\
\rho(z,t)v(z,t) &= \rho_0 v_0 + v_1\overline{\rho_1} + \overline{v_1}\rho_1 + v_2\overline{\rho_2} + \overline{v_2}\rho_2 + \\
&\quad (\rho_0 v_1 + v_0\rho_1 + \overline{v_1}\rho_2 + \overline{\rho_1}v_2)e^{j\omega t} + (\rho_0\overline{v_1} + v_0\overline{\rho_1} + v_1\overline{\rho_2} + \rho_1\overline{v_2})e^{-j\omega t} \\
&\quad +(\rho_1 v_1 + \rho_0 v_2 + v_0\rho_2)e^{2j\omega t} + (\overline{\rho_1 v_1} + \rho_0\overline{v_2} + v_0\overline{\rho_2})e^{-2j\omega t}
\end{aligned}$$

On peut également écrire l'expression de $\frac{\partial E}{\partial t}$:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = j\omega E_1(z)e^{j\omega t} - j\omega\overline{E_1}(z)e^{-j\omega t} + 2j\omega E_2(z)e^{2j\omega t} - 2j\omega\overline{E_2}(z)e^{-2j\omega t}$$

On peut alors exprimer la relation (3.43) en la décomposant sur $e^{j\omega t}$ et sur $e^{2j\omega t}$:

$$j\omega E_1 = -\frac{1}{\epsilon_0}(\rho_0 v_1 + v_0\rho_1 + \overline{v_1}\rho_2 + \overline{\rho_1}v_2) \tag{3.45}$$

$$2j\omega E_2 = -\frac{1}{\epsilon_0}(\rho_1 v_1 + \rho_0 v_2 + v_0\rho_2) \tag{3.46}$$

De même en écrivant : $v\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial z}$, en exprimant $\frac{\partial v^2}{\partial z}$, on peut décomposer la relation (3.41) sur $e^{j\omega t}$ et sur $e^{2j\omega t}$:

$$\frac{dv_2\overline{v_1}}{dz} + v_0\frac{dv_1}{dz} + j\omega v_1 = -\frac{e}{m}E_1 \tag{3.47}$$

$$v_0\frac{dv_2}{dz} + v_1\frac{dv_1}{dz} + 2j\omega v_2 = -\frac{e}{m}E_2 \tag{3.48}$$

L'équation de conservation de la charge (3.42) se décompose de la manière suivante :

$$j\omega\rho_1 + v_0\frac{d\rho_1}{dz} = -\rho_0\frac{dv_1}{dz} - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dz}}(\overline{\mathbf{v_1}}\rho_\mathbf{2} + \overline{\rho_\mathbf{1}}\mathbf{v_2}) \tag{3.49}$$

$$2j\omega\rho_2 + v_0\frac{d\rho_2}{dz} = -\rho_\mathbf{1}\frac{\mathbf{dv_1}}{\mathbf{dz}} - \mathbf{v_1}\frac{\mathbf{d}\rho_\mathbf{1}}{\mathbf{dz}} - \rho_0\frac{v_2}{dz} \tag{3.50}$$

Et les équations (3.47) et (3.48) couplées aux équations (3.45) et (3.46) donnent :

$$\frac{\mathbf{dv_2}\overline{\mathbf{v_1}}}{\mathbf{dz}} + v_0\frac{dv_1}{dz} + j\omega v_1 = \frac{e}{j\omega\epsilon_0 m}(\rho_0 v_1 + v_0\rho_1 + \overline{\mathbf{v_1}}\rho_\mathbf{2} + \overline{\rho_\mathbf{1}}\mathbf{v_2}) \tag{3.51}$$

$$v_0\frac{dv_2}{dz} + 2j\omega v_2 = -\mathbf{v_1}\frac{\mathbf{dv_1}}{\mathbf{dz}} + \frac{e}{2j\omega\epsilon_0 m}(\rho_\mathbf{1}\mathbf{v_1} + \rho_0 v_2 + v_0\rho_2) \tag{3.52}$$

Les quatre équations précédentes forment le système d'équations du faisceau seul. Les termes

non-linéaires sont en caractères gras.

Couplage du faisceau avec le circuit

Le couplage entre le faisceau d'électrons et l'onde dans le tube, représentés par un circuit L, C, se fait selon le schéma suivant, qui a déjà été représenté au paragraphe 2.2.1 (p. 26) :

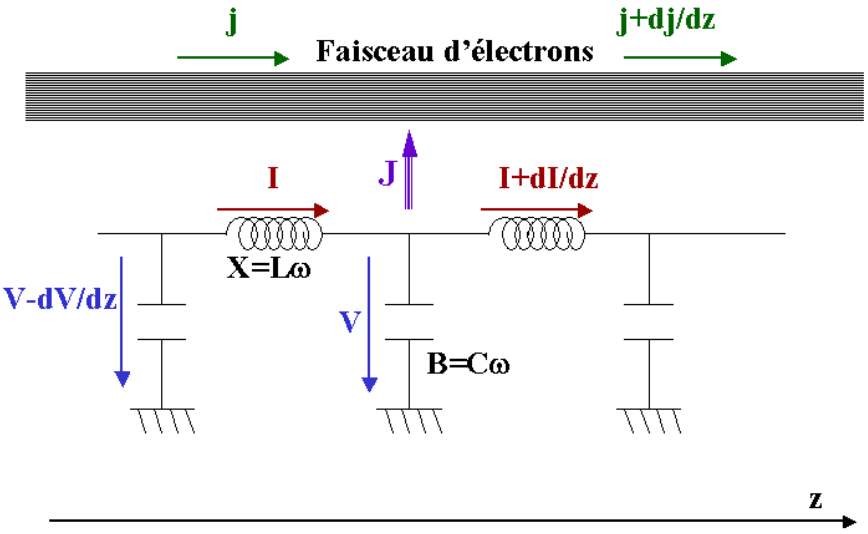


FIG. 3.20 – Circuit équivalent d'un tube à ondes progressives

Pour le circuit seul on a les équations :

$$\text{à} \quad \omega \quad : \quad \frac{\partial I_1}{\partial z} = jBV_1 \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = jXI_1 \tag{3.54}$$

$$\text{à} \quad 2\omega \quad : \quad \frac{\partial I_2}{\partial z} = 2jBV_2 \tag{3.55}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial z} = 2jXI_2 \tag{3.56}$$

Le couplage entre le faisceau et le circuit se fait en considérant d'une part que tout le courant **J** qui part du circuit est récupéré dans le faisceau. $\mathbf{J} = \frac{\partial j}{\partial z}$. Dans les équations (3.53) et (3.55) il faut rajouter les composantes ω et 2ω du courant **J** :

$$\frac{\partial I_1}{\partial z} = jBV_1 + \frac{\partial j_1}{\partial z}, \qquad \frac{\partial I_2}{\partial z} = 2jBV_2 + \frac{\partial j_2}{\partial z} \tag{3.57}$$

D'après la conservation de la charge :

$$\frac{\partial j_1}{\partial z} = -\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -j\omega\rho_1$$
$$\frac{\partial j_2}{\partial z} = -\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = -2j\omega\rho_2$$

D'autre part, le champ auquel sont soumis les électrons comprend le champ de charge d'espace, déjà pris en compte dans les équations (3.51) et (3.52), mais aussi le champ de circuit : $-\frac{\partial V}{\partial z}$.

En rajoutant ce champ pour chacune des harmoniques, et en reprenant toutes les équations du

système, plus celles du système modifiées, on obtient le système complet suivant :

$$(S1)\begin{cases} j\omega\rho_1 + v_0\frac{d\rho_1}{dz} = -\rho_0\frac{dv_1}{dz} - \frac{d}{dz}(\overline{v_1}\rho_2 + \overline{\rho_1}v_2) \\ 2j\omega\rho_2 + v_0\frac{d\rho_2}{dz} = -\rho_1\frac{dv_1}{dz} - v_1\frac{d\rho_1}{dz} - \rho_0\frac{v_2}{dz} \\ v_0\frac{dv_1}{dz} + j\omega v_1 = \frac{e}{j\omega\epsilon_0 m}(\rho_0 v_1 + v_0\rho_1 + \overline{\mathbf{v_1}}\rho_\mathbf{2} + \overline{\rho_\mathbf{1}}\mathbf{v_2}) + \frac{e}{m}\frac{dV_1}{dz} - \frac{dv_2\overline{v_1}}{dz} \\ v_0\frac{dv_2}{dz} + 2j\omega v_2 = -\mathbf{v_1}\frac{\mathbf{dv_1}}{\mathbf{dz}} + \frac{e}{2j\omega\epsilon_0 m}(\rho_\mathbf{1}\mathbf{v_1} + \rho_0 v_2 + v_0\rho_2) + \frac{e}{m}\frac{dV_2}{dz} \\ \frac{\partial I_1}{\partial z} = jBV_1 - j\omega\rho_1 \qquad \frac{\partial V_1}{\partial z} = jXI_1 \\ \frac{\partial I_2}{\partial z} = 2jBV_2 - 2j\omega\rho_2 \qquad \frac{\partial V_2}{\partial z} = 2jXI_2 \end{cases}$$

3.3.2 Simplification du système d'équations différentielles

Nous allons travailler avec les approximations suivantes :

- charge d'espace négligée : cela revient à supprimer les termes en $\frac{e}{j\omega\epsilon_0 m}\rho v$ dans le système (S1) : en effet, le champ de charge d'espace, décrit au paragraphe 2.2.4 du modèle de Pierce, est $E_{zc} = -\frac{j}{\omega\epsilon_0}j_c$, où $j_c = \rho v$.
- approximation de l'enveloppe lentement variable : toutes les grandeurs du système relatives à la fréquence $l\omega$ de l'onde et du faisceau peuvent être écrites sous la forme : $G_{ltot}(z) = G_l(z)e^{-il\beta z}$ où $G_l(y)$ représente l'enveloppe de la grandeur G_{ltot}, et on considère que : $\frac{dG(z)}{dz} << \beta G(z)$. β est le vecteur d'onde de la fondamentale injectée.
- les vitesses initiales de l'onde et du faisceau sont égales : $\beta = \frac{\omega}{v_0}$. Par ailleurs, la constante de propagation du circuit seul $\sqrt{BX}$ est égale à β.

On note A_l, B_l, ν_l respectivement les grandeurs normalisées pour la tension de circuit, la charge du faisceau et la vitesse du faisceau correspondant à l'harmonique $l\omega$ (l=1,2). Par ailleurs, on travaille avec une coordonnée normalisée pour la distance : $y = \beta z$. On définit donc :

$$V_l(y) = 2V_0A_l(y)e^{-ily}, \quad \rho_l(y) = \rho_0B_l(y)e^{-ily}, \quad v_l(y) = v_0\nu_l(y)e^{-ily}$$

On travaille uniquement avec la fondamentale et l'harmonique 2, donc avec $l = 1$ et $l = 2$.

Commençons par transformer la première équation du système (S1). En remarquant que $\frac{d}{dz} = \frac{d}{dy}\frac{\omega}{v_0}$, elle devient :

$$\begin{aligned} i\omega\rho_0B_1(y) + \omega\rho_0B_1'(y) - i\omega\rho_0B_1(y) & \\ &= -\omega\rho_0(\nu_1'(y) - i\nu_1(y)) \\ &- \omega\rho_0[(\overline{\nu_1'(y)} + i\overline{\nu_1(y)})B_2(y) + \overline{\nu_1(y)}(B_2'(y) - 2iB_2(y)) \\ &+ (\overline{B_1'(y)} + i\overline{B_1(y)})\nu_2(y) + \overline{B_1(y)}(\nu_2'(y) - 2i\nu_2(y))] \end{aligned}$$

Deux termes s'annulent dans le premier terme de l'équation, tandis que l'approximation de l'enveloppe lentement variable permet de négliger les termes $\nu_1'(y)$, $B_1'(y)$ et $B_2'(y)$ dans le second terme, ce qui amène à l'équation :

$$B_1'(y) = i\nu_1(y) + i\overline{\nu_1}(y)B_2(y) + i\nu_2(y)\overline{B_1(y)} \tag{3.58}$$

Les trois équations suivantes du système (S1) se transforment de manière similaire, en négligeant les termes de charge d'espace, puis en utilisant le fait que : $\frac{1}{2}mv_0^2 = eV_0$, ce qui aboutit, avec (3.58)

aux quatre équations :

$$\begin{aligned}
B_1'(y) &= i\nu_1(y) + i\overline{\nu_1}(y)B_2(y) + i\nu_2(y)\overline{B_1(y)} \\
B_2'(y) &= 2iB_1(y)\nu_1(y) + 2i\nu_2(y) \\
\nu_1'(y) &= i\overline{\nu_1(y)}\nu_2(y) + iA_1(y) \\
\nu_2'(y) &= i\nu_1(y)\nu_1(y) + 2iA_2(y)
\end{aligned}$$

Les deux équations de circuit concernant l'onde $l\omega$ se transforment en :

$$\beta^2\frac{d^2V_l}{dy^2} = l^2(-XBV_l + \omega X\rho_l)$$

$\frac{d^2V_l}{dy^2}$ se décompose au premier ordre en :

$$2V_0(-2il\frac{dA_l}{dy} - l^2A_l)$$

Du fait que $\sqrt{BX} = \beta$, les termes en $A_l(y)$ disparaissent, et la relation entre A_l et B_l devient :

$$\frac{dA_l(y)}{dy} = i\frac{l}{4}\frac{\omega X\rho_0}{\beta^2V_0}B_l(y)$$

En utilisant l'expression de la résistance de couplage relative à l'onde $l\omega$: $R_c(l\omega) = \sqrt{\frac{X}{B}}$, et la relation $I_0 = \rho_0 v_0$, on transforme le coefficient $\frac{\omega X\rho_0}{\beta^2V_0}$en $\frac{I_0R_c(l\omega)}{4V_0}$. On reconnait là l'expression du coefficient $C(l\omega)^3$ de Pierce. Dans la suite de notre calcul, pour plus d'aisance, nous noterons

$$K_1 = \frac{I_0R_c(\omega)}{4V_0}, \quad K_2 = \frac{I_0R_c(2\omega)}{4V_0}, \quad K_{10} = \sqrt[3]{K_1} \quad et \quad K_{20} = \sqrt[3]{K_2}$$

Les quatre autres équations du système (S1) se simplifient également, en appliquant l'approximation de l'enveloppe lentement variable, et en utilisant $v_0 = \frac{\omega}{\beta}$; le système complet, pour les deux harmoniques, décrivant l'interaction dans le TOP avec nos approximations s'écrit donc finalement :

$$(S2)\begin{cases}
B_1'(y) = i\nu_1(y) + i\overline{\nu_1}(y)B_2(y) + i\nu_2(y)\overline{B_1(y)} \\
B_2'(y) = 2iB_1(y)\nu_1(y) + 2i\nu_2(y) \\
\nu_1'(y) = i\overline{\nu_1(y)}\nu_2(y) + iA_1(y) \\
\nu_2'(y) = i\nu_1(y)\nu_1(y) + 2iA_2(y) \\
A_1'(y) = iK_1B_1(y) \\
A_2'(y) = 2iK_2B_2(y)
\end{cases}$$

Conditions initiales : $A_1(0) = A_{10}$, $A_2(0) = A_{20}e^{ip}$, $B_1(0) = B_2(0) = \nu_2(0) = \nu_1(0) = 0$. Le déphasage initial entre l'onde fondamentale et son harmonique est l'angle p. C'est un système d'équations différentielles du premier ordre non-linéaire. Il n'existe pas de solution générale simple. Ce système peut être résolu numériquement par des logiciels de calculs comme Mathematica, mais nous allons chercher des fonctions analytiques simples qui permettent de représenter les grandeurs $A_1(y)$ et $A_2(y)$ avec une faible erreur comparées aux solutions du système.

3.3.3 Recherche de solutions analytiques pour $A_1(y)$ et $A_2(y)$

La méthode consiste à considérer l'expression des grandeurs d'ordre 0 $G_1^{(0)}(y)$, qui sont les solutions du système sans harmonique 2 pour l'onde ω. On calcule alors les grandeurs $G_2(y)$ de l'onde 2ω induites par le faisceau et l'onde ω d'ordre 0. Enfin, on cherche les solutions à l'ordre 1 pour l'onde ω, qui sont considérées comme une perturbation de l'onde fondamentale ω résultant de la présence d'harmonique 2ω. Ces solutions sont notées $G_1^{(1)}(y)$, et sont petites devant $G_1^{(0)}(y)$.

Expression de $A_1^{(0)}(y)$

$A_1^{(0)}(y)$, $B_1^{(0)}(y)$ et $\nu_1^{(0)}(y)$ sont solutions du système sans seconde harmonique :

$$\begin{aligned} B_1'(y) &= i\nu_1(y) \\ \nu_1'(y) &= iA_1(y) \\ A_1'(y) &= iK_1B_1(y) \\ B_1^{(0)}(0) &= \nu_1^{(0)}(0) = 0, A_1^{(0)}(0) = A_{10} \end{aligned}$$

Ces solutions sont bien connues, elles ont été calculées par Pierce. La tension de circuit s'écrit :

$$A_1^{(0)}(y) = \frac{A_{10}}{3}(e^{\gamma_1 y} + e^{\gamma_2 y} + e^{\gamma_3 y})$$

où $\gamma_k = -iK_{10}\epsilon_k$, et où les ϵ_k sont les racines cubiques de -1.

$$\epsilon_1 = \frac{i\sqrt{3}+1}{2}; \quad \epsilon_2 = \tfrac{-i\sqrt{3}+1}{2}; \quad \epsilon_3 = -1$$

Expression de $A_2(y)$

L'onde 2ω est donc considérée comme étant amplifiée sous l'effet du couplage entre le faisceau et l'onde "pompe" ω calculée précédemment. $A_2(y)$, $B_2(y)$ et $v_2(y)$ sont ainsi les solutions du système différentiel linéaire :

$$\begin{aligned} B_2'(y) &= 2iB_1^{(0)}(y)\nu_1^{(0)}(y) + 2i\nu_2(y) \\ \nu_2'(y) &= i\nu_1^{(0)}(y)\nu_1^{(0)}(y) + 2iA_2(y) \\ A_2'(y) &= 2iK_2B_2(y) \\ A_2(0) &= A_{20}e^{ip}, B_2(0) = \nu_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Ce système est parfaitement intégrable, et donne pour la tension de circuit l'expression :

$$\begin{aligned} A_2(y) &= b_{11}e^{2\gamma_1 y} + b_{22}e^{2\gamma_2 y} + b_{33}e^{2\gamma_3 y} + b_{12}e^{-\gamma_3 y} + b_{23}e^{-\gamma_1 y} + b_{31}e^{-\gamma_2 y} \\ &+ \frac{A_{20}e^{ip}}{3}(a_1e^{\gamma_1' y} + a_2e^{\gamma_2' y} + a_3e^{\gamma_3' y}) \end{aligned} \tag{3.59}$$

où $\gamma_k' = -2iK_{20}\epsilon_k$ avec :

$$b_{11} = \frac{4K_2A_1(0)^2}{3K_{10}^2(8K_2 - 8K_1)}\epsilon_1, b_{12} = \frac{4K_2A_1(0)^2}{3K_{10}^2(8K_2 + K_1)}\epsilon_3$$

$$a_1 = 1 + \frac{(10K_2 - K_1)K_{20}A_{10}^2e^{-ip}}{2A_{20}(K_1 - K_2)(K_1 + 8K_2)}\epsilon_1$$

Les 6 autres coefficients sont obtenus par permutation circulaire des indices 1,2 et 3.

Expression de $A_1^{(1)}(y)$

Pour calculer l'expression de $A_1^{(1)}(y)$ on reprend le système (S2) en remplaçant chaque grandeur de fréquence ω par $G_1(y) = G_1^{(0)}(y)+G_1^{(1)}(y)$. Une partie des termes en $G_1^{(0)}$ disparaissent puisqu'ils sont solution du système de Pierce ; par ailleurs on applique l'approximation : $G_1^{(1)} \ll G_1^{(0)}$. Les grandeurs $G_1^{(1)}$ sont finalement solutions du système différentiel linéaire :

$$\begin{aligned}
B_1'^{(1)}(y) &= i\nu_1^{(1)}(y) + i\overline{\nu}_1^{(0)}(y)B_2(y) + ib\nu_2(y)\overline{B}_1^{(0)}(y) \\
\nu_1'^{(1)}(y) &= i\overline{\nu}_1^{(0)}(y)\nu_2(y) + iA_1^{(1)}(y) \\
A_1'^{(1)}(y) &= iK_1B_1^{(1)}(y) \\
A_1^{(1)}(0) &= B_1^{(1)}(0) = \nu_1^{(1)}(0) = 0
\end{aligned}$$

Ce système est parfaitement intégrable. Le résultat étant assez lourd, nous nous contenterons d'exprimer les termes qui deviennent prépondérants lorsque y est assez grand, c'est à dire :

$$A_1^{(1)}(y) = g_{12}e^{(2\gamma_1-\gamma_2)y} + a_1.h_{12}e^{(\gamma_1'-\gamma_2)} \tag{3.60}$$

$$h_{12} = \frac{-i\gamma_1'\gamma_2({\gamma_1'}^2 + 2\gamma_1'\gamma_2 - 2\gamma_2^2)}{(\gamma_1'-\gamma_2)^3 + iK_1} * \frac{A_{10}}{36K_2}A_{20}e^{ip} \tag{3.61}$$

$$g_{12} = \frac{A_{10}\gamma_1\gamma_2}{108K_2K_1^2} * \frac{36i.b_{11}(-2\gamma_1^2 - 2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2)K_1^2 + 4A_{10}^2\gamma_1^3K_2}{(2\gamma_1-\gamma_2)^3 + iK_1} \tag{3.62}$$

3.3.4 Expression analytique de l'énergie totale de chaque onde, pour les grandes valeurs de y

Onde de fréquence ω

L'énergie est proportionnelle à $\|A_1^{(0)}(y)+A_1^{(1)}(y)\|^2$, qui se développe à l'ordre 1 en : $\|A_1^{(0)}(y)\|^2 + A_1^{(0)}(y) * \overline{A}_1^{(1)}(y) + \overline{A}_1^{(0)}(y) * A_1^{(1)}(y)$.

En ne gardant que les exponentielles prépondérantes, l'expression simplifiée de $A_1(y)$, que nous noterons $A_{1s}(y)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\|A_{1s}(y)\|^2 &= \frac{A_{10}^2}{9}e^{(\gamma_1+\overline{\gamma_1})y} + 2\Re\{\frac{A_{10}}{3}h_{12}e^{(\overline{\gamma_1}+\gamma_1'-\gamma_2)y} + \frac{A_{10}}{3}g_{12}e^{(\overline{\gamma_1}+2\gamma_1-\gamma_2)y}\} \\
&= \frac{A_{10}^2}{9}e^{\sqrt{3}K_{10}y} + 2\frac{A_{10}}{3}\Re\{a_1.h_{12}e^{[\sqrt{3}(K_{10}+K_{20})+i(K_{10}-K_{20})]y}\} + \Re(g_{12})e^{2\sqrt{3}K_{10}y}
\end{aligned}$$

Onde de fréquence 2ω

L'énergie est proportionnelle à $\|A_2(y)\|^2$, qui s'exprime, en ne gardant que les exponentielles prépondérantes :

$$\|b_{11}e^{2\gamma_1 y} + \frac{A_{20}e^{ip}}{3}a_1e^{\gamma_2' y}\|^2$$

Nous allons poser $a_1 = 1 + \frac{\alpha e^{-ip}\epsilon_1}{A_{20}} = 1 + \frac{\alpha e^{i(\frac{\pi}{3}-p)}}{A_{20}}$. L'expression simplifiée de $A_2(y)$ que nous noterons $A_{2s}(y)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\|A_{2s}(y)\|^2 &= \|b_{11}\|^2 e^{2\sqrt{3}K_{10}y} + \frac{A_{20}^2}{9}e^{2\sqrt{3}K_{20}y}(1+\frac{\alpha^2}{A_{20}^2}) + 4\Re(b_{11})\frac{A_{20}}{3}e^{\sqrt{3}(K_{10}+K_{20})y}\cos[(K_{10}-K_{20})y+p-\frac{\pi}{3}] \\ &+ \frac{4\Re(b_{11})}{3}e^{\sqrt{3}(K_{10}+K_{20})y}\alpha\cos[(K_{10}-K_{20})y] + 2\alpha\frac{A_{20}}{9}e^{2\sqrt{3}K_{20}y}\cos(\frac{\pi}{3}-p)\end{aligned}$$

3.3.5 Comparaison entre les résultats numériques et les solutions analytiques

Nous avons utilisé Mathematica pour résoudre numériquement le système (S2) : les solutions numériques sont donc les solutions exactes du système (S2). Pour vérifier la pertinence des solutions analytiques $\|A_{1s}(y)\|^2$ et $\|A_{2s}(y)\|^2$, que nous venons de déterminer, et pour déterminer leur domaine de validité, nous les comparons avec les solutions numériques de Mathematica. Nous avons utilisé comme données initiales, pour Mathematica et pour nos solutions analytiques : $A_{10} = 10^{-6}$ et $K_{10} = 0.03$. Concernant la seconde harmonique, A_{20}, K_{20} et le déphasage p sont spécifiés pour chaque calcul.

Evolution de l'amplitude en fonction de la distance

Les courbes de la puissance de chaque harmonique en fonction de la distance y ont été tracées pour les conditions suivantes : $A_{20} = 10^{-10}$ et $K_2 = \frac{K_1}{0.4}$ (1), $A_{20} = 10^{-10}$ et $K_2 = \frac{K_1}{0.8}$ (2),$A_{20} = 10^{-8}$ et $K_2 = \frac{K_1}{4}$ (3), $A_{20} = 10^{-7}$ et $K_2 = \frac{K_1}{7}$ (4) et $A_{20} = 10^{-7}$ et $K_2 = \frac{K_1}{12}$ (5). Les résultats sont présentés sur la figure 3.21. Les courbes en trait plein sont les résultats du calcul numérique tandis que les courbes en pointillé correspondent aux expressions $\|A_{1s}(y)\|^2$ et $\|A_{2s}(y)\|^2$. Il apparaît que tant que $y < 250$, dans les cas (1) et (2), et $y < 300$ dans les cas (3), (4) et (5) les expressions simplifiées $\|A_{1s}\|$ et $\|A_{2s}\|$ donnent les mêmes résultats que les solutions du système complet, ce qui signifie que nous restons dans le domaine où $\|A_1^{(1)}\| \ll \|A_1^{(0)}\|$.

Désormais, en restant dans le domaine de validité que nous venons de décrire pour chaque cas, nous pourrons considérer les expressions analytiques simplifiées $\|A_{1s}\|$ et $\|A_{2s}\|$ comme une bonne approximation des solutions du système (S2).

Les courbes sont présentées avec à chaque fois deux valeurs pour le déphasage p. On remarque pour les graphes 3.b, 4.b, 5.b un pic sur la courbe de $Log\|A_{2s}\|^2$ qui correspond à une annulation de la puissance de l'onde 2ω.

Evolution de l'amplitude en fonction du déphasage initial p entre les ondes ω et 2ω

Cette fois, nous avons fixé la distance y, et tracé les courbes en fonction du déphasage p, dans les deux cas : $K_2 = \frac{K_1}{0.4}$ et $K_2 = \frac{K_1}{7}$. Les distances choisies sont : $y = 150$, $y = 200$, $y = 250$ et $y = 300$. On a de nouveau travaillé avec $A_{10} = 10^{-6}$ et $K_{10} = 0.03$, et avec $A_{20} = 10^{-10}$ et $K_2 = \frac{K_1}{0.4}$ (figure 3.22), et $A_{20} = 10^{-7}$ et $K_2 = \frac{K_1}{7}$ (figure 3.23).Dans le cas $K_2 = \frac{K_1}{0.4}$, on a une bonne concordance jusqu'à $y = 200$. A $y = 250$, si $\|A_{2s}(y)\|^2$ garde la même allure que le résultat numérique, ce n'est plus du tout le cas pour $\|A_{1s}(y)\|^2$. A $y = 300$, ça ne concorde plus du tout.

Pour une plus faible valeur de K_2 : $K_2 = \frac{K_1}{7}$, la concordance entre $\|A_{1s}(y)\|^2$ et $\|A_{2s}(y)\|^2$ et les résultats numériques reste très bonne jusqu'à $y = 250$, et si les courbes se superposent moins bien à $y = 300$, les les maxima et minima se correspondent.

Par rapport à la figure 3.21, nous avons sur les figures 3.22 et 3.23 une information supplémentaire sur la concordance entre les valeurs des fonctions simplifiées $\|A_{1s}(y)\|^2$ et $\|A_{2s}(y)\|^2$ et les résultats

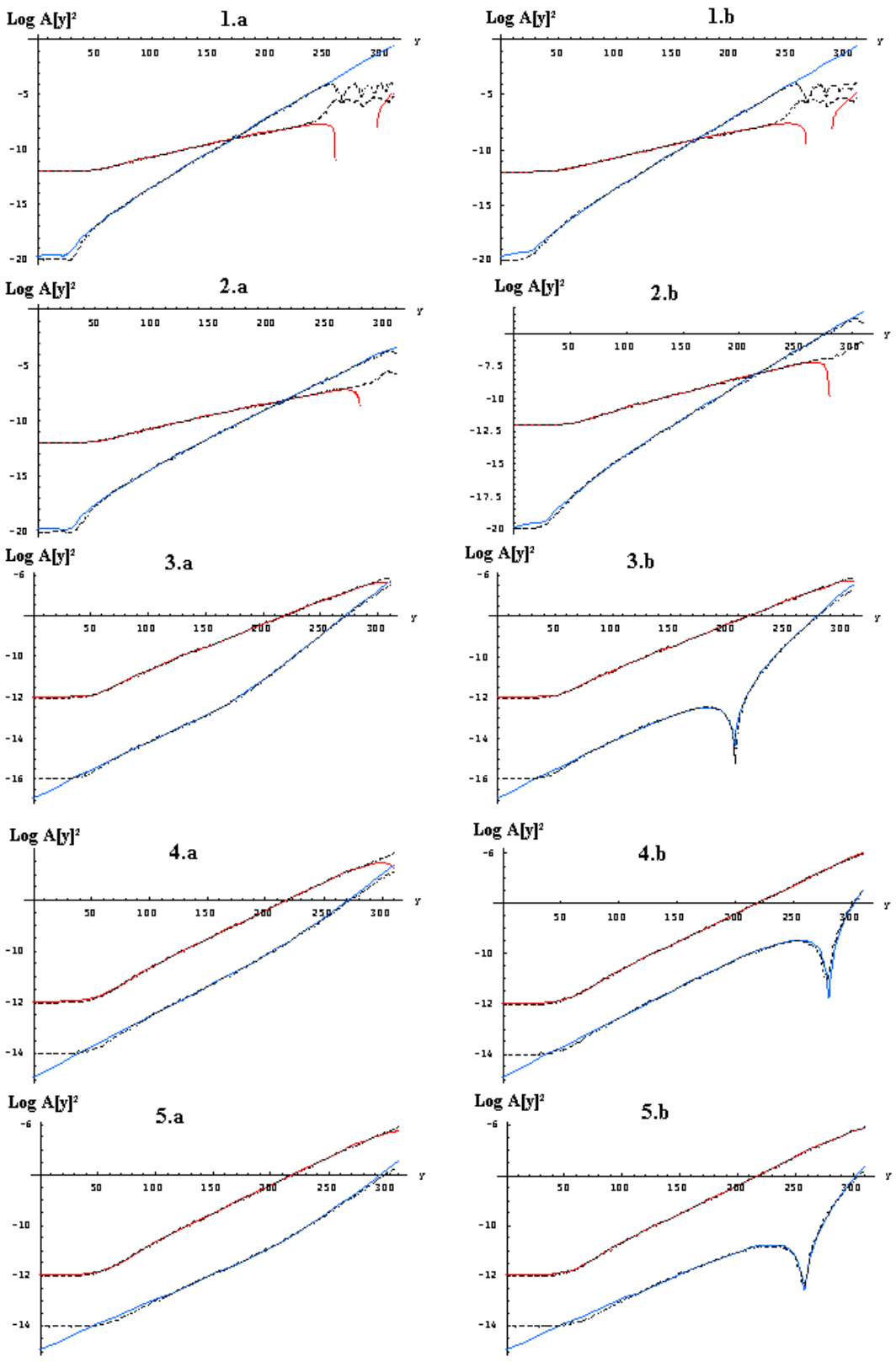


FIG. 3.21 – $Log\|A(y)\|^2$ pour les ondes ω et 2ω. Résultats numériques (trait plein) et analytiques (pointillé). 1. $K_2 = K_1/0.4$, 2. $K_2 = K_1/0.8$, 3. $K_2 = K_1/4$, 4. $K_2 = K_1/7$ et 5. $K_2 = K_1/12$. $p = 0$ *rad* (courbes a) ; p=0.5 rad (1), 0.5 rad (2), 5 rad (3), 3.3 rad (4) et 3 rad (5) (courbes b)

numériques, puisque nous voyons comment ces différentes grandeurs se comportent avec le déphasage.

Dans la section suivante, nous allons travailler sur les expressions $\|A_{1s}\|^2$ et $\|A_{2s}\|^2$, en prenant garde à rester dans le domaine où ces expressions décrivent correctement l'évolution des solutions du système (S2), afin d'observer le rôle des différents paramètres d'injection de l'harmonique.

3.3.6 Conclusions sur les expressions analytiques

Onde de fréquence ω

L'expression de $\|A_{1s}(y)\|^2$ se décompose en quatre termes :

$$\begin{aligned}
\|A_{1s}(y)\|^2 &= \frac{A_{10}^2}{9}e^{\sqrt{3}K_{10}y} \\
&+ \Re(g_{12})e^{2\sqrt{3}K_{10}y} \\
&+ 2\frac{A_{10}}{3}\Re\big(h_{12}e^{(\sqrt{3}(K_{10}+K_{20})+i(K_{10}-K_{20}))y}\big) \\
&+ 2\alpha\frac{A_{10}}{3}\Re\big(h_{12}e^{i(\frac{\pi}{3}-p)}e^{(\sqrt{3}(K_{10}+K_{20})+i(K_{10}-K_{20}))y}\big)
\end{aligned}$$

que l'on peut écrire :

$$\|A_{1s}(y)\|^2 = \frac{A_{10}^2}{9}e^{\sqrt{3}K_{10}y} \tag{3.63}$$

$$+\Re(g_{12})e^{2\sqrt{3}K_{10}y} \tag{3.64}$$

$$+\alpha\Lambda\{\lambda_c\cos((K_{10}-K_{20})y+\frac{\pi}{3})+\lambda_s\sin((K_{10}-K_{20})y+\frac{\pi}{3})\}e^{\sqrt{3}(K_{10}+K_{20})} \tag{3.65}$$

$$+A_{20}\Lambda\{\lambda_c\cos((K_{10}-K_{20})y+p)+\lambda_s\sin((K_{10}-K_{20})y+p)\}e^{\sqrt{3}(K_{10}+K_{20})} \tag{3.66}$$

où $\Re(g_{12})$ est exprimé à partir de la relation (3.62), par $\frac{A_{10}^3(11K_{10}^3-2K_{20}^3)}{972K_{10}^4(K_{20}^3-K_{10}^3)}$ et où on a posé :

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{2A_{10}^2}{27\sqrt{3}K_{10}^2\|iK_1+(iK_{10}e^{-i\frac{\pi}{3}}-2iK_{20}e^{i\frac{\pi}{3}})^3\|^2} \\
\lambda_c &= \sqrt{3}(8K_{10}^4K_{20}^2-K_{10}^6-K_{10}^5K_{20}+28K_{10}^3K_{20}^3+28K_{10}^2K_{20}^4-8K_{10}K_{20}^5) \\
\lambda_s &= 3(8K_{10}^4K_{20}^2+K_{10}^6+3K_{10}^5K_{20}+8K_{10}^3K_{20}^3-12K_{10}^2K_{20}^4-8K_{10}K_{20}^5)
\end{aligned}$$

Le terme (3.63) correspond à la fondamentale seule, et les termes (3.64) et (3.65), qui ne contiennent ni A_{20} ni p, contiennent l'influence de l'harmonique 2ω créée à partir de la fondamentale seule, sans injection d'harmonique. Le quatrième terme : (3.66), est donc le seul terme qui décrit l'influence des conditions initiales d'injection de l'harmonique 2ω sur la fondamentale ω. Ce quatrième terme est proportionnel à l'amplitude initiale de l'harmonique injectée : A_{20}, et c'est une fonction sinusoïdale du déphasage initial p.

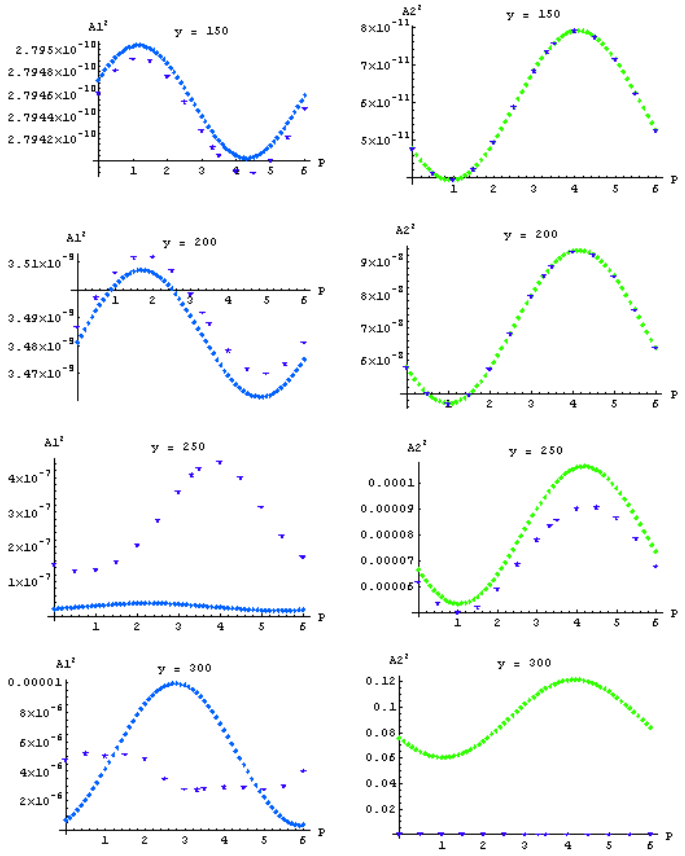


FIG. 3.22 – $\|A(y)\|^2$ en fonction de p pour les ondes ω (à gauche) et 2ω (à droite), et à différentes distances. Résultats numériques (étoiles) et analytiques (losanges). $K_2 = K_1/0.4$, $A_{10} = 10^{-6}$, $A_{20} = 10^{-10}$.

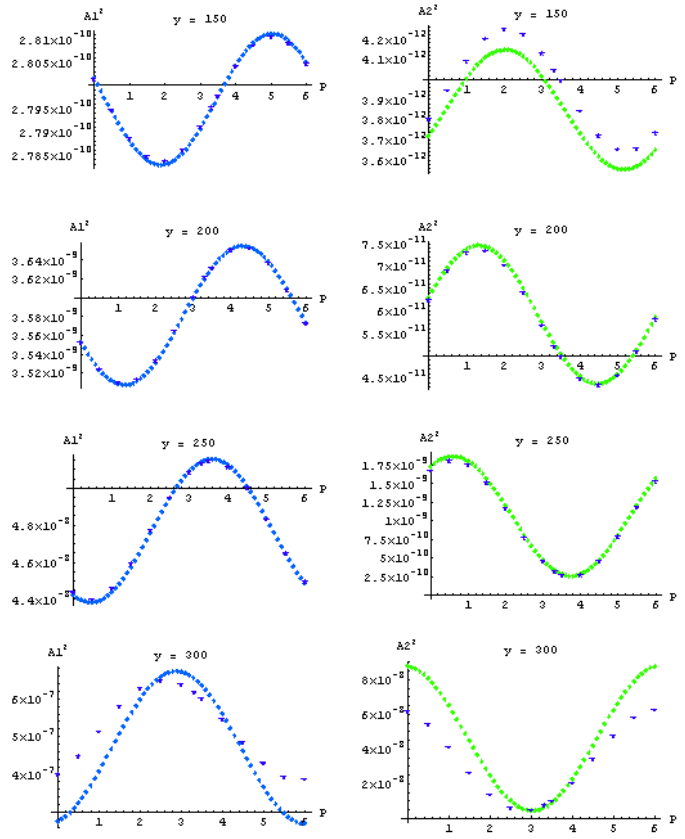


FIG. 3.23 – $\|A(y)\|^2$ en fonction de p pour les ondes ω (à gauche) et 2ω (à droite), et à différentes distances. Résultats numériques (étoiles) et analytiques (losanges). $K_2 = K_1/7$, $A_{10} = 10^{-6}$, $A_{20} = 10^{-7}$.

Onde de fréquence 2ω

L'harmonique se décompose en six termes :

$$\begin{aligned}
\|A_{2s}(y)\|^2 &= \|b_{11}\|^2 e^{2\sqrt{3}K_{10}y} && (3.67)\\
&+ \frac{\alpha^2}{9} \quad e^{2\sqrt{3}K_{20}y} && (3.68)\\
&+ \frac{4\Re(b_{11})\alpha}{3} \quad e^{\sqrt{3}(K_{10}+K_{20})y}\cos[(K_{10}-K_{20})y] && (3.69)\\
&+ \frac{A_{20}^2}{9} \quad e^{2\sqrt{3}K_{20}y} && (3.70)\\
&+ 4\Re(b_{11})\frac{A_{20}}{3}e^{\sqrt{3}(K_{10}+K_{20})y}\cos[(K_{10}-K_{20})y+p-\frac{\pi}{3}] && (3.71)\\
&+ 2\alpha\frac{A_{20}}{9}e^{2\sqrt{3}K_{20}y}\cos(\frac{\pi}{3}-p) && (3.72)
\end{aligned}$$

Les trois premiers termes sont indépendants des conditions d'injection de l'harmonique 2ω : A_{20} et p. Il s'agit de l'harmonique créée par le faisceau à partir de la fondamentale seule. Le quatrième terme (3.70) correspond à l'onde 2ω créée dans le faisceau en l'absence d'onde ω. Les deux derniers termes : (3.71) et (3.72), sont le résultat du couplage des deux ondes dans le faisceau. Ils sont proportionnels à A_{20}, et sont des fonctions sinusoïdales du déphasage initial p.

Influence du paramètre A_{20}

Comme on vient de le voir, la puissance de la fondamentale est une fonction affine de A_{20} : le terme facteur de A_{20} dans (3.66) est positif ou négatif selon les valeurs respectives de K_{10} et K_{20}, et surtout selon la valeur du déphasage p. L'injection d'harmonique peut donc augmenter ou diminuer la puissance sur fondamentale ; elle le fera d'autant plus que son amplitude initiale A_{20} est grande (dans la limite des approximations considérées).

Influence du paramètre p

On l'a vu, les puissances des ondes ω et 2ω sont des fonctions sinusoïdales du déphasage initial p entre les deux ondes. Notamment, pour la fondamentale, on peut augmenter ou diminuer la puissance extraite en faisant varier le paramètre p. C'est un paramètre clé de l'injection d'harmonique.

Il est intéressant de regarder comment varient respectivement les puissances ω et 2ω en fonction de p, toutes autres grandeurs étant les mêmes par ailleurs. C'est ce que nous avons fait sur les figures (3.24) et (3.25). Nous avons fixé à chaque fois le rapport $\frac{K_{10}}{K_{20}}$, et fait varier p entre 0 et 2π pour différentes distances y. Les puissances $\|A_{1s}(y)\|^2$ et $\|A_{2s}(y)\|^2$ sont représentées l'une au dessus de l'autre. (Comme il ne s'agit que d'une observation qualitative, on n'a pas précisé les grandeurs numériques.)

Dans le cas où $K_2 = \frac{K_1}{7}$, on remarque que $\|A_{1s}(y)\|^2$ et $\|A_{2s}(y)\|^2$ sont déphasées de π, c'est à dire que le maximum de $\|A_{1s}(y)\|^2$ correspond toujours à une valeur de p qui rend $\|A_{2s}(y)\|^2$ minimal, et ce à quelques dixièmes de radians près. Dans le cas où $K_2 = \frac{K_1}{0.4}$, ceci reste vrai pour $y = 100$ et $y = 150$, par contre ce n'est plus vrai lorsque $y = 230$. Si l'on se réfère à la figure 3.21, on peut généraliser cette propriété en remarquant que dans le domaine où $\|A_{2s}(y)\|^2$ reste petit devant $\|A_{1s}(y)\|^2$, la valeur de p qui rend $\|A_{1s}(y)\|^2$ maximal, est, à quelques dixièmes de radians près, celle qui rend $\|A_{2s}(y)\|^2$ minimal. Lorsque $\|A_{2s}(y)\|^2$ devient aussi, voire plus grand que $\|A_{1s}(y)\|^2$, cette propriété n'est plus vraie.

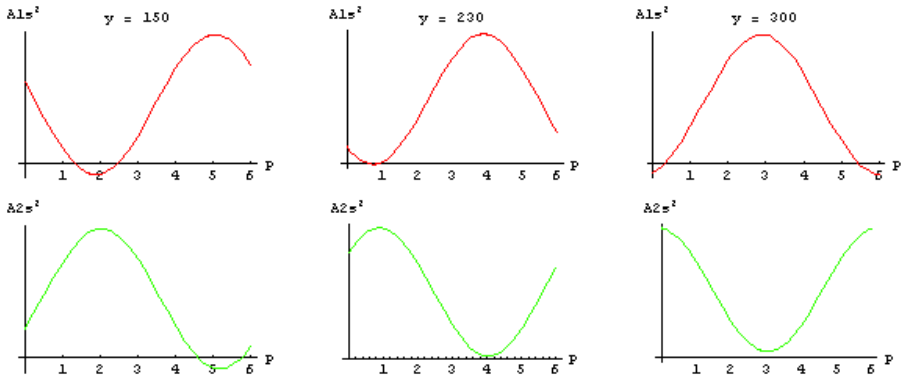


FIG. 3.24 – $\|A(y)\|^2$ en fonction de p pour les ondes ω (en haut) et 2ω (en bas), pour 3 valeurs de y. $K_2 = K_1/7$, $A_{10} = 10^{-6}$, $A_{20} = 10^{-7}$.

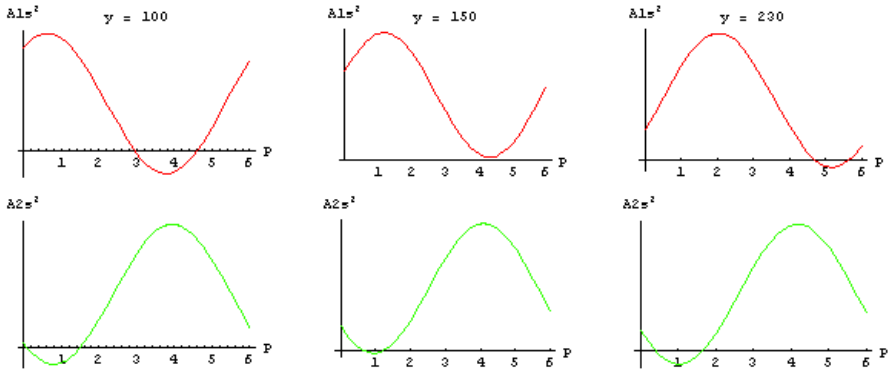


FIG. 3.25 – $\|A(y)\|^2$ en fonction de p pour les ondes ω (en haut) et 2ω (en bas), pour 3 valeurs de y. $K_2 = K_1/0.4$, $A_{10} = 10^{-6}$, $A_{20} = 10^{-10}$.

Influence des paramètres K_{10} et K_{20}

Le paramètre K_{l0} décrit la réponse du circuit à la propagation d'une onde de fréquence $l\omega$; ainsi K_{20} n'est pas un paramètre propre à l'injection d'harmonique : il intervient à la fois dans les termes liés à l'injection d'harmonique, et dans ceux liés à la création d'harmonique à partir de la fondamentale seule. Ce qu'il faut noter, c'est que plus K_{20} est grand, donc plus la puissance 2ω croît vite, plus vite on sort de l'approximation qui nous a permis d'écrire des fonctions analytiques ; ceci dépend aussi de la valeur de A_{20}.

Tant que l'on reste dans le cadre de nos hypothèses de calcul, le type de courbes que l'on obtient est celui des figures 3.26 a et b., qui correspondent à $A_{10} = 10^{-7}$, $A_{20} = 10^{-10}$, $y = 150$, et qui représentent l'évolution de $\|A_{1s}(y)\|^2$ et $\|A_{2s}(y)\|^2$ en fonction de K_{20}/K_{10}, (K_{10} ayant été fixé à 0.03), pour différentes valeurs de p. Ce qui se passe, sur la figure 3.26 a., pour les très petites valeurs de K_{20} n'est pas à prendre en compte car cela sort également de notre approximation.

La puissance extraite sur une onde $l\omega$ augmente avec la valeur de K_{l0} : dans le modèle de Pierce le plus simple, une onde $l\omega$ est amplifiée en $e^{\sqrt{3}K_{l0}*\beta z/2}$.

On retrouve cette évolution sur la figure 3.26 (b), où la puissance de l'onde harmonique 2ω croît de manière exponentielle lorsque K_{20} augmente. Sur la figure 3.26 (a), on remarque comment la puissance de l'onde fondamentale ω diminue au fur et à mesure que la puissance sur harmonique

augmente.

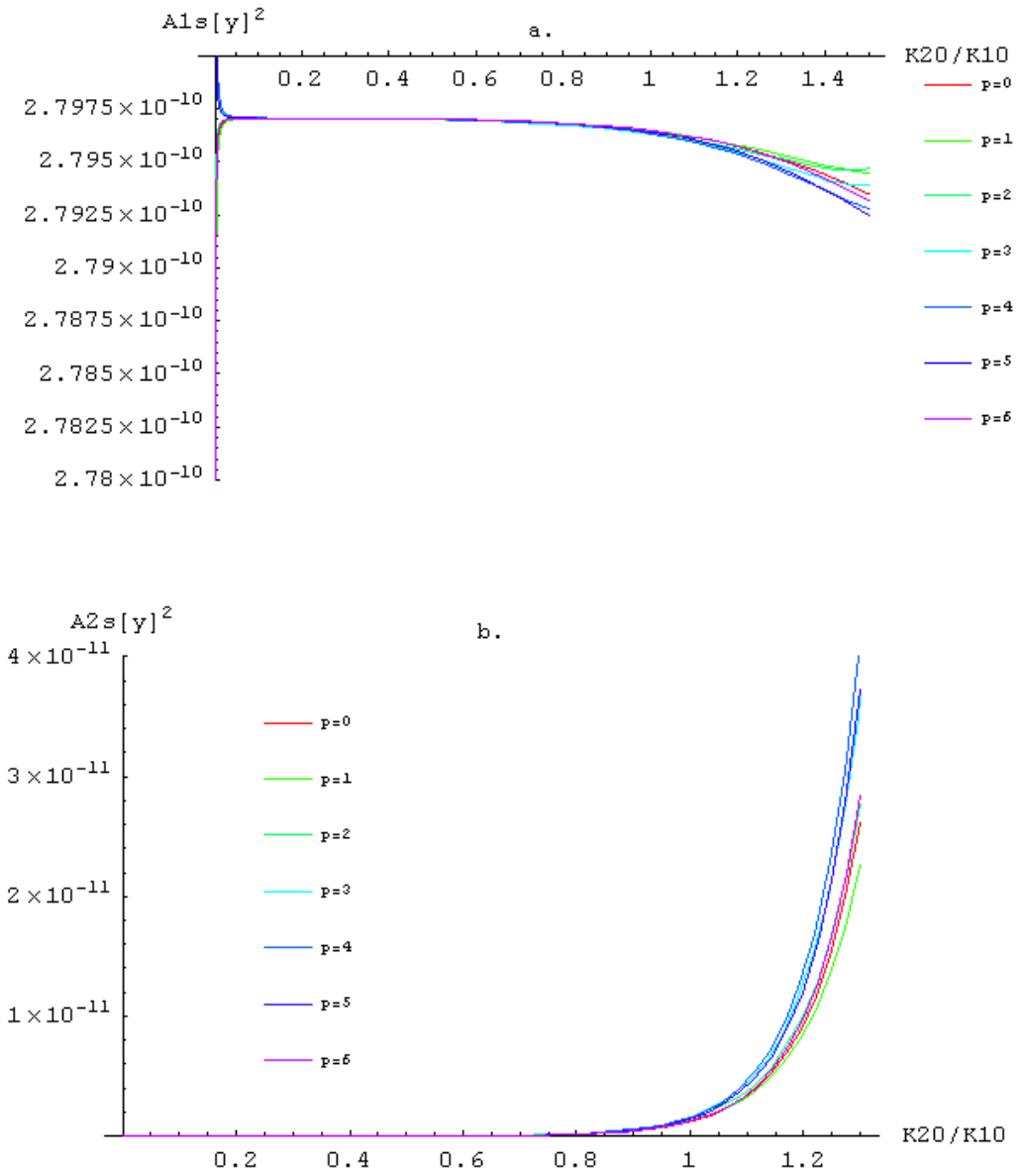


FIG. 3.26 – Influence de K_20 sur $\|A_{1s}(y)\|^2$ (a) et sur $\|A_{2s}(y)\|^2$ (b).

Chapitre 4

Injection de seconde harmonique dans un TOP : simulations

Dans le chapitre précédent, nous avons expliqué que l'injection de la deuxième harmonique 2ω dans un TOP pouvait augmenter la puissance de sortie sur la fondamentale ω. Nous avons travaillé sur des modèles simplifiés, afin de comprendre le phénomène, et d'apporter dans la mesure du possible des solutions analytiques aux problèmes posés. Dans ce chapitre, nous allons étudier l'influence de l'injection d'harmonique en travaillant essentiellement avec le code de simulation TUBH. C'est un code lagrangien, en grand signal et en gain fort, qui prend en compte les aspects physiques (charge d'espace, couplage entre harmoniques, pertes..) et techniques (structure de l'hélice, supports..). C'est un code qui intègre sur une seule dimension, dans le sens de la propagation.

TUBH a été développé par Thales, et il est couramment utilisé pour le développement de tubes à l'usine de Vélizy. Nous avons donc utilisé ce code comme une étude "expérimentale" des phénomènes liés à l'injection d'harmonique. Dans le chapitre précédent, nous avions cherché des modèles analytiques simples, pour nous donner les moyens de comprendre le rôle de l'injection d'harmonique, et de mettre en avant des paramètres clés, notamment le déphasage entre les ondes ω et 2ω. Ici, nous ne chercherons pas à savoir ce qui se passe à l'intérieur du code TUBH : nous étudions les résultats qu'il donne, en les considérant comme une bonne représentation de la réalité.

L'étape suivante, qui consitue le chapitre 5, consistera en une série de mesures sur des tubes industriels. L'étape de la simulation avec TUBH nous a permis de mesurer l'influence de différents paramètres que l'on peut facilement faire varier dans le code de simulation, sans construire un nouveau tube à chaque fois. Notamment, nous travaillons dans le premier paragraphe sur une "hélice magique", qui possède les propriétés exactes que l'on souhaitait, mais qui ne peut pas être réellement construite.

4.1 Injection d'harmonique dans une "hélice magique"

4.1.1 Choix des paramètres de l'hélice

Dans un premier temps, nous avons cherché à nous placer dans le cas idéal où les deux ondes ω et 2ω se déplaçent à la même vitesse et ont le même coefficient d'amplification. Nous avons alors défini pour le code des paramètres à froid représentant une "hélice magique" : les deux ondes ont le même $\frac{c}{v}$, donc la même vitesse de propagation dans l'hélice ; par ailleurs leurs résistances de couplage dans le tube ont été choisies de manière à leur imposer le même coefficient d'amplification

(la même pente dans le diagramme puissance fonction de z).

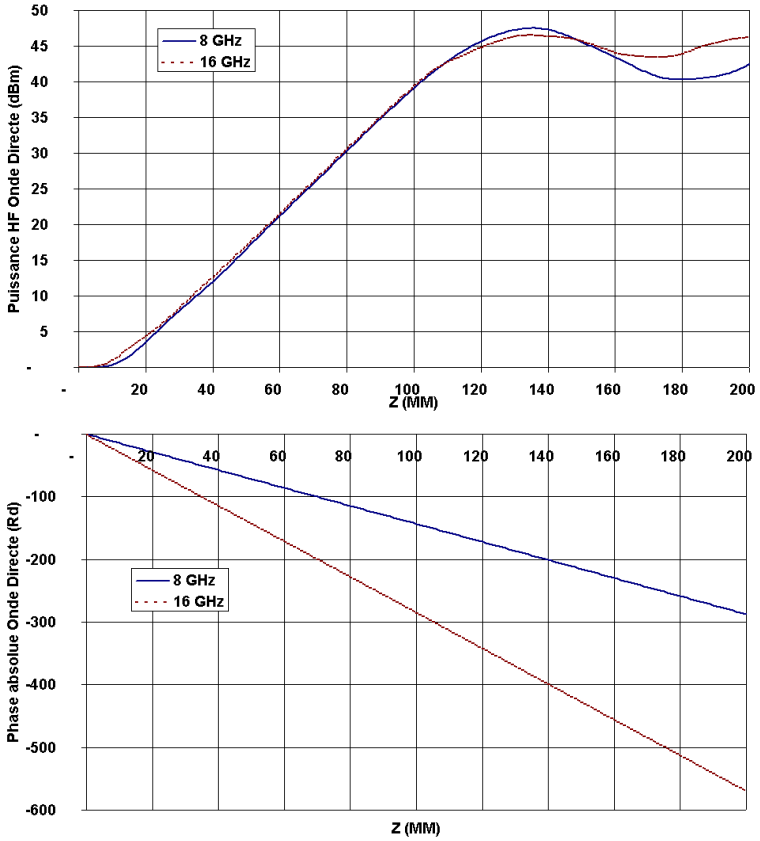


FIG. 4.1 – Puissance (a) et phase (b) des ondes $8GHz$ et $16GHz$ en fonction de z. Ondes indépendantes l'une de l'autre.

La fréquence fondamentale est 8 GHz, et son harmonique 16 GHz. La valeur de $\frac{c}{v}$ commune aux deux fréquences est $\frac{c}{v} = 8.5$, ce qui correspond à une vitesse de phase de $3.53.10^7 ms^{-1}$. Les résistances de couplage ont les valeurs suivantes : $R_{c1} = 50\Omega$ pour 8 GHz et $R_{c2} = 11\Omega$ pour 16 GHz. Les valeurs de tension d'hélice et de courant de cathode sont $V_h = 4200$ V et $I_k = 0.07$ A. La figure 4.1 représente l'évolution de la puissance (a) et de la phase (b) de chaque onde en fonction de la distance dans le tube ; chacune des ondes est calculée de manière indépendante, sans tenir compte de ses harmoniques : il n'y a pas de couplage entre elles. Elles ont une puissance initiale de 0 dBm . On vérifie ainsi qu'elles ont le même coefficient d'amplification (même pente sur la figure 4.1a.) ; la phase absolue de la figure 4.1b est proportionnelle pour chaque fréquence à $\beta_e = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}.\frac{c}{v}$. Avec un même $\frac{c}{v}$ et une fréquence double, on vérifie sur le graphe que la pente du déphasage à 16 GHz est le double de la pente à 8 GHz.

4.1.2 Effet de l'injection d'harmonique

Dans l'hélice ainsi définie, nous avons injecté de la puissance à 8 GHz, avec : $Pe_1 = -20$ dBm et $\Phi_1 = 0$ (pour 8 GHz). Nous avons injecté de l'harmonique à 16 GHz, en cherchant à obtenir le maximum de puissance sur la fondamentale : pour cela nous avons fait varier les paramètres Pe_2 et Φ_2 (16 GHz). La figure 4.2(b) présente le meilleur résultat, obtenu pour $Pe_2 = -15$ dBm et $\Phi_2 = 1.28$ rad. La figure 4.2(c) montre le résultat obtenu avec $Pe_2 = -15$ dBm, lorsqu'on cherche au contraire le minimum de puissance fondamentale ; la valeur de Φ_2 est alors 5.28 rad. Par ailleurs,

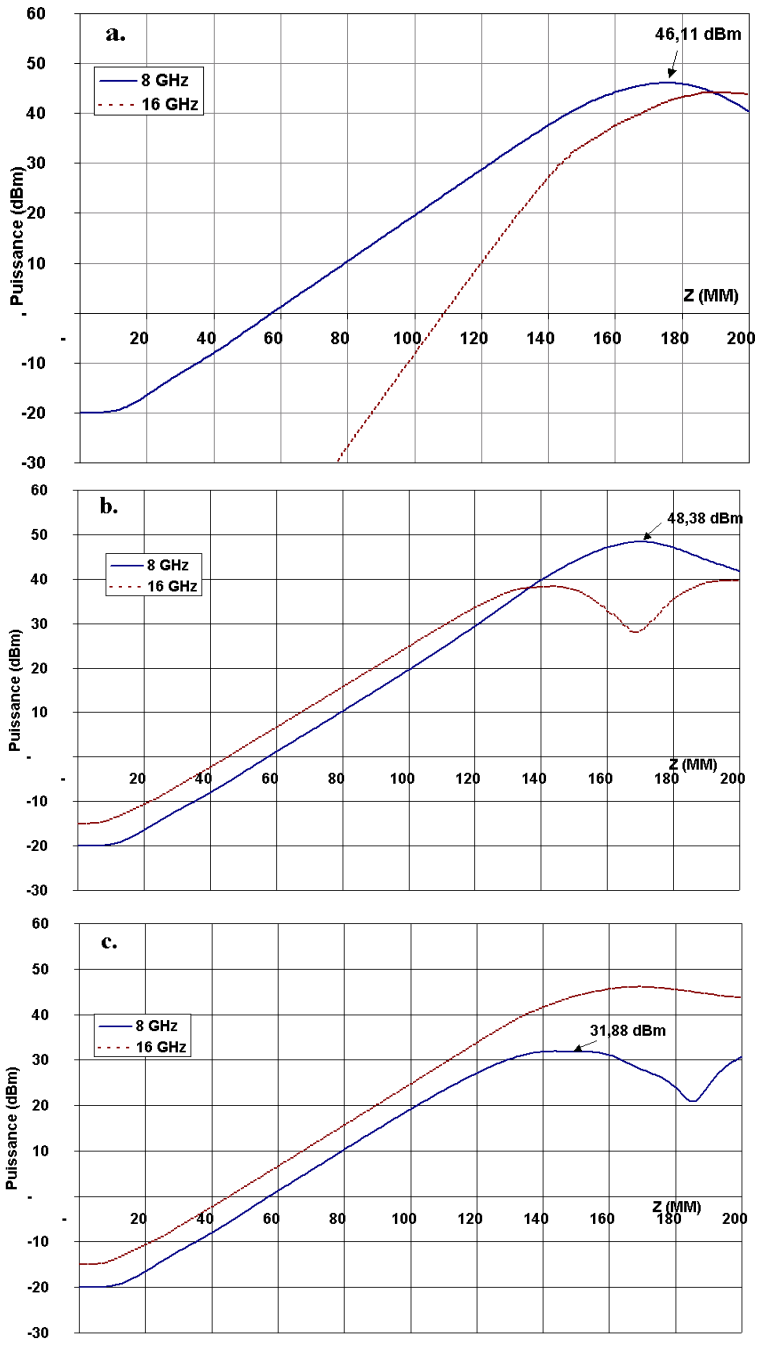


FIG. 4.2 – Puissance des ondes 8 GHz et 16 GHz en fonction de la distance : $Rc_1 = 50\Omega$, $Rc_2 = 11\Omega$, $\frac{c}{v}\Big|_1 = \frac{c}{v}\Big|_2 = 8.5$. Sans injection d'harmonique (a), $Pe_1 = -20$ dBm, $Pe_2 = -15$ dBm, $\Phi_2 = 1.28$ rad (b) ou $\Phi_2 = 5.28$ rad (c).

la figure 4.2(a) montre le résultat que l'on obtient lorsqu'on n'injecte pas d'harmonique à 16 GHz.

La présence de l'harmonique en entrée a un effet important sur la puissance de la fondamentale, puisque le maximum de celle-ci varie de 48.38 dBm à 31.88 dBm selon le déphasage initial Φ_2, alors qu'il était de 46.11 dBm pour la fondamentale seule. On retrouve en particulier le caractère déterminant du déphasage entre les deux ondes, déjà souligné au chapitre 3, dans le couplage entre les deux ondes et le faisceau. On remarque que la puissance fondamentale, initialement plus faible que celle de l'harmonique, dépasse celle-ci pour devenir prépondérante sur la figure 4.2(b), tandis qu'elle reste en dessous sur la figure 4.2(c.)

4.1.3 Influence du déphasage et du niveau de puissance en entrée

Pour étudier l'influence du déphasage initial, nous avons fixé la longueur du tube à L=170 mm, ce qui correspond au maximum de puissance sur fondamentale sur le graphe 4.2 (b) ; la longueur du tube est en effet un paramètre qu'il est possible de choisir dans TUBH. Nous avons alors tracé la puissance en sortie du tube pour la fondamentale et l'harmonique, lorsque $Pe_1 = -20$ dBm, $Pe_2 = -15$ dBm et $\Phi_1 = 0$, en fonction de Φ_2.

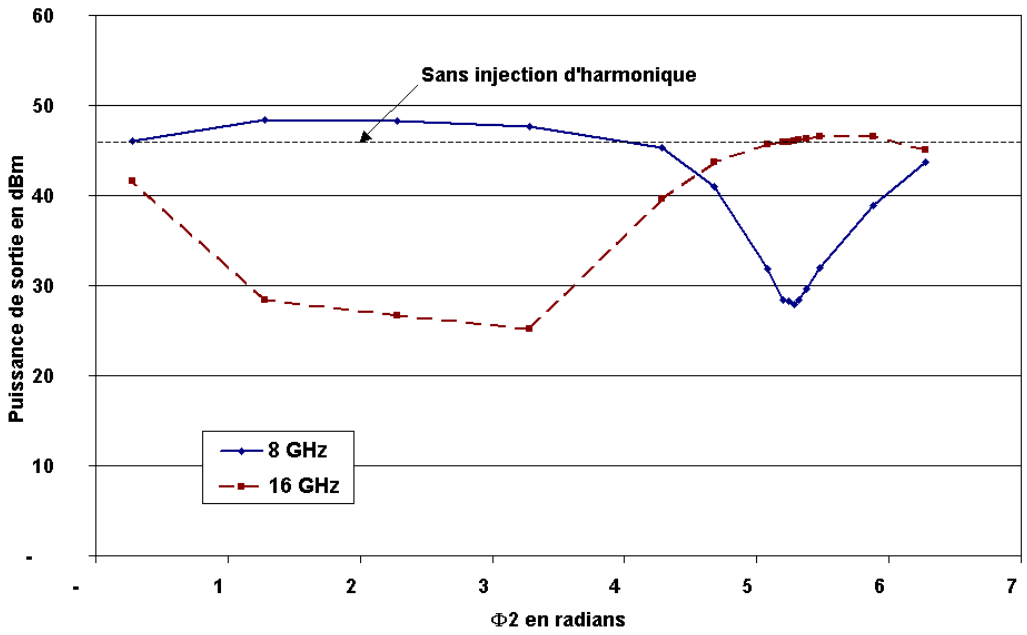


FIG. 4.3 – Puissances de sortie fondamentale et harmonique en fonction de Φ_2, pour $Pe_1 = -20$ dBm, $Pe_2 = -15$ dBm et $\Phi_1 = 0$.

L'influence du déphasage apparaît ici de manière aigüe : toutes choses étant égales par ailleurs, la puissance de sortie sur fondamentale peut varier entre 48.38 dBm et 27.84 dBm, soit entre 68.8 W et quasiment 0, lorsqu'on change Φ_2. Nous avons vérifié par ailleurs que le phénomène était périodique de période 2π (et nous avons vérifié qu'il était équivalent de faire varier Φ_2 sur une période de 2π ou $-\Phi_1$ sur une période de π, ce qui est logique d'après l'expression du champ total en entrée de tube : $E_1 \sin(\omega t - kz + \Phi_1) + E_2 \sin(2\omega - 2kz + \Phi_2)$). On note que la puissance de sortie 8 GHz reste au dessus de la valeur sans injection d'harmonique sur à peu près une demi-période : lorsqu'on se place au maximum, on peut changer un peu Φ_2 en restant dans une configuration positive. Par contre, on a un "trou" très prononcé lorsqu'on s'approche du minimum qu'il faut absolument éviter lorsqu'on cherche à augmenter la puissance de sortie sur fondamentale. On remarque enfin que le maximum de puissance sur fondamentale correspond à peu près au minimum de puissance

sur harmonique (et vice-versa). Selon la configuration initiale, le couplage ondes/faisceau favorise l'une ou l'autre des fréquences au détriment de l'autre.

La figure 4.4 illustre plus précisément cet aspect : elle représente, pour $Pe_1 = -20$ dBm et $Pe_2 = -15$ dBm, la puissance en fonction de z pour $\Phi_2 = 1.28$ rad (a) et $\Phi_2 = 5.28$ rad (b). Sur chaque graphe, on a représenté : la puissance 8 GHz, la puissance 16 GHz et la somme de ces deux dernières, qui correspond à la puissance extraite au faisceau. Les puissances sont portées en watts.

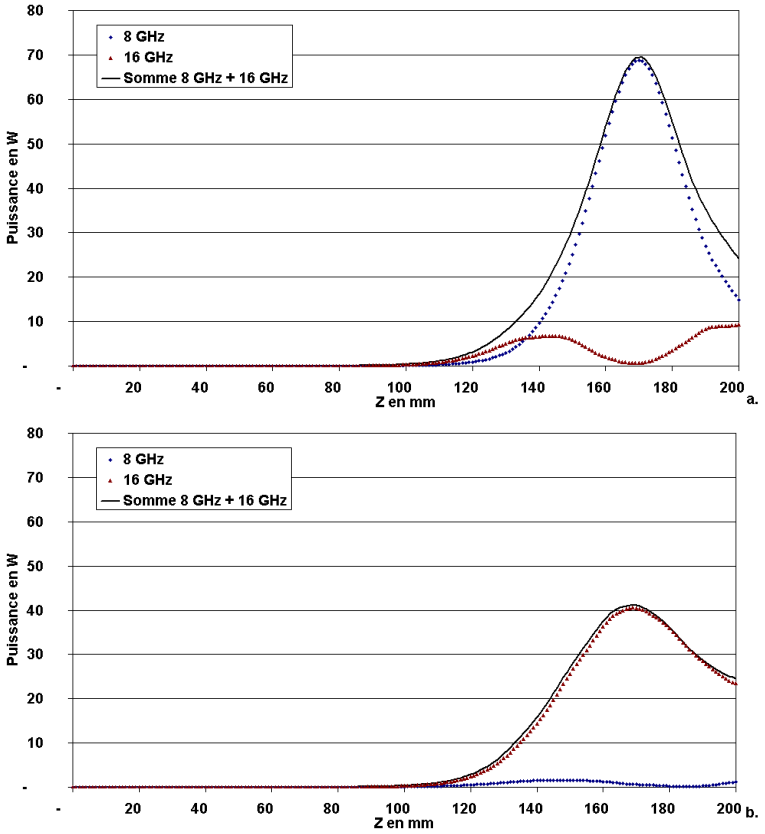


FIG. 4.4 – Puissance en watts en fonction de la distance, pour $Pe_1 = -20$ dBm, $Pe_2 = -15$ dBm, $\Phi_1 = 0$, et $\Phi_2 = 1.28$ rad (a) et $\Phi_2 = 5.28$ rad (b).

On observe sur ces graphes comment pour $\Phi_2 = 1.28$ rad, c'est la fondamentale qui prend quasiment toute la puissance du faisceau lorsqu'elle est maximale alors que pour $\Phi_2 = 5.28$ rad, c'est l'harmonique qui prend quasiment toute la puissance du faisceau. Ceci dit la différence entre ces deux cas n'est pas seulement un transfert d'énergie d'une onde à l'autre : la quantité totale d'énergie extraite au faisceau est différente, puisqu'elle a un maximum de 69.52 W lorsque $\Phi_2 = 1.28$ rad, et de 41.17 W lorsque $\Phi_2 = 5.28$ rad. Ainsi, l'injection d'harmonique avec la fondamentale, dans une bonne configuration de phase et de puissance initiales permet d'une part de favoriser dans le couplage la production de fondamentale au détriment de celle d'harmonique, mais aussi d'augmenter la puissance totale extraite au faisceau d'électrons.

C'est un aspect qu'il est intéressant de souligner. Nous avons déjà fait remarquer, au chapitre 3.1.4, p.65 que la saturation de la puissance fondamentale dans un TOP pouvait être interprétée en constatant que la fondamentale cédait une partie de son énergie à sa (ou ses) harmoniques. Nous retrouvons ici cet constatation, mais de manière plus précise, et aussi plus nuancée : la puissance de la fondamentale sature d'autant plus que l'harmonique est favorisée et qu'elle lui

prend de l'énergie. Ceci dit il ne s'agit pas seulement d'un transfert de puissance d'une fréquence à l'autre, mais aussi de la puissance totale extraite au faisceau, qui dépend aussi de la configuration fondamentale/harmonique initiale.

Enfin, l'influence de la puissance initiale Pe_2, est représentée sur la figure 4.5 : pour chaque valeur de Pe_2 on a cherché la valeur de Φ_2 qui donnait le plus grand maximum de puissance sur fondamentale, et on a porté cette valeur en fonction de Pe_2.

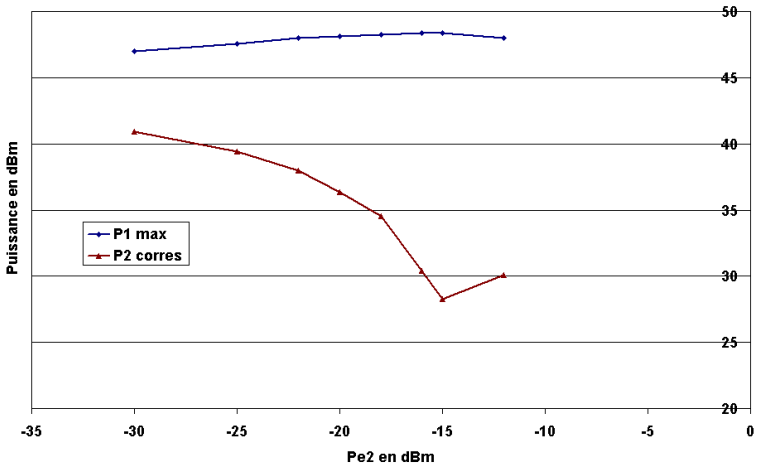


FIG. 4.5 – Maximum de puissance fondamentale obtenu pour chaque valeur de Pe_2 en fonction de Pe_2 et valeur de la puissance harmonique correspondante.

La courbe de puissance sur fondamentale reste assez plate en fonction de Pe_2 : lorsqu'on diminue Pe_2 de 15 dBm à partir de sa valeur optimale $Pe_2 = -15$ dBm, la puissance sur fondamentale passe de 48.38 à 47.02 dBm, et reste au dessus de la valeur sans injection d'harmonique qui est de 46.11 dBm. La puissance d'entrée semble donc être un paramètre moins sensible que le déphasage dans l'injection d'harmonique.

4.2 Variation de la vitesse de phase et de la résistance de couplage

Dans cette section, les paramètres de l'hélice sont modifiés à partir de ceux de "l'hélice magique" de la section précédente, afin d'étudier l'effet alors produit sur l'injection d'harmonique. Nous modifions donc la résistance de couplage, ainsi que la vitesse de l'onde, pour l'harmonique ; c'est à dire que pour la fondamentale, nous gardons : $\frac{c}{v}\Big|_1 = 8.5$ et $R_{c1} = 50\Omega$. En nous éloignant de $\frac{c}{v}\Big|_2 = 8.5$ et $R_{c2} = 11\Omega$ pour l'harmonique, nous nous éloignons donc du cas où les deux fréquences ont la même vitesse de phase et le même coefficient d'amplification.

4.2.1 Variation de la résistance de couplage à 16 GHz

La vitesse de l'harmonique n'est pas modifiée : $\frac{c}{v}\Big|_2 = 8.5$. Pour différentes valeurs de R_{c2} nous avons injecté dans le tube, en plus de la fondamentale ($Pe_1 = -20$ dBm), de l'harmonique avec différentes puissances d'entrée Pe_2. A chaque fois, nous avons cherché la valeur de déphasage Φ_2 qui donnait le plus grand maximum de fondamentale dans le tube. Les résultats sont présentés sur la figure 4.6 qui, comme la figure 4.5 porte le maximum de puissance 8 GHz obtenu pour chaque Pe_2, en fonction de Pe_2, ainsi que la valeur de la puissance 16 GHz correspondante, et ce pour les

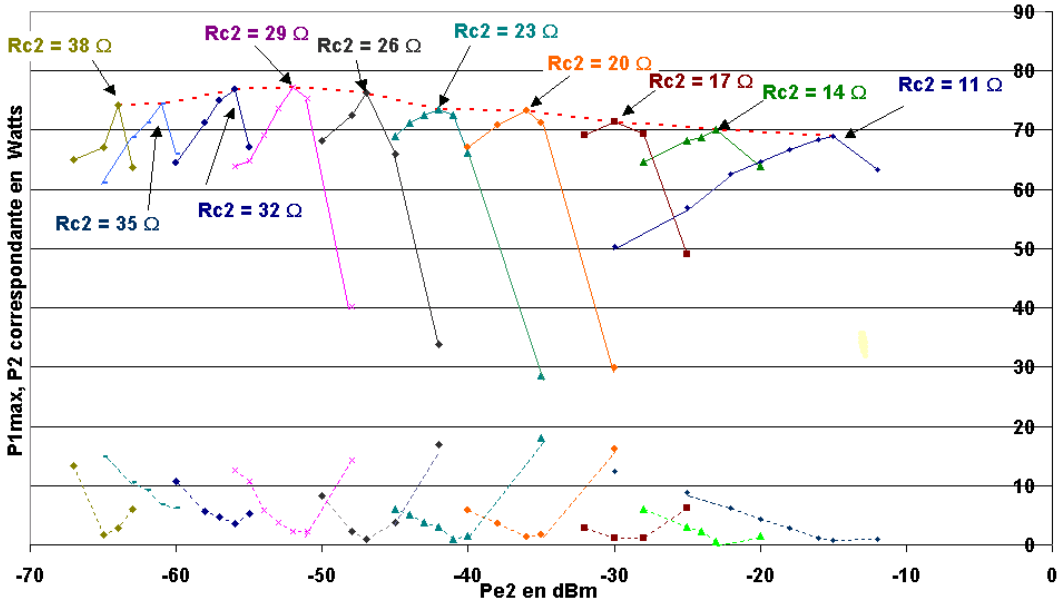


FIG. 4.6 – Maximum de puissance 8 GHz (trait plein) obtenu pour chaque Pe_2, en fonction de Pe_2 et puissance 16 GHz correspondante (pointillé), pour différentes valeurs de R_{c2}

différentes valeurs de la résistance de couplage R_{c2}. Pour plus de lisibilité, les puissances sont en watts. Il apparaît que la configuration la plus favorable n'est pas celle pour laquelle les deux ondes ont le même coefficient d'amplification ($R_{c2} = 11\Omega$) : on obtient un maximum de puissance sur fondamentale lorsque $R_{c2} = 29\Omega$. On remarque que pour les valeurs de R_{c2} proches de l'optimum, la courbe de P_1max en fonction de Pe_2 a une forme plus étroite que lorsque $R_{c2} = 11\Omega$: la puissance sur fondamentale est plus sensible à une variation de Pe_2.

4.2.2 Variation de la vitesse de phase à 16 GHz

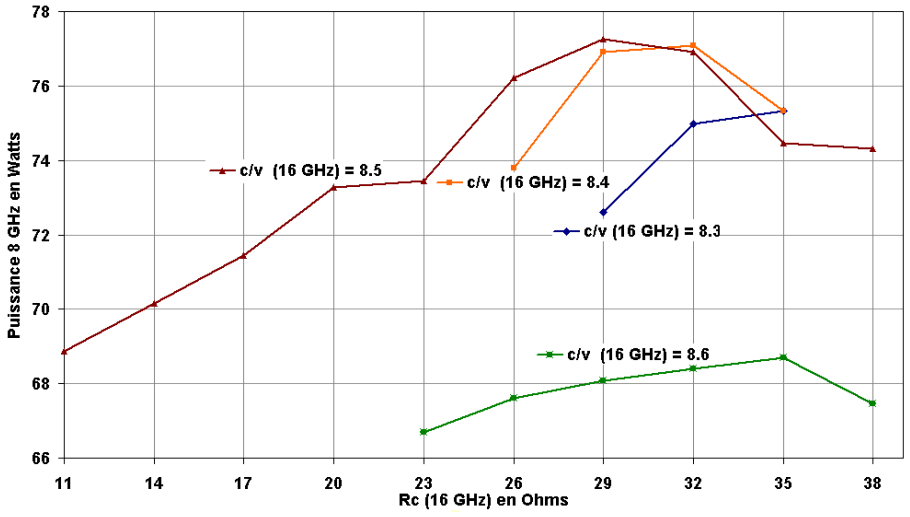


FIG. 4.7 – Maximum de puissance sur fondamentale obtenu pour chaque configuration de $\frac{c}{v}\big|_2$ et de R_{c2}, en fonction de R_{c2}. $\frac{c}{v}\big|_1 = 8.5$, et $R_{c1} = 50\Omega$.

Cette fois, les valeurs de $\frac{c}{v}\big|_2$ sont modifiées, de manière à se désynchroniser un peu d'avec l'onde fondamentale. Pour chacune des valeurs utilisées, nous avons simulé l'interaction avec différentes valeurs de la résistance de couplage R_{c2}. Pour la fondamentale, il n'y a pas de changement : $\frac{c}{v}\big|_1 = 8.5$, et $R_{c1} = 50\Omega$. Pour chaque configuration nous avons recherché les valeurs de Φ_2 et Pe_2 qui donnent le maximum de puissance sur fondamentale. Les valeurs obtenues sont portées sur la figure 4.7, en fonction de la résistance R_{c2} correspondante, et ce pour les différentes valeurs de $\frac{c}{v}\big|_2$ utilisées. Ceci nous permet de mesurer les rôles à la fois du désynchronisme et de la résistance de couplage de l'harmonique. La meilleure configuration correspond au cas où les deux ondes ont la même vitesse de phase $\frac{c}{v}\big|_2 = 8.5$ (mais pas le même coefficient d'amplification comme on l'a vu plus haut). On s'éloigne un peu plus de la puissance maximale lorsqu'on augmente légèrement la valeur de $\frac{c}{v}\big|_2$, que lorsqu'on la diminue légèrement. Autrement dit il semble ici plus défavorable d'avoir une onde harmonique plus lente que l'onde fondamentale, plutôt que l'inverse.

Pour comprendre ce qui se passe dans le tube dans les différents cas de figures, nous avons gardé les quatre configurations optimales, correspondant respectivement à $\frac{c}{v}\big|_2$= 8.3, 8.4, 8.5 et 8.6, et tracé pour chacune d'elle les puissances 8 GHz et 16 GHz en fonction de la distance dans le tube (figure 4.2.2).

Sur les quatre graphes, on retrouve le même phénomène : les deux courbes ont un point de tangence, 30 ou 40 millimètres avant le maximum de fondamentale, marqué d'un cercle sur les graphes. Cette zone de tangence n'existe pas lorsque le déphasage n'est pas optimal : dans ce cas, ou bien l'harmonique coupe et dépasse la fondamentale, ou bien elle reste très en dessous. Il nous semble que cette tangence ait un rôle important dans le couplage : elle signifie qu'il y a une petite zone du tube dans laquelle les deux ondes ont des amplitudes similaires. Le reste du temps, l'une est prépondérante sur l'autre. L'extraction d'énergie au faisceau est optimisée lorsqu'il y a un fort couplage à la fois entre les deux ondes et le faisceau, mais aussi entre les deux ondes elles-mêmes, et il est vraisemblable de penser que ce couplage est le plus fort lorsqu'il existe une zone où les ondes sont du même ordre de grandeur, autrement dit lorsqu'elles ont une zone de tangence. Par ailleurs, la meilleure configuration d'entre les quatre reste celle où les ondes ont la même vitesse, ce qui est un élément supplémentaire pour un bon couplage, les deux ondes se déplaçant ensemble.

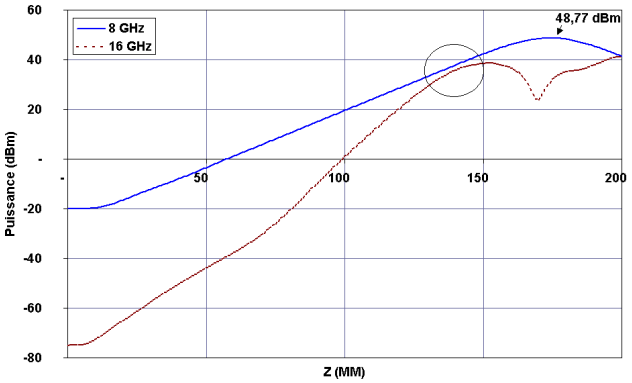
4.2.3 Conclusion

Avec le code TUBH, en modélisant une série d'hélices de manière à faire varier les paramètres comme la résistance de couplage et la vitesse de l'harmonique dans le tube, nous avons pu mettre en évidence un certain nombre de résultats concernant l'injection d'harmonique et son influence sur la puissance sur fondamentale et sur harmonique dans le tube.

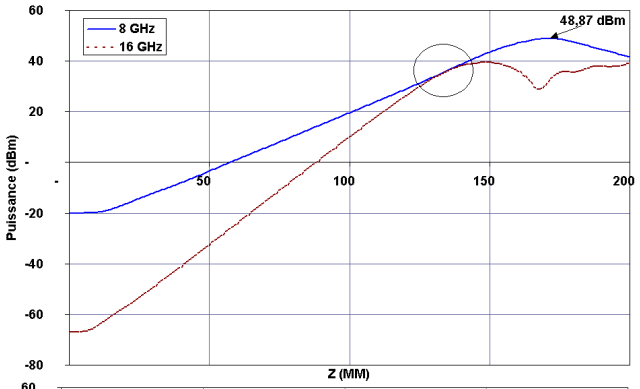
Nous avons retrouvé le rôle essentiel des conditions initiales d'injection de la seconde harmonique, que nous avions déjà mis en évidence au chapitre 3, et en particulier celui du déphasage initial entre fondamentale et harmonique.

Nous avons également mis en évidence le rôle des paramètres à froid de l'harmonique : sa vitesse de propagation et sa résistance de couplage. La meilleure configuration pour favoriser le rôle de l'harmonique et obtenir le plus de puissance sur fondamentale correspond au cas où les deux ondes ont la même vitesse de propagation. Il existe également une valeur optimale de résistance de couplage, égale à 29 Ω pour l'harmonique, lorsque celle de la fondamentale est de 50 Ω. Nous avons remarqué que dans la meilleure configuration il existait une zone de tangence pour les courbes de puissance fondamentale et harmonique, qui semble favoriser le couplage : dans cette zone de tangence les deux fréquences ont une amplitude du même ordre, elles se "voient".

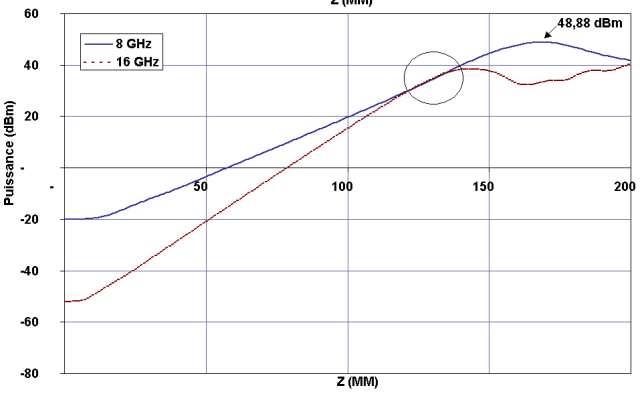
$\frac{c}{v}\Big|_2 = 8.3$, $Rc_2 = 35\Omega$,
$Pe_2 = -75$ dBm, $\Phi_2 = 3.28$ rad.



$\frac{c}{v}\Big|_2 = 8.4$, $Rc_2 = 32\Omega$,
$Pe_2 = -67$ dBm, $\Phi_2 = 0.28$ rad.



$\frac{c}{v}\Big|_2 = 8.5$, $Rc_2 = 29\Omega$,
$Pe_2 = -52$ dBm, $\Phi_2 = 3.28$ rad.



$\frac{c}{v}\Big|_2 = 8.6$, $Rc_2 = 35\Omega$,
$Pe_2 = -59$ dBm, $\Phi_2 = 0$ rad.

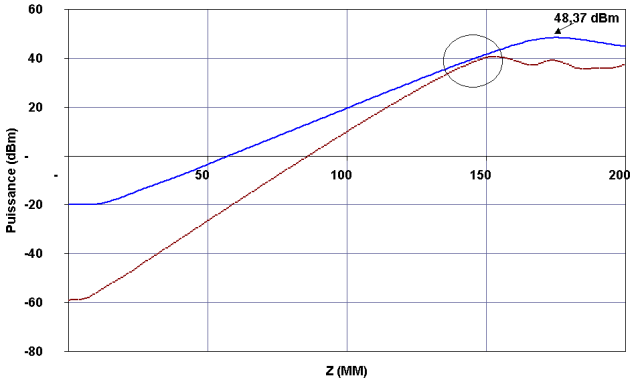


FIG. 4.8 – Puissance des ondes 8 Hz et 16 GHz en fonction de la distance. $Rc_1 = 50\Omega$, $\frac{c}{v}\Big|_1 = 8.5$

4.3 Injection d'harmonique dans un tube industriel

Pour conclure cette série de simulations avec TUBH, nous avons travaillé en utilisant les paramètres à froid correspondant à des tubes industriels de Thales. Ces tubes contiennent des taper, c'est à dire que le pas d'hélice varie le long de la ligne de propagation, ce qui entraîne une variation de la vitesse des ondes ainsi que des résistances de couplage. Ils contiennent également des atténuations, localisées et réparties. Nous avons donc réalisé le même type de simulations que dans les paragraphes précédents avec TUBH, en utilisant les paramètres à froid de tubes de production, notés TH1 et TH2, de manière à y observer l'effet de l'injection d'harmonique.

4.3.1 Simulation TUBH sur le tube TH1

Le point de fonctionnement du tube TH1 est $I_k = 155$ mA pour le courant de cathode et $V_h = 4300$ V pour la tension d'hélice. La longueur de ce tube est L=123 mm ; il contient un taper (une variation de son pas d'hélice destinée à optimiser la puissance de sortie) ainsi que deux atténuations localisées à z=37 mm et z=58 mm.

Une atténuation localisée est une partie de la ligne d'interaction où les supports qui maintiennent l'hélice dans son fourreau sont recouverts d'un matériau (souvent du carbone) qui absorbe l'énergie électromagnétique. La puissance de l'onde qui se propage est extrêmement réduite lorsqu'elle passe cette zone, mais la modulation du faisceau d'électrons est conservée, si bien que la puissance de l'onde croît de nouveau après l'atténuation. Cela n'empêche pas l'amplification de l'onde HF, mais impose d'augmenter un peu la longueur du tube. Le rôle des atténuations localisées est d'empêcher la propagation d'ondes régressives, résultant notamment de réflexions en sortie du tube, et qui peuvent sérieusement diminuer le rendement d'un TOP. Après une atténuation, une onde régressive ne peut pas être régénérée par le faisceau qui se propage dans le sens contraire.

Comme dans les sections précédentes, nous avons choisi une fréquence fondamentale, cette fois égale à 6 GHz, et injecté dans le tube, en même temps que cette fondamentale, son harmonique (12 GHz). Nous avons fixé la puissance initiale sur fondamentale à $Pe_1 = 12$ dBm, ce qui correspond à la puissance de saturation à 6 GHz, et $\Phi_1 = 0$. Nous avons cherché les valeurs de Pe_2 et de Φ_2 qui optimisent la puissance de sortie sur fondamentale, et trouvé : $Pe_2 = 10$ dBm, et $\Phi_2 = 5.28$ rad. La figure 4.9 montre les puissances de sortie, sur fondamentale et harmonique, en fonction du déphasage Φ_2, lorsque $Pe_1 = 12$ dBm et $Pe_2 = 10$ dBm. Si l'on compare avec l'hélice magique, il est notable que la puissance de sortie sur fondamentale varie sur un écart plus petit en fonction de Φ_2 : elle varie entre 49.82 dBm et 52.73 dBm, soit un écart de près de 3 dB au lieu d'un peu plus de 10 dB, et qu'elle ne reste supérieure à la valeur sans injection d'harmonique que sur un intervalle d'un radian environ, au lieu de π rad dans le cas de l'hélice magique.

Sur la figure 4.10 nous avons représenté la puissance dans le tube en fonction de z dans le cas le plus favorable. Les deux creux autour de 37 mm et 58 mm sont dus aux atténuations localisées. Le couplage déterminant a lieu après la seconde atténuation, et ici aussi, les deux courbes ont un point de tangence, aux alentours de z = 83 mm.

4.3.2 Simulation TUBH sur le tube TH2

Comme pour le tube TH1, nous avons utilisé les paramètres calculés pour le tube TH2 de Thales. La fréquence fondamentale est cette fois de 7 GHz, et le point de fonctionnement : $V_h = 4550$ V et $I_k = 168$ mA. La longueur du tube est L = 146 mm, il contient un taper, ainsi que des atténuations localisées à z = 37 mm et z = 95 mm.

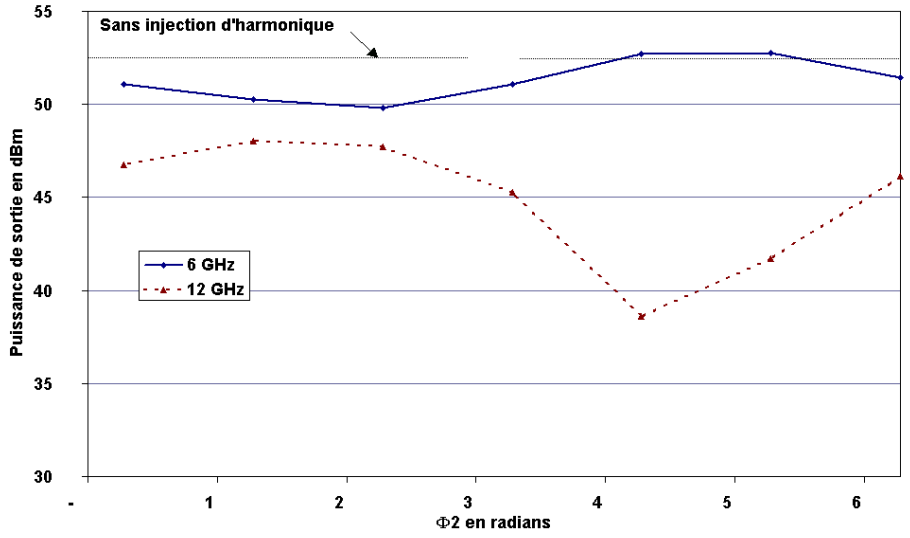


FIG. 4.9 – Puissances de sortie fondamentale et harmonique en fonction de Φ_2 pour le tube TH1, pour $Pe_1 = 12$ dBm, $Pe_2 = 10$ dBm et $\Phi_1 = 0$.

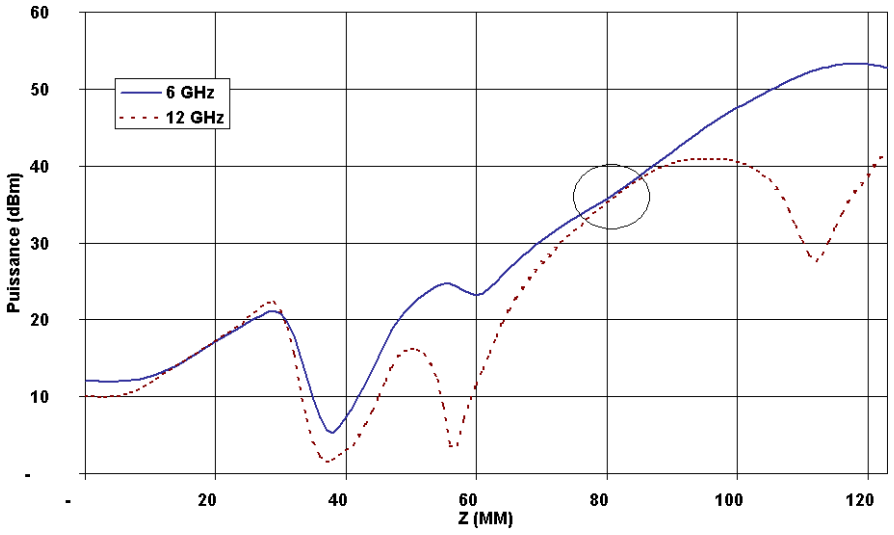


FIG. 4.10 – Puissances de sortie sur fondamentale et sur harmonique en fonction de la distance pour le tube TH1 : $Pe_1 = 12$ dBm, $Pe_2 = 10$ dBm, $\Phi_1 = 0$ et $\Phi_2 = 5.28$ rad.

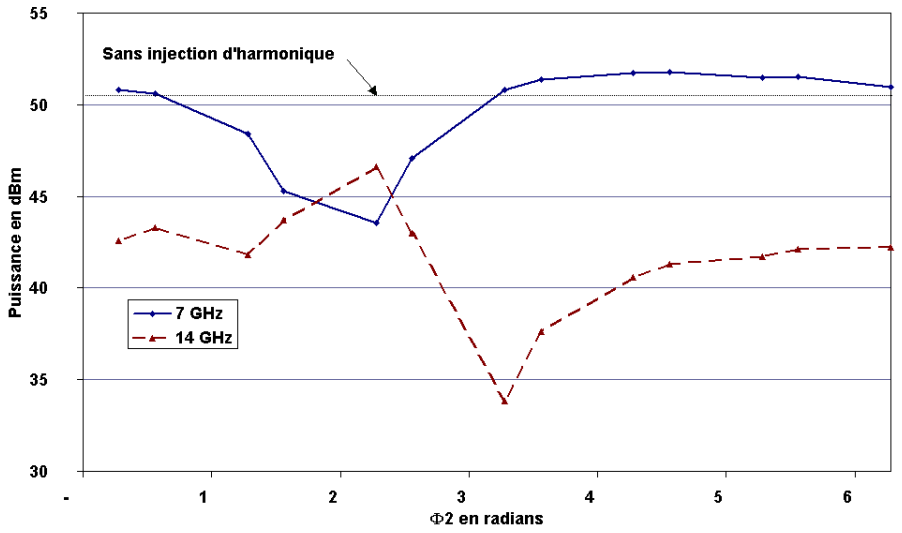


FIG. 4.11 – Puissances de sortie fondamentale et harmonique en fonction de Φ_2 pour le tube TH2, pour $Pe_1 = 12$ dBm, $Pe_2 = 10$ dBm et $\Phi_1 = 0$.

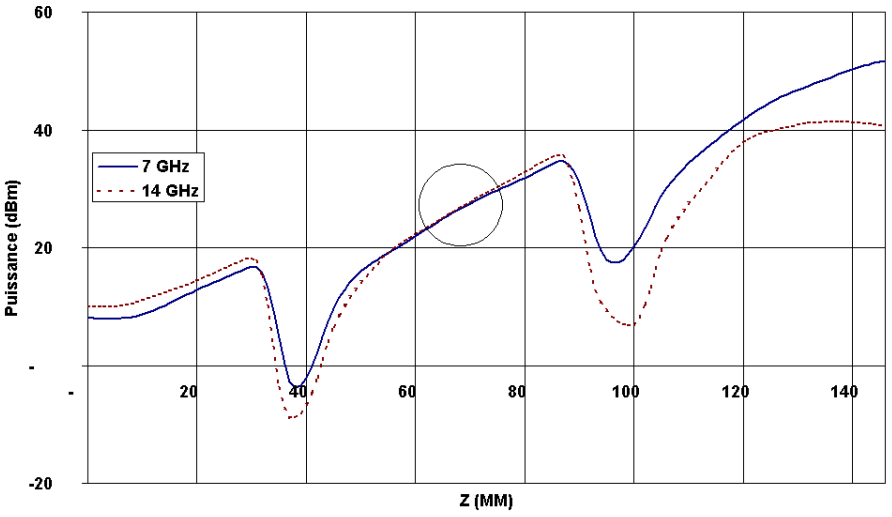


FIG. 4.12 – Puissances de sortie sur fondamentale et sur harmonique en fonction de la distance pour le tube TH2 : $Pe_1 = 12$ dBm, $Pe_2 = 10$ dBm, $\Phi_1 = 0$ et $\Phi_2 = 5.28$ rad.

La puissance d'entrée étant fixée à $Pe_1 = 8$ dBm, nous avons fait varier la puissance et le déphasage en entrée pour l'harmonique 14 GHz, de manière à optimiser la puissance de sortie sur fondamentale. Nous avons trouvé $Pe_2 = 10$ dBm et $\Phi_2 = 4.56$ rad. Les puissances de sortie sur fondamentale et sur harmonique sont présentées sur la figure 4.11 en fonction de Φ_2 pour $Pe_1 = 8$ dBm et $Pe_2 = 10$ dBm. La figure 4.12 montre la puissance en fonction de z dans le tube, dans la meilleure configuration.

On a cette fois un maximum en sortie sur fondamentale de 51.8 dBm, avec un écart maximal de 8.3 dB en variant Φ_2 ; on se trouve au dessus de la puissance fondamentale sans injection d'harmonique, qui vaut 50.5 dBm, sur plus d'une demi-période de Φ_2. Sur la figure on trouve deux creux autour de 37 mm et 95 mm, correspondant aux atténuations localisées de ce tube. On trouve de nouveau une zone de tangence, située cette fois entre les deux atténuations.

4.4 Injection d'harmonique avec le code LMSuite

Il est intéressant d'observer les résultats obtenus avec un autre code de calcul, aussi nous avons travaillé avec le code LMSuite, mis au point par Wöhlbier *et al.* à l'Université du Wisconsin (USA). LMSuite contient un ensemble de trois modèles stationnaires et unidimensionnels : le code MUSE, éulerien, le code S-MUSE, version simplifiée du code MUSE, et enfin le code LATTE, lagrangien [Wöhlbier et al., 2002a], qui des trois est celui qui prend en compte le plus d'effets non-linéaires, puisqu'il tient compte de la saturation inertielle décrite au paragraphe 3.1.2. C'est celui-ci que nous utilisons dans ce chapitre[1].

Notre travail sur le code LATTE et la comparaison avec TUBH qui est présentée dans ce paragraphe ont contribué à un travail commun avec l'équipe de J.H. Booske et J.G. Wöhlbier ; ce dernier préparait une thèse [Wöhlbier, 2003] au cours de laquelle il a mis au point LMSuite, dans le but d'offrir un outil simple et librement accessible pour la modélisation des Tubes à Ondes Progressives [Wöhlbier et al., 2003].

Ainsi nous utilisons le code LATTE pour simuler l'"hélice magique" définie au chapitre 4.1 : nous travaillons avec la fréquence fondamentale de 8 GHz, et nous fixons les vitesses de phase telles que $\frac{c}{v} = 8.5$ pour 8 GHz et 16 GHZ, et les résistances de couplage à $R_{c1} = 50\Omega$ pour 8 GHz et $R_{c2} = 11\Omega$ pour 16 GHz. Les valeurs de tension d'hélice et de courant de cathode sont de nouveau $V_h = 4200$ V et $I_k = 0.07$ A.

Par ailleurs nous avons utilisé les mêmes puissances d'entrée pour TUBH et LATTE : $Pe_1 =$ -20 dBm et $Pe_2 =$ -15 dBm : ce sont celles qui donnent la meilleure configuration d'injection d'harmonique pour TUBH. La phase initiale Φ_1 étant fixée à 0, nous avons cherché le déphasage Φ_2 qui optimisait la puissance de sortie sur fondamentale, et trouvé $\Phi_2 = 2.5$ rad pour LATTE, sachant qu'on avait $\Phi_2 = 1.28$ rad pour TUBH. Les puissances 8 GHz et 16 GHz sont présentées en fonction de la distance sur la figure 4.13.

Afin de comparer le comportement du tube dans chaque code lorsqu'on varie le déphasage Φ_2, nous nous sommes placés pour chaque code à la distance z correspondant au maximum de puissance 8 GHz sur la figure 4.13, c'est à dire $z = 170$ mm pour TUBH et $z = 184$ mm pour LATTE ; la figure 4.14 présente l'évolution de la puissance en fonction de Φ_2 à ces distances.

On remarque que la pente de la puissance en fonction de z, dans le domaine de petit signal, n'est pas la même pour TUBH et LATTE : tant pour la fondamentale que pour l'harmonique, la pente est légèrement plus grande avec TUBH. Les valeurs maximales de puissance sur fondamentale diffèrent également : 48.38 dBm pour TUBH et 48.09 dBm pour LATTE. Ainsi les modèles ne se

[1] LMSuite est disponible sur le site www.lmsuite.org

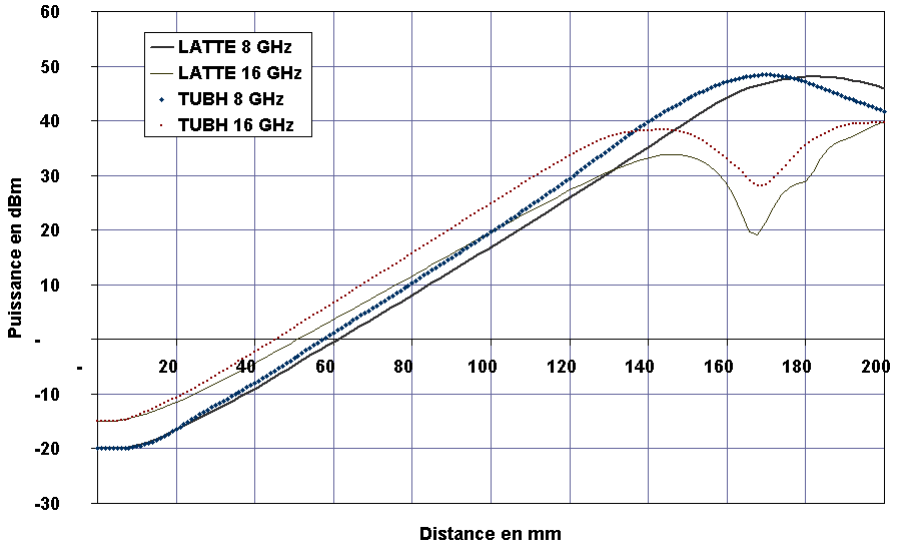


FIG. 4.13 – Puissances en fonction de z : Pe_1 = -20 dBm, Pe_2 = -15 dBm, $\Phi_1 = 0$; $\Phi_2 = 1.28$ rad pour TUBH et $\Phi_2 = 2.5$ rad pour LATTE.

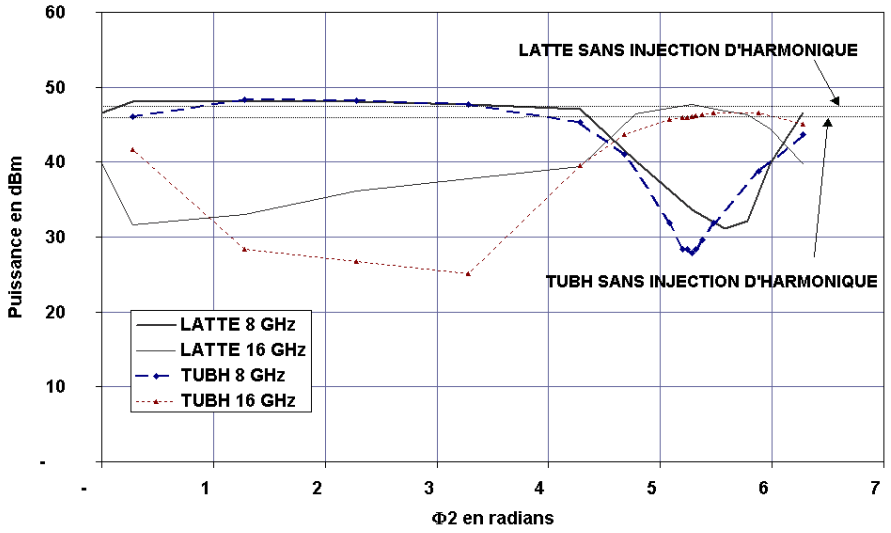


FIG. 4.14 – Puissances en fonction de Φ_2 : Pe_1 = -20 dBm, Pe_2 = -15 dBm, à la distance z = 170 mm pour TUBH et z = 184 mm pour LATTE.

correspondent pas exactement. Sur la figure 4.14, on retrouve une petite différence entre les valeurs maximales de puissance sur fondamentale. Cette différence se trouve accentuée lorsqu'on compare des valeurs plus faibles : on remarque un écart important (plus de 10 dB) sur les valeurs sur harmoniques les plus faibles. Le creux observé pour la puissance sur fondamentale existe bien pour les deux codes de calculs, on le retrouve à peu près au même déphasage : là aussi, pour les valeurs les plus faibles (fond du creux) on a des différences notables, jusqu'à 2.5 dB, entre les résultats des deux condes.

Cette comparaison entre deux codes de calculs, tous deux lagrangiens, unidimensionnels et auto-cohérents, fait apparaître une cohérence entre eux, dans la mesure où les courbes obtenues pour l'injection d'harmonique ont la même allure avec TUBH ou avec LATTE ; on retrouve notamment un rôle similaire pour le déphasage initial entre les ondes. Cependant, les résultats ne sont pas identiques, ils présentent des écarts qui proviennent de différences dans la modélisation de l'interaction.

Cette comparaison illustre la difficulté qui existe à modéliser des phénomènes non-linéaires comme l'interaction entre un faisceau d'électrons et une onde hyperfréquence, et rappelle que les résultats de simulations ne sont qu'une représentation de la réalité, qu'il faut traiter avec précaution.

Chapitre 5

Mesure de l'effet de l'harmonique sur des tubes industriels

Le site Thales Electron Devices de Vélizy produit des Tubes à Ondes Progressives présentant un large panel de propriétés en terme de puissance, de fréquence d'utilisation et de bande passante. Une partie essentielle de cette étude consistait naturellement à tester les effets de l'harmonique sur des tubes industriels. Nous avons donc mené plusieurs campagnes de mesures sur des tubes de Thales : sur des tubes à large bande dans un premier temps, puis sur des tubes à bande étroite. Ces mesures ont permis de vérifier expérimentalement le rôle de l'injection d'harmonique sur la puissance de sortie des tubes. Nous avons ensuite confronté aux résultats des mesures les résultats de simulations issue du code MVTRAD de Thales, (que nous présenterons au paragraphe 5.2), et cette confrontation a initié des questions et des réponses sur la validité du code MVTRAD, et particulièrement sur la manière dont il prend en compte le calcul des harmoniques. Ce sont tous ces résultats que nous présentons dans ce chapitre.

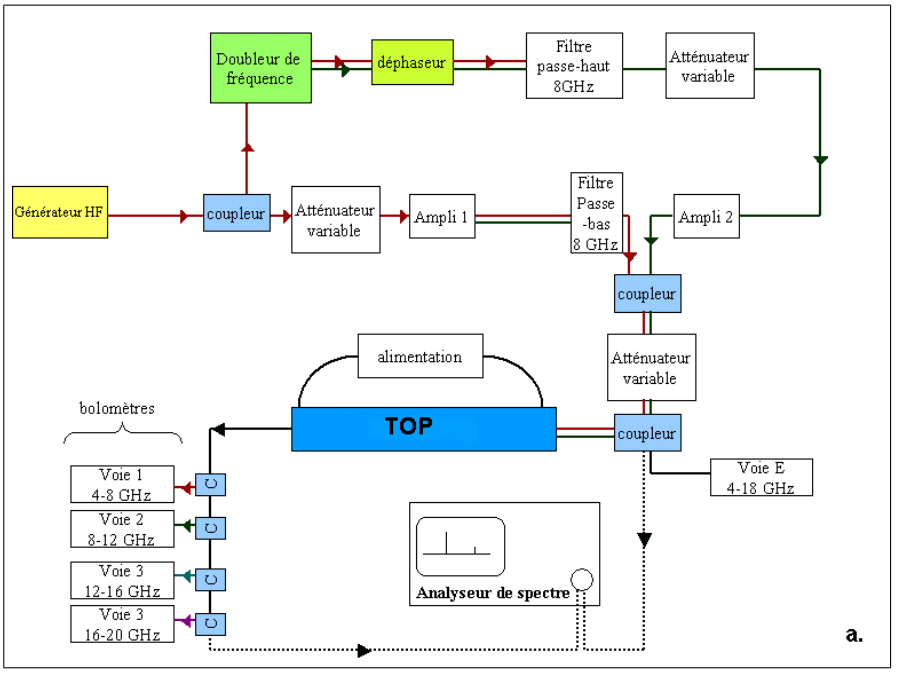
5.1 Mesures sur un tube large bande

Thales produit des tubes pour radars qui ont la propriété de fonctionner sur plusieurs octaves : le tube large bande sur lequel nous avons travaillé a ainsi une bande passante de 4.5 GHz à 18 GHz. Il est donc possible, en travaillant avec une fréquence fondamentale en bas de bande, d'amplifier dans le même tube la fondamentale et ses harmoniques 2 et même 3.

5.1.1 Montage expérimental

Nous avons donc monté un banc de mesures comportant en plus du tube : une alimentation haute tension, un générateur de signaux hyperfréquences, un circuit de propagation pour les signaux en entrée et en sortie de tube avec différents appareils de mesures (bolomètres, analyseur de spectres). Notre intention était d'injecter dans le tube à la fois une fréquence fondamentale F et sa deuxième harmonique F ; pour que l'une soit l'harmonique de l'autre, donc qu'elles soient parfaitement synchronisées, il fallait qu'elles soient issues de la même source. Nous avons donc réalisé un circuit d'entrée, qui à partir du signal F en sortie du générateur HF, en prélève une partie, double sa fréquence à F avant de l'ajouter au reste du signal F.

La figure 5.1 (a) détaille le montage réalisé lorsqu'on travaille avec 5 GHz en fondamentale. Le coupleur en sortie du générateur divise le signal F en deux parties. Sur une branche, on garde



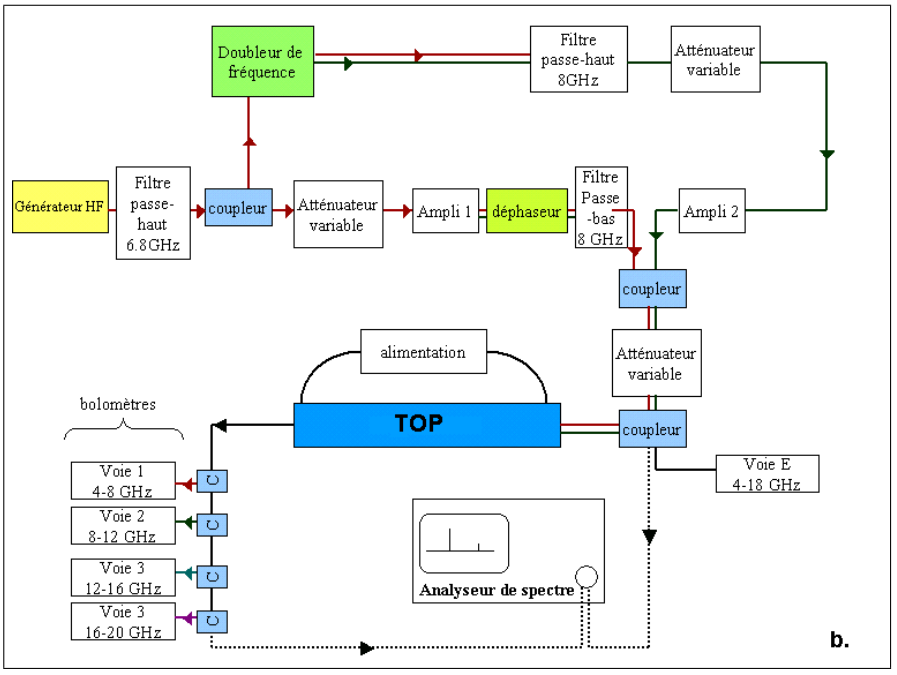


FIG. 5.1 – Montage d'injection de fréquences f et 2f dans un tube large bande, pour f=5GHz (a) et f=7 GHz (b).

la fréquence F, qu'on amplifie afin d'avoir une puissance suffisante en entrée du tube (ampli 1). L'atténuateur variable sert à contrôler son niveau de puissance. Nous avons observé que l'amplificateur produisait, en quantité non négligeable, de l'harmonique F, c'est pourquoi, afin de ne pas perturber le système avec cette harmonique parasite, nous l'avons filtrée (filtre passe-bas 8 GHz : atténue de 30 dB à 10 GHz et de 40 dB à 14 GHz). Sur l'autre branche, la fréquence F est doublée, et la fréquence F obtenue passée par un déphaseur variable : ceci nous permet d'introduire et de contrôler un déphasage entre les deux harmoniques en entrée du tube. Le doubleur laisse passer une partie de fréquence F, que nous éliminons avec le filtre passe-haut 8 GHz (atténue de 60 dB à 7 GHz et de 100 dB à 5 GHz), avant d'envoyer le signal F sur un atténuateur variable puis sur l'ampli 2. Les deux branches sont additionnées par un coupleur, leur puissance globale peut être contrôlée par un atténuateur variable, avant d'être envoyée en entrée de tube. Une partie de la puissance d'entrée est prélevée sur un bolomètre large bande (ou sur l'analyseur de spectre). En sortie de tube, un banc de mesure étalonné permet de mesurer le signal de sortie sur quatre voies, correspondant à quatre bandes de fréquences successives ; on peut également regarder la sortie avec l'analyseur de spectre.

Pour travailler avec une fondamentale de 7 GHz, il a fallu modifier légèrement le montage : le déphaseur n'étant pas adapté au delà de 12 GHz, nous l'avons placé sur la branche à 7 GHz. Par ailleurs, lorsqu'on le fixe sur 7 GHz, le générateur HF produit du 3.5 GHz (à cause de son mode de génération par multiplication de fréquences), que nous filtrons avec un filtre passe-haut (figure 5.1 (b)).

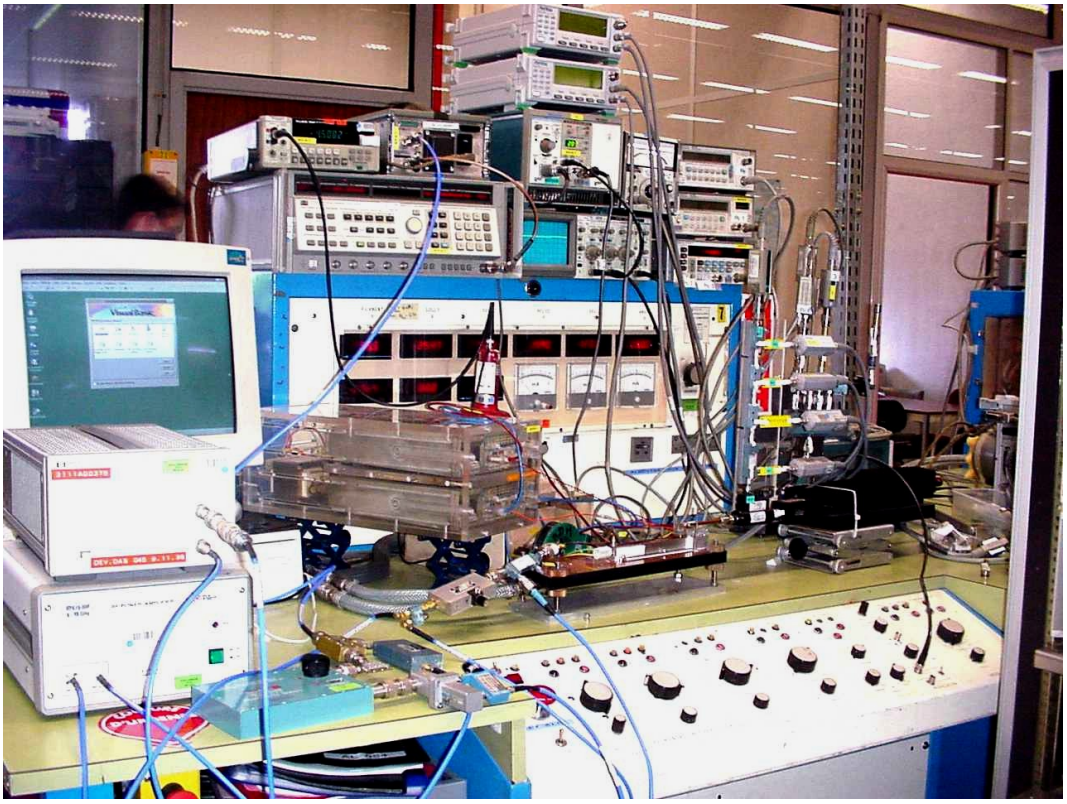


FIG. 5.2 – Photo du montage

Les puissances de sortie sont systématiquement lues sur les bolomètres du banc de mesures, qui est étalonné. Lorsqu'on injecte deux fréquences, il n'est pas possible de mesurer le niveau de puissance en entrée de chacune de ces fréquences sur le bolomètre, qui se contente de les addi-

tionner. On a alors relevé les valeurs d'entrée sur l'analyseur de spectre. Pour avoir des mesures valables, nous avons étalonné, pour chaque fréquence, l'ensemble analyseur de spectre/câble coaxial, en vérifiant que nous restions dans le domaine de linéarité de l'analyseur (qui sature pour des puissances d'entrée trop élevées). Sur la photo du montage, on repère les différents éléments décrits ci-dessus.

5.1.2 Conditions expérimentales

Nous avons choisi de travailler avec les courants et tensions indiquées par Thales pour le fonctionnement du tube, qui sont : $I_k = 168$ mA pour le courant de cathode, et $V_h = 4550$ V pour la tension d'hélice.

5.1.3 Recherche de la tension de gain max

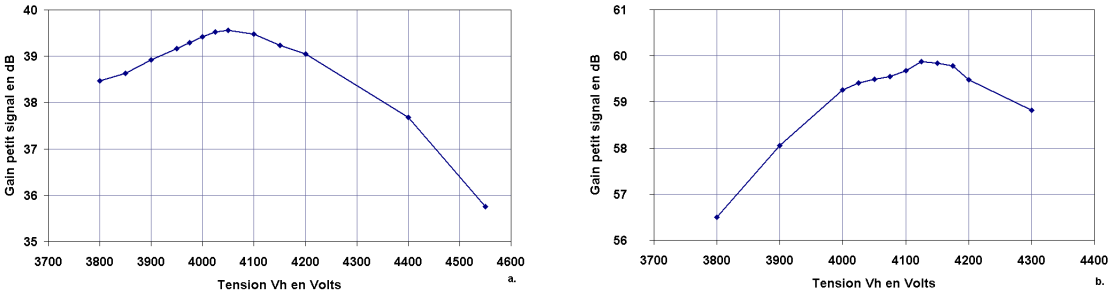


FIG. 5.3 – Recherche de la tension de gain max petit signal, à 5 GHz (a) et 7 GHz (b)

Les mesures d'injection d'harmonique ont été réalisées pour les deux fréquences de fondamentale 5 GHz et 7 GHz, aussi dans un premier temps nous avons mesuré, pour ces deux fréquences, la tension de gain max en petit signal : on se place très en dessous de la puissance de saturation, et on mesure la puissance de sortie sur fondamentale en fonction de la tension d'hélice V_k. Les résultats, présentés sur les figures 5.3 (a) et (b), donnent les valeurs de tension de gain max suivantes : $V_{gainmax}(5GHz) = 4050V$ et $V_{gainmax}(7GHz) = 4125V$ avec une précision de ± 25 V.

Lorsqu'on étudie le fonctionnement d'un TOP, il est utile de mesurer les tensions de gain max aux différentes fréquences : ceci nous permet de regarder le fonctionnement du tube hors de tout phénomène de saturation, en petit signal. La tension d'hélice impose au faisceau sa vitesse initiale ; la tension de gain max correspond à l'écart entre vitesse du faisceau et vitesse de l'onde F (imposée par la géométrie du tube) qui favorise le meilleur gain du système. Nous avons déjà souligné le fait qu'un TOP ne pouvait amplifier une onde que si la vitesse du faisceau y était plus rapide que celle de l'onde. Il existe pour chaque fréquence un écart optimal pour obtenir le plus de gain en petit signal. C'est cet écart optimal que nous fixons en cherchant la tension de gain max.

La tension de gain max est celle qui donne le maximum de gain en petit signal, mais ce n'est pas celle qui donne le meilleur résultat lorsque le tube est à saturation : par la suite nous travaillerons avec la tension $V_k = 4550V$ qui est conseillée par Thales pour avoir les meilleurs résultats, lors de l'utilisation des tubes, et qui est plus grande que les tensions de gain max 5 GHz et 7 GHz.

Nous verrons lors des comparaisons avec les simulations qu'il est primordial de connaître l'écart entre tensions de gain max mesurée et simulée sur un tube, car cela nous permet de mesurer un éventuel écart entre les vitesses de l'onde "à froid" (sans faisceau) du vrai tube, et du tube simulé.

5.1.4 Saturation avec la fondamentale seule

Avant de travailler sur l'injection d'harmonique, nous avons cherché à faire saturer le tube avec la fondamentale seule. Autrement dit, nous avons injecté en entrée une puissance fondamentale Pe_1, jusqu'à trouver le maximum de puissance de sortie sur fondamentale Ps_1. Dans ce cas, on n'utilisait qu'une des deux branches du montage, celle adaptée à la fréquence d'injection. Ces mesures ont été effectuées pour quatre fréquences : 5, 7, 9 et 10 GHz. Les puissances de sortie ont été mesurées sur les bolomètres, mais pour vérifier la forme du signal en sortie, nous avons systématiquement fait une mesure sur l'analyseur de spectre. Le spectre de sortie correspondant à 5 GHz est présenté sur la figure 5.5 (a) ; les valeurs qui sont lues sur l'analyseur de spectre sont imprécises, car celui-ci a un comportement non-linéaire en présence d'un grand nombre de fréquences, aussi nous avons noté à côté de chaque raie la valeur de la puissance lue sur le bolomètre, qui elle est exacte.

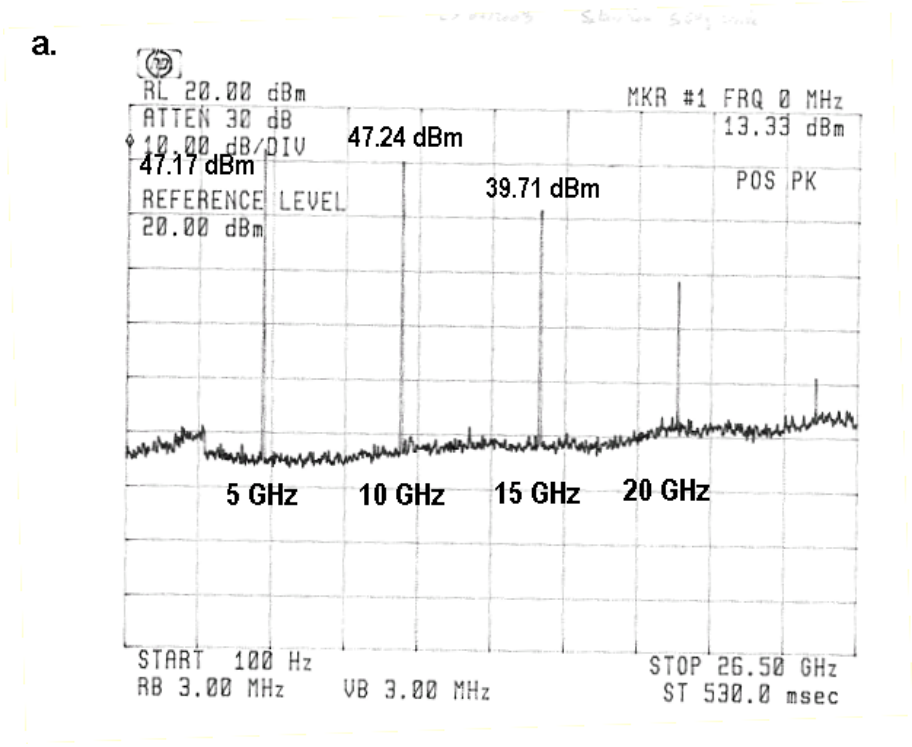
Fréquence d'injection	5 GHz	7 GHz	9 GHz	10 GHz
Puissance d'entrée fondamentale (dBm)	14,27	4,1	-0,5	-0,73
Puissance de sortie fondamentale (dBm)	47,17	49,63	50,38	51,02
Puissance de sortie harmonique 2 (dBm)	47,24	43,6	39,76	36,84
Puissance de sortie harmonique 3 (dBm)	39,71			

FIG. 5.4 – Puissances d'entrée et de sortie à saturation pour différentes fréquences.

Les résultats de ces mesures, donnés sur le tableau de la figure 5.4 montrent qu'on obtient des puissances de sortie sur fondamentale plus élevées pour 9 GHz et 10 GHz, fréquences qui correspondent au milieu de la bande passante. Pour la fréquence la plus basse, 5 GHz, on est en tout début de bande, et on note qu'à la saturation, on sort légèrement plus d'harmonique 2 que de fondamentale, alors que plus on augmente la fréquence plus l'écart se creuse entre fondamentale et harmonique, au détriment de cette dernière. L'harmonique 2 pour la fondamentale 5 GHz est la fréquence 10 GHz, qui se trouve juste en milieu de bande, c'est pourquoi elle est particulièrement favorisée. Au contraire, l'harmonique 2 pour 10 GHz est 20 GHz, fréquence qui se trouve hors de la bande passante définie pour le tube : il est normal qu'on n'en trouve qu'un niveau faible (36 dBm). A 5 GHz, on a aussi relevé la puissance de sortie de l'harmonique 3 (15 GHz).

5.1.5 Saturation avec injection d'harmonique

Nous avons effectué la mesure d'injection d'harmonique pour les fréquences 5 GHz et 7 GHz, puisque leur harmonique reste comprise dans la bande passante du tube. Dans chaque cas, le principe est le suivant : on a fixé la puissance d'entrée sur fondamentale Pe_1 au niveau qui sature le tube sans injection d'harmonique. On a fait varier la puissance d'entrée sur harmonique Pe_2, ainsi que le déphasage entre les deux ondes, jusqu'à trouver la configuration qui optimise la puissance de sortie sur fondamentale Ps_1. Une fois cette configuration déterminée et atteinte, nous avons fait une série de mesures en faisant varier le déphasage sur une période. Dans le cas où la fondamentale est à 5 GHz, c'est la branche harmonique qui est déphasée, contrairement au cas 7 GHz, où l'on déphase la branche fondamentale. Cela étant, nous avions déjà remarqué (et nous l'avons de nouveau vérifié ici) qu'il était équivalent de déphaser la fondamentale d'un angle θ, ou l'harmonique d'un angle -2θ. Aussi, pour avoir des résultats comparables, nous avons tracé les puissances de sortie en



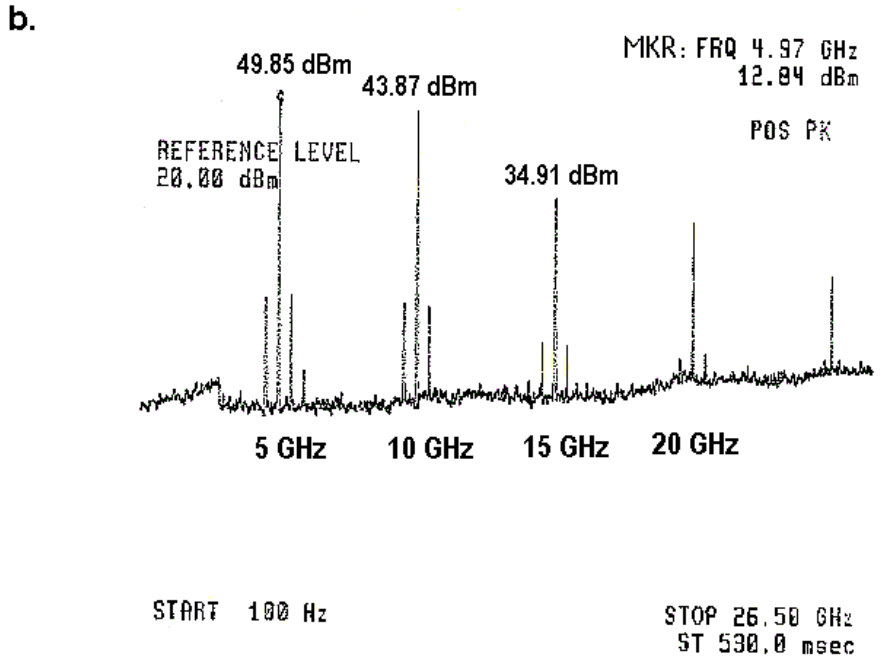


FIG. 5.5 – Spectres en sortie du tube pour la saturation à 5 GHz seule (a) et pour la configuration la plus favorable d'injection de 10 GHz en plus de 5 GHz (b). Les valeurs portées à côté de chaque raie sont celles lues sur les bolomètres.

fonction du déphasage ϕ_2 sur l'harmonique, en modifiant les valeurs de phase dans le cas 7 GHz.

Les configurations optimales ainsi déterminées correspondent, pour 5 GHz à : $Pe_1 = 14.27$ dBm, $Pe_2 = 2.5$ dBm et $\phi_2 = 357°$; pour 7 GHz, $Pe_1 = 3.8$ dBm, $Pe_2 = -2.55$ dBm et $\phi_2 = 283°$. Il faut considérer ces valeurs en tenant compte des imprécisions de mesures : l'analyseur de spectre a une précision à 0.5 dB près ; les bolomètres sont un peu plus précis : à 0.1 dB. Pour ce qui est du déphasage : il est lu sur le vernier du déphaseur. Or, si ce vernier a une bonne précision (1° près), le déphaseur lui même possède une sorte d'hysteresis : lorsqu'on tourne le vernier dans un sens, il est linéaire ; mais lorsqu'on change de sens, on tourne un peu "à vide" avant que le déphasage change vraiment. Nous avons pris garde à faire nos mesures en tournant toujours dans le même sens si bien qu'on a des valeurs précises de déphasage "relatif". La valeur "absolue" du déphasage est par contre beaucoup plus incertaine, et moins reproductible : à 5-10 ° près. Les valeurs de déphasage indiquées pour la configuration optimale sont peu précises. Par contre les graphes des puissances de sortie en fonction du déphasage, représentés sur la figure 5.6 donnent une idée précise du comportement du tube en fonction du déphasage.

Sur la figure 5.5(b) apparaît le spectre de sortie sur l'analyseur dans le cas optimal pour la fondamentale à 5 GHz.

On réussit ainsi à extraire 49.85 dBm (ie 97 W) de puissance fondamentale à 5 GHz en injectant l'harmonique, contre 47.17 dBm sans injection d'harmonique, soit une augmentation de 2.7 dB : c'est une amélioration très notable, cela revient à augmenter de 86 % la puissance de sortie sur fondamentale.

A 7 GHz, on extrait 51.38 dBm (ie 137 W) de puissance sur fondamentale au lieu de 49.63 dBm sans injection d'harmonique. Les 1.75 dB gagnés correspondent cette fois à une augmentation de 50 %.

Nous retrouvons donc expérimentalement le rôle de l'harmonique que nous avons décrit dans les chapitres précédents : il est possible d'augmenter très sensiblement la puissance de sortie d'un signal en injectant dans le tube, en plus de la fondamentale, de l'harmonique 2 dans certaines conditions de phase et d'amplitude.

Sur les deux graphes Φ_2/puissances de sortie de la figure 5.6, on retrouve une plage d'environ une demi-période de Φ_2 sur laquelle la puissance de sortie sur fondamentale (Ps_1) reste au dessus de la valeur sans injection d'harmonique, et où elle ne varie pas brutalement. On retrouve également la présence d'un creux assez profond. Sur le graphe 7 GHz, il apparaît que les plus grandes valeurs de puissance de sortie sur fondamentale correspondent aux plus faibles de puissance de sortie sur harmonique, et vice-versa : le couplage faisceau/fondamentale/harmonique privilégie l'une des ondes au détriment de l'autre. A 5 GHz, les choses sont plus compliquées du fait de la présence de l'harmonique 3 à un niveau comparable à celui des autres fréquences.

L'effet de l'injection d'harmonique est plus grand à 5 GHz qu'à 7 GHz : à 5 GHz, la puissance de sortie varie sur une plage de 17 dB, tant sur fondamentale que sur harmonique 2, lorsque Φ_2 varie. A 7 GHz, cette plage est de 9 dB sur fondamentale, et 7 dB sur harmonique 2. Le rôle des harmoniques est plus fort à 5 GHz : l'harmonique 2, à 10 GHz se trouve au centre de la bande passante, donc elle est plus favorisée que l'harmonique 2 de 7 GHz, qui à 14 GHz, est déjà en fin de bande passante. De plus, l'harmonique 3 de 5 GHz, à 15 GHz, est également dans la bande passante, et joue également un rôle dans le couplage entre fréquences. C'est probablement pour la même raison qu'on a besoin d'injecter un niveau relatif d'harmonique plus élevé à 7 GHz (6.4 dB de moins que la fondamentale) qu'à 5 GHz (11.8 dB de moins que la fondamentale).

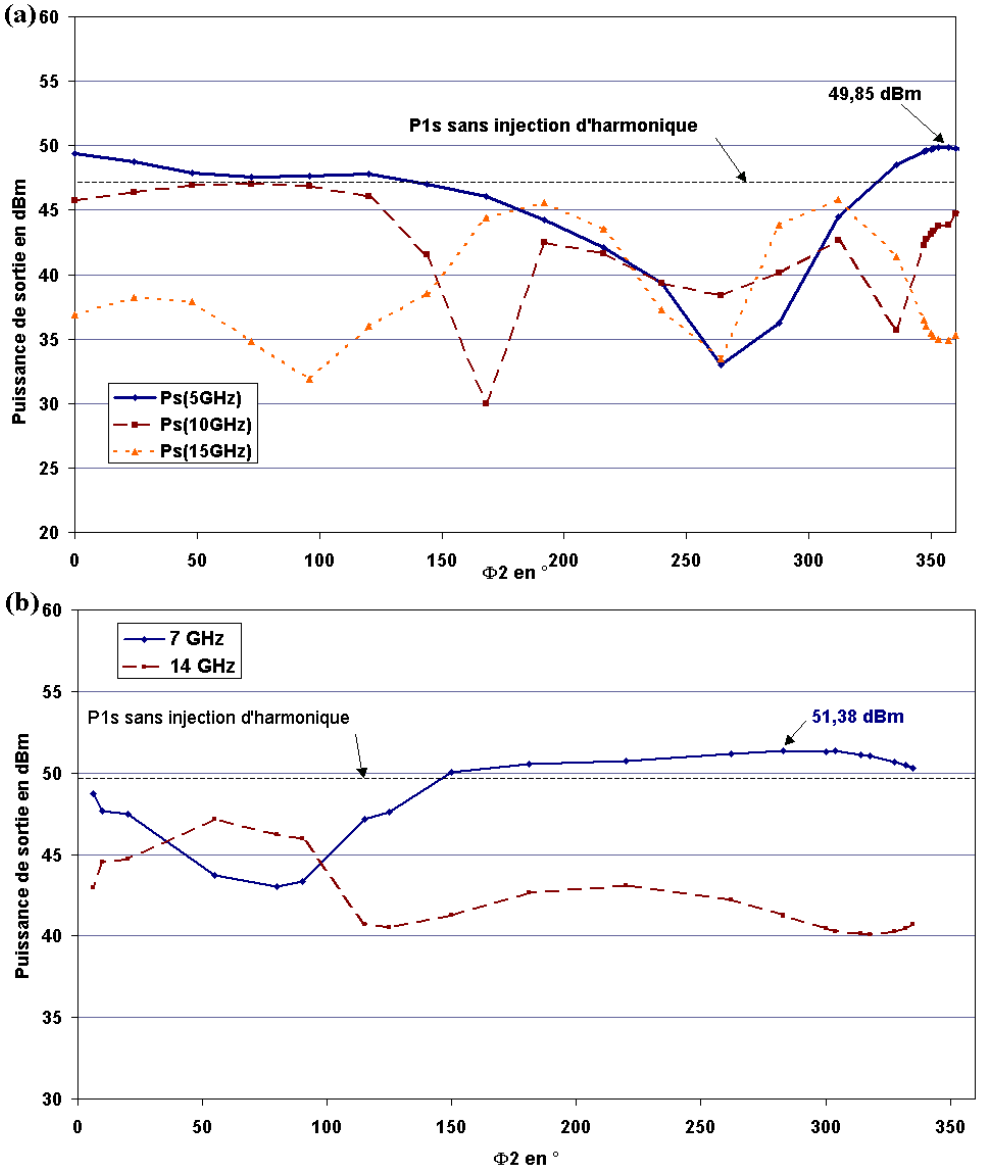


FIG. 5.6 – Puissances de sortie en fonction du déphasage ϕ_2, pour 5 GHz, avec $Pe_1 = 14.27$ dBm et $Pe_2 = 2.5$ dBm (a), et 7 GHz, avec $Pe_1 = 3.8$ dBm et $Pe_2 = -2.55$ dBm (b).

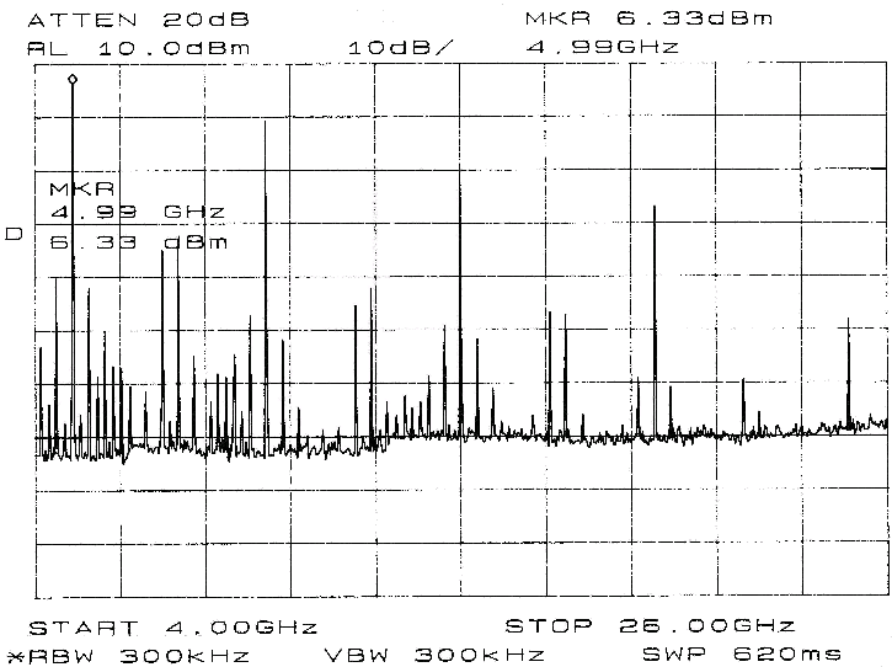


FIG. 5.7 – Spectre en sortie du tube pour l'injection d'harmonique (fondamentale de 5 GHz) : oscillation.

5.1.6 Phénomène d'oscillation dans le tube

Lors de nos mesures d'injection d'harmonique, nous avons à plusieurs reprises observé le phénomène illustré sur la figure 5.7. Ce phénomène n'apparait pas généralement lorsqu'on se travaille dans les conditions habituelles d'utilisation du tube, en n'injectant qu'une seule fréquence en entrée.

Plusieurs hypothèses pourraient expliquer ce phénomène, et pourraient être confirmées ou infirmées par une étude plus approfondie.

- L'entrée et la sortie de la ligne d'interaction d'un TOP réflechissent une fraction des ondes qui se propagent dans le tube, si bien que l'ensemble (entrée/ligne d'interaction/sortie) forme une cavité, dans laquelle sont susceptibles d'osciller un nombre discret de modes. C'est un phénomène que l'on cherche à éviter, en plaçant notamment des atténuations localisées sur la ligne d'interaction, de manière à interrompre la propagation des ondes retour. Les ondes qui se propagent dans le sens de l'interaction sont, elles, régénérées après chaque atténuation par la modulation du faisceau qui se déplace dans le même sens. Il peut toutefois exister un phénomène de "retour collecteur" : lorsque le faisceau a une énergie suffisamment grande, une fraction des électrons est susceptible de repartir dans le tube au lieu d'être captée par le collecteur, ce qui forme un faisceau qui se déplace dans le sens des ondes retour : celles-ci peuvent alors être régénérées après les atténuations, amplifiées par ce faisceau retour. Dans ces conditions, un phénomène d'oscillations est possible dans le tube, à partir de modes de la cavité issus du bruit.

  Dans les mesures en injection d'harmonique, nous avons relevé une forte focalisation du faisceau, témoin d'une grande énergie pour les électrons, qui pourrait motiver cette hypothèse.

- Par ailleurs, lorsqu'on amplifie plusieurs harmoniques, le faisceau d'électrons se trouve soumis à un champ qui implique plusieurs résonances dans l'interaction champ/faisceau, ce qui ouvre la possibilité de créer une situation de chaos lorsque les résonances se recouvrent (critère de Chirikov).

Pour avoir des mesures valables d'injection d'harmonique, nous avons veillé à ne pas nous trouver en présence de ce phénomène, d'une part car cela interfére avec ce que l'on cherche à mesurer ; d'autre part car les bolomètres intégrent un signal sur toute leur bande de fréquence. Par exemple, en croyant mesurer la puissance de sortie 5 GHz sur la voie 1, on mesure en réalité une valeur qui intégre toutes les raies comprises entre 4 et 8 GHz.

5.2 Comparaison avec la simulation pour le tube large bande

Nous avons cherché à comparer les mesures précédentes aux résultats des simulations du code de calcul MVTRAD. Comme TUBH, ce code a été développé à Thales, et il est utilisé pour le développement des tubes. Il est également lagrangien et auto-cohérent, et la différence avec TUBH est qu'il intégre dans ses calculs les mouvements radiaux des électrons : c'est un code 3D, plus précis et c'est pourquoi nous avons préféré l'utiliser ici pour le confronter aux mesures. Par contre, les temps de calculs sont beaucoup plus longs qu'avec TUBH. C'est pourquoi nous avions utilisé TUBH au chapitre précédent, où nous la précision était moins nécessaire.

La mise au point d'un code de simulation 3D pour les TOP a constitué une partie du travail de la thèse de P. Waller, soutenue en 1999, qui a également travaillé en collaboration avec Thales [Waller, 1999]. Il a contribué à développer un code, qu'il nomme INTRAD dans sa thèse, qui était plus performant que le code 3D précédemment utilisé à Thales, qui était appelé MVTRAD. Depuis, le nom du code INTRAD a disparu, et son contenu a remplacé l'ancien code MVTRAD et a conservé ce nom. Le code MVTRAD que nous avons utilisé correspond donc au code INTRAD de la thèse de Waller.

De même, le nom TUBH est venu remplacer TUBO, également décrit dans la thèse de Waller.

Nous avons utilisé comme valeurs de tension d'hélice et de courant de cathode les mêmes que celles des mesures, qui sont donc $V_k = 4550$ V et $I_h = 168$ mA. Les dimensions du tube (rayon d'hélice, pas d'hélice, longueur des différents tronçons, formes et valeurs des atténuations) sont entrées comme paramètres du code en fonction de la géométrie du tube. Les paramètres à froid, c'est à dire les valeurs de résistance de couplage et de vitesse de phase de l'onde dans le tube sans faisceau, ont été calculées par un autre code de calcul de Thales, nommé HELICO, et sont utilisés par MVTRAD.

5.2.1 Prise en compte des harmoniques

MVTRAD est un code multi-harmoniques, où l'on choisit le nombre d'harmoniques de calcul. Le tube industriel fonctionne évidemment avec toutes les harmoniques d'un signal, sachant qu'après un certain rang elles ne sont plus propagées par l'hélice. Le temps de calcul augmentant sensiblement avec le nombre d'harmoniques prises en compte, il fallait estimer dans un premier temps à quelle harmonique on pouvait s'arrêter pour avoir des résultats satisfaisants.

C'est ce que nous avons fait en calculant la puissance de saturation pour différentes fréquences, en prenant en compte d'abord la fondamentale seule, puis les deuxième, troisième et enfin quatrième harmoniques (c'est à dire qu'on impose pour les harmoniques prises en compte une puissance d'entrée de -170 dBm). Le résultat est présenté sur la figure 5.8, où sont portées les puissances de sortie et d'entrée sur fondamentale à la saturation. Pour les puissances d'entrée, on remarque que dès que l'on prend en compte au moins une harmonique, on reste à la même valeur, et ce pour toutes les fréquences. Par ailleurs, plus on prend d'harmoniques en compte, plus la puissance de sortie diminue, probablement "pompée" par les harmoniques, et se rapproche d'une limite : le phénomène "sature" : les harmoniques d'ordre supérieur interviennent de moins en moins. A 7 et

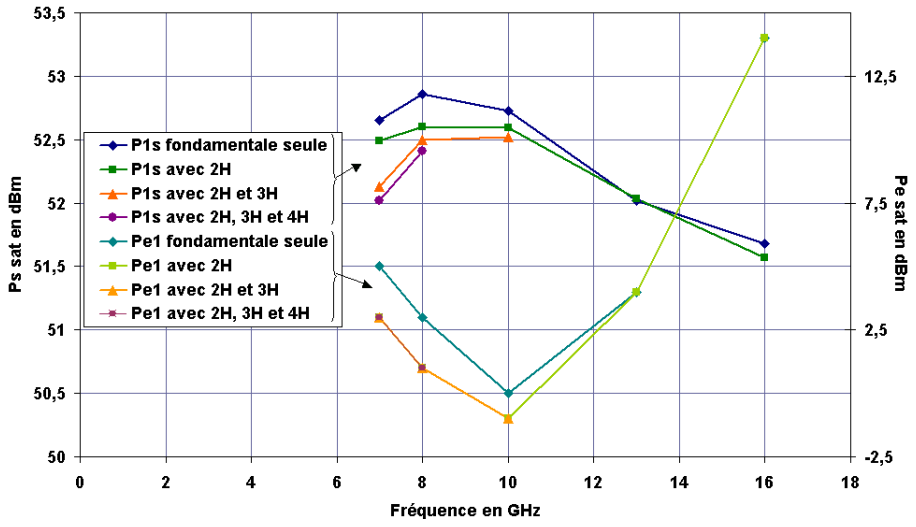


FIG. 5.8 – Influence de la prise en compte des harmoniques dans MVTRAD. Puissances en entrée et en sortie du tube à la saturation, pour différentes fréquences.

8 GHz, la différence entre les résultats des calculs à 3 et 4 harmoniques n'est plus que de 0.1 dB. A 10 GHz, nous n'avons mené le calcul que jusqu'à 3 harmoniques, qui donne un résultat très proche de celui à 2 harmoniques (moins de 0.1 dB d'écart). Enfin, aux fréquences plus hautes, 13 et 16 GHz, on change le résultat de moins de 0.1 dB en prenant en compte une harmonique.

En conclusion : dans la suite du chapitre, jusqu'à 8 GHz nous prendrons les harmoniques 2 et 3 en compte dans nos calculs. Au delà nous ne considérons plus que l'harmonique 2, voire aucune harmonique pour les fréquences supérieures à 13 GHz.

5.2.2 Prise en compte du TOS

Fréquence en GHz	5	7	8	9	10	13	14	16	18
TOS en sortie	2,25	1,06	1,45	1,55	1,4	2	1,3	1,4	1,8
TOS en entrée	1,8	1,45	1,35	1,35	1,4	1,7	1,8	1,9	1,85

FIG. 5.9 – Valeurs du TOS en entrée et en sortie du tube large bande.

Le TOS, ou Taux d'Onde Stationnaire, traduit la proportion du champ E_r qui a été réfléchi à l'entrée ou à la sortie du tube, et qui se propage donc dans la direction inverse de la propagation. Les valeurs de TOS, données dans le tableau 5.9 ont pour définition :

$$TOS = \frac{1+\rho}{1-\rho} \qquad \rho = \frac{E_r}{E_t} \tag{5.1}$$

si bien que la puissance P_{tot} est reliée à la puissance P_t par :

$$P_t = P_{tot}(1-\rho^2) \tag{5.2}$$

A la sortie de tube, on mesure la puissance du champ transmis E_t qui est sorti du tube. Le code ne tient pas compte du TOS, car il ne calcule que le champ qui se propage dans le sens du faisceau, il calcule donc la puissance du champ E_{tot} juste avant la sortie du tube. Pour comparer

calcul et mesure, il faut donc modifier la puissance de sortie du calcul, grâce aux valeurs de TOS du tube industriel, qui ont été mesurées.

En entrée, le code intégre dans son calcul le champ entré dans le tube E_t tandis qu'expérimentalement on a accès au champ juste avant le tube E_{tot}, et la définition du TOS, dont les valeurs sont données dans la deuxième ligne du tableau 5.9 a la même définition qu'en sortie.

Dans les résultats de simulations présentés dans la suite de ce chapitre, on a tenu compte du TOS en rajoutant au résultat brut la valeur $10\log(1-\rho^2)$ en sortie et $-10\log(1-\rho^2)$ en entrée.

Il faut tout de même préciser que cette modification ne prend en compte qu'un des aspects du TOS, le fait qu'une partie seulement du champ se propageant dans le sens du faisceau est transmis en entrée et en sortie de tube. L'effet que peut avoir le champ réfléchi qui se propage à l'intérieur du tube, dans le sens inverse, n'est pas pris en compte ; il est possible cependant que ce champ vienne perturber l'interaction, d'une part en se propageant à contre courant du faisceau, mais surtout si une fraction se réfléchit de nouveau sur l'entrée du tube, alors cette fraction se retrouve dans le sens du faisceau... C'est une des limites du code MVTRAD de ne pas pouvoir mesurer cet effet, qui est probablement faible, mais existant.

5.2.3 Comparaison des tensions de gain max

Avec le code MVTRAD, nous avons calculé les valeurs de tension de gain max en petit signal, et trouvé 3900 V à 5 GHz, et 4000 V à 7 GHz (±50 V dans les deux cas). En mesures, on avait trouvé 4050 V à 5 GHz et 4125 V à 7 GHz (cf. 5.1.3). Les simulations donnent ainsi une valeur de tension de gain max aux deux fréquences de travail plus petite que dans les mesures, d'environ 150 V, c'est à dire de 3.75 % environ.

La tension de gain max correspond à la meilleure synchronisation entre la vitesse de l'onde et celle du faisceau dans le tube ; la différence de tension de gain max entre le calcul et les mesures peut correspondre à une différence de vitesse de phase de l'onde, qui proviendrait d'un écart entre les paramètres à froid de l'hélice du vrai tube, et ceux qui ont été calculés. Elle peut aussi correspondre à une différence au niveau de la charge d'espace : sur la figure 2.8 du chapitre 2.2.4 du modèle de Pierce, nous avons indiqué comment le facteur de charge d'espace influençait la valeur optimale du paramètre de désynchronisme b.

D'autre part nous pouvons comparer les valeurs du gain maximum petit signal G_{max} entre mesures et simulations :

$$\begin{array}{rll} Mesures & G_{max}(5GHz) = 40dB & G_{max}(7GHz) = 60dB \\ MVTRAD & G_{max}(5GHz) > 45dB & G_{max}(7GHz) = 63dB \end{array}$$

On trouve un écart assez important pour le gain petit signal. Cela peut être dû à plusieurs paramètres : résistances de couplages, charge d'espace, prise en compte des pertes et des atténuations localisées.

5.2.4 Comparaison des puissances de saturation

La figure 5.10 présente sur le même graphe les valeurs des puissances d'entrée et de sortie à saturation obtenues en mesures, et celles du code MVTRAD (le TOS a été pris en compte). On a une bonne concordance des valeurs en entrée (moins de 1 dB d'écart) ; par contre on constate des écarts importants sur les puissances de sortie. Les résultats du calcul sont systématiquement plus grands que ceux des mesures : pour la fondamentale, l'écart est maximal en bas de bande (3 dB à 5 GHz) et diminue en milieu de bande (1.4 dB à 10 GHz). Pour la puissance de sortie sur

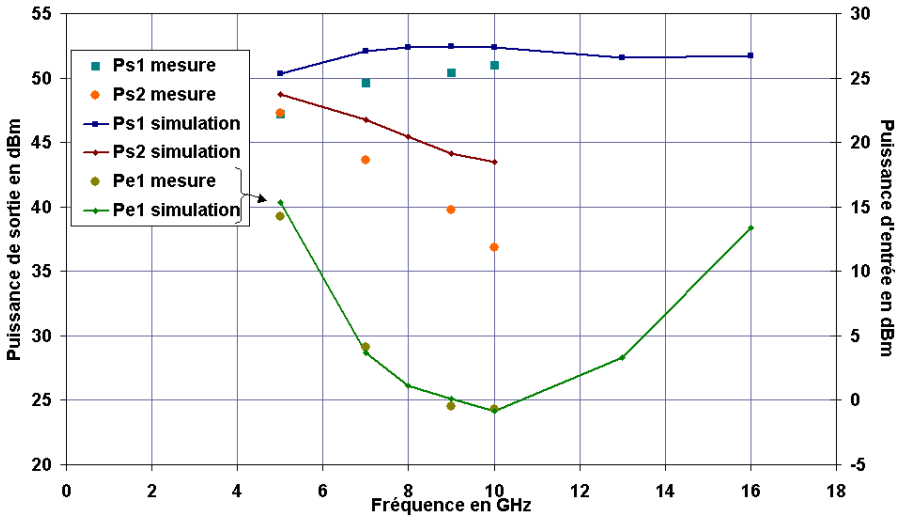


FIG. 5.10 – Comparaison entre mesures et calculs MVTRAD. Pe_1 est la puissance d'entrée sur fondamentale à la saturation ; Ps_1 et Ps_2 sont les puissances de sortie sur fondamentale et sur harmonique à saturation.

harmonique, par contre, l'écart se creuse lorsqu'on passe du bas au milieu de bande, puisqu'il passe de 1.5 dB pour 5 GHz à 6.6 dB pour 10 GHz (NB : la valeur donnée à 10 GHz pour Ps_2 simulation ne tient pas compte du TOS, car nous ne disposions pas de la mesure de TOS au delà de 18 GHz. On aurait sans doute une valeur Ps_2 un peu plus petite).

Ce sont des écarts très importants, puisqu'une différence de 3 dB correspond à un écart du simple au double.

Cette comparaison met en lumière un problème de représentation du tube et/ou de l'interaction dans les simulations. Il semble -et cela a été corroboré sur d'autres tubes- que l'écart entre mesures et résultats du calcul est plus accentué lorsqu'on a de forts taux d'harmoniques.

5.2.5 Comparaison pour l'injection d'harmonique

Pour compléter cette série de comparaisons, nous avons simulé le comportement du tube lorsqu'on y injecte fondamentale et harmonique. Nous avons procédé de la même manière que lors des mesures, c'est à dire que nous avons fixé la puissance d'entrée pour la fondamentale à sa valeur Pe_{sat} à saturation ; nous avons alors cherché la meilleure configuration de puissance et de déphasage en entrée pour la seconde harmonique. Cette configuration une fois trouvée, nous avons fait varier le déphasage Φ_2 entre 0 et 2π.

Les valeurs optimales pour Pe_1 et Pe_2 sont données sur le tableau de la figure 5.11 :

	5 GHz	7 GHz
MVTRAD	Pe1 = 15.37 dBm, Pe2 = 7.1 dBm	Pe1 = 3.65 dBm, Pe2 = 6.4 dBm
Mesures	Pe1 = 14.27 dBm, Pe2 = 2.5 dBm	Pe1 = 3.8 dBm, Pe2 = -2.55 dBm

FIG. 5.11 – Puissances d'entrée optimales pour l'injection d'harmonique

Il est nécessaire d'injecter un niveau d'harmonique largement supérieur dans le code, par rapport à la mesure.

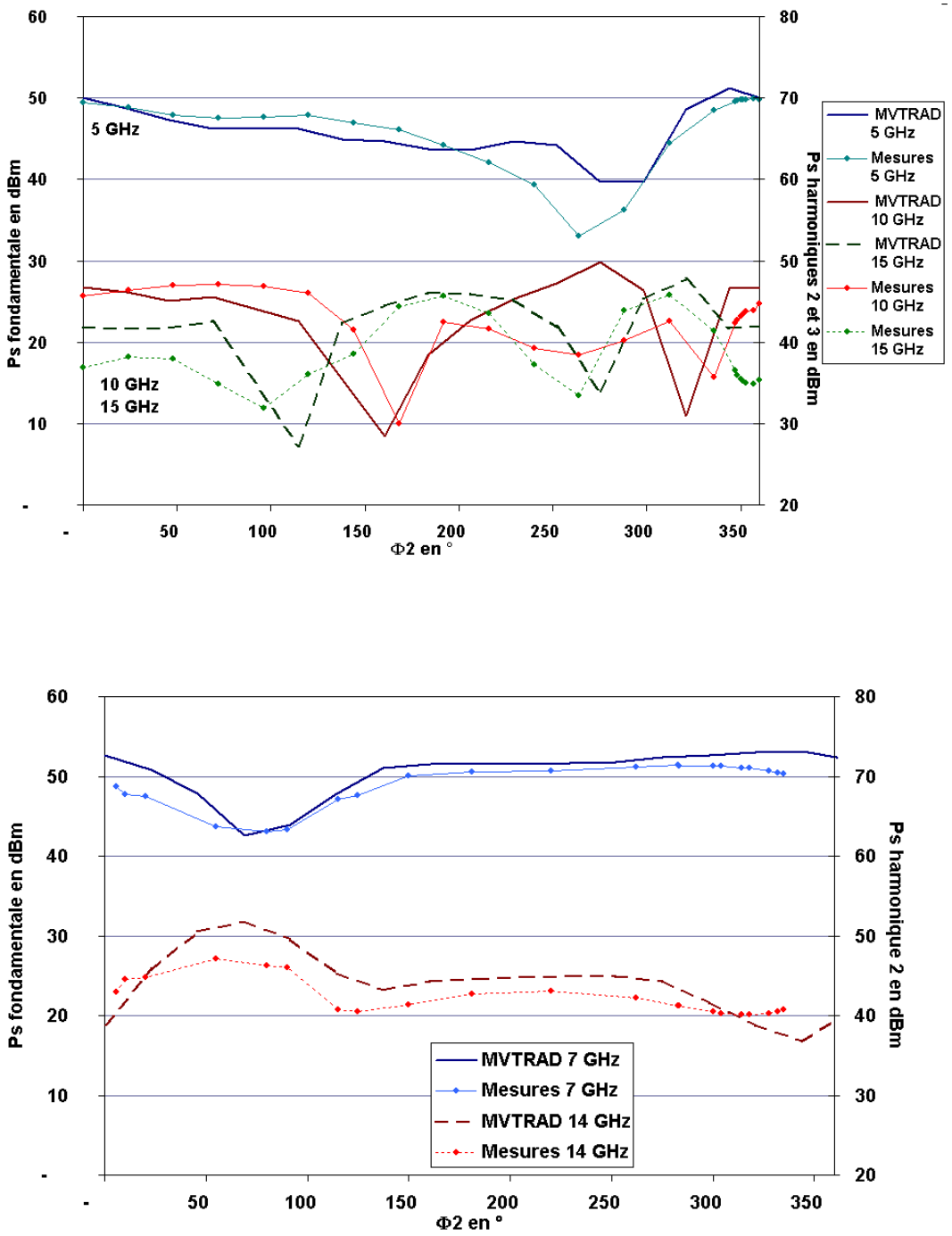


FIG. 5.12 – Injection de seconde harmonique à 5 GHz (a) et 7 GHz (b) : comparaison mesures/calculs MVTRAD.

Les graphes de puissances de sortie en fonction du déphasage Φ_2 sont présentés sur la figure 5.12. Pour plus de lisibilité, on a décalé les axes des ordonnées pour les harmoniques.

On trouve de nouveau de sensibles différences entre les simulations et les mesures ; vu les écarts observés pour le gain petit signal et la puissance de saturation, cela n'est pas très étonnant : les effets s'ajoutent d'autant plus que les harmoniques ont de l'importance. Ceci dit, au delà des différences, on trouve tout de même des résultats cohérents entre eux : en particulier, les creux et bosses des différentes harmoniques se correspondent assez bien, on retrouve les mêmes allures. Les valeurs maximales sur fondamentales sont les suivantes : 51.2 dBm à 5 GHz et 53.1 dBm à 7 GHz, contre respectivement 49.85 dBm et 51.38 dBm pour les mesures, c'est à dire des écarts simulations/mesures plus petits que ceux trouvés à la saturation (cf. 5.2.4).

5.2.6 Bilan des comparaisons mesures/simulations

Des comparaisons entre mesures et calculs MVTRAD on peut conclure qu'on ne reproduit pas toujours en simulation les résultats des mesures, et que les différences sont plutôt accentuées en présence de forts taux d'harmonique.

Ces mesures ont donc été l'occasion de relever plus systématiquement les différences de comportement, et de réfléchir à leur origine.

Il y a plusieurs aspects que l'on peut retenir : ce code ne prend pas en compte l'onde retour, réfléchie dans le tube, et la manière dont elle interfére éventuellement avec l'onde amplifiée. Par ailleurs il n'est pas facile de modéliser les atténuations localisées, qui sur le tube correspondent à une zone où le support de l'hélice est recouvert d'un matériau conducteur, qui annule quasiment la puissance du champ propagé dans l'hélice. Cela ne semble cependant pas être un facteur déterminant dans l'interaction : nous avons fait plusieurs essais en faisant varier de plusieurs dizaines de dB l'amplitude de ces atténuations dans MVTRAD : la variation sur les puissances de sortie était inférieure à 0.25 dB.

Les différences observées sur les valeurs et les tensions de gain max en petit signal nous portent à regarder de près les paramètres à froid (PAF) : ceux-ci ne sont pas un résultat du code MVTRAD, ils sont calculés par un autre code, tridimensionnel : HELICO. La précision sur ces paramètres est estimée à environ 1 %. Il est intéressant de remarquer que la tension de gain max est de l'ordre de $V_{gainmax} = \frac{m}{2e} v_p^2$, où v_p est la vitesse de l'onde à froid. Une différence de 1% sur la valeur de v_p calculée dans les PAF se transforme donc en écart de 2% sur la tension de gain max. Par ailleurs, la valeur du gain petit signal de Pierce est $GdB = 10\log(e) * \sqrt{3} C \beta_e z$, où l'on rappelle que $C = \sqrt[3]{\frac{R_c I_0}{4V_0}}$ et $\beta_e = \frac{\omega}{c}\frac{c}{v}$. Donc si l'écart est de 1% sur le paramètre $\frac{c}{v}$ et sur la résistance de couplage R_c, elle est de $\frac{4}{3} * 1\% = 1.3\%$ sur GdB. Cela contribue à expliquer les différences que nous avons trouvées sur les valeurs de gain max.

5.3 Conclusions sur le tube large bande

Les différences obtenues entre mesures et calculs sur le tube large bande nous ont poussé à étudier de plus près le problème de la représentation des TOP avec le code MVTRAD : dans la suite du chapitre, nous avons travaillé sur des tubes à bande étroite mieux simulés, en les faisant fonctionner avec de forts taux d'harmoniques, ce qui n'est pas leur mode de fonctionnement habituel.

Il reste en tout cas de cette série de mesures sur le tube large bande que nous avons pu vérifier expérimentalement la possibilité d'augmenter très sensiblement la puissance de sortie sur fondamentale d'un tube en injectant l'harmonique 2. Rappelons que nous avons réussi à augmenter de

86 % la puissance de sortie sur fondamentale à 5 GHz, et de 50 % à 7 GHz. Nous avons également une bonne caractérisation du phénomène, et particulièrement du rôle prépondérant du déphasage initial entre harmoniques. Ceci ouvre la voie à une mise en application de l'injection d'harmonique pour augmenter le rendement de tubes en fonctionnement.

5.4 Mesures sur des tubes spatiaux

Les tubes spatiaux, utilisés dans les télécommunications par satellites, sont des dispositifs à bande étroite : centrés sur une fréquence, ils ont une bande passante de 10-20 %. Lorsqu'une onde a sa fréquence comprise dans la bande passante, ce n'est pas le cas de ses harmoniques. Le fonctionnement de ces tubes est bien connu, mais on s'intéresse rarement à l'harmonique qui y est produite, du fait qu'elle n'est pas dans la bande du tube. De fait, il a parfois été constaté des écarts entre les codes et les mesures qui apparaissaient lorsqu'on commençait à regarder les harmoniques, ce qui montre qu'on en maîtrisait peut-être mal l'importance. Le rôle de l'harmonique dans les tubes spatiaux pourrait en particulier expliquer le plafonnement du rendement de certains tubes de la bande Ku, qui ont de forts taux d'harmoniques. Pour les tubes spatiaux, il est particulièrement important d'avoir le maximum de rendement : pour une puissance de sortie donnée, si on augmente le rendement, cela signifie qu'on peut diminuer l'énergie à fournir, ce qui est une économie en énergie, mais aussi en poids.

L'idée qu'une étude sérieuse du rôle de l'harmonique et de sa représentation était nécessaire s'est imposée à la fois comme une contribution à l'étude du rôle de l'harmonique sur le tube large bande, comme une mise au clair des résultats du code de calcul MVTRAD, et comme une perspective d'amélioration du rendement des tubes.

Pour étudier le rôle de l'harmonique 2 dans un tube spatial, il fallait qu'il en sorte une puissance qui ne soit pas négligeable devant la fondamentale. Pour ce faire, nous avons choisi une fréquence de travail dans la bande du tube, et nous avons piloté le tube à la fréquence $\frac{1}{2}$ de celle-ci. Ainsi la seconde harmonique de la fréquence d'entrée est bien dans la bande passante.

5.4.1 Mesures sur une série de tubes TH4765C

Dans un premier temps, nous avons fait une série de mesures sur des tubes de production, fabriqués selon le même cahier des charges. Cela permet de vérifier la reproductibilité des tubes, et d'avoir une moyenne sur l'ensemble des résultats, donc de s'affranchir du risque de travailler sur un tube atypique ou défectueux.

Ces TOP sont fabriqués par Thales et appartiennent à une série notée TH4765C. Ils fonctionnent en bande X, avec une bande passante prévue de 10.7 à 11.7 GHz. Ils peuvent fournir une puissance de 150 W environ. Afin d'être au milieu de la bande passante, nous avons choisi 11.2 GHz comme fréquence de travail. Le cahier des charges prévoit alors une tension d'hélice de 6150 V et un courant cathode fixé à 80 mA, dont la valeur exacte est ajustée au réglage.

En fin de tube, la puissance de sortie est récupérée par un guide d'onde, qui ne laisse pas passer les fréquences hors de la bande passante du tube. Nous ne pouvons donc mesurer en sortie que la puissance à la fréquence 11.2 GHz, et pas ses harmoniques ou sous-harmoniques.

Mesures en injection de fréquence 11.2 GHz

Pour chacun des 7 tubes testés, numérotés de 1 à 7, nous avons d'abord mesuré les caractéristiques lors de l'usage prévu du tube. Nous avons donc mesuré leur tension de gain max en petit signal, puis leur puissance de sortie à saturation, à la fréquence 11.2 GHz. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 5.13 qui porte la tension de gain max, la puissance de sortie à saturation et le courant mesuré sur la cathode pour chaque tube. Nous trouvons une tension de gain max moyenne de 6004 V, avec des valeurs extrêmes de 5970 V et 6073 V, soit un écart à la moyenne inférieur à 1.2 %, attestant d'une bonne reproductibilité des tubes. La valeur moyenne de puissance de sortie à la saturation est 148.6 W, avec des valeurs extrêmes de 146.1 W et 153.2

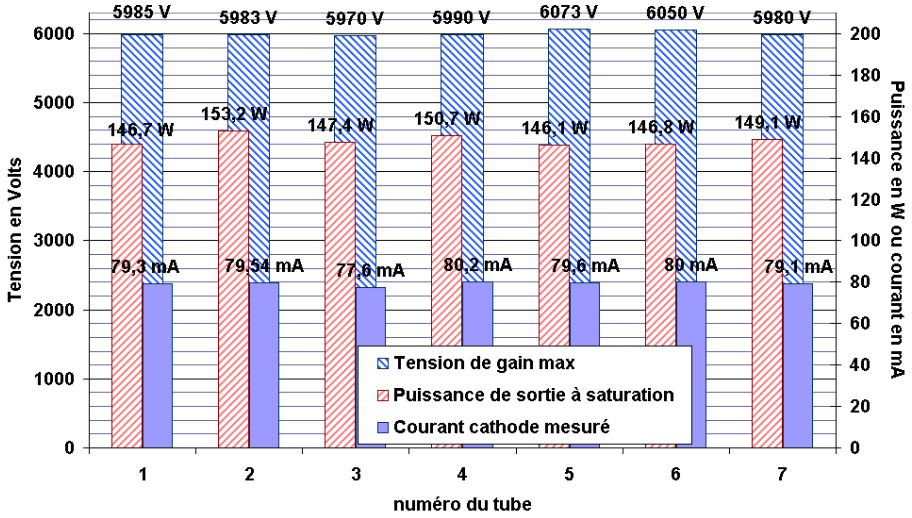


FIG. 5.13 – Valeurs mesurées sur les tubes TH4765C ; injection de 11.2 GHz.

W. L'écart à la moyenne est inférieur à 3.1 %. Le courant de cathode mesuré a comme valeurs extrêmes 77.6 mA et 80.2 mA, soit un écart à la moyenne (79.33 mA) de 2.2 %.

Mesures en injection de fréquence 5.6 GHz

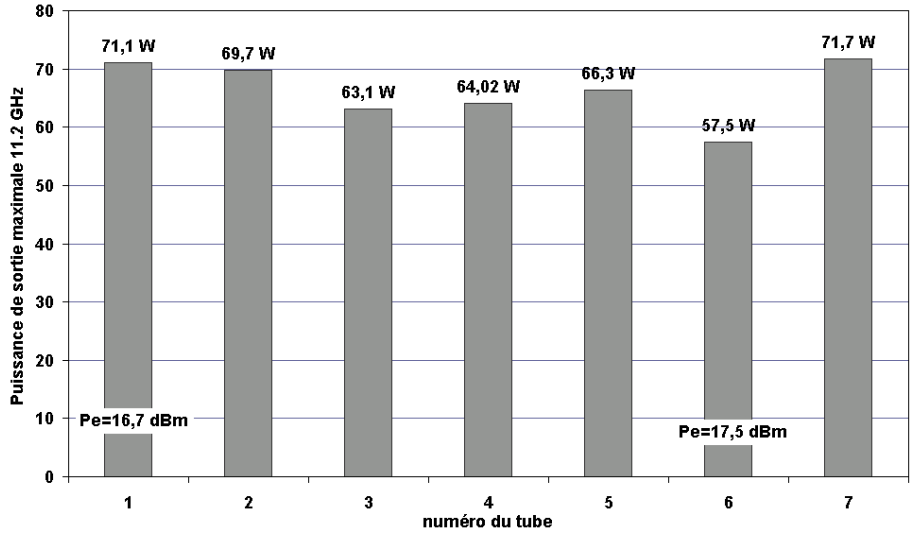


FIG. 5.14 – Valeurs mesurées sur les tubes TH4765C ; injection de 5.6 GHz.

Afin d'étudier la formation d'harmonique dans ces tubes, nous y avons injecté la puissance 5.6 GHz, dont l'harmonique est donc 11.2 GHz. Nous avons réglé la puissance d'entrée 5.6 GHz afin d'obtenir le maximum de puissance 11.2 GHz en sortie. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 5.14 qui donne la puissance de sortie maximale obtenue à 11.2 GHz. Pour deux tubes, nous avons aussi mesuré la puissance d'entrée 5.6 GHz.

On a cette fois une puissance moyenne de 66.2 W, c'est à dire un peu moins de la moitié de la puissance qu'on obtient en injectant directement 11.2 GHz en entrée. Nous nous attendions à avoir moins de puissance 11.2 GHz en injectant 5.6 GHz au lieu de 11.2 GHz : dans ce cas, la puissance

11.2 GHz n'est créée qu'à partir de 5.6 GHz, donc elle part d'un niveau nul en début de tube, et il est logique qu'elle atteigne des puissances moins élevées en fin de tube. Par ailleurs, elle est le produit d'une fréquence qui est moins bien amplifiée par le tube.

Les résultats font apparaître des écarts légèrement plus grands que précédemment, puisque la valeur la plus basse, 57.5 W est éloignée de 13 % de la valeur moyenne.

Par ailleurs, pour deux tubes, nous avons mesuré l'évolution de la puissance de sortie 11.2 GHz en fonction de la puissance d'entrée 5.6 GHz, et les résultats seront présentés directement avec les simulations dans le paragraphe 5.5.1.

Enfin, pour le tube n°7, nous avons mesuré la tension de gain max petit signal à 16.8 GHz (harmonique 3), et trouvé 5370 V.

5.4.2 Mesures sur un tube 175W Ku

Nous avons fait le même type de mesures que sur les tubes TH4765C sur un tube désigné par 175W Ku. Comme son nom l'indique, c'est un tube en bande Ku, sa bande passante étant 11.75-12.75 GHz, et il est susceptible de sortir 175 W dans sa bande. Ce tube était un prototype, si bien que les résultats ne peuvent pas être comparés sur plusieurs tubes. Par contre, il a été monté avec une sortie coaxiale, ce qui a le gros avantage que l'on peut mesurer la puissance de sortie sur une large bande passante, et pas seulement dans la bande Ku.

Nous avons choisi comme fréquence de travail 12.25 GHz (milieu de bande), et le point de fonctionnement préconisé à cette fréquence correspond à une tension d'hélice de 6270 V et un courant d'anode de 91.5 mA.

Pour pouvoir mesurer la puissance de sortie sur le bolomètre, ou sur l'analyseur de spectre, sans dépasser les puissances maximales qui sont préconisées en entrée, nous avons dû placer un atténuateur 30 dB après le tube ; cet atténuateur lui-même n'est pas prévu pour supporter plus de 50 W en entrée en continu. Aussi, nous avons fait deux séries de mesures : pour la première, nous avons fixé le courant de cathode à 34.8 mA. Nous avons alors vérifié que la puissance de sortie maximale à 12.25 GHz est de 33 W, donc en dessous de la limite. Ceci étant, nous avons réglé l'alimentation du tube de manière à ce qu'elle envoie des impulsions de courant : le courant de cathode est modulé par une fréquence de 200 Hz, de manière à ce qu'il soit égal à 34.8 mA sur une demi-période, et à 0 sur l'autre. Sa valeur crête reste 34.8 mA, mais sa valeur moyenne devient 17.4 mA. Le signal de sortie est lui aussi modulé. Nous avons vérifié que la puissance moyenne de sortie était alors 16.5 W, et la puissance crête 33 W. Pour la deuxième série de mesures, nous avons modulé le courant à 10 %, c'est à dire de manière à ce qu'il soit égal à 91.5 mA pendant 1/10e du temps, et à 0 les pendant les 9/10 restants. Il a une valeur moyenne de 9.15 mA. En sortie du tube, à saturation, nous avons alors une puissance crête de 164 W, mais une puissance moyenne de 16.4 W, qui n'abîme pas l'atténuateur. D'une manière générale, nous avons vérifié que les valeurs de puissance crête que l'on obtient en sortie ne dépendent pas de la modulation du courant. Ce sont donc systématiquement ces puissances crête que nous donnerons.

Les éléments du montage utilisé pour ces mesures sont indiqués sur la figure 5.15. L'ampli en sortie de générateur HF permet d'avoir des niveaux de puissances d'entrée suffisants et les harmoniques produites par cet ampli sont coupées, avec le filtre passe-bas 13.6 GHz lorsqu'on injecte 12.25 GHz, et avec le filtre passe-bas 8 GHz lorsqu'on injecte 6.125 GHz. Un premier bolomètre permet de mesurer la puissance d'entrée. En sortie de tube, l'atténuateur 30 dB est suivi d'un coupleur 50/50 de manière à mesurer les puissances de sortie sur l'analyseur de spectre et/ou sur le bolomètre large bande.

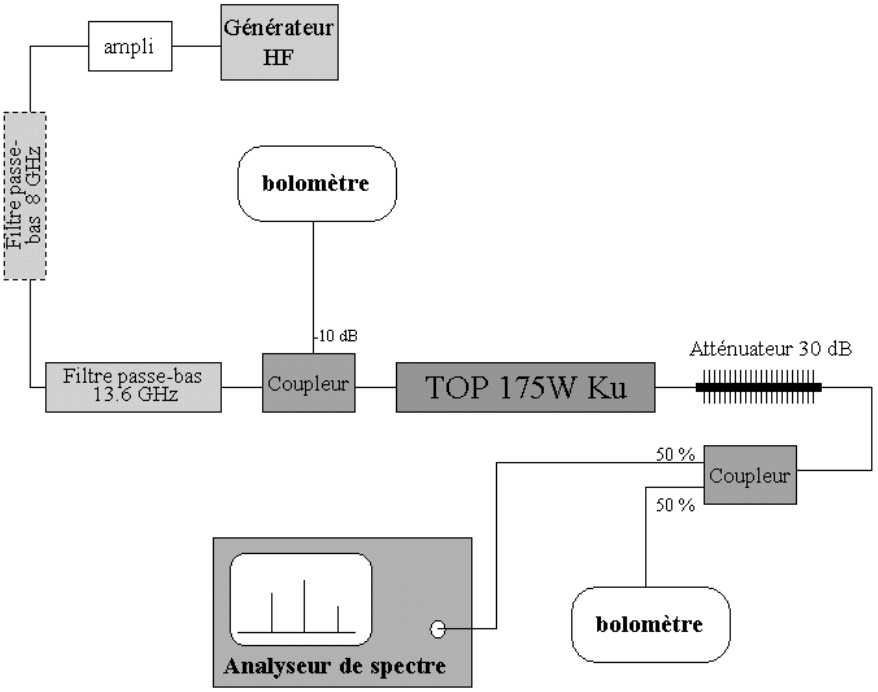


FIG. 5.15 – Montage pour les mesures sur le tube 175W Ku

Tension de gain max en petit signal et rendement de l'interaction

Nous avons mesuré, pour les deux séries de mesures, les tensions de gain max petit signal aux fréquences 6.125 GHz, 12.25 GHz et 18.375 GHz.

	Ik = 34.8 mA			Ik = 91.5 mA		
Fréquence	6.125 GHz	12.25 GHz	18.375 GHz	6.125 GHz	12.25 GHz	18.375 GHz
Tension de gain max en Volts	7100	5870	5250	7100	6050	5530

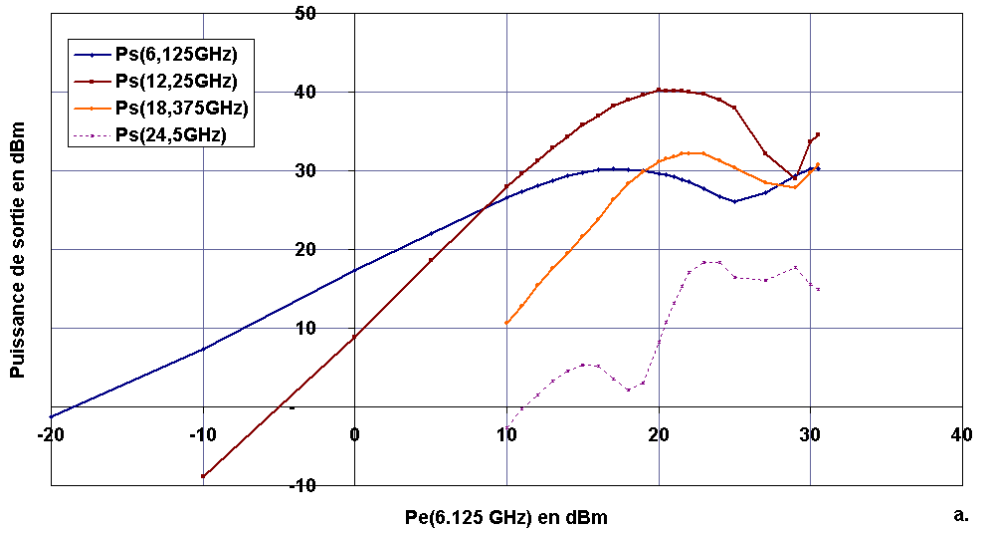
FIG. 5.16 – Mesures de tension de gain max sur le tube 175W Ku.

On remarque qu'à 12.25 et 18.375 GHz les tensions de gain max sont plus petites pour le courant de 34.8 mA que pour celui de 91.5 mA : la vitesse de l'onde en présence du faisceau, qui détermine la tension de gain max, est dépendante de l'intensité du faisceau.

Par ailleurs, en injectant uniquement de la puissance à 12.25 GHz -fonctionnement habituel du tube- , nous avons mesuré 33 W comme puissance de sortie à saturation pour un courant de 34.8 mA, et 164 W pour un courant de 91.5 mA ; dans tous les cas, la tension d'hélice est fixée à 6270 V. Ainsi le rendement de l'interaction dépend du courant puisqu'il est plus petit à 34.8 mA. En effet le rendement à 34.8 mA est égal à 33/(6270*0.0348)= 15 %. A 91.5 mA, il est égal à : 164/(6270*0.0915)= 29 %.

Mesures en injection de fréquence 6.125 GHz

Comme avec les tubes précédents, nous avons injecté de la puissance à 6.125 GHz ($Pe(6.125)$) en entrée de tube, en cherchant à optimiser la puissance de sortie sur 12.25 GHz. Cette fois, nous avons pu tracer, en fonction de $Pe(6.125)$, les puissances de sortie pour quatre fréquences



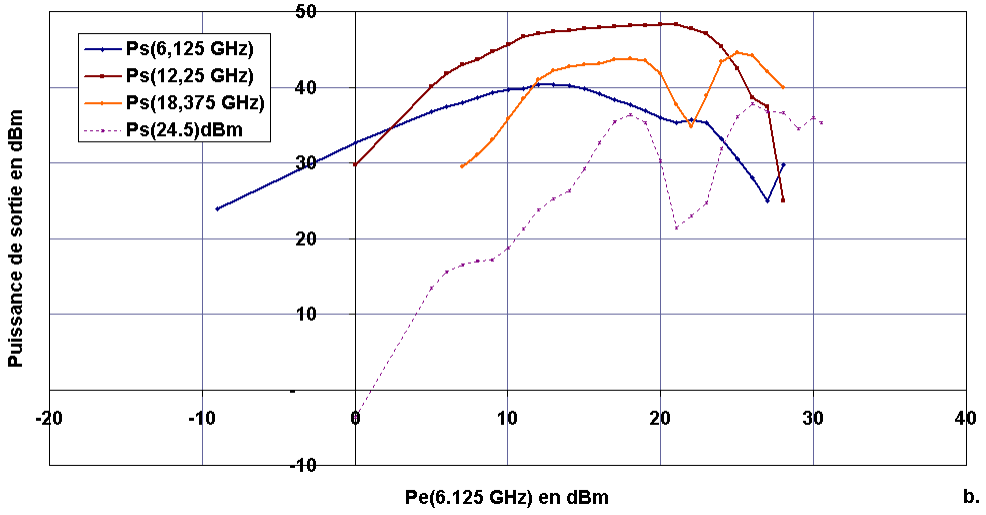


FIG. 5.17 – Puissances de sortie en fonction de la puissance d'entrée 6.125 GHz. Mesures sur le tube 175W Ku à 34.8 mA (a) et 91.5 mA (b).

différentes, comme cela est présenté sur les figures 5.17 (a) et (b). Il faut cependant mentionner que les valeurs de puissance de sortie à 24.5 GHz ne sont pas exactes, car nous ne connaissions pas le couplage du banc de sortie à cette fréquence. Elles sont donc données à titre indicatif.

Sur les deux graphes, on observe comment la puissance 6.125 GHz, initialement prépondérante, est d'abord dépassée par son harmonique 2 à 12.25 GHz, puis par son harmonique 3 à 18.375 GHz, au fur et à mesure que l'on augmente sa puissance d'entrée. Alors que pour 6.125 GHz, la pente avant saturation est de 1dB/dB, celle de 12.25 GHz est de 2dB/dB. On retrouve ici un résultat du chapitre 3.3, exprimé dans les trois premières lignes (3.67-3.69), de l'expression de la puissance de l'harmonique 2, $\|A_{2s}(y)\|^2$ en petit signal : les normes des nombres α et b_{11} sont proportionnelles à A_{10}^2, donc, lorsque A_{20} est nul comme c'est le cas ici, $\|A_{2s}(y)\|^2$ est proportionnel à A_{10}^4. Par contre, la puissance sur fondamentale $\|A_{1s}(y)\|^2$ est proportionnelle à A_{10}^2.

Sur ces graphes, il apparaît que l'harmonique 3, à 18.375 GHz, doit probablement jouer un rôle important dans l'interaction, puisqu'elle atteint des niveaux de puissance supérieurs à ceux de la fondamentale.

5.5 Comparaison avec la simulation pour les tubes spatiaux

Aussi bien pour les tubes TH4765C que pour le 175W Ku, les paramètres à froid calculés par le code HELICO sont utilisés en entrée par le code MVTRAD.

5.5.1 Simulations sur les tubes TH4765C

Simulations avec les paramètres à froid initiaux

Comme paramètre d'entrée, nous avons fixé le courant de cathode à 79 mA. Nous avons alors commencé par chercher la tension de gain max en petit signal, et nous avons trouvé 6075 V à 11.2 GHz et 5300 V à 16.8 GHz, ce qui est à comparer avec la valeur moyenne en mesures de 6004 V à 11.2 GHz, et la valeur mesurée sur le tube n°7 de 5370 V à 16.8 GHz. Par ailleurs, nous avons cherché la puissance de sortie à saturation en injectant 11.2 GHz, en fixant, comme dans les mesures, la tension d'hélice à 6150 V. Nous avons trouvé une valeur de 156 W, donc légèrement supérieure à la moyenne sur les tubes mesurés, qui était de 148.6 W.

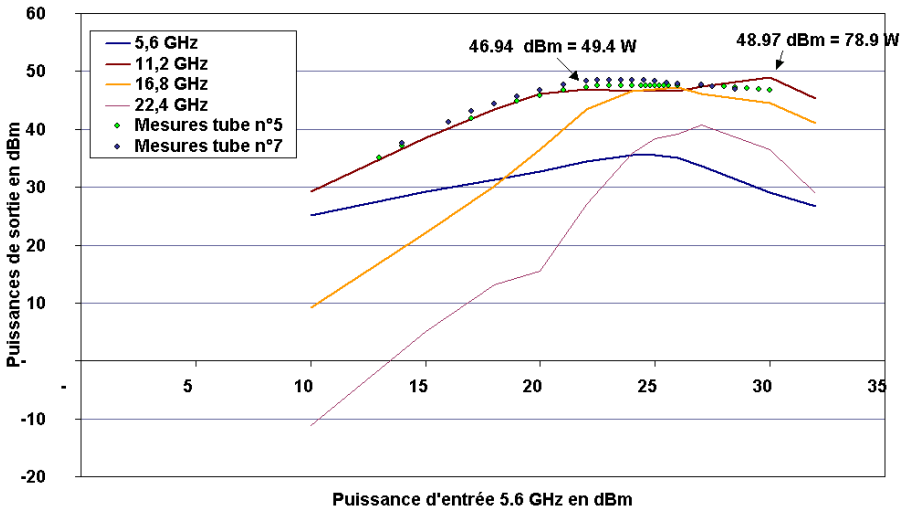


FIG. 5.18 – Simulation des tubes TH4765C, PAF initiaux : injection de puissance 5.6 GHz.

Enfin, nous avons fait une simulation d'injection à 5.6 GHz, avec un calcul MVTRAD comprenant 3 harmoniques en plus de 5.6 GHz, en faisant varier la puissance d'entrée 5.6 GHz. Là aussi, nous avons fixé la tension d'hélice à 6150 V. La puissance de sortie aux quatre fréquences est tracée en fonction de la puissance d'entrée 5.6 GHz sur la figure 5.18. Sur la même figure, nous avons porté les points de mesures de puissance de sortie 11.2 GHz pour les tubes n°5 et 7. On note un écart de 1 à 2 dB entre les simulations et les mesures. Une différence remarquable sur la courbe de sortie 11.2 GHz est la forme, qui présente deux maxima successifs pour la simulation, alors qu'il n'y a qu'un maximum sur les deux courbes de mesures. Le creux sur 11.2 GHz entre ces deux maxima correspond, pour la simulation, à un endroit où l'onde à 16.8 GHz vient dépasser l'onde à 11.2 GHz, et lui "pompe" de la puissance : il semble donc que la présence -erronée au regard des mesures- des deux maxima successifs soit liée à une représentation inexacte de la puissance à 16.8 GHz.

Nous soulignons ici l'importance dans l'interaction de l'harmonique $\frac{3F}{2}$, à 16.8 GHz, qui est susceptible de modifier la puissance de sortie sur F à 11.2 GHz.

Il y a donc des écarts entre simulations et mesures : le premier écart constaté est sur les tensions de gain max, et nous avons déjà indiqué que la tension de gain max était en grande partie déterminée par les paramètres à froid, et plus précisément par le paramètre $\frac{c}{v}$. Il est donc intéressant de mesurer quelle est l'influence du paramètre $\frac{c}{v}$ aux différentes fréquences sur les grandeurs de sortie, et pour cela d'en modifier la valeur pour la simulation.

Variation du paramètre $\frac{c}{v}$

Aussi nous avons transformé directement les fichiers de paramètres à froid utilisés par MVTRAD, en modifiant d'abord les fréquences séparément les unes des autres :

- cas n°1 : on augmente $\frac{c}{v}$ de 2 % à 5.6 GHz
- cas n°2 on augmente $\frac{c}{v}$ de 2 % à 11.2 GHz
- cas n°3 on augmente $\frac{c}{v}$ de 2 % à 16.8 GHz

En plus de ces trois tests, nous avons changé les paramètres à froid en même temps à 11.2 GHz et 16.8 GHz, dans le but de recaler les tensions de gain max simulées sur celles mesurées sur le tube n° 7, qui sont respectivement 5980 V et 5370 V. Pour cela, nous avons fait le raisonnement déjà présenté au paragraphe 5.2.6 : sur la fréquence 11.2 GHz, $V_{gainmax}(simulé)$ est supérieur de 1.67 % à $V_{gainmax}(mesuré)$. Pour se recaler, il faut donc diminuer la vitesse de l'onde à froid v_p simulée de 0.83 %, ce qui revient à augmenter $\frac{c}{v}$ de 0.8 %. A 16.8 GHz, $V_{gainmax}(simulé)$ est inférieur de 1.89 % à $V_{gainmax}(mesuré)$. Pour se recaler, il faut donc augmenter la vitesse de l'onde à froid v_p simulée de 0.94 %, ce qui revient à diminuer $\frac{c}{v}$ de 1 %. Le quatrième cas est donc :

- cas n°4 on augmente $\frac{c}{v}$ de 0.8 % à 11.2 GHz et on diminue $\frac{c}{v}$ de 1 % à 16.8 GHz

Pour le cas n°4, les nouvelles tensions de gain max résultant de la simulation sont alors 5980 V à 11.2 GHz et 5350 V à 16.8 GHz. Ces valeurs étant calculées à une précision de 20 V près, on peut dire qu'on s'est assez bien recalé sur les mesures.

Pour ces quatre cas, en plus du cas initial, nous avons tracé la puissance de sortie sur 11.2 GHz en fonction de la puissance d'entrée 5.6 GHz, comme cela est présenté sur la figure 5.19 où nous avons également reporté les points de mesure des deux tubes.

Ces résultats autorisent des conclusions intéressantes.

Avant la saturation, toutes les courbes coïncident, ainsi que les points de mesures, sauf la courbe du cas n°1 ; A la saturation, dans les simulations, on retrouve pour les cas n°1, 3 et 4, la présence de deux maxima successifs, le second étant plus haut que le premier ; par contre pour le cas n°2, où l'on a modifié $\frac{c}{v}$ à 11.2 GHz, il n'y a qu'un maximum, comme pour les mesures. Plus généralement,

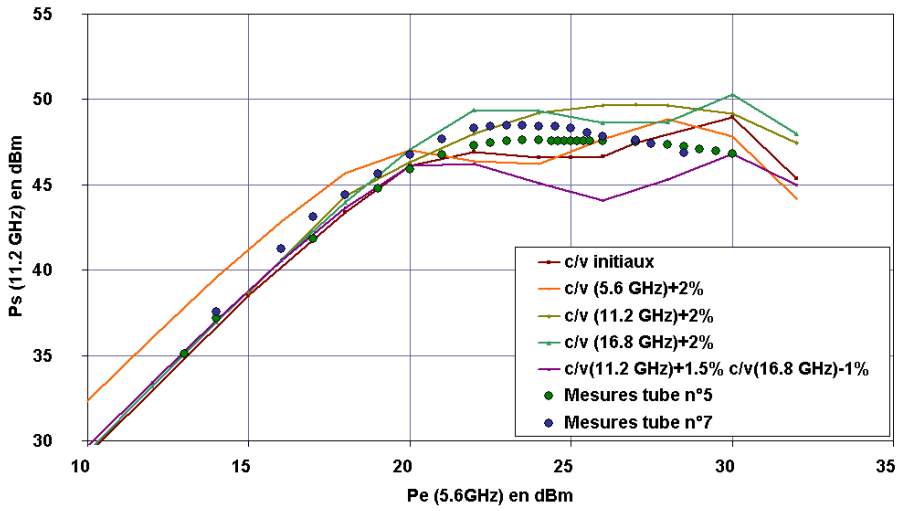


FIG. 5.19 – Simulations avec différentes valeurs de $\frac{c}{v}$ et mesures. Puissance de sortie 11.2 GHz en fonction de la puissance d'entrée 5.6 GHz.

les courbes de simulations enveloppent les mesures. Les écarts entre les simulations avec différents $\frac{c}{v}$ sont plus grands que les écarts initialement observés entre mesures et simulations. Cela souligne la forte dépendance des calculs, notamment à saturation, vis à vis des paramètres à froid. Les puissances de sortie varient sur une plage de 5 dB selon les cas.

Il faut souligner le fait que la valeur de $\frac{c}{v}$ sur l'harmonique 16.8 GHz a également une influence notable : la puissance de sortie à saturation sur 11.2 GHz varie de 1 à 3 dB lorsqu'on augmente $\frac{c}{v}$ de 2 % à 16.8 GHz. Ceci renforce la constatation que le rôle de l'harmonique $\frac{3F}{2}$ est important dans cette configuration.

Ces résultats mettent en évidence la forte sensibilité des simulations en injection de 5.6 GHz vis à vis des paramètres à froid, et ce pour les trois fréquences 5.6 GHz, 11.2 GHz et 16.8 GHz. Il nous semble donc qu'il doit être possible de faire coïncider mesures et simulations, en ajustant les $\frac{c}{v}$.

Il nous semble ainsi avoir identifié une cause première des différences constatées entre simulations et mesures lorsque l'on travaille avec des forts taux d'harmoniques. Une petite variation, inférieure à 2 %, sur les paramètres à froid calculés, peut suffire à donner des résultats différents de plusieurs dB sur les puissances de sortie.

Tant que l'on travaille sur une seule fréquence, un écart en $\frac{c}{v}$ entraîne un écart de tension de gain max qui ne change que peu les résultats. Lorsque l'on fonctionne avec une forte interaction entre les harmoniques (ici 11.2 GHz et 16.8 GHz), on a largement observé dans les chapitres précédents le rôle déterminant du déphasage entre harmoniques et fondamentale. Les mesures sur un tube large bande ont montré un écart jusqu'à 15 dB sur la puissance de sortie sur fondamentale lorsqu'on varie le déphasage entre fondamentale et harmonique. Or un écart, même faible, sur les $\frac{c}{v}$, signifie un écart sur les vitesses de phase des différentes fréquences, qui implique un écart, non négligeable celui-là, sur le déphasage relatif entre ces fréquences. Pour s'en convaincre, faisons le calcul suivant : la phase d'une onde de fréquence ω, au bout d'une distance L, est à peu près :

$$\beta_e L = \frac{\omega}{c}.\frac{c}{v}.L \tag{5.3}$$

Pour une valeur de $\frac{c}{v}$ de 8, une fréquence de 11.2 GHz et une longueur de tube L=120 mm, un écart de 2 % sur $\frac{c}{v}$ entraîne un écart de 4.5 rad sur la phase, c'est à dire un écart considérable !

5.5.2 Simulations sur le tube 175W Ku

Pour le tube 175W Ku, les simulations ont également été effectuées avec des fichiers de paramètres à froid qui avaient été calculés par le code HELICO. Il était par avance précisé que les résultats de la comparaison entre simulations et mesures sur ce tube n'étaient pas vraiment satisfaisants, ceci venant probablement du tube lui-même. Pour autant nous avons mené une série de simulations sur ce tube, avec l'avantage qu'il était cette fois possible de comparer les résultats en sortie de tube sur plusieurs fréquences.

Recherche des tensions de gain max

	Ik = 34.8 mA			Ik = 91.5 mA		
Fréquence	6.125 GHz	12.25 GHz	18.375 GHz	6.125 GHz	12.25 GHz	18.375 GHz
Mesures	7100	5870	5250	7100	6050	5530
MVTRAD initiaux	7700	6400	5400	7800	6400	5650
MVTRAD modifiés	7550	5800	5330	7600	5900	

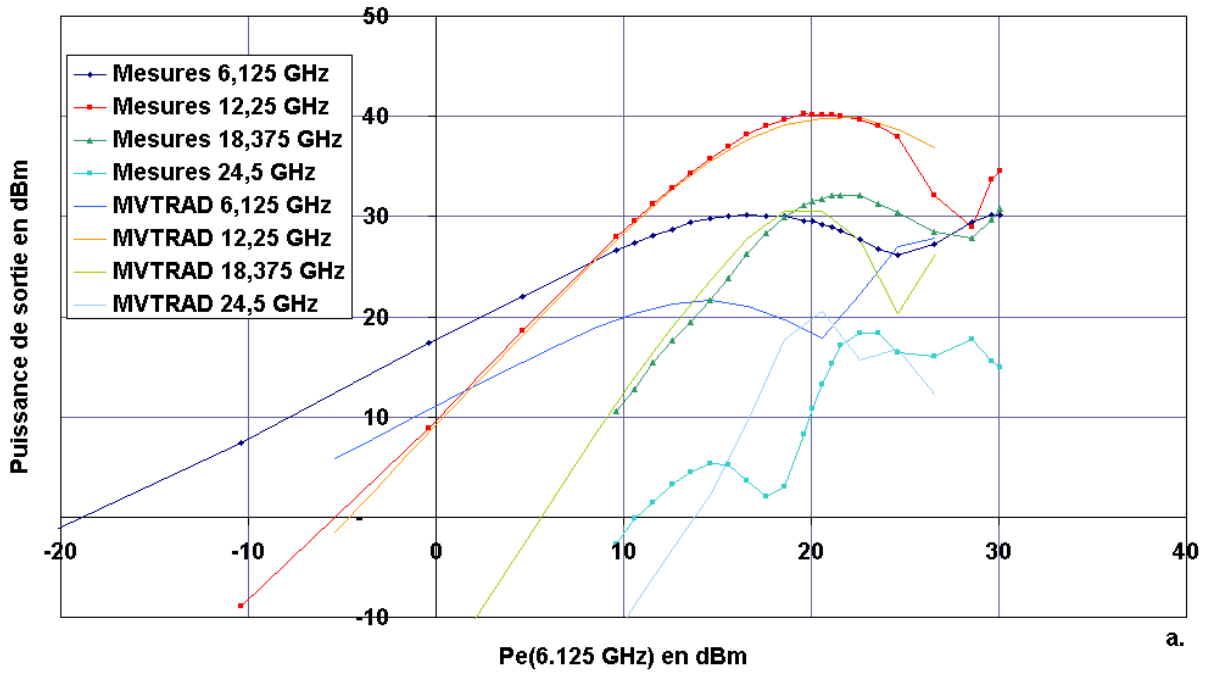
FIG. 5.20 – Tensions de gain max : mesures et simulations.

Les tensions de gain max ont été calculées avec les paramètres à froid initiaux pour les trois fréquences : 6.125 GHz, 12.25 GHz et 18.375 GHz. Les résultats apparaissent dans le tableau de la figure 5.20, où l'on observe des différences importantes entre ces simulations et les mesures. Aussi, nous avons tenté de nous recaler sur les tensions de gain max correspondant au courant de 34.8 mA, avec le même raisonnement que pour les tubes TH4765C, en modifiant les paramètres à froid aux trois fréquences : $\frac{c}{v}$ a été augmenté de 4 % à 6.125 GHz, de 4.3 % à 12.25 GHz et de 1.4 % à 18.375 GHz. Les nouvelles valeurs de tension de gain max résultants de la simulation avec ces valeurs sont données dans la dernière ligne du tableau 5.20. Il apparaît que l'on s'est rapproché des valeurs expérimentales, sans les atteindre, notamment à 6.125 GHz.

Injection de fréquence 6.125 GHz

Pour chaque courant de cathode I_k, et avec les deux séries de $\frac{c}{v}$, initiale et modifiée, nous avons calculé les puissances de sortie aux différentes fréquences, en injectant en entrée de tube la fréquence 6.125 GHz, et en imposant une tension d'hélice de 6270 V. Les résultats sont présentés sur les figures 5.21 et 5.22.

Les courbes de simulations ont été décalées de manière à faire coïncider les puissances de sortie 12.25 GHz en petit signal : pour le courant de 34.8 mA, nous avons diminué $P_e(6.125GHz)$ de 5.4 dBm pour les $\frac{c}{v}$ initiaux, et de 3.4 dBm pour les $\frac{c}{v}$ modifiés. Pour le courant de 91.5 mA, nous avons diminué $P_e(6.125GHz)$ de 10 dBm pour les $\frac{c}{v}$ initiaux, et de 6 dBm pour les $\frac{c}{v}$ modifiés. Ces décalages de puissance d'entrée correspondent à une différence de gain petit signal, qui provient de la différence de tension de gain max. De même, on remarque sur chacun des graphes que la puissance de sortie 6.125 GHz mesurée est supérieure de 4 à 8 dB à la puissance de sortie 6.125 GHz calculée, pour les mêmes raisons. Par contre, les courbes de puissance de sortie 18.375 GHz mesurées et simulées se superposent bien.



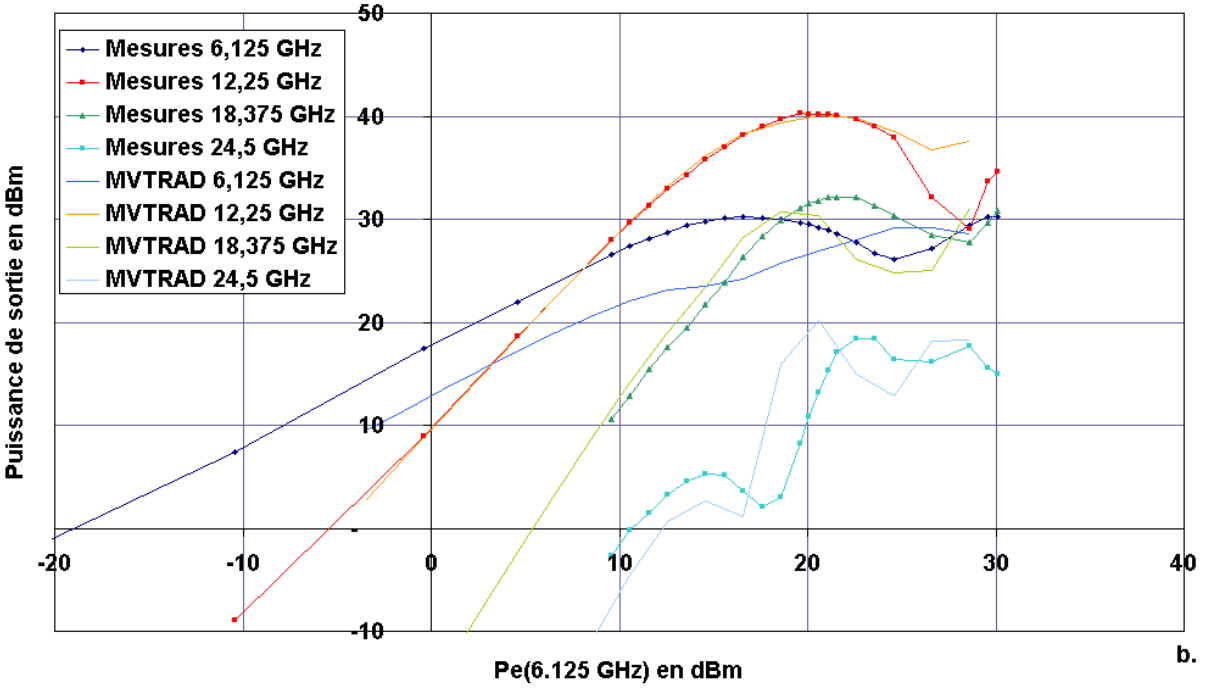
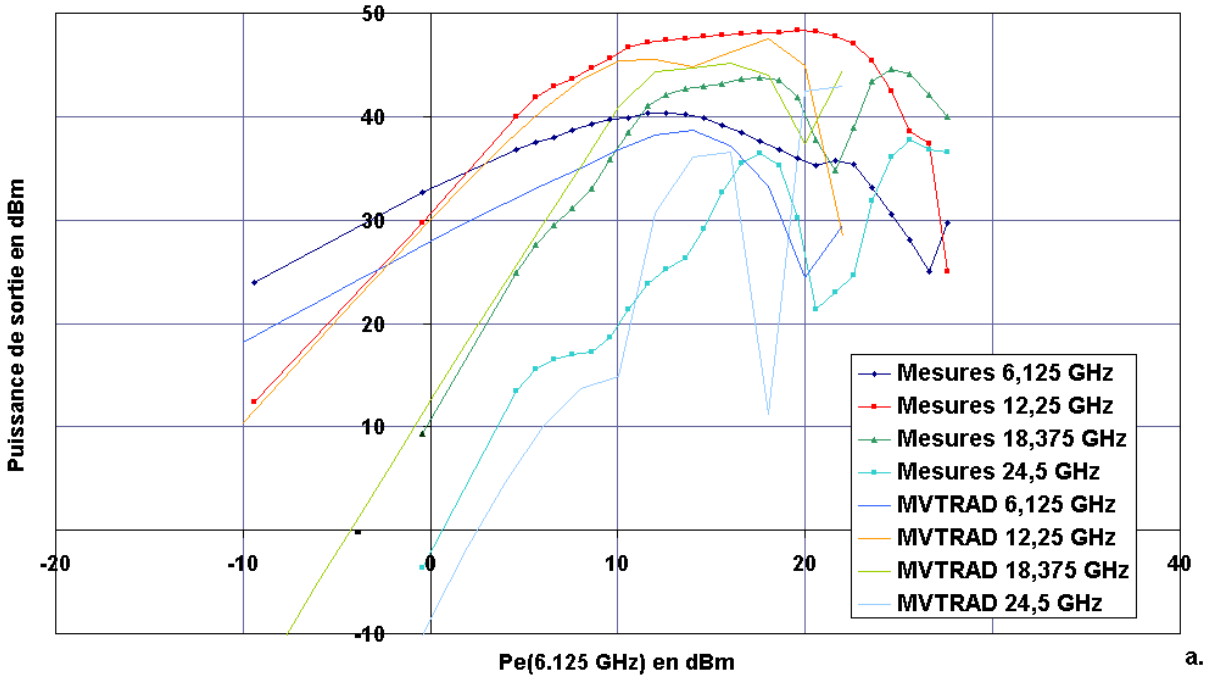


FIG. 5.21 – Puissances de sortie en fonction de la puissance d'entrée 6.125 GHz. Comparaison entre mesures et simulations, avec $\frac{c}{v}$ initiaux (a) et $\frac{c}{v}$ modifiés (b). Courant $I_k = 34.8$ mA



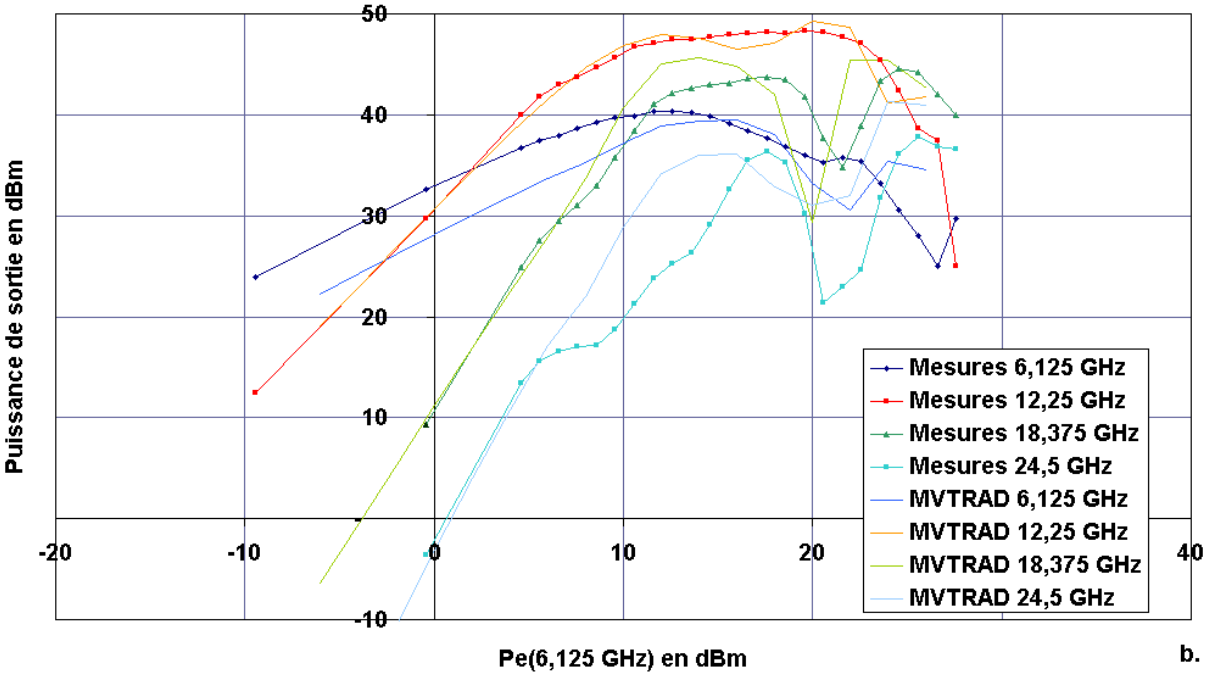


FIG. 5.22 – Puissances de sortie en fonction de la puissance d'entrée 6.125 GHz. Comparaison entre mesures et simulations, avec $\frac{c}{v}$ initiaux (a) et $\frac{c}{v}$ modifiés (b). Courant $I_k = 91.5$ mA

Pour le courant de 34.8 mA, les courbes de puissance de sortie 12.25 GHz mesurées se superposent bien, y compris à la saturation. Le changement de $\frac{c}{v}$ a surtout de l'influence aux trois autres fréquences, sans entraîner une réelle amélioration de la coïncidence mesures/calculs. A 18.375 GHz, le maximum de puissance de sortie reste inférieur de 1.5 dB pour le calcul. A 24.5 GHz, il est plus difficile de conclure, puisque comme on l'a déjà précisé, les mesures n'étaient pas très précises. On a en tout cas des courbes de même allure.

Pour le courant de 91.5 mA, on retrouve pour les simulations une courbe de puissance de sortie 12.25 GHz avec deux maxima successifs, comme pour les tubes TH4765C. Cette fois, le changement des $\frac{c}{v}$ amène une meilleure correspondance mesures/calculs à 12.25 GHz. A 18.375 GHz, on continue d'avoir des maxima différents d'environ 1.5 dB entre mesures et calculs.

Conclusion sur le tube 175W Ku

On retrouve cette constatation qu'une mauvaise représentation des paramètres à froid du tube entraîne des écarts importants lorsqu'on travaille avec de forts taux d'harmoniques. Cependant, le code de calcul MVTRAD donne des résultats qui coïncident assez bien avec les mesures, à partir du moment où l'on tient compte de ces écarts. Il nous semble, comme pour les tubes TH4765C, que l'on doit pouvoir obtenir une bien meilleure correspondance entre mesures et calculs en ajustant les paramètres $\frac{c}{v}$, et ce non seulement sur la puissance de sortie 12.25 GHz, prépondérante, mais également pour les autres fréquences.

5.6 Conclusions sur les tubes spatiaux

Un des objectifs des mesures et simulations sur les tubes spatiaux était de comprendre les écarts observés entre les résultats du code MVTRAD et les mesures sur différents tubes, notamment dans le cas de forts taux d'harmonique. Les résultats que nous avons obtenus contribuent à valider le code de calcul proprement dit, et pointent plutôt du doigt l'imprécision dans le calcul des paramètres à froid : cette imprécision reste peu influente lorsqu'on travaille avec une seule fréquence prépondérante, mais elle a des conséquences importantes dès qu'il faut tenir compte des harmoniques.

Par ailleurs, cette étude ouvre des perspectives d'amélioration pour le rendement des tubes spatiaux, à bande étroite : pour optimiser la puissance de sortie à une fréquence F dans la bande passante, une solution est de fonctionner en injectant la puissance en entrée à la fréquence $\frac{F}{2}$, et en favorisant l'interaction entre $\frac{F}{2}$, F et $\frac{3F}{2}$ de manière à augmenter la puissance de sortie sur F. Deux méthodes pourraient être utilisées :

- ✶ injecter, en plus de $\frac{F}{2}$, de la puissance à F et/ou $\frac{3F}{2}$ dans les conditions de phase et d'amplitudes optimales
- ✶ transformer l'hélice du TOP de manière à créer les conditions optimales d'interaction entre l'onde $\frac{F}{2}$ injectée et les ondes F et $\frac{3F}{2}$ produites dans le tube.

En optimisant la puissance de sortie sur F, le rendement des tubes spatiaux peut être augmenté, ce qui permet de diminuer la puissance électrique à fournir au dispositif .L'enjeu est particulièrement important pour les tubes spatiaux, puisque l'énergie fournie aux TOP constitue une grande partie de l'énergie totale consommée dans un satellite de télécommunications ; par ailleurs, en limitant l'énergie à fournir aux tubes, on diminue la taille et le poids des alimentations.

Conclusion

Les Tubes à Ondes Progressives (TOP) sont des dispositifs hyperfréquences utilisés dans les systèmes télécommunications spatiales ainsi que dans les systèmes radars pour amplifier les ondes hyperfréquences sur lesquelles sont codées les informations (téléphone, télévision..). Ces dispositifs nécessitent donc un fort gain, un rendement élevé, ainsi qu'une bonne qualité de transmission du signal. Or pour des puissances d'entrée élevées, on observe une saturation du gain de sortie, ce qui en limite le rendement, ainsi qu'un phénomène de glissement de phase et une production de signaux d'inter-modulation entre les fréquences, responsables d'une dégradation du signal. Ces phénomènes sont liés à la non-linéarité de l'interaction onde-faisceau d'électrons, qui est au coeur du principe de fonctionnement d'un TOP. L'objectif de la thèse, qui a fait l'objet d'un contrat CIFRE avec Thales Electron Devices, un des leaders mondiaux dans la production de tubes hyperfréquences, était de mieux comprendre l'origine de cette non-linéarité, afin d'en réduire les effets, c'est à dire d'améliorer la linéarité des tubes.

L'aspect non-linéaire des tubes a fait l'objet de nombreuses études, et de multiples solutions ont été proposées pour en réduire les effets.

La démarche présentée dans cette thèse consiste à mettre en évidence les différents aspects de la non-linéarité des tubes, en détaillant le processus d'interaction entre le faisceau d'électrons et le champ éléctromagnétique. Cette étude nous a donné les outils nécessaires pour expliquer et mesurer comment il était possible limiter la saturation des tubes en injectant la seconde harmonique 2F en plus de la fréquence fondamentale F à amplifier. Nous avons effectué une vaste étude du rôle de la seconde harmonique sur la puissance de sortie d'un TOP, en présentant une modélisation théorique de l'interaction, puis en effectuant une campagne de simulations sur un code de Thales, et enfin en menant une étude expérimentale.

Modélisation de l'interaction dans un TOP ; le rôle de l'harmonique

La modélisation précise du fonctionnement d'un Tube à Ondes Progressives implique de résoudre les équations de Maxwell dans une structure compliquée (hélice + fourreau + supports diélectriques), en présence d'un faisceau d'électrons, et de résoudre, de manière couplée, l'équation du mouvement relative à ce faisceau. Pour s'approcher de la représentation exacte d'un TOP, il est nécessaire d'utiliser des codes de simulation informatiques.

Notre but étant de mettre en évidence la saturation dans un TOP, nous avons pris le parti de construire plusieurs modèles simplifiés de l'interaction, qui permettent de travailler avec des résultats analytiques, et d'avoir une meilleure appréhension des phénomènes décrits. Tous ces modèles ont en commun d'être unidimensionnels, et de négliger les effets de la charge d'espace.

Après avoir présenté le modèle de Pierce, modèle eulérien de gain fort et de petit signal, qui

ne prend qu'une fréquence en compte, et qui est la base de nombreux codes de calculs, nous avons d'abord développé un modèle de type "Laser à Electrons Libres" : un modèle lagrangien, de grand signal et de gain faible. Dans un premier temps, ce modèle nous a permis de visualiser le mouvement des électrons sous l'effet d'un champ électrique, et d'expliquer le phénomène de saturation inertielle : il y a une limite à l'énergie qu'un faisceau d'électrons est capable de céder à un champ dans des conditions données, et cette limite est intrinsèque au mouvement des électrons. Puis nous avons pu expliquer qualitativement comment on pourrait améliorer le regroupement des électrons afin d'augmenter l'énergie qu'ils sont capables de céder au champ, autrement dit de repousser cette limite : il s'agit de transformer la forme du champ électrique en y ajoutant des harmoniques. Enfin, nous avons pu quantifier cet effet, en calculant le courant de modulation créé par un faisceau d'électrons sous l'effet d'un champ composé d'une fondamentale et de sa seconde harmonique : dans la meilleure configuration d'injection de seconde harmonique, nous avons calculé une augmentation de 16 % de la puissance sur fondamentale extraite au faisceau d'électrons.

D'un autre côté nous avons développé un modèle eulérien, qui part du même formalisme que celui de Pierce, mais qui prend en compte la présence de plusieurs harmoniques dans le signal. Ce qui est mis en avant dans un tel modèle est la croissance de la seconde harmonique et de la fondamentale, et la manière dont elles se "pompent" mutuellement de l'énergie. Nous avons réussi à écrire l'expression analytique des ondes fondamentale et harmonique amplifiées dans un tel modèle, ce qui offre un outil pour calculer comment l'injection d'harmonique intervient sur la puissance de sortie d'un tube.

Dans ces deux modèles (Laser à Electrons Libres et eulérien), nous avons mis en évidence le rôle des paramètres d'injection, en particulier le rôle primordial du déphasage initial entre les deux ondes : la puissance de sortie sur fondamentale est susceptible d'être multipliée par trois ou quatre, lorsqu'on ne modifie que ce déphasage. Par ailleurs, nous avons trouvé que le maximum de fondamentale correspondait au minimum d'harmonique et vice-versa : il y a un transfert d'énergie entre fondamentale et harmonique, qui selon la configuration, favorise l'une ou l'autre.

Ces deux modèles représentent deux aspects limités de la réalité, puisque le premier ne tient pas compte de l'effet du faisceau sur le champ, et que le second ne contient pas la saturation inertielle. En conséquence, ils mettent en avant deux aspects différents de la non-linéarité de l'interaction dans un TOP : saturation et génération d'harmoniques, mais nous avons expliqué qu'il s'agissait de deux aspects, intimement liés, d'un même phénomène.

Enfin avons développé puis amélioré un modèle présenté par Rowe, qui reste un modèle analytique, unidimensionnel et sans charge d'espace. C'est un modèle lagrangien, et nous avons montré qu'il contenait les deux modèles précédents. Nous y avons retrouvé la saturation de la puissance de sortie lorsqu'on injectait une seule fréquence : ceci a été une occasion de vérifier que ce n'est pas la charge d'espace qui est la cause principale de la saturation des TOP, contrairement à ce qui avait parfois été affirmé.

Nous n'avons développé le modèle de Rowe que pour une seule fréquence, sans harmonique, si bien qu'une des perspectives ouvertes par cette thèse est de reprendre ce modèle, qui a le double avantage d'être analytique et de contenir toute la non-linéarité de l'interaction, et de le développer en présence d'harmoniques.

Ce travail de modélisation de l'interaction onde/électrons contribue à une représentation complète des différents aspects de la non-linéarité dans un Tube à Ondes Progressives. Il nous a donné les outils pour montrer que l'injection de seconde harmonique dans un TOP permettait d'en améliorer les performances, ainsi que pour estimer l'effet des différents paramètres d'injection. La démarche

poursuivie était de développer des modèles avec lesquels on garde une vision sur les équations et les paramètres mis en jeu, c'est pourquoi nous avons développé au maximum des modèles analytiques.

L'injection d'harmonique : simulations numériques

Nous avons mené une campagne de simulations numériques afin de mesurer le rôle des différents paramètres d'injection d'harmonique : nous avons utilisé le code TUBH, développé par Thales. La démarche n'était plus la même que celle décrite plus haut : TUBH est un code numérique, bien plus proche de la réalité que les modèles que nous avons décrits, et nous l'avons utilisé comme pour une étude "expérimentale". Il intègre le calcul de l'interaction pas à pas sur la seule dimension de la propagation et les temps de calculs sont relativement courts.

Nous avons commencé par décrire une "hélice magique", dans laquelle la fondamentale et son harmonique ont la même vitesse et le même coefficient d'amplification, puis nous avons fait varier la vitesse et la résistance de couplage (donc le coefficient d'amplification) de l'harmonique. Nous avons trouvé la configuration optimale (puissance de sortie sur fondamentale la plus forte) lorsque les deux ondes se propageaient à la même vitesse, et que l'harmonique avait un coefficient d'amplification plus fort que celui de la fondamentale. Nous avons remarqué que dans les meilleures configurations il existait une zone du tube où les deux ondes avaient à peu près la même amplitude, ce qui atteste d'un bon couplage.

Le rôle crucial du déphasage a également été souligné : dans l'hélice magique on est passé de 31.88 dBm à 48.38 dBm en ne changeant que la valeur du déphasage initial entre les ondes.

Enfin, un autre aspect du couplage entre faisceau, fondamentale et harmonique a pu être mis en évidence : le transfert d'énergie entre fondamentale et harmonique favorise l'une ou l'autre selon la configuration ; cependant il ne s'agit pas seulement d'un transfert entre deux ondes, car l'énergie totale extraite au faisceau varie elle aussi. Optimiser la puissance de sortie sur fondamentale en injectant de l'harmonique, c'est à la fois optimiser le couplage entre fréquences en faveur de la fondamentale, et optimiser l'extraction d'énergie totale au faisceau.

Résultats expérimentaux et recommandations

Nous avons mené plusieurs campagnes de mesures sur des tubes construits à Thales. La première série de mesures présentée dans cette thèse a été effectuée sur un tube large bande 4.5-18 GHz. Nous y avons mesuré les effets de l'injection d'harmonique en installant un circuit d'entrée qui sépare en deux branches la puissance fondamentale F : sur une des branches, la fréquence est doublée à 2F, avant d'être de nouveau couplée avec F en entrée du tube. Les niveaux relatifs de puissance F et 2F, ainsi que la valeur du déphasage entre elles peuvent être choisis et contrôlés. Nous avons ainsi pu vérifier qu'il était possible d'augmenter la puissance de sortie sur fondamentale d'un TOP en injectant la seconde harmonique : avec une fréquence F de 5 GHz, dans la meilleure configuration d'injection d'harmonique, nous avons extrait une puissance de sortie de 49.85 dBm sur fondamentale, au lieu de 47.17 dBm sans injection d'harmonique. Cette augmentation de 2.7 dB correspond à +86 % en puissance. Avec une fréquence F de 7 GHz, l'augmentation était de 1.75 dB, soit +50 % en puissance.

L'injection d'harmonique dans les tubes large bande apparaît donc comme une solution efficace pour augmenter la puissance de sortie sur fondamentale, et en conséquence pour augmenter le rendement des tubes, ainsi que leur zone de linéarité. C'est une solution qui a d'ailleurs déjà été appliquée, mais qui pose certains problèmes pratiques : en particulier il est nécessaire de fixer avec

précision le déphasage entre les deux ondes, sous peine de perdre de la puissance au lieu d'en gagner ; les tubes large bande ayant comme propriété d'amplifier une grande plage de fréquence, il faut que ce déphasage optimal soit fixé pour chaque fréquence, et ce n'est pas toujours le même. Une solution qui pourrait être envisagée dans l'avenir est de transformer le tube de manière à ce qu'il fabrique lui-même l'harmonique dans des conditions qui permettraient à cette harmonique d'interagir favorablement avec la fondamentale.

Le travail présenté dans cette thèse forme une base d'outils, de connaissances et de vérifications du rôle de l'harmonique dans les TOP, base qui est nécessaire pour mener à bien le développement de telles solutions.

La seconde campagne de mesures concerne des tubes spatiaux, à bande étroite : ces tubes ont une bande passante d'une dizaine de % autour d'une fréquence F, donc ils ne sont pas conçus pour amplifier à la fois une fondamentale et son harmonique. Nous cherchions pourtant à étudier le fonctionnement de ces tubes en présence d'harmonique, aussi nous avons travaillé en pilotant les tubes avec la fréquence $\frac{F}{2}$ en entrée (donc hors de la bande passante), dont l'harmonique F est dans la bande passante. Cette étude était notamment motivée par la constatation suivante : les codes de calcul numériques, en particulier le code MVTRAD de Thales, donnent des résultats qui peuvent être assez éloignés des mesures, plus particulièrement dans les situations où il y a de forts taux d'harmonique.

La première constatation est que l'on peut produire de la puissance F en injectant uniquement $\frac{F}{2}$, mais à un niveau plus faible qu'en injectant directement F. Par exemple, avec le tube TH4765C, dont la bande passante est 10.7-11.7 GHz, la puissance extraite en sortie sur 11.2 GHz est de 149 W en pilotant à 11.2 GHz et de 66 W en pilotant à 5.6 GHz.

Une autre constatation provient de la comparaison entre résultats de mesures et de simulations, et de nos tentatives pour simuler au mieux les résultats des tubes : la précision des paramètres à froid, et en particulier de la vitesse de propagation des ondes "à froid" (sans faisceau) exprimée par le paramètre $\frac{c}{v}$, a une importance plus déterminante lorsqu'il y a de fort taux d'harmoniques. En effet, en décalant de 1 ou 2 % la valeur de $\frac{c}{v}$ dans le code, et en pilotant à $\frac{F}{2}$, nous avons observé des écarts de plusieurs dB sur les puissances de sortie sur F. Ces écarts sont plus grands qu'en pilotant à F. Cela concorde avec le rôle primordial du déphasage entre harmoniques que nous avons mis en évidence : un écart sur la vitesse des ondes entraîne, au bout d'une certaine distance, un écart sur le déphasage entre les ondes : pour de faibles taux d'harmonique, cela ne change pas grand chose, mais lorsqu'il y a une forte interaction entre harmoniques, cet écart sur le déphasage est très important. Il est à noter que les trois fréquences $\frac{F}{2}$, F et $\frac{3F}{2}$ jouent un rôle important dans cette interaction.

Cette constatation a donc contribué à répondre à une interrogation qui se posait pour les codes de simulations de Thales, et devrait permettre de mieux simuler les tubes lorsqu'ils fonctionnent avec de forts taux d'harmonique. L'enjeu est important : la bonne prise en compte de l'harmonique dans les tubes, même lorsque ce n'est pas le phénomène le plus fort, est nécessaire pour en améliorer les performances en terme de rendement et de linéarité.

Enfin, ce travail a ouvert des perspectives d'amélioration pour le rendement des tubes spatiaux utilisant les effets de l'harmonique. L'idée est de favoriser l'interaction entre harmoniques en injectant de la puissance à $\frac{F}{2}$, ce qui permet d'avoir une interaction entre les fréquences $\frac{F}{2}$, F et $\frac{3F}{2}$. Dans des conditions favorables, il nous semble que la puissance de sortie sur F pourrait être optimisée, jusqu'à dépasser les valeurs qu'on atteint en injectant uniquement de la puissance F en entrée de tube.

Ces conditions favorables pourraient être obtenues de plusieurs façons : en injectant en entrée de tube plusieurs fréquences $\frac{F}{2}$ et F, ou même $\frac{3F}{2}$, et en contrôlant à l'entrée de tube les niveaux relatifs de puissance ainsi que les déphasages. Une autre solution serait d'injecter uniquement $\frac{F}{2}$, et de jouer sur les paramètres à froid de l'hélice, notamment sur son pas, de manière à ce que les conditions de phase et d'amplitude optimales soient créées à l'intérieur du tube. Il est plus facile de réaliser des dispositifs appliqués à ces solutions pour les tubes spatiaux que pour les tubes large bande, puisque la bande de fréquence pour laquelle ils doivent fonctionner est plus étroite.

Comme pour les tubes large bande, le développement de telles solutions pourra s'appuyer sur les modèles et les résultats présentés dans cette thèse.

Annexe A

expression de $< (\dot{y} - \dot{y}_0)|_2 >$

Nous donnons ici le calcul aboutissant à l'expression de $< (\dot{y} - \dot{y}_0)|_2 >$ donnée dans l'équation 2.65. A l'ordre 1, nous avions développé y en $y = y_0 + \dot{y}_0 t$. Pour aller à l'ordre 2, nous rajoutons un terme d'ordre supérieur : $y = y_0 + \dot{y}_0 t + y_1$. Par ailleurs nous avions déjà écrit le développement à l'ordre 2 de $\dot{y} - \dot{y}_0$:

$$\dot{y} - \dot{y}_0 = \frac{U_0}{2\dot{y}_0}(\cos ky - \cos ky_0) - \frac{1}{8}\frac{U_0^2}{\dot{y}_0^3}(\cos ky - \cos ky_0)^2 \tag{A.1}$$

Il faut expliciter $(\cos ky - \cos ky_0)$ poussé jusqu'à l'ordre 2.

$$\begin{aligned}
\cos ky - \cos ky_0 &= -2\sin\frac{ky + ky_0}{2}.\sin\frac{ky - ky_0}{2} && \text{(A.2)}\\
&= - \ 2\sin(ky_0 + \frac{k\dot{y}_0}{2}t + \frac{ky_1}{2}).\sin(\frac{k\dot{y}_0}{2}t + \frac{ky_1}{2}) && \text{(A.3)}\\
&= -2\sin(\frac{k\dot{y}_0}{2}t).\sin(ky_0 + \frac{k\dot{y}_0}{2}t).\cos^2(\frac{ky_1}{2}) && \text{(A.4)}\\
&- \ 2\cos(\frac{k\dot{y}_0}{2}t).\sin(ky_0 + \frac{k\dot{y}_0}{2}t).\cos(\frac{ky_1}{2}).\sin(k\frac{y_1}{2}) && \text{(A.5)}\\
&- \ 2\sin(\frac{k\dot{y}_0}{2}t).\cos(ky_0 + \frac{k\dot{y}_0}{2}t).\cos(k\frac{y_1}{2}).\sin(k\frac{y_1}{2}) && \text{(A.6)}\\
&- \ 2\cos(k\frac{\dot{y}_0}{2}t).\cos(ky_0 + \frac{k\dot{y}_0}{2}t).\sin^2(k\frac{y_1}{2}) && \text{(A.7)}
\end{aligned}$$

On néglige le dernier terme, contenant $\sin^2\frac{ky_1}{2}$, qui est d'un ordre supérieur à 1 en ky_1 ; on remplace $\cos\frac{ky_1}{2}$ par 1 et $\sin\frac{ky_1}{2}$ par $\frac{ky_1}{2}$. On obtient alors :

$$\cos ky - \cos ky_0 = -2\sin(\frac{k\dot{y}_0}{2}t).\sin(ky_0 + \frac{k\dot{y}_0}{2}t) - 2\sin(ky_0 + k\dot{y}_0 t).\frac{ky_1}{2} \tag{A.8}$$

L'étape suivante consiste à développer l'expression (A.1) de $(\dot{y} - \dot{y}_0)$, à partir de celle de $(\cos ky - \cos ky_0)$, en ne gardant que les termes d'ordre inférieurs ou égaux à 1 en ky_1 :

$$\begin{aligned}
\dot{y} - \dot{y}_0 &= -\frac{U_0}{\dot{y}_0}[\sin(\frac{k\dot{y}_0}{2}t).\sin(ky_0 + \frac{k\dot{y}_0}{2}t) + \sin(ky_0 + k\dot{y}_0 t).\frac{ky_1}{2}]\\
&- \ \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{\dot{y}_0^3}[\sin^2(\frac{k\dot{y}_0}{2}t).\sin^2(ky_0 + \frac{k\dot{y}_0}{2}t)\\
&\quad +2(\sin\frac{k\dot{y}_0}{2}t).\sin(ky_0 + \frac{k\dot{y}_0}{2}t).\sin(ky_0 + k\dot{y}_0 t).\frac{ky_1}{2}] && \text{(A.9)}
\end{aligned}$$

Il faut calculer y_1 : on l'exprime comme la primitive selon t de $\dot{y} - \dot{y}_0$ à l'ordre 1, qui est défini

par la relation 2.62 :

$$(\dot{y} - \dot{y}_0)|_1 = \frac{U_0}{2\dot{y}_0}[\cos k(y_0 + \dot{y}_0 t) - \cos k y_0] \tag{A.10}$$

d'où

$$y_1 = \frac{U_0}{2\dot{y}_0}\left[\frac{1}{k\dot{y}_0}\sin k(y_0 + \dot{y}_0 t) - \frac{1}{k\dot{y}_0}\sin k y_0 - t\cos k y_0\right] \tag{A.11}$$

La constante a été ajustée de manière à imposer $y_1 = 0$ en $t = 0$. En remplaçant y_1 par son expression on obtient pour $\dot{y} - \dot{y}_0$ à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
\dot{y} - \dot{y}_0 &= -\frac{U_0}{\dot{y}_0}[\sin(\frac{k\dot{y}_0}{2}t).\sin(ky_0 + \frac{k\dot{y}_0}{2}t)] && \text{(A.12)}\\
&+ \frac{kU_0^2}{4\dot{y}_0^2}[t\cos(ky_0)\sin(ky_0 + k\dot{y}_0 t) - \frac{1}{k\dot{y}_0}.\sin^2(ky_0 + k\dot{y}_0 t)\\
&\quad + \frac{1}{k\dot{y}_0}.\sin(ky_0 + k\dot{y}_0 t).\sin(ky_0)] && \text{(A.13)}\\
&- \frac{U_0^2}{2\dot{y}_0^3}\sin^2(\frac{k\dot{y}_0}{2}t).\sin^2(ky_0 + \frac{k\dot{y}_0}{2}t) && \text{(A.14)}\\
&- \frac{kU_0^3}{4\dot{y}_0^4}\sin(\frac{k\dot{y}_0}{2}t).\sin(ky_0 + \frac{k\dot{y}_0}{2}t).\sin(ky_0 + k\dot{y}_0 t)\\
&\quad .[\frac{1}{k\dot{y}_0}\sin(ky_0 + k\dot{y}_0 t) - \frac{1}{k\dot{y}_0}\sin k y_0 - t\cos k y_0] && \text{(A.15)}
\end{aligned}$$

On reconnaît dans le terme (A.12) l'expression au premier ordre de $(y - y_0)|_1$. Les trois autres termes correspondent à $(y - y_0)|_2$. On prend la moyenne de ces termes lorsque y_0 varie sur la période $[0, \frac{2\pi}{k}]$.

- le terme (A.13) donne $\frac{U_0^2}{8\dot{y}_0^3}(k\dot{y}_0 t\sin(k\dot{y}_0 t) - 1 + \cos(k\dot{y}_0 t)$
- le terme (A.14) donne $\frac{U_0^2}{8\dot{y}_0^3}(\cos(k\dot{y}_0 t) - 1)$
- le terme (A.15) donne 0

On trouve ainsi le résultat annoncé dans le chapitre sur le modèle FEL par la formule 2.65 :

$$< (\dot{y} - \dot{y}_0)|_2 >= \frac{U_0^2}{4\dot{y}_0^3}(\frac{k\dot{y}_0 t}{2}\sin k\dot{y}_0 t + \cos k\dot{y}_0 t - 1) \tag{A.16}$$

Annexe B

Solutions exactes de l'équation du pendule

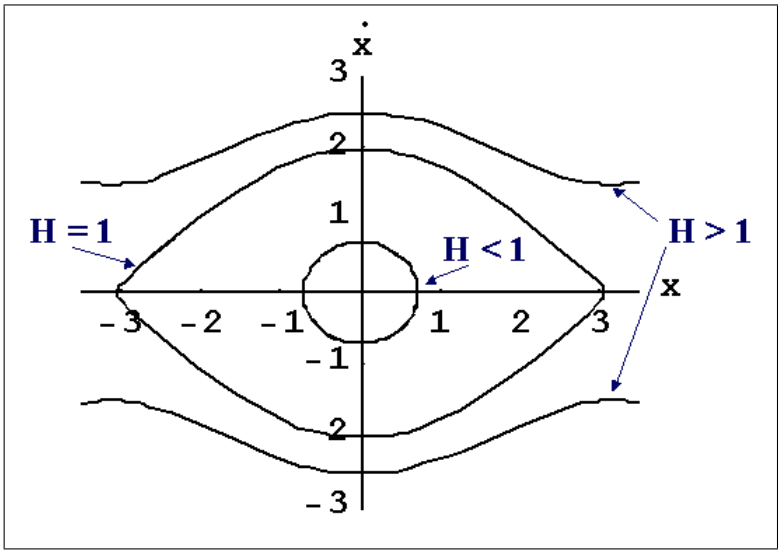


Fig. B.1 – Caractérisation du paramètre H dans un diagramme position/vitesse

Dans cette annexe nous cherchons les solutions exactes de l'équation "du pendule" :

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \cos x = \frac{\dot{x}_0^2}{2} - \cos x_0 = H \tag{B.1}$$

équation que l'on écrit sous une forme un peu différente :

$$dt^2(H + \cos x) = \frac{dx^2}{2} \tag{B.2}$$

puis, en considérant dt et dx du même signe, c'est à dire $\dot{x}$ positif :

$$dt = \frac{dx}{(2H + 2\cos x)^{\frac{1}{2}}} \tag{B.3}$$

On intègre cette équation : entre 0 et t à gauche, et entre $x_0 = x(t=0)$ et x à droite :

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(2H + 2\cos x)^{\frac{1}{2}}} \tag{B.4}$$

Nous définissons une nouvelle constante $m = \sqrt{\frac{1+H}{2}}$, afin d'effectuer un changement de variable, où u est la nouvelle variable définie par :

$$u = \arccos \underbrace{\left[\frac{(2H + 2\cos x)^{\frac{1}{2}}}{2m} \right]}_{\frac{\dot{x}}{2m}} \tag{B.5}$$

Ce qui permet d'exprimer le terme à l'intérieur de l'intégrale (B.4) :

$$\frac{dx}{(2H + 2\cos x)^{\frac{1}{2}}} = (1 - \underbrace{\frac{2H + 2\cos x}{4m^2}}_{\cos^2 u})^{\frac{1}{2}} * 2m \frac{du}{\sin x} = 2m \sin u \frac{du}{\sin x} \tag{B.6}$$

Il reste à exprimer $\sin x$. Tirons $\cos x$ de la définition de u :

$$\cos x = \frac{(2m\cos u)^2 - 2H}{2} = 1 - 2m^2 \sin^2 u \tag{B.7}$$

puis dans le cas où $\sin x > 0$:

$$\sin x = 2m \sin u (1 - m^2 \sin^2 u)^{\frac{1}{2}} \tag{B.8}$$

donc :

$$\frac{dx}{(2H + 2\cos x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{du}{(1 - m^2 \sin^2 u)^{\frac{1}{2}}} \tag{B.9}$$

Ainsi, après le changement de variable l'intégrale (B.4) devient :

$$t = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{du}{(1 - m^2 \sin^2 u)^{\frac{1}{2}}} = \underbrace{\int_{\phi_0}^{0} \frac{du}{(1 - m^2 \sin^2 u)^{\frac{1}{2}}}}_{-t_1} + \underbrace{\int_{0}^{\phi} \frac{du}{(1 - m^2 \sin^2 u)^{\frac{1}{2}}}}_{t'} \tag{B.10}$$

où $\cos\phi = \frac{\dot{x}}{2m}$ et $\cos\phi_0 = \frac{\dot{x}_0}{2m}$. On reconnaît dans les expressions de t_1 et t' les intégrales elliptiques de premier ordre, $t_1 = F(\phi_0, m)$ et $t' = F(\phi, m)$. La borne supérieure de l'intégrale ϕ est déterminée comme l'amplitude de Jacobi de t' : $\phi = am(t', m)$, et le cosinus de ϕ est alors le cosinus elliptique de t' et de m : $\cos\phi = cn(t', m)$. Or $\cos\phi$ est égal à $\frac{\dot{x}}{2m}$, ce qui nous permet d'écrire $\dot{x}$ en fonction du cosinus elliptique de t' et de m :

$$\dot{x}(t') = 2m * cn(t', m) \tag{B.11}$$

On peut finalement écrire la vitesse $\dot{x}$ en fonction de t :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2m * cn(t + t_1, m) \\ t_1 &= F(\arccos \frac{\dot{x}_0}{2m}, m) \end{aligned} \tag{B.12}$$

Nous venons de calculer cette expression dans les cas où $\dot{x} > 0$ et $\sin x > 0$, c'est à dire pour les arcs

contenus dans le quart en haut à droite du diagramme de la figure B.1. Il reste à vérifier comment s'adapte cette expression pour le reste du diagramme. Pour cela, nous allons étudier comment se comportent les conditions aux limites. D'une manière ou d'une autre, on doit se conformer à $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ et $x(0) = x_0$, cette dernière correspondant aussi à $\ddot{x}(0) = -\sin x_0$.

Cherchons à écrire $\ddot{x}(0)$. Pour cela nous allons utiliser la dérivation du cosinus elliptique :

$$\frac{d}{dt} cn(t,m) = -sn(t,m)dn(t,m) \tag{B.13}$$

où sn et dn sont les fonctions elliptiques, également définies d'après la valeur de $\phi = am(t,m)$, par : $sn(t) = \sin\phi$, $dn(t) = \sqrt{1 - m^2 \sin^2\phi}$. En utilisant les équations (B.12) et (B.13), on obtient alors :

$$\ddot{x}(t=0) = -2m \sin\phi_0 \sqrt{1 - m^2 \sin^2\phi_0} \tag{B.14}$$

où $\phi_0 = \arccos \frac{\dot{x}_0}{2m}$, est compris entre 0 et π par définition de l'arc cosinus. Donc $\sin\phi_0 > 0$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\ddot{x}(t=0) = -\sqrt{4m^2 \sin\phi_0^2 (1 - m^2 \sin^2\phi_0)} \tag{B.15}$$

Aussi, en remplaçant $\cos^2\phi_0$ par $\frac{\dot{x}_0^2}{4m^2}$, et en rappelant que $m^2 = \frac{1+H}{2} = \frac{\dot{x}^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\cos x_0}{2}$ on aboutit à

$$\ddot{x}(t=0) = -\sqrt{\sin^2 x_0} \tag{B.16}$$

Lorsque $x_0 > 0$, cela revient à $\ddot{x}(t=0) = -\sin x_0$, ce qui correspond bien aux conditions initiales. Mais lorsque $x_0 < 0$, on trouve $\ddot{x}(t=0) = \sin x_0$, ce qui prouve qu'il faut modifier l'expression de $\dot{x}(t)$: dans ce cas, nous allons alors définir t_1 pour $x_0 < 0$ par $t_1 = F(\underbrace{-\arccos \frac{\dot{x}_0}{2m}}_{\phi_0}, m)$, ce qui permet de trouver l'expression $\ddot{x}(t=0) = -\sin x_0$ imposée.

Calculons maintenant la vitesse initiale :

$$\dot{x}(0) = 2m * cn(t_1, m) = 2m * \cos\phi_0 \tag{B.17}$$

et $\cos\phi_0 = \frac{\dot{x}_0}{2m}$ dans les deux cas différents ($x_0 > 0$ et $x_0 < 0$), car le cosinus est une fonction paire.

Par ailleurs, les deux conditions initiales sont vérifiées quelque soit le signe de $\dot{x}_0$, donc nous pouvons donc exprimer la vitesse d'un électron dans tous les cas possibles de conditions initiales par la définition suivante :

$$\dot{x} = 2m * cn(t + t_1, m) \tag{B.18}$$

$$t_1 = F(\arccos \frac{\dot{x}_0}{2m}, m) \; lorsque \; x_0 > 0 \tag{B.19}$$

$$t_1 = F(-\arccos \frac{\dot{x}_0}{2m}, m) \; lorsque \; x_0 < 0 \tag{B.20}$$

Bibliographie

David K. Abe, Mai T. Ngo, Baruch Levush, Thomas M. Antonsen, Jr, and David P. Chernin. A Comparison of L-Band Helix TWT Experiments with CHRISTINE, a 1-D Multifrequency Helix TWT Code. *IEEE Transaction On Plasma Science*, 28(3), June 2000.

T.M. Antonsen, Jr, A.A Mondelli, B. Levush, J.P. Verboncoeur, and C.K. Birdsall. Advances in modeling and simulation of vacuum electronic devices. *Proceedings of the IEEE*, 87(5) :804–839, May 1999.

S. Bhattacharjee, C. Marchewka, J. Welter, R. Kowalczyc, C.B. Wilsen, Y.Y. Lau, J.H. Booske, A. Singh, J.E. Scharer, R.M. Gilgenbach, M.J. Neumann, and M.W. Keyser. Suppression of Third-Order Intermodulation in a Klystron by Third-Order Injection. *Physical Review Letters*, 90(9), March 2003.

David Chernin, Thomas M. Antonsen, Baruch Levush, and David R. Whaley. A Three-Dimensional Multifrequency Large Signal Model for Helix Traveling Wave Tubes. *IEEE Transaction On Electron Devices*, 48(1), January 2001.

C.C. Cutler. The nature of power saturation in traveling wave tubes. *The Bell System Technical Journal*, 38 :841–876, July 1956.

S.K. Datta, P.K. Jain, and B.N. Basu. Control of IM3 Distortion in Helix TWTs by Harmonic Injection - An Eulerian Hydrodynamical Study. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 48(1) : 62–66, January 2001.

S.K. Datta, P.K. Jain, M.D. Raj Narayan, and B.N. Basu. Nonlinear Eulerian Hydrodynamical Analysis of Helix Traveling-Wave Tubes for Harmonic Generation and Its Control. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 46(2) :420–426, February 1999.

A.S. Gilmour, Jr. *Principles of Traveling Wave Tubes.* Artech House, Inc, Norwood, Massachusset, 1994.

R.O. Jenkins and R.G. Carter. Design of the pitch profile for high linearity helix TWT amplifiers. *ITG-Fachbericht*, 165 :49–54, 2001.

R.O. Jenkins and R.G. Carter. Design of helix TWTs for optimum linearity. *7th-IEEE-High-Frequency-Postgraduate-Student-Colloquium*, 2002.

A. Katz. Linearization : Reducing Distortion in Power Amplifiers. *IEEE Microwave magazine*, December 2001.

Y.Y. Lau. Theory of Intermodulation in a Klystron. *IEEE Transaction On Plasma Science*, 28 (3) :959–970, June 2000.

Thomas C. Marshall. *Free-Electron Lasers*. Macmillan Publishing Company, New York, NY, 1985.

A. Nordsieck. Theory of the Large Signal Behavior of Traveling-Wave Amplifiers. *Proceedings of the IRE*, 41 :630–637, May 1953.

J.R. Pierce. *Traveling Wave Tubes*. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1950.

Joseph E. Rowe. *Nonlinear Electron-Wave Interaction Phenomena*. Academic Press Inc., New York, NY, 1965.

P. Waller. *Modélisation numérique de l'interaction et diagnostic expérimental du faisceau d'électrons dans un Tube à Ondes Progressives spatial*. PhD thesis, Université Paris 7 - Denis Diderot, Paris, 1999.

M. Wirth, A. Singh, J. Scharer, and J. Booske. Third-Order Intermodulation Reduction by Harmonic Injection in a TWT Amplifier. *Third IEEE International Vacuum Electronics Conference,2002, April 23-25*, 2002.

J.G. Wöhlbier. *Nonlinear Distortion and Suppression in Traveling Wave Tubes : Insights and Methods*. PhD thesis, University of Wisconsin, Madison, 2003.

J.G. Wöhlbier and J.H. Booske. Mechanisms for Phase Distortion in a Traveling Wave Tube. *Submitted to Phys. Rev. E*, 2004.

J.G. Wöhlbier, J.H. Booske, and I. Dobson. New Nonlinear Multifrequency TWT Model. *Second IEEE International Vacuum Electronics Conference,2001, April 2-4*, 2001.

J.G. Wöhlbier, J.H. Booske, and I. Dobson. The Multifrequency Spectral Eulerian (MUSE) Model of a Traveling Wave Tube. *IEEE Transaction On Plasma Science*, 30(3), June 2002a.

J.G. Wöhlbier, J.H. Booske, and I. Dobson. The Physics of Harmonic Injection in a TWT. *Third IEEE International Vacuum Electronics Conference,2002, April 23-25*, 2002b.

J.G. Wöhlbier, J.H. Booske, and I. Dobson. On the Physics of Harmonic Injection in a Traveling Wave Tube. *To appear in IEEE Transactions on Plasma Science*, 2004.

J.G. Wöhlbier, M.C. Converse, J. Plouin, A. Rawal, A. Singh, and J.H. Booske. LATTE/MUSE Numerical Suite : An Open Source Teaching and Research Code for Traveling Wave Tube Amplifiers. *Fourth IEEE International Vacuum Electronics Conference,2003, May 28-30*, 2003.

X. Harmonic injection improves travelling wave tubes. *Electronic-Engineering*, 48(55), May 1976.

Résumé

Les Tubes à Ondes Progressives (TOP), utilisés pour amplifier des signaux hyperfréquences, présentent un comportement non-linéaire pour des puissances d'entrée élevées, ce qui limite leurs performances. Ce travail vise à améliorer la linéarité des TOP, et propose une solution consistant à injecter, en plus d'une l'onde fondamentale F, sa seconde harmonique $2F$, afin d'améliorer la puissance de sortie.

Une étude théorique approfondie de la non-linéarité dans les TOP a identifié la "saturation inertielle", comme un aspect essentiel de la saturation de la puissance de sortie. La possibilité d'améliorer la linéarité des TOP par injection d'harmonique a été étudiée à l'aide de modèles analytiques et de simulations numériques, puis validée par des mesures sur des tubes industriels.

Ce travail a ouvert des perspectives pour des applications industrielles qui amélioreront le rendement des TOP.

Mots-clés : Télécommunications spatiales, Tubes à Ondes Progressives, Saturation inertielle, injection d'harmonique

Abstract

Traveling Wave Tubes (TWT) are amplifiers for microwave signals. Nonlinearity occurs for high input powers, and compromises their performances. The overall aim of this Ph.D thesis is to improve the linearity of the tubes ; we present a method where the second harmonic (2F) is injected simultaneously with the fundamental signal (F).

A theoretical study of the nonlinearity of TWT identifies the "inertial saturation", as an essential aspect of output power saturation. The possibility of improving linearity in TWT is explained with analytical models and numerical simulations, and then validated with experimental measurements on industrial tubes.

This work envisages to allows industrial applications to improve the efficiency of TWTs.

Keywords : Spatial communications, Traveling Wave Tubes, Inertial saturation, Harmonic injection