

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers  
Centre de Paris

# THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR  
de  
L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
D'ARTS ET MÉTIERS  
Spécialité : Mécanique

par

**Benjamin HAGEGE**

---

**SIMULATION DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES  
MILIEUX FIBREUX EN GRANDES TRANSFORMATIONS :  
APPLICATION AUX RENFORTS TRICOTES**

---

*soutenue le 21 octobre 2004 devant le jury composé de*

Professeur	L.	BOUBAKAR	Université de Franche-Comté, Besançon	Rapporteur
Professeur	F.	SIDOROFF	Ecole Centrale, Lyon	Rapporteur
Professeur	J.L.	BILLOËT	Ecole Polytechnique de l'Université d'Orléans	Codirecteur
Professeur	P.	BOISSE	INSA, Lyon	Directeur
Professeur	P.	GILORMINI	ENSAM, Paris	Examinateur
Professeur	P.	ROUGEE	ENS, Cachan	Invité

*A mon grand-père,  
A ma mère et à mon père,  
A mon frère Lionel,  
A Yamina,  
A toute la Strass GuebAM et le GazDem'All, mes amis les plus chers,  
A mes mentors.*

« La plus belle expérience que nous puissions faire, c'est celle du mystère de la vie. C'est le sentiment originel dans lequel tout art et toute science véritables plongent leurs racines. Quand on ne le connaît pas, quand on ne sait plus s'étonner, être émerveillé, c'est comme si l'on était mort, le regard éteint. »

Albert EINSTEIN, 1930.

## Remerciements

Ce travail a été mené au Laboratoire de Mécanique des Systèmes et des Procédés, à l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, sous la direction des professeurs Philippe Boisse et Jean-Louis Billoët. C'est à eux que je tiens en tout premier lieu à adresser ma plus grande gratitude, doublée de mon profond respect. Leur encadrement a été tout simplement extraordinaire, autant par l'intensité des échanges que par la passion de la mécanique des grandes transformations qui les anime. Cette passion, avec l'ouverture d'esprit et le scepticisme qui l'accompagne, vous me l'avez transmise et j'espère que nous continuerons à la partager et à la faire partager encore longtemps.

Je remercie les professeurs Boubakar et Sidoroff pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Je remercie aussi le président du jury, le professeur Gilormini. Merci également au professeur Rougée pour avoir accepté mon invitation et fait preuve de tant d'implication dans le débat. Ces personnalités scientifiques m'ont honoré en acceptant de juger et de critiquer mon travail. Leurs travaux de recherche ont été pour moi une source de savoir et d'inspiration essentielle, mais aussi des modèles de rigueur et de précision scientifique.

De chaleureuses pensées vont à mes anciens collègues du Pôle Universitaire Léonard de Vinci : Samir Benchaabane, Samy Missoum, Bassem Ben Lazreg, Salim Bouabdallah, Mohamed Guerich, Pascal Régnier, Thomas Humel, Philippe Gali et Romain Peltier. Nos chemins professionnels ont divergé mais notre aventure humaine continue.

Un clin d'œil pour les doctorants actuels du LMSP, en particulier Majed Youssef et Stéphane Gérardot. Aussi pour les « anciens » que j'ai connu pendant ma thèse : mes colocataires de bureau Anthony Cheruet et Bassem Zouari et mes amis Firas Ali, Ara Sedrakian et François Dumont. J'associe également à ces remerciements les autres membres du LMSP, dont spécialement Paco Chinesta et Claude Laudet, deux hommes d'exception, dans des styles, certes, différents.

Je salue amicalement Xavier Flambard, maître de conférence à l'ENSAIT de Roubaix, un expert hors pair des tricots.

Lastly, I would like to thank professors Stepan Lomov, Julie Chen, Jian Cao, Rajiv Shivpuri and Ron Postle for the discussions which we had at the time of various lectures.

## Notations

- Espaces et opérations de base sur les tenseurs
- $\mathbb{R}^3$  : espace euclidien à 3 dimensions
- $\mathcal{R}_G$  : référentiel global
- $\mathcal{R}, \mathcal{R}', \mathcal{R}_0$  : référentiels tournants par rapport à  $\mathcal{R}_G$
- $\{G\}$  : base globale dans  $\mathcal{R}_G$
- $\{e\}$  : une base tournée dans  $\mathcal{R}$
- $V_3$  : variété différentiable riemannienne « solide déformable »
- $T_M V_3$  : espace vectoriel tangent à  $V_3$  en  $M$
- $T_M^* V_3$  : espace vectoriel cotangent à  $V_3$  en  $M$
- $\otimes$  : produit tensoriel
- $:$  : double contraction
- $\cdot$  : simple contraction
- $\wedge$  : produit vectoriel
- $\bullet = \frac{d}{dt}$  : dérivée temporelle classique
- $\delta_i^j = \delta_j^i$  : symbole de Kronecker
- $\varepsilon_{ijk}$  : composantes du tenseur de permutation de Levi-Civita
- $\underline{\underline{1}}$  : identité d'ordre 2
- $\underline{\underline{I}}$  : identité d'ordre 4
- $\underline{\underline{g}}$  : tenseur métrique fondamental
- $\underline{\underline{g}}^{-1}$  : tenseur métrique conjugué
  
- Représentation des tenseurs
- $\underline{a}$  : tenseur d'ordre 1 (ou vecteur) quelconque
- $\underline{\underline{A}}$  : tenseur d'ordre 2 quelconque
- $\underline{\underline{B}}$  : tenseur d'ordre 2 quelconque
- $\underline{\underline{C}}$  : tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit ou tenseur d'ordre 2 quelconque (selon la circonstance)
- $\underline{\underline{A}}^T$  : transposée d'un tenseur  $\underline{\underline{A}}$
- $\{\underline{\alpha} \otimes \underline{\beta}\}$  : base tensorielle « mixte » formée des vecteurs  $\underline{\alpha}_i$  et  $\underline{\beta}_j$
- $A_{ij} \underline{\alpha}_i \otimes \underline{\beta}_j$  : projection d'un tenseur  $\underline{\underline{A}}$  dans la base  $\{\underline{\alpha} \otimes \underline{\beta}\}$
- $[\underline{\underline{A}}]_{\{\underline{\alpha} \otimes \underline{\beta}\}} = (A_{ij})$  : représentation matricielle d'un tenseur  $\underline{\underline{A}}$  dans la base  $\{\underline{\alpha} \otimes \underline{\beta}\}$
- $\{G \otimes e^0\}$  : base mixte employée pour projeter de nombreux tenseurs dans ce mémoire
  
- Vecteurs de bases
- $\underline{G}_i$  : base globale
- $\underline{e}_i^0$  : orientation initiale

$\underline{e}_i$  : une base tournée (chapitre 3) ou base de Green-Naghdi (chapitre 4)

$\underline{\kappa}_i^t$  : axes constitutifs

$\underline{g}_i$  : base covariante

$\underline{g}^j$  : base contravariante

$\underline{g}_{n,i}$  : base matérielle OND (MCEO-F du chapitre 4) ou base covariante normée (MCEA-F du chapitre 5)

$\underline{g}_n^i$  : base contravariante duale de la base covariante normée

$\underline{g}^{n,i}$  : base contravariante normée

$\underline{g}_i^n$  : base covariante duale de la base contravariante normée

▪ Tenseurs utilisés

$\lambda(\underline{g}_{n,i})$  : élongation dans la direction  $\underline{g}_{n,i}$

$\underline{\phi}$  : application placement

$\underline{u}$  : champ de déplacement

$\underline{v}$  : champ de vitesse

$\underline{F}$  : tenseur gradient de la transformation

$\underline{F}_n$  : transformation normée des segments

$\underline{F}_n^{-T}$  : transformation normée des normales

$\underline{L}$  : gradient eulérien des vitesses

$\underline{D}$  : tenseur taux de déformation

$\underline{W}$  : spin de la matière

$\underline{\Omega}$  : spin de Green-Naghdi

$\underline{\varepsilon}$  : tenseur de déformation

$\underline{U}$  : tenseur d'élongation pure à droite

$\underline{R}$  : tenseur de rotation pure

$\underline{\sigma}$  : tenseur des contraintes de Cauchy

$\underline{O}$  : tenseur d'orientation initiale

$\underline{\beta}$  : tenseur de correction d'incrément de déformation

$\underline{\alpha}$  : tenseur de correction des contraintes de Cauchy

▪ Rotations

$\underline{\Delta}$  : tenseur de rotation matérielle

$\underline{\aleph}$  : tenseur de rotation d'ordre 2 quelconque (prononcer **Alef**, première lettre de l'alphabet hébreu)

$\underline{\iota}$  : tenseur de rotation d'ordre 2 quelconque (si  $\aleph$  est déjà utilisé)

$\underline{S}(\underline{\theta})$  : micro-rotation de vecteur rotation  $\underline{\theta}$

$\underline{\mathbb{R}}$  : tenseur de rotation d'ordre 4

$\mathcal{R}_{\underline{\underline{S}}}$  : référentiel tourné par  $\underline{\underline{S}}$

$\underline{\underline{S}}$  : spin du référentiel tourné par  $\underline{\underline{S}}$  par rapport au référentiel global

▪ Incréments

$\Delta\underline{\underline{S}}$  : incrément de rotation entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$

$\Delta\underline{\underline{S}}^{\hat{}}$  : incrément de rotation entre les instants  $t + \frac{\Delta t}{2}$  et  $t + \Delta t$

$\Delta^{\mathcal{R}_{\underline{\underline{S}}}}\underline{\underline{A}}$  : incrément tensoriel de  $\underline{\underline{A}}$  par rapport au référentiel tourné par  $\underline{\underline{S}}$

$\Delta\underline{\underline{F}}_n$  : incrément tensoriel de la transformation normée des segments entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$

▪ Objectivité

$\underline{\underline{X}}$  : vecteur position des points du solide déformable à l'instant initial

$\underline{\underline{x}}$  : vecteur position des points du solide déformable à l'instant  $t$

$\underline{\underline{T}}(t)$  : translation

$\underline{\underline{L}}$  : segment matériel initial

$\underline{\underline{l}}$  : segment matériel actuel

$\underline{\underline{N}}$  : normale initiale à un élément de surface infinitésimal initial

$\underline{\underline{n}}$  : normale actuelle à un élément de surface infinitésimal actuel

$\underline{\underline{A}}_{\text{TN}}$  : tenseur  $\underline{\underline{A}}$  d'ordre  $n$  entraîné dans le mouvement de corps rigide de rotation  $\underline{\underline{S}}$

$\underline{\underline{a}}_{\text{TF}}$  : tenseur  $\underline{\underline{a}}$  d'ordre 1 transformé par l'affinité  $\underline{\underline{F}}$

$\underline{\underline{A}}_{\text{TF}}$  : tenseur  $\underline{\underline{A}}$  d'ordre 2 transformé par l'affinité  $\underline{\underline{F}}$

$\underline{\underline{A}}|_{\mathcal{R}}$  : tenseur  $\underline{\underline{A}}$  d'ordre  $n$  observé depuis le référentiel  $\mathcal{R}$

▪ Transports

$\underline{\underline{\text{rot}}}$  : rotationnel pour les tenseurs d'ordre 1

$\underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}()$  : transport rotationnel (par  $\underline{\underline{S}}$ ) d'ordre 1

$\underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}()$  : transport rotationnel (par  $\underline{\underline{S}}$ ) d'ordre 2

$\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}()$  : transport rotationnel (par  $\underline{\underline{S}}$ ) d'ordre 4

$\underline{\underline{T}}^{\circ}()$  : transport matériel 1 fois contravariant

$\underline{\underline{T}}_{\circ}()$  : transport matériel 1 fois covariant

$\underline{\underline{\underline{T}}}$  : transport matériel 2 fois contravariant

$\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}$  : transport matériel 2 fois covariant

$\underline{\underline{\underline{T}}}_{\circ n}$  : transport affine normé pour les segments 2 fois covariant

$\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}_n$  : transport affine normé pour les segments dual 2 fois contravariant

$\underline{\underline{\tilde{T}_n^{\circ\circ}(\ )}}$  : transport affine du MCEA-F naturel modifié

$\underline{\underline{T_{\circ n}^{\circ}(\ )}}$  : transport affine du MCEA-F dual

- Opérateurs de dérivation et d'intégration

$L(\ )$  : opérateur de dérivation temporelle objectif

$\underline{\underline{L_{\perp/\underline{\underline{\mathbb{S}}}}(\ )}}$  : dérivée (de Lie) rotationnelle définie par  $\underline{\underline{\mathbb{S}}}$  pour les tenseurs d'ordre 2

$\underline{\underline{L_{\perp/\underline{\underline{Q}}}}(\ )}$  : dérivée de Jaumann

$\underline{\underline{L_{\perp/\underline{\underline{R}}}}(\ )}$  : dérivée de Green-Naghdi

$\underline{\underline{L^{\circ\circ}(\ )}}$  : dérivée de Lie 2 fois contravariante

$\underline{\underline{L_{\circ\circ}(\ )}}$  : dérivée de Lie 2 fois covariante

$\underline{\underline{L_n^{\circ\circ}(\ )}}$  : dérivée de Lie normée pour les segments 2 fois contravariante

$\underline{\underline{L_{\circ\circ n}(\ )}}$  : dérivée de Lie normée pour les segments 2 fois covariante

$\underline{\underline{\tilde{L}_n^{\circ\circ}(\ )}}$  : dérivée de Lie 2 fois contravariante du MCEA-F naturel modifié

$\underline{\underline{L_{\circ n}^{\circ}(\ )}}$  : dérivée de Lie 2 fois contravariante du MCEA-F dual

$S(\ )$  : opérateur d'intégration temporelle objectif

$\underline{\underline{S_{\perp/\underline{\underline{\mathbb{S}}}}(\ )}}$  : intégrale rotationnelle définie par  $\underline{\underline{\mathbb{S}}}$  pour les tenseurs d'ordre 2

$\underline{\underline{S^{\circ\circ}(\ )}}$  : intégrale de Lie 2 fois contravariante

$\underline{\underline{S_{\circ\circ}(\ )}}$  : intégrale de Lie 2 fois covariante

$\underline{\underline{S_{\circ\circ n}(\ )}}$  : intégrale de Lie normée pour les segments 2 fois covariante

- Comportement

$\underline{\underline{\mathbb{C}}}$  : tenseur d'ordre 4 quelconque ou de comportement (selon la circonstance)

${}^t C_{ijkl}$  : composantes du tenseur de comportement dans la base tensorielle actuelle

${}^0 C_{ijkl}$  : composantes du tenseur de comportement dans la base tensorielle initiale

$E_i$  : modules d'Young

$G_{ij}$  : modules de cisaillement

$v_{ij}$  : coefficients de Poisson majeurs ou mineurs

- Sigles

MGT : mécanique des grandes transformations

Base OND : base orthonormée directe

MCO : milieu continu orthotrope

MCEO-F : milieu continu équivalent orthotrope fibreux

MCEO-GN : milieu continu équivalent orthotrope de Green-Naghdi

MCEA-F : milieu continu équivalent anisotrope fibreux

# Table des matières

<b>Remerciements</b> .....	<b>2</b>
<b>Notations</b> .....	<b>3</b>
<b>Table des matières</b> .....	<b>7</b>
<b>Table des figures</b> .....	<b>13</b>
<b>0 Introduction</b> .....	<b>17</b>
0.1 <i>Cadre général</i> .....	18
0.2 <i>Plan du manuscrit</i> .....	18
<b>1 Chapitre 1 : Problématique de la modélisation des renforts fibreux tricotés</b> .....	<b>20</b>
1.1 <i>Généralités sur les renforts fibreux</i> .....	21
1.1.1 <i>Elaboration des composites à base de renforts fibreux</i> .....	21
1.1.1.1 <i>Essor des textiles techniques dans l'industrie</i> .....	21
1.1.1.2 <i>Echelles d'analyse et description générale d'un composite</i> .....	22
1.1.1.3 <i>Elaboration des composites minces</i> .....	22
1.1.2 <i>Objectifs de la recherche sur les renforts fibreux</i> .....	23
1.1.2.1 <i>Caractérisation des lois de comportement</i> .....	23
1.1.2.2 <i>Simulation et optimisation des procédés de mise en forme</i> .....	24
1.2 <i>Intérêt de l'étude des renforts fibreux tricotés</i> .....	26
1.2.1 <i>Cadre de l'étude</i> .....	26
1.2.1.1 <i>Extension des modèles éléments finis de tissu</i> .....	26
1.2.1.2 <i>Classification des renforts tricotés</i> .....	26
1.2.1.3 <i>Comportement des renforts tricotés</i> .....	27
1.2.2 <i>Potentiel pour les applications structurales</i> .....	28
1.2.2.1 <i>Intégration dans les procédés de mise en forme</i> .....	28
1.2.2.2 <i>Tenacité</i> .....	28
1.2.2.3 <i>Exemples de pièces structurales</i> .....	29
1.3 <i>Etat de l'art de la modélisation des textiles techniques et des renforts tricotés</i> .	30
1.3.1 <i>Modèles pour la caractérisation</i> .....	30
1.3.1.1 <i>Modèles microscopiques</i> .....	30
1.3.1.2 <i>Modèles mésoscopiques</i> .....	31
1.3.1.3 <i>Modèles de plaques composites renforcés par des textiles techniques</i> .....	32
1.3.2 <i>Modèles pour la mise en forme</i> .....	33
1.3.2.1 <i>Généralités</i> .....	33
1.3.2.2 <i>Modèles analytiques</i> .....	33
1.3.2.3 <i>Modèles géométriques</i> .....	33
1.3.2.4 <i>Modèles éléments finis</i> .....	34
1.3.2.5 <i>Modèles particuliers</i> .....	34
1.4 <i>Caractérisation d'un renfort tricoté sec d'aramide structural</i> .....	36
1.4.1 <i>Présentation du tricot industriel étudié</i> .....	36
1.4.1.1 <i>Mésographies</i> .....	36
1.4.1.2 <i>Géométrie de la CER</i> .....	37
1.4.1.3 <i>Essai expérimental disponible</i> .....	38
1.4.2 <i>Modèle éléments finis pour la caractérisation</i> .....	40
1.4.2.1 <i>Objectifs</i> .....	40



1.4.2.2	Modèle de mèche à l'échelle de la CER.....	41
1.4.2.3	Modes de déformations d'une mèche fibreuse.....	42
<b>2</b>	<b>Chapitre 2 : Modélisation géométrique et mécanique d'une maille tricotée .....</b>	<b>44</b>
2.1	<i>Modèle géométrique</i> .....	45
2.1.1	Définition du modèle .....	45
2.1.1.1	Objectifs.....	45
2.1.1.2	Hypothèses de modélisation géométrique.....	46
2.1.1.3	Paramétrage de la demi-CER.....	47
2.1.2	Construction de la géométrie.....	49
2.1.2.1	Loi d'angle.....	49
2.1.2.2	Construction de la demi-CER.....	50
2.1.2.3	Reconstitution de tricots à partir de la demi-CER.....	54
2.1.3	Variation des paramètres .....	55
2.1.3.1	Variation de la taille de la CER.....	55
2.1.3.2	Variation de la taille de la section .....	55
2.2	<i>Construction du modèle éléments finis</i> .....	56
2.2.1	Conditions aux limites .....	56
2.2.1.1	Pilotage en vitesse et symétries.....	56
2.2.1.2	Contact.....	58
2.2.2	Formulation des éléments finis.....	58
2.2.2.1	Orientation du maillage.....	58
2.2.2.2	Formulation de Green-Naghdi .....	61
2.2.3	Analyse de sensibilité de la loi de comportement .....	62
2.2.3.1	Cas testés.....	62
2.2.3.2	Résultats et choix des paramètres de la loi de comportement.....	63
2.3	<i>Simulation de la traction biaxiale</i> .....	65
2.3.1	Post-traitement des diverses grandeurs .....	65
2.3.1.1	Déformée et non-déformée de la demi-CER.....	65
2.3.1.2	Ecrasement des mèches.....	66
2.3.1.3	Perspectives sur le cisaillement de la CER .....	67
2.3.2	Confrontation avec l'essai expérimental .....	68
2.3.2.1	Passage de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique.....	68
2.3.2.2	Surfaces de tension.....	69
2.3.2.3	Corrélation entre le calcul et l'essai .....	71
2.3.2.4	Erreur due à la formulation de Green-Naghdi.....	73
<b>3</b>	<b>Chapitre 3 : Milieux continus orthotropes en grandes transformations.....</b>	<b>74</b>
3.1	<i>Manipulation des tenseurs euclidiens</i> .....	75
3.1.1	Représentations et propriétés de base des tenseurs .....	76
3.1.1.1	Définitions de l'espace de travail et du référentiel global.....	76
3.1.1.2	Définition d'un tenseur et d'un champ de tenseur.....	76
3.1.1.3	Bases mixtes.....	78
3.1.1.4	Projections de tenseur et représentation matricielle .....	78
3.1.1.5	Transposition.....	79
3.1.2	Pratique du formalisme matriciel .....	80
3.1.2.1	Règle de multiplication des matrices de tenseurs d'ordre 2 .....	80
3.1.2.2	Règle de multiplication de la matrice d'un tenseur d'ordre 2 avec la matrice d'un tenseur d'ordre 1 .....	81
3.1.2.3	Formules de changement de base.....	81
3.1.2.4	Deux résultats importants sur les matrices d'un tenseur de rotation .....	83
3.1.2.5	Intérêt des projections en base mixte pour les compositions d'opérateurs.....	85
3.2	<i>Evolution des tenseurs euclidiens</i> .....	87
3.2.1	Transports rotationnels des tenseurs.....	87
3.2.1.1	Motivations et prérequis.....	87

3.2.1.2	Tenseur identité d'ordre 4 .....	88
3.2.1.3	Définition d'un tenseur de rotation d'ordre 4 .....	89
3.2.1.4	Transposée d'un tenseur de rotation d'ordre 4 .....	89
3.2.1.5	Orthogonalité d'un tenseur de rotation d'ordre 4 .....	90
3.2.1.6	Action d'un tenseur de rotation d'ordre 4 sur un produit tensoriel de la base globale ...	90
3.2.1.7	Transport rotationnel des tenseurs d'ordre 1 .....	90
3.2.1.8	Transport rotationnel des tenseurs d'ordre 2 .....	91
3.2.1.9	Transport rotationnel des tenseurs d'ordre 4 .....	91
3.2.2	Objectivité euclidienne .....	92
3.2.2.1	Introduction de l'objectivité euclidienne .....	92
3.2.2.2	Entraînement des tenseurs dans une rotation .....	93
3.2.2.3	Changement d'observateur .....	94
3.2.2.4	Propriétés de l'objectivité pour les tenseurs d'ordre 2 symétriques .....	95
3.2.2.5	Cas des bi-tenseurs, indifférence matérielle .....	96
3.2.2.6	Analyse de l'objectivité de quelques tenseurs eulériens usuels en MGT .....	96
3.2.3	Dérivation et intégration rotationnelles .....	98
3.2.3.1	Motivations et hypothèses .....	98
3.2.3.2	Spin .....	99
3.2.3.3	Introduction de la dérivée rotationnelle par la dérivée de Lie .....	100
3.2.3.4	Définition de la dérivée rotationnelle comme dérivée intrinsèque .....	101
3.2.3.5	Définition de la dérivée rotationnelle par le transport rotationnel .....	102
3.2.3.6	Définition de l'intégration rotationnelle .....	103
3.2.3.7	Matrices de l'intégrale et de la dérivée rotationnelle des tenseurs d'ordre 2 en base tournée	104
3.2.3.8	Réciprocité des opérateurs d'intégration et de dérivée rotationnels .....	105
3.2.3.9	Objectivité des opérateurs d'intégration et de dérivée rotationnels .....	105
3.3	<i>Les milieux continus orthotropes</i> .....	108
3.3.1	Tenseur de comportement .....	108
3.3.1.1	Hypo-élasticité .....	108
3.3.1.2	Axes constitutifs et forme du tenseur de comportement .....	109
3.3.1.3	Milieu fibreux à une direction forte d'anisotropie .....	111
3.3.1.4	Objectivité du tenseur de comportement .....	111
3.3.1.5	Loi d'évolution .....	112
3.3.2	Les solides suiveurs .....	113
3.3.2.1	Définition .....	113
3.3.2.2	Solide suiveur de Jaumann .....	114
3.3.2.3	Solide suiveur des axes principaux de $\mathbf{D}$ .....	114
3.3.2.4	Solide suiveur de Green-Naghdi .....	114
3.3.3	Formulation générale des milieux continus orthotropes .....	115
3.3.3.1	Hypothèses générales .....	115
3.3.3.2	Cumul tensoriel des contraintes et des déformations .....	117
3.3.3.3	Propriétés de la mesure de déformation dans le cas du suivi d'une direction matérielle	118
3.3.4	Cumul tensoriel numérique et implémentation de la formulation .....	119
3.3.4.1	Formule de Hughes-Winget .....	119
3.3.4.2	Formule matricielle de Hughes-Winget .....	121
3.3.4.3	Estimation de la mesure de déformation .....	122
3.3.4.4	Estimation de la mesure de contrainte .....	124
3.3.4.5	Algorithme pour l'implémentation .....	125

## **4 Chapitre 4 : Milieu continu équivalent orthotrope fibreux et applications numériques..... 127**

4.1	<i>Milieu continu équivalent orthotrope fibreux</i> .....	128
4.1.1	Formulation du MCEO-F .....	128
4.1.1.1	Solide suiveur matériel .....	128
4.1.1.2	Comportement fibreux .....	130
4.1.2	Rotation matérielle $\Delta$ .....	130

4.1.2.1	Définition d'une rotation à partir de l'axe et de l'angle .....	130
4.1.2.2	Hypothèses pour le calcul d'une rotation matérielle .....	132
4.1.2.3	Particularisation de la formule de Rodrigues .....	132
4.1.2.4	Simplification de la formule de Rodrigues.....	133
4.1.2.5	Calcul des vecteurs de la base matérielle OND .....	134
4.1.2.6	Matrice du tenseur de rotation finie en base mixte.....	136
4.1.3	Formulation correctrice du MCEO-F .....	138
4.1.3.1	Motivation et hypothèses de départ.....	138
4.1.3.2	Incrément de déformation corrigé : tenseur de correction $\beta$ .....	140
4.1.3.3	Approximation du tenseur de correction $\beta$ .....	141
4.1.3.4	Actualisation du comportement et incrément de contraintes.....	142
4.1.3.5	Tenseur de rotation relative $\alpha$ .....	143
4.1.3.6	Actualisation des contraintes en projection dans le solide suiveur de Green-Naghdi ..	144
4.1.3.7	Actualisation des contraintes en projection dans le solide suiveur matériel .....	145
4.1.3.8	Relation entre $\beta$ et $\alpha$ .....	145
4.1.3.9	Implémentation de la formulation correctrice du MCEO-F dans Abaqus/Explicit .....	146
4.2	<i>Application numérique sur le test de cisaillement simple / extension</i> .....	148
4.2.1	Cinématique du glissement simple .....	148
4.2.1.1	Placement et tenseur gradient de la transformation $F$ .....	148
4.2.1.2	Représentation graphique du glissement simple .....	149
4.2.1.3	Elongation pure à droite $U$ .....	151
4.2.1.4	Rotation pure $R$ .....	151
4.2.1.5	Gradient eulérien des vitesses $L$ , taux de déformation $D$ et spin $W$ .....	151
4.2.2	Cinématique du glissement simple / extension .....	152
4.2.2.1	Placement et tenseur gradient de la transformation $F$ .....	152
4.2.2.2	Représentation graphique de l'extension après le glissement simple.....	153
4.2.2.3	Elongation pure à droite $U$ .....	154
4.2.2.4	Rotation pure $R$ .....	154
4.2.2.5	Gradient eulérien des vitesses $L$ , taux de déformation $D$ et spin $W$ .....	155
4.2.3	Solution analytique générale sur le test du glissement simple pour une orientation initiale arbitraire .....	157
4.2.3.1	Orientation initiale $O$ .....	157
4.2.3.2	Tenseur gradient de la transformation $F$ .....	157
4.2.3.3	Base matérielle OND $\{g_n\}$ et tenseur de rotation matérielle $\Delta$ .....	157
4.2.3.4	Incrément infinitésimal de déformation .....	159
4.2.3.5	Mesure de déformation $\epsilon$ dans la base matérielle OND .....	159
4.2.3.6	Mesure de déformation $\epsilon$ dans la base globale.....	161
4.2.3.7	Mesure de contrainte $\sigma$ dans la base matérielle OND.....	163
4.2.3.8	Mesure de contrainte $\sigma$ dans la base globale.....	164
4.2.3.9	Milieu fibreux à une direction forte d'anisotropie sans raideurs transverses .....	165
4.2.4	Validation sur le test de glissement simple de la solution analytique pour trois orientations initiales différentes : $0^\circ$ , $90^\circ$ et $135^\circ$ .....	167
4.2.4.1	Méthode proposée .....	167
4.2.4.2	Orientation initiale à $0^\circ$ .....	168
4.2.4.3	Orientation initiale à $90^\circ$ .....	170
4.2.4.4	Orientation initiale à $135^\circ$ .....	172
4.2.5	Comparaison du MCEO-F et du MCEO-GN sur le test de glissement simple / extension.....	175
4.2.5.1	Critères de comparaison.....	175
4.2.5.2	Orientation initiale à $0^\circ$ .....	175
4.2.5.3	Orientation initiale à $90^\circ$ .....	176
4.3	<i>Application du MCEO-F au calcul de la maille tricotée</i> .....	178
4.3.1	Présentation des calculs effectués .....	178
4.3.1.1	Revue des lois de comportements .....	178
4.3.1.2	Revue des lois d'écrasement .....	179
4.3.2	Analyses de sensibilité .....	180
4.3.2.1	Mise en évidence de la nature fibreuse du comportement.....	180

4.3.2.2	Sensibilité aux caractéristiques transverses.....	181
4.3.3	Recalage du MCEO-F sur l'essai biaxial expérimental.....	183
4.3.3.1	Recalage par translation.....	183
4.3.3.2	Différences entre MCEO-F et le MCEO-GN.....	185

## **5 Chapitre 5 : Perspectives pour des théories de milieu continu équivalent anisotrope fibreux..... 187**

5.1	<i>Cadre mathématique</i> .....	188
5.1.1	Notions de géométrie différentielle.....	188
5.1.1.1	Notations et espaces tangent et cotangent.....	188
5.1.1.2	Dualité des espaces tangent et cotangent induite par la métrique.....	190
5.1.1.3	Gradient de la transformation et transports matériels des tenseurs d'ordre 1.....	191
5.1.1.4	Transports matériels des tenseurs d'ordre 2.....	193
5.1.1.5	Dualité des transports matériels et cas du mouvement de corps rigide.....	194
5.1.1.6	Objectivité affine.....	194
5.1.2	Approche hyper-euclidienne.....	196
5.1.2.1	Définition de l'approche hyper-euclidienne.....	196
5.1.2.2	L'élément de matière naturel et son dual.....	197
5.1.2.3	Dérivation affine.....	198
5.1.2.4	Intégration affine.....	199
5.1.2.5	Solides suiveurs affines.....	200
5.2	<i>Formulations possibles pour la construction d'un MCEA-F</i> .....	202
5.2.1	Cinématiques envisagées.....	202
5.2.1.1	Modes de déformations et continua équivalents.....	202
5.2.1.2	Transformations normées des segments et des normales.....	204
5.2.1.3	Transports affines associés à la transformation normée des segments.....	206
5.2.1.4	Mesure de déformation dans le solide suiveur matériel normé.....	206
5.2.2	Mesures de contrainte.....	208
5.2.2.1	Loi de comportement hypo-élastique.....	208
5.2.2.2	Cumul tensoriel des contraintes sur l'élément de matière naturel.....	209
5.2.2.3	Cumul tensoriel des contraintes sur l'élément de matière naturel avec des normales unitaires.....	211
5.2.2.4	Cumul tensoriel des contraintes sur l'élément de matière dual.....	212
5.3	<i>Solutions analytiques sur le test de glissement simple</i> .....	214
5.3.1	Cinématique du glissement simple pour une orientation initiale arbitraire.....	214
5.3.1.1	Tenseur gradient.....	214
5.3.1.2	Transformations des segments et des normales.....	214
5.3.1.3	Transformation normée des segments.....	215
5.3.1.4	Transformation normée des normales.....	217
5.3.1.5	Taux de déformation dans la base covariante normée.....	218
5.3.1.6	Mesure de déformation matérielle.....	219
5.3.2	Mesures de contrainte possibles.....	220
5.3.2.1	Mesure de contrainte du MCEA-F naturel en base convectée.....	220
5.3.2.2	Mesure de contrainte du MCEA-F naturel modifié en base convectée.....	221
5.3.2.3	Mesure de contrainte du MCEA-F dual en base convectée.....	221
5.3.2.4	Mesure de contrainte du MCEA-F naturel en base globale.....	222
5.3.2.5	Mesure de contrainte du MCEA-F naturel modifié en base globale.....	223
5.3.2.6	Mesure de contrainte du MCEA-F dual en base globale.....	224
5.4	<i>Simulations numériques utilisant la théorie du MCEA-F naturel</i> .....	226
5.4.1	Application au modèle 3D de la maille tricotée.....	226
5.4.1.1	Cas traités.....	226
5.4.1.2	Courbes force-déplacement.....	226
5.4.2	Définition du test du dôme hémisphérique.....	227
5.4.2.1	Mise en donnée.....	227
5.4.2.2	Cas étudiés.....	228
5.4.3	Application au test de formage : déformées du flanc.....	228

5.4.3.1	Flanc à une direction forte d'anisotropie.....	228
5.4.3.2	Flanc à deux directions fortes d'anisotropie.....	228
<b>6</b>	<b>Conclusions .....</b>	<b>230</b>
6.1	<i>Conclusion générale.....</i>	231
6.2	<i>Perspectives.....</i>	232
<b>7</b>	<b>Bibliographie.....</b>	<b>233</b>
<b>8</b>	<b>Annexes.....</b>	<b>241</b>
8.1	<i>Test de la loi d'écrasement sur un élément C3D8R d'Abaqus/Explicit .....</i>	242
8.2	<i>Bases associées aux composantes des tenseurs renvoyées par une VUMAT....</i>	244
8.2.1	Etude du tenseur gradient $\mathbf{F}$ de la transformation.....	244
8.2.1.1	Projection de $\mathbf{F}$ .....	244
8.2.1.2	Composantes de $\mathbf{F}$ renvoyées par la VUMAT pour différentes orientations initiales dans le cas du cisaillement simple.....	244
8.2.2	Etude du tenseur d'élongation pure à droite $\mathbf{U}$ .....	245
8.2.2.1	Projection de $\mathbf{U}$ .....	245
8.2.2.2	Composantes de $\mathbf{U}$ renvoyées par la VUMAT pour différentes orientations initiales dans le cas du cisaillement simple.....	245
8.2.3	Etude du tenseur incrément de déformation.....	246
8.2.3.1	Projection de l'incrément de déformation.....	246
8.2.3.2	Formule de changement de base (base globale vers base de Green-Naghdi).....	246
8.2.4	Calcul de l'écart entre les solutions analytiques et les solutions numériques d'Abaqus/Explicit.....	246
8.2.4.1	Calcul de l'erreur relative.....	246
8.2.4.2	Orientation initiale à $0^\circ$ .....	247
8.2.4.3	Orientation initiale à $90^\circ$ .....	247
8.2.4.4	Orientation initiale à $45^\circ$ .....	247
8.3	<i>Comparaison des déformations matérielles du MCEO-F et des déformations de Green-Naghdi pour une orientation initiale à <math>90^\circ</math>.....</i>	248
8.4	<i>Solutions analytiques de MCEA-F pour le test de traction simple.....</i>	249
8.4.1	Test de traction simple pour une orientation initiale arbitraire : cinématique 249	
8.4.1.1	Tenseur gradient.....	249
8.4.1.2	Transformations des segments et des normales .....	249
8.4.1.3	Transformation normée des segments.....	250
8.4.1.4	Transformation normée des normales .....	252
8.4.1.5	Taux de déformation dans la base covariante normée.....	253
8.4.1.6	Mesure de déformation dans la base matérielle covariante.....	254
8.4.2	Test de traction simple pour une orientation initiale arbitraire : contraintes 257	
8.4.2.1	Mesure de contrainte du MCEA-F naturel en base convectée .....	257
8.4.2.2	Mesure de contrainte du MCEA-F naturel modifié en base convectée .....	258
8.4.2.3	Mesure de contrainte du MCEA-F dual en base convectée.....	258
8.4.2.4	Mesure de contrainte du MCEA-F naturel en base globale.....	258
8.4.2.5	Mesure de contrainte du MCEA-F naturel modifié en base globale .....	260
8.4.2.6	Mesure de contrainte du MCEA-F dual en base globale.....	261

## Table des figures

Figure 1-1 : Haut-parleur d'enceinte hi-fi en tissu d'aramide formé .....	21
Figure 1-2 : Elaboration des composites .....	23
Figure 1-3 : Jersey simple de type plain weft (à gauche) et tricot de type warp (à droite) [GOM98] .....	27
Figure 1-4 : Synthèse de l'état de l'art de la modélisation des textiles techniques .....	30
Figure 1-5 : Exemple de géométrie de mèche fibreuse modélisée avec MSC.Patran .....	31
Figure 1-6 : Renfort tricoté issu d'un procédé de tricotage circulaire.....	36
Figure 1-7 : Mésographies de tricots d'aramide industriels .....	37
Figure 1-8 : Structure tricoté étudiée.....	37
Figure 1-9 : Inclinaison des CER due au procédé de tricotage .....	38
Figure 1-10 : Vue dans l'épaisseur du tricot étudié.....	38
Figure 1-11 : Machine de traction biaxiale du LMSP, Polytech'Orléans. ....	38
Figure 1-12 : Eprouvette en croix pour la traction biaxiale.....	39
Figure 1-13 : Essai de traction biaxiale équilibré.....	39
Figure 1-14 : Courbe de traction d'une mèche du tricot.....	40
Figure 1-15 : Modèles éléments finis de caractérisation de renforts tissés [HAN98].....	41
Figure 1-16 : Mèche continue avec un comportement équivalent à la mèche fibreuse.....	41
Figure 1-17 : Mode de traction longitudinale (sans effet de Poisson).....	42
Figure 1-18 : Mode de cisaillement longitudinal .....	42
Figure 1-19 : Mode de compression transversale.....	43
Figure 1-20 : Mode de cisaillement transversal.....	43
Figure 2-1 : Symétries d'un tricot de type jersey .....	46
Figure 2-2 : Paramétrage de la géométrie de la demi-CER.....	48
Figure 2-3 : Fibre moyenne d'une mèche de la demi-CER.....	48
Figure 2-4 : Section "champ de course" des mèches.....	49
Figure 2-5 : Loi d'angle en tangente hyperbolique .....	50
Figure 2-6 : Loi d'angle linéaire.....	50
Figure 2-7 : Fibre moyenne avec la première section et les points extraits pour les transports .....	51
Figure 2-8 : Fibre moyenne avec ses sections .....	52
Figure 2-9 : Première mèche volumique complète.....	52
Figure 2-10 : Demi-CER vue dans XZ, YZ et XY .....	53
Figure 2-11 : Périodisation de la CER modélisant le tricot étudié .....	54
Figure 2-12 : Jersey avec une section circulaire et une jambe de maille courbe.....	54
Figure 2-13 : Demi-CER plus haute (à gauche) et demi-CER plus large (à droite).....	55
Figure 2-14 : demi-CER avec une section de grand axe a divisé par deux. ....	55
Figure 2-15 : Superposition du tricot réel et du modèle éléments finis.....	56
Figure 2-16 : Sections "en haut" (H), "en bas" (B), "à droite" (D) et "à gauche" (G).....	57
Figure 2-17 : Orientation initiale des axes d'orthotropie dans la mèche.....	59
Figure 2-18 : Orientation initiale des axes d'orthotropie à l'intérieur du maillage.....	60
Figure 2-19 : Orientation initiale des axes d'orthotropie en vue de dessus.....	60
Figure 2-20 : Tableau de synthèse de l'analyse de sensibilité.....	63
Figure 2-21 : Courbes forces-déplacements sur le haut de la CER issues de l'analyse de sensibilité.....	63
Figure 2-22 : Déformée et non-déformée périodisées.....	65

Figure 2-23 : Evolution de la déformée (commencer en haut à gauche et lire de gauche à droite) .....	66
Figure 2-24 : Evolution de l'écrasement (commencer en haut à gauche et lire de gauche à droite) .....	67
Figure 2-25 : Isovaleurs des modules d'Young transverses (MPa) en fin de transformation .....	67
Figure 2-26 : Eprouvette virtuelle cisailée graphiquement .....	68
Figure 2-27 : Illustration du passage de la CER à l'éprouvette.....	69
Figure 2-28 : Surfaces de tension T1 et T2 .....	70
Figure 2-29 : Comparaison entre le MCEO-GN recalé partiellement et l'essai expérimental .....	71
Figure 2-30 : Comparaison entre le MCEO-GN recalé et l'essai expérimental.....	72
Figure 2-31 : Comparaison entre le MCEO-GN recalé et l'essai expérimental, zoom .....	72
Figure 2-32 : Dérive des bases de Green-Naghdi.....	73
Figure 3-1 : Transformations des bases OND et changements de base par un tenseur de rotation $\Delta$ .....	83
Figure 3-2 : Orientation initiale et actualisation des axes d'orthotropie .....	86
Figure 3-3 : Rotation du référentiel $\mathcal{R}_G$ par $\mathfrak{K}$ et entraînement du tenseur objectif symétrique A par $\mathfrak{K}$ .....	94
Figure 3-4 : Solides déformables et solides suiveurs initiaux et actuels .....	114
Figure 3-5 : Divers référentiels de la formulation générale à $\tau-\Delta\tau$ et à $\tau$ .....	116
Figure 3-6: Référentiel intermédiaire entre t et t+ $\Delta t$ .....	124
Figure 4-1 : Orientation initiale discrète des axes constitutifs .....	129
Figure 4-2 : Rotation finie d'angle $\delta$ et d'axe e [CRI91b] .....	131
Figure 4-3 : Référentiels du MCEO-F et du MCEO-GN entre les instant $\tau-\Delta\tau$ et $\tau$ .....	144
Figure 4-4 : Cisaillement simple d'un cube unitaire paramétré par a .....	149
Figure 4-5 : Glissement simple, a=0 et a=0,5.....	149
Figure 4-6 : Glissement simple, a=1 et a=1,5.....	150
Figure 4-7 : Glissement simple, a=2 et a=2,5.....	150
Figure 4-8 : Glissement simple, a=3.....	150
Figure 4-9 : Cisaillement simple / extension d'un cube unitaire paramétré par a et u .....	152
Figure 4-10 : Glissement simple / Extension, (a=0,u=0) et (a=3,u=0).....	153
Figure 4-11 : Glissement simple / Extension, (a=3,u=1,5) et (a=3,u=3).....	153
Figure 4-12 : Rotation du référentiel de Green-Naghdi .....	155
Figure 4-13 : Élément C3D8R d'Abaqus/Explicit dans la phase de glissement simple....	167
Figure 4-14 : Orientation initiale à 0° du comportement par rapport à la base globale ....	168
Figure 4-15 : Déformations matérielles et globales pour une orientation à 0° .....	169
Figure 4-16 : Contraintes principale numérique et matérielle analytique pour une orientation à 0° .....	169
Figure 4-17 : Orientation initiale à 90° du comportement par rapport à la base globale ..	170
Figure 4-18 : Déformations matérielles pour une orientation à 90° .....	171
Figure 4-19 : Déformations globales pour une orientation à 90° .....	171
Figure 4-20 : Contraintes principale numérique SP et matérielle analytique S11gn pour une orientation à 90° .....	172
Figure 4-21 : Orientation initiale à 135° du comportement par rapport à la base globale	172
Figure 4-22 : Déformations matérielles pour une orientation à 135° .....	173
Figure 4-23 : Déformations globales pour une orientation à 135° .....	174
Figure 4-24 : Contraintes principale numérique et matérielle analytique pour une orientation à 135° .....	174

Figure 4-25 : MCEO-F dans la transformation de glissement simple / extension, orientation initiale à $0^\circ$ .....	175
Figure 4-26 : MCEO-GN dans la transformation de glissement simple / extension, orientation initiale à $0^\circ$ .....	175
Figure 4-27 : Valeur de la contrainte principale du MCEO-F pour une orientation à $0^\circ$ ..	176
Figure 4-28 : MCEO-F dans la transformation de glissement simple / extension, orientation initiale à $90^\circ$ .....	176
Figure 4-29 : Valeur de la contrainte principale du MCEO-F pour une orientation à $90^\circ$	177
Figure 4-30 : MCEO-GN dans la transformation de glissement simple / extension, orientation initiale à $90^\circ$ .....	177
Figure 4-31 : Tableau de synthèse de l'analyse de sensibilité du MCEO-F .....	179
Figure 4-32 : Tableau de synthèse des calculs recalés avec le MCEO-F et le MCEO-GN .....	179
Figure 4-33 : Lois d'écrasement testées .....	180
Figure 4-34 : Sensibilité aux constantes de l'ingénieur pour une même loi d'écrasement	181
Figure 4-35 : Sensibilité aux lois d'écrasement .....	182
Figure 4-36 : Sensibilité aux modules d'Young transverses .....	182
Figure 4-37 : Comparaison entre le MCEO-F recalé partiellement et l'essai expérimental .....	183
Figure 4-38 : Comparaison entre le MCEO-F recalé et l'essai expérimental .....	184
Figure 4-39 : Comparaison entre le MCEO-F recalé et l'essai expérimental, zoom.....	184
Figure 4-40 : Comparaison entre le MCEO-GN recalé et le MCEO-F pour un même comportement .....	185
Figure 4-41 : Comparaison entre le MCEO-F recalé et le MCEO-GN pour un même comportement .....	186
Figure 5-1 : Espaces duaux et bases duales .....	189
Figure 5-2 : Transformation matérielle contravariante entre $t$ et $t+dt$ de l'espace vectoriel tangent .....	192
Figure 5-3 : Transformation matérielle covariante entre $t$ et $t+dt$ de l'espace vectoriel cotangent.....	192
Figure 5-4 : Composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur $V$ dans la base covariante .....	196
Figure 5-5 : L'élément de matière naturel (en haut) et son dual (en bas).....	197
Figure 5-6 : Deux descriptions possibles de milieu continu équivalent anisotrope .....	203
Figure 5-7 : Tension dans la première direction forte d'anisotropie sur l'élément de matière naturel.....	203
Figure 5-8 : Tension dans la première direction forte d'anisotropie sur l'élément de matière dual .....	203
Figure 5-9 : Solide suiveur matériel (non-normé sur la figure).....	204
Figure 5-10 : Base covariante normée et duale, base contravariante normée et duale.....	205
Figure 5-11 : Glissement simple d'un cube unitaire avec deux directions fortes d'anisotropie (orientées initialement à $45^\circ$ sur la figure) .....	215
Figure 5-12 : Courbes sur la CER dans le cas 1 (MCEO-GN recalé du chapitre 2) .....	226
Figure 5-13 : Courbes sur la CER dans le cas 2 (MCEO-F recalé du chapitre 4).....	227
Figure 5-14 : Déformées obtenues avec le MCEA-F naturel pour des directions fortes d'anisotropie initiales à $0^\circ$ (à gauche) et $90^\circ$ (à droite).....	228
Figure 5-15 : Déformées pour des directions fortes d'anisotropie initiales à $0^\circ/90^\circ$ obtenues expérimentalement (à gauche) et avec le MCEA-F naturel (à droite).....	229



Figure 5-16 : Déformées pour des directions fortes d'anisotropie initiales à $45^\circ/-45^\circ$ obtenues avec la membrane M3D4R (à gauche) et avec le MCEA-F naturel (à droite) .....	229
Figure 6-1 : Membrane de tricot équivalente à 2 directions fortes d'anisotropie.....	232
Figure 8-1 : Élément C3D8R en traction/compression simple selon 3 .....	242
Figure 8-2 : Loi d'écrasement (module d'Young en MPa) .....	242
Figure 8-3 : Courbes force-déplacement dans les cas d'un module d'Young variable et constant (forces en N, déplacement en mm).....	243
Figure 8-4 : Comparaison en base globale des tenseurs de déformations du MCEO-F et du MCEO-GN .....	248
Figure 8-5 : Traction simple d'un cube unitaire avec deux directions fortes d'anisotropie .....	250

# *0 Introduction*

## 0.1 Cadre général

Cette recherche s'inscrit dans le prolongement des travaux menés au Laboratoire de Mécanique des Systèmes et des Procédés (ENSAM-Polytech'Orléans) sur les matériaux composites. L'objectif principal est de modéliser le comportement spécifique des renforts fibreux de type textile technique (tricotés, mais aussi tissés ou tressés) afin d'établir des modèles globaux de comportement et des outils de simulation dans le domaine des grandes transformations. Les modes de déformations des textiles techniques sont très différents de ceux des milieux continus (classiquement, les métaux) et sont surtout liés au procédé de fabrication qui produit une structure hétérogène et anisotrope. La difficulté est alors de traduire ces spécificités sur un milieu continu équivalent, ce que nous proposons en formulant deux théories : celle du Milieu Continu Equivalent Orthotrope Fibreux et celle du Milieu Continu Equivalent Anisotrope Fibreux, généralisant la précédente. Ces deux modèles sont implémentés et testés numériquement dans le logiciel industriel de calcul non-linéaire Abaqus/Explicit. Au final, ce travail s'est concrétisé par la réalisation de deux routines utilisateurs spécifiques pour simuler :

- La caractérisation de cellules élémentaires représentatives avec des éléments 3D.
- La mise en forme de textiles 2D avec des membranes.

## 0.2 Plan du manuscrit

Ce manuscrit s'articule en cinq chapitres qui retrace linéairement le cheminement de notre recherche<sup>1</sup>. En voici l'architecture :

- Le *premier chapitre* introduit la problématique de la modélisation des textiles techniques. Nous définissons tout d'abord cette catégorie particulière de structures, puis nous soulignons leur importance par leurs utilisations dans la fabrication par mise en forme de pièces composites. Notre travail étant plus focalisé sur les renforts de type tricot, les spécificités de ces derniers sont alors mises en évidence et des applications sont montrées. Ces spécificités devant être prises en compte impliquent une réflexion sur les choix à faire pour obtenir un modèle fiable pour un objectif donné. Nous sommes ainsi conduit à dresser un état de l'art global de la modélisation des textiles techniques. Ensuite, nous présentons le renfort tricoté sec d'aramide que nous souhaitons étudier, le modèle envisagé et les hypothèses sous-jacentes.

- Au *second chapitre*, la modélisation complète d'une Cellule Élémentaire Représentative (CER) de tricot à l'échelle mésoscopique est effectuée. Un modèle géométrique paramétré est mis en place et permet la construction d'un modèle éléments finis. Les grandes transformations des mèches, le contact entre elles et leur loi de comportement spécifique sont pris en compte. Des essais de tension biaxiale sont simulés et permettent de construire la loi de comportement macroscopique de la CER, alors déduite sous forme de surfaces de tension. Dans le cas d'une biaxialité équilibrée, les résultats obtenus sont corrélés avec un essai expérimental et montrent, dans un certain domaine de validité, les capacités descriptives de notre modèle. Les limites du modèle, utilisant la

---

<sup>1</sup> Cela explique que certaines notions soient survolées dans un premier temps pour être reprises en détails dans un deuxième temps. Nous pensons notamment à la formulation mathématique des éléments finis du chapitre 2 qui est détaillée aux chapitre 3 et 4.

formulation de Green-Naghdi, sont alors mises en évidence et il devient nécessaire de développer une formulation spécifique aux milieux fibreux.

- Au *troisième chapitre*, une formulation générale des milieux continus orthotropes est proposée. Un formalisme est mis en place dans le cadre euclidien et précise les concepts couramment utilisés dans les approches hypo-élastiques en grandes transformations. Cela permet de déduire au chapitre 4 une théorie de milieu continu équivalent orthotrope pour constituer un modèle de mèche fibreuse, mais également de détailler la formulation de Green-Naghdi utilisée au chapitre 2.

- Au *quatrième chapitre*, la formulation spécifique aux milieux fibreux à une direction forte d'anisotropie est obtenue à partir de la formulation générale du chapitre 3 : c'est le modèle du Milieu Continu Equivalent Orthotrope Fibreux (MCEO-F). Les axes constitutifs du comportement restent orthogonaux mais tournent en suivant une direction d'anisotropie particulière, ce qui est modélisé par l'action du tenseur de rotation matérielle. Cette formulation est testée sur le cas du glissement simple puis utilisée sur le modèle 3D de la maille tricotée. Il apparaît alors que cette formulation respecte mieux la physique des mèches, évitant les erreurs de la formulation de Green-Naghdi employée au chapitre 2.

- Au *cinquième chapitre*, une généralisation des concepts du chapitre 3 aux espaces non-euclidiens est tentée afin de pouvoir modéliser des milieux à deux ou trois directions fortes d'anisotropie non-orthogonales. La réactualisation des axes constitutifs et le cumul tensoriel des déformations et des contraintes ne se font plus dans un solide suiveur en rotation mais dans des solides suiveurs affines formés de référentiels non-rigides. Le formalisme mis en place permet d'étendre très simplement la formulation du MCEO-F du chapitre 4 en remplaçant la rotation matérielle par une affinité. En découle alors plusieurs nouveaux modèles, dont le Milieu Continu Equivalent Anisotrope Fibreux naturel (MCEA-F naturel). Il nous permet de formuler un élément macroscopique de textile capable de simuler la mise en forme, mais également de modéliser le comportement d'une mèche dont les axes constitutifs sont non-orthogonaux.

1 Chapitre 1 :  
Problématique de la  
modélisation des renforts  
fibreux tricotés

## 1.1 Généralités sur les renforts fibreux

Ce paragraphe présente l'intérêt porté aux renforts fibreux qui interviennent dans les matériaux composites industriels, et spécialement les textiles techniques. Une description générale de l'élaboration des composites est ensuite faite et l'exemple du procédé RTM vient illustrer et poser les bases de la problématique. Enfin, les objectifs actuels de la recherche sur les textiles techniques qui nous préoccupent sont développés en deux thèmes : la caractérisation du comportement et la simulation et l'optimisation des procédés de fabrication.

### 1.1.1 **Elaboration des composites à base de renforts fibreux**

#### 1.1.1.1 Essor des textiles techniques dans l'industrie

Depuis des décennies, l'industrie utilise des renforts fibreux de type unidirectionnel (UD) pour l'élaboration des pièces composites. Ces dernières sont souvent obtenues à partir de l'assemblage de plusieurs laminés 2D, eux-mêmes constitués d'un empilement d'UD ([GAY96]). Nous trouvons de telles structures dans les secteurs de l'aérospatial depuis 30 ans et de l'automobile et du génie civil des grands ouvrages depuis près de 20 ans ([MOU99]). Cependant, les coûts de mise en œuvre sont rédhibitoires : d'une part les structures doivent être usinées et assemblées manuellement, d'autre part la perte de matériau est importante. Cela s'explique par l'impossibilité d'obtenir du « premier coup » des pièces 3D comme c'est le cas avec les métaux, les procédés de fonderie, forge et usinage étant bien maîtrisés dans ce cas. Au niveau mécanique, cela veut dire que l'intégrité structurale est plus difficile à garantir. La solution de ce problème est partiellement résolue en recourant à l'utilisation de nouveaux renforts fibreux, plus complexes, appelés « textiles techniques ». Ils permettent l'obtention directe de composites 3D à hautes performances mécaniques car ils peuvent être mis en forme et permettent de renforcer plusieurs directions au lieu d'une seule. De plus, ils peuvent être intégrés à une chaîne de fabrication assurant une production maîtrisée et adaptée aux réalités économiques. Les technologies sont nombreuses, disons que, globalement, le textile est mis en forme et est stabilisé par l'adjonction d'une matrice, ce qui autorise la fabrication de pièces structurales à géométries complexes. Les composites obtenus par ces procédés se retrouvent dans de nombreux secteurs, comme ceux précédemment cités, mais également celui des loisirs. Un exemple exotique pourrait être celui de la Figure 1-1 où la rigidité de la membrane du haut-parleur confère un son dynamique à l'enceinte hi-fi.



Figure 1-1 : Haut-parleur d'enceinte hi-fi en tissu d'aramide formé

### 1.1.1.2 Echelles d'analyse et description générale d'un composite

La diversité des procédés de fabrication et des matériaux composites est frappante. Elle se décline en une gamme de matériaux de base, mais également de structures pour les renforts. Pour décrire cette profusion, il est pratique de procéder à l'analyse des constituants à diverses échelles. Partons des mèches dont sont fabriqués les renforts.

- A l'échelle microscopique, les mèches sont composées de fibres continues droites ou torsadées (entre 100 et 1000 selon le matériau). Une mèche est donc fortement hétérogène et anisotrope, l'anisotropie étant principalement portée par la direction longitudinale. Les matériaux utilisés sont surtout le carbone, l'aramide et le verre ([BIL93]), mais il existe aujourd'hui des variantes alliant ces matériaux de base à des polymères thermoplastiques. Ainsi, les mèches peuvent être sèches ou préimprégnées d'une résine thermodurcissable ou même thermoplastique.
- A l'échelle mésoscopique, les mèches sont souvent considérées comme continues et forment un réseau qui est le renfort. Il est donc lui-même hétérogène et anisotrope. Il peut se présenter sous la forme de structures  $3D^2$  ou bien de surfaces 2D destinées à être mise en forme. Dans les deux cas, il peut s'agir de tissus, de tricots ou de tresses, voir d'arrangements spécifiques entre ces trois types (des exemples de textiles techniques hybrides sont donnés dans [KAM00] et [LEO00]). C'est à cette échelle que le textile technique peut être défini à partir d'une cellule élémentaire représentative (CER). Il s'agit du réseau minimal de mèches qui forme le motif géométrique élémentaire qui permet de décrire le textile complet par périodisation spatiale ([LOM00]).
- Enfin, à l'échelle macroscopique, le composite est constitué de renforts préimprégnés dont la résine a été polymérisée, ou de renforts secs sur lesquels une résine thermodurcissable, ou thermoplastique, a été injectée. A cette échelle, le renfort et le composite résultant semblent continus, mais restent tout de même anisotropes.

Cette schématisation globale, qui fait pour l'instant abstraction des procédés, est représentée sur la Figure 1-2.

### 1.1.1.3 Elaboration des composites minces

La fabrication des composites minces 3D nécessite soit des renforts préimprégnés drapés dont la résine est polymérisée ([BLA95]), soit des renforts secs mis en forme sur lesquels est déposée une résine. C'est ce dernier cas qui nous intéresse. Le procédé se déroule alors en deux phases :

- La mise en forme d'un flanc de type textile technique.
- L'injection d'un polymère, en général thermodurcissable, sur le flanc et son refroidissement dans le moule.

Dans l'industrie, le procédé RTM est un exemple représentatif parmi les nombreux procédés de moulage pour les composites ([BER-T]). Il a une cinquantaine d'années et est très populaire dans l'aérospatial ([POT99]). Dans notre étude, le champ d'action ne concerne que la première phase. En effet, la deuxième phase est un problème de thermomécanique des fluides concernant l'étude des écoulements et de la perméabilité ([BIC00], [BIC00b]). Cependant, la bonne réalisation des pièces est conditionnée par la prise en compte du couplage entre les deux phases. En effet, la perméabilité de la préforme obtenue à la fin de la première phase dépend des déformations provenant de la mise en

---

<sup>2</sup> De nombreux exemples, comme une poutre, une tuyère ou bien encore une turbine de rotor, sont montrés dans [MOU99].

forme. Ainsi, lors de la deuxième phase, l'écoulement de la résine est fortement influencé par la géométrie de la préforme. Il est important de noter que, jusqu'à présent, c'est majoritairement avec des renforts tissés que le RTM a été étudié. Pour de tels renforts, le mode de déformation prépondérant est le cisaillement de la CER, appelé aussi « effet treillis », qui caractérise les structures tissées ([ROZ00], [WAN99]). Dans la phase de formage, c'est donc l'angle entre la chaîne et la trame qui varie localement. Or, Indermaur et al. [IND99] et Heardman et al. ([HEA01]) montrent que la perméabilité est fonction de cet angle. C'est donc que le bon remplissage du moule, garantissant l'absence de poches d'air dans le composite fini, dépend de la première phase. Un exemple d'étude complète prenant en compte ce couplage faite par Bickerton et al. peut être trouvé dans [BIC97].

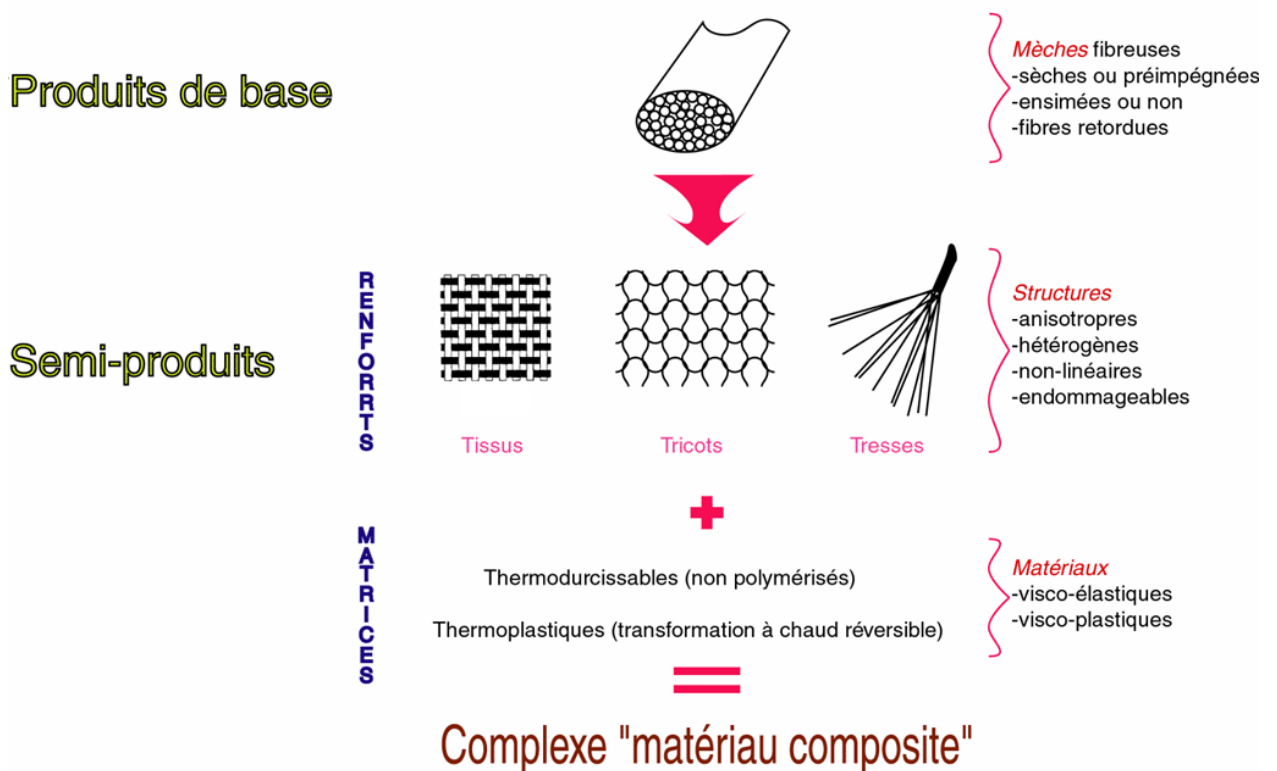


Figure 1-2 : Elaboration des composites

## 1.1.2 Objectifs de la recherche sur les renforts fibreux

### 1.1.2.1 Caractérisation des lois de comportement

Dès que l'on travaille avec des renforts fibreux, la première difficulté à surmonter est la caractérisation mécanique du comportement. En effet, les textiles techniques sont des structures et non des matériaux, cela étant d'autant plus vrai pour les tricotés non-polymérisés. En conséquence :

- L'hétérogénéité, due à l'absence de polymérisation, fait que les essais classiques, relatifs aux milieux continus, sont difficiles à adapter. La préparation des éprouvettes est longue et fastidieuse ([BUE98]) et l'obtention de champs homogènes de déformation est problématique ([WAN98]).



- L'anisotropie fait que les mesures sont difficiles à réaliser dans les directions de faible rigidité en raison des déformations importantes et des efforts très faibles à mesurer.

Cela explique que de nouveaux essais aient été imaginés pour tester les modes de déformations spécifiques au textile étudié, et ce à plusieurs échelles ([BAS99], [STU99], [KAW89]). En effet, le comportement d'un textile technique est le résultat de la conjonction entre le comportement des mèches et un effet de structure, provenant de la déformabilité de la CER.

Afin de limiter le nombre d'essais, des modèles de différentes sortes ont été construits (détaillés au 1.3.1). Ces derniers sont définis à deux échelles :

- L'échelle mésoscopique pour la caractérisation des mèches à l'échelle microscopique (essais de traction uniaxiale ou biaxiale, essai de cisaillement).
- L'échelle macroscopique pour la caractérisation de la CER à l'échelle mésoscopique (essais de formage couplés à une approche inverse).

Cette approche est hiérarchique : un modèle microscopique de comportement fibreux doit modéliser les mèches de la CER d'un autre modèle mésoscopique qui doit permettre d'accéder au comportement macroscopique d'ensemble de la structure fibreuse. Néanmoins, aux deux échelles, les difficultés résident plus dans l'identification des modèles mécaniques que dans leur mise au point.

#### 1.1.2.2 Simulation et optimisation des procédés de mise en forme

L'intérêt de la caractérisation du comportement des textiles techniques est de pouvoir alimenter un modèle pour la simulation des procédés de mise en forme. En effet, la puissance de calcul des ordinateurs ayant incroyablement crue ces dernières années, la mise au point et l'optimisation d'un procédé est aujourd'hui fortement appuyée par l'outil numérique. Cette méthode est économique car elle limite les investigations expérimentales sur des outillages coûteux à fabriquer. D'autre part, un des objectifs industriels est l'intégration de la simulation du procédé de fabrication dans le calcul d'une structure. Les calculs de structure consistent surtout à tester la résistance d'une pièce donnée aux charges de service. Aujourd'hui, cette approche ne suffit plus car le comportement de la pièce manufacturée est souvent lui-même mal connu, dépendant des procédés intervenant lors de son élaboration. Il est donc important de simuler les procédés pour connaître et optimiser le comportement de la pièce obtenue ([MAR01]). C'est la démarche initiée ces dernières années par les sociétés qui produisent les grands codes industriels orientés « métier » en collaboration avec les chercheurs. Par exemple, avec le procédé RTM, évoqué au 1.1.1.3, il est capital de pouvoir modéliser correctement la première phase pour pouvoir simuler la seconde avec précision et il est clair que les propriétés mécaniques du composite final dépendent de ces deux phases. C'est pourquoi le domaine de recherche sur la simulation de la mise en forme des textiles techniques est en progression constante depuis ces dernières années.

Le moyen de parvenir à simuler à moindre coût un procédé de mise en forme est un modèle macroscopique. La difficulté majeure est la nécessité de mettre en place des modèles simplifiés prenant en compte les spécificités des renforts fibreux aux échelles mésoscopique et microscopique. En effet, afin de simuler les opérations de mise en forme avec des temps de calcul acceptables, il n'est pas possible de modéliser à l'échelle macroscopique la totalité de la structure avec les détails des échelles mésoscopique et microscopique. La tendance actuelle est d'utiliser des éléments finis structuraux<sup>3</sup> pour

---

<sup>3</sup> De type coque/membrane et poutre/barre.

modéliser le textile ([BOI00], [BLA95]). Cette approche permet d'accéder aux grandeurs cinématiques et statiques, ce qui est une extension importante des approches géométriques qui furent les premières mises en place et qui continuent d'être développées ([POT01]).

## 1.2 Intérêt de l'étude des renforts fibreux tricotés

Notre recherche est spécifique aux renforts tricotés secs et s'inscrit dans la continuité des recherches entamées par Boisse, Billoët et al. sur les tissus ([BOI00], [BLA95]). C'est ce que nous montrons premièrement en définissant le cadre d'étude. Après avoir rapidement effectué la classification des tricots, nous soulignons l'intérêt des renforts tricotés qui se trouve dans leur comportement. Nous montrons ensuite pourquoi les renforts tricotés sont une alternative intéressante aux tissus pour l'élaboration de composites minces structuraux. Pour finir, nous donnons quelques références où sont montrés des exemples de pièces réalisées avec de tels renforts.

### 1.2.1 Cadre de l'étude

#### 1.2.1.1 Extension des modèles éléments finis de tissu

La problématique du formage des tissés, incontournable dans l'élaboration des composites minces, commence aujourd'hui à être bien maîtrisée, expérimentalement et numériquement. L'intérêt pour les tricots destinés à des applications similaires est donc une extension logique. Bien que leurs propriétés mécaniques soient encore mal connues ([BAN01], [LOM01], [SAV00], [MOU99]...), ils présentent un fort potentiel qui mérite d'être exploré comme s'accordent à le dire de nombreux auteurs (nous reviendrons sur ce point au §1.2.2). Comme nous l'avons vu au §1.1.2 pour les autres textiles techniques, l'étude des renforts tricotés passe par la caractérisation de leur comportement et l'intégration de ce dernier dans des modèles macroscopiques aptes à simuler la mise en forme.

Pour notre étude, la démarche suivie est analogue à celle proposée par Boisse et al. ([BOI00]) pour les tissus. Cette approche consiste à obtenir le comportement d'une CER de tissu et à l'injecter dans une membrane où seules des énergies de tension sont considérées ([BOI97]). L'élément structural construit est équivalent à plusieurs CER du tissu et son comportement est alimenté par deux surfaces de tensions ([BOI01]). Le comportement de la CER peut être caractérisé par trois outils ([BUE98]) : une approche expérimentale ([BOI00]), un modèle éléments finis ([HAN98]) ou un modèle analytique ([KAW89]). C'est sur l'aspect « caractérisation par un modèle éléments finis » que porte notre travail. Il consistera à mener une analyse éléments finis d'une maille élémentaire de tricot sec à l'échelle mésoscopique, de manière analogue au travail d'Hanklar ([HAN98]) (nous précisons ce point au 1.4.2.1). Nous ne traiterons de l'aspect « mise en forme », où l'objectif serait de parvenir à formuler un élément fini macroscopique de « membrane de tricot », que rapidement au chapitre 5.

#### 1.2.1.2 Classification des renforts tricotés

A l'instar de la problématique des tissus, notre étude porte sur les renforts tricotés secs surfaciques car ils présentent une alternative intéressante pour le RTM comme nous le montrerons au 1.2.2.1. Nous n'abordons que la classification des tricots en laissant la classification générale des textiles techniques de côté<sup>4</sup>. Les tricots surfaciques sont classés

---

<sup>4</sup> Cette classification est très vaste ([BAN01], [RAM97]).

en deux grandes familles ([LEO00], [GOM98], [RAM97]) : les tricots à mailles cueillies (weft knits) et les tricots à mailles jetées (warp knits) (Figure 1-3). Les géométries des deux types de CER, tout comme les propriétés mécaniques, diffèrent à cause des procédés de fabrication. Nous devons à Leong, Ramakrishna et al. ([LEO00], [RAM97]) une description assez exhaustive des procédés de tricotage. Notons qu'il existe deux techniques de fabrication des tricots à mailles cueillies : le tricotage plan et le tricotage circulaire. Nous trouvons dans [RAM97], adjointe à la classification des machines à tricoter, une classification des nombreuses CER de tricot existantes.

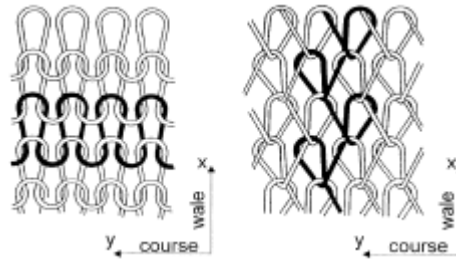


Figure 1-3 : Jersey simple de type plain weft (à gauche) et tricot de type warp (à droite) [GOM98]

### 1.2.1.3 Comportement des renforts tricotés

Le comportement macroscopique des textiles techniques est essentiellement lié à un effet de structure. C'est l'étude du changement de forme des mèches dans la CER qui permet de définir les modes de déformation et les rigidités associées. Dans le cas des tissus, la CER est habituellement considérée comme une membrane très peu extensible dans les directions des mèches, mais très facilement cisillable (effet treillis). Dans le cas des tricots, nous pouvons presque adopter le même point de vue, la différence étant la grande déformabilité de la CER dans les directions chaîne et trame. Nous pouvons trouver les modes de déformations d'un jersey simple représentés par Xue et al. dans [XUE02] et par Lim et al. dans [LIM02]. Cette propriété, caractéristique des renforts tricotés, est conférée par la géométrie courbe de la maille qui autorise les mèches à fléchir en glissant et en s'écrasant les unes sur les autres avant de se tendre. La première voie à explorer dans notre étude est donc la caractérisation du comportement en traction biaxiale, que nous cherchons à obtenir sous la forme de surfaces de tension comme nous l'avons affirmé au 1.2.1.1.

Nous trouvons peu de données expérimentales sur le comportement des tricots techniques secs dans la littérature. C'est surtout la communauté des chercheurs du domaine textile qui a publié sur le comportement des tricots secs<sup>5</sup>, mais rarement techniques, alors que la communauté des chercheurs en mécanique s'intéresse majoritairement à des exemples de caractérisation de composites à renforts tricotés<sup>6</sup>. Néanmoins, dans les deux communautés le comportement inédit des tricots est mis en évidence. Dans la communauté des mécaniciens, ce comportement est au service de la caractérisation du composite fini. Ainsi, Khonder et al. ([KHO01]) propose une étude de l'influence de l'état de déformation sur les caractéristiques du composite résultant d'une technique de fabrication par RTM. Un autre exemple pourrait être donné par Rozant et al. ([ROZ00]), dans lequel une étude de la formabilité de peaux tissées et tricotées d'un composite sandwich inclut également l'étude du renfort tricoté seul. Bien qu'il faille rappeler que les auteurs insistent également sur

<sup>5</sup> Par exemple, [STU99] s'intéresse même au frottement entre les mèches d'un tricot warp.

<sup>6</sup> [LUO02] est un des rares articles où l'on trouve des courbes de traction biaxiale d'un renfort tricoté de verre seul.

l'étendue des recherches qui restent à être menées, les tricots techniques paraissent être des candidats de prédilection pour le renforcement de composites minces injectés.

## 1.2.2 Potentiel pour les applications structurales

### 1.2.2.1 Intégration dans les procédés de mise en forme

Nous pensons que les propriétés spécifiques des tricots sont intéressantes pour le procédé RTM. D'une part, les renforts tricotés exhibent une excellente formabilité conférée par la déformabilité de la maille, d'autre part, ils ont également une très bonne perméabilité provenant de leur hétérogénéité dans les états déformés et non-déformés. Nous n'avons malheureusement trouvé dans la littérature que des exemples concernant la première propriété. Ainsi, nous devons à Gommers et al. ([GOM98]) de s'être interrogé sur le manque de popularité des renforts tricotés et d'avoir justifié leur utilisation potentielle dans les composites. L'article fait référence à une thèse, faite au même laboratoire que les auteurs, où sont atteints des allongements de 100% et des angles de cisaillement de 50°, sans instabilités, lors d'une opération de mise en forme. Un autre article, traitant cette fois-ci de l'emboutissage des tricots secs intégré dans le procédé RTM, est dû à Savci et al. ([SAV00] et [SAV00b]). Ils explorent le concept de formabilité expérimentalement et numériquement. Une approche similaire, mais utilisant un autre modèle, peut aussi être trouvée dans les articles de Lim et al. ([LIM00], [LIM99]). Dans l'article de Mayers et al. ([MAY97]), c'est la mise en forme de plaques composites thermoplastiques à renforts tricotés de carbone qui est étudiée en détail.

*Remarque* : Ce type de semi-produit est une alternative au procédé RTM décrit précédemment, la matrice étant déjà incluse dans le flanc avant le formage.

Il est montré que, pour des propriétés mécaniques proches, le composite voulu est plus facile à réaliser qu'avec un tissu. Citons encore Takano et al. ([TAK01]) qui s'intéressent à la même problématique et qui montre des photos du semi-produit mis en forme. Enfin, Une autre démonstration du potentiel de formabilité des tricots est donnée par Rozant et al. ([ROZ01]) à l'aide d'une comparaison entre tricot de type warp et taffetas pour le drapage d'une surface elliptique. Les déformées obtenues sont sans appel. Ce travail est poursuivi dans [ROZ01b] pour le composite sandwich à peaux tricotées de [ROZ00].

### 1.2.2.2 Tenacité

Une autre propriété importante découle de la grande déformabilité de la maille : la très bonne résistance aux chocs pour les composites renforcés par des tricots. Notons que seules des études sur des plaques composites ont été menées, mais nous pouvons imaginer que cette propriété est aussi vraie pour des pièces obtenues par mise en forme. La résistance aux chocs est expérimentalement mise en évidence par Mouritz et al. ([MOU99b]) en comparant le taux de restitution d'énergie critique  $G_{ic}$  pour des renforts tricotés, tressés, tissés et de type UD. Il ressort que les renforts tricotés permettent d'obtenir des tenacités supérieures. Les mécanismes impliqués et des modèles d'endommagement et de fissuration spécifiques sont décrits par Cox et al. ([COX01]) et Huysmans et al. ([HUY01]). Une mise en évidence expérimentale des mécanismes de déformations de la maille est aussi effectuée par Xue et al. ([XUE02]) sur l'analyse vidéo d'essais de traction, et par Putnoki et al. ([PUT99]) en comparant plusieurs composites à renforts tricotés différents. Citons Dixneuf ([DIX00]) qui corrobore également la bonne tenacité des tricots en montrant l'absence de délaminage du renfort avec la matrice. Enfin,

citons d'autres propriétés connexes analysée par Flambard ([FLA00]), mais cette fois-ci sur des tricots secs. Il s'agit des résistances à la coupure et à la pénétration des armes blanches qui sont bonnes et ont permis de réaliser des vêtements de protection militaires.

### 1.2.2.3 Exemples de pièces structurales

La mécanique des tricots techniques est encore un domaine de recherche. De plus, la maîtrise de la mise en œuvre et la reproductibilité à l'échelle macroscopique sont encore problématiques. Cela explique que les renforts tricotés ne soient pas très utilisés dans les pièces structurales. Huang et Ramakrishna ([HUA00]) ont effectué une classification des tricots pour ces applications. Nous pouvons donner des exemples, souvent trouvés dans les articles précédemment cités (où d'ailleurs de nombreuses autres références sont données). Ainsi, nous avons dans [LEO00] une synthèse des différentes pièces apparaissant dans la littérature : un casque de cycliste, une pièce de porte d'hélicoptère, un raccord en T, ou bien encore des prothèses biomédicales. Un autre exemple de prothèse peut être trouvé dans [MAY97]. Nous-même allons étudier au §1.4 un tricot d'aramide intervenant dans des raccords automobiles.

### 1.3 Etat de l'art de la modélisation des textiles techniques et des renforts tricotés

Avant de se lancer dans une modélisation de tricot, il est essentiel d'avoir un point de vue global sur l'ensemble des modèles de textile déjà existants. Ces modèles peuvent être classés en fonction du niveau de détail de la géométrie de la CER et des mèches (Figure 1-4). Les échelles microscopique et mésoscopique donnent lieu à des modèles pour la caractérisation du comportement des mèches seules et de la CER. L'échelle macroscopique, très riche, est celle de la modélisation de la mise en forme. Il ressort de cette étude qu'il n'existe pas encore de modèle éléments finis volumique de renfort tricoté sec en grandes transformations.

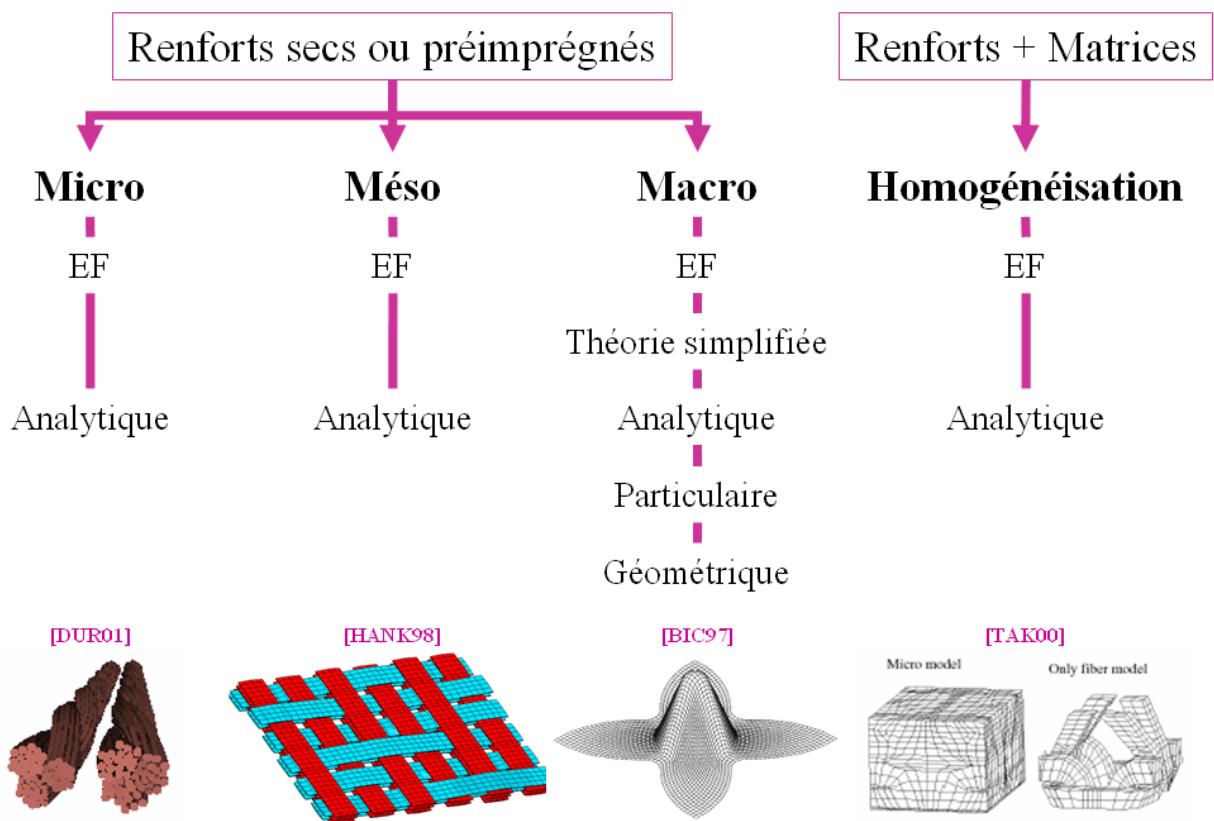


Figure 1-4 : Synthèse de l'état de l'art de la modélisation des textiles techniques

#### 1.3.1 Modèles pour la caractérisation

##### 1.3.1.1 Modèles microscopiques

A l'échelle microscopique, le but de ces modèles est de caractériser le comportement des mèches. Ce comportement est complexe (nous le décrirons en détail au 1.4.2.3), ceci étant dû à l'effet de structure des centaines de fibres en contact avec leurs voisines. La difficulté est alors la prise en compte de tous ces détails. Dans le cas où les fibres sont préimprégnées, les modèles employés sont surtout analytiques et font appel à des procédures

d'homogénéisation. Dans le cas de milieux fibreux secs, l'approche pratiquée est plutôt la mise en œuvre des outils numériques, à savoir l'utilisation de modeleurs géométriques couplés à des codes de calcul éléments finis. Malheureusement, cela conduit à l'heure actuelle à des modèles trop lourds dont les temps de calcul sont beaucoup trop importants. C'est pourquoi cette approche est encore peu pratiquée. Citons Durville ([DUR01]) qui, après avoir travaillé sur une problématique analogue dans les câbles, formule des éléments finis spéciaux pour gérer le contact et ainsi modéliser un paquet de fibres avec des très bons temps de calcul. D'autres éléments, dénommés « digitaux », sont construits par Wang et Sun ([WAN01]) pour modéliser le procédé de tressage. Chaque mèche est alors considérée et mise en contact avec les autres pour former la tresse résultante. Même si les mèches sont continues, et donc modélisées avec les détails de l'échelle mésoscopique, et non microscopique, ce modèle pourrait très bien servir à décrire l'échelle microscopique. Il suffirait de considérer que les mèches sont des fibres et que la tresse est une mèche. Enfin, nous-même avons tenté de mettre en place un tel modèle, mais nous nous sommes arrêtés à la géométrie (Figure 1-5) qui était déjà trop lente à manipuler sur nos machines.

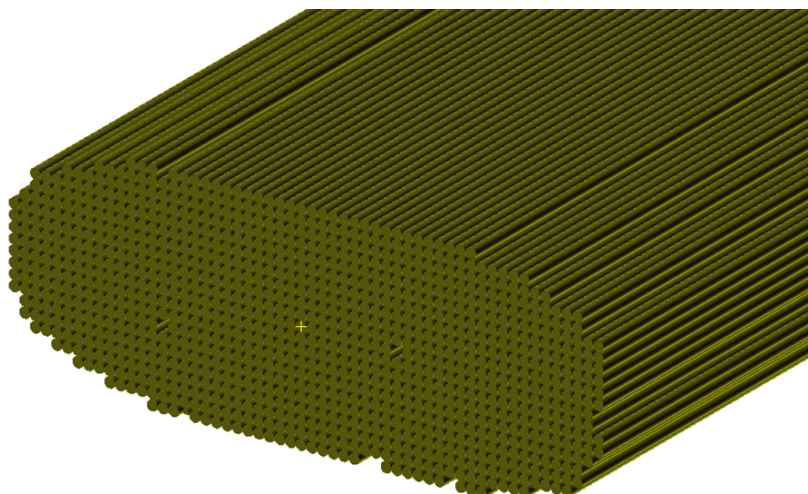


Figure 1-5 : Exemple de géométrie de mèche fibreuse modélisée avec MSC.Patran

### 1.3.1.2 Modèles mésoscopiques

A l'échelle mésoscopique, la mèche est souvent assimilée à un milieu continu et c'est la caractérisation du comportement de la CER qui est recherché. Les deux difficultés résident dans le choix d'un comportement traduisant le caractère fibreux de la mèche et dans la définition de la géométrie de la CER. Comme le comportement de la CER dépend de l'effet de structure dû à l'évolution de cette géométrie, qui n'est connue qu'à l'instant initial, c'est surtout sur ce dernier aspect que portent les efforts des différents auteurs. Ainsi, dans la littérature, l'étude du comportement de la CER va systématiquement de pair avec les modèles descriptifs de sa géométrie. Il est fréquent de trouver des modèles mécaniques de caractérisation des composites qui se basent uniquement sur les caractéristiques géométriques initiales de la CER. C'est pour cela que nous y consacrons un sous-paragraphe (le 1.3.1.3), bien que ce soit la modélisation du textile seul qui nous intéresse.

#### ▪ Modèles éléments finis

Il y a peu de modèles éléments finis volumiques en grandes transformations de textiles techniques à notre connaissance. En effet, le maillage de géométries complexes et la prise en compte du contact, avec des grands déplacements, rendent ce problème complexe et



non-linéaire. Par exemple, nous devons à Hanklar ([HAN98]) la construction de plusieurs modèles éléments finis relatifs à des mailles de tissu différentes, les mèches étant assimilées à des milieux continus orthotropes. L'étude est menée en traction biaxiale. Le cisaillement est, lui, étudié par Peng et Cao ([PEN02]) où la géométrie du tissu est reprise du modèle descriptif de Mc Bride et Chen ([BRI97]).

- Modèles analytiques

Ces modèles sont les plus anciens et proviennent du milieu du textile, mais ils sont toujours d'actualité et continuent d'être développés à l'heure actuelle. Ils consistent à faire des hypothèses sur la géométrie de la CER et sur sa cinématique afin d'en dériver des modèles mécaniques. Nous devons à Kawabata ([KAW89]) et à Postle ([POS87]) les modèles analytiques de tissus et de tricots en grandes transformations les plus connus. La géométrie des tricots y est approximée par un ensemble de portions de cercle et de droites. Une approche similaire a été récemment développée à l'Université Catholique de Louvain par Luo et al. ([LUO02]). Lomov et al. ([LOM00] et [LOM01]), de la même équipe, ont également mis au point des logiciels permettant de calculer des déformées et des efforts sur des CER à l'aide de modèles descriptifs. Les géométries générées peuvent être 3D et permettent de générer numériquement des tricots complexes, à la manière d'Adanur et Liao ([ADA98]). Citons enfin une théorie originale de l'équipe de Ganghoffer pour modéliser les mèches et construire des modèles mécaniques de taffetas : [JUN99] et [MAG01]. La mèche est assimilée à un milieu micropolaire, cela permettant de construire une CER micropolaire équivalente. Le modèle analytique pourrait d'ailleurs être discrétisé numériquement avec la méthode des éléments finis.

### 1.3.1.3 Modèles de plaques composites renforcés par des textiles techniques

Il existe beaucoup de modèles de caractérisation de composites, bien plus que de modèles de caractérisation des renforts seuls qui sont plus difficiles à formuler. La cause est à imputer aux mouvements des mèches qui, s'ils ne sont pas limités par la matrice, impliquent la présence de grandes transformations et de contacts, donc de non-linéarités. Concernant les composites, les modèles de caractérisation sont linéaires et utilisent des théories d'homogénéisation. Il y a deux grandes écoles ([TAN97]) : l'homogénéisation par éléments finis et l'homogénéisation analytique. Ces deux approches diffèrent par la technique de calcul de la CER : la première utilise les logiciels de calcul de structure alors que la deuxième nécessite la résolution de modèles spécifiques développés par les auteurs. L'objectif commun est d'accéder aux propriétés mécaniques de l'échelle macroscopique à partir d'un modèle de la CER (on parle de micro-mécanique de la CER dans la littérature). Un exemple représentatif est l'article de Gommers et al. ([GOM98] et [GOM98b]) qui estime par cette méthode les rigidités des composites à renforts tricotés sur un graphe polaire.

- Modèles éléments finis

La méthode des éléments finis est bien adaptée car les modèles résultants sont linéaires et des géométries complexes peuvent être générées. Par exemple, nous devons à Glaesgen et al. ([GLA96]) un des premiers modèles de composite renforcé par un taffetas et, plus récemment, l'analyse des facteurs de concentration de contrainte autour d'un trou dans un composite renforcé par un tissu de type sergé par Ng et al. ([NG00]). Des géométries plus complexes sont possibles : d'Amato ([AMA01]) propose une CER de tresse plane discrétisée en éléments volumiques. Concernant les composites à renforts tricotés, nous avons dans [CUO00] un maillage de la CER en éléments de poutres noyées dans une matrice représentée par des éléments 3D. Une autre approche est celle de Takano et al. ([TAK01], [TAK00]) : elle consiste à calculer le comportement de la CER d'un tricot par

un modèle éléments finis volumique, la matrice étant toujours représentée par des éléments 3D.

- **Modèles analytiques**

Une synthèse des méthodes existantes appliquées aux composites à renforts tricotés est proposée dans [HUA00]. Cet article nous intéresse surtout car il expose le modèle descriptif de la maille tricoté la plus simple (celle du jersey simple de la Figure 1-3). Ce modèle descriptif est inventé par Leaf et Glaskin en 1955 et a été repris dans plusieurs articles du même type de Ramakrishna et al. ([RAM00], [RAM97]). Il est néanmoins possible d'utiliser d'autres modèles descriptifs ([SCI00]), comme ceux évoqués précédemment au 1.3.1.2 dans la catégorie modèles analytiques. Les techniques analytiques dans le domaine des grandes transformations sont peu nombreuses. Citons par exemple Hoh et al. ([HOH01]) où une méthode générale est donnée pour homogénéiser une CER de sandwich en nids d'abeille. Elle se base sur la modélisation en éléments de poutres des constituants de la CER et serait applicable au cas des tricots.

## **1.3.2 Modèles pour la mise en forme**

### 1.3.2.1 Généralités

Les modèles pour la mise en forme sont très nombreux car c'est eux qui intéressent le plus les industriels. Ces modèles sont formulés à l'échelle macroscopique et, à l'heure actuelle, il est nécessaire de les construire avec des approches simplifiées prenant en compte les spécificités des échelles inférieures. Il n'est en effet pas possible de modéliser la totalité de la structure dans ses moindres détails. Globalement, la difficulté consiste donc en la mise au point d'une formulation permettant de simplifier la structure 3D hétérogène de l'échelle mésoscopique en un élément surfacique continu à l'échelle macroscopique capable de simuler une opération de formage. La simplification peut être obtenue par plusieurs moyens : des modèles géométriques et éléments finis, mais aussi des modèles analytiques et particuliers. Une synthèse de ces modèles est disponible dans [LIM02]. Néanmoins, il existe d'autres modèles originaux basés sur des techniques d'homogénéisation en grandes transformations. Ainsi, dans [TAK00] et [TAK01] la mise en forme est simulée en utilisant une « carte » du comportement homogénéisé d'une cellule éléments finis de tricot. Les différents états de la cellule sont pré-calculés afin d'optimiser les temps de calculs de la mise en forme.

### 1.3.2.2 Modèles analytiques

Il existe très peu de modèles analytiques à cette échelle car ils ne fonctionnent qu'en petites perturbations ou dans des cas spécifiques de simulation de mise en forme. Par exemple, Bondar et al. ([BON99]) assimile le tricot sec à une coque trouée en petites perturbations, ce qui ne peut convenir. Lim, Ramakrishna et al. ([LIM99]) donnent un exemple de formage analytique de tricot rendu possible par les formes des outils qui sont simples.

### 1.3.2.3 Modèles géométriques

Les modèles géométriques sont basés sur l'algorithme du filet (fishnet) et ont prouvé leur efficacité quand il s'agit de prédiction de drapabilité. Par exemple, Borouchaki, Billoët et

al. ont développé une telle méthode pour un logiciel industriel ([BOR01], [BIL00]). D'une manière générale, la technique se base sur la recherche des géodésiques, c'est-à-dire des courbes de plus faible longueur entre deux points de la surface à draper. Cette méthode continue aujourd'hui d'être développée car elle ne fonctionne pas avec toutes les géométries, surtout quand les courbures locales sont importantes ([POT01], [BLA00]). Le réseau de courbe formé peut alors être identifié au tissu si l'on suppose les géodésiques confondues avec les mèches, ce qui est le cas pour les tissus où elles sont très peu extensibles. Cette hypothèse freine l'adaptation de ces modèles au cas des tricots, bien qu'une extension soit proposée par Lim et Ramakrishna ([LIM02]). Cependant, la grosse lacune reste l'absence des grandeurs statiques : le comportement n'intervient pas et il n'est pas possible de calculer (ou d'appliquer) des contraintes ou des efforts.

### 1.3.2.4 Modèles éléments finis

La première approche est d'utiliser des éléments finis classiques en les combinant ou en jouant sur leurs propriétés pour modéliser les CER. Les combinaisons possibles sont obtenues par la juxtaposition d'éléments structuraux, mais il est aussi possible de jouer sur le comportement. Par exemple, dans l'article de Dong et al. ([DON00]), ce sont des membranes classiques qui sont utilisées pour l'emboutissage, la spécificité du comportement tissé étant injectée via le comportement. D'autre part, Cao et al. ([CAO03], [XUE03]) et Yu et al. ([YU02]) proposent un modèle du même type avec une formulation spéciale du comportement où les contraintes sont calculées dans un repère non-orthogonal convecté dans la transformation. Le comportement est donc soit supposé correspondre partiellement à des données expérimentales, soit recalé sur un modèle mésoscopique de CER ([PEN02]). Cependant, ces approches semblent bien incertaines sans une parfaite connaissance de la formulation de l'élément utilisé, notamment en ce qui concerne l'actualisation du tenseur de comportement... Une alternative pour rendre plus physique ces modèles est d'utiliser des barres pour représenter les mèches. On les connecte alors aux membranes pour pouvoir utiliser les algorithmes de contact des solveurs, le contact des outils avec les barres n'étant pas souvent implémenté. Les membranes servent donc de support des barres, mais elles permettent également la prise en compte d'une matrice, souvent modélisée par un comportement viscoélastique. Cette approche est efficace pour les tissus secs ([SID01], [SHA01]) ou préimprégnés ([CHE99], [BLA95]).

La seconde approche consiste à construire de nouveaux éléments basés sur des théories simplifiées. Elles ne concernent que les tissus pour le moment. Cette approche a été initiée avec les premiers travaux de Boisse et al. ([BOI93]). L'interaction chaîne/trame est alors ignorée et l'identification du comportement d'une mèche seule suffit. Par la suite, dans [BOI97], la même théorie est enrichie par un comportement couplé identifié par des essais biaxiaux. Les éléments de tissu obtenus ont été décrits au 1.2.1.1. C'est l'approche qui nous semble la plus physique et la plus cohérente.

### 1.3.2.5 Modèles particuliers

Ces modèles sont une alternative intéressante aux éléments finis et s'apparentent aux méthodes sans maillage (meshless) qui gagnent en popularité ces derniers temps. Les modèles particuliers utilisent des équations de la dynamique intégrées par une technique analogue à l'algorithme explicite classique des solveurs éléments finis ([BEL00]), sauf qu'on ne parle pas d'éléments finis mais uniquement d'équations de liaisons entre les nœuds. Ces liaisons prennent en compte le contact, qui est appelé « gestion des collisions ». Les principes généraux de ces modèles peuvent être trouvés dans la thèse de Lacombe

([LAC98]). Dans le domaine du textile, c'est surtout les acteurs du monde du design et du rendu réaliste qui utilisent ces méthodes pour simuler le drapage de vêtements de confection sur des mannequins virtuels, ou des tombés de nappe sur divers objets ([PLA00], [BAR98], [VOL96] et [BRE94] par exemple). Une autre catégorie de modèles, proche de la méthode particulière par l'écriture des équations, concerne les modèles à base de maillages d'éléments de type masses-ressorts-poutres intégrés avec un schéma explicite ([LEG00]). Enfin, une alternative à ces approches est proposée par Chen et al. ([CHE01]) et fait appel aux volumes finis.

## 1.4 Caractérisation d'un renfort tricoté sec d'aramide structural

Grâce aux notions précédemment exposées, nous pouvons maintenant clairement définir en détail le cadre et les objectifs de notre étude. Nous présentons dans ce paragraphe la structure tricotée que nous souhaitons caractériser et les données expérimentales disponibles. Le tricot est un simple jersey d'aramide sec sur lequel un seul essai de traction biaxial a été effectué. En prenant en compte le comportement fibreux des mèches, notre objectif est de construire un modèle mésoscopique éléments finis pour la caractérisation du comportement de la CER. C'est l'essai qui nous permettra de vérifier les résultats obtenus.

### 1.4.1 Présentation du tricot industriel étudié

#### 1.4.1.1 Mésographies

Dans la littérature anglo-saxonne, les tricots d'aramide sont appelés AFKF (pour Aramid Fiber Knitted Fabric). Grâce aux bonnes caractéristiques mécaniques des mèches d'aramide ([PIN-T], [WAN99b]) et à la déformabilité des mailles, les AFKF trouvent des applications industrielles structurales. Ainsi, dans l'automobile, les tubes en élastomère servant au raccordement du moteur au turbocompresseur peuvent être renforcés par un tricot tubulaire obtenu par tricotage circulaire ([PET98]) (voir Figure 1-6).



Figure 1-6 : Renfort tricoté issu d'un procédé de tricotage circulaire

En usine, ces raccords sortent droits de la chaîne de fabrication pour être par la suite pliés puis vulcanisés afin d'être stabilisés dans leur nouvelle forme. Avant la vulcanisation, le tricot permet, de par sa grande déformabilité, de fléchir le raccord car il travaille dans une zone élastique non-linéaire. Après la vulcanisation, le tricot est en général proche de la zone élastique linéaire et c'est les mèches d'aramide qui assurent alors une bonne rigidité du raccord dans sa nouvelle forme. C'est un de ces renforts tricotés que nous allons modéliser et analyser.

Nous avons eu accès à trois types de renforts différents que nous avons découpé et placé sous une loupe binoculaire afin de faire des mésographies, présentées sur la Figure 1-7. Le plus simple des renforts tricotés tubulaires est celui de type jersey simple à mailles cueillies (à gauche sur la Figure 1-7). C'est le seul à avoir été testé expérimentalement en traction biaxiale et c'est donc sur celui-ci que nous choisissons de concentrer exclusivement nos efforts.

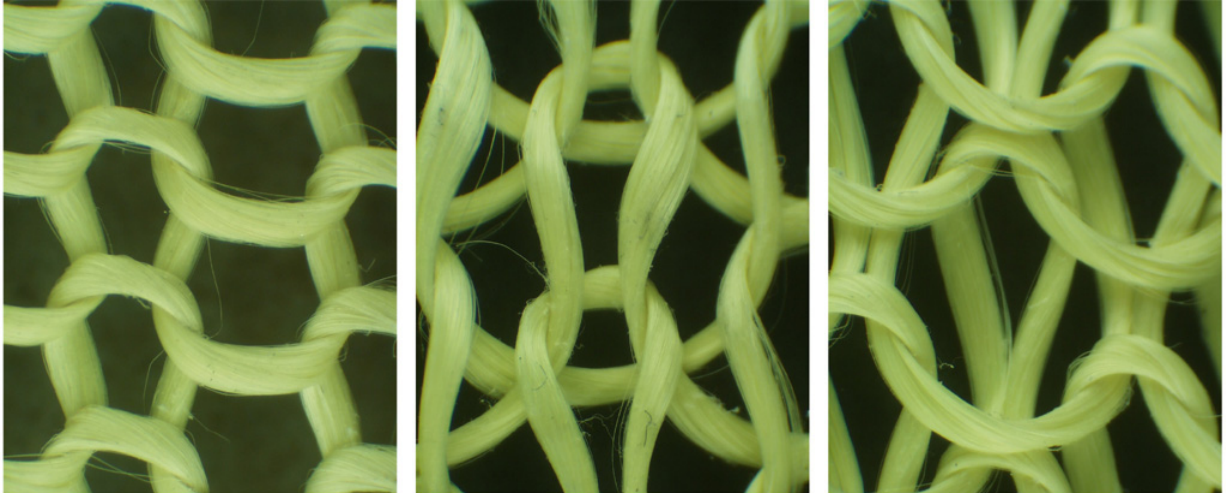


Figure 1-7 : Mésographies de tricots d'aramide industriels

#### 1.4.1.2 Géométrie de la CER

Un échantillon du tricot étudié est présenté sur la Figure 1-8. Si nous cherchons à le caractériser par sa CER, nous constatons que ce tricot est déséquilibré car les mailles ne sont pas toutes de la même taille. De plus, les CER sont inclinées à cause du procédé de tricotage circulaire. Il en résulte des CER inclinées de  $17,7^\circ$ , de largeur moyenne  $L=5\text{mm}$  et de hauteur moyenne  $H=2,9\text{mm}$ , présentées sur la Figure 1-9. N'oublions pas que la structure tricotée est 3D et qu'il faut également analyser la géométrie dans l'épaisseur, ce qui est fait en fléchissant délicatement l'échantillon.

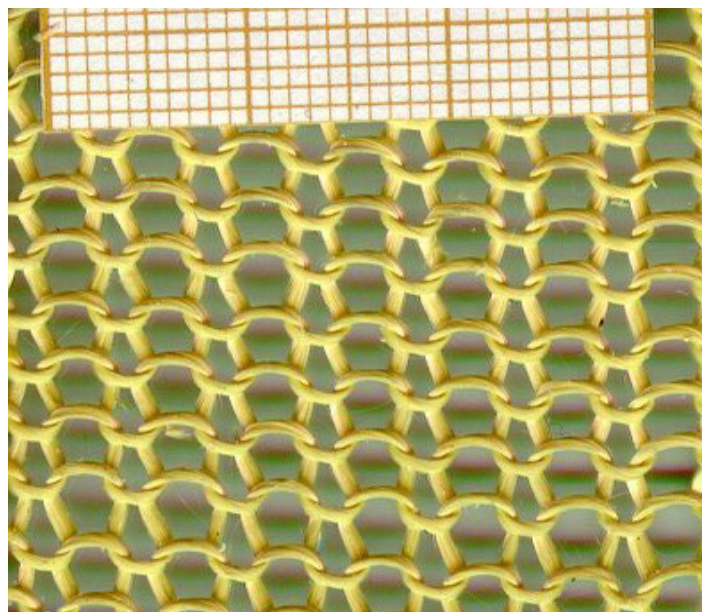


Figure 1-8 : Structure tricoté étudiée

Nous obtenons alors le profil dans l'épaisseur, montré sur la Figure 1-10, qui permet de définir l'épaisseur  $e$  de la CER. Ici,  $e=0,7\text{mm}$ .

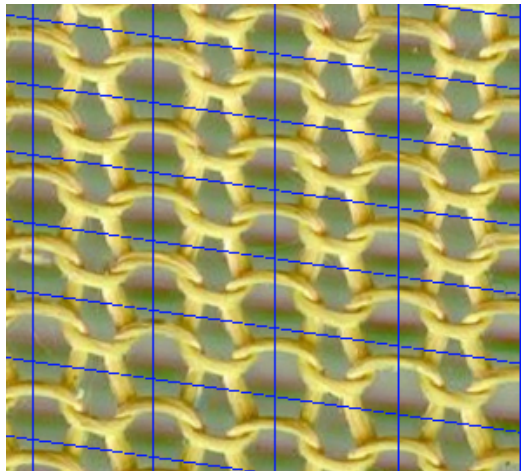


Figure 1-9 : Inclinaison des CER due au procédé de tricotage



Figure 1-10 : Vue dans l'épaisseur du tricot étudié

#### 1.4.1.3 Essai expérimental disponible

L'essai disponible a été réalisé dans la thèse de Buet ([BUE98]) sur la machine du LMSP à Polytech'Orléans. Cette machine est présentée sur la Figure 1-11 avec une éprouvette de tissu montée dessus.



Figure 1-11 : Machine de traction biaxiale du LMSP, Polytech'Orléans.

L'essai biaxial est présenté sur la Figure 1-12. La préparation des éprouvettes est longue et difficile car il faut autoriser les effets de Poisson afin d'avoir un champ de déformation biaxial le plus homogène possible. Cela paraît une tâche très difficile avec les tricots, alors qu'avec les tissus le problème est bien avancé ([BAS99], [BUE98]), et nul doute que des améliorations sont encore à apporter dans l'élaboration de telles éprouvettes.

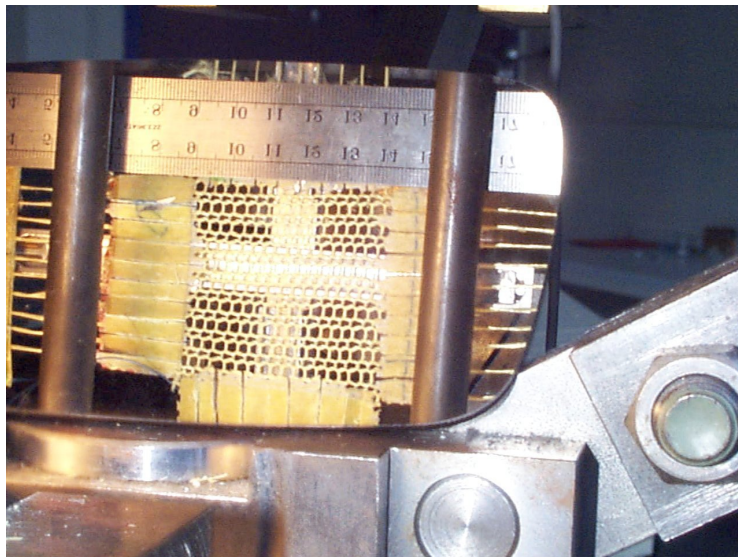


Figure 1-12 : Epreuve en croix pour la traction biaxiale

Les courbes force-déplacement obtenues pour un rapport de biaxialité unitaire sont représentées sur la Figure 1-13. Elles présentent une zone non-linéaire initiale traduisant la grande déformabilité des CER. La machine étant pilotée en déplacement, le rapport de biaxialité de la machine est défini par le rapport des déplacements imposés dans les directions de traction. Nous le notons :

$$k = \frac{U_{\text{HAUT}}}{U_{\text{DROITE}}} \quad (5.1)$$

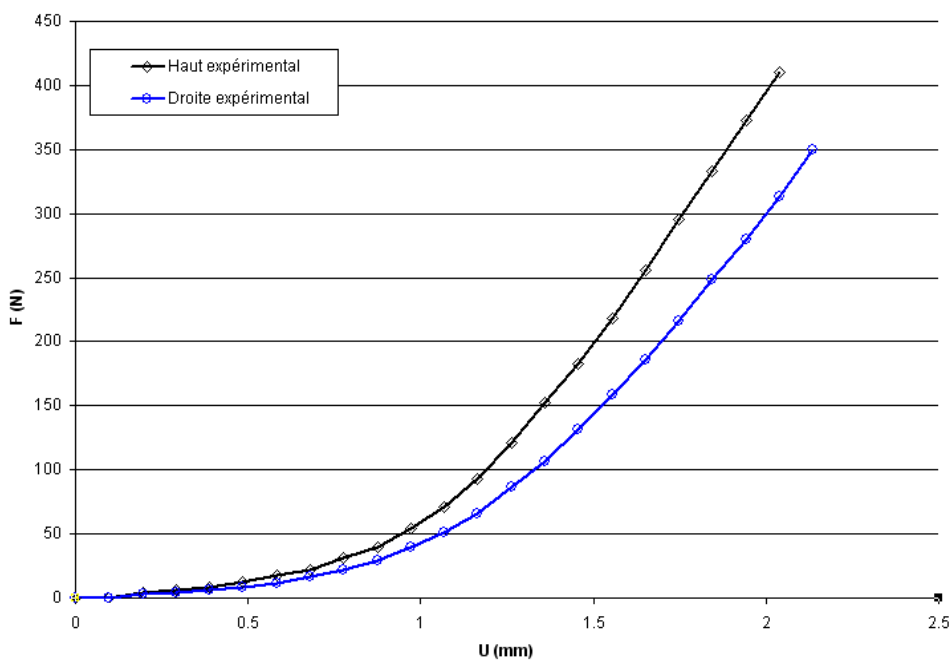


Figure 1-13 : Essai de traction biaxiale équilibré



Le “haut” est défini comme étant la partie supérieure de l’échantillon orthogonale à la direction dans le sens chaîne (warp ou wale en anglais). De même, la partie “droite” est associée à la direction dans le sens trame (weft ou course en anglais). Rappelons que ces directions ont été définies sur la Figure 1-3.

D’autre part, l’essai de traction sur une mèche d’aramide seule est présenté sur la Figure 1-14. Cet essai nous donne accès directement à la rigidité macroscopique de la mèche qui, seule, a un comportement élastique linéaire. Le module d’Young de traction est calculé à partir de la mesure de la section de la mèche et vaut 112000MPa et l’allongement à la rupture est pris à 2,5%. Malheureusement, nous ne connaissons pas les autres caractéristiques de la mèche, notamment son comportement transversal. Dans la littérature, ces caractéristiques sont jugées très difficiles à mesurer ([PIN-T], [LOM01]) bien qu’il existe un système normalisé pour le faire<sup>7</sup>.

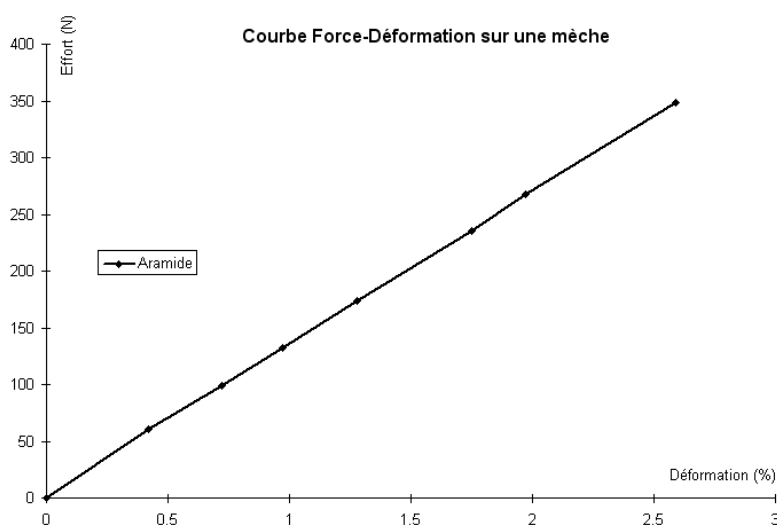


Figure 1-14 : Courbe de traction d’une mèche du tricot

## 1.4.2 Modèle éléments finis pour la caractérisation

### 1.4.2.1 Objectifs

D’après l’état de l’art de la modélisation du §1.3, il n’existe pas encore de modèles éléments finis de tricot en grandes transformations pour la caractérisation à l’échelle mésoscopique ou pour la mise en forme à l’échelle macroscopique. Par contre, cela est fait pour les tissés. Nous proposons donc de nous fixer comme premier objectif la construction d’un modèle mésoscopique éléments finis pour la caractérisation du tricot étudié, de manière analogue au travail de Hanklar ([HAN98]) sur les tissés (Figure 1-15). Nous connaissons la géométrie de la CER et nous avons des informations expérimentales concernant les mèches d’aramide et le tricot constitué, cela est donc possible. Pour y parvenir, il faut se fixer un second objectif : la prise en compte du comportement spécifique des mèches fibreuses dans la formulation éléments finis. Nous verrons que cet objectif est le plus difficile à atteindre. Notre problème consiste donc à mailler avec des éléments finis volumiques la géométrie complexe de la maille tricotée, et à utiliser une

<sup>7</sup> Il s’agit de la machine de Kawabata KES-F.

formulation en grandes transformations prenant en compte le comportement spécifique des mèches.

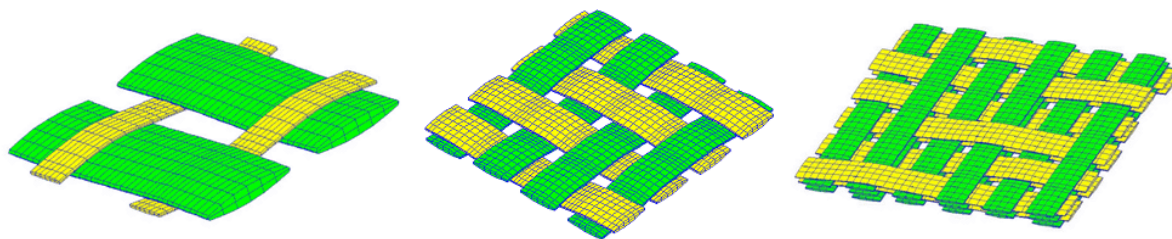


Figure 1-15 : Modèles éléments finis de caractérisation de renforts tissés [HAN98]

#### 1.4.2.2 Modèle de mèche à l'échelle de la CER

Nous avons vu au 1.3.1.1 que, compte tenu de la puissance actuelle des ordinateurs, il n'est pas encore possible de modéliser en grandes transformations par une technique standard éléments finis les milliers de fibres en contact dans une mèche. A l'instar du travail de Hanklar ([HAN98]), il faut supposer l'existence d'un milieu continu avec un comportement équivalent pour construire un modèle de mèche et, par la suite, un modèle de CER mésoscopique. Le comportement doit alors traduire la forte anisotropie dans la direction des fibres et prendre en compte l'écrasement transversal comme nous les représentons sur la Figure 1-16. La direction des fibres définit ce que nous appelons la « direction forte d'anisotropie », portée sur la Figure 1-16 par l'axe constitutif  $\kappa_1$ .

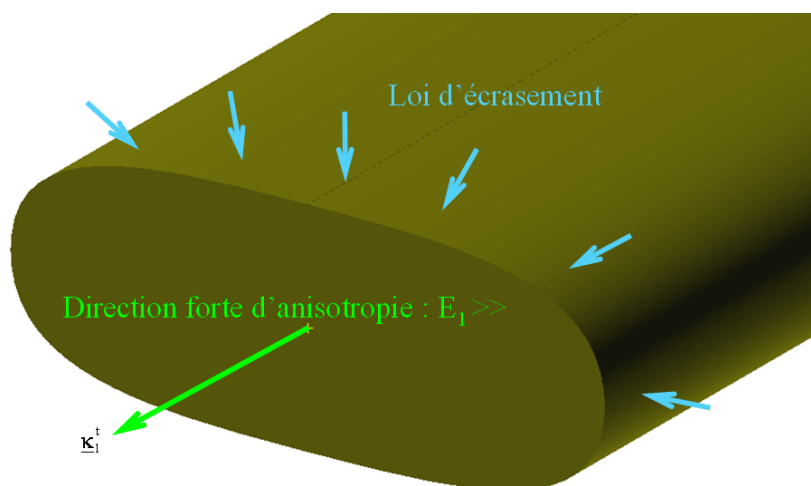


Figure 1-16 : Mèche continue avec un comportement équivalent à la mèche fibreuse

De plus, la mobilité relative des fibres doit pouvoir être prise en compte également. Nous détaillons le lien entre les modes de déformation de la mèche et le comportement équivalent envisagé au 1.4.2.3. Synthétiquement, l'hypothèse que nous faisons est la suivante :

*Il est possible de modéliser une mèche fibreuse hétérogène par une mèche continue 3D ayant un comportement équivalent.*

Cette hypothèse fondamentale est le point de départ de nos investigations.

### 1.4.2.3 Modes de déformations d'une mèche fibreuse

Afin de définir le comportement équivalent de la mèche continue, il faut définir les modes de déformation du milieu fibreux. Par convention, la direction 1 est celle de la direction forte d'anisotropie définie par l'orientation locale des fibres au sein de la mèche. Le comportement équivalent orthotrope peut être supposé modélisé par un tenseur d'ordre 4 dont la première direction principale d'orthotropie est la direction forte d'anisotropie. Nous précisons ce point au chapitre suivant. Pour le moment, cette définition sommaire nous sert à traduire en comportement équivalent les modes de déformations de la mèche.

Passons-les en revue :

- Le premier mode de déformation est le plus évident : il s'agit de la traction dans le sens des fibres qui se traduit par un premier module d'Young  $E_1$  (Figure 1-17). Dans notre approche, les effets de Poisson des fibres et du milieu continu équivalent orthotrope ne sont pas considérés. De plus, le comportement en compression est supposé être le même qu'en traction pour des raisons de simplicité.

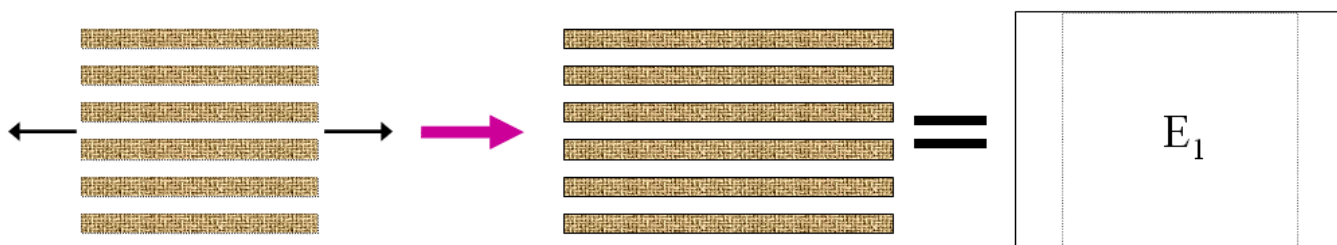


Figure 1-17 : Mode de traction longitudinale (sans effet de Poisson)

- Le deuxième mode est le glissement des fibres les unes par rapport aux autres : il se traduit par deux modules de cisaillement  $G_{12}$  et  $G_{13}$  (Figure 1-18). Si les fibres sont droites et en contact, c'est la friction entre ces dernières qui crée une résistance au glissement. Cette résistance semble globalement très faible devant celle en traction dans la direction forte d'anisotropie et nous pouvons supposer  $G_{12}, G_{13} \ll E_1$ .

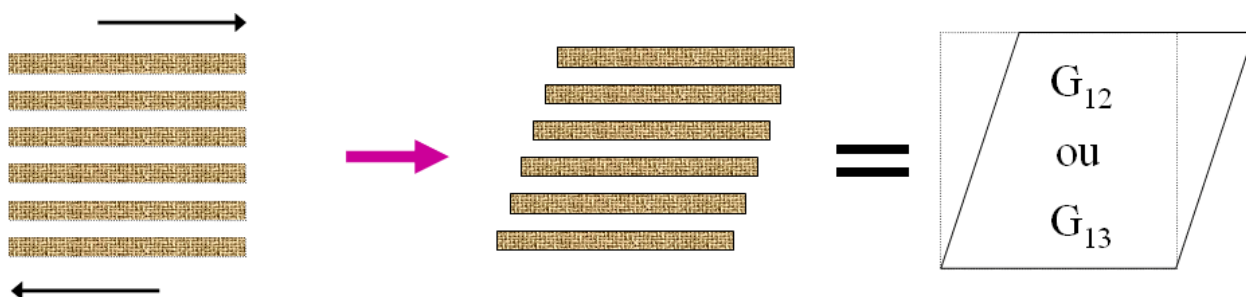


Figure 1-18 : Mode de cisaillement longitudinal

- Le troisième mode est l'écrasement transversal des fibres qui se traduit par deux modules d'Young  $E_2$  et  $E_3$  à priori égaux (Figure 1-19). Ces modules sont fonctions des déformations transversales et longitudinale car les mises en tension et en contact des fibres font qu'il est de plus en plus difficile de les écraser. Néanmoins,  $E_2, E_3 \ll E_1$  ([HAN98]). Enfin, le plan où ce mode est décrit reste à priori orthogonal à la direction forte d'anisotropie.

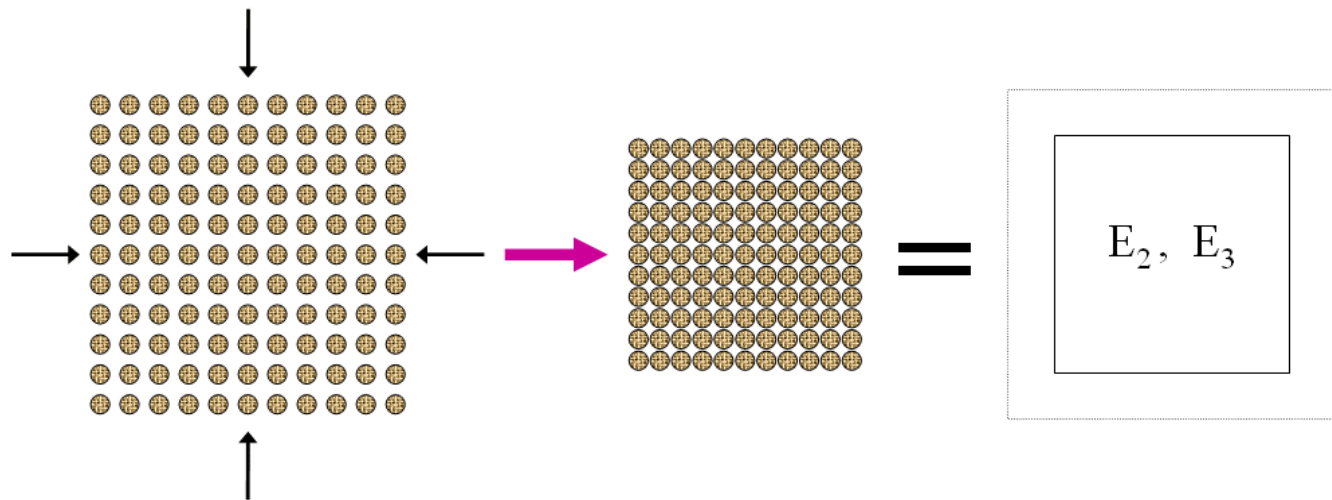


Figure 1-19 : Mode de compression transversale

- Le quatrième mode est le cisaillement transversal, dans le plan de l'écrasement, qui se traduit par un module de cisaillement  $G_{23}$  (Figure 1-20). Nous devons avoir  $G_{23} \ll E_1$ . Ce module peut être fonction de l'écrasement qui tend à rapprocher les fibres et donc à augmenter la friction entre elles.

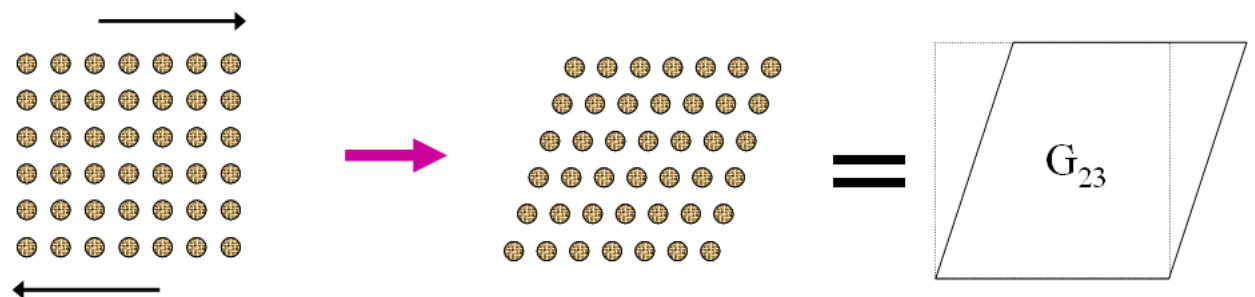


Figure 1-20 : Mode de cisaillement transversal

Au final, il apparaît logique de considérer que le comportement équivalent du milieu fibreux est un comportement orthotrope, et ce, même en grandes transformations. Cela suppose que les plans où les modes 3 et 4 ont lieu restent orthogonaux à la direction forte d'anisotropie, ce qui semble cohérent du point de vue des mesures expérimentales. La première caractéristique essentielle du comportement est donc de rester localement orthotrope et d'être orienté par la direction forte d'anisotropie. La deuxième caractéristique essentielle est que le module d'Young dans la direction forte d'anisotropie doit être très grand devant les autres modules.

Nous verrons au prochain chapitre que le modèle mésoscopique éléments finis de la CER de tricot ne vérifiera pas la première caractéristique essentielle du comportement, la formulation du code de calcul utilisé ne le permettant pas. C'est ce qui nous poussera à redescendre à l'échelle de la mèche pour formuler une loi de comportement appropriée. Des résultats plus physiques seront alors obtenus.

*Remarque :* La prise en compte du comportement fibreux des mèches, qui alimente nos modèles éléments finis de structures tricotées, est l'apport principal de notre travail.

Passons maintenant au chapitre 2 où nous caractérisons numériquement le comportement du tricot étudié à l'aide d'un modèle mésoscopique éléments finis en grandes transformations, dont la technique de construction est détaillée.

2 Chapitre 2 : Modélisation  
géométrique et mécanique  
d'une maille tricotée

Nos investigations initiales concernent l'extension des modèles éléments finis 3D de tissus d'Hanklar ([HAN98]) à des modèles éléments finis 3D de tricot. La technique utilisée pour y parvenir est détaillée dans ce chapitre. Elle consiste à construire, dans un premier temps, un modèle géométrique paramétré qui, dans un deuxième temps, servira de support à un maillage éléments finis. Le comportement initial est défini élément par élément dans ses directions d'orthotropie de manière à rendre compte de la nature fibreuse des mèches. Le modèle éléments finis obtenu permet de simuler des essais de traction biaxiale en faisant varier le rapport de biaxialité. Cela nous permet de construire la loi de comportement macroscopique de la CER sous forme de surfaces de tension à partir de l'extraction des courbes forces-déplacements aux extrémités des mèches. Le modèle éléments finis est ensuite corrélé au seul essai expérimental dont nous disposons. Bien que les courbes forces-déplacements se superposent assez bien, les résultats pour les grands déplacements ne sont pas physiques. Cela est dû à la formulation inhérente aux éléments 3D du code de calcul industriel utilisé. Il s'agit de la formulation de Green-Naghdi qui ne peut convenir pour actualiser les directions d'orthotropie d'un milieu fibreux. Par la suite, c'est donc la compréhension de ce phénomène et la nécessité d'implémenter une nouvelle formulation plus appropriée qui motivera notre travail.

### 2.1 Modèle géométrique

Afin de mettre en place un modèle éléments finis du renfort tricoté d'aramide industriel présenté au chapitre 1, nous sommes amené à définir en tout premier lieu un modèle descriptif de la géométrie de la CER. L'outil de conception assisté par ordinateur est employé afin d'obtenir un résultat réaliste pouvant servir de support à un maillage volumique hexaédrique qui, nous le verrons au §2.2, est indispensable pour définir le comportement local des mèches. Après avoir présenté les hypothèses et le paramétrage du modèle géométrique, nous donnons la méthode de construction générale d'une CER 3D de tricot de type jersey, illustrée dans le cas de notre tricot d'aramide. Enfin, nous illustrons les capacités morphologiques de notre modèle en faisant varier les paramètres.

#### 2.1.1 Définition du modèle

##### 2.1.1.1 Objectifs

La définition d'un modèle géométrique est complexe car elle demande une connaissance précise de la géométrie de la CER du tricot à modéliser. Notre objectif est de définir un modèle géométrique simple qui puisse servir de support à un maillage réglé d'éléments finis hexaédriques. Cette topologie d'élément est nécessaire pour orienter correctement à l'instant initial le tenseur de comportement (voir 2.2.2.1). L'incidence de cette exigence est que les solides géométriques doivent être tri-paramétriques et de connectivité maîtrisée. Le modèle éléments finis nous servira à simuler la traction biaxiale dans les sens chaîne et trame. En effet, d'une part l'essai expérimental dont nous disposons est celui de traction biaxiale décrit au 1.4.1.3, d'autre part la loi de comportement macroscopique d'une CER de textile est en premier lieu recherchée sous la forme de deux surfaces de tensions reliant les efforts dans les sens chaîne et trame aux déformations dans les sens chaîne et trame. Cela explique que, par la suite, nous ne travaillerons qu'avec une demi-CER, cette sous-structure étant suffisante pour simuler la traction biaxiale.

Nous proposons un modèle géométrique construit à partir de quatre points, de deux courbes constituant la fibre moyenne et passant par ces derniers et d'une loi d'angle orientant une section de forme donnée le long de la fibre moyenne.

*Remarque* : il n'existe pas à notre connaissance de modèle géométrique de tricot prenant en compte des sections qui ne sont pas circulaires. Avec notre modèle, le choix de la section est arbitraire et sera pour nous de type « champ de course » comme nous l'avons montré sur la Figure 1-16.

Le modèleur géométrique utilisé est MSC.Patran car il permet de coder le modèle dans un langage (Le PCL pour Patran Command Language) automatisant les opérations et autorisant une paramétrisation, ce qui facilite la recherche du modèle géométrique le plus fidèle possible.

### 2.1.1.2 Hypothèses de modélisation géométrique

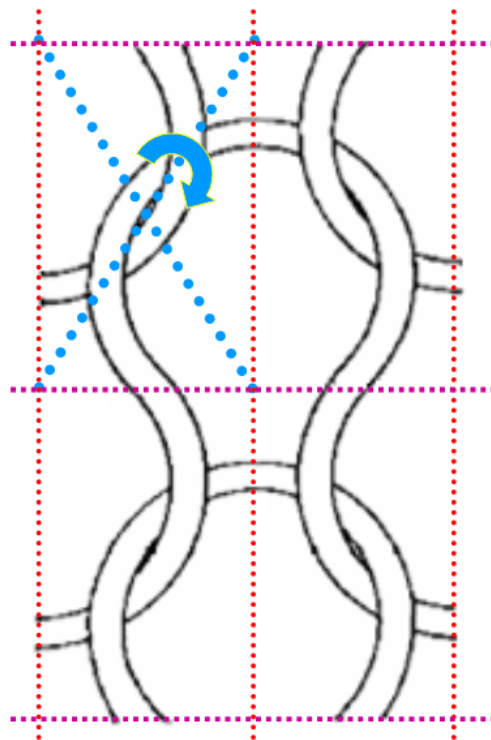


Figure 2-1 : Symétries d'un tricot de type jersey

Afin de simplifier au maximum le modèle géométrique, et compte tenu du manque d'informations précises sur les arrangements des mèches dans l'espace (nos moyens expérimentaux étant rudimentaires), nous faisons librement un certain nombre d'hypothèses simplificatrices :

- La CER est rectangulaire, bien que cela ne soit pas le cas de notre tricot qui a été produit par un procédé de tricotage circulaire. Nous assimilons cependant la CER inclinée à une CER rectangulaire de mêmes dimensions.
- La CER est équilibrée. Cela signifie que les mailles du tricot sont toutes de la même taille. Dans notre cas, la CER est déséquilibrée et il faut donc considérer que la géométrie de la maille est une « moyenne » des géométries des mailles du tricot réel.

- Il existe une symétrie miroir au sein de la CER qui permet de la reconstituer à partir de la demi-CER. Cette symétrie est mise en évidence par les axes verticaux en pointillés (rouges) sur la Figure 2-1.
- Il existe une symétrie cyclique à 180° d'une mèche par rapport à l'autre. L'axe de la symétrie est normal à la CER et passe par l'intersection des diagonales de la demi-CER (axes diagonaux en pointillés bleus sur la Figure 2-1). C'est ce qui est appelé par Postle et al. ([POS87]) la symétrie du quart de boucle.
- Le plan moyen de la CER est situé à sa demi-épaisseur.

Ces simplifications impliquent que la définition d'une des deux mèches de la demi-CER est suffisante pour reconstituer le tricot complet.

### 2.1.1.3 Paramétrage de la demi-CER

Le domaine spatial pour la modélisation géométrique minimale du tricot est maintenant clairement défini : il s'agit du pavé d'épaisseur  $e$ , de hauteur  $H$  et de largeur  $L/2$  définissant la demi-CER. En vertu de la symétrie du quart de boucle, il faut maintenant paramétrer la géométrie d'une mèche de manière à pouvoir reconstituer la géométrie complète. Commençons par définir la fibre moyenne, c'est-à-dire la courbe passant par le centre des sections de la mèche.

La fibre moyenne peut être définie par quatre points : les points caractéristiques 11, 22, 33 et 44 définis sur la Figure 2-2. Par convention, l'origine est fixée « en bas » du plan contenant le point 11 de la demi-CER. Dans le repère  $\{XYZ\}$ , en considérant que le plan moyen de la demi-CER est à  $z=-e/2$ , les coordonnées des points tenant compte de la symétrie du quart de boucle sont :

$$\boxed{[11]_{\{XYZ\}} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ 0 \\ z_{11} \end{bmatrix}, [22]_{\{XYZ\}} = \begin{bmatrix} x_{22} \\ y_{22} \\ z_{11} - e/4 \end{bmatrix}, [33]_{\{XYZ\}} = \begin{bmatrix} -x_{22} \\ H - y_{22} \\ z_{11} - 3e/4 \end{bmatrix}, [44]_{\{XYZ\}} = \begin{bmatrix} L/4 \\ y_{44} \\ z_{11} - e \end{bmatrix}} \quad (2.1)$$

En général, la forme de la maille invite à la décomposer soit :

- En une seule courbe passant par les points 11, 22, 33 et 44 ([RAM00]).
- En une courbe passant par 22, 33 et 44 pour la tête de maille et une ligne passant entre 11 et 22 pour la jambe de maille ([LUO02], [SCI00], [KAW89], [POS87]).

Nous choisissons la deuxième possibilité qui correspond à la forme observée. La ligne entre 11 et 22 peut être tracée immédiatement, mais cela est plus complexe pour la courbe passant par 22, 33 et 44. Nous choisissons de la définir par une courbe de Bézier, ce qui implique la définition de deux vecteurs tangents à chaque extrémité. Le vecteur au point 22 est dans la direction de la portion droite, le vecteur au point 44 est parallèle à l'axe X. La fibre moyenne est maintenant parfaitement définie.

Donnons les valeurs des paramètres et fixons complètement l'origine du repère  $\{XYZ\}$  au point 11. Le jeu de paramètres retenu pour modéliser le tricot étudié est :

$$\begin{cases} H = 2,9\text{mm} & \text{et} & L = 5\text{mm} \\ x_{11} = 0\text{mm} & \text{et} & z_{11} = 0\text{mm} \\ x_{22} = 0,2\text{mm} & \text{et} & y_{22} = 0,3H \\ y_{44} = 0,75H & \text{et} & e = 0,7\text{mm} \end{cases} \quad (2.2)$$



Avec (2.2), (2.1) devient en fonction de L, H et e (en mm) :

$$[11]_{\{XYZ\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [22]_{\{XYZ\}} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,3H \\ -e/4 \end{bmatrix}, \quad [33]_{\{XYZ\}} = \begin{bmatrix} -0,2 \\ 0,7H \\ -3e/4 \end{bmatrix}, \quad [44]_{\{XYZ\}} = \begin{bmatrix} L/4 \\ 0,75H \\ -e \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

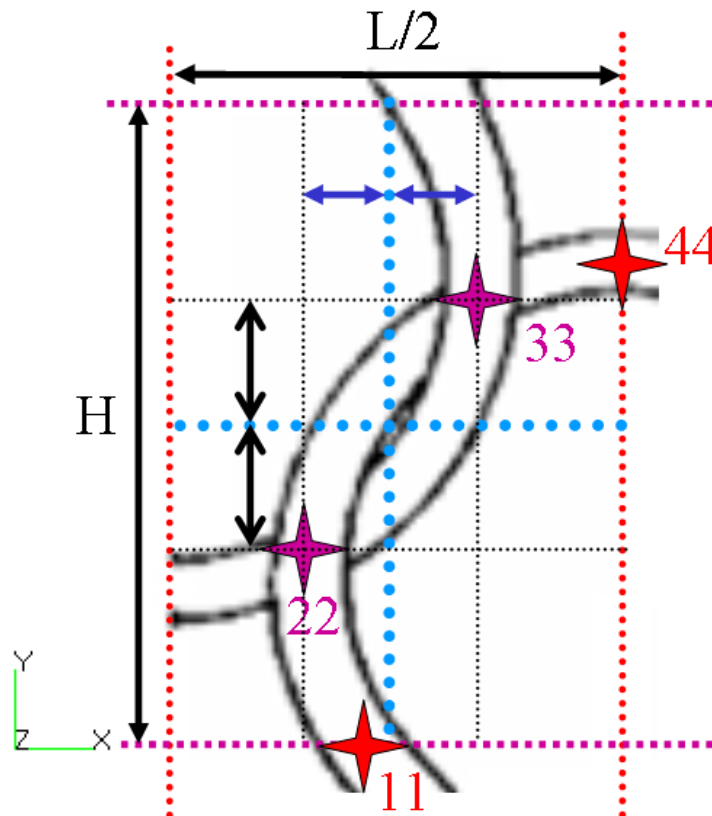


Figure 2-2 : Paramétrage de la géométrie de la demi-CER

La fibre moyenne est tracée sur la Figure 2-3. Il reste à définir la section de la mèche.

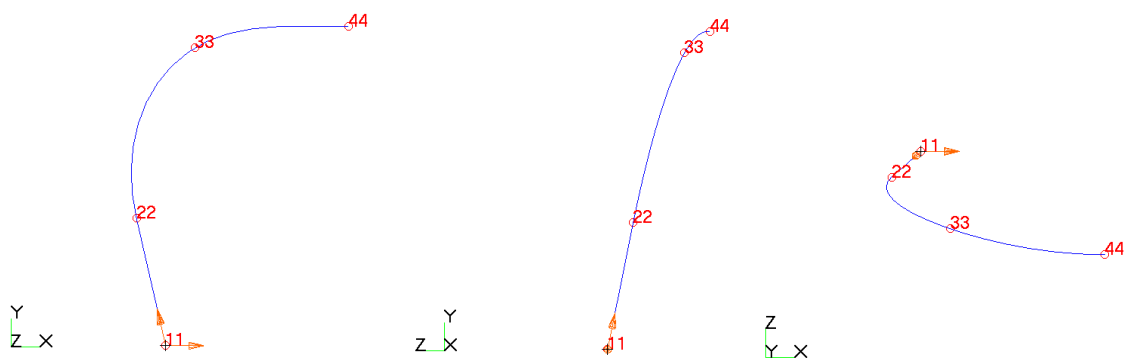


Figure 2-3 : Fibre moyenne d'une mèche de la demi-CER

La forme choisie pour le contour de la section est proche d'une ellipse et se définit par deux nouveaux paramètres : le grand axe a et le petit axe b. Cependant, il ne s'agit pas exactement d'une ellipse mais, une nouvelle fois, de courbes de Bézier. De plus, la section doit être composée de surfaces à quatre côtés pour permettre la construction ultérieure de solides tri-paramétriques. La section choisie est montrée sur la Figure 2-4, avec les

paramètres suivants :  $a=0,28\text{mm}$  et  $b=0,375*a$ . Par la suite, cette première section sera utilisée pour définir toutes les sections de la mèche à l'aide de la loi d'angle que nous allons introduire.

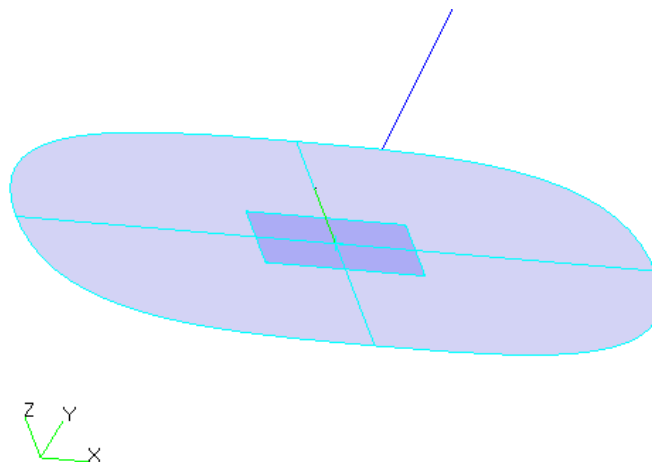


Figure 2-4 : Section "champ de course" des mèches

## 2.1.2 Construction de la géométrie

### 2.1.2.1 Loi d'angle

Une des originalités de notre modèle géométrique est de pouvoir prendre en compte des sections non-circulaires et pouvoir les orienter le long de la fibre moyenne. Il est ainsi possible de prendre en compte la torsion des mèches du tricot due au procédé de fabrication. Nous modélisons cela par ce que nous appelons la « loi d'angle ». Elle intervient à l'étape 3 du 2.1.2.2 pour définir la manière dont sont tournées les sections le long de la fibre moyenne. La loi d'angle associée à  $s$ , l'abscisse curviligne le long de la fibre moyenne, l'angle  $\theta$  de rotation de la section par rapport à la section initiale, définie préalablement au point 11. Cette fonction est prise nulle à  $s=0$  (au point 11) et égale à  $180^\circ$  à  $s=1$  (au point 44). Il est possible de choisir une fonction de type tangente hyperbolique car elle permet une variation rapide de l'angle vers le milieu de la mèche tout en étant de faible variation à ses extrémités. De plus, elle est compatible avec la condition de non-interpénétration des deux mèches volumiques de la demi-CER, chose difficile à maîtriser a priori. La loi d'angle est donnée ici :

$$\boxed{s \in [0,1] \quad \theta(s) = \omega \cdot \text{Tanh} \left( \varpi \left[ s - \frac{m_0}{m_1} \right] \right) + \theta_0} \quad (2.4)$$

$\varpi=3,36\text{mm}$  est la longueur de la mèche, mesurée grâce aux fonctionnalités du modèleur géométrique, et les quatre paramètres sont  $\omega=90,182^\circ$ ,  $m_0=1,620$ ,  $m_1=7$  et  $\theta_0=89,971^\circ$ . Nous avons représenté cette fonction sur la Figure 2-5 de deux façons différentes : classiquement par son graphe, et géométriquement sur une mèche droite volumique<sup>8</sup>.

<sup>8</sup> Ce modèle géométrique est obtenu simplement en appliquant la méthode de construction du 2.1.2.2 avec une fibre moyenne droite. Il suffit d'aligner les points 11, 22, 33 et 44 et de modifier le vecteur tangent en 44 de façon à ce qu'il soit parallèle à l'axe Y.

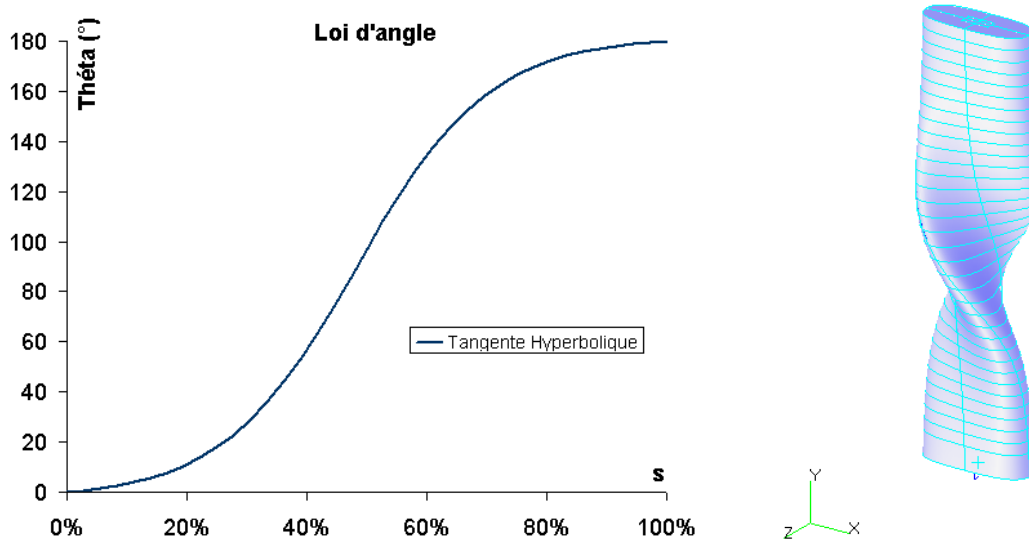


Figure 2-5 : Loi d'angle en tangente hyperbolique

La loi d'angle est une fonction qui peut être modifiée à loisir. Nous illustrons cela sur le cas le plus simple qui serait une fonction linéaire (Figure 2-6) donnée par :

$$s \in [0,1] \quad \theta(s) = a \cdot s$$

Le seul paramètre est  $a=180^\circ$ .

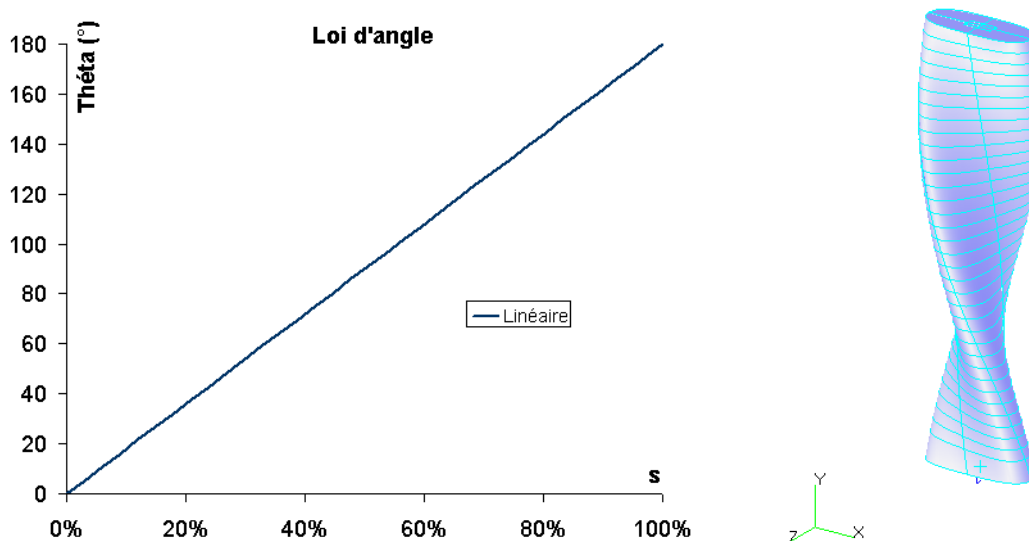


Figure 2-6 : Loi d'angle linéaire

### 2.1.2.2 Construction de la demi-CER

La méthode de construction que nous présentons est générale et fait appel à des fonctions géométriques simples. Elle peut donc être reproduite avec des modélisateurs géométriques autres que celui que nous utilisons. La méthode comprend cinq étapes, dont quatre pour construire la première mèche de la demi-CER. La deuxième mèche est construite à la dernière étape par la symétrie du quart de boucle décrite au 2.1.1.2. Détaillons ces étapes :

◆**Etape 1 : Construction de la section des mèches.**

La première section est générée au point 11. Sa géométrie a été détaillée au 2.1.1.3.

◆**Etape 2 : Construction de la fibre moyenne.**

La fibre moyenne est générée et passe par les points 11, 22, 33 et 44. Cependant, il faut extraire régulièrement  $n$  points sur cette dernière afin de discrétiser les sections (Figure 2-7). C'est uniquement pour des raisons de commodité que la numérotation commence à 200.

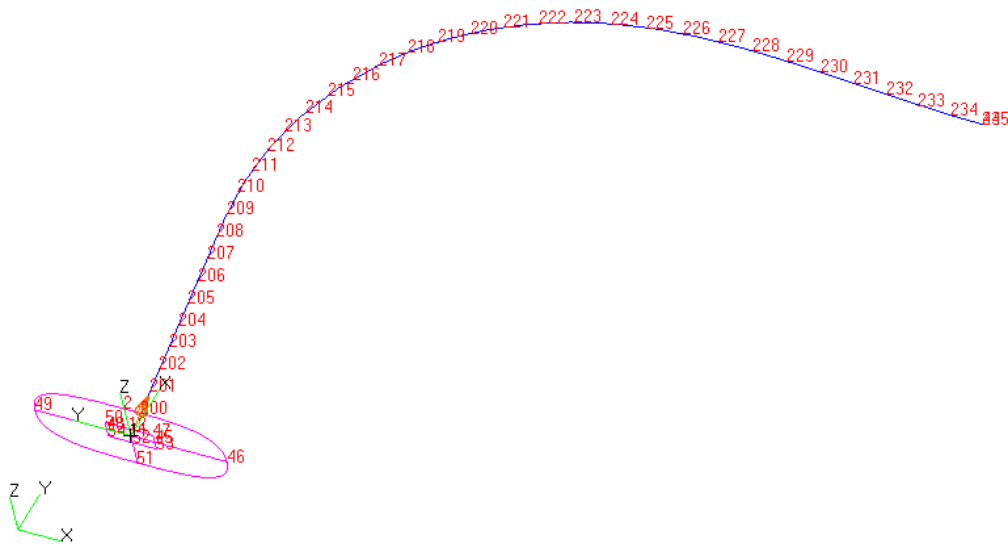


Figure 2-7 : Fibre moyenne avec la première section et les points extraits pour les transports

◆**Etape 3 : Construction des sections le long de la fibre moyenne.**

La construction des sections aux points extraits de la fibre moyenne à l'étape précédente est réalisée à l'aide de la loi d'angle par transports successifs de la première section. Ces transports sont définis grâce à une multitude de repères locaux (Figure 2-8). La technique est la suivante : un repère local est créé et attaché à la première section et un autre repère local est créé en un point de la fibre moyenne. La première section est alors translattée et tournée à l'origine du nouveau repère local pour que ses grand et petit axes coïncident avec les axes de ce dernier. En conséquence, tout repose sur la création de ces repères locaux qui est faite itérativement avec l'algorithme suivant :

○ Boucle sur les  $n$  points de la fibre moyenne

\* Le vecteur tangent  $\mathbf{t}_i$  à la fibre moyenne au point  $i$  est calculé

\* Le plan  $\mathbf{P}_{\mathbf{t}_i}$  de normale  $\mathbf{t}_i$  est calculé

\* L'intersection du plan  $\mathbf{P}_{\mathbf{t}_i}$  et du plan  $\mathbf{XY}$  est calculée et donne le vecteur  $\mathbf{n}_i$

\* Le repère local intermédiaire au point  $i$  est créé de  $(\mathbf{t}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{z}_i = \mathbf{t}_i \wedge \mathbf{n}_i)$

\* Le repère local final est obtenu en tournant de l'angle  $\theta$  autour de  $\mathbf{t}_i$  le repère local intermédiaire.

○ Fin de la boucle

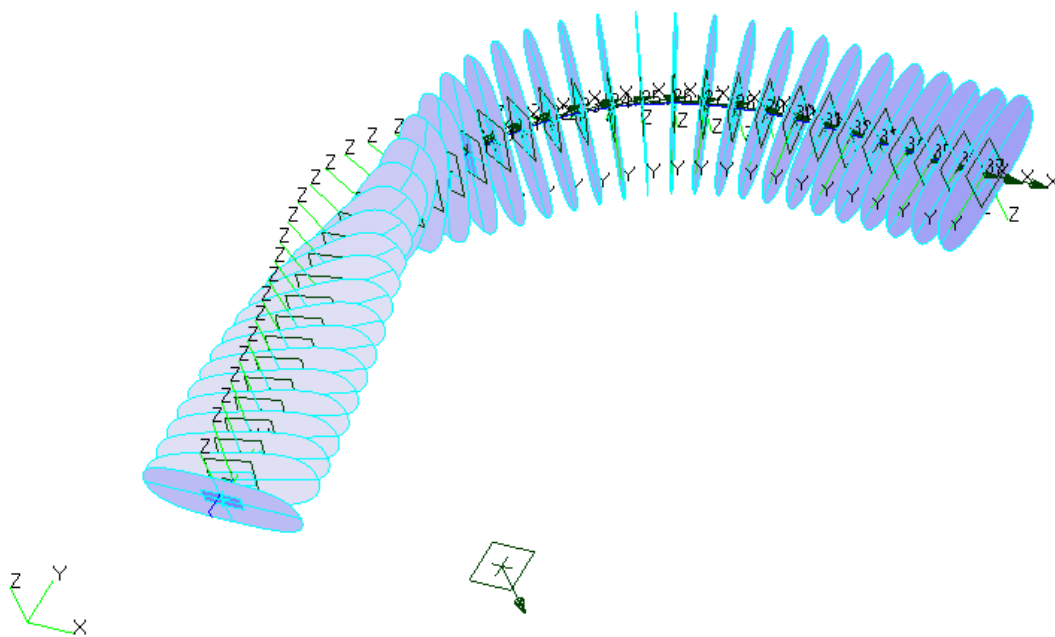


Figure 2-8 : Fibre moyenne avec ses sections

◆ **Etape 4 : Construction des solides tri-paramétriques entre chacune des sections.**

Comme les sections générées à l'étape précédente sont composées de surfaces identiques à la section initiale de l'étape 1, il est aisé de construire des solides tri-paramétriques entre deux surfaces (qui se correspondent) de deux sections qui se suivent. Tout comme la construction des sections, cette procédure est itérative. C'est l'intérêt du codage en PCL de la géométrie, ce dernier permettant d'automatiser les opérations. Autrement, il serait très fastidieux de les effectuer manuellement, surtout si le nombre de sections est grand ! Au final, nous obtenons la première mèche volumique complète formée exclusivement de solides tri-paramétriques à six côtés (Figure 2-9), ce qui autorisera un maillage réglé en éléments hexaédriques par la suite.

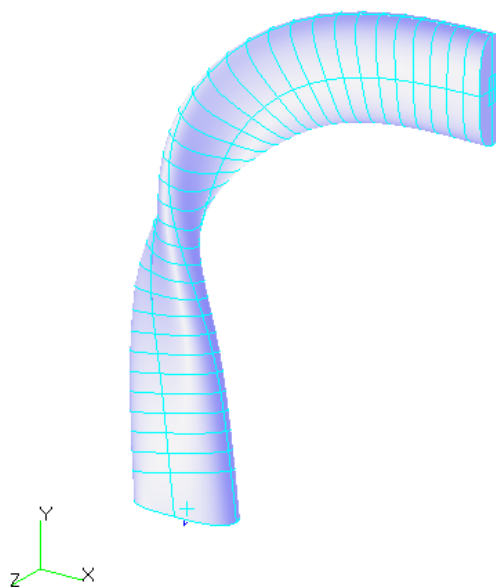


Figure 2-9 : Première mèche volumique complète

◆ **Etape 5 : Construction de la demi-CER complète.**

Pour obtenir la demi-CER, il suffit de calculer l'image de la première mèche par la rotation à 180° d'axe colinéaire à Z passant par le centre de symétrie cyclique de la demi-CER. Par convention, le centre de symétrie cyclique est le point 100 de coordonnées :

$$[100]_{\{XYZ\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ H/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Au final, nous obtenons le modèle descriptif géométrique de la demi-CER représenté sous plusieurs angles sur la Figure 2-10. Ce modèle est en accord avec la description de Postle et al. ([POS87]).

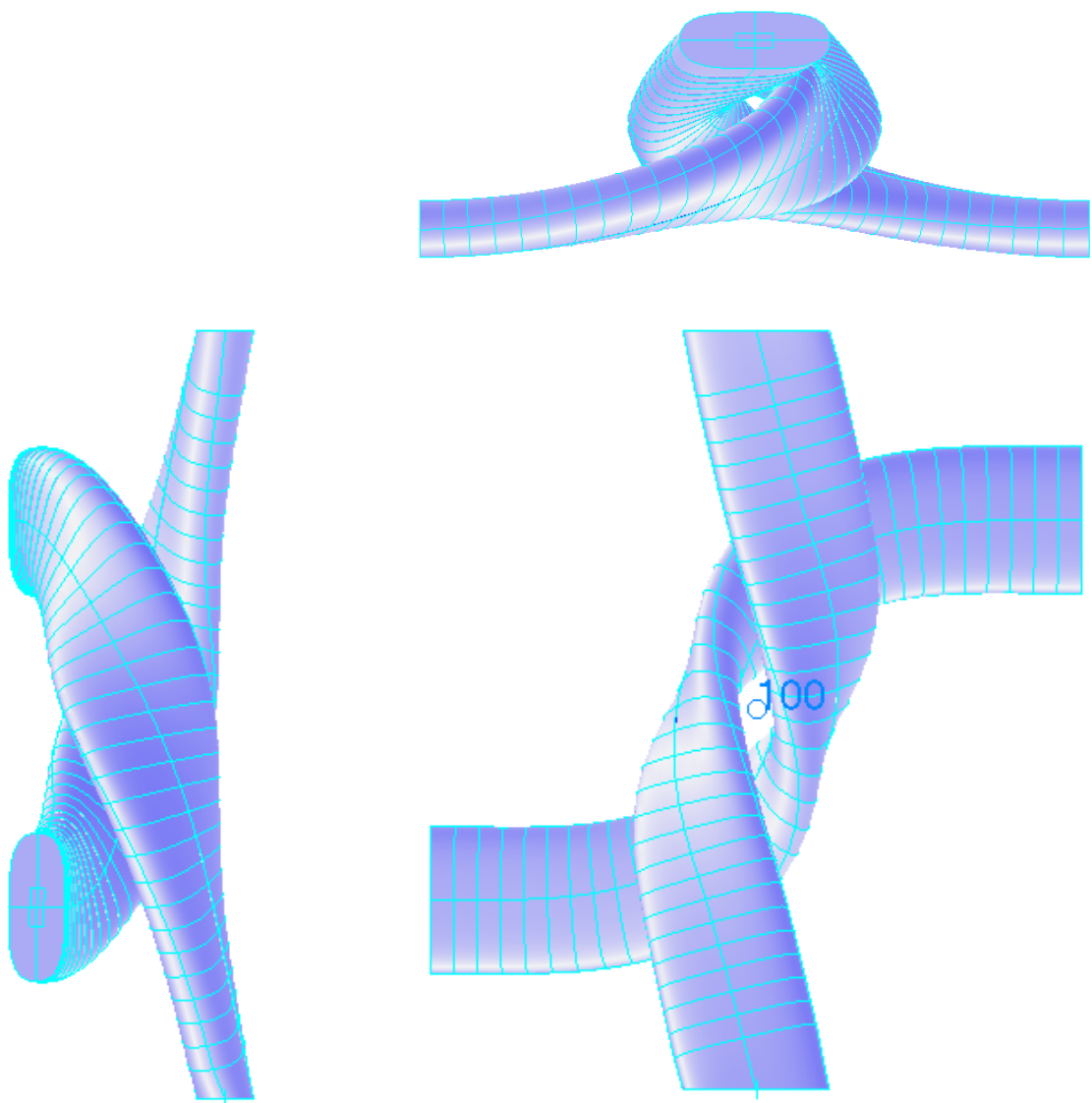


Figure 2-10 : Demi-CER vue dans XZ, YZ et XY

### 2.1.2.3 Reconstitution de tricots à partir de la demi-CER

Pour différentes raisons, il peut être utile de reconstituer le tricot avec plusieurs CER. Il est aisé de reconstruire la CER à partir de la demi-CER. Il suffit de faire calculer au modéleur géométrique le symétrique de la demi-CER par rapport au plan ZY, de normale X, passant par le point 44. A partir de la périodisation de la CER, nous obtenons un tricot avec autant de CER voulues (Figure 2-11).

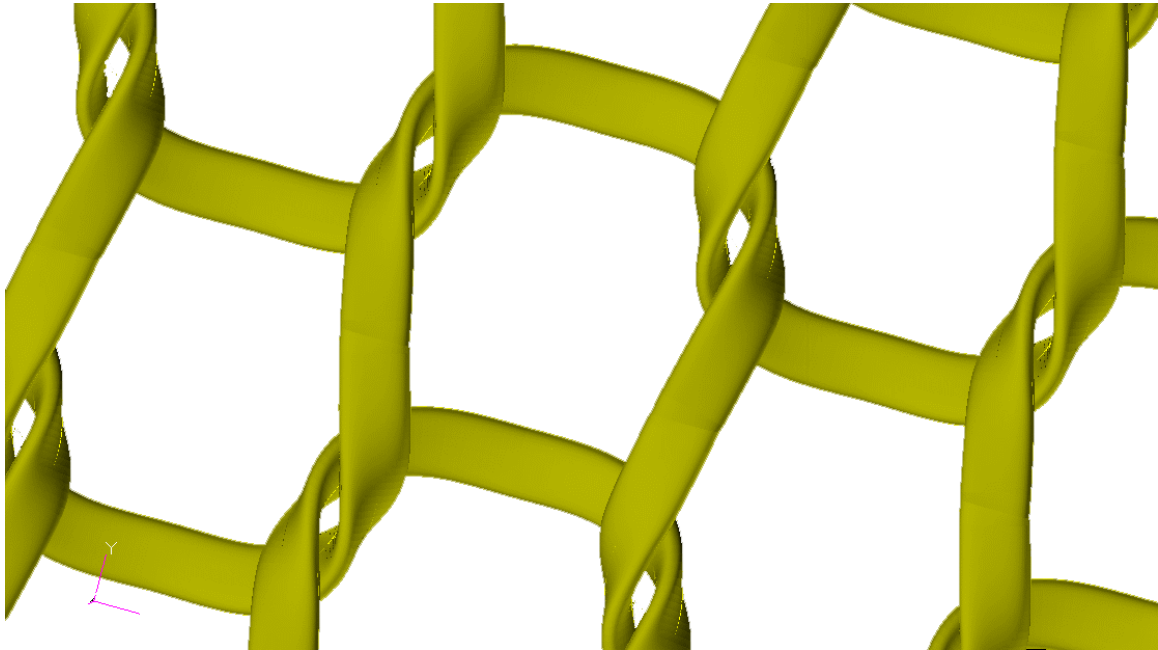


Figure 2-11 : Périodisation de la CER modélisant le tricot étudié

Signalons également qu'il est possible de modifier notre modèle en prenant une unique courbe de Bézier passant par les quatre points caractéristiques. Dans ce cas, avec une section circulaire, nous obtenons sur la Figure 2-12 un résultat semblable au modèle descriptif de Leaf et Glaskin ([LEA55]) utilisé par Ramakrishna dans [RAM00].

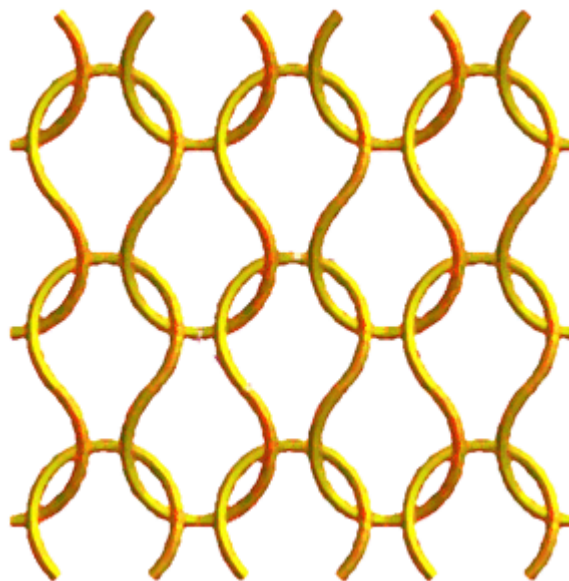


Figure 2-12 : Jersey avec une section circulaire et une jambe de maille courbe

## 2.1.3 Variation des paramètres

### 2.1.3.1 Variation de la taille de la CER

Il est possible de changer la taille de la CER en jouant sur les paramètres H et L. Nous présentons deux exemples sur la Figure 2-13. Le cas de gauche correspond à notre tricot, mais avec une hauteur H augmentée de 20%. Le cas de droite est analogue, mais cette fois-ci c'est la largeur qui est augmentée de 20%. Il apparaît que ces modifications peuvent amener à modifier les paramètres de la loi d'angle pour que la géométrie reste régulière.

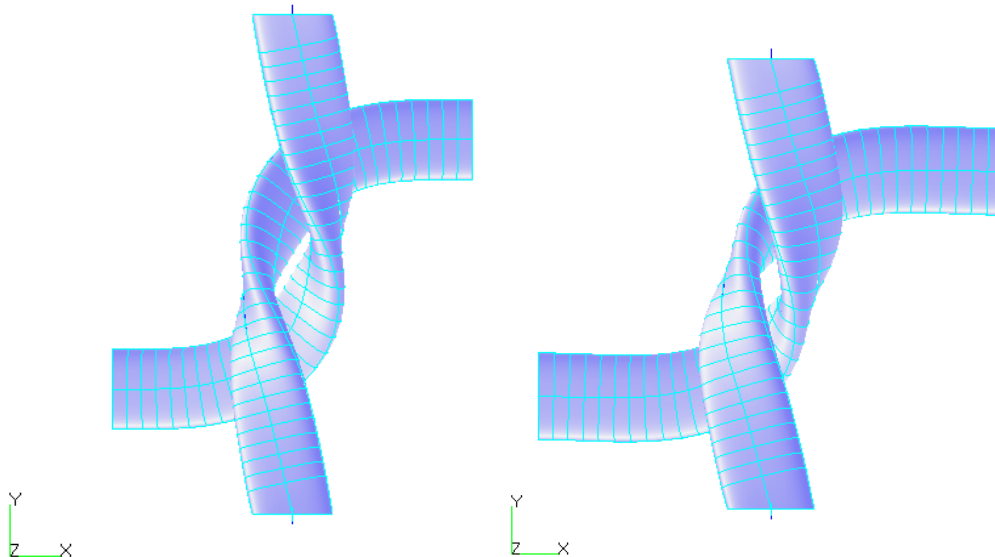


Figure 2-13 : Demi-CER plus haute (à gauche) et demi-CER plus large (à droite)

### 2.1.3.2 Variation de la taille de la section

Le contour de la section peut être modifié en jouant sur les valeurs de a et b. Sur la Figure 2-14, la section a un grand axe divisé par 2. Les paramètres sont alors :  $a=0,14\text{mm}$  et  $b=0,375*a$ .

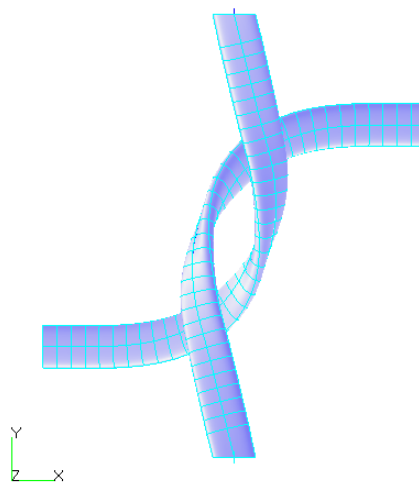


Figure 2-14 : demi-CER avec une section de grand axe a divisé par deux.



## 2.2 Construction du modèle éléments finis

Le modèle géométrique développé précédemment a été conçu pour être le support du modèle éléments finis que nous mettons en place maintenant. La géométrie étant constituée de solides tri-paramétriques, nous réalisons un maillage réglé de briques tri-linéaires. Avec un nombre raisonnable d'éléments, le maillage est fidèle à la géométrie et correspond au tricot étudié (Figure 2-15). Le choix de l'interpolation est le seul possible car nous avons choisi d'opter pour un code de calcul explicite. Il s'agit d'Abaqus/Explicit qui est un code industriel pouvant traiter les grandes transformations et le contact entre les mèches (qui est particulièrement sévère). Concernant le choix de la topologie des éléments, il est justifié par la nécessité de définir localement les composantes du tenseur de comportement dans les axes d'orthotropie. Le maillage étant réglé, les hexaèdres sont harmonieusement générés en suivant la géométrie des mèches. C'est cette technique qui permet la bonne définition de repères locaux en tout point de Gauss du maillage, ce qui définit localement les axes d'orthotropie initiaux.

Dans cette partie, nous détaillons la mise en donnée du modèle. Nous précisons :

- Les conditions aux limites, pilotant la transformation et garantissant les symétries requises.
- La définition du comportement, orienté localement dans le maillage et présentant des composantes variables dans le temps.
- La formulation des éléments finis.

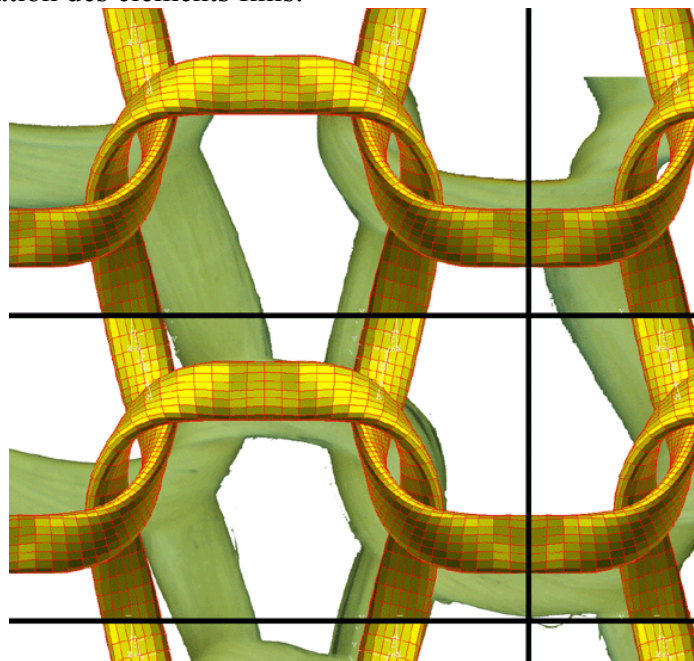


Figure 2-15 : Superposition du tricot réel et du modèle éléments finis

### 2.2.1 Conditions aux limites

#### 2.2.1.1 Pilotage en vitesse et symétries

Pour simuler la traction biaxiale sur la demi-CER, il faut imposer un certain nombre de conditions aux limites cinématiques sur les quatre faces des mèches, notées H, B, D, G sur

la Figure 2-16. Dans une cinématique de poutre, les faces Haut, Bas, Droite et Gauche auraient ces conditions aux limites dans le repère (1,2,3) de la Figure 2-16 :

- Pour les déplacements des sections :

$$\begin{cases} U_1^H = U_1^B \\ U_2^H = -U_2^B = u_2 \\ U_3^H = U_3^B \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_1^D = -U_1^G = u_1 \\ U_2^D = -U_2^G \\ U_3^D = U_3^G \end{cases} \quad (2.6)$$

- Pour les rotations des sections :

$$\begin{cases} \theta_1^D = -\theta_1^G \\ \theta_2^D = \theta_2^G = 0 \\ \theta_3^D = \theta_3^G = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \theta_1^H = \theta_1^B = 0 \\ \theta_2^H = \theta_2^B \\ \theta_3^H = \theta_3^B = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Ces conditions traduisent les symétries de la transformation biaxiale et de la maille (décrites au 2.1.1.2). Le maillage est de type éléments 3D, par conséquent les seuls degrés de liberté nodaux sont des vitesses<sup>9</sup>.

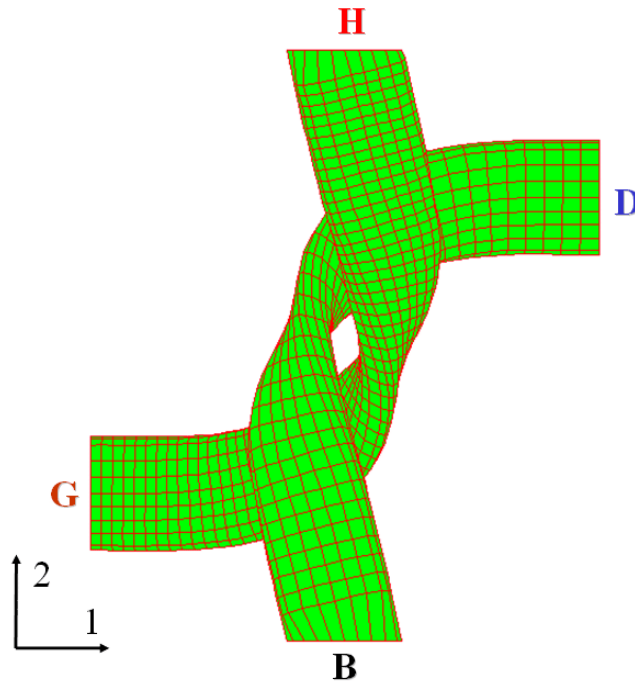


Figure 2-16 : Sections “en haut” (H), “en bas” (B), “à droite” (D) et “à gauche” (G)

Les déplacements à obtenir sont  $u_1$  et  $u_2$  et nous devons respecter un rapport de proportionnalité constant entre eux. Il s’agit du rapport de biaxialité de la CER. Comme les vitesses sont choisies constantes dans le temps, les déplacements résultants sont linéaires. Pour respecter la condition de proportionnalité, nous imposons donc,

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{u_2}{u_1} = k_{CER}$$

$v_1$  et  $v_2$  sont les vitesses nodales respectives des nœuds des éléments sur les faces D et H. Ce sont elles qui sont spécifiées au code de calcul.

<sup>9</sup>L’algorithme explicite est formulé en vitesse (voir le livre de Belytschko et al. [BEL00]). Les seuls déplacements qu’il est possible de spécifier sont des déplacements nuls.

Les valeurs des vitesses sont choisies telles que la transformation soit quasi-statique, c'est-à-dire avec une énergie cinétique très faible devant l'énergie de déformation<sup>10</sup>. Au final, nous choisissons une valeur  $v_1$  de 0,05mm/s.

Concernant les autres conditions de (2.6) et (2.7), elles sont prises en compte par des contraintes cinématiques<sup>11</sup> entre les nœuds des différentes faces.

### 2.2.1.2 Contact

Le contact est un type de condition au limite impliquant une non-linéarité dans le calcul, l'état de contact dépendant de la déformée qui elle-même dépend de l'état de contact. Dans le code de calcul utilisé, l'algorithme de recherche des surfaces est de type maître-esclave et l'algorithme de résolution du contact utilisé par défaut est de type « cinématique ». Il impose l'exactitude des conditions cinématiques (pas de pénétration des nœuds esclaves dans la surface maître) grâce à un schéma de type prédicteur-correcteur. La résolution du problème de contact est donc implicite, les pénétrations étant éliminées, après une itération, à la fin de chaque incrément de temps. L'algorithme est le suivant :

- ◆ Pour chaque incrément, une prédiction de la position des nœuds esclaves est faite : leurs positions respectives sont évaluées sans prise en compte des conditions de contact.

- ◆ Pour les nœuds qui ne respectent pas la condition cinématique, des accélérations correctrices sont appliquées.

- ◆ En fin d'incrément, les nœuds prédits en pénétration sont sur la surface maître avec une force nodale associée proportionnelle à la distance de pénétration. Il est alors possible de calculer des pressions de contact pour chaque nœud en divisant la force de contact nodale par une surface nodale.

Il est également possible de choisir un algorithme de contact par « pénalité ». La résolution du problème de contact est alors explicite car il n'y a pas de correction effectuée sur l'incrément courant, mais à l'incrément suivant. Cet algorithme ne garantit donc pas la non-pénétration des nœuds esclaves. De plus, l'algorithme cinématique n'a pas d'effet sur le pas de temps critique, alors que l'algorithme par pénalité peut le faire chuter. En pratique, nous n'avons pas constaté de différences sur nos calculs, et nous avons finalement opté pour un contact cinématique avec une surface maître associée à la mèche la moins finement maillée et une surface esclave associée à l'autre mèche<sup>12</sup>.

Enfin, signalons qu'un frottement de coulomb de 0,15 est pris en compte dans le calcul. Cette valeur n'est pas connue expérimentalement et est déterminée par recalage.

## 2.2.2 Formulation des éléments finis

### 2.2.2.1 Orientation du maillage

Les hexaèdres ont été orientés le long des mèches pour réussir à définir le tenseur de comportement à l'instant initial. Nous avons postulé au chapitre 1 qu'une mèche peut être assimilée à un milieu continu élastique orthotrope caractérisé par une raideur longitudinale

---

<sup>10</sup> Il est aussi possible de jouer sur la masse volumique. Cette technique est classique avec les codes explicites : c'est le mass-scaling. Dans notre étude, la masse volumique choisie est 1 million de fois la masse volumique réelle.

<sup>11</sup> Il s'agit classiquement de multi-point constraints, dits encore MPC.

<sup>12</sup> Par défaut, le code de calcul inverse les rôles des surfaces maître et esclave sur l'incrément. Ce n'est pas notre cas.

très grande devant les raideurs transversales, par des modules de cisaillement et des coefficients de Poisson majeurs très faibles ([HAN98])<sup>13</sup>. Le tenseur de comportement se caractérise par neuf fonctions indépendantes qu'il faut renseigner<sup>14</sup> :

$$E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{23}, G_{31}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$$

Les directions (1,2,3), définissant ici les axes d'orthotropie, sont confondues avec des repères locaux qu'il est nécessaire de diriger en spécifiant, élément par élément, l'orientation locale par rapport à la connectivité<sup>15</sup>. Dans le jargon du code, ces repères locaux sont appelés « repères structuraux ». En un point de Gauss donné, nous notons  $\{e^0\}$  un repère structural à l'instant initial et  $\{e^t\}$  à l'instant t. Par rapport à toute section dans la mèche, ces repères sont définis par :

- L'axe 1, correspondant au sens des fibres, qui est normal.
- L'axe 2 qui est ortho-radial.
- L'axe 3 qui est radial.

Le post-processeur du code de calcul est capable d'afficher sur le maillage l'orientation initiale des axes d'orthotropie (Figure 2-17, Figure 2-18 et Figure 2-19). Par convention, la direction 1 est de couleur bleue, la direction 2 de couleur jaune et la direction 3 de couleur rouge.

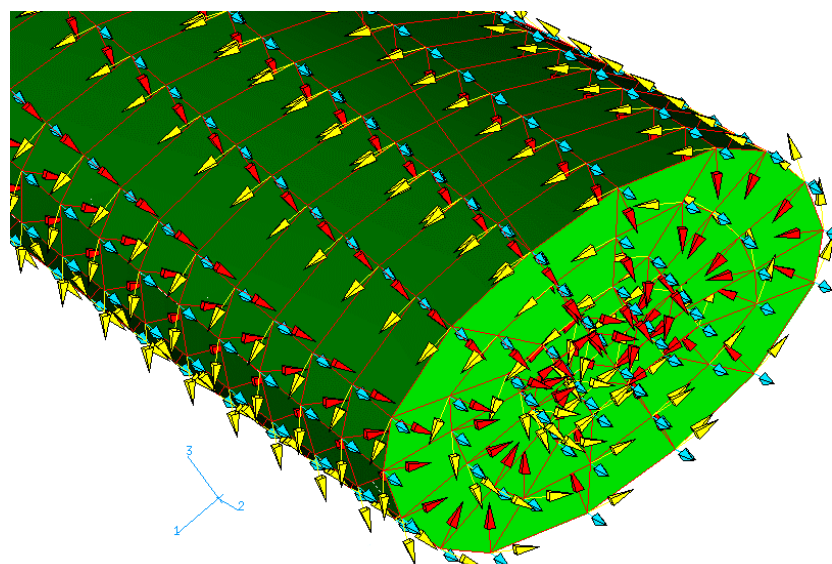


Figure 2-17 : Orientation initiale des axes d'orthotropie dans la mèche

*Remarque* : Bien que les repères structuraux représentés soient extrapolés et moyennés aux noeuds, c'est bien aux points de Gauss qu'ils sont définis. De plus, la zone centrale de la section n'a pu être maillée à l'aide d'éléments prismes à 6 nœuds, car le code ne le permettait pas, et il a fallu se contenter d'hexaèdres.

Afin de prendre en compte l'écrasement, qui est un phénomène important dans les paquets de fibres<sup>16</sup>, nous introduisons des modules d'Young transversaux égaux et réactualisables. Une loi à trois paramètres est choisie. Elle ne dépend que de la déformation radiale et traduit une saturation exponentielle des modules d'Young transverses :

<sup>13</sup> Le calcul éléments finis que nous réalisons n'est donc pas un calcul standard.

<sup>14</sup> Les coefficients de Poisson mineurs ne sont pas donnés car ils sont calculés par le code de calcul à partir de ces neuf fonctions. Les relations sont données au 2.2.2.2.

<sup>15</sup> Cela est fait avec Abaqus/Explicit à l'aide la carte \*ORIENTATION, DEFINITION=OFFSET TO NODES.

<sup>16</sup> Ce phénomène est même prépondérant dans la mécanique des tissus ([BOI01], [HAN98]).

$$E_3 = E_2 = E_\infty \left( 1 - \exp\left(\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon}\right) \right) + E_0 \quad (2.8)$$

*Remarque* : Les calculs 3D sur les mailles tissées ([BOI01], [HAN98]) montrent que dans le cas des tissus il est important de prendre en compte dans la loi de comportement l'état de tension dans la mèche. Les modules d'Young transverses dépendent alors de la déformation longitudinale (composante 11). Cela est vérifié expérimentalement sur des lois d'écrasement macroscopiques faisant intervenir des efforts de compression transversaux sur la mèche ([HIV02]). Cependant, dans notre cas nous montrons que la mèche est déjà fortement écrasée avant de se mettre en tension au 2.3.1.1, ce qui justifie la simplicité de (2.8).

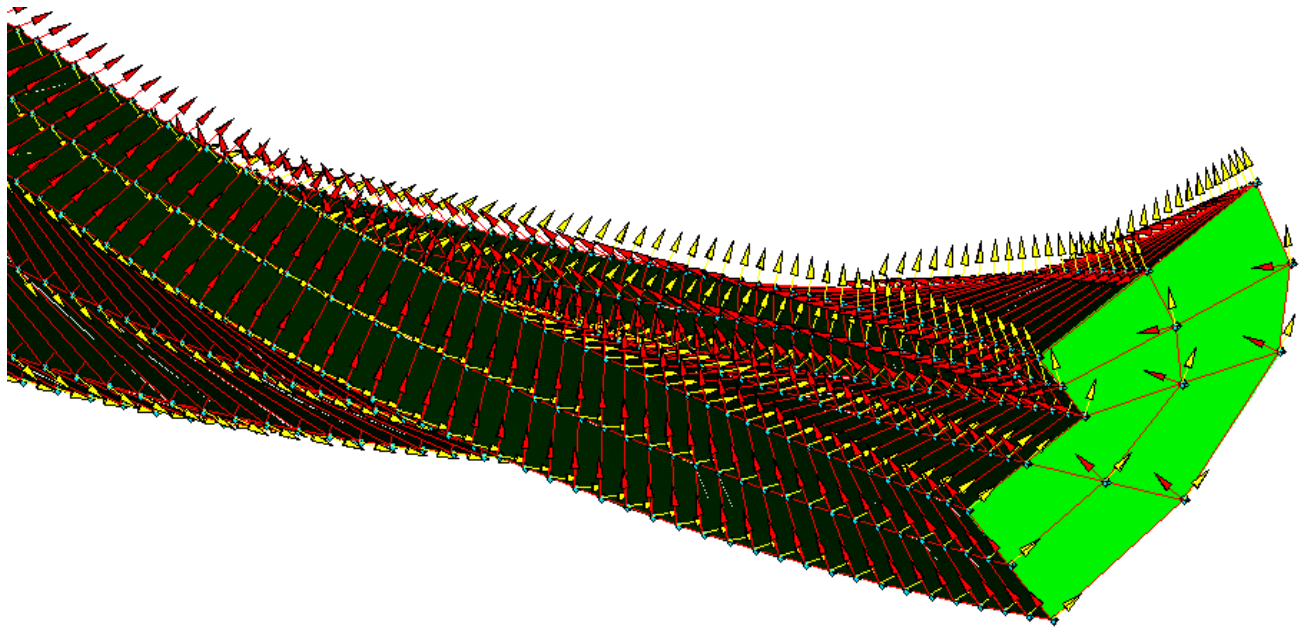


Figure 2-18 : Orientation initiale des axes d'orthotropie à l'intérieur du maillage

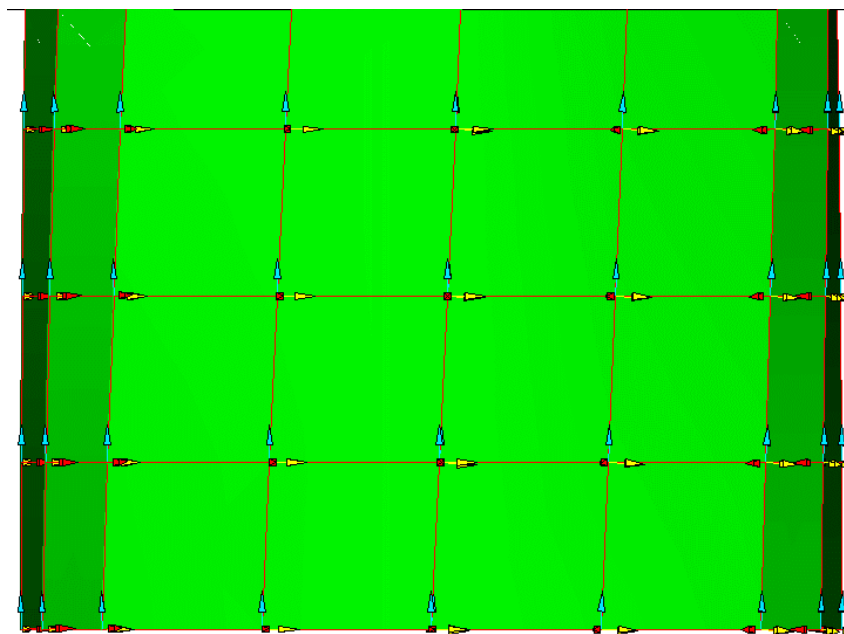


Figure 2-19 : Orientation initiale des axes d'orthotropie en vue de dessus

### 2.2.2.2 Formulation de Green-Naghdi

Les éléments finis employés sont, dans le jargon du code, des C3D8R, c'est-à-dire des éléments de continuum 3D à 8 nœuds sous-intégrés. Ils utilisent un contrôle de modes à énergie nulle et la formulation de Green-Naghdi. La loi de comportement est donc hypo-élastique et le tenseur des déformations et des contraintes de Cauchy sont définis par un cumul tensoriel dans des référentiels tournants ([BIL03], [GIL93c]). Ces référentiels forment le solide suiveur<sup>17</sup> en rotation propre de Green-Naghdi qui est ici l'ensemble, en chaque point de Gauss, des repères structuraux suivant la rotation moyenne de la matière (partie orthogonale  $\mathbf{R}$  du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$ ). Elle correspond à la moyenne des rotations des segments matériels passant par le point considéré ([GIL94]). L'intérêt majeur de l'utilisation d'un tel solide suiveur réside dans l'objectivité du calcul du taux de contrainte. Cependant, nous montrerons au 2.3.2.4 que l'inconvénient est son utilisation pour réactualiser les axes d'orthotropie. Les aspects théoriques, que nous occultons pour le moment bien qu'ils soient fondamentaux pour comprendre ce qui est fait, seront abordés en détail dans les chapitres 3 et 4. Pour le moment nous nous plaçons du point de vue du simple utilisateur de code de calcul voulant enrichir par des modules d'Young transverses variables un comportement orthotrope.

Pour prendre en compte la loi d'écrasement, il faut implémenter la réactualisation des composantes du tenseur de comportement dans Abaqus/Explicit, ce qui est fait par l'écriture d'une VUMAT qui est une routine utilisateur. Sur un incrément de temps  $[t, t+\Delta t]$ , les matrices de l'incrément de déformation et des anciennes contraintes sont fournies par Abaqus/Explicit dans les repères structuraux locaux. De plus, nous définissons 6 variables utilisateurs qui sont les composantes de l'ancien tenseur de déformation, qui ne sont, bizarrement, pas fournies par le code.

Les matrices suivantes sont donc connues en début d'incrément :

$$\left[ \Delta \overset{\mathfrak{R}}{\underline{\underline{\varepsilon}}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}}, \left[ \overset{t}{\underline{\underline{\sigma}}} \right]_{\{e^t\}}, \left[ \overset{t}{\underline{\underline{\varepsilon}}} \right]_{\{e^t\}}$$

La seule matrice à calculer est :

$$\left[ \overset{t+\Delta t}{\underline{\underline{\sigma}}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}}$$

Voici l'algorithme de la VUMAT que nous avons programmé :

◆ Début de la boucle sur les points de Gauss

\* Calculer les nouvelles déformations de Green-Naghdi avec :

$$\left[ \overset{t+\Delta t}{\underline{\underline{\varepsilon}}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}} = \left[ \overset{t}{\underline{\underline{\varepsilon}}} \right]_{\{e^t\}} + \left[ \Delta \overset{\mathfrak{R}}{\underline{\underline{\varepsilon}}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}}$$

\* Calculer les nouveaux modules d'Young transversaux avec :

$$\overset{t+\Delta t}{E}_3 = \overset{t+\Delta t}{E}_2 = E_\infty \left( 1 - \exp \left( - \frac{\overset{t+\Delta t}{\varepsilon}_{33}}{\bar{\varepsilon}} \right) \right) + E_0$$

\* Actualiser les composantes du tenseur de comportement dans la nouvelle base de Green-Naghdi avec<sup>18</sup> :

<sup>17</sup> Cette notion a été introduite par Rougée dans [ROU97]. Nous aurons l'occasion d'en reparler aux chapitre 3 et 5.

<sup>18</sup> Les formules utilisées sont classiques et peuvent être trouvées dans le cours de Billoët sur les matériaux composites ([BIL96]) ou de nombreux autres ouvrages. De plus amples détails seront donnés au chapitre 3.

$$\left[ \begin{array}{c} \underline{\underline{\mathbf{C}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}} \end{array} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}} = \begin{bmatrix} {}^0C_{11} & {}^0C_{12} & {}^0C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ {}^0C_{12} & {}^0C_{22} & {}^0C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ {}^0C_{13} & {}^0C_{23} & {}^0C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^0C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^0C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^0C_{66} \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} {}^0C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta \left( {}^{t+\Delta t}E_3 \right)^2}, & {}^0C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta E_1 \left( {}^{t+\Delta t}E_3 \right)}, & {}^0C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta E_1 \left( {}^{t+\Delta t}E_3 \right)} \\ {}^0C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta \left( {}^{t+\Delta t}E_3 \right)^2}, & {}^0C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{\Delta \left( {}^{t+\Delta t}E_3 \right)^2}, & {}^0C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{\Delta E_1 \left( {}^{t+\Delta t}E_3 \right)} \\ {}^0C_{44} &= 2G_{12}, & {}^0C_{55} &= 2G_{23}, & {}^0C_{66} &= 2G_{31} \\ \Delta &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 \left( {}^{t+\Delta t}E_3 \right)^2} \\ \nu_{21} &= \frac{{}^{t+\Delta t}E_3}{E_1} \nu_{12}, & \nu_{32} &= \nu_{23}, & \nu_{31} &= \frac{{}^{t+\Delta t}E_3}{E_1} \nu_{13} \end{aligned}$$

\*Calculer l'incrément de contrainte dans la base de Green-Naghdi avec<sup>19</sup> :

$$\left[ \left[ \Delta \stackrel{\text{RN}}{\underline{\underline{\sigma}}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}} \right] = \left[ \underline{\underline{\mathbf{C}}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}} \left[ \left[ \Delta \stackrel{\text{RN}}{\underline{\underline{\varepsilon}}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}} \right]$$

\*Actualiser les nouvelles contraintes à t+Δt dans la base de Green-Naghdi avec :

$$\left[ \stackrel{t+\Delta t}{\underline{\underline{\sigma}}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}} = \left[ \stackrel{t}{\underline{\underline{\sigma}}} \right]_{\{e^t\}} + \left[ \Delta \stackrel{\text{RN}}{\underline{\underline{\sigma}}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}}$$

◆Fin de la boucle sur les points de Gauss

## 2.2.3 Analyse de sensibilité de la loi de comportement

### 2.2.3.1 Cas testés

Afin de calibrer la loi d'écrasement (2.8) de façon à ce qu'elle permette de caler le modèle éléments finis au plus proche de l'essai expérimental, nous menons une étude de sensibilité sur le tenseur de comportement dans les cas indexés sur la Figure 2-20. Cela correspond à une approche inverse que nous sommes contraints de pratiquer en l'absence de données expérimentales concernant le comportement de la mèche.

D'après le chapitre 1, le module d'Young de la direction forte d'anisotropie est 112000MPa. Les coefficients de Poisson majeurs sont pris faibles, mais non nuls. Nous étudions donc ici la sensibilité aux modules de cisaillement et aux modules d'Young transverses.

<sup>19</sup> Les vecteurs incrément de contrainte et incrément de déformation sont notés avec des doubles crochets pour traduire le fait qu'ils correspondent à une simple réorganisation des matrices associées.

Calcul	Comportement (MPa)							
	E1	E2=E3	$\nu_{13}$	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	G12	G13	G23
GN_s_1	112000	50	0.10	0.10	0.05	10	10	190
GN_s_2	112000	50	0.10	0.10	0.05	100	100	190
GN_s_3	112000	500	0.10	0.10	0.05	100	100	190
GN_s_4	112000	1000	0.10	0.10	0.05	100	100	190
GN_s_5	112000	5000	0.10	0.10	0.05	100	100	190
GN_s_6	112000	1000	0.10	0.10	0.05	500	500	190
GN_s_7	112000	1000	0.10	0.10	0.05	250	250	190
GN_s_8	112000	1000	0.10	0.10	0.05	150	150	190

Figure 2-20 : Tableau de synthèse de l'analyse de sensibilité

### 2.2.3.2 Résultats et choix des paramètres de la loi de comportement

Pour illustrer la sensibilité de la formulation de Green-Naghdi, nous présentons les courbes forces-déplacements calculées sur la face H de la demi-CER. Les résultats sont représentés sur la Figure 2-21. La première remarque est qu'il n'est pas possible de choisir des modules de cisaillement nuls d'après les cas GN\_s\_1 et GN\_s\_2. De plus, d'après les cas GN\_s\_6, GN\_s\_7 et GN\_s\_8, la rigidité asymptotique des courbes forces-déplacements dépend très fortement de leurs valeurs, ce qui n'est pas très physique pour un milieu fibreux. Concernant les raideurs transverses, les cas GN\_s\_4, GN\_s\_5 et GN\_s\_6 montrent qu'il n'y a plus que de faibles variations de la rigidité asymptotique entre 500MPa et 5000MPa. Nous choisissons donc de fixer dans la loi d'écrasement la valeur maximale des modules d'Young transverses à 1000MPa.

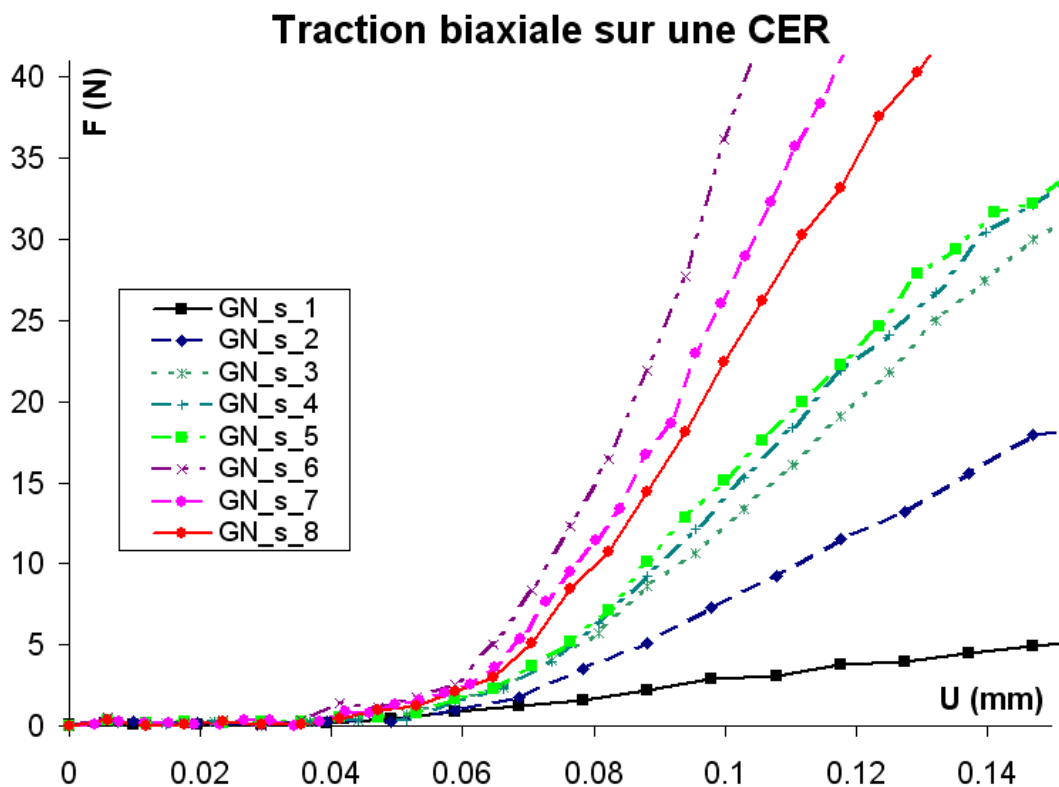


Figure 2-21 : Courbes forces-déplacements sur le haut de la CER issues de l'analyse de sensibilité



Le cas GN\_s\_8 est celui qui s'approche au mieux des courbes expérimentales, mais il ne permet pas de décrire très précisément la zone non-linéaire expérimentale. Il faut pour cela prendre en compte une variation monotone des modules d'Young transverses jusqu'à la valeur seuil de 1000MPa. Ainsi, nous choisissons pour la loi d'écrasement les paramètres suivants :

$$\boxed{E_{\infty} = 1000\text{MPa} \quad \bar{\varepsilon} = 0,13 \quad E_0 = 50\text{MPa}} \quad (2.9)$$

En annexe 8.1, la routine VUMAT du 2.2.2.2 est testée sur un élément avec la loi d'écrasement qui vient d'être définie.

Les modules de cisaillement choisis sont également ceux du cas GN\_s\_8. Au final, le tenseur de comportement est défini par les fonctions suivantes :

- Pour les modules d'Young :

$$E_1 = 112000\text{MPa} \quad \text{et} \quad E_2 = E_3 = E_{\infty} \left( 1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_{33}}{\bar{\varepsilon}}\right) \right) + E_0$$

- Pour les modules de cisaillement :

$$G_{12} = G_{23} = 150\text{MPa} \quad \text{et} \quad G_{31} = 190\text{MPa}$$

- Pour les coefficients de Poisson majeurs :

$$\nu_{12} = \nu_{13} = 0,1 \quad \text{et} \quad \nu_{23} = 0,05$$

## 2.3 Simulation de la traction biaxiale

Le modèle éléments finis vient d'être construit avec sa loi de comportement. Dans cette partie, nous l'exploitons afin d'effectuer le passage méso-macro nous permettant d'accéder à la loi de comportement de la CER sous forme de deux surfaces de tension ([BOI01]). Nous effectuons les post-traitements des résultats des simulations d'essais de traction biaxiale. A défaut de pouvoir démontrer les capacités prédictives de notre modèle, nous montrons qu'il est capable de décrire l'essai expérimental dont nous disposons. Nous montrons surtout que la formulation des éléments finis induit des erreurs sur les courbes forces-déplacements à partir desquelles sont construites les surfaces de tension. A l'exception des surfaces de tension, Les post-traitements présentés sont issus d'un calcul effectué avec le rapport de biaxialité de la CER  $k_{CER}=0,647$ , ce qui correspond au rapport de biaxialité macroscopique de l'essai (nous justifierons cela au 2.3.2.1.).

### 2.3.1 Post-traitement des diverses grandeurs

#### 2.3.1.1 Déformée et non-déformée de la demi-CER

La déformée obtenue est réaliste (Figure 2-22) et conforme aux observations expérimentales de Mayers et al. ([MAY97]) et de Takano et al. ([TAK01]). De plus, les conditions aux limites de symétrie définies au 2.2.1.1 sont bien respectées comme en témoignent les rotations des mèches au cours de la transformation (Figure 2-23). Il y a trois phases qui se traduisent successivement par :

- Le mouvement de corps rigide des mèches qui viennent se mettre en contact.
- Le glissement et l'écrasement des mèches en contact les unes contre les autres.
- Le blocage de la mobilité et la mise en tension des mèches.

Nous constatons un écrasement et un cisaillement très important au point de contact des deux mèches. Nous allons le voir au 2.3.2.4, plus ce cisaillement va être important, moins le modèle sera fiable pour décrire le comportement mécanique globale de la CER.

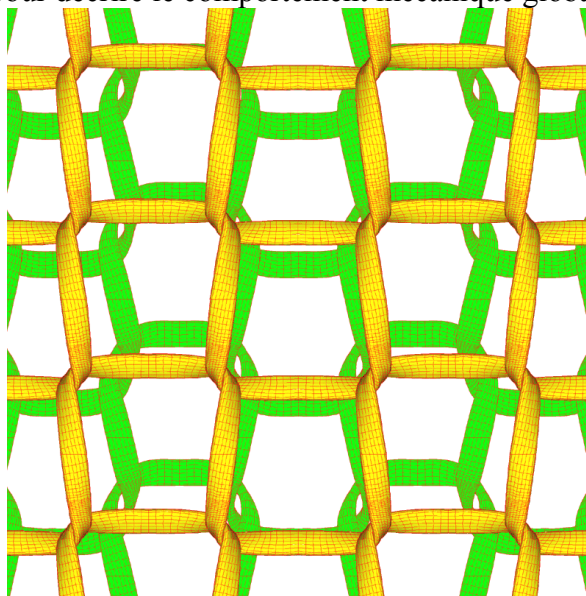


Figure 2-22 : Déformée et non-déformée périodisées

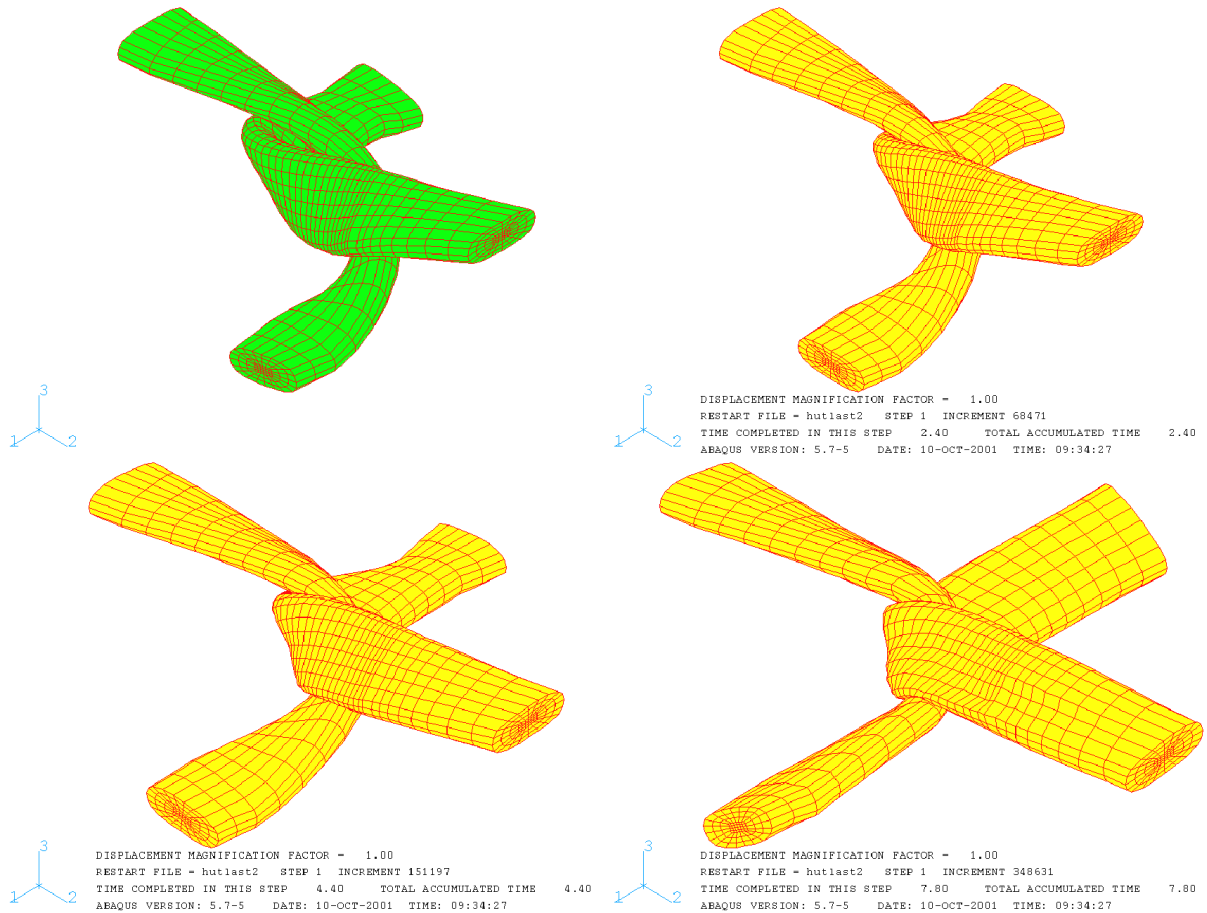
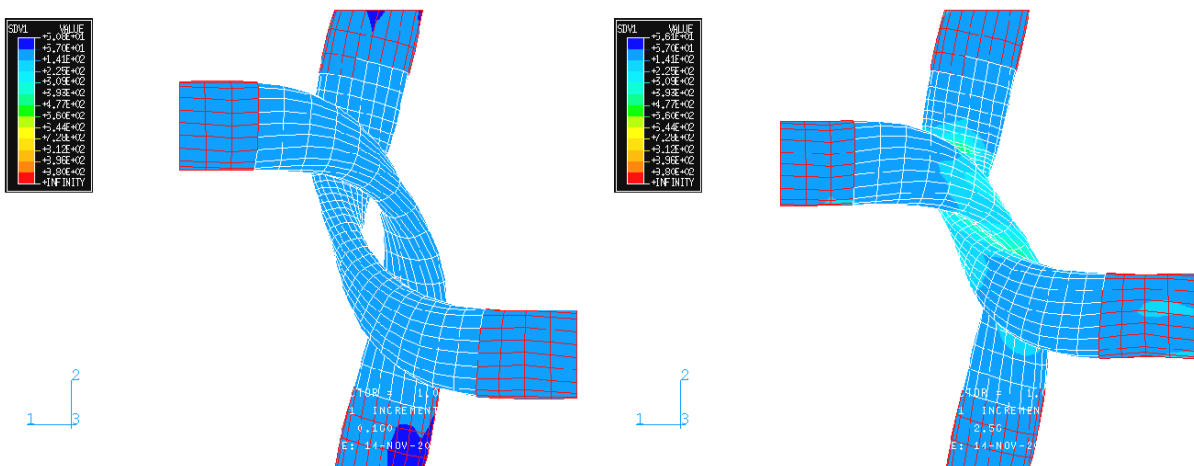


Figure 2-23 : Evolution de la déformée (commencer en haut à gauche et lire de gauche à droite)

### 2.3.1.2 Ecrasement des mèches

Il est possible de post-traiter sous forme d'iso-contours les valeurs des modules d'Young transverses définis par la loi d'écrasement (2.8). Nous constatons sur la Figure 2-24 que l'écrasement est bien progressif dans la zone de contact entre les deux mèches. La rigidité transverse augmente d'abord au point de contact et cette tendance se propage dans l'épaisseur des mèches. De plus, d'après la comparaison des courbes forces-déplacements de ce calcul avec celles d'un cas où les modules d'Young transverses sont constants, il a été montré que c'est la rigidité transverse dans la zone de contact qui est significative.



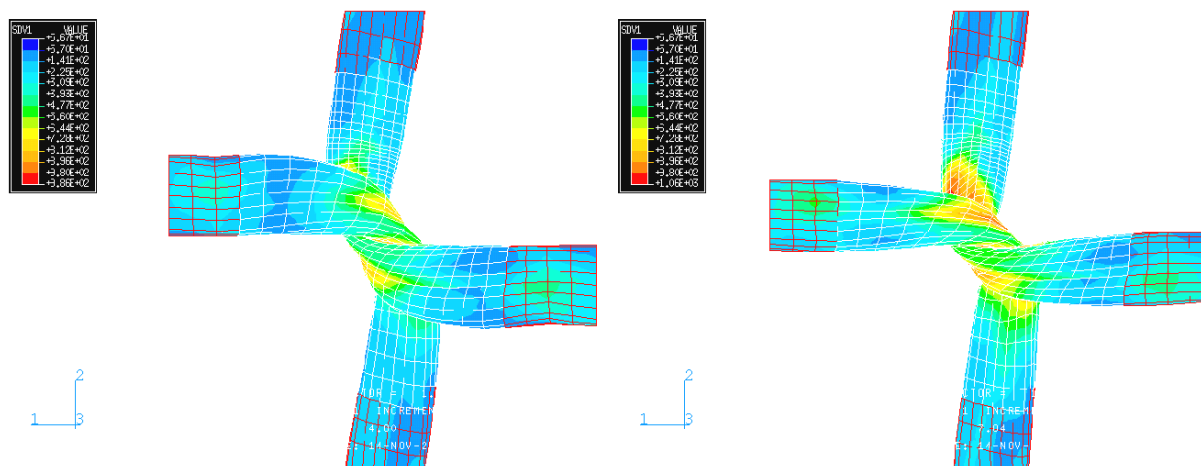


Figure 2-24 : Evolution de l'écrasement (commencer en haut à gauche et lire de gauche à droite)

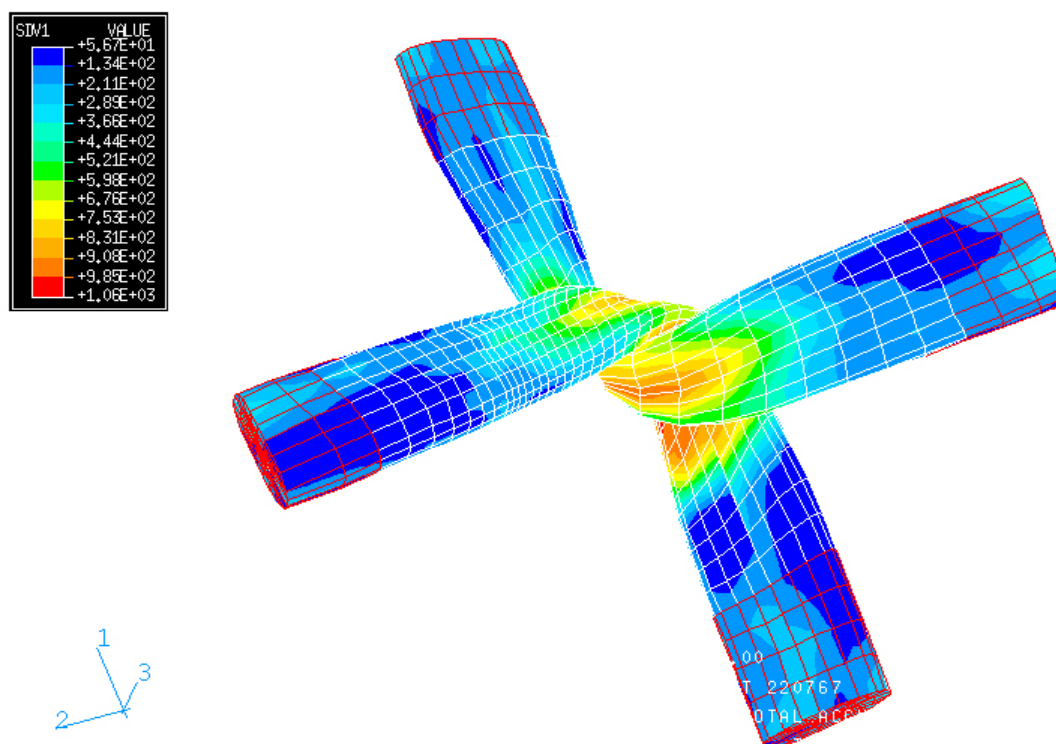


Figure 2-25 : Isovaleurs des modules d'Young transverses (MPa) en fin de transformation

### 2.3.1.3 Perspectives sur le cisaillement de la CER

De manière analogue aux tissus et parce que nous étions en possession de données expérimentales, nous avons caractérisé le comportement de la CER de tricot dans les directions chaîne et trame. Cependant, il serait intéressant d'étudier la réponse de la CER sous d'autres sollicitations, comme le cisaillement. Une étude de ce type, comparant des données expérimentales à des modèles éléments finis volumiques de tissus a été récemment présentée par Dumont ([DUM03]) et Hivet ([HIV02]). De notre côté, bien que nous n'ayons pour le moment aucune données expérimentales, il serait intéressant d'envisager des essais de traction biaxiaux dans d'autres directions du plan de la CER, mais les conditions aux limites seraient difficiles à définir. L'étude du cisaillement de la CER paraît plus accessible, les conditions aux limites pouvant être définies par des vitesses

imposées dans le plan des sections aux extrémités des mèches. Dans ce cas, c'est toute la CER qu'il faudrait modéliser, la symétrie cyclique étant perdue dans la transformation. Pour donner une idée du résultat que nous pourrions obtenir, nous avons déformé graphiquement l'éprouvette simulée en tension biaxiale sur la Figure 2-26.

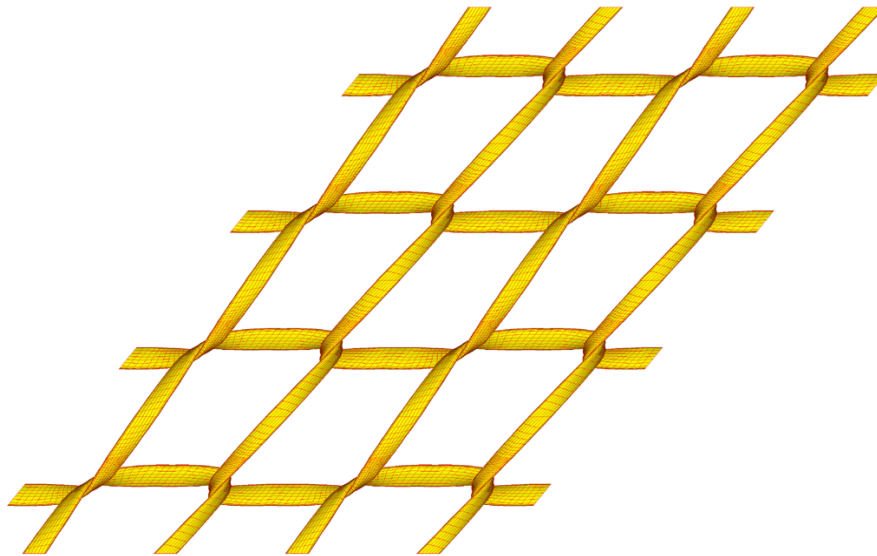


Figure 2-26 : Epreuve virtuelle cisailée graphiquement

## 2.3.2 Confrontation avec l'essai expérimental

### 2.3.2.1 Passage de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique

Afin de confronter notre modèle éléments finis à l'expérience présentée au chapitre 1, nous donnons ici les équations permettant de calculer à partir du modèle éléments finis les forces sur l'éprouvette virtuelle correspondant à l'éprouvette réelle. Nous définissons :

- $n$  comme le nombre de CER dans le sens wale (direction 1) et  $m$  comme le nombre de CER dans le sens course (direction 2). Ici,  $n=11$  et  $m=17$ .
- Les différentes grandeurs suivantes :

Grandeurs mésoscopiques	Grandeurs macroscopiques
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>u_i</math> : déplacements d'une CER.</li> <li>• <math>f_i</math> : forces résultantes sur une demi-CER.</li> <li>• <math>k_{CER}</math> : rapport de biaxialité d'une CER.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>U_i</math> : déplacements de l'éprouvette.</li> <li>• <math>F_i</math> : forces résultantes sur l'éprouvette.</li> <li>• <math>k</math> : rapport de biaxialité de l'éprouvette.</li> </ul>

La situation est représentée sur la Figure 2-27.

Les forces  $f_1$  et  $f_2$  sur la CER sont calculées avec le modèle éléments finis en sommant les forces nodales sur les faces des mèches. Par contre, les déplacements  $u_1$  et  $u_2$  de la CER sont directement un des déplacements nodaux des faces des mèches, tous égaux entre eux. En effet, ils sont connus (voir le 2.2.1.1).

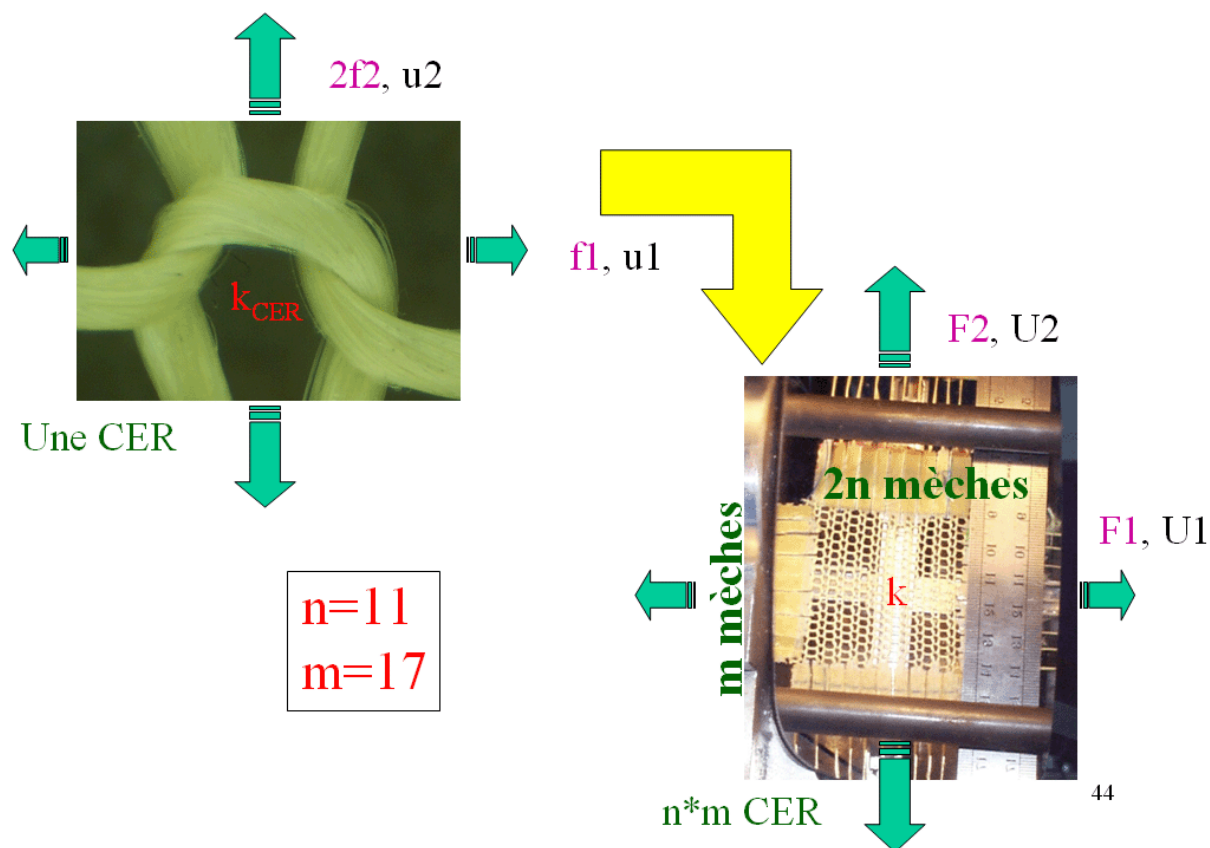


Figure 2-27 : Illustration du passage de la CER à l'éprouvette

Sous l'hypothèse d'homogénéité du champ de déformation dans l'éprouvette, nous pouvons écrire les équations de passage suivantes :

$$\begin{cases} F_1 = mf_1 \\ F_2 = 2nf_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_1 = nu_1 \\ U_2 = mu_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

Les équations (2.10) vont nous permettre de tracer les courbes forces-déplacements macroscopiques sur l'éprouvette virtuelle et de les comparer à l'essai de traction biaxiale fait à  $k=1$ . Nous avons défini le rapport de biaxialité comme le rapport des déplacements dans les directions chaîne et trame au chapitre 1. D'après (2.10), il existe une relation entre le rapport de biaxialité macroscopique et le rapport de biaxialité mésoscopique, c'est à dire celui de l'éprouvette et celui de la CER (qui est utilisé dans nos simulations) :

$$k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{m}{n} k_{\text{CER}} \quad (2.11)$$

Le rapport de biaxialité macroscopique de l'essai expérimental, unitaire, correspond donc à un rapport de biaxialité mésoscopique de  $11/17$ , soit  $0,647$ . Cela explique pourquoi nous avons choisi cette valeur au 2.2.1 pour illustrer nos calculs.

### 2.3.2.2 Surfaces de tension

Il y a deux surfaces de tension qui correspondent au comportement dans les directions chaîne et trame. Ce comportement est formé à partir de deux fonctions  $T_1(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22})$  et  $T_2(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22})$  des déformations logarithmiques dans ces directions et traduit un couplage en tension. La modélisation de la CER 3D hétérogène par une membrane continue 2D avec

pour loi de comportement macroscopique les deux surfaces de tensions permet de considérer les spécificités du milieu fibreux à l'échelle mésoscopique. Elles sont bien adaptées dans le cas des tissus ([HIV02], [BOI01]) et l'idée est d'étendre cela aux tricots. Pour cela, nous supposons que, pour la mise en forme, un tricot se déforme sans effort en cisaillement et qu'il ne présente que des rigidités dans les directions chaîne et trame<sup>20</sup>. Ici, les tensions  $T_1$  et  $T_2$  correspondent aux forces  $f_1$  et  $2f_2$  de (2.10). Elles sont fonction de déformations logarithmiques calculées à partir de  $u_1$  et  $u_2$  de (2.10) et des dimensions initiales de la CER ((2.2)). Nous obtenons pour chaque rapport de biaxialité une courbe force-déplacement de chaque surface. En les regroupant et les interpolant, nous obtenons les surfaces de tension  $T_1$  et  $T_2$  (Figure 2-28).

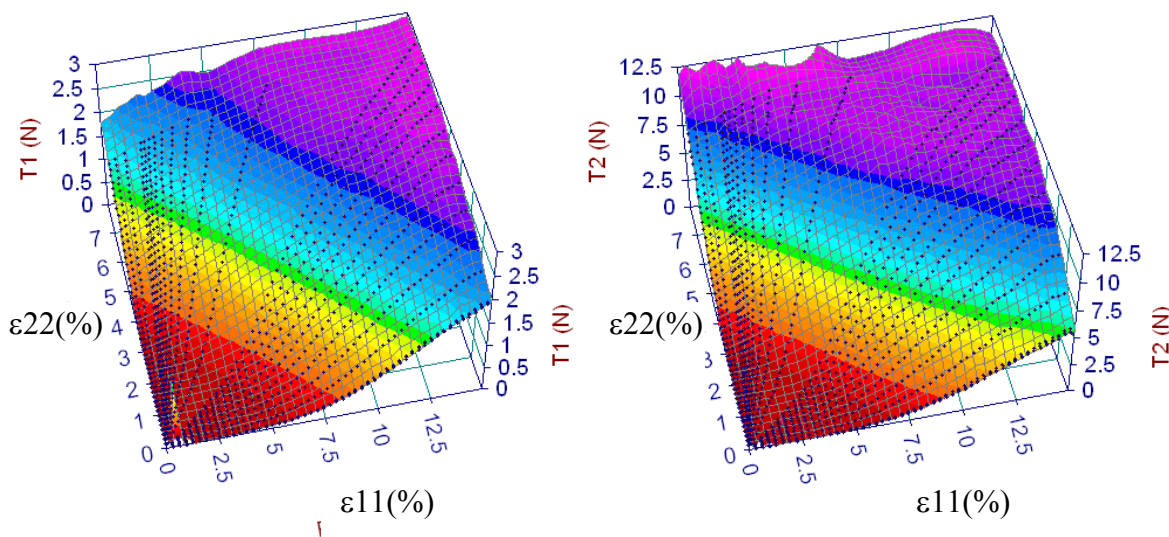


Figure 2-28 : Surfaces de tension  $T_1$  et  $T_2$

Nous constatons que le domaine de validité du modèle est restreint pour la majorité des rapports de biaxialité de la CER dans les grandes déformations : il y a un aplatissement des surfaces qui n'est pas physique. Il n'y a en effet aucune raison pour que la rigidité chute alors que les déplacements continuent d'augmenter linéairement ! Nous revenons sur ce point au 2.3.2.4 lors de la comparaison entre les courbes forces-déplacements extraites des surfaces de tension pour  $k_{CER}=11/17$  et l'essai expérimental disponible.

<sup>20</sup> Les directions chaîne et trame sont en fait considérées comme deux directions fortes d'anisotropie.

### 2.3.2.3 Corrélation entre le calcul et l'essai

Nous comparons les courbes forces-déplacements numériques et expérimentales obtenues pour  $k=1$ . Nous représentons sur la Figure 2-29 les différentes courbes et nous constatons une corrélation possible, à une translation près. En tradant les courbes de  $-0,345\text{mm}$ , nous obtenons les courbes de la Figure 2-30. Cette opération de recalage du modèle est légitime pour deux raisons :

- Dans la réalité, la phase 1 du processus de déformation de la maille tricotée (définie au 2.3.1.1) est quasi-inexistante car les mèches sont déjà en contact.
- Expérimentalement, le « zéro » des courbes est difficile à obtenir puisqu'il faut que l'échantillon soit parfaitement plan initialement et sans tensions dans les mèches.

Sur la Figure 2-31, nous agrandissons la partie connue expérimentalement de la Figure 2-30 et il apparaît que la corrélation est assez bonne pour des valeurs de déplacement macroscopiques atteignant  $1,5\text{mm}$ . Néanmoins, comme sur les surfaces de tension, une perte de rigidité progressive allant jusqu'à se traduire par un plateau nous amène à nous poser de sérieuses questions quant à la formulation des éléments finis du code de calcul. Alors que le matériau est purement élastique et que les déplacements sont linéaires, comment est-il possible d'expliquer cette erreur et quelle est son incidence sur les capacités prédictives du modèle éléments finis ?

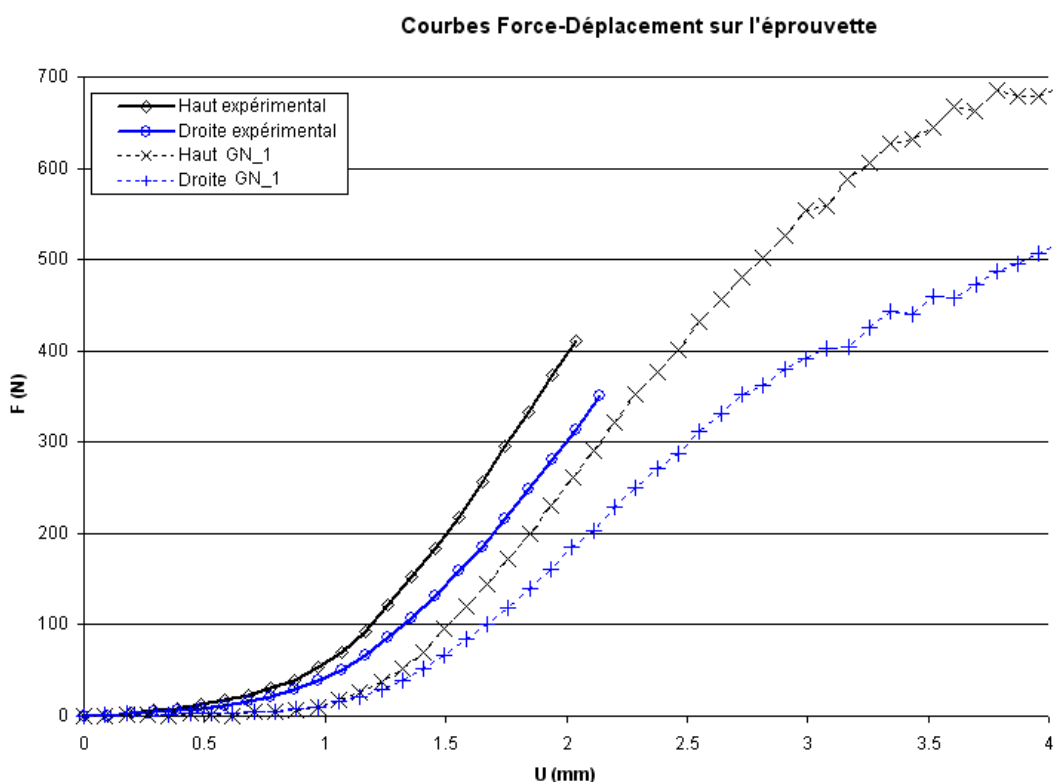


Figure 2-29 : Comparaison entre le MCEO-GN recalé partiellement et l'essai expérimental



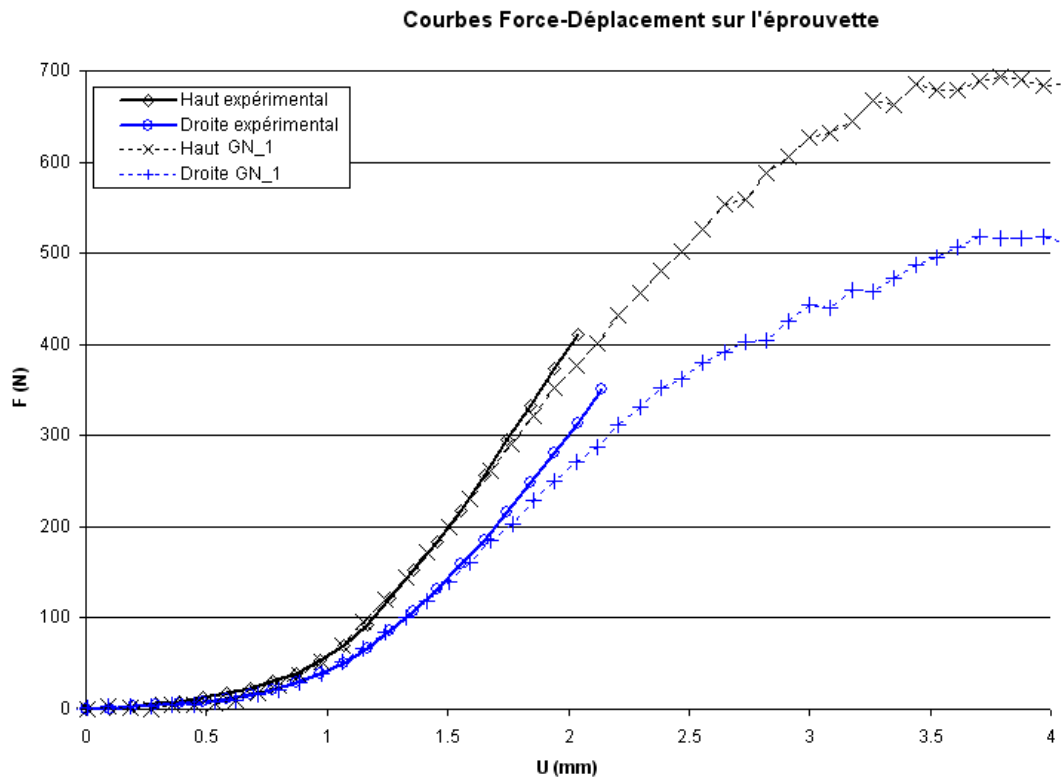


Figure 2-30 : Comparaison entre le MCEO-GN recalé et l'essai expérimental

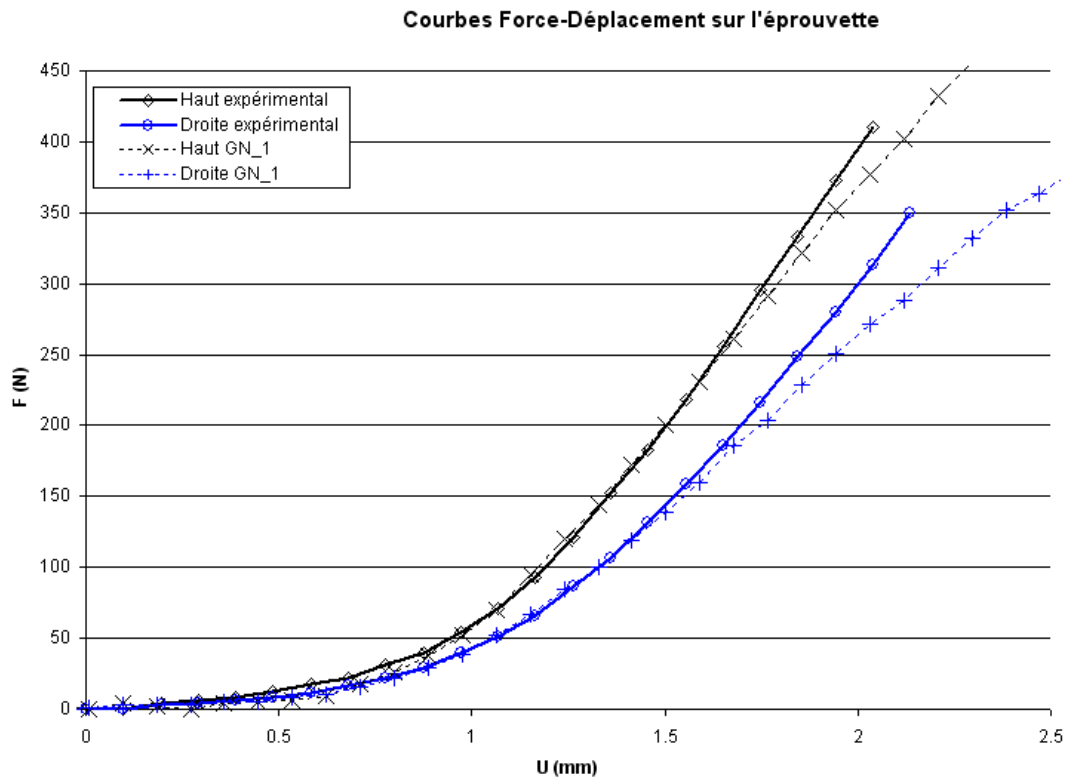


Figure 2-31 : Comparaison entre le MCEO-GN recalé et l'essai expérimental, zoom

### 2.3.2.4 Erreur due à la formulation de Green-Naghdi

La perte de rigidité en fin de transformation est une erreur liée à la formulation de Green-Naghdi. Elle s'explique géométriquement par le fait que la direction forte d'anisotropie ne soit pas réactualisée convectivement. D'après 2.2.2.2, elle dérive en suivant la rotation moyenne de toutes les fibres matérielles passant par le point de Gauss considéré alors qu'elle devrait suivre sa propre rotation. Or nous constatons que la rotation moyenne est très importante dans la zone de contact, ceci conduisant à une dérive trop importante des axes d'orthotropie. C'est ce que nous pouvons observer sur la Figure 2-32.

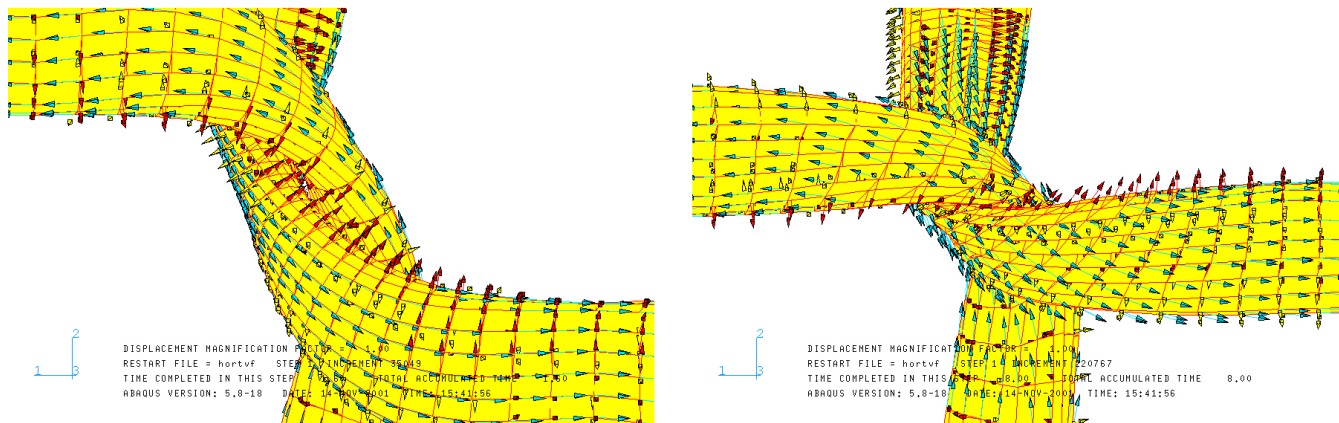


Figure 2-32 : Dérive des bases de Green-Naghdi

Cette dérive est directement liée au cisaillement des éléments, ce que nous montrerons au chapitre 4 sur le test de glissement simple. Remarquons que nous avons déjà constaté au 2.2.3.2 une trop forte sensibilité aux modules de cisaillement testés.

Au final, il apparaît que notre modèle éléments finis de tricot permet d'obtenir une corrélation avec l'essai expérimental satisfaisante, mais en apparence seulement. Il est fort probable que la loi de comportement choisie à cet effet au 2.2.3.2 ne soit plus adaptée si le rapport de biaxialité macroscopique  $k$  change. En effet, la dérive des repères de Green-Naghdi n'a aucune raison de survenir au même moment et peut être trop prématurée si nous changons  $k_{CER}$ , les mèches se cisillant au point de contact plus ou moins tardivement. D'autre part, avec de telles dérives, la loi d'écrasement n'est plus exprimée dans les bons axes d'orthotropie, c'est-à-dire orthogonalement et ortho-radialement à la fibre moyenne d'une mèche. Ces raisons nous laissent penser que la formulation de Green-Naghdi n'est pas adaptée pour la modélisation des milieux fibreux à une direction forte d'anisotropie. Le seul moyen de s'affranchir de ces difficultés est de corriger la dérive des axes d'orthotropie en implémentant une nouvelle formulation qui réactualiserait ces derniers dans la vraie direction forte d'anisotropie. C'est désormais notre nouvel objectif.

3 Chapitre 3 : Milieux  
continus orthotropes en  
grandes transformations

Nous avons précédemment montré qu'implémenter un comportement hypo-élastique orthotrope, sans s'intéresser en détail à la formulation, pouvait conduire à des résultats non-physiques. Partant de ce constat, notre ambition est d'exposer dans ce chapitre une formulation générale des milieux continus orthotropes en grandes transformations où l'évolution des directions d'orthotropie est prise en compte. L'approche choisie est eulérienne et s'inscrit dans le cadre des formulations hypo-élastiques<sup>21</sup>, cette forme de comportement étant très fréquente dans les codes de calcul en grandes transformations tels que celui dont nous usons (Abaqus/Explicit).

L'objectif de ce chapitre est de nous permettre de déduire au chapitre 4 une théorie de milieu continu équivalent orthotrope pour constituer un modèle de mèche fibreuse, mais également de détailler la formulation de Green-Naghdi utilisée au chapitre 2. Il sera alors possible de comprendre les défauts du modèle de la maille tricotée pour les corriger par notre nouvelle formulation. Pour ce faire, nous introduisons les outils tensoriels requis en deux temps. Au §3.1 sont introduits les rudiments de manipulation tensorielle et matricielle en bases mixtes à un instant donné, et au §3.2 les notions caractérisant l'évolution des tenseurs entre deux instants. Ces outils nous permettent d'expliciter notre théorie des milieux continus orthotropes (que nous abrègerons MCO) au §3.3. C'est au chapitre suivant que nous particulariserons cette théorie dans le cas d'un milieu fibreux à une direction forte d'anisotropie tel que les mèches de la maille tricotée du chapitre 2.

Pour assurer la généralité de nos résultats et mettre en place des outils qui pourront éventuellement être exploités à d'autres fins, dépassant le cadre de cette thèse, notre volonté est de privilégier les équations tensorielles. En effet, elles sont intrinsèques et les équations matricielles utilisables dans les codes de calcul en découlent directement. Le formalisme introduit peut sembler de prime abord lourd et volumineux, de par le nombre d'équations développées, mais c'est à ce prix que sont formulés de manière concise et clair les concepts sous-jacents aux formulations hypo-élastiques en MGT.

### 3.1 Manipulation des tenseurs euclidiens

La MGT nécessite l'utilisation intensive des tenseurs pour modéliser les variables, mais aussi pour écrire les relations entre ces dernières. L'outil « tenseur » est très populaire en physique pour trois raisons majeures :

- Il permet d'exprimer des propriétés indépendantes des bases de projection dans un référentiel donné car ils sont intrinsèques.
- Il permet de modéliser des applications multi-linéaires qui suffisent à décrire la majorité des phénomènes physiques.
- Il permet de construire des variables et des équations invariantes dans certaines transformations. En MGT, l'invariance par une rotation est souvent requise pour assurer l'équivalence des observateurs : c'est le principe d'objectivité.

Nous exposons dans ce paragraphe les notions et le formalisme utiles à la description des tenseurs et à leur manipulation à l'aide des matrices. La représentation des tenseurs est donc abordée à l'aide de projections dans des bases tensorielles mais aussi sous la forme matricielle.

---

<sup>21</sup> Il existe d'autres approches, dites lagrangiennes, où la formulation est souvent de la forme hyper-élastique ([DET85]) et où les tenseurs sont ramenés dans la configuration initiale. Néanmoins, il existe aussi des approches hyper-élastiques corotationnelles ([FIS00]).

### 3.1.1 Représentations et propriétés de base des tenseurs

#### 3.1.1.1 Définitions de l'espace de travail et du référentiel global

Notre cadre de travail mathématique sera l'espace euclidien à trois dimensions  $\mathbb{R}^3$  dans lequel est plongé le solide déformable, que nous noterons  $V_3$  (cette notation sera justifiée au 3.1.1.2). Dans l'espace euclidien, les distances et les angles se mesurent avec les mêmes instruments (règle et rapporteur) en tout point. Nous le désignerons tout simplement par « l'espace », car il s'agit du modèle classique de la réalité tridimensionnelle qui nous entoure. C'est dans l'espace que se trouvent les ingrédients constitutifs des tenseurs dits euclidiens. Ces tenseurs seront ceux que nous allons utiliser tout au long de ce chapitre. Pour de tels tenseurs, la notion de variance disparaît (l'espace ayant pour dual lui-même), contrairement aux tenseurs dits « affines » ([ROU97])<sup>22</sup>. Les tenseurs affines sont surtout employés en Relativité Générale et ont été introduits en physique par Einstein ([EIN93]), théorie dont nous pensons qu'il faudrait s'inspirer en MGT pour décrire les corps déformables, mais surtout pour clarifier le formalisme tensoriel sous-jacent.

Les tenseurs euclidiens doivent être évalués par rapport à des référentiels rigides en mouvement de corps rigide dans l'espace. Le travail en composantes se fera tout naturellement dans des bases orthonormées directes (bases qui seront dites « OND »). Nous précisons dès maintenant que toutes les bases utilisées dans ce chapitre seront OND ou construites à partir de bases OND (en ce qui concerne les bases mixtes définies au 3.1.1.3).

C'est l'existence d'une base qui définit automatiquement le référentiel associé dans lequel elle y est fixe. Une base mobile par rapport à une base fixe définit donc automatiquement un nouveau référentiel (dans lequel la base mobile est fixe). Dans ce dernier, les distances et les angles sont conservés puisque les bases doivent rester OND. La transformation associée ne peut donc être qu'une rotation, définissant par là même un mouvement de corps rigide à une translation près. C'est pour cela qu'un référentiel tournant s'apparente à un solide rigide en mouvement dans l'espace par rapport à d'autres solides rigides, fixes ou non.

Il émerge alors la nécessité de définir un premier référentiel fixe par rapport à l'espace pour en définir d'autres par la suite. Ce référentiel « primal », nous l'appelons le référentiel global et nous le notons  $\mathcal{R}_G$ . Il est défini par le choix d'une base OND fixe dans l'espace (c'est la base globale) tel qu'il soit galiléen. Le référentiel global est donc fixe ou en mouvement de translation uniforme par rapport à l'espace. C'est par rapport à  $\mathcal{R}_G$  que des référentiels tournants (donc non-galiléens) seront définis ultérieurement.

#### 3.1.1.2 Définition d'un tenseur et d'un champ de tenseur

Il est insolite de constater qu'en général on n'accorde pas d'utilité fondamentale à la définition des tenseurs. Cela s'explique par le fait que les tenseurs utilisés soient très souvent euclidiens. Dans le cas général, pour les tenseurs affines, il est nécessaire de préciser mathématiquement ce que nous désignons communément par « tenseur » à cause de la notion de variance, dite aussi tensorialité, qui resurgit. Mettons rapidement en place la notion de variété différentiable pour se placer dans ce cadre général que nous allons réduire au cas euclidien jusqu'au chapitre 5.

---

<sup>22</sup> Rougée dirait plutôt que toutes les variances sont équivalentes et doivent donc être traitées sur un pied d'égalité.

Nous identifions le solide déformable à l'instant  $t$  à une variété riemannienne différentiable de dimension 3 que nous notons  $V_3$  ([ROU91]). La notion de variété permet de tracer des arcs matériels infinitésimaux  $ds$  et il est possible de former des systèmes de coordonnées locales en tout point  $M$  du solide qui, bien sûr, est courbe et comporte des déformations. En un point  $M$  du solide déformable, nous ne saurions caractériser les arcs infinitésimaux  $ds$  par des « flèches courbes » (qui ne seraient pas des vecteurs). Il est donc nécessaire d'effectuer l'étude dans un espace tangent  $T_M V_3$  qui serait l'approximation au premier ordre du solide déformable. Il s'agit classiquement d'un processus de linéarisation permettant d'exploiter l'arsenal mathématique de l'algèbre linéaire. Cependant, il existe aussi un espace cotangent, dual de l'espace tangent, en chaque point de  $V_3$  : c'est là que la difficulté de la géométrie différentielle commence à se manifester ! Sans détailler plus ces notions, longuement analysées par Rougée dans [ROU97] et que nous reprendrons au chapitre 5, nous donnons maintenant la définition d'un tenseur à valeurs réelles qui s'appuie sur la dualité de ces espaces ([TAL93]) :

*Un tenseur  $T$  à valeurs réelles  $p$  fois covariant et  $q$  fois contravariant au point  $M$  d'un solide déformable  $V_3$  est une fonction  $(p+q)$ -linéaire, définie sur le produit cartésien de  $p$  espaces vectoriels tangents en  $M$  et  $q$  espaces vectoriels cotangents en  $M$ , vers l'espace des réels. Si  $L_{p+q}$  est l'ensemble des applications multilinéaires, on note :*

$$\underset{\vdots}{T} \in L_{p+q} \left( (T_M V_3)^p \times (T_M^* V_3)^q, \mathbb{R} \right)$$

Le nombre de barres sous  $T$  est égal à l'ordre du tenseur. Il y en a donc  $p+q$ . Nous voulons également attirer l'attention sur le fait qu'un tenseur peut également être vu comme un être mathématique appartenant à un certain espace tensoriel, et pas seulement comme une application multilinéaire :

*Un tenseur à valeurs réelles  $T$   $p$  fois covariant et  $q$  fois contravariant au point  $M$  d'une variété  $V_3$  est un élément de l'espace tensoriel  $(\otimes^p T_M^* V_3) \otimes (\otimes^q T_M V_3)$ .*

Dans le cas euclidien, la notion de variance disparaît car l'espace tangent est son propre dual et est confondu avec l'espace lui-même. L'ensemble des applications multilinéaires se simplifie alors :

$$L_{p+q} \left( (T_M V_3)^p \times (T_M^* V_3)^q, \mathbb{R} \right) = L_{p+q} \left( (\mathbb{R}^3)^p \times (\mathbb{R}^3)^q, \mathbb{R} \right) = L_{p+q} \left( \mathbb{R}^{3(p+q)}, \mathbb{R} \right) = L_n \left( \mathbb{R}^{3n}, \mathbb{R} \right)$$

Cela revient à considérer qu'un tenseur est un élément de l'espace et non un élément d'un espace tangent au solide déformable<sup>23</sup>. C'est ce qui sera appelé au chapitre 5 l'approche hyper-euclidienne ([ROU97]). Le cas euclidien permet donc de simplifier la définition générale en :

*Un tenseur euclidien  $T$  à valeurs réelles d'ordre  $n$  au point  $M$  de l'espace est une fonction  $n$ -linéaire vers l'espace des réels, définie sur le produit cartésien de  $n$  fois l'espace. On note :*

$$\underset{\vdots}{T} \in L_n \left( \mathbb{R}^{3n}, \mathbb{R} \right)$$

### **Jusqu'au chapitre 5, nos tenseurs seront exclusivement euclidiens.**

Il est important de remarquer qu'en MGT, ou d'autres domaines de la physique, on parle souvent de tenseurs pour désigner, en fait, un champ de tenseurs. Nous avons défini ce qu'est un tenseur euclidien, et il faut donc pouvoir caractériser un tenseur donné en chaque point  $M$  de l'espace. Nous introduisons alors l'ensemble des tenseurs (euclidiens) d'ordre  $n$  en un point  $M$  de l'espace :

$$T_M^n \text{ ensemble des tenseurs euclidiens d'ordre } n \text{ au point } M$$

<sup>23</sup> C'est couramment le cas des tenseurs eulériens dans l'approche spatiale.

Nous définissons ensuite la réunion des ensembles de tenseurs d'ordre  $n$  en tout point  $M$  de l'espace :

$$T^n = \bigcup_{M \in \mathbb{R}^3} T_M^n$$

Donnons maintenant la définition d'un champ de tenseurs :

*Un champ de tenseurs  $T$  est une application qui associe à tout point  $M$  de l'espace un tenseur  $T(M)$  au même point, ce que l'on note :*

$$\underline{T} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow T^n \\ M \rightarrow \underline{T}(M) \end{cases}$$

### 3.1.1.3 Bases mixtes

Pour tout ordre de tenseur, et spécialement à l'ordre 2, il est essentiel de préciser les bases de travail en MGT et il est très pratique de travailler en projection dans certaines bases plutôt que d'autres. Il est donc nécessaire de mettre au point une notation claire et une définition étendue des bases classiques.

Plaçons-nous dans un référentiel  $\mathcal{R}$ . Soit  $B$  une base mixte tensorielle, à définir, de l'algèbre tensorielle des tenseurs d'ordre 2, fixe dans  $\mathcal{R}$ . Cette base peut être formée par produit tensoriel de vecteurs formant des bases vectorielles OND fixes dans  $\mathcal{R}$  ([WAS92]). Prenons alors deux bases vectorielles OND composées des vecteurs  $\alpha_k$  et des vecteurs  $\beta_l$  pour former la base tensorielle  $B$  qui est la réunion des neuf produits tensoriels possibles (linéairement indépendants),  $k$  et  $l$  variant de 1 à 3. Nous notons alors :

$$B = \{ \underline{\alpha}_1 \otimes \underline{\beta}_1, \underline{\alpha}_2 \otimes \underline{\beta}_1, \dots, \underline{\alpha}_3 \otimes \underline{\beta}_3 \} = \bigcup_{\substack{k=1..3 \\ l=1..3}} \{ \underline{\alpha}_k \otimes \underline{\beta}_l \} = \{ \alpha \otimes \beta \}$$

Afin d'alléger les notations par la suite, nous utiliserons surtout la dernière notation qui est la plus condensée.

Nous appelons les  $\alpha_k$  les vecteurs de base gauches et les  $\beta_l$  les vecteurs de base droits.

Dans le cas particulier d'une base où les vecteurs de base gauches sont identiques aux vecteurs de base droits, nous notons :

$$B = \{ \alpha \otimes \alpha \} = \{ \alpha \}$$

Dans tout ce qui suit, les bases mixtes qui apparaîtront seront toujours construites à partir de bases vectorielles OND.

### 3.1.1.4 Projections de tenseur et représentation matricielle

D'après ce qui précède, il existe des bases tensorielles mixtes formées à partir d'autres bases tensorielles OND classiques. Afin d'exploiter de telles bases, intéressons-nous à la représentation d'un tenseur dans une base mixte. Nous appelons cette représentation, relative à une base donnée, « projection ».

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , nous nous donnons un tenseur  $A$  et une base mixte  $B$ . La projection de  $A$  sur la base  $B$  est l'association de l'ensemble des composantes de  $A$  avec les vecteurs formant  $B$ . Nous la notons :

$$\underline{\underline{A}} = A_{ij} \underline{\alpha}_i \otimes \underline{\beta}_j$$

Les composantes de  $A$  sont données par l'équation tensorielle :

$$A_{ij} = \underline{\alpha}_i \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\beta}_j$$

Démontrons ce résultat en utilisant la très utile propriété suivante (dont il sera fait un usage abondant) :

$$\boxed{(\underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbf{b}}) \cdot \underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{c}})} \quad (3.1)$$

Contractons une fois  $\mathbf{A}$  avec un vecteur de base droit :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\beta}_k = A_{ij} (\underline{\alpha}_i \otimes \underline{\beta}_j) \cdot \underline{\beta}_k = A_{ij} \underline{\alpha}_i (\underline{\beta}_j \cdot \underline{\beta}_k) = A_{ij} \underline{\alpha}_i \delta_{jk} = A_{ik} \underline{\alpha}_i$$

Contractons une fois le résultat avec un vecteur de base gauche pour obtenir les composantes de  $\mathbf{A}$  :

$$\underline{\alpha}_l \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\beta}_k = A_{ik} \underline{\alpha}_l \cdot \underline{\alpha}_i = A_{ik} \delta_{li} = A_{lk}$$

*Remarque* : Dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , il existe une infinité de projections possibles pour un tenseur donné, et toutes ces projections doivent être équivalentes et représenter le même être mathématique intrinsèque. Cette exigence est réalisée car les tenseurs obéissent à des lois précises de changement de base. Cette propriété peut d'ailleurs servir de définition d'un tenseur.

A cette projection correspond une représentation matricielle. Cela est toujours le cas car il existe un isomorphisme entre l'algèbre des tenseurs d'ordre 2 et l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$ . Cette correspondance définit la matrice de  $\mathbf{A}$  dans la base  $\mathbf{B}$  comme le tableau des composantes de  $\mathbf{A}$  relatives à la base  $\mathbf{B}$ . Nous la notons :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right]_{\mathbf{B}} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right]_{\{\alpha \otimes \beta\}} = (A_{ij})$$

### 3.1.1.5 Transposition

Soit  $\mathbf{A}$  un tenseur en base mixte de projection :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = A_{kl} \underline{\alpha}_k \otimes \underline{\beta}_l$$

Nous avons vu au 3.1.1.2 qu'un tel tenseur est une application multi-linéaire qui permet de calculer un scalaire à partir de deux vecteurs de l'espace :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in L_2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

Cependant,  $\mathbf{A}$  peut aussi être pensé comme un endomorphisme transformant linéairement un vecteur de l'espace en un autre vecteur de l'espace. Nous avons alors :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

Dans ce cadre, d'après [ROU91], la transposée euclidienne est alors mathématiquement définie par :

$$(\forall \underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3)(\forall \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3)(\forall \underline{\underline{\mathbf{A}}} \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)) \quad \underline{\mathbf{v}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\mathbf{u}}) = (\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \cdot \underline{\mathbf{v}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} \quad (3.2)$$

En usant de la propriété (3.1), l'égalité (3.2) permet de définir explicitement la transposée du tenseur  $\mathbf{A}$  :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{v}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\mathbf{u}}) &= \underline{\mathbf{v}} \cdot \left( (A_{kl} \underline{\alpha}_k \otimes \underline{\beta}_l) \cdot \underline{\mathbf{u}} \right) = A_{kl} (\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\alpha}_k) (\underline{\beta}_l \cdot \underline{\mathbf{u}}) = A_{kl} (\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\alpha}_k) (\underline{\beta}_l \cdot \underline{\mathbf{u}}) \\ &= A_{kl} (\underline{\beta}_l \cdot \underline{\mathbf{u}}) (\underline{\alpha}_k \cdot \underline{\mathbf{v}}) = \left( (A_{kl} \underline{\beta}_l \otimes \underline{\alpha}_k) \cdot \underline{\mathbf{v}} \right) \cdot \underline{\mathbf{u}} = (\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \cdot \underline{\mathbf{v}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

Nous définissons donc la transposée de  $\mathbf{A}$  comme étant l'opération tensorielle qui échange l'ordre des vecteurs de la base de projection :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T = A_{kl} \underline{\beta}_l \otimes \underline{\alpha}_k$$



La transposée échange les lignes et les colonnes de la représentation matricielle de  $\mathbf{A}$  car, les indices étant muets, sa projection peut se réécrire :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T = A_{lk} \underline{\underline{\beta}}_k \otimes \underline{\underline{\alpha}}_l$$

Les composantes de la transposée sont donc bien obtenues à partir de la transposition de la matrice de  $\mathbf{A}$  :

$$\boxed{\left[ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \right]_{\{\beta \otimes \alpha\}} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right]_{\{\alpha \otimes \beta\}}^T} \quad (3.3)$$

La matrice de la transposée de  $\mathbf{A}$  est relative à une base différente de celle de  $\mathbf{A}$ . Ainsi, pour user de la représentation matricielle sans ambiguïté, il est bien nécessaire de préciser l'ordre des vecteurs formant les bases mixtes et « sortir » l'opérateur de transposition de la matrice n'est plus sans incidence.

La transposition des tenseurs pouvant être définie à partir de l'échange des termes d'un produit tensoriel, nous avons dans le cas où  $\mathbf{A}$  est un tenseur d'ordre 4, défini à partir de deux tenseurs d'ordre 2, la relation suivante :

$$\boxed{\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\Omega}} \otimes \underline{\underline{\Psi}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T = \underline{\underline{\Psi}} \otimes \underline{\underline{\Omega}}} \quad (3.4)$$

Cette formule nous servira par la suite au 3.2.1.4 à étudier les tenseurs de rotations d'ordre 4.

### 3.1.2 Pratique du formalisme matriciel

#### 3.1.2.1 Règle de multiplication des matrices de tenseurs d'ordre 2

Dans le cas classique où les tenseurs sont représentés par des matrices, relativement à des bases OND non mixtes, la contraction simple entre deux tenseurs d'ordre 2 est isomorphe à la multiplication des matrices et rend ainsi compte de la composition des deux applications linéaires associées. Analysons quand cet isomorphisme est maintenu dans le cas où des bases mixtes sont utilisées.

La contraction simple entre tenseurs d'ordre 2 est définie à partir du produit tensoriel. Soient  $\{\alpha\}$ ,  $\{\beta\}$ ,  $\{\psi\}$  et  $\{\phi\}$  quatre bases OND. Soient deux tenseurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  en bases mixtes de projections :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = A_{kl} \underline{\underline{\alpha}}_k \otimes \underline{\underline{\beta}}_l \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = B_{ij} \underline{\underline{\psi}}_i \otimes \underline{\underline{\phi}}_j$$

Nous cherchons à calculer :  $\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}$

Pour cela, effectuons le produit tensoriel :  $\underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} = B_{ij} A_{kl} \underline{\underline{\psi}}_i \otimes \underline{\underline{\phi}}_j \otimes \underline{\underline{\alpha}}_k \otimes \underline{\underline{\beta}}_l$

La contraction simple s'effectue alors par définition « au milieu » du produit tensoriel :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} = B_{ij} A_{kl} \underline{\underline{\psi}}_i \otimes \left( \underline{\underline{\phi}}_j \cdot \underline{\underline{\alpha}}_k \right) \otimes \underline{\underline{\beta}}_l = B_{ij} A_{kl} \left( \underline{\underline{\phi}}_j \cdot \underline{\underline{\alpha}}_k \right) \underline{\underline{\psi}}_i \otimes \underline{\underline{\beta}}_l$$

Nous en concluons que la base de projection de  $\mathbf{C}$ , résultant des projections de  $\mathbf{A}$  et de  $\mathbf{B}$ , ne dépend que des vecteurs de base gauches de  $\mathbf{B}$  et des vecteurs de base droits de  $\mathbf{A}$ . Cependant, pour pouvoir multiplier systématiquement des matrices entre elles sans recourir au calcul tensoriel de contraction, il est nécessaire d'avoir égalité entre les vecteurs de base droits de  $\mathbf{A}$  et les vecteurs de base gauches de  $\mathbf{B}$  :

$$\underline{\underline{\phi}}_j = \underline{\underline{\alpha}}_j$$

Les composantes de  $\mathbf{C}$  sont alors :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = B_{ij} A_{kl} \left( \underline{\underline{\alpha}}_j \cdot \underline{\underline{\alpha}}_k \right) \underline{\underline{\psi}}_i \otimes \underline{\underline{\beta}}_l = B_{ij} A_{kl} \delta_{jk} \underline{\underline{\psi}}_i \otimes \underline{\underline{\beta}}_l = B_{ij} A_{jl} \underline{\underline{\psi}}_i \otimes \underline{\underline{\beta}}_l$$

Les composantes du tenseur  $\mathbf{C}$  dans la base mixte induite peuvent alors se calculer par la multiplication matricielle suivante :

$$\boxed{[\underline{\underline{\mathbf{C}}}]_{\{\psi \otimes \beta\}} = [\underline{\underline{\mathbf{B}}}]_{\{\psi \otimes \alpha\}} [\underline{\underline{\mathbf{A}}}]_{\{\alpha \otimes \beta\}}} \quad (3.5)$$

Ce résultat constitue la règle de multiplication des matrices relatives à des bases mixtes. Les bases doivent « se suivre » dans la multiplication.

### 3.1.2.2 Règle de multiplication de la matrice d'un tenseur d'ordre 2 avec la matrice d'un tenseur d'ordre 1

Comme précédemment, la contraction simple entre un tenseur d'ordre 2 et un tenseur d'ordre 1 est isomorphe à la multiplication des matrices dans le cas où les calculs sont effectués dans des bases classiques. Nous nous proposons d'analyser si cet isomorphisme tient toujours avec des bases mixtes.

En MGT, la contraction simple rend compte le plus souvent de l'action d'un tenseur  $\mathbf{A}$  d'ordre 2 en tant qu'application linéaire sur le tenseur  $\mathbf{I}$  d'ordre 1 vu comme un vecteur. Avec  $\{\alpha\}$ ,  $\{\beta\}$  et  $\{\psi\}$  trois bases OND, nous avons en projection :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = A_{kl} \underline{\alpha}_k \otimes \underline{\beta}_l \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{L}}} = L_i \underline{\psi}_i$$

Nous cherchons à calculer l'image de  $\mathbf{L}$  par  $\mathbf{A}$ , noté  $\mathbf{I}$  :  $\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{L}}}$

La contraction simple s'effectue directement à l'aide de la propriété (3.1) :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{L}}} = A_{kl} (\underline{\alpha}_k \otimes \underline{\beta}_l) \cdot L_i \underline{\psi}_i = A_{kl} L_i (\underline{\beta}_l \cdot \underline{\psi}_i) \underline{\alpha}_k$$

Nous en concluons que la base de projection de  $\mathbf{I}$ , résultant des projections de  $\mathbf{A}$  et de  $\mathbf{L}$ , est indépendante du choix des vecteurs de base de  $\mathbf{L}$  et des vecteurs de base droits de  $\mathbf{A}$ . Elle ne dépend que des vecteurs de base gauches de  $\mathbf{A}$ . Cependant, pour que la projection de  $\mathbf{I}$  puisse se calculer matriciellement, il faut choisir les vecteurs de base de  $\mathbf{L}$  identiques aux vecteurs de base droits de  $\mathbf{A}$  :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbf{A}}} = A_{kl} \underline{\alpha}_k \otimes \underline{\beta}_l \\ \underline{\underline{\mathbf{L}}} = L_i \underline{\beta}_i \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{I}}} = A_{kl} L_i (\underline{\beta}_l \cdot \underline{\beta}_i) \underline{\alpha}_k = \delta_{li} A_{kl} L_i \underline{\alpha}_k = A_{kl} L_l \underline{\alpha}_k$$

Dans ce cas précis, nous pouvons écrire matriciellement :

$$\boxed{[\underline{\underline{\mathbf{I}}}]_{\{\alpha\}} = [\underline{\underline{\mathbf{A}}}]_{\{\alpha \otimes \beta\}} [\underline{\underline{\mathbf{L}}}]_{\{\beta\}}} \quad (3.6)$$

Cette règle est analogue à (3.5) dans le sens que les vecteurs de bases doivent se « suivre » dans les produits matriciels.

### 3.1.2.3 Formules de changement de base

Il est important de détailler les formules de changement de base des tenseurs en base mixte sous la forme matricielle (et pas seulement indicielle) car nous en aurons fortement besoin pour exposer une formulation implémentable des MCO.

Donnons-nous un tenseur de rotation  $\Delta$  et trois bases OND de  $\mathcal{R}$ :  $\{G\}$ ,  $\{E\}$  et  $\{e\}$ . Dans le référentiel d'observation  $\mathcal{R}$ , effectuer le changement de base par  $\Delta$  d'un tenseur d'ordre 2  $\mathbf{A}$ , c'est exprimer les composantes de  $\mathbf{A}$  dans une autre base fixe de  $\mathcal{R}$ . Soulignons que le tenseur  $\mathbf{A}$  reste inchangé dans  $\mathcal{R}$ , contrairement à un transport rotationnel comme nous le verrons au §3.2.1.

Définissons les diverses composantes de  $\underline{\Delta}$  obtenues d'après les quatre projections possibles sur  $\{G\}$  et  $\{E\}$  :

$$\underline{\underline{\Delta}} = \underline{\Delta}_{ij} \underline{G}_i \otimes \underline{G}_j = \widetilde{\underline{\Delta}}_{ij} \underline{G}_i \otimes \underline{E}_j = \overline{\underline{\Delta}}_{ij} \underline{E}_i \otimes \underline{G}_j = \widehat{\underline{\Delta}}_{ij} \underline{E}_i \otimes \underline{E}_j$$

Analysons deux cas types pour comprendre à quoi correspondent les diverses matrices de passage que l'on pourrait obtenir d'après la Figure 3-1 où  $\{e\}$  est la base d'arrivée issue de la transformation de  $\{G\}$  ou  $\{E\}$  par  $\underline{\Delta}$ . Nous définissons la matrice de passage comme la matrice qui permet d'exprimer les vecteurs de la nouvelle base en fonction des vecteurs de l'ancienne base.

- Premier cas :  $\underline{\Delta}$  transforme la base  $\{G\}$  en base  $\{e\}$ . Nous avons alors :

$$\underline{\underline{\Delta}} \cdot \underline{G}_\alpha = \underline{e}_\alpha$$

D'une part, la matrice de passage de  $\{G\}$  vers  $\{e\}$  est :

$$\left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G\}}^T = \left( \underline{\Delta}_{ij} \right)^T$$

Preuve : soit  $\underline{a}$  un vecteur que nous exprimons dans les deux bases. Nous notons :

$$\underline{a} = a_i \underline{G}_i = \hat{a}_\alpha \underline{e}_\alpha$$

Avec la définition de  $\underline{\Delta}$ , nous obtenons :

$$\hat{a}_\alpha = a_i \left( \underline{G}_i \cdot \underline{e}_\alpha \right) = a_i \left( \underline{G}_i \cdot \underline{\underline{\Delta}} \cdot \underline{G}_\alpha \right) = a_i \underline{\Delta}_{i\alpha}$$

d'où le résultat :

$$\boxed{\left[ \underline{a} \right]_{\{e\}} = \left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G\}}^T \left[ \underline{a} \right]_{\{G\}}} \quad (3.7)$$

D'autre part, la matrice de passage de  $\{E\}$  vers  $\{e\}$  est :

$$\left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{E \otimes G\}}^T = \left( \overline{\underline{\Delta}}_{ij} \right)^T$$

Preuve : soit  $\underline{a}$  un vecteur que nous exprimons dans les deux bases. Nous notons :

$$\underline{a} = \tilde{a}_i \underline{E}_i = \hat{a}_\alpha \underline{e}_\alpha$$

Avec la définition de  $\underline{\Delta}$ , nous obtenons :

$$\hat{a}_\alpha = \tilde{a}_i \left( \underline{E}_i \cdot \underline{e}_\alpha \right) = \tilde{a}_i \left( \underline{E}_i \cdot \underline{\underline{\Delta}} \cdot \underline{G}_\alpha \right) = a_i \overline{\underline{\Delta}}_{i\alpha}$$

d'où le résultat :

$$\boxed{\left[ \underline{a} \right]_{\{e\}} = \left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{E \otimes G\}}^T \left[ \underline{a} \right]_{\{E\}}} \quad (3.8)$$

Pour un tenseur  $\underline{\underline{A}}$  d'ordre 2, les formules de changement de base sont alors :

$$\boxed{\left[ \underline{\underline{A}} \right]_{\{e\}} = \left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G\}}^T \left[ \underline{\underline{A}} \right]_{\{G\}} \left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G\}} \quad \text{ou} \quad \left[ \underline{\underline{A}} \right]_{\{e\}} = \left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{E \otimes G\}}^T \left[ \underline{\underline{A}} \right]_{\{E\}} \left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{E \otimes G\}}} \quad (3.9)$$

*Remarque* : dans ce cas, les matrices des composantes coiffées d'un tilde et d'un chapeau ne sont pas intéressantes car la base image de  $\{E\}$  par la rotation  $\underline{\Delta}$  n'est pas représentée sur la Figure 3-1.

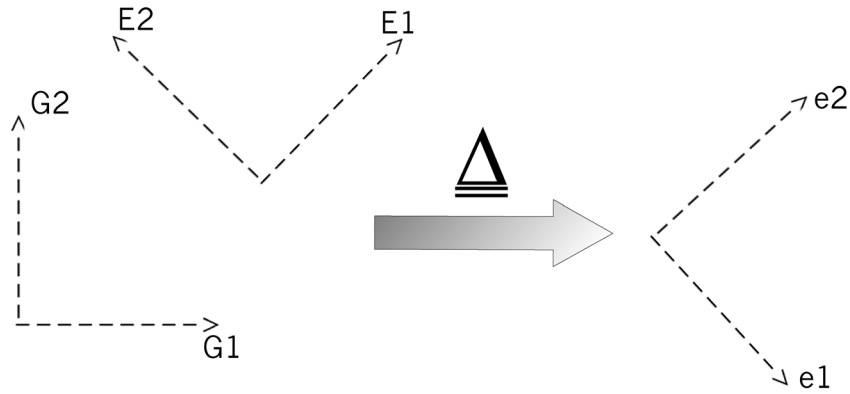


Figure 3-1 : Transformations des bases OND et changements de base par un tenseur de rotation  $\Delta$

- Deuxième cas :  $\Delta$  transforme la base  $\{E\}$  en base  $\{e\}$ . Nous avons alors :

$$\underline{\underline{\Delta}} \cdot \underline{E}_\alpha = \underline{e}_\alpha$$

D'une part, la matrice de passage de  $\{G\}$  vers  $\{e\}$  est :

$$[\underline{\underline{\Delta}}]_{\{G \otimes E\}}^T = (\widetilde{\Delta}_{ij})^T$$

D'autre part, la matrice de passage de  $\{E\}$  vers  $\{e\}$  est :

$$[\underline{\underline{\Delta}}]_{\{E\}}^T = (\widehat{\Delta}_{ij})^T$$

Pour un tenseur  $\underline{A}$  d'ordre 2, les formules de changement de base sont alors :

$$\boxed{[\underline{\underline{A}}]_{\{e\}} = [\underline{\underline{\Delta}}]_{\{G \otimes E\}}^T [\underline{\underline{A}}]_{\{G\}} [\underline{\underline{\Delta}}]_{\{G \otimes E\}} \quad \text{ou} \quad [\underline{\underline{A}}]_{\{e\}} = [\underline{\underline{\Delta}}]_{\{E\}}^T [\underline{\underline{A}}]_{\{E\}} [\underline{\underline{\Delta}}]_{\{E\}}} \quad (3.10)$$

*Remarque* : dans ce cas, les matrices des composantes non-coiffée et coiffée d'une barre ne sont pas intéressantes car la base image de  $\{G\}$  par la rotation  $\Delta$  n'est pas représentée sur la Figure 3-1.

Au final, il apparaît que :

- le vecteur de base gauche de la projection de  $\Delta$  (souligné pour la circonstance) représente la base de départ :

$$[\underline{\underline{\Delta}}]_{\{G \otimes E\}}^T$$

- le vecteur de base droit (souligné pour la circonstance) représente l'image réciproque de la base d'arrivée qui résulte de la rotation  $\Delta$  :

$$[\underline{\underline{\Delta}}]_{\{G \otimes E\}}^T$$

#### 3.1.2.4 Deux résultats importants sur les matrices d'un tenseur de rotation

Intéressons-nous aux composantes d'un tenseur de rotation dans une base tournée. Soit  $\underline{N}$  un tenseur de rotation et  $\{G\}$  et  $\{e\}$  deux bases OND. Nous supposons que  $\{e\}$  est la base tournée par  $\underline{N}$ , image de  $\{G\}$  :

$$\boxed{\underline{e}_i = \underline{N} \cdot \underline{G}_i} \quad (3.11)$$

D'une part, en projetant dans les deux bases cette relation, il vient :

$$[\underline{e}_i]_{\{G\}} = [\underline{N}]_{\{G\}} [\underline{G}_i]_{\{G\}} \quad \text{et} \quad [\underline{e}_i]_{\{e\}} = [\underline{N}]_{\{e\}} [\underline{G}_i]_{\{e\}} \quad (3.12)$$

D'autre part, les formules de changement de base du 3.1.2.3 donnent :

$$[\underline{e}_i]_{\{e\}} = [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{G\}}^T [\underline{e}_i]_{\{G\}} \quad \text{et} \quad [\underline{G}_i]_{\{e\}} = [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{G\}}^T [\underline{G}_i]_{\{G\}} \quad (3.13)$$

En reportant la première équation de (3.13) dans la seconde équation de (3.12) il vient :

$$[\underline{\mathfrak{N}}]_{\{G\}}^T [\underline{e}_i]_{\{G\}} = [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{e\}} [\underline{G}_i]_{\{e\}}$$

En injectant la première équation de (3.12) dans le résultat précédent, nous avons :

$$[\underline{\mathfrak{N}}]_{\{G\}}^T [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{G\}} [\underline{G}_i]_{\{G\}} = [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{e\}} [\underline{G}_i]_{\{e\}} \quad (3.14)$$

Or la propriété fondamentale des rotations est l'orthogonalité :

$$\underline{\mathfrak{N}}^T \cdot \underline{\mathfrak{N}} = \underline{\underline{1}}$$

(3.14) devient donc :

$$[\underline{G}_i]_{\{G\}} = [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{e\}} [\underline{G}_i]_{\{e\}} \quad (3.15)$$

Enfin, en injectant la seconde équation de (3.13) dans (3.15), nous obtenons :

$$[\underline{G}_i]_{\{G\}} = [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{e\}} [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{G\}}^T [\underline{G}_i]_{\{G\}}$$

Soit :

$$\boxed{[\underline{\mathfrak{N}}]_{\{e\}} = [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{G\}}} \quad (3.16)$$

$\underline{\mathfrak{N}}$  a donc les mêmes composantes dans la base de départ et la base tournée.

Projetons maintenant (3.11) en base mixte, nous avons :

$$[\underline{e}_i]_{\{e\}} = [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{e \otimes G\}} [\underline{G}_i]_{\{G\}} \quad (3.17)$$

En reportant (3.17) dans la seconde équation de (3.12) il vient :

$$[\underline{\mathfrak{N}}]_{\{e \otimes G\}} [\underline{G}_i]_{\{G\}} = [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{e\}} [\underline{G}_i]_{\{e\}}$$

Enfin, en injectant la seconde équation de (3.13) nous obtenons :

$$[\underline{\mathfrak{N}}]_{\{e \otimes G\}} [\underline{G}_i]_{\{G\}} = [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{e\}} [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{G\}}^T [\underline{G}_i]_{\{G\}} \Rightarrow [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{e \otimes G\}} = [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{e\}} [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{G\}}^T$$

Avec l'aide de (3.16), nous obtenons :

$$[\underline{\mathfrak{N}}]_{\{e \otimes G\}} = [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{G\}} [\underline{\mathfrak{N}}]_{\{G\}}^T = [\underline{\underline{1}}]_{\{G\}}$$

Soit :

$$\boxed{[\underline{\mathfrak{N}}]_{\{e \otimes G\}} = [\underline{\underline{1}}]_{\{G\}}} \quad (3.18)$$

$\underline{\mathfrak{N}}$  en base mixte a donc les mêmes composantes que l'identité en base globale, résultat qui va nous servir par la suite pour simplifier les projections d'incrémentes de rotations dans une base mixte formée d'une base vectorielle OND et de son image.

*Remarque* : ce résultat est naturel car, d'après le 3.1.2.3, cette matrice peut être interprétée comme étant la matrice de passage de la base  $\{e\}$  à l'image de la base  $\{G\}$  par la rotation  $\underline{\mathfrak{N}}$ , c'est-à-dire la base  $\{e\}$  elle-même ! Or la matrice de passage d'une base à elle-même est la matrice identité, d'où (3.18).

3.1.2.5 Intérêt des projections en base mixte pour les compositions d'opérateurs

Il peut paraître fastidieux de compliquer l'utilisation des tenseurs avec les bases mixtes, mais cela présente l'intérêt d'économiser une multiplication de matrice dans le cas où le tenseur étudié  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  est composé avec une rotation  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$ . En projection dans la base OND  $\{G\}$  :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = A_{ij} \underline{\underline{\mathbf{G}}}_i \otimes \underline{\underline{\mathbf{G}}}_j \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{N}}} = N_{ij} \underline{\underline{\mathbf{G}}}_i \otimes \underline{\underline{\mathbf{G}}}_j$$

Calculons les composantes de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  dans la base mixte formée par  $\{G\}$  et une autre base OND  $\{e\}$  en exploitant l'équivalence des deux projections suivantes :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \tilde{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{ij} \underline{\underline{\mathbf{G}}}_i \otimes \underline{\underline{\mathbf{e}}}_j = A_{kl} \underline{\underline{\mathbf{G}}}_k \otimes \underline{\underline{\mathbf{G}}}_l$$

En effectuant deux produits scalaires et en appliquant (3.1), la formule de changement de base s'écrit :

$$\tilde{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{ij} = A_{kl} (\underline{\underline{\mathbf{G}}}_k \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}}_i) (\underline{\underline{\mathbf{G}}}_l \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_j) = A_{kl} \delta_{ki} (\underline{\underline{\mathbf{G}}}_l \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_j) = A_{il} (\underline{\underline{\mathbf{G}}}_l \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_j) \quad (3.19)$$

Faisons maintenant l'hypothèse que  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$  transforme les vecteurs  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}_j$  en vecteurs  $\underline{\underline{\mathbf{e}}}_j$ . Pour respecter les hypothèses faites sur les bases  $\{G\}$  et  $\{e\}$  qui sont OND,  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$  ne peut être qu'une rotation. Dans ce cas, (3.11) est vérifiée et il est possible de calculer le produit scalaire de (3.19) :

$$\underline{\underline{\mathbf{G}}}_i \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_j = \underline{\underline{\mathbf{G}}}_i \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}}_j = N_{ij}$$

Il vient :

$$\tilde{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{ij} = A_{il} N_{lj}$$

Cette relation s'écrit matriciellement :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right]_{\{G \otimes e\}} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right]_{\{G\}} \left[ \underline{\underline{\mathbf{N}}} \right]_{\{G\}}$$

En résumé :

$$\left. \begin{array}{l} \{G\} \text{ une base OND donnée} \\ \underline{\underline{\mathbf{N}}} \text{ un tenseur de rotation} \\ \{e\} \text{ la base formée des } \underline{\underline{\mathbf{e}}}_j = \underline{\underline{\mathbf{N}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}}_j \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \underline{\underline{\mathbf{A}}} \quad \left[ \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right]_{\{G \otimes e\}} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right]_{\{G\}} \left[ \underline{\underline{\mathbf{N}}} \right]_{\{G\}} \quad (3.20)$$

Projeter  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  dans une certaine base mixte c'est donc obtenir les composantes de l'application linéaire  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  composée avec une rotation. Cette astuce est très importante pour qui programme dans les codes de calcul. En effet, il est fréquent qu'un opérateur agisse sur des bases OND différentes de la base globale, alors que nous cherchons à calculer des composantes dans la base globale.

Dans notre formalisme, les bases tournées par rapport à la base globale seront définies par un champ de tenseurs de rotation  $\underline{\underline{\mathbf{O}}}$ , indépendant du temps, que nous appellerons « orientation initiale ». Anticipons un petit peu sur la suite en définissant la base  $\{\kappa^t\}$  à chaque instant comme la base des axes d'orthotropie actuelle. Au chapitre 2, ces axes étaient renseignés à l'instant initial en chaque point de Gauss par la mise en donnée générée par l'utilisateur (définissant l'orientation initiale  $\underline{\underline{\mathbf{O}}}$ ). Par la suite, les axes d'orthotropie sont actualisés par la rotation  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$  (qui joue le rôle de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  dans (3.20) et où  $\underline{\underline{\mathbf{O}}}$  joue l'ancien rôle de  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$ ) comme sur la Figure 3-2. Nous avons alors :

$$\underline{\underline{\kappa}}_i^t = \underline{\underline{\mathbf{N}}} \cdot \underline{\underline{\kappa}}_i^0 \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\kappa}}_i^0 = \underline{\underline{\mathbf{O}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}}_i$$

Afin de calculer l'orientation actuelle des axes d'orthotropie à partir des vecteurs de la base globale, il est alors plus commode de stocker directement  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$  dans une base mixte. C'est ce

que nous ferons au §3.3 quand nous définirons la rotation d'un MCO donné. Montrons le maintenant. Nous voulons calculer les composantes dans la base globale de :  $\underline{\kappa}_i^t = \underline{\mathfrak{N}} \cdot \underline{\mathbf{O}} \cdot \underline{\mathbf{G}}_i$

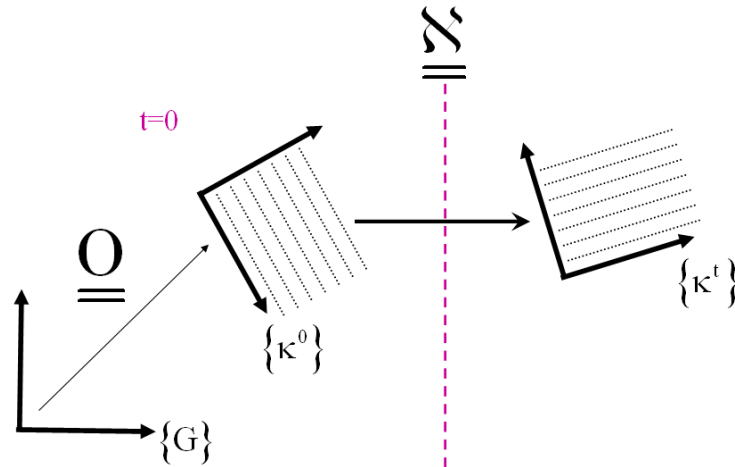


Figure 3-2 : Orientation initiale et actualisation des axes d'orthotropie

Dans ce cas, la matrice de la rotation  $\mathfrak{N}$  dans la base mixte permet de calculer directement la matrice colonne de  $\kappa_i^t$  dans la base globale. En effet, nous avons avec l'aide de (3.20) :

$$\left[ \underline{\kappa}_i^t \right]_{\{G\}} = \left[ \underline{\mathfrak{N}} \right]_{\{G\}} \left[ \underline{\mathbf{O}} \right]_{\{G\}} \left[ \underline{\mathbf{G}}_i \right]_{\{G\}} = \left[ \underline{\mathfrak{N}} \right]_{\{G \otimes \kappa^0\}} \left[ \underline{\mathbf{G}}_i \right]_{\{G\}}$$

Nous pouvons réécrire cette relation à l'aide de l'identité suivante :

$$\left[ \underline{\kappa}_i^0 \right]_{\{\kappa^0\}} = \left[ \underline{\mathbf{G}}_i \right]_{\{G\}}$$

Dans ce cas, il vient :

$$\left[ \underline{\kappa}_i^t \right]_{\{G\}} = \left[ \underline{\mathfrak{N}} \right]_{\{G \otimes \kappa^0\}} \left[ \underline{\kappa}_i^0 \right]_{\{\kappa^0\}}$$

Cette relation est tout à fait cohérente avec (3.6) et nous remarquons que dans la base mixte  $\{G \otimes e\}$ , la matrice de  $\mathfrak{N}$  est formée des colonnes contenant les composantes des  $\kappa_i^t$ , images des  $\kappa_i^0$  par  $\mathfrak{N}$ , dans la base globale.  $\mathbf{O}$  n'intervient plus explicitement dans le calcul.

## 3.2 Evolution des tenseurs euclidiens

Dans ce paragraphe, nous abordons les notions utiles à l'implémentation des modèles hypo-élastiques de MCO. Il faut caractériser l'évolution des tenseurs entre deux instants. Pour cela, les transports rotationnels sont exposés car ils constituent une classe de transformations essentielles pour définir l'objectivité, puis les opérateurs de dérivation et d'intégration dans les référentiels tournants sont développés. Ces notions sont primordiales pour définir clairement le modèle de comportement général au §3.3. Pour ne pas constamment le rappeler, nous supposons (3.11) vérifiée dans toute cette partie. Ainsi, nous rappelons que  $\{e\}$  est toujours l'image de la base globale  $\{G\}$  par la rotation  $\mathbf{R}$ .

### 3.2.1 Transports rotationnels des tenseurs

#### 3.2.1.1 Motivations et prérequis

C'est pour introduire le concept d'objectivité, les opérations de dérivation et d'intégration des tenseurs objectifs et, finalement, leurs lois d'évolution, qu'il est nécessaire de définir les transports rotationnels des tenseurs de différents ordres. Le transport rotationnel consiste à transformer un tenseur grâce à une rotation spécifiée, avec comme propriété essentielle l'égalité des composantes des tenseurs tournés dans la base tournée et des composantes des tenseurs initiaux dans la base initiale. Cette propriété est non seulement essentielle pour définir l'objectivité, mais elle est également fortement exploitée pour implémenter numériquement les formulations hypo-élastiques.

Certaines identités tensorielles vont être indispensables pour nombre de démonstrations. Pour commencer, à l'ordre 2, il sera fait grand usage des relations tensorielles suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{b}} \otimes \underline{\underline{c}}) &= (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{b}}) \otimes \underline{\underline{c}} \\ (\underline{\underline{b}} \otimes \underline{\underline{c}}) \cdot \underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{b}} \otimes (\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{c}}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

De plus, il est tout aussi important d'examiner le cas des tenseurs d'ordre 4 car la loi de comportement y fait appel. Afin de pouvoir transporter le tenseur de comportement, il est donc utile d'étudier brièvement les tenseurs de rotation d'ordre 4 pour construire le transport rotationnel d'ordre 4. Ce transport reproduit l'effet du transport rotationnel d'ordre 2 qui peut transporter le tenseur de contrainte ou de déformation. C'est pour cela que les définitions des transports ne sont données qu'aux 3.2.1.7, 3.2.1.8 et 3.2.1.9.

A l'ordre 4, et c'est là une des grandes propriétés du calcul tensoriel, les règles sont analogues à celles de l'ordre 2 : la simple contraction devient la double contraction et les tenseurs d'ordre 2 deviennent les « vecteurs » des tenseurs d'ordre 4. Ainsi, nous aurons besoin de nouvelles relations tensorielles analogues de (3.21) dans ce paragraphe. D'une part, pour les tenseurs d'ordre 2 et 4, ces relations sont :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} : (\underline{\underline{\Omega}} \otimes \underline{\underline{\Psi}}) &= (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}) \otimes \underline{\underline{\Psi}} \\ (\underline{\underline{\Omega}} \otimes \underline{\underline{\Psi}}) : \underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{\Omega}} \otimes (\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{\Psi}}) \end{aligned} \quad (3.22)$$



D'autre part, pour les tenseurs d'ordre 4 seulement :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}} : (\underline{\underline{\underline{\underline{\Omega}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\Psi}}}})} &= \left( \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\Omega}}}} \right) \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\Psi}}}} \\ (\underline{\underline{\underline{\underline{\Omega}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\Psi}}}}) : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} &= \underline{\underline{\underline{\underline{\Omega}}}} \otimes \left( \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}^T : \underline{\underline{\underline{\underline{\Psi}}}} \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Enfin, la relation définissant la « multiplication » des tenseurs d'ordre 4 sera également utilisée. La formule suivante est analogue à (3.1) :

$$\left( \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{a}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{b}}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{c}}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{d}}}}} \right) : \left( \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{u}}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{v}}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{w}}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\underline{x}}}}} \right) = (\underline{\underline{\underline{\underline{c}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{u}}}}) (\underline{\underline{\underline{\underline{d}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{v}}}}) \underline{\underline{\underline{\underline{a}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{b}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{w}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{x}}}} \quad (3.24)$$

Maintenant que nous avons passé en revue les relations tensorielles utiles, commençons l'étude des tenseurs de rotation d'ordre 4, bien moins classiques que leurs homologues d'ordre 2. Il est possible de trouver dans l'article de Grammenoudis et al. ([GRA01]) et le livre de Bonet et Wood ([BON97]) bon nombre d'informations que nous allons développer ci-dessous.

### 3.2.1.2 Tenseur identité d'ordre 4

Pour introduire les rotations d'ordre 4, il est tout d'abord indispensable de définir l'élément neutre d'ordre 4 pour la double contraction. L'identité d'ordre 4 est l'application linéaire qui associe à un tenseur  $\mathbb{C}$ , lui-même du quatrième ordre, ce même tenseur  $\mathbb{C}$ , pour le produit doublement contracté. Ce tenseur est défini de la manière suivante :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{I}}}}} = \delta_{ik} \delta_{jl} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_i \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_j \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_k \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_l} \quad (3.25)$$

Il est essentiel de souligner que, par définition,  $\mathbb{I}$  a les mêmes composantes dans toutes les « bases tensorielles OND » des tenseurs d'ordre 4 d'un référentiel donné<sup>24</sup> ([BON97]). En effet, relativement à toute base tensorielle d'ordre 4 formée à partir d'une base vectorielle OND  $\{\alpha\}$  :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\alpha}}}}_i \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\alpha}}}}_j \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\alpha}}}}_k \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\alpha}}}}_l$$

ses composantes sont :

$$I_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$$

Cependant, il sera plus pratique par la suite d'utiliser d'autres écritures de l'identité ne faisant pas appel à des composantes, mais seulement à des produits tensoriels. A partir de la définition (3.25) et de l'isotropie de  $\mathbb{I}$ , nous avons :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{I}}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_k \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_l \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_k \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_l} = \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{e}}}}_i \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{e}}}}_j \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{e}}}}_i \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{e}}}}_j} \quad (3.26)$$

L'action de l'identité sur un tenseur  $\mathbb{C}$  d'ordre 4 se traduit par :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{I}}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{I}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} \quad (3.27)$$

Preuve (obtenue avec l'aide de (3.24)) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{I}}}}} &= C_{ijkl} (\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_i \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_j \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_k \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_l) : (\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_\alpha \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_\beta \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_\alpha \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_\beta)} \\ &= C_{ijkl} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_i \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_j \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_\alpha \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_\beta} (\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_k \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_\alpha}) (\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_l \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_\beta)} \\ &= C_{ijkl} \delta_{k\alpha} \delta_{l\beta} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_i \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_j \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_\alpha \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_\beta} = C_{ijkl} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_i \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_j \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_k \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{G}}}}_l \\ &= \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{C}}}}} \end{aligned}$$

<sup>24</sup> Il s'agit d'un tenseur dit isotrope.

### 3.2.1.3 Définition d'un tenseur de rotation d'ordre 4

Un tenseur de rotation  $\mathbf{R}$  d'ordre 4 est défini à partir d'un tenseur de rotation  $\mathbf{N}$  d'ordre 2 comme suit :

$$\boxed{\forall \underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{R}}(\underline{\underline{N}}) : \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{N}}^T} \quad (3.28)$$

Relions les composantes de  $\mathbf{R}$  à celles de  $\mathbf{N}$ . Une projection de  $\mathbf{R}$  peut s'écrire en base globale :

$$\underline{\underline{R}} = R_{ijkl} \underline{G}_i \otimes \underline{G}_j \otimes \underline{G}_k \otimes \underline{G}_l$$

*Remarque* : nous omettrons la dépendance de  $\mathbf{R}$  à  $\mathbf{N}$  pour ne pas alourdir inutilement nos notations.

$\underline{\underline{A}}$  est un tenseur quelconque, en base globale il s'écrit :

$$\underline{\underline{A}} = A_{ij} \underline{G}_i \otimes \underline{G}_j$$

En projetant l'équation (3.28) en base globale, nous avons donc :

$$\forall A_{ij} \quad N_{ki} A_{ij} N_{lj} = R_{kl\gamma\delta} A_{\gamma\delta} = R_{kl\gamma\delta} A_{ij} \Rightarrow R_{kl\gamma\delta} = N_{ki} N_{lj}$$

Soit :

$$\boxed{R_{ijkl} = N_{ik} N_{jl}} \quad (3.29)$$

Une autre écriture de cette projection de  $\mathbf{R}$  peut être obtenue en remarquant l'identité suivante :

$$N_{i\alpha} \underline{G}_i = \underline{G}_i (\underline{G}_i \cdot \underline{N} \cdot \underline{G}_\alpha) = (\underline{G}_i \otimes \underline{G}_i) \cdot (\underline{N} \cdot \underline{G}_\alpha) = \underline{1} \cdot (\underline{N} \cdot \underline{G}_\alpha) = \underline{N} \cdot \underline{G}_\alpha = \underline{e}_\alpha$$

Nous avons donc :

$$\boxed{N_{i\alpha} \underline{G}_i = \underline{e}_\alpha} \quad (3.30)$$

Nous pouvons alors réexprimer le tenseur  $\mathbf{R}$  à l'aide d'un unique produit tensoriel :

$$\boxed{\underline{\underline{R}} = \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{G}_i \otimes \underline{G}_j} \quad (3.31)$$

Preuve (obtenue à l'aide de (3.30)) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{R}} &= N_{ik} N_{jl} \underline{G}_i \otimes \underline{G}_j \otimes \underline{G}_k \otimes \underline{G}_l \\ &= (N_{ik} \underline{G}_i) \otimes (N_{jl} \underline{G}_j) \otimes \underline{G}_k \otimes \underline{G}_l \\ &= \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \otimes \underline{G}_k \otimes \underline{G}_l \end{aligned}$$

### 3.2.1.4 Transposée d'un tenseur de rotation d'ordre 4

La transposée est définie comme l'échange des deux termes d'un produit tensoriel (3.4). A partir de la définition (3.31) de  $\mathbf{R}$ , nous avons donc :

$$\boxed{\underline{\underline{R}}^T = \underline{G}_i \otimes \underline{G}_j \otimes \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j} \quad (3.32)$$

Si nous exprimons la transposition avec les composantes (3.29) de  $\mathbf{R}$ , nous avons :

$$\underline{\underline{R}}^T = R_{ijkl} \underline{G}_k \otimes \underline{G}_l \otimes \underline{G}_i \otimes \underline{G}_j = R_{kl\gamma\delta} \underline{G}_\gamma \otimes \underline{G}_\delta \otimes \underline{G}_i \otimes \underline{G}_j$$

avec :

$$\mathbf{R}^T_{ijkl} = \mathbf{R}_{klij} = \mathfrak{N}_{ki} \mathfrak{N}_{lj} = \mathfrak{N}_{ik}^T \mathfrak{N}_{jl}^T$$

### 3.2.1.5 Orthogonalité d'un tenseur de rotation d'ordre 4

Tout comme à l'ordre 2, la transposée d'un tenseur de rotation d'ordre 4 est égale à son inverse, ce qui traduit son caractère orthogonal :

$$\boxed{\underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}^T = \underline{\underline{\mathbb{R}}}^T : \underline{\underline{\mathbb{R}}} = \underline{\underline{\mathbb{I}}}} \quad (3.33)$$

Preuve (obtenue avec l'aide de (3.24), (3.32) et enfin de (3.26)) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}^T &= (\underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j \otimes \underline{\mathbf{G}}_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_j) : (\underline{\mathbf{G}}_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_j \otimes \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j) \\ &= (\underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j \otimes \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j) (\underline{\mathbf{G}}_i \cdot \underline{\mathbf{G}}_i) (\underline{\mathbf{G}}_j \cdot \underline{\mathbf{G}}_j) \\ &= \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j \otimes \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j \\ &= \underline{\underline{\mathbb{I}}} \end{aligned}$$

### 3.2.1.6 Action d'un tenseur de rotation d'ordre 4 sur un produit tensoriel de la base globale

Un tenseur de rotation  $\mathbf{R}$  d'ordre 4 peut tourner une base tensorielle d'ordre 2. Comme il est construit sur un tenseur de rotation  $\mathfrak{N}$  d'ordre 2, il est naturel que la base tensorielle tournée soit formée des vecteurs tournés chacun par  $\mathfrak{N}$ . Cette propriété sera essentielle pour exprimer les composantes en base tournée du transport rotationnel d'ordre 4. Elle s'exprime par la relation :

$$\boxed{\underline{\underline{\mathbb{R}}} : (\underline{\mathbf{G}}_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_j) = \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j} \quad (3.34)$$

Preuve :

$$\underline{\underline{\mathbb{R}}} : (\underline{\mathbf{G}}_\alpha \otimes \underline{\mathbf{G}}_\beta) = \mathbf{R}_{ijkl} (\underline{\mathbf{G}}_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_j \otimes \underline{\mathbf{G}}_k \otimes \underline{\mathbf{G}}_l) : (\underline{\mathbf{G}}_\alpha \otimes \underline{\mathbf{G}}_\beta)$$

Or d'après (3.24) nous avons :

$$(\underline{\mathbf{G}}_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_j \otimes \underline{\mathbf{G}}_k \otimes \underline{\mathbf{G}}_l) : (\underline{\mathbf{G}}_\alpha \otimes \underline{\mathbf{G}}_\beta) = (\underline{\mathbf{G}}_\alpha \cdot \underline{\mathbf{G}}_k) (\underline{\mathbf{G}}_\beta \cdot \underline{\mathbf{G}}_l) (\underline{\mathbf{G}}_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_j) = \delta_{\alpha k} \delta_{\beta l} \underline{\mathbf{G}}_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_j$$

Il vient :

$$\underline{\underline{\mathbb{R}}} : (\underline{\mathbf{G}}_\alpha \otimes \underline{\mathbf{G}}_\beta) = \mathbf{R}_{ij\alpha\beta} \underline{\mathbf{G}}_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_j = \mathfrak{N}_{i\alpha} \mathfrak{N}_{j\beta} \underline{\mathbf{G}}_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_j = \mathfrak{N}_{i\alpha} \underline{\mathbf{G}}_i \otimes \mathfrak{N}_{j\beta} \underline{\mathbf{G}}_j$$

En vertu de (3.30), nous obtenons finalement le résultat recherché :

$$\mathfrak{N}_{i\alpha} \underline{\mathbf{G}}_i \otimes \mathfrak{N}_{j\beta} \underline{\mathbf{G}}_j = \underline{\mathbf{e}}_\alpha \otimes \underline{\mathbf{e}}_\beta$$

### 3.2.1.7 Transport rotationnel des tenseurs d'ordre 1

Les rotations d'ordre 4 sont maintenant connues. Elles n'étaient pas utiles pour définir les transports rotationnel d'ordre 1 et 2, où seuls les tenseurs de rotation d'ordre 2 interviennent, mais seulement les transports rotationnels d'ordre 4. Cependant, afin de donner successivement les définitions des transports aux ordres 1, 2 et 4, il fallait introduire cette notion préalablement.

Définissons en premier lieu le transport rotationnel des tenseurs d'ordre 1, c'est-à-dire des vecteurs.

Soit  $\underline{T}_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}(\underline{\mathbf{I}})$  le transport rotationnel par la rotation  $\underline{\mathbb{N}}$  d'un vecteur  $\underline{\mathbf{I}}$ , nous avons :

$$\underline{T}_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}(\underline{\mathbf{I}}) = \underline{\mathbb{N}} \cdot \underline{\mathbf{I}} \Leftrightarrow \underline{T}_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}^{-1}(\underline{\mathbf{I}}) = \underline{\mathbb{N}}^T \cdot \underline{\mathbf{I}} \quad (3.35)$$

De (3.35) découle la propriété fondamentale des transports rotationnels d'ordre 1 :

$$\left[ \underline{T}_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}(\underline{\mathbf{I}}) \right]_{\{e\}} = \left[ \underline{\mathbf{I}} \right]_{\{G\}} \quad (3.36)$$

Preuve :  $\underline{\mathbf{I}} = \mathbf{I}_i \underline{\mathbf{G}}_i \Rightarrow \underline{T}_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}(\underline{\mathbf{I}}) = \underline{\mathbb{N}} \cdot \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbb{N}} \cdot \mathbf{I}_i \underline{\mathbf{G}}_i = \mathbf{I}_i \underline{\mathbf{e}}_i$

### 3.2.1.8 Transport rotationnel des tenseurs d'ordre 2

Définissons maintenant le transport rotationnel des tenseurs d'ordre 2.

Soit  $\underline{T}_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}})$  le transport rotationnel par la rotation  $\underline{\mathbb{N}}$  d'un tenseur d'ordre 2  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ , nous avons :

$$\underline{T}_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \underline{\mathbb{N}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\mathbb{N}}^T \Leftrightarrow \underline{T}_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}^{-1}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \underline{\mathbb{N}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\mathbb{N}} \quad (3.37)$$

De (3.37) découle la propriété fondamentale des transports rotationnels d'ordre 2 :

$$\left[ \underline{T}_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) \right]_{\{e\}} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right]_{\{G\}} \quad (3.38)$$

Preuve :

$$\left| \underline{\underline{\mathbf{A}}} = A_{ij} \underline{\mathbf{G}}_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_j \Rightarrow \underline{T}_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \underline{\mathbb{N}} \cdot (A_{ij} \underline{\mathbf{G}}_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_j) \cdot \underline{\mathbb{N}}^T = A_{ij} ((\underline{\mathbb{N}} \cdot \underline{\mathbf{G}}_i) \otimes \underline{\mathbf{G}}_j) \cdot \underline{\mathbb{N}}^T \right. \\ \left. = A_{ij} (\underline{\mathbb{N}} \cdot \underline{\mathbf{G}}_i) \otimes (\underline{\mathbb{N}} \cdot \underline{\mathbf{G}}_j) = A_{ij} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j \right.$$

De même, pour le transport inverse :

$$\left[ \underline{T}_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}^{-1}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) \right]_{\{G\}} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{A}}} \right]_{\{e\}} \quad (3.39)$$

Preuve :

$$\left| \underline{\underline{\mathbf{A}}} = A_{ij} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j \Rightarrow \underline{T}_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}^{-1}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \underline{\mathbb{N}}^T \cdot (A_{ij} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j) \cdot \underline{\mathbb{N}} = A_{ij} ((\underline{\mathbb{N}}^T \cdot \underline{\mathbf{e}}_i) \otimes \underline{\mathbf{e}}_j) \cdot \underline{\mathbb{N}} \right. \\ \left. = A_{ij} (\underline{\mathbb{N}}^T \cdot \underline{\mathbf{e}}_i) \otimes (\underline{\mathbb{N}}^T \cdot \underline{\mathbf{e}}_j) = A_{ij} \underline{\mathbf{G}}_i \otimes \underline{\mathbf{G}}_j \right.$$

### 3.2.1.9 Transport rotationnel des tenseurs d'ordre 4

Finalement, définissons le transport rotationnel des tenseurs d'ordre 4.

Soit  $\underline{T}_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}(\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}})$  le transport rotationnel par la rotation  $\underline{\mathbb{N}}$  d'un tenseur d'ordre 4  $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}}$ , nous avons :

$$\underline{T}_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}(\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}}) = \underline{\mathbb{R}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}} : \underline{\mathbb{R}}^T \Leftrightarrow \underline{T}_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}^{-1}(\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}}) = \underline{\mathbb{R}}^T : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}} : \underline{\mathbb{R}} \quad (3.40)$$

De (3.40) découle la propriété fondamentale des transports rotationnels d'ordre 4 :



notion d'objectivité qui lui impose d'être intrinsèque vis-à-vis d'un changement d'observateur ou d'un entraînement dans une rotation.

D'après Truesdell toujours, c'est Rivlin qui, le premier, a mis en évidence l'équivalence des deux approches en montrant que le changement d'observateur correspond à un entraînement de tenseurs dans une rotation inverse de celle utilisée pour faire le changement d'observateur. Il y a donc plusieurs façons de définir l'objectivité, et les points de vue sont nombreux dans la littérature. Par exemple, Garrigues ([GAR02]) considère que seuls les tenseurs eulériens peuvent être objectifs alors que pour Belytschko et Sidoroff ([BEL00], [SID82]) les tenseurs lagrangiens et eulériens le peuvent. Remarquons qu'en usant de la définition de [GAR02], l'auteur démontre la non-objectivité (à son sens) de tenseurs communément admis comme l'étant ( $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{C}$  notamment) ! Il s'agit manifestement d'un problème de vocabulaire,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{C}$  étant bien invariants dans une rotation quelconque tournant la configuration initiale. Un autre point de vue est celui de Ladevèze et Rougée ([LAD91], [ROU97]) qui parlent d' $\Omega_t$ -matérialité pour traduire l'objectivité des tenseurs lagrangiens et qui réservent le qualificatif d'objectif aux seuls tenseurs eulériens. Donnons notre point de vue.

Nous rappelons que  $\{e\}$  (respectivement  $\{e_0\}$ ) est l'image de la base globale  $\{G\}$ , à l'instant  $t$  (respectivement à l'instant  $t=0$ ), obtenue par la rotation  $\mathbf{N}$  (respectivement  $\mathbf{N}_0$ ). La base  $\{e\}$  définit le référentiel tournant  $\mathcal{R}$  qui se déduit du référentiel  $\mathcal{R}_G$  par la rotation  $\mathbf{N}$  à l'instant  $t$ . A l'instant initial, le référentiel  $\mathcal{R}_0$  se déduit du référentiel  $\mathcal{R}_G$  par la rotation  $\mathbf{N}_0$ . A notre sens, il faut considérer l'invariance par  $\mathbf{N}$  pour les tenseurs eulériens qui sont dans la configuration actuelle à l'instant  $t$  et l'invariance par  $\mathbf{N}_0$  pour les tenseurs lagrangiens qui sont dans la configuration initiale (même s'ils dépendent de  $t$ ). Par la suite, nous ne nous intéresserons qu'aux tenseurs eulériens puisque nous emploierons une loi hypo-élastique. Détaillons maintenant les deux définitions possibles de l'objectivité.

### 3.2.2.2 Entraînement des tenseurs dans une rotation

Cette définition propose d'analyser l'évolution des tenseurs quand on impose un mouvement de corps rigide au solide déformable. Ce mouvement est imposé à l'instant  $t$  pour les tenseurs eulériens. Il est supposé défini par :

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{N}}(t) \cdot \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{T}}(t) \quad \text{avec} \quad \underline{\mathbf{N}}(0) = \underline{\mathbf{N}}_0 \quad (3.42)$$

$\underline{\mathbf{x}}$  est le segment matériel image actuelle de  $\underline{\mathbf{X}}$  par la rotation  $\mathbf{N}$  et la translation  $\mathbf{T}$ .

En différentiant cette relation, nous analysons ce qu'il se passe pour des segments infinitésimaux. Nous obtenons alors à l'instant  $t$  :

$$\underline{\mathbf{l}} = \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{L}} \quad \text{avec} \quad \underline{\mathbf{l}} = d\underline{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{L}} = d\underline{\mathbf{X}} \quad (3.43)$$

Si nous imaginons un tenseur  $\mathbf{A}$  associé au solide déformable dans le référentiel  $\mathcal{R}_G$  et que nous imposons le mouvement (3.42) au solide déformable, nous pouvons nous poser la question suivante : « comment  $\mathbf{A}$  doit-il évoluer ? ». Intuitivement, nous pourrions croire que  $\mathbf{A}$  devrait tourner avec lui. Ce n'est pas le cas en général, l'évolution étant dictée par la loi d'entraînement de  $\mathbf{A}$ , à trouver. Par la suite, nous noterons un tenseur  $\mathbf{A}$ , d'ordre quelconque, transformé par la rotation  $\mathbf{N}$  :

$$\mathbf{A}_{T\mathbf{N}}$$

En l'état, il n'est pas possible de donner de formule générale pour trouver ce  $\mathbf{A}$  tourné par le mouvement de corps rigide car la loi d'entraînement d'un tenseur dépend de la nature physique de ce dernier. Cette loi est fonction des quantités sur lesquelles opère le tenseur

(vitesses, normales, segments...). Il faut les trouver au cas par cas, ce que nous illustrerons au 3.2.2.6, en postulant au départ les lois d'entraînement des normales, des vecteurs contraintes et des segments. Cependant, nous pouvons nous demander si le tenseur entraîné est exactement positionné dans  $\mathcal{R}$  (ou  $\mathcal{R}_0$  selon l'instant considéré) comme l'était  $\underline{\mathbf{A}}$  dans  $\mathcal{R}_G$ . C'est le cas si  $\underline{\mathbf{A}}$  est objectif car sa loi d'entraînement est alors parfaitement connue. Pour un tenseur  $\underline{\mathbf{A}}$  eulérien d'ordre 1, 2 ou 4, l'objectivité est définie par :

$$\underline{\mathbf{A}}_{T\mathcal{N}} = T_{\perp/\mathcal{N}}(\underline{\mathbf{A}}) \quad (3.44)$$

Pour illustrer graphiquement cette situation, supposons momentanément que  $\underline{\mathbf{A}}$  soit un tenseur d'ordre 2 symétrique. Il possède alors des éléments propres et nous pouvons le représenter par un cube sur lequel s'exercent les vecteurs propres pondérés par les valeurs propres (voir Figure 3-3).

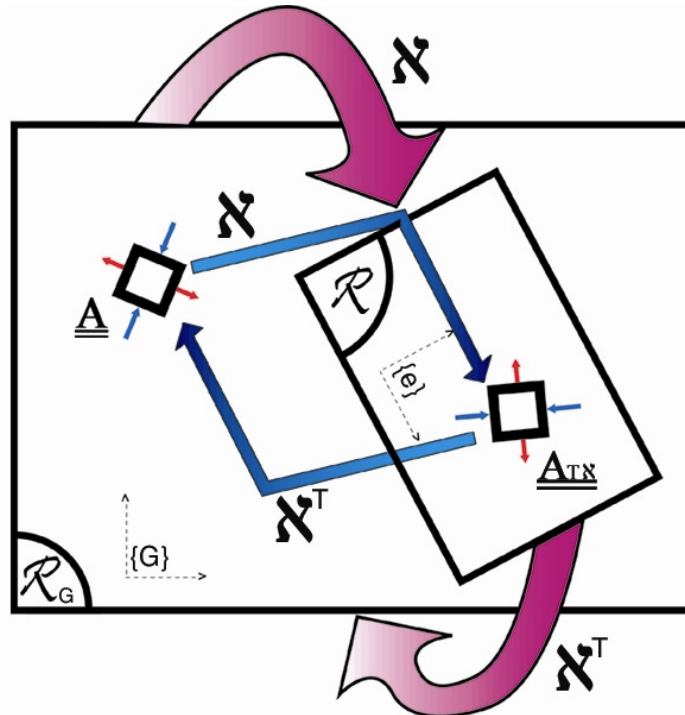


Figure 3-3 : Rotation du référentiel  $\mathcal{R}_G$  par  $\mathcal{N}$  et entraînement du tenseur objectif symétrique  $\underline{\mathbf{A}}$  par  $\mathcal{N}$

L'évolution d'un tenseur objectif transformé par une rotation est donc parfaitement connue. C'est la propriété fondamentale du transport rotationnel qui assure que les composantes du tenseur entraîné soient les mêmes dans la base tournée actuelle  $\{e\}$  que celles du tenseur initial dans la base initiale  $\{G\}$ . En d'autres termes, l'observateur tourné à  $t$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  voit le même être mathématique que l'observateur initial dans  $\mathcal{R}_G$ . C'est ce que l'on entend quand on dit que les tenseurs eulériens objectifs sont invariants dans un mouvement de corps rigide.

### 3.2.2.3 Changement d'observateur

Un observateur dans  $\mathcal{R}$  est classiquement représenté en mécanique par une base OND fixe dans  $\mathcal{R}$ . Les tenseurs étant cette fois-ci fixes dans l'espace, l'approche du changement d'observateur propose de comparer ce que voit l'observateur tournant avec ce que voit un

observateur fixe dans  $\mathcal{R}_G$ . Un segment matériel  $\mathbf{X}$  vu depuis le référentiel  $\mathcal{R}$  est supposé défini par rapport à  $\mathbf{X}$  vu depuis  $\mathcal{R}_G$  par :

$$\boxed{\underline{\mathbf{X}}|_{\mathcal{R}} = \underline{\underline{\mathbb{N}}}^T(t) \cdot \underline{\mathbf{X}}|_{\mathcal{R}_G} - \underline{\mathbf{T}}(t) \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\mathbb{N}}}(0) = \underline{\underline{\mathbb{N}}}_0} \quad (3.45)$$

L'analogie de (3.45) avec (3.42) est flagrante. Ces deux relations sont équivalentes si nous posons :

$$\underline{\mathbf{X}}|_{\mathcal{R}} = \underline{\mathbf{X}} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{X}}|_{\mathcal{R}_G} = \underline{\underline{\mathbf{x}}}$$

Il en découle que, pour un tenseur  $\mathbf{A}$  objectif, un changement d'observateur par une rotation donnée est un entraînement par l'inverse de cette rotation, c'est-à-dire un mouvement de corps rigide inverse du solide déformable. C'est pour cela que les deux approches sont parfaitement équivalentes. Les lois de changement d'observateur sont alors pour un tenseur  $\mathbf{A}$  eulérien-objectif d'ordre 1, 2 ou 4 :

$$\boxed{\underline{\mathbf{A}}|_{\mathcal{R}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathbb{N}}}}^{-1} \left( \underline{\mathbf{A}}|_{\mathcal{R}_G} \right)} \quad (3.46)$$

Ce résultat est naturel si nous nous mettons à la place de l'observateur dans  $\mathcal{R}$ , qui, lui, n'a pas conscience de tourner. Il est clair qu'il voit alors à chaque instant le tenseur  $\mathbf{A}$  entraîné par l'inverse de  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$ .

#### 3.2.2.4 Propriétés de l'objectivité pour les tenseurs d'ordre 2 symétriques

Un tenseur eulérien d'ordre 2 symétrique (à valeurs réelles) est diagonalisable : s'il est objectif, ses éléments propres (valeurs propres et vecteurs propres associés) sont les mêmes pour tout observateur. Cela suppose que les lois de changement d'observateur soient de la forme définie au 3.2.2.3. Nous nous proposons de vérifier cette propriété pour les éléments propres. Nous posons alors :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\phi}} \text{ vecteur propre de } \underline{\underline{\mathbf{A}}}|_{\mathcal{R}_G} \text{ associé à } \lambda \\ \underline{\underline{\psi}} \text{ vecteur propre de } \underline{\underline{\mathbf{A}}}|_{\mathcal{R}} \text{ associé à } \gamma \end{cases}$$

Cela s'écrit tensoriellement :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathbf{A}}}|_{\mathcal{R}_G} \cdot \underline{\underline{\phi}} = \lambda \underline{\underline{\phi}} \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}|_{\mathcal{R}} \cdot \underline{\underline{\psi}} = \gamma \underline{\underline{\psi}} \end{cases}$$

En multipliant la première équation par l'inverse de la rotation  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$  :

$$\underline{\underline{\mathbb{N}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}|_{\mathcal{R}_G} \cdot \underline{\underline{\phi}} = \lambda \underline{\underline{\mathbb{N}}}^T \cdot \underline{\underline{\phi}} \quad (3.47)$$

Si le nouvel observateur voit le même vecteur propre eulérien, il faut qu'il ait tourné de l'inverse de  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$  :

$$\underline{\underline{\psi}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathbb{N}}}}^{-1}(\underline{\underline{\phi}}) = \underline{\underline{\mathbb{N}}}^T \cdot \underline{\underline{\phi}}$$

Soit :

$$\underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{\mathbb{N}}} \cdot \underline{\underline{\psi}}$$

En injectant ce vecteur propre dans (3.47) il vient :

$$\underline{\underline{\mathbb{N}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}|_{\mathcal{R}_G} \cdot \underline{\underline{\mathbb{N}}} \cdot \underline{\underline{\psi}} = \lambda \underline{\underline{\mathbb{N}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbb{N}}} \cdot \underline{\underline{\psi}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathbb{N}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}|_{\mathcal{R}_G} \cdot \underline{\underline{\mathbb{N}}} \cdot \underline{\underline{\psi}} = \lambda \underline{\underline{\psi}}$$

Comme  $\mathbf{A}$  est supposé objectif et eulérien, sa loi de changement d'observateur est (3.46) :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}}|_{\mathcal{R}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathbb{N}}}}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}}|_{\mathcal{R}_G} \right) = \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{N}}}}^T} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}}|_{\mathcal{R}_G} \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{N}}}}}$$

Il vient donc :



$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}\Big|_{\mathcal{R}} \cdot \underline{\underline{\Psi}} = \lambda \underline{\underline{\Psi}}$$

Le caractère objectif de  $\mathbf{A}$  se traduit donc bien par l'invariance de ses éléments propres :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\Psi}} = \underline{\underline{\mathfrak{N}}}^T \cdot \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{\mathfrak{N}}}}^{-1}(\underline{\underline{\Phi}}) \\ \gamma = \lambda \end{cases}$$

### 3.2.2.5 Cas des bi-tenseurs, indifférence matérielle

Ce cas est important car il concerne le gradient de la transformation.  $\mathbf{F}$  est un bi-tenseur car c'est une application linéaire de la configuration initiale vers la configuration actuelle. Il n'est donc ni lagrangien, ni eulérien, et sa loi d'entraînement dans une rotation ne pourra donc pas être reliée à un transport rotationnel défini précédemment. Prenons deux segments matériels infinitésimaux. Si  $\mathbf{I}$  est l'image convectée de  $\mathbf{L}$ , nous avons :

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{L}}} \quad (3.48)$$

En supposant le principe d'indifférence matérielle vérifié, nous avons dans le référentiel  $\mathcal{R}$ :

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}}_{\text{TS}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_{\text{TS}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\text{TS}} \quad (3.49)$$

C'est l'occasion de définir le principe d'indifférence matérielle : les équations tensorielles s'écrivent de la même manière dans tout référentiel euclidien. Ainsi, dans le référentiel tourné par  $\mathfrak{N}$ , (3.49) a la même forme que (3.48). Les tenseurs intervenant dans (3.49) sont soient les tenseurs de (3.48) observés depuis  $\mathcal{R}$ , soient les tenseurs de (3.48) entraînés dans le mouvement de corps rigide de rotation  $\mathfrak{N}$  (ce qui est le cas ici). Comme nous l'avons précédemment montré, ces deux approches sont équivalentes.

Les segments infinitésimaux  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{L}$  sont postulés objectifs,  $\mathbf{I}$  étant eulérien (car dans la configuration actuelle) et  $\mathbf{L}$  étant lagrangien (car dans la configuration de initiale). Nous avons donc :

$$\underline{\underline{\mathbf{I}}}_{\text{TS}} = \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{\mathfrak{N}}}}(\underline{\underline{\mathbf{I}}}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\text{TS}} = \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{\mathfrak{N}_0}}}(\underline{\underline{\mathbf{L}}})$$

Il vient :

$$\underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{\mathfrak{N}}}}(\underline{\underline{\mathbf{I}}}) = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_{\text{TS}} \cdot \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{\mathfrak{N}_0}}}(\underline{\underline{\mathbf{L}}}) \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathfrak{N}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{I}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_{\text{TS}} \cdot \underline{\underline{\mathfrak{N}_0}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{L}}}$$

Nous obtenons la loi d'entraînement de  $\mathbf{F}$  dans le mouvement de corps rigide (3.42) :

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}_{\text{TS}} = \underline{\underline{\mathfrak{N}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathfrak{N}_0}}^T \quad (3.50)$$

*Remarque* : cette loi nous permettrait de définir l'objectivité pour les tenseurs de ce type comme cela est fait par Belytschko et al. ([BEL00]).

### 3.2.2.6 Analyse de l'objectivité de quelques tenseurs eulériens usuels en MGT

Les différents tenseurs qui vont suivre sont usuels en MGT. Des définitions de ces tenseurs classiques peuvent être trouvées dans [BIL03]. Nous nous proposons d'analyser s'ils vérifient le principe d'objectivité en utilisant notre formalisme. Les tenseurs y souscrivant verront par conséquent leurs évolutions dans un mouvement de corps rigide données par un transport rotationnel. Ceux qui n'y souscrivent pas auront d'autres lois d'entraînement, qu'il est néanmoins nécessaire de connaître pour mener des analyses d'objectivité concernant d'autres tenseurs.

▪ Vitesse  $\mathbf{v}$ .

La loi de composition des vitesses est bien connue : la vitesse dans un référentiel  $\mathcal{R}$  est la somme de la vitesse relative dans  $\mathcal{R}_G$  et de la vitesse d'entraînement de  $\mathcal{R}_G$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Cela confirme le caractère non-objectif de la vitesse qui peut très bien s'annuler dans  $\mathcal{R}$  :

$$\boxed{\underline{\mathbf{v}}|_{\mathcal{R}} = \underline{\mathbf{v}}|_{\mathcal{R}_G} + \underline{\mathbf{v}}|_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}}} \quad (3.51)$$

▪ Gradient eulérien des vitesses  $\mathbf{L}$ .

Par définition de  $\mathbf{L}$ , nous avons dans le référentiel  $\mathcal{R}_G$  et dans le référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$\underline{\dot{\mathbf{X}}} = \underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{X}} \quad \text{et} \quad \underline{\dot{\mathbf{x}}} = \underline{\mathbf{L}}_{\text{TS}} \cdot \underline{\mathbf{x}}$$

En dérivant  $\mathbf{x}$  dans (3.43) et en utilisant la définition de  $\mathbf{L}$  il vient :

$$\underline{\dot{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{X}}} = \underline{\mathbf{L}}_{\text{TS}} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{X}} \Leftrightarrow \underline{\dot{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{L}}_{\text{TS}} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{X}}$$

En définissant le spin du référentiel  $\mathcal{R}$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_G$  :

$$\underline{\mathbf{S}}_{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\dot{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\mathbf{S}}^T$$

Nous reviendrons au 3.2.3.2 sur la définition du spin.

Nous obtenons maintenant la loi d'entraînement de  $\mathbf{L}$  dans une rotation de référentiel :

$$\boxed{\underline{\mathbf{L}}_{\text{TS}} = \underline{\mathbf{S}}_{\underline{\mathbf{S}}} + \underline{\mathbf{T}}_{\perp/\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\mathbf{L}})} \quad (3.52)$$

$\mathbf{L}$  n'est donc pas un tenseur objectif, le spin relatif du référentiel tournant venant se rajouter au transport rotationnel dans sa loi d'entraînement (3.52).

▪ Taux de déformation  $\mathbf{D}$ .

Le taux de déformation est par définition la partie symétrique de  $\mathbf{L}$  :

$$\underline{\mathbf{D}} = \frac{\underline{\mathbf{L}} + \underline{\mathbf{L}}^T}{2}$$

Par conséquent, nous avons dans le référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$\underline{\mathbf{D}}_{\text{TS}} = \frac{\underline{\mathbf{L}}_{\text{TS}} + \underline{\mathbf{L}}_{\text{TS}}^T}{2}$$

Avec l'aide de (3.52), nous obtenons la loi d'entraînement de  $\mathbf{D}$  :

$$\underline{\mathbf{D}}_{\text{TS}} = \frac{\underline{\mathbf{S}}_{\underline{\mathbf{S}}} + \underline{\mathbf{T}}_{\perp/\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\mathbf{L}}) + \underline{\mathbf{S}}_{\underline{\mathbf{S}}}^T + \underline{\mathbf{T}}_{\perp/\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\mathbf{L}})^T}{2} = \underline{\mathbf{T}}_{\perp/\underline{\mathbf{S}}}\left(\frac{\underline{\mathbf{L}} + \underline{\mathbf{L}}^T}{2}\right) = \underline{\mathbf{T}}_{\perp/\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\mathbf{D}})$$

En effet, nous montrerons au 3.2.3.2 que :

$$\underline{\mathbf{S}}_{\underline{\mathbf{S}}} + \underline{\mathbf{S}}_{\underline{\mathbf{S}}}^T = \underline{\mathbf{0}}$$

Le tenseur  $\mathbf{D}$  est donc bien objectif :

$$\boxed{\underline{\mathbf{D}}_{\text{TS}} = \underline{\mathbf{T}}_{\perp/\underline{\mathbf{S}}}(\underline{\mathbf{D}})} \quad (3.53)$$

▪ Spin de la matière  $\mathbf{W}$ .

Le spin de la matière, qui caractérise la vitesse de rotation instantanée des directions principales de  $\mathbf{D}$  ([GIL94]), est, par définition, la partie antisymétrique de  $\mathbf{L}$  :

$$\underline{\underline{W}} = \frac{\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^T}{2}$$

Par conséquent, nous avons dans le référentiel  $\mathcal{R}$ :

$$\underline{\underline{W}}_{T\mathcal{N}} = \frac{\underline{\underline{L}}_{T\mathcal{N}} - \underline{\underline{L}}_{T\mathcal{N}}^T}{2}$$

Avec l'aide de (3.52), nous obtenons la loi d'entraînement de  $\underline{\underline{W}}$ :

$$\underline{\underline{W}}_{T\mathcal{N}} = \frac{\underline{\underline{S}}_{\perp/\mathcal{N}} + \underline{\underline{T}}_{\perp/\mathcal{N}}(\underline{\underline{L}}) - \underline{\underline{S}}_{\perp/\mathcal{N}}^T + \underline{\underline{T}}_{\perp/\mathcal{N}}(\underline{\underline{L}})^T}{2} = \underline{\underline{S}}_{\perp/\mathcal{N}} + \underline{\underline{T}}_{\perp/\mathcal{N}}\left(\frac{\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^T}{2}\right) = \underline{\underline{S}}_{\perp/\mathcal{N}} + \underline{\underline{T}}_{\perp/\mathcal{N}}(\underline{\underline{W}})$$

Le spin  $\underline{\underline{W}}$  n'est donc pas objectif :

$$\underline{\underline{W}}_{T\mathcal{N}} = \underline{\underline{S}}_{\perp/\mathcal{N}} + \underline{\underline{T}}_{\perp/\mathcal{N}}(\underline{\underline{W}}) \quad (3.54)$$

- Contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$ .

Les contraintes de Cauchy sont définies à partir d'une normale unitaire  $\underline{\underline{n}}$  à une facette dans la configuration actuelle sur laquelle s'exerce un vecteur contrainte  $\underline{\underline{T}}$ , lui aussi dans la configuration actuelle. Par conséquent  $\underline{\underline{\sigma}}$  est un tenseur eulérien. Il est défini par :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{T}}$$

Nous avons dans le référentiel  $\mathcal{R}$ :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{T\mathcal{N}} \cdot \underline{\underline{n}}_{T\mathcal{N}} = \underline{\underline{T}}_{T\mathcal{N}}$$

Les vecteurs infinitésimaux  $\underline{\underline{n}}$  et  $\underline{\underline{T}}$  sont postulés objectifs. Comme ils sont tous deux eulériens, nous avons :

$$\underline{\underline{n}}_{T\mathcal{N}} = \underline{\underline{T}}_{\perp/\mathcal{N}}(\underline{\underline{n}}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{T}}_{T\mathcal{N}} = \underline{\underline{T}}_{\perp/\mathcal{N}}(\underline{\underline{T}})$$

Nous avons alors :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{T\mathcal{N}} \cdot \underline{\underline{T}}_{\perp/\mathcal{N}}(\underline{\underline{n}}) = \underline{\underline{T}}_{\perp/\mathcal{N}}(\underline{\underline{T}}) \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}}_{T\mathcal{N}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{N}}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{\mathcal{N}}} \cdot \underline{\underline{T}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\mathcal{N}}}^T \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{T\mathcal{N}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{N}}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{T}}$$

Les contraintes de Cauchy sont bien objectives :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{T\mathcal{N}} = \underline{\underline{T}}_{\perp/\mathcal{N}}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (3.55)$$

### 3.2.3 Dérivation et intégration rotationnelles

#### 3.2.3.1 Motivations et hypothèses

La MGT fait apparaître la nécessité de dériver et d'intégrer les tenseurs par rapport à la matière en mouvement dans l'espace, contrairement au cas des petites perturbations où la matière est supposée fixe dans les calculs. Le but est d'analyser l'évolution d'un tenseur en un point fixé d'une configuration par comparaison avec ce qu'il est devenu dans une autre configuration, au point image du précédent point fixe. Comme nous sommes dans un cadre euclidien, cela se traduit par des évaluations dans des référentiels tournants. Il est cependant possible de dépasser le cadre euclidien ([ROU97]), les évaluations se faisant alors dans des référentiels déformables, c'est-à-dire des espaces où les instruments de mesure (règle, rapporteur) se déforment dans le temps. C'est ce que nous ferons momentanément en définissant la dérivée de Lie pour introduire la dérivée rotationnelle

comme cas particulier. Dans cette optique, nous pensons que l'approche qui consiste à affirmer que, pour préserver l'objectivité d'une dérivée temporelle, il faille substituer à la dérivée temporelle classique une « dérivée temporelle objective » est biaisée. Cette approche traduit l'extension historique des théories en petites perturbations à la MGT, alors que si nous nous plaçons naturellement dans le cadre général de la MGT, il apparaît nécessaire d'introduire les opérateurs rotationnels comme cas particuliers d'opérateurs de Lie lorsqu'il y a des mouvements de corps rigide. Comme nous l'avons montré au 3.2.2.2, l'évolution des tenseurs associés au solide déformable est alors parfaitement connue s'ils sont objectifs. Nous retrouvons donc les idées classiques de la mécanique du solide indéformable où la dérivation se fait dans des référentiels tournants, sans pour autant parler de dérivées objectives ! Dans cette mécanique, c'est essentiellement des vecteurs qui sont dérivés dans des référentiels tournants et jamais des tenseurs d'ordre 2. Nous imaginons que si cela avait été le cas, les dérivées objectives euclidiennes auraient été désignées plus couramment par le terme « dérivée rotationnelle ».

Dans tout ce qui suit, le tenseur  $\mathbf{A}$  (quelconque) sera eulérien et objectif car nos équations seront écrites sur la configuration actuelle et nécessiteront, pour pouvoir être manipulées, que le transport rotationnel corresponde à la loi d'entraînement. Le plus souvent, nous ne définirons les concepts voulus qu'à l'ordre 2, le plus utile pour nous, ces concepts se généralisant facilement à tout ordre.  $\mathbf{A}$  sera donc un tenseur d'ordre 2.

Une fois de plus, dans ce paragraphe 3.2.3, la rotation  $\mathbf{N}$  transformera systématiquement le référentiel global  $\mathcal{R}_G$  en référentiel tournant  $\mathcal{R}$ . Nous rappelons que  $\{G\}$  est une base OND fixe dans  $\mathcal{R}_G$  et  $\{e\}$  la base OND tournée, fixe dans  $\mathcal{R}$  et définie par :

$$\underline{e}_i = \underline{N} \cdot \underline{G}_i$$

Pour bien mettre en évidence la dépendance de  $\mathcal{R}$  par rapport à la rotation  $\mathbf{N}$ , nous serons amenés à noter dans les équations :

$$\boxed{\mathcal{R} = \mathfrak{R}_{\underline{N}}} \quad (3.56)$$

Afin d'analyser l'objectivité des tenseurs dépendant de la rotation  $\mathbf{N}$ , il sera nécessaire d'introduire une nouvelle rotation  $\mathbf{t}$ , définissant donc un nouveau référentiel tournant  $\mathfrak{R}_{\mathbf{t}}$ .

### 3.2.3.2 Spin

Un spin est un taux de rotation d'un référentiel tournant par rapport à un autre référentiel, fixe ou tournant. Dans notre cas, nous devons définir le spin du référentiel tournant  $\mathcal{R}$  par rapport au référentiel global  $\mathcal{R}_G$  car il intervient dans la définition de la dérivée rotationnelle. Le spin se calcule à partir de la rotation  $\mathbf{N}$  qui, rappelons-le, transforme  $\mathcal{R}_G$  en  $\mathcal{R}$  :

$$\boxed{\underline{S}_{\underline{N}} = \dot{\underline{N}} \cdot \underline{N}^T} \quad (3.57)$$

Il est construit pour transformer un vecteur de base OND en sa dérivée temporelle classique :

$$\boxed{\dot{\underline{e}}_i = \underline{S}_{\underline{N}} \cdot \underline{e}_i} \quad (3.58)$$

Pour le prouver, souvenons-nous qu'un mouvement de corps rigide de rotation  $\mathbf{N}$  imposé au solide déformable dans  $\mathcal{R}_G$  est similaire à la rotation de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\mathcal{R}_G$ . Nous avons alors :

$$\underline{F} = \underline{R} = \underline{N}$$

Le gradient eulérien des vitesses  $\underline{\mathbf{L}}$  est donc égal au spin :

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}} = \dot{\underline{\underline{\mathbf{F}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} = \dot{\underline{\underline{\mathbf{N}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{S}}}_{\underline{\underline{\mathbf{N}}}}$$

La dérivée temporelle d'un vecteur  $\underline{\mathbf{x}}$  par rapport au référentiel global s'écrit donc dans ce cas :

$$\dot{\underline{\underline{\mathbf{x}}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}_{\underline{\underline{\mathbf{N}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{x}}}$$

De plus, le spin antisymétrique<sup>25</sup> :

$$\boxed{\underline{\underline{\mathbf{S}}}_{\underline{\underline{\mathbf{N}}}}^T = -\underline{\underline{\mathbf{S}}}_{\underline{\underline{\mathbf{N}}}}} \quad (3.59)$$

Preuve (obtenue à l'aide de l'orthogonalité de  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}$ ) :

$$\underline{\underline{\mathbf{N}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{1}}} \Rightarrow \dot{\underline{\underline{\mathbf{N}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{N}}}^T + \underline{\underline{\mathbf{N}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\mathbf{N}}}^T} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{S}}}_{\underline{\underline{\mathbf{N}}}} + \underline{\underline{\mathbf{S}}}_{\underline{\underline{\mathbf{N}}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Un cas particulier intéressant est le spin de la matière  $\underline{\mathbf{W}}$  qui est la partie antisymétrique de  $\underline{\mathbf{L}}$ .  $\underline{\mathbf{W}}$  est le spin d'un référentiel tourné par  $\underline{\mathbf{Q}}$  appelé référentiel de Jaumann. Nous le retrouverons au 3.3.2.2. Ce spin peut aussi se calculer à partir de la « partie tournante » du champ de vitesse  $\underline{\mathbf{v}}$  qui anime le solide déformable, c'est-à-dire son rotationnel :

$$\underline{\underline{\mathbf{W}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}_{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}} = \dot{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^T = \frac{1}{2} \underline{\underline{\text{rot}}}(\underline{\underline{\mathbf{v}}}) \wedge$$

### 3.2.3.3 Introduction de la dérivée rotationnelle par la dérivée de Lie

La dérivation par rapport au temps dans des référentiels quelconques (déformables ou tournants) est définie en géométrie différentielle par la dérivée de Lie. Nous renvoyons au cours de géométrie de Talpaert ([TAL93]) pour de plus amples détails. Il s'agit de la dérivée matérielle en un point fixe de la configuration actuelle à  $t$  qui analyse l'évolution d'un tenseur entre deux configurations à deux instants différents. En général, on parle de dérivées matérielles, ou convectives, quand on suit le solide dans sa transformation affine. C'est, par exemple, le cas des dérivées d'Oldroyd, de Cotter-Rivlin ou de Truesdell, détaillées par Sidoroff dans [SID82], et sur lesquelles nous reviendrons au chapitre 5. La configuration actuelle est déduite de la configuration initiale par un champ de vecteur déplacement infinitésimal  $\underline{\mathbf{d}}\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{v}}dt$ . Il est donc important de remarquer que la dérivation de Lie se fait dans la direction de la vitesse  $\underline{\mathbf{v}}$  choisie, ce que nous ne précisons pas dans les notations. De plus, la définition de la dérivée de Lie est unique, mais en fonction du choix de la tensorialité du transport affine à utiliser, elle devient covariante ou contravariante. Il existe donc une tensorialité associée à la dérivée de Lie qu'il faudra systématiquement préciser lors de son utilisation.

Dans le cas euclidien, auquel nous nous restreignons, les choses se simplifient considérablement, la notion de variance disparaissant. Par contre, la dérivée ne peut plus être qualifiée de « matérielle » que dans le cas d'un mouvement de corps rigide, c'est-à-dire quand le champ de vitesse  $\underline{\mathbf{v}}$  choisi est défini par un spin. En effet, seules les rotations sont autorisées et, dans le cas général où le solide se déforme, la rotation doit localement « suivre au mieux » la matière. C'est alors que nous parlons de « dérivées rotationnelles », dont le « meilleur » choix est encore matière à débat. Par exemple, c'est le cas des dérivées de Jaumann ([DAF83]), de Green-Naghdi ([DIE79]) ou de celle que nous allons définir au chapitre suivant. Une comparaison de ces dérivées rotationnelles entre elles et avec les dérivées convectives est étudiée dans [SZA89] et [BIL03].

<sup>25</sup> Ceci traduit son caractère de taux de rotation instantané.

Dans le cas général, les transformations autorisées pour former les transports sont des affinités<sup>26</sup>. Il s'agit des transformations géométriques linéaires les plus générales. Par exemple, le gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  est une affinité. La dérivée de Lie  $L(\mathbf{A})$  d'un tenseur  $\mathbf{A}$  d'ordre quelconque est alors égale à la limite de la différence de  $\mathbf{A}$  à  $t$  avec le transporté de  $\mathbf{A}$  à  $t-dt$ , le tout rapporté à l'intervalle temporel  $dt$  :

$$L(\mathbf{A}) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}^t - \mathbf{T}(\mathbf{A}^{t-dt})}{dt}$$

Il s'agit donc du taux de variation infinitésimal intrinsèque de  $\mathbf{A}$  dans la configuration convectée. A la différence de la dérivée temporelle classique, il est nécessaire de transporter dans la nouvelle configuration le tenseur  $\mathbf{A}$  tel qu'il était dans la configuration antérieure. En pratique, la dérivée de Lie se calcule explicitement à l'aide du transport  $\mathbf{T}$  :

$$L(\mathbf{A}) = \mathbf{T} \left( \frac{d}{dt} \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A}) \right) \quad (3.60)$$

Dans le cas d'un tenseur euclidien d'ordre 2, la dérivée de Lie devient orthogonale et se réduit à la dérivée rotationnelle définie par le transport rotationnel d'ordre 2 (3.37) :

$$\underline{\underline{L}}_{\perp/\mathcal{N}}(\underline{\underline{A}}) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\underline{\underline{A}}^t - \underline{\underline{T}}_{\perp/\mathcal{N}}(\underline{\underline{A}}^{t-dt})}{dt} \quad (3.61)$$

Cette notation est choisie pour montrer qu'une dérivée rotationnelle est une dérivée de Lie par rapport à un champ de vecteurs défini par un tenseur (orthogonal) de rotation. Elle est alors euclidienne<sup>27</sup> et se définit pour tous les tenseurs euclidiens par une rotation.

#### 3.2.3.4 Définition de la dérivation rotationnelle comme dérivée intrinsèque

Les tenseurs considérés sont euclidiens : ils ne pourront que suivre au mieux la matière puisqu'ils le feront par le biais d'une rotation. Nous nous proposons de considérer une dérivée telle qu'elle mesure la variation de ces tenseurs par rapport à la matière. Le cas particulier du mouvement de corps rigide impose qu'ils soient objectifs pour suivre exactement la matière, et il serait intéressant d'avoir dans ce cas une dérivée rotationnelle nulle. Elle serait donc une dérivée intrinsèque invariante dans les mouvements de corps rigide du solide déformable dans l'espace. Cette approche est proposée par Deski dans [DES99]. Pour l'exprimer, prenons la dérivée temporelle classique d'un tenseur d'ordre 2 :

$$\dot{\underline{\underline{A}}} = \underbrace{\dot{\underline{\underline{A}}}_{ij} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j}_{\text{partie intrinsèque}} + \underbrace{\underline{\underline{A}}_{ij} (\dot{\underline{\underline{e}}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j)}_{\text{partie extrinsèque}} \quad (3.62)$$

La partie intrinsèque de (3.62) est la dérivée rotationnelle de  $\mathbf{A}$  : c'est la variation de  $\mathbf{A}$  relative à la base tournante  $\{\mathbf{e}\}$ , c'est-à-dire la dérivée de  $\mathbf{A}$  par rapport au référentiel tournant  $\mathcal{R}$  où, rappelons-le, la base  $\{\mathbf{e}\}$  est fixe. Elle est tout à fait analogue à la vitesse relative de la loi de composition des vitesses (3.51). Nous la notons :

$$\underline{\underline{L}}_{\perp/\mathcal{N}}(\underline{\underline{A}}) = \frac{d^{\mathcal{R}\mathcal{N}} \underline{\underline{A}}}{dt} = \dot{\underline{\underline{A}}}_{ij} \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{e}}_i = \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{G}}_i \quad (3.63)$$

La partie extrinsèque de (3.62) vient de la variation de la base tournante  $\{\mathbf{e}\}$ , qu'il faut évaluer. Elle est tout à fait analogue à la vitesse d'entraînement de la loi de composition des vitesses (3.51). Pour le produit tensoriel, nous avons :

<sup>26</sup> Une étude de ces transports est menée dans [SAN92].

<sup>27</sup> Nous rappelons que la dérivée de Lie possède généralement plusieurs variances, ce qui n'est plus le cas ici.

$$(\dot{\underline{e}}_i \otimes \underline{e}_j) = \dot{\underline{e}}_i \otimes \underline{e}_j + \underline{e}_i \otimes \dot{\underline{e}}_j$$

Avec l'aide de (3.58), (3.21) et (3.59), la dérivée du produit tensoriel devient :

$$\begin{aligned} (\dot{\underline{e}}_i \otimes \underline{e}_j) &= \underline{S}_{\underline{\mathfrak{N}}} \cdot \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j + \underline{e}_i \otimes \underline{S}_{\underline{\mathfrak{N}}} \cdot \underline{e}_j \\ &= \underline{S}_{\underline{\mathfrak{N}}} \cdot (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) + (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot \underline{S}_{\underline{\mathfrak{N}}}^T \\ &= \underline{S}_{\underline{\mathfrak{N}}} \cdot (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) - (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot \underline{S}_{\underline{\mathfrak{N}}} \end{aligned}$$

La partie extrinsèque de (3.62) est donc :

$$A_{ij}(\dot{\underline{e}}_i \otimes \underline{e}_j) = \underline{S}_{\underline{\mathfrak{N}}} \cdot (A_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) - (A_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot \underline{S}_{\underline{\mathfrak{N}}} = \underline{S}_{\underline{\mathfrak{N}}} \cdot \underline{A} - \underline{A} \cdot \underline{S}_{\underline{\mathfrak{N}}}$$

La dérivée temporelle de  $\underline{A}$  s'écrit donc :

$$\dot{\underline{A}} = \underline{L}_{\perp/\underline{\mathfrak{N}}}(\underline{A}) + \underline{S}_{\underline{\mathfrak{N}}} \cdot \underline{A} - \underline{A} \cdot \underline{S}_{\underline{\mathfrak{N}}}$$

Ce qui permet de donner une nouvelle définition de la dérivée rotationnelle de  $\underline{A}$  :

$$\underline{L}_{\perp/\underline{\mathfrak{N}}}(\underline{A}) = \dot{\underline{A}} + \underline{A} \cdot \underline{S}_{\underline{\mathfrak{N}}} - \underline{S}_{\underline{\mathfrak{N}}} \cdot \underline{A} \quad (3.64)$$

Remarquons que la dérivée temporelle classique apparaît comme la dérivée temporelle par rapport au référentiel global  $\mathcal{R}_G$ , car, si  $\mathfrak{N}$  est constant, alors le spin de  $\mathcal{R}$  est nul et  $\mathfrak{N}$  définit finalement un nouveau référentiel global fixe  $\mathcal{R}_O$  par rapport au précédent, donc fixe lui aussi par rapport à l'espace, où :

$$\underline{L}_{\perp/\underline{\mathfrak{N}}}(\underline{A}) = \frac{d^{\mathfrak{R}_O}}{dt} \underline{A} = \dot{\underline{A}} \quad \text{avec } \underline{\mathfrak{N}} \text{ constant}$$

La dérivée temporelle classique est donc une dérivée rotationnelle où la rotation est indépendante du temps, c'est-à-dire une dérivée par rapport à un référentiel fixe. En fait, une dérivée rotationnelle évaluée par rapport à un référentiel fixe dans l'espace se confond à la dérivée temporelle classique. Si  $\mathfrak{N}$  se réduit à l'identité, nous avons en particulier :

$$\underline{L}_{\perp/\underline{1}}(\underline{A}) = \frac{d^{\mathfrak{R}_G}}{dt} \underline{A} = \dot{\underline{A}}$$

### 3.2.3.5 Définition de la dérivation rotationnelle par le transport rotationnel

Une troisième définition, celle-ci géométrique, est possible. La dérivée rotationnelle est alors vue comme le transport rotationnel de la dérivée du transport rotationnel inverse ([SZA89]) :

$$\underline{L}_{\perp/\underline{\mathfrak{N}}}(\underline{A}) = \underline{T}_{\perp/\underline{\mathfrak{N}}} \left( \frac{d}{dt} \underline{T}_{\perp/\underline{\mathfrak{N}}}^{-1}(\underline{A}) \right) \quad (3.65)$$

*Remarque* : Attention, dans le transport en dehors de la dérivée la rotation  $\mathfrak{N}$  est fixé à  $t$  alors que, dans la dérivée, elle est variable au voisinage de  $t$ . Par la suite cela sera sous-entendu.

Afin de neutraliser la rotation du référentiel tournant  $\mathcal{R}$  et de pouvoir dériver classiquement dans  $\mathcal{R}_G$ , le transport rotationnel inverse est appliqué à  $\underline{A}$ . Puis le transport rotationnel est appliqué à la dérivée obtenue pour obtenir sa bonne orientation par rapport à  $\mathcal{R}$ . Cette définition redonne bien sûr (3.64). En effet :

$$\underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}} \left( \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}^{-1}(\underline{\underline{A}}) \right) = \underline{\underline{S}} \cdot \frac{d(\underline{\underline{S}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}})}{dt} \cdot \underline{\underline{S}}^T = \underline{\underline{\dot{A}}} + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{S}}} - \underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{S}}} \cdot \underline{\underline{A}}$$

Montrons enfin qu'une dérivée rotationnelle nulle traduit l'entraînement dans un mouvement de corps rigide du tenseur  $\mathbf{A}$ . En effet, sur un intervalle de temps  $[t, t+\Delta t]$ , une dérivée rotationnelle nulle donne :

$$\underline{\underline{L}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}^{-1}(\underline{\underline{A}}) \right) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}^{-1}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{S}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{cste}}$$

Nous avons donc :

$$\underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}^{t+\Delta t}}^{-1}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}^t}^{-1}(\underline{\underline{A}}) \Leftrightarrow {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{S}}^T \cdot {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{A}} \cdot {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{S}} = {}^t\underline{\underline{S}}^T \cdot {}^t\underline{\underline{A}} \cdot {}^t\underline{\underline{S}}$$

Le tenseur  $\mathbf{A}$  à l'instant  $t+\Delta t$  est donc relié à celui de la configuration à  $t$  par :

$${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{A}} = {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{S}} \cdot {}^t\underline{\underline{S}}^T \cdot {}^t\underline{\underline{A}} \cdot {}^t\underline{\underline{S}} \cdot {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{S}}^T$$

Or la rotation qui permet de passer de  $t$  à  $t+\Delta t$  est définie par :

$$\underline{\underline{\Delta S}} = {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{S}} \cdot {}^t\underline{\underline{S}}^T$$

Nous avons donc :

$${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\Delta S}} \cdot {}^t\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\Delta S}}^T = \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{\Delta S}}} \left( {}^t\underline{\underline{A}} \right)$$

Le tenseur  $\mathbf{A}$  à l'instant  $t+\Delta t$  est donc bien le transporté rotationnel de  $\mathbf{A}$  à un autre instant  $t$ .

*Remarque* : Nous rappelons que  $\mathbf{A}$  doit être eulérien et objectif pour que cela soit vrai.

### 3.2.3.6 Définition de l'intégration rotationnelle

Tout comme la dérivée de Lie, il est possible de définir l'intégrale de Lie. Une définition possible de l'intégrale de Lie  $S(\mathbf{A})$  d'un tenseur  $\mathbf{A}$  entre l'instant 0 et l'instant  $t$  dans le référentiel tournant défini par le transport  $T$  est la suivante :

$$S(\mathbf{A}) = T \left( \int_0^t T^{-1}(\mathbf{A}) dt \right) \quad (3.66)$$

Cette définition est analogue à celle de la dérivée de Lie : un transport inverse vers le référentiel global est appliqué au tenseur pour en calculer l'intégrale, puis cette intégrale est transportée dans le référentiel d'analyse.

En particulierisant la définition générale pour un tenseur  $\mathbf{A}$  d'ordre 2 euclidien dans le référentiel tournant  $\mathcal{R}$ , il vient :

$$\underline{\underline{S}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}} \left( \int_0^t \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}^{-1}(\underline{\underline{A}}) dt \right) \quad (3.67)$$

Le transport rotationnel d'ordre 2 est défini au 3.2.1.8.

*Remarque* : dans le transport sous l'intégrale  $\mathbf{x}$  est variable entre 0 et  $t$  alors que dans le transport en dehors de l'intégrale  $\mathbf{x}$  est fixé à  $t$ . Par la suite cela sera sous-entendu.

La notation choisie se justifie par la réciprocity de l'intégration rotationnelle avec la dérivation rotationnelle (démontrée au 3.2.3.8). L'intégrale réalise le cumul tensoriel des incréments de  $\mathbf{A}$  dans le référentiel tournant entre l'instant initial et l'instant  $t$ . Nous pourrions donc aussi noter :

$$\underline{\underline{S}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{S}}^{\mathcal{R}\mathcal{S}}(\underline{\underline{A}})$$



Remarquons que, de manière analogue à la dérivée rotationnelle, une intégrale rotationnelle de  $\underline{\underline{A}}$  nulle traduit l'entraînement dans un mouvement de corps rigide du tenseur dont  $\underline{\underline{A}}$  est la dérivée rotationnelle. Montrons cela en posant :

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{\gamma}})$$

Si l'intégrale rotationnelle de  $\underline{\underline{A}}$  est nulle, nous avons :

$$\underline{\underline{S}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}} \left( \int_0^t \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}^{-1}(\underline{\underline{A}}) dt \right) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}^{-1}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$$

D'où :

$$\underline{\underline{L}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{\gamma}}) = \underline{\underline{0}}$$

D'après le 3.2.3.5, avec les mêmes notations, nous avons :

$$\underline{\underline{\gamma}}^{t+\Delta t} = \underline{\underline{T}}_{\perp/\Delta\underline{\underline{S}}} \left( \underline{\underline{\gamma}}^t \right)$$

Le tenseur  $\underline{\underline{\gamma}}$  à l'instant  $t+\Delta t$  est donc bien le transporté rotationnel de  $\underline{\underline{\gamma}}$  à un autre instant  $t$ <sup>28</sup>.

### 3.2.3.7 Matrices de l'intégrale et de la dérivée rotationnelle des tenseurs d'ordre 2 en base tournée

L'intégration rotationnelle se définit à partir du transport rotationnel. Il paraît donc judicieux d'analyser cette intégrale dans la base tournée. Pour ce faire, réécrivons la définition (3.67) :

$$\underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}^{-1} \left( \underline{\underline{S}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{A}}) \right) = \int_0^t \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}^{-1}(\underline{\underline{A}}) dt$$

Dans la base globale, cette relation s'écrit :

$$\left[ \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}^{-1} \left( \underline{\underline{S}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{A}}) \right) \right]_{\{G\}} = \left[ \int_0^t \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}^{-1}(\underline{\underline{A}}) dt \right]_{\{G\}} = \int_0^t \left[ \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}^{-1}(\underline{\underline{A}}) \right]_{\{G\}} dt$$

En vertu de la propriété (3.38) du transport rotationnel, la matrice de l'intégrale rotationnelle dans la base tournée à  $t$  est :

$$\left[ \underline{\underline{S}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{A}}) \right]_{\{e^t\}} = \int_0^t \left[ \underline{\underline{A}} \right]_{\{e\}} dt \quad (3.68)$$

Attention, dans l'intégrale directe de  $\underline{\underline{A}}$  la base tournée est variable entre 0 et  $t$ .

En appliquant le même raisonnement sur la dérivée rotationnelle, nous pouvons montrer que :

$$\left[ \underline{\underline{L}}_{\perp/\underline{\underline{S}}}(\underline{\underline{A}}) \right]_{\{e^t\}} = \frac{d}{dt} \left[ \underline{\underline{A}} \right]_{\{e\}} \quad (3.69)$$

<sup>28</sup> Il faut bien sûr que  $\underline{\underline{\gamma}}$  soit eulérien et objectif.

3.2.3.8 Réciprocité des opérateurs d'intégration et de dérivation rotationnels

Montrons que l'intégration (3.66) est bien l'opération réciproque de la dérivation (3.60). Cela doit être le cas pour que les deux opérations soient cohérentes entre elles. Bien évidemment, il est impératif d'utiliser le même transport (et donc la même rotation) dans les deux définitions. Nous montrons la réciprocité des deux opérateurs en démontrant les deux relations générales suivantes :

$$\boxed{L(S(A)) = A \quad \text{et} \quad S(L(A)) = A + \text{cste}} \quad (3.70)$$

La constante tensorielle est l'opposée de  $A$  à l'instant initial.

Preuves :

- Calcul de la dérivée de l'intégrale d'un tenseur  $A$  :

$$\begin{aligned} L(S(A)) &= T \left( T^{-1} \left( \dot{S}(A) \right) \right) = T \left( \frac{d \left\{ T^{-1} \left( T \left( \int_0^t T^{-1}(A) dt \right) \right) \right\}}{dt} \right) \\ &= T \left( \frac{d \int_0^t T^{-1}(A) dt}{dt} \right) = T(T^{-1}(A)) \\ &= A \end{aligned}$$

- Calcul de l'intégrale de la dérivée d'un tenseur  $A$  (à une constante tensorielle près) :

$$\begin{aligned} S(L(A)) &= T \left( \int_0^t T^{-1}(L(A)) dt \right) = T \left( \int_0^t T^{-1} \left( T \frac{d}{dt} (T^{-1}(A)) \right) dt \right) \\ &= T \left( \int_0^t \frac{d}{dt} (T^{-1}(A)) dt \right) = T \left( \int_0^t d(T^{-1}(A)) \right) = T(T^{-1}(A) - T^{-1}(A(0))) \\ &= A - A(0) \end{aligned}$$

3.2.3.9 Objectivité des opérateurs d'intégration et de dérivation rotationnels

Il est important de montrer que les opérateurs  $S$  et  $L$  sont objectifs, et sous quelle condition, pour pouvoir leur donner un sens physique dans le cas d'un entraînement dans un mouvement de corps rigide. Pour cela, il faut évaluer les nouvelles expressions de  $S$  et  $L$  dans ce cas précis que nous caractérisons par une rotation arbitraire  $\mathfrak{t}$ , différente de la rotation arbitraire  $\mathfrak{R}$  définissant  $S$  et  $L$ . Il apparaît dans les deux démonstrations qui vont suivre que le tenseur  $A$  sur lequel agissent les opérateurs doit être eulérien-objectif pour que les opérateurs soient aussi eulériens-objectifs.

Preuves :

- Dérivée rotationnelle

Nous allons démontrer que la dérivée rotationnelle est objective. Nous le faisons à l'ordre 2, mais cette démonstration peut s'étendre à tout ordre. Il faut montrer que, pour toute rotation  $\mathfrak{t}$ , le transport rotationnel associé d'une dérivée rotationnelle est la même dérivée de rotationnelle tournée par le mouvement de corps rigide défini, à une translation près, par  $\mathfrak{t}$ . Cette question se résume mathématiquement par :

$$\underline{\underline{T_{\mathfrak{t}/\mathfrak{t}} \left( \underline{\underline{L_{\mathfrak{t}/\mathfrak{R}}}}(\underline{\underline{A}}) \right) = \underline{\underline{L_{\mathfrak{t}/\mathfrak{R}}}(\underline{\underline{A}})}_{T_{\mathfrak{t}}}}$$

Evaluons le transport rotationnel par  $\mathbf{v}$  de la dérivée à l'aide de (3.65) et de (3.37) :

$$\underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{v}}} \left( \underline{\underline{L}}_{\perp/\underline{\underline{N}}}(\underline{\underline{A}}) \right) = \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{v}}} \left( \underline{\underline{N}} \cdot \frac{d(\underline{\underline{N}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{N}})}{dt} \cdot \underline{\underline{N}}^T \right) = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{N}} \cdot \frac{d(\underline{\underline{N}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{N}})}{dt} \cdot \underline{\underline{N}}^T \cdot \underline{\underline{v}}^T$$

Le tenseur de rotation  $\underline{\underline{N}}$  entraîné par  $\mathbf{v}$  est défini par la même loi de transformation (3.50) que le gradient  $\underline{\underline{F}}$  puisqu'il s'agit d'un cas particulier :

$$\underline{\underline{N}}_{T_1} = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{v}}_0^T$$

La rotation  $\underline{\underline{v}}_0$  étant constante, elle rentre dans la dérivée et nous avons alors :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{v}}} \left( \underline{\underline{L}}_{\perp/\underline{\underline{N}}}(\underline{\underline{A}}) \right) &= \underline{\underline{N}}_{T_1} \cdot \underline{\underline{v}}_0 \cdot \frac{d(\underline{\underline{N}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{N}})}{dt} \cdot \underline{\underline{v}}_0^T \cdot \underline{\underline{N}}_{T_1}^T \\ &= \underline{\underline{N}}_{T_1} \cdot \frac{d(\underline{\underline{v}}_0 \cdot \underline{\underline{N}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{v}}_0^T)}{dt} \cdot \underline{\underline{N}}_{T_1}^T \\ &= \underline{\underline{N}}_{T_1} \cdot \frac{d(\underline{\underline{v}}_0 \cdot \underline{\underline{N}}^T \cdot \underline{\underline{v}}_0^T \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}}_0^T \cdot \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{v}}_0^T)}{dt} \cdot \underline{\underline{N}}_{T_1}^T \\ &= \underline{\underline{N}}_{T_1} \cdot \frac{d(\underline{\underline{N}}_{T_1}^T \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{N}}_{T_1})}{dt} \cdot \underline{\underline{N}}_{T_1}^T \end{aligned}$$

Finalement, si  $\underline{\underline{A}}$  est eulérien-objectif, la dérivée rotationnelle est eulérienne-objective :

$$\underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{v}}} \left( \underline{\underline{L}}_{\perp/\underline{\underline{N}}}(\underline{\underline{A}}) \right) = \underline{\underline{N}}_{T_1} \cdot \frac{d(\underline{\underline{N}}_{T_1}^T \cdot \underline{\underline{A}}_{T_1} \cdot \underline{\underline{N}}_{T_1})}{dt} \cdot \underline{\underline{N}}_{T_1}^T$$

La loi d'entraînement de la dérivée rotationnelle est donc définie par un transport rotationnel :

$$\underline{\underline{L}}_{\perp/\underline{\underline{N}}}_{T_1}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{v}}} \left( \underline{\underline{L}}_{\perp/\underline{\underline{N}}}(\underline{\underline{A}}) \right) \quad (3.71)$$

#### ▪ Intégrale rotationnelle

Démontrons maintenant que l'intégrale rotationnelle est objective. Nous le faisons à l'ordre 2, mais cette démonstration peut s'étendre à tout ordre. Comme précédemment pour la dérivée rotationnelle, il faut démontrer la relation suivante :

$$\underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{v}}} \left( \underline{\underline{S}}_{\perp/\underline{\underline{N}}}(\underline{\underline{A}}) \right) \stackrel{?}{=} \underline{\underline{S}}_{\perp/\underline{\underline{N}}}_{T_1}(\underline{\underline{A}})$$

Evaluons le transport rotationnel par  $\mathbf{v}$  de l'intégrale à l'aide de (3.67) et de (3.37) :

$$\underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{v}}} \left( \underline{\underline{S}}_{\perp/\underline{\underline{N}}}(\underline{\underline{A}}) \right) = \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{v}}} \left( \underline{\underline{N}} \cdot \left( \int_0^t \underline{\underline{N}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{N}} dt \right) \cdot \underline{\underline{N}}^T \right) = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{N}} \cdot \left( \int_0^t \underline{\underline{N}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{N}} dt \right) \cdot \underline{\underline{N}}^T \cdot \underline{\underline{v}}^T$$

Comme précédemment, le tenseur de rotation  $\underline{\underline{N}}$  entraîné par  $\mathbf{v}$  est défini la loi :

$$\underline{\underline{N}}_{T_1} = \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{v}}_0^T$$

La rotation  $\mathbf{v}_0$  étant constante, elle rentre dans l'intégrale et nous avons alors :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{\Sigma}}} \left( \underline{\underline{S}}_{\perp/\underline{\underline{\Sigma}}}(\underline{\underline{A}}) \right) &= \underline{\underline{\mathfrak{N}}}_{T_1} \cdot \underline{\underline{v}}_0 \cdot \left( \int_0^t \underline{\underline{\mathfrak{N}}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\mathfrak{N}}} dt \right) \cdot \underline{\underline{v}}_0^T \cdot \underline{\underline{\mathfrak{N}}}_{T_1}^T \\ &= \underline{\underline{\mathfrak{N}}}_{T_1} \cdot \left( \int_0^t \underline{\underline{v}}_0 \cdot \underline{\underline{\mathfrak{N}}}^T \cdot \underline{\underline{v}}^T \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\mathfrak{N}}} \cdot \underline{\underline{v}}_0^T dt \right) \cdot \underline{\underline{\mathfrak{N}}}_{T_1}^T \\ &= \underline{\underline{\mathfrak{N}}}_{T_1} \cdot \left( \int_0^t \underline{\underline{\mathfrak{N}}}_{T_1}^T \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\mathfrak{N}}}_{T_1} dt \right) \cdot \underline{\underline{\mathfrak{N}}}_{T_1}^T \end{aligned}$$

Finalement, si  $\mathbf{A}$  est eulérien-objectif, l'intégrale rotationnelle est eulérienne-objective :

$$\underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{\Sigma}}} \left( \underline{\underline{S}}_{\perp/\underline{\underline{\Sigma}}}(\underline{\underline{A}}) \right) = \underline{\underline{\mathfrak{N}}}_{T_1} \cdot \left( \int_0^t \underline{\underline{\mathfrak{N}}}_{T_1}^T \cdot \underline{\underline{A}}_{T_1} \cdot \underline{\underline{\mathfrak{N}}}_{T_1} dt \right) \cdot \underline{\underline{\mathfrak{N}}}_{T_1}^T$$

La loi d'entraînement de l'intégrale rotationnelle est donc définie par un transport rotationnel :

$$\boxed{\underline{\underline{S}}_{\perp/\underline{\underline{\Sigma}}}_{T_1}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{\Sigma}}} \left( \underline{\underline{S}}_{\perp/\underline{\underline{\Sigma}}}(\underline{\underline{A}}) \right)} \quad (3.72)$$

### 3.3 Les milieux continus orthotropes

La formulation que nous voulons développer doit permettre de modéliser en grandes transformations des milieux continus orthotropes, comme cela est fait, par exemple, en plasticité avec les coques par Boubakar ([BOU98], [BOU97], [BOU94]) pour la partie élastique, mais le but final est de l'utiliser pour décrire des milieux hétérogènes fibreux dans des éléments 3D. Nous avons précédemment défini les opérations de dérivation et d'intégration rotationnelles des tenseurs. Il est maintenant possible de définir et d'analyser le tenseur de comportement, intervenant au cœur de la formulation par une loi de comportement hypo-élastique. Nous pouvons alors définir la notion de solide suiveur euclidien dans lequel cette dernière est exploitée et nous définissons le cumul tensoriel ([GIL93]) qui n'est rien d'autre que la mesure induite par l'opération d'intégration rotationnelle. Enfin, nous écrivons la formulation générale des MCO dans ses versions analytique et discrétisée, c'est-à-dire implémentable dans un code de calcul.

#### 3.3.1 Tenseur de comportement

##### 3.3.1.1 Hypo-élasticité

La volonté d'obtenir en MGT les équations constitutives dans un cadre thermodynamique clair a poussé les auteurs historiques de la mécanique à définir la théorie des matériaux simples ([TRU65]). De tels matériaux ont un comportement ne dépendant que du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$ . De cette théorie découle les lois hypo-élastiques, présentant la forme classique des lois élastiques en petites perturbations, mais exprimées en taux. Les lois hypo-élastiques sont des lois de comportement : elles définissent le tenseur de comportement  $\mathbf{C}$ , du 4<sup>ème</sup> ordre, en reliant linéairement un tenseur d'ordre 2 traduisant la cinématique du milieu à un autre tenseur d'ordre 2 traduisant les efforts de cohésion de la matière. Dans notre cadre euclidien, nous écrivons les lois hypo-élastiques à l'aide d'une dérivée rotationnelle (3.61) et du tenseur taux de déformation  $\mathbf{D}$  sous la forme :

$$\underline{\underline{L_{\perp/\mathfrak{N}}(\underline{\underline{\sigma}})}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad (3.73)$$

*Remarque* : Il est nécessaire de préciser la rotation  $\mathfrak{N}$  pour complètement définir (3.73). C'est pour cela que l'hypo-élasticité est une formulation considérée comme moins élégante que l'hyper-élasticité, où les contraintes sont obtenues directement à partir de l'énergie de déformation, elle-même définie par une approche thermodynamique ([BEA96]).

Le choix de  $\mathfrak{N}$  est arbitraire. Pourtant, de lui dépend au moins la mesure de déformation et de contrainte ! C'est un problème crucial de la MGT, traité dans [ROU97] où un chapitre entier est consacré au problème de l'intégration de  $\mathbf{D}$ . Une nouvelle formulation non-euclidienne y est proposée pour s'affranchir de cette ambiguïté. Cependant, elle fait appel à des éléments d'un espace courbe qui ne sont pas des tenseurs ([ROU91]), ce qui en fait une théorie complexe et difficile à appréhender et que, par conséquent, nous n'explorerons pas dans ce document.

3.3.1.2 Axes constitutifs et forme du tenseur de comportement

$\mathbf{C}$  doit être identifié expérimentalement, ou calculé à partir de données expérimentales. Il représente à notre sens le comportement d'un milieu anisotrope élastique, éventuellement non-linéaire. En pratique, avec des matériaux composites finis, il est classique qu'il soit assimilé au comportement identifié sur l'éprouvette en élasticité, c'est-à-dire en petites perturbations, alors que le comportement qui intervient dans (3.73) évolue certainement en grandes transformations. Nous considérons donc que c'est un comportement initial qui est connu, son évolution restant à définir. Nous notons le comportement initial connu :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}} = {}^0C_{ijkl} \underline{\mathbf{k}}_i^0 \otimes \underline{\mathbf{k}}_j^0 \otimes \underline{\mathbf{k}}_k^0 \otimes \underline{\mathbf{k}}_l^0 \quad (3.74)$$

La base tensorielle est définie à chaque instant par la base vectorielle :

$$\{\underline{\mathbf{k}}^t\} = \bigcup_{i=1..3} \underline{\mathbf{k}}_i^t = \{\underline{\mathbf{k}}_1^t, \underline{\mathbf{k}}_2^t, \underline{\mathbf{k}}_3^t\} \quad (3.75)$$

La base  $\{\underline{\mathbf{k}}^t\}$  est composée de ce que nous appelons les « axes constitutifs ». Elle n'est pas forcément OND, mais, en général, à l'instant initial, elle l'est. C'est ce qui fait qu'elle est particulière et il existe une littérature abondante dans le domaine de la mécanique des composites où les formes de  ${}^0\mathbf{C}$  dans la base  $\{\underline{\mathbf{k}}^0\}$  sont données ([DEC00], [JON98], [BER96], [BIL96], [GAY89]). La forme de  ${}^0\mathbf{C}$  dépend essentiellement des symétries que présente le matériau à l'instant initial car il est souvent testé en petites perturbations. A priori,  ${}^0\mathbf{C}$  est un tenseur à 81 composantes qui peut se représenter matriciellement par :

$$\begin{bmatrix} {}^0C_{1111} & {}^0C_{1211} & \cdots & {}^0C_{3311} \\ {}^0C_{1112} & \cdot & \cdots & {}^0C_{3312} \\ {}^0C_{1113} & \cdot & \cdots & {}^0C_{3313} \\ \vdots & \cdot & \cdots & \vdots \\ {}^0C_{1133} & {}^0C_{1233} & \cdots & {}^0C_{3333} \end{bmatrix}$$

Cependant, beaucoup de composantes sont nulles car la dérivée rotationnelle du tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur taux de déformation sont des tenseurs symétriques. Cela impose des conditions de symétries sur  $\mathbf{C}$  à tout instant  $t$  :

- Symétrie sur les deux premiers indices de  $\mathbf{C}$  :

$$\begin{aligned} L_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}(\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}})_{ij} = L_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}(\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}})_{ji} &\Rightarrow L_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}(\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}})_{ji} = C_{ijkl} D_{kl} \\ &\Rightarrow L_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}(\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}})_{ij} = C_{jikl} D_{kl} \\ &\Rightarrow \boxed{C_{ijkl} = C_{jikl}} \end{aligned}$$

- Symétrie sur les deux derniers indices de  $\mathbf{C}$  :

$$\begin{aligned} D_{kl} = D_{lk} &\Rightarrow L_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}(\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}})_{ij} = C_{ijkl} D_{lk} \\ &\Rightarrow L_{\perp/\underline{\mathbb{N}}}(\underline{\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}})_{ij} = C_{jilk} D_{kl} \\ &\Rightarrow \boxed{C_{ijkl} = C_{jilk}} \end{aligned}$$

Sous ces conditions, le nombre de composantes de  $\mathbf{C}$ , et donc de  ${}^0\mathbf{C}$ , se réduit dans le cas général à 36 et les notations se simplifient avec deux indices au lieu de quatre : c'est la notation de Voigt.

Nous représentons donc matriciellement  ${}^0\mathbf{C}$  sous la forme :

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{C} \\ \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{bmatrix}_{\{\kappa^0\}} = \begin{bmatrix} {}^0C_{11} & {}^0C_{12} & {}^0C_{13} & {}^0C_{14} & {}^0C_{15} & {}^0C_{16} \\ {}^0C_{21} & {}^0C_{22} & {}^0C_{23} & {}^0C_{24} & {}^0C_{25} & {}^0C_{26} \\ {}^0C_{31} & {}^0C_{32} & {}^0C_{33} & {}^0C_{34} & {}^0C_{35} & {}^0C_{36} \\ {}^0C_{41} & {}^0C_{42} & {}^0C_{43} & {}^0C_{44} & {}^0C_{45} & {}^0C_{46} \\ {}^0C_{51} & {}^0C_{52} & {}^0C_{53} & {}^0C_{54} & {}^0C_{55} & {}^0C_{65} \\ {}^0C_{61} & {}^0C_{62} & {}^0C_{63} & {}^0C_{64} & {}^0C_{65} & {}^0C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

S'il existe une énergie de déformation définie avec le tenseur de comportement  $\mathbf{C}$ , le nombre de composantes se réduit à 21. La matrice de  ${}^0\mathbf{C}$  devient alors symétrique et la relation suivante est alors vérifiée :

$${}^0C_{ij} = {}^0C_{ji} \quad (3.77)$$

*Remarque 1* : La relation (3.77) n'est pas systématiquement vraie en hypo-élasticité. Il faut pour cela que les composantes de  $\mathbf{C}$  soient constantes dans le temps. En effet, si c'est le cas, il en résulte que la loi de comportement intégrée s'exprime avec le même tenseur de comportement  $\mathbf{C}$  et que l'énergie de déformation associée impose de nouvelles symétries sur  $\mathbf{C}$ . C'est pour cela que, à priori, nous ne la considérerons pas comme évidente. En tout cas, il apparaît nécessaire d'après [LEO00-2] qu'un potentiel de déformation existe pour assurer que le milieu hypo-élastique ne génère pas d'énergie à partir de rien, ce qui serait thermodynamiquement inacceptable.

*Remarque 2* : En fait, il n'y a que dans le cas où  $\mathbf{C}$  est un tenseur isotrope constant que (3.77) est trivialement vraie.  $\mathbf{C}$  représente alors un comportement isotrope et sa matrice est la même dans toutes les bases.

Dans le cas particulier où il existe deux plans de symétrie orthogonaux pour le comportement, il en existe un troisième, orthogonal aux deux précédents. La base  $\{\kappa^0\}$  est alors OND et le comportement est dit orthotrope. Les vecteurs de  $\{\kappa^0\}$  sont alors appelés « directions principales matérielles », ou bien encore « axes d'orthotropie », et sont déduits de l'intersection des trois plans de symétrie. Le nombre de composantes de  ${}^0\mathbf{C}$  se réduit alors à 12. En supposant que (3.77) soit vraie, leur nombre se réduit à 9 et  ${}^0\mathbf{C}$  s'exprime dans les axes d'orthotropie simplement par :

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{C} \\ \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{bmatrix}_{\{\kappa^0\}} = \begin{bmatrix} {}^0C_{11} & {}^0C_{12} & {}^0C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ {}^0C_{12} & {}^0C_{22} & {}^0C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ {}^0C_{13} & {}^0C_{23} & {}^0C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^0C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^0C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^0C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Les composantes sont alors données par les traditionnelles “constantes de l’ingénieur”, qui sont plutôt pour nous des fonctions :

$$\begin{aligned}
 {}^0C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta E_2 E_3}, & {}^0C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta E_1 E_3}, & {}^0C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta E_1 E_2} \\
 {}^0C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta E_2 E_3}, & {}^0C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{\Delta E_2 E_3}, & {}^0C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{\Delta E_1 E_3} \\
 {}^0C_{44} &= 2G_{12}, & {}^0C_{55} &= 2G_{23}, & {}^0C_{66} &= 2G_{31} \\
 \Delta &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Ces fonctions sont identifiées expérimentalement, de manière classique, sur les matériaux composites continus en petites perturbations. Cependant, pour les matériaux fibreux seuls, de grands défis expérimentaux sont encore à relever, la continuité n’étant plus assurée et les essais devant se faire en grandes transformations. Dans notre cas où le milieu fibreux est assimilé à un milieu orthotrope, d’une part la réactualisation des axes constitutifs est essentielle, d’autre part les modules d’Young transverses sont variables pour traduire l’écrasement. Plus généralement, pour un milieu anisotrope quelconque, il est important de savoir comment les axes constitutifs se réactualisent et si les constantes de l’ingénieur ne sont pas en fait des fonctions. La modélisation théorique du comportement, c’est-à-dire sa forme initiale mais aussi sa loi d’évolution, doit donc être dictée par des données empiriques. En conséquence, le tenseur de comportement actuel est pour le moment inconnu. Nous le notons :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} = {}^t C_{ijkl} \underline{\underline{\underline{\underline{k}}}}_i^t \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{k}}}}_j^t \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{k}}}}_k^t \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{k}}}}_l^t \tag{3.80}$$

### 3.3.1.3 Milieu fibreux à une direction forte d’anisotropie

Notre but est de modéliser un paquet de fibres localement alignées dans une direction, représenté précédemment au 1.4.2.3 du chapitre 1, comme c’est le cas des mèches formant la CER de tricot du chapitre 2. Les travaux de Hanklar ([HAN98]) ont montré qu’il était possible de le faire en assimilant le milieu fibreux à un milieu orthotrope avec un module d’Young très grand devant les autres rigidités et des coefficients de Poisson majeurs faibles. Les coefficients de Poisson majeurs sont par convention les coefficients  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$  et  $\nu_{23}$ , toujours plus grands que le coefficient de Poisson mineur associé ([BIL96]). De plus, les modules d’Young transversaux sont des fonctions modélisant l’écrasement du paquet de fibres. Nous souscrivons à cette approche et, bien que les composantes de  ${}^0C$  puissent dépendre du temps à cause de ces lois de compaction, nous postulons que la relation (3.77) est vraie, comme nous l’avons fait au chapitre 2. Le cadre euclidien est bien adapté à la modélisation de tels milieux fibreux car il n’existe qu’une seule direction forte d’anisotropie, mais dans le cas où il y en a plusieurs, à priori non-orthogonales, la formulation développée dans ce chapitre ne peut plus convenir.

### 3.3.1.4 Objectivité du tenseur de comportement

Analysons l’objectivité du tenseur de comportement si celui-ci intervient dans une loi hypo-élastique de type (3.73). Cherchons à en déduire la loi d’entraînement de  $C$ . En vertu



du principe d'indifférence matérielle, la loi de comportement s'écrit dans le référentiel tourné par une rotation  $\mathbf{t}$  :

$$\underline{\underline{L}}_{\perp/\mathbb{N}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{C}}_{T_{\mathbf{t}}} : \underline{\underline{D}}_{T_{\mathbf{t}}}$$

Or, nous connaissons les lois d'entraînement de la dérivée rotationnelle de  $\underline{\underline{\sigma}}$  (eulérienne-objective d'après (3.71)) et de  $\underline{\underline{D}}$  (eulérien-objectif d'après (3.53)). Nous avons :

$$\underline{\underline{T}}_{\perp/\mathbf{t}}(\underline{\underline{L}}_{\perp/\mathbb{N}}(\underline{\underline{\sigma}})) = \underline{\underline{C}}_{T_{\mathbf{t}}} : \underline{\underline{T}}_{\perp/\mathbf{t}}(\underline{\underline{D}})$$

D'après le 3.2.1.3, nous pouvons écrire ces transports rotationnels à l'aide d'un tenseur de rotation d'ordre 4 construit à partir de  $\mathbf{t}$  :

$$\underline{\underline{\mathbb{R}}}(\mathbf{t}) : \underline{\underline{L}}_{\perp/\mathbb{N}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{C}}_{T_{\mathbf{t}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(\mathbf{t}) : \underline{\underline{D}}$$

En usant de l'orthogonalité de  $\mathbf{R}$  définie au 3.2.1.5 :

$$\underline{\underline{L}}_{\perp/\mathbb{N}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{\mathbb{R}}}(\mathbf{t})^T : \underline{\underline{C}}_{T_{\mathbf{t}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}(\mathbf{t}) : \underline{\underline{D}} \Rightarrow \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{\mathbb{R}}}^T : \underline{\underline{C}}_{T_{\mathbf{t}}} : \underline{\underline{\mathbb{R}}}$$

A l'aide du transport rotationnel d'ordre 4 défini par  $\mathbf{t}$ , nous obtenons alors la loi d'entraînement dans une rotation de référentiel du tenseur de comportement qui confirme son caractère eulérien-objectif :

$$\underline{\underline{C}}_{T_{\mathbf{t}}} = \underline{\underline{T}}_{\perp/\mathbf{t}}(\underline{\underline{C}}) \quad (3.81)$$

### 3.3.1.5 Loi d'évolution

Il est clair que le tenseur de comportement évolue dans l'espace au cours d'une transformation quelconque, et, en particulier, dans un mouvement de corps rigide. Il est donc nécessaire de définir une loi d'évolution pour  $\underline{\underline{C}}$ , comme cela est fait dans [HIL78]. Elle doit relier  $\underline{\underline{C}}$  à l'instant  $t$  à  ${}^0\underline{\underline{C}}$  à l'instant initial qui est supposé connu. Or, si une loi hypo-élastique de la forme (3.73) est utilisée,  $\underline{\underline{C}}$  est objectif (3.81). Pour prendre en compte l'entraînement du comportement dans une rotation donnée  $\mathbf{R}$ , nous pouvons donc définir sa loi d'évolution, comme pour les tenseurs eulériens-objectifs d'ordre 2, par un transport rotationnel du 4<sup>ème</sup> ordre défini au 3.2.1.9 :

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{T}}_{\perp/\mathbb{N}}(\underline{\underline{{}^0\underline{\underline{C}}}}) \quad (3.82)$$

Les axes constitutifs tournent alors selon la rotation spécifiée dans (3.82) :

$$\underline{\underline{\kappa}}_i^t = \underline{\underline{\mathbb{N}}} \cdot \underline{\underline{\kappa}}_i^0 \quad (3.83)$$

*Remarque* : la rotation utilisée dans (3.82) et (3.83) n'est pas forcément la même que celle de la dérivée rotationnelle (3.73).

*Il résulte de cette définition que le comportement actuel a les mêmes composantes que le comportement initial :*

$$\underline{\underline{C}} = {}^0\underline{\underline{C}}_{ijkl} \underline{\underline{\kappa}}_i^t \otimes \underline{\underline{\kappa}}_j^t \otimes \underline{\underline{\kappa}}_k^t \otimes \underline{\underline{\kappa}}_l^t \quad \text{car} \quad {}^t\underline{\underline{C}}_{ijkl} = {}^0\underline{\underline{C}}_{ijkl}$$

Par conséquent, si le comportement est initialement orthotrope de la forme (3.78), il le reste au cours de la transformation, la base tensorielle de  $\underline{\underline{C}}$  étant actualisée par une rotation.

### 3.3.2 Les solides suiveurs

#### 3.3.2.1 Définition

Nous avons précédemment défini les outils tensoriels capables de décrire l'évolution dans le temps des tenseurs : les principaux sont le transport, la dérivation et l'intégration dans des référentiels tournants. A la base de toutes les définitions, nous trouvons donc un tenseur de rotation  $\mathbf{R}$ . Ce tenseur de rotation dépend du temps, mais aussi de la position dans l'espace considérée. A partir de maintenant, il faut donc considérer que  $\mathbf{R}$  est un champ de tenseur de rotation, et par conséquent qu'il existe une collection (infinie) de référentiels tournants associés. Cette collection est constituée des images par le champ de tenseurs  $\mathbf{R}$  des référentiels orientés initialement par rapport au référentiel global par le champ de tenseurs de rotation arbitraire  $\mathbf{O}$ . Nous renvoyons à la Figure 3-2 en précisant qu'il s'agit de la situation en un point donné seulement.

Le domaine spatial de définition des champs de tenseur  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{O}$  se limite au volume du solide déformable et chaque point de ce volume eulérien est confondu avec un point du solide déformable. Nous pouvons donc définir, comme cela a été introduit par Rougée dans [ROU97], la notion de solide suiveur euclidien :

*Un solide suiveur euclidien est un ensemble de référentiels tournants en chaque point du solide déformable, défini par un champ de rotations  $\mathbf{R}$ , ayant pour vocation de suivre localement « au mieux » la matière.*

Evidemment, c'est le « au mieux » qui pose problème ! A un solide suiveur sont associés les champs de tenseurs de dérivées rotationnelles et d'intégrales rotationnelles définis aussi par  $\mathbf{R}$ . Ces champs de tenseurs définissent les mesures eulériennes objectives de déformation et de contrainte tensorielle cumulées.

Une première piste est alors de se demander dans quelles directions spatiales cumuler les déformations et les contraintes. Il pourrait s'agir des directions propres de tenseurs comme  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  ou  $\mathbf{D}$ , mais ces directions ne correspondent pas aux mêmes segments matériels à différents instants. Il paraît plus physique de considérer des directions non-orthogonales convectées, mais nous sortirions du cadre euclidien que nous nous sommes fixé en tentant d'utiliser une mesure affine basée sur l'intégrale de Lie (ce que nous ferons au chapitre 5).

Une deuxième piste serait d'inclure l'analyse des directions des axes constitutifs du tenseur de comportement. Ces directions pourraient être celles à privilégier. Dans le cas d'un milieu fibreux à une ou plusieurs directions fortes d'anisotropie, il paraît justifier de suivre ces directions particulières, mais dans le cas d'un milieu isotrope, toutes les directions sont équivalentes et le choix est vaste !

Nous illustrons la notion de solide suiveur en deux dimensions sur la Figure 3-4 en prenant quelques points dans le solide déformable défini par le placement  $\phi$ .

La difficulté de choisir un champ de rotation reste donc entière.

Par contre, tous les solides suiveurs doivent avoir la propriété commune suivante : ils doivent tous être entraînés dans un mouvement de corps rigide par le même champ de transport rotationnel. Cela implique que la rotation du mouvement de corps rigide soit égale au champ de tenseur  $\mathbf{R}$ .  $\mathbf{R}$  est donc dans ce cas un champ de tenseur constant dans l'espace et  $\mathbf{F}=\mathbf{R}=\mathbf{R}$ . Toutes les dérivées rotationnelles sont alors nulles et tous les référentiels tournent de manière identique en bloc. Cette exigence restreint le choix de  $\mathbf{R}$  qui doit se réduire à la rotation de corps rigide dans le cas d'un mouvement de corps rigide. Donnons maintenant trois exemples de solides suiveurs intéressants.

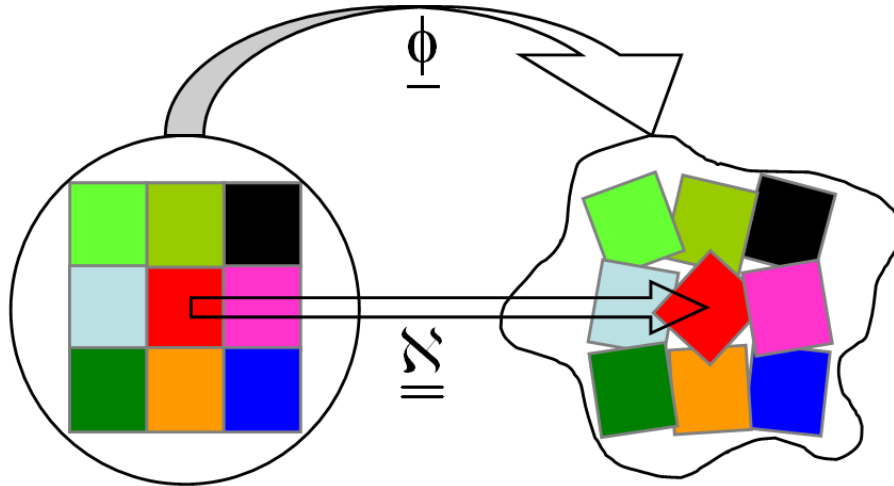


Figure 3-4 : Solides déformables et solides suiveurs initiaux et actuels

### 3.3.2.2 Solide suiveur de Jaumann

Les référentiels constituant le solide suiveur de Jaumann suivent localement le spin de la matière (partie antisymétrique  $\underline{\underline{W}}$  du gradient eulérien des vitesses  $\underline{\underline{L}}$ ). Dans ce référentiel, trois directions matérielles orthogonales 2 à 2 le restent au premier ordre à l'instant suivant [GIL94b]. Le spin de la matière est défini par :

$$\underline{\underline{S}}_{\underline{\underline{Q}}} = \underline{\underline{W}} = \underline{\underline{\dot{Q}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \frac{\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^T}{2}$$

La dérivée rotationnelle induite est donc :

$$\underline{\underline{L}}_{\perp/\underline{\underline{Q}}}(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{Q}}} \left( \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{Q}}}^{-1}(\underline{\underline{A}}) \right) = \underline{\underline{Q}} \cdot \left( \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{\dot{A}}} \cdot \underline{\underline{Q}} \right) \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{\dot{A}}} + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{W}} - \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{A}}$$

Dans le cas d'un mouvement de corps rigide, nous avons le spin suivant :

$$\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{\dot{Q}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{\dot{R}}} \cdot \underline{\underline{R}}^T$$

La rotation  $\underline{\underline{Q}}$  se confond bien avec la rotation de corps rigide.

### 3.3.2.3 Solide suiveur des axes principaux de $\underline{\underline{D}}$

Dans [GIL94b] est proposé un solide suiveur intéressant dans le sens où il donne des résultats physiques sur le test de cisaillement simple, test que nous exploiterons également par la suite. Dans ce solide suiveur, les axes principaux de  $\underline{\underline{D}}$  sont fixes. Pour trouver le spin de ses directions principales, il faut calculer la dérivée temporelle par rapport au référentiel global de  $\underline{\underline{D}}$ . Remarquons que ce solide suiveur diffère de celui de Jaumann car les directions principales de  $\underline{\underline{D}}$  ne représentent pas les mêmes directions matérielles à deux instants différents. Enfin, ce solide suiveur est convenablement entraîné par une rotation de corps rigide, car  $\underline{\underline{D}}$  est objectif et donc ses éléments propres sont objectifs d'après 3.2.2.4.

### 3.3.2.4 Solide suiveur de Green-Naghdi

Les référentiels constituant le solide suiveur de Green-Naghdi suivent localement la rotation moyenne de la matière (partie orthogonale  $\underline{\underline{R}}$  du gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}$ ) :

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{-1}$$

Le spin de la rotation moyenne de la matière est défini par :

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}_{\underline{\underline{\mathbf{R}}}} = \underline{\underline{\mathbf{\Omega}}} = \dot{\underline{\underline{\mathbf{R}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{R}}}^T$$

La dérivée rotationnelle induite est donc :

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\underline{\underline{\mathbf{R}}}/\underline{\underline{\mathbf{R}}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\underline{\underline{\mathbf{R}}}/\underline{\underline{\mathbf{R}}}} \left( \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\underline{\underline{\mathbf{R}}}/\underline{\underline{\mathbf{R}}}}^{-1}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) \right) = \underline{\underline{\mathbf{R}}} \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{R}}}^T \cdot \dot{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{R}}} \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{R}}}^T = \dot{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Omega}}} - \underline{\underline{\mathbf{\Omega}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}$$

Dans le cas d'un mouvement de corps rigide, le solide suiveur est bien sûr animé par la rotation  $\mathbf{R}$  de corps rigide.

### 3.3.3 Formulation générale des milieux continus orthotropes

#### 3.3.3.1 Hypothèses générales

Dans le cadre de l'hypo-élasticité, formuler un modèle de MCO va permettre de définir clairement la mesure de déformation et de contrainte par cumul tensoriel d'une part, et la loi d'évolution du comportement d'autre part. La restriction la plus forte est que le caractère euclidien des tenseurs utilisés doit être préservé. Cela implique que seul un travail dans des référentiels construits par rotation du référentiel global est autorisé. En particulier, les axes constitutifs restent orthogonaux au cours de la transformation et le cumul tensoriel des déformations et des contraintes se fait dans une base tournante OND. Les tenseurs qui interviennent doivent donc être objectifs pour que les transports rotationnels modélisent effectivement des entraînements dans des mouvements de corps rigide. De plus, les lois de comportement hypo-élastiques étant écrites en taux, donc à l'instant  $t$  dans la configuration actuelle, implique que les tenseurs soient eulériens. Afin de réaliser ces exigences, détaillons les hypothèses  $H_i$  des MCO.

- **H1** : La loi de comportement d'un MCO est définie à tout instant par une loi hypo-élastique (identique à celle du 3.3.1.1) :

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\underline{\underline{\mathbf{R}}}/\underline{\underline{\mathbf{R}}}}(\underline{\underline{\mathbf{\sigma}}}) = \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad (3.84)$$

$\underline{\underline{\mathbf{\sigma}}}$  est le tenseur eulérien des contraintes de Cauchy,  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  le tenseur eulérien des taux de déformation et  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  le tenseur eulérien de comportement. La dérivée rotationnelle (définie au 3.2.3.4) utilisée reste à préciser. Pour cela, il suffit de définir le solide suiveur associé, lui-même étant défini complètement par la rotation  $\mathbf{R}$  qui doit être confondue avec la rotation de corps rigide dans le cas d'un mouvement rigidifiant (voir 3.3.2.1).

- **H2** : La loi d'évolution du tenseur de comportement est définie à tout instant par un transport rotationnel d'ordre 4 basé sur la rotation  $\mathbf{R}$  qui actualise les axes constitutifs (voir le 3.3.1.5) :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\underline{\underline{\mathbf{R}}}/\underline{\underline{\mathbf{R}}}} \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}^0 \right) \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\mathbf{\kappa}}}_i^t = \underline{\underline{\mathbf{R}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\kappa}}}_i^0 \quad (3.85)$$

Cette hypothèse définit donc la dérivée rotationnelle de (3.84). En conséquence, le cumul des tenseurs, défini par H1, et l'actualisation du comportement, définie par H2, sont effectués dans le même solide suiveur.

- **H3** : En tout point du solide déformable, les axes constitutifs initiaux  $\{\kappa^0\}$  (dont l'ensemble détermine la position initiale du solide suiveur) et les composantes dans ces axes du tenseur de comportement initial  ${}^0\mathbf{C}$  sont connus. De plus,  ${}^0\mathbf{C}$  est un tenseur de comportement orthotrope ayant une matrice symétrique de la forme (3.78) même dans le cas où ses composantes sont variables. Il reste donc orthotrope au cours de la transformation (voir le 3.3.1.5).

Pour réaliser H3, il faut définir une orientation initiale (c'est-à-dire un champ de rotation constant dans le temps  $\mathbf{O}$ ) plaçant les bases  $\{\kappa^0\}$  dans le solide suiveur initial par rapport à la base globale  $\{G\}$ . Il faut également avoir accès à des informations expérimentales de caractérisation du matériau.

Si H3 est réalisé, nous pouvons conclure que, dans notre formulation générale, *tout revient à définir le champ de rotation  $\mathbf{x}$* .

Nous illustrons notre formulation des milieux continus orthotropes en grandes transformations sur la Figure 3-5. Il s'agit de ce qui se passe en un point donné du solide suiveur entre les instant  $\tau-\Delta\tau$  et  $\tau$ .  $\mathcal{R}_G$  est le référentiel global,  $\mathcal{R}_O$  le référentiel défini par l'orientation initiale  $\mathbf{O}$  et  $\mathcal{R}_{\mathbf{x}}$  le référentiel tournant défini par la rotation  $\mathbf{x}$ .

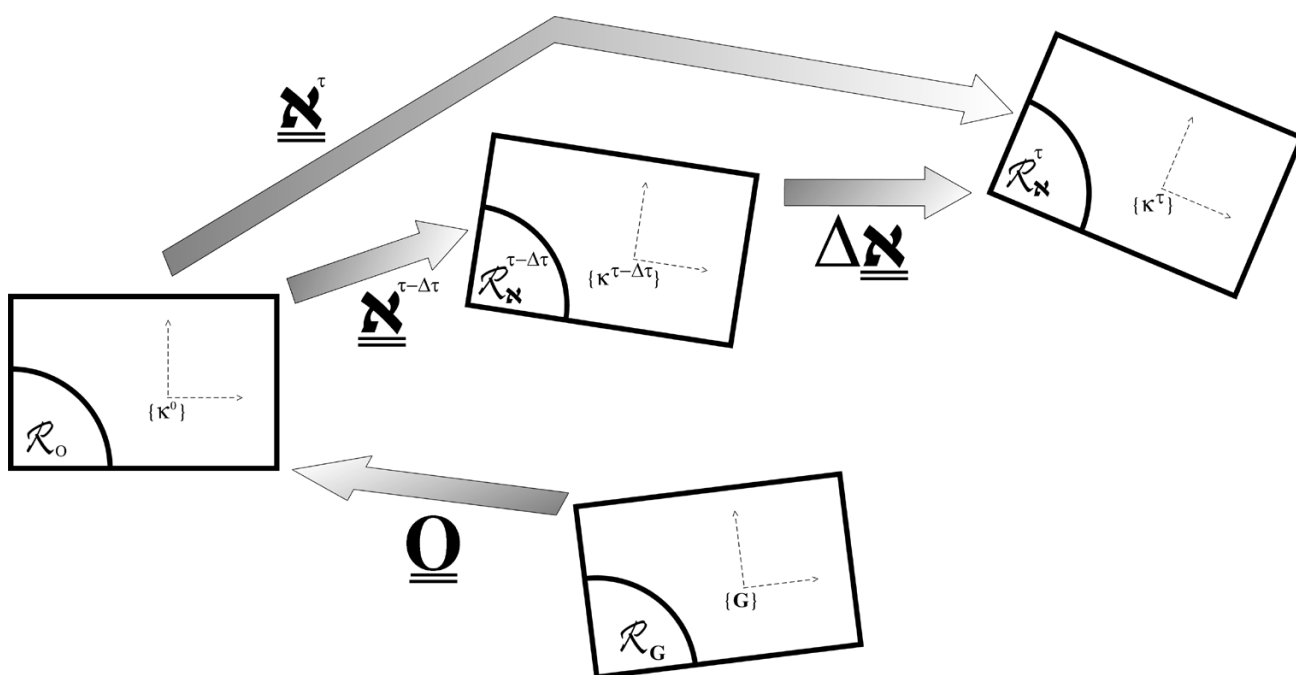


Figure 3-5 : Divers référentiels de la formulation générale à  $\tau-\Delta\tau$  et à  $\tau$



$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathbf{N}}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathbf{N}}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) = \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}$$

Or  $\mathbf{D}$  est nul si les tenseurs ne font que tourner localement, c'est à dire sans variations intrinsèques. D'après 3.2.3.5 :

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathbf{N}}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathbf{N}}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\Delta\underline{\underline{\mathbf{N}}}}({}^t\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) \\ {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\Delta\underline{\underline{\mathbf{N}}}}({}^t\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) \end{cases}$$

Nous avons alors (3.89) qui est vérifiée :

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\Delta\underline{\underline{\mathbf{N}}}}({}^t\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) : \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\Delta\underline{\underline{\mathbf{N}}}}({}^t\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) \\ &= (\Delta\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{\perp} \cdot {}^t\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \Delta\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{\perp}^T) : (\Delta\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{\perp} \cdot {}^t\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \Delta\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{\perp}^T) \\ &= {}^t\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : (\Delta\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{\perp}^T \cdot \Delta\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{\perp} \cdot {}^t\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \Delta\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{\perp}^T \cdot \Delta\underline{\underline{\mathbf{N}}}_{\perp}) \\ &= {}^t\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : {}^t\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \end{aligned}$$

### 3.3.3.3 Propriétés de la mesure de déformation dans le cas du suivi d'une direction matérielle

Si le champ de rotation  $\mathbf{N}$  est choisi tel qu'il suive une direction matérielle, c'est-à-dire qu'au moins un des axes constitutifs de  $\{\boldsymbol{\kappa}^t\}$  suit une direction convectée par  $\mathbf{F}$ , alors la mesure de déformation dans cette direction est égale au logarithme de l'élongation  $\lambda$  de cette direction. Si le  $\alpha^{\text{ième}}$  vecteur de  $\{\boldsymbol{\kappa}^t\}$  suit une direction matérielle, cela s'écrit en introduisant le tenseur d'ordre 2  $\mathbf{C}$  des dilations de Cauchy-Green droit :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_{\alpha}^t \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_{\alpha}^t = \text{Ln}(\lambda(\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_{\alpha}^t)) \quad \text{avec} \quad \lambda(\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_{\alpha}^t) = \sqrt{\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_{\alpha}^0 \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_{\alpha}^0}$$

Pour prouver cette relation, analysons la signification des taux de déformation  $\mathbf{D}$  dans une direction donnée. Etant donné deux vecteurs eulériens  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , la définition de ce tenseur est la suivante :

$$\frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}) = \underline{\underline{\mathbf{v}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{u}}}$$

$\mathbf{D}$  est donc une forme bilinéaire qui associe à deux segments l'évolution de leur produit scalaire. En projetant  $\mathbf{u}$  (respectivement  $\mathbf{v}$ ), le long du vecteur unitaire de même direction  $\mathbf{e}$  (respectivement  $\mathbf{f}$ ), nous avons :

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}} = \|\underline{\underline{\mathbf{v}}}\| \underline{\underline{\mathbf{e}}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{u}}} = \|\underline{\underline{\mathbf{u}}}\| \underline{\underline{\mathbf{f}}}$$

Il vient :

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{v}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{u}}} &= \|\underline{\underline{\mathbf{v}}}\| \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \|\underline{\underline{\mathbf{u}}}\| \underline{\underline{\mathbf{f}}} = \|\underline{\underline{\mathbf{u}}}\| \|\underline{\underline{\mathbf{v}}}\| \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{f}}} \\ \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{v}}}) &= \frac{1}{2}(\|\underline{\underline{\mathbf{u}}}\| \|\underline{\underline{\mathbf{v}}}\| \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{f}}}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{f}}} = \frac{1}{2\|\underline{\underline{\mathbf{u}}}\| \|\underline{\underline{\mathbf{v}}}\|} (\|\underline{\underline{\mathbf{u}}}\| \|\underline{\underline{\mathbf{v}}}\| \dot{\cos(\underline{\underline{\mathbf{e}}, \underline{\underline{\mathbf{f}}})})}}$$

Cette relation ne fait malheureusement pas apparaître clairement le sens des taux de déformation de cisaillement. En particulier, il ne s'agit pas du taux du sinus de l'angle de glissement. Analysons les taux de déformations de traction-compression. Si  $\mathbf{u}=\mathbf{v}$ , il vient :

$$\underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{2\|\underline{\underline{\mathbf{u}}}\|^2} (\|\underline{\underline{\mathbf{u}}}\|^2 \dot{\phantom{\underline{\underline{\mathbf{u}}}}}) = \frac{1}{2} (\text{Ln}(\|\underline{\underline{\mathbf{u}}}\|^2) \dot{\phantom{\underline{\underline{\mathbf{u}}}}}) = (\text{Ln} \|\underline{\underline{\mathbf{u}}}\|) \dot{\phantom{\underline{\underline{\mathbf{u}}}}}$$

Ainsi,  $\underline{\underline{D}}$  permet la mesure du taux de déformation logarithmique dans une direction de l'espace. Si on suit cette direction au cours de la transformation, on cumule bien des incréments déformations qui nous donnent la déformation logarithmique. Si nous prenons maintenant la direction matérielle orientée par le  $\alpha^{\text{ième}}$  vecteur de  $\{\underline{\underline{\kappa}}^t\}$ , il vient :

$$\underline{\underline{\kappa}}_\alpha^t \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\kappa}}_\alpha^t = \left( \text{Ln} \left( \lambda(\underline{\underline{\kappa}}_\alpha^t) \right) \right)$$

Or, d'après 3.3.3.2, nous avons :

$$\left[ \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{\underline{\underline{\kappa}}\}} = \int_0^t \left[ \underline{\underline{D}} \right]_{\{\underline{\underline{\kappa}}\}} dt$$

Une des composantes diagonales correspond donc bien à :

$$\underline{\underline{\kappa}}_\alpha^t \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\kappa}}_\alpha^t = \text{Ln} \left( \lambda(\underline{\underline{\kappa}}_\alpha^t) \right)$$

*Remarque* : il n'est pas possible de cumuler des déformations logarithmiques de ce type dans d'autres directions *matérielles* à l'aide d'une intégrale rotationnelle (bien que cela soit possible le long de directions non-matérielles dans le référentiel triaxial de Dogui ([DOG89])). En effet, les axes constitutifs restent orthogonaux par définition et, pour que cela soit possible, il faudrait que les directions matérielles restent orthogonales au cours de la transformation. Cela n'est vrai que dans le cas de la traction triaxiale ([ROU97]). Pour cumuler le long de trois directions matérielles des incréments logarithmiques de déformations, il faut utiliser une intégrale affine dans un référentiel non-rigide, ce que nous ferons au chapitre 5.

### 3.3.4 Cumul tensoriel numérique et implémentation de la formulation

#### 3.3.4.1 Formule de Hughes-Winget

La formule de Hughes-Winget ([HUG80]) est la version discrétisée de l'intégration rotationnelle. C'est elle qui, dans notre cas, est utilisée numériquement pour réaliser le cumul tensoriel dans le solide suiveur. Cependant, pour que ce cumul ait un sens physique, nous rappelons que  $\underline{\underline{A}}$  doit être un tenseur eulérien-objectif. Plaçons-nous sur un intervalle de temps  $[t, t+\Delta t]$ , avec  $\Delta t$  un incrément de temps, pas forcément petit. Dans le solide suiveur, l'incrément de rotation actualise par hypothèse les axes constitutifs entre  $t$  et  $t+\Delta t$  (définition identique à celle sur la Figure 3-5):

$$\underline{\underline{\kappa}}_i^{t+\Delta t} = \underline{\underline{\Delta N}} \cdot \underline{\underline{\kappa}}_i^t \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\Delta N}} = {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{N}} \cdot {}^t\underline{\underline{N}}^T \quad (3.90)$$

Soit  $\underline{\underline{A}}$  un tenseur du second ordre eulérien-objectif devant être évalué à l'instant  $t+\Delta t$  et connu à l'instant  $t$ . En supposant que nous connaissions l'incrément tensoriel objectif de  $\underline{\underline{A}}$  entre les instant  $t$  et  $t+\Delta t$ , la formule de Hughes-Winget nous donne l'actualisation de  $\underline{\underline{A}}$  par :

$$\underline{\underline{A}}^{t+\Delta t} = \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{\Delta N}}} \left( \underline{\underline{A}}^t \right) + \underline{\underline{\Delta}}^{\mathcal{R}_N} \underline{\underline{A}} \quad (3.91)$$

Le premier terme correspond au transport rotationnel de l'ancien solide suiveur à  $t$  au nouveau à  $t+\Delta t$  et le second terme est l'incrément à cumuler. La difficulté réside dans le calcul de ce dernier. Pour le définir, montrons comment passer de la mesure de  $\underline{\underline{A}}$  (3.67) à sa version incrémentale (3.91) en posant à l'aide d'un tenseur  $\underline{\underline{\eta}}$  :



$${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathcal{S}}}}({}^t\underline{\underline{\boldsymbol{\eta}}})$$

En vertu de la réciprocité des opérateurs  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{L}$ , Le tenseur  $\boldsymbol{\eta}$  est aussi égal à l'instant  $t$  à :

$${}^t\underline{\underline{\boldsymbol{\eta}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathcal{S}}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/{}^t\underline{\underline{\mathcal{S}}}} \left( \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathcal{S}}}}^{-1}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) \right) = \underline{\underline{\mathcal{S}}} \cdot \frac{d(\underline{\underline{\mathcal{S}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{S}}})}{dt} \cdot \underline{\underline{\mathcal{S}}}^T$$

En appliquant la définition de l'intégrale rotationnelle entre les instant 0 et  $t+\Delta t$ , nous avons :

$${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/{}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\mathcal{S}}}} \left( \int_0^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathcal{S}}}}^{-1}(\underline{\underline{\boldsymbol{\eta}}}) dt \right)$$

En décomposant le domaine d'intégration temporel et en exploitant la linéarité du transport rotationnel, nous avons :

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\mathbf{A}}} &= \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/{}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\mathcal{S}}}} \left( \int_0^t \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathcal{S}}}}^{-1}(\underline{\underline{\boldsymbol{\eta}}}) dt + \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathcal{S}}}}^{-1}(\underline{\underline{\boldsymbol{\eta}}}) dt \right) \\ &= \underline{\underline{\mathcal{S}}} \cdot \left( \int_0^t \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathcal{S}}}}^{-1}(\underline{\underline{\boldsymbol{\eta}}}) dt \right) \cdot \underline{\underline{\mathcal{S}}}^T + \underline{\underline{\mathcal{S}}} \cdot \left( \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathcal{S}}}}^{-1}(\underline{\underline{\boldsymbol{\eta}}}) dt \right) \cdot \underline{\underline{\mathcal{S}}}^T \end{aligned} \quad (3.92)$$

A l'aide de (3.90), le premier terme de (3.92) se réécrit :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Delta\mathcal{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{S}}} \cdot \left( \int_0^t \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathcal{S}}}}^{-1}(\underline{\underline{\boldsymbol{\eta}}}) dt \right) \cdot \underline{\underline{\mathcal{S}}}^T \cdot \underline{\underline{\Delta\mathcal{S}}}^T &= \underline{\underline{\Delta\mathcal{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/{}^t\underline{\underline{\mathcal{S}}}} \left( \int_0^t \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathcal{S}}}}^{-1}(\underline{\underline{\boldsymbol{\eta}}}) dt \right) \cdot \underline{\underline{\Delta\mathcal{S}}}^T \\ &= \underline{\underline{\Delta\mathcal{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathcal{S}}}}({}^t\underline{\underline{\boldsymbol{\eta}}}) \cdot \underline{\underline{\Delta\mathcal{S}}}^T \\ &= \underline{\underline{\Delta\mathcal{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\Delta\mathcal{S}}}^T \\ &= \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\underline{\underline{\Delta\mathcal{S}}}}({}^t\underline{\underline{\mathbf{A}}}) \end{aligned}$$

Le second terme de (3.92) correspond à l'intégrale rotationnelle de  $\mathbf{A}$  entre les instant  $t$  et  $t+\Delta t$  que nous définissons comme l'incrément de  $\mathbf{A}$  entre les instant  $t$  et  $t+\Delta t$  :

$$\underline{\underline{\Delta}}^{\mathfrak{R}\underline{\underline{\mathcal{S}}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathcal{S}}} \cdot \left( \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathcal{S}}}}^{-1}(\underline{\underline{\boldsymbol{\eta}}}) dt \right) \cdot \underline{\underline{\mathcal{S}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/{}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\mathcal{S}}}} \left( \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathcal{S}}}}^{-1}(\underline{\underline{\boldsymbol{\eta}}}) dt \right)$$

Au final, nous avons bien la formule de Hughes-Winget :

$${}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\Delta\mathcal{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\Delta\mathcal{S}}}^T + \underline{\underline{\Delta}}^{\mathfrak{R}\underline{\underline{\mathcal{S}}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}}$$

Avec l'incrément tensoriel de  $\mathbf{A}$  défini par :

$$\underline{\underline{\Delta}}^{\mathfrak{R}\underline{\underline{\mathcal{S}}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/{}^{t+\Delta t}\underline{\underline{\mathcal{S}}}} \left( \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathcal{S}}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathcal{S}}}}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) \right) dt \right) \quad (3.93)$$

Pour que l'incrément soit nul dans un mouvement de corps rigide et qu'ainsi  $\mathbf{A}$  soit entraîné par un transport rotationnel, il faut absolument, une fois de plus, que  $\mathbf{A}$  soit un tenseur eulérien-objectif. La dérivée rotationnelle est alors eulérienne-objective et bien nulle dans le mouvement de corps rigide comme nous l'avons montré précédemment au 3.2.3.5. Cette nécessité met une nouvelle fois en lumière l'importance de l'objectivité.

*Remarque* : pour prouver la cohérence de notre formalisme, exprimons l'expression (3.93) à l'aide de (3.37) et de (3.90) :

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathfrak{R}_{\underline{\mathbb{S}}} \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp / \underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{t+\Delta t} \left( \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp / \underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp / \underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\underline{\dot{\mathbf{A}}}}} \right) \right) dt \right) = \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp / \underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{t+\Delta t} \left( \int_t^{t+\Delta t} d \left( \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp / \underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \right) \right) \right) \\
 &= \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp / \underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{t+\Delta t} \left( \left[ \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp / \underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \right) \right]_t^{t+\Delta t} \right) = \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp / \underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{t+\Delta t} \left( \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp / \underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^{t+\Delta t} \right) - \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp / \underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^t \right) \right) \\
 &= \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^{t+\Delta t} - \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp / \underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{t+\Delta t} \left( \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp / \underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^t \right) \right) = \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^{t+\Delta t} - \underline{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{t+\Delta t} \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}^t \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^t \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}^t \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{t+\Delta t \text{ T}} \\
 &= \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^{t+\Delta t} - \underline{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{t+\Delta t} \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^t \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}^{t \text{ T}}
 \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien la formule de Hughes-Winget et même la définition (3.61) de la dérivée rotationnelle en divisant par  $\Delta t$  et en le faisant tendre vers 0.

### 3.3.4.2 Formule matricielle de Hughes-Winget

En projetant la formule tensorielle de Hughes-Winget (3.91), nous pouvons obtenir une équation matricielle implémentable dans un code de calcul. C'est ce qui est classiquement fait en exploitant la projection dans les axes constitutifs en fin d'incrément :

$$\left[ \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^{t+\Delta t} \right]_{\{ \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{t+\Delta t} \}} = \left[ \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp / \underline{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}} \left( \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^t \right) \right]_{\{ \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{t+\Delta t} \}} + \left[ \Delta \mathfrak{R}_{\underline{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}} \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \right]_{\{ \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{t+\Delta t} \}}$$

En vertu de (3.5) et de (3.37), la matrice du transport rotationnel peut s'écrire :

$$\left[ \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp / \underline{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}} \left( \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^t \right) \right]_{\{ \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{t+\Delta t} \}} = \left[ \underline{\underline{\underline{\mathbb{S}}}} \right]_{\{ \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{t+\Delta t} \otimes \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^t \}} \left[ \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^t \right]_{\{ \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^t \}} \left[ \underline{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}^T \right]_{\{ \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^t \otimes \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{t+\Delta t} \}}$$

Avec l'aide de (3.90) et en particulierisant (3.18) avec :

$$\underline{\underline{\underline{\kappa}}}_i^{t+\Delta t} = \underline{\underline{\underline{e}}}_i \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\underline{\kappa}}}_i^t = \underline{\underline{\underline{G}}}_i$$

Il vient :

$$\left[ \underline{\underline{\underline{\mathbb{S}}}} \right]_{\{ \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{t+\Delta t} \otimes \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^t \}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La formule matricielle de Hughes-Winget dans le solide suiveur s'écrit alors :

$$\boxed{ \left[ \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^{t+\Delta t} \right]_{\{ \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{t+\Delta t} \}} = \left[ \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^t \right]_{\{ \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^t \}} + \left[ \Delta \mathfrak{R}_{\underline{\underline{\underline{\mathbb{S}}}}} \underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \right]_{\{ \underline{\underline{\underline{\kappa}}}^{t+\Delta t} \}} } \quad (3.94)$$

Cette formule offre l'avantage de n'avoir à estimer que l'incrément de  $\mathbf{A}$ , le premier terme étant connu car calculé à la fin de l'incrément précédent. C'est pour cela que cette formulation dans le référentiel tournant est très prisée des programmeurs des codes de calcul. Par exemple, c'est ainsi que sont implémentés de nombreux éléments d'Abaqus/Explicit, d'Abaqus/Standard et de Pam-Form.

*Remarque* : si l'incrément est nul,  $\mathbf{A}$  est soumis à un transport rotationnel qui, s'il est objectif bien sûr, traduit son entraînement dans le mouvement de corps rigide de rotation  $\Delta \mathfrak{R}$  :

$$\left[ \begin{matrix} t+\Delta t \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}} \end{matrix} \right]_{\{\kappa^{t+\Delta t}\}} = \left[ \begin{matrix} t \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}} \end{matrix} \right]_{\{\kappa^t\}}$$

### 3.3.4.3 Estimation de la mesure de déformation

Pour définir la mesure de déformation, il suffit d'appliquer le formule matricielle (3.94) en remplaçant le tenseur  $\mathbf{A}$  par  $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ . Nous avons :

$$\left[ \begin{matrix} t+\Delta t \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \end{matrix} \right]_{\{\kappa^{t+\Delta t}\}} = \left[ \begin{matrix} t \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \end{matrix} \right]_{\{\kappa^t\}} + \left[ \begin{matrix} \Delta \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \end{matrix} \right]_{\{\kappa^{t+\Delta t}\}} \quad (3.95)$$

Avec, d'après (3.88) et (3.93), l'incrément de déformation qui est :

$$\underline{\underline{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}_{\perp/t+\Delta t}}}^{-1} \left( \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{T}_{\perp/\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\mathbf{L}_{\perp/\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) \right) dt \right) = \underline{\underline{\mathbf{T}_{\perp/t+\Delta t}}}^{-1} \left( \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{T}_{\perp/\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}}^{-1}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}) dt \right)$$

A l'usage, il est plus commode de travailler avec l'incrément non-tourné :

$$\underline{\underline{\mathbf{T}_{\perp/t+\Delta t}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}} \right) = \int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{T}_{\perp/\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}}^{-1}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}) dt \quad (3.96)$$

En effet, en vertu de la propriété (3.39) des transports rotationnels, il a les mêmes composantes dans l'orientation initiale que l'incrément dans les axes constitutifs actuels qui nous intéresse :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{T}_{\perp/t+\Delta t}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}} \right) \right]_{\{\kappa^0\}} = \left[ \begin{matrix} \Delta \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \end{matrix} \right]_{\{\kappa^{t+\Delta t}\}}$$

Cette relation montre l'équivalence de deux approches possibles : celle avec des grandeurs écrites dans la base tournée, ou celle avec des grandeurs non-tournées écrites dans la base initiale. Cette relation reste vraie si l'incrément de déformation est remplacé par l'incrément de contrainte, la mesure de contrainte ou la mesure de déformation.

Il faut maintenant calculer l'incrément de déformation en estimant l'intégrale de (3.96), c'est la difficulté majeure. Pour y parvenir, il est classique de considérer que la position  $\mathbf{x}$  est interpolée linéairement entre deux instants. Cette approximation est d'autant meilleure que le pas de temps est petit. Si  $\tau$  est un instant dans l'intervalle  $[t, t+\Delta t]$ , nous avons :

$${}^{t+\tau} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \left( 1 - \frac{\tau}{\Delta t} \right) {}^t \underline{\underline{\mathbf{x}}} + \frac{\tau}{\Delta t} {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{x}}} \quad (3.97)$$

C'est là une hypothèse, plus longuement détaillée dans [BOU94], [GIL93c] ou bien encore [HUG80], dont nous n'avons pas besoin jusqu'à présent. Pour qu'elle soit valide, nous sommes maintenant obligés de considérer des petits pas de temps et donc des « petits » incréments.

Effectuons le calcul de l'incrément non-tourné dans l'orientation initiale :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{T}_{\perp/t+\Delta t}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}} \right) \right]_{\{\kappa^0\}} = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \underline{\underline{\mathbf{T}_{\perp/\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}}^{-1}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}) \right]_{\{\kappa^0\}} dt$$

L'intégrale se réécrit en usant de la propriété (3.38) du transport rotationnel et en effectuant un changement de variable :

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \underline{\underline{\mathbf{T}_{\perp/\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}}^{-1}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}) \right]_{\{\kappa^0\}} dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right]_{\{\kappa^\tau\}} d\tau = \int_0^{\Delta t} \left[ \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right]_{\{\kappa^{t+\tau}\}} d\tau$$

Prenant en compte l'interpolation linéaire des positions (3.97), les composantes de  $\mathbf{D}$ , linéaires en fonction du temps, prises au demi-pas de temps, multipliées par l'intervalle de temps, donnent exactement la valeur analytique (sous l'hypothèse de linéarité) de l'incrément de déformation :

$$\int_0^{\Delta t} \left[ {}^{t+\tau} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \right]_{\{\kappa^{t+\tau}\}} d\tau = \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \right]_{\left\{ \kappa^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right\}} \Delta t$$

Qui, toujours à l'aide de (3.38), s'écrit tensoriellement :

$$\int_t^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\underline{\underline{\mathcal{S}}}}^{-1}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}) dt = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/t+\frac{\Delta t}{2}\underline{\underline{\mathcal{S}}}}^{-1} \left( {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \right) \Delta t$$

Nous avons donc :

- Pour l'approche en grandeurs écrites dans la base tournée :

$$\boxed{\left[ \Delta {}^{\mathcal{R}_{\underline{\underline{\mathcal{S}}}}} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right]_{\{\kappa^{t+\Delta t}\}} = \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \right]_{\left\{ \kappa^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right\}} \Delta t} \quad (3.98)$$

Les projections sont donc dans les axes constitutifs, mais à deux instants différents :

$$\Delta {}^{\mathcal{R}_{\underline{\underline{\mathcal{S}}}}} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{ij} \Delta t \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_i^{t+\Delta t} \otimes \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_j^{t+\Delta t} \quad \text{et} \quad {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} = {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{ij} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} \otimes \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_j^{t+\frac{\Delta t}{2}}$$

Il est alors nécessaire d'introduire l'incrément de rotation entre le solide suiveur intermédiaire et le solide suiveur final défini par (voir Figure 3-6) :

$$\boxed{\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_i^{t+\Delta t} = \Delta \hat{\underline{\underline{\mathcal{S}}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad \text{avec} \quad \Delta \hat{\underline{\underline{\mathcal{S}}}} = {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathcal{S}}} \cdot {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\mathcal{S}}}^T} \quad (3.99)$$

L'équation tensorielle associée à (3.98) est :

$$\begin{aligned} \Delta {}^{\mathcal{R}_{\underline{\underline{\mathcal{S}}}}} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/t+\Delta t \underline{\underline{\mathcal{S}}}} \left( \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/t+\frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{\mathcal{S}}}}^{-1} \left( {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \right) \Delta t \right) \\ &= {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathcal{S}}} \cdot {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\mathcal{S}}}^T \cdot {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \Delta t \cdot {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\mathcal{S}}} \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathcal{S}}}^T \\ &= \Delta \hat{\underline{\underline{\mathcal{S}}}} \cdot {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \Delta t \cdot \Delta \hat{\underline{\underline{\mathcal{S}}}}^T \end{aligned}$$

Cette équation se réécrit à l'aide du transport rotationnel d'ordre 2 entre le référentiel intermédiaire et le référentiel en fin d'incrément :

$$\Delta {}^{\mathcal{R}_{\underline{\underline{\mathcal{S}}}}} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\Delta \hat{\underline{\underline{\mathcal{S}}}}} \left( {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \right) \Delta t \quad (3.100)$$

Le calcul matriciel de l'incrément de déformation dans le solide suiveur final (propriété (3.38) du transport rotationnel) peut donc aussi se calculer par :

$$\boxed{\left[ \Delta {}^{\mathcal{R}_{\underline{\underline{\mathcal{S}}}}} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right]_{\{\kappa^{t+\Delta t}\}} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\Delta \hat{\underline{\underline{\mathcal{S}}}}} \left( {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} \right) \right]_{\{\kappa^{t+\Delta t}\}} \Delta t} \quad (3.101)$$

Nous constatons que, aussi bien dans (3.98) que dans (3.101), la connaissance de l'incrément de rotation (3.99) à la moitié du pas de temps est nécessaire. Dans (3.98) elle sert à effectuer le changement de base de  $\mathbf{D}$ , dans (3.101) elle sert à définir le transport rotationnel. Dans [GIL93c], deux estimations sont proposées : une première donnée par Hughes à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, et une seconde sur la simplification pure et simple suivante :

$$\underline{\underline{\hat{\Delta S}}} = \underline{\underline{\Delta S}} \quad (3.102)$$

- Pour l'approche en grandeurs non-tournée écrites dans base initiale :

$$\left[ \underline{\underline{T}}_{\perp / {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{S}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\Delta S}}_{\perp \underline{\underline{S}}} \right) \right]_{\{k^0\}} = \left[ \underline{\underline{T}}_{\perp / {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{S}}}^{-1} \left( {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{D}} \right) \Delta t \right]_{\{k^0\}}$$

Même problème que précédemment : la rotation du solide suiveur intermédiaire doit être connue.

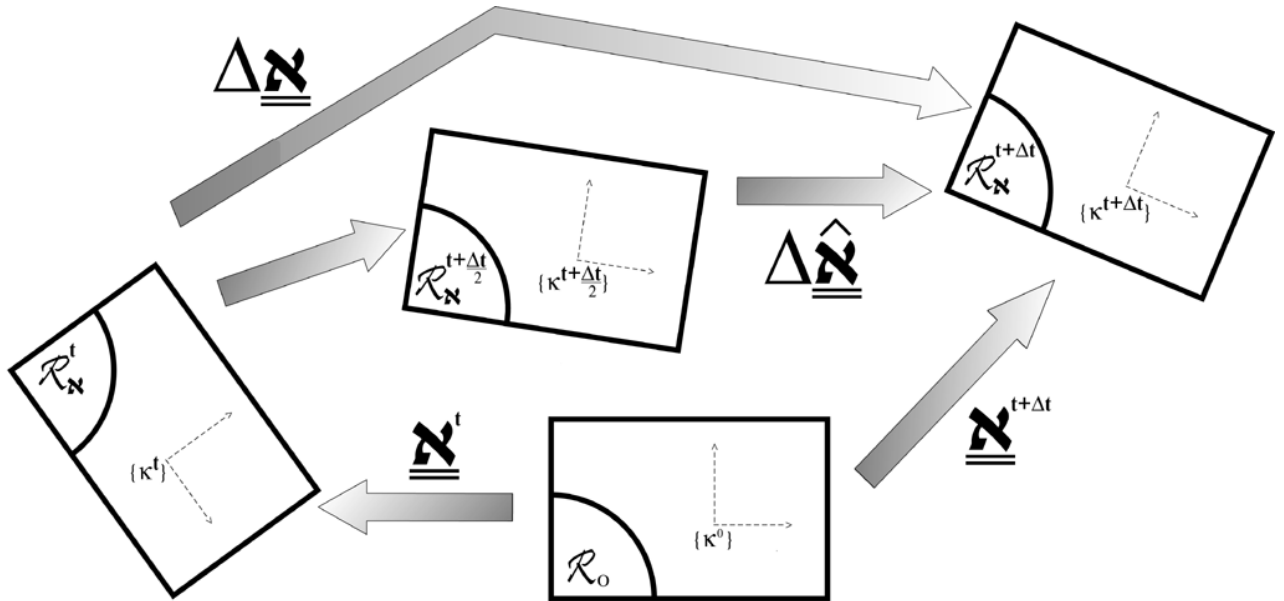


Figure 3-6: Référentiel intermédiaire entre t et t+Δt

Les deux approches possibles sont parfaitement équivalentes. Notre choix est d'écrire les équations dans le solide suiveur actuel, et donc dans des bases tournées. En définitive, sous réserve que le déplacement soit interpolé linéairement sur l'incrément, nous obtenons, en injectant (3.101) dans (3.95), la formule matricielle de cumul tensoriel des déformations dans le solide suiveur :

$$\left[ \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{k^{t+\Delta t}\}} = \left[ \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{k^t\}} + \left[ \underline{\underline{D}} \right]_{\{k^{t+\frac{\Delta t}{2}}\}} \Delta t \quad (3.103)$$

Numériquement, il faut vraiment que le pas de temps  $\Delta t$  soit très petit pour que la formule de Hughes-Winget donne de bons résultats. C'est notamment ce qui est montré dans [GIL93c] sur l'exemple du solide suiveur de Jaumann.

#### 3.3.4.4 Estimation de la mesure de contrainte

Tout comme précédemment pour définir (3.103), il faut déterminer l'incrément de contrainte pour obtenir la formule matricielle de cumul tensoriel des contraintes en particulierisant (3.94). Dans le cadre de notre formulation des MCO, le tenseur de comportement est supposé connu à chaque instant. Il est entraîné avec les axes constitutifs.

En utilisant deux matrices colonnes (notation de Voigt vu au 3.3.1.2) pour représenter les composantes des incréments de contrainte et déformation, nous avons :

$$\left[ \begin{matrix} \Delta \mathbb{R}_N \\ \underline{\underline{\sigma}} \end{matrix} \right]_{\{k^{t+\Delta t}\}} = \left[ \begin{matrix} \mathbb{C} \\ \underline{\underline{\equiv}} \end{matrix} \right]_{\{k^{t+\Delta t}\}} \left[ \begin{matrix} \Delta \mathbb{R}_N \\ \underline{\underline{\varepsilon}} \end{matrix} \right]_{\{k^{t+\Delta t}\}} = \left[ \begin{matrix} \mathbb{C} \\ \underline{\underline{\equiv}} \end{matrix} \right]_{\{k^{t+\Delta t}\}} \left[ \begin{matrix} t+\frac{\Delta t}{2} \\ \underline{\underline{D}} \end{matrix} \right]_{\{k^{t+\frac{\Delta t}{2}}\}} \Delta t$$

La formule matricielle de cumul tensoriel des contraintes dans le solide suiveur matériel s'écrit alors :

$$\boxed{\left[ \begin{matrix} t+\Delta t \\ \underline{\underline{\sigma}} \end{matrix} \right]_{\{k^{t+\Delta t}\}} = \left[ \begin{matrix} t \\ \underline{\underline{\sigma}} \end{matrix} \right]_{\{k^t\}} + \left[ \begin{matrix} \Delta \mathbb{R}_N \\ \underline{\underline{\sigma}} \end{matrix} \right]_{\{k^{t+\Delta t}\}}} \quad (3.104)$$

### 3.3.4.5 Algorithme pour l'implémentation

Nous avons mis en place la majorité des formules pour implémenter notre formulation générale. Les formules manquantes concernent l'estimation de **D** et de la rotation **R** à divers instants. Le calcul des composantes de **D** s'obtient à partir de la solution du système d'équations d'équilibre du modèle éléments finis et le calcul de **R** doit être spécifié par l'utilisateur.

Afin d'effectuer une synthèse de tout ce chapitre, nous donnons ici un algorithme écrit dans le solide suiveur actuelle à titre d'exemple. Nous nous positionnons en début d'incrément à *t*, le pas de temps (petit) est  $\Delta t$  et la fin de l'incrément est donc  $t+\Delta t$ . Nous supposons donc que les matrices suivantes sont connues :

- Les tenseurs de déformations et de contraintes provenant de l'incrément précédent :

$$\left[ \begin{matrix} t \\ \underline{\underline{\varepsilon}} \end{matrix} \right]_{\{k^t\}} \quad \text{et} \quad \left[ \begin{matrix} t \\ \underline{\underline{\sigma}} \end{matrix} \right]_{\{k^t\}}$$

- Le tenseur de comportement qui est défini initialement par le jeu de ses composantes (constantes ou variables) :

$$\left[ \begin{matrix} \mathbb{C} \\ \underline{\underline{\equiv}} \end{matrix} \right]_{\{k^{t+\Delta t}\}} = \left[ \begin{matrix} 0 \\ \underline{\underline{\equiv}} \end{matrix} \right]_{\{k^0\}}$$

Il faut alors boucler sur tous les points de Gauss du modèle éléments finis l'algorithme qui va suivre :

◆ Début de la boucle sur les points de Gauss

\* Calculer **R**

\* Calculer **D** à la moitié de l'incrément :

$$\left[ \begin{matrix} t+\frac{\Delta t}{2} \\ \underline{\underline{D}} \end{matrix} \right]_{\{k^{t+\frac{\Delta t}{2}}\}}$$

\* Calculer l'incrément de déformation :

$$\left[ \begin{matrix} \Delta \mathbb{R}_N \\ \underline{\underline{\varepsilon}} \end{matrix} \right]_{\{k^{t+\Delta t}\}} = \left[ \begin{matrix} t+\frac{\Delta t}{2} \\ \underline{\underline{D}} \end{matrix} \right]_{\{k^{t+\frac{\Delta t}{2}}\}} \Delta t$$

\* Calculer la mesure de déformation

$$\left[ \begin{matrix} t+\Delta t \\ \underline{\underline{\varepsilon}} \end{matrix} \right]_{\{k^{t+\Delta t}\}} = \underbrace{\left[ \begin{matrix} t \\ \underline{\underline{\varepsilon}} \end{matrix} \right]_{\{k^t\}}}_{\text{stocké à l'incrément précédent}} + \left[ \begin{matrix} t+\frac{\Delta t}{2} \\ \underline{\underline{D}} \end{matrix} \right]_{\{k^{t+\frac{\Delta t}{2}}\}} \Delta t$$

\*Actualiser la matrice du tenseur de comportement si ses composantes sont des fonctions de la mesure de déformation :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \equiv \\ \equiv \end{bmatrix}_{\{\kappa^{t+\Delta t}\}} \leftarrow {}^0 C_{ij} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{\varepsilon} \\ \equiv \\ \equiv \end{bmatrix}_{\{\kappa^{t+\Delta t}\}} \right)$$

\*Calculer l'incrément de contraintes sous forme de matrice colonne

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{\varepsilon} \\ \equiv \\ \equiv \end{bmatrix}_{\{\kappa^{t+\Delta t}\}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \equiv \\ \equiv \end{bmatrix}_{\{\kappa^{t+\Delta t}\}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{\varepsilon} \\ \equiv \\ \equiv \end{bmatrix}_{\{\kappa^{t+\Delta t}\}}$$

\*Réorganiser sous forme de matrice carrée la matrice colonne résultat :

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{\varepsilon} \\ \equiv \\ \equiv \end{bmatrix}_{\{\kappa^{t+\Delta t}\}} \leftarrow \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{\varepsilon} \\ \equiv \\ \equiv \end{bmatrix}_{\{\kappa^{t+\Delta t}\}}$$

\*Calculer la mesure de contrainte

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\sigma} \\ \equiv \\ \equiv \end{bmatrix}_{\{\kappa^{t+\Delta t}\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\sigma} \\ \equiv \\ \equiv \end{bmatrix}_{\{\kappa^t\}}}_{\text{stocké à l'incrément précédent}} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{\varepsilon} \\ \equiv \\ \equiv \end{bmatrix}_{\{\kappa^{t+\Delta t}\}}$$

◆ Fin de la boucle sur les points de Gauss

4 Chapitre 4 : Milieu  
continu équivalent orthotrope  
fibreux et applications  
numériques



Nous avons construit au chapitre 3 une formulation générale des milieux orthotropes en grandes transformations basée sur un tenseur de rotation. Dans ce chapitre, nous particularisons cette théorie dans deux cas : celui d'un milieu fibreux à une direction forte d'anisotropie et celui de la formulation de Green-Naghdi, utilisée au chapitre 2. En effet, d'une part nous voulons formuler notre théorie de Milieu Continu Equivalent Orthotrope Fibreux (MCEO-F) et, d'autre part, nous devons préciser ce qu'est la formulation de Green-Naghdi du code de calcul industriel que nous utilisons. En effet, nous avons employé cette formulation au chapitre 2 pour modéliser les mèches, et il va apparaître qu'il s'agit d'une théorie de Milieu Continu Equivalent Orthotrope de Green-Naghdi (MCEO-GN).

Nous commençons ce chapitre par l'introduction du tenseur de rotation matérielle et du comportement fibreux caractérisant le MCEO-F. Ensuite nous donnons une deuxième formulation qui est corrective dans le sens qu'elle permet l'implémentation du MCEO-F dans un code de calcul (Abaqus/Explicit) utilisant la formulation de type MCEO-GN pour les éléments finis 3D. Nous illustrons alors, par la simulation numérique, l'intérêt du MCEO-F sur le test de cisaillement simple/extension et son efficacité à éviter les défauts du MCEO-GN observés sur le calcul de la maille tricotée au chapitre 2.

## 4.1 Milieu continu équivalent orthotrope fibreux

Notre but est de modéliser un milieu fibreux à une direction forte d'anisotropie, par exemple un paquet de fibres droites. C'est désormais possible en particulierisant la formulation générale des MCO précédemment détaillée au §3.3.3. Il suffit « simplement » de définir la rotation utilisée. La rotation  $\mathbf{R}$  va donc être remplacée par le tenseur de rotation matérielle  $\Delta$  orientant à chaque instant la direction d'anisotropie forte. Le solide suiveur euclidien matériel qui en découle suivra donc cette direction matérielle : le cumul tensoriel et l'évolution du comportement seront alors plus physiques qu'avec le MCEO-GN.

### 4.1.1 Formulation du MCEO-F

#### 4.1.1.1 Solide suiveur matériel

Comme un milieu fibreux n'est pas continu, nous rappelons l'hypothèse fondamentale faite au chapitre 1 : il existe un milieu continu 3D avec un comportement orthotrope équivalent au milieu fibreux à une direction forte d'anisotropie étudié. Sous cette hypothèse, il est naturel de particulariser la formulation générale du chapitre 3 pour construire notre modèle du MCEO-F. Notre formulation consiste à choisir un solide suiveur bien particulier pour réactualiser un axe constitutif d'orthotropie privilégié qui représente la direction forte d'anisotropie. La conséquence est qu'il faut définir le tenseur de rotation matérielle qui permet ce suivi. Ce tenseur est noté  $\Delta$  et actualise la base notée  $\{\mathbf{g}_n^t\}$ , que nous appelons « base matérielle OND », à partir de l'orientation initiale  $\{\mathbf{e}^0\}$  :

$$\boxed{\mathbf{g}_{n_i}^t = \Delta \cdot \mathbf{e}_i^0} \quad (4.1)$$

Nous rappelons que l'orientation initiale  $\{\mathbf{e}^0\}$  est définie par le champ de tenseur de rotation constant  $\mathbf{O}$  qui transforme la base globale :

$$\underline{\underline{\mathbf{e}_i^0}} = \underline{\underline{\mathbf{O}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}_i}} \quad (4.2)$$

L'orientation initiale doit être connue et en pratique elle est définie, élément par élément, par la mise en donnée du modèle éléments finis. Nous montrons sur la Figure 4-1 une version discrétisée de cette orientation initiale où la direction forte d'anisotropie est en bleu. Nous venons donc de complètement particulariser la formulation générale du chapitre 3 en choisissant :

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\underline{\Delta}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{\kappa}_i^t}} = \underline{\underline{\mathbf{g}_{n_i}^t}}$$

Nous choisissons par hypothèse le premier vecteur de l'orientation initiale pour définir la direction forte d'anisotropie initiale. Comme nous allons le montrer dans ce paragraphe, cette hypothèse permet de calculer  $\Delta$  explicitement à partir du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  et de l'orientation initiale  $\mathbf{O}$ .

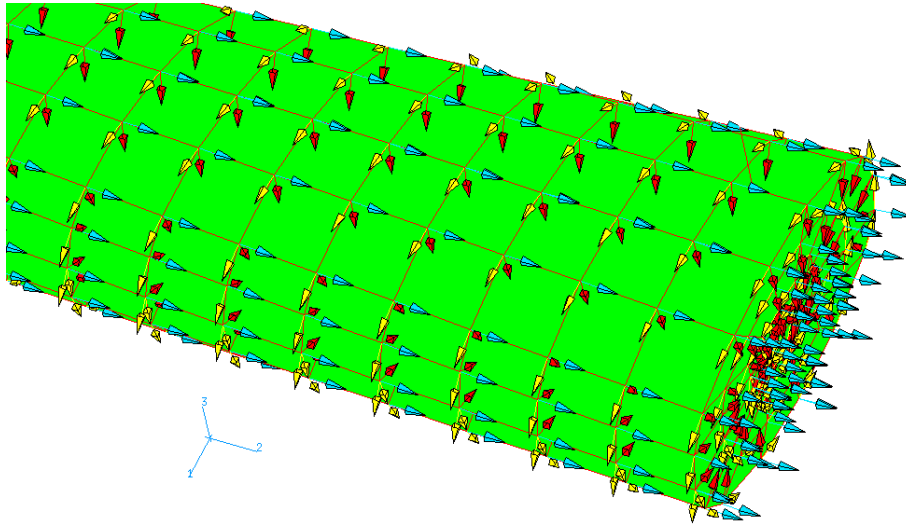


Figure 4-1 : Orientation initiale discrète des axes constitutifs

Comme nous travaillons avec une orientation initiale et que nous voulons connaître les composantes dans la base globale des vecteurs de l'ensemble des bases  $\{\mathbf{g}_{n_i}^t\}$ , nous voulons calculer la matrice de  $\Delta$  en base mixte. D'après (4.1) et (4.2), nous avons :

$$\underline{\underline{\mathbf{g}_{n_i}^t}} = \underline{\underline{\Delta}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}_i^0}} = \underline{\underline{\Delta}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{O}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}_i}} \quad (4.3)$$

D'après le 3.1.2.5, cette équation tensorielle projetée dans la base globale donne :

$$\left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G\}} \left[ \underline{\underline{\mathbf{O}}} \right]_{\{G\}} \left[ \underline{\underline{\mathbf{G}_i}} \right]_{\{G\}} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{g}_{n_i}^t}} \right]_{\{G\}} \Leftrightarrow \left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \left[ \underline{\underline{\mathbf{G}_i}} \right]_{\{G\}} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{g}_{n_i}^t}} \right]_{\{G\}}$$

En exploitant l'identité matricielle :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{G}_i}} \right]_{\{G\}} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{e}_i^0}} \right]_{\{e^0\}} = \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{3i} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Elle peut encore s'écrire :

$$\left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \left[ \underline{\underline{\mathbf{e}_i^0}} \right]_{\{e^0\}} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{g}_{n_i}^t}} \right]_{\{G\}}$$

Ce choix permet donc d'obtenir les images dans la base globale des vecteurs orientés initialement en utilisant des colonnes très simples du type de (4.4). Le tenseur  $\mathbf{O}$  n'apparaît donc pas explicitement et cela évite d'alourdir les notations. Par contre, les composantes de  $\mathbf{O}$  interviennent dans le calcul de  $\Delta$ .

#### 4.1.1.2 Comportement fibreux

Nous avons introduit les spécificités générales d'un comportement fibreux à une direction forte d'anisotropie au 3.3.1.3. Nous rappelons qu'à chaque instant la matrice du tenseur de comportement est donnée dans la base matérielle OND par :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{C} \\ \equiv \\ \equiv \end{bmatrix}_{\{\mathbf{g}_n^i\}} = \begin{bmatrix} {}^0C_{11} & {}^0C_{12} & {}^0C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ {}^0C_{12} & {}^0C_{22} & {}^0C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ {}^0C_{13} & {}^0C_{23} & {}^0C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^0C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^0C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^0C_{66} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

avec :

$$\begin{aligned} {}^0C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta(E_3(\varepsilon_{33}))^2}, & {}^0C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta E_1(E_3(\varepsilon_{33}))}, & {}^0C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta E_1(E_3(\varepsilon_{33}))} \\ {}^0C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta(E_3(\varepsilon_{33}))^2}, & {}^0C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{\Delta(E_3(\varepsilon_{33}))^2}, & {}^0C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{\Delta E_1(E_3(\varepsilon_{33}))} \\ {}^0C_{44} &= 2G_{12}, & {}^0C_{55} &= 2G_{23}, & {}^0C_{66} &= 2G_{31} \\ \Delta &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1(E_3(\varepsilon_{33}))^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

La première composante, associée précédemment par hypothèse à la direction forte d'anisotropie, est très grande devant toutes les autres :

$${}^0C_{11} \gg {}^0C_{22}, {}^0C_{33}, {}^0C_{12}, {}^0C_{13}, {}^0C_{23}, {}^0C_{44}, {}^0C_{55}, {}^0C_{66}$$

Comme au chapitre 2, les modules d'Young transversaux sont des fonctions de la déformation radiale traduisant l'écrasement du paquet de fibre. Nous avons défini au chapitre 3 cette déformation à partir de l'intégration rotationnelle de  $\mathbf{D}$  dans le solide suiveur : il s'agit ici de la mesure de déformation dans la base matérielle OND. Dans notre cas, nous choisissons la même loi d'écrasement pour les  $E_2$  et  $E_3$  qu'au chapitre 2 :

$$E_3(\varepsilon_{33}) = E_2(\varepsilon_{33}) = E_\infty \left( 1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon}\right) \right) + E_0 \quad (4.7)$$

Nous avons maintenant presque toutes les cartes en main pour formuler notre MCEO-F. Il ne nous manque qu'à définir la rotation matérielle  $\Delta$ .

## 4.1.2 Rotation matérielle $\Delta$

### 4.1.2.1 Définition d'une rotation à partir de l'axe et de l'angle

Il existe une littérature abondante sur les rotations car, en MGT, les rotations peuvent être grandes et demandent donc un traitement mathématique spécial qui peut se présenter sous plusieurs formalismes. La question qui nous intéresse est : comment trouver la rotation qui tourne une base initiale donnée en une base actuelle dont le premier vecteur suit une direction imposée (en l'occurrence la direction forte d'anisotropie) ? Nous avons trouvé la réponse dans le livre de Crisfield ([CRI91b], page 203) en adaptant les formules relatives à la rotation d'une base OND attachée à un nœud d'élément de poutre. Nous allons néanmoins démontrer ces formules, ce qui n'est pas fait par l'auteur dans [CRI91b], car

elles sont essentielles pour notre travail. Nous lui empruntons la Figure 4-2 afin de définir les tenseurs utiles pour construire une rotation.

Nous notons l'axe unitaire de la rotation  $\underline{e}$ . Le vecteur de rotation est alors défini par :

$$\underline{\theta} = \delta \underline{e}$$

Il permet de définir le tenseur de micro-rotation

$$\underline{\underline{S}}(\underline{\theta}) = \underline{\theta} \wedge \quad (4.8)$$

*Remarque :* Quand  $\delta$  est petit, le tenseur de rotation d'axe  $\underline{\theta}$ , noté  $\underline{\underline{\Delta}}$ , s'exprime avec la micro-rotation (4.8) à l'aide de :

$$\underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{S}}(\underline{\theta})$$

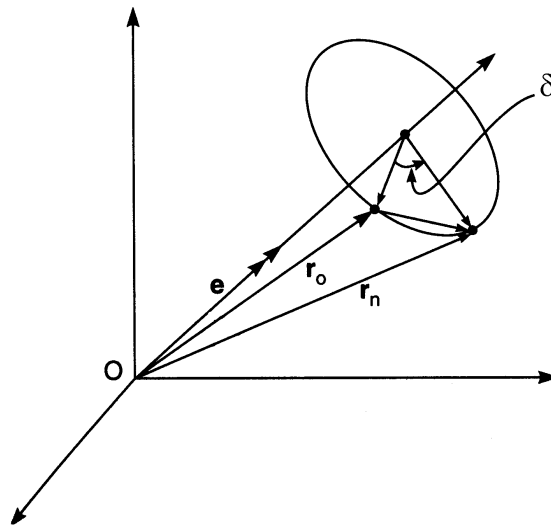


Figure 4-2 : Rotation finie d'angle  $\underline{\delta}$  et d'axe  $\underline{e}$  [CRI91b]

Pour obtenir le tenseur de rotation finie tel que :

$$\underline{r}_n = \underline{\underline{\Delta}} \cdot \underline{r}_0$$

Il faut prendre l'exponentielle tensorielle du tenseur de micro-rotation :

$$\underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{\exp}}(\underline{\underline{S}}(\underline{\theta}))$$

*Remarque :* le vecteur de rotation est en fait appelé dans la littérature pseudo-vecteur, vecteur axial ou bien encore vecteur polaire. Cela tient au fait qu'il n'est pas invariant dans une symétrie miroir comme un vrai vecteur, c'est à dire que la rotation qu'il modélise n'est plus la bonne dans une telle symétrie. De même, le tenseur de micro-rotation est un pseudo-tenseur. Nous ne faisons pas cette distinction qui n'est pas utile à notre application pratique de cette théorie.

L'exponentielle pouvant être développée en série entière, elle peut être classiquement réécrite sous la forme (4.9) donnée par Rodrigues. Cela permet de donner une expression explicite du tenseur de rotation finie en fonction de l'angle et du tenseur de rotation infinitésimale :

$$\underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{1}} + \underbrace{\frac{\sin(\delta)}{\delta} \underline{\underline{S}}(\underline{\theta})}_{\text{Terme 1}} + \underbrace{\frac{1 - \cos(\delta)}{\delta^2} \underline{\underline{S}}^2(\underline{\theta})}_{\text{Terme 2}} \quad (4.9)$$

4.1.2.2 Hypothèses pour le calcul d'une rotation matérielle

Nous cherchons à obtenir une rotation capable de tourner selon une direction spécifiée  $\mathbf{r}_n$ . Pour nous, cette direction doit être matérielle et sera obtenue par le gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  comme étant l'image de  $\mathbf{r}_o$  normée :

$$\underline{\mathbf{r}}_n = \frac{\underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{r}}_o}{\|\underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{r}}_o\|}$$

C'est donc le choix de  $\mathbf{r}_o$  qui définit entièrement la rotation  $\Delta$ . Afin d'atteindre notre objectif, nous considérons donc que  $\mathbf{r}_o$  est la direction initiale d'anisotropie forte du MCEO-F. Nous posons alors :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{r}}_n &= \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \\ \underline{\mathbf{r}}_o &= \underline{\mathbf{e}}_1^0\end{aligned}$$

Dans ce cas,  $\mathbf{r}_n$  et  $\mathbf{r}_o$  sont tous deux orthogonaux à l'axe de rotation et nous avons :  
Pour le vecteur rotation :

$$\underline{\boldsymbol{\theta}} = \delta \underline{\mathbf{e}} = \delta \frac{\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t}{\|\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t\|} \quad (4.10)$$

Pour le cosinus de l'angle de la rotation :

$$\cos(\delta) = \underline{\mathbf{e}}_1^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \quad (4.11)$$

Le produit vectoriel de  $\mathbf{r}_n$  et  $\mathbf{r}_o$  donne :

$$\frac{\sin(\delta)}{\delta} \underline{\boldsymbol{\theta}} = \underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \quad (4.12)$$

Il nous reste maintenant à exploiter ces relations pour simplifier l'expression de la rotation  $\Delta$ .

 4.1.2.3 Particularisation de la formule de Rodrigues

Nous devons particulariser la formule générale de Rodrigues avec les hypothèses faites afin de pouvoir évaluer le tenseur de rotation finie  $\Delta$ . Pour cela, évaluons les deux termes de la formule de Rodrigues (4.9).

- Evaluons le 1<sup>er</sup> terme à l'aide de (4.12) :

$$\frac{\sin(\delta)}{\delta} \underline{\mathbf{S}}(\underline{\boldsymbol{\theta}}) = \underline{\mathbf{S}}\left(\frac{\sin(\delta)}{\delta} \underline{\boldsymbol{\theta}}\right) = \underline{\mathbf{S}}\left(\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t\right)$$

- Evaluons le 2<sup>nd</sup> terme de la formule de Rodrigues à l'aide de (4.11) et (4.10) :

$$\begin{aligned}\frac{1 - \cos(\delta)}{\delta^2} \underline{\mathbf{S}}^2(\underline{\boldsymbol{\theta}}) &= \frac{(1 - \cos(\delta))(1 + \cos(\delta))}{\delta^2 (1 + \cos(\delta))} \underline{\mathbf{S}}^2(\underline{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1 - \cos^2(\delta)}{\delta^2 (1 + \cos(\delta))} \underline{\mathbf{S}}^2(\underline{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \frac{1}{(1 + \cos(\delta))} \left(\frac{\sin(\delta)}{\delta}\right)^2 \underline{\mathbf{S}}^2(\underline{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{1}{(1 + \underline{\mathbf{e}}_1^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t)} \left(\frac{\sin(\delta)}{\delta}\right)^2 \underline{\mathbf{S}}^2\left(\delta \frac{\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t}{\|\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t\|}\right) \\ &= \frac{1}{(1 + \underline{\mathbf{e}}_1^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t)} \sin^2(\delta) \underline{\mathbf{S}}^2\left(\frac{\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t}{\|\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t\|}\right)\end{aligned}$$

Or, nous avons d'après (4.12) et (4.10) :

$$\left(\frac{\sin(\delta)}{\delta}\right)^2 \|\underline{\theta}\|^2 = \|\underline{e}_1^0 \wedge \underline{g}_{n_1}^t\|^2 \quad \text{et} \quad \|\underline{\theta}\|^2 = \delta^2$$

D'où :

$$\sin^2(\delta) = \|\underline{e}_1^0 \wedge \underline{g}_{n_1}^t\|^2$$

Le 2<sup>nd</sup> terme s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos(\delta)}{\delta^2} \underline{S}^2(\underline{\theta}) &= \frac{1}{(1 + \underline{e}_1^0 \cdot \underline{g}_{n_1}^t)} \|\underline{e}_1^0 \wedge \underline{g}_{n_1}^t\|^2 \underline{S}^2\left(\frac{\underline{e}_1^0 \wedge \underline{g}_{n_1}^t}{\|\underline{e}_1^0 \wedge \underline{g}_{n_1}^t\|}\right) \\ &= \frac{1}{1 + \underline{e}_1^0 \cdot \underline{g}_{n_1}^t} \underline{S}^2(\underline{e}_1^0 \wedge \underline{g}_{n_1}^t) \end{aligned}$$

La formule de Rodrigues s'exprime donc :

$$\underline{\Delta}(\underline{e}_1^0, \underline{g}_{n_1}^t) = \underline{1} + \underbrace{\underline{S}(\underline{e}_1^0 \wedge \underline{g}_{n_1}^t)}_{\text{Terme 1}'} + \frac{1}{1 + \underline{e}_1^0 \cdot \underline{g}_{n_1}^t} \underbrace{\underline{S}^2(\underline{e}_1^0 \wedge \underline{g}_{n_1}^t)}_{\text{Terme 2}'} \quad (4.13)$$

Cette expression est particularisée, mais pas encore assez simplifiée car nous voulons faire disparaître le tenseur  $\underline{S}$  de l'expression.

#### 4.1.2.4 Simplification de la formule de Rodrigues

Nous cherchons à simplifier l'expression (4.13) en évaluant  $\underline{S}$  et  $\underline{S}^2$ . En appliquant la définition de  $\underline{S}$  (4.8) et les propriétés d'antisymétrie du produit vectoriel, il vient pour tout vecteur  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  et  $\underline{c}$  :

$$\underline{S}(\underline{a} \wedge \underline{b}) \cdot \underline{c} = (\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge \underline{c} = -\underline{c} \wedge (\underline{a} \wedge \underline{b}) = \underline{c} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{a})$$

La formule classique du double produit vectoriel est :

$$\underline{c} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{a}) = (\underline{c} \cdot \underline{a})\underline{b} - (\underline{c} \cdot \underline{b})\underline{a}$$

D'où, pour tout vecteur  $\underline{c}$  :

$$\underline{S}(\underline{a} \wedge \underline{b}) \cdot \underline{c} = (\underline{c} \cdot \underline{a})\underline{b} - (\underline{c} \cdot \underline{b})\underline{a} = (\underline{b} \otimes \underline{a}) \cdot \underline{c} - (\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{c}$$

Soit :

$$\underline{S}(\underline{a} \wedge \underline{b}) = \underline{b} \otimes \underline{a} - \underline{a} \otimes \underline{b}$$

Nous avons donc pour le terme 1' de (4.13) :

$$\underline{S}(\underline{e}_1^0 \wedge \underline{g}_{n_1}^t) = \underline{g}_{n_1}^t \otimes \underline{e}_1^0 - \underline{e}_1^0 \otimes \underline{g}_{n_1}^t \quad (4.14)$$

Concernant le terme 2' de (4.13), en appliquant la définition (4.8) de  $\underline{S}$  et la formule du double produit vectoriel, il vient pour tout vecteur  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  et  $\underline{c}$  :

$$\underline{S}(\underline{a}) \cdot \underline{S}(\underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c} = (\underline{b} \otimes \underline{a}) \cdot \underline{c} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c}$$

D'où :

$$\underline{S}(\underline{a}) \cdot \underline{S}(\underline{b}) = \underline{b} \otimes \underline{a} - \underline{a} \cdot \underline{b}\underline{1}$$

En particulier :

$$\underline{S}^2(\underline{a}) = \underline{a} \otimes \underline{a} - \underline{a} \cdot \underline{a}\underline{1}$$

Le terme 2' s'exprime donc :

$$\underline{S}^2(\underline{e}_1^0 \wedge \underline{g}_{n_1}^t) = (\underline{e}_1^0 \wedge \underline{g}_{n_1}^t) \otimes (\underline{e}_1^0 \wedge \underline{g}_{n_1}^t) - ((\underline{e}_1^0 \wedge \underline{g}_{n_1}^t) \cdot (\underline{e}_1^0 \wedge \underline{g}_{n_1}^t))\underline{1}$$

Or :

$$\left( (\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) \cdot (\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) \right) \underline{\mathbf{1}} = \left( \left( \frac{\sin(\delta)}{\delta} \right)^2 \|\underline{\boldsymbol{\theta}}\|^2 \right) \underline{\mathbf{1}} = \sin^2(\delta) \underline{\mathbf{1}}$$

Nous avons donc pour le terme 2' :

$$\underline{\mathbf{S}}^2(\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) = (\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) \otimes (\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) - \sin^2(\delta) \underline{\mathbf{1}} \quad (4.15)$$

En injectant (4.14) et (4.15) dans (4.13), la rotation s'exprime :

$$\underline{\Delta} = \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \otimes \underline{\mathbf{e}}_1^0 - \underline{\mathbf{e}}_1^0 \otimes \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t + \frac{(\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) \otimes (\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) - \sin^2(\delta) \underline{\mathbf{1}}}{1 + \underline{\mathbf{e}}_1^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t}$$

Qui se réécrit :

$$\underline{\Delta} = \left( 1 - \frac{\sin^2(\delta)}{1 + \underline{\mathbf{e}}_1^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t} \right) \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \otimes \underline{\mathbf{e}}_1^0 - \underline{\mathbf{e}}_1^0 \otimes \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t + \frac{(\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) \otimes (\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t)}{1 + \underline{\mathbf{e}}_1^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t}$$

Or le premier terme de cette expression se simplifie à l'aide de (4.11) :

$$1 - \frac{\sin^2(\delta)}{1 + \underline{\mathbf{e}}_1^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t} = 1 - \frac{\sin^2(\delta)}{1 + \cos(\delta)} = \frac{1 + \cos(\delta) - \sin^2(\delta)}{1 + \cos(\delta)} = \frac{\cos(\delta) + \cos^2(\delta)}{1 + \cos(\delta)} = \cos(\delta) = \underline{\mathbf{e}}_1^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t$$

Finalement nous obtenons l'expression simplifiée de la rotation matérielle :

$$\underline{\Delta} = \left( \underline{\mathbf{e}}_1^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \right) \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \otimes \underline{\mathbf{e}}_1^0 - \underline{\mathbf{e}}_1^0 \otimes \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t + \frac{(\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) \otimes (\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t)}{1 + \underline{\mathbf{e}}_1^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t} \quad (4.16)$$

#### 4.1.2.5 Calcul des vecteurs de la base matérielle OND

La rotation étant particularisée et simplifiée, nous pouvons exprimer explicitement les vecteurs de la base matérielle OND en fonction de l'orientation initiale. Pour ce faire, utilisons la définition de la base matérielle OND (4.1) :

$$\underline{\mathbf{g}}_{n_i}^t = \underline{\Delta} \cdot \underline{\mathbf{e}}_i^0$$

En injectant l'expression simplifiée de  $\underline{\Delta}$  (4.16) dans cette définition, il vient :

$$\underline{\mathbf{g}}_{n_i}^t = (\underline{\mathbf{e}}_1^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) \underline{\mathbf{e}}_i^0 + (\underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \otimes \underline{\mathbf{e}}_1^0) \cdot \underline{\mathbf{e}}_i^0 - (\underline{\mathbf{e}}_1^0 \otimes \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) \cdot \underline{\mathbf{e}}_i^0 + \frac{(\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) \otimes (\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t)}{1 + \underline{\mathbf{e}}_1^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t} \cdot \underline{\mathbf{e}}_i^0$$

qui se simplifie en :

$$\underline{\mathbf{g}}_{n_i}^t = (\underline{\mathbf{e}}_1^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) \underline{\mathbf{e}}_i^0 + \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t (\underline{\mathbf{e}}_1^0 \cdot \underline{\mathbf{e}}_i^0) - \underline{\mathbf{e}}_1^0 (\underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \cdot \underline{\mathbf{e}}_i^0) + \frac{(\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) \left( (\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) \cdot \underline{\mathbf{e}}_i^0 \right)}{1 + \underline{\mathbf{e}}_1^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t}$$

Nous réécrivons alors cette relation :

$$\underline{\mathbf{g}}_{n_i}^t = b_1 \underline{\mathbf{e}}_i^0 - b_i \underline{\mathbf{e}}_1^0 + \delta_{ii} \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t + \frac{(\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) (\underline{\mathbf{e}}_i^0 \cdot \underline{\mathbf{e}}_1^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t)}{1 + b_1} \quad \text{avec } b_k = \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \cdot \underline{\mathbf{e}}_k^0 \quad (4.17)$$

Nous retrouverons les coefficients  $b_k$  dans l'expression finale recherchée. Ils représentent les composantes du premier vecteur de la base matérielle OND dans l'orientation initiale :

$$\underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t = b_k \underline{\mathbf{e}}_k^0 = b_1 \underline{\mathbf{e}}_1^0 + b_2 \underline{\mathbf{e}}_2^0 + b_3 \underline{\mathbf{e}}_3^0 \quad (4.18)$$

Ils sont donc tels que :

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \quad (4.19)$$

Les  $\mathbf{b}_k$  vont maintenant nous servir à calculer les produits mixtes et les produits vectoriels dans l'expression (4.17).

- D'une part, calculons le produit mixte à l'aide du tenseur de Levi-Civita :

$$\left(\underline{\mathbf{e}}_i^0, \underline{\mathbf{e}}_1^0, \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t\right) = \left(\underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t, \underline{\mathbf{e}}_i^0, \underline{\mathbf{e}}_1^0\right) = \left(\underline{\mathbf{e}}_i^0 \wedge \underline{\mathbf{e}}_1^0\right) \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t = \varepsilon_{i1k} \underline{\mathbf{e}}_k^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t = \varepsilon_{i1k} \mathbf{b}_k \quad (4.20)$$

- D'autre part, calculons le produit vectoriel en le projetant dans l'orientation initiale :

$$\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t = a_k \underline{\mathbf{e}}_k^0 = a_1 \underline{\mathbf{e}}_1^0 + a_2 \underline{\mathbf{e}}_2^0 + a_3 \underline{\mathbf{e}}_3^0$$

Ces composantes se calculent avec un produit mixte et sont fonctions des  $\mathbf{b}_k$  :

$$a_k = \left(\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t\right) \cdot \underline{\mathbf{e}}_k^0 = \left(\underline{\mathbf{e}}_k^0, \underline{\mathbf{e}}_1^0, \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t\right) = \left(\underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t, \underline{\mathbf{e}}_k^0, \underline{\mathbf{e}}_1^0\right) = \left(\underline{\mathbf{e}}_k^0 \wedge \underline{\mathbf{e}}_1^0\right) \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t = \varepsilon_{k1i} \underline{\mathbf{e}}_i^0 \cdot \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t = \varepsilon_{k1i} \mathbf{b}_i$$

Le tenseur de Levi-Civita, dit aussi tenseur de permutation, ou bien encore tenseur d'orientation ([TAL93]), donne les composantes explicitement :

$$\begin{cases} a_1 = \varepsilon_{11i} \mathbf{b}_i = 0 \\ a_2 = \varepsilon_{21i} \mathbf{b}_i = \varepsilon_{213} \mathbf{b}_3 = -\mathbf{b}_3 \\ a_3 = \varepsilon_{31i} \mathbf{b}_i = \varepsilon_{312} \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2 \end{cases}$$

En définitive, le produit vectoriel s'exprime simplement :

$$\underline{\mathbf{e}}_1^0 \wedge \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t = -\mathbf{b}_3 \underline{\mathbf{e}}_2^0 + \mathbf{b}_2 \underline{\mathbf{e}}_3^0 \quad (4.21)$$

A l'aide de (4.20) et (4.21), l'expression (4.17) s'écrit alors :

$$\underline{\mathbf{g}}_{n_i}^t = \mathbf{b}_i \underline{\mathbf{e}}_i^0 - \mathbf{b}_i \underline{\mathbf{e}}_1^0 + \delta_{li} \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t + \varepsilon_{i1k} \mathbf{b}_k \frac{-\mathbf{b}_3 \underline{\mathbf{e}}_2^0 + \mathbf{b}_2 \underline{\mathbf{e}}_3^0}{1 + \mathbf{b}_1}$$

En prenant  $i=2$  puis  $i=3$ , nous obtenons :

$$\underline{\mathbf{g}}_{n_2}^t = \mathbf{b}_1 \underline{\mathbf{e}}_2^0 - \mathbf{b}_2 \underline{\mathbf{e}}_1^0 - \mathbf{b}_3 \frac{-\mathbf{b}_3 \underline{\mathbf{e}}_2^0 + \mathbf{b}_2 \underline{\mathbf{e}}_3^0}{1 + \mathbf{b}_1} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{g}}_{n_3}^t = \mathbf{b}_1 \underline{\mathbf{e}}_3^0 - \mathbf{b}_3 \underline{\mathbf{e}}_1^0 + \mathbf{b}_2 \frac{-\mathbf{b}_3 \underline{\mathbf{e}}_2^0 + \mathbf{b}_2 \underline{\mathbf{e}}_3^0}{1 + \mathbf{b}_1}$$

Cependant, ces expressions peuvent encore se simplifier ! Effectuons cette simplification pour le second vecteur :

$$\underline{\mathbf{g}}_{n_2}^t = \mathbf{b}_1 \underline{\mathbf{e}}_2^0 - \mathbf{b}_2 \underline{\mathbf{e}}_1^0 + \frac{\mathbf{b}_3}{1 + \mathbf{b}_1} \left( \mathbf{b}_3 \underline{\mathbf{e}}_2^0 - \mathbf{b}_2 \underline{\mathbf{e}}_3^0 \right) = \mathbf{b}_1 \underline{\mathbf{e}}_2^0 - \mathbf{b}_2 \underline{\mathbf{e}}_1^0 + \left( \frac{\mathbf{b}_3^2}{1 + \mathbf{b}_1} \right) \underline{\mathbf{e}}_2^0 - \frac{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3}{1 + \mathbf{b}_1} \underline{\mathbf{e}}_3^0$$

Avec l'aide de (4.19), cette expression se réécrit :

$$\underline{\mathbf{g}}_{n_2}^t = \mathbf{b}_1 \underline{\mathbf{e}}_2^0 - \mathbf{b}_2 \underline{\mathbf{e}}_1^0 + \left( \frac{1 - \mathbf{b}_2^2 - \mathbf{b}_1^2}{1 + \mathbf{b}_1} \right) \underline{\mathbf{e}}_2^0 - \frac{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3}{1 + \mathbf{b}_1} \underline{\mathbf{e}}_3^0 = \mathbf{b}_1 \underline{\mathbf{e}}_2^0 - \mathbf{b}_2 \underline{\mathbf{e}}_1^0 + \left( 1 - \frac{\mathbf{b}_2^2}{1 + \mathbf{b}_1} - \mathbf{b}_1 \right) \underline{\mathbf{e}}_2^0 - \frac{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3}{1 + \mathbf{b}_1} \underline{\mathbf{e}}_3^0$$

L'équation se simplifie alors ci-dessous grâce à l'annulation des deux derniers termes :

$$\underline{\mathbf{g}}_{n_2}^t = -\mathbf{b}_2 \underline{\mathbf{e}}_1^0 + \left( 1 - \frac{\mathbf{b}_2^2}{1 + \mathbf{b}_1} \right) \underline{\mathbf{e}}_2^0 - \frac{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3}{1 + \mathbf{b}_1} \underline{\mathbf{e}}_3^0 + \mathbf{b}_1 \underline{\mathbf{e}}_2^0 - \mathbf{b}_1 \underline{\mathbf{e}}_2^0 = -\mathbf{b}_2 \underline{\mathbf{e}}_1^0 + \left( 1 - \frac{\mathbf{b}_2^2}{1 + \mathbf{b}_1} \right) \underline{\mathbf{e}}_2^0 - \frac{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3}{1 + \mathbf{b}_1} \underline{\mathbf{e}}_3^0$$

Nous arrivons à la factorisation suivante :

$$\underline{\mathbf{g}}_{n_2}^t = -\frac{\mathbf{b}_2}{1 + \mathbf{b}_1} (1 + \mathbf{b}_1) \underline{\mathbf{e}}_1^0 + \left( 1 - \frac{\mathbf{b}_2^2}{1 + \mathbf{b}_1} \right) \underline{\mathbf{e}}_2^0 - \frac{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3}{1 + \mathbf{b}_1} \underline{\mathbf{e}}_3^0 = \underline{\mathbf{e}}_2^0 - \frac{\mathbf{b}_2}{1 + \mathbf{b}_1} \left( (1 + \mathbf{b}_1) \underline{\mathbf{e}}_1^0 + \mathbf{b}_2 \underline{\mathbf{e}}_2^0 + \mathbf{b}_3 \underline{\mathbf{e}}_3^0 \right)$$

Or, avec l'aide de (4.18), nous remarquons que :

$$(1 + \mathbf{b}_1) \underline{\mathbf{e}}_1^0 + \mathbf{b}_2 \underline{\mathbf{e}}_2^0 + \mathbf{b}_3 \underline{\mathbf{e}}_3^0 = \underline{\mathbf{e}}_1^0 + \mathbf{b}_1 \underline{\mathbf{e}}_1^0 + \mathbf{b}_2 \underline{\mathbf{e}}_2^0 + \mathbf{b}_3 \underline{\mathbf{e}}_3^0 = \underline{\mathbf{e}}_1^0 + \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t$$

d'où, finalement, et très simplement :

$$\underline{\mathbf{g}}_{n_2}^t = \underline{\mathbf{e}}_2^0 - \frac{\mathbf{b}_2}{1 + \mathbf{b}_1} \left( \underline{\mathbf{e}}_1^0 + \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \right) \quad (4.22)$$



Pour obtenir l'expression du troisième vecteur de la base, il suffit de faire dans (4.22) :

$$2 \Leftrightarrow 3$$

En définitive, nos efforts (qui n'étaient pas des moindres !) se montrent payants car nous obtenons les expressions (4.23) qui vont nous permettre de calculer les composantes des vecteurs de la base matérielle OND et, donc, les composantes du tenseur de rotation matérielle  $\underline{\Delta}$ . Ces équations sont très simples et définissent explicitement les vecteurs de la base matérielle OND en fonction de l'orientation initiale :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t &= \frac{\underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_1^0}{\|\underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_1^0\|} \\ \underline{\mathbf{g}}_{n_2}^t &= \underline{\mathbf{e}}_2^0 - \frac{\mathbf{b}_2}{1 + \mathbf{b}_1} (\underline{\mathbf{e}}_1^0 + \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) \\ \underline{\mathbf{g}}_{n_3}^t &= \underline{\mathbf{e}}_3^0 - \frac{\mathbf{b}_3}{1 + \mathbf{b}_1} (\underline{\mathbf{e}}_1^0 + \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t) \\ \text{avec } \mathbf{b}_k &= \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \cdot \underline{\mathbf{e}}_k^0 \end{aligned}} \quad (4.23)$$

Nous rendons hommage à M.A. Crisfield qui a donné ces formules dans ([CRI91b]-page 203) dans le cas de l'actualisation de trièdres aux nœuds d'éléments finis de poutre.

*Remarque* : si  $\mathbf{b}_1 = -1$  il y a une singularité dans ces équations. Cela correspond au cas où il y a une rotation d'exactly 180° entre la base matérielle OND et l'orientation initiale. Il faut prévoir de remédier à ce problème lors de l'implémentation de cette formulation. Pour cela, il suffit de remplacer  $\mathbf{b}_1$  par une valeur proche de -1.

#### 4.1.2.6 Matrice du tenseur de rotation finie en base mixte

D'après le 4.1.1.1, nous cherchons la matrice de  $\underline{\Delta}$  en base mixte.  $\underline{\Delta}$  transformant l'orientation initiale en base matérielle OND, cette matrice est formée à partir des matrices colonnes des vecteurs de la base matérielle OND projetés en base globale :

$$\left[ \underline{\Delta} \right]_{\{G \otimes e^0\}} = \left[ \left[ \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \right]_{\{G\}} \quad \left[ \underline{\mathbf{g}}_{n_2}^t \right]_{\{G\}} \quad \left[ \underline{\mathbf{g}}_{n_3}^t \right]_{\{G\}} \right] \quad (4.24)$$

Nous obtenons ces matrices colonnes en projetant dans la base globale les équations tensorielles (4.23) :

$$\begin{aligned} \left[ \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \right]_{\{G\}} &= \frac{\left[ \underline{\mathbf{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \left[ \underline{\mathbf{e}}_1^0 \right]_{\{e^0\}}}{\left\| \left[ \underline{\mathbf{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \left[ \underline{\mathbf{e}}_1^0 \right]_{\{e^0\}} \right\|} \\ \left[ \underline{\mathbf{g}}_{n_2}^t \right]_{\{G\}} &= \left[ \underline{\mathbf{e}}_2^0 \right]_{\{G\}} - \frac{\mathbf{b}_2}{1 + \mathbf{b}_1} \left( \left[ \underline{\mathbf{e}}_1^0 \right]_{\{G\}} + \left[ \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \right]_{\{G\}} \right) \\ \left[ \underline{\mathbf{g}}_{n_3}^t \right]_{\{G\}} &= \left[ \underline{\mathbf{e}}_3^0 \right]_{\{G\}} - \frac{\mathbf{b}_3}{1 + \mathbf{b}_1} \left( \left[ \underline{\mathbf{e}}_1^0 \right]_{\{G\}} + \left[ \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \right]_{\{G\}} \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Avec :

$$\mathbf{b}_k = \left[ \underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t \right]_{\{G\}}^T \left[ \underline{\mathbf{e}}_k^0 \right]_{\{G\}} \quad (4.26)$$

Nous devons donc travailler avec le gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  en base mixte également. Ses composantes sont définies par :

$$\underline{[\mathbf{F}]}_{\{G \otimes e^0\}} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Le vecteur orientant la direction forte d'anisotropie est donc :

$$[\underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t]_{\{G\}} = \frac{1}{\sqrt{F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2}} \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Afin de calculer les  $b_k$ , il est maintenant nécessaire d'introduire les composantes de l'orientation initiale en base globale :

$$\underline{[\mathbf{O}]}_{\{G\}} = \left[ \underline{[\mathbf{e}_1^0]}_{\{G\}} \quad \underline{[\mathbf{e}_2^0]}_{\{G\}} \quad \underline{[\mathbf{e}_3^0]}_{\{G\}} \right] = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ O_{31} & O_{32} & O_{33} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

A l'aide de (4.29), (4.2) et (4.28), les  $b_k$  se calculent alors :

$$\begin{aligned} b_k &= [\underline{\mathbf{g}}_{n_1}^t]_{\{G\}}^T \underline{[\mathbf{O}]}_{\{G\}} [\underline{\mathbf{G}}_k]_{\{G\}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2}} \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} & O_{13} \\ O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ O_{31} & O_{32} & O_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{1k} \\ \delta_{2k} \\ \delta_{3k} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2}} \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} O_{11}\delta_{1k} + O_{12}\delta_{2k} + O_{13}\delta_{3k} \\ O_{21}\delta_{1k} + O_{22}\delta_{2k} + O_{23}\delta_{3k} \\ O_{31}\delta_{1k} + O_{32}\delta_{2k} + O_{33}\delta_{3k} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'où :

$$b_k = \frac{(F_{11}O_{11} + F_{21}O_{21} + F_{31}O_{31})\delta_{1k} + (F_{11}O_{12} + F_{21}O_{22} + F_{31}O_{32})\delta_{2k} + (F_{11}O_{13} + F_{21}O_{23} + F_{31}O_{33})\delta_{3k}}{\sqrt{F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2}}$$

Nous en déduisons les  $b_k$  :

$$\boxed{\begin{aligned} b_1 &= \frac{F_{11}O_{11} + F_{21}O_{21} + F_{31}O_{31}}{\sqrt{F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2}} \\ b_2 &= \frac{F_{11}O_{12} + F_{21}O_{22} + F_{31}O_{32}}{\sqrt{F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2}} \\ b_3 &= \frac{F_{11}O_{13} + F_{21}O_{23} + F_{31}O_{33}}{\sqrt{F_{11}^2 + F_{21}^2 + F_{31}^2}} \end{aligned}} \quad (4.30)$$

D'après (4.25), le deuxième vecteur de la base matérielle OND est donc donné par :

$$\left[ \underline{\mathbf{g}}_{\mathbf{n}_2}^t \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} O_{12} \\ O_{22} \\ O_{32} \end{bmatrix} - \frac{b_2}{1+b_1} \begin{bmatrix} O_{11} \\ O_{21} \\ O_{31} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{12} - \frac{b_2}{1+b_1} \left( O_{11} + \frac{F_{11}}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} \right) \\ O_{22} - \frac{b_2}{1+b_1} \left( O_{21} + \frac{F_{21}}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} \right) \\ O_{32} - \frac{b_2}{1+b_1} \left( O_{31} + \frac{F_{31}}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} \right) \end{bmatrix}$$

De même, le troisième vecteur de la base matérielle OND est donné par :

$$\left[ \underline{\mathbf{g}}_{\mathbf{n}_3}^t \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} O_{13} \\ O_{23} \\ O_{33} \end{bmatrix} - \frac{b_3}{1+b_1} \begin{bmatrix} O_{11} \\ O_{21} \\ O_{31} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{13} - \frac{b_3}{1+b_1} \left( O_{11} + \frac{F_{11}}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} \right) \\ O_{23} - \frac{b_3}{1+b_1} \left( O_{21} + \frac{F_{21}}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} \right) \\ O_{33} - \frac{b_3}{1+b_1} \left( O_{31} + \frac{F_{31}}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} \right) \end{bmatrix}$$

La matrice du tenseur de rotation matérielle est donc complètement définie par les matrices de  $\mathbf{F}$  (4.27) et de l'orientation initiale  $\mathbf{O}$  (4.29) :

$$\left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} = \begin{bmatrix} \frac{F_{11}}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} & O_{12} - \frac{b_2}{1+b_1} \left( O_{11} + \frac{F_{11}}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} \right) & O_{13} - \frac{b_3}{1+b_1} \left( O_{11} + \frac{F_{11}}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} \right) \\ \frac{F_{21}}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} & O_{22} - \frac{b_2}{1+b_1} \left( O_{21} + \frac{F_{21}}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} \right) & O_{23} - \frac{b_3}{1+b_1} \left( O_{21} + \frac{F_{21}}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} \right) \\ \frac{F_{31}}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} & O_{32} - \frac{b_2}{1+b_1} \left( O_{31} + \frac{F_{31}}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} \right) & O_{33} - \frac{b_3}{1+b_1} \left( O_{31} + \frac{F_{31}}{\sqrt{F_{11}^2+F_{21}^2+F_{31}^2}} \right) \end{bmatrix}$$

(4.31)

Avec les  $b_k$  donnés par le jeu d'équation (4.30). La formulation du MCEO-F est donc complète.

### 4.1.3 Formulation corrective du MCEO-F

#### 4.1.3.1 Motivation et hypothèses de départ

Nous avons utilisé Abaqus/Explicit au chapitre 2 pour calculer la maille tricotée. Il faut donc pouvoir implémenter dans ce même code de calcul notre formulation afin d'améliorer le modèle éléments finis initial. Pour cela, la mise au point d'une routine fortran propre au code est nécessaire : c'est la VUMAT. Le seul tenseur qu'il faut lui fournir en fin d'incrément est le tenseur des contraintes de Cauchy. C'est malheureusement dans la base

de Green-Naghdi que ces composantes doivent être données. Il faut donc changer de bases et/ou de référentiels souvent. Cela est dû à une carence du code de calcul qui ne permet pas de spécifier le tenseur de rotation choisi pour définir la formulation du milieu orthotrope considérée, à la manière de notre formulation générale du chapitre 3. Malheureusement, cette carence est monnaie courante dans les codes industriels et la seule solution pragmatique est de proposer une formulation correctrice.

La formulation correctrice que nous présentons permet d'implémenter le MCEO-F dans d'autres codes. Chaque code ayant ses spécificités, pour rester le plus général possible, nous ne supposons que  $\underline{\mathbf{F}}$  connu. D'autre part, dans les équations que nous allons développer, le tenseur  $\underline{\mathbf{R}}$  de rotation pure (définissant la formulation de Green-Naghdi) peut être remplacé par une autre rotation (de Jaumann, comme c'est le cas dans Abaqus/Standard par exemple) sans que notre formulation correctrice perde sa généralité.

Le point de départ est la matrice de  $\underline{\mathbf{F}}$  en base mixte, supposée connue :

$$\boxed{\underline{\underline{\mathbf{F}}}}_{\{G \otimes e^0\}} \quad (4.32)$$

A partir de (4.32) et de variables stockées, il est possible de complètement définir la formulation correctrice du MCEO-GN.

$\underline{\mathbf{C}}$  est calculé immédiatement à partir de  $\underline{\mathbf{F}}$  dans l'orientation initiale.

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\{e^0\}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_{\{e^0 \otimes G\}}^T \underline{\underline{\mathbf{F}}}_{\{G \otimes e^0\}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_{\{G \otimes e^0\}}^T \underline{\underline{\mathbf{F}}}_{\{G \otimes e^0\}}$$

Il est alors possible de calculer  $\underline{\mathbf{U}}$  en diagonalisant  $\underline{\mathbf{C}}$ . Dans l'orientation initiale, il n'est bien sûr pas possible de sortir la racine carrée de la matrice. Cela ne fonctionne que dans la base propre de  $\underline{\mathbf{C}}$ . En supposant la diagonalisation réussie, nous connaissons  $\underline{\mathbf{U}}$  dans l'orientation initiale :

$$\boxed{\underline{\underline{\mathbf{U}}}}_{\{e^0\}} = \boxed{\sqrt{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}}_{\{e^0\}} \quad (4.33)$$

Le calcul du tenseur de rotation pure  $\underline{\mathbf{R}}$  peut alors être effectué.  $\underline{\mathbf{R}}$  est la partie orthogonale de  $\underline{\mathbf{F}}$  dans la décomposition polaire. Il est unique et représente la rotation moyenne de la matière, c'est à dire la moyenne des rotations de chaque fibre matérielle passant par le point matériel considéré. A chaque instant, en chaque point de l'espace, la décomposition polaire de  $\underline{\mathbf{F}}$  nous donne :

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{-1}$$

Nous avons matriciellement en base mixte :

$$\boxed{\underline{\underline{\mathbf{R}}}}_{\{G \otimes e^0\}} = \boxed{\underline{\underline{\mathbf{F}}}}_{\{G \otimes e^0\}} \boxed{\underline{\underline{\mathbf{U}}}^{-1}}_{\{e^0\}} \quad (4.34)$$

L'inversion de  $\underline{\mathbf{U}}$  est donc nécessaire pour calculer  $\underline{\mathbf{R}}$ . Pour ce faire, nous utilisons la formule classique suivante :

$$\boxed{\underline{\underline{\mathbf{U}}}^{-1}}_{\{e^0\}} = \frac{1}{\det \underline{\underline{\mathbf{U}}}} \begin{bmatrix} U_{22}U_{33} - U_{32}U_{23} & -(U_{21}U_{33} - U_{31}U_{23}) & U_{21}U_{32} - U_{31}U_{22} \\ -(U_{21}U_{33} - U_{31}U_{23}) & U_{11}U_{33} - U_{31}U_{13} & -(U_{11}U_{32} - U_{31}U_{22}) \\ U_{21}U_{32} - U_{31}U_{22} & -(U_{11}U_{32} - U_{31}U_{22}) & U_{11}U_{22} - U_{21}U_{12} \end{bmatrix}$$

avec  $\det \underline{\underline{\mathbf{U}}} = U_{11}(U_{22}U_{33} - U_{32}U_{23}) - U_{12}(U_{21}U_{33} - U_{31}U_{23}) + U_{13}(U_{21}U_{32} - U_{31}U_{22})$

(4.35)

Les  $U_{ij}$  sont les composantes de  $\underline{\mathbf{U}}$  dans l'orientation initiale données par la matrice (4.33). La formulation de Green-Naghdi, que nous dénommons également MCEO-GN, est alors définie à partir de notre formulation générale du chapitre 3 en prenant :

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\underline{\mathbf{R}}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{k}}}_i^t = \underline{\underline{\mathbf{e}}}_i^t$$

La base de Green-Naghdi est donc définie par :

$$\underline{\underline{e}}_i^t = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{e}}_i^0 \quad (4.36)$$

#### 4.1.3.2 Incrément de déformation corrigé : tenseur de correction $\underline{\underline{\beta}}$

Le premier problème qui se pose est de déduire de l'incrément de déformation de Green-Naghdi (ou du taux de déformation  $\underline{\underline{D}}$ ), renvoyé par le code de calcul, l'incrément de déformation dans la base matérielle OND. L'incrément de déformation du code de calcul est le plus souvent donné dans la base de Green-Naghdi finale :

$$\left[ \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{R}}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}} = \left[ \underline{\underline{T}}_{\perp/t+\Delta t}^{-1} \left( \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{R}}} \right) \right]_{\{e^0\}} = \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{D}} \right]_{\{e^{t+\frac{\Delta t}{2}}\}} \Delta t$$

Soulignons que cette relation matricielle fait intervenir trois bases différentes : l'incrément de déformation est dans la base *finale* alors que  $\underline{\underline{D}}$  est dans la base *intermédiaire*. D'autre part, l'incrément de déformation recherché est :

$$\left[ \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{\Delta}}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}} = \left[ \underline{\underline{T}}_{\perp/t+\Delta t}^{-1} \left( \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{\Delta}}} \right) \right]_{\{e^0\}} = \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{D}} \right]_{\{g_n^{t+\frac{\Delta t}{2}}\}} \Delta t$$

Il faut donc effectuer un changement de base de  $\underline{\underline{D}}$  à la moitié du pas de temps (et non sur l'incrément de déformation à la fin du pas temps) entre la base de Green-Naghdi et la base matérielle OND. Les composantes de  $\underline{\underline{D}}$  dans la base de Green-Naghdi intermédiaire se déduisent de celles dans la base globale par :

$$\left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{D}} \right]_{\{e^{t+\frac{\Delta t}{2}}\}} = \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{R}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^T \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{D}} \right]_{\{G\}} \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{R}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \quad (4.37)$$

De même, les composantes de  $\underline{\underline{D}}$  dans la base matérielle OND intermédiaire se déduisent de celles dans la base globale par :

$$\left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{D}} \right]_{\{g_n^{t+\frac{\Delta t}{2}}\}} = \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^T \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{D}} \right]_{\{G\}} \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \quad (4.38)$$

En injectant (4.37) dans (4.38), nous avons donc :

$$\left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{D}} \right]_{\{g_n^{t+\frac{\Delta t}{2}}\}} = \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^T \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{R}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{D}} \right]_{\{e^{t+\frac{\Delta t}{2}}\}} \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{R}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^T \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}$$

En multipliant cette équation matricielle par le pas de temps, nous obtenons l'incrément de déformation dans la base matérielle OND :

$$\left[ \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{\Delta}}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}} = \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^T \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{R}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \left[ \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_{\underline{\underline{R}}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}} \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{R}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^T \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}$$

En définissant le tenseur de correction  $\underline{\underline{\beta}}$  par :

$$\underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{\Delta}}^T \cdot \underline{\underline{R}} \quad (4.39)$$

Nous avons alors en projection dans la base mixte :

$$\left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\beta}} \right]_{\{e^0\}} = \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\Delta}}^T \right]_{\{e^0 \otimes G\}} \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{R}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} = \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^T \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{R}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}$$

A l'aide de (4.39), l'incrément dans la base matérielle OND s'écrit donc simplement :

$$\boxed{\left[ \Delta^{\mathfrak{R}_\Delta} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \right]_{\{e_n^{t+\Delta t}\}} = \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\underline{\beta}}} \right]_{\{e^0\}} \left[ \Delta^{\mathfrak{R}_R} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}} \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\underline{\beta}}} \right]_{\{e^0\}}^T} \quad (4.40)$$

Cherchons maintenant la définition tensorielle associée à (4.40). En grandeurs non-tournées dans l'orientation initiale, (4.40) est équivalente à :

$$\left[ \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp/t+\Delta t \underline{\underline{\underline{\Delta}}}}^{-1} \left( \Delta^{\mathfrak{R}_\Delta} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \right) \right]_{\{e^0\}} = \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\underline{\beta}}} \right]_{\{e^0\}} \left[ \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp/t+\Delta t \underline{\underline{\underline{R}}}}^{-1} \left( \Delta^{\mathfrak{R}_R} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \right) \right]_{\{e^0\}} \left[ {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\underline{\beta}}} \right]_{\{e^0\}}^T$$

Cette équation matricielle est l'équation tensorielle suivante en projection dans l'orientation initiale :

$$\underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp/t+\Delta t \underline{\underline{\underline{\Delta}}}}^{-1} \left( \Delta^{\mathfrak{R}_\Delta} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \right) = {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\underline{\beta}}} \cdot \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp/t+\Delta t \underline{\underline{\underline{R}}}}^{-1} \left( \Delta^{\mathfrak{R}_R} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \right) \cdot {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\underline{\beta}}}^T$$

Nous obtenons ainsi la définition tensorielle de l'incrément de déformation dans la base matérielle OND en fonction de l'incrément de déformation de Green-Naghdi :

$$\boxed{\Delta^{\mathfrak{R}_\Delta} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp/t+\Delta t \underline{\underline{\underline{\Delta}}}} \left( \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp/t+\frac{\Delta t}{2} \underline{\underline{\underline{\beta}}}} \left( \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp/t+\Delta t \underline{\underline{\underline{R}}}}^{-1} \left( \Delta^{\mathfrak{R}_R} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \right) \right) \right)} \quad (4.41)$$

Cette expression fait intervenir trois transports rotationnels, il est possible de l'exprimer à partir de deux transports en développant (4.41) :

$$\Delta^{\mathfrak{R}_\Delta} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\underline{\Delta}}} \cdot {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\underline{\beta}}} \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\underline{R}}}^T \cdot \Delta^{\mathfrak{R}_R} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\underline{R}}} \cdot {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\underline{\beta}}}^T \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\underline{\Delta}}}^T$$

Avec la définition (4.39) de  $\underline{\underline{\underline{\beta}}}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \Delta^{\mathfrak{R}_\Delta} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} &= {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\underline{\Delta}}} \cdot {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\underline{\beta}}} \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\underline{R}}}^T \cdot \Delta^{\mathfrak{R}_R} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\underline{R}}} \cdot {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\underline{\beta}}}^T \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\underline{\Delta}}}^T \\ &= {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\underline{\Delta}}} \cdot {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\underline{\Delta}}}^T \cdot {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\underline{R}}} \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\underline{R}}}^T \cdot \Delta^{\mathfrak{R}_R} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\underline{R}}} \cdot {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\underline{R}}}^T \cdot {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \underline{\underline{\underline{\Delta}}} \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\underline{\Delta}}}^T \\ &= \Delta \hat{\underline{\underline{\underline{\Delta}}}} \cdot \Delta \hat{\underline{\underline{\underline{R}}}}^T \cdot \Delta^{\mathfrak{R}_R} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \cdot \Delta \hat{\underline{\underline{\underline{R}}}} \cdot \Delta \hat{\underline{\underline{\underline{\Delta}}}}^T \end{aligned}$$

Ce résultat constitue une deuxième définition de l'incrément de déformation dans la base matérielle OND<sup>29</sup> :

$$\boxed{\Delta^{\mathfrak{R}_\Delta} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp/\Delta \hat{\underline{\underline{\underline{\Delta}}}}} \left( \underline{\underline{\underline{T}}}_{\perp/\Delta \hat{\underline{\underline{\underline{R}}}}}^{-1} \left( \Delta^{\mathfrak{R}_R} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \right) \right)} \quad (4.42)$$

Géométriquement, l'incrément de déformation de Green-Naghdi, dans le solide suiveur de Green-Naghdi, est ramené dans la configuration intermédiaire, où est calculé  $\Delta t$ , pour être ramené dans la configuration finale du solide suiveur matériel.

#### 4.1.3.3 Approximation du tenseur de correction $\underline{\underline{\underline{\beta}}}$

Dans (4.40), il faut connaître  $\underline{\underline{\underline{\beta}}}$  à la moitié de l'incrément de temps. Cela est fort gênant car il faut faire des calculs supplémentaires pour y parvenir et l'efficacité de l'algorithme risque d'être affecté. Les simulations numériques qui suivent ont montré que si les pas de temps sont petits, il est possible de faire l'approximation suivante sans perte de précision significative :

<sup>29</sup> Nous aurions pu obtenir directement cette définition à partir de l'équation (3.100) au chapitre 3.

$$\boxed{\underline{\underline{\beta}}^{t+\Delta t} \approx \underline{\underline{\beta}}^{t+\Delta t}} \quad (4.43)$$

Cette approximation revient, sur un pas de temps, à confondre la configuration intermédiaire avec la configuration finale. Nous avons donc :

$$\underline{\underline{\Delta}}^{t+\Delta t} \approx \underline{\underline{\Delta}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \Rightarrow \underline{\underline{\hat{\Delta}}} \approx \underline{\underline{1}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{t+\Delta t} \approx \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \Rightarrow \underline{\underline{\hat{\mathbf{R}}}} \approx \underline{\underline{1}} \quad (4.44)$$

Le tenseur  $\underline{\underline{\beta}}$  en fin d'incrément est :

$$\underline{\underline{\beta}}^{t+\Delta t} = \underline{\underline{\Delta}}^{t+\Delta t \text{ T}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{t+\Delta t} = \underline{\underline{\Delta}}^{t+\frac{\Delta t}{2} \text{ T}} \cdot \underline{\underline{\hat{\Delta}}}^{\text{T}} \cdot \underline{\underline{\hat{\mathbf{R}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{t+\frac{\Delta t}{2}}$$

Or d'après (4.44), nous avons :

$$\underline{\underline{\hat{\Delta}}}^{\text{T}} \cdot \underline{\underline{\hat{\mathbf{R}}}} \approx \underline{\underline{1}}$$

Dans ce cas, l'approximation (4.43) de  $\underline{\underline{\beta}}$  est :

$$\underline{\underline{\beta}}^{t+\Delta t} \approx \underline{\underline{\Delta}}^{t+\frac{\Delta t}{2} \text{ T}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \underline{\underline{\beta}}^{t+\frac{\Delta t}{2}}$$

Cette approximation permet de gagner en efficacité, les calculs de  $\underline{\underline{\Delta}}$  et de  $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$  en fin d'incrément étant nécessaires pour la suite de toute façon. La perte de précision sur l'incrément de déformation matérielle corrigé est négligeable si les pas de temps sont petits (nous le montrerons sur les tests numériques). La nouvelle définition de  $\underline{\underline{\beta}}$  est donc explicite et immédiatement calculable par :

$$\boxed{\left[ \underline{\underline{\beta}}^{t+\Delta t} \right]_{\{e^0\}} = \left[ \underline{\underline{\Delta}}^{t+\Delta t} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^{\text{T}} \left[ \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{t+\Delta t} \right]_{\{G \otimes e^0\}}} \quad (4.45)$$

Sous cette hypothèse, dont nous montrerons le bien fondé sur le test de glissement simple / extension, nous avons pour nouvelle définition de l'incrément corrigé :

$$\boxed{\left[ \underline{\underline{\Delta}}^{\mathfrak{R}_{\underline{\underline{\Delta}}}} \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}} = \left[ \underline{\underline{\beta}}^{t+\Delta t} \right]_{\{e_0\}} \left[ \underline{\underline{\Delta}}^{\mathfrak{R}_{\underline{\underline{\mathbf{R}}}}} \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}} \left[ \underline{\underline{\beta}}^{t+\Delta t} \right]_{\{e_0\}}^{\text{T}}} \quad (4.46)$$

*Remarque* : Tensoriellement, cela revient à dire qu'il est possible de le calculer par un changement de base direct de l'incrément de Green-Naghdi, et, donc, que ces deux incréments sont en fait un seul et même tenseur. D'après (4.42) et (4.44) nous avons en effet :

$$\underline{\underline{\Delta}}^{\mathfrak{R}_{\underline{\underline{\Delta}}}} \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\perp} \left( \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp/\perp}^{-1} \left( \underline{\underline{\Delta}}^{\mathfrak{R}_{\underline{\underline{\mathbf{R}}}}} \underline{\underline{\varepsilon}} \right) \right) = \underline{\underline{\Delta}}^{\mathfrak{R}_{\underline{\underline{\mathbf{R}}}}} \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}\Delta t$$

Nous donnons l'interprétation de  $\underline{\underline{\beta}}$  en terme de matrice de passage au sous-paragraphe 4.1.3.8.

#### 4.1.3.4 Actualisation du comportement et incrément de contraintes

Une fois l'incrément de déformation calculé par (4.46), en tenant compte de l'approximation du tenseur de correction  $\underline{\underline{\beta}}$ , le calcul de l'incrément de contrainte dans la base matérielle OND est immédiat si la matrice du tenseur de comportement est connue. Pour cela, il faut l'actualiser, ses composantes étant a priori variables à cause de la loi d'écrasement (voir 4.1.1.2). Comme la loi d'écrasement est une fonction de la déformation matérielle transversale, il faut calculer cette dernière :

$$\boxed{\left[ \underline{\underline{\varepsilon}}^{t+\Delta t} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}} = \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}^t \right]_{\{g_n^t\}} + \left[ \underline{\underline{\Delta}}^{\mathfrak{R}_{\underline{\underline{\Delta}}}} \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}}} \quad (4.47)$$

En posant :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{t+\Delta t} = \varepsilon_{mij}^{t+\Delta t} \underline{\underline{g}}_{n_i}^{t+\Delta t} \otimes \underline{\underline{g}}_{n_j}^{t+\Delta t}$$

Les nouveaux modules d'Young transversaux se calculent avec la composante 33 du tenseur de déformation en base matérielle OND :

$${}^{t+\Delta t}E_3 = {}^{t+\Delta t}E_2 = E_\infty \left( 1 - \exp\left( -\frac{{}^{t+\Delta t}\varepsilon_{m33}}{\bar{\varepsilon}} \right) \right) + E_0 \quad (4.48)$$

Le comportement peut alors être actualisé en injectant (4.48) dans les formules (4.6). Réorganisé sous forme de colonne avec la notation de Voigt, nous obtenons alors l'incrément de contrainte :

$$\boxed{\left[ \left[ \Delta \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{\underline{\underline{g}}_n^{t+\Delta t}\}} \right]} = \boxed{\left[ \underline{\underline{C}} \right]_{\{\underline{\underline{g}}_n^{t+\Delta t}\}} \left[ \left[ \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{\underline{\underline{g}}_n^{t+\Delta t}\}} \right]} \quad (4.49)$$

#### 4.1.3.5 Tenseur de rotation relative $\alpha$

L'incrément de contrainte est maintenant connu dans la base matérielle OND par (4.49). Comme le code de calcul travaille par défaut dans le solide suiveur de Green-Naghdi, il met à notre disposition les anciennes contraintes dans la base de Green-Naghdi  $\{\mathbf{e}^t\}$ , définie par (4.36), et il faut alors lui retourner les nouvelles contraintes dans la base  $\{\mathbf{e}^{t+\Delta t}\}$ . Deux possibilités s'offrent alors à nous pour calculer ces dernières :

- Utiliser les anciennes contraintes du code et sommer notre incrément de contrainte changé au préalable de base.
- Sommer nos anciennes contraintes (stockées à la fin de l'incrément précédent) avec notre incrément (4.49) et changer le résultat de base.

Dans le premier cas (respectivement le second cas), il faut au moins calculer la projection de l'incrément de contrainte (respectivement des nouvelles contraintes) dans la base de Green-Naghdi. Il nous faut donc connaître la matrice de passage de  $\{\underline{\underline{g}}_n\}$  à  $\{\mathbf{e}\}$ .

L'introduction du tenseur de rotation relative  $\alpha$  est nécessaire pour y parvenir. Il s'agit de la rotation du solide suiveur de Green-Naghdi par rapport à notre solide suiveur matériel. Nous le définissons à partir de la décomposition de  $\mathbf{R}$  suivante (voir Figure 4-3) :

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{\alpha}} \cdot \underline{\underline{\Delta}}$$

D'où la définition de la rotation relative  $\alpha$  :

$$\boxed{\underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{\Delta}}^T} \quad (4.50)$$

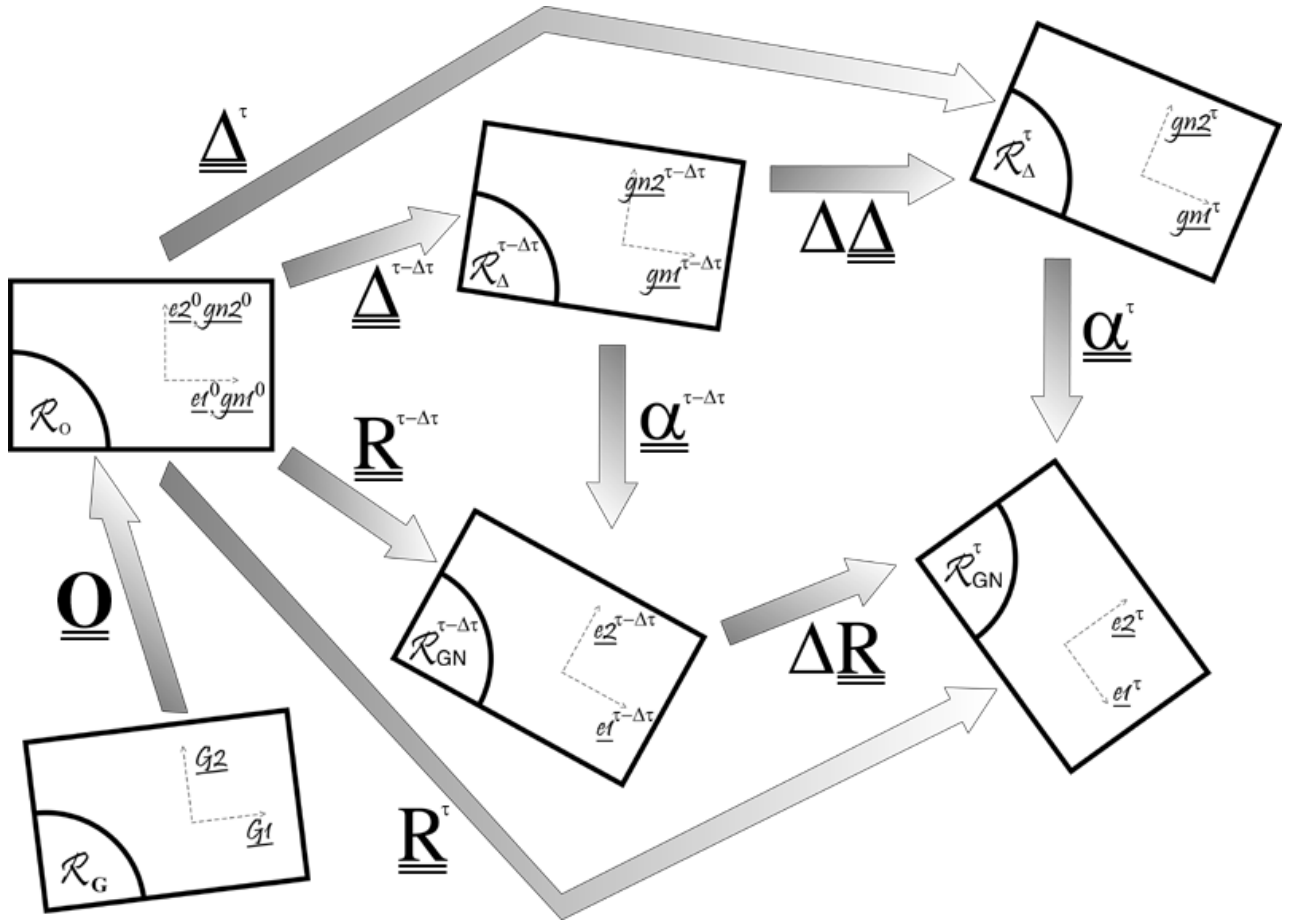
Cette définition implique que  $\alpha$  transforme la base matérielle OND en base de Green-Naghdi à chaque instant  $t$  :

$$\mathbf{e}_i^t = \underline{\underline{\alpha}} \cdot \underline{\underline{g}}_{n_i}^t$$

D'après 3.1.2.3, la matrice de passage de la base  $\{\underline{\underline{g}}_n^t\}$  à la base  $\{\mathbf{e}^t\}$  est en définitive :

$$\boxed{\left[ \left[ \underline{\underline{\alpha}} \right]_{\{\underline{\underline{g}}_n^t\}}^T \right]} \quad (4.51)$$




 Figure 4-3 : Référentiels du MCEO-F et du MCEO-GN entre les instant  $\tau-\Delta\tau$  et  $\tau$ 

#### 4.1.3.6 Actualisation des contraintes en projection dans le solide suiveur de Green-Naghdi

Nous venons de montrer qu'il existe deux possibilités pour actualiser les contraintes à l'aide de  $\alpha$ . Nous détaillons ici la première. Elle consiste à travailler dans le solide suiveur de Green-Naghdi en calculant les deux termes de la formule matricielle de Hughes-Winget :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}} = \left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{e^t\}} + \left[ \Delta \mathbb{R}_{\Delta}^{\mathbb{R}} \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}}$$

L'incrément de contrainte se calcule immédiatement car il s'agit d'un changement de base par la rotation relative  $\alpha$  à l'instant  $t+\Delta t$  :

$$\left[ \Delta \mathbb{R}_{\Delta}^{\mathbb{R}} \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}} = \left[ \underline{\underline{\alpha}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}}^T \left[ \Delta \mathbb{R}_{\Delta}^{\mathbb{R}} \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}} \left[ \underline{\underline{\alpha}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}} \quad (4.52)$$

Par contre, les anciennes contraintes posent problème : il faut corriger celles passées par le code car elles sont entraînées par la rotation de Green-Naghdi et non par la rotation matérielle du MCEO-F. Il faut donc utiliser une formule de Hughes-Winget modifiée pour travailler avec les anciennes contraintes du code :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{t+\Delta t} = \underline{\underline{T}}_{\perp/t\Delta} \left( \underline{\underline{T}}_{\perp/t\Delta}^{-1} \left( \underline{\underline{\sigma}}_{\text{code}} \right) \right) + \Delta \mathbb{R}_{\Delta}^{\mathbb{R}} \underline{\underline{\sigma}}$$

Les anciennes contraintes sont issues du transport rotationnel inverse défini par  $\alpha$  :

$$\underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{\Delta}}} \left( \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{R}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\sigma}}_{\text{code}} \right) \right) = \underline{\underline{\Delta}} \cdot \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{\text{code}} \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{\Delta}}^T = \underline{\underline{\alpha}}^T \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{\alpha}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\sigma}}_{\text{code}} \right)$$

Nous avons donc matriciellement :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{e^t\}} = \left[ \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{\alpha}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\sigma}}_{\text{code}} \right) \right]_{\{e^t\}} = \left[ \underline{\underline{\alpha}}^T \right]_{\{e^t\}} \left[ \underline{\underline{\sigma}}_{\text{code}} \right]_{\{e^t\}} \left[ \underline{\underline{\alpha}} \right]_{\{e^t\}}$$

Cette expression, en vertu de l'identité (3.16) entre les matrices de rotation dans la base initiale et la base tournée, s'écrit :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{e^t\}} = \left[ \underline{\underline{\alpha}}^T \right]_{\{g_n^t\}} \left[ \underline{\underline{\sigma}}_{\text{code}} \right]_{\{e^t\}} \left[ \underline{\underline{\alpha}} \right]_{\{g_n^t\}} \quad (4.53)$$

L'inconvénient de cette formulation réside dans le calcul du tenseur  $\alpha$  en début d'incrément pour calculer (4.53) et en fin d'incrément pour calculer (4.52). Dans un souci d'économie, ce n'est pas cette possibilité que nous utiliserons.

#### 4.1.3.7 Actualisation des contraintes en projection dans le solide suiveur matériel

La deuxième possibilité consiste à travailler dans notre solide suiveur matériel exclusivement et à effectuer au final un changement de base du tenseur des contraintes vers la base de Green-Naghdi pour renseigner le code de calcul conformément à ses attentes. Cette option est la plus intéressante car seul  $\alpha$  en fin d'incrément est requis. Attention cependant, il est nécessaire de stocker nos anciennes contraintes matérielles. Cela implique en pratique la définition de six variables utilisateurs supplémentaires, ce qui est bien moins coûteux que le calcul de  $\alpha$  en début d'incrément.

Nous évaluons dans premier temps les nouvelles contraintes à l'aide de (4.49) :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}} = \underbrace{\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{g_n^t\}}}_{\text{Stocké en variable utilisateur}} + \left[ \underline{\underline{\Delta}}^{\text{RN}} \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}} \quad (4.54)$$

Puis, à l'aide de (4.51), nous obtenons les nouvelles contraintes à renvoyer au code de calcul par un changement de base :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}} = \left[ \underline{\underline{\alpha}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}}^T \left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}} \left[ \underline{\underline{\alpha}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}} \quad (4.55)$$

C'est cette variante que nous recommandons d'implémenter.

#### 4.1.3.8 Relation entre $\beta$ et $\alpha$

Il ne reste plus qu'à calculer  $\alpha$  dans la base matérielle OND en fin d'incrément pour en finir avec la formulation correctrice du MCEO-F. Pour cela, nous mettons en évidence le lien entre les tenseurs  $\alpha$  et  $\beta$ . D'après les définitions (4.39) et (4.50), nous avons :

$$\underline{\underline{\beta}} = \underline{\underline{\Delta}}^T \cdot \underline{\underline{\alpha}} \cdot \underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{\Delta}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\alpha}} \right)$$

En vertu des propriétés du transport rotationnel, nous avons donc :

$$\left[ \underline{\underline{\beta}} \right]_{\{e^0\}} = \left[ \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\underline{\Delta}}}^{-1} \left( \underline{\underline{\alpha}} \right) \right]_{\{e^0\}} = \left[ \underline{\underline{\alpha}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}}$$

La matrice de  $\alpha$  dans la base matérielle OND est donc égale à celle de  $\beta$  dans l'orientation initiale. Cela implique que seul le calcul de l'une des deux est nécessaire :

$$\boxed{\left[ \underline{\underline{\alpha}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}} = \left[ \underline{\underline{\beta}} \right]_{\{e^0\}} = \left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^T \left[ \underline{\underline{R}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}} \quad (4.56)$$

*Remarque* : comme promis au 4.1.3.3, il est maintenant possible d'interpréter la matrice de  $\underline{\underline{\beta}}$  dans l'orientation initiale comme la matrice de passage de la base matérielle OND vers la base de Green-Naghdi et de réécrire l'équation (4.46) sous la forme :

$$\left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}} = \left[ \underline{\underline{\alpha}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}} \left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}} \left[ \underline{\underline{\alpha}} \right]_{\{g_n^{t+\Delta t}\}}^T$$

#### 4.1.3.9 Implémentation de la formulation correctrice du MCEO-F dans Abaqus/Explicit

Nous donnons ici l'algorithme basé sur la formulation correctrice précédemment décrite. C'est lui que nous utilisons par la suite pour effectuer des simulations numériques à l'aide du MCEO-F dans Abaqus/Explicit.

Nous nous plaçons sur un incrément de temps  $[t, t+\Delta t]$ . Les matrices dont nous avons besoin, passées par défaut par la VUMAT<sup>30</sup>, sont :

$$\left[ \underline{\underline{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}, \left[ \underline{\underline{U}} \right]_{\{e^0\}}, \left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}}$$

La VUMAT permet également de passer des variables utilisateurs (appelées SDV dans le jargon du code). Nous avons besoin d'en définir 21, au minimum, qui sont les composantes de l'orientation initiale, de l'ancien tenseur de contrainte et de l'ancien tenseur de déformation. Les matrices suivantes sont donc disponibles en début d'incrément :

$$\left[ \underline{\underline{O}} \right]_{\{G\}}, \left[ \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{g_n^t\}}, \left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{g_n^t\}},$$

La seule matrice à retourner à la VUMAT en fin d'incrément est :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}}$$

Voici l'algorithme que nous avons implémenté :

#### ◆ Début de la boucle sur les points de Gauss

\*Si  $t=0$ , stocker l'orientation initiale :

$$\left[ \underline{\underline{O}} \right]_{\{G\}} = \left[ \underline{\underline{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \quad (4.57)$$

*Remarque* : (4.57) est trouvée à partir de (3.20) en prenant  $\left[ \underline{\underline{F}} \right]_{\{G\}} = \left[ \underline{\underline{1}} \right]_{\{G\}}$

- \*Inverser  $\underline{\underline{U}}$  à  $t+\Delta t$  dans l'orientation initiale avec (4.35)
- \*Calculer  $\underline{\underline{R}}$  à  $t+\Delta t$  en base mixte avec (4.34)
- \*Calculer  $\underline{\underline{\Delta}}$  à  $t+\Delta t$  en base mixte avec (4.31)
- \*Calculer  $\underline{\underline{\alpha}}$  à  $t+\Delta t$  dans la base matérielle OND avec (4.56)
- \*Calculer l'incrément de déformation matérielle dans la base matérielle OND avec (4.46)
- \*Calculer la déformation matérielle à  $t+\Delta t$  dans la base matérielle OND avec (4.47)

<sup>30</sup> Nous rappelons qu'une VUMAT est une routine utilisateur permettant de définir la loi de comportement dans Abaqus/Explicit.

\*Calculer les nouveaux modules d'Young transversaux à  $t+\Delta t$  avec la loi d'écrasement (4.48)

\*Actualiser les composantes à  $t+\Delta t$  du tenseur de comportement dans la base matérielle OND avec (4.6)

\*Calculer l'incrément de contrainte dans la base matérielle OND avec (4.49)

\*Actualiser les nouvelles contraintes à  $t+\Delta t$  dans la base matérielle OND avec (4.54)

\*Retourner les nouvelles contraintes à  $t+\Delta t$  dans la base de Green-Naghdi avec (4.55)

◆Fin de la boucle sur les points de Gauss

## 4.2 Application numérique sur le test de cisaillement simple / extension

La transformation de glissement simple est un test classique pour l'analyse des formulations en MGT. Dans quasiment toute la littérature sur la MGT, on l'utilise pour illustrer les formulations construites et les comparer entre elles, ou bien encore les mettre en évidence lors de l'utilisation d'un code de calcul ([CHE96]). A titre d'exemples représentatifs, nous pouvons citer : [BIL03], [BOU98], [BOU97], [BOU94], [GIL94b], [GIL93b], [GIL93c], [SZA89], [DOG86], [DAF83], [DIE79]... Cette popularité s'explique par les deux avantages que présente cette transformation :

- Elle est simple et homogène. Des solutions analytiques peuvent donc être trouvées.
- Elle présente une rotation pure  $\mathbf{R}$  évoluant dans le temps. La transformation fait donc ressortir des difficultés liées à l'actualisation de tenseurs qui n'existerait pas si  $\mathbf{R}$  était constante.

En conséquence, nous proposons d'analyser le MCEO-F et de le comparer au MCEO-GN sur cet exemple, mais enrichi d'une phase d'extension. Cette phase venant après ou avant la phase de glissement simple, elle permet de rajouter un niveau supplémentaire de vérification de nos théories.

Dans ce paragraphe, nous détaillons les cinématiques du glissement simple et du glissement simple / extension. Nous développons ensuite la solution analytique complète du MCEO-F dans le cas du glissement simple afin de vérifier que nous l'avons correctement implémenté. Pour cela, nous corrélons la solution analytique avec la solution numérique renvoyée par Abaqus/Explicit, le code de calcul utilisé pour modéliser la maille de tricot. Ensuite, nous comparons notre formulation avec le MCEO-GN sur le cas du glissement simple / extension, ce qui nous permet d'expliquer, enfin, pourquoi le MCEO-GN est une formulation inadéquate pour les modéliser les milieux orthotropes en grandes transformations et pourquoi notre formulation est mieux adaptée.

### 4.2.1 Cinématique du glissement simple

#### 4.2.1.1 Placement et tenseur gradient de la transformation $\mathbf{F}$

Soit  $M$  un point matériel quelconque du parallépipède cisailé.  $X_i$  représentent ses coordonnées initiales et  $x_i$  ses coordonnées actuelles, dans la base globale  $\{G\}$ . La transformation est paramétrée par la fonction  $a$ , sans dimensions. L'application placement de cette transformation s'écrit :

$$[\underline{OM}]_{\{G\}} = [\underline{\phi}]_{\{G\}} = [\underline{x}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} X_1 + aX_2 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Nous représentons schématiquement cette transformation sur la Figure 4-4.

Nous obtenons le gradient de la transformation en dérivant dans la configuration initiale l'application placement :

$$[\underline{F}]_{\{G\}} = \left[ \text{Grad}_{\underline{x}} \underline{\phi} \right]_{\{G\}} = \left[ \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

*Remarque* :  $\mathbf{F}$  ne dépendant pas des coordonnées du point matériel étudié, cette transformation est bien homogène.

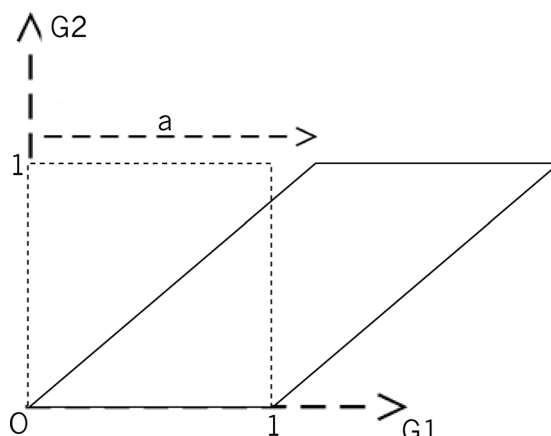


Figure 4-4 : Cisaillement simple d'un cube unitaire paramétré par  $a$

#### 4.2.1.2 Représentation graphique du glissement simple

Graphiquement, il est maintenant possible de représenter cette transformation en calculant l'image par  $\mathbf{F}$  des segments infinitésimaux, de même longueur, passant par un point quelconque, la transformation étant homogène. C'est ce qui est fait sur les Figure 4-5, Figure 4-6, Figure 4-7 et Figure 4-8 pour  $a$  variant de 0 à 3, par incrément de 0,5.

Nous constatons que la transformation est très sévère, tous les segments tendant à s'aligner vers  $0^\circ$  avec  $a$  croissant. Nous remarquons que le segment à  $0^\circ$  reste constant : il ne s'allonge pas et ne tourne pas. D'autre part, nous remarquons que les segments ayant une orientation initiale comprise entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$  (premier et troisième cadrans sur les figures) travaillent tous en traction, alors que les segments ayant une orientation initiale comprise entre  $90^\circ$  et  $180^\circ$  (deuxième et quatrième cadrans sur les figures) travaillent d'abord en compression, puis en traction dès que leur orientation actuelle se retrouve dans le premier ou le troisième cadran.

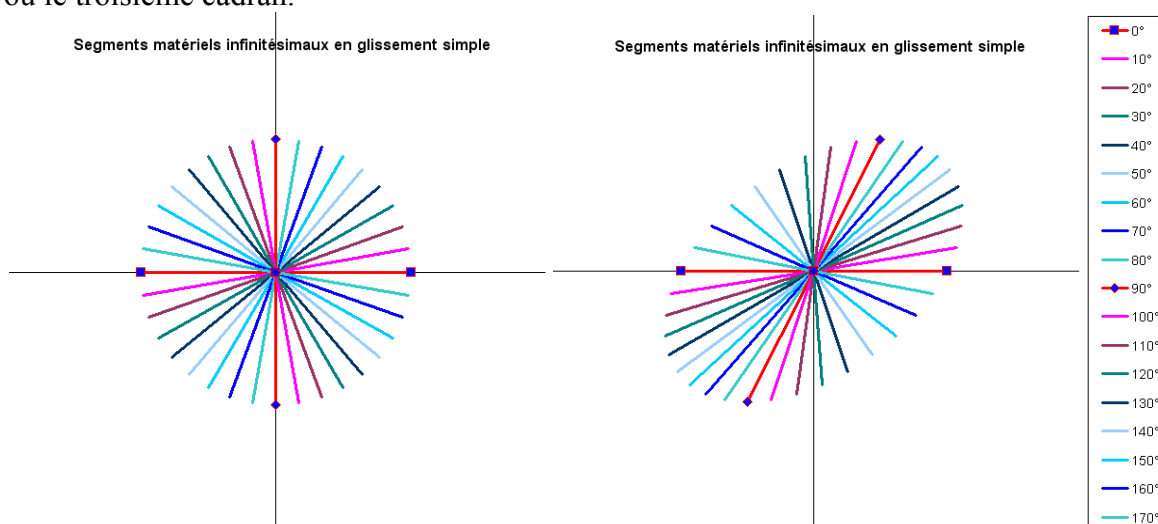


Figure 4-5 : Glissement simple,  $a=0$  et  $a=0,5$

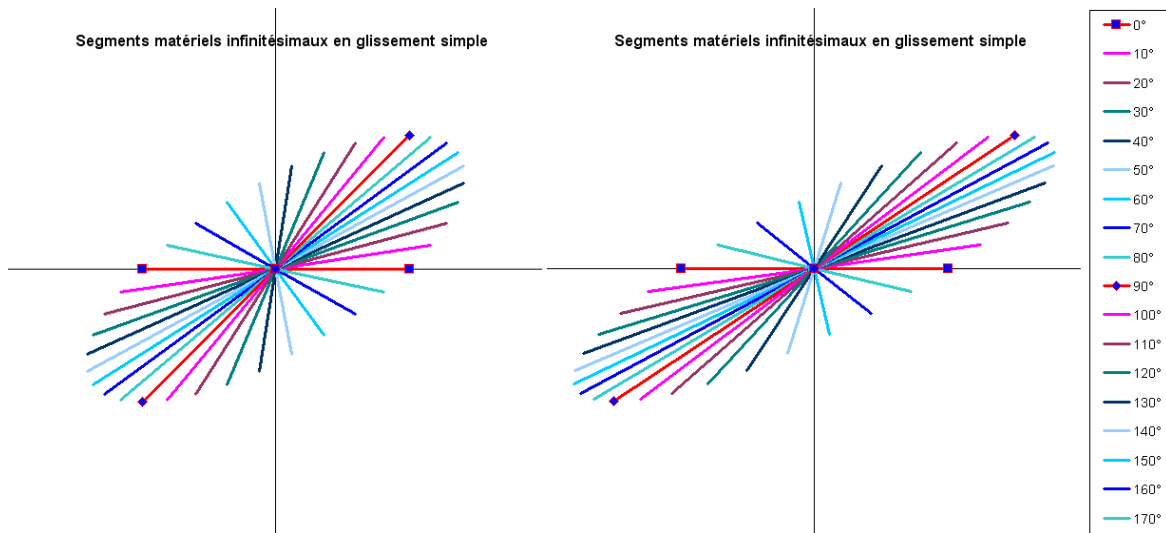


Figure 4-6 : Glissement simple,  $a=1$  et  $a=1,5$

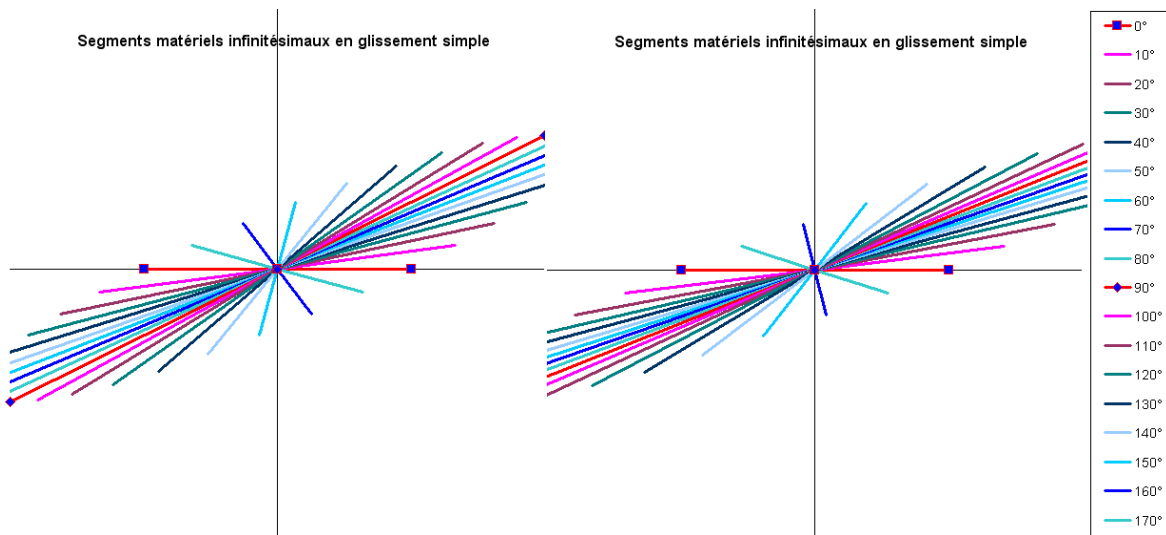


Figure 4-7 : Glissement simple,  $a=2$  et  $a=2,5$

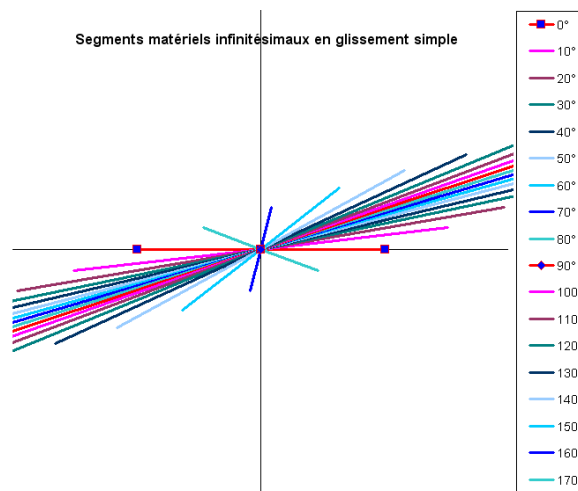


Figure 4-8 : Glissement simple,  $a=3$

4.2.1.3 Elongation pure à droite  $\mathbf{U}$ 

$\mathbf{U}$  doit permettre de calculer la rotation pure  $\mathbf{R}$ . En formant le tenseur de Cauchy-Green  $\mathbf{C}=\mathbf{F}^T\mathbf{F}$  et en le diagonalisant, nous obtenons :

$$[\underline{\underline{\mathbf{U}}}]_{\{G\}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & 1+\frac{a^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

 4.2.1.4 Rotation pure  $\mathbf{R}$ 

A partir de la décomposition polaire de  $\mathbf{F}$ , nous calculons  $\mathbf{R}=\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$  :

$$[\underline{\underline{\mathbf{R}}}]_{\{G\}} = [\underline{\underline{\mathbf{F}}}]_{\{G\}} [\underline{\underline{\mathbf{U}}}]_{\{G\}}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{2} & 0 \\ -\frac{a}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$\mathbf{R}$  est bien variable, ce qui est un des intérêts de la transformation.

 4.2.1.5 Gradient eulérien des vitesses  $\mathbf{L}$ , taux de déformation  $\mathbf{D}$  et spin  $\mathbf{W}$ 

Il est essentiel de connaître  $\mathbf{D}$ , car c'est à partir de lui que l'incrément de déformation est calculé. Pour cela, il faut trouver le champ des vitesses et l'exprimer dans la configuration actuelle,  $\mathbf{D}$  provenant de  $\mathbf{L}$  qui est un gradient eulérien.

Nous dérivons par rapport au temps l'application placement pour avoir le champ des vitesses. Pour dériver dans la configuration actuelle le résultat, il est nécessaire de l'exprimer en fonction des coordonnées actuelles  $x_i$  :

$$[\underline{\underline{\mathbf{v}}}]_{\{G\}} = [\underline{\underline{\dot{\phi}}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \dot{a}X_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{a}x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Le gradient eulérien des vitesses est obtenu en dérivant dans la configuration actuelle le champ des vitesses :

$$[\underline{\underline{\mathbf{L}}}]_{\{G\}} = \left[ \text{Grad}_{\underline{\underline{\mathbf{x}}}} \underline{\underline{\mathbf{v}}} \right]_{\{G\}} = \left[ \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{v}}}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{x}}}} \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Le gradient eulérien  $\mathbf{L}$  se décompose additivement de manière unique (somme directe des espaces vectoriels des tenseurs symétriques et antisymétriques) en un tenseur symétrique  $\mathbf{D}$  (taux de déformation) et un tenseur antisymétrique  $\mathbf{W}$  (spin) :

$$[\underline{\underline{\mathbf{L}}}]_{\{G\}} = [\underline{\underline{\mathbf{D}}}]_{\{G\}} + [\underline{\underline{\mathbf{W}}}]_{\{G\}}$$

Par définition, la partie symétrique de  $\mathbf{L}$  donne  $\mathbf{D}$  :



$$[\underline{\underline{D}}]_{\{G\}} = \text{sym}([\underline{\underline{L}}]_{\{G\}}) = \frac{\dot{a}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

La partie antisymétrique donne le spin  $\mathbf{W}$  :

$$[\underline{\underline{W}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{a}}{2} & 0 \\ -\frac{\dot{a}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ces tenseurs sont constants si le paramètre  $a$  est une fonction linéaire du temps.

## 4.2.2 Cinématique du glissement simple / extension

### 4.2.2.1 Placement et tenseur gradient de la transformation $\mathbf{F}$

Nous reprenons la cinématique du §4.2.1 en l'enrichissant par un nouveau paramètre  $u$ , représenté sur la Figure 4-9. La transformation peut alors être de la traction simple si  $a$  est nul, ou bien de l'extension si  $a$  est non nul (il ne s'agit alors plus de traction).

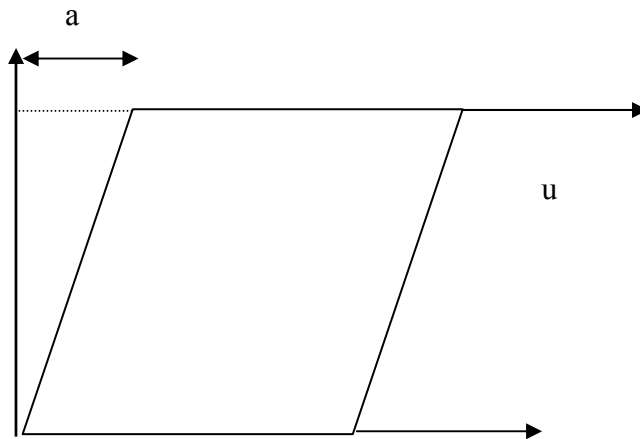


Figure 4-9 : Cisaillement simple / extension d'un cube unitaire paramétré par  $a$  et  $u$

L'application placement de cette transformation s'écrit :

$$[\underline{\underline{OM}}]_{\{G\}} = [\underline{\underline{\phi}}]_{\{G\}} = [\underline{\underline{x}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} X_1 + uX_1 + aX_2 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Nous obtenons le gradient de la transformation en dérivant dans la configuration initiale l'application placement :

$$[\underline{\underline{F}}]_{\{G\}} = \left[ \underline{\underline{\text{Grad} \phi}} \right]_{\{G\}} = \left[ \frac{\partial \underline{\underline{x}}}{\partial \underline{\underline{X}}} \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 1+u & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

*Remarque* : cette transformation est toujours homogène.

4.2.2.2 Représentation graphique de l'extension après le glissement simple

Nous utilisons le même procédé qu'au 4.2.1.2 pour illustrer l'effet de cette transformation après la phase de glissement simple du même sous-paragraphe. Pour bien se rendre compte des grandes transformations, nous remettons sur la Figure 4-10 les segments initiaux ( $a=u=0$ ) et les segments en fin de phase de glissement simple ( $a=3, u=0$ ). Sur la Figure 4-11, nous faisons varier  $u$  par incrément de 1,5. Nous constatons bien qu'il y a des rotations de presque tous les segments matériels : il ne s'agit donc pas d'une traction car  $\mathbf{R}$  évolue. Nous le montrons mathématiquement au 4.2.2.4.

Prêtons une attention particulière aux segments orientés initialement à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  :

- Le segment à  $0^\circ$  était constant dans la phase de glissement simple, maintenant il s'allonge et son élongation est  $\lambda=1+u$ . Par contre, il ne tourne toujours pas.
- Le segment à  $90^\circ$  reste constant dans cette phase d'extension : il ne tourne plus et ne s'allonge plus.

Nous pouvons en conclure que les directions initiales à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  sont deux directions particulières à analyser lors du test de glissement simple / extension, ce que nous ferons par la suite.

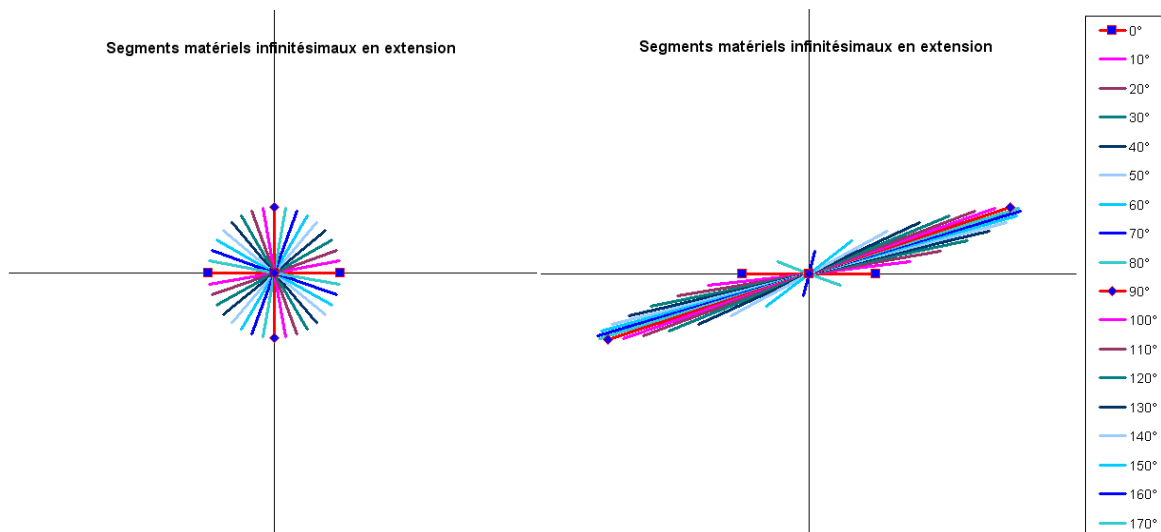


Figure 4-10 : Glissement simple / Extension, ( $a=0, u=0$ ) et ( $a=3, u=0$ )

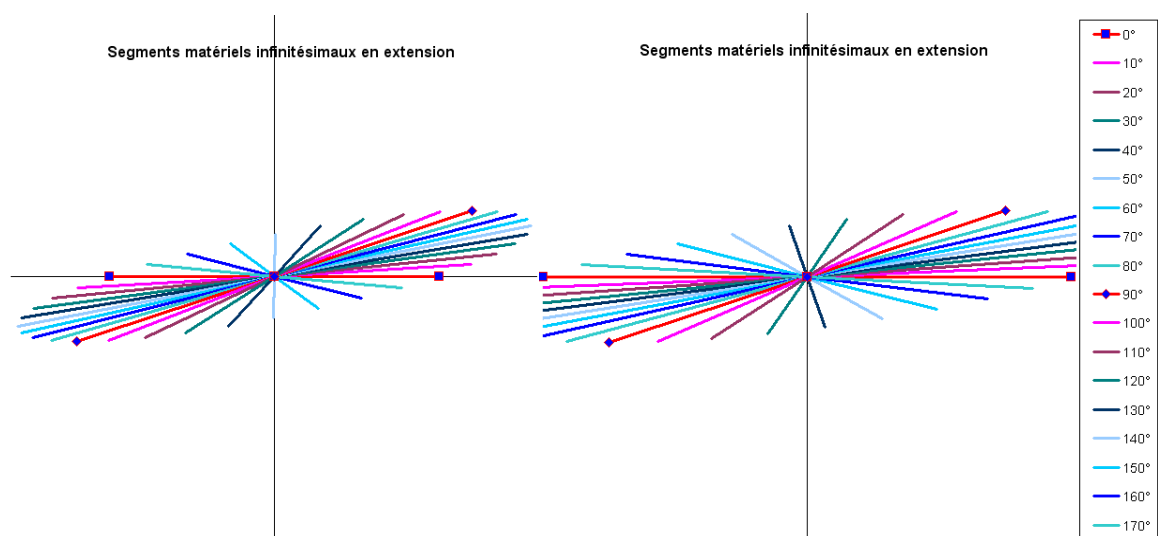


Figure 4-11 : Glissement simple / Extension, ( $a=3, u=1,5$ ) et ( $a=3, u=3$ )

4.2.2.3 Elongation pure à droite U

En formant le tenseur de Cauchy-Green  $\mathbf{C}=\mathbf{F}^T\mathbf{F}$  et en le diagonalisant (nous passons les calculs), nous obtenons :

$$[\underline{\underline{\mathbf{U}}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \frac{a(1+u)}{\sqrt{a^2(1+u)^2 + (\lambda_1^2 - (1+u)^2)^2}} & \frac{a(1+u)}{\sqrt{a^2(1+u)^2 + (\lambda_2^2 - (1+u)^2)^2}} & 0 \\ \frac{\lambda_1^2 - (1+u)^2}{\sqrt{a^2(1+u)^2 + (\lambda_1^2 - (1+u)^2)^2}} & \frac{\lambda_2^2 - (1+u)^2}{\sqrt{a^2(1+u)^2 + (\lambda_2^2 - (1+u)^2)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Avec l'expression des valeurs propres de  $\mathbf{U}$  données par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{\frac{u^2}{4} + u + \frac{a^2}{4} + 1} - \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{2} \\ \lambda_2 = \sqrt{\frac{u^2}{4} + u + \frac{a^2}{4} + 1} + \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{2} \\ \lambda_3 = 1 \end{cases} \quad (4.68)$$

 4.2.2.4 Rotation pure R

Nous obtenons  $\mathbf{R}=\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$  après avoir inversé  $\mathbf{U}$  dans sa base propre et effectué le changement de base vers la base globale :

$$[\underline{\underline{\mathbf{R}}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & 0 \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

avec les composantes de  $\mathbf{R}$  en base globale données par :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{11} = (1+u)(N_{11}^2\lambda_1^{-1} + N_{21}^2\lambda_2^{-1}) + a(N_{12}N_{11}\lambda_1^{-1} + N_{22}N_{21}\lambda_2^{-1}) \\ \mathbf{R}_{12} = (1+u)(N_{12}N_{11}\lambda_1^{-1} + N_{22}N_{21}\lambda_2^{-1}) + a(N_{12}^2\lambda_1^{-1} + N_{22}^2\lambda_2^{-1}) \\ \mathbf{R}_{21} = N_{12}N_{11}\lambda_1^{-1} + N_{22}N_{21}\lambda_2^{-1} \\ \mathbf{R}_{22} = N_{12}^2\lambda_1^{-1} + N_{22}^2\lambda_2^{-1} \\ \mathbf{R}_{33} = N_{33}^2\lambda_3^{-1} = 1 \end{cases}$$

Ces expressions font intervenir la matrice  $[\mathbf{N}]$  des vecteurs propres de  $\mathbf{U}$  :

$$[\mathbf{N}]_{\{G\}}^T = \left[ [\underline{\underline{\mathbf{N}}}_1]_{\{G\}} \quad [\underline{\underline{\mathbf{N}}}_2]_{\{G\}} \quad [\underline{\underline{\mathbf{N}}}_3]_{\{G\}} \right] = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{21} & 0 \\ N_{12} & N_{22} & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} \end{bmatrix}$$

Ces expressions s'évaluent à l'aide des valeurs propres de  $\mathbf{U}$  qui sont données par le jeu d'équation (4.68) :

$$[\mathbf{N}]_{\{G\}}^T = \begin{bmatrix} \frac{a(1+u)}{\sqrt{a^2(1+u)^2 + (\lambda_1^2 - (1+u)^2)^2}} & \frac{a(1+u)}{\sqrt{a^2(1+u)^2 + (\lambda_2^2 - (1+u)^2)^2}} & 0 \\ \frac{\lambda_1^2 - (1+u)^2}{\sqrt{a^2(1+u)^2 + (\lambda_1^2 - (1+u)^2)^2}} & \frac{\lambda_2^2 - (1+u)^2}{\sqrt{a^2(1+u)^2 + (\lambda_2^2 - (1+u)^2)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous constatons bien que la rotation du référentiel de Green-Naghdi est non-nulle,  $\mathbf{R}$  évoluant en fonction de  $u$  à  $a$  fixé. De la première colonne de la matrice de  $\mathbf{R}$ , nous déduisons l'angle de cette rotation en supposant le référentiel de Green-Naghdi initial orienté par la base globale :

$$\theta_{GN} = \text{Ar cos} \left( (1+u) \left( N_{11}^2 \lambda_1^{-1} + N_{21}^2 \lambda_2^{-1} \right) + a \left( N_{12} N_{11} \lambda_1^{-1} + N_{22} N_{21} \lambda_2^{-1} \right) \right)$$

Si nous traçons l'évolution de l'opposé de cet angle (ce dernier étant négatif) dans la transformation complète de glissement simple (jusqu'à  $a=3$  avec  $u=0$ ) puis d'extension (jusqu'à  $u=3$  avec  $a=3$ ), nous obtenons la Figure 4-12.

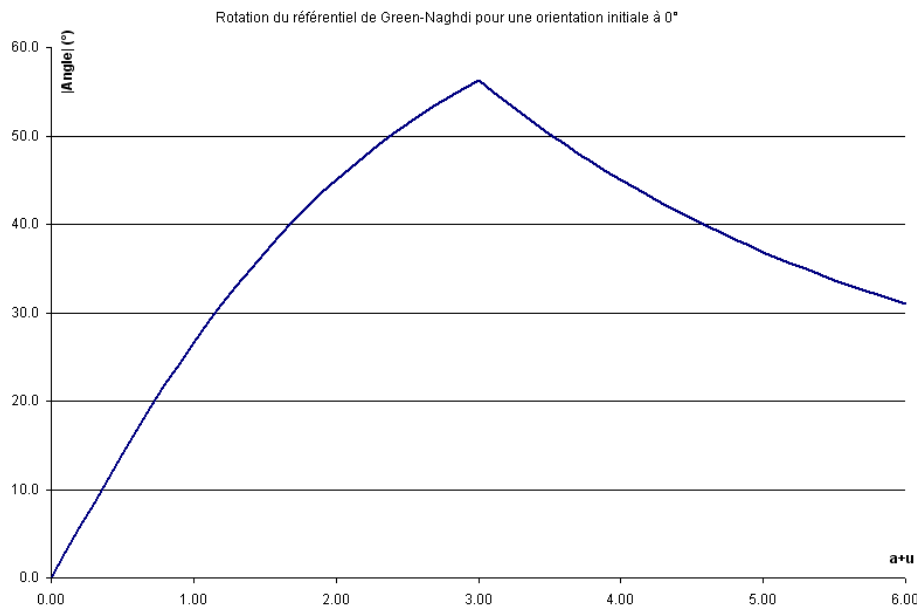


Figure 4-12 : Rotation du référentiel de Green-Naghdi

#### 4.2.2.5 Gradient eulérien des vitesses $\mathbf{L}$ , taux de déformation $\mathbf{D}$ et spin $\mathbf{W}$

Pour calculer le champ des vitesses, nous dérivons classiquement par rapport au temps l'application placement :

$$[\mathbf{v}]_{\{G\}} = [\dot{\Phi}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \dot{u}X_1 + \dot{a}X_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Pour dériver dans la configuration actuelle le résultat, il est nécessaire de l'exprimer en fonction des coordonnées actuelles  $x_i$ . D'après le placement (4.65) :

$$x_1 = X_1 + uX_1 + aX_2 \Rightarrow x_1 = (1+u)X_1 + ax_2 \Rightarrow X_1 = \frac{x_1 - ax_2}{1+u}$$

(4.70) devient :

$$[\underline{\mathbf{v}}]_{\{G\}} = [\underline{\dot{\phi}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \dot{u}X_1 + \dot{a}X_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}\left(\frac{x_1 - ax_2}{1+u}\right) + \dot{a}x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{u}}{1+u}x_1 + \left(\dot{a} - a\frac{\dot{u}}{1+u}\right)x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le gradient eulérien des vitesses est obtenu en dérivant dans la configuration actuelle le champ des vitesses :

$$[\underline{\mathbf{L}}]_{\{G\}} = \left[ \text{Grad}_{\underline{\mathbf{x}}} \underline{\mathbf{v}} \right]_{\{G\}} = \left[ \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{u}}{1+u} & \dot{a} - a\frac{\dot{u}}{1+u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Or, l'extension n'a pas lieu en même temps que le glissement simple,  $a$  est donc fixe quand  $u$  varie et  $\mathbf{L}$  se simplifie en :

$$[\underline{\mathbf{L}}]_{\{G\}} = \left[ \text{Grad}_{\underline{\mathbf{x}}} \underline{\mathbf{v}} \right]_{\{G\}} = \left[ \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \right]_{\{G\}} = \frac{\dot{u}}{1+u} \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Par définition, la partie symétrique de  $\mathbf{L}$  (4.71) donne  $\mathbf{D}$  :

$$[\underline{\mathbf{D}}]_{\{G\}} = \text{sym}\left([\underline{\mathbf{L}}]_{\{G\}}\right) = \frac{\dot{u}}{1+u} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{2} & 0 \\ -\frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Nous constatons que  $\mathbf{D}$  a des composantes de taux de cisaillement constantes, ce qui produira une mesure de déformation de cisaillement variable. De même, le spin est non nul :

$$[\underline{\mathbf{W}}]_{\{G\}} = \frac{\dot{u}}{1+u} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 4.2.3 Solution analytique générale sur le test du glissement simple pour une orientation initiale arbitraire

#### 4.2.3.1 Orientation initiale $\mathbf{O}$

Nous prenons une orientation initiale  $\{e^0\}$  définie relativement à la base globale  $\{G\}$  et arbitrairement par  $\theta_0$ . L'orientation initiale est donc l'image de la base globale par le tenseur  $\mathbf{O}$ . L'orientation initiale n'étant pas confondue avec la base globale, nous écrivons la majorité des projections en base mixte.

L'orientation initiale se représente par un tenseur de rotation  $\mathbf{O}$  défini par :

$$\underline{e}_i^0 = \underline{\underline{O}} \cdot \underline{G}_i$$

$\mathbf{O}$  est donc donné dans la base globale par :

$$\left[ \underline{\underline{O}} \right]_{\{G\}} = \left[ \begin{array}{ccc} \left[ \underline{e}_1^0 \right]_{\{G\}} & \left[ \underline{e}_2^0 \right]_{\{G\}} & \left[ \underline{e}_3^0 \right]_{\{G\}} \end{array} \right]$$

Nous prenons une orientation initiale dont le troisième axe est confondu avec celui de la base globale. Dans ce cas, le problème est plan. Nous pouvons alors orienter les vecteurs de l'orientation initiale par un angle  $\theta_0$  et nous pouvons écrire la matrice de  $\mathbf{O}$  dans la base globale :

$$\left[ \underline{\underline{O}} \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

#### 4.2.3.2 Tenseur gradient de la transformation $\mathbf{F}$

Le gradient de la transformation est connu puisque la cinématique est imposée : il est donné par (4.59). D'après (3.20), nous avons dans la base mixte formée par la base globale et l'orientation initiale :

$$\left[ \underline{\underline{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} = \left[ \underline{\underline{F}} \right]_{\{G\}} \left[ \underline{\underline{O}} \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\left[ \underline{\underline{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 + a \sin \theta_0 & -\sin \theta_0 + a \cos \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

#### 4.2.3.3 Base matérielle OND $\{g_n\}$ et tenseur de rotation matérielle $\Delta$

Pour définir la base matérielle OND, il est nécessaire de calculer son premier vecteur qui reste unitaire tout en étant convecté par  $\mathbf{F}$ . Il s'agit de la direction forte d'anisotropie qui, par définition, est colinéaire à l'image par  $\mathbf{F}$  du premier vecteur de l'orientation initiale  $\{e^0\}$  :

$$\left[ \underline{\mathbf{g}}_{n_1} \right]_{\{G\}} = \frac{\left[ \underline{\mathbf{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \left[ \underline{\mathbf{e}}_1^0 \right]_{\{e^0\}}}{\left\| \left[ \underline{\mathbf{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \left[ \underline{\mathbf{e}}_1^0 \right]_{\{e^0\}} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 + a \sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les deux autres vecteurs de la base matérielle OND s'obtiennent immédiatement :

$$\left[ \underline{\mathbf{g}}_{n_2} \right]_{\{G\}} = \frac{1}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}} \begin{bmatrix} -\sin \theta_0 \\ \cos \theta_0 + a \sin \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left[ \underline{\mathbf{g}}_{n_3} \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il est alors possible d'écrire la matrice de la rotation matérielle dans la base mixte. D'après (4.24), nous avons :

$$\left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}} & \frac{-\sin \theta_0}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}} & 0 \\ \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}} & \frac{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Il sera utile par la suite d'utiliser les composantes de  $\underline{\underline{\Delta}}$  sous une forme non développées, les calculs devenant vite lourds. Définissons la projection de  $\underline{\underline{\Delta}}$  en base mixte :

$$\underline{\underline{\Delta}} = \Delta_{ij} \underline{\mathbf{G}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j^0$$

Nous avons matriciellement :

$$\left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{21} & 0 \\ \Delta_{21} & \Delta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \Delta_{11} = \Delta_{22} &= \frac{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}} \\ \Delta_{21} = -\Delta_{12} &= \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}} \end{aligned}$$

Par la suite, les calculs vont faire intervenir les quantités ci-dessous définies à partir de ces composantes :

$$\begin{aligned} \Delta_{11}^2 &= \frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \\ \Delta_{21}^2 &= \frac{\sin^2 \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \\ \Delta_{11}^2 - \Delta_{21}^2 &= \frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 - \sin^2 \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \\ 2\Delta_{11}\Delta_{21} &= \frac{2a \sin^2 \theta_0 + \sin 2\theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \end{aligned} \quad (4.76)$$

4.2.3.4 Incrément infinitésimal de déformation

Afin de calculer la mesure de déformation dans la base matérielle OND, nous utilisons la formule (3.68) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{\mathbf{g}_n^t\}} = \int_0^t \underline{\underline{D}}_{\{\mathbf{g}_n\}} dt$$

D'après 3.1.2.3 et (4.3), il se calcule par le changement de base de  $\mathbf{D}$  suivant :

$$\underline{\underline{D}}_{\{\mathbf{g}_n\}} = \underline{\underline{\Delta}}_{\{G \otimes e^0\}}^T \underline{\underline{D}}_{\{G\}} \underline{\underline{\Delta}}_{\{G \otimes e^0\}}$$

$\mathbf{D}$  étant connu en base globale par (4.64), nous avons avec l'aide de (4.75) :

$$\underline{\underline{D}}_{\{\mathbf{g}_n\}} = \begin{array}{c} \underline{\underline{D}}_{\{\mathbf{g}_n\}} \\ \hline \dot{a} \\ \hline (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0 \end{array} \begin{bmatrix} \sin \theta_0 (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0) & \frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 - \sin^2 \theta_0}{2} & 0 \\ \frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 - \sin^2 \theta_0}{2} & -\sin \theta_0 (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.77)

L'incrément de déformation infinitésimal est donc :

$$\underline{\underline{D}}_{\{\mathbf{g}_n\}} dt = \begin{array}{c} \underline{\underline{D}}_{\{\mathbf{g}_n\}} \\ \hline da \\ \hline (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0 \end{array} \begin{bmatrix} \sin \theta_0 (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0) & \frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 - \sin^2 \theta_0}{2} & 0 \\ \frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 - \sin^2 \theta_0}{2} & -\sin \theta_0 (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.78)

 4.2.3.5 Mesure de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  dans la base matérielle OND

La mesure de déformation est définie par l'intégrale rotationnelle de  $\mathbf{D}$ , c'est-à-dire l'intégrale de  $\mathbf{D}$  dans notre référentiel matériel :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}}_{\perp/\underline{\underline{\Delta}}}(\underline{\underline{D}})$$

Nous cherchons à évaluer la projection de  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  dans la base matérielle OND :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{mij} \mathbf{g}_{n,i} \otimes \mathbf{g}_{n,j}$$

En usant des propriétés de l'intégration rotationnelle, nous avons :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{\mathbf{g}_n^t\}} = \underline{\underline{S}}_{\perp/\underline{\underline{\Delta}}}(\underline{\underline{D}})_{\{\mathbf{g}_n\}} = \int_0^t \underline{\underline{D}}_{\{\mathbf{g}_n\}} dt$$

Avec l'aide de (4.78), la matrice des déformations matérielles s'écrit :



$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{\{\underline{\underline{e}}_n\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{m11} & \varepsilon_{m12} & 0 \\ \varepsilon_{m12} & \varepsilon_{m22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_{m11} = -\varepsilon_{m22} = \int_0^a \frac{\sin \theta_0 (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} da \\ \varepsilon_{m12} = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 - \sin^2 \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} da \end{cases}$$

Intégrons ces équations pour obtenir explicitement les déformations matérielles. Pour cela, effectuons le changement de variable ci-dessous :

$$x = \cos \theta_0 + a \sin \theta_0$$

L'élément différentiel da devient donc :

$$da = \frac{dx}{\sin \theta_0}$$

- La composante 11 de la déformation matérielle s'écrit alors :

$$\varepsilon_{m11} = \int_{\cos \theta_0}^{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0} \sin \theta_0 \frac{x}{x^2 + \sin^2 \theta_0} \frac{dx}{\sin \theta_0} = \int_{\cos \theta_0}^{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0} \frac{x}{x^2 + \sin^2 \theta_0} dx$$

Une primitive connue permet de finir le calcul :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{m11} &= \left[ \frac{1}{2} \text{Ln} (x^2 + \sin^2 \theta_0) \right]_{\cos \theta_0}^{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0} \\ &= \frac{1}{2} \text{Ln} \left( (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0 \right) - \frac{1}{2} \text{Ln} (\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0) \\ &= \frac{1}{2} \text{Ln} (\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) - \frac{1}{2} \text{Ln} (1) \\ &= \frac{1}{2} \text{Ln} (\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) \end{aligned}$$

- La composante 12 de la déformation matérielle est plus difficile à calculer.

Il faut manipuler la fraction rationnelle sous l'intégrale :

$$\frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 - \sin^2 \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} = \frac{x^2 - \sin^2 \theta_0}{x^2 + \sin^2 \theta_0} = \frac{x^2 + \sin^2 \theta_0 - 2 \sin^2 \theta_0}{x^2 + \sin^2 \theta_0} = 1 - \frac{2 \sin^2 \theta_0}{x^2 + \sin^2 \theta_0}$$

L'intégrale s'écrit alors :

$$\varepsilon_{m12} = \int_{\cos \theta_0}^{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0} \left( 1 - \frac{2 \sin^2 \theta_0}{x^2 + \sin^2 \theta_0} \right) \frac{dx}{\sin \theta_0}$$

Une primitive connue permet de l'exprimer analytiquement :

$$\varepsilon_{m12} = \frac{1}{2 \sin \theta_0} \left[ x - 2 \sin \theta_0 \text{Arc tan} \frac{x}{\sin \theta_0} \right]_{\cos \theta_0}^{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0}$$

En simplifiant à l'aide des tangentes l'expression, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{m12} &= \frac{1}{2 \sin \theta_0} \left[ \cos \theta_0 + a \sin \theta_0 - 2 \sin \theta_0 \operatorname{Arc tan} \left( \frac{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0}{\sin \theta_0} \right) - \cos \theta_0 + 2 \sin \theta_0 \operatorname{Arc tan} \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} \right] \\
 &= \frac{1}{2 \sin \theta_0} \left( a \sin \theta_0 - 2 \sin \theta_0 \operatorname{Arc tan} \left( a + \frac{1}{\tan \theta_0} \right) + 2 \sin \theta_0 \operatorname{Arc tan} \frac{1}{\tan \theta_0} \right) \\
 &= \frac{a}{2} - \operatorname{Arc tan} \left( a + \frac{1}{\tan \theta_0} \right) + \operatorname{Arc tan} \frac{1}{\tan \theta_0}
 \end{aligned}$$

La mesure de déformation dans la base matérielle OND est donc :

$$\left[ \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{\underline{\underline{g}}_n\}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \operatorname{Ln} (\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) & \frac{a}{2} - \operatorname{Arc tan} \left( a + \frac{1}{\tan \theta_0} \right) + \operatorname{Arc tan} \frac{1}{\tan \theta_0} & 0 \\ \frac{a}{2} - \operatorname{Arc tan} \left( a + \frac{1}{\tan \theta_0} \right) + \operatorname{Arc tan} \frac{1}{\tan \theta_0} & -\frac{1}{2} \operatorname{Ln} (\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.79)

*Remarque* : la déformation dans la direction matérielle 1 est logarithmique, comme cela a été montré au 3.3.3.3. En effet, si nous calculons l'élongation  $\lambda$  dans cette direction nous avons :

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 (\underline{\underline{g}}_{n1}) &= \frac{\left\| \left[ \underline{\underline{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \left[ \underline{\underline{e}}_1^0 \right]_{\{e^0\}} \right\|^2}{\left\| \left[ \underline{\underline{e}}_1^0 \right]_{\{e^0\}} \right\|^2} = \left\| \begin{bmatrix} \cos \theta_0 + a \sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 = (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0 \\
 &= a^2 \sin^2 \theta_0 + 1 + 2a \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\
 &= \sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1
 \end{aligned}$$

Or nous avons :

$$\underline{\underline{g}}_{n1} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{g}}_{n1} = \varepsilon_{m11} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} (\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) = \operatorname{Ln} (\sqrt{\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1}) = \operatorname{Ln} (\lambda (\underline{\underline{g}}_{n1}))$$

Conformément à notre théorie, nous avons bien une déformation logarithmique le long de la première direction matérielle, c'est-à-dire la direction forte d'anisotropie.

Par contre, la déformation dans la direction 2 ne correspond pas au logarithme de l'élongation d'un segment matériel mais d'une ligne spatiale orthogonale à chaque instant à la direction matérielle 1. Cette ligne est confondue avec différents segments matériels à différents instants et ne correspond donc à aucun segment physique.

#### 4.2.3.6 Mesure de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ dans la base globale

Calculons maintenant par un changement de base les composantes du tenseur de déformation en base globale à partir des déformation matérielles.  $\Delta$  est la matrice de passage de la base globale à la base matérielle OND. Nous avons donc :

$$\left[ \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{g_n\}} = \left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{e^0 \otimes G\}}^T \left[ \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{G\}} \left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}$$

En inversant la relation, nous avons :

$$\left[ \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{G\}} = \left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{g_n\}} \left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{e^0 \otimes G\}}^T \quad (4.80)$$

Effectuons le calcul matriciel :

$$\left[ \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{21} & 0 \\ \Delta_{21} & \Delta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{m11} & \varepsilon_{m12} & 0 \\ \varepsilon_{m12} & -\varepsilon_{m11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & 0 \\ -\Delta_{21} & \Delta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il vient :

$$\varepsilon_{11} = (\Delta_{11}^2 - \Delta_{21}^2) \varepsilon_{m11} - 2\Delta_{11}\Delta_{21}\varepsilon_{m12}$$

$$\varepsilon_{22} = (\Delta_{21}^2 - \Delta_{11}^2) \varepsilon_{m11} + 2\Delta_{11}\Delta_{21}\varepsilon_{m12} = -\varepsilon_{11}$$

$$\varepsilon_{12} = 2\Delta_{11}\Delta_{21}\varepsilon_{m11} + (\Delta_{11}^2 - \Delta_{21}^2) \varepsilon_{m12}$$

Evaluons ces composantes à l'aide des formules (4.76) et (4.79).

- La composante 11 donne :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 - \sin^2 \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) - \frac{2a \sin^2 \theta_0 + \sin 2\theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \left( \frac{a}{2} - \text{Arc tan} \left( a + \frac{1}{\tan \theta_0} \right) + \text{Arc tan} \frac{1}{\tan \theta_0} \right)$$

- La composante 22 donne :

$$\varepsilon_{22} = -\frac{1}{2} \frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 - \sin^2 \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) + \frac{2a \sin^2 \theta_0 + \sin 2\theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \left( \frac{a}{2} - \text{Arc tan} \left( a + \frac{1}{\tan \theta_0} \right) + \text{Arc tan} \frac{1}{\tan \theta_0} \right) = -\varepsilon_{11}$$

- La composante 12 donne :

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \frac{2a \sin^2 \theta_0 + \sin 2\theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) + \frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 - \sin^2 \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \left( \frac{a}{2} - \text{Arc tan} \left( a + \frac{1}{\tan \theta_0} \right) + \text{Arc tan} \frac{1}{\tan \theta_0} \right)$$

Nous constatons que la composante 11 est non-nulle alors que la matière ne subit pas de déformation dans cette direction d'après (4.59). C'est l'inconvénient des solides suiveurs basés sur des transports rotationnels. Pour cette orientation choisie, notre formulation privilégie le segment matériel initialement orienté à  $\theta_0$  en cumulant l'incrément de déformation dans sa direction actuelle. Comme les incréments ont la forme d'allongements élémentaires (d'après la signification de  $\mathbf{D}$ ), leur cumul donne une déformation logarithmique. Cependant, pour que cette déformation corresponde à un segment matériel, il faut que la direction de cumul soit toujours orientée selon ce segment. Avec notre formulation, cela n'est possible que pour une direction : la direction forte

d'anisotropie. Cette direction sera la seule correctement analysée, les autres n'ayant aucune raison de rester orthogonales à cette dernière. Il en résulte une déformation globale dans la direction 1 non-nulle, sauf dans le cas où  $\theta_0 = 0$ .

#### 4.2.3.7 Mesure de contrainte $\sigma$ dans la base matérielle OND

Pour calculer l'incrément de contrainte, il faut connaître la matrice représentant le tenseur de comportement d'une part, et réorganiser sous forme de colonnes les projections des tenseurs incrément de déformation et incrément de contrainte d'autre part (notation de Voigt). Le comportement est connu dans la base matérielle OND car il évolue selon le transport rotationnel matériel du 4<sup>ème</sup> ordre défini à partir de  $\Delta$ . La matrice du comportement est donnée par (4.5).

Dans notre test, nous choisissons des composantes du tenseur de comportement constantes dans le temps. Le tenseur des contraintes, sous la forme d'une matrice colonne, est donc (d'après le 3.3.3.2) obtenu directement en multipliant la matrice du tenseur de comportement par la matrice colonne mesure de déformation. Tout se passe comme si le matériau est élastique mais avec la mesure de déformation intégrée (4.79) :

$$\left[ \begin{matrix} \underline{\sigma} \\ \underline{\sigma} \\ \underline{\sigma} \end{matrix} \right]_{\{g_n\}} = \left[ \underline{\underline{C}} \right]_{\{g_n\}} \left[ \begin{matrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{\varepsilon} \\ \underline{\varepsilon} \end{matrix} \right]_{\{g_n\}}$$

La colonne des déformations s'écrit :

$$\left[ \begin{matrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{\varepsilon} \\ \underline{\varepsilon} \end{matrix} \right]_{\{g_n\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{m11} \\ -\varepsilon_{m11} \\ 0 \\ \varepsilon_{m12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) \\ -\frac{1}{2} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) \\ 0 \\ \frac{a}{2} - \text{Arc tan} \left( a + \frac{1}{\tan \theta_0} \right) + \text{Arc tan} \frac{1}{\tan \theta_0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La colonne des contraintes se calcule alors :

$$\left[ \begin{matrix} \underline{\sigma} \\ \underline{\sigma} \\ \underline{\sigma} \end{matrix} \right]_{\{g_n\}} = \begin{bmatrix} \sigma_{m11} \\ \sigma_{m22} \\ \sigma_{m33} \\ \sigma_{m12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{m11} \\ -\varepsilon_{m11} \\ 0 \\ \varepsilon_{m12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_{11} - C_{12}) \varepsilon_{m11} \\ (C_{12} - C_{22}) \varepsilon_{m11} \\ (C_{13} - C_{23}) \varepsilon_{m11} \\ C_{44} \varepsilon_{m12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sous la forme matricielle, le tenseur des contraintes de Cauchy est donc donné en base matérielle OND par :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{g_n\}} = \begin{bmatrix} (C_{11} - C_{12}) \varepsilon_{m11} & C_{44} \varepsilon_{m12} & 0 \\ C_{44} \varepsilon_{m12} & (C_{12} - C_{22}) \varepsilon_{m11} & 0 \\ 0 & 0 & (C_{13} - C_{23}) \varepsilon_{m11} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

4.2.3.8 Mesure de contrainte  $\sigma$  dans la base globale

Calculons maintenant par un changement de base les composantes du tenseur de contrainte en base globale à partir des contraintes matérielles (4.81).  $\Delta$  est la matrice de passage de la base globale à la base matérielle OND. De manière analogue à (4.80), nous avons donc :

$$\underline{[\underline{\sigma}]}_{\{G\}} = \underline{[\underline{\Delta}]}_{\{G \otimes e^0\}} \underline{[\underline{\sigma}]}_{\{g_n\}} \underline{[\underline{\Delta}]}_{\{e^0 \otimes G\}}^T$$

Effectuons le calcul matriciel :

$$\underline{[\underline{\sigma}]}_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{21} & 0 \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{m11} & \sigma_{m12} & 0 \\ \sigma_{m12} & \sigma_{m22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{m33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & 0 \\ -\Delta_{21} & \Delta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il vient :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \Delta_{11}^2 \sigma_{m11} + \Delta_{21}^2 \sigma_{m22} - 2\Delta_{11}\Delta_{21}\sigma_{m12} \\ \sigma_{22} = \Delta_{11}^2 \sigma_{m22} + \Delta_{21}^2 \sigma_{m11} + 2\Delta_{11}\Delta_{21}\sigma_{m12} \\ \sigma_{12} = \Delta_{11}\Delta_{21}(\sigma_{m11} - \sigma_{m22}) + (\Delta_{11}^2 - \Delta_{21}^2)\sigma_{m12} \\ \sigma_{33} = \sigma_{m33} \end{cases}$$

Evaluons ces composantes à l'aide des formules (4.76) et (4.81).

La composante 11 donne :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \Delta_{11}^2 (C_{11} - C_{12}) \varepsilon_{m11} + \Delta_{21}^2 (C_{12} - C_{22}) \varepsilon_{m11} - 2\Delta_{11}\Delta_{21}C_{44}\varepsilon_{m12} \\ &= (\Delta_{11}^2 (C_{11} - C_{12}) + \Delta_{21}^2 (C_{12} - C_{22})) \varepsilon_{m11} - 2\Delta_{11}\Delta_{21}C_{44}\varepsilon_{m12} \end{aligned}$$

Explicitement, nous avons :

- Pour la composante 11 :

$$\sigma_{11} = \left( \frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} (C_{11} - C_{12}) + \frac{\sin^2 \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} (C_{12} - C_{22}) \right) \frac{1}{2} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) - \frac{2a \sin^2 \theta_0 + \sin 2\theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} C_{44} \left( \frac{a}{2} - \text{Arc tan} \left( a + \frac{1}{\tan \theta_0} \right) + \text{Arc tan} \frac{1}{\tan \theta_0} \right)$$

- Pour la composante 22 :

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \Delta_{11}^2 (C_{12} - C_{22}) \varepsilon_{m11} + \Delta_{21}^2 (C_{11} - C_{12}) \varepsilon_{m11} + 2\Delta_{11}\Delta_{21}C_{44}\varepsilon_{m12} \\ &= (\Delta_{11}^2 (C_{12} - C_{22}) + \Delta_{21}^2 (C_{11} - C_{12})) \varepsilon_{m11} + 2\Delta_{11}\Delta_{21}C_{44}\varepsilon_{m12} \end{aligned}$$

Explicitement, nous avons :

$$\sigma_{22} = \left( \frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} (C_{12} - C_{22}) + \frac{\sin^2 \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} (C_{11} - C_{12}) \right) \frac{1}{2} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) + \frac{2a \sin^2 \theta_0 + \sin 2\theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} C_{44} \left( \frac{a}{2} - \text{Arc tan} \left( a + \frac{1}{\tan \theta_0} \right) + \text{Arc tan} \frac{1}{\tan \theta_0} \right)$$

- Pour la composante 12 :

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \Delta_{11}\Delta_{21} \left( (C_{11} - C_{12})\varepsilon_{m11} - (C_{12} - C_{22})\varepsilon_{m11} \right) + (\Delta_{11}^2 - \Delta_{21}^2)C_{44}\varepsilon_{m12} \\ &= \Delta_{11}\Delta_{21} (C_{11} + C_{22} - 2C_{12})\varepsilon_{m11} + (\Delta_{11}^2 - \Delta_{21}^2)C_{44}\varepsilon_{m12}\end{aligned}$$

Explicitement, nous avons :

$$\sigma_{12} = \frac{1}{4} \frac{2a \sin^2 \theta_0 + \sin 2\theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} (C_{11} + C_{22} - 2C_{12}) \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) + \frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 - \sin^2 \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} C_{44} \left( \frac{a}{2} - \text{Arc tan} \left( a + \frac{1}{\tan \theta_0} \right) + \text{Arc tan} \frac{1}{\tan \theta_0} \right)$$

- Pour la composante 33 :

$$\sigma_{33} = \sigma_{m33} = \frac{1}{2} (C_{13} - C_{23}) \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1)$$

#### 4.2.3.9 Milieu fibreux à une direction forte d'anisotropie sans raideurs transverses

Le paquet de fibre est le type de structure fibreuse que nous voulons représenter par un comportement équivalent. La direction forte d'anisotropie est celle des fibres, orientées initialement par le tenseur  $\mathbf{O}$  et actualisée par  $\Delta$ . Dans notre formulation, il s'agit de la direction portée par le premier vecteur de la base matérielle OND. Le module d'Young dans cette direction est donc très grand devant les autres modules, et les coefficients de Poisson sont très faibles. Par conséquent, nous testons le cas limite où toutes les composantes de  $\mathbf{C}$  sont nulles à l'exception de la première. Cela implique notamment qu'aucune loi d'écrasement ne soit prise en compte. La matrice du tenseur de comportement est alors :

$$[\mathbf{C}]_{\{g_n\}} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, (4.81) devient :

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{g_n\}} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{2} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Les contraintes dans la base globale deviennent :

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec :

- Pour la composante 11 :

$$\sigma_{11} = \left( \frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \right) \frac{E_1}{2} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) \quad (4.83)$$

- Pour la composante 22 :

$$\sigma_{22} = \left( \frac{\sin^2 \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \right) \frac{E_1}{2} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) \quad (4.84)$$

- Pour la composante 12 :

$$\sigma_{12} = \frac{a \sin^2 \theta_0 + \cos \theta_0 \sin \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \frac{E_1}{2} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) \quad (4.85)$$

La base principale des contraintes est la base matérielle OND car la matrice de  $\sigma$  y est diagonale. Il n'y a donc qu'une contrainte principale non-nulle : la contrainte de traction dans le réseau de fibre. Par la suite, nous allons vérifier que l'implémentation de notre formulation dans le code de calcul utilisé est correcte en comparant la contrainte principale numérique avec la contrainte matérielle 11. De plus, la représentation graphique dans le code de calcul des vecteurs propres de  $\sigma$  se réduit à un seul vecteur orienté dans le sens des fibres, ce qui est très pratique pour vérifier que notre formulation les oriente correctement. La contrainte principale est donnée par :

$$\sigma_1 = \sigma_{m11} = \frac{E_1}{2} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) \quad (4.86)$$

## 4.2.4 Validation sur le test de glissement simple de la solution analytique pour trois orientations initiales différentes : 0°, 90° et 135°

### 4.2.4.1 Méthode proposée

Pour valider la solution analytique, nous proposons de comparer diverses composantes de tenseurs avec la solution renvoyée par Abaqus/Explicit. Nous avons complètement développée la solution analytique générale uniquement dans le cas du glissement simple, sans extension. C'est donc sur cette phase que nous effectuons les corrélations, pour trois orientations initiales : 0°, 90° et 135°. Le comportement choisi est celui du milieu fibreux du 4.2.3.9 car il permet d'avoir une contrainte principale orientée dans la direction des fibres. Le module d'Young  $E_1$  est fixé à  $10^5$ MPa.

Les tenseurs comparés sont :

- Les déformations dans la base matérielle. Les déformations matérielles numériques sont calculées par la formule de Hughes-Winget, alors que les déformations matérielles analytiques sont intégrées exactement. L'approximation faite sur  $\beta$  est ainsi testée.
- Les déformations dans la base globale sont calculées à l'aide de la rotation matérielle  $\Delta$ . Cependant, le  $\Delta$  numérique est calculé à partir des formules générales (4.31), alors qu'analytiquement  $\Delta$  est donné par (4.75).
- La contrainte principale. Numériquement, elle est post-traitée à l'aide des outils fournis avec le code de calcul (ici Abaqus/Post). Elle représente donc bien ce que le code de calcul considère « réellement » comme l'état de contrainte. La corréler à la contrainte matérielle 11 analytique nous assure donc que notre formulation fonctionne.

La modélisation sous Abaqus du test de glissement simple / extension se fait avec un seul élément hexaédrique linéaire sous-intégré. Dans le jargon du code, il s'agit d'un élément C3D8R que nous présentons sur la Figure 4-13. Nous rappelons que cet élément est celui utilisé au chapitre 2 pour modéliser la maille tricotée et que le post-processeur permet d'afficher l'orientation initiale. Elle est représentée en bleu pour la direction 1, en jaune pour la direction 2 et en rouge pour la direction 3.

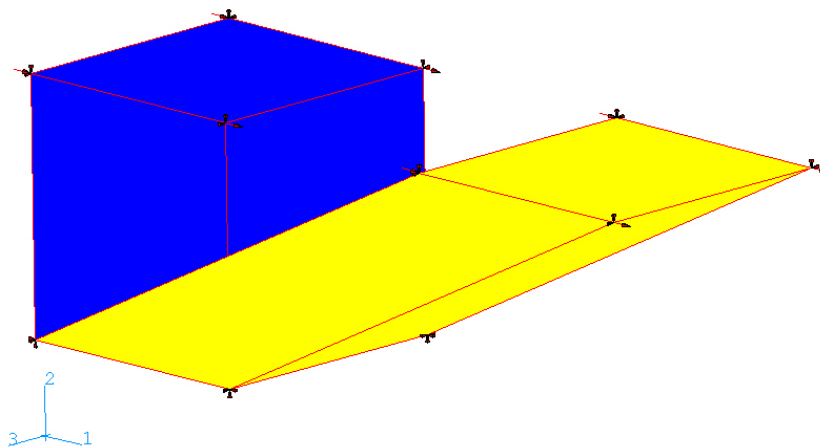


Figure 4-13 : Elément C3D8R d'Abaqus/Explicit dans la phase de glissement simple



Dans ce qui suit, nous constatons que, pour chaque orientation, nous avons les courbes analytiques (en traits continus) superposées avec les courbes numériques (en nuages de points). Cependant, sur le cas où l'orientation initiale est à  $0^\circ$ , il y a des contraintes parasites de compression dans la direction à  $0^\circ$ , provenant de l'approximation du tenseur  $\beta$  faite au 4.1.3.3, qui sont heureusement faibles (de l'ordre de 10MPa). De plus, sur le cas où l'orientation initiale est à  $135^\circ$ , il y a une petite dispersion qui concerne la composante de cisaillement de la Figure 4-22, mais cela reste négligeable.

Globalement, les résultats présentés prouvent que la formulation du MCEO-F est convenablement implémentée dans le code de calcul, que l'approximation du tenseur  $\beta$  fonctionne et que les résultats sont conformes à ce qui est attendu. Nous reviendrons sur les interprétations des résultats au §4.2.5 où nous rajouterons une phase d'extension pour analyser notre théorie.

Aux sous-paragraphe 4.2.4.2, 4.2.4.3 et 4.2.4.4, nous mettons les figures et les expressions analytiques venant de la solution générale particularisée pour les trois  $\theta_0$ .

#### 4.2.4.2 Orientation initiale à $0^\circ$

Nous prenons une orientation initiale  $\{e^0\}$  à  $0^\circ$  illustrée sur la Figure 4-14 :

$$\theta_0 = 0^\circ$$

Elle est donc confondue avec la base globale à tout instant. Par conséquent, le solide suiveur reste fixe et la dérivée rotationnelle se réduit à la dérivée temporelle classique dans le référentiel global.

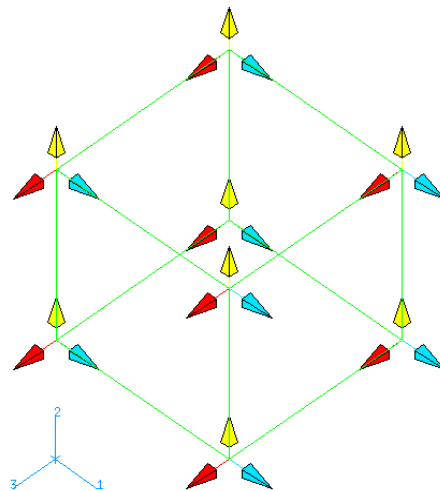


Figure 4-14 : Orientation initiale à  $0^\circ$  du comportement par rapport à la base globale

La rotation matérielle  $\Delta$  est donc constante et réduite à l'identité :

$$\left[ \underline{\Delta} \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[ \underline{1} \right]_{\{G\}}$$

La mesure de déformation (Figure 4-15) n'est donnée que dans la base globale puisque cette dernière est confondue avec la base matérielle OND. L'expression du tenseur de déformation est :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

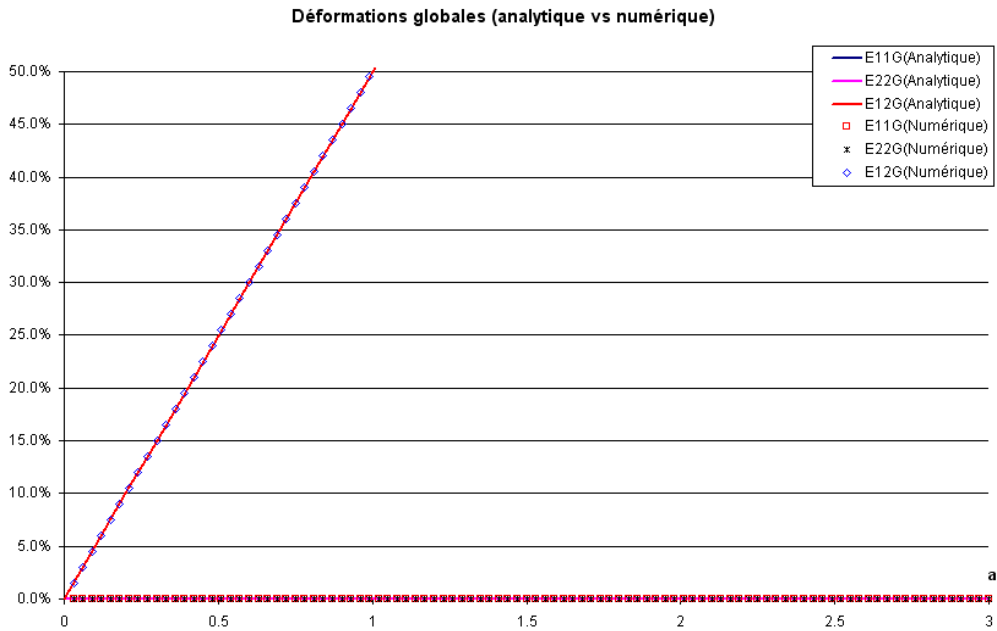


Figure 4-15 : Déformations matérielles et globales pour une orientation à 0°

La contrainte principale est nulle (Figure 4-16) :

$$\sigma_I = 0$$

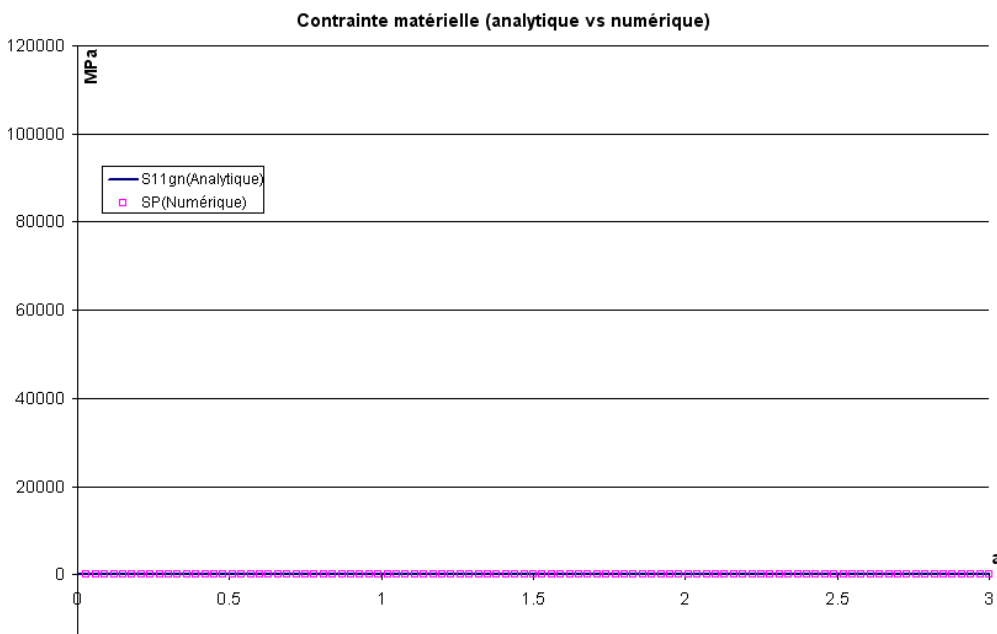


Figure 4-16 : Contraintes principale numérique et matérielle analytique pour une orientation à 0°

#### 4.2.4.3 Orientation initiale à 90°

Nous prenons une orientation initiale  $\{e^0\}$  à 90° (Figure 4-17):

$$\theta_0 = 90^\circ$$

Nous pouvons remarquer que la mesure de déformation obtenue est proche de celle de Green-Naghdi (voir l'annexe 8.3), qui, elle, privilégie une ligne immatérielle très particulière qui tourne selon la rotation moyenne des segments matériels tournants et dont l'orientation initiale doit être connue.

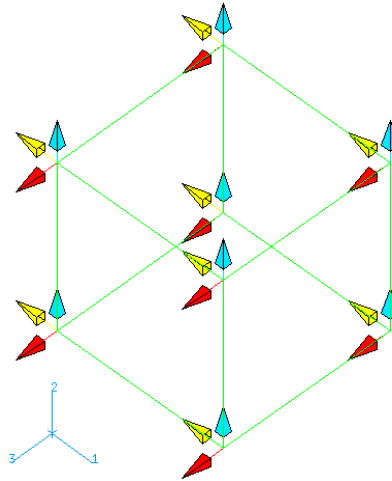


Figure 4-17 : Orientation initiale à 90° du comportement par rapport à la base globale

La rotation matérielle  $\Delta$  est en base mixte :

$$[\underline{\Delta}]_{\{G \otimes e^0\}} = \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} & \frac{-1}{\sqrt{a^2+1}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La mesure de déformation dans la base matérielle OND (Figure 4-18) est :

$$[\underline{\varepsilon}]_{\{g_n\}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \text{Ln}(a^2+1) & \frac{a}{2} - \text{Arc tan}(a) & 0 \\ \frac{a}{2} - \text{Arc tan}(a) & -\frac{1}{2} \text{Ln}(a^2+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La mesure de déformation dans la base globale est (Figure 4-19):

$$[\underline{\varepsilon}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec :

- $\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \text{Ln}(a^2 + 1) - \frac{2a}{a^2 + 1} \left( \frac{a}{2} - \text{Arc tan}(a) \right)$
- $\varepsilon_{22} = -\varepsilon_{11}$
- $\varepsilon_{12} = \frac{a}{a^2 + 1} \text{Ln}(a^2 + 1) + \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \left( \frac{a}{2} - \text{Arc tan}(a) \right)$

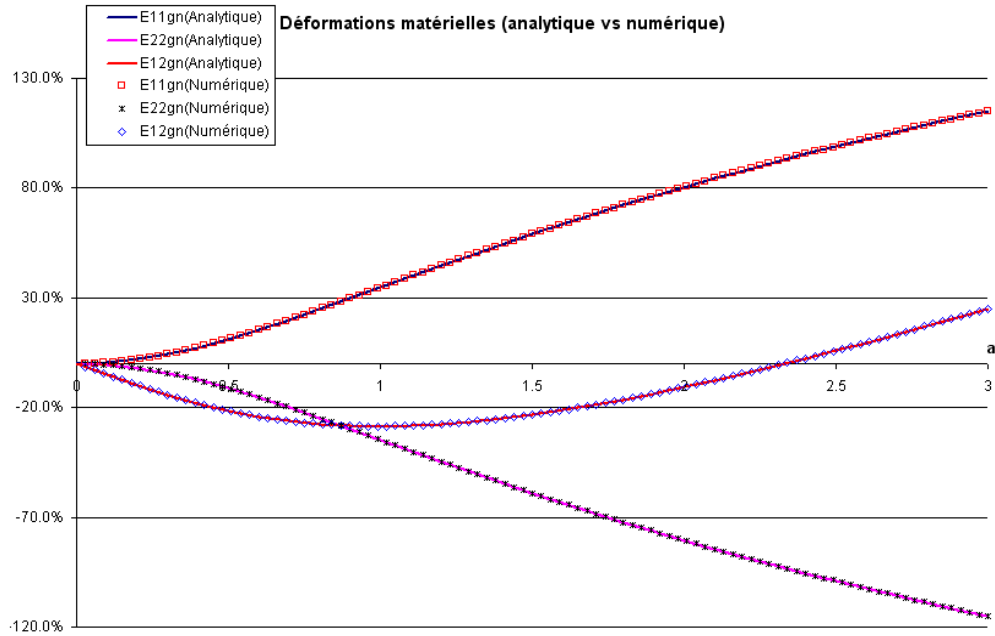


Figure 4-18 : Déformations matérielles pour une orientation à 90°

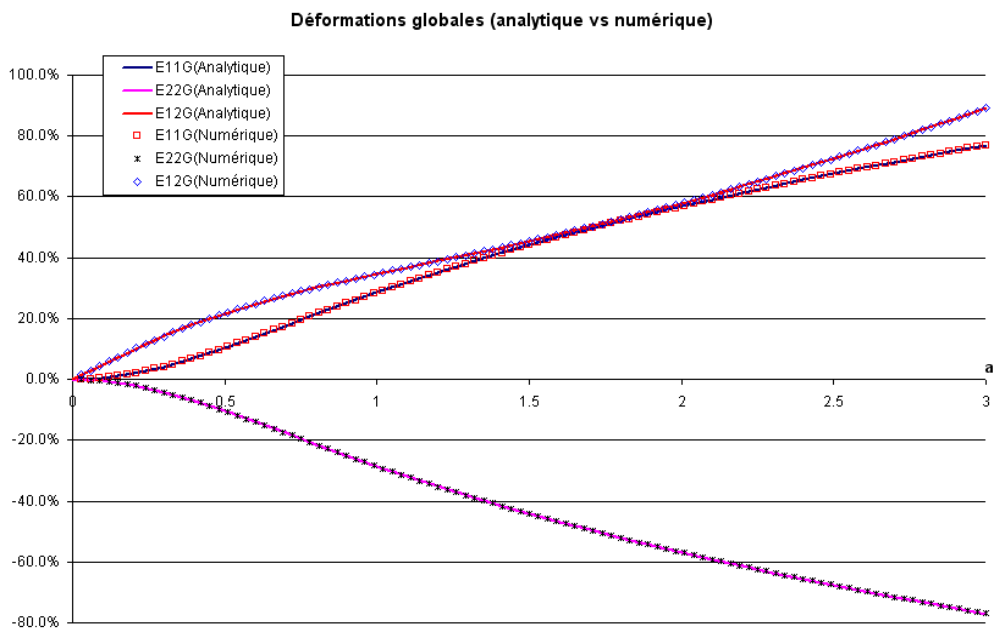


Figure 4-19 : Déformations globales pour une orientation à 90°

La contrainte principale donne (Figure 4-20) :

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{2} \text{Ln}(1 + a^2)$$

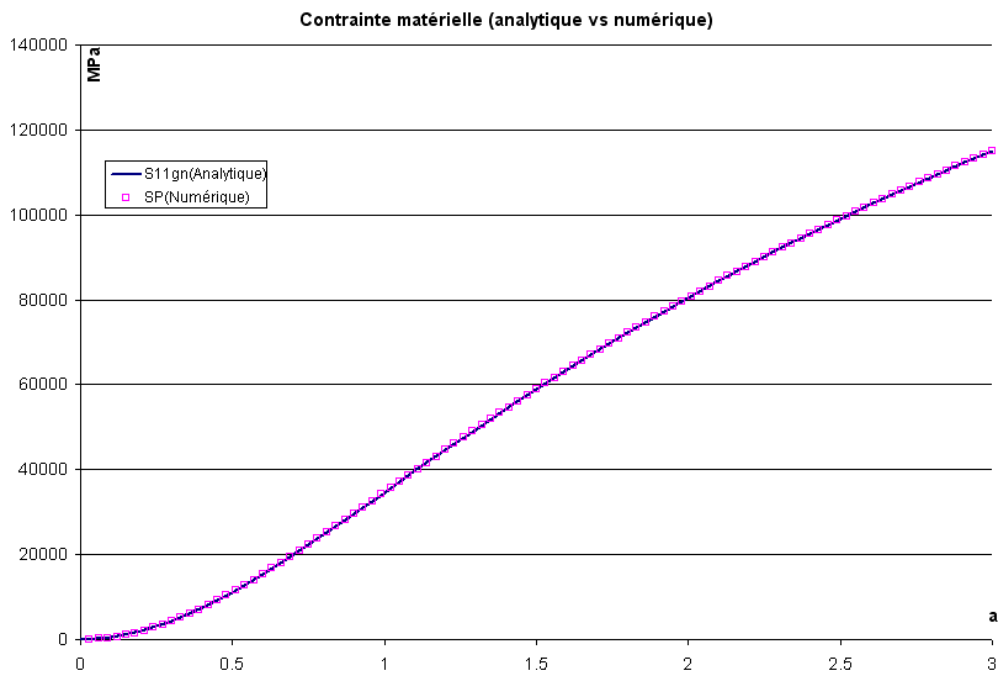


Figure 4-20 : Contraintes principale numérique SP et matérielle analytique S11gn pour une orientation à 90°

#### 4.2.4.4 Orientation initiale à 135°

Nous prenons cette fois une orientation initiale  $\{e^0\}$  à 135° (Figure 4-21), pour démontrer que notre formulation peut fonctionner dans toutes les directions (exceptée pour 180° car il y a une singularité dans  $\Delta$  comme nous l'avons vu précédemment) :

$$\theta_0 = 135^\circ = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \cos \theta_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \theta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

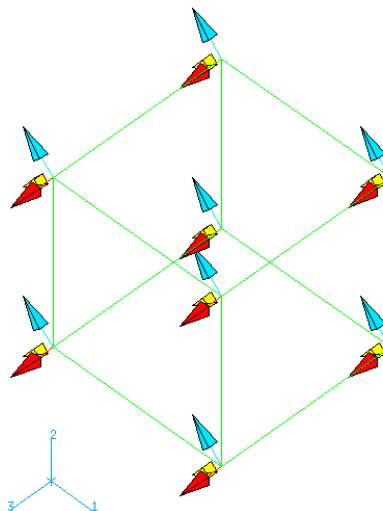


Figure 4-21 : Orientation initiale à 135° du comportement par rapport à la base globale

La rotation matérielle  $\Delta$  est :

$$[\underline{\Delta}]_{\{G \otimes e^0\}} = \begin{bmatrix} \frac{a-1}{\sqrt{(a-1)^2+1}} & \frac{-1}{\sqrt{(a-1)^2+1}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{(a-1)^2+1}} & \frac{a-1}{\sqrt{(a-1)^2+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

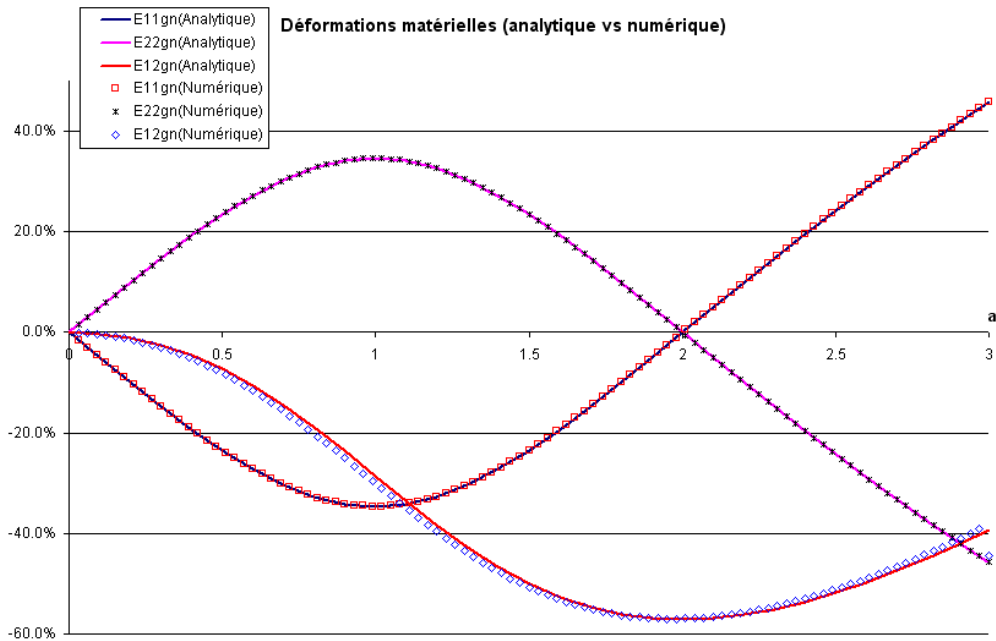


Figure 4-22 : Déformations matérielles pour une orientation à 135°

La mesure de déformation dans la base matérielle OND (Figure 4-22) est :

$$[\underline{\varepsilon}]_{\{g_n\}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \text{Ln} \left( \frac{1}{2} a^2 - a + 1 \right) & \frac{a}{2} - \text{Arc tan} (a - 1) - \frac{\pi}{4} & 0 \\ \frac{a}{2} - \text{Arc tan} (a - 1) - \frac{\pi}{4} & -\frac{1}{2} \text{Ln} \left( \frac{1}{2} a^2 - a + 1 \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La mesure de déformation dans la base globale donne :

$$[\underline{\varepsilon}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec :

- $\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \frac{(a-1)^2 - 1}{(a-1)^2 + 1} \text{Ln} \left( \frac{1}{2} a^2 - a + 1 \right) - \frac{2(a-1)}{(a-1)^2 + 1} \left( \frac{a}{2} - \text{Arc tan} (a - 1) - \frac{\pi}{4} \right)$
- $\varepsilon_{22} = -\frac{1}{2} \frac{(a-1)^2 - 1}{(a-1)^2 + 1} \text{Ln} \left( \frac{1}{2} a^2 - a + 1 \right) + \frac{2(a-1)}{(a-1)^2 + 1} \left( \frac{a}{2} - \text{Arc tan} (a - 1) - \frac{\pi}{4} \right) = -\varepsilon_{11}$

$$\circ \quad \varepsilon_{12} = \frac{a-1}{(a-1)^2+1} \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2}a^2 - a + 1\right) + \frac{(a-1)^2-1}{(a-1)^2+1} \left(\frac{a}{2} - \operatorname{Arc tan}(a-1) - \frac{\pi}{4}\right)$$

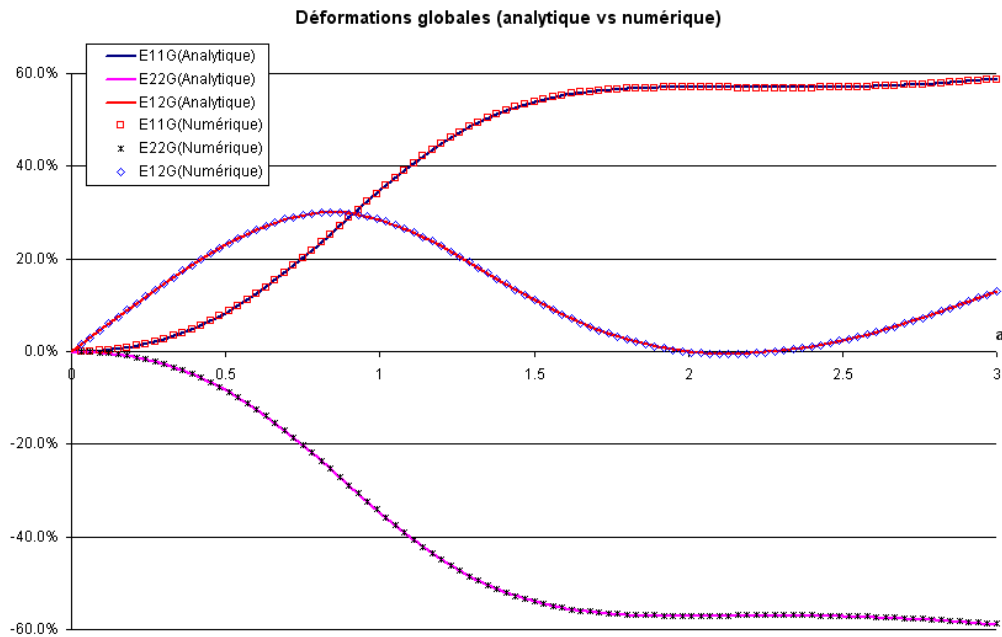


Figure 4-23 : Déformations globales pour une orientation à 135°

La contrainte principale (Figure 4-24) est :

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{2} \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2}a^2 - a + 1\right)$$

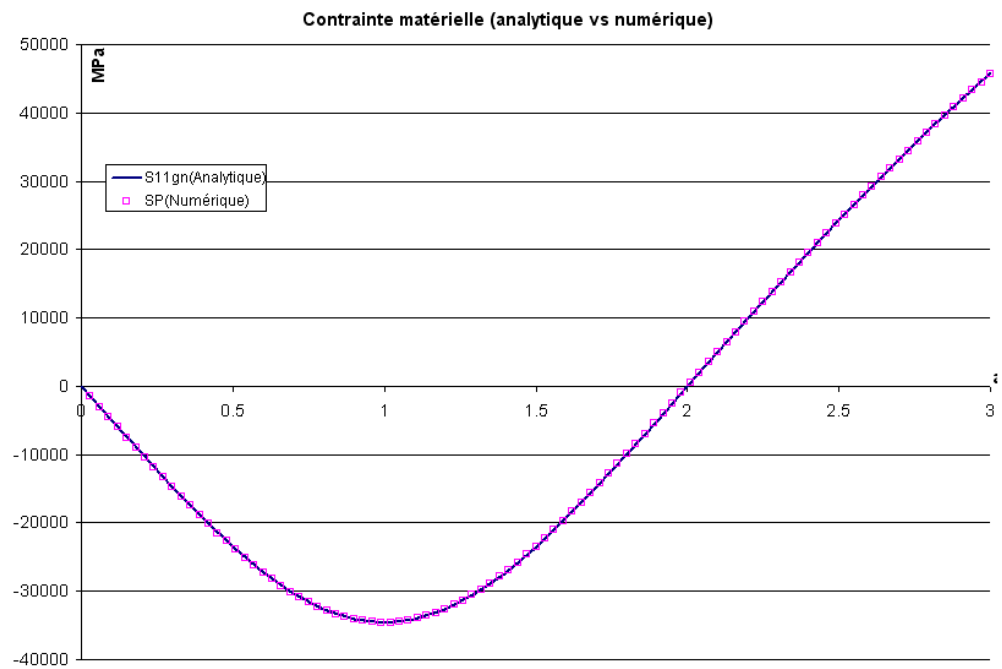


Figure 4-24 : Contraintes principale numérique et matérielle analytique pour une orientation à 135°

## 4.2.5 Comparaison du MCEO-F et du MCEO-GN sur le test de glissement simple / extension

### 4.2.5.1 Critères de comparaison

Afin d'illustrer la physique de notre théorie et la comparer au modèle existant dans Abaqus/Explicit, dont nous nous sommes servis au chapitre 2, nous analysons l'orientation et la valeur de la contrainte principale sur le test de glissement simple / extension. Elle nous donne l'orientation du réseau de fibres car, comme précédemment, le comportement se réduit au module d'Young dans la direction forte d'anisotropie. Les calculs sont entièrement menés avec Abaqus/Explicit dans ce sous-paragraphe.

La cinématique, commentée au 4.2.1.2 et au 4.2.2.2, nous permet de prévoir que :

- Dans le cas d'une orientation initiale à  $0^\circ$ , le réseau de fibre ne tourne jamais. De plus, la contrainte principale doit être nulle dans la phase de glissement simple et logarithmique dans la phase d'extension (d'après (4.72)).
- Dans le cas d'une orientation initiale à  $90^\circ$ , le réseau de fibre tourne en suivant exactement les bords de l'élément fini. Dans la phase d'extension, il ne tourne donc plus. De plus, la contrainte doit être logarithmique dans la phase de glissement simple et constante dans la phase d'extension.

Sur les figures qui suivent, nous avons représenté en pointillés noirs les fibres imaginaires devant être correctement orienté, tâche accomplie par le MCEO-F. En pointillés rouges, nous avons le réseau de fibres imaginaires orienté par le MCEO-GN.

### 4.2.5.2 Orientation initiale à $0^\circ$

Nous constatons sur la Figure 4-25 qu'avec le MCEO-F la direction forte d'anisotropie reste constamment orientée à  $0^\circ$ . Cela est bien physique compte-tenu de la cinématique du test.

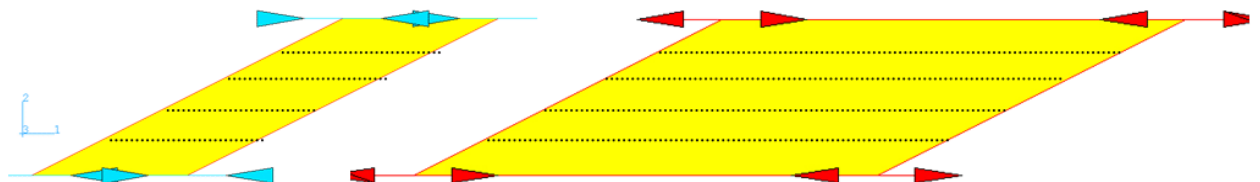


Figure 4-25 : MCEO-F dans la transformation de glissement simple / extension, orientation initiale à  $0^\circ$

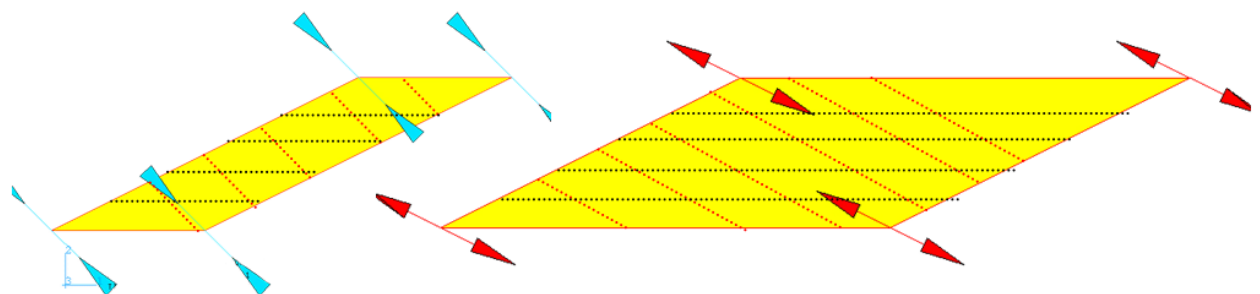


Figure 4-26 : MCEO-GN dans la transformation de glissement simple / extension, orientation initiale à  $0^\circ$



La contrainte est bien nulle dans la phase de glissement simple et logarithmique dans la phase d'extension (Figure 4-27) :

$$\sigma_I = \begin{cases} 0 & \text{si } a \in [0,3] \text{ et } u=0 \\ E_1 \text{Ln}(1+u) & \text{si } a=3 \text{ et } u \in [0,3] \end{cases}$$

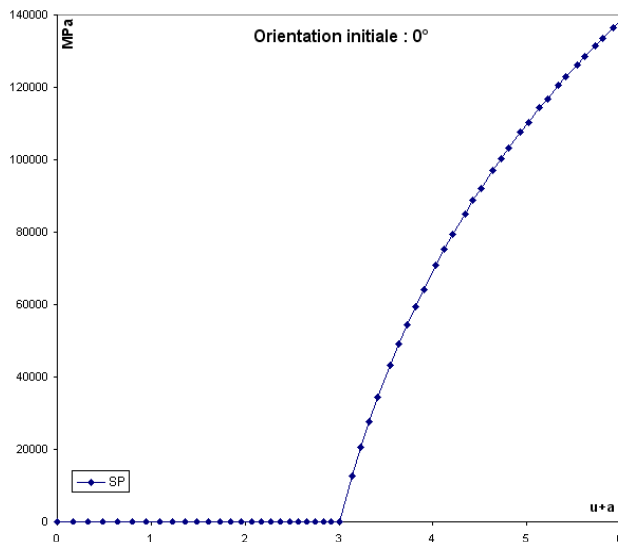


Figure 4-27 : Valeur de la contrainte principale du MCEO-F pour une orientation à 0°

Dans le cas du MCEO-GN, la direction forte d'anisotropie dérive beaucoup trop : le réseau de fibres rouge n'est pas confondu avec le réseau de fibre noir (Figure 4-26). La contrainte principale est, de plus, loin d'être nulle et ce test montre que dès qu'il y a du cisaillement avec cette formulation, les résultats ne sont pas physiques. De plus, nous constatons que même dans la phase d'extension les fibres continuent de tourner, mais dans le sens opposé de celui de la phase de glissement simple. Ce résultat a été démontré précédemment sur la Figure 4-12

*C'est exactement ce qui s'est passé au chapitre 2 et c'est là l'explication de la perte de rigidité des surfaces de tension due à la dérive du solide suiveur de Green-Naghdi.*

Le MCEO-GN est donc fort peu recommandé pour modéliser les milieux orthotropes, surtout s'il y a du cisaillement.

#### 4.2.5.3 Orientation initiale à 90°

Sur la Figure 4-28, nous constatons que la direction forte d'anisotropie est correctement actualisée par le MCEO-F, ce qui n'est pas le cas du MCEO-GN (Figure 4-30).

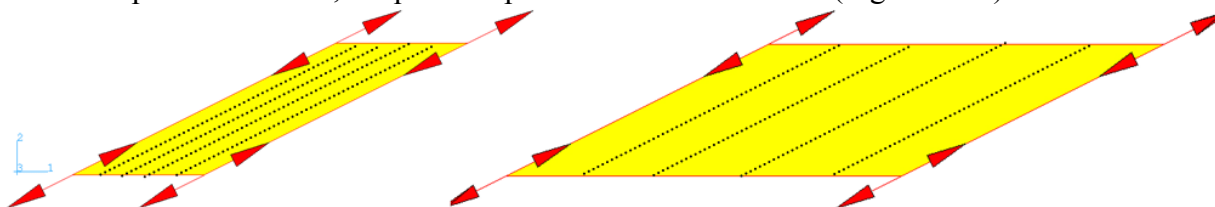


Figure 4-28 : MCEO-F dans la transformation de glissement simple / extension, orientation initiale à 90°

De plus, la contrainte principale est bien logarithmique dans la phase de glissement simple et constante dans la phase d'extension (Figure 4-29) :

$$\sigma_I = \begin{cases} \frac{E_1}{2} \text{Ln}(1+a^2) & \text{si } a \in [0,3] \text{ et } u=0 \\ \frac{E_1}{2} \text{Ln}(1+3^2) & \text{si } a=3 \text{ et } u \in [0,3] \end{cases}$$

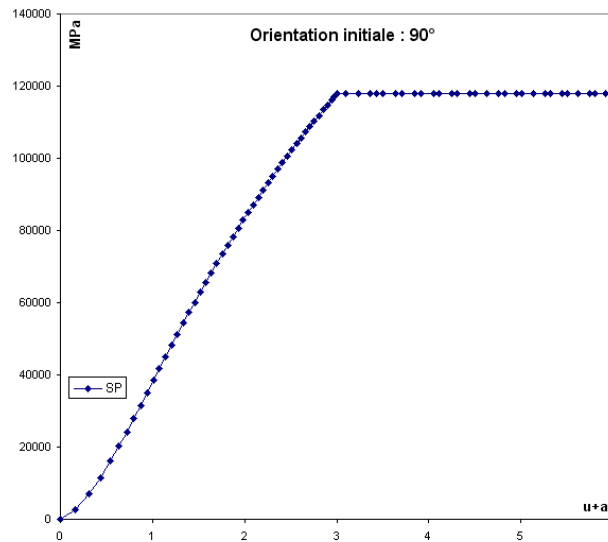


Figure 4-29 : Valeur de la contrainte principale du MCEO-F pour une orientation à 90°

Comme pour le cas de l'orientation initiale à 0°, la direction des fibres change même dans la phase d'extension avec le MCEO-GN. C'est le calcul (4.69) de la rotation pure  $\mathbf{R}$  qui le prouve.

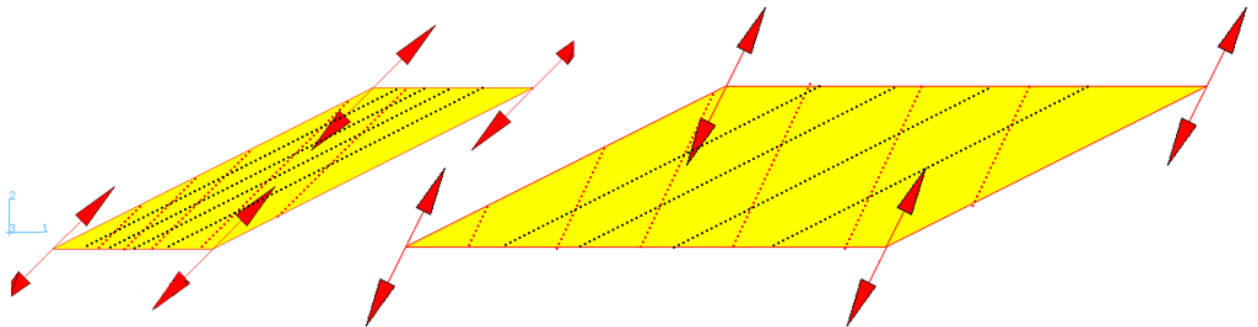


Figure 4-30 : MCEO-GN dans la transformation de glissement simple / extension, orientation initiale à 90°

### 4.3 Application du MCEO-F au calcul de la maille tricotée

Nous venons de tester notre formulation avec succès sur le cas d'école du test de glissement simple / extension. Il est grand temps de l'appliquer au calcul de la maille de tricot et de réaliser ainsi notre objectif initial qui était, rappelons-le, l'élimination des erreurs dues au MCEO-GN. Nous commençons par présenter les divers calculs effectués pour étudier le MCEO-F et le recalcr sur l'essai expérimental décrit au chapitre 1. L'étude commence par une analyse de sensibilité en moyennes déformations qui va nous permettre de mettre en évidence les spécificités du comportement fibreux modélisées par le MCEO-F. Le comportement asymptotique en grandes déformations est supposé être obtenu dès les moyennes déformations, le MCEO-F suivant strictement la direction forte d'anisotropie A partir de ces calculs, il est alors possible de recalcr les courbes force-déplacement complètes du modèle éléments finis pour montrer ses capacités descriptives. Enfin, une comparaison est effectuée entre le MCEO-F et le MCEO-GN afin de mettre en évidence, une fois de plus, les différences profondes de ces deux formulations. Comme au chapitre 2, tous les calculs qui suivent sont effectués pour un rapport de biaxialité de la CER de 11/17, ce qui correspond à un rapport de biaxialité de 1 sur l'éprouvette biaxiale.

#### 4.3.1 Présentation des calculs effectués

##### 4.3.1.1 Revue des lois de comportements

Nous présentons les calculs effectués synthétiquement sous forme de tableau où nous faisons varier les constantes de l'ingénieur et les lois d'écrasement sur le modèle de tricot du chapitre 2. Précisons nos notations : la formulation choisie est le MCEO-F dès que le titre du calcul commence par F\_, et le MCEO-GN dès que le titre du calcul commence par GN\_.

La première série, présentée sur la Figure 4-31, est une étude de sensibilité qui va permettre d'étudier l'influence des constantes de l'ingénieur sur la réponse globale de la structure et de recalcr notre modèle. Dans un souci de concision, nous ne présentons que les courbes force-déplacement sur le haut de la CER, à l'exception de la partie sur le recalcr. La première série se divise en quatre groupes :

- F\_1 : c'est le calcul de référence pour le MCEO-F. Nous reprenons les mêmes constantes de l'ingénieur et la même loi d'écrasement qu'au chapitre 2, mais nous utilisons le MCEO-F à la place du MCEO-GN.
- F\_s\_C\_x : nous cherchons à nous rapprocher du comportement fibreux défini au 3.3.1.3 en prenant le cas limite où tous les modules de cisaillement et les coefficients de Poisson sont nuls. Pour cela, nous les annulons progressivement, à loi d'écrasement imposée.
- F\_s\_Et\_x : avec le comportement fibreux précédent, nous étudions l'influence des modules d'Young transversaux en prenant des lois d'écrasement constantes.
- F\_s\_lc\_x : enfin, avec un comportement de type fibreux toujours, nous étudions diverses lois d'écrasements, présentées au 4.3.1.2. Le calcul F\_s\_lc\_3 est celui qui se recalcr sur l'essai.

La deuxième série, présentée sur la Figure 4-32, est une comparaison des deux théories et consiste en quatre calculs :

- GN\_1 : il s'agit du MCEO-GN recalé du chapitre 2.
- F\_1 : défini précédemment.
- F\_2 : il s'agit du calcul F\_s\_lc\_3 renommé pour la circonstance. Il s'agit donc du MCEO-F recalé, à une translation globale près.
- GN\_2 : nous avons comparé le MCEO-GN recalé avec le MCEO-F ayant les mêmes constantes de l'ingénieur et la même loi d'écrasement, il est donc intéressant de faire l'inverse. Ce calcul est effectué avec le MCEO-GN, mais les constantes de l'ingénieur et la loi d'écrasement sont celles de F\_2.

Calcul	Comportement (MPa)							
	E1	E2=E3	$\nu_{13}$	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	G12	G13	G23
F_1	112000	Loi 1	0.10	0.10	0.05	150	150	190
F_s_C_1	112000	Loi 1	0.10	0.10	0.05	50	50	190
F_s_C_2	112000	Loi 1	0.10	0.10	0.05	0	0	190
F_s_C_3	112000	Loi 1	0.10	0.10	0.05	0	0	0
F_s_C_4	112000	Loi 1	0.00	0.00	0.00	0	0	0
F_s_C_5	56000	Loi 1	0	0	0	0	0	0
F_s_Et_1	112000	1	0	0	0	0	0	0
F_s_Et_2	112000	10	0	0	0	0	0	0
F_s_Et_3	112000	30	0	0	0	0	0	0
F_s_Et_4	112000	60	0	0	0	0	0	0
F_s_Et_5	112000	100	0	0	0	0	0	0
F_s_lc_1	112000	Loi 2	0	0	0	0	0	0
F_s_lc_2	112000	Loi 3	0	0	0	0	0	0
F_s_lc_3	112000	Loi 4	0	0	0	0	0	0

Figure 4-31 : Tableau de synthèse de l'analyse de sensibilité du MCEO-F

Fichier .inp	Comportement (MPa)							
	E1	E2=E3	$\nu_{13}$	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	G12	G13	G23
GN_1	112000	Loi 1	0.10	0.10	0.05	150	150	190
F_1	112000	Loi 1	0.10	0.10	0.05	150	150	190
GN_2	112000	Loi 4	0	0	0	0	0	0
F_2	112000	Loi 4	0	0	0	0	0	0

Figure 4-32 : Tableau de synthèse des calculs recalés avec le MCEO-F et le MCEO-GN

#### 4.3.1.2 Revue des lois d'écrasement

Les lois d'écrasement qui interviennent dans les calculs sont représentées graphiquement sur la Figure 4-33. La première loi est celle du chapitre 2 utilisée pour recalé le MCEO-GN. Concernant les autres lois, l'idée est de conserver la même pente initiale tout en divisant graduellement par deux les modules d'Young asymptotiques. Pour y parvenir, le

troisième paramètre doit être aussi modifié. Toutes les lois d'écrasement sont donc de la forme (4.7).

Les paramètres sont présentés maintenant :

- Loi 1 :  $E_\infty=1000\text{MPa}$  ,  $E_0=50\text{MPa}$  ,  $\bar{\varepsilon}=0,13$
- Loi 2 :  $E_\infty=500\text{MPa}$  ,  $E_0=50\text{MPa}$  ,  $\bar{\varepsilon}=0,055$
- Loi 3 :  $E_\infty=250\text{MPa}$  ,  $E_0=50\text{MPa}$  ,  $\bar{\varepsilon}=0,025$
- Loi 4 :  $E_\infty=125\text{MPa}$  ,  $E_0=50\text{MPa}$  ,  $\bar{\varepsilon}=0,015$

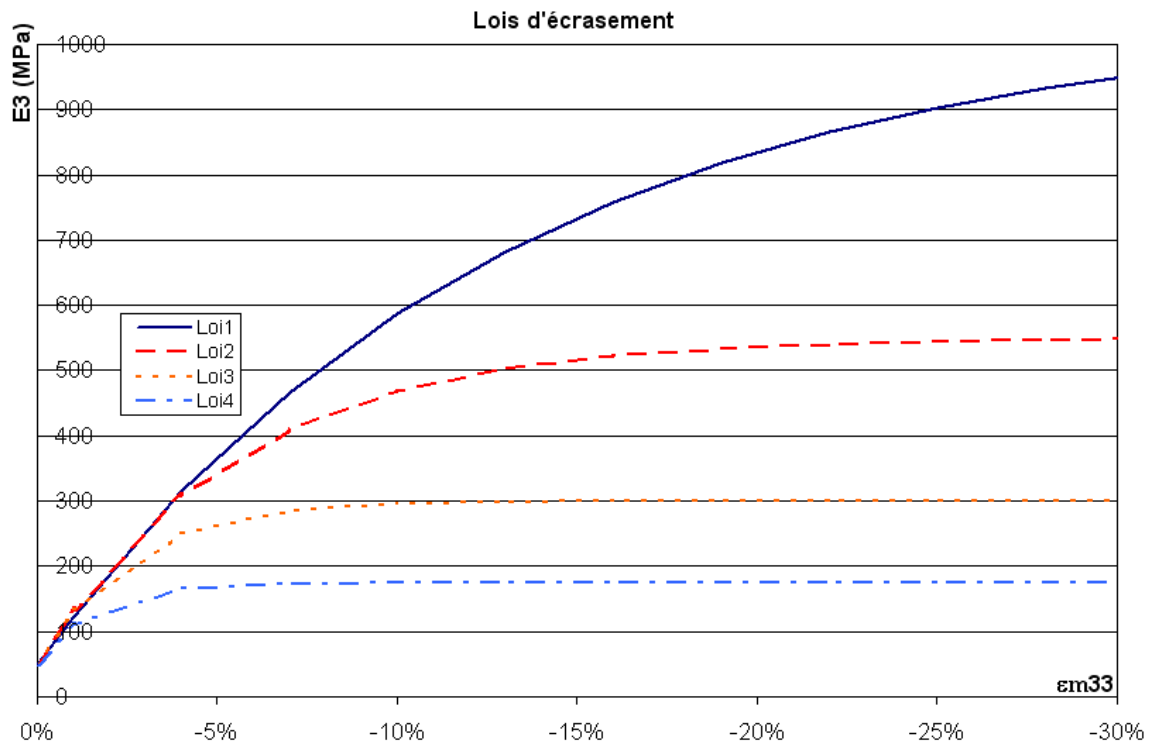


Figure 4-33 : Lois d'écrasement testées

## 4.3.2 Analyses de sensibilité

### 4.3.2.1 Mise en évidence de la nature fibreuse du comportement

Sur la Figure 4-34, nous constatons que, contrairement au MCEO-GN, le MCEO-F parvient à donner des résultats avec des caractéristiques comportementales fibreuses : l'annulation des modules de cisaillement ne provoque plus une rigidité asymptotique proche de zéro mais une faible variation seulement. Maintenant, c'est l'extension de la zone non-linéaire que ces paramètres pilotent.

De plus,  $F_{s\_C\_5}$  montre l'influence du module d'Young longitudinal des mèches qui est beaucoup plus physique qu'avec le MCEO-GN : en le divisant par deux, la rigidité asymptotique est elle aussi presque divisée par deux, pour un même comportement transversal.

Nous pouvons interpréter ces observations comme suit :

- Lors de la flexion des mèches, le cisaillement transverse est important. Si les modules de cisaillement sont nuls, les mèches fléchissent plus facilement et la zone non-linéaire est plus importante. Il est donc logique que la rigidité asymptotique ne soit pas trop sensible aux modules de cisaillement et doive dépendre essentiellement des modules d'Young. La zone linéaire commence alors quand les mèches se mettent en tension et n'ont plus de mobilité, après s'être écrasées.
- Dès que les mèches se mettent en tension, il est clair que le module d'Young longitudinal doit fortement influencer la rigidité asymptotique. Cependant, comme cette dernière résulte aussi de l'écrasement, nous ne retrouvons pas la rigidité asymptotique d'une mèche seule en traction comme c'est le cas pour les taffetas.

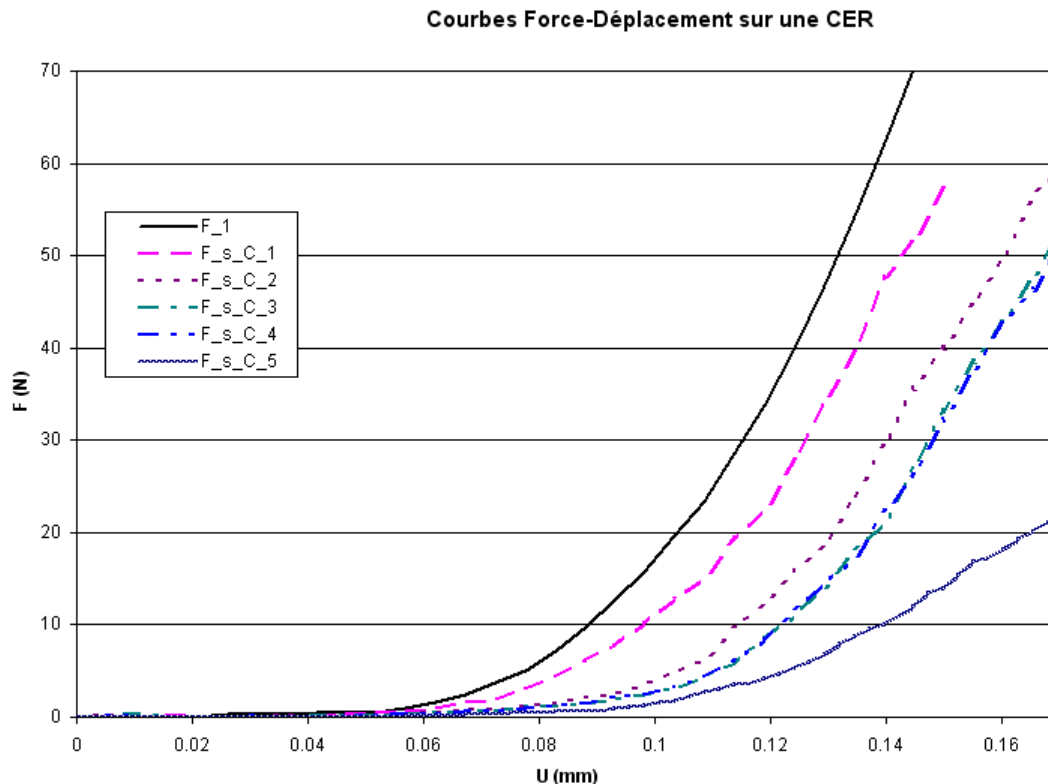


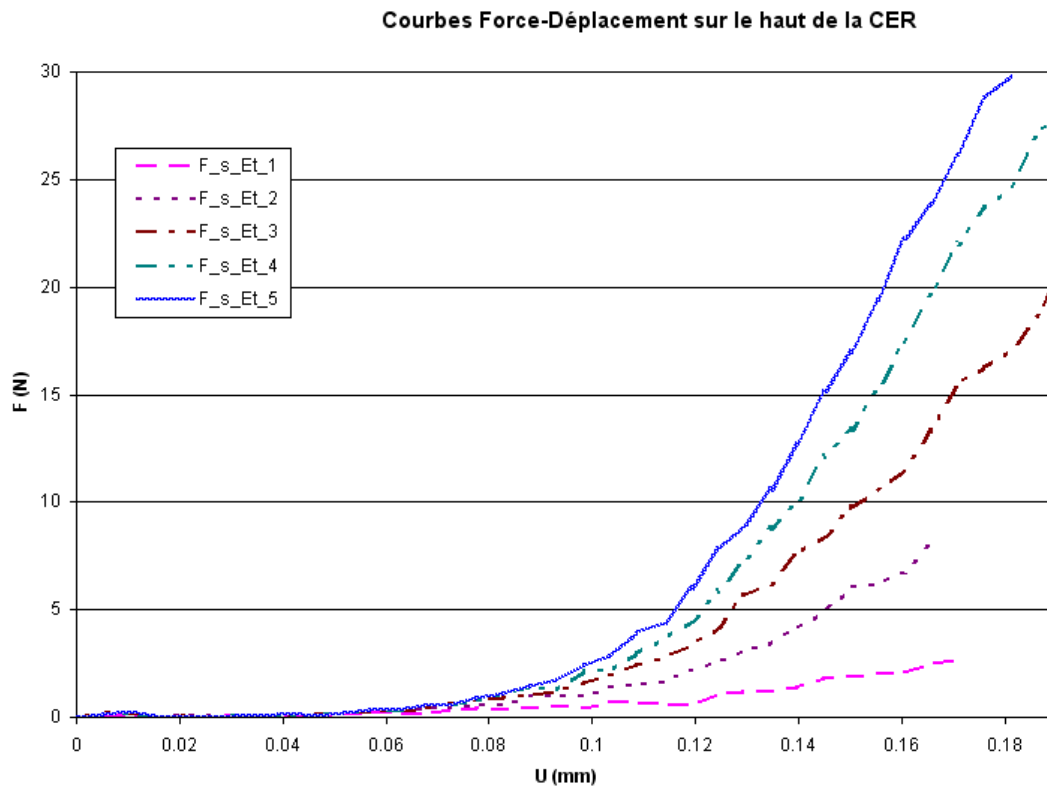
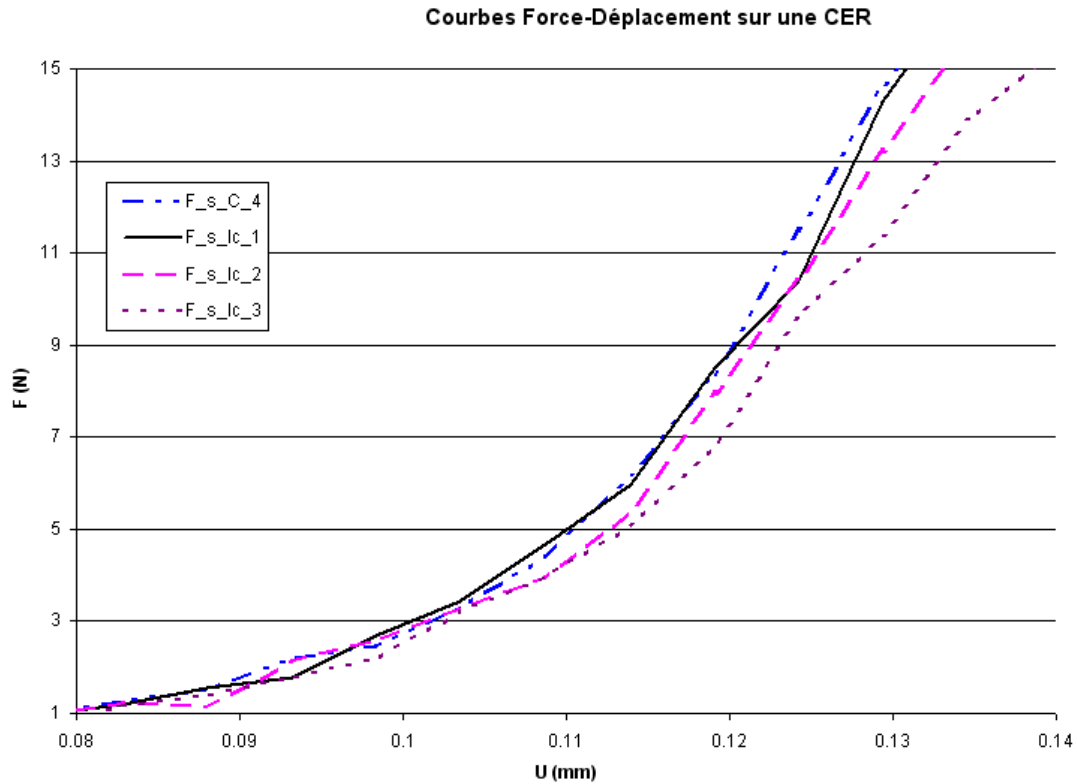
Figure 4-34 : Sensibilité aux constantes de l'ingénieur pour une même loi d'écrasement

Force est de constater que le MCEO-F est plus physique que le MCEO-GN pour modéliser un comportement fibreux. En conservant ces caractéristiques, étudions maintenant sa sensibilité à l'écrasement.

#### 4.3.2.2 Sensibilité aux caractéristiques transverses

Tout comme le MCEO-GN, le MCEO-F est sensible aux caractéristiques transverses qui influencent la zone non-linéaire et la rigidité asymptotique. Cependant, les ordres de grandeurs sont dix fois moindres concernant le MCEO-F ! Nous constatons en effet sur la Figure 4-35 que des lois d'écrasement ayant un module asymptotique variant entre 1050MPa et 175MPa donnent presque la même courbe force-déplacement, pour un même comportement fibreux. Une étude avec des lois d'écrasement constantes comprises entre 1MPa et 100MPa viennent confirmer cette tendance (Figure 4-36).

Cet ordre de grandeur impliqué dans la mise en œuvre du MCEO-F est, en tout cas, plus représentatif d'un milieu fibreux que ne l'était celui associé au MCEO-GN.



### 4.3.3 Recalage du MCEO-F sur l'essai biaxial expérimental

#### 4.3.3.1 Recalage par translation

La formulation du MCEO-F étant différente de celle du MCEO-GN, les résultats obtenus sur la maille tricotée avec un comportement identique sont différents. Par conséquent, la courbe force-déplacement pour le rapport de biaxialité unitaire de la CER ne se superpose plus avec celle de l'essai expérimental. Il faut donc recaler le MCEO-F tout comme nous avons recalé le MCEO-GN au chapitre 2. Finalement, c'est le calcul  $F\_s\_lc\_3$  qui présente les mêmes rigidités asymptotiques que l'essai expérimental. Il est renommé ici  $F\_2$  et est représenté sur la Figure 4-37.

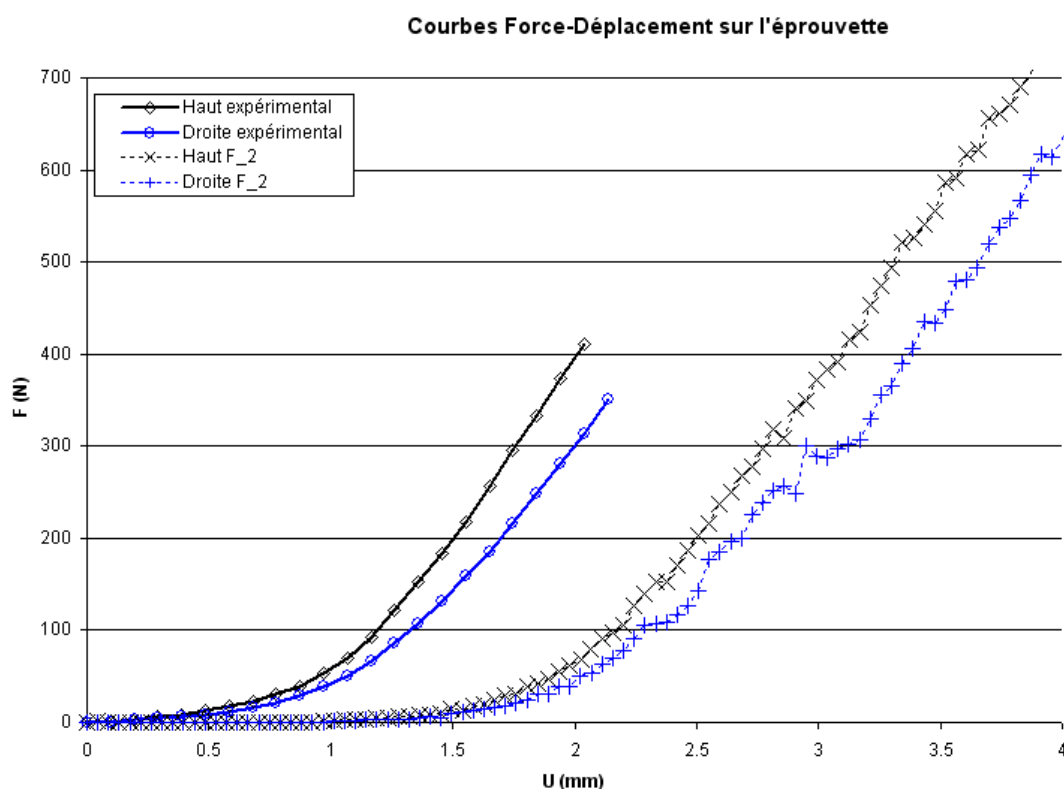


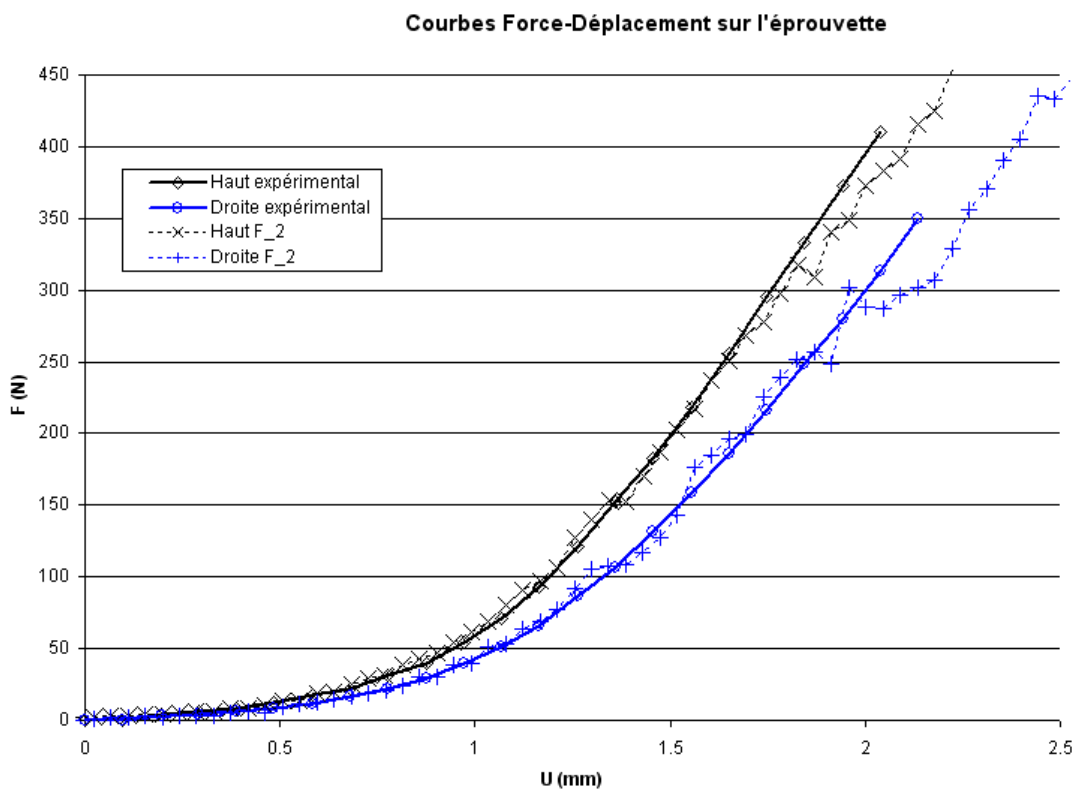
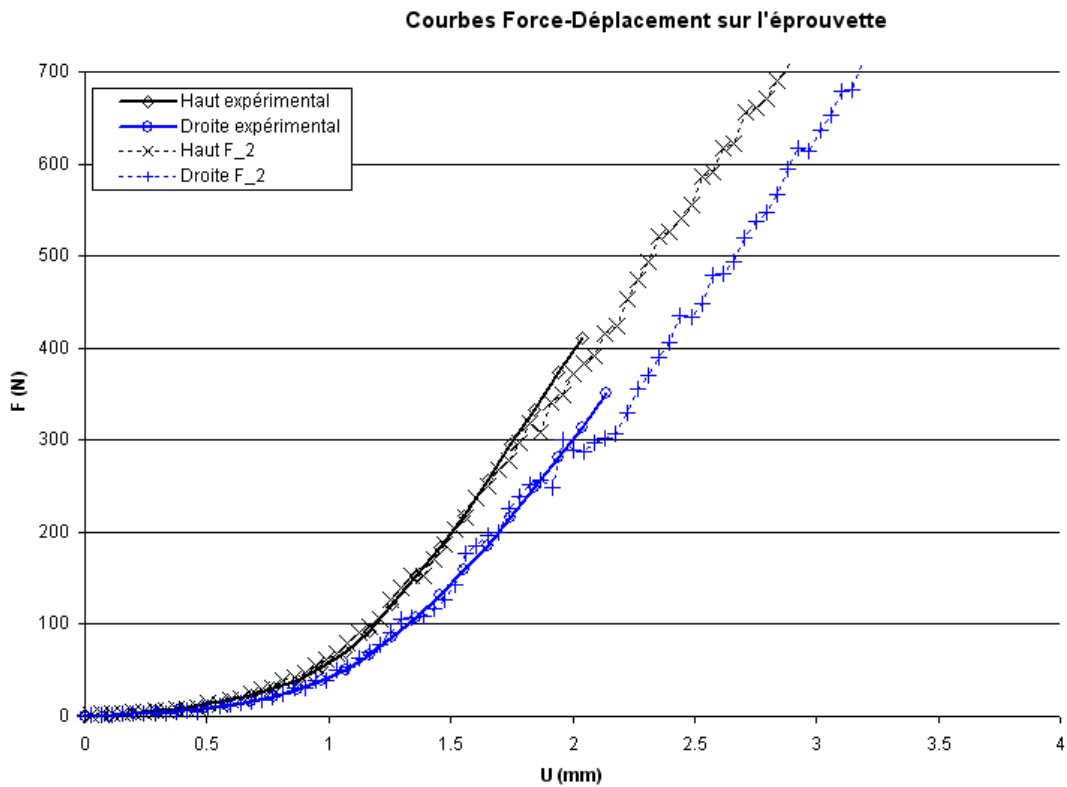
Figure 4-37 : Comparaison entre le MCEO-F recalé partiellement et l'essai expérimental

Tout comme au chapitre 2, pour finir de recaler complètement le modèle, il faut effectuer une translation globale des deux courbes force-déplacement. Cette translation vaut 0,99mm et assure une bonne superposition des courbes comme cela est montré sur la Figure 4-38 et la Figure 4-39.

Vers l'abscisse de 2mm, il faut néanmoins noter une erreur numérique qui décale les courbes, mais qui préserve tout de même la rigidité asymptotique. Un maillage plus fin de la zone de contact permettrait certainement d'atténuer cet artefact.

Nous pouvons finalement conclure que notre formulation peut être recalée, à l'instar de la formulation de Green-Naghdi, sur les courbes expérimentales disponibles. Elle est donc opérationnelle.





#### 4.3.3.2 Différences entre MCEO-F et le MCEO-GN

Il est intéressant de comparer les deux formulations dans les cas où elles se recalent. Ainsi, sur la Figure 4-40, nous montrons que, pour un même tenseur de comportement, le MCEO-F ne perd pas de rigidité, ce qui était le principal problème du MCEO-GN. En effet, le MCEO-F ne voit pas sa direction d'anisotropie forte dériver dans la zone où le cisaillement est important, comme nous l'avons illustré sur un élément, Figure 4-25.

L'artefact numérique du MCEO-GN, mais, bien pire encore, la nécessité de trouver les constantes de l'ingénieur adéquates et la loi d'écrasement compensant la dérive sont ainsi évités. C'est ce phénomène qui peut expliquer les ordres de grandeur trop important de ces paramètres : la plus grande raideur étant orientée le long d'une direction qui dérive, il faut compenser la perte dans la direction des mèches par d'autres raideurs, importantes également.

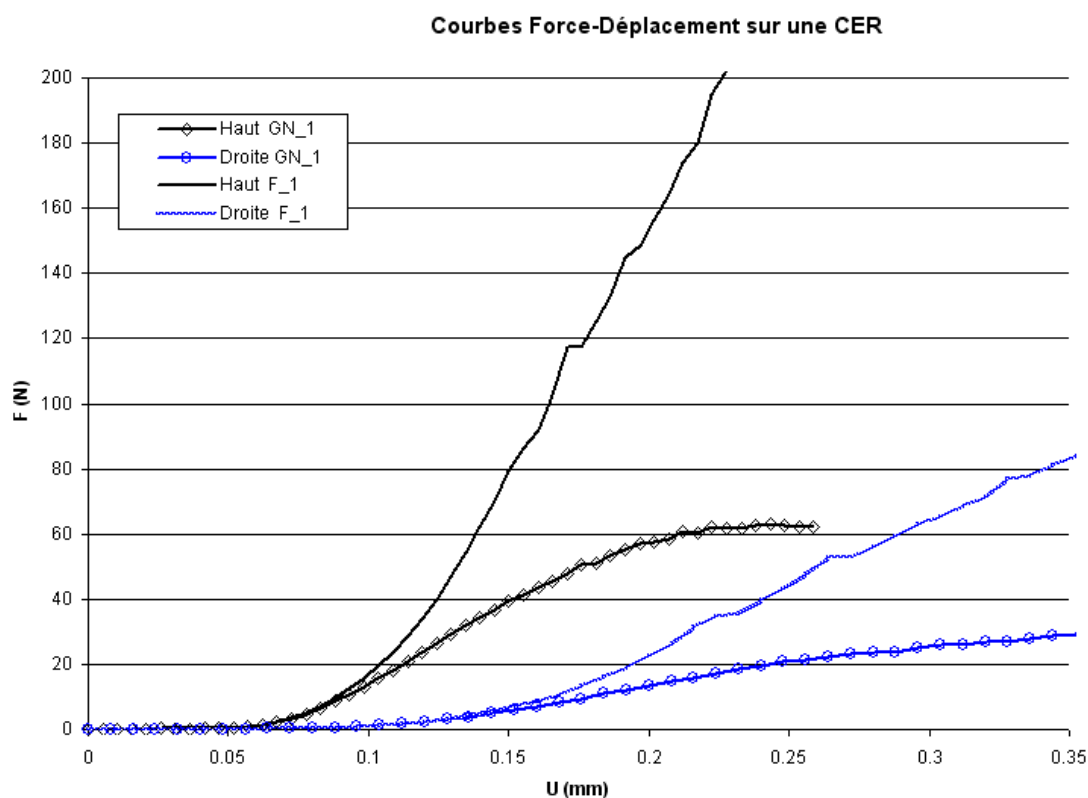
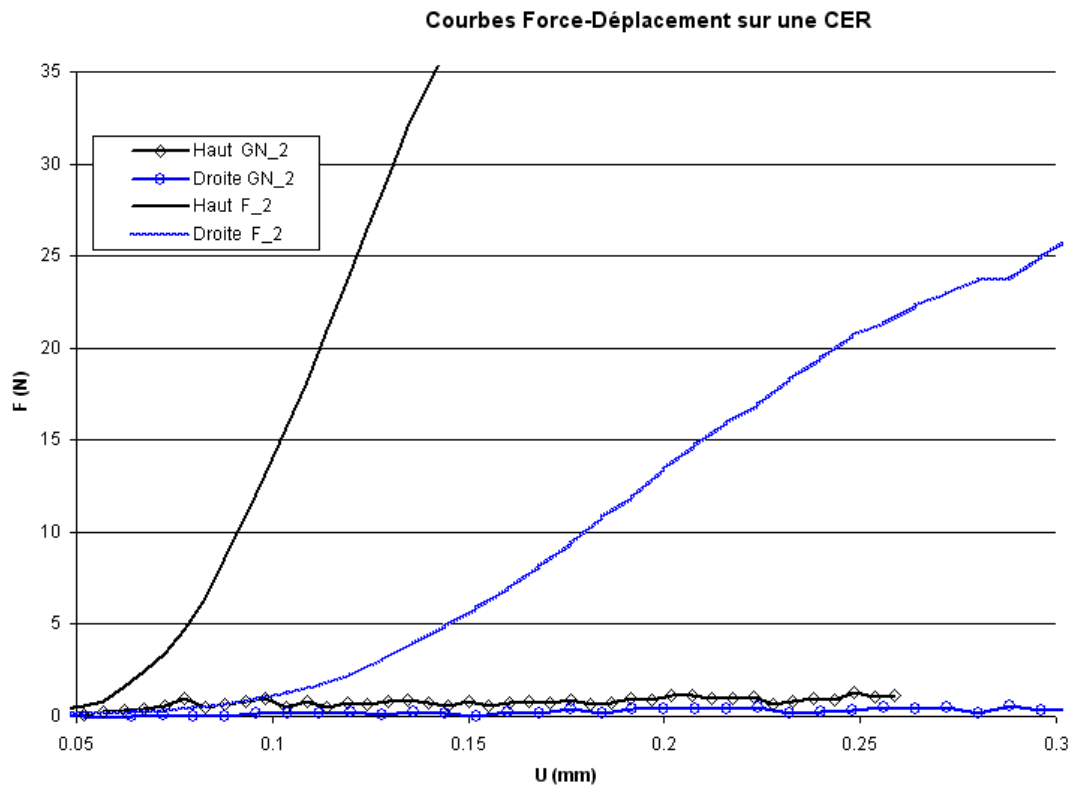


Figure 4-40 : Comparaison entre le MCEO-GN recalé et le MCEO-F pour un même comportement

De manière analogue, nous comparons les deux formulations avec les constantes de l'ingénieur et la loi d'écrasement du MCEO-F recalé. Il apparaît clairement sur la Figure 4-41 que le MCEO-GN ne peut absolument pas fonctionner avec des modules de cisaillement nuls car ses rigidités asymptotiques sont alors négligeables devant celles du MCEO-F.

Soulignons enfin le fait qu'il faille traduire beaucoup plus les courbes du MCEO-F recalé que celle du MCEO-GN recalé pour les superposer à l'essai expérimental : la translation pour F\_2 est de 0,99mm et celle pour GN\_1 de 0,345mm. Cela provient des modules de cisaillement que nous avons pris nuls afin de démontrer la capacité du MCEO-F à modéliser un comportement fibreux.



**Figure 4-41 : Comparaison entre le MCEO-F recalé et le MCEO-GN pour un même comportement**

Pour conclure, nous venons de montrer que :

- Le MCEO-F a une sensibilité aux variations du comportement plus physique que le MCEO-GN pour modéliser un milieu fibreux.
- Le MCEO-F peut être recalé sur l'essai expérimental selon la procédure mise en place au chapitre 2.

5 Chapitre 5 : Perspectives  
pour des théories de milieu  
continu équivalent anisotrope  
fibreux

Ce chapitre présente des perspectives de théories pour la modélisation des milieux anisotropes fibreux. L'objectif est de généraliser la théorie du milieu continu équivalent orthotrope fibreux (MCEO-F), basée sur la rotation d'une fibre unique, en une théorie de milieu continu équivalent anisotrope fibreux (que nous abrègerons MCEA-F) basée sur la convection de deux ou trois fibres distinctes. Cette nouvelle théorie va alors permettre de modéliser des milieux discrets renforcés dans trois directions par des fibres en les remplaçant par des milieux continus à trois directions fortes d'anisotropie. La réactualisation des axes constitutifs, qui se convectent avec la matière, et le cumul tensoriel des déformations ne se font donc plus dans un solide suiveur euclidien mais dans des référentiels affines, c'est-à-dire non-rigides, suivant les directions fortes d'anisotropie. De plus, le tenseur des contraintes devient également affine et modélise des efforts sur un élément de matière déformé.

Le MCEA-F doit pouvoir être particularisé dans le cas d'une ou de deux directions fortes d'anisotropie. Dans le premier cas, avec le comportement défini par un seul module d'Young, nous devons retrouver le MCEO-F. Dans le deuxième cas nous devons obtenir une formulation pour la construction d'un élément de membrane anisotrope destiné à la simulation de la mise en forme. Ce nouvel élément fini peut alors modéliser une CER de textile technique.

Après avoir généralisé les outils mathématiques du chapitre 3 aux affinités, nous proposons trois théories de MCEA-F que nous testons sur le test de glissement simple, poursuivant la démarche du chapitre 4. Ne retenant qu'une de ces théories, nous implémentons dans Abaqus/Explicit une membrane hypo-élastique anisotrope pour simuler la mise en forme par emboutissage sur dôme hémisphérique. Une simulation reprenant le modèle éléments finis de la maille tricotée est également montrée. Les résultats obtenus sont satisfaisants, mais rappelons qu'il ne s'agit que de perspectives qui restent encore à débattre.

## 5.1 Cadre mathématique

Dans cette section nous décrivons le formalisme mathématique nécessaire à la formulation de théories hypo-élastiques de milieux anisotropes. L'outil mathématique qui le permet est la géométrie différentielle, inventée par Ricci, Levi-Civita et Riemann au début du XX<sup>ème</sup> siècle. Elle permet l'étude de la géométrie et du mouvement d'un milieu déformable à  $n$  dimensions (appelé variété de dimension  $n$ ) ([TAL93]). Nous montrons que cette approche généralise le cadre euclidien en étendant aux transformations affines les concepts introduits au chapitre 3. A partir de cette généralisation, il est possible de construire de nouvelles théories où :

- Les tenseurs de déformation et de comportement sont convectés avec des directions fortes d'anisotropie non-orthogonales.
- Le tenseur de contrainte de Cauchy est calculé sur un élément de matière convecté représentant un milieu anisotrope.

### 5.1.1 Notions de géométrie différentielle

#### 5.1.1.1 Notations et espaces tangent et cotangent

Afin de définir les tenseurs, nous avons introduit au chapitre 3 les espaces vectoriels tangent et cotangent en un point d'un espace non-euclidien appelé variété  $V_3$  (c'est le

solide déformable). Ces espaces, où le produit scalaire est défini par le tenseur métrique ([TAL93]), sont nécessaires pour définir rigoureusement les tenseurs affines qui généralisent les tenseurs euclidiens. Les exemples les plus simples sont les tenseurs d'ordre 1 contravariants (les vecteurs) qui appartiennent à l'espace tangent et les tenseurs d'ordre 1 covariants (les covecteurs, appelés aussi 1-formes) qui appartiennent à l'espace cotangent ([ROU97]). Nous pouvons maintenant définir clairement ces deux espaces :

- L'espace vectoriel tangent à  $V_3$  au point  $M$ , noté  $T_M V_3$ , est l'ensemble des vecteurs tangents (ou vecteurs) à  $V_3$  au point  $M$ . Il est également appelé espace naturel. La base canonique de  $T_M V_3$  est la base associée aux composantes contravariantes des vecteurs. Elle est aussi appelée base covariante, ou bien encore base naturelle. On la note  $\{\mathbf{g}_i\}=(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ .
- L'espace vectoriel cotangent à  $V_3$  au point  $M$ , noté  $T^*_M V_3$ , est l'ensemble des vecteurs cotangents (ou covecteurs) à  $V_3$  au point  $M$ . Il est également appelé espace dual. La base canonique de  $T^*_M V_3$  est la base associée aux composantes covariantes des covecteurs. Elle est aussi appelée base contravariante, ou bien encore base duale. On la note  $\{\mathbf{g}^i\}=(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)$ .

Cette situation est illustrée sur la Figure 5-1 où sont représentés les espaces tangents et cotangents, avec leurs bases canoniques, au point  $M$  d'une variété  $V_2$ . Le caractère affine de l'espace vectoriel tangent (respectivement cotangent) est traduit par le fait que la base covariante (respectivement contravariante) n'est en général ni normée, ni orthogonale.

*Remarque* : Bien évidemment, ces espaces diffèrent d'un point  $M$  à l'autre.

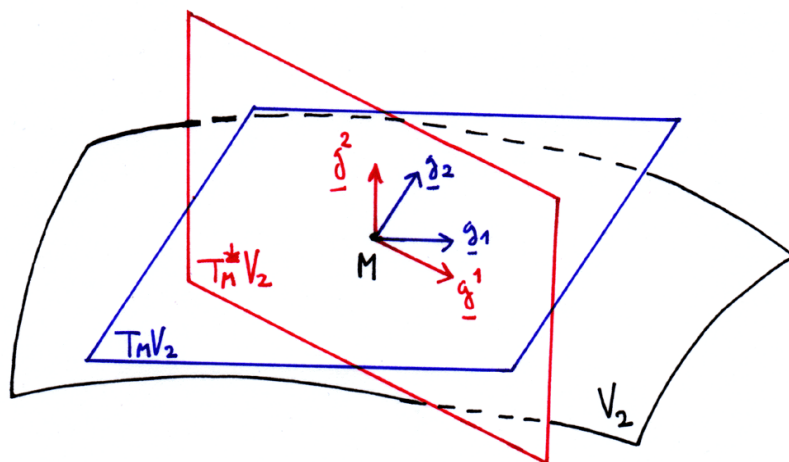


Figure 5-1 : Espaces duaux et bases duales

Comme, par définition, un vecteur donné (respectivement un covecteur) de l'espace tangent (respectivement cotangent) se décompose en composantes covariantes (respectivement contravariantes) associées à la base contravariante (respectivement covariante), nous avons pour un vecteur  $\underline{\mathbf{u}}$  et son covecteur (dual)  $\underline{\mathbf{u}}^*$  :

$$\begin{aligned} \text{Dans } T_M V_3 \quad \underline{\mathbf{u}} &= u^i \mathbf{g}_i \\ \text{Dans } T^*_M V_3 \quad \underline{\mathbf{u}}^* &= u_i \mathbf{g}^i \end{aligned} \quad (5.1)$$

Ceci se généralise à tout ordre. Pour les tenseurs d'ordre 2, les espaces auxquels ils appartiennent sont issus des produits tensoriels des espaces tangent et cotangent. Il existe donc quatre « facettes » de variances différentes pour représenter un même tenseur qui, lui,

est euclidien ([ROU97]). Ces quatre facettes sont les tenseurs affines  $\mathbf{A}$ , son dual  $\mathbf{A}^*$  et deux tenseurs mixtes. Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned}
 \text{Dans } T_M V_3 \otimes T_M V_3 & \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} = A^{ij} \underline{\underline{\mathbf{g}}}_i \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_j \\
 \text{Dans } T^*_M V_3 \otimes T^*_M V_3 & \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}^* = A_{ij} \underline{\underline{\mathbf{g}}}^i \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}^j \\
 \text{Dans } T^*_M V_3 \otimes T_M V_3 & \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\circ} = A_i^j \underline{\underline{\mathbf{g}}}^i \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_j \\
 \text{Dans } T_M V_3 \otimes T^*_M V_3 & \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\circ} = A^i_j \underline{\underline{\mathbf{g}}}_i \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}^j
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Comme la notion de variance est essentielle pour les tenseurs affines, il est nécessaire de définir pour tout ce chapitre une nouvelle notation des bases de projection, étendant celle du chapitre 3. Nous avons :

- Pour une base vectorielle  $B$  :

$$B = \bigcup_{k=1..3} \{\underline{\underline{\alpha}}_k\} = \{\underline{\underline{\alpha}}_\circ\} \quad \text{ou} \quad B = \bigcup_{k=1..3} \{\underline{\underline{\alpha}}^k\} = \{\underline{\underline{\alpha}}^\circ\}$$

- Pour une base tensorielle  $B$  d'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 B = \bigcup_{\substack{k=1..3 \\ l=1..3}} \{\underline{\underline{\alpha}}_k \otimes \underline{\underline{\beta}}_l\} = \{\underline{\underline{\alpha}}_\circ \otimes \underline{\underline{\beta}}_\circ\} \quad \text{ou} \quad B = \bigcup_{\substack{k=1..3 \\ l=1..3}} \{\underline{\underline{\alpha}}^k \otimes \underline{\underline{\beta}}^l\} = \{\underline{\underline{\alpha}}^\circ \otimes \underline{\underline{\beta}}^\circ\} \\
 B = \bigcup_{\substack{k=1..3 \\ l=1..3}} \{\underline{\underline{\alpha}}_k \otimes \underline{\underline{\beta}}^l\} = \{\underline{\underline{\alpha}}_\circ \otimes \underline{\underline{\beta}}^\circ\} \quad \text{ou} \quad B = \bigcup_{\substack{k=1..3 \\ l=1..3}} \{\underline{\underline{\alpha}}^k \otimes \underline{\underline{\beta}}_l\} = \{\underline{\underline{\alpha}}^\circ \otimes \underline{\underline{\beta}}_\circ\}
 \end{array} \right.$$

Dans le cas où les vecteurs de base droits sont identiques aux vecteurs de base gauche, nous simplifions la notation :

$$B = \{\underline{\underline{\alpha}}_\circ \otimes \underline{\underline{\alpha}}_\circ\} = \{\underline{\underline{\alpha}}_\circ\} \quad \text{ou} \quad B = \{\underline{\underline{\alpha}}^\circ \otimes \underline{\underline{\alpha}}^\circ\} = \{\underline{\underline{\alpha}}^\circ\}$$

Il est possible de généraliser sans peine ces notations à l'ordre 4, ce que nous ferons pour projeter le tenseur de comportement au 5.2.2.1.

### 5.1.1.2 Dualité des espaces tangent et cotangent induite par la métrique

Nous avons laissé entendre précédemment que les espaces tangent et cotangent sont duaux. Cette dualité est définie mathématiquement par l'existence de la métrique. Cette métrique associe à tout point  $M$  du solide déformable un tenseur métrique fondamental  $\underline{\underline{\mathbf{g}}}$  et son tenseur conjugué, inverse de  $\underline{\underline{\mathbf{g}}}$ , noté  $\underline{\underline{\mathbf{g}}}^{-1}$ . Ces deux tenseurs, vus comme des formes bilinéaires, vont permettre le calcul des produits scalaires dans les espaces tangent et cotangent. On a :

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\mathbf{g}}} & : T_M V_3 \times T_M V_3 \rightarrow \mathbb{R} \\
 \underline{\underline{\mathbf{g}}}^{-1} & : T^*_M V_3 \times T^*_M V_3 \rightarrow \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

La projection canonique du tenseur métrique fondamental (2 fois covariant) de l'espace tangent est :

$$\text{Dans } T^*_M V_3 \otimes T^*_M V_3 \quad \underline{\underline{\mathbf{g}}} = g_{ij} \underline{\underline{\mathbf{g}}}^i \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}^j \quad \text{avec} \quad g_{ij} = \underline{\underline{\mathbf{g}}}_i \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}}_j$$

De même, pour le tenseur métrique conjugué (2 fois contravariant) de l'espace cotangent :

$$\text{Dans } T_M V_3 \otimes T_M V_3 \quad \underline{\underline{\mathbf{g}}}^{-1} = g^{ij} \underline{\underline{\mathbf{g}}}_i \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_j \quad \text{avec} \quad g^{ij} = \underline{\underline{\mathbf{g}}}^i \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}}^j$$

*Remarque* : Les composantes du tenseur métrique conjugué se calculent matriciellement par :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{g}}}^{-1} \right]_{\{\underline{\underline{\mathbf{g}}}_\circ\}} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{g}}} \right]_{\{\underline{\underline{\mathbf{g}}}^\circ\}}^{-1}$$

La dualité qui existe entre les espaces tangent et cotangent s'exprime alors par cette relation :

$$\boxed{\underline{g}_i \cdot \underline{g}^j = \underline{g}^j \cdot \underline{g}_i = \delta_i^j = \delta_j^i} \quad (5.3)$$

Il en découle que la connaissance d'une base de l'espace tangent (respectivement cotangent) permet de connaître la base duale dans l'espace cotangent (respectivement tangent). Les bases contravariante et covariante se déduisent alors l'une de l'autre par ces relations :

$$\underline{g}^i = g^{ij} \underline{g}_j \quad \text{ou} \quad \underline{g}_i = g_{ij} \underline{g}^j$$

*Remarque* : le tenseur métrique est vu ici comme une application linéaire qui s'appelle en géométrie différentielle le dièse ou le bémol selon le cas.

### 5.1.1.3 Gradient de la transformation et transports matériels des tenseurs d'ordre 1

Le solide déformable est plongé dans l'espace, espace euclidien à 3 dimensions. On le repère alors par l'application placement  $\phi$  qui permet de définir le gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  entre deux instants, séparés par un intervalle  $dt$ , comme suit ([BAS00]) :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{g}_i \otimes \underline{G}^i = \text{Grad}_{\underline{x}} \phi = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}}$$

$\{G^0\}$  est la base contravariante à  $t$  et  $\{g_0\}$  est la base covariante à  $t+dt$ .  $\underline{x}$  est le vecteur position des points  ${}^{t+dt}M$  du solide déformable à  $t+dt$  et  $\underline{X}$  le vecteur position des points  ${}^tM$  du solide déformable à  $t$ .

La théorie du premier gradient nous dit qu'un segment  $\mathbf{l}$  (infinitésimal) de  $T_M {}^tV_3$  se transforme par  $\mathbf{F}$  dans  $T_M {}^{t+dt}V_3$ , alors qu'une facette  $\mathbf{n}$  (infinitésimale) de  $T^*_M {}^tV_3$  voit sa normale transformée par  $\mathbf{F}^{-T}$  dans  $T^*_M {}^{t+dt}V_3$ . Nous avons donc, en particulier, pour les vecteurs des bases covariante et contravariante ([BAS00]) :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{g}_i &= \underline{\underline{F}} \cdot \underline{G}_i \\ \underline{g}^j &= \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{G}^j \end{aligned}} \quad (5.4)$$

Preuve (obtenue avec l'aide de (5.3)) :

$$\left| \begin{aligned} \text{On suppose } \underline{g}_i &= \underline{\underline{F}} \cdot \underline{G}_i \text{ et on pose } \underline{g}^j = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{G}^j, \text{ il vient :} \\ \delta_i^j &= \underline{g}_i \cdot \underline{g}^j = \underline{g}_i \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{G}^j) = (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{G}_i) \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{G}^j) = \underline{G}_i \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{G}^j \\ \Rightarrow \underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{F}}^{-T} \quad \text{car} \quad \underline{G}_i \cdot \underline{G}^j = \delta_i^j \end{aligned} \right.$$

C'est ce qui explique qu'en MGT l'espace tangent soit apparié à son dual, l'espace cotangent, cela étant dû au fait que les segments (décrits par des vecteurs tangents) ne se transforment pas comme les facettes (décrites par des vecteurs cotangents).

C'est donc à partir du tenseur gradient  $\mathbf{F}$  que nous allons construire les différents transports. Les transports matériels contravariants et covariants pour les tenseurs d'ordre 1 se construisent immédiatement à partir de (5.4) :

▪ Nous définissons le transport matériel 1 fois contravariant comme étant l'application de  $T_M {}^tV_3$  à  $T_M {}^{t+dt}V_3$  qui transporte convectivement les tenseurs d'ordre 1 contravariants de  $T_M {}^tV_3$  comme illustré sur la Figure 5-2. Ce transport s'écrit :

$$\boxed{\forall \underline{\underline{I}} \in T_M {}^tV_3 \quad \underline{\underline{T}}^o(\underline{\underline{I}}) = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{I}} \Leftrightarrow \underline{\underline{T}}^{o-1}(\underline{\underline{I}}) = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{I}}} \quad (5.5)$$



▪ Nous définissons le transport matériel 1 fois covariant comme étant l'application de  $T^*_M{}^tV_3$  à  $T^*_M{}^{t+dt}V_3$  qui transporte convectivement les tenseurs d'ordre 1 covariants de  $T^*_M{}^tV_3$  comme illustré sur la Figure 5-3. Ce transport s'écrit :

$$\forall \underline{n} \in T^*_M{}^tV_3 \quad \underline{T}_o(\underline{n}) = \underline{F}^{-T} \cdot \underline{n} \Leftrightarrow \underline{T}_o^{-1}(\underline{n}) = \underline{F}^T \cdot \underline{n} \quad (5.6)$$

De manière analogue aux transports rotationnels du chapitre 3, la propriété fondamentale des transportés matériels est qu'ils ont les mêmes composantes dans la base convectée que leurs antécédents dans la base initiale. Nous avons en effet :

▪ Pour le transport matériel 1 fois contravariant :

$$\left[ \underline{T}^\circ(\underline{l}) \right]_{\{g_o\}} = \left[ \underline{l} \right]_{\{G_o\}} \quad (5.7)$$

Preuve :  $\underline{l} = l^i G_i \Rightarrow \underline{T}^\circ(\underline{l}) = \underline{F} \cdot \underline{l} = \underline{F} \cdot l^i G_i = l^i \underline{g}_i$

▪ Pour le transport matériel 1 fois covariant :

$$\left[ \underline{T}_o(\underline{n}) \right]_{\{g^o\}} = \left[ \underline{n} \right]_{\{G^o\}} \quad (5.8)$$

Preuve :  $\underline{n} = n_i G^i \Rightarrow \underline{T}_o(\underline{n}) = \underline{F}^{-T} \cdot \underline{n} = \underline{F}^{-T} \cdot n_i G^i = n_i \underline{g}^i$

Remarque : avec ce formalisme, (5.4) se réécrit :

$$\begin{aligned} \underline{g}_i &= \underline{T}^\circ(G_i) \\ \underline{g}^i &= \underline{T}_o(G^i) \end{aligned} \quad (5.9)$$

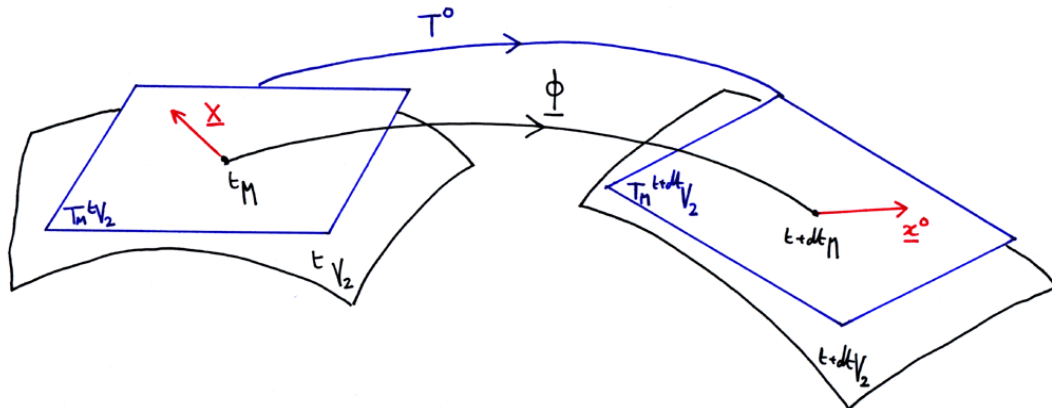


Figure 5-2 : Transformation matérielle contravariante entre t et t+dt de l'espace vectoriel tangent

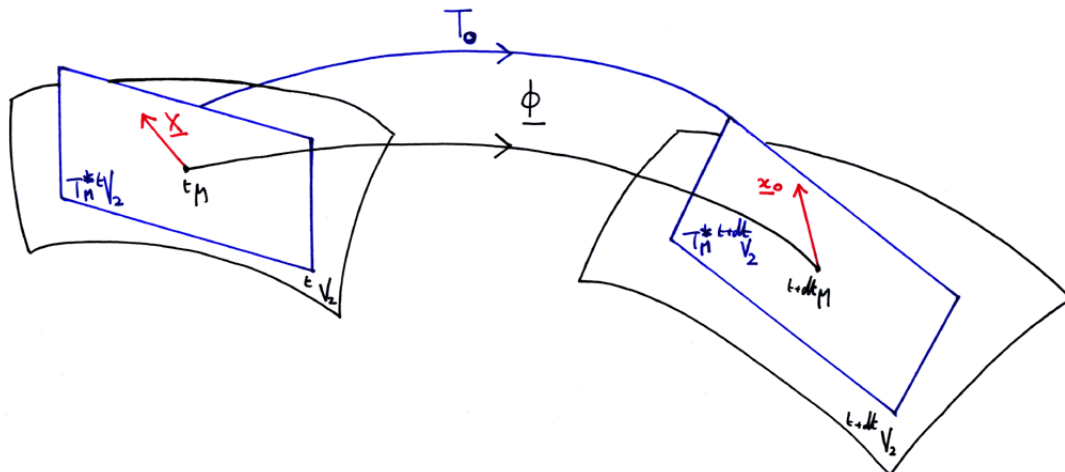


Figure 5-3 : Transformation matérielle covariante entre t et t+dt de l'espace vectoriel cotangent

5.1.1.4 Transports matériels des tenseurs d'ordre 2

Il est possible, comme de coutume avec les tenseurs, de définir à tout ordre les transports matériels. Pour les tenseurs d'ordre 2, il existe quatre transports matériels puisqu'ils peuvent appartenir à quatre espaces tensoriels différents d'après (5.2). Nous laissons de côté les versions mixtes pour nous concentrer sur les transports 2 fois contravariants et 2 fois covariants :

- Transport matériel 2 fois contravariant d'un tenseur 2 fois contravariant :

$$\boxed{\forall \underline{\underline{\sigma}} \in T_M^* \text{}^t V_3 \otimes T_M^* \text{}^t V_3 \quad \underline{\underline{T}}^{\circ\circ}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{T}}^{\circ\circ-1}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}} \quad (5.10)$$

- Transport matériel 2 fois covariant d'un tenseur 2 fois covariant :

$$\boxed{\forall \underline{\underline{D}} \in T_M^* \text{}^t V_3 \otimes T_M^* \text{}^t V_3 \quad \underline{\underline{T}}_{\circ\circ}(\underline{\underline{D}}) = \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{T}}_{\circ\circ}^{-1}(\underline{\underline{D}}) = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{F}}}} \quad (5.11)$$

La propriété fondamentale des transports matériels d'ordre 2 est identique à celle des transports matériels d'ordre 1 introduits au 5.1.1.3. Nous avons en effet :

- Pour le transport matériel 2 fois contravariant :

$$\boxed{\underline{\underline{T}}^{\circ\circ}(\underline{\underline{\sigma}})}_{\{g^{\circ}\}} = \underline{\underline{\sigma}}_{\{G^{\circ}\}} \quad (5.12)$$

Preuve (obtenue avec l'aide de (5.4)) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} = \sigma^{ij} \underline{\underline{G}}_i \otimes \underline{\underline{G}}_j &\Rightarrow \underline{\underline{T}}^{\circ\circ}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{F}} \cdot (\sigma^{ij} \underline{\underline{G}}_i \otimes \underline{\underline{G}}_j) \cdot \underline{\underline{F}}^T = \sigma^{ij} ((\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{G}}_i) \otimes \underline{\underline{G}}_j) \cdot \underline{\underline{F}}^T \\ &= \sigma^{ij} (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{G}}_i) \otimes (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{G}}_j) = \sigma^{ij} \underline{\underline{g}}_i \otimes \underline{\underline{g}}_j \end{aligned}$$

- Pour le transport matériel 2 fois covariant :

$$\boxed{\underline{\underline{T}}_{\circ\circ}(\underline{\underline{D}})}_{\{g^{\circ}\}} = \underline{\underline{D}}_{\{G^{\circ}\}} \quad (5.13)$$

Preuve (obtenue avec l'aide de (5.4)) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} = D_{ij} \underline{\underline{G}}^i \otimes \underline{\underline{G}}^j &\Rightarrow \underline{\underline{T}}_{\circ\circ}(\underline{\underline{D}}) = \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot (D_{ij} \underline{\underline{G}}^i \otimes \underline{\underline{G}}^j) \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = D_{ij} ((\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{G}}^i) \otimes \underline{\underline{G}}^j) \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \\ &= D_{ij} (\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{G}}^i) \otimes (\underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{G}}^j) = D_{ij} \underline{\underline{g}}^i \otimes \underline{\underline{g}}^j \end{aligned}$$

*Remarque* : Notons que cette propriété implique que les transportés matériels inverses aient les mêmes composantes dans la base initiale que leurs images dans la base convectée :

- Pour le transport matériel 2 fois contravariant :

$$\boxed{\underline{\underline{T}}^{\circ\circ-1}(\underline{\underline{\sigma}})}_{\{G^{\circ}\}} = \underline{\underline{\sigma}}_{\{g^{\circ}\}} \quad (5.14)$$

Preuve (obtenue avec l'aide de (5.12)) :

Posons  $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{T}}^{\circ\circ}(\underline{\underline{\sigma}})$ , il vient  $\underline{\underline{T}}^{\circ\circ}(\underline{\underline{\sigma}})_{\{g^{\circ}\}} = \underline{\underline{\sigma}}_{\{G^{\circ}\}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}_{\{g^{\circ}\}} = \underline{\underline{T}}^{\circ\circ-1}(\underline{\underline{A}})_{\{G^{\circ}\}}$

- Pour le transport matériel 2 fois covariant :

$$\boxed{\underline{\underline{T}}_{\circ\circ}^{-1}(\underline{\underline{D}})}_{\{G^{\circ}\}} = \underline{\underline{D}}_{\{g^{\circ}\}} \quad (5.15)$$

Preuve (obtenue avec l'aide de (5.13)) :

Posons  $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{T}}_{\circ\circ}(\underline{\underline{D}})$ , il vient  $\underline{\underline{T}}_{\circ\circ}(\underline{\underline{D}})_{\{g^{\circ}\}} = \underline{\underline{D}}_{\{G^{\circ}\}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}_{\{g^{\circ}\}} = \underline{\underline{T}}_{\circ\circ}^{-1}(\underline{\underline{A}})_{\{G^{\circ}\}}$

5.1.1.5 Dualité des transports matériels et cas du mouvement de corps rigide

Les bases covariante et contravariantes sont construites pour être duales, tout comme les espaces auxquels elles appartiennent. Comme ces bases sont convectées dans une transformation arbitraire par les transports matériels ad hoc, ces derniers présentent également un caractère dual. Ainsi, nous avons conservation du produit scalaire entre un tenseur 1 fois covariant et un tenseur 1 fois contravariant quand ces derniers sont matériellement transportés :

$$\underline{T}^\circ(\underline{\mathbf{I}}) \cdot \underline{T}_\circ(\underline{\mathbf{n}}) = (\underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{I}}) \cdot (\underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \underline{\mathbf{n}}) = (\underline{\mathbf{F}}^{-1} \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{I}}) \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{I}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \quad (5.16)$$

De même, nous avons à l'ordre 2 :

$$\underline{\underline{T}}_{\circ\circ}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}) : \underline{\underline{T}}^{\circ\circ}(\underline{\underline{\sigma}}) = (\underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1}) : (\underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^T) = (\underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1} \underline{\mathbf{F}}) : \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad (5.17)$$

Nous pouvons conclure que la définition d'un transport affine de variance donnée implique donc la définition d'un transport dual de variance imposée.

Dans le cas d'un mouvement de corps rigide du solide déformable, le gradient de la transformation se réduit à sa partie orthogonale. Nous avons alors  $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ , la rotation propre  $\mathbf{R}$  étant elle-même égale à la rotation de corps rigide. Dans ce cas, les transports matériels, bien que toujours duaux, deviennent des transports rotationnels identiques entre eux. Leurs tensorialités ne sont plus distinguables : les normales et les segments sont entraînés par la même rotation. Nous avons, en reprenant les notations du chapitre 3 :

- Pour les tenseurs d'ordre 1

$$\begin{cases} \underline{T}^\circ(\underline{\mathbf{I}}) = \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{I}} = \underline{T}_{\perp/\underline{\mathbf{R}}}(\underline{\mathbf{I}}) \\ \underline{T}_\circ(\underline{\mathbf{n}}) = \underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{R}}^{-T} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{T}_{\perp/\underline{\mathbf{R}}}(\underline{\mathbf{n}}) \end{cases}$$

- Pour les tenseurs d'ordre 2

$$\begin{cases} \underline{\underline{T}}^{\circ\circ}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^T = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{R}}^T = \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\mathbf{R}}}(\underline{\underline{\sigma}}) \\ \underline{\underline{T}}_{\circ\circ}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}) = \underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1} = \underline{\mathbf{R}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\mathbf{R}}^{-1} = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\mathbf{R}}^T = \underline{\underline{T}}_{\perp/\underline{\mathbf{R}}}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}) \end{cases}$$

Ce constat est utile pour généraliser la notion de transport du chapitre 3. Il est maintenant clair que pour y arriver il est impératif de remplacer le transport rotationnel par plusieurs transports affines de variances différentes. Cela implique notamment la définition de plusieurs dérivées affines, généralisant la dérivée rotationnelle, et de plusieurs intégrales affines, généralisant l'intégrale rotationnelle. De plus, il est maintenant nécessaire de définir l'objectivité affine, généralisant l'objectivité euclidienne, pour pouvoir réellement attribuer le caractère matériel aux transports (5.5), (5.6), (5.10) et (5.11) définis à partir de l'affinité  $\mathbf{F}$ .

 5.1.1.6 Objectivité affine

Nous proposons de définir l'objectivité affine de manière à généraliser l'objectivité euclidienne en étendant l'étude de l'invariance des tenseurs à des affinités. Bien que cette notion ne soit pas classique en MGT, elle est très présente en Relativité Générale<sup>31</sup> ([EIN93]) où l'espace-temps est affine et, donc, où les divers observateurs sont déformables. Cela veut dire que ces derniers ne diffèrent pas l'un de l'autre par une simple rotation mais par une affinité. Ils n'ont cependant pas conscience d'être déformés eux-

<sup>31</sup> L'objectivité affine des tenseurs est appelé « covariance des tenseurs » en Relativité Générale.

mêmes car ils sont *dans* l'espace-temps, qui est *lui-même* déformé. En MGT, nous aurions du mal à concevoir de manière évidente de tels observateurs car la démarche de modélisation consiste à plonger et analyser les solides déformables, analogues à l'espace-temps, dans l'espace euclidien qui nous entoure et rarement à travailler au sein de la matière elle-même ([ROU97]). Cependant, l'objectivité affine est un concept nécessaire pour justifier le sens géométrique des transports affines et des opérations de dérivation et d'intégration en découlant, exactement comme l'objectivité euclidienne est nécessaire pour comprendre le sens géométrique des transports rotationnels, de la dérivée rotationnelle et de l'intégrale rotationnelle. En conséquence, nous définissons l'objectivité affine des tenseurs affines comme l'invariance de ces derniers dans une transformation arbitraire d'affinité  $\mathbf{F}$ . Pour le test d'objectivité affine,  $\mathbf{F}$  n'est pas forcément le gradient de la transformation.

*Remarque* : Dans ce chapitre, quand nous dirons qu'un tenseur est objectif, c'est qu'il sera pensé affine et donc invariant par rapport à une affinité.

L'invariance d'un tenseur affine par rapport à la transformation  $\mathbf{F}$  est exprimée par le fait que la loi de transformation d'un tenseur  $\mathbf{A}$  donné corresponde à un transport affine matériel de même tensorialité que  $\mathbf{A}$ . Avec les mêmes notations qu'au chapitre 3, nous définissons l'objectivité affine à l'aide des transports affines matériels (5.5), (5.6), (5.10) et (5.11) :

- Pour un tenseur  $\mathbf{a}$  1 fois contravariant par :

$$\underline{\underline{\mathbf{a}}}_{\text{TF}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}^\circ}(\underline{\underline{\mathbf{a}}}) \quad (5.18)$$

- Pour un tenseur  $\mathbf{a}$  1 fois covariant par :

$$\underline{\underline{\mathbf{a}}}_{\text{TF}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}_\circ}(\underline{\underline{\mathbf{a}}}) \quad (5.19)$$

- Pour un tenseur  $\mathbf{A}$  2 fois contravariant par :

$$\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{\text{TF}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{T}}^\circ}}(\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}) \quad (5.20)$$

- Pour un tenseur  $\mathbf{A}$  2 fois covariant par :

$$\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{\text{TF}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{T}}_\circ}}(\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}) \quad (5.21)$$

*Remarque* : D'après 5.1.1.5, les transports affines généralisent les transports rotationnels. Il est donc possible de montrer qu'un tenseur objectif au sens affine l'est au sens euclidien.

Illustrons le concept d'objectivité affine par deux exemples :

- Exemple 1 : Intuitivement, nous comprenons la signification géométrique des relations (5.7) et (5.8) si nous considérons qu'une base vectorielle (modélisant un observateur déformable) se déforme avec le segment matériel ou la normale matérielle qu'on y regarde : ses composantes restent invariantes. Ce constat permet d'admettre que les segments et les normales sont objectifs.

- Exemple 2 : Les contraintes de Cauchy sont définies par :

$$\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{n}}}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{T}}}} \quad (5.22)$$

Dans une transformation d'affinité arbitraire  $\mathbf{F}$ , les tenseurs de (5.22) sont convectés et l'équation devient :

$$\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}}_{\text{TF}} \cdot \underline{\underline{\underline{\mathbf{n}}}}_{\text{TF}} = \underline{\underline{\underline{\mathbf{T}}}}_{\text{TF}}$$

Les vecteurs affines infinitésimaux  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{T}$  sont postulés objectifs. Les normales sont covariantes, mais la tensorialité des forces est moins évidente ([ROU91]). Elles sont souvent postulées contravariantes. Dans ce cas, les lois de transformations sont données par (5.5) et (5.6) :

$$\underline{n}_{TF} = \underline{T}_\circ(\underline{n}) \quad \text{et} \quad \underline{T}_{TF} = \underline{T}^\circ(\underline{T})$$

Nous avons alors :

$$\underline{\sigma}_{TF} \cdot \underline{T}_\circ(\underline{n}) = \underline{T}^\circ(\underline{T}) \Leftrightarrow \underline{\sigma}_{TF} \cdot \underline{F}^{-T} \cdot \underline{n} = \underline{F} \cdot \underline{T} \Leftrightarrow \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\sigma}_{TF} \cdot \underline{F}^{-T} \cdot \underline{n} = \underline{T}$$

Avec l'aide de (5.10), nous en déduisons la loi de transformation de  $\sigma$  qui correspond à celle d'un tenseur affine 2 fois contravariant objectif :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{TF} = \underline{T}^{\circ\circ}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (5.23)$$

## 5.1.2 Approche hyper-euclidienne

### 5.1.2.1 Définition de l'approche hyper-euclidienne

L'approche hyper-euclidienne a été introduite par Rougée ([ROU97]) pour clairement exprimer une simplification courante très usitée en MGT. Cette dernière consiste à penser en terme de tenseurs euclidiens appartenant à l'espace et possédant plusieurs jeux de composantes équivalents associés à des bases tensorielles produits de bases vectorielles non-orthogonales et non-normées. Cela permet, pour un même tenseur, d'éviter de parler de plusieurs tensorialités, tous les jeux de composantes étant équivalents, et d'éluder la définition des espaces mathématiques sous-jacents.

*Remarque* : Nous adoptons ce point de vue car il est nécessaire pour construire une théorie qui nous permette, au final, d'évaluer le tenseur des contraintes de Cauchy pensé comme un tenseur euclidien de l'espace. Cette exigence est justifiée par notre volonté d'implémenter nos formulations dans des codes de calcul industriels employant des formulations basées sur des rotations (décrites au chapitre 3). C'est le cas d'Abaqus/Explicit que nous utilisons.

Nous nous autorisons donc à identifier un vecteur donné avec son dual. Ainsi, (5.1) devient :

$$\text{Dans } \mathbb{R}^3 \quad \underline{u} = u^i \underline{g}_i = u_i \underline{g}^i$$

Une représentation graphique des composantes d'un vecteur est montrée sur la Figure 5-4.

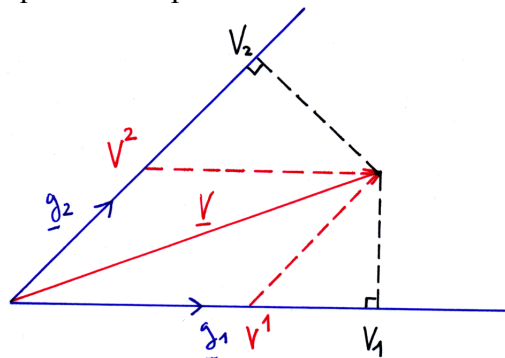


Figure 5-4 : Composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur V dans la base covariante

Pour un tenseur  $A$  d'ordre 2, nous avons quatre jeux de composantes possibles, les deux derniers jeux de composantes étant dits « mixtes ». Ainsi, (5.2) devient :

$$\text{Dans } \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \quad \underline{\underline{A}} = A^{ij} \underline{g}_i \otimes \underline{g}_j = A_{ij} \underline{g}^i \otimes \underline{g}^j = A_i^j \underline{g}^i \otimes \underline{g}_j = A^i_j \underline{g}_i \otimes \underline{g}^j$$

Dans le cadre de cette approche, nous déguisons donc les tenseurs affines, d'ordre  $n$ ,  $p$  fois covariants et  $q$  fois contravariants en tenseurs euclidiens ayant  $n^{p+q}$  jeux de composantes  $p$  fois covariantes et  $q$  fois contravariantes.

Les transports matériels précédemment définis deviennent des endomorphismes de l'espace et peuvent s'appliquer à n'importe quel tenseur euclidien. Evidemment, en fonction du jeu de composantes ayant un sens physique, tel ou tel transport devra être privilégié. Cela veut dire que c'est par le choix d'un transport affine s'appliquant à un tenseur que nous retrouvons la tensorialité de ce dernier.

### 5.1.2.2 L'élément de matière naturel et son dual

Nous l'avons vu au 5.1.1.3 :  $\mathbf{F}$  convecte les segments matériels et  $\mathbf{F}^{-T}$  convecte les normales des facettes matérielles. Ces deux transports conjugués définissent la convection de la matière que nous désignons également par le terme « transformation matérielle ». Si nous définissons un élément de matière cubique infinitésimal dans une configuration initiale non-déformée, les normales aux facettes et les segments sont confondus. Quand le placement  $\phi$  transforme la matière de la configuration initiale au point  $M$  en matière de la configuration actuelle au point  $m$ , normales et segments évoluent de manière différente et il apparaît alors un élément de matière naturel convecté par  $\mathbf{F}$ , et son dual convecté par  $\mathbf{F}^{-T}$ . Notre objectif au §5.2 va être de calculer des contraintes sur ces éléments. Cela diffère complètement de l'approche du chapitre 3 où l'élément de matière sur lequel nous calculions les contraintes était confondu avec son dual et ne se déformait pas puisque nous nous limitons à l'emploi de rotations.

Nous avons représenté les deux éléments de matière sur la Figure 5-5 et, pour plus de lisibilité, nous les avons représentés l'un en dessous de l'autre alors qu'ils se trouvent au même point  $m$ .

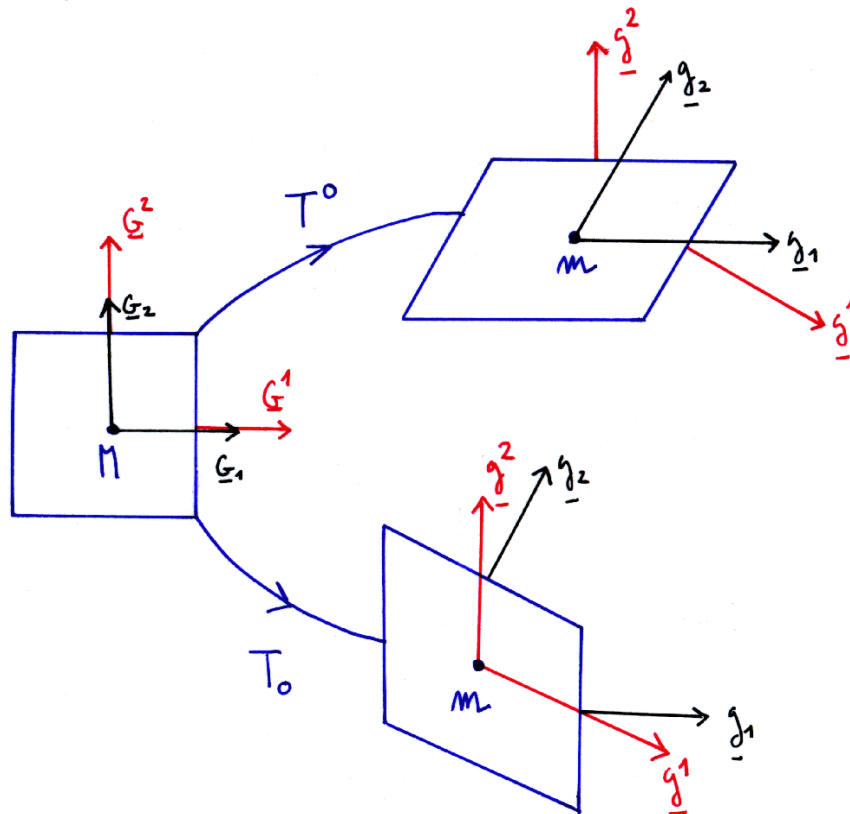


Figure 5-5 : L'élément de matière naturel (en haut) et son dual (en bas)

*Remarque* : cette description est en accord avec l'élément de matière de Rougée ([ROU97]) défini dans son approche « segments et tranches », à la différence que nous nous permettons les identifications des différents espaces où se trouvent les tenseurs (approche hyper-euclidienne). Nous identifions notamment une tranche avec la normale de l'élément de surface associé.

### 5.1.2.3 Dérivation affine

La dérivation de Lie a été introduite au chapitre 3 et particularisée dans le cas des transports rotationnels. Dans le cas des transports affines, et en particulier des transports matériels définis au 5.1.1.4, la définition reste la même et nous obtenons sans difficultés la dérivée de Lie 2 fois covariante et la dérivée de Lie 2 fois contravariante d'un tenseur affine  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  d'ordre 2 objectif ([DES99], [TAL93]) :

$$\left[ \begin{aligned} \underline{\underline{L}}_{\circ\circ}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\underline{\underline{\mathbf{A}}}^t - \underline{\underline{T}}_{\circ\circ}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{t-dt})}{dt} = \dot{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}_{ij} \underline{\underline{\mathbf{g}}}^i \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}^j = \underline{\underline{T}}_{\circ\circ} \left( \underline{\underline{\dot{\mathbf{A}}}} \right) \\ \underline{\underline{L}}^{\circ\circ}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\underline{\underline{\mathbf{A}}}^t - \underline{\underline{T}}^{\circ\circ}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{t-dt})}{dt} = \dot{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}^{ij} \underline{\underline{\mathbf{g}}}_i \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_j = \underline{\underline{T}}^{\circ\circ} \left( \underline{\underline{\dot{\mathbf{A}}}} \right) \end{aligned} \right. \quad (5.24)$$

Ces dérivées représentent la variation intrinsèque de  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  dans les bases tensorielles convectées covariante ou contravariante.

*Remarque* : à l'ordre 2, il existe aussi deux autres dérivées de Lie pour les composantes mixtes.

La définition de la dérivation de Lie est l'occasion de retrouver les dérivées convectives classiques en MGT. Dans la littérature ([MOM03], [BON97], [CRI91], [SZA89], [DET85], [SID82]), la dérivée de Lie 2 fois covariante est connue sous les appellations « dérivée covariante », « dérivée convective » ou bien encore « dérivée de Cotter-Rivlin ». La dérivée de Lie 2 fois contravariante est, elle, appelée « dérivée contravariante » ou bien encore « dérivée d'Oldroyd ». Retrouvons les expressions classiques de ces dérivées temporelles grâce à (5.24) :

- Dérivée de Lie 2 fois covariante

Il s'agit du transport covariant de la dérivée du transport covariant inverse :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{L}}_{\circ\circ}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) &= \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-T} \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\dot{\mathbf{A}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} = \underline{\underline{\dot{\mathbf{A}}}} + \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\dot{\mathbf{F}}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\mathbf{F}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} \\ &= \underline{\underline{\dot{\mathbf{A}}}} + \underline{\underline{\mathbf{L}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{L}}} \\ &= \underline{\underline{\dot{\mathbf{A}}}} + \left( \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T + \underline{\underline{\mathbf{W}}}^T \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{W}}} \right) \\ &= \underline{\underline{\dot{\mathbf{A}}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{W}}} - \underline{\underline{\mathbf{W}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \end{aligned}$$

Nous voyons apparaître la dérivée de Jaumann, définie au du chapitre 3. La dérivée de Lie 2 fois covariante d'un tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  affine objectif s'exprime donc :

$$\boxed{\underline{\underline{L}}_{\circ\circ}(\underline{\underline{A}}) = \dot{\underline{\underline{A}}} + \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}}_{\perp/\underline{\underline{Q}}}(\underline{\underline{A}}) + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{D}}} \quad (5.25)$$

- Dérivée de Lie 2 fois contravariante

Il s'agit du transport contravariant de la dérivée du transport contravariant inverse :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{L}}^{\circ\circ}(\underline{\underline{A}}) &= \underline{\underline{F}} \cdot \left( \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \dot{\underline{\underline{A}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \right) \cdot \underline{\underline{F}}^T = \dot{\underline{\underline{A}}} + \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^T \\ &= \dot{\underline{\underline{A}}} - \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{L}}^T \\ &= \dot{\underline{\underline{A}}} - (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}}) \cdot \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{D}}^T + \underline{\underline{W}}^T) \\ &= \dot{\underline{\underline{A}}} + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{W}} - \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{D}} \end{aligned}$$

Comme pour la précédente dérivée de Lie, nous voyons apparaître la dérivée de Jaumann. La dérivée de Lie 2 fois contravariante d'un tenseur  $\mathbf{A}$  affine objectif s'exprime donc :

$$\boxed{\underline{\underline{L}}^{\circ\circ}(\underline{\underline{A}}) = \dot{\underline{\underline{A}}} - \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{L}}^T = \underline{\underline{L}}_{\perp/\underline{\underline{Q}}}(\underline{\underline{A}}) - \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{D}}} \quad (5.26)$$

*Remarque* : il apparaît que la dérivée de Jaumann peut être définie à partir des dérivées de Lie 2 fois covariante et 2 fois contravariante :

$$\underline{\underline{L}}_{\perp/\underline{\underline{Q}}}(\underline{\underline{A}}) = \frac{\underline{\underline{L}}_{\circ\circ}(\underline{\underline{A}}) + \underline{\underline{L}}^{\circ\circ}(\underline{\underline{A}})}{2}$$

Cela peut expliquer que pour Rougée ([ROU97]) la dérivée de Jaumann soit la dérivée rotationnelle la plus physique puisqu'elle représente la moyenne des dérivées de Lie covariantes et contravariantes.

Enfin, soulignons une propriété importante de la dérivation de Lie : à l'instar de la dérivée rotationnelle qui traduit l'entraînement d'un tenseur euclidien objectif dans un mouvement de corps rigide quand elle s'annule, une dérivée de Lie nulle traduit la convection d'un tenseur affine objectif avec la matière qui se déforme. Par exemple, nous avons trivialement :

- La dérivée de Lie 1 fois contravariante de la base covariante (qui sont des vecteurs contravariants) nulle :

$$\underline{\underline{L}}^{\circ}(\underline{\underline{g}}_i) = \underline{\underline{0}}$$

- La dérivée de Lie 1 fois covariante de la base contravariante (qui sont des vecteurs covariants) nulle :

$$\underline{\underline{L}}_{\circ}(\underline{\underline{g}}^i) = \underline{\underline{0}}$$

#### 5.1.2.4 Intégration affine

De manière analogue aux dérivées de Lie, les intégrales de Lie généralisent l'intégrale rotationnelle. Elles correspondent à l'intégration des tenseurs affines dans des référentiels affines, c'est-à-dire non-rigides ([ROU97]). Avec les transports matériels définis au 5.1.1.4, nous obtenons l'intégrale de Lie 2 fois covariante et l'intégrale de Lie 2 fois contravariante d'un tenseur affine  $\mathbf{A}$  d'ordre 2 objectif :



$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{S_{\circ\circ}}}(\underline{\underline{A}}) &= \underline{\underline{T_{\circ\circ}}} \left( \int_0^t \underline{\underline{T_{\circ\circ}^{-1}}}(\underline{\underline{A}}) dt \right) \\ \underline{\underline{S^{\circ\circ}}}(\underline{\underline{A}}) &= \underline{\underline{T^{\circ\circ}}} \left( \int_0^t \underline{\underline{T^{\circ\circ-1}}}(\underline{\underline{A}}) dt \right) \end{aligned}} \quad (5.27)$$

L'intégration de Lie se définit à partir des transports matériels. Il paraît donc judicieux d'analyser l'intégrale 2 fois covariante (respectivement 2 fois contravariante) de Lie dans la base tensorielle contravariante (respectivement covariante). Réécrivons la définition (5.27) de l'intégrale de Lie 2 fois covariante :

$$\underline{\underline{T_{\circ\circ}^{-1}}} \left( \underline{\underline{S_{\circ\circ}}}(\underline{\underline{A}}) \right) = \int_0^t \underline{\underline{T_{\circ\circ}^{-1}}}(\underline{\underline{A}}) dt$$

Dans la base contravariante initiale, cette relation s'écrit :

$$\left[ \underline{\underline{T_{\circ\circ}^{-1}}} \left( \underline{\underline{S_{\circ\circ}}}(\underline{\underline{A}}) \right) \right]_{\{G^{\circ}\}} = \left[ \int_0^t \underline{\underline{T_{\circ\circ}^{-1}}}(\underline{\underline{A}}) dt \right]_{\{G^{\circ}\}} = \int_0^t \left[ \underline{\underline{T_{\circ\circ}^{-1}}}(\underline{\underline{A}}) \right]_{\{G^{\circ}\}} dt$$

d'où, en vertu de (5.15):

$$\boxed{\left[ \underline{\underline{S_{\circ\circ}}}(\underline{\underline{A}}) \right]_{\{g^{\circ}\}} = \int_0^t \left[ \underline{\underline{A}} \right]_{\{g^{\circ}\}} dt} \quad (5.28)$$

L'intégrale de Lie 2 fois covariante dans la base contravariante d'un tenseur d'ordre 2 est donc l'intégrale directe du tenseur projeté dans la base contravariante.

#### 5.1.2.5 Solides suiveurs affines

L'introduction du concept d'objectivité affine a permis de définir les observateurs déformables modélisés par des bases vectorielles non-orthogonales et non-normées. Ces bases définissent donc des référentiels non-rigides qui se déforment au cours du temps ([ROU97]). La notion de solide suiveur euclidien se généralise donc immédiatement dans le cadre de la théorie du premier gradient : *Un solide suiveur affine est un ensemble de référentiels non-rigides en chaque point du solide déformable, définis par un champ d'affinités, ayant pour vocation de suivre localement la matière au premier ordre.*

La difficulté réside dans la définition de ce que nous appelons le « suivi de la matière ». En effet, la matière peut être suivi à partir des segments ou des normales, ces représentations conduisant à deux éléments de matières duaux comme nous l'avons montré au 5.1.2.2. Il est donc possible de définir à partir des transports matériels contravariant (5.5) et covariant (5.6) deux solides suiveurs affines duaux approximant au premier ordre le solide déformable. Dans la terminologie de la géométrie différentielle, ces solides suiveurs sont respectivement :

- Le fibré contravariant, dit encore fibré tangent, qui est l'ensemble des espaces vectoriels naturels en tout point du solide déformable.
- Le fibré covariant, dit encore fibré cotangent, qui est l'ensemble des espaces vectoriels duaux en tout point du solide déformable.

*Remarque* : Ces deux solides suiveurs sont très populaires puisque la dérivation de Lie 2 fois contravariante (5.26) est effectuée dans le premier et la dérivation de Lie 2 fois covariante (5.25) dans le second.

Cette dualité contraste avec le cas euclidien où un champ de rotation donné est associé à un unique solide suiveur. Ici, la difficulté majeure est de décider dans quel solide suiveur

opérer sur un tenseur si sa tensorialité n'est pas définie. Le cas du tenseur de contrainte  $\sigma$  est exemplaire puisque, d'après 5.1.1.6, pour le supposer deux fois contravariant il faut supposer que les forces sont contravariantes, ce qui n'est pas trivial. Cela peut expliquer pourquoi il n'existe pas de dérivée rotationnelle ou affine évidente pour  $\sigma$  ([SAN92]) et qu'il soit possible d'en construire d'autres, comme la dérivée de Truesdell par exemple ([BON97], [ROU97]).

## 5.2 Formulations possibles pour la construction d'un MCEA-F

Nous venons de mettre en place le formalisme permettant de formuler des milieux continus équivalents anisotropes fibreux. Il nous faut maintenant analyser comment faire correspondre à un milieu anisotrope hétérogène un milieu continu équivalent. Le milieu anisotrope est supposé renforcé dans au plus trois directions et nous négligeons les raideurs de cisaillement entre ces dernières. Il n'y a donc que des contraintes de traction/compression dans les directions fortes d'anisotropie et le comportement est défini par trois modules d'Young. En commençant par l'étude de la cinématique, nous sommes amenés à définir un nouveau solide suiveur à partir d'une affinité conservant la base covariante unitaire. Nous obtenons en intégrant les taux de déformation  $\mathbf{D}$  dans ce solide suiveur une nouvelle mesure de déformation affine. Elle est obtenue par le cumul tensoriel des allongements relatifs le long des directions fortes d'anisotropie. Nous définissons ensuite trois mesures de contrainte possibles pour calculer le tenseur de contrainte de Cauchy. Ces mesures sont définies à partir de différents choix pour le cumul tensoriel des incréments de contraintes.

### 5.2.1 Cinématiques envisagées

#### 5.2.1.1 Modes de déformations et continua équivalents

Les modes de déformations d'un milieu à plusieurs directions d'anisotropie doivent d'abord être identifiés pour construire un MCEA-F. Il est commode de se les représenter comme si le milieu anisotrope était 2D, c'est-à-dire comme s'il s'agissait d'un tissu avec des mèches très extensibles. Cela permet d'illustrer notre propos dans le cas de deux directions fortes d'anisotropie, mais les théories que nous allons développer restent valables pour un milieu anisotrope 3D à trois directions fortes d'anisotropie. De plus, cette approche permet de retrouver la formulation de membranes tissées de Boisse et al. récemment utilisée dans [BOI04] et [HIV02].

Dans le cas 2D, nous avons trois modes de déformations possibles :

- La traction/compression dans les directions fortes d'anisotropie, générant des contraintes uniquement dans les directions fortes d'anisotropie.
- La rotation d'une direction forte d'anisotropie par rapport à l'autre, sans allongement dans ces directions. Puisque par hypothèse nous négligeons tous les autres efforts autres que ceux de traction/compression dans les directions fortes d'anisotropie, ce mode de déformation ne génère pas de contraintes.

La difficulté est de choisir maintenant un « support » continu, ou continuum équivalent, pour le milieu anisotrope où seront définis les tenseurs de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$ . En voyant le milieu anisotrope comme un tissu, nous pouvons choisir comme support la Cellule Élémentaire Représentative, définie par l'élément de matière naturel, ou, pourquoi pas, l'élément de matière dual dont les faces sont orthogonales aux mèches. Nous avons représenté ces deux situations sur la Figure 5-6 où le tissu est soumis à une tension  $\mathbf{T}_1$  le long de la première mèche et une tension  $\mathbf{T}_2$  le long de la deuxième mèche. Les tensions sont définies classiquement comme les intégrales de surface des contraintes normales aux sections des mèches. Le problème est de préciser la tensorialité de ces contraintes normales.

A priori, la cinématique la plus adéquate pour construire un MCEA-F est celle de l'élément de matière naturel. En effet, les extrémités des mèches sont toujours au milieu des faces de cet élément (Figure 5-7), ce qui n'est pas le cas sur l'élément de matière dual (Figure 5-8). Dans ce dernier cas, il est logique de s'attendre à un tenseur de contraintes non-symétrique si ce dernier doit modéliser les tensions du milieu anisotrope.

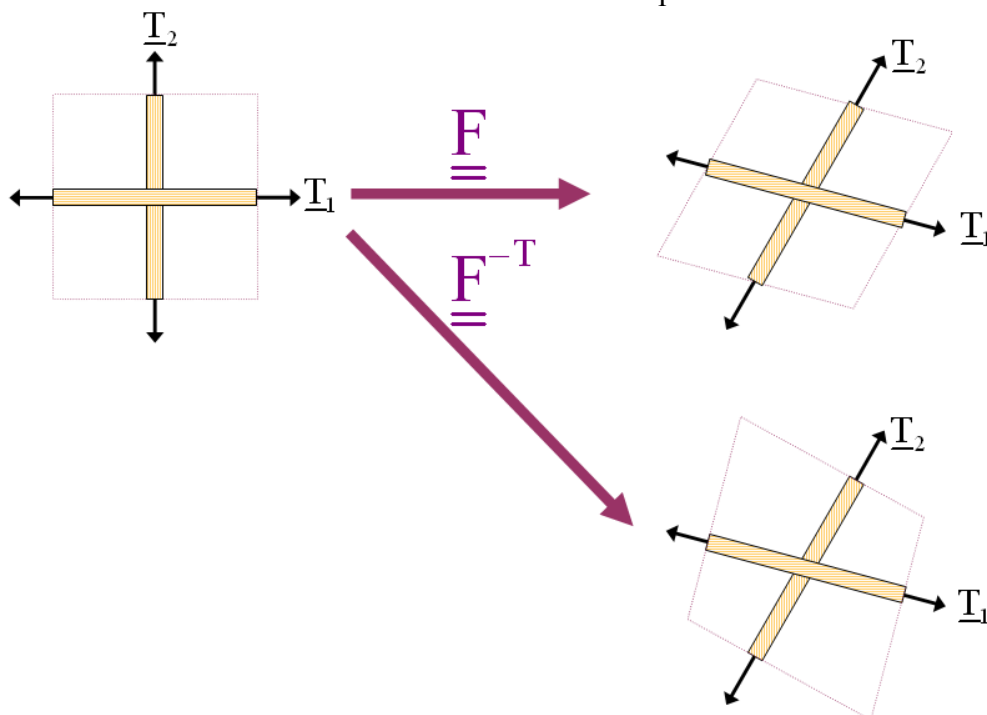


Figure 5-6 : Deux descriptions possibles de milieu continu équivalent anisotrope

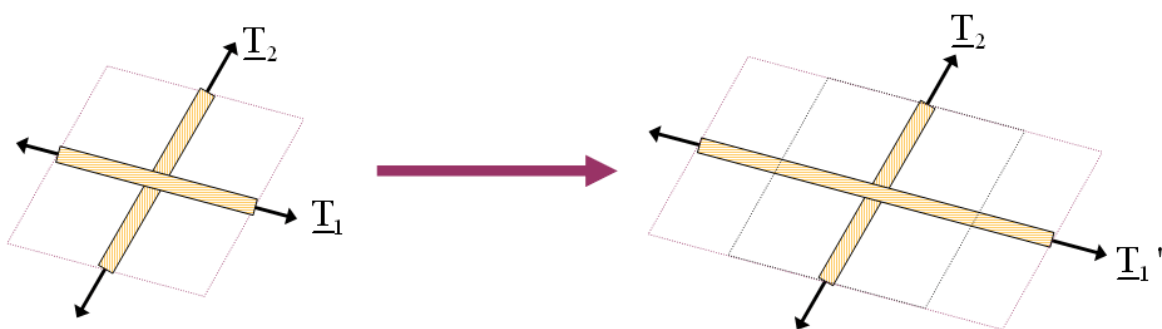


Figure 5-7 : Tension dans la première direction forte d'anisotropie sur l'élément de matière naturel

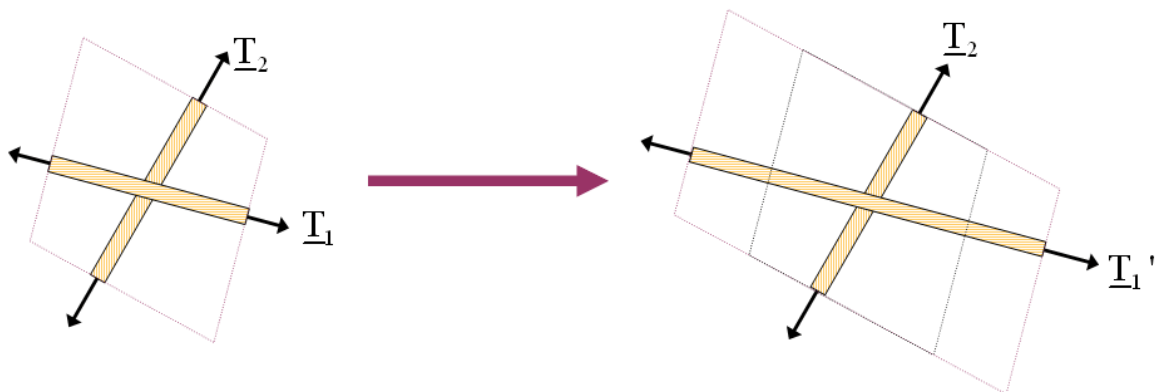


Figure 5-8 : Tension dans la première direction forte d'anisotropie sur l'élément de matière dual

## 5.2.1.2 Transformations normées des segments et des normales

Il est nécessaire de cumuler les incréments de déformations dans des bases normées, mais pas forcément orthogonales. En effet, un observateur qui s'allongerait avec le solide ne mesurerait pas les longueurs et les angles avec les mêmes outils qu'à l'instant précédent, et les incréments de déformations cumulés perdraient leur signification géométrique dans un tel référentiel. Un bon référentiel pour le cumul tensoriel des incréments de déformations doit donc être défini par une base normée. Les déformations étant de nature covariante, cela se traduit par un tenseur métrique fondamental de diagonale unitaire. En effet, la métrique définit la manière de mesurer les longueurs et les angles localement.

En conséquence, nous proposons de construire une mesure de déformation à partir de l'intégrale du tenseur taux de déformation  $\mathbf{D}$  dans des référentiels non-rigides définis par le champ de tenseurs  $\mathbf{F}_n$  (Figure 5-9). Ce champ est défini plus bas par (5.29). Nous appellerons le solide suiveur généré « solide suiveur matériel normé ». Il dépend de la configuration initiale puisqu'il conserve la norme (unitaire) d'un triplet de vecteurs définis initialement.

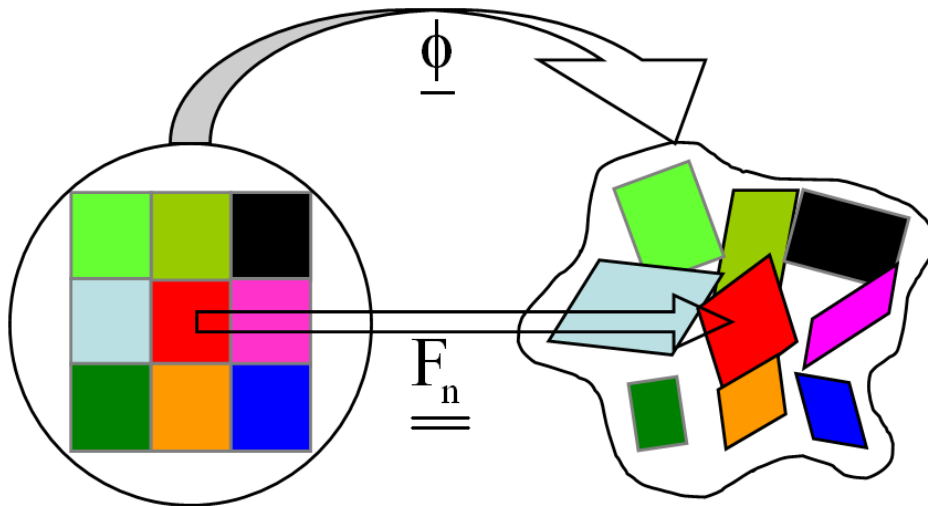


Figure 5-9 : Solide suiveur matériel (non-normé sur la figure)

Afin d'orienter localement les directions fortes d'anisotropie dans la configuration initiale, nous avons introduit la notion d'orientation initiale aux chapitres précédents. Cela consiste en la définition d'un champ de tenseurs  $\mathbf{O}$  orientant à partir de la base globale  $\{G\}$  un ensemble de bases locales OND  $\{e^0\}$ , constituant un ensemble de référentiels euclidiens positionnés par rapport au référentiel global. Dans ce chapitre, les directions fortes d'anisotropie sont actualisées par l'affinité matérielle normée  $\mathbf{F}_n$ . Elles sont donc modélisées à l'instant  $t$  par la base covariante normée. Cette base est définie par :

$$\underline{g}_{n_i} = \underline{F}_n \cdot \underline{e}_i^0 \quad \text{tel que} \quad \underline{g}_{n_i} = \frac{\underline{g}_i}{\|\underline{g}_i\|} = \frac{\underline{g}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (5.29)$$

Cette transformation déforme le triplet de vecteurs défini par l'orientation initiale comme  $\mathbf{F}$  tout en les gardant unitaires. Nous appelons l'affinité  $\mathbf{F}_n$  la « transformation normée des segments ».

Les composantes de  $\mathbf{F}_n$  se calculent donc à partir de celles de  $\mathbf{F}$  et du tenseur métrique fondamental  $\mathbf{g}$ . En projection dans la base mixte, nous avons :

$$\underline{F} = F_{ij} \underline{G}_i \otimes \underline{e}_j^0 \quad \text{et} \quad \underline{F}_n = F_{n,ij} \underline{G}_i \otimes \underline{e}_j^0$$

D'après (5.29), il vient :

$$\underline{\underline{F}}_{nij} = \frac{F_{ij}}{\sqrt{g_{ij}}} \quad (\text{sans sommation}) \quad (5.30)$$

D'après 5.1.1.5, il existe une transformation duale qui convecte les normales (qui ne seront pas unitaires !). Elle est définie par :

$$\underline{\underline{g}}_n^i = \underline{\underline{F}}_n^{-T} \cdot \underline{\underline{e}}_i^0 \quad \text{tel que} \quad \underline{\underline{g}}_{n_i} \cdot \underline{\underline{g}}_n^j = \delta_i^j \quad (5.31)$$

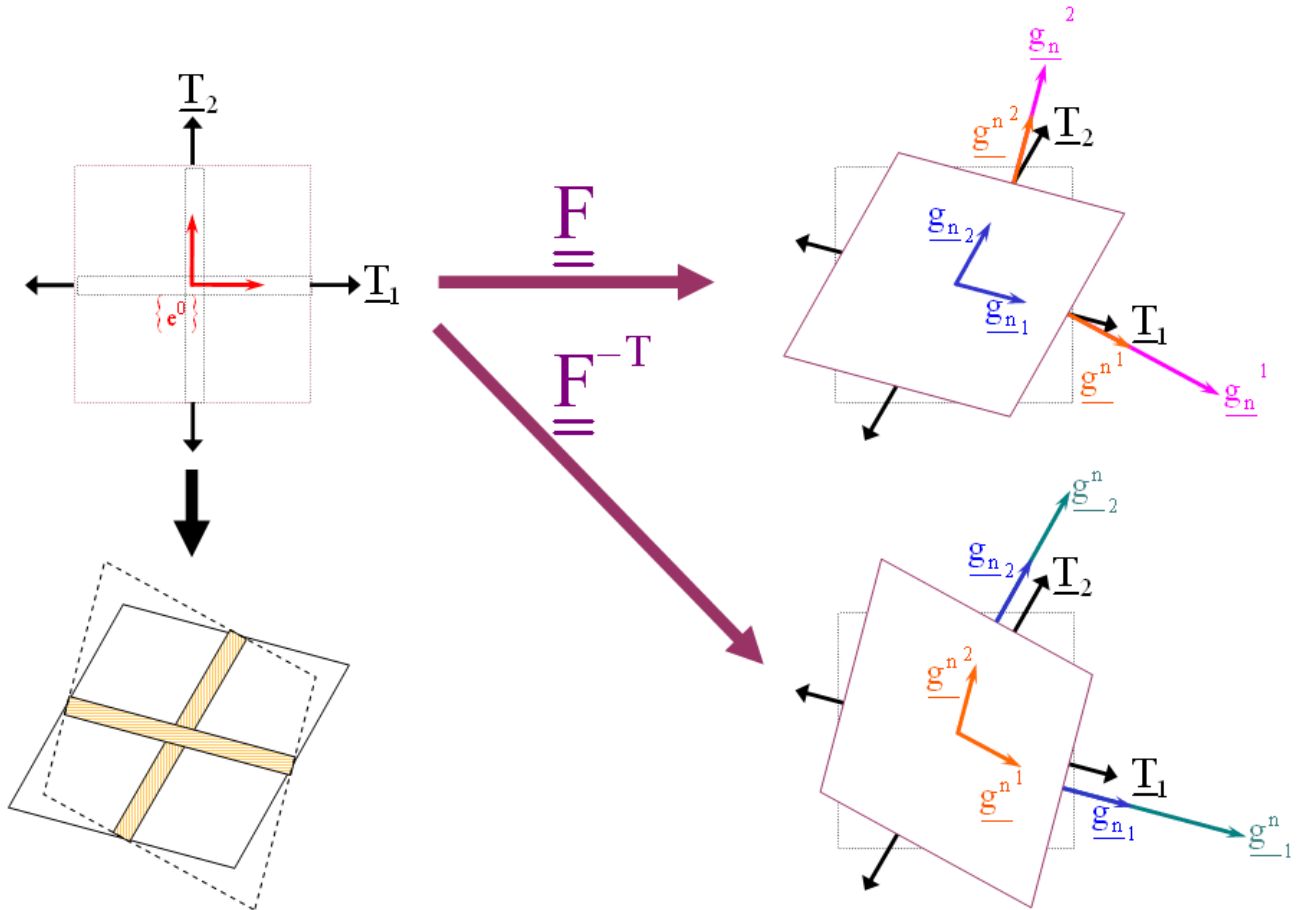


Figure 5-10 : Base covariante normée et duale, base contravariante normée et duale

Comme les normales (5.31) sur les faces de l'élément de matière ne sont pas normées, nous pouvons introduire une nouvelle affinité qui conserve la norme unitaire des normales. Ces normales unitaires forment la base contravariante normée et sont définies par :

$$\underline{\underline{g}}^{n_i} = \underline{\underline{F}}_n^{-T} \cdot \underline{\underline{e}}_i^0 \quad \text{tel que} \quad \underline{\underline{g}}^{n_i} = \frac{\underline{\underline{g}}^i}{\|\underline{\underline{g}}^i\|} = \frac{\underline{\underline{g}}^i}{\sqrt{g^{ii}}} \quad (5.32)$$

Cette transformation déforme les vecteurs définis par l'orientation initiale comme  $\underline{\underline{F}}^{-T}$  en conservant leurs normes unitaires.

Les composantes de  $\underline{\underline{F}}^{n-T}$  se calculent donc à partir de celles de  $\underline{\underline{F}}^{-T}$  et du tenseur métrique conjugué  $\underline{\underline{g}}^{-1}$ . En projection dans la base mixte, nous avons :

$$\underline{\underline{F}}^{-T} = F^{-T}_{ij} \underline{\underline{G}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j^0 \quad \text{et} \quad \underline{\underline{F}}_n^{-T} = F_n^{-T}_{ij} \underline{\underline{G}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j^0$$

D'après (5.32), il vient :

$$\boxed{\mathbf{F}^{n-T}_{ij} = \frac{\mathbf{F}^{-T}_{ij}}{\sqrt{\mathbf{g}^{jj}}} \quad (\text{sans sommation})} \quad (5.33)$$

La transformation duale qui convecte les segments est alors définie par :

$$\underline{\underline{\mathbf{g}}}_i^n = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_i^0 \quad \text{tel que} \quad \underline{\underline{\mathbf{g}}}_i^n \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}}^{n,j} = \delta_i^j \quad (5.34)$$

Nous appelons l'affinité  $\mathbf{F}^n$  la « transformation normée des normales ».

*Remarque* : A l'instant initial, toutes les bases sont confondues avec  $\{\mathbf{e}^0\}$  et nous avons :

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}_n = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^{-T} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^{-T} = \underline{\underline{\mathbf{1}}}$$

Sur la Figure 5-10, nous avons représenté sur les deux éléments de matière duaux les bases définies par (5.29), (5.31), (5.32) et (5.34).

### 5.2.1.3 Transports affines associés à la transformation normée des segments

Comme pour l'affinité  $\mathbf{F}$ , il est possible de définir le transport 2 fois covariant associé à  $\mathbf{F}_n$  :

$$\boxed{\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\circ n}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}) = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^{-T} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\circ n}^{-1}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}) = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n} \quad (5.35)$$

Le transport matériel dual de (5.35), 2 fois contravariant, est :

$$\boxed{\underline{\underline{\mathbf{T}}}_n^{\circ}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^T \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}_n^{\circ-1}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^{-T}} \quad (5.36)$$

Ces transports affines ont les mêmes propriétés que les transports matériels du 5.1.1.4, il faut juste remplacer la base covariante par la base covariante normée et la base contravariante par la base duale de la base covariante normée :

$$\{\mathbf{g}_\circ\} \rightarrow \{\mathbf{g}_{n^\circ}\} \quad \text{et} \quad \{\mathbf{g}^\circ\} \rightarrow \{\mathbf{g}_n^\circ\}$$

De plus, la base initiale est orthogonale et est définie par l'orientation initiale  $\mathbf{O}$  :

$$\{\mathbf{e}^0\} = \{\mathbf{G}^\circ\} = \{\mathbf{G}_\circ\}$$

### 5.2.1.4 Mesure de déformation dans le solide suiveur matériel normé

Nous cherchons à construire une mesure de déformation eulérienne qui nous donne les déformations logarithmiques dans les directions fortes d'anisotropie. Nous définissons le tenseur de déformation par ce que nous appelons l'intégrale de Lie 2 fois covariante normée. Elle est définie à partir de (5.27) en prenant le transport matériel 2 fois covariant normé défini par (5.35) :

$$\boxed{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}_{\circ n}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}) = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\circ n} \left( \int_0^t \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\circ n}^{-1}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}) dt \right) = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^{-T} \cdot \left( \int_0^t \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n dt \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^{-1}} \quad (5.37)$$

Les composantes physiques sont celles lues dans le solide suiveur matériel normé. Nous cherchons à évaluer la projection suivante :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \varepsilon_{nij} \underline{\underline{\mathbf{g}}}_n^i \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_n^j \quad (5.38)$$

D'après (5.28), la projection de (5.37) dans la base duale de la base covariante normée s'écrit :

$$\left[ \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right]_{\{\mathbf{g}_n^\circ\}} = \int_0^t \left[ \underline{\underline{\mathbf{D}}} \right]_{\{\mathbf{g}_n^\circ\}} dt \quad (5.39)$$

Il faut donc analyser les composantes de  $\mathbf{D}$  associées à la projection suivante :

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = D_{nij} \underline{\underline{\mathbf{g}}}_n^i \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_n^j \quad (5.40)$$

D'après (5.38) et (5.39), nous avons donc :

$$\underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} = \varepsilon_{nii} = \int_0^t D_{nii} dt \quad (5.41)$$

Prenons un segment matériel de longueur  $l_i$  dans la  $i$ ème direction forte d'anisotropie :

$$\underline{\underline{\mathbf{l}}}_i = l_i \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} \quad (5.42)$$

D'après le chapitre 3, les composantes diagonales de  $\mathbf{D}$  nous donnent les dérivées des logarithmes des longueurs des segments orientés dans les directions fortes d'anisotropie. En prenant le segment défini par (5.42) :

$$\underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} = \frac{d}{dt} \text{Ln}(l_i) = D_{nii} \quad (5.43)$$

En injectant (5.43) dans (5.41), il vient :

$$\varepsilon_{nii} = \int_0^t \frac{d}{dt} \text{Ln}(l_i) dt = \text{Ln} \left( \begin{matrix} l_i \\ 0 \\ l_i \end{matrix} \right) \quad (5.44)$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\varepsilon_{nii} = \text{Ln} \left( \lambda \left( \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} \right) \right) \quad \text{avec} \quad \lambda \left( \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} \right) = \begin{matrix} l_i \\ 0 \\ l_i \end{matrix}} \quad (5.45)$$

Le tenseur de déformation défini par (5.37) permet d'obtenir les déformations logarithmiques dans les directions fortes d'anisotropie, c'est-à-dire les logarithmes des élongations dans ces directions.

Les composantes physiques du tenseur de déformation étant covariantes dans la base tensorielle duale de la base tensorielle covariante normée, il se convecte avec la matière par un transport affine de type (5.35). Si, sur un intervalle de temps  $[t, t+\Delta t]$ , seul le mode de déformation de rotation entre les directions fortes d'anisotropie est actif, le tenseur de déformation à l'instant  $t+\Delta t$  est donné par :

$${}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\text{oon}} \left( {}^t \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right) \quad (5.46)$$

D'après (5.35), l'expression du transport affine entre les deux instants est donné par :

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\text{oon}} \left( {}^t \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right) = \underline{\underline{\Delta \mathbf{F}}}_n^{-T} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \underline{\underline{\Delta \mathbf{F}}}_n^{-1} \quad (5.47)$$

Les incréments de (5.47) sont définis de manière analogue à ce que nous faisons au chapitre 3. L'incrément de  $\mathbf{F}_n$  entre  $t$  et  $t+\Delta t$  s'écrit :

$$\underline{\underline{\Delta \mathbf{F}}}_n = {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n \cdot {}^t \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^{-1} \quad (5.48)$$

De (5.48) nous déduisons :

$$\underline{\underline{\Delta \mathbf{F}}}_n^{-T} = {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^{-T} \cdot {}^t \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^T \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\Delta \mathbf{F}}}_n^{-1} = {}^t \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^{-1} \quad (5.49)$$

Montrons maintenant que (5.46) permet de convecter les déformations dans les directions fortes d'anisotropie :

$$\underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i}^{t+\Delta t} \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i}^{t+\Delta t} = \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i}^{t+\Delta t} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\text{oon}} \left( {}^t \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i}^{t+\Delta t}$$

En injectant (5.47), nous avons :



$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i}^{t+\Delta t} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\text{oön}}^{t+\Delta t} \left( \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{n_i}^t \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i}^{t+\Delta t} &= \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i}^{t+\Delta t} \cdot \underline{\underline{\Delta \mathbf{F}}}_n^{-T} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{n_i}^t \cdot \underline{\underline{\Delta \mathbf{F}}}_n^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i}^{t+\Delta t} \\
 &= \underline{\underline{\Delta \mathbf{F}}}_n^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i}^{t+\Delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{n_i}^t \cdot \underline{\underline{\Delta \mathbf{F}}}_n^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i}^{t+\Delta t} \\
 &= \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i}^t \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{n_i}^t \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i}^t \\
 &= \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{n_{ii}}^t \\
 &= \text{Ln} \left( \lambda \left( \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i}^t \right) \right)
 \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien les déformations logarithmiques dans les directions fortes d'anisotropie.

*Remarque* : La mesure de déformation étant introduite à partir de l'intégrale de Lie 2 fois covariante *normée pour les segments* de  $\mathbf{D}$ , il en découle que  $\mathbf{D}$  est vu comme la dérivée de Lie 2 fois covariante *normée pour les segments* de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  :

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{\text{oön}} \left( \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right) = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\text{oön}} \left( \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\text{oön}}^{-1} \left( \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right) \right) = \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \underline{\underline{\mathbf{L}}}_n^T \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{L}}}_n \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\mathbf{L}}}_n = \underline{\underline{\dot{\mathbf{F}}}}_n \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^{-1}$$

## 5.2.2 Mesures de contrainte

### 5.2.2.1 Loi de comportement hypo-élastique

La loi de comportement que nous choisissons généralise celle proposée au chapitre 3 en faisant intervenir une dérivée affine. Nous l'écrivons pour le moment :

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}} \left( \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \right) = \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad (5.50)$$

La variance de l'opérateur de dérivation reste à préciser. Le choix de la dérivée affine dépend du ou des transports affines intervenant dans l'actualisation des normales et des forces. Nous proposons trois formulations dans ce paragraphe. Dans tous les cas, la matrice du tenseur de comportement est connue à chaque instant et se réduit à trois modules d'Young qui correspondent aux raideurs dans les directions fortes d'anisotropie. Dans une base  $\mathbf{B}$ , qui reste à préciser, nous avons :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

La base  $\mathbf{B}$  dépend de la manière dont se convecte  $\boldsymbol{\sigma}$ . En effet, nous écrivons la loi de comportement dans des bases qui correspondent aux composantes physiques directement interprétables. La base tensorielle du tenseur de déformation où ses composantes diagonales représentent les logarithmes des élongations dans les directions fortes d'anisotropie est définie au 5.2.1.4. La base tensorielle du tenseur des contraintes où les composantes diagonales représentent les contraintes de traction/compression dans les

directions fortes d'anisotropie reste à définir. C'est ce que nous allons faire par la suite dans trois cas. Les bases  $\mathbf{B}$  obtenues seront :

- Pour la formulation du MCEA-F naturel :

$$\mathbf{B} = \{ \mathbf{g}_{n_0} \otimes \mathbf{g}_{n_0} \otimes \mathbf{g}_{n_0} \otimes \mathbf{g}_{n_0} \}$$

- Pour la formulation du MCEA-F naturel modifié :

$$\mathbf{B} = \{ \mathbf{g}_{n_0} \otimes \mathbf{g}_{n_0}^n \otimes \mathbf{g}_{n_0} \otimes \mathbf{g}_{n_0} \}$$

- Pour la formulation du MCEA-F dual :

$$\mathbf{B} = \{ \mathbf{g}_{n_0} \otimes \mathbf{g}_{n_0}^\circ \otimes \mathbf{g}_{n_0} \otimes \mathbf{g}_{n_0} \}$$

*Remarque* : comme au chapitre 3 avec le transport rotationnel d'ordre 4, il est certainement possible de définir des transports affines d'ordre 4 pour exprimer tensoriellement la convection du tenseur de comportement  $\mathbf{C}$  dans les trois cas.

### 5.2.2.2 Cumul tensoriel des contraintes sur l'élément de matière naturel

Puisque le transport choisi pour les taux de déformation  $\mathbf{D}$  et les déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est le transport affine (5.35), nous pouvons choisir comme transport affine pour les contraintes le transport dual (5.36). Avec ce choix, la densité volumique d'énergie est automatiquement conservée quand les tensions restent constantes sur l'élément de matière naturel qui se cisaille (d'après 5.1.1.5), c'est-à-dire quand les tenseurs  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  sont convectés dans la transformation normée des segments  $\mathbf{F}_n$ . Ce résultat est physiquement satisfaisant, l'énergie totale étant uniquement la somme des énergies de tensions dans les mèches ([BOI97]).

Dans ce cas, la projection de  $\boldsymbol{\sigma}$  que nous allons calculer est faite dans la base tensorielle covariante normée :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \sigma_n^{ij} \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_j} \quad (5.52)$$

La dérivée affine de  $\boldsymbol{\sigma}$  est donc :

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}}_n^\circ(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) = \mathbf{T}_n^\circ \left( \left( \underline{\underline{\mathbf{T}}}_n^{\circ\circ -1}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) \right) \right) = \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}} - \underline{\underline{\mathbf{L}}}_n \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} - \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{L}}}_n^T \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\mathbf{L}}}_n = \dot{\underline{\underline{\mathbf{F}}}}_n \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^{-1} \quad (5.53)$$

En conséquence, la projection connue du tenseur de comportement est :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \mathbf{C}^{ijkl} \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_j} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_k} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_l} \quad (5.54)$$

Les déformations étant données par (5.45), les seules contraintes non-nulles de (5.52) sont donc :

$$\boxed{\sigma_n^{ii} = E_i \varepsilon_{nii} \quad (\text{sans sommation})} \quad (5.55)$$

Les vecteurs contraintes exercés sur les faces de l'élément de matière naturel sont :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}}_n^k = \sigma_n^{ij} \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} \left( \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_j} \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}}_n^k \right) = \sigma_n^{ik} \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i}$$

Or d'après (5.55) il n'y a que des contraintes de traction/compression dans les mèches, d'où :

$$\boxed{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}}_n^i = \sigma_n^{ii} \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} \quad (\text{sans sommation})} \quad (5.56)$$

La relation (5.56) signifie qu'en appliquant les normales non-normées (5.31) de l'élément de matière naturel au tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  (5.52), nous trouvons les contraintes (5.55) dans les

directions fortes d'anisotropie. Cela est satisfaisant, à l'exception du fait que les normales ne soient pas normées, ce qui rentre en contradiction avec la définition euclidienne du tenseur de Cauchy.

Cependant, cette formulation, que nous appelons le MCEA-F naturel, permet de généraliser le MCEO-F du chapitre 4. Dans le cas d'une seule direction forte d'anisotropie, nous n'avons qu'un seul module d'Young non nul. Dans la théorie du MCEO-F, cette direction est toujours la première. Le vecteur contrainte, dans cette direction, s'exerce alors sur la face orthogonale à la direction forte d'anisotropie puisque le MCEO-F est une théorie construite dans le cadre euclidien. Sur les faces orientées par les normales unitaires confondues avec la base covariante normée et en introduisant le tenseur métrique fondamental du solide suiveur matériel normé, nous avons :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{g}_{n_k} = \sigma_n^{ij} \left( \underline{g}_{n_i} \otimes \underline{g}_{n_j} \right) \cdot \underline{g}_{n_k} = \sigma_n^{ij} \underline{g}_{n_i} \left( \underline{g}_{n_j} \cdot \underline{g}_{n_k} \right) = g_{n_{jk}} \sigma_n^{ij} \underline{g}_{n_i} \quad (5.57)$$

Or d'après (5.55) il n'y a que des contraintes contravariantes diagonales qui soient non-nulles. (5.57) devient :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{g}_{n_k} = g_{nik} \sigma_n^{ii} \underline{g}_{n_i} \quad (5.58)$$

Dans le cas où le MCEA-F naturel n'a qu'une seule direction forte d'anisotropie orientée par le  $i$ ème vecteur de la base covariante normée, (5.58) devient :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{g}_{n_k} = g_{nik} \sigma_n^{ii} \underline{g}_{n_i} \quad (\text{sans sommation}) \quad (5.59)$$

Les composantes diagonales de la métrique sont unitaires puisqu'elle est associée au référentiel affine défini par la base covariante normée, nous avons donc sur la face orthogonale à la direction forte d'anisotropie :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{g}_{n_i} = g_{nii} \sigma_n^{ii} \underline{g}_{n_i} = \sigma_n^{ii} \underline{g}_{n_i} \quad (\text{sans sommation}) \quad (5.60)$$

Nous trouvons que la contrainte 2 fois contravariante est aussi la contrainte normale à la face orthogonale à la direction forte d'anisotropie ! Cela est dû à l'égalité de la  $i$ ème contrainte contravariante diagonale avec la  $i$ ème contrainte covariante diagonale car d'après la définition des composantes covariantes de  $\underline{\underline{\sigma}}$  et de (5.60) :

$$\underline{g}_{n_i} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{g}_{n_i} = \sigma_{nii} = \sigma_n^{ii}$$

Nous venons donc de démontrer que le MCEA-F naturel généralise le MCEO-F, ce qui est un argument supplémentaire en faveur de cette théorie.

Enfin, il est important de détailler la formule de passage de la base tensorielle convectée à la base globale pour pouvoir comparer cette mesure de contrainte à d'autres. D'après (5.14) et dans le cas du transport affine 2 fois contravariant défini par (5.36), nous avons :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{g_n\}} = \left[ \underline{\underline{T}}_n^{\circ\circ -1} \left( \underline{\underline{\sigma}} \right) \right]_{\{e^0\}} \quad (5.61)$$

Or d'après (5.36), nous avons en projection :

$$\left[ \underline{\underline{T}}_n^{\circ\circ -1} \left( \underline{\underline{\sigma}} \right) \right]_{\{e^0\}} = \left[ \underline{\underline{F}}_n^{-1} \right]_{\{e^0 \otimes G\}} \left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{G\}} \left[ \underline{\underline{F}}_n^{-T} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \quad (5.62)$$

En injectant (5.61) dans (5.62), nous obtenons la relation de changement de base :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{G\}} = \left[ \underline{\underline{F}}_n \right]_{\{G \otimes e^0\}} \left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{g_n\}} \left[ \underline{\underline{F}}_n^T \right]_{\{e^0 \otimes G\}} \quad (5.63)$$

5.2.2.3 Cumul tensoriel des contraintes sur l'élément de matière naturel avec des normales unitaires

La mesure de contrainte du MCEA-F naturel fonctionne avec des normales non-unitaires, duales de la base covariante normée. Nous proposons ici de construire une mesure de contrainte sur l'élément de matière naturel qui fonctionne avec des normales unitaires. Pour cela, nous devons définir un nouveau transport :

$$\boxed{\underline{\underline{\tilde{T}}}_n^{\circ\circ}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{F}}_n \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}_n^T \Leftrightarrow \underline{\underline{\tilde{T}}}_n^{\circ\circ-1}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{F}}_n^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}_n^{-T}} \quad (5.64)$$

Ce transport convecte le tenseur de contrainte dans une base mixte :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} = \tilde{\sigma}_n^{ij} \underline{\underline{e}}_i^0 \otimes \underline{\underline{e}}_j^0 &\Rightarrow \underline{\underline{\tilde{T}}}_n^{\circ\circ}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{F}}_n \cdot (\tilde{\sigma}_n^{ij} \underline{\underline{e}}_i^0 \otimes \underline{\underline{e}}_j^0) \cdot \underline{\underline{F}}_n^T \\ &= \tilde{\sigma}_n^{ij} \left( (\underline{\underline{F}}_n \cdot \underline{\underline{e}}_i^0) \otimes (\underline{\underline{F}}_n \cdot \underline{\underline{e}}_j^0) \right) \cdot \underline{\underline{F}}_n^T \\ &= \tilde{\sigma}_n^{ij} (\underline{\underline{F}}_n \cdot \underline{\underline{e}}_i^0) \otimes (\underline{\underline{F}}_n \cdot \underline{\underline{e}}_j^0) \\ &= \tilde{\sigma}_n^{ij} \underline{\underline{g}}_{n_i} \otimes \underline{\underline{g}}_{n_j} \end{aligned}$$

Dans ce cas, la projection de  $\sigma$  que nous allons calculer est faite dans la base tensorielle covariante mixte :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tilde{\sigma}_n^{ij} \underline{\underline{g}}_{n_i} \otimes \underline{\underline{g}}_{n_j} \quad (5.65)$$

La dérivée affine de  $\sigma$  est donc :

$$\underline{\underline{\tilde{L}}}_n^{\circ\circ}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{\tilde{T}}}_n^{\circ\circ} \left( \underline{\underline{\tilde{T}}}_n^{\circ\circ-1}(\underline{\underline{\sigma}}) \right) = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{L}}_n \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{L}}_n^T \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\underline{L}}_n = \dot{\underline{\underline{F}}}_n \cdot \underline{\underline{F}}_n^{-1} \\ \underline{\underline{L}}_n^T = \dot{\underline{\underline{F}}}_n^T \cdot \underline{\underline{F}}_n^{-T} \end{cases} \quad (5.66)$$

En conséquence, la projection connue du tenseur de comportement est :

$$\underline{\underline{\underline{C}}} = \tilde{C}^{ijkl} \underline{\underline{g}}_{n_i} \otimes \underline{\underline{g}}_{n_j} \otimes \underline{\underline{g}}_{n_k} \otimes \underline{\underline{g}}_{n_l} \quad (5.67)$$

Les déformations étant données par (5.45), les seules contraintes non-nulles de (5.65) sont donc :

$$\boxed{\tilde{\sigma}_n^{ii} = E_i \varepsilon_{nii} \quad (\text{sans sommation})} \quad (5.68)$$

Les vecteurs contraintes exercés sur les faces de l'élément de matière naturel sont :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{g}}_n^k = \tilde{\sigma}_n^{ij} \underline{\underline{g}}_{n_i} \left( \underline{\underline{g}}_n^j \cdot \underline{\underline{g}}_n^k \right) = \tilde{\sigma}_n^{ik} \underline{\underline{g}}_{n_i}$$

Or d'après (5.68) il n'y a que des contraintes de traction/compression dans les mèches, d'où :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{g}}_n^k = \tilde{\sigma}_n^{kk} \underline{\underline{g}}_{n_k} \quad (\text{sans sommation})} \quad (5.69)$$

La relation (5.69) signifie qu'en appliquant les normales unitaires (5.32) de l'élément de matière naturel au tenseur  $\sigma$  (5.65), nous trouvons les contraintes (5.68) dans les directions fortes d'anisotropie. Nous venons de construire le MCEA-F naturel modifié qui corrige le défaut du MCEA-F naturel qui ne fonctionnait pas avec des normales unitaires. Néanmoins, l'énergie volumique de déformation n'est plus conservée avec la mesure de déformation définie au 5.2.1.4. et le MCEO-F n'est plus un cas particulier de cette mesure de contrainte.

Enfin, la formule de passage de la base tensorielle convectée à la base globale est donnée avec l'aide du transport (5.64). Nous avons :

$$\left[ \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \right]_{\{g_{n^0} \otimes g_{n^0}\}} = \left[ \underline{\underline{\underline{\tilde{T}}}}_n^{-1}(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}) \right]_{\{e^0\}} \quad (5.70)$$

Or, d'après (5.64), nous avons en projection :

$$\left[ \underline{\underline{\underline{\tilde{T}}}}_n^{-1}(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}) \right]_{\{e^0\}} = \left[ \underline{\underline{\underline{F}}}_n^{-1} \right]_{\{e^0 \otimes G\}} \left[ \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \right]_{\{G\}} \left[ \underline{\underline{\underline{F}}}_n^{-T} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \quad (5.71)$$

En injectant (5.70) dans (5.71), nous obtenons la relation de changement de base :

$$\left[ \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \right]_{\{G\}} = \left[ \underline{\underline{\underline{F}}}_n \right]_{\{G \otimes e^0\}} \left[ \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \right]_{\{g_{n^0} \otimes g_{n^0}\}} \left[ \underline{\underline{\underline{F}}}_n^T \right]_{\{e^0 \otimes G\}} \quad (5.72)$$

#### 5.2.2.4 Cumul tensoriel des contraintes sur l'élément de matière dual

Il est aussi possible de définir une mesure de contrainte sur l'élément de matière dual dont les normales sont unitaires. Pour cela, nous devons définir un nouveau transport :

$$\underline{\underline{\underline{T}}}_{\circ n}(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}) = \underline{\underline{\underline{F}}}_n \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\underline{F}}}_n^{-1} \Leftrightarrow \underline{\underline{\underline{T}}}_{\circ n}^{-1}(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}) = \underline{\underline{\underline{F}}}_n^{-1} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\underline{F}}}_n \quad (5.73)$$

Ce transport convecte le tenseur de contrainte dans une base mixte :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} &= \sigma_{n \ j}^i e_i^0 \otimes e_j^0 \Rightarrow \underline{\underline{\underline{T}}}_{\circ n}(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}) = \underline{\underline{\underline{F}}}_n \cdot (\sigma_{n \ j}^i e_i^0 \otimes e_j^0) \cdot \underline{\underline{\underline{F}}}_n^{-1} \\ &= \sigma_{n \ j}^i \left( (\underline{\underline{\underline{F}}}_n \cdot e_i^0) \otimes e_j^0 \right) \cdot \underline{\underline{\underline{F}}}_n^{-1} \\ &= \sigma_{n \ j}^i \left( \underline{\underline{\underline{F}}}_n \cdot e_i^0 \right) \otimes \left( \underline{\underline{\underline{F}}}_n^{-T} \cdot e_j^0 \right) \\ &= \sigma_{n \ j}^i \underline{\underline{\underline{g}}}_{n_i} \otimes \underline{\underline{\underline{g}}}_n^j \end{aligned}$$

Dans ce cas, la projection de  $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}$  que nous allons calculer est faite dans la base tensorielle mixte :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \sigma_{n \ j}^i \underline{\underline{\underline{g}}}_{n_i} \otimes \underline{\underline{\underline{g}}}_n^j \quad (5.74)$$

La dérivée affine de  $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}$  est donc :

$$\underline{\underline{\underline{L}}}_{\circ n}(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}) = \underline{\underline{\underline{T}}}_{\circ n} \left( \underline{\underline{\underline{T}}}_{\circ n}^{-1}(\underline{\underline{\underline{\sigma}}}) \right) = \dot{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}} - \underline{\underline{\underline{L}}}_n \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\underline{L}}}_n \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\underline{L}}}_n = \dot{\underline{\underline{\underline{F}}}}_n \cdot \underline{\underline{\underline{F}}}_n^{-1} \quad (5.75)$$

En conséquence, la projection connue du tenseur de comportement est :

$$\underline{\underline{\underline{C}}} = C_j^{i \ kl} \underline{\underline{\underline{g}}}_{n_i} \otimes \underline{\underline{\underline{g}}}_n^j \otimes \underline{\underline{\underline{g}}}_{n_k} \otimes \underline{\underline{\underline{g}}}_{n_l} \quad (5.76)$$

Les déformations étant données par (5.45), les seules contraintes non-nulles de (5.65) sont donc :

$$\left[ \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_{n \ i}^i = E_i \varepsilon_{nii} \quad (\text{sans sommation}) \right] \quad (5.77)$$

Les vecteurs contraintes exercés sur les faces de l'élément de matière dual sont :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\underline{g}}}_{n_k} = \sigma_{n \ j}^i \underline{\underline{\underline{g}}}_{n_i} \left( \underline{\underline{\underline{g}}}_n^j \cdot \underline{\underline{\underline{g}}}_{n_k} \right) = \sigma_{n \ k}^i \underline{\underline{\underline{g}}}_{n_i}$$

Or d'après (5.68) il n'y a que des contraintes de traction/compression dans les mèches, d'où :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{g}}_{n_k} = \sigma_n^k \underline{\underline{g}}_{n_k} \quad (\text{sans sommation}) \quad (5.78)$$

La relation (5.78) signifie qu'en appliquant les normales normées de l'élément de matière dual, c'est-à-dire les vecteurs de la base covariante normée (5.29), au tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$  (5.74), nous trouvons les contraintes (5.77) dans les directions fortes d'anisotropie. Nous venons de construire le MCEA-F dual qui est une autre possibilité de formulation. Cependant, tout comme le MCEA-F naturel modifié, l'énergie volumique de déformation n'est plus conservée, le MCEO-F n'est plus un cas particulier et, de plus, la mesure de contrainte ne donne plus lieu à un tenseur symétrique (ce que nous illustrons au 5.3.2.6).

Enfin, la formule de passage de la base tensorielle convectée à la base globale est donnée avec l'aide du transport (5.73), nous avons :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\{\underline{\underline{g}}_{n^o} \otimes \underline{\underline{g}}_{n^o}\}} = \underline{\underline{T}}_{\cdot n^o}^{-1}(\underline{\underline{\sigma}})_{\{e^o\}} \quad (5.79)$$

Or d'après (5.73), nous avons en projection :

$$\underline{\underline{T}}_{\cdot n^o}^{-1}(\underline{\underline{\sigma}})_{\{e^o\}} = \underline{\underline{F}}_n^{-1} \underline{\underline{\sigma}}_{\{G\}} \underline{\underline{F}}_n_{\{G \otimes e^o\}} \quad (5.80)$$

En injectant (5.79) dans (5.80), nous obtenons la relation de changement de base :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{\{G\}} = \underline{\underline{F}}_n_{\{G \otimes e^o\}} \underline{\underline{\sigma}}_{\{\underline{\underline{g}}_{n^o} \otimes \underline{\underline{g}}_{n^o}\}} \underline{\underline{F}}_n^{-1} \quad (5.81)$$

### 5.3 Solutions analytiques sur le test de glissement simple

Nous illustrons les théories précédemment proposées sur un test de référence : le glissement simple, déjà détaillé au chapitre 4. En calculant les solutions analytiques de manière analogue à ce que nous avons fait au chapitre 4, nous montrons que la théorie du MCEA-F naturel généralise la théorie du MCEO-F précédemment développée. En effet, dans le cas d'une direction forte d'anisotropie modélisée par un comportement à un seul module d'Young, la mesure de contrainte du MCEA-F naturel est identique à celle du MCEO-F. La mesure de déformation dans la direction forte d'anisotropie, égale au logarithme de l'élongation, est également identique. Ces propriétés ont été vérifiées sur des simulations numériques, mais nous ne les présentons pas car les résultats sont strictement identiques à ceux obtenus avec le MCEO-F. Les autres mesures de contrainte provenant des théories de MCEA-F naturel modifié et dual sont également évaluées à titre d'exemple. Nous pensons que ces développements mathématiques pourront servir de base de réflexion dans la poursuite future d'études de théories de milieux fibreux à plusieurs directions fortes d'anisotropie. A cet effet, nous avons mis à la disposition du lecteur les solutions analytiques correspondantes dans le cas du test de traction simple en annexe 8.4.

#### 5.3.1 Cinématique du glissement simple pour une orientation initiale arbitraire

##### 5.3.1.1 Tenseur gradient

La cinématique du glissement simple détaillée au §4.2.1 nous donne le gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  duquel nous déduisons ses diverses formes (transposée, inverse, inverse-transposée) :

$$\boxed{\begin{array}{l} \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}}} \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}^T}} \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}^{-T}}} \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}^{-1}}} \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}} \quad (5.82)$$

##### 5.3.1.2 Transformations des segments et des normales

L'orientation initiale étant définie au 4.2.3.1, la transformation des segments (respectivement des normales) est donnée par les composantes de  $\mathbf{F}$  (respectivement de  $\mathbf{F}^{-T}$ ) en base mixte.

- Affinité transformant les segments :

La matrice de  $\mathbf{F}$  en base mixte est donné par :

$$[\underline{\underline{\mathbf{F}}}]_{\{G \otimes e^0\}} = [\underline{\underline{\mathbf{F}}}]_{\{G\}} [\underline{\underline{\mathbf{O}}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$[\underline{\underline{\mathbf{F}}}]_{\{G \otimes e^0\}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 + a \sin \theta_0 & -\sin \theta_0 + a \cos \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

Les colonnes de (5.83) représentent les projections dans la base globale des segments, orientés initialement par  $\mathbf{O}$ , dans les directions fortes d'anisotropie (Figure 5-11).

- Affinité transformant les normales

La matrice de  $\mathbf{F}^{-T}$  en base mixte se calcule de la même manière que celle de  $\mathbf{F}$  :

$$[\underline{\underline{\mathbf{F}}}]_{\{G \otimes e^0\}}^{-T} = [\underline{\underline{\mathbf{F}}}]_{\{G\}}^{-T} [\underline{\underline{\mathbf{O}}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$[\underline{\underline{\mathbf{F}}}]_{\{G \otimes e^0\}}^{-T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 - a \cos \theta_0 & \cos \theta_0 + a \sin \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

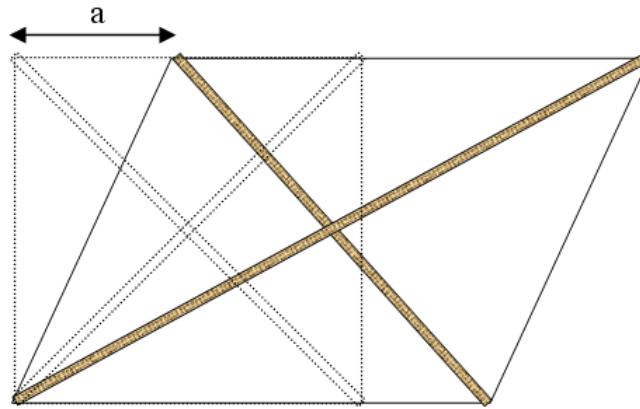


Figure 5-11 : Glissement simple d'un cube unitaire avec deux directions fortes d'anisotropie (orientées initialement à 45° sur la figure)

### 5.3.1.3 Transformation normée des segments

La transformation normée des segments permet de définir la base covariante normée. Les vecteurs de cette base sont unitaires mais non-orthogonaux :

$$[\underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_1}]_{\{G\}} = \frac{[\underline{\underline{\mathbf{F}}}]_{\{G \otimes e^0\}} [\underline{\underline{\mathbf{e}}}_1^0]_{\{e^0\}}}{\|[\underline{\underline{\mathbf{F}}}]_{\{G \otimes e^0\}} [\underline{\underline{\mathbf{e}}}_1^0]_{\{e^0\}}\|} = \frac{1}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 + a \sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.85)$$



$$\left[ \underline{\mathbf{g}}_{n2} \right]_{\{G\}} = \frac{\left[ \underline{\mathbf{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \left[ \underline{\mathbf{e}}_2^0 \right]_{\{e^0\}}}{\left\| \left[ \underline{\mathbf{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \left[ \underline{\mathbf{e}}_2^0 \right]_{\{e^0\}} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0}} \begin{bmatrix} -\sin \theta_0 + a \cos \theta_0 \\ \cos \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

$$\left[ \underline{\mathbf{g}}_{n3} \right]_{\{G\}} = \frac{\left[ \underline{\mathbf{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \left[ \underline{\mathbf{e}}_3^0 \right]_{\{e^0\}}}{\left\| \left[ \underline{\mathbf{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \left[ \underline{\mathbf{e}}_3^0 \right]_{\{e^0\}} \right\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

La transformation normée des segments s'écrit donc en base mixte :

$$\left[ \underline{\mathbf{F}}_n \right]_{\{G \otimes e^0\}} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}} & \frac{a \cos \theta_0 - \sin \theta_0}{\sqrt{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0}} & 0 \\ \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}} & \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

Les autres formes de la transformation normée des segments sont :

$$\left[ \underline{\mathbf{F}}_n^T \right]_{\{e^0 \otimes G\}} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}} & \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}} & 0 \\ \frac{a \cos \theta_0 - \sin \theta_0}{\sqrt{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0}} & \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

$$\left[ \underline{\mathbf{F}}_n^{-1} \right]_{\{e^0 \otimes G\}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \\ -\sin \theta_0 \sqrt{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0} \\ 0 \\ (\sin \theta_0 - a \cos \theta_0) \sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \\ (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0) \sqrt{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{F}_n^{-T}}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \\ (\sin \theta_0 - a \cos \theta_0) \sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \\ 0 \\ -\sin \theta_0 \sqrt{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0} & 0 \\ (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0) \sqrt{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

*Remarque* : la  $i$ ème colonne de la matrice (5.91) est le  $i$ ème vecteur de la base contravariante duale de la base covariante normée. Ces vecteurs ne sont bien sûr pas normés. Nous rappelons qu'ils sont notés :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{g}_n^i}} \right]_{\{G\}}$$

#### 5.3.1.4 Transformation normée des normales

La transformation normée des normales permet de définir la base contravariante normée. Les vecteurs de cette base sont unitaires mais non-orthogonaux :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{g}_n^1}} \right]_{\{G\}} = \frac{\left[ \underline{\underline{\mathbf{F}}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^{-T} \left[ \underline{\underline{\mathbf{e}_1^0}} \right]_{\{e^0\}}}{\left\| \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^{-T} \left[ \underline{\underline{\mathbf{e}_1^0}} \right]_{\{e^0\}} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta_0 + (\sin \theta_0 - a \cos \theta_0)^2}} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 - a \cos \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{g}_n^2}} \right]_{\{G\}} = \frac{\left[ \underline{\underline{\mathbf{F}}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^{-T} \left[ \underline{\underline{\mathbf{e}_2^0}} \right]_{\{e^0\}}}{\left\| \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^{-T} \left[ \underline{\underline{\mathbf{e}_2^0}} \right]_{\{e^0\}} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta_0 + (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2}} \begin{bmatrix} -\sin \theta_0 \\ \cos \theta_0 + a \sin \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{g}_n^3}} \right]_{\{G\}} = \frac{\left[ \underline{\underline{\mathbf{F}}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^{-T} \left[ \underline{\underline{\mathbf{e}_3^0}} \right]_{\{e^0\}}}{\left\| \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^{-T} \left[ \underline{\underline{\mathbf{e}_3^0}} \right]_{\{e^0\}} \right\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

La transformation normée des normales s'écrit donc en base mixte :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{F}_n^{-T}}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{\cos^2 \theta_0 + (\sin \theta_0 - a \cos \theta_0)^2}} & -\frac{\sin \theta_0}{\sqrt{\sin^2 \theta_0 + (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2}} & 0 \\ \frac{\sin \theta_0 - a \cos \theta_0}{\sqrt{\cos^2 \theta_0 + (\sin \theta_0 - a \cos \theta_0)^2}} & \frac{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0}{\sqrt{\sin^2 \theta_0 + (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

Les autres formes de la transformation normée des normales sont :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{F}^{n-1}}} \right]_{\{\varepsilon^0 \otimes G\}} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{1+a^2 \cos^2 \theta_0 - a \sin 2\theta_0}} & \frac{\sin \theta_0 - a \cos \theta_0}{\sqrt{1+a^2 \cos^2 \theta_0 - a \sin 2\theta_0}} & 0 \\ \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{1+a^2 \sin^2 \theta_0 + a \sin 2\theta_0}} & \frac{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0}{\sqrt{1+a^2 \sin^2 \theta_0 + a \sin 2\theta_0}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{F}^{nT}}} \right]_{\{\varepsilon^0 \otimes G\}} = \begin{bmatrix} (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0) \sqrt{\cos^2 \theta_0 + (\sin \theta_0 - a \cos \theta_0)^2} \\ (a \cos \theta_0 - \sin \theta_0) \sqrt{\sin^2 \theta_0 + (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

$$\begin{bmatrix} \sin \theta_0 \sqrt{\cos^2 \theta_0 + (\sin \theta_0 - a \cos \theta_0)^2} & 0 \\ \cos \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 + (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{F}^n}} \right]_{\{G \otimes \varepsilon^0\}} = \begin{bmatrix} (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0) \sqrt{\cos^2 \theta_0 + (\sin \theta_0 - a \cos \theta_0)^2} \\ \sin \theta_0 \sqrt{\cos^2 \theta_0 + (\sin \theta_0 - a \cos \theta_0)^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.98)$$

$$\begin{bmatrix} (a \cos \theta_0 - \sin \theta_0) \sqrt{\sin^2 \theta_0 + (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2} & 0 \\ \cos \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 + (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Remarque* : la  $i$ ème colonne de la matrice (5.98) est le  $i$ ème vecteur de la base covariante duale de la base contravariante normée. Ces vecteurs ne sont bien sûr pas normés. Nous rappelons qu'ils sont notés :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{g}^n}} \right]_{\{G\}}$$

### 5.3.1.5 Taux de déformation dans la base covariante normée

Afin de calculer la mesure de déformation dans la base covariante normée, nous devons estimer sous l'intégrale le taux de déformation dans la base duale de la base covariante normée ((5.39)) :

$$\left[ \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right]_{\{\mathbf{g}_n^{\circ}\}} = \int_0^t \left[ \underline{\underline{\mathbf{D}}} \right]_{\{\mathbf{g}_n^{\circ}\}} dt$$

Il se calcule par un changement de base de  $\mathbf{D}$  :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{D}}} \right]_{\{\mathbf{g}_n^{\circ}\}} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}_n^T}} \right]_{\{\varepsilon^0 \otimes G\}} \left[ \underline{\underline{\mathbf{D}}} \right]_{\{G\}} \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}_n}} \right]_{\{G \otimes \varepsilon^0\}}$$

$\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  étant donné en base globale par (4.64), nous avons avec l'aide de (5.88) et de (5.89) :

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{\{\underline{\mathbf{g}}_n\}} = \begin{bmatrix} a \sin \theta_0 \frac{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} & 0 & 0 \\ \frac{\frac{1}{2} a \cos 2\theta_0 + \frac{1}{2} a a \sin 2\theta_0}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \sqrt{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\frac{1}{2} a \cos 2\theta_0 + \frac{1}{2} a a \sin 2\theta_0}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \sqrt{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0}} & 0 & 0 \\ a \cos \theta_0 \frac{a \cos \theta_0 - \sin \theta_0}{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

### 5.3.1.6 Mesure de déformation matérielle

La mesure de déformation est définie par l'intégrale de Lie 2 fois covariante de  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  par rapport à la transformation normée des segments :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}_{\text{oon}}(\underline{\underline{\mathbf{D}}})$$

Nous cherchons à évaluer la projection de  $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$  dans la base duale de la base covariante normée :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \varepsilon_{nij} \underline{\mathbf{g}}_n^i \otimes \underline{\mathbf{g}}_n^j$$

En usant des propriétés de l'intégration affine, nous avons :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\{\underline{\mathbf{g}}_n\}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}_{\text{oon}}(\underline{\underline{\mathbf{D}}})_{\{\underline{\mathbf{g}}_n\}} = \int_0^t \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{\{\underline{\mathbf{g}}_n\}} dt$$

Avec l'aide de (5.99), la matrice des déformations matérielles s'écrit :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\{\underline{\mathbf{g}}_n\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{n11} & \varepsilon_{n12} & 0 \\ \varepsilon_{n12} & \varepsilon_{n22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_{n11} = \int_0^a \sin \theta_0 \frac{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} da \\ \varepsilon_{n22} = \int_0^a \cos \theta_0 \frac{a \cos \theta_0 - \sin \theta_0}{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0} da \\ \varepsilon_{n12} = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\cos 2\theta_0 + a \sin 2\theta_0}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \sqrt{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0}} da \end{cases}$$

Intégrons ces équations pour obtenir explicitement les déformations matérielles. La composante 12 de la déformation matérielle étant problématique à expliciter et inutile par

la suite, nous ne travaillons que sur les composantes 11 et 22. Effectuons les changements de variable ci-dessous :

$$x = \cos \theta_0 + a \sin \theta_0$$

$$y = a \cos \theta_0 - \sin \theta_0$$

L'élément différentiel da devient donc :

$$da = \frac{dx}{\sin \theta_0} = \frac{dy}{\cos \theta_0}$$

- La composante 11 de la déformation matérielle s'écrit alors :

$$\varepsilon_{n11} = \int_{\cos \theta_0}^{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0} \sin \theta_0 \frac{x}{x^2 + \sin^2 \theta_0} \frac{dx}{\sin \theta_0} = \int_{\cos \theta_0}^{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0} \frac{x}{x^2 + \sin^2 \theta_0} dx$$

Une primitive connue permet de finir le calcul :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n11} &= \left[ \frac{1}{2} \text{Ln}(x^2 + \sin^2 \theta_0) \right]_{\cos \theta_0}^{\cos \theta_0 + a \sin \theta_0} \\ &= \frac{1}{2} \text{Ln}((\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0) - \frac{1}{2} \text{Ln}(\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0) \\ &= \frac{1}{2} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) - \frac{1}{2} \text{Ln}(1) \\ &= \frac{1}{2} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) \end{aligned}$$

- La composante 22 de la déformation matérielle est :

$$\varepsilon_{n22} = \int_{-\sin \theta_0}^{a \cos \theta_0 - \sin \theta_0} \cos \theta_0 \frac{y}{y^2 + \cos^2 \theta_0} \frac{dy}{\cos \theta_0} = \int_{-\sin \theta_0}^{a \cos \theta_0 - \sin \theta_0} \frac{y}{y^2 + \cos^2 \theta_0} dy$$

Une primitive connue permet de finir le calcul :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n22} &= \left[ \frac{1}{2} \text{Ln}(y^2 + \cos^2 \theta_0) \right]_{-\sin \theta_0}^{a \cos \theta_0 - \sin \theta_0} \\ &= \frac{1}{2} \text{Ln}((a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0) - \frac{1}{2} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0) \\ &= \frac{1}{2} \text{Ln}(\cos^2 \theta_0 a^2 - a \sin 2\theta_0 + 1) \end{aligned}$$

La mesure de déformation dans la base duale de la base covariante normée est donc :

$$\boxed{\left[ \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{g_n^o\}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) & \varepsilon_{n12} & 0 \\ \varepsilon_{n12} & \frac{1}{2} \text{Ln}(\cos^2 \theta_0 a^2 - a \sin 2\theta_0 + 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad (5.100)$$

*Remarque* : Conformément à ce qui est attendu au 5.2.1.4, les composantes diagonales sont bien les déformations logarithmiques dans les trois directions fortes d'anisotropie.

## 5.3.2 Mesures de contrainte possibles

### 5.3.2.1 Mesure de contrainte du MCEA-F naturel en base convectée

Dans cette théorie, le tenseur de comportement est connu dans une base tensorielle formée exclusivement à partir de la base covariante normée (voir le 5.2.2.1). Sa matrice s'écrit :

$$\left[ \underset{\equiv}{\mathbb{C}} \right]_{\{g_{n^0}\}} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.101)$$

Les contraintes qui sont évaluées directement à partir du comportement connu et des déformations logarithmiques des directions fortes d'anisotropie sont alors contravariantes. Comme  $\mathbb{C}$  est constant, nous pouvons écrire avec la notation de Voigt :

$$\left[ \underset{\equiv}{\boldsymbol{\sigma}} \right]_{\{g_{n^0}\}} = \left[ \underset{\equiv}{\mathbb{C}} \right]_{\{g_{n^0}\}} \left[ \underset{\equiv}{\boldsymbol{\varepsilon}} \right]_{\{g_{n^0}\}}$$

La colonne des contraintes est alors :

$$\left[ \underset{\equiv}{\boldsymbol{\sigma}} \right]_{\{g_{n^0}\}} = \begin{bmatrix} \sigma_n^{11} \\ \sigma_n^{22} \\ \sigma_n^{33} \\ \sigma_n^{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \varepsilon_{n11} \\ E_2 \varepsilon_{n22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sous la forme matricielle, le tenseur des contraintes de Cauchy est donc donné en base covariante normée par :

$$\left[ \underset{\equiv}{\boldsymbol{\sigma}} \right]_{\{g_{n^0}\}} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{2} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_2}{2} \text{Ln}(\cos^2 \theta_0 a^2 - a \sin 2\theta_0 + 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

### 5.3.2.2 Mesure de contrainte du MCEA-F naturel modifié en base convectée

Dans cette théorie, le tenseur de comportement est connu dans une base tensorielle formée à partir de la base covariante normée et de la base covariante duale de la base contravariante normée (voir le 5.2.2.1). Sa matrice, identique à (5.101), s'écrit :

$$\left[ \underset{\equiv}{\mathbb{C}} \right]_{\{g_{n^0} \otimes g^n, \otimes g_{n^0} \otimes g^n\}} \quad (5.103)$$

La matrice de  $\boldsymbol{\sigma}$ , identique à (5.102), s'écrit :

$$\left[ \underset{\equiv}{\boldsymbol{\sigma}} \right]_{\{g_{n^0} \otimes g^n\}} \quad (5.104)$$

### 5.3.2.3 Mesure de contrainte du MCEA-F dual en base convectée

Dans cette théorie, le tenseur de comportement est connu dans une base tensorielle formée à partir de la base covariante normée et de la base contravariante duale (voir le 5.2.2.1). Sa matrice, identique à (5.101), s'écrit :

$$\left[ \underline{\underline{C}} \right]_{\{g_{n_0} \otimes g_n \otimes g_{n_0} \otimes g_{n_0}\}} \quad (5.105)$$

La matrice de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , identique à (5.102), s'écrit :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{g_{n_0} \otimes g_n \otimes g_n \otimes g_{n_0}\}} \quad (5.106)$$

#### 5.3.2.4 Mesure de contrainte du MCEA-F naturel en base globale

D'après (5.63), les composantes des contraintes en base globale sont données par :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[ \underline{\underline{F}}_n \right]_{\{G\}} \left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{g_{n_0}\}} \left[ \underline{\underline{F}}_n^T \right]_{\{G\}}$$

Evaluons ces composantes à l'aide de la matrice (5.102), de (5.88) et de (5.89). Nous obtenons la matrice des contraintes en base globale :

- Pour la composante 11 :

$$\sigma_{11} = \frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \sigma_n^{11} + \frac{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2}{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0} \sigma_n^{22} \quad (5.107)$$

- Pour la composante 22 :

$$\sigma_{22} = \frac{\sin^2 \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \sigma_n^{11} + \frac{\cos^2 \theta_0}{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0} \sigma_n^{22} \quad (5.108)$$

- Pour les composantes 12 et 21 :

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0) \sin \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \sigma_n^{11} + \frac{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0) \cos \theta_0}{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0} \sigma_n^{22} \quad (5.109)$$

*Remarque* : il est possible de vérifier que la relation tensorielle (5.56) est bien respectée en calculant matriciellement :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{G\}} \left[ \underline{\underline{g}}_n^i \right]_{\{G\}} = \sigma_n^{ii} \left[ \underline{\underline{g}}_{n_i} \right]_{\{G\}}$$

Analysons deux cas particuliers d'orientations initiales :

- Orientation initiale à  $0^\circ$

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{G\}} = \frac{E_2}{2(1+a^2)} \text{Ln}(a^2+1) \begin{bmatrix} a^2 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.110)$$

- Orientation initiale à  $90^\circ$

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{G\}} = \frac{E_1}{2(1+a^2)} \text{Ln}(a^2+1) \begin{bmatrix} a^2 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.111)$$

L'expression (5.111) est identique à (5.110), au module d'Young près.

Analysons le cas particulier d'une orientation initiale quelconque avec un comportement à une direction forte d'anisotropie dans la première direction covariante. Dans ce cas,  $E_2=0$ . Nous avons :

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2} \frac{E_1 (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) \quad (5.112)$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2} \frac{E_1 \sin^2 \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) \quad (5.113)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{1}{2} \frac{E_1 (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0) \sin \theta_0}{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} \text{Ln}(\sin^2 \theta_0 a^2 + a \sin 2\theta_0 + 1) \quad (5.114)$$

Nous retrouvons les composantes du MCEO-F en constatant l'identité entre (5.112) et (4.83), (5.113) et (4.84), (5.114) et (4.85).

### 5.3.2.5 Mesure de contrainte du MCEA-F naturel modifié en base globale

D'après (5.72), les composantes des contraintes en base globale sont données par :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}} \end{bmatrix}_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{F}}_n \end{bmatrix}_{\{G \otimes e^0\}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}} \end{bmatrix}_{\{g_n \otimes g^n\}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{F}}^{nT} \end{bmatrix}_{\{e^0 \otimes G\}}$$

Evaluons ces composantes à l'aide de la matrice (5.102), de (5.88) et de (5.97). Nous obtenons la matrice des contraintes en base globale :

- Pour la composante 11 :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \frac{\sqrt{\cos^2 \theta_0 + (\sin \theta_0 - a \cos \theta_0)^2}}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}} (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 \tilde{\sigma}_n^{11} \\ & + \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_0 + (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2}}{\sqrt{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0}} (a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 \tilde{\sigma}_n^{22} \end{aligned} \quad (5.115)$$

- Pour la composante 22 :

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & \frac{\sqrt{(\sin \theta_0 - a \cos \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0}}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}} \sin^2 \theta_0 \tilde{\sigma}_n^{11} \\ & + \frac{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0}} \cos^2 \theta_0 \tilde{\sigma}_n^{22} \end{aligned} \quad (5.116)$$

- Pour les composantes 12 et 21 :

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = \sigma_{21} = & \frac{\sqrt{(\sin \theta_0 - a \cos \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0}}{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}} (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0) \sin \theta_0 \tilde{\sigma}_n^{11} \\ & + \frac{\sqrt{(\cos \theta_0 + a \sin \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{(a \cos \theta_0 - \sin \theta_0)^2 + \cos^2 \theta_0}} (a \cos \theta_0 - \sin \theta_0) \cos \theta_0 \tilde{\sigma}_n^{22} \end{aligned} \quad (5.117)$$

*Remarque* : il est possible de vérifier que la relation tensorielle (5.69) est bien respectée en calculant matriciellement :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}} \end{bmatrix}_{\{G\}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{g}}^{ni} \end{bmatrix}_{\{G\}} = \tilde{\sigma}_n^{ii} \begin{bmatrix} \underline{\underline{g}}_{ni} \end{bmatrix}_{\{G\}}$$



Analysons deux cas particuliers d'orientations initiales :

- Orientation initiale à  $0^\circ$

$$\underline{[\underline{\sigma}]}_{\{G\}} = \frac{E_2}{2\sqrt{1+a^2}} \text{Ln}(a^2+1) \begin{bmatrix} a^2 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.118)$$

- Orientation initiale à  $90^\circ$

$$\underline{[\underline{\sigma}]}_{\{G\}} = \frac{E_1}{2\sqrt{1+a^2}} \text{Ln}(a^2+1) \begin{bmatrix} a^2 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.119)$$

Même conclusion que pour (5.110) et (5.111).

### 5.3.2.6 Mesure de contrainte du MCEA-F dual en base globale

D'après (5.81), les composantes des contraintes en base globale sont données par :

$$\underline{[\underline{\sigma}]}_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{[\underline{F}_n]}_{\{G \otimes e^0\}} \underline{[\underline{\sigma}]}_{\{g_{n_0} \otimes g_n^0\}} \underline{[\underline{F}_n^{-1}]}_{\{e^0 \otimes G\}}$$

Evaluons ces composantes à l'aide de la matrice (5.102), de (5.88) et de (5.90). Nous obtenons la matrice des contraintes en base globale :

- Pour la composante 11 :

$$\sigma_{11} = (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0) \cos \theta_0 \sigma_{n_1}^1 + (\sin \theta_0 - a \cos \theta_0) \sin \theta_0 \sigma_{n_2}^2 \quad (5.120)$$

- Pour la composante 22 :

$$\sigma_{22} = (\sin \theta_0 - a \cos \theta_0) \sin \theta_0 \sigma_{n_1}^1 + (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0) \cos \theta_0 \sigma_{n_2}^2 \quad (5.121)$$

- Pour la composantes 12 :

$$\sigma_{12} = (\cos \theta_0 + a \sin \theta_0) (\sin \theta_0 - a \cos \theta_0) (\sigma_{n_1}^1 - \sigma_{n_2}^2) \quad (5.122)$$

- Pour la composantes 21 :

$$\sigma_{21} = \frac{\sin 2\theta_0}{2} (\sigma_{n_1}^1 - \sigma_{n_2}^2) \quad (5.123)$$

*Remarque* : il est possible de vérifier que la relation tensorielle (5.78) est bien respectée en calculant matriciellement :

$$\underline{[\underline{\sigma}]}_{\{G\}} \underline{[\underline{g}_{n_i}]}_{\{G\}} = \sigma_{n_i}^i \underline{[\underline{g}_{n_i}]}_{\{G\}}$$

Analysons deux cas particuliers d'orientations initiales :

- Orientation initiale à  $0^\circ$

$$\underline{[\underline{\sigma}]}_{\{G\}} = \frac{E_2}{2} \text{Ln}(a^2+1) \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.124)$$

- Orientation initiale à  $90^\circ$

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{G\}} = \frac{E_1}{2} \text{Ln}(a^2 + 1) \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.125)$$

Dans cette théorie, le tenseur des contraintes n'est plus symétrique.

## 5.4 Simulations numériques utilisant la théorie du MCEA-F naturel

Le MCEA-F naturel nous semble être une théorie apte à modéliser des milieux continus 3D à trois directions fortes d'anisotropie, comme cela pourrait être le cas des mèches fibreuses. De plus, cette théorie trouve une application particulièrement intéressante dans le cas des milieux 2D à deux directions fortes d'anisotropie : la simulation de la mise en forme. Nous proposons donc d'illustrer le potentiel du MCEA-F naturel, d'une part, sur le calcul du modèle éléments finis de la maille tricotée 3D et, d'autre part, sur un test de formage classique : le dôme hémisphérique ([BLA95], [BOI95], [CHE94]).

### 5.4.1 Application au modèle 3D de la maille tricotée

#### 5.4.1.1 Cas traités

Nous proposons deux calculs sur le modèle 3D éléments finis de tricot utilisant le MCEA-F naturel à la place du MCEO-GN et du MCEO-F :

- Le premier cas reprend les caractéristiques matériaux permettant de caler le MCEO-GN sur les courbes expérimentales au chapitre 2. Il correspond au calcul nommé GN\_1 au chapitre 4.
- Le second cas reprend les caractéristiques matériaux permettant de caler le MCEO-F sur les courbes expérimentales au chapitre 4. Il correspond au calcul nommé F\_2 au chapitre 4.

*Remarque* : Les détails relatifs à l'implémentation du MCEA-F naturel dans le code de calcul sont donnés au sous-paragraphe suivant concernant la simulation du formage.

#### 5.4.1.2 Courbes force-déplacement

Dans le premier cas, le MCEA-F naturel montre une tendance intermédiaire entre le modèle d'Abaqus/Explicit (le MCEO-GN) et le MCEO-F (Figure 5-12). Cependant, le MCEA-F naturel, tout comme le MCEO-F, ne présente pas de perte de rigidité.

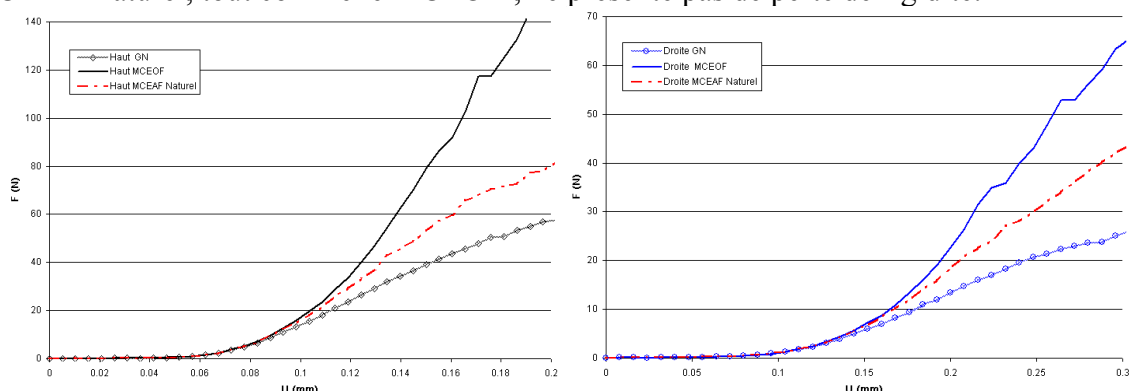


Figure 5-12 : Courbes sur la CER dans le cas 1 (MCEO-GN recalé du chapitre 2)

Dans le second cas, le MCEA-F donne les mêmes rigidités asymptotiques que le MCEO-F mais présente un décalage encore plus important par rapport aux courbes expérimentales

(Figure 5-13). De plus, l'amplitude de ce décalage est différent entre les courbes sur le haut et la droite de la CER.

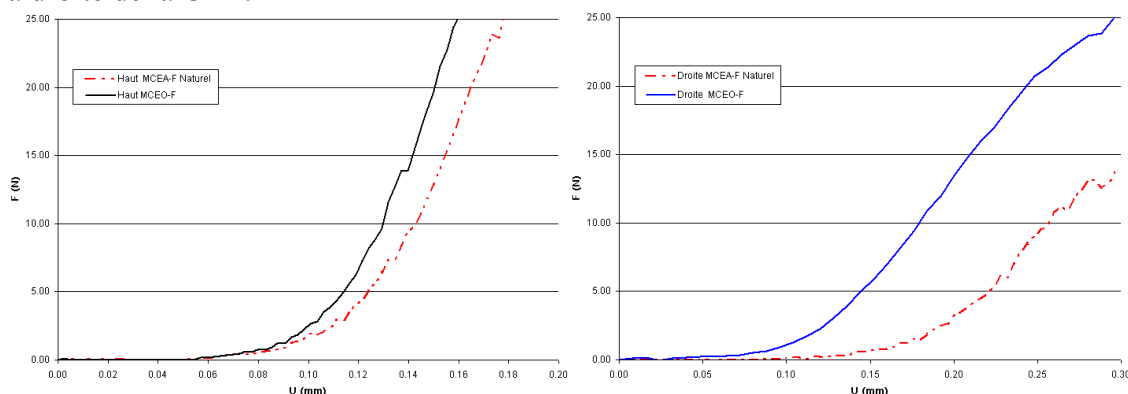


Figure 5-13 : Courbes sur la CER dans le cas 2 (MCEO-F recalé du chapitre 4)

Ces résultats montrent que le MCEA-F naturel est un modèle cohérent avec le MCEO-F et souligne l'incidence du choix de l'évolution des directions transverses.

## 5.4.2 Définition du test du dôme hémisphérique

### 5.4.2.1 Mise en donnée

La mise en forme est ici un emboutissage sans serre-flanc faisant intervenir les pièces suivantes :

- Une matrice circulaire creuse de rayon 100mm.
- Un poinçon hémisphérique de rayon 99mm.
- Un flanc carré, centré sur la matrice, de 400mm par 400mm et d'épaisseur 1mm.

Un frottement coulombien de 0,3 est pris en compte entre ces divers éléments.

Le code de calcul utilisé est toujours Abaqus/Explicit. Les éléments choisis sont des membranes bi-linéaires à quatre nœuds sous-intégrées (éléments M3D4R) avec un contrôle de modes à énergie nulle. Comme pour les éléments 3D, il est possible d'orienter initialement le comportement. Dans Abaqus/Explicit, l'actualisation est faite par défaut pour les éléments M3D4R dans le solide suiveur de Green-Naghdi : les directions fortes d'anisotropie restent donc orthogonales et tournent avec la rotation locale moyenne des segments. Il faut donc, à l'instar de notre précédent travail pour le MCEO-F, implémenter le MCEA-F dans le code de calcul de manière à corriger la formulation de Green-Naghdi (MCEO-GN). Cela est fait avec l'aide d'une routine utilisateur de type VUMAT avec exactement le même algorithme que la routine utilisateur proposée au chapitre 4 pour le MCEO-F. Les modifications à apporter sont :

- Le remplacement de la matrice de la rotation matérielle par la matrice de la transformation normée des segments :

$$\left[ \underline{\underline{\Delta}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} \leftarrow \left[ \underline{\underline{F}}_n \right]_{\{G \otimes e^0\}} \quad (5.126)$$

- L'effacement de la partie concernant le stockage de l'orientation initiale, rendue inutile par (5.126).
- La mise à zéro de toutes les composantes hors du plan des tenseurs. En effet, les membranes ne sont définies que par une cinématique dans leur plan.

#### 5.4.2.2 Cas étudiés

C'est le comportement que nous changeons pour étudier le MCEA-F naturel. Tous les calculs sont donc effectués avec le même maillage. Seuls un ou deux modules d'Young de  $10^5$  MPa sont considérés et il n'y a aucune rigidité de cisaillement. Dans le premier cas, le flanc n'a qu'une direction forte d'anisotropie. Dans le second cas, le flanc a deux directions fortes d'anisotropie. De plus, nous simulons le formage pour plusieurs orientations initiales :

- Cas 1 :  $0^\circ$  et  $90^\circ$ .
- Cas 2 :  $0^\circ/90^\circ$  et  $45^\circ/-45^\circ$ .

Nous comparons également sur le cas  $45^\circ/-45^\circ$  les déformées obtenues avec la formulation standard de Green-Naghdi de l'élément M3D4R et notre formulation.

### 5.4.3 Application au test de formage : déformées du flanc

#### 5.4.3.1 Flanc à une direction forte d'anisotropie

Dans le cas où le tenseur de comportement se réduit à un module d'Young associé à une direction forte d'anisotropie, nous obtenons les déformées sur la Figure 5-14. Les résultats sont conformes à ce qui est attendu : le flanc glisse beaucoup dans la direction d'anisotropie forte et se déforme dans la direction orthogonale sans avoir besoin de glisser. De plus, la symétrie de la déformée entre les cas à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  montre que le modèle est cohérent. Cela conforte le fait que le MCEA-F donne des résultats physiques dans le cas d'une seule direction forte d'anisotropie.

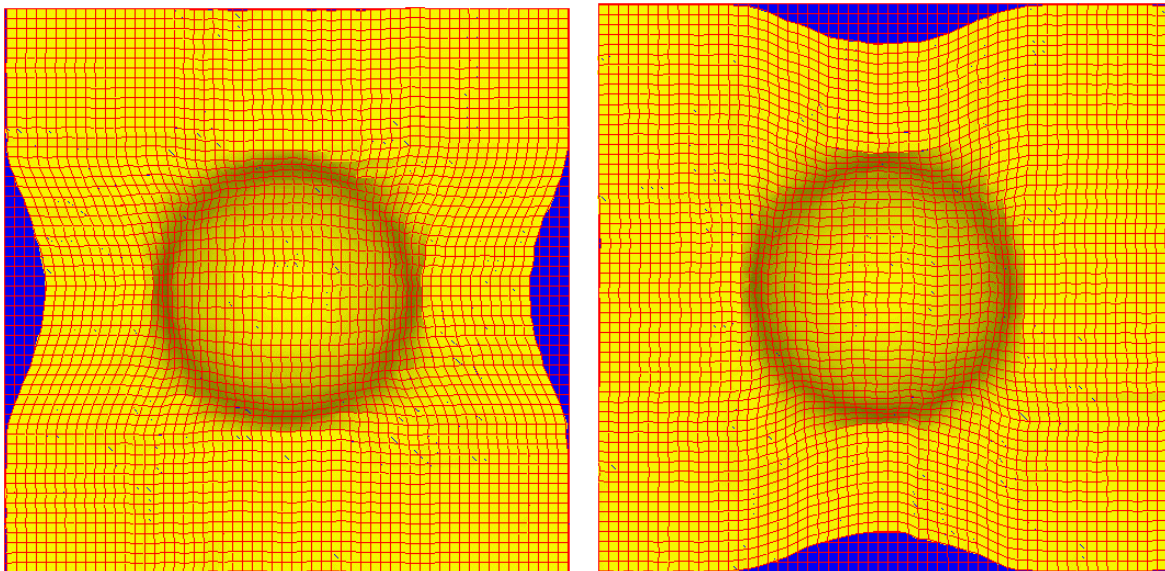


Figure 5-14 : Déformées obtenues avec le MCEA-F naturel pour des directions fortes d'anisotropie initiales à  $0^\circ$  (à gauche) et  $90^\circ$  (à droite)

#### 5.4.3.2 Flanc à deux directions fortes d'anisotropie

Dans le cas où le tenseur de comportement est formé à partir de deux modules d'Young identiques associés à deux directions fortes d'anisotropie, nous obtenons :

- La déformée sur la Figure 5-15 dans le cas d'une orientation initiale à  $0^\circ$ . Le résultat est conforme à l'expérience.
- La déformée sur la Figure 5-16 dans le cas d'une orientation initiale à  $45^\circ$ . Notre modèle donne des résultats comparables à l'élément fini de membrane d'Abaqus M3D4R utilisant la formulation de Green-Naghdi (MCEO-GN détaillé au chapitre 4). Cela est cohérent avec le fait que les méthodes géométriques décrivent également cette transformation avec succès dans le cas des tissus équilibrés. Cependant, des instabilités numériques apparaissent avec le MCEO-GN, ce qui n'est pas le cas du MCEA-F naturel.

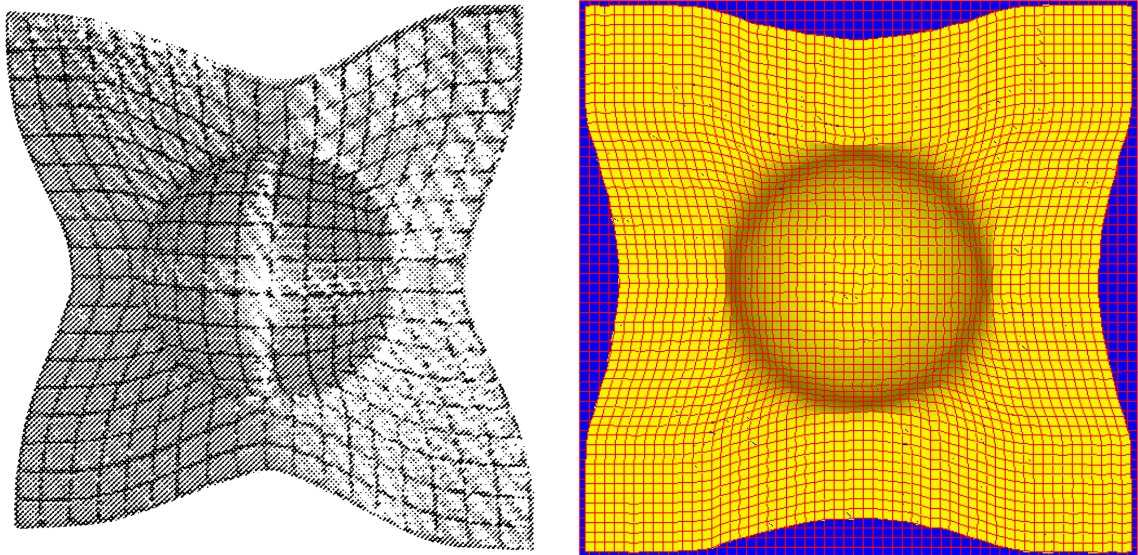


Figure 5-15 : Déformées pour des directions fortes d'anisotropie initiales à  $0^\circ/90^\circ$  obtenues expérimentalement (à gauche) et avec le MCEA-F naturel (à droite)

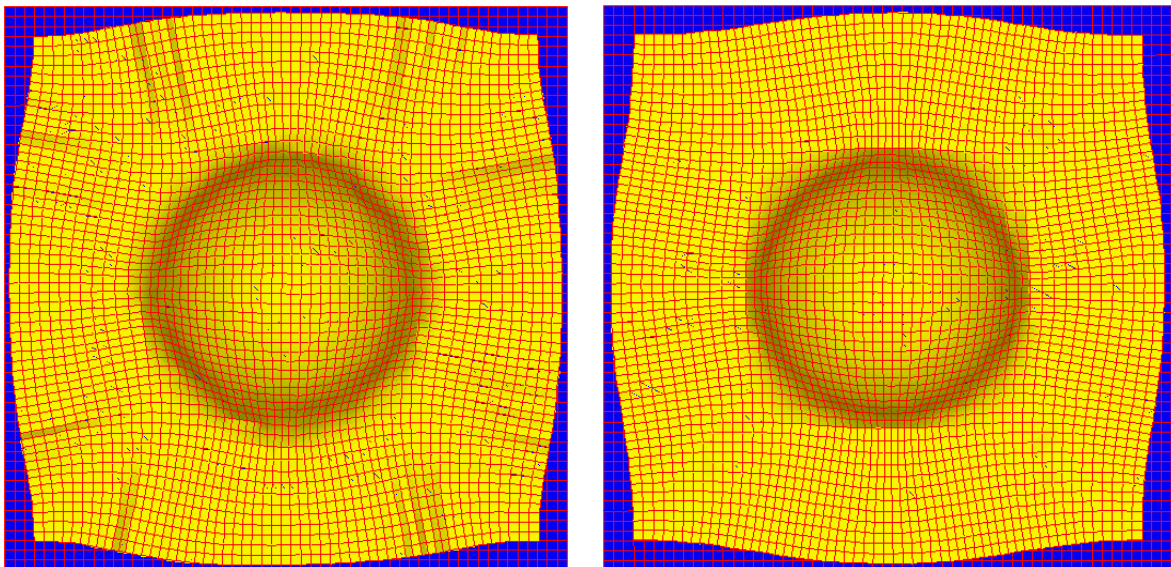


Figure 5-16 : Déformées pour des directions fortes d'anisotropie initiales à  $45^\circ/45^\circ$  obtenues avec la membrane M3D4R (à gauche) et avec le MCEA-F naturel (à droite)

Ces résultats montrent que le MCEA-F naturel semble être un modèle prometteur pour modéliser les milieux anisotropes discrets.

# 6 Conclusions

## 6.1 Conclusion générale

La modélisation, en particulier l'analyse mécanique, des textiles techniques est un sujet de recherche actuel. Les difficultés qui en découlent, aussi bien théoriques qu'expérimentales, ne sont pas des moindres. Cela provient du fait que les textiles sont des structures hétérogènes à la géométrie et à l'anisotropie évolutives. A l'heure actuelle, il n'est pas encore possible de modéliser les détails, à toutes les échelles, de telles structures et nous sommes contraints de trouver des milieux continus équivalents. L'objectif reste de construire des théories simplifiées ayant des capacités prédictives, et pas seulement descriptives. C'est ce que nous avons fait à l'échelle mésoscopique pour modéliser des mèches fibreuses courbes.

Nous avons commencé par mettre en évidence les spécificités des renforts tricotés et nous avons dressé un état de l'art de la modélisation des textiles techniques. Il en est ressorti qu'il n'existe, à notre connaissance, aucun modèle mésoscopique de tricot en grandes transformations. En inscrivant notre travail dans la continuité de celui initié par le Laboratoire de Mécanique des Systèmes et des Procédés sur les tissus, nous avons alors choisi de mettre en place un tel modèle afin d'effectuer une caractérisation numérique du comportement de la structure à l'échelle macroscopique. Pour cela, les hypothèses primordiales de modélisation et la structure tricotée industrielle étudiée ont été détaillées. Au chapitre 2, nous avons construit un modèle géométrique de tricot capable de supporter un modèle éléments finis adéquat. Les simulations effectuées montrent alors qu'il n'est possible de recalculer le modèle éléments finis<sup>32</sup> que dans un domaine de validité restreint. En effet, les surfaces de tensions numériques présentent une perte de rigidité fictive liée à la formulation de Green-Naghdi, inhérente au code de calcul utilisée. Il a fallu remédier à ce problème en trouvant ses causes et en proposant une nouvelle formulation. Pour y parvenir, un retour aux sources théoriques a été nécessaire. Ainsi, au chapitre 3, nous avons formulé une théorie générale des milieux orthotropes en grandes transformations en revisitant les notions théoriques associées à la géométrie euclidienne et aux tenseurs. Parmi ces dernières, les plus importantes sont : le transport, l'objectivité, la dérivation et l'intégration relatives à des référentiels rigides tournants. Ces outils nous ont permis de définir l'hypo-élasticité et le cumul tensoriel. La formulation générale proposée, avec ses aspects tensoriels mais aussi matriciels, nous a été alors fort utile pour mettre en place au chapitre 4 notre modèle de comportement pour les milieux fibreux à une direction forte d'anisotropie. Nous avons précisé la formulation de notre modèle, le Milieu Continu Equivalent Orthotrope Fibreux (MCEO-F), en définissant le tenseur de rotation matérielle  $\Delta$ . Afin de l'implémenter dans le code de calcul industriel utilisé<sup>33</sup>, nous avons proposé une formulation corrective. A l'aide de cette dernière, nous avons ensuite validé notre formulation sur le test de glissement simple / extension et nous avons montré les progrès apportés par rapport à la formulation de Green-Naghdi. Enfin, nous l'avons appliqué au modèle éléments finis de la maille tricotée du chapitre 2 avec succès. En effet, les résultats obtenus sont physiques et traduisent la nature fibreuse des mèches du tricot, ce qui n'était pas le cas de la formulation de Green-Naghdi. Enfin, dans le but de généraliser notre modèle à deux ou trois directions fortes d'anisotropie non-orthogonales, nous avons donné des perspectives pour construire une théorie de Milieu Continu Equivalent Anisotrope Fibreux (MCEA-F). Nous avons alors construit au chapitre 5 une formulation qui semble probante pour simuler la mise en forme de milieux 2D à deux directions fortes

---

<sup>32</sup> Rappelons que le recalage est effectué sur un seul essai expérimental, le seul à notre disposition.

<sup>33</sup> Abaqus/Explicit en l'occurrence.



d'anisotropie, mais également de milieu fibreux 3D à trois directions fortes d'anisotropie. Nous avons dénommé cette formulation « MCEA-F naturel ».

## 6.2 Perspectives

Beaucoup de questions restent ouvertes à l'issu de notre travail et les perspectives sont nombreuses. La première piste à explorer concerne les aspects expérimentaux relatifs à l'identification des lois de comportement des milieux fibreux et aux tests de validations des théories sous-jacentes, comme le MCEO-F ou le MCEA-F naturel. Toutefois, le socle théorique du MCEO-F est posé clairement, et les applications numériques sur le test de référence du glissement simple / extension sont probantes. Pour le MCEA-F naturel, cela reste moins clair car il existe plusieurs possibilités de milieux continus équivalents pour représenter un milieu fibreux anisotrope et hétérogène (MCEA-F naturel modifié, MCEA-F dual...).

Concernant le MCEO-F, nous pensons que le modèle est théoriquement bon, mais, en l'absence de surfaces de tension expérimentales de tricots, il ne nous est pas possible de démontrer ses capacités prédictives en les comparant aux nouvelles surfaces de tensions numériques que nous pourrions obtenir. De plus, il existe une carence expérimentale à combler concernant l'identification des lois de comportement en grandes transformations à l'échelle de la mèche. En effet, il est ardu d'identifier les modules de cisaillement équivalents et les lois d'écrasement et, à l'heure actuelle, seul le module d'Young dans la direction forte d'anisotropie peut être obtenu avec précision. De plus, l'évolution du tenseur de comportement, c'est-à-dire la façon dont se réactualisent les directions fortes d'anisotropie, devrait elle aussi pouvoir être mise en évidence. Enfin, il serait intéressant d'analyser et de prendre éventuellement en compte un comportement en compression différent de celui en traction.

Nous pensons qu'une autre piste importante est la poursuite de l'analyse des modèles de MCEA-F pour finaliser la mise au point d'éléments macroscopiques de textile capable de simuler la mise en forme. L'un des objectifs est l'obtention d'éléments finis macroscopiques de « membranes de tricot » (voir Figure 6-1). Rappelons que le cisaillement des tricots n'a pas été évoqué car les raideurs associées ont été supposées très faibles. Il faudrait donc ajouter à la description d'un MCEA-F des rigidités liées aux rotations des directions fortes d'anisotropie entre elles. Cela paraît possible en usant de la théorie des milieux de Cosserat.

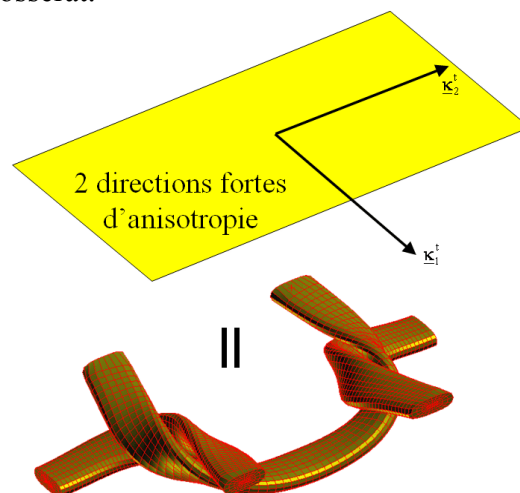


Figure 6-1 : Membrane de tricot équivalente à 2 directions fortes d'anisotropie

# 7 Bibliographie

Nombre de références : 142.

- [ADA98] **Adanur S., Liao T.**, 3D modeling of textile composite preforms, *Composites Part B*, vol. 29B, pp. 787–793, 1998.
- [AMA01] **d’Amato E.**, Finite element modeling of textile composites, *Composite Structures*, vol. 54, pp. 467–475, 2001.
- [BAN01] **Bannister M.**, Challenge for composites into the next millenium, a reinforcement perspective, *Composites Part A*, vol. 32, pp. 901–910, 2001.
- [BAR98] **Baraff D., Witkin A.**, Large steps in cloth simulation, *SIGGRAPH’98 Conference Proceedings*, pp. 43-51, 1998.
- [BAS99] **Basset R.J., Postle R.**, Experimental methods for measuring fabric mechanical properties: a review and analysis, *Journal of the textile institute*, vol. 69, pp. 866-875, 1999.
- [BAS00] **Basar Y., Dieter W.**, Nonlinear continuum mechanics of solides, *Springer*, New York, 2000.
- [BEA96] **Beatty M.F.**, Introduction to nonlinear elasticity, in: Carroll M. and Hayes A. (ed.), Non-linear effects in fluid and solids, *Plenum Press*, New York, pp. 13–104, 1996.
- [BEL00] **Belytschko T., Liu W.K., Moran B.**, Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures, *John Wiley & Sons*, 2000.
- [BER-T] **Berbain F., Chevalier A.**, Mise en œuvre des composites: méthodes et matériels, *Techniques de l’Ingénieur*, pp. 1-34, A 3 720.
- [BER96] **Berthelot J.M.**, Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures, *Editions Masson*, Paris, 1996.
- [BIC97] **Bickerton S., Simacek P., Guglielmi S.E., Advani S.G.**, Investigation of draping and its effects on the mold filling process during manufacturing of a compound curved composite part, *Composites Part A*, vol. 28A, pp. 801–816, 1997.
- [BIC00] **Bickerton S., Sozer E.M., Graham P.J., Advani S.G.**, Fabric structure and mold curvature effects on preform permeability and mold filling in the RTM process. Part I. Experiments, *Composites Part A*, vol. 31, pp. 423–428, 2000.
- [BIC00b] **Bickerton S., Sozer E.M., Simacek P., Advani S.G.**, Fabric structure and mold curvature effects on preform permeability and mold filling in the RTM process. Part II. Predictions and comparisons with experiments, *Composites Part A*, vol. 31, pp. 439–458, 2000.
- [BIL93] **Billoët J.L.**, Introduction aux matériaux composites à hautes performances, *Tecknea*, Paris, 1993.
- [BIL96] **Billoët J.L.**, Mécanique des matériaux et des structures composites, *Cours de DEA S3M*, ENSAM Paris, 1996.
- [BIL00] **Billoët J.L., Cherouat A., Borouchaki H.**, From the predimensioning approach to the optimisation of forming processes of thin composite parts, 2000, in : Design and manufacturing in mechanical engineering, *Kluwer Academic Publishers*, 2002.

- [BIL03] **Billoët J.L.**, Contribution à la compréhension des problèmes en grandes transformations (v 3.0), *Cours de DEA S3M*, ENSAM Paris, 2003.
- [BLA95] **Blanlot R.**, Modélisation de la mise en forme de tissus préimprégnés non polymérisés : application au drapage, *Thèse de doctorat de l'ENSAM*, Paris, 1995.
- [BLA00] **Blachut J.**, Modelling and analysis of multi-ply torispheres draped from woven carbon fabric, *Computers and Structures*, vol. 76, pp. 1-9, 2000.
- [BOI93] **Boisse P., Gelin J.C., Sabhi H.**, Experimental study and finite element simulation of glass fiber fabric shaping process, in *Use of Plastics and Plastic Composites: Materials and Mechanics Issues*, MD-Vol.46, Editor: Y.K. Stokes, Book No. H00884, 1993.
- [BOI95] **Boisse P., Cherouat A.H., Gelin S., Sabhi H.**, Experimental study and finite element simulation of glass fiber fabric shaping process, *Polymer Composites*, vol. 16(1), pp. 83–95, 1995.
- [BOI97] **Boisse P., Borr M., Buet K., Cherouat A.**, Finite element simulations of textile composite forming including the biaxial fabric behaviour, *Composites Part B*, vol. 28, pp. 453–464, 1997.
- [BOI00] **Boisse P., Daniel J.L., Gasser A., Hivet G., Soulat D.**, Prise en compte du procédé de fabrication dans la conception des structures composites minces, *Mécanique & Industries*, vol. 1, pp. 303–311, 2000.
- [BOI01] **Boisse P., Gasser A., Hivet G.**, Analyses of fabric tensile behaviour: determination of the biaxial tension-strain surfaces and their use in forming simulations, *Composites Part A*, vol. 32, pp. 1395–1414, 2001.
- [BOI04] **Boisse P., Zouari B., Gasser A.**, Simulation of woven fibre composite forming, *Composite Science and Technology*, à paraître.
- [BOR01] **Borouchaki H., Cherouat A., Billoët J.L., de Luca P.**, Integration of a new geometrical model for textile forming processes in the QuickForm software, *Esaform 2001*, Louvain, Belgique, 2001.
- [BON97] **Bonet J., Wood R.**, Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis, *Cambridge University Press*, 1997.
- [BON99] **Bondar V.D., Molina S.P., Sadovskii V.V.**, Mathematical modeling of extension of an inhomogeneous elastic cloth, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 40, No. 5, pp. 979–988, 1999.
- [BOU94] **Boubakar M.L.**, Contribution à la simulation numérique de l'emboutissage des tôles. Prise en compte du comportement élastoplastique anisotrope, *Thèse de doctorat de l'Université de Franche-Comté*, Besançon, 1994.
- [BOU97] **Boubakar M.L., Boisse P., Gelin J.C.**, Numerical implementation of orthotropic plasticity for sheet metal forming, *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 65, pp. 143–152, 1997.
- [BOU98] **Boubakar M.L., Boisse P.**, Comportement élastoplastique anisotrope pour l'analyse numérique des coques minces en grandes transformations, *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol. 7, pp. 709–735, 1998.
- [BRE94] **Breen D., House D., Wozny M.**, Predicting the drape of woven cloth using interacting particles, *SIGGRAPH'94 Conference Proceedings*, pp. 365-372, 1994.
- [BRI97] **McBride T.M., Chen J.**, Unit cell geometry in plain-weave fabrics during shear deformation, *Composites Sciences and Technology*, vol. 57, pp. 345–351, 1997.
- [BUE98] **Buet K.**, Analyse et simulation du comportement mécanique des renforts composites tissés, *Thèse de doctorat de l'université d'Orléans*, Orléans, 1998.
- [CAO03] **Cao J., Xue P., Peng X., Krishnan N.**, An approach in modeling the temperature effect in thermo-stamping of woven composites, *Composite Structures*, vol. 61, pp. 413–420, 2003.

- [CHE94] **Cherouat A.H.**, Simulation numérique du préformage des tissus de fibres de verre par la méthode des éléments finis, *Thèse de doctorat de l'Université de Franche-Comté*, Besançon, 1994.
- [CHE96] **Cherouat A.H., Billoët J.L.**, La bonne utilisation du code de calcul ABAQUS en formulation non-linéaire, *Rapport interne LMS/ENSAM-Paris*, Paris, 1996.
- [CHE99] **Cherouat A.H., Billoët J.L.**, Finite element modeling of composite fabrics deformation by the shaping process, *International Journal of Forming Processes*, vol. 2, pp. 225–251, 1999.
- [CHE01] **Chen S.F., Hu J.L., Teng J.G.**, A finite volume method for contact drape simulation of woven fabrics and garments, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 37, pp. 513–531, 2001.
- [COX01] **Cox B.N., Davis J.B.**, Knitted composites for energy absorption under tensile loading, *Composites Part A*, vol. 32, pp. 91–105, 2001.
- [CRI91] **Crisfield M.A.**, Non linear finite element analysis of solids and structures, Volume I: Essentials, *John Wiley & Sons*, England, 1991.
- [CRI91b] **Crisfield M.A.**, Non linear finite element analysis of solids and structures, Volume II: Advanced Topics, *John Wiley & Sons*, England, 1991.
- [CUO00] **Cuong N., Maekawa Z., Hamada H.**, Numerical studies on elastic properties and failure mechanisms of knit fabric composites, *Materials Science Research International*, vol. 6, No. 1, pp. 29–34, 2000.
- [DAF83] **Dafalias Y.F.**, Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations, *Trans. of the ASME, J. of Ap. Mech.*, vol. 50, pp. 561-565, 1983.
- [DEC00] **Decolon C.**, Structures composites : calcul des plaques et des poutres multicouches, *Hermes Science Publications*, 2000.
- [DES99] **Deski T.**, Herezh – code de calcul de structures par éléments finis en grandes transformations, <http://belz.univ-ubs.fr/labadmin/Pub/doc/pdf/Deski-Herezh/>, 1999.
- [DET85] **Detraux J.M.**, Formulations et applications en grandes déformations des solides, *Thèse de docteur-ingénieur de l'U.T.C*, Compiègne, 1985.
- [DIE79] **Dienes J.K.**, On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies, *Acta Mechanica*, vol.32, pp. 217-232, 1979.
- [DIX00] **Dixneuf E.**, Contribution à l'étude des matériaux composites renforcés par des textiles tricotés *Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Nantes*, Nantes, 2000.
- [DOG86] **Dogui A., Sidoroff F.**, Rhéologie anisotrope en grandes transformations, in : Rhéologie des matériaux anisotropes, CR 19<sup>ème</sup> Coll. GFR, Paris, Nov. 1984, *Cépaduès Editions*, Toulouse, pp. 69-78, 1986.
- [DOG89] **Dogui A.**, Plasticité anisotrope en grandes déformations, *Doctorat es-science*, Ecole Centrale de Lyon, 1989.
- [DON00] **Dong L., Lekakou C., Bader M.G.**, Solid-mechanics finite element simulations of the draping of fabrics: a sensitivity analysis, *Composites Part A*, vol. 31, pp. 639–652, 2000.
- [DUM03] **Dumont F.**, Contribution à l'expérimentation et à la modélisation du comportement mécanique de renforts de composites tissés, *Thèse de doctorat de l'Université d'Orléans*, Orléans, 2003.
- [DUR01] **Durville D.**, Modélisation par éléments finis de propriétés mécaniques de structures textiles : de la fibre au tissu, *Colloque sur le Calcul de Structures de Giens*, 2001.
- [EIN93] **Einstein A.** (principal), **Balibar F. Darrigol O. Jech B. Stachel J.**, Œuvres choisies 2 : Relativités I, *Collection Sources du Savoir, Editions Seuil-CNRS*, 1993.
- [FLA00] **Flambard X.**, Résistance à la coupure, à la perforation et au feu de structures textiles maillées, *Thèse de doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille I*, Lille, 2000.

- [FIS00] **Fish J., Shek K.**, Finite deformation plasticity based on the additive split of the rate of deformation and hyperelasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, pp. 75–93, 2000.
- [GAR02] **Garrigues J.**, Grandes déformations et lois de comportement, <http://esm2.imt-mrs.fr/gar/gd.html>, 2002.
- [GAY89] **Gay D.**, Matériaux composites, *Hermès*, 1989.
- [GAY96] **Gay D., Carronier D.**, Approche intégrée du RTM, *Revue des Composites et des Matériaux Avancés*, vol. 6, pp. 711-718, 1996.
- [GIL93] **Gilormini P., Roudier P., Rougée P.**, Les déformations cumulées tensorielles, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, vol. 316, Série II, pp. 1499-1504, 1993.
- [GIL93b] **Gilormini P., Roudier P., Rougée P.**, Utilisation des déformations cumulées tensorielles dans l'analyse du cisaillement simple de matériaux anisotropes, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, vol. 316, Série II, pp. 1659-1666, 1993.
- [GIL93c] **Gilormini P., Roudier P.**, ABAQUS and finite strain, *Rapport interne LMT Cachan n°140*, 1993.
- [GIL94] **Gilormini P., Rougée P.**, Taux de rotation des directions matérielles dans un milieu déformable, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, vol. 318, Série II, pp. 421-427, 1994.
- [GIL94b] **Gilormini P.**, Sur les référentiels locaux objectifs en mécanique des milieux continus, *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, vol. 318, Série II, pp. 1153-1159, 1994.
- [GLA96] **Glaesgen E.H., Pastore C.M., Griffin O.H., Birger A.**, Geometrical and finite element modelling of textile composites, *Composites Part B*, vol. 27B, pp. 43–50, 1996.
- [GOM98] **Gommers B., Verpoest I., Van Houtte P.**, Analysis of knitted fabric reinforced composites: Part I, fibre orientation distribution, *Composites Part A*, vol. 29, pp. 1579–1588, 1998.
- [GOM98b] **Gommers B., Verpoest I., Van Houtte P.**, Analysis of knitted fabric reinforced composites: PartII stiffness and strength, *Composites Part A*, vol. 29, pp. 1589–1601, 1998.
- [GRA01] **Grammenoudis P., Tsakmakis C.**, Hardening rules for finite deformation micropolar plasticity: restrictions imposed by the second law of thermodynamics and the postulate of Il'iushin, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 13, pp. 325–363, 2001.
- [HAN98] **Hanklar S.**, Modélisation mécanique et numérique du comportement des tissus de fibres : simulations du comportement mésoscopique de la maille élémentaire, *Thèse de doctorat de l'Université de Paris 6*, Paris, 1998.
- [HEA01] **Heardman E., Lekakou C., Bader M.G.**, In-plane permeability of sheared fabrics, *Composites Part A*, vol. 32, pp. 933–940, 2001.
- [HIL78] **Hill R.**, Aspect of invariance in solids mechanics, *Advances in Applied Mechanics*, Yih Ed, Academic Press N.Y., vol.18, pp. 1-75, 1978.
- [HIV02] **Hivet G.**, Modélisation mésoscopique pour le comportement biaxial et la mise en forme des renforts de composites tissés, *Thèse de doctorat de l'Université d'Orléans*, Orléans, 2002.
- [HOH01] **Hohe J., Becker W.**, An energetic homogenisation procedure for the elastic properties of general cellular sandwich cores, *Composites Part B*, vol. 32, pp. 185–197, 2001.
- [HUA00] **Huang Z.M., Ramakrishna S.**, Micromechanical modeling approaches for the stiffness and strength of knitted fabric composites : a review and comparative study, *Composites Part A*, vol. 31, pp. 479–501, 2000.

- [HUG80] **Hughes T.J.R., Winget J.**, Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis, *IJNME*, vol.15, pp. 1862-1867, 1980.
- [HUY01] **Huysmans G., Verpoest I., Van Houtte P.**, A damage model for knitted fabric composites, *Composites Part A*, vol. 32, pp. 1465–1475, 2001.
- [IND99] **Indermaur M., Simacek P., Advani S.G.**, The influence of draping on the filling of doubly curved molds in the resin transfert molding process, *International Journal of Forming Processes*, vol. 2, pp. 1–32, 1999.
- [JON98] **Jones R.**, Mechanics of composite materials, *Taylor and Francis*, London, 1998.
- [JUN99] **Jung C., Ganghoffer J.F., Durand B.**, A generalized continuum model for textile, *Proceeding of ICCM 12*, France, 1999.
- [KAM00] **Kamiya R., Cheeseman B.A., Popper P., Chou T.-W.**, Some recent advances in the fabrication and design of three-dimensional textile preforms: a review, *Composites Sciences and Technology*, vol. 60, pp. 33–37, 2000.
- [KAW89] **Kawabata S.**, Nonlinear mechanics of woven and knitted materials, in: Chou T.W., Ko F.K. (eds.), *Textile Structural Composites*, Composite Materials Series Vol. 3, Elsevier, Amsterdam, pp. 67–116, 1989.
- [KHO01] **Khondker O.A., Leong K.H., Herszberg I.**, Effects of biaxial deformation of the knitted glass preform on the in-plane mechanical properties of the composite, *Composites Part A*, vol. 32, pp. 1513–1523, 2001.
- [LAC98] **Lacome J.L.**, Analyse de la méthode particulière SPH, applications à la détonique, *Thèse de doctorat de l'Institut National des Sciences Appliquées*, 1998.
- [LAD91] **Ladevèze P.**, Sur une théorie des grandes transformations: modélisation et calcul, *Rapport LMT Cachan*, n° 116, 1991.
- [LEA55] **Leaf G., Glaskin A.**, The geometry of a plain knitted loop, *J. Textile Inst.*, vol. 45, T587-T605, 1955.
- [LEG00] **Legrand X.**, Contribution à la modélisation dynamique et à l'identification de tissus techniques, *Thèse de doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille*, Lille, 2000.
- [LEO00] **Leong K.H., Ramakrishna S., Huang Z.M., Bibo G.A.**, The potential of knitting for engineering composites—a review, *Composites Part A*, vol. 31, pp. 197–220, 2000.
- [LEO00-2] **Leonov A.**, On the conditions of potentiality in finite elasticity and hypo-elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, pp. 2565–2576, 2000.
- [LIM99] **Lim T.C., Ramakrishna S., Shang H.M.**, Axisymmetric sheet forming of knitted fabric composites by combined stretch forming and deep drawing, *Composite Part B*, vol. 30, p. 495–502, 1999.
- [LIM00] **Lim T.C., Ramakrishna S., Shang H.M.**, Strain field of deep drawn knitted fabric reinforced thermoplastic composite sheets, *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 97, p. 95–99, 2000.
- [LIM02] **Lim T.C., Ramakrishna S.**, Modelling of composite sheet forming: a review, *Composite Part A*, vol. 33, p. 515–537, 2002.
- [LOM00] **Lomov S.W., Gusakov A.V., Huysmans G., Prodromou A., Verpoest I.**, Textile geometry preprocessor for meso-mechanical models of woven composites, *Composites Sciences and Technology*, vol. 60, pp. 2083–2095, 2000.
- [LOM01] **Lomov S.W., Huysmans G., Luo Y., Prodromou A., Verpoest I., Phelan F.R.**, Textile composites: modelling strategies, *Composites Part A*, vol. 32, pp. 1379–1394, 2001.
- [LUO02] **Luo Y., Verpoest I.**, Biaxial tension and ultimate deformation of knitted fabrics reinforcements, *Composites Part A*, vol. 33, pp. 197–203, 2002.

- [MAG01] **Magno M., Ganghoffer J.F.**, Un modèle mésoscopique en grandes perturbations de matériaux textiles – application à l’armure toile, *Compte-Rendus de l’Académie des Sciences de Paris*, t. 329, série IIB, pp. 149–152, 2001.
- [MAR01] **Maria-Sube R., Mercier B.**, La modélisation et la simulation pour le développement d’un produit industriel, *Mécanique et Industries*, vol. 2, pp. 85–105, 2001.
- [MAY97] **Mayer J., Wintermantel E.**, Thermoforming processes for knitted-fabric-reinforced thermoplastics: new manufacturing techniques for load-bearing anisotropic implants, in: Bhattacharyya D. (ed.), *Composite Sheet Forming*, Composite Materials Series Vol. 11, Elsevier, Amsterdam, pp. 403–440, 1997.
- [MOM03] **Mompean G., Thompson R.L., Souza Mendes P.R.**, A general transformation procedure for differential viscoelastic models, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 111, pp. 151–174, 2003.
- [MOU99] **Mouritz A.P., Bannister M.K., Falzon P.J., Leong K.H.**, Review of applications for advanced three-dimensional fibre textile composites, *Composites Part A*, vol. 30, pp. 1445–1461, 1999.
- [MOU99b] **Mouritz A.P., Bains C., Herszberg I.**, Mode I interlaminar fracture toughness properties of advanced textile fibreglass composites, *Composites Part A*, vol. 30, pp. 859–870, 1999.
- [NG00] **Ng S.-P., Lau K.J., Tse P.C.**, 3D finite element analysis of tensile notched strength of 2/2 twill weave fabric composites with drilled circular hole, *Composites Part B*, vol. 31, pp. 113–132, 2000.
- [PEN02] **Peng X., Cao J.**, A dual homogenization and finite elements approach for material characterization of textile composites, *Composites Part B*, vol. 33, pp. 45–56, 2002.
- [PET98] **Petit J.N.**, Etude du comportement mécanique des tricots de renfort des tuyaux de refroidissement, *Rapport de stage Hutchinson-Automobile/ESEM*, ESEM d’Orléans, 1998.
- [PIN-T] **Pinzelli R.**, Fibres aramides pour matériaux composites, *Techniques de l’Ingénieur*, pp. 1-12, A 3 985.
- [PLA00] **Plath J.**, Realistic modelling of textile using interacting particle systems, *Computers and Graphics*, vol. 24, pp. 897–905, 2000.
- [POS87] **Postle R.**, Mechanics of wool structures, joint author with Carnaby G.A. and de Jong S., Ellis Horwood, John Wiley & Sons, U.K., 1987.
- [POT99] **Potter K.D.**, The early history of the resin transfer moulding process for aerospace applications, *Composites Part A*, vol. 30, pp. 619–621, 1999.
- [POT01] **Potluri P., Sharma S., Ramgulum R.**, Comprehensive drape modelling for moulding 3D textile preforms, *Composites Part A*, vol. 32, pp. 1414–1424, 2001.
- [PUT99] **Putnoki I., Moos E., Karger-Kocsis J.**, Mechanical performance of stretched knitted fabric glass fibre reinforced PET composites produced from commingled yarn, *Plastics, Rubber and Composites*, vol. 28, No. 1, pp. 40–46, 1999.
- [RAM97] **Ramakrishna S.**, Characterization and modeling of the tensile properties of plain-weft knit fabric-reinforced composites, *Composites Sciences and Technology*, vol. 57, pp. 1–22, 1997.
- [RAM00] **Ramakrishna S., Huang Z.M., Teoh S.H., Tay A.A.O., Chew C.L.**, Application of the model of Leaf and Glaskin to estimating the 3D elastic properties of knitted-fabric-reinforced composites, *J. Text. Inst.*, vol. 91 Part 1, No. 1, pp. 132–150, 2000.
- [ROU91] **Rougée P.**, A new lagrangian intrinsic approach to large deformations in continuous media, *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 10, pp. 15-39, 1991.
- [ROU97] **Rougée P.**, Mécanique des grandes transformations, Springer-Verlag, 1997.

- [ROZ00] **Rozant O., Bourban P.-E., Manson J.-A.E.**, Drapability of dry textile fabrics for stampable thermoplastic preforms, *Composites Part A*, vol. 31, pp. 1167–1177, 2000.
- [ROZ01] **Rozant O., Bourban P.-E., Manson J.-A.E.**, Warp-knits laminates for stampable sandwich preforms, *Composites Science and Technology*, vol. 61, pp. 145–156, 2001.
- [ROZ01b] **Rozant O., Bourban P.-E., Manson J.-A.E.**, Manufacturing of three dimensionnal sandwich parts by direct thermoforming, *Composites Part A*, vol. 32, pp. 1593–1601, 2001.
- [SAN92] **Sansour C.**, On the geometric structure of the stress and strain tensors, dual variables and objective rates in continuum mechanics, *Arch. Mech.*, vol. 44-5-6, pp. 527-556, 1992.
- [SAV00] **Savci S., Curiskis J.I., Pailthorpe M.T.**, A study of the deformation of weft-knit preforms for advanced composite structures – part I: dry preform properties, *Composites Science and Technology*, vol. 60, pp. 1931–1942, 2000.
- [SAV00b] **Savci S., Curiskis J.I., Pailthorpe M.T.**, A study of the deformation of weft-knit preforms for advanced composite structures – part II: the resultant composite, *Composites Science and Technology*, vol. 60, pp. 1943–1951, 2000.
- [SCI00] **Scida D.**, Prédiction des propriétés élastiques d'un matériau composite à renfort tricoté, *Comptes-rendus des JNC 12*, pp. 323-332, Vol. I, 2000.
- [SHA01] **Sharma S.B., Sutcliffe M.P.F.**, Draping of woven composites over irregular surfaces, *Proceeding of ICCM 13*, China, 2001.
- [SID01] **Sidhu R.M.J.S., Averill R.C., Riaz M., Pourboghraat F.**, Finite element analysis of textile composite preform stamping, *Composites and Structures*, vol. 52, pp. 483–497, 2001.
- [SID82] **Sidoroff F.**, Cours sur les grandes transformations, *rapport GRECO N°51*, Sophia-Antipolis, 1982.
- [STU99] **Stumpf H., Lenz T., Schulte K., Andersson C.-H.**, The mechanical behaviour of single-tricot warp-knitted fabrics – Part I: an experimental investigation of knitted fabrics of varying loop geometry under tensile stress with special attention given to inter-yarn friction, *J. Text. Inst.*, vol. 90 Part 1, No. 2, pp. 209–224, 1999.
- [SUN01] **Sun W., Lin F., Hu X.**, Computer-aided design and modeling of composite unit cells, *Composites Sciences and Technology*, vol. 61, pp. 289–299, 2001.
- [SZA89] **Szabo L., Balla M.**, Comparison of some stress rates, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 25, No. 3, pp. 279–297, 1989.
- [TAK00] **Takano N., Ohnishi Y., Zako M., Nishiyabi K.**, The formulation of homogenization method applied to large deformation problem for composite materials, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, pp. 6517–6535, 2000.
- [TAK01] **Takano N., Ohnishi Y., Zako M., Nishiyabi K.**, Microstructure-based deep-drawing simulation of knitted fabric reinforced thermoplastics by homogenization theory, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, pp. 6333–6356, 2001.
- [TAL93] **Talpaert Y.**, Leçons et applications de géométrie différentielle et de mécanique analytique, *Cépaduès Editions*, 1993.
- [TAN97] **Tan P., Tong L., Steven G.P.**, Modelling for predicting the mechanical properties of textile composites – a review, *Composites Part A*, vol. 28A, pp. 903–922, 1997.
- [TSA01] **Tsakmakis C.**, Generalized strain and stress tensors associated by duality, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 13, pp. 307–324, 2001.
- [TRU65] **Truesdell C., Noll W.**, The non-linear field theories of mechanics, *Springer-Verlag*, 1965.



- [VOL96] **Volino P., Magnenat-Thalmann N.**, An evolving system for simulating clothes on virtual actors, *Computer Graphics in Textiles and Apparel (IEEE Computer Graphics and Applications)*, pp. 42-51, 1996.
- [WAN01] **Wang Y., Sun X.**, Digital-element simulation of textile processes, *Composites Sciences and Technology*, vol. 61, pp. 311–319, 2001.
- [WAN98] **Wang J., Page J.R., Paton R.**, Experimental investigation of the draping properties of reinforcement fabrics, *Composites Science and Technology*, vol. 58, pp. 229–237, 1998.
- [WAN99] **Wang J., Paton R., Page J.R.**, The draping of woven fabric preforms and prepregs for production of polymer composite components, *Composites Part A*, vol. 30, pp. 757–765, 1999.
- [WAN99b] **Wang Y., Xia Y.M.**, Experimental and theoretical study on the strain rate and temperature dependence of mechanical behaviour of Kevlar fibre, *Composites Part A*, vol. 30, pp. 1251–1257, 1999.
- [WAS92] **Wasserman R.H.**, Tensors and manifolds with applications to mechanics and relativity, *Oxford University Press*, 1992.
- [XUE02] **Xue P., Yu T.X., Tao X.M.**, Tensile properties and meso-scale mechanism of weft knitted textile composites for energy absorption, *Composites Part A*, vol. 33, pp. 113–123, 2002.
- [XUE03] **Xue P., Peng X., Cao J.**, A non-orthogonal constitutive model for characterizing woven composites, *Composites Part A*, vol. 34, pp. 183–193, 2003.
- [YU02] **Yu W.R., Pourboghraat F., Chung K., Zampaloni M., Kang T.J.**, Non-orthogonal constitutive equations for woven fabric reinforced thermoplastic composites, *Composites Part A*, vol. 33, pp. 1095–1105, 2002.
- [YU02] **Yu W.R., Pourboghraat F., Chung K., Zampaloni M., Kang T.J.**, Non-orthogonal constitutive equation for woven fabric reinforced thermoplastic composites, *Composites Part A*, vol. 33, pp. 1095–1105, 2002.

# *8 Annexes*

## 8.1 Test de la loi d'écrasement sur un élément C3D8R d'Abaqus/Explicit

La loi d'écrasement exponentielle retenue au 2.2.3.2 du chapitre 2 est testée sur un élément hexaédrique linéaire sous-intégré. Les dimensions initiales de la brique sont de 300mm par 300mm pour la base et de 70mm pour la hauteur (Figure 8-1). Une compression simple selon la direction 3 est d'abord effectuée avant le retour à la position initiale. Le pilotage est fait en vitesse.

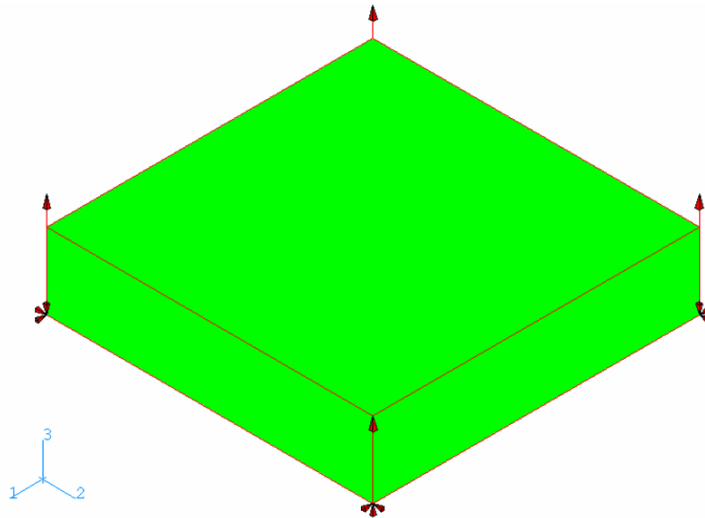


Figure 8-1 : Élément C3D8R en traction/compression simple selon 3

La loi d'écrasement est obtenue sur la Figure 8-2 en post-traitant deux variables utilisateurs :

- Le module d'Young transversal (SDV2)  $E_3$
- La déformation transversale (SDV1)  $\epsilon_{33}$

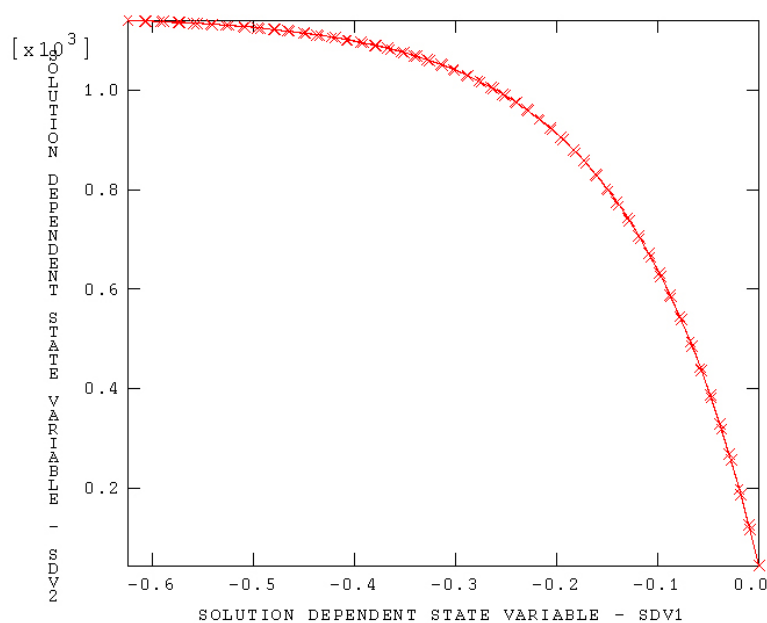


Figure 8-2 : Loi d'écrasement (module d'Young en MPa)

La courbe force-déplacement (Figure 8-3) montre l'intérêt de la loi d'écrasement : l'élément est très facile à écraser au début de la transformation car sa rigidité est quasiment nulle, ce qui n'est pas le cas avec un module d'Young constant.

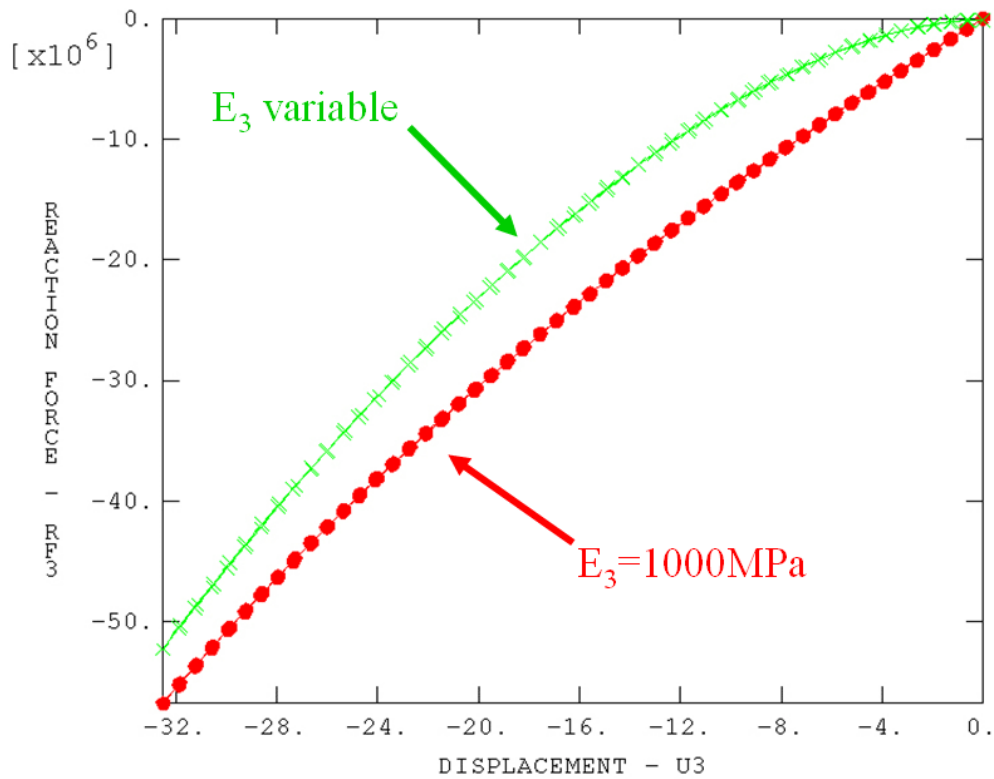


Figure 8-3 : Courbes force-déplacement dans les cas d'un module d'Young variable et constant (forces en N, déplacement en mm)

## 8.2 Bases associées aux composantes des tenseurs renvoyées par une VUMAT

### 8.2.1 Etude du tenseur gradient $\underline{\underline{F}}$ de la transformation

Dans ce paragraphe, les composantes en **rouges** sont celles renvoyées par la VUMAT.

#### 8.2.1.1 Projection de $\underline{\underline{F}}$

Les composantes de  $\underline{\underline{F}}$  renvoyées par la VUMAT correspondent à la projection de  $\underline{\underline{F}}$  dans la base mixte formée de la base globale et de l'orientation initiale quand la carte \*ORIENTATION est utilisée (ce qui systématiquement le cas dans nos calculs) :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_{ij} \underline{\underline{G}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j^0$$

#### 8.2.1.2 Composantes de $\underline{\underline{F}}$ renvoyées par la VUMAT pour différentes orientations initiales dans le cas du cisaillement simple

Nous pouvons obtenir la matrice de  $\underline{\underline{F}}$  analytiquement à l'aide de la formule (4.74) du chapitre 4. C'est ce qui est fait pour trois orientations initiales différentes.

- Orientation initiale à  $0^\circ$  :

$$\{\underline{\underline{e}}^0\} = \{\underline{\underline{G}}\} \Rightarrow [\underline{\underline{F}}]_{\{\underline{\underline{G}} \otimes \underline{\underline{e}}^0\}} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Orientation initiale à  $90^\circ$  :

$$[\underline{\underline{e}}_1^0]_{\{\underline{\underline{G}}\}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [\underline{\underline{e}}_2^0]_{\{\underline{\underline{G}}\}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{\underline{e}}_3^0 = \underline{\underline{G}}_3 \Rightarrow [\underline{\underline{F}}]_{\{\underline{\underline{G}} \otimes \underline{\underline{e}}^0\}} = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Orientation initiale à  $45^\circ$  :

$$[\underline{\underline{e}}_1^0]_{\{\underline{\underline{G}}\}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [\underline{\underline{e}}_2^0]_{\{\underline{\underline{G}}\}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{\underline{e}}_3^0 = \underline{\underline{G}}_3 \Rightarrow [\underline{\underline{F}}]_{\{\underline{\underline{G}} \otimes \underline{\underline{e}}^0\}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} a+1 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

## 8.2.2 Etude du tenseur d'élongation pure à droite $\underline{\underline{U}}$

### 8.2.2.1 Projection de $\underline{\underline{U}}$

Les composantes de  $\underline{\underline{U}}$  renvoyées par la VUMAT correspondent à la projection de  $\underline{\underline{U}}$  dans l'orientation initiale quand la carte \*ORIENTATION est utilisée (ce qui systématiquement le cas dans nos calculs) :

$$\underline{\underline{U}} = U_{ij} \underline{e}_i^0 \otimes \underline{e}_j^0$$

Dans le cas de l'utilisation d'un autre code de calcul ne passant pas  $\underline{\underline{U}}$  dans les routines utilisateur, il est possible de le calculer à partir de  $\underline{\underline{F}}$ .

### 8.2.2.2 Composantes de $\underline{\underline{U}}$ renvoyées par la VUMAT pour différentes orientations initiales dans le cas du cisaillement simple

Nous pouvons obtenir la matrice de  $\underline{\underline{U}}$  analytiquement en effectuant des classiques changements de base à partir de la solution connue à  $0^\circ$ .

- Orientation initiale à  $0^\circ$  :

$$[\underline{\underline{U}}]_{\{e^0\}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{4}}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{2} & 0 \\ \frac{a}{2} & 1 + \frac{a^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Orientation initiale à  $90^\circ$  :

$$[\underline{\underline{U}}]_{\{e^0\}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{4}}} \begin{bmatrix} 1 + \frac{a^2}{2} & -\frac{a}{2} & 0 \\ -\frac{a}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Orientation initiale à  $45^\circ$  :

$$[\underline{\underline{U}}]_{\{e^0\}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{4}}} \begin{bmatrix} 1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} & \frac{a^2}{4} & 0 \\ \frac{a^2}{4} & 1 - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 8.2.3 Etude du tenseur incrément de déformation

### 8.2.3.1 Projection de l'incrément de déformation

Les composantes de l'incrément renvoyées par la VUMAT correspondent à la projection de  $\mathbf{D}\Delta t$  dans la base de Green-Naghdi à la moitié du pas de temps :

$$\left[ \underline{\underline{\Delta \varepsilon}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}} = (\Delta \varepsilon_{ij}) = \left[ \underline{\underline{D}} \right]_{\{e^{t+\frac{\Delta t}{2}}\}} \Delta t$$

### 8.2.3.2 Formule de changement de base (base globale vers base de Green-Naghdi)

Pour le cas du cisaillement simple,  $\mathbf{D}$  est connu en base globale, voir la formule (4.64). Nous devons calculer les composantes de  $\mathbf{D}$  dans la base de Green-Naghdi à la moitié du pas de temps (voir 3.3.4.3) pour les comparer avec ce que renvoie la VUMAT. Pour cela, nous devons connaître la rotation pure  $\mathbf{R}$  (calculée à partir de  $\mathbf{F}$  et de  $\mathbf{U}$  au 4.2.1.4). Comme il n'est pas aisé de la calculer la moitié de l'incrément, nous l'approximons en prenant sa valeur à la fin de l'incrément. Cela correspond à l'approximation faite au 4.1.3.3.

La matrice de  $\mathbf{R}$  dans la base mixte ci-dessous est la matrice de passage de  $\{G\}$  à l'image de  $\{e^0\}$  par  $\mathbf{R}$ , c'est à dire  $\{e^t\}$  (voir le 3.1.2.3 pour s'en convaincre). Nous avons alors à chaque instant :

$$\left[ \underline{\underline{D}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}} = \left[ \underline{\underline{R}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^T \left[ \underline{\underline{D}} \right]_{\{G\}} \left[ \underline{\underline{R}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^{t+\Delta t}$$

C'est cette relation, que nous comparons à l'incrément de déformation (divisé par le pas de temps  $\Delta t$ ) renvoyé par la VUMAT.

$$\left[ \underline{\underline{D}} \right]_{\{e^{t+\frac{\Delta t}{2}}\}} = \left( \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t} \right) \approx \left[ \underline{\underline{D}} \right]_{\{e^{t+\Delta t}\}}^{t+\Delta t}$$

## 8.2.4 Calcul de l'écart entre les solutions analytiques et les solutions numériques d'Abaqus/Explicit.

### 8.2.4.1 Calcul de l'erreur relative

Sur l'essai de cisaillement simple, les composantes de tenseurs à chaque instant sont récupérées à l'aide de SDV (variables utilisateurs) définies dans la VUMAT. Pour un tenseur  $\mathbf{A}$  donné, l'erreur est calculée comme suit :

- Le tenseur  $\mathbf{e}(\mathbf{A})$  a pour composantes les erreurs relatives composante par composante de  $\mathbf{A}$ .

$$\forall A_{ij}^{\text{Analytique}} \neq 0 \quad \left( e_{ij}(\underline{\underline{A}}) \right) = \left( \frac{A_{ij}^{\text{Abaqus}} - A_{ij}^{\text{Analytique}}}{A_{ij}^{\text{Analytique}}} \right)$$

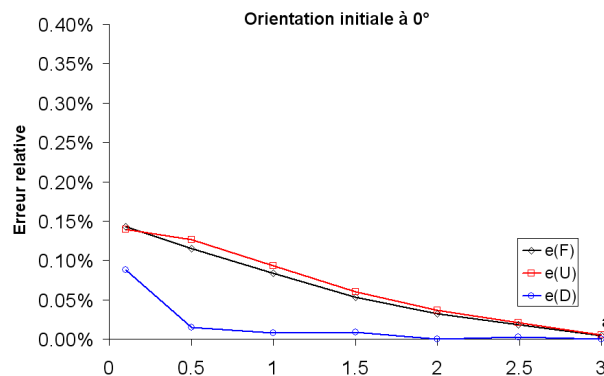
- La norme de ce tenseur au sens du produit doublement contracté donne l'erreur relative que nous utilisons :

$$e = \left\| \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{A}}) \right\| = \sqrt{\underline{\underline{e}}(\underline{\underline{A}}) : \underline{\underline{e}}(\underline{\underline{A}})}$$

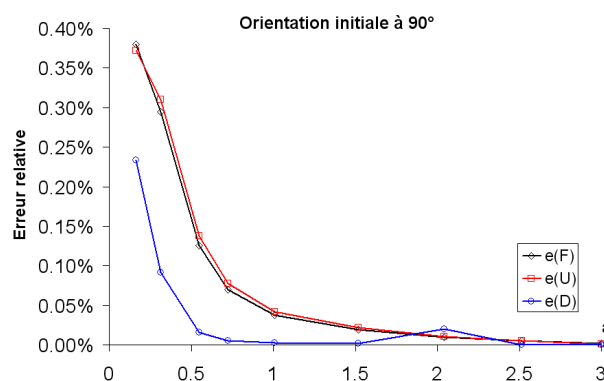
De cette façon, même si des composantes sont négatives, les erreurs relatives se cumulent sans jamais s'annuler.

L'erreur relative est calculée pour  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{D}$  (qui représente l'incrément de déformation) avec le paramètre  $a$  de l'essai de glissement simple allant jusqu'à 3, ce qui est très sévère. Nous constatons dans ce qui suit que l'erreur relative construite ne dépasse jamais 0,4%, ce qui confirme qu'Abaqus/Explicit travaille avec les composantes relatives aux bases citées précédemment et que l'approximation de  $\mathbf{D}$  est bonne.

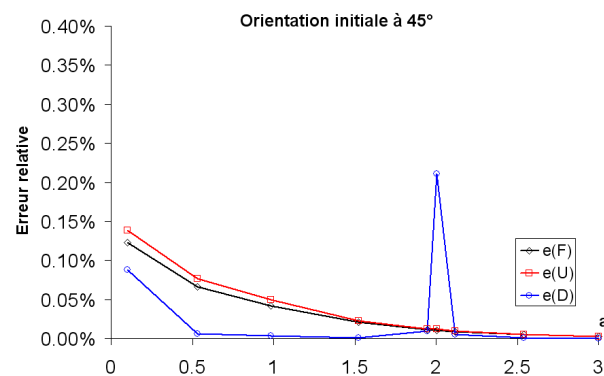
#### 8.2.4.2 Orientation initiale à 0°



#### 8.2.4.3 Orientation initiale à 90°



#### 8.2.4.4 Orientation initiale à 45°





### 8.3 Comparaison des déformations matérielles du MCEO-F et des déformations de Green-Naghdi pour une orientation initiale à $90^\circ$

Nous constatons, sur le test de glissement simple, que la mesure de déformation du MCEO-F est proche de celle du MCEO-GN en base globale (Figure 8-4). Cependant, les similitudes s'arrêtent ici car les contraintes principales ne seront pas du tout identiques, le tenseur de comportement étant orienté différemment dans les deux formulations.

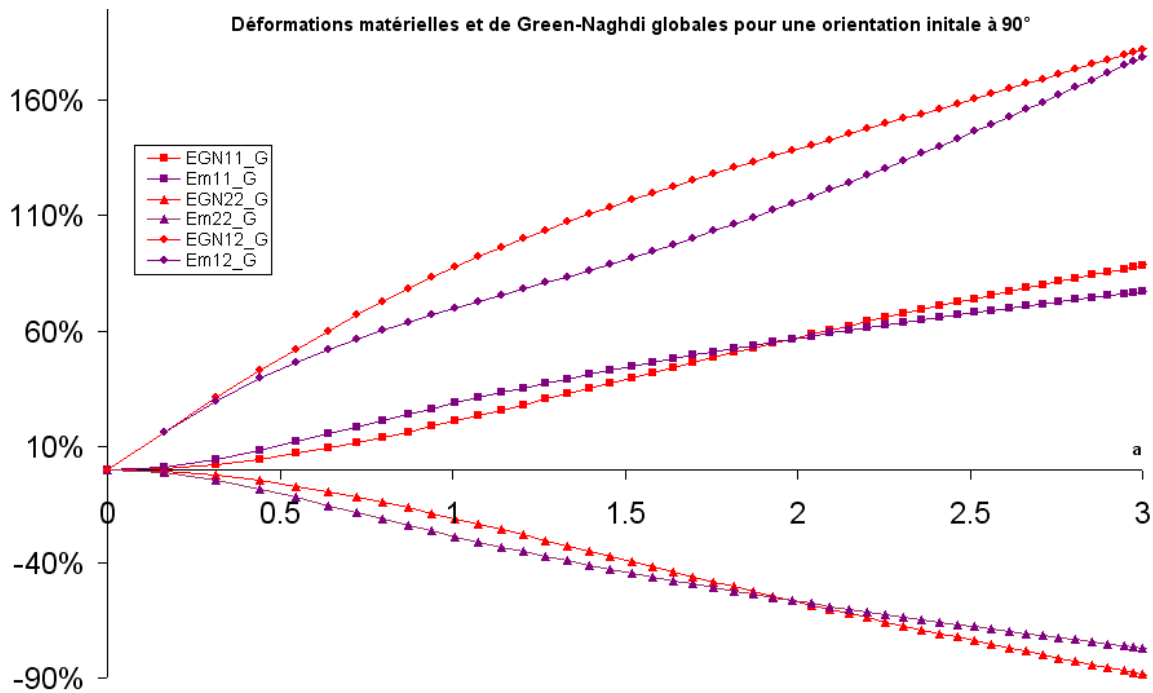


Figure 8-4 : Comparaison en base globale des tenseurs de déformations du MCEO-F et du MCEO-GN

## 8.4 Solutions analytiques de MCEA-F pour le test de traction simple

### 8.4.1 Test de traction simple pour une orientation initiale arbitraire : cinématique

#### 8.4.1.1 Tenseur gradient

La cinématique de la traction simple est donnée au §4.2.2 en prenant  $a=0$ . Cela nous donne le gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  (ici diagonal) duquel nous déduisons ses diverses formes (transposée, inverse, inverse-transposée) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{[\mathbf{F}]}}_{\{G\}} = \underline{\underline{[\mathbf{F}^T]}}_{\{G\}} &= \begin{bmatrix} 1+u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{[\mathbf{F}^{-T}]}_{\{G\}}} = \underline{\underline{[\mathbf{F}^{-1}]}_{\{G\}}} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1+u} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.1)$$

#### 8.4.1.2 Transformations des segments et des normales

L'orientation initiale étant définie au 4.2.3.1, la transformation des segments (respectivement des normales) est donnée par les composantes de  $\mathbf{F}$  (respectivement de  $\mathbf{F}^{-T}$ ) en base mixte.

- Segments :

La matrice de  $\mathbf{F}$  en base mixte est donné par :

$$\underline{\underline{[\mathbf{F}]}}_{\{G \otimes e^0\}} = \underline{\underline{[\mathbf{F}]}}_{\{G\}} \underline{\underline{[\mathbf{O}]}}_{\{G\}} = \begin{bmatrix} 1+u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\underline{\underline{[\mathbf{F}]}}_{\{G \otimes e^0\}} = \begin{bmatrix} (1+u) \cos \theta_0 & -(1+u) \sin \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

Les colonnes de (8.2) représentent les projections dans la base globale des segments, orientés initialement par  $\mathbf{O}$ , dans les directions fortes d'anisotropie (Figure 8-5).

- Normales

La matrice de  $\mathbf{F}^{-T}$  en base mixte se calcule de la même manière que celle de  $\mathbf{F}$  :

$$\underline{[\underline{F}]}_{\{G \otimes e^0\}}^{-T} = \underline{[\underline{F}]}_{\{G\}}^{-T} \underline{[\underline{O}]}_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+u} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 & 0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\underline{[\underline{F}]}_{\{G \otimes e^0\}}^{-T} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_0}{1+u} & -\frac{\sin \theta_0}{1+u} & 0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

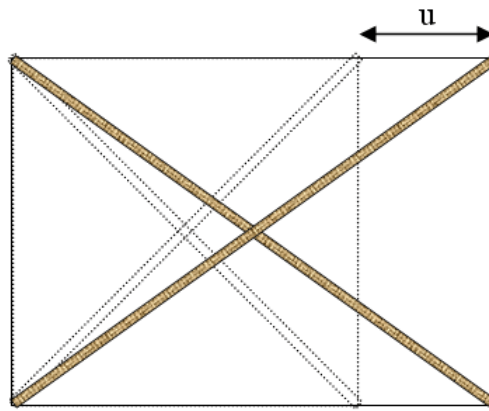


Figure 8-5 : Traction simple d'un cube unitaire avec deux directions fortes d'anisotropie

#### 8.4.1.3 Transformation normée des segments

La transformation normée des segments permet de définir la base covariante normée. Les vecteurs de cette base sont unitaires mais non-orthogonaux :

$$\underline{[\underline{g}_{n1}]}_{\{G\}} = \frac{\underline{[\underline{F}]}_{\{G \otimes e^0\}} \underline{[\underline{e}_1^0]}_{\{e^0\}}}{\left\| \underline{[\underline{F}]}_{\{G \otimes e^0\}} \underline{[\underline{e}_1^0]}_{\{e^0\}} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}} \begin{bmatrix} (1+u) \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

$$\underline{[\underline{g}_{n2}]}_{\{G\}} = \frac{\underline{[\underline{F}]}_{\{G \otimes e^0\}} \underline{[\underline{e}_2^0]}_{\{e^0\}}}{\left\| \underline{[\underline{F}]}_{\{G \otimes e^0\}} \underline{[\underline{e}_2^0]}_{\{e^0\}} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0}} \begin{bmatrix} -(1+u) \sin \theta_0 \\ \cos \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

$$\underline{[\underline{g}_{n3}]}_{\{G\}} = \frac{\underline{[\underline{F}]}_{\{G \otimes e^0\}} \underline{[\underline{e}_3^0]}_{\{e^0\}}}{\left\| \underline{[\underline{F}]}_{\{G \otimes e^0\}} \underline{[\underline{e}_3^0]}_{\{e^0\}} \right\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

La transformation normée des segments s'écrit donc en base mixte :

$$\left[ \underline{\underline{F_n}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} = \begin{bmatrix} \frac{(1+u) \cos \theta_0}{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}} & \frac{-(1+u) \sin \theta_0}{\sqrt{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0}} & 0 \\ \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}} & \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

Les autres formes de la transformation normée des segments sont :

$$\left[ \underline{\underline{F_n^T}} \right]_{\{e^0 \otimes G\}} = \begin{bmatrix} \frac{(1+u) \cos \theta_0}{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}} & \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}} & 0 \\ \frac{-(1+u) \sin \theta_0}{\sqrt{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0}} & \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

$$\left[ \underline{\underline{F_n^{-1}}} \right]_{\{e^0 \otimes G\}} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_0}{1+u} \sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0} \\ -\frac{\sin \theta_0}{1+u} \sqrt{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

$$\left[ \underline{\underline{F_n^{-T}}} \right]_{\{G \otimes e^0\}} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_0}{1+u} \sqrt{(\cos \theta_0 + u)^2 + \sin^2 \theta_0} \\ \sin \theta_0 \sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0} \\ 0 \\ -\frac{\sin \theta_0}{1+u} \sqrt{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0} \\ \cos \theta_0 \sqrt{(\sin^2 \theta_0 + u)^2 + \cos^2 \theta_0} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

*Remarque* : la  $i$ ème colonne de la matrice (8.10) est le  $i$ ème vecteur de la base contravariante duale de la base covariante normée. Ces vecteurs ne sont bien sûr pas normés. Nous rappelons qu'ils sont notés :

$$\left[ \underline{\mathbf{g}}^i \right]_{\{G\}}$$

#### 8.4.1.4 Transformation normée des normales

La transformation normée des normales permet de définir la base contravariante normée. Les vecteurs de cette base sont unitaires mais non-orthogonaux :

$$\left[ \underline{\mathbf{g}}^{n1} \right]_{\{G\}} = \frac{\left[ \underline{\mathbf{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^{-T} \left[ \underline{\mathbf{e}}_1^0 \right]_{\{e^0\}}}{\left\| \left[ \underline{\mathbf{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^{-T} \left[ \underline{\mathbf{e}}_1^0 \right]_{\{e^0\}} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta_0 + (1+u)^2 \sin^2 \theta_0}} \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \\ (1+u) \sin \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

$$\left[ \underline{\mathbf{g}}^{n2} \right]_{\{G\}} = \frac{\left[ \underline{\mathbf{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^{-T} \left[ \underline{\mathbf{e}}_2^0 \right]_{\{e^0\}}}{\left\| \left[ \underline{\mathbf{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^{-T} \left[ \underline{\mathbf{e}}_2^0 \right]_{\{e^0\}} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}} \begin{bmatrix} -\sin \theta_0 \\ (1+u) \cos \theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

$$\left[ \underline{\mathbf{g}}^{n3} \right]_{\{G\}} = \frac{\left[ \underline{\mathbf{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^{-T} \left[ \underline{\mathbf{e}}_3^0 \right]_{\{e^0\}}}{\left\| \left[ \underline{\mathbf{F}} \right]_{\{G \otimes e^0\}}^{-T} \left[ \underline{\mathbf{e}}_3^0 \right]_{\{e^0\}} \right\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

La transformation normée des normales s'écrit donc en base mixte :

$$\left[ \underline{\mathbf{F}}^{n-T} \right]_{\{G \otimes e^0\}} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{\cos^2 \theta_0 + (1+u)^2 \sin^2 \theta_0}} & -\frac{\sin \theta_0}{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}} & 0 \\ \frac{(1+u) \sin \theta_0}{\sqrt{\cos^2 \theta_0 + (1+u)^2 \sin^2 \theta_0}} & \frac{(1+u) \cos \theta_0}{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

Les autres formes de la transformation normée des normales sont :

$$\left[ \underline{\mathbf{F}}^{n-1} \right]_{\{e^0 \otimes G\}} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{\cos^2 \theta_0 + (1+u)^2 \sin^2 \theta_0}} & \frac{(1+u) \sin \theta_0}{\sqrt{\cos^2 \theta_0 + (1+u)^2 \sin^2 \theta_0}} & 0 \\ -\frac{\sin \theta_0}{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}} & \frac{(1+u) \cos \theta_0}{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}^n}} \right]_{\{\mathbf{e}^0 \otimes \mathbf{G}\}} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 (1+u)^2 + \cos^2 \theta_0} \\ -\sin \theta_0 \sqrt{\cos^2 \theta_0 (1+u)^2 + \sin^2 \theta_0} \\ 0 \\ \frac{\sin \theta_0}{1+u} \sqrt{\sin^2 \theta_0 (1+u)^2 + \cos^2 \theta_0} \\ \frac{\cos \theta_0}{1+u} \sqrt{\cos^2 \theta_0 (1+u)^2 + \sin^2 \theta_0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{aligned} \quad (8.16)$$

$$\begin{aligned} \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}^n}} \right]_{\{\mathbf{G} \otimes \mathbf{e}^0\}} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 (1+u)^2 + \cos^2 \theta_0} \\ \frac{\sin \theta_0}{1+u} \sqrt{\sin^2 \theta_0 (1+u)^2 + \cos^2 \theta_0} \\ 0 \\ -\sin \theta_0 \sqrt{\cos^2 \theta_0 (1+u)^2 + \sin^2 \theta_0} \\ \frac{\cos \theta_0}{1+u} \sqrt{\cos^2 \theta_0 (1+u)^2 + \sin^2 \theta_0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{aligned} \quad (8.17)$$

*Remarque* : la  $i$ ème colonne de la matrice (8.17) est le  $i$ ème vecteur de la base covariante duale de la base contravariante normée. Ces vecteurs ne sont bien sûr pas normés. Nous rappelons qu'ils sont notés :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{g}^n}} \right]_{\{\mathbf{G}\}}$$

#### 8.4.1.5 Taux de déformation dans la base covariante normée

Afin de calculer la mesure de déformation dans la base covariante normée, nous devons estimer sous l'intégrale le taux de déformation dans la base duale de la base covariante normée :

$$\left[ \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right]_{\{\mathbf{g}_n^{\otimes 0}\}} = \int_0^t \left[ \underline{\underline{\mathbf{D}}} \right]_{\{\mathbf{g}_n^{\otimes 0}\}} dt$$

Il se calcule par un changement de base de  $\mathbf{D}$  :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbf{D}}} \right]_{\{\mathbf{g}_n^{\otimes 0}\}} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}_n}} \right]_{\{\mathbf{e}^0 \otimes \mathbf{G}\}} \left[ \underline{\underline{\mathbf{D}}} \right]_{\{\mathbf{G}\}} \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}_n}} \right]_{\{\mathbf{G} \otimes \mathbf{e}^0\}}$$

$\mathbf{D}$  est connu en base globale par (4.72) en prenant  $a=0$ . Nous avons avec l'aide de (8.7) et de (8.8) :

$$\begin{aligned}
 \left[ \underline{\underline{D}} \right]_{\{g_n^\circ\}} = & \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_0 \frac{\dot{u}(1+u)}{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0} \\ \frac{\frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \dot{u}(1+u)}{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0} \sqrt{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0}} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \dot{u}(1+u)}{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0} \sqrt{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0}} \\ 0 \\ \sin^2 \theta_0 \frac{\dot{u}(1+u)}{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.18) \\
 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

#### 8.4.1.6 Mesure de déformation dans la base matérielle covariante

La mesure de déformation est définie par l'intégrale de Lie 2 fois covariante de  $\mathbf{D}$  par rapport à la transformation normée des segments :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}}_{\circ\circ n}(\underline{\underline{D}})$$

Nous cherchons à évaluer la projection de  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  dans la base duale de la base covariante normée :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{nij} \underline{g}_n^i \otimes \underline{g}_n^j$$

En usant des propriétés de l'intégration affine, nous avons :

$$\left[ \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{g_n^\circ\}} = \left[ \underline{\underline{S}}_{\circ\circ n}(\underline{\underline{D}}) \right]_{\{g_n^\circ\}} = \int_0^t \left[ \underline{\underline{D}} \right]_{\{g_n^\circ\}} dt$$

Avec l'aide de (5.99), la matrice des déformations matérielles s'écrit :

$$\left[ \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{g_n^\circ\}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{n11} & \varepsilon_{n12} & 0 \\ \varepsilon_{n12} & \varepsilon_{n22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_{n11} = \int_0^u \frac{1+u}{(1+u)^2 + \tan^2 \theta_0} du \\ \varepsilon_{n22} = \int_0^u \frac{1+u}{(1+u)^2 + \cot^2 \theta_0} du \\ \varepsilon_{n12} = \frac{\sin 2\theta_0}{2} \int_0^u \frac{1+u}{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0} \sqrt{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0}} du \\ = \int_0^u \frac{1+u}{\sqrt{(1+u)^2 + \tan^2 \theta_0} \sqrt{(1+u)^2 + \cot^2 \theta_0}} du \end{cases}$$

Intégrons ces équations pour obtenir explicitement les déformations matérielles. Effectuons dans un premier temps le changement de variable ci-dessous :

$$x = 1 + u$$

L'élément différentiel du devient donc :

$$du = dx$$

- La composante 11 de la déformation matérielle s'écrit alors :

$$\varepsilon_{n11} = \int_1^{1+u} \frac{x}{x^2 + \tan^2 \theta_0} dx$$

Une primitive connue permet de finir le calcul :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n11} &= \left[ \frac{1}{2} \text{Ln}(x^2 + \tan^2 \theta_0) \right]_1^{1+u} = \frac{1}{2} \text{Ln}((1+u)^2 + \tan^2 \theta_0) - \frac{1}{2} \text{Ln}(1 + \tan^2 \theta_0) \\ &= \frac{1}{2} \text{Ln} \left( \frac{(1+u)^2 + \tan^2 \theta_0}{1 + \tan^2 \theta_0} \right) \end{aligned}$$

- La composante 22 de la déformation matérielle est :

$$\varepsilon_{n22} = \int_0^u \frac{1+u}{(1+u)^2 + \text{co} \tan^2 \theta_0} du = \int_1^{1+u} \frac{x}{x^2 + \text{co} \tan^2 \theta_0} du$$

Une primitive connue permet de finir le calcul :

$$\varepsilon_{n22} = \left[ \frac{1}{2} \text{Ln}(x^2 + \text{co} \tan^2 \theta_0) \right]_1^{1+u} = \frac{1}{2} \text{Ln} \left( \frac{(1+u)^2 + \text{co} \tan^2 \theta_0}{1 + \text{co} \tan^2 \theta_0} \right)$$

- La composante 12 de la déformation matérielle est :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n12} &= \int_0^u \frac{1+u}{\sqrt{(1+u)^2 + \tan^2 \theta_0} \sqrt{(1+u)^2 + \text{co} \tan^2 \theta_0}} du \\ &= \int_1^{1+u} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \tan^2 \theta_0} \sqrt{x^2 + \text{co} \tan^2 \theta_0}} dx \\ &= \int_1^{1+u} \frac{x}{\sqrt{(x^2 + \tan^2 \theta_0)(x^2 + \text{co} \tan^2 \theta_0)}} dx \\ &= \int_1^{1+u} \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2(\tan^2 \theta_0 + \text{co} \tan^2 \theta_0) + 1}} dx \end{aligned}$$

Effectuons maintenant le nouveau changement de variable :

$$y = x^2$$

L'élément différentiel dx devient donc :

$$dy = 2x dx$$

Il vient :

$$\varepsilon_{n12} = \frac{1}{2} \int_1^{(1+u)^2} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + y(\tan^2 \theta_0 + \text{co} \tan^2 \theta_0) + 1}}$$

Une primitive connue donne alors :

$$\varepsilon_{n12} = \frac{1}{2} \left[ \text{Ln} \left( 2\sqrt{y^2 + y(\tan^2 \theta_0 + \text{co} \tan^2 \theta_0) + 1} + 2y + \tan^2 \theta_0 + \text{co} \tan^2 \theta_0 \right) \right]_1^{(1+u)^2}$$

La déformation de cisaillement s'exprime alors explicitement par :



$$\varepsilon_{n12} = \frac{1}{2} \text{Ln} \left( \frac{2\sqrt{(1+u)^4 + (1+u)^2 (\tan^2 \theta_0 + \text{co} \tan^2 \theta_0) + 1} + 2(1+u)^2 + \tan^2 \theta_0 + \text{co} \tan^2 \theta_0}{2\sqrt{\tan^2 \theta_0 + \text{co} \tan^2 \theta_0 + 2} + \tan^2 \theta_0 + \text{co} \tan^2 \theta_0 + 2} \right)$$

La mesure de déformation dans la base duale de la base covariante normée est donc :

$$\left[ \underline{\varepsilon} \right]_{\{g_n\}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \text{Ln} \left( \frac{(1+u)^2 + \tan^2 \theta_0}{1 + \tan^2 \theta_0} \right) & \varepsilon_{n12} & 0 \\ \varepsilon_{n12} & \frac{1}{2} \text{Ln} \left( \frac{(1+u)^2 + \text{co} \tan^2 \theta_0}{1 + \text{co} \tan^2 \theta_0} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

## 8.4.2 Test de traction simple pour une orientation initiale arbitraire : contraintes

### 8.4.2.1 Mesure de contrainte du MCEA-F naturel en base convectée

Dans cette théorie, le tenseur de comportement est connu dans une base tensorielle formée exclusivement à partir de la base covariante normée :

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}} = C^{ijkl} \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_j} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_k} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_l}$$

Sa matrice est alors :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbb{C}}} \right]_{\{\underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_o}\}} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

La projection de  $\underline{\underline{\sigma}}$  que nous allons calculer est dans la base covariante normée :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_n^{ij} \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_j}$$

Les contraintes qui sont évaluées directement à partir du comportement connu et des déformations logarithmiques des directions fortes d'anisotropie sont alors contravariantes. Comme  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$  est constant, nous pouvons écrire avec la notation de Voigt :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{\underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_o}\}} = \left[ \underline{\underline{\mathbb{C}}} \right]_{\{\underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_o}\}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}} \right]_{\{\underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_o}\}}$$

La colonne des contraintes est alors :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{\underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_o}\}} = \begin{bmatrix} \sigma_n^{11} \\ \sigma_n^{22} \\ 0 \\ \sigma_n^{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \varepsilon_{n11} \\ E_2 \varepsilon_{n22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sous la forme matricielle, le tenseur des contraintes de Cauchy est donc donné en base covariante normée par :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{\underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_o}\}} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{2} \text{Ln} \left( \frac{(1+u)^2 + \tan^2 \theta_0}{1 + \tan^2 \theta_0} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_2}{2} \text{Ln} \left( \frac{(1+u)^2 + \text{co} \tan^2 \theta_0}{1 + \text{co} \tan^2 \theta_0} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

#### 8.4.2.2 Mesure de contrainte du MCEA-F naturel modifié en base convectée

Dans cette théorie, le tenseur de comportement est connu dans la projection suivante :

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}} = \tilde{\mathbb{C}}^{ijkl} \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_j} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_k} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_l}$$

Sa matrice, identique à (8.20), s'écrit donc :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbb{C}}} \right]_{\{\underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_0} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_0} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_0} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_0}\}} \quad (8.22)$$

La projection de  $\underline{\underline{\sigma}}$  que nous calculons est dans une base mixte :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tilde{\sigma}^{ij} \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_j}$$

Avec :

$$\tilde{\sigma}_n^{11} = E_1 \varepsilon_{n11} \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}_n^{22} = E_2 \varepsilon_{n22}$$

La matrice de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , identique à (8.21), s'écrit donc :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{\underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_0} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_0}\}} \quad (8.23)$$

#### 8.4.2.3 Mesure de contrainte du MCEA-F dual en base convectée

Dans cette théorie, le tenseur de comportement s'écrit :

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}} = C_j^{ikl} \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_j} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_k} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_l}$$

Sa matrice, identique à (8.20), s'écrit donc :

$$\left[ \underline{\underline{\mathbb{C}}} \right]_{\{\underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_0} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_0} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_0} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_0}\}} \quad (8.24)$$

La projection de  $\underline{\underline{\sigma}}$  que nous calculons est dans une base mixte :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_n^i \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_i} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_j}$$

Avec :

$$\sigma_{n1}^1 = E_1 \varepsilon_{n11} \quad \text{et} \quad \sigma_{n2}^2 = E_2 \varepsilon_{n22}$$

La matrice de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , identique à (8.21), s'écrit donc :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{\underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_0} \otimes \underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_0}\}} \quad (8.25)$$

#### 8.4.2.4 Mesure de contrainte du MCEA-F naturel en base globale

Les composantes des contraintes en base globale sont données par :

$$\left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n \right]_{\{G\}} \left[ \underline{\underline{\sigma}} \right]_{\{\underline{\underline{\mathbf{g}}}_{n_0}\}} \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}}}_n^T \right]_{\{G\}}$$

Evaluons ces composantes à l'aide de la matrice (8.21), de (8.7) et de (8.8). Nous obtenons la matrice des contraintes en base globale :

- Pour la composante 11 :

$$\sigma_{11} = \frac{(1+u)^2}{(1+u)^2 + \tan^2 \theta_0} \sigma_n^{11} + \frac{1}{(1+u)^2 \cot^2 \theta_0 + 1} \sigma_n^{22} \quad (8.26)$$

- Pour la composante 22 :

$$\sigma_{22} = \frac{(1+u)^2}{(1+u)^2 + \cot^2 \theta_0} \sigma_n^{11} + \frac{1}{(1+u)^2 \tan^2 \theta_0 + 1} \sigma_n^{22} \quad (8.27)$$

- Pour les composantes 12 et 21 :

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_n^{22}}{\sqrt{\left((1+u)^2 \cot^2 \theta_0 + 1\right)\left((1+u)^2 \tan^2 \theta_0 + 1\right)}} - \frac{(1+u)^2 \sigma_n^{11}}{\sqrt{\left((1+u)^2 + \tan^2 \theta_0\right)\left((1+u)^2 + \cot^2 \theta_0\right)}} \quad (8.28)$$

Analysons deux cas particuliers :

- Orientation initiale à 45°

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{G\}} = \frac{1}{2} \frac{\text{Ln} \left( \frac{(1+u)^2 + 1}{2} \right)}{(1+u)^2 + 1} \begin{bmatrix} (1+u)^2 (E_1 + E_2) & (1+u)(E_1 - E_2) & 0 \\ (1+u)(E_1 - E_2) & E_1 + E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Orientation initiale quelconque et comportement à une direction forte d'anisotropie dans la direction 1

Dans ce cas,  $E_2=0$ . Nous avons :

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{G\}} = \frac{E_1}{2} \text{Ln} \left( \frac{(1+u)^2 + \tan^2 \theta_0}{1 + \tan^2 \theta_0} \right) \begin{bmatrix} \frac{(1+u)^2}{(1+u)^2 + \tan^2 \theta_0} & & & \\ & \frac{(1+u)^2}{\sqrt{\left((1+u)^2 + \tan^2 \theta_0\right)\left((1+u)^2 + \cot^2 \theta_0\right)}} & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & & & \\ & \frac{(1+u)^2}{\sqrt{\left((1+u)^2 + \tan^2 \theta_0\right)\left((1+u)^2 + \cot^2 \theta_0\right)}} & & 0 \\ & & \frac{(1+u)^2}{(1+u)^2 + \cot^2 \theta_0} & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

Nous retrouverions cette expression du tenseur de contraintes avec le MCEO-F.

#### 8.4.2.5 Mesure de contrainte du MCEA-F naturel modifié en base globale

Les composantes des contraintes en base globale sont données par :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}} \end{bmatrix}_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{F}}_n \end{bmatrix}_{\{G \otimes e^0\}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}} \end{bmatrix}_{\{g_n \otimes g^n\}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{F}}_n^T \end{bmatrix}_{\{e^0 \otimes G\}}$$

Evaluons ces composantes à l'aide de la matrice (8.23), de (8.7) et de (8.16). Nous obtenons la matrice des contraintes en base globale :

- Pour la composante 11 :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = (1+u) \cos^2 \theta_0 & \frac{\sqrt{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0}}{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}} \tilde{\sigma}_n^{11} \\ & + (1+u) \sin^2 \theta_0 \frac{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0}} \tilde{\sigma}_n^{22} \end{aligned} \quad (8.29)$$

- Pour la composante 22 :

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = \frac{\sin^2 \theta_0}{1+u} & \frac{\sqrt{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0}}{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}} \tilde{\sigma}_n^{11} \\ & + \frac{\cos^2 \theta_0}{1+u} \frac{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0}} \tilde{\sigma}_n^{22} \end{aligned} \quad (8.30)$$

- Pour les composantes 12 et 21 :

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{\sin 2\theta_0}{2} & \frac{\sqrt{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0}}{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}} \tilde{\sigma}_n^{11} \\ & - \frac{\sin 2\theta_0}{2} \frac{\sqrt{(1+u)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0}}{\sqrt{(1+u)^2 \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0}} \tilde{\sigma}_n^{22} \end{aligned} \quad (8.31)$$

Analysons trois cas particuliers d'orientations initiales :

- Orientation initiale à  $0^\circ$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}} \end{bmatrix}_{\{G\}} = \begin{bmatrix} E_1 \text{Ln}(1+u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

- Orientation initiale à  $90^\circ$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}} \end{bmatrix}_{\{G\}} = \begin{bmatrix} E_2 \text{Ln}(1+u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

L'expression (8.33) est identique à (8.32), au module d'Young près.



Analysons trois cas particuliers d'orientations initiales :

- Orientation initiale à 0°

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} E_1 \text{Ln}(1+u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.39)$$

- Orientation initiale à 90°

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} E_2 \text{Ln}(1+u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.40)$$

L'expression (8.40) est identique à (8.39), au module d'Young près. De plus, (8.39) est identique à (8.32) et (8.40) à (8.33), ce qui montre que des théories différentes peuvent donner le même résultat pour certaines orientations.

- Orientation initiale à 45°

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{G\}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(E_1 + E_2) \text{Ln}\left(\frac{(1+u)^2 + 1}{2}\right) & \frac{1+u}{4}(E_1 - E_2) \text{Ln}\left(\frac{(1+u)^2 + 1}{2}\right) & 0 \\ \frac{1}{4(1+u)}(E_1 - E_2) \text{Ln}\left(\frac{(1+u)^2 + 1}{2}\right) & \frac{1}{4}(E_1 + E_2) \text{Ln}\left(\frac{(1+u)^2 + 1}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.41)$$

Si  $E_1=E_2=E$ , (8.41) se simplifie en :

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{\{G\}} = \frac{1}{2} E \text{Ln}\left(\frac{(1+u)^2 + 1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# SIMULATION DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES RENFORTS FIBREUX EN GRANDES TRANSFORMATIONS : APPLICATION AUX RENFORTS TRICOTES

**RESUME:** Les textiles techniques mis en forme sont de plus en plus employés dans la fabrication des structures composites nécessitant de hautes performances mécaniques (aviation, automobile, aérospatial...). Pour les textiles fabriqués à partir de renforts fibreux secs, le procédé fait généralement intervenir une phase de formage du textile et une phase d'injection réalisant la matrice autour de ce dernier. Modéliser correctement le textile est donc indispensable pour obtenir des résultats probants alimentant la simulation de la deuxième phase. La mise au point de modèles éléments finis dans le cadre général des grandes transformations constitue alors un moyen approprié pour simuler de manière réaliste la première phase. C'est dans cette optique que nous développons des outils spécifiques de simulation sur l'exemple d'un renfort tricoté de type jersey d'aramide. Un modèle géométrique est construit afin de mettre en place un modèle éléments finis 3D de la maille à l'échelle mésoscopique. Ensuite, des simulations effectuées avec un code de calcul industriel explicite nous donnent accès à la caractérisation numérique du comportement sous forme de surfaces de tension. Bien que nous parvenions à corréler la simulation à l'expérience, le domaine de validité est restreint. Il nous faut alors modifier la formulation (de Green-Naghdi), inhérente au code de calcul, afin de modéliser plus fidèlement les mèches fibreuses tricotées. Nous sommes donc amenés à détailler la formulation générale des milieux continus orthotropes hypo-élastiques en grandes transformations à l'aide de l'outil tensoriel. Nous proposons enfin un nouveau modèle hypo-élastique plus physique : le Milieu Continu Equivalent Orthotrope Fibreux. Il permet de simuler des paquets de fibres à une, deux, ou trois directions fortes d'anisotropie restant orthogonales et permet de prendre en compte des lois d'écrasements. Cette théorie est analysée sur le test de glissement simple/extension puis appliquées sur le calcul 3D de la maille tricotée avec succès. Enfin, des perspectives pour des modèles de Milieux Continus Equivalents Anisotropes Fibreux, où les directions fortes d'anisotropie sont non-orthogonales, sont développées.

**Mots-clés:** *textiles techniques, tricots, milieux hétérogènes anisotropes, tenseurs euclidiens et affines, hypo-élasticité, cumul tensoriel, Abaqus.*

## SIMULATION OF THE CONSTITUTIVE BEHAVIOR OF FIBROUS REINFORCEMENTS SUBJECTED TO LARGE DEFORMATIONS: APPLICATION TO KNITTED REINFORCEMENTS

**ABSTRACT:** Shaped technical textiles are employed more and more in manufacture of composite structures that require high mechanical performances (aviation, automotive, aerospace...). For textiles manufactured starting from dry fibrous reinforcements, the process generally involves a forming phase for the textile and an injecting phase that produces the matrix around this last. Correctly modelling the textile is thus essential to obtain good results that will feed the simulation of the second phase. The development, within the general framework of large deformations, of finite element models constitutes a suitable way to realistically simulate the first phase. It is accordingly that we develop specific simulation tools on the example of a jersey knitted aramid reinforcement. A geometric model is built in order to set up a 3D FEM of the knit at mesoscopic scale. Then simulations are carried out with an industrial computer code that gives us access, in the form of tension surface, to the numerical characterization of the behavior. Although we managed to correlate simulation with experiment, its validity is restricted. It is then necessary for us to modify the (Green-Naghdi) formulation inherent in the computer code in order to more accurately model the knitted fibrous yarns. We are thus lead to detail the general formulation of hypo-elastic orthotropic continuous media subjected to large deformations with the aid of the tensorial tool. Finally, we propose a new hypo-elastic physical model: the Fibrous Equivalent Orthotropic Continuum. It makes it possible to simulate fiber bundles with one, two, or three strong anisotropic directions that remain orthogonal and to take into account compactions laws. This theory is analyzed on the test of simple shearing/extension then applied to the 3D FEM of the knit successfully. Lastly, some prospects for Fibrous Equivalent Anisotropic Continua models, where the strong anisotropic directions are non-orthogonal, are developed.

**Keywords:** *technical textiles, knits, anisotropic heterogeneous media, euclidean and affine tensors, hypo-elasticity, cumulated tensorial measures, Abaqus.*

