



**HAL**  
open science

**Approches analytiques et numériques de problèmes de transmission en propagation d'ondes en régime transitoire. Application au couplage fluide-structure et aux méthodes de couches parfaitement adaptées**

Julien Diaz

► **To cite this version:**

Julien Diaz. Approches analytiques et numériques de problèmes de transmission en propagation d'ondes en régime transitoire. Application au couplage fluide-structure et aux méthodes de couches parfaitement adaptées. Modélisation et simulation. ENSTA ParisTech, 2005. Français. NNT : . tel-00008708

**HAL Id: tel-00008708**

**<https://pastel.hal.science/tel-00008708v1>**

Submitted on 7 Mar 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

année : 2005

Numero attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



## THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité

Mathématiques Appliquées

présentée par

Julien DIAZ

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet de la thèse :

Approches analytiques et numériques de problèmes de transmission en propagation d'ondes en régime transitoire.

Application au couplage fluide-structure et aux méthodes de couches parfaitement adaptées.

soutenue le 18/02/2005 devant le Jury composé de

Francis Collino	Examineur
Jan Hesthaven	Rapporteur
Patrick Joly	Directeur de thèse
Frédéric Nataf	Rapporteur
Olivier Pironneau	Président du Jury
Olivier Poncelet	Examineur
Maryline Talmant	Examinatrice



# Sommaire

<b>Remerciements</b>	<b>7</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>I Méthodes numériques pour le couplage fluide-structure</b>	<b>15</b>
<b>1 Motivation de l'étude</b>	<b>17</b>
Introduction . . . . .	19
1.1 Pourquoi développer un outil spécifique pour le couplage fluide-solide . . . . .	20
1.2 Maillages non conformes . . . . .	20
1.3 Stratégie de couplage entre le fluide et le solide . . . . .	21
<b>2 Obtention de formulations variationnelles couplées</b>	<b>23</b>
Notations . . . . .	25
2.1 Les équations de l'élastodynamique . . . . .	25
2.2 Les équations de l'acoustique . . . . .	28
2.3 Le couplage entre le solide et le fluide . . . . .	30
2.4 Obtention d'identités d'énergie . . . . .	32
<b>3 Semi-discrétisation en espace</b>	<b>35</b>
Notations . . . . .	37
3.1 Discrétisation par éléments finis de la formulation duale-duale . . . . .	37
3.2 Discrétisation de la formulation primale-primale . . . . .	43
3.3 Calcul d'une énergie . . . . .	48
Annexes . . . . .	48
3.a Les éléments finis courbes . . . . .	48
<b>4 Questions théoriques concernant les problèmes semi-discrets</b>	<b>51</b>
Introduction . . . . .	53
4.1 Équivalence entre les formulations du premier et du second ordre . . . . .	53
4.2 Analyse du cas primal-primal . . . . .	56
4.3 Les difficultés posées par le problème dual-dual . . . . .	60
<b>5 Discrétisation en temps</b>	<b>65</b>
Introduction . . . . .	67
5.1 Utilisation du même pas de temps dans les deux milieux . . . . .	67

5.2	Utilisation d'un pas de temps local . . . . .	71
	Annexes . . . . .	76
5.a	Calcul pratique de la matrice $M$ . . . . .	76
5.b	Calcul du second membre de (5.2.7) . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Implémentation et résultats numériques</b>	<b>81</b>
6.1	Les différents codes implémentés . . . . .	83
6.2	Comparaison avec des solutions analytiques . . . . .	84
6.3	Des expériences réalistes . . . . .	91
<b>II</b>	<b>Une analyse de la précision des conditions aux limites et couches absorbantes pour l'équation des ondes par la méthode de Cagniard de Hoop</b>	<b>99</b>
<b>7</b>	<b>Les techniques de modélisation des milieux infinis</b>	<b>101</b>
	Introduction . . . . .	103
7.1	Les Conditions aux Limites Absorbantes . . . . .	103
7.2	Les Couches Parfaitement Adaptées (PML) . . . . .	116
7.3	Objectifs des chapitres 8 et 9 . . . . .	124
<b>8</b>	<b>Les Conditions aux Limites Absorbantes</b>	<b>125</b>
8.1	Principaux résultats pour les CLA d'Engquist-Majda . . . . .	127
8.2	Démonstrations des théorèmes 8.1.1 et 8.1.2 . . . . .	131
8.3	Résultats numériques . . . . .	141
	Annexes . . . . .	151
8.a	Extension aux conditions de Higdon . . . . .	151
<b>9</b>	<b>Les Couches absorbantes Parfaitement Adaptées</b>	<b>155</b>
9.1	Principaux résultats . . . . .	157
9.2	Démonstrations des théorèmes 9.1.1 à 9.1.7 . . . . .	169
9.3	Résultats numériques concernant le problème du demi-espace . . . . .	177
9.4	Résultats numériques concernant le domaine entouré de PML . . . . .	184
<b>III</b>	<b>PML stabilisées pour l'acoustique en écoulement</b>	<b>195</b>
<b>10</b>	<b>Analyse des PML classiques pour l'acoustique en écoulement</b>	<b>197</b>
10.1	Les équations de l'acoustique en écoulement . . . . .	199
10.2	Les PML pour l'aéroacoustique . . . . .	206
10.3	Analyse de l'instabilité des PML par la méthode de Cagniard-de Hoop . . . . .	212
	Annexes . . . . .	222
10.a	Démonstration du théorème 10.2.4 . . . . .	222
<b>11</b>	<b>Des PML stables pour l'acoustique en écoulement</b>	<b>225</b>
	Introduction . . . . .	227
11.1	L'équation des ondes advectives . . . . .	227
11.2	Extensions aux équations de l'aéroacoustique . . . . .	234

---

11.3 Résultats numériques . . . . .	238
11.4 Le cas d'un écoulement oblique . . . . .	247
<b>IV La méthode de Cagniard-de Hoop : une présentation mathématique et numérique</b>	<b>253</b>
<b>12 La méthode de Cagniard-de Hoop en dimension 2</b>	<b>255</b>
Introduction . . . . .	257
12.1 Calcul de la fonction de Green dans un milieu homogène infini . . . . .	259
12.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes . . . . .	267
12.3 Interaction fluide-solide . . . . .	299
12.4 Considérations pratiques pour le calcul numérique . . . . .	318
<b>13 La méthode de Cagniard-de Hoop en dimension 3</b>	<b>331</b>
Introduction . . . . .	333
13.1 Calcul de la fonction de Green dans un milieu homogène infini . . . . .	337
13.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes . . . . .	340
13.3 Interaction fluide-solide . . . . .	365
13.4 Considérations pratiques pour le calcul numérique. . . . .	396
<b>Index</b>	<b>411</b>
<b>Index des citations</b>	<b>413</b>
<b>Références</b>	<b>415</b>



# Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent bien évidemment à Patrick Joly. Je lui suis infiniment reconnaissant pour ses conseils, sa patience, sa rigueur scientifique et son humour<sup>(1)</sup>. J'ai beaucoup progressé pendant ces quatre années grâce à lui.

Jan Hesthaven et Frédéric Nataf ont accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je les remercie vivement de leurs remarques et de l'attention qu'ils ont portée à mon manuscrit.

Merci à Olivier Pironneau d'avoir accepté de participer à mon jury et d'en être le président.

Je remercie Maryline Talmant et Emmanuel Bossy pour leurs conseils et l'intérêt qu'ils ont pu porter à mon travail. Leurs questions et leurs remarques m'ont certainement permis de clarifier ma présentation du couplage fluide-structure.

C'est grâce à Olivier Poncelet que j'ai connu la méthode de Cagniard-de Hoop, je lui suis reconnaissant pour son aide. Je tiens également à remercier tous ceux qui m'ont permis de progresser dans la compréhension de cette méthode : Quentin Grimal, Bruno Lombard et Madjid Berraki.

Au cours de cette thèse, j'ai beaucoup apprécié les nombreuses discussions (qui s'éloignaient bien souvent du strict cadre mathématique) que j'ai pu avoir avec Francis Collino. Je suis heureux<sup>(2)</sup> qu'il ait accepté de participer à mon jury.

Je remercie Hervé de Féraudy pour m'avoir fait confiance et m'avoir soutenu pour l'attribution de ma bourse de thèse.

Mon travail a été grandement facilité par l'excellente ambiance régnant dans les projets ONDES et ESTIME. Je remercie tous les membres de ces projets, ainsi que ceux du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Ensta, pour l'aide qu'ils m'ont apportée en mathématique et en informatique, et également pour leur disponibilité et leur amitié.

Pour finir je voudrais remercier ici mes amis et mes parents pour le soutien qu'ils m'ont apporté durant toutes ces années.

---

1. Accessoirement, je suis admiratif devant son soutien inconditionnel au PSG. Je suis certain qu'il sera un jour récompensé de sa persévérance.

2. Je n'ose pas dire "honoré" de peur de froisser sa modestie...

## Remerciements

---

# Introduction

La genèse de cette thèse, dont le résultat final est sans doute plus hétéroclite (mais j’espère plus riche) que celui prévu au départ, est très liée à un contexte “historique” qu’il me semble intéressant de rappeler en préambule. Cette présentation va me permettre d’introduire les différentes parties de mon travail et de mettre en avant ses principales caractéristiques, contributions ou nouveautés (en gras dans le texte). Cette présentation sera suivie d’une description plus détaillée du plan de la thèse et du contenu des quatre parties qui la composent. Je terminerai par la liste des publications auxquelles mon travail a donné lieu.

1. Le sujet initial a pour origine une interaction avec des chercheurs du laboratoire d’image-rie paramétrique (LIP) de Paris 6, plus précisément de Maryline Talmant et d’Emmanuel Bossy. Leurs travaux concernent le diagnostic précoce de l’ostéoporose par une technique ultrasonore dite “technique de transmission axiale”. L’ostéoporose est une maladie du squelette caractérisée par une augmentation de la porosité des os et donc par une baisse de leur densité. Elle entraîne une augmentation importante du risque de fracture. Le principal examen permettant de diagnostiquer cette maladie est l’évaluation de la densité minérale osseuse par densitométrie rayons X. Cette technique étant relativement coûteuse et irradiante, l’utilisation de techniques d’évaluation ultrasonore s’est développée depuis une vingtaine d’années. Ce sont toutes des techniques dites de transmission (l’émetteur et le récepteur sont positionnés à deux endroits différents de l’os), par opposition à l’échographie qui est une technique de réflexion. Il y a deux classes de techniques de transmission :
  - (a) La technique de transmission transverse : l’émetteur et le récepteur sont positionnés de part et d’autre de l’os. Cette technique s’applique plus particulièrement à l’étude de l’os trabéculaire qui constitue la partie centrale des os plats ou courts et l’extrémité des os longs (voir figure 1). Cet os est extrêmement poreux.
  - (b) La technique de transmission axiale : l’émetteur et le récepteur sont positionnés sur une ligne parallèle à l’axe de l’os. Cette technique s’applique plus particulièrement à l’étude de l’os cortical qui constitue la partie centrale des os longs et l’enveloppe des os plats ou courts. Cet os est beaucoup plus dense que l’os trabéculaire.

Leur principe repose sur l’évaluation de la vitesse de propagation des ondes de l’émetteur au récepteur ou sur la mesure de l’atténuation des ondes durant ce trajet (pour plus de détails sur ces techniques et sur l’ostéoporose nous renvoyons à la thèse d’Emmanuel Bossy [17]).

Pour pouvoir diagnostiquer l’ostéoporose il faut donc être capable de relier la densité

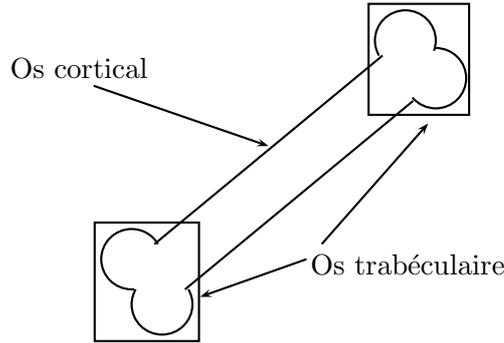


FIG. 1: Os cortical et os trabéculaire<sup>(3)</sup>

osseuse (ainsi éventuellement que d'autres paramètres comme l'anisotropie et l'atténuation) à la vitesse de propagation des ondes. Pour cela il est utile d'avoir à sa disposition un code numérique simulant la propagation de ces ondes. Outre l'os, qui est assimilé à un solide homogène isotrope, ce code doit aussi simuler la propagation des ondes dans les tissus mous (peau, muscle, moelle ...) assimilés à de l'eau. Les codes commerciaux à la disposition du LIP au début de cette thèse étaient limités à la modélisation des solides isotropes bidimensionnels et conduisaient à d'importants artefacts numériques dans le fluide.

C'est pourquoi nous avons cherché à mettre au point une méthode de résolution numérique adaptée à la spécificité du couplage fluide-structure, c'est ce travail qui a fait l'objet de la première partie de la thèse. La particularité de mon travail a été de mettre au point une méthode de **raccord non conforme** en espace autorisant un **pas de temps local**, respectivement dans les domaines fluides et solides. La stratégie de raccord se fait **sans multiplicateur de Lagrange** (contrairement aux méthodes d'éléments joints) et le schéma résultant est **explicite** sauf peut-être à l'interface. La **stabilité** de ces méthodes est **garantie** par un résultat de **conservation d'énergie discrète**.

2. Parallèlement, j'avais, au cours de mon stage de DEA, commencé à travailler sur un problème assez différent, à savoir l'étude de couches absorbantes parfaitement adaptées (Perfectly Matched Layers, PML) en acoustique (qui ont d'ailleurs été utilisées dans le cadre du couplage fluide-structure pour simuler des milieux non bornés), et plus précisément pour l'aéroacoustique. Ce travail n'ayant pas été achevé au cours du stage, j'ai continué à m'y intéresser pendant ma thèse, ce qui a donné lieu à ce qui constitue la troisième partie de ce document. La principale contribution de mon travail a été la construction d'une **nouvelle méthode PML stable pour l'acoustique en écoulement** et une **nouvelle analyse théorique** de la stabilité temporelle de ces PML. Signalons ici que ces travaux, bien que développés indépendamment, sont proches de ceux récents de Hu.
3. C'est un autre aspect de mon travail qui fait le lien entre ces deux sujets, apparemment très distincts. Pour le problème d'interaction fluide-structure, le problème de la validation du code de calcul s'est assez vite posé : en général on cherche tout d'abord

---

3. Pour un bel os, c'est un bel os.

à valider un code à l'aide de solutions analytiques exactes. Dans le cas de l'interaction fluide-structure, l'obtention d'une solution analytique explicite est déjà une question non triviale. Dans le cadre de notre participation au GDR ultrasons, nous avons notamment pu interagir avec des chercheurs du Laboratoire de Mécanique Physique (LMP) de l'Université de Bordeaux 1 (en particulier d'Olivier Poncelet) qui nous ont permis de nous familiariser avec la méthode de Cagniard-de Hoop qui est une méthode particulièrement efficace d'obtention de solutions analytiques non triviales pour la propagation d'ondes en milieu stratifié en régime temporel. De ce fait j'ai été amené à m'investir de façon importante dans la compréhension, l'application à divers cas de figure et la mise en oeuvre numérique de cette méthode. C'est ce travail qui a débouché sur la quatrième partie de la thèse qui, bien que volumineuse, revêt un caractère un peu marginal par rapport au reste de la thèse. Au delà du seul intérêt, déjà réel en soi, de **l'obtention de solutions analytiques**, il m'a semblé intéressant de faire une **présentation de cette méthode à l'intention de la communauté d'analyse numérique**, au sein de laquelle cette méthode, pourtant élégante et utile, reste méconnue. Nous n'avons pas eu la prétention de faire oeuvre d'originalité scientifique ici, si ce n'est au niveau de la justification de certains points techniques, généralement omise dans les articles que nous avons eu l'occasion de consulter. C'est la recherche d'une présentation plus mathématique que celle qu'on trouve dans les exposés plus classiques des ouvrages de physique et le souci de faire une présentation détaillée qui ont débouché sur une partie aussi conséquente.

Dans le même temps, nous avons réalisé que cette méthode était un outil idéal pour analyser, en domaine temporel, les méthodes PML mais aussi sur un sujet très voisin, en l'occurrence les conditions aux limites absorbantes (CLA) locales. De fait, l'utilisation de la méthode nous a permis d'obtenir **des résultats théoriques**, pour le coup résolument nouveaux, **sur l'analyse des PML et des CLA** (deuxième partie).

## Plan de la thèse.

Comme nous l'avons déjà dit, cette thèse se divise en quatre parties :

### **Première partie : Méthodes numériques pour le couplage fluide-structure.**

Dans cette partie nous présentons des méthodes numériques non conformes (c'est-à-dire qui permettent l'utilisation de maillages non conformes et de pas de temps locaux) pour résoudre des problèmes d'interaction fluide-structure dans le domaine temporel en deux ou trois dimensions. Ces méthodes, robustes et très précises, sont basées sur des formulations variationnelles mixtes. Elles sont de plus explicites et conservatives et peuvent être d'ordre arbitrairement élevé en espace.

Dans le premier chapitre nous présentons l'intérêt des méthodes numériques non conformes pour le couplage fluide-structure.

Dans le deuxième chapitre nous présentons les formulations variationnelles que nous utiliserons par la suite : les formulations dites duale-duale et primale-primale. Ces formulations seront obtenues à partir des équations de l'élastodynamique formulées en vitesses-contraintes dans le solide et des équations de l'acoustique formulées en vitesses-pression dans le fluide. Toutes

## Introduction

---

deux ont la particularité de ne pas faire intervenir de multiplicateur de Lagrange.

Dans le troisième chapitre nous décrivons les éléments finis utilisés pour la discrétisation en espace de ces formulations variationnelles.

Dans le quatrième chapitre nous considérons certaines questions relatives à l'analyse des schémas semi-discrets.

Dans le cinquième chapitre nous nous intéressons à la discrétisation en temps des schéma semi-discrets. Nous présenterons d'abord deux schémas conformes (le pas de temps est le même dans le fluide et dans le solide) avant d'étudier un cas particulier de schéma non conforme (le pas de temps sera deux fois plus grand dans le fluide que dans le solide).

Dans le sixième chapitre nous montrerons la précision de nos méthodes en confrontant les solutions numériques obtenues dans des configurations simples à des solutions quasi analytiques calculées par la méthode de Cagniard-de Hoop. Nous montrerons ensuite que ces méthodes sont également capables de traiter des problèmes plus complexes.

### **Deuxième partie : Une analyse de la précision des conditions aux limites et couches absorbantes pour l'équation des ondes par la méthode de Cagniard de Hoop.**

Dans cette partie nous appliquons la méthode de Cagniard-de Hoop, qui nous a permis d'obtenir des solutions analytiques dans la première partie, à l'étude des frontières artificielles.

Dans le septième chapitre nous rappelons les deux principales techniques de frontière artificielle : les conditions aux limites absorbantes et les couches absorbantes parfaitement adaptées (Perfectly Matched Layers, PML). Nous rappelons également les principaux résultats concernant l'étude de la stabilité et de la précision de ces méthodes.

Dans le huitième chapitre nous nous intéressons au problème du demi-espace borné par une condition aux limites absorbante avec une source ponctuelle. Nous montrerons comment il est possible d'obtenir une expression analytique de la solution fondamentale de ce problème grâce à la méthode de Cagniard-de Hoop. Nous en déduisons des estimations d'erreur dans le cas d'une source quelconque en temps.

Dans le neuvième chapitre nous considérons successivement le problème du demi-plan, du quart de plan et du domaine rectangulaire bornés par des couches parfaitement adaptées. Dans chaque cas nous obtiendrons à nouveau une expression explicite de la solution fondamentale du problème considéré grâce à la méthode de Cagniard-de Hoop.

### **Troisième partie : PML stabilisées pour l'acoustique en écoulement.**

Dans le dixième chapitre nous rappelons comment adapter le modèle PML aux équations de l'aéroacoustique. Il est maintenant bien connu que ces PML sont instables et que les causes de ces instabilités peuvent être analysées par une étude à haute fréquence que nous redétaillerons ici. Nous concluons ce chapitre par une nouvelle analyse de ces instabilités par la méthode

de Cagniard-de Hoop.

Dans le onzième chapitre nous présentons une technique de stabilisation des PML en aéro-acoustique. La méthode de Cagniard-de Hoop nous servira ici à montrer la stabilité de notre nouveau modèle.

### **Quatrième partie : La méthode de Cagniard-de Hoop : une présentation mathématique et numérique.**

Dans les deux derniers chapitres nous présentons en détail la méthode de Cagniard-de Hoop en dimension deux (chapitre 11) et en dimension trois (chapitre 12). En partant de la configuration la plus simple possible (un milieu acoustique homogène infini), nous aboutirons progressivement à l'étude du couplage fluide-structure. Ces deux chapitres ne contiennent pas de résultats réellement nouveaux mais regroupent des résultats contenus dans la littérature et éclaircissent certains détails qui ne semblent pas avoir été traités jusqu'à maintenant.

**Liste des articles.** Cette thèse a donné lieu à trois articles :

**J. Diaz et P. Joly.** An analysis of higher boundary conditions for the wave equation. À paraître dans SIAP.

**J. Diaz et P. Joly.** Robust high order non conforming finite element formulation for time domain fluid-structure interaction. À paraître dans JCA.

**J. Diaz et P. Joly.** A time domain analysis of PML models in acoustics. Soumis à CMAME.

et à deux proceedings de conférence :

**J. Diaz et P. Joly.** Éléments finis d'ordre élevé pour le couplage fluide-structure. In *Étude de la propagation ultrasonore en milieux non homogènes en vue du contrôle non destructif* (décembre 2003), GDR-US 2501, pp. 71–80. Aussois.

**J. Diaz et P. Joly.** Stabilized perfectly matched layer for advective acoustics. In *The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (Waves 2003)* (juillet 2003), pp. 115–119. Jyväskylä.



Première partie

**Méthodes numériques pour le  
couplage fluide-structure**



# Chapitre 1

## Motivation de l'étude

Ce premier chapitre a pour objectif d'exposer l'utilité de méthodes numériques non-conformes pour le couplage fluide-structure et les différentes propriétés que nous souhaitons que ces méthodes possèdent : nous voulons pouvoir utiliser des maillages non conformes et des pas de temps locaux (section 1.2), et que le couplage entre le fluide et le solide puisse être assuré sans faire intervenir de multiplicateur de Lagrange (section 1.3). Nous avons choisi de considérer le problème d'interaction fluide-structure comme un problème de transmission entre un système formulé en vitesse-pression dans le fluide et un système formulé en vitesse-contrainte dans le solide (section 1.1).

**Contenu**

---

<b>Introduction . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>1.1 Pourquoi développer un outil spécifique pour le couplage fluide- solide . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>1.2 Maillages non conformes . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>1.3 Stratégie de couplage entre le fluide et le solide . . . . .</b>	<b>21</b>

---

## Introduction

Les problèmes d'interaction fluide-structure apparaissent dans de très nombreuses applications physiques telles que (nous citons ici quelques sujets d'intérêt du projet ONDES) ;

- la propagation des ondes élastiques dans les sols sous-marins (sismique, recherche pétrolière) [67, 41] ;
- la propagation des ondes ultrasonores dans des tissus biologiques, tels que l'os [17, 18] ;
- les vibrations de structures solides (avion, voiture, instrument de musique) immergé dans un fluide [55, 29].

Beaucoup de travaux ont déjà été consacrés au développement de méthodes numériques efficaces pour résoudre ce type de problème dans le domaine fréquentiel mais très peu se sont intéressés au problème temporel qui introduit de nouvelles difficultés, notamment à cause de la question de la stabilité des schémas en temps. De plus, il est de plus en plus courant, en calcul scientifique, de considérer des problèmes de grande taille, comme les problèmes de décomposition de domaines, pour lesquels l'utilisation de maillages indépendants (et non conformes) sur chaque domaine est souhaitable. Pour les problèmes temporels, l'utilisation de pas de temps locaux peut également être nécessaire.

Nous présentons dans cette partie différentes méthodes numériques pour la résolution des problèmes d'interaction fluide-structure dépendant du temps. Ces méthodes sont dans l'esprit de celles présentées dans [65] et sont dans la continuation de différents travaux du projet ONDES à l'INRIA [82, 42, 29, 77, 22, 23]. Toutes ont en commun les propriétés suivantes :

- leur construction repose sur des formulations variationnelles mixtes ;
- la résolution est explicite à l'exception parfois du calcul sur l'interface fluide-solide ;
- ce sont des méthodes conservatives : leur stabilité est garantie par la conservation d'une énergie ;
- elles peuvent être d'ordre arbitrairement élevé en espace.

Le plan de cette partie est le suivant. Dans ce chapitre nous présentons l'intérêt pratique de l'utilisation de maillages non-conformes et de pas de temps locaux. Au chapitre 2 nous présentons les deux principales formulations variationnelles sur lesquelles nos méthodes s'appuient : les formulations dites primale-primale et duale-duale. Nous proposerons, au chapitre 3, une méthode d'éléments finis mixtes pour la discrétisation spatiale de chacune de ces formulations puis nous nous intéresserons, au chapitre 5, à la question cruciale de la discrétisation en temps en insistant particulièrement sur l'analyse de stabilité. Nous concluons cette partie en présentant des résultats numériques destinés à valider nos méthodes (section 6.2) et à donner des exemples d'application (section 6.3).

Ce travail a donné lieu à l'article [31]

## 1.1 Pourquoi développer un outil spécifique pour le couplage fluide-solide

Il est bien connu qu'un milieu acoustique peut-être considéré comme la limite d'un milieu élastique isotrope dont le coefficient de Lamé  $\mu$  tend vers zéro. Il est donc naturel, si on possède un code numérique pour résoudre les équations de l'élastodynamique à coefficients variables, d'essayer de traiter le milieu fluide comme une région particulière d'un solide hétérogène où  $\mu = 0$  (ou très petit). D'un point de vue pratique, cette technique nécessite le calcul d'un tenseur de contraintes (quatre inconnues en dimension 2 et neuf en dimension 3) dans le fluide alors qu'une seule inconnue de pression est *a priori* nécessaire. D'un point de vue plus mathématique, si le code numérique est basé sur une discrétisation du déplacement par des éléments finis  $H^1$ , alors prendre  $\mu = 0$  fait perdre le résultat de coercivité  $H^1$  (seule la norme  $L^2$  du déplacement est contrôlée). Pour pallier cette difficulté, on peut alors choisir  $\mu$  très proche de 0. Dans ce cas des artefacts numériques, causés par la présence d'ondes S très lentes peuvent apparaître. Nous donnons un exemple de ces phénomènes sur la figure 1.1. Au cours de sa thèse au LIP, E. Bossy [17] a rencontré cette difficulté en utilisant un code commercial, il a donc mis au point un code de différences finies, basé sur le schéma de Virieux [84, 83]. Bien que dans ce code le fluide soit toujours considéré comme un solide avec  $\mu$  proche de 0, les ondes S parasites ne perturbent pas la solution.

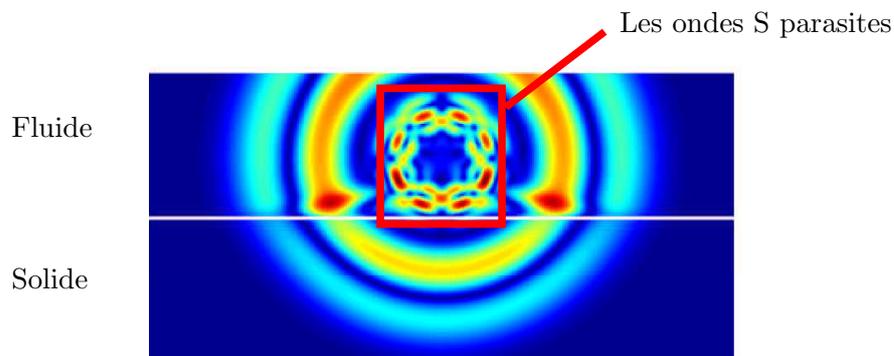


FIG. 1.1: Apparition d'ondes parasites

Nous nous sommes orientés dans ce travail vers une stratégie différente, mieux adaptée au traitement de coefficients variables, aux géométries complexes et à la spécificité du problème d'interaction fluide-solide. Cette approche repose sur la résolution par des méthodes d'éléments finis d'un problème de transmission entre un système formulé en vitesse-pression dans le fluide et un système formulé en vitesse-contrainte dans le solide.

## 1.2 Maillages non conformes

Dans le cas de méthodes numériques classiques le choix des paramètres de discrétisation (pas d'espace  $h$  et pas de temps  $\Delta t$ ) est guidé par les données de l'expérience à simuler, les deux paramètres principaux étant la longueur d'onde  $\lambda$  et la vitesse de propagation des ondes  $c$ . Nous rappelons ci-dessous comment la détermination de ces paramètres se fait dans la pratique

### 1.3 Stratégie de couplage entre le fluide et le solide

---

et pourquoi il est intéressant de pouvoir choisir des pas d'espace et de temps différents dans le milieu fluide et dans le milieu solide :

1. Le critère habituel pour le choix du pas d'espace  $h$  est de choisir  $h < \lambda/N$ , où  $N$  est un nombre de points par longueur d'onde donné.  $N$  dépend du schéma numérique, de la précision souhaitée, de la durée de l'expérience... Dans le cas d'un problème d'interaction fluide-structure, trois longueurs d'onde doivent être considérées :  $\lambda_f$  pour le fluide,  $\lambda_S$  pour les ondes de cisaillement<sup>(4)</sup> et  $\lambda_P$  pour les ondes de compression<sup>(5)</sup>. Nous supposons, pour simplifier le raisonnement, que le nombre  $N$  requis pour obtenir la précision souhaitée est le même dans le milieu fluide et dans le milieu solide et que  $\lambda_f < \lambda_S < \lambda_P$  (situation qui est de loin la plus fréquente dans la pratique). Il est alors facile de remarquer que le choix  $h_f = \lambda_f/N < h_s = \lambda_S/N$  garantit la même précision que  $h_f = h_s = \lambda_f/N$  tout en nécessitant moins de place mémoire et de temps de calcul.
2. Dans le cas de schémas explicites, le pas de temps doit satisfaire, pour des raisons de stabilité, une condition, dite condition CFL (Courant-Friedrichs-Levy) :

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq \alpha,$$

avec  $\alpha$  dépendant de la méthode numérique. D'autre part, choisir  $c\Delta t/h$  trop petit augmente inutilement le temps de calcul et, pour la plupart des schémas numériques, induit des phénomènes de dispersion numérique qui peuvent fortement diminuer la précision de la méthode. Dans le cas d'un couplage fluide-structure où le pas de temps est le même dans les deux milieux, il devra vérifier :

$$\Delta t \leq \min\left(\alpha_f \frac{h_f}{c_f}, \alpha_s \frac{h_s}{c_S}\right).$$

Dans le cas où  $c_f \ll c_P$  (en général le rapport est de un pour trois), nous aurons :

$$\Delta t = \alpha_s \frac{h_s}{c_S} \ll \alpha_f \frac{h_f}{c_f}.$$

L'utilisation de pas de temps différents sur chaque grille (en utilisant la méthode des pas de temps locaux — voir [77] (raccord de type Dirichlet/Neumann) et [43] (raccord par conditions aux limites absorbantes)) nous donnera plus de souplesse pour se rapprocher le plus possible des conditions CFL dans les deux milieux.

### 1.3 Stratégie de couplage entre le fluide et le solide

Quand on utilise des maillages non conformes ou des pas de temps locaux, la principale difficulté réside dans le traitement des conditions de transmission. Dans ce que nous allons présenter, nous avons privilégié la robustesse en imposant la stabilité de la méthode de couplage. Pour cela les principes de base sont :

- construire l'espace de discrétisation à partir d'une formulation variationnelle du système couplé ;

---

4. Aussi appelées ondes S, ondes shear, ondes transverses, ondes T...

5. Aussi appelées ondes P, ondes longitudinales, ondes L...

- assurer la stabilité par la conservation d'une énergie discrète appropriée.

La méthode bien connue des éléments joints (ou mortiers) [15, 12] (dans un contexte volumes finis, une méthode alternative, dite new cement, est proposée dans [3], et prolongée dans [78]. Elle se distingue de la méthode mortar par le fait que la transmission entre domaines se fait par l'intermédiaire de quantités de type Robin et non de Dirichlet/Neumann) permet de traiter la non-conformité de ce problème . Néanmoins cette méthode nécessite l'introduction d'une inconnue supplémentaire sur l'interface, dite multiplicateur de Lagrange et la discrétisation de ce multiplicateur entraîne certaines contraintes, liées en particulier à la vérification d'une condition inf-sup. Nous privilégierons donc les méthodes ne nécessitant pas l'introduction de multiplicateurs de Lagrange.

## Chapitre 2

# Obtention de formulations variationnelles couplées

Nous travaillons avec les équations de l'élastodynamique en vitesses-contraintes formulées comme un système du premier ordre que nous rappelons à la première section. Nous présenterons alors les deux formulations variationnelles qui lui sont naturellement associées : la formulation primale, étudiée par S. Fauqueux [42] et la formulation duale étudiée par C. Tsogka [82]. Nous rappelons ensuite brièvement la formulation des équations de l'acoustique en vitesse-pression ainsi que les deux formulations variationnelles qui lui sont associées. Nous pourrions alors nous intéresser au couplage entre le milieu fluide et le milieu solide : nous présenterons deux formulations variationnelles sans multiplicateur, les formulations primale-primale et duale-duale.

---

 Contenu
 

---

<b>Notations</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>2.1 Les équations de l'élastodynamique</b> . . . . .	<b>25</b>
2.1.1 Les équations sous forme forte . . . . .	25
2.1.2 Les équations sous forme faible . . . . .	26
2.1.2.1 La formulation variationnelle mixte primale . . . . .	26
2.1.2.2 La formulation variationnelle mixte duale . . . . .	27
<b>2.2 Les équations de l'acoustique</b> . . . . .	<b>28</b>
2.2.1 Les équations sous forme forte . . . . .	28
2.2.2 Les équations sous forme faible . . . . .	29
2.2.2.1 La formulation variationnelle mixte primale . . . . .	29
2.2.2.2 La formulation variationnelle mixte duale . . . . .	29
<b>2.3 Le couplage entre le solide et le fluide</b> . . . . .	<b>30</b>
2.3.1 La formulation primale-primale . . . . .	30
2.3.2 La formulation duale-duale . . . . .	31
<b>2.4 Obtention d'identités d'énergie</b> . . . . .	<b>32</b>
2.4.1 Pour la formulation primale-primale . . . . .	32
2.4.2 Pour la formulation duale-duale . . . . .	33

---

## Notations

Nous notons  $d$  la dimension du problème ( $d = 2$  ou  $d = 3$ ). On appelle  $\Omega_f$  le milieu fluide et  $\Omega_s$  le milieu solide, on suppose que  $\Omega_f$  et  $\Omega_s$  sont deux ouverts de  $\mathbb{R}^d$  tels que (voir figure 2.1) :

$$\partial\Omega_f = \partial\Omega_s = \Gamma, \text{ interface entre les deux milieux, et que } \Omega_f \cup \Omega_s \cup \Gamma = \mathbb{R}^d.$$

Nous appelons  $\mathbf{n}$  la normale à  $\Gamma$  dirigée du milieu solide vers le milieu fluide.

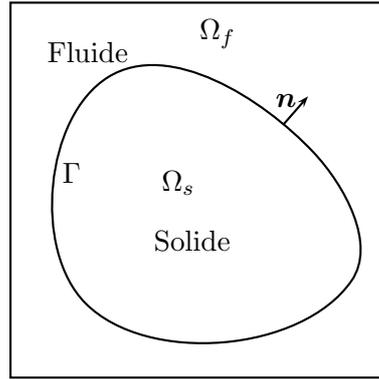


FIG. 2.1: Illustration du problème en dimension 2

## 2.1 Les formulations variationnelles associées aux équations de l'élastodynamique

### 2.1.1 Les équations sous forme forte

La formulation en vitesse-contrainte des équations de l'élastodynamique linéaire (petits déplacements) s'écrit :

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \underline{\underline{C}}(\mathbf{x}) \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{v}_s(\mathbf{x}, t)) = 0 & \text{dans } \Omega_s \times [0, T], & (2.1.1a) \\ \rho_s(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{dans } \Omega_s \times [0, T]. & (2.1.1b) \end{cases}$$

où

- $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1..d}$  représente les coordonnées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ , en m ;
- $\mathbf{v}_s = (v_{si})_{i=1..d} : \Omega_s \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$  représente le champ des vitesses dans le solide, en  $\text{m s}^{-1}$  ;
- $\underline{\underline{\sigma}} = (\sigma_{ij})_{i,j=1..d} : \Omega_s \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^{2d}$  est le tenseur des contraintes, en Pa ( $\text{N m}^{-2}$  ou  $\text{m}^{-1} \text{kg s}^{-2}$ ) ;

- $\underline{\underline{C}} = (c_{ijkl})_{i,j,k,l=1..d}$  est le tenseur des coefficients d'élasticité, en Pa, vérifiant les propriétés de symétrie et de positivité :

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij} \text{ et } c_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq \alpha \sum_{ij} \xi_{ij}^2, \quad \forall \xi \text{ tenseur symétrique ;} \quad (2.1.2)$$

- $\rho_s > 0$  est la masse volumique du solide, en  $\text{kg m}^{-3}$  ;
- $\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{v}_s) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}}\mathbf{v}_s + \underline{\underline{\nabla}}\mathbf{v}_s^t)$  et  $\mathbf{div}$  représente la divergence classique appliquée aux tenseurs.

Les propriétés de  $\underline{\underline{C}}$  impliquent la symétrie de  $\underline{\underline{\sigma}}$ .

**Remarque 2.1.1** *Afin de ne pas alourdir la présentation, les conditions initiales seront supposées nulles sauf mention contraire. Pour la même raison nous ne préciserons plus la dépendance en espace des constantes physiques.*

Nous considérons maintenant deux formulations variationnelles associées à (S), la formulation primale et la formulation duale.

## 2.1.2 Les équations sous forme faible

### 2.1.2.1 La formulation variationnelle mixte primale

La formulation variationnelle primale [65] consiste à chercher  $\mathbf{v}_s$  dans  $\mathbf{H}^1(\Omega_s) = (H^1(\Omega_s))^d$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  dans

$$\mathbb{L}^2(\Omega_s) = \{ \underline{\underline{\sigma}} \mid \sigma_{ij} \in L^2 \}.$$

On multiplie donc respectivement les équations (2.1.1a) et (2.1.1b) par

$$\underline{\underline{\xi}} \in \mathbb{L}^2(\Omega_s) \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_s \in \mathbf{H}^1(\Omega_s),$$

et on intègre les deux nouvelles équations sur  $\Omega_s$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}} - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{v}_s) : \underline{\underline{\xi}} = 0, \end{array} \right. \quad (2.1.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_s \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{w}_s - \int_{\Omega_s} \mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{w}_s = 0. \end{array} \right. \quad (2.1.3b)$$

Nous intégrons alors par parties le terme en divergence de la seconde équation :

$$\int_{\Omega_s} \mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{w}_s = \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w}_s - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{w}_s) : \underline{\underline{\sigma}}.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que, d'après les propriétés de symétrie du tenseur  $\underline{\underline{C}}$  décrites par (2.1.2) :

$$\underline{\underline{C}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{v}_s) = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{v}_s)$$

pour obtenir la formulation variationnelle mixte primale :

Trouver  $(\mathbf{v}_s, \underline{\underline{\sigma}}) : t \mapsto \mathbf{H}^1(\Omega_s) \times \mathbb{L}^2(\Omega_s)$  tel que, pour tout  $(\mathbf{w}_s, \underline{\underline{\xi}}) \in \mathbf{H}^1(\Omega_s) \times \mathbb{L}^2(\Omega_s) :$

$$(SP) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}} - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \nabla(\mathbf{v}_s) : \underline{\underline{\xi}} = 0, & (2.1.4a) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{w}_s + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{w}_s) : \underline{\underline{\sigma}} - \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w}_s = 0. & (2.1.4b) \end{cases}$$

**Remarque 2.1.2 :**

- la symétrie du tenseur des contraintes n'est pas imposée de manière forte dans l'espace fonctionnel ;
- pour l'instant nous ne nous préoccupons pas du terme de bord de (2.1.4b) qui n'a d'ailleurs pas de sens dans les espaces de fonctions décrits précédemment. Ce point sera clarifié au moment de prendre en compte les conditions de transmission (section 2.3).

### 2.1.2.2 La formulation variationnelle mixte duale

La formulation variationnelle duale [65] consiste à chercher  $\mathbf{v}_s$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega_s) = (L^2(\Omega_s))^d$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  dans

$$\mathbb{H}_{div}^{sym}(\Omega_s) = \left\{ \underline{\underline{\sigma}} \text{ d'ordre } d \mid \sigma_{ij} \in L^2(\Omega_s), \operatorname{div} \sigma_i \in (L^2(\Omega_s))^d \text{ et } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \right\}$$

Rappelons que, d'après les propriétés du tenseur  $\underline{\underline{C}}$  décrites par (2.1.2), l'application  $\underline{\underline{\xi}} \mapsto \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\xi}}$  est un isomorphisme dans l'espace des tenseurs symétriques et nous notons  $\underline{\underline{A}}$  l'application inverse correspondante, vérifiant également les propriétés de (2.1.2). Les équations (2.1.1) deviennent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} - \underline{\underline{\xi}}(\mathbf{v}_s) = 0 & \text{dans } \Omega_s \times [0, T], & (2.1.5a) \\ \rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} - \mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0 & \text{dans } \Omega_s \times [0, T]. & (2.1.5b) \end{cases}$$

On multiplie respectivement la première et la seconde équation par

$$\underline{\underline{\xi}} \in \mathbb{H}_{div}^{sym}(\Omega_s) \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_s \in \mathbf{L}^2(\Omega_s)$$

pour obtenir :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}} - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\xi}}(\mathbf{v}_s) : \underline{\underline{\xi}} = 0 & \text{dans } \Omega_s \times [0, T], & (2.1.6a) \\ \rho_s \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{w}_s - \int_{\Omega_s} \mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{w}_s = 0 & \text{dans } \Omega_s \times [0, T]. & (2.1.6b) \end{cases}$$

On intègre alors par parties le terme en  $\varepsilon(\mathbf{v}_s)$ . Rappelons que  $\mathbf{div}$  est l'adjoint de  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\cdot)$  lorsqu'on opère sur des tenseurs symétriques :

$$\int_{\Omega_s} \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{v}_s) : \underline{\underline{\xi}} = \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\xi}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_s - \int_{\Omega_s} \mathbf{div} \underline{\underline{\xi}} \cdot \mathbf{v}_s$$

La formulation variationnelle mixte duale s'écrit donc :

Trouver  $(\mathbf{v}_s, \underline{\underline{\sigma}}) : t \mapsto \mathbf{L}^2(\Omega_s) \times \mathbb{H}_{div}^{sym}(\Omega_s)$  tel que, pour tout  $(\mathbf{w}_s, \underline{\underline{\xi}}) \in \mathbf{L}^2(\Omega_s) \times \mathbb{H}_{div}^{sym}(\Omega_s) :$

$$(SD) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}} + \int_{\Omega_s} \mathbf{div} \underline{\underline{\xi}} \cdot \mathbf{v}_s - \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\xi}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_s = 0, & (2.1.7a) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{w}_s - \int_{\Omega_s} \mathbf{w}_s \cdot \mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0. & (2.1.7b) \end{cases}$$

**Remarque 2.1.3** :

- la symétrie du tenseur des contraintes est cette fois imposée de manière forte dans l'espace des fonctions ;
- ici encore, le terme de bord de (2.1.7a), qui n'a a priori pas de sens, sera traité à la section 2.3.

## 2.2 Les formulations variationnelles associées aux équations de l'acoustique

### 2.2.1 Les équations sous forme forte

La formulation en vitesse-pression des équations de l'acoustique s'écrit :

$$(F) \quad \begin{cases} \frac{1}{c_f^2(\mathbf{x})\rho_f(\mathbf{x})} \frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{div} \mathbf{v}_f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) & \text{dans } \Omega_f \times [0, T], & (2.2.1a) \\ \rho_f(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla p(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{dans } \Omega_f \times [0, T], & (2.2.1b) \end{cases}$$

où

- $p : \Omega_f \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$  représente le champ de pression, en Pa ;
- $\mathbf{v}_f = (v_{f_i})_{i=1..d} : \Omega_f \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$  représente le champ des vitesses dans fluide, en  $\text{m s}^{-1}$  ;
- $c_f > 0$  est la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans  $\Omega_f$ , en  $\text{m s}^{-1}$  ;
- $\rho_f > 0$  est la masse volumique du fluide, en  $\text{kg m}^{-3}$  ;
- $f : \Omega_f \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction source que nous supposons par la suite dans  $L^2(\Omega_f)$ .

## 2.2.2 Les équations sous forme faible

Nous pouvons bien sûr également obtenir deux formulations variationnelles différentes dans le fluide.

### 2.2.2.1 La formulation variationnelle mixte primale

Par analogie avec les équations de l'élastodynamique, la formulation variationnelle mixte primale consiste à chercher  $p$  dans  $H^1(\Omega_f)$  et  $\mathbf{v}_f$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega_f)$ . On multiplie donc respectivement (2.2.1a) et (2.2.1b) par  $q$  dans  $H^1(\Omega_f)$  et par  $\mathbf{w}_f$  dans  $\mathbf{L}^2(\Omega_f)$  et on intègre sur  $\Omega_f$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \frac{pq}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} \operatorname{div} \mathbf{v}_f q = \int_{\Omega_f} f q \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{w}_f + \int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \mathbf{w}_f = 0. \end{array} \right. \quad (2.2.2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \frac{pq}{c_f^2 \rho_f} - \int_{\Omega_f} \nabla q \cdot \mathbf{v}_f - \int_{\Gamma} q (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}) = \int_{\Omega_f} f q, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{w}_f + \int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \mathbf{w}_f = 0. \end{array} \right. \quad (2.2.2b)$$

On obtient alors la formulation variationnelle mixte primale en intégrant par parties le terme en divergence :

Trouver  $(p, \mathbf{v}_f) : t \mapsto H^1(\Omega_f) \times \mathbf{L}^2(\Omega_f)$  tel que, pour tout  $(q, \mathbf{w}_f) \in H^1(\Omega_f) \times \mathbf{L}^2(\Omega_f)$  :

$$(FP) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \frac{pq}{c_f^2 \rho_f} - \int_{\Omega_f} \nabla q \cdot \mathbf{v}_f - \int_{\Gamma} q (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}) = \int_{\Omega_f} f q, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{w}_f + \int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \mathbf{w}_f = 0. \end{array} \right. \quad (2.2.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \frac{pq}{c_f^2 \rho_f} - \int_{\Omega_f} \nabla q \cdot \mathbf{v}_f - \int_{\Gamma} q (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}) = \int_{\Omega_f} f q, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{w}_f + \int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \mathbf{w}_f = 0. \end{array} \right. \quad (2.2.3b)$$

### 2.2.2.2 La formulation variationnelle mixte duale

La formulation variationnelle mixte duale consiste à chercher  $p$  dans  $L^2(\Omega_f)$  et par  $\mathbf{v}_f$  dans  $\mathbf{H}_{div}(\Omega_f)$ . Nous multiplions donc respectivement (2.2.1a) et (2.2.1b) par  $q$  dans  $L^2(\Omega_f)$  et  $\mathbf{w}_f$  dans  $\mathbf{H}_{div}(\Omega_f)$  et on intègre sur  $\Omega_f$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \frac{pq}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} \operatorname{div} \mathbf{v}_f q = \int_{\Omega_f} f q \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{w}_f + \int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \mathbf{w}_f = 0. \end{array} \right. \quad (2.2.4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \frac{pq}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} q \operatorname{div} \mathbf{v}_f = \int_{\Omega_f} f q, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{w}_f - \int_{\Omega_f} p \operatorname{div} \mathbf{w}_f - \int_{\Gamma} p (\mathbf{w}_f \cdot \mathbf{n}) = 0. \end{array} \right. \quad (2.2.4b)$$

On obtient alors la formulation variationnelle mixte duale en intégrant par parties le terme en gradient :

Trouver  $(p, \mathbf{v}_f) : t \mapsto L^2(\Omega_f) \times \mathbf{H}_{div}(\Omega_f)$  tel que, pour tout  $(q, \mathbf{w}_f) \in L^2(\Omega_f) \times \mathbf{H}_{div}(\Omega_f)$  :

$$(FD) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \frac{pq}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} q \operatorname{div} \mathbf{v}_f = \int_{\Omega_f} f q, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{w}_f - \int_{\Omega_f} p \operatorname{div} \mathbf{w}_f - \int_{\Gamma} p (\mathbf{w}_f \cdot \mathbf{n}) = 0. \end{array} \right. \quad (2.2.5a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \frac{pq}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} q \operatorname{div} \mathbf{v}_f = \int_{\Omega_f} f q, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{w}_f - \int_{\Omega_f} p \operatorname{div} \mathbf{w}_f - \int_{\Gamma} p (\mathbf{w}_f \cdot \mathbf{n}) = 0. \end{array} \right. \quad (2.2.5b)$$

## 2.3 Le couplage entre le solide et le fluide

Les conditions naturelles de transmission sur l'interface  $\Gamma$  sont la continuité des vitesses normales et la continuité des contraintes normales :

$$(CT) \quad \begin{cases} \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n} & (\Gamma) & (2.3.1a) \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\mathbf{n} = -p\mathbf{n} & (\Gamma) & (2.3.1b) \end{cases}$$

Coupler la formulation primale dans un domaine avec la formulation duale dans l'autre nécessiterait l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange comme pour les éléments mortar (voir par exemple [36]). Les deux autres possibilités (formulations primale-primale et duale-duale) sont des méthodes sans multiplicateur.

### 2.3.1 La formulation primale-primale

La façon la plus simple de coupler la formulation (SP) dans le solide à la formulation (FP) dans le fluide est d'utiliser la condition de transmission (2.3.1b) dans le terme de bord de (2.1.4b) :

$$\int_{\Gamma} (\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{w}_s = - \int_{\Gamma} (p\mathbf{n}) \cdot \mathbf{w}_s.$$

Cette intégrale de bord a bien un sens puisque la fonction test  $\mathbf{w}_s$  est dans  $\mathbf{H}^1(\Omega_s)$ , et que  $p$  est cherché dans  $H^1(\Omega_f)$ ,  $\mathbf{w}_s \cdot \mathbf{n}$  et  $p$  sont donc tous deux éléments de  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

Réciproquement, il ne nous reste plus qu'à utiliser la condition de transmission (2.3.1a) dans le terme de bord de (2.2.3a) :

$$\int_{\Gamma} q(\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}) = \int_{\Gamma} q(\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}).$$

Il est facile de vérifier que cette intégrale a bien un sens puisque  $q$  et  $\mathbf{v}_s$  sont dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ .

La formulation variationnelle primale-primale s'écrit donc :

*Trouver  $(p, \mathbf{v}_f, \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \mathbf{v}_s)$  :  $t \mapsto X$  tel que tout  $(q, \mathbf{w}_f, \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}}, \mathbf{w}_s)$  de  $X$  vérifie*

$$(PP) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \frac{pq}{c_f^2 \rho_f} - \int_{\Omega_f} \mathbf{v}_f \cdot \nabla q - \int_{\Gamma} q(\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}) = 0, & (2.3.2a) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{w}_f + \int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \mathbf{w}_f = 0, & (2.3.2b) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{w}_s + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}}}(\mathbf{w}_s) + \int_{\Gamma} p\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_s = 0, & (2.3.2c) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}} - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}}}(\mathbf{v}_s) : \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}} = 0, & (2.3.2d) \end{cases}$$

avec

$$X = H^1(\Omega_f) \times \mathbf{L}^2(\Omega_f) \times \mathbb{L}^2(\Omega_s) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s)$$

### 2.3.2 La formulation duale-duale

Nous voulons ici coupler (SD) et (FD). La prise en compte des conditions de transmission (CT) est un peu plus compliquée et nécessite de modifier les termes de bord et les espaces fonctionnels (ce point sera traité plus en détail à la section 4.3). Considérons d'abord le terme de bord de (2.1.7a).

En utilisant le fait que tout vecteur  $\mathbf{u}$  peut se mettre sous la forme  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{n} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n})$ , le produit scalaire  $(\underline{\underline{\xi}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_s$  dans l'intégrale de bord de (2.1.7a) est égal à :

$$((\underline{\underline{\xi}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}) + ((\underline{\underline{\xi}} \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v}_s \wedge \mathbf{n}).$$

Remarquons maintenant que la condition de transmission (2.3.1b) est équivalente à :

$$(2.3.1b) \quad \begin{cases} p = -(\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} & (2.3.3a) \\ (\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} = 0. & (2.3.3b) \end{cases}$$

En imposant la condition (2.3.3b) de manière forte, c'est à dire en prenant les fonctions test  $\underline{\underline{\xi}}$  et en cherchant  $\underline{\underline{\sigma}}$  dans

$$\mathbb{H}_{div,0}^{sym}(\Omega_s) = \{ \underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{H}_{div}^{sym}(\Omega_s) \mid (\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} = 0 \},$$

nous pouvons faire apparaître la condition de transmission (2.3.1a) dans l'intégrale de bord de (2.1.7a)

$$\int_{\Gamma} (\underline{\underline{\xi}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_s = \int_{\Gamma} ((\underline{\underline{\xi}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}). \quad (2.3.4)$$

Nous pouvons ensuite utiliser la condition (2.3.3a) dans l'intégrale de bord de (2.2.5b) :

$$\int_{\Gamma} p(\mathbf{w}_f \cdot \mathbf{n}) = - \int_{\Gamma} p(\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.3.5)$$

Remarquons qu'il reste un problème d'analyse fonctionnelle puisque, si  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\xi}}$  sont dans  $\mathbb{H}_{div,0}^{sym}(\Omega_s)$  et  $\mathbf{v}_f$  et  $\mathbf{w}_s$  dans  $\mathbf{H}_{div}(\Omega_f)$ , les termes de droite de (2.3.4) et de (2.3.5) apparaissent alors *a priori* comme des intégrales de produit de fonctions  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Pour pallier cette difficulté nous devons restreindre les espaces dans lesquels nous allons chercher  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\mathbf{v}_s$ . Les trois possibilités les plus évidentes sont de chercher :

1.  $(\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  ;
2.  $\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  ;
3.  $(\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$  et  $\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}$  dans  $L^2(\Gamma)$ .

Comme nous le verrons à la section 4.3, ces trois choix, qui garantissent la continuité de la forme bilinéaire associée à la formulation variationnelle, lui font perdre sa coercivité. Pour des raisons de symétrie (il n'y pas de raison particulière pour que la régularité de  $\underline{\underline{\sigma}}$  soit différente de celle de  $\mathbf{v}_f$ ), nous avons choisi la troisième possibilité qui nous conduit à chercher  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\mathbf{v}_f$  respectivement dans :

$$\begin{cases} \widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s) = \{ \underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{H}_{div,0}^{sym}(\Omega_s) \mid ((\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}) \in L^2(\Gamma) \} \\ \widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f) = \{ \mathbf{v}_f \in \mathbf{H}_{div}(\Omega_f) \mid \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n} \in L^2(\Gamma) \} \end{cases}$$

dont les normes associées s'écrivent ;

$$\| \underline{\underline{\sigma}} \|_{\widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s)}^2 = \| \underline{\underline{\sigma}} \|_{\mathbb{H}_{div}^{sym}}^2 + \| (\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \|_{L^2(\Gamma)}^2 = \| \underline{\underline{\sigma}} \|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \| \mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}} \|_{L^2(\Omega_s)}^2 + \| (\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \|_{L^2(\Gamma)}^2$$

et

$$\| \mathbf{v}_f \|_{\widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f)}^2 = \| \mathbf{v}_f \|_{\mathbf{H}_{div}(\Omega_f)}^2 + \| \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n} \|_{L^2(\Gamma)}^2 = \| \mathbf{v}_f \|_{L^2(\Omega_f)}^2 + \| \mathbf{div} \mathbf{v}_f \|_{L^2(\Omega_f)}^2 + \| \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n} \|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

La formulation duale-duale s'écrit donc :

Trouver  $(p, \mathbf{v}_f, \underline{\underline{\sigma}}, \mathbf{v}_s) : t \mapsto X$  tel que tout  $(q, \mathbf{w}_F, \underline{\underline{\xi}}, \mathbf{w}_s)$  dans  $X$  vérifie

$$(DD) \begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \frac{pq}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} q \operatorname{div} \mathbf{v}_f = 0, & (2.3.6a) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{w}_f - \int_{\Omega_f} p \operatorname{div} \mathbf{w}_f + \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{w}_f \cdot \mathbf{n}) = 0, & (2.3.6b) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}} + \int_{\Omega_s} \mathbf{div} \underline{\underline{\xi}} \cdot \mathbf{v}_s - \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\xi}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}) = 0, & (2.3.6c) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{w}_s - \int_{\Omega_s} \mathbf{w}_s \cdot \mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0, & (2.3.6d) \end{cases}$$

avec

$$X = L^2(\Omega_f) \times \widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f) \times \widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s) \times L^2(\Omega_s)$$

## 2.4 Obtention d'identités d'énergie

Nous allons maintenant montrer que les formulations (PP) et (DD) vérifient la conservation d'une certaine énergie.

### 2.4.1 Pour la formulation primale-primale

Soit  $(p, \mathbf{v}_f, \underline{\underline{\sigma}}, \mathbf{v}_s)$  solution de (PP). Alors comme l'équation (2.3.2d) est vérifiée pour toute fonction test de  $L^2(\Omega_s)$ , elle est vérifiée de manière forte :

$$\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{C}} \varepsilon(\mathbf{v}_s) = 0.$$

D'après les propriétés du tenseur  $\underline{C}$ ,  $\underline{\sigma}$  est un tenseur symétrique, et nous pouvons donc choisir  $\underline{\xi} = \underline{A}\underline{\sigma}$ . Pour les autres fonctions test nous choisissons  $(q, \mathbf{w}_f, \mathbf{w}_s) = (p, \mathbf{v}_f, \mathbf{v}_s)$  pour obtenir :

$$\left\{ \int_{\Omega_f} \frac{1}{c_f^2 \rho_f} \frac{\partial p}{\partial t} p - \int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \mathbf{v}_f - \int_{\Gamma} p (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}) = 0, \right. \quad (2.4.1a)$$

$$\left\{ \int_{\Omega_f} \rho_f \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \cdot \mathbf{v}_f + \int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \mathbf{v}_f = 0, \right. \quad (2.4.1b)$$

$$\left\{ \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} \cdot \mathbf{v}_s + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\nabla}(\mathbf{v}_s) + \int_{\Gamma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_s = 0, \right. \quad (2.4.1c)$$

$$\left\{ \int_{\Omega_s} \underline{A} \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} : \underline{\underline{\sigma}} - \int_{\Omega_s} \underline{\nabla}(\mathbf{v}_s) : \underline{\underline{\sigma}} = 0. \right. \quad (2.4.1d)$$

soit, en additionnant ces quatre équations :

$$\int_{\Omega_f} \frac{1}{c_f^2 \rho_f} \frac{\partial p}{\partial t} p + \int_{\Omega_f} \rho_f \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \cdot \mathbf{v}_f + \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} \cdot \mathbf{v}_s + \int_{\Omega_s} \underline{A} \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} : \underline{\underline{\sigma}} = 0, \quad (2.4.2)$$

ce qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dE_{PP}}{dt} = 0, \quad (2.4.3)$$

avec

$$E_{PP}(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega_f} \frac{p^2}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} \rho_f \|\mathbf{v}_f\|^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega_s} \rho_s \|\mathbf{v}_s\|^2 + \int_{\Omega_s} \underline{A} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} \right] \quad (2.4.4)$$

Il est évident, grâce aux propriétés du tenseur  $\underline{A}$  que l'énergie  $E_{PP}(t)$  est positive.

**Remarque 2.4.1** Cette énergie est la somme des énergies que nous aurions obtenues en considérant un fluide seul et un solide seul.

## 2.4.2 Pour la formulation duale-duale

Considérons maintenant  $(p, \mathbf{v}_f, \underline{\underline{\sigma}}, \mathbf{v}_s)$  solution de la formulation duale-duale et posons

$$(q, \mathbf{w}_f, \xi, \mathbf{w}_s) = (p, \mathbf{v}_f, \sigma, \mathbf{v}_s),$$

nous obtenons alors :

$$\left\{ \int_{\Omega_f} \frac{1}{c_f^2 \rho_f} \frac{\partial p}{\partial t} p + \int_{\Omega_f} p \operatorname{div} \mathbf{v}_f = 0, \right. \quad (2.4.5a)$$

$$\left\{ \int_{\Omega_f} \rho_f \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \cdot \mathbf{v}_f - \int_{\Omega_f} p \operatorname{div} \mathbf{v}_f + \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}) = 0, \right. \quad (2.4.5b)$$

$$\left\{ \int_{\Omega_s} (\underline{A} \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial t} : \sigma) + \int_{\Omega_s} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_s - \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}) = 0, \right. \quad (2.4.5c)$$

$$\left\{ \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} \cdot \mathbf{v}_s - \int_{\Omega_s} \mathbf{v}_s \cdot \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0. \right. \quad (2.4.5d)$$

En additionnant ces quatre équations on obtient :

$$\frac{dE_{DD}}{dt} = 0, \quad (2.4.6)$$

avec

$$E_{DD}(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega_f} \frac{p^2}{c_F^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} \rho_f \|\mathbf{v}_f\|^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega_s} (\underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}}) + \int_{\Omega_s} \rho_s \|\mathbf{v}_s\|^2 \right] \quad (2.4.7)$$

Il est facile de vérifier que  $E_{DD}(t) \geq 0$ .

**Remarque 2.4.2** *Cette énergie est encore une fois la somme des énergies que nous aurions obtenues en considérant un fluide seul et un solide seul.*

## Chapitre 3

# Semi-discrétisation en espace

Nous présentons dans ce chapitre les éléments finis utilisés pour la discrétisation en espace des formulations variationnelles obtenues au chapitre précédent. Pour la formulation variationnelle duale-duale nous avons choisi, dans le solide, des éléments finis construits à partir des éléments  $Q_{k+1}^{div} - Q_k$  de C. Tsogka [82] et, dans le fluide les éléments finis de Raviart-Thomas classiques. Pour la formulation primale-primale nous avons choisi les éléments finis  $Q_k$  de S. Fauqueux [42] dans le fluide et dans le solide. Nous rappelons en annexe le principe des éléments finis courbes qui permettent une meilleure approximation des frontières courbes.

---

 Contenu
 

---

Notations . . . . .	37
<b>3.1 Discrétisation par éléments finis de la formulation duale-duale .</b>	<b>37</b>
3.1.1 Les éléments finis dans le solide . . . . .	37
3.1.2 Les éléments finis dans le fluide . . . . .	39
3.1.3 Équations semi-discrétisées . . . . .	41
<b>3.2 Discrétisation de la formulation primale-primale . . . . .</b>	<b>43</b>
3.2.1 Modification de la formulation primale-primale . . . . .	43
3.2.2 Considérations sur le maillage utilisé . . . . .	44
3.2.3 Définition des espaces d'approximation . . . . .	44
<b>3.3 Calcul d'une énergie . . . . .</b>	<b>48</b>
3.3.1 Énergie associée au schéma dual-dual (dd) . . . . .	48
3.3.2 Énergie associée au schéma primal-primal (pp) . . . . .	48
<b>Annexes . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>3.a Les éléments finis courbes . . . . .</b>	<b>48</b>

---

## Notations

Dans ce chapitre nous notons :

- $\mathcal{T}_{h_f}$  (resp.  $\mathcal{T}_{h_s}$ ), un maillage de  $\Omega_f$  (resp.  $\Omega_s$ ), composé de quadrangles (si  $d = 2$ ) ou d'hexaèdres (si  $d = 3$ ) notés  $K_i^f$  (resp.  $K_i^s$ ) et  $\mathcal{T}_h$  la réunion de ces deux maillages. ;
- $\widehat{K} = [0, 1]^d$  le cube (ou le carré) unité.
- $F_i^f$  (resp.  $F_i^s$ ) :  $\widehat{K} \mapsto K_i^f$  (resp.  $K_i^s$ ) une application vectorielle bijective transformant la frontière de  $\widehat{K}$  en la frontière de  $K_i^f$  (resp.  $K_i^s$ ) et telle que chaque composante de  $F_i$  soit un polynôme de degré 1 par rapport à chaque variable ;
- $P_k$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $k$  ;
- $P_{k_1, k_2}$  l'ensemble des polynômes de deux variables défini par :

$$P_{k_1, k_2} \left\{ p(x_1, x_2) \mid p(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} x_1^i x_2^j \right\} ;$$

- $P_{k_1, k_2, k_3}$  l'ensemble des polynômes de trois variables défini par :

$$P_{k_1, k_2, k_3} \left\{ p(x_1, x_2, x_3) \mid p(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{l=1}^{k_3} x_1^i x_2^j x_3^l \right\} ;$$

- $Q_k$  l'ensemble des polynômes défini par

$$Q_k = P_{k, k} \text{ (en dimension 2) ou } Q_k = P_{k, k, k} \text{ (en dimension 3) ;}$$

- $Q_k(K)$  l'ensemble des fonctions dont la restriction à l'élément  $K$  peut être identifiée à un polynôme de  $Q_k$  :

$$Q_k(K) = \{q \mid \exists p \in Q_k \text{ telle que } q|_K = p|_K\} ;$$

- on utilisera également les ensembles  $P_k(K)$ ,  $P_{k_1, k_2}(K)$  et  $P_{k_1, k_2, k_3}(K)$  dont la définition est similaire à celle de  $Q_k(K)$

## 3.1 Discrétisation par éléments finis de la formulation duale-duale

### 3.1.1 Les éléments finis dans le solide

Par souci de simplicité, nous nous limitons à la présentation de l'élément fini d'ordre 1,  $\mathbb{Q}_1^{div} - \mathcal{Q}_0$ , et nous renvoyons le lecteur à [82] pour l'extension à des éléments d'ordre élevé ou à la dimension 3.

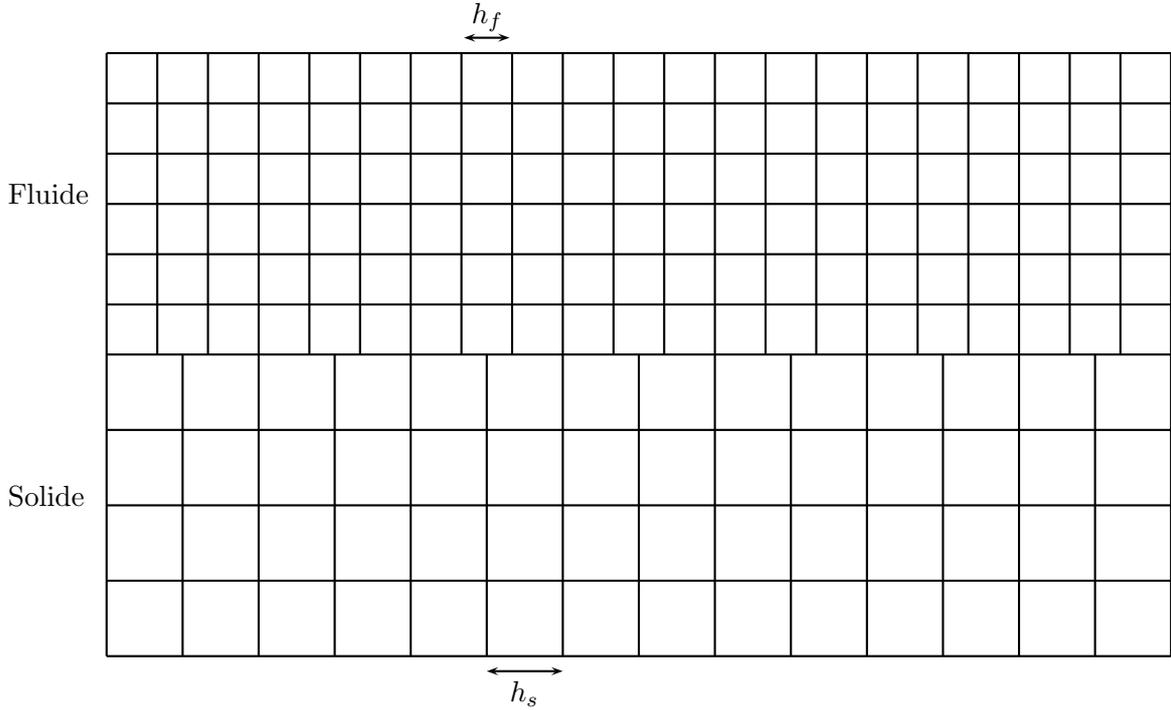


FIG. 3.1: Un maillage pour la formulation duale-duale

**Remarque 3.1.1** *Les éléments de C. Tsogka sont spécifiquement définis pour des maillages réguliers, nous supposons donc que tous les éléments de  $\mathcal{T}_{h_s}$  sont des carrés. En conséquence, les interfaces courbes devront être discrétisées en marche d'escalier. Cependant cela n'interdit pas l'utilisation de pas d'espace différents dans le fluide et dans le solide (voir figure 3.1).*

L'espace  $\mathbb{Q}_1^{div}$  est l'espace des contraintes  $\mathbb{Q}_1$  par morceaux vérifiant les propriétés suivantes :

- $\sigma_{11}$  est discontinue à travers les arêtes horizontales du maillage et continue à travers les arêtes verticales ;
- $\sigma_{22}$  est discontinue à travers les arêtes verticales et discontinue à travers les arêtes horizontales ;
- $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  est une fonction continue.

La définition mathématique de  $\mathbb{Q}_1^{div}$  s'écrit

$$\mathbb{Q}_1^{div} = \{ \underline{\underline{\sigma}} \mid \sigma_{12} = \sigma_{21} \in H^1(\Omega_s), \sigma_{12}|_K \in Q_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_{h_s} \\ \text{et } [\sigma_{11}, \sigma_{22}]^t \in \mathbf{H}_{div}(\Omega_s), (\sigma_{11}, \sigma_{22}) \in Q_1(K) \times Q_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_{h_s} \}$$

Les degrés de liberté des contraintes sont tous associés aux noeuds des éléments. D'après la définition que nous en avons donné, ils sont au nombre de cinq en chaque noeud (voir la figure 3.2). À titre d'illustration nous avons représenté le profil et le support des cinq fonctions de base associées à un noeud  $i$  sur la figure 3.4.

### 3.1 Discrétisation par éléments finis de la formulation duale-duale

Pour que ces éléments soient conformes avec l'espace  $\widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}$  nous devons également imposer  $\sigma_{12} = 0$  sur l'interface  $\Gamma$  : nous appelons  $\widehat{\mathbb{Q}}_1^{div}$  l'espace défini par

$$\widehat{\mathbb{Q}}_1^{div} = \left\{ \underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{Q}_1^{div} \mid \sigma_{12}|_{\Gamma} = 0 \right\}.$$

**Remarque 3.1.2**  $(\underline{\underline{\sigma}}\mathbf{n})$  appartient bien à  $L^2(\Gamma)$  si  $\underline{\underline{\sigma}}$  est dans  $\widehat{\mathbb{Q}}_1^{div}$ .

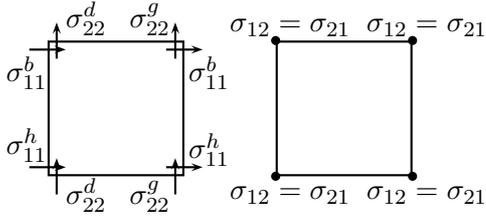


FIG. 3.2: L'élément fini dans le solide : les contraintes (à gauche et au centre) et les vitesses (à droite).

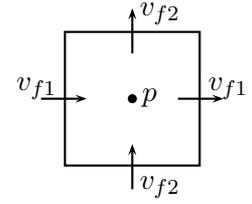


FIG. 3.3: L'élément fini utilisé dans le fluide.

Le champ de vitesse dans le solide sera approché par des éléments de l'espace  $\mathbb{Q}_0$ , l'espace des champs de vitesse constants par maille :

$$\mathbb{Q}_0 = \{ \mathbf{v}_s \in \mathbf{L}^2(\Omega_s) \mid \mathbf{v}_s \in Q_0(K) \times Q_0(K), \forall K \in \mathcal{T}_{h_s} \}$$

(les degrés de liberté sont associés au centre des mailles — voir figure 3.2).

#### 3.1.2 Les éléments finis dans le fluide

Le champ de pression sera approché par des éléments de l'espace  $Q_0$ , l'espace des champs de pression constants par morceaux sont constants par morceaux :

$$Q_0 = \{ p \in L^2(\Omega_f) \mid p \in Q_0(K), \forall K \in \mathcal{T}_{h_f} \}.$$

Les degrés de liberté du champ de pression seront associés au centre des mailles. Pour approcher le champ de vitesse, nous utiliserons l'élément fini de Raviart-Thomas  $\mathbf{RT}_0$  défini par :

$$\mathbf{RT}_0 = \{ \mathbf{v}_f \mid [v_{f_1}, v_{f_2}]^t \in \mathbf{H}_{div}(\Omega_f), (v_{f_1}, v_{f_2}) \in P_{10}(K) \times P_{01}(K), \forall K \in \mathcal{T}_{h_f} \}$$

On en déduit que

- la première composante de la vitesse ( $v_{f_1}$ ) est continue à travers les arêtes verticales et discontinue à travers les arêtes horizontales ;
- la seconde composante de la vitesse ( $v_{f_2}$ ) est continue à travers les arêtes horizontales et discontinue à travers les arêtes verticales.

C'est pourquoi nous associerons les degrés de liberté de  $v_{f_1}$  au centre des arêtes verticales et les degrés de liberté de  $v_{f_2}$  au centre des arêtes horizontales (voir figure 3.3). À titre d'illustration nous avons représenté le profil et le support des de la fonction de base  $v_{f_1}$  (resp  $v_{f_2}$ ) associée à l'arête  $i$  (resp.  $j$ ) sur la figure 3.5.a (resp. sur la figure 3.5.b).

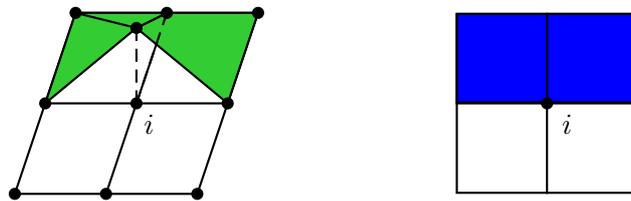


FIG. 3.4.a :  $\sigma_{11}^h$

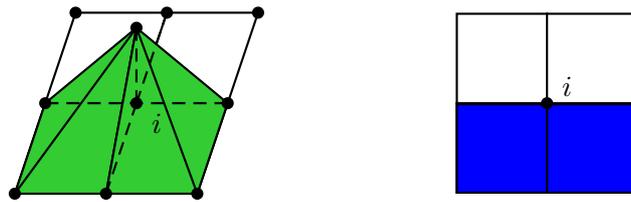


FIG. 3.4.b :  $\sigma_{11}^b$

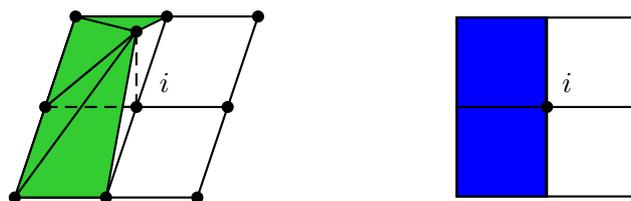


FIG. 3.4.c :  $\sigma_{22}^g$

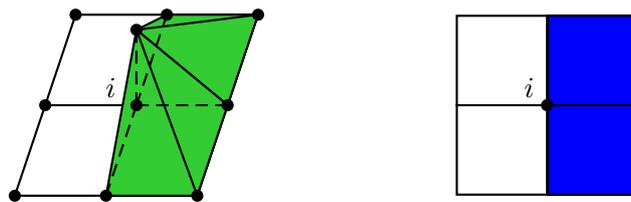


FIG. 3.4.d :  $\sigma_{22}^d$

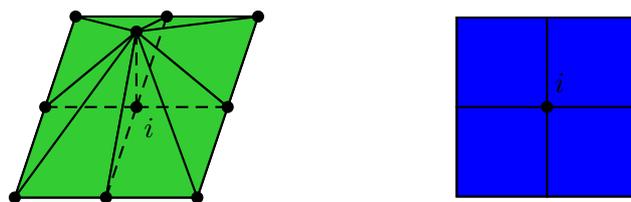


FIG. 3.4.e :  $\sigma_{12}$

FIG. 3.4: Les fonctions de base  $\sigma$  (à gauche) et leurs supports (à droite)

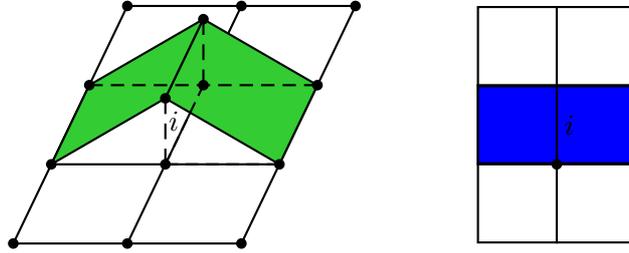


FIG. 3.5.a :  $v_{f_1}$

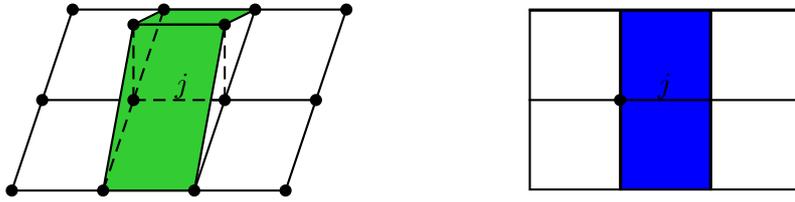


FIG. 3.5.b :  $v_{f_2}$

FIG. 3.5: Les fonctions de base  $v_f$  (à gauche) et leurs supports (à droite)

### 3.1.3 Équations semi-discrétisées

Nous notons

$$(L^2(\Omega_f))_h, \quad (\widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f))_h, \quad (\widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s))_h \quad \text{et} \quad (L^2(\Omega_s))_h$$

les espaces de discrétisation respectifs de

$$L^2(\Omega_f), \quad \widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f), \quad \widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s) \quad \text{et} \quad L^2(\Omega_s)$$

sur un certain maillage  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$  caractérisé par son pas  $h$ .

La formulation variationnelle semi-discrétisée s'écrit alors :

Trouver  $(p^h, \mathbf{v}_f^h, \underline{\underline{\sigma}}^h, \mathbf{v}_s^h) : t \mapsto X^h$  tel que tout  $(q^h, \mathbf{w}_f^h, \underline{\underline{\xi}}^h, \mathbf{w}_s^h)$  dans  $X^h$  vérifie

$$(dd) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \frac{p^h q^h}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} q^h \operatorname{div} \mathbf{v}_f^h = \int_{\Omega_f} f q^h, \quad (3.1.1a) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f^h \cdot \mathbf{w}_f^h - \int_{\Omega_f} p^h \operatorname{div} \mathbf{w}_f^h + \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}}^h \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{w}_f^h \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (3.1.1b) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}}^h : \underline{\underline{\xi}}^h + \int_{\Omega_s} \mathbf{div} \underline{\underline{\xi}}^h \cdot \mathbf{v}_s^h - \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\xi}}^h \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{v}_f^h \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (3.1.1c) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{v}_s^h \cdot \mathbf{w}_s^h - \int_{\Omega_s} \mathbf{w}_s^h \cdot \mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}}^h = 0, \quad (3.1.1d) \end{array} \right.$$

avec

$$X^h = (L^2(\Omega_f))_h \times (\widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f))_h \times (\widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s))_h \times (\mathbf{L}^2(\Omega_s))_h.$$

Nous notons

$$\mathcal{B}[(L^2(\Omega_f))_h] = \left\{ p_i^h \right\}_{j=i}^{Np}, \quad \mathcal{B}[(\widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f))_h] = \left\{ \mathbf{v}_{f_i}^h \right\}_{i=1}^{Nvf}$$

et

$$\mathcal{B}[(\mathbf{L}^2(\Omega_s))_h] = \left\{ \mathbf{v}_{s_i}^h \right\}_{i=1}^{Nvs}, \quad \mathcal{B}[(\widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s))_h] = \left\{ \underline{\underline{\sigma}}_i^h \right\}_{i=1}^{Nvs},$$

les bases respectives des espaces  $(L^2(\Omega_f))_h$ ,  $(\widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f))_h$ ,  $(\mathbf{L}^2(\Omega_s))_h$  et  $(\widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s))_h$  et nous définissons les matrices de masse

$$(M_P)_{i,j} = \oint_{\Omega_f} \frac{p_i^h q_j^h}{c_f^2 \rho_f}, \quad (M_f)_{i,j} = \oint_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_{f_i}^h \cdot \mathbf{v}_{f_j}^h$$

et

$$(M_\Sigma)_{i,j} = \oint_{\Omega_s} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}}_i^h : \underline{\underline{\sigma}}_j^h, \quad (M_s)_{i,j} = \oint_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{v}_{s_i}^h \cdot \mathbf{v}_{s_j}^h,$$

où  $\oint$  désigne une intégration exacte ou numérique. Puisque  $p$  et  $\mathbf{v}_s$  sont constantes par morceaux, les matrices de masse  $M_P$  et  $M_s$  sont diagonales. L'application de la technique de condensation de masse décrite par exemple dans [65] nous permet d'obtenir  $M_f$  diagonale et  $M_\Sigma$  diagonale par blocs  $5 \times 5$ . Le principe consiste à choisir les degrés de liberté des fonctions de base comme points de quadrature de l'intégration numérique.

Nous définissons également les matrices

$$(D_f)_{i,j} = \int_{\Omega_f} p_i^h \operatorname{div} \mathbf{v}_{f_j}^h \quad \text{et} \quad (D_s)_{i,j} = \int_{\Omega_s} \mathbf{v}_{s_i}^h \cdot \mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}}_j^h$$

qui représentent des opérateurs de divergence discrets. Finalement nous notons

$$(B)_{i,j} = \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}}_i^h \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{v}_{f_j}^h \cdot \mathbf{n})$$

l'opérateur de trace discret et

$$F_i = \int_{\Omega_f} f q_j$$

la source discrète.

L'application de la procédure standard de discrétisation par éléments finis conduit alors au système différentiel ordinaire suivant<sup>(6)</sup> :

$$(dd) \quad \begin{cases} M_P \frac{dP}{dt} + D_f V_f = F, & (3.1.2a) \\ M_f \frac{dV_f}{dt} - D_f^* P + B \Sigma = 0, & (3.1.2b) \\ M_\Sigma \frac{d\Sigma}{dt} + D_s^* V_s - B^* V_s = 0, & (3.1.2c) \\ M_s \frac{dV_s}{dt} - D_s \Sigma = 0. & (3.1.2d) \end{cases}$$

## 3.2 Discrétisation de la formulation primale-primale

### 3.2.1 Modification de la formulation primale-primale

Pour pouvoir utiliser les éléments finis de S. Fauqueux dans le solide nous devons modifier la formulation variationnelle (PP) en introduisant une fonction auxiliaire définie par

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v}_s$$

avec la condition initiale  $\gamma(0) = 0$ .

Nous utiliserons donc la formulation suivante, équivalente à (PP) :

*Trouver*  $((p, \mathbf{v}_f, \underline{\underline{\sigma}}, \mathbf{v}_s), \underline{\underline{\gamma}}) : t \mapsto X \times \mathbb{L}^2(\Omega_s)$  *tel que tout*  $(q, \mathbf{w}_f, \underline{\underline{\xi}}, \mathbf{w}_s)$  *de*  $X$  *vérifie*

$$(PP') \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \frac{p q}{c_f^2 \rho_f} - \int_{\Omega_f} \mathbf{v}_f \cdot \nabla q - \int_{\Gamma} q (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}) = 0, & (3.2.1a) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{w}_f + \int_{\Omega_f} \nabla p \cdot \mathbf{w}_f = 0, & (3.2.1b) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{w}_s + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{w}_s) + \int_{\Gamma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_s = 0, & (3.2.1c) \\ \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}} - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\gamma}} : \underline{\underline{\xi}} = 0, & (3.2.1d) \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\gamma}} : \underline{\underline{\xi}} - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{v}_s) : \underline{\underline{\xi}} = 0, & (3.2.1e) \end{cases}$$

---

6. Les vecteurs  $P$ ,  $V_f$ ,  $V_s$  et  $\Sigma$  sont composés des degrés de liberté de  $p^h$ ,  $\mathbf{v}_f^h, \mathbf{v}_s^h$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^h$

avec

$$X = H^1(\Omega_f) \times \mathbf{L}^2(\Omega_f) \times \mathbb{L}^2(\Omega_s) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s)$$

La formulation (PP') étant équivalente à la formulation (PP), elle garantit également la conservation de l'énergie  $E_{PP}$  définie en (2.4.3). Néanmoins, comme nous le verrons par la suite, nous utiliserons plutôt l'énergie  $E_{PP'}$  définie par :

$$E_{PP'}(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega_f} \frac{p^2}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} \rho_f \|\mathbf{v}_f\|^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega_s} \rho_s \|\mathbf{v}_s\|^2 + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\gamma}} : \underline{\underline{\gamma}} \right] \quad (3.2.2)$$

Pour montrer la conservation de  $E_{PP'}(t)$  il suffit de choisir

$$(q, \mathbf{w}_f, \mathbf{w}_s) = (p, \mathbf{v}_f, \mathbf{v}_s)$$

puis

$$\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v}_s \text{ dans (3.2.1d)} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\gamma}} \text{ dans (3.2.1e).}$$

### 3.2.2 Considérations sur le maillage utilisé

Contrairement à la formulation précédente, les éléments finis que nous allons présenter sont définis pour des mailles (quadrangles ou hexaèdres) quelconques. Cette formulation est donc plus adaptée à la prise en compte des interfaces courbes. C'est pourquoi nous considérerons ici un maillage quelconque (un exemple de maillage quelconque est donnée sur la figure 3.6). Si nous utilisons des maillages non conformes sur une frontière courbe, à moins que l'un des pas d'espace soit un multiple de l'autre, les deux maillages vont s'interpénétrer comme le montre la figure 3.7. Nous supposons donc ici que les maillages sont conformes.

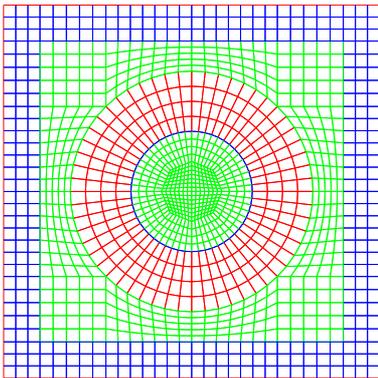


FIG. 3.6: Le maillage du domaine

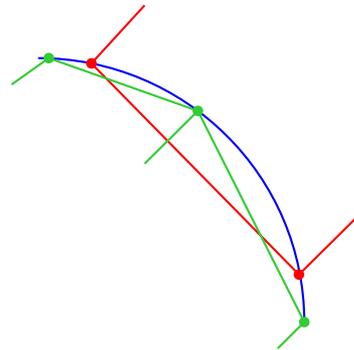


FIG. 3.7: Maillages non conformes sur une frontière courbe

### 3.2.3 Définition des espaces d'approximation

Nous présentons ici les espaces d'approximation pour un ordre  $k$  quelconque. Pour pouvoir appliquer la condensation de masse, les degrés de liberté des fonctions de base sont associés aux points de Gauss-Lobatto d'ordre  $k + 1$  (voir [42] pour plus de détails).

### 3.2 Discrétisation de la formulation primale-primale

---

Le champ de pression dans le fluide qui est une fonction de type  $H^1$ , sera approché par des éléments de  $Q_k^{\text{cont}}$  défini par

$$Q_k^{\text{cont}} = \left\{ p \in H^1(\Omega_f) \mid p|_{K_i^f} \circ \mathbf{F}_i^f \in Q_k(K_i^f) \quad \forall K_i^f \in \mathcal{T}_{h_f} \right\}.$$

D'après cette définition  $p$  est une fonction continue à travers les arêtes (et les faces en dimension trois) des mailles. Pour illustrer notre propos, nous avons représenté l'élément  $Q_5$  sur la figure 3.8.

Le champ de vitesse dans le solide, lui aussi de type  $H^1$ , sera approché par des éléments de  $Q_k^{\text{cont}}$  défini par

$$Q_k^{\text{cont}} = \left\{ \mathbf{v}_s \in H^1(\Omega_s) \mid \mathbf{v}_s|_{K_i^s} \circ \mathbf{F}_i^s \in (Q_k(K_i^s))^d \quad \forall K_i^s \in \mathcal{T}_{h_s} \right\}.$$

D'après cette définition  $\mathbf{v}_s$  est continue à travers les arêtes des mailles (voir figure 3.8).

Le champ de vitesse dans le fluide, qui est de type  $L^2$ , sera approché par des fonctions de l'espace  $Q_k^{\text{disc}}$  défini par

$$Q_k^{\text{disc}} = \left\{ \mathbf{v}_f \in \mathbf{L}^2(\Omega_f) \mid |J_i^f| D\mathbf{F}_i^{f-1} \mathbf{v}_f|_{K_i^f} \circ \mathbf{F}_i^f \in (Q_k(K_i^f))^d \quad \forall K_i^f \in \mathcal{T}_{h_f} \right\},$$

où  $J_i^f$  représente le jacobien de  $\mathbf{F}_i^f$ . Cette transformation, dite transformation de Piola, nous servira plus loin à simplifier la calcul des matrices de rigidité.

De même le champ de contrainte sera approché par des fonctions de l'espace  $Q_k^{\text{disc}}$  défini par

$$Q_k^{\text{disc}} = \left\{ \underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{L}^2(\Omega_f) \mid |J_i^s| D\mathbf{F}_i^{s-1} \underline{\underline{\sigma}}|_{K_i^s} \circ \mathbf{F}_i^s \in (Q_k(K_i^s))^{d^2} \quad \forall K_i^s \in \mathcal{T}_{h_s} \right\}.$$

Les champs auxiliaires  $\underline{\underline{\gamma}}$  sont approchés par les mêmes types de fonction que  $\underline{\underline{\sigma}}$ .

Nous notons

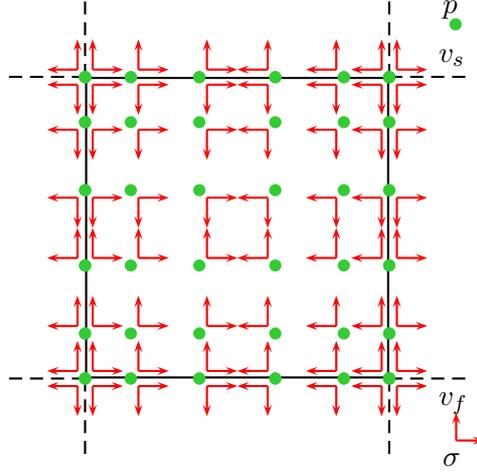
$$(H^1(\Omega_f))_h, \quad (\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h, \quad (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h, \quad \text{et} \quad (\mathbf{H}^1(\Omega_s))_h$$

les espaces de discrétisation respectifs de

$$H^1(\Omega_f), \quad \mathbf{L}^2(\Omega_f), \quad \mathbb{L}^2(\Omega_s) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}^1(\Omega_s)$$

sur un certain maillage  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$  caractérisé par son pas  $h$ . La formulation variationnelle semi-discrétisée s'écrit alors :

*Trouver  $((p^h, \mathbf{v}_f^h, \underline{\underline{\sigma}}^h, \mathbf{v}_s^h), \underline{\underline{\gamma}}^h) : t \mapsto X^h \times (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h$  tel que tout  $(q^h, \mathbf{w}_f^h, \underline{\underline{\xi}}^h, \mathbf{w}_s^h)$  de  $X^h$  vérifie*


 FIG. 3.8: L'élément fini  $Q_5$ 

$$\begin{cases}
 \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \frac{p^h q^h}{c_f^2 \rho_f} - \int_{\Omega_f} \mathbf{v}_f^h \cdot \nabla q^h - \int_{\Gamma} q^h (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}) = \int_{\Omega_f} f q, & (3.2.3a) \\
 \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f^h \cdot \mathbf{w}_f^h + \int_{\Omega_f} \nabla p^h \cdot \mathbf{w}_f^h = 0, & (3.2.3b) \\
 \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{v}_s^h \cdot \mathbf{w}_s^h + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}}^h : \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{w}_s^h) + \int_{\Gamma} p^h \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_s^h = 0, & (3.2.3c) \\
 \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}}^h : \underline{\underline{\xi}}^h - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\gamma}}^h : \underline{\underline{\xi}}^h = 0, & (3.2.3d) \\
 \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\gamma}}^h : \underline{\underline{\xi}}^h - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v}_s^h : \underline{\underline{\xi}}^h = 0, & (3.2.3e)
 \end{cases}$$

avec

$$X^h = (H^1(\Omega_f))_h \times (\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h \times (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h \times (\mathbf{H}^1(\Omega_s))_h.$$

Nous notons

$$\mathcal{B}[(H^1(\Omega_f))_h] = \{p_i^h\}_{i=1}^{Nf}, \quad \mathcal{B}[(\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h] = \{\mathbf{v}_{f_i}^h\}_{i=1}^{Nf}$$

et

$$\mathcal{B}[(\mathbf{H}^1(\Omega_s))_h] = \{\mathbf{v}_{s_i}^h\}_{i=1}^{Ns}, \quad \mathcal{B}[(\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h] = \{\underline{\underline{\sigma}}_i^h\}_{i=1}^s,$$

les bases respectives des espaces  $(H^1(\Omega_f))_h$ ,  $(\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h$ ,  $(\mathbf{H}^1(\Omega_s))_h$  et  $(\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h$ .

Comme pour le problème dual-dual, nous définissons les matrices de masse

$$(M_P)_{i,j} = \oint_{\Omega_f} \frac{p_i^h q_j^h}{c_f^2 \rho_f}, \quad (M_f)_{i,j} = \oint_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_{f_i}^h \cdot \mathbf{v}_{f_j}^h$$

### 3.2 Discrétisation de la formulation primale-primale

et

$$(M_\Sigma)_{i,j} = \oint_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}}_i^h : \underline{\underline{\sigma}}_j^h, \quad (M_s)_{i,j} = \oint_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{v}_{s_i}^h \cdot \mathbf{v}_{s_j}^h, \quad (\mathbf{C})_{i,j} = \oint \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\sigma}}_i^h : \underline{\underline{\sigma}}_j^h.$$

Nous utiliserons encore une fois la condensation de masse pour diagonaliser les matrices de masse : nous obtenons alors  $M_P$  et  $M_s$  diagonales,  $M_f$  diagonale par blocs  $d \times d$  et  $\mathbf{C}$  diagonale par blocs  $d^2 \times d^2$ .

Nous définissons également les matrices

$$(G_f)_{i,j} = \int_{\Omega_f} \nabla p_i^h \cdot \mathbf{v}_{f_j}^h \quad \text{et} \quad (G_s)_{i,j} = \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v}_{s_i}^h : \underline{\underline{\sigma}}_j^h$$

qui représente des opérateurs de gradient discrets. Finalement nous notons

$$(B)_{i,j} = \int_{\Gamma} p_j^h (\mathbf{v}_{s_i} \cdot \mathbf{n})$$

l'opérateur de trace discret et

$$F_i = \int_{\Omega_f} f q_j$$

la source discrète. L'application de la procédure standard de discrétisation par éléments finis conduit alors au système différentiel ordinaire suivant<sup>(7)</sup> :

$$(pp) \begin{cases} M_P \frac{dP}{dt} - G_f^* V_f - B V_s = F, & (3.2.4a) \\ M_f \frac{dV_f}{dt} + G_f P = 0, & (3.2.4b) \\ M_s \frac{dV_s}{dt} + G_s^* \Sigma + B^* P = 0, & (3.2.4c) \\ M_\Sigma \Sigma - \mathbf{C} \Gamma = 0, & (3.2.4d) \\ M_\Sigma \frac{d\Gamma}{dt} - G_s V_s = 0. & (3.2.4e) \end{cases}$$

Les matrices  $G_f$  et  $G_s$  sont des opérateurs de gradient discrets et  $\mathbf{C}$  approche la multiplication par le tenseur  $\underline{\underline{C}}$ . En appliquant à nouveau la technique de condensation de masse

**Remarque 3.2.1** Dans la pratique on réécrit les équations (3.2.4e) et (3.2.4d) uniquement en fonction de  $\Sigma$  :

$$M_\Sigma \frac{d\Sigma}{dt} - \mathbf{C} M_\Sigma^{-1} G_s^* V_s = 0. \quad (3.2.5)$$

**Remarque 3.2.2** Rappelons que le fait d'approcher  $\mathbf{v}_f$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  par des éléments de  $\mathbf{Q}_k^{\text{disc}}$  et  $\mathbb{Q}_k^{\text{disc}}$  nous permet d'obtenir la propriété suivante :

$$\int_{K_i^f} \nabla p^i \cdot \mathbf{v}_f^j = \int_{\widehat{K}} \nabla \widehat{p}^i \cdot \widehat{\mathbf{v}}_f^j \quad \text{et} \quad \int_{K_i^s} \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v}_s^i : \underline{\underline{\sigma}}^j = \int_{\widehat{K}} \underline{\underline{\nabla}} \widehat{\mathbf{v}}_s^i : \widehat{\underline{\underline{\sigma}}}^j.$$

En conséquence, les matrices  $G_f$  et  $G_s$  sont indépendantes des mailles  $\mathcal{T}_{h_f}$  et  $\mathcal{T}_{h_s}$  : toutes les informations concernant les paramètres physiques et la géométrie des maillages sont contenues dans les matrices diagonales (ou diagonales par blocs)  $M_P$ ,  $M_f$ ,  $M_s$ ,  $M_\Sigma$  et  $\mathbf{C}$ .

7. Les vecteurs  $P$ ,  $V_f$ ,  $V_s$  et  $\Sigma$  sont ici encore composés des degrés de liberté de  $p^h$ ,  $\mathbf{v}_f^h$ ,  $\mathbf{v}_s^h$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^h$

### 3.3 Calcul d'une énergie

Comme pour le cas continu nous pouvons montrer la conservation d'une énergie semi-discrète associée à la formulation variationnelle duale-duale et à la formulation variationnelle primale-primale.

#### 3.3.1 Énergie associée au schéma dual-dual (dd)

En multipliant les équations (3.1.2a), (3.1.2b), (3.1.2c) et (3.1.2d) respectivement par  $P$ ,  $V_f$ ,  $\Sigma$  et  $V_s$ , on vérifie facilement que :

$$\frac{dE_{dd}}{dt} = 0,$$

avec :

$$E_{dd}(t) = (M_P P, P) + (M_f V_f, V_f) + (M_\Sigma \Sigma, \Sigma) + (M_s V_s, V_s).$$

Cette énergie n'est rien d'autre que la formulation semi-discrétisée de l'énergie continue  $E_{DD}$ .

#### 3.3.2 Énergie associée au schéma primal-primal (pp)

Utilisons d'abord (3.2.4e) dans (3.2.4c) pour obtenir :

$$(pp) \left\{ \begin{array}{l} M_P \frac{dP}{dt} - G_f^* V_f - B V_s = 0, \\ M_f \frac{dV_f}{dt} + G_f P = 0, \\ M_s \frac{dV_s}{dt} + G_s^* M_\Sigma^{-1} C \Gamma + B^* P = 0, \\ M_\Sigma \frac{d\Gamma}{dt} - G_s V_s = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.3.1a) \\ (3.3.1b) \\ (3.3.1c) \\ (3.3.1d) \end{array}$$

En multipliant respectivement (3.3.1a), (3.3.1b), (3.3.1c) et (3.3.1d) par  $P$ ,  $V_f$ ,  $V_s$  et  $\Gamma$  on montre que

$$\frac{dE_{pp}}{dt} = 0,$$

avec

$$E_{pp}(t) = (M_P P, P) + (M_f V_f, V_f) + (M_s V_s, V_s) + (C \Gamma, \Gamma).$$

On retrouve à nouveau l'expression semi-discrétisée de l'énergie  $E_{PP}$ .

## Annexes

### 3.a Les éléments finis courbes

Avec les éléments finis d'ordre  $N$  les solutions sont approchées par des polynômes de degré  $N$ . La précision du calcul augmente donc avec l'ordre des éléments, ce qui permet de diminuer le nombre de points par longueur d'onde. Typiquement, avec des éléments  $Q_5$  nous prenons 7 à 8 points par longueur d'onde (contre 20 points avec des éléments  $Q_1$ ). En contrepartie les

interfaces courbes sont moins bien prises en compte par des larges mailles (voir figure 3.9). L'utilisation d'éléments finis courbes  $Q_k$  permet une approximation beaucoup plus précise de la géométrie. Le principe consiste à paramétrer les arêtes (ou les faces en dimension 3) des éléments non plus par des fonctions affines mais par des polynômes de degré  $k$  (voir figure 3.10). Considérons par exemple l'élément ABCD représenté sur la figure 3.11 et

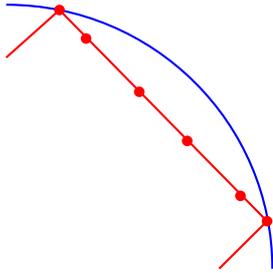


FIG. 3.9: Approximation d'une frontière courbe par des éléments finis  $Q_5$  classiques

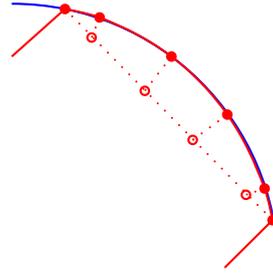


FIG. 3.10: Approximation d'une frontière courbe par des éléments finis  $Q_5$  courbes

supposons que nous connaissions  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  les paramétrages respectifs sur  $[0, 1]$  des quatre "arêtes"  $AB, BC, DC$  et  $AD$ . Comme indiqué dans [79] on peut alors définir une

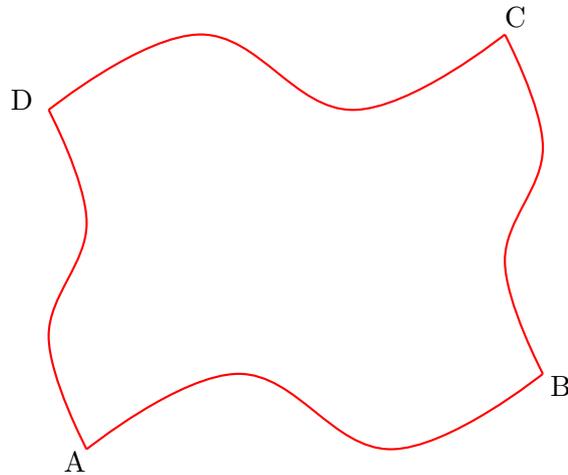


FIG. 3.11: L'élément courbe ABCD

fonction  $F$ , transformant le carré unité en l'élément courbe  $ABCD$  par

$$\begin{aligned} F(\xi_1, \xi_2) &= (1 - \xi_2)f_1(\xi_1) + \xi_1 f_2(\xi_2) + \xi_2 f_3(\xi_1) + (1 - \xi_1)f_4(\xi_2) \\ &\quad - (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)f_1(0) - \xi_1(1 - \xi_2)f_1(1) - (1 - \xi_1)\xi_2 f_3(0) - \xi_1 \xi_2 f_3(1). \end{aligned}$$

$F$  transforme exactement la frontière du carré unité en la frontière de  $ABCD$ . Cette fonction n'est en général pas inversible et encore moins polynomiale. Pour pallier cette difficulté nous

allons donc approcher chaque arête par une arête paramétrée par un polynôme d'un certain degré.

Pour illustrer notre propos nous présentons la méthode pour des éléments finis  $Q_5$ . Intéressons-nous à l'arête  $AB$  paramétrée par la fonction  $f_1$  et considérons  $f_1(\nu_i)$  les images par  $f_1$  des six points de Gauss-Lobatto d'ordre 5 (voir figure 3.12). Nous pouvons alors approcher

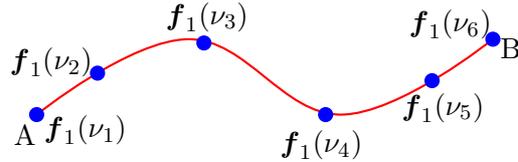


FIG. 3.12: L'arête AB

$f_1$  par une fonction polynômiale de degré 5 définie comme un polynôme de Lagrange par

$$\hat{f}_1(\xi) = \sum_{i=1}^6 f_1(\nu_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 \frac{\xi - \nu_j}{\nu_i - \nu_j}$$

qui nous fournit le paramétrage de l'arête approchée représentée en bleu sur la figure 3.13.

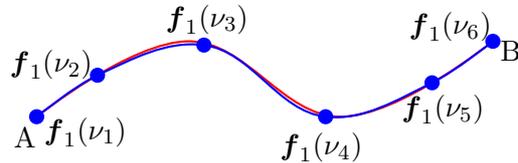


FIG. 3.13: L'arête AB et son approximation par  $\hat{f}$

On définit de la même façon les approximations des trois autres arêtes, et la nouvelle fonction, polynômiale et bijective  $\hat{F}$  est obtenue par la formule :

$$\begin{aligned} \hat{F}(\xi_1, \xi_2) &= (1 - \xi_2)\hat{f}_1(\xi_1) + \xi_1\hat{f}_2(\xi_2) + \xi_2\hat{f}_3(\xi_1) + (1 - \xi_1)\hat{f}_4(\xi_2) \\ &- (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)\hat{f}_1(0) - \xi_1(1 - \xi_2)\hat{f}_1(1) - (1 - \xi_1)\xi_2\hat{f}_3(0) - \xi_1\xi_2\hat{f}_3(1). \end{aligned}$$

## Chapitre 4

# Questions théoriques concernant les problèmes semi-discrets

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'étude de la convergence des schémas semi-discret primal-primal et dual-dual. Nous montrerons à la première section que l'analyse de l'erreur du schéma primal-primal peut se faire de manière très classique et nous verrons à la deuxième section que cette analyse ne peut être appliquée au schéma dual-dual à cause des espaces fonctionnels qui lui sont associés. Nous donnerons cependant quelques pistes pour mener cette étude.

Contenu

---

Introduction . . . . .	53
4.1 Équivalence entre les formulations du premier et du second ordre	53
4.2 Analyse du cas primal-primal . . . . .	56
4.3 Les difficultés posées par le problème dual-dual . . . . .	60
4.3.1 Définition de la projection elliptique associée au problème dual-dual	60
4.3.2 Les différences avec le problème primal-primal . . . . .	61
4.3.3 Existence et unicité du problème (4.3.2) . . . . .	61

---

## Introduction

L'analyse classique de la convergence d'un schéma semi-discret s'appuie sur la définition d'une projection convenablement choisie de la solution continue sur l'espace d'approximation, dite projection elliptique. Cette projection est en général définie comme étant la solution d'un problème elliptique associé au problème d'évolution. L'étude s'effectue alors en deux étapes :

1. On établit des estimations d'erreur entre cette projection et la solution du problème continu.
2. À l'aide de techniques d'énergie on relie ces estimations d'erreur aux estimations d'erreur entre la solution du problème continu et la solution du problème semi-discret.

Nous ne nous intéresserons ici qu'à la première étape et nous renvoyons à la thèse de J. Rodríguez [77].

## 4.1 Équivalence entre les formulations du premier et du second ordre

L'étude de la convergence du problème semi-discret consiste à comparer la solution du problème continu, (c'est-à-dire la solution associée à la formulation primale-primale (2.3.2) ou à la formulation duale-duale (2.3.6)), à la solution du problème discret, (la solution associée à la formulation variationnelle primale-primale semi-discrète (3.2.3) ou à la la formulation variationnelle duale-duale semi-discrète (3.1.1)). Toutes ces formulations sont des formulations du premier ordre et il se trouve qu'il est plus simple de considérer des formulations du second ordre. Nous utiliserons donc les propositions suivantes qui montrent l'équivalence entre le premier ordre et le second ordre.

**Proposition 4.1.1** *Si  $p$  et  $\mathbf{v}_s$  sont solutions de la formulation variationnelle primale-primale du premier ordre (2.3.2), alors elles sont solutions de la formulation variationnelle du second ordre :*

*Trouver  $(p, \mathbf{v}_s) : t \mapsto H^1(\Omega_f) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s)$  tel que tout  $(q, \mathbf{w}_s)$  de  $H^1(\Omega_f) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s)$  vérifie*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_f} \frac{pq}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} \frac{1}{\rho_f} \nabla p \cdot \nabla q - \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} q (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{w}_s + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \nabla(\mathbf{v}_s) : \nabla(\mathbf{w}_s) + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_s = 0. \end{array} \right. \quad (4.1.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{w}_s + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \nabla(\mathbf{v}_s) : \nabla(\mathbf{w}_s) + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_s = 0. \end{array} \right. \quad (4.1.1b)$$

*Réciproquement, si  $p$  et  $\mathbf{v}_s$  sont solutions de (4.1.1), et si nous posons  $\rho_f \frac{d\mathbf{v}_f}{dt} = \nabla p$  et  $\frac{d\sigma}{dt} = \underline{\underline{C}} \nabla \mathbf{v}_s$  alors  $(p, \mathbf{v}_f, \mathbf{v}_s, \underline{\underline{\sigma}})$  est solution de la formulation variationnelle primale-primale du premier ordre (2.3.2).*

**Proposition 4.1.2** *Si  $\mathbf{v}_f$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  sont solutions de la formulation variationnelle duale-duale du premier ordre (2.3.6), alors elles sont solutions de la formulation variationnelle du second ordre :*

Trouver  $(p, \mathbf{v}_s) : t \mapsto H^1(\Omega_f) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s)$  tel que tout  $(q, \mathbf{w}_s)$  de  $H^1(\Omega_f) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s)$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{w}_f + \int_{\Omega_f} \operatorname{div} \mathbf{v}_f \operatorname{div} \mathbf{w}_f + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{w}_f \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}} + \int_{\Omega_s} \mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{div} \underline{\underline{\xi}} - \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\xi}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}) = 0. \end{array} \right. \quad (4.1.2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}} + \int_{\Omega_s} \mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{div} \underline{\underline{\xi}} - \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\xi}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}) = 0. \end{array} \right. \quad (4.1.2b)$$

Réciproquement, si  $\mathbf{v}_f$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  sont solutions de (4.1.2), et si nous posons  $\frac{dp}{dt} = c_f^2 \rho_f \operatorname{div} \mathbf{v}_f$  et  $\rho_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}}$  alors  $(p, \mathbf{v}_f, \mathbf{v}_s, \underline{\underline{\sigma}})$  est solution de la formulation variationnelle duale-duale du premier ordre (2.3.6).

La démonstration de ces deux propositions est évidente.

Pour obtenir des propositions similaires pour les formulations semi-discrétisées il faut considérer des maillages réguliers, on a alors :

**Proposition 4.1.3** Si  $p^h$  et  $\mathbf{v}_s^h$  sont solutions de la formulation variationnelle semi-discrétisée du premier ordre (3.2.3) alors elles sont solutions de la formulation variationnelle semi-discrétisée du second ordre :

Trouver  $(p^h, \mathbf{v}_s^h) : t \mapsto (H^1(\Omega_f))_h \times (H^1(\Omega_s))_h$  tel que tout  $(q^h, \mathbf{w}_s^h)$  de  $(H^1(\Omega_f))_h \times (H^1(\Omega_s))_h$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_f} \frac{p^h q^h}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} \frac{1}{\rho_f} \nabla p^h \cdot \nabla q^h - \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} q^h (\mathbf{v}_s^h \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{v}_s^h \cdot \mathbf{w}_s^h + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{v}_s^h) : \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{w}_s^h) + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} p^h \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_s^h = 0. \end{array} \right. \quad (4.1.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{v}_s^h \cdot \mathbf{w}_s^h + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{v}_s^h) : \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{w}_s^h) + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} p^h \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_s^h = 0. \end{array} \right. \quad (4.1.3b)$$

Réciproquement, si  $p^h$  et  $\mathbf{v}_s^h$  sont solutions de (4.1.3) et si  $(\mathbf{v}_f^h, \underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{\underline{\gamma}}^h)$  est solution de :

Trouver  $(\mathbf{v}_f^h, \underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{\underline{\gamma}}^h) : t \mapsto (\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h \times (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h \times (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h$  tel que tout  $(\mathbf{w}_f^h, \underline{\underline{\xi}}^h)$  de  $(\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h \times (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f^h \cdot \mathbf{w}_f^h + \int_{\Omega_f} \nabla p^h \cdot \mathbf{w}_f^h = 0, \end{array} \right. \quad (4.1.4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}}^h : \underline{\underline{\xi}}^h - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\gamma}}^h : \underline{\underline{\xi}}^h = 0, \end{array} \right. \quad (4.1.4b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\gamma}}^h : \underline{\underline{\xi}}^h - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{v}_s^h) : \underline{\underline{\xi}}^h = 0. \end{array} \right. \quad (4.1.4c)$$

alors  $(p^h, \mathbf{v}_s^h, \mathbf{v}_f^h, \underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{\underline{\gamma}}^h)$  est solution de la formulation variationnelle semi-discrétisée du premier ordre (3.2.3).

## 4.1 Équivalence entre les formulations du premier et du second ordre

### Démonstration :

La démonstration de cette proposition repose sur le fait que, comme nous utilisons des maillages réguliers, les ensembles  $\nabla(H^1(\Omega_f))_h$  et  $\underline{\underline{\nabla}}(H^1(\Omega_s))_h$  sont respectivement inclus dans  $(\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h$  et  $(\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h$ .

Pour tout  $q^h$  de  $(H^1(\Omega_f))_h$  il est donc possible de trouver  $\mathbf{w}_f^h = \nabla q^h$  dans  $(\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h$  et l'équation (3.2.3b) implique donc :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f^h \cdot \nabla q^h + \int_{\Omega_f} \nabla p^h \cdot \nabla q^h = 0.$$

Il suffit alors de dériver l'équation (3.2.3a)<sup>(8)</sup> et d'utiliser cette dernière relation pour obtenir (4.1.3a). De même, pour tout  $\mathbf{w}_s^h$  de  $(H^1(\Omega_s))_h$  il est possible de trouver  $\underline{\underline{\xi}}_1^h = \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{w}_s^h)$  et  $\underline{\underline{\xi}}_2^h = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{w}_s^h)$  dans  $(\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h$  et les équations (3.2.3d) et (3.2.3e) impliquent donc respectivement :

$$\int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}}^h : \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{w}_s^h) - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\gamma}}^h : \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{w}_s^h) = 0 \quad (4.1.5)$$

et

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\gamma}}^h : \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{w}_s^h) - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{v}_s^h) : \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{w}_s^h) = 0. \quad (4.1.6)$$

On utilise la première relation dans (3.2.3c) et on dérive cette nouvelle équation pour obtenir :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{v}_s^h \cdot \mathbf{w}_s^h + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\gamma}}^h : \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{w}_s^h) + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} p^h \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_s^h = 0.$$

Il ne reste plus qu'à utiliser (4.1.6) pour conclure.

La démonstration de la réciproque se fait de manière très similaire. ■

On peut également simplifier le système auxiliaire (4.1.4) grâce à la proposition :

**Proposition 4.1.4** *Si  $\mathbf{v}_f^h$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^h$  sont solutions de la formulation variationnelle (4.1.4) alors elles sont solutions de la formulation variationnelle :*

*Trouver  $(\mathbf{v}_f^h, \underline{\underline{\sigma}}^h) : t \mapsto (\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h \times (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h$  tel que tout  $(\mathbf{w}_f^h, \underline{\underline{\xi}}^h)$  de  $(\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h \times (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h$  vérifie*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f^h \cdot \mathbf{w}_f^h + \int_{\Omega_f} \nabla p^h \cdot \mathbf{w}_f^h = 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}}^h : \underline{\underline{\xi}}^h - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{v}_s^h) : \underline{\underline{\xi}}^h = 0. \end{array} \right. \quad (4.1.7a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f^h \cdot \mathbf{w}_f^h + \int_{\Omega_f} \nabla p^h \cdot \mathbf{w}_f^h = 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}}^h : \underline{\underline{\xi}}^h - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{v}_s^h) : \underline{\underline{\xi}}^h = 0. \end{array} \right. \quad (4.1.7b)$$

*Réciproquement, si  $\mathbf{v}_f^h$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^h$  sont solutions de (4.1.7) et si  $\underline{\underline{\gamma}}^h$  est solution de :*

---

8. En supposant toutefois que  $\rho_f$  soit constante par maille.

Trouver  $\underline{\underline{\gamma}}^h : t \mapsto (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h$  tel que tout  $\underline{\underline{\xi}}^h$  de  $(\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h$  vérifie

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\gamma}}^h : \underline{\underline{\xi}}^h - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{v}_s^h) : \underline{\underline{\xi}}^h = 0, \quad (4.1.8)$$

alors  $(\mathbf{v}_f^h, \underline{\underline{\sigma}}^h, \underline{\underline{\gamma}}^h)$  est solution de la formulation variationnelle (4.1.4).

**Démonstration :**

Il suffit de choisir une fonction test  $\underline{\underline{\xi}}_1^h \in (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h$  dans l'équation (4.1.4b) et une fonction test  $\underline{\underline{\xi}}_2^h = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\xi}}_1^h \in (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h$  dans l'équation (4.1.4c). ■

On a une proposition analogue pour la formulation duale-duale :

**Proposition 4.1.5** *Si  $\mathbf{v}_f^h$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^h$  sont solutions de la formulation variationnelle semi-discrétisée du premier ordre (3.1.1) alors elles sont solutions de la formulation variationnelle semi-discrétisée du second ordre :*

Trouver  $(\mathbf{v}_f^h, \underline{\underline{\sigma}}^h) : t \mapsto (\widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f))_h \times (\widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s))_h$  tel que tout  $(\mathbf{w}_F^h, \underline{\underline{\xi}}^h)$  dans  $(\widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f))_h \times (\widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s))_h$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f^h \cdot \mathbf{w}_f^h + \int_{\Omega_f} c_f^2 \rho_f \operatorname{div} \mathbf{v}_f^h \operatorname{div} \mathbf{w}_f^h + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}}^h \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{w}_f^h \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}}^h : \underline{\underline{\xi}}^h + \int_{\Omega_s} \frac{1}{\rho_s} \operatorname{div} \underline{\underline{\xi}}^h \cdot \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^h - \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\xi}}^h \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{v}_f^h \cdot \mathbf{n}) = 0. \end{array} \right. \quad (4.1.9a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega_s} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}}^h : \underline{\underline{\xi}}^h + \int_{\Omega_s} \frac{1}{\rho_s} \operatorname{div} \underline{\underline{\xi}}^h \cdot \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^h - \frac{d}{dt} \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\xi}}^h \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{v}_f^h \cdot \mathbf{n}) = 0. \end{array} \right. \quad (4.1.9b)$$

Réciproquement, si  $\mathbf{v}_f^h$  et  $\underline{\underline{\sigma}}^h$  et  $\mathbf{v}_s^h$  sont solutions de (4.1.9) et si  $(p^h, \mathbf{v}_s^h)$  est solution de :

Trouver  $(p^h, \mathbf{v}_s^h) : t \mapsto (L^2(\Omega_f))_h \times (\mathbf{L}^2(\Omega_s))_h$  tel que tout  $(q^h, \mathbf{w}_s^h)$  dans  $(L^2(\Omega_f))_h \times (\mathbf{L}^2(\Omega_s))_h$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \frac{p^h q^h}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} q^h \operatorname{div} \mathbf{v}_f^h = 0, \end{array} \right. \quad (4.1.10a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{v}_s^h \cdot \mathbf{w}_s^h - \int_{\Omega_s} \mathbf{w}_s^h \cdot \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^h = 0 = 0, \end{array} \right. \quad (4.1.10b)$$

alors  $(p^h, \mathbf{v}_s^h, \mathbf{v}_f^h, \underline{\underline{\sigma}}^h)$  est solution de la formulation variationnelle semi-discrétisée du premier ordre (3.1.1).

La démonstration de cette proposition se fait de la même manière que les deux précédentes.

## 4.2 Analyse du cas primal-primal

Cette section reprend des démonstrations présentées dans la thèse de J. Rodríguez [77].

On définit  $\Pi_{pp}^h$ , l'opérateur de projection elliptique, par :

$$\begin{aligned} H^1(\Omega_f) \times \mathbf{L}^2(\Omega_f) \times \mathbb{L}^2(\Omega_s) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s) &\longrightarrow (H^1(\Omega_f))_h \times (\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h \times (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h \times (\mathbf{H}^1(\Omega_s))_h \\ (p, \mathbf{v}_f, \underline{\underline{\sigma}}, \mathbf{v}_s) &\longmapsto (\widehat{p}^h, \widehat{\mathbf{v}}_f^h, \widehat{\underline{\underline{\sigma}}}^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h) \end{aligned}$$

où  $(\widehat{p}^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h)$  est défini comme étant solution du problème :

Trouver  $(\widehat{p}^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h) \in (H^1(\Omega_f))_h \times (H^1(\Omega_s))_h$  tel que tout  $(q^h, \mathbf{w}_s^h)$  de  $(H^1(\Omega_f))_h \times (H^1(\Omega_s))_h$  vérifie

$$\begin{cases} \int_{\Omega_f} \frac{(p - \widehat{p}^h) q^h}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} \frac{1}{\rho_f} \nabla(p - \widehat{p}^h) \cdot \nabla q^h - \int_{\Gamma} q^h (\mathbf{v}_s - \widehat{\mathbf{v}}_s^h) \cdot \mathbf{n} = 0, & (4.2.1a) \\ \int_{\Omega_s} \rho_s (\mathbf{v}_s - \widehat{\mathbf{v}}_s^h) \cdot \mathbf{w}_s^h + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \nabla(\mathbf{v}_s - \widehat{\mathbf{v}}_s^h) : \nabla(\mathbf{w}_s^h) + \int_{\Gamma} (p - \widehat{p}^h) \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_s^h = 0, & (4.2.1b) \end{cases}$$

et  $(\widehat{\mathbf{v}}_s^h, \widehat{\underline{\underline{\sigma}}}^h)$  est solution du problème :

Trouver  $(\widehat{\mathbf{v}}_s^h, \widehat{\underline{\underline{\sigma}}}^h) \in (\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h \times (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h$  tel que tout  $(\mathbf{w}_f^h, \underline{\underline{\xi}}^h)$  de  $(\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h \times (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h$  vérifie

$$\begin{cases} \int_{\Omega_f} (\mathbf{v}_f - \widehat{\mathbf{v}}_f^h) \cdot \mathbf{w}_f^h + \int_{\Omega_f} \nabla(p - \widehat{p}^h) \cdot \mathbf{w}_f^h = 0, & (4.2.2a) \\ \int_{\Omega_s} (\underline{\underline{\sigma}} - \widehat{\underline{\underline{\sigma}}}^h) : \underline{\underline{\xi}}^h - \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \nabla(\mathbf{v}_s - \widehat{\mathbf{v}}_s^h) : \underline{\underline{\xi}}^h = 0. & (4.2.2b) \end{cases}$$

On a alors la

**Proposition 4.2.1** *Pour tout  $(p, \mathbf{v}_f, \underline{\underline{\sigma}}, \mathbf{v}_s) \in H^1(\Omega_f) \times \mathbf{L}^2(\Omega_f) \times \mathbb{L}^2(\Omega_s) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s)$ , la projection elliptique  $\Pi_{pp}^h$  satisfait l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} &\left\| \begin{aligned} &\|\widehat{p}^h - p\|_{H^1(\Omega_f)} + \|\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{v}_f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)} + \|\widehat{\underline{\underline{\sigma}}}^h - \underline{\underline{\sigma}}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_s)} + \|\widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{v}_s\|_{H^1(\Omega_s)} \leq \\ &\mathcal{C} \left[ \inf_{p^h \in (H^1(\Omega_f))_h} \|p^h - p\|_{H^1(\Omega_s)} + \inf_{\mathbf{v}_f^h \in (\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h} \|\mathbf{v}_f^h - \mathbf{v}_f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)} \right] \\ &+ \mathcal{C} \left[ \inf_{\mathbf{v}_s^h \in (\mathbf{H}^1(\Omega_s))_h} \|\mathbf{v}_s^h - \mathbf{v}_s\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)} + \inf_{\underline{\underline{\sigma}}^h \in (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h} \|\underline{\underline{\sigma}}^h - \underline{\underline{\sigma}}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_s)} \right]. \end{aligned} \right. & (4.2.3) \end{aligned}$$

Si les maillages dans le fluide et dans le solide sont réguliers de pas d'espace respectif  $h_f$  et  $h_s$  et si les éléments finis sont des éléments  $Q_k$  on a de plus<sup>(9)</sup> :

$$\begin{aligned} &\left\| \begin{aligned} &\|\widehat{p}^h - p\|_{H^1(\Omega_f)} + \|\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{v}_f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)} + \|\widehat{\underline{\underline{\sigma}}}^h - \underline{\underline{\sigma}}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_s)} + \|\widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{v}_s\|_{H^1(\Omega_s)} \leq \\ &\mathcal{C} h^k \left[ \|p\|_{H^{k+1}(\Omega_s)} + \|\mathbf{v}_f\|_{\mathbf{H}^k(\Omega_f)} + \|\mathbf{v}_s\|_{\mathbf{H}^{k+1}(\Omega_s)} + \|\underline{\underline{\sigma}}\|_{\mathbb{H}^k(\Omega_s)} \right]. \end{aligned} \right. & (4.2.4) \end{aligned}$$

9. À condition bien sûr que les fonction  $p$ , et  $\mathbf{v}_s$  soient dans des espaces de type  $H^{k+1}$  et que  $\mathbf{v}_f$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  soient dans des espaces de type  $H^k$ .

avec  $h = \min(h_f, h_s)$

**Démonstration :**

Comme  $(\widehat{p}^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h)$  est solution de (4.2.1), on déduit du lemme de Cea [21] le

**Lemme 4.2.1**  $(\widehat{p}^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h)$  satisfait l'inégalité

$$\left| \begin{aligned} & \|\widehat{p}^h - p\|_{H^1(\Omega_f)} + \|\widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{v}_s\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)} \leq \\ & \mathcal{C} \left[ \inf_{p^h \in (H^1(\Omega_f))_h} \|p^h - p\|_{H^1(\Omega_s)} + \inf_{\mathbf{v}_s^h \in (\mathbf{H}^1(\Omega_s))_h} \|\mathbf{v}_s^h - \mathbf{v}_s\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)} \right]. \end{aligned} \right. \quad (4.2.5)$$

Bien que la démonstration de ce lemme soit bien connue et simple à effectuer, nous la réécrivons ici afin de mieux mettre en lumière les difficultés que nous rencontrerons au cours de l'analyse de la formulation duale-duale à la section suivante :

**Démonstration :**

Nous définissons la forme bilinéaire  $a_{pp}$  par

$$\begin{aligned} H^1(\Omega_f) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s) \times H^1(\Omega_f) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((p, \mathbf{v}_s), (q, \mathbf{w}_s)) & \longmapsto a_{pp}((p, \mathbf{v}_s), (q, \mathbf{w}_s)) \end{aligned}$$

$$\left| \begin{aligned} a_{pp}((p, \mathbf{v}_s), (q, \mathbf{w}_s)) & = \int_{\Omega_f} \frac{pq}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} \frac{1}{\rho_f} \nabla p \cdot \nabla q - \int_{\Gamma} q \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} \\ & + \int_{\Omega_s} \rho_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{w}_s + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v}_s : \underline{\underline{\nabla}}(\mathbf{w}_s^h) + \int_{\Gamma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_s^h \end{aligned} \right.$$

Nous posons  $X = H^1(\Omega_f) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s)$  et  $X_h = (H^1(\Omega_f))_h \times (\mathbf{H}^1(\Omega_s))_h$ . On vérifie facilement que  $a_{pp}$  est **continue** et **coercive** sur  $X$ . Il est également évident que si  $(\widehat{p}^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h)$  est solution du problème (4.2.1), il est aussi solution de :

*Trouver  $(\widehat{p}^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h) \in (H^1(\Omega_f))_h \times (\mathbf{H}^1(\Omega_s))_h$  tel que tout  $(q^h, \mathbf{w}_s^h)$  de  $(H^1(\Omega_f))_h \times (\mathbf{H}^1(\Omega_s))_h$  vérifie*

$$a_{pp}((\widehat{p}^h - p, \widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{v}_s), (q^h, \mathbf{w}_s^h)) = 0. \quad (4.2.6)$$

En utilisant la propriété de coercivité de  $a_{pp}$  on montre que :

$$\mathcal{C}_1 \|(\widehat{p}^h - q^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{w}_s^h)\|_X^2 \leq a_{pp}((\widehat{p}^h - q^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{w}_s^h), (\widehat{p}^h - q^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{w}_s^h)), \quad (4.2.7)$$

avec

$$\|p, \mathbf{v}_s\|_X^2 = \|p\|_{H^1(\Omega_f)}^2 + \|\mathbf{v}_s\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)}^2.$$

Or, d'après (4.2.6) :

$$a_{pp}((\widehat{p}^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h), (q^h, \mathbf{w}_s^h)) = a_{pp}(p, \mathbf{v}_s), (q^h, \mathbf{w}_s^h),$$

donc

$$\mathcal{C}_1 \|(\widehat{p}^h - q^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{w}_s^h)\|_X^2 \leq a_{pp}((p - q^h, \mathbf{v}_s - \mathbf{w}_s^h), (\widehat{p}^h - q^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{w}_s^h)).$$

En utilisant maintenant la continuité de  $a_{pp}$ , on montre que :

$$a_{pp}((p-q^h, \mathbf{v}_s - \mathbf{w}_s^h), (\widehat{p}^h - q^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{w}_s^h)) \leq \mathcal{C}_2 \|(p-q^h, \mathbf{v}_s - \mathbf{w}_s^h)\|_X \|(\widehat{p}^h - q^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{w}_s^h)\|_X. \quad (4.2.8)$$

En combinant les inégalités (4.2.7) et (4.2.8) on établit :

$$\|(\widehat{p}^h - q^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{w}_s^h)\|_X \leq \mathcal{C} \|(p - q^h, \mathbf{v}_s - \mathbf{w}_s^h)\|_X$$

Finalement, en utilisant le fait que (inégalité triangulaire) :

$$\|(\widehat{p}^h - p, \widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{v}_s)\|_X \leq \|(\widehat{p}^h - q^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{w}_s^h)\|_X + \|(p - q^h, \mathbf{v}_s - \mathbf{w}_s^h)\|_X$$

on obtient

$$\|(\widehat{p}^h - p, \widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{v}_s)\|_X \leq (\mathcal{C} + 1) \|(p - q^h, \mathbf{v}_s - \mathbf{w}_s^h)\|_X,$$

or cette inégalité est vérifiée pour tout  $(q^h, \mathbf{w}_s^h)$  de  $(H^1(\Omega_f))_h \times (H^1(\Omega_s))_h$ , donc :

$$\|(\widehat{p}^h - p, \widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{v}_s)\|_X \leq (\mathcal{C} + 1) \inf_{(q^h, \mathbf{w}_s^h) \in (H^1(\Omega_f))_h \times (H^1(\Omega_s))_h} \|(p - q^h, \mathbf{v}_s - \mathbf{w}_s^h)\|_X.$$

ce qui implique bien l'inégalité (4.2.5) ■

Intéressons-nous maintenant au couple  $(\mathbf{v}_f, \underline{\sigma})$ . Soit  $\mathbf{w}_f^h$  de  $(\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} \|\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{w}_f^h\|^2 &= \int_{\Omega_f} (\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{v}_f + \mathbf{v}_f - \mathbf{w}_f^h) \cdot (\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{w}_f^h) \\ &= \int_{\Omega_f} (\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{v}_f) \cdot (\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{w}_f^h) + \int_{\Omega_f} (\mathbf{v}_f - \mathbf{w}_f^h) \cdot (\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{w}_f^h). \end{aligned}$$

Comme  $\widehat{\mathbf{v}}_f^h$  est solution de (4.2.2a), on a  $\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{w}_f^h \in (\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h$  et :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} \|\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{w}_f^h\|^2 &= - \int_{\Omega_f} \nabla(p - \widehat{p}^h) \cdot (\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{w}_f^h) + \int_{\Omega_f} (\mathbf{v}_f - \mathbf{w}_f^h) \cdot (\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{w}_f^h) \\ &\leq \mathcal{C} \left( \|p - \widehat{p}^h\|_{H^1(\Omega_f)} + \|\mathbf{v}_f - \mathbf{w}_f^h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)} \right) \|\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{w}_f^h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)}. \end{aligned}$$

Soit :

$$\|\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{w}_f^h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)} \leq \mathcal{C} \left( \|p - \widehat{p}^h\|_{H^1(\Omega_f)} + \|\mathbf{v}_f - \mathbf{w}_f^h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)} \right).$$

en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\|\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{v}_f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)} \leq \|\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{w}_f^h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)} + \|\mathbf{v}_f - \mathbf{w}_f^h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)},$$

on a :

$$\|\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{v}_f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)} \leq \mathcal{C} \left( \|p - \widehat{p}^h\|_{H^1(\Omega_f)} + \|\mathbf{v}_f - \mathbf{w}_f^h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)} \right).$$

et donc

$$\|\widehat{\mathbf{v}}_f^h - \mathbf{v}_f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)} \leq \mathcal{C} \left( \|p - \widehat{p}^h\|_{H^1(\Omega_f)} + \inf_{\mathbf{w}_f^h \in (\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h} \|\mathbf{v}_f - \mathbf{w}_f^h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)} \right). \quad (4.2.9)$$

On montre de même que

$$\|\underline{\underline{\widehat{\sigma}}}^h - \underline{\underline{\sigma}}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_s)} \leq \mathcal{C} \left( \|\widehat{\mathbf{v}}_s^h - \mathbf{v}_s\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)} + \inf_{\underline{\underline{\xi}}^h \in (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h} \|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\xi}}^h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_s)} \right) \quad (4.2.10)$$

Il ne reste plus qu'à utiliser les inégalités (4.2.5), (4.2.9) et (4.2.10) pour conclure la première partie de la proposition. Pour démontrer la seconde partie il suffit de rappeler que les espaces d'approximation  $(H^1(\Omega_f))_h$  et  $(\mathbf{H}^1(\Omega_s))_h$ , définis à l'aide des éléments finis  $Q_k$  continus sont tels que :

$$\inf_{p^h \in (H^1(\Omega_f))_h} \|p^h - p\|_{H^1(\Omega_s)} \leq \mathcal{C} h_f^k \|p\|_{H^{k+1}(\Omega_s)}$$

et

$$\inf_{\mathbf{v}_s^h \in (\mathbf{H}^1(\Omega_s))_h} \|\mathbf{v}_s^h - \mathbf{v}_s\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_s)} \leq \mathcal{C} h_s^k \|\mathbf{v}_s\|_{\mathbf{H}^{k+1}(\Omega_s)}$$

et que les espaces d'approximation  $\mathbf{L}^2(\Omega_f)$  et  $\mathbb{L}^2(\Omega_s)$ , définis à l'aide des éléments finis  $Q_k$  discontinus sont tels que :

$$\inf_{\mathbf{w}_f^h \in (\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h} \|\mathbf{v}_f - \mathbf{w}_f^h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)} \leq \mathcal{C} h_f^k \|\mathbf{v}_f\|_{\mathbf{H}^k(\Omega_f)}$$

et

$$\inf_{\underline{\underline{\xi}}^h \in (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h} \|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\xi}}^h\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_s)} \leq \mathcal{C} h_s^k \|\sigma\|_{\mathbb{H}^k(\Omega_s)}.$$

■

### 4.3 Les difficultés posées par le problème dual-dual

#### 4.3.1 Définition de la projection elliptique associée au problème dual-dual

On définit l'opérateur de projection elliptique,  $\Pi_{dd}^h$ , par :

$$\begin{aligned} L^2(\Omega_f) \times \widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f) \times \widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s) \times \mathbf{L}^2(\Omega_s) &\rightarrow (L^2(\Omega_f))_h \times (\widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f))_h \times (\widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s))_h \times (\mathbf{L}^2(\Omega_s))_h \\ (p, \mathbf{v}_f, \underline{\underline{\sigma}}, \mathbf{v}_s) &\mapsto (p^h, \widehat{\mathbf{v}}_f^h, \underline{\underline{\widehat{\sigma}}}^h, \widehat{\mathbf{v}}_s^h) \end{aligned}$$

où  $(\widehat{\mathbf{v}}_f^h, \underline{\underline{\widehat{\sigma}}}^h)$  est défini comme étant solution du problème :

Trouver  $(\widehat{\mathbf{v}}_f^h, \underline{\underline{\widehat{\sigma}}}^h) \in (\widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f))_h \times (\widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s))_h$  tel que tout  $(\mathbf{w}_f^h, \underline{\underline{\xi}}^h)$  dans  $(\widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f))_h \times (\widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s))_h$  vérifie

$$\begin{cases} \int_{\Omega_f} \rho_f (\mathbf{v}_f - \widehat{\mathbf{v}}_f^h) \cdot \mathbf{w}_f^h + \int_{\Omega_f} c_f^2 \rho_f \operatorname{div}(\mathbf{v}_f - \widehat{\mathbf{v}}_f^h) \operatorname{div} \mathbf{w}_f^h + \int_{\Gamma} ((\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\widehat{\sigma}}}^h) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{w}_f^h \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ \int_{\Omega_s} \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\widehat{\sigma}}}^h) : \underline{\underline{\xi}}^h + \int_{\Omega_s} \frac{1}{\rho_s} \operatorname{div} \underline{\underline{\xi}}^h \cdot \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\widehat{\sigma}}}^h) - \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\xi}}^h \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} ((\mathbf{v}_f - \widehat{\mathbf{v}}_f^h) \cdot \mathbf{n}) = 0. \end{cases}$$

et  $(\widehat{\mathbf{v}}_s^h, \underline{\underline{\widehat{\sigma}}}^h)$  est solution du problème :

### 4.3 Les difficultés posées par le problème dual-dual

Trouver  $(\widehat{\mathbf{v}}_s^h, \widehat{\underline{\underline{\sigma}}}) \in (\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h \times (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h$  tel que tout  $(\mathbf{w}_f^h, \underline{\underline{\xi}}^h)$  de  $(\mathbf{L}^2(\Omega_f))_h \times (\mathbb{L}^2(\Omega_s))_h$  vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_f} \frac{(p - \widehat{p}^h) q^h}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} q^h \operatorname{div}(\mathbf{v}_f - \widehat{\mathbf{v}}_f^h) = 0, \\ \int_{\Omega_s} \rho_s (\mathbf{v}_s - \widehat{\mathbf{v}}_s^h) \cdot \mathbf{w}_s^h - \int_{\Omega_s} \mathbf{w}_s^h \cdot \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}} - \widehat{\underline{\underline{\sigma}}}) = 0 = 0, \end{array} \right. \quad (4.3.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_f} \frac{(p - \widehat{p}^h) q^h}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} q^h \operatorname{div}(\mathbf{v}_f - \widehat{\mathbf{v}}_f^h) = 0, \\ \int_{\Omega_s} \rho_s (\mathbf{v}_s - \widehat{\mathbf{v}}_s^h) \cdot \mathbf{w}_s^h - \int_{\Omega_s} \mathbf{w}_s^h \cdot \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}} - \widehat{\underline{\underline{\sigma}}}) = 0 = 0, \end{array} \right. \quad (4.3.1b)$$

#### 4.3.2 Les différences avec le problème primal-primal

Nous définissons la forme bilinéaire  $a_{dd}$  associée à la projection elliptique  $\Pi_{dd}^h$  par

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f) \times \widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s) \times \widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f) \times \widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((\mathbf{v}_f, \underline{\underline{\sigma}}), (\mathbf{w}_f, \underline{\underline{\xi}})) &\longmapsto a_{dd}((\mathbf{v}_f, \underline{\underline{\sigma}}), (\mathbf{w}_f, \underline{\underline{\xi}})) \end{aligned}$$

$$\left| \begin{aligned} a_{dd}((\mathbf{v}_f, \underline{\underline{\sigma}}), (\mathbf{w}_f, \underline{\underline{\xi}})) &= \int_{\Omega_f} \rho_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{w}_f^h + \int_{\Omega_f} c_f^2 \rho_f \operatorname{div} \mathbf{v}_f \operatorname{div} \mathbf{w}_f^h + \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{w}_f^h \cdot \mathbf{n}) \\ &+ \int_{\Omega_s} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\xi}}^h + \int_{\Omega_s} \frac{1}{\rho_s} \operatorname{div} \underline{\underline{\xi}}^h \cdot \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} - \int_{\Gamma} (\underline{\underline{\xi}}^h \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}) \end{aligned} \right.$$

Le fait de chercher  $\mathbf{v}_f$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  dans  $\widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f) \times \widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s)$ , c'est-à-dire d'imposer à  $\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}$  et à  $(\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$  d'appartenir à  $L^2(\Gamma)$  nous permet d'assurer la **continuité** de  $a_{dd}^h$  mais nous fait perdre la propriété de **coercivité** qui nous avait permis d'utiliser le lemme de Cea pour le problème primal-primal. Nous ne pouvons donc pas déduire d'estimations d'erreur pour le problème dual-dual semi-discrétisé. Nous pensons cependant qu'une étude du problème :

Trouver  $(\widehat{\mathbf{v}}_f, \widehat{\underline{\underline{\sigma}}}) \in \widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f) \times \widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s)$  tel que tout  $(\mathbf{w}_f, \underline{\underline{\xi}})$  dans  $\widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f) \times \widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s)$  vérifie

$$a_{dd}((\mathbf{v}_f, \underline{\underline{\sigma}}), (\mathbf{w}_f, \underline{\underline{\xi}})) = l(\mathbf{w}_f, \underline{\underline{\xi}}), \quad (4.3.2)$$

avec

$$l(\mathbf{w}_f, \underline{\underline{\xi}}) = \int_{\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_f + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{g}} : \underline{\underline{\xi}}, \quad \mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega_f) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{g}} \in \mathbb{L}^2(\Omega_s),$$

peut fournir des pistes pour obtenir de telles estimations.

#### 4.3.3 Existence et unicité du problème (4.3.2)

Nous allons dans un premier temps étudier un nouveau problème, obtenu par perturbation du problème (4.3.2) de telle sorte que la forme bilinéaire associée à ce nouveau problème soit continue et coercive. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , nous considérons la formulation variationnelle régularisée :

Trouver  $(\mathbf{v}_f^\alpha, \underline{\underline{\sigma}}^\alpha) \in \widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f) \times \widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s)$  tel que tout  $(\mathbf{w}_f, \underline{\underline{\xi}})$  dans  $\widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f) \times \widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s)$  vérifie

$$a^\alpha((\mathbf{v}_f^\alpha, \underline{\underline{\sigma}}^\alpha), (\mathbf{w}_f, \underline{\underline{\xi}})) = 0. \quad (4.3.3)$$

avec

$$a^\alpha((\mathbf{v}_f^\alpha, \underline{\underline{\sigma}}^\alpha), (\mathbf{w}_f, \underline{\underline{\xi}})) = a((\mathbf{v}_f^\alpha, \underline{\underline{\sigma}}^\alpha), (\mathbf{w}_f, \underline{\underline{\xi}})) + \alpha \int_\Gamma (\mathbf{v}_f^\alpha \cdot \mathbf{n})(\mathbf{w}_f \cdot \mathbf{n}) + \alpha \int_\Gamma (\underline{\underline{\sigma}}^\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(\underline{\underline{\tau}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}).$$

Il est évident que  $a^\alpha$  est continue et coercive, ce problème admet donc une unique solution  $(\mathbf{v}^\alpha, \sigma^\alpha)$ . De plus on a

$$a^\alpha((\mathbf{v}_f^\alpha, \underline{\underline{\sigma}}^\alpha), (\mathbf{v}_f^\alpha, \underline{\underline{\sigma}}^\alpha)) = \int_{\Omega_f} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_f^\alpha + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{g}} : \underline{\underline{\sigma}}^\alpha$$

donc

$$a^\alpha((\mathbf{v}_f^\alpha, \underline{\underline{\sigma}}^\alpha), (\mathbf{v}_f^\alpha, \underline{\underline{\sigma}}^\alpha)) \leq \|\mathbf{v}_f^\alpha\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)} + \|\underline{\underline{\sigma}}^\alpha\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_s)} \|\underline{\underline{g}}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_s)} \leq \mathcal{C}F^2$$

avec  $F^2 = \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_f)}^2 + \|\underline{\underline{g}}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_s)}^2$ . Comme

$$\begin{aligned} a^\alpha((\mathbf{v}_f^\alpha, \underline{\underline{\sigma}}^\alpha), (\mathbf{v}_f^\alpha, \underline{\underline{\sigma}}^\alpha)) &= \int_{\Omega_f} \rho_f \|\mathbf{v}_f^\alpha\|^2 + \int_{\Omega_f} c_f^2 \rho_f \|\operatorname{div} \mathbf{v}_f^\alpha\|^2 \\ &\quad + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{A}} \|\underline{\underline{\sigma}}^\alpha\|^2 + \int_{\Omega_s} \frac{1}{\rho_s} \|\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^\alpha\|^2 + \alpha \int_\Gamma (\mathbf{v}_f^\alpha \cdot \mathbf{n})^2 + \alpha \int_\Gamma (\underline{\underline{\sigma}}^\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^2, \end{aligned}$$

on en déduit,

$$\|\mathbf{v}_f^\alpha\|_{H_{\operatorname{div}}(\Omega_f)} \leq \mathcal{C}F, \quad \|\sigma^\alpha\|_{\operatorname{div}(\Omega_s)} \leq \mathcal{C}F, \quad \|\mathbf{v}^\alpha\|_{L^2(\Gamma)} \leq \frac{\mathcal{C}F}{\sqrt{\alpha}} \quad \text{et} \quad \|\sigma^\alpha\|_{L^2(\Gamma)} \leq \frac{\mathcal{C}F}{\sqrt{\alpha}}.$$

Remarquons maintenant que si  $(\mathbf{v}_f^\alpha, \sigma^\alpha)$  est solution du problème variationnel (4.3.3), il est également solution du problème fort :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \mathbf{v}_f^\alpha - c_f^2 \rho_f \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}_f^\alpha) = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega_f, \quad (4.3.4a) \\ \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}}^\alpha - \underline{\underline{\varepsilon}} \left( \frac{1}{\rho_s} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^\alpha \right) = \underline{\underline{g}}, & \text{dans } \Omega_s, \quad (4.3.4b) \\ (\underline{\underline{\sigma}}^\alpha \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = c_f^2 \rho_f (\operatorname{div} \mathbf{v}_f^\alpha) + \alpha \mathbf{v}_f^\alpha \cdot \mathbf{n}, & \text{sur } \Gamma, \quad (4.3.4c) \\ (\underline{\underline{\sigma}}^\alpha \mathbf{n}) \cdot \underline{\underline{\tau}} = 0, & \text{sur } \Gamma, \quad (4.3.4d) \\ \rho_s \mathbf{v}_f^\alpha \cdot \mathbf{n} = (\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^\alpha) \cdot \mathbf{n} + \alpha (\underline{\underline{\sigma}}^\alpha \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, & \text{sur } \Gamma. \quad (4.3.4e) \end{array} \right.$$

qui peut se réécrire

$$\left\{ \begin{array}{ll} -c_f^2 \rho_f \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}_f^\alpha) = \mathbf{f} - \rho_f \mathbf{v}_f^\alpha, & \text{dans } \Omega_f, \quad (4.3.5a) \\ -\underline{\underline{\varepsilon}} \left( \frac{1}{\rho_s} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^\alpha \right) = \underline{\underline{g}} - \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}}^\alpha, & \text{dans } \Omega_s, \quad (4.3.5b) \\ (\underline{\underline{\sigma}}^\alpha \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = c_f^2 \rho_f (\operatorname{div} \mathbf{v}_f^\alpha) + \alpha \mathbf{v}_f^\alpha \cdot \mathbf{n}, & \text{sur } \Gamma, \quad (4.3.5c) \\ (\underline{\underline{\sigma}}^\alpha \mathbf{n}) \cdot \underline{\underline{\tau}} = 0, & \text{sur } \Gamma, \quad (4.3.5d) \\ \rho_s \mathbf{v}_f^\alpha \cdot \mathbf{n} = (\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^\alpha) \cdot \mathbf{n} + \alpha (\underline{\underline{\sigma}}^\alpha \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, & \text{sur } \Gamma. \quad (4.3.5e) \end{array} \right.$$

### 4.3 Les difficultés posées par le problème dual-dual

---

De (4.3.5a) et (4.3.5b) on déduit

$$\|\nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}_f^\alpha)\|_{L^2(\Omega_f)} \leq \mathcal{C}F \quad \text{et} \quad \|\underline{\underline{\xi}}(\mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}}^\alpha)\|_{L^2(\Omega_s)} \leq \mathcal{C}F,$$

puis, en utilisant le théorème de trace, on obtient

$$\|\operatorname{div} \mathbf{v}_f^\alpha\|_{L^2(\Gamma)} \leq \mathcal{C}F$$

et (en utilisant préliminairement le théorème de Korn)

$$\|\mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}}^\alpha\|_{L^2(\Gamma)} \leq \mathcal{C}F.$$

Intéressons-nous maintenant à (4.3.5c) : on obtient facilement que

$$\|(\underline{\underline{\sigma}}^\alpha \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|c_f^2 \rho_f \operatorname{div} \mathbf{v}_f^\alpha\|_{L^2(\Gamma)} + \alpha \|\mathbf{v}_f^\alpha \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma)},$$

soit, en utilisant les résultats déjà obtenus ( $\|\mathbf{v}_f^\alpha\|_{L^2(\Gamma)} \leq \frac{\mathcal{C}F}{\sqrt{\alpha}}$  et  $\|\mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}}^\alpha\|_{L^2(\Gamma)} \leq \mathcal{C}F$ ),

$$\|(\underline{\underline{\sigma}}^\alpha \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma)} \leq \mathcal{C}F.$$

On montre de même que

$$\|\mathbf{v}_f^\alpha \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma)} \leq \mathcal{C}F.$$

On a donc

$$\|\mathbf{v}_f^\alpha\|_{\widehat{\mathbf{H}}_{div}(\Omega_f)} + \|\underline{\underline{\sigma}}^\alpha\|_{\widehat{\mathbb{H}}_{div,0}^{sym}(\Omega_s)} \leq \mathcal{C}F.$$

Il existe donc une sous-suite décroissante  $n \mapsto \alpha_n$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  et telle que  $n \mapsto (\mathbf{v}_f^{\alpha_n}, \underline{\underline{\sigma}}^{\alpha_n})$  soit convergente, nous appelons  $(\mathbf{v}_f^0, \underline{\underline{\sigma}}^0)$  sa limite. On vérifie alors que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\alpha_n}((\mathbf{v}_f^{\alpha_n}, \underline{\underline{\sigma}}^{\alpha_n}), (w, \xi)) = a((\mathbf{v}_f^0, \underline{\underline{\sigma}}^0), (\mathbf{w}_f, \underline{\underline{\xi}})),$$

$(\mathbf{v}_f^0, \underline{\underline{\sigma}}^0)$  est donc une solution de la formulation variationnelle initiale, pour prouver qu'elle est unique, il suffit de remarquer que

$$a((\mathbf{v}_f, \underline{\underline{\sigma}}), (\mathbf{v}_f, \underline{\underline{\sigma}})) = 0 \implies (\mathbf{v}_f, \underline{\underline{\sigma}}) = 0$$



## Chapitre 5

# Discrétisation en temps

Nous présentons dans ce chapitre la discrétisation en temps du schéma primal-primal, mais tout ce qui suit peut être appliqué sans difficulté au schéma dual-dual. Nous nous intéresserons d'abord aux schémas conformes ( $\Delta t_f = \Delta t_s$ ) et nous obtiendrons un schéma totalement explicite mais qui ne nous permettra pas d'obtenir de condition de stabilité. Pour contourner cette difficulté nous utiliserons alors un schéma implicite sur l'interface dont la stabilité sera garantie par une condition de type CFL. Finalement nous présenterons un cas particulier de schéma non-conforme en temps ( $\Delta t_f = 2\Delta t_s$ ) (nous renvoyons le lecteur à [77] pour l'extension aux rapports  $p - q$  quelconque). Le calcul pratique de ce schéma sera détaillé en annexe.

---

**Contenu**


---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>5.1 Utilisation du même pas de temps dans les deux milieux</b> . . . . .	<b>67</b>
5.1.1 Construction d'un schéma complètement explicite . . . . .	68
5.1.2 Construction d'un schéma quasi-explicite . . . . .	68
5.1.3 Analyse de la stabilité des schémas (I) et (II) . . . . .	69
5.1.3.1 Étude du schéma (II) . . . . .	69
5.1.3.2 Étude du schéma (I) . . . . .	71
<b>5.2 Utilisation d'un pas de temps local</b> . . . . .	<b>71</b>
5.2.1 Construction du schéma . . . . .	72
5.2.2 Existence et unicité de la solution du système (5.2.5) . . . . .	74
5.2.3 Obtention d'un schéma post-traité . . . . .	75
<b>Annexes</b> . . . . .	<b>76</b>
<b>5.a Calcul pratique de la matrice <math>M</math></b> . . . . .	<b>76</b>
<b>5.b Calcul du second membre de (5.2.7)</b> . . . . .	<b>78</b>

---

## Introduction

Nous voulons utiliser des schémas d'ordre 2 centrés en temps. Pour obtenir un schéma explicite dans le fluide, il est naturel de calculer  $P$  et  $V_f$  à des instants décalés ( $n$  et  $n + \frac{1}{2}$  par exemple — voir figure 5.1), de telle sorte que (3.2.4a) et (3.2.4b) puissent être résolues explicitement en l'absence de terme de couplage. Nous procédons de la même manière pour  $\Sigma$  et  $V_s$  (voir figure 5.2) pour calculer (3.2.4c) et (3.2.5) explicitement.

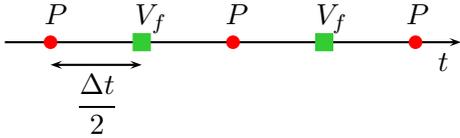


FIG. 5.1: Discrétisation en temps dans le fluide

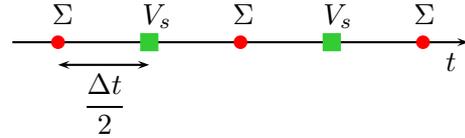


FIG. 5.2: Discrétisation en temps dans le solide

Nous nous intéressons dans un premier temps aux schémas utilisant le même pas de temps dans les deux milieux avant de présenter un schéma avec pas de temps local.

## 5.1 Utilisation du même pas de temps dans les deux milieux

Nous avons deux choix possibles :

- (I). Calculer  $V_s$  et  $P$  à des instants décalés (voir figure 5.3) pour avoir un schéma totalement explicite.
- (II). Calculer  $V_s$  et  $P$  aux mêmes instants (voir figure 5.4), ce qui conduit à un schéma explicite en-dehors de l'interface et implicite sur l'interface.

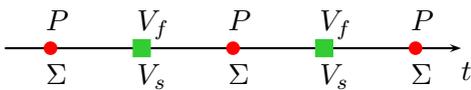


FIG. 5.3: Discrétisation en temps, choix (I)

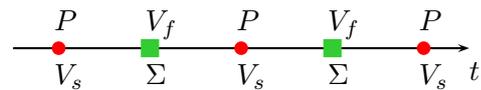


FIG. 5.4: Discrétisation en temps, choix (II)

### 5.1.1 Construction d'un schéma complètement explicite

On considère le choix (I) qui nous conduit au schéma suivant :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_P \frac{P^{n+1} - P^n}{\Delta t} - G_f^* V_f^{n+\frac{1}{2}} - B V_s^{n+\frac{1}{2}} = F^{n+\frac{1}{2}}, \\ M_f \frac{V_f^{n+\frac{1}{2}} - V_f^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + G_f P^n = 0, \\ M_s \frac{V_s^{n+\frac{1}{2}} - V_s^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + G_s^* \Sigma_i^n + B^* P^n = 0, \\ M_\Sigma \frac{\Sigma^{n+1} - \Sigma^n}{\Delta t} - \mathcal{C} M_\Sigma^{-1} G_s V_s^{n+\frac{1}{2}} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5.1.1a) \\ (5.1.1b) \\ (5.1.1c) \\ (5.1.1d) \end{array}$$

Ce schéma est totalement explicite, sa résolution nécessite uniquement l'inversion des quatre matrices de masse diagonales ( $M_P$  et  $M_s$ ) ou diagonales par blocs  $d \times d$  ( $M_f$  et  $M_\Sigma$ ). En contrepartie la condition de stabilité du schéma semble être perturbée par les conditions de transmission (elle ne correspond pas aux conditions de stabilité imposée dans les deux domaines intérieurs) comme nous le verrons lors de l'analyse de stabilité à la section 5.1.3.

### 5.1.2 Construction d'un schéma quasi-explicite

Considérons maintenant le choix (II) qui nous conduit à résoudre le système :

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_P \frac{P^{n+\frac{1}{2}} - P^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - G_f^* V_f^n - B \frac{V_s^{n+\frac{1}{2}} + V_s^{n-\frac{1}{2}}}{2} = F^n, \\ M_f \frac{V_f^{n+1} - V_f^n}{\Delta t} + G_f P^{n+\frac{1}{2}} = 0, \\ M_s \frac{V_s^{n+\frac{1}{2}} - V_s^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + G_s^* \Sigma^n + B^* \frac{P^{n+\frac{1}{2}} + P^{n-\frac{1}{2}}}{2} = 0, \\ M_\Sigma \frac{\Sigma^{n+1} - \Sigma^n}{\Delta t} - \mathcal{C} M_\Sigma^{-1} G_s V_s^{n+\frac{1}{2}} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5.1.2a) \\ (5.1.2b) \\ (5.1.2c) \\ (5.1.2d) \end{array}$$

Il est évident, à partir des équations (5.1.2b) et (5.1.2d), que les inconnues  $V_f$  et  $\Sigma$  peuvent être calculées explicitement alors que  $P$  et  $V_s$  sont obtenues par la résolution d'un système de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_P P^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} B V_s^{n+\frac{1}{2}} = F_1^n, \end{array} \right. \quad (5.1.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_s V_s^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} B^* P^{n+\frac{1}{2}} = F_2^n, \end{array} \right. \quad (5.1.3b)$$

où les vecteurs  $F_1^n$  et  $F_2^n$  sont calculés explicitement à partir des valeurs des inconnues au temps  $n$ . L'inversibilité de (5.1.3) est garantie par le fait que la matrice

$$M_P + \frac{\Delta t^2}{4} B M_s^{-1} B^*$$

## 5.1 Utilisation du même pas de temps dans les deux milieux

est définie positive. De plus, comme les matrices  $M_P$  et  $M_s$  sont diagonales et que la matrice  $B$  “ne voit que” l’interface, le schéma n’est implicite que pour les degrés de liberté de  $P$  et  $V_s$  appartenant à l’interface. La matrice à inverser est donc très creuse.

### 5.1.3 Analyse de la stabilité des schémas (I) et (II)

#### 5.1.3.1 Étude du schéma (II)

Nous nous intéressons d’abord au schéma (II). Même si  $C$  n’est pas inversible, nous pouvons montrer l’existence de  $\Gamma^n$  tel que :

$$M_\Sigma \Sigma^n = C \Gamma^n.$$

Il suffit pour cela de définir  $\Gamma^n$  par

$$\Gamma^0 = 0 \quad \text{et} \quad M_\Sigma \frac{\Gamma^{n+1} - \Gamma^n}{\Delta t} - G_s V_s^{n+\frac{1}{2}} = 0. \quad (5.1.4)$$

Nous effectuons alors les opérations suivantes sur le système (II)<sup>(10)</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_P \frac{P^{n+\frac{1}{2}} - P^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - G_f^* V_f^n - B \frac{V_s^{n+\frac{1}{2}} + V_s^{n-\frac{1}{2}}}{2} = 0, \quad \times \frac{P^{n+\frac{1}{2}} + P^{n-\frac{1}{2}}}{2}, \\ M_f \frac{V_f^{n+1} - V_f^{n-1}}{2\Delta t} + G_f \frac{P^{n+\frac{1}{2}} + P^{n-\frac{1}{2}}}{2} = 0, \quad \times V_f^n, \\ M_s \frac{V_s^{n+\frac{1}{2}} - V_s^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + G_s^* M_\Sigma^{-1} C \Gamma^n + B^* \frac{P^{n+\frac{1}{2}} + P^{n-\frac{1}{2}}}{2} = 0, \quad \times \frac{V_s^{n+\frac{1}{2}} + V_s^{n-\frac{1}{2}}}{2}, \\ C \frac{\Gamma^{n+1} - \Gamma^{n-1}}{\Delta t} - C M_\Sigma^{-1} G_s \frac{V_s^{n+\frac{1}{2}} + V_s^{n-\frac{1}{2}}}{2} = 0, \quad \times \Gamma^n. \end{array} \right.$$

En additionnant ces quatre équations, nous montrons la conservation de l’énergie :

$$E_{II}^{n+\frac{1}{2}} = E_f^{n+\frac{1}{2}} + E_s^{n+\frac{1}{2}},$$

avec  $((.,.)$  représente le produit scalaire classique entre vecteurs) :

$$E_f^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ \left( M_P P^{n+\frac{1}{2}}, P^{n+\frac{1}{2}} \right) + \left( M_f V_f^{n+1}, V_f^n \right) \right]$$

et

$$E_s^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ \left( M_s V_s^{n+\frac{1}{2}}, V_s^{n+\frac{1}{2}} \right) + \left( C \Gamma^{n+1}, \Gamma^n \right) \right].$$

**Remarque 5.1.1**  $E_f^{n+\frac{1}{2}}$  et  $E_s^{n+\frac{1}{2}}$  sont les deux énergies discrètes respectivement équivalentes des deux énergies continues définies précédemment :

$$\frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega_f} \frac{p^2}{c_f^2 \rho_f} + \int_{\Omega_f} \rho_f \|\mathbf{v}_f\|^2 \right]$$

10. Nous supposons ici que le terme source est nul.

et

$$\frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega_s} \rho_s \|\mathbf{v}_s\|^2 + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} \right] = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega_s} \rho_s \|\mathbf{v}_s\|^2 + \int_{\Omega_s} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\gamma}} : \underline{\underline{\gamma}} \right].$$

De plus chacune de ces énergies serait conservée en l'absence de couplage.

La stabilité  $L^2$  du schéma (II) découle de la positivité de  $E_{II}^{n+\frac{1}{2}}$  qui dépend elle-même de celle de  $E_f^{n+\frac{1}{2}}$  et de  $E_s^{n+\frac{1}{2}}$ .

Pour étudier la positivité de  $E_s^{n+\frac{1}{2}}$ , commençons par réécrire le produit scalaire  $(\mathbf{C}\Gamma^{n+1}, \Gamma^n)$  sous la forme :

$$\left( \mathbf{C} \frac{\Gamma^{n+1} + \Gamma^n}{2}, \frac{\Gamma^{n+1} + \Gamma^n}{2} \right) - \frac{\Delta t^2}{4} \left( \mathbf{C} \frac{\Gamma^{n+1} - \Gamma^n}{\Delta t}, \frac{\Gamma^{n+1} - \Gamma^n}{\Delta t} \right).$$

L'équation (5.1.4) nous permet d'écrire :

$$\left( \mathbf{C} \frac{\Gamma^{n+1} - \Gamma^n}{\Delta t}, \frac{\Gamma^{n+1} - \Gamma^n}{\Delta t} \right) = \left( \mathbf{C} M_{\Sigma}^{-1} G_s P^{n+\frac{1}{2}}, M_{\Sigma}^{-1} G_s P^{n+\frac{1}{2}} \right),$$

et l'énergie  $E_s^{n+\frac{1}{2}}$  devient alors

$$E_s^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ \left( \mathbf{C} \frac{\Gamma^{n+1} + \Gamma^n}{2}, \frac{\Gamma^{n+1} + \Gamma^n}{2} \right) + \left( \left[ M_s - \frac{\Delta t^2}{4} G_s^* M_{\Sigma}^{-1} \mathbf{C} M_{\Sigma}^{-1} G_s \right] V_s^{n+\frac{1}{2}}, V_s^{n+\frac{1}{2}} \right) \right].$$

De la même manière on établit facilement que :

$$E_f^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ \left( M_f \frac{V_f^{n+1} + V_f^n}{2}, \frac{V_f^{n+1} + V_f^n}{2} \right) + \left( \left[ M_P - \frac{\Delta t^2}{4} G_f^* M_f^{-1} G_f \right] P^{n+\frac{1}{2}}, P^{n+\frac{1}{2}} \right) \right].$$

$E_{II}^{n+\frac{1}{2}}$  est donc positive dès que les matrices

$$M_P - \frac{\Delta t^2}{4} G_f^* M_f^{-1} G_f \quad \text{et} \quad M_s - \frac{\Delta t^2}{4} G_s^* M_{\Sigma}^{-1} \mathbf{C} M_{\Sigma}^{-1} G_s$$

sont définies positives et il a été montré dans [42] que la première l'était si

$$\Delta t \leq \alpha_r \frac{h_f}{c_f \sqrt{d}} \tag{5.1.5}$$

et que la deuxième l'était si

$$\Delta t \leq \alpha_r \frac{h_s}{c_P \sqrt{d}}, \tag{5.1.6}$$

où  $\alpha_r$  dépend de l'ordre  $r$  de la méthode d'éléments finis, nous rappelons, dans le tableau 5.1, les valeurs de  $\alpha_r$  pour  $r$  variant de 1 à 5. Finalement le schéma (II) est stable si la condition de stabilité suivante est vérifiée :

$$\Delta t \leq \alpha_r \min \left( \frac{h_f}{c_f \sqrt{d}}, \frac{h_s}{c_P \sqrt{d}} \right). \tag{5.1.7}$$

r	1	2	3	4	5
$\alpha_r$	1	0.4082	0.2320	0.1476	0.101

 TAB. 5.1: Les valeurs de  $\alpha_r$  pour  $r$  variant de 1 à 5.

### 5.1.3.2 Étude du schéma (I)

Intéressons nous maintenant au schéma (I) et effectuons les opérations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_P \frac{P^{n+1} - P^n}{\Delta t} - G_f^* V_f^{n+\frac{1}{2}} - B V_s^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad \times \frac{P^{n+1} + P^n}{2}, \\ M_f \frac{V_f^{n+\frac{3}{2}} - V_f^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + G_f \frac{P^{n+1} + P^n}{2} = 0, \quad \times V_f^{n+\frac{1}{2}}, \\ M_s \frac{V_s^{n+\frac{1}{2}} - V_s^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + G_s^* M_\Sigma^{-1} C \Gamma^n + B^* P^n = 0, \quad \times \frac{V_s^{n+\frac{1}{2}} + V_s^{n-\frac{1}{2}}}{2}, \\ C \frac{\Gamma^{n+1} - \Gamma^n}{\Delta t} - C M_\Sigma^{-1} G_s V_s^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad \times \Gamma^n. \end{array} \right. \quad (5.1.8)$$

En additionnant les quatre équations nous montrons la conservation de l'énergie :

$$E_I^{n+\frac{3}{4}} = E_f^{n+1} + E_s^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t \left( B V_s^{n+\frac{1}{2}}, P^{n+1} \right),$$

Il est évident que la condition (5.1.7) est une condition nécessaire pour la positivité de  $E_I^{n+\frac{3}{4}}$ . Cependant, il nous faut également nous assurer que le terme supplémentaire :

$$\Delta t \left( B V_s^{n+\frac{1}{2}}, P^{n+1} \right)$$

n'est pas trop grand, ce qui peut être garanti par une condition de type CFL additionnelle :

$$\Delta t \leq \alpha_c \min \left( \frac{h_f}{c_f \sqrt{d}}, \frac{h_s}{c_P \sqrt{d}} \right). \quad (5.1.9)$$

La condition de stabilité du schéma (I) est donc perturbée par le couplage et le schéma (II) lui sera préféré pour des questions de robustesse.

**Remarque 5.1.2** *Les expériences numériques que nous avons réalisées semblent montrer que  $\alpha_c$  est très proche de  $\alpha_r$  si on utilise la méthode primale-primale alors qu'il peut être très inférieur à  $\alpha_r$  si on utilise la méthode duale-duale.*

## 5.2 Utilisation d'un pas de temps local

Nous présentons dans cette section une adaptation des techniques de raffinement de maillage sans multiplicateur [65, 77] au problème d'interaction fluide-structure. Nous décrivons ici le cas où  $\Delta t_f = 2\Delta t_s = 2\Delta t$  (schéma 1-2) mais cela peut être étendu à un rapport rationnel quelconque  $p - q$  en adaptant les résultats présentés dans [77]. Ici encore plusieurs schémas peuvent être utilisés, nous en présentons un qui possède les mêmes caractéristiques et les mêmes propriétés de robustesse que le schéma (II) présenté ci-dessus :

- le schéma est explicite dans le domaine intérieur et implicite sur l'interface ;
- le schéma garantit la conservation d'une certaine énergie discrète et la condition de stabilité n'est pas affectée par le couplage.

### 5.2.1 Construction du schéma

Nous avons choisi de calculer l'inconnue  $P$  aux temps  $2n$ ,  $V_f$  aux temps  $2n+1$ ,  $V_s$  aux temps  $2n$  et  $2n+1$  et  $\Sigma$  aux temps  $2n+\frac{1}{2}$  et  $2n+\frac{3}{2}$  (voir figure 5.5), ce qui donne les équations suivantes sur l'intervalle de temps  $[t^{2n}; t^{2n+2}]$  :

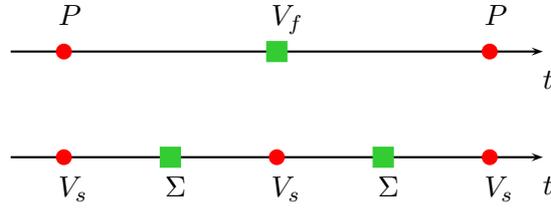


FIG. 5.5: Discretisation en temps, schéma (III)

- dans le fluide :

$$(III.f) \begin{cases} M_P \frac{P^{2n+2} - P^{2n}}{2\Delta t} - G_f^* V_f^{2n+1} - B[V_s]^{2n+1} = F^{2n+1}, & (5.2.1a) \\ M_f \frac{V_f^{2n+1} - V_f^{2n-1}}{2\Delta t} + G_f P^{2n} = 0, & (5.2.1b) \end{cases}$$

- dans le solide (pour le premier pas de temps) :

$$(III.s1) \begin{cases} M_s \frac{V_s^{2n+1} - V_s^{2n}}{\Delta t} + G_s^* \Sigma^{2n+\frac{1}{2}} + B^*[P]^{2n+\frac{1}{2}} = 0, & (5.2.1c) \\ M_\Sigma \frac{\Sigma^{2n+\frac{1}{2}} - \Sigma^{2n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - C M_\Sigma^{-1} G_s V_s^{2n} = 0, & (5.2.1d) \end{cases}$$

- dans le solide (pour le second pas de temps) :

$$(III.s2) \begin{cases} M_s \frac{V_s^{2n+2} - V_s^{2n+1}}{\Delta t} + G_s^* \Sigma^{2n+\frac{3}{2}} + B^*[P]^{2n+\frac{3}{2}} = 0, & (5.2.1e) \\ M_\Sigma \frac{\Sigma^{2n+\frac{3}{2}} - \Sigma^{2n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - C M_\Sigma^{-1} G_s V_s^{2n+1} = 0. & (5.2.1f) \end{cases}$$

où  $[V_s]^{2n+1}$  (resp.  $[P]^{2n+\frac{1}{2}}$  et  $[P]^{2n+\frac{3}{2}}$ ) représente une approximation de  $V_s$  au temps  $2n+1$  (resp. de  $P$  aux temps  $2n+\frac{1}{2}$  et  $2n+\frac{3}{2}$ ) qui sera déterminée de manière à garantir la conservation d'une énergie.

Comme à la section 5.1.2 nous pouvons définir une énergie dans le fluide,

$$E_f^n = \frac{1}{2} \left[ (M_P P^n, P^n) + (M_f V_f^{n+1}, V_f^{n-1}) \right],$$

et une énergie dans le solide,

$$E_s^n = \frac{1}{2} \left[ (M_s V_s^{n+2}, V_s^{n+1}) + (C \Gamma^{n+\frac{1}{2}}, \Gamma^{n-\frac{1}{2}}) \right],$$

avec  $\Gamma^{n+\frac{1}{2}}$  définie par :

$$M_\Sigma \frac{\Gamma^{n+\frac{1}{2}} - \Gamma^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - G_s V_s^n = 0. \quad (5.2.2)$$

En posant  $E^n = E_f^n + E_s^n$  (qui est clairement positive si la condition (5.1.7) est satisfaite), on montre que<sup>(11)</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{E^{2n+2} - E^{2n}}{2\Delta t} &= B^* [P]^{2n+\frac{3}{2}} \frac{V_s^{2n+2} + V_s^{2n+1}}{4} + B^* [P]^{2n+\frac{1}{2}} \frac{V_s^{2n+1} + V_s^{2n}}{4} \\ &\quad - B [V_s]^{2n+1} \left( \frac{P^{2n+2} + P^{2n}}{2} \right). \end{aligned}$$

### Démonstration :

On effectue le même type d'opérations qu'à la section 5.1.3 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} M_P \frac{P^{2n+2} - P^{2n}}{2\Delta t} - G_f^* V_f^{2n+1} - B [V_s]^{2n+1} = 0, & \times \frac{P^{2n+2} + P^{2n}}{2}, \\ M_f \frac{V_f^{2n+1} - V_f^{2n-1}}{2\Delta t} + G_f P^{2n} = 0, & \times V_f^{2n+1}, \\ M_s \frac{V_s^{2n+1} - V_s^{2n}}{\Delta t} + G_s^* M_\Sigma^{-1} C \Gamma^{2n+\frac{1}{2}} + B^* [P]^{2n+\frac{1}{2}} = 0, & \times \frac{V_s^{2n+1} + V_s^{2n}}{2}, \\ C \frac{\Gamma^{2n+\frac{1}{2}} - \Gamma^{2n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - C M_\Sigma^{-1} G_s V_s^{2n} = 0, & \times \Gamma^{2n+\frac{1}{2}}, \\ M_s \frac{V_s^{2n+2} - V_s^{2n+1}}{\Delta t} + G_s^* M_\Sigma^{-1} C \Gamma^{2n+\frac{3}{2}} + B^* [P]^{2n+\frac{3}{2}} = 0, & \times \frac{V_s^{2n+2} + V_s^{2n+1}}{2}, \\ M_\Sigma \frac{\Sigma^{2n+\frac{3}{2}} - \Sigma^{2n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - C M_\Sigma^{-1} G_s V_s^{2n+1} = 0, & \times \Gamma^{2n+\frac{3}{2}}. \end{array} \right.$$

et on additionne toutes ces équations. ■

11. En posant à nouveau que le terme source est nul.

Le schéma (III) sera donc conservatif (i.e.  $E^{2n+2} - E^{2n} = 0$ ) si nous choisissons :

$$[P]^{2n+\frac{1}{2}} = [P]^{2n+\frac{3}{2}} = \frac{P^{2n+2} + P^{2n}}{2} \quad (5.2.3)$$

et

$$[V_s]^{2n+1} = \frac{V_s^{2n+2} + 2V_s^{2n+1} + V_s^{2n}}{4}. \quad (5.2.4)$$

Le système (5.2.1) devient alors :

- dans le fluide :

$$(III.f) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_P \frac{P^{2n+2} - P^{2n}}{2\Delta t} - G_f^* V_f^{2n+1} - B \frac{V_s^{2n+2} + 2V_s^{2n+1} + V_s^{2n}}{4} = F^{2n+1}, \\ M_f \frac{V_f^{2n+1} - V_f^{2n-1}}{2\Delta t} + G_f P^{2n} = 0, \end{array} \right. \quad (5.2.5a)$$

$$(5.2.5b)$$

- dans le solide (pour le premier pas de temps) :

$$(III.s1) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_s \frac{V_s^{2n+1} - V_s^{2n}}{\Delta t} + G_s^* \Sigma^{2n+\frac{1}{2}} + B^* \frac{P^{2n+2} + P^{2n}}{2} = 0, \\ M_\Sigma \frac{\Sigma^{2n+\frac{1}{2}} - \Sigma^{2n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \mathcal{C} M_\Sigma^{-1} V_s^{2n} = 0, \end{array} \right. \quad (5.2.5c)$$

$$(5.2.5d)$$

- dans le solide (pour le deuxième pas de temps) :

$$(III.s2) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_s \frac{V_s^{2n+2} - V_s^{2n+1}}{\Delta t} + G_s^* \Sigma^{2n+\frac{3}{2}} + B^* \frac{P^{2n+2} + P^{2n}}{2} = 0, \\ M_\Sigma \frac{\Sigma^{2n+\frac{3}{2}} - \Sigma^{2n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \mathcal{C} M_\Sigma^{-1} G_s V_s^{2n+1} = 0. \end{array} \right. \quad (5.2.5e)$$

$$(5.2.5f)$$

## 5.2.2 Existence et unicité de la solution du système (5.2.5)

Les inconnues

$$V_f^{2n+1} \quad \text{et} \quad \Sigma^{2n+\frac{1}{2}}$$

peuvent être calculées explicitement en utilisant les équations (5.2.5b) et (5.2.5d). Il reste alors à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_P P^{2n+2} - \Delta t B \frac{V_s^{2n+2} + 2V_s^{2n+1}}{2} = F_1^{2n}, \end{array} \right. \quad (5.2.6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_s V_s^{2n+1} + \Delta t B^* \frac{P^{2n+2}}{2} = F_2^{2n}, \end{array} \right. \quad (5.2.6b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_s [V_s^{2n+2} - V_s^{2n+1}] + \Delta t G_s^* \Sigma^{2n+\frac{3}{2}} + \Delta t B^* \frac{P^{2n+2}}{2} = F_3^{2n}, \end{array} \right. \quad (5.2.6c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_\Sigma \Sigma^{2n+\frac{3}{2}} - \Delta t G_s V_s^{2n+1} = F_4^{2n}, \end{array} \right. \quad (5.2.6d)$$

où les vecteurs  $F_i^{2n}$  sont calculés explicitement à partir des valeurs des inconnues au temps  $2n$ .

Il est évident que  $V_s^{2n+1}$ ,  $\Sigma^{2n+\frac{3}{2}}$  et  $V_s^{2n+2}$  peuvent être calculées explicitement dès que  $P^{2n+2}$  est connue, de plus on peut montrer, après quelques calculs, que cette dernière est solution de :

$$\left[ M_P + \Delta t^2 B M_s^{-1} \left[ M_s - \frac{\Delta t^2}{4} G_s^* [M_\Sigma^{-1} C M_\Sigma^{-1}] G_s \right] M_s^{-1} B^* \right] P^{2n+2} = F_5^{2n}, \quad (5.2.7)$$

où le vecteur  $F_5^{2n}$  est déduit de la valeur des inconnues au temps  $2n$  (le calcul pratique de ce vecteur est détaillé à l'annexe 5.b). On peut facilement vérifier que le calcul de  $P^{2n}$  sur les noeuds intérieurs est explicite (rappelons que  $B$  représente un opérateur de trace discret). De plus la résolution de (5.2.7) nécessite uniquement l'inversion d'une matrice symétrique définie positive très creuse : nous avons vu à la section 5.1.3.1 que la matrice

$$A = M_s - \frac{\Delta t^2}{4} G_s^* [M_\Sigma^{-1} C M_\Sigma^{-1}] G_s$$

est symétrique définie positive dès que la condition CFL est satisfaite, il en est donc de même pour

$$M_P + M = M_P + \Delta t^2 B M_s^{-1} A M_s^{-1} B^*$$

(le calcul pratique de la matrice  $M$  est détaillé à l'annexe 5.a) et l'équation (5.2.7) admet une unique solution.

### 5.2.3 Obtention d'un schéma post-traité

Les conditions de transmission (5.2.3) et (5.2.4) sont clairement des approximations d'ordre 1. Cela entraîne l'apparition d'ondes évanescentes parasites confinées au voisinage de l'interface. Pour résoudre ce problème nous pouvons utiliser le post-traitement suivant, proposé dans [77].

- dans le fluide, on calcule la moyenne des inconnues sur deux pas de temps :

$$\mathbf{P}^{2n+1} = \frac{P^{2n+2} + P^{2n}}{2} \text{ et } \mathbf{V}_f^{2n} = \frac{V_f^{2n+1} + V_f^{2n-1}}{2};$$

- dans le solide, on calcule la moyenne pondérée sur deux pas de temps suivante :

$$\mathbf{V}_s^{2n} = \frac{V_s^{2n+1} + 2V_s^{2n} + V_s^{2n-1}}{4} \text{ et } \Sigma^{2n+\frac{1}{2}} = \frac{\Sigma^{2n+\frac{3}{2}} + 2\Sigma^{2n+\frac{1}{2}} + \Sigma^{2n-\frac{1}{2}}}{4}.$$

Le schéma (5.2.5) peut alors être réinterprété ainsi :

- dans le fluide :

$$(III'.f) \left\{ \begin{array}{l} M_P \frac{\mathbf{P}^{2n+1} - \mathbf{P}^{2n-1}}{2\Delta t} - G_f^* \mathbf{V}_f^{2n} - B \frac{V_s^{2n+1} + V_s^{2n-1}}{2} = F^{2n}, \\ M_f \frac{V_f^{2n} - V_s^{2n-2}}{2\Delta t} + G_F \mathbf{P}^{2n-1} = 0, \end{array} \right. \quad (5.2.8a)$$

$$(5.2.8b)$$

- dans le solide (pour le premier pas de temps) :

$$(III'.s1) \quad \begin{cases} M_s \frac{V_s^{2n} - V_s^{2n+1}}{\Delta t} + G_s^* \Sigma^{2n-\frac{1}{2}} + B^* \frac{P^{2n+1} + 3P^{2n-1}}{4} = 0, & (5.2.8c) \\ M_\Sigma \frac{\Sigma^{2n-\frac{1}{2}} - \Sigma^{2n-\frac{3}{2}}}{\Delta t} - C M_\Sigma^{-1} G_s V_s^{2n-1} = 0, & (5.2.8d) \end{cases}$$

- dans le solide (pour le deuxième pas de temps) :

$$(III'.s2) \quad \begin{cases} M_s \frac{V_s^{2n+1} - V_s^{2n}}{\Delta t} + G_s^* \Sigma_i^{2n+\frac{1}{2}} + B^* \frac{3P^{2n+1} + P^{2n-1}}{4} = 0, & (5.2.8e) \\ M_\Sigma \frac{\Sigma^{2n+\frac{1}{2}} - \Sigma^{2n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - C M_\Sigma^{-1} G_s V_s^{2n} = 0. & (5.2.8f) \end{cases}$$

**Remarque 5.2.1** *Ce schéma possède les mêmes propriétés de stabilité que le schéma (III) mais les termes de couplage sont maintenant des approximations d'ordre 2.*

## Annexes

Nous donnons ici les détails pratiques du calcul de  $M$  et du second membre de (5.2.7) en nous inspirant de [24].

### 5.a Calcul pratique de la matrice $M$

On suppose qu'à l'instant 0 toutes les inconnues et les sources sont nulles et que

$$[P]^{\frac{1}{2}} = [P]^{\frac{3}{2}} = \frac{P_k}{2},$$

avec  $P_k(l) = \delta_{kl}$  et  $k$  tel que le noeud  $k$  appartienne à l'interface. On a alors :

- dans le fluide :

$$\begin{cases} M_P \frac{P^2}{2\Delta t} - G_f^* V_f^1 - B \frac{V_s^2 + 2V_s^1}{4} = 0, & (5.a.1a) \\ M_f \frac{V_f^1}{2\Delta t} = 0 ; & (5.a.1b) \end{cases}$$

- dans le solide (pour le premier pas de temps) :

$$\begin{cases} M_s \frac{V_s^1}{\Delta t} + G_s^* \Sigma^{\frac{1}{2}} + B^* \frac{P_k}{2} = 0, & (5.a.1c) \\ \frac{\Sigma^{\frac{1}{2}}}{\Delta t} = 0 ; & (5.a.1d) \end{cases}$$

- dans le solide (pour le deuxième pas de temps) :

$$\begin{cases} M_s \frac{V_s^2 - V_s^1}{\Delta t} + G_s^* \Sigma^{\frac{3}{2}} + B^* \frac{P_k}{2} = 0, & (5.a.1e) \\ M_\Sigma \frac{\Sigma^{\frac{3}{2}} - \Sigma^{\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \mathbf{C} M_\Sigma^{-1} G_s V_s^1. & (5.a.1f) \end{cases}$$

Ce système est explicite :

$$\begin{aligned} V_s^1 &= -\frac{\Delta t}{2} M_s^{-1} B^* P_k \\ \Sigma^{\frac{3}{2}} &= \Delta t M_\Sigma^{-1} \mathbf{C} M_\Sigma^{-1} G_s V_s^1 \\ &= -\frac{\Delta t^2}{2} M_\Sigma^{-1} \mathbf{C} M_\Sigma^{-1} G_s M_s^{-1} B^* P_k \\ V_s^2 &= V_s^1 - \Delta t M_s^{-1} G_s^* \Sigma^{\frac{3}{2}} - \frac{\Delta t}{2} M_s^{-1} B^* P_k \\ &= -\Delta t M_s^{-1} \left[ M_s - \frac{\Delta t^2}{2} G_s^* M_\Sigma^{-1} \mathbf{C} M_\Sigma^{-1} G_s \right] M_s^{-1} B^* P_k \\ M_P P^2 &= \Delta t B \frac{V_s^2 + 2V_s^1}{2} \\ &= -\Delta t^2 B M_s^{-1} \left[ M_s - \frac{\Delta t^2}{4} G_s^* M_\Sigma^{-1} \mathbf{C} M_\Sigma^{-1} G_s \right] M_s^{-1} B^* P_k \\ &= -M P_k. \end{aligned}$$

Le vecteur  $-M_P P^2$  est la  $k^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $M$ , en effet :

$$M P_k = \begin{bmatrix} M(1,1) & \dots & M(k,1) & \dots & M(k,N) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M(1,k) & \dots & M(k,k) & \dots & M(N,k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M(1,N) & \dots & M(k,N) & \dots & M(N,N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(k,1) \\ \vdots \\ M(k,k) \\ \vdots \\ M(k,N) \end{bmatrix}$$

Il suffit donc de résoudre le système (5.a.1) autant de fois qu'il y a de noeuds sur l'interface, (on peut montrer facilement que la  $k^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $M$  est nulle dès que le noeud  $k$  est à l'extérieur de l'interface) pour construire la matrice  $M$ .

**Remarque 5.a.1** *Il peut sembler coûteux de résoudre le système (5.a.1) un grand nombre de fois. En fait il n'y a pas besoin de le résoudre sur tout le domaine : comme on ne fait le calcul que sur deux pas de temps, on peut se limiter aux éléments du maillage appartenant à l'interface :*

1. Résolution de (5.a.1c) : d'après les propriétés de la matrice  $B^*$ , seuls les éléments de  $V_s^1$  correspondant à des points sur l'interface seront non nuls.

2. Résolution de (5.a.1f) : on peut montrer que, pour qu'un degré de liberté  $\Sigma$  de la maille  $k$  soit non nul au temps  $n + \frac{1}{2}$ , il faut qu'un degré de liberté  $V_s$  de la maille  $k$  soit non nul au temps  $n$ . Seuls les éléments de  $\Sigma^{\frac{3}{2}}$  appartenant à une maille de l'interface seront donc non nuls.
3. Résolution de (5.a.1e) : on peut également montrer que, pour qu'un degré de liberté  $V_s$  de la maille  $k$  soit non nul au temps  $n + 1$ , il faut qu'un degré de liberté  $\Sigma$  de la maille  $k$  soit non nul au temps  $n + \frac{1}{2}$ . De plus comme nous allons le voir nous n'avons besoin de connaître  $V_s$  que sur l'interface.
4. Résolution de (5.a.1a) : là encore, seuls les éléments de  $P^2$  correspondant à des points sur l'interface seront non nuls.

## 5.b Calcul du second membre de (5.2.7)

A la section 5.2.2 nous n'avons pas explicité  $F_5^{2n}$ , le second membre de (5.2.7). On vérifie facilement (après néanmoins quelques calculs) que :

$$F_5^{2n} = [M_P - M] P^{2n} + 2\Delta t G_f^* V_f^{2n+1} - 2\Delta t B M_s^{-1} A V_s^{2n} - 2\Delta t^2 B M_s^{-1} A M_s^{-1} G_s^* \Sigma^{2n+\frac{1}{2}}$$

On suppose maintenant que toutes les inconnues ont été calculées à l'instant  $2n$  et on s'intéresse au système suivant :

- dans le fluide :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_P \frac{\tilde{P}^{2n+2} - P^{2n}}{2\Delta t} - G_f^* V_f^{2n+1} - B \frac{\tilde{V}_s^{2n+2} + 2\tilde{V}_s^{2n+1} + V_s^{2n}}{4} = F^{2n+1}, \\ M_f \frac{V_f^{2n+1} + V_f^{2n-1}}{2\Delta t} + G_f P^{2n} = 0 ; \end{array} \right. \quad (5.b.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_P \frac{\tilde{P}^{2n+2} - P^{2n}}{2\Delta t} - G_f^* V_f^{2n+1} - B \frac{\tilde{V}_s^{2n+2} + 2\tilde{V}_s^{2n+1} + V_s^{2n}}{4} = F^{2n+1}, \\ M_f \frac{V_f^{2n+1} + V_f^{2n-1}}{2\Delta t} + G_f P^{2n} = 0 ; \end{array} \right. \quad (5.b.1b)$$

- dans le solide (pour le premier pas de temps) :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_s \frac{\tilde{V}_s^{2n+1} - V_s^{2n}}{\Delta t} + G_s^* \Sigma^{2n+\frac{1}{2}} + B^* \frac{P^{2n}}{2} = 0, \\ M_\Sigma \frac{\Sigma^{2n+\frac{1}{2}} - \Sigma^{2n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - C M_\Sigma^{-1} G_s V_s^{2n} = 0 ; \end{array} \right. \quad (5.b.1c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_s \frac{\tilde{V}_s^{2n+1} - V_s^{2n}}{\Delta t} + G_s^* \Sigma^{2n+\frac{1}{2}} + B^* \frac{P^{2n}}{2} = 0, \\ M_\Sigma \frac{\Sigma^{2n+\frac{1}{2}} - \Sigma^{2n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - C M_\Sigma^{-1} G_s V_s^{2n} = 0 ; \end{array} \right. \quad (5.b.1d)$$

- dans le solide (pour le deuxième pas de temps) :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_s \frac{\tilde{V}_s^{2n+2} - \tilde{V}_s^{2n+1}}{\Delta t} + G_s^* \tilde{\Sigma}^{2n+\frac{3}{2}} + C_i^* \frac{P^{2n}}{2} = 0 \\ M_\Sigma \frac{\tilde{\Sigma}^{2n+\frac{3}{2}} - \Sigma^{2n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - C M_\Sigma^{-1} G_s \tilde{V}_s^{2n+1} = 0 ; \end{array} \right. \quad (5.b.1e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_s \frac{\tilde{V}_s^{2n+2} - \tilde{V}_s^{2n+1}}{\Delta t} + G_s^* \tilde{\Sigma}^{2n+\frac{3}{2}} + C_i^* \frac{P^{2n}}{2} = 0 \\ M_\Sigma \frac{\tilde{\Sigma}^{2n+\frac{3}{2}} - \Sigma^{2n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - C M_\Sigma^{-1} G_s \tilde{V}_s^{2n+1} = 0 ; \end{array} \right. \quad (5.b.1f)$$

Ce système est explicite et on vérifie que :

$$\left| \begin{aligned} M_P \tilde{P}^{2n+2} &= F^{2n+1} + [M_P - M] P^{2n} + 2\Delta t G_f^* V_f^{2n+1} \\ &- 2\Delta t B M_s^{-1} A V_s^{2n} - 2\Delta t^2 B M_s^{-1} A M_s^{-1} G_s^* \Sigma^{2n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right.$$

ce qui est bien le second membre  $F_5^{2n}$ . La résolution de (5.b.1) nous permet donc de calculer non seulement  $V_f^{2n+1}$  et  $\Sigma^{2n+\frac{1}{2}}$  mais également le second membre de (5.2.7). Il suffit ensuite de résoudre le système

$$[M_P + M] P^{2n+2} = M_P \tilde{P}^{2n+2}$$

pour calculer  $P^{2n+2}$ . Les inconnues restantes ( $V_s^{2n+1}$ ,  $V_s^{2n+2}$  et  $\Sigma^{2n+\frac{3}{2}}$ ) sont calculées en résolvant le système explicite suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} M_s \frac{\widehat{V}_s^{2n+1}}{\Delta t} + B^* \frac{P^{2n+2}}{2} &= 0, & (5.b.2a) \\ M_s \frac{\widehat{V}_s^{2n+2} - \widehat{V}_s^{2n+1}}{\Delta t} + G_s^* \widehat{\Sigma}^{2n+\frac{3}{2}} + B^* \frac{P^{2n+2}}{2} &= 0, & (5.b.2b) \\ M_\Sigma \frac{\widehat{\Sigma}^{2n+\frac{3}{2}}}{\Delta t} - C M_\Sigma^{-1} G_s \bar{V}_s^{2n+1} &= 0, & (5.b.2c) \end{aligned} \right.$$

puis en effectuant :

- $U_i^{2n+1} = \widehat{U}_i^{2n+1} + \tilde{U}_i^{2n+1}$ ,
- $U_i^{2n+2} = \widehat{U}_i^{2n+2} + \tilde{U}_i^{2n+2}$ ,
- $\Sigma_i^{2n+\frac{3}{2}} = \widehat{\Sigma}_i^{2n+\frac{3}{2}} + \tilde{\Sigma}_i^{2n+\frac{3}{2}}$ .



## Chapitre 6

# Implémentation et résultats numériques

Nous présentons d'abord brièvement les différents codes que nous avons implémentés en dimension deux et trois pour mettre en oeuvre les méthodes primale-primale et duale-duale présentées dans les chapitres précédents. Nous montrerons ensuite la précision des ces codes en confrontant les solutions obtenues dans des configurations simples à des solution analytiques obtenues par la méthode de Cagniard-de Hoop. Nous terminerons par des expériences numériques plus réalistes qui nous permettront de montrer que nos méthodes sont capables de traiter efficacement des problèmes complexes tels que la propagation des ultrasons à travers l'os.

Contenu

---

<b>6.1</b>	<b>Les différents codes implémentés . . . . .</b>	<b>83</b>
6.1.1	Codes réalisés à partir de la formulation primale-primale . . . . .	83
6.1.2	Codes réalisés à partir de la formulation duale-duale . . . . .	83
6.1.3	Le code implémenté en dimension trois . . . . .	84
6.1.4	Calcul des solutions analytiques . . . . .	84
<b>6.2</b>	<b>Comparaison avec des solutions analytiques . . . . .</b>	<b>84</b>
6.2.1	Validation en dimension 2 . . . . .	84
6.2.2	Validation en dimension 3 . . . . .	90
<b>6.3</b>	<b>Des expériences réalistes . . . . .</b>	<b>91</b>
6.3.1	Une expérience en dimension 2 . . . . .	93
6.3.2	Une expérience en dimension 3 . . . . .	95

---

## 6.1 Les différents codes implémentés

En dimension deux nous avons implémenté plusieurs codes pour la discrétisation des formulations primale-primale et duale-duale.

### 6.1.1 Codes réalisés à partir de la formulation primale-primale

Tous les codes associés à la formulation primale-primale sont basés sur une discrétisation par des éléments  $\mathbb{Q}_5^{\text{disc}} - \mathbb{Q}_5^{\text{cont}}$  dans le solide et  $Q_5^{\text{cont}} - Q_5^{\text{disc}}$  dans le fluide (voir section 3.2). Le choix de ces éléments s'explique par le fait que nous avons à notre disposition les codes d'acoustique et d'élastodynamique de S. Fauqueux, utilisant des éléments finis  $Q_5$ . De plus tous ces codes sont conformes en espace. En effet ces codes sont destinés à modéliser des interfaces courbes qui ne permettent donc pas l'utilisation de maillages non-conformes (voir paragraphe 3.2.2). Nous avons implémenté trois codes :

- un code utilisant un pas de temps global ( $\Delta t_f = \Delta t_s$ ). Nous avons ici implémenté le schéma totalement explicite (5.1.1). En effet, bien que nous n'ayons pu calculer la condition CFL de ce schéma, les expériences que nous avons menées ont montré que la condition de stabilité était égale à la plus petite des CFL du milieu fluide et du milieu solide. Ce code sera appelé par la suite primal-primal<sub>11</sub>.
- un code utilisant des pas de temps locaux tels que  $\Delta t_f = 2\Delta t_s$ . Nous avons ici implémenté le schéma (5.2.5), implicite sur l'interface. Ce code sera appelé par la suite primal-primal<sub>12</sub>
- un code utilisant des pas de temps locaux et des éléments finis courbes pour discrétiser les interfaces fluide solide. Ce code utilise la technique présentée dans l'annexe 3.a

Tous ces codes sont donc d'ordre 5 en espace et d'ordre 2 en temps.

### 6.1.2 Codes réalisés à partir de la formulation duale-duale

Nous avons réalisés deux codes associés à la formulation duale-duale. Ils sont basés sur une discrétisation par des éléments  $\mathbb{Q}_1^{\text{div}} - \mathbb{Q}_0$  dans le solide et  $Q_0 - \mathbf{RT}_0$  dans le fluide (voir section 3.1). Là encore le choix des éléments finis s'explique par le fait que nous avons à notre disposition le code d'élastodynamique élaboré par C. Tsogka, utilisant des éléments finis  $\mathbb{Q}_1^{\text{div}}$ . La formulation duale-duale étant destinée à traiter des interfaces planes, les deux codes permettent l'utilisation de maillages non-conformes.

La différence entre les deux schémas réside dans la discrétisation en temps :

- nous avons dans un premier temps implémenté le schéma totalement explicite, analogue au schéma (5.1.1). Cependant les expériences que nous avons réalisées nécessitaient de choisir un pas de temps très inférieur à la CFL optimale <sup>(12)</sup> (parfois jusqu'à 10 fois plus petit);
- nous avons donc implémenté le schéma quasi-explicite analogue au schéma (5.1.2) qui garantit la stabilité du système si la CFL optimale est respectée.

Nous appellerons code dual-dual ce deuxième code.

<sup>12</sup>. La plus petite des CFL du fluide et du solide.

### 6.1.3 Le code implémenté en dimension trois

En dimension trois nous avons uniquement implémenté un code basé sur la formulation primale-primale, mieux adaptée pour le traitement des interfaces courbes. Les éléments finis utilisés pour discrétiser cette formulation sont à nouveau les éléments  $Q_5^{\text{disc}} - Q_5^{\text{cont}}$  dans le solide et  $Q_5^{\text{cont}} - Q_5^{\text{disc}}$  dans le fluide. Nous avons en effet à notre disposition le code d'élastodynamique 3D de S. Fauqueux, utilisant des éléments finis  $Q_5$ . Le travail d'implémentation consistait donc ici d'abord à élaborer un code acoustique  $Q_5$  puis à coupler ce code au code d'élastodynamique. Comme en dimension deux nous avons implémenté le schéma explicite (5.1.1) et les expériences que nous avons mené n'ont pas montré de perturbation de la condition CFL.

### 6.1.4 Calcul des solutions analytiques

Pour calculer les solutions analytiques, nous avons mis au point deux codes Matlab (un en dimension deux et un en dimension trois) permettant de calculer les fonctions de Green présentées dans les sections 12.3 et 13.3 et de les convoluer avec un terme source régulier en temps.

## 6.2 Comparaison avec des solutions analytiques

### 6.2.1 Validation en dimension 2

Pour valider à la fois les codes primal-primal et dual-dual en dimension deux, nous avons comparé les solutions obtenues avec les deux méthodes à la solution analytique calculée par la méthode de Cagniard-de Hoop dans une configuration simple : deux demi-plans séparés par une interface droite, le premier constituant le milieu fluide et le second le milieu solide. Les paramètres physiques du fluide sont  $c_f = 1500 \text{ m s}^{-1}$  et  $\rho_f = 1000 \text{ kg m}^{-3}$  et les paramètres physiques du solide sont  $c_s = 1800 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_p = 4000 \text{ m s}^{-1}$  et  $\rho_s = 1850 \text{ kg m}^{-3}$ . Pour les simulations numériques la taille du domaine de calcul dans chaque milieu est  $20 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$  et nous avons utilisé des couches absorbantes parfaitement adaptées (Perfectly Matched Layers ou PML) [28, 42] pour simuler des demi-plans infinis, ces couches ont une largeur de 2 mm. La fonction source est ponctuelle en espace (située dans le fluide à 2mm de l'interface — voir figure 6.1) et varie temporellement comme la dérivée d'une Gaussienne de fréquence dominante 1 MHz.

Nous comparons donc deux simulations numériques :

- pour la méthode duale-duale nous utilisons des maillages réguliers dans chaque domaine mais non conformes : le pas d'espace est 0.1 mm dans le fluide et 0.12 mm dans le solide, ce qui correspond à 15 points de calcul par longueur d'onde, à la fois dans le fluide et dans le solide (pour les ondes S). Nous utilisons le même pas de temps dans les deux milieux, choisi pour satisfaire la condition CFL dans le fluide et dans le solide :  $\Delta t = 45 \text{ ns}$  ;
- pour la méthode primale-primale nous avons utilisé des éléments finis  $Q_5$ . Le maillage global est ici régulier et conforme, avec un pas d'espace de 0.5 mm, ce qui correspond à 3 éléments par longueur d'onde dans le fluide et 3.6 dans le solide (toujours pour les ondes S). Avec le code primal-primal<sub>11</sub> nous utilisons dans les deux milieux un pas de temps  $\Delta t_s = 8.9 \text{ ns}$  satisfaisant les CFL des deux milieux et avec le code primal-primal<sub>12</sub> nous

## 6.2 Comparaison avec des solutions analytiques

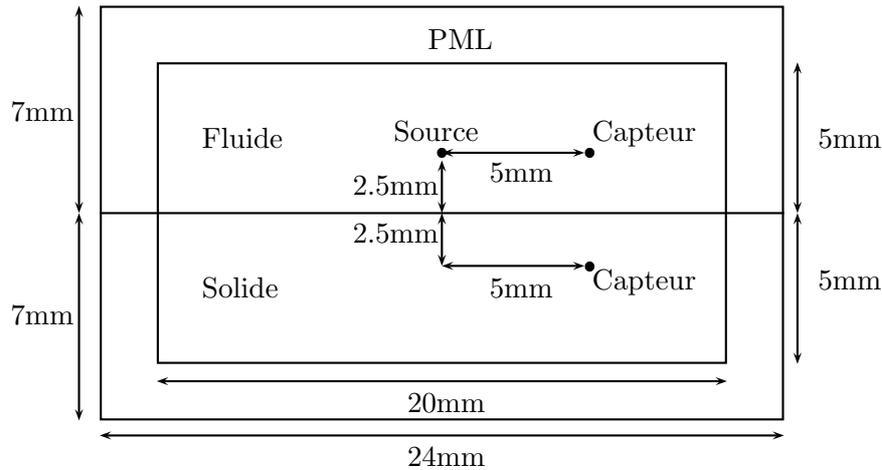


FIG. 6.1: Configuration de la simulation

avons choisi  $\Delta t_f = 17.8$  ns dans le fluide et  $\Delta t_s = 8.9$  ns dans le solide de telle sorte que chaque condition CFL soit satisfaite de manière optimale.

Nous utilisons deux types de représentation pour les résultats numériques :

- des instantanés à temps donné ( $t = 2, 3, 4, 6, 8$  et  $10 \mu s$ ) représentant le module du champ de vitesse (voir figures 6.2 et 6.5). Les résultats montrent une très bonne concordance entre les quatre solutions.
- pour avoir une meilleure idée de la précision de la méthode, nous avons également représenté la variation en temps des deux composantes du champ de vitesse sur deux capteurs situés à l'intérieur du fluide et du solide (la position précise de ces capteurs est indiquée sur la figure 6.1. Les solutions numériques obtenues par les codes dual-dual, primal-primal<sub>11</sub> et primal-primal<sub>12</sub> (les courbes respectivement cyan, magenta et bleue) sont comparées à la solution analytique (la courbe rouge) sur les figures 6.6 à 6.9. Les courbes sont parfaitement superposées, et illustrent encore une fois la précision de la méthode.

**Mise en évidence de l'instabilité du schéma dual-dual totalement explicite.** À titre d'illustration, nous avons relancé l'expérience précédente en utilisant la version totalement explicite du code dual-dual. Nous avons choisi un pas de temps égal à 0.7 fois la CFL optimale, c'est-à-dire  $\Delta t = 0.7 * 45 = 31.5$  ns. La figure 6.10 représente le module des vitesses aux temps  $t = 2, 2.65, 4, 5$  et  $6 \mu s$ . Il est évident sur cette figure que les instabilités sont engendrées par l'interface fluide-solide. On vérifie expérimentalement que le code est stable en choisissant un pas de temps égal à 0.6 fois la CFL optimale. Ce coefficient dépend bien entendu fortement des paramètres de l'expérience.

**Visualisation des fronts d'ondes.** La représentation des instantanés précédents en échelle logarithmique permet de mieux visualiser les différents fronts d'onde que nous décrivons plus précisément à la section 12.3.1.1. La figure 6.11 représente donc le logarithme du module du champ de vitesse aux instants  $t = 3, 4$  et  $5 \mu s$ . Sept fronts d'ondes se détachent clairement :

- dans le fluide on distingue l'onde incidente, l'onde réfléchie ainsi qu'une onde de tête reliant le front de l'onde P au front de l'onde réfléchie ;

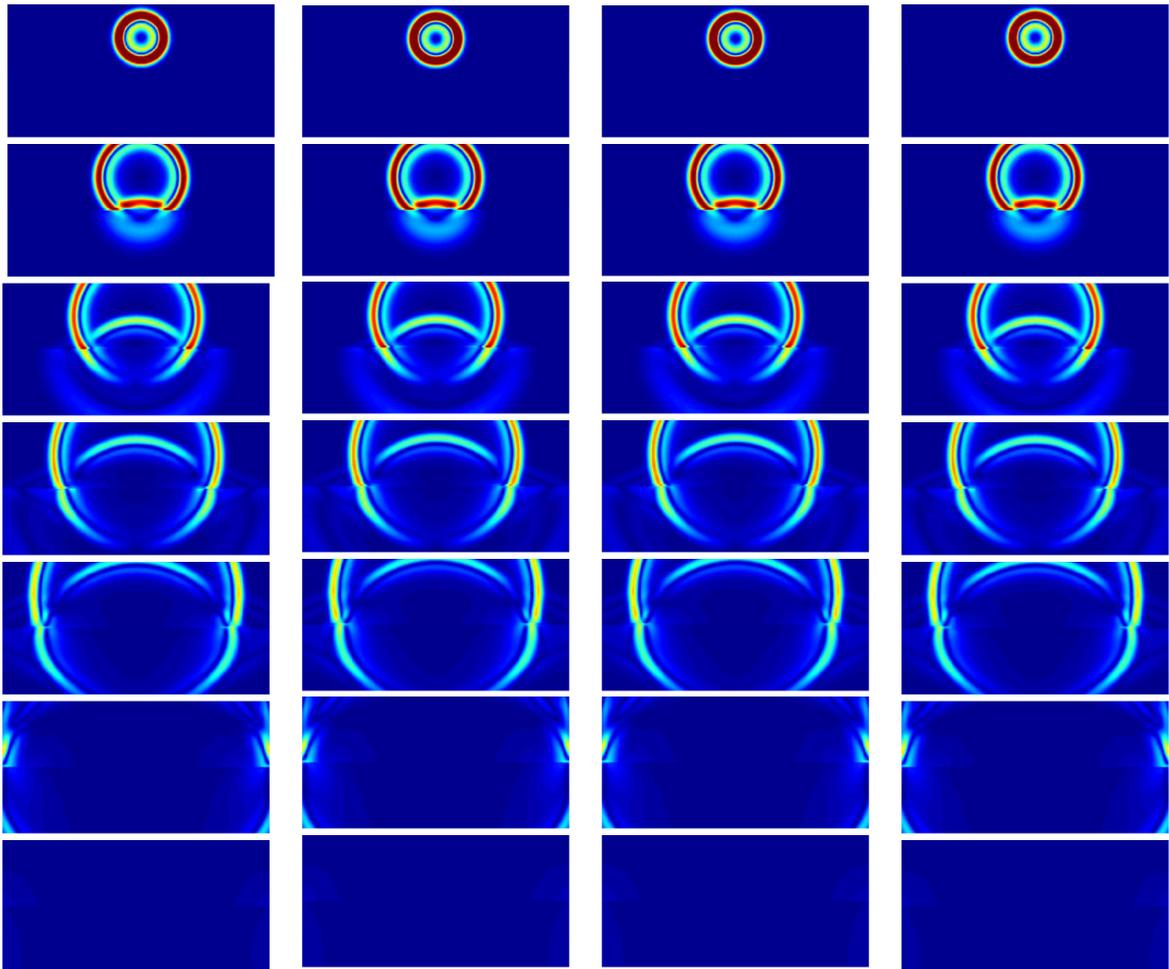


FIG. 6.2: dual-dual

FIG. 6.3: prim-prim<sub>11</sub>

FIG. 6.4: prim-prim<sub>12</sub>

FIG. 6.5: CdH

## 6.2 Comparaison avec des solutions analytiques

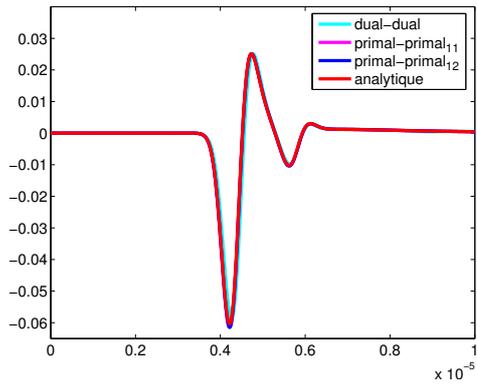


FIG. 6.6: La première composante de la vitesse dans le fluide

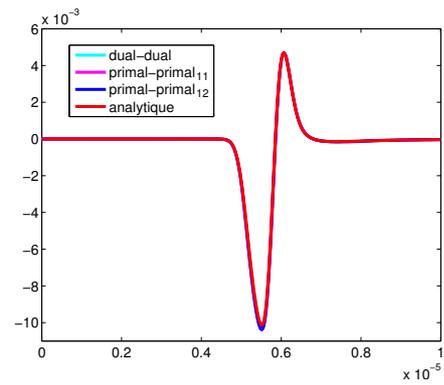


FIG. 6.8: La seconde composante de la vitesse dans le fluide

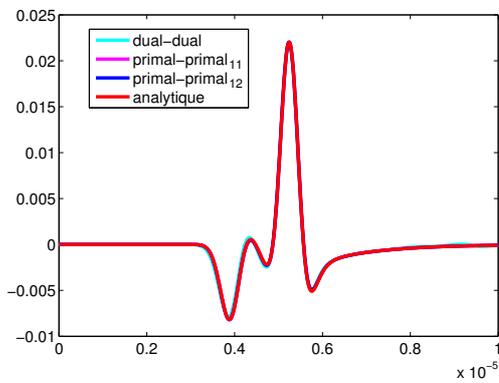


FIG. 6.7: La première composante de la vitesse dans le solide

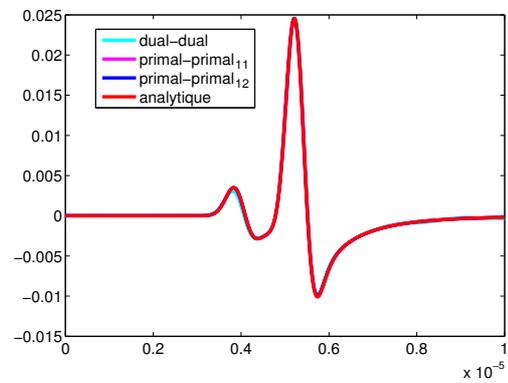


FIG. 6.9: La seconde composante de la vitesse dans le solide

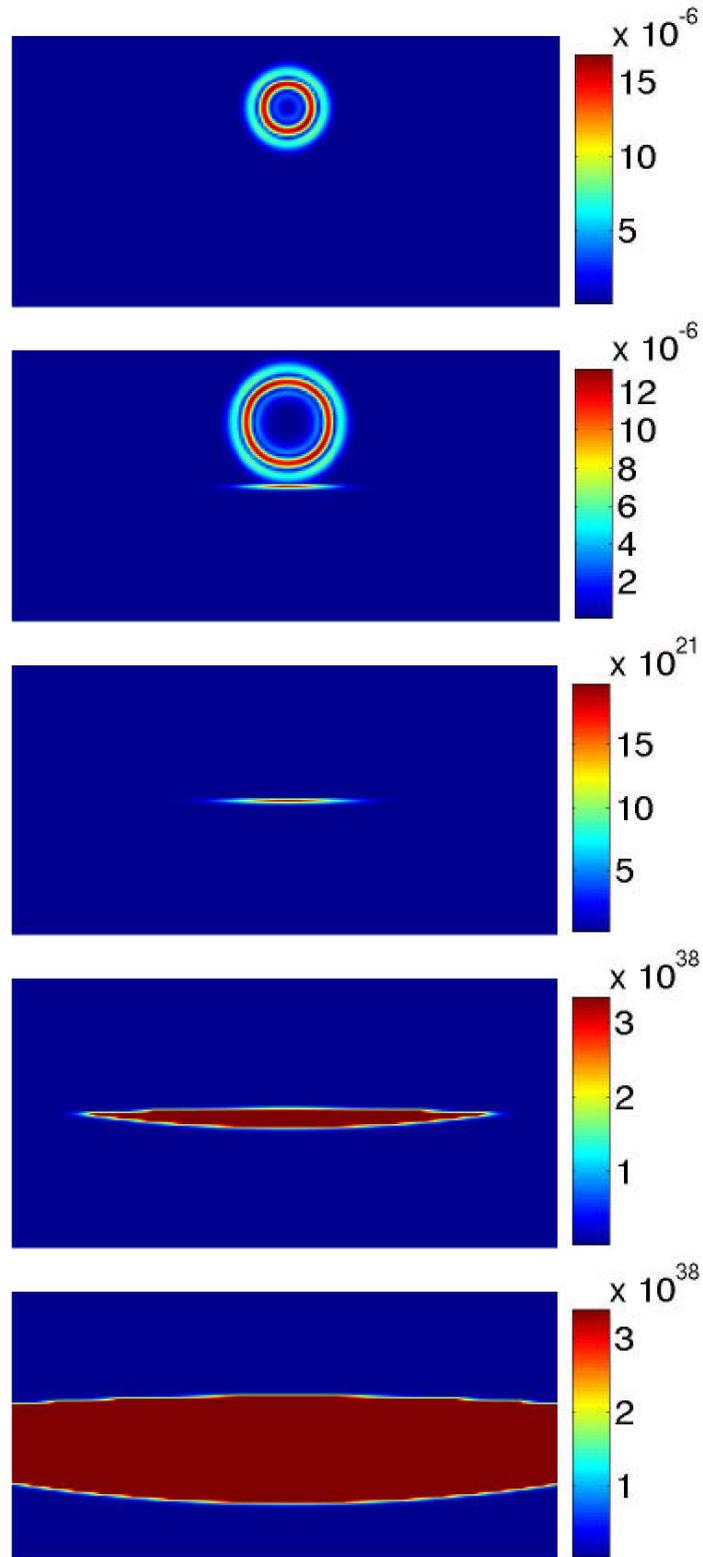


FIG. 6.10: Les instabilités du schéma dual-dual explicite

## 6.2 Comparaison avec des solutions analytiques

- dans le solide on distingue l'onde P, l'onde S ainsi que l'onde de tête reliant le front de l'onde P au front de l'onde S.

Les vitesses de propagation de l'onde S et de l'onde réfléchie dans le fluide étant très proches, nous ne pouvons pas distinguer l'onde de tête reliant ces deux ondes.

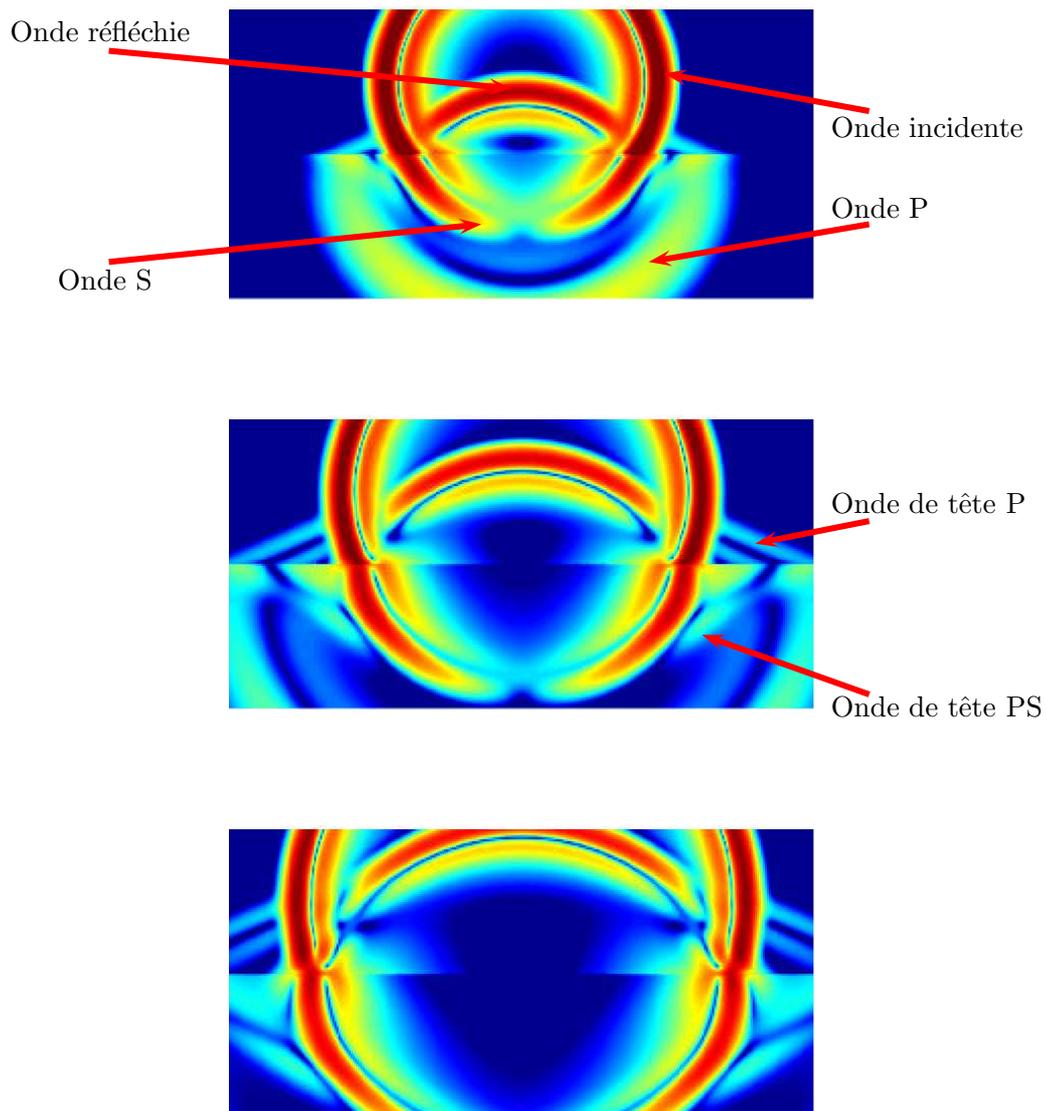


FIG. 6.11: Visualisation des différents fronts d'onde

**Étude en temps plus long.** Il existe une dernière onde, dite onde de Stoneley. Cette onde est surfacique et se propage à une vitesse inférieure à la vitesse des ondes dans le fluide. Ces deux vitesses de propagation sont néanmoins très proches et il n'est pas possible de distinguer l'onde de Stoneley sur les instantanés de la figure 6.11. Pour mettre cette onde en évidence il

faut étudier la solution sur un domaine de calcul plus large et pendant un temps plus long. Nous avons donc répété l'expérience précédente en utilisant le domaine de calcul représenté sur la figure 6.12. Ce domaine est entouré de PML qui n'ont pas été représentées pour des raisons de lisibilité, elles sont plus larges que pour le calcul précédent : 4 mm, pour garantir la précision du calcul. Les figures (6.13) et (6.14) représentent le module du champ de vitesse aux instants ( $t = 2, 4, 8, 16, 24$  et  $32 \mu\text{s}$ ) obtenus respectivement par le code primal-primal<sub>12</sub> et par la méthode de Cagniard-de Hoop. Les deux résultats sont à nouveau similaires (les codes dual-dual et primal-primal<sub>12</sub> donnent des résultats également très proches qui n'ont pas été représentés ici pour des raisons de lisibilité). En plus de l'onde de Stoneley, nous pouvons aussi visualiser l'onde de tête joignant l'onde S à l'onde réfléchie. Nous représentons également, sur les figures (6.15) à (6.18), les deux composantes du champ de vitesse enregistrées par deux capteurs positionnés comme indiqué sur la figure 6.12. Les courbes bleues représentent la solution analytique et les courbes rouges la solution numérique.

**Remarque 6.2.1** *Cette dernière expérience nous permet également de vérifier que la méthode de Cagniard-de Hoop prend bien en compte les ondes de surface. En effet nous verrons, aux chapitres 12 et 13, que cette méthode consiste à calculer chaque onde de volume et chaque onde de tête séparément mais que les ondes de surface sont calculées “en même temps” que les ondes de volume. Il était donc légitime de vérifier que ces ondes de surface sont bien calculées.*

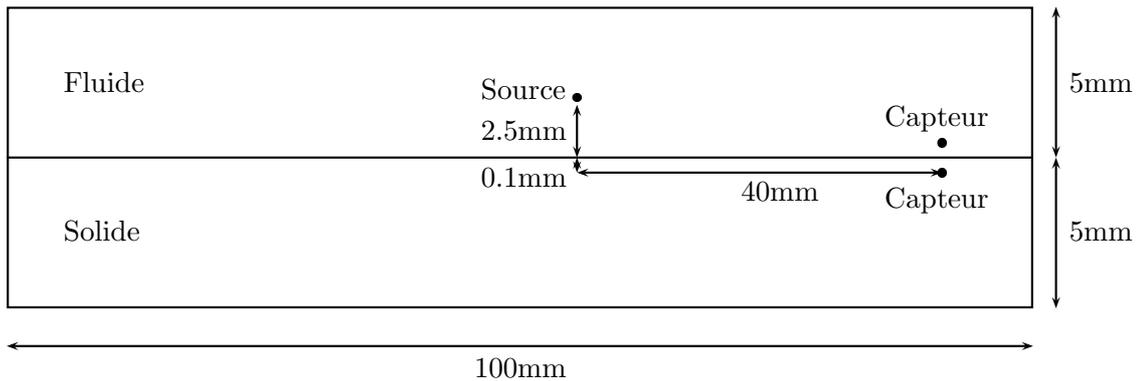
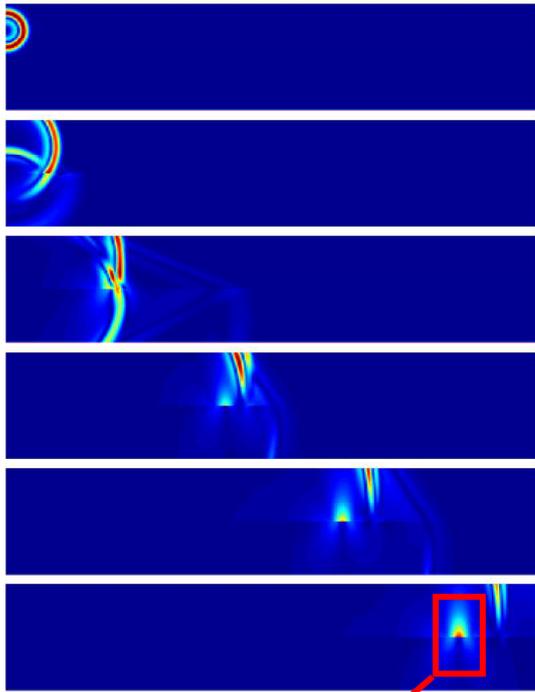


FIG. 6.12: Le nouveau domaine de calcul

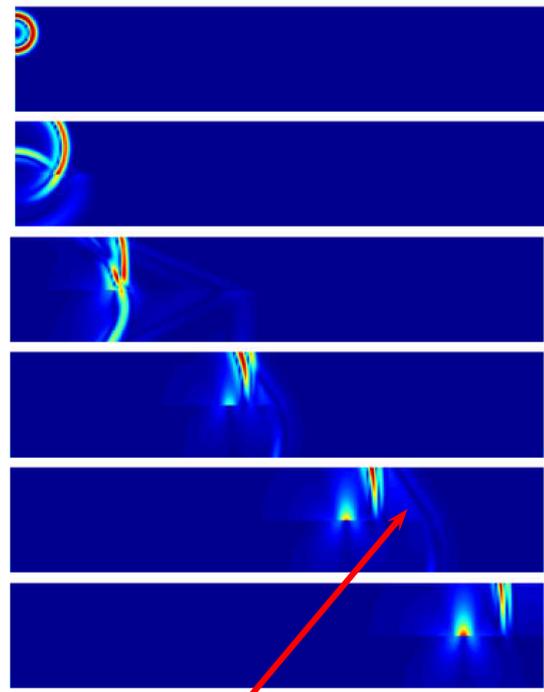
### 6.2.2 Validation en dimension 3

Nous avons mené une expérience similaire dans le cas de deux demi-espaces homogènes pour valider le code primal-primal avec des éléments finis  $Q_5$  en trois dimensions. Les paramètres physiques du milieu fluide sont ici  $c_f = 1 \text{ m s}^{-1}$  et  $\rho_f = 1 \text{ kg m}^{-3}$  et ceux du milieu solide sont  $c_S = 2 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_P = 4 \text{ m s}^{-1}$  et  $\rho_s = 1 \text{ kg m}^{-3}$ . La taille de chaque domaine est  $10 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ . La source est ponctuelle, située dans le fluide à 0.66 m de l'interface — voir figure 6.19. La partie temporelle de la fonction source est la dérivée d'une Gaussienne de fréquence dominante 1 Hz. Dans cette expérience nous avons utilisé le même pas d'espace (maillage conforme) et le même pas de temps dans le fluide et dans le solide. Ici encore, pour montrer que le couplage n'affecte pas la précision, nous avons choisi le pas d'espace en utilisant les critères que nous aurions utilisé dans un fluide seul ou dans un solide seul :  $h = 0.66 \text{ m}$  ;



Onde de Stoneley

FIG. 6.13: Méthode primale-primale



Onde de tête S

FIG. 6.14: Solution analytique

et le pas de temps satisfait les conditions CFL dans les deux milieux :  $\Delta t = 9$  ms.

La figure 6.20 représente un instantané du module du champ de vitesse obtenu par la méthode numérique au temps  $t = 3$  s. La solution analytique obtenue par la méthode de Cagniard-de Hoop est représentée sur la figure 6.21.

Nous avons également calculé les deux premières composantes de la vitesse dans le fluide et dans le solide au cours du temps grâce à deux capteurs situés comme indiqué sur la figure 6.19. La solution numérique (la courbe rouge) est comparée à la solution analytique (la courbe bleue) sur les figures 6.22 et 6.24. On observe une précision similaire à celle obtenue en dimension 2 (les oscillations qui apparaissent sur les solutions numériques après 3 s sont dues aux PML).

### 6.3 Des expériences réalistes

La propagation des ultrasons à travers les os corticaux, qui présente un intérêt particulier pour le diagnostic de l'ostéoporose [17], peut-être modélisée par un problème d'interaction fluide-structure. La peau, les muscles et la moelle osseuse se comportent pratiquement comme de l'eau et l'os se comporte comme un solide anisotrope. Les expériences qui suivent sont des applications de la méthode primale-primale à de tels problèmes, d'abord en deux dimensions, puis en trois dimensions.

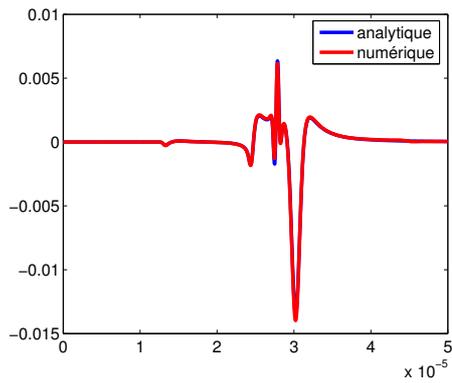


FIG. 6.15: La première composante de la vitesse dans le fluide

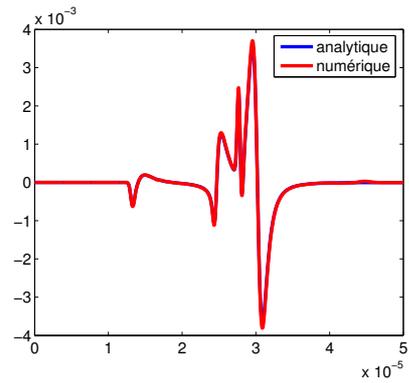


FIG. 6.17: La seconde composante de la vitesse dans le fluide

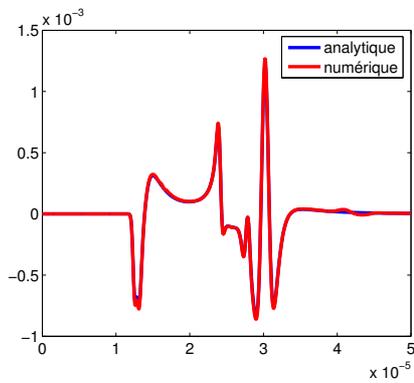


FIG. 6.16: La première composante de la vitesse dans le solide

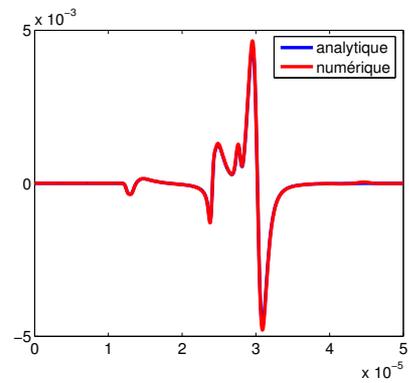


FIG. 6.18: La seconde composante de la vitesse dans le solide

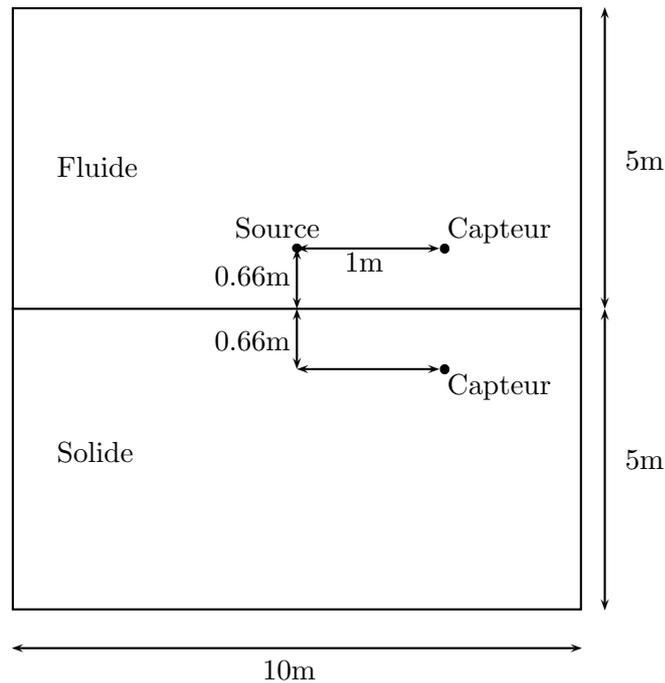


FIG. 6.19: Configuration de la simulation

### 6.3.1 Une expérience en dimension 2

Nous avons simulé la propagation d'une onde à travers la section d'un os. La figure 6.26 représente la configuration de l'expérience :

- le disque intérieur est la moelle osseuse, il est considéré rempli d'eau ( $c_f = 1500 \text{ m s}^{-1}$  et  $\rho_f = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ), son rayon est de 5 mm ;
- la couronne est l'os, considéré comme un solide isotrope (l'anisotropie ne concerne que la troisième dimension) :  $c_S = 1700 \text{ m s}^{-1}$ ,  $c_P = 3400 \text{ m s}^{-1}$  et  $\rho_s = 1850 \text{ kg m}^{-3}$ . Le rayon externe de la couronne est 10 mm ;

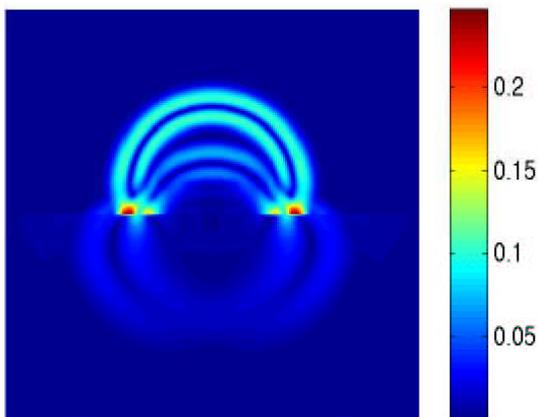


FIG. 6.20: Formulation primale-primale

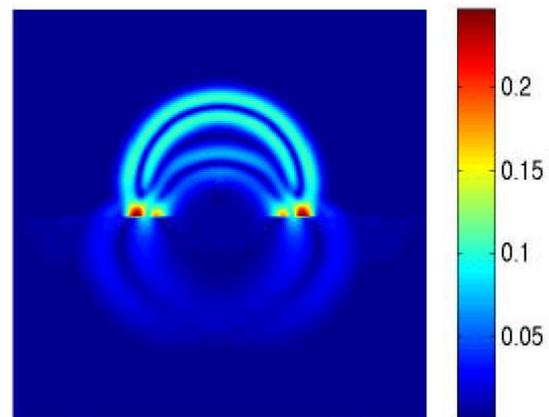


FIG. 6.21: Solution analytique

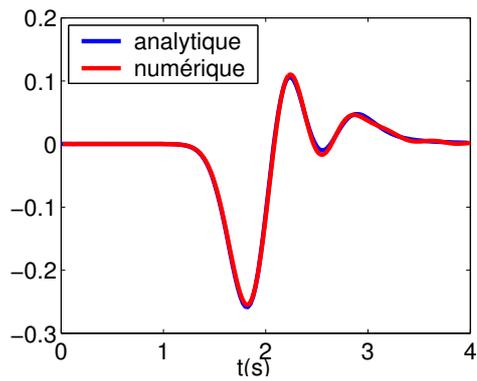


FIG. 6.22: La première composante de la vitesse dans le fluide

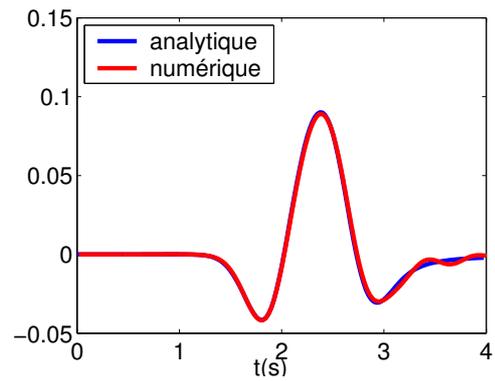


FIG. 6.24: La seconde composante de la vitesse dans le fluide

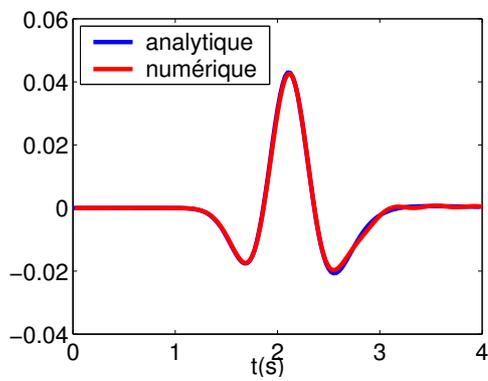


FIG. 6.23: La première composante de la vitesse dans le solide

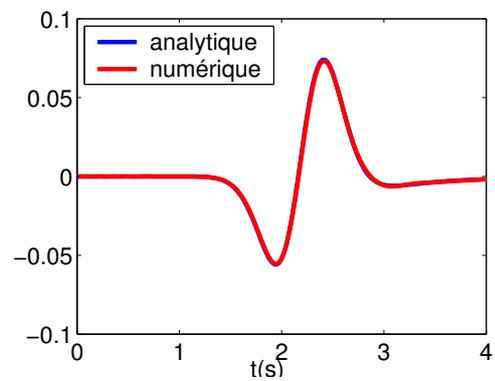


FIG. 6.25: La seconde composante de la vitesse dans le solide

- le milieu extérieur, qui représente les muscles et la peau, est également assimilé à de l'eau.
- le domaine de calcul est borné à l'aide de PML pour simuler un milieu infini.

Le maillage de ce domaine est représenté sur la figure 6.27. La fonction source en espace est

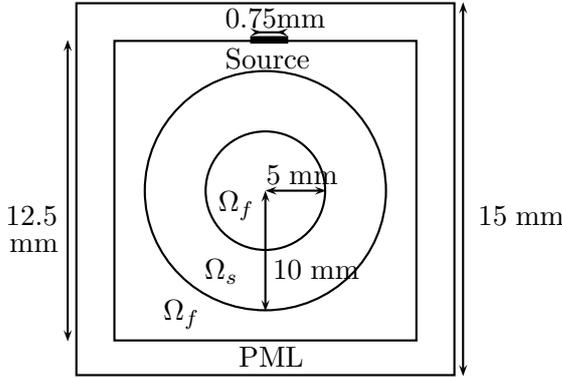


FIG. 6.26: Configuration de la simulation

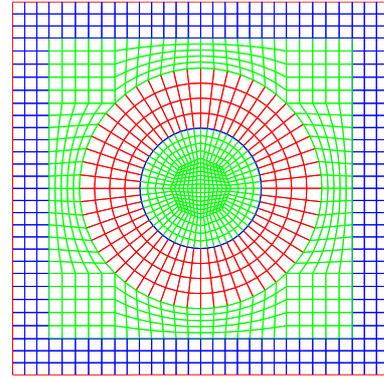


FIG. 6.27: Le maillage du domaine

une ligne source parallèle à l'axe des  $x$  dont le centre est situé sur celui de l'arête supérieure du carré vert et dont la longueur est 0.75 mm (voir figure 6.27). La fonction source en temps est la dérivée d'une Gaussienne dont la fréquence dominante est 1 MHz. Nous avons ici utilisé le code primal-primal<sub>12</sub> avec éléments courbes pour modéliser l'interface : le pas de temps est de 9.5  $\mu$ s dans le solide et de 19  $\mu$ s dans le fluide.

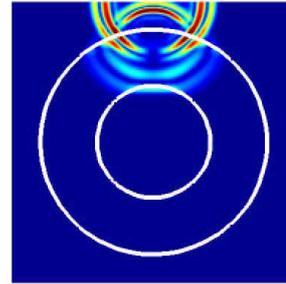
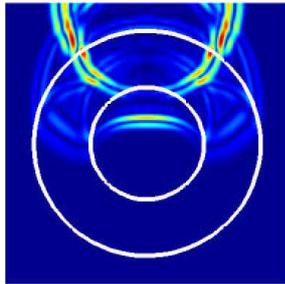
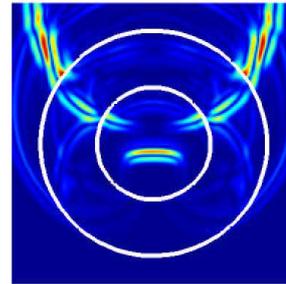
Le module de la vitesse est représenté sur les figures 6.28, 6.29, 6.29 et 6.31, respectivement aux temps  $t = 2, 4, 6, 8$  ms.

### 6.3.2 Une expérience en dimension 3

Nous avons ensuite extrudé le domaine précédent pour obtenir un cylindre de hauteur 30 mm. La source en espace est maintenant un rectangle 12 mm  $\times$  1 mm dont le grand et le petit côté sont respectivement parallèles à l'axe des  $x$  et à l'axe des  $y$ . Les coefficients du tenseur élastique sont (en GPa) :

$$C = \begin{bmatrix} 21.5 & 11.5 & 11.5 & & & \\ 11.5 & 21.5 & 11.5 & & & \\ 11.5 & 11.5 & 29.6 & & & \\ & & & 6 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 6 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

ce qui correspond à un solide isotrope dans le plan  $(x, y)$  (le même que celui modélisé dans l'expérience 2d) et anisotrope dans les plans parallèles à l'axe des  $z$ . Contrairement à l'expérience précédente, nous avons utilisé le même pas de temps (8  $\mu$ s) dans les deux milieux. Les résultats de l'expérience sont présentés sur la page suivante :

FIG. 6.28:  $t=2$  msFIG. 6.29:  $t=4$  msFIG. 6.30:  $t=6$  msFIG. 6.31:  $t=8$  ms

- la figure 6.32 représente le module de la vitesse aux temps  $t = 1.5, 3, 4.5, 6$  ms sur une vue 3d :
- la figure 6.33 représente le module de la vitesse aux temps  $t = 1.5, 3, 4.5, 6$  ms sur une section orthogonale à la source :
- la figure 6.34 représente le module de la vitesse aux temps  $t = 1.5, 3, 4.5, 6$  ms sur une section horizontale :
- la figure 6.35 représente le module de la vitesse aux temps  $t = 1.5, 3, 4.5, 6$  ms sur la paroi externe du cylindre solide.

Ces résultats numériques 2d et 3d (que nous avons comparés — avec une bonne précision — aux solutions obtenues avec un code de différences finies [17]) donnent une bonne idée de la complexité des problèmes de propagation d'ondes à travers les os.

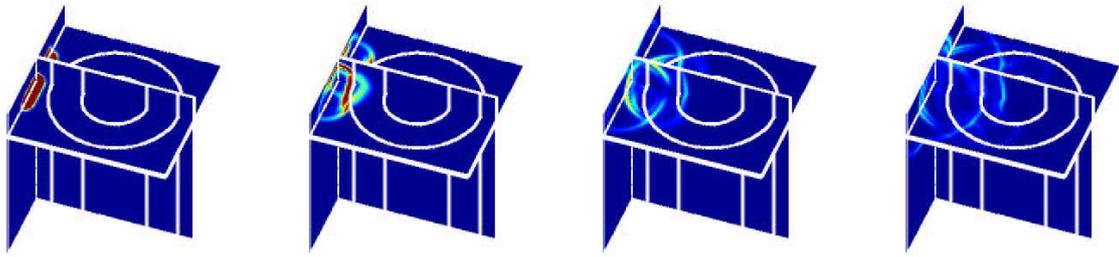


FIG. 6.32: La solution en vue 3d.

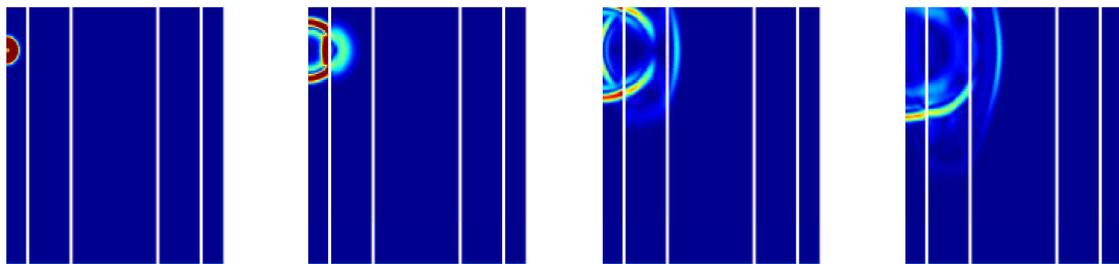


FIG. 6.33: La solution sur une section verticale.

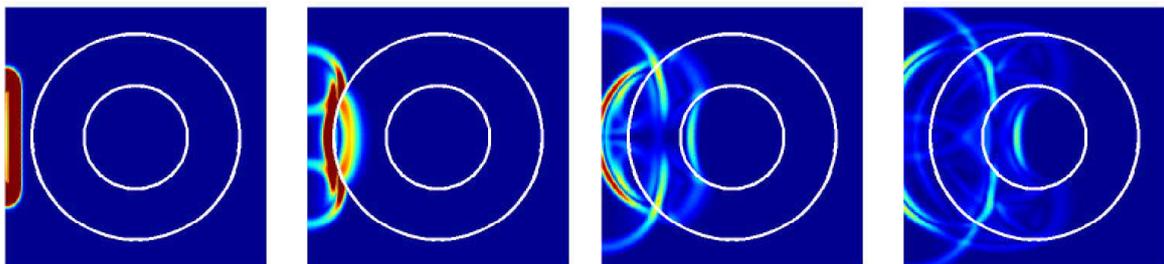


FIG. 6.34: La solution sur une section horizontale.

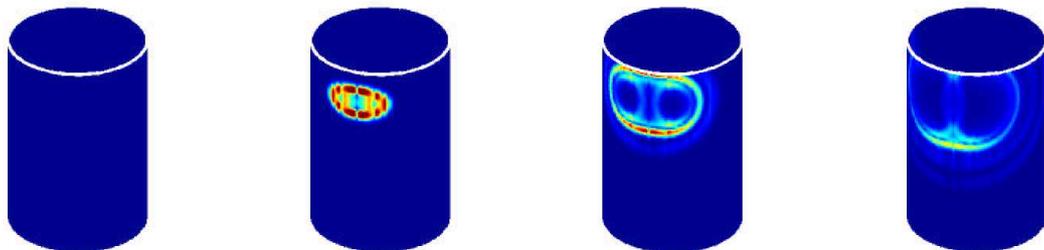


FIG. 6.35: La solution sur la paroi externe externe du cylindre.



## Deuxième partie

Une analyse de la précision des conditions aux limites et couches absorbantes pour l'équation des ondes par la méthode de Cagniard de Hoop



## Chapitre 7

# Les techniques de modélisation des milieux infinis

Dans ce chapitre nous rappelons le principe des Conditions aux Limites Absorbantes et des Couches absorbantes Parfaitement Adaptées (Perfectly Matched Layers, PML) utilisées pour la modélisation des milieux infinis. Nous nous intéresserons ensuite aux outils déjà existants, qui permettent d'étudier la précision de ces deux techniques : l'analyse par ondes planes et le théorème d'Engquist-Majda. Nous montrerons alors que ces outils sont insuffisants pour obtenir des estimations d'erreur.

Cette partie a donné lieu à deux articles [30, 32].

**Contenu**

---

<b>Introduction . . . . .</b>	<b>103</b>
<b>7.1 Les Conditions aux Limites Absorbantes . . . . .</b>	<b>103</b>
7.1.1 Les Conditions aux Limites d'Engquist-Majda . . . . .	103
7.1.2 D'autres types de conditions limites absorbantes . . . . .	108
7.1.3 Rappel des résultats connus . . . . .	109
7.1.3.1 Analyse de stabilité . . . . .	109
7.1.3.2 Analyse de précision par ondes planes . . . . .	112
7.1.3.3 Le résultat d'approximation initial d'Engquist-Majda . . . . .	113
7.1.3.4 D'autres résultats d'approximation. . . . .	115
<b>7.2 Les Couches Parfaitement Adaptées (PML) . . . . .</b>	<b>116</b>
7.2.1 Rappel des résultats connus . . . . .	118
7.2.1.1 Analyse de stabilité . . . . .	118
7.2.1.2 Analyse de précision par ondes planes . . . . .	119
7.2.1.3 Convergence et estimations d'erreur . . . . .	120
<b>7.3 Objectifs des chapitres 8 et 9 . . . . .</b>	<b>124</b>

---

## Introduction et position du problème

L'élaboration de conditions de frontière artificielle pour la modélisation numérique des phénomènes de propagation d'ondes est déjà un sujet ancien, les travaux pionniers d'Engquist et Majda [39, 40] remontant à la fin des années 1970. Leur principale contribution est la construction et l'analyse d'une classe de Conditions aux Limites Absorbantes (CLA) locales d'ordre élevé pour l'équation des ondes que nous décrirons à la section 7.1.1. Durant les trente dernières années, de nombreux travaux ont été consacrés à l'amélioration et à l'extension (en particulier l'application aux autres équations d'ondes) de ces conditions. Il n'est pas possible de donner ici une bibliographie exhaustive et nous renvoyons le lecteur aux articles récemment publiés sur le sujet par Hagström [50, 51] et Givoli [44]. Depuis 1990, des solutions alternatives ont été progressivement développées. Certains travaux ont notamment proposé l'utilisation de conditions absorbantes exactes mais non locales, soit grâce à des frontières absorbantes de géométrie particulière, comme dans les travaux de Grote-Keller [46, 47], soit en exploitant les progrès récents des algorithmes rapides (multi-pôles) et des approximations rationnelles comme dans les travaux d'Alpert, Greengard et Hagström [5, 4].

A peu près au même moment, l'introduction des Couches absorbantes Parfaitement Adaptées (Perfectly Matched Layers, PML) par J.P. Bérenger [13, 14] a révolutionné le sujet. Le principe, que nous décrirons plus en détail à la section 7.2, est ici de remplacer la frontière absorbante par une couche absorbante de largeur  $L$  qui a la propriété étonnante de ne générer aucune réflexion entre le domaine de propagation et le domaine absorbant. Cette méthode a rapidement acquis une grande popularité dans différents domaines d'application, en particulier grâce à ses très bonnes performances et à sa facilité d'implémentation.

Toutes ces méthodes (CLA locales d'ordre élevé, CLA non locales et PML) ont été implémentées avec succès dans de nombreux codes de calcul. Évidemment, pour qui souhaite utiliser ces codes, la question primordiale est le choix de la meilleure méthode. Nous pensons qu'il n'y a pas de réponse immédiate à une telle question et que la réponse devra tenir compte de plusieurs critères : nature du problème à résoudre, précision, vitesse de calcul, facilité d'implémentation, comportement en temps long... Quoiqu'il en soit, même avec de tels critères, la réponse serait délicate à obtenir, en particulier parce qu'aucune comparaison, complète et impartiale, entre les trois classes de méthodes n'a jamais été entreprise. La première raison est probablement que personne n'a jamais implémenté les trois méthodes avec la même attention. La seconde raison est le manque de résultats analytiques, qui sont compliqués à obtenir, en particulier si on s'intéresse aux estimations d'erreur. L'objectif de cette partie est de combler (partiellement) ce manque de résultats dans le cas des CLA d'ordre élevé et des PML.

## 7.1 Les Conditions aux Limites Absorbantes

### 7.1.1 Les Conditions aux Limites d'Engquist-Majda

Considérons l'équation des ondes acoustiques 2D :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0. \quad (7.1.1)$$

Si on suppose que les données initiales (ou la source, ou un objet diffractant) sont contenues dans le demi-espace supérieur  $\mathbb{R}_+^2 = \{x_2 > 0\}$ , il est naturel d'essayer de limiter les calculs numériques à ce demi-espace en imposant des conditions aux limites absorbantes sur la frontière artificielle  $\Gamma = \partial\mathbb{R}_+^2$  (voir figure 7.1).

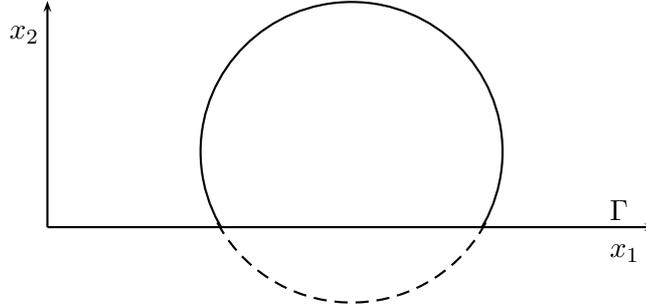


FIG. 7.1: Domaine de calcul

Dans [39], B. Engquist et A. Majda ont proposé la condition suivante :

$$\mathcal{B}^N u = 0, \quad \text{sur } \Gamma, \tag{7.1.2}$$

où les opérateurs

$$\mathcal{B}^N = \mathcal{B}^N\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad N \geq 0,$$

sont une famille d'opérateurs différentiels homogènes définis par la relation de récurrence

$$\begin{cases} \mathcal{B}^0 = 2I, & \mathcal{B}^1 = \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \mathcal{B}^{N+1} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}^N - \frac{c^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \mathcal{B}^{N-1}. \end{cases} \tag{7.1.3}$$

Remarquons que  $\mathcal{B}^N$  peut se réécrire sous la forme :

$$\mathcal{B}^N = S_{N-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \frac{\partial}{\partial x_2} - Q_N\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right)$$

où  $Q_N$  et  $S_{N-1}$  sont des polynômes homogènes de deux variables, de degrés respectifs  $N$  et  $N - 1$ . L'opérateur  $\mathcal{B}^N$  étant du premier ordre par rapport à  $x_2$  ; la condition (7.1.2) peut être vue comme une condition de type Dirichlet to Neumann (ou condition d'impédance) puisqu'elle peut se réécrire formellement :

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{Q_N\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right)}{S_{N-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right)} u = 0 \tag{7.1.4}$$

**Remarque 7.1.1** Pour des solutions régulières de l'équation des ondes, la condition (7.1.2) peut se réécrire uniquement en fonction des dérivées par rapport à  $t$  et à  $x_2$ . En effet,  $\mathcal{B}^N$  est visiblement pair par rapport à la variable  $x_1$  et, en utilisant l'équation des ondes, la dérivée de second ordre par rapport à  $x_1$  peut être remplacée par des dérivées par rapport à  $t$  et à  $x_2$  :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \longrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

En conséquence, on peut montrer que  $\mathcal{B}^N$  se réécrit formellement [58]:

$$\mathcal{B}^N = \frac{1}{2^{N-1}} \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^N \quad (7.1.5)$$

et donc que :

$$\mathcal{B}^N u = 0 \iff \tilde{\mathcal{B}}^N u = 0, \quad \tilde{\mathcal{B}}^N = \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^N. \quad (7.1.6)$$

La démonstration est immédiate par récurrence sur  $N$  :

- il est évident que  $B^0$  et  $B^1$  vérifient (7.1.5) ;
- si  $B^{N-1}$  et  $B^N$  vérifient (7.1.6), alors, d'après la définition (7.1.3) de  $B^{N+1}$  :

$$B^{N+1} = \frac{1}{2^{N-1}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^N - \frac{1}{2^N} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{N-1}.$$

En remarquant que :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

on vérifie que :

$$B^{N+1} = \frac{1}{2^{N-1}} \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^N \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right)$$

soit

$$B^{N+1} = \frac{1}{2^N} \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^N.$$

Cette remarque nous servira à la section 8.2.1.

Rappelons que les conditions (7.1.2), (7.1.4) ou (7.1.6), sont des approximations construites à partir d'une condition aux limites exacte (ou transparente) :

$$\widehat{\mathcal{B}}u = 0, \quad \mathcal{B} = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mathcal{L}, \quad (7.1.7)$$

où  $\mathcal{L}$  est un opérateur pseudo-différentiel suivant  $(x_1, t)$  dont le symbole est connu explicitement. Plus précisément, si on utilise la transformation de Laplace-Fourier dans le plan  $(t, x_1)$  (voir (8.2.2) et (8.2.3)) :

$$\varphi(x_1, t) \rightarrow \tilde{\varphi}(k, s),$$

on obtient la formule :

$$\widetilde{\mathcal{L}} \tilde{\varphi}(k, s) = \left( k^2 + \frac{s^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}(k, s), \quad \operatorname{Re} \left( k^2 + \frac{s^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \geq 0. \quad (7.1.8)$$

Cette relation provient du fait que si  $u$  est solution de l'équation des ondes dans le demi-espace inférieur  $\mathbb{R}_-^2 = \{x_2 < 0\}$  avec des données initiales nulles, sa transformée de Laplace-Fourier suivant  $t$  et  $x_1$ ,  $\tilde{u}(k, x_2, s)$ , vérifie :

$$\tilde{u}(k, x_2, s) = \tilde{u}(k, 0, s) e^{(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} x_2}, \quad x_2 \leq 0,$$

ce qui conduit à :

$$\frac{d\tilde{u}}{dx_2}(k, 0, s) - (k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} \tilde{u}(k, 0, s) = 0.$$

La présence de la racine carrée dans le symbole de  $\mathcal{L}$  rend cet opérateur, et par conséquent la condition aux limites (7.1.7), non local en espace et en temps, ce qui est *a priori* peu pratique d'un point de vue numérique. La condition approchée se déduit simplement d'une approximation rationnelle du symbole  $\mathcal{L}$  de telle sorte que la condition aux limites peut s'exprimer en terme d'opérateurs différentiels, ce qui est beaucoup plus agréable à manipuler numériquement. En remarquant que :

$$(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} = \frac{s}{c} (1 + \frac{c^2 k^2}{s^2})^{\frac{1}{2}},$$

le problème est réduit à la recherche d'une approximation rationnelle de la fonction d'une seule variable :

$$f(z) = (1 + z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus  $f(z)$  est une solution de l'équation de point fixe :

$$f(z) = 1 + \frac{z^2}{1 + f(z)}. \quad (7.1.9)$$

On peut donc obtenir une approximation rationnelle de  $f(z)$  en utilisant l'algorithme de point fixe suivant :

$$f_{n+1}(z) = 1 + \frac{z^2}{1 + f_n(z)}, \quad f_1(z) = 1. \quad (7.1.10)$$

La condition (7.1.2) est finalement obtenue en remplaçant dans (7.1.7) l'opérateur  $\mathcal{L}$  par l'opérateur  $\mathcal{L}_N$ , dont le symbole est donné par

$$\frac{s}{c} f_N(\frac{ck}{s}).$$

Il est alors relativement facile de déduire la relation de récurrence (7.1.3) de (7.1.10). Remarquons tout d'abord que  $f_n(z)$  peut s'écrire

$$f_n(z) = 1 + \frac{T_n(z)}{S_n(z)}.$$

On a alors

$$f_{n+1} = 1 + \frac{z^2}{2 + \frac{T_n(z)}{S_n(z)}} = 1 + \frac{z^2 S_n(z)}{2S_n(z) + T_n(z)} = 1 + \frac{T_{n+1}(z)}{S_{n+1}(z)},$$

donc :

$$T_{n+1}(z) = z^2 S_n(z) \quad \text{et} \quad S_{n+1}(z) = 2S_n(z) + T_n(z).$$

On en déduit

$$T_{n+1}(z) = 2T_n(z) + z^2 T_{n-1}(z) \quad \text{et} \quad S_{n+1}(z) = 2S_n(z) + z^2 S_{n-1}(z).$$

Il nous reste à déterminer  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $S_1$  et  $S_2$ . Comme

$$f_1(z) = 1 \quad \text{et} \quad f_2(z) = 1 + \frac{z^2}{2},$$

on vérifie facilement que :

$$T_1(z) = 0, \quad T_2(z) = \frac{z^2}{2}, \quad S_1(z) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad S_2(z) = 1.$$

La condition absorbante, dans l'espace de Fourier-Laplace, s'écrit

$$\frac{d\tilde{u}}{dx_2}(k, 0, s) - \frac{s}{c} f_N\left(\frac{ck}{s}\right) \tilde{u}(k, 0, s) = 0,$$

soit :

$$\frac{d\tilde{u}}{dx_2}(k, 0, s) - \frac{s}{c} \left(1 + \frac{T_N\left(\frac{ck}{s}\right)}{S_N\left(\frac{ck}{s}\right)}\right) \tilde{u}(k, 0, s) = 0.$$

Cette condition est équivalente à :

$$\left[ S_N\left(\frac{ck}{s}\right) \frac{d}{dx_2} - \frac{s}{c} \left( S_N\left(\frac{ck}{s}\right) + T_N\left(\frac{ck}{s}\right) \right) \right] \tilde{u}(k, 0, s) = 0. \quad (7.1.11)$$

Remarquons maintenant que  $T_N(z)$  et  $S_N(z)$  sont des polynômes de degré respectivement inférieur à  $N$  et à  $N - 1$ . Pour que la condition absorbante soit définie par un opérateur de symbole polynômial en  $s$  et en  $k$  il suffit donc de multiplier l'équation (7.1.11) par  $s^{N-1}$  :

$$\left[ s^{N-1} S_N\left(\frac{ck}{s}\right) \frac{d}{dx_2} - \frac{s^N}{c} \left( S_N\left(\frac{ck}{s}\right) + T_N\left(\frac{ck}{s}\right) \right) \right] \tilde{u}(k, 0, s) = 0. \quad (7.1.12)$$

Nous posons

$$\tilde{B}_N = \frac{1}{2^N} \left[ s^{N-1} S_N\left(\frac{ck}{s}\right) \frac{d}{dx_2} - \frac{s^N}{c} \left( S_N\left(\frac{ck}{s}\right) + T_N\left(\frac{ck}{s}\right) \right) \right].$$

En utilisant les relations de récurrence définissant  $T_N$  et  $S_N$  on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{B}_N &= \frac{s^{N-1}}{2^N} \left( 2S_{N-1}\left(\frac{ck}{s}\right) + \frac{c^2 k^2}{s^2} S_{N-2}\left(\frac{ck}{s}\right) \right) \frac{d}{dx_2} \\ &\quad - \frac{s^N}{2^N c} \left( 2S_{N-1}\left(\frac{ck}{s}\right) + \frac{c^2 k^2}{s^2} S_{N-2}\left(\frac{ck}{s}\right) + 2T_{N-1}\left(\frac{ck}{s}\right) + \frac{c^2 k^2}{s^2} T_{N-2}\left(\frac{ck}{s}\right) \right) \\ \tilde{B}_N &= \frac{s}{2^{N-1}} \left( s^{N-2} S_{N-1}\left(\frac{ck}{s}\right) \frac{d}{dx_2} - \frac{s^{N-1}}{c} \left( S_{N-1}\left(\frac{ck}{s}\right) + T_{N-1}\left(\frac{ck}{s}\right) \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2^{N-2}} \frac{c^2 k^2}{4} \left( s^{N-3} S_{N-2}\left(\frac{ck}{s}\right) \frac{d}{dx_2} - \frac{s^{N-2}}{c} \left( S_{N-2}\left(\frac{ck}{s}\right) + T_{N-2}\left(\frac{ck}{s}\right) \right) \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\tilde{B}_N = s\tilde{B}_{N-1} + \frac{c^2 k^2}{4} \tilde{B}_{N-2},$$

ce qui correspond bien à la définition de  $B_N$ .

**Remarque 7.1.2** *On vérifie facilement que la suite  $f_n(z)$  converge vers  $f(z)$  si et seulement si  $|z| < 1$ . De plus la convergence est uniforme et exponentielle sur tout compact du cercle unité. Pour  $|z| > 1$ ,  $f_n(z)$  converge vers  $-f(z)$  qui est l'autre solution de (7.1.9). Cependant, comme nous le montrerons par la suite, cela ne pose pas de problème dans l'application aux conditions aux limites absorbantes.*

Il est également bien connu que (7.1.10) fournit la suite des  $\{n, n-1\}$  (pour  $n$  pair) et  $\{n-1, n-1\}$  (pour  $n$  impair) approximations de Padé [6] de  $f(z)$  au voisinage de l'origine :

$$f_2(z) = 1 + \frac{z^2}{2}, \quad f_3(z) = 1 + \frac{2z^2}{4+z^2}, \dots$$

et qu'on a en particulier :

$$f_n(z) - f(z) = O((z^2)^N), \quad z \rightarrow 0. \quad (7.1.13)$$

C'est pourquoi la condition aux limites (7.1.2) est appelée condition d'Engquist-Majda d'ordre  $2m$ . La relation (7.1.13) montre que l'approximation rationnelle du symbole de  $\mathcal{L}$  donnée par (7.1.10) privilégie les petites valeurs de  $ck/s$ , ce qui a une interprétation physique comme nous le verrons par la suite : les conditions d'Engquist-Majda absorbent bien les modes propagatifs mais ne sont pas forcément efficaces pour les modes évanescents (voir section 7.1.3.3 ci-dessous).

### 7.1.2 D'autres types de conditions limites absorbantes

Depuis le premier article d'Engquist et Majda, de nombreux travaux ont été consacrés à l'amélioration des conditions aux limites absorbantes et en particulier à la recherche de "meilleures" approximations rationnelles. Comme nous venons de le voir, les conditions aux limites absorbantes d'Engquist-Majda sont construites à partir des approximations de Padé de  $f(z)$  au voisinage de l'origine. On peut généraliser ces conditions en utilisant des approximations de  $f(z)$  du type :

$$r(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (7.1.14)$$

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux fractions rationnelles prenant en compte la parité de  $f(z)$ , qui peuvent donc se mettre sous la forme :

$$r(z) = \gamma - \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k^N z^2}{1 - \alpha_k^N z^2} \quad (7.1.15)$$

avec  $\gamma$ ,  $\alpha_k^N$  et  $\beta_k^N$  réels.

Les coefficients correspondant aux conditions d'Engquist-Majda d'ordre  $N$  sont (voir par exemple les travaux d'Halpern [53]) :

$$\begin{cases} \gamma = 0, \\ \alpha_n^N = \cos^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right), \\ \beta_n^N = \frac{2}{2N+1} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2N+1}\right); \end{cases} \quad (7.1.16)$$

Nous avons vu que les conditions d'Engquist-Majda n'étaient *a priori* pas efficaces pour absorber les modes évanescents. Pour pallier ce problème, Lu et McLaughlin [72] puis Collino et Lavaud [25] ont proposé d'utiliser des coefficients complexes obtenus à partir d'approximations de Padé au voisinage d'un point  $i\beta$ ,  $\beta > 0$ .

Les approximations les plus simples de  $f(z)$  sont de la forme :

$$r(z) = \gamma.$$

Intéressons-nous au cas  $\gamma = \cos \alpha$ ,  $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , l'approximation  $r(z)$  est exacte pour  $z_0$  tel que :

$$(1 + z_0^2)^{\frac{1}{2}} = \cos \alpha$$

soit

$$z_0 = \pm i \sin \alpha.$$

En utilisant cette approximation on obtient la condition aux limites d'ordre 1 et d'angle  $\alpha$  de Higdon [58] :

$$B_{Hig}^1 u = \left( \cos \alpha \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u = 0.$$

Cette condition est très proche de la condition d'Engquist-Majda, comme pour cette dernière on peut obtenir des conditions aux limites d'ordre arbitrairement élevé :

$$B_{Hig}^N u = \left( \cos \alpha \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^N u = 0.$$

Dans le cas général, les conditions aux limites de Higdon s'écrivent :

$$B_{Hig}^N u = \prod_{i=1}^N \left( \cos \alpha_i \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u = 0.$$

### 7.1.3 Rappel des résultats connus

#### 7.1.3.1 Analyse de stabilité

Il y a déjà bien sûr beaucoup de résultats théoriques concernant les conditions absorbantes d'ordre élevé. La première question, soulevée par Engquist et Majda dans leur premier article, était celle du caractère bien posé du problème. Cette question, loin d'être triviale est maintenant bien comprise, grâce notamment à la théorie de Kreiss [57, 68]. En particulier des conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir des conditions aux limites absorbantes conduisant à un problème bien posé ont été données dans [81] et des estimations d'énergie (fournissant des résultats de stabilité, c'est-à-dire des estimations *a priori*, indépendantes de  $N$ ) ont été obtenues dans [35].

**Théorème de Trefethen-Halpern.** Ce théorème concerne le problème aux valeurs initiales suivant :

Trouver  $u$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, & x_1 \in \mathbb{R}, x_2 < 0, t > 0, \\ Bu = 0, & x_2 = 0, t > 0, \\ u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2), & x_2 > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, 0) = u_1(x_1, x_2) & x_2 > 0. \end{array} \right. \quad (7.1.17)$$

avec  $B$  une condition aux limites associée à une approximation de  $f(z)$  par une fonction rationnelle quelconque définie par (7.1.14).

**Théorème 7.1.1** *Le problème aux valeurs initiales (7.1.17) est fortement bien posé si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Tous les pôles et les zéros de la fonction rationnelle  $\frac{r(z)}{z}$  sont réels et alternent sur l'axe réel<sup>(13)</sup>.*
2.  *$r(z) = 0$  pour  $-1 < z < 1$ .*

La condition 1 implique que

$$0 \leq \deg P - \deg Q \leq 2.$$

Les CLA d'Engquist-Majda satisfont bien entendu ces deux conditions (voir [40]). Plus généralement, si  $f(z)$  est approchée par une fonction rationnelle vérifiant (7.1.15), on montre que le problème aux valeurs initiales est bien posé si et seulement si :

$$0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N < 1, \quad \beta_k > 0 \quad (1 \leq k \leq N), \quad \sum_{k=1}^N \frac{\beta^k}{1 - \alpha^k} < \gamma. \quad (7.1.18)$$

Si  $\alpha_1 = 0$ , la CLA sera dite d'ordre pair, si  $\alpha_1 > 0$ , la CLA sera dite d'ordre impair.

**Estimations d'énergie.** Dans [35], Ha-Duong et Joly ont obtenu des estimations d'énergie pour des conditions aux limites associées aux fonctions rationnelles de type (7.1.15). Pour présenter leur théorème il est nécessaire de définir certaines notations : pour  $N$  fixé nous définissons :

- l'énergie physique :

$$E(u; t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |\nabla u|^2 \right) dx_1 dx_2;$$

- la famille d'opérateurs  $(P_k)_{k=1..N}$  :

$$P_k = \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + (1 - \alpha_j) \frac{\partial^2}{\partial t^2};$$

---

13. Un zéro, un pôle, un zéro, un pôle ...

- l'opérateur  $Q$  :

$$Q = \prod_{k=1}^N P_k;$$

- les familles d'opérateurs  $(Q_k)_{k=1..N}$  et  $(q_k)_{k=2..N}$  :

$$Q_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N P_j \quad \text{et} \quad q_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1, k}}^N P_j;$$

- l'énergie d'ordre  $2N + 1$  :

$$\begin{aligned} E_{2N+1}(u) &= \left( \gamma - \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} \right) E(Qu) + \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k \alpha_k}{1 - \alpha_k} E \left( Q_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \beta_k E \left( Q_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial t} \right); \end{aligned} \quad (7.1.19)$$

- l'énergie d'ordre  $2N$  :

$$\begin{aligned} E_{2N}(u) &= \left( \gamma - \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k} \right) E \left( \frac{\partial}{\partial t} Q_1 u \right) + \beta_1 E \left( \frac{\partial}{\partial x_2} Q_1 u \right) \\ &\quad + \sum_{k=2}^N \frac{\beta_k \alpha_k}{1 - \alpha_k} E \left( \frac{\partial^3}{\partial x_2^2 \partial t} q_k u \right) + \sum_{k=2}^N \beta_k E \left( \frac{\partial^3}{\partial x_2 \partial t^2} q_k u \right). \end{aligned} \quad (7.1.20)$$

Si la CLA est d'ordre pair ( $\alpha_1 = 0$ ) on a le théorème suivant :

**Théorème 7.1.2** *Si la condition (7.1.18) est vérifiée, alors le problème aux valeurs initiales (7.1.17) est fortement bien posé au sens de Kreiss et l'unique solution de ce problème vérifie :*

$$\frac{dE_{2N}(u)}{dt} = - \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial t} (Q_1 u) \right|^2 < 0, \quad (7.1.21)$$

ce qui implique la décroissance de l'énergie d'ordre  $2N$ . De plus cette solution vérifie l'estimation a priori

$$\sup_{|\alpha|=2N} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}_+^2))} \leq C(\|u_0\|_{H^{2N}(\mathbb{R}_+^2)} + \|u_1\|_{H^{2N-1}(\mathbb{R}_+^2)}),$$

où la constante positive  $C$  ne dépend que de  $\gamma$ ,  $\alpha_k$  et  $\beta_k$ .

Si la CLA est d'ordre impair ( $\alpha_1 > 0$ ) on a le théorème suivant :

**Théorème 7.1.3** *Si la condition (7.1.18) est vérifiée, alors le problème aux valeurs initiales (7.1.17) est fortement bien posé au sens de Kreiss et l'unique solution de ce problème vérifie :*

$$\frac{dE_{2N+1}(u)}{dt} = - \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial x_2} (Qu) \right|^2 < 0, \quad (7.1.22)$$

ce qui implique la décroissance de l'énergie d'ordre  $2N + 1$ . De plus cette solution vérifie l'estimation a priori

$$\sup_{|\alpha|=2N+1} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}_+^2))} \leq C(\|u_0\|_{H^{2N+1}(\mathbb{R}_+^2)} + \|u_1\|_{H^{2N}(\mathbb{R}_+^2)}),$$

où la constante positive  $C$  ne dépend que de  $\gamma$ ,  $\alpha_k$  et  $\beta_k$ .

### 7.1.3.2 Analyse de précision par ondes planes

Concernant la précision des CLA, l'étude la plus simple consiste à analyser la réflexion des ondes planes, ce qui revient à étudier des solutions particulières de la forme<sup>(14)</sup> :

$$u_\theta(\mathbf{x}, t) = \exp ik(x_1 \sin \theta - x_2 \cos \theta - ct) + \mathbf{R} \exp ik(x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta - ct), \quad (7.1.23)$$

où :

- $\exp ik(x_1 \sin \theta - x_2 \cos \theta - ct)$  est l'onde incidente.
- $\exp ik(x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta - ct)$  est l'onde réfléchie,  $R$  étant le coefficient de réflexion.

Par construction, (7.1.23) est solution de l'équation des ondes (7.1.1). Il reste ensuite à déterminer  $\mathbf{R}$  pour satisfaire la condition aux limites (7.1.2). Les calculs montrent que  $\mathbf{R}$  dépend uniquement de l'angle d'incidence  $\theta$  :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_N(\theta) = (-1)^N \left( \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^N, \quad (7.1.24)$$

Remarquons que, pour tout  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\mathbf{R}_N(\theta)$  tend (exponentiellement vite) vers 0 quand  $N \rightarrow +\infty$  alors que  $|\mathbf{R}_N(\pm\frac{\pi}{2})| = 1$  (voir figure 7.2). De plus  $\mathbf{R}_N(0) = 0$  quelque soit  $N$ . Dans le cas des conditions de Higdon on montre que :

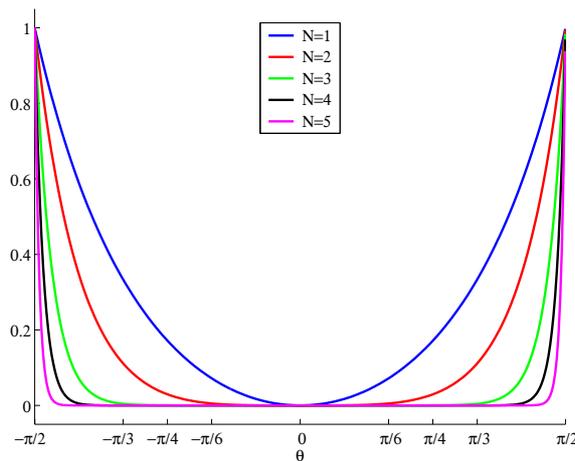


FIG. 7.2: Coefficient de réflexion (CLA)

14.  $k \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  sont des paramètres,  $k$  est le nombre d'onde et  $\theta$  représente l'angle d'incidence de l'onde plane).

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\text{hig}}(\theta) = (-1)^N \prod_{j=1}^N \left( \frac{\cos \alpha_j - \cos \theta}{\cos \alpha_j + \cos \theta} \right)^N. \quad (7.1.25)$$

On a donc  $R_{\text{hig}}(\pm\alpha_j) = 0$  : les conditions de Higdon sont exactes pour toute combinaison linéaire d'ondes planes d'angle d'incidence  $\pm\alpha_j$ .

### 7.1.3.3 Le résultat d'approximation initial d'Engquist-Majda

Il y a beaucoup moins de résultats concernant la convergence et les estimations d'erreur. En fait, il n'y a pas eu de réels progrès depuis le résultat présenté par Engquist et Majda, qui concernait le problème modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } v : \mathbb{R}_-^2 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} & \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_-^2 \times \mathbb{R}^+, \\ v(x_1, 0, t) = g(x_1, t), & \text{sur } x_2 = 0, \\ v(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } t < 0. \end{array} \right. \quad (7.1.26)$$

On souhaite obtenir une bonne approximation de  $v$  dans un domaine

$$\Omega_b = \{x / -b < x_2 < 0\},$$

pour  $b > 0$  donné, en imposant une condition aux limites absorbantes sur la droite  $x_2 = -a$ , avec  $a > b$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } v^N : \Omega_a \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} & \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v^N}{\partial t^2} - \Delta v^N = 0 & \text{dans } \Omega_a \times \mathbb{R}^+, \\ v^N(x_1, 0, t) = g(x_1, t), & \text{sur } x_2 = 0, \\ \mathcal{B}^N v^N = 0, & \text{sur } x_2 = -a, \\ v^N(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } t < 0. \end{array} \right. \quad (7.1.27)$$

Il y a deux paramètres importants dans (7.1.27), l'ordre  $N$  de la condition aux limites et la distance  $a$  entre la source  $g$  et l'interface. On suppose que la fonction  $g$  est de carré intégrable à la fois en espace et en temps :

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |g(x_1, t)|^2 dx_1 dt < +\infty. \quad (7.1.28)$$

On peut alors énoncer le

**Théorème 7.1.4** [40] *Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout entier  $M$  arbitrairement grand, il existe  $N_0 = N_0(\varepsilon, M)$  et  $a_0 = a_0(\varepsilon, M)$  tel que, pour tout  $N \geq N_0$  et  $a \geq a_0$ :*

$$\int_0^T \int_{\Omega_b} |(v - v^N)(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} dt < \varepsilon, \quad \forall T \leq Ma. \quad (7.1.29)$$

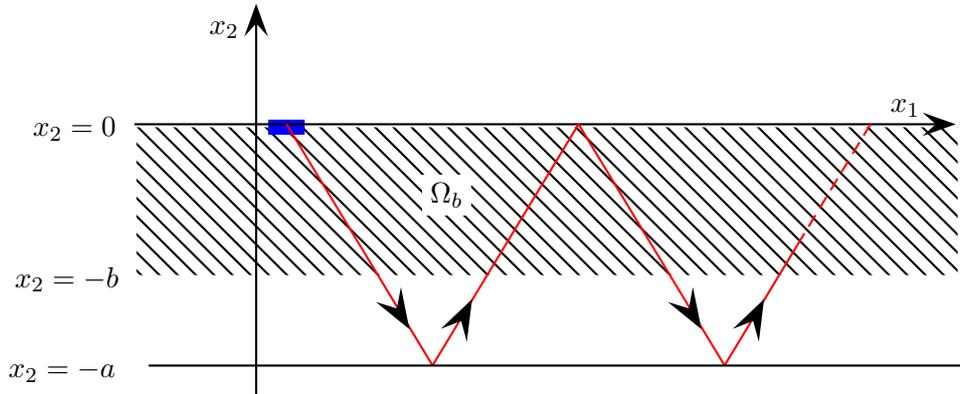


FIG. 7.3: Représentation du problème

- Ce résultat est uniquement un résultat de convergence et ne fournit pas d'estimation d'erreur. Il ne permet donc pas de choisir  $N$  et  $a$  en pratique.
- Le fait que le résultat soit valable pour tout intervalle de temps de la forme  $[0, Ma]$  indique qu'on peut prendre en compte un nombre arbitrairement grand de réflexions sur la frontière absorbante.
- Ce qui limite à nos yeux le théorème 7.1.4 est que l'estimation (7.1.29) nécessite de choisir  $a$  suffisamment grand. Cela ne fournit donc pas de résultat de convergence quand  $N \rightarrow +\infty$  pour  $a$  fixé.
- Il faut regarder la démonstration du théorème pour comprendre la nécessité technique de choisir  $a$  suffisamment grand. Sans reprendre la démonstration dans son intégralité, il nous a semblé ici utile de mettre en lumière certains points. L'idée est d'utiliser la transformation de Fourier à la fois en espace (toujours suivant  $x_1$ ) et en temps :

$$v(x_1, x_2, t) \rightarrow \tilde{v}(k, x_2, \omega) = \tilde{v}(k, x_2, i\omega).$$

On peut alors obtenir une expression explicite de  $\tilde{s}$  et de  $\tilde{s}^N$  en utilisant le principe d'absorption limite :

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{v}(k, x_2, \omega) = \tilde{g}(k, \omega) \exp(k^2 - \omega^2/c^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x_2 \\ (k^2 - \omega^2/c^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2} & \text{si } k^2 \geq \omega^2/c^2, \\ i\sqrt{\omega^2/c^2 - k^2} & \text{si } k^2 \leq \omega^2/c^2. \end{cases} \end{array} \right.$$

En particulier :

- si  $k^2 < \omega^2/c^2$ , la fonction  $x_2 \rightarrow \tilde{v}(k, x_2, \omega)$  oscille : c'est la zone des modes propagatifs ;
- si  $k^2 > \omega^2/c^2$ , la fonction  $x_2 \rightarrow \tilde{v}(k, x_2, \omega)$  est exponentiellement décroissante quand  $x_2 \rightarrow -\infty$  : c'est la zone des modes évanescents.

Quand on considère l'erreur  $e^N = v^N - v$ , sa transformée de Fourier s'écrit comme une somme sur  $j \geq 1$  de termes de la forme :

$$\tilde{v}_j^\pm(k, x_2, \omega) = \mathcal{R}_N\left(\frac{ck}{\omega}\right)^j \cdot \tilde{\mathbf{g}}(k, \omega) \cdot \exp\left[(k^2 - \omega^2/c^2)^{\frac{1}{2}} (\pm x_2 - 2ja)\right],$$

où le *coefficient de réflexion*  $\mathcal{R}_N$  est donné par :

$$\mathcal{R}_N(\nu) = \frac{(f_N - f)(\nu)}{(f_N + f)(\nu)} \quad (7.1.30)$$

et satisfait :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_N(\sigma) \leq 1, & \text{(stabilité),} \\ \mathcal{R}_N(\sigma) \rightarrow 0, & \text{for } |\sigma| < 1, \quad \text{(voir la remarque 7.1.2).} \end{cases}$$

**Remarque 7.1.3** Pour  $t$  donné,  $e^N = v^N - v$  est une somme finie de termes  $v_j^\pm$ . En effet, on vérifie que

$$\tilde{v}_j^\pm(k, x_2, \omega) \leq e^{-2ja|\Im m(\omega)|}.$$

En appliquant le théorème de Paley-Wiener on montre que

$$\tilde{v}_j^\pm(k, x_2, t) = 0 \quad \text{pour } t \leq 2ja,$$

et donc que

$$v_j^\pm(x_1, x_2, t) = 0 \quad \text{pour } t \leq 2ja.$$

Finalement, on vérifie facilement que, si  $t < 2M$ , alors  $v_j^\pm = 0$  pour tout  $j > M$ .

Sans s'attarder sur les détails techniques (qui font intervenir l'hypothèse (7.1.28)), l'idée de la démonstration est la suivante :

- dans la zone propagative  $k^2 < \omega^2/c^2$ ,  $|\mathcal{R}_N(\sigma)|^j$  peut-être rendu arbitrairement petit en choisissant  $N$  suffisamment grand ;
- dans la zone évanescente  $k^2 > \omega^2/c^2$ ,  $|\exp[(k^2 - \omega^2/c^2)^{\frac{1}{2}} (\pm x_2 + 2ja)]|$  peut être rendu arbitrairement petit en choisissant  $a$  suffisamment grand.

On conclut alors grâce au théorème de Plancherel.

Physiquement, le fait que  $f_n(z)$  n'ait rien à voir avec  $f(z)$  pour  $|z| > 1$  signifie que les modes évanescents ne sont pas correctement pris en compte par la condition absorbante. C'est pour cette raison que la démonstration fait apparaître la nécessité de choisir  $a$  suffisamment grand pour "tuer" l'amplitude des modes évanescents sur la frontière  $x_2 = a$ .

#### 7.1.3.4 D'autres résultats d'approximation.

En 1988, Halpern et Rauch ont proposé une analyse haute-fréquence dans [54]. Plus récemment une avancée a été effectuée par T. Hagström (voir en particulier [49] et [48, 50]), qui a développé une théorie pour l'approximation d'une classe d'opérateurs pseudo-différentiels, basée sur une réinterprétation de (7.1.2) et des techniques de quadrature classiques. il a ainsi obtenu des estimations d'erreur permettant de déduire un résultat de convergence pour  $N$  tendant vers  $+\infty$  (i.e. sans faire varier la position de la frontière). Cependant, ces estimations sont non uniformes en temps.

## 7.2 Les Couches Parfaitement Adaptées (PML)

Considérons à nouveau l'équation des ondes acoustiques 2D (7.1.1). Une autre solution pour limiter le domaine de calcul au demi-espace supérieur  $\mathbb{R}_+^2 = \{x_2 > 0\}$  consiste à introduire une couche horizontale d'épaisseur  $L$  dans laquelle l'équation (7.1.1) sera modifiée par un terme d'absorption (voir figure 7.4).

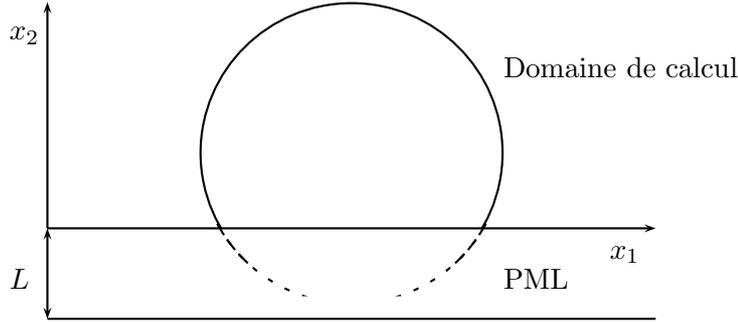


FIG. 7.4: Domaine de calcul et couche PML

Dans [13, 14], Bérenger a proposé d'introduire un terme d'absorption particulier agissant uniquement dans la direction orthogonale à l'interface, en remplaçant l'opérateur de dérivation par rapport à  $x_2$  par l'opérateur  $D_{x_2}^\sigma$  défini formellement par<sup>(15)</sup> :

$$D_{x_2}^\sigma = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma(x_2) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_2},$$

c'est-à-dire que, plus rigoureusement, si  $\psi = D_{x_2}^\sigma \phi$  alors  $\psi$  est solution de l'équation différentielle :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma(x_2) \right) \psi = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi \quad \text{et} \quad \psi(t=0) = 0.$$

L'équation dans la couche absorbante devient alors :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - (D_{x_2}^\sigma)^2 u = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times [-L; 0], \quad t > 0. \quad (7.2.1)$$

Pour comprendre d'où vient l'opérateur  $D_{x_2}^\sigma$ , il faut étudier la formulation du premier ordre de l'équation des ondes. L'équation (7.1.1) est en effet équivalente à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (7.2.2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (7.2.2b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0. \end{array} \right. \quad (7.2.2c)$$

15.  $\sigma$  est une fonction positive de  $x_2$

## 7.2 Les Couches Parfaitement Adaptées (PML)

Nous rappelons ici la formulation introduite par Bérenger, d'autres formulations ont depuis été élaborées (voir par exemple la formulation de Zhao et Cangellaris [86]). Le principe des PML consiste à décomposer chaque équation (et chaque inconnue) en deux parties, la première contenant les dérivées par rapport à  $x_1$  et la seconde les dérivées par rapport à  $x_2$ <sup>(16)</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial u^1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0, \quad x_2 < 0, \quad t > 0, \\ \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 < 0, \quad t > 0, \\ \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad x_2 < 0, \quad t > 0, \\ \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 < 0, \quad t > 0, \\ u = u^1 + u^2. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (7.2.3a) \\ (7.2.3b) \\ (7.2.3c) \\ (7.2.3d) \\ (7.2.3e) \end{array}$$

Il suffit alors pour obtenir une couche PML horizontale d'introduire un amortissement ne dépendant que de  $x_2$  dans les équations contenant les dérivées par rapport à  $x_2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial u^1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0, \quad x_2 < 0, \quad t > 0, \\ \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial u^2}{\partial t} + \sigma(x_2)u^2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 < 0, \quad t > 0, \\ \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad x_2 < 0, \quad t > 0, \\ \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} + \sigma(x_2)v_2 + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 < 0, \quad t > 0, \\ u = u^1 + u^2. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (7.2.4a) \\ (7.2.4b) \\ (7.2.4c) \\ (7.2.4d) \\ (7.2.4e) \end{array}$$

On peut formellement multiplier les équations (7.2.4b) et (7.2.4d) par l'opérateur

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma(x_2) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t}$$

---

16. Les équations (7.2.2b) et (7.2.2c) ne sont pas décomposées puisqu'elles ne contiennent respectivement que des dérivées par rapport à  $x_1$  ou à  $x_2$ .

et additionner (7.2.4a) et (7.2.4b) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma(x_2) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 < 0, \quad t > 0, \quad (7.2.5a) \\ \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad x_2 < 0, \quad t > 0, \quad (7.2.5b) \\ \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} + \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma(x_2) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 < 0, \quad t > 0. \quad (7.2.5c) \end{array} \right.$$

Il est évident, en comparant les systèmes (7.2.2) et (7.2.5) que nous avons bien remplacé l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial x_2}$  par l'opérateur  $D_{x_2}^\sigma$ .

Comme nous l'avons dit en introduction, les ondes se propageant dans le domaine de calcul ne sont pas réfléchies en entrant dans les PML, c'est pour cette raison que ces couches sont dites parfaitement adaptées (perfectly matched). Grâce à cette propriété et à leur facilité d'implémentation, les PML ont rapidement acquis une grande popularité dans différents domaines d'application [80, 86, 28, 63, 14, 42, 27].

## 7.2.1 Rappel des résultats connus

### 7.2.1.1 Analyse de stabilité

Dans le cas où le coefficient d'absorption est variable, la question de l'analyse des PML est délicate et non encore résolue, nous nous limiterons donc ici à l'analyse du problème de Cauchy à coefficients constants. Ce problème étant un cas particulier du problème à coefficients variables, sa stabilité est bien évidemment une condition nécessaire à la stabilité du problème général.

Remarquons tout d'abord que le système décomposé (7.2.3), n'est que faiblement hyperbolique [1], contrairement au système original (7.2.2). Le système (7.2.4) est donc une perturbation d'ordre 0 d'un système faiblement hyperbolique du premier ordre. D'après la théorie de Kreiss et Lorentz [69] rien ne garantit donc *a priori* que ce système soit bien posé. Il est maintenant bien connu qu'il est faiblement bien posé. Cela se traduit par le fait qu'il existe une constante positive  $K$ , une constante réelle  $\alpha$  et un entier  $s$  tels que :

$$\|U(., t)\|_{L^2} \leq K e^{\alpha t} \|U(., 0)\|_{H^s}$$

avec

$$U = [ u^1, u^2, v_1, v_2 ]^t.$$

**Rappel 7.2.1** *Si le problème avait été fortement bien posé on aurait eu*

$$\|U(., t)\|_{L^2} \leq K e^{\alpha t} \|U(., 0)\|_{L^2}$$

Remarquons que le fait que le problème soit bien posé, même fortement, n'interdit pas de croissance exponentielle en temps de la solution. Il est donc utile d'introduire la définition de stabilité [10] :

## 7.2 Les Couches Parfaitement Adaptées (PML)

**Définition 7.2.1** *Un système sera dit faiblement (resp. fortement) stable s'il est faiblement (resp. fortement) bien posé et que*

$$\|U(\cdot, t)\|_{L^2} \leq (1 + t^s)K \|U(\cdot, 0)\|_{H^s}$$

avec  $s > 0$  (resp.  $s = 0$ ).

Le premier résultat, établi dans [26], prouve la stabilité du système décomposé sans coefficients absorbants :

**Théorème 7.2.1** *La solution  $U = [u^1, u^2, v_1, v_2]^t$  du problème (7.2.3) vérifie l'estimation d'erreur*

$$\|\mathbf{v}(t)\|_{L^2}^2 + \|u_1(t) + u_2(t)\|_{L^2}^2 = \|\mathbf{v}(0)\|_{L^2}^2 + \|u_1(0) + u_2(0)\|_{L^2}^2 \quad (7.2.6)$$

et les inconnues décomposées  $u_1$  et  $u_2$  vérifient

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2} \leq \|u_1(0) - u_2(0)\|_{L^2} + t \|U_0\|_{H^1}. \quad (7.2.7)$$

Les inconnues  $u$  et  $\mathbf{v}$  sont donc bornées en temps, mais on observe une perte de régularité de la quantité  $u_1(t) - u_2(t)$  qui peut croître linéairement en temps.

Le théorème suivant, démontré dans [10], prouve que le système (7.2.4) est stable.

**Théorème 7.2.2** *La solution  $U = [u^1, u^2, v_1, v_2]^t$  du problème (7.2.4) vérifie l'estimation d'erreur*

$$\|\mathbf{v}(t)\|_{L^2} + \|u_1(t) + u_2(t)\|_{L^2} \leq C \|U_0\|_{L^2} \quad (7.2.8)$$

et les inconnues décomposées  $u_1$  et  $u_2$  vérifient

$$\|u_1(t)\|_{H^{-1}} + \|u_2(t)\|_{H^{-1}} \leq C t \|U_0\|_{L^2}. \quad (7.2.9)$$

Les inconnues  $u_1$  et  $u_2$  peuvent donc croître linéairement en temps bien que leur somme  $u$  soit bornée. On retrouve ici le comportement de la solution du système sans perturbation.

L'application des PML à d'autres types d'équations (acoustique anisotrope, acoustique en écoulement, élastodynamique) est toujours susceptible d'engendrer des instabilités [63, 9].

### 7.2.1.2 Analyse de précision par ondes planes

Comme pour les CLA nous pouvons étudier la réflexion d'une onde plane<sup>(17)</sup> en cherchant des solutions particulières de la forme :

$$u_\theta(\mathbf{x}, t) = \exp ik(x_1 \sin \theta - x_2 \cos \theta - ct) + \mathbf{R} \exp ik(x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta - ct),$$

Les calculs montrent que  $\mathbf{R}$  dépend uniquement de l'angle d'incidence  $\theta$  :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\sigma, L}(\theta) = e^{-2 \frac{\cos \theta}{c} \int_0^L \sigma(\tau) d\tau} \quad (7.2.10)$$

---

17. Nous considérons ici la réflexion d'une onde sur la frontière extérieure de la PML, puisqu'il n'y a pas de réflexion à l'interface domaine de calcul/PML.

Remarquons que le coefficient de réflexion ne dépend pas de la forme de la fonction  $\sigma$  mais du produit de sa valeur moyenne

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{L} \int_0^L \sigma(\tau) d\tau$$

et de  $L$ .

On peut également remarquer que, pour tout  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\mathbf{R}_{\sigma,L}(\theta)$  tend (exponentiellement vite) vers 0 quand  $\bar{\sigma} \rightarrow +\infty$  ou quand  $L \rightarrow +\infty$  alors que  $|\mathbf{R}_{\sigma,L}(\pm\frac{\pi}{2})| = 1$  (voir figure 7.5). Ce comportement est similaire à celui observé lors de l'analyse par ondes planes des CLA. Néanmoins  $\mathbf{R}_N(0) = 0$  alors que  $\mathbf{R}_{\sigma,L}(0) \neq 0$ . Les paramètres  $N$ ,  $\bar{\sigma}$  et  $L$  semblent donc jouer un rôle similaire. Nous verrons plus loin que nos résultats nuancent cette dernière remarque.

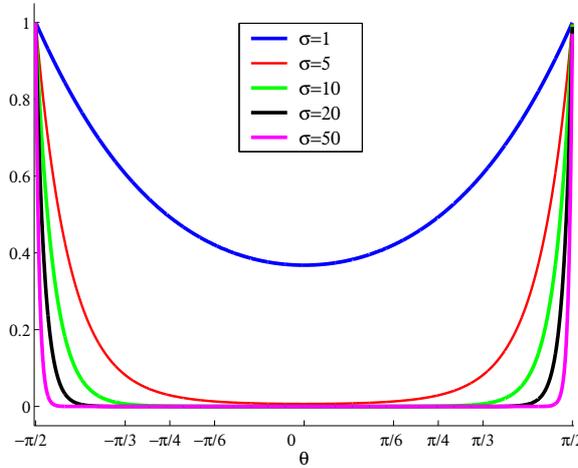


FIG. 7.5: Coefficient de réflexion (PML)

### 7.2.1.3 Convergence et estimations d'erreur

Il n'y a, à notre connaissance, pas de résultats concernant la convergence et les estimations d'erreur pour les PML en domaine temporel. Il existe en revanche des résultats de convergence en régime harmonique et nous ferons dans cette section une brève revue des résultats concernant les PML pour l'équation de Helmholtz.

**Les PML en coordonnées polaires.** Le premier résultat que nous rappelons ici a été établi par Lassas et Somersalo [70] (on pourra également se référer aux travaux de Hohage *et al* [60]). Rappelons que l'équation de Helmholtz se déduit de l'équation des ondes en remplaçant les dérivées temporelles,  $\partial/\partial t$  par  $i\omega$  :

$$\omega^2 u + \Delta u = f \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (7.2.11)$$

$u$  doit également vérifier la condition de radiation suivante :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - i\kappa u \right) = 0. \quad (7.2.12)$$

## 7.2 Les Couches Parfaitement Adaptées (PML)

Supposons maintenant que le support de  $f$  et le domaine qui nous intéresse soient tous les deux compris dans un disque  $\mathcal{D}_1$  de rayon  $r_1$ . Nous pouvons alors entourer le domaine par une couronne PML  $\mathcal{D}_2$  de rayon extérieur  $r_2$ . Nous appelons  $\Gamma$  la frontière extérieure de cette couronne (voir figure 7.6).

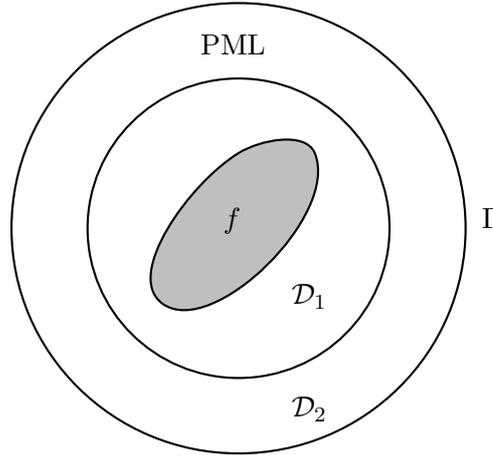


FIG. 7.6: Domaine de calcul et couche PML

Dans une telle configuration il est naturel d'utiliser les coordonnées polaires,  $u$  vérifie alors :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + k^2 u = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}_1 \quad (7.2.13)$$

Pour construire des PML pour l'équation de Helmholtz, l'idée la plus simple consiste à appliquer un changement de variable analogue à celui utilisé en domaine temporel. Remarquons que la transformation que nous avons décrite précédemment,

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \longrightarrow \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma(x_2) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

devient, en harmonique,

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \longrightarrow \frac{i\omega}{i\omega + \sigma(x_2)} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Cette transformation peut alors être interprétée comme un changement de variable dans la PML :

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \frac{i}{\omega} \int_0^{x_2} \sigma(x) dx.$$

Dans le cas qui nous intéresse, nous appliquerons ce changement de variable à la variable  $r$  :

$$\tilde{r} = r + \frac{i}{\omega} \int_0^r \sigma(x) dx.$$

Nous pouvons alors établir l'équation de la couche PML :

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \tilde{r} \frac{\partial u}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + k^2 u = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}_2 \setminus \mathcal{D}_1 \quad (7.2.14)$$

Nous imposerons de plus la condition

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (7.2.15)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le

**Théorème 7.2.3** *Soit  $u$  la solution du problème (7.2.11)-(7.2.12) et  $u^{pml}$  la solution du problème (7.2.13)-(7.2.14)-(7.2.15). Alors*

$$\|u - u^{pml}\|_{H^1(\mathcal{D}_1)} \leq C r e^{-\kappa r \bar{\sigma}},$$

avec

$$r = r_2 - r_1 \quad \text{et} \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{r} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_r dr.$$

$u^{pml}$  converge donc spectralement avec la valeur moyenne de l'amortissement et avec la largeur de la couche.

**Le cas d'un conduit.** Le résultat que nous présentons ici a été établi par Bécache *et al* [8] pour l'équation de Helmholtz convectée dans un conduit, nous nous limiterons cependant ici au cas d'un écoulement nul dans un conduit.

Soit

$$\Omega = \mathbb{R} \times [0, h] \quad \text{et} \quad \Gamma = \partial\Omega = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} \cup \{(x_1, h) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Nous voulons résoudre l'équation

$$\begin{cases} \omega^2 u + \Delta u = f, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \mathcal{R}(u) = 0. \end{cases} \quad (7.2.16)$$

où  $\mathcal{R}(u) = 0$  est une condition de radiation que nous n'explicitons pas.

Supposons maintenant que le support de  $f$  et le domaine qui nous intéresse soient tous les deux compris dans un rectangle  $\Omega_{ab} = [a; b] \times [0; h]$ . Nous pouvons alors encadrer ce domaine par deux couches PML de largeur  $L$  définies par (voir figure 7.7)

$$\Omega_{pml} = [a - L; a] \times [0; h] \cup [b; b + L] \times [0; h].$$

Nous appelons de plus  $\Gamma_{pml}$  la frontière "extérieure" de  $\Omega_{pml}$ , c'est-à-dire

$$\Gamma_{pml} = \{a - L\} \times [0; h] \cup \{b + L\} \times [0; h].$$

Comme nous l'avons vu en temporel, pour obtenir l'équation de la PML en harmonique on peut effectuer formellement :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \longrightarrow \alpha(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{avec} \quad \alpha(x_1) = \frac{i\omega}{i\omega + \sigma(x_1)}. \quad (7.2.17)$$

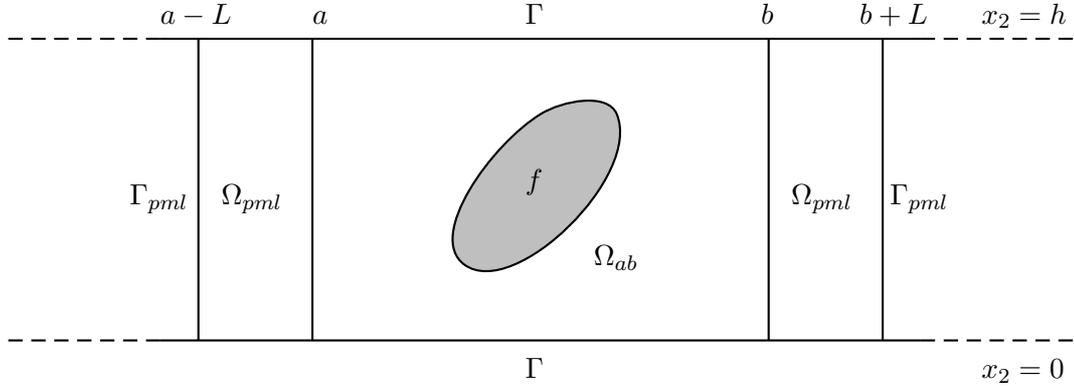


FIG. 7.7: Domaine de calcul et couche PML

Cette définition de  $\alpha$  est la plus utilisée dans la pratique. Cependant, mis à part l'analogie avec l'équation des ondes, il n'est pas nécessaire de choisir une définition aussi restrictive. En effet, en harmonique, il a été montré dans [8] que la couche est parfaitement adaptée quelque soit  $\alpha$  et qu'il suffit que :

$$\Re(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad \Im(\alpha) > 0$$

pour que les ondes entrant dans la PML décroissent exponentiellement.

Nous considérons donc  $u^\alpha$  l'approximation de la solution  $u$  du problème (7.2.16) dans le domaine  $\Omega_{ab}$  vérifiant :

$$\begin{cases} \omega^2 u^\alpha + \Delta u^\alpha = f, & \mathbf{x} \in \Omega_{ab}, & (7.2.18a) \\ \omega^2 u^\alpha + \alpha(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \alpha(x_1) \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x_2^2} \right] = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_{pml}, & (7.2.18b) \\ \frac{\partial u^\alpha}{\partial n} = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma \cup \Gamma_{pml}. & (7.2.18c) \end{cases}$$

Nous pouvons alors énoncer le

**Théorème 7.2.4** *Si  $\alpha(x_1)$  est constante, la solution approchée  $u^\alpha$  vérifie :*

$$\|u^\alpha - u\|_{H^1(\Omega_{ab})} \leq C e^{-\eta L/|\alpha|}$$

avec  $\eta > 0$ .

Ce théorème montre ici encore que dans le cas classique où

$$\alpha = \frac{i\omega}{i\omega + \sigma}$$

la solution approchée converge spectralement avec l'amortissement  $\sigma$  et la largeur de la couche  $L$ . Nous montrerons dans le chapitre 8 que ce comportement est identique dans le cas temporel.

### 7.3 Objectifs des chapitres 8 et 9

La méthode de Cagniard-de Hoop est particulièrement bien connue par les physiciens et les ingénieurs pour calculer des solutions analytiques des problèmes de propagation d'ondes en temporel, notamment en sismologie (voir [20, 61, 59]). Elle permet notamment de faire un lien entre les solutions temporelles et les ondes planes. C'est en l'étudiant pour un problème de couplage fluide-structure (voir la première partie de cette thèse et le chapitre 12) que nous avons immédiatement réalisé qu'elle pouvait facilement être appliquée au problème des CLA et à celui des PML et pourrait probablement aider à l'obtention d'estimations d'erreur. Nous avons par la suite appris que de Hoop avait (indépendamment) appliqué sa méthode à l'étude de ce problème [62] mais sans aller jusqu'à obtenir d'estimations d'erreur. L'objet de cette partie est la présentation des résultats que nous avons obtenus avec cette méthode.

Au chapitre 8, nous présentons les résultats que nous avons obtenus pour les CLA et au chapitre 9 les résultats concernant les PML. Dans les deux cas nous montrerons qu'on peut obtenir un résultat de convergence en faisant uniquement tendre  $N$  (dans le cas des CLA) et  $\sigma$  ou  $L$  (dans le cas des PML) vers  $+\infty$ . En quelque sorte cela montre que la nécessité de choisir  $a$  suffisamment grand dans le théorème 7.1.4 est due à la technique utilisée dans la démonstration mais ne correspond pas à une réelle nécessité. Néanmoins nos résultats montrent qu'augmenter la distance entre la source et la frontière absorbante (ou la couche absorbante) aide à obtenir de meilleures estimations d'erreur. Nous étudierons également le comportement de l'erreur en temps long, ce qui a déjà été le sujet de précédents travaux ([38, 37, 7] pour les CLA et [2, 11] pour les PML).

## Chapitre 8

# Les Conditions aux Limites Absorbantes

**A** la première section, nous décrivons le problème modèle que nous avons considéré (le problème du demi-espace avec une source ponctuelle borné par une frontière absorbante) et nous présentons nos deux principaux résultats : le premier théorème fournit une expression explicite de la solution fondamentale de notre problème ; le deuxième théorème permet d'obtenir des estimations d'erreur dans le cas d'une source quelconque en temps. Nous démontrerons ces théorèmes dans la deuxième section puis nous les analyserons plus en détail et nous les comparerons à des résultats obtenus grâce à un code numérique à la troisième section.

---

 Contenu
 

---

<b>8.1</b>	<b>Principaux résultats pour les CLA d'Engquist-Majda . . . . .</b>	<b>127</b>
8.1.1	Expressions de la solution analytique . . . . .	127
8.1.2	Estimations d'erreur . . . . .	129
<b>8.2</b>	<b>Démonstrations des théorèmes 8.1.1 et 8.1.2 . . . . .</b>	<b>131</b>
8.2.1	Démonstration du théorème 8.1.1 . . . . .	131
8.2.2	Démonstration du théorème 8.1.2 . . . . .	136
<b>8.3</b>	<b>Résultats numériques . . . . .</b>	<b>141</b>
8.3.1	Analyse des solutions fondamentales 2D . . . . .	141
8.3.1.1	Analyse de l'erreur relative . . . . .	141
8.3.1.2	Étude de l'erreur en fonction du temps . . . . .	141
8.3.1.3	Étude de l'erreur en fonction de la distance au point source image . . . . .	143
8.3.1.4	Étude de l'erreur en fonction de l'angle . . . . .	145
8.3.2	Le cas d'un terme source . . . . .	145
8.3.2.1	Comparaison avec des expériences numériques . . . . .	145
8.3.2.2	Estimations d'erreur $L^\infty$ . . . . .	148
<b>Annexes</b>	<b>. . . . .</b>	<b>151</b>
<b>8.a</b>	<b>Extension aux conditions de Higdon . . . . .</b>	<b>151</b>

---

## 8.1 Principaux résultats pour les CLA d'Engquist-Majda

### 8.1.1 Expressions de la solution analytique

Nous présentons d'abord l'expression explicite de la solution fondamentale de l'équation des ondes dans le demi-espace  $\mathbb{R}_+^2 = \{x_2 > 0\}$  avec des conditions absorbantes d'ordre élevé sur la frontière  $\Gamma = \{x_2 = 0\}$  ( $= \partial\mathbb{R}_+^2$ ). Le problème étant invariant par translation dans la direction  $x_1$  nous pouvons nous limiter au cas où le point source a pour coordonnées

$$\mathbf{x}_S = (0, h) \quad \text{avec } h > 0. \quad (8.1.1)$$

Nous voulons donc résoudre explicitement le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} & \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) \times \delta(t) & \text{dans } \mathbb{R}_+^2, \\ \mathcal{B}^N u = 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } t < 0. \end{array} \right. \quad (8.1.2)$$

Avant de présenter nos résultats, il est nécessaire d'introduire quelques notations. Nous définissons le point source image par :

$$\mathbf{x}_S^* = (0, -h) \quad (8.1.3)$$

et nous posons :

$$r(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|, \quad r^*(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_S^*|. \quad (8.1.4)$$

Nous définissons également la fonction  $\theta(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2$  par :

$$\theta(\mathbf{x}) \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}_S^* = (r^*(\mathbf{x}) \sin \theta(\mathbf{x}), r^*(\mathbf{x}) \cos \theta(\mathbf{x}))^t, \quad (8.1.5)$$

et la fonction  $\Phi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2, t > 0$ , par :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{r^*(\mathbf{x})^2 \sin^2 \theta(\mathbf{x}) - (c^2 t^2 - r^*(\mathbf{x})^2)}{r^*(\mathbf{x})^2 \sin^2 \theta(\mathbf{x}) + (c^2 t^2 - r^*(\mathbf{x})^2)} = \frac{x_1^2 - (c^2 t^2 - r^*(\mathbf{x})^2)}{x_1^2 + (c^2 t^2 - r^*(\mathbf{x})^2)}. \quad (8.1.6)$$

Remarquons que :

$$ct > r^*(\mathbf{x}) \implies |\Phi(\mathbf{x}, t)| < 1.$$

Nous avons représenté les lignes de niveau de la fonction  $\Phi$  sur la figure 8.1 pour trois instants différents (de haut en bas,  $t=3, 5$  et  $7$ ) avec  $c = 1$  et  $h = 1$ . Finalement, nous rappelons que les polynômes de Tchebycheff  $P_N(x)$ ,  $N \geq 0$ , sont définis par :

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_{N+1}(x) - 2xP_N(x) + P_{N-1}(x) = 0, \quad (8.1.7)$$

et satisfont :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad P_N(x) = \cos(N \arccos(x)). \quad (8.1.8)$$

En particulier :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad |P_N(x)| \leq 1.$$

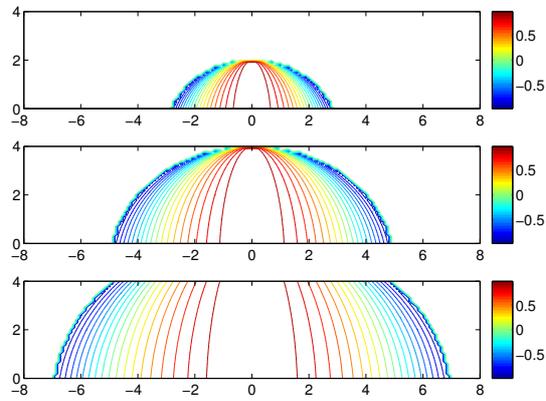


FIG. 8.1:  $\mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{x}, t), t = 3, 5$  et  $7$

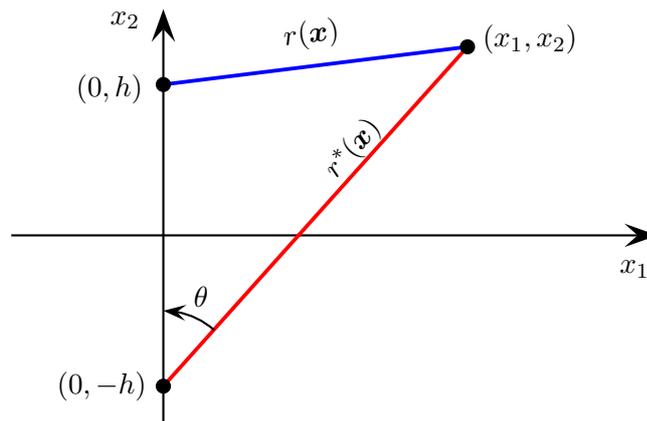


FIG. 8.2: Illustration des notations

## 8.1 Principaux résultats pour les CLA d'Engquist-Majda

**Théorème 8.1.1** *La solution  $u(\mathbf{x}, t) = G^N(\mathbf{x}, t)$  du problème (8.1.2) est donnée par :*

$$G^N(\mathbf{x}, t) = G_i(\mathbf{x}, t) + G_r^N(\mathbf{x}, t), \quad (8.1.9)$$

où, en notant  $H$  la fonction de Heavyside :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_i(\mathbf{x}, t) = \frac{H(ct - r(\mathbf{x}))}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r(\mathbf{x})^2}{c^2}}}, \\ G_r^N(\mathbf{x}, t) = -\frac{H(ct - r^*(\mathbf{x}))}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r^*(\mathbf{x})^2}{c^2}}} \left[ \frac{ct - (x_2 + h)}{ct + (x_2 + h)} \right]^N P_N(\Phi(\mathbf{x}, t)). \end{array} \right. \quad (8.1.10)$$

**Remarque 8.1.1** *La fonction  $G_i(\mathbf{x}, t)$ , qui ne dépend pas de  $N$ , n'est rien d'autre que la restriction de la solution fondamentale de l'équation des ondes 2D au demi-espace  $\mathbb{R}_+^2$ . C'est pour cela que nous l'appellerons champ incident. Le champ  $G_r^N(\mathbf{x}, t)$ , créé par la frontière  $\Gamma$ , est appelé le champ réfléchi.*

**Remarque 8.1.2** *La présence de la fonction  $H(ct - r^*(\mathbf{x}))$  montre que le champ réfléchi  $G_r^N(\cdot, t)$  est inclus de manière compacte dans l'ensemble  $\Omega(t) = \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)$  (voir définition 8.2.24 page 138).*

### 8.1.2 Estimations d'erreur

Considérons maintenant l'approximation, dans le demi-plan supérieur, de la solution  $u$  de l'équation des ondes 2D avec une source ponctuelle "régulière" en temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R} \quad \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) \times f(t) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \end{array} \right. \quad (8.1.11)$$

où nous supposons que la fonction source  $f(t)$  est bornée et a pour support  $[0, T]^{(18)}$ , par la solution  $u^N$  du problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^N : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R} \quad \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2} - \Delta u^N = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) \times f(t), \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+, \\ \mathcal{B}^N u^N = 0, \quad \text{sur } \Gamma, \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2. \end{array} \right. \quad (8.1.12)$$

---

18.  $T$  peut être égal à  $+\infty$ , ce qui inclut le cas d'une source permanente.

**Théorème 8.1.2** *En tout point  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2$ , on a les estimations ponctuelles:*

- pour  $\frac{r^*(\mathbf{x})}{c} \leq t \leq \frac{r^*(\mathbf{x})}{c} + T$  ( $\Leftrightarrow \mathbf{x} \in \Omega_1(t)$  - voir (8.2.24)),

$$|u(\mathbf{x}, t) - u^N(\mathbf{x}, t)| \leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{ct - (x_2 + h)}{ct + (x_2 + h)} \right)^N \text{Log} \left( \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^*(\mathbf{x})^2}}{r^*(\mathbf{x})} \right) \|f\|_{L^\infty}; \quad (8.1.13)$$

- pour  $t > \frac{r^*(\mathbf{x})}{c} + T$  ( $\Leftrightarrow \mathbf{x} \in \Omega_2(t)$  - voir (8.2.24)),

$$|u(\mathbf{x}, t) - u^N(\mathbf{x}, t)| \leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{ct - (x_2 + h)}{ct + (x_2 + h)} \right)^N \text{Log} \left( \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^*(\mathbf{x})^2}}{c(t - T) + \sqrt{c^2 (t - T)^2 - r^*(\mathbf{x})^2}} \right) \|f\|_{L^\infty}. \quad (8.1.14)$$

On a également les estimations uniformes :

- pour  $\frac{h}{c} \leq t \leq \frac{h}{c} + T$ ,

$$\|(u - u^N)(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^2)} \leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{ct - h}{ct + h} \right)^N \text{Log} \left( \frac{t + \sqrt{t^2 - (h/c)^2}}{(h/c)} \right) \|f\|_{L^\infty}; \quad (8.1.15)$$

- pour  $t > \frac{h}{c} + T$ ,

$$\|(u - u^N)(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^2)} \leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{ct - h}{ct + h} \right)^N \text{Log} \left( \frac{t + \sqrt{t^2 - (t - T)^2}}{t - T} \right) \|f\|_{L^\infty}. \quad (8.1.16)$$

Ces résultats appellent plusieurs commentaires :

- l'erreur converge spectralement vers 0 (en norme uniforme) quand  $N$  tend vers l'infini ;
- pour  $t$  donné, les bornes supérieures des estimations (8.1.15) et (8.1.16) diminuent quand la distance  $h$  de la source à la frontière absorbante augmente. Ce résultat est cohérent avec l'intuition physique et avec les observations numériques ;
- à propos de l'erreur aux temps longs, si nous supposons que  $T < +\infty$ , nous observons que le second membre de l'estimation (8.1.16) se comporte, pour  $t$  grand, comme

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2T}{t}},$$

ce qui montre que, pour tout  $N$  et  $h$ , l'erreur converge uniformément vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Par contre, si  $T = +\infty$ , le second membre de l'estimation (8.1.15) se comporte comme

$$\frac{1}{2\pi} \text{Log } t,$$

ce qui autorise a priori une croissance logarithmique de l'erreur quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . C'est effectivement ce qui arrive si  $f(t)$  est, par exemple, la fonction de Heavyside.

**Remarque 8.1.3** *Nous avons choisi ici d'analyser l'approximation du problème associé au point source. Il est facile d'adapter le théorème 8.1.2 (ou plus exactement sa démonstration) pour traiter le cas d'une source étendue  $f(\mathbf{x}, t)$  ou de conditions initiales  $u_0$  et  $u_1$  non nulles. De même nous avons choisi de présenter des estimations d'erreur  $L^\infty$ , qui nous ont semblées être les plus pertinentes en pratique, mais il est facile d'adapter les démonstrations pour obtenir des estimations  $L^p$  ou des estimations d'énergie.*

## 8.2 Démonstrations des théorèmes 8.1.1 et 8.1.2

### 8.2.1 Démonstration du théorème 8.1.1

Comme nous l'avons déjà dit, la formule ((8.1.9),(8.1.10)) découle directement de l'application de la méthode de Cagniard-de Hoop au problème (8.1.2). Bien que cette technique soit détaillée au chapitre 12, nous la réexpliquons ici (seuls quelques calculs ne seront pas détaillés) afin que cette partie puisse être lue indépendamment des autres parties.

Nous décomposons la solution  $G^N$  de (8.1.2) en :

$$G^N = G_i + G_r^N$$

où  $G_i$ , donné par (8.1.10), est la solution fondamentale de l'équation des ondes 2D. Par linéarité, il est évident que  $G_r^N$  satisfait le problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } G_r^N : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} & \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G_r^N}{\partial t^2} - \Delta G_r^N = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_2^+, \\ \mathcal{B}^N G_r^N = -\mathcal{B}^N G_i, & \text{sur } \Gamma, \\ G_r^N(x, t) = 0, & \text{pour } t < 0. \end{array} \right. \quad (8.2.1)$$

Nous appliquons ensuite successivement à  $G_r^N$  :

- La transformation de Laplace en temps ( $s$  est la variable duale de  $t$ ):

$$\tilde{G}_r^N(x_1, x_2, s) = \int_0^{+\infty} G_r^N(x_1, x_2, t) e^{-st} dt, \quad (8.2.2)$$

- La transformation de Fourier suivant la variable d'espace tangentielle  $x_1$  ( $k$  est la variable duale de  $x_1$ ):

$$\hat{G}_r^N(k, x_2, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}_r^N(x_1, x_2, s) e^{ikx_1} dx_1. \quad (8.2.3)$$

A partir de l'équation des ondes nous déduisons alors que la fonction  $x_2 \mapsto \hat{G}_r^N(k, x_2, s)$  vérifie l'équation différentielle ordinaire :

$$-\frac{d^2 \hat{G}_r^N}{dx_2^2} + \left(k^2 + \frac{s^2}{c^2}\right) \hat{G}_r^N = 0.$$

En ne considérant que les solution décroissantes quand  $x_2 \rightarrow +\infty$  pour  $\mathcal{R}e(s) \geq 0$ , nous déduisons l'existence d'une fonction à valeurs complexes  $A(k, s)$  telle que :

$$\widehat{G}_r^N(k, x_2, s) = A(k, s) e^{-(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} x_2}, \quad (8.2.4)$$

nous avons choisi la détermination de la racine carrée complexe correspondant à :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{R}e z^{\frac{1}{2}} \geq 0, \quad (8.2.5)$$

de telle sorte que la coupure de  $z^{\frac{1}{2}}$  coïncide avec la demi-droite réelle  $\mathcal{I}m z = 0, \mathcal{R}e z < 0$ .

Puisque  $G_r^N + G_i$  est régulière pour  $y < h$ , nous pouvons utiliser le fait que (cf remarque 7.1.1) :

$$\mathcal{B}^N(G_r^N + G_i) = 0 \iff \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^N (G_r^N + G_i) = 0, \quad \text{pour } x_2 = 0. \quad (8.2.6)$$

D'autre part, il est bien connu que la transformée de Laplace-Fourier de  $G_i$  est donnée par :

$$\widehat{G}_i(k, x_2, s) = \frac{e^{-(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} |x_2 - h|}}{2(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}. \quad (8.2.7)$$

En utilisant maintenant la forme (voir (8.2.4) et (8.2.7)) de  $\widehat{G}_r^N$  et de  $\widehat{G}_i$ , la condition de bord (8.2.6) nous conduit à :

$$\left(\frac{s}{c} + (k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}\right)^N A(k, s) + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{c} - (k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}\right)^N \frac{e^{-(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} h}}{(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

ce qui nous permet de calculer  $A(k, s)$  et d'obtenir finalement :

$$\widehat{G}_r^N(k, x_2, s) = -R^N(k, \frac{s}{c}) \frac{e^{-(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} (x_2 + h)}}{2(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}, \quad (8.2.8)$$

où  $R^N$  est définie à partir de  $\mathcal{R}_N$  (voir (7.1.30) page 115) par :

$$R^N(k, \sigma) = \mathcal{R}_N\left(\frac{k}{\sigma}\right) = \left[\frac{\sigma - (k^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}}}{\sigma + (k^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}}}\right]^N. \quad (8.2.9)$$

En appliquant à  $\widehat{u}^r(k, x_2, s)$  la transformation inverse de Fourier suivant  $x_1$ , nous obtenons :

$$\widetilde{G}_r^N(x_1, x_2, s) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R^N(k, \frac{s}{c}) \frac{e^{-(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} (x_2 + h)}}{(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} e^{-ikx_1} dk, \quad (8.2.10)$$

Nous arrivons maintenant à la partie spécifique à la méthode de Cagniard-de Hoop : nous allons transformer, par des techniques d'analyse complexe, cette dernière intégrale en une intégrale de la forme :

$$\widetilde{G}_r^N(x_1, x_2, s) = \int_0^{+\infty} F(x_1, x_2, t) e^{-st} dt. \quad (8.2.11)$$

Nous utiliserons pour cela le fait que :

## 8.2 Démonstrations des théorèmes 8.1.1 et 8.1.2

- l'intégrand dans (8.2.10) est homogène en  $s$  et  $k$  ;
- la dépendance en  $x_2$  de cet integrand est exponentielle.

Appliquons tout d'abord, en exploitant la propriété d'homogénéité, le changement de variable  $k = ps/c$  pour obtenir :

$$\tilde{G}_r^N(x_1, x_2, s) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R^N(p, 1) \frac{e^{-s \left[ (1+p^2)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{x_2+h}{c} \right) + ip \frac{x_1}{c} \right]}}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} dp, \quad (\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(p) dp). \quad (8.2.12)$$

Nous supposons maintenant que  $x_1 \in \mathbb{R}_-$  (cette hypothèse n'est pas restrictive puisque la solution que nous recherchons est une fonction paire de  $x_1$ ). Nous introduisons les notations  $r^* = r^*(\mathbf{x})$  et  $\theta = \theta(\mathbf{x})$  ( $\in [-\pi/2; 0]$  puisque  $x_1 \leq 0$ ) définis par (8.1.4) et (8.1.5). Nous avons ainsi:

$$\begin{cases} x_1 = r^* \sin \theta, \\ x_2 + h = r^* \cos \theta. \end{cases} \quad (8.2.13)$$

L'idée est maintenant de considérer la variable  $p$  comme une variable complexe et l'intégrale (8.2.12) comme une intégrale sur un contour coïncidant avec l'axe réel. Si nous sommes capables, par une déformation de contour, de transformer cette intégrale en une intégrale sur une certaine courbe  $\Gamma$  paramétrée par :

$$(1+p^2)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{x_2+h}{c} \right) + ip \frac{x_1}{c} = t, \quad \text{pour } t > 0, \quad (8.2.14)$$

nous aurons atteint notre but. Pour effectuer cela, nous remarquons d'abord que l'intégrand  $\Psi(p)$  dans (8.2.12) est une fonction analytique de  $p$  si on excepte les 2 coupures constituées des demi-droites contenant les imaginaires purs de module supérieur à 1 (voir la figure 8.3). Nous introduisons donc le contour de Cagniard-de Hoop  $\Gamma$  défini par :

$$\begin{cases} \Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-, \\ \Gamma^\pm = \left\{ p = \gamma^\pm(t) \equiv -i \frac{ct}{r^*} \sin \theta \pm \cos \theta \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^{*2}} - 1}, \quad t \geq \frac{r^*}{c} \right\}. \end{cases} \quad (8.2.15)$$

Il est évident que les deux courbes  $\Gamma^\pm$  sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe imaginaire et se rejoignent au point  $-i \sin \theta$  (pour  $t = r^*/c$ ). Plus précisément, il est facile de vérifier que  $\Gamma$  n'est rien d'autre que la branche d'hyperbole d'équation :

$$\frac{Y^2}{\sin^2 \theta} - \frac{X^2}{\cos^2 \theta} = 1, \quad (p = X + iY, (X, Y) \in \mathbb{R}^2),$$

située dans le demi-plan supérieur  $Y = \Im m p > 0$ . Remarquons que cette hyperbole n'intersecte pas les 2 coupures de  $\Psi$ . Toutes ces informations sont résumées sur la figure 8.3.

Les calculs permettant de déterminer l'expression de (8.2.15), à partir de l'équation (8.2.14), sont détaillés à la section 12.1.

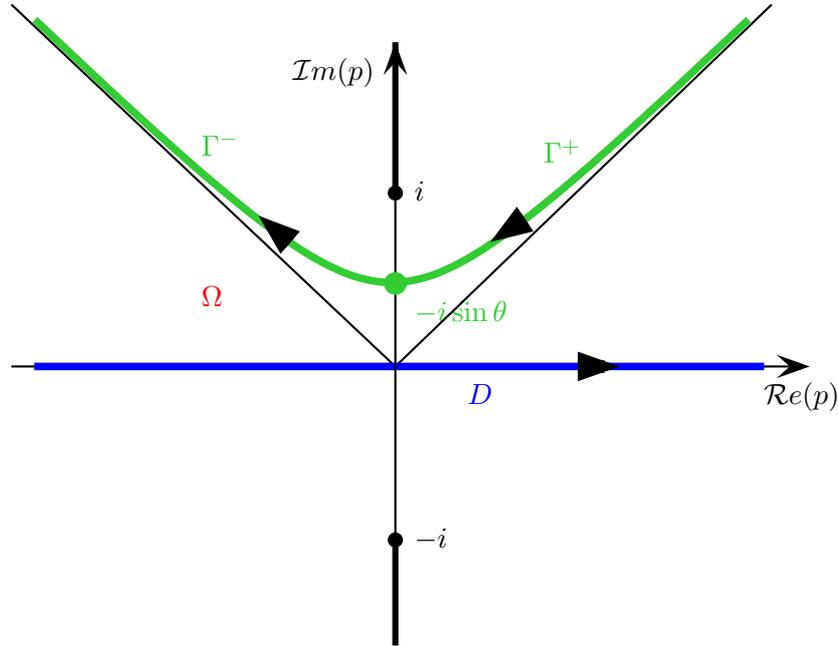


FIG. 8.3: Les contours  $\Gamma$  et  $D$

Notons maintenant  $D$  la droite réelle et  $\Omega$  la partie connexe du plan complexe délimitée par  $D$  et  $\Gamma$ . Soit  $\rho > 0$  un paramètre destiné à tendre vers  $+\infty$ . Nous posons :

$$\begin{cases} D_\rho = \{p \in D / |p| \leq \rho\}, & \Gamma_\rho = \{p \in \Gamma / |p| \leq \rho\}, \\ C_\rho = \{p \in \Omega / |p| = \rho\}. \end{cases}$$

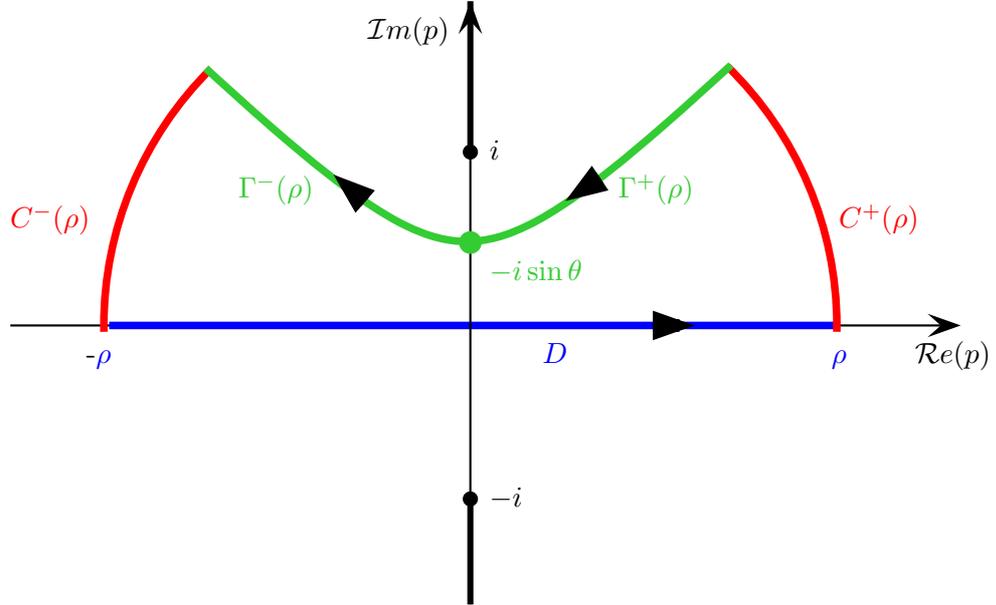
Remarquons que  $C_\rho$  est constitué des deux arcs de cercle de centre 0 et de rayon  $\rho$  qui relie  $D_\rho$  à  $\Gamma_\rho$  de telle sorte que  $D_\rho \cup C_\rho \cup \Gamma_\rho$  soit une courbe fermée. Puisque  $\Psi(p)$  est analytique dans  $\Omega$ , l'intégrale de  $\Psi$  sur  $D_\rho \cup C_\rho \cup \Gamma_\rho$  (nous choisissons l'orientation du chemin pour que le segment réel soit parcouru dans le sens des valeurs croissantes — voir figure 8.4) est nulle, d'après le théorème de Cauchy :

$$\int_{D_\rho} \Psi(p) dp + \int_{C_\rho} \Psi(p) dp + \int_{\Gamma_\rho} \Psi(p) dp = 0.$$

Grâce au choix de la racine carrée et puisque  $x_2 + h > 0$ , la fonction  $\Psi(p)$  décroît exponentiellement vers 0 quand  $\Im m(p)$  tend vers  $+\infty$ . Nous pouvons donc appliquer le lemme de Jordan [85, 66] :

**Lemme 8.2.1 (Second Lemme de Jordan)** Soient  $z_0$  un point de  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{U}$  un secteur angulaire de  $\mathbb{C}$  défini par

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \geq R_0 \text{ et } \psi_1 < \arg(z - z_0) < \psi_2\} (R_0 > 0, \psi_1 \text{ et } \psi_2 \in \mathbb{R}).$$


 FIG. 8.4: Le contour fermé  $D_\rho \cup C_\rho \cup \Gamma_\rho$ 

Si  $f$  est une fonction continue dans  $\mathcal{U}$  et si

$$\lim_{\substack{|z-z_0| \rightarrow +\infty \\ z \in \mathcal{U}}} (z - z_0)f(z) = 0,$$

alors, pour tout arc de cercle  $\gamma$  de centre  $z_0$ , de rayon  $R > R_0$ , contenu dans  $\mathcal{U}$  on a

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Nous en déduisons :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{C_\rho} \Psi(p) dp = 0.$$

Nous déduisons ainsi de (8.2.12) :

$$\tilde{G}_r^N(x_1, x_2, s) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} R^N(p, 1) \frac{e^{-s \left[ (1+p^2)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{x_2+h}{c} \right) + ip \frac{x_1}{c} \right]}}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} dp.$$

Nous utilisons les paramétrisations  $p = \gamma^+(t)$  et  $p = \gamma^-(t)$ , pour  $t \geq r^*/c$ , respectivement sur  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  et nous remarquons que :

$$\left| \begin{array}{ll} \bullet (1+p^2)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{x_2+h}{c} \right) + ip \frac{x_1}{c} = t, & \text{(par construction),} \\ \bullet \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{dt}{(t^2 - \frac{r^{*2}}{c^2})^{\frac{1}{2}}}, & \text{sur } \Gamma^\pm \text{ (voir section 12.1).} \end{array} \right.$$

Donc, comme  $t$  varie de  $+\infty$  à  $\frac{r^*}{c}$  sur  $\Gamma^+$  et de  $\frac{r^*}{c}$  à  $+\infty$  sur  $\Gamma^-$  :

$$\tilde{G}_r^N(x_1, x_2, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{\frac{r^*}{c}}^{+\infty} [R^N(\gamma^+(t), 1) + R^N(\gamma^-(t), 1)] \frac{e^{-st}}{(t^2 - \frac{r^{*2}}{c^2})^{\frac{1}{2}}} dt.$$

Puis, en remarquant que  $\gamma^-(t)^2 = \overline{\gamma^+(t)^2}$  et en utilisant le fait que  $\sqrt{\bar{z}} = \overline{\sqrt{z}}$ , nous déduisons que :

$$R^N(\gamma^-(t), 1) = \overline{R^N(\gamma^+(t), 1)} \implies R^N(\gamma^+(t), 1) + R^N(\gamma^-(t), 1) = 2 \Re [R^N(\gamma^+(t), 1)],$$

ce qui conduit à :

$$\tilde{G}_r^N(x_1, x_2, s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\frac{r^*}{c}}^{+\infty} \Re [R^N(\gamma^+(t), 1)] \frac{e^{-st}}{(t^2 - \frac{r^{*2}}{c^2})^{\frac{1}{2}}} dt. \quad (8.2.16)$$

En utilisant la formule (8.2.9), on obtient :

$$R^N(\gamma^+(t), 1) = [R^1(\gamma^+(t), 1)]^N, \quad (8.2.17)$$

et on établit facilement que :

$$R^1(\gamma^+(t), 1) = \frac{r^* - ct \cos \theta + i \sin \theta \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}}{r^* + ct \cos \theta - i \sin \theta \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}} = \rho_1(t) e^{i\alpha(t)}.$$

En posant  $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, t)$  (cf. (8.1.6)), on montre que (les calculs intermédiaires sont laissés au lecteur) :

$$\begin{cases} \rho_1(t) = \frac{ct - r^* \cos \theta}{ct + r^* \cos \theta} = \frac{ct - (x_2 + h)}{ct + (x_2 + h)}, \\ \cos \alpha(t) = \frac{r^{*2} \sin^2 \theta - (c^2 t^2 - r^{*2})}{r^{*2} \sin^2 \theta + (c^2 t^2 - r^{*2})} = \Phi. \end{cases}$$

Ainsi, d'après (8.2.17) :

$$\Re [R^N(\gamma^+(t), 1)] = \rho_1(t)^N \cos(N\alpha(t)),$$

et, puisque  $\alpha(t) = \arccos \Phi$  :

$$\Re [R^N(\gamma^+(t), 1)] = \left[ \frac{ct - (x_2 + h)}{ct + (x_2 + h)} \right]^N P_N(\Phi). \quad (8.2.18)$$

Il est alors facile d'obtenir le théorème 8.1.1 à partir de (8.2.16) et de (8.2.18).

### 8.2.2 Démonstration du théorème 8.1.2

Soient  $u$  et  $u^N$  les solutions respectives de (8.1.11) et (8.1.12). Nous définissons l'erreur (ou champ réfléchi)  $e^N$  par :

$$e^N = u^N - u. \quad (8.2.19)$$

## 8.2 Démonstrations des théorèmes 8.1.1 et 8.1.2

Pour obtenir les estimations ponctuelles (8.1.13) et (8.1.14), nous choisissons  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2$  et nous posons  $r^* = r^*(\mathbf{x})$  et  $\theta = \theta(\mathbf{x})$ . Rappelons que, d'après les propriétés de la fonction de Green,  $e^N$  peut être calculé par une convolution en temps entre  $G_r^N$  et le fonction source  $f$  :

$$e^N(\mathbf{x}, t) = \int_0^{+\infty} G_r^N(\mathbf{x}, \tau) f(t - \tau) d\tau$$

Remarquons que cette intégrale est bien définie puisque  $G_r^N$  est  $L^1$  en temps.

Il est évident que  $e^N(\mathbf{x}, t) = 0$  pour  $t \leq r^*/c$  et, pour  $t > r^*/c$ , nous obtenons :

$$e^N(\mathbf{x}, t) = \int_{\max(\frac{r^*}{c}, t-T)}^t G_r^N(\mathbf{x}, \tau) f(t - \tau) d\tau, \quad t \geq \frac{r^*}{c}, \quad (8.2.20)$$

en utilisant le fait que  $f$  est à support dans  $[0, T]$  et  $G_r^N(\mathbf{x}, \cdot)$  dans  $[0, \frac{r^*}{c}]$ .

Nous en déduisons que :

$$\begin{cases} |e^N(\mathbf{x}, t)| \leq \|f\|_{L^\infty(0,t)} \cdot \|G_r^N(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(\frac{r^*}{c}, t)} & \text{si } \frac{r^*}{c} \leq t \leq \frac{r^*}{c} + T, \\ |e^N(\mathbf{x}, t)| \leq \|f\|_{L^\infty(0,T)} \cdot \|G_r^N(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(t-T, t)} & \text{si } t > \frac{r^*}{c} + T. \end{cases} \quad (8.2.21)$$

Nous devons donc estimer la norme  $L^1$  en temps de  $G_r^N(\mathbf{x}, \cdot)$ . En remarquant que

$$|P_N(\Phi(\mathbf{x}, t))| \leq 1$$

(cette estimation est quasi optimale sur un intervalle de temps arbitraire), on vérifie que :

$$|G_r^N(\mathbf{x}, t)| \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r^{*2}}{c^2}}} \left( \frac{ct - (x_2 + h)}{ct + (x_2 + h)} \right)^N.$$

Remarquons que, pour  $t \geq \frac{r^*}{c}$ , la fonction  $ct \mapsto \left( \frac{ct - (x_2 + h)}{ct + (x_2 + h)} \right)$  est croissante, ainsi :

$$\begin{aligned} \left| \|G_r^N(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(\frac{r^*}{c}, t)} \right. &\leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{ct - (x_2 + h)}{ct + (x_2 + h)} \right)^N \int_{\frac{r^*}{c}}^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^2 - \frac{r^{*2}}{c^2}}}, \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{ct - (x_2 + h)}{ct + (x_2 + h)} \right)^N \text{Log} \left( \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}}{r^*} \right) \end{aligned} \quad (8.2.22)$$

et, pour  $t > \frac{r^*}{c} + T$ ,

$$\begin{aligned} \left| \|G_r^N(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(t-T, t)} \right. &\leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{ct - (x_2 + h)}{ct + (x_2 + h)} \right)^N \int_{t-T}^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^2 - \frac{r^{*2}}{c^2}}}, \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{ct - (x_2 + h)}{ct + (x_2 + h)} \right)^N \text{Log} \left( \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}}{c(t-T) + \sqrt{c^2(t-T)^2 - r^{*2}}} \right). \end{aligned} \quad (8.2.23)$$

Il est alors facile de déduire (8.1.13) et (8.1.14) à partir de (8.2.21), (8.2.22) et (8.2.23).

Intéressons-nous maintenant à la démonstration des estimations uniformes (8.1.15) et (8.1.16). Nous introduisons les deux ensembles disjoints :

$$\begin{cases} \Omega_1(t) = \{ \mathbf{x} \in R_+^2 / c(t-T) < r^*(\mathbf{x}) \leq ct \} \\ \Omega_2(t) = \{ \mathbf{x} \in R_+^2 / r^*(\mathbf{x}) \leq c(t-T) \} \end{cases} \quad (8.2.24)$$

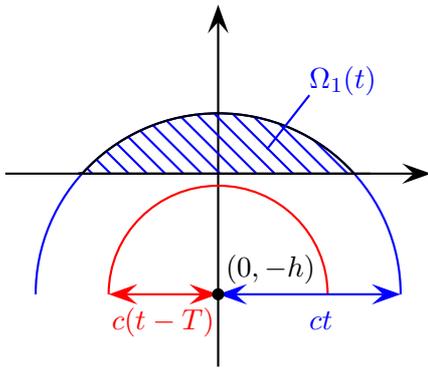


FIG. 8.5: L'ensemble  $\Omega_1(t)$ ,  $\frac{h}{c} \leq t < \frac{h}{c} + T$

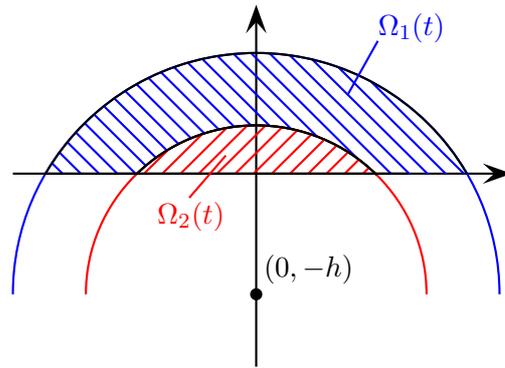


FIG. 8.6:  $\Omega_1(t)$  et  $\Omega_2(t)$ ,  $t \geq \frac{h}{c} + T$

Ces deux ensembles sont représentés sur les figures 8.5 et 8.6 pour deux valeurs de  $t$ . L'ensemble  $\Omega(t) = \Omega_1(t) \cap \Omega_2(t)$  représente bien évidemment le support du champ réfléchi (donc de l'erreur) au temps  $t$ . Remarquons que  $\Omega_1(t)$  est non vide dès que  $t > \frac{h}{c}$  alors que  $\Omega_2(t)$  est non vide dès que  $t > \frac{h}{c} + T$ . Nous cherchons donc à majorer les quantités :

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} |e^N(\mathbf{x}, t)| \quad \text{si} \quad \frac{h}{c} + T > t > \frac{h}{c},$$

et

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)} |e^N(\mathbf{x}, t)| \quad \text{si} \quad t > \frac{h}{c} + T.$$

Comme

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)} |e^N(\mathbf{x}, t)| = \max \left( \sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} |e^N(\mathbf{x}, t)|; \sup_{\mathbf{x} \in \Omega_2(t)} |e^N(\mathbf{x}, t)| \right),$$

il est équivalent de majorer les quantités :

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} |e^N(\mathbf{x}, t)| \quad \text{si} \quad t > \frac{h}{c},$$

et

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_2(t)} |e^N(\mathbf{x}, t)| \quad \text{si} \quad t > \frac{h}{c} + T.$$

## 8.2 Démonstrations des théorèmes 8.1.1 et 8.1.2

D'après (8.2.21), pour obtenir une estimation  $L^\infty$  de  $e^N(., t)$  sur  $\Omega_1(t)$  et sur  $\Omega_2(t)$ , nous devons calculer :

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} \|G_r^N(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(\frac{r^*}{c}, t)} \quad \text{si } t > \frac{h}{c},$$

et :

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_2(t)} \|G_r^N(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(t-T, t)} \quad \text{si } t > \frac{h}{c} + T.$$

Remarquons que, pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega(t)$ ,  $h \leq x_2 + h \leq ct$ . Donc, puisque la fonction

$$x \mapsto \frac{ct - x}{ct + x}, \quad x \in [h, ct],$$

est décroissante, nous obtenons :

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} \left( \frac{ct - (x_2 + h)}{ct + (x_2 + h)} \right) = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega_2(t)} \left( \frac{ct - (x_2 + h)}{ct + (x_2 + h)} \right) = \frac{ct - h}{ct + h}. \quad (8.2.25)$$

Posons maintenant

$$r_1^*(t) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} r^*(x),$$

comme la fonction

$$r \mapsto \frac{ct}{r} + \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^2} - 1}, \quad r \in [0, ct],$$

est décroissante, on a :

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} \text{Log} \left| \frac{ct}{r^*} + \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^{*2}} - 1} \right| = \text{Log} \left| \frac{ct}{r_1^*(t)} + \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r_1^*(t)^2} - 1} \right|.$$

De même, en posant

$$r_2^*(t) = \max_{\mathbf{x} \in \Omega_2(t)} r^*(x)$$

et en utilisant le fait que la fonction :

$$r \mapsto \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^2}}{c(t-T) + \sqrt{c^2(t-T)^2 - r^2}}, \quad r \in [0, c(t-T)], \quad (t > T)$$

est croissante, on montre que :

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_2(t)} \text{Log} \left| \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}}{c(t-T) + \sqrt{c^2(t-T)^2 - r^{*2}}} \right| = \text{Log} \left| \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r_2^*(t)^2}}{c(t-T) + \sqrt{c^2(t-T)^2 - r_2^*(t)^2}} \right|.$$

Il est évident, en regardant les figures 8.5 et 8.6, que

$$\left| \begin{array}{ll} r_1^*(t) = h & \text{si } \frac{h}{c} < t < \frac{h}{c}, \\ r_1^*(t) = c(t-T) & \text{si } t > \frac{h}{c} + T. \end{array} \right.$$

et que :

$$r_2^*(t) = c(t - T) \text{ si } t > \frac{h}{c} + T.$$

On a donc :

$$\left| \begin{array}{l} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} \text{Log} \left| \frac{ct}{r^*} + \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^{*2}} - 1} \right| = \text{Log} \left( \frac{t + \sqrt{t^2 - (h/c)^2}}{(h/c)} \right), \quad \text{si } \frac{h}{c} < t < \frac{h}{c} + T \\ \sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} \text{Log} \left| \frac{ct}{r^*} + \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^{*2}} - 1} \right| = \text{Log} \left( \frac{t + \sqrt{t^2 - (t - T)^2}}{t - T} \right), \quad \text{si } t > \frac{h}{c} + T \end{array} \right.$$

et :

$$\sup_{x \in \Omega_2(t)} \text{Log} \left| \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}}{c(t - T) + \sqrt{c^2 (t - T)^2 - r^{*2}}} \right| = \text{Log} \left( \frac{t + \sqrt{t^2 - (t - T)^2}}{t - T} \right), \quad \text{si } t > \frac{h}{c} + T.$$

Ces trois dernières égalités, combinées avec (8.2.22), (8.2.23) et (8.2.25), nous permettent de montrer les inégalités :

$$\sup_{x \in \Omega_1(t)} \|G_r^N(x, \cdot)\|_{L^1(\frac{r^*}{c}, t)} \leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{ct - h}{ct + h} \right)^N \text{Log} \left( \frac{ct}{h} + \sqrt{\frac{c^2 t^2}{h^2} - 1} \right) \quad (8.2.26)$$

$$\text{si } T + \frac{h}{c} > t > \frac{h}{c},$$

$$\sup_{x \in \Omega_1(t)} \|G_r^N(x, \cdot)\|_{L^1(\frac{r^*}{c}, t)} \leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{ct - h}{ct + h} \right)^N \text{Log} \left( \frac{t + \sqrt{t^2 - (t - T)^2}}{t - T} \right) \quad (8.2.27)$$

$$\text{si } t > T + \frac{h}{c},$$

et

$$\sup_{x \in \Omega_2(t)} \|G_r^N(x, \cdot)\|_{L^1(t-T, t)} \leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{ct - h}{ct + h} \right)^N \text{Log} \left( \frac{t + \sqrt{t^2 - (t - T)^2}}{t - T} \right) \quad (8.2.28)$$

$$\text{si } t > \frac{h}{c} + T.$$

Il est alors facile de conclure à partir de (8.2.26), (8.2.27), (8.2.28) et (8.2.21).

**Remarque 8.2.1** Dans la formule (8.1.10), la fonction  $G_r^N$  apparaît naturellement comme le produit de trois termes. Dans la démonstration ci-dessus, pour des raisons de simplicité, nous avons estimé chacun de ces facteurs indépendamment. Nos estimations ne sont donc pas forcément optimales.

## 8.3 Résultats numériques

### 8.3.1 Analyse des solutions fondamentales 2D

#### 8.3.1.1 Analyse de l'erreur relative

La principale difficulté, lorsqu'on cherche à représenter numériquement le champ réfléchi  $G_r^N$  donné par (8.1.10), est la présence d'une singularité sur le cercle  $r^*(\mathbf{x}) = ct$ . Pour pallier cette difficulté, une solution est de comparer ce champ réfléchi à ce qu'il serait en imposant une condition de bord de type Dirichlet (ce qui correspond à  $N = 0$ ). C'est pourquoi nous introduisons l'erreur relative définie par<sup>(19)</sup> :

$$\gamma_r^N(\mathbf{x}, t) = \frac{G_r^N(\mathbf{x}, t)}{G_r^0(\mathbf{x}, t)} = P_N(\Phi(\mathbf{x}, t)) \left[ \frac{ct - (x_2 + h)}{ct + (x_2 + h)} \right]^N, \quad \mathbf{x} \in \Omega(t). \quad (8.3.1)$$

Dans toutes nos expériences nous avons choisi  $h = 1$  et  $c = 1$ . Sur les figures 8.7 à 8.11 nous représentons, à trois instants différents,  $t = 3, 5$  et  $7$  (de haut en bas) les lignes de niveau de la fonction  $\mathbf{x} \mapsto \gamma_r^N(\mathbf{x}, t)$ . Chaque figure correspond à une valeur de  $N$  ( $N = 1, 2, 5, 10, 20$ ).

On remarque que :

- l'amplitude de l'erreur décroît fortement avec  $N$ . Par exemple, pour  $t = 3$ , le niveau de l'erreur est 0.4 pour  $N = 1$ , 0.2 pour  $N = 2$  et  $7.10^{-4}$  pour  $N = 10$  ;
- comme nous pouvions nous y attendre, l'amplitude de l'erreur augmente avec le temps. Par un argument d'homogénéité, il est évident que faire des comparaisons à des temps différents pour  $h$  fixé est équivalent à faire des comparaisons pour différents  $h$  à  $t$  fixé. Ainsi nos résultats illustrent également l'influence de  $h$  sur le champ incident ;
- quand  $N$  augmente, l'erreur relative se concentre de plus en plus au voisinage de la frontière absorbante. De plus, sa dépendance par rapport à la variable d'espace devient de plus en plus compliquée (le nombre d'oscillations dues aux polynômes de Tchebycheff augmente).

#### 8.3.1.2 Étude de l'erreur en fonction du temps

Dans cette section, nous voulons étudier l'évolution du champ réfléchi en un point donné  $\mathbf{x}$  en fonction du temps. Tous nos points d'observations sont situés sur le cercle  $r^*(\mathbf{x}) = 5$  de telle sorte que le champ réfléchi arrive sur ces points au temps  $t = 5$ .

- **Le cas du point  $\theta(\mathbf{x}) = 0$ .** Contrairement à ce que l'analyse par ondes planes pouvait laisser penser, le champ réfléchi n'est pas identiquement nul pour  $\theta(\mathbf{x}) = 0$ , i.e sur l'axe  $(Ox_2)$ . Cependant, la fonction  $t \mapsto G_r^N(\mathbf{x}, t)$  n'est pas discontinue (sauf pour  $N = 0$  !) au temps  $t = \tau = \tau(\mathbf{x}) = (x_2 + h)/c$  comme le montre la formule :

$$G_r^N(0, x_2, t) = \frac{(-1)^{N+1} [ct - (x_2 + h)]^{N-\frac{1}{2}}}{2\pi [ct + (x_2 + h)]^{N+\frac{1}{2}}}, \quad \text{pour } t > \tau. \quad (8.3.2)$$

Le champ est même de plus en plus régulier quand  $N$  augmente. De plus on peut remarquer que la fonction  $t \mapsto G_r^N(\mathbf{x}, t)$  croît pour  $\tau \leq t \leq 2N\tau$  puis décroît pour

19. Remarquons que  $G_r^0(\cdot, t)$  est non nulle à l'intérieur du disque  $r^*(\mathbf{x}) < ct$ .

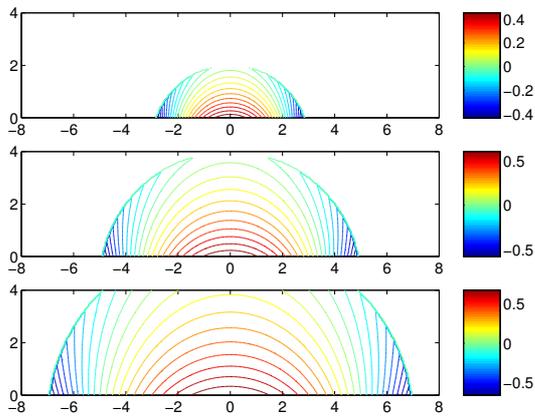


FIG. 8.7:  $x \mapsto \gamma_r^1(x, t), t = 3, 5 \text{ et } 7$

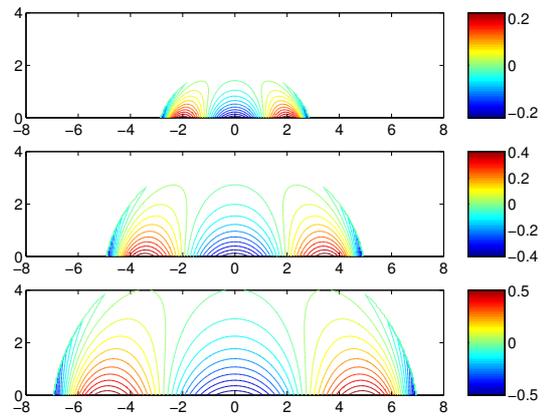


FIG. 8.8:  $x \mapsto \gamma_r^2(x, t), t = 3, 5 \text{ et } 7$

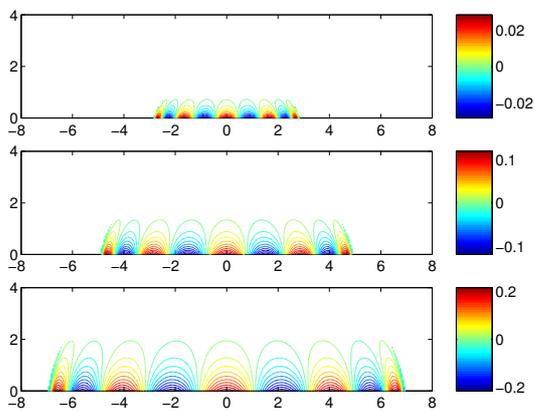


FIG. 8.9:  $x \mapsto \gamma_r^5(x, t), t = 3, 5 \text{ et } 7$

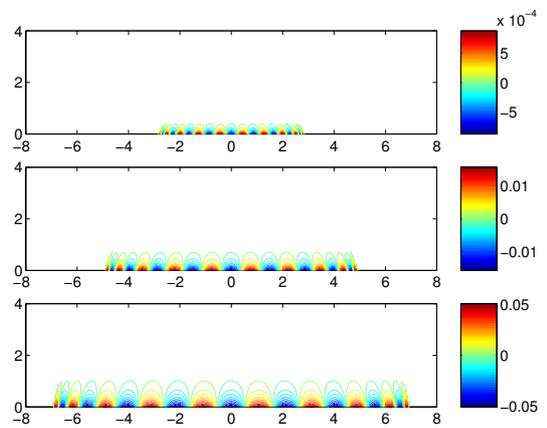


FIG. 8.10:  $x \mapsto \gamma_r^{10}(x, t), t = 5, 7 \text{ et } 9$

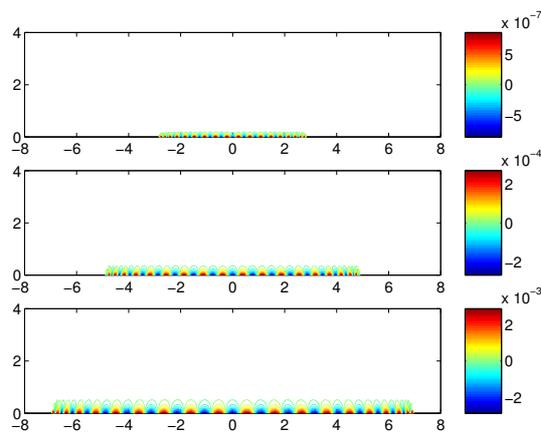


FIG. 8.11:  $x \mapsto \gamma_r^{20}(x, t), t = 3, 5 \text{ et } 7$

$t > 2N\tau$  et tend vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  comme  $1/2\pi ct$ . Le maximum de  $t \mapsto G_r^N(\mathbf{x}, t)$  est donné par :

$$\sup_{t \geq \tau} G_r^N(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2N+1} \left( \frac{2N-1}{2N+1} \right)^{N-\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{2Ne} \quad (N \rightarrow +\infty) \quad (8.3.3)$$

Ces propriétés sont illustrées sur les figures 8.12 et 8.13 : nous avons représenté, sur la figure 8.12, les variations de  $t \mapsto G_r^N(\mathbf{x}, t), t \in [0, 20]$  et, sur la figure 8.13, les variations de  $t \mapsto \gamma_r^N(\mathbf{x}, t), t \in [0, 20]$  pour  $N$  variant de 1 à 5.

Si on considère l'erreur relative, la formule :

$$\gamma_r^N(\mathbf{x}, t) = (-1)^N \frac{[ct - (x_2 + h)]^{N-\frac{1}{2}}}{[ct + (x_2 + h)]^{N+\frac{1}{2}}}, \quad \text{pour } t > \tau. \quad (8.3.4)$$

montre que la fonction  $t \mapsto \gamma_r^N(\mathbf{x}, t), t > \tau$ , croît de 0 à 1, ce qui est confirmé par la figure 8.13

- **Le cas des points  $\theta(\mathbf{x}) \neq 0$ .** Dans ce cas, la fonction  $t \mapsto \gamma_r^N(\mathbf{x}, t)$  n'est plus régulière pour  $t = \tau$  :

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \gamma_r^N(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}_N(\theta(\mathbf{x})) = (-1)^N \left( \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^N. \quad (8.3.5)$$

Cette quantité représente le saut de  $\gamma_r^N$  à travers le front d'onde. Sur les figures 8.14 et 8.15 nous représentons les variations de  $t \mapsto \gamma_r^N(\mathbf{x}, t)$  pour  $\theta = \pi/6$  et  $\theta = \pi/3$ . Sur chaque figure,  $N$  varie de 1 à 5. Il est évident que plus  $N$  est grand, plus la fonction oscille. Finalement, pour des temps longs, on vérifie facilement que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_r^N(\mathbf{x}, t) = (-1)^N, \quad (8.3.6)$$

indépendamment de la valeur de  $N$ . Ce comportement est illustré sur les figures 8.16 et 8.17, respectivement pour  $\theta = \frac{\pi}{6}$  et  $\theta = \frac{\pi}{3}$

### 8.3.1.3 Étude de l'erreur en fonction de la distance au point source image

Nous considérons ici les variations spatiales du champ réfléchi suivant un rayon issu du point image  $x_S^*$  (nous ne nous intéressons évidemment qu'à la partie de ce rayon incluse dans le demi-plan  $\mathbb{R}_+^2$ ). Pour une direction donnée  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$ , ce rayon peut également être défini par (voir figure 8.18) :

$$D_\theta = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2 / \theta(\mathbf{x}) = \theta \} = \{ (r^* \sin \theta, r^* \cos \theta), r^* \geq h / \cos \theta \}$$

Nous représentons sur les figures suivantes les variations du champ réfléchi  $G_r^N$ , pour  $\theta$  fixé, en fonction de  $r^* \geq h / \cos \theta$ , pour différentes valeurs de  $t$  et  $N$ .

- Pour  $\theta = 0, r^* \geq h$ . Nous avons représenté, sur les figures 8.19 à 8.22, les variations de  $G_r^N$  suivant  $D_0$  pour trois valeurs de  $t, t = 3, 5, 8$ . Chaque figure correspond à une valeur de  $N$ , et l'échelle varie donc énormément d'une figure à l'autre. On constate ici encore que le champ réfléchi devient de plus en plus régulier quand  $N$  augmente.

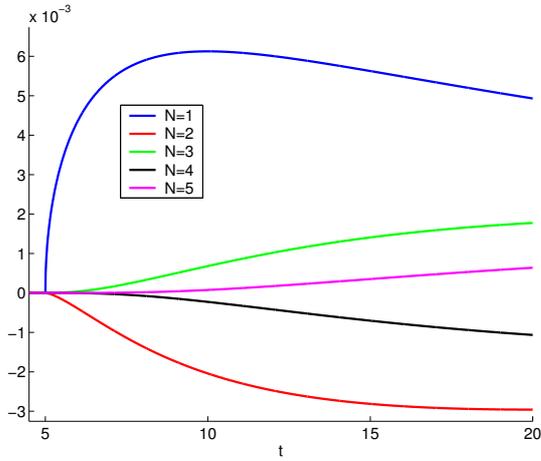


FIG. 8.12:  $t \mapsto G_r^N(\mathbf{x}, t), r^* = 5, \theta = 0$

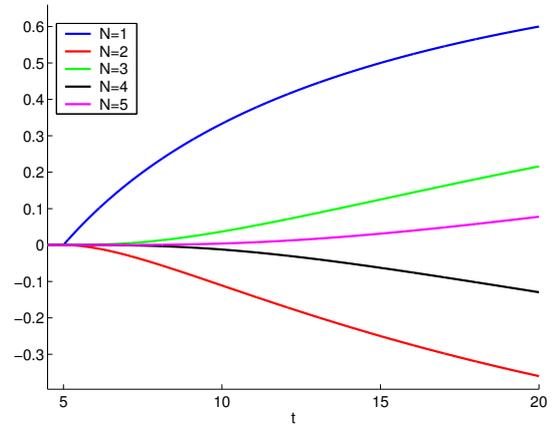


FIG. 8.13:  $t \mapsto \gamma_r^N(\mathbf{x}, t), r^* = 5, \theta = 0$

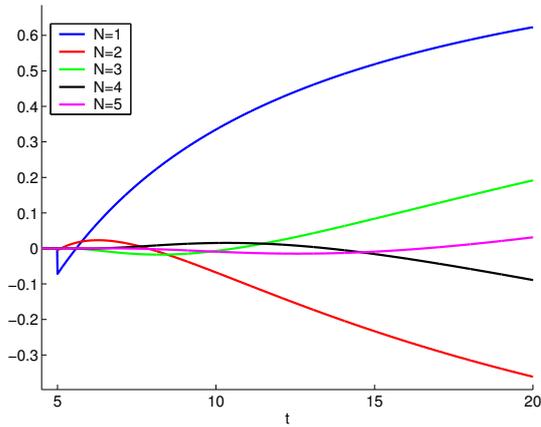


FIG. 8.14:  $t \mapsto \gamma_r^N(\mathbf{x}, t), r^* = 5, \theta = \frac{\pi}{6}$

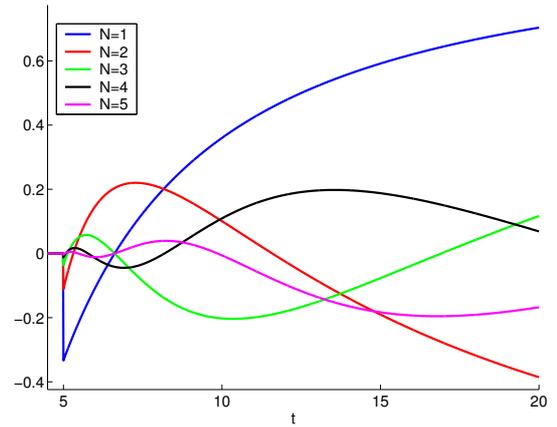


FIG. 8.15:  $t \mapsto \gamma_r^N(\mathbf{x}, t), r^* = 5, \theta = \frac{\pi}{3}$

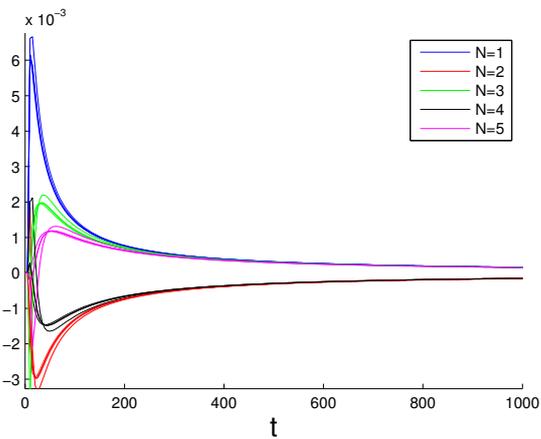


FIG. 8.16:  $t \mapsto G_r^N(\mathbf{x}, t), r^* = 5, \theta = \frac{\pi}{6}$

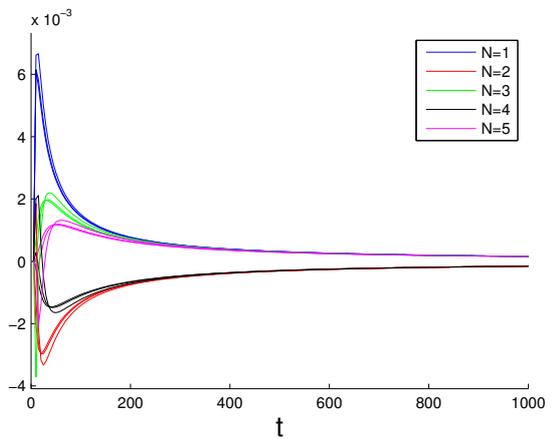
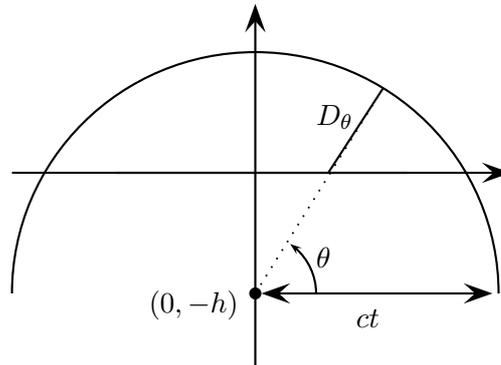


FIG. 8.17:  $t \mapsto G_r^N(\mathbf{x}, t), r^* = 5, \theta = \frac{\pi}{3}$


 FIG. 8.18: Représentation de  $D_\theta$ 

- Pour  $\theta = \pi/6$ ,  $r^* \leq 2h/\sqrt{3}$ . Nous avons représenté, sur les figures 8.23 à 8.26, les variations de  $G_r^N$  suivant  $D_{\pi/6}$  pour trois valeurs de  $t$ ,  $t = 3, 5, 8$ . Le champ réfléchi est cette fois singulier en  $r^* = ct$ . Cependant, la région où  $G_r^N$  devient très grand se confine de plus en plus autour du point  $r^* = ct$  quand  $N$  augmente.
- Pour  $\theta = \pi/3$ ,  $r^* \leq 2h$ . Nous avons représenté, sur les figures 8.23 à 8.26, les variations de  $G_r^N$  suivant  $D_{\pi/3}$  pour trois valeurs de  $t$ ,  $t = 3, 5, 8$ . Le champ réfléchi est encore singulier pour  $r^* = ct$ . Le profil de l'onde réfléchie est plus compliqué que dans le cas  $\theta = \pi/6$ , particulièrement pour  $N$  grand.

#### 8.3.1.4 Étude de l'erreur en fonction de l'angle

Nos précédents résultats ont déjà illustré la dépendance du champ réfléchi par rapport à  $\theta(\mathbf{x})$ . Nous nous intéressons ici à l'erreur relative  $\gamma_r^N(\mathbf{x}, t)$  le long du front d'onde réfléchi défini par :

$$WF_r(t) = \partial\Omega(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2 / r^*(\mathbf{x}) = ct\} \quad (\neq \emptyset \text{ pour } t > \frac{h}{c}).$$

Soit  $M_\theta(t) = (ct \sin \theta, ct \cos \theta) \in WF_r(t)$  (remarquons que  $M_\theta(t)$  décrit  $WF_r(t)$  quand  $\theta$  varie de  $-\arccos \frac{h}{ct}$  à  $+\arccos \frac{h}{ct}$ —voir figure 8.31), on déduit facilement de (8.1.10) que :

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow M_\theta(t), \mathbf{x} \in \Omega(t)} \gamma_r^N(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}_N(\theta) = (-1)^N \left( \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^N.$$

Autrement dit, la courbe représentant les variations de l'erreur relative  $\gamma_r^N(\mathbf{x}, t)$  en fonction de la direction  $\theta$  le long du front d'onde réfléchi  $WF_r(t)$  n'est rien d'autre que la partie de la courbe de la figure 7.2, obtenue grâce à l'analyse par ondes planes, correspondant à  $-\arccos \frac{h}{ct} \leq \theta \leq \arccos \frac{h}{ct}$ .

### 8.3.2 Le cas d'un terme source

#### 8.3.2.1 Comparaison avec des expériences numériques

Nous avons implémenté un code MATLAB pour le calcul de la convolution (8.2.20). Pour valider notre solution “exacte” (!), nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus par

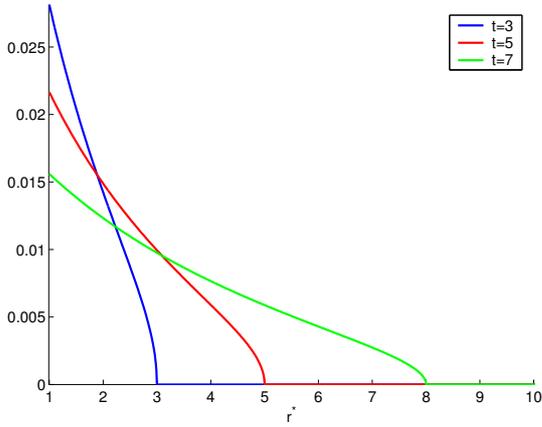


FIG. 8.19:  $r^* \mapsto G_r^1(r^*, \theta = 0, t)$ .

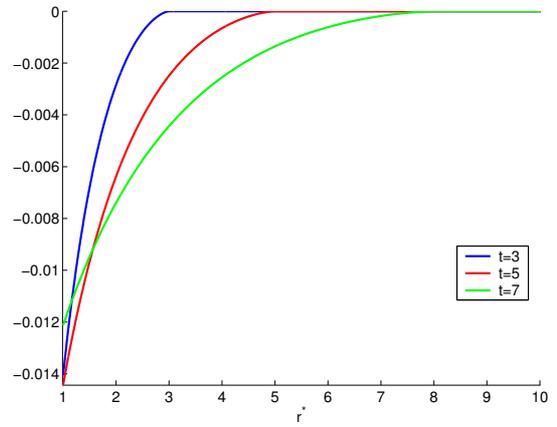


FIG. 8.20:  $t \mapsto \gamma_r^2(\mathbf{x}, t), \theta = 0$ .

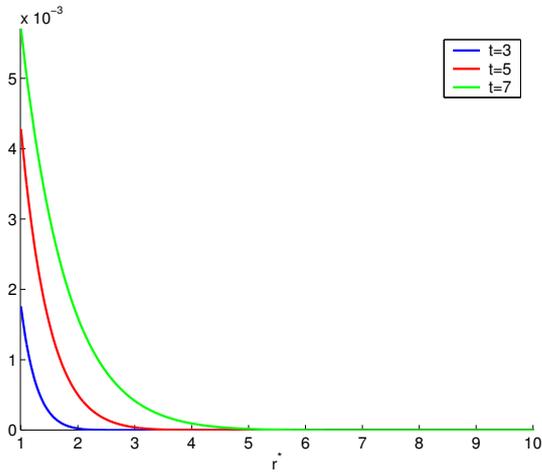


FIG. 8.21:  $t \mapsto \gamma_r^5(\mathbf{x}, t), \theta = 0$ .

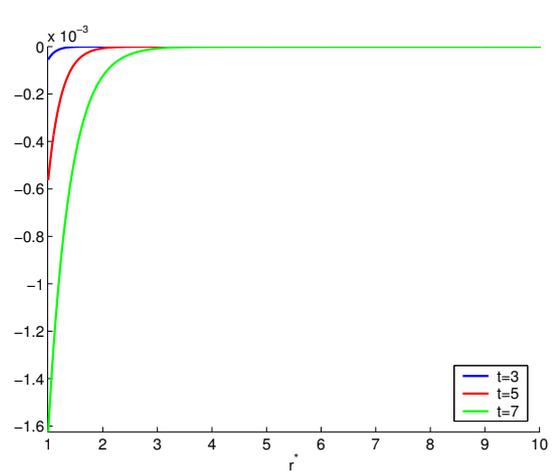


FIG. 8.22:  $t \mapsto \gamma_r^{10}(\mathbf{x}, t), \theta = 0$ .

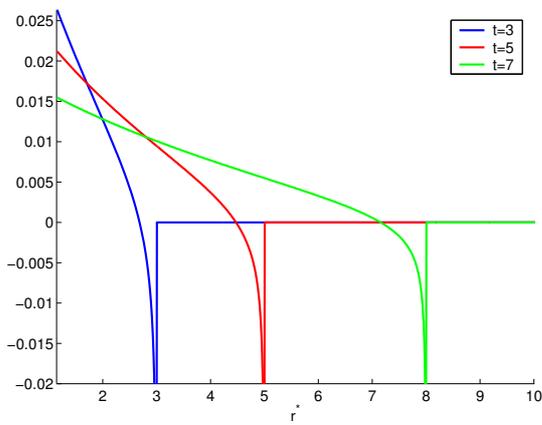


FIG. 8.23:  $t \mapsto G_r^1(\mathbf{x}, t), \theta = \pi/6$

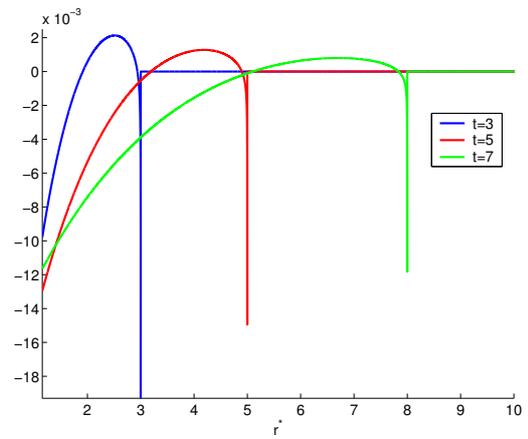


FIG. 8.24:  $t \mapsto G_r^2(\mathbf{x}, t), \theta = \pi/6$

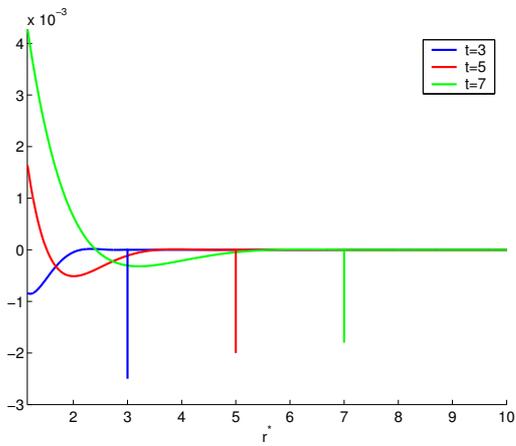


FIG. 8.25:  $t \mapsto G_r^5(\mathbf{x}, t)$ ,  $\theta = \pi/6$

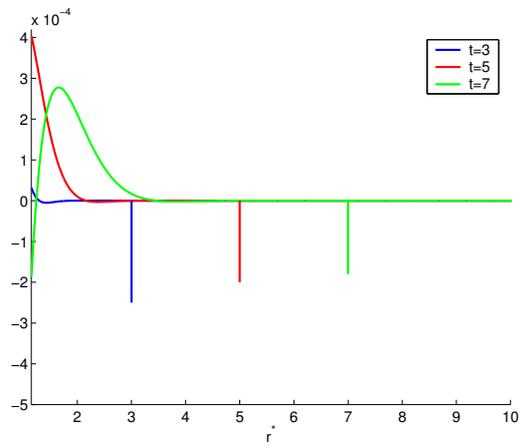


FIG. 8.26:  $t \mapsto G_r^{10}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\theta = \pi/6$

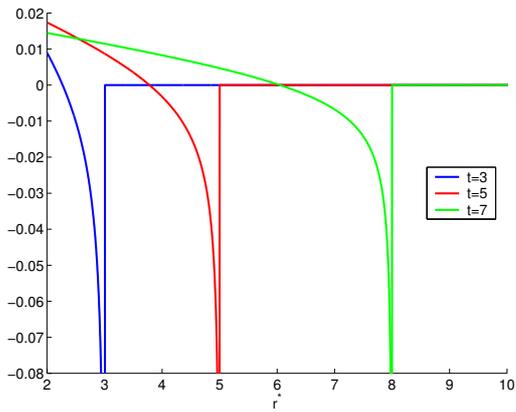


FIG. 8.27:  $t \mapsto G_r^1(\mathbf{x}, t)$ ,  $\theta = \pi/3$

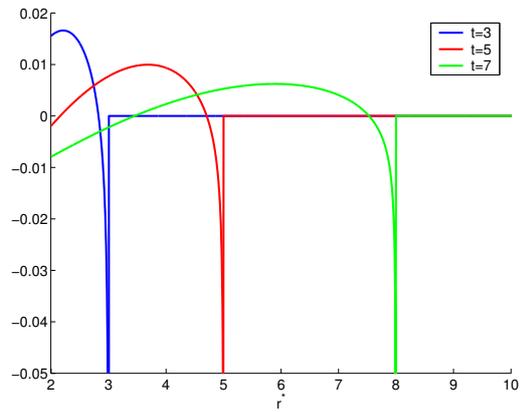


FIG. 8.28:  $t \mapsto G_r^2(\mathbf{x}, t)$ ,  $\theta = \pi/3$

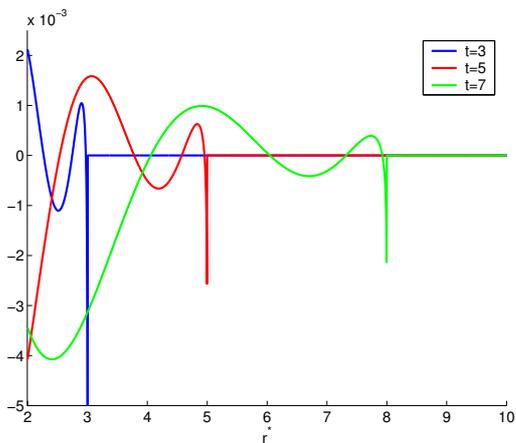


FIG. 8.29:  $t \mapsto G_r^5(\mathbf{x}, t)$ ,  $\theta = \pi/3$

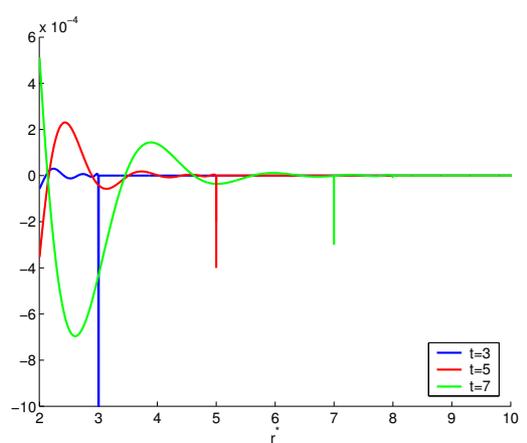
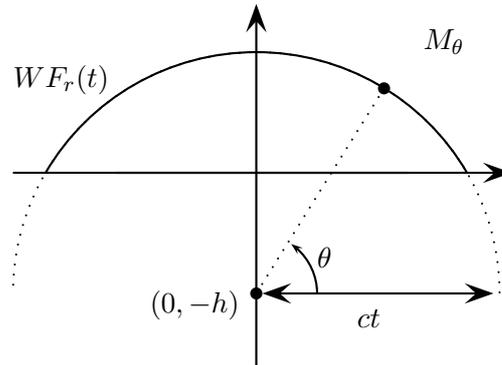


FIG. 8.30:  $t \mapsto G_r^{10}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\theta = \pi/3$

FIG. 8.31: Représentation de  $WF_r(t)$  et  $M_\theta$ 

un code de différences finies écrit par F. Collino. Dans nos expériences, la fonction source est une dérivée de Gaussienne tronquée:

$$f(t) = \frac{d}{dt} \left\{ e^{-2\pi f_0(t-t_0)^2} \right\} H(2t_0 - t), \quad f_0 = 10, \quad t_0 = 1/f_0. \quad (8.3.7)$$

Nous avons comparé, sur les figures 8.32 à 8.37, la solution “analytique” (en haut sur chaque figure) à la solution numérique (en bas sur chaque figure) pour trois valeurs de  $N$  :  $N = 1, 3, 5$ . Sur chaque figure nous avons représenté les lignes de niveau de la solution au temps  $t = 0.4$ . Les figures de gauche représentent le champ total et celles de droite le champ réfléchi (l’erreur). Pour faciliter la représentation, le champ réfléchi a été amplifié d’un facteur dépendant de  $N$  : 1.3 pour  $N = 1$ , 10 pour  $N = 3$  et 25 pour  $N = 5$ . Dans tous les cas, les résultats montrent une très bonne concordance entre les deux solutions.

Nous avons également comparé les deux solutions au point  $(0.9, 0.1)$  en fonction du temps sur les figures 8.38 à 8.43. La courbe bleue représente la solution “analytique” et la courbe rouge la solution numérique pour trois valeurs de  $N$  :  $N = 1, 3, 5$ . Comme précédemment, les figures de gauche représentent le champ total et celles de droite le champ réfléchi.

### 8.3.2.2 Estimations d’erreur $L^\infty$

Nous avons comparé la norme  $L_\infty$  du champ réfléchi (les courbes bleues) aux estimations uniformes (8.1.15) et (8.1.16) données par le théorème 8.1.2 (les courbes rouges) sur les figures 8.44 à 8.47. La source est un échelon temporel :  $f(t) = 1$  si  $0 \leq t \leq 2$  et  $f(t) = 0$  sinon. Notre estimation est pratiquement optimale pour  $N = 1$  et devient moins précise (quoique très acceptable) quand  $N$  augmente. Puisque nous avons utilisé la norme  $L^\infty$  de la fonction source pour établir nos estimations d’erreur, cette estimation peut ne pas être très précise pour des fonctions sources plus compliquées. Pour vérifier ce point nous avons répété les expériences précédentes avec une source de la forme (8.3.7) et de fréquence  $f_0 = 1$ . Ces expériences sont illustrées sur les figures 8.48 à 8.51 pour  $N = 1, 2, 5, 10$ . L’estimation est visiblement moins précise que dans le cas d’une source échelon mais elle fournit encore une borne supérieure raisonnable.

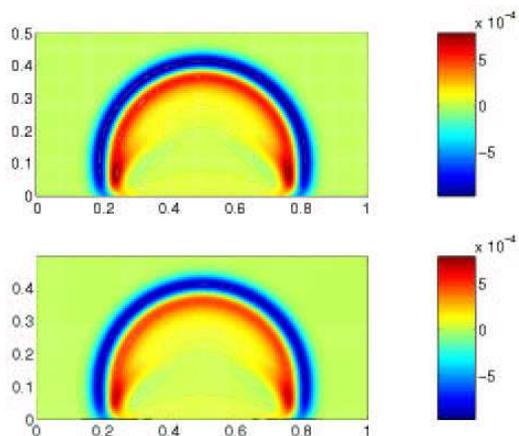


FIG. 8.32: Champ total.  $N = 1$

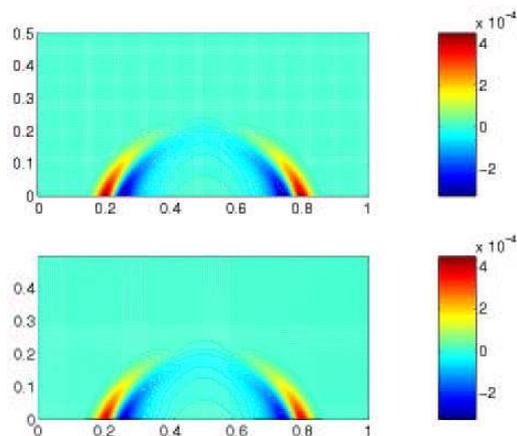


FIG. 8.33: Champ réfléchi.  $N = 1$

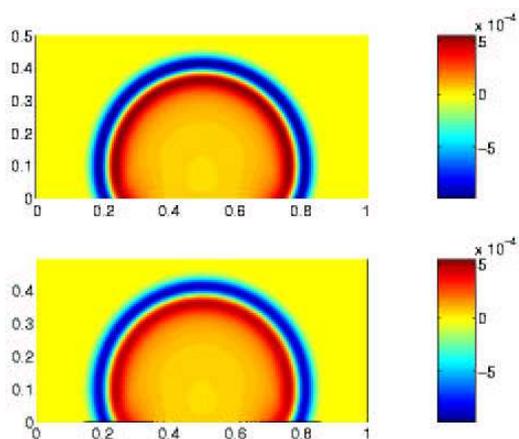


FIG. 8.34: Champ total.  $N = 3$

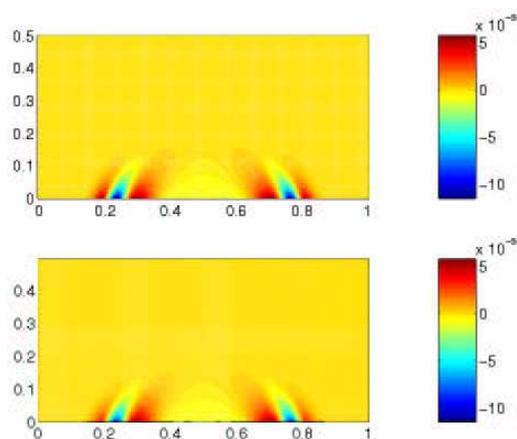


FIG. 8.35: Champ réfléchi.  $N = 3$

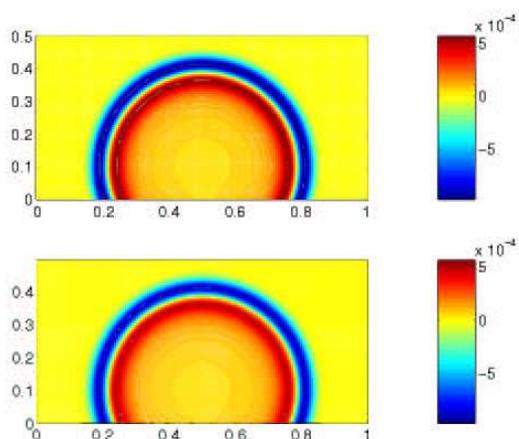


FIG. 8.36: Champ total.  $N = 5$

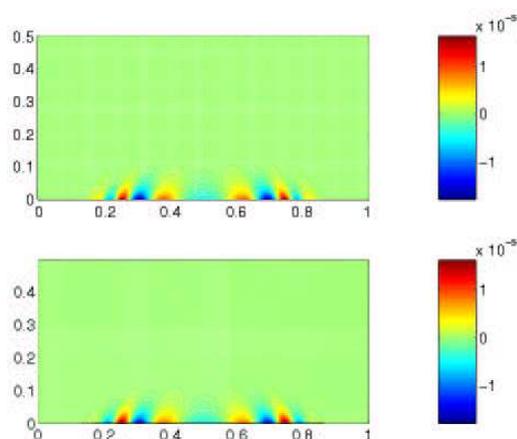


FIG. 8.37: Champ réfléchi.  $N = 5$

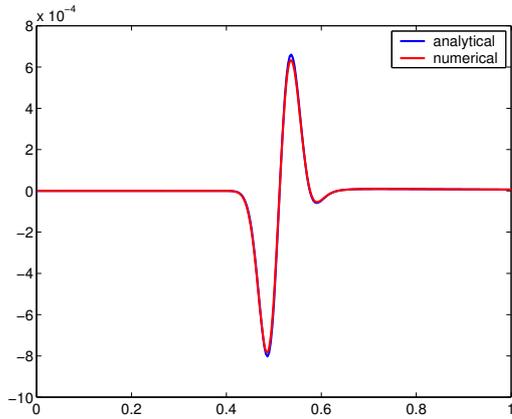


FIG. 8.38: Champ total.  $N = 1$

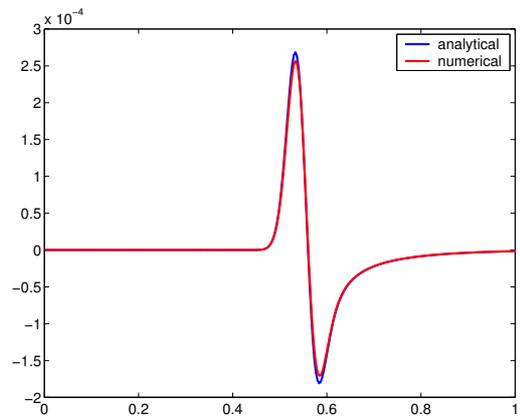


FIG. 8.39: Champ réfléchi.  $N = 1$

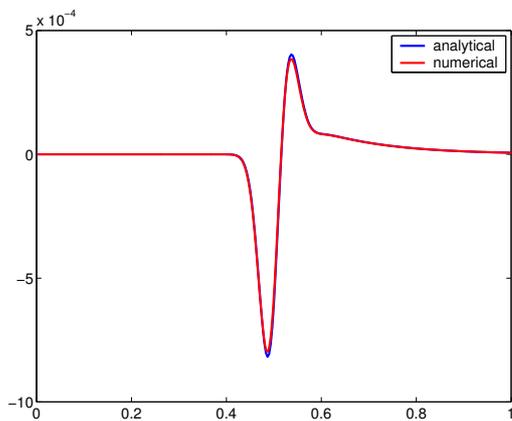


FIG. 8.40: Champ total.  $N = 3$

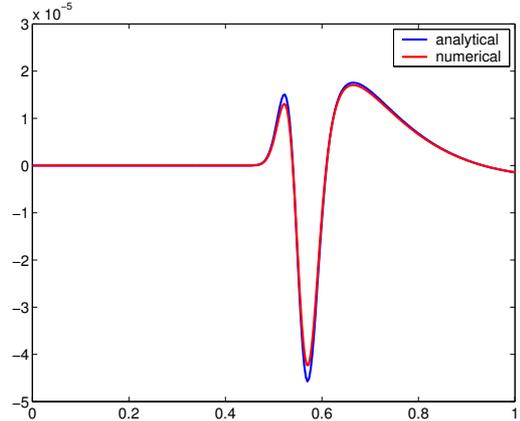


FIG. 8.41: Champ réfléchi.  $N = 3$

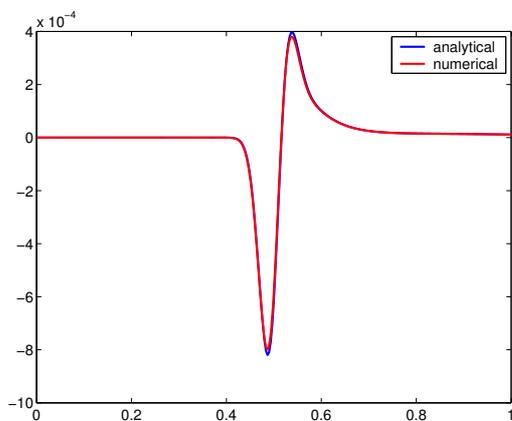


FIG. 8.42: Champ total.  $N = 5$

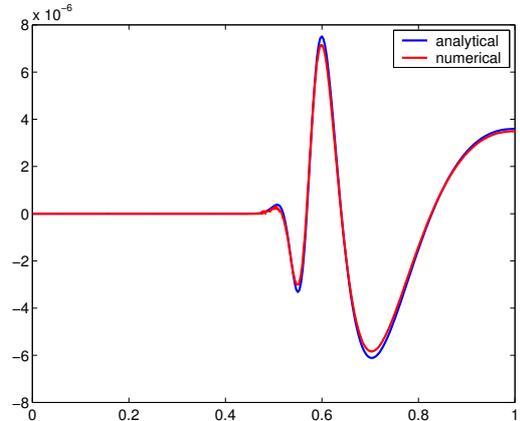


FIG. 8.43: Champ réfléchi.  $N = 5$

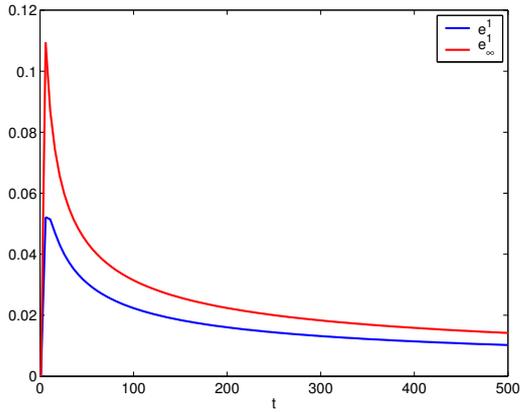


FIG. 8.44: Estimation d'erreur  $N = 1$

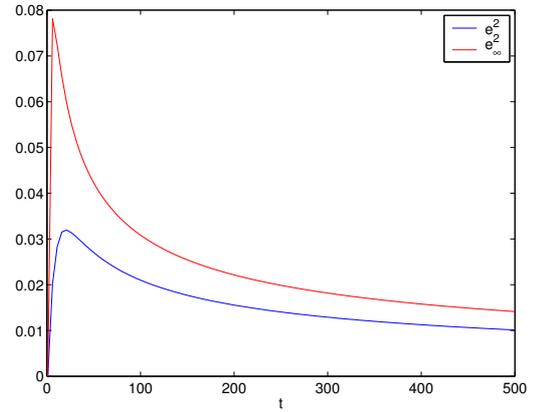


FIG. 8.45: Estimation d'erreur  $N = 2$

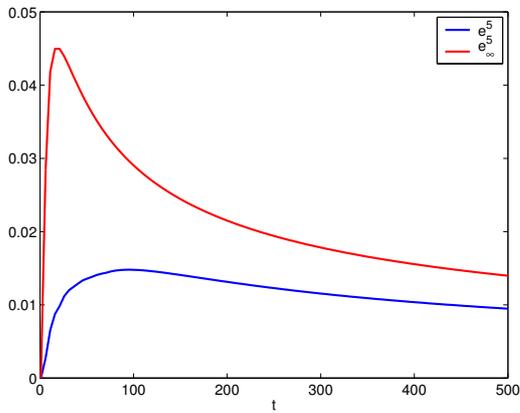


FIG. 8.46: Estimation d'erreur  $N = 5$

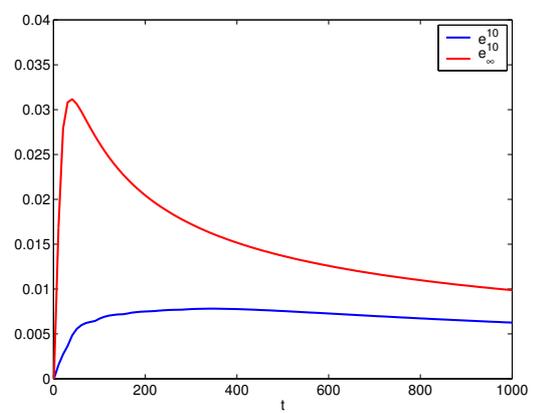


FIG. 8.47: Estimation d'erreur  $N = 10$

## Annexes

### 8.a Extension aux conditions de Higdon

Nous nous intéressons dans cette annexe aux conditions de Higdon présentées à la section 7.1.2 :

$$B_{Hig}^N u = \prod_{j=1}^N \left( \cos \alpha_j \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0. \quad (8.a.1)$$

En utilisant la même méthode qu'à la section 8.2, on montre que la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} & \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) \times \delta(t) & \text{dans } \mathbb{R}_+^2, \\ B_{Hig}^N u = 0, & \text{sur } \Gamma, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } t < 0. \end{array} \right. \quad (8.a.2)$$

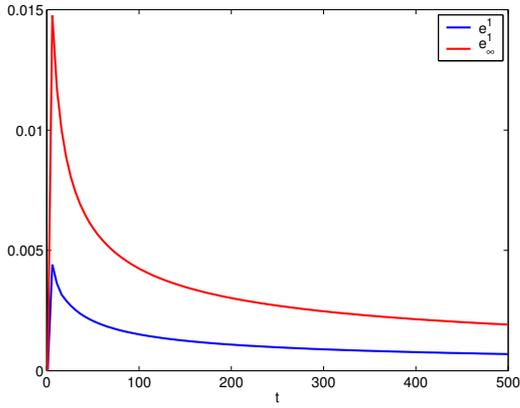


FIG. 8.48: Estimation d'erreur N=1

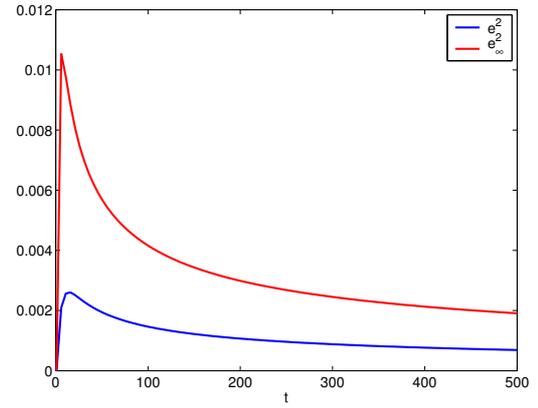


FIG. 8.49: Estimation d'erreur N=2

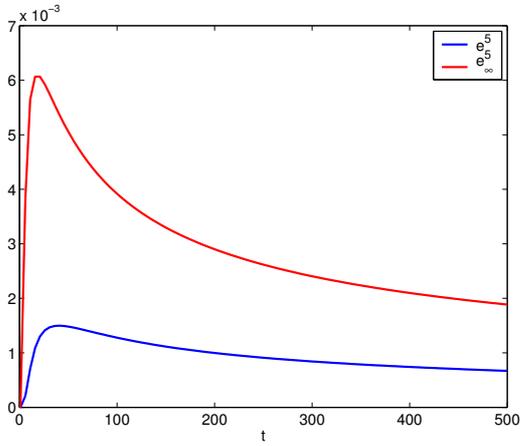


FIG. 8.50: Estimation d'erreur N=5

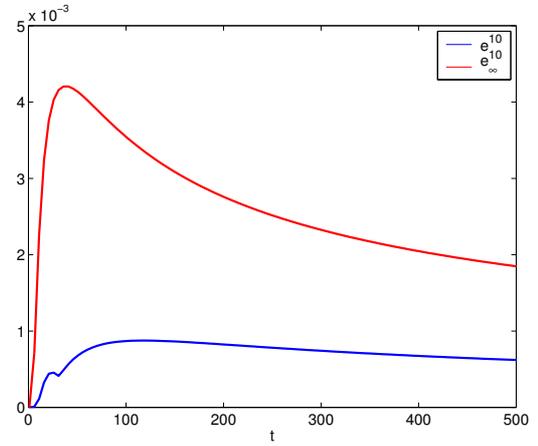


FIG. 8.51: Estimation d'erreur N=10

est donnée par :

$$u(x, t) = G_{Hig}^N(x, t) = G_i(x, t) + G_{Hig,r}^N(x, t), \quad (8.a.3)$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} G_i(x, t) &= \frac{H(ct - r(x))}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r(x)^2}{c^2}}}, \\ G_{Hig,r}^N(x, t) &= \frac{H(ct - r^*(x))}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r^{*2}}{c^2}}} \left[ \prod_{j=1}^n \rho_j(x, t) \right] \cos \left[ \sum_{j=1}^n \psi_j(x, t) \right], \end{aligned} \right. \quad (8.a.4)$$

où  $\rho_j(x, t)$  et  $\psi_j(x, t)$  sont donnés par :

$$\rho_j(x, t) = \sqrt{\frac{(ct - a_j)^2 - b_j^2}{(ct + a_j)^2 - b_j^2}} \quad (8.a.5)$$

et

$$\psi_j(x, t) = \arccos \left[ \frac{r^*(x, t)^2 - c^2 t^2 + r^*(x, t)^2 \cos^2 \alpha_j - r^*(x, t)^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{((ct - a_j)^2 - b_j^2)((ct + a_j)^2 - b_j^2)}} \right] \quad (8.a.6)$$

soit, en coordonnées cartésiennes :

$$\psi_j(x, t) = \arccos \left[ \frac{r^*(x, t)^2 - c^2 t^2 + r^*(x, t)^2 \cos^2 \alpha_j - (x_2 + h)^2}{\sqrt{((ct - a_j)^2 - b_j^2)((ct + a_j)^2 - b_j^2)}} \right] \quad (8.a.7)$$

avec

$$a_j = r^*(x) \cos \alpha_j \cos \theta = \cos \alpha_j (x_2 + h)$$

et

$$b_j = r^*(x) \sin \theta \sin \alpha_j = x_1 \sin \alpha_j.$$

D'après (8.a.5), on voit que la fonction  $x \mapsto G_{Hig,r}^N(x, t)$  est singulière sur le cercle  $r^*(x) = ct$  sauf dans les directions  $\alpha_j$ .



## Chapitre 9

# Les Couches absorbantes Parfaitement Adaptées

**A** la première section, nous décrivons les problèmes modèles que nous avons considérés : nous nous intéressons d'abord au problème du demi-plan avec une source ponctuelle borné par une couche absorbante, nous considérerons ensuite le problème du quart de plan puis d'un domaine rectangulaire borné. Dans chaque cas nous présenterons l'expression explicite de la solution fondamentale de nos problèmes. Dans le cas du demi-plan nous montrerons également comment obtenir des estimations d'erreur dans le cas d'une source quelconque en temps. Nous démontrerons nos théorèmes dans la deuxième section, nous les analyserons plus en détails et nous les comparerons à des résultats obtenus grâce à un code numérique à la troisième section.

## Contenu

---

<b>9.1</b>	<b>Principaux résultats . . . . .</b>	<b>157</b>
9.1.1	Le problème du demi-espace . . . . .	157
9.1.1.1	Expression de la solution analytique dans le cas d'une PML infinie . . . . .	157
9.1.1.2	Expression de la solution analytique dans le cas d'une PML finie . . . . .	159
9.1.1.3	Estimations d'erreur . . . . .	161
9.1.2	Le cas du quart de plan . . . . .	162
9.1.2.1	Expression de la solution analytique dans le cas de PML infinies . . . . .	162
9.1.2.2	Expression de la solution analytique dans le cas de PML finies	163
9.1.3	Le cas d'un domaine rectangulaire borné . . . . .	165
9.1.3.1	Expression de la solution analytique dans le cas de PML infinies . . . . .	165
9.1.3.2	Expression de la solution analytique dans le cas de PML finies	167
<b>9.2</b>	<b>Démonstrations des théorèmes 9.1.1 à 9.1.7 . . . . .</b>	<b>169</b>
9.2.1	Démonstration du théorème 9.1.1 . . . . .	169
9.2.2	Démonstration du théorème 9.1.2 . . . . .	171
9.2.3	Démonstration du théorème 9.1.3 . . . . .	173
9.2.4	Démonstration du théorème 9.1.4 . . . . .	175
9.2.5	Démonstration du théorème 9.1.5 . . . . .	176
9.2.6	Démonstration du théorème 9.1.6 . . . . .	177
9.2.7	Démonstration du théorème 9.1.7 . . . . .	177
<b>9.3</b>	<b>Résultats numériques concernant le problème du demi-espace .</b>	<b>177</b>
9.3.1	Analyse des solutions fondamentales 2D . . . . .	177
9.3.1.1	Analyse de l'erreur relative . . . . .	177
9.3.1.2	Étude de l'erreur en fonction du temps . . . . .	179
9.3.1.3	Étude de l'erreur en fonction de la distance au point source image . . . . .	181
9.3.1.4	Étude de l'erreur en fonction de l'angle . . . . .	181
9.3.2	Le cas d'un terme source . . . . .	181
9.3.2.1	Estimations d'erreur $L^\infty$ . . . . .	184
<b>9.4</b>	<b>Résultats numériques concernant le domaine entouré de PML .</b>	<b>184</b>
9.4.1	Comparaison avec une solution numérique . . . . .	184
9.4.2	Comportement de la solution en temps long . . . . .	184

---

## 9.1 Principaux résultats

### 9.1.1 Le problème du demi-espace

#### 9.1.1.1 Expression de la solution analytique dans le cas d'une PML infinie

Nous nous intéressons dans un premier temps à l'expression explicite de la solution fondamentale  $u^{\sigma, \infty}$  de l'équation des ondes dans le demi-espace  $\mathbb{R}_+^2$  avec une PML infinie dans le demi-espace inférieur.  $u^{\sigma, \infty}$  est donc solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R} & \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - (D_{x_2}^\sigma)^2 u = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) \times \delta(t), & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } t < 0. \end{array} \right. \quad (9.1.1)$$

avec  $\mathbf{x}_S = (0, h)$  et  $\sigma(x_2) \begin{cases} = 0 & \text{si } x_2 \geq 0 \\ > 0 & \text{si } x_2 < 0 \end{cases}$ . À titre d'illustration nous avons représenté la fonction  $\sigma$  sur la figure 9.1 dans le cas où  $\sigma$  est une fonction quadratique de  $x_2$ .

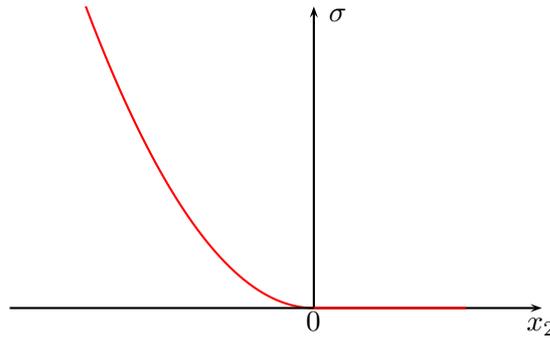


FIG. 9.1: La fonction  $\sigma(x_2)$

Posons maintenant  $r(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|$  et définissons la fonction  $\theta(\mathbf{x})$  par :

$$\theta(\mathbf{x}) \in ] - \pi, \pi], \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}_S = (r(\mathbf{x}) \sin \theta(\mathbf{x}), r(\mathbf{x}) \cos \theta(\mathbf{x}))^t,$$

puis la fonction  $\Sigma(x_2)$  par :

$$\Sigma(x_2) = \left| \int_0^{x_2} \sigma(x) dx \right|,$$

et finalement les fonctions  $A(\mathbf{x}, t)$  et  $B(\mathbf{x}, t)$ , quantités sans dimension, par :

$$A(\mathbf{x}, t) = |\cos \theta(\mathbf{x})| \Sigma(x_2) \frac{t}{r(\mathbf{x})} > 0$$

et

$$B(\mathbf{x}, t) = |\sin \theta(\mathbf{x})| \Sigma(x_2) \sqrt{\frac{t^2}{r(\mathbf{x})^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

**Remarque 9.1.1**  $B(\mathbf{x}, t)$  est l'équivalent de la fonction  $\Phi$  que nous avons utilisée pour les CLA.

**Remarque 9.1.2** Si  $\sigma$  est une fonction quadratique de  $x_2$ , alors  $\Sigma$  est une fonction cubique de  $x_2$  (voir figure 9.2).

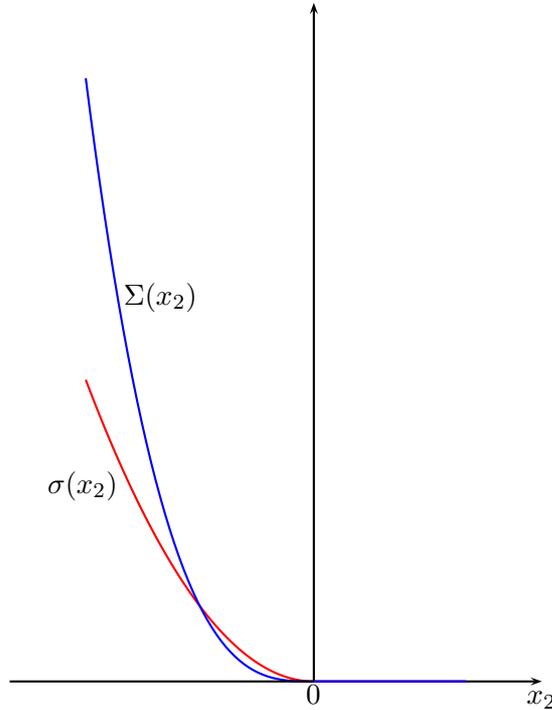


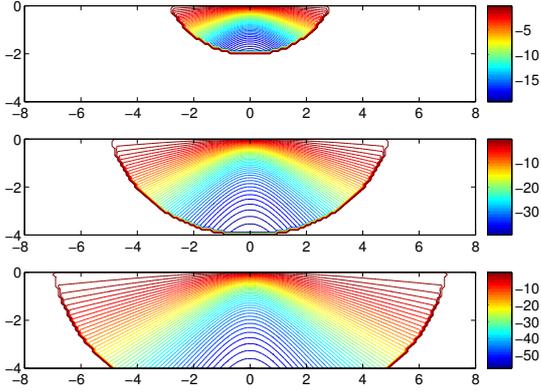
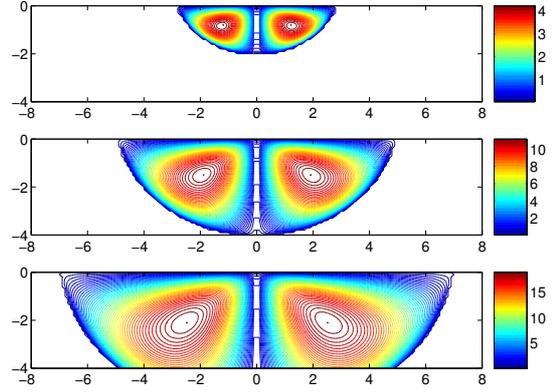
FIG. 9.2: Les fonctions  $\sigma(x_2)$  et  $\Sigma(x_2)$

Nous avons représenté les lignes de niveau des fonctions  $A$  et  $B$  dans la PML respectivement sur les figures 9.3 et 9.4 pour trois instants différents (de haut en bas,  $t=3, 5$  et  $7$ ) avec  $c = 1$ ,  $h = 1$  et  $\sigma(x_2) = \sigma_0 = 10$ .

**Théorème 9.1.1** La solution  $u^{\sigma, \infty}(\mathbf{x}, t) = G_i^{\sigma, \infty}(\mathbf{x}, t)$  du problème (9.1.1) est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} G_i^{\sigma, \infty}(\mathbf{x}, t) = \frac{H(ct - r(\mathbf{x}))}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r(\mathbf{x})^2}{c^2}}}, & x_2 > 0 \\ G_i^{\sigma, \infty}(\mathbf{x}, t) = \frac{H(ct - r(\mathbf{x}))}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r(\mathbf{x})^2}{c^2}}} e^{-A(\mathbf{x}, t)} \cos[B(\mathbf{x}, t)], & x_2 < 0. \end{array} \right. \quad (9.1.2)$$

**Remarque 9.1.3** La restriction de  $G_i^{\sigma, \infty}(\mathbf{x}, t)$  au demi-espace supérieur  $\mathbb{R}_+^2$ , qui ne dépend pas de  $\sigma$ , n'est rien d'autre que la restriction au demi-espace  $\mathbb{R}_+^2$  de la solution fondamentale de l'équation des ondes 2D dans tout l'espace : la PML ne génère donc pas de réflexion à l'interface et on retrouve ici leur caractère bien posé.


 FIG. 9.3:  $\mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}, t), t = 3, 5$  et  $7$ 

 FIG. 9.4:  $\mathbf{x} \mapsto B(\mathbf{x}, t), t = 3, 5$  et  $7$ 

**Remarque 9.1.4** Pour  $\mathbf{x}$  fixé la fonction  $G$  décroît exponentiellement en temps, contrairement à la fonction de Green associée aux CLA.

### 9.1.1.2 Expression de la solution analytique dans le cas d'une PML finie

Nous supposons maintenant que la couche absorbante est de longueur  $L$  finie et nous imposons une condition de type Neumann à son extrémité. Le problème (9.1.1) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R} \quad \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - (D_{x_2}^\sigma)^2 u = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) \times \delta(t), \quad \text{dans } \mathbb{R} \times [-L; +\infty] \times \mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, -L, t) = 0, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, \end{array} \right. \quad (9.1.3) \quad \text{pour } t < 0.$$

Comme au chapitre précédent, nous définissons le point source image par<sup>(20)</sup> :

$$\mathbf{x}_S^* = (0, -h - 2L),$$

nous posons  $r^*(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_S^*|$  et nous définissons la fonction  $\theta^*(\mathbf{x})$  par :

$$\theta^*(\mathbf{x}) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}_S^* = (r^*(\mathbf{x}) \sin \theta^*(\mathbf{x}), r^*(\mathbf{x}) \cos \theta^*(\mathbf{x}))^t.$$

Nous définissons également la fonction  $\Sigma^*(x_2)$  par :

$$\Sigma^*(x_2) = \left| \int_0^{-L} \sigma(x) dx \right| + \left| \int_{-L}^{x_2} \sigma(x) dx \right|,$$

et finalement les fonctions  $A^*(\mathbf{x}, t)$  et  $B^*(\mathbf{x}, t)$  par :

$$A^*(\mathbf{x}, t) = |\cos \theta^*(\mathbf{x})| \Sigma^*(x_2) \frac{t}{r^*(\mathbf{x})} > 0$$

20. Le point source image est le symétrique du point source par rapport à la droite  $x_2 = -L$

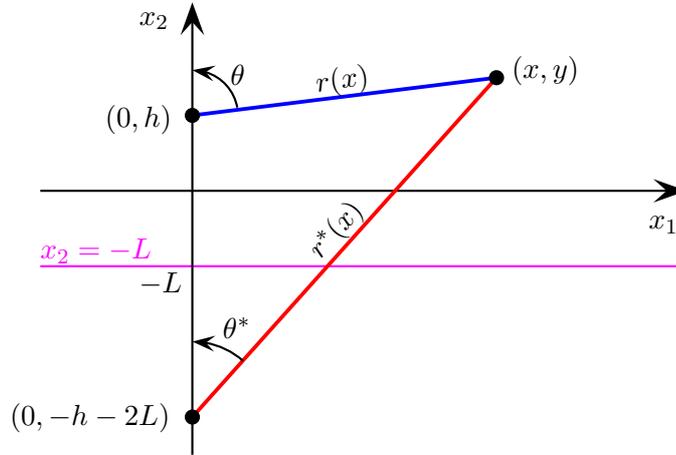


FIG. 9.5: Illustration des notations

et

$$B^*(\mathbf{x}, t) = |\sin \theta^*(\mathbf{x})| \Sigma^*(x_2) \sqrt{\frac{t^2}{r^*(\mathbf{x})^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

Nous avons représenté les lignes de niveau des fonctions  $A^*$  et  $B^*$  respectivement sur les

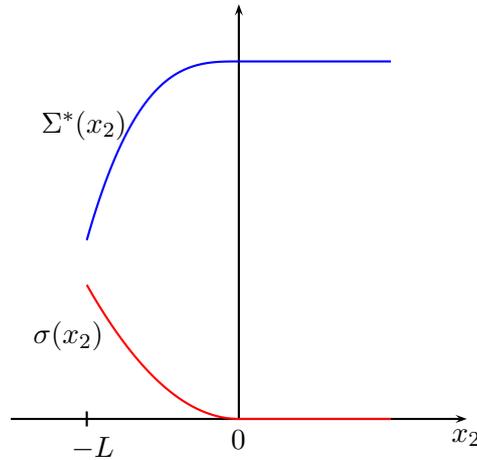


FIG. 9.6: Les fonctions  $\sigma(x_2)$  et  $\Sigma^*(x_2)$

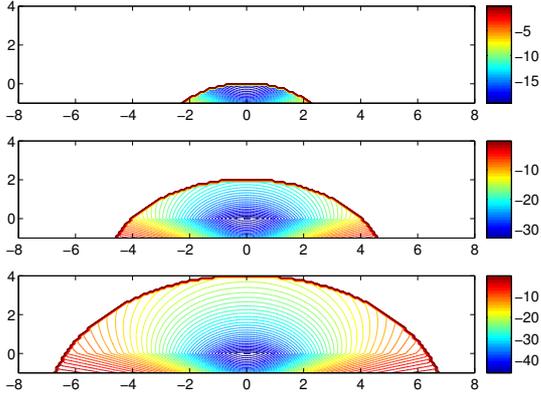
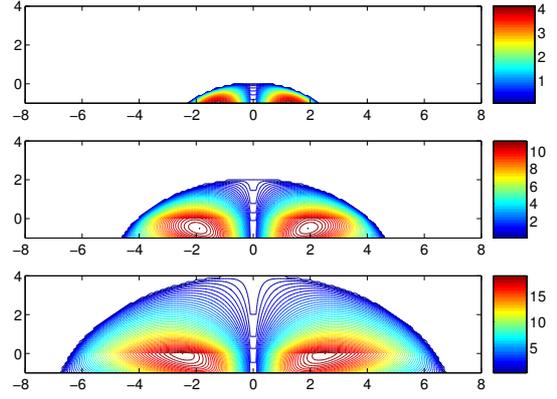
figures 9.7 et 9.8 pour trois instants différents (de haut en bas,  $t=3, 5$  et  $7$ ) avec  $c = 1, h = 1$  et  $\sigma(x_2) = \sigma_0 = 10$ .

**Théorème 9.1.2** La solution  $u^{\sigma,L}(\mathbf{x}, t) = G^{L,\infty}(\mathbf{x}, t)$  du problème (9.1.3) est donnée par :

$$G^{\sigma,L}(\mathbf{x}, t) = G_i^{\sigma,\infty}(\mathbf{x}, t) + G_r^{L,\infty}(\mathbf{x}, t)$$

avec

$$G_r^{\sigma,L}(\mathbf{x}, t) = \frac{H(ct - r^*(\mathbf{x}))}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^*(\mathbf{x})^2}{c^2}}} e^{-A^*(\mathbf{x}, t)} \cos [B^*(\mathbf{x}, t)]. \quad (9.1.4)$$


 FIG. 9.7:  $\mathbf{x} \mapsto A^*(\mathbf{x}, t)$ ,  $t = 3, 5$  et  $7$ 

 FIG. 9.8:  $\mathbf{x} \mapsto B^*(\mathbf{x}, t)$ ,  $t = 3, 5$  et  $7$ 

**Remarque 9.1.5** Pour  $x_2 > 0$ ,  $\Sigma^*(x_2) = \Sigma^*(0)$  ne dépend plus de  $x_2$ .

### 9.1.1.3 Estimations d'erreur

Considérons maintenant l'approximation, dans le demi-plan supérieur, de la solution  $u$  du problème (8.1.11) (l'équation des ondes 2D avec une source ponctuelle "régulière") par la solution  $u^{\sigma, L}$  du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^{\sigma, L} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R} \quad \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u^{\sigma, L}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^{\sigma, L}}{\partial x_1^2} - (D_{x_2}^\sigma)^2 u^{\sigma, L} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) \times f(t), \quad \text{dans } \mathbb{R} \times [-L; +\infty] \times \mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial u^{\sigma, L}}{\partial x_2}(-L, t) = 0, \\ u^{\sigma, L}(\mathbf{x}, t) = 0, \end{array} \right. \quad \text{pour } t < 0. \quad (9.1.5)$$

**Théorème 9.1.3** En tout point  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2$ , on a les estimations ponctuelles<sup>(21)</sup> :

- pour  $\frac{r^*(\mathbf{x})}{c} \leq t \leq \frac{r^*(\mathbf{x})}{c} + T$ ,

$$|u(\mathbf{x}, t) - u^{\sigma, L}(\mathbf{x}, t)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2L}{c}\bar{\sigma} \cos \theta(\mathbf{x})} \text{Log} \left( \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^*(\mathbf{x})^2}}{r^*(\mathbf{x})} \right) \|f\|_{L^\infty}; \quad (9.1.6)$$

- pour  $t > \frac{r^*(\mathbf{x})}{c} + T$ ,

$$|u(\mathbf{x}, t) - u^{\sigma, L}(\mathbf{x}, t)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{-2L\bar{\sigma} \cos \theta \frac{t-T}{r^*(\mathbf{x})}} \text{Log} \left( \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^*(\mathbf{x})^2}}{c(t-T) + \sqrt{c^2(t-T)^2 - r^*(\mathbf{x})^2}} \right) \|f\|_{L^\infty}. \quad (9.1.7)$$

21. Rappelons que  $\bar{\sigma}$  désigne la valeur moyenne de la fonction  $\sigma$  dans la PML.

On a également les estimations uniformes :

- pour  $\frac{h}{c} \leq t \leq \frac{h+2L}{c} + T$ ,

$$\|(u - u^{\sigma,L})(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^2)} \leq \frac{1}{2\pi} e^{-2\frac{2L+h}{c^2t}L\bar{\sigma}} \text{Log} \left( \frac{t + \sqrt{t^2 - ((2L+h)/c)^2}}{((2L+h)/c)} \right) \|f\|_{L^\infty}; \quad (9.1.8)$$

- pour  $t > \frac{h+2L}{c} + T$ ,

$$\|(u - u^{\sigma,L})(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^2)} \leq \frac{1}{2\pi} e^{-2\frac{2L+h}{c^2t}L\bar{\sigma}} \text{Log} \left( \frac{t + \sqrt{t^2 - (t-T)^2}}{t-T} \right) \|f\|_{L^\infty}. \quad (9.1.9)$$

Toutes les remarques que nous avons faites pour les CLA à la section 8.1.2 sont également valables dans ce cas. Nous pouvons ajouter 2 commentaires sur le rôle de  $L$  et de  $\sigma$  :

- comme avec l'analyse par ondes planes, la forme de la fonction  $\sigma(x_2)$  n'a pas d'importance, seule compte sa valeur moyenne entre 0 et  $L$  ;
- à partir de l'analyse par ondes planes nous pouvons imaginer que  $\bar{\sigma}$  et  $L$  jouaient le même rôle (i.e. augmenter  $L$  est équivalent à augmenter  $\bar{\sigma}$ ), mais les estimations uniformes nous montrent qu'augmenter  $L$  permet, en plus d'accroître l'absorption par l'intermédiaire du terme  $L\bar{\sigma}$ , d'éloigner le point source image de l'interface domaine de calcul/PML grâce au terme  $2L+h$ .

### 9.1.2 Le cas du quart de plan

Un des (grands) avantages des PML sur les CLA est qu'elles sont très faciles à implémenter dans les coins. Les PML dans les coins se déduisent des PML verticales et horizontales. Cette propriété se retrouve lorsqu'on cherche à obtenir des solutions analytiques dans le cas d'un quart de plan ou d'un domaine rectangulaire borné : nous n'avons pu obtenir de solution dans le cas des CLA mais nous avons réussi sans grande difficulté pour les PML.

#### 9.1.2.1 Expression de la solution analytique dans le cas de PML infinies

Étudions maintenant l'expression explicite de la solution fondamentale  $u_q^{\sigma_i, \infty}$  de l'équation des ondes dans le quart de plan haut-gauche  $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$  avec des PML infinies dans les trois autres quarts de plan.  $u_q^{\sigma_i, \infty}$  est donc solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R} & \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (D_{x_1}^{\sigma_1})^2 u - (D_{x_2}^{\sigma_2})^2 u = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) \times \delta(t), & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } t < 0. \end{array} \right. \quad (9.1.10)$$

avec  $\mathbf{x}_s = (-h_1, h_2)$ ,  $\sigma_1(x_1) \begin{cases} = 0 & \text{si } x_1 \leq 0 \\ > 0 & \text{si } x_1 > 0 \end{cases}$  et  $\sigma_2(x_2) \begin{cases} = 0 & \text{si } x_2 \geq 0 \\ > 0 & \text{si } x_2 < 0 \end{cases}$  (voir figure 9.9).

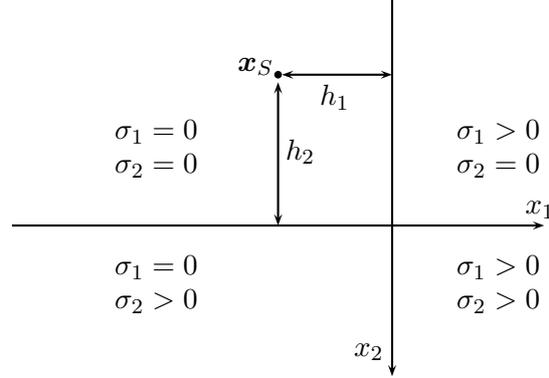


FIG. 9.9: Configuration du problème

Nous définissons respectivement les fonctions  $\Sigma_1(x)$  et  $\Sigma_2(x)$  par

$$\Sigma_1(x) = \left| \int_0^x \sigma_1(x) dx \right| \quad \text{et} \quad \Sigma_2(x) = \left| \int_0^x \sigma_2(x) dx \right|.$$

et les fonctions  $\tilde{A}(\mathbf{x}, t)$  et  $\tilde{B}(\mathbf{x}, t)$  par :

$$\tilde{A}(\mathbf{x}, t) = (|\cos \theta(\mathbf{x})| \Sigma_2(x_2) + |\sin \theta(\mathbf{x})| \Sigma_1(x_1)) \frac{t}{r(\mathbf{x})} > 0$$

et

$$\tilde{B}(\mathbf{x}, t) = (|\cos \theta(\mathbf{x})| \Sigma_1(x_1) + |\sin \theta(\mathbf{x})| \Sigma_2(x_2)) \sqrt{\frac{t^2}{r(\mathbf{x})^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

**Théorème 9.1.4** La solution  $u_q^{\sigma, \infty}(x, t) = G_q^{\sigma, \infty}(\mathbf{x}, t)$  du problème (9.1.10) est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_q^{\sigma, \infty}(\mathbf{x}, t) = \frac{H(ct - r(\mathbf{x}))}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r(\mathbf{x})^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+ \\ G_q^{\sigma, \infty}(\mathbf{x}, t) = \frac{H(ct - r(\mathbf{x}))}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r(\mathbf{x})^2}{c^2}}} e^{-\tilde{A}(\mathbf{x}, t)} \cos[\tilde{B}(\mathbf{x}, t)], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+). \end{array} \right. \quad (9.1.11)$$

### 9.1.2.2 Expression de la solution analytique dans le cas de PML finies

Nous supposons maintenant que la couche absorbante verticale est de largeur  $L_1$  et la couche absorbante horizontale de largeur  $L_2$  et nous imposons une condition de type Neumann à leur

extrémité. Le problème (9.1.10) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R} & \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (D_{x_1}^{\sigma_1})^2 u - (D_{x_2}^{\sigma_2})^2 u = \delta(\mathbf{x}) \times \delta(t), & \text{dans } [-\infty; L_1] \times [-L_2; +\infty] \times \mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } x_1 = L_1, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } x_2 = L_2, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } t < 0. \end{array} \right. \quad (9.1.12)$$

Nous définissons ensuite  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ , les trois points source image par :

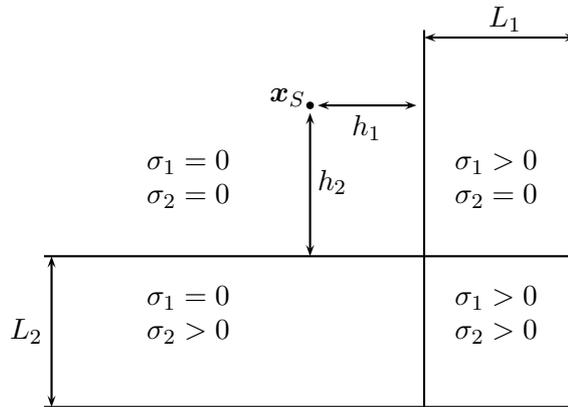


FIG. 9.10: Configuration du problème

$$\mathbf{x}_1 = (2L_1 + h_1, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (0, -2L_2 + h_2), \quad \mathbf{x}_3 = (2L_1 + h_1, -2L_2 + h_2)$$

$x_1$  et  $x_2$  sont les symétriques du point source par rapport, respectivement, aux droites d'équation  $x_1 = L_1$  et  $x_2 = L_2$  (voir figure 9.11).

Pour  $i = 1..3$  nous posons  $r_i(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$  et nous définissons la fonction  $\theta_i(\mathbf{x})$  par :

$$\theta_i(\mathbf{x}) \in ] -\pi, \pi], \quad \mathbf{x} = (r_i(\mathbf{x}) \sin \theta_i(\mathbf{x}), r_i(\mathbf{x}) \cos \theta_i(\mathbf{x}))^t,$$

puis les fonctions  $\Sigma_1^*(x)$  et  $\Sigma_2^*(x)$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_1^*(x) = \int_0^{L_1} \sigma_1(x) dx + \int_{L_1}^x \sigma_1(x) dx \\ \Sigma_2^*(x) = \int_0^{-L_2} \sigma_2(x) dx + \int_{-L_2}^x \sigma_2(x) dx \end{array} \right.$$

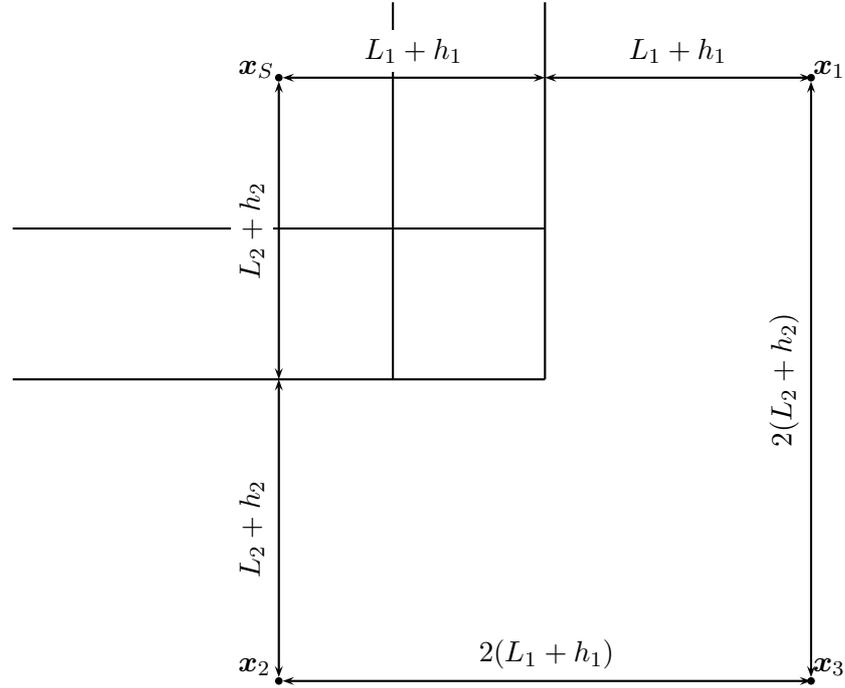


FIG. 9.11: Les points source image

et finalement les fonctions  $A_i(\mathbf{x}, t)$  et  $B_i(\mathbf{x}, t)$  par :

$$A_i(\mathbf{x}, t) = (\cos \theta_i(\mathbf{x}) \Sigma_2(x_2) + \sin \theta_i(\mathbf{x}) \Sigma_1(x_1)) \frac{t}{r_i(\mathbf{x})} > 0$$

et

$$B_i(\mathbf{x}, t) = (|\cos \theta_i(\mathbf{x})| \Sigma_1(x_1) + |\sin \theta_i(\mathbf{x})| \Sigma_2(x_2)) \sqrt{\frac{t^2}{r_i(\mathbf{x})^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

**Théorème 9.1.5** La solution  $u^{\sigma, h_1, h_2, L_1, L_2}(\mathbf{x}, t) = G^{\sigma, h_1, h_2, L_1, L_2}(\mathbf{x}, t)$  du problème (9.1.12) est donnée par :

$$G^{\sigma, h_1, h_2, L_1, L_2}(\mathbf{x}, t) = G_q^{\sigma, \infty}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^3 G_i^{\sigma, h_1, h_2, L_1, L_2, \infty}(\mathbf{x}, t)$$

avec

$$G_i^{\sigma, h_1, h_2, L_1, L_2}(\mathbf{x}, t) = \frac{H(ct - r_i(\mathbf{x}))}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r_i(\mathbf{x})^2}{c^2}}} e^{-\tilde{A}_i(\mathbf{x}, t)} \cos \left[ \tilde{B}_i(\mathbf{x}, t) \right]. \quad (9.1.13)$$

### 9.1.3 Le cas d'un domaine rectangulaire borné

#### 9.1.3.1 Expression de la solution analytique dans le cas de PML infinies

Nous nous intéressons dans cette section à l'expression explicite de la solution fondamentale  $u^{\sigma, h, \infty}$  de l'équation des ondes dans le carré  $\Omega = [-h; h]^2$  entouré d'une PML infinie. Pour

des raisons de lisibilité des résultats, nous nous limiterons au cas où la source est située au centre du domaine de calcul, mais la généralisation des résultats ne présente pas de difficulté particulière.

Nous cherchons  $u^{\sigma,h,\infty}$  solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R} & \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (D_{x_1}^\sigma)^2 u - (D_{x_2}^\sigma)^2 u = \delta(\mathbf{x}) \times \delta(t), & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } t < 0. \end{array} \right. \quad (9.1.14)$$

avec  $\sigma(x) \begin{cases} = 0 & \text{si } |x| \leq h \\ > 0 & \text{si } |x| > h \end{cases}$  (voir figure 9.12).

$\sigma(x_1) > 0$ $\sigma(x_2) > 0$	$\sigma(x_1) = 0$ $\sigma(x_2) > 0$	$\sigma(x_1) > 0$ $\sigma(x_2) > 0$
$\sigma(x_1) > 0$ $\sigma(x_2) = 0$	$\sigma(x_1) = 0$ $\sigma(x_2) = 0$	$\sigma(x_1) > 0$ $\sigma(x_2) = 0$
$\sigma(x_1) > 0$ $\sigma(x_2) > 0$	$\sigma(x_1) = 0$ $\sigma(x_2) > 0$	$\sigma(x_1) > 0$ $\sigma(x_2) > 0$

FIG. 9.12: Configuration du problème

Posons maintenant  $r_{00}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$  et définissons la fonction  $\theta_{00}(\mathbf{x})$  par<sup>(22)</sup> :

$$\theta_{00}(\mathbf{x}) \in ]-\pi, \pi], \quad \mathbf{x} = (r_{00}(\mathbf{x}) \sin \theta_{00}(\mathbf{x}), r_{00}(\mathbf{x}) \cos \theta_{00}(\mathbf{x}))^t,$$

puis la fonction  $\Sigma_0(x)$  par :

$$\Sigma_0(x) = \left| \int_0^x \sigma(x) dx \right|,$$

22. La notation 00 sera justifiée dans la section suivante

et finalement les fonctions  $A_{00}(\mathbf{x}, t)$  et  $B_{00}(\mathbf{x}, t)$  par :

$$A_{00}(\mathbf{x}, t) = (|\cos \theta_{00}(\mathbf{x})| \Sigma_0(x_2) + |\sin \theta_{00}(\mathbf{x})| \Sigma_0(x_1)) \frac{t}{r_{00}(\mathbf{x})} > 0$$

et

$$B_{00}(\mathbf{x}, t) = (|\cos \theta_{00}(\mathbf{x})| \Sigma_0(x_1) + |\sin \theta_{00}(\mathbf{x})| \Sigma_0(x_2)) \sqrt{\frac{t^2}{r_{00}(\mathbf{x})^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

**Théorème 9.1.6** *La solution  $u^{\sigma, h, \infty}(\mathbf{x}, t) = G_{00}^{\sigma, h, \infty}(\mathbf{x}, t)$  du problème (9.1.14) est donnée par :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} G_{00}^{\sigma, h, \infty}(\mathbf{x}, t) = \frac{H(ct - r_{00}(\mathbf{x}))}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r_{00}(\mathbf{x})^2}{c^2}}}, & \mathbf{x} \in \Omega \\ G_{00}^{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \frac{H(ct - r_{00}(\mathbf{x}))}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r_{00}(\mathbf{x})^2}{c^2}}} e^{-A_{00}(\mathbf{x}, t)} \cos[B_{00}(\mathbf{x}, t)], & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega. \end{array} \right. \quad (9.1.15)$$

### 9.1.3.2 Expression de la solution analytique dans le cas de PML finies

Nous supposons maintenant que le domaine  $\Omega$  est entouré de couches absorbantes de largeur  $L$  et nous imposons une condition de type Neumann à leur extrémité. Nous nous intéressons donc au problème :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R} & \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (D_{x_1}^\sigma)^2 u - (D_{x_2}^\sigma)^2 u = \delta(\mathbf{x}) \times \delta(t), & \text{dans } [-L; L]^2 \times \mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } x_1 = \pm L \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } x_2 = \pm L, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } t < 0. \end{array} \right. \quad (9.1.16)$$

Nous définissons les points sources images  $(\mathbf{x}_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{Z}}$  par

$$\mathbf{x}_{ij} = (2i(h+L), 2j(h+L)),$$

nous posons  $r_{ij}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ij}|$  et nous définissons la fonction  $\theta_{ij}(\mathbf{x})$  par :

$$\theta_{ij}(\mathbf{x}) \in ]-\pi, \pi], \quad \mathbf{x} = (r_{ij}(\mathbf{x}) \sin \theta_{ij}(\mathbf{x}), r_{ij}(\mathbf{x}) \cos \theta_{ij}(\mathbf{x}))^t,$$

puis les fonctions  $(\Sigma_i(x))_{i \in \mathbb{Z}}$  par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Sigma_i(x) = (2i-1) \int_0^L \sigma(x) dx + \int_{-L}^x \sigma(x) dx & \text{si } i < 0, \\ \Sigma_i(x) = (2i-1) \int_0^L \sigma(x) dx + \int_x^L \sigma(x) dx & \text{si } i > 0, \end{array} \right.$$

et finalement les fonctions  $A_{ij}(\mathbf{x}, t)$  et  $B_{ij}(\mathbf{x}, t)$  par :

$$A_{ij}(\mathbf{x}, t) = (|\cos \theta_{ij}(\mathbf{x})| \Sigma_j(x_2) + |\sin \theta_{ij}(\mathbf{x})| \Sigma_i(x_1)) \frac{t}{r_{ij}(\mathbf{x})} > 0$$

et

$$B_{ij}(\mathbf{x}, t) = (|\cos \theta_{ij}(\mathbf{x})| \Sigma_i(x_1) + |\sin \theta_{ij}(\mathbf{x})| \Sigma_j(x_2)) \sqrt{\frac{t^2}{r_{ij}(\mathbf{x})^2} - \frac{1}{c^2}}.$$

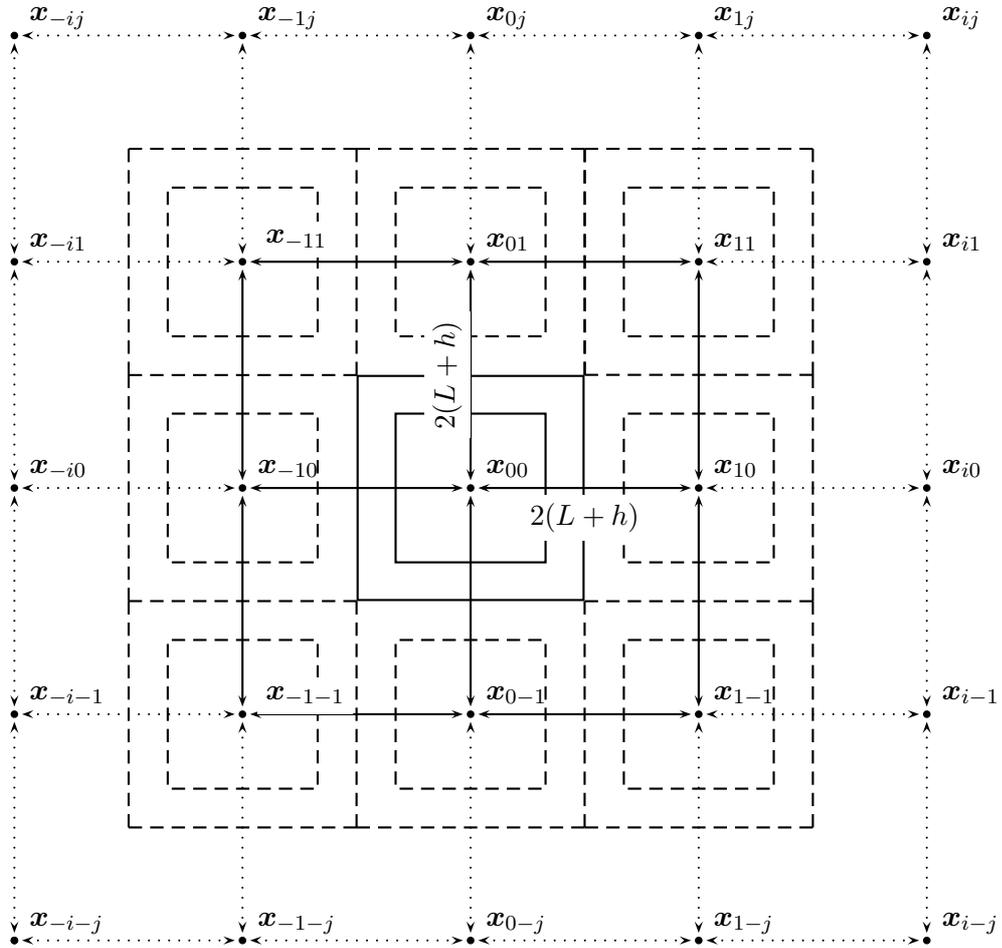


FIG. 9.13: Les points sources images

**Théorème 9.1.7** La solution  $u^{\sigma,h,L}(x, t) = G^{\sigma,h,L}(\mathbf{x}, t)$  du problème (9.1.16) est donnée par :

$$G^{\sigma,h,L}(\mathbf{x}, t) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} G_{i,j}^{\sigma,h,L}(\mathbf{x}, t)$$

avec

$$G_{ij}^{\sigma,h,L}(\mathbf{x}, t) = \frac{H(ct - r_{ij}(\mathbf{x}))}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r_{ij}(\mathbf{x})^2}{c^2}}} e^{-A_{ij}(\mathbf{x}, t)} \cos[B_{ij}(\mathbf{x}, t)]. \quad (9.1.17)$$

**Remarque 9.1.6** Pour  $t$  et  $\mathbf{x}$  fixés,  $G^{\sigma,h,\infty}(\mathbf{x}, t)$  est une somme finie. En effet, si  $i$  et  $j$  sont tels que  $r_{ij}(\mathbf{x}) < ct$ , alors  $G_{ij}^{\sigma,h,L}(\mathbf{x}, t)$  est nulle.

**Remarque 9.1.7** Il est évident que

$$G_{0,0}^{\sigma,h,L} = G^{\sigma,h,\infty}.$$

## 9.2 Démonstrations des théorèmes 9.1.1 à 9.1.7

### 9.2.1 Démonstration du théorème 9.1.1

Soit  $G_i^{\sigma,\infty}(\mathbf{x}, t)$  la solution du problème (9.1.1). Comme au chapitre précédent, afin d'utiliser la méthode de Cagniard-de Hoop, nous appliquons successivement à  $G_i^{\sigma,\infty}(\mathbf{x}, t)$  la transformation de Laplace en temps et la transformation de Fourier suivant  $x_1$ . La fonction  $x_2 \mapsto \widehat{G}_i^{\sigma,\infty}(k, x_2, s)$  vérifie l'équation différentielle ordinaire :

$$-\frac{s}{s + \sigma(x_2)} \frac{d}{dx_2} \left( \frac{s}{s + \sigma(x_2)} \frac{d\widehat{G}_i^{\sigma,\infty}}{dx_2} \right) + \left( k^2 + \frac{s^2}{c^2} \right) \widehat{G}_i^{\sigma,\infty} = \delta(x_2 - h),$$

que nous pouvons réécrire en utilisant le changement de variable  $X_2 = x_2 + \frac{1}{s} \int_0^{x_2} \sigma$  :

$$-\frac{d^2 \widehat{\mathcal{G}}}{dX_2^2} + \left( k^2 + \frac{s^2}{c^2} \right) \widehat{\mathcal{G}} = \delta(X_2 - h).$$

où  $\widehat{\mathcal{G}}(k, X_2, s) = \widehat{G}_i^{\sigma,\infty} \left( k, x_2 + \frac{1}{s} \int_0^{x_2} \sigma, s \right)$ .

Il est bien connu que la solution de cette équation est :

$$\widehat{\mathcal{G}}(k, X_2, s) = \frac{e^{-(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} |X_2 - h|}}{2(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}},$$

soit, en revenant à la variable  $x_2$  :

$$\widehat{G}_i^{\sigma,\infty}(k, x_2, s) = \frac{e^{-(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} \left| x_2 - h - \frac{\Sigma(x_2)}{s} \right|}}{2(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}.$$

Remarquons que, si  $x_2$  est positif,  $\Sigma(x_2) = 0$  et

$$\widehat{G}_i^{\sigma,\infty}(k, x_2, s) = \frac{e^{-(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} |x_2 - h|}}{2(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}.$$

On retrouve bien la transformée de Fourier-Laplace de la solution fondamentale de l'équation des ondes (voir la section 12.1), ce qui démontre la première partie du théorème :

$$\widehat{G}_i^{\sigma, \infty}(x_1, x_2, t) = \frac{H(ct - r(\mathbf{x}))}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r(\mathbf{x})^2}{c^2}}}, \quad x_2 > 0.$$

Nous supposons donc maintenant que  $x_2 < 0$ , alors il est évident que

$$x_2 - h - \frac{\Sigma(x_2)}{s} < 0,$$

donc

$$\widehat{G}_i^{\sigma, \infty}(k, x_2, s) = \frac{e^{(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} (x_2 - h - \frac{\Sigma(x_2)}{s})}}{2(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}.$$

Comme au chapitre précédent, nous appliquons maintenant à  $\widehat{G}_i^{\sigma, \infty}$  la transformation de Fourier inverse suivant  $x_1$  :

$$\widetilde{G}_i^{\sigma, \infty}(x_1, x_2, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} (x_2 - h - \frac{\Sigma(x_2)}{s}) - ikx_1}}{2(k^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} dk.$$

À la différence du chapitre précédent et des cas étudiés dans la quatrième partie, le terme contenu dans l'exponentielle n'est pas homogène en  $(k, s)$ . L'application du changement de variable habituel  $k = ps/c$  nous permet néanmoins d'obtenir :

$$\widetilde{G}_i^{\sigma, \infty}(x_1, x_2, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\Sigma(x_2)}{c}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-s [ -(1+p^2)^{\frac{1}{2}} (\frac{x_2-h}{c}) + ip\frac{x_1}{c} ]}}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} dp, \quad (\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(p) dp).$$

Nous obtenons donc le produit de deux exponentielles, l'une indépendante de  $s$ , l'autre, dépendant de  $s$ , qui est celle qu'on retrouve classiquement dans toutes les applications de la méthode de Cagniard-de Hoop.

Nous allons maintenant utiliser le contour de Cagniard-de Hoop  $\Gamma$  défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-, \\ \Gamma^\pm = \left\{ p = \gamma^\pm(t) \equiv -i \frac{ct}{r} \sin \theta \mp \cos \theta \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^2} - 1}, \quad t \geq \frac{r}{c} \right\}. \end{array} \right.$$

avec  $r = r(\mathbf{x})$  et  $\theta = \theta(\mathbf{x})$  définis à la section précédente. Nous avons ainsi:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = r \sin \theta, \\ x_2 - h = r \cos \theta. \end{array} \right.$$

Le contour  $\Gamma$  a bien évidemment été choisi pour que

$$-(1+p^2)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{x_2-h}{c} \right) + ip \frac{x_1}{c} = t \in \mathbb{R}_+, \quad \text{pour } p \in \Gamma.$$

On montre alors, comme au chapitre précédent que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(p) dp = - \int_{\Gamma} \Psi(p) dp,$$

soit

$$\tilde{G}_i^{\sigma, \infty}(x_1, x_2, s) = - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\frac{\Sigma(x_2)}{c}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-s[-(1+p^2)^{\frac{1}{2}} \frac{x_2-h}{c} + ip \frac{x_1}{c}]}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} dp.$$

Nous utilisons alors les paramétrisations  $p = \gamma^+(t)$  et  $p = \gamma^-(t)$ , pour  $t \geq r/c$ , respectivement sur  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  et nous remarquons que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bullet - (1+p^2)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{x_2-h}{c} \right) + ip \frac{x_1}{c} = t, & \text{(par construction),} \\ \bullet \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{dt}{(t^2 - \frac{r^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}, & \text{sur } \Gamma^{\pm} \text{ (voir section 12.1),} \\ \bullet \frac{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}{c} = - \frac{t}{r^2}(x_2-h) \mp i \frac{x_1}{r^2} (t^2 - \frac{r^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}, & \text{sur } \Gamma^{\pm}. \end{array} \right.$$

Donc, comme  $t$  varie de  $+\infty$  à  $\frac{r}{c}$  sur  $\Gamma^+$  et de  $\frac{r}{c}$  à  $+\infty$  sur  $\Gamma^-$  :

$$\tilde{G}_i^{\sigma, \infty}(x_1, x_2, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{r/c}^{+\infty} e^{-|x_2-h|\Sigma(x_2)\frac{t}{r^2}} \left[ e^{-i\frac{x_1}{r^2}\Sigma(x_2)(t^2 - \frac{r^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} + e^{i\frac{x_1}{r^2}\Sigma(x_2)(t^2 - \frac{r^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{e^{-st} dt}{(t^2 - \frac{r^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}.$$

ce qui peut se réécrire<sup>(23)</sup> :

$$\tilde{G}_i^{\sigma, \infty}(x_1, x_2, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{r}{c}}^{+\infty} e^{-|x_2-h|\Sigma(x_2)\frac{t}{r^2}} \cos \left[ \frac{x_1}{r^2} \Sigma(x_2) (t^2 - \frac{r^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} \right] \frac{e^{-st}}{(t^2 - \frac{r^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} dt.$$

Finalement, on a bien :

$$G_i^{\sigma, \infty}(x_1, x_2, t) = \frac{e^{-A(\mathbf{x}, t)}}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}} \cos [B(\mathbf{x}, t)]. \quad (9.2.1)$$

### 9.2.2 Démonstration du théorème 9.1.2

La démonstration du théorème 9.1.2 repose essentiellement sur le principe des images : considérons le problème suivant, appelé problème image :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R} & \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - (D_{x_2}^{\sigma^*})^2 u = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S^*) \times \delta(t), & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } t < 0. \end{array} \right. \quad (9.2.2)$$

avec  $\sigma^*$  tel que  $\left\{ \begin{array}{ll} \sigma^*(x_2) = \sigma(x_2) & \text{si } x_2 \geq -L \\ \sigma^*(x_2) = \sigma(-2L - x_2) & \text{si } x_2 < -L \end{array} \right.$  (voir figure 9.14).<sup>(24)</sup>

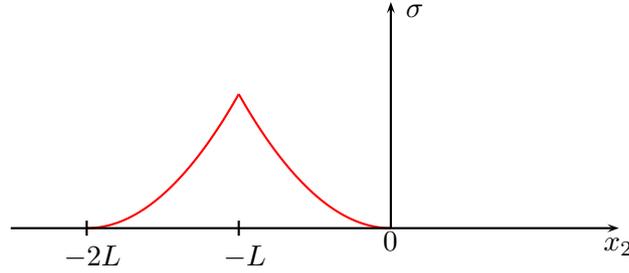


FIG. 9.14: La fonction  $\sigma^*(x_2)$

Ce problème étant très similaire au problème (9.1.1), on vérifie facilement que la solution  $u^{\sigma, \infty}(\mathbf{x}, t) = G_i^{*, \sigma, \infty}(\mathbf{x}, t)$  du problème (9.2.2) est donnée par :

$$G_i^{*, \sigma, \infty}(\mathbf{x}, t) = \frac{H(ct - r(\mathbf{x}))}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r(\mathbf{x})^2}{c^2}}} e^{-A(\mathbf{x}, t)} \cos[B(\mathbf{x}, t)]. \quad (9.2.3)$$

où les fonctions  $A(\mathbf{x}, t)$  et  $B(\mathbf{x}, t)$  sont définies comme à la section 9.1.1.1. Nous pouvons maintenant appliquer le principe des images :

La solution  $u^{\sigma, \infty}(\mathbf{x}, t) = G^{\sigma, \infty}(\mathbf{x}, t)$  du problème (9.1.1) est donnée par :

$$G^{\sigma, \infty}(\mathbf{x}, t) = G_i^{\sigma, \infty}(\mathbf{x}, t) + G_r^{\sigma, \infty}(\mathbf{x}, t)$$

avec  $G_r^{\sigma, \infty}(x_1, x_2, t) = G^{*, \sigma, \infty}(x_1, -2L - x_2, t)$  : le champ réfléchi par la frontière de la PML est équivalent au champ incident du problème image.

Remarquons que :

- $r(x_1, -2L - x_2) = r^*(x_1, x_2)$  ;
- $\theta(x_1, -2L - x_2) = \pi - \theta^*(x_1, x_2)$  ;
- $\Sigma(-2L - x_2) = \left| \int_0^{-2L-x_2} \sigma^*(x) dx \right| = \left| \int_0^{-L} \sigma(x) dx \right| + \left| \int_{-L}^{-2L-x_2} \sigma(-2L - x) dx \right|$ ,

or, en utilisant le changement de variable  $y = -2L - x$ , on obtient :

$$\left| \int_{-L}^{-2L-x_2} \sigma(-2L - x) dx \right| = \left| \int_{-L}^{x_2} \sigma(x) dx \right|.$$

Finalement :

$$\Sigma(-2L - x_2) = \left| \int_0^{-L} \sigma(x) dx \right| + \left| \int_{-L}^{x_2} \sigma(x) dx \right| = \Sigma^*(x_2).$$

23. En utilisant  $e^{ia} + e^{-ia} = 2 \cos a$ .

24.  $\sigma^*$  est le prolongement de  $\sigma$  par parité par rapport à la droite  $x_2 = -L$ .

Donc

$$\begin{aligned}
 A(x_1, -2L - x_2) &= |\cos \theta(x_1, -2L - x_2)| \Sigma(-2L - x_2) \frac{t}{r(x_1, -2L - x_2)} \\
 &= |\cos \theta^*(x_1, x_2)| \Sigma^*(x_2) \frac{t}{r^*(x_1, x_2)} \\
 &= A^*(x_1, x_2)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 B(x_1, -2L - x_2) &= |\sin \theta(x_1, -2L - x_2)| \Sigma(-2L - x_2) \sqrt{\frac{t^2}{r(x_1, -2L - x_2)^2} - \frac{1}{c^2}} \\
 &= |\sin \theta^*(\mathbf{x})| \Sigma^*(x_2) \sqrt{\frac{t^2}{r^*(\mathbf{x})^2} - \frac{1}{c^2}} \\
 &= B^*(x_1, x_2).
 \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
 G_r^{\sigma, \infty}(x_1, x_2, t) &= G^{*, \sigma, \infty}(x_1, -2L - x_2, t) \\
 &= \frac{H(ct - r^*(\mathbf{x}))}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^*(\mathbf{x})^2}{c^2}}} e^{-A^*(\mathbf{x}, t)} \cos [B^*(\mathbf{x}, t)].
 \end{aligned}$$

### 9.2.3 Démonstration du théorème 9.1.3

La démonstration des estimations d'erreur est très similaire à celle du chapitre précédent. Nous notons de nouveau  $u$  la solution du problème (8.1.11) et nous introduisons l'erreur (ou champ réfléchi) définie par :

$$e^{\sigma, L} = u^{\sigma, L} - u.$$

Il est clair que :

$$\begin{cases} e^{\sigma, L}(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{si } t \leq \frac{r^*}{c}, \\ e^{\sigma, L}(\mathbf{x}, t) = \int_0^{+\infty} G_r^{\sigma, L}(\mathbf{x}, \tau) f(t - \tau) d\tau & \text{si } t > \frac{r^*}{c}. \end{cases}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{cases} |e^{\sigma, L}(\mathbf{x}, t)| \leq \|f\|_{L^\infty(0, t)} \cdot \|G_r^{\sigma, L}(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(\frac{r^*}{c}, t)} & \text{si } \frac{r^*}{c} \leq t \leq \frac{r^*}{c} + T, \\ |e^{\sigma, L}(\mathbf{x}, t)| \leq \|f\|_{L^\infty(0, T)} \cdot \|G_r^{\sigma, L}(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(t-T, t)} & \text{si } t > \frac{r^*}{c} + T. \end{cases} \quad (9.2.4)$$

Nous devons donc estimer la norme  $L^1$  en temps de  $G_r^{\sigma, L}(\mathbf{x}, \cdot)$ . Il est évident que

$$|\cos [B^*(\mathbf{x}, t)]| < 1.$$

Donc

$$|G_r^{\sigma,L}(\mathbf{x}, t)| < \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r^*(\mathbf{x})^2}{c^2}}} e^{-A^*(\mathbf{x}, t)}$$

Remarquons que la fonction  $t \mapsto e^{-A^*(\mathbf{x}, t)}$  est décroissante pour  $t > 0$ , ainsi<sup>(25)</sup> :

$$\left| \begin{aligned} \|G_r^{\sigma,L}(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(\frac{r^*}{c}, t)} &\leq \frac{1}{2\pi} e^{-A^*(\mathbf{x}, \frac{r^*}{c})} \int_{\frac{r^*}{c}}^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^2 - \frac{r^{*2}}{c^2}}}, \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2L}{c}\bar{\sigma} \cos \theta^*} \text{Log} \left( \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}}{r^*} \right) \end{aligned} \right. \quad (9.2.5)$$

et, pour  $t > \frac{r^*}{c} + T$  :

$$\left| \begin{aligned} \|G_r^{\sigma,L}(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(t-T, t)} &\leq \frac{1}{2\pi} e^{-A^*(\mathbf{x}, t-T)} \int_{t-T}^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^2 - \frac{r^{*2}}{c^2}}}, \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-2L\bar{\sigma} \cos \theta^* \frac{t-T}{r^*}} \text{Log} \left( \frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - r^{*2}}}{c(t-T) + \sqrt{c^2(t-T)^2 - r^{*2}}} \right). \end{aligned} \right. \quad (9.2.6)$$

On conclut alors facilement à partir de (9.2.6), (9.2.5) et (9.2.4).

Intéressons-nous maintenant aux estimations uniformes (9.1.8) et (9.1.9). Nous rappelons la définition des deux ensembles  $\Omega_1(t)$  et  $\Omega_2(t)$  introduits au chapitre précédent :

$$\left| \begin{aligned} \Omega_1(t) &= \{ \mathbf{x} \in R_+^2 / c(t-T) < r^*(\mathbf{x}) \leq ct \} \\ \Omega_2(t) &= \{ \mathbf{x} \in R_+^2 / r^*(\mathbf{x}) \leq c(t-T) \} \end{aligned} \right.$$

Comme au chapitre précédent nous devons chercher une borne supérieure de :

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} \|G_r^{\sigma,L}(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(\frac{r^*}{c}, t)} \quad \text{si } t > \frac{2L+h}{c},$$

et de :

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_2(t)} \|G_r^{\sigma,L}(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(t-T, t)} \quad \text{si } t > \frac{2L+h}{c} + T.$$

Les bornes supérieures des fonctions Log ont déjà été calculées à la section 8.2.2, nous cherchons donc à majorer les exponentielles. Il est évident que calculer

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} e^{-\frac{2L}{c}\bar{\sigma} \cos \theta^*(\mathbf{x})} \quad \text{et} \quad \sup_{\mathbf{x} \in \Omega_2(t)} e^{-2L\bar{\sigma} \cos \theta^*(\mathbf{x}) \frac{t-T}{r^*(\mathbf{x})}}$$

est équivalent à calculer respectivement

$$\inf_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} \cos \theta^*(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \inf_{\mathbf{x} \in \Omega_2(t)} \frac{\cos \theta^*(\mathbf{x})}{r^*(\mathbf{x})}.$$

25. Comme  $x_2 > 0$  on a :  $\Sigma^*(x_2) = 2\Sigma(-L) = 2L\bar{\sigma}$ .

Or

$$\cos \theta^*(\mathbf{x}) = \frac{x_2 + 2L + h}{r^*(\mathbf{x})}$$

et il est évident que  $\mathbf{x} \mapsto x_2 + 2L + h$  et  $\mathbf{x} \mapsto r^*(\mathbf{x})$  atteignent respectivement leur minimum et leur maximum au point  $\mathbf{x} = (ct, 0)$  :

$$\inf_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} \cos \theta^*(\mathbf{x}) = \frac{\inf_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} x_2 + 2L + h}{\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} r^*(\mathbf{x})} = \frac{2L + h}{ct}.$$

De même

$$\inf_{\mathbf{x} \in \Omega_2(t)} \frac{\cos \theta^*(\mathbf{x})}{r^*(\mathbf{x})} = \frac{\inf_{\mathbf{x} \in \Omega_2(t)} x_2 + 2L + h}{\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_2(t)} r^*(\mathbf{x})^2} = \frac{2L + h}{c^2(t - T)^2}.$$

On vérifie alors facilement que :

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} \|G_r^{\sigma, L}(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(\frac{r^*}{c}, t)} \leq \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2L(2L+h)\bar{\sigma}}{c^2 t}} \text{Log} \left( \frac{ct}{h} + \sqrt{\frac{c^2 t^2}{h^2} - 1} \right) \quad (9.2.7)$$

$$\text{si } T + \frac{2L + h}{c} > t > \frac{h}{c},$$

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1(t)} \|G_r^{\sigma, L}(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(\frac{r^*}{c}, t)} \leq \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2L(2L+h)\bar{\sigma}}{c^2 t}} \text{Log} \left( \frac{t + \sqrt{t^2 - (t - T)^2}}{t - T} \right) \quad (9.2.8)$$

$$\text{si } t > T + \frac{2L + h}{c},$$

et

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega_2(t)} \|G_r^{\sigma, L}(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(t-T, t)} \leq \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{2L(2L+h)\bar{\sigma}}{c^2(t-T)^2}} \text{Log} \left( \frac{t + \sqrt{t^2 - (t - T)^2}}{t - T} \right) \quad (9.2.9)$$

$$\text{si } t > \frac{2L + h}{c} + T.$$

En remarquant que, pour  $t > \frac{2L+h}{c} + T$ ,

$$\|G_r^{\sigma, L}(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(\frac{r^*}{c}, t)} > \|G_r^{\sigma, L}(\mathbf{x}, \cdot)\|_{L^1(t-T, t)},$$

on établit facilement les estimations uniformes à partir de (9.2.7) et (9.2.8).

#### 9.2.4 Démonstration du théorème 9.1.4

En appliquant le changement de variable  $X_1 = x_1 + \frac{1}{s} \int_0^{x_1} \sigma$ , le problème (9.1.10) devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R} & \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - (D_{x_2}^\sigma)^2 u = \delta(\mathbf{x}) \times \delta(t), & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } t < 0. \end{array} \right. \quad (9.2.10)$$

Soit  $F(X_1, x_2, t)$  la solution de ce problème. En utilisant la même démarche qu'à la section 9.2.1, on montre que la transformée de Laplace de  $F$  vérifie

$$\tilde{F}(X_1, x_2, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\Sigma_0(x_2)}{c}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-s[-(1+p^2)^{\frac{1}{2}}(\frac{x_2-h}{c})+ip\frac{X_1}{c}]} (1+p^2)^{\frac{1}{2}} dp,$$

soit, en revenant à la variable  $x_1$  :

$$\tilde{G}_q^{\sigma, \infty}(x_1, x_2, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\Sigma_0(x_2)}{c}(1+p^2)^{\frac{1}{2}} - ip\frac{\Sigma_0(x_1)}{c}} e^{-s[-(1+p^2)^{\frac{1}{2}}(\frac{x_2-h}{c})+ip\frac{x_1}{c}]} (1+p^2)^{\frac{1}{2}} dp.$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le même changement de contour qu'à la section 9.2.1 pour obtenir le résultat.

### 9.2.5 Démonstration du théorème 9.1.5

La démonstration de ce théorème repose à nouveau sur le principe des images. Considérons d'abord le problème image :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R} & \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (D_{x_1}^{\sigma_1^*})^2 u - (D_{x_2}^{\sigma_2^*})^2 u = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) \times \delta(t), & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } t < 0. \end{array} \right. \quad (9.2.11)$$

avec  $\sigma_1^*$  et  $\sigma_2^*$  prolongées comme à la section 9.2.2 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_1^*(x_1) = \sigma(x_1) & \text{si } x_1 \leq L_1 \\ \sigma_1^*(x_1) = \sigma(2L_1 - x_1) & \text{si } x_1 > L_1 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_2^*(x_2) = \sigma(x_2) & \text{si } x_2 \geq -L_2 \\ \sigma_2^*(x_2) = \sigma(-2L_2 - x_2) & \text{si } x_2 < -L_2 \end{array} \right.$$

Il est évident que la solution du problème 9.2.11 s'écrit

$$G_q^{*, \sigma, \infty}(\mathbf{x}, t) = \frac{H(ct - r(\mathbf{x}))}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r(\mathbf{x})^2}{c^2}}} e^{-\tilde{A}(\mathbf{x}, t)} \cos \left[ \tilde{B}(\mathbf{x}, t) \right] \quad (9.2.12)$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le principe des images : la solution

$$u^{\sigma, h_1, h_2, L_1, L_2}(x, t) = G^{\sigma, h_1, h_2, L_1, L_2}(\mathbf{x}, t)$$

du problème (9.1.12) est donnée par :

$$G^{\sigma, h_1, h_2, L_1, L_2}(\mathbf{x}, t) = G_q^{\sigma, \infty}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^3 G_i^{\sigma, h_1, h_2, L_1, L_2, \infty}(\mathbf{x}, t),$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1^{\sigma, h_1, h_2, L_1, L_2, \infty}(x_1, x_2, t) = G_q^{*, \sigma, \infty}(2L_1 - x_1, x_2, t) \\ G_2^{\sigma, h_1, h_2, L_1, L_2, \infty}(x_1, x_2, t) = G_q^{*, \sigma, \infty}(x_1, -2L_2 - x_2, t) \\ G_3^{\sigma, h_1, h_2, L_1, L_2, \infty}(x_1, x_2, t) = G_q^{*, \sigma, \infty}(2L_1 - x_1, -2L_2 - x_2, t) \end{array} \right.$$

### 9.2.6 Démonstration du théorème 9.1.6

La démonstration se fait de la même façon qu'à la section 9.2.4.

### 9.2.7 Démonstration du théorème 9.1.7

Pour pouvoir construire le problème image nous définissons la fonction  $\sigma^*$ , prolongement de la fonction  $\sigma$  par périodicité (période  $2(h + L)$ ) par :

$$\sigma^*(x + 2k(L + h)) = \sigma(x), \quad x \in [-h - L, h + L], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le problème image s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R} & \text{tel que} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (D_{x_1}^{\sigma^*})^2 u - (D_{x_2}^{\sigma^*})^2 u = \delta(\mathbf{x}) \times \delta(t), & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } t < 0. \end{array} \right. \quad (9.2.13)$$

La solution de ce problème s'écrit alors :

$$G_{00}^{*,\sigma}(\mathbf{x}, t) = \frac{H(c t - r_{00}(\mathbf{x}))}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r_{00}(\mathbf{x})^2}{c^2}}} e^{-A_{00}(\mathbf{x}, t)} \cos [B_{00}(\mathbf{x}, t)].$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le principe des images : la solution

$$u^{\sigma, h, L}(x, t) = G^{\sigma, h, L}(\mathbf{x}, t)$$

du problème (9.2.13) est donnée par :

$$G^{\sigma, h, \infty}(\mathbf{x}, t) = \sum_{(i, j) \in \mathbb{Z}^2} G_{i, j}^{\sigma, h, \infty}(\mathbf{x}, t)$$

avec

$$G_{ij}^{\sigma, h, L}(\mathbf{x}, t) = \frac{H(c t - r_{ij}(\mathbf{x}))}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r_{ij}(\mathbf{x})^2}{c^2}}} e^{-A_{ij}(\mathbf{x}, t)} \cos [B_{ij}(\mathbf{x}, t)].$$

## 9.3 Résultats numériques concernant le problème du demi-espace

### 9.3.1 Analyse des solutions fondamentales 2D

Dans toute cette section nous avons choisi  $h = 1$  et  $c = 1$ .

#### 9.3.1.1 Analyse de l'erreur relative

Comme au chapitre précédent, afin de faciliter la représentation graphique, nous introduisons l'erreur relative définie par :

$$\gamma_r^{\sigma, L}(\mathbf{x}, t) = \frac{G_r^{\sigma, L}(\mathbf{x}, t)}{G_r^{0, L}(\mathbf{x}, t)} = e^{-A^*(\mathbf{x}, t)} \cos [B^*(\mathbf{x}, t)], \quad \mathbf{x} \in \Omega(t).$$

Sur les figures 9.15 à 9.17 nous représentons, à trois instants différents ( $t = 3, 5$  et  $7$  de haut en bas), les lignes de niveau de la fonction  $x \mapsto \gamma_r^{\sigma, L}(x, t)$ . Chaque figure correspond à une valeur de  $(\bar{\sigma}, L)$  ( $= (10, 0.1), (50, 0.1), (10, 0.5)$ ).

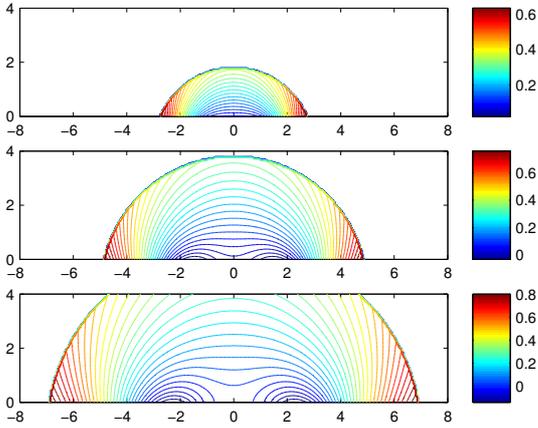


FIG. 9.15:  $x \mapsto \gamma_r^{10,0.1}(x, t), t = 3, 5$  et  $7$

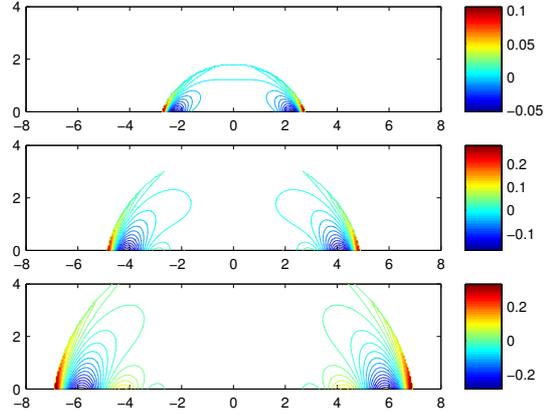


FIG. 9.16:  $x \mapsto \gamma_r^{50,0.1}(x, t), t = 3, 5$  et  $7$

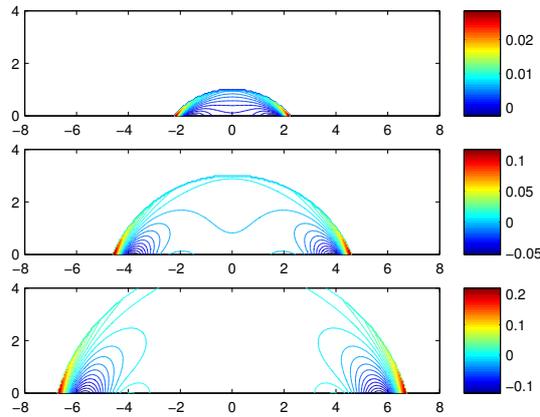


FIG. 9.17:  $x \mapsto \gamma_r^{10,0.5}(x, t), t = 3, 5$  et  $7$

On remarque que :

- l'amplitude de l'erreur décroît fortement avec  $\sigma$  et  $L$ . Par exemple, pour  $t = 3$ , le niveau de l'erreur est 0.6 pour  $(\bar{\sigma}, L) = (10, 0.1)$ , 0.1 pour  $(\bar{\sigma}, L) = (50, 0.1)$  et 0.03 pour  $(\bar{\sigma}, L) = (10, 0.5)$ . De plus, comme l'estimation d'erreur uniforme (9.1.8) nous l'indique, l'erreur diminue plus rapidement avec  $L$  qu'avec  $\bar{\sigma}$  ;
- comme au chapitre précédent, l'amplitude de l'erreur augmente avec le temps. Ce comportement est encore une fois cohérent avec l'estimation uniforme (9.1.8) ;
- quand  $\bar{\sigma}$  (ou  $L$ ) augmente l'erreur relative se concentre de plus en plus au voisinage de

la frontière absorbante et du front d'onde. De plus, sa dépendance par rapport à la variable d'espace devient de plus en plus compliquée (le nombre d'oscillations dues à la fonction cosinus augmente).

#### 9.3.1.2 Étude de l'erreur en fonction du temps

Dans les paragraphes suivants nous ne nous intéresserons qu'aux variations de  $\bar{\sigma}$  et nous choisirons  $L = 0.1$  (ce qui représente 10 % du domaine de calcul que nous utiliserons lors des expériences avec terme source).

Dans cette section nous voulons étudier l'évolution du champ réfléchi en un point donné  $\mathbf{x}$  en fonction du temps. Tous nos points d'observations sont situés sur le cercle  $r^*(\mathbf{x}) = 5$  de telle sorte que le champ réfléchi arrive sur ces points au temps  $t = 5$ .

- **Le cas du point  $\theta(\mathbf{x}) = 0$ .** A la différence des CLA, le champ réfléchi n'est pas continu en temps au point  $t = (x_2 + 2L + h)/c$ <sup>(26)</sup>. Cela s'explique par le fait que la fonction  $t \mapsto \gamma_r^{\sigma,L}(0, x_2, t)$  ne s'annule pas en  $t = (x_2 + 2L + h)/c$ . Cependant le saut en temps de  $\gamma_r^{\sigma,L}(0, x_2, t)$  décroît quand  $\sigma$  (ou  $L$ ) augmente comme le montre la formule

$$\gamma_r^{\sigma,L}\left(0, \frac{x_2, x_2 + 2L + h}{c}\right) = e^{-\Sigma^*(x_2)}.$$

les fonctions  $t \mapsto G_r^{\sigma,L}(0, x_2, t)$  et  $t \mapsto \gamma_r^{\sigma,L}(0, x_2, t)$  sont toutes deux strictement décroissantes et tendent vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini. Ces propriétés sont illustrées sur les figures 9.18 et 9.19 : nous avons représenté, sur la figure 9.18, les variations de  $t \mapsto G_r^{\sigma,0.1}(\mathbf{x}, t), t \in [0, 20]$  et, sur la figure 9.19, les variations de  $t \mapsto \gamma_r^{\sigma,0.1}(\mathbf{x}, t), t \in [0, 20]$  pour  $\bar{\sigma}$  variant de 50 à 100.

- **Le cas des points  $\theta(\mathbf{x}) \neq 0$ .** Dans ce cas  $t \mapsto G_r^{\sigma,L}(0, x_2, t)$  et  $t \mapsto \gamma_r^{\sigma,L}(0, x_2, t)$  ne sont plus des fonctions décroissantes mais tendent néanmoins vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini. Sur les figures 9.20 et 9.21 nous représentons les variations de  $t \mapsto \gamma_r^{\sigma,0.1}(\mathbf{x}, t)$  pour  $\theta = \pi/6$  et  $\theta = \pi/3$ . Sur chaque figure,  $\sigma$  varie de 1 à 5. Il est évident que plus  $\theta(\mathbf{x})$  est grand, plus la fonction  $t \mapsto \gamma_r^{\sigma,L}(0, x_2, t)$  oscille.

Rappelons que, dans le cas des CLA, nous avons

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_r^N(\mathbf{x}, t) = (-1)^N \quad \text{et donc} \quad G_r^N(\mathbf{x}, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\simeq} (-1)^N G_r^0(\mathbf{x}, t).$$

Avec les PML nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_r^{\sigma,L}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} G_r^{\sigma,L}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Les PML sont donc plus efficaces que les CLA en temps long.

---

26. Le temps d'arrivée de l'onde.

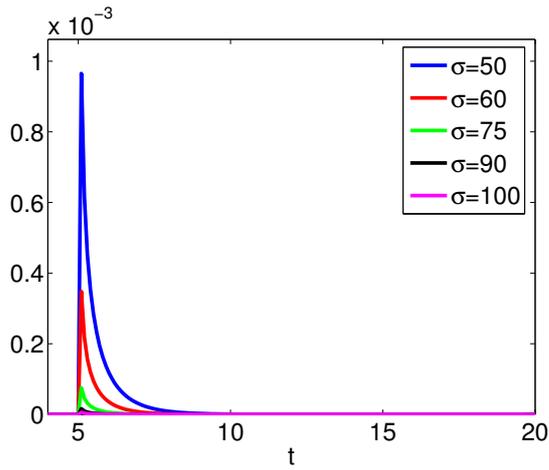


FIG. 9.18:  $t \mapsto G_r^{\sigma,0.1}(x,t), r^* = 5, \theta = 0$

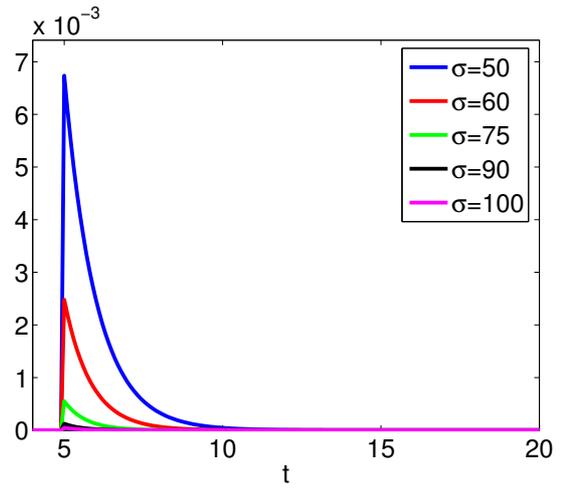


FIG. 9.19:  $t \mapsto \gamma_r^{\sigma,0.1}(x,t), r^* = 5, \theta = 0$

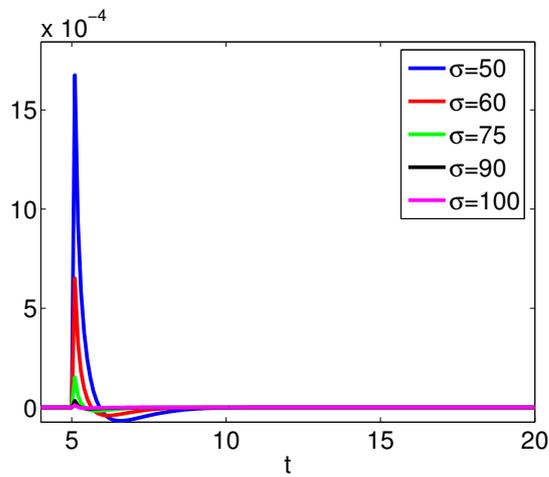


FIG. 9.20:  $t \mapsto \gamma_r^{\sigma,0.1}(x,t), r^* = 5, \theta = \frac{\pi}{6}$

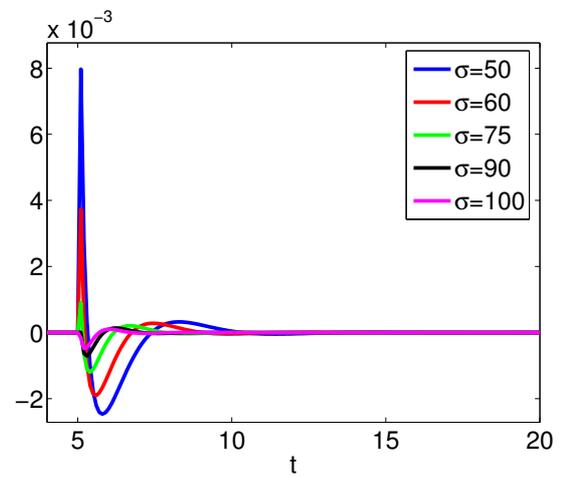


FIG. 9.21:  $t \mapsto \gamma_r^{\sigma,0.1}(x,t), r^* = 5, \theta = \frac{\pi}{3}$

### 9.3.1.3 Étude de l'erreur en fonction de la distance au point source image

Nous considérons ici les variations spatiales du champ réfléchi suivant un rayon issu du point image  $x_S^*$  (nous ne nous intéressons évidemment qu'à la partie de ce rayon incluse dans le demi-plan  $\mathbb{R}_+^2$ ). Pour une direction donnée  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$ , ce rayon peut également être défini par :

$$D_\theta = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2 / \theta(\mathbf{x}) = \theta \} = \{ (r^* \sin \theta, r^* \cos \theta), r^* \geq (2L + h) / \cos \theta \}$$

Nous représentons sur les figures suivantes les variations du champ réfléchi  $G_r^{\sigma,0.1}$ , pour  $\theta$  fixé, en fonction de  $r^* \geq (2L + h) / \cos \theta$ , pour différentes valeurs de  $t$  et  $\sigma$ .

- Pour  $\theta = 0$ ,  $r^* \geq 2L + h$ . Nous avons représenté, sur les figures 9.22 à 9.25, les variations de  $G_r^{\sigma,0.1}$  suivant  $D_0$  pour trois valeurs de  $t$ ,  $t = 3, 5, 8$ . Chaque figure correspond à une valeur de  $\sigma$ , et l'échelle varie donc énormément d'une figure à l'autre. On constate ici encore que la discontinuité du champ réfléchi devient de plus en plus faible quand  $\sigma$  augmente.
- Pour  $\theta = \pi/6$ ,  $r^* \leq 2(2L + h) / \sqrt{3}$ . Nous avons représenté, sur les figures 9.26 à 9.29, les variations de  $G_r^{\sigma,0.1}$  suivant  $D_{\pi/6}$  pour trois valeurs de  $t$ ,  $t = 3, 5, 8$ .
- Pour  $\theta = \pi/3$ ,  $r^* \leq 2(2L + h)$ . Nous avons représenté, sur les figures 9.26 à 9.29, les variations de  $G_r^{\sigma,0.1}$  suivant  $D_{\pi/3}$  pour trois valeurs de  $t$ ,  $t = 3, 5, 8$ . Le profil de l'onde réfléchie est plus compliqué que dans le cas  $\theta = \pi/6$ , particulièrement pour  $\sigma$  grand.

### 9.3.1.4 Étude de l'erreur en fonction de l'angle

Nous nous intéressons ici à l'erreur relative  $\gamma_r^{\sigma,0.1}(\mathbf{x}, t)$  le long du front d'onde réfléchi défini par :

$$WF_r(t) = \partial\Omega(t) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2 / r^*(\mathbf{x}) = ct \} \quad (\neq \emptyset \text{ pour } t > \frac{2L + h}{c}).$$

Soit  $M_\theta(t) = (ct \sin \theta, ct \cos \theta) \in WF_r(t)$  (remarquons que  $M_\theta(t)$  décrit  $WF_r(t)$  quand  $\theta$  varie de  $-\arccos \frac{h}{ct}$  à  $+\arccos \frac{h}{ct}$ ), on déduit facilement de (9.1.4) que :

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow M_\theta(t), \mathbf{x} \in \Omega(t)} \gamma_r^N(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}_{\sigma,L}(\theta) = e^{-2\frac{\cos \theta}{c} \int_0^L \sigma(\tau) d\tau}.$$

Comme pour les CLA, la courbe représentant les variations de l'erreur relative  $\gamma_r^{\sigma,0.1}(\mathbf{x}, t)$  en fonction de la direction  $\theta$ , le long du front d'onde réfléchi  $WF_r(t)$  n'est rien d'autre que la partie de la courbe de la figure 7.5, obtenue grâce à l'analyse par ondes planes, correspondant à  $-\arccos \frac{h}{ct} \leq \theta \leq \arccos \frac{h}{ct}$ .

## 9.3.2 Le cas d'un terme source

Pour valider notre solution exacte, nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus par un code de différences finies. Dans nos expériences, la fonction source est une dérivée de Gaussienne tronquée:

$$f(t) = \frac{d}{dt} \left\{ e^{-2\pi f_0(t-t_0)^2} \right\} H(2t_0 - t), \quad f_0 = 10, \quad t_0 = 1/f_0. \quad (9.3.1)$$

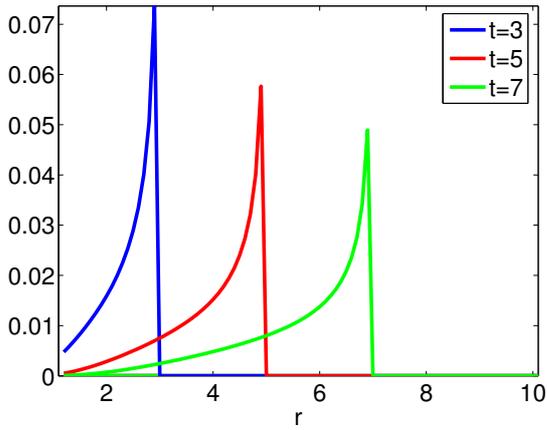


FIG. 9.22:  $r^* \mapsto \gamma_r^{\sigma,10}(r^*, \theta = 0, t)$

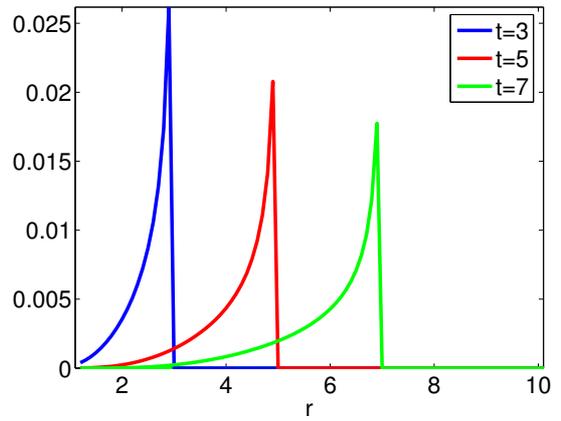


FIG. 9.23:  $r^* \mapsto \gamma_r^{\sigma,20}(r^*, \theta = 0, t)$

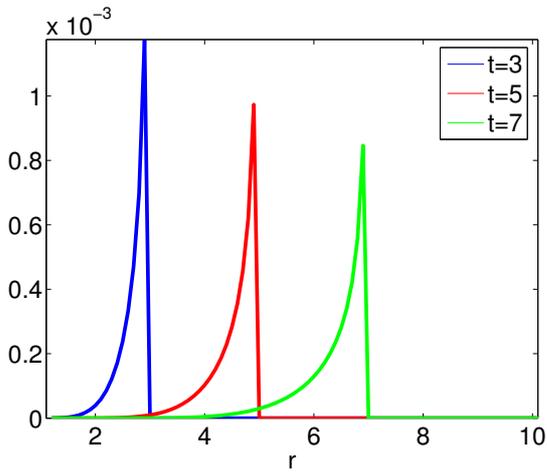


FIG. 9.24:  $r^* \mapsto \gamma_r^{\sigma,50}(r^*, \theta = 0, t)$

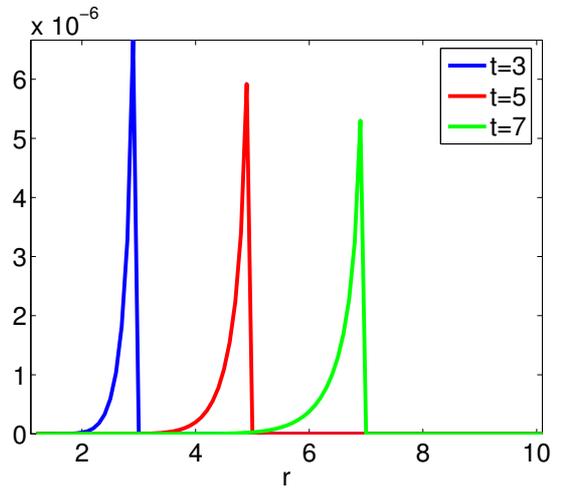


FIG. 9.25:  $r^* \mapsto \gamma_r^{\sigma,100}(r^*, \theta = 0, t)$

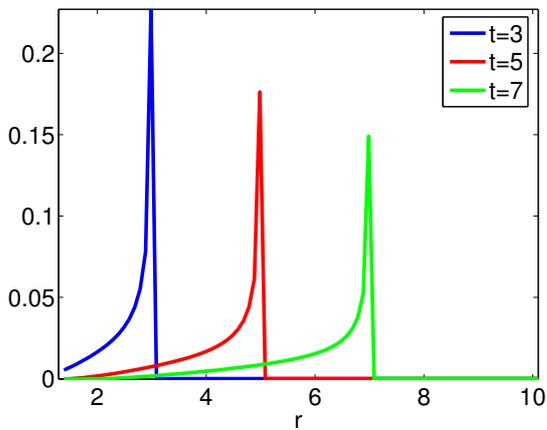


FIG. 9.26:  $r^* \mapsto \gamma_r^{\sigma,10}(r^*, \theta = \pi/6, t)$

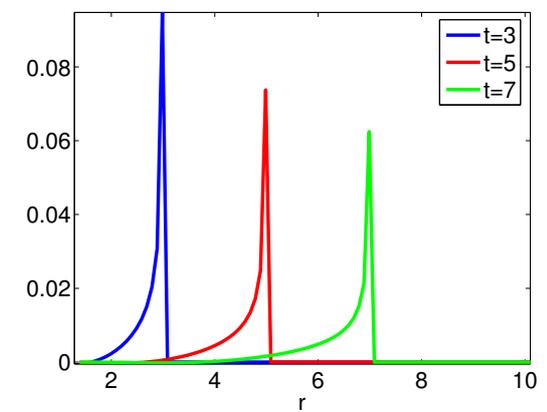


FIG. 9.27:  $r^* \mapsto \gamma_r^{\sigma,20}(r^*, \theta = \pi/6, t)$

### 9.3 Résultats numériques concernant le problème du demi-espace

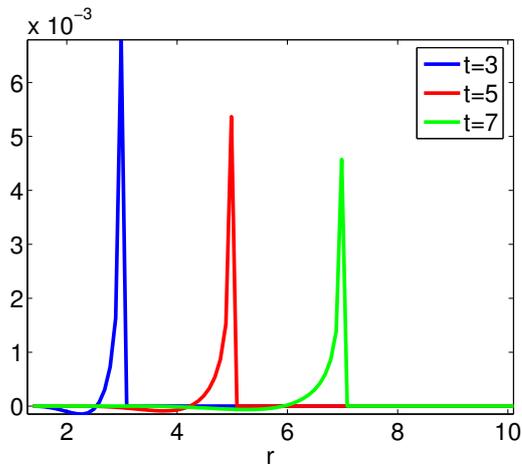


FIG. 9.28:  $r^* \mapsto \gamma_r^{\sigma,50}(r^*, \theta = \pi/6, t)$

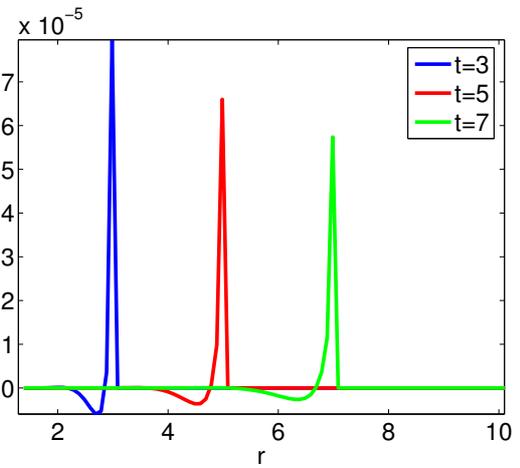


FIG. 9.29:  $r^* \mapsto \gamma_r^{\sigma,100}(r^*, \theta = \pi/6, t)$

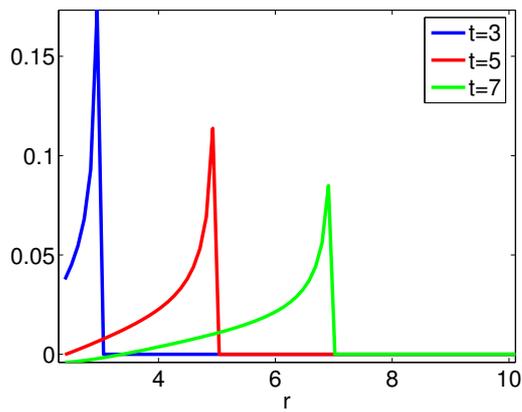


FIG. 9.30:  $r^* \mapsto \gamma_r^{\sigma,10}(r^*, \theta = \pi/3, t)$

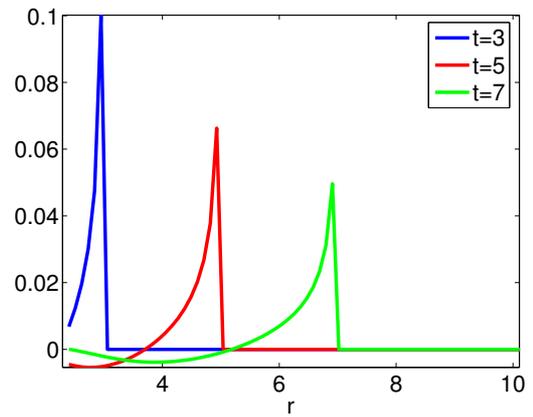


FIG. 9.31:  $r^* \mapsto \gamma_r^{\sigma,20}(r^*, \theta = \pi/3, t)$

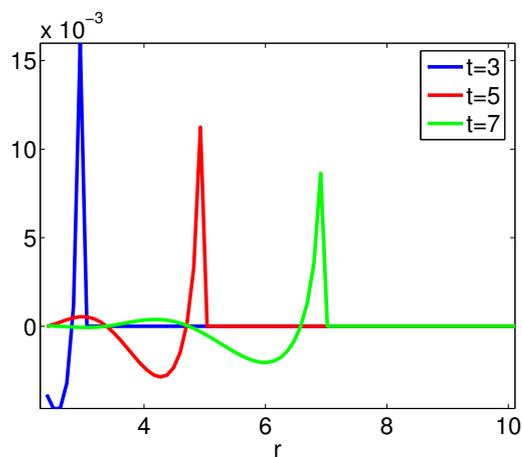


FIG. 9.32:  $r^* \mapsto \gamma_r^{\sigma,50}(r^*, \theta = \pi/3, t)$

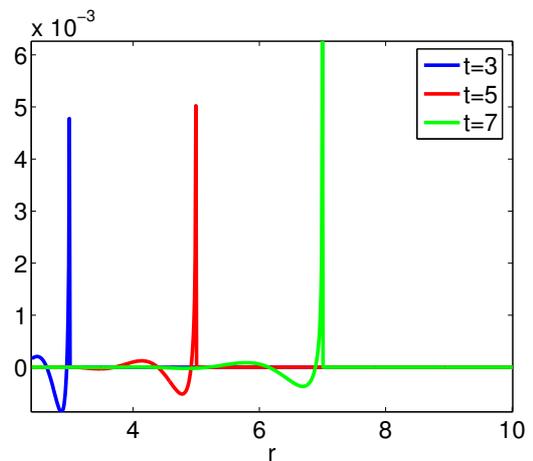


FIG. 9.33:  $r^* \mapsto \gamma_r^{\sigma,100}(r^*, \theta = \pi/3, t)$

Nous avons comparé, sur les figures 9.34 à 9.39, la solution analytique (en haut sur chaque figure) à la solution numérique (en bas sur chaque figure) pour trois valeurs de  $\bar{\sigma}$  :  $\bar{\sigma} = 16, 32, 48$ <sup>(27)</sup>. Sur chaque figure nous avons représenté les lignes de niveau de la solution au temps  $t = 0.4$ . Les figures de gauche représentent le champ total et celles de droite le champ réfléchi (l'erreur). Pour faciliter la représentation, le champ réfléchi a été amplifié d'un facteur dépendant de  $\sigma$  : 5 pour  $\sigma = 16$ , 10 pour  $\sigma = 32$  et 50 pour  $\sigma = 48$ . Dans tous les cas, les résultats montrent une très bonne concordance entre les deux solutions.

Nous avons également comparé les deux solutions au point  $(0.9, 0.1)$  en fonction du temps sur les figures 9.40 à 9.45. La courbe bleue représente la solution "analytique" et la courbe rouge la solution numérique pour trois valeurs de  $\bar{\sigma}$  :  $\bar{\sigma} = 16, 32, 48$ . Comme précédemment, les figures de gauche représentent le champ total et celles de droite le champ réfléchi.

### 9.3.2.1 Estimations d'erreur $L^\infty$

Nous avons comparé la norme  $L_\infty$  du champ réfléchi (les courbes bleues) aux estimations uniformes (9.1.8) et (9.1.9) données par le théorème 9.1.3 (les courbes rouges) sur les figures 9.46 à 9.48. La source est un échelon temporel :  $f(t) = 1$  si  $0 \leq t \leq 2$  et  $f(t) = 0$  sinon. Notre estimation est pratiquement optimale pour  $\bar{\sigma} = 10$  et devient moins précise (quoique très acceptable) quand  $\bar{\sigma}$  augmente.

Puisque nous avons utilisé la norme  $L^\infty$  de la fonction source pour établir nos estimations d'erreur, cette estimation peut ne pas être très précise pour des fonctions sources plus compliquées. Pour vérifier ce point nous avons répété les expériences précédentes avec une source de la forme (9.3.1) et de fréquence  $f_0 = 1$ . Ces expériences sont illustrées sur les figures 9.49 à 9.51 pour  $\bar{\sigma} = 10, 20, 100$ . L'estimation est visiblement moins précise que dans le cas d'une source échelon mais elle fournit encore une borne supérieure raisonnable.

## 9.4 Résultats numériques concernant le domaine entouré de PML

### 9.4.1 Comparaison avec une solution numérique

Nous avons également comparé nos résultats à ceux obtenus par un code numérique dans le cas d'un domaine de calcul entouré de PML. Le domaine de calcul est  $[0; 1]^2$ . La source est ponctuelle en espace, placée au point  $(0.5, 0.5)$ , l'expression de sa partie temporelle est donnée par (9.3.1). Nous avons choisi  $\sigma = 32$ . Nous représentons, sur les figures 9.52 à 9.57, la solution analytique (à gauche sur chaque figure) et la solution numérique (à droite sur chaque figure) pour six valeurs de  $t$  :  $t = 0.4, 0.7, 1.2, 1.7, 2.5$  et  $5$ . Les deux solutions sont encore une fois très proches, même en temps long.

### 9.4.2 Comportement de la solution en temps long

Nous avons vu, lors de l'analyse de l'erreur en fonction du temps dans le cas du demi-espace (page 179) que l'onde réfléchie tendait vers 0 en temps long. Il est possible de généraliser cette étude au cas du domaine rectangulaire et de montrer que :

<sup>27</sup>. Dans cette partie  $\sigma$  est une fonction quadratique de  $x_2$

## 9.4 Résultats numériques concernant le domaine entouré de PML

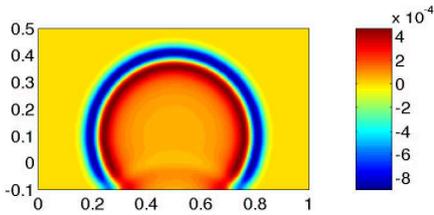
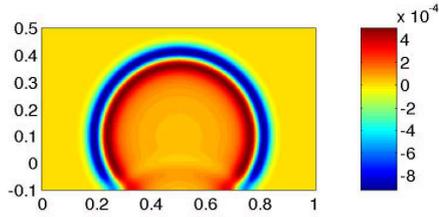


FIG. 9.34: Champ total.  $\sigma = 16$

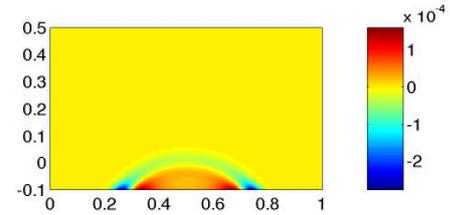
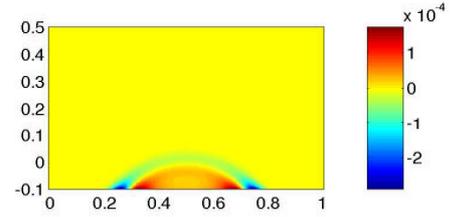


FIG. 9.35: Champ réfléchi.  $\sigma = 16$

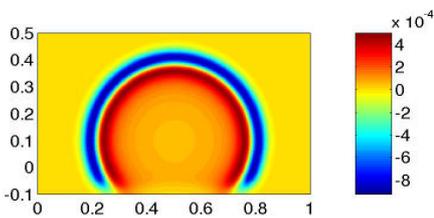
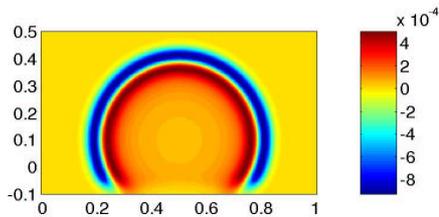


FIG. 9.36: Champ total.  $\sigma = 32$

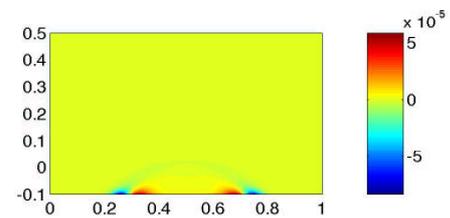
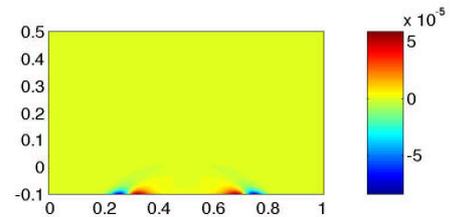


FIG. 9.37: Champ réfléchi.  $\sigma = 32$

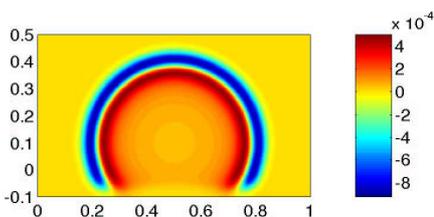
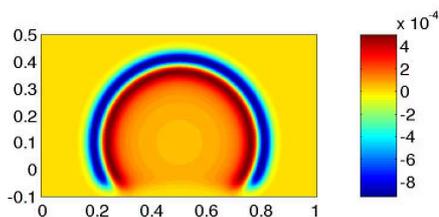


FIG. 9.38: Champ total.  $\sigma = 48$

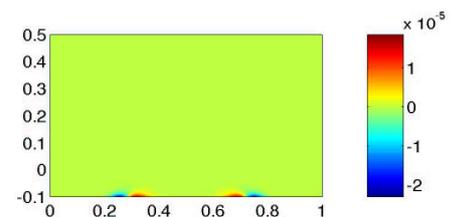
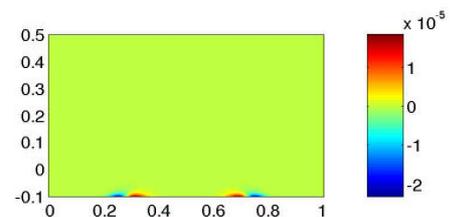


FIG. 9.39: Champ réfléchi.  $\sigma = 48$

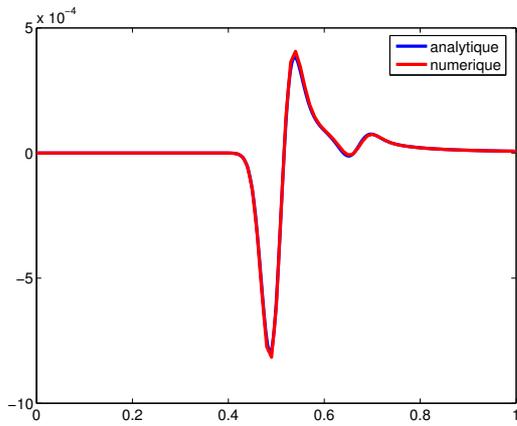


FIG. 9.40: Champ total.  $\sigma = 16$

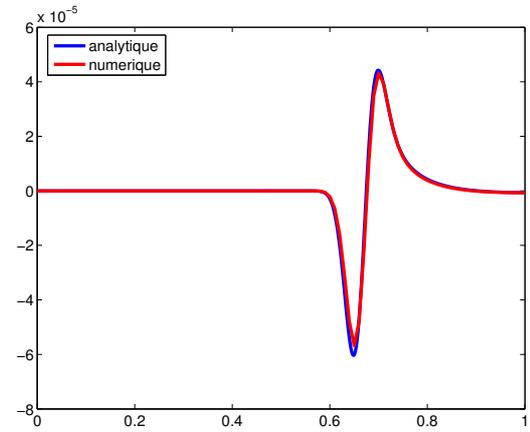


FIG. 9.41: Champ réfléchi.  $\sigma = 16$

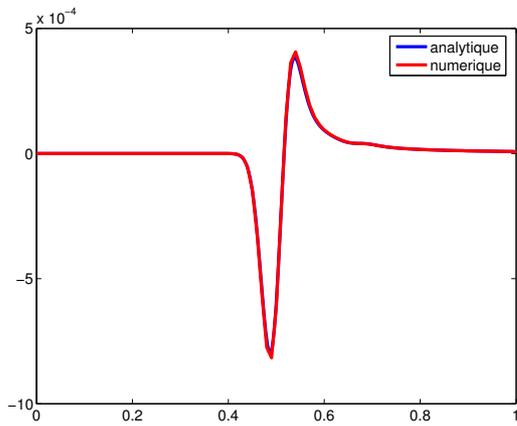


FIG. 9.42: Champ total.  $\sigma = 32$

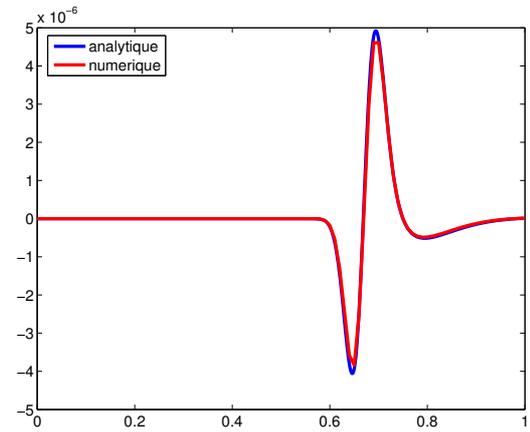


FIG. 9.43: Champ réfléchi.  $\sigma = 32$

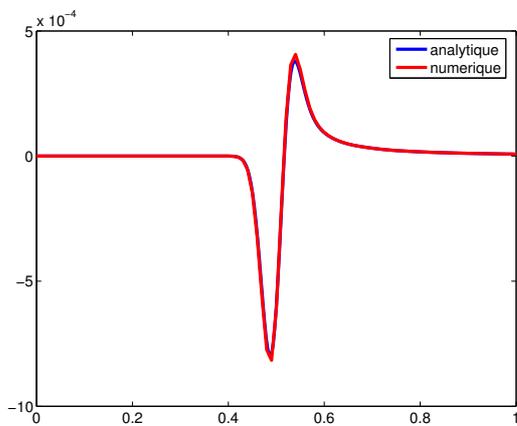


FIG. 9.44: Champ total.  $\sigma = 48$

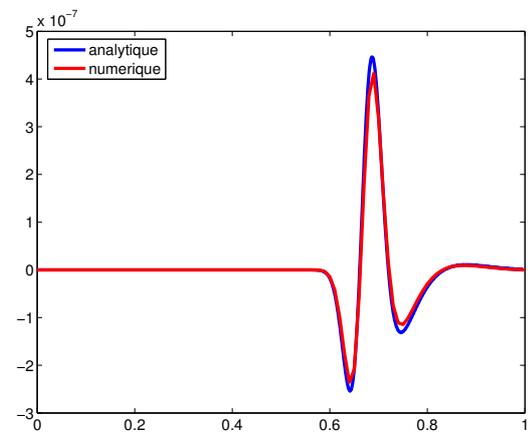


FIG. 9.45: Champ réfléchi.  $\sigma = 48$

## 9.4 Résultats numériques concernant le domaine entouré de PML

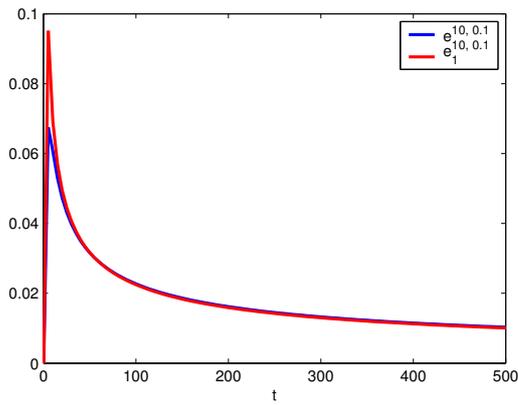


FIG. 9.46: Estimation d'erreur  $\bar{\sigma} = 10$

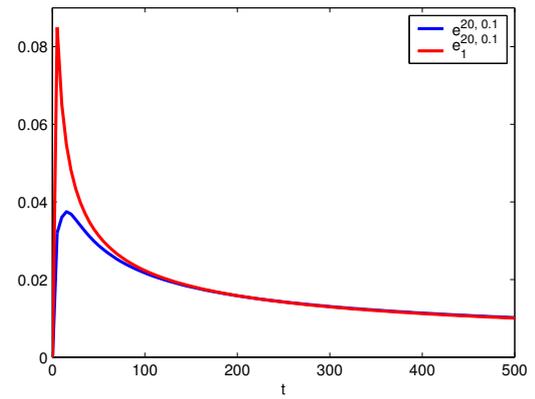


FIG. 9.47: Estimation d'erreur  $\bar{\sigma} = 20$

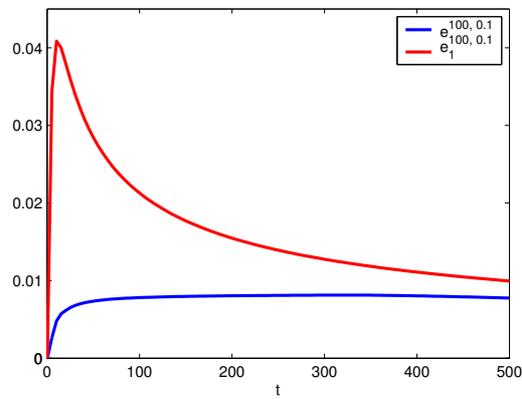


FIG. 9.48: Estimation d'erreur  $\bar{\sigma} = 100$

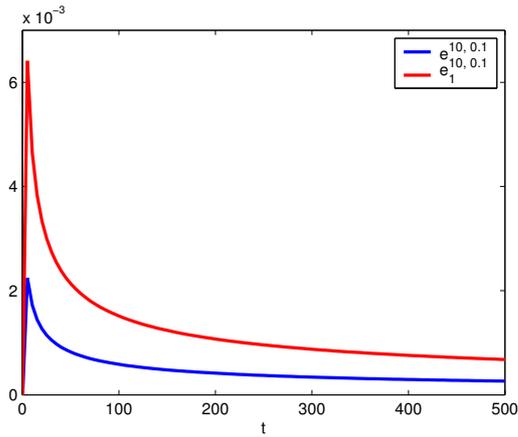


FIG. 9.49: Estimation d'erreur  $\bar{\sigma} = 10$

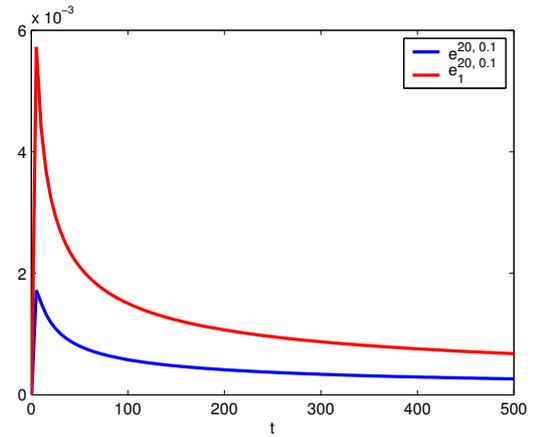


FIG. 9.50: Estimation d'erreur  $\bar{\sigma} = 20$

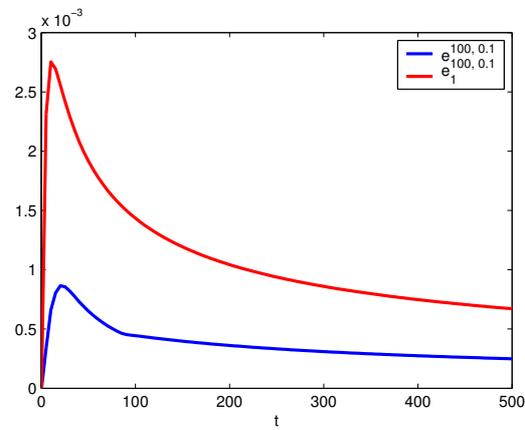


FIG. 9.51: Estimation d'erreur  $\bar{\sigma} = 100$

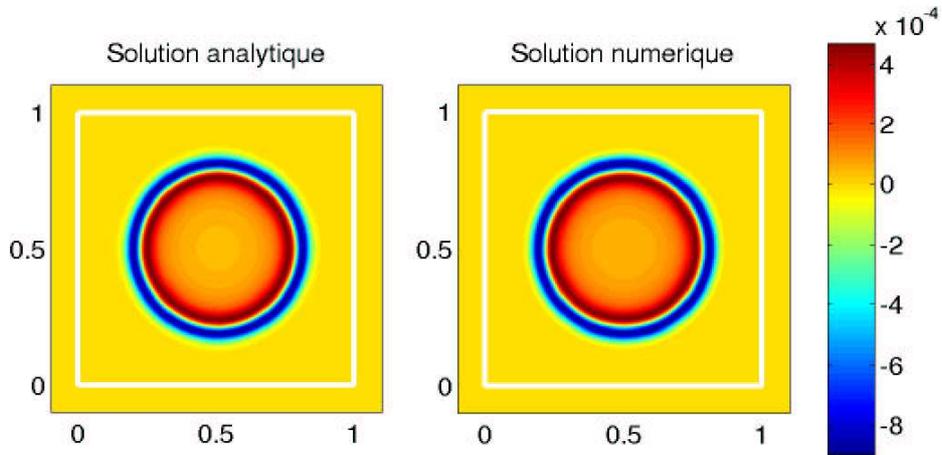


FIG. 9.52: Champ total.  $t = 0.4$

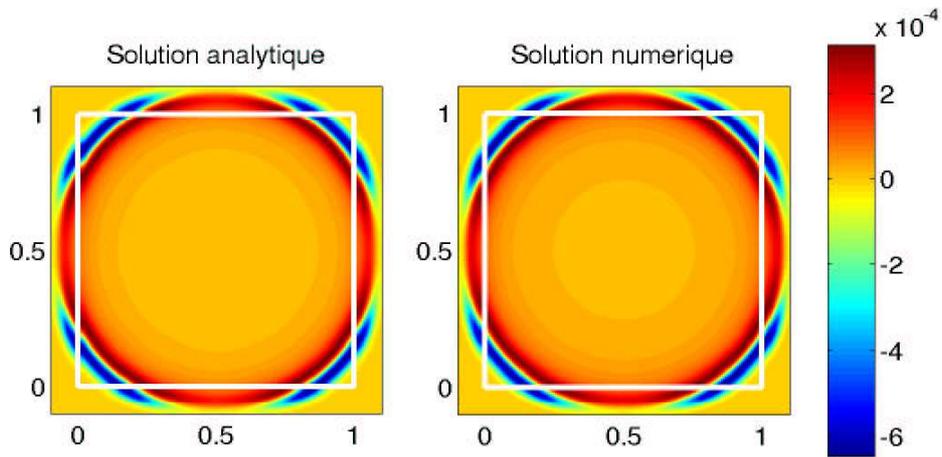


FIG. 9.53: Champ total.  $t = 0.7$

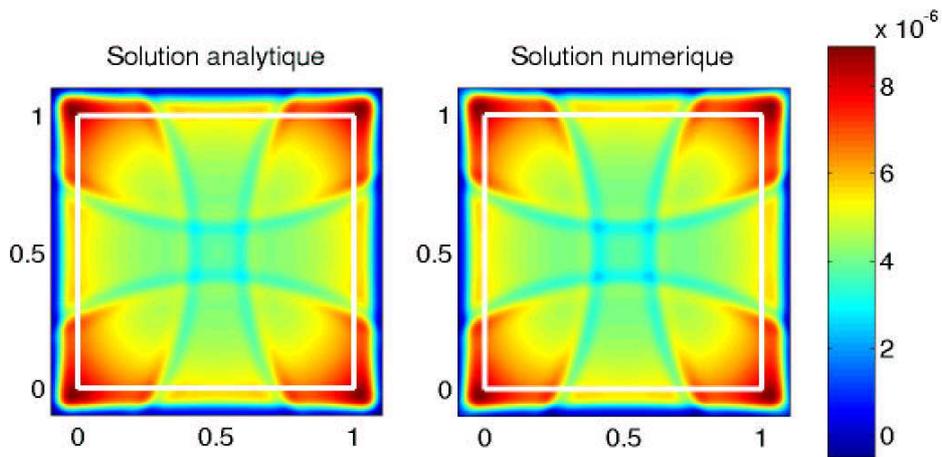


FIG. 9.54: Champ total.  $t = 1.2$

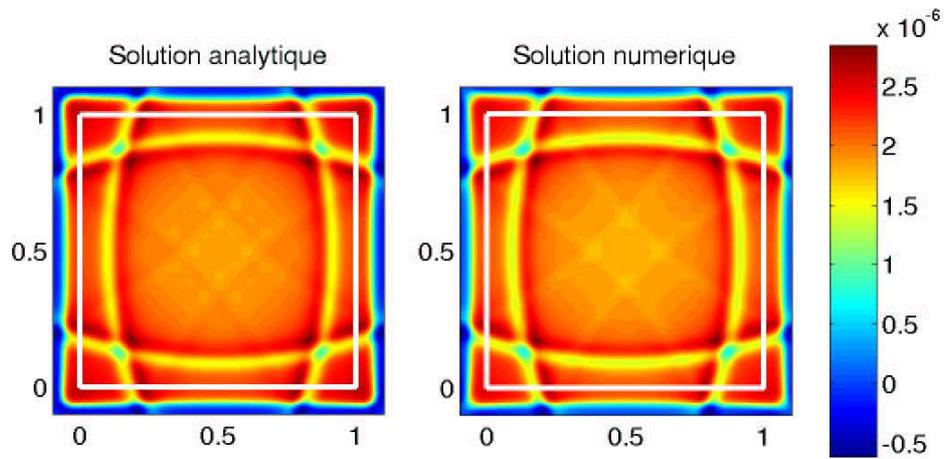


FIG. 9.55: Champ total.  $t = 1.7$

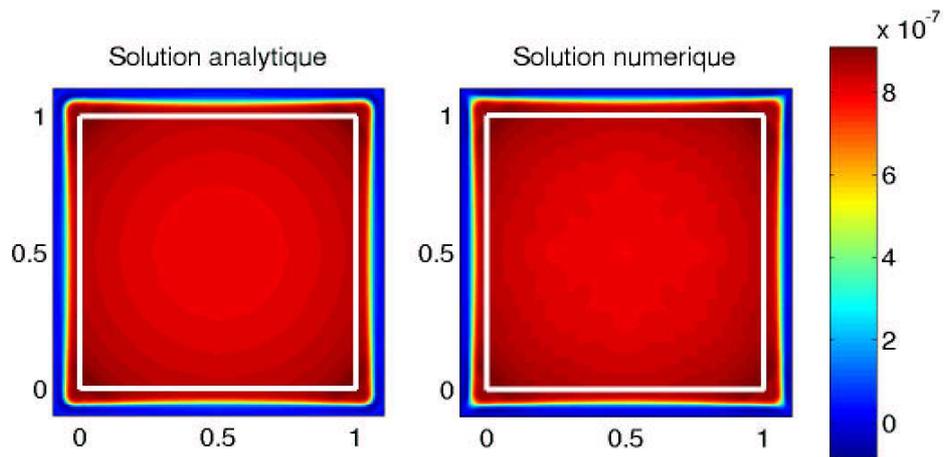


FIG. 9.56: Champ réfléchi.  $t = 2.5$

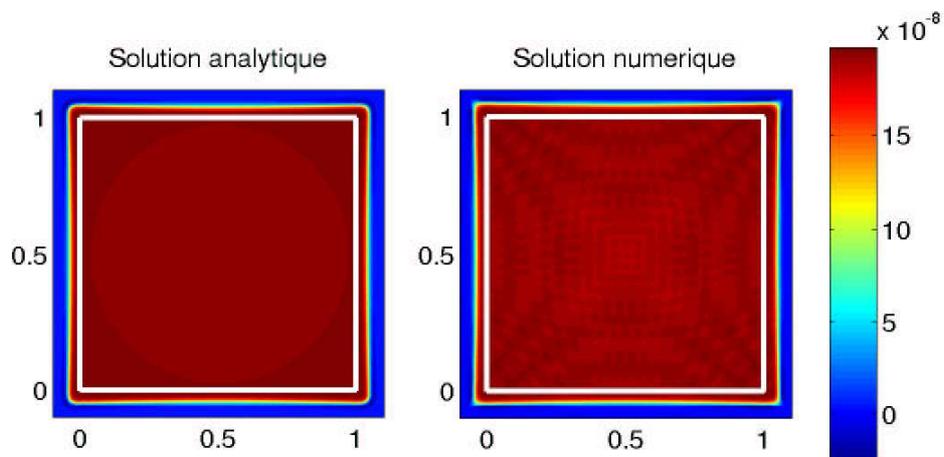


FIG. 9.57: Champ total.  $t = 5$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_{i,j}^{\sigma,h,L}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{pour } (i, j) \neq (0, 0).$$

Comme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G^{\sigma,h,L}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} G_{i,j}^{\sigma,h,L}(\mathbf{x}, t)$$

est constitué d'une infinité de termes, rien ne prouve que

$$G^{\sigma,h,L}(\mathbf{x}, t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} G_{0,0}^{\sigma,h,L} = G^{\sigma,h,\infty},$$

mais le fait que chaque fonction

$$G_{i,j}^{\sigma,h,L}(\mathbf{x}, t)$$

converge spectralement vers 0 pour  $(i, j) \neq (0, 0)$  nous incite fortement à le penser. Pour le vérifier expérimentalement, nous avons répété l'expérience précédente en utilisant des PML infinies, c'est-à-dire que nous n'avons calculé que la convolution du terme source avec la fonction  $G_{0,0}^{\sigma,h,L}$ . Sur la figure 9.58 nous avons représenté les lignes de niveau de la solution obtenue aux temps  $t = 2.5$  (à gauche) et  $t = 5$  (à droite). Les instantanés sont identiques à ceux représentés sur les figures 9.56 et 9.57 de la section précédente : en temps long les ondes réfléchies  $u_{i,j}^{\sigma,h,L}$  sont négligeables devant l'onde incidente  $u_{0,0}^{\sigma,h,L}$ . Pour mieux comprendre le comportement de la solution dans les PML nous avons représenté une coupe de ces instantanés suivant l'axe ( $Oy$ ) sur les figures 9.59 et 9.60.

Nous avons également comparé la solution totale  $u^{\sigma,h,L}$  à  $u_{0,0}^{\sigma,h,L}$  aux points  $(0.75, 0)$  (dans le domaine de calcul) et  $(1.05, 0)$  (dans la PML), respectivement sur les figures 9.61 et 9.62, pour  $t$  variant de 0 à 10). Ces figures montrent un comportement similaire des deux solutions. Pour affiner notre analyse nous avons représenté ces deux solutions sur un intervalle de temps plus restreint (pour  $t$  variant de 1 à 10) sur les figures 9.63 et 9.64. On remarque que, tant dans le domaine de calcul qu'à l'intérieur de la couche, les deux solutions diffèrent pendant un intervalle de temps très court (à peu près pour  $t$  variant de 1 à 2) sous l'influence des ondes réfléchies puis adoptent le même comportement. Cela se voit encore mieux en représentant la différence des deux solutions (figures 9.65 et 9.66).

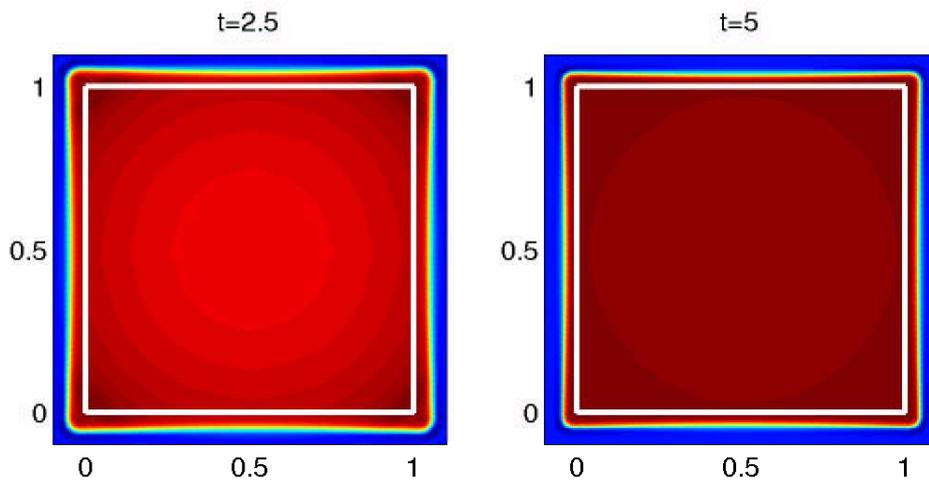


FIG. 9.58:  $u_{0,0}^{\sigma,h,L}$   $t = 2.5$  et  $t = 5$

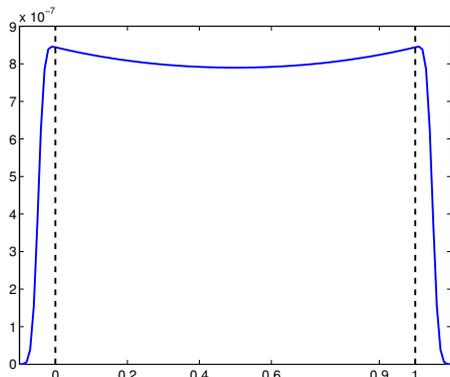


FIG. 9.59:  $u^{\sigma,h,L}(x_1, 0, 2.5)$

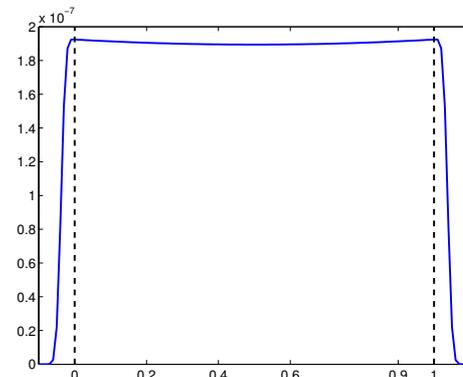


FIG. 9.60:  $u^{\sigma,h,L}(x_1, 0, 5)$

## 9.4 Résultats numériques concernant le domaine entouré de PML

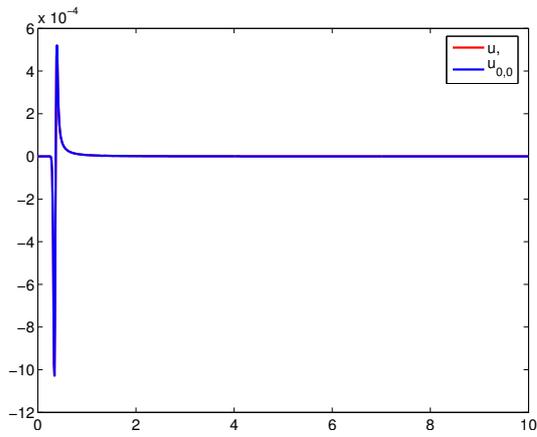


FIG. 9.61: Comparaison entre  $u^{\sigma,h,L}$  et  $u_{0,0}^{\sigma,h,L}$  au point  $(0.75,0)$

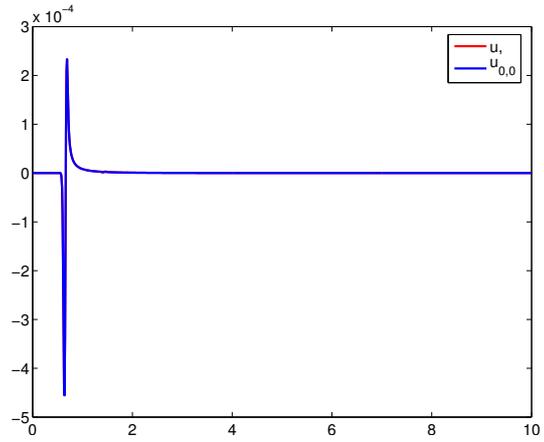


FIG. 9.62: Comparaison entre  $u^{\sigma,h,L}$  et  $u_{0,0}^{\sigma,h,L}$  au point  $(1.05,0)$

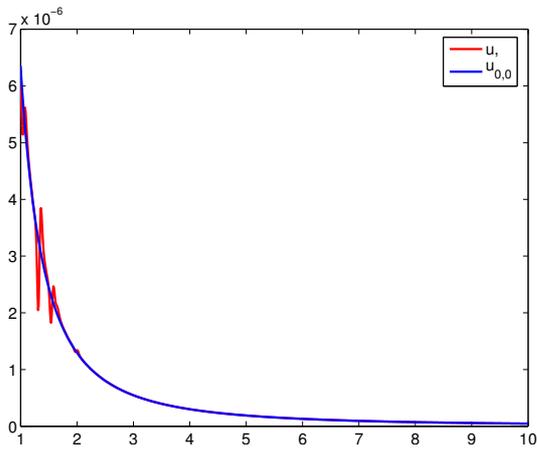


FIG. 9.63: Comparaison entre  $u^{\sigma,h,L}$  et  $u_{0,0}^{\sigma,h,L}$  au point  $(0.75,0)$

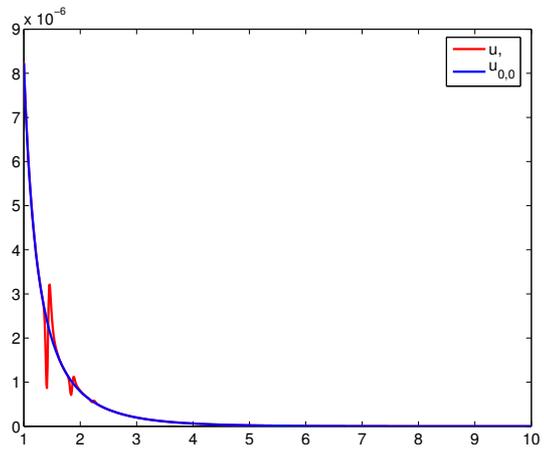


FIG. 9.64: Comparaison entre  $u^{\sigma,h,L}$  et  $u_{0,0}^{\sigma,h,L}$  au point  $(1.05,0)$

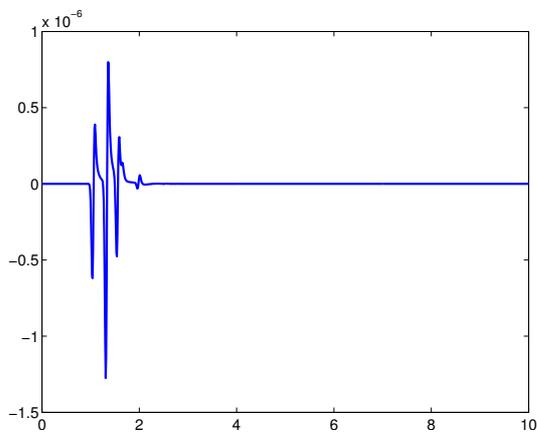


FIG. 9.65:  $u^{\sigma,h,L} - u_{0,0}^{\sigma,h,L}$  au point  $(0.75,0)$

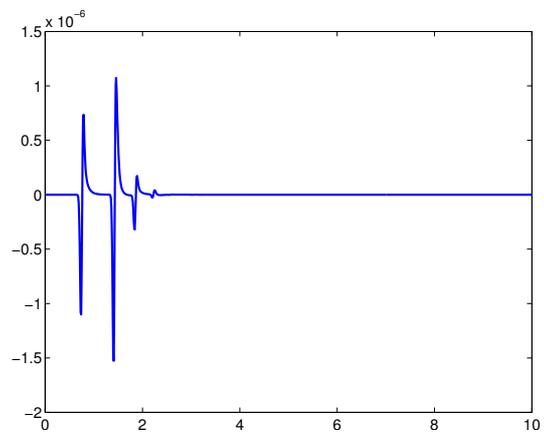


FIG. 9.66:  $u^{\sigma,h,L} - u_{0,0}^{\sigma,h,L}$  au point  $(1.05,0)$



Troisième partie

**PML stabilisées pour l'acoustique  
en écoulement**



## Chapitre 10

# Analyse des PML classiques pour l'acoustique en écoulement

**N**ous nous intéressons dans ce chapitre aux méthodes de couches absorbantes parfaitement adaptées pour les équations d'Euler linéarisées. Nous rappelons dans un premier temps comment ces équations se déduisent des équations d'Euler. Nous montrons ensuite comment obtenir le modèle PML classique et nous rappelons les résultats bien connus concernant l'instabilité de ce modèle. Finalement nous présentons une nouvelle analyse de ces instabilités, grâce à la méthode de Cagniard-de Hoop.

Contenu

---

<b>10.1 Les équations de l'acoustique en écoulement . . . . .</b>	<b>199</b>
10.1.1 Linéarisation des équations d'Euler . . . . .	199
10.1.2 Propagation des ondes planes et relations de dispersion . . . . .	204
10.1.3 Les courbes de lenteur . . . . .	205
10.1.4 Les vitesses de phase et de groupe . . . . .	205
<b>10.2 Les PML pour l'aéroacoustique . . . . .</b>	<b>206</b>
10.2.1 Construction et mise en évidence numérique du phénomène d'instabilité . . . . .	206
10.2.2 Analyse mathématique du phénomène d'instabilité . . . . .	207
10.2.3 Analyse de Fourier des PML en écoulement . . . . .	209
10.2.4 Une condition nécessaire de stabilité à haute fréquence . . . . .	210
10.2.5 Mise en évidence théorique des instabilités sur la courbe de lenteur . . . . .	212
<b>10.3 Analyse de l'instabilité des PML par la méthode de Cagniard-de Hoop . . . . .</b>	<b>212</b>
10.3.1 Principaux résultats . . . . .	213
10.3.2 Démonstrations des théorèmes . . . . .	216
<b>Annexes . . . . .</b>	<b>222</b>
<b>10.a Démonstration du théorème 10.2.4 . . . . .</b>	<b>222</b>

---

## 10.1 Les équations de l'acoustique en écoulement

### 10.1.1 Linéarisation des équations d'Euler

Rappelons que les équations de l'acoustique en écoulement sont obtenues par linéarisation des équations d'Euler qui s'écrivent <sup>(28)</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^* \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* + \nabla p^* \\ \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \text{div}(\rho^* \mathbf{u}^*) \end{array} \right. = 0, \quad (10.1.1a)$$

$$= 0, \quad (10.1.1b)$$

où  $\mathbf{u}^*$  représente le déplacement de particules du fluide,  $p^*$  la pression et  $\rho^*$  la densité. Ces deux dernières inconnues sont liées par une équation, dite équation d'état, qui s'écrit, dans le cas d'un gaz parfait :

$$ds^* = C_V \frac{dp^*}{p^*} - C_P \frac{d\rho^*}{\rho^*}. \quad (10.1.1.c)$$

où  $s^*$  est l'entropie du système et  $C_V$  et  $C_P$  sont les chaleurs spécifiques du gaz, respectivement à volume constant et à pression constante. Dans le cas d'un flux isentropique on a de plus  $ds^* = 0$  et

$$dp^* = c^{*2} d\rho^* \quad \text{avec} \quad c^{*2} = \frac{\gamma p^*}{\rho^*} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}, \quad (10.1.2)$$

( $c^*$  est la vitesse du son dans le fluide considéré). Cette équation implique :

$$\frac{\partial p^*}{\partial t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla p^* = c^{*2} \left( \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \rho^* \right),$$

ce qui devient, en utilisant (10.1.1b) et la relation  $\text{div}(\rho^* \mathbf{u}^*) = \mathbf{u}^* \cdot \nabla \rho^* + \rho^* \text{div} \mathbf{u}^*$  :

$$\frac{\partial p^*}{\partial t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla p^* + c^{*2} \rho^* \text{div} \mathbf{u}^* = 0. \quad (10.1.3)$$

Les équations d'Euler pour un gaz parfait dans un système isentropique s'écrivent donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^* \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* + \nabla p^* = 0, \\ \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \text{div}(\rho^* \mathbf{u}^*) = 0, \\ \frac{\partial p^*}{\partial t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla p^* + c^{*2} \rho^* \text{div} \mathbf{u}^* = 0, \\ c^{*2} = \frac{\gamma p^*}{\rho^*}. \end{array} \right. \quad (10.1.4a)$$

$$(10.1.4b)$$

$$(10.1.4c)$$

$$(10.1.4d)$$

28. On pourra se référer à [76], ouvrage disponible sur internet.

Supposons maintenant que le système soit dans un état stationnaire, défini par les quantités  $\mathbf{u}_s, p_s, \rho_s$  et  $c_s$ , ne dépendant que des variables d'espace et vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_s(\mathbf{u}_s \cdot \nabla)\mathbf{u}_s + \nabla p_s = 0, \\ \operatorname{div}(\rho_s \mathbf{u}_s) = 0, \\ \mathbf{u}_s \cdot \nabla p_s + c_s^2 \rho_s \operatorname{div} \mathbf{u}_s = 0, \\ c_s^2 = \frac{\gamma p_s}{\rho_s}. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (10.1.5a) \\ (10.1.5b) \\ (10.1.5c) \\ (10.1.5d) \end{array}$$

Si cet état stationnaire est soumis à une légère perturbation, les inconnues  $\mathbf{u}^*, p^*, \rho^*$  et  $c^*$  seront étudiées sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^*(x_1, x_2, t) = \mathbf{u}_s(x_1, x_2) + \varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(x_1, x_2, t) + o(\varepsilon), \\ p^*(x_1, x_2, t) = p_s(x_1, x_2) + \varepsilon p_\varepsilon(x_1, x_2, t) + o(\varepsilon), \\ \rho^*(x_1, x_2, t) = \rho_s(x_1, x_2) + \varepsilon \rho_\varepsilon(x_1, x_2, t) + o(\varepsilon). \\ c^*(x_1, x_2, t) = c_s(x_1, x_2) + \varepsilon c_\varepsilon(x_1, x_2, t) + o(\varepsilon). \end{array} \right.$$

Le système (10.1.4) peut alors être linéarisé. En effet l'équation (10.1.4a) devient

$$\rho_s(\mathbf{u}_s \cdot \nabla)\mathbf{u}_s + \nabla p_s + \varepsilon \left( \rho_s \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t} + \rho_s(\mathbf{u}_s \cdot \nabla)\mathbf{u}_\varepsilon + \rho_s(\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla)\mathbf{u}_s + \rho_\varepsilon(\mathbf{u}_s \cdot \nabla)\mathbf{u}_s + \nabla p_\varepsilon \right) + o(\varepsilon) = 0.$$

En utilisant (10.1.5a) et en supposant que  $\varepsilon$  est petit on a donc :

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t} + \rho_s(\mathbf{u}_s \cdot \nabla)\mathbf{u}_\varepsilon + \rho_s(\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla)\mathbf{u}_s + \rho_\varepsilon(\mathbf{u}_s \cdot \nabla)\mathbf{u}_s + \nabla p_\varepsilon = 0. \quad (10.1.6)$$

De même, les équations (10.1.4b), (10.1.4c) et (10.1.4d) deviennent, respectivement

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \mathbf{u}_s) + \operatorname{div}(\rho_s \mathbf{u}_\varepsilon) = 0, \quad (10.1.7)$$

$$\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla p_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla p_s + c_s^2 \rho_s \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon + c_s^2 \rho_\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{u}_s + 2c_\varepsilon c_s \rho_s \operatorname{div} \mathbf{u}_s = 0 \quad (10.1.8)$$

et

$$2c_\varepsilon c_s = \frac{\gamma}{\rho_s} \left( p_\varepsilon - \frac{p_s \rho_\varepsilon}{\rho_s} \right) \quad (10.1.9)$$

on vérifie facilement que cette dernière équation se simplifie :

$$c_\varepsilon = \frac{1}{2} c_s \left( \frac{p_\varepsilon}{p_s} - \frac{\rho_\varepsilon}{\rho_s} \right) \quad (10.1.10)$$

et donc que 10.1.8 peut se réécrire

$$\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla p_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla p_s + c_s^2 \rho_s \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon + c_s^2 \rho_\varepsilon \operatorname{div} \mathbf{u}_s + c_s^2 \left( \frac{p_\varepsilon}{p_s} - \frac{\rho_\varepsilon}{\rho_s} \right) \rho_s \operatorname{div} \mathbf{u}_s = 0. \quad (10.1.11)$$

Nous allons maintenant adimensionner ces équations : soient  $\rho_0$  une densité de référence et  $c_0$  une vitesse de propagation du son de référence<sup>(29)</sup> et soit  $L$  une longueur caractéristique

29. Par exemple  $\rho_0 = \rho_s(0, 0)$  et  $c_0 = c_s(0, 0)$ .

## 10.1 Les équations de l'acoustique en écoulement

du problème<sup>(30)</sup>. On normalise  $\mathbf{u}_\varepsilon$  et  $c_\varepsilon$  par  $c$ ,  $\rho_\varepsilon$  par  $\rho_0$ ,  $p_\varepsilon$  par  $c_0^2 \rho_0$ ,  $\mathbf{x}$  par  $L$  et  $t$  par  $\frac{L}{c}$ , c'est-à-dire qu'on pose :

$$\mathbf{u}_\varepsilon = c_0 \mathbf{u}, \quad c_\varepsilon = c_0 c, \quad \rho_\varepsilon = \rho_0 \rho, \quad p_\varepsilon = c_0^2 \rho_0 p, \quad \mathbf{x} = L \tilde{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad t = \frac{L \tilde{t}}{c_0}.$$

Pour ne pas alourdir la présentation nous ferons alors l'abus de notation  $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$  et  $t = \tilde{t}$ . Nous poserons de plus :

$$\mathbf{u}_s = c_0 \mathbf{M}, \quad \rho_s = \rho_0 \bar{\rho}, \quad p_s = c^2 \rho_0 \bar{p} \quad \text{et} \quad c_s = c_0 \bar{c}.$$

$M = \|\mathbf{M}\|$  est appelé nombre de Mach :

- si  $M < 1$  le flux est dit subsonique,  $\|\mathbf{u}_0\| < c$ , la vitesse de propagation du son dans le milieu ;
- si  $M = 1$  le flux est dit transsonique,  $\|\mathbf{u}_0\| = c$  ;
- si  $M > 1$  le flux est dit supersonique,  $\|\mathbf{u}_0\| > c$ .

Dans toute cette partie nous ne considérerons que le cas subsonique.

Les équations d'Euler linéarisées s'écrivent, dans le cas le plus général :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \bar{\rho} (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \bar{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{M} + \rho (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{M} + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{M}) + \text{div}(\bar{\rho} \mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{p} + \bar{c}^2 \bar{\rho} \text{div} \mathbf{u} + \bar{c}^2 \rho \text{div} \mathbf{M} + \bar{c}^2 \left( \frac{p}{\bar{p}} - \frac{\rho}{\bar{\rho}} \right) \bar{\rho} \text{div} \mathbf{u}_s = 0. \\ c = \frac{1}{2} \bar{c} \left( \frac{p}{\bar{p}} - \frac{\rho}{\bar{\rho}} \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (10.1.12a) \\ (10.1.12b) \\ (10.1.12c) \\ (10.1.12d) \end{array}$$

Dans le cas d'un système isentropique on considère généralement que la vitesse de propagation du son ne varie pas au cours du temps. Dans ce cas il est évident que  $c = 0$ ,  $p/\bar{p} = \rho/\bar{\rho}$  et  $\bar{c} = 1$ <sup>(31)</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \bar{\rho} (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \bar{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{M} + \rho (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{M} + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{M}) + \text{div}(\bar{\rho} \mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{p} + \bar{\rho} \text{div} \mathbf{u} + \rho \text{div} \mathbf{M} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (10.1.13a) \\ (10.1.13b) \\ (10.1.13c) \end{array}$$

30. Par exemple la largeur ou la longueur du domaine de calcul.

31. Puisque  $c_s$  a été normalisé par  $\bar{c}_0 = c_s(0, 0) = c_s$ .

Dans de nombreuses applications on considère des écoulements incompressibles, c'est-à-dire à divergence nulle ( $\text{div}\mathbf{M} = 0$ ) :<sup>(32)</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \bar{\rho}(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \bar{\rho}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{M} + \rho(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{M} + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot \nabla \rho + \text{div}(\bar{\rho} \mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla \bar{p} + \bar{\rho} \text{div} \mathbf{u} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (10.1.14a) \\ (10.1.14b) \\ (10.1.14c) \end{array}$$

Ces équations se simplifient encore si le flux est tel que  $\bar{p}$  est constant. En effet, on a alors  $\nabla p_s = 0$  et, d'après 10.1.5a,  $(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{M} = 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \bar{\rho}(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \bar{\rho}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{M} + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot \nabla \rho + \text{div}(\bar{\rho} \mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot \nabla p + \bar{\rho} \text{div} \mathbf{u} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (10.1.15a) \\ (10.1.15b) \\ (10.1.15c) \end{array}$$

Si la densité moyenne  $\rho_s$  est constante on a de plus  $\bar{p} = 1$ <sup>(33)</sup> et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{M} + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot \nabla \rho + \text{div} \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot \nabla p + \text{div} \mathbf{u} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (10.1.16a) \\ (10.1.16b) \\ (10.1.16c) \end{array}$$

Remarquons que les équations (10.1.16a) et (10.1.16c) ne dépendent pas de  $\rho$  et qu'elles peuvent donc être résolues indépendamment de (10.1.16b). Nous ne nous intéresserons donc pas par la suite à cette dernière équation. Dans ce travail nous ne considérerons que les écoulements uniformes, c'est-à-dire tel que  $\mathbf{M}$  soit constant. Les équations d'Euler s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot \nabla \rho + \text{div} \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{M} \cdot \nabla p + \text{div} \mathbf{u} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (10.1.17a) \\ (10.1.17b) \\ (10.1.17c) \end{array}$$

32. En utilisant le fait que  $\text{div}(\rho \mathbf{M}) = \mathbf{M} \cdot \nabla \rho + \rho \text{div} \mathbf{M}$ .

33. Puisque  $\rho_0$  a été normalisé par  $\bar{p} = \rho(0, 0) = \rho_0$ .

## 10.1 Les équations de l'acoustique en écoulement

Dans tout ce chapitre et dans la majeure partie du suivant nous considérerons un écoulement horizontal  $\mathbf{M} = [M, 0]^t$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t} + M \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + M \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + M \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (10.1.18a) \\ (10.1.18b) \\ (10.1.18c) \end{array}$$

avec  $\mathbf{u} = [u, v]^t$ .

**Remarque 10.1.1** *Les inconnues  $p$  et  $\mathbf{u}$  peuvent être découplées. Il suffit pour cela de multiplier formellement la première équation par l'opérateur*

$$\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x_1} :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 p + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x_1} \right) u + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x_1} \right) v = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + M \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + M \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (10.1.19a) \\ (10.1.19b) \\ (10.1.19c) \end{array}$$

puis d'utiliser les deux autres équations pour obtenir le nouveau système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2M \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_1} - (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + M \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + M \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (10.1.20a) \\ (10.1.20b) \\ (10.1.20c) \end{array}$$

*La première équation de ce système est indépendante des deux autres. Cette équation est appelée équation des ondes advectives.*

Nous allons maintenant rappeler les équations de dispersion ainsi que les notions de vitesse de groupe et de phase et de courbe de lenteur qui nous serviront pour l'étude des PML.

### 10.1.2 Propagation des ondes planes et relations de dispersion

Pour obtenir les équations de dispersion, on recherche les solutions  $u$ ,  $v$  et  $p$  de type ondes planes, c'est-à-dire:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, t) = \mathcal{U}_0 e^{i(\omega t + k_1 x_1 + k_2 x_2)}, \\ v(x_1, x_2, t) = \mathcal{V}_0 e^{i(\omega t + k_1 x_1 + k_2 x_2)}, \\ p(x_1, x_2, t) = \mathcal{P}_0 e^{i(\omega t + k_1 x_1 + k_2 x_2)}. \end{cases} \quad (10.1.21)$$

on notera également  $\mathbf{k} = [k_1 ; k_2]^t$ .  $\omega$ ,  $k_1$  et  $k_2$  sont alors solutions de :

$$\begin{cases} (\omega + Mk_1)\mathcal{P}_0 + k_1\mathcal{U}_0 + k_2\mathcal{V}_0 = 0, & (10.1.22a) \\ (\omega + Mk_1)\mathcal{U}_0 + k_1\mathcal{P}_0 = 0, & (10.1.22b) \\ (\omega + Mk_1)\mathcal{V}_0 + k_2\mathcal{P}_0 = 0. & (10.1.22c) \end{cases}$$

Il nous faut maintenant distinguer deux cas :

- **Si  $\mathcal{P}_0 = 0$ .** Alors  $\omega + Mk_1 = 0$ . Les ondes vérifiant cette relation seront dites **ondes de vorticité**. Remarquons qu'on a alors  $k_1\mathcal{U}_0 + k_2\mathcal{V}_0 = 0$  : les ondes de vorticité sont telles que  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  et  $p = 0$ . Dans le cas où  $M = 0$  (équation des ondes) ces ondes sont stationnaires :  $\omega = 0$ .
- **Si  $\mathcal{P}_0 \neq 0$ .** Alors on peut diviser les équations (10.1.22b) et (10.1.22c) par  $\omega + Mk_1$  (qui est non nul) et utiliser ces deux équations dans (10.1.22a) :

$$(\omega + Mk_1)\mathcal{P}_0 - \frac{k_1^2}{\omega + Mk_1}\mathcal{P}_0 - \frac{k_2^2}{\omega + Mk_1}\mathcal{P}_0 = 0.$$

Soit

$$(\omega + Mk_1)^2 - k_1^2 - k_2^2 = 0.$$

Les ondes vérifiant cette équation seront dites **ondes advectives**. Dans le cas  $M = 0$  on retrouve l'équation de dispersion classique :

$$\omega^2 - k_1^2 - k_2^2 = 0.$$

Nous avons donc deux équations de dispersion :

$$\begin{cases} F_a(\omega, k_1, k_2) = (\omega + Mk_1)^2 - k_1^2 - k_2^2 = 0, & (10.1.23a) \\ F_v(\omega, k_1, k_2) = \omega + Mk_1. & (10.1.23b) \end{cases}$$

Pour  $\mathbf{k}$  (non nul) donné  $F_a$  admet deux racines simples :

$$\omega_a^\pm(\mathbf{k}) = -Mk_1 \pm |\mathbf{k}|^2$$

et  $F_v$  admet une racine simple :

$$\omega_v(\mathbf{k}) = -Mk_1.$$

### 10.1.3 Les courbes de lenteur

On appelle courbes de lenteur la représentation des solutions des équations de dispersion dans le plan  $(k_1/\omega, k_2/\omega)^{(34)}$ . Remarquons que les équations (10.1.23) peuvent se réécrire :

$$\begin{cases} F_a(1, \frac{k_1}{\omega}, \frac{k_2}{\omega}) = \left(1 + M \frac{k_1}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{k_1}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{k_2}{\omega}\right)^2 = 0, & (10.1.24a) \\ F_v(1, \frac{k_1}{\omega}, \frac{k_2}{\omega}) = 1 + M \frac{k_1}{\omega}. & (10.1.24b) \end{cases}$$

L'équation (10.1.24b) est l'équation d'une droite, représentée en vert sur la figure 10.1, et l'équation (10.1.24a) peut se mettre sous la forme :

$$(1 - M^2)^2 \left(\frac{k_1}{\omega} - \frac{M}{1 - M^2}\right)^2 + (1 - M^2) \frac{k_2^2}{\omega^2} = 1.$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse centrée au point  $(\frac{M}{1 - M^2}, 0)$ , représentée en bleu sur la figure 10.1.

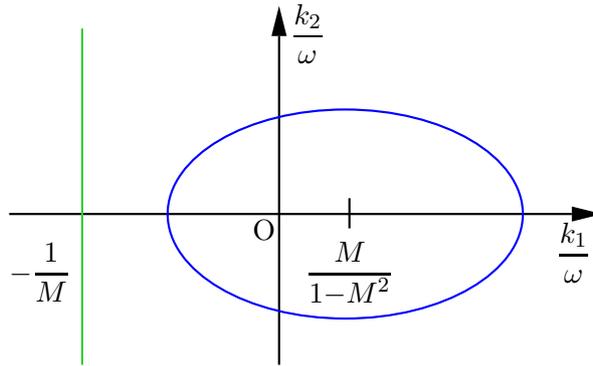


FIG. 10.1: Les courbes de lenteur

### 10.1.4 Les vitesses de phase et de groupe

Soit  $\mathbf{k}$  un vecteur d'onde et  $\omega(\mathbf{k})$  une racine d'une des équations des dispersion ( $\omega = \omega_a^+, \omega_a^-$  ou  $\omega_v$ ). On définit

- le vecteur vitesse de phase :

$$\mathbf{v}_\phi = \left[ \frac{\omega(\mathbf{k})}{k_1}, \frac{\omega(\mathbf{k})}{k_2} \right]^t ; \quad (10.1.25)$$

- la vitesse de groupe :

$$\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) ; \quad (10.1.26)$$

34. Ce plan est appelé plan des lenteurs.

- le vecteur lenteur :

$$\mathbf{l} = \left[ \frac{k_1}{\omega(\mathbf{k})}; \frac{k_2}{\omega(\mathbf{k})} \right], \quad (10.1.27)$$

On remarque la courbe de lenteur est donc le lieu décrit par l'extrémité du vecteur lenteur quand  $\mathbf{k}$  décrit  $\mathbb{R}^2$ .

**Remarque 10.1.2**  $\omega(\mathbf{k})$  étant racine de  $F(\omega, \mathbf{k})$  ( $= F_a$  ou  $F_v$ ) on peut utiliser le théorème des fonctions implicites :

$$\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\omega(\mathbf{k}) = - \left( \frac{\partial F(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \right)^{-1} \nabla_{\mathbf{k}}F(\omega, \mathbf{k}). \quad (10.1.28)$$

Le vecteur vitesse de groupe est donc colinéaire au vecteur  $\nabla_{\mathbf{k}}F(\omega, \mathbf{k})$  qui est orthogonal à la courbe de lenteur au point  $(k_1/\omega, k_2/\omega)$  (voir figure 10.2).

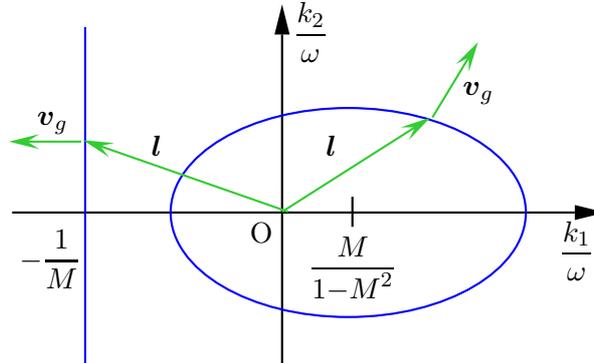


FIG. 10.2: Les vecteurs lenteur de phase et vitesse de groupe

## 10.2 Les PML pour l'aéroacoustique

### 10.2.1 Construction et mise en évidence numérique du phénomène d'instabilité

Les PML que nous avons présentées au chapitre 7 ont été adaptées aux équations d'Euler linéarisées au milieu des années 90, notamment par Hu [63]. La construction de ces PML est très similaire au cas acoustique (voir chapitre 9) :

1. On décompose chaque équation (et chaque inconnue) en deux parties, la première con-

tenant les dérivées par rapport à  $x_1$  et la seconde les dérivées par rapport à  $x_2$ <sup>(35)</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_1}{\partial t} + M \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \end{array} \right. \quad (10.2.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \end{array} \right. \quad (10.2.1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + M \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \end{array} \right. \quad (10.2.1c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_1}{\partial t} + M \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0. \end{array} \right. \quad (10.2.1d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0. \end{array} \right. \quad (10.2.1e)$$

2. On ajoute ensuite un terme d'absorption ne dépendant que de  $x_1$  (resp.  $x_2$ ) dans les équations contenant les dérivées suivant  $x_1$  (resp.  $x_2$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \sigma(x_1)p_1 + M \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \end{array} \right. \quad (10.2.2a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_2}{\partial t} + \sigma(x_2)p_2 + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \end{array} \right. \quad (10.2.2b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma(x_1)u + M \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \end{array} \right. \quad (10.2.2c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \sigma(x_1)v_1 + M \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0. \end{array} \right. \quad (10.2.2d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_2}{\partial t} + \sigma(x_2)v_2 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0. \end{array} \right. \quad (10.2.2e)$$

Hu a alors remarqué l'apparition d'instabilité dans les PML horizontales (voir figure 10.3).

### 10.2.2 Analyse mathématique du phénomène d'instabilité

Depuis le premier article de Hu, de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude des instabilités dans le PML et leurs causes sont maintenant bien comprises. Pour les analyser il est nécessaire d'introduire quelques définitions (voir par exemple [9]).

35. L'équation (10.1.18b) n'est pas décomposée puisqu'elle ne contient que des dérivées par rapport à  $x_1$ .

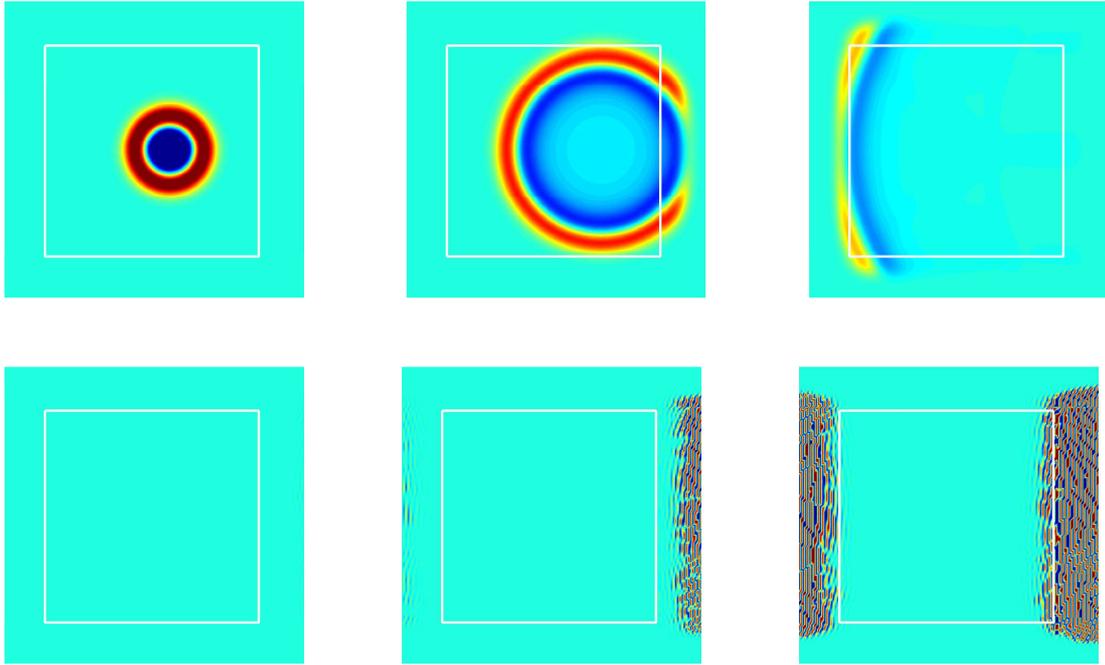


FIG. 10.3: Les instabilités dans les PML horizontales

Intéressons-nous aux équations de la PML horizontale qui génère les instabilités :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \sigma p_1 + M \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma u + M \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + \sigma v_1 + M \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0. \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (10.2.3a) \\ (10.2.3b) \\ (10.2.3c) \\ (10.2.3d) \\ (10.2.3e) \end{array}$$

Comme nous l'avons vu au chapitre 7, la question de l'analyse des PML dans le cas où le coefficient d'absorption varie est un problème ouvert, c'est pourquoi nous considérons le problème de Cauchy à coefficient constant associé à ce problème dans tout l'espace  $\mathbb{R}^2$ . La stabilité de ce problème est là encore une condition nécessaire de la stabilité du problème général à coefficient variable. De plus la technique dite des coefficients gelés [69] permet d'établir un lien entre l'analyse du problème à coefficient constant et celle du problème à coefficient variable.

Nous rappelons ici la notion de problème bien posé et de stabilité (voir par exemple [69]).

Nous notons

$$U = [p ; u ; v]^T .$$

**Définition 10.2.1** *Le problème (10.2.3) sera dit faiblement (resp. fortement) bien posé si, pour toute donnée initiale  $U(., 0) = U_0$  appartenant à l'espace de Sobolev  $H^s$ ,  $s > 0$  (resp.  $s = 0$ ), le système (10.2.3) admet une unique solution  $U(\mathbf{x}, t)$  telle que :*

$$\|U(., t)\|_{L^2} \leq K e^{\alpha t} \|U_0\|_{H^s}. \quad (10.2.4)$$

**Définition 10.2.2** *Le problème (10.2.3) sera dit faiblement (resp. fortement) stable s'il est faiblement (resp. fortement) bien posé et si la solution  $U(\mathbf{x}, t)$  est telle que :*

$$\|U(., t)\|_{L^2} \leq K (1 + t)^s \|U_0\|_{H^s}. \quad (10.2.5)$$

Autrement dit :

- un système bien posé peut avoir des solutions exponentiellement croissantes en temps ;
- un système faiblement stable peut avoir des solutions linéairement croissantes en temps ;
- un système fortement stable possède des solutions bornées en temps.

Dans toute cette partie nous dirons qu'un système est stable s'il est faiblement stable. Nous allons maintenant montrer que le système (10.2.3) est instable, bien que (faiblement) bien posé, c'est à dire qu'il admet des solutions exponentiellement croissantes en temps, en utilisant l'analyse par ondes planes.

### 10.2.3 Analyse de Fourier des PML en écoulement

Comme dans le domaine de calcul nous pouvons établir deux équations de dispersion dans la PML horizontale. Nous avons vu au chapitre 7 que les équations dans la PML se déduisaient des équations dans le domaine de calcul en remplaçant les dérivées par rapport à  $x_1$  par l'opérateur

$$D_{x_1}^\sigma = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Les équations de dispersion dans la PML peuvent également se déduire des équations de dispersion dans le domaine de calcul en remplaçant  $k_1$  par

$$Sk_1 = \frac{i\omega}{i\omega + \sigma} k_1.$$

Les équations de dispersion dans la PML sont donc :

$$\begin{cases} F_a^{\text{pml}}(\omega, Sk_1, k_2) = (\omega + MSk_1)^2 - S^2k_1^2 - k_2^2 = 0, & (10.2.6a) \\ F_v^{\text{pml}}(\omega, Sk_1, k_2) = \omega - MSk_1. & (10.2.6b) \end{cases}$$

Pour  $\mathbf{k}$  fixé  $F_a(\omega, Sk_1, k_2)$  admet quatre racines  $(\omega_i(\mathbf{k}))_{i=1..4}$  et  $F_v(\omega, Sk_1, k_2)$  admet deux racines  $(\omega_i(\mathbf{k}))_{i=5..6}$ .

Pour montrer que le système (10.2.3) est bien posé nous utiliserons la proposition suivante [69].

**Proposition 10.2.1** *Le système (10.2.3) est fortement mal posé s'il existe des modes exponentiellement croissants, c'est-à-dire s'il existe des vecteurs unitaires  $\mathbf{K}$  tels que*

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Im m \omega(\rho \mathbf{K}) = -\infty \quad (10.2.7)$$

dans le cas contraire il est au moins faiblement bien posé.

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 10.2.2** *D'après la définition (10.1.21) des ondes planes que nous avons choisie la PML horizontale sera stable si les solutions  $(\omega_i)_{i=1..6}$  de (10.2.6a) et de (10.2.6b), sont telles que*

$$\forall i \in \{1..6\}, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^2 \quad \Im m(\omega_i(\mathbf{k})) \geq 0.$$

#### 10.2.4 Une condition nécessaire de stabilité à haute fréquence

Le caractère bien posé et la stabilité du problème (10.2.3) sont donc fortement liés au signe de la partie imaginaire des racines  $\omega$  de  $F_a$  et  $F_v^{\text{pml}}$ . La difficulté est que le calcul explicite des racines de  $F_a^{\text{pml}}$  n'est pas trivial. Cependant d'après la proposition 10.2.1, il est clair que l'étude du caractère bien posé du problème ne nécessite que la connaissance du comportement de ces racines à haute fréquence. De plus, si nous sommes capables de trouver une condition de stabilité à haute fréquence, nous aurons trouvé une condition nécessaire de stabilité. Nous allons nous intéresser au calcul d'un développement limité des solutions de  $F_a^{\text{pml}}$  et de  $F_v^{\text{pml}}$  pour  $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  grand. Nous reprenons ici les résultats exposés par Bécache, Fauqueux et Joly dans [9].

Nous nous limitons à l'étude de l'équation de dispersion  $F_a$ , l'étude de  $F_v$  pouvant se faire de façon très similaire<sup>(36)</sup>. Remarquons tout d'abord que

$$\frac{F_a(\omega, Sk_1, k_2)}{|\mathbf{k}|^2} = F_a\left(\frac{\omega}{|\mathbf{k}|}, \frac{Sk_1}{|\mathbf{k}|}, \frac{k_2}{|\mathbf{k}|}\right),$$

posons donc :

$$c = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}, K_1 = \frac{k_1}{|\mathbf{k}|}, K_2 = \frac{k_2}{|\mathbf{k}|}, \mathbf{K} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \text{ et } \varepsilon = \frac{\sigma}{|\mathbf{k}|},$$

alors :

$$S = \frac{i\omega}{i\omega + \sigma} = \frac{ic}{ic + \varepsilon}.$$

Nous ramenons donc l'étude à haute fréquence à une étude pour  $\varepsilon$  petit.

**Théorème 10.2.1** *Soit  $K_1$  et  $K_2$  fixé :*

36. Et même beaucoup plus simplement, la recherche des racines  $\omega$  de  $F_v(\omega, Sk_1, k_2)$  se ramenant à l'étude d'un polynôme de degré 2.

- si  $K_1 = 0$ , alors  $F_a(c, \mathbf{K})$  admet deux racines réelles :  $c^\pm = \pm K_2 = \pm 1$  ;
- si  $K_2 = 0$ , alors  $F_a(c, \mathbf{K})$  admet une racine double nulle et deux racines complexes à partie imaginaire positive :  $c^\pm(\varepsilon) = -1 \pm M + i\varepsilon$  ;
- si  $K_1 K_2 \neq 0$ , alors  $F_a(c, \mathbf{K})$  admet quatre racines complexes :

$$c^\pm(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} -MK_1 \pm 1 + i\varepsilon(l_1 \cdot v_{g1}) + o(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \tilde{c}^\pm(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{iK_2^2 \pm K_1 K_2 \sqrt{1 - M^2}}{1 - M^2 K_1^2} \varepsilon + o(\varepsilon)$$

où  $l_1$  (resp.  $v_{g1}$ ) désigne la première composante du vecteur  $\mathbf{l}$  (resp.  $\mathbf{v}_g$ ) associé à l'onde plane de direction  $(K_1, K_2)$  pour  $\varepsilon = 0$ .

Pour  $\varepsilon$  petit, les racines  $c^\pm$  sont à partie imaginaire négative dès que  $l_1$  et  $v_{g1}$  sont de signe opposé.

La démonstration de ce théorème est fournie en annexe de ce chapitre. En résumé :

- si  $\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{v}_{g1} \geq 0$  : toutes les racines de  $F_a$  sont à partie imaginaire positive ;
- si  $\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{v}_{g1} < 0$  :  $F_a$  admet deux racines complexes à partie imaginaire négative ;

**Corollaire 10.2.1** *Le système (10.2.3) est (au moins faiblement) bien posé et est instable s'il existe des directions  $\mathbf{K}$  telles que  $l_1 v_{g1} < 0$ .*

**Démonstration :**

Soit  $\mathbf{K}$  une direction unitaire,  $\rho$  un réel positif et  $\mathbf{k} = \rho \mathbf{K}$ , par définition, le théorème 10.2.1 devient :

- si  $K_1 = 0$ , alors  $F_a(\omega, \rho \mathbf{K})$  admet deux racines réelles :  $\omega^\pm(\rho \mathbf{K}) = \pm \rho K_2 = \pm \rho$  donc

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Im m(\omega^\pm(\rho \mathbf{K})) = 0 ;$$

- si  $K_2 = 0$ , alors  $F_a(\omega, \rho \mathbf{K})$  admet une racine double nulle et deux racines complexes à partie imaginaire positive :  $\omega^\pm(\rho \mathbf{K}) = (-1 \pm M)\rho + i\sigma$  donc

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Im m(\omega^\pm(\rho \mathbf{K})) = 0 \quad \text{et} \quad \Im m(\omega^\pm(\rho \mathbf{K})) > 0 \text{ pour } \rho \text{ grand.}$$

- si  $K_1 K_2 \neq 0$ , alors  $F_a(\omega, \rho \mathbf{K})$  admet quatre racines complexes :

$$\omega^\pm(\rho \mathbf{K}) \underset{\rho \rightarrow \infty}{=} (-MK_1 \pm 1)\rho + i\sigma(l_1 \cdot v_{g1}) + o(\sigma)$$

et

$$\tilde{\omega}^\pm(\rho \mathbf{K}) \underset{\rho \rightarrow \infty}{=} \frac{iK_2^2 \pm K_1 K_2 \sqrt{1 - M^2}}{1 - M^2 K_1^2} \sigma + o(\sigma),$$

donc

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Im m(\omega^\pm(\rho \mathbf{K})) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \Im m(\tilde{\omega}^\pm(\rho \mathbf{K})) = 0 \quad \text{et} \quad \Im m(\tilde{\omega}^\pm(\rho \mathbf{K})) > 0 \text{ pour } \rho \text{ grand.}$$

Par contre le signe de  $\Im m(\omega^\pm(\rho \mathbf{K}))$  est le même que celui de  $l_1 \cdot v_{g1}$ .

Le système (10.2.3) est au moins faiblement bien posé. Comme sa stabilité dépend du signe de  $\Im m(\rho \mathbf{K})$ , la deuxième partie du corollaire est évidente. ■

Le système (10.2.3) n'est en fait que faiblement bien posé, comme l'a montré Hesthaven [56]. Sans entrer dans les détails, rappelons simplement que le fait de décomposer les équations en deux parties transforme le système original, fortement hyperbolique, en un système faiblement hyperbolique. Le terme d'absorption peut ensuite être considéré comme une perturbation de ce système. Or d'après Kreiss [69], un système construit par perturbation d'un système faiblement hyperbolique n'est en général que faiblement bien posé. D'autres types de PML, comme celles proposées par Zhao et Cangellaris [86], ne reposent pas sur une décomposition des équations et conduisent à des systèmes fortement bien posés.

### 10.2.5 Mise en évidence théorique des instabilités sur la courbe de lenteur

Le signe de  $l_1 v_{g1}$  se déduit très facilement sur la courbe de lenteur, en effet cette quantité est positive si les deux vecteurs vont “dans le même sens” par rapport à l'axe  $\frac{k_1}{\omega}$  (en vert sur la figure 10.4) et négative s'ils vont dans le sens contraire (en rouge sur la figure 10.4). Il est donc évident que l'ensemble des points vérifiant  $l_1 v_{g1} < 0$  est la partie de l'ellipse située entre l'axe  $k_1/\omega = 0$  et la droite  $k_1/\omega = M/(1 - M^2)$  (en rouge sur la figure 10.5) et que les ondes de vorticité n'engendrent pas d'instabilité. Nous en déduisons le

**Théorème 10.2.2** *Le problème (10.2.3) est instable dès que  $|M| > 0$ .*

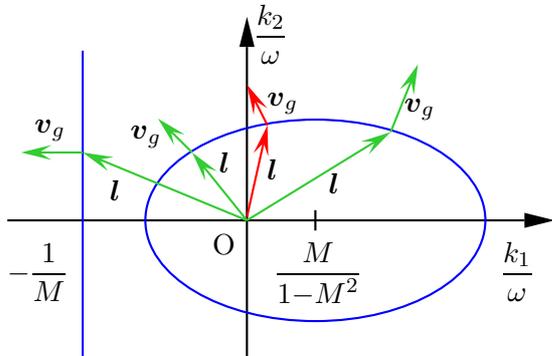


FIG. 10.4: Les vecteurs lenteur de phase et vitesse de groupe

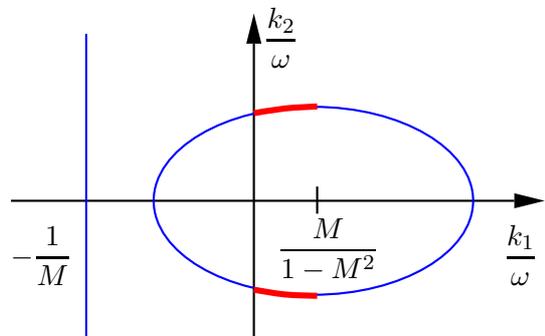


FIG. 10.5: Le lieu des points engendrant les instabilités

## 10.3 Analyse de l'instabilité des PML par la méthode de Cagniard-de Hoop

Comme pour le cas acoustique (voir le chapitre 9) nous pouvons étudier les PML en acoustique en écoulement par la méthode de Cagniard-de Hoop. Nous pourrions alors étudier les instabilités analytiquement. De plus contrairement à l'analyse haute fréquence, cette étude ne nécessite pas de choisir  $\sigma$  constant.

### 10.3.1 Principaux résultats

Considérons le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \sigma(x_1)p_1 + M \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma(x_1)u + M \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + \sigma(x_1)v_1 + M \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \end{array} \right. \quad (10.3.1)$$

qui peut se réécrire formellement

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_1}{\partial t} + M \left( \frac{\partial p_1}{\partial t} + \sigma(x_1) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial p_1}{\partial t} + \sigma(x_1) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + M \left( \frac{\partial p_1}{\partial t} + \sigma(x_1) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial p_1}{\partial t} + \sigma(x_1) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + M \left( \frac{\partial p_1}{\partial t} + \sigma(x_1) \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0. \end{array} \right. \quad (10.3.2)$$

Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t} + MD_{x_1}^\sigma p + D_{x_1}^\sigma u + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + MD_{x_1}^\sigma u + D_{x_1}^\sigma p = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + MD_{x_1}^\sigma v + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0., \\ p = p_1 + p_2, \\ v = v_1 + v_2. \end{array} \right. \quad (10.3.3)$$

En multipliant formellement la première équation par

$$\frac{\partial}{\partial t} + MD_{x_1}^\sigma$$

on vérifie facilement que ce système est équivalent au système découplé suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2MD_{x_1}^\sigma \frac{\partial p}{\partial t} - (1 - M^2)(D_{x_1}^\sigma)^2 p - \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + MD_{x_1}^\sigma u + D_{x_1}^\sigma p = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + MD_{x_1}^\sigma v + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \quad (10.3.4)$$

La première équation de ce système n'est rien d'autre que l'équation des ondes advectives où on a remplacé les dérivées par rapport à  $x_1$  par l'opérateur  $D_{x_1}^\sigma$ . Cette équation, que nous allons maintenant étudier plus en détail, est la cause des instabilités.

Comme pour les équations de l'acoustique (voir chapitre 9), il est possible d'obtenir, grâce à la méthode de Cagniard-de Hoop, la solution analytique du problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}, \text{ nulle pour } t < 0 & \text{telle que} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2M \frac{\partial}{\partial t} D_{x_1}^\sigma p - \left[ (1 - M^2)(D_{x_1}^\sigma)^2 p + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} \right] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S)\delta(t) & \text{in } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (10.3.5)$$

avec  $\mathbf{x}_S = (-h, 0)$ ,  $\sigma(x_1) = 0$  si  $x_1 \leq 0$  et  $\sigma(x_1) = 1$  si  $x_1 > 0$ .

Nous définissons les fonctions  $r(\mathbf{x})$  et  $\theta(\mathbf{x})$  (que nous appellerons "coordonnées polaires généralisées") par :

$$r^2(\mathbf{x}) = \frac{(x_1 + h)^2}{(1 - M^2)^2} + \frac{x_2^2}{1 - M^2}, \quad \cos \theta(\mathbf{x}) = \frac{x_1 + h}{r(1 - M^2)} \quad \text{et} \quad \sin \theta(\mathbf{x}) = \frac{x_2}{r\sqrt{1 - M^2}}.$$

Remarquons que les lignes de niveaux de  $r(\mathbf{x})$  et  $\theta(\mathbf{x})$  sont des ellipses et des demi-droites (voir figure 10.6).

Nous introduisons également les fonctions  $A(\mathbf{x}, t)$  et  $B(\mathbf{x}, t)$  définies par

$$A(\mathbf{x}, t) = \Sigma(x_1) \left( \frac{t}{r} \cos \theta - M \sin^2 \theta \right) \quad \text{et} \quad B(\mathbf{x}, t) = \Sigma(x_1) \sin \theta \sqrt{\left( \frac{t}{r} + M \cos \theta \right)^2 - 1}.$$

**Théorème 10.3.1** *L'expression de la solution  $p(\mathbf{x}, t) = G_i^\sigma(\mathbf{x}, t)$  du problème (10.3.5) est donnée par :*

$$\begin{cases} G_i^\sigma(\mathbf{x}, t) = \frac{H(t - r(1 - M \cos \theta))}{2\pi\sqrt{1 - M^2}\sqrt{(t + Mr \cos \theta)^2 - r^2}}, & x_1 \leq 0 \\ G_i^\sigma(\mathbf{x}, t) = \frac{H(t - r(1 - M \cos \theta))}{2\pi\sqrt{1 - M^2}\sqrt{(t + Mr \cos \theta)^2 - r^2}} e^{-A(\mathbf{x}, t)} \cos [B(\mathbf{x}, t)], & x_1 > 0. \end{cases} \quad (10.3.6)$$

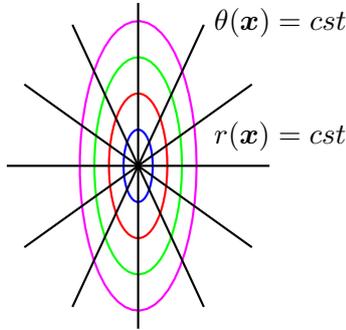


FIG. 10.6: Les lignes de niveau de  $r(\mathbf{x})$  et  $\theta(\mathbf{x})$

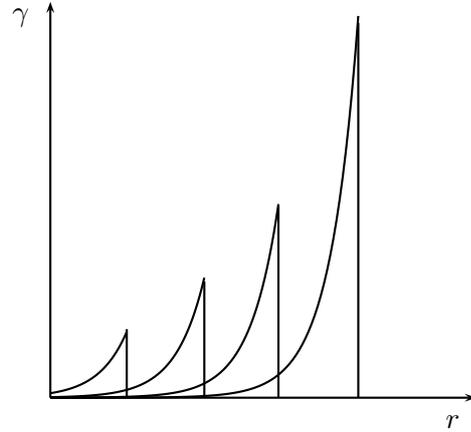


FIG. 10.7:  $r \mapsto \gamma(r, \theta_0, t)$

Pour  $x_1 > 0$  nous définissons la fonction

$$\gamma(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < r(1 - M \cos \theta), \\ \frac{G_i^\sigma(\mathbf{x}, t)}{G_i^0(\mathbf{x}, t)} = e^{-A(\mathbf{x}, t)} \cos [B(\mathbf{x}, t)] & \text{si } t > r(1 - M \cos \theta). \end{cases}$$

Dans le cas acoustique cette fonction décroissait exponentiellement en temps, le théorème suivant montre qu'en présence d'un écoulement il existe un ensemble de directions  $\theta$  instables :

**Théorème 10.3.2** *Pour un point  $\mathbf{x}$  donné, la fonction  $t \rightarrow \gamma(\mathbf{x}, t)$  est bornée :  $\gamma(\mathbf{x}, t) \leq C(\mathbf{x})$ .*

*Cependant, pour une direction  $\theta_0$  donnée, si nous posons*

$$r^{\max}(t) = \frac{t}{(1 - M \cos \theta_0)},$$

*alors,*

$$\gamma(r^{\max}(t), \theta_0, t) > e^{\alpha(\theta_0)t}$$

*avec  $\alpha(\theta_0) > 0$  si  $\cos \theta_0 < M$  et  $\alpha(\theta_0) \leq 0$  si  $\cos \theta_0 \geq M$ .*

*En conséquence la norme  $L^\infty(\mathbb{R}^+)$  de  $\gamma(\mathbf{x}, t)$  croît exponentiellement avec  $t$  :*

$$\|\gamma(\cdot, t)\|_{L^\infty} \geq C e^{\alpha t}, \quad \alpha > 0.$$

Les instabilités exprimées par ce théorème sont souvent appelées “instabilités convectives”, car elles “se déplacent avec le front d’onde”. Pour illustrer ce point, nous avons représenté les variations de  $\gamma$  par rapport à  $r$  pour une direction instable  $\theta_0$  et pour quatre valeurs de  $t$  sur la figure 10.7.

Regardons maintenant comment ces instabilités se traduisent dans le cas d’un terme source.

Considérons donc le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}, \text{ nulle pour } t < 0 \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2M \frac{\partial}{\partial t} D_{x_1}^\sigma p - \left[ (1 - M^2)(D_{x_1}^\sigma)^2 p + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} p \right] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) f(t) \end{array} \right. \text{ dans } \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+. \quad (10.3.7)$$

Pour énoncer le théorème suivant nous nous limiterons au cas d'une fonction échelon de fréquence  $f_0$  c'est-à-dire telle que :  $f(t) = 1$  si  $0 < t < t_0$  et 0 sinon avec  $t_0 = 1/f_0$ .

**Théorème 10.3.3** *Soit  $t > 0$  et soit  $\theta$  une direction instable, c'est-à-dire telle que  $\cos \theta < M$  alors il existe  $A$  et  $\beta$ , réels positifs, et une fonction  $r(t) > 0$  croissante avec  $t$  tels que :*

$$u(r(t), \theta, t) \geq A e^{\beta \Sigma(x_1(t))}.$$

**Corollaire 10.3.1** *La norme  $L^\infty(\mathbb{R}^+)$  de  $u(., t)$  croît exponentiellement avec  $t$  :*

$$\|u(., t)\|_{L^\infty} \geq C e^{\alpha t}, \quad \alpha > 0$$

Ce théorème prouve l'existence d'instabilités convectives dans le cas d'une source échelon. Pour illustrer ce phénomène dans le cas d'une fonction source plus complexe, nous avons calculé numériquement la solution du problème (10.3.7) dans le cas où la fonction source est remplacée par une dérivée de Gaussienne tronquée. Dans les expériences que nous présentons nous avons utilisé une source de fréquence 1 située au point  $(0, -2)$ . Les figures (10.9) et (10.8) représentent la propagation d'une onde advective à différents instants, respectivement avec  $M = 0.5$  et  $M = 0.9$ . Nous avons également représenté en rouge les demi-droites  $\theta(\mathbf{x}) = \arccos(M)$  et  $\theta(\mathbf{x}) = -\arccos(M)$  qui délimitent l'ensemble des directions instables.

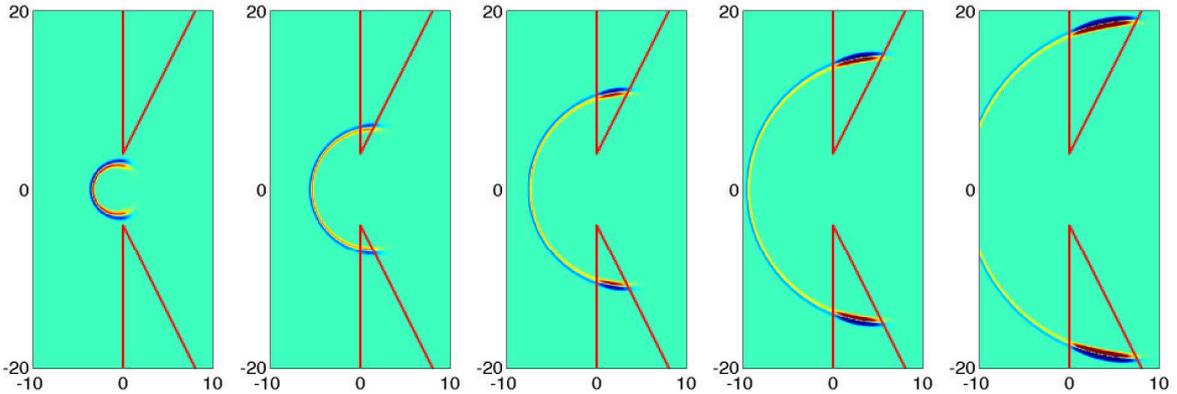


FIG. 10.8: Instabilités dans les PML avec  $M = 0.5$

### 10.3.2 Démonstrations des théorèmes

**Expression de la solution analytique.** Appliquons à  $G_i^\sigma$  la transformation de Laplace en temps  $t$  et la transformation de Fourier dans la direction  $x_2$ . La fonction résultante  $x_1 \mapsto \widehat{G}_i^\sigma(x_1, k, s)$  vérifie l'équation différentielle ordinaire :

$$-(1 - M^2) \frac{s}{s + \sigma} \frac{d}{dx_1} \left( \frac{s}{s + \sigma} \frac{d\widehat{G}_i^\sigma}{dx_1} \right) + 2Ms \frac{s}{s + \sigma} \frac{\partial \widehat{G}_i^\sigma}{\partial x_1} + (k^2 + s^2) \widehat{G}_i^\sigma = \delta(x_1 + h) \quad (10.3.8)$$

### 10.3 Analyse de l'instabilité des PML par la méthode de Cagniard-de Hoop

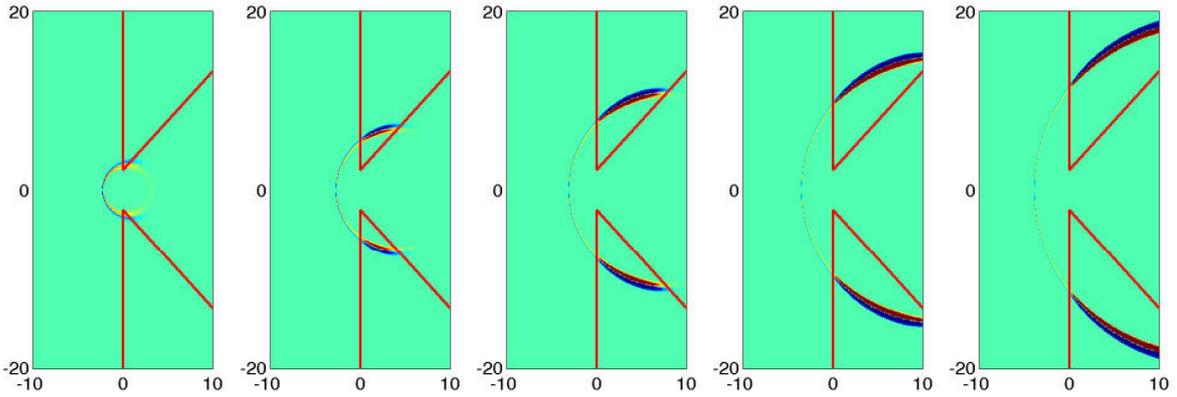


FIG. 10.9: Instabilités dans les PML avec  $M = 0.9$

Si nous posons

$$\lambda(x_1) = \begin{cases} M + \sqrt{1 + (1 - M^2) \frac{k^2}{s^2}}, & \text{si } x_1 < -h, \\ M - \sqrt{1 + (1 - M^2) \frac{k^2}{s^2}}, & \text{si } x_1 > -h, \end{cases}$$

$\widehat{G}_i^\sigma(x_1, k, s)$  s'écrit sous la forme

$$\widehat{G}_i^\sigma(x_1, k, s) = \mathcal{A}(k, s) e^{\frac{s(x_1+h)+\Sigma(x_1)}{1-M^2}\lambda(x_1)}.$$

En utilisant la condition de saut

$$\left[ -(1 - M^2) \left( \frac{s}{s + \sigma} \right)^2 \frac{\partial \widehat{G}_i^\sigma}{\partial x_1} + 2M \frac{s}{s + \sigma} \widehat{G}_i^\sigma \right]_{x_1=-h} = 1, \quad (10.3.9)$$

on obtient, comme  $\sigma(-h) = 0$ ,  $\mathcal{A}(k, s) = \frac{1}{2\sqrt{s^2 + (1 - M^2)k^2}}$ . Si  $x_1$  est négatif,  $\Sigma(x_1) = 0$  et

$$\widehat{G}_i^\sigma(x_1, k, s) = \frac{e^{\frac{s(x_1+h)}{1-M^2}\lambda(x_1)}}{2\sqrt{1 + (1 - M^2) \frac{k^2}{s^2}}},$$

ce qui n'est rien d'autre que la transformée de Fourier-Laplace de la solution fondamentale de l'équation des ondes advectives :

$$G_i^\sigma(\mathbf{x}, t) = \frac{H(ct - r(1 - M \cos \theta))}{2\pi \sqrt{(t + Mr \cos \theta)^2 - r^2}}, \quad x_1 \leq 0.$$

Considérons maintenant le cas  $x_1 > 0$  de telle sorte que  $\lambda(x_1) = M - \sqrt{1 + (1 - M^2) \frac{k^2}{s^2}}$  et

$$\widehat{G}_i^\sigma(x_1, k, s) = \frac{e^{\frac{s(x_1+h)+\Sigma(x_1)}{1-M^2} \left( M - \sqrt{1 + (1 - M^2) \frac{k^2}{s^2}} \right)}}{2\sqrt{s^2 + (1 - M^2)k^2}}$$

En appliquant la transformation inverse de Fourier dans la direction  $x_2$  à  $\widehat{G}_i^\sigma(x_1, k, s)$ , nous obtenons

$$\widetilde{G}_i^\sigma(x_1, x_2, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{s(x_1+h)+\Sigma(x_1)}{1-M^2} \left( M - \sqrt{1+(1-M^2)\frac{k^2}{s^2}} \right)}}{\sqrt{s^2 + (1-M^2)k^2}} e^{-ikx_2} dk, \quad (10.3.10)$$

Nous utilisons ensuite le changement de variable  $k = \frac{ps}{\sqrt{1-M^2}}$  pour obtenir :

$$\widetilde{G}_i^\sigma(x_1, x_2, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\Sigma(x_1)\frac{M-\sqrt{1+p^2}}{1-M^2}} e^{s \left[ \frac{(M-\sqrt{1+p^2})}{1-M^2}(x_1+h) - ip\frac{x_2}{\sqrt{1-M^2}} \right]}}{\sqrt{(1-M^2)(1+p^2)}} dp. \quad (10.3.11)$$

Nous allons maintenant chercher un chemin dans le plan complexe tel que

$$\frac{M - \sqrt{1+p^2}}{1-M^2}(x_1+h) - ip\frac{x_2}{\sqrt{1-M^2}} = -t, \quad \text{pour } t > 0, \quad (10.3.12)$$

Pour  $t \geq t_0 = r(1 - M \cos \theta)$  nous définissons les fonctions  $\gamma^\pm(t)$  par

$$\gamma^\pm(t) \equiv -i \left( \frac{t}{r} + M \cos \theta \right) \sin \theta \pm \cos \theta \sqrt{\left( \frac{t}{r} + M \cos \theta \right)^2 - 1},$$

et nous introduisons le contour de Cagniard-de Hoop  $\Gamma$  défini par :

$$\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-, \quad \Gamma^\pm = \{ p = \gamma^\pm(t) \}. \quad (10.3.13)$$

Ce contour est très semblable à celui utilisé au chapitre 9 pour les PML en acoustique (il suffit de poser  $T = t + Mr \cos \theta$  pour s'en rendre compte) : en particulier il n'intersecte pas les coupures de la fonction  $(1+p^2)^{-\frac{1}{2}}$  (voir figure 10.10). Comme en acoustique nous pouvons donc facilement montrer que :

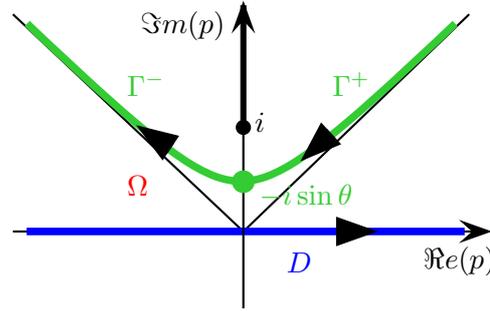
$$\widetilde{G}_i^\sigma(x_1, x_2, s) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{\Sigma(x_1)\frac{M-\sqrt{1+p^2}}{1-M^2}} e^{s \left[ \frac{(M-\sqrt{1+p^2})}{1-M^2}(x_1+h) - ip\frac{x_2}{\sqrt{1-M^2}} \right]}}{\sqrt{1+p^2}} dp.$$

Nous utilisons alors les paramétrages  $p = \gamma^+(t)$  et  $p = \gamma^-(t)$ , pour  $t \geq t_0$ , respectivement sur  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  et nous remarquons que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{(M - \sqrt{1+p^2})}{1-M^2} x_1 - ip\frac{x_2}{\sqrt{1-M^2}} = -t, \quad (\text{par construction}), \\ \bullet \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{dt}{\left[ (t + Mr \cos \theta)^2 - r^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{sur } \Gamma^\pm, \\ \bullet \Sigma(x_1)\frac{M - \sqrt{1+p^2}}{1-M^2} = -A(\mathbf{x}, t) \mp iB(\mathbf{x}, t), \quad \text{sur } \Gamma^\pm \end{array} \right.$$

Donc puisque  $t$  varie de  $+\infty$  à  $t_0$  sur  $\Gamma^+$  et de  $t_0$  à  $+\infty$  sur  $\Gamma^-$  :

$$\widetilde{G}_i^\sigma(x_1, x_2, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^{+\infty} \frac{e^{-A(\mathbf{x}, t)} \cos(B(\mathbf{x}, t))}{\sqrt{1-M^2} \sqrt{(t + Mr \sin \theta)^2 - r^2}} e^{-st} dt.$$


 FIG. 10.10: Le contour  $\Gamma$  (si  $\sin \theta < 0$ )

La conclusion est alors immédiate.

**Comportement de la fonction  $\gamma$ .** Pour  $\mathbf{x}$  fixé, la fonction  $B(\mathbf{x}, t)$  est bornée en temps par 1. De plus la fonction  $t \rightarrow A(\mathbf{x}, t)$  est visiblement croissante avec  $t$  sur  $[t_0; +\infty]$  et son minimum est donc  $A(\mathbf{x}, t_0) = \Sigma(x_1)(\cos \theta - M)$ . Alors

$$\max_{t \geq t_0} \gamma(\mathbf{x}, t) \leq e^{-\Sigma(x_1)(\cos \theta - M)},$$

$t \rightarrow \gamma(\mathbf{x}, t)$  est donc bien bornée.

Pour  $t$  donné, nous notons  $\Omega(t)$  le support de  $\gamma(\cdot, t)$ , on vérifie facilement que  $\Omega(t)$  est le disque de centre  $(Mt - h, 0)$  et de rayon  $t$ . Remarquons que le point de coordonnées polaires généralisées  $(r^{\max}(t), \theta_0)$  appartient à la frontière de  $\Omega_t$  (c'est-à-dire au front d'onde). En posant

$$x_1^{\max}(t) = \frac{r^{\max}(t) \cos \theta_0}{(1 - M^2)} = \max_{\Delta(\theta_0, t)} x_1,$$

il est facile de vérifier que

$$\gamma(r^{\max}(t), \theta_0, t) = e^{-\Sigma(x_1^{\max}(t))(\cos \theta_0 - M)},$$

puisque  $B(r^{\max}(t), \theta_0, t) = 0$ , et, puisque  $x_1^{\max}(t)$  croît linéairement avec  $t$  et que  $\Sigma$  croît avec  $x_1$  la conclusion de la preuve est immédiate.

**Le cas d'un terme source.** Pour simplifier la présentation des calculs nous posons

$$x_1^{\max}(t) = (1 - M^2)r^{\max}(t) \cos \theta - h \quad \text{et} \quad \Sigma_{\max}(t) = \Sigma(x_1^{\max}(t))$$

$(x_1^{\max}(t), \theta_0)$  est l'abscisse du point de coordonnées polaires généralisées  $(r^{\max}(t), \theta)$ . Le théorème 10.3.3 découle immédiatement du

**Lemme 10.3.1** Soit  $t > 0$ , soit  $\theta$  une direction instable, c'est-à-dire telle que  $\cos \theta < M$ , et soient  $\alpha, \beta$  tels que  $0 < \alpha < \pi/2$  et  $0 < \beta < M - \cos \theta$ . Nous définissons les trois fonctions :

$$r_1(t) = \frac{t}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\Sigma_{\max}^2(t) \sin^2 \theta} + 1 - M \cos \theta}}, \quad r_2(t) = \frac{t \cos \theta}{M \sin^2 \theta - \beta} \quad \text{et} \quad r_3(t) = \frac{t}{1 - M \cos \theta} - t_0.$$

Soit  $r(t) = \max(r_1(t), r_2(t), r_3(t))$ , alors la solution  $u$  du problème (10.3.7) est telle que :

$$u(r(t), \theta, t) \geq \operatorname{argch} \left( \frac{t}{r(t)} + M \cos \theta \right) \frac{e^{\beta \Sigma(x_1(t)) \cos \alpha}}{2\pi \sqrt{1 - M^2}},$$

avec  $x_1(t) = r(t) \cos \theta (1 - M^2)$

**Remarque 10.3.1** Il existe donc en fait une infinité de fonctions  $r(t, \alpha, \beta)$  vérifiant le théorème 10.3.3. Autrement dit, pour toute direction instable  $\theta$  il existe un ensemble de points instables de coordonnées polaires généralisées  $(r(t, \alpha, \beta), \theta)$ . Cet ensemble de points est en fait un segment dépendant du temps dont les extrémités sont les points de coordonnées polaires généralisées  $(r(t, 0, M - \cos \theta), \theta)$  et  $(r(t, \pi/2, 0), \theta)$ .

**Démonstration :**

Remarquons tout d'abord que les fonctions  $r_1(t)$  et  $r_3(t)$  sont toutes strictement majorées par  $r^{\max}(t) = t/(1 - M \cos \theta)$ . La fonction  $r_2(t)$  l'est également puisque

$$\beta < 1 - M \cos \theta \implies (1 - M \cos \theta) \cos \theta \leq M \sin^2 \theta - \beta$$

et donc

$$r_2(t) = \frac{t \cos \theta}{M \sin^2 \theta - \beta} \leq \frac{t}{1 - M \cos \theta}.$$

Le point de coordonnées polaires généralisées  $(r(t), \theta)$  est donc bien inclus strictement dans le support de  $G_i^\sigma(., t)$ .

Comme dans le cas acoustique, la fonction  $u$  se calcule en convoluant la fonction  $G_i^\sigma(., t)$  avec la fonction source  $f$  :

$$u(r, \theta, t) = \int_{(1-M \cos \theta)r}^t G_i^\sigma(r, \theta, t) f(t - \tau) d\tau, \text{ si } r < r^{\max}(t) \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Nous supposons donc que  $r < r^{\max}(t)$ . Comme la fonction  $f$  est nulle pour  $t > t_0$  on a

$$u(r, \theta, t) = \int_{(1-M \cos \theta)r}^t G_i^\sigma(r, \theta, \tau) d\tau \quad \text{si } t \leq (1 - M \cos \theta)r + t_0$$

et

$$u(r, \theta, t) = \int_{t-t_0}^t G_i^\sigma(r, \theta, \tau) d\tau \quad \text{si } t \geq (1 - M \cos \theta)r + t_0.$$

Si nous choisissons  $r$  tel que

$$r \geq r_3(t) = \frac{t}{1 - M \cos \theta} - t_0 \quad \text{alors} \quad t \leq (1 - M \cos \theta)r + t_0 \quad \text{et}$$

$$u(r, \theta, t) = \int_{(1-M \cos \theta)r}^t \frac{e^{-A(\mathbf{x}, \tau)} \cos [B(\mathbf{x}, \tau)]}{2\pi \sqrt{1 - M^2} \sqrt{(\tau + Mr \cos \theta)^2 - r^2}} d\tau.$$

Nous allons maintenant choisir  $r$  de telle sorte que

$$\cos B(\mathbf{x}, \tau) \geq \cos \alpha \text{ pour } \tau \text{ dans } [(1 - M \cos \theta)r ; t],$$

### 10.3 Analyse de l'instabilité des PML par la méthode de Cagniard-de Hoop

c'est-à-dire tel que  $|B(\mathbf{x}, \tau)| \leq \alpha$  :

$$\Sigma(x_1) |\sin \theta| \sqrt{\left(\frac{\tau}{r} + M \cos \theta\right)^2 - 1} \leq \alpha$$

ce qui se réécrit facilement :

$$\frac{\tau}{r} \leq \sqrt{\frac{\alpha^2}{\Sigma^2(x_1) \sin^2 \theta} + 1} - M \cos \theta,$$

comme  $\tau \in [(1 - M \cos \theta)r ; t]$  il suffit que

$$r \geq \frac{t}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\Sigma^2(x_1) \sin^2 \theta} + 1} - M \cos \theta}. \quad (10.3.14)$$

Remarquons maintenant, que, comme  $r < r^{\max}(t)$ , on a

$$x_1 < x_1^{\max}(t) \implies \Sigma(x_1) < \Sigma(x_1^{\max}(t)) = \Sigma_{\max} \quad \text{et}$$

$$r_1(t) = \frac{t}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\Sigma_{\max}^2 \sin^2 \theta} + 1} - M \cos \theta} > \frac{t}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\Sigma^2(x_1) \sin^2 \theta} + 1} - M \cos \theta}.$$

Pour que  $r$  vérifie l'inégalité 10.3.14 il suffit donc de choisir  $r \geq r_1(t)$ .

On a donc maintenant

$$u(r, \theta, t) \geq \frac{\cos \alpha}{2\pi \sqrt{1 - M^2}} \int_{(1 - M \cos \theta)r}^t \frac{e^{-A(\mathbf{x}, \tau)}}{\sqrt{(\tau + Mr \cos \theta)^2 - r^2}} d\tau.$$

Il nous reste maintenant à minorer

$$e^{-A(\mathbf{x}, \tau)} \quad \text{par} \quad e^{\Sigma(x_1)\beta} \quad \text{pour } \tau \text{ dans } [(1 - M \cos \theta)r ; t].$$

Il est équivalent de majorer  $A(\mathbf{x}, \tau)$  par  $-\Sigma(x_1)\beta$ , c'est-à-dire :

$$\Sigma(x_1) \left( \frac{\tau}{r} \cos \theta - M \sin^2 \theta \right) \leq -\Sigma(x_1)\beta,$$

comme  $\tau \in [(1 - M \cos \theta)r ; t]$  il suffit que

$$\Sigma(x_1) \left( \frac{t}{r} \cos \theta - M \sin^2 \theta \right) \leq -\Sigma(x_1)\beta,$$

ce qui se réécrit

$$r \geq \frac{t \cos \theta}{M \sin^2 \theta - \beta} = r_2(t).$$

En choisissant  $r = r(t) = \max(r_1(t), r_2(t), r_3(t)) < r^{\max}(t)$  on aura donc

$$u(r, \theta, t) \geq \frac{e^{\Sigma(x_1)\beta} \cos \alpha}{2\pi \sqrt{1 - M^2}} \int_{(1 - M \cos \theta)r}^t \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau + Mr \cos \theta)^2 - r^2}}.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que

$$\int_{(1-M \cos \theta)r}^t \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau + Mr \cos \theta)^2 - r^2}} = \operatorname{argch} \left( \frac{t}{r} + M \cos \theta \right).$$

Pour cela il suffit d'effectuer successivement les deux changements de variable

$$T = \frac{\tau}{r} + M \cos \theta \quad \text{et} \quad Q = \operatorname{argch}(T),$$

pour montrer que :

$$\int_{(1-M \cos \theta)r}^t \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau + Mr \cos \theta)^2 - r^2}} = \int_0^{\operatorname{argch}(\frac{t}{r} + M \cos \theta)} dQ = \operatorname{argch} \left( \frac{t}{r} + M \cos \theta \right).$$

■

## Annexes

### 10.a Démonstration du théorème 10.2.4

Si  $K_1$  ou  $K_2$  sont nuls le calcul des racines  $c$  de  $F_a(c, SK_1, K_2)$  est trivial, supposons donc que  $K_1 K_2 \neq 0$  et posons :

$$F_a^{\text{pml}}(c, \mathbf{K}, \varepsilon) = (ic + \varepsilon)^2 F_a(c, SK_1, K_2) = F_a(c(ic + \varepsilon), icK_1, K_2(ic + \varepsilon)). \quad (10.a.1)$$

Dans ce cas il est évident que, si  $\varepsilon$  est non nul,  $c = -i\varepsilon$  n'est pas racine de  $F_a^{\text{pml}}$ , donc toutes les racines de  $F_a^{\text{pml}}$  sont également racines de  $F_a$ , la réciproque est évidente.

Remarquons maintenant que :

$$F_a^{\text{pml}}(c, \mathbf{K}, 0) = F_a(ic^2, icK_1, icK_2) = c^2 F_a(c, K_1, K_2).$$

Soit  $\mathbf{K}$  fixé. Il est évident que  $F_a^{\text{pml}}(c, \mathbf{K}, 0)$  admet quatre racines :

- deux racines simples  $c_0^\pm$ , également racines de  $F_a(c, \mathbf{K})$ . On vérifie facilement que ces racines sont distinctes et non nulles puisque :

$$c_0^\pm = -MK_1 \pm 1.$$

- une racine double nulle.

Puisque  $c_0^+$  est une racine simple, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à  $F_a^{\text{pml}}(c(\varepsilon), \mathbf{K}, \varepsilon)$  :

Il existe  $U$ , voisinage de 0,  $V$ , voisinage de  $c_0^+$  et une fonction  $c^+ : V \mapsto U$  tels que  $\forall \varepsilon \in V$ ,  $c^+(\varepsilon)$  soit solution de  $F_a^{\text{pml}}(c^+(\varepsilon), \mathbf{K}, \varepsilon) = 0$ , de plus :

$$c^+(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} c_0^+ + \varepsilon \frac{dc^+}{d\varepsilon}(0) + o(\varepsilon).$$

On peut donc rechercher une des racines de  $F_a(c, SK_1, K_2)$  sous la forme :

$$c^+(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} c_0^+ + \varepsilon c_1^+ + o(\varepsilon). \quad (10.a.2)$$

En remarquant que

$$S \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} 1 + i \frac{\varepsilon}{c_0^+} + o(\varepsilon),$$

on obtient, par un développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$F_a(c_0^+, \mathbf{K}) + c_1^+ \varepsilon \frac{\partial F_a}{\partial c}(c_0^+, \mathbf{K}) + i\varepsilon \frac{K_1}{c_0^+} \frac{\partial F_a}{\partial K_1}(c_0^+, \mathbf{K}) + o(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} 0.$$

Par définition de  $c_0^+$ ,  $F_a(c_0^+, \mathbf{K}) = 0$  et  $c_1^+$  doit être tel que :

$$c_1^+ \frac{\partial F_a}{\partial c}(c_0^+, \mathbf{K}) + i \frac{K_1}{c_0^+} \frac{\partial F_a}{\partial K_1}(c_0^+, \mathbf{K}) = 0.$$

$$c_1^+ = -i \frac{K_1}{c_0^+} \left( \frac{\partial F_a(c_0^+, \mathbf{K})}{\partial c} \right)^{-1} \frac{\partial F_a(c_0^+, \mathbf{K})}{\partial K_1},$$

donc, d'après (10.1.28) :

$$c_1^+ = il_1 v_{g1}.$$

Finalement :

$$c^+ \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} c_0^+ + i\varepsilon l_1 v_{g1} + o(\varepsilon).$$

On démontre de même que

$$c^- \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} c_0^- + i\varepsilon l_1 v_{g1} + o(\varepsilon).$$

Pour étudier les deux racines (au voisinage de la racine double 0) on ne peut plus appliquer directement le théorème des fonctions implicites. Pour contourner cette difficulté on pose :

$$c = \tilde{c}(\varepsilon)\varepsilon.$$

Alors

$$F_a^{\text{pml}}(c, \mathbf{K}, \varepsilon) = F_a(\tilde{c}\varepsilon(i\tilde{c}\varepsilon + \varepsilon), i\tilde{c}\varepsilon K_1, K_2(i\tilde{c}\varepsilon + \varepsilon)) = \varepsilon^2 F_a(\tilde{c}\varepsilon(i\tilde{c} + 1), i\tilde{c}K_1, K_2(i\tilde{c} + 1)).$$

Posons maintenant

$$\tilde{F}(\tilde{c}, \mathbf{K}, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} F_a^{\text{pml}}(c, \mathbf{K}, \varepsilon) = F_a(\tilde{c}\varepsilon(i\tilde{c} + 1), i\tilde{c}K_1, K_2(i\tilde{c} + 1)).$$

Il est évident que, si  $\tilde{c}$  est racine de  $F(\tilde{c}, \mathbf{K}, \varepsilon)$ ,  $c$  est racine de  $F_a^{\text{pml}}(c, \mathbf{K}, \varepsilon)$ , donc de  $F_a(c, SK_1, K_2)$ .

Pour  $\varepsilon = 0$  on obtient :

$$\tilde{F}(\tilde{c}, \mathbf{K}, 0) = F_a(0, i\tilde{c}K_1, K_2(i\tilde{c} + 1)) = (1 - M^2)K_x^2 \tilde{c}^2 - (1 + i\tilde{c})^2 K_2^2.$$

On vérifie alors facilement que, pour  $\mathbf{K}$  donné, les racines de  $\tilde{F}(\tilde{c}, \mathbf{K}, 0)$  sont :

$$\tilde{c}_0^\pm = \frac{iK_2^2 \pm K_1 K_2 \sqrt{1 - M^2}}{1 - M^2 K_1^2}.$$

Ces deux racines étant distinctes, on peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites :

il existe  $U$ , voisinage de 0,  $V$ , voisinage de  $\tilde{c}_0^+$  et une fonction  $\tilde{c}^+ : V \mapsto U$  tels que  $\forall \varepsilon \in V$ ,  $\tilde{c}^+(\varepsilon)$  soit solution de  $\tilde{F}(\tilde{c}(\varepsilon), \mathbf{K}, \varepsilon) = 0$ , de plus :

$$\tilde{c}^+(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \tilde{c}_0^+ + o(1).$$

$F_a^{\text{pml}}(c, \mathbf{K}, \varepsilon)$  admet donc une racine à partie imaginaire positive de la forme :

$$c(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \tilde{c}_0^+ \varepsilon + o(\varepsilon),$$

et on montre de même qu'elle admet une racine à partie imaginaire positive de la forme :

$$c(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \tilde{c}_0^+ \varepsilon + o(\varepsilon).$$

## Chapitre 11

# Des PML stables pour l'acoustique en écoulement

Nous présentons ici une méthode permettant de stabiliser les PML dans le cas d'un écoulement uniforme horizontal. Nous nous intéresserons dans un premier temps à l'équation des ondes advectives et nous montrerons la stabilité de notre modèle grâce à la méthode de Cagniard-de Hoop. Nous étendrons alors ce modèle aux équations de l'aéroacoustique, puis nous discuterons de la possibilité de son adaptation aux cas d'écoulements obliques. Nous illustrerons chaque cas par des résultats numériques.

---

 Contenu
 

---

<b>Introduction . . . . .</b>	<b>227</b>
<b>11.1 L'équation des ondes advectives . . . . .</b>	<b>227</b>
11.1.1 Analyse par la courbe de lenteur. . . . .	227
11.1.2 Construction du modèle PML stabilisé . . . . .	228
11.1.3 Analyse du nouveau modèle par la méthode de Cagniard-de Hoop . . . . .	230
11.1.4 Illustration numérique. . . . .	234
<b>11.2 Extensions aux équations de l'aéroacoustique . . . . .</b>	<b>234</b>
<b>11.3 Résultats numériques . . . . .</b>	<b>238</b>
11.3.1 Le schéma numérique . . . . .	238
11.3.2 Tests de validation des PML . . . . .	240
11.3.2.1 Étude qualitative de l'efficacité des PML . . . . .	240
11.3.2.2 Étude quantitative des réflexions . . . . .	241
11.3.2.3 Le cas d'un écoulement avec un nombre de Mach proche de 1243	
<b>11.4 Le cas d'un écoulement oblique . . . . .</b>	<b>247</b>
11.4.1 Construction d'une PML verticale pour l'équation des ondes advectives	247
11.4.2 Application aux équations de l'aéroacoustique . . . . .	250

---

## Introduction

De nombreux auteurs ont proposé des solutions permettant de stabiliser les PML pour l'acoustique en écoulement. Hu [63] a introduit un filtre passe-bas entre la PML et le domaine de calcul pour éliminer les hautes fréquences responsables des instabilités. Tam, Auriault et Cambuli [80] ont proposé l'utilisation de coefficients d'absorption sélectifs, c'est-à-dire dépendant de la fréquence des ondes. Hesthaven [56] a introduit une couche de transition entre le domaine de calcul et la PML pour décélérer le flux jusqu'à l'annuler. Et Lions, Metral et Vacus [71] ont défini une nouvelle couche absorbante en régularisant les termes d'amortissement.

Toutes ces méthodes font perdre à la couche absorbante son caractère parfaitement adapté. De plus, bien que tout ces problèmes soient bien posés, leur stabilité n'a jamais été rigoureusement démontrée. Récemment, une avancée significative a été effectuée par Abarbanel, Gottlieb et Hesthaven qui ont proposé une PML fortement bien posée, ne reposant pas sur une décomposition des équations, en utilisant un changement de variable. Cependant leur PML était instable et ils ont dû ajouter des termes supplémentaires pour la stabiliser, perdant ainsi à nouveau le caractère parfaitement adapté. Hu [64] en utilisant le même changement de variable est ensuite parvenu à obtenir une couche absorbante stable et parfaitement adaptée. La PML que nous allons présenter (que nous avons introduite dans [34, 32]) est très proche de cette dernière, bien que les deux modèles aient été obtenus de manière totalement indépendante. Hagström et Nazarov [52] ont également abouti à un modèle similaire mais en utilisant une méthode relativement différente.

## 11.1 L'équation des ondes advectives

Nous nous intéressons dans un premier temps à la stabilisation des PML pour l'équation des ondes advectives (10.1.20a), dont la courbe de lenteur est l'ellipse représentée sur la figure 10.1 :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2M \frac{\partial p}{\partial t \partial x_1} - (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = 0. \quad (11.1.1)$$

Comme son nom l'indique cette équation régit uniquement la propagation des ondes advectives et ne prend pas en compte les ondes de vorticité.

### 11.1.1 Analyse par la courbe de lenteur.

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les instabilités générées par les PML classiques peuvent être expliquées par le fait que le centre de l'ellipse représentant la courbe de lenteur n'est pas l'origine des axes du plan des lenteurs. Une idée pour stabiliser les PML consiste donc à utiliser un changement de variable translatant cette ellipse de  $M/(1 - M^2)$  vers la gauche, de telle sorte que le centre de la nouvelle ellipse (en magenta sur la figure 11.1) coïncide avec l'origine des axes du plan des lenteurs.

Ce changement de variable doit donc être tel que :

$$\frac{k_1^*}{\omega^*} = \frac{k_1}{\omega} - \frac{M}{1 - M^2}.$$

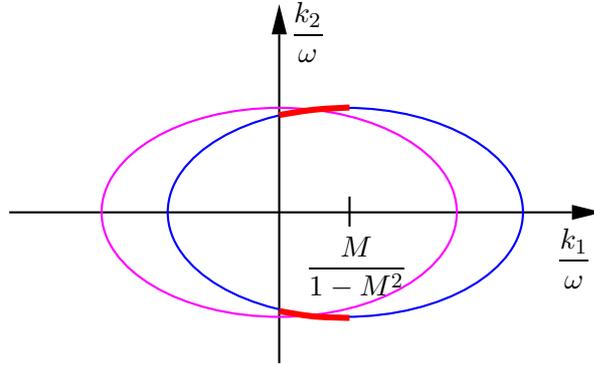


FIG. 11.1: La courbe de lenteur avant (en bleu) et après (en magenta) le changement de variable

Pour des raisons que nous expliquerons ci-dessous, nous ne souhaitons pas que ce changement de variable modifie  $\omega$ , nous choisissons donc  $\omega^* = \omega$  et

$$k_1^* = k_1 - \frac{M}{1 - M^2} \omega.$$

Ce changement de variable peut également s'exprimer avec les coordonnées spatio-temporelles :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{M}{1 - M^2} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1^*},$$

ce qui est obtenu en posant

$$x_1^* = x_1, \quad x_2^* = x_2, \quad \text{et} \quad t^* = t - \frac{M}{1 - M^2} x_1. \quad (11.1.2)$$

Remarquons que ce changement de variable ne modifie pas les coordonnées spatiales et donc les coordonnées de la frontière Domaine de calcul/PML. C'est pour obtenir cette propriété que nous avons choisi  $\omega^* = \omega$ .

### 11.1.2 Construction du modèle PML stabilisé

Nous montrons ici comment obtenir une PML de largeur infinie dans le demi-plan droit  $\mathbb{R}_+^2$  ( $x_1 > 0$ ).

Les étapes de la méthode sont

1. Réécrire le problème comme un problème de transmission entre  $\mathbb{R}_-^2$  et  $\mathbb{R}_+^2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2M \frac{\partial p}{\partial t \partial x_1} - (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = 0, \quad x < 0, \end{array} \right. \quad (11.1.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2M \frac{\partial p}{\partial t \partial x_1} - (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = 0, \quad x > 0, \end{array} \right. \quad (11.1.3b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p(0^-, x_2, t) = p(0^+, x_2, t), \end{array} \right. \quad (11.1.3c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x_1}(0^-, y, t) = \frac{\partial p}{\partial x_1}(0^+, y, t). \end{array} \right. \quad (11.1.3d)$$

Les conditions (11.1.3c) et (11.1.3d) sont les conditions de transmission physiques (continuité de  $p$  et de sa dérivée normale), elles assurent que les ondes passent du milieu gauche au milieu droit sans être réfléchies.

2. Appliquer le changement de variable

$$p^*(x_1, x_2, t) = p(x_1, x_2, t - \frac{M}{1 - M^2} x_1),$$

dans le milieu droit (la PML) pour obtenir le nouveau système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2M \frac{\partial p}{\partial t \partial x_1} - (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = 0, \quad x_1 < 0, \end{array} \right. \quad (11.1.4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 - M^2} \frac{\partial^2 p^*}{\partial t^2} - (1 - M^2) \frac{\partial^2 p^*}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 p^*}{\partial x_2^2} = 0 \quad x_1 > 0, \end{array} \right. \quad (11.1.4b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p(0, x_2, t) = p^*(0, x_2, t), \end{array} \right. \quad (11.1.4c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x_1}(0, x_2, t) = \frac{\partial p^*}{\partial x_1}(0, x_2, t) + \frac{M}{1 - M^2} \frac{\partial p^*}{\partial t}(0, x_2, t). \end{array} \right. \quad (11.1.4d)$$

Remarquons que le changement de variable a transformé l'équation des ondes advectives en une équation très proche de l'équation des ondes classiques.

Nous définissons la fonction  $\rho(\mathbf{x})$  par  $\rho(\mathbf{x}) = 1$  si  $x_1 < 0$  et  $\rho(\mathbf{x}) = 1/(1 - M^2)$  sinon. Le caractère bien posé du nouveau problème est garanti par le

**Théorème 11.1.1** *L'énergie suivante est conservée :*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \rho(\mathbf{x}) \left| \frac{\partial p}{\partial t} \right|^2 + (1 - M^2) \left| \frac{\partial p}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial p}{\partial x_2} \right|^2 \right].$$

**Démonstration :**

Multiplions respectivement (11.1.4a) et (11.1.4b) par  $\partial p / \partial t$  et  $\partial p^* / \partial t$ . Après avoir

intégré ces deux équations sur leurs domaines de définition respectifs ( $\mathbb{R}_-^2$  et  $\mathbb{R}_+^2$ ) et les avoir additionnées, on vérifie que :

$$\frac{dE}{dt}(t) + \int_{\mathbb{R}_-^2} 2M \frac{\partial p}{\partial t \partial x_1} \frac{\partial p}{\partial t} + \int_{\Gamma} (1 - M^2) \left( \frac{\partial p^*}{\partial x_1} \frac{\partial p^*}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial p^*}{\partial x_2} \frac{\partial p^*}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x_2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0,$$

où  $\Gamma$  est la droite d'équation  $x_1 = 0$ . En utilisant la continuité de  $p$  (et par conséquent de ses dérivées par rapport à  $x_2$  et  $t$ ) il est évident que la dernière intégrale de cette équation est nulle. De plus :

$$\int_{\mathbb{R}_-^2} M \frac{\partial p}{\partial t \partial x_1} \frac{\partial p}{\partial t} = \int_{\Gamma} M \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial t} - \int_{\mathbb{R}_-^2} M \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial t \partial x_1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_-^2} 2M \frac{\partial p}{\partial t \partial x_1} \frac{\partial p}{\partial t} + \int_{\Gamma} (1 - M^2) \left( \frac{\partial p^*}{\partial x_1} \frac{\partial p^*}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial t} \left[ M \frac{\partial p}{\partial t} + (1 - M^2) \left( \frac{\partial p^*}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Nous en déduisons, en utilisant la deuxième condition de transmission (11.1.4d) et la continuité de la dérivée temporelle de  $p$  que cette intégrale est nulle :

$$\frac{dE}{dt}(t) = 0.$$

■

3. Il ne reste plus qu'à remplacer formellement les dérivées par rapport à  $x_1$  par l'opérateur  $D_{x_1}^\sigma$  dans la PML :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2M \frac{\partial p}{\partial t \partial x_1} - (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = 0, & x_1 < 0, \quad (11.1.5a) \\ \frac{1}{1 - M^2} \frac{\partial^2 p^*}{\partial t^2} - (1 - M^2) (D_{x_1}^\sigma)^2 p^* - \frac{\partial^2 p^*}{\partial x_2^2} = 0 & x_1 > 0, \quad (11.1.5b) \\ p(0, x_2, t) = p^*(0, x_2, t), & (11.1.5c) \\ \frac{\partial p}{\partial x_1}(0, x_2, t) = D_{x_1}^\sigma p^*(0, x_2, t) + \frac{M}{1 - M^2} \frac{\partial p^*}{\partial t}(0, x_2, t). & (11.1.5d) \end{cases}$$

### 11.1.3 Analyse du nouveau modèle par la méthode de Cagniard-de Hoop

Le nouveau modèle vérifie la condition nécessaire de stabilité présentée au chapitre précédent. Cependant rien ne garantit sa stabilité, notamment pour les basses fréquences. Il est donc

nécessaire de calculer la solution analytique du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2M \frac{\partial p}{\partial t \partial x_1} - (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \delta(t), \quad x_1 < 0, \quad (11.1.6a) \\ \frac{1}{1 - M^2} \frac{\partial^2 p^*}{\partial t^2} - (1 - M^2) (D_{x_1}^\sigma)^2 p^* - \frac{\partial^2 p^*}{\partial x_2^2} = 0 \quad x_1 > 0, \quad (11.1.6b) \\ p(0, x_2, t) = p^*(0, x_2, t), \quad (11.1.6c) \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} = D_{x_1}^\sigma p^*(0, x_2, t) + \frac{M}{1 - M^2} \frac{\partial p^*}{\partial t}. \quad (11.1.6d) \end{array} \right.$$

pour démontrer rigoureusement la stabilité de ce modèle.

Nous utiliserons à nouveau les coordonnées polaires généralisées  $r(\mathbf{x})$  et  $\theta(\mathbf{x})$  :

$$r^2(\mathbf{x}) = \frac{(x_1 + h)^2}{(1 - M^2)^2} + \frac{x_2^2}{1 - M^2}, \quad \cos \theta(\mathbf{x}) = \frac{x_1 + h}{r(1 - M^2)} \quad \text{et} \quad \sin \theta(\mathbf{x}) = \frac{x_2}{r\sqrt{1 - M^2}}.$$

Nous définissons cette fois  $A(\mathbf{x}, t)$  et  $B(\mathbf{x}, t)$  par :

$$A(\mathbf{x}, t) = \Sigma(x_1) \left( t + \frac{Mh}{1 - M^2} \right) \frac{\cos \theta}{r} > 0 \quad \text{et} \quad B(\mathbf{x}, t) = \Sigma(x_1) \frac{\sin \theta}{r} \sqrt{\left( t + \frac{Mh}{1 - M^2} \right)^2 - 1}.$$

**Théorème 11.1.2** *L'expression analytique de la solution  $(p, p^*)(\mathbf{x}, t) = (G_i, G_i^*)(\mathbf{x}, t)$  du problème (11.1.6) est donnée par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} G_i(\mathbf{x}, t) = \frac{H(t - r(1 - M \cos \theta))}{2\pi\sqrt{1 - M^2} \sqrt{(t + Mr \cos \theta)^2 - r^2}}, \quad x_1 \leq 0 \\ G_i^*(\mathbf{x}, t) = \frac{H\left(t + \frac{Mh}{1 - M^2} - r\right)}{2\pi\sqrt{1 - M^2} \sqrt{\left(t + \frac{Mh}{1 - M^2}\right)^2 - r^2}} e^{-A(\mathbf{x}, t)} \cos[B(\mathbf{x}, t)], \quad x_1 > 0. \end{array} \right. \quad (11.1.7)$$

Cette expression est similaire à celle exposée au chapitre précédent. La différence est que la fonction  $A$  est ici toujours positive, ce qui garantit la stabilité de la couche absorbante.

**Démonstration :**

Après avoir appliqué la transformation de Laplace en temps et la transformation de Fourier

dans la direction  $x_2$  nous obtenons le système différentiel ordinaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (s^2 + k^2)\widehat{p} + 2sM \frac{d\widehat{p}}{dx_1} - (1 - M^2) \frac{d^2\widehat{p}}{dx_1^2} = \delta(x_1 + h), \quad x_1 < 0, \quad (11.1.8a) \\ \left( \frac{s^2}{1 - M^2} + k^2 \right) \widehat{p}^* - (1 - M^2) \frac{s}{s + \sigma} \frac{d}{dx_1} \left( \frac{s}{s + \sigma} \frac{d\widehat{p}}{dx_1} \right) = 0 \quad x_1 > 0, \quad (11.1.8b) \\ \widehat{p}(0) = \widehat{p}^*(0), \quad (11.1.8c) \\ \frac{d\widehat{p}}{dx_1}(0) = \frac{s}{s + \sigma} \frac{d\widehat{p}^*}{dx_1}(0) + \frac{Ms}{1 - M^2} \widehat{p}^*(0). \quad (11.1.8d) \end{array} \right.$$

En posant  $\widehat{p} = \widehat{G}_i + \widehat{G}_r$ , avec

$$\widehat{G}_i(x_1, k, s) = \frac{e^{\frac{s(x_1+h)}{1-M^2}\lambda(x_1)}}{2\sqrt{s^2 + (1 - M^2)k^2}},$$

et  $\widehat{p}^* = \widehat{G}_i^*$ , nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} (s^2 + k^2)\widehat{G}_r + 2sM \frac{d\widehat{G}_r}{dx_1} - (1 - M^2) \frac{d^2\widehat{G}_r}{dx_1^2} = 0, \quad x_1 < 0, \quad (11.1.9a) \\ \left( \frac{s^2}{1 - M^2} + k^2 \right) \widehat{G}_i^* - (1 - M^2) \frac{s}{s + \sigma} \frac{d}{dx_1} \left( \frac{s}{s + \sigma} \frac{d\widehat{G}_i}{dx_1} \right) = 0 \quad x_1 > 0, \quad (11.1.9b) \\ \widehat{G}_i(0) + \widehat{G}_r(0) = \widehat{G}_i^*(0), \quad (11.1.9c) \\ \frac{d(\widehat{G}_i + \widehat{G}_r)}{dx_1}(0) = \frac{s}{s + \sigma} \frac{d\widehat{G}_i^*}{dx_1}(0) + \frac{Ms}{1 - M^2} \widehat{G}_i^*(0). \quad (11.1.9d) \end{array} \right.$$

On vérifie que  $\widehat{G}_r$  et  $\widehat{G}_i^*$  sont de la forme

$$\widehat{G}_r = \mathcal{A}(k, s) e^{\frac{Ms + \sqrt{s^2 + (1 - M^2)k^2}}{1 - M^2} x_1} \quad \text{et} \quad \widehat{G}_i^* = \mathcal{B}(k, s) e^{\frac{\left( (x_1 + h + \frac{\Sigma(x_1)}{s}) \sqrt{s^2 + (1 - M^2)k^2} \right)}{1 - M^2}}.$$

En utilisant les deux conditions de transmission, on montre alors que :

$$\widehat{G}_r = 0 \quad \text{et} \quad \widehat{G}_i^*(x_1, k, s) = \frac{e^{\frac{1}{1 - M^2} \left( shM - \left( x_1 + h + \frac{\Sigma(x_1)}{s} \right) \sqrt{s^2 + (1 - M^2)k^2} \right)}}{2\sqrt{s^2 + (1 - M^2)k^2}}.$$

Comme  $\widehat{G}_i$  est à nouveau la transformation de Fourier-Laplace de l'équation des ondes advectives classique il est évident que la nouvelle PML ne génère pas d'ondes réfléchies.

Nous appliquons maintenant la transformation de Fourier inverse suivant  $x_2$  à  $\widehat{G}_i^*(x_1, k, s)$ , pour obtenir :

$$\widetilde{G}_i^*(x_1, x_2, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{1 - M^2} \left( shM - \left( x_1 + h + \frac{\Sigma(x_1)}{s} \right) \sqrt{s^2 + (1 - M^2)k^2} \right)}}{2\sqrt{s^2 + (1 - M^2)k^2}} e^{-ikx_2} dk. \quad (11.1.10)$$

Ensuite, grâce au changement de variable  $k = \frac{ps}{\sqrt{1-M^2}}$  nous établissons :

$$\tilde{G}_i^*(x_1, x_2, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\Sigma(x_1) \frac{\sqrt{1+p^2}}{1-M^2}} e^{s \left[ \frac{(Mh-(x_1+h)\sqrt{1+p^2})}{1-M^2} - ip \frac{x_2}{\sqrt{1-M^2}} \right]}}{\sqrt{(1-M^2)(1+p^2)}} dp. \quad (11.1.11)$$

Nous devons donc maintenant chercher un chemin du plan complexe tel que :

$$\frac{Mh - (x_1 + h)\sqrt{1+p^2}}{1-M^2} - ip \frac{x_2}{\sqrt{1-M^2}} = -t, \quad \text{pour } t > 0. \quad (11.1.12)$$

Pour  $t \geq t_0 = r - \frac{Mh}{1-M^2} > 0$  nous définissons les fonctions  $\gamma^\pm(t)$  par

$$\gamma^\pm(t) \equiv -i \left( \frac{t}{r} + \frac{Mh}{r(1-M^2)} \right) \sin \theta \pm \cos \theta \sqrt{\left( \frac{t}{r} + \frac{Mh}{r(1-M^2)} \right)^2 - 1},$$

et nous introduisons le contour de Cagniard-de Hoop  $\Gamma$  défini par :

$$\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-, \quad \Gamma^\pm = \{ p = \gamma^\pm(t) \}. \quad (11.1.13)$$

Ce contour est encore une fois très semblable à celui utilisé au chapitre 9 pour les PML en acoustique (il suffit de poser  $T = t + Mh/(1-M^2)$  pour s'en rendre compte) : en particulier il n'intersecte pas les coupures de la fonction  $(1+p^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Nous vérifions donc sans difficulté que :

$$\tilde{G}_i^*(x_1, x_2, s) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{-\Sigma(x_1) \frac{\sqrt{1+p^2}}{1-M^2}} e^{s \left[ \frac{(Mh-(x_1+h)\sqrt{1+p^2})}{1-M^2} - ip \frac{x_2}{\sqrt{1-M^2}} \right]}}{\sqrt{(1-M^2)(1+p^2)}} dp.$$

Nous utilisons les paramétrisations  $p = \gamma^+(t)$  et  $p = \gamma^-(t)$ , pour  $t \geq t_0$ , respectivement le long de  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  et nous remarquons que :

$$\left| \begin{array}{l} \bullet \frac{Mh - (x_1 + h)\sqrt{1+p^2}}{1-M^2} - ip \frac{x_2}{\sqrt{1-M^2}} = -t, \quad (\text{par construction}), \\ \bullet \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{dt}{\left[ \left( t + \frac{Mh}{1-M^2} \right)^2 - r^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{sur } \Gamma^\pm, \\ \bullet -\Sigma(x_1) \frac{\sqrt{1+p^2}}{1-M^2} = -A(\mathbf{x}, t) \mp iB(\mathbf{x}, t), \quad \text{sur } \Gamma^\pm \end{array} \right.$$

Alors, puisque  $t$  varie de  $+\infty$  à  $t_0$  sur  $\Gamma^+$  et de  $t_0$  à  $+\infty$  sur  $\Gamma^-$  :

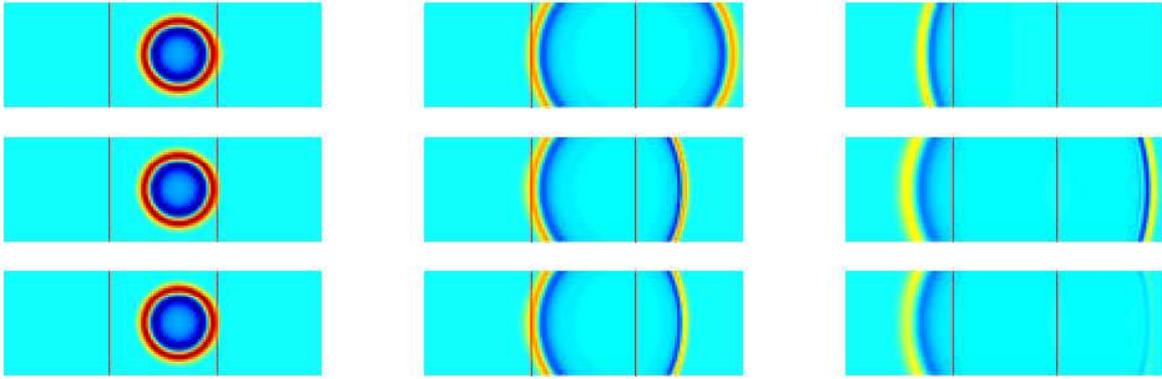
$$\tilde{G}_i^*(x_1, x_2, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^{+\infty} \frac{e^{-A(\mathbf{x}, t)} \cos(B(\mathbf{x}, t))}{\sqrt{1-M^2} \sqrt{\left( t + \frac{Mh}{1-M^2} \right)^2 - r^2}} e^{-st} dt.$$

La conclusion est alors immédiate. ■

### 11.1.4 Illustration numérique.

La figure 11.1.4 représente une comparaison entre trois expériences :

- la première (en haut) représente la propagation d'une onde advective dans un grand domaine de calcul :
- dans la seconde (au centre) on a effectué le changement de variable (11.1.2) à gauche et à droite ;
- dans la dernière (en bas) on a ajouté l'amortissement :



En comparant les deux premières expériences on remarque que le changement de variable (11.1.2) a ralenti l'onde dans la partie de droite et l'a accéléré à gauche. En fait, comme nous l'avons dit, ce changement de variable "annule" l'écoulement. La dernière expérience montre que les ondes sont correctement absorbées dans la PML.

## 11.2 Extensions aux équations de l'aéroacoustique

Compte tenu de la forme de la courbe de lenteur associée aux ondes de vorticité (une droite perpendiculaire à l'axe  $k_1/\omega$  — en bleu sur la figure 11.2), nous pouvons raisonnablement penser que le changement de variable (11.1.2), qui translate les courbes de lenteur de  $M/(1 - M^2)$  vers la droite (en magenta sur la figure 11.2), n'engendre pas d'instabilités supplémentaires.

Comme pour l'équation des ondes advectives, les trois étapes de la construction d'une PML stable sont

1.  crire un problème de transmission entre  $x_1 < 0$  et  $x_1 > 0$  avec les conditions de transmission

$$p(0^-, x_2, t) = p(0^+, x_2, t), \quad u(0^-, x_2, t) = u(0^+, x_2, t), \quad \text{et} \quad v(0^-, x_2, t) = v(0^+, x_2, t).$$

2. Appliquer le changement de variable (11.1.2) pour obtenir le nouveau système dans le

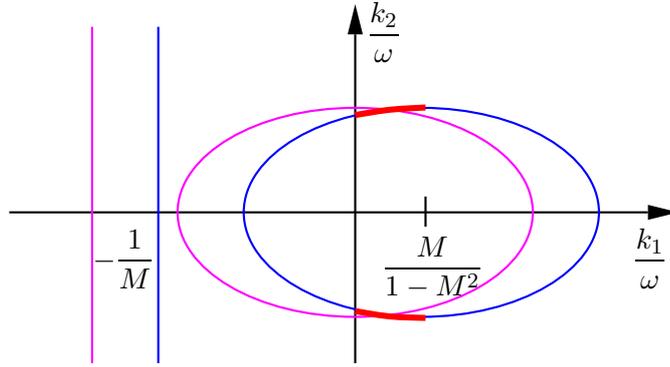


FIG. 11.2: La courbe de lenteur avant (en bleu) et après (en magenta) le changement de variable

domaine  $x_1 > 0$  :

$$\begin{cases} \frac{1}{1-M^2} \frac{\partial p^*}{\partial t} + M \frac{\partial p^*}{\partial x_1} + \frac{\partial u^*}{\partial x_1} + \frac{\partial v^*}{\partial x_2} - \frac{M}{1-M^2} \frac{\partial u^*}{\partial t} = 0, & (11.2.1a) \\ \frac{1}{1-M^2} \frac{\partial u^*}{\partial t} + M \frac{\partial u^*}{\partial x_1} + \frac{\partial p^*}{\partial x_1} - \frac{M}{1-M^2} \frac{\partial p^*}{\partial t} = 0, & (11.2.1b) \\ \frac{1}{1-M^2} \frac{\partial v^*}{\partial t} + M \frac{\partial v^*}{\partial x_1} + \frac{\partial p^*}{\partial x_2} = 0. & (11.2.1c) \end{cases}$$

Les conditions de transmission deviennent alors :

$$p^*(0, x_2, t) = p(0, x_2, t), \quad u^*(0, x_2, t) = u(0, x_2, t), \quad \text{et} \quad v^*(0, x_2, t) = v(0, x_2, t).$$

Le système (11.2.1) peut se réécrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial p^*}{\partial t} + 2M \frac{\partial p^*}{\partial x_1} + (1+M^2) \frac{\partial u^*}{\partial x_1} + \frac{\partial v^*}{\partial x_2} = 0, & (11.2.2a) \\ \frac{\partial u^*}{\partial t} + 2M \frac{\partial u^*}{\partial x_1} + (1+M^2) \frac{\partial p^*}{\partial x_1} + M \frac{\partial v^*}{\partial x_2} = 0, & (11.2.2b) \\ \frac{1}{1-M^2} \frac{\partial v^*}{\partial t} + M \frac{\partial v^*}{\partial x_1} + \frac{\partial p^*}{\partial x_2} = 0. & (11.2.2c) \end{cases}$$

3. Appliquer à (11.2.2) le modèle PML classique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_1^*}{\partial t} + \sigma(x_1)p_1^* + 2M \frac{\partial p^*}{\partial x_1} + (1 + M^2) \frac{\partial u^*}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial p_2^*}{\partial t} + \sigma(x_2)p_2^* + \frac{\partial v^*}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial t} + \sigma(x_1)u_1^* + 2M \frac{\partial u^*}{\partial x_1} + (1 + M^2) \frac{\partial p^*}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial u_2^*}{\partial t} + \sigma(x_2)u_2^* + M \frac{\partial v^*}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{1}{1 - M^2} \frac{\partial v_1^*}{\partial t} + \frac{\sigma(x_1)}{1 - M^2} v_1^* + M \frac{\partial v^*}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{1}{1 - M^2} \frac{\partial v_2^*}{\partial t} + \frac{\sigma(x_2)}{1 - M^2} v_2^* + \frac{\partial p^*}{\partial x_2} = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (11.2.3a) \\ (11.2.3b) \\ (11.2.3c) \\ (11.2.3d) \\ (11.2.3e) \\ (11.2.3f) \end{array}$$

avec  $p^* = p_1^* + p_2^*$ ,  $u^* = u_1^* + u_2^*$  et  $v^* = v_1^* + v_2^*$ .

Ces opérations peuvent être simplifiées en posant  $s = p + u$  et  $d = p - u$ . En effet, les équations de l'aéroacoustique se réécrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s}{\partial t} + (1 + M) \frac{\partial s}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial d}{\partial t} - (1 - M) \frac{\partial d}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + M \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s}{\partial x_2} + \frac{\partial d}{\partial x_2} \right) = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (11.2.4a) \\ (11.2.4b) \\ (11.2.4c) \end{array}$$

et les trois étapes de la construction d'une PML stable deviennent :

1. Écrire un problème de transmission entre  $x_1 < 0$  et  $x_1 > 0$  avec les conditions de transmission

$$s(0^-, x_2, t) = s(0^+, x_2, t), \quad d(0^-, x_2, t) = d(0^+, x_2, t), \quad \text{et} \quad v(0^-, x_2, t) = v(0^+, x_2, t).$$

2. Appliquer le changement de variable (11.1.2) pour obtenir le nouveau système dans le domaine  $x_1 > 0$  :<sup>(37)</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 - M} \frac{\partial s^*}{\partial t} + (1 + M) \frac{\partial s^*}{\partial x_1} + \frac{\partial v^*}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{1}{1 + M} \frac{\partial d^*}{\partial t} - (1 - M) \frac{\partial d^*}{\partial x_1} + \frac{\partial v^*}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{1}{1 - M^2} \frac{\partial v^*}{\partial t} + M \frac{\partial v^*}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s^*}{\partial x_2} + \frac{\partial d^*}{\partial x_2} \right) = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (11.2.5a) \\ (11.2.5b) \\ (11.2.5c) \end{array}$$

---

37. Remarquons qu'avec les inconnues  $s, d, v$  le changement de variable modifie uniquement les coefficients devant les dérivées en temps.

Les conditions de transmission deviennent alors :

$$s^*(0, x_2, t) = s(0, x_2, t), \quad d^*(0, x_2, t) = d(0, x_2, t), \quad \text{et} \quad v^*(0, x_2, t) = v(0, x_2, t).$$

3. Appliquer à (11.2.5) le modèle PML classique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-M} \frac{\partial s_1^*}{\partial t} + \frac{\sigma(x_1)}{1-M} s_1^* + (1+M) \frac{\partial s^*}{\partial x_1} = 0, \end{array} \right. \quad (11.2.6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-M} \frac{\partial s_2^*}{\partial t} + \frac{\sigma(x_2)}{1-M} s_2^* + \frac{\partial v^*}{\partial x_2} = 0, \end{array} \right. \quad (11.2.6b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1+M} \frac{\partial d_1^*}{\partial t} + \frac{\sigma(x_1)}{1+M} d_1^* - (1-M) \frac{\partial d^*}{\partial x_1} = 0, \end{array} \right. \quad (11.2.6c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1+M} \frac{\partial d_2^*}{\partial t} + \frac{\sigma(x_2)}{1+M} d_2^* + \frac{\partial v^*}{\partial x_2} = 0, \end{array} \right. \quad (11.2.6d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-M^2} \frac{\partial v_1^*}{\partial t} + \frac{\sigma(x_1)}{1-M^2} v_1^* + M \frac{\partial v^*}{\partial x_1} = 0, \end{array} \right. \quad (11.2.6e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-M^2} \frac{\partial v_2^*}{\partial t} + \frac{\sigma(x_2)}{1-M^2} v_2^* + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s^*}{\partial x_2} + \frac{\partial d^*}{\partial x_2} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (11.2.6f)$$

avec  $s^* = s_1^* + s_2^*$ ,  $d^* = d_1^* + d_2^*$  et  $v^* = v_1^* + v_2^*$ .

**Remarque 11.2.1** *Le caractère bien posé du problème de transmission (11.2.5) (et donc du problème (11.2.1)) obtenu à la deuxième étape est garanti par le théorème suivant.*

**Théorème 11.2.1** *L'énergie suivante est conservée :*

$$E_2(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^-} [s^2 + d^2 + 2v^2] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} \left[ \frac{s^{*2}}{1-M} + \frac{d^{*2}}{1+M} + 2 \frac{v^{*2}}{1-M^2} \right].$$

**Démonstration :**

Multiplions respectivement les équations (11.2.4a), (11.2.4b) et (11.2.4c) par  $s$ ,  $d$  et  $v$  et (11.2.5a), (11.2.5b) et (11.2.5c) par  $s^*$ ,  $d^*$  et  $v^*$ . Après avoir intégré toutes ces équations sur leurs domaines de définition respectifs, nous effectuons une combinaison linéaire appropriée<sup>(38)</sup> pour montrer que :

$$\begin{aligned} \frac{dE_2}{dt}(t) + \int_{\mathbb{R}^-} \left[ (1+M) \frac{\partial s}{\partial x_1} s - (1-M) \frac{\partial d}{\partial x_1} d + M \frac{\partial v}{\partial x_1} v \right] \\ + \int_{\mathbb{R}^+} \left[ (1+M) \frac{\partial s^*}{\partial x_1} s^* - (1-M) \frac{\partial d^*}{\partial x_1} d^* + M \frac{\partial v^*}{\partial x_1} v^* \right] = 0 \end{aligned}$$

Remarquons alors que, (par exemple pour  $s$ )

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^-} \frac{\partial s}{\partial x_1} s + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial s^*}{\partial x_1} s^* = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (s^{*2} - s^2) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^-} s \frac{\partial s}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} s^* \frac{\partial s^*}{\partial x_1},$$

38. En l'occurrence (11.2.4a)+(11.2.4b) +2(11.2.4c)+(11.2.5a)+(11.2.5b)+2(11.2.5c).

alors, en utilisant la continuité de  $s$  nous obtenons :

$$\int_{\mathbb{R}^-} \frac{\partial s}{\partial x_1} s + \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial s^*}{\partial x_1} s^* = 0.$$

Puisque cette remarque vaut également pour  $d$  et  $v$  on vérifie facilement que :

$$\frac{dE_2}{dt}(t) = 0.$$

■

### Remarque 11.2.2 Comparaison avec les PML de Hu.

Les PML récemment proposées par Hu sont très proches de celles que nous venons de présenter. Les deux modèles reposent en effet sur le même changement de variable. La différence est que Hu applique ce changement de variable à la fois dans le domaine de calcul et dans la PML alors que nous ne l'appliquons que dans la PML. Il n'a donc pas besoin d'imposer de conditions de transmission sur l'interface. Cependant, après avoir construit son modèle PML, il doit appliquer un changement de variable inverse sur tout le domaine pour retrouver les variables originales et cette inversion complique légèrement les équations de la PML.

## 11.3 Résultats numériques

### 11.3.1 Le schéma numérique

Nous avons implémenté un code numérique de différences finies pour tester l'efficacité de notre modèle PML. Nous avons ici privilégié la facilité d'implémentation à la précision du schéma : le schéma utilisé n'est donc que d'ordre 2 en temps et en espace et est peu précis :

- on utilise un schéma saute-mouton classique pour la discrétisation des dérivées temporelles ;
- pour la discrétisation en espace, les inconnues  $s$  et  $d$  (ou  $u$  et  $p$ ) sont calculées sur la même grille et  $v$  est calculée sur une grille décalée verticalement d'un demi-pas d'espace (voir figure 11.3).

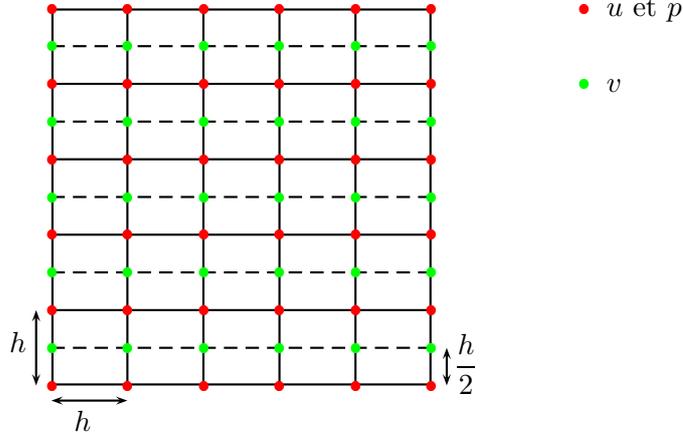
Le schéma numérique s'écrit alors, dans le domaine de calcul (nous supposons que le domaine de calcul est composé horizontalement de  $N_x + 1$  points et verticalement de  $N_y + 1$  points) :

$$\begin{cases} \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + (1 + M) \frac{S_{i+1,j}^n - S_{i-1,j}^n}{2h} + \frac{V_{i,j}^n - V_{i,j-1}^n}{h} = 0, & (11.3.1a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{D_{i,j}^{n+1} - D_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + (1 - M) \frac{D_{i+1,j}^n - D_{i-1,j}^n}{2h} + \frac{V_{i,j}^n - V_{i,j-1}^n}{h} = 0, & (11.3.1b) \end{cases}$$

pour  $2 \leq i \leq N_x$  et  $2 \leq j \leq N_y$ , et

$$\frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + M \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2h} + \frac{1}{2} \frac{S_{i,j+1}^n - S_{i,j}^n}{h} + \frac{1}{2} \frac{D_{i,j+1}^n - D_{i,j}^n}{h} = 0, \quad (.c)$$


 FIG. 11.3: Les grilles de calcul de  $u$ ,  $v$  et  $p$ 

pour  $2 \leq i \leq N_x$  et  $1 \leq j \leq N_y - 1$ .

Dans la PML (par exemple dans la couche de droite) nous aurons, si la couche est composée horizontalement de  $N_c + 1$  points :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-M} \frac{S_{d1i,j}^{n+1} - S_{d1i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\sigma_i}{1-M} \frac{S_{d1i,j}^{n+1} + S_{d1i,j}^{n-1}}{2} + (1+M) \frac{S_{di+1,j}^n - S_{di-1,j}^n}{2h} = 0, \quad (11.3.2a) \\ \frac{1}{1-M} \frac{S_{d2i,j}^{n+1} - S_{d2i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{V_{di,j}^n - V_{di,j-1}^n}{h} = 0, \quad (11.3.2b) \\ \frac{1}{1+M} \frac{D_{d1i,j}^{n+1} - D_{d1i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\sigma_i}{1+M} \frac{D_{d1i,j}^{n+1} + D_{d1i,j}^{n-1}}{2} + (1+M) \frac{D_{di+1,j}^n - D_{di-1,j}^n}{2h} = 0, \quad (11.3.2c) \\ \frac{1}{1+M} \frac{D_{d2i,j}^{n+1} - D_{d2i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{V_{di,j}^n - V_{di,j-1}^n}{h} = 0, \quad (11.3.2d) \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{di,j}^{n+1} = S_{d1i,j}^{n+1} + S_{d2i,j}^{n+1} \quad (11.3.2e) \\ D_{di,j}^{n+1} = D_{d1i,j}^{n+1} + D_{d2i,j}^{n+1}, \quad (11.3.2f) \end{array} \right.$$

pour  $2 \leq i \leq N_c$  et  $2 \leq j \leq N_y$ , et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_{d1i,j}^{n+1} - V_{d1i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + \sigma_i \frac{V_{d1i,j}^{n+1} + V_{d1i,j}^{n-1}}{2} + M \frac{V_{di+1,j}^n - V_{di-1,j}^n}{2h} = 0, \quad (11.3.2g) \\ \frac{V_{d2i,j}^{n+1} - V_{d2i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{S_{di,j+1}^n - S_{di,j}^n}{h} + \frac{1}{2} \frac{D_{di,j+1}^n - D_{di,j}^n}{h} = 0, \quad (11.3.2h) \end{array} \right.$$

avec

$$V_{d_{i,j}}^{n+1} = V_{d_{1,i,j}}^{n+1} + V_{d_{2,i,j}}^{n+1}, \quad (.i)$$

pour  $2 \leq i \leq N_c$  et  $1 \leq j \leq N_y - 1$ .

Les calcul des inconnues sur l'interface s'écrit (en supposant que  $\sigma_1 = 0$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{1-M} \right) \frac{S_{N_x+1,j}^{n+1} - S_{N_x+1,j}^{n-1}}{2\Delta t} + (1+M) \frac{S_{d_{2,j}}^n - S_{N_x,j}^n}{2h} + \frac{V_{N_x+1,j}^n - V_{N_x+1,j-1}^n}{h} = 0, \quad (11.3.3a) \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{1-M} \right) \frac{D_{N_x+1,j}^{n+1} - D_{N_x+1,j}^{n-1}}{2\Delta t} + (1-M) \frac{D_{d_{2,j}}^n - D_{N_x,j}^n}{2h} + \frac{V_{N_x+1,j}^n - V_{N_x+1,j-1}^n}{h} = 0, \quad (11.3.3b) \\ S_{d_{1,j}}^{n+1} = S_{N_x+1,j}^{n+1}, \quad (11.3.3c) \\ D_{d_{1,j}}^{n+1} = D_{N_x+1,j}^{n+1}, \quad (11.3.3d) \end{array} \right.$$

pour  $2 \leq j \leq N_y$ , et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_{N_x+1,j}^{n+1} - V_{N_x+1,j}^{n-1}}{2\Delta t} + M \frac{V_{d_{2,j}}^n - V_{N_x,j}^n}{2h} + \frac{S_{N_x+1,j+1}^n - S_{N_x+1,j}^n}{2h} + \frac{D_{N_x+1,j+1}^n - D_{N_x+1,j}^n}{2h} = 0, \quad (11.3.3e) \\ V_{d_{1,j}}^{n+1} = V_{N_x+1,j}^{n+1}, \quad (11.3.3f) \end{array} \right.$$

pour  $1 \leq j \leq N_y - 1$ .

**Remarque 11.3.1** Avec les inconnues  $s$  et  $d$ , le calcul sur l'interface est effectuée de manière très naturelle puisque seuls les coefficients devant les dérivées temporelles varient entre le domaine de calcul et la PML.

On montre que la stabilité de ce schéma est garantie si la condition CFL

$$\Delta t \leq \frac{h}{\sqrt{5} + |M|}$$

est respectée.

## 11.3.2 Tests de validation des PML

### 11.3.2.1 Étude qualitative de l'efficacité des PML

La figure (11.4) représente la propagation d'une onde advective dans un flux uniforme de nombre de Mach  $M = 0.5$ . Le domaine de calcul est  $[-5 ; 5] \times [-5 ; 5]$ <sup>(39)</sup> et nous imposons la condition initiale  $p = \exp(-4(x_1^2 + x_2^2) \ln(2))$ , générant uniquement des ondes advectives. La largeur de la PML est  $L = 2$  et le profil du coefficient d'absorption est  $\sigma(x) = \sigma_0 x^2 / D$ . Le

39. Nous ne donnons pas d'unité puisque toutes les équations ont été adimensionnées.

pas d'espace est  $h = 0.025$ . Nous avons représenté les lignes de niveau du champ de pression aux temps  $t = 1, 3, 8, 30, 40$  et  $50$  : ces instants correspondent aux instantanés de la figure 10.3 illustrant les instabilités dans les PML classiques.

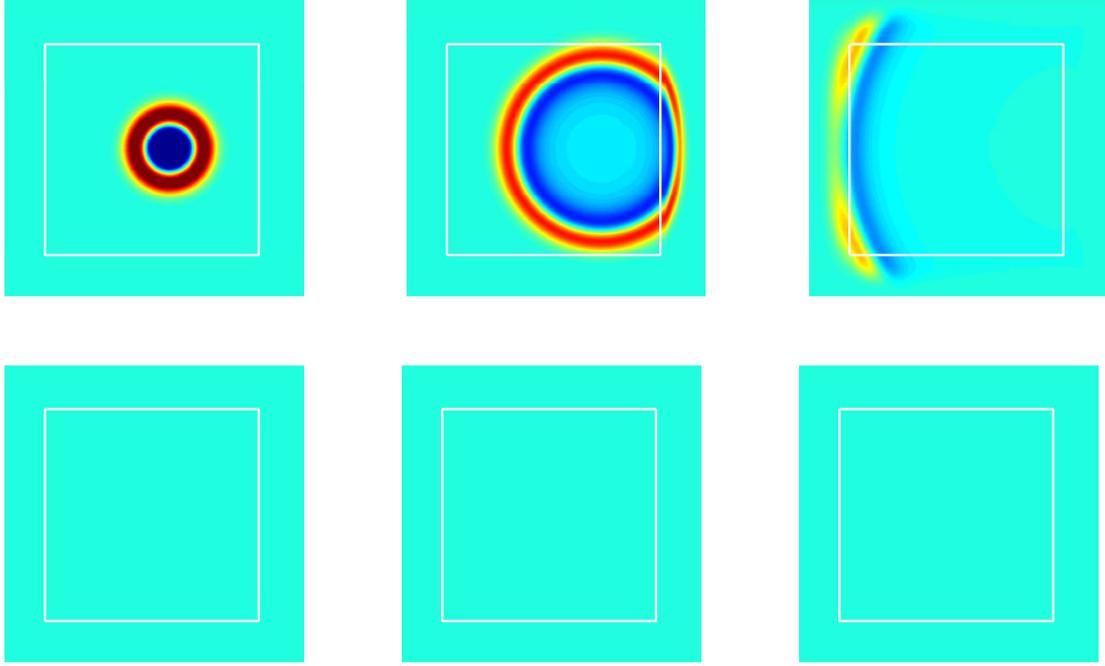


FIG. 11.4: Propagation d'une onde advective,  $t = 1, 3, 8, 30, 40$  et  $50$

Nous avons répété cette expérience en imposant cette fois la condition initiale

$$u = x_1 \exp(-(x_1^2 + x_2^2) \ln(2)) \quad \text{et} \quad v = -x_2 \exp(-(x_1^2 + x_2^2) \ln(2)),$$

choisie pour générer uniquement des ondes de vorticité. La figure 11.5 représente les lignes de niveau du module du champ de vitesse aux temps  $t = 1, 3, 7, 11, 15$  et  $50$ .

Les PML absorbent les deux types d'ondes sans réflexion visible à l'interface et sont stables. Pour nous assurer de ce dernier point nous avons poursuivi les deux expériences en temps long (jusqu'à  $t = 10000$ , soit environ un million de pas de temps) et nous n'avons pas observé d'explosion.

#### 11.3.2.2 étude quantitative des réflexions

Pour évaluer l'importance des réflexions, nous avons calculé la valeur de la pression au point  $(5, 0)$  au cours du temps, c'est-à-dire sur l'interface domaine de calcul/PML, pour différents pas d'espace ( $h = 0.05$  et  $h = 0.025$ ) et pour différents coefficients d'absorption ( $\sigma_0 = 7.5$  et  $\sigma_0 = 15$ ) (les autres paramètres sont les mêmes que lors de la première expérience : nous utilisons la condition initiale  $p = \exp(-4(x_1^2 + x_2^2) \ln(2))$ ) et nous les avons comparés à une pression de référence calcul e au même point mais en utilisant un domaine de calcul beaucoup plus grand. Cette pression, qui est repr sent e sur la figure 11.6 a été normalis e pour faciliter

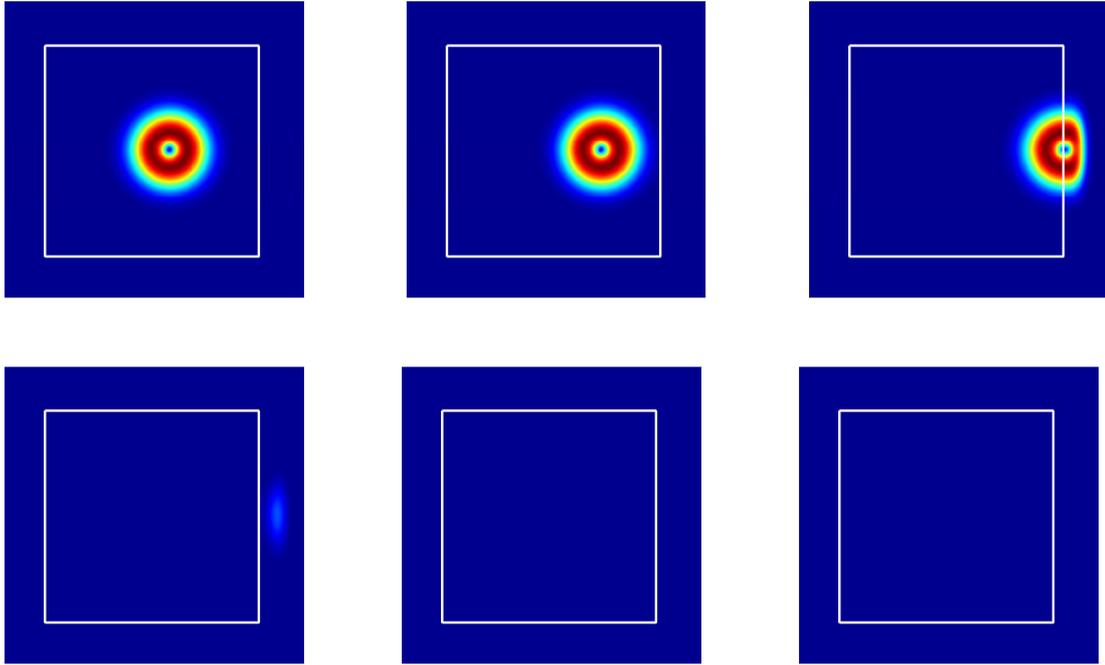


FIG. 11.5: Propagation d'une onde de vorticité,  $t = 1, 3, 7, 11, 15$  et  $50$ .

les comparaisons. Nous avons représenté la différence entre la pression calcul e  $P$  et cette pression de référence pour  $h = 0.05$  et  $\sigma_0 = 15$  (en rouge), pour  $h = 0.025$  et  $\sigma_0 = 15$  (en bleu) et  $h = 0.05$  et  $\sigma_0 = 7.5$  (en bleu ciel) sur la figure 11.7.

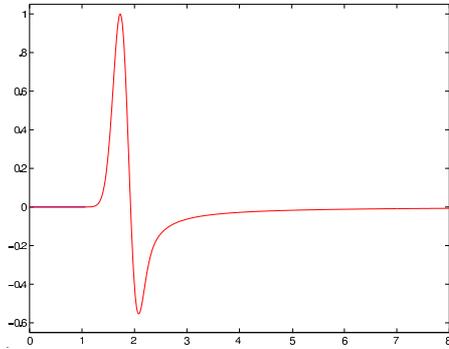


FIG. 11.6: La pression de référence,  $P_{ref}$

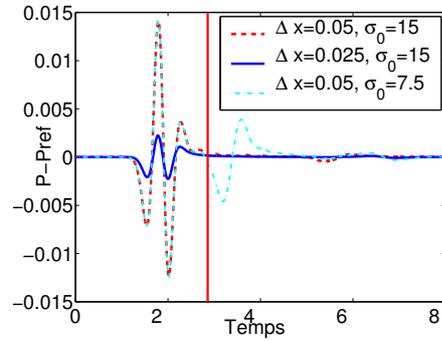


FIG. 11.7:  $P - P_{ref}$

Remarquons qu'il y a deux types de réflexions, clairement s par es par la ligne que nous avons repr sent e en rouge sur la figure 11.7 :

1. **Les réflexions qui diminuent avec le pas d'espace** (  gauche de la ligne rouge). Ces réflexions sont donc provoqu es par la discrétisation numérique. Les deux causes possibles de ces réflexions sont :

- **La discrétisation de la fonction  $\sigma$**  : il est évident, en comparant les expériences  $h = 0.05, \sigma_0 = 15$  et  $h = 0.05, \sigma_0 = 7.5$  que la fonction  $\sigma$  ne modifie pas l'amplitude

de ces réflexions, elle ne peut donc pas en être à l'origine. En fait cette fonction ne cause pas de réflexions car son profil a été convenablement choisi (c'est une fonction quadratique de  $x_1$  ou de  $x_2$ ). Les réflexions auraient été beaucoup plus importantes si nous avions choisi un amortissement constant dans la PML.

- **La discrétisation des conditions de transmission** : c'est en fait l'unique cause, si nous avions choisi  $\sigma = 0$ , nous aurions observé les mêmes réflexions. L'amplitude maximale de ces réflexions reste cependant très acceptable (1.5% pour  $h = 0.05$  et 0.03% pour  $h = 0.025$ ).

Nous avons représenté, sur la figure 11.8, l'évolution du pourcentage maximal de réflexion en fonction de  $M$  pour  $h = 0.05$  (en rouge) et  $h = 0.025$  (en bleu). Pour  $h$  fixé l'erreur croît donc exponentiellement avec  $M$ . Ce dernier résultat peut laisser penser que notre PML n'est pas efficace pour  $M$  proche de 1. Cependant :

- il est bien connu que le pas d'espace doit de toute façon diminuer quand  $M$  augmente pour garantir la précision de la solution ;
- comme nous l'avons dit, notre schéma numérique est rudimentaire, les résultats seraient sans aucun doute bien meilleurs en utilisant un schéma d'ordre élevé ;
- les réflexions peuvent être atténuées par l'ajout d'une couche de transition entre le domaine de calcul et la PML, de manière à effectuer le changement de variable progressivement (voir la section 11.3.2.3).

2. **Les réflexions qui diminuent quand l'amortissement augmente** (à droite de la ligne rouge). Ces réflexions sont évidemment dues au fait que, si l'amortissement n'est pas assez important, les ondes sont réfléchies par la frontière extérieure de la PML et reviennent dans le domaine de calcul.

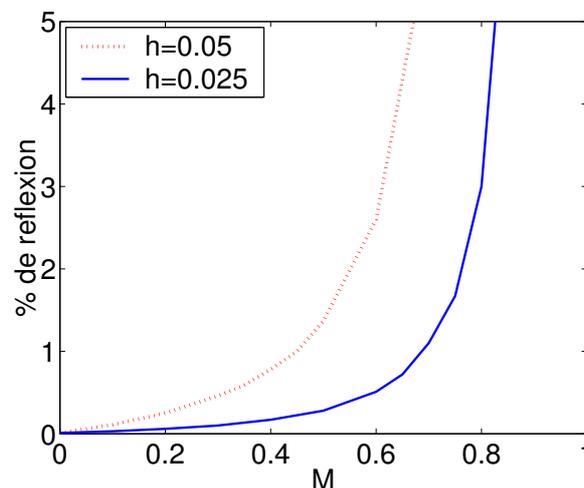


FIG. 11.8: Évolution de l'erreur en fonction de  $M$

### 11.3.2.3 Le cas d'un écoulement avec un nombre de Mach proche de 1

Comme nous venons de le voir, dans le cas où  $M$  est proche de 1, le modèle PML que nous proposons doit être modifié pour limiter les réflexions. Nous avons répété la première

expérience (avec la condition initiale  $p = \exp(-4(x_1^2 + x_2^2) \ln(2))$ ) en choisissant cette fois  $M = 0.9$  et  $h = 0.0125$ . Nous avons représenté les lignes de niveau du champ de pression aux temps  $t = 1.25, 2, 2.75, 3.75, 4.5$  et  $5$  sur la figure 11.9. Remarquons que l'onde réfléchiée par l'interface se propage plus vite que l'onde incidente.

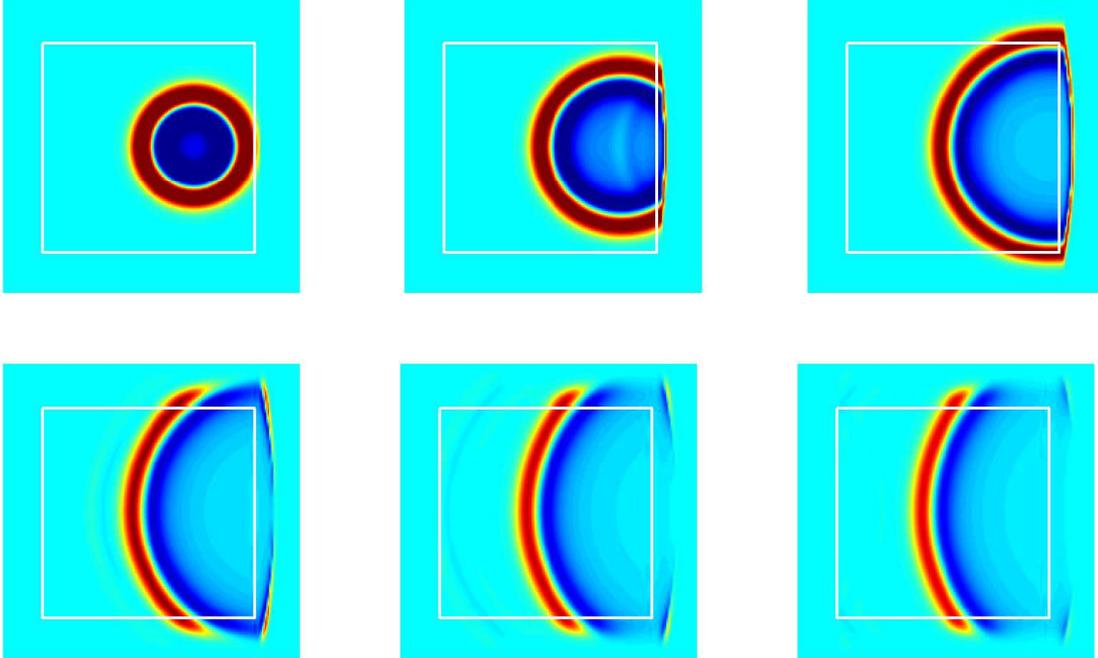


FIG. 11.9: Propagation d'une onde advective dans le cas  $M = 0.9$ ,  $t = 1.25, 2, 2.75, 3.75, 4.5$  et  $5$

Pour diminuer les réflexions générées par le nouveau modèle PML nous proposons d'introduire une couche de transition de longueur  $l$  entre le domaine de calcul et les PML horizontales. Nous utiliserons pour cela une fonction  $\alpha$  :

$$x \in [0, l] \longrightarrow \alpha(l) \quad \text{croissante sur } [0, l], \text{ telle que } \alpha(0) = 0 \text{ et } \alpha(l) = 1.$$

Le nouveau modèle que nous proposons s'écrit alors :

- pour  $x_1 < 0$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + (1 + M) \frac{\partial s}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, & (11.3.4a) \\ \frac{\partial d}{\partial t} - (1 - M) \frac{\partial d}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, & (11.3.4b) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + M \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s}{\partial x_2} + \frac{\partial d}{\partial x_2} \right) = 0 ; & (11.3.4c) \end{cases}$$

- pour  $0 < x_1 < l$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha(t)}{1-M} \frac{\partial s^*}{\partial t} + (1+M) \frac{\partial s^*}{\partial x_1} + \frac{\partial v^*}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\alpha(t)}{1+M} \frac{\partial d^*}{\partial t} - (1-M) \frac{\partial d^*}{\partial x_1} + \frac{\partial v^*}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\alpha(t)}{1-M^2} \frac{\partial v^*}{\partial t} + M \frac{\partial v^*}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s^*}{\partial x_2} + \frac{\partial d^*}{\partial x_2} \right) = 0 ; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (11.3.5a) \\ (11.3.5b) \\ (11.3.5c) \end{array}$$

- Pour  $l < x_1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-M} \frac{\partial s_1^*}{\partial t} + \frac{\sigma(x_1)}{1-M} s_1^* + (1+M) \frac{\partial s^*}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{1}{1-M} \frac{\partial s_2^*}{\partial t} + \frac{\sigma(x_2)}{1-M} s_2^* + \frac{\partial v^*}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{1}{1+M} \frac{\partial d_1^*}{\partial t} + \frac{\sigma(x_1)}{1+M} d_1^* - (1-M) \frac{\partial d^*}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{1}{1+M} \frac{\partial d_2^*}{\partial t} + \frac{\sigma(x_2)}{1+M} d_2^* + \frac{\partial v^*}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{1}{1-M^2} \frac{\partial v_1^*}{\partial t} + \frac{\sigma(x_1)}{1-M^2} v_1^* + M \frac{\partial v^*}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{1}{1-M^2} \frac{\partial v_2^*}{\partial t} + \frac{\sigma(x_2)}{1-M^2} v_2^* + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s^*}{\partial x_2} + \frac{\partial d^*}{\partial x_2} \right) = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (11.3.6a) \\ (11.3.6b) \\ (11.3.6c) \\ (11.3.6d) \\ (11.3.6e) \\ (11.3.6f) \end{array}$$

Ce modèle permet de passer du domaine de calcul à la PML en modifiant régulièrement les coefficients devant les dérivées temporelles<sup>(40)</sup>. On remarque l'analogie avec le coefficient d'absorption  $\sigma$  qui varie lui aussi régulièrement dans la couche PML.

Nous avons répété l'expérience précédente en utilisant une couche intermédiaire de longueur  $l = 2$  (de la même largeur que les PML). La fonction  $\alpha$  est une fonction affine :  $\alpha(x) = x/l$ . La figure 11.10 représente les lignes de niveau du champ de pression aux temps  $t = 1.25, 2, 2.75, 3.75, 4.5$  et  $5$ . La couche de transition est matérialisée par les lignes rouges. Les réflexions sont négligeables par rapport à celles observées dans l'expérience précédente.

Nous avons représenté la suite de l'expérience (aux temps  $t = 10, 17.5, 25, 37.5, 45$  et  $50$ ) sur la figure 11.11 pour vérifier que les ondes sont bien absorbées par la PML.

40. On retrouve encore une fois l'intérêt d'utiliser les variables intermédiaires  $s$  et  $d$ .

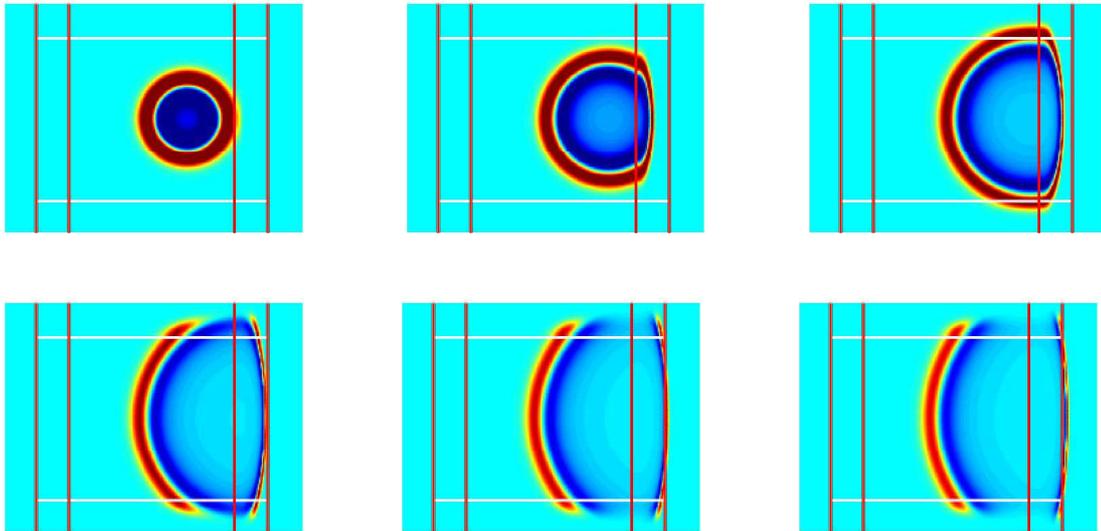


FIG. 11.10: Propagation d'une onde advective dans le cas  $M = 0.9$  avec ajout d'une couche intermédiaire,  $t = 1.25, 2, 2.75, 3.75, 4.5$  et  $5$ .

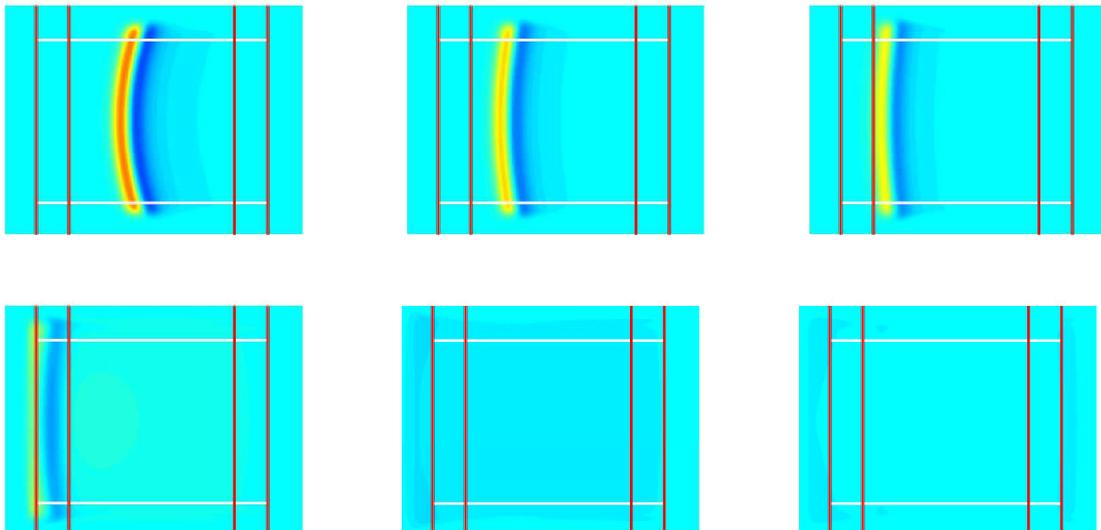


FIG. 11.11: Propagation d'une onde advective dans le cas  $M = 0.9$  avec ajout d'une couche intermédiaire,  $t = 10, 17.5, 25, 37.5, 45$  et  $50$ .

## 11.4 Le cas d'un écoulement oblique

### 11.4.1 Construction d'une PML verticale pour l'équation des ondes advectives

Nous nous intéressons maintenant à l'extension de notre modèle aux écoulements obliques, c'est-à-dire tels que  $\mathbf{M} = [M_1 ; M_2]^t$ , nous posons de plus  $M = \|\mathbf{M}\|$ . L'équation des ondes advectives s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2M_1 \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_1} + 2M_2 \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_2} + 2M_1 M_2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} - (1 - M_1^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} - (1 - M_2^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = 0.$$

La courbe de lenteur associée à cette équation est représentée sur la figure 11.12 (l'ensemble des instables pour une couche verticale a été surligné en rouge), c'est une ellipse de centre  $C = (M_1/(1 - M^2), M_2/(1 - M^2))$ . La construction d'une PML stable s'inspire de ce que nous avons fait dans le cas d'un flux horizontal. La nouveauté réside dans l'apparition d'une étape supplémentaire (l'étape (2.2))

1. On écrit un problème de transmission entre  $x_1 < 0$  et  $x_1 > 0$ .

2.1. Dans le demi-plan  $x_1 > 0$ , on fait disparaître les termes convectifs (les dérivées croisées espace-temps) en utilisant le changement de variable :

$$p^*(x_1, x_2, t) = p\left(x_1, x_2, t - \frac{M_1}{1 - M^2}x_1 - \frac{M_2}{1 - M^2}x_2\right). \quad (11.4.1)$$

L'équation des ondes advectives s'écrit alors :

$$\frac{1}{1 - M^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2M_1 M_2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} - (1 - M_1^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} - (1 - M_2^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} = 0.$$

avec les conditions de transmission

$$p(0, x_2, t) = p^*(0, x_2, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial x_1}(0, x_2, t) = \frac{\partial p^*}{\partial x_1}(0, x_2, t) + \frac{M_1}{1 - M^2} \frac{\partial p^*}{\partial t}(0, x_2, t).$$

Ce changement de variable revient à translater la courbe de lenteur d'un vecteur

$$- \left( \frac{M_1}{1 - M^2} ; \frac{M_2}{1 - M^2} \right)^t.$$

La nouvelle courbe de lenteur, représentée sur la figure 11.13, contient toujours un ensemble de points potentiellement instables si on applique les PML classiques. Cela est dû à la présence de la dérivée croisée par rapport à  $x_1$  et  $x_2$ .

2.2. Dans le demi-plan  $x_1 > 0$  nous appliquons le second changement de variable (qui laisse l'axe  $x_1 = 0$  invariant) :

$$\tilde{x}_1 = \alpha x_1 \quad \text{et} \quad \tilde{x}_2 = x_2 + \beta x_1.$$

En écrivant les équations à l'aide des nouvelles variables, on observe que la dérivée croisée disparaît si  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient :

$$\beta = -\frac{M_1 M_2}{1 - M_1^2} \alpha.$$

En choisissant  $\alpha = 1$ , on vérifie que la nouvelle fonction

$$\tilde{p}(x_1, x_2, t) = p^* \left( x_1, x_2 - \frac{M_1 M_2}{1 - M_1^2} x_1, t \right) \quad (11.4.2)$$

vérifie l'équation suivante, dont la courbe de lenteur est représentée sur la figure 11.14:

$$\frac{1}{1 - M^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} - (1 - M_1^2) \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x_1^2} - \left(1 - \frac{M_2^2}{1 - M_1^2}\right) \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x_2^2} = 0 \quad (11.4.3)$$

et que les conditions de transmission deviennent :

$$\begin{cases} p(0, x_2, t) = \tilde{p}(0, x_2, t) \\ \frac{\partial p}{\partial x_1}(0, x_2, t) = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_1}(0, x_2, t) + \frac{M_1 M_2}{1 - M_1^2} \frac{\partial p^*}{\partial x_2}(0, x_2, t) + \frac{M_1}{1 - M^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}(0, x_2, t). \end{cases}$$

3. On applique ensuite le modèle PML classique à (11.4.3).

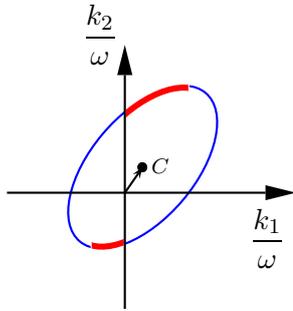


FIG. 11.12: La courbe de lenteur associée aux ondes advectives

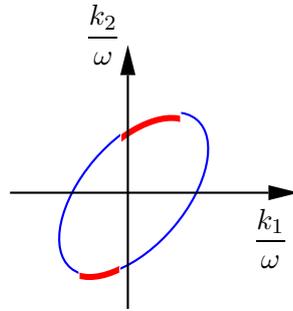


FIG. 11.13: La courbe de lenteur après le premier changement de variable

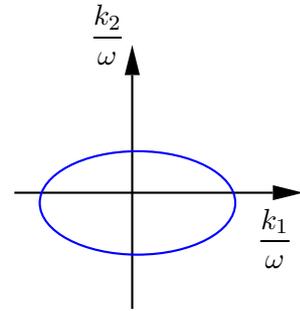


FIG. 11.14: La courbe de lenteur après le second changement de variable

**Le problème des coins.** La solution que nous avons adoptée pour traiter le cas des coins est beaucoup moins justifiée mais semble donner des résultats satisfaisants d'un point de vue numérique (voir figure 11.15). Supposons par exemple que le domaine de calcul soit le quart de plan bas-gauche  $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-$ . Dans la couche verticale, d'après ce que nous venons de voir, nous utilisons le modèle

$$\frac{1}{1 - M^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} - (1 - M_1^2) (D_{x_1}^\sigma)^2 \tilde{p} - \left(1 + \frac{2M_1^2 M_2^2}{1 - M_1^2}\right) \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x_2^2} = 0,$$

avec les conditions de transmission :

$$\begin{cases} p(0, x_2, t) = \tilde{p}(0, x_2, t), \\ \frac{\partial p}{\partial x_1}(0, x_2, t) = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_1}(0, x_2, t) + \frac{M_1 M_2}{1 - M_1^2} \frac{\partial p^*}{\partial x_2}(0, x_2, t) + \frac{M_1}{1 - M_2^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}(0, x_2, t). \end{cases}$$

et dans la couche horizontale nous utiliserons :<sup>(41)</sup>

$$\frac{1}{1 - M^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} - \left(1 + \frac{2M_1^2 M_2^2}{1 - M_2^2}\right) \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x_2^2} - (1 - M_2^2) (D_{x_2}^\sigma)^2 \tilde{p} = 0.$$

avec les conditions de transmission :

$$\begin{cases} p(x_1, 0, t) = \tilde{p}(x_1, 0, t), \\ \frac{\partial p}{\partial x_2}(x_1, 0, t) = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_2}(x_1, 0, t) + \frac{M_1 M_2}{1 - M_2^2} \frac{\partial p^*}{\partial x_1}(x_1, 0, t) + \frac{M_1}{1 - M^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}(x_1, 0, t). \end{cases}$$

Pour obtenir le modèle PML dans le coin (le quart de plan  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ ) nous avons alors deux possibilités :

1. Utiliser l'équation de la couche verticale en remplaçant formellement l'opérateur de dérivée par rapport à  $x_2$  par l'opérateur  $D_{x_2}^\sigma$  pour obtenir :

$$\frac{1}{1 - M^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} - (1 - M_1^2) (D_{x_1}^\sigma)^2 \tilde{p} - \left(1 - \frac{M_2^2}{1 - M_1^2}\right) (D_{x_2}^\sigma)^2 \tilde{p} = 0.$$

2. Utiliser l'équation de la couche horizontale en remplaçant formellement l'opérateur de dérivée par rapport à  $x_1$  par l'opérateur  $D_{x_1}^\sigma$  pour obtenir :

$$\frac{1}{1 - M^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} - \left(1 - \frac{M_1^2}{1 - M_2^2}\right) (D_{x_1}^\sigma)^2 \tilde{p} - (1 - M_2^2) (D_{x_2}^\sigma)^2 \tilde{p} = 0.$$

Avec les PML classiques, les deux choix nous auraient conduits au même résultat et les variables  $x_1$  et  $x_2$  joueraient un rôle symétrique, ce qui n'est pas le cas avec le nouveau modèle. De plus il n'y a pas de raison de privilégier un modèle par rapport à l'autre.

Pour fixer les idées, nous choisissons arbitrairement le premier modèle. Il nous reste à établir les conditions de transmission entre le coin et les couches verticale et horizontale. Comme la PML dans le coin a été obtenue à partir du modèle de la couche verticale, les conditions de transmission entre cette dernière et le coin sont les conditions classiques : la continuité de la pression et de sa dérivée normale. Par contre il n'est pas simple de déduire les conditions de transmission entre la couche horizontale et le coin car les deux ont été obtenus par des changements de variable différents. Nous avons donc sans justification choisi d'imposer à nouveau la continuité de la pression et de sa dérivée normale. Rien ne garantit donc que le passage de la couche verticale au coin se produise sans réflexion. Néanmoins, les expériences numériques que nous avons menées montrent que ces réflexions sont très faibles (voir figure 11.15).

41. Il suffit évidemment d'inverser le rôle des variables  $x_1$  et  $x_2$

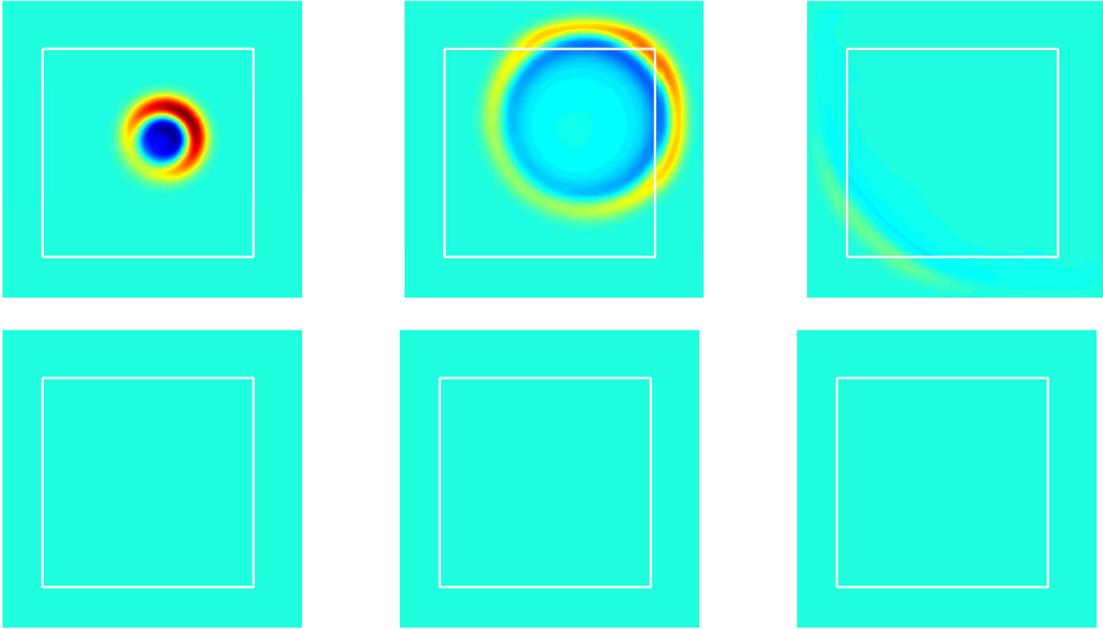


FIG. 11.15: Propagation d'une onde advective dans un écoulement oblique avec  $\mathbf{M} = [\sqrt{0.5}; \sqrt{0.5}]^t$ ,  $t = 1, 3, 8, 30, 40$  et  $50$ .

#### 11.4.2 Application aux équations de l'aéroacoustique

L'extension de la méthode que nous venons de présenter aux équations d'Euler linéarisées n'est pas possible à cause des ondes de vorticité qui seront instables dans la PML. Sans rentrer dans les détails nous pouvons expliquer ce phénomène à l'aide des courbes de lenteur. La courbe de lenteur associ e aux ondes de vorticité est une droite qui n'est plus parallèle à l'un des axes du plan des lenteurs (voir figure 11.16), Contrairement à ce que nous avons vu dans le cas d'un écoulement parallèle à l'axe ( $Ox$ ), les ondes de vorticité sont donc instables dans les PML classiques. Le premier changement de variable, 11.4.1, qui n'est qu'une translation dans le plan des lenteurs ne stabilise pas les ondes de vorticité (voir figure 11.17). Le deuxième changement de variable, 11.4.2, a été étudié pour stabiliser spécifiquement les ondes advectives et ne stabilise pas non plus les ondes de vorticité. En fait pour pouvoir stabiliser les deux types d'ondes il faudrait effectuer une rotation dans le plan des lenteurs, c'est-à-dire appliquer, à la place du second changement de variable un changement de variable du type :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1^* \cos \theta + x_2^* \sin \theta \\ \tilde{x}_2 = -x_1^* \sin \theta + x_2^* \cos \theta \end{cases}$$

Mais un tel changement de variable ne laisse pas l'axe ( $Ox$ ) invariant et ne peut donc pas être utilisé.

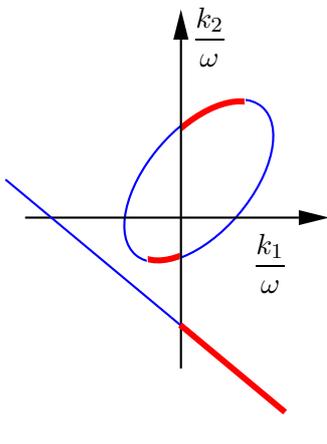


FIG. 11.16: Les courbes de lenteur associées aux équations d'Euler

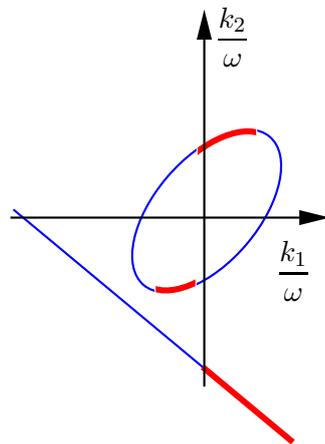


FIG. 11.17: Les courbes de lenteurs après le premier changement de variable

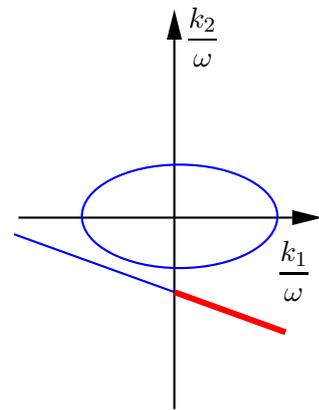


FIG. 11.18: Les courbes de lenteur après le second changement de variable



## Quatrième partie

# La méthode de Cagniard-de Hoop : une présentation mathématique et numérique



## Chapitre 12

# La méthode de Cagniard-de Hoop en dimension 2

Ce chapitre a pour but de présenter les solutions analytiques que nous avons obtenues pour le couplage fluide-structure en dimension 2 grâce à la méthode de Cagniard-de Hoop. Plutôt que de nous limiter à fournir les expressions des solutions, nous avons préféré expliquer la méthode de Cagniard-de Hoop en détail, sans masquer les difficultés que nous avons rencontrées. En effet, bien que cette méthode soit connue depuis longtemps (les travaux de Cagniard remontent à 1930), il n'existe pas, à notre connaissance, d'ouvrages synthétisant toutes les réponses aux problèmes mathématiques soulevés par cette méthode. Citons néanmoins le livre de van der Hijden [59] traitant le cas de milieux stratifiés isotropes ou anisotropes mais sans réellement aborder les détails numériques. Nous avons donc voulu regrouper ici les résultats contenus dans la littérature et éclaircir certains points qui ne semblent pas avoir été traités (ou du moins pas publiés) jusqu'à maintenant.

Après avoir rappelé le principe de la méthode en l'appliquant à un problème très simple, la résolution de l'équation des ondes dans un milieu homogène infini, nous nous intéresserons à un milieu hétérogène composé de deux demi-plans homogènes, d'abord en considérant une source située sur l'interface, puis située à l'intérieur d'un des deux milieux. Nous étudierons ensuite le problème de l'interaction fluide-structure. Nous terminerons ce chapitre en donnant quelques détails techniques pour le calcul numérique des fonctions de Green.

## Contenu

---

<b>Introduction . . . . .</b>	<b>257</b>
<b>12.1 Calcul de la fonction de Green dans un milieu homogène infini .</b>	<b>259</b>
<b>12.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes . . . . .</b>	<b>267</b>
12.2.1 Résultats . . . . .	268
12.2.1.1 Notations . . . . .	268
12.2.1.2 Cas d'une source sur l'interface . . . . .	268
12.2.1.3 Cas d'une source en-dehors de l'interface . . . . .	270
12.2.2 Démonstrations . . . . .	276
12.2.2.1 Cas d'une source sur l'interface . . . . .	277
12.2.2.2 Cas d'une source hors de l'interface . . . . .	286
<b>12.3 Interaction fluide-solide . . . . .</b>	<b>299</b>
12.3.1 Résultats . . . . .	300
12.3.1.1 Les fronts d'onde. . . . .	300
12.3.1.2 Solutions analytiques. . . . .	303
12.3.2 Démonstrations . . . . .	309
12.3.2.1 Calculs préliminaires dans le domaine de Fourier-Laplace .	309
12.3.2.2 Démonstration du théorème 12.3.1 . . . . .	311
<b>12.4 Considérations pratiques pour le calcul numérique . . . . .</b>	<b>318</b>
12.4.1 Calcul de $P$ . . . . .	318
12.4.1.1 Calcul de $P^i$ . . . . .	318
12.4.1.2 Calcul de $P^r$ . . . . .	320
12.4.2 Calcul de $\mathbf{V}_s$ . . . . .	322
12.4.2.1 Calcul de $V_{sx}^P$ . . . . .	322
12.4.2.2 Calcul de $V_{sx}^S$ . . . . .	326

---

## Introduction

La méthode dite de Cagniard-de Hoop a été introduite par Cagniard en 1930 [20], pour obtenir des solutions exactes de l'équation des ondes élastodynamiques en dimension 2. Son extension aux problèmes tridimensionnels a été proposée vers 1960 par de Hoop [61].

Bien que destinée à l'origine à la résolution de l'équation des ondes élastiques, cette méthode peut être appliquée à tout problème de propagation d'onde transitoire (acoustique, électromagnétisme) dans des milieux stratifiés. Elle établit un lien entre les solutions dans le domaine temporel et les ondes planes et permet également de calculer séparément la contribution de chaque type d'onde (onde P, onde S, onde de tête ...).

Nous nous limiterons dans ce chapitre à l'application de la méthode aux **équations des ondes acoustiques et élastiques isotropes** en dimension 2 et nous nous intéresserons à l'extension en dimension 3 au chapitre suivant. Pour fixer les idées nous considérons la fonction  $u(x, y, t)$ , solution fondamentale d'un problème de propagation d'onde dans un milieu stratifié composé de couches isotropes parallèles à un des axes du plan ( $(Ox)$  par exemple). Les étapes de la méthode de Cagniard-de Hoop sont les suivantes :

1. On transforme l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $u$  en une équation différentielle ordinaire suivant la variable d'espace  $y$  à coefficients constants dans chaque couche qui pourra être résolue explicitement. Pour cela on applique successivement à  $u$  :

- La transformation de **Laplace en temps** ( $s$  est la variable duale de  $t$ ):

$$\tilde{u}(x, y, s) = \int_0^{+\infty} u(x, y, t) e^{-st} dt, \quad (12.1.1)$$

- La transformation de **Fourier suivant la variable d'espace  $x$**  ( $k$  est la variable duale de  $x$ ):

$$\hat{u}(k, y, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(x, y, s) e^{ikx} dx. \quad (12.1.2)$$

2. On peut alors calculer explicitement  $\hat{u}(k, y, s)$ . Nous verrons dans les sections suivantes que cette fonction peut se décomposer en une **somme** (éventuellement infinie dans le cas de milieux stratifiés de plus de trois couches ou bornés dans la direction  $y$ ) d'**ondes "élémentaires"** :

$$\hat{u}(k, y, s) = \sum_{l=1}^N \hat{u}_l(k, y, s) = \sum_{l=1}^N \mathcal{A}_l \left( k^2, \frac{s}{c_l}, \mathbf{c} \right) e^{\mathcal{F}_l(k^2, \frac{s}{c_l}, y, \mathbf{c})}$$

où  $c_l$  représente la vitesse de propagation de l'onde  $l$ ,  $\mathbf{c} = [c_i]_{i=1..N}$  est le vecteur contenant les vitesses de propagation de chaque onde  $i$ ,  $\mathcal{A}_l$  est une fonction **homogène en  $s/c_l$  de degré  $-1$**  :

$$\mathcal{A}_l \left( k^2, \frac{s}{c_l}, \mathbf{c} \right) = \frac{c_l}{s} \mathcal{A}_l \left( \frac{k^2 c_l^2}{s^2}, 1, \mathbf{c} \right)$$

et  $\mathcal{F}_l$  une fonction affine en  $y$ , **homogène en  $s/c_l$  de degré 1** :

$$\mathcal{F}_l \left( k^2, \frac{s}{c_l}, y, \mathbf{c} \right) = a_l \left( k^2, \frac{s}{c_l}, \mathbf{c} \right) y + b_l \left( k^2, \frac{s}{c_l}, \mathbf{c} \right)$$

et

$$\mathcal{F}_l \left( k^2, \frac{s}{c_l}, y, \mathbf{c} \right) = \frac{s}{c_l} \mathcal{F}_l \left( \frac{k^2 c_l^2}{s^2}, 1, y, \mathbf{c} \right).$$

De plus  $\mathcal{F}_l$  est une fonction affine en  $y$ .

3. Pour tout  $l \in \{1..N\}$  on applique alors à  $\hat{u}_l$  la transformation de **Fourier inverse suivant  $x$**  :

$$\tilde{u}_l(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_l \left( k^2, \frac{s}{c_l}, \mathbf{c} \right) e^{\mathcal{F}_l(k^2, \frac{s}{c_l}, y, \mathbf{c})} e^{-ikx} dk. \quad (12.1.3)$$

4. En utilisant la propriété d'homogénéité de  $\mathcal{A}_l$  et de  $\mathcal{F}_l$  on pose  $k = ps/c_l$  pour obtenir :

$$\tilde{u}_l(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_l(p^2, 1, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l}(\mathcal{F}_l(p^2, 1, y, \mathbf{c}) - ipx)} dp, \quad (12.1.4)$$

par la suite nous ferons les abus de notation

$$\mathcal{A}_l(p^2, \mathbf{c}) = \mathcal{A}_l(p^2, 1, \mathbf{c}) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_l(p^2, y, \mathbf{c}) = \mathcal{F}_l(p^2, 1, y, \mathbf{c}).$$

Ce changement de variable nous permet de faire apparaître la variable de Laplace,  $s$ , en facteur dans l'exponentielle.

5. Cette étape est la principale étape de la méthode de Cagniard-de Hoop, elle consiste à transformer l'intégrale précédente en une transformée de Laplace, c'est-à-dire à identifier le terme à l'intérieur de l'exponentielle à  $st$ . Pour cela nous allons chercher un **chemin**  $\Gamma$  dans le **plan complexe**, tel que, pour tout  $p$  de  $\Gamma$ ,  $\mathcal{F}_l(p^2, y, \mathbf{c}) - ipx = -c_l t$  avec  $t \in \mathbb{R}^+$  et tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_l(p^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l}(\mathcal{F}_l(p^2, y, \mathbf{c}) - ipx)} dp = \int_{\Gamma} \mathcal{A}_l(p^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l}(\mathcal{F}_l(p^2, y, \mathbf{c}) - ipx)} dp. \quad (12.1.5)$$

Si un tel chemin existe, on pourra alors paramétrer l'ensemble des  $p$  de  $\Gamma$  par une fonction  $\gamma(t, x, y)$ , et, en utilisant le changement de variable  $p = \gamma(t, x, y)$ , on montrera que<sup>(42)</sup>

$$\int_{\Gamma} \mathcal{A}_l(p^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l}(\mathcal{F}_l(p^2, y, \mathbf{c}) - ipx)} dp = \int_{t_{0l}(x, y)}^{+\infty} \mathcal{A}_l(\gamma^2(t, x, y), \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t, x, y) e^{-st} dt. \quad (12.1.6)$$

Par la suite, pour des raisons de **lisibilité** nous **omettrons la dépendance en espace** des fonctions  $\gamma$  et  $t_{0l}$ .

---

42. Nous supposons ici que l'onde  $l$  est une onde de volume, nous verrons comment calculer les ondes de tête dans les sections suivantes.

## 12.1 Calcul de la fonction de Green dans un milieu homogène infini

---

6. La dernière étape est évidente : en utilisant l'injectivité de la transformée de Laplace on montre que, puisque

$$\tilde{u}_l(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_{0l}}^{+\infty} \mathcal{A}_l(\gamma^2(t), \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t) e^{-st} dt, \quad (12.1.7)$$

alors

$$u_l(x, y, t) = H_{t_{0l}}(t) \mathcal{A}_l(\gamma^2(t), \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t) \quad (12.1.8)$$

où  $H_{t_{0l}}$  représente la fonction de Heavyside, nulle pour  $t < t_{0l}$  et telle que  $H_{t_{0l}}(t) = 1$  pour  $t > t_{0l}$ .

L'homogénéité des fonctions  $\mathcal{A}_l$  et  $\mathcal{F}_l$  est capitale pour appliquer la méthode de Cagniard-de Hoop, c'est pourquoi nous ne pouvons pas l'appliquer aux problèmes dispersifs comme l'équation des ondes amorties. Il n'est pas non plus possible de l'appliquer aux problèmes de couplage entre une plaque (ou une membrane) et un fluide ni aux problèmes comportant une symétrie de révolution.

Nous renvoyons le lecteur au livre de van der Hijden [59] pour plus de détails sur le formalisme de la méthode et son application aux problèmes anisotropes (sur ce point précis on pourra également se référer au cours d'O. Poncelet [75]). L'application de cette méthode aux interfaces courbes est détaillée dans la thèse de Q. Grimal [45], les solutions sont alors des solutions approchées obtenues en appliquant la méthode de Cagniard-de Hoop sur une configuration plane approchant la configuration courbe.

## 12.1 Calcul de la fonction de Green de l'équation des ondes scalaires dans un milieu homogène infini

Nous illustrons dans cette section le principe de la méthode de Cagniard-de Hoop exposé en introduction en l'appliquant à un cas très simple dont le résultat est bien connu et peut être obtenu par bien d'autres méthodes : le calcul de la solution de l'équation des ondes 2D dans un milieu homogène infini. L'équation aux dérivées partielles à résoudre est

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right] = \delta(x)\delta(y)f(t), \quad (12.1.9)$$

où  $c$  représente la vitesse de propagation des ondes. Il est bien connu que la solution de cette équation aux dérivées partielles peut être obtenue en convoluant la fonction source avec  $u$  :

$$U(x, y, t) = \int_0^t u(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau, \quad (12.1.10)$$

où  $u$  est la fonction de Green associée à (12.1.9), c'est dire la solution de

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \delta(x)\delta(y)\delta(t). \quad (12.1.11)$$

La première étape de la méthode ne présente aucune difficulté : l'utilisation de la transformée de Laplace en temps et de la transformée de Fourier suivant  $x$ <sup>(43)</sup> sur (12.1.11) nous permet d'obtenir l'équation différentielle ordinaire suivante en  $y$  :

$$-\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} + \left(k^2 + \frac{s^2}{c^2}\right) \hat{u} = \delta(y), \quad (12.1.12)$$

dont la solution (deuxième étape de la méthode) est :

$$\hat{u}(k, y, s) = \frac{1}{2 \left(k^2 + \frac{s^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|y| \left(k^2 + \frac{s^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (12.1.13)$$

où la fonction  $g(p) = p^{\frac{1}{2}}$ , est définie de manière classique :

$$g(p)^2 = p \quad \text{et} \quad \Re e[g(p)] > 0.$$

La coupure de  $g(p)$  dans le plan complexe sera donc la demi-droite définie par  $\{p \in \mathbb{R}^-\}$  (voir figure 12.1).

On applique maintenant (troisième étape de la méthode) la transformée inverse de Fourier en

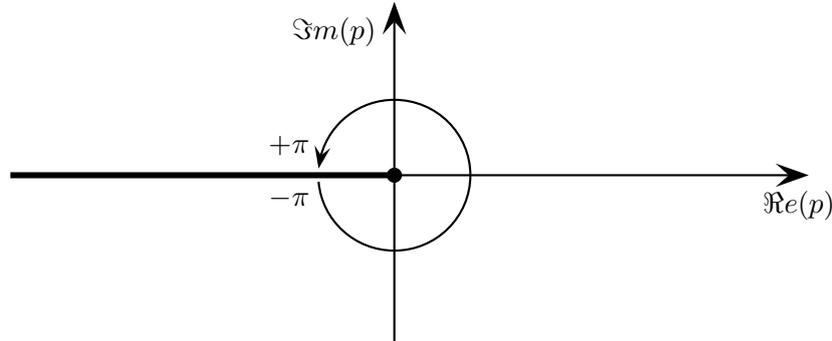


FIG. 12.1: Définition de la fonction  $x \mapsto (x)^{\frac{1}{2}}$

$x$  à  $\hat{u}$ , pour obtenir :

$$\tilde{u}(x, y, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(k^2 + \frac{s^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|y| \left(k^2 + \frac{s^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - ikx} dk, \quad (12.1.14)$$

soit, en posant  $k = \frac{ps}{c}$  (quatrième étape),<sup>(44)</sup>

$$\tilde{u}(x, y, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c} \left[|y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx\right]} dp \quad (\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi(p) dp) \quad (12.1.15)$$

43. Le choix de la direction est ici arbitraire, il s'imposera plus naturellement lors de l'étude des milieux stratifiés dans les prochaines sections.

44. Rappelons que  $\Xi$  se lit xi majuscule.

## 12.1 Calcul de la fonction de Green dans un milieu homogène infini

Comme nous l'avons vu en introduction, ce changement de variable nous permet de faire apparaître la variable de Laplace,  $s$ , en facteur dans l'exponentielle, le principe de la méthode de Cagniard-de Hoop consistant justement à transformer l'intégrale précédente en une transformée de Laplace. Pour cela (cinquième étape de la méthode) nous allons chercher un chemin  $\Gamma$  dans le plan complexe, tel que,

$$\text{pour tout } p \text{ de } \Gamma, |y| (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx = ct \text{ avec } t \in \mathbb{R}^+$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Xi(p) dp = \int_{\Gamma} \Xi(p) dp.$$

Posons donc  $ct = |y| (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx$  et

$$\tilde{\Gamma} = \left\{ p \in \mathbb{C} \mid \left( |y| (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx \right) \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

Le contour  $\Gamma$  que nous cherchons sera inclus dans  $\tilde{\Gamma}$  qui est donc l'ensemble des solutions  $p$  de

$$|y| (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx = ct, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{12.1.16}$$

**Lemme 12.1.1** *L'ensemble  $\tilde{\Gamma}$  des solutions de (12.1.16) pour  $t$  positif est tel que*

$$\tilde{\Gamma} = \Upsilon^+ \cup \Upsilon^- \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-, \tag{45}$$

avec

$$\Gamma^{\pm} = \left\{ p = \gamma^{\pm}(t), \quad \frac{r}{c} \leq t \right\}$$

et

- si  $\cos \theta > 0$

$$\Upsilon^+ = \left\{ p = v^+(t), \quad \frac{r \cos |\theta|}{c} \leq t \leq \frac{r}{c} \right\},$$

$$\Upsilon^- = \left\{ p = v^-(t), \quad 0 \leq t \leq \frac{r}{c} \right\},$$

- si  $\cos \theta < 0$

$$\Upsilon^+ = \left\{ p = v^+(t), \quad 0 \leq t \leq \frac{r}{c} \right\},$$

$$\Upsilon^- = \left\{ p = v^-(t), \quad \frac{r \cos |\theta|}{c} \leq t \leq \frac{r}{c} \right\}.$$

où nous avons posé

$$\gamma^{\pm}(t) = -i \frac{ct}{r} \cos \theta \pm |\sin \theta| \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^2} - 1}$$

et

$$v^{\pm}(t) = -i \left( \frac{ct}{r} \cos \theta \pm |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c^2 t^2}{r^2}} \right). \tag{46}$$

---

45.  $\Upsilon$  =upsilon majuscule.

46.  $v$  =upsilon.

**Démonstration :**

Les solutions de (12.1.16) sont aussi racines du polynôme de degré 2 :

$$P_{t,r,\theta}(p) = p^2 + 2i\frac{ct}{r} \cos \theta p + \sin^2 \theta - \frac{c^2 t^2}{r^2}, \quad (12.1.17)$$

avec  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ .

**Remarque 12.1.1** *Si  $p$  est une racine de ce polynôme, elle ne vérifie pas forcément (12.1.16). En fait elle est solution de*

$$|y| (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} = ct - ipx$$

ou de

$$|y| (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} = -ct + ipx$$

et il faudra vérifier, après résolution du polynôme, que  $\Re(ct - ipx) \geq 0$ .

On vérifie facilement que  $P_{t,r,\theta}$  admet 2 racines imaginaires pures,

$$v^\pm(t) = -i \left( \frac{ct}{r} \cos \theta \pm |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c^2 t^2}{r^2}} \right), \quad \text{pour } t \leq \frac{r}{c}, \quad (12.1.18)$$

et deux racines complexes,

$$\gamma^\pm(t) = -i\frac{ct}{r} \cos \theta \pm |\sin \theta| \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^2} - 1}, \quad \text{pour } t > \frac{r}{c}. \quad (12.1.19)$$

La remarque 12.1.1 nous impose maintenant de vérifier que les racines de (12.1.17) sont bien solutions de (12.1.16).

- pour  $t \leq \frac{r}{c}$  :

$$ct - iv^\pm(t)x = ct \sin^2 \theta \mp \cos \theta |\sin \theta| \sqrt{r^2 - c^2 t^2}$$

donc :

- si  $\cos \theta > 0$

$$\Re(ct - iv^-(t)x) \geq 0 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{r}{c};$$

$$\Re(ct - iv^+(t)x) \geq 0 \quad \text{pour } \frac{r|\cos \theta|}{c} \leq t \leq \frac{r}{c};$$

- si  $\cos \theta < 0$

$$\Re(ct - iv^+(t)x) \geq 0 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{r}{c};$$

$$\Re(ct - iv^-(t)x) \geq 0 \quad \text{pour } \frac{r|\cos \theta|}{c} \leq t \leq \frac{r}{c};$$

- pour  $t > \frac{r}{c}$  :

$$ct - i\gamma^\pm(t)x = ct \sin^2 \theta \mp i \cos \theta |\sin \theta| \sqrt{r^2 - c^2 t^2}$$

donc :

$$\Re(ct - i\gamma^\pm(t)x) \geq 0 \quad \text{pour } \frac{r}{c} < t.$$



**Remarque 12.1.2** Si  $\cos \theta = 0$  on a  $\Gamma^+ \cup \Gamma^- = \mathbb{R}$ .

Nous considérons uniquement, à partir de maintenant et dans les sections suivantes, le cas  $\cos \theta \leq 0$ , mais, les problèmes étudiés étant symétriques par rapport à  $(Oy)$ , les résultats sont évidemment identiques pour  $\cos \theta > 0$ .

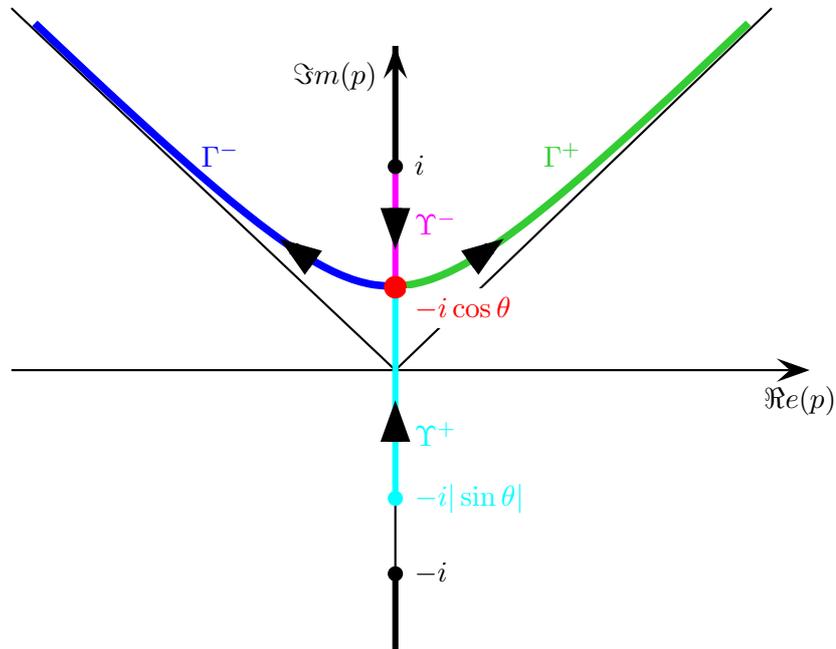


FIG. 12.2: Représentation de  $\tilde{\Gamma}$

Soit  $p \in \Gamma^+$ , on note  $X = \Re(p)$  et  $Y = \Im(p)$ , on a alors

$$X = |\sin \theta| \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^2} - 1} \geq 0, \quad Y = \frac{ct}{r} \cos \theta > 0$$

et

$$\frac{X^2}{\sin^2 \theta} - \frac{Y^2}{\cos^2 \theta} = -1.$$

C'est l'équation d'une hyperbole :  $\Gamma^+$  est la partie de cette hyperbole située dans le quart de plan  $X \geq 0, Y > 0$  et  $\Gamma^-$  la partie située dans le quart de plan  $X \leq 0, Y > 0$ .  $\Gamma$  intersecte l'axe imaginaire au point  $p = -i \cos \theta$  pour  $t = \frac{r}{c}$ .

**Remarque 12.1.3** Si  $\cos \theta > 0$  on montre de même que  $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$  est la branche de cette hyperbole située dans le plan  $Y < 0$ .

Les contours  $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$  et  $\Upsilon = \Upsilon^+ \cup \Upsilon^-$  sont représentés sur la figure 12.2.

**Remarque 12.1.4** *Nous n'utiliserons pas les contours  $\Upsilon$  dans cette section, mais ils interviendront dans le calcul des ondes de tête dans les sections suivantes.*

D'après la définition de la fonction  $x \mapsto (x)^{\frac{1}{2}}$  que nous avons choisie, les points de branchements de  $\Xi$  sont  $p = \pm i$  et ses coupures sont les 2 demi-droites imaginaires

$$\{ip \mid p \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[ \}.$$

Nous notons de plus  $D$  la droite réelle et  $\Omega$  la partie du plan complexe délimitée par  $D$  et  $\Gamma$  (voir figure 12.3). Il est évident que  $\Gamma$  ne traverse pas les coupures.

Montrons maintenant que  $\int_D \Xi(p) dp = - \int_{\Gamma} \Xi(p) dp$ .

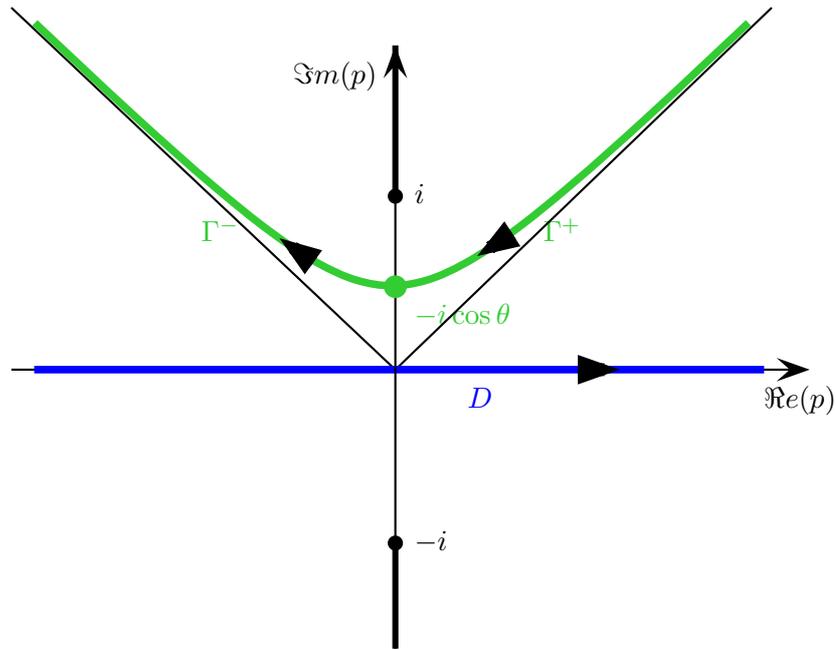


FIG. 12.3: Représentation de  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  dans le plan complexe

Soit  $\rho$  un réel positif, destiné à tendre vers  $+\infty$ , on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_\rho = \{p \in D \mid |p| < \rho\}, \\ \Gamma_\rho = \{p \in \Gamma \mid |p| < \rho\}, \\ C_\rho = \{p \in \Omega \mid |p| = \rho\}. \end{array} \right.$$

$C_\rho$  est constitué de deux arcs-de-cercle reliant  $D_\rho$  et  $\Gamma_\rho$  de telle sorte que  $D_\rho \cup C_\rho \cup \Gamma_\rho$  soit une courbe fermée. Puisque  $\Xi$  est analytique sur  $\Omega$ , son intégrale sur le contour fermé  $D_\rho \cup C_\rho \cup \Gamma_\rho$

## 12.1 Calcul de la fonction de Green dans un milieu homogène infini

(l'orientation du contour est choisie de telle sorte que le segment réel  $D_\rho$  soit parcouru dans le sens des valeurs croissantes — voir figure 12.4) est nulle :

$$\int_{D_\rho} \Xi(p) dp + \int_{\Gamma_\rho} \Xi(p) dp + \int_{C_\rho} \Xi(p) dp = 0. \quad (12.1.20)$$

D'après la définition de la racine carrée que nous avons choisie et puisque  $x < 0$  on vérifie facilement que :

$$\Re(|y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx) > 0 \quad \text{si} \quad \Im m(p) \geq 0 \text{ et } \Re(p) \neq 0$$

et donc que, pour tout  $\psi \in [0; \pi/2[ \cup ]\pi/2; \pi]$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} Re^{i\psi} \Xi(Re^{i\psi}) = 0.$$

Nous pouvons donc appliquer le lemme de Jordan [85, 66] :

**Lemme 12.1.2 (Second Lemme de Jordan)** *Soient  $z_0$  un point de  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{U}$  un secteur angulaire de  $\mathbb{C}$  défini par*

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \geq R_0 \text{ et } \psi_1 < \arg(z - z_0) < \psi_2\} \quad (R_0 > 0, \psi_1 \text{ et } \psi_2 \in \mathbb{R}).$$

*Si  $f$  est une fonction continue dans  $\mathcal{U}$  et si*

$$\lim_{\substack{|z-z_0| \rightarrow +\infty \\ z \in \mathcal{U}}} (z - z_0)f(z) = 0,$$

*alors pour tout arc de cercle  $\gamma$  de centre  $z_0$ , de rayon  $R > R_0$ , contenu dans  $\mathcal{U}$  on a*

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_\gamma f(z) dz = 0.$$

Donc

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho} \Xi(p) dp = 0.$$

Nous déduisons alors de (12.1.20):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c} [ |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx ]} dp = - \int_\Gamma \frac{e^{-\frac{s}{c} [ |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx ]}}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} dp. \quad (12.1.21)$$

Effectuons maintenant le changement de variable  $p = \gamma^\pm(t)$  sur  $\Gamma^\pm$  pour  $t > \frac{r}{c}$ , par construction

$$e^{-\frac{s}{c} [ |y|(1+\gamma^\pm(t)^2)^{\frac{1}{2}} + i\gamma^\pm(t)x ]} = e^{-st},$$

donc

$$\int_\Gamma \frac{e^{-\frac{s}{c} [ |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx ]}}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} dp = - \int_{\frac{r}{c}}^{+\infty} \left[ \frac{1}{(1+\gamma^+(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\gamma^+(t)}{dt} - \frac{1}{(1+\gamma^-(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\gamma^-(t)}{dt} \right] e^{-st} dt.$$

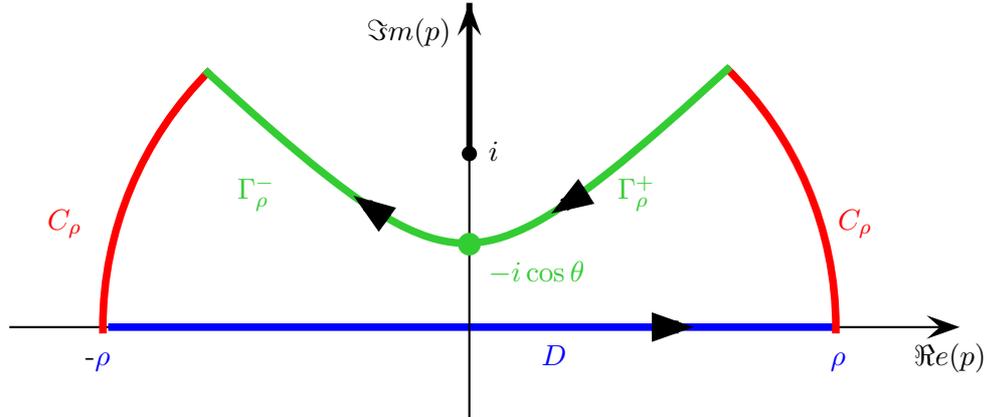


FIG. 12.4: Contour d'intégration

Il ne reste plus qu'à évaluer la quantité

$$\frac{1}{(1 + \gamma^\pm(t))^{\frac{1}{2}}} \frac{d\gamma^\pm(t)}{dt},$$

pour cela on utilise d'abord (12.1.16) :

$$(1 + \gamma^\pm(t))^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{ct}{r} - i\gamma^\pm(t) \cos \theta}{|\sin \theta|}, \tag{12.1.22}$$

soit, en utilisant l'expression (12.1.19) de  $\gamma^\pm(t)$  :

$$(1 + \gamma^\pm(t))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^2} - 1} \left( \frac{\frac{ct}{r} |\sin \theta|}{\sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^2} - 1}} \mp i \cos \theta \right). \tag{12.1.23}$$

Or, en dérivant (12.1.19), on montre que :

$$\frac{d\gamma^\pm(t)}{dt} = \frac{c}{r} \left( \pm \frac{\frac{ct}{r} |\sin \theta|}{\sqrt{\frac{c^2 t^2}{r^2} - 1}} - i \cos \theta \right). \tag{12.1.24}$$

Il est alors facile de montrer que

$$\frac{1}{(1 + \gamma^\pm(t))^{\frac{1}{2}}} \frac{d\gamma^\pm(t)}{dt} = \pm \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}} \tag{12.1.25}$$

puis que :

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{-\frac{s}{c} [ |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx ]}}{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}} dp = 2 \int_{\frac{r}{c}}^{+\infty} \frac{e^{-st}}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}} dt, \tag{12.1.26}$$

## 12.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

soit :

$$\tilde{u}(x, y, s) = \int_{\frac{r}{c}}^{+\infty} \frac{e^{-st}}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}} dt. \quad (12.1.27)$$

Finalement, en utilisant l'injectivité de la transformée de Laplace (sixième et dernière étape de la méthode), nous déduisons le

**Théorème 12.1.1** *La solution du problème (12.1.11) s'écrit :*

$$\boxed{\begin{aligned} u(x, y, t) &= 0, & t < \frac{r}{c} \\ u(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}}, & t > \frac{r}{c} \end{aligned}}$$

**Définition 12.1.1** *Pour  $t$  fixé la solution  $u$  est régulière dans tout l'espace, sauf pour les points vérifiant  $r(x) = ct$ <sup>(47)</sup>. L'ensemble des singularités de  $u$  au temps  $t$  sera appelé le front d'onde de  $u$  au temps  $t$ .*

Pour le calcul numérique de  $U$  on pourra s'inspirer de l'algorithme présenté à la section 12.4.1.1 (calcul de  $P^i$ ) page 318.

## 12.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

Nous considérons maintenant un domaine infini composé de 2 fluides homogènes. Les 2 milieux sont respectivement associés aux demi-plans  $y > 0$  et  $y < 0$ . Nous supposons que la source est située dans le milieu 1 à une distance  $h \geq 0$  de l'interface. L'équation aux dérivées partielles modélisant ce problème est :

$$\frac{1}{\mu(y)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(y)} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho(y)} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] = \delta(x) \delta(y - h) f(t) \quad (12.2.1)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \mu(y) = \mu_1, & \rho(y) = \rho_1, & y > 0, \\ \mu(y) = \mu_2, & \rho(y) = \rho_2, & y < 0 \end{cases} \quad \text{et } c(y) = \sqrt{\frac{\mu(y)}{\rho(y)}}.$$

Comme dans les sections précédentes on s'intéresse au calcul de la fonction de Green solution de

$$\frac{1}{\mu(y)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(y)} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho(y)} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \delta(x) \delta(y - h) \delta(t). \quad (12.2.2)$$

---

47. C'est-à-dire les points appartenant au cercle de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $ct$ .

## 12.2.1 Résultats

### 12.2.1.1 Notations

Nous utiliserons par la suite les fonctions de la variable complexe  $z$  définies par :

$$\mathcal{R}(z) = \frac{\rho_2 (1 + z^2)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 \left( \frac{c_1^2}{c_2^2} + z^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 (1 + z^2)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 \left( \frac{c_1^2}{c_2^2} + z^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$\mathcal{T}(z) = \frac{2\rho_2 (1 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left( \frac{c_2^2}{c_1^2} + z^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 (1 + z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

### 12.2.1.2 Cas d'une source sur l'interface

Nous supposons ici que  $h = 0$  et  $c_1 < c_2$ .

- a) **Les fronts d'onde.** Nous avons défini, à la section précédente, le front d'onde de la solution comme étant l'ensemble des singularités de la solution. Dans le cas d'une source située sur l'interface de deux milieux acoustiques, le front d'onde se décompose en trois fronts d'onde secondaires : un front d'onde de volume et un front d'onde de tête dans le milieu 1 et un front d'onde de volume dans le milieu 2. Ces ondes seront définies plus précisément au §b. Nous utiliserons par la suite les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  de  $\mathbf{x}$  vérifiant

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta,$$

**Front de l'onde de volume dans le milieu 1.** Pour un instant  $t$  donné, le front de l'onde de volume dans le milieu 1 est un demi-cercle de centre  $O = (0, 0)$  et de rayon  $c_1 t$  (en bleu sur la figure 12.5). Nous appelons  $\Omega_R(t)$  l'intérieur de ce demi-cercle.  $\Omega_R(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_R(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \text{ et } \frac{r}{c_1} < t \right\}.$$

**Front de l'onde de volume dans le milieu 2.** De même le front de l'onde de volume dans le milieu 2 est un cercle de centre  $O = (0, 0)$  et de rayon  $c_2 t$  (en rouge sur la figure 12.5) et nous appelons  $\Omega_T(t)$  l'intérieur de ce demi-cercle.  $\Omega_T(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_T(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0 \text{ et } \frac{r}{c_2} < t \right\}.$$

**Front de l'onde de tête dans le milieu 1.** Nous notons  $A(t)$  l'intersection du front d'onde dans le milieu 2 avec l'axe  $x = 0$  à droite et  $B(t)$  le point tel que le segment  $[A(t)B(t)]$  (en magenta sur la figure 12.5) soit tangent à  $\Omega_R(t)$ . Soit  $[C(t)D(t)]$  le symétrique de  $[A(t)B(t)]$  par rapport à l'axe  $(Oy)$ . Il est bien connu qu'il se crée une onde dite onde de tête dans le milieu le plus lent (ici le milieu 1) dont le front d'onde est constitué du segment  $[A(t)B(t)]$  et du segment  $[C(t)D(t)]$ .

## 12.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

**Lemme 12.2.1** *L'angle  $\theta_c = \arccos(c_1/c_2)$  est l'angle limite au-dessus duquel il n'existe plus d'onde de tête. De plus les points du segment  $[A(t)B(t)]$  (resp.  $[C(t)D(t)]$ ) vérifient l'équation :*

$$\left\{ \begin{array}{l} t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{r \cos \theta}{c_2}, \quad \theta \in [0; \theta_c]; \quad (12.2.3a) \\ \text{( resp. } t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_2}, \quad \theta \in [\pi - \theta_c; \pi]). \quad (12.2.3b) \end{array} \right.$$

**Démonstration :**

Le triangle  $OA(t)B(t)$  est rectangle en  $B(t)$ , de plus  $OA(t) = c_2 t$  et  $OB(t) = c_1 t$  :

$$\cos \theta_c = \frac{OB(t)}{OA(t)} = \frac{c_1}{c_2}.$$

L'équation (12.2.3a) (resp. (12.2.3b)) n'est rien d'autre que l'équation du segment joignant le point  $A(t)$  de coordonnées  $(c_2 t, 0)$  au point  $B(t)$  de coordonnées

$$(c_1 t \cos \theta_c; c_1 t \sin \theta_c)$$

(resp. le point  $C(t)$  de coordonnées  $(-c_2 t, 0)$  au point  $D(t)$  de coordonnées

$$(-c_1 t \cos \theta_c; c_1 t \sin \theta_c)).$$

■

Nous noterons  $\Omega_{te}(t)$  l'ensemble constitué des triangles  $OA(t)B(t)$  et  $OC(t)D(t)$  privé de  $\Omega_R(t)$ .  $\Omega_{te}(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_{te}(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, |\cos \theta| > \frac{c_1}{c_2} \text{ et } r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{r |\cos \theta|}{c_2} < t < \frac{r}{c_2} \right\}.$$

Finalement nous notons  $\Omega(t) = \Omega_R(t) \cup \Omega_T(t) \cup \Omega_{te}(t)$ .

**b) Solutions analytiques.** On notera

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1^+(t) = -i \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{r^2} - 1}; \\ v_1^+(t) = -i \left( \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{r^2}} \right); \\ \gamma_2^+(t) = -i \frac{c_2 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_2^2 t^2}{r^2} - 1}. \end{array} \right.$$

Nous pouvons alors énoncer le

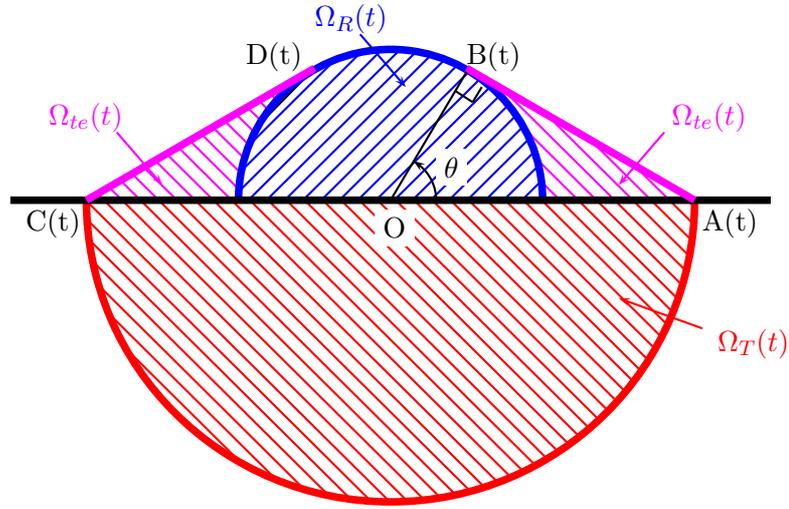


FIG. 12.5: Représentation du front d'onde quand  $h = 0$

**Théorème 12.2.1** *La solution causale du problème (12.2.2) avec  $h = 0$  est donnée par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega(t) : \quad u(x, y, t) = 0 ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_R(t) : \quad u(x, y, t) = \frac{1 + \Re e [\mathcal{R}(\gamma_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_1^2}}} ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) : \quad u(x, y, t) = -\frac{\Im m [\mathcal{R}(v_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_1^2} - t^2}} ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_T(t) : \quad u(x, y, t) = \frac{\Re e [\mathcal{T}(\gamma_2^+(t))]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_2^2}}} . \end{array} \right.$$

Pour le calcul numérique de  $U$  on pourra s'inspirer de l'algorithme présenté à la section 12.4.1.2 (calcul de  $P^r$ ) page 320.

### 12.2.1.3 Cas d'une source en-dehors de l'interface

a) **Les fronts d'onde.** Nous distinguerons deux cas :  $c_1 < c_2$  et  $c_1 > c_2$  et nous utiliserons les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  de  $\mathbf{x}$  vérifiant

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y + h = r \sin \theta,$$

## 12.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

1. **Si  $c_1 < c_2$ .** Dans ce cas, l'onde dans le milieu 1 apparaît comme la somme de trois ondes : une onde incidente, une onde réfléchie et une onde de tête. L'onde dans le milieu 2 est seulement constituée d'une onde transmise. La définition précise de ces ondes sera donnée au §b.

**Front de l'onde incidente dans le milieu 1.** Pour un instant  $t$  donné le front de l'onde incidente (en vert sur la figure 12.7) est l'intersection du cercle de centre  $(0, h)$  et de rayon  $c_1 t$  avec le demi-plan supérieur. Nous appelons  $\Omega_I(t)$  l'intérieur de cet arc de cercle.

**Front de l'onde réfléchie dans le milieu 1.** Le front de l'onde réfléchie (en bleu sur la figure 12.7) est l'intersection du cercle de centre  $(0, -h)$  et de rayon  $c_1 t$  avec le demi-plan supérieur. Nous appelons  $\Omega_R(t)$  l'intérieur de cet arc de cercle.  $\Omega_R(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_R(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \text{ et } \frac{r}{c_2} < t \right\}.$$

**Front de l'onde transmise dans le milieu 2.** Le front de l'onde transmise a une forme plus compliquée. Pour le décrire il est nécessaire de calculer le temps de parcours d'un rayon issu de la source et atteignant le point  $(x, y)$  :

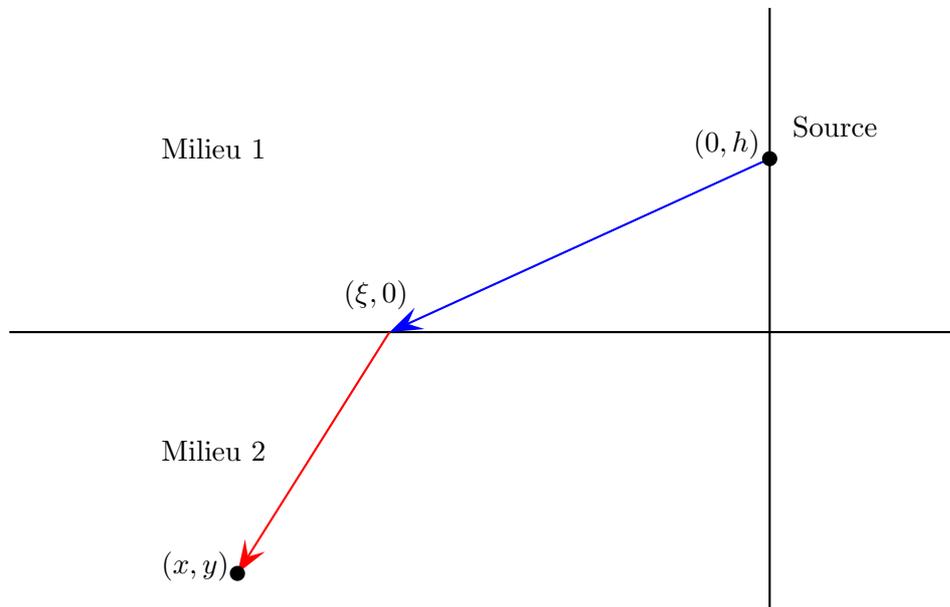


FIG. 12.6: Trajet de l'onde transmise

la figure 12.6 représente le trajet d'un rayon émis par la source dans le milieu 1 et atteignant le point  $(x, y)$  dans le milieu 2. Ce trajet se décompose en 2 parties,

une première partie dans le milieu 1 de la source  $(0, h)$  vers l'interface  $(\xi, 0)$  et une deuxième partie dans le milieu 2 de l'interface  $(\xi, 0)$  vers le point  $(x, y)$ . La longueur du premier trajet est  $\sqrt{\xi^2 + h^2}$  et le temps de parcours est  $\sqrt{\xi^2 + h^2}/c_1$ . La longueur du deuxième trajet est  $\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}$  et le temps de parcours est  $\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}/c_2$ . Le temps de parcours total est donc :

$$t(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}}{c_2}. \quad (12.2.4)$$

Le premier rayon arrivant en  $(x, y)$  est celui passant par  $\xi_{02}(x, y)$ , minimisant la fonction  $t$ .  $\xi = \xi_{02}(x, y)$  vérifie donc :

$$t'(\xi) = \frac{\xi}{c_1 \sqrt{\xi^2 + h^2}} + \frac{\xi - x}{c_2 \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}} = 0 \quad (12.2.5)$$

On montre facilement, en étudiant les variations de  $t'(\xi)$ , que cette équation n'admet qu'une seule racine réelle, que cette racine appartient à l'intervalle  $[0 ; x]$  (ou  $[x ; 0]$  si  $x < 0$ ) et qu'elle minimise  $t(\xi)$  (voir la démonstration ainsi que les détails pratiques pour le calcul de  $\xi_{02}(x, y)$  page 322). Finalement le temps d'arrivée de l'onde est  $t_{02}(x, y) = t(\xi_{02}(x, y))$  et le front de l'onde transmise est l'ensemble des points tels que :

$$t_{02}(x, y) = t.$$

Ce front d'onde est représenté en rouge sur la figure 12.7. Nous définissons également l'ensemble  $\Omega_T(t)$  par :

$$\Omega_T(t) = \{(x, y) \mid y \leq 0 \text{ et } t_{02}(x, y) \leq t\}.$$

**Remarque 12.2.1** *On vérifie facilement que l'ensemble  $\Omega_T(t)$  tend vers un demi-disque de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $c_2 t$  quand  $h$  tend vers 0.*

**Onde de tête dans le milieu 1.** Nous notons  $A(t)$  l'intersection du front d'onde transmis avec l'axe  $x = 0$  à droite et  $B(t)$  le point tel que le segment  $[A(t)B(t)]$  (en magenta sur la figure 12.5) soit tangent à  $\Omega_R(t)$ . Soit  $[C(t)D(t)]$  le symétrique de  $[A(t)B(t)]$  par rapport à l'axe  $(Oy)$ . Comme dans le cas où la source est située sur l'interface, il se crée une onde dite onde de tête dans le milieu le plus lent (ici le milieu 1) dont le front d'onde est constitué du segment  $[A(t)B(t)]$  et du segment  $[C(t)D(t)]$ .

**Lemme 12.2.2** *L'angle  $\theta_c = \arccos(c_1/c_2)$  est l'angle limite au-dessus duquel il n'existe plus d'onde de tête, de plus pour  $t$  donné, l'ensemble des points du segment  $[A(t)B(t)]$  (resp.  $[C(t)D(t)]$ ) vérifie l'équation :*

$$t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{r \cos \theta}{c_2} \quad (\text{resp. } t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_2}) \quad (12.2.6)$$

où  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires du point  $(x, y)$  dans le repère lié au point  $O = (0, -h)$ .

## 12.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

La démonstration de ce lemme est moins évidente que dans le cas  $h = 0$  et sera faite en démontrant le théorème 12.2.2 ci-dessous. (voir page 287).

Nous noterons  $\Omega_{te}(t)$  l'ensemble constitué des triangles  $OA(t)B(t)$  et  $OC(t)D(t)$  privé de  $\Omega_R(t)$ .  $\Omega_{te}(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_{te}(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, |\cos \theta| > \frac{c_1}{c_2} \text{ et } r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{r |\cos \theta|}{c_2} < t < \frac{r}{c_1} \right\}.$$

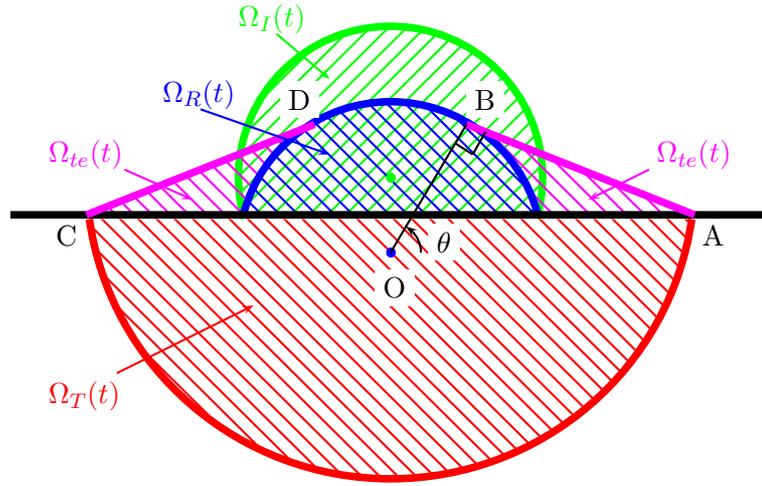


FIG. 12.7: Représentation du front d'onde quand  $c_1 < c_2$

2. **Si  $c_1 > c_2$ .** Dans ce cas le contour est beaucoup plus simple car il n'y a pas d'onde de tête. Nous définissons les fronts d'onde incidente, réfléchi et transmise ainsi que les ensembles  $\Omega_I(t)$ ,  $\Omega_R(t)$  et  $\Omega_T(t)$  de la même manière que dans le cas  $c_1 < c_2$  (voir figure 12.8). Pour harmoniser les résultats dans les deux cas nous notons  $\Omega_{te} = \emptyset$ .

b) **Solutions analytiques.** Nous décomposons la solution  $u$  en :

$$\begin{cases} u = u^i + u^r & y > 0, \\ u = u^t & y < 0. \end{cases} \quad (12.2.7)$$

où  $u^i$  est l'onde incidente, c'est à dire la restriction au demi-plan  $y > 0$  de la solution qu'on aurait obtenue si  $c_1 = c_2$  :

$$\begin{cases} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_I(t) : & u^i(x, y, t) = 0 ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_I(t) : & u^i(x, y, t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^{*2}}{c_1^2}}}. \end{cases}$$

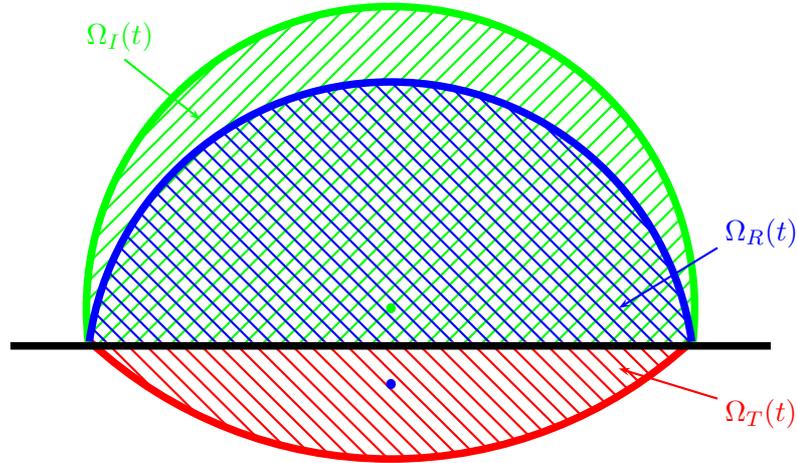


FIG. 12.8: Représentation du front d'onde quand  $c_1 > c_2$

où  $r^* = \sqrt{x^2 + (y - h)^2}$ .

Nous posons

$$r = \sqrt{x^2 + (y + h)^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{(y + h)}{r}$$

( $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires du point  $x$  dans le repère du point source image situé en  $(0, -h)$ ) et

$$\begin{cases} \gamma_1^+(t) = -i \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{r^2} - 1} \\ v_1^+(t) = -i \left( \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{r^2}} \right). \end{cases}$$

Pour définir  $\gamma_2^+(t)$  nous utiliserons la fonction

$$\mathcal{F}(p, t) = -y (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipx - c_2 t = 0,$$

le temps d'arrivée de l'onde transmise au point  $(x, y)$ ,  $t_{02} = t_{02}(x, y)$  et le lemme suivant, vrai pour  $x < 0$  :

**Lemme 12.2.3** (Démonstration page 287). Soit  $m = \min(1, c_1/c_2)$ , soit  $g$  la fonction définie par

$$p \in [-im; im] \mapsto g(p) = \mathcal{F}(p, t) - c_2 t = -y (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipx. \quad (12.2.8)$$

## 12.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

et soit  $h(q) = g(ip)$  la fonction définie par

$$q \in [-m; m] \mapsto h(q) = -y(1 - q^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - q^2\right)^{\frac{1}{2}} - qx. \quad (12.2.9)$$

Alors

- $t_{02}$  est l'unique réel tel que  $\mathcal{F}(p, t_{02})$  admette une racine double  $p = p_{02}$ , cette racine est imaginaire pure, de plus  $0 < \Im(p_{02}) < m$  ;
- pour  $h(m)/c_2 \leq t < h(-m)/c_2$ ,  $\mathcal{F}(p, t)$  admet une unique racine

$$p = v^-(t) \in [p_{02}; im],$$

imaginaire pure ;

- pour  $h(-m)/c_2 \leq t \leq t_{02}$ ,  $\mathcal{F}(p, t)$  admet deux racines

$$p = v_2^-(t) \in [p_{02}; im] \quad \text{et} \quad p = v_2^+(t) \in [-im; p_{02}],$$

imaginaires pures. De plus

$$\frac{dv_2^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_{02}^-}{\simeq} \pm \zeta(t) \sqrt{\frac{1}{t_{02}^2 - t^2}},$$

avec

$$\zeta(t) = \sqrt{\frac{t + t_{02}}{2c_2 g''(p_{02})}};$$

- pour  $t_{02} < t$ ,  $\mathcal{F}(p, t)$  admet deux racines complexes  $\gamma_2^+(t)$  et  $\gamma_2^-(t)$  vérifiant

$$\Im[\gamma_2^+(t)] = \Im[\gamma_2^-(t)] > 0 \quad \text{et} \quad \Re[\gamma_2^+(t)] = -\Re[\gamma_2^-(t)] > 0.$$

De plus

$$\frac{d\gamma_2^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_{02}^+}{\simeq} \pm \zeta(t) \sqrt{\frac{1}{t^2 - t_{02}^2}}.$$

**Théorème 12.2.2** L'onde réfléchie est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_R(t) \cup \Omega_{te}(t) : \quad u^r(x, y, t) = 0 ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_R(t) : \quad u^r(x, y, t) = \frac{\Re[\mathcal{R}(\gamma_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_1^2}}}; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) : \quad u^r(x, y, t) = -\frac{\Im[\mathcal{R}(v_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_1^2} - t^2}}. \end{array} \right.$$

et l'onde transmise est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_T(t) : u^t(x, y, t) = 0 ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_T(t) : u^t(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{c_2 \mathcal{T}(\gamma_2^+(t))}{(1 + \gamma_2^+(t)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t), t)} \right]. \end{array} \right.$$

On pourra s'inspirer, pour le calcul numérique de  $U^r$ , de l'algorithme présenté à la section 12.4.1.2 (calcul de  $P^r$ ) page 320, et, pour celui de  $U^t$  de l'algorithme présenté à la section 12.4.2.1 (calcul de  $V_{sx}^P$ ) page 322.

### 12.2.2 Démonstrations

Si nous décomposons  $u$  suivant (12.2.7), les conditions de transmissions physiques imposant la continuité de  $u$  et de  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y}$ , l'équation (12.2.2) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial y^2} \right] = \delta(x) \delta(y - h) \delta(t), \quad y > 0 \quad (12.2.10a) \\ \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u^r}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 u^r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^r}{\partial y^2} \right] = 0, \quad y > 0 \quad (12.2.10b) \\ \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u^t}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 u^t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^t}{\partial y^2} \right] = 0, \quad y < 0 \quad (12.2.10c) \\ u^i + u^r = u^t, \quad y = 0 \quad (12.2.10d) \\ \rho_2 \left( \frac{\partial u^i}{\partial y} + \frac{\partial u^r}{\partial y} \right) = \rho_1 \frac{\partial u^t}{\partial y}, \quad y = 0 \quad (12.2.10e) \end{array} \right.$$

L'utilisation des transformations de Laplace en temps et de Fourier en  $x$  nous permet d'obtenir le système différentiel ordinaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 \hat{u}^i}{\partial y^2} + \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right) \hat{u}^i = \delta(y - h), \quad y > 0, \quad (12.2.11a) \\ -\frac{\partial^2 \hat{u}^r}{\partial y^2} + \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right) \hat{u}^r = 0, \quad y > 0, \quad (12.2.11b) \\ -\frac{\partial^2 \hat{u}^t}{\partial y^2} + \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right) \hat{u}^t = 0, \quad y < 0, \quad (12.2.11c) \\ \hat{u}^i + \hat{u}^r = \hat{u}^t, \quad y = 0, \quad (12.2.11d) \\ \rho_2 \left( \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}^r}{\partial y} \right) = \rho_1 \frac{\partial \hat{u}^t}{\partial y}, \quad y = 0, \quad (12.2.11e) \end{array} \right.$$

## 12.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

dont les solutions sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}^i = \frac{1}{2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|y-h| \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}}, \end{array} \right. \quad (12.2.12a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}^r = \frac{\mathcal{R}(k, s)}{2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-(y+h) \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}}, \end{array} \right. \quad (12.2.12b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}^t = \frac{\mathcal{T}(k, s)}{2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{y \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} - h \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}}. \end{array} \right. \quad (12.2.12c)$$

Avec  $\mathcal{R}$ , le coefficient de réflexion, et  $\mathcal{T}$ , le coefficient de transmission, définis par

$$\mathcal{R}(k, s) = \frac{\rho_2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (12.2.13)$$

$$\mathcal{T}(k, s) = \frac{2\rho_2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (12.2.14)$$

### 12.2.2.1 Cas d'une source sur l'interface, démonstration du théorème 12.2.1

Dans le cas  $h = 0$  la solution  $\hat{u}$  s'écrit

$$\hat{u}(k, y, s) = \frac{1 + \mathcal{R}(k, s)}{2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|y| \left( k^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (12.2.15)$$

pour  $y > 0$  et

$$\hat{u}(k, y, s) = \frac{\mathcal{T}(k, s)}{2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|y| \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (12.2.16)$$

pour  $y < 0$ .

**Calcul de la solution dans le milieu 2.** En utilisant la transformation de Fourier on obtient :

$$\tilde{u}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(k, s)}{2 \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|y| \left( k^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} - ikx} dk. \quad (12.2.17)$$

Comme précédemment on utilise le changement de variable  $k = \frac{ps}{c_2}$

$$\tilde{u}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(\frac{ps}{c_2}, s)}{2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_2} \left[ |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx \right]} dp \quad (\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_T(p) dp). \quad (12.2.18)$$

Pour ne pas alourdir la présentation, nous faisons maintenant l'abus de notation

$$\mathcal{T}(p) = \mathcal{T}\left(\frac{p}{c_2}, 1\right) = \frac{2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}} + (1+p^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (12.2.19)$$

(il n'y aura pas de risque de confusion par la suite car la première formulation de  $\mathcal{T}$  ne sera plus utilisée).

Nous cherchons maintenant le nouveau contour d'intégration : on pose

$$c_2 t = |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx$$

et

$$\Gamma = \left\{ p \in \mathbb{C} \mid |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Comme à la section 12.1 on montre que

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Upsilon^+ \cup \Upsilon^- \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^- \quad \text{avec} \\ \Gamma^\pm &= \left\{ p = \gamma_2^\pm(t) = -i \frac{c_2 t}{r} \cos \theta \pm |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_2^2 t^2}{r^2} - 1}, \quad \frac{r}{c_2} \leq t \right\}, \\ \Upsilon^+ &= \left\{ p = v_2^+(t) = -i \left( \frac{c_2 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_2^2 t^2}{r^2}} \right), \quad 0 \leq t \leq \frac{r}{c_2} \right\}, \\ \Upsilon^- &= \left\{ p = v_2^-(t) = -i \left( \frac{c_2 t}{r} \cos \theta - |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_2^2 t^2}{r^2}} \right), \quad -\frac{r \cos \theta}{c_2} \leq t \leq \frac{r}{c_2} \right\}. \end{aligned}$$

$\Gamma^+ \cup \Gamma^-$  est une branche d'hyperbole située dans le plan  $\Im m(p) > 0$  si  $\cos \theta < 0$ . De plus  $\Gamma$  intersecte l'axe imaginaire au point  $p = -i \cos \theta$  pour  $t = \frac{r}{c_2}$  (toutes ces informations sont résumées sur la figure 12.9).

D'après la définition de la fonction  $x \mapsto (x)^{\frac{1}{2}}$  que nous avons choisie, les points de branchements de  $\Xi_T$  sont  $p = \pm i$ , et  $p = \pm i \frac{c_2}{c_1}$  et ses coupures sont les deux demi-droites imaginaires

$$\{ip \mid p \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[ \}.$$

Il est évident que  $\Gamma$  ne traverse pas les coupures.

En utilisant le même contour qu'à la section 12.1, on montre que, avec les sens de parcours indiqués sur la figure 12.10 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_T(p) dp = - \int_{\Gamma} \Xi_T(p) dp. \quad (12.2.20)$$

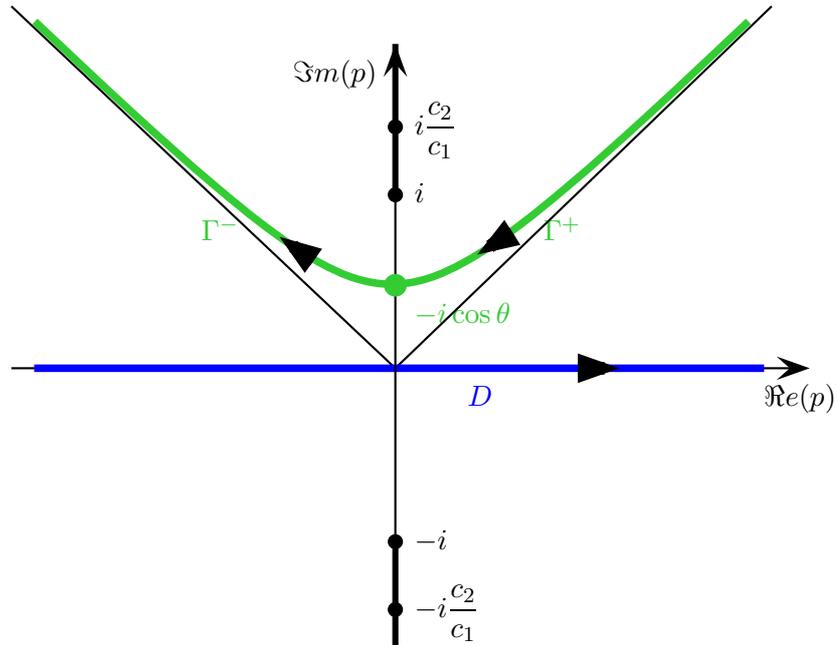


FIG. 12.9: Représentation de  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  dans le plan complexe

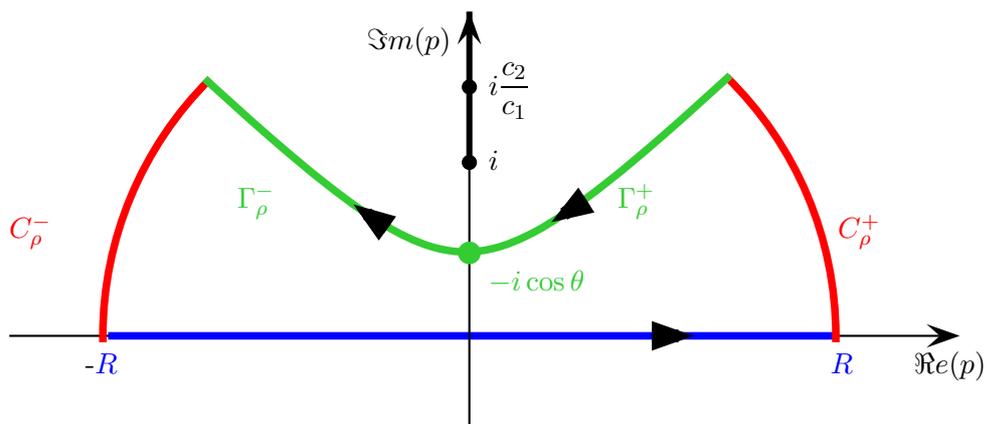


FIG. 12.10: Contour d'intégration

De plus, après avoir effectué le changement de variable

$$p = \gamma_2^\pm(t) = -i\frac{t}{r} \cos \theta \pm |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_2^2 t^2}{r^2} - 1},$$

on obtient :

$$\int_{\Gamma^\pm} \Xi_T(p) dp = \mp \int_{\frac{r}{c_2}}^{+\infty} \frac{1}{4\pi (1 + \gamma_2^\pm(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\gamma_2^\pm(t)}{dt} \mathcal{T}(\gamma_2^\pm(t)) e^{-st} dt. \quad (12.2.21)$$

Or on a vu à la section 12.1 que

$$\frac{1}{(1 + \gamma_2^\pm(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\gamma_2^\pm(t)}{dt} = \pm \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_2^2}}}$$

donc

$$\int_{\Gamma} \Xi_T(p) dp = - \int_{\frac{r}{c_2}}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(\gamma_2^+(t)) + \mathcal{T}(\gamma_2^-(t))}{4\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_2^2}}} e^{-st} dt. \quad (12.2.22)$$

De plus, en utilisant le fait que  $\gamma_2^-(t)^2 = \overline{\gamma_2^+(t)^2}$  et que  $\overline{z^{\frac{1}{2}}} = \overline{z}^{\frac{1}{2}}$ , on montre que :

$$\mathcal{T}(\gamma_2^-(t)) = \overline{\mathcal{T}(\gamma_2^+(t))}$$

et donc que

$$\mathcal{T}(\gamma_2^+(t)) + \mathcal{T}(\gamma_2^-(t)) = 2\Re[\mathcal{T}(\gamma_2^+(t))].$$

On a alors

$$\tilde{u}(x, y, s) = \int_{\frac{r}{c_2}}^{+\infty} \frac{\Re(\mathcal{T}(\gamma_2^+(t)))}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_2^2}}} e^{-st} dt. \quad (12.2.23)$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} u(x, y, t) &= 0, & t < \frac{r}{c_2} \\ u(x, y, t) &= \frac{\Re[\mathcal{T}(\gamma_2^+(t))]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_2^2}}}, & t > \frac{r}{c_2} \end{aligned}}$$

**Calcul de la solution dans le milieu 1.** On s'intéresse maintenant au calcul de la solution dans le milieu où la vitesse est la plus lente et on étudie :

$$\tilde{u}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \mathcal{R}(k, s)}{2 \left(k^2 + \frac{s^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|y| \left(k^2 + \frac{s^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} - ikx} dk. \quad (12.2.24)$$

## 12.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

Utilisons le changement de variable  $k = \frac{ps}{c_1}$  :

$$\tilde{u}(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \mathcal{R}\left(\frac{ps}{c_1}, s\right)}{2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_1} \left[ |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx \right]} dp \quad (\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_R(p) dp). \quad (12.2.25)$$

Nous noterons :

$$\mathcal{R}(p) = \mathcal{R}\left(\frac{p}{c_1}, 1\right) = \frac{(1+p^2)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (12.2.26)$$

Pour trouver le contour d'intégration on pose :

$$c_1 t = |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx \quad (12.2.27)$$

et  $\Gamma = \left\{ p \in \mathbb{C} \mid |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx \in \mathbb{R}^+ \right\}$  et on montre que

$$\Gamma = \gamma^+ \cup \gamma^- \cup \Upsilon^+ \cup \Upsilon^-$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma^\pm &= \left\{ p = \gamma_1^\pm(t) = -i \frac{c_1 t}{r} \cos \theta \pm |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{r^2} - 1}, \quad \frac{r}{c_1} \leq t \right\}, \\ \Upsilon^+ &= \left\{ p = v_1^+(t) = -i \left( \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{r^2}} \right), \quad 0 \leq t \leq \frac{r}{c_1} \right\}, \\ \Upsilon^- &= \left\{ p = v_1^-(t) = -i \left( \frac{c_1 t}{r} \cos \theta - |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{r^2}} \right), \quad -\frac{r \cos \theta}{c_1} \leq t \leq \frac{r}{c_1} \right\}. \end{aligned}$$

$\Gamma$  intersecte l'axe imaginaire au point  $p = -i \cos \theta$  pour  $t = \frac{r}{c_1}$ .

D'après la définition de la fonction  $x \mapsto (x)^{\frac{1}{2}}$  que nous avons choisie, les points de branchements de  $\Xi_R$  sont  $p = \pm i$ , et  $p = \pm i \frac{c_1}{c_2}$ , ses coupures sont les deux demi-droites imaginaires

$$\left\{ ip \mid p \in \left] -\infty; -\frac{c_1}{c_2} \left[ \cup \right] \frac{c_1}{c_2}; +\infty \left[ \right. \right\}.$$

Cette fois  $\Gamma$  traverse les coupures pour  $\cos \theta > \frac{c_1}{c_2}$  (voir figure 12.11). Il faut donc distinguer deux cas.

1. **Si**  $|\cos \theta| \leq \frac{c_1}{c_2}$ . On peut alors utiliser un contour semblable à celui décrit lors du calcul dans le milieu 2 et on montre que :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= 0, \quad t < \frac{r}{c_1} \\ u(x, y, t) &= \frac{1 + \Re(\mathcal{R}(\gamma_1^+(t)))}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_1^2}}}, \quad t > \frac{r}{c_1} \end{aligned}$$

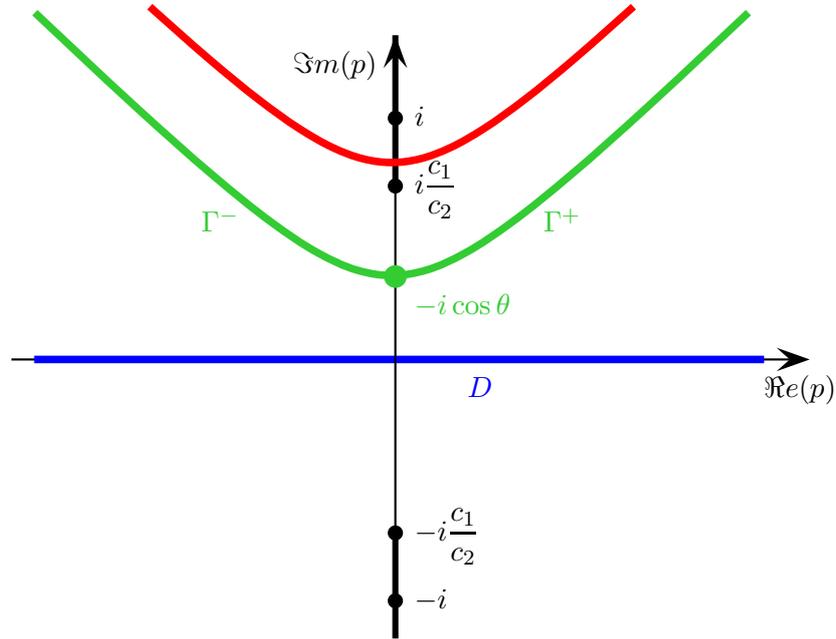


FIG. 12.11: Représentation de  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  dans le plan complexe

(la démonstration est la même que pour le calcul dans le milieu 2).

2. **Si**  $|\cos \theta| > \frac{c_1}{c_2}$ . Il faut alors modifier le contour pour qu'il ne traverse pas les coupures, pour cela nous allons maintenant utiliser  $\Upsilon^\pm$  qui est représenté avec  $\Gamma^\pm$  dans le plan complexe sur la figure 12.12.  $\Upsilon^+$  est le segment imaginaire  $[-i|\sin \theta| ; -i \cos \theta]$  et  $\Upsilon^-$  est le segment imaginaire  $[i ; -i \cos \theta]$ . Seul  $\Upsilon^+$  peut nous permettre de contourner la coupure, de plus nous n'avons besoin que de la partie de  $\Upsilon^+$  comprise entre  $i\frac{c_1}{c_2}$  et  $-i \cos \theta$ , nous notons donc

$$\Upsilon = \Upsilon^+ \cap \left[ i\frac{c_1}{c_2} ; -i \cos \theta \right].$$

On vérifie facilement que  $\Upsilon$  peut être paramétrée par  $t$  :

$$\Upsilon = \left\{ p = v_1^+(t) = -i \left( \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{r^2}} \right), \quad t_1 \leq t \leq \frac{r}{c_1} \right\}$$

avec  $t_1 = r|\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_2}$  ( $t_1$  est obtenu en utilisant (12.2.27) en  $p = i\frac{c_1}{c_2}$ ).

Nous modifions légèrement la définition de  $\Gamma_\rho$  pour qu'il ne touche pas l'axe imaginaire :

$$\Gamma_\rho = \left\{ p \in \Gamma \mid |p| < \rho \quad \text{et} \quad \Re(p) \geq \frac{1}{\rho} \right\},$$

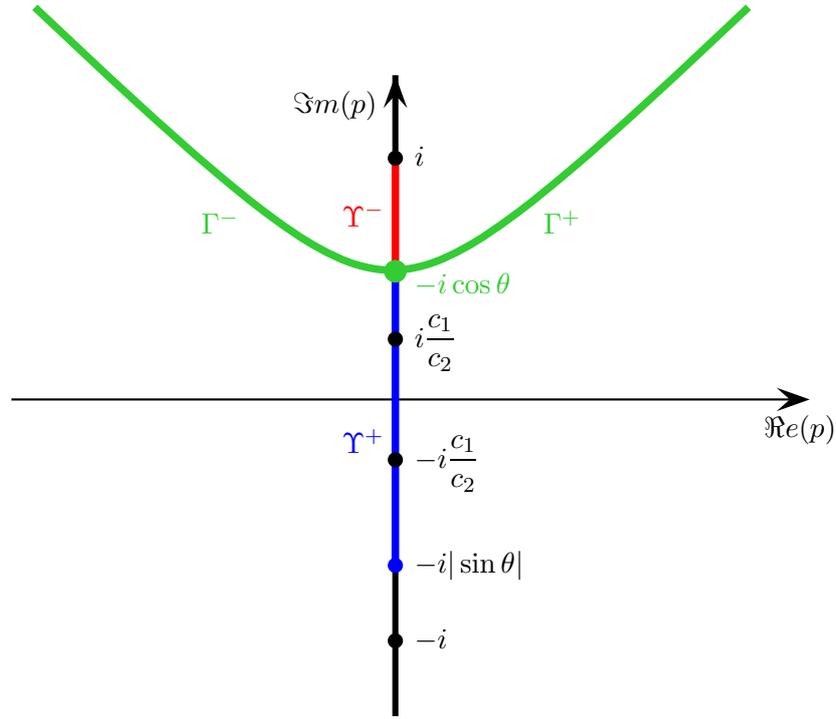


FIG. 12.12: Représentation de  $\Gamma$  dans le plan complexe

et nous définissons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Upsilon_{+\rho} = \left\{ p \mid p - \frac{1}{\rho} \in \Upsilon \right\}, \\ \Upsilon_{-\rho} = \left\{ p \mid p + \frac{1}{\rho} \in \Upsilon \right\}, \\ c_\rho = \left\{ p \mid \left| p - i \frac{c_1}{c_2} \right| = \frac{1}{\rho} \quad \text{et} \quad \Im m(p) \leq \frac{c_1}{c_2} \right\}. \end{array} \right.$$

$\Upsilon_{+\rho}$  (resp.  $\Upsilon_{-\rho}$ ) est l'image de  $\Upsilon$  par la translation de vecteur  $\frac{1}{\rho}$  (resp.  $-\frac{1}{\rho}$ ),  $c_\rho$  est le demi-cercle "inférieur" de centre  $i \frac{c_1}{c_2}$  et de rayon  $\frac{1}{\rho}$ . Puisque  $\Xi_R$  est analytique sur  $\Omega$ , son intégrale sur le contour fermé  $D_\rho \cup C_\rho \cup \Gamma_\rho \cup \Upsilon_{+\rho} \cup \Upsilon_{-\rho} \cup c_\rho$  (l'orientation du contour est choisie de telle sorte que le segment réel  $D_\rho$  soit parcouru dans le sens des valeurs croissantes — voir figure 12.13) est nulle :

$$\int_{D_\rho} \Xi_R(p) dp + \int_{\Gamma_\rho} \Xi_R(p) dp + \int_{\Upsilon_{+\rho}} \Xi_R(p) dp + \int_{\Upsilon_{-\rho}} \Xi_R(p) dp + \int_{C_\rho} \Xi_R(p) dp + \int_{c_\rho} \Xi_R(p) dp = 0.$$

On vérifie facilement que :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho} \Xi_R(p) dp = 0.$$

De plus

$$\lim_{|p - i \frac{c_1}{c_2}| \rightarrow 0} p \Xi_R(p) = 0,$$

on peut donc appliquer le premier lemme de Jordan :

**Lemme 12.2.4 (Premier Lemme de Jordan)** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ , soient  $z_0$  un point de  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{U}$  un secteur angulaire de  $\mathbb{C}$  défini par

$$\mathcal{U} = \{z \in \Omega \mid \psi_1 < \arg(z - z_0) < \psi_2\} (R_0 > 0, \psi_1 \text{ et } \psi_2 \in \mathbb{R}).$$

Si  $f$  est une fonction continue dans  $\Omega \setminus \{z_0\}$  et si,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathcal{U} \setminus \{z_0\}}} (z - z_0)f(z) = 0,$$

alors pour tout arc de cercle  $\gamma$  de centre  $z_0$ , de rayon  $\varepsilon$ , contenu dans  $\mathcal{U}$  on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Donc :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{c_\rho} \Xi_R(p) dp = 0.$$

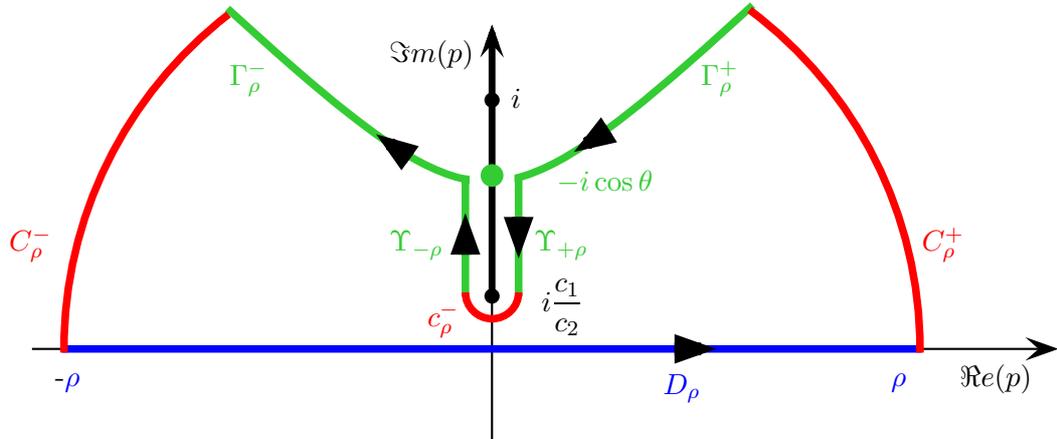


FIG. 12.13: Contour d'intégration

On a alors :

$$\tilde{u}(x, y, s) = - \int_{\Gamma} \Xi_R(p) dp - \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[ \int_{\Gamma_{-\rho}} \Xi_R(p) dp + \int_{\Gamma_{+\rho}} \Xi_R(p) dp \right]. \quad (12.2.28)$$

Il est alors évident (en orientant  $\Upsilon$  "du haut vers le bas") que :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\Upsilon_{\pm\rho}} \Xi_R(p) dp = \int_{\Upsilon} \left( 1 + \frac{\sqrt{1+p^2} \mp i\sqrt{-(p^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2})}}{\sqrt{1+p^2} \pm i\sqrt{-(p^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2})}} \right) \frac{e^{-\frac{s}{c_1} [ |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx ]}}{4\pi(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} dp$$

soit, en posant  $\tilde{\mathcal{R}}(p) = \frac{\sqrt{1+p^2} - i\sqrt{-(p^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2})}}{\sqrt{1+p^2} + i\sqrt{-(p^2 + \frac{c_1^2}{c_2^2})}}$  :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_{+\rho}} \Xi_R(p) dp = - \int_{\Gamma} (1 + \tilde{\mathcal{R}}(p)) \frac{e^{-\frac{s}{c_1} [ |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx ]}}{4\pi(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} dp$$

et

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_{-\rho}} \Xi_R(p) dp = \int_{\Gamma} (1 + \overline{\tilde{\mathcal{R}}(p)}) \frac{e^{-\frac{s}{c_1} [ |y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx ]}}{4\pi(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} dp.$$

**Remarque 12.2.2**  $\tilde{\mathcal{R}}(p) = \mathcal{R}(p)$  si on prolonge la fonction  $x \mapsto (x)^{\frac{1}{2}}$  sur la demi-droite des réels négatifs par  $(x)^{\frac{1}{2}} = i\sqrt{-x}$  pour  $x < 0$ .

Il ne nous reste plus qu'à utiliser le changement de variable

$$p = v_1^+(t) = -i \left( \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{r^2}} \right)$$

pour obtenir :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[ \int_{\Gamma_{-\rho}} \Xi_R(p) dp + \int_{\Gamma_{+\rho}} \Xi_R(p) dp \right] = - \int_{t_1}^{\frac{r}{c_1}} \frac{\mathcal{R}(v_1^+(t)) - \overline{\mathcal{R}(v_1^+(t))}}{4\pi(1+v_1^+(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{dv_1^+(t)}{dt} e^{st} dt.$$

De la même manière qu'à la section précédente on montre que :

$$\frac{1}{(1+v_1^+(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{dv_1^+(t)}{dt} = \frac{i}{\sqrt{\frac{r^2}{c_1^2} - t^2}},$$

et, après avoir remarqué que

$$-i \left[ \mathcal{R}(v_1^+(t)) - \overline{\mathcal{R}(v_1^+(t))} \right] = 2\Im m(\mathcal{R}(v_1^+(t))),$$

on obtient

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[ \int_{\Gamma_{-\rho}} \Xi_R(p) dp + \int_{\Gamma_{+\rho}} \Xi_R(p) dp \right] = \int_{t_1}^{t_0} \frac{\Im m[\mathcal{R}(v^+(t))]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_1^2} - t^2}} e^{-st} dt. \quad (12.2.29)$$

On montre évidemment sans difficulté que :

$$- \int_{\Gamma} \Xi(p) dp = \int_{\frac{r}{c_1}}^{+\infty} \frac{1 + \Re e(\mathcal{R}(\gamma_1^+(t)))}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_1^2}}} e^{-st} dt \quad (12.2.30)$$

et on obtient

$$\tilde{u}(x, y, s) = - \int_{t_1}^{\frac{r}{c_1}} \frac{\Im m [\mathcal{R}(v_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_1^2} - t^2}} e^{-st} dt + \int_{\frac{r}{c_1}}^{+\infty} \frac{1 + \Re e [\mathcal{R}(\gamma_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_1^2}}} e^{-st} dt.$$

Finalement, l'expression de la fonction de Green est :

$u(x, y, t) = 0,$	$t < t_1,$
$u(x, y, t) = -\frac{\Im m [\mathcal{R}(v_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_1^2} - t^2}},$	$t_1 < t < \frac{r}{c_1},$
$u(x, y, t) = \frac{1 + \Re e [\mathcal{R}(\gamma_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_1^2}}},$	$\frac{r}{c_1} < t.$

**12.2.2.2 Cas d'une source hors de l'interface, démonstration du théorème 12.2.2**

Calcul de  $u^r$ . On pose  $r = \sqrt{x^2 + (y + h)^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ,  $\sin \theta = \frac{(y + h)}{r}$  et

$$\mathcal{R}(p) = \mathcal{R}\left(\frac{p}{c_1}, 1\right) = \frac{\rho_2 (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Comme dans le cas  $h = 0$  on vérifie que :

$$\tilde{u}^r(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{R}(p)}{2(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_1} [y(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx]} dp$$

Donc :

a) si  $c_1 > c_2$  ou si  $|\cos \theta| \leq \frac{c_1}{c_2}$ . Alors il n'y a pas d'onde de tête et

$u^r(x, y, t) = 0,$	$t < \frac{r}{c_1}$
$u^r(x, y, t) = \frac{\Re e [\mathcal{R}(\gamma_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_1^2}}},$	$t > \frac{r}{c_1}$

avec  $\gamma_1^+(t) = -i \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{r^2} - 1}.$

## 12.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

b) si  $|\cos \theta| > \frac{c_1}{c_2}$ . Il faut calculer la contribution de l'onde de tête :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= 0, \quad t < t_1 \\ u(x, y, t) &= -\frac{\Im m [\mathcal{R}(v_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_1^2} - t^2}}, \quad t_1 < t < \frac{r}{c_1} \\ u(x, y, t) &= \frac{\Re e [\mathcal{R}(\gamma_1^+(t))]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_1^2}}}, \quad \frac{r}{c_1} < t \end{aligned}$$

avec

$$v_1^+(t) = -i \left( \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{r^2}} \right),$$

$$\gamma_1^+(t) = -i \frac{c_1 t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{r^2} - 1}$$

et

$$t_1 = r |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_2}.$$

Les calculs sont similaires au cas où la source est sur l'interface.

**Remarque 12.2.3** On démontre le lemme 12.2.2 en remarquant que la condition  $t_1 = t$  s'écrit

$$r |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_2} = t,$$

ce qui est bien l'équation du segment  $[C(t)D(t)]$  défini précédemment

**Étude de la fonction  $\mathcal{F}(p, t)$ , démonstration du lemme 12.2.3 :** Rappelons que

$$\mathcal{F}(p, t) = -y (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipx - c_2 t = 0$$

Nous pouvons dans un premier temps énoncer le lemme suivant :

**Lemme 12.2.5**

1. si  $p = a + ib$  avec  $a \neq 0$  est racine de  $\mathcal{F}(p, t)$ , alors  $p = -a + ib$  est également racine de  $\mathcal{F}(p, t)$  ;
2. si  $p$  est réel, alors  $p = 0$  :

3. si  $p$  est imaginaire pur alors  $|p| < m = \min(\frac{c_2}{c_1}, 1)$ , cette condition nous indique que le contour ne traversera pas les coupures et donc qu'il n'y aura pas d'onde de tête ce qui est cohérent avec la théorie physique ;

4. quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ,  $\tilde{\Gamma}$  admet 2 asymptotes paramétrées par  $t$  d'équations

$$p = \frac{t}{\pm(y-h) + ix} = \frac{\pm(y-h) - ix}{(y-h)^2 + x^2}t.$$

Il existe donc  $t_1$  tel que, pour tout  $t > t_1$ ,  $\mathcal{F}(p, t)$  admette deux racines complexes telles que :

$$\Im m [\gamma^+(t)] = \Im m [\gamma^-(t)] \quad \text{et} \quad \Re e [\gamma^+(t)] = -\Re e [\gamma^-(t)] > 0$$

**Démonstration :**

1. la démonstration est évidente ;

2. si  $p$  est réel alors

$$\left\{ \begin{array}{l} -y(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}} - c_2t \text{ est réel ,} \\ ipx \text{ est imaginaire pur ,} \\ -ipx = -y(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}} - c_2t \end{array} \right.$$

donc  $p = 0$  ;

3. si  $p$  est imaginaire pur alors  $ipx + c_2t$  est réel et il faut donc que

$$y(1+p^2)^{\frac{1}{2}} - h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

soit réel et donc que  $|p| < m = \min(\frac{c_2}{c_1}, 1)$  ;

4. si  $\mathcal{F}(p, t) = 0$  alors

$$-y\left(\frac{1}{t^2} + \left(\frac{p}{t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2 t^2} + \left(\frac{p}{t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + i\frac{p}{t}x - c_2 = 0.$$

Donc quand  $t$  tend vers l'infini cette équation devient :

$$-y\left(\left(\frac{p}{t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + h\left(\left(\frac{p}{t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + i\frac{p}{t}x - c_2 = 0.$$

Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} -y\frac{p}{t} + h\frac{p}{t} + i\frac{p}{t}x - c_2 = 0 \quad \text{si } \Re(p) > 0, \\ y\frac{p}{t} - h\frac{p}{t} + i\frac{p}{t}x - c_2 = 0 \quad \text{si } \Re(p) < 0. \end{array} \right.$$

## 12.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

---

Donc

$$\begin{cases} (-y + h + ix)p = c_2 t & \text{si } \Re(p) > 0, \\ (y - h + ix)p = c_2 t & \text{si } \Re(p) < 0. \end{cases}$$

■

Concernant la position dans le plan complexe des éventuelles racines doubles  $p$  de  $\mathcal{F}(p, t)$  nous utiliserons le

**Lemme 12.2.6** *S'il existe  $t_0$  tel que  $p = p_0$  soit une racine double de  $\mathcal{F}(p, t_0)$  alors  $p_0$  est imaginaire pur.*

**Corollaire 12.2.1** *D'après le lemme 12.2.5  $|p_0| < m = \min(\frac{c_2}{c_1}, 1)$ .*

**Démonstration :**

S'il existe  $t_0$  tel que  $\mathcal{F}(p, t_0)$  admette une racine double  $p_0$  alors :

$$\begin{cases} \mathcal{F}(p_0, t_0) = 0 & (12.2.31a) \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(p_0, t_0) = 0, & (12.2.31b) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} -y(1 + p_0^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_0^2\right)^{\frac{1}{2}} + ip_0 x - c_2 t_0 = 0, & (12.2.32a) \\ -\frac{yp_0}{(1 + p_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{hp_0}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_0^2\right)^{\frac{1}{2}}} + ix = 0. & (12.2.32b) \end{cases}$$

En multipliant la seconde équation par  $p_0$  on obtient :

$$\begin{cases} -y(1 + p_0^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_0^2\right)^{\frac{1}{2}} + ip_0 x - c_2 t_0 = 0, & (12.2.33a) \\ -\frac{yp_0^2}{(1 + p_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{hp_0^2}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_0^2\right)^{\frac{1}{2}}} + ixp_0 = 0. & (12.2.33b) \end{cases}$$

On additionne ces deux équations puis on divise la seconde équation par  $p_0^2$  :

$$\begin{cases} -\frac{y}{(1 + p_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{h\frac{c_2^2}{c_1^2}}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_0^2\right)^{\frac{1}{2}}} = c_2 t_0 & (12.2.34a) \\ -\frac{y}{(1 + p_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{h}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_0^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{ix}{p_0} = 0. & (12.2.34b) \end{cases}$$

On soustrait ensuite (12.2.34b) à (12.2.34a) et  $\frac{c_2^2}{c_1^2}$  (12.2.34b) à (12.2.34a) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1)h}{(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_0^2)^{\frac{1}{2}}} = c_2 t_0 - \frac{ix}{p_0} \end{array} \right. \quad (12.2.35a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{(\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1)y}{(1 + p_0^2)^{\frac{1}{2}}} = c_2 t_0 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \frac{ix}{p_0}. \end{array} \right. \quad (12.2.35b)$$

Si  $p_0$  est solution du système (12.2.35) alors  $p_0$  est solution du système suivant, obtenu en élevant (12.2.35a) et (12.2.35b) au carré<sup>(48)</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1(p_0) = (\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1)^2 h^2 p_0^2 - (\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_0^2) (c_2 t_0 p_0 - ix)^2 = 0 \end{array} \right. \quad (12.2.36a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_2(p_0) = -(\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1)^2 y^2 p_0^2 - (1 + p_0^2) (c_2 t_0 p_0 - \frac{c_2^2}{c_1^2} ix)^2. \end{array} \right. \quad (12.2.36b)$$

$Q_1$  et  $Q_2$  sont donc deux polynômes de degré quatre. Pour des raisons de simplicité, nous n'explicitons pas leurs coefficients ici, remarquons simplement que ces deux polynômes ont le même coefficient dominant :  $c_2^2 t_0^2$ .  $Q_3 = Q_1 - Q_2$  est donc un polynôme de degré trois dont  $p_0$  est une racine. On vérifie ensuite (à l'aide d'un logiciel de calcul formel car les calculs se compliquent rapidement) que :

$$Q_1(p) = (a_0 + b_0 p) Q_3(p) + Q_4(p)$$

avec  $Q_4$  polynôme de degré 2, puis que :

$$Q_3(p) = (a_1 + b_1 p) Q_4(p) + (a_2 + b_2 p)$$

avec  $a_2$  réel et  $b_2$  imaginaire pur.

Il est évident que  $p_0$  est racine de  $Q_4$  et donc que

$$p_0 = -\frac{a_2}{b_2}.$$

Les racines doubles de  $\mathcal{F}(p, t)$ , s'il y en a, seront donc imaginaires pures. ■

Le lemme suivant garantit l'existence et l'unicité de la racine double  $p$  de  $\mathcal{F}(p, t)$  :

**Lemme 12.2.7** *Il existe un unique  $t_2 \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathcal{F}(p, t_2)$  admette une racine double  $p_2$ , de plus  $\Im m(p_2) \geq 0$ .*

---

48. La réciproque n'est pas vraie.

**Démonstration :**

Nous définissons la fonction

$$p \in i[-m; m] \mapsto g(p) = -y(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}} + ipx \in \mathbb{R}.$$

Pour tout  $p \in i[-m; m]$ ,  $t = c_2g(p)$  est solution de  $\mathcal{F}(p, t) = 0$ . De plus on a

$$g'(p) = -\frac{yp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{hp}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - p^2\right)^{\frac{1}{2}}} + ix$$

soit

$$g'(p) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(p, t).$$

Donc s'il existe  $p_2$  tel que  $g'(p_2) = 0$  alors  $p_2$  est racine double de  $\mathcal{F}(p_2, c_2g(p_2))$ . Réciproquement, s'il existe  $t_2$  tel que  $\mathcal{F}(p, t_2)$  admette une racine double  $p_2$  alors  $g'(p_2) = 0$ . Il nous suffit donc de chercher les racines de  $g'(p)$ . Pour simplifier les calculs et étudier une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  nous posons  $p = iq$  et nous définissons la fonction  $h$  par

$$q \in [-m; m] \mapsto h(q) = -y(1-q^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - q^2\right)^{\frac{1}{2}} - qx \in \mathbb{R}.$$

On a

$$h'(q) = \frac{yq}{(1-q^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{hq}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - q^2\right)^{\frac{1}{2}}} - x = ig(ip),$$

il est donc équivalent de chercher les racines  $p_2$  de  $g'$  ou les racines  $q_2$  de  $h'$ .

De plus

$$h''(q) = \frac{y}{(1-q^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{h}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - q^2\right)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

$h'$  est strictement décroissante, elle ne peut donc s'annuler qu'une fois sur  $[-m; m]$ . Remarquons maintenant que :

- si  $m = 1$  on a :

$$\lim_{q \rightarrow -1} h(q) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow 1} h(q) = -\infty ;$$

- si  $m = \frac{c_2}{c_1}$  on a :

$$\lim_{q \rightarrow -\frac{c_2}{c_1}} h(q) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow \frac{c_2}{c_1}} h(q) = -\infty.$$

Donc

$$\lim_{q \rightarrow -m} h(q) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{q \rightarrow m} h(q) = -\infty.$$

La fonction  $h$  étant continue et strictement monotone, il est évident qu'elle n'admet qu'une seule racine  $q_2$ . Pour obtenir le signe de  $q_2$  il suffit de remarquer que :  $h'(0) = -x > 0$ .  $h'$  s'annule donc en  $0 < q_2 < m$ . Finalement  $p_2 = iq_2$  est l'unique racine de  $g'$  et  $\Im m(p_2) > 0$ . Le temps  $t_2 = g(p_2)/c_2$  est le seul temps tel que  $\mathcal{F}(p, t_2)$  admette une racine double. ■

Il nous reste à étudier le lien entre  $t_2$  et  $t_{02}$ , le temps d'arrivée de l'onde au point  $(x, y)$  :

**Lemme 12.2.8** *L'unique temps  $t_2$  tel que  $\mathcal{F}(p, t_2)$  admette une racine double correspond au temps d'arrivée de l'onde transmise  $t_{02}$ .*

**Démonstration :**

La démonstration qui suit s'inspire des résultats de van der Hijden [59] et de Cagniard [20].

Nous avons vu que  $t_2$  et  $p_2$  vérifient :

$$\begin{cases} \mathcal{F}(p_2, t_2) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(p_2, t_2) = 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} -y(1+p_2^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_2^2\right)^{\frac{1}{2}} + ip_2x = c_2t_2, \\ \frac{yp_2}{(1+p_2^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{hp_2}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} + ix = 0. \end{cases} \quad \begin{array}{l} (12.2.37a) \\ (12.2.37b) \end{array}$$

De plus  $|p_2| \leq \min\left(\frac{c_2}{c_1}, 1\right)$ . Il existe donc deux angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  vérifiant

$$p_2 = i\frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1 = i \sin \theta_2, \quad (12.2.38)$$

avec  $\cos \theta_1 \geq 0$  et  $\cos \theta_2 \geq 0$ .

**Remarque 12.2.4** *Les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  vérifient les lois de Snell-Descartes.*

On a alors

$$(1+p_2^2)^{\frac{1}{2}} = (1-\sin^2 \theta_2)^{\frac{1}{2}} = \cos \theta_2$$

et

$$\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \theta_2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{c_2}{c_1} \cos \theta_2.$$

L'équation (12.2.37b) se réécrit donc

$$-\frac{iy \sin \theta_2}{(1-\sin^2 \theta_2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{ih\frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - \frac{c_2^2}{c_1^2} \sin^2 \theta_1\right)^{\frac{1}{2}}} + x = 0,$$

soit plus simplement :

$$-y \tan \theta_2 + h \tan \theta_1 = -x. \quad (12.2.39)$$

L'équation (12.2.39) traduit le fait que le rayon issu du point source  $(0, h)$ , atteignant l'interface avec un angle d'incidence  $\theta_1$  et diffracté avec un angle  $\theta_2$  atteint bien le point  $(x, y)$

## 12.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

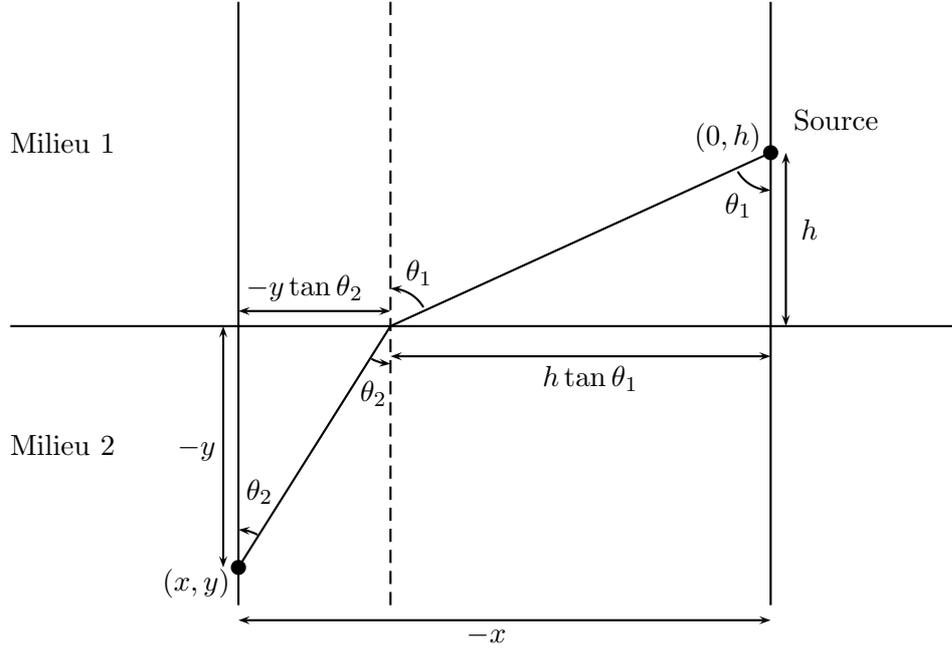


FIG. 12.14: Trajet de l'onde transmise

(voir figure 12.14). Le fait que  $\theta_1$  et  $\theta_2$  satisfassent les lois de Snell-Descartes signifie que ce rayon est le premier à atteindre le point  $(x, y)$ .

Considérons maintenant l'équation (12.2.37a), d'après (12.2.39) on a :

$$ip_2x = ip_2y \tan \theta_2 - ip_2h \tan \theta_1,$$

ce qui peut se réécrire

$$ip_2x = -y \sin \theta_2 \tan \theta_2 + h \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1 \tan \theta_1.$$

L'équation (12.2.37a) devient alors :

$$-y \cos \theta_2 + h \frac{c_2}{c_1} \cos \theta_1 - y \sin \theta_2 \tan \theta_2 + h \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1 \tan \theta_1 = c_2 t_2.$$

Après avoir remarqué que

$$\cos \theta + \sin \theta \tan \theta = \cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta},$$

on obtient :

$$-\frac{1}{c_2} \frac{y}{\cos \theta_2} + \frac{1}{c_1} \frac{h}{\cos \theta_1} = t_2.$$

$h/\cos \theta_1$  est la distance parcourue par le rayon de la source à l'interface, le temps de ce parcours est bien évidemment

$$\frac{1}{c_1} \frac{h}{\cos \theta_1}.$$

De même

$$-\frac{1}{c_2} \frac{y}{\cos \theta_2}$$

est le temps mis par le rayon pour parcourir la distance de l'interface au point  $(x, y)$ ,  $t_2$  est donc le temps de parcours du premier rayon issu de la source atteignant le point  $(x, y)$  :  $t_2 = t_{02}$  est le temps d'arrivée de l'onde transmise. Nous noterons désormais  $p_{02} = p_2$ . ■

Intéressons-nous maintenant au comportement des racines  $p$  de  $\mathcal{F}(p, t)$  pour  $t < t_{02}$  :

**Lemme 12.2.9**

- pour  $h(m)/c_2 \leq t < h(-m)/c_2$ ,  $\mathcal{F}(p, t)$  admet une unique racine  $p = v^-(t) \in i[p_{02}; m]$ , imaginaire pure ;
- pour  $h(-m)/c_2 \leq t \leq t_{02}$ ,  $\mathcal{F}(p, t)$  admet deux racines  $p = v^-(t) \in i[p_{02}; m]$  et  $p = v^+(t) \in i[-m; p_{02}]$ , imaginaires pures.

**Démonstration :**

Pour démontrer ce lemme il suffit de tracer le tableau de variation de la fonction  $h$ . Pour cela il ne nous reste plus qu'à étudier le comportement de  $h$  aux bornes de son domaine de définition :

- si  $m = 1$  on a :

$$h(-m) = h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + x \quad \text{et} \quad h(m) = h\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - x ;$$

- si  $m = \frac{c_2}{c_1}$  on a :

$$h(-m) = -y \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{c_2}{c_1} x \quad \text{et} \quad h(m) = -y \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{c_2}{c_1} x.$$

Quoiqu'il en soit  $h(m)$  est positif et le signe de  $h(-m)$  est indéterminé<sup>(49)</sup>, nous avons néanmoins

$$h(m) \geq h(-m).$$

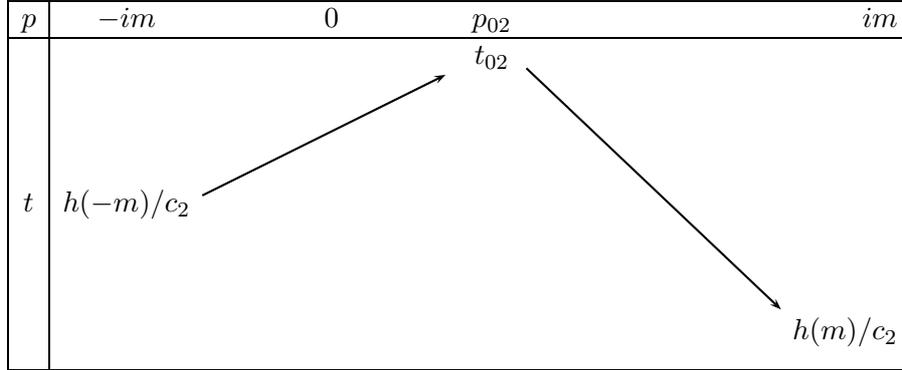
Nous pouvons donc maintenant tracer le tableau de variation de  $h$  :

$q$	$-m$	$0$	$q_{02}$	$m$
$h'(q)$		+	0	-
$h(q)$	$h(-m)$		$h(q_{02})$	$h(m)$

49. Rappelons que  $y$  et  $x$  sont négatifs.

## 12.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

On en déduit les variations de  $t$  quand  $p$  est dans  $[-im; im]$  :



Le résultat est alors évident en regardant ce dernier tableau qui nous permet également de montrer que  $v^+$  et  $v^-$  sont bijectives . ■

Étudions maintenant le comportement des racines de  $\mathcal{F}(p, t)$  pour  $t > t_{02}$  :

**Lemme 12.2.10** *Pour  $t > t_{02}$ ,  $\mathcal{F}(p, t)$  admet deux racines complexes  $\gamma^+(t)$  et  $\gamma^-(t)$  vérifiant*

$$\Im m [\gamma^+(t)] = \Im m [\gamma^-(t)] > 0 \quad \text{et} \quad \Re e [\gamma^+(t)] = -\Re e [\gamma^-(t)] > 0.$$

**Démonstration :**

D'après le lemme 12.2.5 il existe  $t_1$  tel que, pour tout  $t > t_1$ ,  $\mathcal{F}(p, t)$  admette deux racines complexes telles que

$$\Im m [\gamma^+(t)] = \Im m [\gamma^-(t)] \quad \text{et} \quad \Re e [\gamma^+(t)] = -\Re e [\gamma^-(t)] > 0.$$

Or d'après le théorème des fonctions implicites, les fonctions  $\gamma^+(t)$  et  $\gamma^-(t)$  sont continues tant que  $p = \gamma^+(t)$  (ou  $p = \gamma^-(t)$ ) n'est pas racine double de  $\mathcal{F}(p, t)$ . Donc  $t_1 = t_0$ . De plus  $\Im m(\gamma^+(t_{02})) = \Im m(p_{02}) > 0$  et on a vu que, si  $p$  est racine réelle de  $\mathcal{F}(p, t)$ , alors  $p = 0$ . Comme  $\gamma^+(t)$  a une partie réelle strictement positive, sa partie imaginaire ne peut s'annuler :  $\Im m(\gamma^+(t)) > 0$  pour  $t > t_{02}$ . ■

Il nous reste à démontrer le

**Lemme 12.2.11** *On a*

$$\frac{d\gamma^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_0^+}{\simeq} \pm \zeta(t) \sqrt{\frac{1}{t^2 - t_0^2}}.$$

et

$$\frac{dv^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_{02}^-}{\simeq} \pm \zeta(t) \sqrt{\frac{1}{t_{02}^2 - t^2}},$$

avec

$$\zeta(t) = \sqrt{\frac{t + t_{02}}{2c_2 g''(p_{02})}}.$$

Remarquons que  $\lim_{t \rightarrow t_{02}} \zeta(t) < \infty$ .

**Démonstration :**

Nous pouvons prolonger la fonction  $g$ , définie précédemment sur l'intervalle  $i[-m; m]$ , à  $\mathbb{C}$  privé des deux demi-droites  $i[m; \infty]$  et  $i[-\infty; -m]$ . En appliquant la formule de Taylor on montre que :

$$g(p) = g(p_{02}) + (p - p_{02})g'(p_{02}) + \frac{1}{2}(p - p_{02})^2 g''(p_{02}) + o((p - p_{02})^3).$$

Or on a vu que  $g'(p_{02}) = 0$ , donc :

$$g(p) = g(p_{02}) + \frac{1}{2}(p - p_{02})^2 g''(p_{02}) + o((p - p_{02})^3).$$

On sait également que  $t = c_2 g(p)$  est solution de  $\mathcal{F}(p, t) = 0$  :

$$t = t_{02} + \frac{1}{2}(p - p_{02})^2 c_2 g''(p_{02}) + o((p - p_{02})^3).$$

Un rapide calcul nous permet de vérifier que  $g''(p_{02}) > 0$ , en effet :

$$g''(p) = -\frac{y}{1+p^2} + \frac{h}{\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2} > 0 \quad \text{si } p \in [-im; im].$$

Si  $t > t_{02}$ ,  $p = \gamma^+(t)$  ou  $p = \gamma^-(t)$ , et on a :

$$t \underset{t \rightarrow t_{02}^+}{\simeq} t_{02} + \frac{1}{2}(\gamma^\pm(t) - p_{02})^2 c_2 g''(p_{02}),$$

soit

$$\gamma^\pm(t) \underset{t \rightarrow t_{02}^+}{\simeq} p_{02} \pm \sqrt{2 \frac{t - t_{02}}{c_2 g''(p_{02})}}.$$

En dérivant cette relation par rapport au temps on obtient :

$$\frac{d\gamma^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_{02}^+}{\simeq} \pm \sqrt{\frac{1}{2c_2(t - t_{02})g''(p_{02})}} = \pm \sqrt{\frac{t + t_{02}}{2c_2(t^2 - t_{02}^2)g''(p_{02})}}.$$

Donc

$$\frac{d\gamma^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_{02}^+}{\simeq} \pm \zeta(t) \sqrt{\frac{1}{t^2 - t_{02}^2}}.$$

De même, si  $t < t_{02}$ ,  $p = v^+(t)$  ou  $p = v^-(t)$ , et on a :

$$t \underset{t \rightarrow t_{02}^-}{\simeq} t_{02} + \frac{1}{2}(v^\pm(t) - p_{02})^2 c_2 g''(p_{02}),$$

soit

$$v^\pm(t) \underset{t \rightarrow t_{02}^-}{\simeq} p_{02} \pm i \sqrt{2 \frac{t_{02} - t}{c_2 g''(p_{02})}}.$$

## 12.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

En dérivant cette relation par rapport au temps on obtient :

$$\frac{dv^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_{02}^-}{\simeq} \pm i \sqrt{\frac{1}{2c_2(t_{02} - t)g''(p_{02})}} = \pm \sqrt{\frac{t + t_{02}}{2c_2(t_{02}^2 - t^2)g''(p_{02})}}.$$

Donc

$$\frac{dv^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_{02}^-}{\simeq} \pm \zeta(t) \sqrt{\frac{1}{t_{02}^2 - t^2}}.$$

■

**Remarque 12.2.5** Comme  $\frac{d\gamma^\pm(t)}{dt} \underset{t \rightarrow t_{02}^\pm}{\simeq} a \in \mathbb{R}^\pm$ ,  $\Gamma^\pm$  admet une tangente parallèle à l'axe réel.

Nous noterons

- $\Upsilon^- = \{p = v^-(t) \mid t \in [h(m)/c_2; h(q_{02})/c_2]\}$  ;
- $\Upsilon^+ = \{p = v^+(t) \mid t \in [h(-m)/c_2; h(q_{02})/c_2]\}$  ;
- $\Gamma^\pm = \{p = \gamma^\pm(t) \mid t \in [t_{02}; +\infty]\}$ .

Nous pouvons donc maintenant représenter complètement l'ensemble  $\tilde{\Gamma} = \Upsilon^- \cup \Upsilon^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma^+$  (voir figure 12.15).

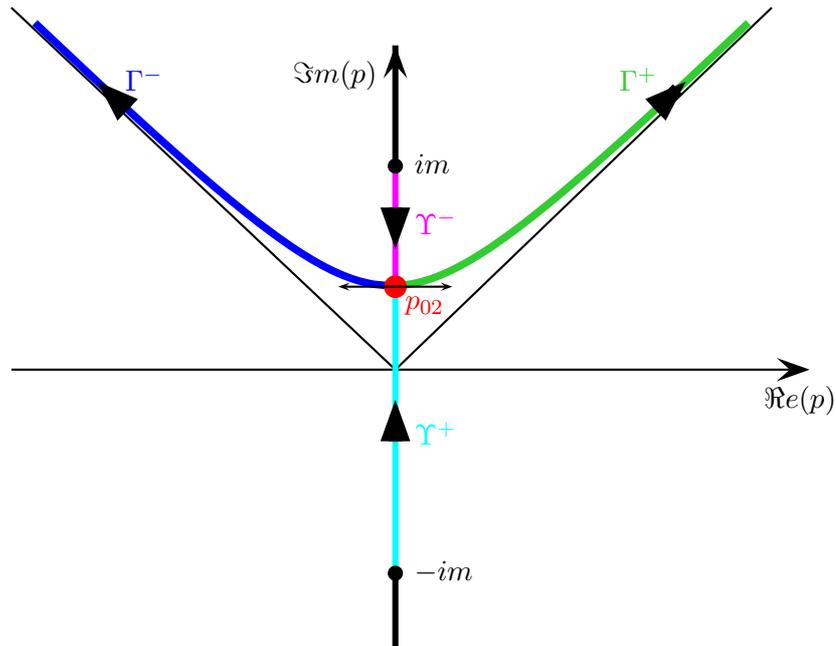


FIG. 12.15: Représentation de  $\tilde{\Gamma}$

Calcul de  $u^t$ .

On applique la transformation de Fourier inverse selon  $x$  :

$$\tilde{u}^t(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(k, s)}{2 \left(k^2 + \frac{s^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{y \left(k^2 + \frac{s^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} - h \left(k^2 + \frac{s^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} - ikx} dk, \quad (12.2.40)$$

et on pose de nouveau  $k = \frac{ps}{c_2}$  pour obtenir

$$\tilde{u}^t(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(p)}{2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_2} \left[-y(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}} + ipx\right]} dp. \quad (12.2.41)$$

Si nous définissons  $\gamma_2^+(t)$  (resp.  $\gamma_1^-(t)$ ) comme étant la racine de  $\mathcal{F}(p, t)$  à partie réelle positive (resp. négative) et

$$\Gamma^\pm = \{p = \gamma_2^\pm(t) \mid t > t_{02}\} \quad \text{et} \quad \Gamma = \Gamma^- \cup \Gamma^+,$$

nous montrons, comme dans les démonstrations précédentes, que :

$$\tilde{u}^t(x, y, s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{T}(p)}{2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_2} \left[-y(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2\right)^{\frac{1}{2}} + ipx\right]} dp. \quad (12.2.42)$$

Nous pouvons ensuite effectuer le changement de variable  $p = \gamma_2^\pm(t)$  :

$$\tilde{u}^t(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_{02}}^{+\infty} \Re e \left[ \frac{\mathcal{T}(\gamma_2^+(t))}{(1 + \gamma_2^+(t)^2)^{\frac{1}{2}}} \gamma_2^{+'}(t) \right] e^{-st} dt \quad (12.2.43)$$

Il faut encore obtenir une expression de  $\gamma_2^{+'}(t)$ . Pour cela on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à  $\mathcal{F}$  :

$$\gamma_2^{+'}(t) = -\frac{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}(\gamma_2^+(t), t)}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t), t)} = \frac{c_2}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t), t)}, \quad (12.2.44)$$

pour obtenir

$$\tilde{u}^t(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_{02}}^{+\infty} \Re e \left[ \frac{c_2 \mathcal{T}(\gamma_2^+(t))}{(1 + \gamma_2^+(t)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t), t)} \right] e^{-st} dt \quad (12.2.45)$$

Finalement :

$u^t(x, y, t) = 0, \quad t < t_{02}$ $u^t(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{c_2 \mathcal{T}(\gamma_2^+(t))}{(1 + \gamma_2^+(t)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t), t)} \right], \quad t > t_{02}$
--

## 12.3 Interaction fluide-solide

Considérons maintenant un milieu infini composé d'un demi-plan fluide  $\Omega_f$  et d'un demi-plan solide isotrope  $\Omega_s$  séparés par une interface horizontale  $\Gamma$ . Nous nous intéressons à la formulation en pression dans le fluide et en vitesse dans le solide, la source est une source ponctuelle de pression située dans le fluide à une distance  $h$  de l'interface. Les équations à résoudre sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \Delta P = \delta(x) \delta(y-h) f(t) \quad (\Omega_f), \quad (12.3.1a) \\ \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{V}_s}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \mathbf{div}(\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{V}_s) + \mu \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{V}_s) = 0 \quad (\Omega_s). \quad (12.3.1b) \end{array} \right.$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé du solide isotrope et où  $\mathbf{rot}$  représente le rotationnel  $2d$  :

$$\mathbf{rot} \mathbf{V} = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}.$$

Les deux milieux sont liés par les conditions de transmission suivantes qui traduisent la continuité des vitesses normales à l'interface et l'égalité entre les contraintes normales et la pression :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_{sy}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (\Gamma), \quad (12.3.1c) \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_{sy}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial V_{sx}}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial t} \quad (\Gamma), \quad (12.3.1d) \\ \frac{\partial V_{sx}}{\partial y} + \frac{\partial V_{sy}}{\partial x} = 0 \quad (\Gamma). \quad (12.3.1e) \end{array} \right.$$

Nous pouvons simplifier ces équations en décomposant le champ de vitesse  $\mathbf{V}_s$  en ondes P et S, en posant  $\mathbf{V}_s = \nabla \Phi + \mathbf{rot} \Psi$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \Delta P = \delta(x) \delta(y-h) f(t) \quad (\Omega_f), \quad (12.3.2a) \\ \frac{1}{c_P^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = 0 \quad (\Omega_s), \quad (12.3.2b) \\ \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Delta \Psi = 0 \quad (\Omega_s), \quad (12.3.2c) \end{array} \right.$$

$$\text{avec } c_P = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_s}} \text{ et } c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}}.$$

Nous allons maintenant calculer les fonctions de Green associées à ce problème, elles sont

solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right] = \delta(x)\delta(y-h)\delta(t) \quad (\Omega_f), \end{array} \right. \quad (12.3.3a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_P^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (\Omega_s), \end{array} \right. \quad (12.3.3b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (\Omega_s), \end{array} \right. \quad (12.3.3c)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_{sy}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\Gamma), \end{array} \right. \quad (12.3.3d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_{sy}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial v_{sx}}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial t} \quad (\Gamma), \end{array} \right. \quad (12.3.3e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_{sx}}{\partial y} + \frac{\partial v_{sy}}{\partial x} = 0. \quad (\Gamma), \end{array} \right. \quad (12.3.3f)$$

et

$$\mathbf{v}_s = \nabla \phi + \text{rot } \psi.$$

### 12.3.1 Résultats

Nous supposons ici que  $c_f < c_S < c_P$ , ce qui est le cas dans la plupart des problèmes d'interaction fluide-structure.

#### 12.3.1.1 Les fronts d'onde.

Dans le cas d'une interaction fluide-structure, l'onde de pression dans le fluide apparaît comme la somme d'une onde incidente, d'une onde de volume réfléchie et de deux ondes de tête. L'onde se propageant dans le solide se décompose en une onde de volume de compression, de rotationnel nul, (dite onde P), une onde de volume de cisaillement, à divergence nulle, (dite onde S) et une onde de tête de cisaillement. La définition précise de chacune de ces ondes est donnée à la section 12.3.1.2.

**Front de l'onde incidente dans le fluide.** Pour un instant  $t$  donné, le front de l'onde incidente de pression (en vert sur les figures 12.17.a et 12.18) est l'intersection du cercle de centre  $(0, h)$  et de rayon  $c_f t$  avec le demi-plan supérieur. Nous appelons  $\Omega_I(t)$  l'intérieur de cet arc de cercle.

**Front de l'onde réfléchie dans le fluide.** Le front de l'onde réfléchie (en bleu sur les figures 12.17.b et 12.18) est l'intersection du cercle de centre  $(0, -h)$  et de rayon  $c_f t$  avec le demi-plan supérieur. Nous appelons  $\Omega_R(t)$  l'intérieur de cet arc de cercle.  $\Omega_R(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_R(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \text{ et } \frac{r}{c_f} < t \right\}.$$

**Fronts des ondes P et S transmises dans le solide.** Comme à la section précédente, nous devons calculer le temps de parcours des rayons P et S issus de la source et atteignant le point  $(x, y)$  : soit  $\xi \in \mathbb{R}$ , le temps de parcours d'un rayon P passant par le point  $(\xi, 0)$  est donné par :

$$t_P(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_f} + \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}}{c_P}, \quad (12.3.4)$$

et le temps de parcours d'un rayon S par :

$$t_S(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_f} + \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}}{c_S}. \quad (12.3.5)$$

On définit  $\xi_{0P}$  (resp.  $\xi_{0S}$ ), le réel minimisant la fonction  $t_P$  (resp.  $t_S$ ) :

$$t'_P(\xi_{0P}(x, y)) = \frac{\xi_{0P}(x, y)}{c_f \sqrt{\xi_{0P}^2(x, y) + h^2}} + \frac{\xi_{0P}(x, y) - x}{c_P \sqrt{(x - \xi_{0P}(x, y))^2 + y^2}} = 0 \quad (12.3.6)$$

et

$$t'_S(\xi_{0S}(x, y)) = \frac{\xi_{0S}(x, y)}{c_f \sqrt{\xi_{0S}^2(x, y) + h^2}} + \frac{\xi_{0S}(x, y) - x}{c_S \sqrt{(x - \xi_{0S}(x, y))^2 + y^2}} = 0. \quad (12.3.7)$$

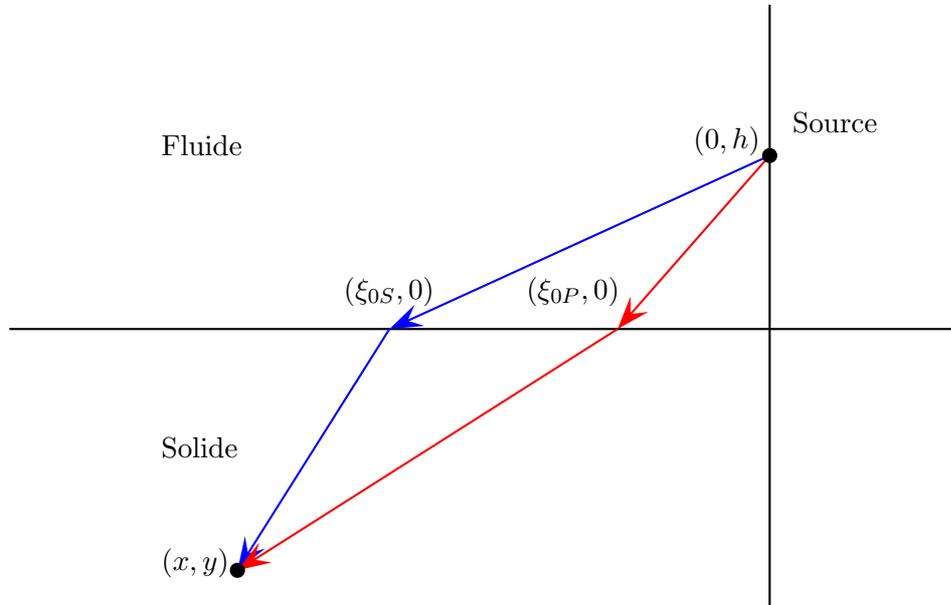


FIG. 12.16: Trajet des ondes P (en rouge) et S (en bleu) transmises

Le rayon passant par  $(\xi_{0P}, 0)$  (resp.  $(\xi_{0S}, 0)$ ) est le premier rayon P (resp. S) atteignant le point  $(x, y)$  (voir figure 12.16).

Finalement le temps d'arrivée de l'onde P (resp. S) est

$$t_{0P}(x, y) = t_P(\xi_{0P}(x, y)) \quad (\text{resp. } t_{0S}(x, y) = t_S(\xi_{0S}(x, y)))$$

et le front de l'onde transmise P (resp. S) est l'ensemble des points tels que :

$$t_{0P}(x, y) = t \quad (\text{resp. } t_{0S}(x, y) = t).$$

Ce front d'onde est représenté en bleu ciel (resp. en rouge) sur les figures 12.17.f (resp. 12.17.g) et 12.18. Nous définissons également l'ensemble  $\Omega_P(t)$  (resp.  $\Omega_S(t)$ ) par :

$$\begin{aligned} \Omega_P(t) &= \{(x, y) \mid y \leq 0 \text{ et } t_{0P}(x, y) \leq t\} \\ (\text{resp. } \Omega_S(t) &= \{(x, y) \mid y \leq 0 \text{ et } t_{0S}(x, y) \leq t\}). \end{aligned}$$

**Fronts des ondes de tête dans le fluide.** Nous notons  $A$  (resp.  $E$ ) l'intersection du front d'onde P (resp. S) avec l'axe  $x = 0$  à droite et  $B$  (resp.  $F$ ) le point tel que le segment  $[AB]$  (en orange sur la figure 12.18) (resp.  $[EF]$  (en magenta sur la figure 12.18)) soit tangent à  $\Omega_R(t)$ . Soit  $[CD]$  (resp.  $[GH]$ ) le symétrique de  $[AB]$  (resp.  $[EF]$ ) par rapport à l'axe  $(Oy)$ . Il se crée une onde de tête P (resp. S) dans le fluide dont le front d'onde est constitué du segment  $[AB]$  (resp.  $[EF]$ ) et du segment  $[CD]$  (resp.  $[GH]$ ).

**Lemme 12.3.1** *L'angle  $\theta_{cP} = \arccos(c_f/c_P)$  (resp.  $\theta_{cS} = \arccos(c_f/c_S)$ ) est l'angle limite au-dessus duquel il n'existe plus d'onde de tête P (resp. S). De plus, pour  $t$  donné, l'ensemble des points des segments  $[AB]$  et  $[CD]$  (resp.  $[EF]$  et  $[GH]$ ) vérifie l'équation :*

$$t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{r \cos \theta}{c_P} \quad ([AB]) \quad \text{et} \quad t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_P} \quad ([CD]) \quad (12.3.8)$$

(resp.

$$t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}} + \frac{r \cos \theta}{c_S} \quad ([EF]) \quad \text{et} \quad t = r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_S} \quad ([GH]) \quad (12.3.9)$$

où  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires du point  $(x, y)$  dans le repère lié au point  $O = (0, -h)$ .

Comme pour le cas de deux milieux acoustiques, la démonstration de ce lemme se fera en démontrant le théorème 12.3.1 ci-dessous (voir page 314).

Nous noterons  $\Omega_{tefP}(t)$  l'ensemble constitué des triangles  $OA(t)B(t)$  et  $OC(t)D(t)$  privé de  $\Omega_R(t)$  (en orange sur les figures 12.17.c et 12.18) et  $\Omega_{tefS}(t)$  l'ensemble constitué des triangles  $OE(t)F(t)$  et  $OG(t)H(t)$  privé de  $\Omega_R(t)$  (en magenta sur les figures 12.17.d et 12.18).  $\Omega_{teP}(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_{teP}(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, |\cos \theta| > \frac{c_f}{c_P} \text{ et } r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{r |\cos \theta|}{c_P} < t < \frac{r}{c_f} \right\},$$

et  $\Omega_{teS}(t)$  par :

$$\Omega_{teS}(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0, |\cos \theta| > \frac{c_f}{c_S} \text{ et } r \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}} + \frac{r |\cos \theta|}{c_S} < t < \frac{r}{c_f} \right\}.$$

**Front de l'onde de tête dans le solide.** Nous notons  $I$  le point tel que le segment  $[AI]$  (en violet sur la figure 12.17) soit tangent à  $\Omega_S(t)$ . Soit  $[CJ]$  le symétrique de  $[AI]$  par rapport à l'axe  $(Oy)$ . Il se crée une onde de tête dans le solide joignant les fronts d'onde P et S dont le front d'onde est constitué du segment  $[AI]$  et du segment  $[CJ]$ .

**Lemme 12.3.2** *L'ensemble des points des segments  $[AI]$  (resp.  $[CJ]$ ) vérifie l'équation :*

$$t = -y \left( \frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{c_S} \quad (12.3.10)$$

$$(resp. t = -y \left( \frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{c_S}). \quad (12.3.11)$$

La démonstration de ce lemme se fera également en démontrant le théorème 12.3.1 (voir page 318).

Nous noterons  $\Omega_{teSP}(t)$  l'ensemble des points compris entre le segment  $[A(t)I(t)]$ , la droite  $(Ox)$  et le front d'onde S et des points compris entre le segment  $[C(t)J(t)]$ , la droite  $(Ox)$  et le front d'onde S (en violet sur les figures 12.17.e et 12.18).  $\Omega_{teSP}(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_{teSP}(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, -y \left( \frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{|x|}{c_S} < t < t_{0S}(x, y) \right\}.$$

### 12.3.1.2 Solutions analytiques.

Nous décomposons la solution  $p$  en  $p = p^i + p^r$ , avec  $p^i$  l'onde incidente de pression, c'est-à-dire la solution qu'on obtiendrait en remplaçant le solide par un fluide de vitesse de propagation  $c_f$  :

$$\begin{cases} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_I(t) : p^i(x, y, t) = 0 ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_I(t) : p^i(x, y, t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^{*2}}{c_f^2}}}. \end{cases}$$

où  $r^* = \sqrt{x^2 + (y - h)^2}$ .

Nous décomposons également  $\mathbf{v}_s$  en  $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_s^P + \mathbf{v}_s^S$  avec  $\mathbf{v}_s^P = \nabla \phi$  et  $\mathbf{v}_s^S = \mathbf{rot} \psi$ .

**Notations.** Nous posons

$$r = \sqrt{x^2 + (y + h)^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{(y + h)}{r}.$$

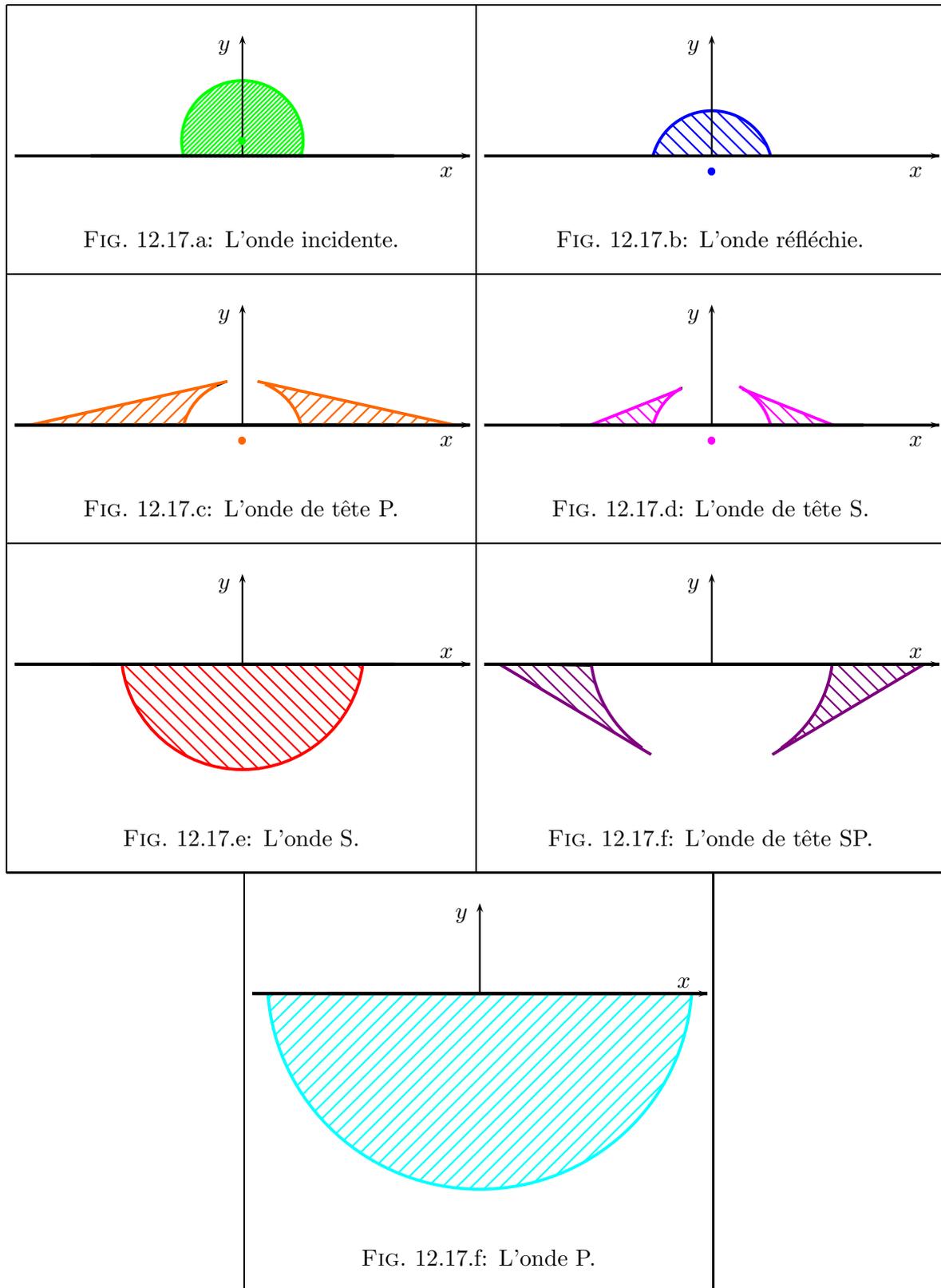


FIG. 12.17: Les différentes ondes du problème

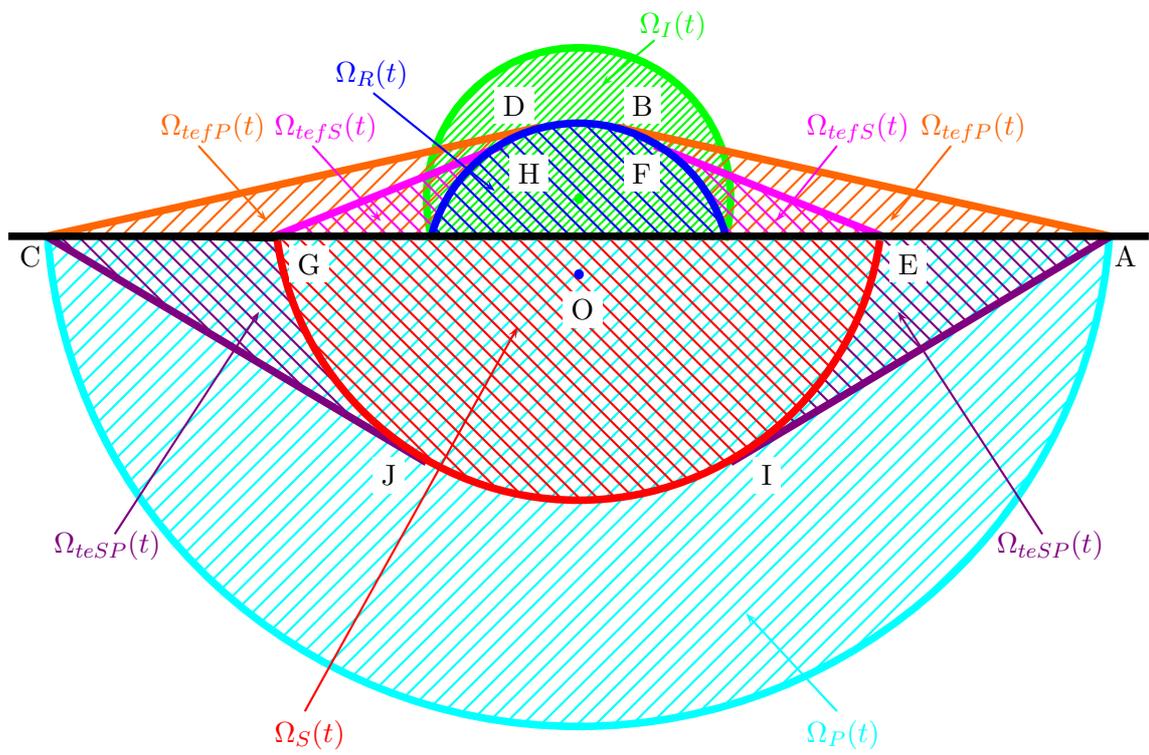


FIG. 12.18: Représentation du front d'onde

puis

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{k}_{ff} = \sqrt{1+p^2}, \quad \tilde{k}_{fP} = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_P^2} + p^2}, \quad \tilde{k}_{fS} = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_S^2} + p^2}, \\ \tilde{k}_{Pf} = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2}, \quad \tilde{k}_{PP} = \sqrt{1+p^2}, \quad \tilde{k}_{PS} = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_S^2} + p^2} \\ \tilde{k}_{Sf} = \sqrt{\frac{c_S^2}{c_f^2} + p^2}, \quad \tilde{k}_{SP} = \sqrt{\frac{c_S^2}{c_P^2} + p^2}, \quad \tilde{k}_{SS} = \sqrt{1+p^2}. \end{array} \right.$$

et nous définissons les fonctions de la variable complexe  $p$  définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}(p) = \frac{[(\lambda(\tilde{z}_{fP}^2 - p^2) + 2\mu\tilde{k}_{fP}^2)(\tilde{k}_{fS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{fS} \tilde{k}_{fP}] \tilde{k}_{ff} - c_f^2 \rho_f \tilde{k}_{fP} (\tilde{k}_{fS}^2 - p^2)}{[(\lambda(\tilde{k}_{fP}^2 - p^2) + 2\mu\tilde{k}_{fP}^2)(\tilde{k}_{fS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{fS} \tilde{k}_{fP}] \tilde{k}_{ff} + c_f^2 \rho_f \tilde{k}_{fP} (\tilde{k}_{fS}^2 - p^2)}, \\ \mathcal{I}_P(p) = \frac{2\tilde{k}_{PP}(\tilde{k}_{PS}^2 + p^2)}{[(\lambda(\tilde{k}_{PP}^2 - p^2) + 2\mu\tilde{k}_{PP}^2)(\tilde{k}_{PS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{PS} \tilde{k}_{PP}] \tilde{k}_{Pf} + c_P^2 \rho_f \tilde{k}_{PP} (\tilde{k}_{PS}^2 - p^2)}, \\ \tilde{\mathcal{I}}_S(p) = \frac{-4ip\tilde{k}_{SP}\tilde{k}_{SS}}{[(\lambda(\tilde{k}_{SP}^2 - p^2) + 2\mu\tilde{k}_{SP}^2)(\tilde{k}_{SS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{SS} \tilde{k}_{SP}] \tilde{k}_{Sf} + c_S^2 \rho_f \tilde{k}_{SP} (\tilde{k}_{SS}^2 - p^2)}. \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_f^+(t) = -i \frac{c_f t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_f^2 t^2}{r^2} - 1}, \\ v_f^+(t) = -i \left( \frac{c_f t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_f^2 t^2}{r^2}} \right). \end{array} \right.$$

Soit  $t_{0P}$  le temps de l'arrivée de l'onde P, défini page 302 et

$$\mathcal{F}_P(p, t) = -y (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipx - cpt,$$

pour  $t > t_{0P}$ , on définit  $p = \gamma_P^+(t)$  l'unique racine de  $\mathcal{F}_P(p, t)$  à partie réelle strictement positive (l'existence et l'unicité de cette racine sont garanties par le lemme 12.2.3 page 274).

Soit  $t_{0S}$  le temps d'arrivée de l'onde S, défini page 302,  $t_{1SP}$  le temps d'arrivée de l'onde de tête S,

$$t_{1SP} = -y \left( \frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{c_P},$$

$$\mathcal{F}_S(p, t) = -y (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{c_S^2}{c_f^2} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipx - cst = 0$$

et  $p_{0S}$  la racine double de  $\mathcal{F}_S(p, t_{0S})$ .

- pour  $t_{1SP} < t < t_{0S}$  on définit  $p = v_S^+(t)$  l'unique racine imaginaire pure telle que

$$\Im m(v_S^+(t)) \leq \Im m(p_{0S}).$$

- pour  $t > t_{0S}$  on définit  $p = \gamma_S^+(t)$  l'unique racine de  $\mathcal{F}_S(p, t)$  à partie réelle strictement positive.

Ici encore, l'existence et l'unicité de  $v_S^+(t)$  et de  $\gamma_S^+(t)$  sont garanties par le lemme 12.2.3.

Nous pouvons maintenant énoncer le

**Théorème 12.3.1** *L'expression de l'onde réfléchie est donnée par*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_R(t) \cup \Omega_{tefS}(t) \cup \Omega_{tefP}(t) : p^r(x, y, t) = 0, \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_R(t) : p^r(x, y, t) = \frac{\Re e \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(t)) \right]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_f^2}}}, \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{tefS}(t) \cup \Omega_{tefP}(t) : p^r(x, y, t) = -\frac{\Im m \left[ \mathcal{R}(v_f^+(t)) \right]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_f^2} - t^2}}, \end{array} \right.$$

*l'expression de l'onde P est donnée par*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_P(t) : v_s^P(x, y, t) = 0, \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_P(t) : \left\{ \begin{array}{l} v_{sx}^P(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{i\gamma_P^+(t) \mathcal{I}_P(\gamma_P^+(t))}{(1 + \gamma_P^+(t)^2(t))^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t), t)} \right], \\ v_{sy}^P(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\mathcal{I}_P(\gamma_P^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t), t)} \right] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et l'expression de l'onde  $S$  est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_S(t) \cup \Omega_{teSP} : \mathbf{v}_S^S(x, y, t) = 0, \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_S(t) : \\ \left. \begin{array}{l} v_{sx}^S(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t), t)} \right], \\ v_{sy}^S(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{i\gamma_S^+(t)\mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t))}{(1 + \gamma_S^+(t)^2(t))^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t), t)} \right], \end{array} \right. \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{teSP}(t) : \\ \left. \begin{array}{l} v_{sx}^S(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\mathcal{I}_S(v_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t), t)} \right], \\ v_{sy}^S(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{iv_S^+(t)\mathcal{I}_S(v_S^+(t))}{(1 + v_S^+(t)^2(t))^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t), t)} \right]. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Les algorithmes de calcul de  $P^i$ ,  $P^r$ ,  $V^P$ ,  $V^S$  sont présentés à la section suivante.

## 12.3.2 Démonstrations

## 12.3.2.1 Calculs préliminaires dans le domaine de Fourier-Laplace

Appliquons comme d'habitude les transformations de Laplace en temps et de Fourier suivant  $x$  aux équations du système pour obtenir le système différentiel ordinaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{s^2}{c_f^2} + k^2 \right] \hat{p} - \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y^2} = \delta(y - h) \quad y > 0, \\ \left[ \frac{s^2}{c_P^2} + k^2 \right] \hat{\phi} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0 \quad y < 0, \\ \left[ \frac{s^2}{c_S^2} + k^2 \right] \hat{\psi} - \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} = 0 \quad y < 0, \end{array} \right. \quad (12.3.12a)$$

$$\left[ \frac{s^2}{c_P^2} + k^2 \right] \hat{\phi} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0 \quad y < 0, \quad (12.3.12b)$$

$$\left[ \frac{s^2}{c_S^2} + k^2 \right] \hat{\psi} - \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} = 0 \quad y < 0, \quad (12.3.12c)$$

avec les trois conditions de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} s\hat{v}_{sy} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \quad y = 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{v}_{sy}}{\partial y} + \lambda ik \hat{v}_{sx} = -sp \quad y = 0, \\ \frac{\partial \hat{v}_{sx}}{\partial y} + ik \hat{v}_{sy} = 0. \quad y = 0. \end{array} \right. \quad (12.3.12d)$$

$$\left( \lambda + 2\mu \right) \frac{\partial \hat{v}_{sy}}{\partial y} + \lambda ik \hat{v}_{sx} = -sp \quad y = 0, \quad (12.3.12e)$$

$$\frac{\partial \hat{v}_{sx}}{\partial y} + ik \hat{v}_{sy} = 0. \quad y = 0. \quad (12.3.12f)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{v}_{sx} = ik \hat{\phi} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y}, \\ \hat{v}_{sy} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} - ik \hat{\psi}. \end{array} \right. \quad (12.3.12g)$$

$$\hat{v}_{sy} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} - ik \hat{\psi}. \quad (12.3.12h)$$

On en déduit facilement la forme des solutions (en introduisant les ondes de pression incidente,  $p^i$ , et réfléchie,  $p^r$ ) :

$$\hat{p} = \hat{p}^i + \hat{p}^r \quad (12.3.13a)$$

$$\hat{p}^i = \frac{1}{2k_f} e^{-|y-h|k_f} \quad (12.3.13b)$$

$$\hat{p}^r = A_R e^{-yk_f} \quad (12.3.13c)$$

$$\hat{\phi} = A_P e^{yk_P} \quad (12.3.13d)$$

$$\hat{\psi} = A_S e^{yk_S} \quad (12.3.13e)$$

$$\hat{v}_{sx} = ik A_P e^{yk_P} + A_S k_S e^{yk_S} \quad (12.3.13f)$$

$$\hat{v}_{sy} = A_P k_P e^{yk_P} - ik A_S e^{yk_S}, \quad (12.3.13g)$$

avec  $k_f = \left(k^2 + \frac{s^2}{c_f^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $k_P = \left(k^2 + \frac{s^2}{c_P^2}\right)^{\frac{1}{2}}$  et  $k_S = \left(k^2 + \frac{s^2}{c_S^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

Les coefficients  $A_R$ ,  $A_P$  et  $A_S$  sont ensuite déterminés à l'aide des équations de transmission (12.3.12d), (12.3.12e) et (12.3.12f) :

$$\left\{ \begin{array}{l} sk_P A_P - iks A_S = -\frac{1}{2\rho_f} e^{-hk_f} + \frac{k_f}{\rho_f} A_R, \\ (\lambda + 2\mu) [z_P^2 A_P - ikk_S A_S] + \lambda ik [ik A_P + A_S k_S] = -s \left[ \frac{1}{2k_f} e^{-hk_f} + A_R \right], \\ ikk_P A_P + A_S z_S^2 + ik [A_P k_P - ik A_S] = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (12.3.14a) \\ (12.3.14b) \\ (12.3.14c) \end{array}$$

soit, plus simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{k_f}{\rho_f} A_R - sk_P A_P + iks A_S = \frac{1}{2\rho_f} e^{-hk_f}, \\ s A_R + [(\lambda + 2\mu) z_P^2 - \lambda k^2] A_P - 2i\mu k k_S A_S = -\frac{s}{2k_f} e^{-hk_f}, \\ 2ikk_P A_P + [z_S^2 + k^2] A_S = 0. \end{array} \right.$$

Les solutions de ce système s'écrivent :

$$\begin{aligned} A_R &= \frac{k_f [(\lambda(k_P^2 - k^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k^2) - 4\mu k^2 k_S k_P] - \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k^2)}{k_f [(\lambda(k_P^2 - k^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k^2) - 4\mu k^2 k_S k_P] + \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k^2)} \frac{e^{-hk_f}}{2k_f}, \\ A_P &= \frac{s(k_S^2 + k^2)}{k_f [(\lambda(k_P^2 - k^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k^2) - 4\mu k^2 k_S k_P] + \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k^2)} e^{-hk_f}, \\ A_S &= \frac{-2isk k_P}{k_f [(\lambda(k_P^2 - k^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k^2) - 4\mu k^2 k_S k_P] + \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k^2)} e^{-hk_f}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \hat{p}^r &= \frac{R(k, s)}{2k_f} e^{-(y+h)k_f} & \text{et} & \quad \hat{p}^i = \frac{1}{2k_f} e^{-|y-h|k_f} \\ \hat{v}_{sx} &= \hat{v}_{sx}^P + \hat{v}_{sx}^S & \text{et} & \quad \hat{v}_{sy} = \hat{v}_{sy}^P + \hat{v}_{sy}^S, \\ \hat{v}_{sx}^P &= \frac{ik T_P(k, s)}{2k_P} e^{yk_P - hk_f} & \text{et} & \quad \hat{v}_{sy}^P = \frac{T_P(k, s)}{2} e^{yk_P - hk_f}, \\ \hat{v}_{sx}^S &= \frac{T_S(k, s)}{2} e^{yk_S - hk_f} & \text{et} & \quad \hat{v}_{sy}^S = -\frac{ik T_S(k, s)}{2k_S} e^{yk_S - hk_f}. \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \frac{k_f [(\lambda(k_P^2 - k^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k^2) - 4\mu k^2 k_S k_P] - \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k^2)}{k_f [(\lambda(k_P^2 - k^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k^2) - 4\mu k^2 k_S k_P] + \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k^2)}, \\ \mathcal{T}_P &= \frac{2s k_P (k_S^2 + k^2)}{k_f [(\lambda(k_P^2 - k^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k^2) - 4\mu k^2 k_S k_P] + \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k^2)}, \\ \mathcal{T}_S &= \frac{-4i s k k_P k_S}{k_f [(\lambda(k_P^2 - k^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k^2) - 4\mu k^2 k_S k_P] + \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k^2)}.\end{aligned}$$

### 12.3.2.2 Démonstration du théorème 12.3.1

Nous nous intéresserons uniquement au calcul de  $p$  et  $v_{sx}$ , le calcul de  $v_{sy}$  étant très similaire.

**Calcul de  $p^r$ .** On a

$$\tilde{p}^r(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{R}(k, s)}{2k_f} e^{-(y+h)k_f - ikx} dk. \quad (12.3.15)$$

On pose

$$k = \frac{ps}{c_f}, \quad \tilde{k}_{ff} = \sqrt{1 + p^2}, \quad \tilde{k}_{fP} = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_P^2} + p^2}, \quad \tilde{k}_{fS} = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_S^2} + p^2}$$

puis  $\mathcal{R}(p) = \mathcal{R}(\frac{p}{c_f}, 1)$ , pour obtenir

$$\mathcal{R}(p) = \frac{\tilde{k}_{ff} [(\lambda(\tilde{k}_{fP}^2 - p^2) + 2\mu\tilde{k}_{fP}^2)(\tilde{k}_{fS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{fS} \tilde{k}_{fP}] - c_f^2 \rho_f \tilde{k}_{fP} (\tilde{k}_{fS}^2 - p^2)}{\tilde{k}_{ff} [(\lambda(\tilde{k}_{fP}^2 - p^2) + 2\mu\tilde{k}_{fP}^2)(\tilde{k}_{fS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{fS} \tilde{k}_{fP}] + c_f^2 \rho_f \tilde{k}_{fP} (\tilde{k}_{fS}^2 - p^2)}$$

Ce qui donne

$$\tilde{p}^r(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{R}(p)}{2\tilde{k}_{ff}} e^{-\frac{s}{c_f}[(y+h)\tilde{k}_f + ipx]} dp \quad (12.3.16)$$

Le contour d'intégration sera similaire à ceux utilisés pour calculer l'onde réfléchie à la section précédente. Comme  $c_f < c_S < c_P$ , il y aura donc toujours une onde de tête.

**Remarque 12.3.1 Calcul des ondes de surface** *La différence avec les sections précédentes est la présence de pôles dans la fonction  $\tilde{\mathcal{R}}(p)$ . Nous supposons que les caractéristiques des milieux sont telles que ces pôles seront imaginaires purs et de modules supérieurs à 1 (ce qui est le cas d'un domaine eau-os), c'est-à-dire qu'ils appartiennent aux coupures de la fonction  $\mathcal{R}$ . Pour comprendre l'action de ces pôles il faut étudier le comportement du contour d'intégration en fonction de  $y + h$ . Sur la figure 12.19 nous avons représenté 4 contours d'intégration obtenus pour 4 valeurs de  $y + h$  décroissantes (respectivement vert, magenta, rouge et bleu) et un pôle de la fonction  $\tilde{\mathcal{R}}$  en rouge. Quand  $y + h$  tend vers 0, le contour tend vers la demi-droite  $[i; +\infty]$ . Le pôle sera donc à l'extérieur du contour d'intégration sauf pour  $y + h = 0$ . Comme nous imposons  $h > 0$  ce cas est impossible, néanmoins, pour des valeurs de  $y + h$  proches de 0, la fonction  $\mathcal{R}$  augmentera brusquement au voisinage du pôle, ce qui nous permettra d'obtenir l'onde de surface. Les ondes de surface n'ont donc pas (sauf dans certains cas particuliers que nous n'étudierons pas ici) à être calculées séparément mais seront prises en compte dans le calcul des ondes de volume.*

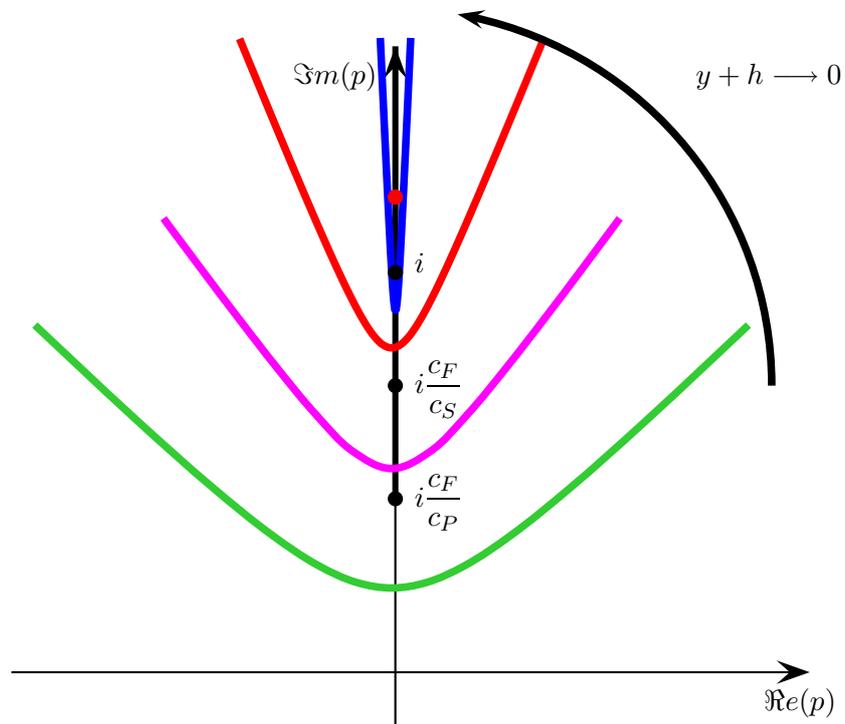


FIG. 12.19: Influence de  $y + h$  sur le contour d'intégration

Posons  $r = \sqrt{x^2 + (y+h)^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ,  $\sin \theta = \frac{(y+h)}{r}$ . De la même manière que pour le calcul de  $u^r$  à la section précédente, on montre que :

- si  $|\cos \theta| < \frac{c_f}{c_P}$ , alors

$$\boxed{\begin{aligned} p^r(x, y, t) &= 0, \quad t < \frac{r}{c_f}, \\ p^r(x, y, t) &= \frac{\Re e \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(t)) \right]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_f^2}}}, \quad t > \frac{r}{c_f}, \end{aligned}}$$

avec  $\gamma_f^+(t) = -i \frac{c_f t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{c_f^2 t^2}{r^2} - 1}$ .

- si  $|\cos \theta| > \frac{c_f}{c_P}$  alors

$$\boxed{\begin{aligned} p^r(x, y, t) &= 0, \quad t < t_1 \\ p^r(x, y, t) &= -\frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_f^+(t)) \right]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_f^2} - t^2}}, \quad t_1 < t < \frac{r}{c_f} \\ p^r(x, y, t) &= \frac{\Re e \left[ \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t)) \right]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_f^2}}}, \quad \frac{r}{c_f} < t \end{aligned}}$$

avec

$$v_f^+(t) = -i \left( \frac{c_f t}{r} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{c_f^2 t^2}{r^2}} \right),$$

et

$$t_1 = r |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2} - \frac{r \cos \theta}{c_P}}.$$

**Remarque 12.3.2** La méthode de Cagniard-de Hoop ne permet pas de différencier les ondes de tête  $S$  et  $P$ . Néanmoins, on peut montrer que  $\tilde{\mathcal{R}}(p)$  n'est pas régulière aux points  $p = ic_f/c_S$  et  $p = ic_f/c_P$  ce qui nous permet de définir le temps d'arrivée de l'onde de tête  $P$  par

$$t_{1fP} = t_1 = r |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2} - \frac{r \cos \theta}{c_P}}$$

et le temps d'arrivée de l'onde de tête  $S$  par

$$t_{1fS} = r |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_S}.$$

Il est alors facile de démontrer le lemme 12.3.1.

**Calcul de  $v_{sx}^P$**  On a

$$\tilde{v}_{sx}^P(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ik \mathcal{T}_P(k, s)}{2k_P} e^{yk_P - hk_f - ikx} dk \quad (12.3.17)$$

On pose

$$k = \frac{ps}{c_P}, \quad \tilde{k}_{PP} = \sqrt{1 + p^2}, \quad \tilde{k}_{Pf} = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2}, \quad \tilde{k}_{PS} = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_S^2} + p^2}$$

puis  $\mathcal{T}_P(p) = c_P^2 \mathcal{T}_P(\frac{p}{c_P}, 1)$  pour obtenir

$$\mathcal{T}_P(p) = 2\tilde{k}_{PP} \frac{\tilde{k}_{PS}^2 + p^2}{\tilde{k}_f \left[ (\lambda(\tilde{k}_{PP}^2 - p^2) + 2\mu\tilde{k}_{PP}^2)(\tilde{k}_{PS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{PS} \tilde{k}_{PP} \right] + c_P^2 \rho_f \tilde{k}_{PP} (\tilde{k}_{PS}^2 - p^2)},$$

ce qui donne

$$\tilde{v}_{sx}^P(x, y, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ip \mathcal{T}_P(p)}{2c_P \tilde{k}_{PP}} e^{-\frac{s}{c_P} [-y\tilde{k}_{PP} + h\tilde{k}_{Pf} + ipx]} dp \quad (12.3.18)$$

On utilisera donc un contour d'intégration similaire à celui utilisé pour calculer l'onde transmise dans le cas de deux milieux acoustiques. Ce contour coupe l'axe imaginaire en un point  $ia$  avec  $|a| < 1$ . Les coupures de la fonction  $\mathcal{T}_P/\tilde{k}_{PP}$  sont les coupures des fonctions  $\tilde{k}_{PP}$ ,  $\tilde{k}_{PS}$  et  $\tilde{k}_{Pf}$ , c'est-à-dire les demi-droites imaginaires définies respectivement par  $|p| > 1$ ,  $|p| > c_P/c_S$  et  $|p| > c_P/c_f$ . Comme  $c_P > c_S > c_f$ , le contour d'intégration ne traverse pas les coupures de  $\mathcal{T}_P/k_P$ . Si on suppose de plus que les pôles de  $\mathcal{T}_P$  sont à l'extérieur de ce contour, on montre, comme dans le cas de deux milieux acoustiques, que :

$$\boxed{\begin{aligned} v_{sx}^P(x, y, t) &= 0, \quad t < t_{0P} \\ v_{sx}^P(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\tilde{\mathcal{T}}_P(\gamma_P^+(t))}{(1 + \gamma_P^+(t)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t), t)} \right], \quad t > t_{0P} \end{aligned}}$$

avec

$$\mathcal{F}_P(p, t) = -y(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipx - c_P t$$

et  $t_{0P}$  et  $\gamma_P^+(t)$  déterminés de la même manière que  $t_{02}$  et  $\gamma_2^+(t)$  dans le cas de deux milieux acoustiques avec  $h \neq 0$ , en remplaçant respectivement  $c_1$  et  $c_2$  par  $c_f$  et  $c_P$ .

Calcul de  $v_{sx}^S$  On a

$$\tilde{v}_{sx}^S(x, y, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}_S(k, s) e^{yk_P - hk_f - ikx} dk \quad (12.3.19)$$

On pose

$$k = \frac{ps}{c_S}, \quad \tilde{k}_{SS} = \sqrt{1 + p^2}, \quad \tilde{k}_{Sf} = \sqrt{\frac{c_S^2}{c_f^2} + p^2}, \quad \tilde{k}_{SP} = \sqrt{\frac{c_S^2}{c_P^2} + p^2}$$

puis  $\mathcal{T}_S(p) = c_S^2 \mathcal{T}_S(\frac{p}{c_S}, 1)$  pour obtenir

$$\mathcal{T}_S(p) = \frac{-4ip\tilde{k}_{SP}\tilde{k}_{SS}}{\tilde{k}_{Sf} \left[ (\lambda(\tilde{k}_{SP}^2 - p^2) + 2\mu\tilde{k}_{SP}^2)(\tilde{k}_{SS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{SS}\tilde{k}_{SP} \right] + c_S^2 \rho_f \tilde{k}_{SP}(\tilde{k}_{SS}^2 - p^2)},$$

ce qui donne

$$\tilde{v}_{sx}^S(x, y, s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}_S(p)}{c_S} e^{-\frac{s}{c_S}[-y\tilde{k}_{SS} + h\tilde{k}_{Sf} + ipx]} dp \quad (12.3.20)$$

Comme dans le cas de deux milieux acoustiques nous pouvons définir le contour d'intégration au temps  $t$  comme une partie de l'ensemble  $\tilde{\Gamma}$  des solutions de l'équation  $\mathcal{F}_S(p, t) = 0$  avec

$$\mathcal{F}_S(p, t) = -y(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{c_S^2}{c_f^2} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipx - cst$$

Nous pouvons également calculer  $t_{0S}$ , le temps d'arrivée de l'onde S au point  $(x, y)$ . Nous notons  $p_{0S}$  la racine double de  $\mathcal{F}_S(p, t_0)$ . Comme nous l'avons vu,  $p_{0S}$  est imaginaire pur et, d'après le lemme 12.2.3,  $|p_{0S}| < 1$ . Les coupures de la fonction  $\mathcal{T}_S$  sont les coupures des fonctions  $\tilde{k}_{SS}$ ,  $\tilde{k}_{SP}$  et  $\tilde{k}_{Sf}$ , c'est-à-dire les demi-droites imaginaires définies respectivement par  $|p| > 1$ ,  $|p| > c_S/c_P$  et  $|p| > c_S/c_f$ . Comme  $c_S < c_P$  il est possible que  $|p_{0S}| > c_S/c_P$  et donc que le contour traverse les coupures. Contrairement au calcul de l'onde P nous devons en conséquence distinguer deux cas :  $|p_{0S}| \leq \frac{c_S}{c_P}$  et  $|p_{0S}| > \frac{c_S}{c_P}$ .

Si  $|p_{0S}| \leq \frac{c_S}{c_P}$ . Dans ce cas les coupures ne traversent pas les contours et on montre facilement que

$$\boxed{\begin{aligned} v_{sx}^S(x, y, t) &= 0, \quad t < t_{0S}, \\ v_{sx}^S(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\mathcal{T}_S(\gamma_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t), t)} \right], \quad t > t_{0S}, \end{aligned}}$$

avec  $\gamma_S^+(t)$  déterminée de la même manière que  $\gamma_2^+(t)$  dans le cas de deux milieux acoustiques avec  $h \neq 0$ , en remplaçant respectivement  $c_1$  et  $c_2$  par  $c_f$  et  $c_S$ .

Si  $|p_{0S}| > \frac{c_S}{c_P}$ . Nous avons représenté, sur la figure 12.20, le contour  $\tilde{\Gamma}$ . Il est évident que seul  $\Upsilon^+$  peut nous permettre de contourner la coupure. Il est facile de déterminer le temps  $t_{1S}$  d'arrivée de l'onde de tête, c'est le temps tel que  $\mathcal{F}_S(i\frac{c_S}{c_P}, t_{1S}) = 0$  :

$$t_{1SP} = -y \left( \frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{c_S} x. \quad (12.3.21)$$

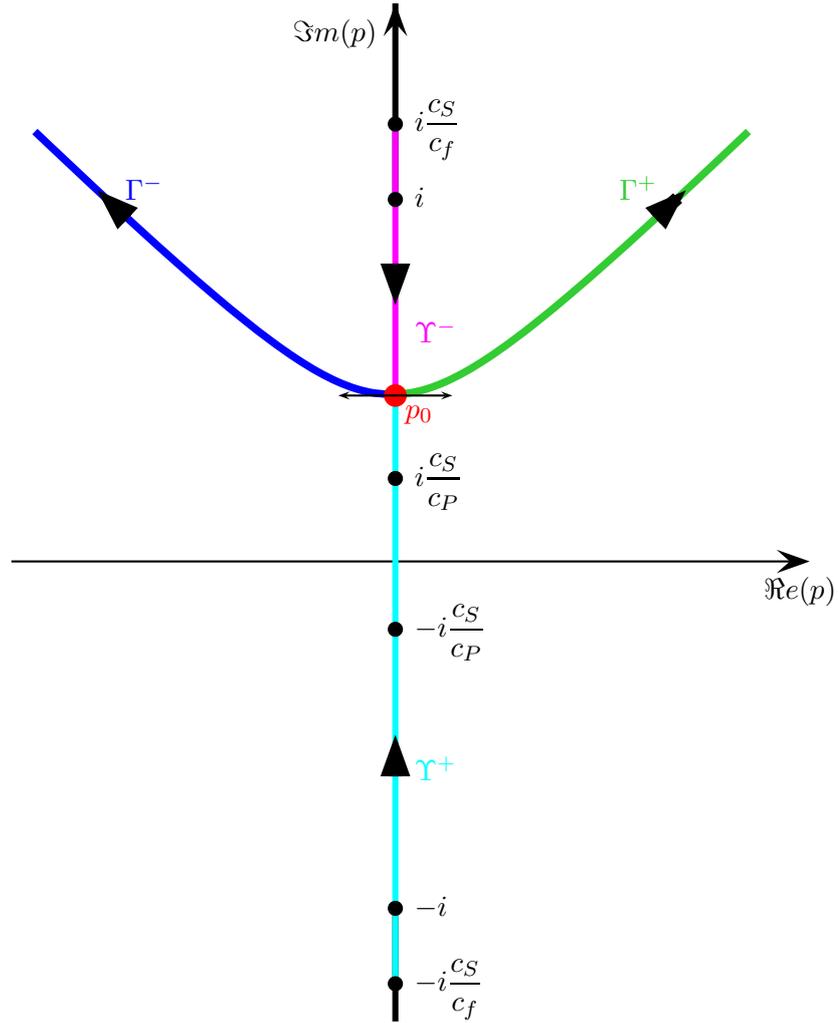


FIG. 12.20: Représentation de  $\tilde{\Gamma}$

Nous appelons  $\Upsilon$  le sous-ensemble de  $\Upsilon^+$  défini par

$$\Upsilon = [v^+(t_{1SP}) = i\frac{c_S}{c_P} ; v^+(t_{0S}) = p_{0S}]$$

et nous posons

$$\Xi_S(p) = \frac{\mathcal{I}_S(p)}{4\pi} e^{-\frac{s}{c_S}[-y\tilde{k}_{SS} + h\tilde{k}_{Sf} + ipx]}.$$

Avec des notations similaires à celles de la section précédente<sup>(50)</sup>, on montre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Xi_S(p) dp = - \int_{\Gamma} \Xi_S(p) dp - \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[ \int_{\Upsilon_{-\rho}} \Xi_S(p) dp + \int_{\Upsilon_{+\rho}} \Xi_S(p) dp \right]$$

et on vérifie que

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\Upsilon_{\pm\rho}} \Xi_S(p) dp = \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{T}_S^{\pm}(p)}{4\pi c_S} e^{\frac{s}{c_S}[-y\tilde{k}_{SS} + h\tilde{k}_{Sf} + ipx]} dp$$

avec

$$\mathcal{T}_S^{\pm}(p) = \frac{-4ip\tilde{k}_{SP}^{\pm}\tilde{k}_{SS}}{\tilde{k}_{Sf} \left[ (\lambda(\tilde{z}_{SP}^{\pm})^2 - p^2) + 2\mu \tilde{z}_{SP}^{\pm} \right] (\tilde{k}_{SS}^2 + p^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{SS} \tilde{k}_{SP}^{\pm}} + c_S^2 \rho_f \tilde{z}_{SP}^{\pm} (\tilde{k}_{SS}^2 - p^2)},$$

et

$$k_{SP}^{\pm} = \pm i \sqrt{-\left(p^2 + \frac{c_S^2}{c_P^2}\right)}.$$

Nous avons vu (page 295) que  $t \mapsto v^+(t)$  est une bijection de  $[t_{1SP}; t_{0S}]$  vers  $\Upsilon = [i\frac{c_S}{c_P}; p_{0S}]$ , nous pouvons donc effectuer le changement de variable  $p = v_S^+(t)$  pour obtenir

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{\Upsilon_{\pm\rho}} \Xi_S(p) dp = \frac{1}{4\pi} \int_{t_{1SP}}^{t_0} \frac{\mathcal{T}_S^{\pm}(v_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t), t)} e^{-st} dt.$$

En remarquant que

$$\frac{\mathcal{T}_S^-(v_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t), t)} = - \overline{\frac{\mathcal{T}_S^+(v_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t), t)}}$$

on vérifie que :

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[ \int_{\Upsilon_{-\rho}} \Xi_S(p) dp + \int_{\Upsilon_{+\rho}} \Xi_S(p) dp \right] = -\frac{1}{4\pi} \int_{t_{1SP}}^{t_0} \Re e \left[ \frac{\mathcal{T}_S^+(v_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t), t)} \right] e^{-st} dt.$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} v_{sx}^S(x, y, t) &= 0, \quad t < t_{1SP}, \\ v_{sx}^S(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\mathcal{T}_S^+(v_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t), t)} \right], \quad t_{1SP} < t < t_{0S}, \\ v_{sx}^S(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\mathcal{T}_S(\gamma_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t), t)} \right], \quad t > t_{0S}. \end{aligned}}$$

50. C'est-à-dire  $\Upsilon_{-\rho} = \Upsilon - \frac{1}{\rho}$  et  $\Upsilon_{\rho} = \Upsilon + \frac{1}{\rho}$ .

On démontre le lemme 12.3.2 en remarquant que la condition  $t_{1SP} = t$  s'écrit

$$-y \left( \frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{c_S} = t$$

ce qui est bien l'équation du segment  $[C(t)J(t)]$  défini précédemment.

## 12.4 Considérations pratiques pour le calcul numérique

Le calcul numérique de la convolution en temps entre les fonctions de Green que nous venons de décrire et un terme source présente certaines difficultés :

1. Les fonctions de Green sont singulières au temps d'arrivée de l'onde ;
2. Le contour  $\Gamma$  n'est pas toujours connu explicitement ;
3. Les singularités des fonctions de Green ne sont pas non plus toujours explicites.

Le but de cette section est de montrer comment résoudre ces problèmes. Pour cela nous détaillerons l'algorithme de résolution du problème de couplage fluide-structure (12.3.1), la résolution du cas deux milieux acoustiques s'en déduit facilement.

### 12.4.1 Calcul de $P$

Le champ de pression est donné par :

$$P(x, y, t) = \int_0^t p(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau \quad (12.4.1)$$

Comme  $p$  se décompose en  $p^i + p^r$ , on peut également décomposer  $P$  en  $P^i + P^r$  avec :

$$P^i(x, y, t) = \int_0^t p^i(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau \quad \text{et} \quad P^r(x, y, t) = \int_0^t p^r(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau$$

#### 12.4.1.1 Calcul de $P^i$

Soit  $r^* = \sqrt{x^2 + (y - h)^2}$  et  $t_0 = r^*/c_f$  le temps d'arrivée de l'onde incidente au point  $(x, y)$ . Rappelons que  $p^i(x, y, t)$  est nulle pour  $t < t_0$  :

$$\begin{cases} P^i(x, y, t) = 0 & \text{si } t \leq t_0 \quad (\iff \mathbf{x} \notin \Omega_I(t)) \\ P^i(x, y, t) = \int_{t_0}^t p^i(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau & \text{si } t > t_0 \quad (\iff \mathbf{x} \in \Omega_I(t)) \end{cases} \quad (12.4.2)$$

On décompose l'intervalle de temps  $[t_0 ; t]$  en  $Nt$  intervalles de même longueur  $dt$ . On a alors

$$P^i(x, y, t) = \sum_{i=1}^{Nt} \int_{t_0+(i-1)dt}^{t_0+idt} p^i(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau.$$

## 12.4 Considérations pratiques pour le calcul numérique

Il existe de nombreuses techniques permettant de calculer les intégrales

$$\int_{t_0+(i-1)dt}^{t_0+idt} p^i(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau,$$

comme la méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson ou de Gauss (par ordre de sophistication croissante). Pour simplifier notre propos nous présentons ici la méthode la plus simple à mettre en oeuvre : la méthode des rectangles. Pour  $i > 1$  on approximera donc l'intégrale

$$\int_{t_0+(i-1)dt}^{t_0+idt} p^i(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau$$

par

$$p^i(x, y, t_0 + (i - 1)dt) f(t - (t_0 + (i - 1)dt)) dt = \frac{f(t - (t_0 + (i - 1)dt))}{2\pi\sqrt{(t_0 + (i - 1)dt)^2 - t_0^2}} dt. \quad (51)$$

Par contre, pour  $i = 1$ , on ne peut plus utiliser cette formule puisque la racine carrée s'annule. Une première idée consiste à approximer

$$\int_{t_0}^{t_0+dt} p^i(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau$$

par

$$p^i(x, y, t_0 + idt) f(t - (t_0 + idt)) dt = \frac{f(t - (t_0 + idt))}{2\pi\sqrt{(t_0 + idt)^2 - t_0^2}} dt,$$

mais c'est une approximation peu précise puisque  $p^i$  varie fortement sur l'intervalle  $[t_0 ; t_0 + dt]$ . On lui préférera donc l'approximation suivante :

$$\int_{t_0}^{t_0+dt} p^i(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau \simeq f(t - t_0) \int_{t_0}^{t_0+dt} p^i(x, y, \tau) d\tau = f(t - t_0) \int_{t_0}^{t_0+dt} \frac{d\tau}{2\pi\sqrt{\tau^2 - t_0^2}}.$$

De plus, on vérifie facilement que :

$$\int_{t_0}^{t_0+dt} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - t_0^2}} = \operatorname{argch} \left( 1 + \frac{dt}{t_0} \right).$$

On calculera donc :

$$P^i(x, y, t) \simeq \frac{f(t - t_0)}{2\pi} \operatorname{argch} \left( 1 + \frac{dt}{t_0} \right) + \sum_{i=2}^{Nt} \frac{f(t - (t_0 + (i - 1)dt))}{2\pi\sqrt{(t_0 + (i - 1)dt)^2 - t_0^2}} dt. \quad (12.4.3)$$

L'algorithme de calcul de  $P^i$  est reproduit sur le tableau 12.1 (la fonction polaire  $(x, y)$  permet d'obtenir les coordonnées polaires du point  $(x, y)$  et nous avons appelé  $C$  le vecteur contenant les données physiques de l'expérience :  $c_f, c_S, c_P, \rho_f \dots$ ).

---

51. Le schéma d'intégration est décentré à gauche.

```

PI(x, y, t, dt, C)
1  (r, theta) = polaire(x, y - h)
2  t0 = r/cf
3  si t ≤ t0 alors
4    Pi = 0
5  sinon
6    Nt = (t - t0)/dt
7    Pi = f(t - t0) * argch(1 + dt/t0)/(2 * pi)
8    pour i de 2 à Nt faire
9      tau = t0 + (i - 1) * dt
10     Pi = Pi + f(t - tau)/(2 * pi * sqrt(t^2/r^2 - 1/cf^2)) * dt
11  fin pour
12 fin si

```

TAB. 12.1: Algorithme de calcul de  $P^i$ 

#### 12.4.1.2 Calcul de $P^r$

On suppose maintenant que  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires du point  $(x, y + h)$  et on pose  $t_{0f} = r/c_f$  le temps d'arrivée de l'onde réfléchiée et

$$t_1 = r |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} - \frac{r \cos \theta}{c_P} < t_{0f},$$

le temps d'arrivée de l'onde tête défini page 313.

On pose

$$p_v^r(x, y, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{0f} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{x} \notin \Omega_R(t)), \\ \frac{\Re e [\mathcal{R}(\gamma_f^+(t))]}{2\pi \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_f^2}}} & \text{si } t > t_{0f} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{x} \in \Omega_R(t)), \end{cases}$$

et, si  $|\cos \theta| > c_f/c_P$  :

$$p_t^r(x, y, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \text{ ou si } t > t_{0f} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{x} \notin \Omega_{tefP}(t)), \\ -\frac{\Im m [\mathcal{R}(v_f^+(t))]}{2\pi \sqrt{\frac{r^2}{c_f^2} - t^2}} & \text{si } t_1 < t < t_{0f} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{x} \in \Omega_{tefP}(t)). \end{cases}$$

On peut alors décomposer  $P^r$  en une onde de tête  $P_t^r$  et une onde de volume  $P_v^r$  avec :

$$\begin{cases} P_v^r(x, y, t) = 0, & \text{si } t \leq t_{0f}, \\ P_v^r(x, y, t) = \int_{t_{0f}}^t p_v^r(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau, & \text{si } t > t_{0f}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} P_t^r(x, y, t) = 0, & \text{si } t \leq t_1 \text{ ou } \cos \theta \leq \frac{c_f}{c_P}, \\ P_t^r(x, y, t) = \int_{t_1}^t p_t^r(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau, & \text{si } t_1 < t < t_{0f} \text{ et } \cos \theta > \frac{c_f}{c_P}, \\ P_t^r(x, y, t) = \int_{t_1}^{t_{0f}} p_t^r(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau & \text{si } t_{0f} \leq t \text{ et } \cos \theta > \frac{c_f}{c_P}. \end{cases}$$

On aura donc  $P^r(x, y, t) = P_t^r(x, y, t) + P_v^r(x, y, t)$

**Calcul de  $P_v^r(x, y, t)$ .** On suppose que l'intervalle  $[t_{0f}; t]$  se décompose en  $Nt_1$  intervalles de même longueur  $dt_1$ . On a alors :

$$P_v^r(x, y, t) = \sum_{i=1}^{Nt_1} \int_{t_{0f}+(i-1)dt_1}^{t_{0f}+idt_1} \frac{\Re e \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(\tau)) \right]}{2\pi \sqrt{\tau^2 - t_{0f}^2}} f(t - \tau) d\tau.$$

avec  $\mathcal{R}$  et  $\gamma_f^+$  définies page 313.

Pour  $i > 1$ , on approximera l'intégrale

$$\int_{t_{0f}+(i-1)dt_1}^{t_{0f}+idt_1} \frac{\Re e \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(\tau)) \right]}{2\pi \sqrt{\tau^2 - t_{0f}^2}} f(t - \tau) d\tau.$$

par

$$\Re e \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(t_{0f} + idt_1)) \right] \frac{f(t - (t_{0f} + (i - 1)dt_1))}{2\pi \sqrt{(t_{0f} + (i - 1)dt_1)^2 - t_{0f}^2}} dt$$

et, pour  $i=1$ , on utilisera l'approximation suivante :

$$\int_{t_{0f}}^{t_{0f}+dt_1} \frac{\Re e \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(\tau)) \right]}{2\pi \sqrt{\tau^2 - t_{0f}^2}} f(t - \tau) d\tau = \Re e \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(t_{0f})) \right] f(t - t_{0f}) \int_{t_{0f}}^{t_{0f}+dt_1} \frac{d\tau}{2\pi \sqrt{\tau^2 - t_{0f}^2}}.$$

On calculera donc :

$$\begin{aligned} P_v^r(x, y, t) &\simeq \frac{\Re e \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(t_{0f})) \right] f(t - t_{0f})}{2\pi} \operatorname{argch} \left( 1 + \frac{dt_1}{t_{0f}} \right) \\ &+ \sum_{i=2}^{Nt_1} \frac{\Re e \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(t_{0f} + (i + 1)dt_1)) \right] f(t - (t_{0f} + (i - 1)dt_1))}{2\pi \sqrt{(t_{0f} + (i - 1)dt_1)^2 - t_{0f}^2}} dt. \end{aligned} \tag{12.4.4}$$

**Calcul de  $P_t^r(x, y, t)$ .** On suppose que l'intervalle  $[t_1; \min(t_{0f}, t)]$  se décompose en  $Nt_2$  intervalles de même longueur  $dt_2$ . On a alors :

$$P_t^r(x, y, t) = - \sum_{i=1}^{Nt_2} \int_{t_1+(i-1)dt_2}^{t_1+idt_2} \frac{\Im m \left[ \mathcal{R}(v_f^+(\tau)) \right]}{2\pi \sqrt{t_{0f}^2 - \tau^2}} f(t - \tau) d\tau.$$

avec  $v_f^+$  définie page 313.

Si  $t < t_{0f}$  on calculera sans difficulté

$$P_t^r(x, y, t) \simeq - \sum_{i=1}^{Nt_2} \frac{\Im m \left[ \mathcal{R}(\gamma_f^+(t_1 + (i+1)dt_1)) \right] f(t - (t_1 + (i-1)dt_2))}{2\pi \sqrt{t_{0f}^2 - (t_1 + (i-1)dt_2)^2}} dt. \quad (12.4.5)$$

Si on devra utiliser l'approximation

$$- \int_{t_{0f}-dt_2}^{t_{0f}} \frac{\Im m \left[ \mathcal{R}(v_f^+(\tau)) \right] f(t - \tau) d\tau}{2\pi \sqrt{t_{0f}^2 - \tau^2}} = - \Im m \left[ \mathcal{R}(v_f^+(t_{0f})) \right] f(t - t_{0f}) \int_{t_{0f}-dt_2}^{t_{0f}} \frac{d\tau}{2\pi \sqrt{t_{0f}^2 - \tau^2}}$$

en remarquant que :

$$\int_{t_{0f}-dt_2}^{t_{0f}} \frac{d\tau}{\sqrt{t_{0f}^2 - \tau^2}} = - \arccos\left(1 - \frac{dt_2}{t_{0f}}\right).$$

On calculera donc :

$$P_t^r(x, y, t) \simeq - \sum_{i=1}^{Nt_2-1} \frac{\Re e \left[ \mathcal{R}(v_f^+(t_1 + (i+1)dt_2)) \right] f(t - (t_1 + (i-1)dt_2))}{2\pi \sqrt{t_{0f}^2 - (t_1 + (i-1)dt_1)^2}} dt + \frac{\Re e \left[ \mathcal{R}(v_f^+(t_{0f})) \right] f(t - t_{0f})}{2\pi} \arccos\left(1 - \frac{dt_2}{t_{0f}}\right). \quad (12.4.6)$$

L'algorithme de calcul de  $P^r$  est décrit sur le tableau 12.2

## 12.4.2 Calcul de $V_s$

### 12.4.2.1 Calcul de $V_{sx}^P$

**Calcul de  $t_{0P}$ .** Comme nous l'avons vu, le calcul du temps d'arrivée de l'onde  $P$  nécessite de trouver la racine  $\xi = \xi_{0P}$  de

$$t_P'(\xi) = \frac{\xi}{c_f \sqrt{\xi^2 + h^2}} + \frac{\xi - x}{c_P \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}}. \quad (12.4.7)$$

Remarquons que :

$$t_P''(\xi) = \frac{h^2}{c_f (\xi^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2(x - \xi)^2 + y^2}{c_P ((x - \xi)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

et que

$$t_P'(0) = -\frac{x}{c_P \sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad t_P'(x) = \frac{x}{c_f \sqrt{x^2 + h^2}}.$$

Donc  $t_P'(0)t_P'(x) < 0$  et  $t_P'(\xi)$  admet une unique racine, comprise entre 0 et  $x$  qui minimise  $t_P(\xi)$ . De plus il est évident que toute racine de  $t_P'$  est également racine de la fonction

$$\sqrt{(\xi^2 + h^2)} \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} t_P'(\xi) = \frac{\xi \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}}{c_f} + \frac{(\xi - x) \sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_P}$$

```

PR(x, y, t, dt1, dt2, C)
1  (r, theta) = polaire(x, y + h)
2  t0 = r/cf
3  si t ≤ t0 alors
4    Pr = 0
5  sinon
6    Nt1 = (t - t0)/dt1
7    p = -i * cos(theta)
8    Pr = f(t - t0) * reel(R(p, C)) * argch(1 + dt1/t0)/(2 * pi)
9    pour i de 2 à Nt1 faire
10     tau = t0 + (i - 1) * dt1
11     p = -it/tau * cos(theta) + abs(sin(theta)) * sqrt(tau^2/t0^2 - 1)
12     Pr = Pr + f(t - tau) * reel(R(p, C))/(2 * pi * sqrt(t^2 - t0^2)) * dt1
13  fin pour
14 fin si
15 si cos(theta) > cf/cP alors
16  t1 = r * abs(sin(theta)) * sqrt(1/cf^2 - 1/cP^2) - r * cos(theta)/cP
17  si t > t1 alors
18    Nt2 = (min(t, t0) - t1)/dt2
19    pour i de 1 à Nt2 - 1 faire
20     tau = t1 + (i - 1) * dt2
21     p = -i (t/t0 * cos(theta) + abs(sin θ) * sqrt(1 - t^2/t0^2))
22     Pr = Pr - f(t - tau) * imag(R(p, C))/(2 * pi * sqrt(t0^2 - t^2)) * dt2
23  fin pour
24  si t0 > t alors
25    tau = t1 + (Nt2 - 1) * dt2
26    p = -i (t/t0 * cos(theta) + abs(sin θ) * sqrt(1 - t^2/t0^2))
27    Pr = Pr - f(t - tau) * imag(R(p, C))/(2 * pi * sqrt(t0^2 - t^2)) * dt2
28  sinon
29    p = -i * cos(theta)
30    Pr = Pr - f(t - t0) * imag(R(p, C)) * arccos(1 - dt2/t0)/(2 * pi) * dt2
31  fin si
32 fin si
33 fin si

```

TAB. 12.2: Algorithme de calcul de  $P^r$

et par conséquent du polynôme de degré 4 :

$$\begin{aligned} Poly(\xi) &= \left( \frac{\xi \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}}{c_f} + \frac{(\xi-x) \sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_P} \right) \left( \frac{\xi \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}}{c_f} - \frac{(\xi-x) \sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_P} \right) \\ &= \frac{\xi^2(x-\xi)^2 + y^2}{c_f^2} - \frac{(\xi-x)^2 \xi^2 + h^2}{c_P^2} \end{aligned}$$

soit

$$c_P^2 c_f^2 Poly(\xi) = (c_P^2 - c_f^2) \xi^4 - 2x(c_P^2 - c_f^2) \xi^3 + ((x^2 + y^2)c_P^2 - (x^2 + h^2)c_f^2) \xi^2 + 2c_f^2 h^2 \xi - c_f^2 h^2 x^2. \quad (12.4.8)$$

Le calcul numérique de  $\xi$  se fera donc de la manière suivante :

1. on calcule les quatre racines de  $Poly$  ;
2. on cherche parmi ces racines la seule racine réelle de  $t'_P$  comprise entre 0 et  $x$  et solution de  $t'_P(\xi) = 0$ .

Il ne reste alors plus qu'à calculer  $t_P(\xi_{0P})$ . Nous appellerons  $t(x, y, h, c_f, c_P)$  la fonction qui nous permet de calculer ce temps d'arrivée.

**Calcul de  $\gamma_P^+(t)$ .** Nous donnons ici une méthode de calcul de  $\gamma_P^+(t)$ , cette méthode n'est certainement pas la plus efficace en terme de temps de calcul mais c'est celle qui nous a paru la plus simple à mettre en oeuvre numériquement.

On vérifie facilement que  $p = \gamma_P^+(t)$  est également racine du polynôme de degré 4 suivant :

$$P_P(p, t) = ap^4 + b(t)p^3 + c(t)p^2 + d(t)p + e(t) = 0. \quad (12.4.9)$$

avec :

$$a = (x^2 + y^2 + h^2)^2 - 4h^2y^2 \quad (12.4.10a)$$

$$b(t) = 4 i c_P t x (x^2 + y^2 + h^2) \quad (12.4.10b)$$

$$c(t) = 2 \left[ y^2 (x^2 + y^2 - h^2) + \frac{c_P^2 h^2}{c_f^2} (x^2 - y^2 + h^2) - c_P^2 t^2 (3x^2 + y^2 + h^2) \right] \quad (12.4.10c)$$

$$d(t) = 4 i c_P t x \left( y^2 + \frac{c_P^2 h^2}{c_f^2} - c_P^2 t^2 \right) \quad (12.4.10d)$$

$$e(t) = \left( y^2 - \frac{c_P^2 h^2}{c_f^2} \right)^2 + c_P^2 t^2 \left( c_P^2 t^2 - 2y^2 - 2 \frac{c_P^2 h^2}{c_f^2} \right) \quad (12.4.10e)$$

En effet :

$$y^2 (1 + p^2) = \left( c_P t - i p_0 x - h \left( \frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2,$$

soit, en développant chaque terme :

$$y^2 (1 + p^2) = (c_{Pt} - ip_{02}x)^2 + h^2 \left( \frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 \right) - 2h (c_{Pt} - ip_{02}x) \left( \frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

puis

$$4h^2 (c_{Pt} - ip_{02}x)^2 \left( \frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 \right) = \left[ y^2 (1 + p^2) - (c_{Pt} - ip_{02}x)^2 - h^2 \left( \frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 \right) \right]^2.$$

Les coefficients de  $P_P$  sont alors obtenus en développant les termes de cette dernière équation.

Le calcul de  $\gamma_P^+(t)$  se fera donc de la manière suivante :

1. on calcule les quatre racines de  $P_P(p, t)$ ;
2. on cherche parmi ces racines l'unique racine de  $\mathcal{F}_P(p, t)$  à partie réelle positive<sup>(52)</sup> ;

Nous appellerons  $\text{gamma}(x, y, h, t, c_f, c_P)$  la fonction qui nous permet de calculer cette racine.

**Calcul de  $V_{sx}^P$ .** On a :

$$\begin{cases} V_{sx}^P(x, y, t) = 0 & \text{si } t \leq t_{0S} \quad (\iff \mathbf{x} \notin \Omega_P(t)) \\ V_{sx}^P(x, y, t) = \int_{t_{0S}}^t v_{sx}^P(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau & \text{si } t > t_{0S} \quad (\iff \mathbf{x} \in \Omega_P(t)), \end{cases} \quad (12.4.11)$$

où  $v_{sx}^P$  est défini par le théorème 12.3.1 On décompose l'intervalle de temps  $[t_{0P} ; t]$  en  $Nt$  intervalles de même longueur  $dt$ . On a alors

$$V_{sx}^P(x, y, t) = \sum_{i=1}^{Nt} \int_{t_0+(i-1)dt}^{t_0+idt} v_{sx}^P(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau.$$

Pour  $i > 1$  nous pouvons sans difficulté écrire :

$$\begin{aligned} & \int_{t_0+(i-1)dt}^{t_0+idt} v_{sx}^P(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau \\ & \simeq \frac{dt}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\tilde{\mathcal{I}}_P(\gamma_P^+(t_{0P} + (i-1)dt))}{\left(1 + \gamma_P^{+2}(t_{0P} + (i-1)dt)\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t_{0P} + (i-1)dt), t)} \right] f(t - (t_{0P} + (i-1)dt)), \end{aligned}$$

mais  $p = \gamma^+(t_{0P})$  est une racine double de  $\mathcal{F}_P(p, t_{0P})$  :

$$\frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma^+(t_{0P}), t_{0P}) = 0,$$

---

<sup>52.</sup> Rappelons que l'existence et l'unicité de cette racine est garantie par le lemme 12.2.3.

cette approximation n'est donc plus valable pour  $i = 1$ . Dans ce cas nous utiliserons

$$\frac{d\gamma_P^+(t)}{dt} \left( = \frac{c_P}{\frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t), t)} \right) \underset{t \rightarrow t_{0P}^+}{\simeq} \zeta_P(t_{0P}) \sqrt{\frac{1}{t^2 - t_{0P}^2}},$$

avec

$$\zeta_P(t_{0P}) = \sqrt{\frac{t + t_{0P}}{2c_P g''(\gamma_P^+(t_{0P}))}}$$

et

$$g''(p) = -\frac{y}{1+p^2} + \frac{h}{\frac{c_S^2}{c_P^2} + p^2} \quad \text{voir lemme 12.2.3 .}$$

On peut donc écrire :

$$\int_{t_{0P}}^{t_{0P}+dt} v_{sx}^P(x, y, t) f(t - \tau) \simeq \frac{f(t - t_{0P})}{2\pi c_P} \Re e \left[ \frac{\zeta(t_{0P}) \mathcal{I}_P(\gamma_P^+(t_{0P}))}{(1 + \gamma_P^{+2}(t_{0P}))^{\frac{1}{2}}} \right] \int_{t_{0P}}^{t_{0P}+dt} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - t_{0P}^2}},$$

soit

$$V_{sx}^P(x, y, t) \simeq \frac{f(t - t_{0P})}{2\pi c_P} \Re e \left[ \frac{\zeta(t_{0P}) \mathcal{I}_P(\gamma_P^+(t_{0P}))}{(1 + \gamma_P^{+2}(t_{0P}))^{\frac{1}{2}}} \right] \operatorname{argch} \left( 1 + \frac{dt}{t_{0P}} \right) dt + \sum_{i=2}^{Nt} \frac{f(t - (t_{0P} + (i-1)dt))}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\tilde{\mathcal{I}}_P(\gamma_P^+(t_{0P} + (i-1)dt))}{(1 + \gamma_P^{+2}(t_{0P} + (i-1)dt))^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t_{0P} + (i-1)dt), t)} \right] dt.$$

L'algorithme de calcul de  $V_{sx}^P$  est décrit sur le tableau 12.3

#### 12.4.2.2 Calcul de $V_{sx}^S$

**Calcul de  $t_{0S}$ , de  $\gamma_S^+(t)$  et de  $v_S^+(t)$ .** Ce calcul se fait de la même façon que pour  $V_{sy}^P$  :

$$t_{0S} = t(x, y, h, cf, cS) \quad \text{et} \quad \gamma_S^+(t) = \text{gamma}(x, y, h, t, cf, cS).$$

On pose  $p_{0S} = \gamma_S^+(t_{0S})$ . Comme nous l'avons vu, si  $|p_{0S}| < c_S/c_P$ , nous devons calculer  $v_S^+(t)$  pour  $t_{1SP} < t < t_{0S}$  avec

$$t_{1SP} = y \left( \frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{|x|}{c_S}.$$

Nous savons également, toujours d'après le lemme 12.2.3, que, pour  $t_{1SP} < t < t_{0S}$ ,  $v_S^+(t)$  est la seule racine de  $\mathcal{F}_S(p, t)$  située dans l'intervalle  $i[c_S/c_P ; 1]$ . Il est évident que  $v_S^+(t)$  est également racine de  $P_S(p, t)$ , où  $P_S$  est le polynôme de degré 4 obtenu à partir de  $P_P$  défini par (12.4.9) en remplaçant  $c_P$  par  $c_S$ . Le calcul de  $v_S^+(t)$  se fera donc de la manière suivante :

```

VPSx(x, y, t, dt, C)
1  t0 = t(x, y, h, cf, cP)
2  si t ≤ t0 alors
3    VPSx = 0
4  sinon
5    Nt = (t - t0)/dt
6    p = gamma(x, y, h, t0, cf, cP)
7    z = zeta(x, y, h, t, cP, cf, p, t0)/cP
8    VPSx = f(t - t0) * reel(zeta * cP * TP(p, C)/sqrt(1 + p^2)) * argch(1 + dt/t0)/(2 * pi)
9    pour i de 2 à Nt faire
10     tau = t0 + (i - 1) * dt
11     p = gamma(x, y, h, tau, cf, cP)
12     df = deriveef(x, y, h, cf, cP, tau, p)
13     VPSx = VPSx + f(t - tau) * reel(TP(p, C)/(sqrt(1 + p^2) * df)) * dt
14  fin pour
15  fin si

```

TAB. 12.3: Algorithme de calcul de  $V_{sx}^P$

1. on calcule les quatre racines de  $P_S(p, t)$ ;
2. on cherche parmi la seule de ces racines située dans l'intervalle  $i[c_S/c_P; 1]$ .

Nous appellerons  $upsilon(x, y, h, t, cf, c_S)$  la fonction qui nous permet de calculer cette racine.

On pose

$$v_{s_{xv}}^S(x, y, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{0S} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{x} \notin \Omega_S(t)), \\ \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t), t)} \right] & \text{si } t > t_{0S} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{x} \in \Omega_S(t)), \end{cases}$$

et, si  $|p_{0S}| \leq \frac{c_S}{c_P}$  :

$$v_{s_{xt}}^S(x, y, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{1SP} \text{ ou si } t > t_{0S} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{x} \notin \Omega_{teSP}(t)), \\ \frac{1}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\mathcal{I}_S(v_S^+(t))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t), t)} \right] & \text{si } t_{SP} < t < t_{0S} \quad (\Leftrightarrow \mathbf{x} \in \Omega_{teSP}(t)). \end{cases}$$

On peut alors décomposer  $V_{sx}^S$  en une onde de tête  $V_{s_{xt}}^S$  et une onde de volume  $V_{s_{xv}}^S$  avec :

$$\begin{cases} V_{s_{xv}}^S(x, y, t) = 0, & \text{si } t \leq t_{0S}, \\ V_{s_{xt}}^S(x, y, t) = \int_{t_{0S}}^t v_{s_{xv}}^S(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau, & \text{si } t > t_{0S}, \end{cases}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{sxt}^S(x, y, t) = 0, \quad \text{si } t \leq t_{1SP} \text{ ou } |p_{0S}| \leq \frac{c_S}{c_P}, \\ V_{sxt}^S(x, y, t) = \int_{t_{1SP}}^t v_{sxt}^S(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau, \quad \text{si } t_{1SP} < t < t_{0S} \text{ et } |p_{0S}| > \frac{c_S}{c_P}, \\ V_{sxt}^S(x, y, t) = \int_{t_{1SP}}^{t_{0S}} v_{sxt}^S(x, y, \tau) f(t - \tau) d\tau \quad \text{si } t_{1SP} \leq t \text{ et } |p_{0S}| > \frac{c_S}{c_P}. \end{array} \right.$$

**Calcul de  $V_{sxt}^S$ .** On suppose que l'intervalle  $[t_{0S}; t]$  se décompose en  $Nt_1$  intervalles de même longueur  $dt_1$ . On peut alors écrire :

$$V_{sxt}^S(x, y, t) \simeq \frac{f(t - t_{0S})}{2\pi c_S} \Re e \left[ \frac{\zeta(t_{0S}) \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t_{0S}))}{\left(1 + \gamma_S^{+2}(t_{0S})\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \argch \left( 1 + \frac{dt_1}{t_{0S}} \right) dt$$

$$+ \sum_{i=2}^{Nt_1} \frac{f(t - (t_{0S} + (i-1)dt_1))}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\tilde{\mathcal{I}}_S(\gamma_S^+(t_{0S} + (i-1)dt_1)) dt_1}{\left(1 + \gamma_S^{+2}(t_{0S} + (i-1)dt_1)\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t_{0S} + (i-1)dt_1), t)} \right].$$

**Calcul de  $V_{sxt}^S$ .** On suppose que l'intervalle  $[t_{1SP}; \min(t_{0S}, t)]$  se décompose en  $Nt_2$  intervalles de même longueur  $dt_2$ . Si  $t < t_{0S}$ , on calculera alors sans difficulté

$$V_{sxt}^S(x, y, t) \simeq$$

$$\sum_{i=1}^{Nt_2} \frac{f(t - t_{1SP} + (i-1)dt_2)}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t_{1SP} + (i-1)dt_2)) dt_2}{\left(1 + v_S^{+2}(t_{1SP} + (i-1)dt_2)\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t_{1SP} + (i-1)dt_2), t)} \right].$$

Sinon, comme pour le calcul de l'onde de volume, on devra utiliser l'approximation, obtenue grâce au lemme 12.2.3

$$\int_{t_{0S}-dt_2}^{t_{0S}} v_{sxt}^S(x, y, t) f(t - \tau) \simeq \frac{f(t - t_{0S})}{2\pi c_S} \Re e \left[ \frac{\zeta(t_{0S}) \mathcal{I}_S(v_P^+(t_{0S}))}{\left(1 + v_P^{+2}(t_{0S})\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \int_{t_{0S}-dt_2}^{t_{0S}} \frac{dt}{\sqrt{t_{0S}^2 - t^2}}.$$

On calculera donc :

$$V_{sxt}^S(x, y, t) \simeq \frac{f(t - t_{0S})}{2\pi c_S} \Re e \left[ \frac{\zeta(t_{0S}) \mathcal{I}_S(v_P^+(t_{0S}))}{\left(1 + v_P^{+2}(t_{0S})\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \arccos \left( 1 - \frac{dt_2}{t_{0S}} \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{Nt_2-1} \frac{f(t_{1SP} + (i-1)dt_2)}{2\pi} \Re e \left[ \frac{\tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t_{1SP} + (i-1)dt_2)) dt_2}{\left(1 + v_S^{+2}(t_{1SP} + (i-1)dt_2)\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t_{1SP} + (i-1)dt_2), t)} \right].$$

L'algorithme de calcul de  $V_{sxt}^S$  est décrit sur le tableau 12.4.

```

VSsx(x, y, t, dt1, dt2, C)
1  t0 = t(x, y, h, cf, cS)
2  si t ≤ t0 alors
3    VSsx = 0
4  sinon
5    Nt = (t - t0)/dt
6    p = gamma(x, y, h, t0, cf, cS)
7    p0 = p
8    z = zeta(x, y, h, t, cS, cf, p, t0)/cS
9    VSsx = f(t - t0) * reel(z * TS(p, C)/sqrt(1 + p2)) * argch(1 + dt/t0)/(2 * pi)
10   pour i de 2 à Nt faire
11     tau = t0 + (i - 1) * dt
12     p = gamma(x, y, h, tau, cf, cS)
13     df = deriveef(x, y, h, cf, cS, tau, p)
14     VSsx = VSsx + f(t - tau) * reel(TS(p, C)/(sqrt(1 + p2) * df)) * dt1
15   fin pour
16 fin si
17 si abs(p0) > cS/cP alors
18   t1 = y * sqrt(1/cP2 - 1/cS2) + h * sqrt(1/cf2 - 1/cS2) - x/cS
19   si t > t1 alors
20     Nt2 = (min(t, t0) - t1)/dt2
21     pour i de 1 à Nt2 - 1 faire
22       tau = t1 + (i - 1) * dt2
23       p = gamma(x, y, h, tau, cf, cS)
24       df = deriveef(x, y, h, cf, cS, tau, p)
25       VSsx = VSsx + f(t - tau) * reel(TS(p, C)/(sqrt(1 + p2) * df)) * dt2
26     fin pour
27     si t0 > t alors
28       tau = t1 + (Nt2 - 1) * dt2
29       p = gamma(x, y, h, tau, cf, cS)
30       df = deriveef(x, y, h, cf, cS, tau, p)
31       VSsx = VSsx + f(t - tau) * reel(TS(p, C)/(sqrt(1 + p2) * df)) * dt2
32     sinon
33       p = p0
34       z = zeta(x, y, h, t, cS, cf, p, t0)/cS
35       VSsx = VSsx +
36       f(t - t0) * reel(zeta * TS(p, C)/sqrt(1 + p2)) * argch(1 + dt/t0)/(2 * pi)
37     fin si
38   fin si
39 fin si

```

TAB. 12.4: Algorithme de calcul de  $V_{sx}^S$



## Chapitre 13

# La méthode de Cagniard-de Hoop en dimension 3

Nous nous rappelons ici le principe de la méthode de Cagniard-de Hoop en dimension 3. Comme dans le chapitre précédent, nous détaillerons précisément les difficultés spécifiques à cette dimension supplémentaire en partant d'un cas très simple pour arriver au couplage fluide-structure.

L'objectif que nous avons poursuivi ici a été de présenter les calculs de telle sorte qu'ils soient le plus proche possible de ceux menés en dimension deux, ce qui nous a parfois conduit à faire des choix ou à suivre des directions pouvant s'écarter de ceux faits traditionnellement dans la littérature (du moins à notre connaissance).

## Contenu

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>333</b>
<b>13.1 Calcul de la fonction de Green dans un milieu homogène infini</b> .	<b>337</b>
<b>13.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes</b> . . . . .	<b>340</b>
13.2.1 Résultats . . . . .	340
13.2.1.1 Cas d'une source sur l'interface . . . . .	340
13.2.1.2 Cas d'une source hors de l'interface . . . . .	345
13.2.2 Démonstrations . . . . .	353
13.2.2.1 Cas d'une source sur l'interface . . . . .	354
13.2.2.2 Cas d'une source hors de l'interface . . . . .	361
<b>13.3 Interaction fluide-solide</b> . . . . .	<b>365</b>
13.3.1 Résultats . . . . .	367
13.3.1.1 Les fronts d'onde. . . . .	367
13.3.1.2 Solutions analytiques. . . . .	371
13.3.2 Démonstrations . . . . .	380
13.3.2.1 Calculs préliminaires dans le domaine de Fourier . . . . .	380
13.3.2.2 Démonstration du théorème 13.3.1 . . . . .	383
<b>13.4 Considérations pratiques pour le calcul numérique.</b> . . . . .	<b>396</b>
13.4.1 Calcul de $P$ . . . . .	396
13.4.1.1 Calcul de $P^i$ . . . . .	396
13.4.1.2 Calcul de $P^r$ . . . . .	397
13.4.2 Calcul de $\mathbf{V}_s$ . . . . .	403
13.4.2.1 Calcul de $V_{sx}^P$ . . . . .	403

---

## Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la méthode de Cagniard-de Hoop a été initialement introduite par Cagniard pour traiter des problèmes bidimensionnels. Dans ce cas on utilise une transformation de Fourier dans une variable d'espace (par exemple  $x$ ) et une transformation de Laplace en temps pour se ramener à une équation différentielle en la variable d'espace restante. La clé est alors d'interchanger le rôle des variables  $x$  et  $t$  (ou plus exactement de leurs variables duales de Fourier-Laplace  $k_x$  et  $s$ ) via des techniques d'analyse complexe.

En dimension trois, la méthode est en quelque sorte moins naturelle : pour se ramener à une équation différentielle ordinaire suivant une variable spatiale (par exemple  $z$ ) il faut cette fois appliquer une transformation de Fourier dans les deux autres directions et l'échange temps espace ne se fait pas de manière aussi évidente. L'idée proposée par de Hoop [61] a été de faire l'échange entre le temps et une variable d'espace convenablement choisie (obtenue à l'aide d'une rotation judicieuse) en appliquant les mêmes techniques qu'en dimension deux. En conséquence la solution fondamentale ne se présente plus comme une formule explicite mais comme une intégrale 1D. Néanmoins, comme nous le verrons cette intégrale se fait toujours sur un intervalle borné et a parfois le bon goût d'être explicitement calculable (voir par exemple le cas d'un milieu acoustique homogène, section 13.1).

Nous décrivons ici de façon un peu plus précise les différentes étapes d'un calcul 3D (le contenu de chaque étape s'éclairera dans les sections suivantes sur les calculs cas par cas). Notre présentation correspond au cas d'un milieu à deux couches homogènes et au cas où le modèle de propagation est isotrope dans les deux premières variables ( $x, y$ ) et nous renvoyons à [59, 74] pour l'étude de milieux stratifiés et/ou anisotropes (concernant les milieux anisotropes citons également [16, 73]) et à la thèse de Q. Grimal [45] pour le traitement d'interfaces courbes.

Soit  $u(x, y, z, t)$  la fonction de Green d'un problème tridimensionnel stratifié, invariant suivant les directions  $x$  et  $y$ . Les premières étapes du calcul de  $u$  par la méthode de Cagniard-de Hoop sont très similaires au cas bidimensionnel :

1. On applique successivement à  $u$ :

- la transformation de **Laplace en temps** ( $s$  est la variable duale de  $t$ ):

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \int_0^{+\infty} u^r(x, y, z, t) e^{-st} dt ; \quad (13.1.1)$$

- la transformation de **Fourier** suivant **les deux variables d'espace  $x$  et  $y$**  ( $k_x$  et  $k_y$  sont les variables duales respectives de  $x$  et de  $y$ ):

$$\hat{u}(k_x, k_y, z, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(x, y, z, s) e^{i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (13.1.2)$$

2.  $\hat{u}(k_x, k_y, z, s)$  est alors solution d'une équation différentielle ordinaire en  $z$  à coefficients constants dans chaque couche, qui peut être résolue explicitement. Qui plus est, cette

fonction peut se mettre sous la forme d'une **somme d'“ondes élémentaires”**

$$\widehat{u}(k_x, k_y, z, s) = \sum_{l=1}^N \widehat{u}_l(k_x, k_y, z, s) = \sum_{l=1}^N \mathcal{A}_l \left( |\mathbf{k}|^2, \frac{s}{c_l}, \mathbf{c} \right) e^{\mathcal{F}_l(|\mathbf{k}|^2, \frac{s}{c_l}, z, \mathbf{c})}$$

où  $c_l$  représente la vitesse de propagation des ondes  $l$ ,  $\mathbf{c} = [c_i]_{i=1..N}$  est le vecteur contenant les vitesses de propagation de chaque onde  $i$ . Les fonctions  $\mathcal{A}_l$  et  $\mathcal{F}_l$  sont exactement les mêmes que celles que nous avons rencontrées en dimension deux lors du calcul de l'onde  $l$ . Rappelons que  $\mathcal{A}_l$  est une fonction **homogène en  $s/c_l$  de degré  $-1$**  et  $\mathcal{F}_l$  une fonction affine en  $z$ , **homogène en  $s/c_l$  de degré  $1$**  :

$$\mathcal{A}_l \left( |\mathbf{k}|^2, \frac{s}{c_l}, \mathbf{c} \right) = \frac{c_l}{s} \mathcal{A}_l \left( \frac{|\mathbf{k}|^2 c_l^2}{s^2}, 1, \mathbf{c} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_l \left( |\mathbf{k}|^2, \frac{s}{c_l}, z, \mathbf{c} \right) = \frac{s}{c_l} \mathcal{F}_l \left( \frac{|\mathbf{k}|^2 c_l^2}{s^2}, 1, z, \mathbf{c} \right).$$

De plus nous montrerons dans les sections suivantes la

**Propriété 13.1.1** *Pour  $l$  et  $i \in 1..N$  nous définissons les “vitesses virtuelles” par*

$$\tilde{c}_{li}(q) = \frac{c_i}{\sqrt{1 + \frac{c_i^2}{c_l^2} q^2}}$$

et  $\tilde{\mathbf{c}}_l(q) = (c_{li})_{i=1..N}$ , alors :

$$\frac{s}{c_l} \mathcal{F}_l(p^2 + q^2, 1, z, \mathbf{c}) = \frac{s}{\tilde{c}_{li}(q)} \mathcal{F}_l \left( \frac{p^2}{1 + q^2}, 1, z, \tilde{\mathbf{c}}_l(q) \right).$$

Cette propriété nous servira à l'étape 6.

3. Pour tout  $l \in \{1..N\}$  on applique alors à  $\widehat{u}_l(k_x, k_y, z, s)$  la transformation de **Fourier inverse suivant  $x$  et  $y$**  :

$$\tilde{u}_l(x, y, z, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_l \left( |\mathbf{k}|^2, \frac{s}{c_l}, \mathbf{c} \right) e^{\mathcal{F}_l(|\mathbf{k}|^2, \frac{s}{c_l}, z, \mathbf{c})} e^{-i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y, \quad (13.1.3)$$

4. On pose alors  $k_x = p_x s/c_l$  et  $k_y = p_y s/c_l$  :

$$\tilde{u}_l(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_l} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_l(\rho^2, 1, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l} (\mathcal{F}_l(\rho^2, 1, z, \mathbf{c}) - i r (p_x x + p_y y))} dp_x dp_y, \quad (13.1.4)$$

avec  $\rho^2 = p_x^2 + p_y^2$  et en faisant l'abus de notation

$$\mathcal{A}_l(\rho^2, \mathbf{c}) = \mathcal{A}_l(\rho^2, 1, \mathbf{c}) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_l(\rho^2, z, \mathbf{c}) = \mathcal{F}_l(\rho^2, 1, z, \mathbf{c}).$$

Remarquons que, contrairement au cas bidimensionnel, ce changement de variable fait apparaître la variable de Laplace ailleurs que dans l'exponentielle. Comme nous le verrons par la suite, cela ne pose pas de problème particulier.

L'étape suivante est **spécifique à la dimension 3** :

5. Soit  $(r, \psi, z)$  les coordonnées cylindriques du point  $\mathbf{x}$  ( $x = r \cos \psi$  et  $y = r \sin \psi$ ), dans [61], de Hoop a proposé d'utiliser le changement de variable

$$p_x = p \cos \psi - q \sin \psi \quad \text{et} \quad p_y = p \sin \psi + q \cos \psi.$$

C'est une **rotation** d'angle  $\psi$  dans le plan  $(p_x, p_y)$ , remarquons que :

$$p_x^2 + p_y^2 = p^2 + q^2 \quad \text{et} \quad p_x x + p_y y = r(p_x \cos \psi + p_y \sin \psi) = rp.$$

L'intégrale (13.1.4) se réécrit alors :

$$\tilde{u}_l(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_l} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_l(p^2 + q^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l}(\mathcal{F}_l(p^2+q^2, z, \mathbf{c}) - irp)} dp dq. \quad (13.1.5)$$

6. L'idée consiste ensuite à effectuer, pour tout  $q$  de  $\mathbb{R}$ , des calculs dans le plan complexe similaires à ceux que nous avons explicités en dimension deux pour transformer l'intégrale suivant  $p$  en une intégrale sur la variable temporelle  $t$ . Remarquons cependant qu'on ne peut pas utiliser directement les résultats précédents puisque le terme dans l'exponentielle n'est pas exactement le même qu'en dimension 2. Une première idée, proposée par van der Hijden dans [59] consiste à poser

$$p = \rho \cos \phi \quad \text{et} \quad q = \rho \sin \phi$$

pour obtenir :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_l} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_l(\rho^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l}(\mathcal{F}_l(\rho^2, z, \mathbf{c}) - ir\rho \cos \phi)} \rho d\rho d\phi. \quad (13.1.6)$$

Cependant, la fonction dans l'exponentielle diffère encore légèrement de ce que nous avons vu en dimension deux. Nous proposons donc plutôt d'effectuer le changement de variable  $(p, q) \rightarrow (\tilde{p}, q)$  avec

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{1+q^2}}.$$

En effet la propriété 13.1.1 peut se réécrire

$$\frac{s}{c_l} \mathcal{F}_l(\rho^2, z, \mathbf{c}) = \frac{s}{\tilde{c}_l(q)} \mathcal{F}_l(\tilde{p}^2, z, \tilde{\mathbf{c}}_l(q))$$

et

$$s \frac{irp}{c_l} = s \frac{ir\tilde{p}\sqrt{1+q^2}}{c_l} = s \frac{ir\tilde{p}}{\tilde{c}_l(q)}.$$

L'équation (13.1.6) devient alors :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_l} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{B}_l(\tilde{p}^2, q^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{\tilde{c}_l(q)}(\mathcal{F}_l(\tilde{p}^2, z, \tilde{\mathbf{c}}_l(q)) - ir\tilde{p})} d\tilde{p} dq, \quad (13.1.7)$$

avec  $\mathcal{B}_l(\tilde{p}^2, q^2, \mathbf{c}) = \mathcal{A}_l(\tilde{p}^2(1+q^2) + q^2, \mathbf{c})$ .

Grâce à ce changement de variable, le terme dans l'exponentielle est le même que celui qu'on obtiendrait en dimension 2 si le point d'observation était le point de coordonnées  $(r, z)$  et si les vitesses des ondes dans chaque milieu étaient données par le vecteur

$c_l$ . Tout se passe donc comme si on travaillait avec des **matériaux bidimensionnels dépendant de  $q$** .

De la même façon qu'en dimension deux, en utilisant (12.1.5) et (12.1.6) on peut donc montrer que :<sup>(53)</sup>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{B}_l(\tilde{p}^2, q^2, \mathbf{c}) e^{\frac{s}{c_l}(\mathcal{F}_l(\tilde{p}^2, z, \tilde{c}_l(q)) - ir\tilde{p})} d\tilde{p} = \int_{t_{0l}(q, x, y)}^{+\infty} \mathcal{B}_l(\gamma^2(t, q, x, y), q^2, \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t, q, x, y) e^{-st} dt,$$

où la fonction  $t_{0l}(q)$ <sup>(54)</sup> vérifie

$$t_{0l}(-q) = t_{0l}(q), \quad t_{0l}(0) > 0 \quad \text{et} \quad t_{0l}(q) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.$$

En particulier, cette fonction est une **bijection** de  $\mathbb{R}_+$  dans  $[t_{0l}(0), +\infty]$  et on peut définir sa **réciproque**  $q_{0l}(t)$ . Nous avons donc :

$$\tilde{u}_l(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_l} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_{0l}(q)}^{+\infty} \mathcal{B}_l(\gamma^2(t, q), q^2, \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t, q) e^{-st} dt dq. \quad (13.1.8)$$

7. Il nous reste maintenant à **changer l'ordre d'intégration** pour exprimer  $\tilde{u}$  sous la forme d'une transformée de Laplace : la figure 13.1 représente le schéma d'intégration pour  $q$  dans  $[-\infty; +\infty]$  puis  $t$  dans  $[t_{0l}(q); +\infty]$  et la figure 13.2 représente l'ordre inverse, pour  $t$  dans  $[t_{0l}(0); +\infty]$  puis  $q$  dans  $[-q_{0l}(t); q_{0l}(t)]$ . Nous pouvons donc écrire

$$\tilde{u}_l(x, y, z, s) = \frac{1}{4\pi^2 c_l} \int_{t_{0l}(0)}^{+\infty} s \left[ \int_{-q_{0l}(t)}^{q_{0l}(t)} \mathcal{B}_l(\gamma^2(t, q), q^2, \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t, q) dq \right] e^{-st} dt. \quad (13.1.9)$$

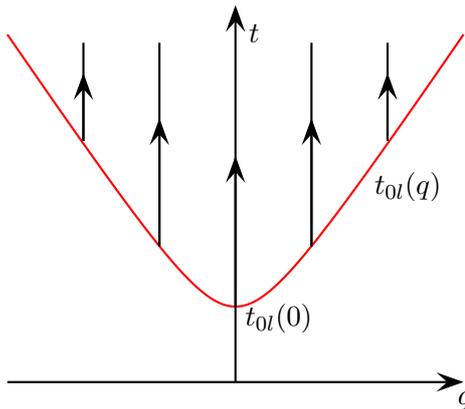


FIG. 13.1: Intégration sur  $q$  puis sur  $t$

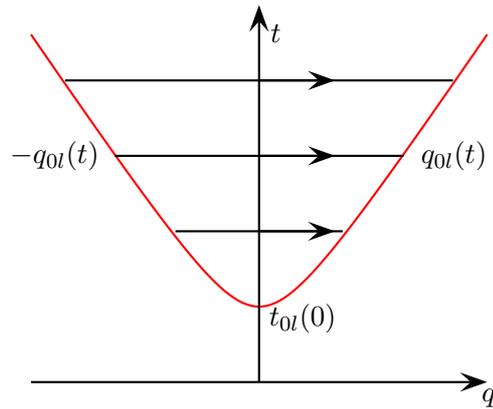


FIG. 13.2: Intégration sur  $t$  puis sur  $q$

53. Comme en dimension deux nous supposons ici que l'onde  $l$  est une onde de volume, nous verrons comment calculer les ondes de tête dans les sections suivantes.

54. Dans la suite de ce chapitre nous omettrons de préciser la dépendance de  $t_{0l}(q)$  et de  $\gamma(t, q)$  par rapport aux variables d'espace pour des raisons de lisibilité.

### 13.1 Calcul de la fonction de Green dans un milieu homogène infini

8. Remarquons que  $q_{0l}(t_{0l}(0)) = 0$  et que

$$t \mapsto \Xi(t) = \int_{-q_{0l}(t)}^{q_{0l}(t)} \mathcal{B}_l(\gamma^2(t, q), q^2, \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t, q) dq$$

est une fonction continue si nous prolongeons  $q_{0l}$  par 0 sur l'intervalle  $[0, t_{0l}(0)]$ , on peut alors montrer que  $\Xi(t)$  est dérivable (au sens des distributions), et par injectivité de la transformation de Laplace, nous pouvons identifier la solution :

$$u_l(x, y, z, t) \equiv \frac{1}{4\pi^2 c_l} \frac{d}{dt} \left[ \int_{-q_{0l}(t)}^{q_{0l}(t)} \mathcal{B}_l(\gamma^2(t, q), q^2, \mathbf{c}) \frac{d\gamma}{dt}(t, q) dq \right]. \quad (13.1.10)$$

### 13.1 Calcul de la fonction de Green dans un milieu homogène infini

Comme au chapitre précédent nous nous intéressons d'abord au cas de l'équation des ondes dans un milieu homogène infini :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] = \delta(x)\delta(y)\delta(z)f(t). \quad (13.1.11)$$

La solution de cette équation peut évidemment être obtenue grâce à une convolution en temps entre la source  $f$  et la fonction de Green  $u$  solution de l'équation suivante :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] = \delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t). \quad (13.1.12)$$

La première étape de la méthode est la plus simple : l'utilisation des transformations de Laplace en temps et de Fourier en  $x$  et en  $y$  nous conduit à l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$-\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} + \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c^2} \right) \hat{u} = \delta(z), \quad (13.1.13)$$

dont la solution s'écrit :

$$\hat{u}(k_x, k_y, z, s) = \frac{e^{-|z|(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}}{2 \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (13.1.14)$$

On utilise alors (troisième étape) la transformée inverse de  $\hat{u}$  en  $x$  et en  $y$

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|z|(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} - i(k_x x + k_y y)}}{2 \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}} dk_x dk_y \quad (13.1.15)$$

On pose ensuite (quatrième étape)  $k_x = \frac{p_x s}{c}$ ,  $k_y = \frac{p_y s}{c}$  et on utilise les coordonnées cylindriques  $r, \psi, z^{(55)}$  :

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi.$$

---

55. Dans toutes les sections de ce chapitre  $r, \psi, z$  désigneront les coordonnées cylindriques du point  $(x, y, z)$ .

L'intégrale (13.1.15) devient alors

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{s}{c} \left[ |z|(1+p_x^2+p_y^2)^{\frac{1}{2}} + ir(p_x \cos \psi + p_y \sin \psi) \right]}}{2(1+p_x^2+p_y^2)^{\frac{1}{2}}} dp_x dp_y. \quad (13.1.16)$$

Comme nous l'avons vu, la cinquième étape, spécifique à la dimension trois, consiste à appliquer le changement de variable :

$$p_x = p \cos \psi - q \sin \psi \quad \text{et} \quad p_y = p \sin \psi + q \cos \psi$$

qui est tel que :

$$p_x^2 + p_y^2 = p^2 + q^2 \quad \text{et} \quad p_x \cos \psi + p_y \sin \psi = p.$$

Nous avons donc :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{s}{c} \left[ |z|(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]}}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}} dp dq. \quad (13.1.17)$$

Nous proposons ensuite (sixième étape) d'effectuer le changement de variable supplémentaire

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{1+q^2}},$$

et d'utiliser la fonction  $q \mapsto \tilde{c}(q)$  définie par :

$$\tilde{c}(q) = \frac{c}{\sqrt{1+q^2}}.$$

L'équation (13.1.17) devient alors :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{s}{\tilde{c}(q)} \left[ |z|(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r \right]}}{2(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} d\tilde{p} dq. \quad (13.1.18)$$

Grâce à ce changement de variable, à l'exception de la vitesse  $\tilde{c}$ , qui dépend de  $q$ , l'intégrand est exactement le même qu'en dimension 2 : on a montré, à la section 12.1 du chapitre précédent (voir les équations (12.1.21) puis (12.1.26)), que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{s}{\tilde{c}(q)} \left[ |z|(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r \right]}}{2(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} d\tilde{p} = \int_{t_0(q)}^{+\infty} \frac{e^{-st}}{\sqrt{t^2 - t_0^2(q)}} dt. \quad (13.1.19)$$

avec

$$t_0(q) = \frac{R}{\tilde{c}(q)} = \frac{R}{c} \sqrt{1+q^2} \quad \text{et} \quad R = \sqrt{z^2 + r^2}.$$

Physiquement le changement de variable que nous proposons nous permet de considérer pour chaque  $q$  de  $\mathbb{R}$  un problème de dimension deux dans un milieu de vitesse de propagation  $\tilde{c}(q)$ .

On a donc :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_0(q)}^{+\infty} \frac{e^{-st}}{\sqrt{t^2 - t_0^2(q)}} dt dq. \quad (13.1.20)$$

### 13.1 Calcul de la fonction de Green dans un milieu homogène infini

La fonction  $q \mapsto t_0(q)$  a bien le comportement présenté sur la figure 13.1 en introduction. Nous pouvons donc définir sa réciproque

$$q_0(t) = \sqrt{\frac{c^2 t^2}{R^2} - 1},$$

et inverser l'ordre d'intégration (voir figure 13.2) :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{1}{4\pi^2 c} \int_{t_0(0)}^{+\infty} s \left[ \int_{-q_0(t)}^{q_0(t)} \frac{dq}{\sqrt{t^2 - t_0^2(q)}} \right] e^{-st} dt. \quad (13.1.21)$$

Comme nous l'avons dit en introduction, l'équation (13.1.21) nous fournit l'expression de la dérivée temporelle de  $u$  et nous pouvons nous arrêter ici. Cependant dans le cas particulier d'un milieu homogène il est possible de simplifier cette expression : remarquons d'abord que :

$$\sqrt{t^2 - t_0^2(q)} = \frac{R}{c} \sqrt{q_0^2(t) - q^2} = \frac{R}{c} q_0(t) \sqrt{1 - \frac{q^2}{q_0^2(t)}},$$

donc

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 R} \int_{t_0(0)}^{+\infty} \left[ \int_{-q_0(t)}^{q_0(t)} \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{q_0^2(t)}}} \right] \frac{e^{-st}}{q_0(t)} dt, \quad (13.1.22)$$

on peut alors effectuer le changement de variable  $Q = \frac{q}{q_0(t)}$  :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 R} \int_{t_0(0)}^{+\infty} \left[ \int_{-1}^1 \frac{dQ}{\sqrt{1 - Q^2}} \right] e^{-st} dt \quad (13.1.23)$$

et comme  $\int_{-1}^1 \frac{dQ}{\sqrt{1 - Q^2}} = \pi$  :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{2\pi R} \int_{\frac{R}{c}}^{+\infty} e^{-st} dt, \quad (13.1.24)$$

soit :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{2\pi R} \int_0^{+\infty} H_{\frac{R}{c}}(t) e^{-st} dt. \quad (13.1.25)$$

Donc, en utilisant l'injectivité de la transformée de Laplace, nous déduisons le :

$$\tilde{u}(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi R} \frac{d}{dt} H_{\frac{R}{c}}(t). \quad (13.1.26)$$

On retrouve donc le résultat bien connu :

**Théorème 13.1.1** *La solution du problème (13.1.12) s'écrit :*

$$\boxed{u(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi R} \delta_{\frac{R}{c}}(t).}$$

## 13.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

Nous considérons maintenant un domaine infini composé de 2 fluides homogènes. Les 2 milieux sont respectivement associés aux demi-espaces  $z > 0$  et  $z < 0$  et les vitesses de propagation des ondes dans ces milieux sont respectivement  $c_1$  et  $c_2$ .

L'équation aux dérivées partielles modélisant ce problème est :

$$\frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(z)} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] = \delta(x) \delta(y) \delta(z - h) f(t) \quad (13.2.1)$$

avec

$$\begin{cases} \mu(z) = \mu_1, & \rho(z) = \rho_1, & z > 0, \\ \mu(z) = \mu_2, & \rho(z) = \rho_2, & z < 0 \end{cases}$$

et  $c(z) = \sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho(z)}}$ .

La fonction de Green associée à ce problème est solution de:

$$\frac{1}{\mu(z)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(z)} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \delta(x) \delta(y) \delta(z - h) \delta(t). \quad (13.2.2)$$

### 13.2.1 Résultats

#### 13.2.1.1 Cas d'une source sur l'interface

Nous supposons ici que  $h = 0$  et  $c_1 < c_2$ .

- a) **Les fronts d'onde.** Comme nous le verrons le front d'onde est très similaire au front d'onde en dimension 2 : il se décompose en trois fronts d'onde secondaires : un front d'onde de volume et un front d'onde de tête dans le milieu 1 et un front d'onde de volume dans le milieu 2. La différence avec la dimension 2 est l'existence d'un domaine où les ondes de volume et de tête coexistent.

Nous utiliserons par la suite :

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = R \cos \theta \quad \text{et} \quad z = R \sin \theta.$$

**Front de l'onde de volume dans le milieu 1.** Pour un instant  $t$  donné le front de l'onde de volume dans le milieu 1 est une demi-sphère de centre  $O = (0, 0)$  et de rayon  $c_1 t$  (en bleu sur les figures 13.3.a et 13.4). Nous appelons  $\Omega_R(t)$  l'intérieur de cette demi-sphère.  $\Omega_R(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_R(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } \frac{R}{c_1} < t \right\}.$$

## 13.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

**Front de l'onde de volume dans le milieu 2.** De même le front de l'onde de volume dans le milieu 2 est une demi-sphère de centre  $O = (0, 0)$  et de rayon  $c_2 t$  (en rouge sur les figures 13.3.c et 13.4) et nous appelons  $\Omega_T(t)$  l'intérieur de cette demi-sphère.  $\Omega_T(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_T(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0 \text{ et } \frac{R}{c_2} < t \right\}.$$

**Front de l'onde de tête dans le milieu 1.** Nous notons  $A(t)$  l'intersection du front d'onde dans le milieu 2 avec l'axe  $x = 0$  à droite et  $B(t)$ <sup>(56)</sup> le point du plan  $(x, z)$  tel que le segment  $[AB]$  (en magenta sur la figure 13.4) soit tangent à  $\Omega_R(t)$ . Nous notons  $\omega_{te1}(t)$  le tronc de cône généré par la rotation de ce segment autour de l'axe  $(Oz)$ . Soit  $\omega_{te2}(t)$  la portion de sphère de centre

$$\left( 0, \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}} \right) \text{ et de rayon } \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}},$$

délimitée par les plans de cote  $z = 0$  et  $z = z_B$  ( $z_B$  est la cote du point  $B$ ). Le front de l'onde de tête dans le milieu 1 est la réunion de  $\omega_{te1}(t)$  et  $\omega_{te2}(t)$ .

**Lemme 13.2.1** *L'angle  $\theta_c = \arccos(\frac{c_1}{c_2})$  est l'angle limite au-dessus duquel il n'existe plus d'onde de tête. De plus, pour  $t$  donné, l'ensemble des points de  $\omega_{te1}(t)$  vérifie l'équation :*

$$t = R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{R |\cos \theta|}{c_2}, \quad \theta \in [0, \theta_c] \quad (13.2.3)$$

et l'ensemble des points de  $\omega_{te2}(t)$  vérifie :

$$t = \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}, \quad \theta \in [0, \theta_c]. \quad (13.2.4)$$

**Démonstration :**

Les équations (13.2.3) et (13.2.4) étant invariantes par rotation autour de l'axe  $(Oz)$ , il suffit de démontrer ce lemme dans le cas  $y = 0$  et  $x > 0$ . Comme en dimension deux, le triangle  $(OAB)$  est rectangle en  $B$  et  $OA = c_2 t$  et  $OB = c_1 t$  :

$$\cos \theta_c = \frac{OB}{OA} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Dans le demi-plan  $y = 0$  et  $x > 0$ , l'équation (13.2.3) n'est rien d'autre que l'équation du segment  $AB$ . De même (13.2.4) est l'équation polaire de l'arc de cercle de centre

$$\left( 0, \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}} \right) \text{ et de rayon } \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}},$$

joignant le point  $O$  au point  $B$ . ■

---

56. Pour plus de lisibilité nous omettrons par la suite la dépendance en temps de  $A$  et de  $B$ .

Nous noterons  $\Omega_{te}(t)$  l'ensemble des points situés entre le front de l'onde de tête et l'interface (en magenta sur les figures 13.3.b et 13.4).  $\Omega_{te}(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_{te}(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{R |\cos \theta|}{c_2} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \right\}.$$

Finalement nous notons  $\Omega(t) = \Omega_R(t) \cup \Omega_T(t) \cup \Omega_{te}(t)$ .

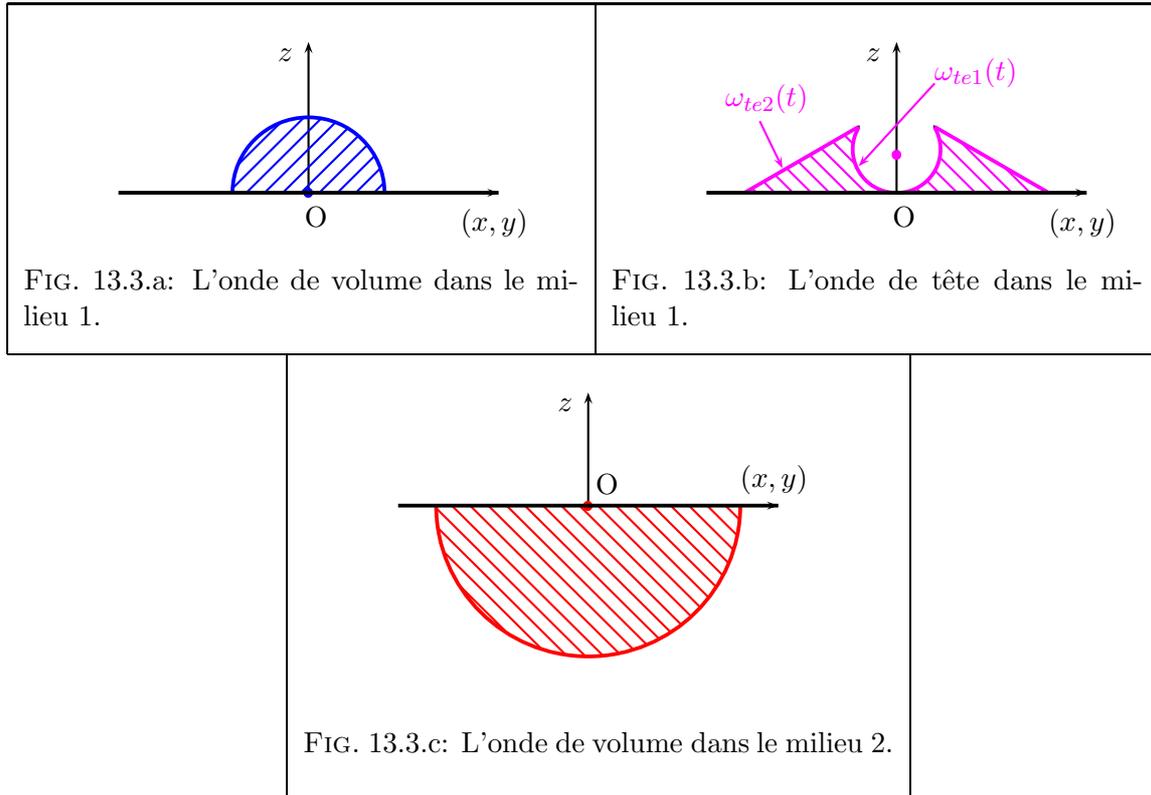
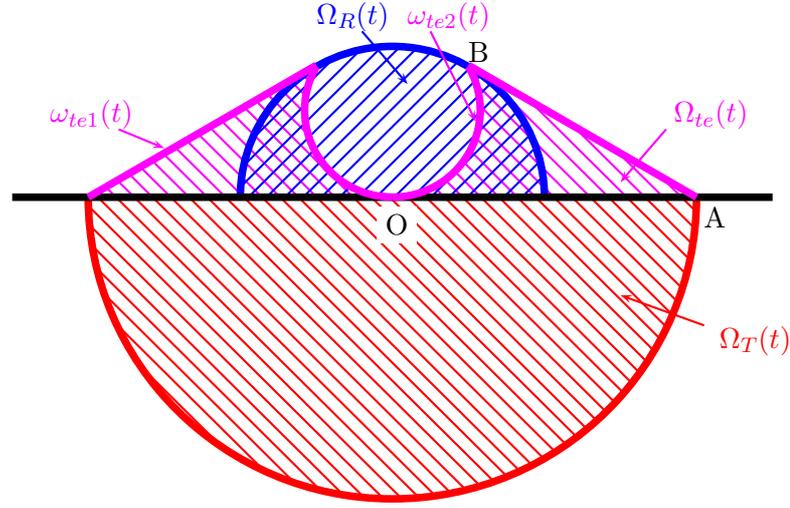


FIG. 13.3: L'ensemble des ondes du problème quand  $h = 0$

**b) Solutions analytiques.**

On notera

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{c}_{11}(q) = \frac{c_1}{\sqrt{1+q^2}} & \text{et} \quad \tilde{c}_{12}(q) = \frac{c_2}{\sqrt{1+\frac{c_2^2}{c_1^2}q^2}}, \\ \tilde{c}_{21}(q) = \frac{c_1}{\sqrt{1+\frac{c_1^2}{c_2^2}q^2}} & \text{et} \quad \tilde{c}_{22}(q) = \frac{c_2}{\sqrt{1+q^2}}, \end{array} \right.$$


 FIG. 13.4: Représentation des fronts d'onde quand  $h = 0$ 

puis

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{R}}(p, q) = \frac{\rho_2 (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 \left( \frac{\tilde{c}_{11}^2(q)}{\tilde{c}_{12}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 \left( \frac{\tilde{c}_{11}^2(q)}{\tilde{c}_{12}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \\ \tilde{\mathcal{T}}(p, q) = \frac{2\rho_2 (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left( \frac{\tilde{c}_{22}^2(q)}{\tilde{c}_{21}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \gamma_1^+(t, q) = -i \frac{\tilde{c}_{11}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)t^2}{R^2} - 1}, \\ v_1^+(t, q) = -i \left( \frac{\tilde{c}_{11}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{\tilde{c}_{11}^2(q)t^2}{R^2}} \right), \\ \gamma_2^+(t, q) = -i \frac{\tilde{c}_{22}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{\tilde{c}_{22}^2(q)t^2}{R^2} - 1}. \end{cases}$$

Nous définissons les fonctions  $q_{01}(t)$  et  $q_{02}(t)$  par

$$q_{01}(t) = \sqrt{\left| \frac{c_1^2 t^2}{R^2} - 1 \right|} \quad \text{et} \quad q_{02}(t) = \sqrt{\left| \frac{c_2^2 t^2}{R^2} - 1 \right|}$$

Enfin, pour le calcul des ondes de tête nous posons :

$$q_1(t) = \sqrt{\left( \frac{c_1 t}{R |\cos \theta|} - \frac{|\sin \theta|}{|\cos \theta|} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \right)^2 - \frac{c_1^2}{c_2^2}}$$

pour

$$R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{R |\cos \theta|}{c_2} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}.$$

**Théorème 13.2.1** *La solution causale du problème (13.2.2) avec  $h = 0$  est donnée par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega(t) : \\ \\ u(x, y, z, t) = 0 ; \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_R(t) \setminus \Omega_{te}(t) : \\ \\ u(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{01}(t)} \frac{1 + \Re e \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right] ; \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) \setminus \Omega_R(t) : \\ \\ u(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 + q_{01}^2(t)}} dq \right] ; \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) \cap \Omega_R(t) : \\ \\ u(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_{q_{01}(t)}^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 - q_{01}^2(t)}} dq \right] \\ \\ + \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{01}(t)} \frac{1 + \Re e \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right] ; \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_T(t) : \\ \\ u(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{02}(t)} \frac{\Re e \left( \tilde{\mathcal{T}}(\gamma_2^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{02}^2(t) - q^2}} dq \right]. \end{array} \right.$$

**Remarque 13.2.1** *On vérifie facilement que :*

- la condition  $\mathbf{x} \in \Omega_R(t) \setminus \Omega_{te}(t)$  se réécrit

$$t > \frac{R}{c_1} \quad \text{si } \theta > \theta_c \quad \text{et } t > \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \quad \text{sinon ;}$$

- la condition  $\mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) \setminus \Omega_R(t)$  se réécrit

$$R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{R |\cos \theta|}{c_2} < t < \frac{R}{c_1} \quad \text{et} \quad \theta < \theta_c ;$$

- la condition  $\mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) \cap \Omega_R(t)$  se réécrit

$$\frac{R}{c_1} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \quad \text{et} \quad \theta < \theta_c.$$

On pourra s'inspirer, pour le calcul numérique de  $U$ , de l'algorithme présenté à la section 13.4.1.2 (calcul de  $P^r$ ), page 397.

### 13.2.1.2 Cas d'une source hors de l'interface

- a) **Les fronts d'onde.** Nous distinguerons deux cas :  $c_1 < c_2$  et  $c_1 > c_2$  et nous utiliserons :

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + h)^2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = R \cos \theta \quad \text{et} \quad z + h = R \sin \theta.$$

1. **Si  $c_1 < c_2$ .** Dans ce cas, l'onde dans le milieu 1 apparaît comme la somme de trois ondes : une onde incidente, une onde réfléchie et une onde de tête. L'onde dans le milieu 2 est seulement constituée d'une onde transmise.

**Front de l'onde incidente dans le milieu 1.** Pour un instant  $t$  donné le front de l'onde incidente (en vert sur les figures 13.5.a et 13.6) est l'intersection de la sphère de centre  $(0, h)$  et de rayon  $c_1 t$  avec le demi-espace supérieur. Toute l'onde incidente est contenue dans cette portion de sphère que nous notons  $\Omega_I(t)$ .

**Front de l'onde réfléchie dans le milieu 1.** Le front de l'onde réfléchie (en bleu sur les figures 13.5.c et 13.6) est l'intersection de la sphère de centre  $(0, -h)$  et de rayon  $c_1 t$  avec le demi-espace supérieur. Nous appelons  $\Omega_R(t)$  l'intérieur de cette portion de sphère.  $\Omega_R(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_R(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } \frac{R}{c_1} < t \right\}.$$

**Front de l'onde transmise dans le milieu 2.** Comme en dimension 2 nous définissons  $\xi_{02}(r, z)^{(57)}$ , minimisant la fonction

$$t(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(r - \xi)^2 + z^2}}{c_2}, \tag{13.2.5}$$

et nous notons  $t_{02}(r, z) = t(\xi_{02}(r, z))$  son minimum. Nous pouvons alors définir l'ensemble  $\Omega_T(t)$  (représenté en rouge sur les figures 13.5.b et 13.6) par :

$$\Omega_T(t) = \{(x, y, z) \mid z \leq 0 \text{ et } t_{02}(r, z) \leq t\}.$$

---

57. Rappelons que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Onde de tête dans le milieu 1.** Nous notons  $A$  l'intersection du front d'onde transmis avec l'axe  $x = 0$  à droite et  $B$  le point du plan  $(x, z)$  tel que le segment  $[AB]$  (en magenta sur la figure 13.6) soit tangent à  $\Omega_R(t)$ . Nous notons  $\omega_{te1}(t)$  le tronc de cône généré par la rotation de ce segment autour de l'axe  $(Oz)$ . Soit  $\omega_{te2}(t)$  la portion de sphère de centre

$$\left(0, \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}} - h\right) \quad \text{et de rayon} \quad \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}}$$

délimitée par les plans de cote  $z = 0$  et  $z = z_B$ . Le front de l'onde de tête est la réunion de  $\omega_{te1}(t)$  et de  $\omega_{te2}(t)$ .

**Lemme 13.2.2** *L'angle  $\theta_c = \arccos(\frac{c_1}{c_2})$  est l'angle limite au-dessus duquel il n'existe plus d'onde de tête. De plus, pour  $t$  donné, l'ensemble des points de  $\omega_{te1}(t)$  vérifie l'équation :*

$$t = R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{R|\cos \theta|}{c_2}, \quad \theta \in [0, \theta_c] \quad (13.2.6)$$

et l'ensemble des points de  $\omega_{te2}(t)$  vérifie :

$$t = \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}, \quad \theta \in [0, \theta_c]. \quad (13.2.7)$$

La démonstration de ce lemme sera faite au cours de la démonstration du théorème 13.2.2 présenté ci-dessous (voir page 363). Remarquons que, dans le plan  $(x, z)$ , (13.2.7) est l'équation polaire d'un arc de cercle de centre

$$\left(0, \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}}\right) \quad \text{et de rayon} \quad \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}}$$

joignant le point  $O$  au point  $B$ .

Nous noterons  $\Omega_{te}(t)$  l'ensemble des points situés entre le front de l'onde de tête et l'interface (en magenta sur les figures 13.5.d et 13.6).  $\Omega_{te}(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_{te}(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{R|\cos \theta|}{c_2} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \right\}.$$

2. **Si  $c_1 > c_2$ .** Dans ce cas le contour est beaucoup plus simple car il n'y a pas d'onde de tête. Nous définissons les fronts d'onde incidente, réfléchie et transmise ainsi que les ensembles  $\Omega_I(t)$ ,  $\Omega_R(t)$  et  $\Omega_T(t)$  de la même manière que dans le cas  $c_1 < c_2$  (voir figures 13.7 et 13.8). Pour harmoniser les résultats dans les deux cas nous notons  $\Omega_{te} = \emptyset$ .

### 13.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

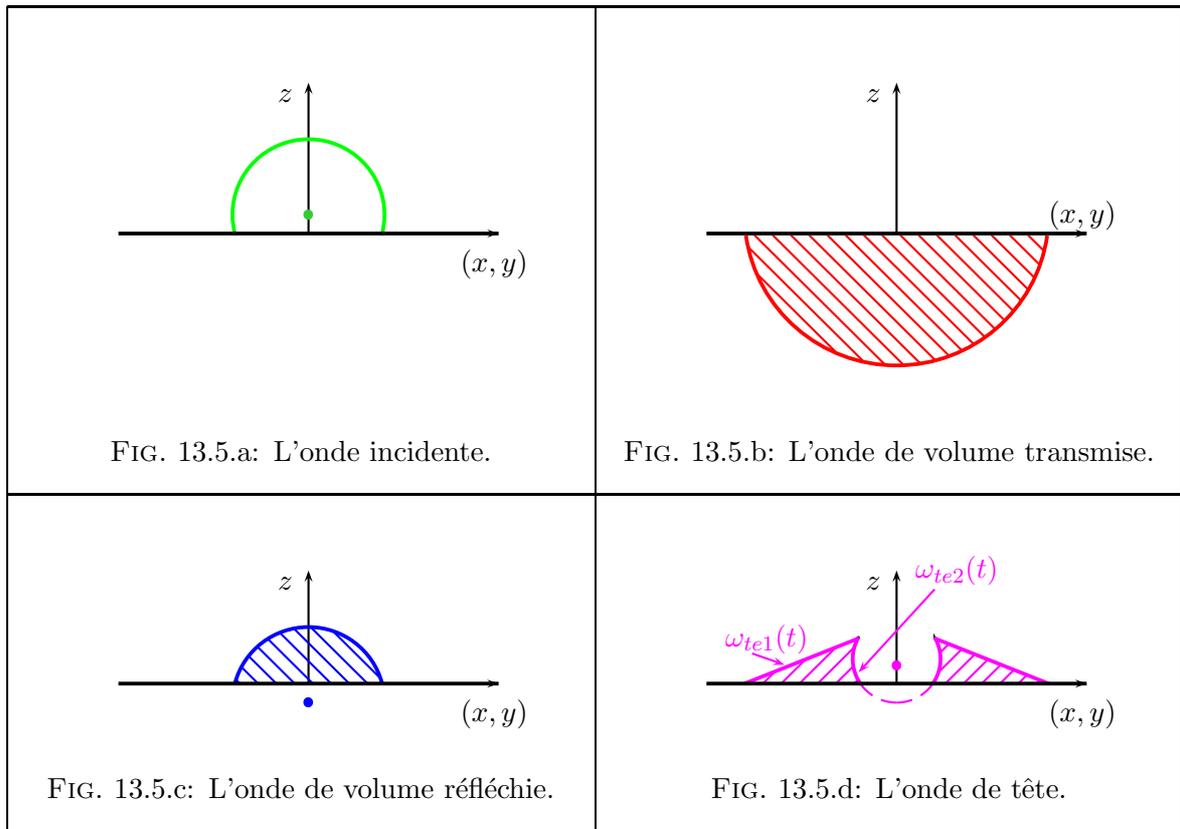


FIG. 13.5: L'ensemble des ondes du problème quand  $h \neq 0$  et  $c_1 < c_2$ .

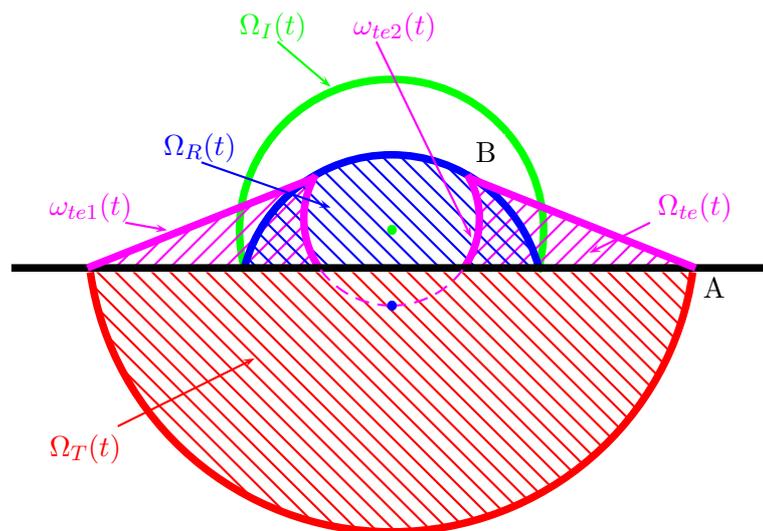


FIG. 13.6: Représentation du front d'onde quand  $c_1 < c_2$ .

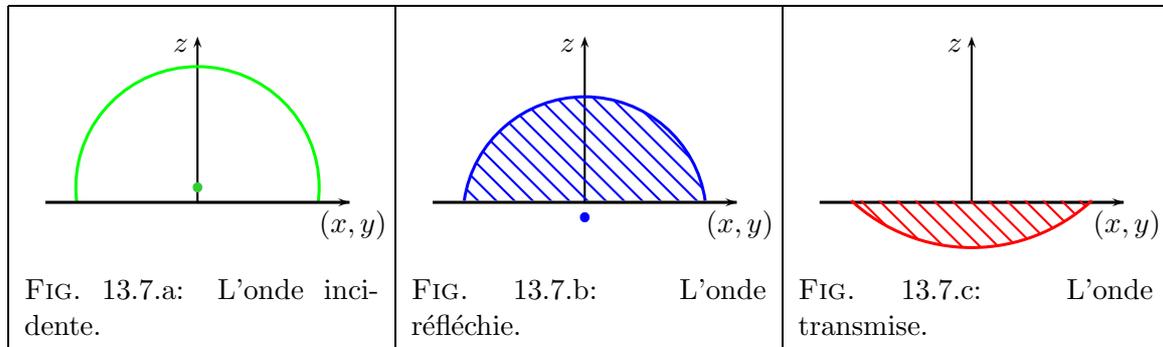


FIG. 13.7: Les différentes ondes du problème quand  $h \neq 0$  et  $c_1 > c_2$ .

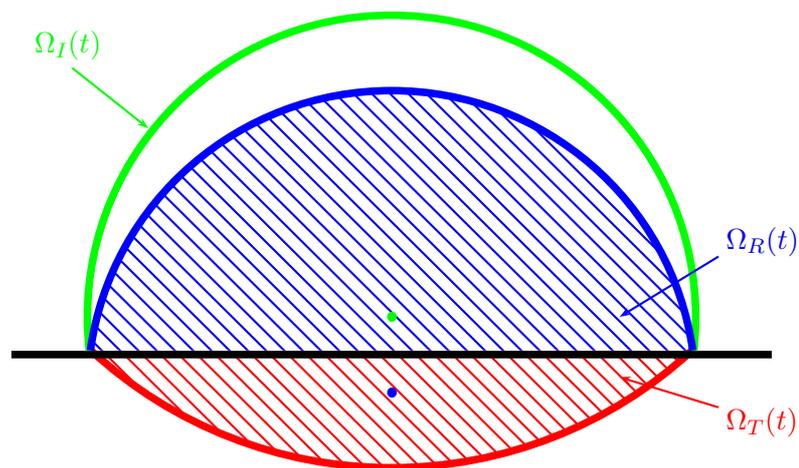


FIG. 13.8: Représentation du front d'onde quand  $c_1 > c_2$ .

**b) Solutions analytiques.** Nous décomposons la solution  $u$  en :

$$\begin{cases} u = u^i + u^r & z > 0, \\ u = u^t & z < 0. \end{cases} \quad (13.2.8)$$

où  $u^i$  est l'onde incidente, c'est-à-dire la restriction au demi-espace  $z > 0$  de la solution qu'on aurait obtenue avec  $c_1 = c_2$  :

$$\begin{cases} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_I(t) : u^i(x, y, z, t) = 0 \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_I(t) : u^i(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi R^*} \delta_{\frac{R}{c}}(t) \end{cases}$$

avec  $R^* = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}$ , la distance au point source.

Comme dans le cas  $h = 0$  on notera :

$$\begin{cases} \tilde{c}_{11}(q) = \frac{c_1}{\sqrt{1+q^2}} & \text{et} & \tilde{c}_{12}(q) = \frac{c_2}{\sqrt{1+\frac{c_2^2}{c_1^2}q^2}}, \\ \tilde{c}_{21}(q) = \frac{c_1}{\sqrt{1+\frac{c_1^2}{c_2^2}q^2}} & \text{et} & \tilde{c}_{22}(q) = \frac{c_2}{\sqrt{1+q^2}}, \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{R}}(p, q) = \frac{\rho_2 (1+p^2)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 \left( \frac{\tilde{c}_{11}^2(q)}{\tilde{c}_{12}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 (1+p^2)^{\frac{1}{2}} + \rho_2 \left( \frac{\tilde{c}_{11}^2(q)}{\tilde{c}_{12}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \\ \tilde{\mathcal{T}}(p, q) = \frac{2\rho_2 (1+p^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left( \frac{\tilde{c}_{22}^2(q)}{\tilde{c}_{21}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 (1+p^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \gamma_1^+(t, q) = -i \frac{\tilde{c}_{11}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)t^2}{R^2} - 1}, \\ v_1^+(t, q) = -i \left( \frac{\tilde{c}_{11}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{\tilde{c}_{11}^2(q)t^2}{R^2}} \right) \end{cases}$$

Nous définissons la fonction  $q_{01}(t)$  par

$$q_{01}(t) = \sqrt{\left| 1 - \frac{c_1^2 t^2}{R^2} \right|}.$$

Pour définir  $\gamma_2^+(t, q)$  et  $q_{02}(t)$  nous utiliserons la fonction

$$\mathcal{F}(p, q, t) = -z (1+p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{\tilde{c}_{22}^2(q)}{\tilde{c}_{21}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipr - \tilde{c}_{22}(q)t = 0,$$

le temps d'arrivée de l'onde transmise au point  $(x, y, z)$ ,  $t_{02} = t_{02}(r, y)$ , et le lemme suivant :

**Lemme 13.2.3** *Pour tout  $q > 0$  il existe un unique  $\tilde{t}_{02}(q) > t_{02}$  tel que :*

- $\tilde{t}_{02}(q)$  est l'unique réel tel que  $\mathcal{F}(p, q, \tilde{t}_{02}(q))$  admette une racine double  $p = \tilde{p}_{02}(q)$ , cette racine est imaginaire pure, de plus

$$-m < \Im m(\tilde{p}_{02}(q)) < 0,$$

avec  $m = \min(1, \tilde{c}_{21}(q)/\tilde{c}_{22}(q))$  ;

- pour  $t > \tilde{t}_{02}(q)$ ,  $\mathcal{F}(p, q, \tilde{t}_{02}(q))$  admet deux racines complexes  $\gamma_2^+(t, q)$  et  $\gamma_2^-(t, q)$  vérifiant

$$\Im m[\gamma_2^+(t, q)] = \Im m[\gamma_2^-(t, q)] \quad \text{et} \quad \Re e[\gamma_2^+(t, q)] = -\Re e[\gamma_2^-(t, q)] > 0.$$

- pour  $h(-m, q)/\tilde{c}_{22}(q) \leq t \leq \tilde{t}_{02}(q)$   $\mathcal{F}(p, t, q)$ , admet deux racines

$$p = v_2^-(t, q) \in [-im \tilde{p}_{02}(q)] \quad \text{et} \quad p = v_2^+(t) \in [\tilde{p}_{02}(q); im],$$

imaginaires pures, avec

$$h(w, q) = -z(1-w^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{\tilde{c}_{22}^2(q)}{\tilde{c}_{21}^2(q)} - w^2\right)^{\frac{1}{2}} - wx.$$

De plus la fonction  $q \mapsto \tilde{t}_{02}(q)$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$

**Démonstration :**

La majeure partie de ce lemme est une réécriture du lemme 12.2.3 (en remplaçant  $c_1$  et  $c_2$  par  $\tilde{c}_{21}(q)$  et  $\tilde{c}_{22}(q)$ )<sup>(58)</sup>. Il ne reste en fait qu'à démontrer que  $\tilde{t}_{02}(q) > t_{02}$  pour tout  $q$  de  $\mathbb{R}^+$  et que  $q \mapsto \tilde{t}_{02}(q)$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

Soit  $q > 0$ . Considérons maintenant que les deux milieux sont de dimension 2, et que les vitesses dans les deux milieux ne sont plus  $c_1$  et  $c_2$  mais  $\tilde{c}_{21}(q)$  et  $\tilde{c}_{22}(q)$ . Toujours d'après le lemme 12.2.3, le temps  $\tilde{t}_{02}(q)$  est le nouveau temps minimum mis par un rayon pour aller de la source de coordonnées  $(0, h)$  au point  $(r, z)$ , or il est évident que  $\tilde{c}_{21}(q) < c_1$  et  $\tilde{c}_{22}(q) < c_2$  : le nouveau milieu virtuel est plus lent que le milieu réel donc  $\tilde{t}_{02}(q) > t_0$ . De même, les fonctions  $q \mapsto \tilde{c}_{21}(q)$  et  $q \mapsto \tilde{c}_{22}(q)$  sont décroissantes : le milieu virtuel devient de plus en plus lent quand  $q$  augmente, donc  $\tilde{t}_{02}(q)$  est bien une fonction croissante. ■

**Corollaire 13.2.1** *Comme la fonction  $q \mapsto \tilde{t}_{02}(q)$  est une bijection de*

$$\mathbb{R}^+ \text{ dans } [t_{02}; +\infty],$$

*on peut définir sa réciproque,  $t \mapsto q_{02}(t)$ , pour  $t > t_{02}$ .*

---

58. Il ne faut cependant pas oublier que  $r$  est positif alors que dans le lemme 12.2.3, son équivalent,  $x$ , était supposé négatif. C'est pour cette raison que  $\tilde{p}_{02}(q)$  a ici une partie imaginaire positive.

### 13.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

Pour le calcul de l'onde de tête dans le milieu 1 nous utiliserons la fonction

$$q_1(t) = \sqrt{\left(\frac{c_1 t}{R|\cos\theta|} - \frac{|\sin\theta|}{|\cos\theta|} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{c_2^2}}\right)^2 - \frac{c_1^2}{c_2^2}}$$

définie pour

$$R \sin\theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{R|\cos\theta|}{c_2} < t < \frac{R}{\sin\theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le

**Théorème 13.2.2** *L'onde réfléchie est donnée par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_R(t) \cup \Omega_{te}(t) : \\ \\ \qquad \qquad \qquad u^r(x, y, z, t) = 0 ; \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_R(t) \setminus \Omega_{te}(t) : \\ \\ \qquad u^r(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{01}(t)} \frac{\Re e \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right] ; \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) \setminus \Omega_R(t) : \\ \\ \qquad u^r(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 + q_{01}^2(t)}} dq \right] ; \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) \cap \Omega_R(t) : \\ \\ \qquad u^r(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_{q_{01}(t)}^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 - q_{01}^2(t)}} dq \right] \\ \\ \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{01}(t)} \frac{\Re e \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right], \end{array} \right.$$

et l'onde transmise est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_T(t) : \\ \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_T(t) : \\ \\ u^t(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 c_2} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{02}(t)} \Re e \left[ \frac{\tilde{c}_{22}(q) \mathcal{T}(\gamma_2^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_2^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t, q), t, q)} \right] dq \right]. \end{array} \right.$$

**Remarque 13.2.2** On vérifie facilement que :

- la condition  $\mathbf{x} \in \Omega_R(t) \setminus \Omega_{te}(t)$  se réécrit

$$t > \frac{R}{c_1} \quad \text{si } \theta > \theta_c \quad \text{et } t > \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \quad \text{sinon ;}$$

- la condition  $\mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) \setminus \Omega_R(t)$  se réécrit

$$R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} + \frac{R |\cos \theta|}{c_2} < t < \frac{R}{c_1} \quad \text{et } \theta < \theta_c ;$$

- la condition  $\mathbf{x} \in \Omega_{te}(t) \cap \Omega_R(t)$  se réécrit

$$\frac{R}{c_1} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} \quad \text{et } \theta < \theta_c.$$

On pourra s'inspirer, pour le calcul numérique de  $U^r$ , de l'algorithme présenté à la section 13.4.1.2 (calcul de  $P^r$ ), page 397, et, pour celui de  $U^t$ , de l'algorithme présenté à la section 13.4.2.1 (calcul de  $V_{sx}^P$ ), page 403.

### 13.2.2 Démonstrations

Si nous décomposons  $u$  suivant (13.2.8), les conditions de transmissions physiques imposant la continuité de  $u$  et de  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z}$ , l'équation (13.2.2) devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^i}{\partial z^2} \right] = \delta(x) \delta(y) \delta(z-h) \delta(t), \quad z > 0 \quad (13.2.9a) \\ \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u^r}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 u^r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^r}{\partial z^2} \right] = 0, \quad z > 0 \quad (13.2.9b) \\ \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u^t}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 u^t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^t}{\partial z^2} \right] = 0, \quad z < 0 \quad (13.2.9c) \\ u^i + u^r = u^t, \quad z = 0 \quad (13.2.9d) \\ \rho_2 \left( \frac{\partial u^i}{\partial z} + \frac{\partial u^r}{\partial z} \right) = \rho_1 \frac{\partial u^t}{\partial z}, \quad z = 0 \quad (13.2.9e) \end{array} \right.$$

L'utilisation des transformées de Laplace en temps et de Fourier en  $x$  et en  $y$  nous permet d'obtenir le système différentiel ordinaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 \hat{u}^i}{\partial z^2} + \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right) \hat{u}^i = \delta(z-h), \quad z > 0, \quad (13.2.10a) \\ -\frac{\partial^2 \hat{u}^r}{\partial z^2} + \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right) \hat{u}^r = 0, \quad z > 0, \quad (13.2.10b) \\ -\frac{\partial^2 \hat{u}^t}{\partial z^2} + \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right) \hat{u}^t = 0, \quad z < 0, \quad (13.2.10c) \\ \hat{u}^i + \hat{u}^r = \hat{u}^t, \quad z = 0, \quad (13.2.10d) \\ \rho_2 \left( \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial z} + \frac{\partial \hat{u}^r}{\partial z} \right) = \rho_1 \frac{\partial \hat{u}^t}{\partial z}, \quad z = 0, \quad (13.2.10e) \end{array} \right.$$

dont les solutions sont

$$\begin{aligned} \hat{u}^i &= \frac{1}{2 \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|z-h| \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}}, \\ \hat{u}^r &= \frac{\mathcal{R}(k_x, k_y, s)}{2 \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-(z+h) \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}}, \\ \hat{u}^t &= \frac{\mathcal{T}(k_x, k_y, s)}{2 \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{z \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} - h \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Avec  $\mathcal{R}$ , le coefficient de réflexion et  $\mathcal{T}$ , le coefficient de transmission, définis par

$$\mathcal{R}(k_x, k_y, s) = \frac{\rho_2 \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (13.2.11)$$

$$\mathcal{T}(k_x, k_y, s) = \frac{2\rho_2 \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (13.2.12)$$

### 13.2.2.1 Cas d'une source sur l'interface, démonstration du théorème 13.2.1

Dans le cas  $h = 0$  la solution  $\hat{u}$  s'écrit

$$\hat{u}(k_x, k_y, z, s) = \frac{1 + \mathcal{R}(k_x, k_y, s)}{2 \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|z| \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (13.2.13)$$

pour  $z > 0$  et

$$\hat{u}(k_x, k_y, z, s) = \frac{\mathcal{T}(k_x, k_y, s)}{2 \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-|z| \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (13.2.14)$$

pour  $z < 0$ .

**Calcul de la solution dans le milieu 2.** En utilisant la transformation de Fourier on obtient :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(k_x, k_y, s)}{2 \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_2} \left[ |z| \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} + i(k_x x + k_y y) \right]} dk_x dk_y$$

On pose d'abord  $k_x = \frac{p_x s}{c_2}$  et  $k_y = \frac{p_y s}{c_2}$ , on utilise à nouveau les coordonnées cylindriques  $r, \psi, z$  et on pose  $p$  et  $q$  tels que :

$$p_x = p \cos \psi - q \sin \psi$$

$$p_y = p \sin \psi + q \cos \psi$$

pour obtenir

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(p, q)}{2(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_2} \left[ |z|(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} + i p r \right]} dp dq \quad (13.2.15)$$

avec l'abus de notation

$$\mathcal{T}(p, q) = \mathcal{T}\left(\frac{p}{c_2}, \frac{q}{c_2}, 1\right) = \frac{2(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2 + q^2\right)^{\frac{1}{2}} + (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (13.2.16)$$

### 13.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

Comme à la section précédente nous allons transformer ce problème tridimensionnel en une infinité de problèmes bidimensionnels avec des vitesses de propagation dépendant de  $q$ . Pour cela nous effectuons maintenant le changement de variable

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{1+q^2}}$$

et nous définissons la fonction  $q \mapsto \tilde{c}_{22}(q)$  par

$$\tilde{c}_{22}(q) = \frac{c_2}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Remarquons alors que :

$$\frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2 + q^2 = (1+q^2) \left( \frac{c_2^2 + c_1^2 q^2}{(1+q^2)c_1^2} + \tilde{p}^2 \right) = (1+q^2) \left( \tilde{c}_{22}(q) \frac{1 + \frac{c_1^2}{c_2^2} q^2}{c_1^2} + \tilde{p}^2 \right).$$

Si nous définissons les fonctions  $q \mapsto \tilde{c}_{11}(q)$  et  $(\tilde{p}, q) \mapsto \tilde{T}(\tilde{p}, q)$  par

$$\tilde{c}_{21}(q) = \frac{c_1}{\sqrt{1 + \frac{c_1^2}{c_2^2} q^2}} \quad \text{et} \quad \tilde{T}(\tilde{p}, q) = \frac{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}}{\left( \frac{\tilde{c}_{22}^2(q)}{\tilde{c}_{21}^2(q)} + \tilde{p}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + (1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

on aura  $\mathcal{T}(p, q) = \tilde{T}(\tilde{p}, q)$  et :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{T}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{22}(q)} \left[ |z|(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} d\tilde{p} dq. \quad (13.2.17)$$

Or on a vu, lors du calcul de l'onde transmise en dimension 2 (voir les équations (12.2.20) puis (12.2.22)), que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{T}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{22}(q)} \left[ |z|(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} d\tilde{p} = \int_{t_{02}(q)}^{+\infty} \frac{\Re \left[ \tilde{T}(\gamma_2^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t^2 - t_{02}^2(q)}} e^{-st} dt.$$

avec :

$$t_{02}(q) = \frac{R}{\tilde{c}_{22}(q)} = \frac{R}{c_2} \sqrt{1+q^2},$$

$$\gamma_2^+(t, q) = -i \frac{\tilde{c}_{22}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{\tilde{c}_{22}^2(q)t^2}{R^2} - 1}$$

et

$$r = R \cos \theta, \quad z = R \sin \theta.$$

On a donc :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_{02}(q)}^{+\infty} \frac{\Re \left[ \tilde{T}(\gamma_2^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t^2 - t_{02}^2(q)}} e^{-st} dt dq. \quad (13.2.18)$$

On peut maintenant échanger l'ordre d'intégration, comme à la section 13.1, et montrer que

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 R} \int_{t_{02}(0)}^{+\infty} \left[ \int_{-q_{02}(t)}^{q_{02}(t)} \frac{\Re e \left( \tilde{T}(\gamma_2^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{02}^2(t) - q^2}} dq \right] e^{-st} dt, \quad (13.2.19)$$

avec

$$q_{02}(t) = \sqrt{\frac{c_2^2 t^2}{R^2} - 1}.$$

Remarquons que, comme l'intégrand est pair,

$$\int_{-q_{02}(t)}^{q_{02}(t)} \frac{\Re e \left[ \tilde{T}(\gamma_2^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q_{02}^2(t) - q^2}} dq = 2 \int_0^{q_{02}(t)} \frac{\Re e \left[ \tilde{T}(\gamma_2^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q_{02}^2(t) - q^2}} dq. \quad (13.2.20)$$

$$u(x, y, z, t) = 0 \quad \text{si } t < t_{02}(0) = \frac{R}{c_2}$$

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{02}(t)} \frac{\Re e \left( \tilde{T}(\gamma_2^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{02}^2(t) - q^2}} dq \right], \quad \text{si } t > t_{02}(0)$$

**Remarque 13.2.3** La condition  $t < t_{02}(0) = R/c_2$  est bien équivalente à  $\mathbf{x} \in \Omega_T(t)$ .

**Calcul de la solution dans le milieu 1.** Avec des changements de variable similaires à ceux que nous venons d'utiliser pour le calcul dans le milieu 2 (on pose cette fois  $k_x = \frac{pxs}{c_1}$ ,  $k_y = \frac{pys}{c_1}$ ), on obtient

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \mathcal{R}(p, q)}{2(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_1} \left[ |z|(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} dp dq$$

avec l'abus de notation

$$\mathcal{R}(p, q) = \mathcal{R}\left(\frac{p}{c_1}, \frac{q}{c_1}, 1\right) = \frac{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} + p^2 + q^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{c_1^2}{c_2^2} + p^2 + q^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (13.2.21)$$

On effectue ensuite le changement de variable

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{1 + q^2}}$$

et on définit les fonctions  $q \mapsto \tilde{c}_{11}(q)$  et  $q \mapsto \tilde{c}_{12}(q)$  par

$$\tilde{c}_{11}(q) = \frac{c_1}{\sqrt{1 + q^2}} \quad \text{et} \quad \tilde{c}_{12}(q) = \frac{c_2}{\sqrt{1 + \frac{c_2^2}{c_1^2} q^2}}$$

et  $(\tilde{p}, q) \mapsto \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)$  par

$$\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q) = \frac{(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)}{\tilde{c}_{12}^2(q)} + \tilde{p}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)}{\tilde{c}_{12}^2(q)} + \tilde{p}^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

### 13.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

On a alors  $\mathcal{R}(p, q) = \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)$  et :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{11}(q)} \left[ |z|(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} d\tilde{p} dq. \quad (13.2.22)$$

On utilisera également les coordonnées  $(R, \theta)$  telles que:

$$r = R \cos \theta \quad \text{et} \quad z = R \sin \theta.$$

On a vu, lors du calcul de l'onde réfléchie en dimension 2, que

- si  $|\cos \theta| \leq \frac{\tilde{c}_{11}(q)}{\tilde{c}_{12}(q)}$  alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{11}(q)} \left[ |z|(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} d\tilde{p} = \int_{t_{01}(q)}^{+\infty} \frac{1 + \Re e \left[ \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t^2 - t_{01}^2(q)}} e^{-st} dt$$

avec:

$$t_{01}(q) = \frac{R}{\tilde{c}_{11}(q)} = \frac{R}{c_1} \sqrt{1 + q^2}$$

et

$$\gamma_1^+(t, q) = -i \frac{\tilde{c}_{11}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)t^2}{R^2} - 1}.$$

- si  $|\cos \theta| > \frac{\tilde{c}_{11}(q)}{\tilde{c}_{12}(q)}$  alors (voir (12.2.28), puis (12.2.29) et (12.2.30))

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{11}(q)} \left[ |z|(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} d\tilde{p} &= \int_{t_{01}(q)}^{+\infty} \frac{1 + \Re e \left[ \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t^2 - t_{01}^2(q)}} e^{-st} dt \\ &+ \int_{t_1(q)}^{t_{01}(q)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q)) \right]}{2\pi \sqrt{t_{01}^2(q) - t^2}} e^{-st} dt \end{aligned}$$

avec

$$v_1^+(t, q) = -i \left( \frac{\tilde{c}_{11}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{\tilde{c}_{11}^2(q)t^2}{R^2}} \right)$$

et

$$t_1(q) = R |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{\tilde{c}_{11}^2(q)} - \frac{1}{\tilde{c}_{12}^2(q)} - \frac{R \cos \theta}{\tilde{c}_{12}(q)}}.$$

Intéressons-nous donc à la condition  $|\cos \theta| \leq \frac{\tilde{c}_{11}(q)}{\tilde{c}_{12}(q)}$  qui s'écrit également :

$$|\cos \theta| \leq \frac{c_1}{c_2} \frac{\sqrt{1 + \frac{c_2^2}{c_1^2} q^2}}{\sqrt{1 + q^2}} = \frac{c_1}{c_2} g(q). \quad (13.2.23)$$

Comme  $c_2 > c_1$  il est évident que  $g(q) > 1$ . La condition (13.2.23) sera donc vérifiée pour tout  $q$  réel si  $\cos \theta \leq \frac{c_1}{c_2}$ . Supposons maintenant que  $\cos \theta > \frac{c_1}{c_2}$ , on peut alors montrer que la condition (13.2.23) est équivalente à :

$$q^2 \geq q_2^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \cos^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2} \right]. \quad (13.2.24)$$

Nous traiterons donc séparément les cas  $\cos \theta \leq \frac{c_1}{c_2}$  et  $\cos \theta > \frac{c_1}{c_2}$ .

a) si  $|\cos \theta| \leq \frac{c_1}{c_2}$ . Dans ce cas, quel que soit  $q$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_{11}(q)} \left[ |z|(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} d\tilde{p} = \int_{t_{01}(q)}^{+\infty} \frac{1 + \Re e \left[ \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t^2 - t_{01}^2(q)}} e^{-st} dt$$

On peut donc montrer, comme pour  $z < 0$  que :

$$\boxed{\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= 0 && \text{si } t < t_{01}(0) = \frac{R}{c_1} \\ u(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{01}(t)} \frac{1 + \Re e \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right], \end{aligned}}$$

avec

$$q_{01}(t) = \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{R^2} - 1}.$$

b) si  $|\cos \theta| > \frac{c_1}{c_2}$ . Dans ce cas on vérifie que :

- si  $q > q_2$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_{11}(q)} \left[ |z|(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} d\tilde{p} = \int_{t_{01}(q)}^{+\infty} \frac{1 + \Re e \left[ \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t^2 - t_{01}^2(q)}} e^{-st} dt ;$$

- si  $q \leq q_2$  :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_{11}(q)} \left[ |z|(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} d\tilde{p} &= \int_{t_{01}(q)}^{+\infty} \frac{1 + \Re e \left[ \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t^2 - t_{01}^2(q)}} e^{-st} dt \\ &+ \int_{t_1(q)}^{t_{01}(q)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q)) \right]}{2\pi \sqrt{t_{01}^2(q) - t^2}} e^{-st} dt \end{aligned}$$

donc :

$$\tilde{u}(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_1} [\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2]$$

## 13.2 Cas d'un milieu à deux couches planes homogènes

---

avec

$$\tilde{u}_1 = - \int_{-q_2}^{q_2} \int_{t_1(q)}^{t_{01}(q)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t_{01}^2(q) - t^2}} e^{-st} dt dq$$

et

$$\tilde{u}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_{01}(q)}^{+\infty} \frac{\Re e \left[ 1 + \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t^2 - t_{01}^2(q)}} e^{-st} dt dq.$$

Etudions d'abord  $\tilde{u}_1$ , on remarque que

$$q \mapsto \int_{t_1(q)}^{t_{01}(q)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t_{01}^2(q) - t^2}} e^{-st} dt$$

est une fonction paire :

$$\tilde{u}_1 = -2 \int_0^{q_2} \int_{t_1(q)}^{t_{01}(q)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{t_{01}^2(q) - t^2}} e^{-st} dt dq.$$

On peut échanger l'ordre d'intégration (voir figures 13.9 et 13.10) :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= -2 \frac{c_1}{R} \int_{t_1(0)}^{t_{01}(0)} \int_0^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 + q_{01}^2(t)}} e^{-st} dq dt \\ &\quad - 2 \frac{c_1}{R} \int_{t_{01}(0)}^{t_{01}(q_2)} \int_{q_{01}(t)}^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 - q_{01}^2(t)}} e^{-st} dq dt \end{aligned}$$

avec

$$q_1(t) = \sqrt{\left( \frac{c_1 t}{R |\cos \theta|} - \frac{|\sin \theta|}{|\cos \theta|} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{c_2^2}} \right)^2 - \frac{c_1^2}{c_2^2}} = t_1^{-1}(t)$$

et

$$q_{01}(t) = \sqrt{1 - \frac{c_1^2 t^2}{R^2}} \quad \text{si } t < \frac{R}{c_1} \quad \text{et} \quad q_{01}(t) = \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{R^2} - 1} = t_{01}^{-1}(t) \quad \text{si } t > \frac{R}{c_1}.$$

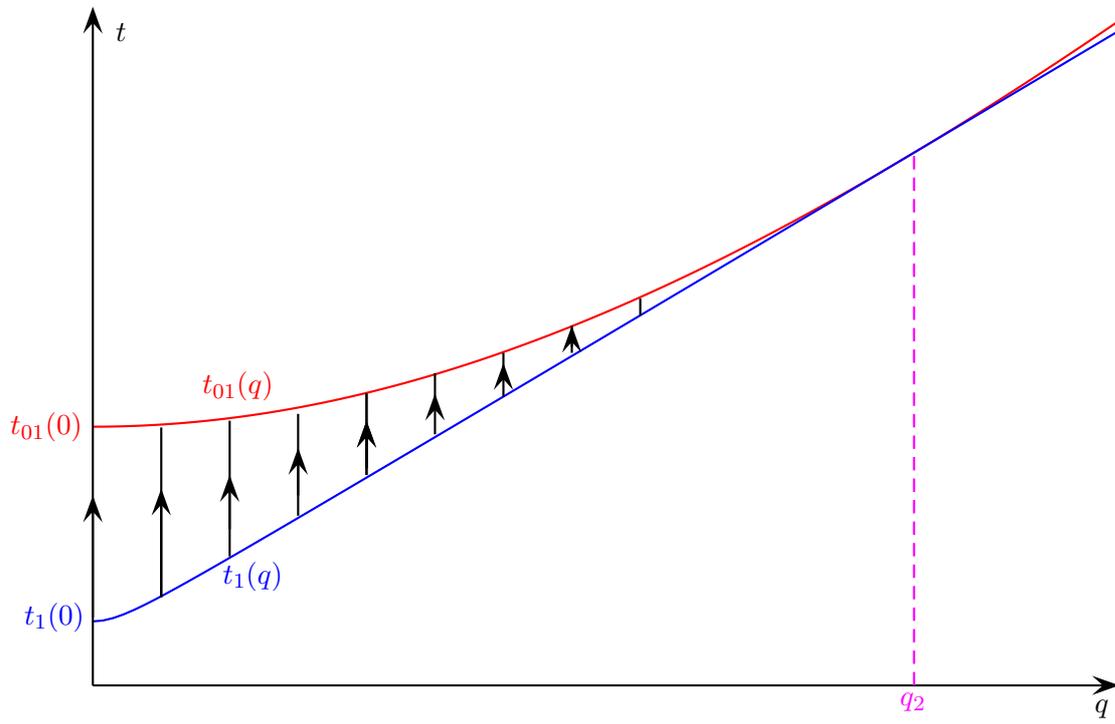


FIG. 13.9: Intégration sur  $q$  puis sur  $t$

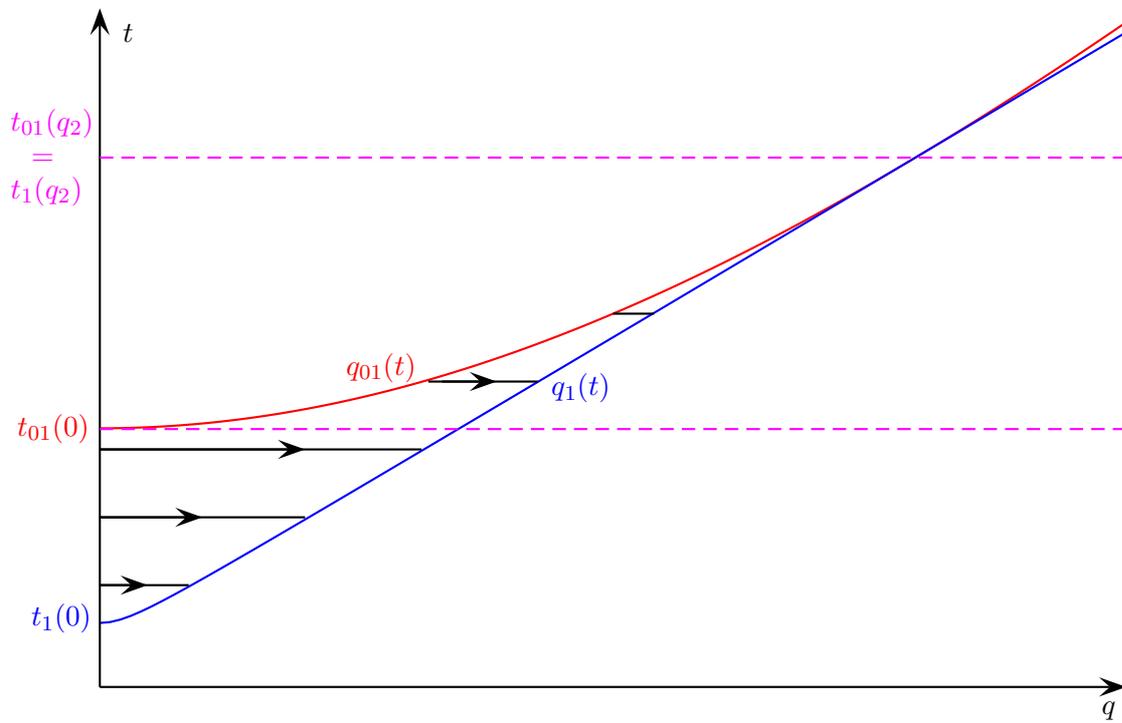


FIG. 13.10: Intégration sur  $t$  puis sur  $q$

Finalemment :

$$u(x, y, z, t) = 0, \quad \text{si } t < t_1(0)$$

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 + q_{01}^2(t)}} dq \right], \quad \text{si } t_1(0) < t < t_{01}(0)$$

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_{q_{01}(t)}^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 - q_{01}^2(t)}} dq \right]$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{01}(t)} \frac{1 + \Re e \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right]$$

si  $t_{01}(0) < t < t_{01}(q_2)$

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{01}(t)} \frac{1 + \Re e \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right], \quad \text{si } t_{01}(q_2) < t.$$

**Remarque 13.2.4** *Il est évident que  $t_1(0) = R/c_1$  et*

$$t_1(0) = R |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} - \frac{R \cos \theta}{c_2},$$

*sont bien les temps limites utilisés pour établir les conditions sur  $t$  à la remarque 13.2.1. Quant à  $t_{01}(q_2)$ , on vérifie que :*

$$t_{01}^2(q_2) = \frac{R^2}{c_1^2} (1 + q_2^2) = \frac{R^2}{c_1^2} \left( 1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \cos^2 \theta - \frac{c_1^2}{c_2^2} \right] \right) = \frac{R^2}{\sin^2 \theta} \left( \frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} \right).$$

**13.2.2.2 Cas d'une source hors de l'interface, démonstration du théorème 13.2.2**

**Calcul de  $u^r$ .** On pose  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + h)^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}$ ,  $\sin \theta = \frac{z + h}{R}$ .

On définit également les fonctions  $q \mapsto \tilde{c}_1(q)$  et  $q \mapsto \tilde{c}_2(q)$  par

$$\tilde{c}_{11}(q) = \frac{c_1}{\sqrt{1 + q^2}} \quad \text{et} \quad \tilde{c}_{12}(q) = \frac{c_2}{\sqrt{1 + \frac{c_2^2}{c_1^2} q^2}}$$

et  $(p, q) \mapsto \tilde{\mathcal{R}}(p, q)$  par

$$\tilde{\mathcal{R}}(p, q) = \frac{\rho_2 (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 \left( \frac{\tilde{c}_{11}^2(q)}{\tilde{c}_{12}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 \left( \frac{\tilde{c}_{11}^2(q)}{\tilde{c}_{12}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Comme dans le cas  $h = 0$  on montre que :

$$\tilde{u}^r(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)}{2(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{11}(q)} \left[ |z|(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + i p r \right]} d\tilde{p} dq, \quad (13.2.25)$$

puis que :

a) si  $c_1 > c_2$  ou si  $|\cos \theta| \leq \frac{c_1}{c_2}$ . Alors il n'y a pas d'onde de tête et

$$\begin{aligned} u^r(x, y, z, t) &= 0 && \text{si } t < t_{01}(0) = \frac{R}{c_1} \\ u^r(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{01}(t)} \frac{\Re e \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right], && \text{si } t > t_{01}(0). \end{aligned}$$

avec

$$\gamma_1^+(t, q) = -i \frac{\tilde{c}_{11}(q)t}{R} \cos \theta + \sin \theta \sqrt{\frac{\tilde{c}_{11}^2(q)t^2}{R^2} - 1}$$

et

$$q_{01}(t) = \sqrt{\frac{c_1^2 t^2}{R^2} - 1}.$$

b) si  $|\cos \theta| > \frac{c_1}{c_2}$ . Il faut calculer la contribution de l'onde de tête :

$$\begin{aligned} u^r(x, y, z, t) &= 0, && \text{si } t < t_1(0) \\ u^r(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 + q_{01}^2(t)}} dq \right] && \text{si } t_1(0) < t < t_{01}(0) \\ u^r(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_{q_{01}(t)}^{q_1(t)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_1^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 - q_{01}^2(t)}} dq \right] \\ &+ \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{01}(t)} \frac{\Re e \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right] \\ &\text{si } t_{01}(0) < t < t_{01}(q_2) \\ u^r(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{01}(t)} \frac{\Re e \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_1^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{01}^2(t) - q^2}} dq \right], && \text{si } t_{01}(q_2) < t. \end{aligned}$$

avec

$$t_1(q) = R |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{\tilde{c}_{11}^2(q)} - \frac{1}{\tilde{c}_{12}^2(q)} - \frac{R \cos \theta}{\tilde{c}_2(q)}},$$

$$q_1(t) = \sqrt{\left(\frac{c_1 t}{R|\cos\theta|} - \frac{|\sin\theta|}{|\cos\theta|} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{c_2^2}}\right)^2 - \frac{c_1^2}{c_2^2}} = t_1^{-1}(t)$$

et

$$v_1^+(t, q) = -i \left( \frac{\tilde{c}_{11}(q)t}{R} \cos\theta + |\sin\theta| \sqrt{1 - \frac{\tilde{c}_{11}^2(q)t^2}{R^2}} \right).$$

Les calculs sont similaires au cas où la source est sur l'interface.

**Remarque 13.2.5** On peut alors démontrer le lemme 13.2.2 en remarquant que le front de l'onde de tête est l'ensemble des points vérifiant soit

$$t = t_{01}(q_2) = \frac{R^2}{\sin^2\theta} \left( \frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2} \right),$$

soit

$$t = t_1(0) = R|\sin\theta| \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} - \frac{R \cos\theta}{c_2}.$$

**Calcul de  $u^t$ .** Après avoir utilisé la transformation de Fourier inverse suivant  $x$  et  $y$  on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{u}^t(x, y, z, s) = \\ \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(k_x, k_y, s)}{2 \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{y \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} - h \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} - ik_x x_i - k_y y} dk_x dk_y \end{aligned}$$

On effectue alors successivement les changements de variable

$$k_x = \frac{p_x s}{c_2}, \quad k_y = \frac{p_y s}{c_2}$$

puis

$$p_x = p \cos\psi - q \sin\psi, \quad p_y = p \sin\psi + q \cos\psi$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \tilde{u}^t(x, y, z, s) = \\ \frac{s}{4\pi^2 c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{T}(p, q)}{2(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_2} \left[ -z(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{c_2^2}{c_1^2} + p^2 + q^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} dp dq \end{aligned}$$

avec l'abus de notation

$$\mathcal{T}(p, q) = \mathcal{T}\left(\frac{p}{c_2}, \frac{q}{c_2}, 1\right) = \frac{2\rho_2 (p^2 + q^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left(p^2 + q^2 + \frac{c_2^2}{c_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 (p^2 + q^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}. \quad (13.2.26)$$

En utilisant le changement de variable

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{1 + q^2}}$$

et les fonctions  $q \mapsto \tilde{c}_1(q)$ ,  $q \mapsto \tilde{c}_2(q)$  et  $(p, q) \mapsto \tilde{T}(p, q)$  définies par

$$\tilde{c}_{22}(q) = \frac{c_2}{\sqrt{1+q^2}} \quad \text{et} \quad \tilde{c}_{21}(q) = \frac{c_1}{\sqrt{1+\frac{c_1^2}{c_2^2}q^2}},$$

et

$$\tilde{T}(\tilde{p}, q) = \frac{2\rho_2 (1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho_2 \left( \frac{\tilde{c}_{22}^2(q)}{\tilde{c}_{21}^2(q)} + \tilde{p}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \rho_1 (1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

on peut réécrire  $\tilde{u}$  sous la forme :

$$\tilde{u}^t(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{T}(\tilde{p}, q)}{2(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{22}(q)} \left[ -z(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{\tilde{c}_{22}^2(q)}{\tilde{c}_{21}^2(q)} + \tilde{p}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r \right]} d\tilde{p} dq.$$

D'après les calculs effectués lors du calcul de l'onde transmise en dimension 2 (voir (12.2.42) puis (12.2.45)) et en utilisant le lemme 13.2.3 on a :

$$\tilde{u}^t(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_{02}(q)}^{+\infty} \Re e \left[ \frac{\tilde{c}_{22}(q) \mathcal{T}(\gamma_2^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_2^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt dq.$$

avec  $\gamma^+(t, q)$ ,  $\mathcal{F}(p, t, q)$  et  $t_{02}(q)$  définis page 274.

Remarquons maintenant que

$$q \mapsto \int_{t_{02}(q)}^{+\infty} \Re e \left[ \frac{\tilde{c}_{22}(q) \mathcal{T}(\gamma_2^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_2^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt$$

est une fonction paire :

$$\tilde{u}^t(x, y, z, s) = \frac{s}{2\pi^2 c_2} \int_0^{+\infty} \int_{t_{02}(q)}^{+\infty} \Re e \left[ \frac{\tilde{c}_{22}(q) \mathcal{T}(\gamma_2^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_2^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt dq.$$

En utilisant la fonction  $q_{02}(t) = t_{02}^{-1}(t)$  on peut inverser l'ordre d'intégration :

$$\tilde{u}^t(x, y, z, s) = \frac{s}{2\pi^2 c_2} \int_{t_{02}(0)}^{+\infty} \int_0^{q_{02}(t)} \Re e \left[ \frac{\tilde{c}_{22}(q) \mathcal{T}(\gamma_2^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_2^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t, q), t, q)} \right] dq e^{-st} dt.$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
 u^t(x, y, z, t) &= 0, \quad \text{si } t < t_{02}(0) \\
 u^t(x, y, z, t) &= \frac{1}{2\pi^2 c_2} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{02}(t)} \Re e \left[ \frac{\tilde{c}_{22}(q) \mathcal{T}(\gamma_2^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_2^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(\gamma_2^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\
 &\text{si } t > t_{02}(0).
 \end{aligned}$$

La condition  $t > t_{02}(0)$  est bien équivalente à la condition  $\mathbf{x} \in \Omega_T$  utilisée dans le théorème 13.2.2 (par définition de  $\Omega_T$ ).

### 13.3 Interaction fluide-solide

Considérons maintenant un milieu infini composé d'un demi-espace fluide  $\Omega_f$  et d'un demi-espace solide isotrope  $\Omega_s$  séparés par une interface horizontale  $\Gamma$ . Comme en dimension deux, nous nous intéressons à la formulation en pression dans le fluide et en vitesse dans le solide, la source est une source ponctuelle de pression située dans le fluide à une distance  $h$  de l'interface. Les équations à résoudre sont

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \Delta P &= \delta(x) \delta(y) \delta(z - h) f(t) & (\Omega_f), & \quad (13.3.1a) \\
 \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{V}_s}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \mathbf{div}(\underline{\nabla} \mathbf{V}_s) + \mu \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{V}_s) &= 0 & (\Omega_s). & \quad (13.3.1b)
 \end{aligned} \right.$$

Les deux milieux sont liés par les conditions de transmission suivantes qui traduisent la continuité des vitesses normales à l'interface et l'égalité entre les contraintes normales et la pression :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial V_{sy}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial P}{\partial y} & (\Gamma), & \quad (13.3.1c) \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_{sy}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial V_{sx}}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial t} & (\Gamma), & \quad (13.3.1d) \\
 \frac{\partial V_{sx}}{\partial y} + \frac{\partial V_{sy}}{\partial x} &= 0. & (\Gamma), & \quad (13.3.1e)
 \end{aligned} \right.$$

Nous pouvons simplifier ces équations en décomposant le champ de vitesse  $\mathbf{V}_s$  en ondes P et S, en posant  $\mathbf{V}_s = \nabla \Phi + \mathbf{rot} \Psi$ . Dans ce cas le vecteur  $\Psi$  sera défini "à un gradient près" puisque

$$\mathbf{rot}(\Psi + \nabla A) = \mathbf{rot} \Psi$$

pour tout champ  $A$ . Pour définir  $\Phi$  de manière unique nous imposerons la condition suivante, dite condition de jauge :

$$\mathbf{div} \Psi = 0.$$

L'ensemble des champs  $\Psi$  vérifiant cette dernière condition s'écrit sous la forme :

$$\Psi = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \Psi_1 - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Psi_2.$$

Le champ  $V_s$  s'écrit donc :

$$V_s = \nabla \Phi - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Psi_1 + \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \Psi_2$$

et le système à résoudre devient :

$$\begin{cases} \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \Delta P = \delta(x) \delta(y) \delta(z-h) f(t) & (\Omega_f), & (13.3.2a) \\ \frac{1}{c_P^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta \Phi = 0 & (\Omega_s), & (13.3.2b) \\ \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} - \Delta \Psi_1 = 0 & (\Omega_s), & (13.3.2c) \\ \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} - \Delta \Psi_2 = 0 & (\Omega_s), & (13.3.2d) \end{cases}$$

avec  $c_P = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_s}}$  et  $c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}}$ .

Les conditions de transmission se réécrivent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial V_{sz}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial z} & (\Gamma), & (13.3.2e) \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V_{sz}}{\partial z} + \lambda \frac{\partial V_{sx}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V_{sy}}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial t} & (\Gamma), & (13.3.2f) \\ \frac{\partial V_{sx}}{\partial z} + \frac{\partial V_{sz}}{\partial x} = 0. & (\Gamma), & (13.3.2g) \\ \frac{\partial V_{sy}}{\partial z} + \frac{\partial V_{sz}}{\partial y} = 0. & (\Gamma). & (13.3.2h) \end{cases}$$

Nous allons maintenant calculer les fonctions de Green associées à ce problème, elles sont solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right] = \delta(x)\delta(y-h)\delta(t) \quad (\Omega_f), \quad (13.3.3a) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_P^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (\Omega_s), \quad (13.3.3b) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (\Omega_s), \quad (13.3.3c) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \left[ \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (\Omega_s), \quad (13.3.3d) \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_{sz}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\Gamma), \quad (13.3.3e) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_{sz}}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_{sx}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_{sy}}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial t} \quad (\Gamma), \quad (13.3.3f) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_{sx}}{\partial z} + \frac{\partial v_{sz}}{\partial x} = 0 \quad (\Gamma), \quad (13.3.3g) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_{sy}}{\partial z} + \frac{\partial v_{sz}}{\partial y} = 0 \quad (\Gamma), \quad (13.3.3h) \end{array} \right.$$

et

$$\mathbf{v}_s = \nabla \phi - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \psi_1 + \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \psi_2.$$

### 13.3.1 Résultats

Comme en dimension 2 nous supposons que  $c_f < c_S < c_P$ .

#### 13.3.1.1 Les fronts d'onde.

Dans le cas d'une interaction fluide-structure, l'onde de pression dans le fluide apparaît comme la somme d'une onde incidente, d'une onde de volume réfléchie et de deux ondes de tête. L'onde se propageant dans le solide se décompose en une onde de volume de compression, de rotationnel nul (dite onde P), une onde de volume de cisaillement, à divergence nulle (dite onde S), et une onde de tête de cisaillement. La définition précise de chacune de ces ondes est donnée à la section 13.3.1.2. Nous utiliserons :

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = R \cos \theta \quad \text{et} \quad z+h = R \sin \theta.$$

**Front de l'onde incidente dans le fluide.** Pour un instant  $t$  donné, le front de l'onde incidente de pression (en vert sur les figures 13.11.a et 13.12) est l'intersection de la sphère de centre  $(0, h)$  et de rayon  $c_f t$  avec le demi-plan supérieur. Toute l'onde incidente est contenue dans cette portion de sphère que nous notons  $\Omega_I(t)$ .

**Front de l'onde réfléchi dans le fluide.** Le front de l'onde réfléchi (en bleu sur les figures 13.11.b et 13.12) est l'intersection de la sphère de centre  $(0, -h)$  et de rayon  $c_f t$  avec le demi-espace supérieur. Nous appelons  $\Omega_R(t)$  l'intérieur de cette portion de sphère.  $\Omega_R(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_R(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } \frac{R}{c_f} < t \right\}.$$

**Fronts des ondes P et S transmises dans le solide.** Comme en dimension 2 nous définissons  $\xi_{0P}(r, z)$  et  $\xi_{0S}(r, z)$  minimisant respectivement les fonctions

$$t_P(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_f} + \frac{\sqrt{(r - \xi)^2 + z^2}}{c_P}, \quad (13.3.4)$$

et

$$t_S(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 + h^2}}{c_f} + \frac{\sqrt{(r - \xi)^2 + z^2}}{c_S}. \quad (13.3.5)$$

et nous notons

$$t_{0P}(r, z) = t_P(\xi_{0P}(r, z)) \text{ et } t_{0S}(r, z) = t_S(\xi_{0S}(r, z))$$

leur minimum. Le front de l'onde transmise P (resp. S) est l'ensemble des points tels que :

$$t_{0P}(r, z) = t \quad (\text{resp. } t_{0S}(r, z) = t).$$

Ce front d'onde est représenté en bleu ciel (resp. en rouge) sur les figures 13.11.f (resp. 13.11.c) et 13.12. Nous définissons également l'ensemble  $\Omega_P(t)$  (resp.  $\Omega_S(t)$ ) par :

$$\Omega_P(t) = \{(x, y, z) \mid z \leq 0 \text{ et } t_{0P}(r, z) \leq t\}$$

$$(\text{resp. } \Omega_S(t) = \{(x, y, z) \mid z \leq 0 \text{ et } t_{0S}(x, r) \leq t\}).$$

**Fronts des ondes de tête dans le fluide.** Nous notons  $A$  (resp.  $E$ ) l'intersection du front d'onde P (resp. S) avec l'axe  $x = 0$  à droite et  $B$  (resp.  $F$ ) le point tel que le segment  $[AB]$  (en orange sur la figure 13.12) (resp.  $[EF]$ , en magenta) soit tangent à  $\Omega_R(t)$ . Nous notons  $\omega_{teP1}(t)$  (resp.  $\omega_{teS1}(t)$ ) le tronc de cône généré par la rotation du segment  $[AB]$  (resp.  $[EF]$ ) autour de l'axe  $(Oz)$ . Soit  $\omega_{teP2}(t)$  la portion de sphère de centre

$$\left( 0, \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}}} - h \right) \text{ et de rayon } \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}}} - h,$$

délimitée par les plans de cote  $z = 0$  et  $z = z_B$ .

Soit  $\omega_{teS2}(t)$  la portion de sphère de centre

$$\left(0, \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_s^2}}} - h\right) \quad \text{et de rayon} \quad \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_s^2}}}$$

délimitée par les plans de cote  $z = 0$  et  $z = z_F$ . Le front de l'onde de tête  $P$  est la réunion de  $\omega_{teP1}(t)$  et de  $\omega_{teP2}(t)$  et le front de l'onde de tête  $S$  est la réunion de  $\omega_{teS1}(t)$  et de  $\omega_{teS2}(t)$ .

**Lemme 13.3.1** *L'angle  $\theta_{cP} = \arccos(\frac{c_f}{c_P})$  est l'angle limite au-dessus duquel il n'existe plus d'onde de tête  $P$ . De plus, pour  $t$  donné, l'ensemble des points de  $\omega_{teP1}(t)$  vérifie l'équation :*

$$t = R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{R|\cos \theta|}{c_P}, \quad \theta \in [0, \theta_{cP}] \quad (13.3.6)$$

et l'ensemble des points de  $\omega_{teP2}(t)$  vérifie :

$$t = \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}}, \quad \theta \in [0, \theta_{cP}]. \quad (13.3.7)$$

L'angle  $\theta_{cS} = \arccos(\frac{c_f}{c_S})$  est l'angle limite au-dessus duquel il n'existe plus d'onde de tête  $S$ . De plus, pour  $t$  donné, l'ensemble des points de  $\omega_{teS1}(t)$  vérifie l'équation :

$$t = R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}} + \frac{R|\cos \theta|}{c_S}, \quad \theta \in [0, \theta_{cS}] \quad (13.3.8)$$

et l'ensemble des points de  $\omega_{teS2}(t)$  vérifie :

$$t = \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}}, \quad \theta \in [0, \theta_{cS}]. \quad (13.3.9)$$

La démonstration de ce lemme se fera lors de la démonstration du théorème 13.3.1 ci-dessous (voir page 385). Ici encore, dans le plan  $(x, z)$ , (13.3.6) est l'équation polaire d'un arc de cercle de centre

$$\left(0, \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}}}\right) \quad \text{et de rayon} \quad \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}}}$$

joignant le point  $O$  au point  $B$  et (13.3.8) est l'équation polaire d'un arc de cercle de centre

$$\left(0, \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}}}\right) \quad \text{et de rayon} \quad \frac{t}{2\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}}}$$

joignant le point  $O$  au point  $F$ .

Nous noterons  $\Omega_{tefP}(t)$  (en orange sur les figures 13.11.c et 13.12) l'ensemble des points situés entre le front de l'onde de tête  $P$  et l'interface et  $\Omega_{tefS}(t)$  (en magenta sur les figures 13.11.d

et 13.12) l'ensemble des points situés entre le front de l'onde de tête S et l'interface.  $\Omega_{tefP}(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_{tefP}(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{R|\cos \theta|}{c_P} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} \right\}$$

et  $\Omega_{tefS}(t)$  par :

$$\Omega_{tefS}(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}} + \frac{R|\cos \theta|}{c_S} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2}} \right\}.$$

**Front de l'onde de tête dans le solide.** Nous notons  $I$  le point tel que le segment  $[AI]$  (en violet sur la figure 13.12) soit tangent à  $\Omega_S(t)$ . Nous notons  $\omega_{teSP1}(t)$  le tronc de cône généré par la rotation de ce segment autour de l'axe  $(Oz)$ . Posons maintenant

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}}$$

puis

$$z_{te} = \frac{1}{2} \left( h \left( \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right) - \frac{t}{\alpha} \right) \quad \text{et} \quad r_{te} = \sqrt{\frac{th}{\beta} - h^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{t}{\alpha} - h \left( \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right) \right)^2}.$$

Nous notons  $\omega_{teSP2}(t)$  la portion de sphère de centre  $(0, z_{te})$ , de rayon  $r_{te}$ , délimitée par les plans de cote  $z = 0$  et  $z = z_I$ . Le front de l'onde de tête  $SP$  dans le solide est la réunion de  $\omega_{teSP1}(t)$  et de  $\omega_{teSP2}(t)$ .

**Lemme 13.3.2** *Pour  $t$  donné, l'ensemble des points de  $\omega_{teSP1}(t)$  vérifie l'équation :*

$$t = -y \left( \frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{c_S} \tag{13.3.10}$$

et l'ensemble des points de  $\omega_{teSP2}(t)$  vérifie :

$$t = \frac{h^2 + z^2 - hz \left( \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \right) + r^2}{\frac{h}{\beta} - \frac{z}{\alpha}}. \tag{13.3.11}$$

Comme le lemme précédent, ce lemme sera démontré au cours de la démonstration du théorème 13.3.1 (voir page 395). Remarquons qu'en élevant au carré les termes de (13.3.11) et après quelques calculs simples nous obtenons bien l'équation de la sphère de centre  $z_{te}$  et de rayon  $r_{te}$ .

Nous noterons  $\Omega_{teSP}(t)$  l'ensemble des points situés entre le front de l'onde de tête et l'interface (en violet sur les figures 13.11.f et 13.12).  $\Omega_{teSP}(t)$  peut également être défini par :

$$\Omega_{teSP}(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0 \text{ et } t_1^*(x, y, z) < t < t_2^*(x, y, z) \right\}.$$

avec

$$t_1^*(x, y, z) = -y \left( \frac{1}{c_P^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{c_S}$$

et

$$t_2^*(x, y, z) = \frac{h^2 + z^2 - hz \left( \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \right) + r^2}{\frac{h}{\beta} - \frac{z}{\alpha}}.$$

### 13.3.1.2 Solutions analytiques.

Nous décomposons la solution  $p$  en  $p = p^i + p^r$ , avec  $p^i$  l'onde incidente de pression, c'est-à-dire la solution qu'on obtiendrait en remplaçant le solide par un fluide de vitesse de propagation  $c_f$  :

$$\begin{cases} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_I(t) : & p^i(x, y, t) = 0 ; \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_I(t) : & p^i(x, y, t) = \frac{1}{2\pi R^*} \delta_{\frac{R^*}{c}}(t). \end{cases}$$

où  $R^* = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}$ .

Nous décomposons également  $\mathbf{v}_s$  en  $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_s^P + \mathbf{v}_s^{S1} + \mathbf{v}_s^{S2}$ , avec :

$$\mathbf{v}_s^P = \nabla \phi, \quad \mathbf{v}_s^{S1} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \psi_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_s^{S2} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \psi_2.$$

**Notations.** Nous posons maintenant :

$$\begin{cases} \tilde{c}_{ff}(q) = \frac{c_f}{\sqrt{1+q^2}}, \\ \tilde{c}_{Pf}(q) = \frac{c_f}{\sqrt{1+\frac{c_f^2}{c_P^2}q^2}}, & \tilde{c}_{PP}(q) = \frac{c_P}{\sqrt{1+q^2}}, \\ \tilde{c}_{Sf}(q) = \frac{c_f}{\sqrt{1+\frac{c_f^2}{c_S^2}q^2}}, & \tilde{c}_{SP}(q) = \frac{c_P}{\sqrt{1+\frac{c_P^2}{c_S^2}q^2}}, & \tilde{c}_{SS}(q) = \frac{c_S}{\sqrt{1+q^2}} \end{cases}$$

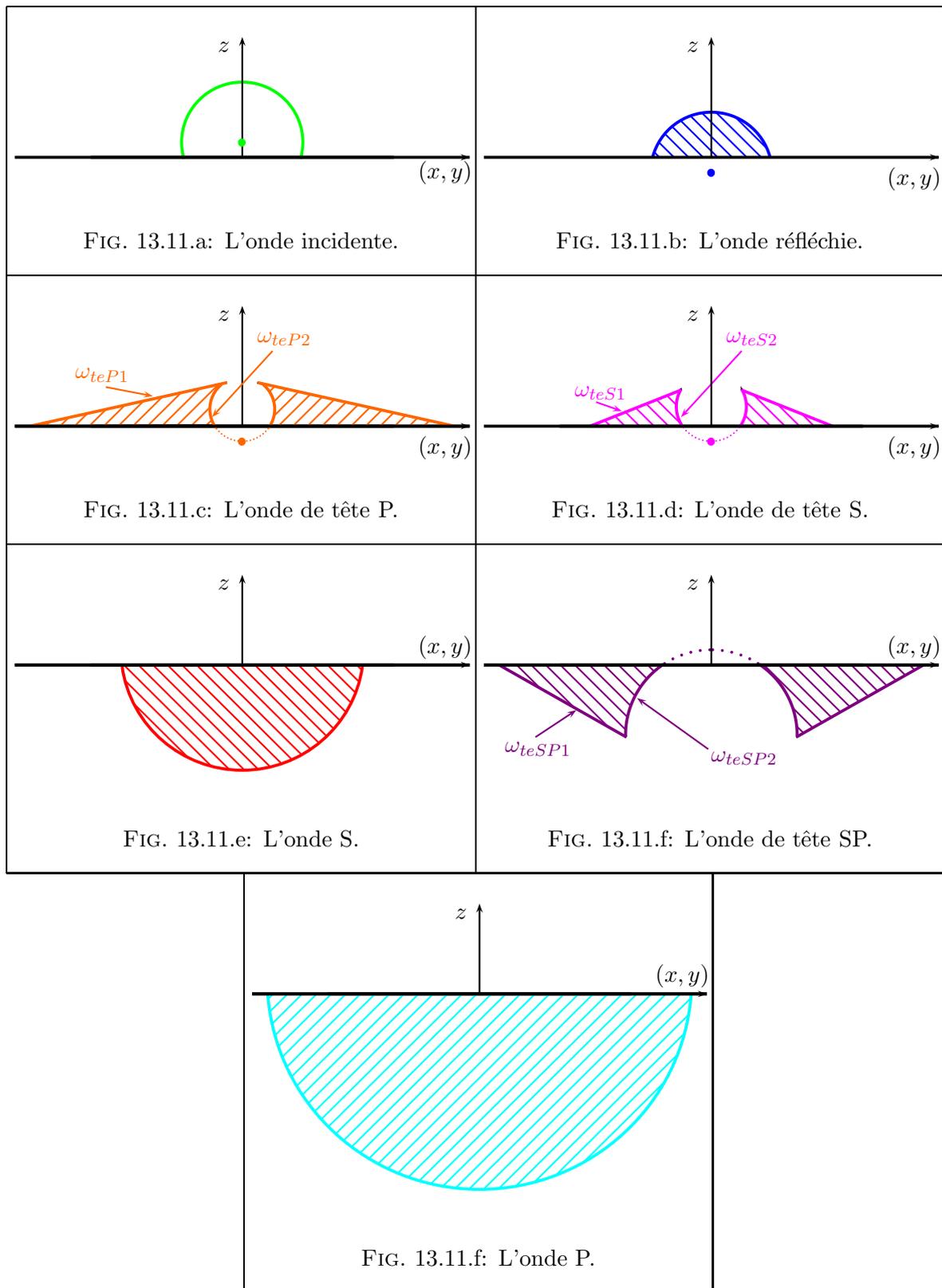


FIG. 13.11: Les différentes ondes du problème

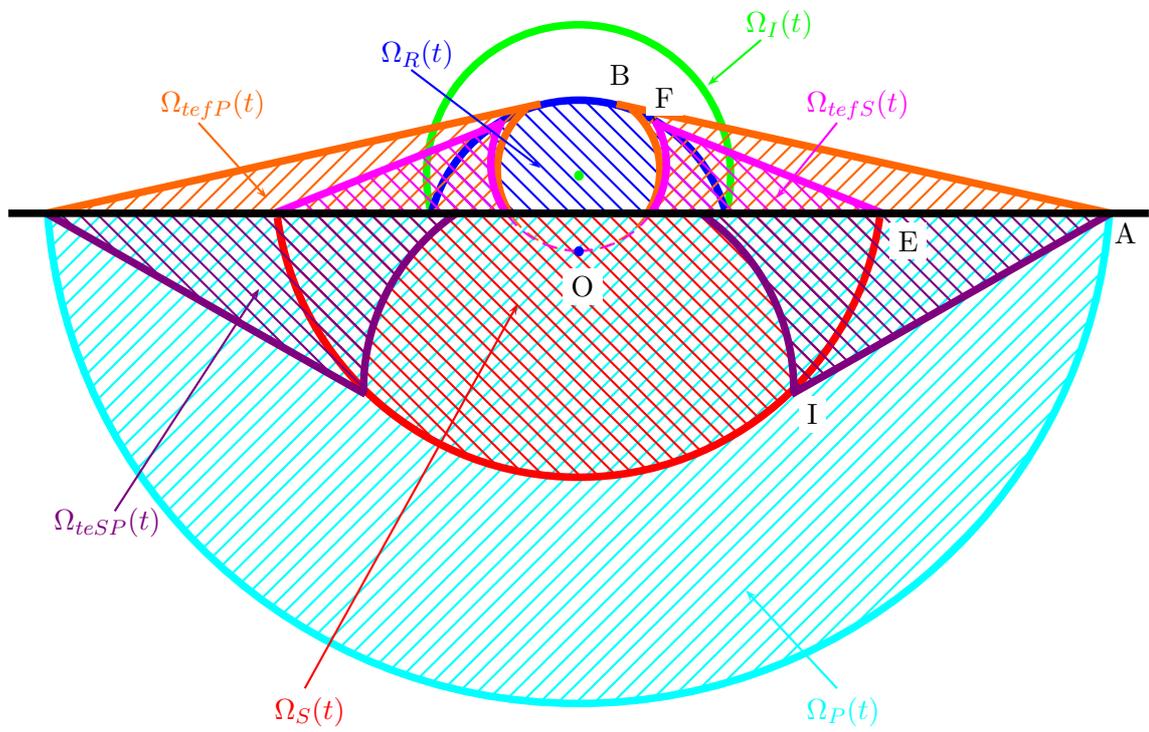


FIG. 13.12: Représentation du front d'onde

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{k}_{ff}(p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{fP}(p, q) = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_P^2} + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{fS}(p, q) = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_S^2} + p^2 + q^2}, \\ \tilde{k}_{Pf}(p, q) = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{PP}(p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{PS}(p, q) = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_S^2} + p^2 + q^2} \\ \tilde{k}_{Sf}(p, q) = \sqrt{\frac{c_S^2}{c_f^2} + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{SP}(p, q) = \sqrt{\frac{c_S^2}{c_P^2} + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{SS}(p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \end{array} \right.$$

et nous définissons les fonctions des variables complexes  $p$  et  $q$  définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}(p, q) = \\ \frac{[(\lambda(\tilde{z}_{fP}^2 - p^2 - q^2) + 2\mu\tilde{k}_{fP}^2)(\tilde{k}_{fS}^2 + p^2 + q^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{fS} \tilde{k}_{fP}] \tilde{k}_{ff} - c_f^2 \rho_f \tilde{k}_{fP} (\tilde{k}_{fS}^2 - p^2 - q^2)}{[(\lambda(\tilde{z}_{fP}^2 - p^2 - q^2) + 2\mu\tilde{k}_{fP}^2)(\tilde{k}_{fS}^2 + p^2 + q^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{fS} \tilde{k}_{fP}] \tilde{k}_{ff} + c_f^2 \rho_f \tilde{k}_{fP} (\tilde{k}_{fS}^2 - p^2 - q^2)}, \\ \mathcal{T}_P(p, q) = \\ \frac{2\tilde{k}_{PP}(\tilde{k}_{PS}^2 + p^2 + q^2)}{[(\lambda(\tilde{z}_{PP}^2 - p^2 - q^2) + 2\mu e k_{PP}^2)(\tilde{k}_{PS}^2 + p^2 + q^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{PS} \tilde{k}_{PP}] \tilde{k}_{Pf} - c_P^2 \rho_f \tilde{k}_{PP} (\tilde{k}_{PS}^2 - p^2 - q^2)}, \\ \mathcal{T}_S(p, q) = \\ \frac{-4ip\tilde{k}_{SP}\tilde{k}_{SS}}{[(\lambda(\tilde{z}_{SP}^2 - p^2 - q^2) + 2\mu\tilde{k}_{SP}^2)(\tilde{k}_{SS}^2 + p^2 + q^2) - 4\mu p^2 \tilde{k}_{SS} \tilde{k}_{SP}] \tilde{k}_{Sf} - c_S^2 \rho_f \tilde{k}_{SP} (\tilde{k}_{SS}^2 - p^2 - q^2)} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathcal{R}}(p, q) = \mathcal{R}(p\sqrt{1 + q^2}, q) \\ \tilde{\mathcal{T}}_P(p, q) = \mathcal{T}_P(p\sqrt{1 + q^2}, q) \\ \tilde{\mathcal{T}}_S(p, q) = \mathcal{T}_S(p\sqrt{1 + q^2}, q). \end{array} \right.$$

Nous définissons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_f^+(t, q) = -i \frac{\tilde{c}_{ff}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{\frac{\tilde{c}_{ff}^2(q)t^2}{R^2} - 1}, \\ v_f^+(t, q) = -i \left( \frac{\tilde{c}_{ff}(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{\tilde{c}_{ff}^2(q)t^2}{R^2}} \right) \end{array} \right.$$

ainsi que la fonction :

$$q_{0f}(t) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{c_f^2 t^2}{R^2}} & \text{si } t < \frac{R}{c_f} \\ \sqrt{\frac{c_f^2 t^2}{R^2} - 1} & \text{si } t > \frac{R}{c_f}. \end{cases}$$

Pour définir  $\gamma_P^+(t, q)$  et  $q_{0P}(t)$  nous utiliserons la fonction

$$\mathcal{F}_P(p, q, t) = -z(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{\tilde{c}_{PP}^2(q)}{\tilde{c}_{Pf}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipr - \tilde{c}_{PP}(q)t$$

et le temps d'arrivée de l'onde P transmise au point  $(x, y)$ ,  $t_{0P} = t_{0P}(x, y)$  :

- pour tout  $q \geq 0$  on définit  $\tilde{t}_{0P}(q)$  le seul réel tel que l'équation  $\mathcal{F}_P(p, q, \tilde{t}_{0P}(q)) = 0$  admette une racine double  $p$  ( $\tilde{t}_{0P}(q)$  correspond au temps d'arrivée de l'onde S dans un milieu 2d virtuel de vitesse  $c_{Sf}^2(q)$  et  $\tilde{c}_{SP}(q)$ ) ;
- pour tous  $q \geq 0$  et  $t > \tilde{t}_{0P}(q)$ , on définit  $\gamma_P^+(t, q)$  la seule solution de l'équation  $\mathcal{F}_P(p, q, t) = 0$  à partie réelle positive ;
- pour tout  $t \geq t_{0P}$  on définit  $q_{0P}(t)$  tel que  $\tilde{t}_{0P}(q_{0P}(t)) = t$  :  $q_{0P}$  est l'inverse de la fonction  $\tilde{t}_{0P}$ , c'est le seul réel tel que  $\mathcal{F}_P(p, \tilde{q}_{0P}(t), t)$  admette une racine double.

De même, pour définir  $\gamma_S^+(t, q)$ ,  $q_{0S}(t)$  et  $v^+(t)$  nous utiliserons la fonction

$$\mathcal{F}_S(p, q, t) = -z(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}} + ipr - \tilde{c}_{SS}(q)t$$

et le temps d'arrivée de l'onde S transmise au point  $(x, y)$ ,  $t_{0S} = t_{0S}(x, y)$  :

- pour tout  $q \geq 0$  on définit  $\tilde{t}_{0S}(q)$  le seul réel tel que l'équation  $\mathcal{F}_S(p, q, \tilde{t}_{0S}(q)) = 0$  admette une racine double  $p = \tilde{p}_{0S}(q)$  ;
- pour tous  $q \geq 0$  et  $t > \tilde{t}_{0S}(q)$  on définit  $\gamma_S^+(t, q)$  la seule racine de  $\mathcal{F}_S(p, q, t)$  à partie réelle positive ;
- pour tout  $t \geq t_{0S}$  on définit  $q_{0S}(t)$  tel que  $\tilde{t}_{0S}(q_{0S}(t)) = t$  :  $q_{0S}(t)$  est le seul réel tel que  $\mathcal{F}_S(p, \tilde{q}_{0S}(t), t)$  admette une racine double.
- pour tous  $q \geq 0$  et  $t < \tilde{t}_{0S}(q)$  on définit  $v_S^+(t, q)$ , la seule racine de  $\mathcal{F}_S(p, q, t)$  telle que :

$$\Im(\tilde{p}_{0S}(q)) \leq \Im(v_S^+(t, q)) \leq \Im\left(\frac{\tilde{c}_{SS}(q)}{\tilde{c}_{SP}(q)}\right).$$

Pour le calcul des ondes de tête dans le fluide, nous utiliserons la fonction

$$q_f(t) = \sqrt{\left( \frac{c_f t}{R|\cos\theta|} - \frac{|\sin\theta|}{|\cos\theta|} \sqrt{1 - \frac{c_f^2}{c_P^2}} \right)^2 - \frac{c_f^2}{c_P^2}},$$

définie pour

$$R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{R |\cos \theta|}{c_P} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}}.$$

Pour le calcul des ondes de tête dans le solide, nous utiliserons la fonction

$$q_{SP}(t) = c_S \sqrt{\frac{1}{r^2} \left( t + z \left( \frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} - h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 - \frac{1}{c_P^2}},$$

définie pour

$$t_1^*(x, y, z) < t < t_2^*(x, y, z).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le

**Théorème 13.3.1** *L'expression de l'onde réfléchie est donnée par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_R(t) \cup \Omega_{tefP}(t) : \\ \\ p^r(x, y, z, t) = 0 ; \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_R(t) \setminus \Omega_{tefP}(t) : \\ \\ p^r(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0f}(t)} \frac{\Re e \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{0f}^2(t) - q^2}} dq \right] ; \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{tefP}(t) \setminus \Omega_R(t) : \\ \\ p^r(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_f(t)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_f^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 + q_{0f}^2(t)}} dq \right] ; \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{tefP}(t) \cap \Omega_R(t) : \\ \\ p^r(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_{q_{0f}(t)}^{q_f(t)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_f^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 - q_{0f}^2(t)}} dq \right] \\ \\ + \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0f}(t)} \frac{\Re e \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{0f}^2(t) - q^2}} dq \right]. \end{array} \right.$$

L'expression de l'onde  $P$  est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_P(t) : \left\{ \begin{array}{l}
 v_{sx}^P(x, y, z, t) = 0, \\
 v_{sy}^P(x, y, z, t) = 0, \\
 v_{sz}^P(x, y, z, t) = 0,
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_P(t) : \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 v_{sx}^P(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 c_P} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0P}(t)} \Re e \left[ \frac{i\gamma_P^+(t, q) \mathcal{T}_P(\gamma_P^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_P^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\
 \\
 v_{sy}^P(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 c_P} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0P}(t)} \Re e \left[ \frac{iq \mathcal{T}_P(\gamma_P^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_P^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\
 \\
 v_{sz}^P(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 c_P} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0P}(t)} \Re e \left[ \frac{\mathcal{T}_P(\gamma_P^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q), t, q)} \right] dq \right].
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

L'onde  $S2$  est nulle dans tout l'espace, nous poserons donc  $\mathbf{v}_s^S = \mathbf{v}_s^{S1}$  et l'expression de l'onde  $S$  est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \notin \Omega_S(t) \cup \Omega_{teSP}(t) : \\ \left. \begin{array}{l} v_{sx}^S(x, y, z, t) = 0, \\ v_{sy}^S(x, y, z, t) = 0, \\ v_{sz}^S(x, y, z, t) = 0, \end{array} \right\} \\ \\ \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_S(t) \setminus \Omega_{teSP}(t) : \\ \left. \begin{array}{l} v_{sx}^S(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[ \frac{i\gamma_S^+(t, q) \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_S^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\ v_{sy}^S(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[ \frac{iq \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_S^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\ v_{sz}^S(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[ \frac{(\gamma_S^{+2}(t, q) + q^2) \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \end{array} \right\} \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{teSP}(t) \setminus \Omega_S(t) : \\ \left. \begin{array}{l} v_{sx}^S(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{SP}(t)} \Re e \left[ \frac{iv_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\ v_{sy}^S(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{SP}(t)} \Re e \left[ \frac{iq \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\ v_{sz}^S(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{SP}(t)} \Re e \left[ \frac{(v_S^{+2}(t, q) + q^2) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_S(t) \cap \Omega_{teSP}(t) : \\
 & \left. \begin{aligned}
 v_{sx}^S(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_{q_{0S}(t)}^{q_{SP}(t)} \Re e \left[ \frac{iv_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{T}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right] \\
 & \quad - \frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[ \frac{i\gamma_S^+(t, q) \mathcal{T}_S(\gamma_S^+(t, q))}{(1 + \gamma_S^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\
 v_{sy}^S(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_{q_{0S}(t)}^{q_{SP}(t)} \Re e \left[ \frac{iq \tilde{\mathcal{T}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right] \\
 & \quad - \frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[ \frac{iq \mathcal{T}_S(\gamma_S^+(t, q))}{(1 + \gamma_S^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right] \\
 v_{sz}^S(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_{q_{0S}(t)}^{q_{SP}(t)} \Re e \left[ \frac{(v_S^{+2}(t, q) + q^2) \tilde{\mathcal{T}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right] \\
 & \quad - \frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[ \frac{(\gamma_S^{+2}(t, q) + q^2) \mathcal{T}_S(\gamma_S^+(t, q))}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right],
 \end{aligned}
 \right\}
 \end{aligned}$$

**Remarque 13.3.1** On vérifie facilement que :

- la condition  $\mathbf{x} \in \Omega_R(t) \setminus \Omega_{tefP}(t)$  se réécrit

$$t > \frac{R}{c_f} \quad \text{si } \theta > \theta_{cf} \quad \text{et } t > \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} \quad \text{sinon ;}$$

- la condition  $\mathbf{x} \in \Omega_{tefP}(t) \setminus \Omega_R(t)$  se réécrit

$$R \sin \theta \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{R |\cos \theta|}{c_P} < t < \frac{R}{c_f} \quad \text{et } \theta < \theta_{cf} ;$$

- la condition  $\mathbf{x} \in \Omega_{tefP}(t) \cap \Omega_R(t)$  se réécrit

$$\frac{R}{c_f} < t < \frac{R}{\sin \theta} \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} \quad \text{et } \theta < \theta_c.$$

- la condition  $\mathbf{x} \in \Omega_S(t) \setminus \Omega_{teSP}(t)$  se réécrit

$$t > t_{0S} \quad \text{si } \Im m(p_{0S}) < \Im m\left(\frac{c_f}{c_S}\right) \quad \text{et } t > t_2^* \quad \text{sinon,}$$

avec  $p_{0S} = \tilde{p}_{0S}(0)$  la racine double de  $\mathcal{F}_S(p, 0, t_{0S})$  ;

- la condition  $\mathbf{x} \in \Omega_{tefP}(t) \setminus \Omega_R(t)$  se réécrit

$$t_1^* < t < t_{0S} \quad \text{et } \Im m(p_{0S}) < \Im m\left(\frac{c_f}{c_S}\right) ;$$

- la condition  $\mathbf{x} \in \Omega_{tefP}(t) \cap \Omega_R(t)$  se réécrit

$$t_{0S} < t < t_2^* \quad \text{et } \Im m(p_{0S}) < \Im m\left(\frac{c_f}{c_S}\right).$$

Les algorithmes de calcul de  $P^r$ ,  $V^P$  et  $V^S$  sont présentés à la section suivante.

### 13.3.2 Démonstrations

#### 13.3.2.1 Calculs préliminaires dans le domaine de Fourier

Appliquons comme d'habitude la transformation de Laplace en temps et la transformation de Fourier suivant  $x$  et  $y$  à ces équations pour obtenir le système différentiel ordinaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{s^2}{c_f^2} + k_x^2 + k_y^2 \right] \hat{p} - \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} = \delta(z - h) \quad z > 0, \end{array} \right. \quad (13.3.12a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{s^2}{c_P^2} + k_x^2 + k_y^2 \right] \hat{\phi} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0 \quad z < 0, \end{array} \right. \quad (13.3.12b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{s^2}{c_S^2} + k_x^2 + k_y^2 \right] \hat{\psi}_1 - \frac{\partial^2 \hat{\psi}_1}{\partial y^2} = 0 \quad z < 0, \end{array} \right. \quad (13.3.12c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{s^2}{c_S^2} + k_x^2 + k_y^2 \right] \hat{\psi}_2 - \frac{\partial^2 \hat{\psi}_2}{\partial y^2} = 0 \quad z < 0, \end{array} \right. \quad (13.3.12d)$$

avec les quatre conditions de transmission :

$$\left\{ \begin{array}{l} s\hat{v}_{sz} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \hat{v}_{sz}}{\partial z} + \lambda i k_x \hat{v}_{sx} + \lambda i k_y \hat{v}_{sy} = -sp \\ \frac{\partial \hat{v}_{sx}}{\partial z} + i k_x \hat{v}_{sz} = 0. \\ \frac{\partial \hat{v}_{sy}}{\partial z} + i k_y \hat{v}_{sz} = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} z = 0, \\ z = 0, \\ z = 0, \\ z = 0, \end{array} \quad \begin{array}{l} (13.3.12e) \\ (13.3.12f) \\ (13.3.12g) \\ (13.3.12h) \end{array}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{v}_{sx} = i k_x \hat{\phi} - i k_x \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial z} - i k_y \psi_2 \\ \hat{v}_{sy} = i k_y \hat{\phi} - i k_y \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial z} + i k_x \psi_2 \\ \hat{v}_{sz} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} - (k_x^2 + k_y^2) \hat{\psi}_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} z < 0, \\ z < 0, \\ z < 0. \end{array} \quad \begin{array}{l} (13.3.12i) \\ (13.3.12j) \\ (13.3.12k) \end{array}$$

On en déduit facilement la forme des solutions (en introduisant les ondes de pression incidente,  $p^i$ , et réfléchie,  $p^r$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p} = \hat{p}^i + \hat{p}^r \\ \hat{p}^i = \frac{1}{2k_f} e^{-|z-h|k_f} \\ \hat{p}^r = A_R e^{-zk_f} \\ \hat{\phi} = A_P e^{zk_P} \\ \hat{\psi}_1 = A_{S1} e^{zk_S} \\ \hat{\psi}_2 = A_{S2} e^{zk_S} \\ \hat{v}_{sx} = i k_x A_P e^{zk_P} - i k_x k_S A_{S1} e^{zk_S} - i k_y A_{S2} e^{zk_S} \\ \hat{v}_{sy} = i k_y A_P e^{zk_P} - i k_y k_S A_{S1} e^{zk_S} + i k_x A_{S2} e^{zk_S} \\ \hat{v}_{sz} = k_P A_P e^{zk_P} - (k_x^2 + k_y^2) A_{S1} e^{zk_S}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (13.3.13a) \\ (13.3.13b) \\ (13.3.13c) \\ (13.3.13d) \\ (13.3.13e) \\ (13.3.13f) \\ (13.3.13g) \\ (13.3.13h) \\ (13.3.13i) \end{array}$$

avec  $k_f = \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_f^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $k_P = \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_P^2}\right)^{\frac{1}{2}}$  et  $k_S = \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{s^2}{c_S^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

Les coefficients  $A_R$ ,  $A_P$  et  $A_S$  sont ensuite déterminés à l'aide des équations de transmis-

sion (13.3.12e), (13.3.12f), (13.3.12g) et (13.3.12h) :

$$\left\{ \begin{array}{l} sk_P A_P - (k_x^2 + k_y^2) s A_{S1} = -\frac{1}{2\rho_f} e^{-hk_f} + \frac{k_f}{\rho_f} A_R, \end{array} \right. \quad (13.3.14a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) [z_P^2 A_P - (k_x^2 + k_y^2) k_S A_{S1}] + \lambda i k_x [i k_x A_P - i k_x A_{S1} k_S - i k_y A_{S2} k_S] \\ + \lambda i k_y [i k_y A_P - i k_y A_{S1} k_S + i k_x A_{S2} k_S] = -s \left[ \frac{1}{2k_f} e^{-hk_f} + A_R \right], \end{array} \right. \quad (13.3.14b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i k_x k_P A_P - i k_x z_S^2 A_{S1} - i k_y z_S^2 A_{S2} + i k_x [k_P A_P - (k_x^2 + k_y^2) A_{S1}] = 0, \end{array} \right. \quad (13.3.14c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i k_y k_P A_P - i k_y z_S^2 A_{S1} + i k_x z_S^2 A_{S2} + i k_y [k_P A_P - (k_x^2 + k_y^2) A_{S1}] = 0. \end{array} \right. \quad (13.3.14d)$$

On vérifie facilement (en effectuant (13.3.14d)  $\times i k_x$  - (13.3.14c)  $\times i k_y$ ) que  $A_{S2} = 0$  et le système (13.3.14) devient (en posant  $A_S = A_{S1}$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{k_f}{\rho_f} A_R - sk_P A_P + s(k_x^2 + k_y^2) A_S = \frac{1}{2\rho_f} e^{-hk_f}, \\ s A_R + [(\lambda + 2\mu) z_P^2 - \lambda(k_x^2 + k_y^2)] A_P - 2i(k_x^2 + k_y^2) \mu k_S A_S = -\frac{s}{2k_f} e^{-hk_f}, \\ 2k_P A_P - [z_S^2 + k_x^2 + k_y^2] A_S = 0. \end{array} \right.$$

Les solutions de ce système s'écrivent :

$$A_R = \mathcal{R}(k_x, k_y) \frac{e^{-hk_f}}{2k_f}, \quad A_P = \mathcal{T}_P(k_x, k_y) \frac{e^{-hk_f}}{2k_P}, \quad \text{et} \quad A_S = \mathcal{T}_S(k_x, k_y) \frac{e^{-hk_f}}{2k_S},$$

avec

$$\mathcal{R}(k_x, k_y) =$$

$$\frac{[(\lambda(k_P^2 - k_x^2 - k_y^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k_x^2 + k_y^2) - 4\mu k_S k_P (k_x^2 + k_y^2)] k_f - \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k_x^2 - k_y^2)}{[(\lambda(k_P^2 - k_x^2 - k_y^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k_x^2 + k_y^2) - 4\mu k_S k_P (k_x^2 + k_y^2)] k_f + \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k_x^2 - k_y^2)},$$

$$\mathcal{T}_P(k_x, k_y) =$$

$$\frac{2s k_P (k_S^2 + k_x^2 + k_y^2)}{[(\lambda(k_P^2 - k_x^2 - k_y^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k_x^2 + k_y^2) - 4\mu k_S k_P (k_x^2 + k_y^2)] k_f + \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k_x^2 - k_y^2)},$$

$$\mathcal{T}_S(k_x, k_y) =$$

$$\frac{-4s k_S k_P}{[(\lambda(k_P^2 - k_x^2 - k_y^2) + 2\mu k_P^2)(k_S^2 + k_x^2 + k_y^2) - 4\mu k_S k_P (k_x^2 + k_y^2)] k_f + \rho_f s^2 k_P (k_S^2 - k_x^2 - k_y^2)}.$$

Donc :

$$\hat{p}^r = \frac{\mathcal{R}(k_x, k_y, s)}{2k_f} e^{-(z+h)k_f} \quad \text{et} \quad \hat{v}_s = \hat{v}_s^P + \hat{v}_s^S \quad \text{avec}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{sx}^P = \frac{ik_x \mathcal{T}_P(k_x, k_y, s)}{2k_P} e^{zk_P - hk_f}, \\ v_{sy}^P = \frac{ik_y \mathcal{T}_P(k_x, k_y, s)}{2k_P} e^{zk_P - hk_f}, \\ v_{sz}^P = \frac{\mathcal{T}_P(k_x, k_y, s)}{2} e^{zk_P - hk_f} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{sx}^S = -\frac{ik_x \mathcal{T}_S(k_x, k_y, s)}{2} e^{zk_S - hk_f}, \\ v_{sy}^S = -\frac{ik_y \mathcal{T}_S(k_x, k_y, s)}{2} e^{zk_S - hk_f}, \\ v_{sz}^S = -\frac{(k_x^2 + k_y^2) \mathcal{T}_S(k_x, k_y, s)}{2k_S} e^{zk_S - hk_f}. \end{array} \right.$$

Nous nous intéresserons uniquement au calcul de  $p^r$  et  $v_{sx}$ , le calcul de  $v_{sy}$  et de  $v_{sz}$  étant très similaire.

### 13.3.2.2 Démonstration du théorème 13.3.1

Calcul de  $p^r$ . On a

$$\tilde{p}^r(x, y, z, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{R}(k_x, k_y, s)}{2k_f} e^{-(z+h)k_f - i(k_x x + k_y y)} dk_y dk_x. \quad (13.3.15)$$

Nous effectuons successivement les changements de variables  $k_x = \frac{p_x s}{c_f}$ ,  $k_y = \frac{p_y s}{c_f}$ , puis

$$p_x = p \cos \psi - q \sin \psi, \quad p_y = p \sin \psi + q \cos \psi$$

pour obtenir

$$\tilde{p}^r(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_f} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{R}(p, q)}{2(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{c_f} [(z+h)(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + ipr]} dp dq.$$

avec

$$\mathcal{R}(p, q) = \mathcal{R}\left(\frac{p}{c_f}, \frac{q}{c_f}, 1\right) =$$

$$\frac{[(\lambda(\tilde{k}_{fP}^2 - p^2 - q^2) + 2\mu\tilde{k}_{fP}^2)(\tilde{k}_{fS}^2 + p^2 + q^2) - 4\mu\tilde{k}_{fS}\tilde{k}_{fP}(p^2 + q^2)] \tilde{k}_{ff} - c_f^2 \rho_f \tilde{k}_{fP}(\tilde{k}_{fS}^2 - p^2 - q^2)}{[(\lambda(\tilde{k}_{fP}^2 - p^2 - q^2) + 2\mu\tilde{k}_{fP}^2)(\tilde{k}_{fS}^2 + p^2 + q^2) - 4\mu\tilde{k}_{fS}\tilde{k}_{fP}(p^2 + q^2)] \tilde{k}_{ff} + c_f^2 \rho_f \tilde{k}_{fP}(\tilde{k}_{fS}^2 - p^2 - q^2)}$$

et

$$\tilde{k}_{ff}(p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{fP}(p, q) = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_P^2} + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{fS}(p, q) = \sqrt{\frac{c_f^2}{c_S^2} + p^2 + q^2}.$$

Posons maintenant

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{1+q^2}}$$

puis définissons les fonctions  $q \mapsto \tilde{c}_{ff}(q)$  et  $(\tilde{p}, q) \mapsto \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)$  par

$$\tilde{c}_f(q) = \frac{c_f}{\sqrt{1+q^2}} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q) = \mathcal{R}(\tilde{p}\sqrt{1+q^2}, q).$$

On a alors

$$\tilde{p}^r(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_f} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\mathcal{R}}(\tilde{p}, q)}{2(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{s}{\tilde{c}_{ff}(q)} [(z+h)(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r]} d\tilde{p} dq.$$

Comme dans le cas de deux milieux acoustiques on peut donc montrer que :

- a) si  $|\cos \theta| < \frac{c_f}{c_P}$ . Il n'y a pas d'onde de tête et

$$p^r(x, y, z, t) = 0 \quad \text{si } t < t_{0f}(0) = \frac{R}{c_f}$$

$$p^r(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0f}(t)} \frac{\Re \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{0f}^2(t) - q^2}} dq \right], \quad \text{si } t > t_{0f}(0).$$

avec

$$\gamma_f^+(t, q) = -i \frac{\tilde{c}_f(q)t}{R} \cos \theta + \sin \theta \sqrt{\frac{\tilde{c}_f^2(q)t^2}{R^2} - 1}.$$

- b) si  $|\cos \theta| > \frac{c_f}{c_P}$ . Alors il faut tenir compte des ondes de tête :

$$p^r(x, y, z, t) = 0, \quad \text{si } t < t_f(0)$$

$$p^r(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_f(t)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_f^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 + q_{0f}^2(t)}} dq \right], \quad \text{si } t_f(0) < t < t_{0f}(0)$$

$$p^r(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_{q_{0f}(t)}^{q_f(t)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_f^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 - q_{0f}^2(t)}} dq \right]$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0f}(t)} \frac{\Re e \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{0f}^2(t) - q^2}} dq \right]$$

si  $t_{0f}(0) < t < t_{2f}$

$$p^r(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 R} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0f}(t)} \frac{\Re e \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{0f}^2(t) - q^2}} dq \right], \quad \text{si } t_{2f} < t.$$

avec

$$q_{0f}(t) = \sqrt{\left| \frac{c_1^2 t^2}{R^2} - 1 \right|}, \quad t_f(q) = R |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{\tilde{c}_f^2(q)} - \frac{1}{\tilde{c}_P^2(q)} - \frac{R \cos \theta}{\tilde{c}_P(q)}},$$

$$q_{2f}^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \cos^2 \theta - \frac{c_f^2}{c_P^2} \right], \quad t_{2f} = t_{0f}(q_{2f}) \quad \text{et}$$

$$v_f^+(t, q) = -i \left( \frac{\tilde{c}_f(q)t}{R} \cos \theta + |\sin \theta| \sqrt{1 - \frac{\tilde{c}_f^2(q) t^2}{R^2}} \right).$$

**Remarque 13.3.2** Comme en dimension 2, la méthode de Cagniard-de Hoop ne permet pas de différencier les ondes de tête  $S$  et  $P$ . Néanmoins, on peut montrer que la solution  $p^r$  n'est pas régulière aux temps

$$t_{fP} = t_f(0) = R |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2} - \frac{R \cos \theta}{c_P}},$$

$$t_{fS} = R |\sin \theta| \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_S^2} - \frac{R \cos \theta}{c_S}},$$

$$t_f(q_{2fP}) \quad \text{et} \quad t_f(q_{2fS})$$

avec

$$q_{2fP} = q_{2f}^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \cos^2 \theta - \frac{c_f^2}{c_P^2} \right] \quad \text{et} \quad q_{2fS} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \cos^2 \theta - \frac{c_f^2}{c_S^2} \right].$$

Il est alors facile de démontrer le lemme 13.3.1

**Calcul de  $v_{sx}^P$**  On a

$$\tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ik_x \mathcal{T}_P(k_x, k_y, s)}{2k_P} e^{zk_P - hk_f - i(k_x x + k_y y)} dk_y dk_x. \quad (13.3.16)$$

Nous effectuons successivement les changements de variable  $k_x = \frac{p_x s}{c_P}$ ,  $k_y = \frac{p_y s}{c_P}$ , puis

$$p_x = p \cos \psi - q \sin \psi, \quad p_y = p \sin \psi + q \cos \psi$$

pour obtenir

$$\tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_P} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ip \mathcal{T}_P(p, q)}{2c_P (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{s}{c_P} \left[ -z(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + h(\frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} dpdq$$

avec

$$\mathcal{T}_P(p, q) = \mathcal{T}_P\left(\frac{p}{c_P}, \frac{q}{c_P}, 1\right) =$$

$$\frac{2c_P^2 \tilde{k}_{PP} (\tilde{k}_{PS}^2 + p^2 + q^2)}{\left[ (\lambda(\tilde{k}_{PP}^2 - p^2 - q^2) + 2\mu \tilde{k}_{PP}^2)(\tilde{k}_{PS}^2 + p^2 + q^2) - 4\mu \tilde{k}_{PS} \tilde{k}_{PP} (p^2 + q^2) \right] \tilde{k}_{Pf} + c_P^2 \rho_f \tilde{k}_{PP} (\tilde{k}_{PS}^2 - p^2 - q^2)}$$

et

$$\tilde{k}_{Pf}(p, q) = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{PP}(p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{PS}(p, q) = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_S^2} + p^2 + q^2}.$$

Posons maintenant

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{1 + q^2}}$$

puis définissons les fonctions  $q \mapsto \tilde{c}_{PP}(q)$ ,  $q \mapsto \tilde{c}_{Pf}(q)$  et  $(\tilde{p}, q) \mapsto \tilde{\mathcal{T}}_P(\tilde{p}, q)$  par

$$\tilde{c}_{PP}(q) = \frac{c_P}{\sqrt{1 + q^2}}, \quad \tilde{c}_{Pf}(q) = \frac{c_f}{\sqrt{1 + \frac{c_f^2}{c_P^2} q^2}} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{T}}_P(\tilde{p}, q) = \mathcal{T}_P(\tilde{p}\sqrt{1 + q^2}, q).$$

On a alors

$$\tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, s) = \frac{s}{4\pi^2 c_P} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\tilde{p}\tilde{\mathcal{T}}_P(\tilde{p}, q)}{2\tilde{c}_{PP}(q)(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{s}{\tilde{c}_{PP}(q)} \left[ -z(1 + \tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{\tilde{c}_{PP}(q)}{\tilde{c}_{Pf}(q)} + \tilde{p}^2\right)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r \right]} d\tilde{p}dq$$

Comme  $c_P > c_S > c_f$ , le contour d'intégration ne traverse pas les coupures, si on suppose de plus que les pôles de  $\mathcal{T}_P$  sont imaginaires purs et à l'extérieur de ce contour, on montre, de la même manière que pour le calcul de l'onde transmise dans le cas de deux milieux acoustiques, que :

$v_{sx}^P(x, y, z, t) = 0, \quad \text{si } t < t_{0P}(0)$ $v_{sx}^P(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi^2 c_P} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0P}(t)} \Re e \left[ \frac{i\gamma_P^+(t, q)\mathcal{T}_P(\gamma_P^+(t, q))}{(1 + \gamma_P^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q), t, q)} \right] dq \right]$ $\text{si } t > t_{0P}(0).$
---

avec  $\gamma_P^+(t, q)$ ,  $\mathcal{F}_P(p, t, q)$ ,  $t_{0P}(0)$  et  $q_{0P}(t)$  définis respectivement comme  $\gamma_2^+(t, q)$ ,  $\mathcal{F}(p, t, q)$ ,  $t_{02}(0)$  et  $q_{02}(t)$  dans le cas de deux milieux acoustiques, en remplaçant respectivement  $c_1$  et  $c_2$  par  $c_f$  et  $c_P$ .

**Calcul de  $v_{sx}^S$**  On a

$$\tilde{v}_{sx}^S(x, y, z, s) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ik_x \mathcal{I}_S(k_x, k_y, s)}{2} e^{zk_S - hk_f - i(k_x x + k_y y)} dk_y dk_x. \quad (13.3.17)$$

Nous effectuons successivement les changements de variable  $k_x = \frac{p_x s}{c_S}$ ,  $k_y = \frac{p_y s}{c_S}$ , puis

$$p_x = p \cos \psi - q \sin \psi, \quad p_y = p \sin \psi + q \cos \psi$$

pour obtenir

$$\tilde{v}_{sx}^S(x, y, z, s) = -\frac{s}{4\pi^2 c_S} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ip\mathcal{I}_S(p, q)}{2c_S} e^{\frac{s}{c_S} \left[ -z(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{c_S^2}{c_f^2} + p^2 + q^2\right)^{\frac{1}{2}} + ipr \right]} dpdq$$

avec

$$\mathcal{T}_S(p, q) = \mathcal{T}_S\left(\frac{p}{c_S}, \frac{q}{c_S}, 1\right) =$$

$$\frac{-4c_S^3 \tilde{k}_{SS} \tilde{k}_{SP}}{\left[ (\lambda(\tilde{k}_{SP}^2 - p^2 - q^2) + 2\mu\tilde{k}_{SP}^2)(\tilde{k}_{SS}^2 + p^2 + q^2) - 4\mu\tilde{k}_{SS}\tilde{k}_{SP}(p^2 + q^2) \right] \tilde{k}_{Sf} + c_S^2 \rho_f \tilde{k}_{SP}(\tilde{k}_{SS}^2 - p^2 - q^2)}$$

et

$$\tilde{k}_{Pf}(p, q) = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_f^2} + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{PP}(p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \quad \tilde{k}_{PS}(p, q) = \sqrt{\frac{c_P^2}{c_S^2} + p^2 + q^2}.$$

Posons maintenant

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{1 + q^2}}$$

puis définissons les fonctions  $q \mapsto \tilde{c}_{SS}(q)$ ,  $q \mapsto \tilde{c}_{SP}(q)$ ,  $q \mapsto \tilde{c}_{Sf}(q)$  et  $(\tilde{p}, q) \mapsto \tilde{\mathcal{T}}_S(\tilde{p}, q)$  par

$$\tilde{c}_{SS}(q) = \frac{c_S}{\sqrt{1 + q^2}}, \quad \tilde{c}_{SP}(q) = \frac{c_P}{\sqrt{1 + \frac{c_P^2}{c_S^2} q^2}}, \quad \tilde{c}_{Sf}(q) = \frac{c_f}{\sqrt{1 + \frac{c_f^2}{c_S^2} q^2}}$$

et

$$\tilde{\mathcal{T}}_S(\tilde{p}, q) = \mathcal{T}_S(\tilde{p}\sqrt{1 + q^2}, q).$$

On a alors

$$\tilde{v}_{sx}^S(x, y, z, s) = -\frac{s}{4\pi^2 c_S} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\tilde{p}\tilde{\mathcal{T}}_S(\tilde{p}, q)}{2\tilde{c}_{SS}(q)} e^{\frac{s}{\tilde{c}_{SS}(q)} \left[ -z(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} + \tilde{p}^2\right)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r \right]} d\tilde{p} dq.$$

Nous notons

$$\mathcal{F}_S(p, q, t) = -z(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} + p^2\right)^{\frac{1}{2}} + ipr - \tilde{c}_{SS}(q)t = 0$$

et nous appelons  $t_{0S}(q)$  le seul réel tel que  $\mathcal{F}_S(p, q, t_{0S}(q))$  admette une racine double que nous noterons  $p = \tilde{p}_{0S}(q)$ . Comme lors du calcul de l'onde réfléchie nous devons distinguer deux cas :

a) si  $|\tilde{p}_{0S}(q)| \leq \frac{\tilde{c}_{SS}(q)}{\tilde{c}_{SP}(q)}$ . Alors

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ip\tilde{\mathcal{T}}_S(\tilde{p}, q)}{2\tilde{c}_{SS}(q)} e^{\frac{s}{\tilde{c}_{SS}(q)} \left[ -z(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + h\left(\frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} + \tilde{p}^2\right)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r \right]} d\tilde{p} \\ &= \int_{t_{0S}(q)}^{+\infty} \Re e \left[ \frac{i\gamma_S^+(t, q)\mathcal{T}_S(\gamma_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt \end{aligned}$$

avec  $\gamma_S^+(t, q)$  la seule racine de  $\mathcal{F}_S(p, q, t)$  à partie réelle positive.

b) si  $|\tilde{p}_{0S}(q)| > \frac{\tilde{c}_{SS}(q)}{\tilde{c}_{SP}(q)}$ . Posons alors

$$t_{SP}(q) = -z \left( \frac{1}{\tilde{c}_{SS}^2(q)} - \frac{1}{\tilde{c}_{SP}^2(q)} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{1}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} - \frac{1}{\tilde{c}_{SP}^2(q)} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{\tilde{c}_{SP}(q)}.$$

D'après le lemme 13.2.3, pour  $t_{SP}(q) \leq t < t_{0S}(q)$ , il existe un unique  $p$ , racine de  $\mathcal{F}_S(p, q, t)$  et appartenant à

$$\left[ \tilde{p}_{0S}(q) ; -i \frac{\tilde{c}_{SS}(q)}{\tilde{c}_{SP}(q)} \right].$$

Nous noterons  $v_S^+(t, q)$  cette racine. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ip \mathcal{T}_S(\tilde{p}, q)}{2\tilde{c}_{SS}(q)} e^{\frac{s}{\tilde{c}_{SS}(q)} \left[ -z(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} + \tilde{p}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r \right]} d\tilde{p} \\ &= \int_{t_{SP}(q)}^{t_{0S}(q)} \Re e \left[ \frac{iv_S^+(t, q) \mathcal{T}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt \\ &+ \int_{t_{0S}(q)}^{+\infty} \Re e \left[ \frac{i\gamma_S^+(t, q) \mathcal{T}_S(\gamma_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Nous utiliserons par la suite le

**Lemme 13.3.3** *La fonction  $I : q \mapsto \Im m[p_{0S}(q)]$  est strictement croissante.*

**Démonstration :**

Comme  $\tilde{p}_{0S}(q)$  est racine double de  $\mathcal{F}_S(p, q, t)$  on sait que

$$\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial \tilde{p}}(\tilde{p}_{0S}(q), q, t) = -\frac{z\tilde{p}_{0S}(q)}{(1 + \tilde{p}_{0S}(q)^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{h\tilde{p}_{0S}(q)}{\left( \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} + \tilde{p}_{0S}(q)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} + ir = 0,$$

soit

$$-\frac{zI(q)}{(1 - I^2(q))^{\frac{1}{2}}} + \frac{hI(q)}{\left( \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} - I^2(q) \right)^{\frac{1}{2}}} + r = 0. \tag{13.3.18}$$

Supposons maintenant que  $I(q)$  soit décroissante. Alors, comme  $\Im m[\tilde{p}_{0S}(q)] < 0$  (d'après le lemme 13.2.3),  $I^2(q)$  et

$$q \mapsto \frac{1}{(1 - I^2(q))^{\frac{1}{2}}}$$

sont croissantes. Remarquons maintenant que

$$q \mapsto \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} = \frac{c_S}{c_f} \frac{1 + \frac{c_f^2}{c_S^2} q^2}{1 + q^2}$$

est une fonction strictement décroissante pour  $q > 0$ . Donc :

$$q \mapsto \frac{1}{\left( \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} - I^2(q) \right)^{\frac{1}{2}}}$$

est strictement croissante. Comme  $z < 0$  et  $h > 0$  la fonction

$$\mathcal{G} : q \mapsto -\frac{z}{(1 - I^2(q))^{\frac{1}{2}}} + \frac{h}{\left( \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{Sf}^2(q)} + I^2(q) \right)^{\frac{1}{2}}}$$

est strictement croissante, or, d'après (13.3.18),  $I(q) = -r/\mathcal{G}(q)$ , donc  $I(q)$  est une fonction strictement croissante, ce qui contredit l'hypothèse de départ. ■

Nous en déduisons le

**Corollaire 13.3.1** *Si  $|\tilde{p}_{0S}(0)| \leq c_S/c_P$  alors  $|\tilde{p}_{0S}(q)| \leq \tilde{c}_{SS}(q)/\tilde{c}_{SP}(q)$  pour tout  $q$  de  $\mathbb{R}^+$ .*

**Démonstration :**

$I(q)$  étant une fonction strictement croissante  $|\tilde{p}_{0S}(q)| = -I(q)$  est strictement décroissante. Remarquons maintenant que

$$q \mapsto \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q)}{\tilde{c}_{SP}^2(q)} = \frac{c_P}{c_f} \frac{1 + \frac{c_P^2}{c_S^2} q^2}{1 + q^2}$$

est une fonction strictement croissante pour  $q > 0$ . Il est donc évident que

$$|\tilde{p}_{0S}(0)| \leq \frac{c_S}{c_P} = \frac{\tilde{c}_{SS}(0)}{c_{SP}(0)} \implies |\tilde{p}_{0S}(q)| \leq \frac{\tilde{c}_{SS}(q)}{c_{SP}(q)}.$$

■

Donc, si  $|\tilde{p}_{0S}(0)| \leq c_S/c_P$ , il n'y a pas d'onde de tête. Dans le cas contraire on aura également besoin du lemme suivant :

**Lemme 13.3.4** *Si  $|\tilde{p}_{0S}(0)| \leq c_S/c_P$  alors*

$$q_{2S} = \sqrt{\frac{r^2}{\left( \frac{h}{\sqrt{\frac{c_S^2}{c_f^2} - \frac{c_S^2}{c_P^2}}} - \frac{z}{\sqrt{1 - \frac{c_S^2}{c_P^2}}} \right)^2} - \frac{c_S^2}{c_P^2}} \quad (13.3.19)$$

est tel que

$$\tilde{p}_{0S}(q_{2S}) = -i \frac{\tilde{c}_{SS}(q_{2S})}{\tilde{c}_{SP}(q_{2S})}.$$

De plus,

$$\begin{cases} |\tilde{p}_{0S}(q)| > \frac{\tilde{c}_S(q)}{\tilde{c}_P(q)} & \text{si } q < q_{2S}; \\ |\tilde{p}_{0S}(q)| \leq \frac{\tilde{c}_S(q)}{\tilde{c}_P(q)} & \text{si } q \geq q_{2S}. \end{cases}$$

**Démonstration :**

Vérifions d'abord que  $q_{2S} \in \mathbb{R}^+$ , c'est-à-dire que :

$$|\tilde{p}_{0S}(0)| \leq c_S/c_P \implies \left( \frac{r}{\frac{z}{\sqrt{1-\frac{c_S^2}{c_P^2}}} - \frac{h}{\sqrt{\frac{c_S^2}{c_f^2} - \frac{c_S^2}{c_P^2}}}} \right)^2 \geq \frac{c_S^2}{c_P^2}.$$

Pour cela rappelons que  $\tilde{p}_{0S}(0)$  est tel que  $\frac{\partial f_S}{\partial p}(\tilde{p}_{0S}(0), 0, t_{0S}) = 0$ , soit :

$$-\frac{z\tilde{p}_{0S}(0)}{\sqrt{1+\tilde{p}_{0S}^2(0)}} + \frac{h\tilde{p}_{0S}(0)}{\sqrt{\frac{c_S^2}{c_f^2} + \tilde{p}_{0S}^2(0)}} + ir = 0.$$

En posant  $\tilde{p}_{0S}(0) = -iw_{0S}$  cette équation devient :

$$\frac{zw_{0S}}{\sqrt{1-w_{0S}^2}} - \frac{hw_{0S}}{\sqrt{\frac{c_S^2}{c_f^2} - w_{0S}^2}} + r = 0.$$

Définissons maintenant la fonction

$$\mathcal{K}(w) = \frac{r}{\frac{h}{\sqrt{\frac{c_S^2}{c_f^2} - w^2}} - \frac{z}{\sqrt{1-w^2}}} - w,$$

cette fonction est strictement décroissante pour  $w > 0$  et  $\mathcal{K}(w_{0S}) = 0$ . Comme

$$0 < w_{0S} \leq \frac{c_S}{c_P}$$

on a :

$$\mathcal{K}(0) > \mathcal{K}(w_{0S}) \geq 0$$

soit :

$$\frac{r}{\frac{h}{\sqrt{\frac{c_S^2}{c_f^2} - \frac{c_S^2}{c_P^2}}} - \frac{z}{\sqrt{1-\frac{c_S^2}{c_P^2}}}} \geq \frac{c_S}{c_P}.$$

$q_{2S}$  appartient donc bien à  $\mathbb{R}^+$ .

Posons maintenant  $\tilde{p}_{2S} = -i\tilde{c}_{SS}(q_{2S})/\tilde{c}_{SP}(q_{2S})$  et

$$t_{2S} = \frac{1}{\tilde{c}_{SS}(q_{2S})} \left( h \left( \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q_{2S})}{\tilde{c}_{Sf}^2(q_{2S})} + \tilde{p}_{2S}^2 \right)^{\frac{1}{2}} - z \left( 1 + \tilde{p}_{2S}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}_{2S}r \right),$$

soit

$$t_{2S} = \left( h \left( \frac{1}{\tilde{c}_{Sf}^2(q_{2S})} - \frac{1}{\tilde{c}_{SP}^2(q_{2S})} \right)^{\frac{1}{2}} - z \left( \frac{1}{\tilde{c}_{SS}^2(q_{2S})} - \frac{1}{\tilde{c}_{SP}^2(q_{2S})} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{\tilde{c}_{SP}(q_{2S})} \right).$$

En utilisant la définition des fonctions  $\tilde{c}_{Sf}(q)$ ,  $\tilde{c}_{SP}(q)$  et  $\tilde{c}_{SS}(q)$  on vérifie facilement que :

$$t_{2S} = \left( h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} - z \left( \frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{r}{c_P} \sqrt{1 + \frac{c_P^2}{c_S^2} q_{2S}^2} \right).$$

Vérifions que  $\tilde{p}_{2S}$  est racine de  $\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial \tilde{p}}(\tilde{p}, q_{2S}, t_{2S})$  :

$$iz \frac{\frac{\tilde{c}_{SS}(q_{2S})}{\tilde{c}_{SP}(q_{2S})}}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q_{2S})}{\tilde{c}_{SP}^2(q_{2S})}}} - ih \frac{\frac{\tilde{c}_{SS}(q_{2S})}{\tilde{c}_{SP}(q_{2S})}}{\sqrt{\frac{\tilde{c}_{SS}^2(q_{2S})}{\tilde{c}_{Sf}^2(q_{2S})} - \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q_{2S})}{\tilde{c}_{SP}^2(q_{2S})}}} + ir = 0, \quad (13.3.20)$$

toujours en utilisant les définitions des fonctions  $\tilde{c}_{Sf}(q)$ ,  $\tilde{c}_{SP}(q)$  et  $\tilde{c}_{SS}(q)$  on vérifie que :

$$z \sqrt{\frac{\frac{c_S^2}{c_P^2} + q_{2S}^2}{1 - \frac{c_S^2}{c_P^2}}} - h \sqrt{\frac{\frac{c_S^2}{c_P^2} + q_{2S}^2}{\frac{c_S^2}{c_f^2} - \frac{c_S^2}{c_P^2}}} + r = 0, \quad (13.3.21)$$

Donc  $q_{2S}$ , défini par (13.3.19), est bien solution de cette équation.

Par définition de  $t_{2S}$ ,  $\mathcal{F}_S(\tilde{p}_{2S}, q_{2S}, t_{2S}) = 0$  donc

$$\mathcal{F}_S(\tilde{p}_{2S}, q_{2S}, t_{2S}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial \tilde{p}}(\tilde{p}_{2S}, q_{2S}, t_{2S}) = 0.$$

On a donc bien  $\tilde{p}_{2S} = \tilde{p}_{02}(q_{2S})$ .

Il ne reste plus qu'à utiliser le fait que  $p_{0S}(q)$  est décroissante et  $\tilde{c}_{SS}(q)/\tilde{c}_{SP}(q)$  croissante pour démontrer la seconde partie du lemme. ■

**Corollaire 13.3.2**  $q_{2S}$  est tel que  $t_{2S}(= t_{02}(q_{2S})) = t_{SP}(q_{2S})$ . C'est-à-dire que le temps d'arrivée de l'onde de tête est égal au temps d'arrivée de l'onde de volume.

**Démonstration :**

Il suffit de rappeler que  $t_{SP}(q)$  est tel que

$$\mathcal{F}_S \left( -i \frac{\tilde{c}_{SS}(q)}{\tilde{c}_{SP}(q)}, q, t_{SP}(q) \right) = 0,$$

or

$$\mathcal{F}_S \left( -i \frac{\tilde{c}_{SS}(q_{2S})}{\tilde{c}_{SP}(q_{2S})}, q_{2S}, t_{2S} \right) = 0,$$

on a donc bien  $t_{2S} = t_{SP}(q_2)$ . ■

Nous devons donc étudier séparément le cas  $|p_{0S}(0)| \leq \frac{c_S}{c_P}$  et le cas  $|p_{0S}(0)| > \frac{c_S}{c_P}$  :

a) si  $|p_0(0)| \leq \frac{c_S}{c_P}$ . Alors il n'y a pas d'onde de tête et on vérifie facilement que :

$$\begin{aligned} v_{sx}^S(x, y, z, t) &= 0 && \text{si } t < t_{0P}(0) \\ v_{sx}^S(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[ \frac{i\gamma_S^+(t, q) \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q))}{(1 + \gamma_S^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\ &&& \text{si } t > t_{0S}(0). \end{aligned}$$

b) si  $|p_0(0)| > \frac{c_S}{c_P}$ . Alors

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ip \mathcal{I}_S(\tilde{p}, q)}{2\tilde{c}_{SS}(q)} e^{\frac{-s}{\tilde{c}_S(q)} \left[ -z(1+\tilde{p}^2)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{c_S^2(q)}{c_P^2(q)} + \tilde{p}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + i\tilde{p}r \right]} d\tilde{p} dq \\ &= \int_{-q_{2S}}^{+q_{2S}} \int_{t_{SP}(q)}^{t_{0S}(q)} \Re e \left[ \frac{iv_S^+(t, q) \mathcal{I}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt dq \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_{0S}(q)}^{+\infty} \Re e \left[ \frac{i\gamma_S^+(t, q) \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt dq. \end{aligned}$$

Le calcul des ondes de volume étant évident, on s'intéresse uniquement au calcul des ondes de tête, c'est-à-dire de

$$\tilde{u}_1(q) = \int_{-q_{2S}}^{+q_{2S}} \int_{t_{SP}(q)}^{t_{0S}(q)} \Re e \left[ \frac{iv_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dt dq.$$

D'après le lemme 13.2.3, la fonction  $t_{0S}(q)$  est croissante. On peut montrer, de manière très similaire, que c'est également le cas de la fonction  $t_{SP}(q)$ . De plus  $t_{SP}(q) < t_{0S}(q)$  pour  $q < q_{2S}$  et on a vu que  $t_{SP}(q_{2S}) = t_{0S}(q_{2S})$ . Les fonctions  $t_{SP}(q)$  et  $t_{0S}(q)$  se comportent donc comme les fonctions  $t_1(q)$  et  $t_{01}(q)$  que nous avons rencontrées lors du calcul des ondes de tête dans le cas de deux milieux acoustiques (voir figure 13.13).

On pose  $q_{SP}(t) = t_{SP}^{-1}(t)$ , on a alors le

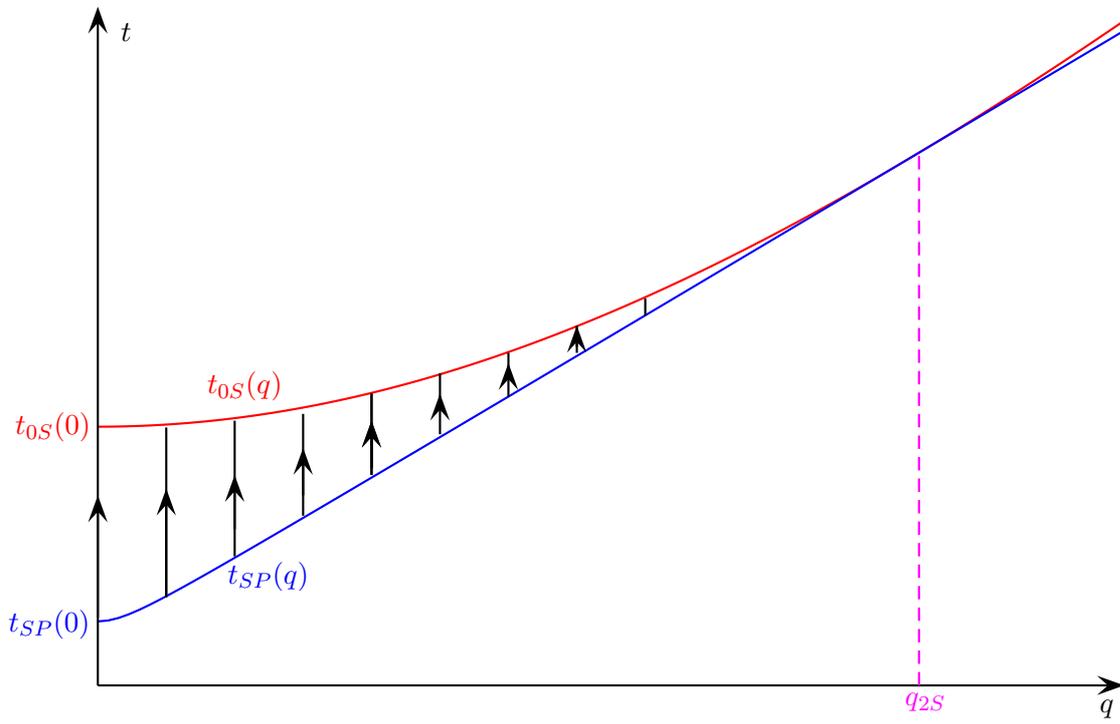


FIG. 13.13: Intégration sur  $q$  puis sur  $t$

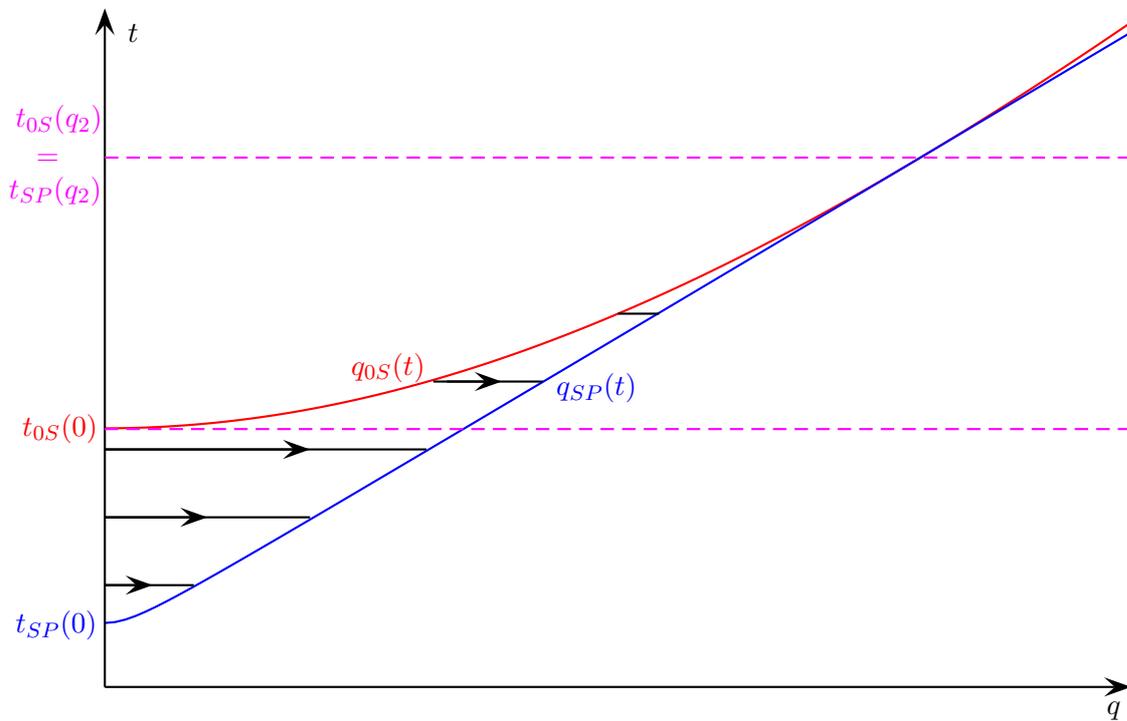


FIG. 13.14: Intégration sur  $t$  puis sur  $q$

**Lemme 13.3.5** *L'expression de  $q_{SP}(t)$  est donnée par*

$$q_{SP}(t) = c_S \sqrt{\frac{1}{r^2} \left( t + z \left( \frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} - h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{\tilde{c}_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 - \frac{1}{c_P^2}}.$$

**Démonstration :**

Le calcul de  $q_{SP}(t)$  est très similaire à celui de  $q_{2S}$  que nous venons d'expliciter : soit  $t$  compris dans  $[t_{SP}; t_{0S}]$  et soit  $\tilde{p} = v_S^+(q, t)$ , alors :

1.  $\mathcal{F}_S(\tilde{p}, q_{SP}(t), t) = 0$  (par définition de  $v_S^+(q, t)$ ) ;
2.  $\tilde{p} = -i \frac{\tilde{c}_{SS}(q_{SP}(t))}{\tilde{c}_{SP}(q_{SP}(t))}$  ( $p$  est sur le point de branchement de  $z \mapsto \left( \frac{\tilde{c}_S^2(q_{SP}(t))}{\tilde{c}_P^2(q_{SP}(t))} + p^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ).

Donc :

$$\begin{cases} -z \left( 1 - \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q_{SP}(t))}{\tilde{c}_{SP}^2(q_{SP}(t))} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q_{SP}(t))}{\tilde{c}_{Sf}^2(q_{SP}(t))} - \frac{\tilde{c}_{SS}^2(q_{SP}(t))}{\tilde{c}_{SP}^2(q_{SP}(t))} \right)^{\frac{1}{2}} \\ + \frac{\tilde{c}_{SS}(q_{SP}(t))}{\tilde{c}_{SP}(q_{SP}(t))} r - \tilde{c}_{SS}(q_{SP}(t)) t = 0. \end{cases}$$

En utilisant la définition des fonctions  $\tilde{c}_{Sf}(q)$ ,  $\tilde{c}_{SP}(q)$  et  $\tilde{c}_{SS}(q)$ , on obtient

$$-z \left( 1 - \frac{c_S^2}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} + h \left( \frac{c_S^2}{c_f^2} - \frac{c_S^2}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} + r \sqrt{\frac{c_S^2}{c_P^2} + q_{SP}^2(t)} - cst = 0,$$

soit :

$$q_{SP}(t) = c_S \sqrt{\frac{1}{r^2} \left( t + z \left( \frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} - h \left( \frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{\tilde{c}_P^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 - \frac{1}{c_P^2}}.$$

■

On peut donc maintenant inverser l'ordre d'intégration (voir figure 13.14) pour obtenir<sup>(59)</sup> :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(q) = & 2 \int_{t_{SP}(0)}^{t_{0S}(0)} \int_0^{q_{SP}(t)} \Re e \left[ \frac{iv_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dq dt \\ & + 2 \int_{t_{0S}(0)}^{t_{2S}} \int_{q_{0S}(t)}^{q_{SP}(t)} \Re e \left[ \frac{iv_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] e^{-st} dq dt \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement :

---

59. Après avoir utilisé le fait que  $\tilde{u}_1(q)$  est une fonction paire

$$\begin{aligned}
 v_{sx}^S(x, y, z, t) &= 0, & \text{si } t < t_{SP}(0) \\
 v_{sx}^S(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{SP}(t)} \Re e \left[ \frac{iv_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\
 & \text{si } t_{SP}(0) < t < t_{0S}(0), \\
 v_{sx}^S(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_{q_{0S}(t)}^{q_{SP}(t)} \Re e \left[ \frac{iv_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right] \\
 & \quad - \frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[ \frac{i\gamma_S^+(t, q) \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q))}{(1 + \gamma_S^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\
 & \text{si } t_{0S}(0) < t < t_{2S}, \\
 v_{sx}^S(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi^2 c_S} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0S}(t)} \Re e \left[ \frac{i\gamma_S^+(t, q) \mathcal{I}_S(\gamma_S^+(t, q))}{(1 + \gamma_S^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_S^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], \\
 & \text{si } t_{2S} < t.
 \end{aligned}$$

**Front de l'onde S** . Par définition de  $\Omega_S(t)$ , la condition  $t > t_{0S}(0)$  est équivalente à  $\mathbf{x} \in \Omega_S(t)$ . Remarquons maintenant que :

$$t_{SP}(0) = -z \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} + h \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{r}{c_P},$$

ce qui est bien l'équation de l'ensemble  $\omega_{teSP1}(t)$  défini dans le lemme (13.3.2). Rappelons également que

$$t_{2S} = h \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} - z \sqrt{\frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{r}{c_P} \sqrt{1 + \frac{c_P^2}{c_S^2}} q_{2S}^2$$

et que

$$q_{2S} = \sqrt{\left( \frac{r}{\frac{h}{\sqrt{\frac{c_S^2}{c_f^2} - \frac{c_S^2}{c_P^2}} - \frac{z}{\sqrt{1 - \frac{c_S^2}{c_P^2}}}} \right)^2 - \frac{c_S^2}{c_P^2}}.$$

On a donc :

$$t_{2S} = h\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} - z\sqrt{\frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2}} + \frac{r^2}{\frac{h}{\sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}}} - \frac{z}{\sqrt{\frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2}}}},$$

ce qui se réécrit, en posant

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{c_S^2} - \frac{1}{c_P^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{c_f^2} - \frac{1}{c_P^2}} :$$

$$\left(\frac{h}{\beta} - \frac{z}{\alpha}\right) t_{2S} = h^2 + z^2 - hz \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) + r^2,$$

et on vérifie, après quelques calculs simples que cette équation est équivalente à :

$$\left(z - \frac{1}{2} \left(h \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) - \frac{t_{2S}}{\alpha}\right)\right)^2 + r^2 = \frac{h t_{2S}}{\beta} - h^2 + \frac{1}{4} \left(h \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) - \frac{t_{2S}}{\alpha}\right)^2,$$

ce qui est bien l'équation de la sphère de centre  $(0, z_{te})$  et de rayon  $r_{te}$  utilisée pour établir le lemme 13.3.2.

### 13.4 Considérations pratiques pour le calcul numérique.

En dimension trois le calcul numérique de la convolution en temps entre les fonctions de Green que nous venons de décrire et un terme source nécessite l'approximation de deux intégrales : une suivant la variable temporelle  $t$  et une suivant la variable  $q$ . Le calcul de la première étant très similaire au cas bidimensionnel, nous nous intéresserons plus particulièrement dans cette section à la deuxième. Afin d'illustrer notre propos nous détaillerons le calcul numérique de la solution du problème de couplage fluide-structure (13.3.1).

#### 13.4.1 Calcul de $P$

Le champ  $p$  étant la fonction de Green du problème (13.3.3) on vérifie facilement que le champ de pression  $P$  est donné par :

$$P(x, y, z, t) = \int_0^t p(x, y, z, \tau) f(t - \tau) d\tau \tag{13.4.1}$$

Comme  $p$  se décompose en  $p^i + p^r$ , on peut également décomposer  $P$  en  $P^i + P^r$  avec :

$$P^i(x, y, z, t) = \int_0^t p^i(x, y, z, \tau) f(t - \tau) d\tau \quad \text{et} \quad P^r(x, y, z, t) = \int_0^t p^r(x, y, z, \tau) f(t - \tau) d\tau$$

##### 13.4.1.1 Calcul de $P^i$

Comme

$$p^i = \frac{1}{2\pi R} \delta_{\frac{R}{c}}(t)$$

il est évident que

$$P^i(x, y, z, t) = \frac{f(t - \frac{R}{c})}{2\pi R}.$$

L'algorithme de calcul de  $P^i$  étant trivial nous ne le décrivons pas ici.

### 13.4.1.2 Calcul de $P^r$

Nous appelons  $C$  le vecteur contenant les données physiques de l'expérience :  $c_f, c_S, c_P, \rho_f \dots$ . Supposons que nous disposions d'une fonction  $\text{coor}(x, y, z, h)$  nous permettant d'obtenir  $r, \theta$  et  $R$  et d'une fonction  $\text{temps}(x, y, z, h, C)$  nous permettant d'obtenir  $t_{0f}, t_f$  et  $t_{2f}$ . Posons :

$$\tilde{p}_v(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{0f}, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \left[ \int_0^{q_{0f}(t)} \frac{\Re e \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, q), q) \right)}{\sqrt{q_{0f}^2(t) - q^2}} dq \right] & \text{si } t_{0f} < t \end{cases}$$

et

$$\tilde{p}_t(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_f \text{ ou si } t_{2f} < t, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \left[ \int_0^{q_f(t)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_f^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 + q_{0f}^2(t)}} dq \right], & \text{si } t_f < t < t_{0f}, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \left[ \int_{q_{0f}(t)}^{q_f(t)} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}}(v_f^+(t, q), q) \right]}{\sqrt{q^2 - q_{0f}^2(t)}} dq \right], & \text{si } t_{0f} < t < t_{2f}. \end{cases}$$

On peut alors décomposer  $P^r$  en une onde de tête  $P_t^r$  et une onde de volume  $P_v^r$  avec :

$$\begin{cases} P_v^r(x, y, z, t) = 0, & \text{si } t \leq t_{0f}, \\ P_v^r(x, y, z, t) = \int_{t_{0f}}^t \frac{d\tilde{p}_v}{dt}(x, y, z, \tau) f(t - \tau) d\tau, & \text{si } t > t_{0f} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} P_t^r(x, y, z, t) = 0, & \text{si } t \leq t_f \text{ ou } \cos \theta \leq \frac{c_f}{c_P}, \\ P_t^r(x, y, z, t) = \int_{t_f}^t \frac{d\tilde{p}_t}{dt}(x, y, z, \tau) f(t - \tau) d\tau, & \text{si } t_f < t < t_{2f} \text{ et } \cos \theta > \frac{c_f}{c_P}, \\ P_t^r(x, y, z, t) = \int_{t_f}^{t_{2f}} \frac{d\tilde{p}_t}{dt}(x, y, z, \tau) f(t - \tau) d\tau & \text{si } t_{2f} \leq t \text{ et } \cos \theta > \frac{c_f}{c_P}. \end{cases}$$

**Calcul de  $P_v^r(x, y, z, t)$ .** D'après les propriétés de  $\tilde{p}_v$ , on vérifie que :

$$P_v^r(x, y, z, t) = \int_{t_{0f}}^t \tilde{p}_v(x, y, z, \tau) f'(t - \tau) d\tau.$$

La fonction  $\tilde{p}_v$  se calcule à l'aide d'une intégrale sur l'intervalle dépendant du temps  $[0 ; q_{0f}(t)]$  qui tend vers  $\mathbb{R}^+$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . D'un point de vue numérique, il est plus intéressant de calculer des intégrales sur des intervalles constants. Nous effectuons donc le changement

de variable  $q = Qq_{0f}(t)$  :

$$\tilde{p}_v(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{0f}, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \left[ \int_0^1 \frac{\Re \left( \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, Qq_{0f}(t)), Qq_{0f}(t)) \right)}{\sqrt{1-Q^2}} dQ \right] & \text{si } t_{0f} < t. \end{cases}$$

La deuxième difficulté numérique est due à la présence de la racine carrée au dénominateur qui rend l'intégrand singulier pour  $Q = 1$  ; nous utiliserons donc le changement de variable  $Q = \sin \eta$  :

$$\tilde{p}_v(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{0f}, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Re \left[ \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, q_{0f}(t) \sin \eta), q_{0f}(t) \sin \eta) \right] d\eta & \text{si } t_{0f} < t. \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant décrire le calcul de  $P_v^r(x, y, z, t)$ .

On suppose que l'intervalle  $[t_{0f} ; t]$  se décompose en  $Nt$  intervalles de même longueur  $dt$ . Comme la fonction  $\tilde{p}_v$  n'est pas singulière, on pourra utiliser l'approximation :

$$P_v^r(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{Nt} \tilde{p}_v(x, y, z, t_{0f} + (i-1)dt) f'(t - (t_{0f} + (i-1)dt)) dt.$$

De même, si l'intervalle  $[0, \pi/2]$  est décomposé en  $N_\eta$  intervalles de même longueur  $d\eta$ , on calculera

$$\tilde{p}_v(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{N_\eta} \frac{\Re \left[ \tilde{\mathcal{R}}(\gamma_f^+(t, q_{0f}(t) \sin(i-1)d\eta), q_{0f}(t) \sin(i-1)d\eta) \right]}{2\pi^2 R} d\eta.$$

L'algorithme de calcul de  $\tilde{p}_v(x, y, z, t)$  est décrit sur le tableau 13.1 et celui de  $P_v^r(x, y, z, t)$  est décrit sur le tableau 13.2 (on appelle  $df(t)$  la fonction qui fournit la dérivée de  $f$  au temps  $t$ ).

**Calcul de  $P_t^r(x, y, z, t)$ .** Comme pour le calcul de l'onde de volume on a :

$$P_t^r(x, y, z, t) = \int_{t_f}^t \tilde{p}_t(x, y, z, \tau) f'(t - \tau) d\tau,$$

$\tilde{p}_t$  se calcule également grâce à des intégrales sur des intervalles dépendant du temps. Effectuons donc dans un premier temps le changement de variable  $q = Qq_{0f}(t)$  :

```

PV( $x, y, z, h, t, deta, C$ )
1  ( $r, theta, R$ ) = coor( $x, y, z, h$ )
2   $Pv = 0$ 
3   $N = (pi/2)/deta$ 
4  pour  $i$  de 1 à  $N$  faire
5       $eta = (i - 1) * deta$ 
6       $q = \text{sqrt}(cf^2 * t^2 / R^2 - 1) * \sin(eta)$ 
7       $p = \text{gamma}(R, theta, t, q, cf)$ 
8       $Pv = Pv + \text{reel}(\text{R}(p, q, C)) / (2 * pi * R) * deta$ 
9  fin pour
10 retourne  $Pv$ 

```

TAB. 13.1: Algorithme de calcul de  $\tilde{p}_v$

```

PRV( $x, y, z, h, t, dt, deta, C$ )
1  ( $r, theta, R$ ) = coor( $x, y, z, h$ )
2   $t0 = R/cf$ 
3   $Prv = 0$ 
4  si  $t > t0$  alors
5       $Nt = (t - t0)/dt$ 
6      pour  $i$  de 1 à  $Nt$  faire
7           $tau = t0 + (i - 1) * dt$ 
8           $Prv = Prv + \text{df}(t - tau) * \text{pv}(x, y, z, h, tau, deta, C)$ 
9      fin pour
10 fin si

```

TAB. 13.2: Algorithme de calcul de  $P_v^r$

$$\tilde{p}_t(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_f \text{ ou si } t_{2f} < t, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^{\frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)}} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}} \left( v_f^+(t, Qq_{0f}(t)), Qq_{0f}(t) \right) \right]}{\sqrt{Q^2 + 1}} dQ & \text{si } t_f < t < t_{0f}, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \int_1^{\frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)}} \frac{\Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}} \left( v_f^+(t, Qq_{0f}(t)), Qq_{0f}(t) \right) \right]}{\sqrt{Q^2 - 1}} dQ & \text{si } t_{0f} < t < t_{2f}. \end{cases}$$

Nous utilisons les changements de variable  $Q = \sinh \eta$  et  $Q = \cosh \eta$ , respectivement pour  $t_f < t < t_{0f}$  et pour  $t_{0f} < t < t_{2f}$  :

$$\tilde{p}_t(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_f \text{ ou si } t_{2f} < t, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^{\operatorname{argsh} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)}} \Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}} \left( v_f^+(t, q_{0f}(t) \sinh \eta), q_{0f}(t) \sinh \eta \right) \right] dQ & \text{si } t_f < t < t_{0f}, \\ \frac{1}{2\pi^2 R} \int_1^{\operatorname{argch} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)}} \Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}} \left( v_f^+(t, q_{0f}(t) \cosh \eta), q_{0f}(t) \cosh \eta \right) \right] d\eta & \text{si } t_{0f} < t < t_{2f}. \end{cases}$$

Finalement nous posons

$$\eta = \zeta \operatorname{argsh} \frac{q_1(t)}{q_{01}(t)}, \quad \text{et} \quad \eta(t) = \zeta \operatorname{argch} \frac{q_1(t)}{q_{01}(t)}$$

respectivement pour  $t_f < t < t_{0f}$  et pour  $t_{0f} < t < t_{2f}$  pour obtenir :

$$\tilde{p}_t(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_f \text{ ou si } t_{2f} < t, \\ \operatorname{argsh} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)} \int_0^1 \Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}} \left( v_f^+(t, \tilde{q}(t, \zeta)), \tilde{q}(t, \zeta) \right) \right] d\zeta & \text{si } t_f < t < t_{0f}, \\ \operatorname{argch} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)} \int_0^1 \Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}} \left( v_f^+(t, \hat{q}(t, \zeta)), \hat{q}(t, \zeta) \right) \right] d\zeta & \text{si } t_{0f} < t < t_{2f}, \end{cases}$$

avec

$$\tilde{q}(t, \zeta) = \cosh \left[ \operatorname{argch} \left( \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)} \right) \zeta \right] q_{0f}(t), \quad \text{et} \quad \hat{q}(t, \zeta) = \cosh \left[ \operatorname{argch} \left( \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)} \right) \zeta \right] q_{0f}(t).$$

Reprenons maintenant le calcul de  $P_v^r(x, y, z, t)$ .

Nous étudierons deux possibilités :

### 13.4 Considérations pratiques pour le calcul numérique.

1. si  $t_f < t < t_{0f}$ . On décompose l'intervalle  $[t_f ; t_{0f}]$  en  $Nt_1$  intervalles de même longueur  $dt_1$  et on calcule

$$P_t^r(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{Nt_1} \tilde{p}_t(x, y, z, t_f + (i-1)dt_1) f'(t - (t_f + (i-1)dt_1)) dt_1$$

2. si  $t_{0f} < t < t_{2f}$ . On décompose l'intervalle  $[t_f ; t_{0f}]$  en  $Nt_1$  intervalles de même longueur  $dt_1$  et l'intervalle  $[t_{0f} ; \min(t, t_{2f})]$  en  $Nt_2$  intervalles de même longueur  $dt_2$ . La difficulté réside dans le fait que les fonctions

$$\operatorname{argsh} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)} \quad \text{et} \quad \operatorname{argch} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)}$$

sont singulières en  $t_{0f}$ . On peut montrer qu'elles sont intégrables mais il est très difficile de calculer

$$\int_{t_{0f}-dt_1}^{t_{0f}} \operatorname{argsh} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)} \quad \text{et} \quad \int_{t_{0f}}^{t_{0f}+dt_2} \operatorname{argch} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)}.$$

C'est pour cette raison que nous approcherons respectivement ces deux intégrales par

$$\operatorname{argsh} \frac{q_f(t_{0f} - dt_1)}{q_{0f}(t_{0f} - dt_1)} dt_1 \quad \text{et} \quad \operatorname{argch} \frac{q_f(t_{0f} + dt_2)}{q_{0f}(t_{0f} + dt_2)} dt_2$$

tout en gardant à l'esprit que cette approximation n'est pas forcément très précise et qu'elle nécessitera de choisir un pas de temps plus petit qu'en dimension 2. On calculera donc :

$$\begin{aligned} P_t^r(x, y, z, t) &\simeq \sum_{i=1}^{Nt_1} \tilde{p}_t(x, y, z, t_f + (i-1)dt_1) f'(t - (t_f + (i-1)dt_1)) dt_1 \\ &+ \sum_{i=1}^{Nt_2} \tilde{p}_t(x, y, z, t_{0f} + idt_2) f'(t - (t_{0f} + idt_2)) dt_2. \end{aligned}$$

Si l'intervalle  $[0 ; 1]$  est décomposé en  $N_\zeta$  intervalles de même longueur  $d\zeta$ , on calculera

$$\tilde{p}_t(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{N_\zeta} \operatorname{argsh} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)} \Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}} \left( v_f^+(t, \tilde{q}(t, (i-1)d\zeta)), \tilde{q}(t, (i-1)d\zeta) \right) \right] d\zeta$$

si  $t < t_{0f}$  et

$$\tilde{p}_t(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{N_\zeta} \operatorname{argch} \frac{q_f(t)}{q_{0f}(t)} \Im m \left[ \tilde{\mathcal{R}} \left( v_f^+(t, \hat{q}(t, (i-1)d\zeta)), \hat{q}(t, (i-1)d\zeta) \right) \right] d\zeta$$

si  $t > t_{0f}$ .

L'algorithme de calcul de  $\tilde{p}_t(x, y, z, t)$  est décrit sur le tableau 13.3 et celui de  $P_t^r(x, y, z, t)$  est décrit sur le tableau 13.4.

```

PT( $x, y, z, h, t, deta, C, t0f$ )
1  ( $r, theta, R$ ) = coor( $x, y, z, h$ )
2   $Pt = 0$ 
3   $N = 1/dzeta$ 
4   $qf = qf(theta, R, cf, cp, t)$ 
5  si  $t < t0f$  alors
6     $q0f = \text{sqrt}(1 - cf^2 * t^2 / R^2)$ 
7    pour  $i$  de 1 à  $N$  faire
8       $zeta = (i - 1) * dzeta$ 
9       $q = \text{sinh}(\text{argsh}(qf/q0f) * zeta) * q0f$ 
10      $p = \text{upsilon}(R, theta, t, q, cf)$ 
11      $Pt = Pt + \text{imag}(R(p, q, C)) / (2 * pi * R) * deta$ 
12   fin pour
13 sinon
14    $q0f = \text{sqrt}(cf^2 * t^2 / R^2 - 1)$ 
15   pour  $i$  de 1 à  $N$  faire
16      $zeta = (i - 1) * dzeta$ 
17      $q = \text{cosh}(\text{argch}(qf/q0f) * zeta) * q0f$ 
18      $p = \text{upsilon}(R, theta, t, q, cf)$ 
19      $Pt = Pt + \text{imag}(R(p, q, C)) / (2 * pi * R) * deta$ 
20   fin pour
21 fin si
22 retourne  $Pt$ 

```

TAB. 13.3: Algorithme de calcul de  $\tilde{p}_t$

```

PRT( $x, y, z, h, t, dt1, dt2, dzeta, C, t0f$ )
1  ( $r, theta, R$ ) =  $coor(x, y, z, h)$ 
2   $t0 = R/cf$ 
3   $tf = tf(x, y, z, h, C)$ 
4   $t2f = t2f(x, y, z, h, C)$ 
5   $Prt = 0$ 
6  si  $t > tf$  alors
7     $Nt = (\min(t, t0f) - tf)/dt1$ 
8    pour  $i$  de 1 à  $Nt$  faire
9       $tau = tf + (i - 1) * dt1$ 
10      $Prt = Prt + df(t - tau) * pt(x, y, z, h, tau, dzeta, C, t0f)$ 
11   fin pour
12   si  $t > t0f$  alors
13      $Nt = (\min(t, t2f) - t0f)/dt2$ 
14     pour  $i$  de 1 à  $Nt$  faire
15        $tau = t2f + i * dt2$ 
16        $Prt = Prt + df(t - tau) * pt(x, y, z, h, tau, dzeta, C)$ 
17     fin pour
18   fin si
19 fin si

```

TAB. 13.4: Algorithme de calcul de  $P_v^r$

### 13.4.2 Calcul de $V_s$

#### 13.4.2.1 Calcul de $V_{sx}^P$

**Calcul de  $t_{0P}(q)$ , de  $\gamma_P^+(t)$  et de  $q_{0P}(t)$ .** Pour calculer  $t_{0P}(q)$  et  $\gamma_P^+(t, q)$  nous utiliserons les fonctions définies en dimension 2 :

$$t_{0P}(q) = t(r, z, h, cf(q), cP(q)) \quad \text{et} \quad \gamma_P^+(t, q) = \text{gamma}(r, z, h, t, cf(q), cP(q)).$$

Le calcul de  $q_{0P}(t)$  est plus compliqué. Contrairement au calcul de  $p$  il est difficile de définir  $q_{0P}(t)$  comme la racine d'un polynôme. En effet  $q_{0P}(t)$  est tel que  $\mathcal{F}_S(p, q_{0P}(t), t)$  admette une racine double, c'est-à-dire:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_S(\gamma_P^+(t, q), q_{0P}(t), t) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q), q_{0P}(t), t) = 0, \end{cases}$$

La difficulté est qu'il faut déterminer en même temps  $\gamma_P^+(t)$  et  $q_{0P}(t)$ . Pour contourner ce problème, nous avons choisi de déterminer  $q_{0P}(t)$  par tâtonnement :

1. on détermine une valeur approchée de  $q_{0P}(t)$  *a priori* par analogie avec le calcul de l'onde réfléchie :

$$\tilde{q}_{0P}(t) = \sqrt{\frac{c_P^2 t^2}{R^2} - 1};$$

2. on pose  $q = 0$ ;
3. On divise l'intervalle  $[0 ; \tilde{q}_{0P}(t)]$  en  $N$  intervalles de longueur  $dq$  ;
4. On pose  $q = q + dq$  et on détermine  $\gamma_P^+(t, q)$  et  $\gamma_P^-(t, q)$  alors :
  - (a) Si  $\Re e(\gamma_P^+(t, q)) > 0^{(60)}$  : on n'a pas encore trouvé, on repart au point 3.
  - (b) si  $\Re e(\gamma_P^+(t, q)) \simeq 0$  et  $\gamma_P^+(t, q) \simeq \gamma_P^-(t, q)^{(61)}$  : On a trouvé  $q_{0P}(t) = q$ , on s'arrête ici.
  - (c) Si  $\Re e(\gamma_P^+(t, q)) \simeq 0$  et  $\gamma_P^+(t, q) \neq \gamma_P^-(t, q)$  : on a été trop loin, il faut revenir au rang précédent :  $q = q - dq$  et choisir un pas plus petit, par exemple  $dq = dq/N$ . On peut alors repartir au point 2.

On appellera  $q_0(r, z, h, t, cf, cP)$  la fonction nous permettant de déterminer  $q_{0P}(t)$ .

**Calcul de  $V_{sx}^P$ .** Soit

$$\tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{0f}, \\ \frac{1}{2\pi^2 c_P} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{q_{0P}(t)} \Re e \left[ \frac{i\gamma_P^+(t, q) \mathcal{I}_P(\gamma_P^+(t, q), q)}{(1 + \gamma_P^+(t, q)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q), t, q)} \right] dq \right], & \text{si } t_{0P} < t. \end{cases}$$

Par analogie avec le calcul de l'onde de pression réfléchie nous utilisons successivement les changements de variable  $q = Qq_{0P}(t)$  puis  $Q = \sin \eta$  pour obtenir :

$$\tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{0f}, \\ \frac{q_{0P}(t)}{2\pi^2 c_P} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Re e \left[ \frac{i\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta) \tilde{\mathcal{I}}_P(\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta), q_{0P}(t) \sin \eta) \cos \eta}{(1 + \gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta), t, q_{0P}(t) \sin \eta)} \right] d\eta & \text{si } t_{0P} < t. \end{cases}$$

On vérifie alors facilement que :

$$\begin{cases} V_{sx}^P(x, y, z, t) = 0, & \text{si } t \leq t_{0S}, \\ V_{sx}^P(x, y, z, t) = \int_{t_{0P}}^t \tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, \tau) f'(t - \tau) d\tau, & \text{si } t > t_{0P}. \end{cases}$$

60. En fait supérieur à une certaine tolérance  $\varepsilon$ .

61. C'est-à-dire que la différence de leurs parties réelles est inférieure à la tolérance  $\varepsilon$ .

### 13.4 Considérations pratiques pour le calcul numérique.

```

VSXP( $x, y, z, h, t, deta, C$ )
1   $vsxp = 0$ 
2   $N = (pi/2)/deta$ 
3   $q0 = q0(r, z, h, t, cf, cP)$ 
4  pour  $i$  de 1 à  $N$  faire
5       $eta = (i - 1) * deta$ 
6       $q = q0 * \sin(eta)$ 
7       $p = \text{gamma}(r, z, h, t, cf(q), cP(q))$ 
8       $dfp = \text{deriveef}(x, z, h, cf(q), cP(q), tau, p)$ 
9       $a = i * p * \text{TP}(p, q, C) / (\text{sqrt}(1 + p^2) * dfp)$ 
10      $vsxp = vsxp + \text{reel}(a) * \cos(eta) / (2 * pi^2 * cP) * deta$ 
11 fin pour
12  $vsxp = q0 * vsxp$ 
13 retourne  $vsxp$ 

```

TAB. 13.5: Algorithme de calcul de  $\tilde{v}_{sx}^P$

Comme la fonction  $\tilde{p}_v$ , la fonction  $\tilde{v}_{sx}^P$  n'est pas singulière sur  $[t_{0P}, \infty]$ . Elle est cependant le produit d'une fonction singulière en  $t_{0P}$  :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Re e \left[ \frac{i\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta) \tilde{\mathcal{T}}_P(\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta), q_{0P}(t) \sin \eta) \cos \eta}{(1 + \gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta), t, q_{0P}(t) \sin \eta)} \right] d\eta,$$

par une fonction qui s'annule en  $t_{0P}$  :  $q_{0P}(t)$ . Cela ne pose pas de problème sur le plan mathématique mais il ne sera pas possible de calculer numériquement cette fonction en  $t_{0P}$ . C'est pourquoi nous approximerons plutôt  $V_{sx}^P(x, y, z, t)$  par :

$$V_{sx}^P(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{Nt} \tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, t_{0f} + idt) f'(t - (t_{0f} + idt)) dt$$

et  $\tilde{v}_{sx}^P$  sera calculée par

$$\tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, t) \simeq$$

$$\frac{q_{0P}(t)}{2\pi^2 c_P} \sum_{i=1}^N \Re e \left[ \frac{i\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta_i) \tilde{\mathcal{T}}_P(\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta_i), q_{0P}(t) \sin \eta_i) \cos \eta_i}{(1 + \gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta_i)^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{F}_P}{\partial p}(\gamma_P^+(t, q_{0P}(t) \sin \eta_i), t, q_{0P}(t) \sin \eta_i)} \right] d\eta$$

avec  $\eta_i = (i - 1)d\eta$  et  $Nd\eta = \pi/2$ . L'algorithme de calcul de  $\tilde{v}_{sx}^P(x, y, z, t)$  est décrit sur le tableau 13.5 et celui de  $V_{sx}^P(x, y, z, t)$  est décrit sur le tableau 13.2.

**Calcul de  $V_{sx}^S$ .** Le calcul de l'onde S de volume se fait sans difficulté, en utilisant l'algorithme du calcul de l'onde P et en remplaçant  $c_P$  par  $c_S$  et TP par TS. On s'intéressera donc

```

VPSX(x, y, z, h, t, dt, deta, C)
1  t0 = t(r, z, h, cf, cP)
2  Vpsx = 0
3  si t > t0 alors
4    Nt = (t - t0)/dt
5    pour i de 1 à Nt faire
6      tau = t0 + (i - 1) * dt
7      Vpsx = Vpsx + df(t - tau) * vsxp(x, y, z, h, tau, deta, C)
8    fin pour
9  fin si

```

TAB. 13.6: Algorithme de calcul de  $V_{sx}^P$ 

uniquement au calcul de l'onde de tête, on pose :

$$\tilde{v}_{sxt}^S(x, y, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_S \text{ ou si } t_{2S} < t, \\ \frac{1}{2\pi^2 c_S} \int_0^{q_{SP}(t)} \Re e \left[ \frac{iv_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq & \text{si } t_S < t < t_{0S}, \\ \frac{1}{2\pi^2 c_S} \int_{q_{0S}(t)}^{q_{SP}(t)} \Re e \left[ \frac{iv_S^+(t, q) \tilde{\mathcal{I}}_S(v_S^+(t, q), q)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q), t, q)} \right] dq & \text{si } t_{0S} < t < t_{2S}. \end{cases}$$

On a alors :

$$V_{sxt}^S(x, y, z, t) = \int_{t_f}^t \tilde{v}_{sxt}^S(x, y, z, \tau) f'(t - \tau) d\tau.$$

Comme pour le calcul de l'onde réfléchie, nous étudierons deux cas possibles :

1. Si  $t_S < t < t_{0S}$ . Alors on décompose l'intervalle  $[t_S ; t_{0S}]$  en  $Nt_1$  intervalles de même longueur  $dt_1$  et on calcule

$$V_{sxt}^S(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{Nt_1} \tilde{v}_{sxt}^S(x, y, z, t_S + (i - 1)dt_1) f'(t - (t_S + (i - 1)dt_1)) dt_1.$$

2. Si  $t_{0S} < t < t_{2S}$ . Alors on décompose l'intervalle  $[t_S ; t_{0S}]$  en  $Nt_1$  intervalles de même longueur  $dt_1$  et l'intervalle  $[t_{0S} ; \min(t, t_{2S})]$  en  $Nt_2$  intervalles de même longueur  $dt_2$ . Comme lors du calcul de l'onde réfléchie, pour éviter les problèmes causés par la

### 13.4 Considérations pratiques pour le calcul numérique.

singularité de  $\tilde{v}_{sxt}^S$  en  $t_{0S}$  nous calculerons :

$$V_{sxt}^S(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{Nt_1} \tilde{v}_{sxt}^S(x, y, z, t_S + (i-1)dt_1) f'(t - (t_S + (i-1)dt_1)) dt_1 \\ + \sum_{i=1}^{Nt_2} \tilde{v}_{sxt}^S(x, y, z, t_{0S} + idt_2) f'(t - (t_{0S} + idt_2)) dt_2.$$

Si  $t_S < t < t_{0S}$ , on décompose l'intervalle  $[0 ; q_{SP}(t)]$  en  $N_{q_1}$  intervalles de même longueur  $dq_1$ , et on calcule

$$\tilde{v}_{sxt}^S(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{N_{q_1}} \frac{1}{2\pi^2 c_S} \Re e \left[ \frac{iv_S^+(t, q_i) \tilde{\mathcal{T}}_S(v_S^+(t, q_i), q_i)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q_i), t, q_i)} \right] dq_1$$

avec  $q_i = (i-1)dq_1$ .

Si  $t_{0S} < t < t_{2S}$  on décompose l'intervalle  $[q_{0S}(t) ; q_{SP}(t)]$  en  $N_{q_1}$  intervalles de même longueur  $dq_1$  et on calcule

$$\tilde{v}_{sxt}^S(x, y, z, t) \simeq \sum_{i=1}^{N_{q_1}} \frac{1}{2\pi^2 c_S} \Re e \left[ \frac{iv_S^+(t, q_i) \tilde{\mathcal{T}}_S(v_S^+(t, q_i), q_i)}{\frac{\partial \mathcal{F}_S}{\partial p}(v_S^+(t, q_i), t, q_i)} \right] dq_1$$

avec  $q_i = q_{0S}(t) + (i-1)dq_1$ .

L'algorithme de calcul de  $\tilde{v}_{sxt}^S(x, y, z, t)$  est décrit sur le tableau 13.7 et celui de  $V_{sxt}^S(x, y, z, t)$  est décrit sur le tableau 13.8<sup>(62)</sup>.

---

62. Les fonctions  $q_{SP}(t)$ ,  $t_S$  et  $t_{2S}$  étant connues explicitement, nous supposons que leurs valeurs sont respectivement obtenues par des routines qSP, tS et t2S que nous ne détaillons pas ici.

```

VSXTS( $x, y, z, h, t, dq, C, t0S$ )
1   $vsxts = 0$ 
2   $q0 = q0(r, z, h, t, cf, cS)$ 
3   $qSP = qSP(r, z, h, t, cf, cS)$ 
4  si  $t < t0S$  alors
5     $N = qSP/dq$ 
6    pour  $i$  de 1 à  $N$  faire
7       $q = (i - 1) * dq$ 
8       $p = \text{gamma}(r, z, h, t, cf(q), cS(q))$ 
9       $dfp = \text{deriveef}(x, z, h, cf(q), cS(q), \text{tau}, p)$ 
10      $a = i * p * \text{TS}(p, q, C) / (\text{sqrt}(1 + p^2) * dfp)$ 
11      $vsxts = vsxtsp + \text{reel}(a) / (2 * \text{pi}^2 * cS) * dq$ 
12   fin pour
13 sinon
14    $N = (qSP - q0) / dq$ 
15   pour  $i$  de 1 à  $N$  faire
16      $q = q0 + (i - 1) * dq$ 
17      $p = \text{gamma}(r, z, h, t, cf(q), cS(q))$ 
18      $dfp = \text{deriveef}(x, z, h, cf(q), cS(q), \text{tau}, p)$ 
19      $a = i * p * \text{TS}(p, q, C) / (\text{sqrt}(1 + p^2) * dfp)$ 
20      $vsxts = vsxtsp + \text{reel}(a) / (2 * \text{pi}^2 * cS) * dq$ 
21   fin pour
22 fin si
23 retourne  $vsxts$ 

```

TAB. 13.7: Algorithme de calcul de  $\tilde{v}_{sxt}^S$

```

Vsxts( $x, y, z, h, t, dt1, dt2, dq, C$ )
1   $t0 = t(r, z, h, cf(q), cP(q))$ 
2   $tS = tS(x, y, z, h, C)$ 
3   $t2S = t2S(x, y, z, h, C)$ 
4   $Vsxts = 0$ 
5  si  $t > tS$  alors
6       $Nt = (\min(t, t0S) - tS) / dt1$ 
7      pour  $i$  de 1 à  $Nt$  faire
8           $tau = tS + (i - 1) * dt1$ 
9           $Vsxts = Vsxts + df(t - tau) * vsxts(x, y, z, h, tau, dq, C, t0)$ 
10     fin pour
11     si  $t > t0S$  alors
12          $Nt = (\min(t, t2S) - t0S) / dt2$ 
13         pour  $i$  de 1 à  $Nt$  faire
14              $tau = t0S + i * dt2$ 
15              $Vsxts = Vsxts + df(t - tau) * vsxts(x, y, z, h, tau, dq, C, t0)$ 
16         fin pour
17     fin si
18 fin si

```

TAB. 13.8: Algorithme de calcul de  $V_{st}^S$



# Index

- B**
- Bien posé, caractère ..... 209
- C**
- Cagniard-de Hoop,  
 - contour de ..... 261, 278, 281  
 - méthode de,  
 - en 3d ..... 333
- Cagniard-de Hoop,  
 - contour de ..... 170
- CFL, condition ..... 21, 70, 71
- Conditions aux Limites Absorbantes .. 103  
 - d'Engquist-Majda ..... 103  
 - de Higdon ..... 109
- Couches Parfaitement Adaptées ..... voir  
 Perfectly Matched Layers
- D**
- Dirichlet to Neumann ..... 104
- E**
- Élément fini,  
 -  $Q_1^{div} - Q_0$  ..... 37
- Élément fini,  
 -  $Q_k$  ..... 43  
 - courbe ..... 49
- Équations  
 - de dispersion ..... 204  
 - de l'élastodynamique ..... 25  
 - de l'acoustique ..... 28  
 - de l'acoustique en écoulement ... 199  
 - des ondes advectives ..... 203
- F**
- Formulation variationnelle  
 - duale ..... 29  
 - primale ..... 29
- Formulation variationnelle  
 - duale ..... 27  
 - duale-duale ..... 32
- L**
- Lagrange, multiplicateur de ..... 22
- Lenteur ..... 206
- Lenteur  
 - courbe de ..... 205
- M**
- Mach, nombre de ..... 201
- Maillage non conforme ..... 21
- O**
- Ondes  
 - de compression ..... 21  
 - advectives ..... 204  
 - de vortacité ..... 204  
 - de cisaillement ..... 21  
 - L ..... voir ondes de compression  
 - longitudinales ..... voir ondes de  
 compression  
 - P ..... voir ondes de compression  
 - S ..... voir ondes de cisaillement  
 - shear ..... voir ondes de cisaillement  
 - T ..... voir ondes de cisaillement  
 - transverses ..... voir ondes de  
 cisaillement
- P**
- Pas de temps local ..... 21, 71
- Perfectly Matched Layers ..... 103, 116
- S**
- Stabilité ..... 209
- Subsonique ..... 201
- Supersonique ..... 201
- T**
- Transsonique ..... 201

## INDEX

---

### V

Vitesse de groupe.....	205
Vitesse de phase.....	205

# Index des citations

- A**  
Abarbanel, S. .... 118, 124  
Achdou, Y. .... 22  
Alpert, B. .... 103  
Auriault, L. .... 118, 227
- B**  
Baker, G. .... 108  
Barnes, C. .... 19  
Barucq, H. .... 124  
Bécache, E. .... 118, 119, 124  
Ben Belgacem, F. .... 22  
Bérenger, J. P. .... 103, 116, 118  
van den Berg, P. .... 124  
Bernardi, C. .... 22  
Bescond, C. .... 333  
Bonnet-Ben Dhia, A.-S. .... 122, 123  
Bossy, E. .... 9, 19, 20, 91, 96
- C**  
Cagniard, L. .... 124, 257, 292, 416  
Cambuli, F. .... 118, 227  
Cangellaris, A. C. .... 117, 118, 212  
Ciarlet, P. G. .... 58  
Cohen, G. C. .... 19  
Collino, F. .... 76, 84, 109, 118, 119
- D**  
Derveaux, G. .... 19  
Deschamps, M. .... 333  
Diaz, J. .... 19, 101, 227  
Doležel, I. .... 49  
Duong, T. H. .... 109, 110  
Duwig, V. .... 30
- E**  
Engquist, B. .... 103, 104, 110, 113, 124  
Ezziani, A. .... 19
- F**  
Faille, I. .... 22
- Fauqueux, S. ... 19, 23, 35, 44, 70, 84, 118,  
119, 207, 210  
Fouquet, T. .... 76
- G**  
Gajewski, R. .... 333  
Gander, M. J. .... 21  
Gedney, S. .... 124  
Givoli, D. .... 103  
Gottlieb, D. .... 118, 124  
Greengard, L. .... 103  
Grimal, Q. .... 259, 333  
Gröte, M. J. .... 103
- H**  
Hagström, T. .... 103, 115, 227  
Halpern, L. .... 21, 108, 109, 115, 124  
Hamdi, M. .... 19  
Hesthaven, J. S. .... 124, 212, 227  
Higdon, R. L. .... 105, 109  
van der Hijden, J. H. M. T. 124, 255, 259,  
292, 333, 335  
Hirschberg, A. .... 199  
Hohage, T. .... 120  
de Hoop, A. T. .... 124, 257, 333, 335  
Hu, F. Q. .... 118, 119, 206, 227
- J**  
Japhet, C. .... 22  
Joly, P. ... 19, 26, 27, 42, 71, 76, 101, 109,  
110, 118, 119, 207, 210, 227  
Jordan, C. .... 134, 265
- K**  
Keller, J. B. .... 103  
Komatitsch, D. .... 19  
Kreiss, H.-O. .... 118, 208, 209, 212
- L**  
Lassas, M. .... 120

## Index des Citations

---

Laugier, P. .... 19  
Lavaud, B. .... 109  
Legendre, G. .... 122, 123  
Lions, J.-L. .... 227  
Lorenz, J. .... 118, 208, 209, 212  
Lu, Y. .... 109

### M

Maday, Y. .... 22  
Majda, A. .... 103, 104, 110, 113  
McLaughlin, J. .... 109  
Métral, J. .... 227  
Monk, P. .... 118, 119  
Mourad, A. .... 333

### N

Nataf, F. .... 21, 22  
Nazarov, I. .... 227

### O

Ousset, Y. .... 19

### P

Pao, Y. .... 333  
Patera, A. T. .... 22  
Petropoulos, P. G. .... 124  
Poncelet, O. .... 259

### R

Rauch, J. .... 115  
Remis, F. .... 124  
Rienstra, S. .... 199  
Rodríguez, J. .... 19, 21, 53, 56, 65, 71, 75

### S

Saas, L. .... 22  
Schmidt, F. .... 120  
Segeth, K. .... 49  
Šolín, P. .... 49  
Somersalo, E. .... 120

### T

Talmant, M. .... 19  
Tam, C. K. W. .... 118, 227  
Trefethen, L. N. .... 109  
Tromp, J. .... 19  
Tsogka, C. .... 19, 23, 35, 37, 84, 118

### V

Vacus, O. .... 227

Verchery, G. .... 19  
Virieux, J. .... 20

### W

Watson, G. N. .... 134, 265  
Whittaker, E. T. .... 134, 265  
Willien, F. .... 22

### Z

Zhao, L. .... 117, 118, 212  
Zschiedrich, L. .... 120

# Références

- [1] **S. Abarbanel et D. Gottlieb.** A mathematical analysis of the PML method. *J. Comput. Phys.* 134, 2 (1997), 357–363.
- [2] **S. Abarbanel, D. Gottlieb et J. S. Hesthaven.** Long time behavior of the perfectly matched layer equations in computational electromagnetics. *SIAM J. Scientific Comp.* 17, 1-4 (2002), 405–422.
- [3] **Y. Achdou, C. Japhet, Y. Maday et F. Nataf.** A new cement to glue non-conforming grids with Robin interface conditions: the finite volume case. *Numer. Math.* 92, 4 (2002), 593–620.
- [4] **B. Alpert, L. Greengard et T. Hagström.** Rapid evaluation of nonreflecting boundary kernels for the time-domain wave equation. *SIAM J. Numer. Anal.* 37 (2000), 1138–1164.
- [5] **B. Alpert, L. Greengard et T. Hagström.** Nonreflecting boundary conditions for the time-dependent wave equation. *J. Comput. Phys.* 180 (2002), 270–296.
- [6] **G. Baker.** Essentials of Padé approximants. Academic Press (New York), 1975.
- [7] **H. Barucq.** A new family of first-order boundary conditions for the Maxwell system: derivation, well-posedness and long-time behavior. *J. Math. Pures Appl.* 9, 1 (2003), 67–88.
- [8] **E. Bécache, A.-S. Bonnet-Ben Dhia et G. Legendre.** Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation. *SIAM J. Numer. Anal.* 42, 1 (2004), 409–433 (electronic).
- [9] **E. Bécache, S. Fauqueux et P. Joly.** Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. *J. Comput. Phys.* 188, 2 (2003), 399–433.
- [10] **E. Bécache et P. Joly.** On the analysis of Bérenger’s perfectly matched layers for Maxwell’s equations. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* 36, 1 (2002), 87–119.
- [11] **E. Bécache, P. G. Petropoulos et S. Gedney.** On the long-time behavior of unsplit perfectly matched layers. 4538, INRIA, 2002.
- [12] **F. Ben Belgacem.** The mortar finite element method with Lagrange multipliers. *Numer. Math.* 84, 2 (1999), 173–197.
- [13] **J. P. Bérenger.** A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. of Comp. Phys.* 114 (1994), 185–200.

## Bibliographie

---

- [14] **J. P. Bérenger**. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. of Comp. Phys.*, 127 (1996), 363–379.
- [15] **C. Bernardi, Y. Maday et A. T. Patera**. A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method. In *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. XI (Paris, 1989–1991)*, vol. 299 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.* Longman Sci. Tech., Harlow, 1994, pp. 13–51.
- [16] **C. Bescond et M. Deschamps**. Dynamical surface response of a semi-infinite anisotropic elastic medium to an impulsive force. *J. Acoust. Soc. Am.* 103, 1 (januar 1998), 114–24.
- [17] **E. Bossy**. Evaluation ultrasonore de l'os cortical par transmission axiale : modélisation et expérimentation *in vitro* et *in vivo*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2003.
- [18] **E. Bossy, M. Talmant et P. Laugier**. Effect of bone cortical thickness on velocity measurements using ultrasonic axial transmission: A 2d simulation study. *J. Acoust. Soc. Am.* 112, 1 (Juillet 2002), 297–307.
- [19] **L. Cagniard**. Réflexion et réfraction des ondes sismiques progressives. Gauthier-Villard, 1939.
- [20] **L. Cagniard**. Reflection and refraction of progressive seismic waves. McGraw-Hill, 1962. traduit de [19].
- [21] **P. G. Ciarlet**. The finite element method for elliptic problems, vol. 40 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.
- [22] **G. C. Cohen**. Higher-order numerical methods for transient wave equations. Scientific Computation. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Préface de R. Glowinski.
- [23] **G. C. Cohen et S. Fauqueux**. Mixed finite elements with mass-lumping for the transient wave equation. *J. Comput. Acoust.* 8, 1 (2000), 171–188. Finite elements for wave problems (Trieste, 1999).
- [24] **F. Collino, T. Fouquet et P. Joly**. Conservative space time mesh refinement methods for the FDTD solution of maxwell's equations. Soumis à JCP.
- [25] **F. Collino et B. Lavaud**. Peut-on obtenir des amplitudes correctes avec les équations paraxiales ? 3004, INRIA, Octobre 1996.
- [26] **F. Collino et P. Monk**. Conditions et couches absorbantes pour les équations de Maxwell. In *Aspects récents en méthodes numériques pour les équations de Maxwell*, G. Cohen et P. Joly, Eds., Ecole des Ondes. INRIA, Rocquencourt, 1998, ch. 4.
- [27] **F. Collino et P. Monk**. The Perfectly Matched Layer in curvilinear coordinates. *SIAM J. Scient. Comp.* 164 (1998), 157–171.
- [28] **F. Collino et C. Tsogka**. Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics* 66, 1 (2001), 294–307.

- 
- [29] **G. Derveaux**. Modélisation numérique de la guitare acoustique. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 2002.
- [30] **J. Diaz et P. Joly**. An analysis of higher boundary conditions for the wave equation. À paraître dans SIAP.
- [31] **J. Diaz et P. Joly**. Robust high order non conforming finite element formulation for time domain fluid-structure interaction. À paraître dans JCA.
- [32] **J. Diaz et P. Joly**. A time domain analysis of pml models in acoustics. Soumis à CMAME.
- [33] **J. Diaz et P. Joly**. Éléments finis d'ordre élevé pour le couplage fluide-structure. In *Étude de la propagation ultrasonore en milieux non homogènes en vue du contrôle non destructif* (décembre 2003), GDR-US 2501, pp. 71–80. Aussois.
- [34] **J. Diaz et P. Joly**. Stabilized perfectly matched layer for advective acoustics. In *The Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (Waves 2003)* (juillet 2003), pp. 115–119. Jyväskylä.
- [35] **T. H. Duong et P. Joly**. On the stability analysis of boundary conditions for the wave equation by energy methods; Part I : The homogeneous case . *Math. of Comp.* 62, 206 (1994), 539–563.
- [36] **V. Duwig**. Raffinement de maillage pour le couplage fluide-structure. Mémoire de DEA, EDF-Ensta-Paris 6, 2001.
- [37] **B. Engquist et L. Halpern**. Far field boundary conditions for computation over long time. *Appl. Numer. Math.* 4, 1 (1988), 21–45.
- [38] **B. Engquist et L. Halpern**. Long-time behaviour of absorbing boundary conditions. *Math. Methods Appl. Sci.* 13, 3 (1990), 189–203.
- [39] **B. Engquist et A. Majda**. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp* 31 (1977), 629–651.
- [40] **B. Engquist et A. Majda**. Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations. *Comm. Pure Appl. Math.* 32 (1979), 314–358.
- [41] **A. Ezziani**. Modélisation mathématique et numérique de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques et poroélastiques. Thèse de doctorat, Université Paris 9, 2005.
- [42] **S. Fauqueux**. Éléments finis spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d'ondes élastiques en milieu transitoire. Thèse de doctorat, Université Paris IX-Dauphine, 2003.
- [43] **M. J. Gander, L. Halpern et F. Nataf**. Optimal Schwarz waveform relaxation for the one dimensional wave equation. *SIAM J. Numer. Anal.* 41, 5 (2003), 1643–1681 (electronic).
- [44] **D. Givoli**. Exact and high order non-reflecting computational boundaries. In *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, G. Cohen, E. Heikkola, P. Joly, et P. Neittanmaki, Eds. Springer, 2003, pp. 1–42.

## Bibliographie

---

- [45] **Q. Grimal**. Étude dans le domaine temporel de la propagation d'ondes élastiques en milieux stratifiés ; modélisation de la réponse du thorax à un impact. Thèse de doctorat, Université Paris XII-Val de Marne, 2003.
- [46] **M. J. Grote et J. B. Keller**. Exact nonreflecting boundary conditions for the time dependent wave equation. *SIAM J. Appl. Math.* 55 (1995), 280–297.
- [47] **M. J. Grote et J. B. Keller**. Nonreflecting boundary conditions for time dependent scattering. *J. Comp. Physics* 127 (1996), 52–81.
- [48] **T. Hagström**. On the convergence of local approximations to pseudo-differentials operators. In *Proceedings of the 3rd Int. Conference on Mathematical and Numerical aspects of Wave Propagation Phenomena*, E. Bécache, G. Cohen, P. Joly, et J. Roberts, Eds. SIAM, 1995, pp. 474–482.
- [49] **T. Hagström**. On high-order radiation boundary conditions. In *IMA Vol. on Computational Wave Propagation*, B. Engquist et G. A. Kriegsmann, Eds. Springer-Verlag, 1996, pp. 1–21.
- [50] **T. Hagström**. Radiation boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Acta Numerica* 8 (1999), 47–106.
- [51] **T. Hagström**. New results on absorbing layers and radiation boundary conditions. In *Topics in Computational Wave Propagation - Direct and Inverse Problems*, M. Ainsworth, P. Davies, D. Duncan, P. Martin, et B. Rynne, Eds., Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer, 2003, pp. 1–42.
- [52] **T. Hagström et I. Nazarov**. Absorbing layers and radiation boundary condition for jet flow simulations. Technical Report AIAA 2002-2606, AIAA, 2002.
- [53] **L. Halpern**. Approximation paraxiales et conditions aux limites absorbantes. Thèse d'état, Université ParisVI, 1986.
- [54] **L. Halpern et J. Rauch**. Error analysis for absorbing boundary conditions. *Numer. Math.* 51 (1987), 459–467.
- [55] **M. Hamdi, Y. Ousset et G. Verchery**. A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems. *International J. for Num. Meth. in Eng.* 13 (1978), 139–150.
- [56] **J. S. Hesthaven**. On the analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized Euler equations. *J. Comput. Phys.* 142, 1 (1998), 129–147.
- [57] **R. L. Higdon**. Initial boundary value problems for linear hyperbolic systems. *SIAM Review* 28, 2 (1986), 177–217.
- [58] **R. L. Higdon**. Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation. *Math. Comp.* 4 (1987), 65–90.
- [59] **J. H. M. T. van der Hijden**. Propagation of transient elastic waves in stratified anisotropic media, vol. 32 of *North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*. Elsevier Science Publishers, 1987.

- 
- [60] **T. Hohage, F. Schmidt et L. Zschiedrich.** Solving time-harmonic scattering problems based on the pole condition. II. Convergence of the PML method. *SIAM J. Math. Anal.* 35, 3 (2003), 547–560 (electronic).
- [61] **A. T. de Hoop.** The surface line source problem. *Appl. Sci. Res. B* 8 (1959), 349–356.
- [62] **A. T. de Hoop, P. van den Berg et F. Remis.** Analytic time-domain performance analysis of absorbing boundary conditions and perfectly matched layers. In *Proc. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium* (2001), vol. 4, pp. 502–505.
- [63] **F. Q. Hu.** On absorbing boundary conditions for linearized euler equations by a perfectly matched layer. *J. Comp. Phys.*, 129 (1996), 201.
- [64] **F. Q. Hu.** A stable, perfectly matched layer for linearized Euler equations in unsplit physical variables. *J. Comp. Phys.* 173, 2 (2001), 455–480.
- [65] **P. Joly.** Variational methods for time-dependent wave propagation problems. In *Topics in Computational Wave Propagation, Direct and Inverse Problems*. LNCSE, 2003, pp. 201–264.
- [66] **C. Jordan.** Cours d’analyse de l’école polytechnique, 3 ed., vol. 2. Gauthier-Villars, 1909-1915, pp. 285–286.
- [67] **D. Komatitsch, C. Barnes et J. Tromp.** Wave propagation near a fluide-solide interface : A spectral-element approach. *Geophysics* 65, 2 (2000), 623–631.
- [68] **H. O. Kreiss.** Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. Pure Appl. Math.* 23 (1970), 277–298.
- [69] **H.-O. Kreiss et J. Lorenz.** Initial boundary value problems and the Navier-Stokes equations. In *Pure and Appl. Math.*, A. Press, Ed., vol. 136. Academic Press, Boston, USA, 1989.
- [70] **M. Lassas et E. Somersalo.** On the existence and convergence of the solution of PML equations. *Computing* 60, 3 (1998), 229–241.
- [71] **J.-L. Lions, J. Méttral et O. Vacus.** Well-posed absorbing layer for hyperbolic problems. *Numer. Math.* 92, 3 (2002), 535–562.
- [72] **Y. Lu et J. McLaughlin.** Spectral analysis of the parabolic equation method. , Department of Mathematical Sciences, Rensselaer Polytechnic Institute Troy, NY 12180, 1995.
- [73] **A. Mourad et M. Deschamps.** Lamb’s problem for an anisotropic half-space studied by the cagniard de hoop method. *J. Acoust. Soc. Am.* 97, 5 (May 1995), 3194–7.
- [74] **Y. Pao et R. Gajewski.** The generalized ray theory and transient respons of layered elastic solids. Academic Press, New York and London, 1977.
- [75] **O. Poncelet.** Réponse transitoire à une source impulsionnelle en espace en milieu anisotrope. Calcul de fonctions de Green par la méthode de Cagniard-de Hoop. In *Ondes élastiques dans les solides, Cours de l’Ecole des ondes*. INRIA, 2001, pp. 277–330.

## Bibliographie

---

- [76] **S. Rienstra et A. Hirschberg.** An introduction to acoustics. Disponible en ligne sur <http://www.win.tue.nl/~sjoerdr/papers/boek.pdf>, Eindhoven University of Technology.
- [77] **J. Rodríguez.** Raffinement de maillage spatio-temporel pour les equations de l'elastodynamique. Thèse de doctorat, Université Paris IX-Dauphine, En préparation.
- [78] **L. Saas, I. Faille, F. Nataf et F. Willien.** Domain decomposition for a finite volume method on non-matching grids. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 338, 5 (2004), 407–412.
- [79] **P. Šolín, K. Segeth et I. Doležal.** Higher-order finite element methods. Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [80] **C. K. W. Tam, L. Auriault et F. Cambuli.** Perfectly matched layer as an absorbing boundary condition for the linearized Euler equations in open and ducted domains. *J. Comput. Phys.* 144, 1 (1998), 213–234.
- [81] **L. N. Trefethen et L. Halpern.** Well-posedness of one-way wave equations and absorbing boundary conditions. *Math. Comp.* 47, 176 (1986), 421–435.
- [82] **C. Tsogka.** Modélisation mathématique et numérique de la propagation des ondes élastiques tridimensionnelles dans des milieux fissurés. Thèse de doctorat, Université Paris IX-Dauphine, 1999.
- [83] **J. Virieux.** Sh wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method. *Geophysics* 49, 11 (1984), 1933–1957.
- [84] **J. Virieux.** P-sv wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method. *Geophysics* 51, 4 (1986), 889–901.
- [85] **E. T. Whittaker et G. N. Watson.** A course in modern analysis, 4th ed. Cambridge University Press, 1990, pp. 115–117.
- [86] **L. Zhao et A. C. Cangellaris.** A general approach for the development of unsplit-field time-domain implementations of perfectly matched layers for FDTD grid truncation. *IEEE Microwave and Guided Letters* 6, 5 (May 1996).



## Résumé

Dans la première partie nous présentons deux méthodes numériques non conformes espace-temps pour la propagation d'ondes en interaction fluide-structure. Ces méthodes, robustes et précises, sont basées sur deux formulations mixtes dites duale-duale et primale-primale. Elles sont explicites, sauf à l'interface, et conservatives, ce qui en assure la stabilité. Nous les validons à l'aide de solutions analytiques calculées par la méthode de Cagniard-de Hoop (CdH). Dans la deuxième partie nous obtenons, via la méthode CdH, des estimations d'erreur pour l'utilisation de conditions aux limites absorbantes (CLA) ou couches absorbantes parfaitement adaptées (PML) pour la résolution de l'équation des ondes dans le demi-espace. La troisième partie est consacrée aux PMLs pour l'acoustique en écoulement: analyse (par CdH) de l'instabilité des PMLs classiques et construction de PMLs stabilisées. La dernière partie consiste en une présentation mathématique détaillée de la méthode CdH.

**Mots clés :** acoustique, élastodynamique, aéroacoustique, couplage fluide-structure, conditions aux limites absorbantes, couches absorbantes parfaitement adaptées, méthode de Cagniard-de Hoop.

## Abstract

In the first part we present two numerical methods for solving time-dependent fluid-structure interaction problem. These methods, robust and accurate, are based on mixed formulations known as dual-dual and primal-primal. They are explicit, but on the interface, and conservative, which ensures their stability. They are validated thanks to analytical solutions calculated by the Cagniard de Hoop method. In the second part, we obtain, via the Cagniard de Hoop method, error estimates for the use of absorbing boundary conditions (ABC) and perfectly matched layers (PML) for time-domain acoustics. The third part is devoted to the PML for advective acoustics: analysis via the Cagniard-de Hoop method and construction of stabilized PMLs. The last part is a detailed mathematical presentation of the Cagniard-de Hoop method.

**Key words :** acoustics, elastodynamics, aeroacoustics, fluid-structure coupling, absorbing boundary conditions, perfectly matched layers, Cagniard-de Hoop method.