



**HAL**  
open science

# Méthodes à haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusoides modulées. Application aux signaux de musique

Roland Badeau

► **To cite this version:**

Roland Badeau. Méthodes à haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusoides modulées. Application aux signaux de musique. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Télécom ParisTech, 2005. Français. NNT: . tel-00009321

**HAL Id: tel-00009321**

**<https://pastel.hal.science/tel-00009321>**

Submitted on 26 May 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Doctorale  
d'Informatique,  
Télécommunications  
et Électronique de Paris

# Thèse

présentée pour obtenir le grade de docteur  
de l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications  
Spécialité : Signal et Images

**Roland BADEAU**

Méthodes à haute résolution pour l'estimation  
et le suivi de sinusoïdes modulées.  
Application aux signaux de musique.

Soutenue le 18 avril 2005 devant le jury composé de

Pierre Comon  
Sylvie Marcos  
Philippe Depalle  
Yves Grenier  
Karim Abed-Meraim  
Gaël Richard  
Bertrand David

Président  
Rapporteurs  
  
Examineurs  
  
Directeurs de thèse



*Je dédie ce mémoire  
à mes parents et à Magali*



# Remerciements

Je remercie avant tout mes directeurs de thèse, Gaël Richard et Bertrand David, qui m'ont apporté leur compétence scientifique et se sont montrés présents et disponibles pendant toute cette période. Ils ont su accompagner mon travail tout en m'accordant la liberté d'approfondir les thèmes de recherche qui me tenaient à coeur.

Je remercie aussi Henri Maître et Yves Grenier, qui m'ont accueilli au sein du département de Traitement du Signal et des Images (TSI) de l'ENST, dans un environnement très favorable à la réussite de ces travaux de recherche.

Je remercie également les autres membres du jury de m'avoir fait l'honneur de participer à ma soutenance : Pierre Comon, président du jury, Sylvie Marcos et Philippe Depalle, rapporteurs, et enfin Yves Grenier et Karim Abed-Meraim, examinateurs.

L'idée originale d'appliquer les méthodes à haute résolution aux signaux de musique m'a été suggérée par Bertrand David, qui les avait lui-même utilisées dans sa thèse de doctorat pour étudier les vibrations acoustiques en atmosphère raréfiée. Ces méthodes font partie des compétences développées au sein du département TSI depuis un certain nombre d'années, en particulier dans les équipes TSAC, AAO et COD.

Pendant la première période de ma thèse, Rémy Boyer m'a apporté son expérience des méthodes à haute résolution qu'il avait acquise dans le cadre du codage audio.

Karim Abed-Meraim a également été un interlocuteur privilégié, qui m'a fait partager ses connaissances dans le domaine des techniques de poursuite de sous-espace.

Ma collaboration avec Miguel Alonso a conduit au développement d'un algorithme original d'estimation du tempo musical.

Je remercie aussi tous les enseignants-chercheurs du département TSI avec lesquels j'ai échangé quelques fructueuses conversations, notamment Maurice Charbit et Jacques Prado, sans oublier les nombreux thésards avec lesquels j'ai pu partager quelques moments de distraction pendant ces trois années de dur labeur.

Enfin, parvenir au terme de cette aventure aurait été plus difficile sans le soutien bienveillant et chaleureux de ma famille et de mes proches.

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| Remerciements   | i         |
| Table des matières  | ii        |
| Table des figures   | vii       |
| Liste des tableaux  | ix        |
| Acronymes   | x         |
| Notations   | xii       |
| Introduction  | 1         |
| <b>Partie I Modèle de signal et méthodes d'estimation</b>                         | <b>7</b>  |
| <b>I État de l'art des méthodes à haute résolution</b>                            | <b>9</b>  |
| I.1 Introduction . . . . .  | 10        |
| I.2 Modèle de signal . . . . .  | 10        |
| I.3 Méthode du maximum de vraisemblance . . . . .                                 | 11        |
| I.3.1 Application du principe du maximum de vraisemblance au modèle ESM . . .     | 12        |
| I.3.2 Maximum de vraisemblance et résolution de Fourier . . . . .                 | 13        |
| I.4 Méthodes à haute résolution . . . . .   | 14        |
| I.4.1 Techniques de prédiction linéaire . . . . .                                 | 14        |
| I.4.2 Méthodes sous-espace . . . . .  | 17        |
| I.5 Estimation des autres paramètres . . . . .                                    | 20        |
| I.5.1 Estimation de l'ordre de modélisation . . . . .                             | 20        |
| I.5.2 Estimation des amplitudes, des phases et de l'écart-type du bruit . . . . . | 21        |
| I.6 Performances des estimateurs . . . . .  | 21        |
| I.6.1 Borne de Cramer-Rao . . . . .   | 21        |
| I.6.2 Performances des méthodes HR . . . . .                                      | 23        |
| I.7 Conclusion . . . . .  | 24        |
| <b>II Estimation des paramètres dans le cas de pôles multiples</b>                | <b>25</b> |
| II.1 Introduction . . . . .   | 26        |
| II.2 Le modèle <i>Polynomial Amplitude Complex Exponentials</i> . . . . .         | 26        |
| II.2.1 Equations de récurrence linéaires et homogènes . . . . .                   | 26        |
| II.2.2 Polynômes binomiaux . . . . .  | 27        |
| II.2.3 Paramétrisation complète du modèle de signal . . . . .                     | 27        |

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| II.3       | Les matrices de Pascal-Vandermonde . . . . .  | 28        |
| II.4       | Méthode du maximum de vraisemblance . . . . .   | 30        |
| II.5       | Généralisation de l'algorithme ESPRIT . . . . .   | 31        |
| II.5.1     | Structure singulière de la matrice de données . . . . .                                     | 31        |
| II.5.2     | Structure singulière de la matrice de corrélation . . . . .                                 | 33        |
| II.5.3     | L'algorithme ESPRIT généralisé . . . . .  | 33        |
| II.6       | Estimation des amplitudes, des phases et de l'écart-type du bruit . . . . .                 | 34        |
| II.7       | Conclusion . . . . .  | 34        |
| <b>III</b> | <b>Performances de l'algorithme ESPRIT généralisé</b>                                       | <b>35</b> |
| III.1      | Introduction . . . . .  | 36        |
| III.2      | Bornes de Cramér-Rao . . . . .  | 36        |
| III.2.1    | Bornes de Cramér-Rao pour le modèle PACE . . . . .  | 36        |
| III.2.2    | Bornes de Cramér-Rao asymptotiques . . . . .  | 38        |
| III.3      | Etude des perturbations et de la performance des estimateurs . . . . .                      | 39        |
| III.3.1    | Perturbations induites par le bruit additif . . . . .                                       | 39        |
| III.3.2    | Performance des estimateurs . . . . .   | 44        |
| III.4      | Simulations numériques . . . . .  | 47        |
| III.4.1    | Modèle de signal réel . . . . .   | 48        |
| III.4.2    | Modulation d'amplitude polynomiale . . . . .  | 49        |
| III.4.3    | Modulation d'amplitude et de fréquence . . . . .  | 49        |
| III.5      | Conclusion . . . . .  | 50        |
| <b>IV</b>  | <b>Estimation de l'ordre de modélisation</b>  | <b>53</b> |
| IV.1       | Introduction . . . . .  | 54        |
| IV.2       | Impact d'un ordre de modélisation erroné . . . . .  | 54        |
| IV.2.1     | Sur-estimation de l'ordre du modèle . . . . .   | 54        |
| IV.2.2     | Sous-estimation de l'ordre du modèle . . . . .  | 55        |
| IV.3       | Sélection d'un ordre de modélisation approprié reposant sur l'erreur d'estimation . . . . . | 56        |
| IV.3.1     | Calcul récursif de $\Phi(p)$ . . . . .  | 57        |
| IV.3.2     | Calcul récursif de $E(p)$ . . . . .   | 58        |
| IV.4       | Simulations numériques . . . . .  | 59        |
| IV.4.1     | Pertinence des bornes d'erreur a priori et a posteriori . . . . .                           | 59        |
| IV.4.2     | Sélection de l'ordre du modèle pour un signal synthétique . . . . .                         | 60        |
| IV.4.3     | Comparaison statistique des performances . . . . .  | 62        |
| IV.4.4     | Sélection de l'ordre du modèle pour un signal de musique . . . . .                          | 63        |
| IV.5       | Conclusion . . . . .  | 64        |
| <b>V</b>   | <b>Optimisation de l'algorithme d'estimation</b>  | <b>67</b> |
| V.1        | Introduction . . . . .  | 68        |
| V.2        | Estimation de l'espace signal . . . . .   | 68        |
| V.2.1      | Algorithme d'itération orthogonale . . . . .  | 69        |
| V.2.2      | Produit matriciel rapide . . . . .  | 70        |
| V.3        | Optimisation des autres étapes . . . . .  | 71        |
| V.3.1      | Calcul de la matrice spectrale . . . . .  | 71        |
| V.3.2      | Estimation des amplitudes . . . . .   | 72        |
| V.4        | Conclusion . . . . .  | 73        |



|                  |   |            |
|------------------|---|------------|
| <b>Partie II</b> | <b>Algorithmes rapides de poursuite des paramètres</b>                                      | <b>75</b>  |
| <b>VI</b>        | <b>Etat de l'art des techniques de poursuite de l'espace signal et des pôles</b>            | <b>77</b>  |
| VI.1             | Introduction . . . . .  | 78         |
| VI.2             | Poursuite de l'espace signal . . . . .  | 78         |
| VI.2.1           | Étude préliminaire . . . . .  | 78         |
| VI.2.2           | Méthode des puissances itérées . . . . .  | 80         |
| VI.2.3           | Algorithmes adaptatifs de poursuite de l'espace signal . . . . .                            | 81         |
| VI.3             | Poursuite de la matrice spectrale et des pôles . . . . .                                    | 85         |
| VI.4             | Conclusion . . . . .  | 86         |
| <b>VII</b>       | <b>Approximation de la méthode des puissances itérées</b>                                   | <b>89</b>  |
| VII.1            | Introduction . . . . .  | 90         |
| VII.2            | Fenêtrage des données . . . . .   | 90         |
| VII.3            | L'approximation par projection . . . . .  | 91         |
| VII.4            | Approximation des Puissances Itérées . . . . .  | 92         |
| VII.4.1          | Récurrence pour la matrice $\mathbf{C}_{xy}(t)$ . . . . .                                   | 92         |
| VII.4.2          | Récurrence pour la matrice $\mathbf{Z}(t)$ . . . . .  | 94         |
| VII.4.3          | Récurrence pour la matrice $\mathbf{W}(t)$ . . . . .  | 94         |
| VII.5            | Méthode API rapide . . . . .  | 95         |
| VII.5.1          | Une solution particulière à l'équation (VII.33) . . . . .                                   | 95         |
| VII.5.2          | Implémentation rapide de la solution particulière . . . . .                                 | 98         |
| VII.6            | Lien avec les algorithmes PAST et OPAST . . . . .   | 99         |
| VII.7            | Poursuite des valeurs et vecteurs propres principaux de la matrice de corrélation . . . . . | 99         |
| VII.8            | Simulations numériques . . . . .  | 101        |
| VII.8.1          | Comparaison de FAPI et TW-FAPI avec d'autres algorithmes existants . . . . .                | 101        |
| VII.8.2          | Comportement de la méthode API vis-à-vis du RSB et de $n$ et $r$ . . . . .                  | 106        |
| VII.9            | Conclusion . . . . .  | 108        |
| <b>VIII</b>      | <b>Yet Another Subspace Tracker</b>   | <b>109</b> |
| VIII.1           | Introduction . . . . .  | 110        |
| VIII.2           | Principe . . . . .  | 110        |
| VIII.3           | Implémentation rapide de YAST . . . . .   | 111        |
| VIII.3.1         | Calcul de $\overline{\mathbf{W}}(t)$ . . . . .  | 112        |
| VIII.3.2         | Calcul de $\overline{\mathbf{Z}}(t)$ . . . . .  | 112        |
| VIII.3.3         | Mise à jour de $\mathbf{W}(t)$ . . . . .  | 114        |
| VIII.3.4         | Mise à jour de $\mathbf{Z}(t)$ . . . . .  | 115        |
| VIII.3.5         | Implémentation . . . . .  | 115        |
| VIII.4           | Simulations numériques . . . . .  | 116        |
| VIII.5           | Conclusion . . . . .  | 117        |
| <b>IX</b>        | <b>Suivi des pôles et des amplitudes complexes</b>  | <b>121</b> |
| IX.1             | Introduction . . . . .  | 122        |
| IX.2             | Suivi de la matrice spectrale . . . . .   | 122        |
| IX.3             | Suivi des pôles . . . . .   | 123        |
| IX.3.1           | Algorithme d'itération orthogonale séquentiel avec décalage . . . . .                       | 123        |
| IX.3.2           | Mise à jour exacte . . . . .  | 125        |
| IX.4             | Simulations numériques . . . . .  | 128        |
| IX.5             | Suivi des amplitudes complexes . . . . .  | 129        |

|  |  |            |
|--|--|------------|
| IX.6   | Conclusion . . . . .   | 130        |
| <b>Partie III Application aux signaux de musique</b> |  | <b>131</b> |
| <b>X</b>   | <b>Analyse à haute résolution des signaux de musique</b>                           | <b>133</b> |
| X.1  | Introduction . . . . .   | 134        |
| X.2  | Potentiel des méthodes HR pour l'analyse du signal de musique . . . . .            | 134        |
| X.2.1  | Trémolo . . . . .  | 134        |
| X.2.2  | Vibrato . . . . .  | 136        |
| X.2.3  | Glissando . . . . .  | 137        |
| X.2.4  | Modulations induites par les pôles multiples . . . . .                             | 139        |
| X.3  | Limites des méthodes HR pour l'analyse du signal de musique . . . . .              | 140        |
| X.3.1  | Couleur du bruit . . . . .   | 141        |
| X.3.2  | Importance perceptive relative des composantes sinusoïdales . . . . .              | 142        |
| X.3.3  | Ordre de modélisation et stabilité numérique . . . . .                             | 142        |
| X.4  | Mise en oeuvre des méthodes HR . . . . .   | 143        |
| X.4.1  | Techniques d'estimation du signal dans un bruit coloré . . . . .                   | 143        |
| X.4.2  | Introduction d'une connaissance psycho-acoustique . . . . .                        | 144        |
| X.4.3  | Découpage en sous-bandes . . . . .   | 144        |
| X.5  | Conclusion . . . . .   | 145        |
| <b>XI</b>  | <b>Système complet d'analyse / synthèse</b>  | <b>147</b> |
| XI.1   | Introduction . . . . .   | 148        |
| XI.2   | Décomposition du signal en sous-bandes . . . . .                                   | 148        |
| XI.2.1   | Pré-accentuation du signal . . . . .   | 148        |
| XI.2.2   | Découpage uniforme ou non uniforme . . . . .                                       | 149        |
| XI.2.3   | Analyse multi-résolution . . . . .   | 150        |
| XI.2.4   | Bancs de filtres en cosinus modulés et découpage non uniforme . . . . .            | 151        |
| XI.3   | Blanchiment du bruit . . . . .   | 153        |
| XI.3.1   | Blanchiment d'un processus AR . . . . .  | 154        |
| XI.3.2   | Blanchiment d'un signal comportant des sinusoïdes . . . . .                        | 154        |
| XI.4   | Analyse HR des signaux de sous-bandes . . . . .                                    | 156        |
| XI.5   | Traitements applicables dans les sous-bandes . . . . .                             | 157        |
| XI.5.1   | Débruitage du signal et extraction du bruit . . . . .                              | 157        |
| XI.5.2   | Estimation du rythme musical basée sur l'extraction du bruit . . . . .             | 159        |
| XI.6   | Conclusion . . . . .   | 162        |
| <b>Conclusions et perspectives</b>                   |  | <b>163</b> |
| <b>Partie IV Annexes</b>                             |  | <b>167</b> |
| <b>A</b>   | <b>Résultats de la première partie</b>   | <b>169</b> |
| A.1  | Introduction . . . . .   | 170        |
| A.2  | Modèle PACE . . . . .  | 170        |
| A.3  | Déterminant de la matrice Pascal-Vandermonde . . . . .                             | 171        |
| A.4  | Propriété d'invariance rotationnelle des matrices de Pascal généralisées . . . . . | 174        |
| A.5  | Factorisation de la matrice de données . . . . .                                   | 174        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| A.6      | Caractérisation des matrices de Hankel singulières . . . . .                         | 175        |
| A.7      | Bornes de Cramér-Rao . . . . .   | 177        |
| A.7.1    | Bornes générales pour le modèle PACE . . . . .                                       | 177        |
| A.7.2    | Bornes asymptotiques . . . . .   | 181        |
| A.8      | Lemmes d'inversion matricielle . . . . .   | 182        |
| A.9      | Performance des estimateurs . . . . .  | 182        |
| A.9.1    | Perturbation de l'espace signal . . . . .  | 182        |
| A.9.2    | Perturbation de la matrice spectrale . . . . .                                       | 183        |
| A.9.3    | Perturbation des pôles . . . . .   | 184        |
| A.9.4    | Perturbation des amplitudes et des phases . . . . .                                  | 185        |
| A.9.5    | Performance des estimateurs au premier ordre . . . . .                               | 186        |
| A.9.6    | Performances asymptotiques . . . . .   | 188        |
| A.10     | Borne d'erreur a priori . . . . .  | 190        |
| <b>B</b> | <b>Résultats de la deuxième partie</b>   | <b>193</b> |
| B.1      | Introduction . . . . .   | 194        |
| B.2      | Moyenne géométrique des valeurs propres de $\mathbf{R}_{ss}(t)$ . . . . .            | 194        |
| B.3      | Approximation de la méthode des puissances itérées . . . . .                         | 194        |
| B.4      | Algorithme SW-NIC . . . . .  | 195        |
| B.5      | Mise à jour des pôles . . . . .  | 195        |
| B.5.1    | Modification de la structure propre par ajout d'une matrice de rang un . . . . .     | 195        |
| B.5.2    | Modification de la structure propre par ajout d'une matrice de rang faible . . . . . | 197        |
| <b>C</b> | <b>Articles</b>  | <b>199</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>221</b> |
|          | <b>Index</b>   | <b>229</b> |

# Table des figures

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| I.1    | Jean Baptiste Joseph FOURIER (1768-1830) . . . . .  | 15  |
| I.2    | Gaspard-Marie RICHE de PRONY (1755-1839) . . . . .  | 16  |
| III.1  | Efficacité des estimateurs . . . . .  | 46  |
| III.2  | Modulation d'amplitude polynomiale . . . . .  | 49  |
| III.3  | Modulation d'amplitude et de fréquence . . . . .  | 50  |
| IV.1   | Bornes d'erreur a priori et a posteriori . . . . .  | 60  |
| IV.2   | Périodogramme et valeurs singulières du signal synthétique . . . . .                            | 61  |
| IV.3   | Sélection de l'ordre du modèle pour le signal synthétique . . . . .                             | 62  |
| IV.4   | Périodogramme et valeurs singulières du signal de piano . . . . .                               | 64  |
| IV.5   | Sélection de l'ordre du modèle pour le signal de piano . . . . .                                | 65  |
| VI.1   | Valeurs et vecteurs propres pour un signal contenant deux fréquences ( $n = l = 20$ ) . . . . . | 79  |
| VI.2   | Algorithmes de complexité élevée . . . . .  | 85  |
| VI.3   | Algorithmes de complexité linéaire $O((n + l)r^2)$ ou $O(nr)$ à fenêtre rectangulaire . . . . . | 86  |
| VI.4   | Algorithmes de complexité linéaire $O(nr^2)$ à fenêtre exponentielle . . . . .                  | 87  |
| VI.5   | Algorithmes de complexité linéaire $O(nr)$ à fenêtre exponentielle . . . . .                    | 88  |
| VI.6   | Algorithmes à convergence lente . . . . .   | 88  |
| VII.1  | Poursuite de l'espace signal reposant sur une fenêtre exponentielle (1/2) . . . . .             | 103 |
| VII.2  | Poursuite de l'espace signal reposant sur une fenêtre exponentielle (2/2) . . . . .             | 104 |
| VII.3  | Poursuite de l'espace signal reposant sur une fenêtre rectangulaire . . . . .                   | 105 |
| VII.4  | Influence du rapport signal à bruit . . . . .   | 106 |
| VII.5  | Influence des paramètres $n$ et $r$ . . . . .   | 107 |
| VIII.1 | Poursuite de l'espace signal reposant sur une fenêtre exponentielle . . . . .                   | 117 |
| VIII.2 | Poursuite de l'espace signal reposant sur une fenêtre rectangulaire . . . . .                   | 118 |
| IX.1   | Suivi des fréquences (1/2) . . . . .  | 129 |
| IX.2   | Suivi des fréquences (2/2) . . . . .  | 130 |
| X.1    | Tremolo synthétique . . . . .   | 135 |
| X.2    | Tremolo synthétique : fréquences parcourues et pôles estimés . . . . .                          | 136 |
| X.3    | Vibrato synthétique . . . . .   | 137 |
| X.4    | Vibrato synthétique : fréquences parcourues et pôles estimés . . . . .                          | 138 |
| X.5    | Vibrato synthétique : spectre théorique et spectre estimé . . . . .                             | 138 |
| X.6    | Chirp synthétique . . . . .   | 139 |
| X.7    | Chirp synthétique : fréquences parcourues et pôles estimés . . . . .                            | 140 |
| X.8    | Vibrato humain : spectrogramme . . . . .  | 140 |
| X.9    | Vibrato humain : fréquences parcourues et pôles estimés . . . . .                               | 141 |

---

|      |   |     |
|------|---|-----|
| X.10 | Exponentielles dans un bruit coloré . . . . .               | 142 |
| X.11 | Analyse HR dans un bruit coloré . . . . .                   | 143 |
| XI.1 | Système d'analyse du signal . . . . .                       | 148 |
| XI.2 | Système de reconstruction du signal . . . . .               | 149 |
| XI.3 | Signal traité et banc de filtres d'analyse . . . . .        | 151 |
| XI.4 | Périodogrammes des signaux des sous-bandes 0 à 3 . . . . .  | 152 |
| XI.5 | Périodogramme avant et après blanchiment du bruit . . . . . | 155 |
| XI.6 | Séparation par modélisation paramétrique . . . . .          | 159 |
| XI.7 | Séparation par filtrage . . . . .                           | 160 |
| XI.8 | Vue d'ensemble du système. . . . .                          | 161 |

# Liste des tableaux

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| 1      | Structure du document . . . . .   | 5   |
| IV.1   | Calcul récursif de $\mathbf{E}(p)$ . . . . .  | 59  |
| IV.2   | Paramètres du signal synthétique . . . . .  | 60  |
| IV.3   | Comparaison des performances pour diverses valeurs de $N$ . . . . .                   | 63  |
| IV.4   | Comparaison des performances pour divers RSB . . . . .                                | 63  |
| V.1    | Algorithme d'estimation . . . . .   | 73  |
| VI.1   | Algorithmes de poursuite d'espace signal . . . . .                                    | 84  |
| VII.1  | Algorithme API à fenêtre exponentielle . . . . .                                      | 96  |
| VII.2  | Algorithme API à fenêtre tronquée (TW-API) . . . . .                                  | 97  |
| VII.3  | Algorithme API rapide à fenêtre exponentielle (FAPI) . . . . .                        | 99  |
| VII.4  | Algorithme API rapide à fenêtre tronquée (TW-FAPI) . . . . .                          | 100 |
| VII.5  | Comparaison des algorithmes de poursuite de sous-espace . . . . .                     | 102 |
| VII.6  | Erreur maximale d'orthonormalité . . . . .  | 105 |
| VIII.1 | Comparaison des algorithmes de poursuite de l'espace signal . . . . .                 | 116 |
| VIII.2 | Pseudo-code de l'algorithme YAST . . . . .  | 119 |
| IX.1   | Suivi de la matrice spectrale . . . . .   | 123 |
| IX.2   | Itération orthogonale séquentielle avec décalage . . . . .                            | 124 |
| IX.3   | Algorithme de suivi des pôles (mise à jour de rang 1) . . . . .                       | 127 |
| IX.4   | Algorithme de suivi des pôles (mise à jour de rang faible) . . . . .                  | 128 |
| XI.1   | Découpage dyadique du spectre en quatre sous-bandes . . . . .                         | 150 |
| XI.2   | Structure d'un banc de filtres non-uniforme pour l'analyse de signaux audio . . . . . | 152 |
| XI.3   | Paramètres des diverses fenêtres . . . . .  | 155 |
| XI.4   | Performances des algorithmes d'estimation du tempo. . . . .                           | 162 |
| B.1    | Algorithme NIC à fenêtre rectangulaire . . . . .                                      | 196 |



---

# Acronymes

Pour des raisons de lisibilité, la signification d'une abréviation ou d'un acronyme n'est souvent rappelée qu'à sa première apparition dans le texte d'un chapitre. Par ailleurs, puisque nous utilisons toujours l'abréviation la plus usuelle, il est fréquent que ce soit le terme anglais qui soit employé.

|                 |   |
|-----------------|---|
| <b>AIC</b>      | <i>Akaike Information Criterion</i>   |
| <b>API</b>      | <i>Approximation de la méthode des Puissances Itérées</i>                   |
| <b>AR</b>       | <i>Auto-Régressif</i>   |
| <b>ARMA</b>     | <i>Auto-Régressif à Moyenne Ajustée</i>                                     |
| <b>Bi-SVD</b>   | <i>Bi-iteration SVD</i>   |
| <b>BPM</b>      | <i>Battements Par Minute</i>  |
| <b>dB</b>       | <i>decibels</i>   |
| <b>CMF</b>      | <i>banc de Filtres en Cosinus Modulés</i>                                   |
| <b>DSP</b>      | <i>Densité Spectrale de Puissance</i>                                       |
| <b>EDC</b>      | <i>Efficient Detection Criteria</i>   |
| <b>EDS</b>      | <i>Exponentially Damped Sinusoids</i>                                       |
| <b>ESM</b>      | <i>Exponential Sinusoidal Model</i>   |
| <b>ESPRIT</b>   | <i>Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques</i> |
| <b>ESTER</b>    | <i>ESTimation ERror</i>   |
| <b>EVD</b>      | <i>Décomposition en Valeurs propres</i>                                     |
| <b>FAP</b>      | <i>API rapide</i>   |
| <b>FFT</b>      | <i>Fast Fourier Transform</i>   |
| <b>FST</b>      | <i>Fast Subspace Tracking</i>   |
| <b>HR</b>       | <i>à Haute Résolution</i>   |
| <b>HR-ogram</b> | <i>High Resolution spectrogram</i>  |
| <b>Hz</b>       | <i>Hertz</i>  |
| <b>ITC</b>      | <i>Critères de Théorie de l'Information</i>                                 |
| <b>KT</b>       | <i>Kumaresan et Tufts</i>   |
| <b>LMS</b>      | <i>Least Mean Square</i>  |
| <b>LORAF</b>    | <i>Low Rank Adaptive Filter</i>   |
| <b>LS</b>       | <i>Least Squares</i>  |
| <b>MDL</b>      | <i>Minimum Description Length</i>   |



|                   |   |
|-------------------|---|
| <b>MKT</b>        | <i>Modified KT</i>                                |
| <b>MUSIC</b>      | <i>MUltiple Signal Classification</i>             |
| <b>NIC</b>        | <i>Novel Information Criterion</i>                |
| <b>NP3</b>        | <i>fast Natural Power</i>                         |
| <b>OPAST</b>      | <i>PAST orthonormé</i>                            |
| <b>PACE</b>       | <i>Polynomial Amplitude Complex Exponentials</i>  |
| <b>PAST</b>       | <i>Projection Approximation Subspace Tracking</i> |
| <b>QR</b>         | <i>orthogonale-triangulaire</i>                   |
| <b>SACF</b>       | <i>Fonction d'Auto-Corrélation de Synthèse</i>    |
| <b>SP</b>         | <i>Subspace Projection</i>                        |
| <b>RSB</b>        | <i>Rapport Signal à Bruit</i>                     |
| <b>SVD</b>        | <i>Décomposition en Valeurs Singulières</i>       |
| <b>SW-NIC</b>     | <i>NIC à fenêtre rectangulaire</i>                |
| <b>SW-PAST</b>    | <i>PAST à fenêtre rectangulaire</i>               |
| <b>SW-OPAST</b>   | <i>OPAST à fenêtre rectangulaire</i>              |
| <b>SWASVD</b>     | <i>Sliding Window Adaptive SVD</i>                |
| <b>TAM</b>        | <i>Toeplitz Approximation Method</i>              |
| <b>TFD</b>        | <i>Transformée de Fourier Discrète</i>            |
| <b>TLS</b>        | <i>Total Least Squares</i>                        |
| <b>TLS-ESPRIT</b> | <i>Total Least Squares ESPRIT</i>                 |
| <b>TW-API</b>     | <i>API à fenêtre tronquée</i>                     |
| <b>TW-FAPI</b>    | <i>FAPI à fenêtre tronquée</i>                    |
| <b>YAST</b>       | <i>Yet Another Subspace Tracker</i>               |

# Notations

Nous avons regroupé ci-dessous les principales notations employées dans les différents chapitres du document. Dans la mesure du possible, nous avons tenté de conserver les mêmes notations d'un chapitre à l'autre.

|                   |   |
|-------------------|---|
| $\mathbf{v}$      | vecteur   |
| $\mathbf{v}(z)$   | vecteur contenant les puissances successives du scalaire $z$ : $\mathbf{v}(z) = [1, z, z^2, \dots]^T$ |
| $\mathbf{e}_m$    | vecteur dont tous les échantillons sont nuls, sauf celui d'indice $m$ , égal à 1                      |
| $\mathbf{M}$      | matrice   |
| $(.)^T$           | transposé   |
| $(.)^H$           | conjugué hermitien  |
| $\mathcal{R}e(.)$ | partie réelle   |
| $\mathcal{I}m(.)$ | partie imaginaire   |
| $\text{span}(.)$  | espace image d'une matrice  |
| $\text{ker}(.)$   | noyau d'une matrice   |
| $\text{diag}(.)$  | matrice diagonale construite à partir d'un vecteur  |
| $\text{dim}(.)$   | dimension d'un espace vectoriel   |
| $\text{rank}(.)$  | rang d'une matrice  |
| $\text{trace}[.]$ | trace d'une matrice   |
| $\text{det}(.)$   | déterminant d'une matrice carrée  |
| $\text{cond}(.)$  | conditionnement (rapport de la plus grande sur la plus petite valeur singulière)                      |
| $\widehat{(.)}$   | estimateur d'un paramètre   |
| $\mathbb{E}[.]$   | espérance mathématique  |
| $\text{var}(.)$   | variance d'une variable aléatoire   |
| $\text{cov}(.)$   | matrice de covariance d'un vecteur aléatoire  |
| $\text{CRB}\{.\}$ | borne de Cramér-Rao pour un estimateur  |

*Tous les indices désignant des éléments de vecteurs ou de matrices sont numérotés à partir de 0.*



---

# Introduction

Dans le cadre du traitement de la parole et des signaux de musique, la partie tonale d'une grande variété de sons trouve une modélisation efficace comme une somme de sinusoides à paramètres lentement variables. Par exemple, les sons qui produisent une sensation de hauteur bien définie possèdent une forme d'onde quasi périodique (sur une durée supérieure à quelques dizaines de millisecondes). L'analyse de Fourier montre que ces signaux sont composés de sinusoides satisfaisant une relation d'*harmonicité*, ce qui signifie que leurs fréquences sont multiples de la fréquence fondamentale, définie comme l'inverse de la période. C'est notamment le cas des signaux de parole dits voisés, produits par vibration quasi périodique des cordes vocales, comme les voyelles. De nombreux instruments à vent ou à corde produisent également des sons harmoniques ou quasi harmoniques. Cependant, dans un signal de musique polyphonique, les sons émis simultanément par un ou plusieurs instruments se superposent ; ainsi la relation d'harmonicité n'est plus vérifiée, mais le signal reste essentiellement constitué de sinusoides.

En traitement de la parole, le modèle sinusoidal a été introduit par McAulay et Quatieri au début des années 80 pour coder le signal en bande téléphonique [Mc Aulay et Quatieri, 1986]. Ce type de représentation a également été utilisé en traitement des signaux de musique, notamment à Stanford, dans le cadre des travaux de X. Serra qui a développé un système complet d'analyse / synthèse [Serra et Smith, 1990]. Cette approche a également été adoptée pour coder les signaux de musique, notamment dans le cadre du codeur bas-débit MPEG4-HILN. De telles applications nécessitent de disposer d'outils performants pour estimer les paramètres du modèle. Il s'agit d'un problème classique d'estimation, vieux de plus de deux cents ans. Dans ce domaine, la transformation de Fourier est un outil privilégié en raison de sa robustesse, de la simplicité de sa mise en oeuvre, et de l'existence d'algorithmes rapides (*Fast Fourier Transform* (FFT)). Elle présente néanmoins un certain nombre d'inconvénients. Tout d'abord, sa *précision* fréquentielle, c'est-à-dire la précision avec laquelle la fréquence d'une sinusoides peut être estimée, est limitée par le nombre d'échantillons utilisés pour la calculer. Cette première limitation peut cependant être contournée en prolongeant le signal utile par une suite de zéros. Cependant, sa *résolution* fréquentielle, c'est-à-dire sa capacité à distinguer deux sinusoides proches, est limitée par la durée du signal observé. Malgré ces inconvénients, la transformation de Fourier reste aujourd'hui encore l'outil le plus utilisé en analyse spectrale. Elle a donné lieu à de nombreuses méthodes d'estimation des fréquences des sinusoides [Keiler et Marchand, 2002].

## Les méthodes à haute résolution

Les méthodes dites à *Haute Résolution* (HR), qui trouvent leurs applications en traitement d'antenne comme en analyse spectrale [Marcos *et al.*, 1998], présentent l'avantage de s'affranchir des limitations naturelles de l'analyse de Fourier. En effet, en l'absence de bruit, leur précision et leur résolution fréquentielles sont virtuellement infinies (bien qu'en pratique limitées par la précision finie des machines de calcul). Ceci est rendu possible en s'appuyant fortement sur un modèle paramétrique de signal. Ainsi, contrairement à l'analyse de Fourier qui consiste à représenter le signal dans un domaine transformé, les méthodes HR sont des méthodes d'estimation paramétrique. Dans le cadre du traitement du si-

gnal audio, malgré leur supériorité en terme de résolution spectrale (en particulier sur des fenêtres temporelles courtes), elles restent peu utilisées en raison de leur forte complexité algorithmique.

L'origine des méthodes HR remonte aux travaux de Prony publiés en 1795, qui visent à estimer une somme d'exponentielles par des techniques de prédiction linéaire [Riche de Prony, 1795]. Plus récemment, cette approche a été approfondie par Pisarenko pour estimer des sinusoides [Pisarenko, 1973]. Les fréquences se déduisent alors des racines du polynôme prédicteur. Les méthodes HR modernes reposent sur les propriétés particulières de la matrice de covariance du signal. Ainsi, l'étude de son rang permet de séparer l'espace des données en deux sous-espaces, l'espace signal engendré par les sinusoides, et l'espace bruit qui est son complémentaire orthogonal. Les méthodes HR issues de cette décomposition en sous-espaces sont plus robustes que les techniques de prédiction linéaire. Citons par exemple la méthode *MUltiple SIgnal Classification* (MUSIC) [Schmidt, 1986], qui s'appuie sur l'espace bruit, et les méthodes *Matrix Pencil* [Hua et Sarkar, 1990] et *Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques* (ESPRIT) [Roy *et al.*, 1986], qui s'appuient sur l'espace signal.

## Analyse à haute résolution des signaux de musique

En outre, les méthodes HR sont bien adaptées pour estimer les paramètres d'une somme de sinusoides dont l'amplitude varie exponentiellement (modèle *Exponential Sinusoidal Model* (ESM)). Ce type de modulation permet de décrire l'amortissement naturel des systèmes vibratoires libres, tels que la vibration d'une corde pincée [Jensen *et al.*, 2004]. D'autre part, il a été montré dans [Laroche, 1993] que les méthodes HR se révèlent particulièrement performantes dans le cas de signaux fortement atténués. D'une manière plus générale, le modèle ESM permet de décrire des signaux à forte variation d'amplitude [Hermus *et al.*, 2002]. Par ailleurs, les signaux de musique contiennent souvent des paires ou des triplets de fréquences très proches qui engendrent un phénomène de battements. Ces battements contribuent fortement à l'aspect naturel du son. Ils résultent souvent des propriétés particulières des systèmes de vibration. Par exemple, une dissymétrie mineure dans la géométrie d'une cloche conduit à des paires de modes de vibration. Dans le cas d'une guitare, le couplage entre les cordes et le chevalet peut être représenté par une matrice dite de mobilité, dont il est possible de déduire des paires de fréquences [Lambourg et Chaigne, 1993]. Dans le cas du piano, le couplage des modes de vibration horizontal et vertical de chaque corde et la présence de paires ou de triplets de cordes pour la plupart des notes expliquent la présence de quatre ou six fréquences voisines au niveau de chaque harmonique [Weinreich, 1977]. L'analyse de Fourier ne permet généralement pas de distinguer toutes ces fréquences. Les études menées dans [Laroche, 1993] sur des sons de piano et de guitare ont montré la supériorité des méthodes HR, et de l'algorithme Matrix Pencil, dans ce domaine. Cette supériorité se révèle plus particulièrement sur des fenêtres temporelles courtes. La même technique a été utilisée pour estimer des paramètres physiques, comme le facteur de rayonnement d'une guitare [David, 1999], et pour étudier la propagation d'ondes mécaniques dans des matériaux solides [Jeanneau *et al.*, 1998].

Enfin, de nombreux auteurs ont remarqué que le modèle ESM peut aussi modéliser efficacement des sons transitoires, en particulier des attaques et des sons percussifs [Laroche, 1989, Nieuwenhuijse *et al.*, 1998, Jensen *et al.*, 1999, Hermus *et al.*, 2002, Karjalainen *et al.*, 2003]. En effet, certaines attaques peuvent être décrites comme la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire invariant dans le temps, qui satisfait justement le modèle ESM. De plus, une attaque est un son de courte durée, qui se prête donc particulièrement bien à l'analyse HR. Cependant, il est indispensable de veiller à ce que la fenêtre d'analyse débute à l'instant précis de l'attaque, sinon l'analyse HR donne des résultats imprécis, et conduit généralement à des phénomènes de pré-écho, souvent observés en codage audio. Pour résoudre ce problème, R. Boyer a proposé l'usage des modèles *Damped and Delayed Sinusoids* (DDS) et *Partially Damped and Delayed Sinusoids* (PDDS), pour lesquels il propose des méthodes d'estimation spécifiques [Boyer et Abed-Meraim, 2004].

Nous montrerons également dans cette thèse que les méthodes HR permettent de représenter efficacement des signaux modulés lentement en fréquence, comme dans le cas d'un trémolo, d'un vibrato ou d'un glissando. Elles possèdent donc un potentiel intéressant dans le cadre de l'analyse des signaux de musique. Cependant elles présentent un inconvénient notable : leur complexité algorithmique élevée, de l'ordre de  $N^3$ , où  $N$  est la longueur de l'horizon d'observation<sup>1</sup>. D'autre part, elles s'appuient sur un modèle de signal à paramètres constants, alors que les signaux de musique présentent une certaine variabilité. Il paraît donc nécessaire de développer des techniques de plus faible complexité permettant le suivi des paramètres tout en conservant la même résolution spectrale.

## Poursuite des paramètres du signal

Un exemple de méthode visant à suivre les variations des fréquences est l'algorithme *Sintrack* développé par P. Duvaut [Duvaut, 1994]. Cette méthode comprend deux étapes : l'algorithme *Matrix Pencil* est d'abord appliqué pour estimer les paramètres initiaux. Cet algorithme est connu pour sa robustesse mais reste néanmoins assez coûteux, c'est pourquoi il n'est utilisé qu'à l'initialisation. La poursuite est ensuite réalisée à l'aide d'une technique de prédiction linéaire adaptative de type *Least Mean Square* (LMS), beaucoup moins complexe que *Matrix Pencil*. Les fréquences et les facteurs d'atténuation sont ainsi déduits à chaque itération des racines du polynôme prédicteur. Quand l'erreur de prédiction dépasse un certain seuil, l'algorithme *Sintrack* est réinitialisé à l'aide de *Matrix Pencil*. Le principal avantage de cette méthode est la faible complexité de l'algorithme LMS, qui permet d'envisager une poursuite en temps réel des sinusoïdes amorties. Cependant, quand elle est appliquée à des signaux de musique [David *et al.*, 2002], son manque de robustesse conduit à de fréquentes réinitialisations, qui accroissent considérablement le coût du traitement.

Pour suivre les sinusoïdes de manière robuste, il faudrait appliquer *Matrix Pencil* à chaque itération, ce qui est impraticable de par sa complexité élevée, principalement due à la technique utilisée pour déterminer l'espace signal. En effet, celui-ci est obtenu en calculant une *Décomposition en Valeurs propres* (EVD) de la matrice de covariance du signal, ou de façon équivalente une *Décomposition en Valeurs Singulières* (SVD) de la matrice de données. Afin de pallier ce problème, il existe dans un contexte adaptatif des techniques beaucoup plus rapides permettant de suivre l'espace signal et ainsi de s'affranchir des décompositions précédentes (EVD ou SVD). Ces techniques de poursuite de sous-espace ont été essentiellement développées depuis le début des années 90. Les plus rapides d'entre elles ont une complexité linéaire en  $N$ . Elles offrent ainsi des perspectives intéressantes pour le problème du suivi des fréquences. Dans le cadre de cette thèse, nous avons étudié les méthodes existantes et nous en avons proposé de nouvelles, afin de développer un algorithme complet de suivi des sinusoïdes.

## Principaux résultats apportés dans le cadre de la thèse

Dans la littérature, le modèle ESM est généralement considéré comme le modèle de signal le plus général pouvant être estimé à l'aide des méthodes HR. Il est pourtant restreint au cas où le polynôme prédicteur ne possède que des racines simples. Qu'advient-il en présence de racines multiples ? On peut démontrer que le signal est alors composé de sinusoïdes dont la modulation est une combinaison linéaire d'exponentielles et de polynômes. Nous introduisons ainsi une représentation paramétrique complète de ce type de modulation, que nous avons baptisée modèle *Polynomial Amplitude Complex Exponentials* (PACE). Pour l'estimer, nous proposons une version modifiée de l'algorithme ESPRIT. Notre choix s'est porté sur cette méthode d'estimation, car elle se prête bien à diverses optimisations,

---

<sup>1</sup>Typiquement, pour un signal audio échantillonné à 44100 Hz, l'horizon d'observation est de l'ordre de 23ms, soit plus de 1000 échantillons.

en particulier dans un contexte adaptatif. Les bornes de Cramér-Rao pour le modèle PACE sont calculées analytiquement dans le contexte le plus général (sans approximation asymptotique). Les performances de l'algorithme ESPRIT généralisé sont ensuite déterminées en terme de biais, de variance et d'efficacité, grâce à la théorie des perturbations, sous l'hypothèse d'un fort rapport signal à bruit. Tous ces résultats peuvent être directement particularisés au modèle ESM.

Par ailleurs, l'algorithme ESPRIT, comme toutes les méthodes HR, présuppose que l'ordre de modélisation est connu, ce qui n'est généralement pas le cas en pratique. Quelle est la perturbation induite sur les pôles estimés lorsque cet algorithme est appliqué avec un ordre de modélisation erroné? Le travail mené au cours de cette thèse a permis d'apporter une réponse quantitative à cette question, à partir de laquelle nous avons développé une nouvelle méthode d'estimation de l'ordre du modèle, plus robuste que les critères généralement utilisés, issus de la théorie de l'information. Cette méthode d'estimation peut être appliquée au modèle PACE comme au modèle ESM. Enfin, comme la complexité algorithmique constitue un problème crucial pour la mise en oeuvre des méthodes HR, une implémentation rapide de l'algorithme ESPRIT est proposée.

Enfin, dans un contexte adaptatif, nous avons cherché à réduire encore davantage le coût de cet algorithme, en utilisant des techniques de poursuite de l'espace signal. Nous proposons ainsi de nouveaux algorithmes de poursuite, qui offrent un meilleur compromis performance / complexité que les méthodes existantes. L'un d'eux possède la complexité la plus faible et atteint des performances équivalentes à celles d'une EVD ou d'une SVD. L'estimation de l'espace signal n'étant que la première étape de l'algorithme ESPRIT, nous proposons également une implémentation adaptative des étapes restantes (estimation de la matrice spectrale et de ses valeurs propres), qui permet de déterminer les paramètres plus rapidement sans aucune perte de performance. Un algorithme complet d'estimation et de poursuite des paramètres est ainsi obtenu, totalement adaptatif et de faible complexité.

Nous avons ensuite mis en oeuvre cet algorithme dans le cadre de l'analyse spectrale des signaux de musique. Nous avons pu observer que cette mise en oeuvre est délicate, et qu'il est préférable de pré-traiter les signaux de façon à ce qu'ils respectent au mieux le modèle de signal, tout en tenant compte des propriétés du système auditif humain. Un système complet d'analyse / synthèse du signal audio est ainsi proposé, dont le coeur est l'analyse HR. Ce système peut avoir plusieurs applications, comme le codage, le débruitage et l'extraction du bruit additif. Une application de ce système développée en collaboration avec M. Alonso sera présentée à la fin du mémoire : l'estimation du rythme musical.

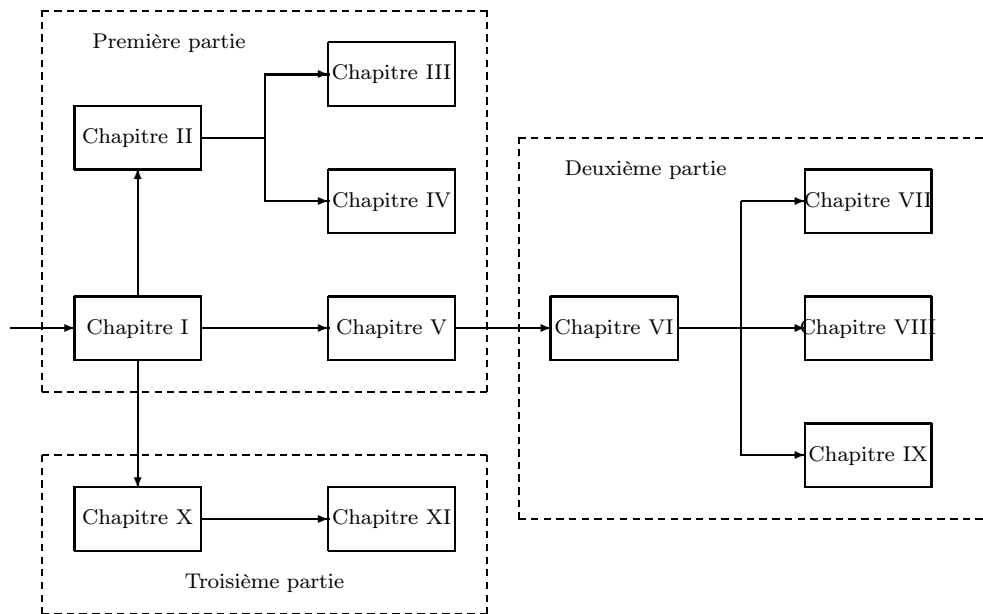
Le lecteur remarquera sans doute que la partie théorique de ce document repose sur un modèle de signal à valeurs complexes, alors que le signal audio est à valeurs réelles. Nous avons fait ce choix pour la simple raison que les résultats théoriques s'expriment de façon plus concise et plus intelligible en complexe qu'en réel. De plus, les résultats pour le modèle réel sont généralement obtenus en particularisant les résultats pour le modèle complexe<sup>2</sup>.

## Structure du document

Le document est structuré en quatre parties regroupant chacune plusieurs chapitres. La lecture d'un chapitre particulier ne requiert généralement pas d'avoir lu l'ensemble des chapitres qui le précèdent. La table 1 présente un schéma des principales dépendances entre chapitres.

---

<sup>2</sup>En pratique, il serait quand même possible d'appliquer l'algorithme d'estimation en complexe, en filtrant préalablement le signal audio à l'aide d'un filtre analytique. Cela permettrait de réduire la complexité car la dimension de l'espace signal serait alors divisée par deux ; cependant les calculs matriciels sont quatre fois plus coûteux en complexe qu'en réel.



TAB. 1 – Structure du document

### Première partie : *Modèle de signal et méthodes d'estimation*

Dans la première partie sont présentés divers aspects théoriques des techniques d'analyse spectrale à haute résolution. Le chapitre I est ainsi consacré à l'estimation des paramètres d'un signal composé d'une somme de sinusoïdes modulées exponentiellement et perturbées par un bruit additif (modèle ESM). Le chapitre II introduit ensuite une extension du modèle ESM, qui représente le signal comme une somme d'exponentielles complexes à modulation d'amplitude polynomiale. Ce modèle, baptisé PACE, correspond à la présence de pôles multiples. Il s'agit du modèle de signal le plus général pouvant être traité par les méthodes HR. Deux techniques d'estimation sont présentées : la méthode du maximum de vraisemblance et l'algorithme ESPRIT généralisé. Les performances de ces diverses méthodes d'estimation sont étudiées dans le chapitre III. Tout d'abord, les bornes de Cramér-Rao pour le modèle PACE sont calculées analytiquement dans le cas général, puis simplifiées dans un contexte asymptotique. Les performances des estimateurs introduits dans le chapitre II sont ensuite comparées à ces bornes, en étudiant les perturbations induites par le bruit additif au premier ordre. Des simulations numériques sont proposées pour illustrer les résultats obtenus, dans le cas de signaux réels modulés en amplitude et en fréquence. Le chapitre IV porte sur la sélection de l'ordre de modélisation. En effet, les méthodes HR présupposent que l'ordre du modèle est connu, ce qui n'est généralement pas le cas dans la pratique. En particulier, pour des applications de codage, le signal doit être représenté avec un nombre minimal de paramètres. Malheureusement, il est connu qu'appliquer l'algorithme ESPRIT avec un ordre de modélisation sous-estimé biaise l'estimation des fréquences. Nous proposons ainsi une nouvelle méthode pour sélectionner un ordre de modélisation approprié, qui minimise ce biais. Cette approche est appliquée à des signaux synthétiques et à des signaux de musique, et s'avère plus performante que les critères classiques de théorie de l'information. Enfin, le chapitre V traite le problème de la complexité algorithmique, qui constitue l'inconvénient principal des méthodes HR. L'objectif est ainsi de réduire la complexité de l'algorithme ESPRIT généralisé. Toutes les étapes sont optimisées : l'estimation de l'espace signal, qui constitue l'étape la plus coûteuse, le calcul de la matrice spectrale et enfin l'estimation des amplitudes. Ce chapitre constitue aussi une introduction aux algorithmes rapides de poursuite présentés dans la deuxième partie.



## Deuxième partie : *Algorithmes rapides de poursuite des paramètres*

La deuxième partie du document est consacrée à l'analyse de signaux dont les paramètres ne sont plus constants, mais varient au cours du temps. Dans ce contexte, un très grand nombre d'algorithmes permettant de suivre les variations temporelles de l'espace signal ont été proposés dans la littérature. Le chapitre VI mentionne les principaux d'entre eux, parmi lesquels la méthode des puissances itérées, qui est l'un des plus précis, et l'algorithme *PAST orthonormé* (OPAST), qui est l'un des plus rapides. Plusieurs critères permettant de caractériser ces divers algorithmes sont présentés, et leurs performances sont illustrées sur un signal présentant de brusques variations. Des techniques permettant de suivre la matrice spectrale et ses valeurs propres sont également évoquées. Le chapitre VII introduit ensuite un nouvel algorithme rapide de poursuite de l'espace signal dérivé de la méthode des puissances itérées, baptisé *Approximation de la méthode des Puissances Itérées* (API). Cet algorithme est plus rapide que la méthode des puissances itérées, mais un peu moins performant. Ensuite, le chapitre VIII introduit un autre algorithme rapide de poursuite de l'espace signal, qui possède la même complexité que l'algorithme OPAST, mais dont les performances sont équivalentes, voire supérieures, à celles de la méthode des puissances itérées. Cet algorithme, baptisé *Yet Another Subspace Tracker* (YAST), peut être vu comme une implémentation optimisée des algorithmes SP1 et SP2 récemment proposés dans [Davila, 2000]. Ses performances sont illustrées sur un signal présentant de brusques variations, et comparées à la méthode des puissances itérées. Enfin, reposant sur l'estimation de l'espace signal obtenue par le biais de l'algorithme API rapide ou de YAST, une technique rapide de suivi de la matrice spectrale est présentée dans le chapitre IX. D'autre part, deux approches sont proposées pour suivre les pôles, la première reposant sur une approximation, et la seconde permettant de les calculer exactement. La question du suivi des amplitudes est également évoquée. Les performances de l'algorithme complet de poursuite des paramètres ainsi obtenu sont illustrées à la fin du chapitre.

## Troisième partie : *Application aux signaux de musique*

Dans la troisième partie de ce document, les algorithmes d'estimation introduits dans les deux premières parties sont appliqués à des signaux de musique. Dans la littérature, les méthodes HR restent marginalement utilisées dans le cadre de l'analyse spectrale des signaux de musique. Pourtant, certains auteurs ont montré que le modèle ESM est particulièrement bien adapté à ce type de signaux. En fait, il permet de représenter bien plus qu'une simple somme de sinusoïdes à modulation exponentielle. Il n'en reste pas moins que la mise en oeuvre des méthodes HR est délicate et nécessite de prendre certaines précautions. Le chapitre X résume les problèmes que l'on peut rencontrer, et diverses solutions qui ont été proposées pour y remédier. Le chapitre XI aborde ensuite la mise en oeuvre des techniques d'estimation présentées dans les deux premières parties du document. Divers pré-traitements permettant d'accroître la robustesse de l'algorithme d'estimation sont ainsi présentés. Ces pré-traitements sont agencés sous la forme d'un système complet d'analyse / synthèse du signal, pour lequel plusieurs applications sont envisagées, comme le codage, le débruitage et l'extraction de la partie bruitée du signal. L'extraction du bruit peut avoir plusieurs applications ; à titre d'exemple sera présenté un travail mené avec M. Alonso sur l'estimation du rythme musical.

## Quatrième partie : *Annexes*

Enfin, trois annexes sont proposées dans la quatrième partie du document. Dans les deux premières sont exposées les démonstrations des principaux résultats énoncés dans les parties I et II. La troisième annexe contient les reproductions de trois articles publiés au début de cette thèse, mais dont le contenu n'a pas été développé dans le corps de ce document afin d'éviter de le surcharger.

Première partie

Modèle de signal et méthodes  
d'estimation



## Chapitre I

# État de l'art des méthodes à haute résolution

### Résumé

Ce chapitre est consacré à l'estimation des paramètres d'un signal composé d'une somme de sinusoïdes modulées exponentiellement et perturbées par un bruit additif. Le principe du maximum de vraisemblance ramène alors l'estimation des amplitudes et des phases à un problème de moindres carrés simple, alors que l'estimation des fréquences et des facteurs d'atténuation exige des méthodes plus sophistiquées, dites *à haute résolution*, car elles s'affranchissent des limites de l'analyse de Fourier en terme de résolution spectrale.

## I.1 Introduction

L'origine des méthodes HR remonte aux travaux de Prony publiés en 1795, qui visent à estimer une somme d'exponentielles par des techniques de prédiction linéaire [Riche de Prony, 1795]. Plus récemment, cette approche a été approfondie par Pisarenko pour estimer des sinusoides [Pisarenko, 1973]. En comparaison, les méthodes HR modernes reposent sur les propriétés particulières de la matrice de covariance du signal. Ainsi, l'étude de son rang permet de séparer l'espace des données en deux sous-espaces, l'espace signal engendré par les sinusoides, et l'espace bruit qui est son complémentaire orthogonal. Les méthodes HR issues de cette décomposition en sous-espaces sont connues pour être plus robustes que les techniques de prédiction linéaire. C'est le cas des méthodes MUSIC [Schmidt, 1986] et root-MUSIC [Barabell, 1983] (qui reposent sur l'espace bruit), de l'algorithme *Toeplitz Approximation Method* (TAM) [Kung *et al.*, 1983], ainsi que de l'algorithme ESPRIT [Roy *et al.*, 1986] et de ses variantes TLS-ESPRIT [Roy et Kailath, 1987] et PRO-ESPRIT [Zoltawski et Stavrinides, 1989] (qui reposent sur l'espace signal). En fait, toutes ces méthodes d'estimation peuvent être appliquées à un modèle de signal plus général, le modèle ESM, qui représente le signal comme une somme de sinusoides modulées exponentiellement. Ce modèle est également baptisé *Exponentially Damped Sinusoids* (EDS) quand la modulation est décroissante [Nieuwenhuijse *et al.*, 1998]. D'autres techniques d'estimation ont été spécifiquement développées pour le modèle ESM, telles que l'algorithme de *Kumaresan et Tufts* (KT), encore appelé méthode Min-Norm [Kumaresan et Tufts, 1982], et sa version modifiée *Modified KT* (MKT) [Li *et al.*, 1997] (de type prédiction linéaire), et la méthode *Matrix Pencil* [Hua et Sarkar, 1990] (de type sous-espace). Une liste plus complète de ces méthodes peut être consultée dans [Van der Veen *et al.*, 1993].

Ce chapitre n'a pas vocation à présenter les méthodes HR de façon exhaustive, mais plutôt à familiariser le lecteur avec les concepts sur lesquels elles reposent. C'est pourquoi seules certaines d'entre elles sont présentées ici : les méthodes de Prony, de Pisarenko, MUSIC et ESPRIT. Cet exposé débutera par la définition du modèle de signal (section I.2). Puis la méthode du maximum de vraisemblance, qui permet d'établir un lien avec la transformation de Fourier, sera présentée dans la section I.3. Ensuite les méthodes à haute résolution pour estimer les pôles complexes seront introduites dans la section I.4, et des techniques d'estimation des autres paramètres du modèle seront présentées dans la section I.5. La section I.6 sera consacrée à l'analyse des performances des méthodes HR. Enfin, les résultats de ce chapitre seront résumés dans la section I.7.

## I.2 Modèle de signal

Considérons le modèle de signal discret (défini pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ )

$$s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k z_k^t \quad (\text{I.1})$$

où  $K \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall k \in \{0 \dots K-1\}$ ,  $\alpha_k \in \mathbb{C}^*$ , et tous les pôles  $z_k \in \mathbb{C}^*$  sont distincts. Dans le cas particulier où tous les pôles appartiennent au cercle unité, le signal est représenté comme une somme de sinusoides complexes. Ainsi, chaque pôle  $z_k$  s'écrit sous la forme  $z_k = e^{i2\pi f_k}$  où  $f_k \in \mathbb{R}$  est la fréquence de la sinusoides. Plus généralement, si les pôles ne se trouvent pas sur le cercle unité, les sinusoides sont modulées exponentiellement (modèle ESM). Dans ce cas, chaque pôle  $z_k$  s'écrit sous forme polaire  $z_k = e^{\delta_k} e^{i2\pi f_k}$ , où  $\delta_k \in \mathbb{R}$  est le facteur d'atténuation (ou taux d'amortissement) de la sinusoides. En particulier, les pôles de même angle polaire et de modules différents sont associés à la même fréquence. Les amplitudes complexes  $\alpha_k$  s'écrivent également sous forme polaire  $\alpha_k = a_k e^{i\phi_k}$ , où  $a_k \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\phi \in \mathbb{R}$ .

En outre, le signal observé  $x(t)$  peut être modélisé comme la somme du signal déterministe  $s(t)$  défini ci-dessus et d'un bruit blanc gaussien complexe centré  $w(t)$  de variance  $\sigma^2$ . Rappelons qu'un bruit blanc gaussien complexe centré est une suite de variables aléatoires *i.i.d* à valeurs complexes, de densité de probabilité  $p(w) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{|w|^2}{\sigma^2}}$ . On obtient ainsi la relation

$$x(t) = s(t) + w(t). \quad (\text{I.2})$$

Le signal est observé sur des fenêtres temporelles de longueur  $N \geq K$ . Ainsi, pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ , on considère la fenêtre temporelle  $\{t-l+1 \dots t+n-1\}$ , où les entiers  $n$  et  $l$  sont tels que  $N = n+l-1$ , et on définit le vecteur  $\mathbf{s}(t) = [s(t-l+1), \dots, s(t+n-1)]^T$ , de dimension  $N$ . Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , posons  $\mathbf{v}(z) = [1, z, \dots, z^{N-1}]^T$ . Or  $\mathbf{s}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k z_k^{t-l+1} \mathbf{v}(z_k)$ . Cette égalité peut être réécrite sous la forme d'un produit :  $\mathbf{s}(t) = \mathbf{V}^N \mathbf{J}^{t-l+1} \boldsymbol{\alpha}$ , où  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_0, \dots, \alpha_{K-1}]^T$  est un vecteur de dimension  $K$ ,  $\mathbf{J} = \text{diag}(z_0, \dots, z_{K-1})$  est une matrice diagonale de dimension  $K \times K$ , et  $\mathbf{V}^N = [\mathbf{v}(z_0), \dots, \mathbf{v}(z_{K-1})]$  est une matrice de Vandermonde de dimensions  $N \times K$  :

$$\mathbf{V}^N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_{K-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_0^{N-1} & z_1^{N-1} & \dots & z_{K-1}^{N-1} \end{bmatrix}.$$

Définissons alors le vecteur d'amplitudes à l'instant  $t$ ,  $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{J}^{t-l+1} \boldsymbol{\alpha}$ , de sorte que  $\mathbf{s}(t) = \mathbf{V}^N \boldsymbol{\alpha}(t)$ . Il est connu que la matrice de Vandermonde carrée  $\mathbf{V}^K$  extraite des  $K$  premières lignes de  $\mathbf{V}^N$  (rappelons que  $N \geq K$ ) a pour déterminant [Horn et Johnson, 1985, pp. 29]

$$\det(\mathbf{V}^K) = \prod_{0 \leq k_1 < k_2 \leq K-1} (z_{k_2} - z_{k_1}). \quad (\text{I.3})$$

Ainsi, la matrice  $\mathbf{V}^N$  est de rang plein si et seulement si tous les pôles sont distincts. La relation  $\mathbf{s}(t) = \mathbf{V}^N \boldsymbol{\alpha}(t)$  montre donc que pour chaque instant  $t$  le vecteur  $\mathbf{s}(t)$  vit dans l'espace image de la matrice  $\mathbf{V}^N$ , de dimension inférieure ou égale à  $K$  dans le cas général, et égale à  $K$  si tous les pôles sont distincts.

Soit  $\mathbf{w}(t) = [w(t-l+1), \dots, w(t+n-1)]^T$  le vecteur contenant les échantillons du bruit additif. Il s'agit d'un vecteur aléatoire gaussien centré, dont la matrice de covariance est  $\mathbf{R}_{ww} = \sigma^2 \mathbf{I}_N$ . Notons enfin  $\mathbf{x}(t) = [x(t-l+1), \dots, x(t+n-1)]^T$  le vecteur de données observées. Ce vecteur vérifie donc  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{w}(t)$ . Le modèle étant posé, l'analyse du signal  $s(t)$  va consister à estimer les paramètres  $\sigma^2, z_0, \dots, z_{K-1}$  et  $\boldsymbol{\alpha}(t)$ . Une technique classique d'estimation paramétrique, la méthode du maximum de vraisemblance, est appliquée à ce modèle dans la prochaine section.

### I.3 Méthode du maximum de vraisemblance

Le principe du maximum de vraisemblance est une méthode générale d'estimation de paramètres. Il fournit des estimateurs asymptotiquement efficaces et sans biais. C'est pourquoi il est souvent préféré aux autres techniques d'estimation lorsqu'il possède une solution analytique simple.

### I.3.1 Application du principe du maximum de vraisemblance au modèle ESM

Le principe du maximum de vraisemblance consiste à maximiser la probabilité conditionnelle d'observer le signal  $x$  sur l'intervalle  $\{t-l+1, \dots, t+n-1\}$ , connaissant les paramètres  $\sigma^2, z_0, \dots, z_{(K-1)}$  et  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  (ou le logarithme népérien de cette probabilité, appelé *log-vraisemblance* des observations). Puisque  $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{w}(t)$ , où  $\boldsymbol{s}(t) = \mathbf{V}^N \boldsymbol{\alpha}(t)$  est un vecteur déterministe et  $\boldsymbol{w}(t)$  est un vecteur aléatoire gaussien complexe centré de matrice de covariance  $\mathbf{R}_{ww} = \sigma^2 \mathbf{I}_N$ ,  $\boldsymbol{x}(t)$  est lui-même un vecteur aléatoire gaussien complexe d'espérance  $\boldsymbol{s}(t)$  et de matrice de covariance  $\mathbf{R}_{ww}$ . Rappelons que la densité de probabilité d'un tel vecteur aléatoire est

$$p(\boldsymbol{x}(t)) = \frac{1}{\pi^N \det(\mathbf{R}_{ww})} e^{-(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{s}(t))^H \mathbf{R}_{ww}^{-1} (\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{s}(t))}.$$

Ainsi, la log-vraisemblance des observations est

$$L(\sigma^2, z_0 \dots z_{K-1}, \boldsymbol{\alpha}(t)) = -N \ln(\pi \sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2} g(z_0 \dots z_{K-1}, \boldsymbol{\alpha}(t))$$

où

$$g(z_0 \dots z_{K-1}, \boldsymbol{\alpha}(t)) = (\boldsymbol{x}(t) - \mathbf{V}^N \boldsymbol{\alpha}(t))^H (\boldsymbol{x}(t) - \mathbf{V}^N \boldsymbol{\alpha}(t)).$$

La maximisation de cette log-vraisemblance par rapport aux paramètres  $(\sigma^2, z_0 \dots z_{K-1}, \boldsymbol{\alpha}(t))$  peut être effectuée en minimisant d'abord  $g$  par rapport au couple  $(z_0 \dots z_{K-1}, \boldsymbol{\alpha}(t))$ , puis en maximisant  $L$  par rapport à  $\sigma$ . On obtient ainsi  $\sigma^2 = \frac{1}{N} g(z_0 \dots z_{K-1}, \boldsymbol{\alpha}(t))$ , ou encore

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{1}{N} \|\boldsymbol{x}(t) - \mathbf{V}^N \boldsymbol{\alpha}(t)\|^2.} \quad (\text{I.4})$$

Il apparaît que  $\sigma^2$  est estimé en calculant la puissance du résiduel obtenu en soustrayant les exponentielles du signal observé.

La matrice  $\mathbf{V}^N$  est de rang plein, puisqu'il a été supposé dans la section I.2 que les pôles sont distincts deux à deux. Ainsi, la matrice  $\mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N$  est inversible. Pour minimiser  $g$  par rapport au couple  $(z_0 \dots z_{K-1}, \boldsymbol{\alpha}(t))$ , il suffit d'utiliser la décomposition

$$\begin{aligned} g(z_0 \dots z_{K-1}, \boldsymbol{\alpha}(t)) &= \boldsymbol{x}(t)^H \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t)^H \mathbf{V}^N (\mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N)^{-1} \mathbf{V}^{NH} \boldsymbol{x}(t) \\ &+ \left( \boldsymbol{\alpha}(t) - (\mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N)^{-1} \mathbf{V}^{NH} \boldsymbol{x}(t) \right)^H (\mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N) \left( \boldsymbol{\alpha}(t) - (\mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N)^{-1} \mathbf{V}^{NH} \boldsymbol{x}(t) \right). \end{aligned}$$

Le dernier terme de cette équation est toujours positif, et peut être rendu nul en posant

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha}(t) = (\mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N)^{-1} \mathbf{V}^{NH} \boldsymbol{x}(t).} \quad (\text{I.5})$$

Il apparaît que le vecteur des amplitudes complexes  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  est estimé de la même façon qu'en utilisant la méthode des moindres carrés ordinaire.

La fonction  $g$  est donc minimale quand le  $K$ -uplet  $(z_0 \dots z_{K-1})$  maximise la fonction  $\mathcal{J}$  définie par

$$\boxed{\mathcal{J}(z_0, \dots, z_{(K-1)}) = \boldsymbol{x}(t)^H \mathbf{V}^N (\mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N)^{-1} \mathbf{V}^{NH} \boldsymbol{x}(t).} \quad (\text{I.6})$$

Comme ce problème d'optimisation ne possède pas de solution analytique dans le cas général, il doit être résolu numériquement. En résumé, le principe du maximum de vraisemblance conduit à estimer les paramètres du modèle en trois étapes :

**les pôles complexes** sont obtenus en effectuant la maximisation de la fonction  $\mathcal{J}$  (équation (I.6)),  
**les amplitudes complexes** sont obtenues en calculant le membre de droite de l'équation (I.5),  
**l'écart-type** est alors donné par l'équation (I.4).

Malheureusement, il se trouve que la première étape de cette méthode d'estimation, qui requiert l'optimisation d'une fonction de  $K$  variables complexes, est difficile à implémenter, car la fonction à maximiser possède de nombreux maxima locaux. De plus, elle s'avère extrêmement coûteuse en temps de calcul. C'est pourquoi on utilise généralement des méthodes plus fiables et plus rapides pour estimer les pôles complexes. Néanmoins, une fois les pôles estimés, le principe du maximum de vraisemblance peut être utilisé pour déterminer les amplitudes complexes et l'écart-type du bruit.

### I.3.2 Maximum de vraisemblance et résolution de Fourier

Intéressons-nous maintenant au cas particulier où tous les pôles sont sur le cercle unité ( $\forall k, \delta_k = 0$ ). Les résultats de la section I.3.1 ont montré que le principe du maximum de vraisemblance conduit à un problème d'optimisation qui ne possède pas de solution analytique simple dans le cas général. Cependant, une telle solution existe dans le cas particulier où  $K = 1$ , ainsi qu'une solution approchée si  $K > 1$ .

Examinons d'abord le cas d'une seule exponentielle complexe ( $K = 1$ ). Alors l'équation (I.6) se simplifie en  $\mathcal{J}(z_0) = \widehat{R}_x(z_0)$ , où  $\widehat{R}_x$  est le périodogramme du signal  $x(t)$  observé sur la fenêtre temporelle  $\{t - l + 1 \dots t + n - 1\}$  :

$$\widehat{R}_x(e^{i2\pi f_0}) = \frac{1}{N} \left| X(e^{i2\pi f_0}) \right|^2$$

où  $X(e^{i2\pi f_0}) = \mathbf{v}(e^{i2\pi f_0})^H \mathbf{x}(t) = \sum_{\tau=0}^{N-1} x(t - l + 1 + \tau) e^{-i2\pi f_0 \tau}$ . De même, l'équation (I.5) se simplifie en  $\alpha_0(t) = \frac{1}{N} X(e^{i2\pi f_0})$ . Enfin, l'équation (I.4) se simplifie en  $\sigma^2 = \frac{1}{N} \left( \|\mathbf{x}(t)\|^2 - \widehat{R}_x(e^{i2\pi f_0}) \right)$ .

Ces résultats induisent la conclusion suivante :

Le principe du maximum de vraisemblance conduit dans le cas d'une sinusoïde complexe à détecter la fréquence pour laquelle le périodogramme atteint son maximum. L'amplitude complexe correspondante est proportionnelle à la valeur de la *Transformée de Fourier Discrète* (TFD) du signal à cette fréquence. La variance du bruit est estimée comme la puissance du signal après soustraction de la sinusoïde.

Abordons maintenant le cas général  $K \geq 1$ , pour lequel la maximisation de la fonction  $\mathcal{J}(z)$  ne possède plus de solution analytique exacte. On introduit alors l'hypothèse suivante :

$$N \gg \frac{1}{\min_{k_1 \neq k_2} |f_{k_2} - f_{k_1}|}.$$

La matrice  $\mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N$  est une matrice hermitienne définie positive de dimension  $K \times K$ , dont les coefficients peuvent être calculés analytiquement :  $\left\{ \mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N \right\}_{(k_1, k_2)} = \sum_{\tau=0}^{N-1} (z_{k_1}^* z_{k_2})^\tau$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \left\{ \mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N \right\}_{(k_1, k_2)} &= e^{i\pi(N-1)(f_{k_2} - f_{k_1})} \frac{\sin(\pi N(f_{k_2} - f_{k_1}))}{N \sin(\pi(f_{k_2} - f_{k_1}))} & \text{si } k_1 \neq k_2 \\ \frac{1}{N} \left\{ \mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N \right\}_{(k, k)} &= 1 & \text{si } k_1 = k_2 = k \end{aligned}$$



Ainsi, quand  $N \gg \frac{1}{\min_{k_1 \neq k_2} |f_{k_2} - f_{k_1}|}$ ,  $\frac{1}{N} \mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N = \mathbf{I}_K + O\left(\frac{1}{N}\right)$ , donc

$$\left(\mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N\right)^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{I}_K + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Alors l'équation (I.6) se simplifie en

$$\mathcal{J}(z_0, \dots, z_{K-1}) = \frac{1}{N} \left\| \mathbf{V}^{NH} \mathbf{x}(t) \right\|^2 + O\left(\frac{1}{N^2}\right) = \sum_{k=0}^{K-1} \widehat{R}(z_k) + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

De même, l'équation (I.5) se simplifie en  $\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{1}{N} \mathbf{V}^{NH} \mathbf{x}(t) + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ , d'où

$$\alpha_k(t) = \frac{1}{N} X(e^{i2\pi f_k}) + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Enfin, l'équation (I.4) se simplifie en  $\sigma^2 = \frac{1}{N} \left( \left\| \mathbf{x}(t) \right\|^2 - \sum_{k=0}^{K-1} \widehat{R}(e^{i2\pi f_k}) \right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ .

Ainsi, la maximisation conjointe de  $\mathcal{J}$  par rapport à  $z_0, \dots, z_{K-1}$  conduit à déterminer les  $K$  fréquences associées aux  $K$  plus grandes valeurs du périodogramme. Les amplitudes complexes correspondantes sont proportionnelles à la valeur de la TFD du signal à ces fréquences. Rappelons que ces résultats ne sont valables que si tous les pôles sont sur le cercle unité et reposent sur l'hypothèse  $N \gg \frac{1}{\min_{k_1 \neq k_2} |f_{k_2} - f_{k_1}|}$ .

On observe ainsi la limite de l'analyse de Fourier en terme de résolution spectrale : les paramètres sont estimés correctement à condition que la longueur de la fenêtre observée soit suffisamment grande devant l'inverse du plus petit écart fréquentiel entre deux pôles voisins. C'est de cette limite que les méthodes HR présentées dans la section I.4 permettent de s'affranchir. Ainsi, les méthodes HR sont capables de distinguer deux sinusoïdes proches, que l'analyse de Fourier ne permet pas de discerner (un exemple sera donné dans la section IV.4.2). Dans les applications, les méthodes HR pourront être utilisées avec des fenêtres plus courtes que celles que l'on utilise habituellement avec l'analyse de Fourier.

## I.4 Méthodes à haute résolution

On commence par introduire ici les méthodes à haute résolution les plus anciennes, qui reposent sur des techniques de prédiction linéaire (section I.4.1), avant d'aborder dans la section I.4.2 les méthodes de type sous-espace, plus récentes.

### I.4.1 Techniques de prédiction linéaire

Les deux premières méthodes à haute résolution présentées dans ce chapitre reposent sur un résultat fondamental portant sur les équations de récurrence linéaires, présenté dans la section I.4.1.1.



FIG. I.1 – Jean Baptiste Joseph FOURIER (1768-1830)

#### I.4.1.1 Equations de récurrence linéaires

Soient  $p_0 \in \mathbb{C}^*$ ,  $K \in \mathbb{N}^*$  et  $\{z_0, \dots, z_{K-1}\}$   $K$  nombres complexes distincts et non nuls. On définit le polynôme de degré  $K$  dont le coefficient dominant est  $p_0$  et dont les racines sont les  $z_k$  :

$$P[z] = p_0 \prod_{k=0}^{K-1} (z - z_k) = \sum_{\tau=0}^K p_{K-\tau} z^\tau.$$

Le théorème suivant caractérise le modèle de signal.

**Théorème I.4.1.** *Un signal discret complexe  $\{s(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$  satisfait l'équation de récurrence*

$$\boxed{\sum_{\tau=0}^K p_\tau s(t - \tau) = 0} \quad (\text{I.7})$$

pour tout  $t \in \mathbb{Z}$  si et seulement si il existe des scalaires  $\alpha_0, \dots, \alpha_{K-1} \in \mathbb{C}$  tels que  $s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k z_k^t$ .

Ce résultat est prouvé entre autres dans [Kumaresan, 1983].

#### I.4.1.2 Méthode de Prony

Les travaux du baron de Prony sont à l'origine du développement des méthodes à haute résolution. Celui-ci a proposé une méthode d'estimation s'inspirant du résultat précédent sur les équations de



FIG. I.2 – Gaspard-Marie RICHE de PRONY (1755-1839)

réurrence linéaires [Riche de Prony, 1795]. Cette méthode était originellement destinée à estimer des exponentielles réelles non bruitées ; cependant nous l'appliquons ici à l'estimation d'exponentielles complexes bruitées. La méthode de Prony consiste à déterminer dans un premier temps le polynôme  $P[z]$  à l'aide de techniques de prédiction linéaire, puis à extraire les racines de ce polynôme. On définit l'erreur de prédiction

$$\varepsilon(t) \triangleq \sum_{\tau=0}^K p_{\tau} x(t - \tau). \quad (\text{I.8})$$

En particulier, en substituant les équations (I.2) et (I.7) dans l'équation (I.8), on obtient  $\varepsilon(t) = \sum_{\tau=0}^K p_{\tau} w(t - \tau)$ . L'erreur de prédiction caractérise donc uniquement le bruit qui se superpose au signal. Plaçons-nous dans le cas particulier  $n = K + 1$ , et supposons que  $l \geq K + 1$ . Ainsi, le signal est observé sur la fenêtre  $\{t - l + 1 \dots t + K\}$ . En appliquant l'équation (I.8) aux instants  $\{t - l + K + 1, t - l + K + 2, \dots, t + K\}$ , on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} p_0 x(t - l + K + 1) + p_1 x(t - l + K) + \dots + p_K x(t - l + 1) = \varepsilon(t - l + K + 1) \\ p_0 x(t - l + K + 2) + p_1 x(t - l + K + 1) + \dots + p_K x(t - l + 2) = \varepsilon(t - l + K + 2) \\ \vdots + \vdots + \dots + \vdots = \vdots \\ p_0 x(t + K) + p_1 x(t + K - 1) + \dots + p_K x(t) = \varepsilon(t + K) \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

Posons alors  $\mathbf{p} = [p_K, p_{(K-1)}, \dots, p_0]^H$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = [\varepsilon(t - l + K + 1), \varepsilon(t - l + K + 2), \dots, \varepsilon(t + K)]^H$

et

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t-l+1) & \cdots & x(t-1) & x(t) \\ x(t-l+2) & \cdots & x(t) & x(t+1) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x(t-l+K+1) & \cdots & x(t+K-1) & x(t+K) \end{bmatrix} \quad (\text{I.10})$$

de sorte que le système d'équations (I.9) peut être condensé sous la forme  $\mathbf{p}^H \mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t)^H$ .

La méthode de Prony consiste à minimiser la puissance de l'erreur de prédiction  $\frac{1}{l} \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2$  par rapport à  $\mathbf{p}$ , sous la contrainte  $p_0 = 1$ . Or il est possible d'écrire  $\frac{1}{l} \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 = \mathbf{p}^H \widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t) \mathbf{p}$ , où la matrice  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t) = \frac{1}{l} \mathbf{X}(t) \mathbf{X}(t)^H$  est de dimension  $(K+1) \times (K+1)$ . Comme la matrice  $\mathbf{X}(t)$  possède  $K+1$  lignes et  $l \geq K+1$  colonnes, on peut supposer que la matrice  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t)$  est inversible. La solution de ce problème d'optimisation est alors

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\mathbf{e}_1^H \widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t)^{-1} \mathbf{e}_1} \widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t)^{-1} \mathbf{e}_1$$

où  $\mathbf{e}_1 \triangleq [1, 0 \dots 0]^T$  est un vecteur de dimension  $K+1$ . Ainsi, la méthode d'estimation de Prony comprend les étapes suivantes :

- Construire la matrice  $\mathbf{X}(t)$  et calculer  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t)$ ;
- Calculer  $\mathbf{p} = \frac{1}{\mathbf{e}_1^H \widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t)^{-1} \mathbf{e}_1} \widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t)^{-1} \mathbf{e}_1$ ;
- Déterminer les pôles  $\{z_0, \dots, z_{K-1}\}$  en tant que racines du polynôme  $P[z] = \sum_{k=0}^K p_k z^{K-k}$ .

### I.4.1.3 Méthode de Pisarenko

La méthode de Pisarenko est une variante de la méthode de Prony. Elle consiste à minimiser la puissance de l'erreur de prédiction  $\frac{1}{l} \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 = \mathbf{p}^H \widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t) \mathbf{p}$  sous la contrainte que le vecteur  $\mathbf{p}$  soit de norme 1. La solution de ce problème d'optimisation est le vecteur propre de la matrice  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t)$  associé à la plus petite valeur propre.

Ainsi la méthode de Pisarenko [Pisarenko, 1973] consiste à

- calculer et diagonaliser  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t)$ ;
- déterminer  $\mathbf{p}$  comme le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre;
- extraire les racines du polynôme  $P[z]$ .

Les méthodes de Prony et de Pisarenko constituent les plus anciennes méthodes HR. Comme nous le montrerons dans la section I.6.2, elles s'avèrent peu robustes en pratique, c'est pourquoi les méthodes de type sous-espace, proposées plus récemment, leur sont généralement préférées.

## I.4.2 Méthodes sous-espace

Dans le même esprit que la méthode de Pisarenko, les méthodes HR modernes (*e.g.* [Schmidt, 1986, Roy *et al.*, 1986, Hua et Sarkar, 1990]) reposent sur une décomposition de la matrice  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t)$ .

### I.4.2.1 Structure singulière de la matrice de données

Supposons désormais que  $n \geq K+1$  et  $l \geq K+1$ , et construisons la matrice de données du signal non bruité  $s(t)$  sur le même modèle que la matrice  $\mathbf{X}(t)$  dans l'équation (I.10), selon une structure de

Hankel :

$$\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} s(t-l+1) & \cdots & s(t-1) & s(t) \\ s(t-l+2) & \cdots & s(t) & s(t+1) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ s(t-l+n) & \cdots & s(t+n-2) & s(t+n-1) \end{bmatrix}. \quad (\text{I.11})$$

La proposition suivante, démontrée dans [Hua et Sarkar, 1990], caractérise le modèle de signal.

**Proposition I.4.2** (Factorisation de la matrice de données). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Le signal  $s(t)$  satisfait le modèle défini dans l'équation (I.1) sur l'intervalle  $\{t-l+1, \dots, t+n-1\}$  ;
2. La matrice  $\mathbf{S}(t)$  définie dans l'équation (I.11) peut être factorisée sous la forme

$$\boxed{\mathbf{S}(t) = \mathbf{V}^n \mathbf{D}(t) \mathbf{V}^{lT}} \quad (\text{I.12})$$

où la matrice diagonale  $\mathbf{D}(t) = \text{diag}(z_0^{t-l+1}\alpha_0, \dots, z_{(K-1)}^{t-l+1}\alpha_{(K-1)})$  est de dimension  $K \times K$ ,  $\mathbf{V}^n$  est de dimensions  $n \times K$ , et  $\mathbf{V}^l$  est de dimensions  $l \times K$ .

Cette proposition montre que la matrice  $\mathbf{S}(t)$  est de rang inférieur ou égal à  $K$ . Plus précisément, elle est de rang  $K$  si et seulement si  $n \geq K$ ,  $l \geq K$ , tous les pôles  $z_k$  sont distincts et non nuls, et toutes les amplitudes  $\alpha_k$  sont non nulles. Dans ce cas, son espace image est engendré par la matrice  $\mathbf{V}^n$ . La structure singulière de la matrice de données induit une structure équivalente pour la matrice de corrélation, définie ci-dessous.

#### I.4.2.2 Structure singulière de la matrice de corrélation

Les méthodes sous-espace reposent sur la structure particulière de la matrice de corrélation du signal  $\mathbf{C}_{ss}(t) = \mathbf{S}(t) \mathbf{S}(t)^H$ , et en particulier sur ses sous-espaces propres, que nous allons maintenant étudier. Définissons  $\mathbf{R}_{ss}(t) = \frac{1}{l} \mathbf{C}_{ss}(t)$ . L'équation (I.12) montre que

$$\boxed{\mathbf{R}_{ss}(t) = \mathbf{V}^n \mathbf{P}(t) \mathbf{V}^{nH}} \quad (\text{I.13})$$

où

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{l} \mathbf{D}(t) \mathbf{V}^{lT} \mathbf{V}^{l*} \mathbf{D}(t)^H \quad (\text{I.14})$$

est une matrice symétrique définie positive. Ainsi, l'équation (I.13) montre que sous les mêmes hypothèses que pour  $\mathbf{S}(t)$ , la matrice  $\mathbf{R}_{ss}(t)$  est de rang  $K$ . Son espace image, appelé *espace signal* dans la littérature, est engendré par la matrice  $\mathbf{V}^n$ . En particulier, les  $K$  valeurs propres de  $\mathbf{R}_{ss}(t)$  associées à cet espace sont strictement positives, alors que les  $n - K$  autres sont nulles.

On définit ensuite la matrice  $\mathbf{X}(t)$  à partir des échantillons du signal bruité  $x(t)$ , de la même manière que la matrice  $\mathbf{S}(t)$  dans l'équation (I.11), et on considère la matrice de corrélation

$$\mathbf{C}_{xx}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{X}(t)^H. \quad (\text{I.15})$$

Posons alors  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t) = \frac{1}{l} \mathbf{C}_{xx}(t)$  (comme dans la section I.4.1.2). Puisque le bruit additif  $w(t)$  est blanc et centré, de variance  $\sigma^2$ , la matrice  $\mathbf{R}_{xx}(t) = \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t)]$  vérifie  $\mathbf{R}_{xx}(t) = \mathbf{R}_{ss}(t) + \sigma^2 \mathbf{I}_n$ . Cette dernière équation montre que tous les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{R}_{ss}(t)$  sont également vecteurs propres de  $\mathbf{R}_{xx}(t)$ , et que les valeurs propres correspondantes de  $\mathbf{R}_{xx}(t)$  sont égales à celles de  $\mathbf{R}_{ss}(t)$  plus  $\sigma^2$ . Par conséquent, l'espace signal est également l'espace principal de dimension  $K$  de la matrice  $\mathbf{R}_{xx}(t)$ ,

c'est-à-dire l'espace propre de  $\mathbf{R}_{xx}(t)$  associé aux  $K$  plus grandes valeurs propres, toutes strictement supérieures à  $\sigma^2$ . Les  $n - K$  valeurs propres associées au complémentaire orthogonal de l'espace signal, appelé *espace bruit*, sont toutes égales à  $\sigma^2$ . Il est possible d'estimer l'espace signal et l'espace bruit en calculant l'EVD de la matrice  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t)$ , ou encore la SVD de  $\mathbf{X}(t)$ . En juxtaposant les  $K$  principaux vecteurs propres ou singuliers de l'une de ces matrices, on obtient ainsi une matrice  $\mathbf{W}(t)$  de dimensions  $n \times K$  engendrant l'espace signal, et en juxtaposant les  $n - K$  autres vecteurs, on obtient une matrice  $\mathbf{W}_\perp(t)$  de dimensions  $n \times (n - K)$  engendrant l'espace bruit.

L'idée qui consiste à décomposer l'espace des données en deux sous-espaces (signal et bruit) est à l'origine de plusieurs méthodes à haute résolution, parmi lesquelles la méthode MUSIC, présentée dans la section I.4.2.3, et la méthode ESPRIT, présentée dans la section I.4.2.4.

### I.4.2.3 Multiple Signal Characterization (MUSIC)

La méthode MUSIC, développée par R. O. Schmidt [Schmidt, 1981], repose sur la remarque suivante : les pôles  $\{z_k\}_{k=0\dots K-1}$  sont les uniques solutions de l'équation

$$\|\mathbf{W}_\perp(t)^H \mathbf{v}(z)\|^2 = 0 \quad (\text{I.16})$$

où  $\mathbf{v}(z) = [1, z, \dots, z^{n-1}]^T$ . En effet,  $z$  est solution si et seulement si  $\mathbf{v}(z) \in \text{span}(\mathbf{W}(t)) = \text{span}(\mathbf{V}^n)$ . Donc tout pôle  $z_k$  est solution, et il ne peut y en avoir d'autre car dans le cas contraire l'espace signal serait de dimension strictement plus grande que  $K$ . Ainsi, la méthode *root-MUSIC* [Barabell, 1983] consiste à

- calculer et diagonaliser la matrice  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t)$  ;
- en déduire une base de l'espace bruit  $\mathbf{W}_\perp(t)$  ;
- extraire les racines de l'équation (I.16).

Dans le cas particulier où l'espace bruit est de dimension 1, elle est équivalente à la méthode de Pisarenko présentée dans la section I.4.1.3.

Dans la pratique, les signaux réels ne correspondent pas rigoureusement au modèle, et l'équation (I.16) n'est pas rigoureusement vérifiée. C'est pourquoi la méthode *spectral-MUSIC* [Schmidt, 1986] consiste plutôt à rechercher les  $K$  pics les plus élevés de la fonction  $\widehat{S}(z) = \frac{1}{\|\mathbf{W}_\perp^H \mathbf{v}(z)\|^2}$ .

La méthode ESPRIT, présentée ci-dessous, permet d'éviter l'optimisation de la fonction  $\widehat{S}(z)$ , ou la résolution de l'équation (I.16), et fournit les valeurs des pôles complexes d'une manière plus directe.

### I.4.2.4 Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques

La méthode ESPRIT [Roy *et al.*, 1986] s'appuie sur une propriété particulière de l'espace signal : l'invariance rotationnelle. Soit  $\mathbf{V}_\downarrow^n$  la matrice de dimensions  $(n-1) \times K$  qui contient les  $n-1$  premières lignes de  $\mathbf{V}^n$ , et  $\mathbf{V}_\uparrow^n$  la matrice de dimensions  $(n-1) \times K$  qui contient les  $n-1$  dernières lignes de  $\mathbf{V}^n$ . De même, soit  $\mathbf{W}(t)_\downarrow$  la matrice de dimensions  $(n-1) \times K$  qui contient les  $n-1$  premières lignes de  $\mathbf{W}(t)$ , et  $\mathbf{W}(t)_\uparrow$  la matrice de dimensions  $(n-1) \times K$  qui contient les  $n-1$  dernières lignes de  $\mathbf{W}(t)$ . Alors on vérifie que

$$\boxed{\mathbf{V}_\uparrow^n = \mathbf{V}_\downarrow^n \mathbf{J}} \quad (\text{I.17})$$

où  $\mathbf{J} = \text{diag}(z_0, \dots, z_{K-1})$ . Or les colonnes de  $\mathbf{V}^n$  et celles de  $\mathbf{W}(t)$  constituent deux bases d'un même espace vectoriel de dimension  $K$ . Ainsi, il existe une matrice inversible  $\mathbf{G}(t)$  de dimension  $K \times K$  telle que

$$\mathbf{V}^n = \mathbf{W}(t) \mathbf{G}(t) \quad (\text{I.18})$$

où  $\mathbf{G}(t)$  est définie comme la matrice de passage de la première base à la seconde. En substituant l'équation (I.18) dans l'équation (I.17), on montre que

$$\boxed{\mathbf{W}(t)_{\uparrow} = \mathbf{W}(t)_{\downarrow} \Phi(t)}$$

où  $\Phi(t)$ , appelée *matrice spectrale*, est définie par son EVD :

$$\boxed{\Phi(t) = \mathbf{G}(t) \mathbf{J} \mathbf{G}(t)^{-1}}. \quad (\text{I.19})$$

En particulier, les valeurs propres de  $\Phi(t)$  sont les pôles  $\{z_k\}_{k=0\dots K-1}$ .

Finalement, l'algorithme ESPRIT se décompose en quatre étapes :

- calculer et diagonaliser la matrice  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}(t)$  ;
- en déduire une base de l'espace signal  $\mathbf{W}(t)$  ;
- extraire de  $\mathbf{W}(t)$  les matrices  $\mathbf{W}(t)_{\downarrow}$  et  $\mathbf{W}(t)_{\uparrow}$  ;
- estimer la matrice spectrale  $\Phi(t)$  en utilisant la méthode des moindres carrés (*Least Squares* (LS))<sup>1</sup> ou des moindres carrés totaux (*Total Least Squares* (TLS))<sup>2</sup>.
- diagonaliser  $\Phi(t)$  et en déduire les pôles estimés.

Des études théoriques et expérimentales ont montré que la méthode ESPRIT est la plus performante des méthodes HR présentées ci-dessus (*cf.* section I.6.2).

## I.5 Estimation des autres paramètres

Les méthodes à haute résolution exposées dans les sections précédentes estiment uniquement les pôles  $z_k$ . On s'intéresse maintenant à l'estimation des autres paramètres du modèle.

### I.5.1 Estimation de l'ordre de modélisation

Jusqu'à présent, l'ordre du modèle ESM était supposé connu, ce qui n'est généralement pas le cas dans la pratique. De nombreuses méthodes ont été proposées dans la littérature pour estimer le nombre de sinusoides présentes dans un bruit blanc. Les plus classiques sont la méthode du maximum de vraisemblance [Bienvenu et Kopp, 1983] et les critères issus de la théorie de l'information, dits *Critères de Théorie de l'Information* (ITC) [Wax et Kailath, 1985], parmi lesquels les critères *Akaike Information Criterion* (AIC) [Akaike, 1973] et *Minimum Description Length* (MDL) par Schwartz [Schwarz, 1978] et Rissanen [Rissanen, 1978]. Une autre technique dans le cadre des ITC est le critère *Efficient Detection Criteria* (EDC) [Zhao *et al.*, 1986a], qui s'avère également robuste à un bruit blanc multiplicatif [Gini et Bordonì, 2003]. Ces divers critères ITC reposent sur la similarité des valeurs propres dans l'espace bruit, et non sur l'existence d'une cassure entre les espaces signal et bruit [Liavas et Regalia, 2001]. Un critère de sélection de l'ordre de modélisation fondé sur cette cassure, formulée en terme de décomposition *maximalement stable*, a été développé dans [Liavas *et al.*, 1999]. D'autres approches reposent sur les matrices de Wishart [Grouffaud *et al.*, 1996] et sur la méthode de validation croisée [Kundu et Mitra, 2000].

Cependant, dans le cas où le bruit est coloré, toutes ces méthodes tendent à surestimer l'ordre du modèle. Ainsi, des méthodes spécifiques ont été conçues pour traiter le cas d'un bruit coloré, parmi lesquelles de nouveaux critères ITC [Zhao *et al.*, 1986b, Zhang et Wong, 1993], une technique basée sur un modèle de fonction d'autocovariance du bruit à support fini [Fuchs, 1992], et un critère de maximum a posteriori [Bishop et Djuric, 1996].

<sup>1</sup>L'algorithme LS-ESPRIT [Roy *et al.*, 1986] calcule  $\Phi(t) = \mathbf{W}(t)_{\downarrow}^{\dagger} \mathbf{W}(t)_{\uparrow}$  (où le symbole  $\dagger$  désigne le pseudo-inverse).

<sup>2</sup>L'algorithme *Total Least Squares ESPRIT* (TLS-ESPRIT) estime  $\Phi(t)$  comme solution d'un problème de minimisation au sens des moindres carrés totaux [Roy et Kailath, 1987].

Parmi toutes ces méthodes, nous présentons ici les plus classiques, à savoir les trois principaux critères ITC : AIC, MDL et EDC (qui est une généralisation robuste de AIC et MDL). Ces méthodes consistent à minimiser une fonction de coût composée d'un premier terme commun et d'un second terme qui constitue un facteur de pénalisation :

$$\text{ITC}(p) = -(n-p) l \ln \left( \frac{\left( \prod_{q=p+1}^n \sigma_q^2 \right)^{\frac{1}{n-p}}}{\frac{1}{n-p} \sum_{q=p+1}^n \sigma_q^2} \right) + p(2n-p) C(l)$$

où les scalaires  $\sigma_q^2$  sont les valeurs propres de la matrice  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}(t)$  classées par ordre décroissant, et  $C(l)$  est une fonction de la variable  $l$ . Le critère AIC est défini en posant  $C(l) = 1$ , et le critère MDL est défini en posant  $C(l) = \frac{1}{2} \ln(l)$ . Les critères EDC sont obtenus pour toutes les fonctions  $l \mapsto C(l)$  telles que  $\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{C(l)}{l} = 0$  et  $\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{C(l)}{\ln(\ln(l))} = +\infty$ . Ces critères conduisent à maximiser le rapport de la moyenne géométrique des valeurs propres de l'espace bruit sur leur moyenne arithmétique. Or ce rapport est maximal et égal à 1 lorsque toutes ces valeurs propres sont égales; il mesure donc la blancheur du bruit (en théorie les valeurs propres sont toutes égales à  $\sigma^2$ ). Le terme de pénalisation  $C(l)$  permet d'éviter de surestimer  $p$ . Dans la pratique, ces méthodes sont relativement satisfaisantes pour traiter des signaux qui vérifient bien le modèle de signal, mais leurs performances s'effondrent quand ce modèle est moins bien vérifié, en particulier quand le bruit est coloré.

### I.5.2 Estimation des amplitudes, des phases et de l'écart-type du bruit

Le principe du maximum de vraisemblance développé dans la section I.3.1 suggère d'utiliser la méthode des moindres carrés pour estimer les amplitudes complexes (*cf.* équation (I.5)) :

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{V}^{N\dagger} \mathbf{x}(t),$$

dont se déduisent  $a_k = |\alpha_k|$  et  $\phi_k = \arg(\alpha_k)$ . Rappelons que d'après le théorème de Gauss-Markov, l'estimateur des moindres carrés est un estimateur linéaire sans biais, de variance minimale parmi tous les estimateurs linéaires sans biais, dans la mesure où le bruit additif est blanc. Dans le cas où le bruit additif est coloré, l'estimateur optimal est obtenu par la méthode des moindres carrés pondérés (on pourra consulter [Stoica *et al.*, 2000] pour des informations détaillées sur l'estimation des amplitudes par la méthode des moindres carrés pondérés).

Enfin, le principe du maximum de vraisemblance suggère d'estimer l'écart-type en calculant la puissance du résiduel (*cf.* équation (I.4)) :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{V}^N \boldsymbol{\alpha}(t)\|^2.$$

## I.6 Performances des estimateurs

### I.6.1 Borne de Cramer-Rao

La borne de Cramér-Rao est un outil fondamental en théorie des probabilités, car elle permet d'analyser les performances d'un estimateur, en rapportant la variance de celui-ci à une valeur optimale, qui tient en quelque sorte lieu de repère de qualité. Dans le cas particulier du modèle de signal ESM, une étude de la borne de Cramér-Rao a été proposée dans [Hua et Sarkar, 1990]. Le théorème général de la borne de Cramér-Rao est rappelé ci-dessous (*cf.* [Kay, 1993]). Il repose sur l'hypothèse d'un modèle statistique régulier.



**Définition I.6.1** (Modèle statistique régulier). Soit un modèle statistique dominé par une mesure  $\mu$  et paramétré par  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ , où  $\Theta$  est une partie ouverte de  $\mathbb{R}^q$ . Notons  $\mathbf{x}$  la variable vectorielle de dimension  $N$ . La paramétrisation est dite régulière si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. la densité de probabilité  $p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})$  est continûment dérivable,  $\mu$ -presque partout, par rapport à  $\boldsymbol{\theta}$ .
2. la matrice d'information de Fisher

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) \triangleq \int_H \mathbf{l}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) \mathbf{l}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})^T p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x}$$

définie à partir de la fonction de score  $\mathbf{l}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) \triangleq \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \ln p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) \mathbf{1}_{p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) > 0}$  est définie positive pour toute valeur du paramètre  $\boldsymbol{\theta}$  et continue par rapport à  $\boldsymbol{\theta}$ .

**Théorème I.6.1** (Borne de Cramér-Rao). Soit un modèle statistique régulier paramétré par  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ . Soit  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  un estimateur non biaisé de  $\boldsymbol{\theta}$  ( $\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}}[\hat{\boldsymbol{\theta}}] = \boldsymbol{\theta}$ ). Alors la matrice de dispersion  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \triangleq \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}} \left[ (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T \right]$  est telle que la matrice  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$  est positive.

En particulier, les éléments diagonaux de la matrice  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$  sont positifs. Par conséquent, les variances des coefficients de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  sont supérieures aux éléments diagonaux de la matrice  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ . Ainsi les bornes d'estimation de Cramér-Rao pour l'ensemble des paramètres scalaires s'obtiennent en trois étapes :

- calcul de la matrice d'information de Fisher ;
- inversion de cette matrice ;
- extraction des éléments diagonaux.

Comme cela a été mentionné dans la section I.3.1, le vecteur  $\mathbf{x}(t)$  contenant les  $N$  échantillons du signal observé est un vecteur aléatoire gaussien d'espérance  $\mathbf{s}(t)$  et de matrice de covariance  $\mathbf{R}_{ww}$ . Ci-dessous, la dépendance de  $\mathbf{s}(t)$  et de  $\mathbf{R}_{ww}$  par rapport aux paramètres du modèle sera mentionnée explicitement. En revanche, pour simplifier les notations, nous omettrons la dépendance de  $\mathbf{s}(t)$  par rapport au temps (qui ne prête pas ici à ambiguïté).

Il est connu que la matrice d'information de Fisher d'un vecteur aléatoire gaussien s'exprime simplement en fonction des paramètres du modèle, comme le montre la proposition suivante [Kay, 1993, pp. 525].

**Proposition I.6.2** (Matrice d'information de Fisher pour une densité gaussienne). Pour une famille de lois de probabilité gaussiennes complexes de matrice de covariance  $\mathbf{R}_{ww}(\boldsymbol{\theta})$  et de moyenne  $\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})$ , où  $\mathbf{R}_{ww} \in \mathcal{C}^1(\Theta, \mathbb{C}^{N \times N})$  et  $\mathbf{s} \in \mathcal{C}^1(\Theta, \mathbb{C}^N)$ , les coefficients de la matrice d'information de Fisher  $\{\mathbf{F}_{(i,j)}(\boldsymbol{\theta})\}_{1 \leq i, j \leq k}$  sont donnés par la formule de Bangs-Slepian étendue :

$$\mathbf{F}_{(i,j)}(\boldsymbol{\theta}) = \text{trace} \left( \mathbf{R}_{ww}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_{ww}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \mathbf{R}_{ww}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_{ww}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right) + 2 \text{Re} \left( \frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})^H}{\partial \theta_i} \mathbf{R}_{ww}^{-1} \frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right). \quad (\text{I.20})$$

En appliquant la formule (I.20) au modèle ESM, on obtient une expression analytique de la matrice d'information de Fisher. On en déduit le théorème suivant, démontré dans [Hua et Sarkar, 1990] :

**Proposition I.6.3.** Les bornes de Cramér-Rao pour les paramètres  $(\phi_k, \delta_k, f_k)$  sont indépendantes de  $a_{k'}$  pour tout  $k' \neq k$ , mais proportionnelles à  $\frac{1}{a_k^2}$ . La borne pour le paramètre  $a_k$  est indépendante de tous les  $a_{k'}$ . Enfin, les bornes pour tous les paramètres sont indépendantes de toutes les phases  $\phi_{k'}$ , et sont inchangées par une translation de l'ensemble des fréquences  $f_{k'}$ .

En outre, les bornes de Cramér-Rao peuvent être calculées analytiquement sous certaines hypothèses, comme cela a été fait dans [Rao et Zhao, 1993].

**Proposition I.6.4.** *Supposons que tous les facteurs d'atténuation sont nuls, et faisons tendre  $N$  vers  $+\infty$ . Alors les bornes de Cramér-Rao pour les paramètres du modèle ESM admettent les développements limités au premier ordre suivants :*

- $\text{CRB}\{\sigma\} = \frac{\sigma^2}{4N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$  ;
- $\text{CRB}\{f_k\} = \frac{6\sigma^2}{4\pi^2 N^3 a_k^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$  ;
- $\text{CRB}\{a_k\} = \frac{2\sigma^2}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$  ;
- $\text{CRB}\{\phi_k\} = \frac{2\sigma^2}{Na_k^2} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ .

On remarque en particulier que les bornes de Cramér-Rao relatives aux fréquences  $f_k$  sont de l'ordre de  $\frac{1}{N^3}$ , ce qui est peu courant en estimation paramétrique. Par ailleurs, il est connu que le principe du maximum de vraisemblance fournit des estimateurs asymptotiquement efficaces [Kay, 1993]. Ainsi, les variances des estimateurs donnés dans la section I.3.1 sont asymptotiquement équivalentes aux bornes de Cramér-Rao données dans la proposition I.6.4. Le cas des méthodes HR est abordé ci-dessous.

## I.6.2 Performances des méthodes HR

Les performances d'un estimateur sont généralement exprimées en terme de biais et de variance. Il est également possible de mesurer son efficacité, définie comme le rapport de sa variance sur la borne de Cramér-Rao. En particulier, un estimateur est dit efficace si son efficacité est égale à 1.

Dans le cas des méthodes HR, il s'avère malheureusement impossible de calculer analytiquement biais et variance, car l'extraction des racines d'un polynôme, ou des valeurs propres d'une matrice, induit une relation complexe entre les statistiques du signal et celles des estimateurs. Cependant, des résultats asymptotiques ont pu être obtenus grâce à la théorie des perturbations. Ces résultats reposent soit sur l'hypothèse  $N \rightarrow +\infty$  (dans le cas où tous les pôles sont sur le cercle unité), soit sur l'hypothèse d'un fort *Rapport Signal à Bruit* (RSB) ( $\text{RSB} \rightarrow +\infty$ ). Sous chacune de ces deux hypothèses, il a été démontré que toutes les méthodes HR présentées dans ce chapitre sont non biaisées. De plus, sous l'hypothèse  $N \rightarrow +\infty$ , les variances des méthodes de Prony et Pisarenko ont été calculées dans [Stoica et Nehorai, 1988], et celles de MUSIC et ESPRIT dans [Stoica et Söderström, 1991]. Sous l'hypothèse  $\text{RSB} \rightarrow +\infty$ , la variance de la méthode de Prony a été calculée dans [Kot *et al.*, 1987], celle de MUSIC dans [Eriksson *et al.*, 1993], et celle de ESPRIT dans [Hua et Sarkar, 1991, Eriksson *et al.*, 1993].

Les développements mathématiques proposés dans tous ces articles sont assez complexes, et sont fortement liés à la méthode d'estimation considérée, c'est pourquoi ils ne sont pas reproduits dans le cadre de ce document. Seuls les principaux résultats sont résumés ici. Tout d'abord, il a été démontré dans [Kot *et al.*, 1987, Stoica et Nehorai, 1988] que les méthodes de Prony et de Pisarenko sont très inefficaces, au sens statistique du terme : leurs variances sont largement supérieures aux bornes de Cramér-Rao. De plus, elles augmentent plus vite que les bornes de Cramér-Rao quand le RSB décroît. En revanche les méthodes MUSIC et ESPRIT ont une efficacité asymptotique proche de 1. Plus précisément, il a été démontré dans [Stoica et Söderström, 1991, Eriksson *et al.*, 1993] (dans le cadre de sinusoides non modulées) que ces deux méthodes atteignent des performances presque identiques, mais que ESPRIT est légèrement meilleur que MUSIC. L'étude menée dans [Hua et Sarkar, 1991] (dans le cas plus général de sinusoides modulées exponentiellement) va dans le même sens : ESPRIT s'avère moins sensible au bruit que MUSIC.

## I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que l'estimation des fréquences et des facteurs d'atténuation par la méthode du maximum de vraisemblance conduit à un problème d'optimisation difficile. Quand tous les pôles du signal sont sur le cercle unité, elle peut être approchée par la détection des  $K$  principaux pics du périodogramme. Ce résultat n'est valable que lorsque la longueur de la fenêtre d'observation est suffisamment grande devant l'inverse du plus petit écart fréquentiel entre pôles voisins. L'intérêt principal des méthodes HR est qu'elles s'affranchissent de cette limite de l'analyse de Fourier en terme de résolution spectrale. Les premières méthodes de cette famille, proposées par Prony et Pisarenko, reposent sur les équations de récurrence linéaire qui caractérisent le modèle de signal. En revanche les techniques plus modernes, parmi lesquelles les méthodes MUSIC et ESPRIT, s'appuient sur la décomposition de l'espace des données en deux sous-espaces propres de la matrice de covariance, appelés espace signal et espace bruit. L'étude statistique de ces diverses techniques d'estimation a montré que la méthode ESPRIT est la plus performante. Les amplitudes et les phases des exponentielles complexes peuvent ensuite être estimées par la méthode des moindres carrés. L'algorithme ESPRIT et la méthode des moindres carrés sont illustrés dans la section X.2, où ils sont appliqués à des signaux synthétiques et à un signal de musique. On y montre en particulier que le modèle ESM permet aussi de représenter des signaux modulés en amplitude et en fréquence.

Le prochain chapitre présente une généralisation du modèle de signal et de l'algorithme ESPRIT.

## Chapitre II

# Estimation des paramètres dans le cas de pôles multiples

### Résumé

Dans ce chapitre sont présentés des résultats de nos travaux de recherche qui généralisent un certain nombre de concepts introduits dans le chapitre I. Une extension du modèle ESM est ainsi proposée, qui représente le signal comme une somme d'exponentielles complexes à modulation d'amplitude polynomiale. Il s'agit du modèle de signal le plus général pouvant être traité par les méthodes HR. Ce modèle correspond à la présence de pôles multiples. Deux techniques d'estimation sont présentées : la méthode du maximum de vraisemblance et l'algorithme ESPRIT généralisé. Cette dernière méthode repose sur la propriété d'invariance rotationnelle des matrices de Pascal-Vandermonde, qui constituent une généralisation des matrices de Vandermonde au cas de pôles multiples. Des techniques d'estimation des amplitudes et de l'écart-type du bruit sont également proposées. Les développements qui vont suivre ont fait l'objet d'un article à paraître dans *IEEE Transactions on Signal Processing* [Badeau *et al.*, 2005c].

## II.1 Introduction

Dans la littérature, le modèle ESM est généralement considéré comme le modèle de signal le plus général pouvant s'inscrire dans le cadre des méthodes HR. Pourtant, il se trouve que ce modèle est restreint aux signaux qui contiennent seulement des pôles simples. En revanche, le modèle PACE introduit ci-dessous englobe le cas de pôles multiples. Il décrit une classe de signaux plus générale, incluant des modulations d'amplitude et de fréquence, et conduit à une interprétation alternative des fréquences estimées par les méthodes HR. Par ailleurs, le modèle PACE comprend moins de paramètres pour un même ordre de modélisation, ce qui est particulièrement intéressant pour des applications de codage. Une méthode complète d'estimation est proposée ci-dessous, reposant soit sur des techniques de prédiction linéaire, soit sur l'algorithme ESPRIT.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : la section II.2 présente la solution générale des équations de récurrence linéaires et homogènes, et une paramétrisation complète du modèle PACE est proposée. Les matrices de Pascal-Vandermonde associées à ce modèle sont ensuite introduites dans la section II.3, et la méthode du maximum de vraisemblance est présentée dans la section II.4. Dans la section II.5, l'algorithme ESPRIT est généralisé au modèle PACE. Des techniques permettant d'estimer les amplitudes, les phases et l'écart-type du bruit sont présentées dans la section II.6. Enfin, le résumé des principales conclusions obtenues clôturera ce chapitre dans la section II.7.

## II.2 Le modèle *Polynomial Amplitude Complex Exponentials*

### II.2.1 Equations de récurrence linéaires et homogènes

Il a été montré dans la section I.4.1.1 que tous les signaux de la forme (I.1) satisfont des équations de récurrence linéaires et homogènes. Cependant, le modèle ESM ne correspond pas à la solution générale de ces équations, puisque dans le cas général le polynôme prédicteur peut avoir des racines multiples, comme le montre le théorème suivant.

**Théorème II.2.1.** *Soit  $p_0 \in \mathbb{C}^*$  ;  $\forall k \in \{0 \dots K-1\}$ , on pose  $M_k \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $P[z]$  le polynôme d'ordre  $r \triangleq \sum_{k=0}^{K-1} M_k$  dont le coefficient dominant<sup>1</sup> est  $p_0$  et dont les racines sont les  $z_k$ , de multiplicités  $M_k$  :*

$$P[z] = p_0 \prod_{k=0}^{K-1} (z - z_k)^{M_k} = \sum_{\tau=0}^r p_{r-\tau} z^\tau. \quad (\text{II.1})$$

Alors le signal  $s(t)$  satisfait la récurrence

$$\boxed{\sum_{\tau=0}^r p_\tau s(t - \tau) = 0} \quad (\text{II.2})$$

pour tout  $t \in \mathbb{Z}$  si et seulement si il s'écrit sous la forme

$$\boxed{s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k[t] z_k^t} \quad (\text{II.3})$$

où  $\forall k \in \{0, \dots, K-1\}$ ,  $\alpha_k[t]$  is un polynôme complexe de degré inférieur ou égal à  $M_k - 1$ .

---

<sup>1</sup>Les coefficients  $p_{r-\tau}$  s'écrivent comme des fonctions des racines  $z_k$ . En particulier,  $p_r = p_0 \prod_{k=0}^{K-1} (-z_k)^{M_k}$ .

*Exemple.* Considérons le polynôme  $P[z] = (z - z_0)^2 = z^2 - 2z_0 z + z_0^2$ . Alors on vérifie que tous les signaux complexes satisfaisant la récurrence  $s(t) - 2z_0 s(t-1) + z_0^2 s(t-2) = 0$  sont de la forme  $s(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 t) z_0^t$  où  $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$ .

Ce théorème est démontré dans la section A.2 (une autre démonstration peut également être trouvée dans [Kincaid et Cheney, 1996, pp. 33]). Le modèle de signal dans l'équation (II.3) sera désigné sous le terme de modèle PACE. Ce modèle peut associer plusieurs pôles simples à une fréquence unique (comme pour le modèle ESM), ainsi que des pôles multiples (contrairement au modèle ESM).

### II.2.2 Polynômes binomiaux

Le modèle de signal dans l'équation (II.3) n'est pas encore complet, puisque une paramétrisation complète nécessiterait en outre de choisir une base de polynômes sur laquelle projeter  $\alpha_k[t]$ . Dans cette section est proposée une base particulière qui satisfait des propriétés intéressantes.

**Définition II.2.1** (Polynômes binomiaux). Pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ , le polynôme binomial d'ordre  $m$  est le polynôme

$$F_m[t] = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 0 \\ 1 & \text{si } m = 0 \\ \frac{1}{m!} \prod_{m'=0}^{m-1} (t - m') & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

La famille  $\{F_m[t]\}_{m \geq 0}$  est une base de  $\mathbb{C}[t]$  puisque le degré de  $F_m[t]$  est  $m$  quel que soit  $m \geq 0$ . De plus, ces polynômes satisfont pour tout  $m \in \mathbb{Z}$  la récurrence

$$F_m[t+1] = F_m[t] + F_{m-1}[t] \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \quad (\text{II.4})$$

Cette propriété est un simple corollaire de l'*identité du binôme* [Roman, 1984, Graham *et al.*, 1994], plus générale :

**Proposition II.2.2** (Identité du binôme). Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$F_m[t_1 + t_2] = \sum_{m'=0}^m F_{m'}[t_1] F_{m-m'}[t_2]$$

Ce résultat est démontré par récurrence sur  $m$  dans la section A.2. Il sera utilisé à plusieurs reprises dans les démonstrations de l'annexe A.

### II.2.3 Paramétrisation complète du modèle de signal

Les polynômes  $\alpha_k$  se décomposent dans la base  $\{F_m[t]\}_{m \geq 0} : \forall k \in \{0 \dots K-1\}$ ,

$$\alpha_k[t] = \sum_{m=0}^{M_k-1} \alpha'_{(k,m)} F_m[t]$$

où  $\forall m \in \{0 \dots M_k-1\}$ ,  $\alpha'_{(k,m)} \in \mathbb{C}$ , de sorte que l'équation (II.3) se réécrit sous la forme

$$\boxed{s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{m=0}^{M_k-1} \alpha_{(k,m)} F_m[t] z_k^{t-m}} \quad (\text{II.5})$$

où  $\forall k \in \{0 \dots K-1\}$ ,  $\forall m \in \{0, M_k-1\}$ ,

$$\alpha_{(k,m)} = \alpha'_{(k,m)} z_k^m \quad (\text{II.6})$$

est une amplitude complexe. L'introduction volontaire du décalage temporel  $t - m$  est destinée à simplifier les développements suivants.

Par ailleurs, le signal observé  $x(t)$  peut être modélisé comme la somme du signal déterministe  $s(t)$  défini dans l'équation (II.5), et d'un bruit blanc ou coloré  $w(t)$  de variance  $\sigma^2$  :  $x(t) = s(t) + w(t)$ .

Par conséquent, les paramètres du modèle complet sont :

- les ordres  $K$ ,  $\{M_k\}_{k \in \{0 \dots K-1\}}$ ,
- les  $K$  pôles complexes  $z_k$ ,
- les  $r$  amplitudes complexes  $\alpha_{(k,m)}$ ,
- l'écart-type  $\sigma$  du bruit additif.

Les méthodes HR basées sur la prédiction linéaire, telles que [Riche de Prony, 1795, Pisarenko, 1973, Kumaresan et Tufts, 1982], peuvent être utilisées directement pour estimer les paramètres  $K$ ,  $M_k$  et  $z_k$ , qui sont complètement caractérisés par le polynôme prédictif. Cependant des techniques plus robustes seront présentées dans la suite de ce chapitre.

### II.3 Les matrices de Pascal-Vandermonde

Avant d'appliquer la méthode de maximum de vraisemblance au modèle PACE, il est nécessaire d'introduire les matrices de Pascal généralisées et les matrices de *Pascal-Vandermonde*. Tout d'abord, les matrices de Pascal généralisées constituent une généralisation des matrices de Pascal triangulaires inférieures<sup>2</sup>, dont la définition figure dans [Strang, 2003].

**Définition II.3.1** (Matrices de Pascal généralisées). Soient  $z \in \mathbb{C}$  et  $M \in \mathbb{N}^*$ . La matrice de Pascal généralisée notée  $\mathbf{C}_M^N(z)$  est une matrice de dimensions  $N \times M$  dont les coefficients sont<sup>3</sup>  $\mathbf{C}_M^N(z)_{(i,j)} = F_j[i] z^{i-j}$  pour tous  $i \in \{0 \dots N-1\}$  et  $j \in \{0 \dots M-1\}$ .

*Exemple.* Si  $M = 3$  et  $N = 5$ ,

$$\mathbf{C}_3^5(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 \\ z^2 & 2z & 1 \\ z^3 & 3z^2 & 3z \\ z^4 & 4z^3 & 6z^2 \end{bmatrix}.$$

Une matrice de Pascal-Vandermonde est obtenue en juxtaposant plusieurs matrices de Pascal généralisées. La définition suivante généralise ainsi la structure de Vandermonde [Horn et Johnson, 1985, pp. 29]. Elle figure également dans [Boley *et al.*, 1997].

**Définition II.3.2** (Matrices de Pascal-Vandermonde). Soit  $K \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $k \in \{0 \dots K-1\}$ , soient  $z_k \in \mathbb{C}$  et  $M_k \in \mathbb{N}^*$ . Posons  $r \triangleq \sum_{k=0}^{K-1} M_k$ . La matrice de Pascal-Vandermonde de dimension  $N \times r$  est obtenue en juxtaposant les matrices de Pascal généralisées  $\mathbf{C}_{M_k}^N(z_k)$  :

$$\mathbf{V}^N = \left[ \mathbf{C}_{M_0}^N(z_0), \dots, \mathbf{C}_{M_{K-1}}^N(z_{(K-1)}) \right].$$

<sup>2</sup>Une matrice de Pascal triangulaire inférieure est une matrice de Pascal généralisée carrée pour laquelle  $z = 1$ .

<sup>3</sup> Si  $z = 0$ , on définit  $\mathbf{C}_M^N(0)_{(i,i)} = 1 \forall i$ , et  $\forall i \neq j$ ,  $\mathbf{C}_M^N(0)_{(i,j)} = 0$ .

*Exemple.* Si  $K = 2$ ,  $M_0 = 3$ ,  $M_1 = 2$  et  $N = r = 5$ ,

$$\mathbf{V}^5 = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ z_0 & 1 & 0 & z_1 & 1 \\ z_0^2 & 2z_0 & 1 & z_1^2 & 2z_1 \\ z_0^3 & 3z_0^2 & 3z_0 & z_1^3 & 3z_1^2 \\ z_0^4 & 4z_0^3 & 6z_0^2 & z_1^4 & 4z_1^3 \end{array} \right].$$

La proposition suivante généralise un résultat classique sur le déterminant des matrices de Vandermonde [Horn et Johnson, 1985, pp. 29], dont l'expression a été donnée dans l'équation (I.3). Sa démonstration figure en annexe dans la section A.3, page 171.

**Proposition II.3.1** (Déterminant et rang des matrices de Pascal-Vandermonde). *Le déterminant de la matrice de Pascal-Vandermonde carrée  $\mathbf{V}^r$  est*

$$\det(\mathbf{V}^r) = \prod_{\substack{k_1, k_2 = 0 \\ k_1 < k_2}}^{K-1} (z_{k_2} - z_{k_1})^{M_{k_1} M_{k_2}}$$

Par conséquent, la matrice de Pascal-Vandermonde  $\mathbf{V}^N$  de dimensions  $N \times r$  (avec  $N \geq r$ ) est de rang  $r$  si et seulement si les  $K$  paramètres  $z_0, \dots, z_{K-1}$  sont distincts.

*Exemple.* La matrice  $\mathbf{V}^5$  définie dans l'exemple ci-dessus a pour déterminant  $\det(\mathbf{V}^5) = (z_1 - z_0)^6$ .

La propriété d'invariance rotationnelle des matrices de Vandermonde rappelée dans l'équation (I.17) est généralisée ci-dessous aux matrices de Pascal-Vandermonde.

**Théorème II.3.2** (Propriété d'invariance rotationnelle des matrices de Pascal-Vandermonde). *Supposons que  $n \geq 2$ . Soit  $\mathbf{V}_\downarrow^n$  la matrice extraite de  $\mathbf{V}^n$  en supprimant la dernière ligne. De même, soit  $\mathbf{V}_\uparrow^n$  la matrice extraite de  $\mathbf{V}^n$  en supprimant la première ligne. Alors  $\mathbf{V}_\downarrow^n$  et  $\mathbf{V}_\uparrow^n$  engendrent le même sous-espace, et*

$$\mathbf{V}_\uparrow^n = \mathbf{V}_\downarrow^n \mathbf{J} \quad (\text{II.7})$$

où  $\mathbf{J}$  est la matrice de dimension  $r \times r$ , diagonale par blocs,

$$\mathbf{J} = \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{J}_{M_0}(z_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_{M_1}(z_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{J}_{M_{(K-1)}}(z_{(K-1)}) \end{array} \right] \quad (\text{II.8})$$

dont le  $k^{\text{ème}}$  bloc  $\mathbf{J}_{M_k}(z_k)$  est le bloc de Jordan de dimension  $M_k \times M_k$

$$\mathbf{J}_{M_k}(z_k) = \left[ \begin{array}{ccccc} z_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_k & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & z_k & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & z_k \end{array} \right].$$



*Exemple.* Si  $K = 2$ ,  $M_0 = 3$  et  $M_1 = 2$  (dans ce cas  $r = 5$ ), on peut vérifier que

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} z_0 & 1 & 0 & z_1 & 1 & \\ z_0^2 & 2z_0 & 1 & z_1^2 & 2z_1 & \\ z_0^3 & 3z_0^2 & 3z_0 & z_1^3 & 3z_1^2 & \\ z_0^4 & 4z_0^3 & 6z_0^2 & z_1^4 & 4z_1^3 & \\ z_0^5 & 5z_0^4 & 10z_0^3 & z_1^5 & 5z_1^4 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ z_0 & 1 & 0 & z_1 & 1 & \\ z_0^2 & 2z_0 & 1 & z_1^2 & 2z_1 & \\ z_0^3 & 3z_0^2 & 3z_0 & z_1^3 & 3z_1^2 & \\ z_0^4 & 4z_0^3 & 6z_0^2 & z_1^4 & 4z_1^3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|cc} z_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & z_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 \end{array} \right]$$

Le théorème II.3.2 est un corollaire du lemme A.4.1, présenté dans l'annexe A.4, page 174. Il est intéressant de constater dans le théorème II.3.2 que l'équation (II.7) fait apparaître une matrice de Jordan<sup>4</sup>  $\mathbf{J}$ , qui caractérise les pôles  $z_k$  et leurs multiplicités  $M_k$ .

Les matrices de Pascal-Vandermonde apparaissent dans la section suivante, portant sur la méthode du maximum de vraisemblance, mais leur propriété d'invariance rotationnelle ne sera explicitement utilisée que dans la section II.5.3, dans le cadre de l'algorithme ESPRIT généralisé.

## II.4 Méthode du maximum de vraisemblance

La méthode du maximum de vraisemblance présentée dans la section I.3.1 est ici généralisée au modèle PACE avec bruit additif coloré. Pour tout  $k \in \{0 \dots K-1\}$ , définissons le vecteur  $\boldsymbol{\alpha}_k = [\alpha_{(k,0)}, \dots, \alpha_{(k,M_k-1)}]^T$  de dimension  $M_k$ . En juxtaposant les vecteurs  $\boldsymbol{\alpha}_k$ , on définit le vecteur  $\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}_0, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{K-1}]^T$  de dimension  $r$ . Définissons également les vecteurs  $\mathbf{s}(t) = [s(t-l+1), \dots, s(t+n-1)]^T$ ,  $\mathbf{w}(t) = [w(t-l+1), \dots, w(t+n-1)]^T$  et  $\mathbf{x}(t) = [x(t-l+1), \dots, x(t+n-1)]^T$  de dimension  $N = n + l - 1$ . Alors la propriété d'invariance rotationnelle de la matrice Pascal-Vandermonde (théorème II.3.2) montre que  $\mathbf{s}(t) = \mathbf{V}^N \mathbf{J}^{t-l+1} \boldsymbol{\alpha}$ . On définit donc le vecteur d'amplitudes à l'instant  $t$ ,  $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{J}^{t-l+1} \boldsymbol{\alpha}$ , de sorte que  $\mathbf{s}(t) = \mathbf{V}^N \boldsymbol{\alpha}(t)$ . De plus, on supposera que la matrice de covariance du processus  $\mathbf{w}(t)$  est  $\mathbf{R}_{ww} = \sigma^2 \boldsymbol{\Gamma}$ , où  $\boldsymbol{\Gamma}$  est une matrice à structure Toeplitz définie positive, dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 ( $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{I}_N$  si le bruit est blanc), supposée connue. La log-vraisemblance des observations est

$$L(\sigma^2, z_0 \dots z_{K-1}, \boldsymbol{\alpha}(t)) = -N \ln(\pi \sigma^2) - \ln(\det(\boldsymbol{\Gamma})) - \frac{1}{\sigma^2} g(z_0 \dots z_{K-1}, \boldsymbol{\alpha}(t))$$

où

$$g(z_0 \dots z_{K-1}, \boldsymbol{\alpha}(t)) = (\mathbf{x}(t) - \mathbf{V}^N \boldsymbol{\alpha}(t))^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{V}^N \boldsymbol{\alpha}(t)).$$

La maximisation de la log-vraisemblance par rapport au triplet  $(\sigma^2, z_0 \dots z_{K-1}, \boldsymbol{\alpha}(t))$  peut être effectuée en minimisant d'abord  $g$  par rapport au couple  $(z_0 \dots z_{K-1}, \boldsymbol{\alpha}(t))$ , puis en maximisant  $L$  par rapport à  $\sigma$ . On obtient ainsi  $\sigma^2 = \frac{1}{N} g(z_0 \dots z_{K-1}, \boldsymbol{\alpha}(t))$ , ou encore

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{1}{N} \left\| \boldsymbol{\Gamma}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{V}^N \boldsymbol{\alpha}(t)) \right\|^2} \quad (\text{II.9})$$

où  $\boldsymbol{\Gamma}^{-\frac{1}{2}}$  est l'unique matrice définie positive dont le carré est égal à  $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ . Elle a pour effet de blanchir le bruit additif. Il apparaît donc que  $\sigma^2$  est estimé comme la puissance du résiduel blanchi.

La matrice  $\mathbf{V}^N$  est de rang plein, puisque les pôles sont distincts deux à deux (proposition II.3.1). Ainsi, la matrice  $\mathbf{V}^{NH} \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{V}^N$  est inversible. Pour minimiser  $g$  par rapport au couple  $(z_0 \dots z_{K-1},$

<sup>4</sup>Voir [Horn et Johnson, 1985, pp. 121–142] pour une définition de la décomposition canonique de Jordan.

$\alpha(t)$ ), il suffit de décomposer  $g$  sous la forme

$$g(z_0 \dots z_{K-1}, \alpha(t)) = \mathbf{x}(t)^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t)^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{V}^N \left( \mathbf{V}^{NH} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{V}^N \right)^{-1} \mathbf{V}^{NH} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{x}(t) \\ + \left( \alpha(t) - \left( \mathbf{V}^{NH} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{V}^N \right)^{-1} \mathbf{V}^{NH} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{x}(t) \right)^H \left( \mathbf{V}^{NH} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{V}^N \right) \left( \alpha(t) - \left( \mathbf{V}^{NH} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{V}^N \right)^{-1} \mathbf{V}^{NH} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{x}(t) \right).$$

Le dernier terme de cette équation est toujours positif, et peut être rendu nul en posant

$$\boxed{\alpha(t) = \left( \mathbf{V}^{NH} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{V}^N \right)^{-1} \mathbf{V}^{NH} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{x}(t).} \quad (\text{II.10})$$

Le vecteur des amplitudes complexes  $\alpha(t)$  est ainsi estimé de la même façon qu'en utilisant la méthode des moindres carrés pondérés.

La fonction  $g$  est donc maximale pour

$$\boxed{(z_0 \dots z_{K-1}) = \operatorname{argmax} \left( \mathbf{x}(t)^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{V}^N \left( \mathbf{V}^{NH} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{V}^N \right)^{-1} \mathbf{V}^{NH} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{x}(t) \right).} \quad (\text{II.11})$$

En résumé, le principe du maximum de vraisemblance conduit à estimer les paramètres du modèle en trois étapes :

- les pôles complexes sont obtenus en effectuant la maximisation (II.11),
- les amplitudes complexes sont obtenues en calculant le membre de droite de l'équation (II.10),
- l'écart-type est alors donné par l'équation (II.9).

Cette approche présente les mêmes inconvénients que dans le cas du modèle ESM avec bruit blanc : l'optimisation est difficile à implémenter et s'avère extrêmement coûteuse en temps de calcul. On voit là encore l'intérêt d'utiliser une méthode HR pour estimer les pôles complexes. La section II.5 sera ainsi consacrée à la généralisation de l'algorithme ESPRIT au modèle PACE. Néanmoins, une fois les pôles estimés, le principe du maximum de vraisemblance pourra être utilisé pour déterminer les amplitudes complexes et l'écart-type du bruit (*cf.* section II.6).

## II.5 Généralisation de l'algorithme ESPRIT

Ci-dessous, l'algorithme ESPRIT introduit dans la section I.4.2.4 est généralisé au modèle PACE. Le bruit additif est supposé blanc.

### II.5.1 Structure singulière de la matrice de données

Les résultats énoncés dans la section I.4.2.1 dans le cas du modèle ESM sont ici généralisés au modèle PACE. Les échantillons du signal  $s(t)$  peuvent être rangés dans une matrice de Hankel possédant  $n \in \mathbb{N}^*$  lignes et  $l \in \mathbb{N}^*$  colonnes :

$$\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} s(t-l+1) & \cdots & s(t-1) & s(t) \\ s(t-l+2) & \cdots & s(t) & s(t+1) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ s(t-l+n) & \cdots & s(t+n-2) & s(t+n-1) \end{bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

Une factorisation de la matrice de Hankel est proposée ci-dessous<sup>5</sup>. La proposition II.5.1 est une généralisation de la proposition I.4.2 au cas de pôles multiples.

<sup>5</sup>Une telle factorisation a déjà été établie par Vandevoorde et Boley dans [Vandevoorde, 1996, Boley *et al.*, 1997]. Cependant, les développements présentés ici reposent sur des concepts différents. De plus, ils conduisent à une formulation explicite du facteur diagonal par blocs  $\mathbf{D}(t)$  (voir la proposition II.5.1).

**Proposition II.5.1** (Factorisation de la matrice de données). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Le signal  $s(t)$  satisfait le modèle défini dans l'équation (II.5) sur l'intervalle  $\{t-l+1, \dots, t+n-1\}$ .
2. La matrice de Hankel  $\mathbf{S}(t)$  de dimensions  $n \times l$  définie dans l'équation (II.12) peut être factorisée sous la forme

$$\boxed{\mathbf{S}(t) = \mathbf{V}^n \mathbf{D}(t) \mathbf{V}^{lT}} \quad (\text{II.13})$$

où  $\mathbf{D}(t)$  est la matrice diagonale par blocs de dimension  $r \times r$

$$\mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_1(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{H}_{(K-1)}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

dont le  $k^{\text{ème}}$  bloc  $\mathbf{H}_k(t)$  est une matrice de Hankel anti-triangulaire supérieure de dimension  $M_k \times M_k$  et de la forme

$$\mathbf{H}_k(t) = \begin{bmatrix} \beta_{(k,0)}(t) & \beta_{(k,1)}(t) & \cdots & \beta_{(k,M_k-1)}(t) \\ \beta_{(k,1)}(t) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \beta_{(k,M_k-1)}(t) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

De plus, la relation entre les coefficients  $\beta_{(\dots)}$  et les coefficients  $\alpha_{(\dots)}$  définis dans l'équation (II.6) est la suivante :

$$\beta_{(k,m')}(t) = \sum_{m=m'}^{M_k-1} \alpha_{(k,m)} F_{m-m'} [t-l+1] z_k^{t-l+1-(m-m')} \quad (\text{II.16})$$

pour tous  $k \in \{0 \dots K-1\}$  et  $m' \in \{0 \dots M_k-1\}$ .

La démonstration de la proposition II.5.1 est présentée dans l'annexe A.5, page 174. Cette proposition montre l'équivalence entre le modèle PACE et la factorisation de la matrice de Hankel donnée dans l'équation (II.13). Elle montre aussi que la matrice  $\mathbf{S}(t)$  est de rang inférieur ou égal à  $r$ .

*Remarque.* Pour tout  $k \in \{0 \dots K-1\}$ ,  $\mathbf{H}_k(t)$  peut être factorisée sous la forme

$$\mathbf{H}_k(t) = \mathbf{J}_{M_k}(z_k)^{(t-l+1)} \mathbf{H}'_k(t) = \mathbf{H}'_k(t) \mathbf{J}_{M_k}(z_k)^{(t-l+1)T}$$

où  $\mathbf{H}'_k(t)$  est définie de la même façon que  $\mathbf{H}_k(t)$  dans l'équation (II.15), en remplaçant tous les  $\beta_{(k,m)}$  par  $\alpha_{(k,m)}$ .

La démonstration du corollaire suivant figure dans l'annexe A.5, page 174. L'équation (II.17) signifie que  $\forall k \in \{0, \dots, K-1\}$ , le polynôme  $\alpha_k[t]$  dans l'équation (II.3) est de degré  $M_k - 1$ .

**Corollaire II.5.2** (Rang de la matrice de données). *Une matrice de Hankel  $\mathbf{S}(t)$  de dimensions  $n \times l$  et de la forme (II.12), où  $s(t)$  est le signal défini dans l'équation (II.5), est de rang  $r$  si et seulement si  $n \geq r$ ,  $l \geq r$ , tous les pôles  $z_k$  sont distincts et non nuls, et*

$$\forall k \in \{0 \dots K-1\}, \alpha_{(k,M_k-1)} \neq 0. \quad (\text{II.17})$$

Enfin, le théorème suivant caractérise les matrices de Hankel singulières : celles-ci sont étroitement liées au modèle PACE.

**Théorème II.5.3** (Équivalence entre la structure de Hankel singulière et le modèle de signal). *Soient  $n \geq 2$ ,  $l \geq 2$ , et  $r$  un entier tel que  $r < n$  et  $r < l$ . On considère un signal discret  $s(t)$  et la matrice  $\mathbf{S}(t)$  définie dans l'équation (II.12) à partir des échantillons de  $s(t)$ . Soit  $\mathbf{S}(t)_\downarrow$  la matrice extraite de  $\mathbf{S}(t)$  en supprimant la dernière ligne. De même, soit  $\mathbf{S}(t)_\uparrow$  la matrice extraite de  $\mathbf{S}(t)$  en supprimant la première ligne. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La matrice  $\mathbf{S}(t)$  est de rang  $r$ , et les matrices extraites  $\mathbf{S}(t)_\downarrow$  et  $\mathbf{S}(t)_\uparrow$  sont aussi de rang  $r$ .*
2. *Le signal  $s(t)$  s'écrit sous la forme (II.5) sur l'intervalle  $[t-l+1 \dots t+n-1]$ , et  $\forall k \in \{0 \dots K-1\}$ ,  $\alpha_{(k, M_k-1)} \neq 0$ .*

La démonstration de ce théorème est assez complexe et figure en annexe dans la section A.6, page 175.

## II.5.2 Structure singulière de la matrice de corrélation

Dans le cas d'un bruit blanc additif, tous les développements mathématiques présentés dans la section I.4.2.2 sont encore valables, sauf que  $\mathbf{V}^n$  a une structure Pascal-Vandermonde (cf. définition II.3.2),  $\mathbf{D}(t)$  est diagonale par blocs (cf. équation (II.14)), et l'espace signal est de dimension  $r$ . Plus précisément, les matrices  $\mathbf{C}_{ss}(t)$  et  $\mathbf{R}_{ss}(t)$  sont définies de la même façon à partir des échantillons du signal. L'équation (II.13) montre alors que  $\mathbf{R}_{ss}(t) = \mathbf{V}^n \mathbf{P}(t) \mathbf{V}^{nH}$ , où  $\mathbf{V}^n$  est une matrice de Pascal-Vandermonde de dimension  $n \times r$ , et  $\mathbf{P}(t) = \frac{1}{l} \mathbf{D}(t) \mathbf{V}^{lT} \mathbf{V}^{l*} \mathbf{D}(t)^H$  est une matrice symétrique définie positive de dimension  $r \times r$ . Ainsi, sous les mêmes hypothèses que pour  $\mathbf{S}(t)$  dans le corollaire II.5.2, la matrice  $\mathbf{R}_{ss}(t)$  est de rang  $r$ , et l'espace signal est engendré par la matrice  $\mathbf{V}^n$ . On définit de même les matrices  $\mathbf{C}_{xx}(t)$  et  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t)$ . Puisque le bruit additif  $w(t)$  est blanc et centré, de variance  $\sigma^2$ , la matrice  $\mathbf{R}_{xx}(t) = \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t)]$  vérifie aussi  $\mathbf{R}_{xx}(t) = \mathbf{R}_{ss}(t) + \sigma^2 \mathbf{I}_n$ . Ainsi, l'espace signal est également l'espace principal de dimension  $r$  de la matrice  $\mathbf{R}_{xx}(t)$ . Une matrice  $\mathbf{W}(t)$  de dimensions  $n \times r$  engendrant l'espace signal peut donc être estimée en calculant l'EVD de la matrice  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx}(t)$ , ou encore la SVD de  $\mathbf{X}(t)$ .

Dans le cas où le bruit additif est coloré, sa matrice de covariance s'écrit sous la forme  $\mathbf{R}_{ww} = \sigma^2 \mathbf{\Gamma}$  comme dans la section II.4. Si  $\mathbf{\Gamma}$  est connue, il est possible de blanchir le bruit additif en posant  $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{\Gamma}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{X}(t)$  et  $\widehat{\mathbf{R}}'_{xx}(t) = \frac{1}{l} \mathbf{X}'(t) \mathbf{X}'(t)^H$ . En effet, on obtient alors

$$\mathbf{R}'_{xx}(t) \triangleq \mathbb{E} \left[ \widehat{\mathbf{R}}'_{xx}(t) \right] = \left( \mathbf{\Gamma}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^n \right) \mathbf{P}(t) \left( \mathbf{\Gamma}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^n \right)^H + \sigma^2 \mathbf{I}_n.$$

Ainsi, en calculant l'EVD de  $\widehat{\mathbf{R}}'_{xx}(t)$  ou la SVD de  $\mathbf{X}'(t)$ , on peut extraire une matrice  $\mathbf{W}'(t)$  de dimension  $n \times r$  engendrant le même espace que la matrice  $\mathbf{\Gamma}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{V}^n$ . Une base orthonormée  $\mathbf{W}(t)$  de l'espace signal est alors obtenue en orthonormalisant la matrice  $\mathbf{\Gamma}^{\frac{1}{2}} \mathbf{W}'(t)$ .

L'algorithme ESPRIT généralisé présenté ci-dessous estime les pôles complexes à partir de la matrice  $\mathbf{W}(t)$ .

## II.5.3 L'algorithme ESPRIT généralisé

De nouveau, tous les développements mathématiques présentés dans la section I.4.2.4 sont encore valables, sauf que  $\mathbf{J}$  est la matrice de Jordan définie dans l'équation (II.8). Plus précisément, la propriété d'invariance rotationnelle s'écrit maintenant  $\mathbf{V}_\uparrow^n = \mathbf{V}_\downarrow^n \mathbf{J}$  où  $\mathbf{J}$  est la matrice de Jordan. Comme les colonnes de  $\mathbf{V}^n$  et celles de  $\mathbf{W}(t)$  constituent deux bases d'un même espace vectoriel de dimension  $r$ ,

il existe une matrice inversible  $\mathbf{G}(t)$  de dimension  $r \times r$  telle que  $\mathbf{V}^n = \mathbf{W}(t)\mathbf{G}(t)$ . On obtient ainsi par substitution  $\mathbf{W}(t)_\uparrow = \mathbf{W}(t)_\downarrow \mathbf{\Phi}(t)$ , où la matrice spectrale  $\mathbf{\Phi}(t)$  est définie par sa décomposition canonique de Jordan :  $\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{J}\mathbf{G}(t)^{-1}$ . En particulier, chaque pôle  $z_k$  est valeur propre de  $\mathbf{\Phi}(t)$  de multiplicité  $M_k$ .

Ainsi l'algorithme ESPRIT généralisé comprend les étapes suivantes :

- estimation d'une base  $\mathbf{W}(t)$  de l'espace signal,
- estimation de la matrice spectrale  $\mathbf{\Phi}(t)$ , par la méthode des moindres carrés (LS) ou des moindres carrés totaux (TLS),
- calcul de la décomposition canonique de Jordan de cette matrice, à partir de laquelle les pôles et leurs multiplicités sont extraits.

Dans un contexte bruité, la matrice spectrale estimée ne possède pas de valeurs propres multiples en pratique. Ce problème sera discuté dans la section III.3. Pour estimer la matrice spectrale, plusieurs auteurs ont observé que la méthode des moindres carrés totaux, qui est plus coûteuse que la méthode des moindres carrés, améliore de façon négligeable la performance de l'estimation [Van der Veen *et al.*, 1993]. Comme la méthode des moindres carrés peut être implémentée efficacement (*cf.* chapitre V), elle sera utilisée dans les développements à venir.

## II.6 Estimation des amplitudes, des phases et de l'écart-type du bruit

Le principe du maximum de vraisemblance développé dans la section II.4 suggère d'utiliser la méthode des moindres carrés pondérés pour estimer les amplitudes complexes (*cf.* équation (II.10)) :

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \left( \mathbf{V}^{NH} \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{V}^N \right)^{-1} \mathbf{V}^{NH} \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{x}(t)$$

ou encore  $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{V}^{N\dagger} \mathbf{x}(t)$  dans le cas où le bruit est blanc, dont se déduisent  $a_k = |\alpha_k|$  et  $\phi_k = \text{phase}(\alpha_k)$ . Enfin, le principe du maximum de vraisemblance suggère d'estimer l'écart-type en calculant la puissance du résiduel blanchi (*cf.* équation (II.9)) :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \left\| \boldsymbol{\Gamma}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{V}^N \boldsymbol{\alpha}(t)) \right\|^2$$

ou encore  $\sigma^2 = \frac{1}{N} \left\| \mathbf{x}(t) - \mathbf{V}^N \boldsymbol{\alpha}(t) \right\|^2$  dans le cas où le bruit est blanc.

## II.7 Conclusion

Dans ce chapitre, le modèle de signal PACE a été introduit comme la solution générale des équations de récurrence linéaires homogènes. Il permet ainsi de représenter des pôles simples ou multiples, contrairement au modèle ESM qui est restreint au cas de pôles simples uniquement. Il offre en particulier des perspectives intéressantes en terme de codage, car il fait intervenir moins de paramètres que le modèle ESM pour un même ordre de modélisation  $r$  (la fréquence et le facteur d'atténuation d'un pôle multiple n'étant codés qu'une seule fois). Comme dans le cas du modèle ESM, la méthode du maximum de vraisemblance s'avère difficile à implémenter et très coûteuse en temps de calcul. Afin de mettre en oeuvre des méthodes de type sous-espace telles que celles présentées dans le chapitre I, une formule de factorisation des matrices de Hankel a été proposée, faisant intervenir des matrices de type Pascal-Vandermonde. Reposant sur la propriété d'invariance rotationnelle de ces matrices, l'algorithme ESPRIT a été généralisé au modèle PACE et consiste à factoriser la matrice spectrale sous sa forme de Jordan. Les amplitudes complexes sont ensuite estimées par la méthode des moindres carrés. Les performances de ces diverses techniques d'estimation seront étudiées dans le chapitre III. En particulier, le modèle PACE et l'algorithme ESPRIT seront illustrés dans la section III.4.

## Chapitre III

# Performances de l'algorithme ESPRIT généralisé

### Résumé

Dans ce chapitre, les bornes de Cramér-Rao pour le modèle PACE sont calculées analytiquement dans le cas général, et simplifiées dans un contexte asymptotique. Il s'agit d'un résultat nouveau, qui approfondit et généralise des études menées antérieurement sur le modèle ESM (*cf.* section I.6). Les performances des estimateurs introduits dans le chapitre II sont ensuite comparées à ces bornes, en étudiant les perturbations induites par le bruit additif au premier ordre. Nous démontrons en particulier que la présence de bruit engendre un éclatement des pôles multiples en plusieurs pôles simples, dispersés de façon homogène et isotrope en première approximation. Nous démontrons aussi que dans un contexte asymptotique les estimateurs du chapitre II sont proches de l'efficacité, ce qui généralise un résultat présenté dans [Hua et Sarkar, 1990] dans le cas particulier d'un signal constitué d'un unique pôle simple. Des simulations numériques sont proposées pour illustrer les résultats obtenus, dans le cas de signaux réels modulés en amplitude et en fréquence.

### III.1 Introduction

Dans la section I.6 ont été présentées les bornes de Cramér-Rao pour le modèle ESM, et les performances des principales méthodes HR relativement à ces bornes. Ce chapitre porte sur le modèle PACE et sur l'algorithme ESPRIT généralisé introduits dans le chapitre II.

Cet exposé débutera par l'étude des bornes de Cramér-Rao pour le modèle PACE (section III.2). Le cas général sera abordé dans la section III.2.1, et des équivalents asymptotiques seront proposés dans la section III.2.2. Dans la section III.3, les performances des estimateurs introduits dans le chapitre II seront comparées aux bornes de Cramér-Rao ; pour cela il sera nécessaire d'étudier préalablement les perturbations induites par le bruit additif (section III.3.1) dont se déduisent le biais et la variance des estimateurs au premier ordre (section III.3.2). Un résultat remarquable sur la perturbation des pôles multiples présenté dans la section III.3.1 sera ensuite illustré dans la section III.4. Enfin, les principales conclusions de ce chapitre seront exposées dans la section III.5.

### III.2 Bornes de Cramér-Rao

Dans la section I.6.1, nous avons rappelé l'énoncé du théorème de Cramér-Rao, qui donne une borne inférieure sur la variance des estimateurs non biaisés. Il est ici appliqué au modèle PACE défini dans la section II.2.

#### III.2.1 Bornes de Cramér-Rao pour le modèle PACE

Commençons par exprimer l'espérance et la matrice de covariance du vecteur observé en fonction des paramètres du modèle. Soit  $\boldsymbol{\theta}_k$  le vecteur contenant les  $2(M_k + 1)$  paramètres réels associés au pôle  $z_k$  d'ordre  $M_k$  :

$$\boldsymbol{\theta}_k \triangleq [a_{(k,0)}, \phi_{(k,0)}, \dots, a_{(k,M_k-1)}, \phi_{(k,M_k-1)}, \delta_k, f_k]^T.$$

Le vecteur  $\boldsymbol{\theta}_k$  appartient au sous-ensemble ouvert  $\Theta_k = (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})^{M_k} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  de  $\mathbb{R}^{2(M_k+1)}$ . Soit  $\boldsymbol{\theta}$  le vecteur de dimension  $1 + 2r + 2K$  contenant l'ensemble des paramètres du modèle :

$$\boldsymbol{\theta} \triangleq [\sigma, \boldsymbol{\theta}_0^T, \dots, \boldsymbol{\theta}_{K-1}^T]^T.$$

Le vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  appartient au sous-ensemble ouvert  $\Theta = \mathbb{R}_+^* \times \Theta_0 \times \dots \times \Theta_{K-1}$  de  $\mathbb{R}^{1+2r+2K}$ . Considérons par ailleurs un bruit additif coloré, comme cela a été fait dans la section II.4, dont la matrice de covariance est  $\mathbf{R}_{ww}(\boldsymbol{\theta}) = \sigma^2 \boldsymbol{\Gamma}$ , où  $\boldsymbol{\Gamma}$  est une matrice à structure Toeplitz définie positive, dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1, de dimension  $N \times N$  ( $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{I}_N$  dans le cas d'un bruit blanc).

Rappelons enfin que le vecteur  $\mathbf{x}(t)$  contenant les  $N$  échantillons du signal observé est un vecteur aléatoire gaussien de matrice de covariance  $\mathbf{R}_{ww}$ , et d'espérance  $\mathbf{s}(t)$ . Comme nous l'avons fait dans la section I.6, la dépendance de  $\mathbf{s}(t)$  et de  $\mathbf{R}_{ww}$  par rapport aux paramètres du modèle sera mentionnée explicitement ci-dessous. En revanche, pour simplifier les notations, nous omettrons la dépendance de  $\mathbf{s}(t)$  par rapport au temps (qui ne prête pas ici à ambiguïté). Les coefficients du vecteur  $\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{s}(t)$ , notés  $s_t(\boldsymbol{\theta}) = s(t)$ , sont donnés pour tout  $t \in \{0, \dots, N-1\}$  par la relation

$$s_t(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{m_k=0}^{M_k-1} a_{(k,m_k)} e^{i\phi_{(k,m_k)}} C_{m_k}[t] e^{(\delta_k + i2\pi f_k)(t-m_k)}.$$

L'application de la proposition I.6.2 au modèle PACE aboutit à une expression de la matrice d'information de Fisher qui peut être inversée analytiquement (les calculs sont présentés en annexe

dans la section A.7.1, page 177), dont se déduisent les bornes données dans la proposition III.2.1 ci-dessous. Avant de l'énoncer, il est nécessaire d'introduire quelques notations.

Considérons la matrice Pascal-Vandermonde  $\mathbf{V}^N$ , de dimension  $N \times (r + K)$ , construite en juxtaposant les matrices de Pascal généralisées  $\mathbf{C}_{M_k+1}^N(z_k)$  pour tous  $k \in \{0 \dots K - 1\}$ . Définissons ensuite la matrice  $\mathbf{Z} = \mathbf{V}^{NH} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{V}^N$ , de dimension  $(r + K) \times (r + K)$ . Cette matrice est constituée de  $K \times K$  blocs  $\mathbf{Z}_{(k,k')} = \mathbf{C}_{M_k+1}^N(z_k)^H \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{C}_{M_{k'}+1}^N(z_{k'})$ . Chaque bloc  $\mathbf{Z}_{(k,k')}$  est de dimension  $(M_k + 1) \times (M_{k'} + 1)$  et ses éléments sont notés  $Z_{(k,k',m_k,m_{k'})}$ , où  $m_k \in \{0 \dots M_k\}$  et  $m_{k'} \in \{0 \dots M_{k'}\}$ . De même, la matrice inverse  $\mathbf{Z}^{-1}$  sera découpée en  $K \times K$  blocs  $\mathbf{Z}_{(k',k)}^{-1}$ , de dimension  $M_{k'} \times M_k$ , dont les éléments seront notés  $Z_{(k',k,m_{k'},m_k)}^{-1}$ .

Par ailleurs, il sera supposé ici que  $\forall k \in \{0, K - 1\}$ ,  $\forall m_k \in \{0 \dots M_k - 1\}$ ,  $a_{k,m_k} \neq 0$ .

**Proposition III.2.1** (Bornes de Cramér-Rao pour le modèle PACE). *La borne de Cramér-Rao pour l'écart-type du bruit est  $\text{CRB}\{\sigma\} = \frac{\sigma^2}{4N}$ . De plus, pour tout  $k \in \{0 \dots K - 1\}$ ,*

$$\begin{aligned} \text{CRB}\{\delta_k\} &= \frac{\sigma^2 e^{-2\delta_k}}{2M_k^2 a_{(k,M_k-1)}^2} Z_{(k,k,M_k,M_k)}^{-1} \\ \text{CRB}\{f_k\} &= \frac{\sigma^2 e^{-2\delta_k}}{8\pi^2 M_k^2 a_{(k,M_k-1)}^2} Z_{(k,k,M_k,M_k)}^{-1} \\ \text{CRB}\{a_{(k,0)}\} &= \frac{\sigma^2}{2} Z_{(k,k,0,0)}^{-1} \\ \text{CRB}\{\phi_{(k,0)}\} &= \frac{\sigma^2}{2a_{(k,0)}^2} Z_{(k,k,0,0)}^{-1} \end{aligned}$$

et pour tout  $m_k \in \{1 \dots M_k - 1\}$ ,

$$\begin{aligned} \text{CRB}\{a_{(k,m_k)}\} &= \frac{\sigma^2}{2} \left( Z_{(k,k,m_k,m_k)}^{-1} + \left( \frac{m_k a_{(k,m_k-1)}}{M_k a_{(k,M_k-1)}} \right)^2 Z_{(k,k,M_k,M_k)}^{-1} - 2 \mathcal{R}e \left( \frac{m_k \alpha_{(k,m_k-1)}}{M_k \alpha_{(k,M_k-1)}} Z_{(k,k,M_k,m_k)}^{-1} \right) \right) \\ \text{CRB}\{\phi_{(k,m_k)}\} &= \frac{\sigma^2}{2a_{(k,m_k)}^2} \left( Z_{(k,k,m_k,m_k)}^{-1} + \left( \frac{m_k a_{(k,m_k-1)}}{M_k a_{(k,M_k-1)}} \right)^2 Z_{(k,k,M_k,M_k)}^{-1} - 2 \mathcal{R}e \left( \frac{m_k \alpha_{(k,m_k-1)}}{M_k \alpha_{(k,M_k-1)}} Z_{(k,k,M_k,m_k)}^{-1} \right) \right). \end{aligned}$$

Ces formules appellent plusieurs commentaires :

- les bornes relatives à  $\delta_k$  et  $f_k$  ne dépendent d'aucune phase,
- elles sont inversement proportionnelles à  $a_{(k,M_k-1)}^2$  ( $a_{(k,M_k-1)}$  étant l'amplitude d'indice le plus élevé associée au pôle  $z_k$ ), mais ne dépendent d'aucune autre amplitude,
- si le bruit est blanc (*i.e.* si  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}_N$ ), l'ensemble des bornes ne dépend des fréquences que par leurs différences (*i.e.* elles sont invariantes par une translation de l'ensemble des fréquences).

En outre, les formules des bornes pour les paramètres  $\delta_k$  et  $f_k$  peuvent encore être approfondies.

En effet,

$$\begin{aligned} \text{CRB}\{\delta_k\} &= \frac{\sigma^2 e^{-2\delta_k}}{2M_k^2 a_{(k,M_k-1)}^2} \frac{F(z_0, \dots, z_{K-1})}{\prod_{k' \neq k} |z_{k'} - z_k|^{2(M_{k'}+1)}} \\ \text{CRB}\{f_k\} &= \frac{\sigma^2 e^{-2\delta_k}}{8\pi^2 M_k^2 a_{(k,M_k-1)}^2} \frac{F(z_0, \dots, z_{K-1})}{\prod_{k' \neq k} |z_{k'} - z_k|^{2(M_{k'}+1)}} \end{aligned}$$



où  $F(z_0, \dots, z_{K-1})$  est une fonction continue, à valeurs finies et strictement positives (la démonstration de ce résultat est présentée en annexe, dans la section A.7.1, page 177). Ces formules montrent la divergence des bornes de Cramér-Rao quand deux pôles deviennent arbitrairement proches.

Dans un contexte asymptotique, les expressions des bornes de Cramér-Rao données dans la proposition III.2.1 se simplifient, comme le montre la section suivante.

### III.2.2 Bornes de Cramér-Rao asymptotiques

Dans cette section est proposée une expression simplifiée des bornes de Cramér-Rao, dans le cas particulier où le bruit est blanc ( $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}_N$ ), tous les pôles sont sur le cercle unité ( $\forall k \in \{0 \dots K-1\}, \delta_k = 0$ ), et l'horizon d'observation tend vers l'infini ( $N \rightarrow +\infty$ ). Rappelons que pour tous  $k \in \{0 \dots K-1\}$  et  $m_k \in \{0 \dots M_k-1\}$ , la composante du signal d'indice  $m_k$  associée au pôle  $z_k$  a pour expression

$$s_{(k,m_k)}(t) = a_{(k,m_k)} e^{i\phi_{(k,m_k)}} C_{m_k}[t] e^{(\delta_k + i2\pi f_k)(t-m_k)}.$$

**Proposition III.2.2** (Bornes de Cramér-Rao asymptotiques). *Dans le cas particulier où le bruit est blanc et où tous les pôles sont sur le cercle unité, le rapport signal à bruit de la composante  $s_{(k,m_k)}(t)$ ,*

*défini par  $\text{SNR}_{(k,m_k)} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} |s_{(k,m_k)}(t)|^2}{\sigma^2}$ , a pour équivalent asymptotique  $\text{SNR}_{(k,m_k)} \sim \frac{a_{(k,m_k)}^2 N^{2m_k}}{(2m_k+1)m_k!^2 \sigma^2}$ .*

*Lorsque  $N$  vers  $+\infty$ , on obtient pour tout  $k \in \{0 \dots K-1\}$*

$$\begin{aligned} \text{CRB} \{ \delta_k \} &\sim \frac{\sigma^2}{N^{2M_k+1} a_{(k,M_k-1)}^2} \frac{(2M_k+1)!^2}{2M_k^2 (2M_k+1) M_k!^2} \\ &\sim \frac{1}{N^3 \text{SNR}_{(k,M_k-1)}} \frac{(2M_k+1)!^2}{2(4M_k^2-1) M_k!^4} \\ \text{CRB} \{ f_k \} &\sim \frac{\sigma^2}{N^{2M_k+1} a_{(k,M_k-1)}^2} \frac{(2M_k+1)!^2}{8\pi^2 M_k^2 (2M_k+1) M_k!^2} \\ &\sim \frac{1}{N^3 \text{SNR}_{(k,M_k-1)}} \frac{(2M_k+1)!^2}{8\pi^2 (4M_k^2-1) M_k!^4} \end{aligned}$$

et pour tout  $m_k \in \{0 \dots M_k-1\}$ ,

$$\begin{aligned} \text{CRB} \{ a_{(k,m_k)} \} &\sim \frac{\sigma^2}{N^{2m_k+1}} \frac{(M_k+1+m_k)!^2}{2(2m_k+1)m_k!^2(M_k-m_k)!^2} \\ \text{CRB} \{ \phi_{(k,m_k)} \} &\sim \frac{\sigma^2}{N^{2m_k+1} a_{(k,m_k)}^2} \frac{(M_k+1+m_k)!^2}{2(2m_k+1)m_k!^2(M_k-m_k)!^2} \\ &\sim \frac{1}{N \text{SNR}_{(k,m_k)}} \frac{(M_k+1+m_k)!^2}{2(2m_k+1)^2(m_k!)^4(M_k-m_k)!^2}. \end{aligned}$$

La proposition III.2.2 est démontrée en annexe, dans la section A.7.2, page 181. Ces formules appellent les commentaires suivants :

- les bornes en  $\delta_k$  et  $f_k$  sont inversement proportionnelles au produit de  $N^3$  et du rapport signal à bruit de la composante  $s_{(k,M_k-1)}$  (résultat déjà connu dans le cas du modèle ESM),
- ces bornes croissent rapidement avec l'ordre du pôle  $z_k$ . Plus précisément, on vérifie que

$$\frac{(2M_k+1)!^2}{(4M_k^2-1)M_k!^4} \sim \frac{2^{4M_k}}{\pi M_k}$$

quand  $M_k \rightarrow +\infty$ . Ainsi l'estimation d'un pôle est d'autant plus difficile que celui-ci est d'ordre élevé.

Dans le cas de pôles simples, les formules données dans la proposition III.2.2 se simplifient de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{CRB} \{ \delta_k \} &\sim \frac{6 \sigma^2}{N^3 a_{(k,0)}^2} \sim \frac{6}{N^3 \text{SNR}_{(k,0)}} \\ \text{CRB} \{ f_k \} &\sim \frac{6 \sigma^2}{4\pi^2 N^3 a_{(k,0)}^2} \sim \frac{6}{4\pi^2 N^3 \text{SNR}_{(k,0)}} \\ \text{CRB} \{ a_{(k,0)} \} &\sim \frac{2 \sigma^2}{N} \\ \text{CRB} \{ \phi_{(k,0)} \} &\sim \frac{2 \sigma^2}{N a_{(k,0)}^2} \sim \frac{2}{N \text{SNR}_{(k,0)}}. \end{aligned}$$

La section III.3 vise à déterminer les biais et variances des estimateurs introduits dans le chapitre II afin de les comparer aux bornes de Cramér-Rao exprimées dans les propositions III.2.1 et III.2.2.

### III.3 Etude des perturbations et de la performance des estimateurs

Nous souhaitons à présent mesurer la performance des estimateurs introduits ci-dessus en terme de biais et de dispersion. Il s'avère malheureusement impossible d'établir des formules analytiques dans le cas général, car l'extraction de valeurs et de vecteurs propres ou singuliers ne s'y prête pas. Cependant, des résultats asymptotiques ont pu être obtenus grâce à la théorie des perturbations dans le cadre du modèle sinusoïdal [Eriksson *et al.*, 1993] et du modèle ESM [Hua et Sarkar, 1991], sous l'hypothèse d'un rapport signal à bruit élevé (*cf.* section I.6.2). Cette section vise donc à appliquer la théorie des perturbations dans le cadre plus général du modèle PACE, pour en déduire *in fine* les moments d'ordre un et deux des estimateurs.

#### III.3.1 Perturbations induites par le bruit additif

Rappelons que le signal observé  $x(t)$  est la somme du signal non bruité  $s(t)$  et du bruit additif  $w(t)$ , dont la matrice de covariance est égale à  $\sigma^2 \mathbf{\Gamma}$  (on suppose ici que le bruit n'est pas nécessairement blanc, comme dans la section III.2). On définit alors le processus  $\Delta s(t) = \frac{1}{\sigma} w(t)$ , dont la matrice de covariance est  $\mathbf{\Gamma}$ . On considère de plus la matrice de Hankel  $\Delta \mathbf{S}(t)$  contenant les échantillons du processus  $\Delta s(t)$ , définie de la même manière que les matrices  $\mathbf{S}(t)$  et  $\mathbf{X}(t)$  (*cf.* équation (II.12)). En posant  $\varepsilon = \sigma$ , on obtient ainsi l'égalité  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{S}(t) + \varepsilon \Delta \mathbf{S}(t)$ , qui peut être vue comme une perturbation d'ordre 1 de la matrice de données.

Les démonstrations de tous les résultats présentés dans cette section sont proposées en annexe, dans la section A.9, page 182. Pour simplifier les notations, les dépendances temporelles ne seront plus explicitement mentionnées. Ainsi,  $\mathbf{S}$  désignera  $\mathbf{S}(t)$ ,  $\mathbf{W}$  désignera  $\mathbf{W}(t)$ , etc. Nous commencerons par étudier la perturbation induite par le bruit sur l'espace signal (section III.3.1.1), dont se déduit la perturbation induite sur la matrice spectrale (section III.3.1.2), puis celle induite sur les pôles complexes, les fréquences et les facteurs d'atténuation (section III.3.1.3), et enfin celle induite sur les amplitudes et les phases (section III.3.1.4).

##### III.3.1.1 Perturbation de l'espace signal

La proposition suivante analyse l'impact d'une perturbation des données sur la matrice  $\mathbf{W}$ .

**Proposition III.3.1** (Perturbation de l'espace signal). *Soit  $\Delta \mathbf{S} \in \mathbb{C}^{n \times l}$ . Pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , soit*

$$\mathbf{X}(\varepsilon) = \mathbf{S} + \varepsilon \Delta \mathbf{S}. \quad (\text{III.1})$$

*Alors il existe une fonction  $\varepsilon \mapsto \mathbf{\Pi}(\varepsilon)$  définie dans un voisinage de  $\varepsilon = 0$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}^{n \times n}$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , telle que  $\mathbf{\Pi}(0) = \mathbf{W} \mathbf{W}^H$ , et qui à tout  $\varepsilon$  associe le projecteur sur l'espace engendré par les  $r$  principaux vecteurs propres de  $\mathbf{X}(\varepsilon) \mathbf{X}(\varepsilon)^H$ .*

*D'autre part il existe une infinité<sup>1</sup> de fonctions  $\varepsilon \mapsto \mathbf{W}(\varepsilon)$  définies dans un voisinage de  $\varepsilon = 0$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}^{n \times r}$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , telles que  $\mathbf{W}(0) = \mathbf{W}$  et  $\mathbf{W}(\varepsilon) \mathbf{W}(\varepsilon)^H = \mathbf{\Pi}(\varepsilon)$ .*

*Chacune des fonctions  $\varepsilon \mapsto \mathbf{W}(\varepsilon)$  admet un développement limité à l'ordre 1*

$$\boxed{\mathbf{W}(\varepsilon) = \mathbf{W} + \varepsilon(\Delta \mathbf{W} - \mathbf{W} \mathbf{A}) + O(\varepsilon^2)} \quad (\text{III.2})$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice à antisymétrie hermitienne et

$$\boxed{\Delta \mathbf{W} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{W} \mathbf{W}^H) \Delta \mathbf{S} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{W}.} \quad (\text{III.3})$$

L'équation (III.3) montre que  $\Delta \mathbf{W}$  est orthogonal à  $\text{span}(\mathbf{W})$ . En revanche, le terme  $\mathbf{W} \mathbf{A}$  dans l'équation (III.2) appartient à cet espace.

### III.3.1.2 Perturbation de la matrice spectrale

La proposition suivante complète le résultat de la proposition III.3.1 en montrant comment la matrice spectrale est perturbée.

**Proposition III.3.2** (Perturbation de la matrice spectrale). *Supposons que la matrice  $\mathbf{W}_\downarrow$  est de rang plein, et posons  $\mathbf{\Phi}(\varepsilon) \triangleq \mathbf{W}(\varepsilon)_\downarrow^\dagger \mathbf{W}(\varepsilon)_\uparrow$  (en particulier,  $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{\Phi}$ ). Alors au voisinage de  $\varepsilon = 0$ ,  $\mathbf{W}_\downarrow(\varepsilon)$  est aussi de rang plein et la fonction  $\varepsilon \mapsto \mathbf{\Phi}(\varepsilon)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur ce voisinage.*

*De plus, la fonction  $\varepsilon \mapsto \mathbf{\Phi}(\varepsilon)$  admet le développement limité à l'ordre 1 :*

$$\boxed{\mathbf{\Phi}(\varepsilon) = \mathbf{\Phi} + \varepsilon(\Delta \mathbf{\Phi} + \mathbf{A} \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi} \mathbf{A}) + O(\varepsilon^2)} \quad (\text{III.4})$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice à antisymétrie hermitienne et

$$\boxed{\Delta \mathbf{\Phi} = -\mathbf{W}_\downarrow^\dagger \Delta \mathbf{W}_\downarrow \mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi} \mathbf{W}_\uparrow^\dagger \Delta \mathbf{W}_\uparrow.} \quad (\text{III.5})$$

La perturbation de la matrice de Jordan se déduit maintenant de la proposition III.3.2. Les vecteurs  $\mathbf{v}_0$  et  $\mathbf{v}_{(n-1)}$  de même dimension  $r$  sont définis comme les conjugués hermitiens de la première et de la dernière ligne de la matrice  $\mathbf{V}^n$  respectivement. Considérons également les vecteurs  $\mathbf{e}_0 = [1, 0, \dots, 0]^T$  et  $\mathbf{e}_{(n-1)} = [0, \dots, 0, 1]^T$  de même dimension  $n$ .

**Corollaire III.3.3** (Perturbation de la matrice de Jordan). *Posons  $\mathbf{J}(\varepsilon) = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{\Phi}(\varepsilon) \mathbf{G}$ . La fonction  $\varepsilon \mapsto \mathbf{J}(\varepsilon)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de  $\varepsilon = 0$ , et admet le développement limité*

$$\boxed{\mathbf{J}(\varepsilon) = \mathbf{J} + \varepsilon(\Delta \mathbf{J} + \mathbf{A}' \mathbf{J} - \mathbf{J} \mathbf{A}') + O(\varepsilon^2)} \quad (\text{III.6})$$

<sup>1</sup> Toutes ces fonctions s'obtiennent en multipliant l'une d'entre elles à droite par une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , à valeurs dans le groupe des matrices orthonormées  $\mathcal{O}_r(\mathbb{C})$ , et prenant la valeur  $\mathbf{I}_r$  en  $\varepsilon = 0$ .

où  $\mathbf{A}' = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{G}$  et la matrice  $\Delta \mathbf{J}$  est de rang deux :

$$\Delta \mathbf{J} = \mathbf{v}'_{(n-1)} \mathbf{e}'_{(n-1)H} \Delta \mathbf{S} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{V}^n \mathbf{J} - \mathbf{J} \mathbf{v}'_0 \mathbf{e}'_0{}^H \Delta \mathbf{S} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{V}^n \quad (\text{III.7})$$

où  $\mathbf{Z} = \mathbf{V}^n \mathbf{H} \mathbf{V}^n$ , les vecteurs  $\mathbf{v}'_{(n-1)} = \frac{\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{v}_{(n-1)}}{1 - \mathbf{v}_{(n-1)}^H \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{v}_{(n-1)}}$  et  $\mathbf{v}'_0 = \frac{\mathbf{Z}^{-1} \mathbf{v}_0}{1 - \mathbf{v}_0^H \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{v}_0}$  sont de dimension  $r$ , et les vecteurs  $\mathbf{e}'_{(n-1)} = \mathbf{e}_{(n-1)} - \mathbf{V}^n \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{v}_{(n-1)}$  et  $\mathbf{e}'_0 = \mathbf{e}_0 - \mathbf{V}^n \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{v}_0$  sont de dimension  $n$ .

### III.3.1.3 Perturbation des pôles

Nous nous intéressons maintenant à la perturbation des pôles. Ceux-ci sont obtenus en déterminant la forme de Jordan de la matrice spectrale  $\Phi$ . En pratique, contrairement à  $\Phi$ , la matrice spectrale perturbée ne possède pas de valeurs propres multiples. Chacune de ces valeurs propres est éclatée en plusieurs valeurs propres simples.

**Proposition III.3.4** (Perturbation fractionnaire). *Soit  $z_k$  une valeur propre non dérogatoire<sup>2</sup> d'ordre  $M_k \in \mathbb{N}^*$  de la matrice  $\Phi$  de dimension  $r \times r$ . Supposons que le coefficient de la matrice  $\Delta \mathbf{J}$  situé à l'intersection de la ligne d'indice  $\sum_{k'=0}^k M_{k'} - 1$  et de la colonne d'indice  $\sum_{k'=0}^{k-1} M_{k'}$  soit non nul. Alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , il existe exactement  $M_k$  valeurs propres de la matrice  $\Phi(\varepsilon)$ , notées  $\{z_{(k,m)}(\varepsilon)\}_{m \in \{0 \dots M_k - 1\}}$ , qui admettent le développement fractionnaire au premier ordre*

$$z_{(k,m)}(\varepsilon) = z_k + \varepsilon^{\frac{1}{M_k}} \Delta z_k e^{i2\pi \frac{m}{M_k}} + O\left(\varepsilon^{\frac{2}{M_k}}\right) \quad (\text{III.8})$$

où  $\Delta z_k$  est une racine d'ordre  $M_k$  du nombre complexe

$$(\Delta z_k)^{M_k} = \Delta \mathbf{J} \left( \sum_{k'=0}^k M_{k'} - 1, \sum_{k'=0}^{k-1} M_{k'} \right) = \mathbf{e}'_{(n-1)H} \Delta \mathbf{S} \mathbf{e}''_{(n-1,k)} - \mathbf{e}'_0{}^H \Delta \mathbf{S} \mathbf{e}''_{(0,k)} \quad (\text{III.9})$$

où les vecteurs  $\mathbf{e}''_{(n-1,k)}$  et  $\mathbf{e}''_{(0,k)}$  sont de dimension  $l$  :

$$\begin{cases} \mathbf{e}''_{(n-1,k)} &= z_k \mathbf{S}^\dagger \mathbf{v}(z_k) \mathbf{v}'_{(n-1)} \left( \sum_{k'=0}^k M_{k'} - 1 \right) \\ \mathbf{e}''_{(0,k)} &= z_k \mathbf{S}^\dagger \mathbf{v}(z_k) \mathbf{v}'_0 \left( \sum_{k'=0}^k M_{k'} - 1 \right). \end{cases}$$

Si  $M_k > 1$ , la perturbation au premier ordre du pôle  $z_k$  dans l'équation (III.8) est homogène et isotrope, si bien que les  $M_k$  valeurs propres perturbées constituent les sommets d'un polygone régulier d'ordre  $M_k$  dans le plan complexe.

Il apparaît de plus que les pôles multiples sont plus sensibles aux perturbations que les pôles simples, dans la mesure où le terme du premier ordre dans l'équation (III.8) est  $\varepsilon^{\frac{1}{M_k}} > \varepsilon$  (en supposant que  $\varepsilon < 1$ ). Il est en fait possible de contourner ce problème en ne considérant plus les valeurs propres  $z_{(k,m)}(\varepsilon)$  comme  $M_k$  estimateurs distincts du même pôle  $z_k$ , mais en construisant un estimateur unique

<sup>2</sup> Consulter e.g. [Moro et al., 1997] pour une définition des valeurs propres non dérogatoires. Puisque les pôles sont distincts, toutes les valeurs propres de la forme de Jordan définie dans l'équation (II.8) sont non dérogatoires.

de ce pôle en moyennant les  $z_{(k,m)}(\varepsilon)$ . En effet, puisque la somme des racines  $M_k^{\text{èmes}}$  de l'unité est nulle, l'équation (III.8) implique

$$z_k(\varepsilon) \triangleq \frac{1}{M_k} \sum_{m=0}^{M_k-1} z_{(k,m)}(\varepsilon) = z_k + O\left(\varepsilon^{\frac{2}{M_k}}\right).$$

Il apparaît donc que l'estimateur  $z_k(\varepsilon)$  est meilleur que chacun des  $z_{(k,m)}(\varepsilon)$  puisque l'erreur d'estimation est plus faible d'un ordre de grandeur au moins. La proposition suivante montre que  $z_k(\varepsilon)$  admet en fait un développement en séries entières.

**Proposition III.3.5** (Perturbation entière). *Posons  $z_k(\varepsilon) = \frac{1}{M_k} \sum_{m=0}^{M_k-1} z_{(k,m)}(\varepsilon) \forall k \in \{0 \dots K-1\}$ . Alors la fonction  $\varepsilon \mapsto z_k(\varepsilon)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et admet le développement limité au premier ordre*

$$\boxed{z_k(\varepsilon) = z_k + \varepsilon \Delta z_k + O(\varepsilon^2)} \quad (\text{III.10})$$

où  $\Delta z_k$  est le nombre complexe

$$\Delta z_k = \frac{1}{M_k} \text{trace}(\Delta \mathbf{J}_k) \quad (\text{III.11})$$

(où  $\Delta \mathbf{J}_k$  est le sous-bloc de dimension  $M_k \times M_k$  extrait de la matrice  $\Delta \mathbf{J}$ , qui est associé au pôle  $z_k$ ; il correspond aux lignes et aux colonnes d'indices  $\sum_{k'=0}^{k-1} M_{k'}$  à  $\sum_{k'=0}^k M_{k'} - 1$ ). Le nombre  $\Delta z_k$  s'écrit également sous la forme

$$\Delta z_k = \frac{1}{M_k \alpha_{(k, M_k-1)}} \left( \mathbf{e}'_{(n-1)}{}^H \Delta \mathbf{S} \mathbf{e}''_{(n-1,k)} - \mathbf{e}'_0{}^H \Delta \mathbf{S} \mathbf{e}''_{(0,k)} \right) \quad (\text{III.12})$$

où les vecteurs  $\mathbf{e}''_{(n-1,k)}$  et  $\mathbf{e}''_{(0,k)}$  sont de dimension  $l$  :

$$\begin{cases} \mathbf{e}''_{(n-1,k)} &= \mathbf{V}^{l*} \left( \mathbf{V}^{lT} \mathbf{V}^{l*} \right)^{-1} \left( \begin{smallmatrix} k-1 \\ \sum_{k'=0} \end{smallmatrix} M_{k'} : \begin{smallmatrix} k \\ \sum_{k'=0} \end{smallmatrix} M_{k'} - 1 \right) \left( \alpha_{(k, M_k-1)} \mathbf{H}_k^{-1} \right) \mathbf{J}_{M_k}(z_k) \mathbf{v}'_{(n-1)} \left( \begin{smallmatrix} k-1 \\ \sum_{k'=0} \end{smallmatrix} M_{k'} : \begin{smallmatrix} k \\ \sum_{k'=0} \end{smallmatrix} M_{k'} - 1 \right) \\ \mathbf{e}''_{(0,k)} &= \mathbf{V}^{l*} \left( \mathbf{V}^{lT} \mathbf{V}^{l*} \right)^{-1} \left( \begin{smallmatrix} k-1 \\ \sum_{k'=0} \end{smallmatrix} M_{k'} : \begin{smallmatrix} k \\ \sum_{k'=0} \end{smallmatrix} M_{k'} - 1 \right) \left( \alpha_{(k, M_k-1)} \mathbf{H}_k^{-1} \right) \mathbf{J}_{M_k}(z_k) \mathbf{v}'_0 \left( \begin{smallmatrix} k-1 \\ \sum_{k'=0} \end{smallmatrix} M_{k'} : \begin{smallmatrix} k \\ \sum_{k'=0} \end{smallmatrix} M_{k'} - 1 \right). \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

L'équation (III.12) s'écrit aussi sous la forme d'un produit scalaire :

$$\Delta z_k = \frac{1}{M_k \alpha_{(k, M_k-1)}} \mathbf{u}_k{}^H \Delta \mathbf{s} \quad (\text{III.14})$$

où les vecteurs  $\Delta \mathbf{s} = [\Delta s(t-l+1), \dots, \Delta s(t+n-1)]^T$  et  $\mathbf{u}_k$  sont de dimension  $N = n+l-1$ . Plus précisément, pour tout  $\tau \in [0, \dots, n+l-2]$ ,

$$u_k(\tau) = \sum_{\tau'=\max(\tau-l+1, 0)}^{\min(\tau, n-1)} \mathbf{e}'_{(n-1)}(\tau') \mathbf{e}''_{(n-1,k)}(\tau - \tau')^* - \mathbf{e}'_0(\tau') \mathbf{e}''_{(0,k)}(\tau - \tau')^*. \quad (\text{III.15})$$

Le corollaire suivant montre comment la perturbation des pôles se répercute sur les fréquences et les facteurs d'atténuation.

**Corollaire III.3.6** (Perturbation des fréquences et des facteurs d'atténuation). *Posons  $\delta_k(\varepsilon) = \operatorname{Re}(\ln(z_k(\varepsilon)))$  et  $f_k(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im}(\ln(z_k(\varepsilon)))$  (en particulier,  $\delta_k(0) = \delta_k$  et  $f_k(0) = f_k$ )<sup>3</sup>. Alors les fonctions  $\varepsilon \mapsto \delta_k(\varepsilon)$  et  $\varepsilon \mapsto f_k(\varepsilon)$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et admettent le développement limité au premier ordre :*

$$\begin{cases} \delta_k(\varepsilon) &= \delta_k + \varepsilon \Delta\delta_k + O(\varepsilon^2) \\ f_k(\varepsilon) &= f_k + \varepsilon \Delta f_k + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

où

$$\begin{cases} \Delta\delta_k &= \operatorname{Re}\left(\frac{\Delta z_k}{z_k}\right) \\ \Delta f_k &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im}\left(\frac{\Delta z_k}{z_k}\right). \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

### III.3.1.4 Perturbation des amplitudes et des phases

Connaissant l'impact d'une perturbation des données sur les pôles estimés, il est maintenant possible d'analyser la perturbation induite sur les amplitudes complexes, déduites de ces pôles par la méthode des moindres carrés. Cette étude nécessite préalablement de calculer la perturbation de la matrice Pascal-Vandermonde  $\mathbf{V}^N$ .

**Lemme III.3.7** (Perturbation de la matrice Pascal-Vandermonde). *Soit  $\mathbf{V}^N(\varepsilon)$  la matrice Pascal-Vandermonde de dimensions  $N \times r$  associée aux pôles estimés  $\{z_0(\varepsilon), \dots, z_{K-1}(\varepsilon)\}$  définis dans la proposition III.3.5 (en particulier,  $\mathbf{V}^N(0) = \mathbf{V}^N$ ). Alors la fonction  $\varepsilon \mapsto \mathbf{V}^N(\varepsilon)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de  $\varepsilon = 0$ , et admet le développement limité à l'ordre 1 :*

$$\boxed{\mathbf{V}^N(\varepsilon) = \mathbf{V}^N + \varepsilon \Delta\mathbf{V}^N + O(\varepsilon^2)} \quad (\text{III.18})$$

où la matrice  $\Delta\mathbf{V}^N$  s'exprime sous la forme

$$\boxed{\Delta\mathbf{V}^N = \overline{\mathbf{V}}^N \Delta\mathbf{Z}} \quad (\text{III.19})$$

où  $\overline{\mathbf{V}}^N$  est la matrice Pascal-Vandermonde de dimensions  $N \times (r + K)$  obtenue en juxtaposant les matrices de Pascal généralisées  $\mathbf{C}_{M_k+1}^N(z_k)$ , et  $\Delta\mathbf{Z} = \operatorname{diag}(\Delta\mathbf{Z}_0, \dots, \Delta\mathbf{Z}_{K-1})$  est une matrice de dimension  $(r + K) \times r$  dont les blocs diagonaux  $\Delta\mathbf{Z}_k = \Delta z_k \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \operatorname{diag}(1, 2, \dots, M_k) \end{bmatrix}$  sont de dimension  $(M_k + 1) \times M_k$ .

La perturbation des amplitudes complexes se déduit maintenant du lemme III.3.7. Notons  $\mathbf{s} = [s(t-l+1), \dots, s(t+n-1)]^T$  le vecteur de dimension  $N$  contenant les échantillons du signal non bruité.

**Proposition III.3.8** (Perturbation des amplitudes complexes). *Pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , considérons le vecteur  $\mathbf{x}(\varepsilon) = \mathbf{s} + \varepsilon \Delta\mathbf{s}$  de dimension  $N$ , contenant les échantillons du signal bruité. Posons alors  $\boldsymbol{\alpha}(\varepsilon) = \mathbf{V}^N(\varepsilon)^\dagger \mathbf{x}(\varepsilon)$  (en particulier,  $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\alpha}$ ). Alors la fonction  $\varepsilon \mapsto \boldsymbol{\alpha}(\varepsilon)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de  $\varepsilon = 0$ , et admet le développement limité au premier ordre :*

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha}(\varepsilon) = \boldsymbol{\alpha} + \varepsilon \Delta\boldsymbol{\alpha} + O(\varepsilon^2)} \quad (\text{III.20})$$

<sup>3</sup>On suppose ici que toutes les fréquences sont comprises entre  $-\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$ , et la notation  $\ln(\cdot)$  désigne la détermination du logarithme complexe correspondant à un argument compris entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

où le vecteur  $\Delta\boldsymbol{\alpha}$  de dimension  $r$  vérifie

$$\boxed{\Delta\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B}^H \Delta\mathbf{s}} \quad (\text{III.21})$$

où la matrice

$$\mathbf{B}^H = \mathbf{V}^{N\dagger} \left( \mathbf{I}_N - \overline{\mathbf{V}}^N \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{K-1} \end{bmatrix} \right), \quad (\text{III.22})$$

de dimensions  $r \times N$ , est définie à partir des matrices  $\mathbf{A}_k$ , de dimensions  $(M_k + 1) \times N$  et de rang 1 :

$$\mathbf{A}_k = \left[ 0, \frac{1}{M_k} \frac{\alpha_{(k,0)}}{\alpha_{(k,M_k-1)}}, \frac{2}{M_k} \frac{\alpha_{(k,1)}}{\alpha_{(k,M_k-1)}}, \dots, \frac{M_k - 1}{M_k} \frac{\alpha_{(k,M_k-2)}}{\alpha_{(k,M_k-1)}}, 1 \right]^T \mathbf{u}_k^H.$$

Le corollaire suivant montre comment la perturbation des amplitudes complexes se répercute sur les amplitudes réelles et les phases<sup>4</sup>.

**Corollaire III.3.9** (Perturbation des amplitudes et des phases). *Soient  $a_{(k,m_k)}(\varepsilon) = |\alpha_{(k,m_k)}(\varepsilon)|$  et  $\phi_{(k,m_k)}(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{I}m(\ln(\alpha_{(k,m_k)}(\varepsilon)))$  (on retrouve  $a_{(k,m_k)}(0) = a_{(k,m_k)}$  et  $\phi_{(k,m_k)}(0) = \phi_{(k,m_k)}$ ). Si  $a_{(k,m_k)} \neq 0$ , alors les fonctions  $\varepsilon \mapsto a_{(k,m_k)}(\varepsilon)$  et  $\varepsilon \mapsto \phi_{(k,m_k)}(\varepsilon)$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et admettent le développement limité à l'ordre 1 :*

$$\begin{cases} a_{(k,m_k)}(\varepsilon) &= a_{(k,m_k)} + \varepsilon \Delta a_{(k,m_k)} + O(\varepsilon^2) \\ \phi_{(k,m_k)}(\varepsilon) &= \phi_{(k,m_k)} + \varepsilon \Delta \phi_{(k,m_k)} + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

où

$$\begin{cases} \Delta a_{(k,m_k)} &= a_{(k,m_k)} \mathcal{R}e \left( \frac{\Delta \alpha_{(k,m_k)}}{\alpha_{(k,m_k)}} \right) \\ \Delta \phi_{(k,m_k)} &= \mathcal{I}m \left( \frac{\Delta \alpha_{(k,m_k)}}{\alpha_{(k,m_k)}} \right). \end{cases} \quad (\text{III.24})$$

### III.3.2 Performance des estimateurs

Nous souhaitons à présent exploiter les résultats de la théorie des perturbations pour en déduire les moments d'ordre un et deux des estimateurs au premier ordre, c'est-à-dire dans le cas où le rapport signal à bruit est élevé. La section III.3.2.1 présente les résultats obtenus au premier ordre, qui sont ensuite simplifiés dans la section III.3.2.2 dans un contexte asymptotique.

#### III.3.2.1 Performance des estimateurs au premier ordre

La proposition suivante exprime la variance des estimateurs  $z_k(\varepsilon)$ ,  $\delta_k(\varepsilon)$  et  $f_k(\varepsilon)$  en fonction du vecteur  $\mathbf{u}_k$  et de la matrice  $\boldsymbol{\Gamma}$ .

**Proposition III.3.10.** *L'estimateur  $z_k(\varepsilon)$  du pôle  $z_k$  défini dans la proposition III.3.5 est centré au premier ordre, et sa variance est égale à*

$$\text{var}(z_k(\varepsilon)) = \frac{\sigma^2}{M_k^2 a_{(k,M_k-1)}^2} \mathbf{u}_k^H \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u}_k. \quad (\text{III.25})$$

<sup>4</sup>La perturbation induite sur l'écart-type ne sera pas présentée dans ce document. En effet, en substituant les développements limités (III.18) et (III.20) dans l'équation (I.4), les termes d'ordre 0 et 1 s'annulent, et on obtient  $\sigma(\varepsilon)^2 = \frac{1}{N} O(\varepsilon^2)$ , d'où  $\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{N}} O(\varepsilon)$ . Ainsi, pour calculer la perturbation induite sur l'écart-type, il faudrait pousser tous les développements limités à l'ordre 2.

De même, les estimateurs  $\delta_k(\varepsilon)$  et  $f_k(\varepsilon)$  du facteur d'atténuation  $\delta_k$  et de la fréquence  $f_k$  définis dans le corollaire III.3.6 sont centrés au premier ordre. De plus, leurs variances respectives sont égales à

$$\text{var}(\delta_k(\varepsilon)) = \frac{\sigma^2 e^{-2\delta_k}}{2M_k^2 a_{(k, M_k-1)}^2} \mathbf{u}_k^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_k \quad (\text{III.26})$$

$$\text{var}(f_k(\varepsilon)) = \frac{\sigma^2 e^{-2\delta_k}}{8\pi^2 M_k^2 a_{(k, M_k-1)}^2} \mathbf{u}_k^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_k. \quad (\text{III.27})$$

En particulier, il existe une analogie remarquable entre les expressions des variances des estimateurs  $\delta_k(\varepsilon)$  et  $f_k(\varepsilon)$  et leurs bornes de Cramér-Rao données dans la proposition III.2.1. La proposition III.3.11 exprime ensuite la variance des estimateurs  $\boldsymbol{\alpha}(\varepsilon)$ ,  $a_{(k, m_k)}(\varepsilon)$  et  $\phi_{(k, m_k)}(\varepsilon)$  en fonction des matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{\Gamma}$ . On notera  $\mathbf{b}_{(k, m_k)}$  la colonne de  $\mathbf{B}$  correspondant au pôle  $z_k$  à l'indice  $m_k$ , c'est-à-dire la colonne d'indice  $m_k + \sum_{k'=0}^{k-1} M_{k'}$ .

**Proposition III.3.11.** *L'estimateur  $\boldsymbol{\alpha}(\varepsilon)$  du vecteur des amplitudes complexes  $\boldsymbol{\alpha}$  défini dans la proposition III.3.8 est centré au premier ordre, et sa matrice de covariance est égale à*

$$\text{cov}(\boldsymbol{\alpha}(\varepsilon)) = \sigma^2 \mathbf{B}^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{B}. \quad (\text{III.28})$$

De même, les estimateurs  $a_{(k, m_k)}(\varepsilon)$  et  $\phi_{(k, m_k)}(\varepsilon)$  de l'amplitude réelle  $a_{(k, m_k)}$  et de la phase  $\phi_{(k, m_k)}$  définis dans le corollaire III.3.9 sont centrés au premier ordre. De plus, leurs variances respectives sont

$$\text{var}(a_{(k, m_k)}(\varepsilon)) = \frac{\sigma^2}{2} \mathbf{b}_{(k, m_k)}^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{b}_{(k, m_k)} \quad (\text{III.29})$$

$$\text{var}(\phi_{(k, m_k)}(\varepsilon)) = \frac{\sigma^2}{2a_{(k, m_k)}^2} \mathbf{b}_{(k, m_k)}^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{b}_{(k, m_k)}. \quad (\text{III.30})$$

### III.3.2.2 Performances asymptotiques

Les formules des variances données dans la section III.3.2.1 ne sont pas très parlantes, car elles font intervenir de nombreux intermédiaires de calcul par le biais du vecteur  $\mathbf{u}_k$ . Cependant, nous allons voir dans cette section que sous certaines hypothèses, ces formules se simplifient. On se replace dans le contexte de la section III.2.2 : on suppose que le bruit est blanc ( $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}_N$ ), tous les pôles sont sur le cercle unité ( $\forall k \in \{0 \dots K-1\}$ ,  $\delta_k = 0$ ), et l'horizon d'observation tend vers l'infini ( $N \rightarrow +\infty$ ).

**Proposition III.3.12.** *Si  $z_k$  est un pôle simple, les variances des estimateurs  $\delta_k(\varepsilon)$  et  $f_k(\varepsilon)$  admettent les développements limités*

$$\text{var}(\delta_k(\varepsilon)) = \frac{\sigma^2}{\max(n, l)^2 \min(n, l) a_{(k, 0)}^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right) \quad (\text{III.31})$$

$$\text{var}(f_k(\varepsilon)) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2 \max(n, l)^2 \min(n, l) a_{(k, 0)}^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right). \quad (\text{III.32})$$



Elles sont toutes deux minimales pour  $n = 2l = \frac{2}{3}(N + 1)$  ou pour  $l = 2n = \frac{2}{3}(N + 1)$  (en supposant  $N$  congru à 2 modulo 3), et ces minima ont pour équivalents asymptotiques

$$\text{var}(\delta_k(\varepsilon)) \sim \frac{27}{4} \frac{\sigma^2}{N^3 a_{(k,0)}^2}$$

$$\text{var}(f_k(\varepsilon)) \sim \frac{27}{4} \frac{\sigma^2}{4\pi^2 N^3 a_{(k,0)}^2}.$$

On prêtera attention au fait que les expressions (III.31) et (III.32) ne sont valables que pour un pôle simple. Si  $z_k$  est un pôle multiple, ces variances ne s'expriment pas aussi simplement et sont fonction des amplitudes complexes associées au pôle  $z_k$  à tous les indices  $m \in \{0 \dots M_k - 1\}$  (les valeurs optimales de  $n$  et  $l$  sont alors elles-mêmes fonction de ces amplitudes). Rappelons que les bornes de Cramér-Rao données dans la proposition III.2.2 deviennent, pour un pôle simple,  $\text{CRB}\{\delta_k\} = 6 \frac{\sigma^2}{N^3 a_{(k,0)}^2}$  et  $\text{CRB}\{f_k\} = 6 \frac{\sigma^2}{4\pi^2 N^3 a_{(k,0)}^2}$ . Les variances peuvent être alors comparées à ces bornes :

Sous les hypothèses précisées ci-dessus, l'efficacité<sup>5</sup> asymptotique des estimateurs de tous les facteurs d'atténuation et de toutes les fréquences associés à des pôles simples est la même, indépendante des paramètres du modèle, et égale à  $9/8 = 1,125$  si  $n = 2l$  ou  $l = 2n$ .

On retrouve ainsi les résultats qui avaient été obtenus dans [Hua et Sarkar, 1990] sur la méthode *Matrix Pencil*, dans le cas particulier d'une seule sinusoïde complexe. La figure III.1-a représente le rapport de la borne de Cramér-Rao sur la variance des estimateurs en échelle logarithmique en fonction du rapport  $\frac{n}{N+1}$ . On vérifie ainsi que le maximum est bien atteint en  $n = \frac{N+1}{3}$  et  $n = \frac{2(N+1)}{3}$ . De plus, les performances s'effondrent quand  $n$  devient trop grand ou trop petit.

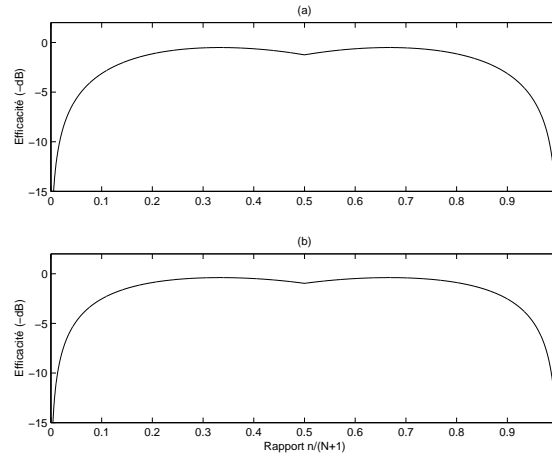


FIG. III.1 – Efficacité des estimateurs

- (a) Efficacité de l'estimation des fréquences et des facteurs d'atténuation
- (b) Efficacité de l'estimation des amplitudes réelles et des phases

<sup>5</sup>L'efficacité d'un estimateur est définie comme le rapport de sa variance sur la borne de Cramér-Rao.

La proposition suivante est l'analogie de la proposition III.3.12 pour les amplitudes réelles et les phases.

**Proposition III.3.13.** *Si  $z_k$  est un pôle simple, les variances des estimateurs  $a_{(k,0)}(\varepsilon)$  et  $\phi_{(k,0)}(\varepsilon)$  admettent les développements limités*

$$\text{var}(a_{(k,0)}(\varepsilon)) = \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{1}{N} + \frac{N^2}{2 \max(n, l)^2 \min(n, l)} \right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad (\text{III.33})$$

$$\text{var}(\phi_{(k,0)}(\varepsilon)) = \frac{\sigma^2}{2a_{(k,0)}^2} \left( \frac{1}{N} + \frac{N^2}{2 \max(n, l)^2 \min(n, l)} \right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (\text{III.34})$$

Elles sont toutes deux minimales pour  $n = 2l = \frac{2}{3}(N+1)$  ou pour  $l = 2n = \frac{2}{3}(N+1)$  (en supposant  $N$  congru à 2 modulo 3), et ces minima ont pour équivalents asymptotiques

$$\boxed{\text{var}(a_{(k,0)}(\varepsilon)) \sim \frac{35\sigma^2}{16N}}$$

$$\boxed{\text{var}(\phi_{(k,0)}(\varepsilon)) \sim \frac{35\sigma^2}{16Na_{(k,0)}^2}}.$$

Là encore, on prêtera attention au fait que les expressions (III.33) et (III.34) ne sont valables que pour un pôle simple. Rappelons que les bornes de Cramér-Rao données dans la proposition III.2.2 deviennent, pour un pôle simple,  $\text{CRB}\{a_{(k,0)}\} = \frac{2\sigma^2}{N}$  et  $\text{CRB}\{\phi_{(k,0)}\} = \frac{2\sigma^2}{Na_{(k,0)}^2}$ . Les variances peuvent être alors comparées à ces bornes :

Sous les hypothèses précisées ci-dessus, l'efficacité asymptotique des estimateurs de toutes les amplitudes réelles et de toutes les phases associées à des pôles simples est la même, indépendante des paramètres du modèle, et égale à  $35/32 = 1,09375$  si  $n = 2l$  ou  $l = 2n$ .

Elle est encore meilleure que celle des estimateurs  $\delta_k(\varepsilon)$  et  $f_k(\varepsilon)$ . Il est aussi remarquable de constater que l'optimum est obtenu pour les mêmes valeurs de  $n$  et de  $l$  que dans le cas précédent. La figure III.1-b représente le rapport de la borne de Cramér-Rao sur la variance des estimateurs en échelle logarithmique en fonction du rapport  $\frac{n}{N+1}$ . Là encore, le maximum est bien atteint en  $n = \frac{N+1}{3}$  et  $n = \frac{2(N+1)}{3}$ , et les performances s'effondrent quand  $n$  devient trop grand ou trop petit. La similitude entre les courbes représentées dans les figures III.1-a et III.1-b est remarquable. Cela pourrait s'expliquer par le fait que l'estimation des amplitudes et des phases repose directement sur l'estimation des fréquences et des facteurs d'atténuation.

A présent, nous allons illustrer les résultats sur la perturbation des pôles multiples établis dans la section III.3.1.3.

## III.4 Simulations numériques

Dans cette section, la méthode ESPRIT présentée dans la section II.5.3 est appliquée aux signaux réels. Le modèle de signal réel est présenté dans la section III.4.1. Ensuite la section III.4.2 illustre un cas de modulation d'amplitude polynomiale, et la section III.4.3 illustre un cas de modulation en amplitude et en fréquence.

### III.4.1 Modèle de signal réel

Dans cette section le modèle de signal introduit dans la section II.2 est appliqué au cas particulier de signaux réels. Puisque le polynôme prédicteur a des coefficients réels, ses racines peuvent être partitionnées en pôles réels d'une part, et paires de pôles complexes conjugués (de même ordre) d'autre part. Ainsi, en groupant les pôles dont les angles polaires ont la même valeur absolue, l'équation (II.3) se réécrit sous la forme

$$s(t) = \sum_{p=0}^{P-1} a_p(t) \cos(2\pi f_p t) + b_p(t) \sin(2\pi f_p t) \quad (\text{III.35})$$

où  $P \leq K$  est le nombre de fréquences distinctes  $f_p \in [0, \frac{1}{2}]$ , et  $\forall p \in \{0, \dots, P-1\}$ ,  $a_p(t)$  et  $b_p(t)$  appartiennent à une classe de fonctions paramétriques. Plus précisément, une fonction  $g(t)$  de cette classe est de la forme

$$g(t) = \sum_{q=0}^{Q-1} P_q[t] \exp(\delta_q t)$$

où  $Q \in \mathbb{N}^*$  est le nombre de pôles de même angle polaire, les facteurs d'atténuation  $\delta_q \in \mathbb{R}$  sont distincts, et  $\forall q \in \{0, \dots, Q-1\}$ ,  $P_q$  est un polynôme réel. Alors l'équation (III.35) s'écrit sous la forme

$$s(t) = \sum_{p=0}^{P-1} A_p(t) \cos(2\pi f_p t + \phi_p(t)) \quad (\text{III.36})$$

où l'amplitude variante dans le temps  $A_p(t)$  et la phase  $\phi_p(t)$  de la  $p^{\text{th}}$  sinusoïde satisfont les équations

$$\begin{cases} a_p(t) &= A_p(t) \cos(\phi_p(t)) \\ b_p(t) &= -A_p(t) \sin(\phi_p(t)) \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

dont les solutions sont<sup>6</sup>

$$\begin{cases} A_p(t) &= \sqrt{a_p(t)^2 + b_p(t)^2} \\ \phi_p(t) &= -2 \arctan\left(\frac{b_p(t)}{A_p(t) + a_p(t)}\right). \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

Le modèle de signal dans l'équation (III.36) ressemble à celui de McAulay et Quatieri [Mc Aulay et Quatieri, 1986]. Cependant, dans [Mc Aulay et Quatieri, 1986]  $A_p(t)$  et  $\phi_p(t)$  sont des fonctions non paramétriques telles que  $A_p(t)$  et  $\frac{d\phi_p}{dt}$  varient lentement et  $A_p(t)$  est positive, alors que dans notre modèle  $A_p(t)$  et  $\phi_p(t)$  sont des fonctions paramétriques.

Les variations de la fréquence instantanée  $f_p^i$  de la  $p^{\text{ème}}$  sinusoïde peuvent être calculées analytiquement, en différentiant (III.37) :

$$f_p^i(t) = f_p + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_p}{dt} = f_p + \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{da_p}{dt} b_p(t) - \frac{db_p}{dt} a_p(t)}{a_p(t)^2 + b_p(t)^2}. \quad (\text{III.39})$$

En conclusion, le modèle de signal PACE comporte des modulations d'amplitude et des modulations de fréquence. En revanche, toutes les types de modulations d'amplitude et de fréquence ne sont pas nécessairement représentables par le modèle PACE, puisque les équations (III.38) et (III.39) ne représentent qu'une certaine classe paramétrique de modulations.

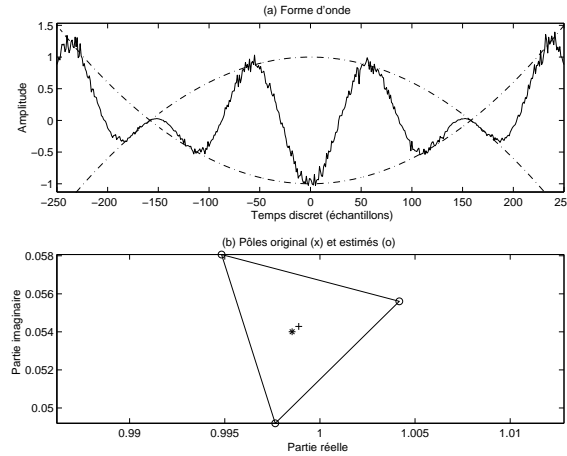


FIG. III.2 – Modulation d'amplitude polynomiale

- (a) Forme d'onde  
(b) Pôles original (x) et estimés (o)

### III.4.2 Modulation d'amplitude polynomiale

Le signal de test représenté dans la figure III.2-a est une sinusoïde bruitée dont l'amplitude est modulée polynomialement et dont la fréquence est constante (les lignes pointillées représentent son enveloppe). Plus précisément, le signal est celui défini dans l'équation (III.35) avec les paramètres  $P = 1$ ,  $f_0 = 8.6 \times 10^{-3}$ ,  $a_0(t) = \frac{t^2}{25000} - 1$  et  $b_0(t) = 0$ , plus un bruit blanc additif dont la variance a été choisie de telle sorte que le RSB est de 20 dB. Les paramètres du modèle complexe correspondant sont  $K = 2$  et  $M_0 = M_1 = 3$  (donc  $r = 6$ ), et la fenêtre d'observation est  $t \in \{-250 \dots 250\}$ .

L'algorithme ESPRIT a été appliqué avec les paramètres  $n = l = 251$ . Les trois valeurs propres avec des angles positifs sont représentées dans la figure III.2-b, par des symboles O aux sommets du triangle. Le véritable pôle multiple  $z_0 = e^{i2\pi f_0}$  est représenté par le symbole \*. Comme cela a été mentionné dans la section III.3.1.3, la perturbation au premier ordre de  $z_0$  est approximativement homogène et isotrope, de sorte que  $z_0$  est proche de la moyenne des trois valeurs propres (représenté par un symbole +). La variation relative de fréquence entre le véritable pôle et la moyenne des valeurs propres est 0.48%.

### III.4.3 Modulation d'amplitude et de fréquence

Le signal de test représenté dans la figure III.3-a est celui défini dans l'équation (III.35) avec  $P = 1$ ,  $f_0 = 8.6 \times 10^{-3}$ , et

$$\begin{cases} a_0(t) \triangleq (1 + \delta'_0 t + \frac{1}{2} \delta'_0{}^2 t^2) \\ b_0(t) \triangleq -\pi \Delta f t^2 a_0(t) \end{cases}$$

où  $\delta'_0 = 4 \times 10^{-3}$ ,  $\Delta f = 8 \times 10^{-6}$ , plus un bruit blanc additif dont la variance a été choisie de façon à ce que le RSB soit de 50 dB<sup>7</sup>. Les paramètres correspondants du modèle complexe sont  $K = 2$  et

<sup>6</sup>Il se trouve que  $\arctan\left(\frac{-b_p(t)}{a_p(t)}\right) = \phi_p(t)$  seulement si  $\phi_p(t) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . En revanche, la formule d'inversion proposée est valide pour tous  $\phi_p(t) \in ]-\pi, \pi[$ .

<sup>7</sup>Puisque l'ordre de multiplicité des pôles est plus grand que dans la section III.4.2, la proposition III.3.4 montre que les valeurs propres sont plus sensibles aux perturbations. C'est pourquoi on choisit un RSB plus élevé pour obtenir un résultat similaire.

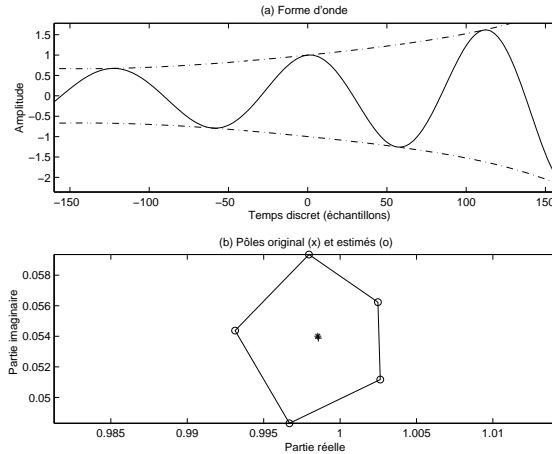


FIG. III.3 – Modulation d'amplitude et de fréquence

- (a) Forme d'onde  
(b) Pôles original (x) et estimés (o)

$M_0 = M_1 = 5$  (donc  $r = 10$ ), et la fenêtre d'observation est  $t \in \{-500 \dots 500\}$ <sup>8</sup>.

Les équations (III.38) et (III.39) donnent les modulations d'amplitude et de fréquence correspondantes :

$$\begin{cases} A_0(t) = \sqrt{1 + \pi^2 \Delta f^2 t^4} a_0(t) \\ f_0^i(t) = f_0 + \frac{\Delta f t}{1 + \pi^2 \Delta f^2 t^4}. \end{cases}$$

En particulier, la fenêtre d'observation de la figure III.3-a montre un accroissement conjugué de l'amplitude et de la fréquence.

La méthode ESPRIT a été appliquée avec les paramètres  $n = l = 501$ . Les cinq valeurs propres d'angles polaires positifs sont représentées dans la figure III.3-b, par des symboles O aux sommets du pentagone. Le véritable pôle multiple  $z_0 = e^{i2\pi f_0}$  est représenté par un symbole \*. Comme cela a été mentionné dans la section III.3.1.3, la perturbation au premier ordre de  $z_0$  est approximativement homogène et isotrope, si bien que  $z_0$  est proche de la moyenne des cinq valeurs propres. En fait, la variation relative de la fréquence entre le pôle original et la moyenne des valeurs propres est de 0.23%.

### III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les bornes de Cramér-Rao pour le modèle PACE ont été calculées analytiquement dans le cas général, et leurs expressions ont été simplifiées sous l'hypothèse  $N \rightarrow +\infty$  (dans le cas où le bruit est blanc et où tous les pôles sont sur le cercle unité). Par ailleurs, il a été montré que les estimateurs des pôles et des amplitudes complexes sont centrés, et leurs variances ont été calculées sous l'hypothèse  $\text{RSB} \rightarrow +\infty$ . Ces variances ont été comparées aux bornes de Cramér-Rao en supposant conjointement que  $N \rightarrow +\infty$  et  $\text{RSB} \rightarrow +\infty$ , et il a été montré que l'efficacité des estimateurs était voisine de 1.

La théorie des perturbations a montré en particulier que le bruit additif éclate les pôles multiples en plusieurs valeurs propres simples, formant les sommets d'un polygone régulier. Ce phénomène a été

<sup>8</sup>La figure III.3-a est un agrandissement de la partie centrale du signal.

---

observé dans nos simulations numériques, qui ont confirmé que la moyenne des valeurs propres dispersées est une bonne approximation du pôle multiple original. Ainsi le modèle de signal PACE conduit à une interprétation alternative d'un ensemble de pôles estimés appartenant au même voisinage (plusieurs pôles simples peuvent correspondre à une seule sinusoïde modulée). La question de l'application du modèle PACE aux signaux de musique sera abordée dans la section X.2.4. Nous y montrerons que les modulations qui apparaissent naturellement dans ce type de signaux sont généralement mieux représentées avec des pôles simples qu'avec des pôles multiples.



## Chapitre IV

# Estimation de l'ordre de modélisation

### Résumé

Dans le chapitre II, l'ordre du modèle PACE était supposé connu, ce qui n'est pas le cas dans la pratique. Dans les applications de codage, le signal doit être représenté avec un nombre minimal de paramètres. Malheureusement, il se trouve qu'appliquer l'algorithme ESPRIT avec un ordre de modèle sous-estimé biaise l'estimation des fréquences. Dans ce chapitre est proposée une nouvelle méthode pour sélectionner un ordre de modélisation approprié, qui minimise ce biais. Cette approche a été appliquée à des signaux synthétiques et à des signaux de musique, et donne de meilleurs résultats que les critères classiques. Les développements qui vont suivre ont fait l'objet d'un article à paraître dans *IEEE Transactions on Signal Processing* [Badeau *et al.*, 2005a].



## IV.1 Introduction

Ce chapitre montre comment l'application de l'algorithme ESPRIT avec un ordre de modèle erroné perturbe l'estimation des sinusoides. A notre connaissance, aucune analyse des perturbations induites par un ordre de modélisation erroné n'a été publiée (dans le cas de l'algorithme MUSIC, une étude a été menée dans [Saarnisaari, 1999]). Par ailleurs, tous les articles analysant les performances de l'algorithme ESPRIT mentionnés dans la section I.6.2 reposent sur des approximations au premier ordre. Dans ce chapitre sont présentées des bornes d'erreur pour les pôles estimés, qui sont dérivées sans approximation et se calculent facilement. De plus, elles sont plus précises que celles présentées dans [Badeau *et al.*, 2004b]. A partir de ce résultat, une nouvelle méthode de sélection de l'ordre du modèle est proposée, qui consiste à minimiser la perturbation. Contrairement aux autres méthodes proposées dans la littérature, qui sélectionnent l'ordre du modèle en analysant les propriétés spectrales du bruit additif, notre approche se concentre sur le signal lui-même. Bien qu'elle repose sur un modèle sans bruit, elle s'avère plus performante que les critères classiques, même dans le cas d'un faible RSB.

Le chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la section IV.2, la perturbation des pôles induite par un ordre de modélisation erroné est analysée. Ensuite notre nouvelle méthode de sélection de l'ordre de modélisation, baptisée méthode *ESTimation ERROR* (ESTER), est introduite dans la section IV.3, où une implémentation rapide est proposée. Dans la section IV.4, la pertinence de notre critère en tant que borne d'erreur est examinée, et la performance de la méthode ESTER est comparée à celle de quelques critères classiques. Enfin, les principales conclusions de ce chapitre sont résumées dans la section IV.5.

## IV.2 Impact d'un ordre de modélisation erroné

On suppose ci-dessous que l'algorithme ESPRIT généralisé présenté dans la section II.5.3 est appliqué avec un ordre de modélisation  $p$  éventuellement erroné, et on observe comment l'estimation des pôles en est affectée. Dans le but de simplifier les notations, les dépendances temporelles ne seront plus mentionnées explicitement dans cette section.

Si  $\{\mathbf{w}(1), \dots, \mathbf{w}(n)\}$  sont les vecteurs singuliers de la matrice de données associés aux valeurs singulières  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$  rangées par ordre décroissant, alors l'espace signal est engendré par la matrice orthonormée  $\mathbf{W}(r) = [\mathbf{w}(1), \dots, \mathbf{w}(r)]$ , de dimensions  $n \times r$  (les  $n - r$  dernières valeurs singulières étant toutes nulles). De même, pour tout  $p \in \{1 \dots n\}$  posons  $\mathbf{W}(p) \triangleq [\mathbf{w}(1), \dots, \mathbf{w}(p)]$  et

$$\boxed{\Phi(p) \triangleq \mathbf{W}_{\downarrow}(p)^{\dagger} \mathbf{W}_{\uparrow}(p)}. \quad (\text{IV.1})$$

Les pôles estimés sont définis comme les valeurs propres de  $\Phi(p)$ .

### IV.2.1 Sur-estimation de l'ordre du modèle

Si  $p \geq r$ , la proposition suivante montre que les  $K$  pôles originaux appartiennent à l'ensemble des valeurs propres de  $\Phi(r)$ .

**Proposition IV.2.1.** *Supposons que  $r \leq p < n$  et que  $\mathbf{W}_{\downarrow}(p)$  est de rang plein. Alors  $\forall k \in \{0, \dots, K-1\}$ ,  $z_k$  est une valeur propre d'ordre  $M_k$  de  $\Phi(p)$ .*

*Démonstration.* La décomposition canonique de Jordan de la matrice  $\Phi(r)$  a été donnée dans l'équation (I.19) :  $\Phi(r) = \mathbf{G} \mathbf{J} \mathbf{G}^{-1}$ . Soit  $\mathbf{G}_k$  la matrice de dimensions  $r \times M_k$  extraite de  $\mathbf{G}$  telle que  $\Phi(r) \mathbf{G}_k = \mathbf{G}_k \mathbf{J}_{M_k}(z_k)$  (où  $\mathbf{J}_{M_k}(z_k)$  est le bloc de Jordan de dimension  $M_k \times M_k$  associé au pôle  $z_k$ ). Considérons la matrice  $\overline{\mathbf{G}}_k \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{G}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$  de dimensions  $p \times M_k$ . Or  $\mathbf{W}(p) \overline{\mathbf{G}}_k = \mathbf{W}(r) \mathbf{G}_k$ . Par

conséquent,  $\mathbf{W}_\uparrow(p)\overline{\mathbf{G}}_k = \mathbf{W}_\uparrow(r)\mathbf{G}_k = \mathbf{W}_\downarrow(r)\Phi(r)\mathbf{G}_k = \mathbf{W}_\downarrow(r)\mathbf{G}_k\mathbf{J}_{M_k}(z_k) = \mathbf{W}_\downarrow(p)\overline{\mathbf{G}}_k\mathbf{J}_{M_k}(z_k)$ . Puisque  $\mathbf{W}_\downarrow(p)$  est de rang plein, en multipliant l'égalité précédente par  $\mathbf{W}_\downarrow(p)^\dagger$ , on obtient  $\Phi(p)\overline{\mathbf{G}}_k = \overline{\mathbf{G}}_k\mathbf{J}_{M_k}(z_k)$ .  $\square$

### IV.2.2 Sous-estimation de l'ordre du modèle

Si  $p < r$ , les valeurs propres de  $\Phi(p)$  ne correspondent pas aux pôles complexes dans le cas général. Plus précisément, soit  $\hat{z}$  une valeur propre de  $\Phi(p)$ . Dans cette section, il est démontré que  $\hat{z}$  approche l'une des valeurs propres de  $\Phi(r)$ , et qu'une borne d'erreur peut être facilement calculée. Tout d'abord, il faut définir le *conditionnement supérieur* de l'espace signal<sup>1</sup> :

$$\kappa_2 = \inf_{\Lambda \in \Lambda(\mathbb{C})} \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{V}^n \Lambda)}{\sigma_{\min}(\mathbf{V}_\downarrow^n \Lambda)} \quad (\text{IV.2})$$

où  $\sigma_{\max}(\cdot)$  désigne la plus grande valeur singulière d'une matrice,  $\sigma_{\min}(\cdot)$  désigne la plus petite,  $\mathbf{V}^n$  est la matrice de Pascal-Vandermonde introduite dans la section II.3, et  $\Lambda(\mathbb{C})$  est le groupe multiplicatif des matrices de la forme  $\text{diag}(\Lambda_0, \dots, \Lambda_{K-1})$ , où chaque bloc  $\Lambda_k$ , de dimension  $M_k \times M_k$ , est triangulaire supérieur, Toeplitz et inversible. Ce conditionnement caractérise le signal non bruité lui-même, et ne dépend pas de  $p$ . Il s'agit d'une constante inconnue pour notre problème, qu'il n'est pas utile de calculer. Elle apparaît dans le théorème suivant, dont la démonstration figure en annexe dans la section A.10, page 190.

**Théorème IV.2.2** (Borne d'erreur a priori<sup>2</sup>). *Pour tout  $\hat{z} \in \mathbb{C}$ , il existe une valeur propre  $z_k$  de  $\Phi(r)$  pour laquelle*

$$|z_k - \hat{z}| \leq \max \left( \Delta_k(\hat{z}), \Delta_k(\hat{z})^{\frac{1}{M_k}} \right) \quad (\text{IV.3})$$

où  $\Delta_k(\hat{z}) \triangleq M_k \kappa_2 \sigma_{\min}(\mathbf{W}_\uparrow(p) - \hat{z}\mathbf{W}_\downarrow(p))$ .

Le résultat présenté dans ce théorème est assez fort, car il est en fait valable pour tout  $\hat{z} \in \mathbb{C}$ ; il montre ainsi que pour tout nombre complexe  $\hat{z}$ , il existe un pôle complexe  $z_k$  dont la distance à ce nombre est majorée par la quantité définie dans l'équation (IV.3). Dans le cas particulier où  $z_k$  est un pôle simple, on obtient la majoration  $|z_k - \hat{z}| \leq \kappa_2 \sigma_{\min}(\mathbf{W}_\uparrow(p) - \hat{z}\mathbf{W}_\downarrow(p))$ .

Il se trouve que  $\sigma_{\min}(\mathbf{W}_\uparrow(p) - \hat{z}\mathbf{W}_\downarrow(p))$  peut être calculée sans connaître la valeur exacte de  $r$ . Le corollaire IV.2.3, qui est également démontré en annexe dans la section A.10 (page 190) et se déduit du théorème IV.2.2, a une certaine similitude avec le théorème de Bauer-Fike [Horn et Johnson, 1985, pp. 365], [Golub et Van Loan, 1996, pp. 321]. Il donne une borne d'erreur valide pour toutes les valeurs propres de  $\Phi(p)$ . A nouveau, cette borne peut être calculée sans connaître la valeur exacte de  $r$ . Elle fait apparaître la norme spectrale d'une matrice (ou norme 2), notée  $\|\cdot\|_2$ , définie comme  $\|\mathbf{M}\|_2 \triangleq \max_{\|\mathbf{u}\|_2=1} \|\mathbf{M}\mathbf{u}\|_2 = \sigma_{\max}(\mathbf{M})$ .

<sup>1</sup> Dans [Badeau *et al.*, 2004b],  $\kappa_2$  était défini comme le conditionnement supérieur de la *matrice de Pascal-Vandermonde*  $\mathbf{V}^n$ , égal à  $\frac{\sigma_{\max}(\mathbf{V}^n)}{\sigma_{\min}(\mathbf{V}_\uparrow^n)}$ . La nouvelle définition de  $\kappa_2$  dans l'équation (IV.2) conduit à de meilleures bornes d'erreur, en raison de la présence de la borne inférieure.

<sup>2</sup>En comparaison, la borne d'erreur a priori présentée dans [Badeau *et al.*, 2004b] était égale à

$$\frac{\sigma_{\max}(\mathbf{V}^n)}{\sigma_{\min}(\mathbf{V}_\downarrow^n)} \|\mathbf{W}_\uparrow(p)\hat{\mathbf{v}} - \hat{z}\mathbf{W}_\downarrow(p)\hat{\mathbf{v}}\|_2,$$

où  $\hat{\mathbf{v}}$  était un vecteur unitaire quelconque. Le conditionnement supérieur  $\kappa_2$  défini dans l'équation (IV.2) est inférieur à  $\frac{\sigma_{\max}(\mathbf{V}^n)}{\sigma_{\min}(\mathbf{V}_\uparrow^n)}$ . De plus,  $\sigma_{\min}(\mathbf{W}_\uparrow(p) - \hat{z}\mathbf{W}_\downarrow(p)) \leq \|\mathbf{W}_\uparrow(p)\hat{\mathbf{v}} - \hat{z}\mathbf{W}_\downarrow(p)\hat{\mathbf{v}}\|_2$  pour tout vecteur unitaire  $\hat{\mathbf{v}}$ . Ainsi la borne d'erreur a posteriori dans l'équation (IV.3) est inférieure à celle proposée dans [Badeau *et al.*, 2004b].

**Corollaire IV.2.3** (Borne d'erreur a posteriori<sup>3</sup>). *Pour chaque valeur propre  $\hat{z}$  de  $\Phi(p)$ , il existe une valeur propre  $z_k$  de  $\Phi(r)$  pour laquelle*

$$|z_k - \hat{z}| \leq \max \left( \Delta_k, \Delta_k^{\frac{1}{M_k}} \right) \quad (\text{IV.4})$$

où  $\Delta_k \triangleq M_k \kappa_2 \|\mathbf{E}(p)\|_2$  et

$$\mathbf{E}(p) = \mathbf{W}_\uparrow(p) - \mathbf{W}_\downarrow(p) \Phi(p). \quad (\text{IV.5})$$

Ce corollaire particularise le résultat du théorème IV.2.2 aux nombres complexes  $\hat{z}$  qui sont valeurs propres de  $\Phi(p)$ . Cette hypothèse permet d'obtenir une majoration qui ne dépend plus de  $\hat{z}$ . Dans le cas particulier où  $z_k$  est un pôle simple, on obtient  $|z_k - \hat{z}| \leq \kappa_2 \|\mathbf{E}(p)\|_2$ .

*Remarque.* Soit  $p < n - 1$ . Nous savons que si  $p = r$ ,  $\mathbf{E}(p) = 0$ . Réciproquement, si  $\mathbf{E}(p) = 0$ , alors les matrices  $\mathbf{W}_\downarrow(p)$  et  $\mathbf{W}_\uparrow(p)$  engendrent le même sous-espace, ce qui signifie que la propriété d'invariance rotationnelle est satisfaite à l'ordre  $p$ . Ainsi,  $p$  composantes peuvent être extraites du signal observé, et les pôles complexes correspondants peuvent être estimés à l'aide de l'algorithme ESPRIT. Puisque le signal ne contient pas plus de  $r$  composantes,  $p$  devrait normalement être inférieur ou égal à  $r$ . Le cas  $p < r$  peut survenir si les paramètres du signal satisfont certaines relations particulières. En pratique,  $r$  est toujours la plus grande valeur de  $p$  pour laquelle  $\mathbf{E}(p) = 0$ .

### IV.3 Sélection d'un ordre de modélisation approprié reposant sur l'erreur d'estimation

L'intérêt pratique du corollaire IV.2.3 est que  $\|\mathbf{E}(p)\|_2$  (qui sera désignée sous le terme de *borne d'erreur a posteriori*) peut être calculée pour tout  $p \in \{1, \dots, p_{\max}\}$ , où  $1 \leq p_{\max} < n - 1$ . Si  $p_{\max}$  se trouve être inférieur à  $r$ , la borne d'erreur a posteriori fournit un critère quantitatif pour sélectionner un ordre de modélisation approprié, tel que la borne d'erreur est faible. Si  $p_{\max}$  se trouve être supérieur à  $r$ , alors  $r$  est la plus grande valeur de  $p \in \{1 \dots p_{\max}\}$  pour laquelle la borne d'erreur a posteriori est nulle. Dans tous les cas, détecter les maxima de la fonction d'erreur inverse  $J : p \mapsto \frac{1}{\|\mathbf{E}(p)\|_2^2}$  dans l'intervalle  $\{1 \dots p_{\max}\}$  est une approche pertinente pour sélectionner l'ordre du modèle. En présence de bruit, une façon robuste de déterminer l'ordre de modélisation consiste à sélectionner la plus grande valeur de  $p$  pour laquelle la fonction  $J(p)$  est supérieure à un certain seuil, choisi de façon empirique (typiquement de l'ordre de 100). Des exemples d'une telle fonction sont représentés dans les simulations numériques (section IV.4). La proposition IV.3.1 montre que les valeurs de la fonction  $J$  sont dans l'intervalle  $[1, +\infty[$  (la démonstration figure en annexe dans la section A.10, page 190).

**Proposition IV.3.1.** *Pour tout  $p \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\|\mathbf{E}(p)\|_2 \leq 1$ .*

Ce critère mesure l'invariance rotationnelle de  $\mathbf{W}(p)$ , puisque par définition la propriété d'invariance rotationnelle est vérifiée exactement si  $\|\mathbf{E}(p)\|_2 = 0$ . L'inconvénient de la méthode ESTER est qu'une implémentation directe est coûteuse.

*Remarque.* A partir de cette section et jusqu'à la fin de ce document, toutes les complexités seront exprimées en MACs (une multiplication plus une accumulation).

<sup>3</sup>Cette borne d'erreur a posteriori est inférieure à celle proposée dans [Badeau *et al.*, 2004b], en raison de la valeur inférieure de  $\kappa_2$ .

Tout d'abord, les vecteurs singuliers  $\mathbf{w}(p)$  doivent être calculés pour tout  $p \in \{1 \dots p_{\max}\}$ , ce qui requiert  $O(N \log_2(N) p_{\max} + n p_{\max}^2)$  opérations, par le biais de l'algorithme d'itération orthogonale présenté dans la section V.2. Ensuite la matrice  $\mathbf{E}(p)$  doit être calculée pour tout  $p \in \{1, \dots, p_{\max}\}$ . Un tel calcul nécessiterait  $3np^2$  MACs pour chaque  $p$ , si bien que la complexité totale serait de  $n p_{\max}^3$  MACs<sup>4</sup>. Ce coût doit être comparé à celui des ITC illustrés dans la section IV.4. En particulier, les complexités des critères AIC, MDL [Wax et Kailath, 1985] et EDC [Zhao *et al.*, 1986a] est linéaire en  $p_{\max}$ . Cependant, contrairement à la méthode ESTER, ces ITC requièrent la SVD complète de la matrice de données, dont la complexité est  $O(N^3)$ . Par ailleurs, les ITC proposés dans [Zhang et Wong, 1993] pour traiter le cas d'un bruit additif coloré ont également une complexité égale à  $O(N^3)$ . Par conséquent, les complexités relatives de ESTER et des ITC dépendent de  $p_{\max}$ .

Pour rendre la méthode ESTER plus rapide, une implémentation efficace est proposée ici, résumée dans la table IV.1. Elle nécessite seulement  $6np + O(p^2)$  MACs pour chaque  $p$ , si bien que sa complexité totale est  $3np_{\max}^2 + O(p_{\max}^3)$  (hors calcul des vecteurs singuliers). En particulier, calculer les matrices  $\mathbf{E}(p)$  pour tout  $p \in \{1 \dots p_{\max}\}$  de cette façon n'est pas plus coûteux que de calculer directement  $\mathbf{E}(p_{\max})$ . Les sections IV.3.1 et IV.3.2 présentent des méthodes rapides pour calculer  $\Phi(p)$  et  $\mathbf{E}(p)$  récursivement.

### IV.3.1 Calcul récursif de $\Phi(p)$

Un calcul direct de  $\Phi(p)$  pour tout  $p \in \{1 \dots p_{\max}\}$  à partir de l'équation (IV.1) nécessiterait  $2np^2 + O(p^3)$  MACs pour chaque  $p$ , et la complexité totale serait égale à  $\frac{2}{3} n p_{\max}^3 + O(p_{\max}^4)$ . Cette section vise à calculer la matrice  $\Phi(p)$  de dimension  $p \times p$  récursivement, dans le but de réduire la complexité. L'équation (IV.1) se réécrit sous la forme

$$\Phi(p) = \Omega(p) \Psi(p) \quad (\text{IV.6})$$

où  $\Omega(p)$  et  $\Psi(p)$  sont des matrices de dimension  $p \times p$  :

$$\Omega(p) \triangleq (\mathbf{W}_{\downarrow}(p)^H \mathbf{W}_{\downarrow}(p))^{-1} \quad (\text{IV.7})$$

$$\Psi(p) \triangleq \mathbf{W}_{\downarrow}(p)^H \mathbf{W}_{\uparrow}(p). \quad (\text{IV.8})$$

La matrice  $\Omega(p)$  peut être calculée facilement. En effet, puisque la matrice  $\mathbf{W}(p)$  est orthonormée,  $\mathbf{W}(p)^H \mathbf{W}(p) = \mathbf{I}_p$ . En particulier, cette équation montre que  $\mathbf{W}_{\downarrow}(p)^H \mathbf{W}_{\downarrow}(p) = \mathbf{I}_p - \boldsymbol{\nu}(p) \boldsymbol{\nu}(p)^H$ , où  $\boldsymbol{\nu}(p)$  est le vecteur de dimension  $p$  tel que  $\boldsymbol{\nu}(p)^H$  est la dernière ligne de  $\mathbf{W}(p)$ . Enfin, le lemme d'inversion matricielle A.8.1 présenté en annexe (page 182) montre que

$$\boxed{\Omega(p) = \mathbf{I}_p + \frac{1}{1 - \|\boldsymbol{\nu}(p)\|^2} \boldsymbol{\nu}(p) \boldsymbol{\nu}(p)^H.} \quad (\text{IV.9})$$

De plus,  $\Psi(p)$  peut être mise à jour récursivement. En effet, l'équation (IV.8) montre que

$$\Psi(p) = \left[ \begin{array}{c|c} \Psi(p-1) & \boldsymbol{\psi}_r(p) \\ \hline \boldsymbol{\psi}_l(p)^H & \boldsymbol{\psi}_{lr}(p) \end{array} \right] \quad (\text{IV.10})$$

où  $\boldsymbol{\psi}_r(p) \triangleq \mathbf{W}_{\downarrow}(p-1)^H \mathbf{w}_{\uparrow}(p)$ ,  $\boldsymbol{\psi}_l(p) \triangleq \mathbf{W}_{\uparrow}(p-1)^H \mathbf{w}_{\downarrow}(p)$  et  $\boldsymbol{\psi}_{lr}(p) \triangleq \mathbf{w}_{\downarrow}(p)^H \mathbf{w}_{\uparrow}(p)$ . Le calcul de  $\Psi(p)$  à partir de  $\Psi(p-1)$  requiert seulement  $2np$  MACs.

Enfin,  $\Phi(p)$  peut être calculée à partir de  $\Psi(p)$ . En effet, en substituant l'équation (IV.9) dans l'équation (IV.6) on obtient

$$\boxed{\Phi(p) = \Psi(p) + \frac{1}{1 - \|\boldsymbol{\nu}(p)\|^2} \boldsymbol{\nu}(p) \boldsymbol{\varphi}(p)^H} \quad (\text{IV.11})$$

<sup>4</sup>En pratique  $p_{\max}$  est supposé être très inférieur à  $n$ .

où

$$\varphi(p) \triangleq \Psi(p)^H \nu(p). \quad (\text{IV.12})$$

Le calcul de  $\Phi(p)$  à partir de  $\Psi(p)$  requiert seulement  $p^2 + O(p)$  MACs, plus le calcul de  $\varphi(p)$ . Cette dernière opération nécessite normalement  $p^2$  MACs, mais le lemme IV.3.2 suggère une implémentation récursive, en seulement  $O(p)$  MACs.

**Lemme IV.3.2.** *Soit  $\mu(p)$  le nombre complexe tel que*

$$\nu(p) = \left[ \frac{\nu(p-1)}{\mu(p)} \right] \quad (\text{IV.13})$$

Alors  $\varphi(p)$  satisfait la récurrence

$$\varphi(p) = \left[ \frac{\varphi(p-1) + \mu(p) \psi_l(p)}{\psi_r(p)^H \nu(p-1) + \mu(p) \psi_{lr}(p)^*} \right] \quad (\text{IV.14})$$

*Démonstration.* L'assertion se démontre en substituant les équations (IV.10) et (IV.13) dans l'équation (IV.12).  $\square$

Enfin, le calcul récursif de  $\Phi(p)$  consiste à calculer  $\Psi(p)$  à partir de  $\Psi(p-1)$  en utilisant l'équation (IV.10), puis à calculer  $\varphi(p)$  à partir de  $\varphi(p-1)$  en utilisant l'équation (IV.14), puis à calculer  $\Phi(p)$  à partir de  $\Psi(p)$  en utilisant l'équation (IV.11). Cette méthode requiert  $2np + O(p^2)$  MACs à chaque itération. Par conséquent, son coût total est de  $np_{\max}^2 + O(p_{\max}^3)$  MACs.

### IV.3.2 Calcul récursif de $E(p)$

Supposons ici que tous les  $\Phi(p)$  ont été calculés. Un calcul direct de  $E(p)$  pour tout  $p \in \{1 \dots p_{\max}\}$  à partir de l'équation (IV.5) nécessiterait  $np^2$  MACs pour chaque  $p$ , et la complexité totale serait  $\frac{1}{3} np_{\max}^3$ . Cette section vise à calculer  $E(p)$  récursivement, dans le but de réduire la complexité.

En substituant l'équation (IV.11) dans l'équation (IV.5), on montre que

$$E(p) = \Xi(p) - \frac{1}{1 - \|\nu(p)\|^2} (\mathbf{W}_{\downarrow}(p) \nu(p)) \varphi(p)^H \quad (\text{IV.15})$$

où

$$\Xi(p) \triangleq \mathbf{W}_{\uparrow}(p) - \mathbf{W}_{\downarrow}(p) \Psi(p). \quad (\text{IV.16})$$

Le calcul de  $E(p)$  à partir de  $\Xi(p)$  nécessite  $2np$  MACs. Ensuite en substituant l'équation (IV.10) dans l'équation (IV.16), on obtient une récurrence pour la matrice  $\Xi(p)$  de dimensions  $(n-1) \times p$  :

$$\Xi(p) = \left[ \Xi(p-1) - \mathbf{w}_{\downarrow}(p) \psi_l(p)^H \mid \xi(p) \right] \quad (\text{IV.17})$$

où  $\xi(p) \triangleq \mathbf{w}_{\uparrow}(p) - \mathbf{W}_{\downarrow}(p-1) \psi_r(p) - \mathbf{w}_{\downarrow}(p) \psi_{lr}(p)$ . Le calcul de  $\Xi(p)$  à partir de  $\Xi(p-1)$  requiert  $2np$  MACs. Enfin, le calcul récursif de  $E(p)$  consiste à calculer  $\Xi(p)$  à partir de  $\Xi(p-1)$  avec l'équation (IV.17), puis à calculer  $E(p)$  à partir de  $\Xi(p)$  avec l'équation (IV.15). Cette méthode requiert  $4np$  MACs à chaque étape. Ainsi son coût global est de  $2np_{\max}^2$  MACs. Par conséquent, calculer les matrices  $\Phi(p)$  et  $E(p)$  pour tout  $p \in \{1 \dots p_{\max}\}$  n'est pas plus coûteux que de les calculer seulement pour  $p = p_{\max}$ . Dans les deux cas, la complexité totale est de  $3np_{\max}^2 + O(p_{\max}^3)$  MACs.

Le pseudo-code complet du calcul de  $E(p)$  pour tout  $p \in \{1 \dots p_{\max}\}$  est présenté dans la table IV.1. Le calcul des matrices  $\Psi(p)$  et  $\Phi(p)$  n'est même pas nécessaire.

TAB. IV.1 – Calcul récursif de  $\mathbf{E}(p)$ **Initialisation**Calculer  $\mathbf{w}(p)$  pour tout  $p = 1 \dots p_{\max}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{[]}$ ,  $\boldsymbol{\Xi}(0) = \mathbf{[]}$ Pour  $p = 1$  à  $p_{\max}$ 

|   |            |
|---|------------|
| <b>Mise à jour de la matrice auxiliaire <math>\boldsymbol{\Psi}(p)</math></b>   | <b>Cot</b> |
| $\boldsymbol{\psi}_r(p) = \mathbf{W}_\downarrow(p-1)^H \mathbf{w}_\uparrow(p)$  | $np$       |
| $\boldsymbol{\psi}_l(p) = \mathbf{W}_\uparrow(p-1)^H \mathbf{w}_\downarrow(p)$  | $np$       |
| $\psi_{lr}(p) = \mathbf{w}_\downarrow(p)^H \mathbf{w}_\uparrow(p)$  | $n$        |
| <b>Mise à jour de la matrice auxiliaire <math>\boldsymbol{\Xi}(p)</math></b>  |            |
| $\boldsymbol{\xi}(p) = \mathbf{w}_\uparrow(p) - \mathbf{W}_\downarrow(p-1) \boldsymbol{\psi}_r(p) - \mathbf{w}_\downarrow(p) \psi_{lr}(p)$  | $np$       |
| $\boldsymbol{\Xi}(p) = [ \boldsymbol{\Xi}(p-1) - \mathbf{w}_\downarrow(p) \boldsymbol{\psi}_l(p)^H \mid \boldsymbol{\xi}(p) ]$  | $np$       |
| <b>Calcul de <math>\mathbf{E}(p)</math> à partir de <math>\boldsymbol{\Xi}(p)</math></b>  |            |
| $\boldsymbol{\varphi}(p) = \left[ \frac{\boldsymbol{\varphi}(p-1) + \mu(p) \boldsymbol{\psi}_l(p)}{\boldsymbol{\psi}_r(p)^H \boldsymbol{\nu}(p-1) + \mu(p) \psi_{lr}(p)^*} \right]$ | $2p$       |
| $\mathbf{E}(p) = \boldsymbol{\Xi}(p) - \frac{1}{1 - \ \boldsymbol{\nu}(p)\ ^2} (\mathbf{W}_\downarrow(p) \boldsymbol{\nu}(p)) \boldsymbol{\varphi}(p)^H$                            | $2np$      |

## IV.4 Simulations numériques

La section IV.4.1 illustre la pertinence des bornes d'erreur dans le cas de pôles simples (modèle ESM). Ensuite la méthode ESTER est appliquée à des signaux synthétiques (sections IV.4.2 et IV.4.3) et à un signal de musique (section IV.4.4).

### IV.4.1 Pertinence des bornes d'erreur a priori et a posteriori

Dans cette section, la pertinence des bornes d'erreur a priori et a posteriori est illustrée. Le signal de test est une somme de  $r = 20$  exponentielles complexes non amorties de même amplitude  $\alpha_k = 1$ , dont les fréquences sont distribuées aléatoirement dans l'intervalle  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Le conditionnement supérieur de l'espace signal satisfait  $1 \leq \kappa_2 \leq 1.05$ . Les vecteurs singuliers formant les matrices  $\mathbf{W}(p)$  ont été obtenus en calculant la SVD d'une matrice de Hankel comprenant  $n = 512$  lignes et  $l = 512$  colonnes, qui contient les  $n + l - 1 = 1023$  échantillons du signal complet. Pour tout  $p \in \{1 \dots p_{\max} = r\}$ , les valeurs propres  $\{\widehat{z}_{(p,m)}\}_{m \in \{1 \dots p\}}$  de la matrice  $\boldsymbol{\Phi}(p)$  ont été calculées.

Dans la figure IV.1-a, la ligne continue représente les erreurs sur les valeurs propres obtenues pour  $p = 7 < r$ , c'est-à-dire

$$\left\{ \min_{k \in \{1 \dots r\}} |\widehat{z}_{(7,m)} - z_k| \right\}_{m \in \{1 \dots 7\}}$$

triées par ordre croissant. La ligne pointillée représente les bornes d'erreur a priori correspondantes, c'est-à-dire

$$\left\{ \kappa_2 \sigma_{\min} (\mathbf{W}_\uparrow(7) - \widehat{z}_{(7,m)} \mathbf{W}_\downarrow(7)) \right\}_{m \in \{1 \dots 7\}}$$

La ligne pointillée est au-dessus de la ligne continue (comme prévu), et les variations de la ligne pointillée suivent celles de la ligne continue, ce qui suggère que la borne d'erreur a priori est pertinente.

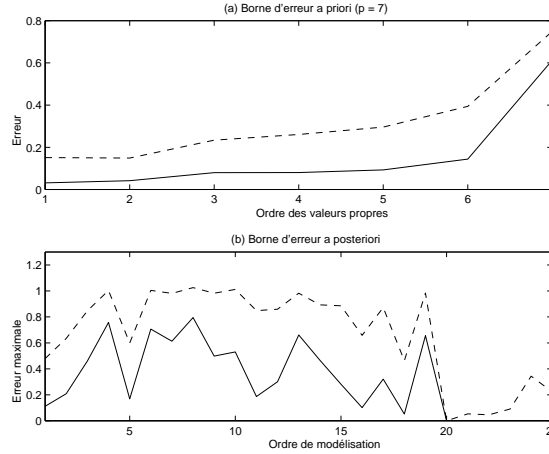


FIG. IV.1 – Bornes d'erreur a priori et a posteriori

- (a) Borne d'erreur a priori *vs.* erreur sur les valeurs propres à l'ordre  $p = 7$
- (b) Borne d'erreur a posteriori *vs.* erreur maximale sur les valeurs propres comme fonction de  $p$

Dans la figure IV.1-b, la ligne continue représente l'erreur maximale sur les valeurs propres obtenue pour tous les ordres de modélisation, c'est-à-dire

$$\max_{m \in \{1 \dots p\}} \min_{k \in \{1 \dots r\}} |\hat{z}_{(p,m)} - z_k|$$

comme fonction de  $p$ . La ligne pointillée représente les bornes d'erreur correspondantes, c'est-à-dire  $\kappa_2 \|\mathbf{E}(p)\|_2$  comme fonction de  $p$ . Comme pour la borne d'erreur a priori, la ligne pointillée est au-dessus de la ligne continue (comme prévu), et que les variations de la ligne pointillée suivent celles de la ligne continue. Cela suggère que la borne d'erreur a posteriori est un critère pertinent pour caractériser l'erreur d'estimation des valeurs propres. Ci-dessous, ce critère est utilisé pour déterminer l'ordre de modélisation, comme cela a été proposé dans la section IV.3.

#### IV.4.2 Sélection de l'ordre du modèle pour un signal synthétique

Le signal de test est une somme de  $r = 5$  exponentielles complexes non amorties et d'un bruit complexe coloré. Pour chaque  $k \in \{1, \dots, r\}$ , la  $k^{\text{ème}}$  exponentielle est caractérisée par son amplitude  $\alpha_k$  et son pôle  $z_k = e^{i2\pi f_k}$ , où  $f_k \in \mathbb{R}$  est sa fréquence. Les valeurs des paramètres sont données dans la table IV.2. Le bruit additif a été obtenu en appliquant le filtre  $H(z) = \frac{1}{1-0.95z^{-1}}$  à un bruit

TAB. IV.2 – Paramètres du signal synthétique

| Fréquence | 0.1 Hz | 0.102 Hz | 0.4 Hz | 0.7 Hz | 0.9 Hz |
|-----------|--------|----------|--------|--------|--------|
| Amplitude | 100    | 100      | 10     | 50     | 100    |

blanc gaussien complexe, dont la variance a été choisie de façon à ce que le RSB soit de 40 dB. Le périodogramme du signal de test ainsi obtenu est représenté dans la figure IV.2-a. Il a été calculé à partir

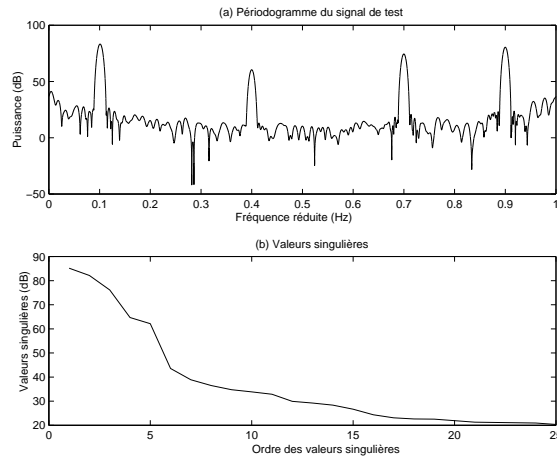


FIG. IV.2 – Périodogramme et valeurs singulières du signal synthétique

- (a) Périodogramme du signal synthétique en dB  
 (b) Valeurs singulières du signal synthétique triées par ordre décroissant

d'un signal de longueur 255, multiplié par une fenêtre de Blackman, choisie pour sa forte réjection des lobes secondaires (-57 dB), et complété par des zéros de façon à obtenir 65536 points dans le domaine fréquentiel. En particulier, les deux exponentielles complexes de plus basses fréquences ne sont pas résolues par le périodogramme<sup>5</sup>.

La méthode ESTER est comparée à plusieurs autres méthodes de sélection de l'ordre de modélisation, parmi lesquelles trois ITC : les critères AIC [Wax et Kailath, 1985], MDL [Wax et Kailath, 1985], et EDC [Zhao *et al.*, 1986a] qui est une généralisation robuste de AIC et MDL (*cf.* section I.5.1). Pour le critère EDC, nous avons choisi  $C(l) = \sqrt{l \ln(\ln(l))}$ , pour laquelle nous avons obtenu les meilleurs résultats. Les valeurs singulières ont été obtenues en calculant la SVD d'une matrice de Hankel comprenant  $n = 128$  lignes et  $l = 128$  colonnes, qui contient les  $n + l - 1 = 255$  échantillons du signal complet. La figure IV.2-b représente les  $p_{\max} = 25$  plus grandes valeurs singulières. Les valeurs singulières ne présentent pas de décroissance significative au delà de  $p = 5$ .

La figure IV.3-a représente les critères AIC (ligne continue), MDL (tirets) et EDC (ligne pointillée), pour  $p \in \{1 \dots p_{\max}\}$ . Aucun d'entre eux n'atteint de minimum pour  $p = r = 5$ . Cet échec pourrait être expliqué par la présence du bruit environnant, dont la densité spectrale de puissance n'est pas uniforme, contrairement à l'hypothèse de bruit blanc additif sur laquelle ces estimateurs reposent fondamentalement. Comme on s'y attendait, le critère EDC est plus robuste que les critères AIC et MDL, mais son minimum est obtenu en  $p = 8$ . La figure IV.3-b représente le critère proposé dans [Liavas *et al.*, 1999] pour détecter la cassure dans la décroissance des valeurs propres. On peut remarquer que ce critère sélectionne la bonne valeur  $p = r = 5$ , mais la valeur  $p = 3$  est presque autant accentuée. La figure IV.3-c représente les nouveaux ITC proposés dans [Zhang et Wong, 1993] pour traiter le cas d'un bruit additif coloré<sup>6</sup>. Les meilleurs résultats ont été obtenus avec le critère  $C_2$ , qui atteint un minimum en  $p = 6 \simeq r$ .

Enfin, la figure IV.3-d représente la fonction d'erreur inverse  $J$  for  $p \in \{1, \dots, p_{\max}\}$ . Le maximum

<sup>5</sup>En fait elles ne sont pas résolues non plus si on utilise une fenêtre rectangulaire, dont la réjection est plus faible, mais dont le lobe principal est plus étroit que celui de la fenêtre de Blackman.

<sup>6</sup>Ces nouveaux critères sont nommés  $C_1$  (ligne continue),  $C_2$  (tirets),  $C_{m1}$  (ligne pointillée) et  $C_{m2}$  (cercles). La valeur commune des paramètres  $M_1$  et  $M_2$  définis dans [Zhang et Wong, 1993] a été fixée à  $\frac{\pi}{2} - 1$ .



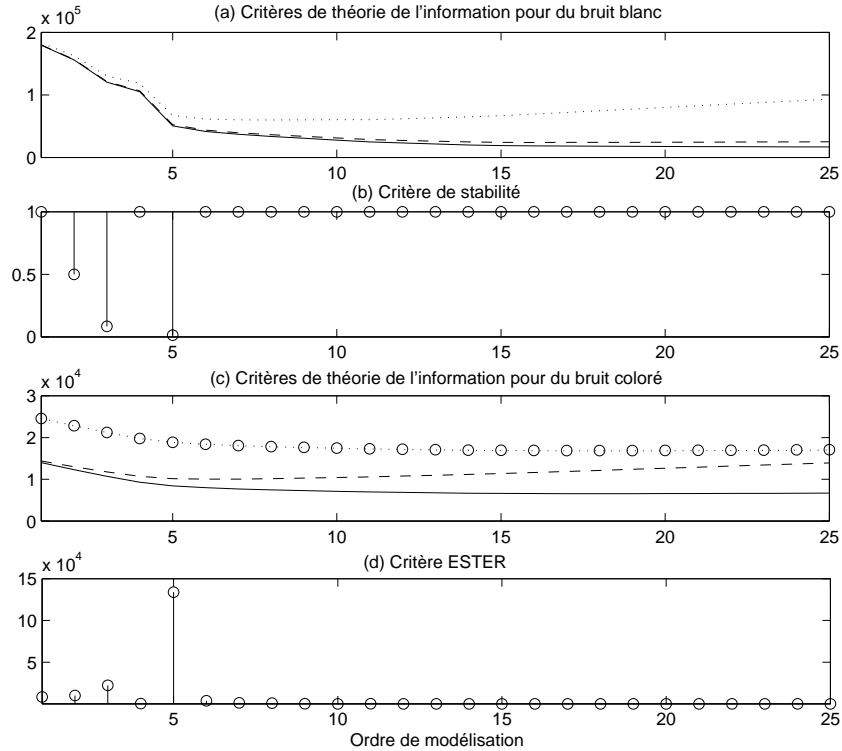


FIG. IV.3 – Sélection de l'ordre du modèle pour le signal synthétique

- (a) Critères AIC, MDL et EDC
- (b) Critère de stabilité
- (c) Critères  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_{m1}$  et  $C_{m2}$
- (d) Critère ESTER

global est atteint en  $p = r = 5$ , malgré le bruit environnant, qui n'était pas inclus dans le modèle.

### IV.4.3 Comparaison statistique des performances

Dans cette section, la méthode ESTER et les méthodes de sélection de l'ordre de modélisation mentionnées ci-dessus sont appliquées à divers signaux synthétiques. Ces signaux sont composés d'une somme de sinusoides réelles non amorties et d'un bruit coloré. Le nombre de sinusoides est uniformément distribué entre 1 et 10, si bien que l'ordre du modèle  $r$  appartient à l'intervalle  $\{2 \dots 20\}$ . Leurs amplitudes, phases et fréquences sont distribuées aléatoirement dans les intervalles  $[1, 10]$ ,  $]-\pi, \pi]$  et  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  respectivement. Le bruit additif est obtenu en filtrant un bruit blanc gaussien par le filtre passe-haut  $1 - 0.5z^{-1}$  (dont la réjection est inférieure à 10 dB).

Comme nous l'avons proposé dans la section IV.3, la robustesse de la méthode ESTER est améliorée en sélectionnant la plus grande valeur de  $p$  pour laquelle le critère  $J(p)$  est supérieur à un seuil (ici égal à un dixième du maximum global de  $J(p)$ ). Les tables IV.3 et IV.4 présentent les taux d'estimations exactes de l'ordre  $r$ , moyennés sur 10000 réalisations indépendantes, pour diverses valeurs de  $N$  et du RSB (les autres paramètres d'analyse sont  $n = \lfloor N/2 \rfloor$  et  $p_{\max} = 22$ ). Dans la table IV.3, le RSB est fixé à 20 dB, et l'expérience est réalisée pour  $N = 125$ ,  $N = 250$  et  $N = 500$ . Dans la table IV.4,  $N$  est fixé à 250, et l'expérience est réalisée pour des SNR de 10 dB, 20 dB et 30 dB. Les pourcentages obtenus ont été arrondis vers l'entier le plus proche, car le nombre de réalisations (10000) garantit un

TAB. IV.3 – Comparaison des performances pour diverses valeurs de  $N$ 

| $N$                  | 125  | 250  | 500  |
|----------------------|------|------|------|
| AIC                  | 8 %  | 2 %  | 0 %  |
| MDL                  | 48 % | 61 % | 70 % |
| EDC                  | 38 % | 58 % | 77 % |
| Critère de stabilité | 47 % | 63 % | 76 % |
| C2                   | 35 % | 44 % | 44 % |
| ESTER                | 48 % | 63 % | 76 % |

TAB. IV.4 – Comparaison des performances pour divers RSB

| RSB                  | 10 dB | 20 dB | 30 dB |
|----------------------|-------|-------|-------|
| AIC                  | 3 %   | 2 %   | 2 %   |
| MDL                  | 45 %  | 61 %  | 65 %  |
| EDC                  | 18 %  | 58 %  | 77 %  |
| Critère de stabilité | 28 %  | 63 %  | 75 %  |
| C2                   | 13 %  | 44 %  | 61 %  |
| ESTER                | 36 %  | 63 %  | 76 %  |

intervalle de confiance de  $\pm 1\%$  autour du taux estimé, pour un taux de confiance de 95%.

On peut remarquer que le critère AIC n'est pas suffisamment robuste pour traiter ces données synthétiques. Par ailleurs, les taux obtenus pour le critère  $C_2$  (conçu pour traiter le cas d'un bruit additif coloré [Zhang et Wong, 1993]) sont toujours inférieurs à ceux de toutes les autres méthodes. Le critère MDL semble plus robuste que ESTER à des RSB faibles. Cependant, ESTER s'avère plus performant pour des valeurs élevées de  $N$  ou du RSB. Comparé au critère EDC, ESTER présente des performances similaires pour des valeurs élevées de  $N$  ou du RSB, mais s'avère plus robuste à de faibles valeurs de  $N$  ou du RSB. Enfin, ESTER atteint des performances voisines de celles du critère de stabilité [Liavas *et al.*, 1999] pour toutes les valeurs de  $N$ . Il est néanmoins plus robuste à de faibles RSB. Ainsi, bien que la méthode ESTER repose sur un modèle de signal non bruité, ses performances ne s'effondrent pas pour de faibles RSB.

#### IV.4.4 Sélection de l'ordre du modèle pour un signal de musique

Cette section illustre l'application de la méthode ESTER à un signal de musique. L'étude porte sur une note de piano, le do de la 5<sup>ème</sup> octave, échantillonné à 11025 Hz, à partir duquel un segment de 255 échantillons (23 ms) a été extrait. Les signaux audio nécessitent souvent un pré-traitement avant de pouvoir appliquer l'algorithme ESPRIT. Par exemple, les signaux contenant un nombre élevé de sinusoïdes (typiquement les sons graves) peuvent être d'abord décomposés en plusieurs sous-bandes (par filtrage et décimation, comme cela est proposé dans [Laroche, 1993]). Dans cet exemple, ce pré-traitement n'est pas utilisé, puisque la note de piano choisie a peu de composantes sinusoïdales. Par ailleurs, la puissance des signaux audio décroît lorsque la fréquence augmente. Nous avons ainsi utilisé un filtre de pré-accentuation obtenu par prédiction linéaire à l'ordre 7 pour compenser cette décroissance.

Le périodogramme du signal de piano filtré est affiché dans la figure IV.4-a. Dans cette figure, seize pics spectraux émergent clairement du niveau de bruit environnant. Les  $p_{\max} = 40$  plus grandes valeurs

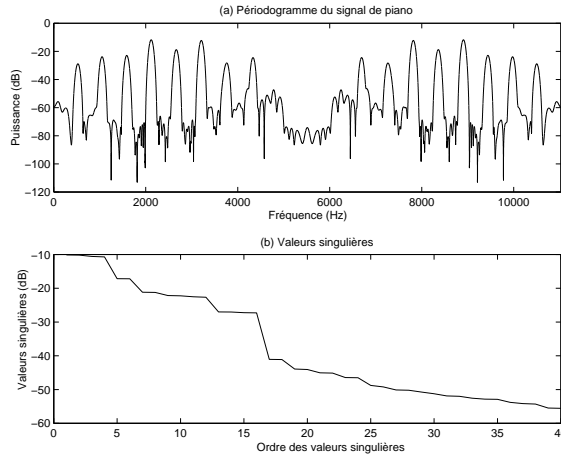


FIG. IV.4 – Périodogramme et valeurs singulières du signal de piano

- (a) Périodogramme du signal de piano en dB  
 (b) Valeurs singulières du signal de piano triées par ordre décroissant

singulières de la matrice de données<sup>7</sup> sont représentées dans la figure IV.4-b. Ces valeurs singulières s'effondrent de façon significative au delà de  $p = 16$ , ce qui suggère un ordre de modélisation égal à 16.

La figure IV.5-a représente les critères AIC (ligne continue), MDL (tirets) et EDC (ligne pointillée). Seul EDC atteint un minimum en  $p = 16$ . Cependant ce minimum n'est pas beaucoup plus petit que les valeurs voisines. La figure IV.5-b représente le critère de stabilité proposé dans [Liavas *et al.*, 1999]. Contrairement aux ITC mentionnés ci-dessus, ce critère sélectionne ici la bonne valeur  $p = 16$ . La figure IV.5-c représente les critères ITC proposés dans [Zhang et Wong, 1993], avec les mêmes paramètres que dans la section IV.4.2. Aucun d'entre eux n'atteint de minimum en  $p = 16$ . La figure IV.5-d représente la fonction d'erreur inverse  $J$  pour tout  $p \in \{1, \dots, p_{\max}\}$ . Le maximum global est atteint en  $p = 16$ . De plus, les bornes d'erreur obtenues pour des valeurs inférieures de  $p$  sont pertinentes. En effet, des valeurs élevées sont atteintes en  $p = 4, 6, 12$ , ce qui correspond en fait à des petits sauts dans la décroissance des valeurs singulières (représentées dans la figure IV.4-b). Par conséquent, la méthode ESTER donne l'ordre de modélisation attendu, et de plus les bornes d'erreur peuvent être utilisées pour quantifier l'adéquation d'un éventuel ordre de modélisation inférieur. En particulier, les ordres impairs ne sont pas adaptés au signal. En effet, puisque ce signal est à valeurs réelles et centré, son spectre est à symétrie hermitienne sans composante constante, ce qui sous-tend un ordre de modélisation pair.

## IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit la perturbation de l'estimation du modèle PACE induite par un ordre de modélisation erroné, en l'absence de bruit. Si l'ordre du modèle est sur-estimé, les pôles originaux se trouvent parmi les pôles estimés. Inversement, si l'ordre est sous-estimé, les pôles estimés peuvent être vus comme des approximations de certains des pôles originaux. Dans ce dernier cas, nous avons déterminé une *borne d'erreur a posteriori*, qui peut être calculée sans connaître l'ordre exact du modèle. A partir de cette observation, nous avons introduit la méthode ESTER, qui sélectionne un

<sup>7</sup>Les valeurs singulières ont été obtenues en calculant la SVD d'une matrice de Hankel contenant  $n = 128$  lignes et  $l = 128$  colonnes, comme dans la section IV.4.2.

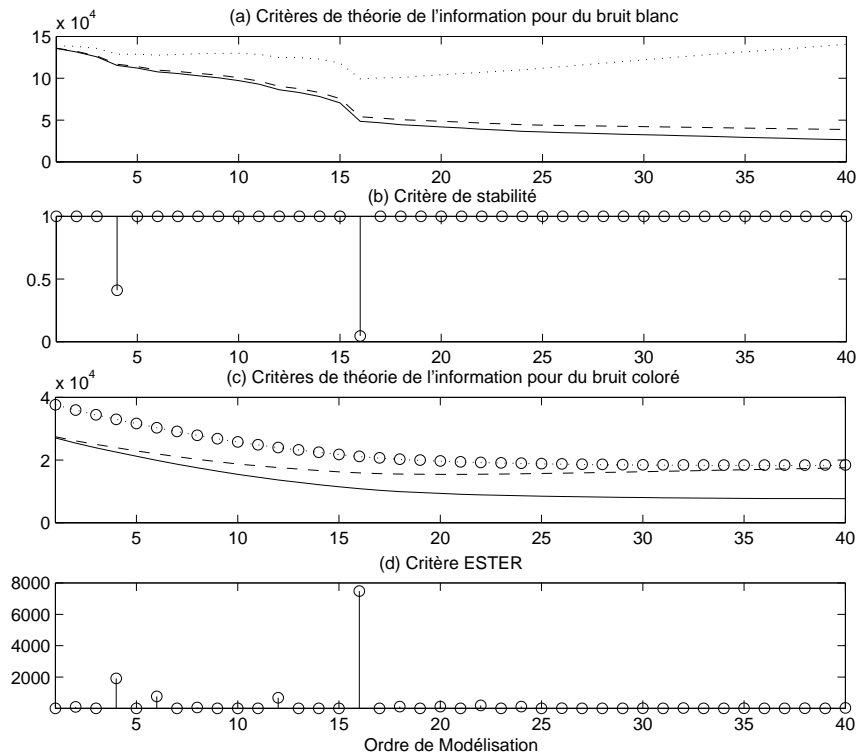


FIG. IV.5 – Sélection de l'ordre du modèle pour le signal de piano

- (a) Critères AIC, MDL et EDC
- (b) Critère de stabilité
- (c) Critères  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_{m1}$  et  $C_{m2}$
- (d) Critère ESTER

ordre de modélisation approprié. La détermination de l'ordre de modélisation est une étape essentielle du processus d'estimation, car elle conditionne toute la suite de l'analyse à haute résolution du signal. Puisque la méthode initiale était assez coûteuse, nous avons proposé un algorithme rapide pour calculer récursivement les bornes d'erreur a posteriori. Ensuite, nous avons montré la pertinence de critère en tant que borne d'erreur, et les performances de la méthode ESTER ont été illustrées sur un signal synthétique et sur un signal de piano. Nous avons ainsi observé que cette méthode est plus robuste que les *Critères de Théorie de l'Information* (ITC). De plus, les bornes d'erreur peuvent être utilisées pour quantifier l'adéquation d'un éventuel ordre de modélisation inférieur, ce qui offre des perspectives intéressantes en terme de codage.



## Chapitre V

# Optimisation de l'algorithme d'estimation

### Résumé

L'inconvénient principal de la méthode d'estimation basée sur l'algorithme ESPRIT généralisé (présentée dans le chapitre II) est sa lenteur. Le présent chapitre vise à optimiser les calculs afin de réduire sa complexité. Toutes les étapes sont ainsi optimisées, à commencer par l'estimation de l'espace signal, qui constitue l'étape la plus coûteuse, grâce à l'algorithme d'itération orthogonale (optimisé à l'aide de produits de convolution rapides). Nous proposons également des méthodes originales de calcul de la matrice spectrale et d'estimation des amplitudes. Ce chapitre constitue aussi une introduction aux algorithmes rapides de poursuite des paramètres présentés dans la deuxième partie.

## V.1 Introduction

Une optimisation des calculs intervenant dans l'algorithme d'estimation introduit dans les sections II.5 et II.6 est développée dans ce chapitre. Pour cela, il convient dans un premier temps d'analyser en détail le coût de cette méthode d'estimation. Rappelons qu'elle comprend quatre étapes :

- estimation d'une base de l'espace signal  $\mathbf{W}(t)$ ,
- calcul de la matrice spectrale  $\mathbf{\Phi}(t)$ ,
- calcul des valeurs propres de  $\mathbf{\Phi}(t)$ ,
- estimation des amplitudes complexes  $\alpha(t)$  par la méthode des moindres carrés ordinaires (dans tout ce chapitre, le bruit additif est supposé blanc ; nous ne nous intéresserons plus à l'estimation de sa variance).

*Remarque.* Comme nous l'avons mentionné dans la section IV.3, dans ce document toutes les complexités sont exprimées en MACs (une multiplication plus une accumulation), et sont des fonctions des paramètres  $n$ ,  $l$  et  $r$ . Dans la pratique, les dimensions de la matrice de données sont choisies de façon à ce que  $r \ll \min(n, l)$ .

Tout d'abord, l'estimation de l'espace signal peut être faite de deux manières différentes : via la SVD de la matrice de données  $\mathbf{X}(t)$ , ou via l'EVD de la matrice de covariance empirique  $\mathbf{C}_{xx}(t)$ <sup>1</sup>. Cette dernière solution comprend deux étapes :

- le calcul de  $\mathbf{C}_{xx}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t)^H$  requiert  $ln^2$  MACs ;
- ensuite, la diagonalisation de  $\mathbf{C}_{xx}(t)$ , via l'*algorithme QR symétrique* [Golub et Van Loan, 1996, pp. 421], est de complexité  $O(n^3)$ .

Si seul  $\mathbf{W}(t)$  est requis (*i.e.* l'espace singulier gauche), le coût de la SVD de  $\mathbf{X}(t)$  est du même ordre de grandeur, via l'algorithme Golub-Reinsch [Golub et Van Loan, 1996, pp. 253–254]. Dans la suite ne sera retenue que la méthode reposant sur l'EVD de  $\mathbf{C}_{xx}(t)$  qui, comme nous le verrons, offre des possibilités de simplification intéressantes. L'étape suivante est le calcul de la matrice spectrale  $\mathbf{\Phi}(t)$  par la méthode des moindres carrés ou des moindres carrés totaux (*cf.* section II.5.3), dont la complexité est  $O(nr^2)$ . Ensuite, le calcul des valeurs propres de  $\mathbf{\Phi}(t)$  requiert  $O(r^3)$  MACs, via l'*algorithme QR* [Golub et Van Loan, 1996, pp. 359]. Enfin, le calcul des amplitudes complexes  $\hat{\alpha}(t) = \mathbf{V}^{N\dagger} \mathbf{x}(t)$  est de complexité  $O(Nr^2)$ .

Il apparaît donc que l'étape limitante est l'estimation de l'espace signal, sur laquelle l'effort d'optimisation doit porter prioritairement (section V.2). Les deux idées exploitées dans cette section ont été originellement proposées par R. Boyer [Boyer *et al.*, 2002]. L'optimisation des autres étapes sera ensuite abordée dans la section V.3. Enfin, un bilan des diverses optimisations apportées à l'algorithme sera dressé dans la section V.4.

## V.2 Estimation de l'espace signal

Tout d'abord, la diagonalisation complète de la matrice  $\mathbf{C}_{xx}(t)$  entraîne des calculs superflus, puisque en réalité seuls les  $r$  principaux vecteurs propres sont requis. Il est préférable d'utiliser l'algorithme d'*itération orthogonale* présenté ci-dessous, qui ne calcule justement que les  $r$  principaux vecteurs propres.

---

<sup>1</sup>Il est également possible de calculer l'EVD de la matrice de données, dans le cas particulier où celle-ci, en plus d'avoir une structure Hankel, est carrée et réelle, comme cela a été fait dans [Badeau *et al.*, 2002] (cet article est reproduit en annexe dans le chapitre C).

### V.2.1 Algorithme d'itération orthogonale

L'algorithme d'itération orthogonale [Golub et Van Loan, 1996] est une méthode itérative qui est initialisée avec une matrice orthonormée  $\mathbf{W}(t, 0)$  de dimension  $n \times r$ , tirée aléatoirement. Théoriquement, cette matrice doit vérifier certaines conditions pour que l'algorithme converge, mais dans la pratique, ces conditions sont vérifiées presque sûrement (*i.e.* avec probabilité 1). A chaque itération, l'algorithme calcule une matrice de covariance «compressée», de dimension  $n \times r$  :

$$\mathbf{C}_{xy}(t, i) \triangleq \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{W}(t, i - 1).$$

Cette matrice est ensuite orthonormalisée à l'aide d'une factorisation *orthogonale-triangulaire* (QR) :

$$\mathbf{W}(t, i) \mathbf{R}(t, i) = \mathbf{C}_{xy}(t, i) \quad (\text{V.1})$$

où  $\mathbf{W}(t, i)$  est une matrice orthonormée de même dimension  $n \times r$ , et  $\mathbf{R}(t, i)$  est une matrice carrée de dimension  $r \times r$ , triangulaire supérieure. L'algorithme d'itération orthogonale est résumé ci-dessous :

|   |                                 |
|---|---------------------------------|
| Tirage aléatoire de $\mathbf{W}(t, 0)$                            |                                 |
| Itération sur $i \geq 1$ jusqu'à convergence                      |                                 |
| $\mathbf{C}_{xy}(t, i) = \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{W}(t, i - 1)$ | produit matriciel, $n^2 r$ MACs |
| $\mathbf{W}(t, i) \mathbf{R}(t, i) = \mathbf{C}_{xy}(t, i)$       | factorisation QR, $nr^2$ MACs   |
| Fin itération   |                                 |

Il est démontré dans [Golub et Van Loan, 1996, pp. 410–411] que si les  $r$  plus grandes valeurs propres de  $\mathbf{C}_{xx}(t)$  sont strictement supérieures aux  $n - r$  autres valeurs propres, la matrice  $\mathbf{W}(t, i)$  converge vers  $\mathbf{W}(t)$ , et la vitesse de convergence est exponentielle :  $\left| \frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_r} \right|^i$  quand  $i \rightarrow +\infty$ . Nous écrivons ce résultat sous la forme

$$\mathbf{W}(t, \infty) = \mathbf{W}(t). \quad (\text{V.2})$$

De même,  $\mathbf{R}(t, i)$  converge vers une matrice diagonale contenant les  $r$  valeurs propres principales de  $\mathbf{C}_{xx}(t)$ .

Le coût de la factorisation QR dépend du procédé utilisé. La technique la plus rapide est la méthode de *Gram-Schmidt modifiée* [Golub et Van Loan, 1996, pp. 231–232], dont la complexité est  $nr^2$ . Ainsi, la complexité globale de l'algorithme est  $O(n^2 r)$ ; il est donc plus rapide que l'*algorithme QR symétrique*, qui calcule tous les vecteurs propres en  $O(n^3)$  MACs. Cependant, il nécessite quand même le calcul préalable de  $\mathbf{C}_{xx}(t)$ , qui requiert  $ln^2$  MACs.

Pour éviter ce calcul superflu, posons

$$\mathbf{Y}(t, i) \triangleq \mathbf{W}(t, i - 1)^H \mathbf{X}(t). \quad (\text{V.3})$$

Alors on vérifie que

$$\mathbf{C}_{xy}(t, i) = \mathbf{X}(t) \mathbf{Y}(t, i)^H. \quad (\text{V.4})$$

On obtient ainsi l'algorithme suivant :

|   |                               |
|---|-------------------------------|
| Tirage aléatoire de $\mathbf{W}(t, 0)$                      |                               |
| Itération sur $i \geq 1$ jusqu'à convergence                |                               |
| $\mathbf{Y}(t, i) = \mathbf{W}(t, i - 1)^H \mathbf{X}(t)$   | produit matriciel, $lnr$ MACs |
| $\mathbf{C}_{xy}(t, i) = \mathbf{X}(t) \mathbf{Y}(t, i)^H$  | produit matriciel, $lnr$ MACs |
| $\mathbf{W}(t, i) \mathbf{R}(t, i) = \mathbf{C}_{xy}(t, i)$ | factorisation QR, $nr^2$ MACs |
| Fin itération   |                               |



La complexité globale de l'algorithme d'estimation des paramètres est alors réduite à  $O(lnr)$  (au lieu de  $O(N^3)$ ), mais l'étape limitante reste le calcul de l'espace signal. Il convient donc de pousser plus loin les efforts d'optimisation.

## V.2.2 Produit matriciel rapide

Cette section vise à réduire la complexité des produits (V.3) et (V.4). On considère un signal à temps discret  $v(t)$ , nul hors de l'intervalle  $\{0, \dots, l-1\}$ , et le vecteur  $\mathbf{v} = [v(l-1), v(l-2), \dots, v(0)]^T$  de dimension  $l$ . De même, on considère le signal à temps discret  $\tilde{x}$ , nul hors de l'intervalle  $\{t-l+1, \dots, t+n-1\}$ , et dont les échantillons sur cet intervalle sont ceux de  $x$ . De par la structure Hankel de la matrice  $\mathbf{X}(t)$ , il apparaît très clairement que le vecteur  $\mathbf{X}(t)\mathbf{v}$  contient les échantillons aux instants  $\{t, \dots, t+n-1\}$  du produit de convolution des signaux  $\tilde{x}$  et  $v$  :

$$\begin{bmatrix} x(t-l+1) & \dots & x(t-1) & x(t) \\ x(t-l+2) & \dots & x(t) & x(t+1) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x(t-l+n) & \dots & x(t+n-2) & x(t+n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(l-1) \\ v(l-2) \\ \vdots \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\tilde{x} * v)(t) \\ (\tilde{x} * v)(t+1) \\ \vdots \\ (\tilde{x} * v)(t+n-1) \end{bmatrix}$$

Or il est connu qu'un produit de convolution se calcule de manière rapide par le biais de l'algorithme FFT (on peut consulter par exemple [Williams et Madisetti, 1999] pour référence). Plus précisément, soit  $N'$  la puissance de 2 immédiatement supérieure à  $N = l + n - 1$ . Les  $n$  coefficients du vecteur  $\mathbf{X}(t)\mathbf{v}$  sont également les  $n$  premiers échantillons du produit de convolution *circulaire* entre les signaux

$$\bar{x} = \{x(t), x(t+1), \dots, x(t+n-1), 0, \dots, 0, x(t-l+1), x(t-l+2), \dots, x(t-1)\}$$

et  $\bar{v} = \{v(0), v(1), \dots, v(l-1), 0, \dots, 0\}$ , de même longueur finie  $N'$ .

Ce produit de convolution circulaire s'obtient en calculant la FFT inverse du produit des FFT de  $\bar{x}$  et  $\bar{v}$ . Or il est connu que la FFT d'un signal de longueur  $N'$  coûte  $N' \log_2(N')$  MACs. Comme le calcul du produit de convolution fait intervenir trois transformations rapides et un produit terme à terme de deux vecteurs de dimension  $N$ , le coût total est  $3N' \log_2(N') + N'$  MACs. En particulier, si la FFT de  $\bar{x}$  est précalculée, le coût de ce produit de convolution est réduit à  $2N' \log_2(N') + N'$  MACs.

Ainsi, dans la deuxième version de l'algorithme d'itération orthogonale proposée dans la section V.2.1, le produit  $\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t, i)^H$  peut être calculé en appliquant cette méthode à chaque colonne de la matrice  $\mathbf{Y}(t, i)^H$ . Si la FFT de  $\bar{x}$  est précalculée, cette opération coûte  $2N'r \log_2(N') + N'r$  MACs.

La même approche peut être utilisée pour calculer un produit  $\mathbf{w}^H \mathbf{X}(t)$ , où  $\mathbf{w}$  est un vecteur colonne de dimension  $n$ ; le coût d'une telle opération serait identique. Ainsi, dans l'algorithme d'itération orthogonale, le produit  $\mathbf{W}(t, i-1)^H \mathbf{X}(t)$  peut être calculé en appliquant cette méthode à chaque colonne de la matrice  $\mathbf{W}(t, i-1)$ . Si la FFT de  $\bar{x}$  est précalculée, cette opération coûte encore  $2N'r \log_2(N') + N'r$  MACs. L'algorithme faisant intervenir ces produits rapides est résumé ci-dessous :

Tirage aléatoire de  $\mathbf{W}(t, 0)$

Itération sur  $i \geq 1$  jusqu'à convergence

|  |                           |                           |
|--|---------------------------|---------------------------|
| $\mathbf{Y}(t, i) = \mathbf{W}(t, i-1)^H \mathbf{X}(t)$    | produit matriciel rapide, | $2Nr \log_2(N) + Nr$ MACs |
| $\mathbf{C}_{xy}(t, i) = \mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t, i)^H$  | produit matriciel rapide, | $2Nr \log_2(N) + Nr$ MACs |
| $\mathbf{W}(t, i)\mathbf{R}(t, i) = \mathbf{C}_{xy}(t, i)$ | factorisation QR,         | $nr^2$ MACs               |

Fin itération

Dans ce pseudo-code, les complexités ont été exprimées en fonction de  $N$  et non plus de  $N'$ , car un choix approprié des dimensions  $n$  et  $l$  permet de rendre  $N'$  voisin de  $N$  (ou même égal à

$N$ ). La complexité totale de cet algorithme est donc  $O(Nr \log_2(N) + nr^2)$ . On peut vérifier que cette implémentation est plus rapide que celle proposée dans la section V.2 dès lors que  $2N \log_2(N) + N \leq ln$ . Par exemple, si  $n = l$ , on obtient numériquement la condition  $N \geq 47$  (et  $n = l \geq 24$ ).

### V.3 Optimisation des autres étapes

Dans la pratique, pour des valeurs usuelles<sup>2</sup> des paramètres  $l$ ,  $n$  et  $r$ , il se trouve que les complexités  $2Nr \log_2(N)$  et  $nr^2$  sont du même ordre de grandeur. Ainsi, afin d'optimiser encore davantage notre méthode d'estimation, il convient maintenant de s'intéresser aux autres étapes dont la complexité est en  $O(nr^2)$ , à savoir :

- le calcul de la matrice spectrale (section V.3.1) ;
- l'estimation des amplitudes complexes (section V.3.2).

#### V.3.1 Calcul de la matrice spectrale

Rappelons que les pôles du signal sont estimés en tant que valeurs propres de la matrice spectrale (cf. section II.5.3), définie dans l'équation (I.19) :

$$\{z_k(t)\} = \text{eig}(\Phi(t)) \quad (\text{V.5})$$

La méthode des moindres carrés estime la matrice spectrale sous la forme suivante :  $\Phi(t) = \mathbf{W}(t)_{\downarrow}^{\dagger} \mathbf{W}(t)_{\uparrow}$ . Si l'on suppose par ailleurs que la matrice  $\mathbf{W}(t)_{\downarrow}$  est de rang plein (ce qui est toujours le cas dans la pratique), cette équation se réécrit sous la forme

$$\Phi(t) = \Omega(t) \Psi(t) \quad (\text{V.6})$$

où  $\Omega(t)$  et  $\Psi(t)$  sont des matrices de dimension  $r \times r$

$$\Omega(t) \triangleq (\mathbf{W}_{\downarrow}(t)^H \mathbf{W}_{\downarrow}(t))^{-1} \quad (\text{V.7})$$

$$\Psi(t) \triangleq \mathbf{W}_{\downarrow}(t)^H \mathbf{W}_{\uparrow}(t). \quad (\text{V.8})$$

Or il se trouve que la matrice  $\Omega(t)$  peut être facilement calculée. En effet, puisque  $\mathbf{W}(t)$  est orthonormale,  $\mathbf{W}(t)^H \mathbf{W}(t) = \mathbf{I}_r$ . En particulier, cette équation montre que  $\mathbf{W}_{\downarrow}(t)^H \mathbf{W}_{\downarrow}(t) = \mathbf{I}_r - \boldsymbol{\nu}(t) \boldsymbol{\nu}(t)^H$ , où  $\boldsymbol{\nu}(t)$  est le vecteur de dimension  $r$  tel que  $\boldsymbol{\nu}(t)^H$  est la dernière ligne de la matrice  $\mathbf{W}(t)$ . Ainsi, la matrice  $\mathbf{W}_{\downarrow}(t)^H \mathbf{W}_{\downarrow}(t)$  est simplement une modification de rang 1 de la matrice identité.

Finalement, le lemme d'inversion matricielle A.8.1 présenté en annexe (page 182) montre que

$$\Omega(t) = \mathbf{I}_r + \frac{1}{1 - \|\boldsymbol{\nu}(t)\|^2} \boldsymbol{\nu}(t) \boldsymbol{\nu}(t)^H.$$

En injectant cette dernière équation dans l'équation (V.6), on obtient finalement

$$\boxed{\Phi(t) = \Psi(t) + \frac{1}{1 - \|\boldsymbol{\nu}(t)\|^2} \boldsymbol{\nu}(t) \boldsymbol{\varphi}(t)^H} \quad (\text{V.9})$$

où le vecteur  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  de dimension  $r$  est défini par

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \Psi(t)^H \boldsymbol{\nu}(t). \quad (\text{V.10})$$

Ainsi, la matrice  $\Phi(t)$  est obtenue par une modification de rang 1 de la matrice  $\Psi(t)$ . Par cette méthode, le calcul de la matrice spectrale ne requiert que  $nr^2 + O(r^2)$  MACs (au lieu de  $2nr^2 + O(r^3)$  MACs).

<sup>2</sup>Pour traiter des signaux de musique, on choisit typiquement  $n$  et  $l$  de l'ordre de la centaine et  $r$  de l'ordre de la dizaine (cf. partie III).

### V.3.2 Estimation des amplitudes

L'estimation des amplitudes par la méthode des moindres carrés a été présentée dans la section II.6. Dans le cas d'un bruit blanc, elle requiert normalement de pseudo-inverser la matrice  $\mathbf{V}^N$ , de dimension  $N \times r$ . Ce calcul coûte  $O(Nr^2)$  opérations. Cependant, en tenant compte de la structure particulière de la matrice Pascal-Vandermonde  $\mathbf{V}^N$ , il est possible d'en réduire la complexité. En effet, puisque tous les pôles sont distincts,  $\mathbf{V}^N$  est de rang plein donc

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \left( \mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N \right)^{-1} \mathbf{V}^{NH} \mathbf{x}(t). \quad (\text{V.11})$$

Or les coefficients de la matrice  $\mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N$  se calculent rapidement. En effet, on vérifie que la colonne de  $\mathbf{V}^N$  correspondant au pôle  $z_k$  et à l'indice  $m \in \{0 \dots M_k - 1\}$  est égale au vecteur  $\frac{1}{m!} \frac{d^m \mathbf{v}(z)}{dz^m} (z_k)$ , où  $\mathbf{v}(z) = [1, z, \dots, z^{N-1}]^T$ . En particulier, son conjugué hermitien est  $\frac{1}{m!} \frac{d^m \mathbf{v}(z)^T}{dz^m} (z_k^*)$ . Ainsi le produit scalaire hermitien entre deux colonnes correspondant respectivement aux pôles  $z_{k_1}$  à l'indice  $m_1$  et au pôle  $z_{k_2}$  à l'indice  $m_2$  est égal à

$$\frac{1}{m_1!} \frac{d^{m_1} \mathbf{v}(z_1)^T}{dz_1^{m_1}} (z_{k_1}^*) \cdot \frac{1}{m_2!} \frac{d^{m_2} \mathbf{v}(z_2)}{dz_2^{m_2}} (z_{k_2}) = \frac{1}{m_1!} \frac{1}{m_2!} \frac{\partial^{m_1+m_2} (\mathbf{v}(z_1)^T \mathbf{v}(z_2))}{\partial z_1^{m_1} \partial z_2^{m_2}} (z_{k_1}^*, z_{k_2}).$$

Or  $\mathbf{v}(z_1)^T \mathbf{v}(z_2) = \frac{1-z_1^N z_2^N}{1-z_1 z_2}$  si  $z_1 z_2 \neq 1$ , ou  $N$  sinon. Ainsi, le produit scalaire est égal à

$$\boxed{\frac{1}{m_1!} \frac{1}{m_2!} \frac{\partial^{m_1+m_2} \left( \frac{1-z_1^N z_2^N}{1-z_1 z_2} \right)}{\partial z_1^{m_1} \partial z_2^{m_2}} (z_{k_1}^*, z_{k_2})}. \quad (\text{V.12})$$

En effectuant les dérivations dans l'équation (V.12), on obtient ainsi des formules analytiques pour tous les couples  $(m_1, m_2)$ , impliquant des opérations arithmétiques élémentaires faisant intervenir les termes  $z_{k_1}$ ,  $z_{k_1}^N$ ,  $z_{k_2}$  et  $z_{k_2}^N$ . En particulier, pour  $m_1 = m_2 = 0$ , on obtient  $\frac{1-z_{k_1}^N z_{k_2}^N}{1-z_{k_1}^* z_{k_2}^N}$ .

Une méthode rapide de calcul de la matrice  $\mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N$  consiste donc à précalculer ces termes, ce qui coûte  $O(r)$  MACs, puis à calculer chacun des  $r^2$  coefficients de la matrice à l'aide de la formule (V.12), ce qui donne un coût global de  $O(r^2)$  MACs.

De même, les coefficients du vecteur  $\mathbf{V}^{NH} \mathbf{x}(t)$  se calculent rapidement. En effet, le coefficient relatif au pôle  $z_k$  et à l'indice  $m$  est égal à

$$\boxed{\frac{1}{m!} \frac{d^m \mathbf{v}(z)^T}{dz^m} (z_k^*) \mathbf{x}(t) = \frac{1}{m!} \frac{d^m (\mathbf{v}(z)^T \mathbf{x}(t))}{dz^m} (z_k^*)}. \quad (\text{V.13})$$

Or  $\mathbf{v}(z)^T \mathbf{x}(t) = \sum_{\tau=0}^{N-1} x(t+\tau) z^\tau$  est un polynôme de degré  $N-1$  en la variable  $z$ . Ainsi, calculer le membre de droite de l'équation (V.13) consiste à évaluer la dérivée d'ordre  $m$  de ce polynôme au point  $z_k^*$ . Cette opération coûte  $N$  MACs. Comme elle doit être effectuée  $r$  fois pour évaluer les  $r$  coefficients du vecteur  $\mathbf{V}^{NH} \mathbf{x}(t)$ , le coût global de ce calcul est  $Nr$ .

Enfin, la matrice  $\mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N$  et le vecteur  $\mathbf{V}^{NH} \mathbf{x}(t)$  étant obtenus, il reste à résoudre le système

$$\left( \mathbf{V}^{NH} \mathbf{V}^N \right) \hat{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \mathbf{V}^{NH} \mathbf{x}(t).$$

Il s'agit d'un système linéaire symétrique défini positif, dont la solution se calcule en  $\frac{r^3}{6}$  MACs à l'aide d'algorithmes reposant sur la factorisation de Cholesky [Golub et Van Loan, 1996, §4.2]. Ainsi, le coût global du calcul de  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(t)$  est réduit à  $Nr + \frac{r^3}{6} + O(r^2)$  MACs (au lieu de  $Nr^2 + Nr + O(r^3)$ ).

TAB. V.1 – Algorithme d'estimation

| Estimation de l'espace signal   |        | Complexité                    |
|---|--------|-------------------------------|
| Tirage aléatoire de $\mathbf{W}(t, 0)$  |        |                               |
| Itération sur $i \geq 1$ jusqu'à convergence  |        |                               |
| $\mathbf{Y}(t, i) = \mathbf{W}(t, i - 1)^H \mathbf{X}(t)$   | (V.3)  | $2Nr \log_2(N) + Nr$          |
| $\mathbf{C}_{xy}(t, i) = \mathbf{X}(t) \mathbf{Y}(t, i)^H$  | (V.4)  | $2Nr \log_2(N) + Nr$          |
| $\mathbf{W}(t, i) \mathbf{R}(t, i) = \mathbf{C}_{xy}(t, i)$   | (V.1)  | $nr^2$                        |
| Fin itération   |        |                               |
| $\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}(t, \infty)$   | (V.2)  |                               |
| <b>Calcul de la matrice spectrale</b>   |        |                               |
| $\mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{W}_\downarrow(t)^H \mathbf{W}_\uparrow(t)$  | (V.8)  | $nr^2$                        |
| $\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{\Psi}(t)^H \boldsymbol{\nu}(t)$  | (V.10) | $r^2$                         |
| $\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{\Psi}(t) + \frac{1}{1 - \ \boldsymbol{\nu}(t)\ ^2} \boldsymbol{\nu}(t) \boldsymbol{\varphi}(t)^H$ | (V.9)  | $r^2 + O(r)$                  |
| <b>Calcul des pôles</b>   |        |                               |
| $\{z_k(t)\} = \text{eig}(\mathbf{\Phi}(t))$   | (V.5)  | $O(r^3)$                      |
| <b>Estimation des amplitudes</b>  |        |                               |
| $\hat{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \left(\mathbf{V}^{nH} \mathbf{V}^n\right)^{-1} \mathbf{V}^{nH} \mathbf{x}(t)$                 | (V.11) | $Nr + \frac{r^3}{6} + O(r^2)$ |

*Remarque.* Dans la pratique, il peut arriver que la matrice  $\mathbf{V}^N$  soit extrêmement mal conditionnée, par exemple s'il existe au moins deux pôles très proches, ou si un ou plusieurs pôles se trouvent éloignés du cercle unité, ou encore en présence de pôles multiples si  $N$  est grand. Les erreurs numériques peuvent alors engendrer une estimation erronée des paramètres et une mauvaise représentation du signal. Pour éviter cela, il est possible de réduire fortement le conditionnement de la matrice  $\mathbf{V}^N$ , en normalisant ses colonnes. Plus précisément, cela revient à considérer la matrice  $\mathbf{V}'^N = \mathbf{V}^N \mathbf{\Delta}^{-1}$ , où  $\mathbf{\Delta}$  est la matrice diagonale<sup>3</sup> contenant les normes des colonnes de  $\mathbf{V}^N$ . Posons alors  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}'(t) = \mathbf{\Delta} \hat{\boldsymbol{\alpha}}(t)$ ; cela revient à résoudre le système  $\left(\mathbf{V}'^{NH} \mathbf{V}'^N\right) \hat{\boldsymbol{\alpha}}'(t) = \mathbf{V}'^{NH} \mathbf{x}(t)$ . Le signal peut alors être reconstruit sous la forme  $\hat{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{V}'^N \hat{\boldsymbol{\alpha}}'(t)$ .

## V.4 Conclusion

Dans ce chapitre a été présentée une méthode rapide d'estimation de l'espace signal reposant sur l'algorithme d'itération orthogonale et sur la technique de convolution rapide. Les autres étapes de l'estimation ont également été optimisées en tenant compte des propriétés particulières des matrices  $\mathbf{W}(t)$  et  $\mathbf{V}^N$ . L'algorithme complet d'estimation des paramètres ainsi obtenu est présenté dans la table V.1. Toutes les étapes ont été optimisées. Son coût global est  $O(Nr \log_2(N) + nr^2)$ , au lieu de  $O(N^3)$  dans le cas d'une implémentation directe. Cependant, le chapitre VI montrera que dans un contexte adaptatif il est possible de réduire encore davantage la charge de calcul, à condition toutefois de renoncer à calculer l'espace signal de manière exacte.

<sup>3</sup>Dans le cas particulier où  $r = 2$ , il est possible de démontrer que la matrice  $\mathbf{\Delta}$  ainsi définie minimise le conditionnement de  $\mathbf{V}'^N$  parmi toutes les matrices diagonales.



## Deuxième partie

# Algorithmes rapides de poursuite des paramètres



## Chapitre VI

# Etat de l'art des techniques de poursuite de l'espace signal et des pôles

### Résumé

Après avoir traité le cas de signaux à paramètres constants, nous nous intéressons à l'analyse de signaux dont les paramètres varient au cours du temps (sous l'hypothèse de blancheur du bruit additif). L'objectif de cette étude est de développer un système complet permettant de suivre les trajectoires temporelles des sinusoides. Une telle représentation du signal peut être ensuite utilisée pour en modifier par exemple la durée ou la hauteur, comme cela a été proposé dans [Serra et Smith, 1990].

Un très grand nombre d'algorithmes permettant de suivre les variations temporelles de l'espace signal ont été proposés dans la littérature. Dans ce chapitre sont mentionnés les principaux d'entre eux, parmi lesquels la méthode des puissance itérées et l'algorithme PAST orthonormé, puis plusieurs critères permettant de caractériser ces divers algorithmes sont présentés, et enfin leurs performances sont illustrées sur un signal présentant de brusques variations. Des techniques permettant de suivre la matrice spectrale et ses valeurs propres sont également évoquées.



## VI.1 Introduction

Dans le chapitre V, nous nous sommes concentrés sur l'estimation des paramètres du modèle à partir d'un segment de signal extrait sur une fenêtre temporelle  $\{t - l + 1, \dots, t + n - 1\}$ . Nous cherchons maintenant à effectuer cette analyse sur un ensemble de fenêtres décalées les unes par rapport aux autres de un ou plusieurs échantillons. L'analyse de chaque fenêtre pourra ainsi reposer sur celle de la précédente.

La première étape de l'estimation consistera à poursuivre l'espace signal (section VI.2). La seconde portera sur la poursuite des pôles du signal (section VI.3). Finalement, les principales conclusions de ce chapitre seront résumées dans la section VI.4.

## VI.2 Poursuite de l'espace signal

Avant d'évoquer les algorithmes de poursuite de l'espace signal, il nous paraît important d'étudier les variations temporelles des valeurs et des vecteurs propres de la matrice de corrélation des données, afin de définir précisément ce que l'on peut attendre de tels algorithmes.

### VI.2.1 Étude préliminaire

Il est connu que l'espace signal d'un signal non bruité composé d'une somme de sinusoides est constant au cours du temps. Mais contrairement aux idées reçues, ni les valeurs propres, ni les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{R}_{ss}(t)$  (définie dans la section I.4.2.2) ne sont constants. En fait, non seulement ceux-ci admettent des variations temporelles, mais en plus ces variations présentent des discontinuités au cours du temps.

Le signal représenté dans la figure VI.1-a est la somme de deux exponentielles complexes non amorties, de fréquences 0.025 et 0.026 *Hertz* (Hz), de même amplitude égale à 1 et de même phase nulle à l'instant initial, non bruitées, contenant 2000 échantillons (seule la partie réelle de ce signal est représentée). L'analyse à haute résolution est effectuée avec des matrices de données de dimensions  $n = l = 20$ . Pour tout instant  $t$  appartenant à l'intervalle  $\{n \dots 1999\}$ , les 2 vecteurs propres principaux et les 2 valeurs propres principales ont été calculés (les autres valeurs propres étant nulles). Les variations des deux valeurs propres principales sont représentées dans la figure VI.1-b (les variations de la plus grande valeur propre sont représentées en trait continu, alors que celles de la seconde valeur propre sont représentées en pointillés). On peut faire les remarques suivantes :

- quand les interférences entre les deux sinusoides sont destructives (instants  $t = 500$  et  $t = 1500$ ), les deux valeurs propres sont égales ;
- quand les interférences sont constructives (instants  $t = 0$ ,  $t = 1000$  et  $t = 2000$ ), la plus grande valeur propre est supérieure de 70 *decibels* (dB) à la suivante ;
- les variations des deux valeurs propres sont irrégulières à l'ordre 1 aux instants  $t = 500$  et  $t = 1500$  ;
- il semble que les deux valeurs propres sont «permutées» en  $t = 500$  et  $t = 1500$  (deux courbes régulières sont reconstituées en permutant leurs variations en ces deux instants).

Nous pouvons en tirer les conclusions suivantes :

- la dimension de l'espace signal apparaît plus clairement quand les interférences sont destructives que quand elles sont constructives ;
- les variations des valeurs propres sont étroitement liées.

Par contre, la figure VI.1-b montre que la moyenne arithmétique des valeurs propres exprimées en dB

(autrement dit leur moyenne géométrique) est constante au cours du temps. La proposition suivante donne un résultat plus général, valable dans le cas du modèle PACE introduit dans le chapitre II.

**Proposition VI.2.1.** *La moyenne géométrique des valeurs propres non nulles de la matrice  $\mathbf{R}_{ss}(t)$  varie exponentiellement au cours du temps. Plus précisément, elle est égale à*

$$C \left( \prod_{k=0}^{K-1} |z_k|^{\frac{M_k}{r}} \right)^t \quad (\text{VI.1})$$

$$\text{où } C = \frac{1}{t} \left( \det(\mathbf{V}^{lT} \mathbf{V}^{l*}) \det(\mathbf{V}^{nH} \mathbf{V}^n) \prod_{k=0}^{K-1} |\alpha_{(k, M_k-1)}|^{2M_k} |z_k|^{2M_k(-l+1)} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

La démonstration de cette proposition est présentée en annexe dans la section B.2, page 194. Dans le cas particulier où tous les pôles sont sur le cercle unité, l'équation (VI.1) montre que la moyenne géométrique des valeurs propres est constante, comme on a pu l'observer dans la figure VI.1-b.

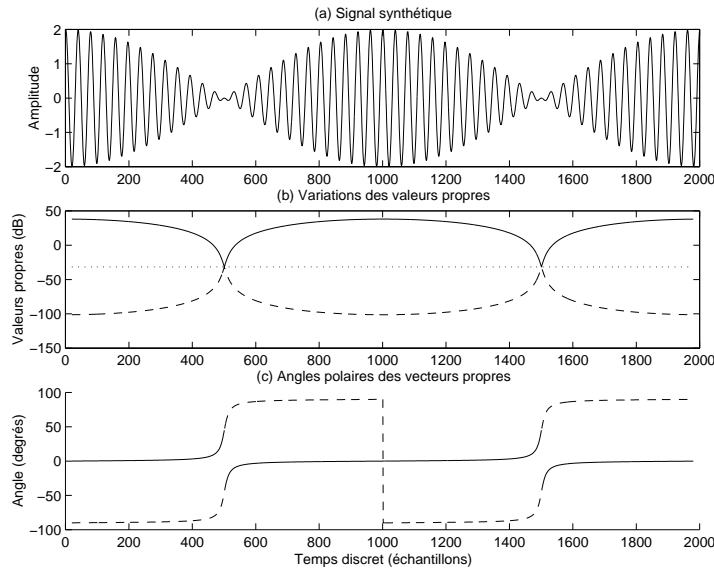


FIG. VI.1 – Valeurs et vecteurs propres pour un signal contenant deux fréquences ( $n = l = 20$ )

- (a) Signal synthétique contenant deux fréquences
- (b) Variations des deux valeurs propres principales
- (c) Angles polaires des deux vecteurs propres principaux dans une base de l'espace signal de dimension deux

La figure VI.1-c représente les variations des deux vecteurs propres principaux. Une base particulière de l'espace signal a été choisie, constituée des deux vecteurs propres principaux à l'instant  $t = 1000$ . Ensuite, pour chaque instant  $t$ , les deux vecteurs propres principaux ont été décomposés dans cette base et représentés par leur angle polaire. Les variations de l'angle du vecteur propre principal sont représentées en trait continu, alors que celles du second vecteur propre sont représentées en pointillés. En particulier, on notera que cet angle est nul en  $t = 1000$  pour le vecteur propre principal, et égal à  $\pm 90^\circ$  pour le second vecteur propre (l'angle polaire est défini modulo  $180^\circ$  puisque seule la direction du vecteur importe). Nous pouvons faire les remarques suivantes :

- quand les interférences sont constructives (instants  $t = 0$ ,  $t = 1000$  et  $t = 2000$ ), les deux vecteurs propres principaux sont à peu près stables ;

- leurs variations sont discontinues quand les interférences entre les deux sinusoïdes sont destructives (instants  $t = 500$  et  $t = 1500$ ) ;
- il semble que les deux vecteurs propres sont «permutés» en  $t = 500$  et  $t = 1500$  (deux courbes régulières sont reconstituées en permutant leurs variations en ces deux instants).

Ainsi, comme dans le cas des valeurs propres, les variations de vecteurs propres sont étroitement liées.

Il paraît donc inutile de chercher à suivre les valeurs propres ou les vecteurs propres au cours du temps. Seul l'espace signal lui-même est stable, et la moyenne géométrique des valeurs propres correspondantes varie exponentiellement. Cependant, le signal observé n'est pas  $s(t)$ , mais le signal bruité  $x(t)$ . Comme cela a été montré dans la section II.5, les vecteurs propres de  $\mathbf{R}_{xx}(t)$  sont les mêmes que ceux de  $\mathbf{R}_{ss}(t)$ . Par contre, les valeurs propres de cette matrice sont surélevées de  $\sigma^2$  par rapport à celles de  $\mathbf{R}_{ss}(t)$ . Ainsi, pour le signal bruité, la propriété d'invariance temporelle de l'espace signal reste vérifiée, par contre le résultat de la proposition VI.2.1 n'est plus valable. Ainsi, l'étude du signal doit essentiellement porter sur l'espace signal lui-même et non sur les valeurs propres.

## VI.2.2 Méthode des puissances itérées

La méthode des puissances itérées [Hua *et al.*, 1999, Badeau *et al.*, 2005b] est une technique de poursuite de l'espace signal dérivée de l'algorithme d'itération orthogonale présenté dans la section V.2. Rappelons que la deuxième étape de cet algorithme consiste à orthonormaliser la matrice  $\mathbf{C}_{xy}$ . Dans la section V.2, cette opération était réalisée par le biais d'une factorisation QR. En fait, il est possible d'utiliser n'importe quelle méthode d'orthonormalisation. L'intérêt de la factorisation QR est qu'elle garantit la convergence vers la base des vecteurs propres de la matrice de covariance, alors que toute autre méthode garantit seulement la convergence vers une base orthonormée de l'espace signal. Or il a été démontré dans la section VI.2.1 que le suivi des vecteurs propres ne présentait pas d'intérêt particulier dans un contexte de poursuite. Il est donc possible d'utiliser une autre technique d'orthonormalisation.

Par ailleurs, dans la section V.2 l'algorithme d'itération orthogonale était initialisé par un tirage aléatoire de la matrice  $\mathbf{W}(t, 0)$ . Dans un contexte adaptatif, il paraît naturel d'initialiser cet algorithme avec la base de l'espace signal calculée sur la fenêtre précédente. Cette matrice ayant toutes les chances d'engendrer un espace plus proche de l'espace signal à l'instant  $t$  qu'une matrice tirée aléatoirement, l'algorithme converge ainsi plus rapidement. En fait, une seule itération suffit dans les cas usuels pour obtenir une estimation assez précise de l'espace signal (*cf.* section VI.2.3.3). Afin de réduire la charge de calculs, nous n'effectuerons donc dans la suite qu'une seule itération par fenêtre d'analyse. Pour simplifier les notations, l'indice d'itération  $i$  ne sera donc plus indiqué dans les développements ci-dessous, une unique itération étant effectuée à chaque instant  $t$ . L'algorithme ainsi obtenu porte le nom de méthode des puissances itérées. Il est résumé par les deux équations suivantes

$$\mathbf{C}_{xy}(t) = \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{W}(t-1) \tag{VI.2}$$

$$\mathbf{W}(t) \mathbf{R}(t) = \mathbf{C}_{xy}(t). \tag{VI.3}$$

Sa complexité est  $4Nr \log_2(N) + nr^2 + o(nr^2)$  MACs. L'étape d'orthonormalisation (VI.3) fait apparaître une matrice  $\mathbf{R}(t)$  qui n'est plus nécessairement triangulaire. Cependant, elle doit vérifier  $\mathbf{R}(t)^H \mathbf{R}(t) = \mathbf{\Phi}(t)$ , où  $\mathbf{\Phi}(t)$  est la matrice symétrique définie positive  $\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{C}_{xy}(t)^H \mathbf{C}_{xy}(t)$ . Ainsi,  $\mathbf{R}(t)^H$  est une racine carrée matricielle de  $\mathbf{\Phi}(t)$ . Elle s'exprime donc comme le produit de l'unique racine carrée matricielle définie positive de  $\mathbf{\Phi}(t)$ , multipliée à droite par une matrice orthonormée arbitraire<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Si  $\mathbf{T}$  est une matrice symétrique définie positive, une *racine carrée matricielle* de  $\mathbf{T}$  est une matrice  $\mathbf{S}$  de même dimension telle que  $\mathbf{S} \mathbf{S}^H = \mathbf{T}$ . Une telle matrice est notée  $\mathbf{S} = \mathbf{T}^{\frac{1}{2}}$ . Il n'existe qu'une seule racine carrée définie positive

Si  $\mathbf{R}(t)$  est symétrique définie positive, il s'agit alors de la *méthode des puissances naturelles* [Hua *et al.*, 1999]. Il sera montré dans la section VII.3 que cette dernière méthode engendre une suite de matrices  $\mathbf{W}(t)$  qui est stable si l'espace signal est constant au cours du temps, contrairement à la base des vecteurs propres.

La méthode des puissances itérées permet de suivre rapidement l'espace signal. Cependant, elle ne conduit pas à une réduction du coût du calcul de la matrice spectrale, de ses valeurs propres et des amplitudes complexes. Ce calcul sera donc effectué selon la technique proposée dans la section V.3 ; la complexité globale de l'algorithme d'estimation sera alors de  $4Nr \log_2(N) + 2nr^2 + o(nr^2)$  opérations. La méthode des puissances itérées sera appliquée à un signal synthétique dans la section VI.2.3.3 et à un son de piano dans la section XI.5.1.2.

### VI.2.3 Algorithmes adaptatifs de poursuite de l'espace signal

Concernant les techniques de poursuite de l'espace signal, la littérature est particulièrement abondante. En effet, ces méthodes peuvent être appliquées dans plusieurs domaines de traitement du signal, parmi lesquels l'analyse spectrale (qui nous intéresse ici), ou encore la localisation de sources. Ainsi, toutes les publications portant sur ce thème s'appuient sur un même formalisme général : on considère une séquence de vecteurs  $\{\mathbf{x}(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$  de dimension  $n$ , et on souhaite suivre l'espace engendré par les  $r$  principaux vecteurs propres de la matrice de corrélation  $\mathbf{C}_{xx}(t)$ , susceptible de varier au cours du temps. En localisation de sources, les  $n$  éléments du vecteur  $\mathbf{x}(t)$  sont les échantillons des  $n$  signaux arrivant simultanément sur une antenne de capteurs à l'instant  $t$ . En analyse spectrale, les  $n$  éléments du vecteur  $\mathbf{x}(t)$  sont extraits d'un même signal  $x(t) : \mathbf{x}(t) = [x(t), x(t+1), \dots, x(t+n-1)]^T$ . Il apparaît donc que la matrice de corrélation introduite dans l'équation (I.15) (et sur laquelle repose la méthode des puissances itérées présentée dans la section VI.2.2) est définie sur une fenêtre rectangulaire, à partir de  $l$  vecteurs consécutifs :

$$\mathbf{C}_{xx}(t) = \sum_{u=t-l+1}^t \mathbf{x}(u) \mathbf{x}(u)^H. \quad (\text{VI.4})$$

Ainsi, en analyse spectrale la matrice de corrélation est structurée, dans la mesure où la matrice  $\mathbf{X}(t)$  est de Hankel, alors qu'en localisation de sources, elle ne présente aucune propriété particulière (autre que la symétrie hermitienne et la positivité). C'est pourquoi la quasi totalité des algorithmes de poursuite de l'espace signal proposés dans la littérature, qui ont une vocation généraliste, n'exploitent pas la structure Hankel de la matrice de données. Cependant quelques algorithmes font exception, comme l'implémentation de la méthode des puissances itérées présentée dans la section VI.2.2 (qui utilise des transformées de Fourier rapides), ainsi que [Strobach, 1997b, Davila, 2000, Badeau *et al.*, 2005d]. Ceux-ci ne peuvent donc pas être utilisés en localisation de sources.

*Remarque.* Dans le cadre de l'analyse spectrale, il est possible de réduire la charge de calculs en ne déterminant pas l'espace signal à chaque instant, mais seulement à certains instants régulièrement espacés. Deux approches peuvent être envisagées :

- il est possible d'extraire de la séquence  $\{\mathbf{X}(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$  une sous-suite de matrices régulièrement espacées, et lui appliquer l'implémentation de la méthode des puissances itérées présentée dans la section VI.2.2, seul algorithme de poursuite pouvant être utilisé dans ce contexte ;
- il est également possible d'extraire de la séquence  $\{\mathbf{x}(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$  une sous-suite de vecteurs régulièrement espacés, et lui appliquer l'un des nombreux algorithmes de poursuite de l'espace signal proposés dans la littérature. Cependant cela revient à supprimer certaines colonnes dans la ma-

---

de  $\mathbf{T}$ . Les autres racines carrées sont obtenues en multipliant à droite cette racine carrée définie positive par une matrice orthonormée arbitraire. La notation  $\mathbf{S}^{\frac{1}{2}}$  peut désigner n'importe laquelle d'entre elles.

trice  $\mathbf{X}(t)$ , qui perd alors sa structure Hankel. Ainsi, les algorithmes reposant explicitement sur cette propriété ne peuvent plus être utilisés, comme c'était déjà le cas en localisation de source.

Outre la fenêtre rectangulaire définie dans l'équation (VI.4), d'autres types de fenêtres sont couramment utilisés dans la littérature :

**Fenêtre exponentielle :** la matrice de corrélation est égale à  $\mathbf{C}_{xx}(t) = \sum_{u=-\infty}^t \beta^{t-u} \mathbf{x}(u) \mathbf{x}(u)^H$ , où  $0 < \beta < 1$  est le facteur d'oubli. Elle peut être mise à jour selon la récurrence :

$$\boxed{\mathbf{C}_{xx}(t) = \beta \mathbf{C}_{xx}(t-1) + \mathbf{x}(t) \mathbf{x}(t)^H.} \quad (\text{VI.5})$$

**Fenêtre tronquée :** la matrice de corrélation de dimension  $n \times n$  est estimée sur une fenêtre de longueur  $l$  :

$$\mathbf{C}_{xx}(t) = \sum_{u=t-l+1}^t \beta^{t-u} \mathbf{x}(u) \mathbf{x}(u)^H \quad (\text{VI.6})$$

où  $0 < \beta \leq 1$ . Le cas  $\beta = 1$  correspond à une fenêtre rectangulaire, ou fenêtre glissante. Cette matrice peut être mise à jour à l'aide de la récurrence :

$$\boxed{\mathbf{C}_{xx}(t) = \beta \mathbf{C}_{xx}(t-1) + \mathbf{x}(t) \mathbf{x}(t)^H - \beta^l \mathbf{x}(t-l) \mathbf{x}(t-l)^H.} \quad (\text{VI.7})$$

Les algorithmes de poursuite de l'espace signal peuvent être classés selon leur complexité. On distingue deux grandes classes : les algorithmes de complexité sur-linéaire en  $n$ , et ceux de complexité linéaire en  $n$ . Ainsi les algorithmes appartenant à la deuxième classe sont plus rapides que la méthode des puissances itérées. Ce faible coût est en général obtenu au prix d'une approximation qui engendre une dégradation des performances du suivi.

La section VI.2.3.1 présente une liste non exhaustive des algorithmes proposés dans la littérature, dont un comparatif est proposé dans la section VI.2.3.2. Leurs performances sont ensuite illustrées dans la section VI.2.3.3.

### VI.2.3.1 Brève bibliographie

Une méthode de référence en poursuite de sous-espace est l'algorithme de I. Karasalo [Karasalo, 1986], qui approche la SVD de la matrice de données en calculant la SVD d'une matrice plus petite. Une approche similaire a été développée dans [Real *et al.*, 1999]. L'algorithme *Fast Subspace Tracking* (FST) présenté dans [Rabideau, 1996] remplace la petite SVD dans [Karasalo, 1986] par des rotations de Givens, conduisant à un suivi plus rapide. Une autre approche consiste à entrelacer une mise à jour récursive de la matrice de corrélation ou de la matrice de données avec une ou plusieurs étapes d'un algorithme standard de SVD. C'est le cas de la méthode de Jacobi [Moonen *et al.*, 1992], l'itération QR transposée [Dowling *et al.*, 1994], l'itération orthogonale / bi-orthogonale [Strobach, 1996, Strobach, 1997a, Strobach, 1997b, Badeau *et al.*, 2004a], et la méthode des puissances itérées [Hua *et al.*, 1999]. Certaines techniques de poursuite sont basées sur d'autres décompositions matricielles, comme la factorisation QR révélatrice de rang [Bischof et Shroff, 1992], la décomposition URV révélatrice de rang [Stewart, 1992], et la (bi)-diagonalisation de Lankzos [Xu *et al.*, 1994]. Une approche conceptuellement différente considère l'estimation de l'espace signal comme un problème d'optimisation avec ou sans contraintes [Oja, 1989, Xu, 1993, Chen et Amari, 2001, Kung *et al.*, 1994, Mathew et Reddy, 1995, Fu et Dowling, 1995]. En particulier, il est démontré dans [Xu, 1993, Yang, 1995] que la méthode classique de Oja [Oja, 1989] peut être vue comme une approximation d'un algorithme de

descente de gradient d'une fonction d'erreur quadratique. Un certain nombre de méthodes de poursuite de sous-espace plus rapides ont été développées en combinant l'approche de descente de gradient avec l'hypothèse connue sous le nom de *projection approximation* [Yang, 1995, Miao et Hua, 1998, Douglas, 2000, Abed-Meraim *et al.*, 2000, Badeau *et al.*, 2003a]. D'autres techniques reposent sur un moyennage des espaces signal et bruit [DeGroat, 1992], sur le principe du maximum de vraisemblance [Chonavel *et al.*, 2003], sur l'analyse d'opérateurs restreints [MacInnes, 1998], ou sur la théorie des perturbations [Champagne et Liu, 1998]. Un résumé de techniques plus anciennes est proposé dans [Comon et Golub, 1990].

### VI.2.3.2 Critères de comparaison des algorithmes de poursuite

Afin de comparer les nombreux algorithmes cités dans la section VI.2.3.1, plusieurs critères permettant de les caractériser sont listés ci-dessous :

**complexité** : les algorithmes les plus rapides requièrent seulement  $O(nr)$  MACs.

**type de fenêtre** : certains algorithmes ont été conçus pour des fenêtres exponentielles, d'autres pour des fenêtres rectangulaires.

**orthonormalité de la matrice  $\mathbf{W}(t)$**  : certains algorithmes ne garantissent pas l'orthonormalité de  $\mathbf{W}(t)$ , ce qui présente un inconvénient pour certains post-traitements qui requièrent une matrice orthonormée, comme la méthode MUSIC, présentée dans la section IV.4.4. Par ailleurs, cette hypothèse a été utilisée à plusieurs reprises dans les chapitres précédents.

**suivi de la structure propre** : certains algorithmes permettent de suivre, outre l'espace signal, les vecteurs et les valeurs propres de la matrice de covariance. Nous avons expliqué dans la section VI.2.1 pourquoi cette propriété n'était pas indispensable.

Dans le tableau VI.1, les algorithmes de poursuite sont caractérisés par les quatre critères proposés ci-dessus. Ils sont classés par ordre de complexité décroissante. La dernière colonne indique la figure de la section VI.2.3.3 où leurs performances sont illustrées.

### VI.2.3.3 Simulations numériques

Dans cette section sont illustrées les performances de la plupart des algorithmes cités dans le tableau VI.1. Le signal de test est une somme de  $r = 4$  exponentielles complexes non amorties et d'un bruit blanc gaussien complexe (tel que le RSB est de 5.7 dB). Les fréquences des exponentielles varient par paliers selon des trajectoires initialement proposées par P. Strobach dans le contexte de la localisation de sources [Strobach, 1998]. Leurs variations sont représentées dans la figure VI.3-a. Les algorithmes de poursuite d'espace signal ont été appliqués avec les paramètres  $n = 80$ , ainsi que  $l = 120$  dans le cas d'une fenêtre rectangulaire, et  $\beta = 1 - \frac{1}{7}$  dans le cas d'une fenêtre exponentielle (afin que le support de celle-ci soit approximativement de même longueur que celui de la fenêtre rectangulaire)<sup>3</sup>. Les fréquences ont ensuite été calculées par la méthode proposée dans la section V.3.1. Les trajectoires fréquentielles estimées sont représentées dans les figures VI.2 à VI.6. Les lignes pointillées indiquent les paramètres fréquentiels exacts, alors que les lignes continues indiquent les fréquences estimées. Par ailleurs, les courbes ont été translatées dans le temps afin de compenser le retard dû à longueur de la fenêtre d'analyse. Dans chaque figure ont été regroupés des algorithmes aux performances équivalentes, et les cinq figures sont triées par ordre de performances décroissantes.

La figure VI.2 illustre des algorithmes de complexité élevée. Ainsi les figures VI.2-a et VI.2-b représentent les trajectoires obtenues en calculant l'espace propre exact de la matrice de corrélation,

<sup>2</sup>Cet article est reproduit en annexe dans le chapitre C.

<sup>3</sup>Dans le cas de l'algorithme NIC [Miao et Hua, 1998], le paramètre  $\beta$  a été fixé à 0.5.

TAB. VI.1 – Algorithmes de poursuite d'espace signal

| Algorithme  | Référence  | Coût   | Fenêtre  | Ortho-<br>norma-<br>lité   | Struc-<br>ture<br>propre   | Figure   |
|---|--|--|--|--|--|--|
| Bi-Lanczos<br>FAST  | [Xu <i>et al.</i> , 1994]<br>[Real <i>et al.</i> , 1999]   | $O(n^2r)$<br>$nlr$   | rectangulaire<br>rectangulaire   | oui<br>oui   | oui<br>oui   | VI.6   |
| Jacobi SVD<br>Rank-revealing QR<br>URV  | [Moonen <i>et al.</i> , 1992]<br>[Bischof et Shroff, 1992]<br>[Stewart, 1992]  | $O(n^2)$<br>$O(n^2)$<br>$9n^2$   | rectangulaire<br>rectangulaire<br>rectangulaire  | oui<br>oui<br>oui  | oui<br>non<br>non  |  |
| CGET2<br>SHSVD2<br>PROTEUS-1<br>SWASVD2<br>NP2<br>Karasalo<br>TQR-SVD<br>LORAF2<br>Bi-SVD1<br>OPERA | [Fu et Dowling, 1995]<br>[Strobach, 1997b]<br>[Champagne et Liu, 1998]<br>[Badeau <i>et al.</i> , 2004a] <sup>2</sup><br>[Hua <i>et al.</i> , 1999]<br>[Karasalo, 1986]<br>[Dowling <i>et al.</i> , 1994]<br>[Strobach, 1996]<br>[Strobach, 1997a]<br>[MacInnes, 1998] | $O(nr^2)$<br>$2nr^2$<br>$2nr^2$<br>$(n+l)r^2$<br>$\frac{3}{2}nr^2$<br>$nr^2$<br>$nr^2$<br>$nr^2$<br>$nr^2$<br>$nr^2$ | exponentielle<br>rectangulaire<br>exponentielle<br>rectangulaire<br>exponentielle<br>exponentielle<br>exponentielle<br>exponentielle<br>exponentielle<br>exponentielle | oui<br>oui<br>oui<br>oui<br>oui<br>oui<br>oui<br>oui<br>oui<br>oui | oui<br>oui<br>oui<br>oui<br>non<br>oui<br>oui<br>oui<br>oui<br>oui | VI.3<br>VI.4<br>VI.4<br>VI.4<br>VI.4<br>VI.4                         |
| SW-OPAST<br>FST<br>SW-PAST<br>ROSA<br>PASTd<br>NIC<br>Householder PAST<br>OPAST<br>PAST             | [Badeau <i>et al.</i> , 2003a]<br>[Rabideau, 1996]<br>[Badeau <i>et al.</i> , 2003a]<br>[DeGroat, 1992]<br>[Yang, 1995]<br>[Miao et Hua, 1998]<br>[Douglas, 2000]<br>[Abed-Meraim <i>et al.</i> , 2000]<br>[Yang, 1995]  | $15nr$<br>$5nr$<br>$5nr$<br>$4nr$<br>$4nr$<br>$4nr$<br>$4nr$<br>$4nr$<br>$3nr$                                       | rectangulaire<br>exponentielle<br>rectangulaire<br>exponentielle<br>exponentielle<br>exponentielle<br>exponentielle<br>exponentielle<br>exponentielle                  | oui<br>oui<br>non<br>non<br>non<br>non<br>oui<br>oui<br>non        | non<br>oui<br>non<br>non<br>oui<br>non<br>non<br>non<br>non        | VI.3<br>VI.6<br>VI.3<br>VI.6<br>VI.6<br>VI.5<br>VI.5<br>VI.5<br>VI.5 |

calculée respectivement sur une fenêtre rectangulaire et sur une fenêtre exponentielle. De même, les figures VI.2-c et VI.2-d représentent les trajectoires obtenues avec la méthode des puissances itérées dans chacun des deux cas. Nous pouvons faire deux remarques :

- la fenêtre rectangulaire réagit un peu plus rapidement aux variations du signal que la fenêtre exponentielle,
- dans chacun des deux cas la méthode des puissances itérées atteint des performances voisines de celles d'une EVD exacte.

La figure VI.3 illustre des algorithmes à fenêtre rectangulaire, de complexité linéaire en  $n$ . Les performances restent relativement proches de celles observées dans la figure VI.2. Parmi les trois algorithmes représentés, SW-OPAST donne les meilleurs résultats. Il présente en outre l'avantage d'avoir une complexité en  $O(nr)$ . Ensuite, les figures VI.4 et VI.5 représentent des algorithmes à fenêtre exponentielle, de complexité linéaire en  $n$ , qui présentent tous des performances très voisines, mais nettement dégradées par rapport à la figure VI.3. Les algorithmes illustrés dans la figure VI.5 seront préférés à ceux de la figure VI.4, car ceux-ci présentent une complexité plus faible ( $O(nr)$  au lieu de  $O(nr^2)$ ). Ainsi, dans la classe des algorithmes de complexité linéaire en  $n$ , ceux qui reposent sur une fenêtre rectangulaire sont nettement plus performants que ceux qui reposent sur une fenêtre exponentielle. Enfin, les algorithmes présentés dans la figure VI.6 sont de complexités diverses, mais ont en commun de converger encore plus lentement que ceux illustrés dans les figures VI.4 et VI.5. Ils seront donc abandonnés au profit des précédents.

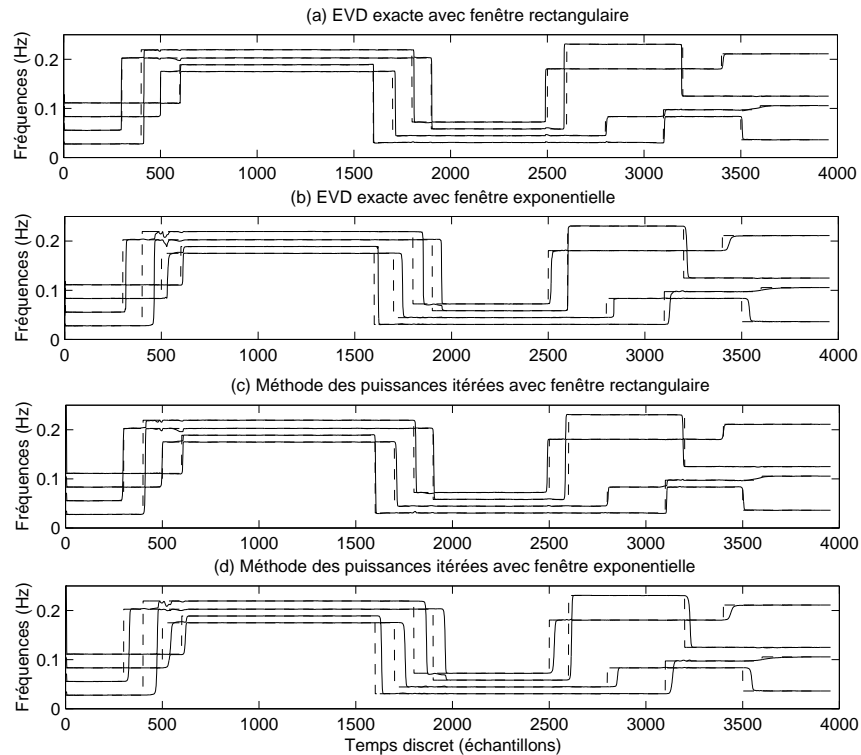


FIG. VI.2 – Algorithmes de complexité élevée

### VI.3 Poursuite de la matrice spectrale et des pôles

Après l'étape de poursuite de l'espace signal, nous nous intéressons aux techniques de suivi de la matrice spectrale, parfois appelées *algorithmes ESPRIT adaptatifs* dans la littérature. Ces techniques sont généralement liées à un algorithme de poursuite de l'espace signal spécifique. Ainsi, la méthode proposée dans [Moonen *et al.*, 1994] repose sur l'algorithme Jacobi SVD [Moonen *et al.*, 1992], et celle proposée dans [Liu *et al.*, 1994] est fondée sur la décomposition URV révélatrice de rang [Stewart, 1992]. La complexité de ces méthodes est de l'ordre de  $n^2$  opérations à chaque instant. Dans [Strobach, 1998], d'autres algorithmes ESPRIT adaptatifs ont été proposés pour un usage conjoint avec les algorithmes de poursuite de l'espace signal baptisés *Low Rank Adaptive Filter* (LORAF) [Strobach, 1996] et *Bi-iteration SVD* (Bi-SVD) [Strobach, 1997a]. En comparaison avec [Moonen *et al.*, 1994] et [Liu *et al.*, 1994], la complexité de ces algorithmes est réduite à  $O(nr^2)$  ou  $O(nr)$ . Cependant nous avons observé que les algorithmes LORAF3 et Bi-SVD3, de complexité  $O(nr)$ , ne convergent pas en pratique, si bien que seul l'algorithme ESPRIT adaptatif de complexité  $O(nr^2)$  s'avère intéressant. Enfin, nous avons récemment proposé dans [Badeau *et al.*, 2003b] et [Badeau *et al.*, 2005e] deux nouvelles implémentations adaptatives de la méthode ESPRIT, de complexité  $O(nr)$ , qui peuvent s'appuyer par exemple sur les algorithmes de poursuite de l'espace signal proposés dans [Abed-Meraim *et al.*, 2000, Douglas, 2000]. Il est important de noter que tous les algorithmes mentionnés ci-dessus calculent la matrice spectrale de manière exacte, c'est-à-dire sans introduire d'approximation supplémentaire par rapport à l'algorithme de poursuite de l'espace signal.

Une fois que la matrice spectrale est estimée, ses valeurs propres peuvent être calculées à l'aide d'une EVD, de complexité  $O(r^3)$ , comme cela a été proposé dans [Liu *et al.*, 1994]. Cependant, il est également possible de poursuivre les valeurs propres. Une première approche proposée dans [Liu et



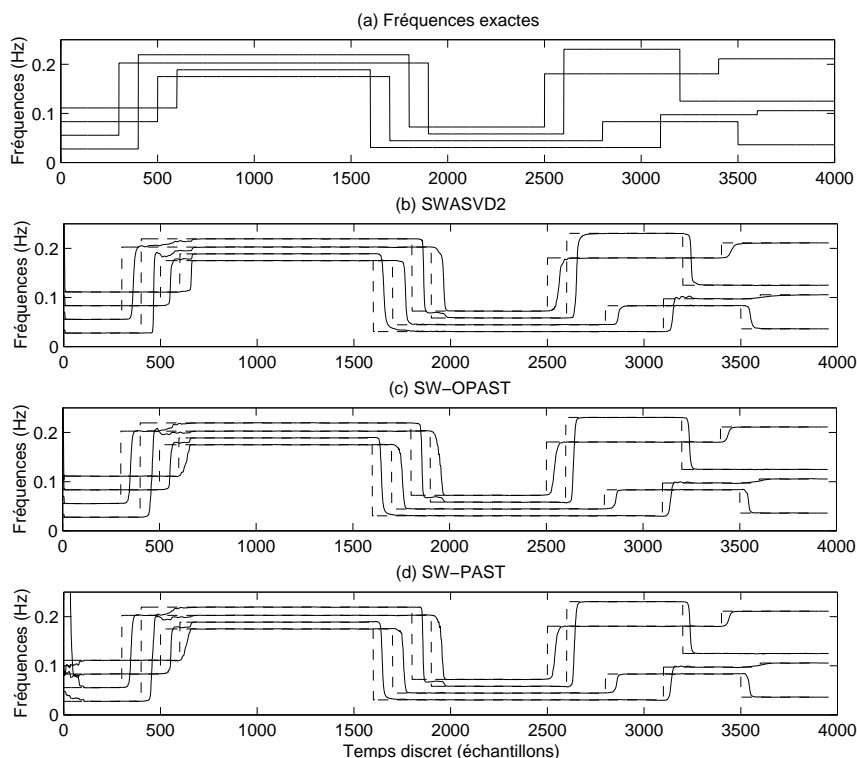


FIG. VI.3 – Algorithmes de complexité linéaire  $O((n + l)r^2)$  ou  $O(nr)$  à fenêtre rectangulaire

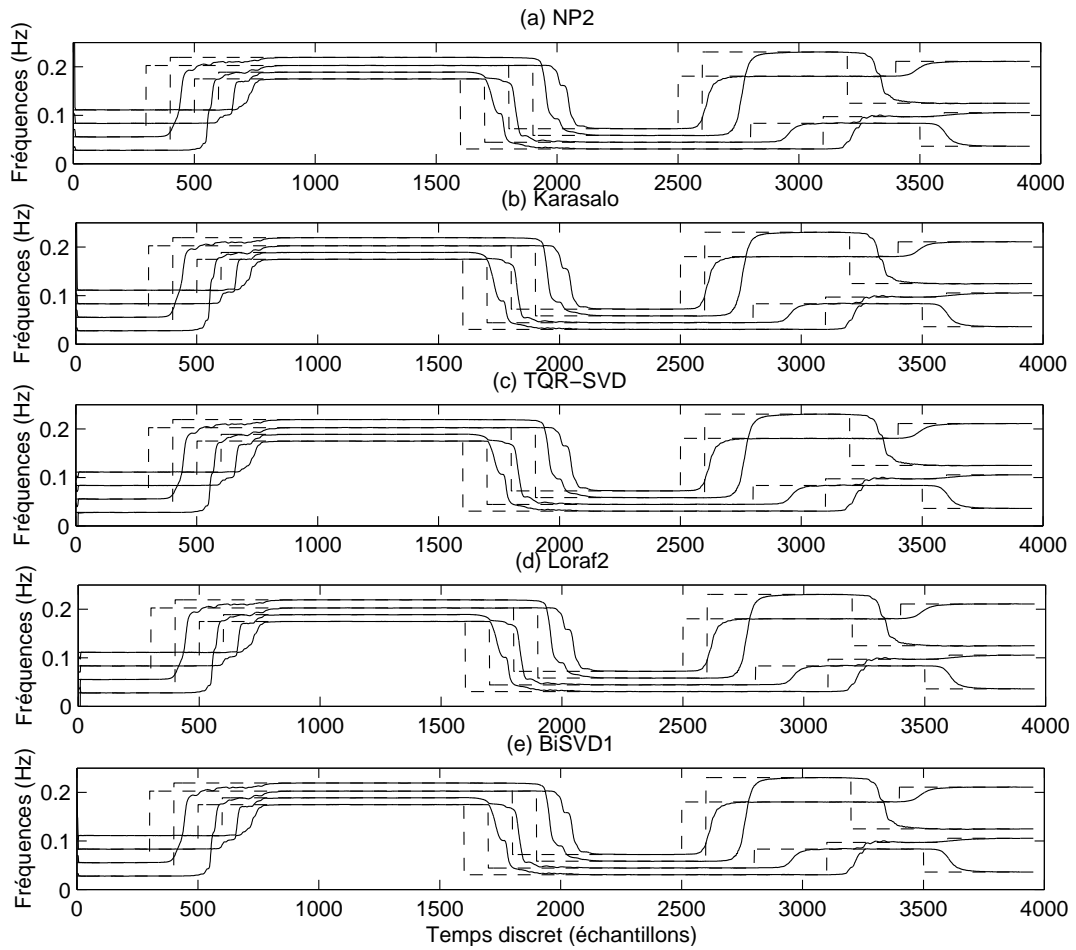
Champagne, 1996] repose sur la théorie des perturbations mais pêche par son manque de robustesse. Une seconde technique proposée dans [Strobach, 1998] repose sur le théorème «split-Schur», mais s'avère moins précise et aussi coûteuse qu'une simple EVD. Dans [Badeau *et al.*, 2005e], nous avons introduit une nouvelle approche permettant de calculer l'EVD de la matrice spectrale récursivement et de manière exacte. Cette méthode sera approfondie dans la section IX.3.2.

## VI.4 Conclusion

L'étude comparative des algorithmes de poursuite proposée dans la section VI.2.3 a montré la supériorité de la méthode des puissances itérées en terme d'estimation de l'espace signal. En effet, cette méthode atteint des performances remarquablement proches de celles obtenues à l'aide d'une EVD. En revanche, elle reste assez coûteuse. Parmi les algorithmes de plus faible complexité, OPAST semble sortir du lot. En effet, il fait partie des algorithmes les plus rapides. De plus, il garantit l'orthonormalité de la matrice estimée, et présente l'avantage d'avoir été développé pour les deux types de fenêtres<sup>4</sup>. Enfin et surtout, pour chaque type de fenêtre, aucun algorithme parmi ceux illustrés dans les figures VI.3 à VI.6 n'atteint de meilleures performances que OPAST.

En ce qui concerne les techniques de suivi de la matrice spectrale, nous retiendrons que la plus rapide d'entre elles a une complexité de l'ordre de  $nr$  MACs par itération. Elle présente également l'avantage de calculer l'EVD de la matrice spectrale de manière récursive [Badeau *et al.*, 2005e].

<sup>4</sup>SW-OPAST est une version à fenêtre rectangulaire de OPAST.

FIG. VI.4 – Algorithmes de complexité linéaire  $O(nr^2)$  à fenêtre exponentielle

- (a) NP2
- (b) Karasalo
- (c) TQR-SVD
- (d) Loraf2
- (e) BiSVD1

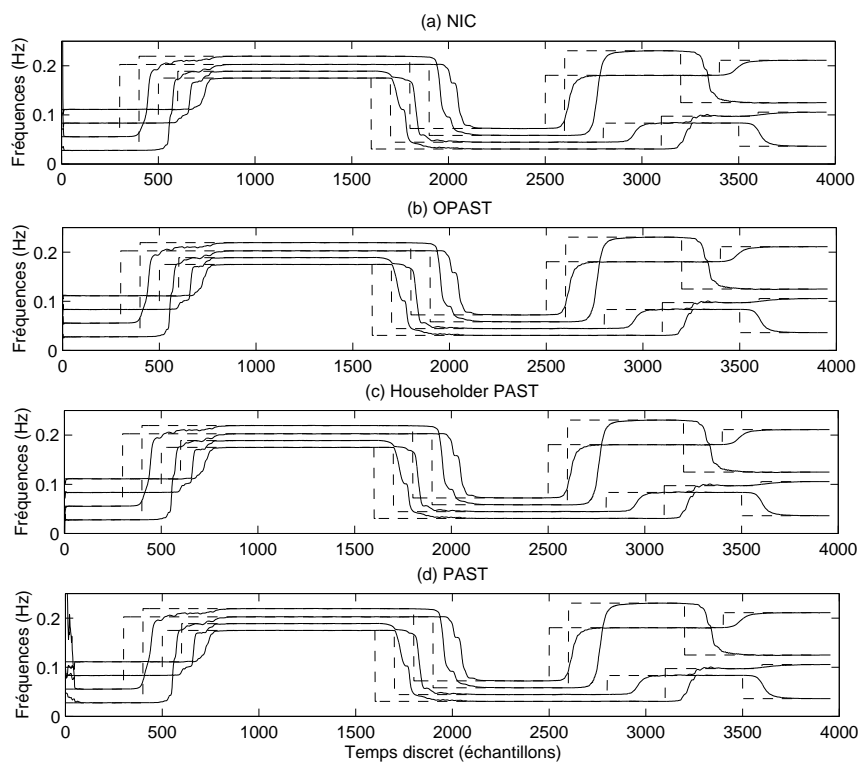


FIG. VI.5 – Algorithmes de complexité linéaire  $O(nr)$  à fenêtre exponentielle

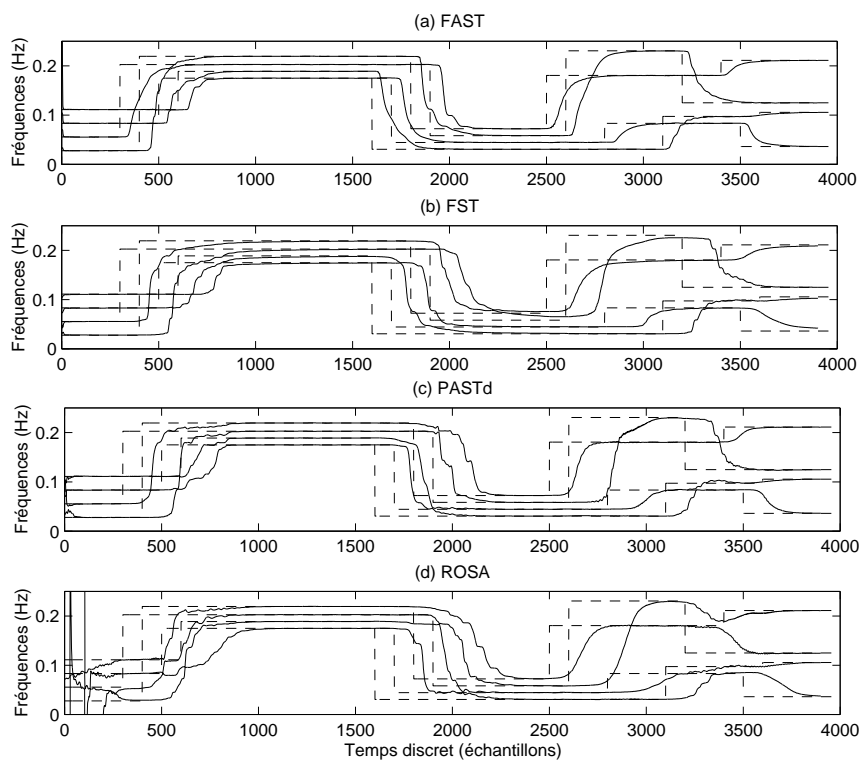


FIG. VI.6 – Algorithmes à convergence lente

## Chapitre VII

# Approximation de la méthode des puissances itérées

### Résumé

Nous proposons dans ce chapitre une implémentation rapide de la méthode des puissances itérées, basée sur une approximation moins restrictive que celle connue sous le nom de *projection approximation*. Cet algorithme, baptisé méthode API rapide, garantit l'orthonormalité de la base de l'espace signal à chaque itération. Il peut être appliqué à la fois en analyse spectrale et en traitement d'antenne. De plus, ses performances sont meilleures que celles de nombreux algorithmes de poursuite de sous-espace liés à la méthode des puissances itérées, tels que les algorithmes *Projection Approximation Subspace Tracking* (PAST), *Novel Information Criterion* (NIC), *fast Natural Power* (NP3) et OPAST. Par ailleurs, il est plus rapide que NIC, NP3 et OPAST, et aussi rapide que PAST. La méthode API est conçue à la fois pour des fenêtres exponentielles et des fenêtres rectangulaires. Les simulations numériques montrent que les fenêtres rectangulaires offrent une réponse plus rapide à de brusques variations du signal. Les développements qui vont suivre ont fait l'objet d'un article pour *IEEE Transactions on Signal Processing* [Badeau *et al.*, 2005b].

## VII.1 Introduction

Comme cela a été mentionné dans la section VI.2.3.1, l'estimation de l'espace signal peut être vue comme un problème d'optimisation avec ou sans contraintes [Oja, 1989, Xu, 1993, Chen et Amari, 2001, Kung *et al.*, 1994, Mathew et Reddy, 1995, Fu et Dowling, 1995], pour lequel l'introduction de l'hypothèse connue sous le nom de *projection approximation* conduit à des méthodes rapides de poursuite de l'espace signal (voir par exemple les algorithmes PAST [Yang, 1995] et NIC [Miao et Hua, 1998]). Dans [Hua *et al.*, 1999], il est prouvé que ces algorithmes sont étroitement liés à la méthode des puissances itérées introduite dans la section VI.2.2. Plusieurs implémentations de cette méthode basées sur des factorisations QR ont été proposées dans [Strobach, 1996], parmi lesquelles les algorithmes LORAF2 et LORAF3. Cependant, comparés à PAST et NIC, LORAF2 est plus coûteux, et LORAF3 est moins performant. Une autre implémentation rapide de la méthode des puissances itérées, l'algorithme NP3 qui repose sur des modifications matricielles de rang 1, est proposée dans [Hua *et al.*, 1999], mais nos simulations numériques ont montré que cet algorithme ne converge pas dans de nombreux cas. Une version orthonormée de l'algorithme PAST, proposée dans [Abed-Meraim *et al.*, 2000], peut être vue comme une implémentation rapide de la méthode des puissances naturelles et s'avère plus performante que PAST, NIC et NP3. En comparaison, la récente méthode API [Badeau *et al.*, 2003c], basée sur la méthode des puissances itérées et sur une nouvelle approximation, a la même complexité que les algorithmes mentionnés ci-dessus, mais fournit une meilleure estimation de l'espace signal.

Ce chapitre présente plusieurs implémentations rapides de la méthode API. Ces algorithmes présentent plusieurs avantages :

- ils peuvent être appliqués soit sur une fenêtre exponentielle infinie ou sur une fenêtre tronquée,
- une base orthonormée de l'espace signal est calculée à *chaque itération*, ce qui est nécessaire pour certaines méthodes d'estimation paramétrique de type sous-espace, comme MUSIC [Schmidt, 1981],
- ils reposent sur une nouvelle approximation, moins restrictive que celle connue sous le nom de *projection approximation*, ce qui permet d'atteindre de meilleurs résultats de poursuite. En particulier, il est montré que les algorithmes PAST et OPAST peuvent être vus comme des approximations de la méthode API rapide.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : la section VII.2 présente une formalisation unifiée pour les diverses formes de fenêtres appliquées aux données. La nouvelle approximation est abordée dans la section VII.3. Notre méthode API est introduite dans la section VII.4, et une implémentation rapide de cet algorithme est proposée dans la section VII.5. Dans la section VII.6, il est montré que PAST et OPAST peuvent être vus comme des approximations de l'algorithme *API rapide* (FAPI). Une méthode pour suivre la structure propre dominante de la matrice de corrélation est proposée dans la section VII.7. Dans la section VII.8, les performances de cette méthode sont comparées à celles de plusieurs algorithmes classiques, parmi lesquels PAST et OPAST. Les principales conclusions de ce chapitre sont résumées dans la section VII.9.

## VII.2 Fenêtrage des données

Cette section présente une formalisation unifiée pour les diverses fenêtres introduites dans la section VI.2.3. Les deux équations (VI.5) et (VI.7) s'écrivent sous la forme

$$\boxed{\mathbf{C}_{xx}(t) = \beta \mathbf{C}_{xx}(t-1) + \mathbf{x}(t) \mathbf{J} \mathbf{x}(t)^H} \quad (\text{VII.1})$$

où  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{J}$  sont définis selon la forme de la fenêtre :

– dans le cas de la fenêtre exponentielle :

$$\underline{J} = 1 \quad (\text{VII.2})$$

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) \quad (\text{VII.3})$$

– dans le cas de la fenêtre tronquée :

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\beta^l \end{bmatrix} \quad (\text{VII.4})$$

$$\underline{\mathbf{x}}(t) = \left[ \mathbf{x}(t) \mid \mathbf{x}(t-l) \right]. \quad (\text{VII.5})$$

Soit  $q$  le rang de la mise à jour impliquée dans l'équation (VII.1). Puisque  $q = 1$  dans le cas de la fenêtre exponentielle et  $q = 2$  dans le cas de la fenêtre tronquée,  $q$  caractérise la forme de la fenêtre. En particulier,  $\underline{\mathbf{x}}(t)$  est une matrice de dimensions  $n \times q$  et  $\underline{J}$  est une matrice de dimension  $q \times q$ .

### VII.3 L'approximation par projection

Nous recherchons maintenant une approximation qui nous permettra de réduire la complexité de la méthode des puissances itérées introduite dans la section VI.2.2. Supposons que  $\mathbf{W}(t-1)$  engendre *exactement* le sous-espace propre principal de la matrice  $\mathbf{C}_{xx}(t)$ . L'équation (VI.2) implique alors

$$\mathbf{C}_{xy}(t) = \mathbf{W}(t-1) \mathbf{C}_{yy}(t) \quad (\text{VII.6})$$

où la matrice  $\mathbf{C}_{yy}(t) \triangleq \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{W}(t-1)$  peut être vue comme la matrice de corrélation des vecteurs de données compressés. Dans ce cas,  $\mathbf{W}(t)$  et  $\mathbf{W}(t-1)$  sont deux matrices orthonormées qui engendrent l'espace image de  $\mathbf{C}_{xy}(t)$ , donc

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}(t-1) \boldsymbol{\Theta}(t) \quad (\text{VII.7})$$

où  $\boldsymbol{\Theta}(t) \triangleq \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{W}(t)$  est une matrice orthonormée de dimension  $r \times r$ . En substituant l'équation (VII.6) dans l'équation (VI.3) et en multipliant à gauche par  $\mathbf{W}(t)^H$ , on obtient la décomposition polaire de  $\mathbf{R}(t)^H$  :

$$\mathbf{R}(t)^H = \mathbf{C}_{yy}(t) \boldsymbol{\Theta}(t) \quad (\text{VII.8})$$

où  $\mathbf{C}_{yy}(t)$  est le facteur défini positif et  $\boldsymbol{\Theta}(t)$  est le facteur orthonormé. A présent supposons que  $\mathbf{W}(t-1)$  engendre *approximativement* le sous-espace propre principal de  $\mathbf{C}_{xx}(t)$ . Les équations (VII.7) et (VII.8) deviennent alors des approximations :

$$\boxed{\mathbf{W}(t) \simeq \mathbf{W}(t-1) \boldsymbol{\Theta}(t)} \quad (\text{VII.9})$$

$$\mathbf{R}(t)^H \simeq \mathbf{C}_{yy}(t) \boldsymbol{\Theta}(t) \quad (\text{VII.10})$$

où la matrice  $\boldsymbol{\Theta}(t)$ , de dimension  $r \times r$ , est *presque* orthonormée.

Par rapport à l'équation (VII.9), l'hypothèse connue sous le nom de *projection approximation* [Yang, 1995] est équivalente à  $\mathbf{W}(t) \simeq \mathbf{W}(t-1)$  à chaque itération<sup>1</sup>. La validité de cette approximation requiert additionnellement que  $\boldsymbol{\Theta}(t)$  soit proche de la matrice identité de dimension  $r \times r$  (notée ici  $\mathbf{I}_r$ ). Dans ce cas, l'équation (VII.10) montre que  $\mathbf{R}(t)^H$  doit être presque définie positive<sup>2</sup>. Par conséquent, le

<sup>1</sup>En fait, la *projection approximation* dans [Yang, 1995] est définie comme  $\mathbf{W}(t')^H \mathbf{x}(t) \approx \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{x}(t) \triangleq \mathbf{y}(t)$   $\forall t' \geq t$ . Il a été démontré dans [Hua *et al.*, 1999, pp. 301] que cette approximation est équivalente à  $\mathbf{W}(t) \simeq \mathbf{W}(t-1)$  à chaque itération.

<sup>2</sup>Inversement, si  $\mathbf{R}(t)^H$  est choisie proche de la seule racine carrée définie positive de  $\boldsymbol{\Phi}(t)$ , la décomposition polaire approchée (VII.10) montre que  $\boldsymbol{\Theta}(t) \simeq \mathbf{I}_r$ , si bien que l'équation (VII.9) implique  $\mathbf{W}(t) \simeq \mathbf{W}(t-1)$ .

choix d'une racine carrée  $\mathbf{R}(t)^H$  de  $\Phi(t)$  est restreint (par exemple  $\mathbf{R}(t)$  ne peut plus être triangulaire supérieure, comme c'était le cas dans [Strobach, 1996]).

L'implémentation de la méthode des puissances naturelles baptisée NP3 [Hua *et al.*, 1999] repose sur cette approximation, mais cet algorithme calcule une matrice  $\mathbf{R}(t)$  qui dévie de la contrainte de structure définie positive. Par conséquent, la *projection approximation* n'est pas valable, et la convergence de cet algorithme n'est pas garantie.

En revanche, les algorithmes présentés dans la section VII.4 ne sont pas confrontés à cette limitation, car ils reposent sur l'approximation moins restrictive (VII.9). De plus, (VII.9) est la meilleure approximation de  $\mathbf{W}(t)$  en terme d'erreur quadratique moyenne, puisque la solution du problème de minimisation

$$\arg \min_{\Theta \in \mathbb{C}^{r \times r}} \|\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(t-1)\Theta\|_F^2$$

est  $\Theta(t) = \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{W}(t)$  (où  $\mathbf{W}(t-1)$  est supposée être orthonormée).

## VII.4 Approximation des Puissances Itérées

Il est possible de réduire la complexité de la méthode des puissances itérées en introduisant l'approximation (VII.9) au temps  $t-1$  dans l'étape (VI.2). Alors la matrice  $\mathbf{C}_{xy}(t)$ , de dimensions  $n \times r$ , se calcule récursivement, comme cela est montré dans la section VII.4.1, et la factorisation (VI.3) peut être mise à jour, comme cela est montré dans la section VII.4.3. Cette mise à jour rapide nécessite l'introduction d'une matrice auxiliaire  $\mathbf{Z}(t)$ , de dimension  $r \times r$ , présentée dans la section VII.4.2.

### VII.4.1 Récurrence pour la matrice $\mathbf{C}_{xy}(t)$

Il est démontré dans cette section que la matrice  $\mathbf{C}_{xy}(t)$  (de dimensions  $n \times r$ ) peut être mise à jour de la même façon que la matrice  $\mathbf{C}_{xx}(t)$  (de dimension  $n \times n$ ) dans l'équation (VII.1) :

$$\boxed{\mathbf{C}_{xy}(t) = \beta \mathbf{C}_{xy}(t-1) \Theta(t-1) + \underline{\mathbf{x}}(t) \underline{\mathbf{J}} \underline{\hat{\mathbf{y}}}(t)^H.} \quad (\text{VII.11})$$

Dans le cas de la fenêtre exponentielle, l'équation (VII.11) fait apparaître une modification de rang un ( $\underline{\mathbf{x}}(t)$  et  $\underline{\hat{\mathbf{y}}}(t)$  sont des vecteurs et  $\underline{\mathbf{J}}$  est un scalaire), alors que dans le cas de la fenêtre tronquée elle fait apparaître une modification de rang deux ( $\underline{\mathbf{x}}(t)$  et  $\underline{\hat{\mathbf{y}}}(t)$  sont des matrices contenant deux colonnes et  $\underline{\mathbf{J}}$  est une matrice de dimension  $2 \times 2$ ).

#### VII.4.1.1 Fenêtre tronquée

Tout d'abord, l'équation (VI.6) s'écrit sous la forme

$$\mathbf{C}_{xx}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{D} \mathbf{X}(t)^H \quad (\text{VII.12})$$

où  $\mathbf{X}(t) \triangleq [\mathbf{x}(t-l+1), \mathbf{x}(t-l+2), \dots, \mathbf{x}(t)]$  est la matrice de données de dimensions  $n \times l$  et  $\mathbf{D}$  est la matrice diagonale  $\text{diag}(\beta^{l-1}, \beta^{l-2}, \dots, \beta, 1)$  de dimension  $l \times l$ .

En substituant l'équation (VII.12) dans l'équation (VI.2), on obtient

$$\mathbf{C}_{xy}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{D} \mathbf{Y}(t)^H \quad (\text{VII.13})$$

où  $\mathbf{Y}(t) \triangleq \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{X}(t)$  est la matrice de données compressée, de dimensions  $r \times l$ . A présent montrons les récurrences pour les matrices  $\mathbf{X}(t)$  et  $\mathbf{Y}(t)$ . La première est immédiate :

$$[\mathbf{x}(t-l) \mid \mathbf{X}(t)] = [\mathbf{X}(t-1) \mid \mathbf{x}(t)]. \quad (\text{VII.14})$$

Ensuite en multipliant l'équation (VII.14) à gauche par  $\mathbf{W}(t-1)^H$ , on obtient

$$[ \mathbf{v}(t-l) \mid \mathbf{Y}(t) ] = [ \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{X}(t-1) \mid \mathbf{y}(t) ] \quad (\text{VII.15})$$

où

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{x}(t) \quad (\text{VII.16})$$

$$\mathbf{v}(t-l) = \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{x}(t-l) \quad (\text{VII.17})$$

sont des vecteurs de données compressés de dimension  $r$ . En appliquant l'approximation (VII.9) à l'instant  $t-1$  à l'équation (VII.15), on obtient la récurrence  $[ \mathbf{v}(t-l) \mid \mathbf{Y}(t) ] \simeq [ \mathbf{V}(t-1) \mid \mathbf{y}(t) ]$ , où  $\mathbf{V}(t-1)$  est la matrice de données compressée de dimensions  $r \times l$

$$\mathbf{V}(t-1) \triangleq \mathbf{\Theta}(t-1)^H \mathbf{Y}(t-1).$$

A partir de maintenant, les définitions exactes de  $\mathbf{Y}(t)$  et  $\mathbf{V}(t-1)$  sont donc remplacées par

$$[ \hat{\mathbf{v}}(t-l) \mid \hat{\mathbf{Y}}(t) ] \triangleq [ \hat{\mathbf{V}}(t-1) \mid \mathbf{y}(t) ] \quad (\text{VII.18})$$

$$\hat{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{\Theta}(t)^H \hat{\mathbf{Y}}(t) \quad (\text{VII.19})$$

où le vecteur  $\hat{\mathbf{v}}(t-l)$  de dimension  $r$ , défini par la première colonne dans le membre de gauche de l'équation (VII.18), est une approximation du vecteur  $\mathbf{v}(t-l)$ , et  $\hat{\mathbf{Y}}(t)$  et  $\hat{\mathbf{V}}(t)$  sont des approximations de  $\mathbf{Y}(t)$  et  $\mathbf{V}(t)$ . Les équations (VII.13), (VII.14), (VII.19) et (VII.18) impliquent finalement

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{xy}(t) = & \beta \mathbf{C}_{xy}(t-1) \mathbf{\Theta}(t-1) \\ & + \mathbf{x}(t) \mathbf{y}(t)^H - \beta^l \mathbf{x}(t-l) \hat{\mathbf{v}}(t-l)^H \end{aligned} \quad (\text{VII.20})$$

Cette récurrence est un cas particulier de l'équation (VII.11), où  $\underline{\mathbf{J}}$  et  $\underline{\mathbf{x}}(t)$  sont définis dans les équations (VII.4) et (VII.5) et la matrice de dimension  $r \times q$  (avec  $q = 2$ )

$$\underline{\hat{\mathbf{y}}}(t) \triangleq [ \mathbf{y}(t) \mid \hat{\mathbf{v}}(t-l) ] \quad (\text{VII.21})$$

est une approximation de

$$\underline{\mathbf{y}}(t) \triangleq \mathbf{W}(t-1)^H \underline{\mathbf{x}}(t) = [ \mathbf{y}(t) \mid \mathbf{v}(t-l) ]. \quad (\text{VII.22})$$

#### VII.4.1.2 Fenêtre exponentielle

En substituant l'équation (VI.5) dans l'équation (VI.2), on obtient

$$\mathbf{C}_{xy}(t) = \beta \mathbf{C}_{xx}(t-1) \mathbf{W}(t-1) + \mathbf{x}(t) \mathbf{y}(t)^H. \quad (\text{VII.23})$$

En appliquant l'approximation (VII.9) à l'instant  $t-1$ , l'équation (VII.23) peut être remplacée par la récurrence suivante :

$$\mathbf{C}_{xy}(t) = \beta \mathbf{C}_{xy}(t-1) \mathbf{\Theta}(t-1) + \mathbf{x}(t) \mathbf{y}(t)^H. \quad (\text{VII.24})$$

Cette récurrence est un cas particulier de l'équation (VII.11), où  $\underline{\mathbf{J}}$  et  $\underline{\mathbf{x}}(t)$  sont définis dans les équations (VII.2) et (VII.3), et la matrice de dimensions  $r \times q$  (avec  $q = 1$ )  $\underline{\hat{\mathbf{y}}}(t) \triangleq \mathbf{y}(t)$  est maintenant égale au vecteur  $\underline{\mathbf{y}}(t) \triangleq \mathbf{W}(t-1)^H \underline{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{y}(t)$ .



### VII.4.2 Récurrence pour la matrice $\mathbf{Z}(t)$

Grâce à l'équation (VII.11), la factorisation (VI.3) peut être mise à jour. Ce calcul nécessite l'introduction d'une matrice auxiliaire, notée  $\mathbf{Z}(t)$ . Soit  $\mathbf{S}(t-1) \triangleq (\mathbf{R}(t-1) \mathbf{\Theta}(t-1))^H$ . Supposons que la matrice  $\mathbf{S}(t-1)$ , de dimension  $r \times r$ , est inversible. Alors posons

$$\mathbf{Z}(t-1) \triangleq \mathbf{S}(t-1)^{-1}. \quad (\text{VII.25})$$

**Proposition VII.4.1.** *La matrice de dimension  $r \times r$*

$$\mathbf{S}(t) \triangleq (\mathbf{R}(t) \mathbf{\Theta}(t))^H \quad (\text{VII.26})$$

*est inversible si et seulement si la matrice  $\beta \underline{\mathbf{J}}^{-1} + \underline{\mathbf{y}}(t)^H \underline{\mathbf{h}}(t)$ , de dimension  $q \times q$ , est inversible, où*

$$\underline{\mathbf{h}}(t) \triangleq \mathbf{Z}(t-1) \hat{\underline{\mathbf{y}}}(t). \quad (\text{VII.27})$$

*est de dimension  $r \times q$ . Dans ce cas, la matrice de dimension  $r \times r$*

$$\mathbf{Z}(t) \triangleq \mathbf{S}(t)^{-1} \quad (\text{VII.28})$$

*satisfait la récurrence*

$$\boxed{\mathbf{Z}(t) = \frac{1}{\beta} \mathbf{\Theta}(t)^H (\mathbf{I}_r - \underline{\mathbf{g}}(t) \underline{\mathbf{y}}(t)^H) \mathbf{Z}(t-1) \mathbf{\Theta}(t)^{-H}} \quad (\text{VII.29})$$

où  $\underline{\mathbf{g}}(t)$  est la matrice de dimensions  $r \times q$

$$\underline{\mathbf{g}}(t) \triangleq \underline{\mathbf{h}}(t) (\beta \underline{\mathbf{J}}^{-1} + \underline{\mathbf{y}}(t)^H \underline{\mathbf{h}}(t))^{-1}. \quad (\text{VII.30})$$

La démonstration de la proposition VII.4.1 figure dans la section B.3 des annexes, page 194.

### VII.4.3 Récurrence pour la matrice $\mathbf{W}(t)$

Ensuite, la proposition VII.4.2 introduit une mise à jour rapide de la base de l'espace signal. Sa démonstration figure également dans la section B.3 des annexes, page 194.

**Proposition VII.4.2.** *Si la matrice  $\beta \underline{\mathbf{J}}^{-1} + \underline{\mathbf{y}}(t)^H \underline{\mathbf{h}}(t)$ , de dimension  $q \times q$ , est inversible,  $\mathbf{W}(t)$  satisfait la récurrence*

$$\boxed{\mathbf{W}(t) = (\mathbf{W}(t-1) + \underline{\mathbf{e}}(t) \underline{\mathbf{g}}(t)^H) \mathbf{\Theta}(t)} \quad (\text{VII.31})$$

où  $\underline{\mathbf{e}}(t)$  est la matrice de dimensions  $n \times q$

$$\underline{\mathbf{e}}(t) \triangleq \underline{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{W}(t-1) \underline{\mathbf{y}}(t). \quad (\text{VII.32})$$

Si  $\beta \underline{\mathbf{J}}^{-1} + \underline{\mathbf{y}}(t)^H \underline{\mathbf{h}}(t)$  est singulière, les matrices  $\mathbf{Z}(t)$  et  $\mathbf{W}(t)$  ne peuvent plus être mises à jour avec les équations (VII.29) et (VII.31). En pratique, nous n'avons jamais rencontré ce cas singulier dans nos simulations numériques<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Une solution consiste à calculer  $\mathbf{W}(t)$  et  $\mathbf{R}(t)$  en utilisant la SVD ou la factorisation QR de  $\mathbf{C}_{xy}(t)$ . Alors on en déduit  $\mathbf{\Theta}(t) = \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{W}(t)$ . Le calcul complet requiert  $O(nr^2)$  opérations ; cette technique doit être utilisée tant que  $\mathbf{R}(t)$  ou  $\mathbf{\Theta}(t)$  reste singulière. Quand les deux matrices  $\mathbf{R}(t)$  et  $\mathbf{\Theta}(t)$  redeviennent inversibles, alors on calcule  $\mathbf{Z}(t)$ , et l'algorithme peut poursuivre le traitement adaptatif

Puisque  $\mathbf{W}(t-1)$  est orthonormée,  $\underline{\mathbf{e}}(t)$  est orthogonal à  $\mathbf{W}(t-1)$ . De plus, l'orthonormalité de  $\mathbf{W}(t)$ , associée à l'équation (VII.31), implique

$$\boxed{\boldsymbol{\Theta}(t) \boldsymbol{\Theta}(t)^H = (\mathbf{I}_r + \underline{\mathbf{g}}(t) (\underline{\mathbf{e}}(t)^H \underline{\mathbf{e}}(t)) \underline{\mathbf{g}}(t)^H)^{-1}.} \quad (\text{VII.33})$$

Par conséquent,  $\boldsymbol{\Theta}(t)$  est une racine carrée inverse de la matrice définie positive de dimension  $r \times r$

$$\mathbf{I}_r + \underline{\mathbf{g}}(t) (\underline{\mathbf{e}}(t)^H \underline{\mathbf{e}}(t)) \underline{\mathbf{g}}(t)^H.$$

Le choix de cette racine carrée inverse n'affecte pas la performance de la poursuite<sup>4</sup>. Le pseudo-code de l'algorithme API à fenêtre exponentielle est présenté dans la table VII.1<sup>5</sup>, et celui de l'algorithme *API à fenêtre tronquée* (TW-API) est présenté dans la table VII.2. La première section de API est exactement la même que celle de l'algorithme PAST [Yang, 1995]; elle requiert seulement  $nr + r^2 + O(r)$  opérations par itération, alors que le reste de l'algorithme a une complexité de  $nr^2 + o(nr^2)$  opérations. De même, la première section de TW-API est similaire à la version à fenêtre rectangulaire de PAST [Badeau *et al.*, 2003a]; elle requiert seulement  $2nr + 2r^2 + O(r)$  opérations, alors que le reste de l'algorithme a une complexité de  $(n+l)r^2 + o(nr^2)$  opérations. Les implémentations directes de API et TW-API présentées dans les tables VII.1 et VII.2 sont d'un intérêt limité, puisque un certain nombre d'algorithmes plus rapides ont déjà été proposés dans la littérature, dont la complexité est de  $O(nr)$  opérations (parmi lesquels [Yang, 1995, Rabideau, 1996, Miao et Hua, 1998, Douglas, 2000, Abed-Meraim *et al.*, 2000, Badeau *et al.*, 2003a] sont illustrés dans la section VII.8). Une implémentation plus rapide de API et TW-API est proposée dans la section VII.5.

## VII.5 Méthode API rapide

Dans cette section, une implémentation rapide de la méthode API est proposée, reposant sur un choix particulier de la matrice  $\boldsymbol{\Theta}(t)$ . Supposons que  $\beta \underline{\mathbf{J}}^{-1} + \underline{\mathbf{y}}(t)^H \underline{\mathbf{h}}(t)$  est inversible, de sorte que  $\boldsymbol{\Theta}(t)$  est également inversible. Ci-dessous, la matrice identité de dimension  $q \times q$  est notée  $\underline{\mathbf{I}}_q$ .

### VII.5.1 Une solution particulière à l'équation (VII.33)

Soit  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$  une racine carrée de la matrice  $\underline{\mathbf{e}}(t)^H \underline{\mathbf{e}}(t) = \underline{\mathbf{x}}(t)^H \underline{\mathbf{x}}(t) - \underline{\mathbf{y}}(t)^H \underline{\mathbf{y}}(t)$  de dimension  $q \times q$  :

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)^H = \underline{\mathbf{x}}(t)^H \underline{\mathbf{x}}(t) - \underline{\mathbf{y}}(t)^H \underline{\mathbf{y}}(t). \quad (\text{VII.35})$$

<sup>4</sup>Soit  $\boldsymbol{\Theta}^P(t)$  la seule racine carrée définie positive. Alors  $\boldsymbol{\Theta}(t)$  s'écrit sous la forme

$$\boldsymbol{\Theta}(t) = \boldsymbol{\Theta}^P(t) \mathbf{U}(t) \quad (\text{VII.34})$$

où  $\mathbf{U}(t)$  est une matrice orthonormée de dimension  $r \times r$ . En substituant l'équation (VII.34) dans l'équation (VII.31), on obtient

$$\mathbf{W}(t) = \left\{ \left( \mathbf{W}(t-1) + \mathbf{e}(t) \mathbf{g}(t)^H \right) \boldsymbol{\Theta}^P(t) \right\} \mathbf{U}(t).$$

Cette dernière équation montre que  $\mathbf{U}(t)$  n'affecte pas le sous-espace engendré par  $\mathbf{W}(t)$ ; elle affecte seulement la base orthonormée particulière  $\mathbf{W}(t)$  de ce sous-espace. Par conséquent, le choix d'une racine carrée inverse  $\boldsymbol{\Theta}(t)$  particulière n'a pas d'impact sur la performance de la poursuite du sous-espace.

<sup>5</sup>Les valeurs initiales  $\mathbf{W}(0)$  et  $\mathbf{Z}(0)$  doivent être choisies de manière adéquate :

- $\mathbf{W}(0)$  devrait être une matrice orthonormée de dimensions  $n \times r$ ,
- $\mathbf{Z}(0)$  devrait être une matrice définie positive de dimension  $r \times r$ .

Les deux matrices peuvent être déterminées à partir d'un bloc initial de données ou de façon arbitraire. Le moyen le plus simple, cependant, est de poser  $\mathbf{W}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{I}_r$ . Le choix de ces valeurs initiales affecte le comportement transitoire mais non les performances en régime stable de l'algorithme.

TAB. VII.1 – Algorithme API à fenêtre exponentielle

| <b>Initialisation :</b>   |          |              |
|---|----------|--------------|
| $\mathbf{W}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} \end{bmatrix}, \mathbf{Z}(0) = \mathbf{I}_r$ |          |              |
| A chaque itération faire  |          |              |
| Vecteur d'entrée : $\mathbf{x}(t)$  |          |              |
| <b>Section principale de PAST</b>   |          |              |
| $\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{x}(t)$   | (VII.16) | $nr$         |
| $\mathbf{h}(t) = \mathbf{Z}(t-1) \mathbf{y}(t)$   | (VII.27) | $r^2$        |
| $\mathbf{g}(t) = \frac{\mathbf{h}(t)}{\beta + \mathbf{y}(t)^H \mathbf{h}(t)}$   | (VII.30) | $2r$         |
| <b>Section principale de API</b>  |          |              |
| $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{W}(t-1) \mathbf{y}(t)$   | (VII.32) | $nr$         |
| $\Theta(t) = (\mathbf{I}_r + \ \mathbf{e}(t)\ ^2 \mathbf{g}(t) \mathbf{g}(t)^H)^{-\frac{1}{2}}$                           | (VII.33) | $n + O(r^3)$ |
| $\mathbf{Z}(t) = \frac{1}{\beta} \Theta(t)^H (\mathbf{I}_r - \mathbf{g}(t) \mathbf{y}(t)^H)$                              | (VII.29) | $O(r^3)$     |
| $\mathbf{Z}(t-1) \Theta(t)^{-H}$  |          |              |
| $\mathbf{W}(t) = (\mathbf{W}(t-1) + \mathbf{e}(t) \mathbf{g}(t)^H) \Theta(t)$   | (VII.31) | $nr^2 + nr$  |

En substituant l'équation (VII.35) dans l'équation (VII.33) et en appliquant le lemme d'inversion matricielle A.8.1 (dans la page 182 des annexes), on montre que<sup>6</sup>

$$\Theta(t) \Theta(t)^H = \mathbf{I}_r - \underline{\mathbf{g}}(t) \underline{\varepsilon}(t) \underline{\rho}(t)^{-1} \underline{\varepsilon}(t)^H \underline{\mathbf{g}}(t)^H \quad (\text{VII.36})$$

où  $\underline{\rho}(t)$  est la matrice définie positive de dimension  $q \times q$

$$\underline{\rho}(t) = \underline{\mathbf{I}}_p + \underline{\varepsilon}(t)^H (\underline{\mathbf{g}}(t)^H \underline{\mathbf{g}}(t)) \underline{\varepsilon}(t). \quad (\text{VII.37})$$

En considérant l'équation (VII.36), on recherche une solution particulière de la forme

$$\Theta(t) = \mathbf{I}_r - \underline{\mathbf{g}}(t) \underline{\varepsilon}(t) \underline{\sigma}(t)^{-1} \underline{\varepsilon}(t)^H \underline{\mathbf{g}}(t)^H \quad (\text{VII.38})$$

où  $\underline{\sigma}(t)$  est une matrice inversible de dimension  $q \times q$ . L'intérêt de cette approche est que le problème d'extraction d'une matrice carrée de dimension  $r \times r$  dans l'équation (VII.36) est remplacé par l'extraction d'une racine carrée de dimension  $q \times q$ . En effet, en substituant l'équation (VII.38) dans l'équation (VII.36) on obtient une condition suffisante :

$$\underline{\sigma}(t)^{-1} + \underline{\sigma}(t)^{-H} + \underline{\sigma}(t)^{-1} (\underline{\mathbf{I}}_p - \underline{\rho}(t)) \underline{\sigma}(t)^{-H} = \underline{\rho}(t)^{-1}.$$

En multipliant les deux membres de cette dernière équation à gauche par  $\underline{\sigma}(t)$  et en les multipliant à droite par  $\underline{\sigma}(t)^H$ , on obtient l'équation<sup>7</sup>

$$(\underline{\sigma}(t) - \underline{\rho}(t)) \underline{\rho}(t)^{-1} (\underline{\sigma}(t) - \underline{\rho}(t))^H = \underline{\mathbf{I}}_p$$

<sup>6</sup> Le lemme A.8.1 est appliqué avec  $\mathbf{C} = \mathbf{I}_r$ ,  $\mathbf{A} = \underline{\mathbf{g}}(t) \underline{\varepsilon}(t)$ ,  $\mathbf{D} = \underline{\mathbf{I}}_p$  et  $\mathbf{B} = \underline{\varepsilon}(t)^H \underline{\mathbf{g}}(t)^H$ . En particulier, l'inversibilité de  $\Theta(t)$  est équivalente à celle de  $\underline{\rho}(t)$ .

<sup>7</sup>Rappelons que  $\underline{\rho}(t)$  est une matrice hermitienne.

TAB. VII.2 – Algorithme API à fenêtre tronquée (TW-API)

| <b>Initialisation :</b>   |          |               |
|---|----------|---------------|
| $\mathbf{W}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} \end{bmatrix}, \mathbf{Z}(0) = \mathbf{I}_r, \mathbf{X}(0) = \mathbf{0}_{n \times l}, \widehat{\mathbf{V}}(0) = \mathbf{0}_{r \times l}$ |          |               |
| A chaque itération faire  |          |               |
| Vecteur d'entrée : $\mathbf{x}(t)$  |          |               |
| <b>Section similaire SW – PAST</b>  |          |               |
| $\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t-l) &   & \mathbf{X}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t-1) &   & \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}$   | (VII.14) |               |
| $\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{x}(t)$   | (VII.16) | $nr$          |
| $\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{v}}(t-l) &   & \widehat{\mathbf{Y}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{V}}(t-1) &   & \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}$   | (VII.18) |               |
| $\mathbf{v}(t-l) = \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{x}(t-l)$   | (VII.17) | $nr$          |
| $\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) &   & \mathbf{x}(t-l) \end{bmatrix}$   | (VII.5)  |               |
| $\underline{\widehat{\mathbf{y}}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) &   & \widehat{\mathbf{v}}(t-l) \end{bmatrix}$   | (VII.21) |               |
| $\underline{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) &   & \mathbf{v}(t-l) \end{bmatrix}$   | (VII.22) |               |
| $\underline{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{Z}(t-1) \underline{\widehat{\mathbf{y}}}(t)$   | (VII.27) | $2r^2$        |
| $\underline{\mathbf{g}}(t) = \underline{\mathbf{h}}(t) (\beta \underline{\mathbf{J}}^{-1} + \underline{\mathbf{y}}(t)^H \underline{\mathbf{h}}(t))^{-1}$  | (VII.30) | $8r$          |
| <b>Section principale de TW – API</b>   |          |               |
| $\underline{\mathbf{e}}(t) = \underline{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{W}(t-1) \underline{\mathbf{y}}(t)$   | (VII.32) | $2nr$         |
| $\Theta(t) = (\mathbf{I}_r + \underline{\mathbf{g}}(t) (\underline{\mathbf{e}}(t)^H \underline{\mathbf{e}}(t)) \underline{\mathbf{g}}(t)^H)^{-\frac{1}{2}}$   | (VII.33) | $4n + O(r^3)$ |
| $\mathbf{Z}(t) = \frac{1}{\beta} \Theta(t)^H (\mathbf{I}_r - \underline{\mathbf{g}}(t) \underline{\mathbf{y}}(t)^H)$  | (VII.29) | $O(r^3)$      |
| $\mathbf{Z}(t-1) \Theta(t)^{-H}$  | (VII.29) |               |
| $\mathbf{W}(t) = (\mathbf{W}(t-1) + \underline{\mathbf{e}}(t) \underline{\mathbf{g}}(t)^H) \Theta(t)$   | (VII.31) | $nr^2 + 2nr$  |
| $\widehat{\mathbf{V}}(t) = \Theta(t)^H \widehat{\mathbf{Y}}(t)$   | (VII.19) | $lr^2$        |

dont la solution est

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{\rho}(t) + \underline{\rho}(t)^{\frac{1}{2}H}. \quad (\text{VII.39})$$

Même si d'autres choix seraient possibles, à partir de maintenant nous supposons que la racine carrée de  $\underline{\rho}(t)$  qui est impliquée dans l'équation ci-dessus est la seule racine carrée définie positive. Cette condition garantit que  $\underline{\sigma}(t)$  est définie positive, si bien que  $\Theta(t)$  est hermitienne<sup>8</sup>. On définit alors la matrice définie positive de dimension  $q \times q$

$$\underline{\tau}(t) = \underline{\varepsilon}(t) \sigma(t)^{-1} \underline{\varepsilon}(t)^H. \quad (\text{VII.40})$$

En substituant l'équation (VII.40) dans l'équation (VII.38), on obtient

$$\Theta(t) = \mathbf{I}_r - \underline{\mathbf{g}}(t) \underline{\tau}(t) \underline{\mathbf{g}}(t)^H. \quad (\text{VII.41})$$

<sup>8</sup>Plus précisément,  $\Theta(t)$  est définie positive. En effet, l'équation (VII.39) montre que  $\underline{\sigma}(t)$  et  $\underline{\rho}(t)$  sont conjointement diagonalisables, et les valeurs propres de  $\underline{\sigma}(t)$  sont strictement supérieures à celles de  $\underline{\rho}(t)$ . Par conséquent,  $\underline{\rho}(t)^{-1} - \underline{\sigma}(t)^{-1}$  est une matrice définie positive. Alors en soustrayant l'équation (VII.36) à l'équation (VII.38), on montre que  $\Theta(t)$  est définie positive.

### VII.5.2 Implémentation rapide de la solution particulière

A partir de la mise à jour de rang faible de la matrice  $\Theta(t)$  dans l'équation (VII.41), on montre ci-dessous que les matrices  $\mathbf{Z}(t)$ ,  $\mathbf{W}(t)$  et  $\widehat{\mathbf{V}}(t)$  peuvent également être mises à jour efficacement. Considérons la matrice de dimension  $q \times q$

$$\underline{\eta}(t) = \underline{I}_p - (\underline{\mathbf{g}}(t)^H \underline{\mathbf{g}}(t)) \underline{\tau}(t). \quad (\text{VII.42})$$

Puisque  $\Theta(t)$  est inversible, le lemme d'inversion matricielle A.8.1 montre que  $\underline{\eta}(t)$  l'est également<sup>9</sup>. Alors en substituant l'équation (VII.41) dans l'équation (VII.29), on obtient

$$\boxed{\mathbf{Z}(t) = \frac{1}{\beta} (\mathbf{Z}(t-1) - \underline{\mathbf{g}}(t) \underline{\mathbf{h}}'(t)^H + \underline{\boldsymbol{\epsilon}}(t) \underline{\mathbf{g}}(t)^H)} \quad (\text{VII.43})$$

où les matrices  $\underline{\mathbf{h}}'(t)$  et  $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}(t)$ , de dimensions  $r \times q$ , sont définies par

$$\underline{\mathbf{y}}'(t) = \underline{\mathbf{y}}(t) \underline{\eta}(t) + \underline{\mathbf{g}}(t) \underline{\tau}(t) \quad (\text{VII.44})$$

$$\underline{\mathbf{h}}'(t) = \mathbf{Z}(t-1)^H \underline{\mathbf{y}}'(t) \quad (\text{VII.45})$$

$$\underline{\boldsymbol{\epsilon}}(t) = (\mathbf{Z}(t-1) \underline{\mathbf{g}}(t) - \underline{\mathbf{g}}(t) (\underline{\mathbf{h}}'(t)^H \underline{\mathbf{g}}(t))) (\underline{\tau}(t) \underline{\eta}(t)^{-1})^H \quad (\text{VII.46})$$

Ensuite, en substituant l'équation (VII.41) dans l'équation (VII.31), on montre que

$$\boxed{\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}(t-1) + \underline{\mathbf{e}}'(t) \underline{\mathbf{g}}(t)^H} \quad (\text{VII.47})$$

où  $\underline{\mathbf{e}}'(t)$  est la matrice de dimensions  $n \times q$

$$\underline{\mathbf{e}}'(t) = \underline{\mathbf{e}}(t) \underline{\eta}(t) - \mathbf{W}(t-1) \underline{\mathbf{g}}(t) \underline{\tau}(t). \quad (\text{VII.48})$$

Par ailleurs, en substituant les équations (VII.32) et (VII.44) dans l'équation (VII.48), on obtient

$$\underline{\mathbf{e}}'(t) = \underline{\mathbf{x}}(t) \underline{\eta}(t) - \mathbf{W}(t-1) \underline{\mathbf{y}}'(t). \quad (\text{VII.49})$$

Enfin, en substituant l'équation (VII.41) dans l'équation (VII.19), on montre que

$$\widehat{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{Y}(t) - \underline{\mathbf{g}}(t) (\underline{\mathbf{g}}(t) \underline{\tau}(t))^H \mathbf{Y}(t). \quad (\text{VII.50})$$

Le pseudo-code de l'algorithme FAPI à fenêtre exponentielle est présenté dans la table VII.3, et celui de l'algorithme *FAPI à fenêtre tronquée* (TW-FAPI) est présenté dans la table VII.4. La complexité globale de FAPI est de  $n(3r+2) + 5r^2 + O(r)$  MACs par itération<sup>10</sup> (alors que les complexités de PAST [Yang, 1995] et OPAST [Abed-Meraim *et al.*, 2000] sont  $3nr + 2r^2 + O(r)$  et  $n(4r+1) + 2r^2 + O(r)$  respectivement). La complexité globale de TW-FAPI est de  $n(6r+8) + 4lr + O(r^2)$  MACs par itération<sup>11</sup> (alors que les complexités de *PAST à fenêtre rectangulaire* (SW-PAST) et *OPAST à fenêtre rectangulaire* (SW-OPAST) [Badeau *et al.*, 2003a] sont respectivement  $5nr + 4r^2 + O(r)$  et  $n(15r+28) + 12r^2 + O(r)$ ). Le terme  $4lr$  dans la complexité de TW-FAPI peut rendre cet algorithme plus coûteux dans des applications pour lesquelles  $l$  est beaucoup plus grand que  $n$ . Cependant, dans le contexte de l'analyse spectrale, il a été démontré que les bornes de Cramér-Rao optimales sont obtenues pour  $\frac{1}{2}n \leq l \leq 2n$  (*cf.* section III.2.2).

<sup>9</sup> Le lemme A.8.1 est appliqué à l'équation (VII.41), avec  $\mathbf{C} = \underline{I}_p$ ,  $\mathbf{A} = \underline{\mathbf{g}}(t) \underline{\tau}(t)$ ,  $\mathbf{D} = -\underline{I}_p$  et  $\mathbf{B} = \underline{\mathbf{g}}(t)^H$ .

<sup>10</sup> Cette implémentation de FAPI est plus rapide que celle proposée dans [Badeau *et al.*, 2003c], dont le coût global était égal à  $n(4r+2) + 5r^2 + O(r)$ .

<sup>11</sup> Cette implémentation de TW-FAPI est aussi plus rapide que celle proposée dans [Badeau *et al.*, 2003d], dont le coût global était égal à  $n(8r+8) + 4lr + O(r^2)$ .

TAB. VII.3 – Algorithme API rapide à fenêtre exponentielle (FAPI)

| <b>Initialisation</b> (cf. table VII.1)  |          |            |
|--|----------|------------|
| A chaque itération faire   |          |            |
| Vecteur d'entrée : $\mathbf{x}(t)$   |          |            |
| <b>Section principale de PAST</b> (cf. table VII.1)  |          |            |
| <b>Section principale de FAPI :</b>  |          |            |
| $\varepsilon^2(t) = \ \mathbf{x}(t)\ ^2 - \ \mathbf{y}(t)\ ^2$   | (VII.35) | $n + r$    |
| $\tau(t) = \frac{\varepsilon^2(t)}{1 + \varepsilon^2(t)\ \mathbf{g}(t)\ ^2 + \sqrt{1 + \varepsilon^2(t)\ \mathbf{g}(t)\ ^2}}$        | (VII.40) | $r$        |
| $\eta(t) = 1 - \tau(t)\ \mathbf{g}(t)\ ^2$   | (VII.42) | 1          |
| $\mathbf{y}'(t) = \eta(t)\mathbf{y}(t) + \tau(t)\mathbf{g}(t)$   | (VII.44) | $2r$       |
| $\mathbf{h}'(t) = \mathbf{Z}(t-1)^H \mathbf{y}'(t)$  | (VII.45) | $r^2$      |
| $\boldsymbol{\epsilon}(t) = \frac{\tau(t)}{\eta(t)} (\mathbf{Z}(t-1)\mathbf{g}(t) - (\mathbf{h}'(t)^H \mathbf{g}(t)) \mathbf{g}(t))$ | (VII.46) | $r^2 + 3r$ |
| $\mathbf{Z}(t) = \frac{1}{\beta} (\mathbf{Z}(t-1) - \mathbf{g}(t)\mathbf{h}'(t)^H + \boldsymbol{\epsilon}(t)\mathbf{g}(t)^H)$        | (VII.43) | $2r^2$     |
| $\mathbf{e}'(t) = \eta(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{W}(t-1)\mathbf{y}'(t)$  | (VII.49) | $nr + n$   |
| $\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}(t-1) + \mathbf{e}'(t)\mathbf{g}(t)^H$  | (VII.47) | $nr$       |

## VII.6 Lien avec les algorithmes PAST et OPAST

Dans cette section, nous montrons que l'algorithme PAST à fenêtre exponentielle peut être vu comme une approximation au premier ordre de l'algorithme FAPI. En effet, l'erreur  $\mathbf{e}(t)$  est la composante de  $\mathbf{x}(t)$  qui n'appartient pas au sous-espace engendré par  $\mathbf{W}(t-1)$ . Ainsi, si ce sous-espace varie lentement, et si le RSB est élevé,  $\mathbf{e}(t) \simeq \mathbf{0}$ . Si le terme du deuxième ordre  $\|\mathbf{e}(t)\|^2$  est négligé dans la table VII.3,  $\tau(t) = 0$ ,  $\eta(t) = 1$  et  $\boldsymbol{\Theta}(t)$  devient la matrice identité de dimension  $r \times r$ . Alors les équations (VII.47) et (VII.43) deviennent

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}(t-1) + \mathbf{e}(t)\mathbf{g}(t)^H \quad (\text{VII.51})$$

$$\mathbf{Z}(t) = \frac{1}{\beta} (\mathbf{Z}(t-1) - \mathbf{g}(t)\mathbf{h}(t)^H) \quad (\text{VII.52})$$

(en particulier, on montre par récurrence que  $\mathbf{Z}(t)$  est toujours hermitienne). Par conséquent, cette approximation au premier ordre de la méthode FAPI est une implémentation exacte de l'algorithme PAST [Yang, 1995], qui fournit seulement une base *presque* orthonormée de l'espace signal. Par ailleurs, un examen approfondi de l'algorithme OPAST présenté dans [Abed-Meraim *et al.*, 2000] montre que  $\mathbf{W}(t)$  est mise à jour comme dans l'équation (VII.47) (ce qui garantit l'orthonormalité, contrairement à l'équation (VII.51)). Cependant,  $\mathbf{Z}(t)$  est mise à jour comme dans l'équation (VII.52). Par conséquent, OPAST peut être vu comme un intermédiaire entre PAST et FAPI.

## VII.7 Poursuite des valeurs et vecteurs propres principaux de la matrice de corrélation

Dans cette section est proposée une méthode pour suivre la structure propre complète de la matrice de corrélation. Cette méthode repose sur le résultat suivant :

TAB. VII.4 – Algorithme API rapide à fenêtre tronquée (TW-FAPI)

| <b>Initialisation</b> (cf. table VII.2)   |          |              |
|---|----------|--------------|
| A chaque itération faire  |          |              |
| <b>Section similaire SW – PAST</b> (cf. table VII.2)  |          |              |
| <b>Section principale de TW – FAPI</b>  |          |              |
| $\underline{\varepsilon}(t) = (\underline{\mathbf{x}}(t)^H \underline{\mathbf{x}}(t) - \underline{\mathbf{y}}(t)^H \underline{\mathbf{y}}(t))^{\frac{1}{2}}$  | (VII.35) | $4n + 4r$    |
| $\underline{\rho}(t) = \underline{I}_p + \underline{\varepsilon}(t)^H (\underline{\mathbf{g}}(t)^H \underline{\mathbf{g}}(t)) \underline{\varepsilon}(t)$   | (VII.37) | $4r$         |
| $\underline{\tau}(t) = \underline{\varepsilon}(t) \left( \underline{\rho}(t) + \underline{\rho}(t)^{\frac{1}{2}H} \right)^{-1} \underline{\varepsilon}(t)^H$  | (VII.40) | $O(1)$       |
| $\underline{\eta}(t) = \underline{I}_p - (\underline{\mathbf{g}}(t)^H \underline{\mathbf{g}}(t)) \underline{\tau}(t)$   | (VII.42) | $O(1)$       |
| $\underline{\mathbf{y}}'(t) = \underline{\mathbf{y}}(t) \underline{\eta}(t) + \underline{\mathbf{g}}(t) \underline{\tau}(t)$  | (VII.44) | $8r$         |
| $\underline{\mathbf{h}}'(t) = \underline{\mathbf{Z}}(t-1)^H \underline{\mathbf{y}}'(t)$   | (VII.45) | $2r^2$       |
| $\underline{\varepsilon}(t) = (\underline{\mathbf{Z}}(t-1) \underline{\mathbf{g}}(t) - \underline{\mathbf{g}}(t) (\underline{\mathbf{h}}'(t)^H \underline{\mathbf{g}}(t)))$<br>$(\underline{\tau}(t) \underline{\eta}(t)^{-1})^H$ | (VII.46) | $2r^2 + 12r$ |
| $\underline{\mathbf{Z}}(t) = \frac{1}{\beta} (\underline{\mathbf{Z}}(t-1) - \underline{\mathbf{g}}(t) \underline{\mathbf{h}}'(t)^H + \underline{\varepsilon}(t) \underline{\mathbf{g}}(t)^H)$                                     | (VII.43) | $4r^2$       |
| $\underline{\mathbf{e}}'(t) = \underline{\mathbf{x}}(t) \underline{\eta}(t) - \underline{\mathbf{W}}(t-1) \underline{\mathbf{y}}'(t)$   | (VII.49) | $2nr + 4n$   |
| $\underline{\mathbf{W}}(t) = \underline{\mathbf{W}}(t-1) + \underline{\mathbf{e}}'(t) \underline{\mathbf{g}}(t)^H$  | (VII.47) | $2nr$        |
| $\widehat{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{Y}(t) - \underline{\mathbf{g}}(t) (\underline{\mathbf{g}}(t) \underline{\tau}(t))^H \mathbf{Y}(t)$   | (VII.50) | $4lr$        |

**Proposition VII.7.1.** Soient  $\lambda_1(t) \geq \dots \geq \lambda_r(t) > 0$  les  $r$  valeurs propres de  $\mathbf{C}_{xx}(t)$  de plus grande amplitude. Supposons que la matrice orthonormée  $\mathbf{W}(t)$ , de dimensions  $n \times r$ , engendre le sous-espace propre principal de  $\mathbf{C}_{xx}(t)$ . Alors  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_r(t)$  sont aussi les  $r$  valeurs propres (ou valeurs singulières) de la matrice définie positive de dimension  $r \times r$

$$\boxed{\mathbf{\Gamma}_{xx}(t) \triangleq \mathbf{W}(t)^H \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{W}(t).} \quad (\text{VII.53})$$

*Démonstration.* Considérons la matrice diagonale  $\mathbf{\Lambda}(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_r(t))$  de dimension  $r \times r$ . Soit  $\mathbf{U}(t)$  la matrice orthonormée de dimensions  $n \times r$  dont les colonnes sont les  $r$  vecteurs propres dominants de  $\mathbf{C}_{xx}(t)$ , de sorte que

$$\mathbf{U}(t)^H \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{U}(t) = \mathbf{\Lambda}(t). \quad (\text{VII.54})$$

Puisque  $\mathbf{U}(t)$  et  $\mathbf{W}(t)$  sont des matrices orthonormées engendrant le même sous-espace, il existe une matrice orthonormée  $\mathbf{O}(t)$  de dimension  $r \times r$  telle que

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{W}(t) \mathbf{O}(t). \quad (\text{VII.55})$$

En substituant les équations (VII.55) et (VII.54) dans l'équation (VII.53), on obtient

$$\boxed{\mathbf{\Gamma}_{xx}(t) = \mathbf{O}(t) \mathbf{\Lambda}(t) \mathbf{O}(t)^H.} \quad (\text{VII.56})$$

L'équation (VII.56) peut être vue comme l'EVD, ou aussi comme la SVD de la matrice définie positive  $\mathbf{\Gamma}_{xx}(t)$ , faisant intervenir la base orthonormée  $\mathbf{O}(t)$ .  $\square$

Par conséquent,  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_r(t)$  s'obtiennent comme les  $r$  valeurs singulières de  $\mathbf{\Gamma}_{xx}(t)$ . De plus,  $\mathbf{O}(t)$  s'obtient en calculant la SVD de  $\mathbf{\Gamma}_{xx}(t)$ , et les vecteurs propres dominants de  $\mathbf{C}_{xx}(t)$  s'obtiennent

à l'aide de l'équation (VII.55). Cependant, le calcul de  $\mathbf{\Gamma}_{xx}(t)$  tel que défini dans l'équation (VII.53) requiert  $nlr + lr^2$  MACs, ce qui est assez coûteux. Ce calcul peut être évité en introduisant l'approximation (VII.9) dans l'équation (VII.53) :

$$\mathbf{\Gamma}_{xx}(t) \simeq \mathbf{\Theta}(t)^H \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{W}(t). \quad (\text{VII.57})$$

En substituant les équations (VI.2), (VI.3), (VII.26) dans l'équation (VII.57), on obtient

$$\mathbf{\Gamma}_{xx}(t) \simeq \mathbf{S}(t). \quad (\text{VII.58})$$

En substituant les équations (VII.56) et (VII.58) dans l'équation (VII.28), on obtient

$$\mathbf{Z}(t) \simeq \mathbf{O}(t) \mathbf{\Lambda}(t)^{-1} \mathbf{O}(t)^H.$$

Considérons une SVD exacte de  $\mathbf{Z}(t)$  :

$$\mathbf{Z}(t) = \widehat{\mathbf{O}}(t) \widehat{\mathbf{\Lambda}}(t)^{-1} \widehat{\mathbf{O}}(t)^H.$$

où  $\widehat{\mathbf{O}}(t)$  et  $\widehat{\mathbf{O}}(t)^H$  sont des matrices orthonormées de dimension  $r \times r$ , et les valeurs singulières de la matrice diagonale  $\widehat{\mathbf{\Lambda}}(t)^{-1}$  sont triées par *ordre croissant*.

Alors la SVD de  $\mathbf{\Gamma}_{xx}(t)$  peut être remplacée par celle de  $\mathbf{Z}(t)$  (qui requiert seulement  $O(r^3)$  opérations), où les valeurs singulières de  $\mathbf{Z}(t)$  sont triées par ordre croissant. Ainsi  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_r(t)$  peuvent être approchés en inversant ces valeurs singulières. De plus,  $\mathbf{O}(t)$  peut être approché par le facteur de gauche dans la SVD de  $\mathbf{Z}(t)$ , et des approximations des vecteurs propres dominants de  $\mathbf{C}_{xx}(t)$  se déduisent à l'aide de l'équation (VII.55), qui requiert  $nr^2$  MACs.

## VII.8 Simulations numériques

La performance de l'estimation de l'espace signal est analysée dans le contexte de l'analyse spectrale, en terme de l'angle principal maximal entre le véritable sous-espace propre principal de la matrice de corrélation  $\mathbf{C}_{xx}(t)$  (obtenu via une EVD exacte), et le sous-espace estimé de la même matrice de corrélation (obtenu avec l'algorithme de poursuite). Ce critère d'erreur a été initialement proposé par P. Comon et G.H. Golub comme mesure de la distance entre des sous-espaces de même dimension [Comon et Golub, 1990]. Dans la section VII.8.1, les algorithmes FAPI et TW-FAPI sont comparés à d'autres algorithmes existants. Dans la section VII.8.2, le comportement de la méthode API vis-à-vis du RSB et des paramètres  $n$  et  $r$  est analysé.

### VII.8.1 Comparaison de FAPI et TW-FAPI avec d'autres algorithmes existants

Dans cette section, le signal de test est celui introduit dans la section VI.2.3.3. Les variations des fréquences sont représentées dans la figure VII.1-a. Ce signal est traité en utilisant dans la section VII.8.1.1 une fenêtre exponentielle dont le facteur d'oubli est  $\beta \approx 0.99$ , et dans la section VII.8.1.2 une fenêtre rectangulaire de longueur  $l = 120$ . Ces paramètres ont été choisis de façon à ce que la longueur effective de la fenêtre soit la même dans les deux cas, c'est-à-dire  $\beta = \frac{1}{1-1/l}$ . La section VII.8.1.3 est consacrée à l'orthonormalité de la base de l'espace signal. La table VII.5 caractérise les divers algorithmes illustrés dans cette section. Elle complète la table VI.1 en détaillant les complexités et en apportant les algorithmes FAPI, TW-FAPI, SP1 et SW-NIC.



TAB. VII.5 – Comparaison des algorithmes de poursuite de sous-espace

| Algorithme       | Référence                          | Complexité (MACs)            | Ortho-normalité | Structure propre | Figure / Fenêtre            |
|------------------|------------------------------------|------------------------------|-----------------|------------------|-----------------------------|
| FAPI             | [Badeau <i>et al.</i> , 2003c]     | $n(3r + 2) + 5r^2 + O(r)$    | oui             | non              | Fig. VII.1<br>exponentielle |
| PAST             | [Yang, 1995]                       | $3nr + 2r^2 + O(r)$          | non             | non              |                             |
| NIC              | [Miao et Hua, 1998]                | $4nr + 2r^2 + O(r)$          | non             | non              |                             |
| OPAST            | [Abed-Meraim <i>et al.</i> , 2000] | $n(4r + 1) + 2r^2 + O(r)$    | oui             | non              |                             |
| Karasalo         | [Karasalo, 1986]                   | $nr^2 + n(3r + 2) + O(r^3)$  | oui             | oui              | Fig. VII.2<br>exponentielle |
| FST              | [Rabideau, 1996]                   | $n(6r + 2) + 12r^2 + O(r)$   | oui             | oui              |                             |
| Householder PAST | [Douglas, 2000]                    | $n(4r + 1) + 2r^2 + O(r)$    | oui             | non              |                             |
| LORAF2           | [Strobach, 1996]                   | $nr^2 + n(3r + 2) + O(r^3)$  | oui             | oui              |                             |
| SP1              | [Davila, 2000]                     | $4nr^2 + n(4r + 2) + O(r^3)$ | oui             | oui              |                             |
| TW-FAPI          | [Badeau <i>et al.</i> , 2003d]     | $n(6r + 8) + 4lr + O(r^2)$   | oui             | non              | Fig. VII.3<br>rectangulaire |
| SW-PAST          | [Badeau <i>et al.</i> , 2003a]     | $5nr + 4r^2 + O(r)$          | non             | non              |                             |
| SW-NIC           | section B.4                        | $6nr + 4r^2 + O(r)$          | non             | non              |                             |
| SW-OPAST         | [Badeau <i>et al.</i> , 2003a]     | $n(15r + 28) + 12r^2 + O(r)$ | oui             | non              |                             |

### VII.8.1.1 Cas de la fenêtre exponentielle

La figure VII.1-b représente la trajectoire de l'angle principal maximal d'erreur  $\theta_{\text{FAPI}}(t)$ , obtenue avec la méthode FAPI en utilisant les paramètres  $n = 80$  et  $\beta \approx 0.99$ . Ce résultat est ensuite comparé à celui obtenu avec l'algorithme PAST : la figure VII.1-c représente le rapport en dB des trajectoires obtenues avec FAPI et PAST, c'est-à-dire

$$20 \log_{10} \left( \frac{\theta_{\text{FAPI}}(t)}{\theta_{\text{PAST}}(t)} \right).$$

A l'initialisation, FAPI converge plus rapidement que PAST. De plus, PAST ne fournit pas une base orthonormée de l'espace signal. La figure VII.1-d représente le rapport en dB des trajectoires obtenues avec FAPI et l'algorithme NIC<sup>12</sup>, qui est une généralisation robuste de PAST [Miao et Hua, 1998]. L'erreur d'estimation de l'espace signal est toujours plus faible avec FAPI. Comme PAST, NIC ne garantit pas l'orthonormalité de la base de l'espace signal. La figure VII.1-e montre le rapport des trajectoires obtenues avec FAPI et OPAST. Les deux algorithmes atteignent les mêmes performances, excepté à l'initialisation, où FAPI converge plus rapidement. En fait, la différence est beaucoup plus nette avec les versions à fenêtre rectangulaire de ces algorithmes (voir section VII.8.1.2).

Dans la figure VII.2, l'algorithme FAPI est comparé à cinq algorithmes bien connus de poursuite de l'espace signal :

- l'algorithme de I. Karasalo [Karasalo, 1986],
- l'algorithme FST [Rabideau, 1996],
- le nouvel algorithme PAST utilisant des transformations de Householder, appelé ici *Householder PAST* [Douglas, 2000],
- l'algorithme *Low-Rank Adaptive Filter* (LORAF2) [Strobach, 1997a],
- et l'algorithme *Subspace Projection* (SP1) [Davila, 2000].

La figure VII.2-a montre que les comportements de FAPI et de l'algorithme de Karasalo sont très similaires. Ensuite la figure VII.2-b montre que FAPI converge vers l'espace signal beaucoup plus précisément que FST. La figure VII.2-c montre que FAPI et Householder PAST atteignent des performances identiques, excepté à l'initialisation, où FAPI converge plus rapidement. Enfin, la figure VII.2-d montre que la même remarque peut être faite à propos de FAPI et LORAF2. Par ailleurs, le coût dominant de

<sup>12</sup>Le pas d'apprentissage  $\eta$  est égal à 0.7.

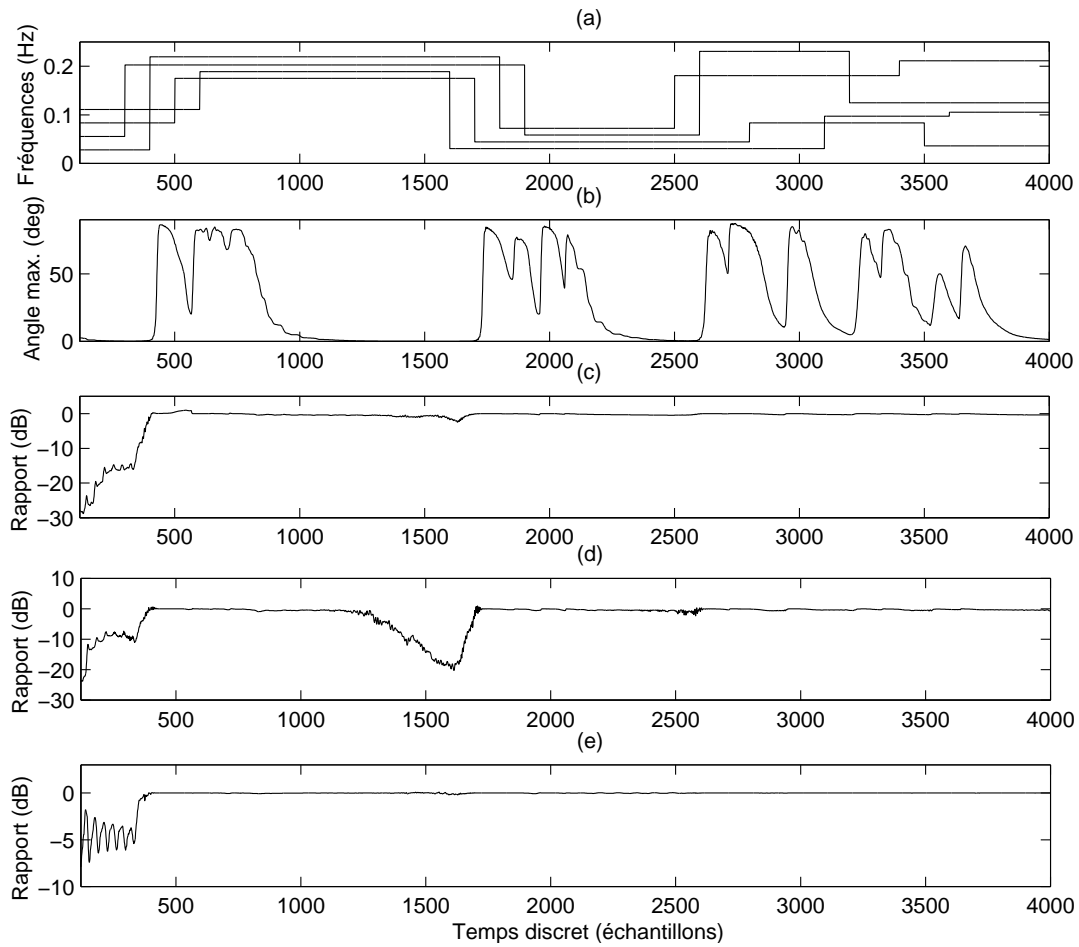


FIG. VII.1 – Poursuite de l'espace signal reposant sur une fenêtre exponentielle (1/2)

- (a) Fréquences réduites des sinusoides
- (b) Trajectoire de l'angle principal maximal obtenue avec FAPI
- (c) Rapport des trajectoires obtenues avec FAPI et PAST
- (d) Rapport des trajectoires obtenues avec FAPI et NIC
- (e) Rapport des trajectoires obtenues avec FAPI et OPAST

l'algorithme de Karasalo et de LORAF2 est  $nr^2$  et celui de FST est  $6nr$ , alors que celui de FAPI est seulement  $3nr$  (voir la table VII.5). Parmi les nombreux algorithmes de poursuite de l'espace signal que nous avons testés, SP1 est le seul qui ait présenté de meilleures performances que FAPI (voir figure VII.2-e). Cependant, la table VII.5 montre que SP1 est l'algorithme plus coûteux. Par ailleurs, il ne se prête qu'à l'analyse spectrale de séries temporelles, et a seulement été conçu pour des fenêtres exponentielles.

### VII.8.1.2 Cas de la fenêtre rectangulaire

La figure VII.3-a représente la trajectoire de l'angle principal maximal d'erreur  $\theta_{TW-FAPI}(t)$ , obtenue avec la méthode TW-FAPI en utilisant les paramètres  $\beta = 1$  (qui fait de la fenêtre tronquée une fenêtre rectangulaire),  $n = 80$  et  $l = 120$ . Cet algorithme converge rapidement après chaque saut de fréquence. Ce résultat doit être comparé à celui de la figure VII.1-b, obtenu avec la méthode FAPI à fenêtre exponentielle, pour laquelle la réponse aux sauts de fréquence est plus lente, en raison de la

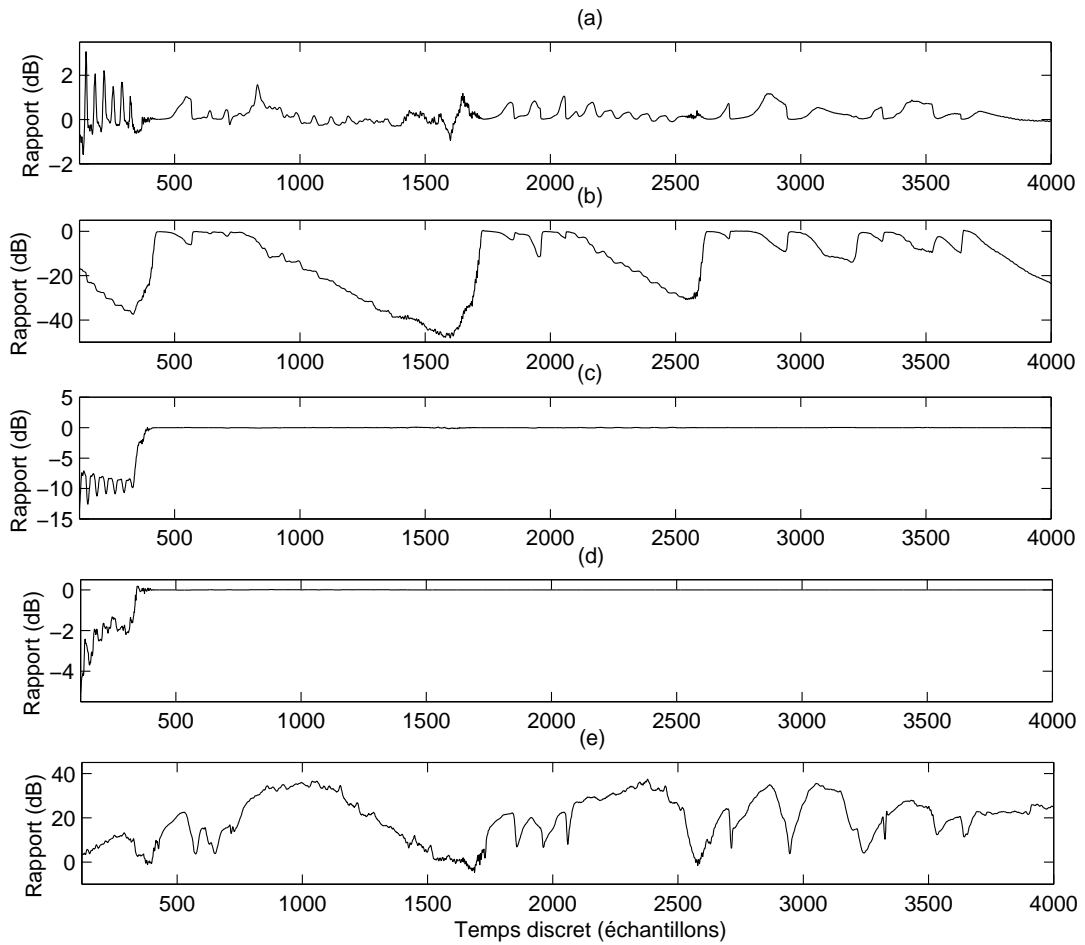


FIG. VII.2 – Poursuite de l'espace signal reposant sur une fenêtre exponentielle (2/2)

- (a) Rapport des trajectoires obtenues avec FAPI et Karasalo
- (b) Rapport des trajectoires obtenues avec FAPI et FST
- (c) Rapport des trajectoires obtenues avec FAPI et Householder PAST
- (d) Rapport des trajectoires obtenues avec FAPI et LORAF2
- (e) Rapport des trajectoires obtenues avec FAPI et SP1

nature de la fenêtre qui tend à lisser les variations du signal. La figure VII.3-b représente le rapport en dB des trajectoires obtenues avec TW-FAPI et la version à fenêtre rectangulaire de PAST, appelée ici SW-PAST [Yang, 1995, Badeau *et al.*, 2003a]. TW-FAPI converge plus rapidement que SW-PAST à l'initialisation. Notons au passage que PAST et SW-PAST ne fournissent pas une base orthonormée de l'espace signal. La figure VII.3-c représente le rapport en dB des trajectoires obtenues avec TW-FAPI et une version à fenêtre rectangulaire de l'algorithme NIC présentée dans la section B.4 des annexes (page 195), appelée ici *NIC à fenêtre rectangulaire* (SW-NIC)<sup>13</sup>. Enfin, la figure VII.3-d montre le rapport en dB des trajectoires obtenues avec TW-FAPI et l'algorithme SW-OPAST [Badeau *et al.*, 2003a]. La trajectoire de l'angle principal maximal d'erreur obtenue avec TW-FAPI est inférieure d'environ 20 dB à celles obtenues avec SW-NIC et SW-OPAST dans les régions où les fréquences sont constantes.

<sup>13</sup>SW-NIC est également implémenté avec  $\eta = 0.7$ .

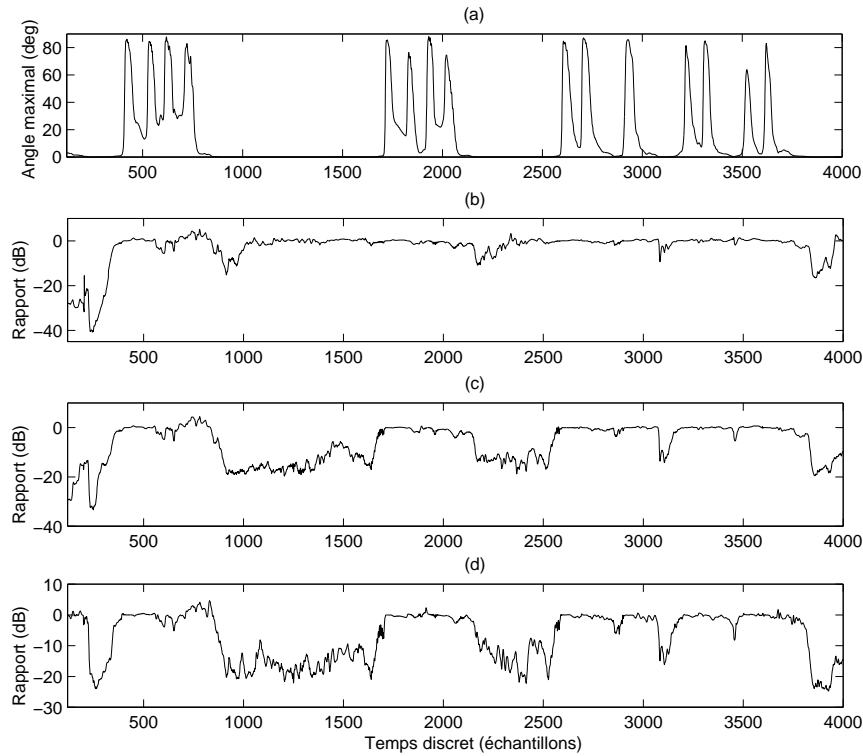


FIG. VII.3 – Poursuite de l'espace signal reposant sur une fenêtre rectangulaire

- (a) Trajectoire de l'angle principal maximal obtenue avec TW-FAPI
- (b) Rapport des trajectoires obtenues avec TW-FAPI et SW-PAST
- (c) Rapport des trajectoires obtenues avec TW-FAPI et SW-NIC
- (d) Rapport des trajectoires obtenues avec TW-FAPI et SW-OPAST

### VII.8.1.3 Erreur d'orthonormalité

TAB. VII.6 – Erreur maximale d'orthonormalité

| Algorithmes                            | Erreur maximale |
|--|-----------------|
| FAPI, TW-FAPI, OPAST, Householder PAST | environ -300 dB |
| Karasalo, FST, LORAF2                  | environ -280 dB |
| SP1, SW-OPAST                          | environ -240 dB |
| PAST, NIC                              | environ -25 dB  |
| SW-PAST, SW-NIC                        | environ -5 dB   |

L'orthonormalité de la base de l'espace signal  $\mathbf{W}(t)$  peut être mesurée à l'aide du critère d'erreur suivant :  $20 \log_{10} (\|\mathbf{W}(t)^H \mathbf{W}(t) - \mathbf{I}_r\|_F)$ . La table VII.6 montre l'erreur maximale d'orthonormalité atteinte par les algorithmes mentionnés ci-dessus en suivant les variations du signal de test. Nous avons observé que FAPI, TW-FAPI, OPAST et Householder PAST étaient meilleurs que tous les autres algorithmes, alors que PAST, NIC, et leurs versions à fenêtre rectangulaire ne garantissent pas l'orthonormalité de la base de l'espace signal.

## VII.8.2 Comportement de la méthode API vis-à-vis du RSB et de $n$ et $r$

A présent, le signal de test est toujours une somme de  $r = 4$  exponentielles complexes plus un bruit blanc gaussien complexe. Cependant, les fréquences des sinusoides sont constantes, égales aux valeurs initiales données dans la figure VII.1-a.

### VII.8.2.1 Influence du RSB

Nous analysons ici l'effet du RSB sur l'estimation de l'espace signal. Dans ce but, la partie bruitée du signal de test a été synthétisée de façon à ce que le RSB varie linéairement de +30 dB à -30 dB (voit figure VII.4-a). La figure VII.4-b montre la trajectoire de l'angle principal maximal d'erreur obtenu avec la méthode FAPI en utilisant les paramètres  $n = 80$  et  $\beta \approx 0.99$ . La performance de l'estimation de l'espace signal s'effondre au delà de  $n \simeq 2600$ . La figure VII.4-a montre qu'à partir de cet instant le RSB est inférieur à -10 dB. La figure VII.4-c représente la trajectoire de l'angle principal maximal d'erreur obtenu avec la méthode TW-FAPI avec les paramètres  $\beta = 1$ ,  $n = 80$  et  $l = 120$ . De nouveau, la performance de l'estimation de l'espace signal s'effondre au delà de  $n \simeq 2600$ . Bien qu'ils ne soient pas illustrés ici, nous avons observé que les performances de tous les algorithmes mentionnés ci-dessus s'effondrent de la même manière au delà de la même limite de RSB (-10 dB).

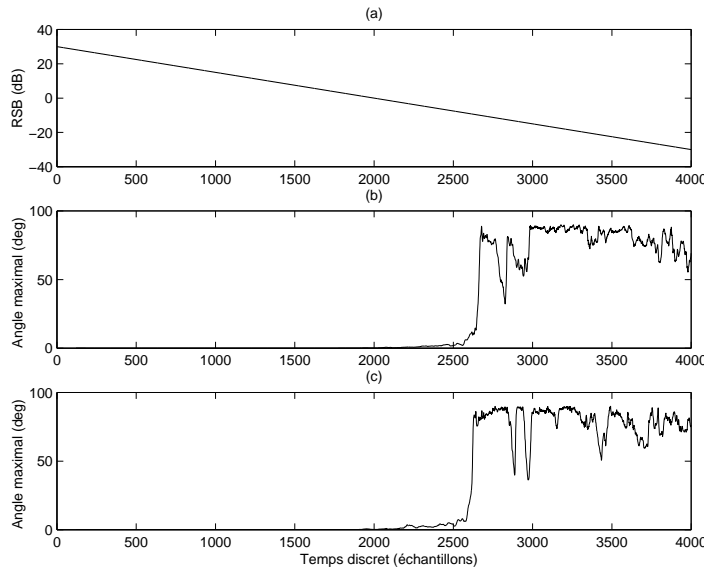


FIG. VII.4 – Influence du rapport signal à bruit

- (a) Rapport signal à bruit en dB
- (b) Trajectoire de l'angle principal maximal obtenue avec FAPI
- (c) Trajectoire de l'angle principal maximal obtenue avec TW-FAPI

### VII.8.2.2 Influence du rapport $n/r$

Nous nous intéressons ici à l'influence du rapport  $n/r$  sur l'estimation de l'espace signal. Le RSB est constant, égal à 5.7 dB. La figure VII.5-a représente la moyenne de  $\theta_{\text{FAPI}}(t)$ , comme fonction du rapport  $n/r$ , pour tous  $n \in \{r + 1, \dots, 80\}$  (avec  $\beta \approx 0.99$ ). L'estimation de l'espace signal devient fiable dès que  $n/r \geq 7$ . La figure VII.5-b représente la moyenne de  $\theta_{\text{TW-FAPI}}(t)$ , comme fonction du

rapport  $n/r$ , pour tous  $n \in \{r+1, \dots, 80\}$  (avec  $\beta = 1$  et  $l = 120$ ). De nouveau, l'estimation de l'espace signal devient fiable dès que  $n/r \geq 7$ . Bien qu'ils ne soient pas illustrés ici, nous avons observé que la même remarque est valide pour tous les algorithmes mentionnés ci-dessus.

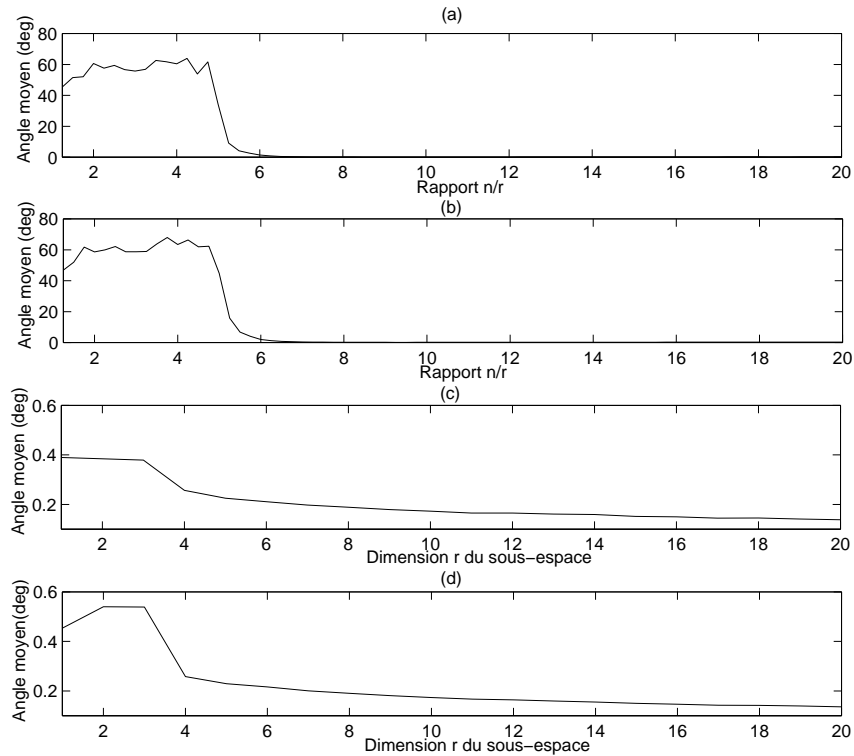


FIG. VII.5 – Influence des paramètres  $n$  et  $r$

- (a) Angle max. moyen obtenu avec FAPI comme fonction de  $n/r$
- (b) Angle max. moyen obtenu avec TW-FAPI comme fonction de  $n/r$
- (c) Angle max. moyen obtenu avec FAPI comme fonction de  $r$
- (d) Angle max. moyen obtenu avec TW-FAPI comme fonction de  $r$

### VII.8.2.3 Poursuite d'un sous-espace de mauvaise dimension

Puisque la dimension  $r$  de l'espace signal est inconnue dans le cadre de nombreuses applications, nous étudions dans cette section les performances des algorithmes FAPI et TW-FAPI dans le cas où ils sont appliqués avec une dimension  $r$  erronée. Le RSB est constant, égal à 5.7 dB. Les performances de l'estimation de l'espace signal sont analysées en terme de l'angle principal maximal entre le véritable espace signal de dimension 4 et le sous-espace estimé de dimension  $r$ .

La figure VII.5-c représente la moyenne de  $\theta_{\text{FAPI}}(t)$ , comme fonction de  $r$ , pour tous  $r \in \{1, \dots, 20\}$  (avec les paramètres  $\beta \approx 0.99$  et  $n = 80$ ). De même, la figure VII.5-d représente la moyenne de  $\theta_{\text{TW-FAPI}}(t)$ , comme fonction de  $r$ , pour tous  $r \in \{1, \dots, 20\}$  (avec les paramètres  $l = 120$  et  $n = 80$ ). L'estimation de l'espace signal est fiable dans tous les cas :

- si  $r = 4$ , l'angle principal maximal est très faible (comme nous pouvions le supposer),
- si  $r < 4$ , l'angle principal maximal reste bas, ce qui signifie que le sous-espace sous-dimensionné estimé est presque inclus dans le véritable espace signal,

- si  $r > 4$ , l'angle principal maximal est encore plus bas que dans le cas  $r = 4$ , ce qui signifie que le véritable espace signal est presque inclus dans le sous-espace sur-dimensionné estimé. De plus, l'angle principal maximal diminue quand la dimension du sous-espace estimé croît.

Nous pouvons en déduire que FAPI et TW-FAPI sont robustes à une dimension  $r$  du sous-espace erronée.

## VII.9 Conclusion

Plusieurs implémentations de l'algorithme API, reposant sur une fenêtre exponentielle ou sur une fenêtre tronquée, ont été présentées dans ce chapitre. Ces algorithmes atteignent une complexité linéaire et garantissent l'orthonormalité de la base de l'espace signal à chaque itération. Dans le contexte de l'analyse spectrale, la méthode s'avère robuste à de brusques variations de fréquences, et atteint de meilleures performances que de nombreux algorithmes de poursuite de sous-espace, à la fois en terme d'estimation de l'espace signal et de complexité algorithmique.

## Chapitre VIII

# Yet Another Subspace Tracker

### Résumé

Nous proposons dans ce chapitre un nouvel algorithme rapide de poursuite de sous-espace, qui possède la même complexité que OPAST, mais dont les performances sont voisines de celles de la méthode des puissances itérées présentée dans la section VI.2.2. Cet algorithme, baptisé YAST, peut être vu comme une implémentation optimisée des algorithmes SP1 et SP2 récemment proposés dans [Davila, 2000]. Sa faible complexité est obtenue en exploitant la structure Hankel de la matrice de données. Ainsi, contrairement à FAPI, il ne peut être utilisé qu'en analyse spectrale et non en localisation de sources (*cf.* section VI.2.3). Ses performances sont illustrées sur un signal présentant de brusques variations, et comparées à la méthode des puissances itérées.



## VIII.1 Introduction

Récemment, un nouvel algorithme de poursuite de l'espace signal, baptisé *Subspace Projection* (SP), a été proposé par C.E. Davila [Davila, 2000]. Nous avons observé dans le chapitre VII que cet algorithme présente de meilleures performances que celles de nombreux algorithmes classiques de poursuite de sous-espace, tels que l'algorithme de Karasalo [Karasalo, 1986], PAST [Yang, 1995], LORAF [Strobach, 1996], FST [Rabideau, 1996], NIC [Miao et Hua, 1998], OPAST [Abed-Meraim *et al.*, 2000] et FAPI [Badeau *et al.*, 2005b]. Comme dans [Yang, 1995] et [Miao et Hua, 1998], l'estimation de l'espace signal est considérée comme un problème d'optimisation. Cependant, au lieu d'introduire des approximations, l'algorithme SP calcule l'espace signal comme la solution exacte de ce problème, qui est néanmoins restreint à un sous-espace de dimension limitée.

Malheureusement, cet algorithme remarquable ne se prête qu'à l'analyse de séries temporelles, et présente un coût élevé. Sa complexité globale est  $O(nr^2)$  (où  $n$  est la dimension des vecteurs de données observés, et  $r$  est la dimension de l'espace signal), alors qu'un certain nombre d'algorithmes existants ne requièrent que  $O(nr)$  opérations à chaque instant (c'est le cas de PAST, FST, NIC et OPAST). Néanmoins, nous avons découvert que cet inconvénient peut être éliminé, et nous proposons dans ce chapitre un nouvel algorithme, baptisé YAST, qui calcule le même espace signal que l'algorithme SP, mais requiert seulement  $O(nr)$  opérations.

Le chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la section VIII.2 est présenté le principe sur lequel repose l'algorithme YAST. Ensuite, une implémentation rapide de YAST est proposée dans la section VIII.3. Les performances de cet algorithme sont illustrées dans la section VIII.4. Enfin, les principales conclusions de ce chapitre sont résumées dans la section VIII.5.

## VIII.2 Principe

Il est bien connu qu'une matrice orthonormée  $\mathbf{W}(t)$  de dimensions  $n \times r$  engendre le sous-espace dominant de dimension  $r$  de la matrice  $\mathbf{C}_{xx}(t)$  introduite dans la section I.4.2.2 si et seulement si elle maximise le critère  $\mathcal{J}$ , défini comme

$$\mathcal{J}(\mathbf{W}(t)) = \text{trace}(\mathbf{W}(t)^H \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{W}(t)).$$

En particulier, le maximum de ce critère est égal à la somme des  $r$  plus grandes valeurs propres de  $\mathbf{C}_{xx}(t)$ . Cependant, implémenter cette maximisation parmi toutes les matrices orthonormées est très coûteux (la complexité est  $O(n^2r)$ ), et ne conduit pas à une récurrence simple entre  $\mathbf{W}(t)$  et  $\mathbf{W}(t-1)$ .

Dans le but de réduire le coût, l'idée introduite dans [Davila, 2000] consiste à limiter cette recherche à l'espace image de  $\mathbf{W}(t-1)$ , plus quelques directions de recherche additionnelles. L'algorithme YAST présenté ci-dessous repose sur la même idée.

Cependant cette recherche n'est pas implémentée de la même façon que dans [Davila, 2000]. L'espace image de la matrice  $\mathbf{W}(t)$  (de dimension  $r$ ) est obtenu comme un sous-espace de l'espace de dimension  $(r+p+q-1)$  (avec  $p=1$  ou  $2$ , et  $q=1$  dans le cas de la fenêtre exponentielle, ou  $2$  dans le cas de la fenêtre tronquée) engendré par la matrice

$$\bar{\mathbf{V}}(t) = [\mathbf{W}(t-1), \bar{\mathbf{x}}(t)] \tag{VIII.1}$$

où la matrice  $\bar{\mathbf{x}}(t)$ , de dimensions  $n \times (p+q-1)$ , contient le vecteur  $\mathbf{x}(t)$  dans tous les cas, le vecteur  $\mathbf{x}(t-l)$  dans le cas de la fenêtre tronquée ( $q=2$ ), et éventuellement<sup>1</sup> le vecteur  $\mathbf{C}_{xx}(t-1)\mathbf{x}(t)$  (cas  $p=2$ ).

<sup>1</sup>Cette dernière direction de recherche a été initialement proposée dans [Davila, 2000].

Soit  $\overline{\mathbf{W}}(t)$  une matrice orthonormée de dimensions  $n \times (r + p + q - 1)$  engendrant l'espace image de la matrice  $\overline{\mathbf{V}}(t)$ . Alors  $\mathbf{W}(t)$  s'écrit sous la forme

$$\boxed{\mathbf{W}(t) = \overline{\mathbf{W}}(t) \mathbf{U}(t).} \quad (\text{VIII.2})$$

où  $\mathbf{U}(t)$  est une matrice orthonormée de dimensions  $(r + p + q - 1) \times r$ . Dans ce cas

$$\boxed{\mathcal{J}(\mathbf{W}(t)) = \text{trace}(\mathbf{U}(t)^H \overline{\mathbf{C}}_{yy}(t) \mathbf{U}(t))} \quad (\text{VIII.3})$$

où  $\overline{\mathbf{C}}_{yy}(t)$  est la matrice de dimension  $(r + p + q - 1) \times (r + p + q - 1)$

$$\boxed{\overline{\mathbf{C}}_{yy}(t) = \overline{\mathbf{W}}(t)^H \mathbf{C}_{xx}(t) \overline{\mathbf{W}}(t).} \quad (\text{VIII.4})$$

La recherche exhaustive parmi toutes les matrices orthonormées  $\mathbf{W}(t)$  de dimensions  $n \times r$  est ainsi remplacée par la maximisation de (VIII.3) parmi toutes les matrices orthonormées  $\mathbf{U}(t)$  de dimensions  $(r + p + q - 1) \times r$ . Le résultat de cette maximisation est bien connu :  $\mathbf{U}(t)$  doit engendrer le sous-espace dominant de dimension  $r$  de la matrice  $\overline{\mathbf{C}}_{yy}(t)$ . Ainsi il est possible de suivre la matrice  $\mathbf{W}(t)$  en calculant

- une base orthonormée  $\overline{\mathbf{W}}(t)$  de l'espace image de  $\overline{\mathbf{V}}(t)$ ,
- la matrice  $\overline{\mathbf{C}}_{yy}(t) = \overline{\mathbf{W}}(t)^H \mathbf{C}_{xx}(t) \overline{\mathbf{W}}(t)$ ,
- une matrice orthonormée  $\mathbf{U}(t)$  de dimensions  $(r + p + q - 1) \times r$  engendrant le sous-espace dominant de dimension  $r$  de  $\overline{\mathbf{C}}_{yy}(t)$ ,
- la matrice  $\mathbf{W}(t) = \overline{\mathbf{W}}(t) \mathbf{U}(t)$ .

En particulier,  $\mathbf{U}(t)$  s'obtient en diagonalisant  $\overline{\mathbf{C}}_{yy}(t)$ . Par conséquent, les colonnes de la matrice résultante  $\mathbf{W}(t)$  définie dans l'équation (VIII.2) correspondent aux  $r$  vecteurs propres dominants de  $\mathbf{C}_{xx}(t)$ . Cependant, ce calcul conduit à une complexité globale de  $O(nr^2)$ , comme dans [Davila, 2000]. Dans le but de réduire cette complexité globale à  $O(nr)$ , on choisit une stratégie différente qui évite la diagonalisation. Comme cela a été mentionné ci-dessus,  $\mathbf{U}(t)$  doit être une matrice orthonormée engendrant le sous-espace dominant de dimension  $r$  de la matrice  $\overline{\mathbf{C}}_{yy}(t)$ . Par conséquent,  $\mathbf{U}(t)$  s'obtient comme une base du complémentaire orthogonal du sous-espace dominant de dimension  $(p + q - 1)$  de la matrice  $\overline{\mathbf{Z}}(t) = \overline{\mathbf{C}}_{yy}(t)^{-1}$ . Ainsi, l'algorithme YAST calcule  $\overline{\mathbf{Z}}(t)$  et son sous-espace dominant de dimension  $(p + q - 1)$ , et calcule  $\mathbf{U}(t)$  comme une base du complémentaire orthogonal de ce sous-espace. Comme cela sera montré dans la section VIII.3, cet algorithme peut être implémenté efficacement en mettant à jour l'inverse  $\mathbf{Z}(t)$  de la matrice de corrélation compressée  $\mathbf{C}_{yy}(t)$ , de dimension  $r \times r$  :

$$\boxed{\mathbf{C}_{yy}(t) = \mathbf{W}(t)^H \mathbf{C}_{xx}(t) \mathbf{W}(t).} \quad (\text{VIII.5})$$

### VIII.3 Implémentation rapide de YAST

Ci-dessous, une implémentation rapide de l'algorithme YAST est proposée, dont le coût global est seulement de  $(3p + 4q - 3)nr$  MACs. Elle se décompose en quatre étapes successives :

- calcul de  $\overline{\mathbf{W}}(t)$  (section VIII.3.1),
- calcul de  $\overline{\mathbf{Z}}(t)$  (section VIII.3.2),
- mise à jour de  $\mathbf{W}(t)$  (section VIII.3.3),
- mise à jour de  $\mathbf{Z}(t)$  (section VIII.3.4).

Cette implémentation est résumée dans la section VIII.3.5.

### VIII.3.1 Calcul de $\overline{\mathbf{W}}(t)$

La première étape consiste à orthonormaliser la matrice  $\overline{\mathbf{V}}(t)$ . Considérons la matrice  $\overline{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{W}(t-1)^H \overline{\mathbf{x}}(t)$  de dimensions  $r \times (p+q-1)$ , et posons

$$\overline{\mathbf{e}}(t) = \overline{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{W}(t-1) \overline{\mathbf{y}}(t). \quad (\text{VIII.6})$$

La matrice  $\overline{\mathbf{e}}(t)$ , de dimensions  $n \times (p+q-1)$ , est orthogonale à l'espace image de  $\mathbf{W}(t-1)$ . Soit  $\overline{\sigma}(t)$  une racine carrée de la matrice  $\overline{\mathbf{e}}(t)^H \overline{\mathbf{e}}(t)$ , de dimension  $(p+q-1) \times (p+q-1)$  :

$$\overline{\sigma}(t) = (\overline{\mathbf{e}}(t)^H \overline{\mathbf{e}}(t))^{\frac{1}{2}} = (\overline{\mathbf{x}}(t)^H \overline{\mathbf{x}}(t) - \overline{\mathbf{y}}(t)^H \overline{\mathbf{y}}(t))^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{VIII.7})$$

Ci-dessous,  $\overline{\sigma}(t)$  est supposée inversible. En effet, même si  $\overline{\sigma}(t)$  se trouve être singulière, elle peut être rendue inversible en supprimant une ou plusieurs colonnes dans  $\overline{\mathbf{x}}(t)$ <sup>2</sup>. Alors la matrice

$$\overline{\mathbf{W}}(t) = [\mathbf{W}(t-1), \overline{\mathbf{e}}(t) \overline{\sigma}(t)^{-1}] \quad (\text{VIII.8})$$

est orthonormée. En particulier,  $\overline{\mathbf{V}}(t)$  s'écrit sous la forme

$$\overline{\mathbf{V}}(t) = \overline{\mathbf{W}}(t) \overline{\mathbf{R}}(t) \quad (\text{VIII.9})$$

où  $\overline{\mathbf{R}}(t)$  est une matrice inversible de dimension  $(r+p+q-1) \times (r+p+q-1)$  :

$$\overline{\mathbf{R}}(t) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \overline{\mathbf{y}}(t) \\ \hline \mathbf{0}_{(p+q-1) \times r} & \overline{\sigma}(t) \end{array} \right]. \quad (\text{VIII.10})$$

### VIII.3.2 Calcul de $\overline{\mathbf{Z}}(t)$

Comme cela a été mentionné dans la section VIII.2, la matrice  $\overline{\mathbf{Z}}(t)$  est définie comme l'inverse de la matrice  $\overline{\mathbf{C}}_{yy}(t)$  de dimension  $(r+p+q-1) \times (r+p+q-1)$  définie dans l'équation (VIII.4). Par conséquent, calculer  $\overline{\mathbf{Z}}(t)$  revient à calculer la matrice  $\overline{\mathbf{C}}_{yy}(t)$  (section VIII.3.2.1) et à l'inverser (section VIII.3.2.2).

#### VIII.3.2.1 Calcul de $\overline{\mathbf{C}}_{yy}(t)$

En substituant l'équation (VIII.9) dans l'équation (VIII.4), on obtient

$$\overline{\mathbf{C}}_{yy}(t) = \overline{\mathbf{R}}(t)^{-H} \overline{\mathbf{C}}'_{yy}(t) \overline{\mathbf{R}}(t)^{-1} \quad (\text{VIII.11})$$

où  $\overline{\mathbf{C}}'_{yy}(t)$  est une matrice de dimension  $(r+p+q-1) \times (r+p+q-1)$  :

$$\overline{\mathbf{C}}'_{yy}(t) = \overline{\mathbf{V}}(t)^H \mathbf{C}_{xx}(t) \overline{\mathbf{V}}(t). \quad (\text{VIII.12})$$

<sup>2</sup>Tout d'abord, le rang de  $\overline{\mathbf{V}}(t)$  est égal à celui de  $\overline{\mathbf{e}}(t)$  plus  $r$ . En effet, on vérifie que

$$\overline{\mathbf{V}}(t) = [ \mathbf{W}(t-1) \mid \overline{\mathbf{e}}(t) ] \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \overline{\mathbf{y}}(t) \\ \hline \mathbf{0} \dots \mathbf{0} & 1 \end{array} \right].$$

Puisque la matrice à l'extrême droite de cette équation est inversible, le rang de  $\overline{\mathbf{V}}(t)$  est égal à celui de la matrice  $[ \mathbf{W}(t-1) \mid \overline{\mathbf{e}}(t) ]$ . De plus,  $\mathbf{W}(t-1)$  est orthonormée et  $\overline{\mathbf{e}}(t)$  est orthogonal à  $\text{span}(\mathbf{W}(t-1))$ , donc le rang de  $\overline{\mathbf{V}}(t)$  est égal à celui de  $\overline{\mathbf{e}}(t)$  plus  $r$ . Par ailleurs, le rang de  $\overline{\sigma}(t)$  est égal à celui de  $\overline{\mathbf{e}}(t)$ . Par conséquent, il est égal à celui de  $\overline{\mathbf{V}}(t)$  moins  $r$ . Par conséquent, même si  $\overline{\sigma}(t)$  se trouve être singulière, elle peut être rendue inversible en supprimant une ou plusieurs colonnes dans  $\overline{\mathbf{x}}(t)$ , ce qui revient à réduire la dimension  $(p+q-1)$ .

Par ailleurs, nous n'avons jamais rencontré ce cas singulier dans nos simulations.

Soit alors

$$\bar{\alpha}(t) = \underline{x}(t)^H \bar{x}(t) \quad (\text{VIII.13})$$

$$\underline{y}(t) = \mathbf{W}(t-1)^H \underline{x}(t) \quad (\text{VIII.14})$$

$$\bar{x}'(t) = \mathbf{C}_{xx}(t-1) \bar{x}(t) \quad (\text{VIII.15})$$

$$\bar{y}'(t) = \mathbf{W}(t-1)^H \bar{x}'(t). \quad (\text{VIII.16})$$

En substituant les équations (VII.1) et (VIII.1) dans l'équation (VIII.12), on obtient

$$\bar{\mathbf{C}}'_{yy}(t) = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{C}}_{yy}(t) & \bar{\mathbf{y}}''(t) \\ \hline \bar{\mathbf{y}}''(t)^H & \bar{c}_{yy}(t) \end{array} \right] \quad (\text{VIII.17})$$

où

$$\tilde{\mathbf{C}}_{yy}(t) = \beta \mathbf{C}_{yy}(t-1) + \underline{y}(t) \underline{J} \underline{y}(t)^H \quad (\text{VIII.18})$$

$$\bar{\mathbf{y}}''(t) = \beta \bar{\mathbf{y}}'(t) + \underline{y}(t) \underline{J} \bar{\alpha}(t) \quad (\text{VIII.19})$$

$$\bar{c}_{yy}(t) = \beta \bar{x}(t)^H \bar{x}'(t) + \bar{\alpha}(t)^H \underline{J} \bar{\alpha}(t). \quad (\text{VIII.20})$$

### VIII.3.2.2 Inversion de $\bar{\mathbf{C}}_{yy}(t)$

La matrice  $\bar{\mathbf{C}}_{yy}(t)$  s'obtient à partir de  $\bar{\mathbf{C}}'_{yy}(t)$  à l'aide de l'équation (VIII.11). Ainsi, inverser  $\bar{\mathbf{C}}_{yy}(t)$  nécessite d'inverser  $\bar{\mathbf{C}}'_{yy}(t)$ . Comme cela est montré ci-dessous, cette dernière opération peut être effectuée en inversant d'abord le coin supérieur gauche de dimension  $r \times r$  de la matrice  $\bar{\mathbf{C}}'_{yy}(t)$ , noté  $\tilde{\mathbf{C}}_{yy}(t)$ .

**Inversion de  $\tilde{\mathbf{C}}_{yy}(t)$  :** Supposons que la matrice  $\mathbf{C}_{yy}(t-1)$  est inversible et posons  $\mathbf{Z}(t-1) = \mathbf{C}_{yy}(t-1)^{-1}$ . Soit

$$\underline{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{Z}(t-1) \underline{y}(t). \quad (\text{VIII.21})$$

En appliquant le lemme A.8.1 à l'équation (VIII.18), on montre que  $\tilde{\mathbf{C}}_{yy}(t)$  est inversible si et seulement si  $\beta \underline{J}^{-1} + \underline{y}(t)^H \underline{\mathbf{h}}(t)$  est inversible<sup>3</sup>. Dans ce cas, soit

$$\underline{\gamma}(t) = (\beta \underline{J}^{-1} + \underline{y}(t)^H \underline{\mathbf{h}}(t))^{-1}. \quad (\text{VIII.22})$$

Alors  $\tilde{\mathbf{Z}}(t) \triangleq \tilde{\mathbf{C}}_{yy}(t)^{-1}$  satisfait

$$\boxed{\tilde{\mathbf{Z}}(t) = \frac{1}{\beta} (\mathbf{Z}(t-1) - \underline{\mathbf{h}}(t) \underline{\gamma}(t) \underline{\mathbf{h}}(t)^H)}. \quad (\text{VIII.23})$$

**Inversion de  $\bar{\mathbf{C}}_{yy}(t)$  :** Inverser l'équation (VIII.11) implique

$$\bar{\mathbf{Z}}(t) = \bar{\mathbf{R}}(t) \bar{\mathbf{C}}'_{yy}(t)^{-1} \bar{\mathbf{R}}(t)^H. \quad (\text{VIII.24})$$

Soit

$$\bar{\mathbf{h}}(t) = \tilde{\mathbf{Z}}(t) \bar{\mathbf{y}}''(t). \quad (\text{VIII.25})$$

<sup>3</sup>Le lemme A.8.1 figure dans la section A.8 des annexes (page 182). Il est ici appliqué avec  $\mathbf{C} = \beta \mathbf{C}_{yy}(t-1)$ ,  $\mathbf{A} = \underline{y}(t)$ ,  $\mathbf{B} = \underline{y}(t)^H$ , et  $\mathbf{D} = \underline{J}$ .

En appliquant le lemme A.8.2 à l'équation (VIII.17), on montre que  $\overline{\mathbf{C}}'_{yy}(t)$  est inversible si et seulement si  $\overline{\mathbf{c}}_{yy}(t) - \overline{\mathbf{y}}''(t)^H \overline{\mathbf{h}}(t)$  est inversible<sup>4</sup>. Dans ce cas,

$$\overline{\mathbf{C}}'_{yy}(t)^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{Z}}(t) + \overline{\mathbf{h}}(t) \overline{\gamma}(t) \overline{\mathbf{h}}(t)^H & -\overline{\mathbf{h}}(t) \overline{\gamma}(t) \\ \hline -\overline{\gamma}(t) \overline{\mathbf{h}}(t)^H & \overline{\gamma}(t) \end{array} \right] \quad (\text{VIII.26})$$

où  $\overline{\gamma}(t)$  est la matrice définie positive de dimension  $p \times p$

$$\overline{\gamma}(t) = (\overline{\mathbf{c}}_{yy}(t) - \overline{\mathbf{y}}''(t)^H \overline{\mathbf{h}}(t))^{-1}. \quad (\text{VIII.27})$$

En substituant les équations (VIII.10) et (VIII.26) dans l'équation (VIII.24), on obtient

$$\overline{\mathbf{Z}}(t) = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{Z}}'(t) & -\overline{\mathbf{g}}(t) \\ \hline -\overline{\mathbf{g}}(t)^H & \overline{\gamma}'(t) \end{array} \right] \quad (\text{VIII.28})$$

où

$$\overline{\mathbf{h}}'(t) = \overline{\mathbf{h}}(t) - \overline{\mathbf{g}}(t) \quad (\text{VIII.29})$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}'(t) = \tilde{\mathbf{Z}}(t) + \overline{\mathbf{h}}'(t) \overline{\gamma}(t) \overline{\mathbf{h}}'(t)^H \quad (\text{VIII.30})$$

$$\overline{\mathbf{g}}(t) = \overline{\mathbf{h}}'(t) \overline{\gamma}(t) \overline{\sigma}(t)^H \quad (\text{VIII.31})$$

$$\overline{\gamma}'(t) = \overline{\sigma}(t) \overline{\gamma}(t) \overline{\sigma}(t)^H. \quad (\text{VIII.32})$$

### VIII.3.3 Mise à jour de $\mathbf{W}(t)$

Une fois que la matrice  $\overline{\mathbf{Z}}(t)$  a été calculée, la matrice  $\mathbf{W}(t)$  peut être mise à jour efficacement. Soit  $\overline{\boldsymbol{\phi}}(t)$  une matrice orthonormée de dimensions  $(r + p + q - 1) \times (p + q - 1)$ , dont les colonnes engendrent le sous-espace dominant de dimension  $(p + q - 1)$  de la matrice définie positive  $\overline{\mathbf{Z}}(t)$ , de dimension  $(r + p + q - 1) \times (r + p + q - 1)$ . En particulier, il existe une matrice  $\overline{\boldsymbol{\lambda}}(t)$  définie positive de dimension  $(p + q - 1) \times (p + q - 1)$ , dont les valeurs propres sont égales aux  $p + q - 1$  plus grandes valeurs propres de  $\overline{\mathbf{Z}}(t)$ , telle que

$$\overline{\mathbf{Z}}(t) \overline{\boldsymbol{\phi}}(t) = \overline{\boldsymbol{\phi}}(t) \overline{\boldsymbol{\lambda}}(t). \quad (\text{VIII.33})$$

Soit  $\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)$  la matrice de dimensions  $r \times (p + q - 1)$  contenant les  $r$  premières colonnes de  $\overline{\boldsymbol{\phi}}(t)$ , et  $\overline{\boldsymbol{z}}(t)$  la matrice de dimension  $(p + q - 1) \times (p + q - 1)$  contenant ses  $p + q - 1$  dernières lignes :

$$\overline{\boldsymbol{\phi}}(t)^T = [\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)^T, \overline{\boldsymbol{z}}(t)^T]. \quad (\text{VIII.34})$$

La factorisation polaire de  $\overline{\boldsymbol{z}}(t)$  est définie comme

$$\overline{\boldsymbol{z}}(t) = \overline{\boldsymbol{\rho}}(t) \overline{\boldsymbol{\theta}}(t) \quad (\text{VIII.35})$$

où  $\overline{\boldsymbol{\rho}}(t)$  est définie positive et  $\overline{\boldsymbol{\theta}}(t)$  est orthonormal. Soit<sup>5</sup>

$$\overline{\boldsymbol{f}}(t) = \overline{\boldsymbol{\varphi}}(t) \overline{\boldsymbol{\theta}}(t)^H \quad (\text{VIII.36})$$

$$\overline{\boldsymbol{f}}'(t) = \overline{\boldsymbol{f}}(t) (\overline{\mathbf{I}} + \overline{\boldsymbol{\rho}}(t))^{-1}. \quad (\text{VIII.37})$$

<sup>4</sup>Le lemme A.8.2 doit être appliqué avec  $\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{C}}_{yy}(t)$ ,  $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{y}}''(t)$ ,  $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{y}}''(t)^H$ , et  $\mathbf{D} = \overline{\mathbf{c}}_{yy}(t)$ .

<sup>5</sup>Puisque  $\overline{\boldsymbol{\rho}}(t)$  est définie positive, la matrice  $\overline{\mathbf{I}} + \overline{\boldsymbol{\rho}}(t)$ , de dimension  $(p + q - 1) \times (p + q - 1)$ , est également définie positive. En particulier,  $\overline{\mathbf{I}} + \overline{\boldsymbol{\rho}}(t)$  est inversible.

Alors on vérifie que la matrice de dimensions  $(r + p + q - 1) \times r$

$$\mathbf{U}(t) = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{I}_r - \overline{\mathbf{f}}'(t) \overline{\mathbf{f}}(t)^H \\ -\mathbf{f}(t)^H \end{array} \right] \quad (\text{VIII.38})$$

est orthonormale et satisfait  $\mathbf{U}(t)^H \overline{\boldsymbol{\phi}}(t) = \mathbf{0}$ . Par conséquent,  $\mathbf{U}(t)$  est une base orthonormée du sous-espace mineur de dimension  $r$  de la matrice  $\overline{\mathbf{Z}}(t)$ . En substituant les équations (VIII.8) et (VIII.38) dans l'équation (VIII.2), on obtient une récurrence pour la matrice  $\mathbf{W}(t)$  :

$$\boxed{\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}(t-1) - \overline{\mathbf{e}}'(t) \overline{\mathbf{f}}(t)^H} \quad (\text{VIII.39})$$

où  $\overline{\mathbf{e}}'(t) = \overline{\mathbf{e}}(t) \overline{\boldsymbol{\sigma}}(t)^{-1} + \mathbf{W}(t-1) \overline{\mathbf{f}}'(t)$ .

Finalement, en substituant l'équation (VIII.6) dans cette dernière définition, on obtient

$$\overline{\mathbf{e}}'(t) = \overline{\mathbf{x}}(t) \overline{\boldsymbol{\sigma}}(t)^{-1} - \mathbf{W}(t-1) \overline{\mathbf{y}}'''(t) \quad (\text{VIII.40})$$

où

$$\overline{\mathbf{y}}'''(t) = \overline{\mathbf{y}}(t) \overline{\boldsymbol{\sigma}}(t)^{-1} - \overline{\mathbf{f}}'(t). \quad (\text{VIII.41})$$

### VIII.3.4 Mise à jour de $\mathbf{Z}(t)$

La matrice auxiliaire  $\mathbf{Z}(t)$  peut aussi être mise à jour efficacement. En effet, en substituant les équations (VIII.2) et (VIII.4) dans l'équation (VIII.5), on obtient  $\mathbf{C}_{yy}(t) = \mathbf{U}(t)^H \overline{\mathbf{C}}_{yy}(t) \mathbf{U}(t)$ . Comme la matrice orthonormée  $\mathbf{U}(t)$  engendre un sous-espace invariant de  $\overline{\mathbf{Z}}(t)$ , elle engendre aussi un sous-espace invariant de son inverse  $\overline{\mathbf{C}}_{yy}(t)$ . Par conséquent cette dernière équation implique

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{U}(t)^H \overline{\mathbf{Z}}(t) \mathbf{U}(t). \quad (\text{VIII.42})$$

En substituant les équations (VIII.37), (VIII.36), et (VIII.34) dans l'équation (VIII.38), on montre que

$$\mathbf{U}(t) = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{I}_r \\ -\overline{\mathbf{f}}'(t)^H \end{array} \right] - \overline{\boldsymbol{\phi}}(t) \overline{\boldsymbol{\theta}}(t)^H \overline{\mathbf{f}}'(t)^H. \quad (\text{VIII.43})$$

Ainsi, en substituant les équations (VIII.43), (VIII.28), (VIII.33) dans l'équation (VIII.42), on obtient

$$\boxed{\mathbf{Z}(t) = \widetilde{\mathbf{Z}}'(t) + \overline{\mathbf{g}}'(t) \overline{\mathbf{f}}'(t)^H + \overline{\mathbf{f}}'(t) \overline{\mathbf{g}}(t)^H} \quad (\text{VIII.44})$$

où

$$\overline{\mathbf{g}}'(t) = \overline{\mathbf{g}}(t) + \overline{\mathbf{f}}'(t) (\overline{\boldsymbol{\gamma}}'(t) - \overline{\boldsymbol{\theta}}(t) \overline{\boldsymbol{\lambda}}(t) \overline{\boldsymbol{\theta}}(t)^H). \quad (\text{VIII.45})$$

### VIII.3.5 Implémentation

Le pseudo-code complet de YAST est présenté dans la table VIII.2<sup>6</sup>. Dans le cas de la fenêtre exponentielle, son coût global est  $4nr$  MACs si  $p = 1$ , ce qui est inférieur ou égal à celui de FST, NIC et OPAST, et  $7nr$  si  $p = 2$ , ce qui reste un ordre de grandeur plus faible que celui de l'algorithme de

<sup>6</sup>Nous avons observé que l'algorithme YAST est sujet à une instabilité numérique s'il est implémenté de la façon proposée ci-dessus. Cela est dû à une perte de symétrie de la matrice  $\mathbf{Z}(t)$ . Pour rendre YAST stable, la symétrie doit être forcée en calculant

$$\mathbf{Z}(t) = \frac{\mathbf{Z}(t) + \mathbf{Z}(t)^H}{2} \quad (\text{VIII.46})$$

à la fin de chaque itération (voir la table VIII.2).

Karasalo, LORAF et SP. Dans le cas de la fenêtre tronquée, son coût global est  $8nr$  MACs si  $p = 1$ , ce qui est généralement plus faible que celui de TW-FAPI, et  $11nr$  si  $p = 2$ , ce qui reste plus faible que celui de SHSVD2, SWASVD2 et SW-OPAST.

Le coût du calcul des vecteurs  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{C}_{xx}(t-1)\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}''(t) = \mathbf{C}_{xx}(t-1)^2\mathbf{x}(t)$  et  $\tilde{\mathbf{x}}'(t-l) = \mathbf{C}_{xx}(t-1)\mathbf{x}(t-l)$  est réduit de  $O(n^2)$  à  $O(n)$  en utilisant la technique décrite dans [Davila, 2000], qui exploite la structure Hankel de la matrice de données.

## VIII.4 Simulations numériques

Le performance de l'estimation de l'espace signal est analysée comme dans la section VII.8 en terme d'angle principal maximal entre le sous-espace dominant exact de la matrice de corrélation  $\mathbf{C}_{xx}(t)$  et le sous-espace dominant estimé de cette même matrice de corrélation. Le signal de test est celui introduit dans la section VI.2.3.3. Le tableau VIII.1 caractérise les divers algorithmes de poursuite de l'espace signal illustrés dans cette section. Il complète le tableau VI.1 par l'ajout de la méthode des puissances itérées et des algorithmes FAPI, TW-FAPI et YAST.

TAB. VIII.1 – Comparaison des algorithmes de poursuite de l'espace signal

| Algorithme                     | Référence      | Coût                   | Ortho-normalité | Structure propre     | Figure / Fenêtre             |
|--------------------------------|----------------|------------------------|-----------------|----------------------|------------------------------|
| FAPI                           | chapitre VII   | $3nr$                  | oui             | non                  | Fig. VIII.1<br>exponentielle |
| YAST ( $p = 1$ et $q = 1$ )    | chapitre VIII  | $4nr$                  | oui             | non                  |                              |
| Méthode des puissances itérées | section VI.2.2 | $n^2r + nr^2$          | oui             | oui/non <sup>7</sup> |                              |
| YAST ( $p = 2$ et $q = 1$ )    | chapitre VIII  | $7nr$                  | oui             | non                  | Fig. VIII.2<br>rectangulaire |
| TW-FAPI                        | chapitre VII   | $6nr + 4lr$            | oui             | non                  |                              |
| YAST ( $p = 1$ et $q = 2$ )    | chapitre VIII  | $8nr$                  | oui             | non                  |                              |
| Méthode des puissances itérées | section VI.2.2 | $4Nr \log_2(N) + nr^2$ | oui             | oui/non              |                              |
| YAST ( $p = 2$ et $q = 2$ )    | chapitre VIII  | $11nr$                 | oui             | non                  |                              |

La figure VIII.1-a montre la trajectoire de l'angle principal maximal d'erreur obtenu avec FAPI, avec les paramètres  $n = 80$  et  $\beta \approx 0.99$ . Ce résultat doit être comparé à celui obtenu avec l'algorithme YAST en utilisant les mêmes paramètres (figure VIII.1-b) et  $p = 1$ . On observe que YAST converge beaucoup plus vite que FAPI. Ensuite la figure VIII.1-c montre le résultat obtenu avec la méthode des puissances itérées avec les mêmes paramètres. La méthode des puissances itérées converge plus rapidement que YAST. Enfin, la figure VIII.1-d montre le résultat obtenu avec YAST dans le cas  $p = 2$ . La convergence est encore plus rapide que celle de la méthode des puissances itérées.

La figure VIII.2-a montre la trajectoire de l'angle principal maximal d'erreur obtenue avec TW-FAPI, avec les paramètres  $n = 80$ ,  $\beta = 1$  et  $l = 120$  (fenêtre rectangulaire). Ce résultat doit être comparé à celui obtenu avec l'algorithme YAST à fenêtre tronquée avec les mêmes paramètres (figure VIII.2-b) et  $p = 1$ . On remarque que YAST converge beaucoup plus vite que TW-FAPI. Ensuite la figure VIII.2-c compare ce résultat à celui obtenu avec la méthode des puissances itérées avec les mêmes paramètres. La méthode des puissances itérées converge plus rapidement que YAST. Enfin, la

<sup>7</sup>La méthode des puissances itérées permet de suivre la structure propre de la matrice de corrélation quand l'étape d'orthonormalisation est effectuée à l'aide d'une factorisation QR; l'algorithme prend alors le nom de méthode d'*itération orthogonale*. D'autres méthodes d'orthonormalisation ne permettent pas de suivre la structure propre. Par exemple, celle utilisée dans la méthode des *puissances naturelles* [Hua et al., 1999] permet en revanche d'obtenir une matrice  $\mathbf{W}(t)$  stable au cours du temps (ce qui n'est pas le cas de la base des vecteurs propres, comme cela a été mentionné dans la section VI.2.1).

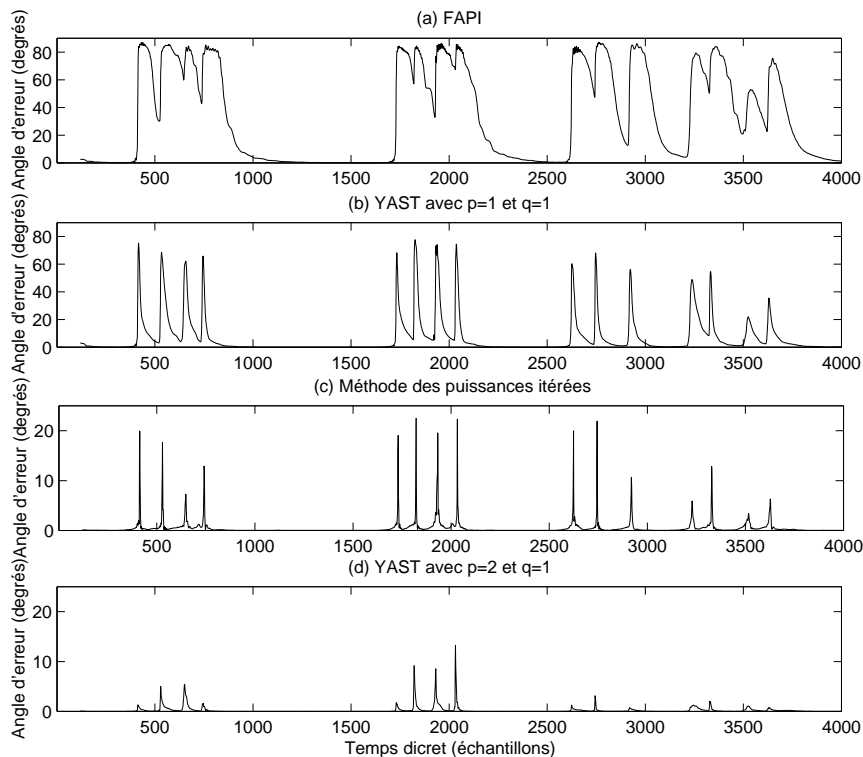


FIG. VIII.1 – Poursuite de l'espace signal reposant sur une fenêtre exponentielle

- (a) FAPI
- (b) YAST avec  $p = 1$  et  $q = 1$
- (c) Méthode des puissances itérées
- (d) YAST avec  $p = 2$  et  $q = 1$

figure VIII.2-d montre le résultat obtenu avec l'algorithme YAST à fenêtre tronquée dans le cas  $p = 2$ . De nouveau, la convergence est encore plus rapide que celle de la méthode des puissances itérées.

## VIII.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un nouvel algorithme de poursuite de sous-espace a été présenté, dérivé de l'algorithme SP de C.E. Davila. En particulier, la démonstration de sa convergence figure dans [Davila, 2000]. Cet algorithme atteint la complexité linéaire  $O(nr)$  et surclasse largement les algorithmes classiques de poursuite de sous-espace de même complexité. De plus, il garantit l'orthonormalité de la base de l'espace signal à chaque itération. Cet algorithme peut être modifié pour suivre le sous-espace mineur de la matrice de corrélation<sup>8</sup>.

<sup>8</sup>Dans ce cas, la matrice  $U(t)$  doit engendrer le sous-espace mineur de dimension  $r$  de  $\overline{C}_{yy}(t)$  (au lieu de  $\overline{Z}(t)$ ).



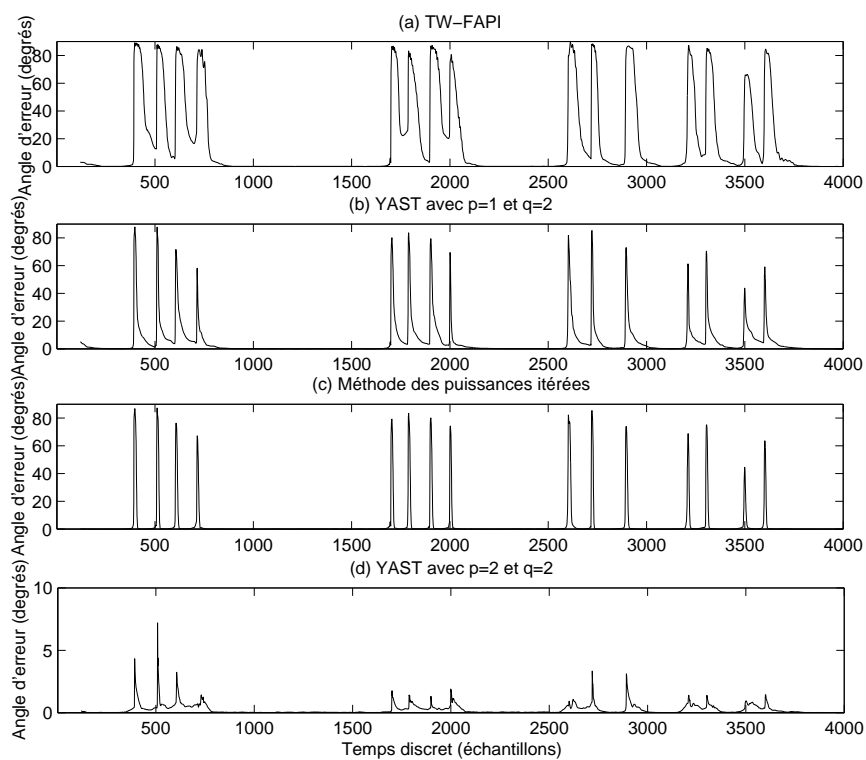


FIG. VIII.2 – Poursuite de l'espace signal reposant sur une fenêtre rectangulaire

- (a) TW-FAPI
- (b) YAST avec  $p = 1$  et  $q = 2$
- (c) Méthode des puissances itérées
- (d) YAST avec  $p = 2$  et  $q = 2$

TAB. VIII.2 – Pseudo-code de l'algorithme YAST

|   | éq. :     | MACs :                    |
|---|-----------|---------------------------|
| $\underline{\mathbf{x}}(t) \leftarrow \mathbf{x}(t)$  |           |                           |
| $\underline{\mathbf{y}}(t) \leftarrow \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{x}(t)$  |           | $nr$                      |
| $\underline{\tilde{\mathbf{x}}}'(t) \leftarrow \mathbf{x}'(t) = \mathbf{C}_{xx}(t-1) \mathbf{x}(t)$   |           | $O(n)$                    |
| $\underline{\tilde{\mathbf{y}}}'(t) \leftarrow \mathbf{y}'(t) = \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{x}'(t)$   |           | $nr$                      |
| si $q = 2$ ,  |           |                           |
| $\underline{\mathbf{x}}(t) \leftarrow [\underline{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t-l)]$   |           |                           |
| $\underline{\mathbf{y}}(t) \leftarrow [\underline{\mathbf{y}}(t), \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{x}(t-l)]$   |           | $(q-1)nr$                 |
| $\underline{\tilde{\mathbf{x}}}'(t-l) = \mathbf{C}_{xx}(t-1) \mathbf{x}(t-l)$   |           | $(q-1)O(n)$               |
| $\underline{\tilde{\mathbf{x}}}'(t) \leftarrow [\underline{\tilde{\mathbf{x}}}'(t), \underline{\tilde{\mathbf{x}}}'(t-l)]$  |           |                           |
| $\underline{\tilde{\mathbf{y}}}'(t) \leftarrow [\underline{\tilde{\mathbf{y}}}'(t), \mathbf{W}(t-1)^H \underline{\tilde{\mathbf{x}}}'(t-l)]$  |           | $(q-1)nr$                 |
| fin ;   |           |                           |
| $\overline{\mathbf{x}}(t) \leftarrow \underline{\mathbf{x}}(t)$   |           |                           |
| $\overline{\mathbf{y}}(t) \leftarrow \underline{\mathbf{y}}(t)$   |           |                           |
| si $p = 2$ ,  |           |                           |
| $\overline{\mathbf{x}}(t) \leftarrow [\overline{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}'(t)]$  |           |                           |
| $\overline{\mathbf{y}}(t) \leftarrow [\overline{\mathbf{y}}(t), \mathbf{y}'(t)]$  |           |                           |
| $\mathbf{x}''(t) = \mathbf{C}_{xx}(t-1)^2 \mathbf{x}(t)$  |           | $(p-1)O(n)$               |
| $\overline{\mathbf{x}}'(t) \leftarrow [\overline{\mathbf{x}}'(t), \mathbf{x}''(t)]$   |           |                           |
| $\overline{\mathbf{y}}'(t) \leftarrow [\overline{\mathbf{y}}'(t), \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{x}''(t)]$   |           | $(p-1)nr$                 |
| fin ;   |           |                           |
| $\overline{\sigma}(t) = (\overline{\mathbf{x}}(t)^H \overline{\mathbf{x}}(t) - \overline{\mathbf{y}}(t)^H \overline{\mathbf{y}}(t))^{\frac{1}{2}}$  | (VIII.7)  | $(p+q-1)^2(n+r)$          |
| $\underline{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{Z}(t-1) \underline{\mathbf{y}}(t)$   | (VIII.21) | $qr^2$                    |
| $\underline{\gamma}(t) = (\beta \underline{\mathbf{J}}^{-1} + \underline{\mathbf{y}}(t)^H \underline{\mathbf{h}}(t))^{-1}$  | (VIII.22) | $q^2r$                    |
| $\underline{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) = \frac{1}{\beta} (\mathbf{Z}(t-1) - \underline{\mathbf{h}}(t) \underline{\gamma}(t) \underline{\mathbf{h}}(t)^H)$   | (VIII.23) | $qr^2 + q^2r$             |
| $\overline{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \underline{\mathbf{x}}(t)^H \overline{\mathbf{x}}(t)$  | (VIII.13) | $(p+q-1)qn$               |
| $\overline{\mathbf{y}}''(t) = \beta \overline{\mathbf{y}}'(t) + \underline{\mathbf{y}}(t) \underline{\mathbf{J}} \overline{\boldsymbol{\alpha}}(t)$   | (VIII.19) | $(p+q-1)qr$               |
| $\overline{c}_{yy}(t) = \beta \overline{\mathbf{x}}(t)^H \overline{\mathbf{x}}'(t) + \overline{\boldsymbol{\alpha}}(t)^H \underline{\mathbf{J}} \overline{\boldsymbol{\alpha}}(t)$                                    | (VIII.20) | $(p+q-1)^2n$              |
| $\overline{\mathbf{h}}(t) = \underline{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) \overline{\mathbf{y}}''(t)$   | (VIII.25) | $(p+q-1)r^2$              |
| $\overline{\gamma}(t) = (\overline{c}_{yy}(t) - \overline{\mathbf{y}}''(t)^H \overline{\mathbf{h}}(t))^{-1}$  | (VIII.27) | $(p+q-1)^2r$              |
| $\overline{\mathbf{h}}'(t) = \overline{\mathbf{h}}(t) - \overline{\mathbf{y}}(t)$   | (VIII.29) |                           |
| $\underline{\tilde{\mathbf{Z}}}'(t) = \underline{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) + \overline{\mathbf{h}}'(t) \overline{\gamma}(t) \overline{\mathbf{h}}'(t)^H$   | (VIII.30) | $(p+q-1)r^2 + (p+q-1)^2r$ |
| $\overline{\mathbf{g}}(t) = \overline{\mathbf{h}}'(t) \overline{\gamma}(t) \overline{\sigma}(t)^H$  | (VIII.31) | $(p+q-1)^2r$              |
| $\overline{\gamma}'(t) = \overline{\sigma}(t) \overline{\gamma}(t) \overline{\sigma}(t)^H$  | (VIII.32) |                           |
| $\underline{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) = [\underline{\tilde{\mathbf{Z}}}'(t), -\overline{\mathbf{g}}(t); -\overline{\mathbf{g}}(t)^H, \overline{\gamma}'(t)]$   | (VIII.28) |                           |
| $(\overline{\boldsymbol{\phi}}(t), \overline{\boldsymbol{\lambda}}(t)) = \text{eigs}(\underline{\tilde{\mathbf{Z}}}(t), p+q-1)$   | (VIII.33) | $O((p+q-1)r^2)$           |
| $[\overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)^T, \overline{\boldsymbol{z}}(t)^T] = \overline{\boldsymbol{\phi}}(t)^T$  | (VIII.34) |                           |
| $(\overline{\boldsymbol{\rho}}(t), \overline{\boldsymbol{\theta}}(t)) = \text{polar}(\overline{\boldsymbol{z}}(t))$   | (VIII.35) |                           |
| $\overline{\mathbf{f}}(t) = \overline{\boldsymbol{\varphi}}(t) \overline{\boldsymbol{\theta}}(t)^H$   | (VIII.36) | $(p+q-1)^2r$              |
| $\overline{\mathbf{f}}'(t) = \overline{\mathbf{f}}(t) (\overline{\mathbf{I}} + \overline{\boldsymbol{\rho}}(t))^{-1}$   | (VIII.37) | $(p+q-1)^2r$              |
| $\overline{\mathbf{y}}'''(t) = \overline{\mathbf{y}}(t) \overline{\sigma}(t)^{-1} - \overline{\mathbf{f}}'(t)$  | (VIII.41) | $(p+q-1)^2r$              |
| $\overline{\mathbf{e}}'(t) = \overline{\mathbf{x}}(t) \overline{\sigma}(t)^{-1} - \mathbf{W}(t-1) \overline{\mathbf{y}}'''(t)$  | (VIII.40) | $(p+q-1)nr + (p+q-1)^2n$  |
| $\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}(t-1) - \overline{\mathbf{e}}'(t) \overline{\mathbf{f}}(t)^H$  | (VIII.39) | $(p+q-1)nr$               |
| $\overline{\mathbf{g}}'(t) = \overline{\mathbf{g}}(t) + \overline{\mathbf{f}}'(t) (\overline{\gamma}'(t) - \overline{\boldsymbol{\theta}}(t) \overline{\boldsymbol{\lambda}}(t) \overline{\boldsymbol{\theta}}(t)^H)$ | (VIII.45) | $(p+q-1)^2r$              |
| $\mathbf{Z}(t) = \underline{\tilde{\mathbf{Z}}}'(t) + \overline{\mathbf{g}}'(t) \overline{\mathbf{f}}'(t)^H + \overline{\mathbf{f}}'(t) \overline{\mathbf{g}}'(t)^H$  | (VIII.44) | $2(p+q-1)r^2$             |
| $\mathbf{Z}(t) = \frac{\mathbf{Z}(t) + \mathbf{Z}(t)^H}{2}$ (force la symétrie)   | (VIII.46) | $\frac{r(r+1)}{2}$        |
| <b>Total :</b>  |           | $(3p+4q-3)nr + O(n+r^2)$  |



## Chapitre IX

# Suivi des pôles et des amplitudes complexes

### Résumé

Reposant sur l'estimation de l'espace signal obtenue par le biais de FAPI et de YAST, nous proposons dans ce chapitre une nouvelle technique de suivi de la matrice spectrale, plus rapide que celles évoquées dans la section VI.3. Par ailleurs, nous proposons également deux approches pour suivre les pôles, la première effectuant une approximation, et la seconde permettant de les calculer exactement pour un coût inférieur à celui d'une EVD. La question du suivi des amplitudes est également évoquée. Les performances de l'algorithme complet de poursuite des paramètres ainsi obtenu sont illustrées en fin de chapitre.

## IX.1 Introduction

Les chapitres VII et VIII présentaient des algorithmes de poursuite d'espace signal qui mettent à jour la matrice  $\mathbf{W}(t)$  de dimension  $n \times r$  en lui ajoutant une matrice de rang réduit<sup>1</sup>  $p + q - 1 < r$  :

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}(t-1) + \underline{\mathbf{e}}(t) \underline{\mathbf{g}}(t)^H \quad (\text{IX.1})$$

où  $\underline{\mathbf{e}}(t)$  est une matrice de dimension  $n \times (p+q-1)$  et  $\underline{\mathbf{g}}(t)$  est une matrice de dimension  $r \times (p+q-1)$ .

Nous visons maintenant à optimiser la suite du traitement en exploitant la structure particulière de la mise à jour de la matrice  $\mathbf{W}(t)$  dans l'équation (IX.1). Ainsi un nouvel algorithme ESPRIT adaptatif est proposé dans la section IX.2, plus rapide que ceux évoqués dans la section VI.3. La section IX.3 est consacrée au suivi des pôles. Les performances des méthodes de suivi de la matrice spectrale et des pôles sont ensuite illustrées dans la section IX.4. La question du suivi des amplitudes complexes est évoquée dans la section IX.5. Enfin, la section IX.6 dresse un bilan de l'algorithme complet de suivi des paramètres du modèle.

## IX.2 Suivi de la matrice spectrale

L'expression de la matrice spectrale  $\Phi(t)$  a été donnée dans la section V.3.1 :

$$\Phi(t) = \Omega(t) \Psi(t) \quad (\text{V.6})$$

où  $\Omega(t)$  et  $\Psi(t)$  sont des matrices de dimension  $r \times r$

$$\Omega(t) \triangleq (\mathbf{W}_\downarrow(t)^H \mathbf{W}_\downarrow(t))^{-1} \quad (\text{V.7})$$

$$\Psi(t) \triangleq \mathbf{W}_\downarrow(t)^H \mathbf{W}_\uparrow(t) \quad (\text{V.8}).$$

En particulier, il a été démontré dans la section V.3.1 que la matrice  $\Omega(t)$  possédait une expression simple permettant d'optimiser les calculs. A présent, nous allons montrer que la matrice  $\Psi(t)$  peut être calculée récursivement. Posons

$$\underline{\mathbf{e}}_-(t) = \mathbf{W}_\downarrow(t-1)^H \underline{\mathbf{e}}_\uparrow(t), \quad (\text{IX.2})$$

$$\underline{\mathbf{e}}_+(t) = \mathbf{W}_\uparrow(t-1)^H \underline{\mathbf{e}}_\downarrow(t), \quad (\text{IX.3})$$

$$\underline{\mathbf{e}}'_+(t) = \underline{\mathbf{e}}_+(t) + \underline{\mathbf{g}}(t) (\underline{\mathbf{e}}_\uparrow(t)^H \underline{\mathbf{e}}_\downarrow(t)). \quad (\text{IX.4})$$

En substituant les équations (IX.2), (IX.3) et (IX.4) dans l'équation (V.8), on montre que  $\Psi(t)$  satisfait une récursion de rang  $2(p+q-1)$  :

$$\boxed{\Psi(t) = \Psi(t-1) + \underline{\mathbf{e}}_-(t) \underline{\mathbf{g}}(t)^H + \underline{\mathbf{g}}(t) \underline{\mathbf{e}}'_+(t)^H.} \quad (\text{IX.5})$$

Ainsi, le calcul complet de  $\Phi(t)$  est réduit à  $2(p+q-1)nr + O(n+r^2)$  MACs (*cf.* table (IX.1)).

Par ailleurs, on peut extraire de l'équation (IX.1) le résultat suivant :

$$\boldsymbol{\nu}(t) = \boldsymbol{\nu}(t-1) + \underline{\mathbf{g}}(t) \underline{\mathbf{e}}_{(n-1)}(t) \quad (\text{IX.6})$$

où  $\boldsymbol{\nu}(t)$  est un vecteur de dimension  $r$  contenant le conjugué hermitien de la dernière ligne de  $\mathbf{W}(t)$  (*cf.* section V.3.1), et  $\underline{\mathbf{e}}_{(n-1)}(t)$  est un vecteur de dimension  $p+q-1$  contenant le conjugué hermitien

<sup>1</sup>Les vecteurs  $\underline{\mathbf{e}}(t)$  et  $\underline{\mathbf{g}}(t)$  ne sont pas définis de la même manière dans les chapitres VII et VIII, et ne sont d'ailleurs pas désignés sous le même nom. Nous optons ici pour une notation unique, qui ne prête pas à ambiguïté avec celles de ces deux chapitres. Concernant le rang de ces matrices, le chapitre VII correspond au cas  $p=1$ .

TAB. IX.1 – Suivi de la matrice spectrale

|   |        |                                  |
|---|--------|----------------------------------|
| $\underline{e}_-(t) = \mathbf{W}_\downarrow(t-1)^H \underline{e}_\uparrow(t)$   | (IX.2) | <b>Complexité</b><br>$n(p+q-1)r$ |
| $\underline{e}_+(t) = \mathbf{W}_\uparrow(t-1)^H \underline{e}_\downarrow(t)$   | (IX.3) | $n(p+q-1)r$                      |
| $\underline{e}'_+(t) = \underline{e}_+(t) + \underline{g}(t) (\underline{e}_\uparrow(t)^H \underline{e}_\downarrow(t))$ | (IX.4) | $n(p+q-1)^2$                     |
| $\Psi(t) = \Psi(t-1) + \underline{e}_-(t) \underline{g}(t)^H + \underline{g}(t) \underline{e}'_+(t)^H$                  | (IX.5) | $2(p+q-1)r^2$                    |
| $\varphi(t) = \Psi(t)^H \nu(t)$   | (V.10) | $r^2$                            |
| $\Phi(t) = \Psi(t) + \frac{1}{1-\ \nu(t)\ ^2} \nu(t) \varphi(t)^H$  | (V.9)  | $r^2$                            |

de la dernière ligne de  $\underline{e}(t)$ . En substituant les équations (IX.5) et (IX.6) dans l'équation (V.9), on obtient finalement une récursion pour la matrice spectrale :

$$\Phi(t) = \Phi(t-1) + \underline{g}(t) \underline{e}''_+(t)^H + \underline{e}_-(t) \underline{g}(t)^H + \nu(t-1) \Delta\varphi(t)^H, \quad (\text{IX.7})$$

où

$$\begin{aligned} \underline{e}''_+(t) &= \underline{e}'_+(t) + \frac{1}{1-\|\nu(t)\|^2} \varphi(t) \underline{e}_{n-1}(t)^H, \\ \Delta\varphi(t) &= \frac{\varphi(t)}{1-\|\nu(t)\|^2} - \frac{\varphi(t-1)}{1-\|\nu(t-1)\|^2}. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une mise à jour de rang  $2(p+q-1)+1$ . Dans la suite, l'équation (IX.7) sera écrite sous une forme plus compacte :

$$\boxed{\Phi(t) = \Phi(t-1) + \underline{a}(t) \underline{b}(t)^H} \quad (\text{IX.8})$$

où  $\underline{a}(t)$  et  $\underline{b}(t)$  sont des matrices de dimension  $r \times (2p+2q-1)$ .

Cette technique de mise à jour de la matrice spectrale est encore plus rapide que celle qui a été proposée dans [Badeau *et al.*, 2003b]. On remarquera que le surcoût correspondant au calcul de  $\underline{e}''_+(t)$  et  $\Delta\varphi(t)$  n'est que de  $O(r)$  MACs.

### IX.3 Suivi des pôles

Comme il a été montré dans la section IX.2, la matrice  $\Phi(t)$  est mise à jour à l'aide d'une modification de rang  $2p+2q-1$  (*cf.* équation (IX.8)). Pour suivre ses valeurs propres, les techniques évoquées dans la section VI.3 s'avèrent moins intéressantes qu'une simple EVD. Deux autres approches sont proposées ci-dessous :

- utiliser un algorithme d'itération orthogonale séquentiel (section IX.3.1),
- effectuer une mise à jour exacte (section IX.3.2).

#### IX.3.1 Algorithme d'itération orthogonale séquentiel avec décalage

Partant sur la même idée que dans la section V.2, il est possible d'utiliser l'algorithme d'itération orthogonale pour calculer la décomposition de Schur (et en particulier les valeurs propres) de la matrice  $\Phi(t)$ . Malheureusement, il se trouve que cet algorithme converge très lentement dans la pratique. En effet, comme il a été mentionné dans la section V.2, la vitesse de convergence pour chaque valeur propre  $z_k(t)$  est en  $\left| \frac{z_{k+1}(t)}{z_k(t)} \right|^i$  (en supposant  $k < K-1$  et les pôles  $z_k(t)$  triés par ordre de module décroissant). Or les pôles du signal se trouvent le plus souvent dans le voisinage du cercle unité et ont

par conséquent des modules très proches. Pour contourner cette difficulté, il existe une solution très simple qui repose sur la technique des décalages [Golub et Van Loan, 1996, pp. 353] : au lieu de calculer les valeurs propres de la matrice  $\Phi(t)$ , on calcule celles de la matrice  $\Phi_\mu(t) \triangleq \Phi(t) - \mu(t)\mathbf{I}_r$ , où  $\mu(t) \in \mathbb{C}$  (il suffit ensuite de rajouter  $\mu(t)$  à toutes les valeurs propres obtenues). La vitesse de convergence de l'algorithme est alors  $\left| \frac{z_{k+1}(t) - \mu(t)}{z_k(t) - \mu(t)} \right|^i$  et peut être optimisée en choisissant judicieusement<sup>2</sup> le décalage  $\mu(t)$ .

La complexité de cet algorithme d'itération orthogonale avec décalage est  $O(r^3)$ . Contrairement à ce qui a été fait dans le chapitre VI, il n'est pas possible de réduire cette complexité sans introduire d'approximation, car la matrice  $\Phi(t)$  ne possède pas de structure particulière. Il est cependant possible de réduire les calculs en n'effectuant qu'une seule itération à chaque instant. On obtient ainsi l'algorithme séquentiel présenté dans la table IX.2, dont la complexité est  $2r^3$ . Cet algorithme approche les valeurs propres de la matrice  $\Phi(t)$ .

TAB. IX.2 – Itération orthogonale séquentielle avec décalage

|  |   |
|--|---|
| Récursion sur $t$  |   |
| $\Phi_\mu(t) = \Phi_\mu(t-1) + \underline{\mathbf{a}}(t)\underline{\mathbf{b}}(t)^H - (\mu(t) - \mu(t-1))\mathbf{I}_r$ | $(2p + 2q - 1)r^2$<br>$r^3$<br>$r^3$<br>$r$ |
| $\mathbf{Z}(t) = \Phi_\mu(t)\mathbf{Q}(t-1)$   |   |
| $\mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t) = \mathbf{Z}(t)$   |   |
| $\{z_k(t)\}_{k \in \{0 \dots K-1\}} = \text{diag } \mathbf{R}(t) + \mu(t)$   |   |

*Remarque.* Il existe dans la littérature une alternative à l'algorithme d'itération orthogonale baptisée *itération QR*, utilisable dans le cas où l'on ne cherche pas à calculer un sous-ensemble mais la totalité des valeurs propres (ce qui est le cas ici). Une version séquentielle de cet algorithme s'obtient en effectuant le changement de variable  $\Phi(t) \rightarrow \mathbf{T}(t) = \mathbf{Q}(t-1)^H \Phi(t) \mathbf{Q}(t-1)$ , de façon similaire à ce qui est proposé dans [Golub et Van Loan, 1996, pp. 334]. Cependant, cet algorithme n'est pas intéressant car il s'avère plus coûteux que l'algorithme d'itération orthogonale séquentiel ( $3r^3$  au lieu de  $2r^3$ ) et présente exactement les mêmes performances.

Pour réduire davantage la complexité, il serait possible d'envisager d'utiliser une approximation similaire à celle qui a été introduite dans le chapitre VII, afin d'obtenir un coût en  $O(r^2)$ . Malheureusement, nous avons pu observer que cette méthode ne donne pas les résultats attendus (en fait elle ne converge pas). En effet, contrairement à la mise à jour de la matrice  $\mathbf{C}_{xx}(t)$  qui fait intervenir un vecteur de l'espace signal à l'instant  $t$ , la mise à jour de la matrice  $\Phi(t)$  consiste en un ajustement de faible amplitude, idéalement nul en l'absence de bruit si les paramètres du signal sont constants. Introduire une approximation à chaque itération amène ainsi à cumuler les erreurs et empêche l'algorithme de converger.

Un deuxième algorithme de suivi est proposé dans la section suivante. Celui-ci calcule les valeurs propres *exactes* de la matrice  $\Phi(t)$ , et ne s'avère pas plus coûteux que l'algorithme d'itération orthogonale séquentiel, qui ne donne que des valeurs approchées. Le premier sera donc logiquement abandonné au profit du second.

<sup>2</sup>Si les pôles sont supposés être au voisinage du cercle unité et avoir des fréquences centrées en 0,  $\mu(t) = 1$  paraît être un choix approprié. En particulier,  $\mu(t)$  est lui-même sur le cercle unité, et la matrice  $\Phi_\mu(t)$  est réelle si  $\Phi(t)$  est réelle.

### IX.3.2 Mise à jour exacte

Dans cette section est proposée une méthode récursive permettant de calculer les valeurs propres de la matrice spectrale de manière exacte, en exploitant la structure de la mise à jour dans l'équation (IX.8) :

$$\Phi(t) = \Phi(t-1) + \underline{\mathbf{a}}(t) \underline{\mathbf{b}}(t)^H.$$

Cette méthode est limitée au cas où la matrice  $\Phi(t)$  est diagonalisable à chaque instant, ce qui est toujours le cas dans la pratique (d'ailleurs la méthode d'estimation des pôles multiples proposée dans le chapitre III tient compte de l'éclatement de ces pôles en valeurs propres simples en présence de perturbations).

Par souci de simplicité, cette récursion est analysée dans un premier temps dans le cas particulier où  $\underline{\mathbf{a}}(t)$  et  $\underline{\mathbf{b}}(t)$  sont des vecteurs de dimension  $r$ , qui seront par conséquent notés  $\mathbf{a}(t)$  et  $\mathbf{b}(t)$  (section IX.3.2.1). Cette étude sera ensuite généralisée au cas où  $\underline{\mathbf{a}}(t)$  et  $\underline{\mathbf{b}}(t)$  sont des matrices de dimension  $r \times (2p + 2q - 1)$  (section IX.3.2.2).

#### IX.3.2.1 Cas d'une mise à jour de rang un

Considérons la factorisation

$$\Phi(t-1) = \mathbf{G}(t-1) \mathbf{J}(t-1) \mathbf{G}(t-1)^{-1}$$

où la matrice de Jordan  $\mathbf{J}(t-1)$  est diagonale. Considérons également la mise à jour de rang un

$$\Phi(t) = \Phi(t-1) + \mathbf{a}(t) \mathbf{b}(t)^H. \quad (\text{IX.9})$$

Alors posons  $\tilde{\Phi}(t) = \mathbf{G}(t-1)^{-1} \Phi(t) \mathbf{G}(t-1)$ ,

$$\tilde{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{G}(t-1)^{-1} \mathbf{a}(t) \quad (\text{IX.10})$$

et

$$\tilde{\mathbf{b}}(t) = \mathbf{G}(t-1)^H \mathbf{b}(t). \quad (\text{IX.11})$$

Ainsi, l'équation (IX.9) est équivalente à

$$\tilde{\Phi}(t) = \mathbf{J}(t-1) + \tilde{\mathbf{a}}(t) \tilde{\mathbf{b}}(t)^H. \quad (\text{IX.12})$$

Nous cherchons à diagonaliser  $\tilde{\Phi}(t)$  sous la forme  $\tilde{\Phi}(t) = \tilde{\mathbf{G}}(t) \mathbf{J}(t) \tilde{\mathbf{G}}(t)^{-1}$ . On obtiendra ainsi

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{G}(t-1) \tilde{\mathbf{G}}(t). \quad (\text{IX.13})$$

Soient alors  $\tilde{\mathbf{g}}_0(t), \dots, \tilde{\mathbf{g}}_{r-1}(t)$  les vecteurs colonne de la matrice  $\tilde{\mathbf{G}}(t)$ , de sorte que

$$\tilde{\mathbf{G}}(t) = [\tilde{\mathbf{g}}_0(t), \dots, \tilde{\mathbf{g}}_{r-1}(t)].$$

De même, posons  $\tilde{\mathbf{G}}(t)' = \tilde{\mathbf{G}}(t)^{-H}$ , et considérons ses vecteurs colonne de sorte que

$$\tilde{\mathbf{G}}(t)' = [\tilde{\mathbf{g}}'_0(t), \dots, \tilde{\mathbf{g}}'_{r-1}(t)].$$

Les vecteurs ainsi définis vérifient  $\forall k \in \{0 \dots r-1\}$ ,  $\tilde{\mathbf{g}}'_k(t)^H \tilde{\mathbf{g}}_k(t) = 1$  et  $\forall k \neq k'$ ,  $\tilde{\mathbf{g}}'_k(t)^H \tilde{\mathbf{g}}_{k'}(t) = 0$ .

Soit  $z$  une valeur propre de  $\tilde{\Phi}(t)$ ,  $\tilde{\mathbf{g}}$  un vecteur propre à droite associé, et  $\tilde{\mathbf{g}}'$  un vecteur propre à gauche. Alors on vérifie que

$$(z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1)) \tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{a}}(t) (\tilde{\mathbf{b}}(t)^H \tilde{\mathbf{g}}) \quad (\text{IX.14})$$

$$(z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^* \tilde{\mathbf{g}}' = \tilde{\mathbf{b}}(t) (\tilde{\mathbf{a}}(t)^H \tilde{\mathbf{g}}') \quad (\text{IX.15})$$

Les deux propositions suivantes donnent l'expression des vecteurs propres  $\tilde{\mathbf{g}}$  et  $\tilde{\mathbf{g}}'$ , selon que  $z$  est une valeur propre de  $\Phi(t-1)$  ou non. Elles sont démontrées en annexe, dans la section B.5.1, page 195.



**Proposition IX.3.1.** *Si  $z$  n'est pas valeur propre de  $\Phi(t-1)$ , alors  $\tilde{\mathbf{b}}(t)^H \tilde{\mathbf{g}} \neq 0$  et  $\tilde{\mathbf{a}}(t)^H \tilde{\mathbf{g}} \neq 0$ . De plus,*

$$\boxed{\tilde{\mathbf{g}} \in \text{span} \left( (z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1} \tilde{\mathbf{a}}(t) \right)} \quad (\text{IX.16})$$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{g}}' \in \text{span} \left( (z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1*} \tilde{\mathbf{b}}(t) \right)}. \quad (\text{IX.17})$$

**Proposition IX.3.2.** *Si  $z$  est égal à une valeur propre  $z_k(t-1)$  de  $\Phi(t-1)$ , alors au moins l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

-  $\tilde{\mathbf{a}}_k(t) = 0$  et

$$\tilde{\mathbf{g}}' \in \text{span}(\mathbf{e}_k) \quad (\text{IX.18})$$

$$\tilde{\mathbf{g}} = \rho_1 (z_k(t-1)\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^\dagger \tilde{\mathbf{a}}(t) + \rho_2 \mathbf{e}_k \quad (\text{IX.19})$$

où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  satisfont la relation

$$\rho_1 \left( 1 - \tilde{\mathbf{b}}(t)^H (z_k(t-1)\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^\dagger \tilde{\mathbf{a}}(t) \right) = \rho_2 \tilde{\mathbf{b}}_k(t)^* \quad (\text{IX.20})$$

-  $\tilde{\mathbf{b}}_k(t) = 0$  et

$$\tilde{\mathbf{g}} \in \text{span}(\mathbf{e}_k) \quad (\text{IX.21})$$

$$\tilde{\mathbf{g}}' = \rho_1 (z_k(t-1)\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{*\dagger} \tilde{\mathbf{b}}(t) + \rho_2 \mathbf{e}_k \quad (\text{IX.22})$$

où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  satisfont la relation

$$\rho_1 \left( 1 - \tilde{\mathbf{a}}(t)^H (z_k(t-1)\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{*\dagger} \tilde{\mathbf{b}}(t) \right) = \rho_2 \tilde{\mathbf{a}}_k(t)^*. \quad (\text{IX.23})$$

La proposition suivante détermine les valeurs propres de  $\Phi(t)$ . Elle est également démontrée en annexe, dans la section B.5.1, page 195.

**Proposition IX.3.3.** *Pour tout  $k \in \{0 \dots r-1\}$ ,  $z_k(t-1)$  est valeur propre de  $\Phi(t)$  si et seulement si le produit  $\tilde{\mathbf{b}}_k(t)^* \tilde{\mathbf{a}}_k(t)$  est nul. Les autres valeurs propres de  $\Phi(t)$  sont les solutions de l'équation*

$$\boxed{1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\tilde{\mathbf{b}}_k(t)^* \tilde{\mathbf{a}}_k(t)}{z - z_k(t-1)} = 0.} \quad (\text{IX.24})$$

Pour résoudre l'équation (IX.24), il suffit de remarquer que le membre de gauche devient un polynôme de degré  $r$  quand il est multiplié par  $\prod_{k=0}^{r-1} (z - z_k(t-1))$ . L'algorithme de suivi des pôles est résumé dans la table (IX.3). Par souci de simplicité, il est supposé dans cette table qu'aucune valeur propre de  $\Phi(t)$  n'est exactement valeur propre de  $\Phi(t-1)$  (ce qui est toujours le cas dans la pratique). Par contre, la formule utilisée pour calculer la matrice  $\tilde{\mathbf{G}}(t)$  a été choisie de façon à éviter les problèmes numériques dans le cas où  $z_k(t)$  est proche de  $z_k(t-1)$ . Enfin, la normalisation des colonnes de  $\tilde{\mathbf{G}}(t)$  est indispensable pour assurer la stabilité de l'algorithme.

La complexité globale est  $\frac{4}{3}r^3 + O(r^2)$  : l'ordre de grandeur,  $r^3$ , est le même que celui d'une diagonalisation directe de la matrice  $\Phi(t)$ , mais la constante multiplicative est beaucoup plus faible (cf. [Golub et Van Loan, 1996, pp. 359]).

TAB. IX.3 – Algorithme de suivi des pôles (mise à jour de rang 1)

|  |         |                          |
|--|---------|--------------------------|
| $\tilde{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{G}(t-1)^{-1} \mathbf{a}(t)$   | (IX.10) | $\frac{r^3}{3} + O(r^2)$ |
| $\tilde{\mathbf{b}}(t) = \mathbf{G}(t-1)^H \mathbf{b}(t)$  | (IX.11) | $r^2$                    |
| Calculer $\{z_k(t)\}$ en résolvant l'équation $1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\tilde{b}_k(t)^* \tilde{a}_k(t)}{z - z_k(t-1)} = 0$  | (IX.24) | $O(r^2)$                 |
| $\forall k', k, \tilde{\mathbf{G}}_{(k',k)}(t) = \frac{z_k(t) - z_{k'}(t-1)}{z_k(t) - z_{k'}(t-1)} \tilde{\mathbf{a}}_{k'}(t)$ | (IX.16) | $2r^2$                   |
| Normaliser les colonnes de $\tilde{\mathbf{G}}(t)$   |         | $2r^2$                   |
| $\mathbf{G}(t) = \mathbf{G}(t-1) \tilde{\mathbf{G}}(t)$  | (IX.13) | $r^3$                    |

### IX.3.2.2 Généralisation à une mise à jour de rang faible

Considérons de nouveau l'équation (IX.8),  $\Phi(t) = \Phi(t-1) + \underline{\mathbf{a}}(t) \underline{\mathbf{b}}(t)^H$ , où  $\underline{\mathbf{a}}(t)$  et  $\underline{\mathbf{b}}(t)$  sont des matrices de dimension  $r \times (2p + 2q - 1)$ . Soit  $\mathbf{G}'(t-1) = \mathbf{G}(t-1)^{-H}$ . Alors posons

$$\tilde{\underline{\mathbf{a}}}(t) = \mathbf{G}'(t-1)^H \underline{\mathbf{a}}(t) \quad (\text{IX.25})$$

et

$$\tilde{\underline{\mathbf{b}}}(t) = \mathbf{G}(t-1)^H \underline{\mathbf{b}}(t). \quad (\text{IX.26})$$

qui remplacent les équations (IX.10) et (IX.11). Alors l'équation (IX.12) devient

$$\tilde{\Phi}(t) = \mathbf{J}(t-1) + \tilde{\underline{\mathbf{a}}}(t) \tilde{\underline{\mathbf{b}}}(t)^H.$$

Soit  $z$  une valeur propre de  $\tilde{\Phi}(t)$ ,  $\tilde{\mathbf{g}}$  un vecteur propre à droite associé, et  $\tilde{\mathbf{g}}'$  un vecteur propre à gauche. Alors on vérifie que

$$(z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1)) \tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\underline{\mathbf{a}}}(t) (\tilde{\underline{\mathbf{b}}}(t)^H \tilde{\mathbf{g}}) \quad (\text{IX.27})$$

$$(z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^* \tilde{\mathbf{g}}' = \tilde{\underline{\mathbf{b}}}(t) (\tilde{\underline{\mathbf{a}}}(t)^H \tilde{\mathbf{g}}') \quad (\text{IX.28})$$

qui se substituent aux équations (IX.14) et (IX.15).

La proposition suivante donne l'expression des vecteurs propres  $\tilde{\mathbf{g}}$  et  $\tilde{\mathbf{g}}'$  dans le cas où  $z$  n'est pas une valeur propre de  $\Phi(t-1)$ , et exprime  $z$  comme solution d'une équation. Elle est démontrée dans la section B.5.2.

**Proposition IX.3.4.** *Si  $z$  n'est pas valeur propre de  $\Phi(t-1)$ , alors la matrice*

$$\underline{\mathbf{I}} - \tilde{\underline{\mathbf{b}}}(t)^H (z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1} \tilde{\underline{\mathbf{a}}}(t)$$

*est singulière et  $z$  est solution de l'équation*

$$\det \left( \underline{\mathbf{I}} - \tilde{\underline{\mathbf{b}}}(t)^H (z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1} \tilde{\underline{\mathbf{a}}}(t) \right) = 0. \quad (\text{IX.29})$$

*De plus, les vecteurs propres  $\tilde{\mathbf{g}}$  et  $\tilde{\mathbf{g}}'$  s'écrivent sous la forme*

$$\tilde{\mathbf{g}} = (z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1} \tilde{\underline{\mathbf{a}}}(t) \underline{\mathbf{v}} \quad (\text{IX.30})$$

$$\tilde{\mathbf{g}}' = (z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1*} \tilde{\underline{\mathbf{b}}}(t) \underline{\mathbf{v}}' \quad (\text{IX.31})$$

où

$$\underline{v} \in \ker \left\{ \underline{I} - \tilde{\mathbf{b}}(t)^H (z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1} \tilde{\mathbf{a}}(t) \right\} \quad (\text{IX.32})$$

$$\underline{v}' \in \ker \left\{ \left( \underline{I} - \tilde{\mathbf{b}}(t)^H (z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1} \tilde{\mathbf{a}}(t) \right)^H \right\}. \quad (\text{IX.33})$$

L'algorithme est résumé dans la table (IX.4). Sa complexité est  $2r^3 + O(r^2)$ , indépendamment de  $2p + 2q - 1$  (à condition toutefois que  $2p + 2q - 1$  reste très inférieur à  $r$ ).

TAB. IX.4 – Algorithme de suivi des pôles (mise à jour de rang faible)

|   |            |                    |
|---|------------|--------------------|
| $\tilde{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{G}'(t-1)^H \underline{\mathbf{a}}(t)$  | (IX.25)    | $(2p + 2q - 1)r^2$ |
| $\tilde{\mathbf{b}}(t) = \mathbf{G}(t-1)^H \underline{\mathbf{b}}(t)$   | (IX.26)    | $(2p + 2q - 1)r^2$ |
| Calculer $\{z_k(t)\}$ en résolvant l'équation $\det \left( \underline{I} - \tilde{\mathbf{b}}(t)^H (z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1} \tilde{\mathbf{a}}(t) \right) = 0$                            | (IX.29)    | $O(r^2)$           |
| Pour $k$ allant de 1 à $r$ faire  | $r \times$ |                    |
| $\underline{\phi}_k(t) = \underline{I} - \tilde{\mathbf{b}}(t)^H (z_k(t)\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1} \tilde{\mathbf{a}}(t)$   | $O(1)$     |                    |
| Extraire $\underline{v}_k(t)$ de $\ker \left\{ \underline{\phi}_k(t) \right\}$  | (IX.32)    | $O(1)$             |
| $\tilde{\mathbf{g}}_k(t) = \text{diag} \left( \frac{z_k(t) - z_k(t-1)}{z_k(t) - z_0(t-1)}, \dots, \frac{z_k(t) - z_k(t-1)}{z_k(t) - z_{r-1}(t-1)} \right) \tilde{\mathbf{a}}(t) \underline{v}_k(t)$     | (IX.30)    | $(2p + 2q + 1)r$   |
| Extraire $\underline{v}'_k(t)$ de $\ker \left\{ \underline{\phi}_k(t)^H \right\}$   | (IX.33)    | $O(1)$             |
| $\tilde{\mathbf{g}}'_k(t) = \text{diag} \left( \frac{z_k(t) - z_k(t-1)}{z_k(t) - z_0(t-1)}, \dots, \frac{z_k(t) - z_k(t-1)}{z_k(t) - z_{r-1}(t-1)} \right)^* \tilde{\mathbf{b}}(t) \underline{v}'_k(t)$ | (IX.31)    | $(2p + 2q + 1)r$   |
| Fin pour  |            |                    |
| Remettre à l'échelle les colonnes de $\tilde{\mathbf{G}}(t)$ et $\tilde{\mathbf{G}}'(t)$ de façon à obtenir $\tilde{\mathbf{G}}'(t)^H \tilde{\mathbf{G}}(t) = \mathbf{I}_r$                             |            | $4r^2$             |
| $\mathbf{G}(t) = \mathbf{G}(t-1) \tilde{\mathbf{G}}(t)$   | (IX.13)    | $r^3$              |
| $\mathbf{G}'(t) = \mathbf{G}'(t-1) \tilde{\mathbf{G}}'(t)$  | (IX.13)    | $r^3$              |

## IX.4 Simulations numériques

Nous illustrons ici les performances du suivi obtenu avec la technique de suivi de la matrice spectrale résumée dans la table IX.1 et la technique de suivi des pôles résumée dans la table IX.4. Ces deux méthodes ont été testées avec les algorithmes de poursuite d'espace signal FAPI, TW-FAPI et YAST, dont les complexités ont été données dans la table VIII.1. Le signal de test est celui qui a été introduit dans la section VI.2.3.3. Les paramètres du suivi sont  $n = 80$ ,  $l = 120$  et  $\beta = 1 - \frac{1}{7}$ .

La figure IX.1 montre les trajectoires fréquentielles obtenues avec les algorithmes FAPI, TW-FAPI et YAST avec  $p = 1$  et  $q = 1$  (fenêtre exponentielle). La ligne pointillée indique les paramètres fréquentiels exacts, alors que la ligne continue indique les fréquences estimées. Les performances de TW-FAPI et YAST sont semblables, et meilleures que celles de FAPI. La figure IX.2 montre les trajectoires fréquentielles obtenues avec l'algorithme YAST, dans les cas de figure ( $p = 1, q = 2$ ), ( $p = 2, q = 1$ ) et ( $p = 2, q = 2$ ). Les performances atteintes par ces trois implémentations sont comparables et meilleures que celles observées dans la figure IX.1. En fait, elles sont voisines de celles des algorithmes de complexité élevée illustrés dans la figure VI.2.

En conclusion, TW-FAPI et YAST sont meilleurs que FAPI en terme d'estimation des fréquences. Comme par ailleurs YAST possède une complexité voisine de celle de FAPI dans le cas  $p = 1$  et  $q = 1$ , nous préférons logiquement YAST à FAPI. De plus, TW-FAPI ne peut rivaliser avec YAST en terme

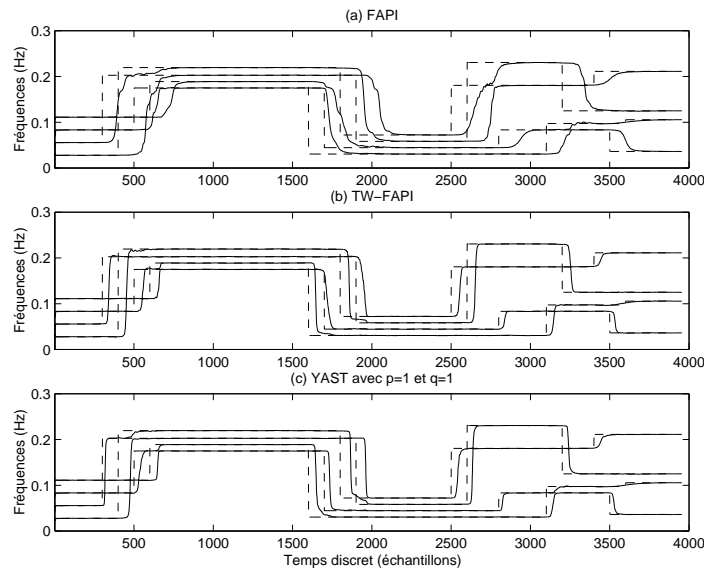


FIG. IX.1 – Suivi des fréquences (1/2)

- (a) FAPI
- (b) TW-FAPI
- (c) YAST avec  $p=1$  et  $q=1$  (fenêtre exponentielle)

de performances que dans le cas  $p = 1$  et  $q = 1$ , mais son coût est alors deux fois plus élevé. Nous préférons donc également YAST à TW-FAPI.

Cependant, si l'on souhaite réduire la charge de calculs en n'estimant pas l'espace signal à chaque instant, mais seulement à certains instants régulièrement espacés, il n'est plus possible d'utiliser YAST, car celui-ci s'appuie sur la structure Hankel de la matrice de données (des explications ont été données à ce sujet dans la remarque de la section VI.2.3). Dans ce cas FAPI et TW-FAPI constituent le meilleur choix.

## IX.5 Suivi des amplitudes complexes

Dans la section II.6 nous avons défini le vecteur  $\alpha(t)$  contenant les amplitudes complexes, dont se déduisent les amplitudes réelles et les phases correspondantes. Il est immédiat de vérifier que ce vecteur peut être mis à jour récursivement à l'aide de l'équation  $\alpha(t) = \mathbf{J}(t)\alpha(t-1)$ . Le suivi de  $\alpha(t)$  par cette méthode requiert ainsi  $r$  MACs<sup>3</sup>. Malheureusement, si cette technique de poursuite est peu coûteuse, elle n'est pas du tout robuste aux variations des paramètres, puisque les erreurs s'accroissent à chaque itération. Dans la pratique, elle devra être abandonnée au profit de la méthode (non adaptative) présentée dans la section V.3.2. Comme cette dernière ne coûte que  $Nr + \frac{r^3}{6} + O(r^2)$  MACs, elle n'accroît pas la complexité globale de l'algorithme de suivi des paramètres.

<sup>3</sup>Dans la pratique, les pôles sont estimés à chaque instant à une permutation près. Il est donc nécessaire de déterminer préalablement les trajectoires de chaque pôle par un critère de continuité temporelle avant de chercher à suivre les amplitudes complexes.

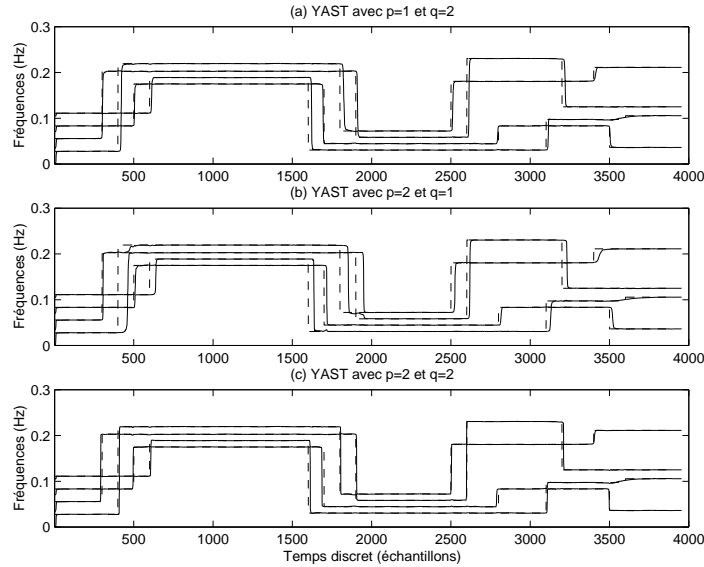


FIG. IX.2 – Suivi des fréquences (2/2)

- (a) YAST avec  $p=1$  et  $q=2$  (fenêtre rectangulaire)
- (b) YAST avec  $p=2$  et  $q=1$  (fenêtre exponentielle)
- (c) YAST avec  $p=2$  et  $q=2$  (fenêtre rectangulaire)

## IX.6 Conclusion

Dans ce chapitre a été proposé un nouvel algorithme ESPRIT adaptatif, plus rapide que ceux mentionnés dans la section VI.3. Les valeurs propres de la matrice spectrale sont obtenues par le biais d'une EVD, dont la complexité est réduite grâce à un calcul récursif. Enfin, les amplitudes complexes sont estimées comme dans la section V.3.2.

Le coût de chaque étape de l'algorithme de poursuite des paramètres est résumé ci-dessous :

- poursuite de l'espace signal :  $3qnr + 4(q-1)lr + o(nr)$  MACs avec FAPI/TW-FAPI, ou  $(3p + 4q - 3)nr + O(n + r^2)$  MACs avec YAST (*cf.* table VIII.2),
- calcul de la matrice spectrale :  $2(p+q-1)nr + O(n + r^2)$  MACs (*cf.* table IX.1),
- suivi des pôles :  $2r^3 + O(r^2)$  MACs (*cf.* table IX.4),
- suivi des amplitudes complexes :  $Nr + \frac{r^3}{6} + O(r^2)$  MACs (*cf.* section IX.5).

Le coût du traitement complet est donc  $(q+4)nr + (4q-3)Nr + \frac{13}{6}r^3 + O(n+r^2)$  MACs avec FAPI/TW-FAPI, ou  $(6q+5p-5)nr + Nr + \frac{13}{6}r^3 + O(n+r^2)$  MACs avec YAST.

Cet algorithme permet ainsi de suivre de manière précise et rapide les trajectoires temporelles des sinusoïdes. Ce suivi permet d'envisager par exemple des applications de modification de durée ou de hauteur du signal, que nous avons abordées dans [Badeau *et al.*, 2002, David *et al.*, 2003]<sup>4</sup>. D'autres applications seront présentées dans la troisième partie de ce mémoire.

<sup>4</sup>Ces articles sont reproduits en annexe dans le chapitre C.

Troisième partie

Application aux signaux de musique



## Chapitre X

# Analyse à haute résolution des signaux de musique

### Résumé

Dans la littérature, les méthodes HR restent marginalement utilisées dans le cadre de l'analyse spectrale des signaux de musique. Pourtant, certains auteurs ont montré que le modèle ESM est particulièrement bien adapté à ce type de signaux. En fait, il permet de représenter bien plus qu'une simple somme de sinusoides à modulation exponentielle. Il n'en reste pas moins que la mise en oeuvre des méthodes HR est délicate et nécessite de prendre certaines précautions. Nous résumons dans ce chapitre les problèmes pouvant être rencontrés, et diverses solutions qui ont été proposées pour y remédier.



## X.1 Introduction

Dans la littérature, il est courant de représenter le signal audio comme une somme de sinusoïdes superposées à un bruit additif [Serra et Smith, 1990]. Le modèle ESM est plus général, car il permet de représenter des sinusoïdes dont l'amplitude varie exponentiellement dans l'horizon d'analyse. Certains auteurs se sont intéressés aux avantages apportés par cette extension du modèle. Nous nous efforçons ici de montrer que les méthodes HR permettent de décrire bien plus qu'une simple modulation exponentielle : elles se prêtent en fait à de nombreux types de modulations couramment rencontrées dans les signaux de musique.

Cependant, plusieurs problèmes se posent quand on souhaite mettre en oeuvre ces méthodes. Tout d'abord, le bruit additif n'est généralement pas blanc, ce qui rend le problème d'estimation plus complexe. Par ailleurs, les méthodes HR ont tendance à privilégier dans le signal les partiels de plus forte énergie, qui ne sont pas toujours les plus importants à l'oreille. Enfin, elles ne permettent en pratique d'estimer qu'un nombre réduit de composantes sinusoïdales, pouvant être inférieur au nombre d'harmoniques présents dans un son grave. Plusieurs approches ont été proposées pour pallier ces difficultés. En particulier, nous montrerons que découper le signal en sous-bandes présente de nombreux avantages.

Le chapitre est organisé de la façon suivante : dans la section X.2, nous tâcherons de mettre en évidence les apports essentiels des méthodes HR dans le traitement des signaux de musique. Ensuite, les divers problèmes posés par leur utilisation dans ce contexte seront évoqués dans la section X.3. Les méthodes proposées dans la littérature pour résoudre ces problèmes seront présentées dans la section X.4. Enfin, les principales conclusions de ce chapitre seront résumées dans la section X.5.

## X.2 Potentiel des méthodes HR pour l'analyse du signal de musique

Par rapport à l'analyse de Fourier, les méthodes HR offrent une résolution spectrale améliorée, permettant en particulier d'utiliser des fenêtres temporelles courtes, et d'éviter les inconvénients liés au fenêtrage. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce document, elles ont été appliquées à différentes fins dans le cadre du traitement des signaux de musique, mais leur utilisation dans ce domaine reste marginale. Nous visons dans cette section à démontrer que les méthodes HR permettent en fait de représenter une grande variété de signaux et de modulations d'amplitude et de fréquence. Nous constaterons en particulier que la présence de pôles hors du cercle unité permet de décrire fidèlement des signaux d'énergie constante. Trois exemples types de modulations couramment rencontrées dans les signaux de musique seront abordés : le trémolo (section X.2.1), le vibrato (section X.2.2) et le glissando (section X.2.3). Dans les trois cas, les résultats sont illustrés à l'aide d'un signal synthétique, échantillonné à 1024 Hz, défini sur l'intervalle temporel  $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  de longueur  $N = 1024$  échantillons. La décomposition en sous-espaces est effectuée en dimension  $n = 512$ . Un bruit blanc gaussien complexe est ajouté au signal de façon à obtenir un rapport signal à bruit de 30 dB. Cette étude se termine par une discussion sur le modèle PACE et les modulations induites par la présence de pôles multiples (section X.2.4).

### X.2.1 Trémolo

Le trémolo est défini ici comme une modulation périodique de l'amplitude du son. Il se traduit par une multiplication de la forme d'onde du son original par une fonction périodique. Par exemple, le fondamental centré à la fréquence  $f_0$  s'exprime sous la forme  $s(t) = z_0^t (1+p(t))$ , où  $p(t)$  est une fonction périodique réelle de période  $\frac{1}{\Delta f}$  (on suppose  $\Delta f \ll f_0$ ), qui prend des valeurs petites devant 1. Cette fonction se décompose donc comme une somme d'exponentielles complexes de fréquences multiples de

$\Delta f$ . Ainsi, le spectre du signal au voisinage du fondamental est un spectre de raies équidistantes et centrées en  $f_0$ .

Pour illustrer ce résultat, nous synthétisons un signal constitué du seul fondamental, auquel est appliqué un trémolo sinusoïdal :

$$s(t) = z_0^t (1 + \varepsilon \cos(2\pi\Delta ft)). \tag{X.1}$$

La figure X.1-a représente la partie réelle du signal bruité obtenu avec les paramètres  $f_0 = 20$  Hz,  $\delta_0 = 0 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Delta f = 2.3$  Hz, et  $\varepsilon = 0.2$ . La variation de l'enveloppe de la sinusoïde est bien visible (phénomène de battements). Nous souhaitons modéliser ce signal à l'aide du modèle ESM. L'équation (X.1) se réécrit sous la forme

$$s(t) = e^{i2\pi f_0 t} + \frac{\varepsilon}{2} e^{i2\pi(f_0 + \Delta f)t} + \frac{\varepsilon}{2} e^{i2\pi(f_0 - \Delta f)t}.$$

Ainsi, il apparaît que le signal est constitué de  $r = 3$  pôles. La figure X.1-b représente les 10 plus grandes valeurs propres de la matrice de corrélation de dimension  $512 \times 512$ , exprimées en dB et rangées par ordre décroissant. Celles-ci sont bien quasi-constantes après le point d'abscisse 3, ce qui confirme cet ordre de modélisation<sup>1</sup>. Enfin, la figure X.1-c représente la partie réelle du signal reconstruit.

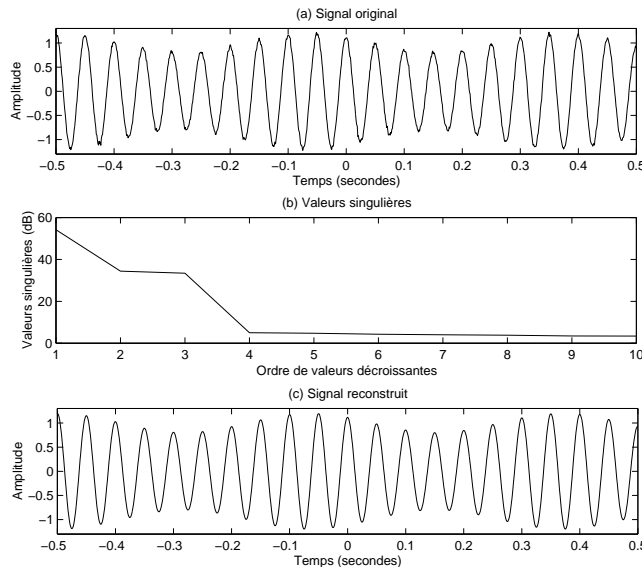


FIG. X.1 – Tremolo synthétique  
 (a) partie réelle du signal original  
 (b) valeurs singulières  
 (c) partie réelle du signal reconstruit

Les trois pôles estimés sont représentés dans la figure X.2 par des croix. Il sont bien équidistants sur le cercle unité (tracé en ligne continue) et centrés en  $f_0$ . L'intervalle fréquentiel  $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$  est représenté par un secteur angulaire délimité en pointillés. Enfin, signalons que les trois amplitudes estimées sur le signal *bruité* par la méthode des moindres carrés diffèrent des amplitudes théoriques de moins de 0.4% en moyenne.

<sup>1</sup>Pour cette même valeur  $r = 3$ , la fonction d'erreur inverse  $J$  du critère ESTER culmine à  $1.2 \times 10^6$ .

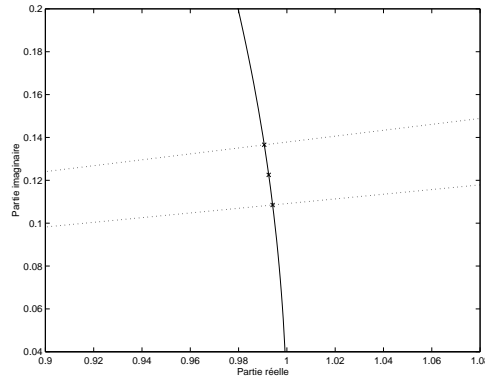


FIG. X.2 – Tremolo synthétique : fréquences parcourues et pôles estimés

### X.2.2 Vibrato

Le vibrato est défini dans une acception restrictive comme une modulation périodique de la hauteur du son. Ainsi, tous les harmoniques du son subissent une modulation de même période. Par exemple, le fondamental centré à la fréquence  $f_0$  s'exprime sous la forme  $s(t) = z_0^t e^{i2\pi f_0 p(t)}$ , où  $p(t)$  est une fonction périodique réelle de période  $\frac{1}{\Delta f}$  (on suppose  $\Delta f \ll f_0$ ), dont la dérivée est de moyenne nulle et prend des valeurs petites devant 1. Ainsi, la fonction  $t \mapsto e^{i2\pi f_0 p(t)}$  est elle-même périodique de période  $\frac{1}{\Delta f}$ , et se décompose par conséquent comme une somme d'exponentielles complexes de fréquences multiples de  $\Delta f$ , de sorte que

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{i2\pi(f_0 + k\Delta f)t}. \quad (\text{X.2})$$

Ainsi, le spectre du signal au voisinage du fondamental est un spectre de raies équidistantes et centrées en  $f_0$ , comme dans le cas d'un trémolo périodique.

Pour illustrer ce résultat, nous synthétisons un signal constitué du seul fondamental, auquel est appliqué un vibrato sinusoïdal :

$$s(t) = z_0^t e^{i\beta \sin(2\pi \Delta f t)}$$

où  $\beta = \varepsilon \frac{f_0}{\Delta f}$  est appelé indice de modulation.

La figure X.3-a représente la partie réelle du signal bruité obtenu avec les paramètres  $f_0 = 20$  Hz,  $\delta_0 = 0 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Delta f = 2.3$  Hz, et  $\varepsilon = 0.2$  (de sorte que  $\beta \simeq 1.74$ ). La variation de la fréquence de la sinusoïde est bien visible. Nous souhaitons modéliser ce signal à l'aide du modèle ESM. La figure X.3-b représente les 25 plus grandes valeurs propres de la matrice de corrélation de dimension  $512 \times 512$ , exprimées en dB et rangées par ordre décroissant. Celles-ci sont quasi-constantes après le point d'abscisse 9, ce qui suggère d'utiliser  $r = 9$  pôles complexes<sup>2</sup>. Enfin, la figure X.3-c représente la partie réelle du signal reconstruit.

Les pôles estimés sont représentés dans la figure X.4 par des croix. Ils sont bien régulièrement répartis sur le cercle unité (tracé en ligne continue) autour de la fréquence  $f_0$ . L'intervalle fréquentiel  $[(1 - \varepsilon)f_0, (1 + \varepsilon)f_0]$  est représenté par un secteur angulaire délimité en pointillés. Les pôles nécessaires pour modéliser correctement le signal s'étendent au-delà de cet intervalle.

Enfin, comme la modulation de fréquence est sinusoïdale, il est connu que les amplitudes  $\alpha_k$  peuvent être calculées analytiquement [Chowning, 1973]. En effet, le développement en série de Fourier de la

<sup>2</sup>Pour cette même valeur  $r = 9$ , la fonction d'erreur inverse  $J$  du critère ESTER culmine à  $4.0 \times 10^4$ .

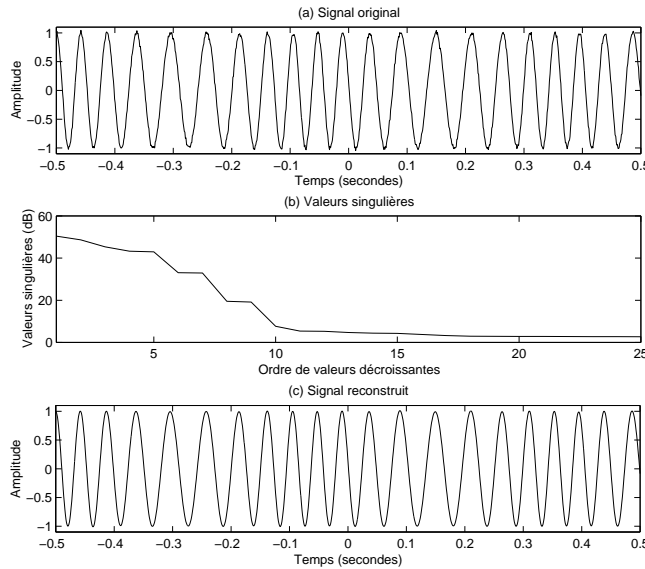


FIG. X.3 – Vibrato synthétique  
 (a) partie réelle du signal original  
 (b) valeurs singulières  
 (c) partie réelle du signal reconstruit

fonction  $t \mapsto e^{i\beta \sin(2\pi\Delta f t)}$  de période  $\frac{1}{\Delta f}$  donne

$$e^{i\beta \sin(2\pi\Delta f t)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(\beta) e^{i2\pi k\Delta f t}$$

où  $J_k(\beta) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i(\beta \sin(2\pi u) - 2\pi k u)} du$  est une fonction de Bessel de première espèce. Par substitution dans l'équation (X.2), on obtient  $\alpha_k = J_k(\beta)$ . Ces valeurs analytiques des amplitudes complexes peuvent être comparées aux valeurs estimées par la méthode des moindres carrés. La figure X.5-a représente ainsi le spectre théorique du signal  $s(t)$ , c'est-à-dire les fréquences  $f_0 + k\Delta f$  en abscisse et les amplitudes  $J_k(\beta)$  en ordonnée. Notons qu'il existe théoriquement une infinité de composantes, mais la représentation est restreinte à l'intervalle  $-4 \leq k \leq 4$ , qui contient les 9 composantes les plus énergétiques. La figure X.5-b représente le spectre estimé du signal *bruité* observé en utilisant comme ci-dessus l'ordre de modélisation  $r = 9$ . Les fréquences estimées sont représentées en abscisse, et les amplitudes  $a_k$  estimées sont représentées en ordonnée. On remarque que le modèle estimé correspond aux 9 composantes les plus énergétiques du modèle théorique.

### X.2.3 Glissando

Le glissando est défini comme une variation monotone de la hauteur du son. A titre d'exemple, nous synthétisons un *chirp* dont la fréquence varie linéairement entre  $f_0 - \frac{\Delta f}{2}$  et  $f_0 + \frac{\Delta f}{2}$  sur l'intervalle temporel  $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  :

$$s(t) = z_0 t e^{i2\pi\Delta f \frac{t^2}{2}}.$$

La figure X.6-a représente la partie réelle du signal bruité obtenu avec les paramètres  $f_0 = 16$  Hz,  $\delta_0 = 0$  s<sup>-1</sup> et  $\Delta f = 14$  Hz<sup>2</sup>. La variation de la fréquence de la sinusoïde est bien visible. Nous souhaitons

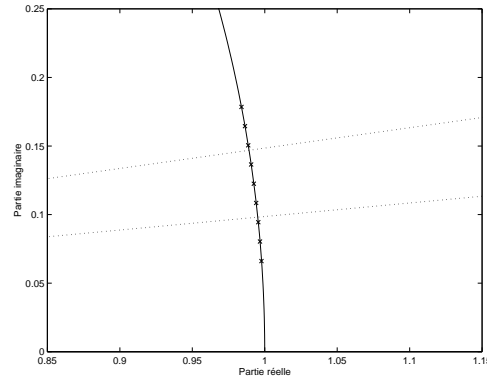


FIG. X.4 – Vibrato synthétique : fréquences parcourues et pôles estimés

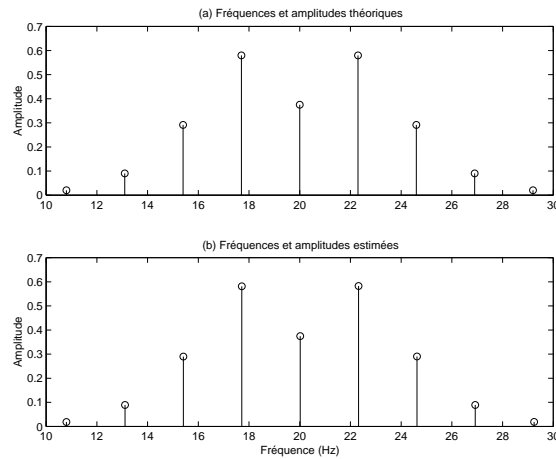


FIG. X.5 – Vibrato synthétique : spectre théorique et spectre estimé  
 (a) Fréquences et amplitudes théoriques  
 (b) Fréquences et amplitudes estimées

modéliser ce signal à l'aide du modèle ESM. La figure X.6-b représente les 25 plus grandes valeurs propres de la matrice de corrélation de dimension  $512 \times 512$ , exprimées en dB et rangées par ordre décroissant. Celles-ci sont quasi-constantes après le point d'abscisse 11, ce qui suggère d'utiliser  $r = 11$  pôles complexes<sup>3</sup>. Enfin, la figure X.6-c représente la partie réelle du signal reconstruit.

Les pôles estimés sont représentés dans la figure X.7 par des croix. Ils sont répartis sur une courbe coupant le cercle unité (tracé en ligne continue) au point de fréquence  $f_0$ . Certains d'entre eux sont assez éloignés du cercle unité, si bien que d'une part un modèle sans amortissement ne permettrait pas de reconstruire correctement le signal, d'autre part la matrice de Vandermonde  $\mathbf{V}^n$  est très mal conditionnée ( $\text{cond}(\mathbf{V}^n) = 3.63 \cdot 10^8$ ). C'est pourquoi il est nécessaire de normaliser ses colonnes pour estimer correctement les amplitudes (*cf.* section V.3.2). L'intervalle fréquentiel  $[f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}]$  est représenté par un secteur angulaire délimité en pointillés.

<sup>3</sup>Pour cette même valeur  $r = 11$ , la fonction d'erreur inverse  $J$  du critère ESTER culmine à 560.

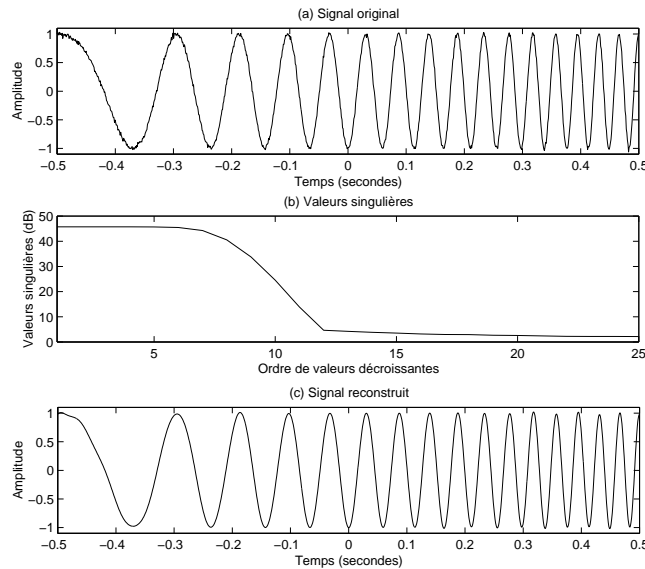


FIG. X.6 – Chirp synthétique  
 (a) partie réelle du signal original  
 (b) valeurs singulières  
 (c) partie réelle du signal reconstruit

#### X.2.4 Modulations induites par les pôles multiples

Nous avons examiné dans les sections qui précèdent trois exemples types de modulations d'amplitude ou de fréquence couramment rencontrées dans les signaux de musique. Dans les trois cas, l'algorithme ESPRIT a permis de représenter le signal avec une grande précision, en disposant les pôles complexes le long d'une courbe, située ou non sur le cercle unité.

Dans le cas des signaux réels, les modulations rencontrées ne correspondent pas exactement aux modèles mathématiques présentés ci-dessus, mais les pôles ont quand même tendance à se répartir le long d'une courbe.

A titre d'exemple, la figure X.8 représente le spectrogramme<sup>4</sup> d'une voix de soprano originellement échantillonnée à 44100 Hz, qui a été filtrée passe-bas et décimée d'un facteur 7, de sorte que sa fréquence d'échantillonnage est de 6300 Hz. Ce signal est caractérisé par un net vibrato / tremolo (les deux types de modulation étant très souvent associées dans un signal de musique). Il apparaît également que les trois premiers harmoniques sont les plus énergétiques.

L'algorithme ESPRIT lui a été appliqué en utilisant des vecteurs de dimension  $n = 512$ , et un ordre de modélisation  $r = 73$  (que nous avons choisi de manière empirique). Les pôles estimés sont représentés dans la figure X.9 par des croix. Ils sont essentiellement regroupés sur le cercle unité en trois régions, correspondant aux trois premiers harmoniques du signal. Ces régions sont délimitées par des secteurs angulaires représentés en pointillées, dont les valeurs frontières ont été déterminées de manière empirique à partir du spectrogramme de la figure X.8. A l'intérieur de chacune de ces régions, la répartition des pôles estimés est relativement homogène. Nous retrouvons donc le type de modélisation que nous avons observé dans les sections précédentes sur des signaux synthétiques. Comme nous l'avons mentionné plus haut, les pôles ont bien tendance à se répartir le long d'une courbe.

<sup>4</sup>Ce spectrogramme a été calculé en utilisant des fenêtres de 196 points.

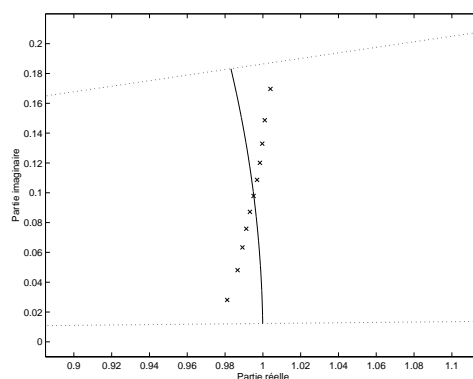


FIG. X.7 – Chirp synthétique : fréquences parcourues et pôles estimés

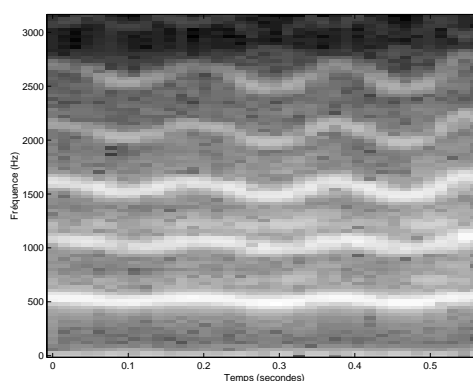


FIG. X.8 – Vibrato humain : spectrogramme

Nous pouvons alors nous poser la question suivante : le modèle PACE se prête-t-il à la représentation de tels signaux ? Comme nous l'avons vu dans le chapitre III, les pôles multiples ont tendance à se retrouver dispersés de façon homogène et isotrope en présence de bruit (ce résultat, valable en première approximation, a été démontré dans la section III.3.1.3 et illustré dans la section III.4). Ainsi, il est possible de les identifier en tant que sommets d'un polygone régulier, ce qui ne correspond absolument pas à la répartition curviligne observée ci-dessus (excepté dans le cas particulier de pôles d'ordre deux). Les tests que nous avons effectués confirment cet argument : nous avons pu observer qu'à nombre égal de paramètres, le signal est presque toujours mieux représenté avec des pôles simples qu'avec des pôles multiples (en terme d'erreur quadratique moyenne). Pour exhiber des cas où l'utilisation de pôles multiples permet d'atteindre une meilleure précision que le simple modèle ESM, il faut utiliser des fenêtres très courtes (de l'ordre de 4 ms). Mais même à court terme, le modèle ESM conduit généralement à une meilleure représentation du signal. Ainsi, dans le cadre du traitement de signaux de musique, le modèle PACE sera particularisé en modèle ESM.

### X.3 Limites des méthodes HR pour l'analyse du signal de musique

Nous nous intéressons maintenant aux difficultés posées par l'application des méthodes HR aux signaux de musique.

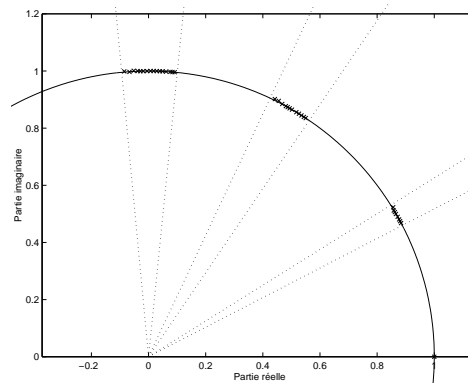


FIG. X.9 – Vibrato humain : fréquences parcourues et pôles estimés

### X.3.1 Couleur du bruit

Les méthodes d'estimation proposées dans le chapitre II supposent que le bruit additif est blanc, ou tout du moins que sa matrice de covariance est connue à un facteur multiplicatif près. Dans un enregistrement de musique, le bruit n'est jamais blanc, et bien souvent sa densité spectrale de puissance décroît globalement (parfois rapidement) quand la fréquence augmente. Malheureusement, la matrice de covariance du bruit est inconnue dans la pratique. En l'absence d'information sur la coloration du bruit, il est toujours possible d'appliquer l'algorithme ESPRIT en supposant que le bruit est blanc. Nous nous proposons ici d'illustrer l'impact de cette erreur de modélisation sur l'estimation des sinusoides.

La figure X.10-a représente la partie réelle d'un signal composé de deux exponentielles complexes de même amplitude égale à 1, de même phase à l'instant initial égale à 0, de fréquences  $f_0 = 0.1156$  et  $f_1 = 0.1312$ , et de facteurs d'atténuation  $\delta_0 = \delta_1 = 0$ . Le signal est de longueur  $N = 1024$ , mais seuls ses  $n = 512$  premiers échantillons sont représentés. Dans la figure X.10-b, un bruit blanc gaussien complexe de variance égale à 2, filtré par le filtre *Auto-Régressif* (AR)  $H(z) = \frac{1}{1-0.95z^{-1}}$ , a été superposé à ce signal. Le périodogramme du signal bruité est représenté dans la figure X.10-c (ce périodogramme a été calculé avec une taille de fenêtre égale à la longueur du signal). On reconnaît les deux pics spectraux aux fréquences  $f_0$  et  $f_1$ , superposés à la densité spectrale de puissance du bruit coloré.

Un tel signal ne respecte donc pas l'hypothèse de bruit blanc. Malgré tout, il est toujours possible de diagonaliser la matrice de corrélation, et ranger ses valeurs propres (et les vecteurs propres associés) par ordre décroissant. On observe ainsi que la suite des valeurs propres décroît de façon très régulière et ne présente aucune cassure perceptible. Ainsi, aucun ordre de modélisation ne semble privilégié. Cependant, en observant les principaux vecteurs propres de cette matrice, on constate qu'ils correspondent à des composantes de bruit basse fréquence, sauf deux d'entre eux. En effet, il apparaît que le 6<sup>ème</sup> et le 9<sup>ème</sup> vecteurs propres, dont les parties réelles sont représentées dans les figures X.11-a et X.11-b correspondent aux deux exponentielles complexes qui composent le signal (perturbées par le bruit additif). Ainsi, il est possible d'appliquer l'algorithme ESPRIT (présenté dans la section I.4.2.4) à l'ordre  $r = 9$ . Parmi les 9 pôles estimés, deux correspondent aux fréquences  $f_0$  et  $f_1$ . La figure X.11-c représente la partie réelle du signal reconstruit à partir de ces deux pôles.

Le mélange entre composantes de signal et composantes de bruit mis en évidence ci-dessus est un phénomène classique que nous avons pu observer à plusieurs reprises lors du traitement de signaux de musique : dans la pratique, le bruit n'est pas blanc, et la frontière entre espace signal et espace bruit est mal définie. En général, on observe un premier ensemble de vecteurs propres qui décrivent le signal, puis un deuxième ensemble où se mêlent signal et bruit, puis un troisième ensemble qui ne contient que



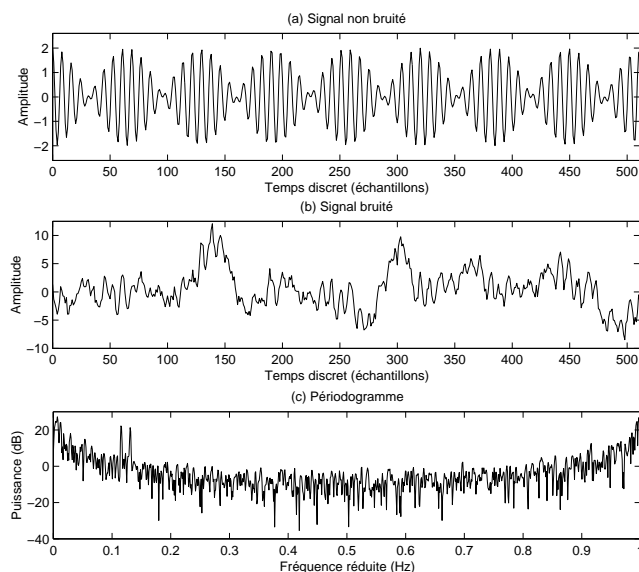


FIG. X.10 – Exponentielles dans un bruit coloré  
 (a) partie réelle du signal non bruité  
 (b) partie réelle du signal bruité  
 (c) périodogramme du signal bruité

du bruit. De plus, en présence d'un bruit coloré, les pôles du signal ne sont pas estimés correctement. Il s'agit d'un problème fondamental auquel il est nécessaire de trouver une solution.

### X.3.2 Importance perceptive relative des composantes sinusoïdales

Dans le contexte du codage audio, on cherche à représenter le signal le plus fidèlement possible en utilisant un nombre réduit de composantes sinusoïdales. Or les méthodes sous-espace détectent prioritairement les composantes les plus énergétiques, qui ne sont pas nécessairement les composantes les plus importantes d'un point de vue perceptif. Il serait donc intéressant de trouver une solution basée sur des critères psycho-acoustiques permettant de détecter prioritairement les composantes importantes à l'oreille.

### X.3.3 Ordre de modélisation et stabilité numérique

Pour un son grave, de fréquence fondamentale inférieure à 80 Hz, le nombre d'harmoniques dans la bande 0–10 kHz peut être supérieur à 100. Même si l'on utilise un filtre analytique pour éliminer les fréquences négatives, la dimension de l'espace signal est alors elle aussi supérieure à 100. Ainsi, pour obtenir une estimation robuste des harmoniques, il faudrait utiliser des vecteurs de données dont la dimension est de l'ordre du millier, et donc des matrices de données contenant un nombre de coefficients de l'ordre du million. Cela s'avère totalement impraticable, non seulement en raison de la complexité algorithmique, mais surtout pour des raisons de stabilité numérique. En pratique, nous avons observé que les méthodes sous-espace sont utilisables quand la dimension de l'espace signal n'excède pas  $r \simeq 25$ . Lorsque le nombre de composantes est trop élevé, il est possible de décomposer le problème d'estimation en plusieurs sous-problèmes d'ordre plus faible, en découpant le signal en sous-bandes (comme cela sera proposé dans la section X.4.3).

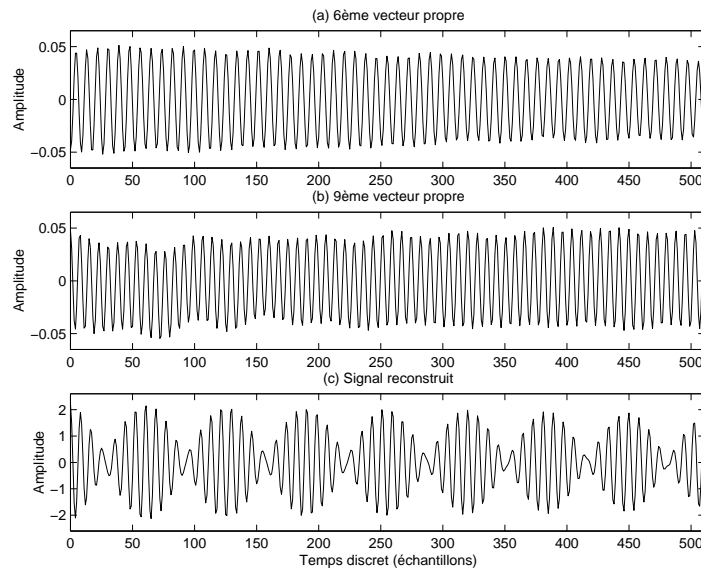


FIG. X.11 – Analyse HR dans un bruit coloré

- (a) partie réelle du 6<sup>ème</sup> vecteur propre
- (b) partie réelle du 9<sup>ème</sup> vecteur propre
- (c) partie réelle du signal reconstruit

## X.4 Mise en oeuvre des méthodes HR

Dans cette section, nous présentons des solutions proposées dans la littérature pour résoudre les problèmes soulevés dans la section X.3.

### X.4.1 Techniques d'estimation du signal dans un bruit coloré

Quand la coloration du bruit est inconnue, l'estimation des paramètres du signal est un problème mal posé en général. En effet, la matrice de covariance observée peut toujours être interprétée comme la matrice de covariance du bruit seul en l'absence de signal. Pour rendre le problème identifiable, il est donc nécessaire d'introduire des hypothèses supplémentaires sur les statistiques du bruit par rapport au signal. Les techniques d'estimation du signal et/ou du bruit peuvent être classées en deux catégories dans ce contexte : les approches paramétriques, qui reposent sur un modèle paramétrique de bruit, et les approches non-paramétriques, qui introduisent des hypothèses plus faibles sur les statistiques du bruit.

Une méthode de référence pour estimer un signal perturbé par un bruit coloré a été proposée dans [Le Cadre, 1989]. Il s'agit d'une méthode paramétrique, dans la mesure où le bruit additif est modélisé comme un processus *Auto-Régressif à Moyenne Ajustée* (ARMA), et itérative, puisque qu'elle vise à maximiser la vraisemblance des observations par une méthode de gradient. Le signal et le bruit sont ainsi estimés conjointement. En pratique, elle consiste à calculer un filtre dont l'action sur le signal observé a pour effet de blanchir les  $n - r$  valeurs propres de la matrice de covariance associées à l'espace bruit. Malheureusement, cette optimisation s'avère très coûteuse en temps de calcul, et assez peu robuste [Barthelemy et Willett, 1993]. Plus récemment, une méthode reposant sur le même principe, mais sur une famille de modèles paramétriques de bruit différents du modèle ARMA a été proposée dans [Göransson et Ottersten, 1999]. Un choix particulier de paramétrisation consiste à supposer que le support de la matrice de covariance à structure Toeplitz est limité à une bande centrée sur la

diagonale [Göransson, 1994].

Parmi les méthodes non paramétriques, la technique des variables instrumentales [Viberg *et al.*, 1995] repose sur l'hypothèse que le bruit n'est corrélé que sur un faible nombre d'échantillons par rapport au signal. Une autre approche consiste à supposer que le bruit suit une distribution gaussienne, alors que le signal est non-gaussien [Cardoso et Moulines, 1995]. Puisque les cumulants d'ordre supérieur à deux sont insensibles aux statistiques gaussiennes, les méthodes d'estimation des paramètres du signal basées sur les cumulants ne sont théoriquement pas affectées par le bruit. Le problème de cette approche est qu'en pratique le bruit n'est pas gaussien et perturbe aussi les cumulants d'ordre supérieur à deux.

Une bibliographie plus complète sur les méthodes paramétriques et non paramétriques d'estimation du signal en présence de bruit coloré est disponible dans [Göransson et Ottersten, 1999]. Nous avons pu observer qu'aucune de ces méthodes ne s'avère suffisamment robuste dans le cadre du traitement de signaux audio.

### X.4.2 Introduction d'une connaissance psycho-acoustique

Dans le contexte du codage audio, des techniques reposant sur des critères psycho-acoustiques ont été développées pour ne coder que les composantes les plus importantes à l'oreille. Par exemple, la technique de codage proposée dans [Hermus *et al.*, 2002] repose sur le modèle perceptif de MPEG1-Layer1. Le signal est divisé en sous-bandes, et la méthode sous-espace est appliquée à chaque signal de sous-bande. Les composantes sont estimées de manière itérative, en incrémentant à chaque itération l'ordre de modélisation dans la sous-bande qui possède le résiduel le plus énergétique par rapport au seuil de masquage, exactement de la même façon que les bits sont assignés aux différentes sous-bandes dans MPEG. Une autre approche proposée dans [Jensen *et al.*, 2004] repose sur une mesure de distorsion perceptive. Elle consiste simplement à introduire une étape de pré-filtrage du signal destinée à rehausser les composantes perceptivement importantes. Ainsi, la fonction de transfert du filtre de rehaussement est définie par rapport au seuil de masquage (plus précisément, il s'agit de l'inverse de la racine carrée du seuil de masquage).

Ces deux approches possèdent chacune leurs inconvénients : la première s'avère coûteuse car l'algorithme complet d'estimation est appliqué à chaque itération. La seconde présente une autre difficulté : le filtre conçu pour rehausser les composantes importantes à l'oreille a aussi pour effet de modifier la couleur du bruit additif, mais ne le blanchit pas. Ainsi, l'estimation des paramètres est biaisée et le signal n'est pas toujours représenté correctement. Enfin, dans les deux cas, le fait de ne coder qu'un nombre réduit de composantes sinusoïdales implique que les autres composantes, moins importantes d'un point de vue perceptif, se retrouvent mélangées au bruit. Cela peut poser problème pour des applications de traitement du signal audio autres que le codage, faisant intervenir le bruit extrait du signal.

Nous ne retiendrons donc ici de ces approches perceptives que la notion de découpage en sous-bandes. En effet, un découpage judicieux du spectre permet de «guider» les méthodes HR de façon à répartir la densité des sinusoïdes détectées en fonction de l'importance perceptive relative des différentes régions spectrales. Par exemple, une méthode de découpage du signal adaptée à l'échelle Bark a été proposée dans [Wang *et al.*, 2004], en pré-traitement de la décomposition en sous-espaces.

### X.4.3 Découpage en sous-bandes

Ainsi les caractéristiques du système auditif humain peuvent être prises en compte par le biais d'un découpage adapté du signal en sous-bandes (par exemple selon l'échelle Mel ou selon l'échelle Bark). Nous allons voir ci-dessous qu'un tel découpage présente également d'autres avantages.

Tout d'abord, le découpage en sous-bandes apporte une solution (partielle) au problème de la non blancheur du bruit. En effet, dans l'exemple de la section X.3.1, l'estimation des deux sinusoïdes en

basses fréquences était essentiellement perturbée par la puissance du bruit en hautes fréquences. Le découpage en sous-bandes permet justement d'éviter ce genre d'«interférence» entre différentes régions du spectre, en découplant les problèmes d'estimation dans chaque sous-bande. De plus, il se trouve qu'un découpage du spectre plus fin en basses fréquences qu'en hautes fréquences est adapté à la forme particulière de la densité spectrale de puissance du bruit généralement présent dans les signaux audio (qui est plus coloré en basses fréquences qu'en hautes fréquences).

Par ailleurs, dans la section X.3.3, nous avons noté que les sons composés d'un grand nombre de sinusoïdes ne peuvent pas être traités directement par les méthodes HR, car dans la pratique il n'est pas possible d'estimer un espace signal de dimension supérieure à  $r \simeq 25$ , à la fois pour des raisons de complexité et de stabilité numérique. Comme cela a été suggéré dans [Laroche, 1993] et [Hermus *et al.*, 2000], un découpage du signal en sous-bandes résout ce problème en limitant le nombre de sinusoïdes présentes dans chaque sous-bande par réjection de la bande atténuée.

Enfin, il est possible d'associer au découpage en sous-bandes une décimation du signal d'un facteur  $M$ . Comme cela a été démontré dans [Tkacenko et Vaidyanathan, 2001], la décimation présente plusieurs avantages :

- Tout d'abord, elle engendre un étirement spectral du même facteur  $M$ . Ainsi, non seulement la résolution spectrale est meilleure, mais le bruit additif est approximativement blanchi.
- De plus, sous certaines hypothèses, le RSB est également amélioré dans chaque sous-bande.
- Enfin, la fréquence d'échantillonnage est alors divisée par  $M$ , ce qui réduit globalement la charge de calculs dans le cadre d'un traitement par blocs puisque la complexité des méthodes sous-espace est généralement une fonction sur-linéaire du nombre de points traités, et dans le cadre d'un traitement adaptatif parce que le nombre d'itérations est également réduit.

## X.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé par montrer le potentiel des méthodes HR dans le cadre du traitement des signaux de musique. En particulier, nous avons montré que ces méthodes peuvent représenter une classe de signaux bien plus large qu'une simple somme de sinusoïdes amorties. Puis nous avons évoqué les difficultés posées par l'application des méthodes HR aux signaux de musique :

- l'estimation est biaisée en raison de la couleur du bruit présent dans le signal audio ;
- l'importance perceptive relative des composantes sinusoïdales n'est pas prise en compte ;
- seuls les sons contenant un nombre limité de sinusoïdes peuvent être traités de façon robuste.

Enfin, nous avons vu que la mise en oeuvre d'un banc de filtres apporte une solution à chacun de ces trois problèmes :

- l'importance perceptive relative des différentes régions fréquentielles est prise en compte par le biais d'un découpage adapté du spectre ;
- le bruit est approximativement blanchi dans chaque sous-bande ;
- le nombre de composantes dans chaque sous-bande est réduit par réjection de la bande atténuée.

En outre, la décimation présente d'autres avantages non négligeables :

- la résolution spectrale est améliorée ;
- le rapport signal à bruit est amélioré dans chaque sous-bande ;
- la charge globale de calculs est réduite.



## Chapitre XI

# Systeme complet d'analyse / synthese

### Résumé

Dans le chapitre précédent, nous avons montré le potentiel des méthodes HR dans le cadre du traitement des signaux de musique. Néanmoins, la mise en oeuvre de ces méthodes reste délicate et nécessite de prendre un certain nombre de précautions. Le présent chapitre a ainsi pour objet de présenter divers pré-traitements permettant d'accroître la robustesse de l'algorithme d'estimation. Ces pré-traitements sont agencés sous la forme d'un système complet d'analyse / synthèse du signal, pouvant être utilisé dans le cadre de diverses applications de traitement du signal. Citons par exemple le codage, ou encore le débruitage et l'extraction de la partie bruitée du signal. L'extraction du bruit peut avoir plusieurs applications ; nous présenterons à titre d'exemple un travail mené avec M. Alonso sur l'estimation du rythme musical.

## XI.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons un système complet d'analyse / synthèse du signal audio. Ce système repose sur une décomposition du signal en sous-bandes (les nombreux avantages d'une telle décomposition en pré-traitement de l'algorithme d'estimation ont été évoqués dans le chapitre X). Les paramètres du modèle sont ainsi estimés indépendamment dans chaque sous-bande. Il est ensuite possible de reconstruire un signal pleine bande, en faisant passer les signaux de sous-bandes dans le banc de filtres de synthèse associé au banc d'analyse.

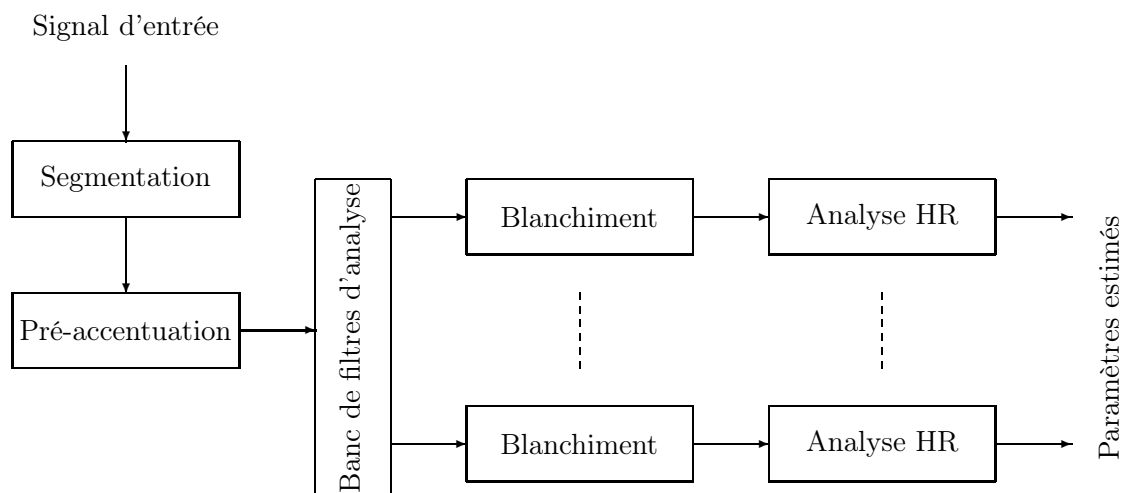


FIG. XI.1 – Système d'analyse du signal

Le système d'analyse complet est résumé dans la figure XI.1 (et le système de synthèse correspondant est présenté dans la figure XI.2). Comme les méthodes de poursuite des paramètres présentées dans la deuxième partie du mémoire présupposent que l'ordre de modélisation est constant, il est nécessaire avant de les appliquer de segmenter le signal en régions que l'on modélisera avec un ordre constant. Le signal est ensuite filtré par un filtre de pré-accentuation, destiné à rehausser les hautes fréquences par rapport aux basses fréquences. Enfin, il est découpé en sous-bandes à l'aide du banc de filtres d'analyse. Ces premières étapes sont détaillées dans la section XI.2. Les signaux de sous-bande sont ensuite filtrés de façon à blanchir le bruit, ce qui permet d'accroître la robustesse de l'analyse HR (section XI.3). Enfin, les signaux filtrés sont analysés à l'aide des algorithmes d'estimation présentés dans les deux premières parties de ce document (les détails pratiques d'implémentation sont donnés dans la section XI.4). Les divers traitements appliqués à partir de cette modélisation sont présentés dans la section XI.5. La section XI.6 résume les principaux résultats de ce chapitre.

## XI.2 Décomposition du signal en sous-bandes

Dans la section X.4.3 ont été évoqués les divers avantages d'une décomposition du signal en sous-bandes en pré-traitement de l'analyse HR. Nous nous proposons maintenant d'aborder plus concrètement la mise en oeuvre d'une telle décomposition.

### XI.2.1 Pré-accentuation du signal

Afin d'obtenir une bonne estimation des paramètres fréquentiels dans chaque sous-bande, il est nécessaire d'utiliser des filtres suffisamment réjecteurs pour que la puissance du signal dans la bande

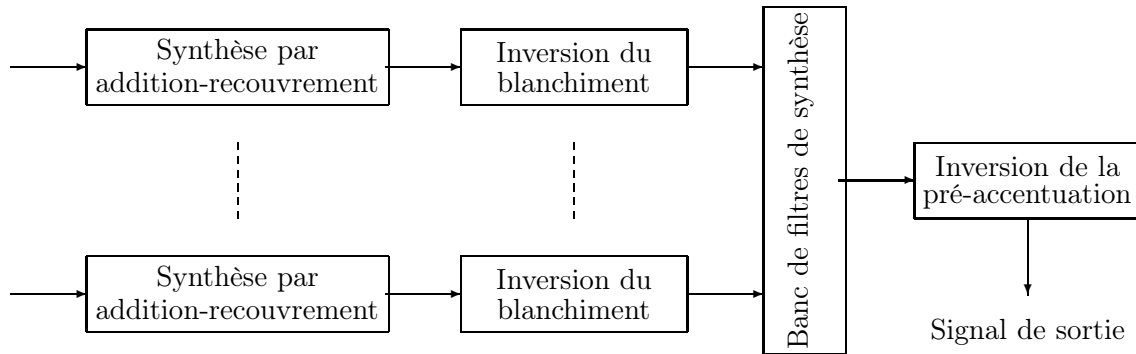


FIG. XI.2 – Système de reconstruction du signal

atténuée ne dépasse jamais le niveau de bruit dans la bande passante. Or la densité spectrale de puissance des sons émis par de nombreux instruments de musique est une fonction décroissante de la fréquence. Ainsi, la sélection d'une bande en hautes fréquences nécessiterait d'utiliser un filtre plus réjeteur qu'en basses fréquences, donc un filtre plus long. Pour éviter cette distinction et pouvoir appliquer la même réjection en hautes fréquences qu'en basses fréquences, il est préférable d'égaliser approximativement la puissance du signal en entrée du banc de filtres. Une façon simple mais suffisante de procéder consiste à appliquer un filtre de pré-accatuation, par exemple de fonction de transfert  $H(z) = 1 - 0.98z^{-1}$ .

### XI.2.2 Découpage uniforme ou non uniforme

Dès que l'on envisage de décomposer le signal en sous-bandes, une première question se pose : est-il préférable de choisir des bandes de largeur uniforme, ou de largeur non uniforme, comme cela a été suggéré dans les sections X.4.2 et X.4.3 ?

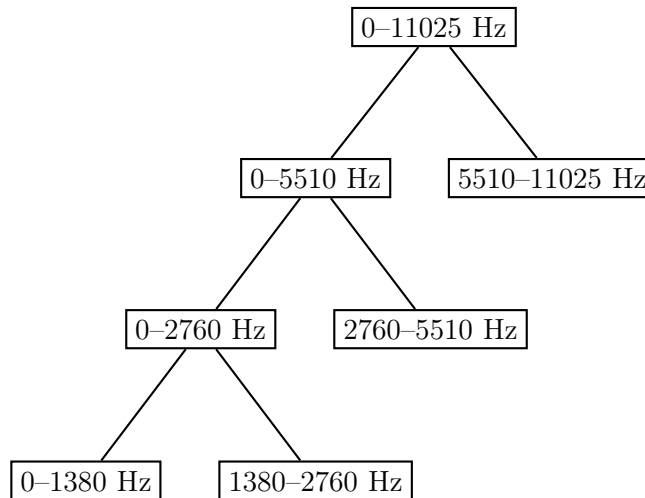
Deux arguments seraient plutôt en faveur d'un découpage uniforme : d'une part les partiels d'un son harmonique sont distribués uniformément dans le spectre ; d'autre part les méthodes HR traitent le spectre de façon homogène, dans la mesure où les performances d'estimation sont invariantes par une translation de l'ensemble des fréquences (*cf.* section III.2.1). Un découpage uniforme du spectre paraîtrait donc plus naturel dans le cadre des méthodes HR.

Pendant, les études psycho-acoustiques seraient plutôt en faveur d'un découpage non-uniforme, puisqu'il a été montré que l'oreille humaine perçoit la hauteur des sons selon une échelle logarithmique<sup>1</sup>. La nature des signaux de musique conforte cet argument. En effet, les hauteurs des notes de musique de la gamme tempérée sont également distribuées selon une échelle logarithmique. De plus, la puissance spectrale de chaque note décroît généralement avec la fréquence. Ainsi, si l'on superpose les partiels de toutes les notes qui sont jouées au cours d'un morceau, ou simplement si l'on superpose les partiels des notes qui sont jouées simultanément au cours d'une musique polyphonique, on obtient une densité d'harmoniques plus forte en basses fréquences qu'en hautes fréquences.

Par ailleurs, les instruments à vent ou à cordes frottées peuvent produire des sons dont la hauteur varie au cours du temps, par exemple dans le cas d'un vibrato ou d'un glissando. Or quand la fréquence fondamentale suit une variation d'amplitude  $\Delta f$ , l'harmonique d'ordre  $p$  correspondant suit une variation d'amplitude  $p\Delta f$ . Ainsi, les variations des partiels présentent une amplitude plus faible en basses fréquences qu'en hautes fréquences, ce qui justifie un découpage fréquentiel plus fin en

<sup>1</sup>Loi de Weber-Fechner, valable en première approximation dans un certain domaine de fréquences et de puissances du signal.





TAB. XI.1 – Découpage dyadique du spectre en quatre sous-bandes

basses fréquences, et sont plus rapides en hautes fréquences qu'en basses fréquences, ce qui justifie un découpage temporel plus fin en hautes fréquences.

### XI.2.3 Analyse multi-résolution

Ainsi, il paraît souhaitable d'utiliser des bandes de largeurs variables. L'analyse multi-résolution constitue l'une des techniques les plus couramment utilisées pour obtenir un tel découpage (on peut consulter par exemple [Vaidyanathan, 1993] pour référence). Il s'agit d'une procédure récursive, consistant à décomposer le signal en deux signaux de sous-bandes (basses fréquences et hautes fréquences), puis à réitérer la décomposition sur le signal de basses fréquences. Cette approche a été adoptée dans [Levine *et al.*, 1997] pour l'analyse des signaux audio polyphoniques et large bande. L'intervalle fréquentiel  $[0, 11025]$  Hz est ainsi décomposé en quatre sous-bandes, selon la structure binaire présentée dans la table XI.1. L'avantage de la technique particulière de décomposition proposée dans [Levine *et al.*, 1997] est l'absence de repliement dans les signaux de sous-bandes (ce qui n'empêche pas les sous-bandes voisines de se recouvrir partiellement). Cependant, cette technique n'autorise pas une décimation critique des signaux de sous-bandes, et ne permet pas de reconstruire le signal d'entrée à partir des signaux de sous-bande.

Par ailleurs, toute technique de découpage en sous-bandes doit respecter deux contraintes pour être utilisée en conjonction avec l'analyse HR :

- le nombre de fréquences pouvant être détectées dans chaque bande est limité (*cf.* section X.3.3) ; ainsi la largeur de bande en hautes fréquences ne doit pas excéder une certaine limite (typiquement de l'ordre de 2500 Hz) ;
- la longueur des filtres d'analyse ne doit pas dépasser la durée moyenne de stationnarité du signal (généralement de l'ordre de 25 ms) ; ainsi la largeur de bande en basses fréquences ne peut pas être arbitrairement petite.

Ainsi, on préférera abandonner l'approche multi-résolution, qui constitue une technique de découpage un peu trop rigide. Par ailleurs, les échelles Mel et Bark, conçues pour imiter le système auditif humain, ne correspondent pas à un découpage strictement dyadique du spectre, mais constituent plutôt des intermédiaires entre découpage uniforme et découpage dyadique. Ainsi, dans [Wang *et al.*, 2004] une structure plus générale qu'une simple décomposition dyadique est utilisée pour se rapprocher de l'échelle Bark : un arbre de paquets d'ondelettes. Cependant, comme c'est le cas pour toutes les tech-

niques multi-résolution, il existe un problème de compromis entre la longueur des filtres d'analyse et le recouvrement spectral entre sous-bandes voisines. En effet, nous avons pu observer que les filtres de longueur usuelle conduisent à un très fort recouvrement spectral. Inversement, il est possible de réduire ce recouvrement en choisissant des filtres appropriés, mais la longueur totale du filtrage dans les bandes les plus étroites est alors très supérieure à la durée de stationnarité du signal.

Une autre technique de découpage permettant de s'adapter plus finement à n'importe quelle échelle (Bark, Mel, ou encore *Equivalent Rectangular Bands* (ERB)), tout en offrant une reconstruction parfaite, a été proposée dans [Goodwin, 1996]. Cependant les signaux de sous-bande ne peuvent pas être décimés. Nous opterons finalement pour une technique plus simple, présentée dans la section suivante, qui est caractérisée par un faible recouvrement spectral entre sous-bandes tout en faisant intervenir des filtres de longueur raisonnable. Cette approche fournit des signaux de sous-bande maximale-ment décimés et offre une certaine liberté dans le découpage du spectre.

#### XI.2.4 Bancs de filtres en cosinus modulés et découpage non uniforme

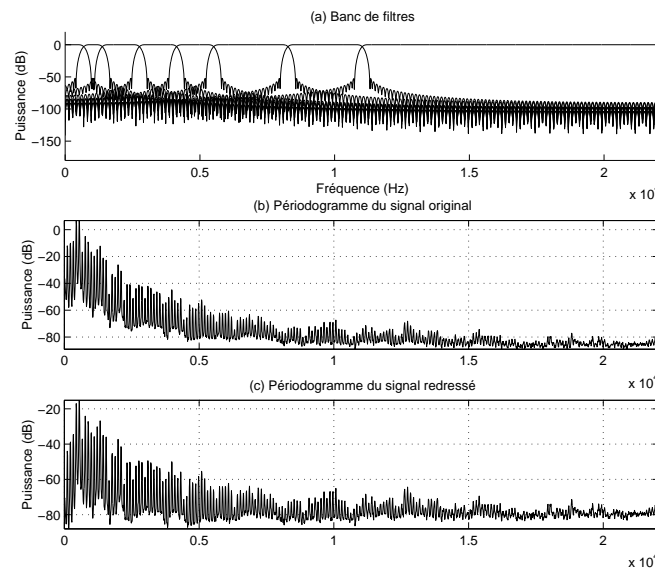


FIG. XI.3 – Signal traité et banc de filtres d'analyse

- (a) Banc de filtres d'analyse
- (b) Périodogramme de la note de musique
- (c) Périodogramme du signal redressé

La technique de découpage que nous avons finalement retenue fait intervenir un *banc de Filtrés en Cosinus Modulés* (CMF). Ce type de banc de filtres a déjà été utilisé en pré-traitement de méthodes sous-espace dans [Hermus *et al.*, 2002], aboutissant à un découpage uniforme du spectre. Cependant, il est possible de construire un banc de filtres non uniforme en regroupant des voies adjacentes (c'est-à-dire en les sommant), comme cela a été proposé dans [Lee et Lee, 1995]. Chaque sous-bande ainsi obtenue peut alors être décimée d'un facteur égal au nombre total de voies du banc CMF, divisé par le nombre de voies fusionnées. Par exemple, dans le cas d'un banc CMF contenant 32 voies, une sous-bande obtenue en fusionnant 4 voies adjacentes peut être décimée d'un facteur 8. Sous certaines conditions, le banc de filtres ainsi obtenu satisfait trois propriétés essentielles :

- les filtres d'analyse et de synthèse sont passe-tout dans leur bande passante ;
- le banc de filtres d'analyse/synthèse vérifie la condition d'annulation de repliement ;

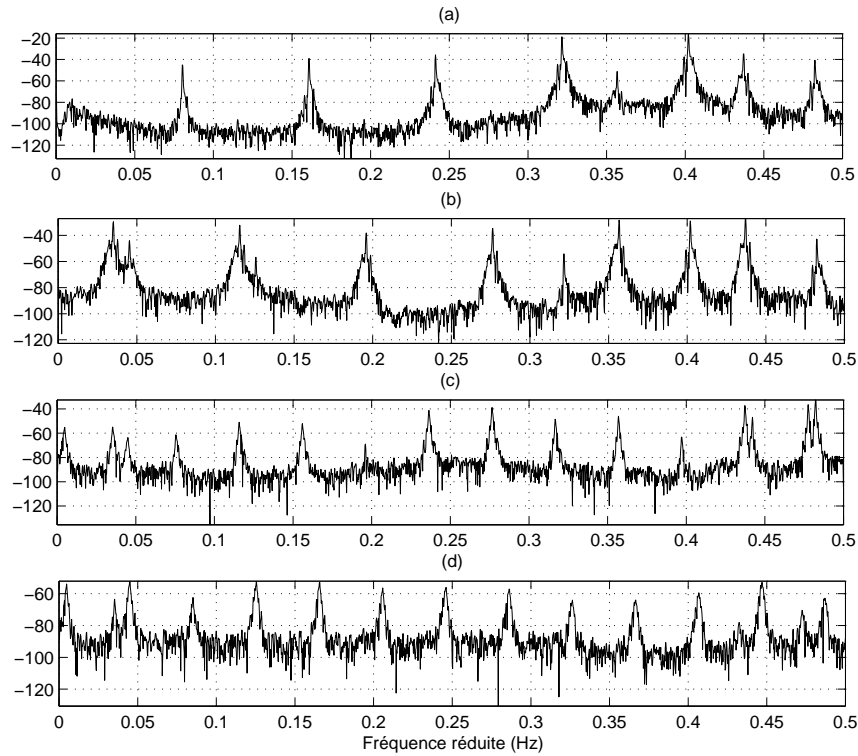


FIG. XI.4 – Périodogrammes des signaux des sous-bandes 0 à 3

- (a) Sous-bande 0 (0–690 Hz)
- (b) Sous-bande 1 (690–1380 Hz)
- (c) Sous-bande 2 (1380–2755 Hz)
- (d) Sous-bande 3 (2755–4135 Hz)

– la fonction de distorsion est identique à celle du banc CMF.

De plus, après décimation critique, tous les filtres d'analyse deviennent passe-tout. Ainsi, si le bruit dans le signal en entrée du banc de filtres est blanc, le bruit dans les signaux de sous-bande est également blanc, ce qui constitue une propriété souhaitable dans le cadre de l'analyse HR.

La table XI.2 présente un exemple de banc de filtres obtenu par cette méthode. Nous supposons que le signal en entrée est échantillonné à 44100 Hz, et nous nous basons sur un banc CMF contenant  $M = 32$  voies, numérotées de 0 à  $M - 1$ . Après regroupement des voies, le banc de filtres contient alors 8 sous-bandes non-uniformes. En pratique, la 8<sup>ème</sup> sous-bande n'est pas traitée par l'analyse HR, car nous considérons qu'il n'y a pas ou peu de sinusoïdes au-delà de 11025 Hz.

|                  |       |          |           |           |           |           |            |             |
|------------------|-------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|-------------|
| Sous-bande       | 0     | 1        | 2         | 3         | 4         | 5         | 6          | 7           |
| Voies fusionnées | 0     | 1        | 2–3       | 4–5       | 6–7       | 8–11      | 12–15      | 16–31       |
| Intervalle (Hz)  | 0–690 | 690–1380 | 1380–2755 | 2755–4135 | 4135–5515 | 5515–8270 | 8270–11025 | 11025–22050 |
| Décimation       | 32    | 32       | 16        | 16        | 16        | 8         | 8          | 2           |

TAB. XI.2 – Structure d'un banc de filtres non-uniforme pour l'analyse de signaux audio

La figure XI.3-a représente les fonctions de transfert des filtres d'analyse obtenus à partir d'un banc CMF à 32 voies. Nous avons choisi des filtres de longueur 320, car cette longueur permet d'obtenir une réjection en bande atténuée supérieure à 50 dB. A titre d'exemple, ce banc de filtres est utilisé pour décomposer une note de musique (A2) jouée par un basson, dont le périodogramme est représenté

dans la figure XI.3-b. Avant d'être injecté dans le banc de filtres, le spectre de ce signal est corrigé à l'aide du filtre de pré-accélération proposé dans la section XI.2.1 (figure XI.3-c). Les périodogrammes des signaux des sous-bandes 0 à 3 sont représentés dans la figure XI.4. En particulier, le banc de filtres présente un net effet blanchissant sur la densité du bruit dans les signaux de sous-bandes. Finalement, ce banc de filtres présente tous les avantages que l'on peut attendre d'un découpage en sous-bandes :

- le découpage non uniforme du spectre est adapté à la nature des signaux et à l'oreille humaine ;
- la longueur des filtres d'analyse est de 7 ms, inférieure à la durée typique de stationnarité des signaux<sup>2</sup> ;
- les signaux de sous-bande sont maximalelement décimés ;
- les filtres d'analyse sont passe-tout dans leur sous-bande ;
- le recouvrement spectral entre sous-bandes est faible ;
- le signal est reconstruit parfaitement en sortie du banc de filtres.

Il possède néanmoins un inconvénient : les signaux de sous-bande, maximalelement décimés, présentent un (faible) repliement. Ainsi, des fréquences «fantômes» peuvent être détectées dans les sous-bandes, provenant en réalité de sous-bandes voisines. Pour un certain nombre d'applications, ce phénomène peut être tout simplement ignoré, puisque le repliement est de toute façon éliminé par les filtres de synthèse, et le signal est reconstruit parfaitement en sortie du banc de filtres. Citons par exemple les applications de codage, de débruitage, et d'extraction du bruit additif, qui seront présentées dans la section XI.5.

En revanche, pour des applications qui nécessitent de connaître les valeurs exactes des fréquences, non pas dans les signaux de sous-bandes, mais dans le signal pleine bande, il n'est pas trivial de reconnaître les fréquences repliées et d'attribuer les fréquences estimées à la bonne sous-bande. On peut par exemple penser aux diverses applications d'analyse spectrale, ou de synthèse avec modification d'échelle temporelle ou fréquentielle. Une solution a été proposée dans [Tkacenko et Vaidyanathan, 2001] pour résoudre cette ambiguïté.

### XI.3 Blanchiment du bruit

Comme cela a été mentionné dans la section X.4.3, la décomposition du signal en sous-bandes induit un effet blanchissant sur le bruit additif. Cependant, il ne s'agit que d'un blanchiment approximatif, parfois insuffisant pour pouvoir appliquer l'algorithme ESPRIT de manière robuste. Par ailleurs, nous avons pu observer que les méthodes d'analyse du signal en présence de bruit coloré mentionnées dans la section X.4.1 sont souvent très complexes, et donnent rarement des résultats satisfaisants sur des signaux audio. La technique proposée ici est à la fois plus simple et plus robuste. Elle consiste à estimer la densité spectrale de puissance du bruit pour en déduire un filtre blanchisseur dans chaque sous-bande.

Une méthode d'estimation de la densité du bruit en présence de sinusoides a été proposée dans [von Sachs, 1994]. Elle consiste à calculer un périodogramme lissé à l'aide d'un noyau insensible aux pics fréquentiels. Ce périodogramme est obtenu comme la solution d'une équation implicite qui peut être résolue de manière itérative. Sous certaines hypothèses, il est démontré que cet estimateur est asymptotiquement consistant. L'implémentation de cette technique itérative s'avère cependant assez coûteuse en temps de calcul. Nous proposons ici une technique plus rapide, qui consiste à lisser le périodogramme non plus par filtrage linéaire, mais à l'aide d'un filtre de rang<sup>3</sup>, que l'on peut choisir insensible aux pics

<sup>2</sup>Cependant, cette durée reste supérieure à celle des sons transitoires, comme les sons percussifs ou les attaques. Ainsi, dans le signal reconstruit à partir des paramètres estimés dans chaque sous-bande, les attaques ont tendance à être adoucies. Inversement, dans le résiduel, il reste des sinusoides après chaque attaque, sur une durée voisine de la longueur des filtres.

<sup>3</sup>Les filtres de rang généralisent la notion de filtrage médian : les données sont d'abord triées par ordre de croissant, et

fréquentiels. Ainsi, le résultat du filtrage sera comparable, mais la résolution itérative d'une équation implicite aura été évitée.

### XI.3.1 Blanchiment d'un processus AR

Supposons dans un premier temps que le signal  $x(t)$  soit un processus AR, obtenu en filtrant un bruit blanc de variance  $\sigma^2$  par un filtre de fonction de transfert  $\frac{1}{H(z)}$ , où tous les zéros de  $H(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}$  sont à l'intérieur du cercle unité. Ainsi,  $x(t)$  est un processus stationnaire centré. Il est connu que les coefficients du filtre  $H(z)$  et la variance  $\sigma^2$  s'estiment par prédiction linéaire [Scharf, 1991], à partir d'un estimateur de la fonction d'autocovariance  $r_x(t) = \mathbb{E}[x(u)^* x(u+t)]$ .

Commençons donc par définir un estimateur de  $r_x(t)$ . Considérons une fenêtre  $u(t)$ , dont le support est de longueur finie  $N$  (par exemple une fenêtre rectangulaire). Notons  $\tilde{x}(t) = x(-t)^*$  et  $\tilde{u}(t) = u(-t)^*$ . Définissons alors l'estimateur  $\hat{r}_x = \frac{1}{N} (\tilde{u} \star \tilde{x}) \star (u \times x)$ . Il s'agit d'un estimateur biaisé car son espérance est

$$\mathbb{E}[\hat{r}_x(t)] = \frac{1}{N} (\tilde{u} \star u)(t) \times r_x(t).$$

Par exemple, si  $u(t)$  est une fenêtre rectangulaire,  $\frac{1}{N} (\tilde{u} \star u)(t)$  est une fenêtre triangulaire (fenêtre de Bartlett). La fonction  $\hat{r}_x(t)$ , définie comme un produit de convolution, a un support de longueur finie  $2N - 1 > N$ . Comme nous l'avons évoqué dans la section V.2.2, un tel produit de convolution se calcule de manière rapide par le biais de l'algorithme FFT. Plus précisément, soit  $N'$  la puissance de 2 immédiatement supérieure à  $2N - 1$ . Alors les  $2N - 1$  échantillons non nuls de  $N \hat{r}_x(t)$  s'extraient du produit de convolution *circulaire* entre les signaux  $x'$  et  $\tilde{x}'$ , où  $x'$  est un signal de longueur  $N'$  contenant les  $N$  échantillons non nuls du signal fenêtré  $u \times x$  complétés par des zéros, et  $x'(t) = x'(-t)^*$ . Ce produit de convolution circulaire s'obtient en calculant la FFT inverse du carré du module de la FFT de  $x'$ , qui sera notée  $X(e^{i2\pi f})$  ( $f \in \frac{1}{N'} \mathbb{Z}$ ). Ainsi,  $\hat{r}_x(t)$  s'obtient en calculant la transformée de Fourier inverse du périodogramme

$$\hat{R}_x(e^{i2\pi f}) = \frac{1}{N} |X(e^{i2\pi f})|^2. \quad (\text{XI.1})$$

Ainsi l'algorithme d'estimation du filtre blanchisseur se décompose en cinq étapes :

1. multiplication du signal  $x(t)$  par la fenêtre  $u(t)$  ;
2. prolongation par des zéros et transformée de Fourier directe ;
3. calcul du périodogramme défini dans l'équation (XI.1) ;
4. calcul de  $\hat{r}_x(t)$ , obtenue par transformée de Fourier inverse ;
5. estimation du filtre  $H(z)$  par prédiction linéaire à partir de  $\hat{r}_x(t)$ .

Cette approche présente plusieurs avantages :

- l'estimateur du filtre  $\frac{1}{H(z)}$ , obtenu par prédiction linéaire, est causal et stable [Scharf, 1991] (cette propriété n'aurait pas été garantie par un estimateur non biaisé de  $r_x(t)$ ) ;
- le choix de la fenêtre  $u(t)$  est libre, bien que la fenêtre rectangulaire soit communément utilisée pour cette application.

### XI.3.2 Blanchiment d'un signal comportant des sinusoïdes

Supposons maintenant que le signal  $x(t)$  soit perturbé par la présence de sinusoïdes qui viennent s'ajouter au processus AR. Le périodogramme  $\hat{R}_x(e^{i2\pi f})$  est alors perturbé par des pics centrés aux fréquences de ces sinusoïdes, qui se superposent à la *Densité Spectrale de Puissance* (DSP) du processus AR. Il est possible de les éliminer en introduisant une étape de lissage du périodogramme à l'aide

le filtrage consiste à sélectionner la valeur dont l'ordre est égal à un rang prédéterminé.

| Fenêtre       | Largeur du lobe principal | Hauteur du 1er lobe secondaire en dB | Décroissance des lobes secondaires en dB / octave |
|---------------|---------------------------|--------------------------------------|---|
| Rectangulaire | $2/N$                     | -13                                  | -6  |
| Hamming       | $4/N$                     | -41                                  | -6  |
| Hann          | $4/N$                     | -31                                  | -18   |
| Blackman      | $6/N$                     | -57                                  | -18   |

TAB. XI.3 – Paramètres des diverses fenêtres

d'un filtre de rang (entre les étapes 3 et 4). Or la forme de ces pics correspond à la transformée de Fourier de la fenêtre  $\frac{1}{N}(\tilde{u} \star u)(t)$ . On constate alors l'importance du choix de la fenêtre  $u(t)$  : nous avons intérêt à choisir une fenêtre dont le lobe principal est le plus étroit possible et les lobes secondaires le plus bas possible, afin d'éviter qu'ils ne dominent le niveau de bruit. Malheureusement il n'est pas possible d'optimiser les deux caractéristiques simultanément et il est nécessaire de faire un compromis. Les caractéristiques des fenêtres les plus couramment utilisées sont rappelées dans le tableau XI.3.

En pratique, cette méthode de blanchiment peut être appliquée à des fenêtres de longueur  $N = 128$  dans chaque sous-bande (ce qui correspond à 23 ms dans les bandes aiguës du banc de filtres introduit dans la section XI.2.4, ou 93 ms dans les bandes les plus graves). Le signal est multiplié par une fenêtre de Hann de même longueur, et le périodogramme est calculé sur  $N' = 256$  points. Il est ensuite lissé en appliquant un filtre de rang de longueur  $q = 51 \simeq N'/5$  (il s'agit d'un choix empirique). Pour calculer la valeur du périodogramme lissé en chaque point, les  $q$  valeurs extraites sont triées par ordre croissant, puis celle d'ordre  $\frac{q}{3} = 17$  est sélectionnée (cette valeur a également été choisie de manière empirique). Pour déterminer les valeurs frontières, le périodogramme est prolongé par périodicité. Enfin, il est également possible d'introduire une étape de lissage temporel du périodogramme. La fonction  $\hat{r}_x(t)$  est ensuite obtenue en calculant la transformée de Fourier inverse du périodogramme filtré. Puis le filtre blanchisseur  $H(z)$  est calculé par prédiction linéaire à l'ordre  $p = 4$  (l'ordre choisi est peu élevé de façon à lisser les variations locales du périodogramme).

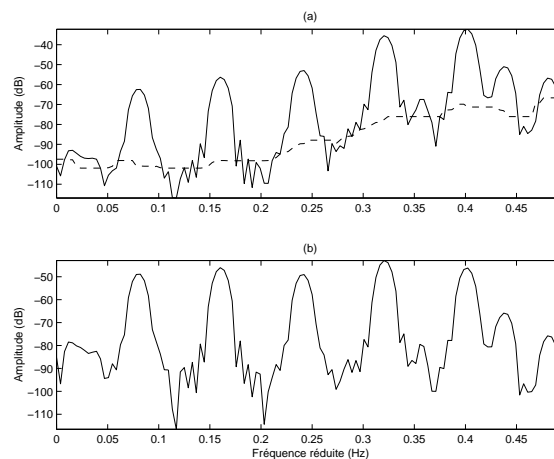


FIG. XI.5 – Périodogramme avant et après blanchiment du bruit

- (a) Périodogramme original et périodogramme filtré
- (b) Périodogramme redressé

La figure XI.5 représente le résultat du blanchiment sur un segment extrait du signal de la sous-bande la plus grave du son de basson illustré dans la section XI.2.4. Dans la figure XI.5-a, le périodogramme original est représenté en trait continu, et le périodogramme filtré en pointillés. Le périodogramme redressé est représenté dans la figure XI.5-b.

## XI.4 Analyse HR des signaux de sous-bandes

Après blanchiment du bruit, les signaux de sous-bande sont prêts pour être analysés à l'aide de l'algorithme rapide d'estimation présenté dans le chapitre V, ou à l'aide des méthodes adaptatives introduites dans la deuxième partie du document. On peut extraire du signal des fenêtres de même longueur  $N = 128$  que celles utilisées pour le blanchiment, ce qui correspond à 23 ms dans les bandes aiguës du banc de filtres introduit dans la section XI.2.4, ou 93 ms dans les bandes les plus graves. Cette dernière longueur peut paraître grande par rapport à la durée moyenne de stationnarité des signaux audio. Cependant il n'est pas absurde d'utiliser des fenêtres longues, car le modèle ESM permet justement de représenter des signaux non stationnaires.

La valeur de  $N$  laisse le choix des dimensions  $n$  et  $l$  de la matrice  $\mathbf{X}(t)$  (sous la contrainte  $N = n + l - 1$ ). Or il a été démontré dans la section III.3.2.2 que les performances de la méthode d'estimation sont proches de l'optimum quand  $\frac{1}{3}(N + 1) \leq n \leq \frac{2}{3}(N + 1)$ . Dans la pratique, il est préférable de choisir la valeur  $n = N/2$ , qui ne coïncide pas exactement avec l'optimum théorique, mais se trouve au milieu de la plage de valeurs optimales, ce qui permet de garantir la robustesse de l'estimation.

Enfin, l'ordre de modélisation  $r$  doit être choisi dans l'intervalle  $\{0 \dots p_{\max}\}$ , où  $p_{\max} = N/4$  (au delà de cette valeur, le problème d'estimation des  $4r$  paramètres du modèle ESM est sous-déterminé). Pour déterminer  $r$ , il est possible d'utiliser le critère ESTER introduit dans le chapitre IV. Pour éviter de sous-estimer l'ordre de modélisation, on sélectionnera la plus grande valeur  $p$  pour laquelle la fonction d'erreur inverse  $J(p) = \frac{1}{\|\mathbf{E}(p)\|_2^2}$  dépasse un certain seuil, typiquement égal à 100 (comme cela a été suggéré dans la section IV.3). Ce critère peut être rendu encore plus robuste en lissant la fonction  $J$  au cours du temps.

Comme cela a été mis en évidence dans la section VI.2.1 en faisant glisser dans le temps la fenêtre d'analyse, l'ordre du modèle apparaît plus clairement sur certaines fenêtres temporelles que sur d'autres, où il aurait tendance à être sous-estimé (cela vaut pour toutes les méthodes de sélection de l'ordre de modélisation). Or il est préférable de maintenir l'ordre de modélisation constant sur la durée la plus longue possible. Cela permet d'une part de garantir la régularité temporelle de la représentation paramétrique, et d'autre part de suivre l'espace signal et les paramètres fréquentiels dans un contexte adaptatif. C'est pourquoi la première étape du système d'analyse présenté dans la figure XI.1 consiste à segmenter le signal en régions où l'ordre de modélisation est supposé constant. Cette segmentation peut être effectuée en détectant les attaques par exemple. Ensuite, l'ordre de modélisation est sélectionné en appliquant le critère ESTER à différentes fenêtres de même longueur  $N$ , et en fusionnant les résultats obtenus.

Une fois que l'ordre de modélisation est fixé, les paramètres du signal sont estimés à l'aide de l'algorithme rapide présenté dans le chapitre V. Dans un contexte adaptatif, il est possible de suivre leurs variations de trois manières différentes :

- si l'on souhaite estimer les paramètres à chaque instant  $t$ , la méthode adaptative proposée dans le chapitre IX, utilisée en conjonction avec l'algorithme YAST (*cf.* chapitre VIII), permet d'atteindre les meilleures performances tout en ayant la complexité la plus faible ;
- dans le cas où l'on souhaite davantage réduire la charge de calcul en n'estimant les paramètres qu'à certains instants régulièrement espacés, deux approches sont possibles :

- les meilleurs performances sont atteintes avec l’algorithme de suivi basé sur la méthode des puissances itérées proposé dans la section VI.2.2;
- la complexité la plus faible est atteinte avec la méthode adaptative du chapitre IX, utilisée en conjonction avec l’algorithme FAPI ou TW-FAPI (*cf.* chapitre VII).

## XI.5 Traitements applicables dans les sous-bandes

Un certain nombre de traitements peuvent être effectués directement sur les signaux de sous-bandes. Par exemple, dans le cas des applications de codage, il suffit de coder les paramètres du modèle ESM estimés dans les sous-bandes (la partie bruitée pouvant par exemple être modélisée par un processus AR [Kahrs et Brandenburg, 1998]). Les signaux de sous-bandes peuvent ensuite être resynthétisés à partir de ces paramètres, puis injectés dans le système de reconstruction de la figure XI.2.

Il est également possible d’envisager des opérations de débruitage et d’extraction du bruit, qui sont complémentaires l’une de l’autre : il s’agit de séparer la partie sinusoïdale du signal de sa partie bruitée. A ce titre, diverses techniques de séparation sont présentées dans la section XI.5.1. L’extraction de la partie bruitée du signal peut avoir plusieurs applications, dont l’estimation du tempo musical, présentée dans la section XI.5.2.

### XI.5.1 Débruitage du signal et extraction du bruit

La paramétrisation des signaux de sous-bandes obtenue par l’algorithme d’estimation permet de séparer très facilement leur partie sinusoïdale de leur partie bruitée. En effet, dans chaque fenêtre d’analyse, il est possible de resynthétiser la partie sinusoïdale à partir des paramètres estimés ; la partie bruitée est alors constituée du résiduel, obtenu en soustrayant ce signal de synthèse au signal original. Une simple technique d’addition-recouvrement permet ensuite de reconstruire les signaux séparés à partir des segments obtenus sur chaque fenêtre (il est possible d’utiliser par exemple des fenêtres de Hann avec un recouvrement égal à la moitié ou au quart de la longueur des fenêtres). Les signaux séparés peuvent enfin être injectés dans le système de reconstruction de la figure XI.2.

Cependant il existe d’autres méthodes de séparation basées sur l’analyse HR. Il s’agit des techniques dites de *subspace filtering* [De Moor, 1993, Ephraim et Van Trees, 1995]. Celles-ci présentent un avantage non négligeable : elles ne nécessitent pas d’estimer les paramètres du modèle, mais uniquement l’espace signal. Par contre, elles n’éliminent pas complètement le bruit dans la partie sinusoïdale.

#### XI.5.1.1 Méthodes de *subspace filtering*

Ces méthodes ont été appliquées avec succès, en particulier dans le cadre du traitement de la parole [Wang *et al.*, 2004, Hermus et Wambacq, 2004]. Sur chaque fenêtre d’analyse, connaissant la matrice observée  $\mathbf{X}(t)$ , il s’agit de définir un estimateur  $\hat{\mathbf{S}}(t)$  de la matrice de données  $\mathbf{S}(t)$ , sans aller jusqu’à estimer tous les paramètres du modèle de signal (la matrice de bruit s’obtient alors en soustrayant  $\hat{\mathbf{S}}(t)$  à  $\mathbf{X}(t)$ ). Ces méthodes définissent la matrice débruitée  $\hat{\mathbf{S}}(t)$  en projetant la matrice observée  $\mathbf{X}(t)$  sur son espace signal, et en corrigeant les valeurs singulières correspondantes. Plus précisément, supposons que les  $r$  principales valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{X}(t)$ , notées  $\{\sigma_0, \dots, \sigma_{r-1}\}$ , sont rangées par ordre décroissant (les valeurs singulières d’ordre strictement supérieur à  $r$  étant toutes supposées égales à l’écart-type du bruit  $\sigma$ ). Supposons de plus que la matrice  $\mathbf{W}(t)$  de dimensions  $n \times r$  contient les  $r$  vecteurs singuliers à gauche correspondants. La matrice débruitée est alors définie de la façon suivante :

$$\hat{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{W}(t) \mathbf{C}(t) \mathbf{W}(t)^H \mathbf{X}(t)$$

où la matrice diagonale  $\mathbf{C}(t) = \text{diag}(c(0), \dots, c(r-1))$  contient les facteurs de pondération associés aux valeurs singulières  $\{\sigma_0, \dots, \sigma_{r-1}\}$ . Ces facteurs sont compris dans l’intervalle  $[0, 1]$ . Le fait de



choisir des facteurs strictement plus petits que 1 réduit le niveau de bruit mais distord le signal. Il s'agit donc de trouver un compromis entre niveau de bruit et distorsion. Finalement, les échantillons du signal débruité peuvent être obtenus en extrayant des éléments de la matrice  $\widehat{\mathbf{S}}(t)$ , ou en moyennant ses anti-diagonales. Les principales méthodes de *subspace filtering* sont résumées ci-dessous :

**Moindres Carrés (LS) :** l'estimateur  $\widehat{\mathbf{S}}(t)$  est défini comme la meilleure approximation de rang  $r$  de la matrice  $\mathbf{X}(t)$ . Il est obtenu en tronquant simplement la SVD de la matrice  $\mathbf{X}(t)$ ; les facteurs de pondération sont donc tous égaux à 1 :  $c(q) = 1 \forall q \in \{0 \dots r-1\}$ . Cet estimateur produit un signal qui contient le niveau de bruit le plus haut mais la distorsion la plus faible.

**Adaptation des Valeurs Singulières (SVA) :** l'estimateur  $\widehat{\mathbf{S}}(t)$  est défini en remplaçant les valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{X}(t)$  par une estimation des valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{S}(t)$  [Huffel, 1993], de sorte que  $c(q) = \frac{\sqrt{\sigma_q^2 - \sigma^2}}{\sigma_q} \forall q \in \{0 \dots r-1\}$ .

**Variance Minimale (MV) :** l'estimateur  $\widehat{\mathbf{S}}(t)$  est défini comme la meilleure approximation de la matrice  $\mathbf{S}(t)$  pouvant être obtenue en calculant des combinaisons linéaires des colonnes de la matrice  $\mathbf{X}(t)$  :  $\widehat{\mathbf{S}}(t)_{\text{MV}} = \mathbf{X}(t)\mathbf{M}(t)$ , où la matrice  $\mathbf{M}(t)$ , de dimension  $l \times l$ , minimise l'erreur quadratique  $\|\mathbf{X}(t)\mathbf{M}(t) - \mathbf{S}(t)\|_F^2$ . On obtient ainsi [De Moor, 1993] les facteurs  $c(q) = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_q^2} \forall q \in \{0 \dots r-1\}$ . Cet estimateur produit un signal qui contient le niveau de bruit le plus bas.

Citons également les estimateurs contraints dans le domaine temporel (TDC) et dans le domaine spectral (SDC) [Ephraïm et Van Trees, 1995], qui effectuent un compromis entre niveau de bruit et distorsion. En pratique, nous préférons utiliser la méthode des moindres carrés, qui consiste simplement à projeter les données observées sur l'espace signal. Elle présente à la fois l'avantage d'être la plus simple à implémenter (il n'est pas nécessaire de connaître les vecteurs singuliers mais seulement une base de l'espace signal) et de ne pas introduire de distorsion.

Notons qu'il est possible de raffiner les méthodes ci-dessus en les implémentant de façon itérative, comme cela a été proposé dans [Dologlou *et al.*, 1997] pour la méthode des moindres carrés. Chaque itération comprend alors deux étapes :

- appliquer l'une des méthodes ci-dessus à la matrice  $\mathbf{X}(t)$  pour en déduire le signal débruité  $\widehat{s}(t)$  ;
- remplacer les coefficients de la matrice  $\mathbf{X}(t)$  par les échantillons de  $\widehat{s}(t)$ .

Cependant, le coût d'une telle approche est souvent prohibitif puisqu'elle requiert plusieurs SVD, et elle ne converge de toute façon généralement pas vers  $s(t)$ . Enfin, les diverses méthodes mentionnées ci-dessus peuvent être implémentées dans un contexte adaptatif en utilisant un algorithme de poursuite de l'espace signal. Ainsi, une technique de filtrage adaptatif basée sur la méthode des moindres carrés et l'algorithme de poursuite LORAF a été proposée dans [Strobach, 1996].

Dans la section suivante, la méthode des moindres carrés sera utilisée pour séparer les composantes signal et bruit du signal.

### XI.5.1.2 Simulations numériques

Nous nous proposons ici d'illustrer deux méthodes de séparation :

- celle qui consiste à resynthétiser le signal à partir des paramètres estimés ;
- la technique de *subspace filtering* par la méthode des moindres carrés, qui consiste simplement à projeter le signal observé sur l'espace signal.

Le signal traité est une note de piano (fa, 6<sup>ème</sup> octave), échantillonnée à 44100 Hz. Son spectrogramme est représenté dans la figure XI.6-a<sup>4</sup>. Dans les deux cas, le signal est décomposé en sous-bandes

<sup>4</sup>Le spectrogramme a été calculé en utilisant des fenêtres de Hann de 1024 points. La sous-bande 11025–22050 Hz n'étant pas traitée par l'algorithme de poursuite, elle n'est pas représentée ici.

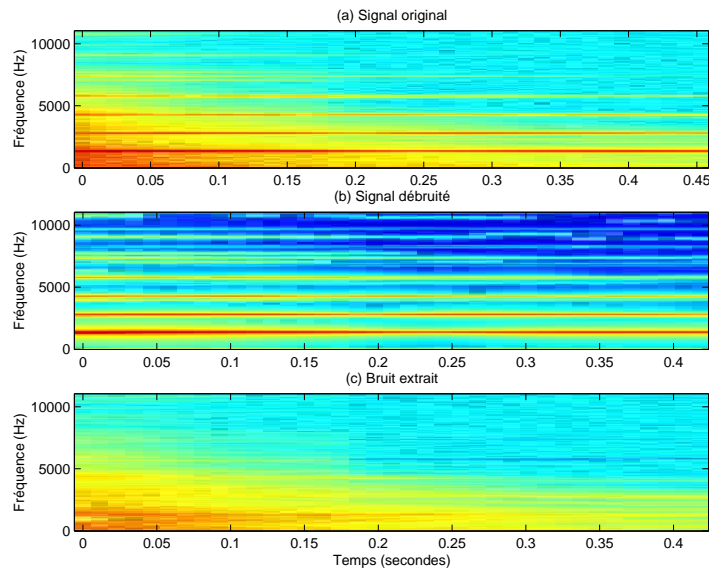


FIG. XI.6 – Séparation par modélisation paramétrique

- (a) Signal original
- (b) Signal débruité
- (c) Bruit extrait

et analysé à l'aide du système représenté dans la figure XI.2, en utilisant la technique de poursuite de l'espace signal présentée dans la section VI.2.2.

La figure XI.6-b montre le spectrogramme du signal obtenu en sortie du système de reconstruction, en resynthétisant les signaux de sous-bandes à partir des paramètres estimés. Les sinusoïdes ont bien été conservées ; en revanche le bruit a été fortement réduit (cela est visible par la présence des zones bleues sombres). La figure XI.6-c représente le spectrogramme du résiduel obtenu par cette méthode. Les sinusoïdes ont été efficacement retirées du signal. A titre de comparaison, la figure XI.7-b montre le spectrogramme du signal obtenu en sortie du système de synthèse, en projetant les signaux de sous-bandes sur leur espace signal. Il apparaît que le niveau de bruit a été moins réduit que dans la figure XI.6-b (les zones de bruits sont moins sombres). Cela confirme que la projection sur l'espace signal ne retire qu'une partie du bruit. Enfin, la figure XI.7-c montre le spectrogramme du signal obtenu en projetant les signaux de sous-bande sur l'espace bruit. Le résultat est similaire à celui de la figure XI.6-c. En conclusion, la méthode basée sur la resynthèse permet de mieux séparer le bruit du signal ; elle est cependant plus coûteuse en terme de calculs qu'une simple projection sur l'espace signal, qui ne nécessite pas de déterminer les paramètres du modèle.

### XI.5.2 Estimation du rythme musical basée sur l'extraction du bruit

Malgré l'aisance que nous avons à battre la mesure, l'estimation automatique du tempo musical reste un problème difficile à résoudre. Dans cette section est décrit un algorithme qui détermine le tempo en terme de *Battements Par Minute* (BPM), que nous avons publié dans [Alonso *et al.*, 2003a]. Jusqu'à présent, la plupart des systèmes d'estimation du tempo proposés dans la littérature n'ont été capables de traiter que des signaux au rythme très marqué [Scheirer, 1998, Laroche, 2001, Goto et Muraoka, 1997]. Certains sont plus généraux, mais sont souvent mis en difficulté par la musique classique orchestrale, principalement en raison de la faiblesse des attaques et des variations de tempo [Paulus et Klapuri, 2002, Seppänen, 2001].

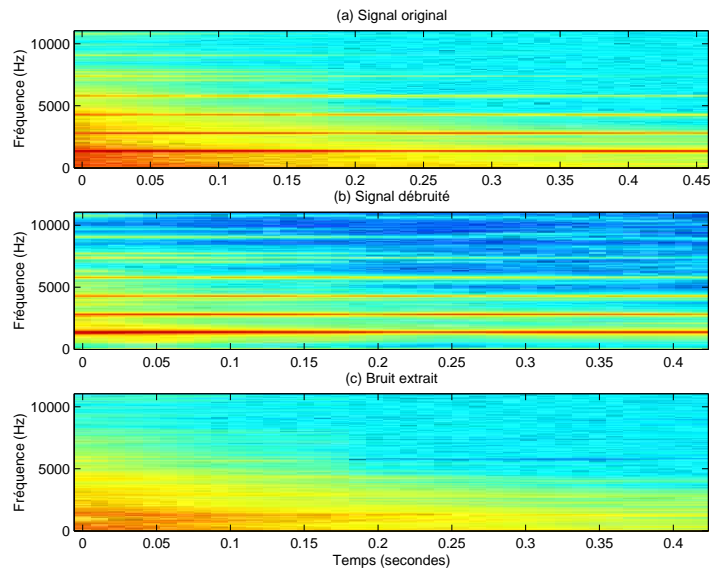


FIG. XI.7 – Séparation par filtrage

- (a) Signal original
- (b) Signal débruité
- (c) Bruit extrait

De nombreux algorithmes partagent le même principe. D'abord, le signal est décomposé en sous-bandes à l'aide d'un banc de filtres [Scheirer, 1998, Paulus et Klapuri, 2002, Seppänen, 2001] ou en groupant des canaux de sa TFD [Laroche, 2001, Goto et Muraoka, 1997]. Ensuite, il s'agit d'extraire les attaques dans les sous-bandes. Dans [Scheirer, 1998, Paulus et Klapuri, 2002, Seppänen, 2001], les attaques sont détectées en calculant l'enveloppe temporelle des signaux de sous-bandes. La dernière étape consiste à estimer la périodicité des attaques détectées.

Le système proposé vise à traiter une grande variété de genres musicaux. Ses performances ont été testées sur une base de données annotée manuellement, contenant des extraits de rock, de pop, de jazz, de musique latine, classique et de chants traditionnels. Le système est décrit dans la section XI.5.2.1. Les résultats expérimentaux sont résumés dans la section XI.5.2.2, et comparés à d'autres méthodes existantes. La question de la robustesse de la méthode proposée est également abordée.

### XI.5.2.1 Description de l'algorithme

Notre algorithme d'estimation du tempo partage un certain nombre d'éléments avec d'autres systèmes présentés dans la littérature. La principale différence est que l'estimation est faite à partir de la partie bruitée du signal, où les attaques sont mises en valeur. Les différentes étapes de cet algorithme sont présentées ci-dessous :

**Vue d'ensemble du système** (présentée dans la figure XI.8) : le signal est d'abord décomposé en douze sous-bandes uniformes à l'aide d'un banc CMF dont le filtre prototype est de longueur 200 et présente une réjection de 80 dB.

**Extraction du bruit** : la méthode d'extraction du bruit a été présentée dans la section XI.5.1. Elle repose sur une technique de *subspace filtering* de type moindres carrés, qui consiste simplement à projeter les signaux de sous-bandes sur leur espace bruit.

**Détection des attaques** : les techniques présentées dans [Klapuri, 1999, Meddis et O'Mard, 1997]

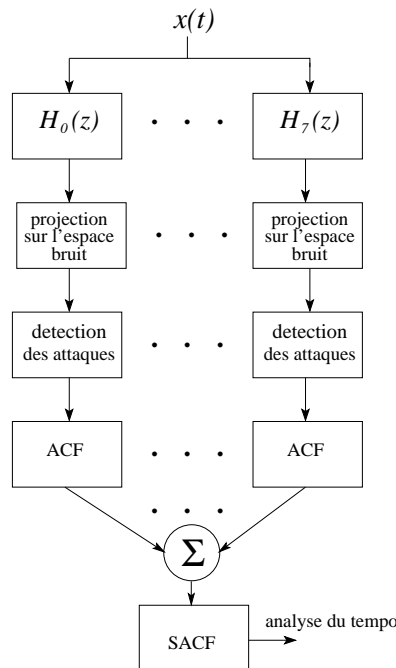


FIG. XI.8 – Vue d'ensemble du système.

permettent de transformer les signaux de sous-bande en trains d'impulsions localisées au niveau des attaques.

**Estimation de la périodicité :** la méthode utilisée pour déterminer la périodicité des trains d'impulsion repose sur une technique présentée dans [Meddis et O'Mard, 1997], basée sur la *Fonction d'Auto-Corrélation de Synthèse* (SACF).

### XI.5.2.2 Résultats expérimentaux

Le système d'estimation du tempo présenté ci-dessus a été testé sur une base de données contenant 54 extraits musicaux provenant d'enregistrements commerciaux. Ces morceaux de musique ont été choisis pour leur diversité : rythmes variés, large panel d'instruments, voix d'hommes et de femmes, présence ou non de percussions. Ils ont également été sélectionnés pour représenter une grande variété de genres musicaux : musique classique (23% de la base de données) ; rock, musique moderne ou musique pop (33%) ; chants traditionnels (12%) ; musique latine ou cubaine (12%) et jazz (20%). Des passages de 10 secondes ont été extraits de ces enregistrements et rééchantillonnés à 16 kHz. Enfin, pour chaque extrait le tempo a été mesuré manuellement par trois musiciens qualifiés, dont les estimations n'ont jamais différé d'un écart supérieur à 1%. Ainsi, l'estimation fournie par l'algorithme est considérée comme correcte si elle ne diffère pas de plus de 5% du tempo annoté manuellement.

La table XI.4 résume les résultats obtenus en utilisant notre implémentation des algorithmes de Scheirer [Scheirer, 1998], Paulus [Paulus et Klapuri, 2002], puis trois méthodes présentées dans [Alonso *et al.*, 2003b] et enfin notre nouvelle méthode. Bien que la base de données utilisée pour les tests contient assez peu d'extraits musicaux, les résultats de simulation montrent la supériorité de notre méthode par rapport aux autres algorithmes mentionnés ci-dessus. Pour l'analyse HR, la longueur de la fenêtre d'observation a été fixée à 300 échantillons, ce qui correspond approximativement à 19 ms.

<sup>3</sup>Notre implémentation de la méthode de Scheirer.

<sup>4</sup>Notre implémentation de la méthode de Paulus.

| banc de filtres | détection des attaques | estimation de la périodicité | projection sur l'espace bruit | taux de succès    |
|-----------------|------------------------|------------------------------|-------------------------------|-------------------|
| 6 (RII)         | $da/dt$                | filtre en peigne             | non                           | 76 % <sup>3</sup> |
| 8 (RII)         | —                      | YIN                          | non                           | 74 % <sup>4</sup> |
| 12 (RIF)        | $d \ln a/dt$           | SACF                         | non                           | 87 %              |
| 8 (RII)         | "                      | somme spectrale              | non                           | 87 %              |
| 8 (RII)         | "                      | produit spectral             | non                           | 89 %              |
| 12 (RIF)        | "                      | SACF                         | oui                           | 96 %              |

TAB. XI.4 – Performances des algorithmes d'estimation du tempo.

## XI.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un système complet d'analyse / synthèse reposant sur une décomposition en sous-bandes du signal. Nous avons finalement opté pour un banc de filtres non uniforme construit à partir d'un banc CMF, qui est adapté à la nature des signaux, tout en respectant les diverses contraintes imposées par la mise en oeuvre des méthodes HR. En complément du banc de filtres, une technique de blanchiment du bruit additif a été proposée, consistant à éliminer les sinusoïdes présentes dans le signal, et à modéliser le résiduel par un processus AR. Puis nous avons présenté diverses applications de ce système d'analyse / synthèse, parmi lesquelles des méthodes de séparation de la partie sinusoïdale et de la partie bruitée du signal. Deux de ces méthodes ont été illustrées dans le cas simple d'une note de piano. Nous avons ensuite utilisé l'une d'elles, appartenant à la famille des techniques de *subspace filtering*, pour développer un algorithme d'estimation du tempo musical. Les performances de ce système ont été testées sur une base de 54 morceaux provenant de divers genres musicaux. Un taux de reconnaissance de 96% a ainsi été atteint.

# Conclusions et perspectives

## Bilan de l'étude

Le travail mené au cours de cette thèse a permis d'apporter un certain nombre de résultats théoriques nouveaux. Tout d'abord, la littérature associe généralement aux méthodes à *Haute Résolution* (HR) le modèle ESM, qui représente le signal comme une somme de sinusoides modulées exponentiellement. En réalité, ce modèle est limité au cas particulier où tous les pôles du signal sont simples. Nous nous sommes donc interrogés sur ce qu'il advient en présence de pôles multiples. Cela nous a amené à introduire le modèle *Polynomial Amplitude Complex Exponentials* (PACE). Nous avons montré que ce modèle constitue la solution générale des équations de récurrence linéaires homogènes. Il offre en particulier des perspectives intéressantes en terme de codage, car il fait intervenir moins de paramètres que le modèle ESM pour un même ordre de modélisation  $r$  (la fréquence et le facteur d'atténuation d'un pôle multiple n'étant codés qu'une seule fois). Pour estimer les paramètres du modèle PACE, nous avons généralisé toute la construction théorique développée dans le cadre du modèle ESM, qui conduit à l'algorithme ESPRIT. Notre choix s'est porté sur cet algorithme, car d'une part il est plus performant que d'autres méthodes HR, comme les méthodes de Prony, de Pisarenko, ou la méthode MUSIC, d'autre part il peut être aisément optimisé et implémenté de façon adaptative. Nous avons ainsi défini les matrices de Pascal-Vandermonde qui généralisent les matrices de Vandermonde au cas de pôles multiples, et nous avons montré que ces matrices satisfont également une propriété d'invariance rotationnelle. Nous avons aussi démontré que toute matrice de Hankel singulière est associée de manière univoque à un modèle PACE, nous avons proposé une formule de factorisation des matrices de Hankel, faisant intervenir des matrices de type Pascal-Vandermonde. La propriété d'invariance rotationnelle a ainsi permis de généraliser l'algorithme ESPRIT au modèle PACE. L'algorithme consiste alors à factoriser la matrice spectrale sous sa forme de Jordan. Une fois que les pôles complexes et leurs multiplicités sont estimés, les amplitudes complexes peuvent en être déduites par la méthode des moindres carrés. Pour étudier les performances de ces techniques d'estimation, nous avons calculé analytiquement les bornes de Cramér-Rao pour le modèle PACE, et nous avons simplifié leurs expressions en supposant que l'horizon d'observation  $N \rightarrow +\infty$  (dans le cas où le bruit est blanc et où tous les pôles sont sur le cercle unité). Par ailleurs, nous avons démontré que les estimateurs des pôles et des amplitudes complexes sont centrés, et nous avons calculé leurs variances sous l'hypothèse  $RSB \rightarrow +\infty$ . Nous avons enfin comparé ces variances aux bornes de Cramér-Rao en supposant conjointement que  $N \rightarrow +\infty$  et  $RSB \rightarrow +\infty$ , et nous avons conclu que l'efficacité des estimateurs était voisine de 1. En utilisant la théorie des perturbations, nous avons démontré en particulier que le bruit additif éclate les pôles multiples en plusieurs valeurs propres simples, formant les sommets d'un polygone régulier, et que la moyenne de ces valeurs propres dispersées constitue un bon estimateur du pôle multiple. Ce phénomène a été mis en évidence dans nos simulations numériques.

Comme l'algorithme ESPRIT présuppose que l'ordre du modèle est connu, nous avons cherché à étudier la perturbation induite par un ordre de modélisation erroné, en l'absence de bruit. Nous avons ainsi démontré que si l'ordre du modèle est sur-estimé, les pôles originaux se trouvent parmi les pôles

estimés. Inversement, si l'ordre est sous-estimé, les pôles estimés peuvent être vus comme des approximations de certains des pôles originaux. Dans ce dernier cas, nous avons déterminé une *borne d'erreur a posteriori*, qui peut être calculée sans connaître l'ordre exact du modèle. A partir de cette observation, nous avons introduit la méthode ESTER, qui sélectionne un ordre de modélisation approprié. La détermination de l'ordre de modélisation est une étape essentielle du processus d'estimation, car elle conditionne toute la suite de l'analyse à haute résolution du signal. Puisque la méthode initiale était assez coûteuse, nous avons proposé un algorithme rapide pour calculer récursivement les bornes d'erreur a posteriori. Nous avons montré que la méthode ESTER s'avère plus robuste que les *Critères de Théorie de l'Information* (ITC), et que les bornes d'erreur peuvent être utilisées pour quantifier l'adéquation d'un éventuel ordre de modélisation inférieur, ce qui offre des perspectives intéressantes en terme de codage. Enfin, comme l'inconvénient majeur de l'algorithme ESPRIT est sa complexité algorithmique élevée, nous en avons proposé une implémentation rapide. Dans un premier temps l'espace signal est calculé en utilisant l'algorithme d'itération orthogonale associé à une technique de convolution rapide. Dans un deuxième temps, la matrice spectrale et les amplitudes complexes sont déterminées en tenant compte des propriétés particulières de la base de l'espace signal et de la matrice de Vandermonde. Le coût global de l'algorithme d'estimation est ainsi réduit à  $O(Nr \log_2(N) + nr^2)$ , au lieu de  $O(N^3)$ .

Après avoir traité le cas de signaux à paramètres constants, nous nous sommes intéressés à l'analyse de signaux dont les paramètres varient au cours du temps (sous l'hypothèse de blancheur du bruit additif). L'objectif de cette étude était de développer un système complet permettant de suivre les trajectoires temporelles des sinusoides. Un très grand nombre d'algorithmes permettant de suivre les variations temporelles de l'espace signal ont été proposés dans la littérature. Les simulations numériques que nous avons effectuées ont montré la supériorité de la méthode des puissances itérées en terme d'estimation de l'espace signal. En effet, cette méthode atteint des performances remarquablement proches de celles obtenues à l'aide d'une EVD. En revanche, elle reste assez coûteuse. Nous en avons donc proposé une version de plus faible complexité, baptisée FAPI, qui repose sur une approximation moins restrictive que celle connue dans la littérature sous le nom de *projection approximation*. Nous en avons proposé plusieurs implémentations, reposant respectivement sur une fenêtre exponentielle et sur une fenêtre tronquée. Cet algorithme atteint une complexité linéaire et garantit l'orthonormalité de la base de l'espace signal à chaque itération (ce qui n'est pas toujours le cas des algorithmes publiés dans la littérature). Dans le contexte de l'analyse spectrale, la méthode s'avère robuste à de brusques variations de fréquences, et atteint de meilleures performances que de nombreux algorithmes de poursuite de sous-espace, à la fois en terme d'estimation de l'espace signal et de complexité algorithmique. Nos travaux les plus récents nous ont ensuite menés à un autre algorithme de poursuite de sous-espace, dérivé de l'algorithme SP de C.E. Davila, que nous avons baptisé YAST. Cet algorithme atteint également une complexité linéaire et offre des performances très supérieures à celles des algorithmes classiques de poursuite de sous-espace de même complexité, dont FAPI. De plus, il garantit lui aussi l'orthonormalité de la base de l'espace signal à chaque itération. Enfin, nous avons également conçu un troisième algorithme de poursuite de l'espace signal baptisé *Sliding Window Adaptive SVD* (SWASVD), développé antérieurement à FAPI et YAST et publié dans la revue *IEEE Transactions on Signal Processing* [Badeau *et al.*, 2004a], que nous avons choisi de reproduire en annexe dans le chapitre C pour ne pas surcharger le corps de ce mémoire. A partir de ces divers algorithmes de poursuite, il restait à développer une version adaptative de l'algorithme ESPRIT. Nous avons ainsi montré que la structure particulière de la mise à jour de l'espace signal effectuée par FAPI ou par YAST permet de calculer la matrice spectrale de manière récursive. Les pôles complexes sont ensuite obtenus en calculant l'EVD de cette matrice, dont la complexité est réduite grâce à un calcul récursif. Le coût du traitement complet est ainsi réduit à  $O(Nr + r^3)$  au lieu de  $O(N^3)$  initialement. L'algorithme obtenu permet de suivre de manière précise et rapide les trajectoires temporelles des sinusoides<sup>5</sup>.

<sup>5</sup> Les développements de la deuxième partie sont également applicables en traitement d'antenne : la poursuite de

L'objet de notre travail étant l'analyse spectrale des signaux de musique, nous avons étudié le potentiel des méthodes HR dans ce domaine. Nous avons ainsi montré que ces méthodes peuvent représenter une classe de signaux bien plus large qu'une simple somme de sinusoides amorties. En effet, le modèle ESM permet également de décrire différentes modulations d'amplitude ou de fréquence qui sont familières des musiciens, comme le tremolo, le vibrato et le glissando. Nous avons ainsi pu observer que le modèle ESM, moins général que le modèle PACE, s'avère néanmoins suffisant pour représenter ces signaux. Nous avons également évoqué les trois principales difficultés posées par l'application des méthodes HR aux signaux de musique : tout d'abord, l'estimation est biaisée en raison de la couleur du bruit présent dans le signal audio. Par ailleurs, l'importance perceptive relative des composantes sinusoidales n'est pas prise en compte. Enfin, seuls les sons contenant un nombre limité de sinusoides peuvent être traités de façon robuste. Nous avons vu que la mise en oeuvre d'un banc de filtres en pré-traitement des méthodes HR apporte une solution à chacun de ces trois problèmes. D'une part, elle a pour effet de blanchir approximativement le bruit dans chaque sous-bande. D'autre part, l'importance perceptive relative des différentes régions fréquentielles est prise en compte par le biais d'un découpage adapté du spectre. Enfin, le nombre de composantes dans chaque sous-bande est réduit par réjection de la bande atténuée. L'utilisation d'un banc de filtre avec décimation présente également d'autres avantages non négligeables, comme l'amélioration de la résolution spectrale et du rapport signal à bruit dans chaque sous-bande, ou encore la réduction de la charge globale de calculs. Nous avons ainsi développé un système complet d'analyse / synthèse du signal audio reposant sur un banc de filtres non uniforme conçu à partir d'un banc CMF. L'analyse du signal comprend plusieurs étapes : un filtre de pré-accentuation est d'abord appliqué au signal afin de rééquilibrer approximativement la puissance en basses et en hautes fréquences. Le signal rehaussé est ensuite décomposé en sous-bandes. L'effet blanchissant du banc de filtres n'étant pas toujours suffisant, l'étape suivante consiste à blanchir le bruit additif dans les sous-bandes par filtrage. Cette opération est effectuée en éliminant les sinusoides présentes dans le signal, et en appliquant une technique de prédiction linéaire au résiduel. Les signaux de sous-bandes sont alors prêts pour être analysés à l'aide des algorithmes rapides que nous avons développés. Ce système d'analyse / synthèse est directement utilisable pour des applications de codage et de séparation des parties déterministe et stochastique du signal, qui ont en commun de pouvoir être effectuées directement sur les signaux de sous-bandes. Ces principes ont été mis en oeuvre dans le cadre d'un travail mené avec M. Alonso sur l'estimation du rythme musical [Alonso *et al.*, 2003a]. Les performances de ce système ont été testées sur une base de 54 morceaux provenant de divers genres musicaux. Un taux de reconnaissance de 96% a ainsi été atteint.

## Perspectives

Deux applications très classiques des modèles sinusoidaux sont les modifications d'échelle temporelle et d'échelle fréquentielle du signal. Il serait donc intéressant de transposer des techniques existantes [Mc Aulay et Quatieri, 1986, Serra et Smith, 1990] au modèle ESM et à notre système d'analyse. Cependant, les modifications d'échelle ne peuvent pas être effectuées en traitant les signaux de sous-bandes indépendamment les uns des autres. Dans le cas d'une modification d'échelle fréquentielle, il existe une raison simple à cela : modifier une fréquence détectée dans une sous-bande peut amener à la déplacer dans une autre sous-bande. Dans le cas d'une modification de l'échelle temporelle, ce problème ne se pose plus, car le signal est synthétisé sur des fenêtres plus ou moins longues, mais son contenu fréquentiel n'est pas modifié. Il est cependant nécessaire d'ajuster les phases des sinusoides dans chaque fenêtre, afin d'assurer leur continuité entre fenêtres successives. Or il se trouve que l'élimination en sor-

---

l'espace signal peut être réalisée à l'aide de l'algorithme FAPI introduit dans le chapitre VII, et le suivi des pôles complexes peut être effectué à l'aide de l'algorithme présenté dans le chapitre IX.



tie du banc de filtres du repliement présent dans les sous-bandes repose fortement sur des interférences constructives et destructives entre fréquences repliées. Malheureusement, le fait de modifier les phases des sinusoides dans les sous-bandes adjacentes perturbe ces interférences ; le repliement n'est alors plus correctement éliminé et engendre une gêne auditive. Il apparaît donc que toute modification d'échelle doit être effectuée sur le signal pleine bande. Il est ainsi nécessaire d'estimer les paramètres fréquentiels en bande pleine à partir des paramètres déterminés dans les sous-bandes, en distinguant les fréquences repliées des fréquences réellement présentes dans le signal. Il s'agit d'un problème délicat, pour lequel une solution a été suggérée dans [Tkacenko et Vaidyanathan, 2001]. On peut également renoncer à utiliser un banc de filtres à reconstruction parfaite, et utiliser un ensemble de filtres d'analyse dont les bandes passantes permettent de recouvrir la totalité du spectre. Ainsi les fréquences détectées dans les bandes de transition peuvent être tout simplement ignorées.

En outre, que l'on cherche à modifier l'échelle temporelle ou l'échelle fréquentielle d'un signal, un même problème se pose : il est nécessaire d'ajuster les phases des sinusoides estimées sur chaque fenêtre d'analyse, afin de garantir la continuité de celles-ci dans le signal modifié. Cet ajustement est connu sous le nom de «déroutement de la phase». Le lecteur pourra trouver de nombreuses références à ce sujet dans la littérature (citons par exemple [Moulines et Laroche, 1995, Serra et Smith, 1990]). Le déroulement de la phase est lui-même facile à implémenter ; cependant il repose implicitement sur la connaissance des valeurs successives des paramètres fréquentiels de *chaque* sinusoides. Or les algorithmes adaptatifs présentés dans la deuxième partie du document permettent seulement d'estimer l'ensemble des pôles complexes à chaque itération, sans pour autant établir de correspondance biunivoque entre les ensembles de pôles successifs. Il est donc nécessaire de retrouver les trajectoires des partiels à l'aide d'une méthode ad hoc, comme cela a été proposé dans [Mc Aulay et Quatieri, 1986, Serra et Smith, 1990] dans le cadre du modèle sinusoidal. Nous avons commencé à développer une approche similaire pour le modèle ESM, et quelques résultats préliminaires<sup>6</sup> ont été publiés dans [Badeau *et al.*, 2002, David *et al.*, 2003]. Nous avons ainsi implémenté des techniques de reconstruction des trajectoires de partiels et de déroulement de la phase. Nous avons également introduit une représentation temps-fréquence du signal analogue au spectrogramme, que nous avons baptisée *High Resolution spectrogram* (HR-ogram) [David *et al.*, 2003]. Grâce à la décomposition du signal en sa partie déterministe et sa partie stochastique, de nombreux effets peuvent être appliqués au signal audio. Par exemple, le changement de hauteur peut être appliqué à la partie déterministe seule, en interpolant éventuellement son enveloppe spectrale. Il est également envisageable de rééquilibrer les puissances respectives des parties déterministe et stochastique, ou encore d'ajouter ou de retirer du vibrato ou du trémolo aux diverses trajectoires fréquentielles.

D'autres applications pourraient concerner l'estimation de hauteur ou de hauteurs multiples, ou la séparation de sources. Les méthodes HR seraient par exemple utilisées pour construire une somme ou un produit spectral à haute résolution à l'aide des paramètres estimés, en tenant compte d'une éventuelle inharmonicité. La séparation de sources reviendrait à trier les sinusoides en plusieurs classes, chaque classe correspondant à une source. Parmi les critères de classification qui pourraient être envisagés, citons l'harmonicité, la régularité de l'enveloppe spectrale des sinusoides au sein d'une classe, ou encore la cohérence de phase entre composantes.

Sur le plan théorique, d'autres développements pourraient compléter ce travail de thèse, comme l'analyse statistique des performances de ESTER en présence de bruit (en terme de biais, de dispersion et d'efficacité), ou l'implémentation d'une version adaptative de la méthode de blanchiment proposée dans la section XI.3.

---

<sup>6</sup>Ces résultats ont été obtenus antérieurement aux travaux présentés dans la troisième partie de ce mémoire, et ne reposent donc pas sur notre système d'analyse / synthèse (le signal n'est pas décomposé en sous-bandes). Afin de maintenir la cohérence de cette troisième partie, nous avons préféré reproduire les articles [Badeau *et al.*, 2002] et [David *et al.*, 2003] en annexe dans le chapitre C.

## Quatrième partie

### Annexes



## Annexe A

# Résultats de la première partie

### Résumé

Ce chapitre expose les démonstrations des principaux résultats énoncés dans la première partie. Ces résultats concernent la caractérisation du modèle PACE, les propriétés des matrices de Pascal-Vandermonde et des matrices de Hankel singulières, le calcul des bornes de Cramér-Rao, l'étude des perturbations et enfin la borne d'erreur relative à un ordre de modélisation erroné.

## A.1 Introduction

Dans ce chapitre sont démontrés les principaux résultats de la première partie :

- les premiers résultats sur le modèle PACE sont démontrés dans la section A.2 ;
- le déterminant de la matrice Pascal-Vandermonde est calculé dans la section A.3 ;
- le lemme sur la propriété d'invariance rotationnelle des matrices de Pascal généralisées est énoncé dans la section A.4 ;
- la formule de factorisation de la matrice de données est prouvée dans la section A.5 ;
- le théorème de caractérisation des matrices de Hankel singulières par le modèle PACE est démontré dans la section A.6 ;
- les bornes de Cramér-Rao pour le modèle PACE sont calculées dans la section A.7 ;
- dans la section A.8 sont présentés des lemmes d'inversion matricielle qui sont utilisés dans des démonstrations ultérieures ;
- les performances de la méthode d'estimation du chapitre II sont étudiées dans la section A.9 ;
- enfin, le théorème portant sur la borne d'erreur à priori relative à un ordre de modélisation erroné est démontré dans la section A.10.

## A.2 Modèle PACE

Le théorème II.2.1 qui caractérise le modèle de signal est démontré ici. La démonstration utilise des notions introduites dans le chapitre II, qu'il convient de lire préalablement en intégralité.

*Démonstration du théorème II.2.1.* Tout d'abord, il est immédiat de vérifier que l'ensemble des signaux qui satisfont la relation (II.2) constitue un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . Ensuite, nous allons montrer que cet espace vectoriel est de dimension inférieure ou égale à  $r$ . En effet, considérons une famille de  $r + 1$  vecteurs  $\{s_m(t)\}_{m \in \{0, \dots, r\}}$  de cet espace. Les  $r + 1$  vecteurs extraits  $\{[s_m(0), \dots, s_m(r - 1)]^T\}_{m \in \{0, \dots, r\}}$  de dimension  $r$  constituent nécessairement une famille liée. Donc il existe des coefficients  $\{\lambda_m\}_{m \in \{0, \dots, r\}}$  tels que le signal  $y(t) \triangleq \sum_{m=0}^r \lambda_m s_m(t)$  est nul sur l'intervalle  $\{0, \dots, r - 1\}$ . En utilisant la récurrence (II.2), on en déduit que  $y(t)$  également nul sur l'intervalle  $[r, +\infty[$ . Enfin, en utilisant la récurrence (II.2) et le fait que  $p_r \neq 0$ , on montre que  $y(t)$  est également nul sur l'intervalle  $] -\infty, -1]$ . Par conséquent,  $y(t) = 0 \forall t$ , et la famille  $\{s_m(t)\}_{m \in \{0, \dots, r\}}$  est liée. Puisque toute famille de  $r + 1$  vecteurs est liée, l'espace est au plus de dimension  $r$ .

À présent, nous allons montrer que tout signal de la forme  $s(t) = F_{m_k}[t] z_k^{t-m_k}$  où  $m_k < M_k$  satisfait la relation (II.2). En effet,

$$\sum_{\tau=0}^r p_\tau s(t - \tau) = \sum_{\tau=0}^r p_{r-\tau} F_{m_k}[t - r + \tau] z_k^{t-r+\tau-m_k}. \quad (\text{A.1})$$

Or, d'après la proposition II.2.2,  $F_{m_k}[t - r + \tau] = \sum_{m=0}^{m_k} F_{m_k-m}[t - r] F_m[\tau]$ . En substituant cette identité dans l'équation (A.1), on obtient

$$\sum_{\tau=0}^r p_\tau s(t - \tau) = \sum_{m=0}^{m_k} F_{m_k-m}[t - r] z_k^{(t-r)-(m_k-m)} \sum_{\tau=0}^r p_{r-\tau} F_m[\tau] z_k^{\tau-m}.$$

On obtient ainsi

$$\sum_{\tau=0}^r p_\tau s(t - \tau) = \sum_{m=0}^{m_k} F_{m_k-m}[t - r] z_k^{(t-r)-(m_k-m)} \frac{1}{m!} P^{(m)}(z_k).$$

Or  $z_k$  est une racine multiple d'ordre  $M_k$  du polynôme  $P[z]$ , donc toutes ses dérivées  $m^{\text{èmes}}$  s'annulent en  $z_k$  jusqu'à l'ordre  $M_k - 1$ . Puisqu'il a été supposé que  $m_k < M_k$ , on en déduit que  $\sum_{\tau=0}^r p_\tau s(t-\tau) = 0$ . Nous avons donc démontré que le signal  $s(t) = F_{m_k}[t] z_k^{t-m_k}$  satisfait la récurrence (II.2).

Finalement, considérons la famille des vecteurs  $\{F_{m_k}[t] z_k^{t-m_k}\}_{\{k \in \{0, \dots, K-1\}, m_k \in \{0, \dots, M_k-1\}\}}$ . La matrice carrée dont les colonnes sont extraites de ces vecteurs et dont les lignes correspondent aux instants  $\{0 \dots r-1\}$  est une matrice Pascal-Vandermonde telle que introduite dans la définition II.3.2. D'après la proposition II.3.1, elle est inversible, puisque les pôles  $z_k$  sont distincts deux à deux. Par conséquent, la famille  $\{F_{m_k}[t] z_k^{t-m_k}\}_{\{k \in \{0, \dots, K-1\}, m_k \in \{0, \dots, M_k-1\}\}}$  est libre. Or elle contient précisément  $r$  vecteurs. En conclusion, l'espace vectoriel des signaux qui satisfont la récurrence (II.2) est exactement de dimension  $r$ , et que cette famille en constitue une base. Donc un signal  $s(t)$  satisfait la récurrence (II.2) si et seulement si il est de la forme (II.3).  $\square$

Démontrons maintenant l'identité du binôme pour les polynômes  $F_m[t]$ .

*Démonstration de la proposition II.2.2.* Nous utilisons une récurrence sur  $n$  :

- pour  $n = 0$ ,  $F_0[t_1 + t_2] = F_0[t_1] F_0[t_2] = 1$ ,
- pour  $n \geq 1$ , supposons que le résultat est vrai à l'ordre  $n - 1$ . Alors

$$\begin{aligned}
& F_n[t_1 + t_2] \\
&= \frac{1}{n} (F_{n-1}[t_1 + t_2]) (t_1 + t_2 - n + 1) \\
&= \frac{1}{n} \left( \sum_{m=0}^{n-1} F_m[t_1] F_{n-1-m}[t_2] \right) ((t_1 - m) + (t_2 - n + m + 1)) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} (F_m[t_1] (t_1 - m)) F_{n-1-m}[t_2] + \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} F_m[t_1] (F_{n-1-m}[t_2] (t_2 - n + m + 1)) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} ((m+1) F_{m+1}[t_1]) F_{n-1-m}[t_2] + \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} F_m[t_1] ((n-m) F_{n-m}[t_2]) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^n m F_m[t_1] F_{n-m}[t_2] + \frac{1}{n} \sum_{m=0}^n F_m[t_1] (n-m) F_{n-m}[t_2] \\
&= \sum_{m=0}^n F_m[t_1] F_{n-m}[t_2]
\end{aligned}$$

Ainsi, le résultat est également vérifié à l'ordre  $n$ .  $\square$

### A.3 Déterminant de la matrice Pascal-Vandermonde

Nous calculons ici le déterminant de la matrice Pascal-Vandermonde introduite dans la définition II.3.2.

*Démonstration de la proposition II.3.1.* Dans le cas particulier où il existe deux pôles  $z_{k_1}$  et  $z_{k_2}$  égaux, la matrice  $\mathbf{V}^r$  possède (au moins) deux colonnes égales, donc son déterminant est nul. Le scalaire défini dans l'équation (II.3.1) l'étant également, le résultat est vérifié. Les pôles seront donc désormais supposés distincts deux à deux.

Pour tout  $k \in \{0, \dots, K-1\}$ , posons  $r_k = \sum_{k'=k}^{K-1} M_{k'}$  et définissons la matrice carrée de dimension  $r_k \times r_k$

$$\mathbf{V}_k = \left[ \mathbf{C}_{M_k}^{r_k}(z_k), \dots, \mathbf{C}_{M_{(K-1)}}^{r_k}(z_{(K-1)}) \right].$$

Notons  $D_k = \det(\mathbf{V}_k)$ . En particulier,  $r_0 = r$  et  $D_0 = D$ . Par ailleurs,  $D_{(K-1)} = 1$ , puisque  $V_{(K-1)}$  est une matrice carrée de dimension  $(M_{(K-1)}) \times (M_{(K-1)})$ , triangulaire inférieure, et dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1. Enfin, en appliquant récursivement le lemme A.3.1 ci-dessous pour  $k$  allant de  $K-2$  à 0, on montre par récurrence que  $\forall k \in \{0, \dots, K-2\}$ ,

$$D_k = \prod_{\substack{k_1, k_2=k \\ k_1 < k_2}}^{K-1} (z_{k_2} - z_{k_1})^{M_{k_1} M_{k_2}}. \quad (\text{A.2})$$

En particulier, pour  $k = 0$ , on obtient l'équation (II.3.1), puisque  $D_0 = D$ .  $\square$

**Lemme A.3.1.** *Pour tout  $k \in \{0, \dots, K-2\}$ ,* 
$$D_k = \left( \prod_{k_2=k+1}^{K-1} (z_{k_2} - z_k)^{M_{k_2} M_k} \right) D_{(k+1)}.$$

*Démonstration.* Pour tout  $m \in \{0, \dots, M_k\}$ , posons  $r_{(k,m)} = m + \sum_{k'=k+1}^{K-1} M_{k'}$  et définissons la matrice carrée de dimension  $r_{(k,m)} \times r_{(k,m)}$

$$\mathbf{V}_{(k,m)} = \left[ \mathbf{C}_m^{r_{(k,m)}}(z_k), \mathbf{C}_{M_{(k+1)}}^{r_{(k,m)}}(z_{(k+1)}), \dots, \mathbf{C}_{M_{(K-1)}}^{r_{(k,m)}}(z_{(K-1)}) \right].$$

Notons  $D_{(k,m)} = \det(\mathbf{V}_{(k,m)})$  avec la convention  $D_{(k,0)} = D_{k+1}$ . En particulier,  $r_{(k,0)} = r_{(k+1)}$  et  $r_{(k,M_k)} = r_k$ . De même,  $D_{(k,M_k)} = D_k$ . En appliquant récursivement le lemme A.3.2 ci-dessous pour  $m$  allant de 1 à  $M_k$ , on montre par récurrence que  $\forall m \in \{0, \dots, M_k\}$ ,

$$D_{(k,m)} = \left( \prod_{k_2=k+1}^{K-1} (z_{k_2} - z_k)^{m(M_{k_2})} \right) D_{(k+1)}. \quad (\text{A.3})$$

En particulier, pour  $m = M_k$ , on obtient l'équation (A.2), puisque  $D_{(k,M_k)} = D_k$ .  $\square$

**Lemme A.3.2.** *Pour tout  $k \in \{0, \dots, K-2\}$ , pour tout  $m \in \{1, \dots, M_k\}$ ,*

$$D_{(k,m)} = \left( \prod_{k_2=k+1}^{K-1} (z_{k_2} - z_k)^{M_{k_2}} \right) D_{(k,m-1)}. \quad (\text{A.4})$$

*Démonstration.* Pour calculer  $D_{(k,m)}$ , on effectue des manipulations sur les lignes de  $\mathbf{V}_{(k,m)}$  qui ne modifient pas la valeur de son déterminant. On construit ainsi une matrice  $\mathbf{V}'_{(k,m)}$  de même dimension calculée récursivement :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}'_{(k,m)} &= \mathbf{V}_{(k,m)}; \\ \text{for } i &= r_{(k,m)} - 1 : -1 : 1, \\ &\quad \mathbf{V}'_{(k,m)(i,:)} = \mathbf{V}'_{(k,m)(i,:)} - z_k \mathbf{V}'_{(k,m)(i-1,:)}; \\ \text{end;} \end{aligned}$$

Ainsi, les coefficients de la première colonne de  $\mathbf{V}'_{(k,m)}$  vérifient  $\mathbf{V}'_{(k,m)(0,0)} = 1$  et  $\forall i > 0$ ,  $\mathbf{V}'_{(k,m)(i,0)} = 0$ . Donc le déterminant de  $\mathbf{V}'_{(k,m)}$  est égal à celui de la matrice extraite  $\mathbf{V}''_{(k,m)} \triangleq$

$\mathbf{V}'_{(k,m)(1:r(k,m)-1, 1:r(k,m)-1)}$ , de dimension  $(r(k,m) - 1) \times (r(k,m) - 1)$ . Il reste donc à calculer les coefficients de cette matrice.

Commençons par les  $m - 1$  premières colonnes, qui s'expriment en fonction du seul pôle  $z_k$ . Pour tous  $i \in \{0, \dots, r(k,m) - 2\}$  et  $j \in \{0, \dots, m - 2\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}''_{(k,m)(i,j)} &= \mathbf{V}'_{(k,m)(i+1,j+1)} \\ &= (F_{j+1}[i+1] z_k^{(i+1)-(j+1)}) - z_k (F_{j+1}[i] z_k^{i-(j+1)}) \\ &= F_j[i] z_k^{i-j}. \end{aligned}$$

Ensuite, pour tout  $k_2 \in \{k + 1, \dots, K - 1\}$ , considérons les  $M_{k_2}$  colonnes qui s'expriment en fonction du pôle  $z_{k_2}$ . Soit  $j(k,k_2) \triangleq (m - 1) + \sum_{k'=k+1}^{k_2-1} M_{k'}$  l'indice de la première de ces colonnes. Pour tous  $i \in \{0, \dots, r(k,m) - 2\}$  et  $j \in \{0, \dots, M_{k_2} - 1\}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}''_{(k,m)(i, j+j(k,k_2))} &= \mathbf{V}'_{(k,m)(i+1, j+(1+j(k,k_2)))} \\ &= (F_j[i+1] z_{k_2}^{(i+1)-j}) - z_k (F_j[i] z_{k_2}^{i-j}) \\ &= F_{j-1}[i] z_{k_2}^{i-(j-1)} + F_j[i] z_{k_2}^{i-j} (z_{k_2} - z_k). \end{aligned}$$

Maintenant que les coefficients de la matrice  $\mathbf{V}''_{(k,m)}$  sont connus, nous allons effectuer des opérations sur ses colonnes qui ne modifient pas son déterminant. Nous construisons ainsi une matrice  $\mathbf{V}'''_{(k,m)}$  de même dimension calculée récursivement :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}'''_{(k,m)} &= \mathbf{V}''_{(k,m)}; \\ \text{for } k_2 &= k + 1 : K - 1, \\ \quad \text{for } j &= 1 : M_{k_2} - 1, \\ \quad \quad \mathbf{V}'''_{(k,m)(:, j+j(k,k_2))} &= \mathbf{V}''_{(k,m)(:, j+j(k,k_2))} - \frac{1}{z_{k_2} - z_k} \mathbf{V}''_{(k,m)(:(j-1)+j(k,k_2))}; \\ \quad \text{end;} \\ \text{end;} \end{aligned}$$

Il reste à déterminer les coefficients de cette matrice. Pour  $j \in \{0 \dots m - 2\}$ ,

$$\forall i \in \{0 \dots r(k,m) - 2\}, \quad \mathbf{V}'''_{(k,m)(i,j)} = \mathbf{V}''_{(k,m)(i,j)} = F_j[i] z_k^{i-j}.$$

De même, pour tout  $k_2 \in \{k + 1, \dots, K - 1\}$ , on démontre par récurrence sur  $j \in \{0 \dots M_{k_2} - 1\}$  que

$$\forall i \in \{0 \dots r(k,m) - 2\}, \quad \mathbf{V}'''_{(k,m)(i, j+j(k,k_2))} = F_j[i] z_{k_2}^{i-j} (z_{k_2} - z_k).$$

En résumé, on constate que pour  $j \in \{0 \dots m - 2\}$ ,  $\mathbf{V}'''_{(k,m)(:,j)} = \mathbf{V}_{(k,m-1)(:,j)}$  et pour tout  $k_2 \in \{k + 1 \dots K - 1\}$ , pour tout  $j \in \{0 \dots M_{k_2} - 1\}$ ,

$$\mathbf{V}'''_{(k,m)(:, j+j(k,k_2))} = (z_{k_2} - z_k) \mathbf{V}_{(k,m-1)(:, j+j(k,k_2))}.$$

On en déduit que

$$\det(\mathbf{V}'''_{(k,m)}) = \left( \prod_{k_2=k+1}^{K-1} (z_{k_2} - z_k)^{M_{k_2}} \right) \det(\mathbf{V}_{(k,m-1)}).$$

Cette dernière équation est équivalente à (A.4). □



## A.4 Propriété d'invariance rotationnelle des matrices de Pascal généralisées

Le lemme suivant est utilisé pour montrer la propriété d'invariance rotationnelle des matrices de Pascal-Vandermonde dans la section II.3 (page 29).

**Lemme A.4.1** (Propriété d'invariance rotationnelle des matrices de Pascal généralisées). *Supposons que  $n \geq 2$ . Soit  $\mathbf{C}_M^n(z)_\downarrow$  la matrice extraite de  $\mathbf{C}_M^n(z)$  en supprimant la dernière ligne. De même, soit  $\mathbf{C}_M^n(z)_\uparrow$  la matrice extraite de  $\mathbf{C}_M^n(z)$  en supprimant la première ligne. Alors  $\mathbf{C}_M^n(z)_\downarrow$  et  $\mathbf{C}_M^n(z)_\uparrow$  engendrent le même sous-espace, et*

$$\boxed{\mathbf{C}_M^n(z)_\uparrow = \mathbf{C}_M^n(z)_\downarrow \mathbf{J}_M(z)}. \quad (\text{A.5})$$

*Démonstration.* Les coefficients de la matrice  $\mathbf{C}_M^n(z)_\uparrow$  sont définis par  $\mathbf{C}_M^n(z)_\uparrow(i,j) = F_j[i+1] z^{(i+1)-j}$ . De plus, l'équation (II.4) montre que  $F_j[i+1] = F_j[i] + F_{j-1}[i]$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_M^n(z)_\uparrow(i,j) &= z F_j[i] z^{i-j} + F_{j-1}[i] z^{i-(j-1)} \\ &= z \mathbf{C}_M^n(z)_\downarrow(i,j) + \mathbf{1}_{\{j \geq 1\}} \mathbf{C}_M^n(z)_\downarrow(i,j-1). \end{aligned}$$

Cette dernière équation s'écrit sous la forme (A.5). □

## A.5 Factorisation de la matrice de données

Dans cette section, les résultats théoriques présentés dans la section II.5.1 (page 31) sont démontrés.

*Démonstration de la proposition II.5.1. Montrons que 1.  $\Rightarrow$  2.* Les coefficients de la matrice  $\mathbf{S}(t)$  sont pour tous  $i \in \{0 \dots n-1\}$ ,  $j \in \{0 \dots l-1\}$ ,

$$\mathbf{S}(t)_{(i,j)} = s(t-l+1+i+j). \quad (\text{A.6})$$

En substituant l'équation (II.5) dans l'équation (A.6), on obtient

$$\mathbf{S}(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{S}_k(t) \quad (\text{A.7})$$

où les coefficients de la matrice  $\mathbf{S}_k(t)$ , de dimensions  $n \times l$ , sont

$$\mathbf{S}_k(t)_{(i,j)} = \sum_{m=0}^{M_k-1} \alpha_{(k,m)} F_m[t-l+1+i+j] z_k^{t-l+1+i+j-m}. \quad (\text{A.8})$$

Alors la proposition II.2.2 montre que

$$F_m[t-l+1+i+j] = \sum_{m'=0}^m F_{m'}[i+j] F_{m-m'}[t-l+1]. \quad (\text{A.9})$$

En substituant les équations (A.9) et (II.16) dans l'équation (A.8), on montre que

$$\mathbf{S}_k(t)_{(i,j)} = \sum_{m'=0}^{M_k-1} \beta_{(k,m')} (t) F_{m'}[i+j] z_k^{i+j-m'}. \quad (\text{A.10})$$

En appliquant à nouveau la proposition II.2.2, on obtient

$$F_{m'}[i+j] = \sum_{m''=0}^{m'} F_{m''}[i] F_{m'-m''}[j]. \quad (\text{A.11})$$

Alors en substituant l'équation (A.11) dans l'équation (A.10), on obtient l'équation

$$\mathbf{S}_k(t)_{(i,j)} = \sum_{m'=0}^{M_k-1} \beta_{(k,m')} (t) \sum_{m''=0}^{m'} \mathbf{C}_{M_k}^n(z_k)_{(i,m'')} \mathbf{C}_{M_k}^l(z_k)_{(j,m'-m'')}$$

qui s'écrit comme un produit de matrices :

$$\mathbf{S}_k(t) = \mathbf{C}_{M_k}^n(z_k) \mathbf{H}_k(t) \mathbf{C}_{M_k}^l(z_k)^T. \quad (\text{A.12})$$

En substituant l'équation (A.12) dans l'équation (A.7), on obtient la factorisation (II.13).

**Montrons que 2.  $\Rightarrow$  1.** Les développements précédents peuvent être parcourus dans l'ordre inverse pour montrer que 2.  $\Rightarrow$  1. Il suffit de montrer que les coefficients  $\alpha_{(k,m_k)}$  peuvent être obtenus à partir des coefficients  $\beta_{(k,m'_k)}$ . En effet, pour tous  $k \in \{0 \dots K-1\}$ , le système linéaire (II.16) (où  $m'_k \in \{0 \dots M_k-1\}$ ) s'écrit sous la forme

$$\boldsymbol{\beta}_k = \mathbf{C}_k \boldsymbol{\alpha}_k$$

où  $\boldsymbol{\beta}_k \triangleq [\beta_{(k,0)}, \dots, \beta_{(k,M_k-1)}]^T$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_k \triangleq [\alpha_{(k,0)}, \dots, \alpha_{(k,M_k-1)}]^T$ , et la matrice  $\mathbf{C}_k$  est triangulaire supérieur et tous ses éléments diagonaux sont égaux à  $z_k^{t-(l-1)} \neq 0$ . Par conséquent, ce système est inversible. □

*Démonstration du corollaire II.5.2.* La proposition II.3.1 montre que les deux matrices  $\mathbf{V}^n$  et  $\mathbf{V}^l$  sont de rang  $r$ . Par conséquent, la factorisation (II.13) montre que  $\mathbf{S}(t)$  est de rang  $r$  si et seulement si la matrice  $\mathbf{D}(t)$ , de dimension  $r \times r$ , est inversible. Par ailleurs, l'équation (II.14) montre que  $\mathbf{D}(t)$  est inversible si et seulement si  $\mathbf{H}_k(t)$  est inversible  $\forall k \in \{0 \dots K-1\}$ . Puisque  $\mathbf{H}_k(t)$  est anti-triangulaire supérieure avec des coefficients anti-diagonaux égaux à  $\beta_{(k,M_k-1)}$ ,  $\mathbf{H}_k(t)$  est inversible si et seulement si  $\beta_{(k,M_k-1)} \neq 0$ . De plus, l'équation (II.16) montre que  $\forall k \in \{0 \dots K-1\}$ ,  $\beta_{(k,M_k-1)} = \alpha_{(k,M_k-1)} z_k^{t-(l-1)}$ . On en déduit que  $\mathbf{D}(t)$  est inversible si et seulement si  $\alpha_{(k,M_k-1)} \neq 0 \forall k \in \{0 \dots K-1\}$ . □

## A.6 Caractérisation des matrices de Hankel singulières

Dans cette section est démontré le théorème II.5.3. La démonstration repose sur la proposition suivante :

**Proposition A.6.1.** *Soit  $\mathbf{W}$  une matrice de dimension  $n \times r$  (où  $n \geq 2$ ). Soit  $\mathbf{W}_\downarrow$  la matrice définie en supprimant la dernière ligne de  $\mathbf{W}$ , et  $\mathbf{W}_\uparrow$  la matrice définie en supprimant la première ligne de  $\mathbf{W}$ . Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\mathbf{W}$  vérifie la propriété d'invariance rotationnelle

$$\boxed{\mathbf{W}_\uparrow = \mathbf{W}_\downarrow \mathbf{J}} \quad (\text{A.13})$$

(où la matrice  $\mathbf{J}$  a été définie dans l'équation (II.8)).

2.  $\mathbf{W}$  est de la forme

$$\boxed{\mathbf{W} = \mathbf{V}^n \mathbf{T}} \quad (\text{A.14})$$

où  $\mathbf{T}$  est une matrice diagonale par blocs

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{T}_{(K-1)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

où pour tout  $k \in \{0 \dots K-1\}$ , le bloc  $\mathbf{T}_k$  est une matrice de dimension  $M_k \times M_k$ , triangulaire supérieure, et à structure Toeplitz.

*Démonstration. Montrons que 2.  $\Rightarrow$  1.* L'équation (A.14) induit  $\mathbf{W}_\uparrow = \mathbf{V}_\uparrow^n \mathbf{T}$ . Le théorème II.3.2 implique alors  $\mathbf{W}_\uparrow = \mathbf{V}_\uparrow^n \mathbf{J} \mathbf{T}$ . Or il est facile de vérifier que toute matrice  $\mathbf{T}$  de la forme (A.15) permute avec la matrice  $\mathbf{J}$ . Ainsi,  $\mathbf{W}_\uparrow = \mathbf{V}_\uparrow^n \mathbf{J} \mathbf{T}$ . Enfin, toujours d'après l'équation (A.14),  $\mathbf{W}_\downarrow = \mathbf{V}_\downarrow^n \mathbf{T}$ . D'où l'équation (A.13).

**Montrons que 1.  $\Rightarrow$  2.** Le résultat est démontré par récurrence sur  $n \geq 2$  :

- Pour  $n = 2$ ,  $\mathbf{W}_\downarrow$  est une ligne contenant  $r$  coefficients. Pour tout  $k \in \{0 \dots K-1\}$ , notons  $\mathbf{T}_k$  la matrice de dimension  $M_k \times M_k$ , triangulaire supérieure, et à structure Toeplitz, dont la première ligne est  $\mathbf{W}_\downarrow \left( \sum_{k'=0}^{k-1} M_{k'} : -1 + \sum_{k'=0}^k M_{k'} \right)$ . Ensuite, définissons la matrice  $\mathbf{T}$  selon l'équation (A.15).

Alors on s'assure que l'équation (A.14) est vérifiée.

- Soit  $n > 2$ , et supposons que 2. est vérifiée à l'ordre  $n-1$ . Alors  $\mathbf{W}_{(0:n-2,:)} = \mathbf{V}_{(0:n-2,:)}^n \mathbf{T}$ . De plus, d'après l'équation (A.13),  $\mathbf{W}_{(n-1,:)} = \mathbf{W}_{(n-2,:)} \mathbf{J} = \mathbf{V}_{(n-2,:)}^n \mathbf{T} \mathbf{J} = \mathbf{V}_{(n-2,:)}^n \mathbf{J} \mathbf{T}$ . Or l'équation (II.7) implique  $\mathbf{V}_{(n-1,:)}^n = \mathbf{V}_{(n-2,:)}^n \mathbf{J}$ . Donc  $\mathbf{W}_{(n-1,:)} = \mathbf{V}_{(n-1,:)}^n \mathbf{T}$ , ce qui implique finalement l'équation (A.14). □

*Démonstration du théorème II.5.3. Montrons que 1.  $\Rightarrow$  2.* Commençons par remarquer que l'assertion 1. requiert que  $r < n$ , puisque les deux matrices  $\mathbf{S}(t)_\downarrow$  et  $\mathbf{S}(t)_\uparrow$  n'ont que  $n-1$  lignes. Dans un premier temps, nous allons démontrer par l'absurde que la matrice de dimension  $(n-1) \times (l-1)$  extraite dans le coin supérieur droit ou inférieur gauche de  $\mathbf{S}(t)$ , que nous noterons  $\mathbf{S}'(t)$ , est également de rang  $r$  (ce qui requiert aussi que  $r < l$ , puisque cette matrice ne possède que  $l-1$  colonnes). Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors la matrice  $\mathbf{S}(t)_\downarrow$  est de rang  $r$ , donc elle contient une matrice extraite inversible de dimension  $r \times r$ . Mais la matrice  $\mathbf{S}'(t)$  est de rang  $< r$ , donc toutes ses matrices carrées extraites de dimension  $r \times r$  sont singulières. Par conséquent,  $\mathbf{S}(t)_\downarrow$  possède une et une seule matrice extraite inversible de dimension  $r \times r$  : la matrice extraite dans le coin supérieur gauche. De même, la matrice  $\mathbf{S}(t)_\uparrow$  est de rang  $r$ , donc elle contient une matrice extraite inversible de dimension  $r \times r$ . Mais la matrice  $\mathbf{S}'(t)$  est de rang  $< r$ , donc toutes les matrices carrées extraites de dimension  $r \times r$  sont singulières. Par conséquent,  $\mathbf{S}(t)_\uparrow$  possède une et une seule matrice extraite inversible de dimension  $r \times r$  : la matrice extraite dans le coin inférieur droit. Ainsi, les matrices de dimension  $r \times r$  extraites respectivement dans les coins

supérieur gauche et inférieur droit de  $\mathbf{S}(t)$ , sont toutes deux inversibles et de dimension  $r \times r$ , alors que toutes les autres matrices carrées extraites de dimension  $r \times r$  sont singulières. Par conséquent, les  $r$  premières colonnes de  $\mathbf{S}(t)$ , de même que ses  $r$  dernières colonnes, engendrent l'espace image de cette matrice. Or ces deux familles de  $r$  vecteurs, distinctes puisque  $r < l$ , ne peuvent pas engendrer le même espace. En effet, la matrice carrée de dimension  $r \times r$  extraite dans le coin supérieur droit est singulière alors que celle extraite dans le coin supérieur gauche est inversible (ou de même, la matrice carrée de dimension  $r \times r$  extraite dans le coin inférieur gauche est singulière alors que celle extraite dans le coin inférieur droit est inversible). Ainsi, l'hypothèse de départ était fausse. Nous venons donc de démontrer que la matrice  $\mathbf{S}'(t)$  est de rang  $r$ .

Comme la matrice  $\mathbf{S}(t)$  est de rang  $r$ , il existe des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ , respectivement de dimension  $n \times r$  et  $l \times r$ , toutes deux de rang  $r$ , telles que  $\mathbf{S}(t) = \mathbf{A} \mathbf{B}^T$ . Par conséquent, la matrice  $\mathbf{S}'(t)$ , de rang  $r$ , qui peut être extraite de  $\mathbf{S}(t)$  à la fois dans le coin supérieur droit et dans le coin inférieur gauche, est simultanément égale à  $\mathbf{A}_\downarrow \mathbf{B}_\uparrow^T$  et à  $\mathbf{A}_\uparrow \mathbf{B}_\downarrow^T$ . Ainsi,

$$\mathbf{A}_\downarrow \mathbf{B}_\uparrow^T = \mathbf{A}_\uparrow \mathbf{B}_\downarrow^T. \quad (\text{A.16})$$

Par conséquent,  $\mathbf{A}_\downarrow$  et  $\mathbf{A}_\uparrow$  engendrent le même espace de dimension  $r$ . Donc il existe une matrice inversible  $\Phi$ , de dimension  $r \times r$ , telle que  $\mathbf{A}_\uparrow = \mathbf{A}_\downarrow \Phi$ . Soit  $\Phi = \mathbf{G} \mathbf{J} \mathbf{G}^{-1}$  la décomposition de Jordan de la matrice  $\Phi$  ( $\mathbf{G}$  est une matrice inversible, et  $\mathbf{J}$  est de la forme (II.8), avec des pôles non nuls, puisque  $\Phi$  est inversible). Posons ensuite  $\mathbf{W} \triangleq \mathbf{A} \mathbf{G}$ . Alors  $\mathbf{W}$  vérifie l'égalité  $\mathbf{W}_\uparrow = \mathbf{W}_\downarrow \mathbf{J}$ . La proposition A.6.1 implique alors  $\mathbf{W} = \mathbf{V}^n \mathbf{T}'$ , où la matrice  $\mathbf{V}^n$  a été introduite dans la définition II.3.2, et où  $\mathbf{T}'$  est de la forme (A.15). Ainsi,  $\mathbf{A} = \mathbf{V}^n \mathbf{T}' \mathbf{G}^{-1}$ . Notons que cette égalité implique que les pôles de la matrice  $\mathbf{J}$  sont distincts deux à deux, sinon  $\mathbf{V}^n$ , et par conséquent  $\mathbf{A}$  ne seraient pas de rang plein. De même  $\mathbf{T}'$  est inversible, sinon  $\mathbf{A}$  ne serait pas de rang plein. En substituant cette dernière égalité dans l'équation (A.16), et en utilisant le théorème II.3.2, on obtient  $\mathbf{V}_\downarrow^n \mathbf{T}' \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B}_\uparrow^T = \mathbf{V}_\downarrow^n \mathbf{J} \mathbf{T}' \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B}_\downarrow^T$ . Comme de plus  $\mathbf{V}_\downarrow^n$  est de rang plein, on en déduit que la matrice  $\widetilde{\mathbf{W}} \triangleq \mathbf{B} \mathbf{G}^{-T} \mathbf{T}'^T \mathbf{P}$  (où  $\mathbf{P}$  est la matrice de permutation dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux situés sur l'anti-diagonale, égaux à 1) vérifie l'égalité  $\widetilde{\mathbf{W}}_\uparrow = \widetilde{\mathbf{W}}_\downarrow \mathbf{J}$ . La proposition A.6.1 implique alors  $\widetilde{\mathbf{W}} = \mathbf{V}^l \mathbf{T}$ , où  $\mathbf{T}$  est de la forme (A.15). Ainsi,  $\mathbf{B} = \mathbf{V}^l \mathbf{T} \mathbf{P} \mathbf{T}'^{-T} \mathbf{G}^T$ . Par conséquent,  $\mathbf{S}(t) = \mathbf{A} \mathbf{B}^T = \mathbf{V}^n \mathbf{H} \mathbf{V}^{lT}$ , où  $\mathbf{H} = \mathbf{P} \mathbf{T}'^T = \mathbf{T} \mathbf{P}$ . La proposition II.5.1 et le corollaire II.5.2 permettent alors de conclure.

**Montrons que 2.  $\Rightarrow$  1.** Le corollaire II.5.2 et la proposition II.5.1 montrent que la matrice  $\mathbf{S}(t)$  est de rang  $r$  et vérifie  $\mathbf{S}(t) = \mathbf{V}^n \mathbf{H} \mathbf{V}^{lT}$ . En particulier,  $\mathbf{H}$  est inversible. Donc le corollaire II.5.2 permet de conclure que les matrices  $\mathbf{S}(t)_\downarrow = \mathbf{V}_\downarrow^n \mathbf{H} \mathbf{V}^{lT}$  et  $\mathbf{S}(t)_\uparrow = \mathbf{V}_\uparrow^n \mathbf{H} \mathbf{V}^{lT}$  sont également de rang  $r$ . □

## A.7 Bornes de Cramér-Rao

Les résultats de la section III.2 (page 36) sont démontrés ici.

### A.7.1 Bornes générales pour le modèle PACE

*Démonstration de la proposition III.2.1.* Commençons par calculer la matrice d'information de Fisher relative au modèle PACE. On part de l'expression donnée dans la proposition I.6.2, qui fait intervenir les dérivées partielles de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_{ww}$  et du vecteur moyenne  $\mathbf{s}$  par rapport aux paramètres du modèle.

Les dérivées partielles de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_{ww}$  par rapport aux paramètres du modèle sont toutes nulles, sauf  $\frac{\partial \mathbf{R}_{ww}}{\partial \sigma} = 2\sigma \mathbf{\Gamma}$ . Inversement, la dérivée partielle du vecteur moyenne  $\mathbf{s}$  par rapport à  $\sigma$  est nulle. Donc la matrice  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})$  définie dans l'équation I.20, de dimension  $(1+2r+2K) \times (1+2r+2K)$ ,

s'écrit sous la forme  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \begin{array}{c|ccc} \frac{4N}{\sigma^2} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{F}'(\boldsymbol{\theta}) & \\ 0 & & & \end{array} \right]$ , où l'expression de la matrice  $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\theta})$ , de dimension

$(2r+2K) \times (2r+2K)$ , sera précisée ci-dessous. Ainsi on obtient  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})^{-1} = \left[ \begin{array}{c|ccc} \frac{\sigma^2}{4N} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{F}'(\boldsymbol{\theta})^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right]$  dont

se déduit la borne de Cramér-Rao pour l'écart-type  $\sigma$ . Pour obtenir les bornes relatives aux autres paramètres, il convient maintenant de calculer et d'inverser la matrice  $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\theta})$ .

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , considérons le vecteur  $\mathbf{v}(z) = [1, z, \dots, z^{N-1}]^T$ . Les dérivées partielles des coefficients du vecteur moyenne  $\mathbf{s}$  par rapport aux autres paramètres du modèle sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_t}{\partial a_{(k,m_k)}} &= e^{i\phi_{(k,m_k)}} \frac{1}{m_k!} \frac{d^{m_k} \mathbf{v}(z_k)}{dz_k^{m_k}} \\ \frac{\partial s_t}{\partial \phi_{(k,m_k)}} &= i a_{(k,m_k)} e^{i\phi_{(k,m_k)}} \frac{1}{m_k!} \frac{d^{m_k} \mathbf{v}(z_k)}{dz_k^{m_k}} \\ \frac{\partial s_t}{\partial \delta_k} &= z_k \sum_{m_k=1}^{M_k} m_k \alpha_{(k,m_k-1)} \frac{1}{m_k!} \frac{d^{m_k} \mathbf{v}(z_k)}{dz_k^{m_k}} \\ \frac{\partial s_t}{\partial f_k} &= i 2\pi z_k \sum_{m_k=1}^{M_k} m_k \alpha_{(k,m_k-1)} \frac{1}{m_k!} \frac{d^{m_k} \mathbf{v}(z_k)}{dz_k^{m_k}}. \end{aligned}$$

Pour tous les couples de pôles  $(z_k, z_{k'})$ , où  $(k, k') \in \{0 \dots K-1\}^2$ , définissons alors la matrice  $\mathbf{Z}_{(k,k')}$  de dimension  $(M_k+1) \times (M_{k'}+1)$ , dont les coefficients sont indexés par les indices  $m_k \in \{0 \dots M_k\}$  et  $m_{k'} \in \{0 \dots M_{k'}\}$  :

$$\mathbf{Z}_{(k,k',m_k,m_{k'})} = \frac{1}{m_k!} \frac{1}{m_{k'}!} \frac{d^{m_k} \mathbf{v}(z_k)^H}{dz_k^{m_k}} \mathbf{\Gamma}^{-1} \frac{d^{m_{k'}} \mathbf{v}(z_{k'})}{dz_{k'}^{m_{k'}}}.$$

Enfin, considérons la matrice  $\mathbf{Z}$  de dimension  $(r+K) \times (r+K)$ , définie<sup>1</sup> en juxtaposant les blocs  $\mathbf{Z}_{(k,k')}$  pour tous  $k, k' \in \{0 \dots K-1\}$ . Son inverse  $\mathbf{Z}^{-1}$  peut à son tour être découpée en  $K \times K$  blocs notés  $\mathbf{Z}_{(k',k)}^{-1}$  pour tous  $k', k \in \{0 \dots K-1\}$ , de dimension  $(M_{k'}+1) \times (M_k+1)$ . Les coefficients du bloc  $\mathbf{Z}_{(k',k)}^{-1}$ , indexés par les indices  $m_{k'} \in \{0 \dots M_{k'}\}$  et  $m_k \in \{0 \dots M_k\}$ , sont notés  $\mathbf{Z}_{(k',k,m_{k'},m_k)}^{-1}$ .

Par ailleurs, pour toute matrice complexe  $\mathbf{M}$  de dimension  $d \times d$ , définissons la matrice réelle  $\mathcal{R}_2(\mathbf{M})$ , de dimension  $(2d) \times (2d)$ , de la façon suivante :

$$\mathcal{R}_2(\mathbf{M}) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \cdot \cdot & \vdots & \vdots & \cdot \cdot \\ \hline \cdots & \mathcal{R}e(\mathbf{M}_{(i,j)}) & -\mathcal{I}m(\mathbf{M}_{(i,j)}) & \cdots \\ \hline \cdots & \mathcal{I}m(\mathbf{M}_{(i,j)}) & \mathcal{R}e(\mathbf{M}_{(i,j)}) & \cdots \\ \hline \cdot \cdot & \vdots & \vdots & \cdot \cdot \\ \hline \end{array}.$$

<sup>1</sup>Cette définition rejoint celle donnée dans la section III.2.1, page 36.

Alors on vérifie que la matrice  $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\theta})$  se décompose en sous-blocs  $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\theta})_{(k,k')}$ , où  $(k, k') \in \{0, \dots, K-1\}^2$ , chaque bloc  $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\theta})_{(k,k')}$ , de dimension  $2(M_k + 1) \times 2(M_{k'} + 1)$ , pouvant s'écrire sous la forme

$$\mathbf{F}'(\boldsymbol{\theta})_{(k,k')} = \frac{2}{\sigma^2} \text{diag}(\dots, 1, a_{(k,m_k)}, \dots, 1, 2\pi)$$

$$\mathcal{R}_2 \left( \begin{array}{c} \text{diag} \left( \dots e^{-i\phi_{(k,m_k)}} \dots, z_{k^*} \right) \\ \left( \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \ddots & \vdots & \ddots \\ \cdots & Z_{(k,k',m_k,m_{k'})} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \ddots \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ \sum_{m_{k'}=1}^{M_{k'}} m_{k'} \alpha_{(k',m_{k'}-1)} Z_{(k,k',m_k,m_{k'})} \\ \vdots \end{array} \\ \cdots \sum_{m_k=1}^{M_k} m_k \alpha_{(k,m_k-1)}^* Z_{(k,k',m_k,m_{k'})} \cdots & \sum_{m_k=1}^{M_k} \sum_{m_{k'}=1}^{M_{k'}} m_k m_{k'} \alpha_{(k,m_k-1)}^* \alpha_{(k',m_{k'}-1)} Z_{(k,k',m_k,m_{k'})} \end{array} \right) \\ \text{diag} \left( \dots e^{i\phi_{(k',m_{k'})}} \dots, z_{k'} \right) \end{array} \right) \cdot$$

$$\text{diag}(\dots, 1, a_{(k',m_{k'})}, \dots, 1, 2\pi)$$

Cette expression se factorise sous la forme suivante :

$$\mathbf{F}'(\boldsymbol{\theta})_{(k,k')} = \frac{2}{\sigma^2} \text{diag}(\dots, 1, a_{(k,m_k)}, \dots, 1, 2\pi)$$

$$\mathcal{R}_2 \left( \begin{array}{c} \text{diag} \left( \dots e^{-i\phi_{(k,m_k)}} \dots, z_{k^*} \right) \\ \left( \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \mathbf{I}_{M_k} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \cdots m_k \alpha_{(k,m_k-1)}^* \cdots & M_k \alpha_{(k,M_k-1)}^* \end{array} & \mathbf{Z}_{(k,k')} \begin{array}{cc} \mathbf{I}_{M_{k'}} & \begin{array}{c} \vdots \\ m_{k'} \alpha_{(k',m_{k'}-1)} \\ \vdots \end{array} \\ 0 \cdots 0 & M_{k'} \alpha_{(k',M_{k'}-1)} \end{array} \end{array} \right) \\ \text{diag} \left( \dots e^{i\phi_{(k',m_{k'})}} \dots, z_{k'} \right) \end{array} \right) \cdot$$

$$\text{diag}(\dots, 1, a_{(k',m_{k'})}, \dots, 1, 2\pi)$$

Or on vérifie que l'opérateur  $\mathcal{R}_2$  peut être permuté avec l'opérateur d'inversion matricielle :  $\forall \mathbf{M} \in \mathbb{C}^{d \times d}$ ,  $(\mathcal{R}_2(\mathbf{M}))^{-1} = \mathcal{R}_2(\mathbf{M}^{-1})$ . Par conséquent, la matrice  $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\theta})$  peut aisément être inversée, et son inverse peut à son tour être décomposée en sous-blocs notés  $\mathbf{F}'(\boldsymbol{\theta})_{(k',k)}^{-1}$  :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}'(\boldsymbol{\theta})_{(k',k)}^{-1} &= \frac{\sigma^2}{2} \text{diag}(\dots, 1, \frac{1}{a_{(k',m_{k'})}}, \dots, 1, \frac{1}{2\pi}) \\
\mathcal{R}_2 &= \left( \begin{array}{c} \text{diag} \left( \dots e^{-i\phi_{(k',m_{k'})}} \dots, \frac{1}{z_{k'}} \right) \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{I}_{M_{k'}} & \begin{array}{c} \vdots \\ -\frac{m_{k'} \alpha_{(k',m_{k'}-1)}}{M_{k'} \alpha_{(k',M_{k'}-1)}} \\ \vdots \end{array} \\ \hline 0 \dots 0 & \frac{1}{M_{k'} \alpha_{(k',M_{k'}-1)}} \end{array} \\ \text{diag} \left( \dots e^{i\phi_{(k,m_k)}} \dots, \frac{1}{z_k^*} \right) \end{array} \right) \mathbf{Z}_{k',k}^{-1} \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{I}_{M_k} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline \dots -\frac{m_k \alpha_{(k,m_k-1)}^*}{M_k \alpha_{(k,M_k-1)}} \dots & \frac{1}{M_k \alpha_{(k,M_k-1)}^*} \end{array} \\ \text{diag} \left( \dots, 1, \frac{1}{a_{(k,m_k)}}, \dots, 1, \frac{1}{2\pi} \right)
\end{aligned}$$

En développant l'expression précédente, on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}'(\boldsymbol{\theta})_{(k',k)}^{-1} &= \frac{\sigma^2}{2} \text{diag}(\dots, 1, \frac{1}{a_{(k',m_{k'})}}, \dots, 1, \frac{1}{2\pi}) \\
\mathcal{R}_2 &= \left( \begin{array}{c} \text{diag} \left( \dots e^{-i\phi_{(k',m_{k'})}} \dots, \frac{1}{z_{k'}} \right) \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \dots \vdots \dots \\ \dots \left( \begin{array}{c} Z_{(k',k,m_{k'},m_k)}^{-1} \\ + \frac{m_k}{M_k} \frac{m_{k'}}{M_{k'}} \frac{\alpha_{(k,m_k-1)}^*}{\alpha_{(k,M_k-1)}^*} \frac{\alpha_{(k',m_{k'}-1)}}{\alpha_{(k',M_{k'}-1)}} Z_{(k',k,M_{k'},M_k)}^{-1} \\ - \frac{m_{k'}}{M_{k'}} \frac{\alpha_{(k',m_{k'}-1)}}{\alpha_{(k',M_{k'}-1)}} Z_{(k',k,M_{k'},m_k)}^{-1} \\ - \frac{m_k}{M_k} \frac{\alpha_{(k,m_k-1)}}{\alpha_{(k,M_k-1)}} Z_{(k',k,m_{k'},M_k)}^{-1} \end{array} \right) \dots \\ \dots \vdots \dots \\ \dots \frac{1}{M_k \alpha_{(k,M_k-1)}^*} \left( \begin{array}{c} Z_{(k',k,m_{k'},M_k)}^{-1} \\ - \frac{m_{k'}}{M_{k'}} \frac{\alpha_{(k',m_{k'}-1)}}{\alpha_{(k',M_{k'}-1)}} Z_{(k',k,M_{k'},M_k)}^{-1} \\ \vdots \end{array} \right) \dots \\ \dots \vdots \dots \\ \dots \frac{1}{M_{k'} \alpha_{(k',M_{k'}-1)}} \left( \begin{array}{c} Z_{(k',k,M_{k'},m_k)}^{-1} \\ - \frac{m_k}{M_k} \frac{\alpha_{(k,m_k-1)}^*}{\alpha_{(k,M_k-1)}^*} Z_{(k',k,M_{k'},M_k)}^{-1} \end{array} \right) \dots \\ \dots \frac{1}{M_k M_{k'} \alpha_{(k,M_k-1)}^* \alpha_{(k',M_{k'}-1)}} Z_{(k',k,M_{k'},M_k)}^{-1} \dots \\ \text{diag} \left( \dots e^{i\phi_{(k,m_k)}} \dots, \frac{1}{z_k^*} \right) \end{array} \right) \\
\text{diag}(\dots, 1, \frac{1}{a_{(k,m_k)}}, \dots, 1, \frac{1}{2\pi})
\end{aligned}$$

dont les éléments diagonaux donnent les expressions des bornes de Cramér-Rao pour les paramètres du modèle autres que  $\sigma$ , données dans la proposition III.2.1.  $\square$

Démontrons maintenant les formules qui ont été données à la suite de la proposition III.2.1.

*Démonstration.* Il est connu que les coefficients de la matrice inverse  $\mathbf{Z}^{-1}$  peuvent être exprimés à l'aide de déterminants. Plus précisément,  $Z_{(k,k,M_k,M_k)}^{-1} = \frac{\det(\mathbf{Z}/(k,M_k))}{\det(\mathbf{Z})}$ , où  $\mathbf{Z}/(k,M_k)$  est la matrice extraite de  $\mathbf{Z}$  en supprimant la ligne et la colonne de même indice  $(k, M_k)$ . Or<sup>2</sup>

$$\det(\mathbf{Z}) = \left( \prod_{k_2 > k_1} |z_{k_2} - z_{k_1}|^{2(M_{k_1+1})(M_{k_2+1})} \right) D(\boldsymbol{\Gamma}, \{z_{k'}, M_{k'} + 1\}_{k' \in \{0 \dots K-1\}})$$

où  $D$  est une fonction des variables  $z_0, \dots, z_{K-1}$  à valeurs *strictement* positives. De même,

$$\det(\mathbf{Z}/_{(k, M_k)}) = \left( \prod_{k_2 > k_1} |z_{k_2} - z_{k_1}|^{2(M_{k_1+1}\{k_1 \neq k\})(M_{k_2+1}\{k_2 \neq k\})} \right) D(\mathbf{\Gamma}, \{z_{k'}, M_{k'} + 1_{\{k' \neq k\}}\}_{k' \in \{0 \dots K-1\}})$$

Par conséquent,

$$Z_{(k, k, M_k, M_k)}^{-1} = \frac{F(z_0, \dots, z_{K-1})}{\prod_{k' \neq k} |z_{k'} - z_k|^{2(M_{k'}+1)}}$$

où  $F(z_0, \dots, z_{K-1}) = \frac{D(\mathbf{\Gamma}, \{z_{k'}, M_{k'}+1_{\{k' \neq k\}}\}_{k' \in \{0 \dots K-1\}})}{D(\mathbf{\Gamma}, \{z_{k'}, M_{k'}+1\}_{k' \in \{0 \dots K-1\}})}$  est une fonction continue, à valeurs finies et strictement positives.  $\square$

## A.7.2 Bornes asymptotiques

*Démonstration de la proposition III.2.2.* Supposons que  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}_N$  et que tous les pôles sont sur le cercle unité. Dans ce cas, nous allons voir qu'il est possible de calculer des équivalents asymptotiques des coefficients de la matrice  $\mathbf{Z}^{-1}$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ . En effet, on vérifie que  $\forall (k, k') \in \{0 \dots K-1\}^2$ ,  $\forall (m_k, m_{k'}) \in \{0 \dots M_k\} \times \{0 \dots M_{k'}\}$ ,

- si  $k \neq k'$ ,  $Z_{(k, k', m_k, m_{k'})} = O(N^{m_k+m_{k'}})$ ,
- si  $k = k'$ ,  $Z_{(k, k', m_k, m_{k'})} = \frac{1}{m_k!(1+m_k+m_{k'})m_{k'}!} z_k^{m_k-m_{k'}} N^{m_k+m_{k'}+1} + O(N^{m_k+m_{k'}})$ .

Définissons la matrice diagonale  $\mathbf{D}$  telle que  $\forall (k, k') \in \{0 \dots K-1\}^2$ ,  $\forall (m_k, m_{k'}) \in \{0 \dots M_k\} \times \{0 \dots M_{k'}\}$ ,

- si  $k \neq k'$ ,  $D_{(k, k', m_k, m_{k'})} = 0$ ,
- si  $k = k'$ ,  $D_{(k, k', m_k, m_{k'})} = 0$  si  $m_k \neq m_{k'}$  et  $D_{(k, k, m_k, m_k)} = z_k^{m_k} N^{-m_k - \frac{1}{2}}$  sinon.

Considérons alors la matrice  $\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{D}^* \mathbf{Z} \mathbf{D}$ .

Alors on vérifie que  $\tilde{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Z}} + O(\frac{1}{N})$ , où  $\forall (k, k') \in \{0 \dots K-1\}^2$ ,  $\forall (m_k, m_{k'}) \in \{0 \dots M_k\} \times \{0 \dots M_{k'}\}$ ,

- si  $k \neq k'$ ,  $\bar{Z}_{(k, k', m_k, m_{k'})} = 0$ ,
- si  $k = k'$ ,  $\bar{Z}_{(k, k', m_k, m_{k'})} = \frac{1}{m_k!(1+m_k+m_{k'})m_{k'}!}$ .

Nous admettons<sup>3</sup> que l'inverse de la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}$  satisfait

- si  $k \neq k'$ ,  $\bar{Z}_{(k', k, m_{k'}, m_k)}^{-1} = 0$ ,
- si  $k = k'$ ,  $\bar{Z}_{(k', k, m_{k'}, m_k)}^{-1} = \frac{(M_{k'}+1+m_{k'})!}{(M_{k'}-m_{k'})!} \frac{(-1)^{m_{k'}+m_k}}{m_{k'}!(1+m_{k'}+m_k)m_k!} \frac{(M_k+1+m_k)!}{(M_k-m_k)!}$ .

En particulier,  $\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{D}^{*-1}$ , où  $\tilde{\mathbf{Z}}^{-1} = \bar{\mathbf{Z}}^{-1} + O(\frac{1}{N})$ .

On en déduit que  $\forall (k, k') \in \{0 \dots K-1\}^2$ ,  $\forall (m_k, m_{k'}) \in \{0 \dots M_k\} \times \{0 \dots M_{k'}\}$ ,

- si  $k \neq k'$ ,  $Z_{(k', k, m_{k'}, m_k)}^{-1} = O(\frac{1}{N^{m_{k'}+m_k+2}})$ ,
- si  $k = k'$ ,  $Z_{(k', k, m_{k'}, m_k)}^{-1} = \frac{(M_k+1+m_k)!}{(M_k-m_k)!} \frac{(-1)^{m_{k'}+m_k}}{m_{k'}!(1+m_{k'}+m_k)m_k!} \frac{(M_k+1+m_k)!}{(M_k-m_k)!} \frac{z_k^{m_{k'}-m_k}}{N^{m_{k'}+m_k+1}} + O\left(\frac{1}{N^{m_{k'}+m_k+2}}\right)$ .

Les formules de la proposition III.2.2 sont obtenues en substituant les valeurs des coefficients de la matrice  $\mathbf{Z}^{-1}$  dans les équations données dans la proposition III.2.1.  $\square$

<sup>2</sup>La preuve de ce résultat est omise en raison de sa complexité. Elle consiste à appliquer à droite et à gauche de la matrice  $\mathbf{Z} = \mathbf{V}^{NH} \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{V}^N$  les opérations que l'on appliquerait aux colonnes de la matrice Pascal-Vandermonde pour calculer son déterminant.

<sup>3</sup>La démonstration de ce résultat est omise en raison de sa complexité.



## A.8 Lemmes d'inversion matricielle

Le lemme suivant montre comment l'inverse d'une matrice est modifié par l'ajout d'une matrice de rang faible [Horn et Johnson, 1985, pp. 18-19].

**Lemme A.8.1** (Formule d'inversion par ajout d'une matrice de rang faible). *Soient  $r \in \mathbb{N}$  et  $\mathbf{C}$  des matrices inversibles de dimension  $r \times r$ . Soient  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{A}$  une matrice de dimensions  $r \times q$ ,  $\mathbf{B}$  une matrice de dimensions  $q \times r$ , et  $\mathbf{D}$  une matrice inversible de dimension  $q \times q$ . Considérons la matrice  $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{B}$ , de dimension  $r \times r$ . Alors  $\tilde{\mathbf{C}}$  est inversible si et seulement si la matrice  $\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$ , de dimension  $q \times q$ , est inversible, et dans ce cas  $\tilde{\mathbf{C}}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}$ , où  $\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A})^{-1}$ .*

De même, le lemme A.8.2 montre comment l'inverse d'une matrice est modifié par ajout de lignes et de colonnes.

**Lemme A.8.2** (Formule d'inversion par ajout de lignes et de colonnes). *Soient  $r \in \mathbb{N}$  et  $\mathbf{C}$  une matrice inversible de dimension  $r \times r$ . Soient  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{A}$  une matrice de dimensions  $r \times p$ ,  $\mathbf{B}$  une matrice de dimensions  $p \times r$ , et  $\mathbf{D}$  une matrice de dimension  $p \times p$ . Considérons la matrice  $\underline{\mathbf{C}} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{C} & \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{array} \right]$ , de dimension  $(r+p) \times (r+p)$ . Alors  $\underline{\mathbf{C}}$  est inversible si et seulement si la matrice  $\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$ , de dimension  $p \times p$ , est inversible. Dans ce cas, posons  $\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A})^{-1}$ . Alors*

$$\underline{\mathbf{C}}^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} & -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Gamma} \\ \hline -\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{\Gamma} \end{array} \right]. \quad (\text{A.17})$$

*Démonstration.* Si  $\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$  est inversible, soit  $\mathbf{\Gamma}$  son inverse. Alors on vérifie qu'en multipliant  $\underline{\mathbf{C}}$  à droite ou à gauche par le membre de droite de l'équation (A.17), on obtient la matrice identité de dimension  $(r+p) \times (r+p)$ . Réciproquement, supposons que  $\underline{\mathbf{C}}$  est inversible. Puisque la matrice  $\left[ \begin{array}{c} -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I}_p \end{array} \right]$ , de dimensions  $r \times p$ , est de rang plein, la matrice

$$\underline{\mathbf{C}} \left[ \begin{array}{c} -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} \\ \hline \mathbf{I}_p \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} \end{array} \right],$$

de dimensions  $r \times p$ , est également de rang plein, donc la matrice  $\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$  est inversible.  $\square$

## A.9 Performance des estimateurs

On démontre ici les résultats de la section III.3 (page 39).

### A.9.1 Perturbation de l'espace signal

*Démonstration de la proposition III.3.1.* L'existence et l'unicité de la fonction  $\varepsilon \mapsto \mathbf{\Pi}(\varepsilon)$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  est un résultat classique de la théorie des perturbations. Alors on vérifie que la fonction

$$\mathbf{W}(\varepsilon) \triangleq \mathbf{\Pi}(\varepsilon)\mathbf{W} (\mathbf{W}^H\mathbf{\Pi}(\varepsilon)\mathbf{W})^{-\frac{1}{2}}$$

satisfait toutes les propriétés énoncées dans la proposition III.3.1. Il est également clair que toute fonction de la forme  $\mathbf{W}(\varepsilon) \Theta(\varepsilon)$  (où  $\varepsilon \mapsto \Theta(\varepsilon)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , à valeurs dans le groupe des matrices orthonormées  $\mathcal{O}_r(\mathbb{C})$ , et prenant la valeur  $\mathbf{I}_r$  en  $\varepsilon = 0$ ) vérifie également ces propriétés.

Enfin, si  $\varepsilon \mapsto \mathbf{W}'(\varepsilon)$  est une autre fonction satisfaisant toutes ces propriétés, alors  $\mathbf{\Pi}(\varepsilon) = \mathbf{W}(\varepsilon) \mathbf{W}(\varepsilon)^H = \mathbf{W}'(\varepsilon) \mathbf{W}'(\varepsilon)^H$ . On en déduit que  $\mathbf{W}'(\varepsilon) = \mathbf{W}(\varepsilon) \Theta(\varepsilon)$ , où  $\Theta(\varepsilon) \triangleq \mathbf{W}(\varepsilon)^H \mathbf{W}'(\varepsilon)$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , à valeurs dans le groupe des matrices orthonormées  $\mathcal{O}_r(\mathbb{C})$  puisque  $\mathbf{W}(\varepsilon)$  et  $\mathbf{W}'(\varepsilon)$  sont deux bases orthonormées du même espace, et prenant la valeur  $\mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{I}_r$  en  $\varepsilon = 0$ .

Rappelons ensuite que d'après [Yang, 1995], toute matrice orthonormée  $\mathbf{W}(\varepsilon)$  engendrant l'espace principal de la matrice  $\mathbf{X}(\varepsilon) \mathbf{X}(\varepsilon)^H$  minimise la fonction

$$J' : \begin{array}{l} \mathbb{C}^{n \times r} \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{W}' \mapsto \|\mathbf{X}(\varepsilon) - \mathbf{W}' \mathbf{W}'^H \mathbf{X}(\varepsilon)\|_F^2. \end{array}$$

Par conséquent, la dérivée

$$\frac{dJ'}{d\mathbf{W}'}(\mathbf{W}') = (-2\mathbf{X}(\varepsilon) \mathbf{X}(\varepsilon)^H + \mathbf{X}(\varepsilon) \mathbf{X}(\varepsilon)^H \mathbf{W}' \mathbf{W}'^H + \mathbf{W}' \mathbf{W}'^H \mathbf{X}(\varepsilon) \mathbf{X}(\varepsilon)^H) \mathbf{W}'$$

est nulle en  $\mathbf{W}' = \mathbf{W}(\varepsilon)$ . Soit

$$\mathbf{W}(\varepsilon) = \mathbf{W} + \varepsilon \Delta' \mathbf{W} + O(\varepsilon^2)$$

le développement limité à l'ordre 1 de la fonction  $\varepsilon \mapsto \mathbf{W}(\varepsilon)$ . Alors

$$\frac{dJ}{d\mathbf{W}'}(\mathbf{W}(\varepsilon)) = \varepsilon (- (\mathbf{I}_r - \mathbf{W} \mathbf{W}^H) \Delta \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{W} + \Delta' \mathbf{W} (\mathbf{W}^H \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{W}) + \mathbf{W} \mathbf{N}) + O(\varepsilon^2) = \mathbf{0} \quad (\text{A.18})$$

où  $\mathbf{N} \triangleq \Delta' \mathbf{W}^H \mathbf{W} (\mathbf{W}^H \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{W}) + (\mathbf{W}^H \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{W}) (\mathbf{W}^H \Delta' \mathbf{W} + \Delta' \mathbf{W}^H \mathbf{W})$ .

En particulier, le développement limité à l'ordre 1 de la condition d'orthonormalité  $\mathbf{W}(\varepsilon)^H \mathbf{W}(\varepsilon) = \mathbf{I}_r$  montre que  $\mathbf{W}^H \Delta' \mathbf{W} + \Delta' \mathbf{W}^H \mathbf{W} = \mathbf{0}$ , ce qui signifie que la matrice  $\mathbf{A} \triangleq \Delta' \mathbf{W}^H \mathbf{W}$  est à antisymétrie hermitienne. Ainsi,  $\mathbf{N} = \mathbf{A} (\mathbf{W}^H \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{W})$ . L'équation (A.18) implique alors

$$\Delta' \mathbf{W} = (\mathbf{I}_r - \mathbf{W} \mathbf{W}^H) \Delta \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{W} (\mathbf{W}^H \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{W})^{-1} - \mathbf{W} \mathbf{A}.$$

En remarquant que  $\mathbf{S}^H \mathbf{W} (\mathbf{W}^H \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{W})^{-1} = \mathbf{S}^\dagger \mathbf{W}$ , on en déduit les équations (III.2) et (III.3).  $\square$

### A.9.2 Perturbation de la matrice spectrale

*Démonstration de la proposition III.3.2.* La fonction  $\varepsilon \mapsto \det \left( \mathbf{W}(\varepsilon)_\downarrow^H \mathbf{W}(\varepsilon)_\downarrow \right)$  est continue. Comme  $\mathbf{W}_\downarrow$  est de rang plein, elle est non nulle en  $\varepsilon = 0$ . Donc elle reste non nulle dans un voisinage de 0. Par conséquent,  $\mathbf{W}_\downarrow(\varepsilon)$  est de rang plein dans ce voisinage. De plus, d'après la proposition III.3.1 la fonction  $\varepsilon \mapsto \mathbf{W}(\varepsilon)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Donc la fonction  $\Phi(\varepsilon) = \left( \mathbf{W}(\varepsilon)_\downarrow^H \mathbf{W}(\varepsilon)_\downarrow \right)^{-1} \mathbf{W}(\varepsilon)_\downarrow^H \mathbf{W}(\varepsilon)_\uparrow$  l'est également. On obtient ainsi les équations (III.4) et (III.5) en calculant le développement limité à l'ordre 1 de l'égalité  $\left( \mathbf{W}(\varepsilon)_\downarrow^H \mathbf{W}(\varepsilon)_\downarrow \right) \Phi(\varepsilon) = \mathbf{W}(\varepsilon)_\downarrow^H \mathbf{W}(\varepsilon)_\uparrow$ .  $\square$

*Démonstration du corollaire III.3.3.* En multipliant l'équation (III.4) à gauche par  $\mathbf{G}^{-1}$  et à droite par  $\mathbf{G}$ , on obtient l'équation (III.6), où

$$\Delta \mathbf{J} = \mathbf{G}^{-1} \Delta \Phi \mathbf{G}. \quad (\text{A.19})$$

En multipliant l'équation (III.5) à gauche par  $\mathbf{G}^{-1}$  et à droite par  $\mathbf{G}$ , on obtient en substituant les équations (A.19), (I.19) et (I.18)

$$\Delta \mathbf{J} = -\mathbf{V}_{\downarrow}^{n\dagger} \Delta \mathbf{W}_{\downarrow} \mathbf{G} \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{V}_{\uparrow}^{n\dagger} \Delta \mathbf{W}_{\uparrow} \mathbf{G}. \quad (\text{A.20})$$

Finalement, en substituant les équations (III.3) et (I.18) dans l'équation (A.20) et en utilisant le lemme A.9.1 ci-dessous, on obtient finalement l'équation (III.7).  $\square$

**Lemme A.9.1.** *La matrice Pascal-Vandermonde  $\mathbf{V}^n$  satisfait les identités suivantes :*

$$\boxed{\left[ \mathbf{V}_{\downarrow}^{n\dagger} \mid \mathbf{0} \right] - \mathbf{V}^{n\dagger} = -\mathbf{v}'_{(n-1)} \mathbf{e}'_{(n-1)}{}^H} \quad (\text{A.21})$$

$$\boxed{\left[ \mathbf{0} \mid \mathbf{V}_{\uparrow}^{n\dagger} \right] - \mathbf{V}^{n\dagger} = -\mathbf{v}'_0 \mathbf{e}'_0{}^H.} \quad (\text{A.22})$$

*Démonstration.* On démontre l'équation (A.21). Comme la matrice  $\mathbf{V}_{\downarrow}^n$  est de rang plein,  $\mathbf{V}_{\downarrow}^{n\dagger} = \left( \mathbf{V}_{\downarrow}^{nH} \mathbf{V}_{\downarrow}^n \right)^{-1} \mathbf{V}_{\downarrow}^{nH}$ . Or  $\mathbf{V}_{\downarrow}^{nH} \mathbf{V}_{\downarrow}^n = \mathbf{Z} - \mathbf{v}_{(n-1)} \mathbf{v}_{(n-1)}^H$ . En appliquant le lemme d'inversion matricielle A.8.1 à cette dernière égalité et en multipliant à droite par  $\mathbf{V}_{\downarrow}^{nH}$ , on obtient

$$\mathbf{V}_{\downarrow}^{n\dagger} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{V}_{\downarrow}^{nH} + \mathbf{v}'_{(n-1)} \mathbf{v}_{(n-1)}^H \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{V}_{\downarrow}^{nH}. \quad (\text{A.23})$$

De plus,

$$\mathbf{V}^{n\dagger} = \left[ \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{V}_{\downarrow}^{nH} \mid \left( 1 - \mathbf{v}_{(n-1)}^H \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{v}_{(n-1)} \right) \mathbf{v}'_{(n-1)} \right]. \quad (\text{A.24})$$

En soustrayant l'équation (A.24) à l'équation (A.23) augmentée d'une colonne de zéros, on obtient finalement l'équation (A.21). L'équation (A.22) peut être dérivée de façon similaire.  $\square$

### A.9.3 Perturbation des pôles

*Démonstration de la proposition III.3.4.* Le développement fractionnaire (III.8) est obtenu en appliquant le théorème 2.1 dans [Moro *et al.*, 1997] à la matrice  $\mathbf{J}(\varepsilon)$  dans l'équation (III.6) (dans le cas particulier des valeurs propres non dérogoires). Comme les vecteurs propres à gauche et à droite de la matrice de Jordan  $\mathbf{J}$  associés à la valeurs propre  $z_k$  sont respectivement  $\mathbf{e}_{\left( \sum_{l=0}^k M_{l-1} \right)}$  et  $\mathbf{e}_{\left( \sum_{l=0}^{k-1} M_l \right)}$ , ce

théorème montre que

$$(\Delta z_k)^{M_k} = \mathbf{e}_{\left( \sum_{l=0}^k M_{l-1} \right)}^H (\Delta \mathbf{J} + \mathbf{A}' \mathbf{J} - \mathbf{J} \mathbf{A}') \mathbf{e}_{\left( \sum_{l=0}^{k-1} M_l \right)} = \Delta \mathbf{J} \left( \sum_{l=0}^k M_{l-1}, \sum_{l=0}^{k-1} M_l \right). \quad (\text{A.25})$$

L'équation (III.9) est alors obtenue en substituant l'équation (III.7) dans l'équation (A.25).  $\square$

*Démonstration de la proposition III.3.5.* Rappelons que la matrice  $\mathbf{J}$  dans l'équation (III.6) est diagonale par blocs de dimensions  $M_k \times M_k$ . La théorie des perturbations montre que pour tout  $\varepsilon$  voisin de 0, la matrice  $\mathbf{J}(\varepsilon)$  peut être également diagonalisée par blocs de mêmes dimensions, et que les fonctions qui à  $\varepsilon$  associent chacun de ces blocs sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Plus précisément, la fonction qui à  $\varepsilon$  associe le bloc de dimension  $M_k \times M_k$  relatif au pôle  $z_k$  admet le développement limité à l'ordre 1 :

$$\left[ \mathbf{0} \mid \mathbf{I}_{M_k} \mid \mathbf{0} \right] (\mathbf{J} + \varepsilon (\Delta \mathbf{J} + \mathbf{A}' \mathbf{J} - \mathbf{J} \mathbf{A}')) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{M_k} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + O(\varepsilon^2).$$

Il s'agit simplement d'un sous-bloc extrait du développement limité (III.6). Or la somme des valeurs propres  $z_{(k,m)}(\varepsilon)$  est justement égale à la trace de ce bloc. Ainsi, la fonction  $\varepsilon \mapsto z_k(\varepsilon)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et admet le développement limité au premier ordre :

$$z_{(k,m)}(\varepsilon) = \frac{1}{M_k} \text{trace} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{M_k} & \mathbf{0} \end{bmatrix} (\mathbf{J} + \varepsilon (\Delta \mathbf{J} + \mathbf{A}' \mathbf{J} - \mathbf{J} \mathbf{A}')) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{M_k} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \right) + O(\varepsilon^2)$$

De plus,

$$\begin{aligned} & - \text{trace} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{M_k} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{M_k} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \right) = \text{trace} (\mathbf{J}_{M_k}(z_k)) = M_k z_k, \\ & - \text{trace} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{M_k} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{M_k} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \right) = \text{trace} \left( \Delta \mathbf{J} \left( \sum_{k'=0}^{k-1} M_{k'} : \sum_{k'=0}^k M_{k'-1}, \sum_{k'=0}^{k-1} M_{k'} : \sum_{k'=0}^k M_{k'-1} \right) \right), \\ & - \text{trace} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{M_k} & \mathbf{0} \end{bmatrix} (\mathbf{A}' \mathbf{J} - \mathbf{J} \mathbf{A}') \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{M_k} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \right) = 0. \end{aligned}$$

On en déduit les équations (III.10) et (III.11).

En substituant l'équation (III.7) dans l'équation (III.11), on obtient

$$\begin{aligned} \Delta z_k &= \frac{1}{M_k} \text{trace} \left( \mathbf{v}'_{(n-1)} \left( \sum_{k'=0}^{k-1} M_{k'} : \sum_{k'=0}^k M_{k'-1} \right) \mathbf{e}'_{(n-1)}{}^H \Delta \mathbf{S} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{C}_{M_k}^n(z_k) \mathbf{J}_{M_k}(z_k) \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{J}_{M_k}(z_k) \mathbf{v}'_0 \left( \sum_{k'=0}^{k-1} M_{k'} : \sum_{k'=0}^k M_{k'-1} \right) \mathbf{e}'_0{}^H \Delta \mathbf{S} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{C}_{M_k}^n(z_k) \right) \\ &= \frac{1}{M_k} \left( \mathbf{e}'_{(n-1)}{}^H \Delta \mathbf{S} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{C}_{M_k}^n(z_k) \mathbf{J}_{M_k}(z_k) \mathbf{v}'_{(n-1)} \left( \sum_{k'=0}^{k-1} M_{k'} : \sum_{k'=0}^k M_{k'-1} \right) \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{e}'_0{}^H \Delta \mathbf{S} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{C}_{M_k}^n(z_k) \mathbf{J}_{M_k}(z_k) \mathbf{v}'_0 \left( \sum_{k'=0}^{k-1} M_{k'} : \sum_{k'=0}^k M_{k'-1} \right) \right) \end{aligned}$$

L'équation (III.12) est alors obtenue en remarquant que  $\mathbf{S}^\dagger = \mathbf{V}^{l*} \left( \mathbf{V}^{lT} \mathbf{V}^{l*} \right)^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{V}^{n\dagger}$ .  $\square$

*Démonstration du corollaire III.3.6.* Le logarithme complexe est un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{R} \times ]-\pi, \pi[$ , donc les fonctions  $\varepsilon \mapsto \delta_k(\varepsilon)$  et  $\varepsilon \mapsto f_k(\varepsilon)$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Un développement limité à l'ordre 1 donne, en utilisant l'équation (III.10),  $\ln(z_k(\varepsilon)) = \ln(z_k) + \varepsilon \frac{\Delta z_k}{z_k} + O(\varepsilon^2)$ . On en déduit les équations (III.17).  $\square$

#### A.9.4 Perturbation des amplitudes et des phases

*Démonstration du lemme III.3.7.* Les coefficients de la matrice  $\mathbf{V}^N(\varepsilon)$  sont des puissances des pôles estimés  $z_k(\varepsilon)$ . Puisque ceux-ci sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de la variable  $\varepsilon$ , la fonction  $\varepsilon \mapsto \mathbf{V}^N(\varepsilon)$  est également de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Par ailleurs, la colonne de  $\mathbf{V}^N(\varepsilon)$  relative au pôle  $z_k(\varepsilon)$  à l'indice  $m < M_k$  est égale à  $\frac{1}{m!} \frac{d^m \mathbf{v}(z)}{dz^m}(z_k(\varepsilon))$ , où  $\mathbf{v}(z) = [1, z, \dots, z^{n-1}]^T$ . Par conséquent, son développement limité à l'ordre 1 est

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} \frac{d^m \mathbf{v}(z)}{dz^m}(z_k(\varepsilon)) &= \frac{1}{m!} \frac{d^m \mathbf{v}(z)}{dz^m}(z_k(0)) + \varepsilon \frac{1}{m!} \frac{d^{m+1} \mathbf{v}(z)}{dz^{m+1}}(z_k(0)) \frac{dz_k(\varepsilon)}{d\varepsilon}(0) + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{1}{m!} \frac{d^m \mathbf{v}(z)}{dz^m}(z_k) + \varepsilon (m+1) \Delta z_k \frac{1}{(m+1)!} \frac{d^{m+1} \mathbf{v}(z)}{dz^{m+1}}(z_k) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

On en déduit les équations (III.18) et (III.19) colonne par colonne.  $\square$

*Démonstration de la proposition III.3.8.* Comme les pôles  $z_k$  sont distincts deux à deux et comme les fonctions  $\varepsilon \mapsto z_k(\varepsilon)$  sont continues, elles prennent des valeurs distinctes dans un voisinage de 0. Ainsi, la matrice Pascal Vandermonde  $\mathbf{V}^N(\varepsilon)$  reste de rang plein dans ce voisinage. De plus, d'après le lemme III.3.7, la fonction  $\varepsilon \mapsto \mathbf{V}^N(\varepsilon)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , donc la fonction  $\varepsilon \mapsto \mathbf{V}^N(\varepsilon)^\dagger$  l'est également. On en déduit que la fonction  $\varepsilon \mapsto \boldsymbol{\alpha}(\varepsilon) = \mathbf{V}^N(\varepsilon)^\dagger \mathbf{x}(\varepsilon)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de 0. De plus, le développement limité à l'ordre 1 de l'égalité  $\mathbf{V}^N(\varepsilon) \boldsymbol{\alpha}(\varepsilon) = \mathbf{x}(\varepsilon)$  donne

$$\mathbf{V}^N \Delta \boldsymbol{\alpha} + \Delta \mathbf{V}^N \boldsymbol{\alpha} = \Delta \mathbf{s}.$$

En substituant l'équation (III.19) dans cette dernière égalité, on obtient

$$\Delta \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{V}^{N\dagger} \left( \Delta \mathbf{s} - \overline{\mathbf{V}}^N \Delta \mathbf{Z} \boldsymbol{\alpha} \right).$$

Or en utilisant l'équation (III.12), un simple jeu de réécriture montre que  $\Delta \mathbf{Z} \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{K-1} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{s}$ . On en déduit l'équation (III.21).  $\square$

*Démonstration du corollaire III.3.9.* On suppose que  $|\alpha_{(k,m_k)}(0)| = a_{(k,m_k)} \neq 0$ . Alors comme la fonction  $\varepsilon \mapsto \alpha_{(k,m_k)}(\varepsilon)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , la fonction  $\varepsilon \mapsto a_{(k,m_k)}(\varepsilon) = |\alpha_{(k,m_k)}(\varepsilon)|$  est également de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de 0. De plus, en substituant la première ligne de l'équation (III.23) dans l'égalité  $a_{(k,m_k)}(\varepsilon) = a_{(k,m_k)} \sqrt{\frac{\alpha_{(k,m_k)}(\varepsilon)}{\alpha_{(k,m_k)}} \frac{\alpha_{(k,m_k)}(\varepsilon)^*}{\alpha_{(k,m_k)}^*}}$ , on obtient son développement limité à l'ordre 1.

Par ailleurs, le logarithme complexe est un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{R} \times ]-\pi, \pi[$ , donc la fonction  $\varepsilon \mapsto \phi_{(k,m_k)}(\varepsilon)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Un développement limité à l'ordre 1 donne, en utilisant l'équation (III.20),

$$\ln(\alpha_{(k,m_k)}(\varepsilon)) = \ln(\alpha_{(k,m_k)}) + \varepsilon \frac{\Delta \alpha_{(k,m_k)}}{\alpha_{(k,m_k)}} + O(\varepsilon^2)$$

On en déduit le développement limité à l'ordre 1 de la fonction  $\varepsilon \mapsto \phi_{(k,m_k)}(\varepsilon)$ .  $\square$

### A.9.5 Performance des estimateurs au premier ordre

*Démonstration de la proposition III.3.10.* Comme le signal  $\Delta s(t)$  est centré, l'équation (III.14) implique  $\mathbb{E}[\Delta z_k] = 0$ , donc l'estimateur  $z_k(\varepsilon)$  est centré au premier ordre. De plus, sa variance (toujours au premier ordre) est  $\text{var}(z_k(\varepsilon)) = \varepsilon^2 \mathbb{E}[|\Delta z_k|^2]$ ; on en déduit l'expression (III.25) en utilisant la relation (III.14). Par ailleurs, en substituant l'équation (III.14) dans l'équation (III.17), on obtient

$$\begin{cases} \Delta \delta_k &= \frac{1}{M_k} \mathcal{R}e \left( \frac{\mathbf{u}_k^H \Delta \mathbf{s}}{z_k \alpha_{(k,M_k-1)}} \right) \\ \Delta f_k &= \frac{1}{2\pi M_k} \mathcal{I}m \left( \frac{\mathbf{u}_k^H \Delta \mathbf{s}}{z_k \alpha_{(k,M_k-1)}} \right). \end{cases}$$

Comme le signal  $\Delta s(t)$  est centré, en injectant cette dernière équation dans l'équation (III.16) on montre que les estimateurs  $\delta_k$  et  $f_k$  sont centrés au premier ordre. De plus,

$$\text{var}(\delta_k) = \frac{\varepsilon^2}{M_k^2} \mathbb{E} \left[ \mathcal{R}e \left( \frac{\mathbf{u}_k^H \Delta \mathbf{s}}{z_k \alpha_{(k,M_k-1)}} \right)^2 \right]$$

au premier ordre. En injectant l'identité remarquable  $(\mathcal{R}e(z))^2 = \frac{1}{2}(|z|^2 + \mathcal{R}e(z^2))$  dans cette dernière équation, on obtient

$$\begin{aligned} \text{var}(\delta_k) &= \frac{\sigma^2}{2M_k^2} \left( \frac{\mathbf{u}_k^H \mathbb{E}[\Delta \mathbf{s} \Delta \mathbf{s}^H] \mathbf{u}_k}{|z_k|^2 |\alpha_{(k, M_k-1)}|^2} + \mathcal{R}e \left( \frac{\mathbf{u}_k^H \mathbb{E}[\Delta \mathbf{s} \Delta \mathbf{s}^T] \mathbf{u}_k^*}{z_k^2 \alpha_{(k, M_k-1)}^2} \right) \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2M_k^2} \left( \frac{e^{-2\delta_k}}{a_{(k, M_k-1)}^2} \mathbf{u}_k^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_k + 0 \right). \end{aligned}$$

On en déduit l'équation (III.26).

De même,  $\text{var}(f_k) = \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2 M_k^2} \mathbb{E} \left[ \mathcal{I}m \left( \frac{\mathbf{u}_k^H \Delta \mathbf{s}}{z_k \alpha_{(k, M_k-1)}} \right)^2 \right]$  au premier ordre. Alors l'identité remarquable  $(\mathcal{I}m(z))^2 = \frac{1}{2}(|z|^2 - \mathcal{R}e(z^2))$  conduit à la relation

$$\begin{aligned} \text{var}(f_k) &= \frac{\sigma^2}{8\pi^2 M_k^2} \left( \frac{\mathbf{u}_k^H \mathbb{E}[\Delta \mathbf{s} \Delta \mathbf{s}^H] \mathbf{u}_k}{|z_k|^2 |\alpha_{(k, M_k-1)}|^2} - \mathcal{R}e \left( \frac{\mathbf{u}_k^H \mathbb{E}[\Delta \mathbf{s} \Delta \mathbf{s}^T] \mathbf{u}_k^*}{z_k^2 \alpha_{(k, M_k-1)}^2} \right) \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{8\pi^2 M_k^2} \left( \frac{e^{-2\delta_k}}{a_{(k, M_k-1)}^2} \mathbf{u}_k^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}_k - 0 \right). \end{aligned}$$

On en déduit l'équation (III.27). □

*Démonstration de la proposition III.3.11.* Comme le signal  $\Delta s(t)$  est centré, l'équation (III.21) implique  $\mathbb{E}[\Delta \boldsymbol{\alpha}] = 0$ , donc l'estimateur  $\boldsymbol{\alpha}(\varepsilon)$  est centré au premier ordre. De plus, sa matrice de covariance (toujours au premier ordre) est égale à  $\text{cov}(\boldsymbol{\alpha}(\varepsilon)) = \varepsilon^2 \mathbb{E}[\Delta \boldsymbol{\alpha} \Delta \boldsymbol{\alpha}^H]$ ; on en déduit l'expression (III.28) en utilisant la relation (III.20).

Par ailleurs, en substituant l'équation (III.20) dans l'équation (III.24), on obtient

$$\begin{cases} \Delta a_{(k, m_k)} &= a_{(k, m_k)} \mathcal{R}e \left( \frac{\mathbf{b}_{(k, m_k)}^H \Delta \mathbf{s}}{\alpha_{(k, m_k)}} \right) \\ \Delta \phi_{(k, m_k)} &= \mathcal{I}m \left( \frac{\mathbf{b}_{(k, m_k)}^H \Delta \mathbf{s}}{\alpha_{(k, m_k)}} \right). \end{cases}$$

Comme le signal  $\Delta s(t)$  est centré, en injectant cette dernière équation dans l'équation (III.23) on montre que les estimateurs  $a_{(k, m_k)}(\varepsilon)$  et  $\phi_{(k, m_k)}(\varepsilon)$  sont centrés au premier ordre. En particulier,  $\text{var}(a_{(k, m_k)}(\varepsilon)) = \varepsilon^2 a_{(k, m_k)}^2 \mathbb{E} \left[ \mathcal{R}e \left( \frac{\mathbf{b}_{(k, m_k)}^H \Delta \mathbf{s}}{\alpha_{(k, m_k)}} \right)^2 \right]$  au premier ordre. En injectant l'identité remarquable  $(\mathcal{R}e(z))^2 = \frac{1}{2}(|z|^2 + \mathcal{R}e(z^2))$  dans cette dernière équation, on obtient

$$\begin{aligned} \text{var}(a_{(k, m_k)}(\varepsilon)) &= \frac{\sigma^2 a_{(k, m_k)}^2}{2} \left( \frac{\mathbf{b}_{(k, m_k)}^H \mathbb{E}[\Delta \mathbf{s} \Delta \mathbf{s}^H] \mathbf{b}_{(k, m_k)}}{|\alpha_{(k, m_k)}|^2} + \mathcal{R}e \left( \frac{\mathbf{b}_{(k, m_k)}^H \mathbb{E}[\Delta \mathbf{s} \Delta \mathbf{s}^T] \mathbf{b}_{(k, m_k)}^*}{\alpha_{(k, m_k)}^2} \right) \right) \\ &= \frac{\sigma^2 a_{(k, m_k)}^2}{2} \left( \frac{1}{a_{(k, m_k)}^2} \mathbf{b}_{(k, m_k)}^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{b}_{(k, m_k)} + 0 \right). \end{aligned}$$

On en déduit l'équation (III.29).

De même,  $\text{var}(\phi_{(k, m_k)}(\varepsilon)) = \varepsilon^2 \mathbb{E} \left[ \mathcal{I}m \left( \frac{\mathbf{b}_{(k, m_k)}^H \Delta \mathbf{s}}{\alpha_{(k, m_k)}} \right)^2 \right]$  au premier ordre. Alors l'identité remar-

quable  $(\mathcal{I}m(z))^2 = \frac{1}{2}(|z|^2 - \mathcal{R}e(z^2))$  conduit à la relation

$$\begin{aligned} \text{var}(\phi_{(k,m_k)}(\varepsilon)) &= \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{\mathbf{b}_{(k,m_k)}^H \mathbb{E}[\Delta \mathbf{s} \Delta \mathbf{s}^H] \mathbf{b}_{(k,m_k)}}{|\alpha_{(k,m_k)}|^2} - \mathcal{R}e \left( \frac{\mathbf{b}_{(k,m_k)}^H \mathbb{E}[\Delta \mathbf{s} \Delta \mathbf{s}^T] \mathbf{b}_{(k,m_k)}^*}{\alpha_{(k,m_k)}^2} \right) \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{1}{a_{(k,m_k)}^2} \mathbf{b}_{(k,m_k)}^H \mathbf{\Gamma} \mathbf{b}_{(k,m_k)} - 0 \right). \end{aligned}$$

On en déduit l'équation (III.30).  $\square$

### A.9.6 Performances asymptotiques

On démontre ici les résultats de la section III.3.2.2 (page 45). Par souci de simplicité, on supposera que *tous* les pôles sont simples, bien que le résultat reste vrai dans le cas général. Avant de démontrer les propositions III.3.12 et III.3.13, on va énoncer un lemme utilisé dans les deux démonstrations.

**Lemme A.9.2.** *Pour tout  $k \in \{0 \dots K-1\}$ , les coefficients du vecteur  $\mathbf{u}_k$  admettent le développement limité à l'ordre 2*

$$\boxed{u_k(\tau) = \mathbf{1}_{\tau \geq n-1} \frac{z_k^{t-l+\tau}}{nl} - \mathbf{1}_{\tau \leq l-1} \frac{z_k^{t-l+\tau}}{nl} + O\left(\frac{1}{N^3}\right).} \quad (\text{A.26})$$

*Démonstration.* La matrice  $\mathbf{Z}^{-1}$  introduite dans le corollaire III.3.3 admet le développement asymptotique  $\mathbf{Z}^{-1} = \frac{1}{n} \mathbf{I}_\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Par conséquent, les vecteurs introduits dans ce même corollaire vérifient

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_0 &= \mathbf{e}_0 + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ \mathbf{e}'_{(n-1)} &= \mathbf{e}_{(n-1)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ \mathbf{v}'_0 &= \frac{1}{n} \mathbf{v}_0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \mathbf{v}'_{(n-1)} &= \frac{1}{n} \mathbf{v}_{(n-1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Alors, en substituant les quatre équations ci-dessus dans l'équation (III.13), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{e}''_{(0,k)} &= \frac{z_k^{-t+l}}{nl} \mathbf{v}^l(z_k^*) + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \\ \mathbf{e}''_{(n-1,k)} &= \frac{z_k^{-t+l-n+1}}{nl} \mathbf{v}^l(z_k^*) + O\left(\frac{1}{N^3}\right). \end{aligned}$$

Enfin, en substituant les deux équations ci-dessus dans l'équation (III.15), on obtient l'expression (A.26).  $\square$

Démontrons maintenant les propositions III.3.12 et III.3.13.

*Démonstration de la proposition III.3.12.* On déduit du lemme A.9.2 que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^H \mathbf{u}_k &= \frac{2}{n^2 l} + O\left(\frac{1}{N^4}\right) \quad \text{si } n \geq l \\ &= \frac{2}{nl^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right) \quad \text{si } n \leq l \end{aligned}$$

Les équations (III.31) et (III.32) sont obtenues en injectant ce résultat dans les équations (III.26) et (III.27).

Le minimum sous la contrainte  $n + l = N + 1$  est atteint pour  $n = 2l = \frac{2}{3}(N + 1)$  ou pour  $l = 2n = \frac{2}{3}(N + 1)$  (en supposant  $N$  congru à 2 modulo 3).  $\square$

*Démonstration de la proposition III.3.13.* Puisque  $\mathbf{V}^{N\dagger} = \frac{1}{N}\mathbf{V}^{NH} + O(\frac{1}{N^2})$ , on vérifie que

$$\mathbf{V}^{N\dagger}\overline{\mathbf{V}}^N \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{K-1} \end{bmatrix} = \frac{N}{2}\mathbf{J}^H\mathbf{U}^H + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

où  $\mathbf{U}$  est la matrice de dimension  $n \times K$  dont les colonnes sont les vecteurs  $\mathbf{u}_k$ . Par substitution dans l'équation (III.22), on obtient

$$\mathbf{B}^H = \frac{1}{N}\mathbf{V}^{NH} - \frac{N}{2}\mathbf{J}^H\mathbf{U}^H + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

On en déduit que

$$\mathbf{B}^H\mathbf{B} = \frac{1}{N^2}\mathbf{V}^{NH}\mathbf{V}^N + \frac{N^2}{4}\mathbf{J}^H\mathbf{U}^H\mathbf{U}\mathbf{J} - \mathcal{R}e\left(\mathbf{V}^{NH}\mathbf{U}\mathbf{J}\right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \quad (\text{A.27})$$

Or on sait que  $\mathbf{V}^{NH}\mathbf{V}^N = N\mathbf{I}_r + O(1)$ . De plus, on déduit du lemme A.9.2 que

$$\mathbf{U}^H\mathbf{U} = \frac{2}{\max(n, l)^2 \min(n, l)}\mathbf{I}_r + O\left(\frac{1}{N^4}\right).$$

Enfin, le lemme A.9.2 montre aussi que

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{V}^{NH}\mathbf{U}\right)_{(k_1, k_2)} &= \mathbf{v}(z_{k_1})^H \mathbf{v}_{k_2} \\ &= - \sum_{\tau=0}^{\min(l-1, n-2)} z_{k_1}^{-\tau} \frac{z_{k_2}^{t-l+\tau}}{nl} + \sum_{\tau=\max(n-1, l)}^{n+l-2} z_{k_1}^{-\tau} \frac{z_{k_2}^{t-l+\tau}}{nl} + O\left(\frac{1}{N^3}\right) \\ &= -\frac{z_{k_2}^{t-l}}{nl} \min(l, n-1) + \frac{z_{k_2}^{t-l}}{nl} \min(l, n-1) + O\left(\frac{1}{N^3}\right) = O\left(\frac{1}{N^3}\right) \text{ si } z_{k_1} = z_{k_2} \\ &= O\left(\frac{1}{N^2}\right) \text{ sinon.} \end{aligned}$$

On en déduit que  $\mathcal{R}e\left(\mathbf{V}^{NH}\mathbf{U}\mathbf{J}\right) = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$ . Ainsi, l'équation (A.27) est équivalente à

$$\mathbf{B}^H\mathbf{B} = \left(\frac{1}{N} + \frac{N^2}{2\max(n, l)^2 \min(n, l)}\right)\mathbf{I}_r + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

Les équations (III.33) et (III.34) sont obtenues en substituant ce résultat dans les équations (III.29) et (III.30).

Il apparaît que les éléments diagonaux de cette matrice sont tous égaux à l'ordre 1, et le minimum de leur valeur commune sous la contrainte  $n + l = N + 1$  est atteint pour  $n = 2l = \frac{2}{3}(N + 1)$  ou pour  $l = 2n = \frac{2}{3}(N + 1)$  (en supposant  $N$  congru à 2 modulo 3).  $\square$



## A.10 Borne d'erreur a priori

Les résultats du chapitre IV sont démontrés ici.

*Démonstration du théorème IV.2.2.* S'il existe  $k \in \{1 \dots r\}$  tel que  $\hat{z} = z_k$ , l'assertion est triviale. Supposons donc que  $\forall k \in \{1 \dots r\}, \hat{z} \neq z_k$ . Soit  $\hat{\mathbf{v}}$  un vecteur unitaire quelconque. Soit le résiduel

$$\mathbf{e}(p) \triangleq (\mathbf{W}_\uparrow(p) - \hat{z} \mathbf{W}_\downarrow(p)) \hat{\mathbf{v}}. \quad (\text{A.28})$$

Puisque  $\mathbf{W}(p) \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{W}(r) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ , l'équation (A.28) implique

$$\mathbf{e}(p) = (\mathbf{W}_\uparrow(r) - \hat{z} \mathbf{W}_\downarrow(r)) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

En substituant les équations (I.18) et (II.7) dans l'équation (A.29), on obtient

$$\mathbf{e}(p) = \mathbf{V}_\downarrow^n (\mathbf{J} - \hat{z} \mathbf{I}_r) \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.30})$$

Puisque  $\forall k \in \{1 \dots r\}, \hat{z} \neq z_k$ ,  $\mathbf{J} - \hat{z} \mathbf{I}_r$  est inversible. Ainsi, l'équation (A.30) montre que

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{G} (\mathbf{J} - \hat{z} \mathbf{I}_r)^{-1} \mathbf{V}_\downarrow^{n\dagger} \mathbf{e}(p). \quad (\text{A.31})$$

Considérons une matrice  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\mathbf{\Lambda}_0, \dots, \mathbf{\Lambda}_{K-1})$  de dimension  $r \times r$ , diagonale par blocs, dont chaque bloc  $\mathbf{\Lambda}_k$  est de dimension  $M_k \times M_k$ , triangulaire supérieur, Toeplitz et inversible. Alors on montre que la matrice  $\mathbf{\Lambda}$  permute avec n'importe quelle matrice de Jordan ayant la même structure que  $\mathbf{J}$ . Ainsi, l'équation (A.31) est équivalente à

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{\Lambda} (\mathbf{J} - \hat{z} \mathbf{I}_r)^{-1} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{V}_\downarrow^{n\dagger} \mathbf{e}(p). \quad (\text{A.32})$$

En appliquant la norme 2 à l'équation (A.32), on obtient

$$\|\hat{\mathbf{v}}\|_2 \leq \|\mathbf{G} \mathbf{\Lambda}\|_2 \left\| (\mathbf{J} - \hat{z} \mathbf{I}_r)^{-1} \right\|_2 \left\| \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{V}_\downarrow^{n\dagger} \right\|_2 \|\mathbf{e}(p)\|_2. \quad (\text{A.33})$$

Puisque la matrice  $\mathbf{W}(r)$  est orthonormée et  $\mathbf{V}^n \mathbf{\Lambda} = \mathbf{W}(r) \mathbf{G} \mathbf{\Lambda}$ ,  $\|\mathbf{G} \mathbf{\Lambda}\|_2 = \|\mathbf{V}^n \mathbf{\Lambda}\|_2 = \sigma_{\max}(\mathbf{V}^n \mathbf{\Lambda})$ . Puisque  $\mathbf{V}_\downarrow^n$  est de rang plein, les valeurs singulières de  $\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{V}_\downarrow^{n\dagger}$  sont les inverses de celles de  $\mathbf{V}_\downarrow^n \mathbf{\Lambda}$ , si bien que  $\left\| \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{V}_\downarrow^{n\dagger} \right\|_2 = \frac{1}{\sigma_{\min}(\mathbf{V}_\downarrow^n \mathbf{\Lambda})}$ . Finalement, puisque  $\hat{\mathbf{v}}$  est unitaire, l'équation (A.33) implique

$$\frac{1}{\left\| (\mathbf{J} - \hat{z} \mathbf{I}_r)^{-1} \right\|_2} \leq \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{V}^n \mathbf{\Lambda})}{\sigma_{\min}(\mathbf{V}_\downarrow^n \mathbf{\Lambda})} \|\mathbf{e}(p)\|_2. \quad (\text{A.34})$$

Par ailleurs, la matrice  $\mathbf{J} - \hat{z} \mathbf{I}_r$  est diagonale par blocs, donc

$$\frac{1}{\left\| (\mathbf{J} - \hat{z} \mathbf{I}_r)^{-1} \right\|_2} = \min_{k \in \{0 \dots K-1\}} \frac{1}{\left\| (\mathbf{J}_{M_k}(z_k) - \hat{z} \mathbf{I}_{M_k})^{-1} \right\|_2}.$$

Ainsi l'équation (A.34) montre que  $\exists k \in \{0 \dots K-1\}$  tel que

$$\boxed{\frac{1}{\left\| (\mathbf{J}_{M_k}(z_k) - \widehat{z} \mathbf{I}_{M_k})^{-1} \right\|_2} \leq \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{V}^n \mathbf{\Lambda})}{\sigma_{\min}(\mathbf{V}_{\downarrow}^n \mathbf{\Lambda})} \|\mathbf{e}(p)\|_2.} \quad (\text{A.35})$$

De plus,  $\mathbf{J}_{M_k}(z_k) - \widehat{z} \mathbf{I}_{M_k}$  est la somme de la matrice diagonale  $(z_k - \widehat{z}) \mathbf{I}_{M_k}$  et de la matrice nilpotente  $\mathbf{N}_{M_k}$ , qui contient des 1 sur la première sur-diagonale, et des 0 partout ailleurs. En particulier,  $\mathbf{N}_{M_k}^{M_k} = \mathbf{0}$ . Par conséquent,

$$(\mathbf{J}_{M_k}(z_k) - \widehat{z} \mathbf{I}_{M_k})^{-1} = \frac{1}{z_k - \widehat{z}} \sum_{m_k=0}^{M_k-1} (-1)^{m_k} \frac{\mathbf{N}_{M_k}^{m_k}}{(z_k - \widehat{z})^{m_k}}.$$

En appliquant la norme 2 aux deux membres de cette équation, on obtient

$$\left\| (\mathbf{J}_{M_k}(z_k) - \widehat{z} \mathbf{I}_{M_k})^{-1} \right\|_2 \leq \frac{1}{|z_k - \widehat{z}|} \sum_{m_k=0}^{M_k-1} \frac{1}{|z_k - \widehat{z}|^{m_k}}.$$

Si  $|z_k - \widehat{z}| \geq 1$ , cela implique

$$|z_k - \widehat{z}| \leq \frac{M_k}{\left\| (\mathbf{J}_{M_k}(z_k) - \widehat{z} \mathbf{I}_{M_k})^{-1} \right\|_2}.$$

Inversement, si  $|z_k - \widehat{z}| \leq 1$ ,

$$|z_k - \widehat{z}| \leq \left( \frac{M_k}{\left\| (\mathbf{J}_{M_k}(z_k) - \widehat{z} \mathbf{I}_{M_k})^{-1} \right\|_2} \right)^{\frac{1}{M_k}}.$$

Ainsi, dans tous les cas,

$$\boxed{|z_k - \widehat{z}| \leq \max \left( \frac{M_k}{\left\| (\mathbf{J}_{M_k}(z_k) - \widehat{z} \mathbf{I}_{M_k})^{-1} \right\|_2}, \left( \frac{M_k}{\left\| (\mathbf{J}_{M_k}(z_k) - \widehat{z} \mathbf{I}_{M_k})^{-1} \right\|_2} \right)^{\frac{1}{M_k}} \right).}$$

Finalement, en substituant cette dernière équation dans l'équation (A.35), on obtient

$$|z_k - \widehat{z}| \leq \max \left( M_k \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{V}^n \mathbf{\Lambda})}{\sigma_{\min}(\mathbf{V}_{\downarrow}^n \mathbf{\Lambda})} \|\mathbf{e}(p)\|_2, \left( M_k \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{V}^n \mathbf{\Lambda})}{\sigma_{\min}(\mathbf{V}_{\downarrow}^n \mathbf{\Lambda})} \|\mathbf{e}(p)\|_2 \right)^{\frac{1}{M_k}} \right). \quad (\text{A.36})$$

L'équation (A.36) est satisfaite pour tous les vecteurs unitaires  $\widehat{\mathbf{v}}$  et toutes les matrices  $\mathbf{\Lambda}$  ayant la structure mentionnée ci-dessus. Par conséquent, l'équation (IV.3) se déduit de l'équation (A.36).  $\square$

*Démonstration du corollaire IV.2.3.* Soit  $\widehat{z}$  une valeur propre de  $\mathbf{\Phi}(p)$  et  $\widehat{\mathbf{v}}$  un vecteur propre unitaire associé à  $\widehat{z}$ . Soit  $\mathbf{e}(p) \triangleq (\mathbf{W}_{\uparrow}(p) - \widehat{z} \mathbf{W}_{\downarrow}(p)) \widehat{\mathbf{v}}$ . Puisque  $\widehat{\mathbf{v}}$  est unitaire,  $\sigma_{\min}(\mathbf{W}_{\uparrow}(p) - \widehat{z} \mathbf{W}_{\downarrow}(p)) \leq \|\mathbf{e}(p)\|_2$ . Par ailleurs,

$$\mathbf{e}(p) = (\mathbf{W}_{\uparrow}(p) - \mathbf{W}_{\downarrow}(p) \mathbf{\Phi}(p)) \widehat{\mathbf{v}},$$

donc  $\|\mathbf{e}(p)\|_2 \leq \|\mathbf{E}(p)\|_2$ . Par conséquent,

$$\sigma_{\min}(\mathbf{W}_{\uparrow}(p) - \widehat{z} \mathbf{W}_{\downarrow}(p)) \leq \|\mathbf{E}(p)\|_2. \quad (\text{A.37})$$

Finalement, en substituant l'équation (A.37) dans l'équation (IV.3), on obtient l'équation (IV.4).  $\square$

*Démonstration de la proposition IV.3.1.* Remarquons que

$$\mathbf{E}(p) = \left( \mathbf{W}_{\uparrow}(p) \mathbf{W}_{\uparrow}(p)^{\dagger} - \mathbf{W}_{\downarrow}(p) \mathbf{W}_{\downarrow}(p)^{\dagger} \right) \mathbf{W}_{\uparrow}(p).$$

En appliquant la norme 2, on obtient

$$\|\mathbf{E}(p)\|_2 \leq \text{dist}(\mathbf{W}_{\uparrow}(p), \mathbf{W}_{\downarrow}(p)) \|\mathbf{W}_{\uparrow}(p)\|_2 \quad (\text{A.38})$$

où

$$\text{dist}(\mathbf{W}_{\uparrow}(p), \mathbf{W}_{\downarrow}(p)) \triangleq \left\| \mathbf{W}_{\uparrow}(p) \mathbf{W}_{\uparrow}(p)^{\dagger} - \mathbf{W}_{\downarrow}(p) \mathbf{W}_{\downarrow}(p)^{\dagger} \right\|_2$$

est la distance entre les sous-espaces  $\text{span}(\mathbf{W}_{\uparrow}(p))$  et  $\text{span}(\mathbf{W}_{\downarrow}(p))$ , qui satisfait

$$\text{dist}(\mathbf{W}_{\uparrow}(p), \mathbf{W}_{\downarrow}(p)) \leq 1,$$

comme cela est montré dans [Golub et Van Loan, 1996, pp. 76-77]. Puisque  $\|\mathbf{W}_{\uparrow}(p)\|_2 \leq \|\mathbf{W}(p)\|_2 = 1$ , le résultat se déduit de l'équation (A.38).  $\square$

## Annexe B

# Résultats de la deuxième partie

### Résumé

Ce chapitre expose les démonstrations des principaux résultats énoncés dans la deuxième partie. Ces résultats concernent les variations des valeurs propres de la matrice de corrélation, l'approximation de la méthode des puissances itérées, et la mise à jour des valeurs propres de la matrice spectrale. Un algorithme de poursuite de l'espace signal est également présenté : l'algorithme NIC à fenêtre rectangulaire.

## B.1 Introduction

Dans ce chapitre sont démontrés les principaux résultats de la deuxième partie :

- la proposition sur la moyenne géométrique des valeurs propres de la matrice de corrélation est démontrée dans la section B.2;
- les principaux résultats sur l'approximation de la méthode des puissances itérées sont prouvés dans la section B.3;
- l'algorithme de poursuite de l'espace signal SW-NIC est présenté dans la section B.4;
- enfin, les résultats sur la mise à jour des valeurs propres de la matrice spectrale sont démontrés dans la section B.5.

## B.2 Moyenne géométrique des valeurs propres de $\mathbf{R}_{ss}(t)$

*Démonstration de la proposition VI.2.1.* Il a été démontré dans la section I.4.2.2 (page 18) que

$$\mathbf{R}_{ss}(t) = \mathbf{V}^n \mathbf{P}(t) \mathbf{V}^{nH} \quad (\text{I.13})$$

où

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{l} \mathbf{D}(t) \mathbf{V}^{lT} \mathbf{V}^{l*} \mathbf{D}(t)^H. \quad (\text{I.14})$$

Il est alors facile de vérifier que les valeurs propres non nulles de  $\mathbf{R}_{ss}(t)$  sont égales à celles de la matrice  $\mathbf{P}(t) \mathbf{V}^{nH} \mathbf{V}^n$ . Donc leur produit est égal au déterminant de cette matrice, lui-même égal à

$$\frac{1}{l^r} \det(\mathbf{V}^{lT} \mathbf{V}^{l*}) \det(\mathbf{D}(t)^H \mathbf{D}(t)) \det(\mathbf{V}^{nH} \mathbf{V}^n).$$

Or on vérifie que  $\det(\mathbf{D}(t)^H \mathbf{D}(t)) = \prod_{k=0}^{K-1} |\alpha_{k, M_k-1}|^{2M_k} |z_k|^{2M_k(t-l+1)}$ , d'où le résultat.  $\square$

## B.3 Approximation de la méthode des puissances itérées

Les résultats du chapitre VII dont démontrés ici.

*Démonstration de la proposition VII.4.1.* En substituant l'équation (VI.3) dans l'équation (VII.11) et en multipliant à gauche par  $\mathbf{W}(t-1)^H$ , on obtient

$$\Theta(t) \mathbf{R}(t) = \beta \mathbf{S}(t-1)^H + \underline{\mathbf{y}}(t) \underline{\mathbf{J}} \hat{\underline{\mathbf{y}}}(t)^H. \quad (\text{B.1})$$

Ensuite, on utilise le lemme d'inversion matricielle A.8.1 présenté page 182 pour inverser le membre de droite de cette égalité. L'intérêt de cette approche est que le problème de l'inversion d'une matrice de dimension  $r \times r$  est transformé en l'inversion d'une matrice plus petite, de dimension  $q \times q$  (avec  $q = 1$  ou  $2$ ).

En appliquant le lemme A.8.1 à l'équation (B.1), on montre que la matrice  $\Theta(t) \mathbf{R}(t)$ , de dimension  $r \times r$ , est inversible si et seulement si la matrice  $\beta \underline{\mathbf{J}}^{-1} + \underline{\mathbf{y}}(t)^H \underline{\mathbf{h}}(t)$ , de dimension  $q \times q$ , est inversible (ce qui fournit un moyen rapide de détecter la singularité de  $\mathbf{R}(t)$  ou  $\Theta(t)$ ). Dans le cas d'inversibilité, le lemme A.8.1 conduit à l'équation

$$(\Theta(t) \mathbf{R}(t))^{-1} = \frac{1}{\beta} \mathbf{Z}(t-1)^H (\mathbf{I}_r - \underline{\mathbf{y}}(t) \underline{\mathbf{g}}(t)^H).$$

Finalement, en multipliant le conjugué hermitien de cette dernière équation à gauche par  $\Theta(t)^H$ , et en le multipliant à droite par  $\Theta(t)^{-H}$ , on obtient la récurrence (VII.29).  $\square$

*Démonstration de la proposition VII.4.2.* En substituant l'équation (VI.3) dans l'équation (VII.11) et en multipliant à droite par  $\Theta(t)$ , on montre que  $\mathbf{W}(t)$  satisfait la récurrence

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{S}(t)^H = (\beta\mathbf{W}(t-1)\mathbf{S}(t-1)^H + \underline{\mathbf{x}}(t)\underline{\mathbf{J}}\widehat{\mathbf{y}}(t)^H)\Theta(t).$$

En substituant les équations (B.1) et (VII.32) dans l'équation ci-dessus, on montre que

$$\mathbf{W}(t)\mathbf{S}(t)^H = \mathbf{W}(t-1)\Theta(t)\mathbf{S}(t)^H + \underline{\mathbf{e}}(t)\underline{\mathbf{J}}\widehat{\mathbf{y}}(t)^H\Theta(t). \quad (\text{B.2})$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation (B.1) à gauche par  $\underline{\mathbf{g}}(t)^H$ , et en remplaçant  $\underline{\mathbf{g}}(t)$  par sa définition dans l'équation (VII.30), on obtient

$$\underline{\mathbf{g}}(t)^H\Theta(t)\mathbf{R}(t) = (\beta\underline{\mathbf{J}}^{-1} + \underline{\mathbf{y}}(t)^H\underline{\mathbf{h}}(t))^{-H} \left( (\beta\mathbf{S}(t-1)\underline{\mathbf{h}}(t))^H + (\underline{\mathbf{y}}(t)^H\underline{\mathbf{h}}(t))^H \underline{\mathbf{J}}\widehat{\mathbf{y}}(t)^H \right). \quad (\text{B.3})$$

Alors les équations (VII.27) et (VII.25) montrent que

$$(\beta\mathbf{S}(t-1)\underline{\mathbf{h}}(t))^H = \beta\widehat{\mathbf{y}}(t)^H = \beta\underline{\mathbf{J}}^{-1}\underline{\mathbf{J}}\widehat{\mathbf{y}}(t)^H. \quad (\text{B.4})$$

En substituant l'équation (B.4) dans l'équation (B.3), on obtient

$$\underline{\mathbf{g}}(t)^H\Theta(t)\mathbf{R}(t) = \underline{\mathbf{J}}\widehat{\mathbf{y}}(t)^H. \quad (\text{B.5})$$

Finalement, en substituant l'équation (B.5) dans l'équation (B.2) et en multipliant à droite par  $\mathbf{S}(t)^{-H} = \mathbf{Z}(t)^H$ , on obtient l'équation (VII.31).  $\square$

## B.4 Algorithme SW-NIC

Dans la table B.1 est présentée une version à fenêtre rectangulaire de l'algorithme NIC, originellement conçu pour une fenêtre exponentielle dans [Miao et Hua, 1998]. Cet algorithme est illustré dans la section VII.8, page 101.

## B.5 Mise à jour des pôles

Les résultats de la section IX.3.2 (page 125) sont démontrés ici.

### B.5.1 Modification de la structure propre par ajout d'une matrice de rang un

*Démonstration de la proposition IX.3.1.* La contraposée de la première assertion est une conséquence immédiate des équations (IX.14) et (IX.15). De plus, si  $z$  n'est pas valeur propre de  $\Phi(t-1)$ , alors  $z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1)$  est inversible. Alors l'équation (IX.16) est obtenue en multipliant l'équation (IX.14) à gauche par  $(z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1}$ , et l'équation (IX.17) est obtenue en multipliant l'équation (IX.15) à gauche par  $(z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1*}$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition IX.3.2.* En multipliant l'équation (IX.14) à gauche par  $\mathbf{e}_k^H$ , on obtient

$$(\mathbf{e}_k^H\tilde{\mathbf{a}}(t))\left(\tilde{\mathbf{b}}(t)^H\tilde{\mathbf{g}}\right) = 0.$$

Donc l'une au moins des deux conditions suivantes est vérifiée :

TAB. B.1 – Algorithme NIC à fenêtre rectangulaire

| <b>Initialisation :</b>   |  |
|---|--|
| $\widetilde{\mathbf{W}}(0) = \mathbf{W}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} \end{bmatrix}$   | $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{I}_r, \mathbf{X}(0) = \mathbf{0}_{n \times l}, \mathbf{Y}(0) = \mathbf{0}_{r \times l}$ |
| A chaque instant faire  |  |
| Vecteur d'entrée : $\mathbf{x}(t)$  |  |
| $\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t-l) &   & \mathbf{X}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t-1) &   & \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}$   | <b>Coût</b>  |
| $\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}(t-1)^H \mathbf{x}(t)$   | $nr$   |
| $\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t-l) &   & \mathbf{Y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(t-1) &   & \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}$   |  |
| $\underline{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) &   & \mathbf{x}(t-l) \end{bmatrix}$   |  |
| $\underline{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) &   & \mathbf{y}(t-l) \end{bmatrix}$   |  |
| $\underline{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{Z}(t-1) \underline{\mathbf{y}}(t)$   | $2r^2$   |
| $\underline{\mathbf{g}}(t) = \underline{\mathbf{h}}(t) \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \underline{\mathbf{y}}(t)^H \underline{\mathbf{h}}(t) \right)^{-1}$ | $8r$   |
| $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Z}(t-1) - \underline{\mathbf{h}}(t) \underline{\mathbf{g}}(t)^H$   | $2r^2$   |
| $\underline{\mathbf{e}}(t) = \underline{\mathbf{x}}(t) - \widetilde{\mathbf{W}}(t-1) \underline{\mathbf{y}}(t)$   | $2nr$  |
| $\widetilde{\mathbf{W}}(t) = \widetilde{\mathbf{W}}(t-1) + \underline{\mathbf{e}}(t) \underline{\mathbf{g}}(t)^H$   | $2nr$  |
| $\mathbf{W}(t) = (1 - \eta) * \mathbf{W}(t-1) + \eta * \widetilde{\mathbf{W}}(t)$   | $nr$   |

- $\mathbf{e}_k^H \widetilde{\mathbf{a}}(t) = \widetilde{a}_k(t) = 0$ . Alors en multipliant l'équation (IX.12) à gauche par  $\mathbf{e}_k^H$ , on obtient  $\mathbf{e}_k^H \widetilde{\Phi}(t) = \mathbf{e}_k^H \mathbf{J}(t-1) = z_k(t-1) \mathbf{e}_k^H$ . Donc  $\mathbf{e}_k$  est un vecteur propre à gauche de  $\widetilde{\Phi}(t)$ , et  $\widetilde{\mathbf{g}}' \in \text{span}(\mathbf{e}_k)$ . Notons que l'équation (IX.14) contraint les coefficients de  $\widetilde{\mathbf{g}}$  d'ordre différent de  $k$ , de sorte que  $\widetilde{\mathbf{g}}$  s'exprime sous la forme (IX.19), où  $\rho_1 \triangleq \widetilde{\mathbf{b}}(t)^H \widetilde{\mathbf{g}}$ . En injectant l'équation (IX.19) dans cette dernière équation, on montre en particulier que  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont contraints par la relation (IX.20).
- $\widetilde{\mathbf{b}}(t)^H \widetilde{\mathbf{g}} = 0$ . Alors l'équation (IX.15) montre que  $\mathbf{J}(t-1) \widetilde{\mathbf{g}} = z \widetilde{\mathbf{g}}$ . Comme les valeurs propres de  $\mathbf{J}(t-1)$  sont distinctes et associées aux vecteurs de la base canonique, on en déduit que  $\widetilde{\mathbf{g}} \in \text{span}(\mathbf{e}_k)$ . Donc l'égalité  $\widetilde{\mathbf{b}}(t)^H \widetilde{\mathbf{g}} = 0$  implique  $\mathbf{e}_k^H \widetilde{\mathbf{b}}(t) = \widetilde{b}_k(t) = 0$ . Notons que l'équation (IX.15) contraint les coefficients de  $\widetilde{\mathbf{g}}'$  d'ordre différent de  $k$ , de sorte que  $\widetilde{\mathbf{g}}'$  s'exprime sous la forme (IX.22), où  $\rho_1 \triangleq \widetilde{\mathbf{a}}(t)^H \widetilde{\mathbf{g}}'$ . En injectant l'équation (IX.22) dans cette dernière équation, on montre en particulier que  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont contraints par la relation (IX.23).

□

*Démonstration de la proposition IX.3.3.* Si  $z_k(t-1)$  est valeur propre de  $\Phi(t)$ , la proposition IX.3.2 montre que le produit  $\widetilde{b}_k(t)^* \widetilde{a}_k(t)$  est nul. Réciproquement, si le produit  $\widetilde{b}_k(t)^* \widetilde{a}_k(t)$  est nul, alors soit  $\widetilde{b}_k(t) = 0$ , auquel cas l'équation (IX.12) montre que  $\mathbf{e}_k$  est vecteur propre à droite de  $\widetilde{\Phi}(t)$  associé à la valeur propre  $z_k(t-1)$ , soit  $\widetilde{a}_k(t) = 0$ , auquel cas l'équation (IX.12) montre que  $\mathbf{e}_k$  est vecteur propre à gauche de  $\widetilde{\Phi}(t)$  associé à la valeur propre  $z_k(t-1)$ . Ainsi, la première assertion est démontrée. Maintenant, soit  $z$  une valeur propre de  $\Phi(t)$  qui n'est pas valeur propre de  $\Phi(t-1)$ . En multipliant l'équation (IX.14) à gauche par  $\widetilde{\mathbf{b}}(t)^H (z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1}$ , on obtient  $\widetilde{\mathbf{b}}(t)^H \widetilde{\mathbf{g}} = \left( \widetilde{\mathbf{b}}(t)^H (z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1} \widetilde{\mathbf{a}}(t) \right) \left( \widetilde{\mathbf{b}}(t)^H \widetilde{\mathbf{g}} \right)$ . Or la proposition IX.3.1 montre que  $\widetilde{\mathbf{b}}(t)^H \widetilde{\mathbf{g}} \neq 0$ . On en déduit que

$$1 - \widetilde{\mathbf{b}}(t)^H (z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1} \widetilde{\mathbf{a}}(t) = 0$$

Finalement, cette dernière équation se réécrit sous la forme (IX.24). Réciproquement, en multipliant l'équation (IX.24) par le produit

$$\prod_{k'=0}^{r-1} (z - z_{k'}(t-1)), \text{ on obtient}$$

$$\tilde{b}_{k'}(t)^* \tilde{a}_{k'}(t) \neq 0$$

$$\left( \prod_{k'=0}^{r-1} (z - z_{k'}(t-1)) \right)_{\tilde{b}_{k'}(t)^* \tilde{a}_{k'}(t) \neq 0} - \sum_{k=0}^{r-1} \left( \tilde{b}_k(t)^* \tilde{a}_k(t) \right)_{\tilde{b}_k(t)^* \tilde{a}_k(t) \neq 0} \left( \prod_{k'=0}^{r-1} (z - z_{k'}(t-1)) \right)_{\substack{\tilde{b}_{k'}(t)^* \tilde{a}_{k'}(t) \neq 0 \\ k' \neq k}} = 0$$

Il s'agit d'un polynôme en  $z$  dont le degré est égal au nombre d'indices  $k' \in \{0 \dots r-1\}$  tels que  $\tilde{b}_{k'}(t)^* \tilde{a}_{k'}(t) \neq 0$ , dont on sait déjà que toute valeur propre de  $\Phi(t)$  non valeur propre de  $\Phi(t-1)$  est racine. Donc ce polynôme ne possède pas d'autre racine. Puisque l'on sait par ailleurs que le produit

$$\prod_{k'=0}^{r-1} (z - z_{k'}(t-1)) \text{ ne s'annule pas sur l'ensemble de ces racines, on en déduit que l'ensemble}$$

$$\tilde{b}_{k'}(t)^* \tilde{a}_{k'}(t) \neq 0$$

des solutions de l'équation (IX.24) est égal à l'ensemble des valeurs propres de  $\Phi(t)$  non valeurs propres de  $\Phi(t-1)$ .  $\square$

### B.5.2 Modification de la structure propre par ajout d'une matrice de rang faible

*Démonstration de la proposition IX.3.4.* Si  $z$  n'est pas valeur propre de  $\Phi(t-1)$ , alors  $z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1)$  est inversible. Alors l'équation (IX.30) est obtenue en multipliant l'équation (IX.27) à gauche par  $(z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1}$ , et en posant

$$\underline{v} \triangleq \underline{\tilde{b}}(t)^H \tilde{\mathbf{g}} \tag{B.6}$$

Ensuite, en substituant l'équation (IX.30) dans l'équation (B.6), on obtient l'équation (IX.32). Comme  $\tilde{\mathbf{g}}$  est non nul,  $\underline{v}$  est nécessairement non nul ; on en déduit donc que la matrice

$$\underline{I} - \underline{\tilde{b}}(t)^H (z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1} \underline{\tilde{a}}(t)$$

est singulière, ce dont l'équation (IX.29) est une conséquence immédiate. De la même façon, l'équation (IX.31) est obtenue en multipliant l'équation (IX.28) à gauche par  $(z\mathbf{I}_r - \mathbf{J}(t-1))^{-1*}$ , et en posant

$$\underline{v}' \triangleq \underline{\tilde{a}}(t)^H \tilde{\mathbf{g}}' \tag{B.7}$$

Ensuite, en substituant l'équation (IX.31) dans l'équation (B.7), on obtient l'équation (IX.33).  $\square$





## Annexe C

# Articles

Dans cette annexe sont reproduits trois articles, dont le contenu n'a pas été développé dans le corps de ce document afin d'éviter de le surcharger :

- [Badeau et al., 2002] R. Badeau, R. Boyer, et B. David. EDS parametric modeling and tracking of audio signals. Dans *Proc. of Int. Conf. on Digital Audio Effects DAFX-02*, pages 139–144, Hamburg, septembre 2002.
- [David et al., 2003] B. David, G. Richard, et R. Badeau. An EDS modeling tool for tracking and modifying musical signals. Dans *Proc. of SMAC 03*, volume 2, pages 715–718, Stockholm, Sweden, août 2003.
- [Badeau et al., 2004b] R. Badeau, G. Richard, et B. David. Sliding window adaptive SVD algorithms. *IEEE Trans. Signal Processing*, 52(1) :1–10, janvier 2004.



## EDS PARAMETRIC MODELING AND TRACKING OF AUDIO SIGNALS

Roland Badeau, Rémy Boyer and Bertrand David

ENST, Département de Traitement du Signal et des Images  
46, rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13 France  
roland.badeau, remy.boyer, bertrand.david@enst.fr

### ABSTRACT

Despite the success of parametric modeling in various fields of digital signal processing, the Fourier analysis remains a prominent tool for many audio applications. This paper aims at demonstrating the usefulness of the Exponentially Damped Sinusoidal (EDS) model both for analysis/synthesis and tracking purposes.

### 1. INTRODUCTION

The advantages of this model are on the one hand to overcome the Fourier resolution limit related to windowing and on the other hand to enhance the classical sinusoidal model used in speech and audio coding. The main drawbacks of the EDS-based methods consist in the complexity of the algorithms and in the assumption of non time-varying parameters. In this paper, applications of some recent enhancements of the algorithms to audio signal processing are presented, in order to both reduce the complexity and track the parameter variations with time.

**Modeling context.** Recently, many efforts have been made to achieve a powerful representation of an audio signal as speech or music, for a compression purpose [1, 2]. More specifically, in parametric audio coding, it is worthwhile to have compact (sparse) representations of the signal: the model order  $M$  (*i.e.* the number of elementary components) must be far less than  $N$ , the length of the analysis window in samples. One way to obtain a more compact representation is to increase the parameter  $N$  and keep unchanged the model order. Unfortunately, for large  $N$ , the audio signal can no longer be considered as a quasi-stationary signal. In this case, the basic sinusoidal model [3], which tends to represent the audio signal as a sum of constant-amplitude components, becomes ineffective. Consequently, the EDS model was introduced in the audio modeling context [4, 5]. In this work, we compare the sinusoidal and EDS models with the same total number of model parameters. Note that keeping a satisfactory algorithmic complexity implies setting a maximal bound to the parameter  $N$ .

**Tracking context.** The EDS model relies on the assumption of non varying signal parameters within the observation window. A more realistic modeling of musical signals should include slow variations of the parameters. Tracking these time variations would have interesting applications, such as:

- evaluating the degree of stationarity of the audio signal,
- detecting model breaks, which characterize transient sounds,
- developing more realistic synthesis techniques.

A reference method in frequency tracking is the Sintrack algorithm introduced by P. Duvaut [6]. This method relies on a fast linear prediction technique, which makes it useful for real-time estimation and tracking of damped sinusoids in noise. However, its lack

of robustness results in repeated re-initializations which increase the computational cost.

Concurrently, subspace-based high resolution methods, despite their higher computational complexity, prove to be much more reliable than linear prediction. Therefore, adaptive subspace estimation may offer interesting outlooks for frequency tracking.

**Contents.** This paper is organized as follows.

Section 2 introduces the EDS model and presents subspace-based high resolution methods for the estimation and tracking of the model parameters. Some synthesis techniques are proposed both in a static and an adaptive context, with an application to pitch modification.

Section 3 shows the application of these methods to coding, tracking and re-synthesis of audio signals.

Finally, section 4 summarizes the main conclusions of this paper.

### 2. THEORETICAL BACKGROUND

The EDS model defines the discrete signal as

$$x(t) = \sum_{m=1}^M a_m \exp(d_m t) \cos(2\pi f_m t + \phi_m), \quad t \in \{0, \dots, N-1\} \quad (1)$$

where  $x(t)$  is the discrete signal observed in the window  $t \in \{0, \dots, N-1\}$ ,  $M$  is the order of the model,  $a_m \in \mathbb{R}_+$  are the amplitudes,  $d_m$  are the real valued damping factors,  $f_m \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  are the frequencies and  $\phi_m \in [-\pi, \pi[$  denote initial phases. Equation (1) can equivalently be rewritten with the complex amplitudes  $\alpha_m = \frac{1}{2} a_m \exp(i\phi_m)$  and the complex poles  $z_m = \exp(d_m + i2\pi f_m)$  as in equation (2):

$$x(t) = \sum_{m=1}^M (\alpha_m z_m^t + \alpha_m^* z_m^{*t}). \quad (2)$$

In section 2.1, EDS-based analysis/synthesis methods are presented in a block processing context (with constant model parameters). In section 2.2, it will be shown how these methods can be adapted to track slow variations of these parameters.

#### 2.1. Block signal processing

The estimation of the model parameters is achieved in two steps: first the frequencies and damping factors are computed using a high resolution (HR) method, from which the amplitudes and initial phases are deduced by minimizing a least squares (LS) criterion. The estimated parameters are then used to re-synthesize the signal.

Table 1: Orthogonal iteration EVD algorithm

---

Initialization:  $U^S = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2M} \\ \mathbf{0}_{(L-2M) \times 2M} \end{bmatrix}$   
 For  $n = 1, 2, \dots$  until convergence iterate:

---


$$\begin{cases} \mathbf{A}(n) = \mathbf{H} \mathbf{U}^S(n-1) & \text{fast matrix product} \\ \mathbf{A}(n) = \mathbf{U}^S(n) \mathbf{R}(n) & \text{skinny QR factorization} \end{cases}$$


---

### 2.1.1. Subspace-based signal analysis

Define the  $L \times L$  real Hankel data matrix  $\mathbf{H}$  (with  $N = 2L - 1$ ) as

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \dots & x(L-1) \\ x(1) & x(2) & \dots & x(L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(L-1) & x(L) & \dots & x(N-1) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Suppose that  $2M \leq L$ . Then this matrix can be decomposed as  $\mathbf{H} = \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{E}^T$ , where

$$\mathbf{A} = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_M, \alpha_1^*, \dots, \alpha_M^*)$$

and  $\mathbf{E}$  is the  $L \times 2M$  Vandermonde matrix

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & \dots & z_M & z_1^* & \dots & z_M^* \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{L-1} & \dots & z_M^{L-1} & z_1^{*L-1} & \dots & z_M^{*L-1} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

$\mathbf{H}$  has a  $2M$ -dimensional range space, spanned by the full-rank matrix  $\mathbf{E}$ . This range space fully characterizes the signal poles, even in presence of an additive white noise [7], and thus is referred to as the *signal subspace*. An orthonormal basis  $\mathbf{U}^S$  of this space can be obtained from the eigenvalue decomposition (EVD) of  $\mathbf{H}$ . Indeed, since  $\mathbf{H}$  is a rank-deficient symmetric real matrix, there exist a  $L \times 2M$  orthonormal real matrix  $\mathbf{U}^S$  and a  $2M \times 2M$  diagonal real matrix  $\mathbf{\Lambda}$  such that  $\mathbf{H} = \mathbf{U}^S \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^{S^T}$ . The columns of  $\mathbf{U}^S$  thus span the signal subspace. In the presence of an additive white noise, the columns of  $\mathbf{U}^S$  are defined as the  $2M$ -dominant eigenvectors of  $\mathbf{H}$  (i.e. the eigenvectors associated to the  $2M$  eigenvalues which have the highest magnitudes).

These dominant eigenvectors can be computed using the classical EVD algorithm called *orthogonal iteration* [8]<sup>1</sup> (cf. table 1), which involves an auxiliary matrix  $\mathbf{A}$ . The Hankel structure of the matrix  $\mathbf{H}$  can be taken into account to make the algorithm faster by computing the first-step matrix product using Fast Fourier Transforms, which requires only  $O(LM \log(L))$  operations [8]<sup>2</sup>. Then the second step can be achieved in  $O(LM^2)$  operations [8]<sup>3</sup>. Since in practice this algorithm converges in a few iterations, the overall process requires  $O(LM(M + \log(L)))$  operations.

<sup>1</sup>Chapter 8, section 2.4.

<sup>2</sup>Chapter 4, section 7.7.

<sup>3</sup>Chapter 5, section 2.

### 2.1.2. Estimation of the frequencies and damping factors

The poles  $\{z_m, z_m^*\}_{1 \leq m \leq M}$  can be calculated by exploiting the rotational invariance property of the signal subspace. More precisely, define  $\mathbf{E}_\downarrow$  (respectively  $\mathbf{E}_\uparrow$ ) the matrix extracted from  $\mathbf{E}$  by deleting the last (respectively the first) row. These matrices satisfy the equation

$$\mathbf{E}_\uparrow = \mathbf{E}_\downarrow \mathbf{D} \quad (5)$$

where

$$\mathbf{D} = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_M, z_1^*, z_2^*, \dots, z_M^*).$$

Since the matrices  $\mathbf{U}^S$  and  $\mathbf{E}$  span the same subspace, there exist an invertible matrix  $\mathbf{C}$  such that

$$\mathbf{U}^S = \mathbf{E} \mathbf{C}^{-1}. \quad (6)$$

As for  $\mathbf{E}$ , let  $\mathbf{U}_\downarrow^S$  (respectively  $\mathbf{U}_\uparrow^S$ ) be the matrix extracted from  $\mathbf{U}^S$  by deleting the last (respectively the first) row. Then equations (5) and (6) yield

$$\mathbf{U}_\uparrow^S = \mathbf{U}_\downarrow^S \mathbf{\Phi} \quad (7)$$

where  $\mathbf{\Phi} = \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{C}^{-1}$ . The Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques (ESPRIT) method [9] consists in:

- computing the matrix  $\mathbf{\Phi} = (\mathbf{U}_\downarrow^S)^\dagger \mathbf{U}_\uparrow^S$  (where the symbol  $\dagger$  denotes the Moore-Penrose pseudo-inverse; this computation requires  $O(LM^2)$  operations),
- extracting the estimated poles  $\hat{z}_m$  as the eigenvalues of  $\mathbf{\Phi}$  (which can be achieved in  $O(M^3)$  operations).

Finally, for  $m = 1, \dots, M$ , the  $m^{\text{th}}$  estimated frequency and damping factor can be deduced using  $\hat{f}_m = \frac{\text{angle}(\hat{z}_m)}{2\pi}$  and  $\hat{d}_m = \ln |\hat{z}_m|$ .

### 2.1.3. Estimation of the amplitudes and initial phases

The complex amplitudes  $\{\alpha_m\}_{1 \leq m \leq M}$  can be determined by minimizing the LS criterion  $\min_{\alpha} \|\mathbf{x} - \mathbf{E} \alpha\|_2^2$ , where

- $\mathbf{x} = [x(0), \dots, x(L-1)]^T$  are the signal samples,
- $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_M, \alpha_1^*, \dots, \alpha_M^*]^T$  are complex amplitudes.

The solution to this criterion is

$$\hat{\alpha} = \mathbf{E}^\dagger \mathbf{x}. \quad (8)$$

Hence, for  $m = 1, \dots, M$ , the  $m^{\text{th}}$  estimated real amplitude and initial phase are  $\hat{a}_m = 2|\hat{\alpha}_m|$  and  $\hat{\phi}_m = \text{angle}(\hat{\alpha}_m)$ .

Note that the full computation of  $\mathbf{E}^\dagger$  can be avoided since equation (6) shows that  $\mathbf{E}^\dagger = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U}^{S^T}$  where  $\mathbf{C} = \mathbf{U}^{S^T} \mathbf{E}$ . Thus,  $\hat{\alpha} = \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{U}^{S^T} \mathbf{x})$  can be computed in  $O(LM^2)$  operations.

### 2.1.4. Re-synthesis

Once the model parameters have been estimated, the signal can be reconstructed using equation (2). Thus, the estimated signal sample at time  $t$  is

$$\hat{x}(t) = \sum_{m=1}^M (\hat{x}_m(t) + \hat{x}_m^*(t)) \quad (9)$$

where  $\hat{x}_m(t) = \hat{\alpha}_m \hat{z}_m^t$  is the  $m^{\text{th}}$  complex damped sinusoid.

Note that equation (9) can be implemented in  $O(LM)$  operations.

In a block processing context, some interpolation techniques are required in order to force the continuity of the parameters between consecutive blocks [10].

### 2.1.5. Pitch-scale modification

An immediate application of the EDS model is a frequency-scale modification of the signal, which just consists in multiplying the estimated frequencies  $\hat{f}_m$  by a same factor  $\beta$ . Thus, the frequency of the  $m^{\text{th}}$  complex damped sinusoid in the modified signal is

$$\hat{f}_m^s = \beta \hat{f}_m$$

so that the corresponding pole is

$$\begin{aligned} \hat{z}_m^s &= \exp(\hat{d}_m + i 2\pi \hat{f}_m^s) \\ &= \hat{z}_m \exp(i 2\pi (\beta - 1) \hat{f}_m) \end{aligned} \quad (10)$$

Therefore, equation (9) becomes

$$\hat{x}^s(t) = \sum_{m=1}^M (\hat{x}_m^s(t) + \hat{x}_m^{s*}(t)) \quad (11)$$

where  $\hat{x}_m^s(t) = \hat{\alpha}_m (\hat{z}_m^s)^t$ .

Note that this pitch modification method is no more computationally demanding than the exact re-synthesis.

## 2.2. Adaptive signal processing

The section transposes the HR methods presented above in an adaptive context. It will be shown that tracking the slow variations of the model parameters leads to a very simple re-synthesis method.

### 2.2.1. Model parameters tracking

The Sintrack method for frequency estimation and tracking [6] consists in a two-steps estimation: the Matrix Pencil HR method [7] is first applied to obtain the initial parameters, and the tracking is then achieved using an adaptive Least Mean Square (LMS) algorithm, the frequencies and damping factors being extracted from the roots of a backward prediction polynomial [11]. When the prediction error exceeds a certain threshold, the algorithm switches back to the initialization step.

Although this method has proved to be successful on musical signals [12], the lack of robustness of the LMS algorithm results in an intensive use of the Matrix Pencil method, which is very time-consuming.

To avoid this increase of complexity, the prediction polynomial tracking can be replaced by a signal subspace tracking, since subspace-based HR methods are known to give more reliable estimates of the signal poles than linear prediction. Subspace tracking has been intensively studied in the fields of adaptive filtering, source localization or parameter estimation. A first class of tracking algorithms is based on the projection approximation hypothesis [13]; an other one relies on EVD or SVD tracking techniques, derived from classical EVD or SVD algorithms.

Table 2: Sequential iteration EVD algorithm

|  |                         |
|--|-------------------------|
| Initialization: $U^S = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2M} \\ \mathbf{0}_{(L-2M) \times 2M} \end{bmatrix}$ |                         |
| For each time step $t$ iterate:  |                         |
| $\mathbf{A}(t) = \mathbf{H}(t)U^S(t-1)$  | fast matrix product     |
| $\mathbf{A}(t) = U^S(t)\mathbf{R}(t)$  | skinny QR factorization |

For example, the *orthogonal iteration* algorithm of Table 1 can be adapted to track the dominant eigenvectors of a sliding-window matrix

$$\mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} x(t-(L-1)) & \dots & x(t) \\ x(t-(L-2)) & \dots & x(t+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x(t) & \dots & x(t+L-1) \end{bmatrix} \quad (12)$$

just by replacing the iteration index  $n$  in table 1 by the discrete time index  $t$  [14] (cf. table 2).

Thus, only one iteration is completed at each time step. Once the signal subspace basis  $U^S$  is computed, the standard ESPRIT method can be applied. However, for the sake of computational efficiency, adaptive implementations of ESPRIT have been developed [15], which require  $O(LM^2)$  or  $O(LM)$  operations at each time step.

Finally, the estimation of the amplitudes and initial phases can be achieved as in section 2.1.3. Equation (8) now becomes

$$\hat{\alpha}(t) = \mathbf{E}(t)^\dagger \mathbf{x}(t) \quad (13)$$

where  $\mathbf{E}(t)$  is the Vandermonde matrix of the estimated poles at time  $t$ ,  $\hat{\alpha}_m(t)$  and  $\hat{z}_m(t)$  denote the estimated  $m^{\text{th}}$  complex amplitude and pole at time  $t$ , and  $\mathbf{x}(t) = [x(t), \dots, x(t+L-1)]^T$ .

Since this estimation involves the matrix  $\mathbf{E}$  defined in equation (4) for a time window  $[0 \dots L-1]$ , it must be noted that  $\hat{\alpha}_m(t)$  now is the complex amplitude of the  $m^{\text{th}}$  damped sinusoid at time  $t$ .

### 2.2.2. Re-synthesis

In an adaptive context, since the complex amplitudes of the damped sinusoids are estimated at each time step, equation (9) stands with  $\hat{x}_m(t) = \hat{\alpha}_m(t)$ . Therefore, the re-synthesis of the signal at each time step just consists in summing the complex amplitudes, which only requires  $O(M)$  operations.

### 2.2.3. Pitch scale modification

Let  $\varphi_m(t)$  be the phase shift between the  $m^{\text{th}}$  estimated damped sinusoid and the  $m^{\text{th}}$  synthesized damped sinusoid at time  $t$ , so that equation (11) stands with

$$\hat{x}_m^s(t) = \hat{x}_m(t) \exp(i \varphi_m(t)) = \hat{\alpha}_m(t) \exp(i \varphi_m(t)). \quad (14)$$

Since these sinusoids satisfy the following recurrences

- $\hat{x}_m(t) = \hat{x}_m(t-1) \hat{z}_m(t)$ ,

- $\hat{x}_m^s(t) = \hat{x}_m^s(t-1) \hat{z}_m^s(t)$ ,

equations (10) and (14) show that  $\varphi_m(t)$  can be recursively updated using the following scheme:

$$\varphi_m(t) = \varphi_m(t-1) + 2\pi(\beta-1)\hat{f}_m(t). \quad (15)$$

Then,  $\hat{x}_m^s(t)$  can be computed using equation (14), from which the synthesized sample  $\hat{x}^s(t)$  can be deduced using equation (11). Note that this pitch modification method has the same complexity as the exact re-synthesis.

### 3. EXPERIMENTAL RESULTS

This section illustrates first the enhancement of the coding quality using the EDS rather than a simple sinusoidal model, then the tracking and re-synthesis of musical signals. The study deals with two piano tones, C5 and G5, sampled at 11025 Hz.

It is to be noticed that in real audio signal applications, the data matrix  $\mathbf{H}$  is never rank-deficient, because of the presence of noise. Moreover, the rank-truncation order  $2M$  is unknown, and must be chosen carefully. Indeed, over-estimating  $M$  is harmless, but under-estimating  $M$  often generates biases in the estimates of the frequencies and damping factors. Then,  $L$  must be chosen much greater than  $M$ , in order to enforce the robustness of the HR method. On the other hand, the higher  $L$  is, the more this method is computationally demanding. Therefore, audio signals with a high number of sinusoids (typically low-pitched sounds) may first be decomposed into several sub-band signals (via filtering/decimating, as proposed in [16]), before applying the HR method. In the examples proposed below, this pre-processing is useless, since the chosen piano tones have few sinusoidal components.

#### 3.1. EDS vs sinusoids

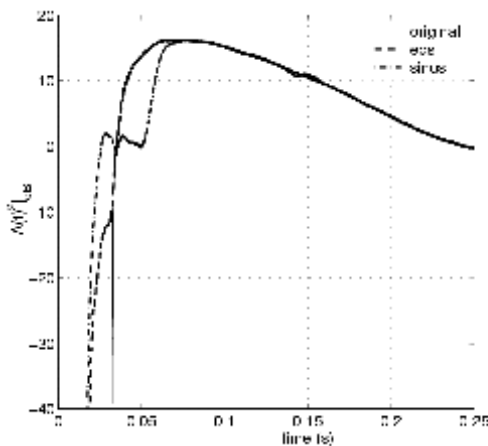


Figure 1: Time-shape waveforms : original signal, sinusoidal modeling with  $M_{SIN} = 16$  and EDS modeling with  $M_{EDS} = 12$ .

This section shows the efficiency of the EDS model in comparison with the classical sinusoidal model with an identical total number of model parameters, i.e.  $M_{EDS} = 3/4 M_{SIN}$ . The test signal is the C5 piano tone. Figures 1 and 2-a,b,c show the time-shape waveforms and the Fourier spectra of the original and

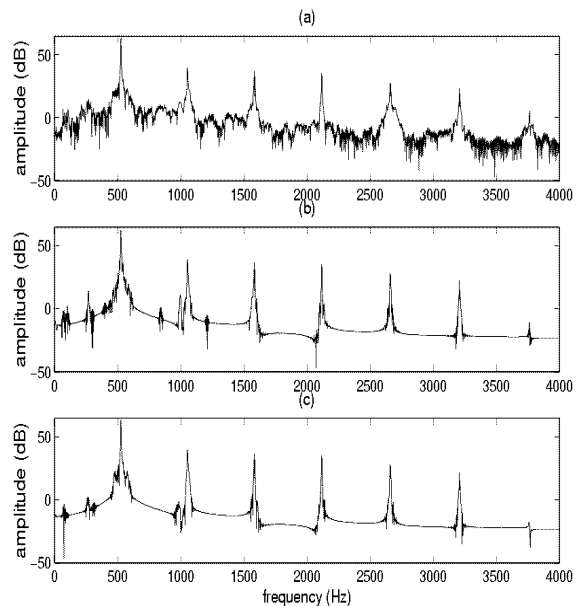


Figure 2: Fourier spectra : (a) original signal, (b) sinusoidal modeling with  $M_{SIN} = 16$ , (c) EDS modeling with  $M_{EDS} = 12$ .

modeled signals. Figure 1 shows a strong pre-echo (energy before the onset) with the sinusoidal model. Moreover, the global variation of the attack is wrongly estimated.

Thanks to the exponentially time-varying amplitudes, the EDS model provides a better modeling since it creates a short pre-echo and offers a good reproduction of the attack.

After several structural considerations, a frequency aspect is introduced in the analysis by using the polyphase 32-bands pseudo-QMF filter-bank of MPEG1-audio [17], which provides a uniform partition of the frequency axis. After that, a power and a SNR measure are computed in each sub-band, noted  $SNR_{TF}$ .

Figure 3 shows the better  $SNR_{TF}$  values of the EDS model. Note that several sub-bands are not reliable due to their weak power (see figure 4).

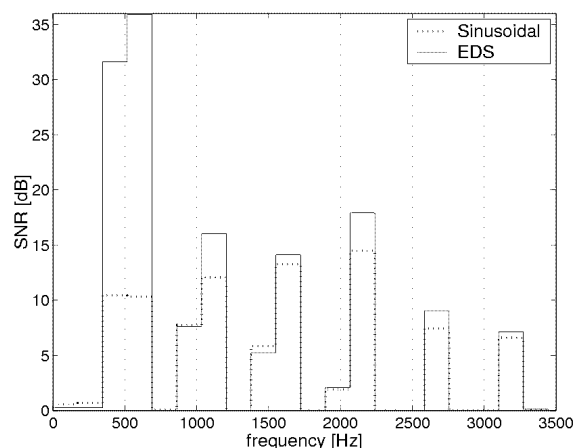


Figure 3:  $SNR_{TF}$  in dB.

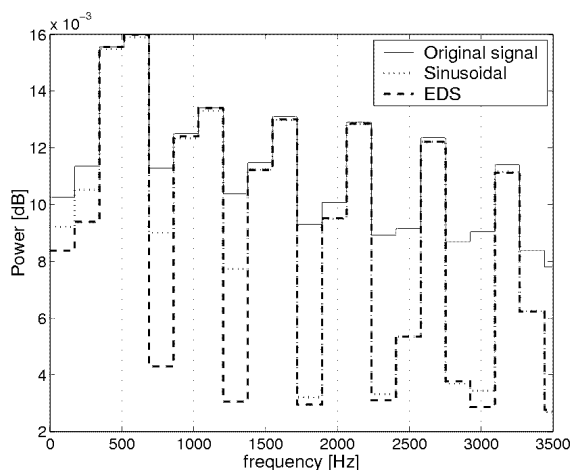


Figure 4: Power in sub-bands in dB.

### 3.2. Adaptive signal processing

This section illustrates first the frequency tracking of a musical signal composed of two piano tones, then the synthesis method of section 2.1.4.

#### 3.2.1. Frequency tracking

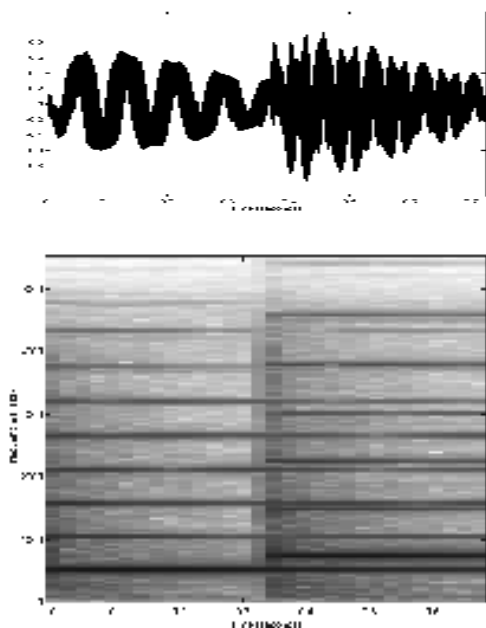


Figure 5: Time waveform and spectrogram of the piano signal for the frequency tracking test.

The parameters tracking method presented in section 2.2.1 has been tested on a piano signal: the C5 tone of figure 1-a is played at time  $t = 0s$ , then the G5 is played at time  $t = 0.36s$ , while the C5 is maintained (the time waveform and the spectrogram of

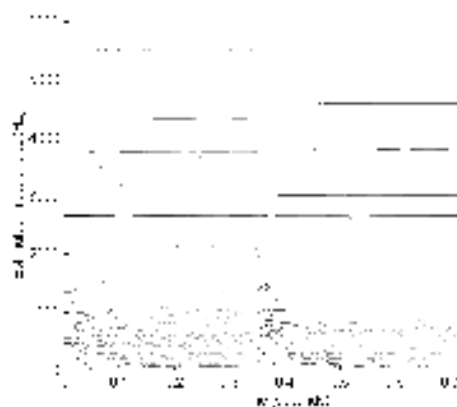


Figure 6: Frequency tracking of the piano signal.

this signal are plotted in figure 5). Figure 6 shows the result of the tracking. The model order and the window length where  $M = 16$  and  $L = 160$ , and the sinusoids energies ( $\mathcal{E}_m = \alpha_m^2 \frac{1-|z_m|^{2L}}{1-|z_m|^2}$ ) are represented on a logarithmic scale using gray levels for the plot. Since the number of sinusoids is over-estimated, it can be seen that spurious poles are detected in the low frequency band (below 1000Hz), which actually corresponds to the highest level of noise in the original signal.

#### 3.2.2. Re-synthesis and pitch scale modification

The synthesis method proposed in section 2.1.4 gave excellent results on the piano tones: the synthesized sounds were perceptually very similar to the original ones.

The hearing sensation is particularly well reproduced at the attack of both sounds. This may be related to the spurious poles detection mentioned above. Their number and energy are greater at the attack, which allows a good representation of the mechanical noise. It is well known that this impact noise occurring during the action of the hammer on the strings is of great importance for the naturalness of the sound.

This method could be directly implemented without any further modification. On the opposite, the pitch-scale modification requires additional work. Indeed, the recursion on the phase shift between the estimated and the pitch-shifted signal in equation (15) relies on several implicit assumptions, such as:

- the number of frequencies is constant through time,
- each pole characterizes one single time-varying frequency, which is present in the whole signal,
- $\hat{z}_m(t)$  matches  $\hat{z}_m(t-1)$  (ie. the  $m^{\text{th}}$  frequency trajectory is known).

In real audio signals, however, the frequencies may appear or disappear, so that their number changes through time. Moreover, spurious frequencies are sometimes detected, and should be eliminated. Consequently, tracking the poles trajectories is a difficult problem.

In the literature, several strategies were proposed to track sinusoids in the presence of noise in a block processing context [3, 10, 18]. These methods were designed in association with frequency estimators based on the Short Time Fourier Transform



(STFT), but they can easily be adapted to the EDS model and the HR methods.

Finally, the pitch-scale modification technique proposed in section 2.2.3 in combination with these classical frequency matching strategies proved to be successful on the piano tones.

Note that once the poles trajectories are estimated, the discrimination should be made between

- the harmonics (related to the pitch of the sound),
- the remaining poles, which model the signal noise.

A realistic pitch scale modification should change the frequencies of the first class and leave the second class unchanged. Of course, the classification of the poles would require additional work.

#### 4. CONCLUSIONS

The EDS model is a useful tool for audio signals modeling. It leads to a better representation of signal frames than the undamped sinusoidal model for a coding purpose. The use of a HR algorithm achieves an accurate estimation which can be efficiently updated by tracking the signal subspace through time. Moreover, tracking the model parameters offers very interesting outlooks for signal re-synthesis and modification.

#### 5. REFERENCES

- [1] ISO-MPEG, "Call for proposals for new tools for audio coding," *ISO/IEC JTC1/SC29/WG11 MPEG2001/N3793*, 2001.
- [2] H. Purnhagen and N. Meine, "HILN-the MPEG-4 parametric audio coding tools," in *Proc. of IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems*, 2000.
- [3] R.J. McAulay and T.F. Quatieri, "Speech analysis and synthesis based on a sinusoidal representation," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Proc.*, vol. 34, no. 4, 1986.
- [4] J. Nieuwenhuijse, R. Heusdens, and E.F. Deprettere, "Robust exponential modeling of audio signal," in *Proc. of IEEE Int. Conf. on Acoustic, Speech and Signal Proc.*, May 1998.
- [5] R. Boyer, S. Essid, and N. Moreau, "Non-stationary signal parametric modeling techniques with an application to low bitrate audio coding," in *Proc. of IEEE Int. Conf. on Signal Proc.*, 2002.
- [6] Patrick Duvaut, *Traitement du signal*, Hermes, Paris, 1994.
- [7] Y. Hua and T.K. Sarkar, "Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 38, no. 5, May 1990.
- [8] G.H. Golub and C.F. Van Loan, *Matrix computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, third edition, 1996.
- [9] R. Roy and T. Kailath, "ESPRIT—estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Proc.*, vol. 37, no. 7, 1989.
- [10] X. Serra and J. Smith, "Spectral modeling synthesis : a sound system based on a deterministic plus stochastic decomposition," *Computer Music Journal*, vol. 14, no. 4, 1990.
- [11] R. Kumaresan and D.W. Tufts, "Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 30, no. 6, 1982.
- [12] B. David, R. Badeau, and G. Richard, "Sintrack analysis for tracking components of musical signals," in *Proc. of Forum Acusticum Sevilla 2002*, accepted for publication.
- [13] K. Abed-Meraim, A. Chkeif, and Y. Hua, "Fast orthonormal PAST algorithm," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 7, no. 3, 2000.
- [14] P. Strobach, "Square hankel SVD subspace tracking algorithms," *Signal Processing*, vol. 57, no. 1, 1997.
- [15] P. Strobach, "Fast recursive subspace adaptive ESPRIT algorithms," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 46, no. 9, 1998.
- [16] J. Laroche, "The use of the Matrix Pencil method for the spectrum analysis of musical signals," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 94, no. 4, 1993.
- [17] K. Banderburg and G. Stoll, "ISO-MPEG-1 audio: a generic standard for coding of high-quality digital audio," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 42, 1994.
- [18] S. Levine, *Audio representations for data compression and compressed domain processing*, Ph.D. thesis, Stanford University, 1998.

## AN EDS MODELLING TOOL FOR TRACKING AND MODIFYING MUSICAL SIGNALS

Bertrand DAVID, Gaël RICHARD and Roland BADEAU

ENST, Department of Signal and Image processing  
École Nationale Supérieure des Télécommunications,  
46, rue Barrault,  
75634 PARIS cedex 13, FRANCE  
bedavid,grichard,rbadeau@tsi.enst.fr

### ABSTRACT

An analysis/synthesis scheme for musical signals is introduced in this paper. It is based on an adaptive subspace analysis and the Exponentially Damped Sinusoids model. This method leads to a new representation, called the HR-ogram, where the signal components are represented as points in the time-frequency plane. These points are gathered according to their frequency, phase and amplitude proximity from an analysis time-instant to the following one. This leads to an accurate deterministic/stochastic decomposition using a projection onto the noise subspace. The whole technique allows a separate processing for both components.

### 1. INTRODUCTION

Most of the analysis/synthesis schemes designed for musical sounds found in the literature are based on either a frequency-domain or a time-domain approach. Both families have evolved into a broad variety of algorithms from their very ancestors: the so-called phase-vocoder [1] and the OLA (overlap-add) method. These tools and their derivatives (Quatieri and Serra techniques [2, 3], synchronized OLA methods SOLA [4], PSOLA [5]) are widely used in the context of audio signal processing [6, 7].

The technique described in this paper is mostly related to the first class of methods: it relies on an Exponentially Damped Sinusoids (EDS) model and takes advantage of the signal decomposition into a deterministic part and a noise component. The EDS modelling allows an accurate representation of each signal frame in terms of the amplitudes, phases, damping factors and frequencies of the component sine waves while the modifications can be processed separately on both parts (deterministic and stochastic) of the signal decomposition.

This work follows earlier ones designed for estimating, tracking and modifying musical sounds [8, 9] and rely on the high resolution properties of the subspace analysis [10]. The main drawback of this approach is the computational cost of such algorithms but the newest versions have become adaptive and overcome the constraint of computing a Singular Value Decomposition at each time step [11].

The theoretical background presented in section 2 mainly recovers from [9], highlighting the relationship with the well-known quasi-stationary models [2] and [3] and the applicative context. Section 3 shows analysis results and the modification and synthesis techniques are discussed in section 4.

### 2. THEORETICAL BACKGROUND

#### 2.1. Definitions and model

The discrete signal to be analysed and modified is assumed real valued and denoted  $s(t)$ . It is segmented in overlapping frames  $x(t, u) = s(t + t_a(u))w_a(t)$  where  $t_a(u)$  are the analysis marks indexed by the non-negative integer  $u$  and  $w_a$  is the analysis window assumed of finite length  $L_a$ . The time-instants  $t_a(u)$  are usually regularly spaced, *i.e.*  $t_a(u) = u\Delta_a$ ,  $u \in \mathbb{N}$ , where the interval  $\Delta_a$  is a fixed increment such as  $\Delta_a \leq L_a$ . In this paper,  $w_a$  will always be the rectangular window of length  $L_a$ .

For each frame, an Exponentially Damped Sinusoids model is used:

$$x(t, u) = \sum_{k=1}^M (b_k z_k^t + b_k^* z_k^{*t}) \quad (1)$$

where  $b_k = \frac{A_k}{2} \exp(j\phi_k)$  is the complex amplitude of the  $k^{\text{th}}$  component ( $A_k$  is the amplitude of the corresponding real component and  $\phi_k$  its initial phase), and  $z_k = \exp(-\alpha_k + j2\pi f_k)$  is its complex pole.  $\alpha_k$  and  $f_k$  denote its damping factor and frequency, ranging in  $\mathbb{R}$  for the first one and in  $[0 \ 1/2]$  for the other. These parameters are implicit functions of  $t_a(u)$ , not reported in (1) for lightening purposes. Like the well-known sinusoidal decompositions found in [2, 3], the parameters are assumed to vary slowly, *i.e.* they are considered constant over the window duration. Anyway, it should be noted that, in contrast, the definition of the EDS model includes a possible variation of the components envelopes leading to a more accurate representation for each frame, yielding to a residual of lower energy than the one obtained by an undamped modelling for the same order  $M$  and window length  $L_a$ .

#### 2.2. Analysis stage

The estimation of the  $4M$  parameters for each frame  $x(t)$  (for simplicity the  $u$ -dependency is removed) is performed using a subspace-based technique for the frequencies  $f_k$  and damping factors  $\alpha_k$ . The  $b_k$  are jointly estimated by a least squares method. The subspace analysis takes into account the particular mathematical structure of the model, leading to a high resolution (HR) estimation: when the signal is noise-free the limit for separating two close components is only restrained by the limited computational capacity.

### 2.2.1. HR method outlines

Using the  $L_a = 2N - 1$  samples of the frame, the square Hankel structured data matrix  $\mathbf{H}$  is defined as

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} x(0) & x(1) & \dots & x(N-1) \\ x(1) & x(2) & \dots & x(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N-1) & x(N) & \dots & x(L_a-1) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Assuming  $2M \leq N$ , the symmetric real matrix  $\mathbf{H}$  is rank-deficient of dimension  $2M$  [9]. Its eigendecomposition yields

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T \quad (3)$$

where  $\mathbf{U}$  is an  $N \times 2M$  orthonormal real matrix. In presence of an additive white noise,  $\mathbf{H}$  becomes full rank and the columns of  $\mathbf{U}$  are defined as the  $2M$  dominant eigenvectors, corresponding to the  $2M$  eigenvalues of highest magnitude.

The signal poles  $\{z_k, z_k^*\}_{k=1, \dots, M}$  are estimated by taking into account the rotational invariance property of the signal subspace, which is expressed in terms of a real  $2M \times 2M$  matrix  $\mathbf{\Phi}$  whose eigenvalues are the signal poles:

$$\mathbf{U}_\uparrow = \mathbf{U}_\downarrow \mathbf{\Phi} \quad (4)$$

where  $\mathbf{U}_\uparrow$  (*resp.*  $\mathbf{U}_\downarrow$ ) is obtained by deleting the first (*resp.* the last) row of  $\mathbf{U}$ .

### 2.2.2. Estimation of the complex amplitudes

This estimation of the complex amplitudes  $\{b_k, b_k^*\}_{k=1, \dots, M}$  is performed for each frame using a Least Squares (LS) method. The  $N \times 2M$  Vandermonde matrix  $\mathbf{Z}$  is defined by

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & \dots & z_M & z_1^* & \dots & z_M^* \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & \dots & z_M^{N-1} & z_1^{*N-1} & \dots & z_M^{*N-1} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

When the frame is noise-free, the column vector  $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_M, b_1^*, \dots, b_M^*]^T$  satisfies the relation

$$\mathbf{Z}\mathbf{b} = \mathbf{x} \quad (6)$$

where  $\mathbf{x} = [x(0), \dots, x(N-1)]^T$ . The solution of (6) in the least squares sense is  $\mathbf{b} = \mathbf{Z}^+ \mathbf{x}$  where  $\mathbf{Z}^+$  denotes the pseudo-inverse of the matrix  $\mathbf{Z}$ .

### 2.2.3. Subspace tracking

Since the HR-method relies on the eigenvalue decomposition (EVD) of the data matrix  $\mathbf{H}$ , without further modification the estimation of the frequencies and damping factors would require an EVD at each time step and thus would lead to a high computational cost (*cf.* [9] for more details). However this cost can be reduced by using an adaptive algorithm which avoids the computation of the EVD. It is based on an iterative algorithm called *Orthogonal Iteration* [12] and uses a two steps procedure which yields the matrix  $\mathbf{U}$  when the convergence is reached. For our tracking purpose, this algorithm is applied in a sequential way, assuming that it converges much faster than the variations of the signal subspace. As shown in table 1, it involves two auxiliary matrices  $\mathbf{A}(u)$  and  $\mathbf{R}(u)$  and an economy size QR factorization since  $\mathbf{A}(u)$  is of dimension  $N \times 2M$ .

Table 1: Sequential iteration for subspace tracking

Initialization of the signal subspace matrix

$$\mathbf{U}(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{2M} \\ \mathbf{0}_{(N-2M) \times 2M} \end{pmatrix}$$

For each analysis time-instant  $t_a(u), u = 1, 2, \dots$  iterate:  
matrix product  $\mathbf{A}(u) = \mathbf{H}(u)\mathbf{U}(u-1)$   
skinny QR factorization  $\mathbf{A}(u) = \mathbf{U}(u)\mathbf{R}(u)$

## 3. ANALYSIS RESULTS: HR-OGRAM

In this section, the capabilities of the algorithm are demonstrated for both synthetic and real data (singing voice). A time-frequency representation is introduced, called the HR-ogram<sup>1</sup> which serves the same goals as the spectrogram in Fourier analysis. The HR-ogram represents the components as points  $(t_a(u), f_k(u))$  in the time-frequency plane for each analysis time-instant  $t_a(u)$ . The energy  $\epsilon_k$  of the  $k^{\text{th}}$  component is represented in decibels using gray levels and defined as

$$\epsilon_k = A_k^2 \frac{1 - \exp(-2\alpha_k L_a)}{1 - \exp(-2\alpha_k)}. \quad (7)$$

This definition includes the effect of the damping factor in the graph. This avoids the overvaluing of spurious poles, often related to noise, which can be highly damped and estimated at very high magnitude values, resulting in a weak component.

### 3.1. Simulation example

The graphs of figure 1 show the analysis results for a three components signal with an additive white noise corresponding to a 27dB signal to noise ratio (SNR). All the components are undamped.

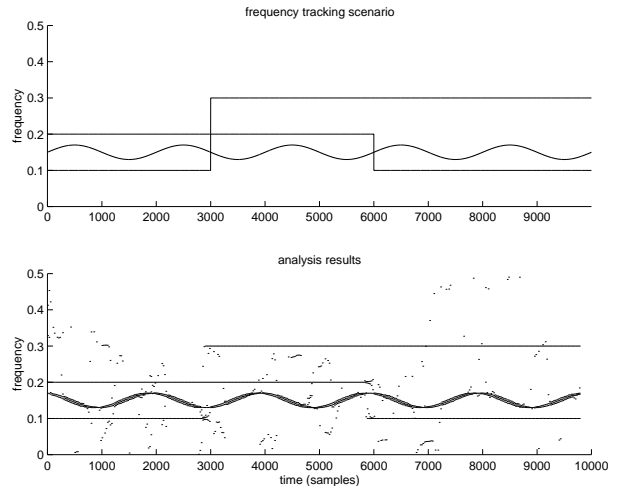


Figure 1: Analysis results for a synthetic signal

<sup>1</sup>standing for High Resolution Spectrogram

Two of them present a frequency jump at distinct time-instants while the third one is sinusoidally modulated at the period of 2000 samples and with a 0.05 frequency deviation.

The analysis parameters are set as follows: the window length is  $L_a = 201$ , the number of components is overestimated to  $M = 6$  and the analysis is performed every  $\Delta_a = 25$  samples.

The results show clearly the good tracking of the three components. The convergence of the algorithm is fast enough to handle the frequency jumps and when they occur for one component the estimation of the other ones remains stable and accurate. The modulated component is often represented by a few (2 or 3) poles. The signal model (1) is indeed not fully respected by the frequency modulated component. The spurious poles corresponding to the additive noise are easily identifiable for they do not aggregate in a specific shape and are widely spread in the whole frequency range.

### 3.2. Singing voice subspace tracking

This example is a female soprano singing voice, who realizes an up and down glissando between C5 and E5. The signal is recorded at the 44100 Hz sampling rate. The analysis provides the HR-ogram shown in figure 2, which highlights the spectral lines associated to the harmonic structure but also the poles related to noise, gathered in formant-like shapes.

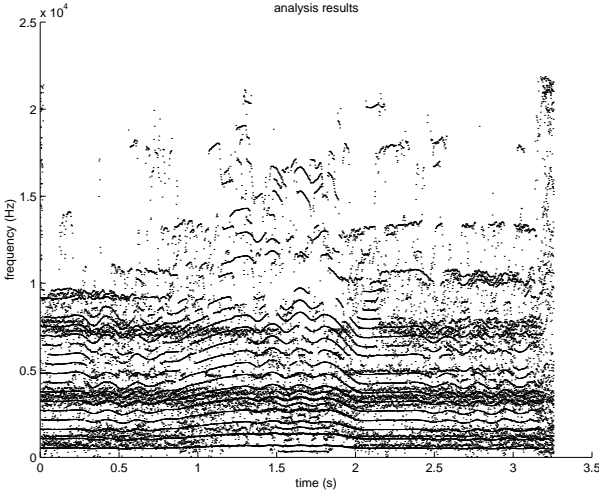


Figure 2: HR-ogram of a soprano singer

## 4. MODIFICATION AND SYNTHESIS

Each point of the HR-ogram is well localized both in frequency and time domains and can be modified individually. However, in order to achieve a high quality analysis/modification/synthesis the poles related to the sinusoidal components and those related to noise must be processed separately. Moreover, the EDS model does not represent accurately the stochastic part of the signal.

## 4.1. Deterministic/stochastic decomposition

### 4.1.1. Method

As in most of the analysis schemes, a noise component  $w(t, u)$  is added to the model (1) leading to:

$$x(t, u) = \sum_{k=1}^M (b_k z_k^t + b_k^* z_k^{*t}) + w(t, u). \quad (8)$$

This component is often expressed as a time-varying filtering of a white stochastic process [6] and will be referred to as the stochastic component of the signal while the noise-free EDS model will be referred to as the deterministic component.

A common technique to derive the noise component consists in subtracting to  $x(t, u)$  the deterministic part, after its estimation. But this can lead to a significant amount of sinusoidal components introduced in  $w(t, u)$ . In order to avoid this effect,  $w(t, u)$  is obtained by projecting the signal onto the noise subspace. For the noisy model (8), the matrix  $\mathbf{H}$  is full rank. The signal subspace is the space spanned by the eigenvectors associated to the  $N - 2M$  smallest eigenvalues.

The number  $M$  of sinusoids is chosen accordingly to the stability of the spectral lines of their associated poles.  $M$  is first overestimated and the signal poles  $z_k(u)_{k=1, \dots, M}$  and corresponding complex amplitudes  $b_k(u)$  are estimated at the analysis time-instant  $t_a(u)$ .  $z_m(u+1)$  and  $b_m(u+1)$  are estimated at the time-instant  $t_a(u+1)$  and distances are computed to measure how these poles are close in terms of frequency, amplitude and phase. The corresponding distances  $d_f$ ,  $d_A$  and  $d_\phi$  are thus defined as:

$$d_f(k, m) = 4(f_k(u) - f_m(u+1))^2 \quad (9)$$

$$d_A(k, m) = (A_k(u) - A_m(u+1))^2 \quad (10)$$

$$d_\phi(k, m) = \frac{([\phi_k(u) + 2\pi f_k(u)\Delta_a] - [\phi_m(u+1)])^2}{4\pi^2} \quad (11)$$

where  $[\phi]$  denotes the principal determination of  $\phi$  and the signal is normalized to a maximum magnitude equal to one. The spectral lines are formed according to the following steps:

1. for each  $k$ ,  $m_k = \arg_m \min d(k, m)$  is computed where  $d(k, m) = d_A(k, m) + d_f(k, m) + d_\phi(k, m)$ ,
2. for each  $k$ , the poles  $z_k(u)$  and  $z_{m_k}(u+1)$  are connected if  $|f_k(u) - f_{m_k}(u+1)|/f_k(u) < 1\%$  and  $d_A < -20\text{dB}$  and  $d_\phi < -30\text{dB}$ .

The number of components of the deterministic part  $\hat{M} < M$  is defined as the number of poles which have been connected between  $t_a(u)$  and  $t_a(u+1)$ . The stochastic component is obtained by the projection:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{I}_{2\hat{M}} - \mathbf{U}_{2\hat{M}}^H \mathbf{U}_{2\hat{M}}) \mathbf{x} \quad (12)$$

where  $\mathbf{U}_{2\hat{M}}$  is the subspace matrix whose columns are the  $2\hat{M}$  dominant eigenvectors,  $\mathbf{w} = [w(0, u), \dots, w(L_a - 1, u)]^T$  and  $\mathbf{x} = [x(0, u), \dots, x(L_a - 1, u)]^T$ .

### 4.1.2. Results

Figure 3 shows the spectral lines tracked by the technique described in section 4.1.1, leading to a time-frequency representation of the deterministic component of the preceding singing voice signal for the time indices ranging between 1s and 1.25s (cf. the

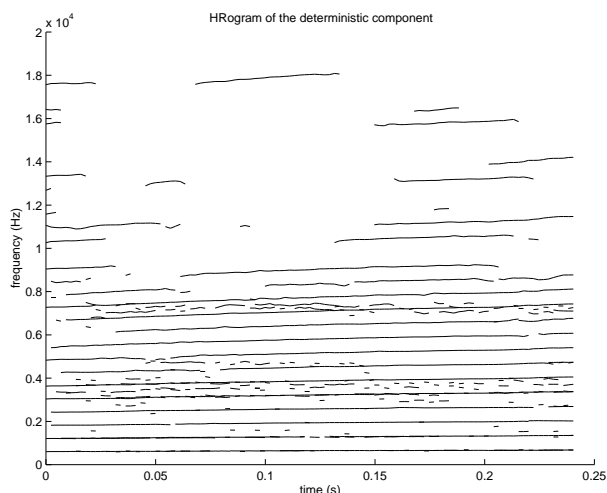


Figure 3: HR-ogram of the deterministic part

HR-ogram of figure 2). Besides a few lines related to noise components and easily identifiable because of their short time duration, the harmonic structure is highlighted and shows clearly the frequency modulation due to the *glissando* produced by the soprano singer. The short-term spectra (10ms) of the signal and its stochastic part are represented in figure 4. The sinusoidal part has been mostly removed by the projection while the formant-like reinforcements around 4000 Hz and 7500 Hz are emphasized.

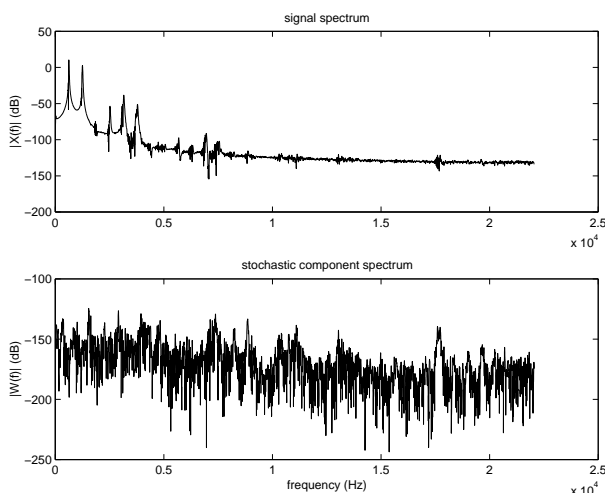


Figure 4: Short-term spectra of  $x(t, u)$  and  $w(t, u)$

#### 4.2. Modifications

Coming along with the deterministic/stochastic decomposition, many audio effects can be processed. For example, pitch-shifting can be applied only on the deterministic part, eventually taking into account the spectral envelope. An interesting by-product of this decomposition is the capability of processing each spectral line to add or remove vibrato and tremolo, to adjust the pitch or the du-

ration or to modify the ratio between the voiced and the unvoiced part of the sound.

#### 5. CONCLUSIONS

In this paper an analysis/synthesis scheme has been proposed. It uses a High Resolution adaptive method which overcomes the Fourier resolution limit and achieves an accurate estimation of the sinusoidal components of the signal. The stochastic part is then derived by projecting the signal onto the noise subspace. The deterministic and stochastic parts can thus be processed separately, leading to high quality audio effects.

**Acknowledgements.** The authors are very grateful to Nathalie Henrich for having provided the musical signals.

#### 6. REFERENCES

- [1] M. R. Portnoff, "Implementation of the digital phase vocoder using the fast fourier transform," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-24, no. 3, pp. 243–248, Jun 1976.
- [2] R. J. McAulay and T. F. Quatieri, "Speech analysis/synthesis based on a sinusoidal representation," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, no. 4, pp. 744–754, Aug 1986.
- [3] X. Serra and J. Smith, "Spectral modeling synthesis: A sound analysis/synthesis system based on a deterministic plus stochastic decomposition," *Computer Music J.*, vol. 14, no. 4, pp. 12–24, Winter 1990.
- [4] S. Roucos and A. M. Wilgus, "High quality time-scale modification of speech," *Proc. IEEE ICASSP-85, Tampa*, pp. 493–496, Apr 1985.
- [5] E. Moulines and F. Charpentier, "Pitch-synchronous waveform processing techniques for text-to-speech synthesis using diphones," *Speech Communication*, vol. 9, no. 5/6, pp. 453–467, Dec 1990.
- [6] M. Kahrs and K. Brandenburg, *Applications of Digital Signal Processing to Audio and Acoustics*. Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Press, 1998.
- [7] E. Moulines and J. Laroche, "Non parametric techniques for pitch-scale and time-scale modification of speech," *Speech Communication*, vol. 16, pp. 175–205, Feb 1995.
- [8] B. David, R. Badeau, and G. Richard, "Sintrack analysis for tracking components of musical signals," in *Forum Acusticum*, Sevilla, Spain, Sep 2002.
- [9] R. Badeau, R. Boyer, and B. David, "EDS parametric modeling and tracking of audio signals," in *5th Int. Conf. on Digital Audio Effects (DAFx-02)*, Hamburg, Germany, Sep 2002, pp. 139–144.
- [10] Y. Hua and T. K. Sarkar, "Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-38, no. 5, pp. 814–824, May 1990.
- [11] R. Badeau, G. Richard, and B. David, "Sliding window adaptive SVD algorithms," *IEEE Trans. Signal Processing*, to be published.
- [12] G. Golub and C. V. Loan, *Matrix computations*, 3rd ed. Baltimore and London: Johns Hopkins University Press, 1996.

# Sliding Window Adaptive SVD Algorithms

Roland Badeau, *Member, IEEE*, Gaël Richard, *Member, IEEE*, and Bertrand David

**Abstract**—The singular value decomposition (SVD) is an important tool for subspace estimation. In adaptive signal processing, we are especially interested in tracking the SVD of a recursively updated data matrix. This paper introduces a new tracking technique that is designed for rectangular sliding window data matrices. This approach, which is derived from the classical bi-orthogonal iteration SVD algorithm, shows excellent performance in the context of frequency estimation. It proves to be very robust to abrupt signal changes, due to the use of a sliding window. Finally, an ultra-fast tracking algorithm with comparable performance is proposed.

**Index Terms**—Sliding window, subspace tracking, SVD.

## I. INTRODUCTION

SUBSPACE-BASED signal analysis consists of splitting the observations into a set of desired and a set of disturbing components, which can be viewed in terms of signal and noise subspaces. This approach has been widely studied in the fields of adaptive filtering, source localization, or parameter estimation [1]. The eigenvalue decomposition (EVD) and the singular value decomposition (SVD) are commonly used in subspace estimation. However, they usually lead to computationally demanding algorithms. Therefore, in an adaptive signal processing context, there is a real need for fast tracking techniques.

A reference method in subspace tracking is Karasalo's algorithm [2], which involves the full SVD of a small matrix. More recently, the FST algorithm presented in [3] replaces this SVD by Givens rotations, resulting in a faster tracking. Another approach consists of interlacing a recursive update of the estimated covariance matrix or the data matrix with one or a few steps of a standard SVD or power iteration algorithm. This is the case of the Jacobi SVD method [4], the transposed QR-iteration [5], the orthogonal/bi-orthogonal iteration [6], [7], and the power method [8]. Some tracking techniques are based on other matrix decompositions, such as the rank-revealing QR factorization [9], the rank-revealing URV decomposition [10], and the Lankzos (bi)-diagonalization [11]. A conceptually different approach considers the principal subspace estimation as a constrained or unconstrained optimization problem [12]–[17]. In particular, it is established in [13] and [18] that the classical Oja method [12] can be viewed as an approximated gradient descent of a mean square error function. A number of faster subspace tracking methods have been developed based on the combination of the gradient descent approach with a projection approxi-

mation hypothesis [18]–[21]. Other techniques rely on the noise and signal subspace averaging method [22], the maximum likelihood principle [23], the operator restriction analysis [24], or the perturbation theory [25]. A review of former literature can be found in [1].

Most of these adaptive techniques are designed for exponential forgetting windows. Indeed, this choice tends to smooth the signal variations and thus allows a low-complexity update at each time step. However, it is only suitable for slowly varying signals. Conversely, a few subspace trackers are based on sliding windows, which generally require more computations, but offer a faster tracking response to sudden signal changes [18], [26]. The tracking of the full SVD in the sliding window case was investigated in [27] and [28].

In this paper, we will focus on the bi-orthogonal iteration SVD method [29], [30]. This technique has been widely investigated by Strobach, who proposed various subspace tracking algorithms designed for exponential forgetting windows [6], [7]. In [27], the sliding window case was addressed, but the approach was limited to real square Hankel data matrices. The adaptive SVD technique presented in this paper overcomes this limitation. Our work mainly differs from that presented in [7] by the way the basic sequential bi-iteration SVD algorithm is simplified.

Compared with the above-mentioned subspace tracking methods, our fastest algorithm has the advantage of

- computing an orthonormal subspace basis *at each time step*, which is required for some subspace-based estimation methods, such as MUSIC [31];
- relying on a sliding window, which offers a faster tracking response to abrupt signal variations;
- tracking the full SVD, which may be useful for rank estimation and tracking, as in [7] and [28];
- relying on an approximation of the data matrix that is less restrictive than the classical *projection approximation* [18], leading to better tracking results.

The paper is organized as follows. In Section II, we recall the principles of the bi-orthogonal iteration approach, from which our new sliding window adaptive SVD (SWASVD) algorithm is derived. A fast implementation of SWASVD is then presented in Section III. In Section IV, the capacity of these new tracking algorithms to cope with transients is illustrated in the context of frequency estimation. Their performance is compared with that of some of the most robust and efficient methods found in the literature. Finally, the main conclusions of this paper are summarized in Section V.

## II. SLIDING WINDOW ADAPTIVE SVD

The bi-orthogonal iteration SVD algorithm is a straightforward extension of the classical orthogonal iteration, which com-

Manuscript received July 29, 2002; revised February 27, 2003. The associate editor coordinating the review of this paper and approving it for publication was Dr. Rick S. Blum.

The authors are with the Department of Signal and Image Processing, École Nationale Supérieure des Télécommunications (ENST) (Telecom Paris), Paris, France (e-mail: roland.badeau@enst.fr; gael.richard@enst.fr; bertrand.david@enst.fr).

Digital Object Identifier 10.1109/TSP.2003.820069

TABLE I  
BI-ORTHOGONAL ITERATION SVD ALGORITHM

|  |                         |
|--|-------------------------|
| <b>Initialize :</b> $\mathbf{Q}_A(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \text{---} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ |                         |
| FOR $n = 1, 2 \dots$ UNTIL CONVERGENCE DO :  |                         |
| <b>First Iteration :</b>   |                         |
| $\mathbf{B}(n) = \mathbf{X} \mathbf{Q}_A(n-1)$   | matrix product          |
| $\mathbf{B}(n) = \mathbf{Q}_B(n) \mathbf{R}_B(n)$  | skinny QR factorization |
| <b>Second Iteration :</b>  |                         |
| $\mathbf{A}(n) = \mathbf{X}^H \mathbf{Q}_B(n)$   | matrix product          |
| $\mathbf{A}(n) = \mathbf{Q}_A(n) \mathbf{R}_A(n)$  | skinny QR factorization |

computes the EVD of a square matrix [32, Sect. 8.2.4]. In this section, it will be shown how this algorithm can be made adaptive and how its computational complexity can be reduced with a low-rank approximation of the data matrix.

#### A. Bi-Orthogonal Iteration SVD Algorithm

The bi-orthogonal iteration algorithm computes the  $r$  dominant singular values and vectors of a data matrix  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{L \times N}$  (with  $r \leq r_{\max} \triangleq \min(L, N)$ ). The SVD of  $\mathbf{X}$  is the factorization  $\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^H$ , where  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{L \times r_{\max}}$  and  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{N \times r_{\max}}$  are orthonormal matrices, and  $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{r_{\max} \times r_{\max}}$  is a non-negative diagonal matrix:  $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{r_{\max}})$ , where  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{r_{\max}} \geq 0$ . Thus, the  $r$  dominant singular values are  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}$ , the  $r$  dominant left singular vectors are the  $r$  first columns of the matrix  $\mathbf{U}$ , and the  $r$  dominant right singular vectors are the  $r$  first columns of the matrix  $\mathbf{V}$ . In many signal processing applications,  $r$  is much lower than  $r_{\max}$ .

The quasicode of the bi-orthogonal iteration SVD algorithm is given in Table I. This algorithm generates two auxiliary matrices  $\mathbf{B}(n) \in \mathbb{C}^{L \times r}$  and  $\mathbf{A}(n) \in \mathbb{C}^{N \times r}$ . It can be shown [29], [30] that the columns of  $\mathbf{Q}_B(n)$  converge to the  $r$  dominant left singular vectors, the columns of  $\mathbf{Q}_A(n)$  converge to the  $r$  dominant right singular vectors, and  $\mathbf{R}_B(n)$  and  $\mathbf{R}_A(n)$  both converge to  $\mathbf{\Sigma}$ .

#### B. Sequential Bi-Iteration SVD Algorithm

The bi-orthogonal iteration algorithm can simply be adapted in a tracking context. Suppose the data matrix is updated according to the following scheme:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t)^H \\ \mathbf{x}(t-1)^H \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t-L+1)^H \end{bmatrix}$$

where  $\mathbf{x}(t)$  is the  $N$ -dimensional data vector at time  $t$ .<sup>1</sup> The SVD of  $\mathbf{X}(t)$  can be approximated and updated just by replacing the iteration index  $n$  in Table I by the discrete time index  $t$ .

The sequential bi-iteration algorithm is summarized in Table II. In the right column, the computational complexities

<sup>1</sup>In the context of frequency estimation, the coefficients of  $\mathbf{x}(t)$  are the successive samples of the signal  $\mathbf{x}(t) = [x(t), x(t-1), \dots, x(t-N+1)]^T$ . In the context of direction-of-arrival (DOA) estimation,  $\mathbf{x}(t)$  is the snapshot vector received from the  $N$  captors.

TABLE II  
SEQUENTIAL BI-ITERATION SVD ALGORITHM

|  |                     |
|--|---------------------|
| <b>Initialize :</b> $\mathbf{Q}_A(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \text{---} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ |                     |
| FOR EACH TIME STEP DO :  |                     |
| <b>First Iteration :</b>   | <b>Complexity :</b> |
| $\mathbf{B}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{Q}_A(t-1)$  | $8NLr$              |
| $\mathbf{B}(t) = \mathbf{Q}_B(t) \mathbf{R}_B(t)$  | $19Lr^2$            |
| <b>Second Iteration :</b>  |                     |
| $\mathbf{A}(t) = \mathbf{X}(t)^H \mathbf{Q}_B(t)$  | $8NLr$              |
| $\mathbf{A}(t) = \mathbf{Q}_A(t) \mathbf{R}_A(t)$  | $19Nr^2$            |

are quantified with a multiplicative factor related to the real floating point operation (*flop*) count, as obtained with the Matlab *flops* command [32, Sect. 1.2.4]. For example, a dot product of  $N$ -dimensional complex vectors involves  $8N$  flops.

In spite of its robustness, the main drawback of this SVD tracking algorithm is its high computational complexity (since in practice  $r \ll \max(N, L)$ , its dominant cost is  $16NLr$ ). However, some simplifications will be brought below, which will result in lower complexity algorithms.

#### C. Low-Rank Approximation of the Updated Data Matrix

In this section, a low-rank approximation of the data matrix  $\mathbf{X}(t)$  will be introduced. In array processing, it is well known that rank reductions have a noise-cleaning effect. Here, this approximation will result in a faster tracking algorithm.

First, the time-updating structure of the data matrix can advantageously be taken into account. Indeed, it can be noticed that

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \text{---} \\ \mathbf{x}(t-L)^H \end{bmatrix} \mathbf{Q}_A(t-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^H(t) \\ \text{---} \\ \mathbf{X}(t-1) \end{bmatrix} \mathbf{Q}_A(t-1). \quad (1)$$

Now, consider the compressed data vector  $\mathbf{h}(t) = \mathbf{Q}_A(t-1)^H \mathbf{x}(t)$ . According to the definition of  $\mathbf{B}(t)$  (see Table II), (1) becomes

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) \\ \text{---} \\ \times \dots \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(t)^H \\ \text{---} \\ \mathbf{X}(t-1) \mathbf{Q}_A(t-1) \end{bmatrix} \quad (2)$$

where the symbol  $\times$  denotes uninteresting quantities.

To go further, Strobach [7] introduces the low-rank approximation  $\tilde{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(t) (\mathbf{Q}_A(t-1) \mathbf{Q}_A(t-1)^H) = \mathbf{Q}_B(t) \mathbf{R}_B(t) \mathbf{Q}_A(t-1)^H$  of  $\mathbf{X}(t)$ , which corresponds to the projection of the rows of  $\mathbf{X}(t)$  onto the subspace spanned by  $\mathbf{Q}_A(t-1)$ . Consequently

$$\tilde{\mathbf{X}}(t-1) \mathbf{Q}_A(t-1) = \mathbf{Q}_B(t-1) \mathbf{R}_B(t-1) \mathbf{\Theta}_A(t-1)$$

where  $\mathbf{\Theta}_A(t-1) = \mathbf{Q}_A(t-2)^H \mathbf{Q}_A(t-1)$ . It can be seen that this approximation is less restrictive than the classical *projection approximation* [18], which implicitly assumes that  $\mathbf{\Theta}_A(t-1) = \mathbf{I}_r$ .

However, we prefer to use the low-rank approximation  $\hat{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{Q}_B(t) \mathbf{Q}_B(t)^H) \mathbf{X}(t) = \mathbf{Q}_B(t) \mathbf{R}_A(t)^H \mathbf{Q}_A(t)^H$ . It

corresponds to the projection of the columns of  $\mathbf{X}(t)$  onto the subspace spanned by  $\mathbf{Q}_B(t-1)$ . Consequently

$$\hat{\mathbf{X}}(t-1)\mathbf{Q}_A(t-1) = \mathbf{Q}_B(t-1)\mathbf{R}_A(t-1)^H.$$

This choice has the advantage of involving more up to date matrix factors than  $\tilde{\mathbf{X}}(t)$ . Moreover, the explicit computation of the matrix  $\Theta_A(t-1)$  is avoided.

The substitution of  $\hat{\mathbf{X}}(t-1)$  to  $\mathbf{X}(t-1)$  in (2) yields

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) \\ \text{---} \\ \times \dots \times \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \mathbf{h}(t)^H \\ \text{---} \\ \mathbf{Q}_B(t-1)\mathbf{R}_A(t-1)^H \end{bmatrix}. \quad (3)$$

In the same way, it can be noticed that

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t)^H & \vdots & \mathbf{x}(t-L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_B(t) \\ \text{---} \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) & \vdots & \mathbf{X}(t-1)^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_B(t) \\ \text{---} \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

According to the definition of  $\mathbf{A}(t)$  (see Table II), (4) becomes

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) & \vdots & \mathbf{X}(t-1)^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_B(t) \\ \text{---} \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Taking into account that the sequential bi-iteration SVD algorithm satisfies the equation  $\mathbf{Q}_A(t-1)^H \mathbf{A}(t) = \mathbf{B}(t)^H \mathbf{Q}_B(t) = \mathbf{R}_B(t)^H$ , a pre-multiplication of both sides of (5) by  $\mathbf{Q}_A(t-1)^H$  yields

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_B(t)^H &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}(t) & \vdots & \mathbf{Q}_A(t-1)^H \mathbf{X}(t-1)^H \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_B(t) \\ \text{---} \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Then, let  $\mathbf{x}_\perp(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{Q}_A(t-1)\mathbf{h}(t)$ . This vector is orthogonal to span( $\mathbf{Q}_A(t-1)$ ) so that  $\mathbf{x}(t)$  can be written as a sum of two orthogonal vectors

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}_A(t-1)\mathbf{h}(t) + \mathbf{x}_\perp(t). \quad (7)$$

The substitution of  $\hat{\mathbf{X}}(t-1)$  to  $\mathbf{X}(t-1)$  in (5) and (6), respectively, yields

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &\simeq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_A(t-1) & \vdots & \mathbf{x}_\perp(t) \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \mathbf{h}(t) & \mathbf{R}_A(t-1)\mathbf{Q}_B(t-1)^H \\ \hline 1 & 0 \dots 0 \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_B(t) \\ \text{---} \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

and

$$\mathbf{R}_B(t)^H \simeq \begin{bmatrix} \mathbf{h}(t) & \vdots & \mathbf{R}_A(t-1)\mathbf{Q}_B(t-1)^H \end{bmatrix}$$

TABLE III  
SLIDING WINDOW ADAPTIVE SVD ALGORITHM (SWASVD)

|  |  |
|--|--|
| Initialize: $\mathbf{Q}_A(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \text{---} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ; $\mathbf{Q}_B(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \text{---} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ; $\mathbf{R}_A(0) = \mathbf{I}_r$ ; |  |
| FOR EACH TIME STEP DO :  |  |
| Input : $\mathbf{x}(t)$  |  |
| First Iteration :  | Complexity :   |
| $\mathbf{h}(t) = \mathbf{Q}_A(t-1)^H \mathbf{x}(t)$  | $8Nr$  |
| $\begin{bmatrix} \mathbf{B}(t) \\ \text{---} \\ \times \dots \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(t)^H \\ \text{---} \\ \mathbf{Q}_B(t-1)\mathbf{R}_A(t-1)^H \end{bmatrix}$   | $4Lr^2$  |
| $\mathbf{B}(t) = \mathbf{Q}_B(t)\mathbf{R}_B(t)$   | $19Lr^2$   |
| Second Iteration :   |  |
| $\mathbf{x}_\perp(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{Q}_A(t-1)\mathbf{h}(t)$   | $8Nr$  |
| $\mathbf{A}(t) = \mathbf{Q}_A(t-1)\mathbf{R}_B(t)^H + \mathbf{x}_\perp(t)\mathbf{q}_{B_1}(t)^H$  | $4Nr^2$  |
| $\mathbf{A}(t) = \mathbf{Q}_A(t)\mathbf{R}_A(t)$   | $19Nr^2$   |
|  | $\times \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_B(t) \\ \text{---} \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$ |

Let  $\mathbf{q}_{B_1}(t)$  be the column vector obtained by transposing the first row of  $\mathbf{Q}_B(t)$ . Equations (8) and (9) finally yield

$$\mathbf{A}(t) \simeq \mathbf{Q}_A(t-1)\mathbf{R}_B(t)^H + \mathbf{x}_\perp(t)\mathbf{q}_{B_1}(t)^H. \quad (10)$$

Note that the exact computation of  $\mathbf{B}(t)$  and  $\mathbf{A}(t)$  requires  $16NLr$  operations, whereas the approximated matrices (3) and (10) can be computed in  $4Lr^2$  and  $4Nr^2$  operations. Therefore, introducing these approximations in the sequential bi-iteration SVD algorithm leads to the lower complexity algorithm herein called SWASVD, which is summarized in Table III. Its dominant cost is only  $23(L+N)r^2$ . Moreover, it can be seen that for all  $r \leq r_{\max}$ , SWASVD requires fewer computations than the sequential bi-iteration algorithm. From now on,  $\mathbf{B}(t)$  and  $\mathbf{A}(t)$  will denote the approximated auxiliary matrices.

### III. FAST IMPLEMENTATION OF THE SLIDING WINDOW ADAPTIVE SVD ALGORITHM

A major drawback in the SWASVD algorithm is the explicit computation and QR factorization of the approximated matrices  $\mathbf{B}(t)$  and  $\mathbf{A}(t)$ . However, these operations can be avoided by directly updating the QR factorizations.

Since this update is simpler in the case of  $\mathbf{A}(t)$ , the optimization of the second iteration will be presented first.

#### A. Fast Implementation of the Second Iteration

In the second member of (10), the vector  $\mathbf{x}_\perp(t)$  is orthogonal to span( $\mathbf{Q}_A(t-1)$ ). It can be normalized as

$$\bar{\mathbf{x}}_\perp(t) = \frac{\mathbf{x}_\perp(t)}{\|\mathbf{x}_\perp(t)\|} \quad (11)$$

(in the special case  $\mathbf{x}_\perp(t) = \mathbf{0}$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_\perp(t)$  is forced to be  $\mathbf{0}$ ). Then,  $\mathbf{A}(t)$  can be written as the product

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_A(t-1) & \vdots & \bar{\mathbf{x}}_\perp(t) \end{bmatrix} \mathbf{T}_A(t) \quad (12)$$



of a  $N \times (r+1)$  orthonormal matrix by the  $(r+1) \times r$  matrix

$$\mathbf{T}_A(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_B(t)^H \\ \hline \|\mathbf{x}_\perp(t)\| \mathbf{q}_{B_1}(t)^H \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Now, consider the QR factorization of  $\mathbf{T}_A(t)$ :

$$\mathbf{T}_A(t) = \mathbf{G}_A(t) \begin{bmatrix} \mathbf{R}_A(t) \\ \hline 0 \dots 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

where  $\mathbf{G}_A(t)$  is a square  $(r+1) \times (r+1)$  orthonormal matrix, and  $\mathbf{R}_A(t)$  is a square  $r \times r$  upper triangular matrix (it will be shown below that  $\mathbf{R}_A(t)$  is also the triangular factor in the QR factorization of  $\mathbf{A}(t)$ , as defined in Section II). Equations (12) and (14) yield

$$\mathbf{A}(t) = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_A(t-1) & \vdots & \bar{\mathbf{x}}_\perp(t) \end{bmatrix} \mathbf{G}_A(t) \right) \begin{bmatrix} \mathbf{R}_A(t) \\ \hline 0 \dots 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

This last equation shows an explicit QR factorization of  $\mathbf{A}(t)$ . From (15),  $\mathbf{Q}_A(t)$  can be directly extracted:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_A(t) \\ \times \\ \vdots \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_A(t-1) & \vdots & \bar{\mathbf{x}}_\perp(t) \end{bmatrix} \mathbf{G}_A(t). \quad (16)$$

Therefore, the QR factorization of  $\mathbf{A}(t)$  can be updated with the smaller factorization (14) and the product (16).

### B. Fast Implementation of the First Iteration

The QR factorization of  $\mathbf{B}(t)$  is more difficult to update because of the row shifting in the updating scheme of the data matrix. An elegant but complex way of achieving this update can be found in [27]. A simpler solution, which has been inspired from the considerations of Section III-A, is proposed below.

Let  $\mathbf{q}_{B_L}(t-1)$  be the column vector obtained by transposing the last row of  $\mathbf{Q}_B(t-1)$ . Consider the orthonormal matrix  $\tilde{\mathbf{Q}}_B(t-1)$  obtained by a circular permutation of the rows of  $\mathbf{Q}_B(t-1)$ :

$$\tilde{\mathbf{Q}}_B(t-1) = \left[ \begin{array}{c|c} 0 \dots 0 & 1 \\ \hline \mathbf{I}_{L-1} & \vdots \\ & 0 \end{array} \right] \mathbf{Q}_B(t-1).$$

Finally, consider the  $L$ -dimensional vector  $\mathbf{z} = [1, 0 \dots 0]^T$ . Equation (3) yields

$$\mathbf{B}(t) = \tilde{\mathbf{Q}}_B(t-1) \mathbf{R}_A(t-1)^H + \mathbf{z} \tilde{\mathbf{h}}(t)^H$$

where  $\tilde{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{h}(t) - \mathbf{R}_A(t-1) \mathbf{q}_{B_L}(t-1)$ .

Now, the orthogonal decomposition of  $\mathbf{x}(t)$  given in (7) will be transposed to  $\mathbf{z}$ . Thus, let  $\mathbf{z}_\perp(t) = \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{Q}}_B(t-1) \mathbf{q}_{B_L}(t-1)$ . It can be noticed that  $\mathbf{q}_{B_L}(t-1) = \tilde{\mathbf{Q}}_B(t-1)^H \mathbf{z}$  so that the vector  $\mathbf{z}_\perp(t)$  is orthogonal to  $\text{span}(\tilde{\mathbf{Q}}_B(t-1))$ . Then,  $\mathbf{z}$  can be written as a sum of two orthogonal vectors:

$$\mathbf{z} = \tilde{\mathbf{Q}}_B(t-1) \mathbf{q}_{B_L}(t-1) + \mathbf{z}_\perp(t). \quad (17)$$

As for  $\mathbf{x}(t)$ , let

$$\bar{\mathbf{z}}_\perp(t) = \frac{\mathbf{z}_\perp(t)}{\|\mathbf{z}_\perp(t)\|}$$

(in the special case  $\mathbf{z}_\perp(t) = \mathbf{0}$ ,  $\bar{\mathbf{z}}_\perp(t)$  is forced to be  $\mathbf{0}$ ). Finally,  $\mathbf{B}(t)$  can be written as the product

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_B(t-1) & \vdots & \bar{\mathbf{z}}_\perp(t) \end{bmatrix} \mathbf{T}_B(t) \quad (18)$$

of a  $L \times (r+1)$  orthonormal matrix by the  $(r+1) \times r$  matrix

$$\mathbf{T}_B(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_A(t-1)^H \\ \hline 0 \dots 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{B_L}(t-1) \\ \hline \|\mathbf{z}_\perp(t)\| \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}(t)^H. \quad (19)$$

Now, consider the QR factorization of  $\mathbf{T}_B(t)$ :

$$\mathbf{T}_B(t) = \mathbf{G}_B(t) \begin{bmatrix} \mathbf{R}_B(t) \\ \hline 0 \dots 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

where  $\mathbf{G}_B(t)$  is a square  $(r+1) \times (r+1)$  orthonormal matrix, and  $\mathbf{R}_B(t)$  is a square  $r \times r$  upper triangular matrix (it will be shown below that  $\mathbf{R}_B(t)$  is also the triangular factor in the QR factorization of  $\mathbf{B}(t)$ , as defined in Section II). Equations (18) and (20) yield

$$\mathbf{B}(t) = \left( \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_B(t-1) & \vdots & \bar{\mathbf{z}}_\perp(t) \end{bmatrix} \mathbf{G}_B(t) \right) \begin{bmatrix} \mathbf{R}_B(t) \\ \hline 0 \dots 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

This last equation shows an explicit QR factorization of the matrix  $\mathbf{B}(t)$ . As for  $\mathbf{Q}_A(t)$ ,  $\mathbf{Q}_B(t)$  can be directly extracted from this factorization:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_B(t) \\ \times \\ \vdots \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_B(t-1) & \vdots & \bar{\mathbf{z}}_\perp(t) \end{bmatrix} \mathbf{G}_B(t). \quad (22)$$

Therefore, the time-consuming direct QR factorization of  $\mathbf{B}(t)$  can be split into the smaller QR factorization (20) and the product (22). Finally, (14), (16), (20), and (22) lead to the fast implementation of the SWASVD algorithm given in Table IV,<sup>2</sup> herein called SWASVD2. Its dominant cost is only  $8(N+L)r^2$ . Therefore, SWASVD2 is approximately three times faster than SWASVD. As a comparison, the dominant cost of the exponential forgetting window Bi-SVD1 algorithm presented in [7] is  $8Nr^2$  at each time step. It can be seen that SWASVD2 requires a number of additional operations proportional to the sliding window length. However, this increased computational cost is compensated by better performance, as shown in Section III-C.

### C. Step Toward Linear Complexity

In spite of the various optimizations that were introduced above, the SWASVD2 algorithm is not the fastest subspace

<sup>2</sup>The computation of  $\bar{\mathbf{x}}_\perp(t)$  is subject to rounding errors that might affect the algorithm stability due to a loss of orthogonality among the columns of  $\mathbf{Q}_A$ . Note that the orthogonality can be maintained by repeating one or a few times the following operations:

- projection of  $\bar{\mathbf{x}}_\perp(t)$  onto  $\text{span}(\mathbf{Q}_A)^\perp$ ;
- renormalization of  $\bar{\mathbf{x}}_\perp(t)$ .

The same method can be applied to  $\bar{\mathbf{z}}_\perp(t)$  in order to maintain the orthogonality among the columns of  $\tilde{\mathbf{Q}}_B$ .

TABLE IV  
FAST IMPLEMENTATION OF THE SLIDING WINDOW ADAPTIVE SVD  
ALGORITHM (SWASVD2)

FOR EACH TIME STEP DO :

| First Iteration :   | Complexity : |
|---|--------------|
| $\mathbf{h}(t) = \mathbf{Q}_A(t-1)^H \mathbf{x}(t)$   | $8Nr$        |
| $\mathbf{z}_\perp(t) = [1, 0 \dots 0]^T - \tilde{\mathbf{Q}}_B(t-1) \mathbf{q}_{B_L}(t-1)$  | $8Lr$        |
| $\tilde{\mathbf{z}}_\perp(t) = \frac{\mathbf{z}_\perp(t)}{\ \mathbf{z}_\perp(t)\ }$   | $10L$        |
| $\tilde{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{h}(t) - \mathbf{R}_A(t-1) \mathbf{q}_{B_L}(t-1)$   | $4r^2$       |
| $\begin{bmatrix} \mathbf{R}_A(t-1)^H \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{B_L}(t-1) \\ \ \mathbf{z}_\perp(t)\  \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}(t)^H$               |              |
| $= \mathbf{G}_B(t) \begin{bmatrix} \mathbf{R}_B(t) \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix}$  | $12r^3$      |
| $\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_B(t) \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_B(t-1) \\ \tilde{\mathbf{z}}_\perp(t) \end{bmatrix} \mathbf{G}_B(t)$                      | $8Lr^2$      |
| Second Iteration :  |              |
| $\mathbf{x}_\perp(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{Q}_A(t-1) \mathbf{h}(t)$   | $8Nr$        |
| $\tilde{\mathbf{x}}_\perp(t) = \frac{\mathbf{x}_\perp(t)}{\ \mathbf{x}_\perp(t)\ }$   | $10N$        |
| $\begin{bmatrix} \mathbf{R}_B(t)^H \\ \ \tilde{\mathbf{x}}_\perp(t)\  \mathbf{q}_{B_1}(t)^H \end{bmatrix} = \mathbf{G}_A(t) \begin{bmatrix} \mathbf{R}_A(t) \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix}$ | $12r^3$      |
| $\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_A(t) \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_A(t-1) \\ \tilde{\mathbf{x}}_\perp(t) \end{bmatrix} \mathbf{G}_A(t)$                              | $8Nr^2$      |

tracker that can be found in the literature (for instance, the algorithms presented in [18]–[21] require only  $O(Nr)$  operations).

To reach this minimal complexity, Strobach [7] assumes that the matrix  $\Theta_A(t) = \mathbf{Q}_A(t-1)^H \mathbf{Q}_A(t)$  is close to the  $r \times r$  identity matrix (which is the same as the classical projection approximation [18], as mentioned in Section II-C). Such an approximation is not required here since the use of  $\tilde{\mathbf{X}}(t-1)$  instead of  $\tilde{\mathbf{X}}(t-1)$  avoids the explicit computation of  $\Theta_A(t)$  in SWASVD2.

Table IV shows that the  $8(N+L)r^2$  dominant cost of SWASVD2 is due to the use of the full rotation matrices  $\mathbf{G}_B(t)$  and  $\mathbf{G}_A(t)$ . These matrices are computed to make  $\mathbf{R}_B(t)$  and  $\mathbf{R}_A(t)$  upper triangular.

In fact, it can be shown that this triangular constraint does not affect the signal subspace estimation. If  $\mathbf{R}_B(t)$  and  $\mathbf{R}_A(t)$  were not triangular, the algorithm would also converge to an orthonormal matrix spanning the signal subspace (this approach is known as the power method [8]). The triangular constraint is only required to guarantee the convergence to the  $r$  dominant singular vectors.

Therefore, linear complexity can be reached by simply relaxing this constraint. The exact QR factorization can be replaced by an “approximated QR factorization,” which involves a “nearly triangular” right factor. This method, herein called SWASVD3, is presented in the Appendix and requires  $O(Nr)$  operations. Its subspace tracking performance is exactly the same as that of SWASVD2. Although the convergence to the singular vectors and values is no longer theoretically guaranteed, the algorithm proves to robustly track their variations.

#### IV. SIMULATION RESULTS

In this section, the performance of the new tracking algorithms is illustrated in the context of frequency estimation. A

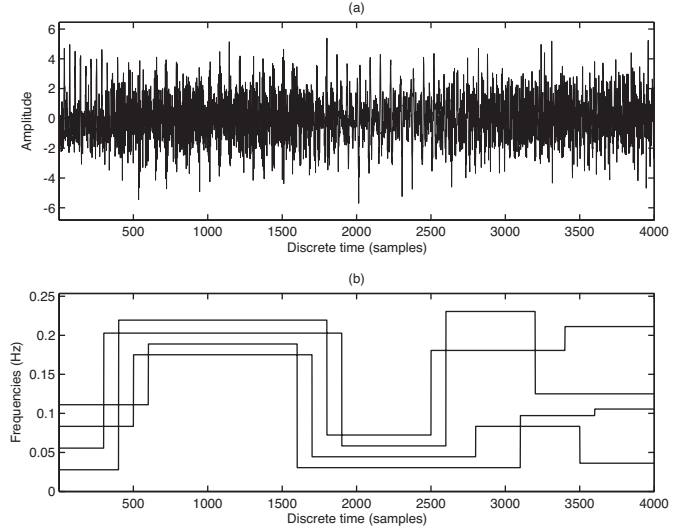


Fig. 1. (a) Test signal. (b) Normalized frequencies of the sinusoids.

discrete signal  $x(t)$  can be described using a Hankel data matrix  $\mathbf{X}(t)$ . In the exponentially damped sinusoidal (EDS) model case, it can be shown that  $\text{span}(\mathbf{X}(t))$  is an  $r$ -dimensional subspace, where  $r$  is the number of complex sinusoids. The ESPRIT high-resolution method can be used to estimate the model parameters, among which are the frequencies of the sinusoids [33], [34].

Here, this high-resolution method has been tested in conjunction with several subspace trackers on a synthetic signal (an application to real audio signals was proposed in [33], involving the sequential iteration SVD algorithm).

The test signal of Fig. 1(a) is a sum of  $r = 4$  complex sinusoidal sources plus a complex white Gaussian noise. The frequencies of the sinusoids vary according to a “jump scenario” (proposed by Strobach in the context of DOA estimation [35]): Their values abruptly change at different time instants, between which they remain constant. Their variations are represented in Fig. 1(b).

The SWASVD2 algorithm was applied to this signal with matrix dimensions  $N = 80$  and  $L = 120$ . As in [35], the signal-to-noise (SNR) ratio was fixed to 5.7 dB.

Fig. 2(a) shows the frequency tracking result. The dotted line indicates the true frequency parameters, whereas the solid line indicates the estimated frequencies. It can be noticed that SWASVD2 robustly tracks abrupt frequency variations.

The performance of the subspace estimation is also analyzed in terms of the maximum principal angle between the true dominant subspace of the data matrix (obtained via an exact singular value decomposition) and the estimated dominant subspace of the same data matrix (obtained with the tracker). This error criterion was originally proposed by Comon and Golub as a measure of the distance between equidimensional subspaces [1]. Fig. 2(b) shows that the subspace estimation fails on transient regions but gives excellent results everywhere else. This is not surprising since the subspace modeling does not make sense in transient regions.

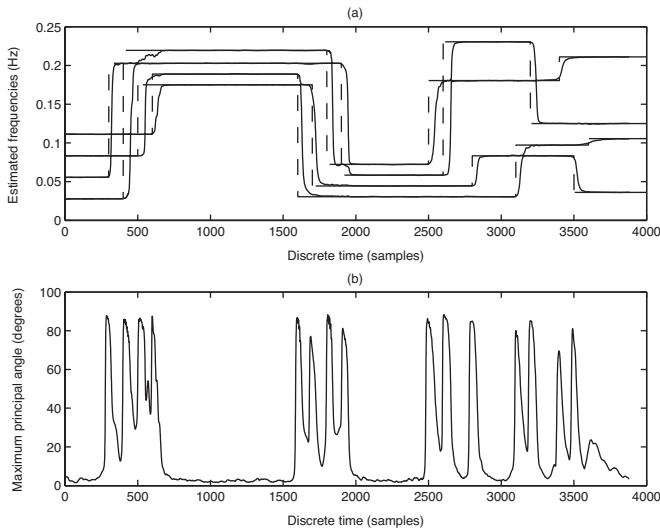


Fig. 2.  $O((N+L)r^2)$  SWASVD2 algorithm. (a) Frequency tracking. (b) Maximum principal angle trajectory.

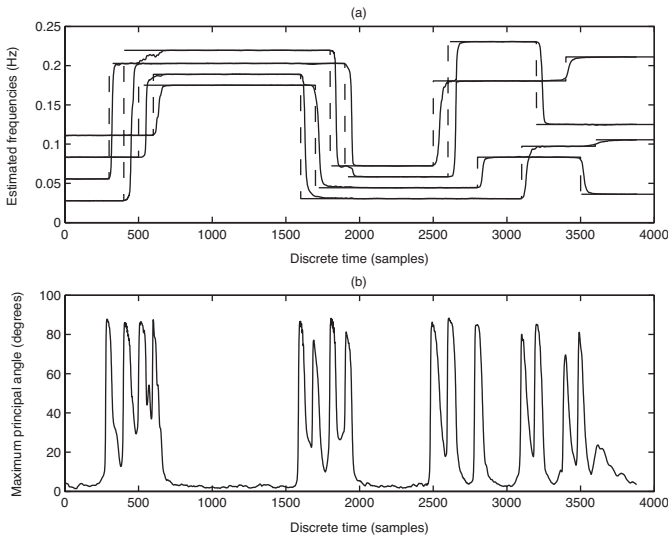


Fig. 3.  $O((N+L)r)$  SWASVD3 algorithm. (a) Frequency tracking. (b) Maximum principal angle trajectory.

Fig. 3 shows the result obtained with the ultra-fast SWASVD3 algorithm on the same test signal. It can be noticed that this algorithm reaches the same performance as SWASVD2.

These results have been compared with those obtained with some of the most robust subspace trackers found in the literature [2], [5]–[8], [18]–[20], [27], [28]. Three of them are illustrated in Figs. 4–6:

- the exponential forgetting window Bi-SVD1 algorithm by Strobach [7];
- the FAST algorithm by Real *et al.* [28], which is a recent contribution to sliding window SVD subspace tracking;
- our sliding window version of the NIC subspace tracker by Miao and Hua [19].

Despite the good performance of the Bi-SVD1 algorithm, its convergence is slower than that of SWASVD3 after abrupt signal variations.<sup>3</sup> This may be explained by the use of an

<sup>3</sup>The forgetting factor  $\alpha \simeq 0.99$  was chosen to get an effective window length equal to  $L$ .

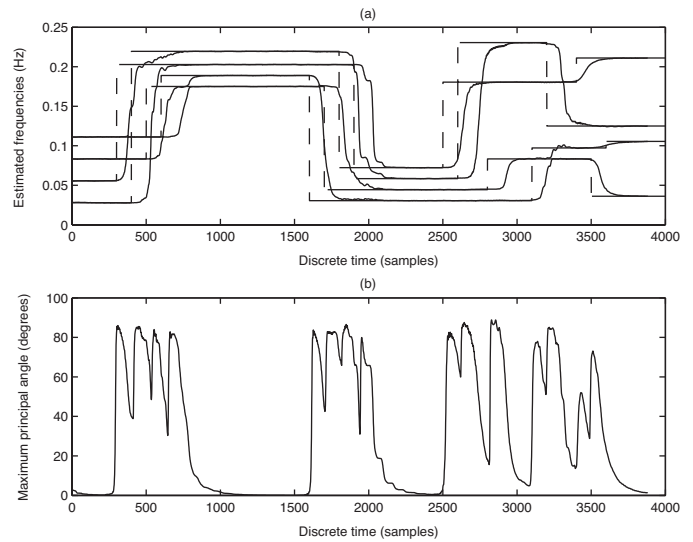


Fig. 4.  $O(Nr^2)$  Bi-SVD1 algorithm. (a) Frequency tracking. (b) Maximum principal angle trajectory.

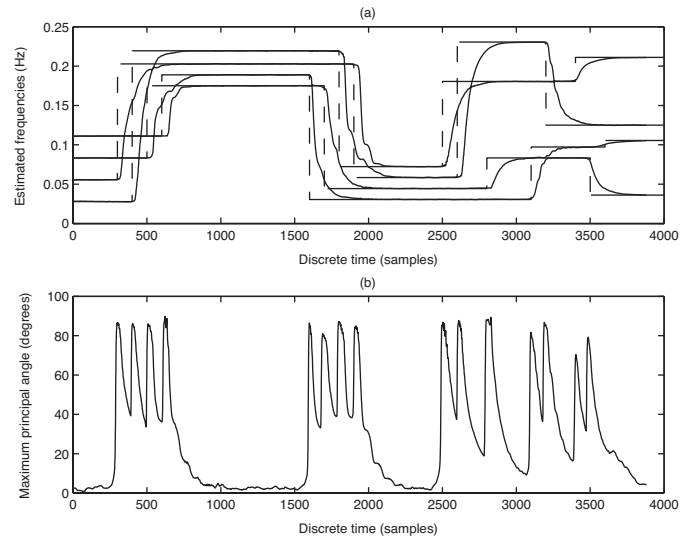


Fig. 5.  $O(NLr)$  FAST subspace tracker. (a) Frequency tracking. (b) Maximum principal angle trajectory.

exponential forgetting window. Note that the Bi-SVD3 subspace tracker, which has also been presented in [7], has a lower complexity (its dominant cost is  $80Nr$ ), but it proved to be unstable on this test signal.

Concurrently, the FAST subspace tracker is better than Bi-SVD1 in terms of the maximum principal angle error Fig. 5(b). However, its dominant cost is  $8NLr$ , and the frequency tracking response Fig. 5(a) remains slower than that of SWASVD3. Note that the dominant cost of the approximated FAST2 algorithm [28] is also  $8NLr$ .

The novel information criterion (NIC) subspace tracker was introduced in [19] as a robust generalization of the PAST algorithm [18]. Fig. 6(a) shows the frequency tracking obtained with our sliding window version of NIC,<sup>4</sup> whose dominant cost is  $30Nr$ . It can be noticed that this fast subspace tracker is very stable and converges much faster than Bi-SVD1 and FAST.

<sup>4</sup>The learning step size  $\eta$  was equal to 0.5.

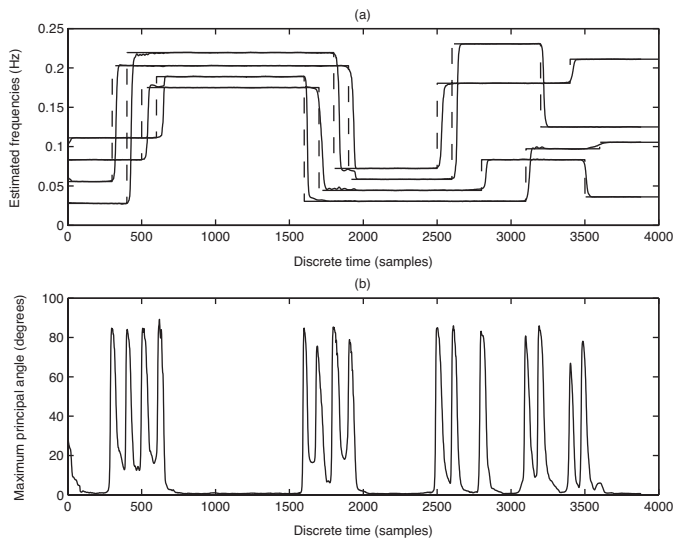


Fig. 6.  $O(Nr)$  sliding window NIC subspace tracker. (a) Frequency tracking. (b) Maximum principal angle trajectory.

However, this algorithm only converges to an orthonormal matrix spanning the principal subspace. It does not compute the singular vectors and values of the data matrix (which might be important for rank estimation and tracking) and does not guarantee the orthonormality of the subspace basis *at each time step* (which is required for some subspace-based estimation methods, such as MUSIC [31]).

Finally, SWASVD outperformed all the other subspace trackers that we have tested on the same test signal (Karasalo's algorithm [2], TQR-SVD [5], Loraf [6], Bi-SVD3 [7], NP3 [8], PAST [18], OPAST [20], SHSVD [27] and FAST2 [28]). These results were not presented here to keep the presentation as concise as possible.

## V. CONCLUSIONS

This paper introduced new SVD tracking algorithms derived from the classical bi-orthogonal iteration method. These algorithms have been designed for a sliding window data matrix, which is a characteristic that distinguishes them from most of existing subspace tracking techniques. The results obtained on synthetic signals in the frequency estimation context showed their robustness to abrupt signal variations.

We successfully obtained an ultra-fast tracking algorithm with linear complexity without degrading the excellent performance of our  $O((N + L)r^2)$  subspace tracker. This could be achieved by means of an approximated fast QR factorization.

Finally, these subspace tracking algorithms may be considered as the starting point of a real-time frequency tracker, whose full implementation would additionally require an adaptive version of the ESPRIT algorithm.

## APPENDIX ULTRA-FAST SWASVD3 ALGORITHM

This Appendix introduces the ultra-fast SWASVD3 tracking algorithm. Since there is no room here for a complete description, only the main steps will be highlighted, and some details required for a full implementation will be skipped.

### A. Fast Approximated QR Factorization

Remember that the first iteration in SWASVD2 relies on the low-dimensional QR factorization (20). Generally, this factorization requires  $12r^3$  operations. Now, suppose that  $\mathbf{R}_A(t-1)$  is not only upper triangular but also diagonal (in practice, this is nearly the case since  $\mathbf{R}_A$  converges to the diagonal matrix  $\mathbf{\Sigma}$  in the original bi-orthogonal iteration SVD algorithm of Table I). In this case,  $\mathbf{R}_A(t-1)^H$  is also diagonal and, therefore, upper triangular so that  $\mathbf{T}_B(t)$  defined in (19) is an upper triangular plus rank one matrix. In particular, it is well known that the QR factorization of such a matrix can be achieved in  $O(r^2)$  computations, using only  $2r$  Givens rotations [32, Sect. 12.5]. Therefore, (20) can be written

$$\mathbf{T}_B(t) = \tilde{\mathbf{G}}_B(t)\tilde{\mathbf{R}}_B(t) \quad (23)$$

where  $\tilde{\mathbf{G}}_B(t)$  is a product of  $2r$  Givens rotations, and  $\tilde{\mathbf{R}}_B(t)$  is a  $(r+1) \times r$  upper-triangular matrix (whose last row is equal to  $\mathbf{0}$  in this particular case).

In practice,  $\mathbf{R}_A(t-1)$  is not diagonal, and this fast QR-factorization cannot be achieved. However, since  $\mathbf{R}_A(t-1)$  is nearly diagonal, applying the fast QR-factorization technique as it is with this nondiagonal matrix gives a *nearly* upper triangular matrix  $\tilde{\mathbf{R}}_B(t)$ .

This fast approximated QR-factorization is the key step of our ultra-fast tracking algorithm. Note that (23) is not an approximation but a strict equality.

### B. Modification of the First Iteration

Equation (21) now becomes

$$\mathbf{B}(t) = \left( \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{Q}}_B(t-1) & \\ \hline \mathbf{z}_\perp(t) & \tilde{\mathbf{G}}_B(t) \end{array} \right) \tilde{\mathbf{R}}_B(t). \quad (24)$$

A new difficulty arises:  $\mathbf{Q}_B(t)$  can no longer be directly extracted from this factorization as in (22), since the last row of the nearly upper triangular matrix  $\tilde{\mathbf{R}}_B(t)$  is generally not equal to  $\mathbf{0}$ . Consequently, the dimensions of the second member matrices in (24) cannot be reduced.

Therefore, it will be necessary to explicitly force this last row to be zero. Suppose that there exists a rotation matrix  $\mathbf{G}_{R_B}(t)^H$  such that the last row of  $\mathbf{G}_{R_B}(t)^H \tilde{\mathbf{R}}_B(t)$  is equal to  $\mathbf{0}$ . Then, let

$$\left[ \begin{array}{c} \mathbf{R}_B(t) \\ \text{---} \\ \mathbf{0} \dots \mathbf{0} \end{array} \right] \triangleq \mathbf{G}_{R_B}(t)^H \tilde{\mathbf{R}}_B(t).$$

Now, (22) stands with

$$\mathbf{G}_B(t) \triangleq \tilde{\mathbf{G}}_B(t)\mathbf{G}_{R_B}(t). \quad (25)$$

Such a matrix  $\mathbf{G}_{R_B}(t)^H$  will be given in section c of the Appendix.

### C. Choice of an Appropriate Rotation Matrix

First, note that if  $\mathbf{z}_\perp(t) = \mathbf{0}$ , the last row of  $\tilde{\mathbf{R}}_B(t)$  is  $\mathbf{0}$ . From now on, suppose that  $\mathbf{z}_\perp(t) \neq \mathbf{0}$ . A first step toward the obtention of the rotation matrix  $\mathbf{G}_{R_B}(t)^H$  will be the computation of

a unitary vector  $\tilde{\mathbf{w}}(t)$  such that  $\tilde{\mathbf{w}}(t)^H \tilde{\mathbf{R}}_B(t) = [0 \dots 0]$ . Consider the  $r$ -dimensional vector

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{R}_A(t-1)^{-1} \mathbf{h}(t) - \mathbf{q}_{B_L}(t-1)$$

and the scalar

$$\mu(t) = \frac{1 + \mathbf{q}_{B_L}(t-1)^H \mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{z}_\perp(t)\|}.$$

Then, a direct calculation shows that the vector

$$\mathbf{w}(t) = \tilde{\mathbf{G}}_B(t)^H \begin{bmatrix} -\mathbf{v}(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}$$

satisfies the homogenous equation  $\mathbf{w}(t)^H \tilde{\mathbf{R}}_B(t) = [0 \dots 0]$ , and so does the normalized vector<sup>5</sup>

$$\tilde{\mathbf{w}}(t) \triangleq \frac{1}{\|\mathbf{w}(t)\| \exp(i \text{phase}(w_{r+1}(t)))} \mathbf{w}(t).$$

The phase shift is chosen so that  $\tilde{w}_{r+1}(t) \geq 0$  (this choice will be explained below).

Now, we are looking for a rotation matrix  $\mathbf{G}_{R_B}(t)^H$  whose last row is  $\tilde{\mathbf{w}}(t)^H$  (so that the last row of  $\mathbf{G}_{R_B}(t)^H \tilde{\mathbf{R}}_B(t)$  is  $\mathbf{0}$ ). An appropriate choice for  $\mathbf{G}_{R_B}(t)^H$  is a product of  $r$  Givens rotations,<sup>6</sup> as defined in (26) (because it would be the classical way of zeroing the last row of  $\tilde{\mathbf{R}}_B(t)$  if its  $r$  first rows had an exact upper-triangular structure).

$$\mathbf{G}_{R_B}(t)^H = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & c_r(t) & -s_r(t)^* \\ & & & s_r(t) & c_r(t) \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & c_2(t) & & & -s_2(t)^* \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ s_2(t) & & & & c_2(t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1(t) & & & & -s_1(t)^* \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ s_1(t) & & & & c_1(t) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Then, it can be easily shown that the last row of  $\mathbf{G}_{R_B}(t)^H$  is equal to

$$[\gamma_1(t)s_1(t), \gamma_2(t)s_2(t), \dots, \gamma_r(t)s_r(t)|\gamma_0(t)]$$

<sup>5</sup>Note that  $\mathbf{w}(t)$  cannot be equal to  $\mathbf{0}$  since either  $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$  or  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$ , which yields  $\mu(t) \neq 0$ .

<sup>6</sup>Note that these Givens rotations are not real but complex transformations. Their orthonormality is guaranteed if

- $c_n(t) \geq 0$ ;
- $|c_n(t)|^2 + |s_n(t)|^2 = 1$ .

where  $\gamma_n(t) = \prod_{i=n+1}^r c_i(t)$  for  $n \in \{1, \dots, r-1\}$ , and  $\gamma_r(t) = 1$ . To make this row equal to  $\tilde{\mathbf{w}}(t)^H$ , the coefficients  $c_n(t)$  and  $s_n(t)$  can be computed recursively as

$$\begin{aligned} \gamma_r(t) &= 1 \\ \text{for } n &= r \text{ down to } 1 \\ s_n(t) &= \frac{\tilde{w}_n(t)^*}{\gamma_n(t)} \\ c_n(t) &= \sqrt{1 - |s_n(t)|^2} \\ \gamma_{n-1}(t) &= \gamma_n(t)c_n(t). \end{aligned}$$

Note that all the  $c_n(t)$  are non-negative numbers so that  $\gamma_0(t) \geq 0$ . Therefore, it can be noticed that  $\tilde{w}_{r+1}(t) \geq 0$  was a necessary condition to guarantee the equality between  $\tilde{\mathbf{w}}(t)^H$  and the last row of  $\mathbf{G}_{R_B}(t)^H$  (this condition was sufficient because of the orthonormality of both row vectors).

Finally, the matrix  $\mathbf{G}_B(t)$  defined in (25) is expressed as a product of only  $2r + r$  Givens rotations. Therefore,  $\mathbf{Q}_B(t)$  can be computed using (22) in only  $96Lr$  operations (by recursively applying the Givens rotations). Consequently, the whole first iteration is reduced to linear complexity (see Table V).<sup>7, 8</sup>

#### D. Modification of the Second Iteration

Contrary to  $\mathbf{R}_B(t)$ , it will now be shown that  $\mathbf{R}_A(t)$  can be made exactly upper triangular in  $O(r^2)$  operations. Indeed, substituting (19) and (20) into (13) and (14) shows that  $\mathbf{R}_A(t)$  satisfies the recurrence

$$\mathbf{G}_A(t) \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{R}_A(t) & \begin{matrix} \times \\ \vdots \\ \times \end{matrix} \\ \hline 0 \dots 0 & \times \end{array} \right] = \tilde{\mathbf{T}}_A(t) \mathbf{G}_B(t) \quad (27)$$

where

$$\tilde{\mathbf{T}}_A(t) = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{R}_A(t-1) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \dots 0 & 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{h}}(t) & \\ \hline \|\mathbf{x}_\perp(t)\| & \|\mathbf{z}_\perp(t)\| \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{q}_{B_L}(t-1) \\ \hline \|\mathbf{z}_\perp(t)\| \end{array} \right]^H.$$

It can be noticed that the first member of (27) is an exact QR factorization of the second one. Therefore,  $\mathbf{G}_A(t)$  and  $\mathbf{R}_A(t)$  can be obtained by computing this QR factorization instead of using (14).

Moreover,  $\tilde{\mathbf{T}}_A(t)$  is an upper triangular plus rank-one matrix. It is well known that the QR factorization of such a matrix can be achieved using only  $2r$  Givens rotations.

<sup>7</sup>Note that the vector  $\mathbf{R}_A(t-1)^{-1} \mathbf{h}(t)$  can be computed in  $4r^2$  operations using simple back substitution, since  $\mathbf{R}_A(t-1)$  is triangular.

<sup>8</sup>The pseudo-code for SWASVD3 in Table V should not be implemented as it is. An efficient implementation should recursively apply all the Givens rotations without storing them in memory.

TABLE V  
ULTRA-FAST SLIDING WINDOW ADAPTIVE SVD ALGORITHM (SWASVD3)

| FOR EACH TIME STEP DO :   |                     |
|---|---------------------|
| <b>First Iteration :</b>  | <b>Complexity :</b> |
| $\mathbf{h}(t) = \mathbf{Q}_A(t-1)^H \mathbf{x}(t)$   | $8Nr$               |
| $\mathbf{z}_\perp(t) = [1, 0, \dots, 0]^T - \tilde{\mathbf{Q}}_B(t-1) \mathbf{q}_{B_L}(t-1)$  | $8Lr$               |
| $\tilde{\mathbf{z}}_\perp(t) = \frac{\mathbf{z}_\perp(t)}{\ \mathbf{z}_\perp(t)\ }$   | $10L$               |
| $\tilde{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{h}(t) - \mathbf{R}_A(t-1) \mathbf{q}_{B_L}(t-1)$   | $4r^2$              |
| $\mathbf{T}_B(t) = \tilde{\mathbf{G}}_B(t) \tilde{\mathbf{R}}_B(t)$   | $64r^2$             |
| $\mathbf{v}(t) = \mathbf{R}_A(t-1)^{-1} \tilde{\mathbf{h}}(t) - \mathbf{q}_{B_L}(t-1)$  | $4r^2$              |
| $\mu(t) = \frac{1 + \mathbf{q}_{B_L}(t-1)^H \mathbf{v}(t)}{\ \mathbf{z}_\perp(t)\ }$  | $8r$                |
| $\mathbf{w}(t) = \tilde{\mathbf{G}}_B(t)^H \begin{bmatrix} -\mathbf{v}(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}$  | $64r$               |
| $\tilde{\mathbf{w}}(t) = \frac{1}{\ \mathbf{w}(t)\  \exp(i \text{phase}(\mathbf{w}_{r+1}(t)))} \mathbf{w}(t)$   | $10r$               |
| $\gamma_r(t) = 1$   |                     |
| for $n = r$ downto 1  | $8r$                |
| $s_n(t) = \frac{\tilde{w}_n(t)^*}{\gamma_n(t)}$   |                     |
| $c_n(t) = \sqrt{1 -  s_n(t) ^2}$  |                     |
| $\gamma_{n-1}(t) = \gamma_n(t) c_n(t)$  |                     |
| end   |                     |
| $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_B(t) \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_B(t-1) \\ \tilde{\mathbf{z}}_\perp(t) \end{bmatrix} \mathbf{G}_B(t)$  | $96Lr$              |
| <b>Second Iteration :</b>   | <b>Complexity :</b> |
| $\mathbf{x}_\perp(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{Q}_A(t-1) \mathbf{h}(t)$   | $8Nr$               |
| $\tilde{\mathbf{x}}_\perp(t) = \frac{\mathbf{x}_\perp(t)}{\ \mathbf{x}_\perp(t)\ }$   | $10N$               |
| $\tilde{\mathbf{T}}_A(t) = \tilde{\mathbf{G}}_A(t) \tilde{\mathbf{R}}_A(t)$   | $32r^2$             |
| $\tilde{\mathbf{R}}_A(t) \mathbf{G}_B(t) = \mathbf{G}_{R_A}(t) \begin{bmatrix} \mathbf{R}_A(t) & \times \\ & \vdots \\ & \times \\ \hline 0 \dots 0 & \times \end{bmatrix}$ | $64r^2$             |
| $\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_A(t) \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_A(t-1) \\ \tilde{\mathbf{x}}_\perp(t) \end{bmatrix} \mathbf{G}_A(t)$                  | $192Nr$             |

Now, consider this fast QR factorization:

$$\tilde{\mathbf{T}}_A(t) = \tilde{\mathbf{G}}_A(t) \tilde{\mathbf{R}}_A(t).$$

Finally, the QR factorization of  $\tilde{\mathbf{R}}_A(t) \mathbf{G}_B(t)$  gives

$$\tilde{\mathbf{R}}_A(t) \mathbf{G}_B(t) = \mathbf{G}_{R_A}(t) \begin{bmatrix} \mathbf{R}_A(t) & \times \\ & \vdots \\ & \times \\ \hline 0 \dots 0 & \times \end{bmatrix} \quad (28)$$

and (27) and (16) now stand with

$$\mathbf{G}_A(t) \triangleq \tilde{\mathbf{G}}_A(t) \mathbf{G}_{R_A}(t). \quad (29)$$

Since  $\mathbf{G}_B(t)$  is a product of  $3r$  Givens rotations, it can be shown that the QR factorization in (28) can be achieved using

only  $4r$  Givens rotations.<sup>9</sup> Therefore, the whole QR factorization in (27) requires only  $2r + 4r$  Givens rotations, i.e.,  $O(r^2)$  operations. Then, the matrix  $\mathbf{Q}_A(t)$  can be computed using (16) in  $O(Nr)$  operations (by recursively applying the Givens rotations). Finally, the whole second iteration is reduced to linear complexity (see Table V).

It can be seen that the dominant cost of SWASVD3 is  $104(2N + L)r$ . Although this complexity is linear in  $r$ , the multiplicative factor is quite high. Therefore, this algorithm is less computationally demanding than SWASVD2 only for high values of  $r$  (for instance, if  $N$  is much smaller than  $L$ , SWASVD3 is faster than SWASVD2 for all  $r \geq 12$ ; in the general case,  $r \geq 24$  is a sufficient condition).

#### ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank their colleague P. Weyer-Brown for his helpful comments on the English grammar. They also acknowledge the anonymous reviewers for their constructive comments and corrections.

#### REFERENCES

- [1] P. Comon and G. H. Golub, "Tracking a few extreme singular values and vectors in signal processing," *Proc. IEEE*, vol. 78, pp. 1327–1343, Aug. 1990.
- [2] I. Karasalo, "Estimating the covariance matrix by signal subspace averaging," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, pp. 8–12, Feb. 1986.
- [3] D. J. Rabideau, "Fast, rank adaptive subspace tracking and applications," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, pp. 2229–2244, Sept. 1996.
- [4] M. Moonen, P. V. Dooren, and J. Vandewalle, "An SVD updating algorithm for subspace tracking," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 13, no. 4, pp. 1015–1038, 1992.
- [5] E. M. Dowling, L. P. Ammann, and R. D. DeGroat, "A TQR-iteration based adaptive SVD for real time angle and frequency tracking," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, pp. 914–926, Apr. 1994.
- [6] P. Strobach, "Low-rank adaptive filters," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, pp. 2932–2947, Dec. 1996.
- [7] —, "Bi-iteration SVD subspace tracking algorithms," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, pp. 1222–1240, May 1997.
- [8] Y. Hua, Y. Xiang, T. Chen, K. Abed-Meraim, and Y. Miao, "A new look at the power method for fast subspace tracking," *Digital Signal Processing*, vol. 9, no. 4, pp. 297–314, Oct. 1999.
- [9] C. H. Bischof and G. M. Shroff, "On updating signal subspaces," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, pp. 96–105, Jan. 1992.
- [10] G. W. Stewart, "An updating algorithm for subspace tracking," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, pp. 1535–1541, June 1992.
- [11] G. Xu, H. Zha, G. H. Golub, and T. Kailath, "Fast algorithms for updating signal subspaces," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 41, pp. 537–549, Aug. 1994.
- [12] E. Oja, "Neural networks, principal components and subspaces," *Int. J. Neural Syst.*, vol. 1, no. 1, pp. 61–68, 1989.
- [13] L. Xu, "Least mean square error reconstruction principle for self-organizing neural nets," *Neural Networks*, vol. 6, pp. 627–648, 1993.
- [14] T. Chen and S. Amari, "Unified stabilization approach to principal and minor components extraction algorithms," *Neural Networks*, vol. 14, no. 10, pp. 1377–1387, 2001.

<sup>9</sup>In particular,  $\mathbf{G}_B(t)$  is the product of  $\tilde{\mathbf{G}}_B(t)$  (which contains  $2r$  Givens rotations) and  $\mathbf{G}_{R_B}(t)$  (which contains  $r$  Givens rotations). Consequently, the QR factorization in (28) can be achieved in two steps.

- QR factorization of the product of an upper triangular matrix and  $\tilde{\mathbf{G}}_B(t)$ . It can be readily verified that the upper triangular structure can be recursively maintained (each Givens rotation in  $\tilde{\mathbf{G}}_B(t)$  can be compensated by a Givens rotation in  $\mathbf{G}_{R_A}(t)$ ).
- QR factorization of the product of an upper triangular matrix and  $\mathbf{G}_{R_B}(t)$ . It must be noticed that such a product is an upper triangular plus rank one matrix. Therefore, the fast QR factorization method presented in [32, Sect. 12.5] can be applied. It involves only  $2r$  Givens rotations.

- [15] S. Y. Kung, K. I. Diamantaras, and J. S. Taur, "Adaptive principal component extraction (APEX) and applications," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, pp. 1202–1217, Jan. 1995.
- [16] G. Mathew and V. U. Reddy, "Adaptive estimation of eigensubspace," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, pp. 401–411, Feb. 1995.
- [17] Z. Fu and E. M. Dowling, "Conjugate gradient eigenstructure tracking for adaptive spectral estimation," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, pp. 1151–1160, May 1995.
- [18] B. Yang, "Projection approximation subspace tracking," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, pp. 95–107, Jan. 1995.
- [19] Y. Miao and Y. Hua, "Fast subspace tracking and neural network learning by a novel information criterion," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, pp. 1967–1979, July 1998.
- [20] K. Abed-Meraim, A. Chkeif, and Y. Hua, "Fast orthonormal PAST algorithm," *IEEE Signal Processing Lett.*, vol. 7, pp. 60–62, Mar. 2000.
- [21] S. C. Douglas, "Numerically-robust adaptive subspace tracking using householder transformations," in *Proc. IEEE Sensor Array Multichannel Signal Process. Workshop*, 2000, pp. 499–503.
- [22] R. D. DeGroat, "Noniterative subspace tracking," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, pp. 571–577, Mar. 1992.
- [23] C. Riou and T. Chonavel, "Fast adaptive eigenvalue decomposition: A maximum likelihood approach," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process.*, 1997, pp. 3565–3568.
- [24] C. S. MacInnes, "Fast, accurate subspace tracking using operator restriction analysis," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process.*, 1998, pp. 1357–1360.
- [25] B. Champagne, "SVD-updating via constrained perturbations with application to subspace tracking," *Signals, Syst., Comput.*, vol. 2, pp. 1379–1385, 1996.
- [26] R. Badeau, K. Abed-Meraim, G. Richard, and B. David, "Sliding window orthonormal PAST algorithm," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 5, Apr. 2003, pp. 261–264.
- [27] P. Strobach, "Square Hankel SVD subspace tracking algorithms," *Signal Process.*, vol. 57, no. 1, pp. 1–18, Feb. 1997.
- [28] E. C. Real, D. W. Tufts, and J. W. Cooley, "Two algorithms for fast approximate subspace tracking," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 47, pp. 1936–1945, July 1999.
- [29] M. Clint and A. Jennings, "A simultaneous iteration method for the unsymmetric eigenvalue problem," *J. Inst. Math. Appl.*, vol. 8, pp. 111–121, 1971.
- [30] G. W. Stewart, *Topics in Numerical Analysis*, 2nd ed. New York: J. J. H. Miller, 1975, pp. 169–185.
- [31] R. O. Schmidt, "A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation," Ph.D. dissertation, Stanford Univ., Stanford, CA, 1981.
- [32] G. H. Golub and C. F. V. Loan, *Matrix Computations*, 3rd ed. Baltimore, MD: Johns Hopkins Univ. Press, 1996.
- [33] R. Badeau, R. Boyer, and B. David, "EDS parametric modeling and tracking of audio signals," in *Proc. Int. Conf. Digital Audio Effects*, Sept. 2002, pp. 139–144.
- [34] R. Roy and T. Kailath, "ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 37, pp. 984–995, July 1989.
- [35] P. Strobach, "Fast recursive subspace adaptive ESPRIT algorithms," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, pp. 2413–2430, Sept. 1998.



**Roland Badeau** (M'02) was born in Marseilles, France, on August 28, 1976. He received the State Engineering degree from the École Polytechnique, Palaiseau, France, in 1999, the State Engineering Degree from the École Nationale Supérieure des Télécommunications (ENST), Paris, in 2001, and the M.Sc. degree in applied mathematics from the École Normale Supérieure (ENS), Cachan, France, in 2001. In 2001, he joined the Department of Signal and Image Processing, ENST, as an Assistant Professor, where he is also pursuing the Ph.D.

degree.

His research interests include adaptive subspace algorithms and audio signal processing.



**Gaël Richard** (M'02) received the State Engineering degree from the École Nationale Supérieure des Télécommunications (ENST), Paris, France, in 1990 and the Ph.D. degree from LIMSI-CNRS, University of Paris-XI, in 1994 in the area of speech synthesis. He received the Habilitation à Diriger des Recherches degree from the University of Paris XI in September 2001.

He then spent two years at the CAIP Center, Rutgers University, Piscataway, NJ, in the speech processing group of Prof. J. Flanagan, where he explored innovative approaches for speech production. Between 1997 and 2001, he successively worked for Matra Nortel Communications and for Philips Consumer Communications. In particular, he was the project manager of several large-scale European projects in the field of multimodal verification and speech processing. He joined the Department of Signal and Image Processing, ENST, as an Associate Professor in the field of audio and multimedia signals processing. He is co-author of over 30 papers and inventor in a number of patents, he is also one of the expert of the European commission in the field of man/machine interfaces.

Dr. Richard is a member of the ISCA.



**Bertrand David** was born on March 12, 1967, in Paris, France. He received the M.Sc. degree from the University of Paris-Sud, in 1991 and the Agrégation, a competitive french examination for the recruitment of teachers, in the field of applied physics, from the École Normale Supérieure (ENS), Cachan, France. He received the Ph.D. degree from the University of Paris 6 in 1999 in the field of musical acoustics and signal processing.

From 1996 to 2001, he was a teacher in a graduate school in electrical engineering, computer science, and communication. He is now an Associate Professor with the Department of Signal and Image Processing, École Nationale Supérieure des Télécommunications (ENST), Paris, France. His research interests include parametric methods for the analysis/synthesis of musical signals and parameter extraction for music description and musical acoustics.



---

# Bibliographie

---



---

## Bibliographie de l'auteur

---

### — Articles de revues —

- [Badeau *et al.*, 2004a] R. BADEAU, G. RICHARD, et B. DAVID. Sliding window adaptive SVD algorithms. *IEEE Trans. Signal Processing*, 52(1) :1–10, janvier 2004. (reproduit en annexe).
- [Badeau *et al.*, 2005a] R. BADEAU, B. DAVID, et G. RICHARD. A new perturbation analysis for signal enumeration in rotational invariance techniques. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2005. (à paraître).
- [Badeau *et al.*, 2005b] R. BADEAU, B. DAVID, et G. RICHARD. Fast Approximated Power Iteration Subspace Tracking. *IEEE Trans. Signal Processing*, août 2005. (à paraître).
- [Badeau *et al.*, 2005c] R. BADEAU, B. DAVID, et G. RICHARD. High resolution spectral analysis of mixtures of complex exponentials modulated by polynomials. *IEEE Trans. Signal Processing*, 2005. (accepté sous réserve de modifications mineures).

### — Articles de conférences —

- [Alonso *et al.*, 2003a] M. ALONSO, R. BADEAU, B. DAVID, et G. RICHARD. Musical tempo estimation using noise subspace projections. Dans *Proc. of WASPAA '03*, pages 95–98, New Paltz, NY, USA, octobre 2003. IEEE.
- [Badeau *et al.*, 2002] R. BADEAU, R. BOYER, et B. DAVID. EDS parametric modeling and tracking of audio signals. Dans *Proc. of DAFX-02*, pages 139–144, Hambourg, Allemagne, septembre 2002. (reproduit en annexe).
- [Badeau *et al.*, 2003a] R. BADEAU, K. ABED-MERAIM, G. RICHARD, et B. DAVID. Sliding Window Orthonormal PAST Algorithm. Dans *Proc. of ICASSP'03*, volume 5, pages 261–264, Hong Kong, Chine, avril 2003. IEEE.
- [Badeau *et al.*, 2003b] R. BADEAU, G. RICHARD, et B. DAVID. Adaptive ESPRIT algorithm based on the PAST subspace tracker. Dans *Proc. of ICASSP'03*, volume 6, pages 229–232, Hong Kong, Chine, avril 2003. IEEE.
- [Badeau *et al.*, 2003c] R. BADEAU, G. RICHARD, et B. DAVID. Approximated power iterations for fast subspace tracking. Dans *Proc. of 7th Int. Symp. on Signal Proc. and its Applications*, volume 2, pages 583–586, Paris, France, juillet 2003.
- [Badeau *et al.*, 2003d] R. BADEAU, G. RICHARD, et B. DAVID. Suivi d'espace dominant par la méthode des puissances itérées. Dans *Actes du 19ème colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images*, volume 1, pages 137–140, Paris, France, septembre 2003.
- [Badeau *et al.*, 2004b] R. BADEAU, B. DAVID, et G. RICHARD. Selecting the modeling order for the ESPRIT high resolution method : an alternative approach. Dans *Proc. of ICASSP'04*, volume 2, pages 1025–1028, Montréal, Québec, Canada, mai 2004. IEEE.



- [Badeau *et al.*, 2005d] R. BADEAU, B. DAVID, et G. RICHARD. Yet Another Subspace Tracker. Dans *Proc. of ICASSP'05*, volume 4, pages 329–332, Philadelphie, PA, USA, mars 2005. IEEE.
- [Badeau *et al.*, 2005e] R. BADEAU, G. RICHARD, et B. DAVID. Fast adaptive ESPRIT algorithm. Dans *Proc. of SSP'05*, Bordeaux, France, juillet 2005. IEEE. (à paraître).
- [David *et al.*, 2002] B. DAVID, R. BADEAU, et G. RICHARD. Sintrack analysis for tracking components of musical signals. Dans *Proc. of the Forum Acusticum Sevilla 2002*, Séville, Espagne, septembre 2002.
- [David *et al.*, 2003] B. DAVID, G. RICHARD, et R. BADEAU. An EDS modeling tool for tracking and modifying musical signals. Dans *Proc. of SMAC'03*, volume 2, pages 715–718, Stockholm, Suède, août 2003. (reproduit en annexe).

---

## Bibliographie du document

---

- [Abed-Meraim *et al.*, 2000] K. ABED-MERAÏM, A. CHKEÏF, et Y. HUA. Fast orthonormal PAST algorithm. *IEEE Signal Proc. Letters*, 7(3) :60–62, mars 2000.
- [Akaike, 1973] H. AKAIKE. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. Dans B. N. PETROV et F. CSAKI, éditeurs, *Proc. of the 2nd International Symposium on Information Theory*, pages 267–281, Budapest, Hongrie, 1973. Akademia Kiado.
- [Alonso *et al.*, 2003b] M. ALONSO, B. DAVID, et G. RICHARD. A Study of Tempo Tracking Algorithms from Polyphonic Music Signals. Dans *Proc. of 4th COST 276 Workshop*, France, mars 2003.
- [Barabell, 1983] A. J. BARABELL. Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms. Dans *Proc. of ICASSP'83*, pages 336–339, Boston, MA, USA, 1983. IEEE.
- [Barthelemy et Willett, 1993] A. C. BARTHELEMY et P. K. WILLETT. Prewhitening of colored noise fields for detection of threshold sources. Dans *Conf. Record of the 27th Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers*, volume 1, pages 243–247, Pacific Grove, CA, USA, novembre 1993.
- [Bienvenu et Kopp, 1983] G. BIENVENU et L. KOPP. Optimality of high-resolution array processing using the eigensystem method. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 31(5) :1235–1245, octobre 1983.
- [Bischof et Shroff, 1992] C. H. BISCHOF et G. M. SHROFF. On updating signal subspaces. *IEEE Trans. Signal Processing*, 40 :96–105, 1992.
- [Bishop et Djuric, 1996] W. B. BISHOP et P. M. DJURIC. Model order selection of damped sinusoids in noise by predictive densities. *IEEE Trans. Signal Processing*, 44(3) :611–619, mars 1996.
- [Boley *et al.*, 1997] D. L. BOLEY, F. T. LUK, et D. VANDEVOORDE. A General Vandermonde Factorization of a Hankel Matrix. Dans *Int'l Lin. Alg. Soc. (ILAS) Symp. on Fast Algorithms for Control, Signals and Image Processing*, Winnipeg, Canada, 1997.
- [Boyer et Abed-Meraim, 2004] R. BOYER et K. ABED-MERAÏM. Audio modeling based on delayed sinusoids. *IEEE Trans. Speech Audio Processing*, 12(2) :110–120, mars 2004.
- [Boyer *et al.*, 2002] R. BOYER, S. ESSID, et N. MOREAU. Non-stationary signal parametric modeling techniques with an application to low bit rate audio coding. Dans *Proc. of 6th Int. Conf. on Signal Processing*, volume 1, pages 430–433, Beijing, Chine, août 2002.
- [Cardoso et Moulines, 1995] J. F. CARDOSO et E. MOULINES. Asymptotic performance analysis of direction-finding algorithms based on fourth-order cumulants. *IEEE Trans. Signal Processing*, 43 :214–224, janvier 1995.

- [Champagne et Liu, 1998] B. CHAMPAGNE et Q.-G. LIU. Plane rotation-based EVD updating schemes for efficient subspace tracking. *IEEE Trans. Signal Processing*, 46(7) :1886–1900, juillet 1998.
- [Chen et Amari, 2001] T. CHEN et S. AMARI. Unified stabilization approach to principal and minor components extraction algorithms. *Neural Networks*, 14(10) :1377–1387, 2001.
- [Chonavel *et al.*, 2003] T. CHONAVEL, B. CHAMPAGNE, et C. RIOU. Fast adaptive eigenvalue decomposition : a maximum likelihood approach. *Signal processing*, 83(2) :307–324, février 2003.
- [Chowning, 1973] J. M. CHOWNING. The synthesis of complex audio spectra by means of frequency modulation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 21(7) :526–534, 1973.
- [Comon et Golub, 1990] P. COMON et G. H. GOLUB. Tracking a few extreme singular values and vectors in signal processing. Dans *Proc. of IEEE*, volume 78, pages 1327–1343, août 1990.
- [David, 1999] B. DAVID. *Caractérisations acoustiques de structures vibrantes par mise en atmosphère raréfiée*. PhD thesis, University of Paris VI, 1999.
- [Davila, 2000] C. E. DAVILA. Efficient, high performance, subspace tracking for time-domain data. *IEEE Trans. Signal Processing*, 48(12) :3307–3315, décembre 2000.
- [De Moor, 1993] B. DE MOOR. The singular value decomposition and long and short spaces of noisy matrices. *IEEE Trans. Signal Processing*, 41(9) :2826–2838, septembre 1993.
- [DeGroat, 1992] R. D. DEGROAT. Noniterative subspace tracking. *IEEE Trans. Signal Processing*, 40(3) :571–577, mars 1992.
- [Dologlou *et al.*, 1997] I. DOLOGLOU, S. VAN HUFFEL, et D. VAN ORMONDT. Improved signal enhancement procedures applied to exponential data modeling. *IEEE Trans. Signal Processing*, 45(3) :799–803, mars 1997.
- [Douglas, 2000] S. C. DOUGLAS. Numerically-robust adaptive subspace tracking using Householder transformations. Dans *Proc. of Sensor Array and Multichannel Signal Proc. Workshop*, pages 499–503. IEEE, 2000.
- [Dowling *et al.*, 1994] E. M. DOWLING, L. P. AMMANN, et R. D. DEGROAT. A TQR-iteration based adaptive SVD for real time angle and frequency tracking. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42(4) :914–926, avril 1994.
- [Duvaut, 1994] P. DUVAUT. *Traitement du signal*. Hermes, Paris, France, 1994.
- [Ephraim et Van Trees, 1995] Y. EPHRAIM et H. L. VAN TREES. A signal subspace approach for speech enhancement. *IEEE Trans. Speech Audio Processing*, 3(4) :251–266, juillet 1995.
- [Eriksson *et al.*, 1993] A. ERIKSSON, P. STOICA, et T. SODERSTROM. Second-order properties of MUSIC and ESPRIT estimates of sinusoidal frequencies in high SNR scenarios. *IEE Proceedings on Radar, Sonar and Navigation*, 140(4) :266–272, août 1993.
- [Fu et Dowling, 1995] Z. FU et E. M. DOWLING. Conjugate gradient eigenstructure tracking for adaptive spectral estimation. *IEEE Trans. Signal Processing*, 43(5) :1151–1160, mai 1995.
- [Fuchs, 1992] J. J. FUCHS. Estimation of the number of signals in the presence of unknown correlated sensor noise. *IEEE Trans. Signal Processing*, 40(5) :1053–1061, mai 1992.
- [Gini et Bordoni, 2003] F. GINI et F. BORDONI. On the behavior of information theoretic criteria for model order selection of InSAR signals corrupted by multiplicative noise. *Signal Processing*, 83 :1047–1063, 2003.
- [Golub et Van Loan, 1996] G. H. GOLUB et C. F. VAN LOAN. *Matrix computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, UK, third édition, 1996.

- [Goodwin, 1996] M. GOODWIN. Nonuniform filterbank design for audio signal modeling. Dans *Conf. Record of the 30th Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers*, volume 2, pages 1229–1233, novembre 1996.
- [Goto et Muraoka, 1997] M. GOTO et Y. MURAOKA. Real-time Rhythm Tracking for Drumless Audio Signals. Dans *Proc. of the IJCAI'97*, 1997.
- [Graham et al., 1994] R. L. GRAHAM, D. E. KNUTH, et O. PATASHNIK. *Concrete Mathematics : A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA, second édition, 1994.
- [Göransson, 1994] B. GÖRANSSON. Robust direction estimation in the presence of spatially correlated noise. Dans *Proc. of 7th Workshop on Statistical and Array Processing*, pages 157–160, 1994.
- [Göransson et Ottersten, 1999] B. GÖRANSSON et B. OTTERSTEN. Direction estimation in partially unknown noise fields. *IEEE Trans. Signal Processing*, 47(9) :2375–2385, septembre 1999.
- [Grouffaud et al., 1996] J. GROUFFAUD, P. LARZABAL, et H. CLERGEOT. Some properties of ordered eigenvalues of a Wishart matrix : application in detection test and model order selection. Dans *Proc. of ICASSP'96*, volume 5, pages 2465–2468. IEEE, 1996.
- [Hermus et al., 2002] K. HERMUS, W. VERHELST, et P. WAMBACQ. Psychoacoustic modeling of audio with exponentially damped sinusoids. Dans *Proc. of ICASSP'02*, volume 2, pages 1821–1824. IEEE, 2002.
- [Hermus et al., 2000] K. HERMUS, W. VERHELST, P. WAMBACQ, et P. LEMMERLING. Total Least Squares based subband modelling for scalable speech representations with damped sinusoids. Dans *Proc. of International Conference on Spoken Language Processing*, volume 3, pages 1129–1132, Beijing, Chine, octobre 2000.
- [Hermus et Wambacq, 2004] K. HERMUS et P. WAMBACQ. Assessment of signal subspace based speech enhancement for noise robust speech recognition. Dans *Proc. of ICASSP'04*, volume 1, pages 945–948. IEEE, mai 2004.
- [Horn et Johnson, 1985] R. A. HORN et C. R. JOHNSON. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.
- [Hua et Sarkar, 1990] Y. HUA et T. K. SARKAR. Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 38(5) :814–824, mai 1990.
- [Hua et Sarkar, 1991] Y. HUA et T. K. SARKAR. On SVD for estimating generalized eigenvalues of singular matrix pencil in noise. *IEEE Trans. Signal Processing*, 39(4) :892–900, avril 1991.
- [Hua et al., 1999] Y. HUA, Y. XIANG, T. CHEN, K. ABED-MERAIM, et Y. MIAO. A new look at the power method for fast subspace tracking. *Digital Signal Processing*, octobre 1999.
- [Huffel, 1993] S. Van HUFFEL. Enhanced resolution based on minimum variance estimation and exponential data modeling. *Signal Processing*, 33(3) :333–355, septembre 1993.
- [Jeanneau et al., 1998] M. JEANNEAU, P. MOUYON, et C. PENDARIES. Sintrack analysis, application to detection and estimation of flutter for flexible structures. Dans *Proc. of EUSIPCO*, pages 789–792, Ile de Rhodes, Grèce, septembre 1998.
- [Jensen et al., 2004] J. JENSEN, R. HEUSDENS, et S. H. JENSEN. A perceptual subspace approach for modeling of speech and audio signals with damped sinusoids. *IEEE Trans. Speech Audio Processing*, 12(2) :121–132, mars 2004.
- [Jensen et al., 1999] J. JENSEN, S. H. JENSEN, et E. HANSEN. Exponential Sinusoidal Modeling of Transitional Speech Segments. Dans *Proc. of ICASSP'99*, volume 1, pages 473–476. IEEE, mars 1999.

- [Kahrs et Brandenbourg, 1998] M. KAHRS et K. BRANDENBOURG. *Applications of Digital Signal Processing to Audio and Acoustics*. Kluwer Academic Press, Dordrecht, Pays-Bas, 1998.
- [Karasalo, 1986] I. KARASALO. Estimating the covariance matrix by signal subspace averaging. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 34 :8–12, février 1986.
- [Karjalainen *et al.*, 2003] M. KARJALAINEN, P. A. A. ESQUEF, et V. VÄLIMÄKI. Making of a computer carillon. Dans *Proc. of SMAC'03*, volume 1, pages 339–342, Stockholm, Suède, août 2003.
- [Kay, 1993] S. M. KAY. *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1993.
- [Keiler et Marchand, 2002] F. KEILER et S. MARCHAND. Survey on extraction of sinusoids in stationary sounds. Dans *Proc. of DAFx-02*, pages 51–58, Hambourg, Allemagne, septembre 2002.
- [Kincaid et Cheney, 1996] D. KINCAID et W. CHENEY. *Numerical analysis*. Brooks/Cole Publishing, Pacific Grove, Californie, USA, second édition, 1996.
- [Klapuri, 1999] A. KLAURI. Sound Onset Detection by Applying Psychoacoustic Knowledge. Dans *Proc. of ICASSP'99*, Arizona, USA, mars 1999.
- [Kot *et al.*, 1987] A. KOT, S. PARTHASARATHY, D. TUFTS, et R. VACCARO. The statistical performance of state-variable balancing and Prony's method in parameter estimation. Dans *Proc. of ICASSP'87*, volume 12, pages 1549–1552, avril 1987.
- [Kumaresan, 1983] R. KUMARESAN. On the zeros of the Linear Prediction-error filter for deterministic signals. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 31(1) :217–220, février 1983.
- [Kumaresan et Tufts, 1982] R. KUMARESAN et D. W. TUFTS. Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 30(6) :833–840, décembre 1982.
- [Kundu et Mitra, 2000] D. KUNDU et A. MITRA. Detecting the number of signals for an undamped exponential model using cross-validation approach. *Signal Processing*, 80(3) :525–534, 2000.
- [Kung *et al.*, 1983] S. Y. KUNG, K. S. ARUN, et D. B. RAO. State-space and singular value decomposition based approximation methods for harmonic retrieval problem. *J. of Opt. Soc. of America*, 73 :1799–1811, décembre 1983.
- [Kung *et al.*, 1994] S. Y. KUNG, K. I. DIAMANTARAS, et J. S. TAUR. Adaptive principal component extraction (apex) and applications. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42(5) :1202–1217, mai 1994.
- [Lambourg et Chaigne, 1993] C. LAMBOURG et A. CHAIGNE. Measurements and modeling of the admittance matrix at bridge in guitars. Dans *Proc. of SMAC'93*, pages 449–453, Stockholm, Suède, juillet 1993.
- [Laroche, 1989] J. LAROCHE. A new analysis / synthesis system of musical signals using Prony's method – application to heavily damped percussive sounds. Dans *Proc. of ICASSP'89*, volume 3, pages 2053–2056. IEEE, mai 1989.
- [Laroche, 1993] J. LAROCHE. The use of the Matrix Pencil method for the spectrum analysis of musical signals. *Journal of the Acoustical Society of America*, 94(4) :1958–1965, octobre 1993.
- [Laroche, 2001] J. LAROCHE. Estimating Tempo, Swing, and Beat Locations in Audio Recordings. Dans *Proc. of WASPAA'01*, New York, NY, USA, octobre 2001.
- [Le Cadre, 1989] J. P. LE CADRE. Parametric methods for spatial signal processing in the presence of unknown colored noise fields. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 37(7) :965–983, juillet 1989.
- [Lee et Lee, 1995] J.-J. LEE et B. G. LEE. A design of nonuniform cosine modulated filter banks. *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 42(11) :732–737, novembre 1995.

- [Levine *et al.*, 1997] S. N. LEVINE, T. S. VERMA, et J. O. SMITH. Alias-free multiresolution sinusoidal modeling for polyphonic, wideband audio. Dans *Proc. of WASPAA'97*, New Paltz, NY, USA, octobre 1997. IEEE.
- [Li *et al.*, 1997] Y. LI, K. LIU, et J. RAZAVILAR. A parameter estimation scheme for damped sinusoidal signals based on low-rank Hankel approximation. *IEEE Trans. Signal Processing*, 45 :481–486, février 1997.
- [Liavas et Regalia, 2001] A. P. LIAVAS et P. A. REGALIA. On the behavior of Information Theoretic Criteria for model order selection. *IEEE Trans. Signal Processing*, 49(8) :1689–1695, août 2001.
- [Liavas *et al.*, 1999] A. P. LIAVAS, P. A. REGALIA, et J.-P. DELMAS. Blind channel approximation : effective channel order determination. *IEEE Trans. Signal Processing*, 47(12) :3336–3344, décembre 1999.
- [Liu *et al.*, 1994] K. J. R. LIU, D. P. O'LEARY, G. W. STEWART, et Y.-J. J. WU. URV ESPRIT for tracking time-varying signals. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42(12) :3443–3448, décembre 1994.
- [Liu et Champagne, 1996] Q. G. LIU et B. CHAMPAGNE. An adaptive ESPRIT algorithm based on perturbation of unsymmetrical matrices. Dans *Proc. of 8th EUSIPCO*, pages 539–542, Trieste, Italie, septembre 1996.
- [MacInnes, 1998] C. S. MACINNES. Fast, accurate subspace tracking using operator restriction analysis. Dans *Proc. of ICASSP'98*, pages 1357–1360. IEEE, 1998.
- [Marcos *et al.*, 1998] S. MARCOS, J. SANCHEZ-ARAUJO, N. BERTAUX, P. LARZABAL, et P. FORSTER. *Les Méthodes à haute résolution : traitement d'antenne et analyse spectrale. Chapitres 4 et 5*. Hermès, Paris, France, 1998. Ouvrage collectif sous la direction de S. Marcos.
- [Mathew et Reddy, 1995] G. MATHEW et V. U. REDDY. Adaptive estimation of eigensubspace. *IEEE Trans. Signal Processing*, 43(2) :401–411, février 1995.
- [Mc Aulay et Quatieri, 1986] R. J. MC AULAY et T. F. QUATIERI. Speech analysis and synthesis based on a sinusoidal representation. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 34(4) :744–754, août 1986.
- [Meddis et O'Mard, 1997] R. MEDDIS et L. O'MARD. A Unitary Model of Pitch Perception. *JASA*, 102, septembre 1997.
- [Miao et Hua, 1998] Y. MIAO et Y. HUA. Fast subspace tracking and neural network learning by a novel information criterion. *IEEE Trans. Signal Processing*, 46(7) :1967–1979, juillet 1998.
- [Moonen *et al.*, 1992] M. MOONEN, P. VAN DOOREN, et J. VANDEWALLE. An SVD updating algorithm for subspace tracking. *SIAM J. Matrix Ana. Appl.*, 13(4) :1015–1038, 1992.
- [Moonen *et al.*, 1994] M. MOONEN, F. J. VANPOUCKE, et E. F. DEPRETTERE. Parallel and adaptive high-resolution direction finding. *IEEE Trans. Signal Processing*, 42(9) :2439–2448, septembre 1994.
- [Moro *et al.*, 1997] J. MORO, J. V. BURKE, et M. L. OVERTON. On the Lidskii-Vishik-Lyusternik perturbation theory for eigenvalues of matrices with arbitrary Jordan structure. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 18(4) :793–817, octobre 1997.
- [Moulines et Laroche, 1995] E. MOULINES et J. LAROCHE. Non parametric techniques for pitch-scale and time-scale modification of speech. *Speech Communication*, pages 175–205, février 1995.
- [Nieuwenhuijse *et al.*, 1998] J. NIEUWENHUIJSE, R. HEUSENS, et Ed. F. DEPRETTERE. Robust exponential modeling of audio signals. Dans *Proc. of ICASSP'98*, volume 6, pages 3581–3584. IEEE, mai 1998.

- [Oja, 1989] E. OJA. Neural networks, principal components and subspaces. *Int. journal of neural systems*, 1(1) :61–68, 1989.
- [Paulus et Klapuri, 2002] J. PAULUS et A. KLAPURI. Measuring The Similarity of Rhythmic Patterns. Dans *Proc. of ISMIR'02, 3rd Int. Conf. on Music Information Retrieval*, Paris, France, octobre 2002.
- [Pisarenko, 1973] V. F. PISARENKO. The retrieval of harmonics from a covariance function. *Geophysical J. Royal Astron. Soc.*, 33 :347–366, 1973.
- [Rabideau, 1996] D. J. RABIDEAU. Fast, rank adaptive subspace tracking and applications. *IEEE Trans. Signal Processing*, 44(9) :2229–2244, septembre 1996.
- [Rao et Zhao, 1993] C. R. RAO et L. C. ZHAO. Asymptotic behavior of maximum likelihood estimates of superimposed exponential signals. *IEEE Trans. Signal Processing*, 41(3) :1461–1464, mars 1993.
- [Real et al., 1999] E. C. REAL, D. W. TUFTS, et J. W. COOLEY. Two algorithms for fast approximate subspace tracking. *IEEE Trans. Signal Processing*, 47(7) :1936–1945, juillet 1999.
- [Riche de Prony, 1795] G. M. RICHE DE PRONY. Essai expérimental et analytique : sur les lois de la dilatabilité de fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alcool à différentes températures. *Journal de l'école polytechnique*, 1(22) :24–76, 1795.
- [Rissanen, 1978] J. RISSANEN. Modeling by shortest data description. *Automatica*, 14 :465–471, 1978.
- [Roman, 1984] S. ROMAN. *The Umbral Calculus*. Academic Press, New York, NY, USA, 1984. §1.2 : The Lower Factorial Polynomial.
- [Roy et Kailath, 1987] R. ROY et T. KAILATH. Total least squares ESPRIT. Dans *Proc. of 21st Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, pages 297–301, novembre 1987.
- [Roy et al., 1986] R. ROY, A. PAULRAJ, et T. KAILATH. ESPRIT—A subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 34(5) :1340–1342, octobre 1986.
- [Saarnisaari, 1999] H. SAARNISAARI. Robustness of the MUSIC algorithm to Errors in Estimation the Dimensions of the Subspaces : Delay Estimation in DS/SS in the Presence of Interference. Dans *Proc. of the Military Communications Conference MILCOM'99*, Atlantic City, NJ, USA, 1999.
- [Scharf, 1991] L. L. SCHARF. *Statistical signal processing*. Addison Wesley, New York, NY, USA, 1991.
- [Scheirer, 1998] E. D. SCHEIRER. Tempo and Beat Analysis of Acoustic Music Signals. *JASA*, 103 :588–601, janvier 1998.
- [Schmidt, 1981] R. O. SCHMIDT. *A signal subspace approach to multiple emitter location and spectral estimation*. PhD thesis, Stanford University, Stanford, Californie, USA, novembre 1981.
- [Schmidt, 1986] R. O. SCHMIDT. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 34(3) :276–280, mars 1986.
- [Schwarz, 1978] G. SCHWARZ. Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2) :461–464, 1978.
- [Seppänen, 2001] J. SEPPÄNEN. Tatum Grid Analysis of Musical Signals. Dans *Proc. of WASPAA'01*, New York, NY, USA, octobre 2001.
- [Serra et Smith, 1990] X. SERRA et J. SMITH. Spectral modeling synthesis : a sound analysis/synthesis based on a deterministic plus stochastic decomposition. *Computer Music Journal*, 14(4), 1990.
- [Stewart, 1992] G. W. STEWART. An updating algorithm for subspace tracking. *IEEE Trans. Signal Processing*, 40 :1535–1541, juin 1992.

- [Stoica *et al.*, 2000] P. STOICA, H. LI, et J. LI. Amplitude estimation of sinusoidal signals : survey, new results, and an application. *IEEE Trans. Signal Processing*, 48(2) :338–352, 2000.
- [Stoica et Nehorai, 1988] P. STOICA et A. NEHORAI. Study of the statistical performance of the Pisarenko harmonic decomposition method. *IEE Proceedings Radar and Signal Processing*, 135(2) :161–168, avril 1988.
- [Stoica et Söderström, 1991] P. STOICA et T. SÖDERSTRÖM. Statistical Analysis of MUSIC and Subspace Rotation Estimates of Sinusoidal Frequencies. *IEEE Trans. Signal Processing*, 39 :1836–1847, août 1991.
- [Strang, 2003] G. STRANG. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, third édition, 2003.
- [Strobach, 1996] P. STROBACH. Low-rank adaptive filters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(12) :2932–2947, décembre 1996.
- [Strobach, 1997a] P. STROBACH. Bi-iteration SVD subspace tracking algorithms. *IEEE Trans. Signal Processing*, 45(5) :1222–1240, mai 1997.
- [Strobach, 1997b] P. STROBACH. Square Hankel SVD subspace tracking algorithms. *Signal Processing*, 57(1) :1–18, février 1997.
- [Strobach, 1998] P. STROBACH. Fast recursive subspace adaptive ESPRIT algorithms. *IEEE Trans. Signal Processing*, 46(9) :2413–2430, septembre 1998.
- [Tkacenko et Vaidyanathan, 2001] A. TKACENKO et P. P. VAIDYANATHAN. The role of filter banks in sinusoidal frequency estimation. *Journal of the Franklin Institute*, 338(5) :517–547, août 2001.
- [Vaidyanathan, 1993] P. P. VAIDYANATHAN. *Multirate systems and filter banks*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1993.
- [Van der Veen *et al.*, 1993] A-J. VAN DER VEEN, ED. F. DEPRETTERE, et A. L. SWINDLEHURST. Subspace based signal analysis using singular value decomposition. *Proc. of IEEE*, 81(9) :1277–1308, septembre 1993.
- [Vandevoorde, 1996] D. VANDEVOORDE. *A fast exponential decomposition algorithm and its applications to structured matrices*. PhD thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY, USA, 1996.
- [Viberg *et al.*, 1995] M. VIBERG, P. STOICA, et B. OTTERSTEN. Array processing in correlated noise fields based on instrumental variables and subspace fitting. *IEEE Trans. Signal Processing*, 43(5) :1187–1199, mai 1995.
- [von Sachs, 1994] R. VON SACHS. Peak-insensitive non-parametric spectrum estimation. *Journal of time series analysis*, 15 :429–452, 1994.
- [Wang *et al.*, 2004] J. F. WANG, C-H. YANG, et K-H. CHANG. Subspace tracking for speech enhancement in car noise environments. Dans *Proc. of ICASSP'04*, volume 2, pages 789–792. IEEE, mai 2004.
- [Wax et Kailath, 1985] M. WAX et T. KAILATH. Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 33(2) :387–392, avril 1985.
- [Weinreich, 1977] G. WEINREICH. Coupled piano strings. *Journal of the Acoustical Society of America*, 62(6) :1474–1484, 1977.
- [Williams et Madisetti, 1999] D. B. WILLIAMS et V. K. MADISETTI. *Fast Fourier Transforms : A Tutorial Review and a State of the Art, in Digital Signal Processing Handbook*. CRC Press LLC, Boca Raton, Floride, USA, 1999.

- [Xu *et al.*, 1994] G. XU, H. ZHA, G. H. GOLUB, et T. KAILATH. Fast algorithms for updating signal subspaces. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 41(8) :537–549, août 1994.
- [Xu, 1993] L. XU. Least mean square error reconstruction principle for self-organizing neural nets. *Neural Networks*, 6 :627–648, 1993.
- [Yang, 1995] B. YANG. Projection Approximation Subspace Tracking. *IEEE Trans. Signal Processing*, 44(1) :95–107, janvier 1995.
- [Zhang et Wong, 1993] Q. T. ZHANG et K. M. WONG. Information theoretic criteria for the determination of the number of signals in spatially correlated noise. *IEEE Trans. Signal Processing*, 41(4) :1652–1663, avril 1993.
- [Zhao *et al.*, 1986a] L. C. ZHAO, P. R. KRISHNAIAH, et Z. D. BAI. On detection of the number of signals in presence of white noise. *Journal of Multivariate Analysis*, 20(1) :1–25, 1986.
- [Zhao *et al.*, 1986b] L. C. ZHAO, P. R. KRISHNAIAH, et Z. D. BAI. On detection of the number of signals when the noise covariance matrix is arbitrary. *Journal of Multivariate Analysis*, 20(1) :26–49, 1986.
- [Zoltawski et Stavrinides, 1989] M. ZOLTAWSKI et D. STAVRINIDES. Sensor array signal processing via a Procrustes rotations based eigen-analysis of the ESPRIT data pencil. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 37(6) :832–861, juin 1989.



# Index

- AIC, 20, 61
- Amplitudes, 10, 21, 26, 34, 37, 43, 45, 47
- Bornes de Cramér-Rao, 21, 36, 44, 177
- Conditionnement supérieur, 55
- Ecart-type, 10, 21, 26, 34, 37
- EDC, 20, 61
- Espace bruit, 19
- Espace signal, 19, 33, 39, 55, 68, 78, 90, 110
- ESPRIT, 19, 31, 54, 85
- ESTER, 56
- Facteurs d'atténuation, 10, 21, 26, 37, 42, 44, 45
- FAPI, 90, 128
- Fenêtre exponentielle, 82, 90
- Fenêtre tronquée, 82, 90
- Forme de Jordan, 29, 40, 183
- Fréquences, 10, 21, 26, 37, 42, 44, 45
- ITC, 20, 61
- MAC, 56, 68
- Matrice d'information de Fisher, 22, 177
- Matrice spectrale, 20, 40, 71, 122
- Matrices de Hankel, 17, 31, 70, 175
- Matrices de Pascal généralisées, 28, 174
- Matrices de Pascal-Vandermonde, 28, 29, 43, 171, 174
- Matrices de Vandermonde, 11
- Maximum de vraisemblance, 11, 30
- MDL, 20, 61
- MUSIC, 19
- Méthode d'itération orthogonale, 69, 123
- Méthode de Pisarenko, 17
- Méthode de Prony, 15
- Méthode des puissances itérées, 80, 90
- Méthode des puissances naturelles, 81
- Méthodes HR, 14
- OPAST, 82, 99
- Ordre de modélisation, 20, 26, 54, 190
- PACE, 26, 36, 48, 177
- PAST, 82, 99
- Perturbations, 23, 39, 54, 182
- Phases, 10, 21, 26, 34, 37, 43, 45, 47
- Polynômes binomiaux, 27, 171
- Projection approximation, 83, 91
- Propriété d'invariance rotationnelle, 19, 29, 56, 174
- Pôles complexes, 10, 14, 26, 31, 41, 44, 54, 125
- Récurrences linéaires, 15, 26
- Résolution de Fourier, 13
- SW-NIC, 104, 195
- YAST, 110, 128