HAL
open science

Etude des propriétés de cohérence d'un condensat de Bose-Einstein à l'équilibre et hors équilibre

Mathilde Hugbart-Fouché

To cite this version:

Mathilde Hugbart-Fouché. Etude des propriétés de cohérence d'un condensat de Bose-Einstein à l'équilibre et hors équilibre. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2005. Français. NNT : . tel-00010825

HAL Id: tel-00010825

https://pastel.hal.science/tel-00010825v1

Submitted on 28 Oct 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 8018

INSTITUT D'OPTIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE
LABORATOIRE CHARLES FABRY

UNIVERSITÉ PARIS XI

U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

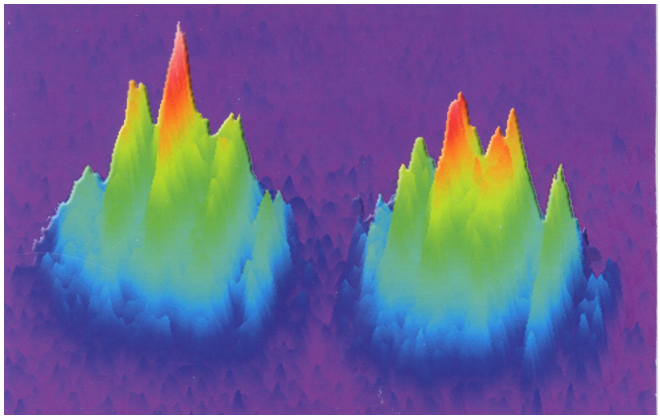
présentée pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

par

Mathilde HUGBART-FOUCHÉ



Sujet :

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DE COHÉRENCE D'UN CONDENSAT DE BOSE-EINSTEIN À L'ÉQUILIBRE ET HORS ÉQUILIBRE

Longueur de cohérence d'un condensat de Bose-Einstein très allongé

Soutenue le 10 octobre 2005 devant la Commission d'examen :

M.	A. ASPECT	Directeur de thèse
M.	P. BOUYER	Membre invité
M.	P. CHAVEL	Président
M.	M. INGUSCIO	Rapporteur
M.	R. KAISER	Rapporteur
M.	P. LEMONDE	Examinateur
M.	H. PERRIN	Examinatrice

Remerciements

Cette thèse a été cofinancée par l'ANRT et IXSEA. Je remercie Thierry Gaiffe, directeur d'IXSEA, pour avoir accepté avec enthousiasme de financer ces travaux. Je pense que peu d'entreprises ont l'audace de soutenir ainsi la recherche fondamentale, indispensable pourtant pour les perspectives de l'entreprise sur le long terme. Je tiens également à remercier tout particulièrement Eric Willemenot qui a suivi le déroulement de cette thèse du début à la fin. J'ai largement pu apprécier ses grandes qualités humaines, sa gentillesse et son écoute. J'ai beaucoup appris à ses côtés, à la fois d'un point de vue scientifique avec le principe de fonctionnement des gyromètres à fibres optiques et d'un point de vue industriel avec les différents processus de fabrication. Merci pour avoir toujours trouvé le temps de découvrir et discuter nos résultats, malgré un emploi du temps très chargé, et d'avoir toujours porté un si vif intérêt à tout ce que nous faisions.

Le travail expérimental de cette thèse s'est déroulé au Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique. Je remercie son directeur, Pierre Chavel, de m'y avoir accueillie.

Je remercie Alain Aspect de m'avoir accueillie dans son équipe. J'ai largement bénéficié de ses nombreuses analogies à l'optique. Etant issue de SupOptique, tout ceci n'est bien évidemment pas tombé dans l'oreille d'une sourde, et cela m'a certainement permis de comprendre plus rapidement les différents phénomènes physiques que nous avons étudiés.

Philippe Bouyer a plus personnellement encadré l'ensemble de ces travaux. J'ai apprécié son éternelle bonne humeur (communicative en plus de cela), son soutien dans les moments difficiles et sa persévérance, indispensable pour mener à bien les différentes expériences. Il a toujours su nous redonner courage quand nous en avions le plus besoin et confiance dans la qualité de nos expériences et interprétations.

Les résultats présentés ici constituent le travail de toute une équipe. Lorsque je suis arrivée, l'équipe de choc : Joseph Thywissen en tant que post-doc, Fabrice Gerbier et Simon Richard en tant que thésards, étaient déjà à pied d'oeuvre pour traquer les moindres instabilités réduisant la précision de la mesure. Je les remercie sincèrement de m'avoir intégrée avec autant de facilité et de m'avoir finalement tout appris tant sur le plan physique que sur le plan expérimental (cette manip ayant, comme beaucoup d'autres, ses petits caprices qu'il faut savoir habilement dompter). Je n'oublierai pas non plus les nombreuses heures de prises

de données avec Simon qui ont été pour moi l'occasion de comprendre, souvent en termes très clairs, les phénomènes physiques des fluctuations de phase, et de connaître par ailleurs les déboires de Simon avec le chat des voisins... Jocelyn Retter a ensuite pris le relais en tant que post-doc. C'est avec elle que j'ai approfondi la plupart des choses et elle a toujours été un appui sérieux. Elle a également largement contribué à donner une ambiance agréable en salle de manip, qualité indispensable pour avancer dans une équipe. Je lui souhaite une très bonne route pour la suite, même si celle-ci s'écarte pour l'instant du monde de la recherche (mais personne n'est parfait !). Andrès Varon et David Clément sont finalement arrivés, à une année d'intervalle, en tant que thésards. Muchas gracias por todo ! Je vous souhaite tout le courage nécessaire pour affronter la manip. Les quelques résultats déjà obtenus m'ont montré qu'il n'y avait pas franchement de raison de s'inquiéter !

Cette expérience ne fonctionnerait très certainement pas sans nos électroniciens : Frédéric Moron et André Villing. Je les remercie pour leur aide, leurs explications, et leur patience aussi.

Je tiens également à remercier l'ensemble des membres du groupe d'Optique Atomique. Chacun contribue à donner une ambiance de travail des plus agréable. Je garderai également un souvenir impérissable de YAO 2005 avec Jean-Baptiste Trebbia et William Guérin. Je ne suis pas prête d'oublier le voyage du retour, ni nos rapides descentes d'avions pour aller trouver ... ce dont nous avions besoin de façon pressante.

Je suis très reconnaissante à Massimo Inguscio et Robin Kaiser d'avoir accepté de rapporter ce manuscrit. Je remercie sincèrement Pierre Chavel, Pierre Lemonde et Hélène Perrin pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de faire partie du jury de soutenance.

J'ai eu le plaisir de pouvoir encadrer quelques TP et TD à SupOptique. Ces quelques heures m'ont permis de confirmer mon goût pour l'enseignement. Merci à Fabienne Bernard, Franck Delmotte, Frédéric Druon, Lionel Jacubowiez et Nathalie Westbrook pour leur confiance. Je pense finalement que je garderai un souvenir tout particulier des TP d'électronique auprès de Frédéric Druon, avec son humour incomparable et connu de tous.

Merci aux services techniques et généraux de l'Institut d'Optique qui permettent de très bonnes conditions de travail. Je remercie également Gracia Martins pour le tirage de ce manuscrit.

Enfin, je souhaite remercier ma famille : ma mère pour m'avoir toujours soutenue avec confiance dans ce que j'entreprenais et mon père qui m'a le premier donné le goût de la physique et plus particulièrement de l'optique. Je termine en

remerciant de tout mon coeur Jean-Baptiste, mon plus solide pilier, qui a soutenu ces trois années de thèse, dans les bons comme dans les mauvais moments. Tes yeux admiratifs resteront mon plus beau cadeau.

Table des matières

Introduction **5**

1 La cohérence en optique photonique et en optique atomique **11**
1.1 Cohérence en optique photonique 11
1.1.1 Historique 11
1.1.2 Fonction de corrélation du premier ordre 13
1.1.3 Lien avec la distribution spectrale 14
1.1.4 Différents types de sources 15
1.1.5 Cohérence temporelle et cohérence spatiale 16
1.1.6 Fonction de corrélation d'ordre supérieur 17
1.2 Cohérence en optique atomique 18
1.2.1 Atomes et ondes de matière 18
1.2.2 Source atomique cohérente : le condensat de Bose-Einstein 19
1.2.3 Fonction d'onde macroscopique 20
1.2.4 Fonction de corrélation et distribution en impulsion 22
1.2.5 Diverses expériences ayant mesuré la cohérence d'un condensat 26
1.3 Chute de la longueur de cohérence dans un condensat allongé . . . 29
1.3.1 Condensation en dimension réduite 30
1.3.2 Rôle des excitations dans les fluctuations de phase 31
1.3.3 Fluctuations de phase dans un condensat 1D 33
1.3.4 Fluctuations de phase dans un condensat 3D très allongé . 35
1.3.5 Fonction de corrélation d'un condensat allongé 38
1.3.6 Longueur de cohérence d'un condensat allongé 39
1.3.7 Distribution en impulsion d'un condensat allongé 40
1.3.8 Excitations collectives 41
1.4 Conclusion 42

2 Production et manipulation du condensat **43**
2.1 Production et observation d'un condensat de Bose-Einstein 43
2.1.1 Mélasse transverse et ralentisseur Zeeman 44
2.1.2 Piège Magnéto-Optique 46
2.1.3 Piège magnétique et évaporation 47
2.1.4 Imagerie par absorption 50

2.2 Caractérisation des nuages atomiques 54
2.2.1 Fréquences du piège magnétique 54
2.2.2 Nombre d'atomes 57
2.2.3 Profils des nuages atomiques 60
2.2.4 Température et fraction condensée 62
2.3 Manipulation des atomes par la lumière 65
2.3.1 Principe de la diffraction de Bragg 65
2.3.2 Les différents régimes de couplage 67
2.3.3 Régime de Bragg et Oscillation de Rabi 68
2.3.4 Applications expérimentales 72
2.3.5 Mise en place expérimentale des impulsions $\pi/2$ 73
2.3.6 Dispositif expérimental pour la spectroscopie de Bragg . . 78
2.3.7 Conclusion 80

3 Cohérence en phase d'un quasi-condensat à l'équilibre 83
3.1 Etudes précédentes sur les quasi-condensats 83
3.1.1 Première observation des fluctuations de phase 83
3.1.2 Mesure quantitative par la fonction de corrélation en intensité (Hannovre) 85
3.2 Mesure quantitative par spectroscopie de Bragg 87
3.2.1 Méthode d'acquisition des spectres 88
3.2.2 Profil des distributions en impulsion 88
3.2.3 Largeur des distributions en impulsion 89
3.3 Mesure par voie interférométrique 90
3.3.1 Principe de notre méthode 91
3.3.2 Réalisation expérimentale de l'interféromètre 92
3.3.3 Interférogrammes obtenus 94
3.3.4 Analyse dans l'espace de Fourier 96
3.4 Analyse des interférogrammes 97
3.4.1 Description théorique de l'interféromètre 97
3.4.2 Lien entre transformée de Fourier et fonction de corrélation 101
3.4.3 Simulation des résultats attendus 102
3.4.4 Analyse expérimentale détaillée des interférogrammes . . . 106
3.5 Résultats expérimentaux 109
3.5.1 Interfrange 109
3.5.2 Fonctions de corrélation obtenues 109
3.5.3 Profil des fonctions de corrélation 110
3.5.4 Longueur de cohérence 111
3.6 Limites à la lecture du contraste 112
3.6.1 Angle du laser sonde 113
3.6.2 Résolution de l'imagerie 114
3.6.3 Conclusion sur les effets systématiques 117

3.7 Franges supplémentaires observées sur les interférogrammes 117
3.7.1 Observation expérimentale 117
3.7.2 Transition Bragg d'ordre supérieur 118
3.7.3 Interférences dans le nuage thermique 118
3.7.4 Interaction pendant les impulsions Bragg 120
3.8 Conclusion 120

4 Cinétique de formation de la cohérence en phase 121
4.1 Principe de la formation du condensat 122
4.1.1 Stimulation bosonique 122
4.1.2 Théorie cinétique quantique : montée de la fraction condensée 124
4.1.3 Théorie sur la cinétique de formation de la cohérence . . . 128
4.2 Historique expérimental 129
4.2.1 Stimulation bosonique - MIT 130
4.2.2 Croissance à partir d'une vapeur thermique - Munich . . . 131
4.2.3 Formation de condensats hors équilibre - Amsterdam . . . 133
4.3 Expérience et montée de la fraction condensée 135
4.3.1 Séquence expérimentale 135
4.3.2 Thermalisation et évaporation 137
4.3.3 Montée de la fraction condensée 139
4.3.4 Oscillation du rapport d'anisotropie 143
4.3.5 Oscillation du centre de masse 149
4.4 Longueur de cohérence au cours de la formation 151
4.4.1 Séquence expérimentale de la mesure 151
4.4.2 Données brutes sur une montée de fraction condensée lente 152
4.4.3 Normalisation des largeurs des spectres 154
4.4.4 Dispersion et oscillations quadrupolaires 155
4.4.5 Longueur de cohérence 157
4.4.6 Mesure sur une montée de fraction condensée plus rapide . 158
4.4.7 Comparaison avec les prévisions théoriques 161
4.5 Conclusion 162

Conclusion 163

A Variables 167

B Atome de ^{87}Rb et transitions laser 173
B.1 Données sur l'atome de ^{87}Rb 173
B.2 Transitions lasers 174

C Modification du paramètre d'évaporation due à la gravité 175
C.1 Paramètre d'évaporation 175
C.2 Effet de la gravité 176
C.3 Paramètre d'évaporation incluant l'effet de la gravité 177

D Articles 179

Bibliographie 223

Introduction

En 1923, Louis de Broglie émit l'hypothèse qu'à toute particule ayant une quantité de mouvement $\vec{p}$ est associée une onde, dite désormais de de Broglie, dont la longueur d'onde est donnée par : $\lambda_{\mathrm{dB}} = h/\left|\vec{p}\right|$. Cette hypothèse généralisait aux particules massives la dualité "onde-corpuscule" déjà constatée pour les photons, ceux-ci étant caractérisés à la fois par une longueur d'onde et par des valeurs bien déterminées de la quantité de mouvement et de l'énergie.

L'hypothèse de L. de Broglie a été confirmée pour la première fois avec l'expérience de diffraction des électrons par un cristal de Davisson et Germer [1]. Les interférences d'ondes de matière, autre manifestation des propriétés ondulatoires, ont été ensuite observées pour différents types de particules.

FIG. 1 – *Expérience des fentes d'Young utilisant des atomes de néon métastables. Cette image est issue de l'article [2].*

Ainsi, dès 1938, une première expérience d'interférométrie mettant en évidence le caractère ondulatoire des neutrons a été réalisée[1] [4]. Les années 1950 voient ensuite le développement de l'interféromètre à électrons de Möllenstedt [5]. L'interférométrie atomique démarre quant à elle à la fin des années 1980 avec une première expérience d'interférométrie type fentes d'Young [6] et un interféromètre à division d'amplitude [7]. Ce retard expérimental par rapport aux précédents interféromètres est dû au fait que tous les outils mis en place précédemment pour les neutrons ou les électrons afin d'avoir une source suffisamment collimatée et cohérente ne peuvent s'appliquer au cas des atomes. Leur neutralité électrique rend délicate leur manipulation et leur très faible pouvoir de pénétration dans la matière dense interdit l'emploi de la diffraction par un cristal, technique utilisée

[1] Les interféromètres à neutrons ne se sont finalement réellement développés que dans les années 1970 [3].

pour les neutrons. La véritable révolution pour le développement des interféromètres atomiques a été les avancées considérables réalisées sur la manipulation et le refroidissement des atomes neutres, en particulier par la lumière. Ces avancées ont d'ailleurs été récompensées par le prix Nobel de Physique de 1997 attribué à C. Cohen-Tannoudji, S. Chu et W. D. Phillips [8–10]. La manipulation cohérente des atomes par la lumière a permis ensuite de mettre en place divers outils indispensables à l'optique atomique tels que les miroirs [11], les réseaux de diffraction [7] ou encore les lames séparatrices [12]. La référence suivante [13] offre une revue des publications consacrées à cette thématique.

Atomes et interféromètres de grande sensibilité

L'interférométrie atomique, comparée à l'interférométrie optique, présente de nombreux avantages potentiels :

- Tout d'abord les atomes interagissent davantage avec leur environnement que les photons. Leur moment dipolaire électrique et magnétique les rendent sensibles aux champs électriques et magnétiques extérieurs, alors que leur masse les rend sensible à une accélération ou une rotation. L'atome apparaît donc comme un outil idéal pour sonder l'environnement.
- Les atomes circulant dans l'interféromètre ont une vitesse beaucoup plus petite que les photons. Les temps d'interaction peuvent donc être beaucoup plus longs et la sensibilité intrinsèque des interféromètres atomiques aux effets inertiels tels que l'accélération, la rotation ou la gravitation par exemple, est supérieure à celle des interféromètres optiques de plusieurs ordres de grandeur.

Si nous prenons par exemple le cas du gyromètre atomique, le gain potentiel par rapport aux gyromètres optiques, toutes choses égales par ailleurs, peut être évalué à :

$$\frac{\text{effet Sagnac atomique}}{\text{effet Sagnac photonique}} = \frac{mc^2}{h\nu} \simeq 10^{11},$$

ν étant la fréquence de l'onde optique.

La mise en place d'interféromètres atomiques de très haute sensibilité, et plus particulièrement de gyromètres atomiques, trouverait de nombreuses applications. En physique fondamentale, ceci ouvre la voie à des tests de relativité générale, comme avec le projet spatial HYPER par exemple [14]. Elle trouverait également des applications directes pour la navigation de satellites ou de sous-marins, le grand intérêt pour ces derniers étant la très grande stabilité à long terme de ce genre d'interféromètre permettant une plus grande autonomie.

Les interféromètres atomiques présentent cependant encore quelques inconvénients qui sont qu'actuellement :

- leur aire est beaucoup plus faible, de l'ordre du cm^2, que celle des interféromètres optiques dont l'aire peut aller jusqu'à la centaine de m^2.

– la luminance[2] des sources atomiques étant plus faible, le rapport signal à bruit reste plus petit que celui des interféromètres optiques.

Mais le gain en sensibilité a priori est si grand que les interféromètres atomiques actuels ont déjà des performances aussi bonnes que les meilleurs interféromètres optiques, comme pour les gyromètres atomiques par exemple [15, 16]. De plus, les systèmes atomiques peuvent s'avérer beaucoup plus performants en terme de stabilité à long terme.

Pour pallier les quelques inconvénients évoqués plus haut, plusieurs solutions peuvent être envisagées. Une première possibilité serait de réaliser les expériences d'interférométrie atomique dans l'espace, afin d'augmenter en particulier les temps d'interaction. Mais ceci reste bien évidemment compliqué, très coûteux, et peu intéressant pour les applications telles que la navigation de sous-marins par exemple.

Une autre possibilité serait de réaliser des interféromètres atomiques guidés, à l'aide de micro-pièges magnétiques par exemple [17–19], afin d'augmenter en particulier la luminance de la source atomique. Ceci ouvrirait de plus la voie à la réalisation d'interféromètres très compacts et de configurations très diverses. De nombreux travaux sont actuellement en cours afin de montrer la faisabilité de ce genre d'interféromètres. Les résultats obtenus sont d'ores et déjà très prometteurs. Ceux-ci ont montré en particulier la possibilité de déplacer un nuage d'atomes dans un guide dipolaire [20], de le déplacer sur plusieurs dizaines de centimètres à l'aide de fils conducteurs déposés sur une surface (puce à atomes) [21] ou encore de réaliser une séparatrice [22, 23].

Enfin, une amélioration supplémentaire serait de pouvoir disposer d'une source atomique de grande luminance, comme ce que nous avons en optique avec le laser.

Le condensat de Bose-Einstein comme source "idéale" pour l'interférométrie

Les interféromètres atomiques actuels utilisent des sources atomiques dites "thermiques". Ces sources sont l'analogue atomique des sources optiques classiques de faible cohérence. Comme dans les interféromètres optiques, ces interféromètres atomiques sont efficaces lorsqu'ils opèrent à la teinte plate, c'est à dire à très faible déphasage. Cette limite contraint l'utilisation des gyromètres ou accéléromètres atomiques par exemple à la mesure de petites accélérations ou vitesses de rotation. Une solution serait alors d'utiliser une source atomique de grande cohérence.

Ce type de source a été obtenu pour la première fois en 1995, avec la réalisation expérimentale du premier condensat de Bose-Einstein [24–26], système

[2] La luminance est l'intensité d'une source dans une direction donnée, divisée par l'aire apparente de cette source dans cette même direction.

où une fraction macroscopique de bosons s'accumule dans un état quantique unique. Cette prouesse expérimentale et les premières investigations menées sur le condensat ont donné lieu au prix Nobel de Physique 2001 décerné à E. A. Cornell, C. E. Wieman [27] et W. Ketterle [28].

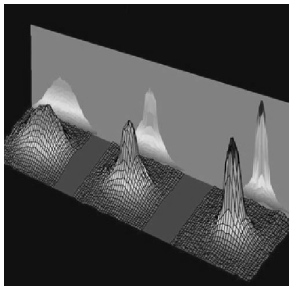


FIG. 2 – *Passage d'un nuage thermique à un condensat quasi-pur.*

L'analogie avec le phénomène laser est ici transparente : tous les atomes d'un condensat de Bose-Einstein sont décrits par la même fonction d'onde, comme les photons d'un faisceau laser sont tous dans le même mode du champ électromagnétique. Ces condensats peuvent donc constituer des sources cohérentes. On parle de lasers à atomes lorsque l'on extrait d'un condensat un flux d'atomes pulsé [29] ou quasi-continu [30]. L'utilisation de ces lasers à atomes est très prometteuse pour l'interférométrie atomique : leur cohérence et leur grande luminance laissent à penser que l'optique atomique pourrait générer une révolution analogue à celle de l'optique après la découverte de l'effet laser.

Condensat et guides d'onde

Finalement, l'idéal dans la réalisation d'interféromètres atomiques serait de coupler l'intérêt du condensat de Bose-Einstein, avec sa grande cohérence et sa grande luminance, à l'intérêt du guidage des atomes, sur une puce atomique par exemple.

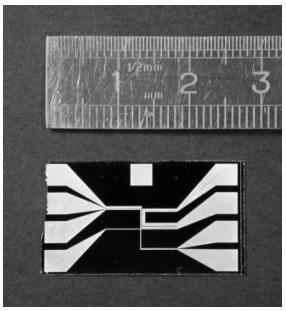


FIG. 3 – *Photographie d'une puce atomique. Cette image est tirée du manuscrit de thèse [31].*

De nombreux groupes ont d'ores et déjà obtenu un condensat sur ce type de puce atomique, comme cela est en particulier le cas dans le groupe d'optique

atomique d'Orsay [32]. Divers schémas d'interféromètres atomiques guidés ont été proposés [33–35] et une première démonstration expérimentale a même été réalisée très récemment [36].

De nombreuses questions restent toutefois encore ouvertes et doivent être approfondies avant de pouvoir réaliser des interféromètres guidés performants utilisant des lasers à atomes. Les guides d'ondes de la puce atomique impliquent en particulier l'utilisation de condensats très confinés transversalement, avec des rapports d'anisotropie pouvant aller jusqu'à plus de 1000. Or, le fait d'allonger le condensat n'est pas sans conséquence sur sa cohérence en phase. Une chute de la longueur de cohérence est en effet prédite théoriquement [37]. Les performances d'un interféromètre atomique utilisant ce type de condensat seraient donc plus faibles que dans le cas idéal d'un condensat parfaitement cohérent. Ceci n'est pas forcément dramatique en soit, la longueur de cohérence pouvant tout de même rester bien supérieure à celle d'une source thermique. De plus, la luminance reste sans commune mesure avec celle des sources thermiques. Mais une compréhension complète de l'interféromètre et une prévision de ses performances nécessitent forcément une compréhension de la source utilisée la plus complète possible.

Notre but au cours de cette thèse a finalement été d'étudier en détails ces fluctuations de phase sur les condensats allongés à l'équilibre, travail essentiel en vue de la compréhension la plus précise possible de ce phénomène. Cette étude a en particulier permis de montrer le bon accord entre la théorie de ces fluctuations de phase et nos résultats expérimentaux. Nous nous sommes ensuite basés sur ces résultats pour aborder et étudier le problème de la cinétique de formation de la cohérence au cours de la croissance du condensat. Le but était ici de comprendre le plus complètement possible notre source, que ce soit à l'équilibre, mais aussi lors de "l'allumage" de notre source laser à atomes qu'est le condensat.

Plan du mémoire

Mon travail de thèse a été consacré à l'étude expérimentale des condensats de Bose-Einstein fortement anisotropes, ceci dans la continuité des thèses de Fabrice Gerbier [38] et Simon Richard [39]. Ce mémoire est organisé de la façon suivante :

- Le **premier chapitre** est consacré à la présentation générale des bases nécessaires à la compréhension des expériences que nous avons réalisées. Nous rappelons en particulier les propriétés de cohérence des condensats de Bose-Einstein dans le cas 3D peu allongé. Nous présentons ensuite les prévisions théoriques sur la cohérence des condensats fortement allongés. Nous observons que ceux-ci peuvent présenter de fortes fluctuations de phase, à la fois spatiales et temporelles, et nous montrons leur évolution en fonction de divers paramètres comme le nombre d'atomes condensés, la température ou les paramètres du piège magnétique contenant les atomes.

- Le **deuxième chapitre** présente le montage expérimental sur lequel nous avons travaillé et qui nous permet d'obtenir des condensats fortement allongés. Nous abordons ensuite le dispositif que nous avons mis en place pour l'étude de la cohérence des condensats. Ce dispositif utilise la manipulation des atomes par la lumière et nous montrons comment celui-ci nous permet de réaliser des lames séparatrices, des miroirs ou des réseaux de diffraction.

- Expérimentalement, nous nous sommes tout d'abord intéressés à l'étude des condensats fortement allongés *à l'équilibre*. Les thèses précédentes, qui correspondent au commencement de la mienne, se sont intéressées aux condensats présentant de très fortes fluctuations de phase. La mesure de la cohérence y était réalisée par l'intermédiaire de la mesure de la distribution en impulsion des condensats. Le **troisième chapitre** présente l'expérience complémentaire que nous avons réalisée afin de mesurer la longueur de cohérence de condensats présentant des fluctuations de phase plus faibles et de faire le lien entre des condensats parfaitement cohérents et des condensats présentant de fortes fluctuations de phase. Nous montrons comment notre méthode interférométrique nous permet de mesurer la fonction de corrélation et la cohérence de nos condensats.

- Enfin, le **quatrième chapitre** aborde le sujet de la cohérence des condensats *au cours de leur formation*. Outre l'intérêt physique évident que présente cette étude, celle-ci est primordiale en vue de la réalisation de lasers à atomes continus. Le taux de rechargement régulier du condensat peut en effet être limité par la vitesse à laquelle se forme la cohérence en phase.
  Après la description de notre expérience permettant l'étude de condensats au cours de leur formation, nous présentons tout d'abord nos résultats sur la montée de la fraction condensée. Nous comparons en particulier ces résultats avec ceux déjà obtenus sur de précédentes expériences réalisées avec des condensats peu anisotropes. Nous montrons également comment cette expérience crée des nuages hors équilibre, avec des oscillations de la taille des nuages. Enfin, nos résultats sur l'étude de la cohérence des condensats en cours de formation sont analysés.

CHAPITRE 1

La cohérence en optique photonique et en optique atomique

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord rappeler comment le concept de cohérence à été introduit en optique photonique et le lien entre cohérence et fonctions de corrélation des champs. Le but ici n'est pas d'être exhaustif, mais plutôt de présenter très rapidement les résultats des phénomènes liés à la cohérence, bien connus en optique. Pour une revue plus complète, on peut se référer aux ouvrages suivants : [40, 41].

Ceci nous permettra ensuite d'introduire facilement la cohérence en optique atomique, avec en particulier la cohérence dans les condensats de Bose-Einstein, équivalents atomiques des lasers en optique. Nous présenteront les fonctions de corrélation et distributions en impulsion attendues pour ce type d'objet, fonctions qui permettent de caractériser la cohérence.

Le condensat de Bose-Einstein est encore souvent perçu comme un objet parfaitement cohérent. Nous montrerons dans la troisième partie que cet objet apparemment "idéal" ne l'est pas forcément dans toutes les configurations. Ainsi, dans le cas de condensats très fortement allongés, nous verrons que nous pouvons avoir une chute de la longueur de cohérence due à l'apparition de fluctuations de phase, fluctuations à la fois spatiales et temporelles. Nous verrons d'où proviennent ces fluctuations de phase et ce que cela implique pour les fonctions de corrélation et distributions en impulsion que nous désirons par la suite mesurer.

1.1 Cohérence en optique photonique

1.1.1 Historique

En optique physique, le terme "cohérence" est utilisé pour indiquer la tendance qu'ont deux valeurs du champ séparées d'une certaine distance - dans l'espace ou dans le temps - à être corrélées entre elles. La manifestation la plus simple de ces corrélations est l'effet d'interférence que l'on obtient lorsque deux rayons provenant d'une même source sont superposés. La possibilité d'obtenir ces franges

représente généralement la définition optique de la cohérence. Cette définition est restée satisfaisante tant que les expériences était restreintes à la mesure du contraste des franges.

Les premières investigations liées au problème de la lumière cohérente et partiellement cohérente sont dues à Verdet à la fin du dix-neuvième siècle qui étudia la cohérence spatiale d'une source primaire étendue [42, 43]. Michelson a ensuite établit le lien entre la visibilité des franges et la distribution en énergie d'une raie spectrale [44], et entre la visibilité des franges d'interférence et la taille de la source primaire [45]. Ce dernier résultat sur les propriétés de cohérence spatiale des sources lui ont permis en particulier de remonter, à l'aide d'une mesure de contraste de franges, au diamètre angulaire des étoiles.

Ces différents résultats n'étaient alors pas encore interprétés en terme de cohérence et de corrélation du champ, ce concept n'étant apparu que plus tard. Mais ils ont largement motivé et contribué à la mise en place de la théorie de la cohérence partielle et à sa formulation.

La première mesure quantitative sur la corrélation de la vibration lumineuse a été introduite par von Laue [46] au début du vingtième siècle. Viennent ensuite les contributions de Berek [47] qui utilisa le concept de corrélation dans ses expériences liées à la formation d'images dans un microscope.

Une nouvelle étape est franchie avec les travaux de van Cittert dans les années 1930 qui détermina les corrélations du champ entre deux points d'un écran éclairé par une source primaire étendue [48]. Il détermina également ces corrélations en n'importe quel point à deux instants différents [49]. Aux précisions des calculs près, il trouva que les distributions de probabilité devaient être gaussiennes et il détermina les coefficients de corrélation.

Peu après, Zernike proposa une approche différente et simplifiée des problèmes de la cohérence partielle. Il définit la notion de "degré de cohérence" de la lumière d'une façon directement reliée à l'expérience [50]. Ses méthodes se sont avérées particulièrement adaptées pour le traitement des problèmes expérimentaux liés à l'optique instrumentale. Tout ceci a encore été davantage simplifié et a été appliqué à l'étude de la formation des images par Hopkins dans les années 1950 [51].

Toutes ces recherches ont permis de faire un premier lien entre l'optique cohérente et l'optique incohérente. Mais elles restaient encore restrictives puisqu'elles ne s'appliquaient qu'à la lumière quasi-monochromatique et dans des situations où la différence de marche entre deux faisceaux qui interféraient était petite. Wolf [52], ainsi que Blanc-Lapierre et Dumontet indépendamment [53] ont généralisé cette théorie avec l'introduction de fonctions de corrélation plus générales.

1.1.2 Fonction de corrélation du premier ordre

Une onde lumineuse est classiquement décrite par un champ électromagnétique dépendant du temps et de l'espace. Le champ électrique est dans le cas général[1] :

$$E(\vec{r},t) = |E(\vec{r},t)|\, e^{i\phi(\vec{r},t)}. \tag{1.1}$$

Une onde plane est donnée quant à elle par l'expression :

$$E = E_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}. \tag{1.2}$$

Cette onde idéale est parfaitement cohérente. Nous pouvons en particulier, à partir de la connaissance de sa phase en un point de l'espace-temps donné, en déduire toutes les autres.

Le cas général (1.1) est donné, à partir de (1.2), par l'intégrale :

$$E(\vec{r},t) = \int \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}\vec{k}\, E_0(\vec{k},\omega) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}. \tag{1.3}$$

La longueur de cohérence temporelle d'un faisceau lumineux peut être mesurée en le faisant interférer avec lui-même comme cela est montré sur la Figure 1.1. L'un des faisceaux parcourant une distance supplémentaire L, l'intensité au niveau de la superposition des deux faisceaux est :

$$I = \frac{I_0}{2}\big(1 + \cos[\omega L/c]\big), \tag{1.4}$$

pour une onde plane, et :

$$I = \frac{1}{4}\Big(|E(\vec{r},t)|^2 + |E(\vec{r},t+L/c)|^2 \Big) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big(E^\star(\vec{r},t)E(\vec{r},t+L/c)\Big), \tag{1.5}$$

dans le cas général.

L'information sur la cohérence du champ est contenue dans le terme d'interférence, autrement dit dans le dernier terme des équations (1.4) et (1.5). Ceci mène donc à la définition de la fonction de corrélation temporelle normalisée du premier ordre :

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E^\star(\vec{r},t)E(\vec{r},t+\tau)\rangle}{\langle E^\star(\vec{r},t)E(\vec{r},t)\rangle}, \tag{1.6}$$

où les crochets représentent une moyenne sur un ensemble statistique. De la même façon, la fonction de corrélation spatiale normalisée du premier ordre est définie comme :

$$g^{(1)}(\vec{r},\vec{s}) = \frac{\langle E^\star(\vec{r}+\vec{s}/2,t)E(\vec{r}-\vec{s}/2,t)\rangle}{\langle E^\star(\vec{r},t)E(\vec{r},t)\rangle}. \tag{1.7}$$

[1] Tout ce qui suit ne tient pas compte de la polarisation.

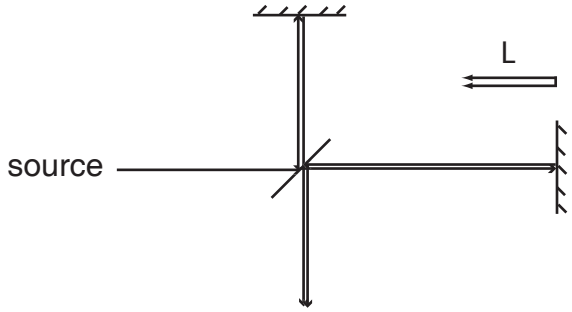


FIG. 1.1 – *Mesure de la longueur de cohérence à l'aide d'un interféromètre de Michelson. L'un des rayons parcourt une distance supplémentaire L. Le taux de décroissance du contraste des franges avec L donne la longueur de cohérence de la source.*

Le taux de décroissance de la fonction de corrélation (1.7) ((1.6)) avec $\vec{s}\ (\tau)$ donne la longueur de cohérence (le temps de cohérence) du champ reçu au point $\vec{r}$.

Les quelques effets pouvant réduire la cohérence sont les suivants :

- la collimation : Pour des sources étendues spatialement incohérentes, même si celles-ci sont parfaitement monochromatiques, les vecteurs d'onde arrivant en un point donné de l'espace présentent un certain étalement. Un étalement trop important entraîne un brouillage des franges d'interférence.
- l'impureté spectrale : L'émission des sources réelles est caractérisée par une certaine distribution en fréquences due à la durée de vie finie des niveaux atomiques, aux collisions entre atomes ou encore à l'élargissement Doppler. Les diverses fréquences sont incohérentes, ce qui implique là aussi une baisse de contraste des franges d'interférence.
- les fluctuations : Pour les mêmes raisons que précédemment, l'amplitude et la phase de la lumière sont sujettes à des fluctuations aléatoires. Seule une approche statistique permet alors de décrire les propriétés de la source.

1.1.3 Lien avec la distribution spectrale

La fonction de corrélation du premier ordre $g^{(1)}(\tau)$ donnée par l'équation (1.6) est symétrique en τ si le champ est stationnaire. Cette symétrie mène à une propriété très importante de $g^{(1)}(\tau)$, connue sous le nom de théorème de Wiener-Khintchine, et qui donne :

$$\frac{1}{T}\int_T \mathrm{d}t\, E^\star(t)E(t+\tau) = \frac{1}{T}\int_T \mathrm{d}t\, E^\star(t)E(t-\tau) \tag{1.8}$$

$$\propto \int_\omega \mathrm{d}\omega\ |E(\omega)|^2\, e^{i\omega\tau} = TF^{-1}[I(\omega)](\tau). \tag{1.9}$$

La fonction $g^{(1)}(\tau)$ est donc proportionnelle à la transformée de Fourier de la distribution spectrale de l'intensité lumineuse. La largeur de $g^{(1)}(\tau)$ qui définit la longueur de cohérence de la source est la réciproque de la largeur de la distribution spectrale.

Cette propriété importante montre en particulier que la mesure de la longueur de cohérence peut se faire :

- soit dans l'espace réel, avec la mesure de $g^{(1)}(\tau)$. L'expérience à réaliser se ramène alors à une expérience d'interférométrie et de mesure de contraste de franges d'interférence.
- soit dans l'espace de Fourier, avec la mesure de la largeur spectrale de la raie à l'aide, par exemple, d'un spectromètre.

1.1.4 Différents types de sources

La source monochromatique

L'onde plane a une distribution spectrale de la forme :

$$I(\omega) = I_0 \delta(\omega - \omega_0). \tag{1.10}$$

La fonction $g^{(1)}(\tau)$ est alors une constante égale à 1 quel que soit τ.

La source élargie par collisions

Ce type de source a un profil de distribution spectrale lorentzien :

$$I(\omega) = I_0 \frac{a}{\Gamma^2/4 + (\omega - \omega_0)^2}. \tag{1.11}$$

Par transformée de Fourier, nous trouvons :

$$g^{(1)}(\tau) \propto e^{-\Gamma|\tau|}. \tag{1.12}$$

Nous pouvons citer comme exemple de sources les lampes spectrales au sodium ou les lampes spectrales au mercure basse pression. La largeur spectrale est alors de l'ordre de 10^{-2} nm.

Remarque : Lorsque les collisions peuvent être négligées, la largeur de la distribution spectrale est limitée par la durée de vie finie du niveau excité des atomes. Celle ci donne un profil de raie lorentzien, et on parle de largeur naturelle de la raie pour la largeur de la distribution spectrale due à cet effet.

La source élargie par effet Doppler

La raie spectrale peut être également élargie du fait de la vitesse différente de chaque atome émettant les photons. Lorsque cet effet prédomine, la source a

une distribution spectrale gaussienne :

$$I(\omega) = I_0 \exp\Big(- \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Delta\omega^2}\Big). \tag{1.13}$$

La fonction $g^{(1)}(\tau)$ est donc elle aussi gaussienne :

$$g^{(1)}(\tau) \propto \exp\Big(\frac{1}{2(\Delta\omega\,\tau)^2}\Big). \tag{1.14}$$

Le laser

Dans un laser monomode, quasiment tous les photons se trouvent dans le même mode la cavité. Dans le cas d'un laser idéal où tous les photons sont dans le même état quantique, nous retrouvons une distribution spectrale et une fonction de corrélation identiques à celles trouvées dans le cas de l'onde plane. Expérimentalement, la largeur de la fonction de corrélation n'est pas infinie mais reste très grande. Elle est essentiellement limitée par les instabilités de la cavité et de façon ultime par la diffusion de phase Schawlow-Townes.

1.1.5 Cohérence temporelle et cohérence spatiale

Dans ce qui précède, nous avons essentiellement discuté de la cohérence temporelle. Le temps de cohérence d'une source $\Delta t \sim 1/\Delta\nu$ est donné par la largeur de $g^{(1)}(\tau)$, et la longueur de cohérence est $l = c\Delta t$. Cette longueur correspond, par exemple, à la différence de marche maximale que nous pouvons appliquer entre les deux bras d'un interféromètre de Michelson - éclairé par cette source - pour pouvoir observer des interférences.

La notion de cohérence spatiale contient deux aspects :

- la cohérence longitudinale, autrement dit la longueur de cohérence suivant la direction de propagation. Ceci n'est rien d'autre que la cohérence temporelle.
- la cohérence transverse. Dans le cas d'une source parfaitement monochromatique mais spatialement incohérente, ceci représente la mesure de la collimation de la source et donc la mesure de l'étalement $\Delta\vec{k}$ des vecteurs d'onde. La longueur de cohérence transverse est alors :

$$l_{\mathrm{c}} = \frac{2\pi}{\left|\Delta\vec{k}\right|}. \tag{1.15}$$

  Le laser monomode présente là aussi une très bonne cohérence spatiale transverse avec un faisceau d'une très faible divergence.

C'est cette propriété de cohérence spatiale transverse qui a été utilisée par A. A. Michelson pour mesurer le diamètre angulaire d'une étoile.

1.1.6 Fonction de corrélation d'ordre supérieur

Fonction de corrélation du second ordre

De la même manière que nous avons défini la fonction de corrélation du premier ordre, nous pouvons définir des fonctions de corrélations d'ordre supérieur. La fonction de corrélation du deuxième ordre mesure par exemple les corrélations de l'intensité. Dans le cas purement temporel par exemple, cette fonction normalisée est définie comme :

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle E^\star(t)E^\star(t+\tau)E(t)E(t+\tau)\rangle}{\langle E^\star(t)E(t)\rangle^2}, \tag{1.16}$$

$$= \frac{\langle I(t)I(t+\tau)\rangle}{\langle I(t)\rangle^2}. \tag{1.17}$$

Cette fonction de corrélation est directement liée à celle du premier ordre :
- Dans le cas d'un laser monomode idéal, $g^{(1)}(\tau)$ et $g^{(2)}(\tau)$ valent 1 quel que soit τ.
- Pour toutes les sources où une description statistique gaussienne[2] peut s'appliquer, qui incluent les distributions spectrales lorentzienne et gaussienne décrites plus haut, nous avons la relation suivante :

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \left|g^{(1)}(\tau)\right|^2. \tag{1.18}$$

Dans le dernier cas, $g^{(2)}(\tau)$ tend vers 2 lorsque τ tend vers 0 : la probabilité de détecter deux photons quasi-simultanément est donc deux fois plus importante qu'à temps long où $g^{(2)}(\tau)$ tend vers 1. Cet effet, valable pour les bosons, est bien connu sous le nom d'effet Hanbury Brown et Twiss.

Fonction de corrélation d'ordre supérieur à 2

Pour terminer sur la cohérence en optique, il est évident que les fonctions de corrélation d'ordre supérieur à deux sont importantes pour la description complète du champ électromagnétique et de ses propriétés de cohérence. Ainsi, la cohérence parfaite requiert une succession infinie de conditions sur toutes les fonctions de corrélation. R. Glauber [54] a montré que ces conditions se ramènent à une condition de factorisation des fonctions de corrélation. On dit alors que la cohérence est d'ordre m lorsque la condition de factorisation sur toutes les fonctions de corrélation d'ordre n tel que $n \leq m$ est satisfaite.

[2] autrement dit lorsque la champ peut être considéré comme une somme d'un grand nombre de contributions aléatoires indépendantes et donc incohérentes, mais de mêmes propriétés statistiques.

1.2 Cohérence en optique atomique

1.2.1 Atomes et ondes de matière

Nature ondulatoire des atomes

Tout comme les photons, les atomes peuvent être à la fois considérés sous leur aspect corpusculaire et sous leur aspect ondulatoire. Ainsi, on associe à une particule ayant une quantité de mouvement $\vec{p}$ une longueur d'onde, dite longueur d'onde de de Broglie, donnée par :

$$\lambda_{\mathrm{dB}} = \frac{h}{|\vec{p}|}, \tag{1.19}$$

et un vecteur d'onde :

$$\vec{k}_{\mathrm{dB}} = \frac{\vec{p}}{\hbar}. \tag{1.20}$$

Dans le cas d'un ensemble statistique de particules ayant une énergie d'agitation thermique moyenne $\frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T$, on leur associe plutôt une longueur d'onde dite de de Broglie thermique :

$$\lambda_{\mathrm{dB_{Th}}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_{\mathrm{B}}T}}, \tag{1.21}$$

où m est la masse de la particule.

Cette nature ondulatoire des particules, et donc des atomes, implique que ce que nous venons de voir en optique photonique peut également s'appliquer aux atomes. Nous pouvons donc de la même manière introduire les fonctions de corrélation et les distributions spectrales des ondes de matière qui vont caractériser leur cohérence. La fonction de corrélation du premier ordre peut encore une fois être déterminée à partir d'une expérience de mesure de contraste de franges d'interférences entre deux faisceaux issus d'une même source mais décalés l'un par rapport à l'autre dans l'espace ou dans le temps. La distribution spectrale est quant à elle, d'après (1.19), directement liée à la distribution en impulsion de la source. Ainsi, plus la classe de vitesse à laquelle appartiennent les atomes d'une source atomique est fine, plus cette source est cohérente.

Différents type de sources atomiques

Comme nous l'avons dit en introduction, la nature ondulatoire des atomes peut être utilisée pour développer des interféromètres atomiques de grande sensibilité, potentiellement bien plus importante que celle des interféromètres optiques. Par ailleurs, pour ne pas avoir un brouillage trop rapide des franges d'interférence que l'on veut observer, le développement de ces interféromètres atomiques nécessite de disposer d'une source suffisamment monochromatique, obtenue soit :

- en sélectionnant le plus précisément possible une classe de vitesse donnée. On parle alors de jet thermique filtré. La classe de vitesse transverse peut être sélectionnée à l'aide d'un diaphragme par exemple.
- en piégeant puis en refroidissant les atomes dans un piège magnéto-optique par exemple. Ceci permet là aussi de diminuer la largeur de la distribution en impulsion. Ce sont ce type de sources thermiques qui sont utilisées désormais dans les interféromètres atomiques tels que les gyromètres. Leurs avantages comparés aux jets thermiques sont leur plus grande densité et leur faible vitesse moyenne qui permet de longs temps d'interaction dans l'interféromètre et qui augmente donc leur sensibilité.
- en refroidissant encore davantage sous une certaine température critique. On obtient alors un condensat de Bose-Einstein, analogue atomique du laser en optique. Son intérêt pour l'interférométrie est bien évidemment sa grande cohérence, mais aussi sa grande luminance. C'est ce type de source que nous avons étudié.

1.2.2 Source atomique cohérente : le condensat de Bose-Einstein

La longueur d'onde de de Broglie thermique associée à une particule et donnée par (1.21) indique l'étalement caractéristique de l'onde associée à cette particule. A température ambiante, nous trouvons une longueur d'onde de l'ordre de la dizaine de picomètre, donc généralement bien plus petite que la distance moyenne entre particules et que le rayon de Bohr. La nature ondulatoire de l'atome est alors quasiment invisible. Pour que celle-ci apparaisse, il est donc nécessaire de baisser la température.

En baissant suffisamment la température, nous pouvons obtenir un étalement de la fonction d'onde $\lambda_{\mathrm{dB_{Th}}}$ de l'ordre de la distance moyenne entre particule $n^{-1/3}$, n étant la densité atomique. Les fonctions d'onde commencent alors à se recouvrir, et nous pouvons voir apparaître, dans le cas d'un système de bosons, ce que l'on appelle la condensation de Bose-Einstein. A température plus élevée, les atomes se répartissent de façon aléatoire sur les différents niveaux d'énergie du système avec une probabilité de présence sur chaque niveau inférieure à 1. La condensation de Bose-Einstein est au contraire un phénomène où les atomes viennent s'accumuler dans le niveau d'énergie fondamental du système, bien que la température soit encore suffisamment élevée pour autoriser plus d'un niveau peuplé. Le critère de condensation sur la longueur d'onde de de Broglie thermique est donné par [55] :

$$n\lambda^3_{\mathrm{dB_{Th}}} \geq 2,612, \tag{1.22}$$

qui se traduit par un critère sur la température :

$$k_{\mathrm{B}}T \leq k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}^{0} = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\Big(\frac{n}{2,612}\Big)^{2/3}, \tag{1.23}$$

T_{c}^{0} étant ici la température critique pour un gaz sans interaction à la limite thermodynamique.

Les expériences décrites dans cette thèse ont été réalisées avec des atomes piégés dans un potentiel harmonique de symétrie cylindrique, donc du type : $V_{\mathrm{ext}} = V_0 + m/2(\omega_\perp^2 x^2 + \omega_\perp^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)$ avec $\omega_\perp$ et ω_z les pulsations radiale et axiale du potentiel. La température critique peut s'exprimer alors à partir du nombre total d'atomes N [56] :

$$k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}^{0} = 0,94\hbar\omega N^{1/3}, \tag{1.24}$$

avec $\omega = (\omega_\perp^2\omega_z)^{1/3}$ la moyenne géométrique des pulsations du piège.

1.2.3 Fonction d'onde macroscopique

Dans le cas d'un gaz idéal, les atomes condensés occupent tous le niveau d'énergie fondamental du système, et occupent la même fonction d'onde. Nous avons l'équivalent atomique des photons d'un laser en optique qui se trouvent tous dans le même mode de la cavité. Nous pouvons représenter le condensat par une fonction d'onde unique macroscopique $\Psi = \sqrt{N_0}\Psi_0$, Ψ_0 étant la fonction d'onde de l'état individuel des atomes normalisé à 1. La densité atomique est donnée par $n(\vec{r}) = |\Psi|^2(\vec{r})$.

Equation de Gross-Pitaevskii

Dans le cas d'un gaz dilué, c'est à dire tel que $na^3 \ll 1$, avec a la longueur de diffusion lors d'une collision dans l'onde s, la fonction d'onde du condensat est en très bonne approximation solution de l'équation de Gross-Pitaevskii suivante [55] :

$$\Big[-\frac{\hbar^2\Delta}{2m} + V_{\mathrm{ext}}(\vec{r}) + g|\Psi|^2(\vec{r})\Big]\Psi(\vec{r}) = \mu\Psi(\vec{r}), \tag{1.25}$$

où V_{ext} est le potentiel de piégeage externe, $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ est la constante de couplage due aux interactions et μ est le potentiel chimique. Le premier terme de cette équation représente l'énergie cinétique et le deuxième l'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique. Enfin le troisième terme est un terme non linéaire qui prend en compte les interactions et est proportionnel à la densité atomique $n(\vec{r}) = |\Psi|^2(\vec{r})$. Cette approche revient à considérer le mouvement de chaque particule du condensat dans le champ moyen créé par les $N_0 - 1$ autres particules condensées. L'équation de Gross-Pitaevskii, qui peut être vue finalement comme

une équation de Schrödinger possédant un terme non linéaire, est une approximation qui permet de surmonter la difficulté de résoudre de façon exacte l'équation de Schrödinger à N corps et permet de décrire le comportement macroscopique du système [55].

Le calcul de la densité atomique est désormais simple pour deux limites que nous allons présenter maintenant.

Approximation faibles interactions

Dans la limite des faibles interactions, nous pouvons négliger le terme d'interaction. La fonction d'onde du condensat est alors simplement le niveau fondamental de l'oscillateur harmonique, qui donne pour la densité atomique une forme gaussienne, comme indiqué sur le graphique de gauche de la Figure 1.2 :

$$|\Psi|^2(\vec{r}) = \frac{N_0}{\pi^{3/2}} \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{r_{i,0}} \exp - \frac{r_i^2}{r_{i,0}^2}, \tag{1.26}$$

où $r_{i,0} = \sqrt{\hbar/m\omega_i}$ sont les tailles rms de la fonction d'onde du condensat dans les trois directions. La taille moyenne de l'oscillateur harmonique est quant à elle définie comme $a_{\mathrm{OH}} = \sqrt{\hbar/m\omega}$.

Approximation Thomas-Fermi

Dans la limite au contraire des interactions répulsives fortes ($N_0|a|/a_{\mathrm{OH}} \gg 1$), nous pouvons négliger le terme d'énergie cinétique, autrement dit négliger la pression quantique [57, 58]. Cette approximation est appelée approximation Thomas-Fermi et donne pour la densité atomique du condensat :

$$|\Psi|^2(\vec{r}) = \max\left[\frac{\mu - V_{\mathrm{ext}}(\vec{r})}{g}, 0\right], \tag{1.27}$$

et $\mu = gn(0) = \frac{\hbar\omega}{2}(15N_0a/a_{\mathrm{OH}})^{2/5}$. Dans le cas du potentiel harmonique de symétrie cylindrique, nous obtenons un condensat de symétrie cylindrique ayant la forme d'une parabole inversée dont le profil suivant une des directions est représenté sur le graphique de droite de la Figure 1.2. Les demi-tailles du condensat valent $L = \sqrt{2\mu/m\omega_z^2}$ suivant la direction axiale et $R = \sqrt{2\mu/m\omega_\perp^2}$ suivant la direction radiale. Les interactions ont donc pour effet d'augmenter la taille du condensat.

Finalement, le régime intermédiaire requiert une résolution numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii ou d'autres modèles et approximations qui seront rapidement évoqués dans le chapitre suivant. Ceci se traduit par l'apparition d'ailes sur la densité atomique, qui tend donc vers une gaussienne à grande distance. Expérimentalement, nous pouvons parfois nous trouver dans ce régime

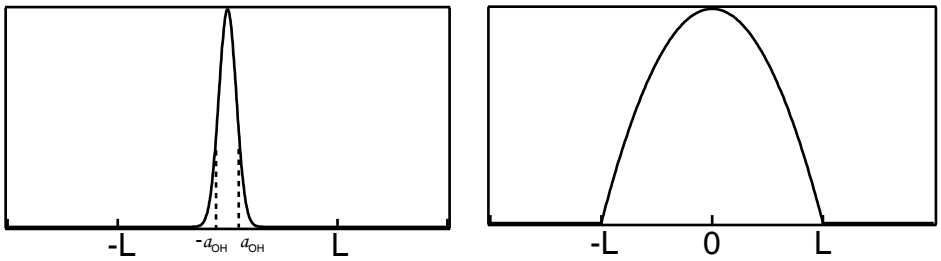


FIG. 1.2 – *Gauche : Profil de densité atomique gaussien d'un condensat dans le régime des faibles interactions et pour un piège sphérique. Droite : Profil de densité atomique parabolique dans le régime Thomas-Fermi. Les interactions ont pour effet d'augmenter la taille du condensat.*

intermédiaire : de légères ailes peuvent apparaître sur les bords de la densité atomique, mais, dans ces expériences, les profils longitudinaux qui nous intéressent sont tout de même encore très bien ajustés par une parabole inversée. Pour le calcul des fonctions de corrélation dans la partie suivante, nous allons donc nous placer dans l'approximation de Thomas-Fermi pour ces profils de condensat.

1.2.4 Fonction de corrélation et distribution en impulsion

De la même façon que cela est réalisé en optique, l'étude de la cohérence d'un champ de matière passe par le calcul ou la mesure de fonctions de corrélations.

Corrélation de la phase

La fonction de corrélation du premier ordre caractérise les corrélations de la phase du champ $\hat{\Psi}'$ et est définie comme :

$$G^{(1)}(\vec{r},\vec{r'}) = \langle \hat{\Psi}'^{\dagger}(\vec{r})\hat{\Psi}'(\vec{r'})\rangle, \tag{1.28}$$

où les crochets représentent la moyenne statistique. Sa décroissance en fonction de $|\vec{r}-\vec{r'}|$ indique la longueur de cohérence typique de la fonction d'onde.

Dans le cas d'un gaz très peu dégénéré, c'est à dire pour une température bien supérieure à la température critique, la fonction de corrélation du premier ordre est, dans un piège harmonique, [59] :

$$G^{(1)}_{\mathrm{th}}(\vec{r},\vec{r'}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{N}{\Delta r^3}\exp\Big[-\frac{[(\vec{r}+\vec{r'})/2]^2}{2\Delta\vec{r}^2}\Big]\exp\Big[-\frac{(\vec{r}-\vec{r'})^2}{2\xi^2}\Big]. \tag{1.29}$$

Elle dépend à la fois de $\vec{r}-\vec{r'}$ et de $\vec{r}+\vec{r'}$ puisque le profil du nuage thermique n'est pas homogène. La densité du nuage thermique est donnée par $G^{(1)}_{\mathrm{th}}(\vec{r},\vec{r})$ qui est une gaussienne de largeur $\Delta r_i = \sqrt{k_{\mathrm{B}}T/m\omega_i^2}$, avec ω_i la fréquence du piège

suivant la direction i. La grandeur $\xi = \sqrt{\lambda_{\mathrm{dB}}^2/2\pi}$ apparaît quant à elle comme la longueur de cohérence du champ qui est de l'ordre de λ_{dB}. Celle-ci a été en particulier mesurée à l'aide d'une méthode analogue à la spectroscopie de Fourier en optique [60], ainsi qu'à l'aide d'une procédure d'echo de spin [61].

Lorsque l'on baisse la température jusqu'à la température critique, la fonction de corrélation devient proportionnelle à :

$$G_{\mathrm{th}}^{(1)}(\vec{r},\vec{r'}) \propto \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{3/2}} e^{-\frac{(\vec{r}-\vec{r'})^2}{2l\xi^2}} \tag{1.30}$$

Ensuite, la contribution de l'état fondamental devient importante. La fonction de corrélation du premier ordre devient alors :

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\vec{r},\vec{r'}) &\simeq \langle \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r'})\rangle + G_{\mathrm{th}}^{(1)}(\vec{r},\vec{r'}), & (1.31)\\ &\simeq \Psi^\star(\vec{r})\Psi(\vec{r'}) + G_{\mathrm{th}}^{(1)}(\vec{r},\vec{r'}), & (1.32)\end{aligned}$$

avec $\Psi(\vec{r})$ la fonction d'onde du condensat et où le deuxième terme dû au nuage thermique a une largeur bien plus petite que celle due au condensat comme le montre la Figure 1.3. Le condensat fait apparaître une nouvelle longueur de cohérence de l'ordre de la taille du condensat et qui est donc bien plus grande que la longueur de cohérence dans le nuage thermique.

Corrélation de la densité

Tout comme en optique, la fonction de corrélation du premier ordre ne caractérise pas entièrement le champ. Il est donc nécessaire d'introduire des fonctions de corrélations d'ordre supérieur, et en particulier la fonction de corrélation du deuxième ordre :

$$G^{(2)}(\vec{r},\vec{r'}) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\Psi}(\vec{r})\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r'})\hat{\Psi}(\vec{r'})\rangle, \tag{1.33}$$

qui permet d'étudier les corrélations de densité du champ.

Fonction de corrélation spatiale

Expérimentalement, nous mesurons généralement la fonction de corrélation spatiale globale sur tout le condensat :

$$C^{(1)}(\vec{s}) = \int \mathrm{d}\vec{r}\, G^{(1)}(\vec{r}-\vec{s}/2, \vec{r}+\vec{s}/2). \tag{1.34}$$

Cette fonction est la somme de toutes les cohérences entre couples de points séparés de $\vec{s}$.

Dans le cas d'un condensat parfait, c'est à dire avec une phase uniforme sur tout le condensat, la fonction de corrélation spatiale est simplement la corrélation

de la racine carré du profil de densité du condensat. La largeur de $C^{(1)}$ est donc uniquement limitée par la taille finie du condensat. La Figure 1.3 représente la fonction de corrélation spatiale suivant un des axes du condensat dans la limite de Thomas-Fermi. Comme nous pouvons le voir sur cette figure, la forme de la fonction de corrélation est quasiment une gaussienne [62].

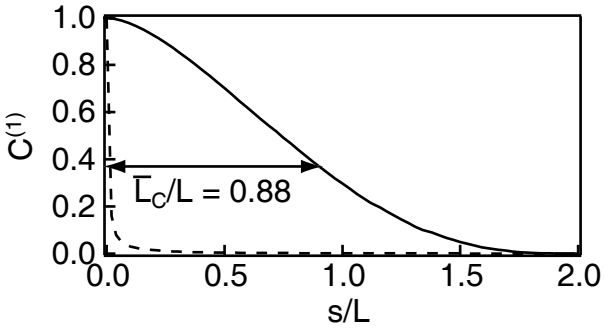


FIG. 1.3 – *Fonction de corrélation spatiale pour un condensat parfaitement cohérent à la limite de Thomas-Fermi (trait plein) et pour un nuage thermique juste au seuil de condensation (trait pointillé) avec une température critique de typiquement 500 nK. Les deux courbes ont été normalisées à 1 et ont été tracées en fonction de la séparation s divisée par la demi-taille L du condensat de* $100\,\mu m$.

Définition de la longueur de cohérence

Nous pouvons alors définir la longueur de cohérence de deux façons différentes :

- soit comme la longueur L_ϕ sur laquelle la phase varie de moins d'un radian. Dans le cas du condensat parfait, cela donne une longueur de cohérence infinie. Cette définition est utilisée dans les articles de D. S. Petrov *et al* [37, 63] décrivant les fluctuations de phase dans les condensats allongés et qui nous seront utiles dans la partie suivante 1.3.
- soit comme la largeur $\overline{L}_\mathrm{C}$ de la fonction de corrélation spatiale, à $1/e$ par exemple. Dans le cas d'une fonction de corrélation uniquement limitée par la taille du condensat toujours à la limite de Thomas-Fermi, un ajustement par une gaussienne donne $\overline{L}_\mathrm{C}/L = 0{,}88$ qui correspond à une largeur à mi-hauteur de 0,73.

Dans le cas d'un condensat où la phase fluctue, la fonction de corrélation spatiale décroît plus rapidement que dans le cas parfait, ce qui se traduit finalement par une baisse de la longueur de cohérence.

Distribution en impulsion

La distribution en impulsion du condensat est directement reliée à la fonction de corrélation spatiale par transformée de Fourier :

$$P(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathrm{d}^3\vec{q}\, e^{-i\vec{q}.\vec{p}/\hbar}\, C^{(1)}(\vec{q}). \tag{1.35}$$

La distribution en impulsion suivant l'axe long du condensat, intégrée sur les impulsions p_x, p_y radiales est alors [62] :

$$P(p_z) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \mathrm{d}s\, e^{-is.p_z/\hbar}\, C^{(1)}(s), \tag{1.36}$$

avec $C^{(1)}(s) = C^{(1)}(s\vec{u}_z)$ la fonction de corrélation spatiale suivant l'axe long du condensat. Dans le cas d'un condensat parfaitement cohérent, toujours dans le régime de Thomas-Fermi, cela donne pour la distribution en impulsion p_z suivant l'axe z [64] :

$$P(p_z) = \frac{2(4+\kappa^2)J_1(\kappa)J_2(\kappa) + \kappa J_0(\kappa)[5\kappa J_1(\kappa) - 16J_2(\kappa) + 3\kappa J_3(\kappa)]}{\kappa^3}, \tag{1.37}$$

avec J_i les fonctions de Bessel d'ordre i et $\kappa = p_z L/\hbar$. Ceci donne en bonne approximation une gaussienne de demi-largeur à mi-hauteur $\Delta p_z = 1,87\hbar/L$. La Figure 1.4 montre bien la cohérence à longue portée du condensat. La distribution en impulsion d'un nuage thermique à la température critique est en effet bien plus large que celle du condensat.

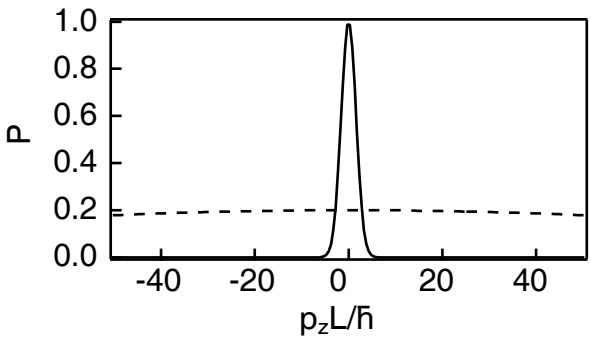


FIG. 1.4 – *Distribution en impulsion pour un condensat parfait de demi-longueur $L = 100$ μm dans la limite de Thomas-Fermi (trait plein) et dans le cas d'un nuage thermique de température 200 nK inférieure à la température critique (on ne considère ici que la distribution en impulsion du nuage thermique et non du condensat.*

Expérimentalement, nous avons mis en place deux méthodes de mesure de la longueur de cohérence par l'intermédiaire :

– soit de la mesure de la fonction de corrélation spatiale que nous réalisons par voie interférométrique.
– soit par la mesure de la distribution en impulsion que nous effectuons par spectroscopie de Bragg. La longueur de cohérence est alors donnée par la largeur de la distribution : $\overline{L}_{\mathrm{C}} \propto \hbar/\Delta p$.

Ces deux expériences ne constituent bien évidemment pas une liste exhaustive de la manière dont nous pouvons mesurer la longueur de cohérence. De plus, comme nous l'avons dit plus haut, la cohérence n'est pas simplement déterminée par la fonction de corrélation du premier ordre, mais également par les fonctions de corrélation d'ordre supérieur. Des mesures sur ce type de fonctions ont déjà été réalisées pour l'ordre 2 [65, 66] et l'ordre 3 [67].

1.2.5 Diverses expériences ayant mesuré la cohérence d'un condensat

Observation de la cohérence à longue portée

Une manière évidente de montrer la cohérence à longue portée du condensat est de faire interférer deux nuages atomiques séparés d'une certaine distance et d'observer le contraste des franges d'interférence. Cette expérience a été réalisée pour la première fois au MIT [68]. Le condensat a été séparé en deux à l'aide d'un faisceau laser désaccordé vers le bleu. Après expansion des condensats, c'est-à-dire après coupure du piège magnétique et après un certain temps de vol, les franges d'interférences de la Figure 1.5 ont été observées au niveau de la zone de recouvrement. Elles présentent un fort contraste et mettent donc clairement en évidence la cohérence sur toute l'étendue du condensat.

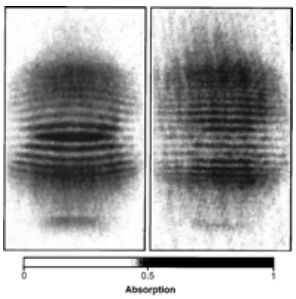


FIG. 1.5 – *Franges d'interférence observées au MIT entre deux condensats déplacés l'un par rapport à l'autre [68].*

Mesure de la distribution en impulsion

L'expérience précédente a permis de montrer qualitativement la cohérence du condensat. L'expérience suivante réalisée également au MIT et décrite dans l'article [64] donne une mesure plus quantitative de la longueur de cohérence du condensat. Cette mesure a été réalisée par l'intermédiaire de la mesure de la distribution en impulsion du condensat par spectroscopie de Bragg. La Figure 1.6 présente les résultats pour un condensat dans le piège (cercles) et après un certain temps d'expansion[1] (triangles). La courbe en trait pointillé large représente la distribution en impulsion calculée pour un nuage thermique au seuil de condensation. La largeur de la distribution en impulsion du condensat est bien plus petite que celle du nuage thermique, ce qui indique une longueur de cohérence bien plus importante. Il est montré également que cette largeur est limitée par la taille finie du condensat.

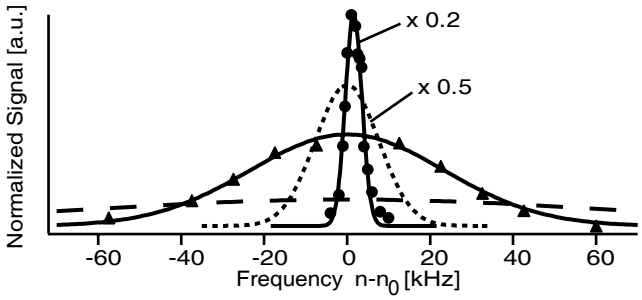


FIG. 1.6 – *Distribution en impulsion pour un condensat dans le piège (cercles), et pour le condensat après 3 ms de temps de vol*[1] *(triangles). La courbe en traits pointillés larges représente la distribution en impulsion calculée pour un nuage thermique à* $1\ \mu K$*, proche de la température critique. La courbe en traits pointillés courts représente la distribution en impulsion de l'état fondamental du potentiel de piégeage. Ce graphique est tiré de l'article [64].*

[1]La distribution en impulsion est ici élargie après un certain temps de vol. Il est important de noter ici que pour toutes les expériences décrites dans ce manuscrit, les mesures réalisées par spectroscopie de Bragg ont été réalisées également après temps de vol. En revanche, les fréquences des pièges utilisés, et plus particulièrement leur grand rapport d'anisotropie, impliquent une expansion axiale très faible et donc une distribution en impulsion peu modifiée pendant l'expansion. Nous pouvons donc toujours considérer que la mesure de la distribution en impulsion que nous effectuons suivant l'axe long après temps de vol est quasiment identique à la distribution en impulsion dans le piège.

Mesure de la fonction de corrélation spatiale

Une mesure directe de la fonction de corrélation spatiale a été réalisée peu de temps après à Gaithersburg [69] en utilisant la diffraction de Bragg d'un condensat d'atomes de Sodium. Le principe de l'expérience est présenté sur la Figure 1.7. Deux copies du condensat initial sont créées, chaque copie ayant une vitesse $\pm 2\hbar k_{\mathrm{L}}/m$. Cette diffraction est répétée après un certain temps "*Delay*". On a alors dans chaque direction deux copies séparées d'une distance $s = 2Delay\,\hbar k_{\mathrm{L}}/m$. Le nombre d'atomes diffractés, dans chaque direction, dépend de l'interférence entre les deux copies de condensat et oscille avec s. La mesure du contraste de ces oscillations donne directement la fonction de corrélation spatiale présentée sur la Figure 1.7.

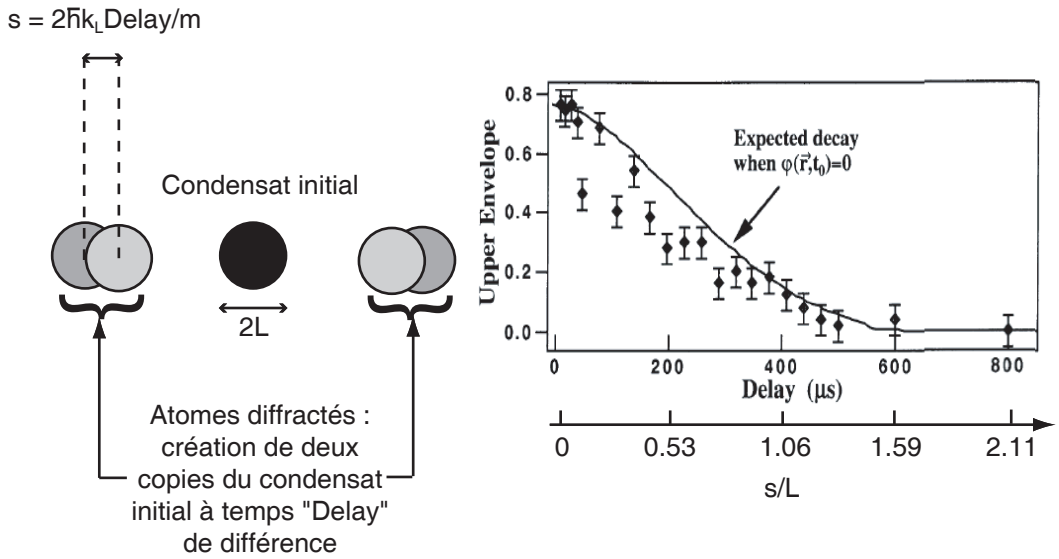


FIG. 1.7 – *Gauche : Expérience permettant la mesure de la fonction de corrélation spatiale. Le nombre d'atomes diffractés oscille avec la séparation s entre condensats. La fonction de corrélation spatiale est ensuite mesurée par la mesure du contraste de ces oscillations. Droite : Fonction de corrélation spatiale en fonction du délai entre la création des deux copies ou en fonction de la séparation entre ces deux copies normalisée par rapport à la demi-longueur du condensat. Ce graphique est tiré de [69].*

La longueur de cohérence est donnée par la décroissance de la fonction de corrélation qui est ici, à mi-hauteur, de $L_{1/2}/L = 0{,}59$ (10), où L est la demi-longueur du condensat suivant la direction de séparation entre condensats. Le terme entre parenthèses représente l'erreur statistique de la mesure. Ceci montre donc que la longueur de cohérence est de l'ordre de son extension spatiale. Ceci est également en accord, à 20 % près, avec la longueur attendue théoriquement

pour un condensat parfaitement cohérent qui est de 0,73 (largeur de la fonction de corrélation à mi-hauteur correspondant à une largeur à $1/e$ de 0,88 comme indiquée sur la Figure 1.3).

Cohérence entre deux points du condensat

Enfin, une troisième expérience réalisée à Munich [70] a permis de mesurer directement la cohérence à l'aide d'une expérience du type fentes d'Young permettant de mesurer la cohérence entre deux ondes de matière issues de deux points différents du condensat. Pour cela, deux régions différentes du condensat ont été couplées par deux ondes radio-fréquence vers un état anti-piégeant, comme présenté sur la Figure 1.8. La mesure de la visibilité des franges entre ces deux ondes en fonction de la distance entre les deux zones du condensat où les atomes sont extraits donne la fonction de corrélation du système (nuage thermique et condensat).

Le graphique de la Figure 1.8 montre une visibilité qui décroît jusqu'à 0 pour des températures supérieures à la température critique, alors que pour des températures inférieures, la visibilité décroît vers une valeur non nulle. Le plateau indique une cohérence en phase à longue portée due au condensat lui-même. La décroissance rapide de la visibilité des franges est due à la partie thermique.

1.3 Chute de la longueur de cohérence dans un condensat allongé

Les expériences évoquées précédemment ont permis de montrer une cohérence en phase du condensat à longue portée qui s'étend sur toute la taille du condensat, et ceci, même à température finie. Ces expériences ont été réalisées sur des condensats 3D peu anisotropes. Or, comme nous l'avons dit en introduction, le fait d'allonger un condensat n'est pas sans conséquence sur sa cohérence. Les excitations thermiques des modes axiaux de plus basses énergies impliquent en effet des fluctuations de phase suivant l'axe long du condensat et donc une dégradation de sa cohérence.

Dans cette partie, nous allons rappeler rapidement les différents outils théoriques et paramètres permettant de caractériser ces fluctuations de phase en se fondant sur les travaux théoriques de D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov et J. T. M. Walraven pour des atomes dans un piège harmonique 1D [63] ou 3D fortement allongé [37] et ceux de F. Gerbier pour les fonctions de corrélation spatiale et les distributions en impulsion [71]. Nous donnerons également les fonctions de corrélation et longueurs de cohérence attendues ainsi que les distributions en impulsion et leur largeur pour ce type de système.

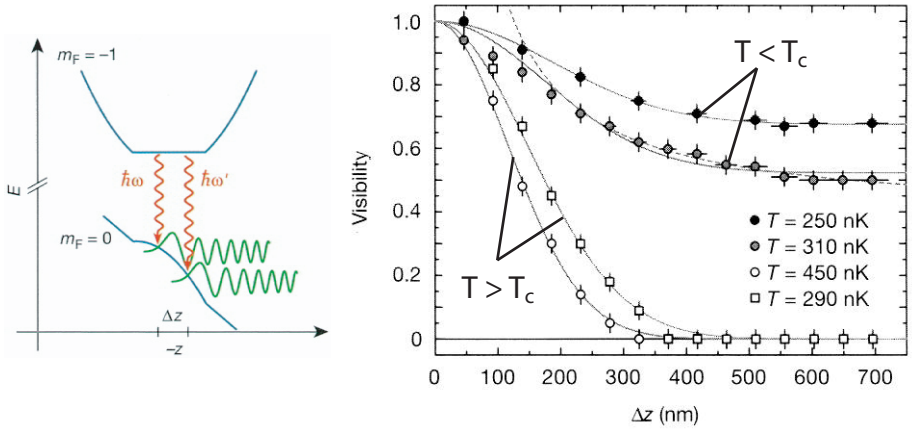


FIG. 1.8 – *Mesure de la cohérence spatiale du condensat. Gauche : Deux ondes radio-fréquence permettent d'extraire deux zones du condensat séparées d'une distance Δz vers une niveau anti-piégeant. Des franges d'interférence sont observées à la sortie de ces deux coupleurs. Le potentiel harmonique de l'état piégé ($m_F = -1$) et le potentiel linéaire de l'état non piégé ($m_F = 0$) sont modifiés pas le champ moyen du condensat. Droite : Mesure de la visibilité de ces franges en fonction de Δz. Le plateau observé pour des températures $T < T_c$ indique une cohérence en phase à longue portée, due à la présence du condensat. Les figures sont issues de l'article [70].*

1.3.1 Condensation en dimension réduite

Gaz sans interaction

Pour un gaz de bosons sans interaction, nous parlons de système 3D lorsque $k_B T_c^0 \gg \hbar\omega_{x,y,z}$. Changer la dimensionalité du système pour un gaz de bosons sans interaction revient à enlever cette condition pour une ou deux directions.

Il est connu que pour un gaz d'atomes idéal uniforme, le phénomène de condensation de Bose-Einstein est absent dans le régime 2D et 1D à température finie [72]. Dans le cas 3D, la densité d'états décroît lorsque l'énergie diminue. Ainsi, pour des températures suffisamment basses, il devient impossible d'occuper les niveaux de basses énergies tout en maintenant constant le potentiel chimique ou la densité. En conséquence, un nombre macroscopique de particules vient peupler le niveau d'énergie fondamental. En revanche, dans le cas 2D et 1D, la densité d'états ne diminue pas avec l'énergie et ce phénomène de condensation est donc absent.

Pour un gaz idéal dans un piège harmonique à la limite thermodynamique, seul le régime 2D présente le phénomène de condensation. Enfin, à une dimension, Ketterle et Van Druten ont montré un phénomène de condensation similaire au cas 3D pour un nombre fini d'atomes N [73]. La température critique est alors

estimée à $k_{\mathrm{B}}T_{1\mathrm{D}} = N\hbar\omega_z/\ln(2N)$, où ω_z est la fréquence du piège. Pour des températures inférieures à $T_{1\mathrm{D}}$, la population du niveau fondamental du système devient macroscopique.

Gaz avec interactions

Les interactions font intervenir une autre échelle d'énergie : le potentiel chimique μ. C'est maintenant la comparaison de cette énergie par rapport aux fréquences du piège qui donne la dimensionalité du système, ce qui donne pour un piège harmonique de symétrie cylindrique :

- pour $\mu \gg \hbar\omega_{\perp,z}$, un condensat dans le régime Thomas-Fermi 3D.
- pour $\hbar\omega_z \ll \mu \ll \hbar\omega_\perp$, un mode transverse qui est le fondamental du piège. La densité atomique du condensat a toujours la forme d'une parabole inversée mais uniquement suivant l'axe long du piège et a un profil gaussien suivant les axes radiaux. Le condensat est alors dans le régime 1D. La partie non condensée est quant à elle dans le régime 3D tant que $k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}^0 > \hbar\omega_z$.

1.3.2 Rôle des excitations dans les fluctuations de phase

L'équation de Gross-Pitaevskii a été établie à partir d'une approche de champ moyen. Cette équation est intéressante si l'on ne s'intéresse qu'au niveau d'énergie fondamentale, mais cette approche devient insuffisante lorsqu'il est nécessaire de prendre en compte la déplétion quantique, les corrélations entre particules ou les différentes excitations dans le condensat donnant lieu à des fluctuations de la phase ou de la densité. L'approche de Bogoliubov permet d'apporter quelques solutions.

Afin de tenir compte de ces excitations, l'opérateur champ $\hat{\Psi}_{\mathrm{T}}$ est maintenant représenté par la somme d'une partie non condensée $\hat{\Psi}'$ et de la fonction d'onde du condensat Ψ :

$$\hat{\Psi}_{\mathrm{T}}(\mathbf{r},t) = \hat{\Psi}'(\mathbf{r},t) + \Psi(\mathbf{r}), \tag{1.38}$$

en supposant que la partie condensée reste la partie dominante de l'opérateur champ total. Ce dernier est solution de l'équation de Heisenberg :

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\Psi}_{\mathrm{T}}}{\partial t} = \Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\mathrm{ext}}(\vec{r}) - \mu + g\hat{\Psi}_{\mathrm{T}}^{\dagger}\hat{\Psi}_{\mathrm{T}}\Big)\hat{\Psi}_{\mathrm{T}}. \tag{1.39}$$

A l'équilibre, en négligeant la partie non condensée, nous retrouvons évidemment l'équation de Gross-Pitaevskii (1.25). La partie non condensée est quant à elle solution de l'équation suivante [74, 75] :

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\Psi}'}{\partial t} = \Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\mathrm{ext}}(\vec{r}) - \mu + 2g|\Psi|^2\Big)\hat{\Psi}' + g|\Psi|^2\hat{\Psi}'^{\dagger}, \tag{1.40}$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2 en Ψ'.

Transformation de Bogoliubov

Résoudre cette équation reste encore difficile. La transformation de Bogoliubov consiste alors à exprimer $\hat{\Psi}'$ sous la forme d'une somme d'excitations élémentaires [74] :

$$\hat{\Psi}'(\mathbf{r},t) = \sum_{\nu}[u_\nu(\mathbf{r})\hat{a}_\nu \exp(-i\epsilon_\nu t/\hbar) - v_\nu^\star(\mathbf{r})\hat{a}_\nu^\dagger \exp(i\epsilon_\nu t/\hbar)], \tag{1.41}$$

où $\hat{a}_\nu$ et $\hat{a}_\nu^\dagger$ sont les opérateurs annihilation et création des excitations d'énergie ϵ_ν qui sont caractérisées par les nombres quantiques ν. Les fonctions d'onde u_ν et v_ν obéissent à la condition de normalisation $\int \mathrm{d}\vec{r}\left(|u_\nu(\vec{r})|^2 - |v_\nu(\vec{r})|^2\right) = 1$. La population thermique de l'excitation d'énergie ϵ_ν est donnée par $\langle \hat{a}_\nu^\dagger \hat{a}_\nu \rangle = 1/[\exp(\epsilon_\nu/k_\mathrm{B}T) - 1]$.

En injectant (1.41) dans (1.40), on aboutit aux équations de Bogoliubov-De Gennes [72] :

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\mathrm{ext}}(\vec{r}) + g|\Psi|^2 - \mu\Big) f_\nu^+ = \epsilon_\nu f_\nu^-, \tag{1.42}$$

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\mathrm{ext}}(\vec{r}) + 3g|\Psi|^2 - \mu\Big) f_\nu^- = \epsilon_\nu f_\nu^+, \tag{1.43}$$

avec $f_\nu^\pm = u_\nu \pm v_\nu$. La résolution de ces équations donnent finalement le spectre en énergie et les valeurs des différents modes propres $f_\nu^\pm$.

Opérateur densité et opérateur phase

L'opérateur champ peut également être représenté à l'aide de l'opérateur densité $\hat{n} = n + \delta\hat{n}$, n étant la densité moyenne du condensat, et de l'opérateur phase $\hat{\phi}$: $\hat{\Psi}_\mathrm{T} = \sqrt{\hat{n}}\exp(i\hat{\phi})$ [76]. Les fluctuations de densité sont supposées petites. Ces opérateurs s'expriment alors à l'aide des modes propres $f_\nu^\pm$:

$$\delta\hat{n}(\mathbf{r},t) = \sqrt{n(\mathbf{r})}\sum_\nu i f_\nu^-(\mathbf{r})\hat{a}_\nu e^{-i\epsilon_\nu t/\hbar} + h.c., \tag{1.44}$$

$$\hat{\phi}(\vec{r}) = [4n(\mathbf{r})]^{-1/2}\sum_\nu f_\nu^+(\mathbf{r})\hat{a}_\nu e^{-i\epsilon_\nu t/\hbar} + h.c. \tag{1.45}$$

Remarque : La déplétion quantique, qui correspond au nombre d'atomes non condensés à température nulle, est donnée par le terme $\sum_\nu |v_\nu|^2$. Dans notre cas, ce terme est toujours très faible (moins de 2 %) et sera toujours négligé par la suite.

Excitations élémentaires dans le cas uniforme

Nous pouvons illustrer ce qui précède par la résolution des équations dans le cas spatialement uniforme, tout en sachant que dans le cas d'un gaz piégé,

les résultats restent similaires. Les excitations sont caractérisées par leur vecteur d'onde k et la résolution des équations de Bogoliubov-De Gennes donne le spectre en énergie suivant :

$$\epsilon_k = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\Big(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\mu\Big)}, \tag{1.46}$$

représenté sur la Figure 1.9.

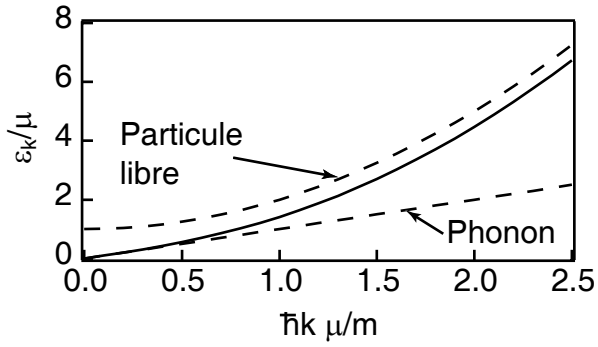


FIG. 1.9 – *Spectre en énergie des excitations de Bogoliubov (trait plein) et comparaison avec celui d'une excitation de type phonon et particule libre (traits pointillés).*

On distingue alors deux types d'excitations :

- pour $\epsilon_k \leq \mu$: $\epsilon_k \approx \hbar k\sqrt{\frac{\mu}{m}}$. Ces excitations sont de types phonons, c'est à dire des excitations collectives se déplaçant à la vitesse du son $c_0 = \sqrt{\mu/m}$. Il ne s'agit pas de véritables particules, et on parle alors de quasiparticules.
- pour les excitations de hautes énergies : $\epsilon_k \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu$. Ces excitations sont de type particules libres.

Les excitations de basses énergies vont être à l'origine des fluctuations de phase dans le condensat alors que les excitations de type particules libres se retrouvent dans le nuage thermique.

L'approche de Bogoliubov et la résolution des équations (1.42) et (1.43) vont finalement nous permettre de caractériser l'amplitude des fluctuations de phase et de densité dans le cas de condensats 1D ou fortement allongés.

1.3.3 Fluctuations de phase dans un condensat 1D

Comme nous l'avons vu dans la partie 1.3.1, la condensation de Bose-Einstein peut expérimentalement exister dans un gaz piégé à une dimension. Cette condensation s'accompagne d'une réduction des fluctuations de densité. En revanche, comme cela est également le cas en optique, qui dit réduction des fluctuations de densité ne dit pas forcément réduction des fluctuations de phase et nous pouvons

très bien avoir un condensat dont la phase fluctue spatialement et temporellement.

Comme nous venons de le voir, la transformation de Bogoliubov et la résolution des équations de Bogoliubov-De Gennes permettent de caractériser théoriquement ces fluctuations de phase et de densité. Cette étude est décrite en détail dans la thèse de D. S. Petrov [76] et dans l'article [63] et nous ne rappelons ici que les résultats principaux.

La résolution des équations (1.42) et (1.43) donnent le spectre en énergie et les modes propres suivants [77, 78] :

$$\epsilon_j = \hbar\omega\sqrt{j(j+1)}, \tag{1.47}$$

$$f_j^{\pm} = \left(\frac{j+1/2}{L}\right)^{1/2}\left[\frac{2\mu}{\epsilon_j}(1-\tilde{z}^2)\right]^{1/2} P_j(\tilde{z}), \tag{1.48}$$

où j est un nombre entier positif, ω la pulsation axiale du piège, P_j sont les polynômes de Legendre, L est la demi-taille du condensat et $\tilde{z} = z/L$. Il est alors possible de calculer, à partir des équations (1.44) et (1.45), l'amplitude des fluctuations de phase et de densité. Les résultats de l'article [63] montrent tout d'abord que les fluctuations de densité sont fortement supprimées pour des températures bien inférieures à la température de dégénérescence $T_\mathrm{d} = N\hbar\omega$. Quant aux fluctuations de phase, leur amplitude vaut :

$$\langle\delta\hat{\phi}^2_{zz'}\rangle_T = \frac{4T\mu}{3T_\mathrm{d}\hbar\omega}\left|\ln\left[\frac{(1-\tilde{z}')(1+\tilde{z})}{(1+\tilde{z}')(1-\tilde{z})}\right]\right|, \tag{1.49}$$

où $\delta\hat{\phi}_{zz'} = \hat{\phi}(z) - \hat{\phi}(z')$ est la différence de phase entre deux points z et z' du condensat. Ces fluctuations de phase provenant d'excitations peuplées thermiquement, leur amplitude augmente avec la température.

On définit alors la température de phase :

$$T_\phi = T_\mathrm{d}\frac{\hbar\omega}{\mu} \tag{1.50}$$

pour laquelle la phase fluctue d'environ un radian sur la demi-longueur du condensat. Le potentiel chimique $\mu = g_{1D}n(0)$, $n(0)$ étant la densité maximale et g_{1D} la constante de couplage dans le cas uni-dimensionnel [63], est ici tel que $\mu \gg \hbar\omega$. Le condensat est donc dans le régime de Thomas-Fermi.

Cette température de phase permet de définir deux régimes de comportement du condensat :

- pour $T \ll T_\phi$, les fluctuations de phase et de densité sont supprimées. Le condensat est cohérent sur toute sa longueur.
- pout $T_\phi \ll T \ll T_\mathrm{d}$, les fluctuations de densité sont fortement réduites. La densité atomique est celle d'un condensat idéal. Mais la phase n'est plus uniforme sur tout le condensat et fluctue sur une distance de l'ordre de $L_\phi \simeq L(T_\phi/T) \ll L$. On parle alors de *quasi-condensat*.

1.3.4 Fluctuations de phase dans un condensat 3D très allongé

Excitations 1D

Sur notre expérience, nous nous trouvons entre le régime 1D et le régime 3D Thomas-Fermi. Or le caractère 1D des fluctuations de phase est également présent dans ces condensats 3D très allongés. Nous pouvons en effet diviser les excitations dans ce type de condensat en deux catégories :

- les excitations de hautes énergies telles que $\epsilon_\nu > \hbar\omega_\perp$. Celles-ci ont un caractère 3D et ont une longueur d'onde plus petite que la taille radiale R du condensat. Comme dans les condensats 3D usuels et peu anisotropes, ces excitations ne donnent que de très faibles fluctuations de phase.
- les excitations axiales de basses énergies telles que $\epsilon_\nu < \hbar\omega_\perp$. Ces excitations ont des longueurs d'onde plus grandes que la taille radiale du condensat et ont un caractère 1D. Ce type d'excitations engendre des fluctuations de phase suivant l'axe long du condensat.

Ce type de système permet donc également d'observer le phénomène de quasi-condensation. Bien évidemment, plus le piège est anisotrope, c'est à dire plus le rapport entre les fréquences du piège $\omega_\perp/\omega_z$ est grand, plus le nombre d'excitations de type 1D accessibles thermiquement est important. Les fluctuations de phase sont donc d'autant plus importantes que le piège est anisotrope.

Amplitude des fluctuations de phase

Les fluctuations de phase dans les condensats allongés sont décrites dans l'article théorique [37]. Les fluctuations de densité sont dominées par les excitations d'énergie de l'ordre de μ. Les longueurs d'onde de ces excitations sont petites devant la taille radiale du condensat : elles ont un caractère 3D. On peut donc considérer ces fluctuations de densité comme très petites et écrire l'opérateur champ comme $\hat{\Psi}_\mathrm{T} = \sqrt{n(\vec{r})}\exp[i\hat{\phi}(\vec{r})]$.

Le spectre en énergie [78] et les modes propres associés sont donnés par :

$$\epsilon_j = \hbar\omega_z\sqrt{j(j+3)/4}, \text{ pour } \epsilon_j \ll \hbar\omega_\perp \tag{1.51}$$

$$f_j^+(\vec{r}) = \sqrt{\frac{(j+2)(2j+3)gn(\vec{r})}{4\pi(j+1)R^2L\epsilon_j}}P_j^{(1,1)}(\frac{z}{L}), \tag{1.52}$$

où j est un entier positif, L et R sont les demi-tailles axiales et radiales du condensat et $P_j^{(1,1)}$ sont des polynômes de Jacobi. A partir de l'équation (1.45), nous remontons à la phase dans le condensat le long de son axe. Sur la Figure 1.10 sont représentées deux réalisations possibles pour le profil de phase suivant l'axe long du condensat à une température donnée. La phase fluctue le long de cet

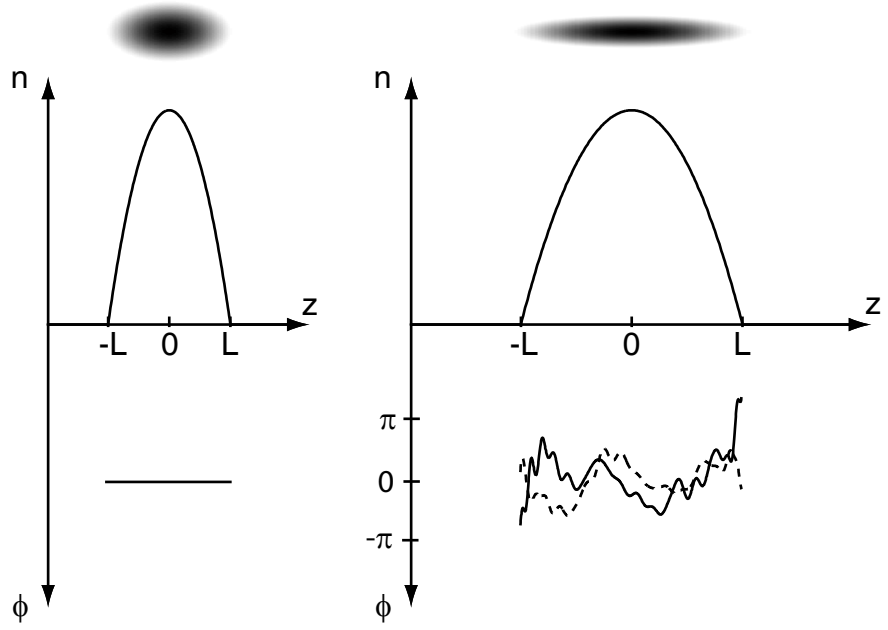


FIG. 1.10 – *Profil de densité et de phase suivant l'axe long du condensat. Gauche : Cas d'un condensat peu anisotrope. La phase est uniforme sur toute la taille du condensat. Droite : Cas d'un condensat fortement allongé à une température supérieure à la température de phase T_ϕ. Le profil de densité reste le même que dans le cas peu allongé. En revanche, la phase fluctue le long de l'axe et au cours du temps, les excitations étant peuplées thermiquement. Nous avons représenté sur la courbe de droite deux réalisations possibles différentes avec les mêmes paramètres (même T/T_ϕ, même nombre d'atomes, ...), en trait plein et en traits pointillés.*

axe, contrairement au cas d'un condensat peu allongé dont la phase est uniforme sur toute sa longueur, et fluctue au cours du temps.

A partir de l'équation (1.45), nous pouvons remonter au comportement des fluctuations de phase qui, au centre du piège, est donné par :

$$\langle \delta\hat{\phi}^2_{zz'} \rangle_T = \frac{32\mu k_\mathrm{B} T}{15 N_0 (\hbar\omega_z)^2} \frac{|z - z'|}{L}, \tag{1.53}$$

N_0 étant le nombre d'atomes condensés.

Température de phase

Comme dans le cas 1D, nous pouvons définir une température de phase pour laquelle la phase fluctue d'un radian sur la demi-longueur L du condensat :

$$k_\mathrm{B} T_\phi = \frac{15(\hbar\omega_z)^2 N_0}{32\mu}. \tag{1.54}$$

Cette expression indique qu'à température fixée, l'amplitude des fluctuations de phase est d'autant plus importante que le piège est allongé suivant l'axe long, que le nombre d'atomes dans le condensat est faible et que μ est grand, autrement dit que le confinement radial est fort.

Comme le résume le diagramme de la Figure 1.11, la condensation se déroule de la façon suivante :

- pour $T_\phi \ll T \ll T_\mathrm{c}$: pas de fluctuations de densité, mais des fluctuations de phase d'autant plus fortes que la température est élevée.
- pour $T \ll T_\phi$: condensat parfaitement cohérent.

Les paramètre du piège et le nombre d'atomes permettent de modifier la valeur de T_ϕ et donc de modifier la plage de température sur laquelle le quasi-condensat peut être observé.

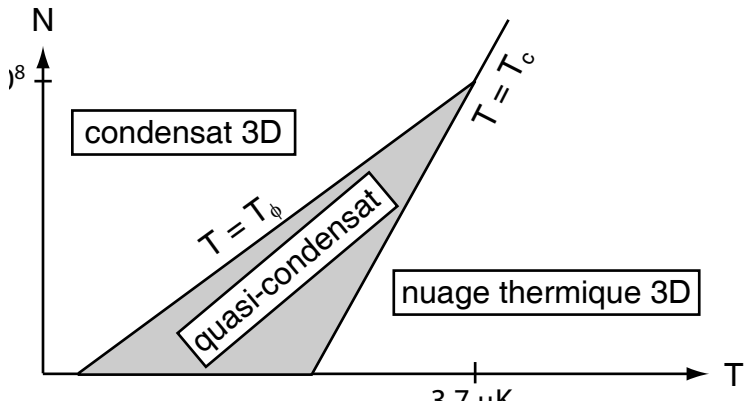


FIG. 1.11 – *Diagramme de phases dans un piège très anisotrope pour les fréquences du piège particulières suivantes :* $\omega_z = 2\pi \times 6.5\,Hz$ *et* $\omega_\perp = 2\pi \times 650\,Hz$. *La condensation s'établit en deux étapes. Le nuage d'atomes passe tout d'abord par une condensation avec des fluctuations de phase qui diminuent avec la température avant d'arriver à un condensat 3D parfaitement cohérent.*

Enfin, nous définissons la longueur de cohérence au centre du piège comme :

$$L_\phi(0) = L\frac{T_\phi}{T}, \tag{1.55}$$

qui peut s'exprimer en fonction de la densité 1D au centre du condensat :

$$L_\phi(0) = \frac{\hbar^2 n_{1\mathrm{D}}(0)}{m k_\mathrm{B} T}, \tag{1.56}$$

où $n_{1\mathrm{D}}(z) = \int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, n(\vec{r})$ est la densité du condensat intégrée suivant les axes radiaux. L'équation (1.53) devient alors :

$$\langle \delta\hat{\phi}^2_{zz'} \rangle_T = \frac{|z - z'|}{L_\phi(0)}. \tag{1.57}$$

Remarque : Comme nous l'avons vu dans ce paragraphe, l'amplitude des fluctuations de phase est caractérisée par le rapport T/T_ϕ. C'est ce paramètre qui sera utilisé dans tout ce mémoire.

1.3.5 Fonction de corrélation d'un condensat allongé

Connaissant désormais l'expression de l'opérateur phase à partir des équations (1.45) et (1.52), nous pouvons calculer la fonction de corrélation du premier ordre :

$$g^{(1)}(s) = \langle \hat{\Psi}_{\mathrm{T}}^{\dagger}(r, z + \frac{s}{2}) \hat{\Psi}_{\mathrm{T}}(r, z - \frac{s}{2}) \rangle, \tag{1.58}$$

$$= \sqrt{n(r, z + \frac{s}{2}) n(r, z - \frac{s}{2})} \exp\left[-\frac{\langle \delta\hat{\phi}_s^2 \rangle}{2}\right]. \tag{1.59}$$

La quantité que nous allons effectivement mesurer est la fonction de corrélation spatiale :

$$C^{(1)}(s) = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, g^{(1)}(s). \tag{1.60}$$

Cette fonction contient à la fois la corrélation du profil de densité atomique et la corrélation de la phase.

Nous avons calculé numériquement les fonctions de corrélations spatiales pour différentes amplitudes de fluctuations de phase dans le cas d'un profil de densité parabolique et la Figure 1.12 présente quelques résultats.

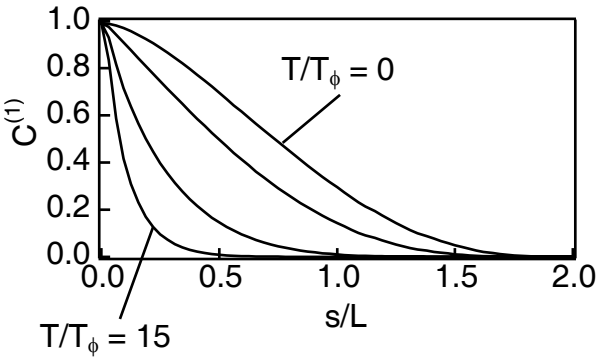


FIG. 1.12 – *Fonctions de corrélation pour différentes amplitudes de fluctuations de phase T/T_ϕ avec, de la fonction la plus large à la plus fine, T/T_ϕ = 0, 1, 5, 15.*

Cas absence de fluctuations de phase

A $T/T_\phi = 0$, il n'y a aucune fluctuation de phase. La fonction de corrélation spatiale est donc uniquement une corrélation du profil de densité du condensat.

Comme nous l'avons déjà vu dans la Section 1.2.4, la fonction de corrélation a alors quasiment la forme d'une gaussienne, due au profil parabolique du condensat.

Cas fortes fluctuations de phase

Dans le cas des fortes fluctuations de phase, la fonction de corrélation spatiale est dominée par la corrélation de la phase. Une approximation de densité locale, décrite dans la thèse de F. Gerbier [38] et dans l'article [71], a permis d'étendre la définition de la longueur de cohérence définie par l'équation (1.55) à toute position du condensat, et plus uniquement en son centre, et son expression est :

$$L_\phi(z) = L_\phi(0)\frac{n_{1\mathrm{D}}(z)}{n_{1\mathrm{D}}(0)}. \tag{1.61}$$

La fonction de corrélation spatiale devient :

$$C^{(1)}(s) = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\sqrt{n\big(r, z+\frac{s}{2}\big)n\big(r, z-\frac{s}{2}\big)}\,\exp\Big[-\frac{s}{2L_\phi(z)}\Big]. \tag{1.62}$$

Cette fonction est très bien approximée par une exponentielle décroissante de la forme $\exp[-\alpha s/L_\phi(0)]$, avec $\alpha = 0{,}67$ pour un condensat dans le régime Thomas-Fermi 3D et $\alpha = 0{,}64$ pour un condensat 1D [71].

Cas intermédiaire

Enfin, entre le régime de faibles fluctuations de phase et de fortes fluctuations de phase, nous avons à la fois la contribution de la densité atomique et la contribution de la phase. Ceci donne des fonctions correctement ajustées par le produit d'une gaussienne et d'une exponentielle.

1.3.6 Longueur de cohérence d'un condensat allongé

Nous verrons dans les chapitres suivants qu'expérimentalement nous n'avons pas, la plupart du temps, un accès direct à $L_\phi(z)$ car nous mesurons la fonction de corrélation spatiale. Pour y remédier, nous définissons la longueur de cohérence $\overline{L}_\mathrm{C}$ comme la largeur à $1/e$ de la fonction de corrélation spatiale. La Figure 1.13 présente cette longueur de cohérence mesurée sur les fonctions calculées numériquement en fonction de l'amplitude des fluctuations de phase. Comme cela était attendu, $\overline{L}_\mathrm{C}$ diminue lorsque T/T_ϕ augmente.

La courbe en traits pointillés représente quant à elle la largeur de la fonction de corrélation si l'on prend l'approximation de densité locale. La longueur de cohérence est alors :

$$L_\phi = \frac{L_\phi(0)}{\alpha}. \tag{1.63}$$

Le terme α vient du fait que la fonction de corrélation spatiale mesure la cohérence sur l'ensemble du condensat et pas uniquement au centre du piège. La quantité L_ϕ représente ici la distance sur laquelle les fluctuations de phase sont inférieures ou égales à 1. Elle tend donc vers l'infini pour $T = 0$, c'est à dire pour un condensat dont la phase est uniforme sur toute sa taille.

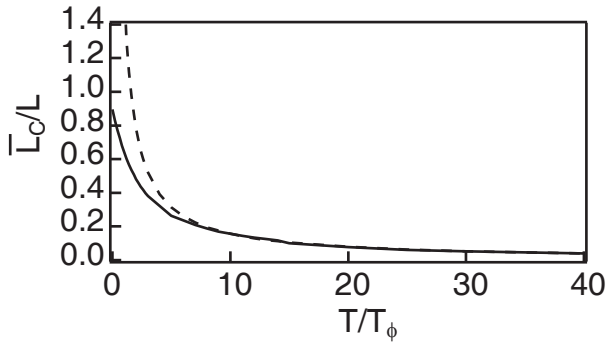


FIG. 1.13 – *Longueur de cohérence en fonction de l'amplitude des fluctuations de phase. Courbe en trait plein : largeur à 1/e de la fonction de corrélation spatiale calculée numériquement, divisée par la demi-longueur du condensat. Courbe en traits pointillés : Longueur de cohérence L_ϕ dans le cas de l'approximation de densité locale.*

Ces deux courbes se rejoignent à 5 % près pour $T/T_\phi > 8$. Les fluctuations de phase dominent alors dans la fonction de corrélation spatiale. Pour les températures inférieures à cette limite, il est nécessaire de tenir compte du profil de densité suivant l'axe.

1.3.7 Distribution en impulsion d'un condensat allongé

Les distributions en impulsion $P(p_z)$ suivant l'axe z ont également été calculées numériquement par transformée de Fourier de la fonction de corrélation spatiale $C^{(1)}(s)$. La Figure 1.14 présente les résultats pour différentes valeurs de T/T_ϕ. Les distributions en impulsion ont été normalisées à 1 en $p_z = 0$.

Comme pour la fonction de corrélation spatiale, les fluctuations de phase se traduisent de deux façons :

– Elles se traduisent tout d'abord par une modification de la largeur des distributions en impulsion. Alors que la fonction de corrélation décroît plus rapidement lorsque T/T_ϕ augmente, la distribution en impulsion s'élargit. La mesure de la demi-largeur à mi-hauteur de ces distributions en fonction de T/T_ϕ permet une mesure quantitative de ces fluctuations de phase. Pour les fortes fluctuations de phase, la demi-largeur à mi-hauteur vaut :

$$\Delta p_\phi = \alpha \frac{\hbar}{L_\phi(0)} = \frac{\hbar}{L_\phi}, \tag{1.64}$$

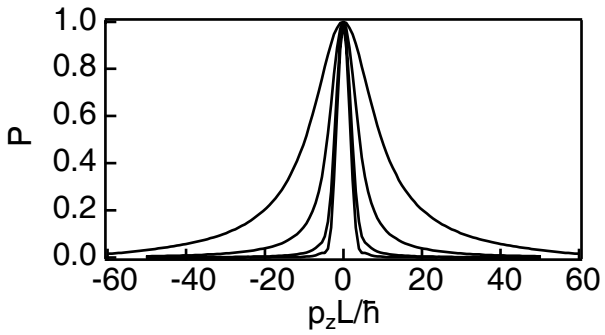


FIG. 1.14 – *Distributions en impulsion normalisées pour différentes amplitudes des fluctuations de phase. De la fonction la plus fine à la plus large, nous avons* $T/T_\phi = 0, 1, 5, 15$.

α étant le paramètre défini dans la partie précédente.

– La présence de fluctuations de phase implique également une modification de la forme générale de la fonction. Alors qu'à $T = 0$, la distribution en impulsion est une quasi-gaussienne, elle devient lorentzienne pour les fortes fluctuations de phase. L'observation de la modification de la forme permet l'observation qualitative des fluctuations de phase.

Ces deux propriétés ont été observées expérimentalement. Nous les aborderons dans la Partie 3.2.

1.3.8 Excitations collectives

Pour un condensat 3D allongé, le spectre en énergie des excitations suivant l'axe long est : $\epsilon_j = \hbar\omega_z\sqrt{j(j+3)/4}$ pour $\epsilon_j \ll \hbar\omega_\perp$ [78, 79]. Les fluctuations de phase proviennent du fait que ces différentes excitations sont peuplées thermiquement et elles sont donc présentes même à l'équilibre. Il est également possible d'exciter ces modes collectifs de manière dynamique et cohérente, en déplaçant ou modulant le piège par exemple [80, 81]. Une excitation du mode j entraîne alors une modulation de la densité du condensat du type [78] :

$$\delta n^{(j)}(z,t) = a_1 z^j e^{i\epsilon_j t/\hbar} + a_2 z^{j-2} e^{i\epsilon_{j-2} t/\hbar} + ... + c.c. \tag{1.65}$$

Premier état excité

Le premier état excité, pour $j = 1$, est à la pulsation ω_z. L'excitation de ce mode donne une oscillation du centre de masse à la fréquence axiale du piège, ce qui permet une mesure précise de cette dernière.

Deuxième état excité

Le deuxième état excité est à la pulsation $\sqrt{5/2}\,\omega_z$. Ce mode correspond à un mode de respiration où la taille du condensat oscille. Si ce mode peut-être excité en modulant les fréquences du piège, nous verrons qu'il peut également être excité lors de la formation du condensat [82, 83], et ceci d'autant plus fortement que la formation se fait rapidement. Nous en reparlerons dans le Chapitre 4 et nous montrerons qu'il est primordial de tenir compte de ces oscillations dans l'analyse et l'interprétation de nos données.

Correction du spectre en énergie

Le spectre en énergie au premier ordre en λ^2, où $\lambda = \omega_z/\omega_\perp$ est le paramètre de déformation du piège, est donné par [78] :

$$\epsilon_j = \hbar\omega_j, \tag{1.66}$$

$$\text{avec} \qquad \omega_j^2 = \frac{1}{4}j(j+3)\omega_z^2\Big(1 - \frac{\lambda^2}{48}(j-1)(j+4)\Big). \tag{1.67}$$

Alors que la fréquence du mode d'oscillation du centre de masse reste inchangée, celle du mode d'excitation quadrupolaire est légèrement modifiée. Pour les pièges que nous utilisons expérimentalement, cette modification reste cependant infime (moins de 0,003 %).

1.4 Conclusion

Nous avons présenté ici la condensation de Bose-Einstein pour des condensats très allongés. Alors que dans le cas d'un piège peu anisotrope, la phase des condensats est uniforme sur toute leur longueur, la phase des condensats très allongés peu fluctuer fortement. Nous avons donné l'expression de la température de phase typique T_ϕ qui caractérise la température à laquelle le condensat voit sa cohérence s'établir sur toute sa taille. Le paramètre T/T_ϕ caractérise l'amplitude des fluctuations de phase. Enfin, nous avons établi les fonctions de corrélation attendues pour ces quasi-condensats, leur longueur de cohérence en fonction de T/T_ϕ et les distributions en impulsion associées. Nous avons en particulier montré que l'augmentation de l'amplitude des fluctuations de phase modifie la forme de la fonction de corrélation en la faisant passer d'une gaussienne à une exponentielle. Ceci correspond, pour la distribution en impulsion, au passage d'une gaussienne à une lorentzienne.

CHAPITRE 2

Production et manipulation du condensat

Dans ce chapitre nous allons présenter le dispositif expérimental ainsi que les différentes étapes permettant d'obtenir un condensat de Bose-Einstein de ^{87}Rb. Davantage de détails pourront être trouvés dans les thèses des étudiants qui se sont succédés sur cette expérience, B. Desruelle, V. Boyer, G. Delannoy, Y. Le Coq, F. Gerbier et S. Richard [39, 71, 84–87].

Ensuite, l'analyse directe des images par absorption réalisées sur les atomes sera détaillée. Cette analyse nous permet de tirer directement les informations telles que la température de nos nuages atomiques, leur nombre d'atomes ou leur taille par exemple.

Enfin, je présenterai les outils qui ont été mis en place sur cette expérience pour la mesure expérimentale de la cohérence en phase. Nous verrons que ces expériences sont essentiellement fondées sur la manipulation des atomes par la lumière.

2.1 Production et observation d'un condensat de Bose-Einstein

L'obtention d'un condensat de Bose-Einstein nécessite d'avoir un nuage d'atomes dont le paramètre de dégénérescence, appelé aussi densité réduite dans l'espace des phases, est tel que :

$$n(0)\lambda_{\mathrm{dB_{Th}}} \geq 2,612; \tag{2.1}$$

où $n(0)$ est la densité atomique au centre du condensat et $\lambda_{\mathrm{dB_{Th}}} = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_BT}$ la longueur d'onde de de Broglie thermique à la température T, m étant la masse de l'atome. Autrement dit, il faut que la distance entre les particules soit de l'ordre de $\lambda_{\mathrm{dB_{Th}}}$.

Le dispositif expérimental permettant d'obtenir ces condensats est présenté sur la Figure 2.1. Le four nous donne une vapeur de Rubidium à 120 °C. La densité atomique dans le faisceau est de l'ordre de 10^{13} at/cm^3. Ceci donne un

paramètre de dégénérescence de 10^{-14} [87]. Il ne reste donc pas moins de 14 ordres de grandeur à gagner pour obtenir un condensat de Bose-Einstein !

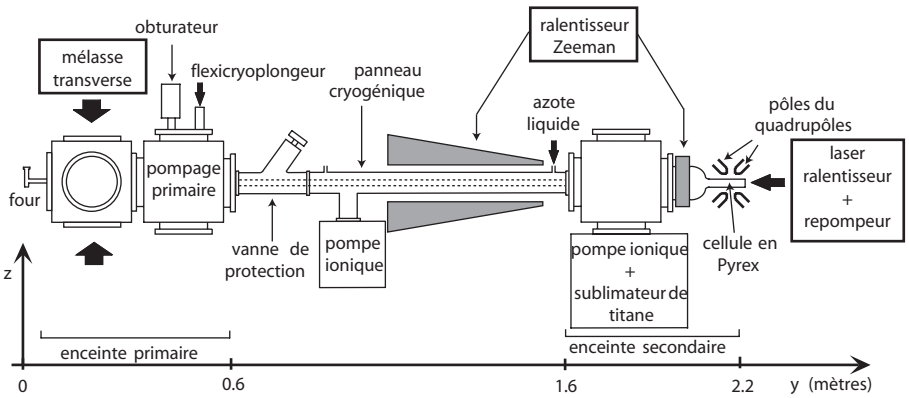


FIG. 2.1 – *Dispositif expérimental permettant d'obtenir un condensat de Bose-Einstein.*

Pour augmenter le paramètre de dégénérescence, nous pouvons jouer sur deux paramètres : la densité atomique qu'il faut augmenter en comprimant le nuage atomique, et la température qu'il va falloir baisser énormément. Les températures qu'il est nécessaire d'atteindre sont en effet de l'ordre du microkelvin, voire du nanokelvin, soit une réduction de la température des atomes d'un facteur 10^{11}. Ces atomes doivent donc être refroidis et isolés de toute paroi. Ceci est réalisé à l'aide de pièges magnéto-optique et magnétique sous vide. La qualité du vide est primordiale dans nos expériences : plus le vide sera bon, plus la durée de vie des atomes dans nos pièges sera importante. Ceci permet également de garder une densité $n(0)$ grande. Sur notre expérience, nous avons un vide de 10^{-11} mbar dans l'enceinte secondaire, suffisant pour obtenir un condensat avec un nombre d'atomes non négligeable.

2.1.1 Mélasse transverse et ralentisseur Zeeman

La profondeur des pièges utilisés pour confiner nos atomes est de l'ordre du millikelvin. Or les atomes sortant du four sont à 400 K, et ne peuvent pas être raisonnablement piégés directement : il faut passer par une phase de prérefroidissement pour obtenir un nombre suffisant d'atomes piégés.

Ralentisseur Zeeman

Les atomes sont décélérés par pression de radiation à l'aide d'un faisceau laser à résonance avec les atomes, envoyé dans la direction inverse de propagation des

atomes, comme le montre la Figure 2.2. Au cours de la décélération, la condition de résonance entre les atomes et la lumière change par effet Doppler. Pour assurer la résonance tout au long de la décélération, un champ magnétique inhomogène est créé grâce à des bobines dont le nombre de tours varie suivant l'axe de propagation. Ce dispositif est appelé ralentisseur Zeeman [88].

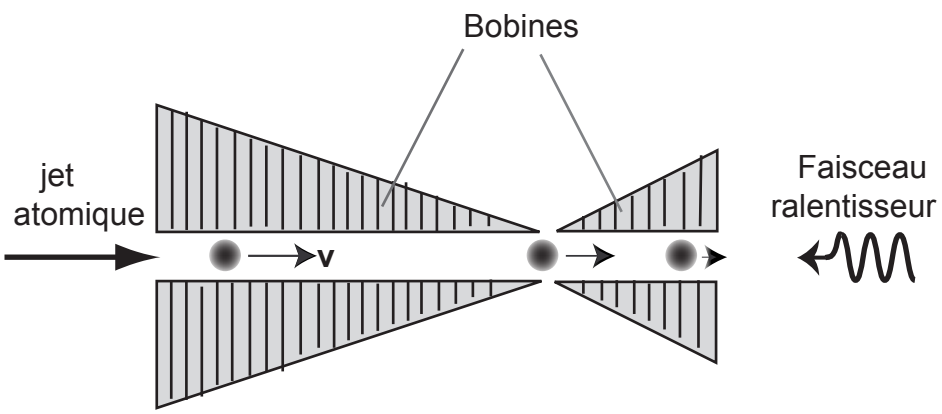


FIG. 2.2 – *Schéma du ralentisseur Zeeman. Les atomes sont ralentis par pression de radiation à l'aide d'un faisceau laser de propagation opposée. Les bobines permettent de garder le laser à résonance avec les atomes au cours de la décélération. L'utilisation des deux solénoïdes inversés permet de diminuer la puissance Joule dissipée dans le ralentisseur et d'annuler le champ à la sortie du ralentisseur et au niveau du piège magnéto-optique [85].*

Mélasse transverse

Afin d'avoir un maximum de flux dans le ralentisseur Zeeman, et avoir un maximum d'atomes piégés en un minimum de temps, quatre faisceaux laser perpendiculaires à l'axe du ralentisseur sont ajoutés au niveau de l'enceinte primaire. Ceux ci permettent de collimater le jet d'atomes dans la direction du ralentisseur Zeeman. On parle alors de mélasse transverse.

Les atomes ainsi ralentis arrivent dans la cellule avec une vitesse de quelques dizaines de mètres par seconde, suffisamment faible pour être piégés dans le piège magnéto-optique (PMO).

2.1.2 Piège Magnéto-Optique

PMO

Le piège magnéto-optique est représenté sur la Figure 2.3. Il est constitué de six paires de faisceaux laser, appelé lasers pièges, se croisant au niveau du centre de la cellule, de polarisation circulaire correctement choisie, de longueur d'onde décalée légèrement vers le rouge de la transition ($|F = 2\rangle - |F' = 3\rangle$) comme indiqué dans l'annexe B, et de deux bobines parcourues par des courants de sens opposé créant un champ magnétique quadrupolaire sphérique [89]. Ce piège permet à la fois de piéger les atomes sortant du ralentisseur Zeeman et de les refroidir jusqu'à une température de l'ordre de 500 μK. Le nombre d'atomes piégés est d'environ 10^9 avec une densité au centre du nuage de l'ordre de 3×10^{11} at/cm^3.

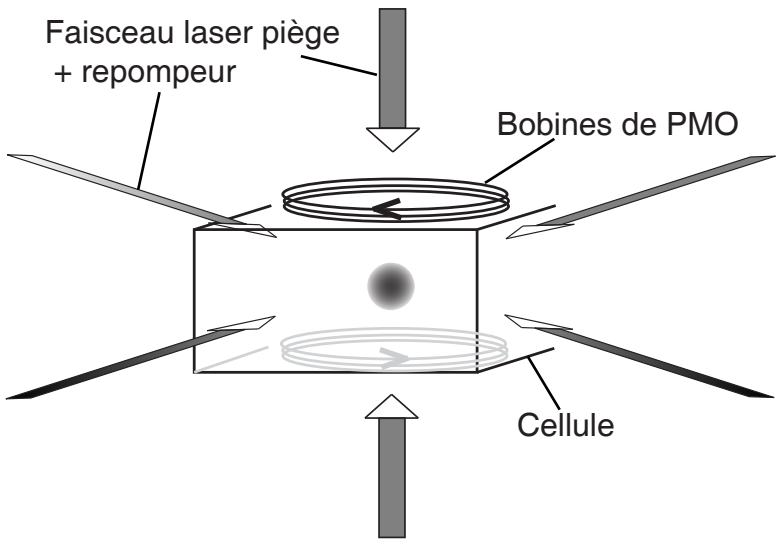


FIG. 2.3 – *Schéma du Piège Magnéto-Optique. Six paires de faisceaux laser et deux bobines parcourues par des courants de sens opposé permettent de piéger et de refroidir les atomes sortant du ralentisseur Zeeman.*

Le niveau $|F' = 2\rangle$ est couplé par émission spontanée au niveau $|F = 1\rangle$ qui est un niveau non piégé. Étant donné que cette phase de piégeage et de refroidissement dure quelques secondes et afin de garder un maximum d'atomes dans le PMO, nous superposons aux faisceaux pièges des faisceaux laser permettant de repomper vers $|F = 2\rangle$ les atomes tombés dans $|F = 1\rangle$.

Dark Spot et Ultra Dark Spot

La densité atomique dans le PMO est limitée par l'absorption et la réémission de photons. Afin d'augmenter cette densité et d'avoir ensuite une évaporation efficace grâce à un taux de collisions élastiques élevé, nous laissons redescendre spontanément dans un état "noir" les atomes se trouvant au centre du piège, c'est à dire dans un état non résonant avec les faisceaux laser. Il n'y a alors plus de diffusion de photons. Pour ce faire, nous masquons au centre du piège le faisceau laser repompeur. Cette phase est appelée Dark Spot [90]. Le taux de dépompage restant relativement faible comparé à la durée de cette étape, l'ajout d'un faisceau dépompeur (Ultra Dark Spot) permet d'en augmenter encore l'efficacité en forçant les atomes à tomber dans cet état noir. Ces deux phases permettent d'obtenir une densité atomique d'environ 5×10^{11} at/cm^3 et une température de 100 à 200 μK.

Mélasse

Enfin, dans une troisième phase, les champs magnétiques sont coupés et les faisceaux laser sont désaccordés encore davantage vers le rouge pour effectuer du refroidissement sub-Doppler, par mécanisme Sisyphe [91, 92]. Ceci permet d'obtenir au final une température inférieure à 100 μK et une densité de 10^{11} at/cm^3. La densité dans l'espace des phases est alors de 5×10^{-7}.

2.1.3 Piège magnétique et évaporation

Piège de Ioffe-Pritchard

Avec le type de refroidissement et de piégeage optique que nous venons de décrire, la baisse de la température est limitée par l'échauffement dû à l'émission spontanée. De même, la densité du nuage atomique y est également limitée. Pour pallier ces limitations, le nuage d'atomes est transféré dans un piège conservatif purement magnétique créé par un champ magnétique statique.

Dans notre expérience, le piège magnétique est de type Ioffe-Pritchard [93]. Celui-ci crée un champ magnétique quadrupolaire cylindrique de gradient B' pour le confinement radial, et un champ dipolaire axial de courbure B'' et de biais magnétique B_0. Le champ dipolaire permet de passer radialement d'un potentiel semi-linéaire à un potentiel harmonique sur un rayon $r_0 = B_0/B'$. Il permet également d'obtenir une valeur non nulle B_0 du champ en son centre. Ce dernier point est primordial car il permet aux atomes de suivre le champ de manière adiabatique. Ceci évite qu'ils ne se dépolarisent et qu'ils ne soient finalement perdus par le piège.

A basse température, le potentiel créé par le piège de type Ioffe-Pritchard

peut donc être considéré comme quasiment harmonique et il s'écrit :

$$V_{\text{ext}} = g_F m_F \mu_{\text{B}} \Big[B_0 + \frac{1}{2}\Big(\frac{B'^2}{B_0} - \frac{B''}{2}\Big)(x^2+y^2) + \frac{B''}{2} z^2 \Big], \tag{2.2}$$

$$= V_0 + \frac{1}{2} m(\omega_\perp^2 x^2 + \omega_\perp^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \tag{2.3}$$

g_F étant le facteur de Landé et μ_{B} le magnéton de Bohr. Dans la suite, $\omega_\perp/2\pi$ sera appelé fréquence radiale et $\omega_z/2\pi$ fréquence axiale.

Piégeage magnétique à l'aide d'électro-aimants

Une particularité de notre groupe de recherche est le choix de pôles ferromagnétiques entourés de bobines, comme indiqué sur la Figure 2.4, pour créer le champ magnétique. Les avantages de cette technique sont de faibles courants de fonctionnement (30 A maximum) et un fort confinement. L'utilisation de pôles biseautés le long de z est en outre favorable à la réalisation de condensats allongés.

Plusieurs générations d'électro-aimants se sont succédés sur notre expérience. Celui que nous utilisons à l'heure actuelle a été développé par V. Boyer [85]. Il produit un fort confinement dans deux directions et faible dans la troisième, ce qui nous permet d'obtenir des condensats de grande anisotropie (jusqu'à 200 de rapport d'anisotropie $\omega_\perp/\omega_z$), indispensable pour observer des fluctuations de phase dans le condensat. Les caractéristiques de ce piège sont présentées en détail dans la thèse de S. Richard [39], ainsi que le cycle magnétique complet permettant d'obtenir un condensat.

Evaporation

L'évaporation est faite à l'aide d'un champ radio-fréquence qui couple les atomes les plus chauds vers un état anti-piégeant. Les atomes les plus chauds sont donc éjectés hors du piège et les atomes restant dans le piège se rethermalisent à une température plus basse [94]. La fréquence du champ radio-fréquence est diminuée au cours du temps afin de diminuer la température tout en augmentant la densité atomique : le paramètre de dégénérescence augmente alors jusqu'à l'obtention du condensat.

Résumé des grandes étapes vers la condensation

Les grandes étapes depuis le PMO jusqu'à l'obtention du condensat sont les suivantes :

- **Transfert des atomes** de la mélasse vers le piège magnétique. Les fréquences du piège magnétique sont calculées pour avoir la meilleure adaptation possible entre le PMO et le piège magnétique. Les atomes piégés sont

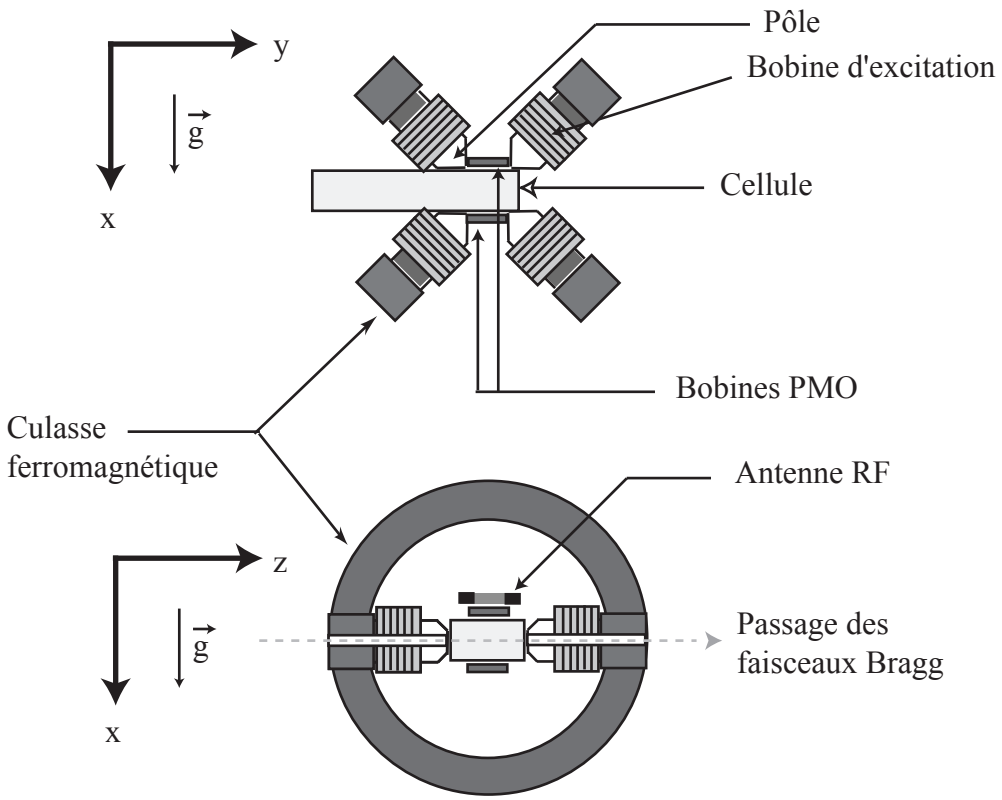


FIG. 2.4 – *Schéma de l'électro-aimant permettant de piéger les atomes (tiré de la thèse de F. Gerbier [38]).*

dans l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$. Ils sont transférés de $|F = 2\rangle$ à $|F = 1\rangle$ à l'aide du faisceau dépompeur à la fin de la mélasse[1].

– **Compression du piège magnétique** par une augmentation du gradient B' et une diminution du biais magnétique qui permet d'obtenir une fréquence radiale plus grande. Ceci permet d'augmenter le taux de collisions élastiques et d'avoir un refroidissement évaporatif efficace. A la fin de cette compression, les fréquences du piège sont $\omega_\perp = 2\pi \times 415$ Hz et $\omega_z = 2\pi \times 7$ Hz.
– **Evaporation**.
– **Compression finale.** Nos expériences sur les quasi-condensats requièrent de grands rapports d'anisotropie. Une deuxième compression est donc réalisée à mi-parcours de la rampe d'évaporation en abaissant la courbure et

[1]Ancun faisceau directeur n'étant appliqué pendant cette phase de transfert, les différents niveaux Zeeman sont a priori uniformément peuplés. Le transfert des atomes dans l'état piégeant est donc de 30 % maximum

le biais du champ magnétique.
– **Obtention du condensat de Bose-Einstein.**

2.1.4 Imagerie par absorption

Système d'imagerie

Les nuages atomiques sont observés optiquement à l'aide d'un faisceau laser à résonance appelé faisceau sonde. Une caméra CCD permet ensuite de regarder l'absorption du faisceau sonde au niveau des atomes. Le schéma du montage permettant de réaliser l'imagerie est présenté sur la Figure 2.5.

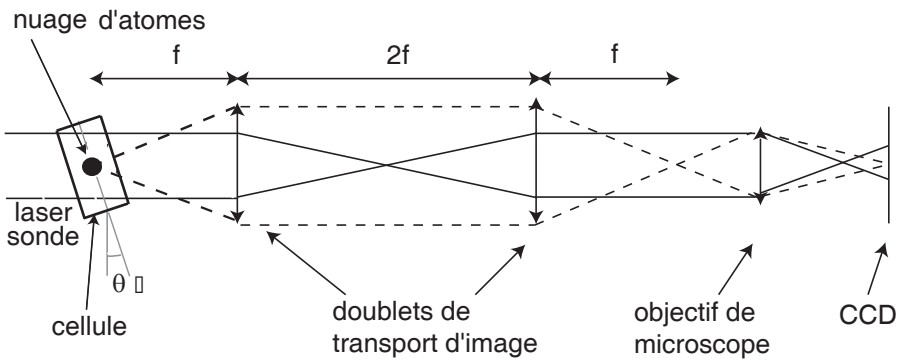


FIG. 2.5 – *Schéma du dispositif d'imagerie par absorption.*

Le dispositif d'imagerie est constitué des éléments suivants :
– un faisceau laser à résonance avec les atomes. L'axe du faisceau est perpendiculaire à l'axe long du piège magnétique et est incliné par rapport à l'axe vertical, correspondant à l'un des axes radiaux du piège magnétique, d'environ 5° pour les expériences que nous décrivons dans cette thèse.
– deux doublets corrigés de l'aberration sphérique et de la coma permettent de réaliser un transport de l'image des atomes dans une zone plus accessible, 60 cm en-dehors de la cellule, avec un grandissement 1.
– un objectif de microscope permettant d'imager les atomes avec un grandissement d'environ $1,8$.
– l'image du nuages d'atomes est finalement visualisée sur une caméra CCD numérique PixelFly.

Intéraction atome-lumière

L'interaction des atomes avec la lumière fait intervenir trois processus différents : l'absorption de photons, la réémission de photons et le déphasage de la lumière transmise. Ces trois propriétés sont utilisées pour l'imagerie par absorption, fluorescence et contraste de phase respectivement.

L'interaction avec la lumière peut être décrite grâce à l'indice de réfraction des atomes $n_{\mathrm{at}} = \sqrt{1 + 4\pi n\alpha}$, où α est la polarisabilité atomique et n la densité atomique. Dans le cas où $|n_{\mathrm{at}} - 1| \ll 1$ et où l'intensité du laser est telle que $I \ll I_{\mathrm{sat}}$, I_{sat} étant l'intensité de saturation de la transition utilisée, l'indice de réfraction pour un système à deux niveaux peut s'écrire [95] :

$$n_{\mathrm{at}} = 1 + \frac{\sigma_0 n\lambda}{4\pi}\Big[\frac{i}{1 + 4\delta^2/\Gamma^2} - \frac{2\delta/\Gamma}{1 + 4\delta^2/\Gamma^2}\Big], \tag{2.4}$$

où $\sigma_0 = 3\lambda^2/2\pi$ est la section efficace d'absorption à résonance pour un atome à deux niveaux, λ la longueur d'onde du laser, δ le décalage par rapport à la résonance et Γ la largeur du niveau excité qui est égale à $5,9\,\mathrm{MHz}$ dans notre cas. La partie imaginaire de l'indice implique une atténuation de l'amplitude E_0 du laser sonde alors que la partie réelle la déphase. L'amplitude transmise par le nuage atomique est : $E_{\mathrm{trans}} = \mathcal{T} E_0 e^{i\phi}$, le coefficient de transmission et le déphasage valant alors :

$$\mathcal{T} = \exp\Big(-\sigma_0 \int n(x,y,z)\,\mathrm{d}x \frac{1}{1 + 4\delta^2/\Gamma^2}\Big), \tag{2.5}$$

$$\phi = -\sigma_0 \int n(x,y,z)\,\mathrm{d}x \frac{2\delta/\Gamma}{1 + 4\delta^2/\Gamma^2}, \tag{2.6}$$

avec un laser sonde dirigé suivant l'axe Ox.

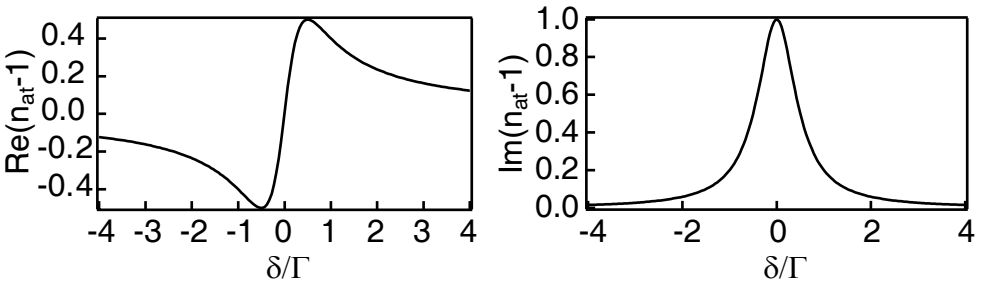


FIG. 2.6 – *Tendance de la partie réelle et partie imaginaire de l'indice en fonction du désaccord par rapport à la résonance pour une densité atomique donnée.*

Sur notre expérience, nous nous plaçons à désaccord δ nul afin d'éviter les effets de lentille de condensat qui conduisent à des signaux très difficiles à analyser. Nous observons donc sur la caméra CCD la variation spatiale de $\mathcal{T}^2$. Nous prenons deux images successives, l'une avec les atomes, l'autre sans les atomes afin de connaître E_0. En divisant les deux images puis en prenant le logarithme, nous obtenons la quantité $\sigma_0 \int n(x,y,z)\mathrm{d}x$ directement proportionnelle à la densité atomique spatiale intégrée suivant la direction du faisceau laser sonde, quantité

qui nous intéresse pour réaliser toutes nos mesures (nombre d'atomes, température, taille,...).

Nous ne réalisons l'image des atomes qu'après un certain temps de vol t (20 ms typiquement), c'est à dire après avoir coupé le piège magnétique et laissé tomber les atomes. L'étalement du nuage implique une réduction de son épaisseur optique ($\sigma_0 \int n\mathrm{d}x$) et permet une analyse correcte des images. Dans le cas d'un nuage d'atomes dans le piège, la résolution de l'imagerie est insuffisante et l'épaisseur optique est alors trop grande : l'atténuation du laser sonde est trop importante et le signal d'absorption détecté sur la caméra CCD se noie dans le bruit exponentiellement vite. Il est alors difficile d'être quantitatif. Une autre solution pour observer le profil de densité atomique serait de décaler la fréquence du faisceau sonde par rapport à la résonance atomique. Mais dans ce cas, l'effet lentille du nuage atomique (les atomes modifient la phase du faisceau laser) dévie le faisceau sonde de façon significative.

Section efficace d'absorption

Dans ce qui précède, nous avons utilisé la section efficace d'absorption σ_0 à résonance pour un atome à deux niveaux, ce qui correspondrait aux transitions fermées $|F = 2, m_F = \pm 2\rangle$ - $|F' = 3, m_{F'} = \pm 3\rangle$ pour notre laser sonde. Or celui-ci est polarisé linéairement et la direction du champ magnétique résiduel lors de la prise d'image est inconnue. De plus, les atomes initialement piégés dans $|F = 1, m_F = -1\rangle$ sont repompés avant la prise d'image dans $|F = 2\rangle$ et dans tous les sous niveaux Zeeman sans qu'on en connaisse les populations respectives. La section efficace d'absorption σ n'est donc pas celle d'un atome à deux niveaux σ_0, mais doit inclure toutes les transitions mises en jeu et leur coefficient de Clebsch-Gordan, et les populations dans les divers sous-niveaux Zeeman.

La connaissance de cette section efficace d'absorption σ est primordiale pour la caractérisation des nuages atomiques et en particulier pour la mesure du nombre d'atomes. Nous présenterons plus loin les méthodes utilisées pour déterminer σ.

Mise au point du système d'imagerie

Le système d'imagerie est mis au point sur des condensats de petite taille, avec un nombre d'atomes total constant et un laser sonde à résonance. Le temps de vol est de 20,3 ms, temps de vol généralement utilisé pour toutes nos expériences. La distance entre l'objectif de microscope et la caméra CCD est maintenue constante à 160 mm, comme indiquée sur la Figure 2.7. La taille des images obtenues est mesurée en fonction de la position dx du système objectif + caméra. Le condensat est un objet purement absorbant et la taille des images évolue quadratiquement avec dx à l'ordre le plus bas, avec un minimum lorsque le système d'imagerie est correctement mis au point. La mise au point est réalisée à $\pm$ 0,2 mm.

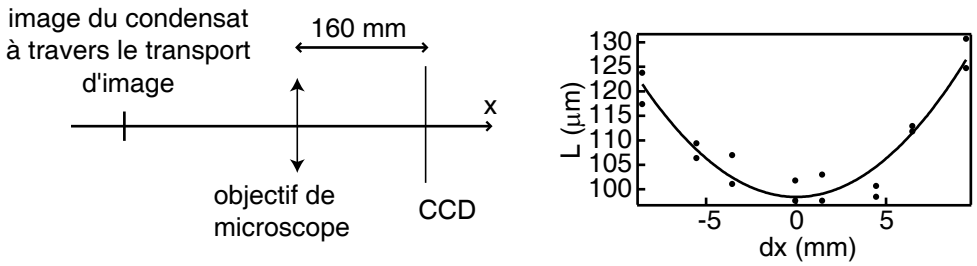


FIG. 2.7 – *Gauche : le système d'imagerie est mis au point en regardant la taille des condensats en fonction de la position dx du système objectif + caméra. Droite : Points expérimentaux de la taille des condensats en fonction de dx. La courbe est un ajustement par une fonction quadratique.*

Une autre possibilité pour effectuer la mise au point de notre système d'imagerie serait de réaliser le même type d'expérience que précédemment mais avec le laser sonde décalé par rapport à la résonance. Le condensat équivaut alors à une lentille convergente ou divergente. La convergence, ou divergence, est maximale lorsque la valeur absolue de la partie réelle de l'indice de réfraction est maximale, autrement dit pour $\delta = \pm\Gamma/2$ comme l'indique la Figure 2.6. La Figure 2.8 montre la taille mesurée du condensat en fonction de dx, courbes obtenues d'après des simulations que nous avons réalisées. Le minimum de ces courbes est déplacé d'une certaine quantité, dépendant de la densité atomique[2], de part et d'autre de la position de focalisation précédente. Dans ce cas, la position de bonne mise au point est donnée par l'intersection des deux courbes réalisées à $\delta = \pm\Gamma/2$.

Calibration

Enfin, afin de connaître précisément le grandissement de tout notre système d'imagerie et la taille effective d'un pixel de la caméra dans le plan objet, nous plaçons une mire juste en dessous de la cellule. Nous trouvons alors une taille effective du pixel de $2,78$ μm dans le plan objet. L'erreur systématique de cette mesure due au fait que l'on effectue la mesure en dehors du plan de focalisation est estimée à $1,4$ %. Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, le plan de focalisation se trouve en effet au niveau du nuage d'atomes après un temps de vol de 20,3 ms, donc à l'intérieur de la cellule. Nous tiendrons compte de cette erreur systématique dans l'évaluation de nos incertitudes de mesures.

[2]La valeur de la focale de la lentille représentée par le condensat dépend de la densité atomique

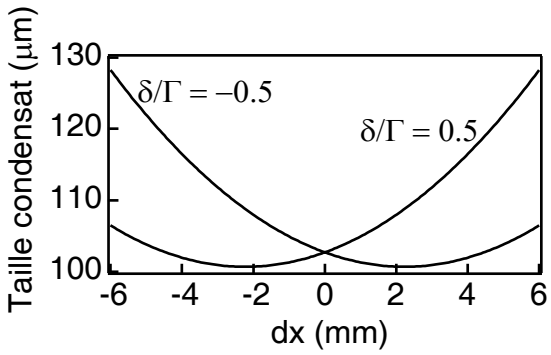


FIG. 2.8 – *Taille du condensat en fonction de la position du système objectif + caméra et pour un désaccord de la sonde de* $\pm\Gamma/2$. *La position de bonne mise au point est donnée par l'intersection entre les courbes.*

2.2 Caractérisation des nuages atomiques

Une fois les images de nuages atomiques obtenues, il faut être en mesure de les caractériser afin de pouvoir exploiter nos mesures. Nous voulons en particulier connaître la température de notre nuage, sa taille, son nombre total d'atomes,... La connaissance de tous ces paramètres est primordiale pour pouvoir ensuite interpréter nos expériences, et en particulier calculer l'amplitude des fluctuations de phase.

2.2.1 Fréquences du piège magnétique

La caractérisation de nos ensembles d'atomes passe forcément par la caractérisation du piège magnétique final qui nous permet d'obtenir le condensat, autrement dit la mesure de ses fréquences, définies à la section 2.1.3.

Fréquence radiale

La fréquence radiale dans un piège de type Ioffe-Pritchard dépend du gradient de champ magnétique radial B' et du biais magnétique B_0. Les atomes piégés étant dans le niveau $|F = 1, m_F = -1\rangle$, la fréquence radiale vaut[3] :

$$\omega_\perp = \sqrt{\frac{\mu_\mathrm{B}}{2m}}\frac{B'}{\sqrt{B_0}}. \tag{2.7}$$

Le gradient magnétique reste une constante sur nos expériences. Deux mesures indépendantes, réalisées par S. Richard, F. Gerbier et J. Thywissen [38,39], grâce à une sonde Hall et par chauffage paramétrique, ont donné une valeur de

[3] D'après l'équation (2.2) et pour une courbure de champ magnétique telle que $B'' \ll B'^2/B_0$.

gradient de : $B' = 1,46(1)$ kG/cm. Nous changeons la fréquence radiale en modifiant le biais magnétique B_0. Finalement, la fréquence radiale est mesurée par l'intermédiaire de la mesure de B_0. Nous mesurons cette dernière grâce à la mesure de la fréquence du champ radio-fréquence permettant de vider complètement le piège de ses atomes.

Le champ magnétique déplace en énergie le niveau $m_F = -1$. C'est ce qui permet de piéger nos atomes. En revanche, le niveau $m_F = 0$ reste inchangé au premier ordre. Les atomes se trouvant dans ce niveau ne sont donc pas piégés. La condition de couplage entre les niveaux $m_F = -1$ et $m_F = 0$ évolue donc avec le champ magnétique qui varie spatialement comme cela est indiqué sur le graphique de droite de la Figure 2.9. Le champ radio-fréquence effectuant le couplage à une fréquence donnée est donc sélectif en énergie mais aussi spatialement.

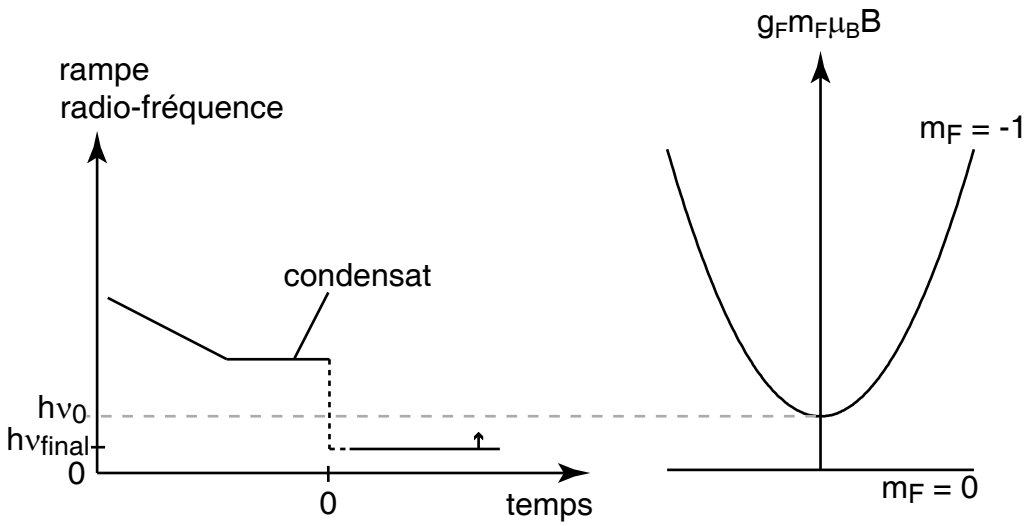


FIG. 2.9 – *Principe de la mesure de biais magnétique grâce à la mesure de la fréquence du champ radio-fréquence vidant le piège de ses atomes. Le graphique de gauche présente la séquence du champ radio-fréquence appliqué en fonction du temps. Les pointillés indiquent que l'amplitude de ce champ est fortement diminuée. Le graphique de droite représente les niveaux d'énergie du niveau piégé $m_F = -1$ et du niveau non piégé $m_F = 0$ en fonction de la position.*

Lorsque le champ radio-fréquence correspond au biais magnétique, c'est à dire au champ au centre du piège, tous les atomes sont couplés vers le niveau $m_F = 0$ et sont donc éjectés du piège. Si la fréquence du champ radio-fréquence est supérieure au biais, seuls les atomes les plus chauds sont couplés vers le niveau non piégé : c'est le principe de l'évaporation. Enfin, s'il est inférieur, aucun atome n'est couplé et tous restent piégés. La perte ou non des atomes en fonction de la valeur du champ radio-fréquence est ainsi révélatrice de sa position par rapport au biais magnétique.

Le principe de la mesure est présentée sur la Figure 2.9. Nous partons initialement d'un condensat afin d'avoir une densité atomique au centre du piège importante. Nous baissons ensuite fortement l'amplitude du champ radio-fréquence pour ne plus avoir de couplage et diminuons sa fréquence jusqu'à une valeur ν_{final}. L'amplitude est ensuite remise à sa valeur initiale. Si $\nu_{\text{final}} < g_F m_F \mu_{\text{B}} B_0/h$, aucun atome n'est couplé vers un état non piégeant. Lors de la prise d'image, le nombre d'atomes reste identique au nombre d'atomes dans le condensat initial. L'expérience est renouvelée en remontant petit à petit la valeur de la fréquence ν_{final}. Lorsque $\nu_{\text{final}} = g_F m_F \mu_{\text{B}} B_0/h$, tous les atomes sont subitement couplés vers un état anti-piégeant et sont éjectés du piège. Nous ne trouvons plus aucun atome lors de la prise d'image.

Cette méthode permet de mesurer précisément le biais magnétique et d'en déduire la fréquence radiale. Les expériences décrites dans ce manuscrit ont été réalisées pour des fréquences radiales $\omega_\perp/2\pi = 395(4)$ Hz et 655(8) Hz.

Fréquence axiale

La fréquence axiale du piège magnétique est quant à elle mesurée en excitant le mode d'oscillation du centre de masse du condensat, mode oscillant à la fréquence axiale ω_z [78]. Pour exciter ce mode, nous appliquons un gradient de champ magnétique créé par les bobines du PMO pendant quelques millisecondes. La Figure 2.10 représente la position du centre de masse d'un condensat à différents instants après l'application du gradient de champ. Un ajustement sinusoïdal permet de trouver la fréquence axiale, soit $\omega_z/2\pi = 8,67(2)$ Hz et $6,55(2)$ Hz pour les expériences décrites dans cette thèse.

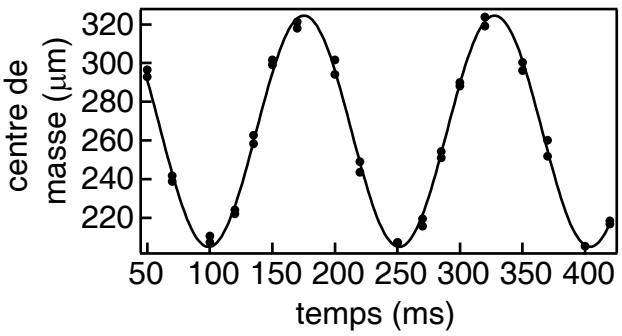


FIG. 2.10 – *Mesure de la fréquence axiale du piège magnétique. Les points représentent la position du centre de masse d'un condensat, après application d'un gradient de champ magnétique, en fonction du temps. La ligne est un ajustement sinusoïdal qui donne une fréquence de* $6,55(2)$ *Hz.*

Régime 1D-3D

En résumé, les pièges utilisés pour nos expériences ont été les suivants :

- Pour la mesure des fluctuations de phase à l'équilibre par la méthode de la spectroscopie de Bragg décrite dans les thèses de S. Richard et F. Gerbier [38,39] et brièvement rappelée dans la Partie 3.2 : $\omega_z/2\pi = 5$ Hz et $\omega_\perp/2\pi = 760$ Hz.
- Pour la mesure des fluctuations de phase par interférométrie décrite dans la Partie 3.3 : $(\omega_z/2\pi; \omega_\perp/2\pi) = (8,67; 395)$ Hz et $(6,55; 655)$ Hz.
- Pour la mesure des fluctuations de phase au cours de la formation du condensat décrite dans le Chapitre 4 : $\omega_z/2\pi = 6,55$ Hz et $\omega_\perp/2\pi = 655$ Hz.

Ce sont donc toujours des pièges fortement allongés, mais nous ne sommes pas dans le régime 1D au sens strict du terme. Avec un nombre d'atomes pouvant aller de quelques 10^4 à quelques 10^5, le potentiel chimique, calculé en supposant que nous sommes dans le régime de Thomas-Fermi 3D, varie en effet d'environ $1,2\hbar\omega_\perp$ à $5\hbar\omega_\perp$. Nous nous plaçons entre le régime parfaitement 1D et 3D Thomas-Fermi.

2.2.2 Nombre d'atomes

Mesure sur les images

Le nombre total d'atomes est déterminé simplement en sommant la transmission du laser sonde sur toute l'image obtenue par absorption :

$$N = \iiint n \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{2.8}$$

$$= \frac{A}{\sigma} \sum_{pixels} -\ln \mathcal{T}(y,z), \tag{2.9}$$

avec A l'aire par pixel de caméra ramenée dans le plan objet et σ la section efficace d'absorption. Le faisceau laser sonde est à résonance ($\delta = 0$).

Calibration du nombre d'atomes

Le mesure du nombre d'atomes repose sur la connaissance de la section efficace d'absorption $\sigma = \sigma_0/C_N$, σ_0 étant la section efficace d'absorption de la transition fermée $|F = 2, m_F = +2\rangle$ - $|F' = 3, m_{F'} = +3\rangle$. Le nombre total d'atomes est alors égal à :

$$N = C_N N_{\mathrm{mes}}. \tag{2.10}$$

où N_{mes} est le nombre d'atomes mesurés en prenant comme section efficace d'absorption σ_0. Or, pour les raisons évoquées dans la Partie 2.1.4, la valeur de σ, et donc de C_N, n'est pas connue d'emblée sur notre expérience et doit donc être déterminée.

Calibration par la mesure de T_c

La mesure de C_N peut se faire de deux manières indépendantes. La première méthode consiste à mesurer la température critique T_c qui dépend du nombre d'atomes total comme [96] :

$$T_c = T_c^0(1 - 0,73\frac{\bar{\omega}}{\omega}N^{-1/3} - 1,33\frac{a}{a_{OH}}N^{1/6}), \tag{2.11}$$

où $T_c^0 = 0{,}94\ \hbar\omega N^{1/3}/k_B$ est la température critique d'un gaz sans interaction, $\bar{\omega} = (2\omega_\perp + \omega_z)/3$ la moyenne des fréquences, $\omega = (\omega_\perp^2\omega_z)^{1/3}$ la moyenne géométrique des fréquences, a la longueur de diffusion et $a_{OH} = \sqrt{\hbar/m\omega}$ la taille de l'oscillateur harmonique. Les données expérimentales sont présentées sur la Figure 2.11. Nous mesurons le nombre d'atomes dans le condensat pour différentes températures autour de la température critique. Nous faisons varier la température en changeant la valeur finale du champ radio-fréquence ν_{rf}. Un ajustement linéaire par morceau nous donne la valeur de la fréquence au seuil de la condensation. A partir de cette valeur et de l'ajustement linéaire sur la température, nous en déduisons la température critique et donc le nombre d'atomes total théorique correspondant. Ceci donne un facteur de correction C_N égal à $3,84$ à 20 % près.

Calibration par la mesure de la taille des condensats

La deuxième méthode se fonde sur la dépendance de la taille de condensats purs, c'est à dire sans nuage thermique visible sur les images, vis à vis du nombre d'atomes. Dans nos expériences, les condensats se trouvent entre le régime Thomas-Fermi et le régime 1D. Pour calculer les tailles des condensats attendues théoriquement, nous avons choisi d'utiliser l'approximation analytique proposée par A. L. Zubarev et Y. E. Kim [97]. Leur théorie permet de modifier l'équation de la taille dans l'approximation Thomas-Fermi afin de tenir compte de l'énergie cinétique radiale. Le paramètre C_N est ensuite calculé afin de faire correspondre les tailles mesurées et les tailles calculées en fonction du nombre d'atomes.

La Figure 2.12 représente la taille des condensats après temps de vol en fonction du nombre d'atomes. Les courbes en trait plein correspondent aux calculs réalisés à partir de l'approximation de Zubarev et Kim. Le paramètre C_N est calculé dans la direction axiale et dans la direction radiale afin d'ajuster au mieux ces courbes aux points expérimentaux. Nous trouvons alors un facteur de calibration de $3,8(4)$. L'incertitude représente l'erreur systématique sur la calibration du nombre d'atomes et provient essentiellement de la différence trouvée sur les facteurs de calibration suivant les deux directions du condensat[4].

[4]La comparaison des profils issus de l'approximation de Zubarev et Kim avec les résultats exacts obtenus par résolution numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii montre que la taille

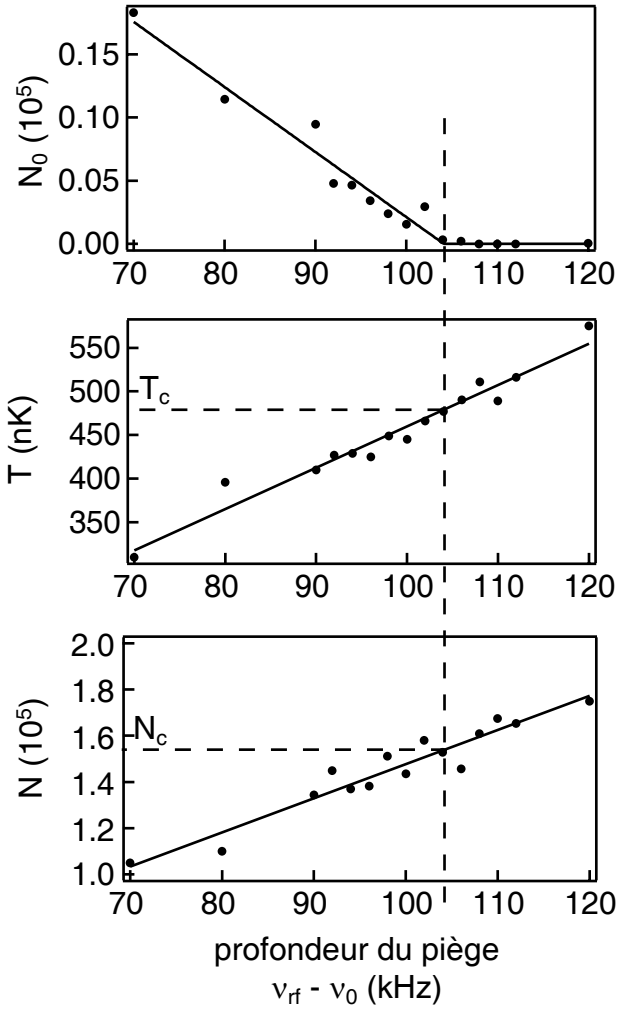


FIG. 2.11 – *Calibration du nombre d'atomes par la mesure de la température critique. Haut : Nombre d'atomes, sans facteur de correction, dans le condensat en fonction de la profondeur du piège. Un ajustement linéaire par morceau donne la valeur de la profondeur du piège au seuil de la condensation. Milieu : Température en fonction de la profondeur du piège avec un ajustement linéaire. Nous en déduisons la valeur de la température critique. Bas : Nombre d'atomes total, sans facteur de correction, en fonction de la profondeur du piège. Nous en déduisons le nombre d'atomes total mesuré au seuil de la condensation.*

axiale issue de l'approximation est sur-estimée par rapport à la taille exacte, alors que la taille radiale est sous-estimée [39]. Ceci a donc pour effet de sur-estimer ou de sous-estimer le facteur de calibration en fonction de la direction suivant laquelle l'ajustement est réalisé. Mais cette approximation donne toutefois une erreur inférieure à celle obtenue avec les profils issus de l'approximation Thomas-Fermi. La précision sur le facteur de calibration est donc meilleure en utilisant les tailles issues de l'approximation de Zubarev et Kim.

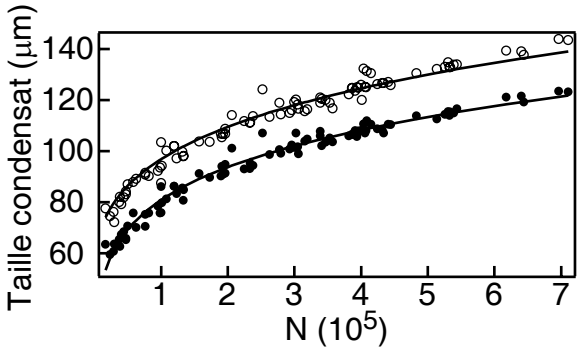


FIG. 2.12 – *Taille du condensat après temps de vol en fonction du nombre d'atomes correctement calibré. Les cercles pleins représentent la demi-longueur du condensat et les cercles blancs le demi-rayon. Les courbes correspondent aux calculs réalisés à partir de l'approximation de Zubarev et Kim.*

Remarque

Théoriquement, le plus petit coefficient de Clebsch-Gordan pour une transition π donne un facteur de correction C_N de 3. Il faut également tenir compte de la largeur spectrale Δ du laser sonde qui est de l'ordre de 2 MHz et qui réduit l'absorption à résonance d'un facteur $(\Delta + \Gamma)/\Gamma$. Ceci donne un facteur de correction maximum de 4, valeur compatible avec notre mesure.

2.2.3 Profils des nuages atomiques

L'imagerie permet également de fournir la distribution de la densité atomique au cours du temps de vol d'où nous pouvons déduire de nombreuses propriétés des condensats et des nuages thermiques. Ceci est réalisé en comparant les distributions mesurées avec les résultats des différents modèles que nous allons rapidement présenter maintenant.

Nuages thermiques au dessus du seuil de condensation

La densité d'un nuage d'atomes piégés à une température T supérieure à la température de condensation est, dans l'approche semi-classique [95] :

$$\begin{aligned} n_{\mathrm{th}}(\vec{r}, t=0) &= \frac{1}{\lambda^3_{\mathrm{dB_{Th}}}} g_{3/2}\Big(\exp\Big[\frac{\mu}{k_{\mathrm{B}}T} - \frac{V_{\mathrm{ext}}(\vec{r})}{k_{\mathrm{B}}T}\Big]\Big), \\ &= \frac{1}{\lambda^3_{\mathrm{dB_{Th}}}} g_{3/2}\Big(\exp\Big[\frac{\mu}{k_{\mathrm{B}}T} - \sum_i \frac{r_i^2}{2X_i^2(0)}\Big]\Big) \text{ avec } i = x, y, z, \end{aligned}$$

où μ est le potentiel chimique, $X_i(0) = \sqrt{k_\mathrm{B}T/m\omega_i^2}$ la taille du nuage dans la direction i et $g_j(x) = \sum_{l=0}^{\infty} x^l/l^j$. Cette distribution s'approche d'une distribution gaussienne de rayon quadratique moyen $X_i(0)$.

Lorsque le piège harmonique est coupé et en négligeant les collisions au cours de l'expansion, le nuage s'étend de façon purement balistique. Le profil de densité reste identique à celui dans le piège, la taille du nuage augmentant de la façon suivante avec le temps de vol t :

$$X_i^2(t) = X_i^2(0) + \frac{k_\mathrm{B}T}{m}t^2. \tag{2.12}$$

Enfin, les images que nous observons nous donnent la densité intégrée suivant une des directions après temps de vol :

$$\tilde{n}_\mathrm{th}(y,z,t) = \tilde{n}_\mathrm{th}(0,0,t)g_2\Big(\exp\Big[\frac{\mu}{k_\mathrm{B}T} - \frac{y^2}{2X_y^2(t)} - \frac{z^2}{2X_z^2(t)}\Big]\Big). \tag{2.13}$$

Condensats purs

La densité atomique du condensat dans le piège a la forme, dans la limite de Thomas-Fermi, d'une parabole inversée :

$$n_0(\vec{r}, t=0) = \max\Big(\frac{\mu - V_\mathrm{ext}(\vec{r})}{g}, 0\Big), \tag{2.14}$$

$$= n_0(0,0)\max\Big(0, 1 - \sum_i \frac{r_i^2}{R_i^2(0)}\Big), \tag{2.15}$$

où $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ est la constante de couplage due aux interactions et a est la longueur de diffusion dans l'onde s.

A la coupure du piège, l'énergie d'interaction est convertie en énergie cinétique. La densité atomique après temps de vol garde la forme d'une parabole inversée avec, pour un nuage allongé dans une direction, les tailles suivantes [98,99] :

$$R_z(t) = \lambda_z R_z(0) \qquad \text{suivant l'axe long,} \tag{2.16}$$

$$R_{x,y}(t) = \lambda_\perp R_{x,y}(0) \qquad \text{suivant l'axe radial,} \tag{2.17}$$

avec les facteurs d'échelle :

$$\lambda_z(\tau) = 1 + \epsilon^2[\tau\arctan(\tau) - \ln\sqrt{1+\tau^2}] + O(\epsilon^4) \tag{2.18}$$

$$\text{et} \quad \lambda_\perp(\tau) = \sqrt{1+\tau^2}, \tag{2.19}$$

où $\epsilon = \omega_z/\omega_\perp$ et $\tau = \omega_\perp t$.

Nos condensats se trouvent entre le régime de Thomas-Fermi et le régime 1D. La taille des condensats n'est plus correctement calculée lorsque l'on utilise

l'approximation Thomas-Fermi, mais la densité atomique reste toujours proche d'une parabole inversée[5]. Les tailles du condensat sont donc toujours correctement extraites à partir d'un ajustement parabolique sur les images.

Les images, après integration suivant la direction de la sonde, donnent un profil de la forme :

$$\tilde{n}_0(y,z,t) = \tilde{n}_0(0,0,t)\max\Big(1-\frac{y^2}{R^2(t)}-\frac{z^2}{L^2(t)},0\Big), \tag{2.20}$$

avec $R = R_{x,y}$ la taille du condensat suivant l'axe radial et $L = R_z$ la taille suivant l'axe long.

Nuages mixtes

La distribution en densité des nuages atomiques est bien connue dans les deux cas limites évoqués plus hauts. Dans le cas intermédiaire où le nuage est constitué à la fois d'un condensat et d'un nuage thermique, aucun modèle théorique simple n'existe. Pour l'analyse des images, nous supposons que la distribution de la densité est correctement ajustée par une distribution bimodale : une distribution de Bose avec un potentiel chimique nul pour le nuage thermique à laquelle s'ajoute une distribution parabolique pour le condensat. Cette distribution bimodale se voit clairement sur les images. Nous ne prenons pas en compte l'interaction entre le nuage thermique et le condensat, et donc la modification de la densité du nuage thermique par le condensat qui nécessiterait une procédure d'ajustement plus évoluée. Tout cela est discuté en détails dans l'article de F. Gerbier *et al* [100].

2.2.4 Température et fraction condensée

Mesure de la température

Les images de nuages thermiques sont ajustées par l'équation (2.13). D'après (2.12), la taille X_i du nuage thermique nous donne la température suivant la relation :

$$k_{\mathrm{B}}T = m\Big[\frac{\omega_i^2}{1+\omega_i^2 t^2}X_i(t)^2\Big]. \tag{2.21}$$

Sur des nuages mixtes et lorsque le nuage thermique est visible autour du condensat, l'ajustement par la fonction de Bose est réalisé sur les ailes du nuage, c'est à dire sur une région où l'on exclut le condensat. Nous avons choisi de garder la valeur de la température donnée par l'ajustement suivant l'axe radial. Cette valeur est en effet bien moins sensible au choix de la zone d'exclusion pour

[5]Dans notre régime, la transition vers le régime 1D fait apparaître des "ailes" sur les profils radiaux.

effectuer l'ajustement par la fonction de Bose que la valeur mesurée suivant l'axe long. La précision sur la mesure de la température est estimée à ±16 nK.

Lorsque le nuage thermique n'est pas visible autour du condensat, une autre méthode a dû être mise en place pour déterminer la température. Nous mesurons la température en fonction de la profondeur du piège $\nu_{\mathrm{rf}} - \nu_0$, fixée par la valeur finale de la rampe d'évaporation. Les points expérimentaux représentés sur la Figure 2.13 montrent qu'ils sont correctement ajustés par un polynôme d'ordre deux. Nous vérifions par ailleurs que cet ajustement nous donne une température nulle pour $\nu_{\mathrm{rf}} - \nu_0 = 0$, c'est à dire au niveau du fond du piège. Cet ajustement est utilisé pour déterminer la température lorsque le nuage thermique n'est plus visible, autrement dit pour les températures inférieures à 180 nK.

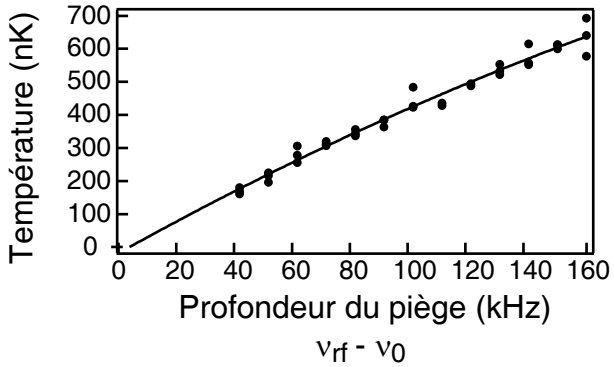


FIG. 2.13 – *Les points représentent la température mesurée expérimentalement en fonction de la profondeur du piège. La courbe est un ajustement sur ces données par un polynôme d'ordre deux.*

Mesure de la fraction condensée

La fraction condensée, autrement dit le nombre d'atomes dans le condensat divisé par le nombre total d'atomes, est extraite de l'ajustement des images par la fonction bimodale. L'erreur sur la mesure est estimée à ±5 %. Encore une fois, ce type de mesure peut être réalisé lorsque le nuage thermique est visible autour du condensat. Ainsi, la fraction condensée est extraite des ajustements de façon fiable quand elle est inférieure à 50 %.

Lorsque nous voulons connaître la fraction condensée pour des nuages où la partie thermique n'est plus visible, une première solution est d'utiliser la formule théorique de la fraction condensée d'après la connaissance de la température avec la méthode décrite précédemment et du nombre total d'atomes. Cette formule calculée dans l'approximation semi-classique et dans le régime de Thomas-Fermi

est [55] :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^0}\right)^3 - \eta_{\text{frac}} \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} \left(\frac{T}{T_c^0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c^0}\right)^3\right]^{2/5}, \tag{2.22}$$

avec $\eta_{\text{frac}} = \mu / k_B T_c^0$, $\zeta(2) = 1,65$ et $\zeta(3) = 1,20$. Cette formule montre un bon accord avec les résultats expérimentaux pour des pièges "peu" allongés, avec typiquement un rapport d'anisotropie inférieur à 45 [38, 100]. En revanche, pour des rapports d'anisotropie supérieurs, nous mesurons une fraction condensée sensiblement plus petite que celle calculée.

La Figure 2.14 présente les points expérimentaux de la mesure de la fraction condensée en fonction de T/T_c^0 pour le piège de fréquences 8,67 Hz et 395 Hz. La courbe en traits pointillés représente la fraction condensée calculée à partir de l'équation (2.22). Nous pouvons déjà observer sur cette courbe une fraction condensée mesurée plus petite que celle calculée. Cet écart peut aller jusqu'à 10 % pour les pièges les plus allongés comme cela a été rapporté dans la thèse de S. Richard [39] pour des pièges de rapport d'anisotropie 150. Nous pouvons avancer comme explication possible de cette différence le fait que nous ne sommes plus tout à fait dans le régime de Thomas-Fermi, au moins radialement.

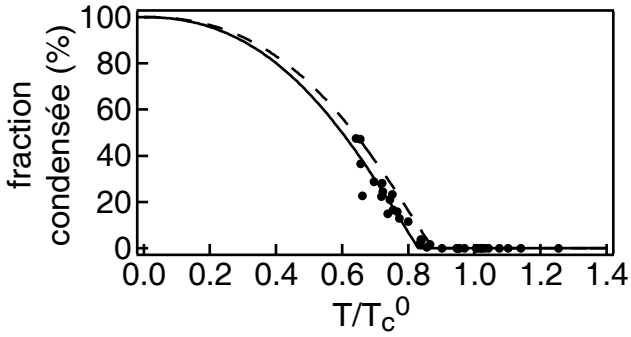


FIG. 2.14 – *Les points représentent la fraction condensée mesurée expérimentalement en fonction de T/T_c^0. La courbe en traits pointillés est donnée par l'équation (2.22) qui tient compte des effets de taille finie et des interactions. La courbe en trait plein est un ajustement sur ces données par l'équation (2.23).*

Afin de contourner le problème, nous avons décidé d'ajuster les points expérimentaux de la Figure 2.14 par une courbe du type :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^0}\right)^3 - \beta \left(\frac{T}{T_c^0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c^0}\right)^3\right]^{2/5}, \tag{2.23}$$

avec β comme paramètre ajustable. La courbe en trait plein représente cet ajustement. Ainsi, pour une profondeur de piège donnée et lorsque le nuage thermique n'est plus visible sur les images, nous obtenons la fraction condensée à partir de

ce dernier ajustement, la température étant calculée à partir de son ajustement en fonction de la profondeur de piège comme décrit dans la partie précédente et T_c^0 à partir de la mesure du nombre total d'atomes[6].

2.3 Manipulation des atomes par la lumière

Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 1, la mesure de la cohérence en phase du condensat peut se faire de deux façons différentes et complémentaires : soit grâce à la mesure de la fonction de corrélation spatiale de sa fonction d'onde, soit par la mesure de sa distribution en impulsion. Ces deux types de mesures sont réalisés à partir de la manipulation cohérente de nos condensats par la lumière et plus particulièrement par diffraction de Bragg sur des ondes lumineuses stationnaires [101].

2.3.1 Principe de la diffraction de Bragg

Nous considérons le cas d'une onde stationnaire formée par deux faisceaux laser contra-propageant, éclairant le condensat suivant son axe long z comme indiqué sur la Figure 2.15. Les faisceaux laser de vecteur d'onde $|\vec{k_L}| = 2\pi/\lambda_L$ sont décalés en fréquence l'un par rapport à l'autre d'une quantité $\delta\omega \ll \omega_L$. L'interférence de ces deux faisceaux donne le réseau d'intensité suivant :

$$I = \frac{I_0}{2}\Big(1 + \cos\big[2\big(k_L z + \frac{\delta\omega}{2}t\big)\big]\Big), \tag{2.24}$$

réseau d'interfrange $i_{\text{réseau}} = \pi/k_L$ et se déplaçant à la vitesse $v_{\text{réseau}} = \delta\omega/2k_L$. Nous avons ici l'équivalent pour les atomes de ce que l'on appelle en optique un miroir de Bragg : les ondes de de Broglie associées à l'atome peuvent être diffractées sur ce potentiel périodique.

Condition de diffraction

La condition de diffraction dans l'ordre n de l'onde de de Broglie associée à l'atome est une condition sur l'angle d'incidence θ_B de l'onde par rapport au réseau :

$$n\lambda_{dB} = \lambda_L \sin(\theta_B), \tag{2.25}$$

[6]L'ajustement (2.23) réalisé sur l'ensemble des données reste en revanche moins bon que l'équation (2.22) pour les très faibles fractions condensées (inférieures à 5 %) et ne donne pas en particulier la température critique attendue théoriquement selon (2.11). En revanche, un ajustement réalisé uniquement sur les fractions condensées les plus faibles donne une valeur de température critique correspondant à la théorie, ce qui est tout à fait logique puisque nous avons calibré le nombre d'atomes, à 20 % près, à partir de la mesure de la température critique (voir Partie 2.2.2).

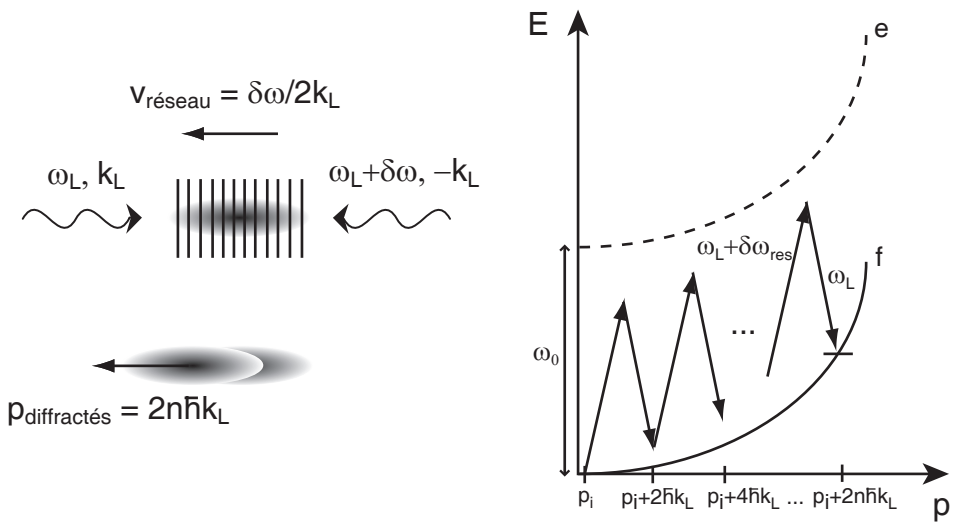


FIG. 2.15 – *Diffraction de Bragg à résonance. Gauche : Le condensat est éclairé par deux faisceaux laser contra-propageant de fréquence ω_L et $\omega_L + \delta\omega$. Ces deux faisceaux interfèrent pour former un réseau d'intensité se déplaçant à la vitesse $\delta\omega/2k_L$. L'impulsion des atomes diffractés est de $2n\hbar k_L$. Droite : Diagramme des états d'impulsion couplés par les faisceaux laser dans un processus à $2n$ photons.*

où λ_{dB} est la longueur d'onde de de Broglie associée à l'atome dans le référentiel du réseau. Dans notre cas, nous travaillons avec l'angle de Bragg $\theta_B = 90°$. La condition de diffraction, ou condition de résonance, devient :

$$\lambda_L = n\lambda_{dB}, \tag{2.26}$$

$$= n\frac{h}{m|v_i - v_{réseau}|}, \tag{2.27}$$

v_i et $v_{réseau}$ étant respectivement la vitesse initiale de l'atome avant diffraction et du réseau dans le référentiel du laboratoire. Ainsi, la condition de diffraction des atomes de vitesse v_i revient à une condition sur la vitesse du réseau :

$$v_{réseau} = v_i \pm \frac{n\hbar k_L}{m}, \tag{2.28}$$

la diffraction dans l'ordre $\pm n$ dépendant de la direction de propagation du réseau.

Cette condition de résonance peut également être retrouvée en considérant la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Comme le montre le graphique de droite de la Figure 2.15, la diffraction de Bragg réalise un couplage entre deux niveaux externes du condensat par une transition multi-photonique, les atomes restant par ailleurs dans le même niveau hyperfin. La diffraction de Bragg d'ordre n s'accompagne d'un transfert d'impulsion $2n\hbar k_L$: les atomes diffractés absorbent n photons de fréquence $\omega_L + \delta\omega$ dans une direction et réémettent de façon stimulée

n photons de fréquence ω_{L} dans la même direction. La conservation de l'impulsion et de l'énergie donnent :

$$p_{\mathrm{f}} = p_{\mathrm{i}} + 2n\hbar k_{\mathrm{L}}, \tag{2.29}$$
$$E_{\mathrm{f}} = E_{\mathrm{i}} + n\hbar\delta\omega, \tag{2.30}$$

où les indices "f" et "i" correspondent respectivement aux atomes diffractés et aux atomes dans le nuage atomique initial avant diffraction. On déduit ensuite de ces équations la condition de diffraction :

$$\delta\omega_{\mathrm{res}} = \frac{2n\hbar k_{\mathrm{L}}^2}{m} + 2v_{\mathrm{i}}k_{\mathrm{L}}, \tag{2.31}$$
$$= \delta\omega_0 + 2v_{\mathrm{i}}k_{\mathrm{L}}. \tag{2.32}$$

La quantité $\delta\omega_0$ représente la condition de diffraction dans l'ordre n pour des atomes initialement immobiles. La sélection du désaccord entre les faisceaux laser permet donc de sélectionner la classe de vitesse des atomes diffractés.

2.3.2 Les différents régimes de couplage

Diffraction par un réseau mince : régime Kapitza-Dirac

Ce régime est l'analogue de la diffraction Raman-Nath en optique où les ondes lumineuses sont diffractées par un réseau dont l'épaisseur est faible devant son pas. Dans notre cas, ceci revient à pouvoir négliger le mouvement des atomes durant la durée τ d'application du réseau devant le pas de ce réseau, soit :

$$2v_{\mathrm{rec}}\tau \ll i_{\text{réseau}}, \tag{2.33}$$

où $v_{\mathrm{rec}} = \hbar k_{\mathrm{L}}/m$ est la vitesse de recul à un photon de l'atome. Ce régime est donc limité aux faibles temps d'interaction, inférieurs à 30 μs sur notre expérience avec le ^{87}Rb.

La diffraction dans le régime Kapitza-Dirac correspond alors à la diffraction des atomes dans plusieurs ordres n à la fois [102]. Pour pouvoir effectivement observer un nombre d'atomes diffractés non négligeable pour ces temps d'interaction, il est par ailleurs nécessaire de disposer d'une intensité laser importante. Sur notre expérience, la puissance des faisceaux laser trop faible ne nous a jamais permis d'observer ce régime.

Régime d'oscillation

Le régime de Kapitza-Dirac s'arrête lorsque la condition (2.33) sur les temps d'application du réseau lumineux n'est plus vérifiée. Nous entrons alors dans le

régime dit d'oscillation où l'on peut considérer que les atomes oscillent classiquement dans le fond des puits du potentiel lumineux considéré comme quasi-harmonique. Il est alors possible d'observer une focalisation et défocalisation périodique du nuage d'atomes à la période τ_{osc} [103]. La transition entre le régime de Kapitza-Dirac et le régime d'oscillation, qui apparaît pour $\tau \geq \tau_{\text{osc}}/4$, a été étudiée avec un condensat au NIST avec l'observation dans l'espace des impulsions de l'oscillation de la population dans les différents ordres de diffraction en fonction de τ [103].

Ce régime d'oscillation requiert là aussi une intensité laser suffisante. Sur notre expérience, les intensités laser utilisées ne nous permettent pas de nous trouver dans ce régime.

Diffraction par un réseau épais : régime de Bragg

Enfin, la diffraction par un réseau épais, ou diffraction de Bragg, est un régime où il n'y a qu'un seul ordre de diffraction [104]. Le mouvement des atomes par rapport au réseau de diffraction n'est plus négligeable, mais nous ne sommes pas non plus dans le régime d'oscillation décrit précédemment (intensité laser faible et/ou temps d'interaction trop long).

L'obtention du régime de Bragg requiert donc de ne diffracter qu'un seul ordre et donc de ne pas peupler les ordres de diffraction adjacents, distants de $4\omega_{\text{rec}} = 2\hbar k_{\text{L}}^2/m$ d'après (2.31). Une durée d'application du réseau de τ provoquant un élargissement en fréquence dans l'espace de Fourier[7] de $1/\tau$, il faut choisir des durées d'interaction telles que :

$$\tau > \frac{\pi}{2\omega_{\text{rec}}}, \tag{2.34}$$

supérieures à 60 μs pour le ^{87}Rb.

C'est dans ce régime que nous nous sommes placés expérimentalement.

2.3.3 Régime de Bragg et Oscillation de Rabi

Oscillation de Rabi

Le principe de la diffraction d'ordre n est rappelé sur la Figure 2.16. Les deux faisceaux laser décalés en fréquence de $\delta\omega$ couplent deux niveaux externes du condensat, $|f, p_{\text{i}}\rangle$ et $|f, p_{\text{i}} + 2n\hbar k_{\text{L}}\rangle$ dans un processus à $2n$ photons. Le problème peut donc être traité à partir du formalisme des oscillations de Rabi entre deux niveaux. Le but ici est de connaître les fractions d'atomes diffractés, en fonction des divers paramètres comme le temps d'application τ du réseau lumineux ou le désaccord δ par rapport à la résonance.

[7] largeur à mi-hauteur du spectre en fréquence

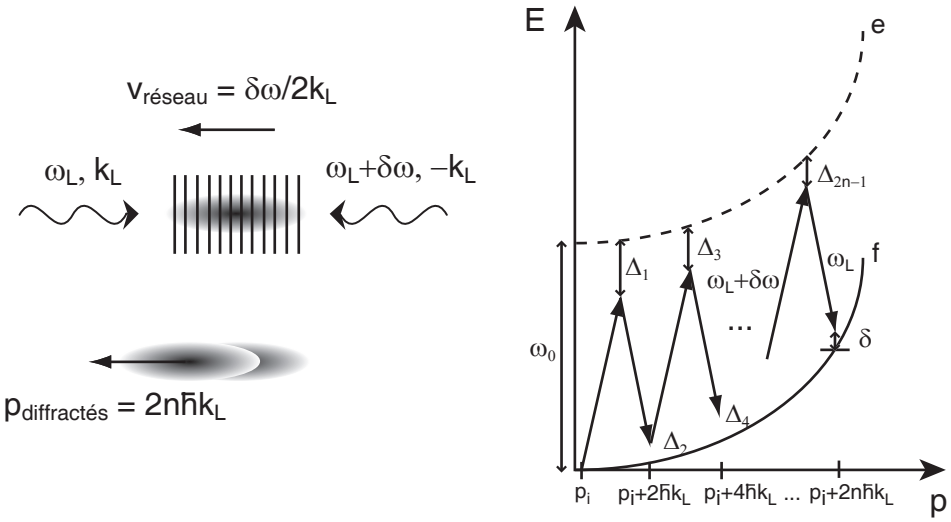


FIG. 2.16 – *Diffraction de Bragg d'ordre n hors résonance. Gauche : Deux faisceaux laser contra-propageant de fréquence ω_{L} et $\omega_{\mathrm{L}} + \delta\omega$ créent un réseau de diffraction pour les atomes du condensat. Droite : Diagramme des états d'impulsion couplés par les faisceaux laser dans un processus à $2n$ photons. Le paramètre δ représente le désaccord par rapport à la résonance.*

Dans le cas d'une transition à deux photons, autrement dit pour $n = 1$, la probabilité de transférer un atome du niveau $|f, p_{\mathrm{i}}\rangle$ au niveau $|f, p_{\mathrm{i}} + 2\hbar k_{\mathrm{L}}\rangle$, après un temps τ d'interaction entre les atomes et la lumière, est [105] :

$$P(\tau) = \left(\frac{\Omega_1^* \Omega_2}{2\Omega_{\mathrm{R}}^{(2)} \Delta_1}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\Omega_{\mathrm{R}}^{(2)}}{2}\tau\right). \tag{2.35}$$

Le paramètre Δ_1 est le désaccord par rapport au niveau excité comme indiqué sur la Figure 2.16, et Ω_1 et Ω_2 sont les pulsations de Rabi à un photon caractérisant l'interaction lumière-atome pour chaque transition individuelle. Ces dernières dépendent de l'intensité des lasers par la relation : $\Omega_{1,2} = \Gamma\sqrt{I_{1,2}/2I_{\mathrm{sat}}}$ où Γ est la largeur naturelle du niveau excité et I_{sat} l'intensité de saturation de la transition utilisée.

La population du système initialement dans $|f, p_{\mathrm{i}}\rangle$ oscille donc au cours du temps de manière cohérente entre les deux états $|f, p_{\mathrm{i}}\rangle$ et $|f, p_{\mathrm{i}} + 2\hbar k_{\mathrm{L}}\rangle$. La pulsation d'oscillation $\Omega_{\mathrm{R}}^{(2)}$ est appelée pulsation de Rabi à deux photons généralisée et est donnée par :

$$\Omega_{\mathrm{R}}^{(2)} = \sqrt{\Bigg(\underbrace{\frac{|\,\Omega_1\,|^2}{4\Delta_1} - \frac{|\,\Omega_2\,|^2}{4\Delta_1}}_{\text{déplacement lumineux}} - \overbrace{\delta}^{\text{désaccord}}\Bigg)^2 + \underbrace{\frac{|\,\Omega_1\,|^2 |\,\Omega_2\,|^2}{4\Delta_1^2}}_{\text{Pulsation de Rabi à résonance}}}\,, \tag{2.36}$$

où $\delta = \delta\omega - \delta\omega_{\text{res}}$, représenté sur la Figure 2.16, est le désaccord par rapport à la résonance. Les termes $\mid \Omega_{1,2} \mid^2 /4\Delta_1$ représentent les déplacements lumineux. Ils seront négligés par la suite car nous avons pris expérimentalement deux faisceaux d'environ même intensité ($\Omega_1 \simeq \Omega_2$). La pulsation de Rabi à 2 photons devient donc :

$$\Omega_{\text{R}}^{(2)} = \sqrt{\delta^2 + \Omega_{\text{res}}^2}, \tag{2.37}$$

$$\text{avec} \quad \Omega_{\text{res}} = \Omega_1^* \Omega_2 / 2\Delta_1, \tag{2.38}$$

Ω_{res} étant la pulsation de Rabi à résonance.

Le processus à $2n$ photons est identique au cas à 2 photons que nous venons de présenter [106]. Nous avons un couplage cohérent entre les niveaux $|f, p_{\text{i}}\rangle$ et $|f, p_{\text{i}} + 2n\hbar k_{\text{L}}\rangle$ caractérisé par une pulsation de Rabi effective à $2n$ photons valant à résonance ($\delta = 0$) :

$$\Omega_{\text{R}}^{(2n)} = \frac{(\Omega_1 \Omega_2)^n}{2^{2n-1} \Delta_1 \Delta_2 ... \Delta_{2n-1}}. \tag{2.39}$$

Finalement, pour rester cohérent, ce couplage suppose que l'on puisse négliger l'émission spontanée. Ceci impose une durée maximale pour la durée d'interaction entre le réseau et les atomes telle que [101] :

$$\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{4\Delta^2} \Gamma \tau \ll 1, \tag{2.40}$$

avec Δ le désaccord moyen par rapport au niveau excité. Nous avons toujours vérifié que ce critère était respecté dans toutes nos expériences.

Lames séparatrices et miroirs

Nous avons représenté sur la Figure 2.17 l'amplitude diffractée en fonction du temps d'interaction τ entre les atomes et le réseau lumineux, amplitude calculée à partir des équations (2.35) et (2.37), pour $\delta = 0$ et pour $\delta \neq 0$. Cette Figure montre clairement la dépendance de la fréquence d'oscillation et du maximum de diffraction en fonction de ce désaccord. Nous pouvons en particulier remarquer que la diffraction maximale de 100 % ne peut être obtenue qu'à désaccord nul.

Le réseau de Bragg permet de transférer de manière cohérente des atomes du niveau $|f, p_{\text{i}}\rangle$ au niveau $|f, p_{\text{i}} + 2\hbar k_{\text{L}}\rangle$ dans le cas d'une transition à 2 photons par exemple. Le taux de transfert dépend alors du temps d'application du réseau lumineux. A désaccord nul, nous trouvons les cas particuliers suivants :

- $\underline{\Omega_{\text{R}}^{(2)} \tau = \pi/2}$: on obtient une superposition cohérente équiprobable des états $|f, p_{\text{i}}\rangle$ et $|f, p_{\text{i}} + 2\hbar k_{\text{L}}\rangle$. Cette interaction correspond à une lame séparatrice 50/50 en optique et est appelée <u>impulsion $\pi/2$</u>.
- $\underline{\Omega_{\text{R}}^{(2)} \tau = \pi}$: on transfert la totalité des atomes de $|f, p_{\text{i}}\rangle$ vers $|f, p_{\text{i}} + 2\hbar k_{\text{L}}\rangle$. Cette interaction correspond à un miroir pour les populations atomiques et est appelée <u>impulsion π</u>.

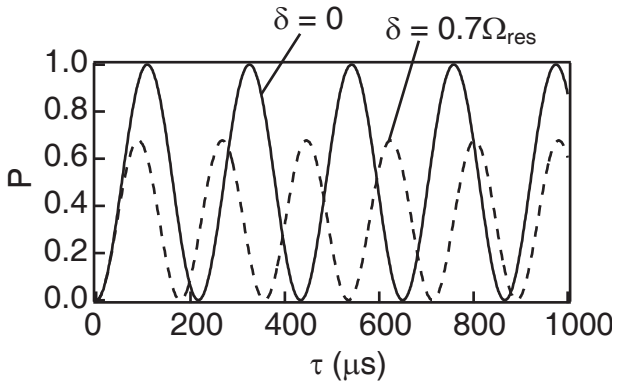


FIG. 2.17 – *Oscillation de Rabi. L'amplitude diffractée P en fonction du temps d'interaction τ est représentée dans le cas résonant (trait plein, $\delta = 0$) et pour un certain désaccord par rapport à la pulsation de Rabi à résonance (trait pointillé, $\delta = 0,7\,\Omega_{\mathrm{res}}$).*

– $\Omega_{\mathrm{R}}^{(2)}\tau = 2\pi$: nous retrouvons tous les atomes dans le niveau initial $|f, p_{\mathrm{i}}\rangle$ puisque le processus est cohérent.

Sélectivité en impulsion

L'équation (2.32) donne la classe de vitesse des atomes diffractés par le réseau de Bragg pour un $\delta\omega$ donné. Expérimentalement, le réseau lumineux est appliqué sur les atomes à l'aide d'une impulsion créneau de durée τ finie, donnant dans l'espace de Fourier un sinus cardinal de largeur $1/\tau$. Ainsi, plus la durée d'interaction est longue, plus la sélectivité en impulsion des atomes diffractés par le réseau augmente. Cette sélectivité est donnée par :

$$\Delta\omega_{\text{résolution}} = \frac{2\pi}{n\tau}, \tag{2.41}$$

avec n l'ordre de diffraction. Le pouvoir séparateur du réseau augmente avec l'ordre de diffraction de manière analogue à un réseau de diffraction en optique.

Comme nous l'avons dit dans la Partie 2.3.2, le fait d'être dans le régime de Bragg implique que cette durée soit suffisamment longue pour n'avoir qu'un seul ordre diffracté et ne pas coupler les ordres voisins. En revanche, la durée τ n'étant pas infiniment longue, nous avons tout de même un élargissement en fréquence proportionnel à $1/\tau$.

La durée d'application de l'impulsion Bragg détermine donc la sélectivité en impulsion du réseau, c'est à dire la largeur Δp de la classe d'impulsion des atomes qui vont être diffractés, selon l'équation :

$$\Delta\omega_{\text{résolution}} = \frac{2k_{\mathrm{L}}}{m}\Delta p. \tag{2.42}$$

2.3.4 Applications expérimentales

Lames séparatrices pour l'interférométrie

La diffraction de Bragg va tout d'abord nous permettre de réaliser des lames séparatrices à l'aide d'impulsions $\pi/2$, l'objectif final étant de créer un interféromètre. Cet interféromètre nous permettra alors de réaliser l'autocorrélation de la fonction d'onde du condensat et donc de mesurer directement sa fonction de corrélation spatiale, comme nous le verrons dans le Chapitre 3.

La réalisation de lames séparatrices nécessite de coupler tout le condensat. Celui-ci a une largeur en impulsion non nulle due à sa taille spatiale finie et aux fluctuations de phase qui élargissent encore davantage la distribution en impulsion. La durée d'application du réseau de diffraction doit être suffisamment courte pour coupler tous les atomes du condensat.

La largeur de la distribution en impulsion des condensats correspond à une largeur en fréquence, dans le cas de la transition à deux photons, donnée par :

$$\Delta\omega = \frac{2k_{\mathrm{L}}}{m}\Delta p. \tag{2.43}$$

Les expériences d'interférométrie du Chapitre 3 ont été effectuées sur des condensats tels que $T/T_\phi < 7$. La valeur maximum de la demi-largeur à mi-hauteur de la distribution en impulsion correspond alors à $2\pi \times 200$ Hz. Pour coupler tout le condensat, la durée d'application τ du réseau doit être suffisamment faible pour satisfaire :

$$\frac{\pi}{\tau} \gg \frac{2k_{\mathrm{L}}\Delta p}{m}. \tag{2.44}$$

Ceci donne une durée devant être inférieure à 2,5 ms. Expérimentalement, nous avons utilisé des durées d'application du réseau allant de 70 à 150 μs, donc suffisamment courtes pour coupler tous les atomes du condensat.

Sélectivité en vitesse et spectroscopie de Bragg

A partir de la diffraction de Bragg, nous avons également développé une méthode permettant de mesurer la distribution en impulsion des condensats par spectroscopie de Bragg. Alors que dans la partie précédente le but était de coupler tout le condensat, la spectroscopie de Bragg est au contraire un régime où l'on veut pouvoir résoudre les longueurs d'onde de de Broglie, c'est à dire résoudre la distribution en impulsion du condensat [64]. Comme nous l'avons dit plus haut, la résolution du réseau est augmentée en diminuant l'élargissement dû à la durée finie d'application des lasers Bragg, autrement dit en augmentant le temps d'interaction entre le réseau et les atomes.

La spectroscopie de Bragg nécessite par ailleurs de se trouver dans la limite du faible couplage où l'on peut considérer que la population dans le nuage d'atomes

initial reste constante : les temps d'interaction entre le réseau et les atomes doivent être tels que $\tau\Omega_{\mathrm{res}}/2 \ll 1$.[8] La fraction d'atomes d'impulsion p_{i} diffractés dans l'ordre n par ce réseau est alors :

$$P(\delta\omega, p_{\mathrm{i}}) = \left(\frac{\tau\Omega_{\mathrm{res}}}{2}\right)^2 \mathrm{sinC}^2\left(\frac{\tau}{2}n\delta\right), \tag{2.45}$$

avec, nous le rappelons, $\delta = \delta\omega - \delta\omega_{\mathrm{res}}$. Ceci donne ce que l'on appelle la "fonction d'appareil" de la mesure lorsque celle-ci est limitée par le temps d'interaction entre le réseau et les atomes.

Finalement, la fraction d'atomes diffractés d'un paquet d'onde est donnée par la convolution de la fonction d'appareil et de la distribution en impulsion du paquet d'onde [105]. Nous appellerons par la suite spectre de Bragg la courbe représentant la fraction d'atomes diffractés en fonction du désaccord $\delta\omega$ entre les faisceaux Bragg. Nous rappelons que la condition de diffraction est la suivante :

$$\delta\omega_{\mathrm{res}} = \frac{4n\hbar k_{\mathrm{L}}^2}{2m} + \frac{2k_{\mathrm{L}}p_{\mathrm{i}}}{m}, \tag{2.46}$$

où n est l'ordre de diffraction. En modifiant le désaccord en fréquence $\delta\omega_{\mathrm{res}}$ entre les deux faisceaux Bragg nous modifions la classe d'impulsion des atomes diffractés.

Une fonction d'appareil infiniment fine donne une largeur en impulsion directement reliée à la largeur du spectre de Bragg associé :

$$\Delta\omega = \frac{2k_{\mathrm{L}}}{m}\Delta p. \tag{2.47}$$

D'après le Chapitre 1, cette largeur nous permet ensuite de remonter directement à la longueur de cohérence du condensat suivant la direction de diffraction que l'on effectue naturellement suivant l'axe long dans notre expérience. Pour résoudre la distribution en impulsion du condensat, il faut bien évidemment une largeur de fonction d'appareil bien inférieure à la largeur de la distribution en impulsion. Nous tiendrons compte de cette largeur de la fonction d'appareil dans l'analyse de nos résultats.

2.3.5 Mise en place expérimentale des impulsions $\pi/2$

Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental permettant de créer le réseau de Bragg pour les atomes est présenté sur la Figure 2.18. Le laser utilisé, prélevé sur le faisceau permettant de ralentir les atomes dans le ralentisseur Zeeman, est désaccordé

[8] Expérimentalement, ceci revient à s'assurer que la fraction d'atomes diffractés n'excède jamais 20 %.

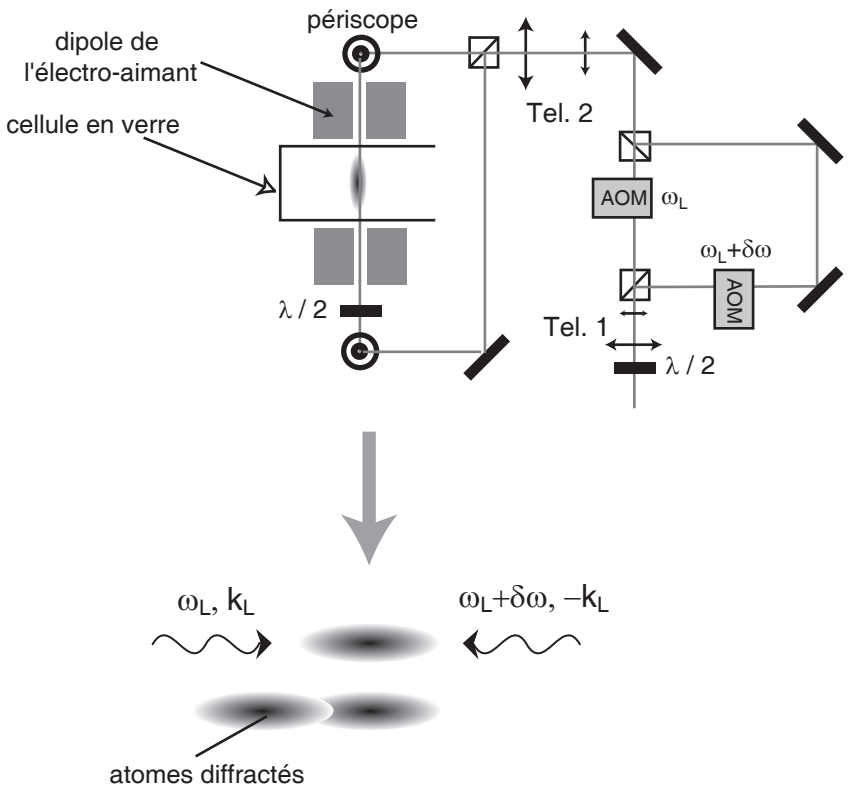


FIG. 2.18 – *Dispositif expérimental utilisé pour l'expérience d'interférométrie de la Partie 3.3. Les deux modulateurs acousto-optiques (AOM) permettent de créer une différence de fréquence $\delta\omega$ entre les deux faisceaux laser qui créent le réseau.*

de $\Delta \simeq 7$ GHz par rapport à la transition $|F = 1\rangle - |F' = 0, 1, 2\rangle$. Ce grand désaccord permet de limiter fortement l'émission spontanée. Le laser est divisé en deux, chaque partie passant ensuite dans un modulateur acousto-optique à 80 MHz alimenté par deux synthétiseurs stables au Hertz près et utilisant le même oscillateur de référence. La fréquence de l'un des modulateurs est variée de la quantité $\delta\omega$ nécessaire pour se placer autour de la résonance de Bragg. Chaque faisceau est ensuite amené de chaque côté du condensat, parallèlement à son axe long. Les polarisations des deux faisceaux lasers au niveau du condensat sont identiques et linéaires.

L'application du réseau de diffraction sur les atomes se fait après coupure du piège magnétique, après 2 ms de temps de vol au minimum. La densité du nuage atomique est alors suffisamment faible pour que l'on puisse négliger les collisions entre le condensat et le nuage diffracté [39].

Oscillations de Rabi

Expérimentalement, pour une intensité laser des faisceaux donnée et pour un désaccord quasiment nul, nous trouvons l'oscillation de Rabi tracée sur la Figure 2.19. Cette mesure a été effectuée dans le cas d'une transition à deux photons et le réseau a été appliqué après 2 ms de temps de vol. Nous trouvons une fréquence d'oscillation de $4,5\,\mathrm{kHz}$, compatible avec l'intensité des faisceaux laser que nous avons mesurée. La décroissance des oscillations est due à la décohérence du processus, essentiellement due aux vibrations de nos miroirs amenant les faisceaux laser Bragg au niveau des atomes.

Les images présentées sur cette même figure ont été prises après un temps de vol supplémentaire de typiquement 20 ms après l'application du réseau, temps nécessaire pour obtenir la séparation spatiale des deux nuages d'atomes. Le condensat initial reste à sa vitesse moyenne initiale v_i suivant l'axe des faisceaux lasers tandis que le nuage d'atomes diffractés se déplace à une vitesse de $v_\mathrm{i} + 2\hbar k_\mathrm{L}/m = 11,72$ mm/s (transition à deux photons). Ceci donne une séparation spatiale typique entre nuages de 230 μm.

Fréquence de résonance

Nous mesurons la fréquence de résonance pour le couplage à deux photons en mesurant la probabilité de transition en fonction du désaccord entre les deux faisceaux Bragg. La position du maximum de la courbe nous donne alors la fréquence de résonance. Pour un condensat initial sans vitesse suivant la direction des lasers Bragg, la fréquence de résonance vaut $\delta\omega_0/2\pi = 4\hbar k_\mathrm{L}^2/2m \simeq 15$ kHz.

La Figure 2.20 à gauche présente la mesure de la probabilité de transition en fonction du désaccord entre les faisceaux laser Bragg, ceci pour une transition $\pi/2$ à résonance dans ce cas. Le réseau Bragg a été appliqué 7 ms après la coupure du piège magnétique. Cette courbe est ensuite ajustée par la formule :

$$P(\delta\omega) = \left(\frac{\Omega_\mathrm{res}\tau}{2}\right)^2 \mathrm{sinC}^2 \frac{\tau\sqrt{(\delta\omega - \delta\omega_\mathrm{res})^2 + \Omega_\mathrm{res}^2}}{2}, \tag{2.48}$$

obtenue à partir des équations (2.35), (2.37) et (2.38). L'ajustement donne une fréquence de résonance à 16,9 kHz.

Le graphique de droite présente la mesure de la fréquence de résonance en fonction de l'instant d'application du réseau lumineux après la coupure du piège magnétique. Celle-ci indique une résonance différente des 15 kHz attendus pour une condensat à vitesse nulle et qui de plus varie en fonction du temps. Ceci est dû au fait qu'après la coupure du piège, il existe encore de faibles champs magnétiques résiduels qui accélèrent le condensat au cours de son temps de vol. L'impulsion moyenne suivant la direction longue du condensat n'est pas nulle, ce qui déplace la fréquence de résonance par effet Doppler.

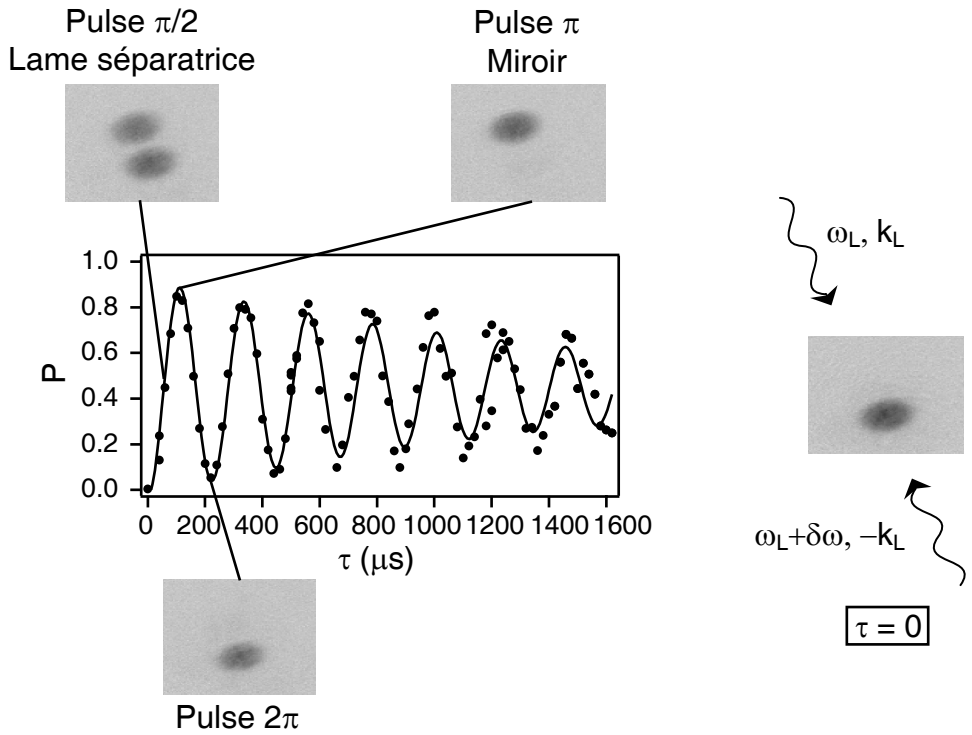


FIG. 2.19 – *Oscillation de Rabi expérimentale à désaccord quasiment nul. Le graphique représente le nombre d'atomes diffractés divisé par le nombre d'atomes total en fonction du temps d'application des faisceaux laser Bragg. Un ajustement sinusoïdal multiplié par une exponentielle décroissante donne une fréquence d'oscillation de* $4,5$ *kHz et un temps de décohérence à* $1/e$ *de* $1,5$ *ms.*

Pulsation de Rabi au cours du temps de vol

Enfin, les faisceaux laser Bragg ont un profil d'intensité gaussien avec un diamètre à $1/e^2$ d'environ 2 mm. Les atomes qui tombent au cours du temps de vol voient donc une intensité laser qui change. La pulsation de Rabi est donc modifiée au cours de ce temps de vol.

Sur la Figure 2.21, nous avons représenté la mesure de la fréquence de Rabi à résonance en fonction de l'instant d'application du réseau lumineux. Pour cela, nous avons fixé la fréquence de résonance aux différents instants avec les valeurs indiquées sur le graphique de droite de la Figure 2.20. Il est alors possible de remonter à l'intensité du laser en fonction de la position (graphique de droite) avec l'équation (2.38). A partir d'un ajustement gaussien sur les points expérimentaux, nous mesurons un diamètre de faisceau laser à $1/e^2$ de $1,3$ mm, légèrement plus petit que ce l'on mesure lorsque l'on observe les faisceaux lasers sur une caméra CCD. L'erreur vient principalement du fait que cette méthode ne nous

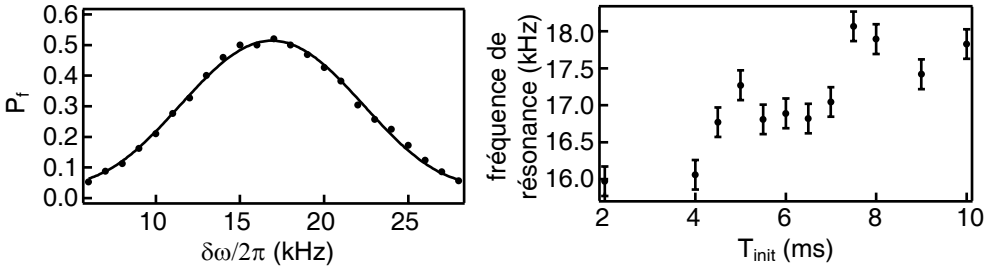


FIG. 2.20 – *Gauche : Probabilité de transition mesurée en fonction du désaccord $\delta\omega$ entre les faisceaux Bragg. Ces données ont été prises pour un instant d'application du réseau Bragg de 7 ms après la coupure du piège. A résonance, l'impulsion correspond à une impulsion $\pi/2$. La ligne est un ajustement par l'équation (2.48), ajustement qui nous permet de mesurer la fréquence de résonance. Droite : Fréquence de résonance en fonction de l'instant d'application de l'impulsion Bragg. La coupure du piège magnétique correspond à $T_{\text{init}} = 0$. Les barres d'erreur représentent l'incertitude sur la mesure de la résonance issue de l'ajustement.*

permet pas de mesurer des intensités laser faibles (inférieures à 2 mW/cm^2). La fréquence de Rabi est alors trop petite et les processus de décohérence deviennent trop importants.

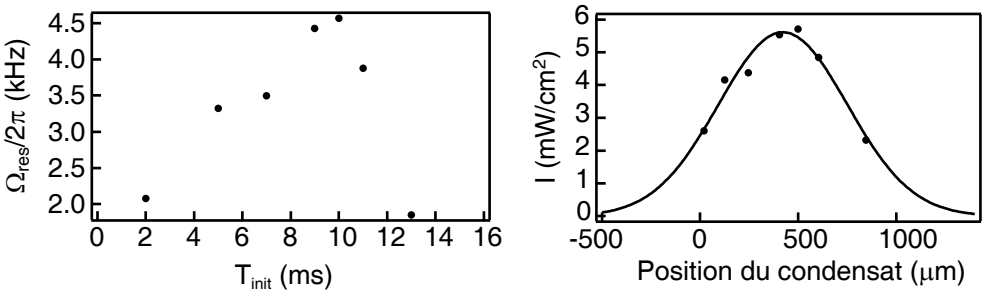


FIG. 2.21 – *Gauche : Fréquence de Rabi en fonction de l'instant d'application de l'impulsion Bragg, l'origine des temps correspondant à la coupure du piège magnétique. Droite : Intensité laser correspondante en fonction de la position du condensat au cours du temps de vol.*

Réalisation expérimentale des impulsions $\pi/2$

L'expérience d'interférométrie (voir Figure 3.7) nécessite la réalisation de deux impulsions $\pi/2$ séparées d'un temps allant de 2 ms à 10 ms, l'application de la première impulsion étant fixée à 2 ms après l'ouverture du piège magnétique. Nous

venons de voir que la fréquence de résonance et la fréquence de Rabi changent au cours du temps de vol des atomes. Les conditions d'obtention de l'impulsion $\pi/2$ sont donc différentes en chaque instant et doivent être contrôlées.

Expérimentalement, nous avons décidé de travailler avec un décalage en fréquence entre les lasers Bragg fixe. Cette valeur a été fixée à la moyenne des fréquences de résonance mesurées et représentées sur le graphique de droite de la Figure 2.20, soit $\delta\omega = 17,1$ kHz. Finalement, nous contrôlons les impulsions $\pi/2$ en contrôlant la durée des impulsions laser, durée qui est modifiée en fonction de l'instant où l'on applique le réseau.

2.3.6 Dispositif expérimental pour la spectroscopie de Bragg

La spectroscopie de Bragg nécessite une grande stabilité du désaccord entre les faisceaux laser. Une variation de ce désaccord entraîne en effet une variation de la vitesse du réseau et donc un élargissement de la fonction d'appareil de la mesure ce qui réduit finalement notre résolution. Un travail important a été réalisé sur le montage optique pour obtenir une stabilité satisfaisante durant un temps d'interaction suffisamment long.

Brièvement, pour améliorer la stabilité, le montage optique a été réalisé afin d'avoir deux faisceaux laser co-propageant et rétro-réfléchis par un miroir M1, comme présenté sur la Figure 2.22. La stabilité du désaccord entre les deux faisceaux laser formant le réseau ne dépend alors plus que de la stabilité du miroir M1[9]. Ce miroir se trouve à 35 cm au dessus de la table optique. Pour éliminer au maximum ses vibrations suivant l'axe du réseau, nous l'avons fixé sur une plaque en métal de 30 cm de longueur dans la direction des faisceaux laser. Une lame $\lambda/4$ permet de tourner les polarisations de 90° après réflexion sur le miroir M1. Ce montage crée alors deux réseaux de diffraction se déplaçant à la même vitesse mais dans des directions opposées et qui vont donc diffracter les atomes d'impulsion p_{i} et $-p_{\mathrm{i}}$ dans les deux directions.

Ce montage a finalement permis d'obtenir de très bonnes stabilités pour 2 ms d'impulsion laser. Au-delà, les vibrations de la table déclenchées par la coupure des électro-aimants dégradent fortement la stabilité. On trouve alors une fonction d'appareil de largeur très proche de la limite de Fourier avec une demi-largeur à mi-hauteur de 216(10) Hz[10]. Cette valeur a été mesurée lors de l'acquisition de spectres d'une dizaine de battements entre les deux faisceaux laser Bragg, acquisition que nous avons étalée sur une heure, temps typique d'acquisition d'un spectre de Bragg. Ceci n'est en fait qu'une sur-estimation de la largeur de la fonction d'appareil puisque l'acquisition des battements a nécessité la mise en

[9]Les vibrations des miroirs au niveau des modulateurs acousto-optiques peuvent également modifier le désaccord entre les deux faisceaux laser. Mais ceux-ci se trouvent à quelques centimètres de la table optique et donc vibrent peu.

[10]La largeur de Fourier est de 221 Hz.

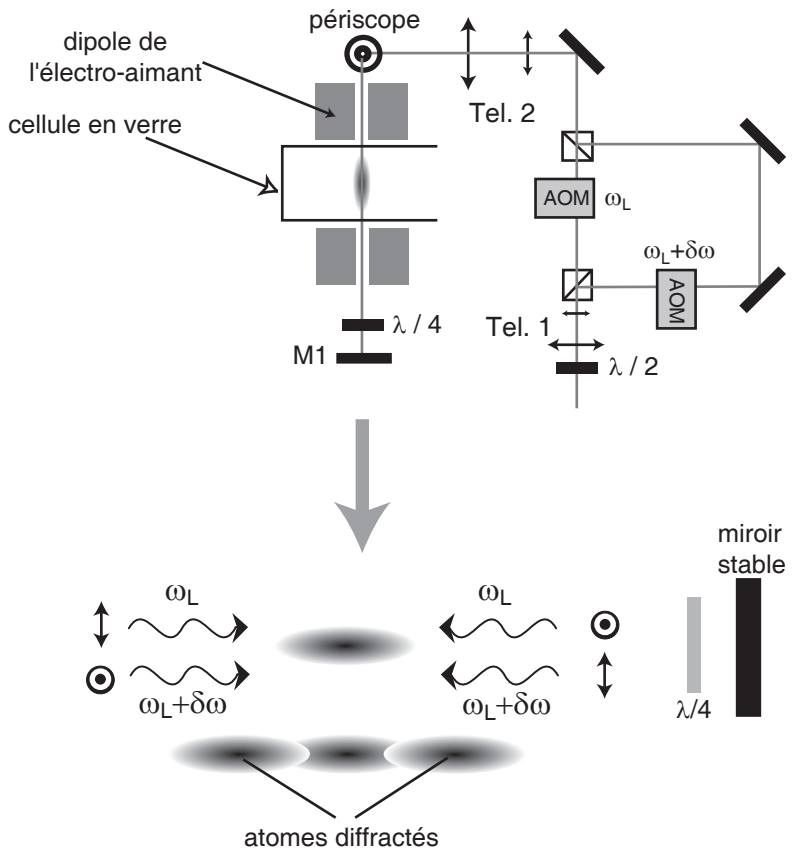


FIG. 2.22 – *Dispositif expérimental utilisé pour la spectroscopie de Bragg. Ce dispositif crée deux réseaux se déplaçant à la même vitesse mais en sens opposé.*

place de miroirs supplémentaires pouvant eux aussi vibrer.

Séquence expérimentale

L'acquisition d'un spectre de Bragg se déroule ensuite de la façon suivante :

- Ouverture du piège magnétique.
- Temps de vol de 2 ms. La densité atomique diminue alors suffisamment pour que l'on puisse négliger les collisions entre le condensat initial et les atomes diffractés.
- Illumination des atomes par le réseau de Bragg durant 2 ms avec un désaccord $\delta\omega$ donné.
- Temps de vol supplémentaire de 20 ms. Le nuage d'atomes diffractés se sépare spatialement du condensat initial. Nous avons choisi d'avoir une transition à 4 photons plutôt qu'à 2 photons. L'impulsion des atomes diffractés est alors 2 fois plus importante et permet donc d'avoir une séparation spa-

tiale deux fois plus grande. Ceci rend la mesure plus facile, en particulier en présence de nuage thermique autour du condensat .
- Imagerie par absorption.
- Mesure du nombre d'atomes diffractés par rapport au nombre total d'atomes sur les images par absorption du type de l'image de la Figure 2.23.

Cette mesure est ensuite refaite avec un nouveau désaccord entre faisceaux Bragg. On mesure ainsi un spectre de Bragg complet, tel que le spectre de la Figure 2.23.

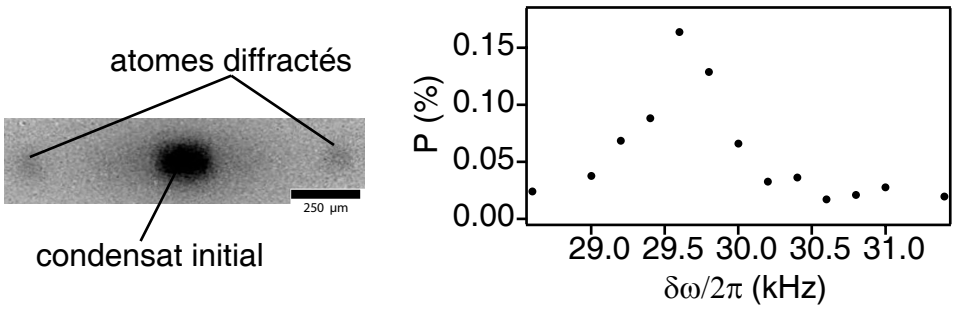


FIG. 2.23 – *Gauche : Image par absorption de la diffraction du condensat sur les deux réseaux de Bragg. Droite : Nombre d'atomes diffractés dans une direction par rapport au nombre total d'atomes en fonction du désaccord entre les faisceaux Bragg. Ce spectre de Bragg a été obtenu pour une profondeur de piège* $\nu_{\mathrm{rf}} - \nu_0 =$ 40 *kHz*

.

Nous avons toujours vérifié que ce spectre permet une mesure directe de la distribution en impulsion du condensat dans le piège. L'élargissement des spectres dû en particulier à l'énergie de champ moyen et à l'expansion longitudinale du condensat est suffisamment faible pour ne pas noyer notre signal. Nous en tenons compte tout de même dans notre analyse des résultats au travers de la fonction d'appareil de la mesure. Tous les détails de la mise en place du dispositif et de l'interprétation des spectres de Bragg et de leur largeur sont donnés dans les thèses de Simon Richard et Fabrice Gerbier [38, 39].

2.3.7 Conclusion

Ce chapitre nous a tout d'abord permis d'exposer les méthodes d'analyse des images de condensat et nuage thermique qui nous permettent d'extraire tous les paramètres essentiels à l'analyse de nos résultats. Nous avons également vu les outils que nous avons mis en place afin de manipuler de façon cohérente les atomes avec la diffraction de Bragg. Cet outil est primordial puisqu'il va nous

permettre d'étudier expérimentalement la cohérence de nos condensats comme nous allons le voir dans le prochain chapitre.

CHAPITRE 3

Cohérence en phase d'un quasi-condensat à l'équilibre

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'étude de la cohérence d'un condensat, ou quasi-condensat, à l'équilibre. Sur notre expérience, deux méthodes complémentaires ont été mises en place pour réaliser cette mesure :

- mesure de la distribution en impulsion du condensat par spectroscopie de Bragg ;
- mesure directe de la fonction de corrélation spatiale du condensat.

Dans une première partie, après avoir évoqué les différentes expériences déjà réalisées sur les quasi-condensats, je rappellerai comment nos résultats obtenus par spectroscopie de Bragg ont permis de mettre en évidence la variation de la largeur de la distribution en impulsion en fonction de l'amplitude des fluctuations de phase. Ces résultats obtenus sur notre expérience sont les premières mesures quantitatives de la longueur de cohérence des quasi-condensats.

Ensuite, nous présenterons dans les deuxième et troisième partie la méthode interférométrique également utilisée pour mesurer la longueur de cohérence. La méthode d'analyse de nos interférogrammes, ainsi que les résultats obtenus par cette méthode, seront décrites. Enfin, dans la dernière partie, nous évoquerons les limites à la lecture du contraste rencontrées et pouvant réduire la longueur de cohérence mesurée.

3.1 Etudes précédentes sur les quasi-condensats

3.1.1 Première observation des fluctuations de phase

L'existence des quasi-condensats dans des pièges anisotropes a été établie pour la première fois en 2001 dans le groupe de W. Ertmer et K. Sengstock [107–109]. En effet, des modulations de la densité le long de l'axe long du quasi-condensat après temps de vol ont été observées et leur amplitude a été comparée à la théorie pour différentes températures, rapports d'anisotropie du piège et nombres d'atomes dans le condensat.

Leur expérience a été réalisée sur des condensats de ^{87}Rb dans l'état $|F = 2, m_F = +2\rangle$ avec un nombre d'atomes maximum de 5×10^5. La fréquence

axiale du piège est de $\omega_z = 2\pi \times 14$ Hz, et la fréquence radiale $\omega_\perp$ varie entre $2\pi \times 138$ Hz et $2\pi \times 715$ Hz, donnant un rapport d'anisotropie $\omega_\perp/\omega_z$ allant de 10 à 51. La Figure 3.1 montre les images typiques qu'ils obtiennent pour un temps de vol de 25 ms. Plus le rapport T/T_ϕ augmente, lorsque la température ou le rapport d'anisotropie du piège augmentent, plus l'amplitude des fluctuations de phase devient importante, et plus l'amplitude des modulations de la densité après temps de vol augmente.

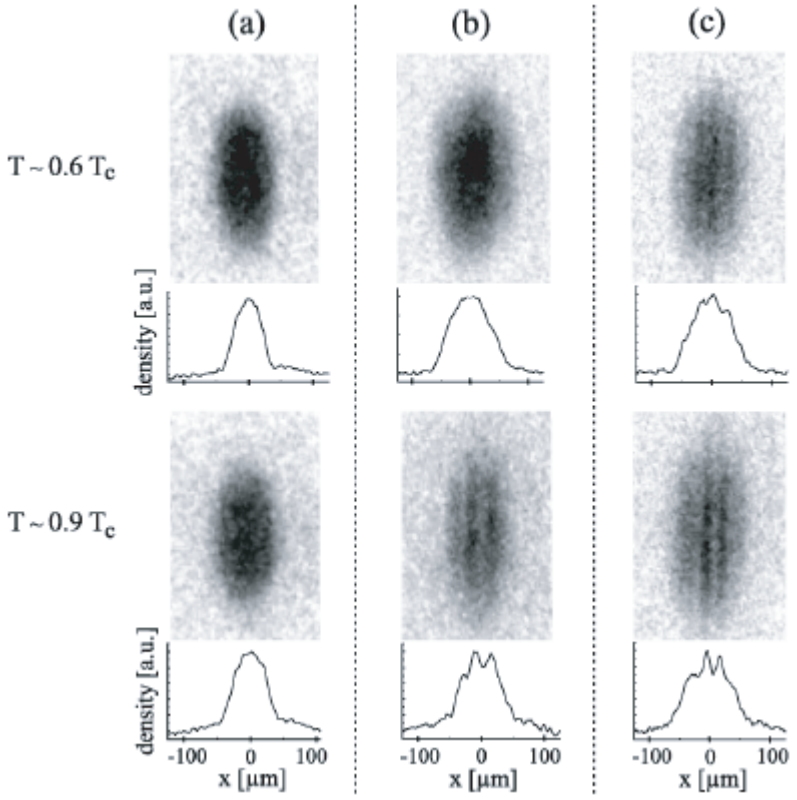


FIG. 3.1 – *Images par absorption et profil de densité axial correspondant après 25 ms de temps de vol, pour deux températures et différents rapports d'anisotropie du piège [$\omega_\perp/\omega_z$ = 10 (a), 26 (b), 51 (c)]. Cette Figure est tirée de [107]. L'axe long du condensat correspond ici à l'axe x et correspond à l'axe z dans ce manuscrit.*

L'apparition de ces modulations de la densité pendant le temps de vol peut s'interpréter qualitativement. En effet, nous avons vu dans la Partie 1.3 que l'interaction de champ moyen dans le piège empêche la transformation des champs en vitesse locaux, dus aux fluctuations de phase, en modulations de densité. En revanche, lorsque le piège est coupé, l'énergie de champ moyen diminue rapidement sous l'effet de l'expansion du condensat. La distribution axiale en vitesse

peut donc être convertie en distribution de densité, et les fluctuations de phase du condensat dans le piège se transforment en modulations de densité après temps de vol.

L'amplitude des modulations de densité a été calculée théoriquement dans l'article de D. Hellweg *et al* [108]. La comparaison entre l'expérience et cette théorie est présentée sur la Figure 3.2. Les points correspondent à une large gamme de fluctuations de phase : $1 < T/T_\phi < 15$. Cette figure montre que les résultats expérimentaux suivent parfaitement la tendance attendue théoriquement. En revanche, ils restent plus petits que les résultats théoriques d'un facteur 2. Cette différence est attribuée par les auteurs à un défaut d'alignement du faisceau laser sonde par rapport au plan des modulations qui réduit le contraste mesuré.

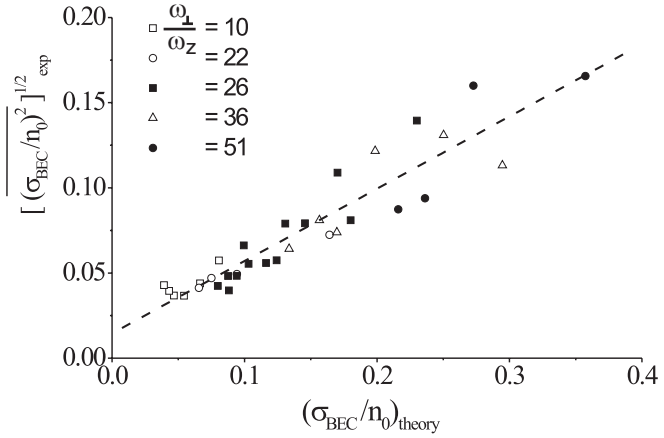


FIG. 3.2 – *Ecarts types moyens sur la densité axiale du condensat mesurés après temps de vol comparés aux valeurs attendues théoriquement. La ligne pointillée est un ajustement linéaire sur les données. Ce graphique est tiré de l'article [107].*

Il manquait donc toujours une mesure quantitative des fluctuations de phase en accord avec la théorie. Deux expériences ont permis de faire cette mesure quasiment en même temps. L'une a été effectuée dans notre équipe à Orsay avec la mesure de la distribution en impulsion [83]. L'autre a été réalisée dans le groupe d'Hannovre en mesurant la fonction de corrélation du deuxième ordre du condensat [110, 111] .

3.1.2 Mesure quantitative par la fonction de corrélation en intensité (Hannovre)

Cette mesure a été réalisée à Hannovre [110] à l'aide d'un interféromètre $\pi/2 - \pi/2$ (identique à celui que nous avons utilisé et que nous décrirons dans la

section 3.3). L'expérience utilise un condensat de ^{87}Rb dans l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ avec un nombre d'atomes allant de 4×10^4 à 6×10^5. La fréquence axiale du piège vaut $\omega_z = 2\pi \times 3,4$ Hz et la fréquence radiale varie de $2\pi \times 300$ Hz à $2\pi \times 380$ Hz. Le rapport d'anisotropie varie donc de 88 à 112 et T_ϕ entre 10 nK et 70 nK. Toutes les mesures ont été effectuées à des températures telles que $T/T_\phi > 5$, donc dans le régime des fortes fluctuations de phase.

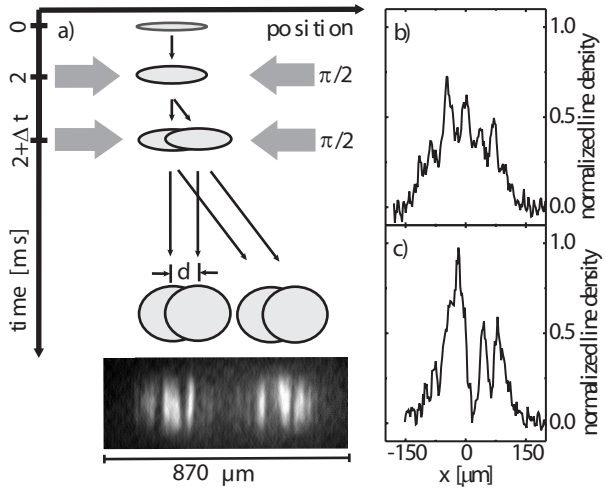


FIG. 3.3 – *(a) Schéma de l'interféromètre et image typique obtenue. Profil de densité typique pour une longueur de cohérence de 25 μm et une séparation entre condensat $d = 7$ μm (b) et $d = 35$ μm (c). Cette figure est tirée de [110]. L'axe long du condensat correspond ici à l'axe x et correspond à l'axe z dans ce manuscrit.*

L'interféromètre permet de créer deux copies de condensat séparées d'une distance s qui vont interférer. Si la séparation devient plus grande que la longueur de cohérence, les régions de condensats qui se superposent ont leur phase décorrélée. Ceci crée une zone d'interférence de pas irrégulier mais de contraste élevé, comme nous le voyons sur la Figure 3.3. Dans ce cas précis, il est important de noter que les franges proviennent uniquement des fluctuations de la phase dans le condensat et non de la phase quadratique qui, comme nous le verrons plus loin, se développe au cours du temps de vol. En effet, leur fréquence axiale est très faible et ce terme de phase est quasiment nul au moment de la prise d'image. Ce

ne sera pas le cas dans notre expérience décrite dans la section 3.3.

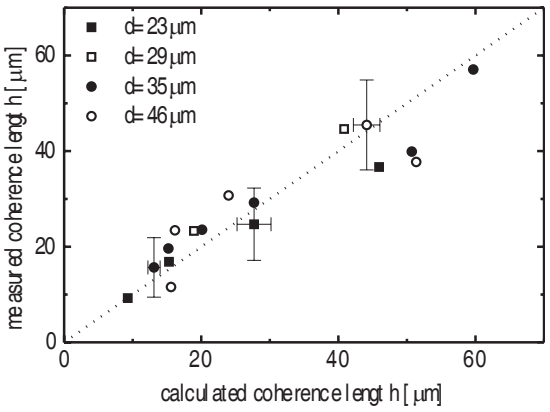


FIG. 3.4 – *Mesure de la longueur de cohérence en phase en fonction de la valeur attendue théoriquement, pour différentes séparations d. La ligne $f(x) = x$ correspond à ce qui est attendu théoriquement. Ce graphique est tiré de [110].*

L'expérience du groupe d'Hannovre ne permet pas de mesurer directement la première fonction de corrélation car celle-ci est très sensible aux fluctuations de la phase globale des franges. Pour contourner ce problème, il a été choisi de mesurer la longueur de cohérence par l'intermédiaire de la fonction de corrélation spatiale du deuxième ordre, comme cela avait déjà été fait dans l'expérience d'interférométrie d'Hanbury Brown et Twiss. En mesurant les corrélations des fluctuations de la densité, on remonte alors à la longueur de cohérence dans le condensat. Ces résultats sont présentés sur la Figure 3.4 et montrent un très bon accord avec la théorie.

3.2 Mesure quantitative par spectroscopie de Bragg

Dans notre équipe, il a été choisi de mesurer quantitativement les fluctuations de phase par l'intermédiaire de la mesure de la distribution en impulsion du condensat, autrement dit grâce à la transformée de Fourier de la fonction de corrélation. Je ne rappellerai ici que les résultats principaux que nous avons obtenus. L'ensemble des détails sont donnés dans l'article publié en 2003 [83], ainsi que dans les thèses de Fabrice Gerbier [38] et Simon Richard [39].

Expérimentalement, nous avons utilisé un piège de rapport d'anisotropie 152, avec une fréquence axiale de $\omega_z = 2\pi \times 5$ Hz et une fréquence radiale de $\omega_\perp = 2\pi \times$ 760 Hz. Le condensat contient environ 5×10^4 atomes. Le potentiel chimique étant alors de quelques $\hbar\omega_\perp$, le nuage atomique se trouve dans le régime intermédiaire 3D-1D. L'amplitude des fluctuations de phase a été étudiée dans la plage $6 <$

$T/T_\phi < 28$ en faisant varier la température, le nombre d'atomes et la fraction condensée.

3.2.1 Méthode d'acquisition des spectres

La méthode d'acquisition d'un spectre élémentaire est décrite dans la partie 2.3.6 : la fraction diffractée est mesurée en fonction du désaccord $\delta\omega$ entre les faisceaux Bragg. Afin d'augmenter le rapport signal sur bruit de nos spectres, nous effectuons les analyses sur les moyennes suivantes :

- moyenne sur l'échelle de temps d'acquisition d'un spectre :
  Pour chaque désaccord entre les faisceaux Bragg, plusieurs mesures de fraction diffractée sont réalisées puis moyennées. Expérimentalement, nous acquérons environ sept spectres élémentaires successifs. La moyenne de ces sept spectres nous donne le spectre que nous appelons spectre moyenné.
- moyenne sur l'échelle de temps d'acquisition de plusieurs spectres moyennés :
  Pour une valeur de T/T_ϕ donnée, nous mesurons quatre spectres moyennés dont l'acquisition est répartie sur plusieurs jours. Chaque spectre moyenné individuel est recentré, corrigé du fond et normalisé par son aire totale. Nous englobons ensuite tous ces spectres renormalisés sur un même spectre global. Cette procédure permet de moyenner les fluctuations lentes de la mesure sur l'échelle de quelques jours.

La dernière moyenne évoquée permet également de s'affranchir de signaux parasites tels que celui provenant des oscillations résiduelles de la taille du condensat. Nous avons en effet remarqué que des oscillations de la longueur du condensat se développent lors du franchissement du seuil de condensation. La spectroscopie de Bragg est bien évidemment sensible à ces oscillations qui se traduisent par une oscillation de la largeur des spectres. Afin de minimiser ce type d'excitation, le seuil de condensation est franchi lentement, et nous fixons un temps d'attente de 6,5 s avant l'ouverture du piège pour permettre aux oscillations résiduelles de relaxer. Enfin, pour un T/T_ϕ donné, les quatre spectres moyennés sont acquis tous les quarts de période d'oscillation afin de s'affranchir au maximum de ce signal parasite.

3.2.2 Profil des distributions en impulsion

Le premier résultat de cette expérience est l'obtention de la forme de la distribution en impulsion du quasi-condensat. La Figure 3.5 présente un spectre de Bragg global obtenu pour $T/T_\phi = 20$, ainsi que les résidus d'un ajustement par une gaussienne et par une lorentzienne. Ceci montre sans ambiguïté que les spectres ont une forme lorentzienne, forme caractéristique de la présence de fortes fluctuations de phase comme cela a été vu dans la partie 1.3.7 [71].

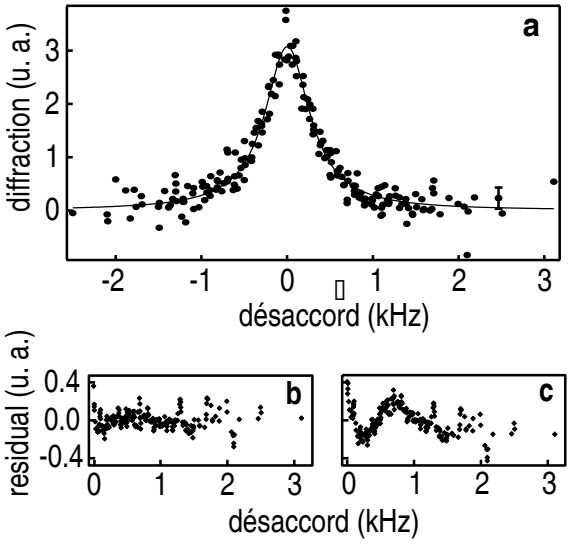


FIG. 3.5 – *(a) Spectre de Bragg. Fraction d'atomes diffractés en fonction du désaccord entre les faisceaux Bragg pour $T/T_\phi = 20$. La ligne est un ajustement lorentzien sur les données.(b) Résidu avec un ajustement par une lorentzienne. (c) Résidu avec un ajustement par une gaussienne.*

3.2.3 Largeur des distributions en impulsion

Résultats bruts

Sur la Figure 3.6 nous avons représenté la demi-largeur à mi-hauteur $\Delta\nu_{\mathrm{M}}$ des spectres expérimentaux en fonction de la largeur $\Delta\nu_\phi = \hbar k_{\mathrm{L}}/[\pi m L_\phi(0)]$, $L_\phi(0)$ étant défini par l'équation (1.56). Lorsque $\Delta\nu_\phi$ augmente, c'est-à-dire lorsque l'amplitude des fluctuations de phase augmente, $\Delta\nu_{\mathrm{M}}$ augmente également. Théoriquement, nous attendons une courbe de la forme $\Delta\nu_{\mathrm{M}} = \alpha\Delta\nu_\phi$ avec $\alpha = 0{,}67$ car nous avons un profil de densité parabolique[1] [71].

Fonction d'appareil

La comparaison de nos résultats avec la théorie nécessite également de tenir compte de la limite de résolution de la mesure qui est due aux paramètres suivants :

– Élargissement de Fourier dû à la durée finie d'application des lasers Bragg. Le temps d'application des faisceaux est de 2 ms, ce qui donne un élargissement de 115 Hz (demi-largeur à mi-hauteur) pour une transition à quatre

[1]Nous rappelons que ce terme α vient du fait que l'on réalise la mesure sur l'ensemble du condensat alors que $\Delta\nu_\phi$ est une valeur théorique valable au centre du piège (voir Parties 1.3.5 et 1.3.7).

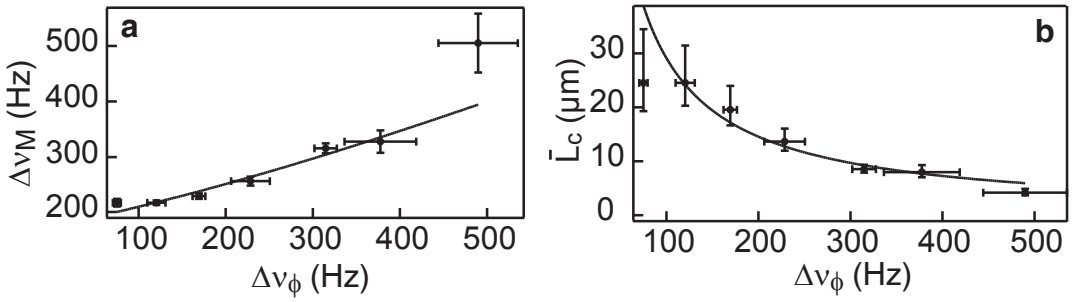


FIG. 3.6 – *(a) Demi-largeur à mi-hauteur des spectres de Bragg expérimentaux en fonction de $\Delta\nu_\phi$. La ligne est un ajustement sur les données par la fonction décrite dans le texte. (b) Longueur de cohérence en fonction de $\Delta\nu_\phi$, déduite des largeurs des données expérimentales et de l'ajustement précédent. La ligne est la courbe théorique $L_\phi(0)/\alpha$. La longueur totale typique du quasi-condensat est de $240\,\mu m$.*

photons.
- Élargissement dû à l'expansion du condensat durant les 3 ms de temps vol avant l'application des lasers Bragg, et qui est de l'ordre de 85 Hz.
- Élargissement dû aux vibrations des miroirs qui permettent d'amener les faisceaux laser Bragg au niveau des atomes.

Nous avons considéré une fonction d'appareil gaussienne, de demi-largeur à mi-hauteur w_G constante [38, 39]. Le spectre de Bragg est donc la convolution d'une gaussienne et d'une lorentzienne, autrement dit un profil de Voigt[2]. La demi-largeur à mi-hauteur des spectres attendue théoriquement est finalement :

$$\Delta\nu_M = \frac{\alpha\Delta\nu_\phi}{2} + \sqrt{w_G^2 + \left(\frac{\alpha\Delta\nu_\phi}{2}\right)^2}. \tag{3.1}$$

Un ajustement de nos données expérimentales par cette fonction donne $w_G = 176(6)$ Hz et $\alpha = 0,64(5)$. Ceci montre le très bon accord entre la valeur de α expérimentale et la valeur théorique 0,67, aux 20 % d'incertitude près qui proviennent de la mesure et de l'évaluation de la fonction d'appareil.

3.3 Mesure par voie interférométrique

La spectroscopie de Bragg est particulièrement adaptée aux mesures de petites longueurs de cohérence. La largeur de la distribution en impulsion est alors suffisamment grande pour que la mesure ne soit pas limitée par la largeur de

[2]L'ajustement des spectres de Bragg expérimentaux par une lorentzienne ou par un profil de Voigt donne les mêmes résultats.

la fonction d'appareil. En revanche, pour mesurer les grandes longueurs de cohérence, nous sommes rapidement limités par la résolution de la mesure. Ainsi, pour les résultats précédents utilisant des durées d'impulsion Bragg de 2 ms, nous n'avons pas accès au domaine $T/T_\phi < 5$, domaine qui nous permettrait d'étudier la transition entre un quasi-condensat et un condensat parfaitement cohérent.

Pour avoir accès à ce domaine, nous sommes donc contraints d'augmenter la résolution de la spectroscopie de Bragg. Ceci passe alors forcément par une augmentation des durées d'interaction entre les lasers Bragg et les atomes. Hélas cela n'est pas possible sur notre dispositif expérimental actuel : au-delà de 2 ms les vibrations des miroirs deviennent trop importantes et élargissent fortement la fonction d'appareil.

Pour remédier à ce problème de résolution dû aux fluctuations de la phase des lasers Bragg pendant le temps d'interaction T long, une solution possible est d'utiliser deux impulsions Bragg brèves de durée τ séparées de T. C'est le principe qui est utilisé dans les horloges atomiques. Ainsi, si l'on peut s'affranchir des fluctuations de phase des lasers pendant le temps T, la mesure est simplement limitée par la stabilité du réseau de Bragg sur les temps courts, stabilité que nous savons alors être très bonne. Cette méthode revient finalement à la réalisation d'un interféromètre dont nous allons détailler maintenant le fonctionnement.

3.3.1 Principe de notre méthode

Le schéma de l'interféromètre utilisé est présenté sur la Figure 3.7. Le principe de la méthode est de créer deux copies identiques d'un même condensat et de les séparer suivant leur axe long d'une distance s variable. Nous observons alors des franges d'interférence au niveau de la superposition des deux condensats. Le contraste des franges nous renseigne sur la corrélation entre ces deux copies, et donc sur la fonction de corrélation spatiale du condensat initial. La vitesse à laquelle décroît le contraste avec s nous donne finalement la longueur de cohérence du condensat.

L'interféromètre utilisé est un interféromètre de type Mach-Zender. La première lame séparatrice est réalisée à partir d'une impulsion $\pi/2$ qui sépare le condensat en une superposition cohérente de deux états d'impulsion 0 et $2\hbar k_{\mathrm{L}}$.[3] Après un temps de vol libre T_s, une deuxième lame séparatrice recombine les deux condensats. Comme pour un interféromètre optique, nous observons deux voies de sortie dont les figures d'interférence sont complémentaires.

[3]Pour l'expérience d'interférométrie, nous utilisons des transitions à deux photons.

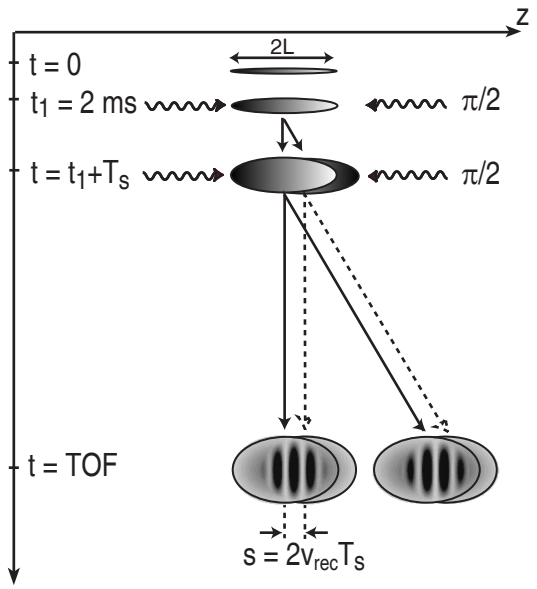


FIG. 3.7 – *Séquence de l'interférométrie : le condensat est relâché du piège à l'instant $t = 0$. Deux impulsions $\pi/2$ séparées de T_s sont ensuite appliquées. On observe ensuite, après un temps de vol TOF, les deux voies de l'interféromètre (d'impulsion $p = 0$ et $p = 2\hbar k_{\mathrm{L}}$) produisant des franges d'interférence complémentaires dans la zone de recouvrement des condensats. La séparation entre deux condensats d'une même voie de l'interféromètre varie avec T_s.*

3.3.2 Réalisation expérimentale de l'interféromètre

Séquence expérimentale

L'interféromètre atomique est réalisé à l'aide des mêmes faisceaux Bragg que précédemment. Ceux-ci sont utilisés pour effectuer deux impulsions $\pi/2$ successives du condensat en utilisant la méthode décrite dans la Partie 2.3.5. La séquence expérimentale est présentée sur la Figure 3.7 et est la suivante :

- Le condensat est maintenu dans le piège avec un couteau radio-fréquence pendant au moins deux secondes, ceci afin d'obtenir un condensat à l'équilibre, sans oscillation[4] [83]. Le temps pendant lequel le couteau est maintenu permet également de contrôler le nombre d'atomes final du condensat.
- Le piège est coupé à l'instant $t = 0$. Le condensat tombe sous l'effet de la gravité.
- La première impulsion $\pi/2$ est appliquée après 2 ms de temps de vol : la densité atomique est alors suffisamment petite pour que les collisions entre le condensat et le nuage diffracté puissent être négligées. Cette première

[4]La méthode interférométrique n'est pas sensible à ce genre d'oscillations. Le but du couteau radio-fréquence est uniquement d'obtenir un condensat le plus proche possible de l'équilibre.

impulsion réalise une superposition cohérente de deux paquets d'onde ayant une différence en vitesse de $2v_{\mathrm{rec}} = 2\hbar k_{\mathrm{L}}/m$.
- Durant un temps d'expansion supplémentaire de T_s, les deux copies se séparent d'une distance $s = 2v_{\mathrm{rec}}T_s$. La deuxième impulsion $\pi/2$ boucle l'interféromètre en créant deux sorties (soit quatre copies de condensats), l'une d'impulsion 0, l'autre d'impulsion $2\hbar k_{\mathrm{L}}$.
- Les atomes sont enfin imagés par absorption, perpendiculairement à l'axe long des condensats après un temps de vol de 29 ms.

Impulsions $\pi/2$

La largeur en impulsion du condensat correspond à une largeur en fréquence d'au maximum 200 Hz pour les quasi-condensats que nous avons étudiés et dont le paramètre T/T_ϕ n'excède pas 7. Comme nous l'avons dit dans la Partie 2.3.4, nous utilisons des impulsions laser d'une durée de l'ordre de 100 μs, suffisamment courte pour que la largeur en fréquence de ces impulsions permette de coupler tout le condensat. Le nuage thermique quant à lui a une distribution en impulsion beaucoup plus large que celle du condensat, allant de 12 kHz à 60 kHz dans le cas de notre expérience. Il n'est donc couplé que de façon infime par les impulsions Bragg [100]. Enfin, les impulsions $\pi/2$ sont réalisées en contrôlant leur durée pour les raisons évoquées dans la Partie 2.3.5. Ces durées sont mesurées chaque demi-journée en fonction de l'instant d'application au cours du temps de vol.

Augmentation du temps de vol

Pour pouvoir analyser correctement nos systèmes de franges, il faut que les deux sorties de l'interféromètre soient séparées spatialement d'au moins $2L + s$. Ceci impose un temps de vol t tel que :

$$2v_{\mathrm{rec}}(t - t_1 - T_s) > 2L + s, \tag{3.2}$$

L étant la demi-longueur du condensat. La demi-hauteur de 5 mm de notre cellule ne nous autorise normalement que des temps de vol inférieurs à 26 ms, ce qui n'est pas suffisant.

Nous augmentons notre temps de vol en ajoutant un gradient de champ magnétique qui ralentit la chute des atomes et autorise des temps de vol suffisamment longs pour permettre la séparation. Ce gradient est réalisé à l'aide du champ du piège magnéto-optique (PMO) provenant de deux bobines d'axe vertical d'une quinzaine de spires, en configuration anti-Helmoltz, parcourues par un courant de 2 A. Ceci donne un gradient de 28 G/cm suivant l'axe des bobines et donc une accélération de $(9\ \mathrm{m/s^2}) \times m_F$. Les atomes sont toujours dans le niveau $F = 1$, le repompage étant réalisé juste avant l'imagerie. Le nombre d'atomes avec et sans gradient de champ est identique, ce qui nous indique que les atomes sont

tous dans $m_F = -1$. Dans le cas contraire, nous aurions en particulier observé l'apparition de trois nuages d'atomes le long de l'axe des bobines et dont la position de chacun aurait dépendu du sous-niveau Zeeman dans lequel il se serait trouvé. Cette méthode Stern-Gerlach a en particulier été utilisée dans le groupe de Sengstock pour pouvoir observer l'évolution des spins dans le niveau $F = 2$ dans un condensat de ^{87}Rb [112].

Au cours de l'expérience, ce champ est appliqué après les séquences des impulsions Bragg pour ne pas perturber la formation de l'interféromètre. Le temps d'application du champ du PMO est ajusté expérimentalement de façon à pouvoir séparer correctement les deux sorties de l'interféromètre. Enfin, le champ du PMO est éteint quelques millisecondes, 5 ms typiquement, avant d'imager les atomes.

Le champ du PMO n'est pas un gradient de champ magnétique uniforme. Il a également des composantes non nulles suivant les axes perpendiculaires à l'axe des bobines. Ce champ déplace légèrement les nuages d'atomes (excepté dans la direction de l'axe des bobines où leur chute est fortement ralentie) et diminue légèrement leur taille (moins de 10 % par rapport à la taille attendue après un temps de vol identique). Nous avons vérifié expérimentalement que cela n'affectait pas notre mesure du contraste.

Dans la suite, toutes nos courbes seront tracées en fonction de s/L. Ce rapport reste constant pendant la faible compression due au champ du PMO. La séparation s est calculée théoriquement à partir du temps T_s entre les deux impulsions Bragg. C'est donc la séparation avant compression. La demi-longueur du condensat L est donc elle aussi mesurée à partir d'un ajustement de nos images obtenues sans PMO et donc pour un temps de vol plus court. La fréquence axiale du piège magnétique utilisé est faible : nous pouvons donc considérer que la longueur du condensat ne change pas pendant le temps de vol.

3.3.3 Interférogrammes obtenus

L'interféromètre décrit plus haut permet d'obtenir sur chacune des voies deux copies d'un condensat, identiques et séparées d'un distance s. La Figure 3.8 présente une image typique obtenue à la sortie de l'interféromètre pour une séparation de 36 μm entre les condensats d'une même voie. Les deux condensats interfèrent au niveau de leur zone de recouvrement. Comme pour les interféromètres en optique, les interférences des deux voies de sortie sont complémentaires. Les franges sont rectilignes, perpendiculaires à l'axe z de séparation entre condensats et régulièrement espacées. Nous verrons par la suite que les franges d'interférence proviennent de la phase parabolique développée par le condensat au cours du temps de vol.

Les figures d'interférence typiques obtenues en fonction de la séparation entre les condensats sont présentées sur la Figure 3.9 pour l'une des voies de sortie.

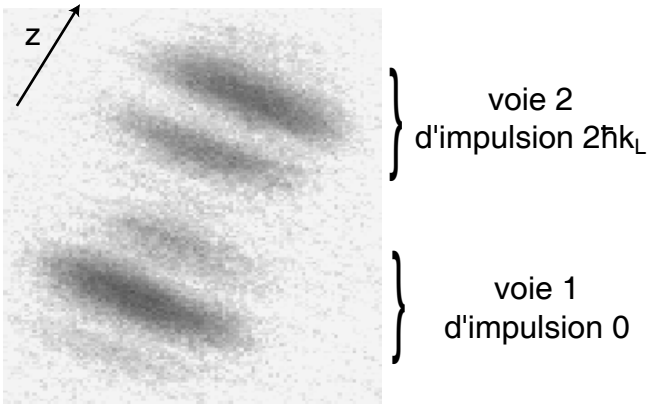


FIG. 3.8 – *Image par absorption des deux sorties de l'interféromètre. La voie 1 est immobile alors que la voie 2 se déplace à* $2v_{\mathrm{rec}}$. *Les interférences des deux voies sont complémentaires. La direction de l'axe long* z *du condensat est représentée par la flèche. C'est également la direction de séparation entre les condensats.*

On fait varier la séparation s en changeant le temps T_s entre les deux impulsions $\pi/2$.

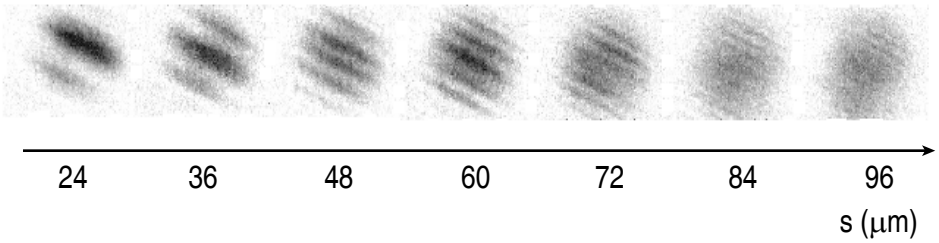


FIG. 3.9 – *Images par absorption d'une des sorties de l'interféromètre pour différentes séparations* s *entre les deux condensats. La demi-longueur du condensat est ici de* 85 μm.

La phase du condensat étant parabolique après le temps de vol, la différence de phase entre les deux condensats est proportionnelle à zs. L'interfrange diminue donc avec l'augmentation de s. Nous observons également sur la Figure 3.9 une diminution du contraste avec s. Cette diminution reflète à la fois la diminution de la zone de recouvrement entre condensats et la présence de fluctuations de phase suivant l'axe long du quasi-condensat. En effet, en présence de fluctuations de phase, les franges d'interférence restent rectilignes, mais ne sont plus rigoureusement périodiques, ce qui implique une baisse du contraste des franges. L'information sur la fonction de corrélation spatiale et sur la longueur de cohérence est finalement contenue dans la variation du contraste avec s.

3.3.4 Analyse dans l'espace de Fourier

Problèmes expérimentaux

Dans un quasi-condensat, la phase fluctue à la fois spatialement et temporellement. Chaque réalisation des mesures donne donc un interférogramme différent. En pratique, ceci impose de réaliser l'expérience plusieurs fois pour une séparation s donnée et de moyenner les mesures de contraste pour en connaître une valeur représentative de l'amplitude des fluctuations de phase.

Une première possibilité est de moyenner toutes nos images, puis de mesurer le contraste sur la nouvelle image moyenne. Ceci n'est valable que si la phase globale des franges, donnée par la composante constante de la phase entre les deux copies de condensat[5], reste stable au cours des différentes réalisations. Or, dans notre cas, cette phase fluctue, ceci à cause de problèmes expérimentaux tels qu'un décalage en phase entre les deux lasers Bragg incontrôlable durant le temps T_s ou un gradient de champ résiduel et aléatoire accélérant le condensat et impliquant un déphasage aléatoire entre les deux copies. Pour remédier à cela, nous avons décidé de passer dans l'espace de Fourier et de prendre le module de la transformée de Fourier de l'interférogramme pour mesurer le contraste. En réalisant ensuite la moyenne du module des transformées de Fourier, nous nous affranchissons de la phase globale fluctuante entre les deux copies du condensat.

Profil des transformées de Fourier

Expérimentalement, nous prenons le module de la transformée de Fourier 2D de l'image par absorption obtenue à chaque sortie de l'interféromètre. Nous réalisons ensuite une coupe suivant l'axe long. La Figure 3.10 présente la valeur absolue de ces coupes pour différentes séparations s entre condensat.

La hauteur du pic central nous donne le nombre total d'atomes. La position du pic latéral correspond à la fréquence spatiale des franges d'interférence. Cette fréquence augmente avec s. Le contraste des franges est donné par le rapport entre la hauteur du pic latéral et celle du pic central. Nous observons une baisse de la hauteur du pic latéral lorsque s augmente indiquant une baisse du contraste, ce que l'on peut également remarquer sur les images par absorption à gauche. Enfin, la transformée de Fourier de la forme parabolique de la densité atomique donne la structure particulière observée sur le pic central pour les petites valeurs d'interfrange, autrement dit lorsque le pic latéral est distant du pic central.

[5] autrement dit, la phase entre les deux copies de condensat pour $s = 0$.

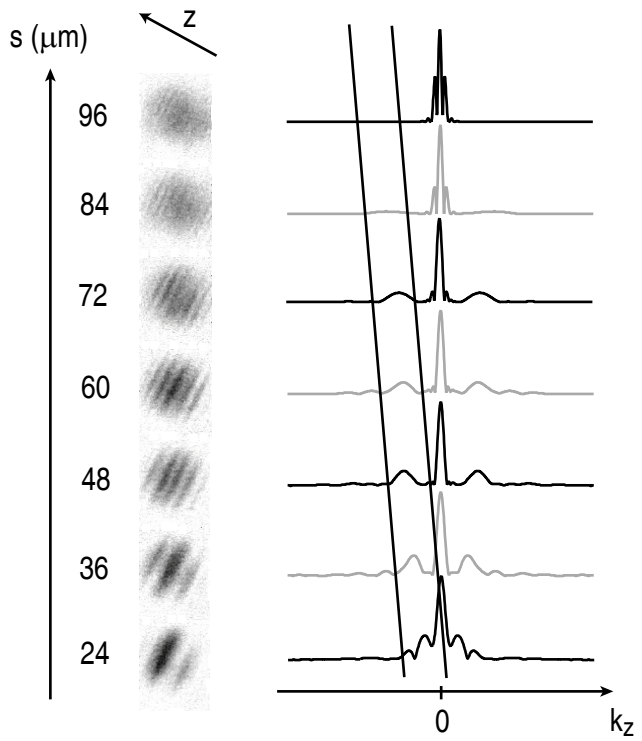


FIG. 3.10 – *Gauche : Images par absorption d'une des sorties de l'interféromètre pour différentes séparations s entre les deux condensats. La demi-longueur du condensat est ici de 85 μm. Droite : Profil de la valeur absolue de coupe de la transformée de Fourier des images de gauche. La position du second pic (délimitée par les deux droites) donne l'interfrange. Le rapport entre la hauteur du second pic sur le pic central donne le contraste des franges.*

3.4 Analyse des interférogrammes

Afin de connaître parfaitement ce que nous allons mesurer et de faire le lien entre contraste et fonction de corrélation, nous allons décrire de manière plus formelle l'interféromètre.

3.4.1 Description théorique de l'interféromètre

Cas du condensat parfait

Considérons tout d'abord le cas d'un condensat parfait, c'est-à-dire sans fluctuation thermique de sa phase. Cette dernière est donc uniforme dans le piège. La fonction d'onde du condensat dans le piège s'écrit : $\Psi = \sqrt{n}e^{i\Phi}$, Φ étant une constante. Nous avons vu dans la section 2.2.3 que l'expansion du condensat au cours du temps vol peut être considérée comme une dilatation pure pour un

condensat dans le régime de Thomas-Fermi. On a alors pour la densité atomique après un temps de vol $t = \tau/\omega_\perp$:

$$\begin{aligned} n(\rho, z, \tau) &= \frac{1}{\lambda_\perp^2 \lambda_z} n(\rho/\lambda_\perp, z/\lambda_z, 0), && (3.3)\\ \text{avec} \quad \lambda_\perp(\tau) &= \sqrt{1+\tau^2}, && (3.4)\\ \text{et} \quad \lambda_z(\tau) &= 1 + \epsilon^2[\tau \arctan(\tau) - \ln\sqrt{1+\tau^2}] + O(\epsilon^4), && (3.5) \end{aligned}$$

le paramètre $\epsilon = \omega_z/\omega_\perp$ étant très petit devant 1. Pour nos temps de vol, nous pouvons considérer $\lambda_z(\tau) \simeq 1$. La longueur du condensat après temps de vol est donc quasiment identique à celle dans le piège.

La vitesse locale du condensat est alors :

$$\begin{aligned} v_\perp(\rho, \tau) &= \rho \frac{\dot{\lambda}_\perp(\tau)}{\lambda_\perp(\tau)} = \rho \frac{\omega_\perp \tau}{1+\tau^2}, && (3.6)\\ v_z(z, \tau) &= z \frac{\dot{\lambda}_z(\tau)}{\lambda_z(\tau)} = z \frac{\omega_z \epsilon \arctan \tau}{1 + \epsilon^2(\tau \arctan \tau - \ln\sqrt{1+\tau^2})}. && (3.7) \end{aligned}$$

La vitesse étant le gradient de la phase :

$$v = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi, \tag{3.8}$$

la phase du condensat, uniforme dans le piège, devient alors après temps de vol :

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, z, \tau) &= \delta z^2 + \gamma \rho^2, && (3.9)\\ \text{avec} \quad \delta(\tau) &= \frac{m}{2\hbar} \frac{\dot{\lambda}_z(\tau)}{\lambda_z(\tau)}, && (3.10)\\ \text{et} \quad \gamma(\tau) &= \frac{m}{2\hbar} \frac{\dot{\lambda}_\perp(\tau)}{\lambda_\perp(\tau)}. && (3.11) \end{aligned}$$

La phase développée pendant le temps de vol est donc quadratique.

Interfrange

Nous connaissons désormais la phase et la densité d'un condensat parfait après temps de vol. Regardons maintenant la figure d'interférence à l'une des sorties de l'interféromètre. Pour une séparation s donnée le long de l'axe long du condensat initial, nous obtenons donc la densité atomique suivante :

$$\begin{aligned} n_{\text{out}}(\rho, z, \tau) &= \frac{1}{4} |\Psi(\rho, z - s/2, \tau) + \Psi(\rho, z + s/2, \tau)|^2 \\ &= \frac{n_+}{4} + \frac{n_-}{4} + \frac{\sqrt{n_+ n_-}}{2} \cos[\Delta\Phi(z, \tau) + \phi_{\text{g}}], && (3.12) \end{aligned}$$

avec $n_\pm = n(\rho, z \pm s/2, \tau)$, $\Delta\Phi(z,\tau) = \Phi(z+s/2,\tau) - \Phi(z-s/2,\tau) = 2\delta(\tau)zs$ et ϕ_g une phase globale introduite par les deux impulsions Bragg. La différence de phase est linéaire avec z, ce qui donne des franges d'interférence rectilignes, perpendiculaires à l'axe z. Sur l'autre sortie de l'interféromètre, les deux copies sont déphasées de π. Nous trouvons donc le système de franges complémentaire de celui de la première sortie.

L'interfrange se déduit très facilement de ce qui précède et nous trouvons :

$$i = \frac{\pi}{\delta(\tau)s}. \tag{3.13}$$

Le paramètre δ dépend du temps de vol. La variation de l'interfrange en fonction de ce temps de vol est représentée sur la Figure 3.11 par le trait plein.

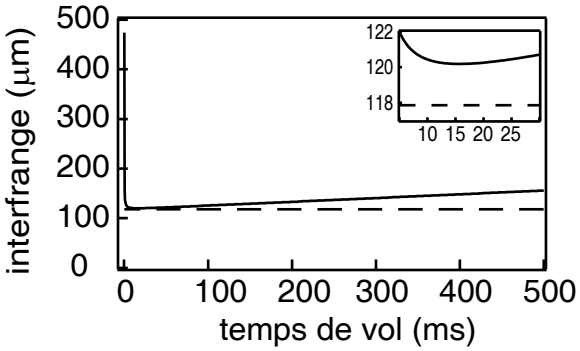


FIG. 3.11 – *Evolution de l'interfrange calculée à partir des équations (3.13) et (3.10) en fonction du temps de vol pour un piège de fréquences $\omega_z = 2\pi \times 8,67$ Hz et $\omega_\perp = 2\pi \times 395$ Hz, et pour une séparation entre condensats $s = 20$ μm (trait plein). Le trait pointillé représente l'évolution de l'interfrange si l'on néglige la variation de la longueur de condensat durant le temps de vol et pour des temps de vol tels que $\tau \gg 1$. L'interfrange ne dépend alors pas de τ. Insert : évolution de l'interfrange pour des temps de vol entre 5 et 30 ms. Nous pouvons effectivement négliger la variation de la taille du condensat pour les temps de vol que nous utilisons expérimentalement ($<$ 30 ms). L'interfrange dépend alors peu du temps de vol.*

L'expérience d'interférométrie a été réalisée sur deux pièges différents, afin de couvrir une plage plus importante de T/T_ϕ. Le premier piège a pour fréquence radiale $\omega_\perp = 2\pi \times 395$ Hz et pour fréquence axiale $\omega_z = 2\pi \times 8,67$ Hz, ce qui donne un rapport d'anisotropie de 45. Le deuxième piège a pour fréquences $\omega_\perp = 2\pi \times 655$ Hz et $\omega_z = 2\pi \times 6,55$ Hz, donnant un rapport d'anisotropie de 100. Les rapports d'anisotropie utilisés sont grands et permettent, pour les temps de vol ne dépassant pas 30 ms, de négliger la variation de la longueur du condensat

au cours du temps de vol, et donc de prendre $\lambda_z(\tau) = 1$.[6] De plus, nous avons $\tau \gg 1$; ainsi, pour la plage de temps de vol utilisée expérimentalement, nous trouvons un interfrange qui ne dépend pas de τ, comme nous le montre l'insert de la Figure 3.11, et qui vaut :

$$i = \frac{2h}{\pi m \frac{\omega_z^2}{\omega_\perp} s}. \tag{3.14}$$

La courbe en traits pointillés représente cet interfrange.

La répulsion entre les deux copies de condensat due à l'énergie de champ moyen peut modifier l'interfrange [113]. Dans notre cas, l'énergie de champ moyen durant le temps de vol diminue comme [55] :

$$E_{\text{champ moyen}} = \frac{2\mu}{7\lambda_\perp^2 \lambda_z}, \tag{3.15}$$

celle-ci étant convertie en énergie cinétique. Au moment où l'on applique la première impulsion Bragg, c'est-à-dire au bout de 2 ms de temps de vol, nous trouvons que plus de 96 % de cette énergie de champ moyen a été convertie en énergie cinétique. Nous pouvons donc négliger la répulsion entre les deux copies qui était sensée introduire un décalage de l'interfrange.

Cas du quasi-condensat

Comme il a été montré dans [63, 83], les fluctuations de densité du condensat dans le piège sont supprimées à cause de l'effet de champ moyen. Nous pouvons donc écrire la fonction d'onde du condensat après un temps de vol de t comme $\Psi(\rho, z, t) = \sqrt{n(\rho, z, t)} e^{i\Phi(\rho,z,t)}$, avec $n(\rho, z, t)$ la densité atomique et $\Phi(\rho, z, t)$ la phase du condensat. Dans le cas d'un quasi-condensat, cette phase est donnée par l'équation (3.9) à laquelle s'ajoute un terme fluctuant temporellement et spatialement suivant long du condensat.

En effet, les excitations thermiques 1D impliquent des fluctuations de la phase le long de l'axe z du condensat, à la fois temporelles et spatiales. La différence en phase entre les deux copies peut s'écrire :

$$\Delta\Phi(z) = \delta z s + \phi_{\text{th}}(z + s/2) - \phi_{\text{th}}(z - s/2), \tag{3.16}$$

où $\phi_{\text{th}}(z)$ représente les fluctuations de phase. Dans notre expérience, ces fluctuations sont faibles par rapport à la phase parabolique du condensat qui se développe au cours du temps de vol. Lorsque nous observons le système de franges, nous obtenons toujours des franges perpendiculaires à z, mais le pas de ces franges n'est plus rigoureusement périodique. Dans l'espace de Fourier, le

[6] Ceci revient à négliger les termes en ϵ^2 dans $\delta(\tau)$.

pic à la fréquence spatiale des franges s'élargit et voit sa hauteur diminuée. Ceci a pour effet de réduire le contraste des franges. Lorsque la séparation s entre les condensats augmente, les franges deviennent de plus en plus perturbées car les phases des deux copies deviennent de moins en moins corrélées. Le contraste des franges diminue donc avec s. Plus les fluctuations de phase augmentent et plus cette baisse du contraste avec s est rapide. Ainsi, en mesurant la largeur de cette fonction de corrélation (contraste des franges en fonction de s), nous mesurons la dépendance de la longueur de cohérence du condensat avec la température.

3.4.2 Lien entre transformée de Fourier et fonction de corrélation

Les atomes sont imagés par absorption suivant l'axe y, perpendiculairement à l'axe long z du condensat. L'image obtenue, normalisée en unité de densité atomique 2D, est la densité intégrée suivante :

$$I(x,z) = \int \mathrm{d}y\, n_{\mathrm{out}}, \tag{3.17}$$

où n_{out} est donnée par les équations (3.12) et (3.16). Nous prenons ensuite la transformée de Fourier 2D de cette image et réalisons une coupe le long de l'axe à la fréquence radiale $k_x = 0$:

$$\tilde{I}[0,k_z] = \int \mathrm{d}^3r\, n_{\mathrm{out}} e^{ik_z z}. \tag{3.18}$$

La Figure 3.10 présente la valeur absolue des coupes des transformées de Fourier obtenues pour différentes séparations entre condensat. Nous rappelons que la hauteur du pic central nous donne le nombre d'atomes. La position du pic latéral correspond à la fréquence spatiale des franges $k_0(s) = \delta s$. Le contraste des franges est donné par le rapport entre la hauteur de ce pic latéral et celle du pic central $2\tilde{I}[0,k_0(s)]/\tilde{I}[0,0]$.

Pour obtenir la fonction de corrélation, nous prenons donc la valeur de la transformée de Fourier complexe à la fréquence spatiale k_0 des franges :

$$\tilde{I}[0,k_0(s)] = e^{i\phi_{\mathrm{g}}} \int \mathrm{d}^3r\, \sqrt{n_+ n_-} e^{i\Delta\Phi_{\mathrm{th}}}. \tag{3.19}$$

Dans l'hypothèse où il n'y a pas de fluctuation de la phase globale ϕ_{g}, en moyennant directement la transformée de Fourier complexe (3.19), nous retrouvons la fonction de corrélation spatiale du premier ordre :

$$C^{(1)}(s) = \langle \tilde{I}[0,k_0(s)] \rangle = \int \mathrm{d}^3r\, \langle \sqrt{n_+ n_-} e^{i\Delta\Phi_{\mathrm{th}}} \rangle, \tag{3.20}$$

comme définie au Chapitre 1 avec l'équation (1.60). Or, dans notre cas, ϕ_{g} fluctue d'une expérience à l'autre. La fluctuation de ϕ_{g} entraîne un décalage aléatoire des franges d'une image à l'autre. Moyenner les transformées de Fourier complexes revient à moyenner les images. Le contraste de ces franges, au fur et à mesure où l'on moyenne les transformées de Fourier, va baisser mais ne reflétera pas la baisse due aux fluctuations de phase du quasi-condensat. Pour éliminer cette phase globale, nous prenons la valeur absolue de la transformée de Fourier avant de moyenner. Nous obtenons alors la fonction de corrélation effective suivante :

$$C^{\mathrm{eff}}(s) = \langle \left| \tilde{I}[0, k_0] \right| \rangle = \langle \left| \int \mathrm{d}^3 r \, \sqrt{n_+ n_-} e^{i\Delta\Phi_{\mathrm{th}}} \right| \rangle. \tag{3.21}$$

Expérimentalement, c'est cette fonction de corrélation que nous allons mesurer. Cette fonction a le même comportement que la fonction de corrélation spatiale du premier ordre $C^{(1)}(s)$, que ce soit avec s ou avec la température. Mais elles ne sont pas quantitativement identiques. La principale conséquence de l'introduction des valeurs absolues est la réduction de l'effet des fluctuations de phase. Or celles-ci peuvent introduire un décalage des franges d'interférence en plus d'une variation locale de l'interfrange. On s'attend donc à ce que $C^{\mathrm{eff}}(s)$ diminue moins rapidement que $C^{(1)}(s)$ avec s.

3.4.3 Simulation des résultats attendus

Modélisation des fluctuations de phase

La fonction de corrélation spatiale du premier ordre $C^{(1)}(s)$ (3.20) peut être calculée analytiquement [71]. En revanche, la fonction de corrélation effective $C^{\mathrm{eff}}(s)$ (3.21) que nous mesurons ne peut être calculée analytiquement. Pour connaître l'allure de $C^{\mathrm{eff}}(s)$, nous avons tout d'abord simulé les fluctuations de phase dans le quasi-condensat en utilisant la théorie décrite dans [37]. Nous rappelons que l'opérateur de phase est donné par :

$$\hat{\phi}_{\mathrm{th}}(\mathbf{r}) = [4n(\mathbf{r})]^{-1/2} \sum_j f_j^+(\mathbf{r}) \hat{a}_j + h.c., \tag{3.22}$$

où $\hat{a}_j$ est l'opérateur d'annihilation d'une quasi-particule dont l'énergie est $\epsilon_j = \hbar\omega_z \sqrt{j(j+3)/4}$ [78]. Les fonctions d'onde associées à ces quasi-particules de basse énergie sont :

$$f_j^+(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{(j+2)(2j+3)gn(\mathbf{r})}{4\pi(j+1)R^2 L \epsilon_j}} P_j^{(1,1)}(z/L), \tag{3.23}$$

où les $P_j^{(1,1)}$ sont des polynômes de Jacobi. Pour simuler numériquement les fluctuations de la phase, il suffit de remplacer les opérateurs annihilation $\hat{a}_j$ et

création $\hat{a}_j^\dagger$ de quasi-particules par des variables aléatoires gaussiennes α_j et α_j^*. Ces variables ont une valeur moyenne nulle et leur corrélation $\langle \alpha_j \alpha_{j'}^* \rangle = \delta_{jj'} N_j$ est liée au nombre d'occupation de quasi-particules dans le mode j à une température T et vaut $N_j = k_B T/(\hbar\omega_z \sqrt{j(j+3)/4})$.

Evolution de la phase au cours du temps de vol

Au cours du temps de vol, les fluctuations de la phase évoluent et se transforment en fluctuations de densité. C'est ce phénomène qui a tout d'abord été exploité dans [107] pour montrer l'existence de quasi-condensats. Au cours du temps de vol $t = \tau/\omega_\perp$, l'évolution de la phase du mode de nombre quantique j vaut :

$$\phi_j(z,t) \sim \phi_j(z,0)\tau^{-\left(\frac{\epsilon_j}{\hbar\omega_\perp}\right)^2} \cos\left(\epsilon_j^2 \frac{\tau}{\mu\hbar\omega_\perp}\right), \tag{3.24}$$

avec $\phi_j(z,0)$ la phase initiale au point z et un temps de vol tel que $t \ll \omega_\perp/\omega_z^2$. L'évolution de la phase s'écrit aussi en fonction de l'énergie du mode de vecteur d'onde k :

$$\phi_k(z,t) \sim \phi_k(z,0)\tau^{-\left(\frac{\omega_k^B}{\omega_\perp}\right)^2} \cos(\omega_k t), \tag{3.25}$$

où $\hbar\omega_k^B = \epsilon_k$ est l'énergie du spectre de Bogoliubov donnée par (1.46) et avec $\omega_k = \hbar k^2/2m$. L'évolution de la phase dans notre cas est dominée par le cosinus, $\omega_k^B/\omega_\perp$ étant petit. Nous voyons bien d'après ces équations que l'évolution est d'autant plus rapide que l'énergie du mode considéré est élevée. Le mode de plus haute énergie participant encore aux excitations axiales 1D a une longueur d'onde de l'ordre de la longueur de cohérence du condensat, $L_\phi \sim 1/k$. Donc, pour pouvoir considérer que les fluctuations de phase sont gelées au cours du temps de vol, il faut $\omega_k t \ll 1$ ce qui revient à considérer des temps de vol tels que $t \ll mL_\phi^2/\hbar^2$.

Notre temps de vol est de 30 ms. La transformation complète des fluctuations de phase en fluctuations de densité se fait sur une échelle de temps allant de 600 ms à 26 s. Nous pouvons donc tout à fait considérer que la phase n'évolue pas pendant notre temps de vol.

Calcul de $C^{\text{eff}}(s)$

Pour une quantité de fluctuations de phase T/T_ϕ donnée, une vingtaine de condensats sont générés numériquement pour chaque valeur de s allant de 0,2 L à $2L$. Chaque condensat est intégré suivant l'axe y pour simuler les images typiques d'absorption. Chaque image est ensuite traitée de la même façon que les images obtenues expérimentalement (voir la Partie 3.4.4). Nous moyennons

les valeurs absolues des transformées de Fourier et nous calculons le contraste d'après l'équation (3.21).

Les points de la Figure 3.12 montrent le contraste typique que l'on obtient à partir de nos simulations pour $T/T_\phi = 1$. Nous trouvons que ces points sont parfaitement ajustés par le produit d'une gaussienne et d'une exponentielle et ceci pour n'importe quel T/T_ϕ. Ce type d'ajustement fonctionnant déjà pour $C^{(1)}(s)$ [71], il n'est pas étonnant qu'il convienne aussi pour $C^{\text{eff}}(s)$. Par la suite, nous prendrons cet ajustement pour la fonction de corrélation effective $C^{\text{eff}}(s)$ théorique.

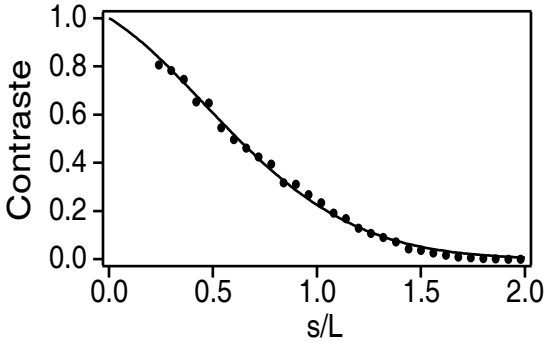


FIG. 3.12 – *Les points représentent le contraste mesuré sur nos images simulées en fonction de s/L et pour $T/T_\phi = 1$. Ces points sont ensuite ajustés par le produit d'une gaussienne et d'une exponentielle. Cet ajustement (courbe en trait plein) est ce que nous appelons dans le texte la fonction de corrélation effective théorique.*

Nous avons calculé $C^{\text{eff}}(s)$ pour $0 \leq T/T_\phi \leq 20$. Le graphique de gauche de la Figure 3.13 présente différents résultats pour différents T/T_ϕ. A $T = 0$, $C^{\text{eff}}(s)$ coïncide avec $C^{(1)}(s)$ [71] et ne dépend que du profil de densité du condensat. Cette fonction est très bien approximée par une gaussienne [62]. Lorsque T/T_ϕ augmente, la forme de notre fonction tend petit à petit vers une exponentielle et sa largeur diminue. Sur le graphique de droite de la Figure 3.13 sont représentées la fonction de corrélation effective théorique en trait plein et $C^{(1)}(s)$ en traits pointillés, ceci pour $T/T_\phi = 10$. La largeur de $C^{\text{eff}}(s)$ diminue plus lentement que celle de $C^{(1)}(s)$ lorsque les fluctuations de phase augmentent.

Pour mesurer quantitativement la dépendance des fluctuations de phase avec la température, nous avons mesuré la largeur à $1/e$ de $C^{\text{eff}}(s)$ en fonction de T/T_ϕ. C'est ce qui est représenté en trait plein sur la Figure 3.14. Nous avons également tracé, à titre de comparaison, la largeur à $1/e$ de $C^{(1)}(s)$ en traits pointillés : elle décroît plus rapidement avec T/T_ϕ.

La largeur à $1/e$ de $C^{\text{eff}}(s)$ représentée sur la Figure 3.14 décroît vers une valeur non nulle d'environ 0,5. Ceci est dû au fait que les images générées numé-

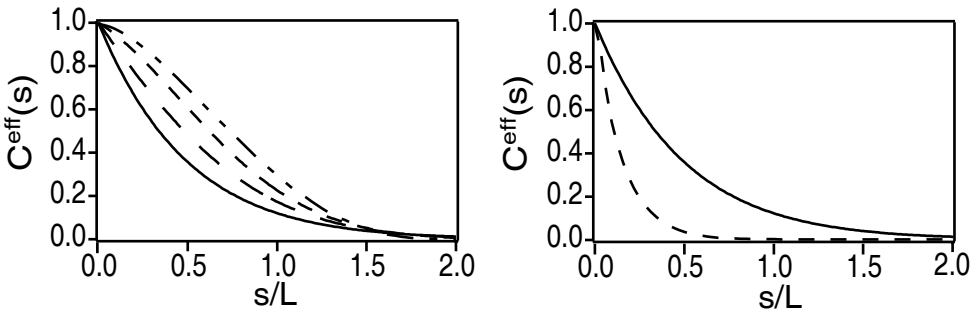


FIG. 3.13 – *Gauche : Fonctions de corrélation effectives théoriques en fonction de s/L pour différents T/T_ϕ. De haut en bas, $T/T_\phi = 0, 1, 3, 10$. Lorsque T/T_ϕ augmente, la courbe passe d'une quasi-gaussienne à une exponentielle et sa largeur diminue. Droite : Comparaison de $C^{\text{eff}}(s)$ (courbe en trait plein) et de $C^{(1)}(s)$ (courbe en traits pointillés) à $T/T_\phi = 10$.*

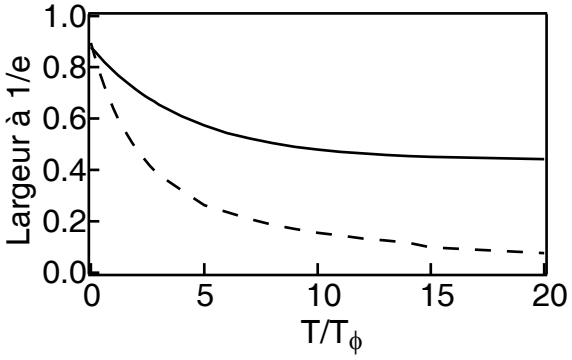


FIG. 3.14 – *Largeur théorique à $1/e$ de $C^{\text{eff}}(s)$ (trait plein) et de $C^{(1)}(s)$ (traits pointillés) en fonction de T/T_ϕ. Cette largeur est normalisée par la demi-longueur du condensat.*

riquement ont naturellement un pas d'échantillonnage non nul, ce qui revient à avoir dans l'espace de Fourier une plage en fréquence de dimension finie. Le pas d'échantillonnage choisi est bien entendu plus petit que les interfranges considérés. Or, plus les fluctuations de phase augmentent, plus la hauteur du pic latéral de la transformée de Fourier diminue et donc plus la largeur de ce pic augmente. Lorsque cette largeur devient trop importante, nous observe un repliement spectral, et la hauteur du pic latéral décroît avec l'augmentation des fluctuations de phase vers une limite non nulle. La fonction de corrélation effective ainsi simulée finit par ne plus évoluer et sa largeur à $1/e$ sature à une valeur non nulle n'ayant pas de signification physique. Il s'agit d'une limitation du calcul numérique dont il faut avoir conscience.

Sur nos simulations, nous avons pris un pas d'échantillonnage égal au pas d'échantillonnage expérimental lié aux pixels de la caméra. Nous constatons que le repliement spectral prend de l'importance à partir de $T/T_\phi = 10$. Pour des valeurs inférieures, nous avons vérifié en diminuant le pas d'échantillonnage sur nos simulations que la largeur à $1/e$ de $C^{\text{eff}}(s)$ reste identique et est donc toujours correctement calculée. Nos mesures expérimentales ayant été effectuées dans la plage $0 < T/T_\phi < 8$, nous ne sommes pas gênés par ce repliement.

3.4.4 Analyse expérimentale détaillée des interférogrammes

Les interférogrammes simulés et expérimentaux sont analysés de la façon suivante (chaque étape sera ensuite détaillée) :

- Étape 1 : Transformée de Fourier 2D de chaque sortie de l'interféromètre et coupe le long de l'axe de fréquence radiale $k_x = 0$.
- Étape 2 : Renormalisation de ces coupes à 1 à la fréquence nulle.
- Étape 3 : Soustraction des coupes provenant des deux sorties de l'interféromètre.
- Étape 4 : Moyenne de toutes les valeurs absolues de ces soustractions et réalisées pour une même séparation s/L.
- Étape 5 : Extraction de la position et de la hauteur du pic latéral. Ceci nous donne la valeur de l'interfrange et de la fonction de corrélation effective pour une séparation donnée.

Les étapes 1, 4 et 5 correspondent à ce qui a été décrit dans la Partie 3.4.2. L'étape 2 consiste à prendre la valeur du pic central de la transformée de Fourier, correspondant au nombre total d'atomes, et à diviser la transformée de Fourier par cette valeur. Toutes les coupes des transformées de Fourier sont ainsi normalisées à la même valeur de 1 pour le pic central.

L'étape 3 nous permet d'éliminer le pic central et de ne garder que la contribution du pic latéral. En effet les franges des deux sorties de l'interféromètre sont déphasées de π l'une par rapport à l'autre. La première sortie donne au niveau de la densité atomique un terme en $C\cos(2\pi z/i)$ ce qui donne dans l'espace de fourier le contraste C à la fréquence $1/i$. La deuxième sortie de l'interféromètre donne un terme en $-C\cos(2\pi z/i)$ et qui implique dans l'espace de Fourier un terme en $-C$. Donc, en soustrayant les coupes issues des deux voies de sortie, nous éliminons le pic central et nous ne gardons que les pics latéraux. Au contraire, la somme des coupes élimine les pics latéraux et ne garde que le pic central, comme cela est montré sur la Figure 3.15.

Cette étape de soustraction a l'avantage d'extraire la valeur du contraste des deux voies de l'interféromètre simultanément, et nous permet de mesurer le contraste à des valeurs de s/L plus faibles. En effet, comme nous l'avons vu précédemment sur la Figure 3.10, la transformée de Fourier d'une des sorties de l'interféromètre donne un pic central, correspondant à la transformée de Fourier

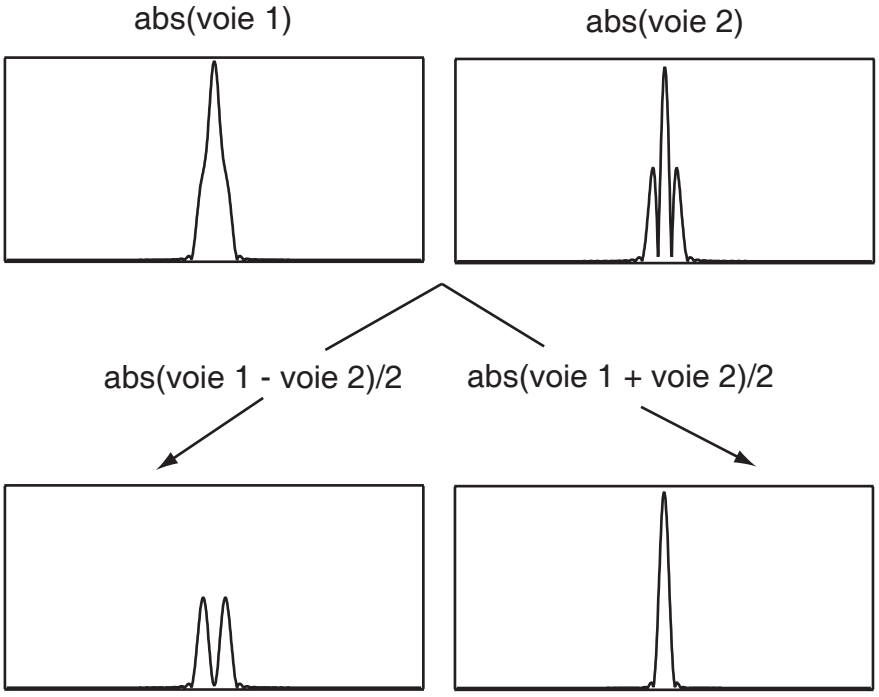


FIG. 3.15 – *Modules des coupes des transformées de Fourier des deux voies de sortie de l'interféromètre pour une séparation faible entre condensats. Pour l'une des voies de sortie, le pic latéral correspondant aux franges d'interférences se trouve noyé dans le pic central. La soustraction des transformées de Fourier des deux voies permet d'extraire les pics latéraux et d'éliminer le pic central. La somme au contraire ne garde que le pic central.*

du condensat sans interférence, et un pic latéral correspondant aux franges. Pour les faibles valeurs de s/L, le pic latéral est noyé dans le pic central comme le montre le graphique de gauche de la Figure 3.15. Or nous ne pouvons mesurer la valeur du contraste des franges de façon fiable que lorsque le pic latéral se détache suffisamment du pic central. La largeur du pic central du maximum au premier minimum est d'environ $1/2\,L$ et elle détermine l'interfrange maximum qui permet de faire la mesure : pour mesurer le contraste sur une seule des sorties de l'interféromètre, il faut pouvoir observer *grosso modo* deux franges sur le condensat.

Dans le cas où l'on soustrait les transformées de Fourier des deux sorties de l'interféromètre, nous éliminons la contribution du pic central et ne gardons que la composante correspondant à l'interfrange, comme le montre le graphique du bas de la Figure 3.15. Nous pouvons extraire alors le contraste lorsque nous observons au moins deux franges réparties sur les deux sorties soit une seule frange sur chaque sortie.

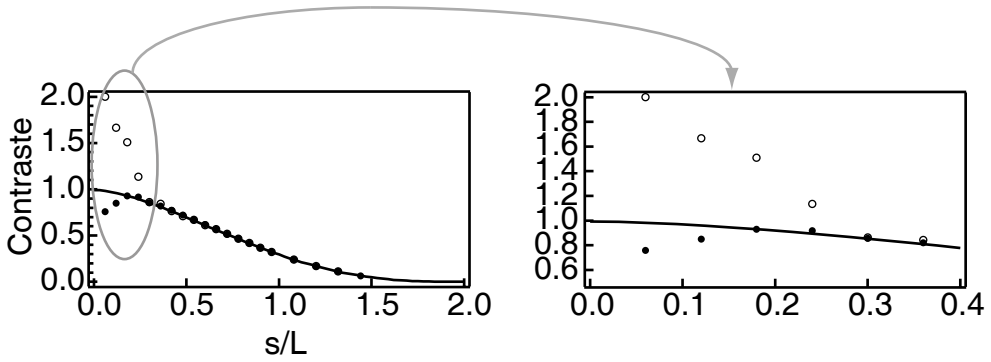


FIG. 3.16 – *Deux méthodes d'analyse des interférogrammes testées sur des images simulées à $T/T_\phi = 0$ et avec le piège le moins allongé. La première méthode consiste à mesurer le contraste sur chaque sortie de l'interféromètre séparément (points blancs). La deuxième méthode consiste à tout d'abord soustraire les transformées de Fourier des deux sorties, puis à calculer le contraste (points noirs). La ligne correspond à ce que l'on doit obtenir théoriquement. Nous voyons effectivement, en particulier sur le zoom de la figure de droite, que la soustraction permet de mesurer le contraste à des séparations plus faibles.*

Afin de vérifier l'intérêt de cette étape, nous avons utilisé les deux méthodes d'analyse, avec et sans soustraction, pour extraire le contraste sur des images simulées à $T/T_\phi = 0$. La Figure 3.16 présente les résultats obtenus. Pour cette simulation, le piège dans la configuration la moins allongée a été utilisé ($8,67$ Hz et 395 Hz) et nous avons pris une taille axiale totale de condensat de 200 μm, taille habituelle pour les nombres d'atomes que nous utilisons. La ligne représente la fonction de corrélation attendue théoriquement et calculée numériquement. Les cercles correspondent aux contrastes mesurés sur les images simulées à partir des deux méthodes d'analyse. L'analyse du contraste sur chaque sortie de l'interféromètre indépendamment donne les cercles blancs. La mesure du contraste devient correcte à partir d'une séparation entre condensats de $s/L \simeq 0.3$ et un interfrange correspondant de $i \simeq 85$ μm. L'analyse avec soustraction des transformées de Fourier des deux sorties donne les cercles noirs. D'après le graphique, cette analyse devient correcte pour $s/L \simeq 0{,}18$ et pour $i \simeq 150$ μm. Elle est plus performante puisque la mesure du contraste devient fiable pour des séparations plus petites. Cette exploration des faibles séparations est d'autant plus importante que l'amplitude des fluctuations de phase augmente et permet finalement d'augmenter la résolution de la méthode interférométrique.

3.5 Résultats expérimentaux

Comme nous l'avons dit précédemment, deux pièges ont été utilisés afin de couvrir une plus grande plage de fluctuations de phase. Le premier piège a pour fréquences $\omega_\perp = 2\pi \times 395$ Hz et $\omega_z = 2\pi \times 8,67$ Hz. Le deuxième piège a pour fréquences $\omega_\perp = 2\pi \times 655$ Hz et $\omega_z = 2\pi \times 6,55$ Hz. Les températures vont de 100 à 230 nK, et le nombre d'atomes condensés varie de $0,5 \times 10^5$ à $2,5 \times 10^5$. Ces conditions correspondent à $0,8 < T/T_\phi < 8$.

3.5.1 Interfrange

Dans un premier temps, nous avons observé l'interfrange expérimental obtenu en fonction de ce qui est attendu d'après la formule (3.14). La Figure 3.17 présente les résultats expérimentaux (points) en fonction de la séparation entre condensats, pour le premier piège et pour $T/T_\phi = 0,96$, donc avec peu de fluctuations de phase. Les points sont en bon accord avec ce que l'on attend théoriquement (ligne). Le même accord est observé aux différentes températures auxquelles nous avons travaillé et pour les deux types de piège. Pour le premier piège, nous trouvons un interfrange qui varie de 140 μm à 25 μm, et pour le deuxième piège de 170 μm à 60 μm.

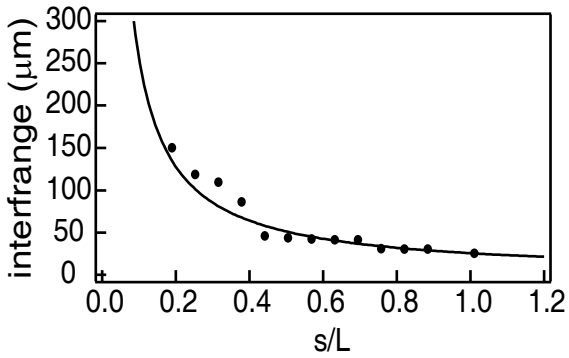


FIG. 3.17 – *Interfrange en fonction de la séparation entre condensats pour le piège le moins allongé. Les points représentent l'interfrange mesuré expérimentalement, alors que la ligne représente l'interfrange attendu théoriquement.*

3.5.2 Fonctions de corrélation obtenues

La Figure 3.18 présente deux exemples de fonctions de corrélation effectives expérimentales. Les points de la Figure 3.18a ont été obtenus avec le premier piège de rapport d'anisotropie 45, et avec un nombre d'atomes condensés et une température correspondant à $T/T_\phi = 1,35$. Ceci correspond à des conditions

de faibles fluctuations de phase. Les points de la Figure 3.18b ont été obtenus avec le deuxième piège de rapport d'anisotropie 100, et avec $T/T_\phi = 4,86$. Le contraste est tracé en fonction de s/L, où L a été mesuré séparément à l'aide d'un ajustement parabolique tronqué sur un condensat sans impulsion Bragg. Chaque point correspond à la moyenne calculée sur cinq condensats.

Les fonctions de corrélation théoriques ont, à séparation entre condensat nulle ($s = 0$), une valeur de 1. Nos images simulées ne prennent en compte que le condensat, et pas de nuage thermique. Or, dans notre expérience, la fraction condensée n'est jamais de 100 % puisque l'on veut un T/T_ϕ non nul. Il apparaît donc sur la sortie de l'interféromètre d'impulsion $p = 0$ un nuage thermique. Bien qu'il ne joue aucun rôle dans l'interférogramme, il réduit le contraste mesuré (la hauteur du pic central de la transformée de Fourier augmente, alors que la hauteur du pic latéral reste identique). Afin de pouvoir comparer directement les fonctions de corrélation théoriques et expérimentales, nous avons décidé de normaliser à 1 nos fonctions expérimentales pour $s = 0$. Cette normalisation est faite à partir de mesures indépendantes de la fraction condensée, qui varie de 60 % à 80 % dans notre cas.

La plage s/L explorée n'est pas la même sur les deux graphiques. Ceci vient du fait que la dynamique d'expansion après avoir relâché le piège n'est pas la même pour les deux pièges. Dans le cas du potentiel de piégeage le plus anisotrope (Figure 3.18b), l'expansion axiale est plus lente. La décroissance de l'interfrange est donc plus lente avec la séparation s entre condensats. Pour les valeurs de s faibles, il est alors impossible de mesurer le contraste puisque l'on n'observe pas assez de franges.

Ces fonctions de corrélations effectives expérimentales vont nous permettre d'extraire des informations sur les fluctuations de phase en fonction de T/T_ϕ. Nous nous intéressons à la fois à la forme de ces fonctions et à leur largeur.

3.5.3 Profil des fonctions de corrélation

Tout d'abord, nous pouvons observer que la forme de $C^{\text{eff}}(s)$ change lorsqu'on augmente T/T_ϕ. Pour les faibles T/T_ϕ, comme sur la Figure 3.18a, les courbes expérimentales sont clairement gaussiennes, comme le montre l'ajustement de la figure. Au fur et à mesure que T/T_ϕ augmente, les courbes deviennent rapidement exponentielles. La Figure 3.18b indique qu'à $T/T_\phi = 4,86$, la courbe est déjà bien mieux ajustée par une exponentielle que par une gaussienne. Pour des valeurs de T/T_ϕ intermédiaires, nous pouvons utiliser le produit d'une gaussienne et d'une exponentielle pour ajuster correctement les courbes. La contribution de l'exponentielle augmente rapidement avec la température, en accord avec nos simulations, ce qui montre bien l'augmentation de l'amplitude des fluctuations de phase avec T/T_ϕ.

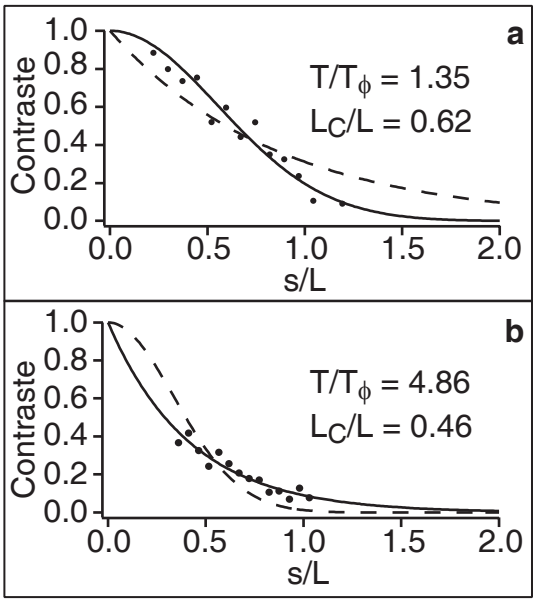


FIG. 3.18 – *Exemple de deux fonctions de corrélation effectives expérimentales (points), en fonction de s/L. Chaque point correspond à la moyenne réalisée sur cinq images, chacune contenant les deux sorties de l'interféromètre. Ces deux mesures montrent clairement le changement de forme et de largeur de $C^{\text{eff}}(s)$ avec T/T_ϕ.* **a** *: A $T/T_\phi = 1,35$, $C^{\text{eff}}(s)$ est correctement ajusté par une gaussienne (courbe en trait plein), avec une largeur à $1/e$ de $L_{\text{C}}/L = 0,62$. L'ajustement exponentiel (courbe en traits pointillés) montre que celui-ci ne convient pas.* **b** *: A $T/T_\phi = 4,86$, $C^{\text{eff}}(s)$ est mieux ajusté par une exponentielle (courbe en trait plein) que par une gaussienne (courbe en traits pointillés), et sa largeur est de $L_{\text{C}}/L = 0,46$.*

3.5.4 Longueur de cohérence

Afin d'extraire une valeur quantitative de nos courbes expérimentales sur les fluctuations de phase, nous avons défini une longueur de cohérence L_{C} égale à la largeur à $1/e$ de la fonction de corrélation effective, celle-ci étant la courbe d'ajustement de nos points expérimentaux ou simulés. Ensuite, nous utilisons ce paramètre pour comparer les largeurs des fonctions de corrélation effectives mesurées et simulées. L'ajustement utilisé est celui déjà évoqué plus haut : le produit d'une gaussienne et d'une exponentielle. Les courbes expérimentales ayant été normalisées à 1, la valeur de l'ajustement est fixée à 1 en $s/L = 0$.

Sur la Figure 3.19, nous avons tracé L_{C}/L en fonction de T/T_ϕ. Nous voyons tout d'abord que la longueur de cohérence varie doucement en fonction de T/T_ϕ, même pour des températures proche de T_ϕ. C'est ce qui est attendu théoriquement puisque T_ϕ est simplement une température caractéristique, définie comme

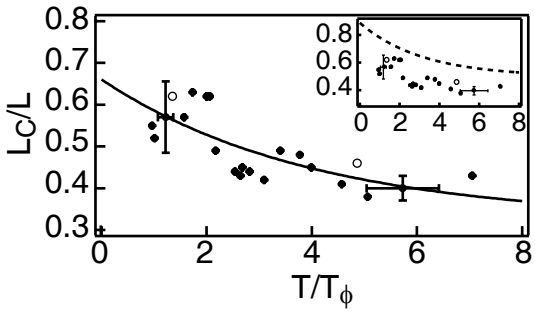


FIG. 3.19 – *L_C/L en fonction de T/T_ϕ. La courbe en trait plein est un ajustement exponentiel sur les points expérimentaux. Les deux points blancs correspondent aux mesures réalisées sur les deux fonctions de corrélation de la Figure 3.18. Les barres d'erreur représentent les erreurs systématiques typiques. Insert : La courbe en traits pointillés représente la longueur de cohérence mesurée sur les courbes simulées et représentée sur la Figure 3.14b.*

la température à laquelle la variance de la différence de phase entre deux points du condensat séparés d'une distance L est égale à un. Ainsi, il n'y a pas de transition abrupte à $T/T_\phi = 1$ et le condensat n'est jamais complètement cohérent, et ce, même pour des températures inférieures à T_ϕ.

La courbe L_C/L de la Figure 3.14 est une exponentielle décroissante et est tracée dans l'insert de la Figure 3.19. Afin d'évaluer la décroissance de la longueur de cohérence expérimentale comparée à la simulation, nous avons ajusté nos points expérimentaux par une exponentielle décroissante avec un décalage. La longueur de cohérence expérimentale décroît de 30(7) % entre $T/T_\phi = 1$ et $T/T_\phi = 6$. Le chiffre entre parenthèses est la précision calculée à partir de celle donnée par l'ajustement. Ceci est à comparer à la décroissance de 28(1) % pour la simulation. Nous voyons donc que la tendance de nos points expérimentaux suit très bien celle de la simulation. En revanche, la longueur de cohérence expérimentale est décalée d'environ 25 % à $T/T_\phi = 1$ par rapport à la théorie. Dans la partie suivante, nous allons évoquer les différentes sources d'erreurs et limitations qui auraient pu expliquer ce décalage et dont nous avons tenu compte dans notre expérience.

3.6 Limites à la lecture du contraste

Nous avons tenté d'attribuer cette baisse du contraste à diverses sources d'erreurs et limitations de notre système expérimental.

3.6.1 Angle du laser sonde

L'orientation du faisceau sonde par rapport aux axes du condensat et au plan des franges d'interférences est présentée sur la Figure 3.20. Il est incliné par rapport à la verticale et dans le plan des franges d'environ 5°, ceci pour éviter l'observation sur la caméra de franges d'interférence dans le faisceau laser, très certainement dues aux faces de la cellule.

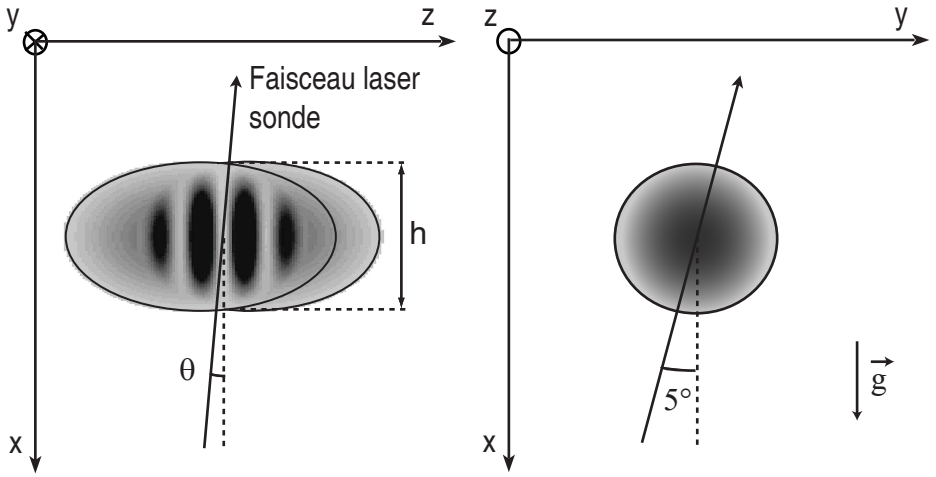


FIG. 3.20 – *Angle du faisceau laser imageant les atomes. Le faisceau est légèrement incliné par rapport à la verticale. Gauche : L'angle d'inclinaison θ par rapport au plan des franges est faible pour éviter une baisse sur la mesure du contraste des franges. Il est estimé à 6 mrad maximum. Droite : Dans l'autre direction, l'angle de la sonde est d'environ 5°.*

L'inclinaison de la sonde par rapport au plan des franges est critique pour les mesures que nous voulons réaliser sur les interférogrammes. Un angle θ entre la sonde et le plan de nos franges introduit en effet une différence entre le contraste mesuré et le contraste réel dont la valeur maximale est donnée par le rapport :

$$\frac{C_{\text{mesuré}}}{C_{\text{réel}}} = \text{sinC}(\pi h \tan\theta / i), \tag{3.26}$$

où h est la hauteur des franges après temps de vol et qui est donnée par la zone de recouvrement des deux condensats. Pour une hauteur de franges h donnée, plus l'interfrange diminue, plus l'angle devient critique pour nos mesures.

Nous avons vérifié que notre faisceau se trouve dans le plan des franges à mieux que 6 mrad. Le diamètre radial du condensat après temps de vol a une valeur maximum de 200 μm, et représente la taille maximum de la zone de recouvrement que nous pouvons avoir entre condensats, et donc la hauteur maximum des franges. Cette hauteur diminue avec la séparation entre les condensats.

L'interfrange minimum observé est de 25 μm, ceci avec le premier piège. L'erreur maximale sur le contraste, calculée avec une hauteur de franges égale au diamètre du condensat, est alors de $0,4\,\%$ ce qui est tout à fait négligeable par rapport à nos incertitudes de mesures. Nous avons donc négligé cette source d'erreur dans l'exploitation de la mesure de la fonction de corrélation effective.

3.6.2 Résolution de l'imagerie

Fonction de transfert de modulation

La précision de notre mesure du contraste repose sur la comparaison du contraste des franges pour différentes fréquences spatiales. Il est donc primordial de tenir compte de notre système d'imagerie et de le caractériser. Pour cela, nous avons mesuré la fonction de transfert de modulation (FTM) [114] de notre système *in situ*. Nous avons utilisé une mire de modulation en créneaux USAF1951. La Figure 3.21 présente l'allure de cette mire. Elle comprend des groupes de trois lignes gravées en créneaux, de fréquences spatiales allant de 4 lignes/mm à 200 lignes/mm, soit un pas de 250 μm à 5 μm qui couvre la plage de nos interfranges expérimentaux.

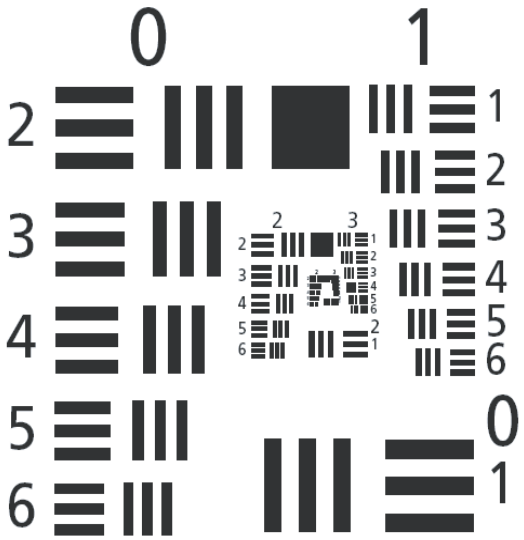


FIG. 3.21 – *Mire de calibration du contraste. Elle est constituée de groupes de trois lignes, de fréquences spatiales allant de* 4 *lignes/mm à* 200 *lignes/mm.*

Cette mire a été placée juste sous la cellule de verre et le système d'imagerie objectif + caméra a été focalisé sur cette mire. Nous comparons ensuite la valeur du module de la transformée de Fourier de l'image de chacune des mires, en la fréquence nominale de la mire, avec le contraste nominal de la mire. Nous mesu-

rons ainsi la FTM globale de notre système d'imagerie. Celle-ci est représentée sur la figure 3.22.

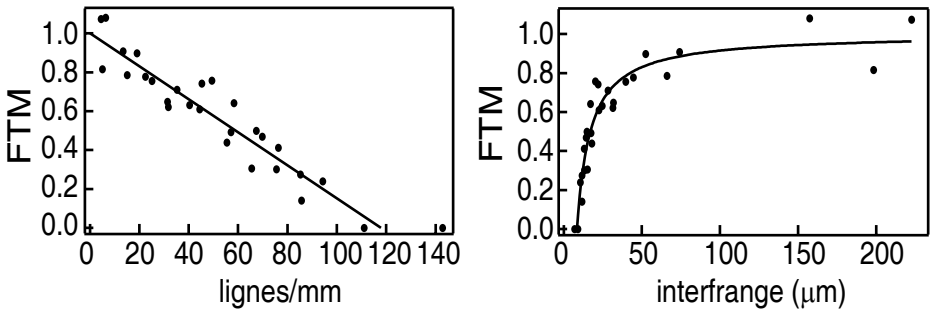


FIG. 3.22 – *Mesure expérimentale de la FTM de notre système d'imagerie à l'aide de la mire présentée dans le texte. Les points représentent la mesure du contraste sur différentes zones de la mire correspondant à une fréquence ou interfrange donné. La FTM est pratiquement linéaire en fonction de la fréquence (courbe en trait plein). La fréquence de coupure, dans le plan objet, est de* 118 mm^{-1} *et correspond à une limite de résolution de* $8,5$ μm.

Nous observons que la FTM est à peu près linéaire. Elle part de un à fréquence nulle et tombe à zéro pour 118 lignes/mm. Notre limite de résolution dans le plan objet est donc de $8,5$ μm, en accord avec des mesures précédentes réalisées sur le système et rapportées dans [39]. Cette limite de résolution n'est pas le pixel, d'une taille de $2,5$ μm dans le plan objet, mais est donnée par l'ouverture de l'objectif de microscope se trouvant devant la caméra (Figure 2.5). La forme de la FTM est due quant à elle principalement à la caméra CCD. Ceci a été confirmé par une mesure de FTM d'une caméra similaire qui nous a été fournie par PCO-imaging et qui se trouve sur la Figure 3.23. Les points se trouvant à une fréquence inférieure à 15 mm^{-1} ne sont pas représentatifs de la FTM et correspondent à un artefact de leur mesure. La FTM est bien linéaire en fonction de la fréquence spatiale. la fréquence de coupure est de l'ordre de 140 mm^{-1}, autrement dit une limite de résolution d'environ 7 μm qui correspond dans leur cas à la taille du pixel qui est de $6,7$ μm. Il est important de noter que la réduction de la FTM est grande même pour des interfranges bien supérieurs à la taille d'un pixel.

Toutes nos courbes de fonctions de corrélation effectives ont été corrigées par la FTM mesurée. La correction est faible pour le deuxième piège. En effet, la fréquence maximale des franges observée alors est de 16 lignes/mm, et la FTM diminue peu. En revanche, pour le premier piège où la fréquence maximale est de 40 lignes/mm, la correction devient significative et change la largeur de nos fonctions de corrélation effectives de 10 % typiquement. La figure 3.19 présentant nos résultats sur la longueur de cohérence en fonction de T/T_ϕ tient déjà compte

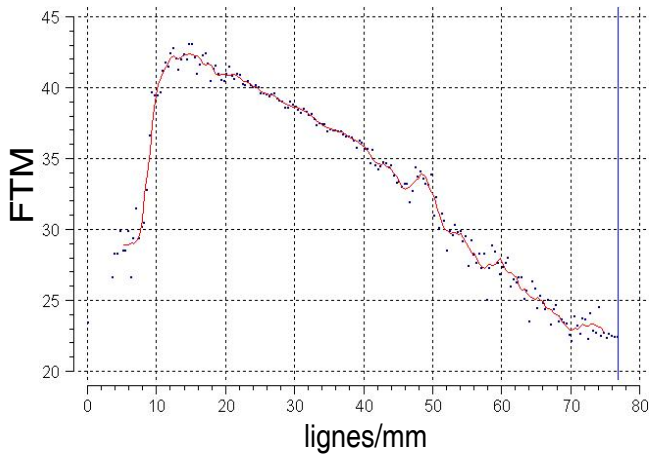


FIG. 3.23 – *Mesure de la FTM de la caméra seule fournie par PCO-imaging. Cette mesure n'est pas normalisée à 1, contrairement à la Figure 3.22. Cette courbe donne une fréquence de coupure de l'ordre de* $140\,\mathrm{mm}^{-1}$ *dans le plan de la caméra, correspondant à une limite de résolution d'environ* $7\,\mu m$*. La taille d'un pixel de la caméra est ici de* $6,45\ \mu m$*.*

de cette correction. Celle-ci laisse donc un écart de 25 % à $T/T_\phi = 1$ par rapport aux simulations.

Défaut de focalisation

Nous avons également considéré l'erreur introduite par un défaut de focalisation du système d'imagerie sur les atomes. Comme nous l'avons vu à la Section 2.1.4, le système d'imagerie est focalisé sur le condensat à $\pm 0,2$ mm, pour un temps de vol de 20,3 ms. Or ce temps de vol a été modifié lors de l'observation des franges d'interférence dans le condensat, modifiant donc la position du condensat au moment de l'imagerie et introduisant une erreur de focalisation maximale d'un millimètre.

Nous avons mesuré la FTM du système pour différentes focalisations du système d'imagerie dans la plage ± 1 mm, ainsi que des fonctions de corrélation expérimentales pour le deuxième piège. A l'aide de ces deux expériences, nous trouvons que la largeur des fonctions de corrélation change d'une quantité plus faible inférieure au bruit que nous avons déjà sur nos points expérimentaux et qui peut atteindre 10 %. La longueur de cohérence mesurée varie donc très peu lorsque l'on est défocalisé de moins d'1 mm.

Par ailleurs, une modélisation d'un tel défaut de focalisation nous donne une erreur de ± 6 % sur le contraste pour le deuxième piège et pour les amplitudes de fluctuations de phase considérées. Pour le premier piège, l'erreur sur le contraste

est un peu plus importante car l'interfrange est plus petite et est estimée à ± 15 %.

3.6.3 Conclusion sur les effets systématiques

Le tracé du graphique de la Figure 3.19 nécessite de connaître la température T, le nombre d'atomes dans le condensat N_0, et sa demi-longueur L. Les incertitudes systématiques sur ces trois paramètres proviennent des incertitudes sur la calibration du grandissement du système d'imagerie ($\pm 1,4$ %), de la mesure de N_0 (± 15 %) et du défaut de focalisation évoqué plus haut. Nous avons représenté sur la Figure 3.19 les erreurs systématiques pour deux points. Ces barres d'erreurs montrent clairement que celles ci ne sont pas suffisantes pour expliquer la différence entre l'expérience et la simulation.

Notons enfin que l'article récent de N. P. Proukakis suggère que les fluctuations de densité pourraient être à l'origine de la réduction de notre contraste [115]. Ceci est actuellement en cours d'étude.

3.7 Franges supplémentaires observées sur les interférogrammes

3.7.1 Observation expérimentale

Lorsque nous regardons les interférogrammes obtenus expérimentalement, un phénomène reste encore inexpliqué. La Figure 3.24 représente les images sur une des sorties de l'interféromètre en fonction de la séparation s entre condensats. Les franges d'interférence ne devraient normalement apparaître que dans la zone de recouvrement des deux condensats.

En effet, nous avons rapporté, figuré par des ellipses, le bord de chaque condensat, mesuré indépendamment sur des images avec condensat unique. Nous voyons alors clairement que les franges d'interférence apparaissent également en dehors de la zone de recouvrement. Nous observons aussi que ces franges "supplémentaires" ont la même fréquence spatiale et la même phase que les franges centrales. De telles franges apparaissent également sur d'autres données déjà publiées [113]. Pour expliquer ces franges supplémentaires, différentes hypothèses ont été émises. Malheureusement, aucune ne semble expliquer leur présence de manière satisfaisante. Ne comprenant pas actuellement le processus qui crée ces franges supplémentaires, nous ne sommes pas en mesure de pouvoir dire si leur présence augmente ou diminue le contraste total que nous mesurons.

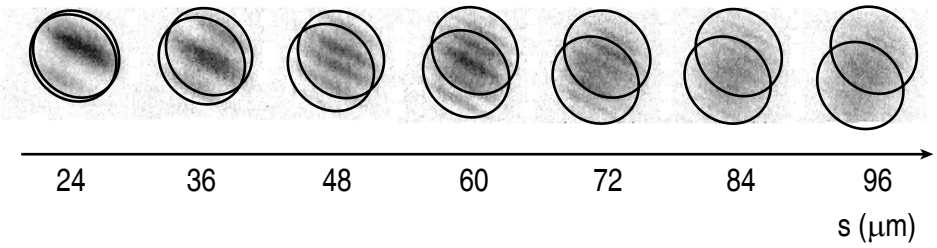


FIG. 3.24 – *Observation des franges supplémentaires. Les images sont issues de la Figure 3.10. Les ellipses délimitent chaque condensat. Nous voyons que des franges d'interférence apparaissent également en dehors de la zone de recouvrement des deux condensats.*

3.7.2 Transition Bragg d'ordre supérieur

Nous avons tout d'abord regardé si ces franges supplémentaires pouvaient provenir de transitions Bragg d'ordre supérieur à deux photons. Les franges supplémentaires sont présentes aux deux extrémités des condensats. Il faudrait donc mettre en jeu des transitions à quatre photons et -2 photons (transition à deux photons dans la direction opposée). Nous serions donc dans le régime de Kapitza-Dirac.

Comme nous l'avons vu dans la Section 2.3, ce régime équivaut à pouvoir considérer les atomes comme immobiles durant l'interaction entre les atomes et le réseau lumineux formé par les lasers Bragg. Il faut donc des durées d'impulsion très petites, telles que : $\tau < i_{\text{réseau}}/2v_{\text{recul}} < 30$ μs. Nous avons réglé la puissance laser de façon à effectuer nos impulsions $\pi/2$ en environ 100 μs. Nous sommes donc théoriquement en dehors du régime Kapitza-Dirac.

Expérimentalement, nous avons tenté d'observer ce régime. Nous avons pour cela augmenté la puissance des faisceaux laser au maximum. Nous obtenons alors une fréquence de Rabi de $5,5$ kHz, correspondant à une période d'oscillation de 180 μs. Nous avons pris des images en fonction de la durée des impulsions. Nous n'avons jamais réussi à observer plus d'un ordre diffracté, la puissance du laser étant trop faible. Nous sommes donc certains que dans notre expérience d'interférométrie où nous utilisons une fréquence de Rabi au moins deux fois plus faible, nous n'avons qu'un seul ordre diffracté. Les franges sur les bords des condensats ne peuvent donc pas être expliquées par ce phénomène.

3.7.3 Interférences dans le nuage thermique

La présence d'interférences dans le nuage thermique pourrait également expliquer la présence de ces franges supplémentaires. Comme nous l'avons vu dans la Section 3.3.2, le nuage thermique est très faiblement couplé par les impul-

sions Bragg. Cependant, même avec quelques fractions de nuage couplé, cela est peut-être suffisant pour observer des franges avec un bon contraste.

L'observation d'interférences de très bon contraste dans le nuage thermique a été rapportée dans [116]. L'interféromètre utilisé est le même que dans notre expérience, c'est-à-dire deux impulsions $\pi/2$ séparées dans le temps et créant deux copies du nuage thermique distantes de s. En l'absence d'interaction, la densité atomique du nuage thermique après temps de vol reflète la distribution en vitesse. A un point donné du nuage, de coordonnée z suivant l'axe long du piège, correspond une vitesse donnée $v_z = z/t$. Les franges observées dans le nuage thermique ont alors un interfrange de :

$$i_{\mathrm{T}} = \frac{ht}{ms}, \tag{3.27}$$

qui diminue lorsque le temps de vol diminue. Le contraste de ces franges vaut :

$$C_{\mathrm{T}} = \exp(-\frac{2\pi^2 R_{\mathrm{T}^2}}{i_{\mathrm{T}}^2}), \tag{3.28}$$

où $X_z = \sqrt{k_{\mathrm{B}}T/m\omega_z^2}$ est le rayon du nuage thermique dans le piège suivant l'axe long. D'après cette formule, le contraste augmente avec le temps de vol. En effet, plus le temps de vol augmente, plus la taille du nuage augmente et donc plus le nuage thermique initial dans le piège peut être considéré comme ponctuel. A un point du nuage thermique après temps de vol correspond alors une vitesse de mieux en mieux définie et donc un contraste qui augmente.

La Figure 3.25 compare l'interfrange dans le condensat et dans le nuage thermique en fonction du temps de vol, pour une séparation entre nuages de 60 μm. Lorsque le condensat est lâché hors du piège, son expansion provient tout d'abord de l'énergie de champ moyen principalement. L'interfrange découle de ce terme d'expansion. Dans le nuage thermique, ce terme n'intervient pas puisque l'on peut négliger l'énergie d'interaction entre particles, la densité atomique étant faible. L'interfrange dans le condensat et dans le nuage thermique est donc différent pour les temps de vol courts. En revanche, pour les temps de vol longs, lorsque l'on peut considérer les nuages atomiques dans le piège comme ponctuels par rapport aux nuages après temps de vol, l'interfrange devient identique dans le nuage thermique et dans le condensat.

Dans notre expérience, pour le piège le moins allongé, l'interfrange dans le condensat et l'interfrange dans le nuage thermique sont égaux à mieux que 5 % pour des temps de vol supérieurs à 10 s. En revanche, pour les temps de vol typiques utilisés dans notre expérience d'interférométrie, soit 30 ms avec le gradient de champ du PMO, l'interfrange dans le nuage thermique est dix-huit fois plus petite que dans le condensat. Or les franges "supplémentaires" ont le même pas que les franges centrales. Elles ne peuvent donc pas s'expliquer par un phénomène d'interférence dans le nuage thermique.

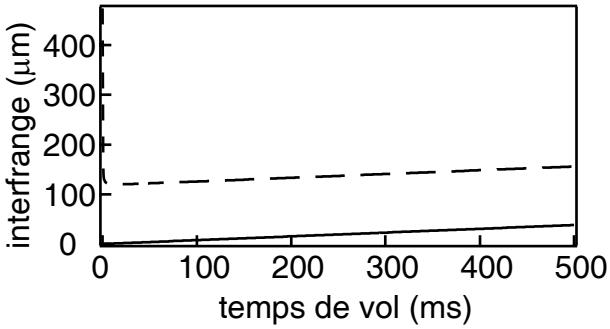


FIG. 3.25 – *Interfrange en fonction du temps de vol pour le premier piège et pour une séparation entre nuages atomiques de 60 μm. La courbe en trait plein représente le cas du nuage thermique et la courbe en traits pointillés le cas du condensat. Ces deux interfranges deviennent identiques pour des temps de vol longs (bien plus longs que ce qui est représenté sur le graphique où les deux lignes semblent rester faussement parallèles).*

3.7.4 Interaction pendant les impulsions Bragg

L'équation de Gross-Pitaevskii a été résolue numériquement pour observer l'expansion des deux condensats de l'une des sorties de l'interféromètre au cours du temps de vol : seules des franges d'interférence au centre apparaissent. On ne peut donc pas envisager un processus faisant intervenir une interaction entre les deux copies pour expliquer ces franges. La dernière hypothèse est que ces franges supplémentaires résultent d'interactions pendant l'application des impulsions Bragg. Les calculs sont actuellement en cours pour la confirmer ou l'infirmer.

3.8 Conclusion

Nous avons détaillé dans ce chapitre la mise en place d'un interféromètre destiné à mesurer la longueur de cohérence d'un condensat à l'équilibre. L'analyse des données se fait dans l'espace de Fourier afin d'éliminer les variations aléatoires de la phase des franges d'interférences provenant de variations expérimentales non contrôlables. Nos résultats montrent que la fonction de corrélation mesurée passe d'une forme gaussienne à une forme exponentielle lorsque les fluctuations de phase augmentent, comme cela est attendu théoriquement. Il n'y a pas de transition abrupte de la longueur de cohérence des condensats allongés pour des températures aux alentours de T_ϕ. Cela souligne le fait que cette température caractéristique n'indique pas une réelle transition d'un quasi-condensat vers un condensat complètement cohérent, mais plutôt que les condensats allongés voient leur phase fluctuer, même très faiblement, pour toute température finie.

CHAPITRE 4

Cinétique de formation de la cohérence en phase

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit la cohérence du condensat à l'équilibre. Ces condensats sont produits expérimentalement en enlevant les atomes les plus chauds suffisamment lentement pour que le système puisse être considéré à l'équilibre à chaque instant de l'évaporation. La cinétique de formation de condensat est alors donnée par la cinétique d'évaporation. Il a été alors établi que le condensat commence à se former au centre du piège puis grossit au fur et à mesure que les atomes les plus chauds sont extraits. L'étude de la cinétique de formation du condensat nécessite au contraire de se placer hors équilibre. A partir d'un nuage thermique juste au dessus de seuil de condensation, nous faisons chuter très rapidement la température sous le seuil de condensation. On observe ensuite au cours du temps le retour à l'équilibre du système par la formation du condensat.

A l'heure actuelle, les expériences qui ont été menées sur l'étude de la cinétique de formation du condensat [82, 117, 118] ont principalement porté sur la croissance du nombre d'atomes dans le condensat en fonction du temps. Or ces études ne donnent pas ou peu d'information sur la phase de ces condensats au cours de leur formation. Nous avons en particulier vu au chapitre précédent que même à l'équilibre, la présence d'un condensat avec un profil de densité régulier n'était pas toujours liée à l'apparition de la cohérence en phase. Finalement, seule l'expérience réalisée à Amsterdam [82] s'est intéressée aux fluctuations de phase dans ce type de condensat en formation, mais plutôt de manière qualitative que quantitative.

L'étude de l'évolution des propriétés de cohérence en phase pendant la formation du condensat ouvre de nombreuses perspectives nouvelles. Cette étude permettrait en particulier une compréhension plus profonde de la cohérence en phase des états quantiques macroscopiques. Cette connaissance serait également primordiale en vue de la création de lasers à atomes continus [119]. Le taux de rechargement régulier du condensat, et par là même le taux de génération d'ondes de matière cohérentes, pourrait être en effet limité par la vitesse à laquelle la cohérence en phase se forme.

Le but de notre étude sur la formation du condensat est alors double. Comme

nous l'avons évoqué tout au long de ce manuscrit, notre dispositif expérimental, avec des pièges très allongés, crée la plupart du temps des quasi-condensats et non pas des condensats "idéaux" sans fluctuation de phase. Le premier intérêt de l'étude est alors l'observation de la croissance des condensats dans le cas des quasi-condensats et de comparer ces résultats à la croissance de condensats 3D. Ensuite, le second et principal intérêt est finalement de mesurer pour la première fois quantitativement la cohérence en phase au cours de cette formation.

4.1 Principe de la formation du condensat

La croissance du condensat est un processus dynamique où les atomes doivent tomber dans le niveau d'énergie fondamental du système et où la cohérence à longue portée doit être établie. Une description complète de la formation doit inclure le condensat et ses excitations élémentaires, et les interactions avec le nuage thermique. Ce problème de cinétique quantique a été abordé théoriquement de deux manières :

- à l'aide d'une approche de type optique quantique qui modélise le processus de condensation de la même façon que l'effet laser en optique ;
- en terme de relaxation de la phase pour les théoriciens travaillant sur la matière condensée.

Dans ce qui suit, nous allons plutôt présenter le problème de la formation du condensat par analogie à l'effet laser en optique.

4.1.1 Stimulation bosonique

En optique, l'effet laser est obtenu par émission stimulée de photons, autrement dit par un processus d'amplification cohérente de la lumière. De la même façon, le condensat de Bose-Einstein provient en quelque sorte de l'amplification stimulée des ondes de matière. Tout comme en optique où l'énergie est fournie à partir d'un réservoir et est transformée en une radiation électromagnétique cohérente par émission stimulée, pour le condensat de Bose-Einstein, les atomes proviennent d'un réservoir, le nuage thermique, qui sont transformés en une onde de matière cohérente par collisions.

Les atomes du nuage thermique diffusent parmi un grand nombre d'états quantiques possibles. Mais lorsque la température critique est atteinte, les atomes diffusent préférentiellement dans le niveau d'énergie fondamental du système. Cette température critique peut être assimilée au seuil laser en optique à partir duquel l'effet laser est effectivement obtenu. La présence d'un condensat implique ensuite la diffusion stimulée dans le niveau d'énergie fondamental avec un taux de diffusion proportionnel à N_0+1, où N_0 est le nombre d'atomes dans le condensat.

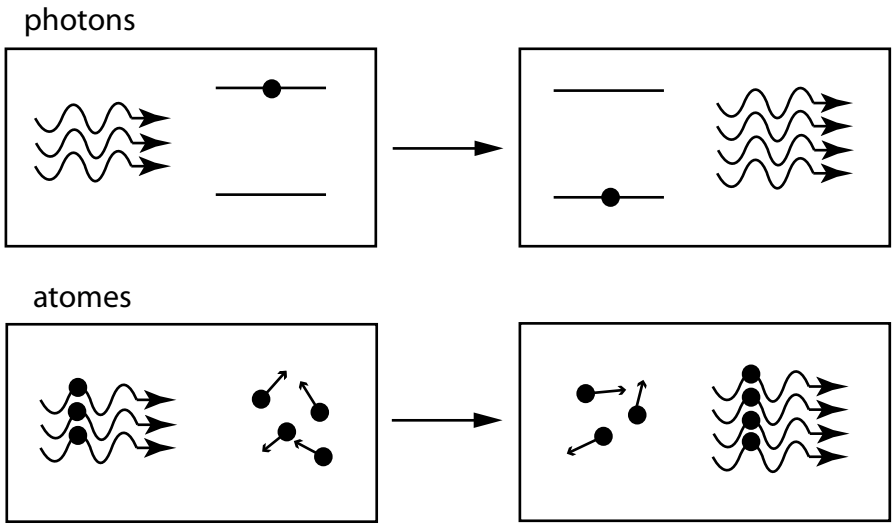


FIG. 4.1 – *Emission stimulée pour l'amplification de la lumière dans un laser et stimulation bosonique pour l'amplification des ondes de matière dans la formation du condensat de Bose-Einstein.*

Ainsi, l'évolution du nombre d'atomes condensés est de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}t} = \Gamma(N_0 + 1). \tag{4.1}$$

Donc, plus ce nombre augmente, plus la vitesse de formation du condensat est rapide. Le paramètre Γ détermine le taux de croissance initial qui dépend en particulier du taux de collisions entre atomes, puisqu'il faut bien entendu une collision pour faire passer un atome du nuage thermique au condensat.

Le système étant à une température donnée avec un nombre d'atomes fixe, le système à l'équilibre doit avoir une fraction condensée bien déterminée. Le taux de croissance ne peut donc pas croître indéfiniment et tend au contraire vers zéro lorsque le nuage atteint l'équilibre. Ceci donne alors l'équation d'évolution pour N_0 suivante :

$$\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}t} = \Gamma N_0 \Big[1 - \Big(\frac{N_0}{N_{0,\mathrm{f}}}\Big)^{\delta}\Big], \tag{4.2}$$

où $N_{0,\mathrm{f}}$ est le nombre d'atomes condensés final une fois l'équilibre atteint. La théorie de C. W. Gardiner *et al* [120] prévoyait dès 1997 un taux de croissance proportionnel à la différence du potentiel chimique du condensat, qui est proportionnel à $N_0^{2/5}$ dans l'approximation Thomas-Fermi, et celui du nuage thermique considéré comme étant à l'équilibre. Ceci donne un facteur δ égal à $2/5$.

Cette dernière équation d'évolution donne la forme d'une dynamique de croissance en forme de S, bien connue dans le cas de la stimulation bosonique, et plus particulièrement pour le laser photonique.

4.1.2 Théorie cinétique quantique : montée de la fraction condensée

Nous venons d'exposer rapidement la stimulation bosonique et ce que cela implique pour la dynamique de croissance du condensat. Mais cela reste qualitatif ; plus particulièrement, nous ne connaissons pas la valeur du taux de croissance initial Γ. La théorie de la formation des condensats a été abondamment étudiée par C. W. Gardiner *et al* [120–123]. Ces travaux ont en particulier permis d'établir une équation de croissance correspondant quantitativement aux courbes mesurées expérimentalement. Nous allons rappeler brièvement les résultats finaux obtenus.

Bandes condensée et non condensée

Les travaux de C. W. Gardiner se fondent sur la théorie cinétique quantique [124]. Le système considéré est un nuage thermique dont la température est inférieure à la température critique, contenu dans un piège harmonique à trois dimensions. Le système est ensuite divisé en deux bandes d'énergie : la bande dite condensée et la bande non condensée comme indiqué sur la Figure 4.2 [121, 122]. La croissance du condensat est supposée suffisamment lente pour pouvoir considérer que les bandes condensée et non condensée sont toujours à l'équilibre thermique, avec la même température pour les deux bandes. En revanche, le potentiel chimique du nuage thermique μ n'est initialement pas le même que celui de la bande condensée $\mu_{\mathrm{C}}(N_0)$ qui dépend du nombre d'atomes condensés. La croissance vient du fait que les atomes sont transférés de la vapeur thermique au condensat et ceci jusqu'à l'obtention d'un potentiel chimique égal pour les deux bandes.

La bande condensée est définie par le niveau $e_{\max}$ et vérifie principalement deux critères :

- La bande non condensée est supposée invariante dans le temps. Elle est prise comme un réservoir thermique, source d'atomes pour la bande condensée.
- La bande condensée doit donc contenir tous les niveaux dont la population change significativement pendant la croissance. Elle comprend essentiellement les niveaux d'énergie affectés par la présence du condensat et qui sont représentés par les niveaux d'énergie inférieure à E_Δ sur la Figure 4.2. Ces niveaux ont une énergie dépendant du nombre d'atomes dans le condensat, c'est à dire dans le niveau d'énergie fondamental, et donc dépendant du temps. Le niveau E_Δ est pris égal à 2μ. Les niveaux compris entre E_Δ et $e_{\max}$ ont une population dépendante du temps. Leur énergie n'est en revanche pas modifiée pendant la croissance du condensat.

La valeur de $e_{\max}$ est généralement prise légèrement supérieure à E_Δ, de l'ordre de $2,2\mu$.

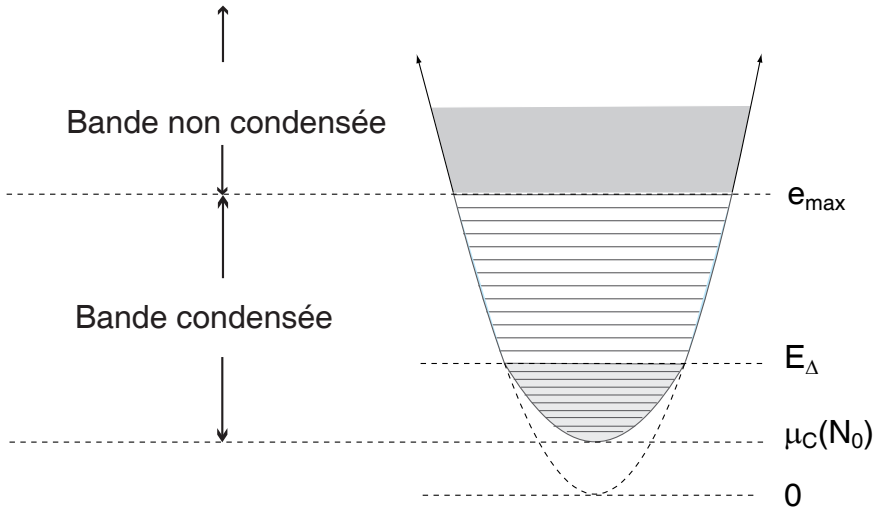


FIG. 4.2 – *Représentation schématique des niveaux d'énergie et des bandes considérées. La bande non condensée est invariante dans le temps. La population de la bande condensée varie au cours de la croissance du condensat. Enfin, les niveaux d'énergie inférieure à E_Δ sont les niveaux dont l'énergie est affectée par la présence du condensat et donc varie au cours de la croissance. Cette figure est tirée de [121] et [122].*

Processus dynamiques

Les processus qui sont considérés pour décrire l'évolution de la bande condensée en fonction du temps sont représentés sur la Figure 4.3 [122].

Les processus considérés sont donc les suivants :

- Le processus de croissance, qui implique une augmentation du nombre d'atomes dans la bande condensée, est déterminé par les collisions suivantes :
  - a) une collision entre deux particules de la bande non condensée donnant, après collision, une particule restant dans la bande non condensée et l'autre entrant dans la bande condensée. Le processus inverse est également pris en compte.
  - b) une collision entre une particule de la bande condensée et une particule de la bande non condensée donnant deux particules dans la bande condensée. Le processus inverse est également pris en compte.
- Le processus de diffusion, qui garde le nombre d'atomes dans la bande condensée constant, correspond aux collisions suivantes :
  - c) une collision entre une particule de la bande condensée et une particule de la bande non condensée, les deux particules restant au final dans leur bande respective.
  - d) une collision entre deux particules de la bande condensée donnant

deux particules restant dans la même bande.

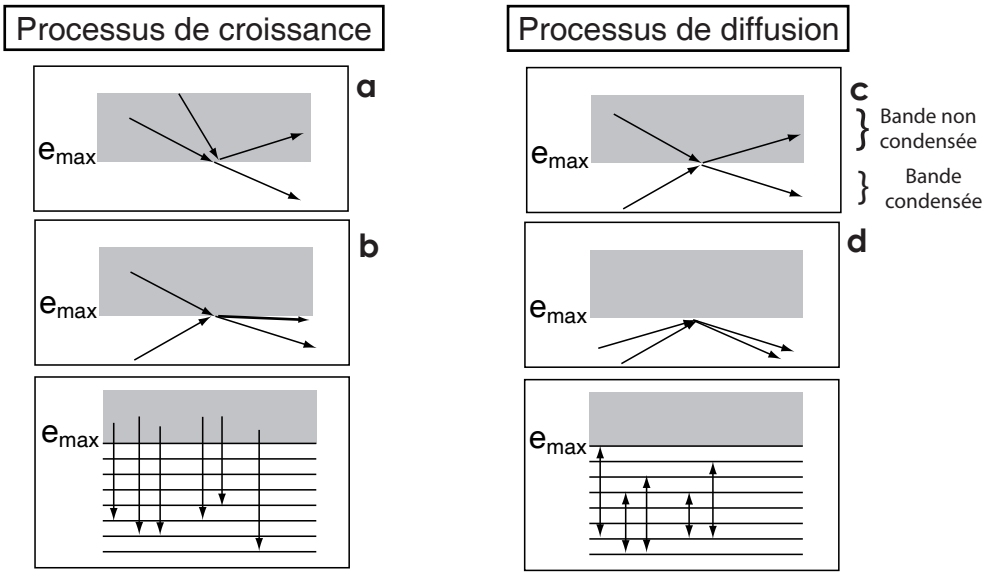


FIG. 4.3 – *Illustration des processus pris en compte lors de la croissance du condensat. Le processus a) est le processus d'émission spontanée : après collision entre deux atomes de la bande non condensée, un des atomes entre dans la bande condensée. Le processus b) représente le processus d'émission stimulée : une collision entre un atome de la bande condensée et un atome de la bande non condensée conduit à l'obtention de deux atomes dans la bande condensée. Enfin, les processus c) et d) correspondent à la diffusion. Après collision, le nombre d'atomes dans chaque bande reste constant. Cette figure est partiellement tirée de [121] et [122].*

Le processus d) est en fait négligé par rapport au processus c). Il a été en effet supposé que la bande non condensée était invariante dans le temps, ce qui veut donc dire que le nombre d'atomes dans la bande non condensée est bien plus grand que celui dans la bande condensée. Le processus b) peut être assimilé à l'émission stimulée dans un laser et le processus a) à l'émission spontanée.

L'évolution du nombre d'atomes dans le niveau fondamental est alors donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}N_0}{\mathrm{d}t} = \dot{N}_0|_{\text{croissance}} + \dot{N}_0|_{\text{diffusion}}. \tag{4.3}$$

Les équations donnant les taux de collisions en fonction du temps et la théorie cinétique quantique [122] permettent d'aboutir à l'équation de croissance et de diffusion.

Equation d'évolution

L'équation de croissance est de la forme [121, 122] :

$$\dot{N}_0|_{\text{croissance}} = 2W^+(N_0)\big[(1 - e^{[\mu_{\text{C}}(N_0)-\mu]/k_{\text{B}}T})N_0 + 1\big], \tag{4.4}$$

où μ est le potentiel chimique du nuage thermique à l'équilibre et μ_{C} est le potentiel chimique du condensat. Le facteur $W^+(N_0)$ est donné par :

$$W^+(N_0) = \frac{1}{2}\Big(\frac{k_{\text{B}}T}{\hbar\omega}\Big)^2\Big(\big[\ln(1-z)\big]^2 + z^2\sum_{j=1}^{\infty}\big[z\,z(N_0)\big]^j\big[\Phi(z,1,j+1)\big]^2\Big), \tag{4.5}$$

où

$$z = \exp\Big(\frac{\mu - e_{\max}}{k_{\text{B}}T}\Big), \tag{4.6}$$

$$z(N_0) = \exp\Big(\frac{\mu_{\text{C}}(N_0) - e_{\max}}{k_{\text{B}}T}\Big). \tag{4.7}$$

La fonction Φ est la fonction *Lerch transcendent*, définie par :

$$\Phi(x,s,a) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(a+k)^s}. \tag{4.8}$$

L'équation de croissance (4.4) est du même type que les équations que nous trouvons pour les lasers. Le terme d'émission spontanée est donné par le $+1$ entre les crochets, l'autre terme représentant l'émission stimulée, ou terme de gain. Le terme de gain est ici entièrement déterminé par la différence entre le potentiel chimique du condensat μ_{C} et celui du nuage thermique μ.

Le graphique de la Figure 4.4 montre la forme typique de la montée du nombre d'atomes condensés que nous obtenons d'après l'équation (4.4). Nous observons une courbe en S, forme typique représentant un processus de stimulation bosonique et bien connue dans le cas des lasers en optique.

La courbe en traits pointillés montre un ajustement de la courbe du type :

$$N_0(t) = \max\big(0, N_{0,\text{f}}[1 - e^{-\Gamma(t-t_{\text{init}})}]\big), \tag{4.9}$$

c'est à dire une montée de type exponentielle avec un décalage de temps initial avant la montée rapide. Cet ajustement est relativement bon et permet de quantifier sur les courbes théoriques et expérimentales le temps initial t_{init} avant la montée rapide ainsi que le taux de montée rapide Γ.

L'évolution (4.3) du nombre total d'atomes dans le condensat est donnée par la somme des équations de croissance et de diffusion, cette dernière pouvant être trouvée dans les articles suivants : [121, 122]. Le terme de diffusion change en fait peu le taux de croissance du condensat qui est dominé par la stimulation

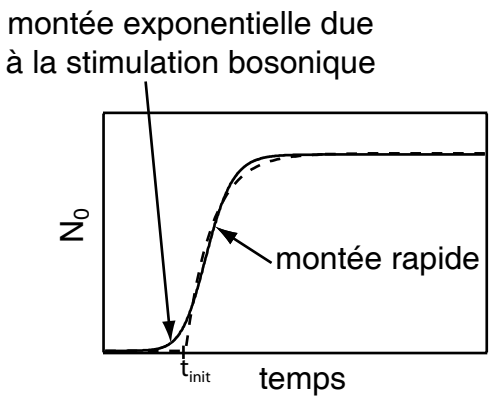


FIG. 4.4 – *Croissance typique du nombre d'atomes condensés en fonction du temps d'après l'équation (4.4) (trait plein). La courbe en traits pointillés est un ajustement de type exponentielle croissance incluant un délai avant la montée.*

bosonique. En revanche, il accélère légèrement la période de croissance initiale, qui est dominée par l'émission spontanée. Cela a pour effet de diminuer le temps avant lequel le terme d'émission spontanée devient significatif, cette diminution étant d'autant plus importante que le taux de collisions est important.

Enfin, les résultats présentés ici suppose que la bande non condensée est invariante dans le temps et donc que la fraction condensée atteinte à l'équilibre est faible. L'article suivant [123] présente un modèle amélioré qui prend en compte les effets dus à la dynamique de la bande non condensée au cours du temps. Ce modèle montre en fait des résultats similaires à celui que nous venons de présenter pour des fractions condensées finales inférieures à 10 %, vis-à-vis de la montée du nombre d'atomes condensés. Pour des fractions condensées plus importantes, ce nouveau modèle indique une montée légèrement plus rapide.

4.1.3 Théorie sur la cinétique de formation de la cohérence

Les modèles développés par C. W. Gardiner ont permis d'étudier la montée du nombre d'atomes condensés au cours du temps, mais ils ne prennent pas en compte la cohérence. Les études sur la cinétique de formation de la cohérence en phase dans le condensat ont essentiellement été réalisées par Yu. M. Kagan, B. V. Svistunov et G. V. Shlyapnikov [99, 125–128]. Le scénario envisagé dans ces références est une rampe d'évaporation brutale appliquée à un nuage thermique au dessus du seuil de condensation permettant de diminuer rapidement la température sous la température critique. Ceci est très proche de l'expérience que nous avons réalisée. En revanche, les calculs ont été menés pour un gaz homogène.

Yu. M. Kagan et B. V. Svistunov ont montré que la formation du condensat

est régie par différentes échelles de temps :

- le temps au bout duquel les fluctuations de densité sont supprimées. Ce temps est typiquement de :
$$\tau_c = \frac{\hbar}{g n_c}, \tag{4.10}$$
où $g = 4\pi a\hbar^2/m$ est la constante de couplage et n_c la densité du condensat à l'équilibre. Ceci caractérise le temps à partir duquel un quasi-condensat peut se former.
- le temps d'initiation à partir duquel le nombre d'atomes condensés augmente significativement. Ce temps est de l'ordre du temps entre deux collisions successives :
$$\tau_{\text{init}} = t_{\text{coll}}. \tag{4.11}$$
- le temps de relaxation τ_ϕ des fluctuations de phase, qui caractérise donc le temps nécessaire à l'obtention d'un condensat à l'équilibre en phase. Ce temps dépend de la taille D_0 du système et est donné par :
$$\tau_\phi = \frac{\hbar}{k_{\text{B}}T} a n D_0^2 \qquad \text{dans le régime hydrodynamique,} \tag{4.12}$$
$$\tau_\phi = 10^{-2}\frac{\hbar}{k_{\text{B}}T}\frac{D_0}{a} \qquad \text{autrement,} \tag{4.13}$$
n étant la densité atomique du nuage.

La plupart du temps, la condition $\tau_c \ll \tau_{\text{init}}$ est vérifiée. L'étape de montée de la fraction condensée est alors l'étape limitante dans la formation d'un quasi-condensat. En revanche, ce n'est pas encore forcément celle qui limite l'établissement de la cohérence.

Le temps de relaxation nécessaire à l'établissement de la cohérence en phase dépend du régime dans lequel nous nous trouvons. Si nous sommes dans le régime hydrodynamique, τ_ϕ devient de l'ordre de τ_{init}. La cohérence s'établit donc rapidement et l'étape limitante dans la formation est la montée de la fraction condensée. Dans le cas inverse, τ_ϕ devient le temps le plus long dans la formation du condensat. La formation commence par la croissance d'un quasi-condensat qui relaxe ensuite lentement vers l'équilibre.

4.2 Historique expérimental

Expérimentalement, la première investigation sur la formation du condensat a été réalisée au MIT en 1998 [117], puis à Munich en 2002 [118,129] avec l'observation de la montée du nombre d'atomes en fonction du temps après une baisse brutale de la température. Enfin, une étude de la formation de condensats hors équilibre a été effectuée à Amsterdam en 2002 [82]. L'apparition de fluctuations

de densité sur le condensat après temps de vol ainsi qu'une étude de la focalisation du condensat ont indiqué la présence d'un quasi-condensat au tout début de cette formation. Nous allons brièvement rappeler les résultats obtenus dans ces différentes expériences.

4.2.1 Stimulation bosonique - MIT

L'expérience réalisée au MIT [117] consistait, à partir d'un nuage thermique juste au dessus du seuil de condensation, à faire chuter brutalement la température en baissant rapidement la rampe radio-fréquence de 200 kHz en 100 ms. La radio-fréquence est ensuite coupée. La formation du condensat était observée par imagerie par contraste de phase non destructive qui permettait l'observation de la montée du nombre d'atomes dans le condensat sur une réalisation expérimentale unique. La Figure 4.5 présente les courbes obtenues.

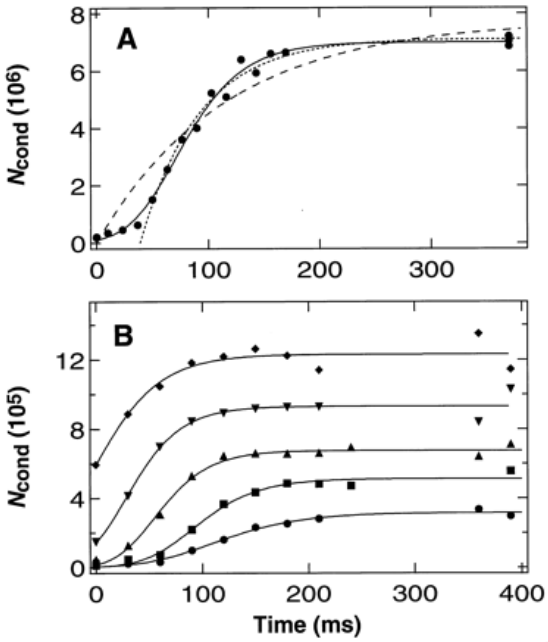


FIG. 4.5 – *Croissance du condensat : nombre d'atomes dans le condensat en fonction du temps après la fin de la rampe d'évaporation rapide. (**A**) Croissance du condensat sur une réalisation expérimentale unique. La courbe en trait plein est un ajustement supposant la stimulation bosonique, alors que les courbes en traits pointillés supposent un processus de relaxation, en incluant ou non un délai avant la montée du nombre d'atomes. (**B**) Courbes de croissance avec différents nombres d'atomes condensés initiaux. Chaque courbe représente une moyenne de dix courbes ayant le même nombre d'atomes dans le condensat une fois l'équilibre atteint. Ces graphiques sont tirés de [117].*

Les données du graphique **A** ont été ajustées par différentes courbes :

- La courbe en trait plein est un ajustement du type de l'équation différentielle (4.2) donnant pour le nombre d'atomes en fonction du temps :

$$N_0(t) = N_{0,\mathrm{i}} e^{\Gamma t}\Big[1 + \Big(\frac{N_{0,\mathrm{i}}}{N_{0,\mathrm{f}}}\Big)^{\delta}(e^{\delta\Gamma t} - 1)\Big]^{-1/\delta}. \tag{4.14}$$

  On suppose donc ici un processus de stimulation bosonique dans la formation du condensat. Le paramètre δ est fixé à 2/5 en accord avec [120]. L'ajustement est alors très bon.
- La courbe en traits pointillés larges représente un ajustement par une exponentielle supposant un processus de relaxation. L'ajustement est beaucoup moins bon.
- La courbe en traits pointillés courts est un ajustement exponentiel avec un décalage de temps donné par l'équation (4.9). Cet ajustement est relativement bon et montre que la stimulation bosonique a pour principal effet d'ajouter une montée purement exponentielle de courte durée avant la montée rapide du nombre d'atomes dans le condensat.

Ces données ont donc clairement clairement mis en évidence la forme en S de la montée du nombre d'atomes dans le condensat, caractéristique d'un processus de stimulation bosonique. En revanche, les résultats de cette expérience ne s'accordaient pas quantitativement avec la théorie de l'époque, en particulier en ce qui concerne le taux de croissance Γ.

4.2.2 Croissance à partir d'une vapeur thermique - Munich

Il a fallu ensuite attendre l'expérience de Munich [118] et les travaux théoriques de C. W. Gardiner *et al* pour montrer l'accord entre les deux. L'expérience de M. Köhl *et al* a consisté, toujours à partir d'un nuage thermique juste au dessus du seuil de condensation, à baisser brutalement la rampe radio-fréquence afin de faire chuter rapidement la température. La radio-fréquence était ensuite maintenue à la valeur finale. La mesure de la montée du nombre d'atomes condensés a été réalisée pour différents paramètres d'évaporation $\eta = \epsilon_{\mathrm{cut}}/k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{i}}$, où T_{i} est la température de nuage thermique juste avant l'évaporation rapide et ϵ_{cut} est l'énergie de troncature radio-fréquence par rapport au fond du piège. Chaque courbe de formation, comme celle du graphique de gauche de la Figure 4.6, a été ensuite ajustée à l'aide de l'exponentielle croissante de l'équation (4.9) afin de quantifier le temps d'initiation t_{init} marquant le début de la montée rapide de la fraction condensée.

La Figure 4.6 indique ce temps d'initiation en fonction du paramètre d'évaporation η. Les cercles représentent les données expérimentales brutes, c'est à dire le temps auquel un premier condensat est détecté, alors que les résultats

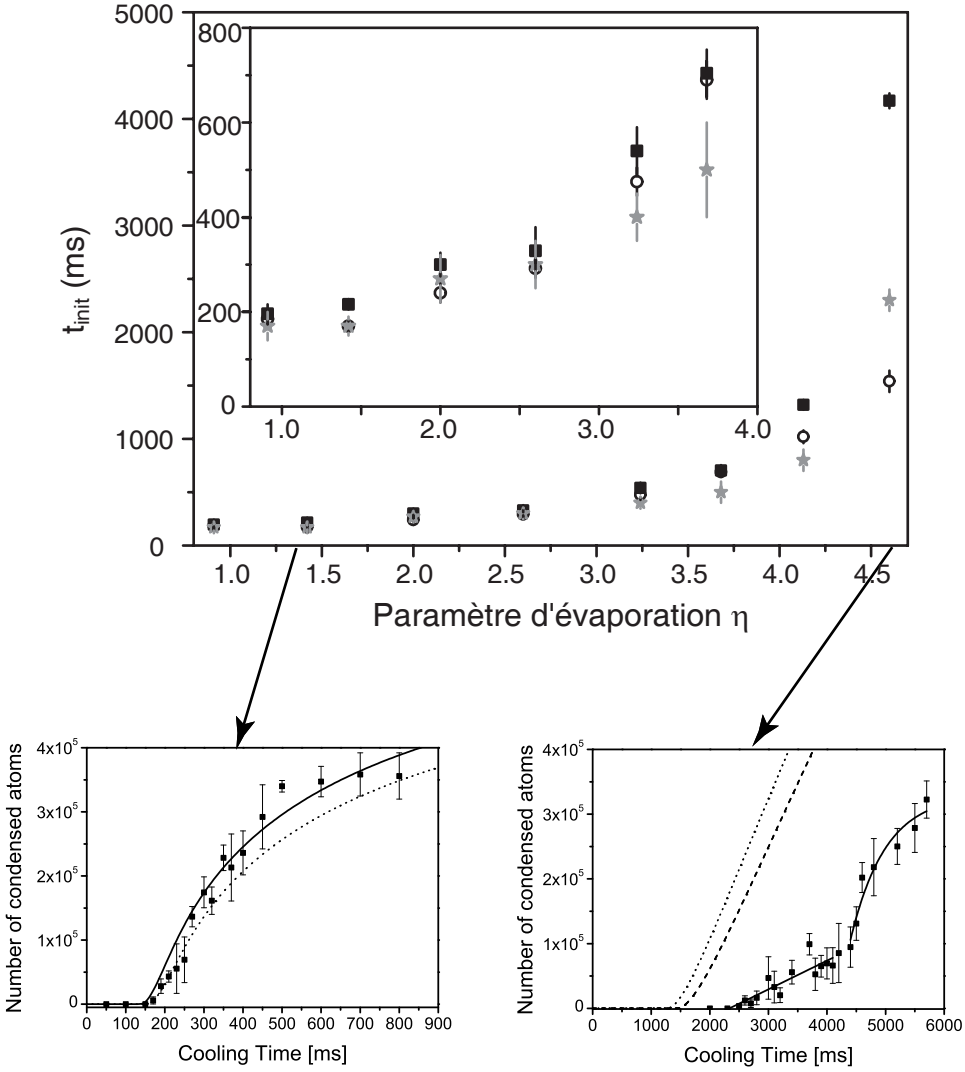


FIG. 4.6 – *Haut : Temps d'initiation avant la croissance rapide du condensat en fonction du paramètre d'évaporation η. Les carrés représentent la mesure expérimentale obtenue à partir de l'ajustement décrit dans le texte, les cercles indiquent l'instant où un condensat est observé pour la première fois et les étoiles proviennent d'un calcul théorique et correspondent au moment où le nombre d'atomes dans le condensat devient supérieur à 10^4.*
Bas à gauche : Courbe de formation pour $\eta = 1,4$. Les courbes correspondent aux résultats de simulations numériques pour différentes conditions initiales.
Bas à droite : Courbe de formation pour $\eta = 4,6$. La courbe en trait plein est un ajustement sur les données expérimentales alors que les courbes en traits pointillés correspondent aux résultats de la simulation avec les même conditions initiales que pour la courbe précédente.
Ces graphiques sont tirés de [118].

donnés par l'ajustement (4.9) sont indiqués par les carrés. Ceux-ci montrent un très bon accord avec les résultats de simulations numériques, correspondant aux étoiles sur le graphique, lorsque l'évaporation est forte, c'est à dire pour η petit. La courbe de croissance correspond également dans ce cas aux simulations numériques tracées sur le graphique de gauche de la Figure 4.6.

En revanche, pour les évaporations faibles, un écart important entre les observations expérimentales et les calculs est constaté sur le temps d'initiation. La montée de la fraction condensée est également très différente de celle habituellement observée, et attendue théoriquement, comme le montre le graphique de droite. La croissance se déroule alors en deux étapes avec une première phase de croissance linéaire puis une deuxième phase de relaxation. La transition entre les deux régimes correspond dans leur cas à une fraction condensée de 3,5 %. L'hypothèse émise par les auteurs est une première phase de croissance avec des condensats présentant de fortes fluctuations de phase, autrement dit une phase de quasi-condensation, suivie finalement par une phase de montée sans fluctuation de phase. Cette hypothèse a été émise car leur modèle théorique ne tient pas compte des effets de cohérence. De plus, les calculs donnaient $T/T_\phi > 1$ pour des fractions condensées inférieures à 4 % [118]. Cette observation a été une de nos motivations pour l'étude de la cohérence au cours de la formation du condensat.

4.2.3 Formation de condensats hors équilibre - Amsterdam

Une autre expérience sur la formation du condensat a été réalisée à Amsterdam [82]. Après l'obtention du nuage thermique juste au dessus du seuil de condensation, la radio-fréquence est baissée à une valeur inférieure au seuil de condensation pendant une durée de 1 ms telle que $1/\omega_\perp < 1$ ms $< 1/\omega_z$. La valeur de la radio-fréquence est ensuite remontée à sa valeur initiale. Cette expérience permet alors d'étudier la formation des condensats dans des états hors équilibre. Le système à l'équilibre a une fraction condensée de 6 % avec $2,5 \times 10^6$ atomes au total.

Le graphique de gauche de la Figure 4.7 présente la taille du condensat en fonction du temps après le créneau radio-fréquence, appelé temps d'évolution. Les différentes courbes correspondent à différents temps de vol. Ce graphique montre une oscillation de la taille du condensat de type quadrupolaire, ce qui indique la création d'un condensat hors équilibre. De plus, la taille du condensat initiale, à $t = 0$, est supérieure à la taille du condensat théoriquement attendue. Le condensat relaxe ensuite vers sa taille d'équilibre obtenue pour des temps d'évolution longs. Ceci a été interprété en terme de condensation locale due à une température locale non uniforme sur la longueur du nuage thermique.

A partir de ces oscillations quadrupolaires, l'équipe d'Amsterdam a introduit une technique de "focalisation du condensat". L'étude a été réalisée en coupant le

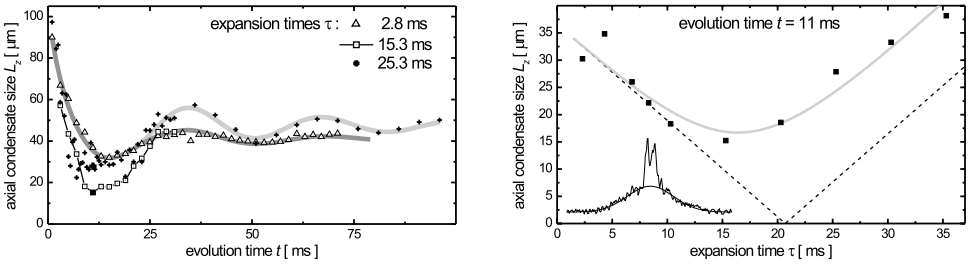


FIG. 4.7 – *Gauche : Demi-longueur du condensat en fonction du temps après le créneau radio-fréquence et pour différents temps de vol. Droite : Demi-longueur du condensat en fonction du temps de vol pour un temps après le créneau d'évaporation fixe. La courbe en trait plein (respectivement pointillés) est un ajustement sur les équations d'échelle en incluant (respectivement excluant) l'élargissement dû aux fluctuations de phase. Ces graphiques sont tirés de [82].*

piège magnétique après un temps d'évolution de 11 ms, pendant la contraction longitudinale du condensat. La taille du condensat décroît ensuite pendant le temps de vol, atteint un point de focalisation, puis s'étale à nouveau. Cette évolution est reportée sur le graphique de droite de la Figure 4.7.

Les données ont été ensuite comparées aux résultats attendus à partir des équations d'échelle décrivant l'expansion du condensat après temps de vol [98,99] en incluant les effets des fluctuations de phase (trait plein) et en les excluant (traits pointillés). La longueur du condensat au point de focalisation reflète sa distribution en vitesse. Les fluctuations de phase ont donc pour effet d'élargir la longueur du point de focalisation. Les données du graphique indiquent donc la présence de fluctuations de phase dans le condensat, ce qui a été confirmé par l'observation de fluctuations de densité sur le condensat après temps de vol.

La mesure du nombre d'atomes condensés et de la température donnent $L/L_{\phi,\mathrm{eq}} = 7(4)$ et donc une longueur de cohérence à l'équilibre $L_{\phi,\mathrm{eq}} = 10$ μm. Or, l'ajustement des données du graphique de droite indique une taille du point de focalisation plus grande d'un ordre de grandeur, donnant une longueur de cohérence de l'ordre de $L_\phi = 1$ μm au lieu des 10 μm attendus. L'amplitude de fluctuations de phase est donc plus importante que celle calculée à l'équilibre. Ce surcroît de fluctuations de phase indique encore une fois un phénomène de condensation hors équilibre.

Cette étude a été réalisée pour un condensat proche de T_c et pour un temps d'évolution après le créneau radio-fréquence bien inférieur à la période d'oscillation axiale $1/\omega_z$. Une étude plus poussée de ces fluctuations de phase en fonction de la valeur de la fraction condensée finale ainsi qu'une étude de la décroissance des fluctuations de phase en fonction du temps d'évolution n'ont en revanche pas encore été menées.

4.3 Expérience et montée de la fraction condensée

La différence principale entre notre expérience et les autres, exceptée celle réalisée à Amsterdam, est la présence de fluctuations de phase sur les condensats à l'équilibre. Nous allons donc pouvoir observer la montée de la fraction condensée de quasi-condensats. De plus, toutes les expériences réalisées précédemment n'ont jamais mesuré la longueur de cohérence du condensat en chaque instant de sa formation. Elles n'ont donc jamais pu montrer comment la cohérence s'établit au cours du temps et si le condensat passe par une étape de condensation avec fortes fluctuations de phase avant d'établir complètement sa cohérence. L'objectif principal de notre expérience de formation a été de mesurer de façon précise cette longueur de cohérence du condensat au cours de sa formation. Les fluctuations de phase ayant été correctement caractérisées à l'équilibre à l'aide de la spectroscopie de Bragg [83], nous avons décidé d'utiliser cet outil pour notre expérience de formation.

4.3.1 Séquence expérimentale

Le piège utilisé pour notre expérience a pour fréquences $\omega_\perp/2\pi = 655$ Hz et $\omega_z/2\pi = 6,55$ Hz. Pour étudier la formation du condensat au cours du temps, nous préparons tout d'abord un nuage thermique à l'aide d'une séquence d'évaporation habituelle. La rampe radio-fréquence a un taux de décroissance final de $\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}t = -200$ kHz/s et s'arrête à une valeur ν_i telle que $\nu_\mathrm{i} - \nu_0 = 140$ kHz, ν_0 représentant le fond du piège. La vitesse de la rampe radio-fréquence est telle que[1] :

$$\left|\frac{\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}t}{\nu_\mathrm{i} - \nu_0}\right| \ll \omega_z, \tag{4.15}$$

de façon à avoir une évaporation quasi-statique donnant un nuage thermique caractérisé par une température uniforme unique et une densité atomique à l'équilibre. La température atteinte est de l'ordre de 550 nK, température toujours légèrement supérieure à la température de condensation. Nous maintenons ensuite la radio-fréquence à une valeur constante pendant un certain temps t_i. Ce temps permet entre autre de contrôler le nombre d'atomes final dans le nuage thermique juste avant l'expérience de formation du condensat proprement dite.

L'expérience se déroule ensuite en trois étapes, comme indiqué sur la Figure 4.8 :

[1] La température à la fin de la rampe d'évaporation est fixée par le niveau de la radio-fréquence par rapport au fond du piège, donc par $\nu_\mathrm{i} - \nu_0$. La condition (4.15) équivaut à dire que la température change peu durant l'oscillation de plus petite fréquence $\omega_z/2\pi$.

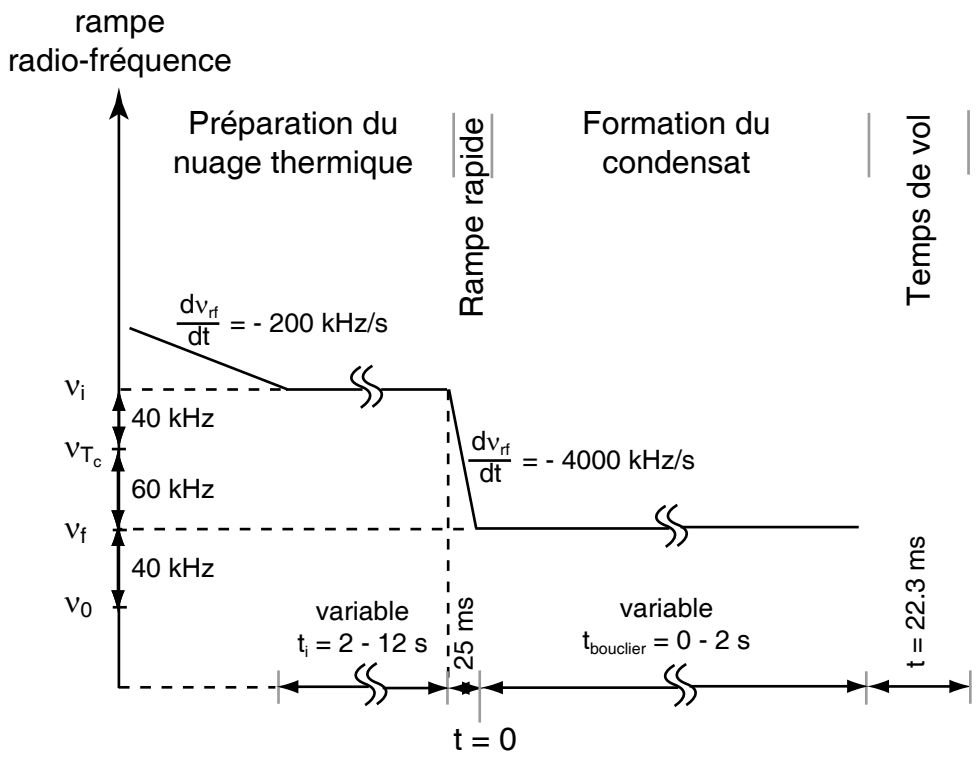


FIG. 4.8 – *Représentation de la séquence sur l'évaporation radio-fréquence permettant d'étudier la formation du condensat. L'origine des temps est prise à la fin de la rampe rapide. La fréquence ν_0 indique le fond du piège magnétique.*

- Rampe rapide : La radio-fréquence décroît de $\nu_\mathrm{i} - \nu_\mathrm{f} = 100$ kHz en 25 ms, ce qui correspond à une vitesse de $\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}t = -4000$ kHz/s. Cette rampe rapide permet aux atomes ayant une énergie suivant l'axe radial plus grande que celle fixée par la radio-fréquence de sortir du piège. En revanche, elle est suffisamment rapide pour empêcher un refroidissement évaporatif quasi-statique, avec $|(\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}t)/(\nu_\mathrm{f} - \nu_0)| = 100 > \omega_z$. Elle permet donc de créer un nuage d'atomes hors équilibre. Au cours de cette étape, environ 50 % des atomes sont éjectés du piège.
- Formation du condensat : La radio-fréquence est ensuite maintenue constante. Le système se thermalise et le condensat commence à se former.
- Temps de vol : Après un certain temps t_bouclier de champ radio-fréquence constant pouvant varier de 5 ms à plus de 2 s, le piège est coupé. Le condensat est ensuite observé par imagerie par absorption après un temps de vol d'une vingtaine de millisecondes.

4.3.2 Thermalisation et évaporation

Notre expérience ayant pour but de mesurer la longueur de cohérence du condensat au cours de sa formation, il est nécessaire de pouvoir calculer l'amplitude des fluctuations de phase attendue théoriquement à l'équilibre en chaque instant de la formation. Le calcul de T/T_ϕ nécessite de mesurer la température qui ne peut se faire correctement que si le nuage est à l'équilibre thermique. Or, la baisse brutale de la radio-fréquence crée un nuage thermique hors équilibre. Nous allons maintenant préciser les temps caractéristiques de sa mise à l'équilibre thermique.

Régime hydrodynamique dans le nuage thermique

La comparaison du libre parcours moyen dans le nuage thermique et de sa taille permet de déterminer si nous sommes dans le régime hydrodynamique ou non. Ceci caractérise le nombre de collisions par période d'oscillation. Plus ce dernier est important, plus l'écart au gaz idéal est important et plus il faut tenir compte de ces collisions pour décrire et comprendre la dynamique du nuage thermique.

Le libre parcours moyen est $l_{\mathrm{lpm}} = (\sqrt{2}n_0\sigma_{\mathrm{c}})^{-1}$, où $\sigma_{\mathrm{c}} = 8\pi a^2$ est la section efficace de collisions élastiques et n_0 la densité atomique au centre du nuage. Pour nos expériences de formation du condensat, les densités atomiques des nuages thermiques initiaux, juste avant la rampe d'évaporation rapide, vont de 4×10^{19} et 10^{20} atomes par m^3, ce qui équivaut à un libre parcours moyen allant de 10 à 25 μm. Les demi-largeurs à $1/e$ des nuages sont données quant à elles par $x_{\perp,z} = \sqrt{2k_{\mathrm{B}}T/m\omega_{\perp,z}^2}$. La comparaison de ces deux grandeurs, pour des températures allant de 530 nK à 650 nK, donne :

$$3 < \frac{l_{\mathrm{lpm}}}{x_\perp} < 11 \qquad \text{et} \qquad 0,03 < \frac{l_{\mathrm{lpm}}}{x_z} < 0,1. \tag{4.16}$$

Le système est donc dans le régime hydrodynamique axialement mais pas radialement.

Le fait d'être dans le régime hydrodynamique implique la possibilité d'avoir un équilibre local, en chaque point du nuage, avant l'équilibre thermique global. Cela implique également une modification de la dynamique du nuage thermique. L'expansion de celui-ci pendant le temps de vol est perturbée, comme cela a été décrit dans la thèse de Fabrice Gerbier [38] et l'énergie des excitations collectives est décalée comme nous le verrons dans la Partie 4.3.4.

Thermalisation locale et globale

Nous pouvons définir deux échelles de temps pour la thermalisation :

- Le temps de thermalisation locale définit le temps typique nécessaire à l'obtention d'un équilibre thermique local, uniforme radialement mais qui peut varier suivant l'axe long. Ce temps de thermalisation locale est défini par $t_{\text{locale}} \simeq 4/t_{\text{coll}}^{-1}$ [130, 131]. Le paramètre t_{coll}^{-1} est le taux de collisions élastiques donné, au centre du piège, par $t_{\text{coll}}^{-1} = n_0 \sigma_{\text{c}} \overline{v_{\text{rel}}}$, où $\overline{v_{\text{rel}}} = \sqrt{8 k_{\text{B}} T / \pi m}$ est la vitesse moyenne thermique. Ceci donne, pour nos valeurs expérimentales de densité et de température données plus haut, c'est-à-dire pour des nuages thermiques juste avant la rampe d'évaporation rapide, des temps de thermalisation locale allant de 7,5 à 24 ms. Ces temps restent sensiblement les mêmes pour les nuages thermiques juste après la rampe d'évaporation rapide.
- Le temps de thermalisation globale définit le temps nécessaire à l'obtention d'un équilibre thermique sur l'ensemble du nuage d'atomes. Il est de l'ordre de $t_{\text{globale}} = 1/\omega_z = 25$ ms.

Le temps de thermalisation globale étant plus grand que le temps de thermalisation locale, des gradients de températures suivant l'axe long du piège peuvent se développer.

Expérimentalement, nous avons effectué toutes nos mesures de température, fraction condensée et longueur de cohérence après les 25 ms de thermalisation globale caractérisant les échanges thermiques le long de l'axe.

Température au cours de la formation du condensat

La Figure 4.9 montre l'évolution de la température en fonction du temps après la rampe rapide d'évaporation. Le point blanc à $t_{\text{bouclier}} = -25$ ms correspond à la température du nuage thermique initial juste avant la rampe rapide. Ensuite, les points correspondent à des mesures effectuées à des temps supérieurs au temps de thermalisation globale.

La température chute rapidement d'environ 530 nK à 300 nK sous l'effet de l'évaporation rapide. Elle continue ensuite à légèrement diminuer. Ceci est dû au fait que l'on garde le champ radio-fréquence à sa valeur finale qui maintient une légère évaporation, comme le montre également la Figure 4.10 qui représente la chute du nombre total d'atomes en fonction du temps. Pour éviter cette évaporation continue, nous aurions pu soit enlever la radio-fréquence, soit la remonter au niveau initial comme cela a été fait à Amsterdam [82]. Mais nous constatons alors un chauffage sur nos nuages, certainement dû à un vide insuffisamment bon, et qui nous empêche d'observer la formation du condensat.

Finalement, les données de température et de nombre total d'atomes, pour les instants positifs, sont très bien ajustées par une exponentielle décroissante.

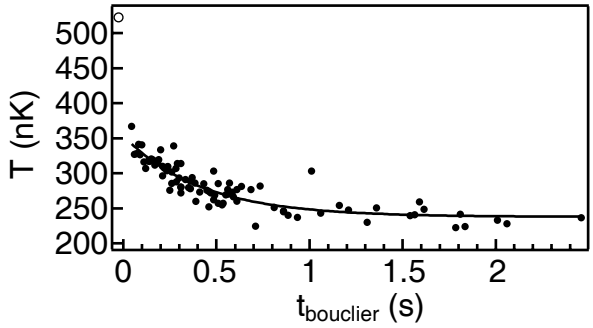


FIG. 4.9 – *Température du nuage thermique en fonction du temps après la rampe radio-fréquence rapide. Le cercle blanc à* $t_{\text{bouclier}} = -25$ *ms représente une mesure de la température juste avant la rampe rapide. Tous les autres points correspondent à des mesures effectuées une fois l'équilibre thermique global atteint, avec* $t_{\text{bouclier}} \geq 40$ *ms. Ces points sont ajustés par une exponentielle décroissante.*

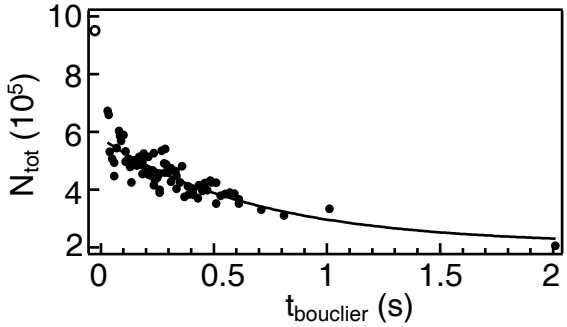


FIG. 4.10 – *Nombre d'atomes total en fonction du temps. Le nombre d'atomes initial à* $t_{\text{bouclier}} = -25$ *ms figuré par le cercle blanc est de* $9,5 \times 10^5$ *et correspond à la courbe I de la Figure 4.11. Pour les temps positifs, les points sont ajustés par une exponentielle décroissante.*

4.3.3 Montée de la fraction condensée

Courbes expérimentales de montée de la fraction condensée

La Figure 4.11 présente la montée de la fraction condensée, c'est à dire le nombre d'atomes dans le condensat divisé par le nombre total d'atomes, en fonction du temps après la fin de la rampe d'évaporation rapide. Chaque point correspond à une mesure réalisée sur une moyenne d'environ deux à quatre images prises quasiment au même instant. Les paramètres de la séquence expérimentale sont identiques pour toutes les courbes excepté le nombre total d'atomes initial N_{i} juste avant la rampe rapide. Le nombre d'atomes N_{i} est choisi en modifiant la durée t_{i} du bouclier radio-fréquence avant la rampe d'évaporation rapide. La

variation de ce nombre d'atomes initial revient à une variation du taux de collisions avant la rampe rapide, la température initiale restant à peu près la même pour toutes les courbes, et donc également à une variation du taux de collisions après la rampe rapide.

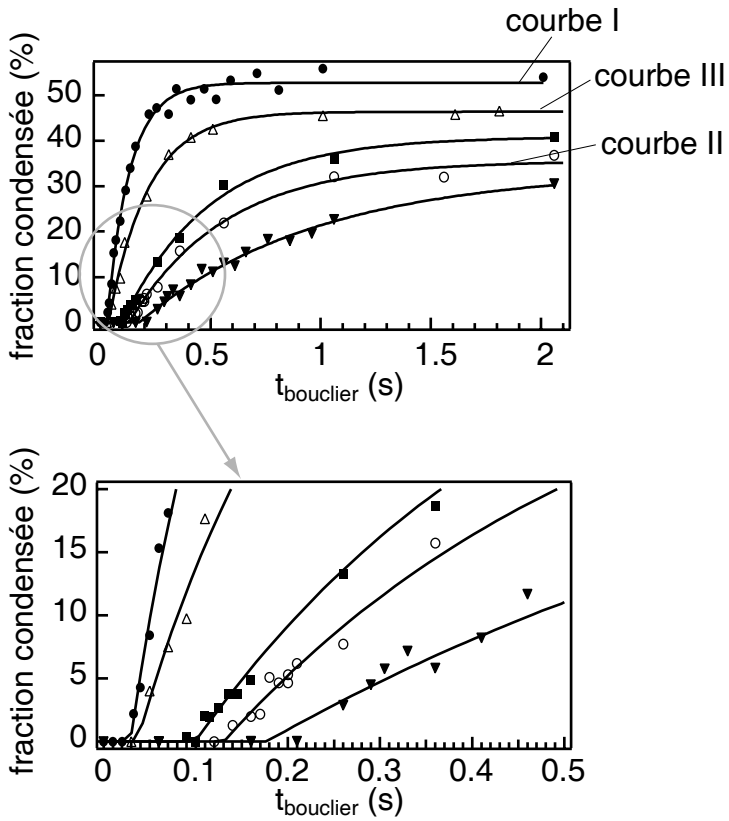


FIG. 4.11 – *Haut : Montée de la fraction condensée en fonction de la durée du bouclier radio-fréquence après la fin de la rampe rapide. Chaque point représente la mesure réalisée sur une moyenne de deux à quatre images prises dans les mêmes conditions. Les différentes courbes correspondent à différents nombre d'atomes dans le nuage thermique initial, juste avant la rampe :* (•) $N_\mathrm{i} = 9,5 \times 10^5$, (△) $N_\mathrm{i} = 7,9 \times 10^5$, (■) $N_\mathrm{i} = 4,4 \times 10^5$, (○) $N_\mathrm{i} = 3,8 \times 10^5$, (▼) $N_\mathrm{i} = 3,1 \times 10^5$. *Les courbes en trait plein sont des ajustements sur les données par l'équation (4.17). Bas : Zoom du graphique du haut.*

Les données avant la rampe et après la rampe d'évaporation rapide correspondant aux courbes de la Figure 4.11 sont résumées dans le Tableau 4.1. Le nuage thermique initial a bien une température supérieure à la température critique, alors que sa température juste après la rampe est inférieure à la température critique. La mesure expérimentale montre également que le taux de collisions après la rampe d'évaporation rapide, et une fois l'équilibre thermique atteint, est

sensiblement identique à celui du nuage thermique initial.

Avant rampe					40 ms après rampe				
N_i ($\times 10^5$)	T_i (nK)	n_i ($\times 10^{13}$ at/cm^3)	$T_\mathrm{i}/T_\mathrm{c}$	$t_\mathrm{coll,i}^{-1}$ s^{-1}	N ($\times 10^5$)	T (nK)	n ($\times 10^{13}$ at/cm^3)	T/T_c	t_coll^{-1} s^{-1}
$9,5$	590	9,9	1,05	457	5,1	360	11,2	0,78	404
$7,9$	630	7,5	1,18	359	4,75	380	9,6	0,85	355
$4,4$	550	5,1	1,26	226	3,1	340	7,5	0,87	262
$3,8$	530	4,6	1,27	202	2,6	340	6,1	0,93	214
$3,1$	550	3,6	1,42	160	1,9	300	5,5	0,91	180

Tab. 4.1 – *Données juste avant et juste après la rampe d'évaporation rapide correspondant aux différentes courbes de croissance de la Figure 4.11. La température critique T_c a été calculée d'après (2.11) qui tient compte des interactions et des effets de taille finie.*

Les différentes courbes de la Figure 4.11 montrent clairement qu'une diminution du taux de collisions entraîne une diminution de la vitesse de croissance du condensat ainsi qu'une augmentation du délai après lequel nous sommes capables d'observer la croissance. Afin de pouvoir quantifier ces deux paramètres, taux de croissance et délai, les données sont ajustées avec une courbe du type :

$$\frac{N_0}{N_\mathrm{total}}(t_\mathrm{bouclier}) = \max\left[0, \left(\frac{N_0}{N_\mathrm{total}}\right)_\mathrm{f}[1 - e^{-\Gamma(t_\mathrm{bouclier}-t_\mathrm{init})}]\right], \tag{4.17}$$

comme cela a été montré dans la partie théorique 4.1.2.[2] La Figure 4.12 présente les résultats en fonction du temps moyen entre deux collisions successives t_coll dans le nuage thermique après la rampe d'évaporation rapide et une fois l'équilibre thermique atteint. Ces deux graphiques montrent une tendance claire du taux de montée et du temps d'initiation en fonction du taux de collisions : plus ce dernier est important, plus le condensat commence sa croissance tôt et plus sa vitesse de croissance est rapide. Nous observons également expérimentalement que les paramètres $1/\Gamma$ et t_init évoluent linéairement avec t_coll dans la plage explorée.

Sur la gamme que nous avons observée expérimentalement, le temps d'initiation varie de 10 à 30 t_coll, compatible avec les 30 t_coll observés expérimentalement dans [118].

[2]Il est important de rappeler que la courbe de croissance du condensat a bel et bien une forme en S, signature de la stimulation bosonique, et non une forme exponentielle. Le condensat commence à se former dès la fin de la rampe d'évaporation et dès que la température devient inférieure à la température critique. Le temps d'initiation t_init ne représente donc pas l'instant où le condensat commence à se former, mais plutôt l'instant où le condensat voit son nombre d'atomes augmenter significativement. Expérimentalement, nous ne sommes pas en mesure de détecter des fractions condensées inférieures à 2 %, ce qui nous empêche d'observer la forme en S initiale de la formation.

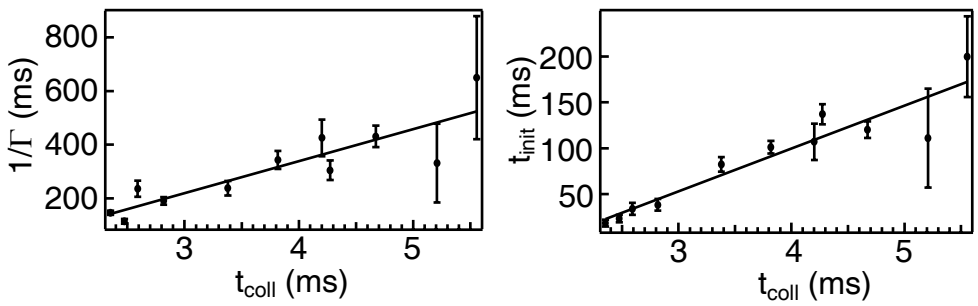


FIG. 4.12 – *Gauche : Taux de montée* Γ *de la fraction condensée en fonction du temps* t_{coll} *entre deux collisions successives dans le nuage thermique juste après la rampe d'évaporation rapide. Droite : Temps d'initiation* t_{init} *avant la montée rapide de la fraction condensée en fonction du temps entre deux collisions successives. Les droites sont des ajustements linéaires sur les données.*

Croissance et quasi-condensat

Il est important de noter que sur cette expérience, le condensat présente toujours des fluctuations de phase, même lorsque l'équilibre est atteint. En effet, à partir de la mesure du nombre d'atomes dans le condensat à l'équilibre et de la température, nous trouvons que le paramètre T/T_ϕ varie de 4 à 10 pour les courbes présentées sur la Figure 4.11. Nous avons donc réalisé une expérience de formation avec des quasi-condensats, différence majeure avec les précédentes expériences réalisées et décrites dans la Partie 4.2.

Pourtant, les courbes de croissance que nous observons sont qualitativement identiques à celles observées dans [118] avec des condensats 3D (voir graphique en bas à gauche de la Figure 4.6). De plus, les échelles de temps Γ et t_{init} pour une séquence d'évaporation comparable sont du même ordre de grandeur. Nous en concluons que la présence des fluctuations de phase, et donc le fait d'avoir de nombreux niveaux thermiquement peuplés par le quasi-condensat, et non plus un niveau unique, ne change pas la cinétique de croissance de la fraction condensée.

L'évaporation est caractérisée à partir du paramètre $\eta = \epsilon_{\text{cut}}/k_{\text{B}}T$, ϵ_{cut} étant la profondeur du piège magnétique limitée par la valeur du champ radio-fréquence, et T étant la température. Initialement, nous partons avec une température telle que $530 < T_{\text{i}} < 650$ nK. Les courbes de la Figure 4.11 ont été réalisées à l'aide d'un champ radio-fréquence final tel que $\nu_{\text{f}} - \nu_0 = 40$ kHz. En tenant compte du déplacement de $0,58$ μm du centre du piège magnétique dû à la gravité, nous trouvons un paramètre d'évaporation variant de 2,3 à 2,8 (voir Annexe C). Une fois le condensat formé, la température vaut 250 nK et le paramètre d'évaporation vaut $\eta = 6$.

Pour aller vers un paramètre d'évaporation initial plus grand, autrement dit

vers une évaporation plus faible, nous avons augmenté la fréquence de la fin de la rampe d'évaporation. Ainsi, pour $\nu_f - \nu_0 = 60$ kHz, nous avons $\eta \simeq 5$. Nous sommes donc dans un cas similaire au cas du graphique de droite de la Figure 4.6 où l'on observe une condensation en deux étapes beaucoup plus lente que ce que prévoient les simulations. Il était suggéré que ce phénomène était peut-être dû à la présence de fluctuations de phase dans la partie initiale de la croissance [118].

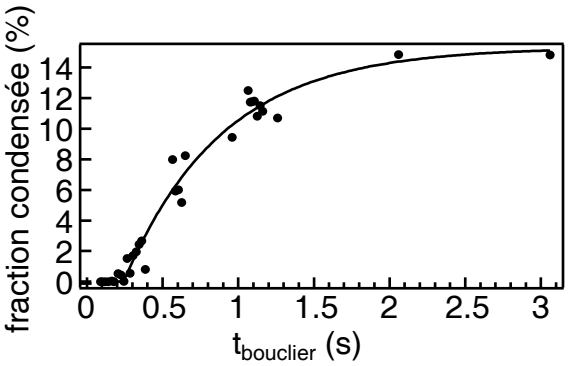


FIG. 4.13 – *Montée de la fraction condensée en fonction du temps pour un paramètre d'évaporation $\eta \simeq 5$.*

La Figure 4.13 présente la courbe expérimentale de croissance mesurée pour le paramètre d'évaporation $\eta \simeq 5$. La température initiale est de 650 nK et le nombre d'atomes N_i est de $8,2 \times 10^5$. Cette courbe ne montre pas de croissance en deux étapes et nous n'avons en fait jamais observé expérimentalement ce type de phénomène, et ceci quelle que soit la valeur du paramètre d'évaporation. Le temps d'initiation et le temps de montée restent également semblables à ceux de nos courbes précédentes. Nous attribuons cette différence par rapport à l'expérience de Munich au fait que le paramètre η n'est très certainement pas le critère pertinent vis-à-vis de l'observation de ce type de montée en deux étapes.

Finalement, tous nos résultats sur la montée de la fraction condensée montrent que nous n'avons aucune raison de croire que les fluctuations de phase modifient le processus de condensation par rapport à la condensation dans un système 3D.

4.3.4 Oscillation du rapport d'anisotropie

Oscillation du rapport d'anisotropie du condensat

Au cours de la formation du condensat, nous avons également observé une oscillation du rapport d'anisotropie du condensat qui est déclenchée par la traversée du seuil de condensation, autrement dit à l'instant où le nombre d'atomes condensés augmente de façon macroscopique. Ces oscillations sont représentées sur la Figure 4.14 par les point noirs, les données correspondant à la courbe I

de la Figure 4.11, soit pour un grand nombre initial d'atomes $N_{\mathrm{i}} = 9,5 \times 10^5$. Les données sont ajustées par une sinusoïde décroissant exponentiellement. Ceci donne une pulsation d'oscillation ω_{Q} telle que $\omega_{\mathrm{Q}}/\omega_z = 1,56(3)$. Cela correspond à la pulsation attendue de $1,58\omega_z$ pour le mode d'oscillation quadrupolaire dans le cas d'un condensat très allongé, comme nous l'avons vu dans la Section 1.3.8. Une explication possible du léger décalage de la mesure par rapport à la valeur théorique peut être la présence du nuage thermique dont le potentiel de champ moyen modifie le potentiel de piégeage perçu par les atomes du condensat. Cet effet de la température sur cette fréquence d'oscillation a été observé au MIT [81].

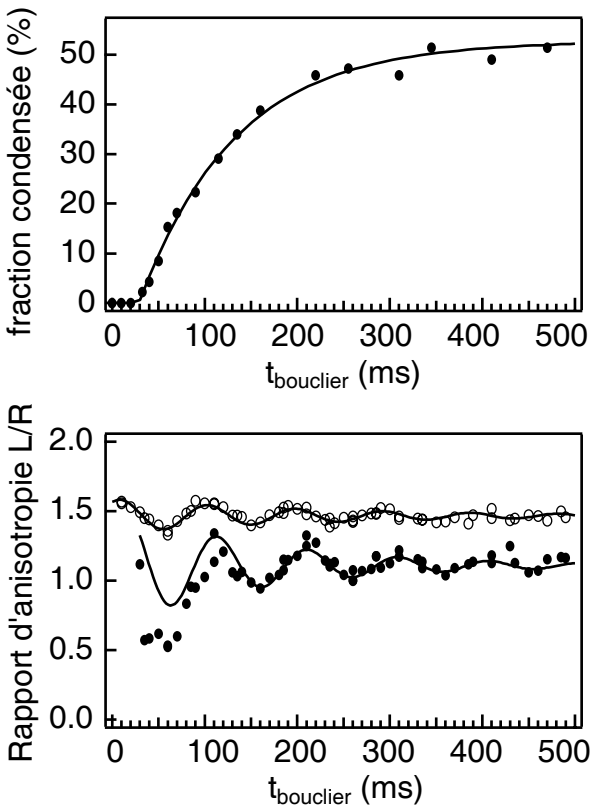


FIG. 4.14 – *Haut : Montée de la fraction condensée en fonction du temps (courbe I de la Figure 4.11). Bas : Rapport d'anisotropie (longueur/largeur) après un temps de vol de 20,3 ms du condensat (•) et du nuage thermique (∘) en fonction de* t_{bouclier}. *L'ensemble des données est ajusté par une sinusoïde décroissant exponentiellement ce qui donne une pulsation d'oscillation* $\omega_{\mathrm{Q}} = 1,56(3)\omega_z$ *pour le condensat et* $\omega_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{th}} = 1,61(3)\omega_z$ *pour le nuage thermique. Toutes ces données ont été mesurées.*

Temps d'amortissement

Le temps d'amortissement à $1/e$ des oscillations est de $\tau_Q = 160 \pm 45$ ms lorsque l'ajustement est réalisé sur l'ensemble des données. Or, le graphique 4.14 semble plutôt indiquer la présence de deux temps d'amortissement : un premier temps de décroissance très rapide qui amortit fortement la première grosse oscillation, puis un deuxième temps de décroissance plus long. Nous attribuons ceci au fait que le taux d'amortissement[3] dépend de la température, et du rapport T/T_c, comme cela a été montré à la fois expérimentalement [81, 132, 133] et théoriquement [134] : le taux d'amortissement est d'autant plus important que la température est élevée. Or, comme le montre la Figure 4.15, le rapport T/T_c diminue rapidement les premières 100 ms pour finalement quasiment se stabiliser. La diminution de T/T_c correspond, d'après les articles cités précédemment, à un temps d'amortissement multiplié par deux[4]. Finalement, un ajustement de même type sur les données mais pour les points pris aux instants supérieurs à 80 ms donne effectivement un temps d'amortissement de $\tau_Q = 400 \pm 170$ ms plus important.

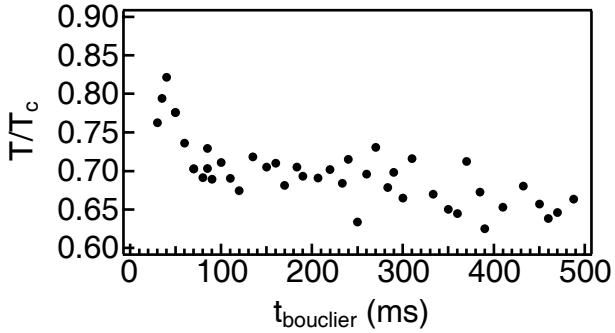


FIG. 4.15 – *Rapport T/T_c en fonction du temps. Ce rapport baisse rapidement les premières 100 ms pour ensuite décroître plus lentement.*

Enfin, il est difficile de mesurer ce temps d'amortissement de façon extrêmement fiable. En effet, pour des temps supérieurs à 400 ms, nous sommes déjà à la limite de résolution du système d'imagerie ce qui empêche donc une mesure fiable de l'oscillation de la taille des condensats. Il est en fait plus probable, d'après les mesures réalisées par Simon Richard et rapportées dans sa thèse [39], que le temps d'amortissement soit de l'ordre de 500 ms à 1 s.[5]

[3] Le taux d'amortissement est l'inverse du temps d'amortissement : $\Gamma = 1/\tau_Q$.

[4] Ceci n'est qu'un ordre de grandeur. Il est de plus nécessaire de rester prudent avec ces valeurs puisque l'analyse théorique suppose $k_B T \gg \mu$ alors que nous avons plutôt un potentiel chimique de l'ordre de $k_B T$.

[5] Le taux d'amortissement de ces oscillations est également fonction du rapport d'anisotropie du piège : plus le piège est anisotrope, plus le taux d'amortissement est faible [39].

Oscillation du rapport d'anisotropie du nuage thermique

Sur la Figure 4.14 est également représenté le rapport d'anisotropie du nuage thermique qui, tout comme le condensat, oscille. Ces oscillations du nuage thermique sont ici déclenchées à la fin de la rampe d'évaporation rapide et non plus lors de la traversée du seuil de condensation. La pulsation d'oscillation est de $\omega_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{th}}/\omega_z = 1,61(3)$. Ceci est à comparer avec le cas où le nuage est dans le régime hydrodynamique, donnant une pulsation de $\sqrt{12/5}\ \omega_z = 1,55\omega_z$, et le cas non hydrodynamique donnant $2\omega_z$ [99, 135]. La valeur mesurée confirme le fait que nous nous trouvons dans le régime intermédiaire, comme nous l'avons indiqué au paragraphe 4.3.2. Le temps de décroissance à $1/e$ des oscillations est de 240 ± 60 ms. Enfin, le rapport d'anisotropie moyen est de $1,455(4)$, différent de la valeur prédite dans le modèle du gaz idéal de 1,56 pour notre temps de vol de 20,3 ms. Cette différence est due aux effets hydrodynamiques qui perturbent l'expansion du nuage thermique et qui sont détaillés dans la thèse de Fabrice Gerbier [38].

Provenance possible de ces oscillations

Comme nous l'avons dit plus haut, la rampe d'évaporation est suffisamment lente pour ôter tous les atomes suivant l'axe radial ayant une énergie plus élevée que celle fixée par la radio-fréquence, mais elle est trop rapide pour permettre une évaporation complète suivant l'axe long. Cette rampe crée un nuage d'atomes hors équilibre aussi bien au niveau de l'équilibre thermique qu'au niveau de l'équilibre de sa taille dans le piège. Après la rampe d'évaporation, le nuage relaxe alors vers l'équilibre. Cette relaxation vers la taille d'équilibre du nuage thermique lance son oscillation. De plus, cette évaporation ne se fait vraisemblablement pas de façon parfaitement isotrope sur tout le nuage d'atomes, ne serait-ce qu'à cause du déplacement du centre du piège par la gravité. Le nuage thermique est donc tronqué spatialement de façon anisotrope par la baisse brutale de la radio-fréquence. Ceci implique aussi une relaxation vers l'équilibre avec une oscillation de sa taille ainsi que de la position du nuage.

Quant à l'oscillation de la taille de condensat, nous avons déjà observé ce phénomène lors de notre étude des condensats très allongés à l'équilibre [83]. Nous avions en particulier observé que cette oscillation semblait être déclenchée par la traversée du seuil de condensation. Ce type d'oscillation a également été observée dans [82] lors de l'étude de la formation de condensats hors équilibre. L'interprétation qualitative donnée par I. Shvarchuck est alors la suivante [133, 136] : comme le libre parcours moyen est bien plus petit que la taille axiale du nuage, nous pouvons diviser le nuage en régions de taille de l'ordre du libre parcours moyen comme indiqué sur la Figure 4.16. On considère ensuite la condensation de Bose-Einstein en chaque point. La température critique locale est calculée en considérant qu'en chaque point nous avons un cylindre infiniment long de densité

égale à la densité en ce point. Elle vaut alors [137] :

$$T_{\mathrm{c}}(z) \simeq \frac{1,28\hbar\omega_{\perp}}{k_{\mathrm{B}}}[n_{1\mathrm{D}}(z)r_{\perp}]^{2/5}, \tag{4.18}$$

avec $r_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$ la taille radiale de l'oscillateur harmonique et $n_{1\mathrm{D}}(z)$ le nombre d'atomes par unité de longueur suivant z.

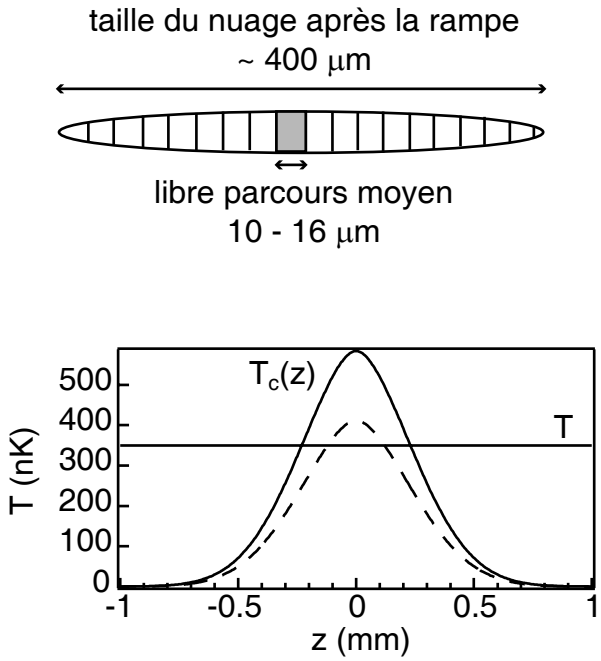


FIG. 4.16 – *Haut : Division du nuage suivant l'axe long en différentes régions de taille égale au libre parcours moyen. On considère ensuite la condensation dans chaque région. Bas : Température critique en fonction de la position suivant l'axe pour les paramètres de la courbe I de la Figure 4.11 (trait plein) et pour la courbe II (traits pointillés) après la rampe d'évaporation rapide. Le trait horizontal représente la température à l'équilibre du nuage.*

Prenons tout d'abord les paramètres de la courbe I de la Figure 4.11. Juste après l'évaporation rapide et après thermalisation globale, la température est de 350 nK avec un nombre total d'atomes d'environ 6×10^5. La température critique locale en fonction de la position suivant l'axe long est représentée sur le graphique de la Figure 4.16 par le trait plein. D'après ce graphique, la température, représentée par le trait horizontal, est inférieure à la température critique sur une demi-longueur d'environ 230 μm. Or nous mesurons une demi-longueur du condensat à l'équilibre de 100 μm. On crée donc initialement un condensat plus grand que le condensat à l'équilibre et qui relaxe ensuite vers sa longueur d'équilibre en effectuant des oscillations.

Lorsque la densité atomique diminue, la région pour laquelle $T < T_c(z)$ devient plus petite. Dans le cas de la courbe II par exemple, le condensat se forme initialement sur une demi-longueur de 120 μm alors que sa taille à l'équilibre est de 70 μm. Ainsi, plus la densité atomique initiale diminue, plus l'amplitude des oscillations de la taille du condensat devient petite. Nous ne sommes d'ailleurs pas en mesure de les résoudre sur les images par absorption obtenues pour les courbes autres que la courbe I.

Il faut néanmoins rester prudent avec cette interprétation des oscillations de la taille du condensat. Celle-ci n'est valable que dans le cas où l'on baisse la température brutalement sous le seuil de condensation, l'évaporation n'étant plus quasi-statique. Or ce type d'oscillations a également été observée lors de l'expérience de spectroscopie de Bragg sur les quasi-condensats à l'équilibre [39]. Ces oscillations étaient également déclenchées par l'instant où l'on passait sous le seuil de condensation, mais l'expérience était réalisée dans ce cas avec une évaporation extrêmement lente à l'approche de seuil de condensation. Celle-ci se faisait donc toujours de façon quasi-statique et l'interprétation précédente ne peut s'appliquer ici.

Implication pour la spectroscopie de Bragg

La mesure de la longueur de cohérence au cours de la formation du condensat a été réalisée par spectroscopie de Bragg, c'est à dire par une mesure de la distribution en impulsion du condensat au cours du temps. Or cette méthode est sensible aux fluctuations de la taille du condensat suivant son axe long. Il faut donc en tenir compte dans l'analyse de nos résultats finaux.

L'oscillation de la taille du condensat dans le piège suivant l'axe long peut être décrite par le facteur d'échelle λ_z, déjà introduit dans l'équation (2.16), avec la forme suivante [98] :

$$\lambda_z(t_{\text{bouclier}}) = \frac{L(t_{\text{bouclier}})}{L_0}, \tag{4.19}$$

$$= 1 + \frac{\Delta L}{L_0}\sin(\omega_{\text{Q}} t_{\text{bouclier}} + \phi), \tag{4.20}$$

L_0 étant la demi-longueur du condensat dans le piège et à l'équilibre. On suppose que l'amplitude $\Delta L/L_0$ des oscillations est faible. Après un temps de vol t, le facteur d'échelle devient :

$$\lambda_z(t_{\text{bouclier}} + t) = \lambda_z(t_{\text{bouclier}}) + t\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_z(t)\right]_{t=t_{\text{bouclier}}}, \tag{4.21}$$

$$= 1 + \frac{\Delta L}{L_0}\sqrt{1+\omega_{\text{Q}}^2 t^2}\sin(\omega_{\text{Q}} t_{\text{bouclier}} + \phi + \phi_0), \tag{4.22}$$

avec $\cos\phi_0 = 1/\sqrt{1+\omega_{\text{Q}}^2 t^2}$. Le rapport d'anisotropie du piège étant important, nous avons négligé l'expansion axiale due à l'énergie d'interaction.

La distribution en impulsion après temps de vol reflète quant à elle la distribution en vitesse dans le piège qui est de la forme :

$$P(p_z) \propto \left(1 - \frac{p_z^2}{[m\omega_{\mathrm{Q}}\Delta L \cos(\omega_{\mathrm{Q}} t_{\mathrm{bouclier}} + \phi)]^2}\right)^2, \tag{4.23}$$

ce qui donne une demi-largeur à mi-hauteur de :

$$\Delta p_z(t_{\mathrm{bouclier}}) \simeq 0,54 m\omega_{\mathrm{Q}}\Delta L |\cos(\omega_{\mathrm{Q}} t_{\mathrm{bouclier}} + \phi)|. \tag{4.24}$$

L'oscillation de la taille du condensat donne une oscillation de la largeur de la distribution en impulsion de fréquence double et qui est représentée sur la Figure 4.17.

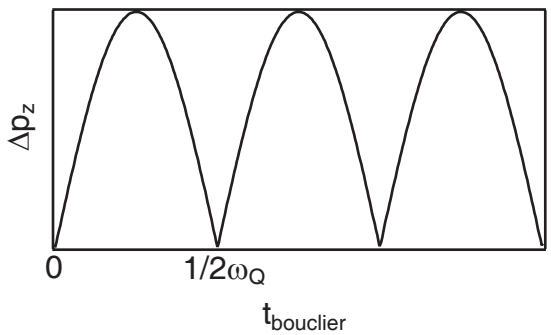


FIG. 4.17 – *Oscillation de la largeur de la distribution en impulsion due à une oscillation quadrupolaire de la taille du condensat.*

La mesure par spectroscopie de Bragg sera bien plus sensible à ces oscillations que la mesure de la taille des condensats sur les images par absorption. Une oscillation de la taille de l'ordre de la résolution de notre système d'imagerie, soit 8,5 μm, nous donne une amplitude d'oscillation de la largeur des spectres de 750 Hz bien supérieure à la largeur de la fonction d'appareil de la spectroscopie de Bragg qui est de l'ordre de 200 Hz. Une toute petite oscillation pourra ne pas être visible sur les images, ce qui est déjà quasiment le cas pour la courbe III de la Figure 4.11 où les oscillations sont à peine visibles sur l'imagerie, mais être tout à fait détectable sur la mesure de la largeur des spectres. Il est donc bien évidemment nécessaire d'en tenir compte pour l'analyse de nos résultats.

4.3.5 Oscillation du centre de masse

Comme nous l'avons dit plus haut, l'évaporation radio-fréquence ne se fait vraisemblablement pas de façon parfaitement isotrope sur tout le nuage d'atomes. L'expérience que nous réalisons en éjectant brutalement les atomes les plus chauds hors du piège donne lieu à une oscillation de la taille du nuage thermique

ainsi qu'à une oscillation du centre de masse de l'ensemble du nuage. Cette dernière n'est pas visible sur les images, mais est visible par spectroscopie de Bragg qui est, comme nous l'avons vu, bien plus sensible à cet effet que notre système d'imagerie. L'oscillation de centre de masse correspond alors à une oscillation du centre des spectres de Bragg pris à différents instants t_{bouclier}.

Nous avons représenté sur la Figure 4.18 le centre des spectres de Bragg acquis à différents instants dans le cas de la courbe II de la Figure 4.11. Les données ont été ajustées par une sinusoïde exponentiellement décroissante. La qualité de l'ajustement montre que la phase de cette oscillation est très stable. L'oscillation est donc bien déclenchée par la fin de la rampe d'évaporation rapide. Cette phase n'étant pas aléatoire d'une réalisation sur l'autre, et son amplitude variant très peu, les spectres de Bragg, qui nécessitent une prise de données sur un grand nombre de réalisations à un t_{bouclier} fixe, ne seront donc pas élargis par ces oscillations dipolaires.

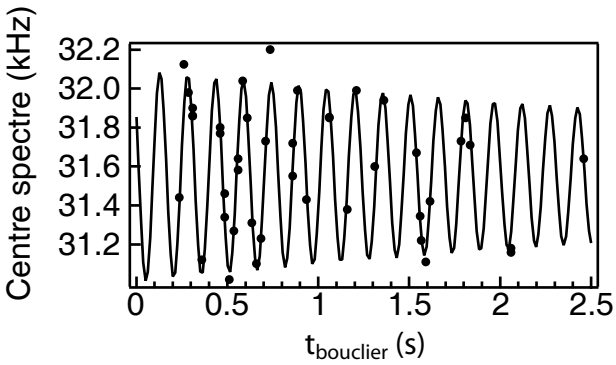


FIG. 4.18 – *Centre des distributions en impulsion mesurées par spectroscopie de Bragg. Les points sont les mesures expérimentales alors que la courbe est un ajustement par une sinusoïde exponentiellement décroissante.*

L'ajustement des points expérimentaux par la sinusoïde exponentiellement décroissante donne une pulsation d'oscillation de $\omega_{\text{D}}/2\pi = 6,53(1)$ qui est égale à la pulsation axiale du piège mesurée comme indiqué au paragraphe 2.2.1. L'amplitude des oscillations est initialement de 540(50) Hz, soit une vitesse maximale de 200(20) μm/s qui donne un déplacement du centre du condensat de 4 μm après 20 ms de temps de vol et qui est donc encore une fois difficilement détectable sur les images par absorption. Enfin, le temps de décroissance est de $\tau_{\text{D}} = 5,5(2,9)$ s. Dans le cas d'un piège parfaitement harmonique, cette oscillation ne devrait jamais être amortie [55], ce qui explique le faible taux d'amortissement trouvé.

4.4 Longueur de cohérence au cours de la formation

Le but de notre expérience est finalement de mesurer la longueur de cohérence des condensats au cours de leur formation. Sur les courbes de la Figure 4.11, le paramètre T/T_ϕ va de 4 pour la montée de fraction condensée la plus rapide à 10 pour la plus lente, ces valeurs étant calculées une fois l'équilibre atteint[6]. La spectroscopie de Bragg est un outil parfaitement adapté pour mesurer la longueur de cohérence sur ce type de quasi-condensats. Elle a par ailleurs déjà montré un très bon accord avec la théorie lors de l'étude des quasi-condensats à l'équilibre [83]. Nous utiliserons donc cette méthode pour notre mesure.

4.4.1 Séquence expérimentale de la mesure

La mesure de la longueur de cohérence pour une courbe de formation donnée de la Figure 4.11 se déroule de la façon suivante :

- *Choix des conditions initiales* avant la rampe d'évaporation rapide. La température est fixée à l'aide de la radio-fréquence initiale ν_i. Le nombre d'atomes est ajusté à l'aide de la durée t_i du bouclier radio-fréquence initial.
- *Acquisition d'un spectre de Bragg* à un instant t_bouclier donné après la rampe d'évaporation rapide.
- Ajustement lorentzien du spectre et *extraction de la demi-largeur à mi-hauteur* $\Delta\nu_\mathrm{M}$. La demi-largeur à mi-hauteur de la distribution en impulsion est finalement donnée par :

$$\Delta p_\mathrm{M} = \frac{2\pi m}{2k_\mathrm{L}}\Delta\nu_\mathrm{M}, \tag{4.25}$$

  qui est elle-même inversement proportionnelle à la longueur de cohérence du condensat. Ainsi, pour chaque point de la courbe de formation, nous obtenons la largeur de la distribution en impulsion.

Cette séquence expérimentale est répétée pour différents temps après la rampe d'évaporation rapide afin de mesurer la largeur de la distribution en impulsion au cours de la formation de condensat.

L'acquisition d'un spectre de Bragg se déroule quant à elle de la façon suivante :

- Coupure du piège magnétique.
- Temps de vol de 3 ms permettant de réduire la densité atomique et d'éviter les collisions entre le condensat et les atomes diffractés.
- Application des faisceaux laser Bragg pendant 2 ms avec un désaccord $\delta\omega$ donné.

[6] Le nombre d'atomes condensés augmente au cours du temps jusqu'à sa valeur d'équilibre. Le paramètre T/T_ϕ diminue donc au cours de la formation du condensat.

– Temps de vol supplémentaire de 15,3 ms et imagerie par absorption.
– Mesure du pourcentage d'atomes diffractés.

Cette séquence est répétée pour différents désaccords $\delta\omega$ entre les faisceaux laser Bragg afin d'acquérir un spectre complet.

Le temps d'acquisition d'un spectre de Bragg est d'environ deux heures. Une courbe de mesure de la longueur de cohérence au cours de la formation nécessite finalement plus de quinze jours de prises de données. Le nombre d'atomes n'est évidemment pas stable sur toute cette durée. L'étape du choix des conditions initiales est donc ici essentielle : celle-ci nous permet de nous placer à chaque fois sur la courbe de formation voulue. La durée du bouclier radio-fréquence t_{i} est ainsi réajustée avant chaque acquisition de spectre. Nous avons finalement vérifié que nos mesures de fraction condensée réalisées au moment de chaque acquisition de spectre redonnent le même type de courbe que celle de la Figure 4.11 acquise en une heure.

4.4.2 Données brutes sur une montée de fraction condensée lente

Nous avons tout d'abord réalisé notre mesure sur une courbe de formation proche de la courbe II de la Figure 4.11. Les conditions initiales, mesurées avant chaque prise de spectres, sont les suivantes : $N_{\mathrm{i}} = 4,2(3) \times 10^6$ et $T_{\mathrm{i}} = 520(20)$ nK. Les incertitudes proviennent de la variation du nombre d'atomes et de la température sur l'ensemble des données. Le condensat se forme après un délai $t_{\mathrm{init}} = 120(9)$ ms et avec un taux de montée $\Gamma^{-1} = 431\,(40)$ ms.

Le graphique **a** de la Figure 4.19 représente la fraction condensée au cours du temps. Les points noirs correspondent aux mesures réalisées lors de la prise de spectres de Bragg et correspondent à des données prises sur quinze jours. Nous avons également tracé la fraction condensée de la courbe II avec les cercles blancs et la courbe en trait plein représente son ajustement. Enfin, sur le graphique 4.19**b** est tracée la demi-largeur à mi-hauteur $\Delta\nu_{\mathrm{M}}$ des spectres de Bragg mesurés en fonction du temps. Les barres d'erreurs correspondent à la déviation standard de la largeur donnée par l'ajustement lorentzien des spectres.

L'acquisition du premier spectre a été réalisée 115 ms après t_{init}. Ce point correspond à un fraction condensée de 8 %. Pour des temps inférieurs, nous ne sommes pas en mesure d'obtenir des spectres de Bragg : la fraction condensée est alors trop petite. La diffraction de Bragg se faisant en régime perturbatif, avec 20 % de diffraction maximum, le nombre d'atomes diffractés devient trop faible pour pouvoir être mesuré correctement[7]. Nous ne seront donc pas en mesure ici

[7] Le nombre d'atomes total après la rampe d'évaporation rapide est, pour la courbe II, de $2,6 \times 10^5$. Le réseau de Bragg appliqué sur une fraction condensée de 8 % diffracte au maximum 20 % des atomes condensés, ce qui représente au maximum $0,5 \times 10^4$ atomes diffractés.

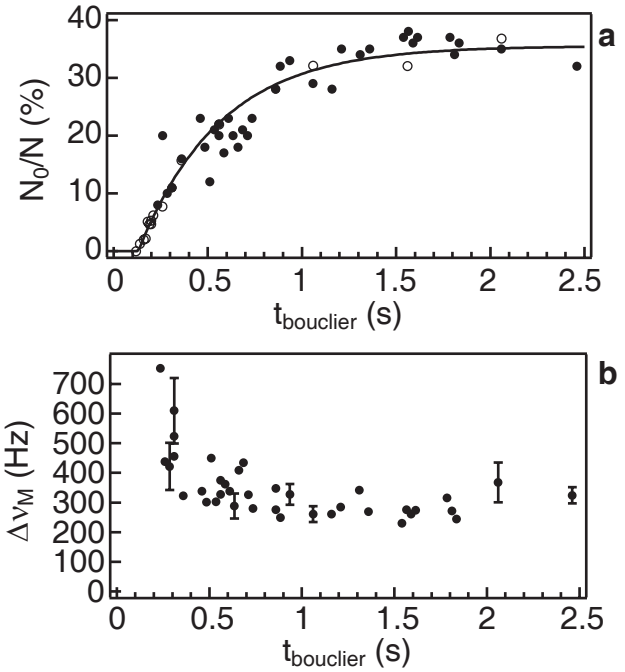


FIG. 4.19 – (**a**) *Fraction condensée en fonction du temps après la rampe d'évaporation rapide. Les points noirs correspondent à la fraction condensée mesurée pour les différents spectres acquis expérimentalement. Les points blancs correspondent à la fraction condensée de la courbe II de la Figure 4.11, dont les conditions initiales sont très proches de celles utilisées lors des mesures des spectres, et le trait plein représente son ajustement.* (**b**) *Demi-largeur à mi-hauteur des spectres de Bragg expérimentaux en fonction du temps. Nous avons également représenté les barres d'erreurs pour quelques points, ces barres d'erreurs correspondant à la déviation standard de la largeur donnée par l'ajustement lorentzien des spectres.*

de commenter l'établissement de la cohérence durant les tous premiers instants de la montée rapide de la fraction condensée.

Le graphique 4.19**b** indique une diminution de la largeur des spectres au cours du temps, principalement durant les six cents premières millisecondes de croissance. Ceci correspond donc à une diminution de la largeur de la distribution en impulsion et donc à une augmentation de la longueur de cohérence. Si ces données "brutes" tendent à indiquer un retard à l'établissement de la cohérence en phase, il est toutefois nécessaire d'être prudent dans nos interprétations. En effet, comme le nombre d'atomes condensés croît au cours du temps, la taille du condensat augmente. Or, même en l'absence de fluctuation de phase, la largeur de la distribution en impulsion est limitée par la taille du condensat et son augmentation entraîne une diminution de la largeur de la distribution en impulsion.

Le paramètre T/T_ϕ qui caractérise l'amplitude des fluctuations de phase à l'équilibre dépend également du nombre d'atomes condensés : plus le nombre d'atomes condensés est petit, plus l'amplitude des fluctuations de phase attendue à l'équilibre est importante. Le nombre d'atomes condensés augmentant au cours du temps, l'amplitude des fluctuations de phase à l'équilibre diminue, ce qui entraîne également une augmentation de la longueur de cohérence et une diminution de la largeur de la distribution en impulsion.

Finalement, l'interprétation de nos résultats nécessite de tenir compte de cette augmentation de la longueur de cohérence, et donc de la diminution de la largeur de la distribution en impulsion, liée au simple fait que le nombre d'atomes condensés augmente. Pour cela, nous allons normaliser toutes nos données par les largeurs des spectres attendues, calculées à partir de la mesure du nombre d'atomes condensés et de la température, à chaque instant et en considérant l'équilibre atteint. Ainsi, nous comparons simplement nos données aux valeurs prévues à l'équilibre.

4.4.3 Normalisation des largeurs des spectres

Largeur due aux fluctuations de phase à l'équilibre

La mesure du nombre d'atomes condensés et de la température en fonction du temps donne pour les données de la Figure 4.19 une variation du paramètre T/T_ϕ commençant à 30 et diminuant jusqu'à 8,4. La distribution en impulsion est donc ici dominée par les fluctuations de la phase et non pas par le profil de densité comme nous l'avons vu dans la Partie 1.3.6.

Dans ce régime de fortes fluctuations de phase, la demi-largeur à mi-hauteur de la distribution en impulsion à l'équilibre est donnée par :

$$\Delta p = \alpha \Delta p_\phi, \tag{4.26}$$

$$= \alpha \frac{T}{T_\phi} \frac{\hbar}{L}, \tag{4.27}$$

$$= \alpha \frac{\hbar}{L_\phi(0)}. \tag{4.28}$$

Nous rappelons que le paramètre α permet de tenir compte du fait que nous faisons la mesure sur l'ensemble du condensat et pas uniquement au centre. Il vaut 0,67 pour un condensat dans le régime de Thomas-Fermi et 0,64 pour un condensat 1D [71]. Sur cette expérience, nous avons choisi de prendre $\alpha = 0,67$, ce qui est potentiellement une source d'erreur dont nous tiendrons compte dans l'évaluation de nos erreurs systématiques. La longueur de cohérence au centre du piège est :

$$L_\phi(0) = \frac{\hbar^2 n_{1\mathrm{D}}(0)}{m k_\mathrm{B} T}. \tag{4.29}$$

Expérimentalement, nous avons mesuré la température, le nombre d'atomes condensés ainsi que la taille du condensat lors de l'acquisition de chaque spectre de Bragg, ce qui nous permet de calculer la largeur attendue théoriquement si le condensat est à l'équilibre.

Largeur de la fonction d'appareil

Comme nous l'avons vu dans la Partie 3.2.3, l'analyse de nos résultats nécessite de tenir compte de la largeur de la fonction d'appareil de la spectroscopie de Bragg. Nous rappelons que la demi-largeur à mi-hauteur des spectres attendue à l'équilibre est :

$$\Delta\nu_{\mathrm{eq}} = \frac{\alpha\Delta\nu_\phi}{2} + \sqrt{w_{\mathrm{G}}^2 + \left(\frac{\alpha\Delta\nu_\phi}{2}\right)^2}, \tag{4.30}$$

avec $\Delta\nu_\phi = \Delta p_\phi k_{\mathrm{L}}/\pi m$ et w_{G} la demi-largeur à mi-hauteur de la fonction d'appareil supposée de forme gaussienne. Cette expression est valable dans le cas où $T/T_\phi > 8$, c'est à dire pour les fortes fluctuations de phase.

Des mesures sur des condensats à l'équilibre et les plus cohérents possibles, avec typiquement un paramètre T/T_ϕ valant 3, permettent d'extraire la demi-largeur à mi-hauteur w_{G} de la fonction d'appareil qui est de 200(30) Hz. Ceci est compatible avec la mesure qui a été réalisée deux ans plus tôt lors de l'étude des quasi-condensats à l'équilibre et qui donnait $w_{\mathrm{G}} = 176(6)$ Hz [83].

Chaque largeur de spectre $\Delta\nu_{\mathrm{M}}$ mesurée expérimentalement a finalement été normalisée par la valeur calculée théoriquement à l'équilibre $\Delta\nu_{\mathrm{eq}}$. Les largeurs ainsi normalisées sont représentées sur le graphique **c** de la Figure 4.20. Les barres d'erreurs représentent l'erreur systématique pour quelques points. La courbe en traits pointillés représente la valeur attendue à l'équilibre.

4.4.4 Dispersion et oscillations quadrupolaires

Le graphique **b** de la Figure 4.20 indique tout d'abord une dispersion des points supérieure aux barres d'erreurs statistiques. Les largeurs normalisées des spectres varient ainsi initialement entre 1 et 1,8, puis terminent entre 1 et 1,4. Cette dispersion reste importante même au bout d'un temps relativement long de 2 s.

Nous attribuons cette dispersion des points aux oscillations quadrupolaires de la taille du condensat. Nous avons vu en effet dans la Partie 4.3.4 que la formation du condensat entraîne systématiquement une oscillation quadrupolaire de sa taille. Pour la courbe de formation présentée dans cette partie, cette oscillation n'est pas visible sur les images par absorption, mais elle peut être encore tout à fait détectable sur les spectres de Bragg. Ainsi, la largeur maximale des spectres est initialement de 700 Hz ce qui peut donner, d'après l'équation (4.24), une variation de la taille du condensat de 7,8 μm, inférieure à la résolution de

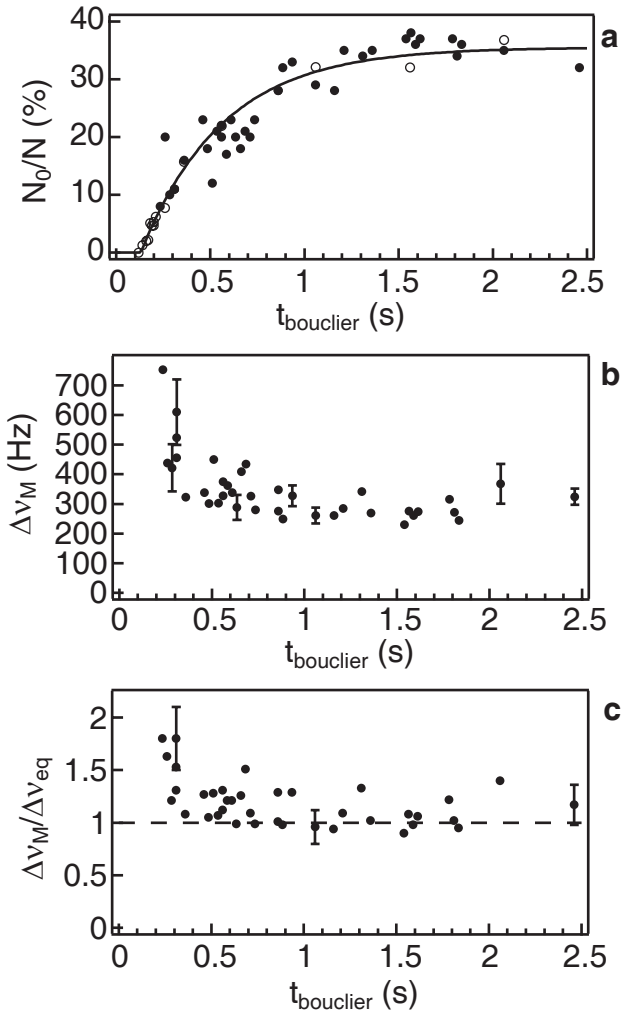


FIG. 4.20 – *(**a**) Fraction condensée au cours du temps, identique à 4.19**a**. (**b**) Demi-largeur à mi-hauteur des spectres expérimentaux, identique à 4.19**b**. Les barres d'erreurs représentent la déviation standard de la largeur donnée par l'ajustement lorentzien des spectres. (**c**) Demi-largeurs à mi-hauteur des spectres normalisées par les valeurs calculées théoriquement en supposant l'équilibre de la cohérence en phase atteint. Le calcul des valeurs théoriques tient compte de la largeur de la fonction d'appareil. Les barres d'erreurs représentent l'erreur systématique pour différents points. La courbe en traits pointillés représente la valeur attendue lorsque l'équilibre est atteint.*

notre système d'imagerie. Après 500 ms de croissance, la largeur maximale des spectres n'est plus que de 400 Hz, ce qui peut correspondre tout de même à 4,5 μm d'amplitude d'oscillation de la taille.

Nous avons tenté d'observer temporellement l'oscillation de la largeur des spectres, donnée par l'équation (4.24). Pour cela, nous avons pris différents spectres à des instants séparés d'un quart d'oscillation. Malheureusement, nous n'arrivons jamais à observer proprement cette oscillation. Si celle-ci est présente, sa phase, comme nous allons le voir, change trop d'un spectre à l'autre, ce qui brouille complètement notre signal.

Ce déphasage de l'oscillation d'un spectre à l'autre peut provenir du fait que cette oscillation quadrupolaire est excitée lorsque le condensat commence à se former de façon macroscopique[8], c'est à dire approximativement à t_{init}. Or nous avons observé expérimentalement que ce temps d'initiation varie d'un cycle à l'autre et donc également d'un spectre à l'autre. Il dépend en effet du taux de collisions qui dépend des conditions initiales qui ne peuvent pas être parfaitement contrôlées.

Nous avons évalué le temps d'initiation à partir de notre mesure du taux de collisions et de l'ajustement linéaire du graphique de droite de la Figure 4.12 donnant le temps d'initiation en fonction du temps entre deux collisions successives. Celui-ci nous donne pour notre taux de collisions $t_{\text{init}} = 130$ ms. La variation du taux de collisions sur l'ensemble des spectres nous donne quant à elle une variation du temps d'initiation de ± 16 ms, toujours calculé à partir de l'ajustement de la Figure 4.12. Cette variation de ± 16 ms sur l'ensemble des spectres entraîne un déphasage de l'oscillation quadrupolaire de $\Delta\phi = \pm 2$ rad. Ce déphasage important explique que l'on ne puisse pas facilement résoudre temporellement cette oscillation sur l'ensemble des spectres expérimentaux.

Enfin, nous pouvons observer que la dispersion des points diminue au cours des cinq cent premières millisecondes et donc que ces oscillations s'amortissent. Au delà, l'amortissement semble plus lent.

4.4.5 Longueur de cohérence

La ligne en traits pointillés du graphique 4.20**c** représente la valeur attendue lorsque le condensat est à l'équilibre et en l'absence d'oscillation quadrupolaire. Comme nous l'avons vu, ces oscillations ont pour effet d'élargir la distribution en impulsion du condensat et donc d'élargir les spectres. L'amplitude de l'élargissement est donnée par l'amplitude de l'oscillation. En revanche, la valeur minimale de la largeur des spectres reste identique quelle que soit l'amplitude d'oscillation. Elle correspond en effet à l'instant où le champ de vitesse axiale dû à l'oscillation est nul. Pour observer l'évolution de la longueur de cohérence au cours du temps, il faut donc comparer les valeurs minimales des largeurs des spectres obtenus expérimentalement aux valeurs calculées à l'équilibre.

[8] Mais rien n'exclut que ce déphasage puisse également provenir d'un processus de fluctuations quantiques.

La courbe du graphique **c** indique que la valeur minimale des largeurs normalisées des spectres expérimentaux vaut 1 dès 300 ms de bouclier radio-fréquence. Nous rappelons que nous avons $t_{\text{init}} = 120$ ms. Nous pouvons donc affirmer ici que la cohérence en phase s'établit en moins de 200 ms après le début de la formation rapide.

Pour les points qui précèdent, la valeur minimale tombe à 1,2. Ceci correspond alors à une longueur de cohérence de $L_\phi = 0,7L_{\phi,\text{eq}}$, où $L_{\phi,\text{eq}}$ est la longueur de cohérence attendue à l'équilibre. L'oscillation quadrupolaire est ici de grande amplitude. Ajoutons à cela le fait que l'oscillation se déphase d'un spectre à l'autre, et nous pouvons très bien ne pas avoir mesuré le vrai minimum de l'oscillation. Ces oscillations ont donc pour effet de masquer l'élargissement des spectres dû aux fluctuations de phase ce qui nous permet seulement de donner une borne inférieure pour la longueur de cohérence. Dans ce cas ci, nous pouvons affirmer que la longueur de cohérence est supérieure à $0{,}7L_{\phi,\text{eq}}$.

Enfin, comme nous l'avons déjà dit plus haut, nous ne sommes pas en mesure d'acquérir des spectres, et donc de mesurer la longueur de cohérence, au tout début de la formation qui correspond ici au cent premières millisecondes de croissance rapide.

Conclusion

Les mesures sur ce type de formation ont donc permis de montrer un établissement rapide de la cohérence en phase comparée au temps de mise à l'équilibre de la fraction condensée. Alors que la montée de la fraction condensée se fait en un temps total d'environ une seconde, nous avons clairement montré que la cohérence en phase s'établit en moins de 200 ms après le début de la formation rapide. Pour un temps de 100 ms, nous avons trouvé une longueur de cohérence d'au minimum 0,7 fois celle attendue à l'équilibre : $0{,}7L_{\phi,\text{eq}} \leq L_\phi \leq L_{\phi,\text{eq}}$.

4.4.6 Mesure sur une montée de fraction condensée plus rapide

Nous avons réalisé le même type de mesure sur une deuxième courbe de formation, proche cette fois-ci de la courbe III de la Figure 4.11, et qui est représentée par les triangles blancs sur le graphique **a** de la Figure 4.21 avec leur ajustement en trait plein. Les points noirs sont les fractions condensées mesurées lors de chaque prise des spectres Bragg. Le taux de collisions initial est maintenant plus important, ce qui donne une montée plus rapide, avec un temps de croissance de $\Gamma^{-1} = 190(15)$ ms, et une croissance débutant plus tôt, avec $t_{\text{init}} = 39(7)$ ms. Le but est ici :

- d'observer comment la longueur de cohérence évolue dans le cas d'une montée du nombre d'atomes condensés beaucoup plus rapide et d'observer un

possible retard à l'établissement de la cohérence ;
- de pouvoir réaliser des mesures de longueurs de cohérence plus tôt, le nombre d'atomes condensés devenant suffisamment important plus rapidement. Ainsi, nous avons été en mesure de prendre des spectres de Bragg dès 80 ms de temps de bouclier radio-fréquence, c'est à dire 40 ms après le début de la formation rapide contre 100 ms pour la courbe de formation précédente.

Ajoutons ici, que sur ce type de courbes, nous observons une variation de la taille du condensat en fonction du temps que nous savons due à une oscillation quadrupolaire. Mais l'amplitude de cette variation n'est que très légèrement supérieure à la résolution de notre système d'imagerie. Le rapport signal à bruit est alors trop faible pour nous permettre de mesurer proprement la fréquence et le taux d'amortissement de cette oscillation.

Prise en compte du profil de densité

Le nombre d'atomes condensés final est ici plus important que pour la courbe de formation précédente, avec environ 10^5 atomes condensés contre 5×10^4 précédemment. La valeur minimale de T/T_ϕ est donc plus petite, la température finale restant sensiblement la même. Sur l'ensemble des spectres pris expérimentalement, nous avons $14,5 > T/T_\phi > 5,8$. Or pour des valeurs inférieures à 8, il devient nécessaire de tenir compte à la fois de la corrélation de la phase et de la corrélation du profil de densité, les fluctuations de phase ne dominant plus la fonction de corrélation. D'après [71] et dans la plage T/T_ϕ considérée, la demi-largeur à mi-hauteur de la distribution en impulsion à l'équilibre peut être approximée par :

$$\Delta\nu_{\mathrm{eq}} = \frac{\Delta\nu_\phi}{2} + \sqrt{w_{\mathrm{G}}^2 + \left(\frac{\Delta\nu_\phi}{2}\right)^2}, \tag{4.31}$$

avec

$$\Delta\nu_\phi = \frac{k_{\mathrm{L}}}{\pi m}\sqrt{\left(2,04\frac{\hbar}{L}\right)^2 + \left(0,65\frac{\hbar}{L}\frac{T}{T_\phi}\right)^2}. \tag{4.32}$$

La Figure 4.21**b** indique la largeur des spectres. La Figure 4.21**c** représente les largeurs des spectres normalisées à l'aide de (4.31) et en tenant toujours compte de la largeur de la fonction d'appareil de la spectroscopie de Bragg.

Oscillations quadrupolaires

La dispersion des points est due aux oscillations quadrupolaires de la taille du condensat. Nous pouvons par ailleurs observer sur le graphique **c** que l'amplitude des oscillations des spectres de Bragg est initialement plus importante que pour la courbe de formation présentée dans la partie précédente. Plus le taux de collisions initial est important, plus cette amplitude augmente. La courbe I de la Figure

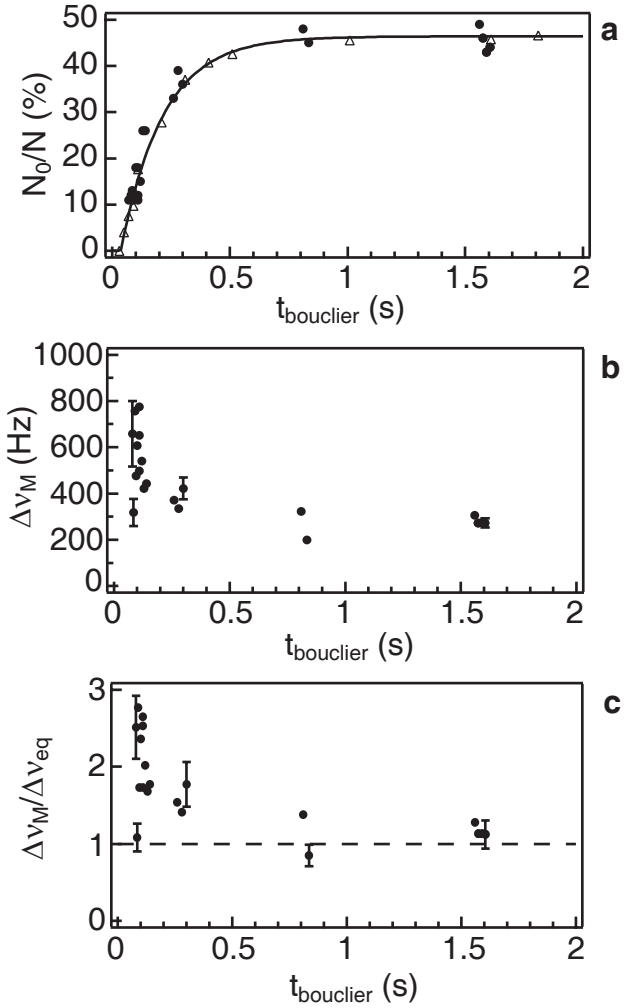


FIG. 4.21 – (**a**) *Fraction condensée en fonction du temps après la rampe d'évaporation rapide. Les points noirs correspondent à la fraction condensée mesurée pour les différents spectres acquis expérimentalement. Les triangles blancs correspondent à la fraction condensée de la courbe III de la Figure 4.11, dont les conditions sont très proches de celles utilisées lors des mesures des spectres et le trait plein représente son ajustement.*
(**b**) *Demi-largeur à mi-hauteur des spectres expérimentaux en fonction du temps. Les barres d'erreurs représentent la déviation standard de la largeur donnée par l'ajustement des spectres.*
(**c**) *Demi-largeurs à mi-hauteur des spectres normalisées par les valeurs calculées théoriquement en supposant l'équilibre de la cohérence en phase atteint. Le calcul des valeurs théoriques tient compte de la largeur de la fonction d'appareil. Les barres d'erreur représentent l'erreur systématique pour différents points.*

4.11 a d'ailleurs mis en évidence le cas d'un taux de collisions suffisamment important pour que cette oscillation soit nettement observable sur les images par absorption.

Longueur de cohérence

Enfin, le graphique **c** nous montre que la largeur normalisée des spectres tombe à 1 dès les quarante premières millisecondes de formation rapide. Cette courbe indique donc elle aussi un établissement de la cohérence rapide comparée au temps de mise à l'équilibre de la fraction condensée. Il est probable qu'il en ait été de même pour la courbe de formation précédente mais que nous n'ayons pas mesuré initialement le minimum réel de la largeur de la distribution en impulsion.

Remarque

Toutes nos mesures montrent finalement un établissement de la cohérence en phase plus rapide que le temps de mise à l'équilibre de la faction condensée. Notons que ceci n'est pas en contradiction avec les résultats donnés à Amsterdam montrant une diminution de la longueur de cohérence par rapport à la valeur attendue à l'équilibre. Leurs mesures ont en effet été effectuées à des temps inférieurs à la période d'oscillation axiale $1/\omega_z$. Sur notre expérience, toutes les mesures ont au contraire été effectuées à des temps bien supérieurs à cette période d'oscillation.

4.4.7 Comparaison avec les prévisions théoriques

Nous avons présenté dans la Partie 4.1.3 les prévisions théoriques des temps d'établissement de la cohérence en phase. Expérimentalement, nous avons vu que nous nous trouvons dans un régime hydrodynamique intermédiaire, en étant hydrodynamique axialement mais pas radialement. Le temps d'établissement de la cohérence est donc, d'après cette théorie, inférieur au temps de relaxation τ_ϕ dans le cas non hydrodynamique donné par l'équation (4.13). En prenant une température de l'ordre de 300 nK et une taille de système de 200 μm, nous trouvons un temps d'établissement de la cohérence inférieur à 10 ms, compatible avec nos observations.

Il ne faut pas oublier ici que les calculs présentés dans la Partie 4.1.3 ont été réalisés dans le cas d'un gaz homogène, donc non piégé. Les 10 ms ne sont donc qu'un ordre de grandeur et ne s'appliquent pas directement au cas des atomes dans un piège harmonique.

Remarque : Le temps d'initiation τ_{init} donné par cette même théorie est de l'ordre de t_{coll}. Un calcul numérique a confirmé que ceci est valable dans le cas d'un piège harmonique [121, 122]. Or nous trouvons expérimentalement un temps d'initiation de l'ordre de $30t_{\text{coll}}$, comme dans l'expérience réalisée à

Munich [118] ou à Amsterdam [82]. La justification donnée par M. Köhl [118] est que l'évaporation devient 1D à cause du décalage dû à la gravité du centre du nuage atomique par rapport au centre du piège magnétique.

4.5 Conclusion

Cette expérience sur la formation des quasi-condensats nous a permis de mettre en évidence deux phénomènes. Premièrement, nous avons montré que la montée de la fraction condensée des quasi-condensats est qualitativement du même type que celle des condensats 3D sans fluctuation de phase. Les temps d'initiation et le taux de montée sont du même ordre de grandeur que ceux mesurés pour les condensats 3D peu allongés. Nous avons également observé que cette croissance s'accompagne d'oscillations quadrupolaires de la taille. En revanche, nous n'avons pas observé la formation en deux étapes signalée par le groupe de Munich [118].

Deuxièmement, nous avons mesuré la longueur de cohérence au cours de la formation du condensat, ce qui n'avait encore jamais été réalisé. Nos mesures ont clairement montré un établissement de la cohérence en moins de 100 ms de bouclier radio-fréquence, c'est-à-dire dans les 40 premières millisecondes des 500 millisecondes du temps de montée rapide de la fraction condensée. Cet établissement de la cohérence est finalement toujours plus rapide que le temps de mise à l'équilibre de la fraction condensée.

Il serait bien évidemment intéressant de mesurer la longueur de cohérence pour d'autres courbes de formation, en modifiant en particulier la densité atomique initiale, la température, le paramètre d'évaporation η ou encore les fréquences et le rapport d'anisotropie du piège. Mais ce type d'expérience présente l'inconvénient de nécessiter une prise de données importante et longue, et le problème essentiel reste certainement que l'on ne dispose d'aucune théorie avancée prédisant le temps d'établissement de cette cohérence en phase pour des atomes piégés. Le changement des paramètres pour pouvoir observer une augmentation de la longueur de cohérence au cours du temps doit donc se faire plus ou moins "en aveugle".

Enfin, il serait intéressant de faire ce type de mesures sur des condensats 3D peu allongés, et non plus des quasi-condensats. Mais notre piège ne nous permet pas d'aborder ce type de cas, l'électro-aimant ayant été conçu dans le but d'étudier des condensats avec de fortes fluctuations de phase.

Conclusion

Ce mémoire est consacré à l'étude expérimentale des propriétés de cohérence des condensats de Bose-Einstein, sources atomiques présentant une cohérence à longue portée et analogues atomiques des lasers en optique.

Pour caractériser cette cohérence en phase, nous avons mesuré la fonction de corrélation. En effet, la cohérence d'une source, quelle soit optique ou atomique, peut être directement caractérisée par la fonction de corrélation du champ ou par sa transformée de Fourier, la raie spectrale. Nous avons présenté dans le premier chapitre les formes et largeurs attendues de ces fonctions pour le condensat de Bose-Einstein, à la fois dans le cas 3D peu allongé et dans le cas fortement allongé que nous avons expérimentalement étudié.

Le deuxième chapitre nous a permis de présenter rapidement le dispositif expérimental de production du condensat ainsi que la technique utilisée pour manipuler de façon cohérente nos atomes à l'aide de la diffraction de Bragg. Les techniques d'analyse des images nous permettant d'extraire les informations essentielles à l'analyse de nos données comme la température, le nombre d'atomes ou bien encore les profils de densité, ont également été abordées. Nous avons finalement discuté des contraintes expérimentales qui ont dû être prises en compte pour la mise en place de l'élément clef qu'est la diffraction de Bragg pour nos expériences réalisées sur la cohérence.

Le manuscrit présente ensuite deux études sur les propriétés de cohérence du condensat, propriétés à la fois statiques et dynamiques. La première étude expérimentale a porté sur la cohérence en phase du condensat à l'équilibre. La spectroscopie de Bragg avait permis de montrer un accord quantitatif entre nos résultats sur la perte de cohérence dans les condensats allongés [83] et le modèle théorique de D. S. Petrov *et al* [37]. Le chapitre III présente la méthode interférométrique complémentaire que nous avons mis en place et qui nous permet d'étudier la transition entre un condensat parfaitement cohérent et un condensat partiellement cohérent. Nos mesures ont confirmé le passage de la forme gaussienne à la forme exponentielle de la fonction de corrélation lorsque l'on augmente l'amplitude des fluctuations de phase. La chute de la longueur de cohérence a également été observée et nous avons montré que la variation de celle-ci avec l'amplitude des fluctuations de phase est en accord avec la prévision théorique. Enfin, nous avons abordé le problème des franges d'interférence observées en dehors de la zone de recouvrement des condensats, phénomène déjà observé expérimentalement sur de

précédentes expériences [113], mais qui reste finalement toujours inexpliqué.

Enfin, le chapitre IV présente notre étude de la cinétique de formation du condensat. Celle-ci a tout d'abord permis d'observer la montée de la fraction condensée pour des quasi-condensats à partir d'un nuage thermique hors équilibre. Nos résultats montrent une formation qualitativement identique à celle déjà observée pour les condensats 3D peu allongés, ne présentant pas de fluctuation de phase. Enfin, nous avons réalisé la première étude quantitative visant à mesurer l'établissement de la cohérence au cours de la formation du condensat. Cette étude a montré que la cohérence se trouvait à l'équilibre quasiment dès les premières instants de la formation. Elle s'établit donc, pour les paramètres que nous avons utilisés, très rapidement en comparaison du temps de mise à l'équilibre de la fraction condensée.

Comme nous l'avons dit en introduction de ce manuscrit, l'étude de la longueur de cohérence des condensats allongés à l'équilibre est primordiale en vue de l'utilisation de ce type de sources atomiques cohérentes dans de futurs interféromètres atomiques guidés, les fluctuations de phase impliquant une réduction des performances. Mais nos études expérimentales nous permettent de montrer que ce type de sources reste d'un très grand intérêt. Tout d'abord, nous conservons une source de très grande luminance. De plus, nos résultats montrent qu'elle conserve malgré tout une cohérence macroscopique. Ainsi, pour un paramètre $T/T_\phi = 10$ et une demi-longueur de condensat de 100 μm, nous avons une longueur de cohérence de 10 μm. Celle-ci reste bien supérieure à la longueur de cohérence des sources thermiques actuellement utilisées dans les interféromètres atomiques qui est de l'ordre du dixième de micron.

Dans la continuité de ce qui a été réalisé au cours de cette thèse, il me semble désormais essentiel de comprendre de façon théorique la cinétique du processus créant la cohérence à longue portée du condensat. De nombreuses études théoriques ont été réalisées sur la montée de la fraction condensée [120–123]. Divers résultats expérimentaux ont par ailleurs montré un très bon accord avec ces modèles théoriques. Mais il reste un réel manque quant à la description quantitative de la cinétique d'établissement de la cohérence dans le cas des atomes piégés.

D'un point de vue expérimental, notre étude a permis de montrer une cohérence à longue portée déjà établie dès les premiers instants où la mesure pouvait être réalisée. Ceci donne une première échelle de temps pour l'établissement de la cohérence, mais il serait désormais intéressant de pouvoir mesurer un retard à l'établissement de la cohérence. Pour cela, il sera très certainement nécessaire d'obtenir une montée de la fraction condensée beaucoup plus rapide, avec un temps de montée idéalement inférieur à la période d'oscillation axiale du piège. Mais il ne faut pas oublier que ces expériences restent longues et difficiles à mener.

Les résultats détaillés dans ce manuscrit montrent que nous disposons, avec la

diffraction de Bragg, d'un outil très performant pour l'étude de la cohérence des condensats. Il est également possible d'utiliser cet outil et la source atomique pour développer un interféromètre, non plus afin de caractériser la source elle-même, mais pour mesurer de façon extrêmement précise diverses constantes fondamentales. Une précédente étude sur notre expérience de spectroscopie de Bragg a montré en particulier le fort potentiel dont dispose notre méthode pour mesurer le rapport h/m, rapport directement relié à la constante de structure fine α [138]. Ensuite, pour pouvoir effectivement mesurer de façon précise cette grandeur, il est nécessaire de s'affranchir au maximum des effets de la gravité qui impliquent des temps d'intéraction limités avec les atomes. La solution serait alors de réaliser ce type d'expérience dans l'espace, mais les diverses contraintes techniques les rendent encore difficilement envisageables dans un avenir très proche.

Enfin, on peut constater un certain engouement ces dernières années pour l'étude des condensats dans les réseaux ordonnés et désordonnés. Les condensats placés dans ce type de systèmes subissent en effet des transitions de phase. En l'absence de désordre, la transition de Mott, caractérisée par un nombre fixe d'atomes par site, a été mise en évidence expérimentalement en 2002 dans le groupe de I. Bloch [139]. En présence de désordre, la nature des transitions dépend du régime dans lequel nous sommes. Dans le régime des fortes intéractions, nous obtenons une transition vers le verre de Bose [140], alors que le régime des faibles interactions mène à la localisation d'Anderson [141]. Nos condensats très allongés sont particulièrement adaptés à cette dernière étude car il est alors relativement aisé d'y appliquer un potentiel désordonné : à une dimension, il est en effet possible d'utiliser des tavelures dont la taille de grain est supérieure à la taille radiale du condensat mais reste bien inférieure à la taille axiale. Les premières études réalisées sur notre expérience ont permis de montrer une suppression de l'expansion du condensat à l'ouverture du piège magnétique suivant l'axe long [142]. Là encore, la spectroscopie de Bragg pourra se révéler un outil particulièrement utile en permettant entre autres d'étudier précisément la distribution en impulsion du condensat dans ce type de système. Enfin, il pourra également être intéressant d'observer la croissance du condensat dans cette configuration et de comparer plus particulièrement la vitesse de la montée de la fraction condensée avec ou sans potentiel désordonné.

ANNEXE A

Variables

Chapitre 1

λ_{dB}	Longueur d'onde de de Broglie
$\lambda_{\mathrm{dB_{Th}}}$	Longueur d'onde de de Broglie thermique
m	Masse de l'atome
a	Longueur de diffusion dans l'onde s
g	Constante de couplage

Piégeage magnétique

V_{ext}	Potentiel de piégage
$\omega_z/2\pi$	Fréquence axiale du piège magnétique
$\omega_\perp/2\pi$	Fréquence radiale du piège magnétique
ω	Moyenne géométrique des pulsations du piège
$\bar{\omega}$	Moyenne arithmétique des pulsations du piège
a_{OH}	Taille moyenne de l'oscillateur harmonique

Caractérisation des nuages atomiques

T	Température
T_{c}^0	Température critique d'un gaz sans interaction
T_{c}	Température critique en tenant compte des interactions de champ moyen et des effets de taille finie
n	Densité atomiqe
n_{1D}	Densité atomique 1D
N	Nombre total d'atomes
N_0	Nombre d'atomes condensés
μ	Potentiel chimique
Ψ	Fonction d'onde macroscopique du condensat
Ψ_0	Fonction d'onde du condensat normalisée

X_i	Taille quadratique moyenne du nuage thermique
L	Demi-longueur du condensat
R	Demi-largeur du condensat

Fonction de corrélation et distribution en impulsion

$G^{(1)}$	Fonction de corrélation du premier ordre
$g^{(1)}$	Fonction de corrélation du premier ordre normalisée
$C^{(1)}$	Fonction de corrélation spatiale du premier ordre
$L_\phi(z)$	Longueur sur laquelle la phase varie de moins d'un radian autour du point z
L_ϕ	Longueur sur laquelle la phase varie de moins d'un radian définie sur l'ensemble du condensat
$\overline{L}_{\mathrm{C}}$	Largeur à 1/e de la fonction de corrélation spatiale du premier ordre
$P(p_z)$	Distribution en impulsion suivant l'axe z
Δp	Demi-largeur à mi-hauteur de la distribution en impulsion

Excitations et fluctuations de phase

ϵ_j	Énergie du mode de nombre quantique j du spectre des excitations (spectre de Bogoliubov)
$f_j^{\pm}$	Mode propre des excitations
$\delta\hat{n}$	Opérateur champ
$\hat{\phi}$	Opérateur phase
T_{d}	Température de dégénerescence
T_ϕ	Température de phase

Chapitre 2

Piégeage magnétique

g_F	Facteur de Landé
μ_{B}	Magnéton de Bohr
B_0	Biais du champ magnétique
B'	Gradient du champ magnétique quadrupolaire
B''	Courbure du champ magnétique dipolaire

Imagerie par absorption

α	Polarisabilité atomique
n_{at}	Indice de réfraction du milieu atomique
λ	Longueur d'onde du laser sonde
δ	Désaccord par rapport à la résonance
I_{sat}	Intensité de saturation de la transition utilisée
Γ	Largeur du niveau excité
σ_0	Section efficace d'absorption à résonance pour un atome à deux niveaux
σ	Section efficace d'absorption à résonance pour un système quelconque
C_{N}	Facteur de calibration : $\sigma = \sigma_0/C_{\mathrm{N}}$

Diffraction de Bragg

λ_{L}	Longueur d'onde des faisceaux Bragg
k_{L}	Vecteur d'onde des faisceaux Bragg
$\delta\omega$	Désaccord entre les faisceaux Bragg
Δ	Désaccord des faisceaux Bragg par rapport au niveau excité
i	Interfrange du réseau de Bragg
$v_{\mathrm{réseau}}$	Vitesse du réseau de Bragg
v_{i}	Vitesse des atomes avant diffraction
p_{i}	Impulsion des atomes avant diffraction
$\delta\omega_{\mathrm{res}}$	Désaccord entre les faisceaux Bragg à résonance pour une diffraction des atomes de vitesse v_{i}
$\delta\omega_0$	Condition de diffraction pour des atomes de vitesse nulle
v_{rec}	Vitesse de recul à un photon de l'atome
ω_{rec}	Pulsation de recul à un photon de l'atome
Ω_1	Pulsation de Rabi à un photon
$\Omega_{\mathrm{R}}^{(2n)}$	Pulsation de Rabi à $2n$ photons
Ω_{res}	Pulsation de Rabi à résonance
$\Delta\omega_{\mathrm{résolution}}$	Sélectivité en fréquence du réseau de Bragg

Chapitre 3

Expérience : Spectroscopie de Bragg

$\Delta\nu_{\mathrm{M}}$	Demi-largeur à mi-hauteur expérimentale des spectres de Bragg
$\Delta\nu_{\phi}$	Demi-largeur à mi-hauteur théoriques des spectres valables au centre du piège

w_{G}	Demi-largeur à mi-hauteur de la fonction d'appareil de la spectroscopie de Bragg

Expérience : Interférométrie

Ψ	Fonction d'onde du condensat
Φ	Phase du condensat
ϕ_{th}	Phase du condensat due aux fluctuations de phase
ϕ_{g}	Phase globale entre les deux copies de condensat de l'une des voies de l'interféromètre
s	Séparation entre condensats dans l'interféromètre
i	Interfrange du à l'interférence entre deux condensats distants de s
i_{th}	Interfrange du à l'interférence entre deux nuages thermiques distants de s

Excitations

ϕ_j	Phase du mode de nombre quantique j
ϵ_j	Énergie du mode de nombre quantique j du spectre des excitations (spectre de Bogoliubov)
ϕ_k	Phase du mode de vecteur d'onde k
ϵ_k	Énergie du mode de vecteur d'onde k du spectre des excitations
$\hbar\omega_k^{\mathrm{B}}$	Energie du spectre de Bogoliubov

Fonction de corrélation et longueur de cohérence

$C^{(1)}$	Fonction de corrélation spatiale du premier ordre
C^{eff}	Fonction de corrélation effective
L_{C}	Largeur à 1/e de la fonction de corrélation effective

Chapitre 4

Paramètres expérimentaux

ν_{i}	Radio-fréquence initiale, juste au dessus du seuil de condensation
ν_{f}	Radio-fréquence à la fin de rampe d'évaporation rapide
ν_0	Radio-fréquence correspondant au fond du piège
η	Paramètre d'évaporation
t_{i}	Temps de bouclier avant la rampe d'évaporation rapide permettant d'ajuster les conditions initiales de l'expérience
t_{bouclier}	Temps de bouclier après la rampe d'évaporation rapide

T_i	Température avant la rampe d'évaporation rapide
T_f	Température après la rampe d'évaporation rapide
N_i	Nombre d'atomes total avant la rampe d'évaporation rapide

Régime hydrodynamique et thermalisation

σ_c	Section efficace de collisions élastiques
l_lpm	Libre parcours moyen
$x_{\perp,z}$	Largeur à $1/e$ du nuage thermique
t_coll	Temps entre deux collisions successives
t_locale	Temps de thermalisation locale
t_globale	Temps de thermalisation globale

Oscillations quadrupolaires

$\omega_\mathrm{Q}^\mathrm{th}$	Fréquence du mode d'oscillation quadrupolaire du nuage thermique
ω_Q	Fréquence du mode d'oscillation quadrupolaire du condensat
τ_Q	Temps d'amortissement à $1/e$ des oscillations du mode quadrupolaire

Caractérisation de la montée de la fraction condensée

μ_C	Potentiel chimique du condensat
μ	Potentiel chimique du nuage thermique à l'équilibre
Γ	Taux de montée de la fraction condensée
t_init	Délai avant la montée rapide de la fraction condensée ou temps d'initiation

Spectroscopie de Bragg

$\Delta\nu_\mathrm{M}$	Demi-largeur à mi-hauteur des spectres de Bragg mesurés
Δp_M	Demi-largeur à mi-hauteur des distributions en impulsion correspondantes
$\Delta\nu_\mathrm{eq}$	Demi-largeur à mi-hauteur des spectres calculée à l'équilibre

ANNEXE B

Atome de ^{87}Rb et transitions laser

B.1 Données sur l'atome de ^{87}Rb

Structure du ^{87}Rb

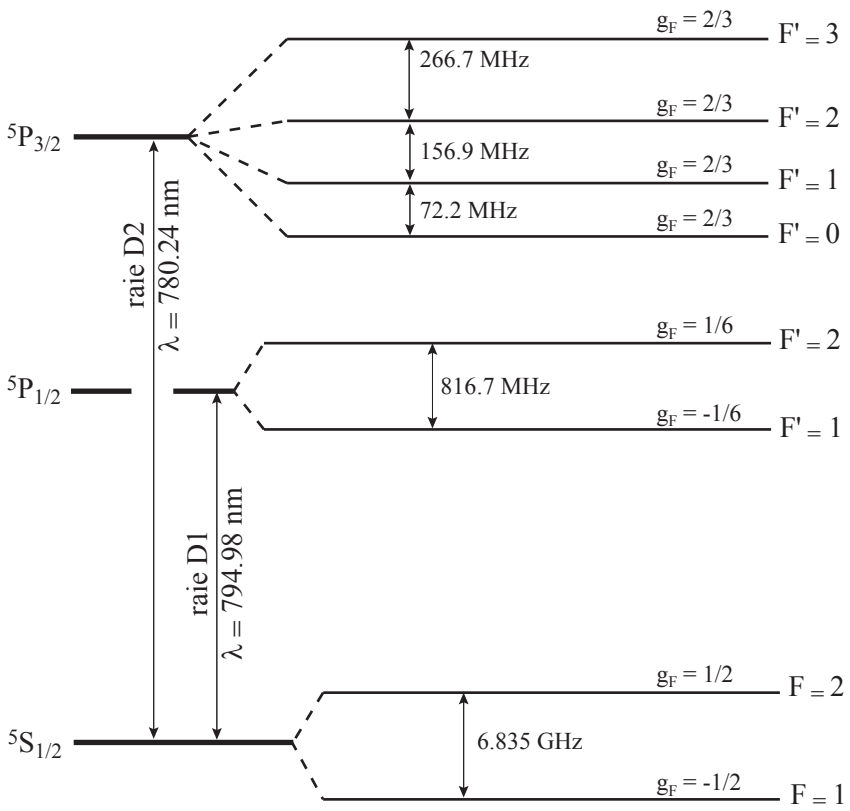


FIG. B.1 – *Niveaux atomiques des raies D_1 et D_2 du ^{87}Rb. Les longueurs d'onde sont données dans le vide.*

Masse de l'atome : $m = 1,44 \times 10^{-25}$ kg
Longueur de diffusion : $a = 5,31$ nm

Caractéristique de la raie D_2

Largeur de raie	$\Gamma = 2\pi \times 6,06$ MHz
Longueur d'onde dans le vide	$\lambda_{\text{vide}} = 780,24$ nm
Longueur d'onde dans l'air	$\lambda_{\text{air}} = 780,03$ nm
Intensité de saturation	$I_{\text{sat}} = 1,6\,\text{mW/cm}^2$
Vitesse de recul	$v_{\text{recul}} = 5,88\,\text{mm/s}$

Un grand nombre de données numériques sont fournies dans [143].

B.2 Transitions lasers

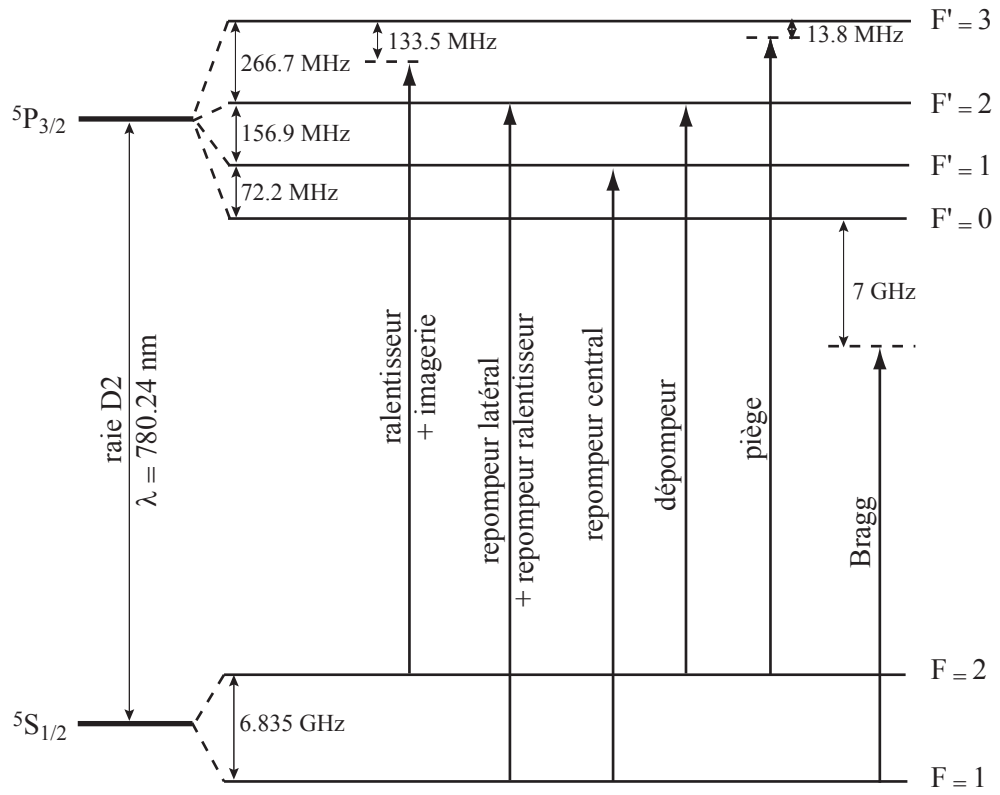


FIG. B.2 – *Transitions utilisées pour le piégeage, le refroidissement, l'imagerie et la diffraction de Bragg*

ANNEXE C

Modification du paramètre d'évaporation due à la gravité

C.1 Paramètre d'évaporation

Le potentiel correspondant au champ magnétique est donné par :

$$V_{\text{ext}} = \frac{1}{2}m(\omega_\perp^2 x^2 + \omega_\perp^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) + V_0, \tag{C.1}$$

V_0 étant une constante. Ce potentiel correspond au potentiel de piégeage des atomes si la gravité est négligée. Nous réalisons l'évaporation à l'aide d'un champ radio-fréquence de valeur ν_{f} qui couple les atomes les plus chauds vers un état anti-piégeant. On représente schématiquement ceci par un potentiel de piégeage "tronqué" à une hauteur $\epsilon_{\text{cut}} = h(\nu_{\text{f}} - \nu_0)$, comme cela est représenté sur la Figure C.1. La fréquence ν_0 correspond à la valeur de la radio-fréquence vidant le piège de tous ses atomes. Elle correspond donc au fond du piège et vaut $\nu_0 = V_0/h$.

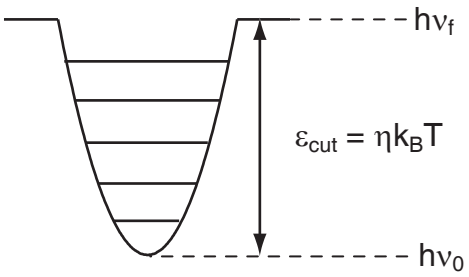


FIG. C.1 – *Potentiel magnétique et paramètre d'évaporation.*

L'évaporation est caractérisée à l'aide du paramètre $\eta = \epsilon_{\text{cut}}/k_{\text{B}}T$ qui caractérise la hauteur du piège tronqué en unité de $k_{\text{B}}T$. En l'absence de gravité, η est simplement donné par :

$$\eta = \frac{h\Delta\nu}{k_{\text{B}}T}, \tag{C.2}$$

avec $\Delta\nu = \nu_{\text{f}} - \nu_0$. Plus le paramètre η est grand, plus les atomes éjectés du piège ont une haute énergie et donc plus le refroidissement évaporatif est efficace.

En revanche, la probabilité d'évaporation est plus faible, ce qui implique une évaporation plus lente. Expérimentalement, pour l'obtention d'un condensat à l'équilibre, nous nous plaçons à $\eta > 6$ afin d'être dans le régime d'emballement qui permet d'avoir une augmentation du taux de collisions élastiques au cours du refroidissement et donc une amélioration des performances d'évaporation au cours de ce refroidissement [85].

Dans le cas de notre expérience sur l'étude de la formation du condensat décrite au Chapitre 4, avec une température initiale de typiquement 600 nK et une radio-fréquence telle que $\Delta\nu = 40$ kHz, nous trouvons un paramètre d'évaporation initial $\eta = 3,2$. Lorsque l'équilibre est atteint, la radio-fréquence est toujours de $\Delta\nu = 40$ kHz et la température vaut approximativement 230 nK. Le paramètre η vaut alors 8,4.

C.2 Effet de la gravité

Lorsque l'on prend en compte l'effet de la gravité, nous trouvons que le potentiel de piégeage ressenti par les atomes est donné par :

$$V_{\text{ext}} = \frac{1}{2}m[\omega_\perp^2(x-A)^2 + \omega_\perp^2 y^2 + \omega_z^2 z^2] + V_0, \tag{C.3}$$

où l'origine spatiale correspond ici à la position du minimum du champ magnétique. Le centre du nuage atomique est donc déplacé de $A = g/\omega_\perp^2 = 0,59\ \mu$m[1] par rapport à l'origine. En revanche, les sous-niveaux Zeeman sont déplacés par le champ magnétique, mais ne sont bien évidemment pas sensibles à la gravité. Ainsi, la condition de résonance entre les sous-niveaux Zeeman couplés par la radio-fréquence ne dépend que du champ magnétique qui varie spatialement.

Ce décalage du centre du piège dû à la gravité a d'importantes conséquences sur l'évaporation. Sur la Figure C.2 sont représentés les équipotentiels du potentiel de piégeage en trait plein et dont le centre est déplacé de A, et les équipotentiels de champ magnétique en traits pointillés centrés sur 0. Le point central représente le centre du potentiel de piégeage. L'équipotentiel de champ magnétique de rayon le plus faible correspond au fond du piège. Ensuite, pour une valeur de radio-fréquence fixée, correspondant à l'équipotentiel de rayon le plus grand, la position des atomes éjectés du piège dont l'énergie est la plus basse correspond à la position de la croix. L'énergie des atomes couplés par le champ radio-fréquence est alors plus faible que dans le cas où la gravité est négligée.

[1] Dans cette annexe, nous prenons les paramètres du piège utilisés dans l'expérience de formation du condensat décrite dans le chapitre 4. Les fréquences du piège sont donc $\omega_\perp/2\pi = 655$ Hz et $\omega_z/2\pi = 6,55$ Hz.

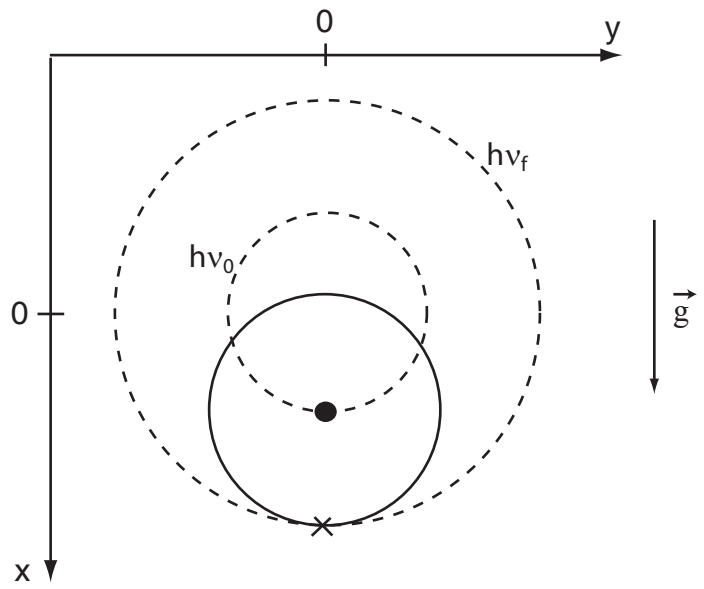


FIG. C.2 – *Equipotentiels du champ magnétique (traits pointillés) et du potentiel de piégeage (trait plein). Le point indique le centre du nuage atomique. La croix indique l'intersection entre le potentiel magnétique de valeur $h\nu_{\mathrm{f}}$ et l'équipotentiel du potentiel de piégeage de plus basse énergie couplé par la radio-fréquence.*

C.3 Paramètre d'évaporation incluant l'effet de la gravité

La Figure C.3 présente une coupe du potentiel de piégeage et du potentiel magnétique suivant l'axe x qui est l'axe suivant la gravité, ce dernier potentiel donnant le déplacement du sous niveau Zeeman piégé $m_F = -1$. Les atomes se trouvant au fond du piège déplacé de A sont couplés vers le niveau anti-piégeant $m_F = 0$ pour une radio-fréquence :

$$\nu_0 = \frac{\frac{1}{2}m\omega_\perp^2 A^2 + V_0}{h}. \tag{C.4}$$

Un champ radio-fréquence de valeur ν_{f} va coupler les atomes de plus basse énergie vers un état anti-piégeant en x_{cut} qui est tel que :

$$x_{\mathrm{cut}} = \sqrt{\frac{h\Delta\nu + \frac{m}{2}\omega_\perp^2 A^2}{\frac{m}{2}\omega_\perp^2}}, \tag{C.5}$$

avec $\Delta\nu = \nu_{\mathrm{f}} - \nu_0$. Tous les atomes ayant une énergie inférieure à :

$$\epsilon_{\mathrm{cut}} = \frac{m}{2}\omega_\perp^2 (x_{\mathrm{cut}} - A)^2 \tag{C.6}$$

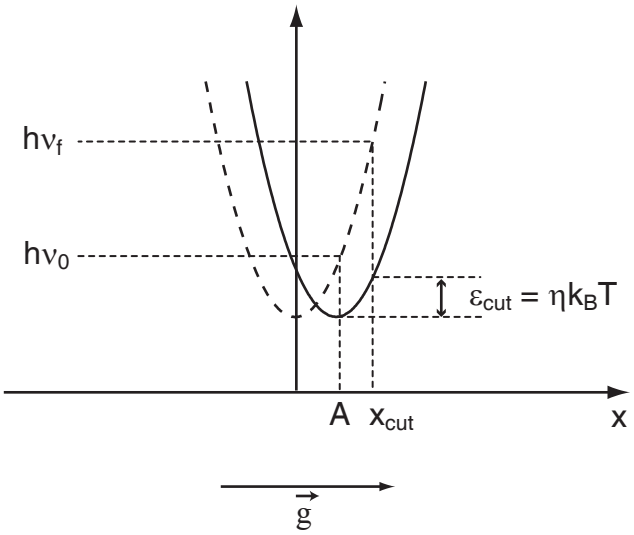


FIG. C.3 – *Coupe suivant l'axe x du potentiel magnétique (traits pointillés) et du potentiel de piégeage (trait plein) en tenant compte de la gravité. La fréquence ν_0 est la fréquence qui vide le piège de tous ses atomes. La fréquence ν_f couple les atomes de plus basse énergie en x_{cut}.*

restent dans le piège.

En reprenant les données de température et de radio-fréquence précédentes, nous trouvons un paramètre d'évaporation initial de 2,5 et un paramètre d'évaporation final de 6,5. L'effet de la gravité diminue ici d'environ 20 % le paramètre d'évaporation comparé au cas où l'on néglige l'effet de la gravité. Cette différence importante montre ici que l'effet de la gravité n'est absolument pas négligeable dans le processus d'évaporation sur ce piège, et ceci d'autant plus que la température est basse.

ANNEXE D

Articles

Momentum distribution and correlation function of quasi-condensates in elongated traps

F. Gerbier, J. H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, et A. Aspect

Phys. Rev. A **67** 051602(R) (2003)

Momentum Spectroscopy of 1D Phase Fluctuations in Bose-Einstein Condensates

S. Richard, F. Gerbier, J.H. Thywissen, M. Hugbart, P. Bouyer, et A. Aspect

Phys. Rev. Lett. **91** 010405 (2003)

Critical Temperature of a Trapped, Weakly Interacting Bose Gas

F. Gerbier, J. H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, et A. Aspect

Phys. Rev. Lett. **92** 030405 (2004)

Experimental study of the thermodynamics of an interacting trapped Bose-Einstein condensed gas

F. Gerbier, J. H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, et A. Aspect

Phys. Rev. A **70** 013607 (2004)

Coherence length of an elongated condensate : a study by matter-wave interferometry

M. Hugbart, J. A. Retter, F. Gerbier, A. F. Varón, S. Richard, J. H. Thywissen, D. Clément, P. Bouyer, et A. Aspect

Eur. Phys. J. D **35** 155 (2005)

PHYSICAL REVIEW A **67**, 051602(R) (2003)

Momentum distribution and correlation function of quasicondensates in elongated traps

F. Gerbier,* J. H. Thywissen,† S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, and A. Aspect
Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique,‡ 91403 Orsay, France
(Received 5 November 2002; published 27 May 2003)

We calculate the spatial correlation function and momentum distribution of a phase-fluctuating, elongated three-dimensional condensate in a trap and in free expansion. We take the inhomogeneous density profile into account via a local-density approximation. We find an almost Lorentzian momentum distribution, in stark contrast with a Heisenberg-limited Thomas-Fermi condensate.

DOI: 10.1103/PhysRevA.67.051602 PACS number(s): 03.75.Hh, 05.30.Jp

Low-dimensional, degenerate Bose gases are expected to have significantly different coherence properties than their three-dimensional (3D) counterparts. In one-dimensional (1D) uniform systems, no true condensate can exist at any temperature T because of a large population of low-lying states that destroys the phase coherence (see Ref. [1] and references therein). For a trapped gas, the situation is different—the finite size of the sample naturally introduces a low-momentum cutoff, and at sufficiently low temperature, $T \ll T_\phi$, a phase coherent sample can exist [1]. Above T_ϕ, the degenerate cloud is a so-called *quasicondensate*—the density has the same smooth profile as a true condensate, but the phase fluctuates in space and time. As shown in Ref. [2], this analysis holds also for 3D condensates in elongated traps even if, strictly speaking, radial motion is not frozen. Such 3D, phase-fluctuating condensates have been recently observed experimentally in equilibrium [3] and nonequilibrium [4] samples.

Phase fluctuations of the condensate are caused mainly by long-wavelength (or low-energy) collective excitations [1,2,5]. In elongated traps, the lowest-energy modes are 1D excitations along the long axis of the trap [6]. Furthermore, in the long-wavelength limit, density fluctuations are small and can be neglected for the calculation of the correlation function [1,7]. Then, the single-particle density matrix is, assuming cylindrical symmetry,

$$\langle \hat{\Psi}^\dagger(\rho,z)\hat{\Psi}(\rho,z')\rangle \approx \chi(\rho,Z,s)e^{-(1/2)\Delta\phi^2(Z,s)}. \qquad (1)$$

We have introduced $\Delta\phi^2(Z,s)=\langle[\phi(z)-\phi(z')]^2\rangle$, the variance of the phase difference between two points z,z' on the axis of the trap, with mean coordinate $Z=(z+z')/2$ and relative distance $s=z-z'$, and the overlap function $\chi=\sqrt{n_0(\rho,z)n_0(\rho,z')}$, where n_0 is the (quasi)condensate density. The variance $\Delta\phi^2(Z,s)$, the key quantity to characterize the spatial fluctuations of the phase of the condensate, has been calculated in Ref. [2], and an analytical form has been given, which is valid near the center of the trap (i.e., for $Z,s \ll L$, with L the condensate half length). The first goal of this paper is to find an analytical approximation for the variance $\Delta\phi^2(Z,s)$ valid across the whole sample. This is motivated by the fact that experiments with quasicondensates [15,16] are quite sensitive to the inhomogeneity of the sample. In position space, interferometry [10,11] gives access to the spatial correlation function $\mathcal{C}^{(1)}(s)$ (see, e.g., Ref. [12])

$$\mathcal{C}^{(1)}(s)=\int d^3\mathbf{R}\langle\hat{\Psi}^\dagger(\rho,Z+s/2)\hat{\Psi}(\rho,Z-s/2)\rangle. \qquad (2)$$

Equivalently, one can measure the axial (i.e., integrated over transverse momenta) momentum distribution $\mathcal{P}(p_z)$, which is the Fourier transform of $\mathcal{C}^{(1)}(s)$ [12,13,14]:

$$\mathcal{P}(p_z)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int ds\mathcal{C}^{(1)}(s)e^{-ip_z s/\hbar}. \qquad (3)$$

A powerful tool to measure $\mathcal{P}(p_z)$ is Bragg spectroscopy with large momentum transfer, as demonstrated in Ref. [14] for a 3D condensate, and recently applied in our group to perform the momentum spectroscopy of a quasicondensate [15]. It is clear that both $\mathcal{C}^{(1)}$ and $\mathcal{P}$ are sensitive to the inhomogeneity of the system. Our second goal is to obtain explicit expressions for these two important quantities.

This paper is organized as follows. First, we summarize the results of Ref. [2], and give an energetic interpretation of T_ϕ. Next, we discuss in detail a local-density approach (LDA) to compute the variance of the phase for any mean position in the trap. This approximation is found to be accurate for $T \gg 8T_\phi$, when applied to a trapped condensate. Using the LDA, we then address the problem of a phase-fluctuating condensate in free expansion. In particular, we point out that at a higher temperature, the phase fluctuations dominate over the mean-field release velocity and govern the shape of the momentum distribution.

We consider N_0 condensed atoms, trapped in a cylindrically symmetric harmonic trap, with an aspect ratio $\lambda=\omega_z/\omega_\square \ll 1$. If $\mu \gg \{\hbar\omega_\square,\hbar\omega_z\}$, the condensate is in the 3D Thomas-Fermi (TF) regime [16]. The density has the well-known inverted parabola form: $n_0(\mathbf{r})=n_{0\mathrm{m}}(1-\tilde{\rho}^2-\tilde{z}^2)$, with the peak density $n_{0\mathrm{m}}=\mu/g$ related to the chemical potential μ. From now on, we will use the reduced coordinates $\tilde{\rho}=\rho/R$ and $\tilde{z}=z/L$, with $R^2=2\mu/M\omega_\square^2$ and $L^2=2\mu/M\omega_z^2$, respectively.

As shown in Ref. [1], the phase fluctuations in trapped gases are mostly associated with thermally excited, low-energy quasiparticles (the quantum fluctuations are negligible). Under these conditions, the variance $\Delta\phi^2(\tilde{Z},\tilde{s})$ is

*Email address: fabrice.gerbier@iota.u-psud.fr
†Present address: Department of Physics, University of Toronto, Canada.
‡UMRA 8501 du CNRS.

 ©2003 The American Physical Society

$$\Delta\phi^2(\tilde{Z},\tilde{s}) \approx \sum_j \frac{2k_B T}{\hbar\omega_j} |\phi_j(\tilde{Z}+\tilde{s}/2) - \phi_j(\tilde{Z}-\tilde{s}/2)|^2, \quad (4)$$

where the sum extends over the 1D axial excitations, with energy $\hbar\omega_j$ and occupation number $N_j \approx k_B T/\hbar\omega_j$ for $N_j \gg 1$. For a 3D condensate in an elongated trap, the amplitude ϕ_j is proportional to a Jacobi polynomial $P_j^{(1,1)}$, and $\omega_j = \omega_z\sqrt{j(j+3)}/2$ [6] for integer j. The explicit result for the variance is then [2]

$$\Delta\phi^2(\tilde{Z},\tilde{s}) = \frac{T}{T_\phi} f(\tilde{Z},\tilde{s}), \quad (5)$$

with $f(\tilde{Z},\tilde{s}) = \Sigma_j F_j [P_j^{(1,1)}(\tilde{Z}+\tilde{s}/2) - P_j^{(1,1)}(\tilde{Z}-\tilde{s}/2)]^2$ and the coefficients $F_j = (j+2)(j+3/2)/4j(j+1)(j+3)$. Below the characteristic temperature $T_\phi = 15N_0(\hbar\omega_z)^2/32\mu k_B$, the phase profile is almost flat, and the single-particle density matrix (1) is limited by the overlap function χ; therefore the characteristic width of $\mathcal{C}^{(1)}$ (i.e., the coherence length) is of the order of L. On the other hand, if $T \gg T_\phi$ the variance $\Delta\phi^2$ dominates the behavior of $\mathcal{C}^{(1)}$, and the coherence length is substantially smaller than L. Near the center of the trap $(\tilde{Z},\tilde{s} \ll 1)$, Petrov *et al.* [2] have derived the simple law $\Delta\phi^2(\tilde{Z},\tilde{s}) \approx (T/T_\phi)|\tilde{s}|$ and introduced the characteristic phase-coherence length $L_\phi = LT_\phi/T$ which depends implicitly on the temperature, on the number of condensed atoms, and on the trapping geometry.

We can understand this expression for L_ϕ from energetic considerations. A random-phase gradient of the condensate wave function, on a length scale L_ϕ, requires an average kinetic energy $E_\phi \sim N_0\hbar^2/ML_\phi^2$. This kinetic energy is supplied by the thermal excitations that drive the fluctuations of the phase [5]. As these excitations are quasiclassical ($N_k \gg 1$), this energy is of order $k_B T$ times the number of relevant modes. In 1D k space, the distribution of the relevant excitations extends over $\sim 1/L_\phi$, and the spacing between modes is $\sim 1/L$ because of the finite size of the system—this gives L/L_ϕ relevant modes. By equating the two expressions for E_ϕ, we recover finally $L_\phi \sim LN_0(\hbar\omega_z)^2/\mu k_B T$.

As indicated earlier, it is important to take the full spatial dependence of $\Delta\phi^2(\tilde{Z},\tilde{s})$ into account for quantitative comparison with experiments. In any case, Eq. (5) can be evaluated numerically. However, we gain physical insight with an analytical approach based on the LDA, also used in Ref. [3] to calculate the evolution of the density in time of flight. This approximation considers that the condensate is locally equivalent to a homogeneous medium, however, with a slowly varying density that depends on the trapping potential. If $T \gg T_\phi$, the coherence length is sufficiently small compared to L, so that the LDA is valid for the calculation of correlation properties.

The first step is to consider a finite cylinder of length $2L$, with radial harmonic trapping and periodic boundary conditions along z (and therefore homogeneous axial density). For this geometry, we find in the TF regime $n_0(\mathbf{r}) = n_{0m}(1-\tilde{\rho}^2)$ for the condensate wave function. The low-lying excitations are found using standard Bogoliubov theory [5] after averaging over the transverse degrees of freedom [6]. The Bogoliubov spectrum for the excitation frequencies is $\omega_k^B = [\omega_k(\omega_k + Mc_{1d}^2/\hbar)]^{1/2} \approx c_{1D}k$ for small k, with the free particle energy $\hbar\omega_k = \hbar^2k^2/2M$ and the 1D speed of sound $c_{1D} = \sqrt{\mu/2M}$ [17]. The Fourier component for phase fluctuations with wave vector k is

$$\phi_k = \sqrt{\frac{\omega_k^B}{2\omega_k}}\frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}} \approx \sqrt{\frac{Mc_{1D}}{\hbar k}}\frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}}, \quad (6)$$

where the final expression holds for low-lying phonon states $(k \to 0)$, and $\mathcal{V} = 2\pi n_{0m}R^2L$. In a second step, we take into account the trapping potential by the substitution

$$\mu \to \mu - \frac{1}{2}M\omega_z^2 z^2. \quad (7)$$

This implies directly the following replacements:

$$\begin{aligned} \text{density:} \quad & n_{0m}(\propto\mu) \to n_{0m}(1-\tilde{z}^2), \\ \text{speed of sound:} \quad & c_{1D}(\propto\sqrt{\mu}) \to c_{1D}\sqrt{1-\tilde{z}^2}, \\ \text{radius:} \quad & R(\propto\sqrt{\mu}) \to R\sqrt{1-\tilde{z}^2}, \\ \text{half length:} \quad & L \to L. \end{aligned} \quad (8)$$

With these substitutions, we recover the 3D TF density profile. We require that the excitation frequency $c_{1D}k$ is not modified as well, which implies replacing k with $k(1-\tilde{z}^2)^{-1/2}$ and using a density of states $\mathcal{N}(k)dk = (L/\pi)(1-\tilde{z}^2)^{-1/2}dk$. For the position-dependent variance of the phase, we find [18]

$$\Delta\phi^2(\tilde{Z},\tilde{s}) \approx \frac{T}{T_\phi}\frac{|\tilde{s}|}{(1-\tilde{Z}^2)^2}. \quad (9)$$

The $\tilde{Z}$-dependent phase-coherence length $L_\phi(1-\tilde{Z}^2)^2$, appearing in Eq. (9), can be substantially smaller near the edges of the trap than in the center. We will see that this reduces the average coherence length below its value at the center of the trap.

We deduce from Eqs. (1), (2), and (9) the correlation function

$$\mathcal{C}^{(1)}_{\text{trap,T}}(\tilde{s}) \approx \frac{15N_0}{8}\int_0^{\sqrt{1-\tilde{s}^2/4}} d\tilde{z}(1-\tilde{z}^2-\tilde{s}^2/4)^2 \times \exp\left(-\frac{T}{2T_\phi}\frac{|\tilde{s}|}{(1-\tilde{z}^2)^2}\right). \quad (10)$$

In deriving Eq. (10), we have used the approximation for the overlap function $\chi(\rho,Z,s) \approx (1-\tilde{\rho}^2-\tilde{z}^2-\tilde{s}^2/4)$, which is valid near the center of the trap. In Fig. 1, we compare the result (10) to the correlation function following from the numerical integration of Eq. (5). In the $T=0$ limit, the correlation function is limited by the overlap χ. Because of the

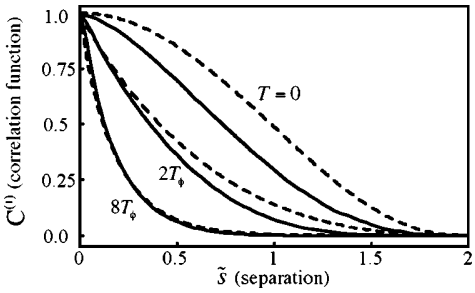


FIG. 1. Spatial correlation function $\mathcal{C}^{(1)}(\tilde{s})$ of a trapped quasicondensate. The solid lines follow from the numerical evaluation of the result (5) derived in Ref. [2], for $T=0$, $T/T_\phi=4$, and $T/T_\phi=8$, in order of decreasing width. The dashed lines follow from the local-density approximation (10). Note that for convenience, $\mathcal{C}^{(1)}(\tilde{s})$ as shown here is normalized to 1 rather than to N_0, different from what is done in the text.

approximate form of χ, our result $\mathcal{C}^{(1)}_{\mathrm{trap,T=0}} \approx N_0[1-(\tilde{s}/2)^2]^{5/2}$ is about 25% too broad, and one should rather use the Gaussian approximation to $\mathcal{C}^{(1)}$, derived in Ref. [13]. As T increases, $\mathcal{C}^{(1)}$ turns to an exponential-like function, and our approximation approaches the numerical calculation. For $T>8T_\phi$, the LDA result is very close to the numerical one (maximum error $\approx 3\%$). For $T \gg T_\phi$, Eq. (10) can be further simplified by keeping the $\tilde{s}$-dependent term only in the exponential. The Fourier transform then gives the momentum distribution

$$\mathcal{P}_{\mathrm{trap,T}}(p_z) \approx \frac{15N_0 p_\phi}{32\pi}\int_{-1}^{1} d\tilde{z}\frac{(1-\tilde{z}^2)^4}{(1-\tilde{z}^2)^4 p_z^2 + p_\phi^2/4}, \quad (11)$$

where $p_\phi = \hbar/L_\phi$ is a typical momentum associated with the phase fluctuations. This function is self-similar in p_z/p_ϕ, and approximated to better than 4% by a normalized Lorentzian with a half-width at half maximum (HWHM) of $\Delta p = 0.67 p_\phi$. This Lorentzian shape of the momentum distribution differs qualitatively from the fully coherent case, where it is almost Gaussian and limited by the Heisenberg principle [14]. The increase of the phase fluctuations with increasing T not only broadens the momentum distribution, but also induces the appearance of "wings," which form the "high-energy tail" of the quasicondensate. To quantify the accuracy of our approximation, we have calculated numerically the Fourier transform of the correlation function. We find empirically that the HWHM is accounted for by the formula $\Delta p^2 \approx (2.04\hbar/L)^2 + (0.65\hbar/L_\phi)^2$. The first term corresponds to the Heisenberg-limited momentum width, and the second to the phase fluctuations. For $T \gg 8T_\phi$, the height and width agree to better than 4% with the Lorentzian approximation. For lower T, the overlap function χ still affects the momentum distribution.

Note finally that the momentum distribution is Lorentzian only in the domain $k \ll R^{-1}$. Outside this region, the 3D nature of the excitations should be taken into account properly. However, this does not affect the quasicondensate peak we are investigating here, but only the much smoother thermal background [13,14].

The results of the above paragraphs are valid for an equilibrium situation. However, coherence measurements involving Bragg scattering [10,14] suffer from two major difficulties in a very elongated trap [15]: mean-field broadening of the resonance [14] and elastic scattering from the recoiling atoms and the condensate towards initially empty modes [19]. Both of these problems can be solved by opening the trap abruptly, and allowing the Bose-Einstein condensates to expand to decrease its density before measurement. In the remainder of this paper, we discuss how expansion modifies the momentum distribution and the correlation function, assuming that the expansion time is chosen to be long enough to neglect the collisions.

For a pure elongated condensate, abruptly released from the trap at $t=0$, the explicit solution was found in Ref. [20]. The condensate density keeps its initial Thomas-Fermi shape, with the coordinates rescaled. The (small) axial momentum from the released mean-field energy is linear in position: $p_z \approx p_{\mathrm{exp}}\tilde{z}$, with $p_{\mathrm{exp}} = (\pi/\sqrt{2})\lambda M c_S$ for $\tau = \omega_\square t \gg 1$, and $c_S = \sqrt{\mu/M}$ is the 3D speed of sound. The axial momentum distribution mirrors the (integrated) density distribution:

$$\mathcal{P}_{\mathrm{exp,T=0}}(p_z) = \frac{15}{16 p_{\mathrm{exp}}}\left[1-\left(\frac{p_z}{p_{\mathrm{exp}}}\right)^2\right]^2. \quad (12)$$

This expression holds for a pure condensate, at $T=0$, as indicated. For a phase-fluctuating condensate at finite T, it is necessary to consider the time evolution of the fluctuations as well. As shown in Ref. [3], the momentum distribution partially converts into density modulations after time of flight. An explicit solution was derived for the density fluctuations in the axially homogeneous case. Using the continuity equation (after radial averaging), we find for $\tau \gg 1$,

$$\phi_k(z,\tau) \approx \phi_k(z,0)\,\tau^{-(\omega_k^{\mathrm{B}}/\omega_\square)^2}\cos\left(\frac{\omega_k}{\omega_\square}\tau\right). \quad (13)$$

If $\omega_z t \ll (\mu/\hbar\omega_z)(T/T_\phi)^2$, then for all $k \lesssim L_\phi^{-1}$, the phase distribution is essentially frozen: $\phi_k(z,\tau) \approx \phi_k(z,0)$. Physically, this condition states that for such a time of flight, the excitations that have significant contributions to the phase fluctuations have not yet been converted into density modulations. This condition is not at all restrictive for typical experimental parameters [3,4,15], and we suppose it is met in the remainder of the paper.

Using the rescaled wave function from Ref. [20], together with Eq. (9), we find the correlation function for the expanding quasicondensate:

$$\mathcal{C}^{(1)}_{\mathrm{exp,T}}(\tilde{s}) \approx \frac{15N_0}{16}\int_{-1}^{1} d\tilde{z}(1-\tilde{z}^2)^2 \times \exp\left(i\frac{\pi\mu}{\hbar\omega_\square}\tilde{z}\tilde{s} - \frac{T}{2T_\phi}\frac{|\tilde{s}|}{(1-\tilde{z}^2)^2}\right). \quad (14)$$

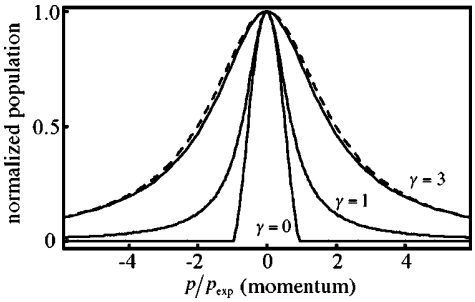


FIG. 2. The momentum distribution in expansion g_γ [Eq. (16)] for $\gamma = p_\phi / p_{\rm exp} = 0,1,3$. As γ increases, g_γ continuously transforms from a quartic profile to a Lorentzian-like profile (see text). For $\gamma = 3$, we find little change from the momentum distribution in the trap (dashed line, a Lorentzian with HWHM 0.67γ, see text). The functions have been rescaled by their maximum values to facilitate comparison.

The phase factor in Eq. (14) accounts for the local expansion momentum introduced above (recall $\pi\mu/\hbar\omega_\square \gg 1$). The Fourier transform gives the momentum distribution

$$\mathcal{P}_{\rm exp,T}(p_z) \approx \frac{N_0}{p_{\rm exp}} g_{\gamma = p_\phi / p_{\rm exp}}\left(\frac{p_z}{p_{\rm exp}}\right). \tag{15}$$

The function g_γ is given by

$$g_\gamma(x) = \frac{15\gamma}{32\pi}\int_{-1}^{1} d\tilde{z} \frac{(1-\tilde{z}^2)^4}{(1-\tilde{z}^2)^4 (x-\tilde{z})^2 + \frac{\gamma^2}{4}}, \tag{16}$$

and the ratio $\gamma = p_\phi / p_{\rm exp}$ controls the component of the momentum distribution which dominates. In the limit $T \to 0$, using $\gamma/(x^2+\gamma^2) \to \pi\delta(x)$ as $\gamma \to 0$, we recover the zero-temperature result (12). On the other hand, if $\gamma \gg 1$, we expect the momentum distribution to be similar to the distribution in the trap (11). Figure 2 shows a numerical calculation of g_γ for various values of γ. We find that already for $p_\phi \gtrsim 2p_{\rm exp}$, the momentum distribution is almost entirely dominated by phase fluctuations and, as in the trapped case, is very well approximated by a normalized Lorentzian with HWHM $= 0.67 p_\phi$. Here, we note the following two points: first, that the Heisenberg width $\sim \hbar/L$ is negligible at any temperature, and second that, for large enough condensates, we can have $p_{\rm exp} \gg p_\phi$ even if the coherence length is smaller than L.

In summary, we have analyzed the measurement of phase fluctuations in elongated Bose condensates. Within a local-density approach, we have been able to take the density profile into account, and derived analytical formulas for the correlation function and the momentum distribution of static and freely expanding quasicondensates. In the regime of interest, the formula compares well to a numerical evaluation based on the results of Ref. [2], which are exact in the long-wavelength limit. In particular, we show how the shape of the momentum distribution tends to a Lorentzian with half-width $\approx 0.67\hbar/L_\phi$ as one goes further in the phase-fluctuating regime. We believe that these results may be helpful to understand quantitatively the experiments involving quasicondensates [3,4,15].

We gratefully acknowledge D. S. Petrov and G. V. Shlyapnikov for many stimulating discussions, for useful comments on the manuscript, and also for providing us with a detailed version of the calculations published in Ref. [3]. This work was supported by the EU and DGA. M.H. is supported by IXSEA.

[1] D.S. Petrov, G.V. Shlyapnikov, and J.T.M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **85**, 3745 (2000).
[2] D.S. Petrov, G.V. Shlyapnikov, and J.T.M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **87**, 050404 (2001).
[3] S. Dettmer *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 160406 (2001); D. Hellweg *et al.*, Appl. Phys. B: Lasers Opt. **73**, 781 (2001).
[4] I. Schvarchuck *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 270404 (2002).
[5] E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, *Statistical Physics* (Butterworth-Heinemann, London, 1980), Pt. 2.
[6] S. Stringari, Phys. Rev. A **58**, 2385 (1998).
[7] It is necessary to improve Bogolubov theory [8,9] to obtain the equation of state in any dimensions, in the presence of phase fluctuations. For the specific problem we address in this paper, the long-wavelength formulation is sufficient.
[8] J.O. Andersen, U. Al Khawaja, and H.T.C. Stoof, Phys. Rev. Lett. **88**, 070407 (2002); U. Al Khawaja, J.O. Andersen, N.P. Proukakis, and H.T.C. Stoof, Phys. Rev. A **66**, 013615 (2002).
[9] C. Mora and Y. Castin, Phys. Rev. A (to be published).
[10] E.W. Hagley *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3112 (1999).
[11] I. Bloch, T.W. Hänsch, and T. Esslinger, Nature (London) **403**, 166 (2000).
[12] C. Cohen-Tannoudji and C. Robilliard, C. R. Acad. Sci., Ser IV: Phys., Astrophys. **2**, 445 (2001).
[13] F. Zambelli, L. Pitaevskii, D.M. Stamper-Kurn, and S. Stringari, Phys. Rev. A **61**, 063608 (2000).
[14] J. Stenger, S. Inouye, A.P. Chikkatur, D.M. Stamper-Kurn, D.E. Pritchard, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **82**, 4569 (1999); D. Luxat and A. Griffin, Phys. Rev. A **67**, 043603 (2003).
[15] S. Richard, F. Gerbier, J.H. Thywissen, M. Hugbart, P. Bouyer, and A. Aspect, Phys. Rev. Lett. (to be published).
[16] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999); D. Hellweg *et al.*, e-print cond-mat/0303308.
[17] E. Zaremba, Phys. Rev. A **57**, 518 (1998); G.M. Kavoulakis and C.J. Pethick, *ibid.* **58**, 1563 (1998).
[18] We have also verified that, starting from the large *j* limit of the Jacobi polynomials, one can recover Eq. (9).
[19] A.P. Chikkatur, A. Görlitz, D.M. Stamper-Kurn, S. Inouye, S. Gupta, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **87**, 483 (2000).
[20] Y. Castin and R. Dum, Phys. Rev. Lett. **77**, 5315 (1996); Yu. Kagan, E.L. Surkov, and G.V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **55**, R18 (1997).

Momentum Spectroscopy of 1D Phase Fluctuations in Bose-Einstein Condensates

S. Richard, F. Gerbier, J. H. Thywissen,* M. Hugbart, P. Bouyer, and A. Aspect
Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, UMR 8501 du CNRS, 91403 Orsay Cedex, France
(Received 7 March 2003; published 3 July 2003)

We measure the axial momentum distribution of Bose-Einstein condensates with an aspect ratio of 152 using Bragg spectroscopy. We observe the Lorentzian momentum distribution characteristic of one-dimensional phase fluctuations. The temperature dependence of the width of this distribution provides a quantitative test of quasicondensate theory. In addition, we observe a condensate length consistent with the suppression of density fluctuations, even when phase fluctuations are large.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.010405 PACS numbers: 03.75.Hh, 03.75.Nt, 05.30.Jp

One of the most striking features of Bose-Einstein condensates is their phase coherence. Extensive experimental work on dilute atomic gases has demonstrated a uniform phase of three-dimensional (3D) trapped condensates [1,2], even at finite temperature [3]. In low dimensional systems, however, phase fluctuations of the order parameter are expected to destroy off-diagonal long range order (see [4,5] and references therein). This phenomenon also occurs in sufficiently anisotropic 3D samples, where phase coherence across the axis (long dimension) is established only below a temperature T_ϕ, that can be much lower than the critical temperature T_c [6]. In the range $T_\phi < T < T_c$, the cloud is a "quasicondensate," whose incomplete phase coherence is due to thermal excitations of 1D axial modes, with wavelengths larger than its radial size. Quasicondensates in elongated traps have been observed by Dettmer *et al.* [7], who measured the conversion, during free expansion, of the phase fluctuations into ripples in the density profile. Although the conversion dynamics is well understood [8], the measured amplitude of density ripples was a factor of 2 smaller than expected. In addition, nonequilibrium phase fluctuations in elongated condensates have been observed with the condensate focusing method [9].

In this Letter, we report on the measurement of the axial coherence properties of quasicondensates via momentum Bragg spectroscopy. In previous work using this technique [2,10], the finite size and mean-field energy were the primary contributors to the spectral width. By contrast, the dominant broadening in our conditions results from thermally driven fluctuations of the phase, which reduce the coherence length [4,6]. Indeed, the axial momentum distribution is the Fourier transform of the spatial correlation function $C(s) = \int d^3\mathbf{r}\langle\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r} - s\mathbf{u}_z/2)\hat{\Psi}(\mathbf{r} + s\mathbf{u}_z/2)\rangle$ [11], where $\mathbf{u}_z$ is the axial unit vector. When phase fluctuations dominate (i.e., $T \gg T_\phi$), the axial momentum width is, hence, proportional to $\hbar/L_\phi$, where L_ϕ is the characteristic axial decay length of $C(s)$. Experimentally, for $6 < T/T_\phi < 28$, we find momentum distributions with Lorentzian shapes, whose widths increase with T. Such a shape is characteristic of large phase fluctuations in 1D [12], which result in a nearly exponential decay of $C(s)$. Moreover, the momentum half-width Δp agrees quantitatively with theoretical predictions to within our 15% experimental uncertainty. This implies, in this temperature range, a coherence length $\hbar/\Delta p$ substantially smaller than the quasicondensate length $2L$, from about $L/18$ to $L/4$ [13]. We have also checked an important feature of quasicondensates: the suppression of density fluctuations even in the presence of large phase fluctuations.

We produce a Bose-Einstein condensate of ^{87}Rb in the $5S_{1/2}\,|F = 1, m_F = -1\rangle$ state. A new design of our iron-core electromagnet, with respect to our previous work [14], allows us to lower the bias field of the Ioffe-Pritchard trap to obtain tighter radial confinement. Final radial and axial trap frequencies are, respectively, $\omega_\perp/2\pi = 760(20)$ and $\omega_z/2\pi = 5.00(5)$ Hz. The condensates, containing around 5×10^4 atoms [15], are needle shaped, with a typical half-length $L \simeq 130\ \mu$m and radius $R \simeq 0.8\ \mu$m. The chemical potential being a few times $\hbar\omega_\perp$, the clouds are between the 3D and 1D Thomas-Fermi regime [17]. However, the low-lying excitations of the condensate are 1D in character, due to the large aspect ratio of the trap [18].

Our momentum distribution measurement is based on four-photon velocity-selective Bragg diffraction [2,10,11,19]. Atoms are diffracted out of the condensate by a moving standing wave, formed by two counterpropagating laser beams with a relative detuning δ. Because of the Doppler effect, the momentum component resonantly diffracted out of the condensate is $p_z = M(\delta - 8\omega_R)/(2k_L)$ with $\omega_R = \hbar k_L^2/(2M)$, M the atomic mass, and $k_L = 2\pi/\lambda$ ($\lambda = 780.02$ nm). The lasers are tuned 6.6 GHz below resonance to avoid Rayleigh scattering. The laser intensities (about 2 mW/cm^2) are adjusted to keep the diffraction efficiency below 20%.

To build the momentum spectrum of the quasicondensate, we measure the fraction of diffracted atoms versus the detuning δ between the Bragg laser beams. The differential frequency δ must be stable to better than the desired spectral resolution, about 200 Hz for our typical $L_\phi = 10\ \mu$m. The optical setup is as follows. A single laser beam is spatially filtered by a fiber optic,

 © 2003 The American Physical Society

separated into two arms with orthogonal polarizations, frequency shifted by two independent 80 MHz acousto-optic modulators, and recombined. The modulators are driven by two synthesizers stable to better than 1 Hz over the typical acquisition time of a spectrum. The overlapping, recombined beams are then sent through the vacuum cell, parallel (to within 1 mrad) to the long axis of the trap, and retroreflected to obtain two standing waves with orthogonal polarizations, moving in opposite directions. After we mounted the critical retroreflecting mirror on a long, rigid plate to minimize axial vibrations, the average over ten beat notes had a half width at half maximum (HWHM) of 216(10) Hz for a 2-ms pulse [20].

The following procedure is used to acquire a momentum spectrum. At the end of evaporative cooling, the radio frequency knife is held fixed for 6.5 s to allow the cloud to relax to equilibrium. Indeed, we observe axial shape oscillations of the cloud, triggered by the onset of Bose-Einstein condensation [9,21], despite a slow evaporation (less than 100 kHz/s) across T_c. The magnetic trap is then switched off abruptly, in roughly 100 μs, and the cloud expands for 2 ms before the Bragg lasers are pulsed on for 2 ms. We wait for a further 20 ms to let each diffracted component (one per laser standing wave) separate from the parent condensate, and take an absorption image [Fig. 1(a)]. Diffraction efficiency is defined as the fraction of atoms in each secondary cloud. We repeat this complete sequence for several detunings (typically 15), several times (typically 5). After averaging the diffraction efficiencies measured at each detuning δ, we obtain two "elementary spectra," one for each diffraction component.

We take the Bragg spectrum after expansion rather than in the trap to overcome two severe problems. In the trapped condensate, first, the mean-free path (about 10 μm) is much smaller than its axial size, typically 260 μm, so that fast Bragg-diffracted atoms would scatter against the cloud at rest [22]. Second, the inhomogeneous mean-field broadening [2] would be of the order of 300 Hz, i.e., larger than the spectral width expected from phase fluctuations. By contrast, after 2 ms of free expansion, the peak density has dropped by 2 orders of magnitude [23], and both effects become negligible. In addition, the phase fluctuations do not significantly evolve in 2 ms, since the typical time scale for their complete conversion into density ripples varies from 400 ms to 15 s for the range of temperatures we explore [12]. Also, the mean-field energy is released almost entirely in the radial direction, because of the large aspect ratio of the trap [23], and contributes only about 50 Hz of Doppler broadening in the axial direction. The only perturbation of in-trap axial momenta due to the trap release seems to be small overall shifts (around 100 μm/s) attributed to residual magnetic gradients that merely displace the spectra centers.

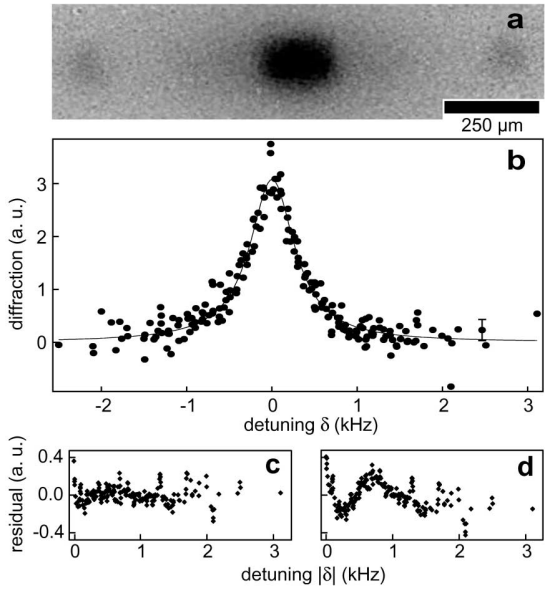


FIG. 1. (a) Absorption image of degenerate cloud (center) and diffracted atoms (left and right), averaged over several shots, after free-flight expansion. (b) Diffraction efficiency versus relative detuning of the Bragg lasers at $T = 261(13)$ nK, with $T/T_\phi = 20(2)$. A typical statistical error bar is shown. This spectrum is the superposition of 12 "elementary spectra" (see text). The true average center is 30.18(2) kHz, close to 30.17 kHz, the four-photon resonance frequency. The solid line is a Lorentzian fit of width 316(10) Hz (HWHM). (c) and (d) show, respectively, the residual of a Lorentzian and of a Gaussian fit to the above spectrum. Residuals are folded around the $\delta = 0$ axis, and smoothed with a six-point-wide sliding average.

Bragg spectra have been taken at various temperatures between 90(10) and 350(20) nK, while T_c varied from 280(15) to 380(20) nK. The temperature was fixed to within 20 nK by controlling the final trap depth to a precision of 2 kHz, and measured from a fit to the wings of an averaged absorption image. The fitting function is an ideal Bose distribution with zero chemical potential, plus an inverted parabolic profile for the quasicondensed cloud. At each temperature, pairs of elementary spectra (described above) were collected across a 125-ms-wide range of hold times to average over residual oscillations and slowly varying fluctuations. All elementary spectra corresponding to the same temperature are reduced to the same surface, background, and center, and superposed, as in Fig. 1(b).

The line shape of the resulting spectra is clearly closer to a Lorentzian than to a Gaussian (see Figs. 1(c) and 1(d)). This is a significant result, because a Lorentzian-like profile is expected for a momentum distribution dominated by phase fluctuations (see [12] and below), in contrast to the Gaussian-like profile expected for a pure condensate [2,11]. From the Lorentzian fit, we extract the measured half-width $\Delta\nu_M$ for each temperature.

The theoretical results obtained in [6,12] do not apply directly to our experiment. In those works, a 3D Thomas-Fermi density profile was assumed, whereas in our case modification of the density profile by the thermal cloud and radial quantum pressure must be accounted for. We find (and discuss below) that a parabolic profile is still a good fit function, but that the usual $T = 0$ relations between μ, L, R, and the number of condensed atoms N_0 are no longer valid. We therefore extend the calculation of the axial correlation function in [12] to an arbitrary density profile, in the local density approximation. In the mean-field regime [4], from the result of [24] for a 1D uniform Bose gas at finite-temperature, we obtain

$$C(s) = \int dz\, n_1(z) \exp\left(-\frac{n_1(0)|s|}{2n_1(z)L_\phi}\right), \tag{1}$$

where $n_1(z) = \int d^2\mathbf{r}_\perp n_0(\mathbf{r}_\perp, z)$ is the axial 1D density of the quasicondensate, while $n_0(\mathbf{r})$ is its 3D density profile. The coherence length near the center of the trap is $2L_\phi$, with $L_\phi = \hbar^2 n_1(0)/(Mk_\mathrm{B}T)$. Following Petrov *et al.* [4,6], we define the temperature which delineates the border between coherent and phase-fluctuating condensates as $T_\phi = L_\phi T/L$. Since $n_1(0)$, L, and T are extracted directly from the images, the definitions of L_ϕ and T_ϕ relate the coherence properties to experimentally measured quantities. The axial momentum distribution follows from a Fourier transform of $C(s)$ and is well approximated by a Lorentzian of width $\Delta p_\phi = \alpha\hbar/L_\phi$ (HWHM), with $\alpha = 0.67$ for a parabolic $n_0(\mathbf{r})$ [12]. The predicted spectral half-width is therefore $\alpha\Delta\nu_\phi$, where

$$\Delta\nu_\phi = \frac{2\hbar k_\mathrm{L}}{2\pi M L_\phi}. \tag{2}$$

In the following, we will use α as a free parameter to test the theory outlined above.

Figure 2 shows the measured spectral width $\Delta\nu_\mathrm{M}$ versus $\Delta\nu_\phi$. The measured widths increase at higher $\Delta\nu_\phi$ as expected. To compare these data to theory, we need to take into account a finite "instrumental" width of the Bragg spectra, including the effect of the mirror vibrations, residual sloshing in the trap, and Fourier broadening due to the 2-ms pulse length (125 Hz HWHM). We assume that all experimental broadenings result in a Gaussian apparatus function of half-width w_G, to be convolved by the Lorentzian momentum profile with a half-width $\alpha\Delta\nu_\phi$. The convolution, a Voigt profile, has a half-width $\alpha\Delta\nu_\phi/2 + \sqrt{w_\mathrm{G}^2 + (\alpha\Delta\nu_\phi)^2/4}$. Note that fitting a Voigt profile instead of a Lorentzian to a spectrum gives the same total HWHM to less than 5%, but the Lorentzian shape is too predominant to extract reliably the Gaussian and the Lorentzian contributions to the profile. Using α and w_G as free parameters to fit the data of Fig. 2, we find $w_\mathrm{G} = 176(6)$ Hz, and $\alpha = 0.64(5)(5)$. The first uncertainty quoted for α is the standard deviation of the fit value. The second results from calibration uncertainties on the magnification of the imaging system and on the total atom number, which do not affect w_G. The agreement of the measured value of α with the theoretical value 0.67, to within the 15% experimental uncertainty, confirms quantitatively the temperature dependence of the momentum width predicted in Ref. [6]. The coherence length $\hbar/p_\phi$ deduced from this measurement varies between 5.9(8) and 39(4) μm, in the range $6 < T/T_\phi < 28$.

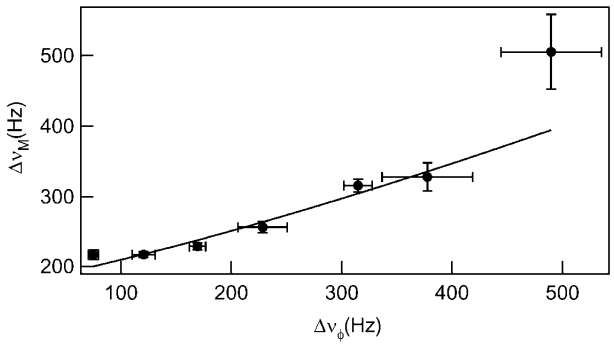


FIG. 2. Half widths at half maximum $\Delta\nu_\mathrm{M}$ of the experimental Bragg spectra versus $\Delta\nu_\phi$. Vertical error bars are the standard deviations of the fit width; the horizontal error bars are the one-sigma statistical dispersions of $\Delta\nu_\phi$. The solid line is a fit assuming a Voigt profile for the spectra.

Another important aspect of quasicondensates, the suppression of axial density fluctuations, is investigated here through the size of the trapped condensate. In the presence of density fluctuations, the resulting interaction energy [25] would increase the size with respect to the expectation for a smooth density profile. The measured axial half-length L after release faithfully reflects the half-length in the trap since axial expansion is found experimentally to be negligible. Figure 3 shows that the measured values of L at various temperatures (filled circles) deviate from the standard Thomas-Fermi prediction (diamonds) $L_\mathrm{TF}^2 = 2\mu/(M\omega_z^2)$, with μ given by $2\mu = \hbar\bar{\omega}(15N_0 a/\sigma)^{2/5}$ [16], where $\bar{\omega} = (\omega_\perp^2\omega_z)^{1/3}$, $\sigma = \sqrt{\hbar/(M\bar{\omega})}$, and $a = 5.31$ nm [26]. We understand this smaller value by taking into account the compression of the quasicondensate by the 3D thermal component (excitations with energy much larger than $\hbar\omega_\perp$), and the radial quantum pressure. The 3D excited states contribute negligibly to the fluctuations of the phase [6] and only the density profile is affected. Using a Hartree-Fock approach [16,27], we find

$$L^2 = \frac{2g}{M\omega_z^2}\left\{n_0(0) + \frac{2}{\lambda_\mathrm{T}^3}[g_{3/2}(e^{-gn_0(0)/(k_\mathrm{B}T)}) - g_{3/2}(1)]\right\}, \tag{3}$$

with the coupling constant $g = 4\pi\hbar^2 a/M$, the thermal de Broglie wavelength $\lambda_\mathrm{T} = [2\pi\hbar^2/(Mk_\mathrm{B}T)]^{1/2}$, and $g_{3/2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^{3/2}$. The open circles in Fig. 3 show the solution of Eq. (3) assuming a parabolic profile, such

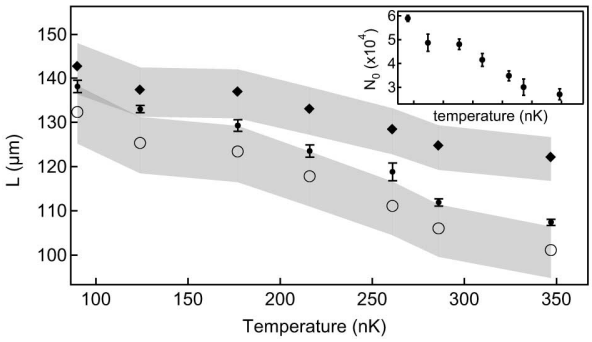


FIG. 3. Half-length L of the quasicondensate versus temperature. Experimental values (□ with statistical error bars) are compared to two calculations: standard Thomas-Fermi (□) and Hartree-Fock with radial quantum pressure corrections (see text) (○). Calculations use the measured temperature and number of condensed atoms. The greyed areas represent uncertainty associated with atom number calibration. Inset: Number of condensed atoms N_0 with statistical dispersion at each temperature.

that $n_0(0) = 15N_0L^{-3}\epsilon^2/(8\pi)$. The aspect ratio ϵ is calculated according to the theory developed in [29], which takes into account radial quantum pressure. The calculated lengths are in agreement with our measurements to within our estimated calibration uncertainty. We conclude, in line with [8], that a phase-fluctuating condensate has the same smooth profile as a true condensate [29], and thus that the axial density fluctuations are suppressed even when phase fluctuations are large.

In conclusion, we have demonstrated three important features of quasi–Bose-Einstein condensates: (i) the momentum distribution shape, found Lorentzian; (ii) the temperature dependence of the momentum width; and (iii) the suppression of density fluctuations. Our results are in quantitative agreement with the finite-temperature, interactive theory developed in [4,6] supplemented by a Hartree-Fock treatment of 3D excited states. The same method could be applied to investigate how long range order develops during the condensate growth.

We thank M. Lécrivain and V. Boyer for the development of the electromagnet trap used in this work, and J. Retter for useful comments on the manuscript. We also thank G.V. Shlyapnikov and D. S. Petrov for stimulating interactions, and S. Gupta and N. Davidson for useful conversations. M. H. acknowledges support from IXSEA. This work was supported by CNRS, DGA, and EU.

Note added.—We would like to point out that complementary work [30] using interferometry was reported soon after the submission of this manuscript.

*Current address: Department of Physics, University of Toronto, Canada.

[1] E.W. Hagley *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3112 (1999).
[2] J. Stenger *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82**, 4569 (1999).
[3] I. Bloch, T.W. Hänsch, and T. Esslinger, Nature (London) **403**, 166 (2000).
[4] D.S. Petrov, G.V. Shlyapnikov, and J.T.M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **85**, 3745 (2000).
[5] J.O. Andersen, U. Al Khawaja, and H.T.C. Stoof, Phys. Rev. Lett. **88**, 070407 (2002); D. L. Luxat and A. Griffin, Phys. Rev. A **67**, 043603 (2003); C. Mora and Y. Castin, Phys. Rev. A **67**, 053615 (2003).
[6] D.S. Petrov, G.V. Shlyapnikov, and J.T.M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **87**, 050404 (2001).
[7] S. Dettmer *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 160406 (2001); D. Hellweg *et al.*, Appl. Phys. B **73**, 781 (2001).
[8] H. Kreutzmann *et al.*, Appl. Phys. B **76**, 165 (2003).
[9] I. Shvarchuck *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 270404 (2002).
[10] J. Steinhauer *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 120407 (2002).
[11] F. Zambelli *et al.*, Phys. Rev. A **61**, 063608 (2000).
[12] F. Gerbier *et al.*, Phys. Rev. A **67**, 051602(R) (2003).
[13] Note that this definition of the coherence length is different from L_ϕ (see later in the text).
[14] B. Desruelle *et al.*, Phys. Rev. A **60**, R1759 (1999).
[15] The atom number measurement is calibrated to a 20% precision by comparing a measurement of N_c to theory [16].
[16] F. Dalfovo *et al.*, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
[17] F. Schreck *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 080403 (2001); A. Görlitz *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001); M. Greiner *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 160405 (2001); see also E.H. Lieb, R. Seiringer, and J. Yngvason, cond-mat/0304071, and references therein.
[18] S. Stringari, Phys. Rev. A **58**, 2385 (1998).
[19] P.B. Blakie, R.J. Ballagh, and C.W. Gardiner, Phys. Rev. A **65**, 033602 (2002); M.D. Girardeau and E.M. Wright, Phys. Rev. Lett. **87**, 050403 (2001).
[20] Since supplementary mirrors must be added to perform this measurement, the result is an upper limit to the linewidth of δ.
[21] F. Gerbier *et al.*, cond-mat/0210206.
[22] A.P. Chikkatur *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, 483 (2000).
[23] Y. Castin and R. Dum, Phys. Rev. Lett. **77**, 5315 (1996); Yu. Kagan, E.L. Surkov, and G.V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **55**, R18 (1997).
[24] J.W. Kane and L.P. Kadanoff, Phys. Rev. **155**, 80 (1967).
[25] W. Ketterle and H.-J. Miesner, Phys. Rev. A **56**, 3291 (1997).
[26] E.G.M. van Kempen *et al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 093201 (2002).
[27] V.V. Goldman, I.F. Silvera, and A.J. Leggett, Phys. Rev. B **24**, 2870 (1981); S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari, J. Low Temp. Phys. **109**, 309 (1997).
[28] A.L. Zubarev and Y.E. Kim, Phys. Rev. A **65**, 035601 (2002).
[29] For a 1D gas, relative density fluctuations $\langle[\delta n/n_0(0)]^2\rangle$ are predicted not to exceed a few percent [4] with our experimental parameters. Systematic uncertainties, however, prevent us from observing them.
[30] D. Hellweg *et al.*, Phys. Rev. Lett. 91, 010406 (2003).

Critical Temperature of a Trapped, Weakly Interacting Bose Gas

F. Gerbier,* J. H. Thywissen,† S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, and A. Aspect
Groupe d'Optique Atomique, Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, UMR 8501 du CNRS, 91403 Orsay CEDEX, France
(Received 8 July 2003; published 23 January 2004)

We report on measurements of the critical temperature of a harmonically trapped, weakly interacting Bose gas as a function of atom number. Our results exclude ideal-gas behavior by more than two standard deviations, and agree quantitatively with mean-field theory. At our level of sensitivity, we find no additional shift due to critical fluctuations. In the course of this measurement, the onset of hydrodynamic expansion in the thermal component has been observed. Our thermometry method takes this feature into account.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.030405 PACS numbers: 03.75.Hh, 03.75.Kk

Degenerate atomic Bose gases provide an ideal testing ground for the theory of quantum fluids. First, their diluteness makes possible first-principles theoretical approaches [1]. Second, thanks to the powerful experimental techniques of atomic physics, static and dynamic properties can be studied quantitatively through a wide range of temperature and densities. Furthermore, the inhomogeneity induced by the external trapping potential leads to entirely new behavior, when compared to bulk quantum fluids.

Atomic interactions have previously been found to affect deeply the dynamical behavior of trapped Bose gases at finite temperatures [2,3]. By contrast, the influence of interactions on *thermodynamics* is less pronounced [4], and has been less studied experimentally. Pioneering work on thermodynamics [5] concentrated essentially on the ground state occupation, and the role of interactions was somewhat hidden by finite-size effects [1]. Though several such measurements have been reported [3,6], to our knowledge a decisive test of the role of interactions is still lacking.

In this Letter, we focus on the critical temperature T_c of a harmonically trapped ^{87}Rb Bose gas to demonstrate the influence of interactions on the thermodynamics. We study the behavior of T_c as a function of the number of atoms at the transition, for a fixed trapping geometry. We find a deviation from ideal-gas behavior, towards lower critical temperatures, whose significance will be discussed below. In the course of this study, we have observed that collisions induce an anisotropy in the free expansion of the cloud even far from the hydrodynamic regime [7,8]. We correct for this effect in our temperature measurement.

For an ideal Bose gas in a harmonic trap, the critical temperature is [1]

$$k_B T_c^{\text{ideal}} \approx \hbar\overline{\omega}\left[\frac{N}{\zeta(3)}\right]^{1/3} - \frac{\zeta(2)}{6\zeta(3)}\hbar(\omega_z + 2\omega_\perp). \qquad (1)$$

The first term on the right-hand side is the transition temperature T_c^0 in the thermodynamic limit, and the second represents finite-size corrections. Here N is the total atom number, $\omega_\perp$ and ω_z are the trapping frequencies, $\overline{\omega} = \omega_\perp^{2/3}\omega_z^{1/3}$ is their geometrical average, and ζ is the Riemann zeta function.

As stated earlier, the main goal of this paper is to probe the role of two-body repulsive interactions on T_c. Corrections to the ideal-gas formula depend on the ratio between the s-wave scattering length a and $\lambda_0 = (2\pi\hbar^2/Mk_B T_c^0)^{1/2}$, the de Broglie wavelength at the transition. In a trapped gas, the dominant effect of interactions can be understood using a simple mean-field picture [4]: Interactions lower the density in the center of the trap $n(0)$, and accordingly decrease the temperature that meets Einstein's criterion $n(0)\lambda_0^3 = \zeta(3/2)$. The magnitude of this reduction has been calculated to leading order [4],

$$\frac{T_c - T_c^{\text{ideal}}}{T_c^0} = -a_1\frac{a}{\lambda_0} \approx -1.326\frac{a}{\overline{\sigma}}N^{1/6}, \qquad (2)$$

where $a_1 \approx 3.426$ [4,9], and $\overline{\sigma} = \sqrt{\hbar/M\overline{\omega}}$ is the mean ground state width. In this work, the finite-size correction in Eq. (1) changes T_c^0 by at most 2%, whereas the interactive shift (2) can be as high as 10%. The measurements presented below are in quantitative agreement with the prediction of Eq. (2).

As discussed in [9–14], critical fluctuations that develop in the system near T_c are expected to favor the formation of the condensate and thus to increase T_c. In the case of a uniform Bose gas [12–14], this is the leading effect, because the critical temperature is not affected at the mean-field level. The correction $\delta T_c/T_c^0 = +c_1 a/\lambda_0$, with $c_1 \approx 1.3$ [14], can be traced back to density fluctuations with a wavelength much larger than the correlation radius $r_c \sim \lambda_0^2/a$ [13]. This upwards trend, which has been observed experimentally in a dilute sample of ^{4}He adsorbed in a porous glass [15], is quite sensitive to the presence of an external potential [9,11]. In the trapped case of interest here, the contribution of long wavelength excitations to the shift in T_c scales as a higher power of a/λ_0, making it negligible when compared to the "compressional" shift given by Eq. (2). The quantitative

 © 2004 The American Physical Society

agreement we find with the mean-field result can be considered evidence of this effect, and highlights the important role played by the trapping potential.

Our experimental setup to reach Bose-Einstein condensation in the $|F = 1; m_F = -1\rangle$ hyperfine ground state of ^{87}Rb is similar to that used in [16]. The trapping frequencies are $\omega_\perp/2\pi = 413(5)$ Hz and $\omega_z/2\pi = 8.69(2)$ Hz in the present work. To reduce nonequilibrium shape oscillations that occur in such anisotropic traps upon condensation [8,16], the last part of the evaporation ramp is considerably slowed down (to a ramp speed of 200 kHz/s) and followed by a 1 s hold time in the presence of a radiofrequency shield. We ensure good reproducibility of the evaporation ramp in the following way. We monitor regularly (typically every four cycles) the radiofrequency ν_0 that empties the trap. This allows us to detect slow drifts of the trap bottom, and to adjust in real time the final evaporation radiofrequency ν_{rf} to follow them. In this way, the "trap depth" $\nu_{rf} - \nu_0$, is kept constant within ± 2 kHz. Since we measure $\eta = h(\nu_{rf} - \nu_0)/k_B T \approx 11$ in this final evaporation stage, we estimate the temperature stability to be ± 10 nK.

We infer the properties of the clouds by absorption imaging. After rapid switchoff of the trap ($1/e$ cutoff time of about 50 μs), a 22.3 ms free expansion, and a repumping pulse, we probe the ultracold cloud on resonance with the $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ transition [17]. The images are analyzed using a standard procedure, described, for instance, in [18]. For an ideal thermal cloud above the transition point, the evolution of the density in time of flight is related to the initial density profile by simple scaling relations, so that the column density (integrated along the probe line of sight, almost perpendicular to the long axis of the trap) is

$$\tilde{n}_{\rm th}(\boldsymbol{\rho}) = \tilde{n}_{\rm th}(0) g_2\left\{\exp\left(\frac{\mu}{k_B T} - \frac{x^2}{2R_{\rm th}^2} - \frac{z^2}{2L_{\rm th}^2}\right)\right\}, \quad (3)$$

where $g_2(u) = \sum_{j\geq 1} u^j/j^2$, and x and z are the coordinates along the tight and shallow trapping axes, respectively. For mixed clouds containing a normal and a (small) Thomas-Fermi (TF) condensate [1], we describe the bimodal distribution by an inverted parabola on top of an ideal, quantum-saturated thermal distribution [Eq. (3) with $\mu = 0$]. The condensed number N_0 is then deduced from the TF fit, and the total atom number N from integration over the entire image. We estimate that condensed fractions as low as 1% can be reliably detected by the fitting routine. Absolute accuracy on atom number relies on the precise knowledge of the absorption cross section of the probe laser, which depends on its polarization and the local magnetic field. This cross section is calibrated by fitting the radial sizes of condensates with no discernible thermal fraction to the TF law $R_0 \propto N_0^{1/5}$ [1,7,18,19]. We find a reduction of 4.00(14) compared to the reference value $\sigma_0 = 3\lambda_L^2/2\pi$ [17].

We will now discuss the more complex issue of thermometry in some detail. The temperature is usually inferred from the sizes of the thermal cloud after a time of flight t, assuming a purely ballistic expansion with isotropic mean velocity, $v_0 = \sqrt{k_B T/M}$, as appropriate for an ideal gas. We show in Fig. 1 that the observed aspect ratio of noncondensed clouds, in a wide range of temperatures and atom numbers (corresponding to $1 \lesssim T/T_c \lesssim 1.8$), is actually larger than the value (0.773) expected for an ideal gas and $\omega_z t \approx 1.23$ that corresponds to our parameters (dotted line in Fig. 1), in contradiction with the assumption of an isotropic velocity distribution.

In a very elongated trap, this could be explained by two distinct collisional effects. First, the initial mean-field energy of the nondegenerate cloud converts almost completely into *radial* kinetic energy during time of fight [20], as for an elongated condensate [7,19]. The magnitude of this effect is controlled by the ratio χ of the mean-field energy to the temperature. In our case, the parameter χ does not exceed 0.02, too low to explain the observed anisotropy (dashed line in Fig. 1, calculated along the lines of [20]).

Second, as studied theoretically in [7,21,22] and observed in Bose [8] and Fermi gases [23], anisotropic expansion occurs for a cloud in the hydrodynamic regime, i.e., when the mean-free path at equilibrium is smaller than the dimensions of the sample. In our very elongated cloud, the mean-free path is typically smaller than the axial length, but much larger than the radial size. Hydrodynamic axial motion of the thermal particles results in energy transfer from the axial to the radial degrees of freedom. For weak deviations from ballistic expansion, this collisional dynamic creates a velocity imbalance proportional to $\gamma_{\rm coll}$, the equilibrium collision rate, in agreement with the trend observed in Fig. 1.

In [22], a set of scaling equations was derived to investigate how collisions affect the expansion of a noncondensed cloud. Numerical solution of these equations, which also include the weak mean-field effect, agrees well with our data (solid line in Fig. 1). The calculation

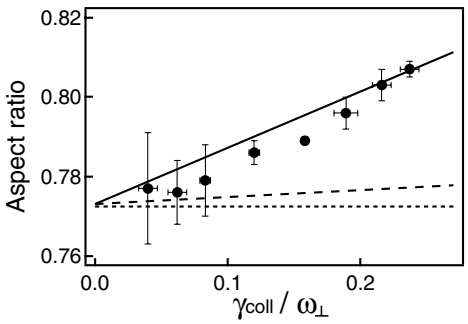


FIG. 1. Onset of hydrodynamic expansion for trapped clouds above threshold. Measured aspect ratios after expansion (filled circles, with statistical error bars) are plotted versus the collision rate $\gamma_{\rm coll}$, and compared against several hypotheses: a ballistic expansion (dotted line); a mean field dominated expansion (dashed line); and a collisional expansion for a noncondensed Bose gas (solid line).

makes use of the results of [24] for the collision rate of a noncondensed, almost ideal Bose gas, in general larger (by as much as 70% close to T_c) than the classical collision rate with the same N and T [25]. In view of the satisfactory agreement of our data with the scaling theory, we conclude that the observed anisotropy is a signature of the onset of hydrodynamic expansion.

In the regime $\gamma_{\rm coll} \lesssim \omega_\perp$, where the anisotropy is weak and increases linearly with $\gamma_{\rm coll}$, kinetic energy conservation suggests that mean square expansion velocities take the form $\langle v_x^2\rangle/v_0^2 \approx 1 + \beta\gamma_{\rm coll}/2\omega_\perp$, and $\langle v_z^2\rangle/v_0^2 \approx 1 - \beta\gamma_{\rm coll}/\omega_\perp$, where β depends in general on $\omega_\perp$, ω_z, t (fixed for the measurement presented here). These simple forms are confirmed by the numerical calculation described above. Provided the expansion velocities along both axes are measured, they allow to infer the initial temperature T_0, independently of the coefficient β [26]. Were this correction not applied, a systematic 10%–15% discrepancy between the axial and radial temperature would remain. We estimate the remaining systematic uncertainties on T as $\pm 5\%$ [27].

Having identified an appropriate thermometric technique, we turn to the measurement of the critical temperature as a function of atom number. Data were taken in a narrow range around T_c. From the two-component fit, we extract the number of condensed atoms, the temperature, and the total atom number as a function of the trap depth, as shown in Figs. 2(a)–2(c), respectively. The trap depth at which the transition point is reached, $(\nu_{\rm rf} - \nu_0)_c$, is taken to be the point at which a linear fit to the condensed number data crosses zero (a linear approach towards T_c is consistent with the simulations reported in [28]). The temperature and total number are also fitted assuming a linear dependency on $\nu_{\rm rf}$, and from the value $(\nu_{\rm rf} - \nu_0)_c$ we extract the critical atom number N_c and critical temperature T_c.

In Fig. 3, we plot T_c as a function of N_c, measured in ten independent data sets. The ideal-gas value $T_c^{\rm ideal}$ (dashed line) lies two standard deviations above our data. Including the mean-field correction (2) yields a much better agreement (solid line), which we quantify by assuming that the interactive shift in T_c can be written as $\delta T_c/T_c^0 = \alpha N^{1/6}$, with a free coefficient α. A fit to the data yields $\alpha = -0.009(1)^{+0.002}_{-0.001}$, whereas Eq. (2) predicts $\alpha \approx -0.007$ for a scattering length $a \approx 5.31$ nm [29] and $\overline{\sigma} \approx 1.00\ \mu$m. The first uncertainty is statistical, while the upper and lower bounds reflect calibration and analysis uncertainties. The shaded area in Fig. 3 delineates the resulting 1σ confidence interval compatible with the experimental results.

The data shown in Fig. 3 reasonably exclude any additional shift of the same order of magnitude as the compressional effect given by Eq. (2). In particular, if the (positive) critical shift in T_c predicted in the uniform case [12] were directly scalable to the trapped one, one would expect an overall $\alpha \approx -0.004$, a value not consistent with our findings within the estimated accuracy. This observation is in line with recent theoretical studies [9,11], which point out that, instead of being delocalized over the entire system as in the homogeneous case, critical fluctuations in the trapped gas are confined to a small region around the trap center. This reduces corrections to the equation of state by a factor $\sim(a/\lambda_0)^3 \ll 1$, corresponding to the ratio of the volume of the fluctuation region to the volume of the thermal cloud. Corrections to the critical temperature are thus fixed by the equation of state of the whole interacting cloud, and deviations from mean-field behavior enter only to second order in a/λ_0 [30]. For our experimental parameters, we calculate from [9] an upwards correction to T_c smaller than 1%, below the sensitivity of the measurement.

In summary, we have measured the critical temperature of a trapped, weakly interacting ^{87}Rb Bose-Einstein gas. Our results exclude ideal-gas behavior by two standard deviations, and we find satisfactory agreement with

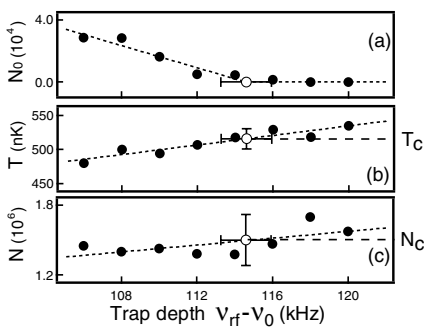


FIG. 2. Procedure to locate the transition point. We plot the condensed number (a), temperature (b), and total atom number (c) as a function of the trap depth, fixed by the final rf frequency $\nu_{\rm rf}$ and the trap bottom ν_0. The transition point (hollow circle, with statistical error bars) is found from a piecewise linear fit [dotted curve in (a)], and reported in (b) and (c) to find T_c and N_c.

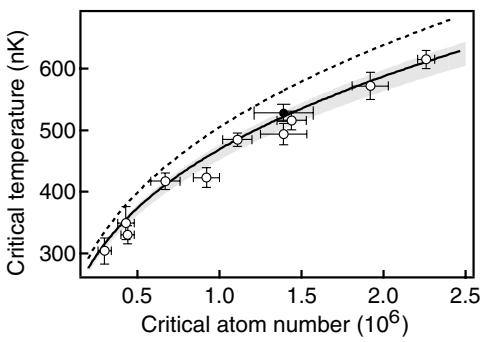


FIG. 3. Critical temperature as a function of atom number at the transition. The experimental points (circles) are lower than the ideal gas law Eq. (1) (dashed) by two standard deviations. The shaded area is the range of acceptable fits taking statistical and systematic errors into account. Our results are consistent with the shift due to the compressional effect given by Eq. (2), indicated by the solid line. The filled circle represents the data of Fig. 2.

mean-field theory. We find no evidence for critical behavior close to T_c within our experimental sensitivity, in line with recent theoretical estimates for the trapped case. We have also observed hydrodynamic behavior in the expansion of the thermal cloud, and shown how to correct for it in the thermometry procedure. We note to conclude that measuring corrections to T_c beyond the mean field for our typical experimental parameters would require thermometry with an accuracy of 1% or better. A more direct route to investigate such effects might be to measure the critical density near the center of the trap, directly sensitive to the presence of critical fluctuations. Alternatively, these many-body effects could be enhanced in the vicinity of a Feshbach resonance.

We thank D. Guéry-Odelin, F. Laloë, D. Boiron, J. Retter, J. Dalibard, and S. Giorgini for useful discussions and comments on this work. J. H. T. acknowledges support from CNRS, and M. H. from IXSEA. This work was supported by DGA and the EU.

*Electronic address: fabrice.gerbier@iota.u-psud.fr
†Current address: Department of Physics, University of Toronto, Toronto, ON, M5S 1A7, Canada.

[1] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
[2] D. S. Jin, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **78**, 764 (2001); D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, S. Inouye, M. R. Andrews, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **81**, 500 (1998); F. Chevy, V. Bretin, P. Rosenbusch, K.W. Madison, and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **88**, 250402 (2002).
[3] O. Maragò, G. Hechenblaikner, E. Hodby, and C. Foot, Phys. Rev. Lett. **86**, 3938 (2001).
[4] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Phys. Rev. A **54**, R4633 (1996); J. Low Temp. Phys. **109**, 309 (1997).
[5] J. R. Ensher, D. S. Jin, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **77**, 4984 (1996).
[6] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **77**, 416 (1996); D. J. Han, R. H. Wynar, Ph. Courteille, and D. J. Heinzen, Phys. Rev. A **57**, R4114 (1998); B. P. Anderson and M. A. Kasevich, Phys. Rev. A **59**, R938 (1999); F. Schreck *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 080403 (2001).
[7] Y. Kagan, E. L. Surkov, and G.V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **55**, R18 (1997).
[8] I. Shvarchuck *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 270404 (2002).
[9] P. Arnold and B. Tomášik, Phys. Rev. A **64**, 053609 (2001).
[10] M. Houbiers, H. T. C. Stoof, and E. A. Cornell, Phys. Rev. A **56**, 2041 (1997).
[11] M. Holzmann, J.-N. Fuchs, J.-P. Blaizot, G. Baym, and F. Laloë, cond-mat/0310460.
[12] P. Grüter, D. Ceperley, and F. Laloë, Phys. Rev. Lett. **79**, 3549 (1997); M. Holzmann, P. Grüter, and F. Laloë, Eur. Phys. J. B **10**, 739 (1999).
[13] G. Baym, J.-P. Blaizot, M. Holzmann, F. Laloë, and D. Vautherin, Phys. Rev. Lett. **83**, 1703 (1999); G. Baym, J.-P. Blaizot, and J. Zinn-Justin, Europhys. Lett. **49**, 150 (2000); M. Holzmann, G. Baym, J.-P. Blaizot, and F. Laloë, Phys. Rev. Lett. **87**, 120403 (2001).
[14] P. Arnold and G. Moore, Phys. Rev. Lett. **87**, 120401 (2001); V. A. Kashurnikov, N.V. Prokof'ev, and B.V. Svistunov, Phys. Rev. Lett. **87**, 120402 (2001).
[15] J. D. Reppy, B. C. Crooker, B. Hebral, A. D. Corwin, J. He, and G. M. Zassenhaus, Phys. Rev. Lett. **84**, 2060 (2000).
[16] S. Richard, F. Gerbier, J. H. Thywissen, M. Hugbart, P. Bouyer, and A. Aspect, Phys. Rev. Lett. **91**, 010405 (2003).
[17] The probe laser wavelength is $\lambda_L = 780.2$ nm; its intensity is 0.17 mW/cm^2, and the imaging pulse length is 34 μs. The 8 MHz half-width of the absorption line is slightly broader than the natural linewidth (6 MHz), which could explain the small value of the measured cross section.
[18] W. Ketterle, D. S. Durfee, and D. M. Stamper-Kurn, in *Proceedings of the International School of Physics-Enrico Fermi*, edited by M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman (IOS Press, Amsterdam, 1999).
[19] Y. Castin and R. Dum, Phys. Rev. Lett. **77**, 5315 (1996).
[20] C. Menotti, P. Pedri, and S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **89**, 250402 (2002).
[21] H. Wu and E. Arimondo, Europhys. Lett. **43**, 141 (1998).
[22] P. Pedri, D. Guéry-Odelin, and S. Stringari, Phys. Rev. A **68**, 043608 (2003).
[23] K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, and J. E. Thomas, Science **298**, 2179 (2002); C. A. Regal and D. S. Jin, Phys. Rev. Lett. **90**, 230404 (2003); T. Bourdel *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 020402 (2003).
[24] G. M. Kavoulakis, C. J. Pethick, and H. Smith, Phys. Rev. A **61**, 053603 (2000).
[25] We have extrapolated the results of [24] by the formula $\gamma_{\rm coll} \approx \gamma_{\rm class}(1 + 0.23/t^3 + 0.4/t^4)$, with $t = T/T_c^0$. Following [22], we define the classical collision rate as $\gamma_{\rm class} = (4\sqrt{2\pi}/5)n_{\rm class}(0)\sigma_{\rm el}v_0$, with $\sigma_{\rm el} = 8\pi a^2$ and $n_{\rm class}(0) = N\overline{\omega}^3(m/2\pi k_B T)^{3/2}$.
[26] Defining effective temperatures as $k_B T_i = M\omega_i^2 R_i^2(1 + \tau_i^2)^{-1/2}$, where $R_i|_{i=x,z}$ are the measured cloud sizes and $\tau_i = \omega_i t$, we infer the initial temperature T_0 from $T_0 \approx 2\tau_z^2/(1 + 3\tau_z^2)T_x + (1 + \tau_z^2)/(1 + 3\tau_z^2)T_z$. This cancels the hydrodynamic corrections to first order in $\gamma_{\rm coll}/\omega_\perp$.
[27] This 5% uncertainty on T takes into account length calibration, the released mean-field energy, and the finite fall time of the current producing the magnetic potential. Note that, in a $T_c - N$ plot, the uncertainty on the *shift* in T_c is smaller because of partial error cancellation.
[28] M. Holzmann, W. Krauth, and M. Naraschewski, Phys. Rev. A **59**, 2956 (1999); T. Bergeman, D. L. Feder, N L. Balazs, and B. I. Schneider, Phys. Rev. A **61**, 063605 (2000).
[29] E. G. M. van Kempen, S. Kokkelmans, D. J. Heinzen, and B. J. Verhaar, Phys. Rev. Lett. **88**, 093201 (2002).
[30] These corrections are provided by critical fluctuations with wavelength $\lesssim r_c$, barely affected by the trap potential.

Experimental study of the thermodynamics of an interacting trapped Bose-Einstein condensed gas

F. Gerbier,[1,*] J. H. Thywissen,[1,2] S. Richard,[1] M. Hugbart,[1] P. Bouyer,[1] and A. Aspect[1]
[1]*Groupe d'Optique Atomique, Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, 91403 Orsay Cedex, France*
[2]*Department of Physics, University of Toronto, Toronto, Ontario, M5S 1A7, Canada*
(Received 28 January 2004; published 19 July 2004)

We have investigated experimentally the finite-temperature properties of a Bose-Einstein condensed cloud of ^{87}Rb atoms in a harmonic trap. Focusing primarily on condensed fraction and expansion energy, we measure unambiguous deviations from ideal-gas thermodynamics and obtain good agreement with a Hartree-Fock description of the mixed cloud. Our results offer clear evidence of the mutual interaction between the condensed and thermal components. To probe the low-temperature region unaccessible to the usual time-of-flight technique, we use coherent Bragg scattering as a filtering technique for the condensate. This allows us to separate spatially the condensed and normal components in time of flight and to measure reliably temperatures as low as $0.2T_c^0$ and thermal fractions as low as 10%. Finally, we observe evidence for the limitations of the usual image analysis procedure, pointing out to the need for a more elaborate model of the expansion of the mixed cloud.

DOI: 10.1103/PhysRevA.70.013607 PACS number(s): 03.75.Hh

I. INTRODUCTION

Trapped, dilute atomic gases offer an opportunity to study the interplay between quantum-statistical phenomena and interactions in Bose systems [1]. A third ingredient, the external trapping potential, also plays a key role in understanding the properties of these gases [2]. At finite temperatures, it leads to spatially distinct condensed and thermal phases, a new behavior when compared to bulk quantum fluids, in which both components overlap everywhere. This spatial separation allows in particular a clear identification of the condensed fraction through absorption imaging, in stark contrast with superfluid ^{4}He, where condensed fraction measurements are only indirect [3].

Much work has been devoted to the properties of condensed gases at very low temperatures (much smaller than the critical temperature T_c), where the noncondensed fraction is negligible. Then, in the so-called Thomas-Fermi (TF) regime [2], the static and dynamic behavior of the condensate is essentially determined by the interplay between the trapping potential and the atomic interactions. At higher temperatures, less than but comparable to T_c, a significant thermal component is also present, typically much more dilute than the condensate. In this situation, the kinetic energy per thermal atom is larger than the mean-field energy, and deviations from ideal gas behavior are small [4–9]. Although several key thermodynamical properties, such as condensed fraction and average energy, are readily measurable experimentally, a detailed comparison of experiments with finite-temperature theories of the interacting cloud is to our knowledge still lacking.

The goal of this paper is to contribute to fill this gap by investigating experimentally the thermodynamics of a trapped ^{87}Rb Bose gas below T_c, where both a condensed and a thermal component are present. We focus on two quantities, the condensed fraction and the expansion (kinetic plus mean-field) energy in the radial direction. We find that the condensed fraction N_0/N is significantly reduced with respect to the ideal-gas law, $N_0/N=1-(T/T_c^0)^3$, where T_c^0 is the ideal-gas condensation temperature in the thermodynamic limit, and that the expansion energy is increased, even for the thermal atoms.

Our measurements thus clearly exclude ideal-gas behavior, and to assess the importance of interactions, we compare them with two mean-field theories of the interacting cloud that assume a condensate in the TF regime. The simplest one is the so-called "semi-ideal" model [10,11], which considers the thermal cloud as a quantum-saturated gas evolving in the combined trapping plus condensate-mean-field potential. Although the general trend of our observations is well reproduced by this model, finer details are not. To take interactions within the thermal cloud and between the thermal cloud and the condensate into account, we use a self-consistent Hartree-Fock (HF) description of the mixed cloud [12–18], which yields good agreement with the data. We are able to confirm experimentally its validity over a wide range of temperatures and atom numbers, and to show that despite the diluteness of the thermal cloud, its mean-field energy affects both the condensed and noncondensed atoms. Such systematic measurements of the mutual interplay between the condensed and noncondensed components have not been reported before, although evidence for repulsion of the thermal atoms by the condensate has been provided in [19], through a careful study of the interface region between the two components.

Our measurements rely on the standard time-of-flight technique to observe the mixed cloud. A limitation arises at low temperatures, where the condensate appears broader than the thermal cloud in time of flight. This limits our measurements with this technique to $T/T_c^0>0.3$ (condensed fraction

*Present address: Institut für Physik, Johannes Gutenberg-Universität, 55128 Mainz, Germany. Electronic address: gerbier@uni-mainz.de

 ©2004 The American Physical Society

$<80\%$). To overcome this limitation, we use coherent Bragg scattering to spatially separate the coherent and incoherent components of the cloud in time of flight. We apply it for low-temperature thermometry and measure in this way condensed fraction larger than 90% and temperatures below 100 nK ($T/T_c^0 \approx 0.2$).

The paper is organized as follows. Section II first describes the experimental apparatus used for condensate production. Then, after reviewing the widely used procedure of time-of-flight imaging, we introduce the improved method based on Bragg diffraction to filter the condensate out of thermal cloud. The key results of this paper are presented in Secs. III and IV. In Sec. III, we present a measurement of the temperature dependence of the condensed fraction. In Sec. IV, the Bragg filtering scheme is applied to a measurement of the expansion energy of the thermal component. Both measurements clearly confirm the HF predictions in the whole temperature range. Further evidence for mutual interaction is provided in Sec. V, where we analyze the behavior of the mixed cloud in time of flight and measure a compression of the condensate axial length by the thermal cloud. For completeness, we review briefly in the Appendix I the three well-understood models to which we compare the data: namely, the ideal-gas model, the semi-ideal model, and the self-consistent HF model.

II. EXPERIMENTAL METHODS

This section reviews the experimental techniques used in this work. After a brief description of our experimental apparatus (Sec. II A), we discuss in Sec. II B condensed fraction and temperature measurements via time-of-flight absorption imaging and point out the limitations of this technique for high condensed fractions. In Sec. II C, we show how they can be overcome using coherent Bragg scattering [20,21].

A. Condensate production

Our experimental setup employs the standard combination of laser and evaporative cooling to reach Bose-Einstein condensation in a sample of ^{87}Rb atoms, spin polarized in the $|F=1;m_F=-1\rangle$ hyperfine ground state. A Zeeman-slowed atomic beam loads a magneto-optical trap in 4 s. After spatial compression (125 ms) and cooling in optical molasses (6 ms), the laser-cooled sample is repumped in the $|F=1\rangle$ hyperfine manifold and loaded into an Ioffe-Pritchard-type magnetic trap. The trap, an iron-core electromagnet, is a specific feature of our experiment [22]. The guiding of magnetic flux lines along the ferromagnetic body of the magnet produces strong (when compared to macroscopic, coil-based devices) radial gradients (1.4 kG/cm), while using a modest current of 30 A. This produces a cigar-shaped, very elongated harmonic potential of the form $V_{\text{ext}}=M\omega_{\square}^2(x^2+y^2)/2+M\omega_z^2z^2/2$. In this work, differently from [23], radial and axial trapping frequencies are, respectively, $\omega_{\square}/2\pi=413(5)$ Hz and $\omega_z/2\pi=8.69(2)$ Hz at a 10-G bias field.

The combined compression and evaporation sequence typically lasts for 16 s, with the last part of the radio-frequency (rf) evaporation ramp considerably slowed down (to a ramp speed of 200 kHz/s) and followed by a 1-s hold time in the presence of an rf shield. This is done in order to allow the system to cross slowly the quantum degeneracy threshold and to relax towards equilibrium. In particular, nonequilibrium shape oscillations that occur in such anisotropic traps upon condensation [23,24] are strongly reduced. To ensure the reproducibility of the temperature in the experiment, the radio frequency ν_0 that empties the trap is measured every five experimental cycles, and the rf shield frequency ν_{rf} is readjusted in real time to follow slow drifts of the bottom of the trap. In this way, the "trap depth" $\nu_{\text{rf}}-\nu_0$ is controlled within ± 2 kHz. Since we measure $h(\nu_{\text{rf}}-\nu_0)/k_{\text{B}}T \approx 11$ in this final evaporation stage, we estimate the temperature reproducibility to be ± 10 nK.

B. Time-of-flight imaging

Information about the atomic cloud is obtained through time-of-flight absorption imaging (see [25] for a detailed account of imaging techniques and [26] for details of the implementation in our experiment). This widely employed method will be referred to as the "standard method" in the following. Here, two important quantities are measured through a fit to absorption images: the condensed fraction and the temperature. To find the condensed fraction, we use the fitting method described in [25], which assumes that the atomic density can be described by a parabolic TF profile describing the condensate plus an ideal Bose-Einstein distribution with zero chemical potential describing the thermal cloud. The condensed number N_0 is taken to be the number of atoms integrated under the parabolic profile, while the total atom number N is found by integration over the entire profile.

The temperature is measured through an independent fit to a thermal Bose-Einstein distribution, restricted to the wings of the thermal distribution only, in order to minimize the effect of interactions (see [4,5] and Sec. IV). One typically assumes that the high-energy atoms selected by this procedure behave as if the gas were ideal and extracts effective temperatures T_x and T_z from the cloud sizes—for instance, $k_{\text{B}}T_x=M\omega_{\square}^2R_{\text{th}}^2/[1+(\omega_{\square}t)^2]$, with R_{th} the radial size. We observe a systematic variation of the temperature T_z measured along the long axis with the size of the exclusion region. This effect was more pronounced with increasing condensed fraction and disappeared above T_c. On the contrary, the radial temperature T_x was barely affected by the actual size of the exclusion region, provided it was chosen larger than the condensate radius and sufficiently small to conserve a reasonable signal-to-noise ratio (5% or less variation). For this reason, we infer the initial temperature from the radial value T_x only [28]. This thermometry procedure assumes a nearly ballistic expansion. Collisional effects in time of flight may invalidate this assumption, and it is important to estimate their importance to quantify the accuracy of our measurements. We defer this discussion to Secs. IV and V.

C. Selective displacement of the condensate using coherent Bragg scattering

The method described in the last subsection rests on the clean distinction between the condensed and thermal compo-

nents. However, for cold samples ($k_B T \lesssim \mu$), the condensate radius after time of flight is larger than the extension of the thermal cloud. The details of the thermal distribution are therefore "buried" under the condensate density profile, and a reliable fit is not possible. We have found no difficulties for $N_0/N \sim 60\%$ ($T/T_c^0 \sim 0.5$), while still being able to extract valuable information for condensed fractions close to 80% ($T \gtrsim 0.3 T_{C0}$). For higher condensed fractions, the signal to noise on the wings is too low to perform a reliable fit.

In this section, we describe an improvement of the time-of-flight technique that exploits the dramatic difference between the two components in momentum space [2,20,21]. Our primary motivation for introducing this method is to improve the resolution at low temperatures, a key advantage in the condensed fraction measurements presented below. The principle of the technique is to transfer the whole condensate to a center-of-mass momentum state with two photon recoil velocities (we define the recoil velocity as $v_R = h/M\lambda_L \approx 5.8$ mm/s, where $\lambda_L = 780$ nm is the Bragg laser wavelength), while leaving the thermal atoms essentially unaffected. As shown in Fig. 1, after a subsequent time of flight (typically 20 ms), the condensate has moved away from the center of the thermal cloud, allowing us to perform separate fits and revealing previously hidden information about the thermal component. This technique is related to the filtering scheme used in [29] to study collective modes in the presence of a weak optical lattice at finite temperatures.

Momentum transfer is achieved by exposing the sample to two counterpropagating laser beams detuned with respect to each other. The moving lattice formed this way can Bragg-diffract the atoms, promoting them to a two-recoil momentum state. In principle, Bragg scattering is sensitive to the atomic momentum distribution [20,21]. However, if the spectral width of the Bragg pulse, Fourier limited by the pulse duration T to $\Delta\nu_F \sim 1/T$, is much larger than the condensate Doppler width $\Delta\nu_0 \sim 2\nu_R/L$, the momentum sensitivity of Bragg diffraction is lost and almost complete transfer of the condensate (π pulse) is achieved. On the other hand, if the thermal component spectral width $\Delta\nu_{th} \sim 2\nu_R/\lambda_T$ ($\lambda_T = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$ is the thermal de Broglie wavelength) is much larger than $\Delta\nu_F$, Bragg diffraction is then a momentum-selective process, and most of the thermal atoms, being off resonant with the Bragg beams, stay at rest in the laboratory frame. This filtering technique thus makes possible independent manipulation of the condensed and non-condensed atoms.

The experimental setup that we use to generate the Bragg beams is identical to the one used in [23]. The π Bragg pulse is applied after a sudden switch-off of the trapping potential and a 2-ms time of flight. This decreases the condensate and thermal cloud densities by a factor of order $(\omega_\square t)^2 \sim 30$, making any further mutual interactions negligible. This avoids in particular s-wave collisions between atoms with different momenta [30] and suppresses the equilibration of the thermal cloud with the displaced condensate. The Bragg beams are counterpropagating and parallel to the elongated axis of the trap. Since the condensate mean-field energy is then almost entirely released in the transverse directions, perpendicular to the diffraction axis, the ratio between the condensate and thermal cloud spectral widths is

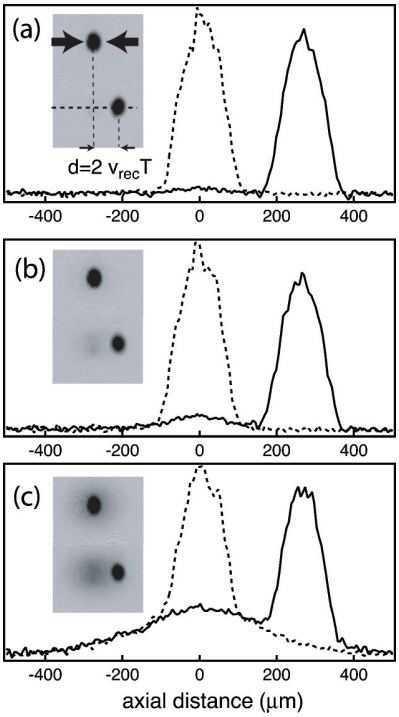


FIG. 1. Bragg diffraction as a condensate filter. (a), (b), and (c) correspond to 92%, 85%, and 30% condensed fraction, respectively ($T/T_c^0 \approx 0.2$, 0.35, and 0.8). Two-dimensional absorption images are shown, with a cut along the direction of the trap weakest axis ("axial cut"). The top images show regular absorption images for a 24.27-ms time of flight (dashed lines in the cut). The bottom images, also shown as the solid line in the axial cut, corresponding to the same temperatures and atom numbers within experimental reproducibility, have been taken after applying a moving optical lattice tuned to realize a π Bragg pulse, transferring two photon recoils to almost all condensed atoms (velocity 1.1 cm/s). The distance traveled by the condensate is verified to be 250 μm, corresponding to a free flight of 22.27 ms after the Bragg pulse. As can be seen, the thermal cloud is barely affected, due to its much larger extent in momentum space.

$$\left(\frac{\Delta\nu_0}{\Delta\nu_{th}}\right)_{TOF} \sim \left(\frac{\omega_z}{\omega_\square}\right)\sqrt{\frac{\mu}{k_B T}}, \tag{1}$$

and remains smaller than 1 even at very low temperatures. Note that this would not have been the case for Bragg beams parallel to a radial axis, where the momentum width is larger by a factor $(\omega_\square/\omega_z)$ due to the released mean-field energy.

To find the condensate fraction, we simply count the number of diffracted atoms and identify it with the condensed number. To obtain a meaningful measurement of the condensed fraction, two conditions have to be met. First, almost all condensate atoms should be diffracted. Transfer efficiencies as high as 97% were observed for the coldest clouds we have produced, indicating that only a few percent of the condensate population remains at rest; this is comparable to the ±2% root-mean-square fluctuations of the diffraction efficiency that we have measured experimentally. Second, the diffracted number of thermal atoms should be small to obtain

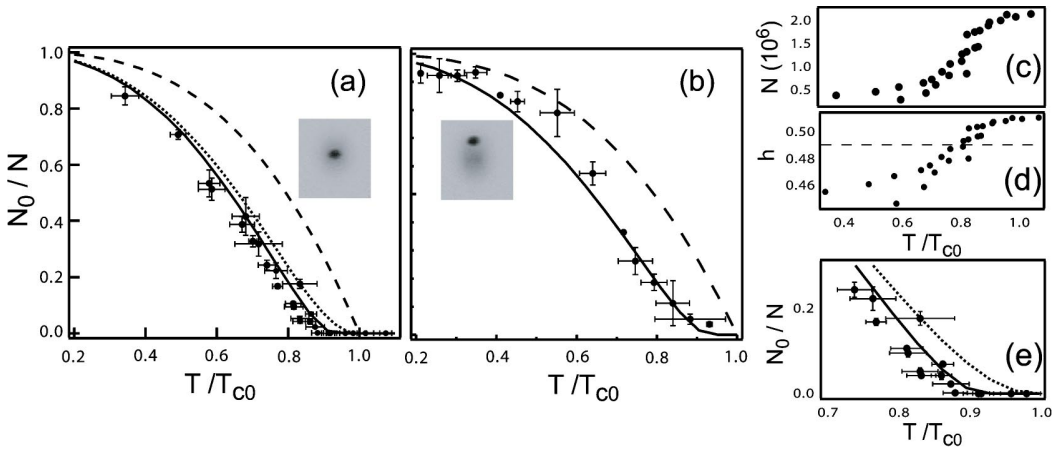


FIG. 2. Condensed fraction as a function of reduced temperature. (a),(b) Experimental data after averaging are shown as solid circles, with statistical error bars. Data in (a) were taken using the standard time-of-flight technique, while data in (b) were measured with the Bragg filtering scheme and extend to lower temperature, down to $T \approx 0.2T_{C0}$, whereas the standard method is limited to $T \approx 0.4T_{C0}$. Lines show theoretical expectations according to an ideal gas calculation, including finite-size effects (dashed line), a "semi-ideal" model that neglects interactions within the thermal cloud (dotted line), and a self-consistent HF calculation (solid line). Due to a different average atom number, the parameter $\overline{\eta}$ that controls the importance of interactions is different in each case, $\overline{\eta}=0.49$ and $\overline{\eta}=0.47$ for (a) and (b), respectively. The variation in total number due to evaporative cooling across the data set in (a) is shown in (c), and the corresponding variations of η in (d) (note the vertical scale, extending over no more than 5% of the average value). The average $\overline{\eta}=0.49$ is shown by the dashed line. In (e), we show an enlargement of (a) around the critical temperature, to highlight the importance of making the full HF calculation to reproduce the trend seen in the data.

a sensible measurement of the condensed number. We estimate the diffracted *fraction* of thermal atoms $f_{\rm th}$ in the impulse approximation discussed in [31]. In this approximation, well justified for the low densities considered here, the number of atoms diffracted from the thermal cloud is taken to be proportional to the thermal part of the momentum distribution, integrated over the directions perpendicular to the axis of the Bragg beams. Treating the thermal cloud as an ideal Bose gas in a first approximation, we find for a resonant π pulse,

$$f_{\rm th} = \frac{\pi^2}{4\Delta\nu_{\rm th}T}\frac{[g_{5/2}(1) - g_{5/2}\{\exp[-32(\nu_{\rm R}/\Delta\nu_{\rm th})^2]\}]}{g_{3/2}(1)}, \quad (2)$$

where $\Delta\nu_{\rm th}=2v_{\rm R}/\sqrt{2\pi}\lambda_{\rm T}$. Here and below, the Bose functions are defined by $g_\propto(u)=\Sigma_{j\geqslant 1}u^j/j^\propto$. The second term in brackets arises from off-resonant excitations, which are negligible for the condensate but sizable for the thermal component. The quantity $f_{\rm th}$ varies from 6% at 400 nK ($T\sim 0.8T_{\rm c}^0$ or $N_0/N\sim 20\%$) to 20% at 150 nK ($T\sim 0.2T_{\rm c}^0$ or $N_0/N\sim 90\%$). The ratio between the number of thermal atoms to the number of BEC atoms in the diffracted peak is given by $(1-f_{\rm c})/f_{\rm c}f_{\rm th}$, where $f_{\rm c}=N_0N$ is the condensed fraction, and it should remain small for the technique to work. All in all, we estimate from this simplified calculation that the Bragg filter is a useful technique in a window $5\% < N_0/N < 95\%$, the upper bound being set by the first condition (complete condensate transfer) and the lower by the second (the number of condensed atoms larger than the number of thermal atoms in the diffracted peak). Outside of this window, it becomes suspect to identify unambiguously the diffracted order with the condensate. Despite this, the technique represents a significant improvement over the standard method, as we will see in the next sections.

III. CONDENSED FRACTION OF THE INTERACTING GAS VERSUS TEMPERATURE

With the tools of Sec. II in hand, we can investigate the behavior of the condensed fraction as a function of temperature. This quantity is of primary importance: the possibility to measure it directly in trapped gases is in stark contrast with the situation in traditional, bulk superfluids where such measurements are intrinsically difficult [3]. We have done this measurement in two steps, first by using the standard method and second by taking advantage of the enhanced resolution of the Bragg filtering scheme.

A. Standard time-of flight measurements

Using the standard analysis technique (i.e. no Bragg filtering), we investigate in this section a temperature interval ranging from $T\approx 1.1T_{\rm c}^0$ down to $T\approx 0.3T_{\rm c}^0$, with approximately 2×10^6 atoms at the transition. Figure 2 shows the measured condensed fraction as a function of $T/T_{\rm c}^0$. Each point results from an averaging over several (typically five) realizations under identical conditions. The expectation for an ideal gas, including finite-size effects [2], lies distinctly above our experimental data. The difference can be attributed to interactions, as shown by the far better agreement with the self-consistent HF calculation (solid line). The observed reduction of the condensed fraction contrasts with the homogeneous case [32], where the condensed and normal components overlap everywhere and where it is energetically favorable to *increase* the condensed fraction to diminish the

exchange interaction energy among excited states.

An interesting property, first pointed out in [33], is the scaling behavior of all thermodynamical quantities, which depend only on the reduced temperature T/T_c^0 and on the parameter η which controls the magnitude of two-body repulsion [34]:

$$\eta = \frac{\mu_{\mathrm{TF}}[N_0 = N]}{k_B T_c^0} \approx 1.57\left(\frac{a}{\bar{\sigma}}\right)^{2/5} N^{1/15}. \tag{3}$$

Alternatively, one can express η as the ratio between the two characteristic lengths in the uniform problem—the scattering length a and the de Broglie wavelength λ_0 for $T=T_c^0$ — as $\eta \approx 1.07(a/\lambda_0)^{2/5}$. The power $2/5$ reflects the presence of the trapping potential. A typical value in our experiment is $\eta = 0.5$, while previous experiments (for instance, [4]) correspond to $\eta \sim 0.3-0.4$. Thus, the effect of two-body interactions is stronger in the work reported here, which explains to some extent the clarity with which we observe deviations from ideal-gas behavior.

In the experiment, because the total number N drops with T due to evaporation and losses, η decreases slightly across the temperature range, from 0.51 above T_c to 0.47 at low temperature [see Figs. 2(c) and 2(d)]. To compare with theory, we use the average number of atoms across the data set, $\bar{N} \approx 1.2 \times 10^6$, and the corresponding $\bar{\eta} = 0.49$. This does not lead to a discernible variation of the HF prediction at the scale of the graph, because of the weak $N^{1/15}$ dependence of η. This behavior emphasizes the scaling behavior exhibited by trapped Bose gases with large atom numbers [33].

Finally, we note that the data in the vicinity of T_c, shown in Fig. 2(e), emphasize the necessity of the full HF treatment of the thermal component to understand quantitatively the thermodynamic properties. As a matter of fact, the semi-ideal model (dashed line) predicts a condensed fraction systematically higher than the one we observe. This is clear evidence for mutual interaction between the condensed and noncondensed components. We will return later to this point, which is an important conclusion to be drawn from this work.

B. Enhanced resolution of low thermal fraction

As discussed earlier, at low temperatures $T \lesssim 0.4T_C$, the standard procedure is unable to extract faithfully the properties of the thermal cloud. Thanks to the Bragg filtering technique introduced in Sec. II C, this difficulty can be overcome and a very small thermal fraction can be detected. The condensed fraction measured this way is plotted in Fig. 2(b), along with the $\bar{\eta} = 0.47$ curve that corresponds the value $\bar{N} \approx 8 \times 10^5$ for this set of measurements. Again, we find good agreement with the prediction of the HF model within our uncertainty, even at very low temperatures. One could wonder whether the contribution from collective excitations (quantum and low-energy thermal depletion) could be measured by this technique (the analog of the phonon regime in superfluid ^{4}He). Unfortunately, according to the estimations of [18], they are always small when compared to the contribution of single-particle excitations in the temperature range we explore and compared to the estimated sensitivity of the Bragg technique (Sec. II C). Only by increasing the diluteness parameter $\sqrt{n_0(0)a^3}$ significantly could this regime become observable experimentally with the techniques described here.

IV. MEASUREMENT OF THE OVERALL AND THERMAL EXPANSION ENERGIES

Another quantity that can be measured from time-of-flight expansion is the release energy [2,4,5], the sum of the kinetic and interaction energy released at the trap cutoff and available for the expansion of the whole cloud. In an anisotropic trap such as ours ($\omega_\square/\omega_z \approx 51$), almost all the interaction energy converts into radial expansion velocity. The radial expansion of the cloud for $t \gg \omega_\square^{-1}$, observed in the y direction, proceeds at an overall speed v_y, fixed by the expansion energy

$$E_y = \frac{1}{2}Mv_y^2 = \frac{1}{3}E_{\mathrm{kin}} + \frac{1}{2}E_{\mathrm{int}}, \tag{4}$$

which, if scaled by the characteristic $Nk_BT_c^0$, is a universal function of η and T/T_c^0. We discuss in the Appendix I how to calculate the kinetic and interaction energies in the HF approximation.

Experimentally, one measures E_y directly from the root-mean-square cloud radius, according to $\langle y^2 \rangle = v_y t$ [4,5], without resorting to a detailed fitting model. This expression assumes negligible relaxation between the axial and radial degrees of freedom. We have plotted the measured value of E_y in Fig. 3(a) for same data as those shown in Fig. 2(b), where the Bragg filter has been used ($\eta \approx 0.47$ for these data). As expected, the kinetic energy of the thermal cloud dominates close to T_c, with a small contribution of the mean-field energy, whereas the interaction energy of the condensate E_0 is the most important term at low temperature. The HF curve connects these two limiting cases and reproduces well our observations.

A key advantage in our situation is the ability to analyze separately the condensate and thermal cloud thanks to the Bragg filtering scheme and, therefore, to measure the release energy of the thermal cloud *alone*. To avoid the condensate, we estimate the thermal cloud rms radius from a fit to a radial cut to the image [see inset in Fig. 3(b)]. The release energy of the thermal cloud measured this way is shown in Fig. 3(b), together with the calculated value:

$$E_y^{(\mathrm{th})} = \frac{1}{3}E_{\mathrm{kin}} + \frac{k_BT}{2}(\zeta_0 + \zeta_{\mathrm{th}}). \tag{5}$$

The quantities ζ_0 and ζ_{th} represent the scaled mean-field energy corresponding to the repulsion felt by a thermally excited atom due the condensate and to the remaining thermal atoms, respectively. They are defined more precisely in the Appendix I. Although the difference with the noninteracting curve is less pronounced at very low temperatures, where the thermal energy is very low, close to T_c, these results emphasize the important role of interactions and the good agreement with HF theory once again.

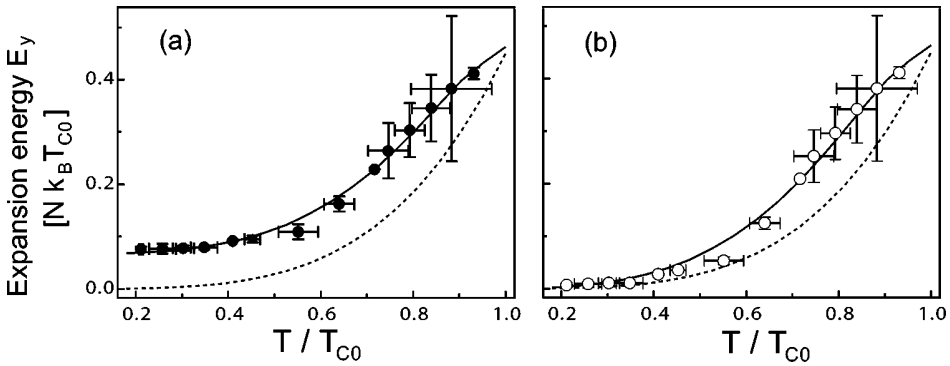


FIG. 3. Expansion energy in the radial x direction as a function of temperature. Solid circles in (a) correspond to the whole cloud and open circles in (b) to the thermal component only. The data are taken from the same set as in Fig. 2(b). The solid lines on the graphs show the same quantities predicted by the self-consistent HF model, with $\eta = 0.47$. The dotted line is the expansion energy (kinetic only) of an ideal cloud.

V. FURTHER EVIDENCE FOR MUTUAL INTERACTION BETWEEN THE CONDENSED AND THERMAL COMPONENTS

From images taken employing the Bragg filtering scheme, it is also possible to examine a radial cut to the profile of the thermal cloud, as shown in Fig. 4(a). As the initial kinetic energy of the thermal cloud is typically much larger than its mean-field energy, one expects that the density distribution after time of flight reflects at least approximately the initial momentum distribution, which does not display the "hole" present in the density distribution in the trap (see the Appendix I for further discussion). This is indeed the case: the measured profiles show a monotonic behavior near the center of the cloud [35]. Nevertheless, the density distribution we observe is somewhat flatter in the central region than the ideal-gas distribution used in the analysis, as shown by the residuals of a fit to the radial profile [Fig. 4(b)]. Above T_c, the effect disappears, which indicates that a flatter profile is not simply an artifact of our measurement method. Furthermore, such a behavior is to be expected if the condensate mean field repels the thermal cloud in the early stage of the expansion, since interactions tend in general to make the density profile more uniform.

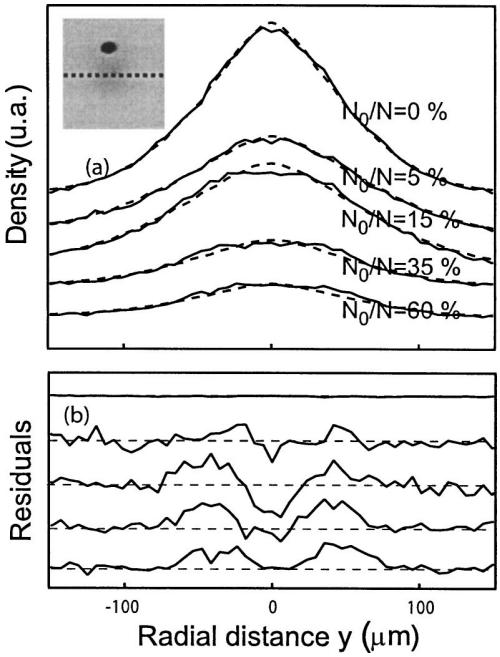


FIG. 4. Radial density profile of the thermal cloud. The dashed line in the inset shows the axis along which the profiles are taken. (a) Radial cut of the column density profile of the thermal cloud after 24.3 ms time of flight (solid line) and the best fit to an ideal Bose-Einstein distribution (dashed line). The Bragg filter has been employed to separate the thermal and condensed components. The condensed fraction is indicated in each case. (b) Residual of the fit for each case in (a).

A. Evidence for nonballistic expansion

As stated in Sec. II, this repulsion effect is not taken into account in our fitting procedure, which assumes an ideal Bose distribution to fit the profile and ballistic expansion to deduce temperature from the cloud sizes. To investigate further the validity of the analysis, we begin by plotting in Figs. 5(a) and 5(b) the aspect ratio of both components, as a function of the reduced temperature. One sees from these graphs that the simple model of a TF condensate on top of an ideal thermal background is not sufficient to account for the data. Indeed, for our trapping frequencies and for the time of flight $t = 22.3$ ms used in these measurements, one would expect from this model an aspect ratio of 1.17 for the condensate and 0.77 for the thermal cloud. Both deviate from these values and vary with temperature, indicating that the expansion dynamics is more complex than assumed by the analysis model. Note that although this model fails to describe fully the expansion dynamics, the observed deviation from ballistic expansion remains small.

As already pointed out, the obvious weakness of the analysis model is the neglect of collisional effects. We recall that the expansion model is basically motivated by the absence of a more elaborate theory to which we could compare our observations. It is, however, of interest to quantify the error level on temperature measurements, which we will do

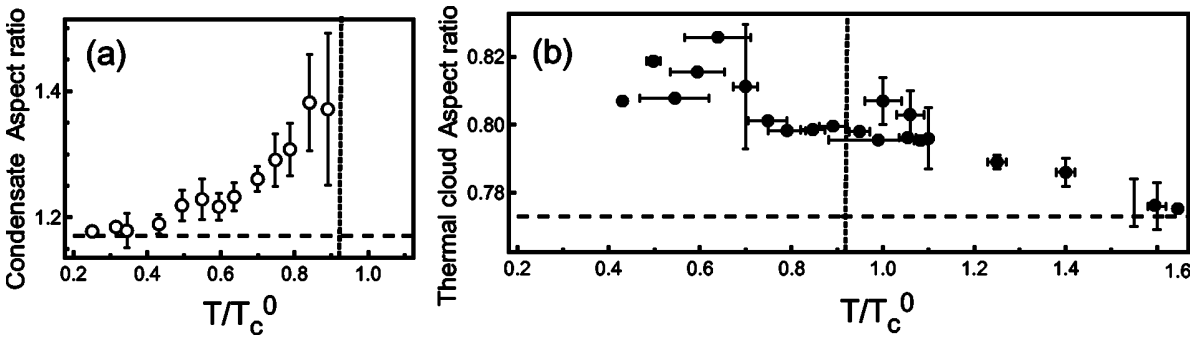


FIG. 5. Deviation from ballistic expansion. The aspect ratios of the condensed (a) and thermal (b) components of mixed clouds, after 22.3 ms of free expansion, are plotted as a function of the reduced temperature. The aspect ratios for noncondensed clouds, analyzed in more detail in [27], are also shown for comparison. The horizontal dashed lines indicate the aspect ratio of a TF condensate and an ideal thermal gas, respectively, and the vertical dotted lines show the critical temperature including mean-field and finite-size effects.

in the remainder of this section at the gross estimate level.

Interaction-driven forces that affect the expansion can be divided into two distinct classes [36]: hydrodynamic forces on the one hand, predominant above T_c in [27], and mean-field repulsion on the other, which play a minor role above T_c, but become increasingly important with decreasing T due to the presence of the condensate [37]. Both effects are roughly speaking comparable in magnitude, and from our observations above T_c and HF calculations (see the I), we estimate an upper bound on the systematic error on temperature measurements, from 10% close to T_c (mostly due to hydrodynamic behavior) to 20% well below (mostly due to repulsion by the condensate), compatible with the observed deviation from the ideal gas expansion.

This is an upper bound because the temperature is found through a fit to the wings of the distribution the only, which is expected to reduce effect of mean-field repulsion. The close agreement we find between the calculated release energy and the measured one in Fig. 3(b), where we recall that the radial size used to deduce the expansion energy was found through a fit to the full profile, seems to indicate that fitting to the wings avoids counting most of the repulsion energy in the determination of the temperature, as expected. However, this need not be true for the hydrodynamic relaxation, which affects directly the momentum distribution. Just as above T_C, hydrodynamic forces are thus likely to be the dominant source of systematic error in most of the temperature range in elongated traps such as ours.

B. Compression of the condensate by the thermal cloud

We conclude this section by examining the axial length of the condensate, which is reasonably immune to the effects discussed above because axial expansion of the condensate is very slow: the measured length thus stays close to the in-trap length. From condensed fraction measurements, it is clear that the semi-ideal model is not sufficient to reproduce our results, meaning that the mutual interaction between condensed and noncondensed atoms is observable. This is also seen from the length of the condensate inferred from the two-component fit, which is reduced when compared to the TF length calculated with the number of condensate atoms we measure. A quantitative comparison can be made only by taking into account the slow axial expansion. In the absence of a complete theory, we assume that the axial length is rescaled from the equilibrium length by the same factor as a condensate in the TF regime, $b_z \approx 1 + \pi\omega_z^2 t/2\omega_\square \approx 1.04$ for our parameters [39,40]. With this assumption, we find our data to be in reasonable agreement with the HF length, whereas the TF prediction is found systematically too high (see Fig. 6). This reduction can be attributed to the thermal cloud compression discussed in the I: at equilibrium, the shell of thermal atoms surrounding the condensate exerts a force towards the trap center, reducing its extension when compared to a "free" TF condensate.

VI. CONCLUSION

In this paper, we have investigated experimentally the thermodynamics of a trapped, interacting Bose gas over a wide range of temperatures, from T_c down to $0.2T_c$. We have used the standard time-of-flight analysis, complemented by the use of coherent Bragg scattering, to filter the condensate out of the thermal cloud. The latter technique allows us to reach lower temperatures and higher condensed fractions than those accessible by the usual method. We have investigated primarily two quantities: the condensed fraction and

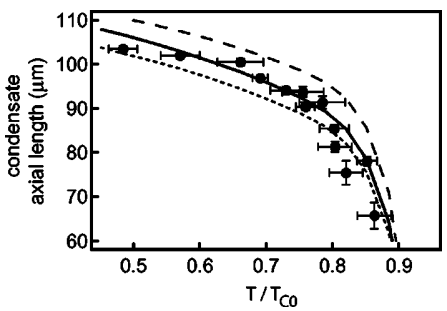


FIG. 6. Compression of the condensate by the thermal cloud. The axial length of the condensate as measured in the absorption images is shown, with the TF (dashed line) and the HF predictions for the trapped condensate (dotted line) and after rescaling by the same factor as a TF condensate (solid line).

the (radial) release energy. The data display without ambiguity an interacting gas behavior and are in agreement at a few percent level with a Hartree-Fock description of the mixed cloud. This highlights the pertinence of this simple description of the interacting, trapped Bose gas at finite temperature. Moreover, this gives evidence for a mutual interaction between the condensate and the thermal cloud close to T_c. Although these effects are small, they are measurable and should be taken into account in precise comparisons to the theory of finite-temperature, Bose-Einstein condensed gases.

A more thorough quantitative test of theory for ground-state occupation and similar thermodynamic properties is, however, hindered by the lack of theory to understand the expansion of a mixed cloud. For instance, the data in Fig. 2(a) lie systematically slightly below the theory, which may be due to an underestimation of the condensed fraction or the temperature: as described above, we use an ideal Bose distribution to fit the thermal component. This assumption contradicts the principal conclusion of this paper, that ideal-gas approximations are far from sufficient at the desired level of accuracy. Although the experiments described in this paper suggest an accuracy on temperature of order 10% at least, we have also shown that the density profile deviates from an ideal gas near the center of the cloud and stressed that hydrodynamic and mean-field effects in the expansion are not properly accounted for. Systematic errors may thus still be present, and a better accuracy is not guaranteed with the methods used in this paper. Numerical work—for instance, along the lines of [41]—may help study the expansion of mixed clouds and improve the standard analysis procedure.

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank D. Guéry-Odelin, S. Giorgini, J. Dalibard, G. V. Shlyapnikov, J. Retter, and D. Boiron for useful discussions and comments on the manuscript, as well as D. Clément for his work on a related project. J.H.T. acknowledges support from the Châteaubriand Program, CNRS, and NSERC, and M.H. from IXSEA. This work was supported by Délégation Générale de l'Armement, the European Union (Cold Quantum Gas network), INTAS (Contract No. 211-855), and XCORE.

APPENDIX: SIMPLE MODELS OF A TRAPPED BOSE-EINSTEIN CONDENSED GAS AT FINITE TEMPERATURES

In this appendix, we briefly summarize the three different models to which we compare our observations. We use as a temperature scale the critical temperature of an ideal gas in the thermodynamic limit [2], $k_B T_c^0 = \hbar\bar{\omega}[N/\zeta(3)]^{1/3}$, where ζ is the Riemann function and $\bar{\omega} = \omega_\square^{2/3}\omega_z^{1/3}$ is the geometrical mean of the trapping frequencies. We make three key assumptions [labeled (i)—(iii) in the following] to simplify the theoretical description. For the condensate, we suppose that (i) the condition $N_0 a/\bar{\sigma} \gg 1$ holds, where $\bar{\sigma} = \sqrt{\hbar/M\bar{\omega}}$ is the mean ground-state width and a the scattering length. This ensures that the condensate is in the TF regime. At very low temperatures, where the condensed fraction is almost unity, this gives the condensate density $n_0 = n_{TF}$ as

$$n_{TF}(\mathbf{r}) = [\mu_{TF} - V_{ext}(\mathbf{r})]/U, \tag{A1}$$

where $U = 4\pi\hbar^2 a/M$ is the mean-field coupling constant. The TF chemical potential is $\mu_{TF} = (\hbar\bar{\omega}/2)(15N_0 a/\bar{\sigma})^{2/5}$. For the thermal cloud, we assume (ii) $k_B T \gg \hbar\omega_\square$ for the semiclassical approximation to hold and (iii) use a mean-field description which treats thermal atoms as independent particles evolving in a self-consistent static potential $V_{eff}(\mathbf{r})$ (see below). The distribution function in phase space for thermal particles then reads

$$f(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{\beta[H(\mathbf{r},\mathbf{p})-\mu]} - 1}, \tag{A2}$$

with the semiclassical Hamiltonian $\mathcal{H}(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2M + V_{eff}(\mathbf{r})$, the chemical potential μ, and $\beta = 1/k_B T$. The particle density distribution for the thermal component n_{th} is found by integration over momenta and reads

$$n_{th}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda_T^3} \quad g_{3/2}\{\exp[\beta(\mu - V_{eff}(\mathbf{r}))]\}. \tag{A3}$$

Each model detailed below is thus specified by the precise form of V_{eff}: in the ideal-gas model, V_{eff} reduces to the trapping potential, in the semi-ideal model, it includes the mean field of the condensate only, and in the HF model, it also takes the mean field of the thermal atoms into account.

1. Ideal-gas model

The simplest approximation neglects all interactive contributions to the effective potential, which reduces to the trapping field:

$$V_{eff} - \mu = V_{ext} - \mu. \tag{A4}$$

The thermodynamic quantities follow the ideal-gas laws (see, for instance, [2]) and impose in particular $\mu = 0$ below T_c and $N_0/N = 1 - (T/T_c^0)^3$ for $T \leqslant T_c^0$. This ideal-gas description is thus incompatible with the existence of a TF condensate, which implies $\mu = \mu_{TF} > 0$, and it should be considered as a reasonable approximation only for $k_B T \gg \mu$.

2. Semi-ideal model

The repulsion of the thermal cloud by condensed atoms is taken into account in the so-called "semi-ideal" model [10,11], which considers a TF condensate containing $N_0 < N$ atoms plus a quantum-saturated, ideal thermal gas moving in the combined trapping plus condensate mean-field potential:

$$V_{eff}(\mathbf{r}) - \mu = V_{ext}(\mathbf{r}) + 2Un_{TF}(\mathbf{r}) - \mu_{TF}. \tag{A5}$$

The factor of 2 accounts for exchange collisions between atoms in different quantum states [2]. Note that the condensed atom number N_0 should be found self-consistently for a given T under the constraint that the total atom number be fixed.

The semi-ideal model correctly predicts the most important feature in the static density profile of trapped interacting Bose gases. As soon as the condensed fraction is larger than a few percent, the density of the condensate greatly exceeds the density of the thermal component. Therefore, the condensate mean field is stronger and repels the thermal cloud from the center of the trap, digging a hole in the thermal density distribution.

3. Self-consistent Hartree-Fock model

Although qualitatively correct and appealing because of its simplicity, the semi-ideal model is not sufficient to describe precisely our experiments. Interactions among thermal atoms and the backaction of the thermal cloud on the condensate have to be taken into account, which we do here in the HF approximation [12–18], corresponding to a self-consistent potential:

$$V_{\mathrm{eff}}(\mathbf{r}) - \mu = V_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r}) + 2Un_0(\mathbf{r}) + 2Un_{\mathrm{th}}(\mathbf{r}) - \mu. \quad \text{(A6)}$$

The equilibrium condensate density is no longer simply given by the TF profile, but depends also on the thermal density through

$$n_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu - V_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r}) - 2Un_{\mathrm{th}}(\mathbf{r})}{U}. \quad \text{(A7)}$$

A self-consistent numerical solution with a fixed atom number N fixes the finite-T chemical potential, $\mu = Un_0(0) + 2Un_{\mathrm{th}}(0)$, from which all other quantities can be determined. For instance, the interaction energy, which contains mixed terms describing the mutual influence of the condensate and the thermal cloud, can be written as $E_{\mathrm{int}} = E_0 + k_B T(2\zeta_0 + \zeta_{\mathrm{th}})$, where

$$E_0 = \frac{U}{2}\int d^{(3)}\mathbf{r}\, n_0(\mathbf{r})^2, \quad \text{(A8)}$$

$$\zeta_0 = \frac{U}{k_{\mathrm{B}}T}\int d^{(3)}\mathbf{r}\, n_0(\mathbf{r}) n_{\mathrm{th}}(\mathbf{r}), \quad \text{(A9)}$$

$$\zeta_{\mathrm{th}} = \frac{U}{k_{\mathrm{B}}T}\int d^{(3)}\mathbf{r}\, n_{\mathrm{th}}(\mathbf{r})^2. \quad \text{(A10)}$$

The kinetic energy is entirely due to the thermal cloud in the TF approximation and reads

$$E_{\mathrm{kin}} = \int \frac{1}{h^3} d^{(3)}\mathbf{r}\, d^{(3)}\mathbf{p} \frac{\mathbf{p}^2}{2M} f(\mathbf{r},\mathbf{p}). \quad \text{(A11)}$$

Numerical solution of the HF model displays two additional features compared to the semi-ideal model. First, mean-field interactions lower the critical temperature for Bose-Einstein condensation [27–32]. Second, there is a backaction of the thermal cloud on the condensate: the mean field exerted by the shell of thermal atoms surrounding the condensate acts in return to compress it, increasing its density and reducing its axial length L_0 according to

$$L_0^2 = \frac{2g}{m\omega_z^2}\left\{ n_0(0) + \frac{2}{\lambda_{\mathrm{T}}^3}\{g_{3/2}(e^{-gn_0(0)/k_{\mathrm{B}}T}) - g_{3/2}[1]\}\right\}. \quad \text{(A12)}$$

This compression effect is directly observed in Sec. V B and indirectly through the measurements of condensed fraction in Sec. III.

A further step forward would be to include collective effects in the model. However, Ref. [42] points out that low-energy, collective excitations cause a minute change in the thermodynamic properties of the system even at relatively low temperatures $T \lesssim \mu$. Another approach, based on quantum Monte Carlo calculations [43,44], has confirmed that the HF approximation could reproduce the *thermodynamics* of the trapped clouds to a very good accuracy.

[1] For a recent review, see Nature Insight **416** (2002).
[2] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
[3] P. E. Sokol, in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. Griffin, D. W. Snoke, and S. Stringari (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1993), p. 51.
[4] J. R. Ensher, D. S. Jin, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **77**, 4984 (1996).
[5] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **77**, 416 (1996).
[6] O. Maragò, G. Hechenblaikner, E. Hodby, and C. Foot, Phys. Rev. Lett. **86**, 3938 (2001).
[7] D. J. Han, R. H. Wynar, P. Courteille, and D. J. Heinzen, Phys. Rev. A **57**, R4114 (1998).
[8] B. P. Anderson and M. A. Kasevich, Phys. Rev. A **59**, R938 (1999).
[9] F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, and C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **87**, 080403 (2001).
[10] A. Minguzzi, S. Conti, and M. P. Tosi, J. Phys.: Condens. Matter **9**, L33 (1997).
[11] M. Naraschewski and D. M. Stamper-Kurn, Phys. Rev. A **58**, 2423 (1998).
[12] V. V. Goldman, I. F. Silvera, and A. J. Leggett, Phys. Rev. B **24**, 2870 (1981).
[13] D. A. Huse and E. Siggia, J. Low Temp. Phys. **46**, 137 (1982).
[14] J. Oliva, Phys. Rev. B **39**, 4197 (1989).
[15] V. Bagnato, D. E. Pritchard, and D. Kleppner, Phys. Rev. A **35**, 4354 (1988).
[16] H. Shi and W.-M. Zheng, Phys. Rev. A **56**, 1046 (1997).
[17] H. Shi and W.-M. Zheng, Phys. Rev. A **56**, 2984 (1997).
[18] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, J. Low Temp. Phys. **109**, 309 (1997).
[19] B. D. Busch, C. Liu, Z. Dutton, C. H. Behroozi, and L. V. Hau, Europhys. Lett. **51**, 485 (2000).
[20] M. Kozuma, L. Deng, E. W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, Phys. Rev. Lett. **82**, 871 (1999).

[21] J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **82**, 4569 (1999).

[22] B. Desruelle, V. Boyer, P. Bouyer, G. Birkl, M. Lécrivain, F. Alves, C. Westbrook, and A. Aspect, Eur. Phys. J. D **1**, 255 (1998).

[23] S. Richard, F. Gerbier, J. H. Thywissen, M. Hugbart, P. Bouyer, and A. Aspect, Phys. Rev. Lett. **91**, 010405 (2003).

[24] I. Shvarchuck, C. Buggle, D. S. Petrov, K. Dieckmann, M. Zielonkovski, M. Kemmann, T. Tiecke, W. von Klitzing, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **89**, 270404 (2002).

[25] W. Ketterle, D. S. Durfee, and D. M. Stamper-Kurn, in *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi,"* edited by M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman (IOS Press, Amsterdam, 1999), p. 67.

[26] The probe laser wavelength is $\lambda_L = 780.2$ nm; its intensity is 0.17 mW/cm^2, and the imaging pulse length is 34 μs. The half-width of the absorption resonance has been measured to be 8 MHz, slightly broader than the natural linewidth 6 MHz. This could explain the value of the measured absorption cross section, found to be smaller than the resonant cross section $\sigma_0 = 3\lambda_L^2/4$ by a factor of 4.00(15) [27].

[27] F. Gerbier, J. H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, and A. Aspect, Phys. Rev. Lett. **92**, 030405 (2004).

[28] A possible cause for this behavior is that for our parameters, the radial expansion is already asymptotic ($\omega_\square t \approx 57.0$), whereas the axial expansion is not ($\omega_z t \approx 1.2$). Thus, the spatial distribution along z might be intermediate between the in-trap distribution and the asympotic one. Note however that using the temperature measured along the axial direction (with the same exclusion region than the one chosen to find T_x) would merely shift the temperature downwards by approximately 5–10 %, without significantly affecting the main conclusions of the paper.

[29] F. Ferlaino, P. Maddaloni, S. Burger, F. S. Cataliotti, C. Fort, M. Modugno, and M.Inguscio, Phys. Rev. A **66**, 011604(R) (2002).

[30] A. P. Chikkatur, A. Görlitz, D. M. Stamper-Kurn, S. Inouye, S. Gupta, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **85**, 483 (2000).

[31] F. Zambelli, L. Pitaevskii, D. M. Stamper-Kurn, and S. Stringari, Phys. Rev. A **61**, 063608 (2000).

[32] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Phys. Rev. A **54**, R4633 (1996).

[33] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **78**, 3987 (1997).

[34] This property holds in the semiclassical approximation, independently of making the HF approximation.

[35] Note also that integration along the probe line of sight decreases the visibility of the hole, even in the trap.

[36] P. Pedri, D. Guéry-Odelin, and S. Stringari, Phys. Rev. A **68**, 043608 (2003).

[37] In addition, particle transfer is also possible [38,41], leading to a dynamic depletion of the condensate in the initial stages of the expansion.

[38] T. Nikuni and A. Griffin, Phys. Rev. A **65**, 011601 (2002).

[39] Y. Castin and R. Dum, Phys. Rev. Lett. **77**, 5315 (1996).

[40] Y. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **55**, R18 (1997).

[41] E. Zaremba, T. Nikuni, and A. Griffin, J. Low Temp. Phys. **43**, 141 (1999).

[42] F. Dalfovo, S. Giorgini, M. Guilleumas, L. Pitaevskii, and S. Stringari, Phys. Rev. A **56**, 3840 (1997).

[43] W. Krauth, Phys. Rev. Lett. **77**, 3695 (1996).

[44] M. Holzmann, W. Kratuh, and M. Narachewski, Phys. Rev. A **59**, 2956 (1999).

Eur. Phys. J. D **35**, 155–163 (2005)
DOI: 10.1140/epjd/e2005-00056-2

THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL D

Coherence length of an elongated condensate

A study by matter-wave interferometry

M. Hugbart[1,a], J.A. Retter[1], F. Gerbier[2], A.F. Varón[1], S. Richard[3], J.H. Thywissen[4], D. Clément[1], P. Bouyer[1], and A. Aspect[1]

[1] Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, UMR8501 du CNRS, 91403 Orsay Cedex, France
[2] Institut für Physik, Johannes Gutenberg Universität, Staudingerweg 7, 55099 Mainz, Germany
[3] THALES Research & Technology, 91404 Orsay Cedex, France
[4] Department of Physics, University of Toronto, 60 Saint George St, Toronto, Ontario, M5S 1A7 Canada

Received 13 January 2005 / Received in final form 5 March 2005
Published online 3 May 2005 – © EDP Sciences, Società Italiana di Fisica, Springer-Verlag 2005

Abstract. We measure the spatial correlation function of Bose-Einstein condensates in the cross-over region between phase-coherent and strongly phase-fluctuating condensates. We observe the continuous path from a Gaussian-like shape to an exponential-like shape characteristic of one-dimensional phase-fluctuations. The width of the spatial correlation function as a function of the temperature shows that the condensate coherence length undergoes no sharp transition between these two regimes.

PACS. 03.75.Hh Static properties of condensates; thermodynamical, statistical and structural properties – 03.75.Dg Atom and neutron interferometry – 39.20.+q Atom interferometry techniques

1 Introduction

The high atomic phase-space density provided by a Bose-Einstein condensate (BEC) [1] has driven interest in guiding atoms in a manner analogous to guiding laser light through single-mode optical fibres. The most advanced technology to date is based on *atom chips*, where the fields which trap and guide the atoms are created by microfabricated structures [2–7]. Many groups around the world have already succeeded in preparing BEC on an atom chip [8–14] and one can envisage using this technology to create integrated atom interferometers [15–18]. In this context, a precise characterization of the phase coherence properties of the condensate is crucial [19–21].

Trapping quantum gases on atom chips naturally involves highly elongated, guide-like traps. Changing the dimensionality of the system from three-dimensional (3D) towards one-dimensional (1D) has a profound effect on the phase coherence of the condensate. In 3D condensates of modest aspect ratio, experimental results show that phase coherence extends across the whole cloud [22,23], even at finite temperature [24]. However, in the 1D regime, thermal excitations of the low energy axial modes lead to phase fluctuations which degrade the phase coherence [25,26]. Condensates exhibiting such phase fluctuations are known as *quasi-condensates*.

In the intermediate regime of elongated 3D condensates with a high aspect ratio, a behaviour similar to the 1D case is observed [27]: below a characteristic temperature T_ϕ determined by the atom number and the trapping frequencies, the condensate is nearly phase coherent, but above T_ϕ the population of the axial modes is high and phase fluctuations may be pronounced. For weakly elongated condensates, T_ϕ can be higher than the transition temperature T_c, so that the condensate is nearly phase coherent at all temperatures. In contrast, atom chips can easily produce traps with high aspect ratios (∼1000) for which T_ϕ can be much smaller than T_c. Phase fluctuations are therefore likely to impose limits on the performance of atom chip devices and need to be well understood.

In an elongated condensate, the wavelength of the low energy axial modes is longer than the radial size of the condensate, so these excitations have a 1D character. However, the wavelength of these excitations can be much shorter than the axial length of the condensate, reducing the phase coherence length in the axial direction. An important feature of quasi-condensates is that density fluctuations remain suppressed in the trap, due to the mean field energy, even in the presence of large phase fluctuations [21,27]. Therefore, the 3D quasi-condensate has the usual parabolic profile in the Thomas-Fermi limit.

Phase-fluctuating condensates in elongated traps were first observed by the conversion of phase fluctuations into density fluctuations after a sufficiently long free expansion [19] and by a condensate-focussing technique [20]. Quantitative measurements of the phase coherence length have since been obtained from the momentum

[a] e-mail: mathilde.hugbart@iota.u-psud.fr

distribution [21] and the second-order correlation function [28]. The results of each of these experiments showed good agreement with theory [27] in the strongly phase-fluctuating regime (at temperatures $T \gg T_\phi$). However, neither experiment explored the cross-over region ($T \sim T_\phi$) between phase-coherent and strongly phase-fluctuating condensates.

In this article we describe a new experiment using a matter-wave interferometer and Fourier-space analysis to measure the spatial correlation function, thereby extending our measurements into the cross-over region ($T \sim T_\phi$). Our results agree with the predicted shapes of the correlation function: for $T \gg T_\phi$, we find exponential-like correlation functions as predicted for significant phase fluctuations, whereas at $T \sim T_\phi$ we find a Gaussian-like shape, as expected when the phase profile is nearly flat and the correlation function decay is dominated by the density profile. The coherence length as a function of T/T_ϕ follows the trend predicted by theory, showing that the coherence length increases smoothly as the temperature falls and that there is no sharp transition at T_ϕ. This highlights the fact that phase fluctuations occur at all finite temperatures, even if these effects are too small to be resolved experimentally for more spherical traps. However, whereas our previous measurements based on momentum spectroscopy [21], realized for high T/T_ϕ, were in full agrement with the theory, two observations remain unexplained in the interferometric method. First, as in a previous experiment [22], our experimental measurements of the coherence length are shifted from the theoretical prediction, by about 25% for $T/T_\phi = 1$, even after taking the limitations of our imaging system into account. Second, our interferometer produces unexplained supplementary fringes outside of the region where the condensates overlap, and we note that similar unexplained fringes appear in other published data [29]. These supplementary fringes do not seem to be compatible with interference of the thermal cloud observed in [30].

2 Measurement of the coherence length by atom interferometry

A natural method to study the coherence length along the long axis z of a condensate, or a quasi-condensate, is to use atom interferometry. With atomic beam-splitters, one produces two daughter copies of the initial condensate with a separation s, and observes the interference pattern appearing in the atomic density:

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}) &\propto \left|\Psi_0\left(\mathbf{r}-\frac{s}{2}\mathbf{e}_z\right)+e^{i\phi_{\mathrm{rel}}}\Psi_0\left(\mathbf{r}+\frac{s}{2}\mathbf{e}_z\right)\right|^2 \\ &\propto \left|\Psi_0\left(\mathbf{r}-\frac{s}{2}\mathbf{e}_z\right)\right|^2+\left|\Psi_0\left(\mathbf{r}+\frac{s}{2}\mathbf{e}_z\right)\right|^2 \\ &\quad +2\mathrm{Re}\left[e^{i\phi_{\mathrm{rel}}}\Psi_0^*\left(\mathbf{r}-\frac{s}{2}\mathbf{e}_z\right)\Psi_0\left(\mathbf{r}+\frac{s}{2}\mathbf{e}_z\right)\right], \quad (1) \end{aligned}$$

where $\mathbf{e}_z$ is the axial unit vector, $\Psi_0(\mathbf{r})$ is the wavefunction describing the initial condensate and ϕ_{rel} a relative phase shift produced by the interferometer and the free fall of the condensate.

Let us first consider the behaviour of a fully phase coherent condensate. During free expansion, it acquires a phase distribution proportional to z^2 [31]. The phase difference ϕ_{rel} between two displaced copies of the condensate is therefore proportional to zs, giving rise to an interference pattern of straight fringes, uniformly spaced along the longitudinal direction, the spatial frequency of the fringes being proportional to the separation s. The fringe contrast integrated over the entire condensate gives the first-order correlation function at s:

$$C^{(1)}(s)=\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\Psi_0^*\left(\mathbf{r}-\frac{s}{2}\mathbf{e}_z\right)\Psi_0\left(\mathbf{r}+\frac{s}{2}\mathbf{e}_z\right). \quad (2)$$

Repeating this contrast measurement for different separations s, one can study the decay of $C^{(1)}(s)$ with increasing s [22]. For a fully phase coherent condensate, the first-order correlation function decay reflects only the width of the density profile $n(\mathbf{r})$ [32].

In the case of a quasi-condensate, 1D thermal excitations cause the phase to fluctuate along the longitudinal axis, both spatially and temporally. In our experiment, these fluctuations are small compared to the parabolic phase developed during free expansion. Therefore when we image the overlapping condensates after free expansion, we still observe straight fringes, but they are no longer strictly periodic. Small local phase shifts add a "jitter" to the fringe spacing, which in Fourier space has the effect of broadening the peak at the spatial frequency of the fringes and thereby reducing its height. As s is increased, the fringes are perturbed more strongly, because the condensate phase becomes less correlated at larger separations. The contrast therefore decreases faster with s than in the fully phase-coherent case. The greater the amplitude of the phase fluctuations, the faster the contrast decreases with s. Therefore by measuring the width of the correlation function at different temperatures, we extract the temperature dependence of the coherence length. Further information is obtained from the shape of the correlation function [33].

In the presence of phase fluctuations, each realization of the experiment gives a different interference pattern, even with fixed experimental conditions. Expression (2) must therefore be generalized to:

$$C^{(1)}(s)=\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\left\langle\Psi_0^*\left(\mathbf{r}-\frac{s}{2}\mathbf{e}_z\right)\Psi_0\left(\mathbf{r}+\frac{s}{2}\mathbf{e}_z\right)\right\rangle, \quad (3)$$

where the brackets $\langle\,\rangle$ denote a statistical average of the random process describing the random phase. In practice, one must repeat the experiment at a given separation s and average the contrast measurements over many quasi-condensates to obtain $C^{(1)}(s)$.

This principle was used by Michelson in his famous astronomical interferometer, whose goal was to measure the spatial coherence of the light field arriving from a star, in order to deduce the diameter of the star [34]. However, Michelson's method is plagued by the existence of a randomly fluctuating relative phase between the two inputs

of the interferometer, and various methods insensitive to the relative phase fluctuations had to be developed [35]. A similar problem appears when one tries to determine the coherence length of a condensate or a quasi-condensate with interferometry. In addition to the controlled relative phase between the two components interfering in (1), there is an uncontrollable relative phase due to experimental problems such as a residual phase shift between the lasers creating the two copies or a random velocity kick imparted to the sample. In order to overcome this problem [36], Hellweg et al. [28] have used an analysis analogous to the Hanbury Brown and Twiss method [37], since it is based on the measurement of the second-order correlation function which is insensitive to global phase shifts. In contrast, our method is in line with the initial method of Michelson who could visually evaluate the contrast of the randomly moving fringes he was observing. The decrease of this contrast as a function of the telescopes' separation gave a direct measurement of the coherence length. Similarly, we directly evaluate the contrast of the fringes by taking the modulus of the Fourier transform of the fringe pattern. The decrease of that contrast as a function of the separation s yields the coherence length of the quasi-condensate.

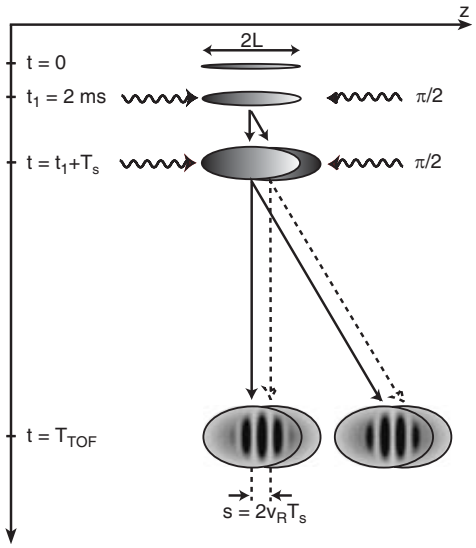


Fig. 1. The condensate is released from the trap at $t = 0$ and has a half-length of L. A sequence of two Bragg pulses is applied to generate the interferometer. Two output ports are created ($p = 0$, $p = 2\hbar k_{\mathrm{L}}$) with complementary fringe patterns.

3 Experiment

3.1 Creation of elongated Bose-Einstein condensates

In our experimental setup [38], a Zeeman-slowed atomic beam of ^{87}Rb is trapped in a MOT, and after optical pumping into the $5\mathrm{S}_{1/2}|F = 1, m_F = -1\rangle$ state is transferred to a magnetic Ioffe-Pritchard trap created by an iron-core electromagnet. Our design allows us to lower the magnetic field at the bottom of the trap to a few Gauss and thus to obtain very tight radial confinement [39]. Using this trap, we are able to create condensates very close to the 1D Thomas-Fermi regime [40], as was demonstrated in [41–43]. In the present experiment, we produce condensates further into the 3D regime so that we can explore the cross-over regime ($T \sim T_\phi$). We use two different trap configurations: in the first, the final radial and axial trap frequencies are respectively $\omega_\perp = 2\pi \times 395$ Hz and $\omega_z = 2\pi \times 8.67$ Hz, giving an aspect ratio of 45; for the second trap configuration, the final frequencies are $\omega_\perp = 2\pi \times 655$ Hz and $\omega_z = 2\pi \times 6.55$ Hz, with aspect ratio 100. In this way, we obtain needle-shaped condensates containing around 3×10^5 atoms, with a typical half-length $L \simeq 85$ μm in the first trap and $L \simeq 120$ μm in the second. We control the final number of atoms by holding the condensate for a variable time, typically a few seconds, in the presence of an rf shield. The absolute number of atoms is calibrated from a measurement of the critical temperature, taking into account the effects of interactions [44]. For condensates with small condensate fractions (less than 60%), the temperature is obtained by fitting a Gaussian distribution to the thermal wings of the cloud. The temperature is then extrapolated from the final frequency of the rf ramp to lower temperatures for which the thermal fraction is indiscernible [43,45].

3.2 Interferometry set-up and timing

As shown in Figure 1, we implement the interferometer using a sequence of two $\frac{\pi}{2}$-Bragg pulses, which act as matter-wave beamsplitters. The set-up consists of two laser beams counter-propagating along the longitudinal trap axis, each of intensity $\sim$2 mW cm^{-2}, red-detuned by $\Delta = 6.6$ GHz from the ^{87}Rb D2 line at $\lambda = 780.02$ nm. Two acousto-optic modulators driven by frequency synthesizers produce a small relative detuning δ, tuned to the two-photon Bragg resonance $\delta = 2\hbar k_{\mathrm{L}}^2/m$, with m the atomic mass and $k_{\mathrm{L}} = 2\pi/\lambda$. The momentum width along z of the expanding condensate corresponds to a frequency width of 200 Hz. Therefore we use Bragg pulses of $\sim$100 μs, short enough such that the corresponding 1.6 kHz frequency width (full width at half maximum) is sufficient to couple the entire condensate. The thermal cloud surrounding the condensate has a momentum distribution with a frequency width ranging from 12 kHz to 60 kHz, much larger than that of the condensate. Thus, only a small fraction of the thermal cloud is coupled by the Bragg pulses [45]. By controlling the Bragg pulse length, we realize a $\frac{\pi}{2}$-pulse which splits the condensate into a coherent superposition of two wavepackets with velocities differing by $2v_{\mathrm{R}} = 2\hbar k_{\mathrm{L}}/m = 11.72$ mm s^{-1}, where v_{R} is the recoil velocity. The interferometer sequence is illustrated in Figure 1. The condensate is held in the trap for at least 2 s at the end of the final rf evaporative-cooling ramp, to allow residual oscillations to be damped [20,21]. After switching off the trap, the condensate is allowed to expand freely for 2 ms before the first $\frac{\pi}{2}$-pulse is applied. During this expansion the condensate density reduces by two orders of magnitude, so collisions between the diffracted wavepacket and the original condensate become negligible. During a free-evolution time 2 ms $< T_s <$ 10 ms, the two wavepackets

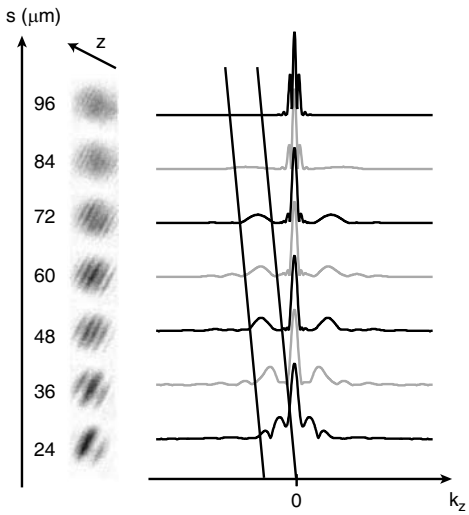


Fig. 2. Left: one of the two output ports of the interferometer for different separations s between the two condensate copies. The half-length of the initial condensate is $L = 85$ μm. Right: profiles of the 2D Fourier transform (absolute value) of each of the images on the left. The profiles are normalized to equal central peak height (proportional to total atom number). The position of the second peak (delimited by the two lines) gives the spatial frequency of the fringes, and the ratio of the height of the second peak to the central peak gives the fringe contrast.

separate to a distance $s = 2v_{\mathrm{R}}T_s$. The second $\frac{\pi}{2}$-pulse completes the interferometer, and we observe interference in each of the two output ports, which differ in momentum by $p = 2\hbar k_{\mathrm{L}}$. The condensate is imaged by absorption perpendicular to the long axis z after a 29 ms total time-of-flight [46].

For a given set of experimental conditions (condensate atom number and temperature), the experimental correlation function is acquired by taking a sequence of interference images with different condensate separations s ranging from $0.2L$ to $1.2L$, varied by changing T_s. For smaller separations, we do not observe enough fringes to obtain a reliable measurement of the contrast. At the maximum value of s, the contrast has reduced such that the fringes are no longer discernible above the noise. Typical images for $0.3L \leq s \leq 1.1L$ are shown in Figure 2. For each value of s, typically 5 images are taken, so that a statistical average can be performed. The fringe contrast is then measured, giving the correlation function. Correlation functions have been obtained at various temperatures T between 100 and 230 nK and for condensate atom numbers N_0 between 0.5×10^5 and 2.5×10^5. These conditions correspond to $0.8 < T/T_\phi < 8$, where $T_\phi = 15\hbar^2 N_0/16mL^2$ [27,47].

4 Analysis of interferograms

4.1 Interferogram

As shown in [25], a quasi-condensate is well-described by a fluctuating complex field $\Psi(\rho, z) = \sqrt{n(\rho, z)}\mathrm{e}^{i\Phi(\rho,z)}$, with fixed density distribution $n(\rho, z)$ and fluctuating phase $\Phi(\rho, z)$. In the following, $\Psi(\rho, z)$ represents the wavefunction of the condensate after the free-fall expansion. The first Bragg pulse is applied after 2 ms of free expansion, at which time the density has reduced such that interactions between the atoms are negligible. We therefore assume that the different copies of the condensate propagate independently. The phase distribution can be expressed as $\Phi(\rho, z) = \alpha z^2 + \beta\rho^2 + \phi_{\mathrm{th}}(z)$, where $\phi_{\mathrm{th}}(z)$ represents the thermal phase fluctuations and the quadratic terms represent the parabolic phase developed during expansion.

We now consider the interference pattern produced at one of the output ports of the interferometer. For a separation s, we obtain the atomic density distribution:

$$n_{\mathrm{out}}(\rho, z) = \frac{1}{4}|\Psi(\rho, z - s/2) + \Psi(\rho, z + s/2)|^2 = \frac{n_+}{4} + \frac{n_-}{4} + \frac{\sqrt{n_+ n_-}}{2}\cos[\Delta\Phi(z) + \phi_{\mathrm{g}}], \quad (4)$$

with $n_\pm = n(\rho, z \pm s/2)$ and $\Delta\Phi(z) = \Phi(z + s/2) - \Phi(z - s/2)$. The global phase shift ϕ_{g} is due to random, uncontrolled phase shifts between the two Bragg pulses. The phase difference between the two copies is $\Delta\Phi(z) = \alpha z s + \phi_{\mathrm{th}}(z + s/2) - \phi_{\mathrm{th}}(z - s/2)$. The density of the condensate is small when the first Bragg pulse is applied, so we neglect a small relative velocity due to repulsion between the two copies. At the second output port, the two condensate copies have an additional π relative phase shift due to the Bragg pulses, thereby producing a complementary fringe pattern. In our data analysis, the images of each output port are treated separately.

Since the global phase shift ϕ_{g} fluctuates from shot to shot, we cannot average over different images at the same separation s. Instead, we take the contrast of each image individually and then average the contrast.

4.2 Analysis in Fourier space

The atoms are imaged by absorption along the vertical y-axis, perpendicular to the long axis of the trap. The image we obtain, rescaled to units of 2D atomic density, is the integrated density:

$$I(x, z) = \mathrm{const} \int \mathrm{d}y\, n_{\mathrm{out}}. \quad (5)$$

We take the 2D Fourier transform of this image and extract its profile along the zero radial frequency $k_x = 0$ axis:

$$\tilde{I}[0, k_z] = \mathrm{const} \int \mathrm{d}^3 r\, n_{\mathrm{out}} e^{ik_z z}. \quad (6)$$

Typical images and their 2D Fourier transform profiles are shown in Figure 2 for different separations s. The contrast of the fringe pattern is given by the ratio $2\tilde{I}[0, k_0(s)]/\tilde{I}[0, 0]$, where $k_0(s) \simeq \alpha s$ is the dominant spatial frequency of the fringe pattern. The profiles of Figure 2 show clearly the increasing spatial frequency and decreasing contrast as a function of s.

To extract the correlation function, we take the complex amplitude of the Fourier peak at the spatial frequency k_0 of the fringes:

$$\tilde{I}[0, k_0(s)] = e^{i\phi_g} \int d^3r \sqrt{n_+ n_-} e^{i\Delta\Phi_{th}}. \quad (7)$$

In the absence of the global phase shifts ϕ_g, the correlation function $C^{(1)}(s)$ would be obtained by taking the statistical average of equation (7):

$$C^{(1)}(s) = \left\langle \tilde{I}[0, k_0(s)] \right\rangle = \int d^3r \left\langle \sqrt{n_+ n_-} e^{i\Delta\Phi_{th}} \right\rangle \quad (8)$$

which is identical to relation (3). However, ϕ_g changes from shot to shot and prevents us from averaging Fourier transforms directly in this way [48]. To eliminate this random phase, we can take the absolute value of the Fourier transform before averaging. Thus we obtain an effective correlation function:

$$C^{\text{eff}}(s) = \left\langle \left| \tilde{I}[0, k_0] \right| \right\rangle = \left\langle \left| \int d^3r \sqrt{n_+ n_-} e^{i\Delta\Phi_{th}} \right| \right\rangle. \quad (9)$$

Note that although it has similar behaviour, our effective correlation function is expected to be quantitatively different from $C^{(1)}(s)$. Taking the absolute value of the transform reduces the cancelling effect between the random thermal phase shifts in the statistical average, so that the effective correlation function $C^{\text{eff}}(s)$ decays more slowly with s than $C^{(1)}(s)$, as calculated in the next section.

4.3 Simulation

The 1st order correlation function $C^{(1)}(s)$ can be calculated analytically [33], using the theory of [27] to account for the phase fluctuations. However, it is not possible to obtain an analytic expression for the effective correlation function $C^{\text{eff}}(s)$ (Eq. (9)) which we measure. Therefore, to calculate $C^{\text{eff}}(s)$, we first simulate the quasi-condensate phase fluctuations following the theory in [27]. The phase operator is given by:

$$\hat{\phi}_{th}(\mathbf{r}) = [4n(\mathbf{r})]^{-1/2} \sum_j f_j^+(\mathbf{r}) \hat{a}_j + h.c., \quad (10)$$

where $\hat{a}_j$ is the annihilation operator of the excitation with quantum number j. The solution of the Bogoliubov-de Gennes equations for "low energy" excitations (with energies $\epsilon_\nu < \hbar\omega_\perp$) gives the wavefunctions of these modes:

$$f_j^+(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{(j+2)(2j+3)gn(\mathbf{r})}{4\pi(j+1)R^2 L \epsilon_j}} P_j^{(1,1)}(z/L), \quad (11)$$

where $P_j^{(1,1)}$ are Jacobi polynomials, $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ is the interaction strength, a is the scattering length, R and L are the size of the condensate in the trap and $\epsilon_j = \hbar\omega_z\sqrt{j(j+3)/4}$ is the energy of mode j [40]. We assume the Thomas-Fermi approximation for the density $n(\mathbf{r})$, taking R and L from fits to images after expansion. To simulate numerically the phase fluctuations, we replace the operators $\hat{a}_j$ and $\hat{a}_j^\dagger$ by complex Gaussian random variables α_j and α_j^*. These variables have a mean value of zero and the correlation $\langle \alpha_j \alpha_{j'}^* \rangle = \delta_{jj'} N_j$ where $N_j = k_B T/(\hbar\omega_z\sqrt{j(j+3)/4})$ is the occupation number for the quasiparticle mode j at a given temperature T. We assume that the phase fluctuations do not evolve on the time scale of the expansion [33]. We have verified this by studying images of condensates after the same time-of-flight, but without the interferometer pulses. In this case, we observe a smooth density profile, with no extra features appearing in the Fourier transform.

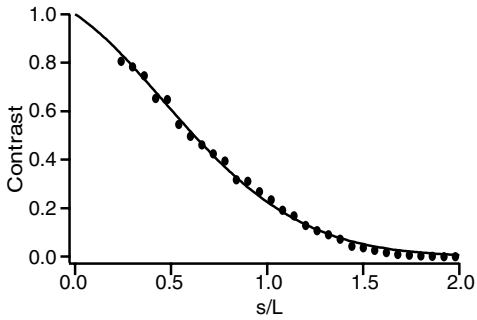


Fig. 3. Points represent the contrast extracted from our simulated absorption images (see text) as a function of s/L, L being the condensate half-length, for $T/T_\phi = 1$. These points are fitted by the product of a Gaussian and an exponential (solid line) which we take to be our theoretical effective correlation function $C^{\text{eff}}(s)$.

For a given T/T_ϕ, 20 condensates are generated at each value of s, with s ranging from $0.2L$ to $2L$. Each condensate is integrated over y as in equation (5). These simulated absorption images are analysed in exactly the same way as the real experimental images. The absolute values of the Fourier transforms of the images are averaged, and the contrast extracted as in equation (9). The points in Figure 3 show the typical contrast extracted from our simulations for $T/T_\phi = 1$. We found that these points are very well fitted by the product of a Gaussian and an exponential, for all T/T_ϕ. We use these fits as our theoretical effective correlation functions $C^{\text{eff}}(s)$.

The effective correlation function was simulated for $0 \leq T/T_\phi \leq 20$. Figure 4a presents results for different T/T_ϕ. At $T = 0$, $C^{\text{eff}}(s)$ coincides with $C^{(1)}(s)$ [33]. This function is simply the integrated overlap function between the two condensates, and is approximately a Gaussian function of the separation s [32]. As T/T_ϕ increases, the width of the function decreases and its form gradually becomes exponential. In Figure 4b we plot the $1/e$ widths of the simulated $C^{\text{eff}}(s)$ functions as a function of T/T_ϕ. For comparison we show also the width of $C^{(1)}(s)$ [33] which decreases much faster with T/T_ϕ.

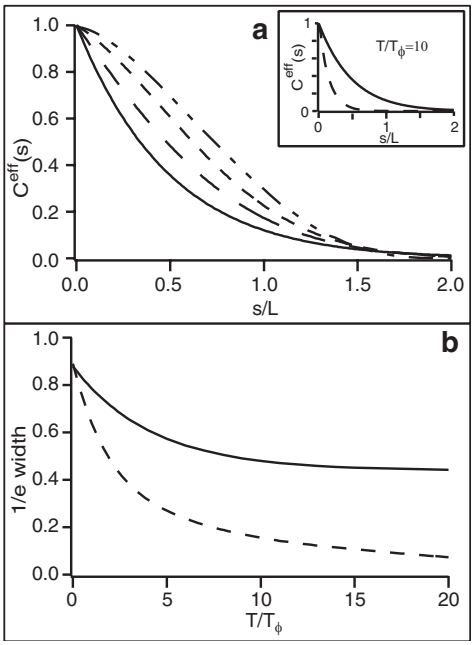


Fig. 4. Top: lines are simulated effective correlation function $C^{\text{eff}}(s)$ (described in the text) as a function of s/L for different T/T_ϕ. From the top, $T/T_\phi = 0, 1, 3, 10$. With increasing T/T_ϕ, the curve changes from a quasi-Gaussian to an exponential and the width decreases. Inset: comparison of $C^{\text{eff}}(s)$ (solid line) and $C^{(1)}(s)$ (dashed line) at $T/T_\phi = 10$. Bottom: width at $1/e$ of $C^{\text{eff}}(s)$ (solid line) and $C^{(1)}(s)$ (dashed line) as a function of T/T_ϕ.

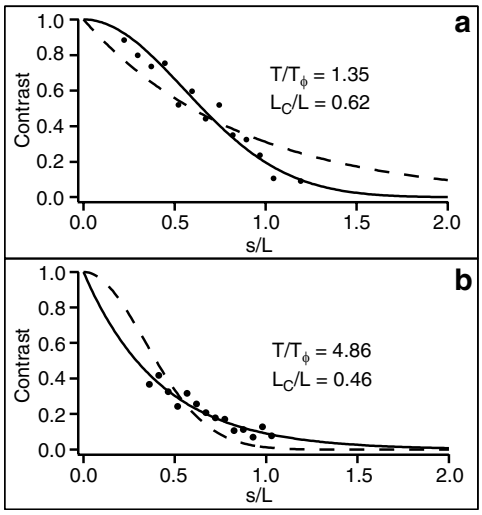


Fig. 5. Example of two experimental effective correlation profiles (points) as a function of s/L showing clearly the change in shape and width with T/T_ϕ. Each point is averaged over 5 condensates, each with 2 output port images. Top: at $T/T_\phi = 1.35$, the effective correlation curve is fitted by a Gaussian (solid line), with $1/e$ width $L_C/L = 0.62$. The fit to an exponential (dashed line) is shown for comparison. Bottom: at $T/T_\phi = 4.86$, the effective correlation curve is fitted better by an exponential (solid line), with $1/e$ width $L_C/L = 0.46$. The fit to a Gaussian (dashed line) is shown for comparison.

5 Experimental results

Figure 5 shows two examples of effective correlation curves measured using our interferometer and analysed as described above. The points shown in Figure 5a were obtained using a magnetic trap with an aspect ratio of 45, and with an atom number and temperature corresponding to $T/T_\phi = 1.35$, that is for small-amplitude phase fluctuations. The points in Figure 5b were obtained using a trapping aspect ratio of 100, and with $T/T_\phi = 4.86$. The contrast is plotted as function of s/L, obtained from a fit to a truncated parabola. Each point corresponds to an average over 5 condensates. The difference in the range of s/L explored is due to different expansion dynamics after release from the two different traps. In the more tightly confined trap (Fig. 5b), the axial expansion is much slower, and thus the fringe spacing decreases more slowly with s. At the smallest values of s, it is therefore impossible to measure the contrast reliably since we do not observe enough fringes. We can extract information about the phase fluctuations from both the shape and the width of these effective correlation functions.

5.1 Shape of the effective correlation functions

First, we observe qualitatively that the shape of the effective correlation functions $C^{\text{eff}}(s)$ changes as T/T_ϕ increases. For small T/T_ϕ, as in Figure 5a, the curves are clearly Gaussian, as shown by the fit in the figure. As we increase T/T_ϕ, the profiles become rapidly exponential. We see in Figure 5b that at $T/T_\phi = 4.86$, the curve is already better fitted by an exponential than a Gaussian. At intermediate values of T/T_ϕ, we can use the product of a Gaussian and an exponential to fit a smooth curve through the data. The contribution of the exponential increases rapidly in importance at finite T, in agreement with the simulation, reflecting the increasing amplitude of the phase fluctuations with T/T_ϕ.

5.2 Comparison of coherence length L_C

In order to extract quantitative information from the effective correlation functions, we define a coherence length L_C, equal to the $1/e$ width of the effective correlation curve $C^{\text{eff}}(s)$ [49]. We then use this parameter to compare the widths of the measured and simulated effective correlation functions. A smooth curve is fitted through the data (using the product of a Gaussian and an exponential) and the $1/e$ width extracted. Although the thermal cloud plays no role in the interference pattern we observe, it appears behind the condensates in the $p = 0$ output of the interferometer and thus reduces the measured contrast. Independent measurements of the thermal fraction (between 60% and 80% for this experiment) allow us to renormalize the experimental effective correlation functions to take account of this effect. When fitting the renormalized curves, we then fix the value at $s/L = 0$ to unity.

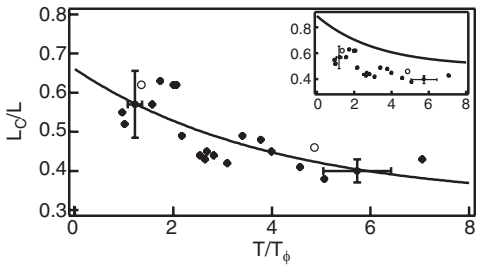


Fig. 6. L_C/L as a function of T/T_ϕ. The solid curve is a fit using an exponential with offset. Empty circles correspond to the two experimental correlation profiles of Figure 5. Error bars represent typical systematic errors. Inset: the solid curve is the simulated effective correlation function of Figure 4b.

In Figure 6, we plot L_C/L as a function of T/T_ϕ. Importantly, we see that the coherence length varies smoothly as a function of T/T_ϕ, even when the temperature is close to T_ϕ. This is what we should expect since T_ϕ is simply a characteristic temperature, defined as that at which the mean square fluctuations of the phase difference between two points separated by a distance L is equal to 1. Therefore it should be borne in mind that even condensates at temperatures below T_ϕ are not necessarily fully coherent.

The inset of Figure 6 compares the measured coherence widths with the results of the simulation (Fig. 4b). Despite the offset between the two curves, the trend of the data follows very well that of the simulation. To compare the decrease of the experimental and simulated coherence lengths, we fit the data by an exponential with an offset. The experimental coherence length decreases by 30(7)% between $T/T_\phi = 1$ and $T/T_\phi = 6$, in good agreement with the corresponding decrease of 28(1)% for the simulation. In the following discussion we consider possible explanations for the observed reduction in contrast.

5.3 Discussion

As shown in the inset of Figure 6, the measured coherence length is offset by about 25% from the results of the simulation at $T/T_\phi = 1$. In order to eliminate various possible causes of this discrepancy, and to understand better the limitations of our experiment, we have performed several tests.

Since the accuracy of our experiment relies on the comparison of fringe contrast at different spatial frequencies, it is important to take great care in setting up and characterising the imaging system. Therefore we measured the modulation transfer function (MTF) (see e.g. [50]) of our complete imaging system in situ, using a USAF1951 resolution target engraved with 3-bar square wave patterns of spatial frequency 4–200 lines/mm, covering the range of spatial frequencies observed in our interference experiment. By Fourier transforming images of different regions of the target, we were able to compare the magnitude of the different Fourier components in the image with those of the target pattern, thereby obtaining the MTF of our system. We found that the MTF is approximately linear, falling from 1 at zero spatial frequency to 0 at 118 lines/mm. This resolution limit at 8.5 μm is in agreement with earlier characterisations of the system [42]. The shape of the MTF is due almost entirely to the CCD camera [51], and is surprisingly significant at fringe spacings much greater than the effective pixel size of 2.5 μm. All contrast measurements were corrected by this MTF. In fact, for the data obtained using the second trapping aspect ratio, the axial expansion (and thus the phase difference developed) was sufficiently small that the maximum observed fringe spatial frequency was 16 lines/mm and therefore the MTF correction had a negligible effect on the experimental effective correlation functions. In the first set of data, where the maximum fringe frequency was 38 lines/mm (a fringe spacing of 25 μm), the correction was more significant, changing the width of the curves by typically 10%, though still leaving a 20% discrepancy with the simulation.

We also considered the error introduced by a small focussing error. The imaging system is focussed onto the condensate to within ± 0.2 mm by minimising the imaged size of a small condensate as a function of the objective lens position. However, by varying the time-of-flight used, we may have introduced an error of up to ± 1 mm. Such an error could also be introduced by small changes to the residual magnetic fields, which lead to changes in the release velocity of the condensate when the magnetic trap is switched off. We measured effective correlation curves for different foci of the imaging system, but found that the width of the effective correlation curve changed by less than the existing spread in the points.

Other possible sources of error, such as the alignment of the imaging beam with respect to the condensates' fringes and correct background subtraction have also been eliminated. In Figure 6, we indicate the systematic errors for two points. These include calibration errors on the atom number and the image magnification. The uncertainty on the focussing adds a further error to L_C/L, which depends on the fringe spacing and thus on the axial trap frequency. These error bars show clearly that these systematic uncertainties are not sufficient to explain the discrepancy between the data and the theoretical prediction.

There remains in our experiment an unexplained phenomenon regarding the distribution of the fringe pattern. We expect to see fringes only in the region where the two condensates overlap. However, it can be seen in the images of Figure 7 that the fringes extend to the edges of each condensate. Moreover, these "extra" fringes have the same spatial frequency and phase as the central fringes. Although it is possible that a small fraction of the thermal cloud is coupled by the Bragg beams, interference fringes produced in this way [30] would have a much smaller fringe spacing, less than 6 μm. More importantly, the contributions from different parts of the original thermal cloud, whose width is $\sim$100 μm, would sum incoherently to wash out the fringe pattern. It is more likely that these extra fringes arise as a result of interactions during the application of the Bragg pulses, but better modelling is still

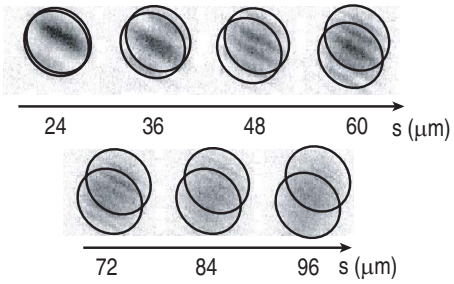


Fig. 7. Zoom on images of Figure 2. Circles represents the edge of the two condensates displaced by a distance s. The "extra" fringes are visible outside of the overlap region of the two condensates.

needed before evaluating whether their presence should increase or decrease the overall measured contrast.

6 Conclusion

We have demonstrated a new type of matter-wave interferometry using Bragg beam-splitter pulses and Fourier space analysis. Our results show that the expected shape of the correlation functions changes from a Gaussian-like shape to an exponential-like shape when the amplitude of phase fluctuations is increased. The coherence length of elongated condensates varies smoothly at temperatures close to T_ϕ, as predicted by theory. This highlights the fact that the characteristic phase temperature T_ϕ does not indicate a transition to full phase coherence, but rather that condensates exhibit phase fluctuations at all finite temperatures, albeit of small amplitude. This may place constraints on the trapping geometries which can be used for creating measurement devices based on the phase coherence of condensates.

We would like to acknowledge support from IXSEA-OCEANO (M.H.), from the BEC2000+ programme and the Marie Curie Fellowships programme of the European Union (J.R.), from IXCORE (F.G.) and from the Chateaubriand Program, CNRS, and NSERC (J.H.T.). This work was supported by Délégation Générale de l'Armement, the European Union (grants IST-2001-38863 and MRTN-CT-2003-505032) and INTAS (Contract No. 211-855).

References

1. M.H. Anderson et al., Science **269**, 198 (1995); K.B. Davis et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995); C.A. Sackett, R.G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **78**, 985 (1997); C.C. Bradley et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995)
2. J. Reichel, W. Hänsel, T.W. Hänsch, Phys. Rev. Lett. **83**, 3398 (1999)
3. D. Müller, D.Z. Anderson, R.J. Grow, P.D.D. Schwindt, E.A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **83**, 5194 (1999)
4. N.H. Dekker et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 1124 (2000)
5. A. Haase, D. Cassettari, B. Hessmo, J. Schmiedmayer, Phys. Rev. A **64**, 043405 (2001)
6. J. Fortágh, H. Ott, G. Schlotterbeck, C. Zimmermann, Appl. Phys. Lett. **81**, 1146 (2002)
7. M.P.A. Jones, C.J. Vale, D. Sahagun, B.V. Hall, E.A. Hinds, Phys. Rev. Lett. **91**, 080401 (2003)
8. W. Hänsel, P. Hommelhoff, T.W. Hänsch, J. Reichel, Nature **413**, 498 (2001)
9. H. Ott, J. Fortágh, G. Schlotterbeck, A. Grossmann, C. Zimmermann, Phys. Rev. Lett. **87**, 230401 (2001)
10. T.L. Gustavson et al., Phys. Rev. Lett. **88**, 020401 (2002)
11. S. Schneider et al., Phys. Rev. A **67**, 023612 (2003)
12. Y. Lin, I. Teper, C. Chin, V. Vuletić, Phys. Rev. Lett. **92**, 050404 (2004)
13. J. Esteve, C. Aussibal, T. Schumm, C. Figl, D. Mailly, I. Bouchoule, C.I. Westbrook, A. Aspect, Phys. Rev. A **70**, 043629 (2004)
14. C. Vale, B. Upcroft, M.J. Davis, N.R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop, J. Phys. B **37**, 2959 (2004)
15. E.A. Hinds, C.J. Vale, M.G. Boshier, Phys. Rev. Lett. **86**, 1462 (2001)
16. W. Hänsel, J. Reichel, P. Hommelhoff, T.W. Hänsch, Phys. Rev. A **64**, 063607 (2001)
17. E. Andersson, T. Calarco, R. Folman, M. Andersson, B. Hessmo, J. Schmiedmayer, Phys. Rev. Lett. **88**, 100401 (2002)
18. Y.-J. Wang et al., e-print `arXiv:cond-mat/0407689`
19. S. Dettmer et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 160406 (2001)
20. I. Shvarchuck, Ch. Buggle, D.S. Petrov, K. Dieckmann, M. Zielonkowski, M. Kemmann, T.G. Tiecke, W. von Klitzing, G.V. Shlyapnikov, J.T.M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **89**, 270404 (2002)
21. S. Richard, F. Gerbier, J.H. Thywissen, M. Hugbart, P. Bouyer, A. Aspect, Phys. Rev. Lett. **91**, 010405 (2003)
22. E.W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, M. Trippenbach, Y.B. Band, M. Edwards, M. Doery, P.S. Julienne, K. Helmerson, S.L. Rolston, W.D. Phillips, Phys. Rev. Lett. **83**, 3112 (1999)
23. J. Stenger et al., Phys. Rev. Lett. **82**, 4569 (1999)
24. I. Bloch, T.W. Hänsch, T. Esslinger, Nature **403**, 166 (2000)
25. D.S. Petrov, G.V. Shlyapnikov, J.T.M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **85**, 3745 (2000)
26. Y. Castin, R. Dum, E. Mandonnet, A. Minguzzi, I. Carusotto, J. Mod. Opt. **47**, 2671 (2000)
27. D.S. Petrov, G.V. Shlyapnikov, J.T.M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **87**, 050404 (2001)
28. D. Hellweg, L. Cacciapuoti, M. Kottke, T. Shulte, K. Sengstock, W. Ertmer, J.J. Arlt, Phys. Rev. Lett. **91**, 010406 (2003)
29. J.E. Simsarian, J. Denschlag, M. Edwards, C.W. Clark, L. Deng, E.W. Hagley, K. Helmerson, S.L. Rolston, W.D. Phillips, Phys. Rev. Lett. **85**, 2040 (2000)
30. D.E. Miller, J.R. Anglin, J.R. Abo-Shaeer, K. Xu, J.K. Chin, W. Ketterle, e-print `arXiv:cond-mat/0412672`
31. Y. Castin, R. Dum, Phys. Rev. Lett. **77**, 5315 (1996)
32. F. Zambelli, L. Pitaevskii, D.M. Stamper-Kurn, S. Stringari, Phys. Rev. A **61**, 063608 (2000)
33. F. Gerbier, J.H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, A. Aspect, Phys. Rev. A **67**, 051602 (2003)

34. A.A. Michelson, Astroph. J. **51**, 257 (1920)
35. A. Labeyrie, in *Progress in Optics XIV*, edited by E. Wolf (North-Holland, 1976) pp. 47-87
36. Note that the Bragg momentum spectroscopy method does not suffer from this problem
37. R. Hanbury Brown, R.Q. Twiss, Nature **177**, 27 (1956); Nature **178**, 1046 (1956)
38. B. Desruelle et al., Phys. Rev. A **60**, R1759 (1999)
39. P. Bouyer, A. Aspect, M. Lécrivain, B. Desruelle, V. Boyer, patent 00 02704 (2000)
40. S. Stringari, Phys. Rev. A **58**, 2385 (1998)
41. P. Bouyer, J.H. Thywissen, F. Gerbier, M. Hugbart, S. Richard, J. Retter, A. Aspect, J. Phys. IV France **116**, 219 (2004)
42. S. Richard, Ph.D. thesis, University of Paris XI, 2003
43. F. Gerbier, Ann. Phys. Fr. **29**, no. 1 (2004)
44. F. Gerbier et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 030405 (2004)
45. F. Gerbier, J.H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, A. Aspect, Phys. Rev. A **70**, 013607 (2004)
46. Our cell allows maximum 25 ms free-fall. We increase the time-of-flight by applying, after the Bragg pulses, a magnetic field gradient opposed to the gravity field
47. In [27], T_ϕ is defined relative to a *phase coherence length* L_ϕ, such that $L_\phi/L = T_\phi/T$. Here, L_ϕ is the characteristic separation over which the phase fluctuates by 1 radian at the *trap centre*
48. This would be equivalent to averaging the original images: the fringe contrast would be averaged out to the non-interfering density profile
49. Note that this definition of L_C gives a value which is always smaller than L, even at $T = 0$, in contrast to the definition of L_ϕ which goes to infinity [47]. The $1/e$ values of both $C^{\text{eff}}(s)$ and $C^{(1)}(s)$ reflect the effects of both the phase fluctuations (characterised by L_ϕ) and the condensate density envelope $n(r)$. For $T/T_\phi > 8$, the phase fluctuations dominate and it was shown in [21,42,43] that the $1/e$ width of $C^{(1)}(s)$ is equivalent to αL_ϕ where the factor $\alpha = 0.64$ accounts for the fact that we integrate over the entire condensate, whereas L_ϕ is valid only at trap centre
50. J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, 2nd edn. (McGraw-Hill, 1996)
51. This has been confirmed by MTF measurements of the Pixelfly HiRes camera alone, provided by PCO (`www.pco.de`)

Bibliographie

[1] C. Davisson et L. H. Germer, "Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel", *Phys. Rev.* **30**, 705 (1927).

[2] F. Shimizu, K. Shimizu, et H. Takuma, "Double-slit interference with ultracold metastable neon atoms", *Phys. Rev. A* **46**, R17 (1992).

[3] H. Rauch, W. Treimer, et U. Bonse, "Test of a single crystal neutron interferometer", *Phys. Lett.* **47A**, 369 (1974).

[4] O. R. Frisch, H. von Halban Jr., et J. Koch, "Some Experiments on the Magnetic Properties of Free Neutrons", *Phys. Rev.* **53**, 719 (1938).

[5] G. Möllenstedt et H. Düker, *Z. Phys.* **145**, 377 (1956).

[6] O. Carnal et J. Mlynek, "Young's double-slit experiment with atoms : A simple atom interferometer", *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2689 (1991).

[7] D. W. Keith, C. R. Ekstrom, Q. A. Turchette, et D. E. Pritchard, "An interferometer for atoms", *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2693 (1991).

[8] C. N. Cohen-Tannoudji, "Nobel Lecture : Manipulating atoms with photons", *Rev. Mod. Phys.* **70**, 707 (1998).

[9] S. Chu, "Nobel Lecture : The manipulation of neutral particles", *Rev. Mod. Phys.* **70**, 685 (1998).

[10] W. D. Phillips, "Nobel Lecture : Laser cooling and trapping of neutral atoms", *Rev. Mod. Phys.* **70**, 721 (1998).

[11] V. I. Balykin, V. S. Letokhov, Y. B. Ovchinnikov, et A. I. Sidorov, "Quantum-State-Selective Mirror Reflection of Atoms by Laser Light", *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2137 (1988).

[12] E. M. Rasel, M. K. Oberthaler, H. Batelaan, J. Schmiedmayer, et A. Zeilinger, "Atom Wave Interferometry with Diffraction Gratings of Light", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2633 (1995).

[13] "Special Issue Atom Optics", *Appl. Phys. B* **54**, (1992).

[14] "Hyper-Precision Cold Atom Interferometry In Space, ESA Assessment Study Report", *ESA-SCI 10* (2000).

[15] T. L. Gustavson, P. Bouyer, et M. A. Kasevich, "Precision Rotation Measurements with an Atom Interferometer Gyroscope", *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2046 (1997).

[16] F. Yver-Leduc, P. Cheinet, J. Fils, A. Clairon, N. Dimarcq, D. Holleville, P. Bouyer, et A. Landragin, "Reaching the quantum noise limit in a high-sensitivity cold-atom inertial sensor", *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* **5**, S136 (2003).

[17] J. Reichel, W. Hänsel, et T. W. Hänsch, "Atomic Micromanipulation with Magnetic Surface Traps", *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3398 (1999).

[18] D. Müller, D. Z. Anderson, R. J. Grow, P. D. D. Schwindt, et E. A. Cornell, "Guiding Neutral Atoms Around Curves with Lithographically Patterned Current-Carrying Wires", *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5194 (1999).

[19] J. H. Thywissen, M. Olshanii, G. Zabow, M. Drndic, K. S. Johnson, R. M. Westervelt, et M. Prentiss, "Microfabricated magnetic waveguides for neutral atoms", *Eur. Phys. J. D* **7**, 361 (1999).

[20] D. Müller, E. A. Cornell, D. Z. Anderson, et E. R. I. Abraham, "Guiding laser-cooled atoms in hollow-core fibers", *Phys. Rev. A* **61**, 033411 (2000).

[21] M. Greiner, I. Bloch, T. W. Hänsch, et T. Esslinger, "Magnetic transport of trapped cold atoms over a large distance", *Phys. Rev. A* **63**, 031401 (2001).

[22] D. Cassettari, B. Hessmo, R. Folman, T. Maier, et J. Schmiedmayer, "Beam Splitter for Guided Atoms", *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5483 (2000).

[23] D. Müller, E. A. Cornell, M. Prevedelli, P. D. D. Schwindt, A. Zozulya, et D. Z. Anderson, "Waveguide atom beam splitter for laser-cooled neutral atoms", *Opt. Lett.* **25**, 1382 (2000).

[24] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, et E. A. Cornell, "Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor", *Science* **269**, 198 (1995).

[25] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, et W. Ketterle, "Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).

[26] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, et R. G. Hulet, "Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).

[27] E. A. Cornell et C. E. Wieman, "Nobel Lecture : Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments", *Rev. Mod. Phys.* **74**, 875 (2002).

[28] W. Ketterle, "Nobel lecture : When atoms behave as waves : Bose-Einstein condensation and the atom laser", *Rev. Mod. Phys.* **74**, 1131 (2002).

[29] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, et W. Ketterle, "Output Coupler for Bose-Einstein Condensed Atoms", *Phys. Rev. Lett.* **78**, 582 (1997).

[30] I. Bloch, T. W. Hänsch, et T. Esslinger, "Atom Laser with a cw Output Coupler", *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3008 (1999).

[31] C. Aussibal, *Réalisation d'un condensat de Bose-Einstein sur une microstructure*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 2003.

[32] J. Esteve, C. Aussibal, T. Schumm, C. Figl, D. Mailly, I. Bouchoule, C. I. Westbrook, et A. Aspect, "Role of wire imperfections in micromagnetic traps for atoms", *Phys. Rev. A* **70**, 043629 (2004).

[33] E. A. Hinds, C. J. Vale, et M. G. Boshier, "Two-Wire Waveguide and Interferometer for Cold Atoms", *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1462 (2001).

[34] W. Hänsel, P. Hommelhoff, T. W. Hänsch, et J. Reichel, "Bose-Einstein condensation on a microelectronic chip", *Nature* **413**, 498 (2001).

[35] E. Andersson, T. Calarco, R. Folman, M. Andersson, B. Hessmo, et J. Schmiedmayer, "Multimode Interferometer for Guided Matter Waves", *Phys. Rev. Lett.* **88**, 100401 (2002).

[36] Y.-J. Wang, D. Z. Anderson, V. M. Bright, E. A. Cornell, Q. Diot, T. Kishimoto, M. Prentiss, R. A. Saravanan, S. R. Segal, et S. Wu, "Atom Michelson Interferometer on a Chip Using a Bose-Einstein Condensate", *Phys. Rev. Lett.* **94**, 090405 (2005).

[37] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, et J. T. M. Walraven, "Phase-Fluctuating 3D Bose-Einstein Condensates in Elongated Traps", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 050404 (2001).

[38] F. Gerbier, *Condensats de Bose-Einstein dans un piège anisotrope*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2003.

[39] S. Richard, *Spectroscopie en impulsion des fluctuations de phase de condensats de Bose-Einstein très allongés*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 2003.

[40] L. Mandel et E. Wolf, *Physica* (Cambridge University Press, 1995), Vol. Optical Coherence and Quantum Optics.

[41] M. Born et E. Wolf, *Principles of Optics* (Cambridge University Press, 1999).

[42] E. Verdet, *Ann. Scientif. l'Ecole Normale Supérieure* **2**, 291 (1865).

[43] E. Verdet, *Leçons d'Optique Physique* (Paris, L'Imprimerie Impériale, 1869), Vol. 1.

[44] A. A. Michelson, "On the application of interference methods to spectroscopic measurements - II", *Phil. Mag. (5)* **34**, 280 (1892).

[45] A. A. Michelson, "On the application of interference methods to astronomical measurements", *Astrophys. J.* **51**, 257 (1920).

[46] M. von Laue, *Ann. d. Physik (4)* **23**, 795 (1907).

[47] C. Lakeman et J. T. Groosmuller, (Physica's Gravenhage, 1928), Vol. 8.

[48] P. H. van Cittert, *Physica* **1**, 201 (1934).

[49] P. H. van Cittert, *Physica* **6**, 1129 (1939).

[50] F. Zernike, *Physica* **5**, 785 (1938).

[51] H. H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc., A* **217**, 408 (1953).

[52] E. Wolf, *Proc. Roy. Soc., A* **230**, 246 (1955).

[53] A. Blanc-Lapierre et P. Dumontet, *Rev. d'Optique* **34**, 1 (1955).

[54] R. J. Glauber, "The Quantum Theory of Optical Coherence", *Phys. Rev.* **130**, 2529 (1963).

[55] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, et S. Stringari, "Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases", *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).

[56] V. Bagnato, D. E. Pritchard, et D. Kleppner, "Bose-Einstein condensation in an external potential", *Phys. Rev. A* **35**, 4354 (1987).

[57] M. Edwards et K. Burnett, "Numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation for small samples of trapped neutral atoms", *Phys. Rev. A* **51**, 1382 (1995).

[58] G. Baym et C. J. Pethick, "Ground-State Properties of Magnetically Trapped Bose-Condensed Rubidium Gas", *Phys. Rev. Lett.* **76**, 6 (1996).

[59] C. Cohen-Tannoudji, Cours au Collège de France, 1999, disponible sur http ://www.lkb.ens.fr/cours/college-de-france.

[60] B. Saubaméa, T. W. Hijmans, S. Kulin, E. Rasel, E. Peik, M. Leduc, et C. Cohen-Tannoudji, "Direct Measurement of The Spatial Correlation Function of Ultracold Atoms", *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3146 (1997).

[61] E. Maréchal, R. Long, T. Miossec, J.-L. Bossennec, R. Barbé, J.-C. Keller, et O. Gorceix, "Atomic spatial coherence monitoring and engineering with magnetic fields", *Phys. Rev. A* **62**, 053603 (2000).

[62] F. Zambelli, L. Pitaevskii, D. M. Stamper-Kurn, et S. Stringari, "Dynamic structure factor and momentum distribution of a trapped Bose gas", *Phys. Rev. A* **61**, 063608 (2000).

[63] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, et J. T. M. Walraven, "Regimes of Quantum Degeneracy in Trapped 1D Gases", *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3745 (2000).

[64] J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, D. E. Pritchard, et W. Ketterle, "Bragg Spectroscopy of a Bose-Einstein Condensate", *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4569 (1999), erratum : *idem*, **84**, 2283 (2000).

[65] M. Yasuda et F. Shimizu, "Observation of Two-Atom Correlation of an Ultracold Neon Atomic Beam", *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3090 (1996).

[66] S. Fölling, F. Gerbier, A. Widera, O. Mandel, T. Gericke, et I. Bloch, "Spatial quantum noise interferometry in expanding ultracold atom clouds", *Nature* **434**, 481 (2005).

[67] E. A. Burt, R. W. Ghrist, C. J. Myatt, M. J. Holland, E. A. Cornell, et C. E. Wieman, "Coherence, Correlations, and Collisions : What One Learns about Bose-Einstein Condensates from Their Decay", *Phys. Rev. Lett.* **79**, 337 (1997).

[68] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, et W. Ketterle, "Observation of Interference Between Two Bose Condensates", *Science* **275**, 637 (1997).

[69] E. W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, M. Trippenbach, Y. B. Band, M. Edwards, M. Doery, P. S. Julienne, K. Helmerson, S. L. Rolston, et W. D. Phillips, "Measurement of the Coherence of a Bose-Einstein Condensate", *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3112 (1999).

[70] I. Bloch, T. W. Hänsch, et T. Esslinger, "Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition", *Nature* **403**, 166 (2000).

[71] F. Gerbier, J. H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, et A. aspect, "Momentum distribution and correlation function of quasicondensates in elongated traps", *Phys. Rev. A* **67**, 051602(R) (2003).

[72] D. S. Petrov, D. M. Gangardt, et G. V. Shlyapnikov, "Low-dimensional trapped gases", *J. Phys. IV France* **116**, 5 (2004).

[73] W. Ketterle et N. J. van Druten, "Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions", *Phys. Rev. A* **54**, 656 (1996).

[74] A. Griffin, "Conserving and gapless approximations for an inhomogeneous Bose gas at finite temperatures", *Phys. Rev. B* **53**, 9341 (1996).

[75] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, et S. Stringari, "Thermodynamics of a trapped Bose-condensed gas", *J. Low Temp. Phys.* **109**, 309 (1997).

[76] D. S. Petrov, *Bose-Einstein condensation in low-dimensional trapped gases*, Phd thesis, Pays-Bas, 2003.

[77] T.-L. Ho et M. Ma, "Quasi 1 and 2d Dilute Bose Gas in Magnetic Traps : Existence of Off-Diagonal Order and Anomalous Quantum Fluctuations", *J. Low Temp. Phys.* **115**, 61 (1999).

[78] S. Stringari, "Dynamics of Bose-Einstein condensed gases in highly deformed traps", *Phys. Rev. A* **58**, 2385 (1998).

[79] M. Fliesser, A. Csordás, P. Szépfalusy, et R. Graham, "Hydrodynamic excitations of Bose condensates in anisotropic traps", *Phys. Rev. A* **56**, R2533 (1997).

[80] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, et W. Ketterle, "Collective Excitations of a Bose-Einstein Condensate in a Magnetic Trap", *Phys. Rev. Lett.* **77**, 988 (1996).

[81] D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, S. Inouye, M. R. Andrews, et W. Ketterle, "Collisionless and Hydrodynamic Excitations of a Bose-Einstein Condensate", *Phys. Rev. Lett.* **81**, 500 (1998).

[82] I. Shvarchuck, C. Buggle, D. S. Petrov, K. Dieckmann, M. Zielonkowski, M. Kemmann, T. G. Tiecke, W. von Klitzing, G. V. Shlyapnikov, et J. T. M. Walraven, "Bose-Einstein Condensation into Nonequilibrium States Studied by Condensate Focusing", *Phys. Rev. Lett.* **89**, 270404 (2002).

[83] S. Richard, F. Gerbier, J. H. Thywissen, M. Hugbart, P. Bouyer, et A. aspect, "Momentum Spectroscopy of 1D Phase Fluctuations in Bose-Einstein Condensates", *Phys. Rev. Lett.* **91**, 010405 (2003).

[84] B. Desruelle, *Evaporation par radio-fréquence et condensation de Bose-Einstein d'un gaz d'alcalins en régime de champ fort*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 1999.

[85] V. Boyer, *Condensation de Bose-Einstein avec un électroaimant à noyau ferromagnétique : stratégies de refroidissement dans les champs magnétiques intenses*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2000.

[86] G. Delannoy, *Etude des techniques de production de condensats de Bose-Einstein : évaporation multi-fréquence et refroidissement sympathique*, Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 2001.

[87] Y. L. Coq, *Condensats de Bose-Einstein et lasers à atomes*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 2002.

[88] W. D. Phillips et H. Metcalf, "Laser Deceleration of an Atomic Beam", *Phys. Rev. Lett.* **48**, 596 (1982).

[89] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, et D. E. Pritchard, "Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure", *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2631 (1987).

[90] W. Ketterle, K. B. Davis, M. A. Joffe, A. Martin, et D. E. Pritchard, "High densities of cold atoms in a dark spontaneous-force optical trap", *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2253 (1993).

[91] J. Dalibard et C. Cohen-Tannoudji, "Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoritical models", *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2023 (1989).

[92] P. J. Ungar, D. S. Weiss, E. Riis, et S. Chu, "Optical molasses and multilevel atoms : theory", *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2058 (1989).

[93] D. E. Pritchard, "Cooling neutral atoms in a magnetic trap for precision spectroscopy", *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1336 (1983).

[94] H. F. Hess, "Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen", *Phys. Rev. B* **34**, 3476 (1986).

[95] W. Ketterle, D. S. Durfee, et D. M. Stramper-Kurn, *dans Bose-Einstien condensation in atomic gases* (edited by M. inguscio, S. Stingari and C. E. Wieman, Amsterdam, 1999), Chap. Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates.

[96] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, et S. Stringari, "Condensate fraction and critical temperature of a trapped interacting Bose gas", *Phys. Rev. A* **54**, R4633 (1996).

[97] A. L. Zubarev et Y. E. Kim, "Approximation for nonlinear dynamics of trapped Bose-Einstien condensates", *Phys. Rev. A* **65**, 035601 (2002).

[98] Y. Castin et R. Dum, "Bose-Einstein condensates in time dependent traps", *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).

[99] Y. Kagan, E. L. Surkov, et G. V. Shlyapnikov, "Evolution of a Bose gas in anisotropic time-dependent traps", *Phys. Rev. A* **55**, R18 (1997).

[100] F. Gerbier, J. H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, et A. aspect, "Experimental study of the thermodynamics of an interacting trapped Bose-Einstein condensed gas", *Phys. Rev. A* **70**, 013607 (2004).

[101] S. Gupta, A. E. Leanhardt, A. D. Cronin, et D. E. Pritchard, "Coherent manipulation of atoms with standing light waves", *CR. Acad. Sci. IV-Phys.* **2**, 479 (2001).

[102] P. L. Gould, G. A. Ruff, et D. E. Pritchard, "Diffraction of Atoms by Light : The Near-Resonant Kapitza-Dirac Effect", *Phys. Rev. Lett.* **56**, 827 (1986).

[103] Y. B. Ovchinnikov, J. H. Müller, M. R. Doery, E. J. D. Vredenbregt, K. Helmerson, S. L. Rolston, et W. D. Phillips, "Diffraction of a Released Bose-Einstein Condensate by a Pulsed Standing Light Wave", *Phys. Rev. Lett.* **83**, 284 (1999).

[104] M. Kozuma, L. Deng, E. W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S. L. Rolston, et W. D. Phillips, "Coherent Splitting of Bose-Einstein Condensed Atoms with Optically Induced Bragg Diffraction", *Phys. Rev. Lett.* **82**, 871 (1999).

[105] K. Moler, D. S. Weiss, M. Kasevich, et S. Chu, "Theoretical analysis of velocity-selective Raman transitions", *Phys. Rev. A* **45**, 342 (1992).

[106] D. M. Giltner, R. W. McGowan, et S. A. Lee, "Theoretical and experimental study of the Bragg scattering of atoms from a standing light wave", *Phys. Rev. A* **52**, 3966 (1995).

[107] S. Dettmer, D. Hellweg, P. Ryytty, J. J. Arlt, W. Ertmer, K. Sengstock, D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, H. Kreutzmann, L. Santos, et M. Lewenstein, "Observation of Phase Fluctuations in Elongated Bose-Einstein Condensates", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160406 (2001).

[108] D. Hellweg, S. Dettmer, P. Ryytty, J. J. Arlt, W. Ertmer, K. Sengstock, D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, H. Kreutzmann, L. Santos, et M. Lewenstein, "Phase fluctuations in Bose-Einstein condensates", *Appl. Phys. B* **73**, 781 (2001).

[109] H. Kreutzmann, A. Sanpera, L. Santos, M. Lewenstein, D. Hellweg, L. Cacciapuoti, M. Kottke, T. Schulte, K. Sengstock, J. J. Arlt, et W. Ertmer, "Characterization and control of phase fluctuations in elongated Bose-Einstein condensates", *Appl. Phys. B* **76**, 165 (2003).

[110] D. Hellweg, L. Cacciapuoti, M. Kottke, T. Schulte, K. Sengstock, W. Ertmer, et J. J. Arlt, "Measurement of the Spatial Correlation Function of Phase Fluctuating Bose-Einstein Condensates", *Phys. Rev. Lett.* **91**, 010406 (2003).

[111] L. Cacciapuoti, D. Hellweg, M. Kottke, T. Schulte, W. Ertmer, J. J. Arlt, K. Sengstock, L. Santos, et M. Lewenstein, "Second-order correlation function of a phase fluctuating Bose-Einstein condensate", *Phys. Rev. A* **68**, 053612 (2003).

[112] H. Schmaljohann, M. Erhard, J. Kronjäger, M. Kottke, S. van Staa, L. Cacciapuoti, J. J. Arlt, K. Bongs, et K. Sengstock1, "Dynamics of F = 2 Spinor Bose-Einstein Condensates", *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040402 (2004).

[113] J. E. Simsarian, J. Denschlag, M. Edwards, C. W. Clark, L. Deng, E. W. Hagley, K. Helmerson, S. L. Rolston, et W. D. Phillips, "Imaging the Phase of an Evolving Bose-Einstein Condensate Wave Function", *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2040 (2000).

[114] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics, 2nd edition* (McGraw-Hill, 1996).

[115] N. P. Proukakis, "Density Fluctuations in Ultracold One-dimensional Bose Gases", *cond-mat/0505039* (2005).

[116] D. E. Miller, J. R. Anglin, J. R. Abo-Shaeer, K. Xu, J. K. Chin, et W. Ketterle, "High-Contrast Interference in a Thermal Cloud of Atoms", *Phys. Rev. A* **71**, 043615 (2005).

[117] H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, D. S. Durfee, S. Inouye, et W. Ketterle, "Bosonic Stimulation in the Formation of a Bose-Einstein Condensate", *Science* **279**, 1005 (1998).

[118] M. Köhl, M. J. Davis, C. W. Gardiner, T. W. Hänsch, et T. Esslinger, "Growth of Bose-Einstein Condensates from Thermal Vapor", *Phys. Rev. Lett.* **88**, 080402 (2002).

[119] R. Ballagh et C. M. Savage, "The theory of atom laser", *ANU BEC 2000 Physics Summer School Proceeding* (2000), cond-mat/0008070.

[120] C. W. Gardiner, P. Zoller, R. J. Ballagh, et M. J. Davis, "Kinetics of Bose-Einstein Condensation in a Trap", *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1793 (1997).

[121] C. W. Gardiner, M. D. Lee, R. J. Ballagh, M. J. Davis, et P. Zoller, "Quantum Kinetic Theory of Condensate Growth : Comparison of Experiment and Theory", *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5266 (1998).

[122] M. D. Lee et C. W. Gardiner, "Quantum kinetic theory. VI. The growth of a Bose-Einstein condensate", *Phys. Rev. A* **62**, 033606 (2000).

[123] M. J. Davis, C. W. Gardiner, et R. J. Ballagh, "Quantum kinetic theory. VII. The influence of vapor dynamics on condensate growth", *Phys. Rev. A* **62**, 063608 (2000).

[124] C. W. Gardiner et P. Zoller, "Quantum kinetic theory : A quantum kinetic master equation for condensation of a weakly interacting Bose gas without a trapping potential", *Phys. Rev. A* **55**, 2902 (1997).

[125] B. V. Svistunov, "Highly Nonequilibrium Bose Condensation in a Weakly Interacting Gas", *J. Moscow Phys. Soc.* **1**, 373 (1991).

[126] Y. Kagan, B. V. Svistunov, et G. V. Shlyapnikov, "Erratum : Kinetics of Bose condensation in an interacting Bose gas", *Sov. Phys. JETP* **74**, 279 (1992).

[127] Y. Kagan et B. V. Svistunov, "Kinetics of the onset of long-range during Bose condensation in an interacting gas", *Sov. Phys. JETP* **105**, 353 (1994).

[128] Y. Kagan et B. V. Svistunov, "Evolution of large-scale correlations in a strongly nonequilibrium Bose condensation process", *Sov. Phys. JETP* **67**, 495 (1998).

[129] M. J. Davis et C. W. Gardiner, "Growth of a Bose-Einstein condensate : A detailed comparison of theory and experiment", *J. Phys. B* **35**, 733 (2002).

[130] D. W. Snoke et J. P. Wolfe, "Population dynamics of a Bose gas near saturation", *Phys. Rev. B* **39**, 4030 (1989).

[131] A. Browaeys, *Piégeage magnétique d'un gaz d'Hélium métastable : vers la condensation de Bose-Einstein*, Thèse de doctorat, Université de Paris XI, 2000.

[132] D. S. Jin, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, et E. A. Cornell, "Temperature-Dependent Damping and Frequency Shifts in Collective Excitations of a Dilute Bose-Einstein Condensate", *Phys. Rev. Lett.* **78**, 764 (1997).

[133] I. Shvarchuck, *Bose-Einstein condensation into non-equilibrium states*, Phd thesis, University of Amsterdam, 2003.

[134] P. O. Fedichev, G. V. Shlyapnikov, et J. T. M. Walraven, "Damping of Low-Energy Excitations of a Trapped Bose-Einstein Condensate at Finite Temperatures", *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2269 (1998).

[135] A. Griffin, W.-C. Wu, et S. Stringari, "Hydrodynamic Modes in a Trapped Bose Gas above the Bose-Einstein Transition", *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1838 (1997).

[136] C. Buggle, I. Shvarchuck, W. von Klitzing, et J. T. M. Walraven, "Hydrodynamic clouds and Bose-Einstein condensation", *J. Phys. IV France* **116**, 211 (2004).

[137] C. J. Pethick et H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002), eq. (2.19) avec $\alpha = 5/2$ et $N/L = n_{1\mathrm{D}}(z)$, L étant le volume 1D.

[138] Y. L. Coq, J. A. Retter, S. Richard, A. Aspect, et P. Bouyer, "Coherent matter wave inertial sensors for precision measurements in space", *cond-mat/0501520* (2004).

[139] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, et I. Bloch, "Bose-Einstein condensation : Breaking up a superfluid", *Nature* **415**, 39 (2002).

[140] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, et D. S. Fisher, "Boson localization and the superfluid-insulator transition", *Phys. Rev. B* **40**, 546 (1989).

[141] P. W. Anderson, "Absence of Diffusion in Certain Random Lattices", *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).

[142] D. Clément, A. F. Var'on, M. Hugbart, J. A. Retter, P. Bouyer, L. Sanchez-Palencia, D. M. Gangardt, G. V. Shlyapnikov, et A. Aspect, "Suppression of Transport of an Interacting Elongated Bose-Einstein Condensate in a Random Potential", *cond-mat/0506638* (2005).

[143] D. A. Steck, http ://george.ph.utexas.edu/dsteck/alkalidata/rubidium87-numbers.pdf.

Résumé

Le condensat de Bose-Einstein, équivalent atomique du laser en optique, est habituellement considéré comme un objet complètement cohérent. Mais ceci n'est vérifié que dans le cas de systèmes peu anisotropes. Pour des condensats fortement allongés, des fluctuations de phase apparaissent suivant l'axe long, ce qui implique une réduction de la longueur de cohérence de ces condensats. On parle alors de quasi-condensat.

Dans ce mémoire, nous présentons deux études expérimentales portant sur la cohérence de condensats très allongés. La première étude a été réalisée sur des condensats à l'équilibre. La mesure de la longueur de cohérence a été effectuée par l'intermédiaire de la mesure de la fonction de corrélation à l'aide d'une méthode interférométrique. Nos résultats montrent la transition entre un condensat cohérent et un quasi-condensat, avec une longueur de cohérence diminuant avec l'augmentation de l'amplitude des fluctuations de phase. Nous avons par ailleurs observé le passage d'une forme gaussienne à une forme exponentielle pour la fonction de corrélation.

La deuxième étude a porté sur la formation du condensat avec plus particulièrement l'étude de la cinétique de formation de la cohérence en phase. Nos résultats montrent tout d'abord une montée de la fraction condensée qualitativement identique à celle des condensats 3D sans fluctuation de phase. Enfin, nous avons mesuré la longueur de cohérence au cours de cette formation à l'aide de la spectroscopie de Bragg. Nos résultats montrent un établissement de la cohérence rapide comparé au temps de mise à l'équilibre de la fraction condensée.

Abstract

The Bose-Einstein condensate, the atomic counterpart to laser in optics, is usually considered as a fully coherent object. However this is true for systems of moderate anisotropy only. For highly elongated condensates, phase fluctuations appear along the long axis, and these imply a reduction of the coherence length. Such a phase fluctuating condensate is called a quasi-condensate.

In this thesis, we report on two experimental studies about the coherence of highly elongated condensates. The first study has been realized on condensates at equilibrium. The measurement of the coherence length has been done through the measurement of the correlation function using an interferometric method. Our results show the transition between a full phase coherent condensate and a quasi-condensate, the coherence length decreasing when the amplitude of the phase fluctuations is increased. We have also observed that the expected shape of the correlation function changes from a Gaussian-like shape to an exponential-like shape.

The second study focuses on the formation of the condensate, and more particularly on the kinetic of the establishment of the phase coherence. Our results show that the growth of the condensed fraction proceeds qualitatively as for 3D non-phase-fluctuating condensates. Finally, we have measured the coherence length during the formation using Bragg spectroscopy. Our results show a fast establishment of the coherence compared to the time needed for the condensed fraction to reach equilibrium.

Mots-clés

ATOMES FROIDS – CONDENSATION DE BOSE-EINSTEIN – QUASI-CONDENSAT – FLUCTUATION DE PHASE – INTERFÉROMÉTRIE ATOMIQUE – SPECTROSCOPIE DE BRAGG – FORMATION DU CONDENSAT