

Thèse de Doctorat de Mildred Hager sous  
la direction du Prof. J. Sjöstrand

---

**INSTABILITÉ SPECTRALE  
SEMICLASSIQUE  
D'OPÉRATEURS  
NON-AUTOADJOINTS**

---

*Mildred Hager*

CMLS, Ecole polytechnique, 91128 Palaiseau Cédex, France,  
UMR 7640.

*E-mail* : `mildred.hager@math.polytechnique.fr`

**INSTABILITÉ SPECTRALE  
SEMICLASSIQUE D'OPÉRATEURS  
NON-AUTOADJOINTS**

**Thèse de Doctorat de Mildred Hager sous  
la direction du Prof. J. Sjöstrand**



# TABLE DES MATIÈRES

Remerciements.....	7
<b>Introduction.....</b>	<b>9</b>
0.1. Enoncé des résultats.....	17
<b>1. Instabilité spectrale semiclassique pour des opérateurs non-autoadjoints I : un modèle.....</b>	<b>29</b>
Introduction.....	29
1.1. Pseudospectre et solutions BKW.....	34
1.2. Enoncé et résolution du problème de Grushin.....	38
1.3. Perturbation.....	46
1.4. Propriétés analytiques de $E_{-+}$ .....	47
1.5. Analyse de $E_{-+}^\delta$ .....	50
1.6. Construction de la perturbation du théorème 1.0.3 .....	51
1.7. Perturbation par une somme de noyaux oscillants.....	53
1.8. Zéros de $E_{-+}^\delta$ et fin de la preuve du théorème 1.0.6.....	60
1.9. Preuve du théorème 1.0.3.....	64
<b>2. Instabilité spectrale semiclassique d'opérateurs non-autoadjoints II.....</b>	<b>65</b>
Introduction.....	65
2.1. Quantification de Weyl, espaces de symboles et de Sobolev « semiclassiques ».....	73
2.2. Factorisation et quasimodes.....	82
2.3. Enoncé et résolution asymptotique du problème de Grushin..	88
2.4. Propriétés d'holomorphie de $E_{-+}$ .....	101

2.5. Preuve des théorèmes 2.0.9 et 2.0.11.....	105
<b>3. Bound on the number of eigenvalues near the boundary of the pseudospectrum.....</b>	<b>115</b>
<b>4. Calculs numériques.....</b>	<b>125</b>
<b>A. Esquisse d'une preuve alternative de la décroissance exponentielle de <math>E_{-+}</math> dans le cadre analytique.....</b>	<b>131</b>
A.1. Transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer.....	131
A.2. Opérateurs.....	132
A.3. Fonctions d'ordre, espaces de Sobolev.....	137
A.4. Quasimodes.....	139
A.5. Problème de Grushin reformulé.....	142
A.6. Preuve de la conjecture A.5.3 à partir de la conjecture A.6.3..	145
<b>B. Preuve alternative du lemme 2.2.5.....</b>	<b>151</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>155</b>

## Remerciements

Je voudrais remercier en tout premier lieu Johannes Sjöstrand pour sa générosité, et exprimer ma grande admiration pour son enthousiasme mathématique. C'est grâce à lui que j'ai pu découvrir, apprendre et aimer le sujet de ma thèse et bien d'autres. Il a su être admirable tant en mathématiques qu'au niveau humain.

J'aimerais aussi remercier M. Helffer pour sa lecture détaillée et ses critiques qui m'ont permis de progresser, M. Lerner pour sa lecture et ses remarques, et M. Zworski pour sa lecture et les explications, suggestions et discussions qu'il m'a apportées.

Je remercie M. Bony et M. Dimassi d'être membres de mon jury.

Je remercie aussi N. Dencker, M. Hitrik et C. Stolk pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et les discussions reliées.

Je remercie mes collègues Christian, Dima, Frédéric, Jérôme et Oliver pour leur soutien et les pauses-café, ainsi que Mme. Fuseau, Mme. Lavalette, Mme. Harmide, Mme. Juppín, M. Royer et M. Aicardi pour leur amabilité.

Je remercie également Annemarie, Daniel, Dima, Fipsi, Frédéric, Jérôme, Laurent, Simon, Veronika et mes amis à Zürich et à Vienne.

Für die unglaubliche Wärme, die sie mir entgegengebracht haben, und die unzähligen Diskussionen, möchte ich mich bei meinen Freunden Katherine, Pascal, Peti, Rudi und Valérie bedanken, und bei Pierre.

Ich möchte mich schliesslich bei meiner Familie bedanken, die immer da ist, bei meinen Tanten, bei meinen Grosseltern Franz und Theresia, bei meinen Grosseltern Alfred und Anna, die soviel Mut gezeigt haben, und bei meinem Vater und meiner Mutter für ihre unendliche Grossherzigkeit.





# INTRODUCTION

Pour des opérateurs non-autoadjoints, la norme de la résolvante peut être grande même loin du spectre. Ce fait est connu depuis longtemps, et constitue une des difficultés majeures dans l'étude spectrale de ces opérateurs. Une conséquence importante est que de très petites perturbations peuvent bouger beaucoup le spectre, et c'est ce phénomène que nous allons étudier ici.

L'introduction de la notion de Pseudospectre est due à N. Trefethen et à ses prédécesseurs dans le domaine des mathématiques numériques [37]. Il s'agit de la région délimitée par une courbe de niveau de la norme de la résolvante, qui contient le spectre mais peut être beaucoup plus grande. Il s'intéresse à l'origine à de grandes matrices non-normales et constate que leurs valeurs propres calculées numériquement peuvent être très instables sous de petites perturbations, ce qui peut être caractérisé avec la notion de Pseudospectre. Ces matrices proviennent par exemple de discrétisations d'opérateurs différentiels, et l'instabilité spectrale a alors des conséquences importantes pour l'étude numérique d'équations différentielles. Nous renvoyons à [39] pour plus de références, ainsi qu'un aperçu historique très complet.

Des phénomènes similaires apparaissent pour des opérateurs non-autoadjoints. Un des premiers exemples traités numériquement est l'opérateur d'Orr-Sommerfeld intervenant dans la dynamique des fluides ([26]). D'autres types de problèmes, traités analytiquement, sont par exemple les systèmes différentiels elliptiques (voir [8]), où l'influence des conditions au bord joue un grand rôle, l'oscillateur harmonique non-autoadjoint (dont Boulton étudie dans [3] le spectre, pseudospectre et image numérique), et l'opérateur de Fokker-Planck (opérateur de

convection-diffusion) pour lequel Hérau, Sjöstrand et Stolk [19] étudient les propriétés spectrales et pseudospectrales (pour plus de références nous renvoyons à leur article).

Un domaine très actif faisant intervenir des opérateurs non-autoadjoints est l'étude des résonances. Il s'agit de problèmes de diffusion (« scattering ») en mécanique quantique, et les résonances sont les pôles de la résolvante de l'opérateur modifié par scaling complexe. L'opérateur de Schrödinger transformé est alors non-autoadjoint, et il s'agit d'estimer la norme de sa résolvante.

Parmi les nombreux travaux effectués sur les résonances, on peut citer dans le contexte du scaling complexe par exemple [33], et nous y renvoyons pour plus de références.

Nous commençons par rappeler des généralités autour du pseudospectre.

Soit  $H$  un espace de Hilbert complexe. Soit  $A : D(A) \rightarrow H$ ,  $D(A)$  dense dans  $H$ , un opérateur linéaire fermé. Soit

$$\rho(A) := \{z \in \mathbb{C}; \exists (A - z)^{-1} : H \rightarrow D(A) \text{ borné} \} \quad (0.0.1)$$

l'ensemble résolvant de  $A$ . Pour  $z \in \rho(A)$  nous appelons  $(z - A)^{-1}$  la résolvante de  $A$ . Le spectre de  $A$  est

$$\text{Spec}(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A) . \quad (0.0.2)$$

Ensuite nous définissons l'adjoint  $A^*$  de  $A$ . Soit

$$D(A^*) = \{f \in H; \exists v \in H : \langle f, Au \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u \in D(A)\} , \quad (0.0.3)$$

et posons pour  $f \in D(A^*)$  comme ci-dessus  $A^*f := v$ .

Si  $A^* = A$ , nous disons que  $A$  est autoadjoint.

Soit, pour  $U \subset \mathbb{C}$ ,  $\text{dist}(z, U) := \inf_{w \in U} |z - w|$ . Si  $A$  est autoadjoint (ou normal), nous avons (voir par exemple [22])

$$\|(z - A)^{-1}\| \leq (\text{dist}(z, \text{Spec}(A)))^{-1}, z \in \rho(A) . \quad (0.0.4)$$

Une des difficultés majeures pour étudier les propriétés spectrales d'opérateurs non-autoadjoints est que l'estimation ci-dessus n'est plus valable en général. Ainsi la norme de la résolvante peut être très grande même loin du spectre.

L'étude de la taille de cette norme peut être reformulée en introduisant pour  $\delta > 0$  le  $\delta$ -pseudospectre de  $A$  :

$$\text{Spec}_\delta(A) := \text{Spec}(A) \cup \{z \in \rho(A); \|(z - A)^{-1}\| > \frac{1}{\delta}\} . \quad (0.0.5)$$

Remarquons que s'il existe  $u \in D(A)$ ,  $\|u\| \geq 1$  avec  $\|(A - z)u\| < \delta$ , alors  $z \in \text{Spec}_\delta(A)$ . Nous appelons  $u$  un quasimode de  $A$  (pour  $z$ , correspondant à  $\delta$ ). De manière analogue, s'il existe  $u \in D(A)$ ,  $\|u\| \geq 1$  avec  $\|(A - z)^*u\| < \delta$ , alors  $z \in \text{Spec}_\delta(A)$ .

Nous avons une caractérisation alternative du pseudospectre :

$$\text{Spec}_\delta(A) := \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{L}(H) \\ \|B\| < \delta}} \text{Spec}(A + B) . \quad (0.0.6)$$

Ainsi le spectre de l'opérateur perturbé est à l'intérieur d'une région déterminée par la norme de la résolvante, et si celle-ci est grande loin du spectre, de petites perturbations peuvent avoir un grand effet sur le spectre.

Si  $\dim(H) < \infty$ , nous avons (0.0.6) aussi avec des inégalités non-strictes. Ceci se voit de la manière suivante. Si  $z \in \rho(A)$  avec  $\|(z - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{\delta}$ , alors  $\exists v \in H$ ,  $\|v\| = 1$  tel que  $\|(A - z)^{-1}v\| \geq \frac{1}{\delta}$ . Soit  $u := (A - z)^{-1}v \in D(A)$ ,  $\|u\| \geq \frac{1}{\delta}$ . Soit  $B : H \rightarrow H$ , défini par :

$$Bw := -\frac{1}{\|u\|^2} \langle w, u \rangle v, w \in H . \quad (0.0.7)$$

On a  $\|B\| \leq \frac{1}{\|u\|} \leq \delta$ . Alors

$$(A - z + B)u = 0 , \quad (0.0.8)$$

et  $z \in \text{Spec}(A + B)$ .

Soit

$$\text{Num}(A) := \{ \langle Au, u \rangle ; u \in D(A), \|u\| = 1 \} \quad (0.0.9)$$

l'image numérique de  $A$ . Nous supposons que  $\text{Spec}(A) \subset \overline{\text{Num}(A)}$  (ce qui est souvent vérifié dans les applications). Nous avons

$$\|(z - A)^{-1}\| \leq (\text{dist}(z, \text{Num}(A)))^{-1}, z \notin \text{Num}(A) , \quad (0.0.10)$$

donc, en écrivant  $D(0, \delta) := \{z \in \mathbb{C}; |z| < \delta\}$ ,

$$\text{Spec}_\delta(A) \subset \overline{\text{Num}(A) + D(0, \delta)} . \quad (0.0.11)$$

Les problèmes d'évolution pour des opérateurs non-autoadjoints peuvent être instables. Ceci est bien connu si le spectre de l'opérateur contient des points à partie réelle positive, et que l'on est intéressé à résoudre

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - Au(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} . \quad (0.0.12)$$

Nous supposons que  $A$  est le générateur d'un semigroupe  $C_0$  que nous dénotons par  $\exp(tA)$ , et écrivons  $u(x, t) = \exp(tA)u_0(x)$ . Un résultat classique (voir par exemple [9]) est que si

$$\alpha(A) := \sup_{z \in \text{Spec}(A)} \text{Re } z \quad (0.0.13)$$

est l'abscisse spectrale de  $A$ , alors

$$\|\exp(tA)\| \geq e^{t\alpha(A)}, \forall t \geq 0. \quad (0.0.14)$$

Le théorème d'Hille-Yosida dit que si  $\text{Spec}(A) \subset \{\text{Re } z \leq 0\}$  et que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}, \lambda > 0, \quad (0.0.15)$$

alors  $A$  est le générateur d'un semigroupe  $C_0$  avec  $\|e^{tA}\| \leq 1$  (semigroupe de contraction), et l'implication inverse est aussi valable. Donc même si  $\text{Spec}(A) \subset \{\text{Re } z \leq 0\}$ , il peut y avoir des phénomènes d'instabilité, et ceci est relié à la norme de la résolvante.

D'autre part, dans des expériences, on doit souvent considérer que le problème est légèrement perturbé, ce qui peut avoir l'effet que le spectre de l'opérateur perturbé contient des points à partie réelle très grande qui causeront de l'instabilité. Ce constat a permis de donner une explication de l'instabilité observée expérimentalement pour certaines valeurs du nombre de Reynolds des "plane couette flow", alors que l'opérateur correspondant n'a pas de valeurs propres à partie réelle positive : les pseudospectres vont tellement loin dans le demi-plan  $\{\text{Re } z > 0\}$  qu'en pratique de minuscules perturbations peuvent causer de l'instabilité (voir [39], chapitre 5 où l'on trouve aussi des images numériques de pseudospectres).

**0.0.1. Le bloc de Jordan.** — Afin d'illustrer ces notions, nous examinons un exemple simple. Cet exemple a été notamment étudié par Davies ainsi que Sjöstrand et Zworski [34], ce que nous allons reprendre ici. Considérons  $J \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $J_{ij} = \delta_{i+1,j}$  :

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}). \quad (0.0.16)$$

$J$  a une seule valeur propre  $\lambda = 0$ . Soit  $Q \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $Q_{ij} = \delta_{i,n}\delta_{j,1}$  :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) . \quad (0.0.17)$$

Alors pour  $\delta \in \mathbb{C}$ ,

$$\text{Spec}(J + \delta Q) = \{\lambda_k = \delta^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2\pi i k}{n}}, k = 1, \dots, n\} . \quad (0.0.18)$$

Si  $|\delta| < 1$  et que  $n$  est très grand, celles-ci sont donc « très loin » de la valeur propre de  $J$  : on peut parler d'instabilité spectrale. Nous avons  $J \neq J^* = (\bar{J})^t$ , donc  $J$  n'est pas autoadjoint, et de plus

$$([J, J^*])_{ij} = \delta_{i1}\delta_{j1} - \delta_{in}\delta_{jn} , \quad (0.0.19)$$

donc  $J$  n'est pas normal.

Pour montrer que la norme de la résolvante est très grande, nous faisons une construction de quasimodes, donc de presque fonctions propres. Nous retrouverons cette approche plus loin dans des cas plus généraux.

Soit  $0 < |\lambda| < 1$ . Soit  $e_j \in \mathbb{C}^n$  le  $j$ -ième vecteur unité. Soit  $(e_+(\lambda))_j := \lambda^{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , donc

$$\begin{aligned} e_+(\lambda) &= (1, \dots, \lambda^{n-1}) \text{ avec } (J - \lambda)e_+(\lambda)^t = -\lambda^n e_n , \\ \|e_+(\lambda)\| &\geq 1 . \end{aligned} \quad (0.0.20)$$

et  $e_+(0) = e_1 \in \mathfrak{N}(J)$  : nous appelons  $e_+(\lambda)$  un quasimode de  $J$ , car si  $\lambda$  est fixé et que  $n$  est très grand, alors  $e_+(\lambda)$  vérifie presque l'équation  $(J - \lambda)u = 0$  ; il peut alors dans des applications être difficile de distinguer  $\lambda$  d'une vraie valeur propre de  $J$ . Soit  $(e_-(\lambda))_j := \lambda^{n-j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , donc

$$\begin{aligned} e_-(\lambda) &= (\lambda^{n-1}, \dots, 1) \text{ avec } (J - \lambda)^* e_-(\bar{\lambda})^t = -\bar{\lambda}^n e_1 , \\ \|e_-(\lambda)\| &= \|e_+(\lambda)\| \geq 1 . \end{aligned} \quad (0.0.21)$$

et  $e_-(0) = e_n \in \mathfrak{N}(J^*) = \text{coker}(J)$  : nous appelons  $e_-(\bar{\lambda})$  un quasimode de  $J^*$ , et la remarque ci-dessus s'applique de nouveau.

Ceci implique que pour  $0 < |\lambda| < 1$  nous avons

$$\|(J - \lambda)^{-1}\| \geq \frac{\|e_{\pm}\|}{|\lambda|^n} \gg \frac{1}{|\lambda|} = (\text{dist}(\lambda, \text{Spec}J))^{-1} , \quad (0.0.22)$$

et la norme de la résolvante est très grande pour  $n$  grand.

Nous pouvons reprendre la construction de la perturbation (0.0.7) pour  $\delta = \frac{|\lambda|^n}{\|e_{\pm}\|}$  comme ci-dessus. Alors  $v = e_n$  et  $u = \frac{1}{\lambda^n}e_+(\lambda)$ . Donc

$$Qw = \frac{1}{\|e_+(\lambda)\|} \langle w, e_+(\lambda) \rangle e_n, \quad (0.0.23)$$

et  $(J - \lambda + \delta Q)e_+(\lambda) = 0$ .

Considérons maintenant la matrice (0.0.17) :  $Qw = \langle w, e_1 \rangle e_n = \langle w, e_+(0) \rangle e_-(0)$ . Alors  $Qe_+(\lambda) = e_n$ , et nous avons

$$(J - \lambda + \lambda^n Q)e_+(\lambda) = 0, \quad (0.0.24)$$

donc  $\lambda$  est une valeur propre de  $J + \lambda^n Q$ . La matrice  $Q$  correspond donc presque à la perturbation (0.0.7).

Finalement considérons le problème d'évolution correspondant : nous savons que pour des matrices, nous avons asymptotiquement égalité dans (0.0.14), donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists T(\epsilon) \text{ tel que } \|e^{tJ}\| \leq e^{\epsilon t}, \quad t \geq T(\epsilon). \quad (0.0.25)$$

Cependant, pour  $t < n$  nous avons

$$\|e^{tJ}\| \geq \frac{1}{\sqrt{t}} e^t, \quad (0.0.26)$$

donc une croissance transitoire.

**0.0.2. Cadre semiclassique et quasimodes.** — Nous allons maintenant reformuler ces concepts dans le cadre semiclassique. Pour  $h \in (0, 1]$ , soit

$$P = \sum_{j \leq M} a_j(x; h) (hD_x)^j, \quad (0.0.27)$$

$$a_j(x; h) = \sum_{k \leq \tilde{M}} a_{j,k}(x) h^k, \quad a_{j,k} \in C_b^\infty(\mathbb{R}),$$

(où  $C_b^\infty$  désigne l'espace des fonctions lisses bornées avec toutes les dérivées bornées), agissant dans (un sous-espace dense de)  $L^2(\mathbb{R})$ . La limite  $h \rightarrow 0$  s'appelle limite semiclassique (la constante  $h$  étant à l'origine la constante de Planck), et nous nous intéressons aux propriétés spectrales de  $P$  dans cette limite. Comme nous le verrons plus loin, il existera une région dans laquelle la norme de la résolvante sera plus grande que toute puissance négative de  $h$ , que nous appellerons pseudospectre semiclassique. Par simplicité nous nous limitons ici à des

opérateurs différentiels, et les généralisations aux opérateurs pseudo-différentiels se trouvent plus loin. Toutes les normes non-indexées sont des normes  $L^2$ , respectivement  $\mathcal{L}(L^2)$ .

Nous munissons  $P$  du domaine

$$H_{M,sc} := \{u \in L^2(\mathbb{R}); \|u\|_{M,sc}^2 := \sum_{j \leq M} \|(hD_x)^j u\|^2 < \infty\} . \quad (0.0.28)$$

L'adjoint formel de  $P$  est

$$P^* = \sum_{j \leq M} (hD_x)^j \bar{a}_j(x; h) . \quad (0.0.29)$$

Soit  $p(x, \xi) = \sum_{j \leq M} a_{j,0}(x) \xi^j$ ,  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$ , le symbole principal (semi-classique) de  $P$ . Le symbole principal de  $P^*$  est  $\bar{p}(x, \xi)$ . Soit

$$\{p, \bar{p}\}(x, \xi) := (\partial_\xi p \partial_x \bar{p} - \partial_x p \partial_\xi \bar{p})(x, \xi) \quad (0.0.30)$$

le crochet de Poisson de  $p$  et  $\bar{p}$ . Nous avons formellement

$$\frac{1}{h}[P, P^*] = \frac{1}{h}(PP^* - P^*P) , \quad (0.0.31)$$

dont le symbole principal est  $\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}$ . Donc la normalité de  $P$  est relié au crochet de Poisson de  $p$  et  $\bar{p}$ .

En 1999, E.B. Davies fait une construction de quasimodes pour l'opérateur de Schrödinger  $p = \xi^2 + V(x)$  à potentiel  $V$  complexe et caractérise ainsi son pseudospectre ([5]). M. Zworski met en évidence la relation de ce résultat avec une condition de commutateur de Hörmander, ce qui permet un progrès dans la compréhension conceptuelle du problème. L'affirmation (qui repose sur une construction de type BKW) est la suivante :

Si

$$\exists(y, \eta) \in \mathbb{R}^2 : p(y, \eta) = z, \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(y, \eta) > 0 , \quad (0.0.32)$$

alors

$$\begin{aligned} \exists e_+(x, z; h) \in C_0^\infty, \|e_+\|_{L^2} = 1 : \forall N \in \mathbb{N} \exists C_N > 0 \text{ tel que} \\ \|(P - z)e_+\|_{L^2} \leq C_N h^N . \end{aligned} \quad (0.0.33)$$

Nous appelons  $e_+$  un quasimode de  $P$  (pour  $z$ ) avec  $\delta = C_N h^N$ , et ceci implique une minoration correspondante de la norme de la résolvante. De plus,  $e_+$  est « fortement concentré » près de  $(y, \eta)$ , et nous renvoyons au chapitre 2 pour le sens précis de cette affirmation.

Par antisymétrie du crochet de Poisson, nous avons aussi :  
Si

$$\exists(y, \eta) \in \mathbb{R}^2 : p(y, \eta) = z, \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(y, \eta) < 0, \quad (0.0.34)$$

alors

$$\begin{aligned} \exists e_-(x, z; h) \in C_0^\infty, \|e_-\|_{L^2} = 1 : \forall N \in \mathbb{N} \exists C_N > 0 \text{ tel que} \\ \|(P^* - \bar{z})e_-\|_{L^2} \leq C_N h^N. \end{aligned} \quad (0.0.35)$$

Nous appelons  $e_-$  un quasimode de  $P^*$  (pour  $\bar{z}$ ), et avons une minoration similaire de la norme de la résolvante.  $e_-$  est « fortement concentré » près de  $(y, \eta)$ .

Remarquons l'analogie formelle avec le bloc de Jordan : le quasimode  $e_+$  était concentré près de la première composante, où le commutateur  $[J, J^*]$  avait une composante positive, alors que le quasimode  $e_-$  pour l'adjoint était concentré près de la dernière composante, où le commutateur  $[J, J^*] = -[J^*, J]$  avait une composante négative.

Soit  $\Sigma := p(\mathbb{R}^2)$ . Soient

$$\Lambda_\pm := \{p(y, \eta); \pm \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(y, \eta) > 0\} \subset \Sigma. \quad (0.0.36)$$

Alors dans  $\Lambda_+ \cup \Lambda_-$  la norme de la résolvante est plus grande que toute puissance négative de  $h$ .

Dencker, Sjöstrand et Zworski caractérisent le pseudospectre semiclassical d'opérateurs pseudodifférentiels en plusieurs dimensions. Dans [\[11\]](#), ils montrent que sous certaines conditions (notamment l'analyticité)  $\Lambda_\pm = \Sigma$ , et prouvent l'existence de quasimodes pour des valeurs spectrales dans  $\Lambda_\pm$  (avec erreur exponentiellement petite dans le cas analytique). Nous travaillerons dans le cas analytique, et appellerons  $\Sigma$  par abus de langage le pseudospectre semiclassical.

Ces résultats sont étroitement liés à la question de la résolubilité d'opérateurs (pseudo-) différentiels classiques. Si  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq M} a_\alpha(x) (D_x)^\alpha$  est un opérateur différentiel sur  $\mathbb{R}^n$ , on se demande si pour tout  $f \in C^\infty$  il existe une solution  $u$  de

$$Pu = f. \quad (0.0.37)$$

Lewy introduit en 1957 un opérateur pour lequel la réponse est négative : il n'est pas résoluble localement, et Hörmander montre en 1960 que si pour le symbole principal  $p(x, \xi) := \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x) \xi^\alpha$  de  $P$  on a

$$\exists(y, \eta) : p(y, \eta) = 0, \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(y, \eta) < 0, \quad (0.0.38)$$



alors  $\exists f \in C^\infty$  tel que pour tout voisinage  $V$  de  $y$ , (0.0.37) n'a pas de solution  $u \in \mathcal{D}'(V)$ . Nous retrouvons ici l'analogie « classique » de la condition (0.0.34), et c'est précisément l'existence du quasimode pour l'adjoint qui empêche la résolubilité. C'est cette condition que Zworski a mis en évidence dans la construction de quasimodes précédente, et nous voyons ainsi que les questions de résolubilité sont étroitement liées aux opérateurs non-normaux et au pseudospectre. En 1966, Hörmander montre que le même résultat est valable pour des opérateurs pseudo-différentiels (pour ceci ainsi qu'un aperçu historique plus détaillé, nous renvoyons à [23]).

### 0.1. Énoncé des résultats

Nous nous sommes intéressés à l'aspect perturbatif du pseudospectre, donc à l'instabilité spectrale intrinsèque d'opérateurs non-autoadjoints.

Une des motivations pour notre étude a été une observation de Zworski lors de calculs numériques des valeurs propres des éléments matriciels de l'opérateur  $(hD_x)^2 + h\partial_x + x^2$  dans la base des fonctions d'Hermite ([41]). Il observe que pour  $h$  petit, ces valeurs propres ont tendance à migrer vers le bord du pseudospectre. Nous avons donc essayé d'investiguer si, en prenant des perturbations dans une certaine classe, nous pouvions observer ce phénomène. Nous obtenons une distribution de Weyl bidimensionnelle dans des domaines à l'intérieur du Pseudospectre pour nos perturbations, ce qui implique qu'il n'y a pas forcément de migration des valeurs propres vers le bord.

Notre travail se décompose essentiellement en trois parties : d'abord nous étudions un opérateur modèle, ensuite l'opérateur de Schrödinger et travaillons dans les deux cas à l'intérieur d'un domaine où la caractéristique de  $p$  (i.e.  $p^{-1}(z)$ ) est composée d'un nombre pair de points dont la moitié remplit (0.0.32) et l'autre moitié remplit (0.0.34). Ceci permettra de poser un problème de Grushin qui réduit l'analyse spectrale à l'analyse des zéros d'une fonction.

La troisième partie est complémentaire aux deux précédentes dans le sens que nous y montrons une estimation du nombre de valeurs propres près du bord du pseudospectre.

Finalement nous avons illustré nos résultats par des calculs numériques.

Nous avons mis en appendice des preuves alternatives de deux résultats du chapitre 2. La plus longue (dans l'appendice A) n'est pas complète mais donne un point de vue différent.

Dans la suite, nous indiquons entre crochets où se trouvent les hypothèses et théorèmes dans le chapitre correspondant.

**0.1.1. L'opérateur modèle.** — Il s'agit de l'opérateur non-formellement-autoadjoint dans  $L^2(S^1)$

$$P = hD_x + g(x) , \quad h \in (0, 1] , \quad D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} , \quad (0.1.1)$$

muni du domaine

$$H_{sc}^1(S^1) := \{u \in L^2(S^1); \|u\|_{H_{sc}^1} := \|u\| + \|hD_x u\| < \infty\} . \quad (0.1.2)$$

Nous supposons :

**Hypothèse 0.1.1 (Hypothèse 1.0.1).** —  $g(x)$  est une fonction analytique (à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ) tel que

$$\text{Im } g' \neq 0 , \quad (0.1.3)$$

sauf en deux points critiques  $a, b \in S^1$ , avec

$$\text{Im } g(a) \leq \text{Im } g(x) \leq \text{Im } g(b), \quad \forall x \in S^1 . \quad (0.1.4)$$

Le symbole semiclassique est

$$p(x, \xi) = \xi + g(x), \quad (x, \xi) \in T^*(S^1) , \quad (0.1.5)$$

et  $\Sigma = \{\text{Im } g(a) \leq \text{Im } z \leq \text{Im } g(b)\}$ .

Pour  $z \in \overset{\circ}{\Sigma}$ , nous introduisons les points  $\rho_{\pm}(z) = (x_{\pm}, \xi_{\pm}) \in T^*(S^1)$  donnés par

$$\rho_{\pm}(z) \in p^{-1}(z); \quad \pm \frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(\rho_{\pm}) = \mp \text{Im } g'(x_{\pm}) > 0 . \quad (0.1.6)$$

Nous voyons que l'hypothèse 0.1.1, qui garantit les conditions sur le crochet de Poisson (0.0.32) et (0.0.34), implique que  $\overline{\Lambda_{\pm}} = \Sigma$ .

Il s'agit d'un opérateur modèle car nous avons  $\forall z \in \overset{\circ}{\Sigma}$  exactement un point  $\rho_+(z)$  dans la caractéristique de  $p$  avec (0.0.32) et un point  $\rho_-$  avec (0.0.34), qui de plus sont séparés spatialement. Une grande partie du travail pourra donc être faite localement en se ramenant à l'opérateur de création ou d'annihilation.

Pour un ensemble  $\Gamma \subset \overset{\circ}{\Sigma}$  nous définissons

$$\Gamma_{-+}(\Gamma) := \{(\rho_-(z), \rho_+(z)); \quad z \in \Gamma\} \quad (0.1.7)$$

qui est homéomorphe à deux copies de  $\Gamma$ .

Si  $\Gamma$  est un ouvert, alors  $\Gamma_{-+}(\Gamma)$  est une sous-variété symplectique de  $T^*(S^1) \times T^*(S^1)$  pour la forme symplectique  $d\xi \wedge dx - d\eta \wedge dy$ , et nous notons  $|\Gamma_{-+}|$  le volume symplectique correspondant.

Comme nous verrons plus loin, la norme de la résolvante sera exponentiellement grande en  $h$  dans  $\overset{\circ}{\Sigma}$ . Pour étudier les phénomènes d'instabilité spectrale, il s'agit donc d'examiner le comportement de l'opérateur perturbé par une perturbation exponentiellement petite en  $h$ . De plus, nous allons nous limiter à l'étude de perturbations admettant un noyau oscillatoire.

Nous introduisons la projection

$$\begin{aligned} \Pi_{(x,y)} : T^*(S^1) \times T^*(S^1) &\rightarrow S^1 \times S^1, \\ (x, \xi, y, \eta) &\rightarrow (x, y). \end{aligned} \quad (0.1.8)$$

**Théorème 0.1.2 (Théorème 1.0.3).** — *Soit  $\gamma \subset \Sigma$  une courbe de la forme*

$$Re z = f(Im z), Im z \in [a', b'], Im g(a) < a' < b' < Im g(b) \quad (0.1.9)$$

où  $f$  est analytique.

Alors il existe un voisinage  $U \subset S^1 \times S^1$  de  $\tilde{\gamma} = \Pi_{(x,y)}(\Gamma_{-+}(\gamma))$ ,  $\epsilon_0 > 0$ ,  $C_0 > 0$ , une fonction  $\varphi$  analytique dans  $U$  (et indépendante de  $z$ ) avec  $Im \varphi \geq 0$ , et  $\chi \in C_c^\infty(U)$  (indépendant de  $z$ ),  $\chi = 1$  près de  $\tilde{\gamma}$  tels que :

Si  $Q : L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$  a le noyau intégral

$$k(x, y) = \chi(x, y) e^{\frac{i}{h}\varphi(x,y)}, \quad (0.1.10)$$

et si  $\delta = e^{-\frac{\epsilon}{h}}$ , pour  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ , alors pour  $h$  assez petit en fonction de  $\epsilon$  on a :

$$Spec(P + \delta Q) \cap V_\epsilon = \emptyset, \quad (0.1.11)$$

où  $V_\epsilon = \{z \in \Sigma; dist(z, \gamma) \leq \frac{\sqrt{\epsilon}}{C_0}\}$ .

Nous avons donc réussi à trouver une perturbation qui « chasse le spectre » d'un voisinage d'une courbe à l'intérieur du pseudospectre. Cependant, comme nous le verrons, il ne sera pas possible de faire la même construction pour tout un domaine à l'intérieur du pseudospectre.

Pour étudier le spectre de l'opérateur perturbé dans un domaine, nous considérons une perturbation  $\delta Q$ , où pour  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \ll 1$ ,  $\delta = e^{-\frac{\epsilon}{h}}$ ,  $Q = Q(\epsilon)$  est la somme de plusieurs termes oscillants :

**Hypothèse 0.1.3 (Hypothèse 1.0.4).** — Soit

$$Q := \sum_{j=1}^N Q_j : L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1) \quad (0.1.12)$$

avec

$$k_{Q_j}(x, y) = \alpha \chi(x - x_j) \chi(y - y_j) e^{\frac{i}{h} \varphi_j(x, y)} \quad (0.1.13)$$

le noyau intégral de  $Q_j$ , où  $\chi \in C_c^\infty((-\pi, \pi))$ ,  $\chi = 1$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , est indépendant de  $h$ . La phase est de la forme

$$\varphi_j(x, y) = \xi_j(x - x_j) + \frac{i}{2}(x - x_j)^2 - \eta_j(y - y_j) + \frac{i}{2}(y - y_j)^2, \quad (0.1.14)$$

avec  $(x_j, \xi_j) \neq (x_k, \xi_k)$ ,  $(y_j, \eta_j) \neq (y_k, \eta_k)$ ,  $\forall j \neq k$ , et  $\alpha$  est tel que  $\|Q_j\| = 1$  (donc  $\alpha \sim (\pi h)^{-\frac{1}{2}}$ ). Ici  $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ,  $(x_j, \xi_j), (y_j, \eta_j) \in \mathbb{R}^2$  dépendent de  $\epsilon$  mais pas de  $h$ , alors que  $\chi, \alpha$  ne dépendent pas de  $\epsilon$ .

**Hypothèse 0.1.4 (Hypothèse 1.0.5).** — Soit  $\Gamma \subset\subset \overset{\circ}{\Sigma}$  un ouvert simplement connexe de bord  $\gamma = \partial\Gamma \in C^\infty$ . Nous supposons alors que pour  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ,

$$\Gamma_{-+}(\gamma) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq N(\epsilon)} B\left(\left((x_j, \xi_j), (y_j, \eta_j)\right), \frac{\sqrt{\epsilon}}{C}\right), \quad (0.1.15)$$

où  $C$  devra être choisi assez grand. De manière générale  $B(x_0, r)$  désigne la boule ouverte de centre  $x_0$  et de rayon  $r$ .

Finalement nous supposons pour chaque  $\epsilon > 0$  une hypothèse remplie de manière générique (hypothèse 1.7.4 dans le chapitre 1).

**Théorème 0.1.5 (Théorème 1.0.6).** — Nous supposons que  $P$  remplit l'hypothèse 0.1.1, que la perturbation  $Q$  remplit les hypothèses 0.1.3, 0.1.4 (ainsi qu'une hypothèse remplie de manière générique) et que  $\delta = e^{-\frac{\epsilon}{h}}$  avec  $\epsilon > 0$  assez petit indépendant de  $h$ . Alors le nombre de valeurs propres de  $P + \delta Q$  dans  $\Gamma$  vérifie

$$\#(\text{Spec}(P + \delta Q) \cap \Gamma) = \frac{1}{2\pi h} |\Gamma_{-+}(\Gamma)| + O\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{h}\right) \quad (0.1.16)$$

pour  $h$  assez petit en fonction de  $\epsilon$ . Ici  $|\Gamma_{-+}(\Gamma)|$  désigne le volume symplectique de  $\Gamma_{-+}(\Gamma)$  pour la forme  $d\xi \wedge dx - d\eta \wedge dy$ .

Pour la preuve de ces théorèmes, nous procédons de la manière suivante : Nous commençons par la construction de quasimodes  $e_+$  pour  $P - z$  et  $e_-$  pour  $(P - z)^*$ . Nous pourrions alors poser un problème de Grushin. Il s'agit d'un problème pour un opérateur augmenté afin de « fixer les quasimodes ». Considérons

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H_{sc}^1 \times \mathbb{C} \rightarrow L^2 \times \mathbb{C}, \quad (0.1.17)$$

où

$$R_+ u := \langle u, e_+ \rangle, \quad (0.1.18)$$

$$R_- u_- := u_- e_- . \quad (0.1.19)$$

Nous montrons qu'il existe

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix},$$

tel que

$$\mathcal{P}\mathcal{E} = 1_{L^2 \times \mathbb{C}} \text{ et } \mathcal{E}\mathcal{P} = 1_{H_{sc}^1 \times \mathbb{C}}.$$

Alors  $P - z$  admet un inverse si et seulement si  $E_{-+} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est inversible, ce que nous allons utiliser pour l'analyse spectrale.

Cette démarche est en fait bien connue depuis longtemps. Dans le cadre des « problèmes au bord intérieurs », Sjöstrand montre en '73 ([27]) que si  $P$  est un opérateur de type principal sur une variété avec des conditions au bord intérieures (on suppose bien évidemment des conditions supplémentaires que nous ne détaillons pas ici) et que l'on a uniquement des points dans la caractéristique de  $p$  qui remplissent soit (0.0.32), soit (0.0.34), alors il est possible de poser et résoudre un « problème de Grushin », et l'on obtient des estimations avec perte d'une demi-dérivée.

Nous reprenons la même démarche pour  $P - z + \delta Q$ , et obtenons un développement perturbatif de  $E_{-+}^\delta$ , dont les zéros déterminent le spectre de l'opérateur perturbé.

Pour le premier théorème, nous utilisons la méthode de la phase stationnaire pour montrer qu'il existe une perturbation telle que le terme de premier ordre perturbatif domine sur tous les autres et ne s'annule pas,  $\forall z \in \gamma$ , mais indiquons aussi pourquoi cette construction ne se généralise pas à tout un domaine.

Afin d'estimer le nombre de zéros dans tout un domaine, nous devons nous ramener à une fonction holomorphe ayant les mêmes zéros que  $E_{-+}^\delta$ , dont la croissance est borné par un poids sousharmonique. Avec le choix

de notre perturbation du théorème 0.1.5, nous obtiendrons que cette fonction atteint presque le poids dans les points  $z_k$ , et ceci permettra de relier le nombre de zéros à l'intégrale du laplacien du poids, et d'estimer l'erreur commise. Cette intégrale est reliée au volume symplectique  $|\Gamma_{-+}(\Gamma)|$ , ce qui terminera la preuve.

**0.1.2. Cas « général ».** — Comme nous l'avons vu dans la section précédente, l'opérateur modèle avait certaines propriétés qui simplifiaient beaucoup le problème. L'idée de la généralisation est de se ramener micro-localement à ce modèle, du moins pour les constructions de quasimodes et le problème de Grushin. Pour la construction de perturbations aléatoires pour lesquelles on aurait avec une grande probabilité un théorème analogue au théorème 0.1.5, il y a cependant un obstacle : l'hypothèse 0.1.1 (où plutôt sa reformulation en termes de crochet de poisson) est souvent trop restrictive, et déjà pour l'oscillateur harmonique non-autoadjoint on sort de ce cadre, car on a plus que deux points dans la caractéristique de  $p$ . Cependant, pour les opérateurs à symbole pair en  $\xi$  on peut exploiter cette propriété et étudier les perturbations multiplicatives, ce que nous allons expliquer dans le chapitre 2.

Nous commençons par préciser les hypothèses sur les opérateurs non-autoadjoints que nous considérons. L'opérateur de Schrödinger rentre dans ce cadre, mais l'étude reste valable pour des opérateurs plus généraux pairs en  $\xi$ .

Soit  $m$  une fonction d'ordre sur  $\mathbb{R}^2$ , c'est à dire  $m \in C^\infty(\mathbb{R}^2, (0, \infty))$  tel que  $\exists C_0, N_0$  tels que

$$m(X) \leq C_0 \langle X - Y \rangle^{N_0} m(Y), \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2. \quad (0.1.20)$$

Soit  $(p - z) \in S(\mathbb{R}^2, m) = \{q \in C^\infty(\mathbb{R}^2); \forall \alpha \in \mathbb{N}^2 \exists C_\alpha > 0 : |\partial^\alpha q| \leq C_\alpha m\}$ , indépendant de  $h$ .

Nous dénotons par  $P = p^w$  son quantifié de Weyl, que nous considérons dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

Nous prenons la variable spectrale dans un domaine (c'est à dire un ouvert connexe) relativement compact à l'intérieur de  $\Sigma$  :

$$z \in \Omega \subset\subset \overset{\circ}{\Sigma}. \quad (0.1.21)$$

A partir de maintenant nous supposons

**Hypothèse 0.1.6 (Hypothèse 2.0.3).** —  $\forall z \in \Omega$  nous avons

$$p^{-1}(z) = \{\rho_-^j(z), \rho_+^j(z), j = 1, \dots, n\},$$

$$\text{où } \pm \frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(\rho_{\pm}) = \pm \text{Im}(p_{\xi} \bar{p}_x)(\rho_{\pm}) > 0. \quad (0.1.22)$$

Nous nous contenterons souvent de traiter le cas  $n = 1$  si le cas général se traite de manière analogue.

Nous introduisons, pour  $\Gamma \subset \Omega$  un ensemble,

$$\Gamma_{-+}(\Gamma) = \{\rho_-^j(z), \rho_+^j(z), j = 1, \dots, n, z \in \Gamma\} \subset (T^*(\mathbb{R}))^{2n}. \quad (0.1.23)$$

Si  $\Gamma$  est un domaine,  $\Gamma_{-+}(\Gamma)$  est symplectique par rapport à la forme symplectique  $\sum_j (d\xi_j \wedge dx_j - d\eta_j \wedge dy_j)$ , et nous dénotons le volume correspondant par  $|\Gamma_{-+}(\Gamma)|$ , qui s'exprime aussi comme

$$|\Gamma_{-+}(\Gamma)| = \sum_j (\text{vol}(\{\rho_-^j(z), z \in \Gamma\}) + \text{vol}(\{\rho_+^j(z), z \in \Gamma\})). \quad (0.1.24)$$

**Hypothèse 0.1.7 (Hypothèse 2.0.5).** — Soit  $\tilde{\Omega} \subset \subset \mathbb{C}$  un domaine,  $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ . Soit  $(p - z) \in S(\mathbb{R}^2; m)$  indépendant de  $h$ , où  $m \geq 1$ . Nous supposons que  $(p - z)$  est elliptique à l'infini uniformément  $\forall z \in \tilde{\Omega}$  :

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall z \in \tilde{\Omega}, |p(X) - z| > \frac{1}{C} m(X), \forall X \in \mathbb{R}^2, |X| > C,$$

et que  $\exists z_0 \in \tilde{\Omega}$  tel que  $p - z_0$  est elliptique :

$$\exists C > 0 \text{ tel que } |p(X) - z_0| > \frac{1}{C} m(X), \forall X \in \mathbb{R}^2.$$

Nous supposons que  $\exists c > 0$  tel que  $p$  est analytique dans un voisinage tubulaire de  $\mathbb{R}^2$

$$S_c = \{X \in \mathbb{C}^2; |\text{Im} X| < c\} \quad (0.1.25)$$

et y vérifie  $|p(X)| \leq m(\text{Re} X)$ .

Remarquons que  $\frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(x, -\xi) = -\frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(x, \xi)$ , donc si  $p$  est pair en  $\xi$ , on peut prendre  $\rho_{\pm}^j = (x^j, \pm \xi^j)$ .

**Hypothèse 0.1.8 (Hypothèse 2.0.6).** — Nous supposons que  $p(x, -\xi) = p(x, \xi)$  et que  $x^j \neq x^k, j \neq k$ .

On rappellera au chapitre 2 qu'il existe parmi les quantifiés de Weyl à symbole dans  $S(\mathbb{R}^2, m)$  et pour  $h$  assez petit un opérateur elliptique inversible réalisant un isomorphisme de son domaine  $H(m)$  sur  $L^2$ , que

nous désignons par abus de notation par  $m$ . Ceci nous permet d'introduire l'espace de Sobolev

$$H(m) := (m^w)^{-1}(L^2), \quad \|u\|_m := \|m^w u\|, \quad u \in H(m). \quad (0.1.26)$$

Nous munissons  $p^w$  du domaine  $H(m)$ .

L'ellipticité à l'infini et l'ellipticité en un point impliquent que  $p^w$  a, pour  $h$  assez petit, un spectre purement discret dans  $\tilde{\Omega}$ . Pour  $p = \xi^2 + V(x) \in S(\mathbb{R}^2, m)$  les hypothèses 0.1.6, 0.1.7 impliquent que  $\forall z \in \Omega, \forall j$ , il est possible de construire des quasimodes comme dans (0.0.33), (0.0.35) avec erreur exponentiellement petite en  $h$ .

Finalement, dans le cadre de l'hypothèse 0.1.8, nous avons, en écrivant  $\Gamma f(x) := \bar{f}(x)$ , que

$$\Gamma(p^w - z)\Gamma = \overline{(p(x, -\xi) - z)^w} = \overline{(p(x, \xi) - z)^w} = (p^w - z)^* \quad (0.1.27)$$

donc  $\overline{(p^w - z)^*} \Gamma e_+^j = O(h^\infty)$  (car  $\Gamma^2 = 1$ ) et nous pouvons prendre  $e_+^j = e_-^j$ .

Pour  $p \in S(\mathbb{R}^2; m)$  remplissant les hypothèses 0.1.6, 0.1.7 et 0.1.8, soit  $e_-^j$  comme dans (0.0.35). Nous écrivons, pour  $u \in \mathcal{S}', v \in \mathcal{S}$ ,  $\langle u, v \rangle := \langle u, \bar{v} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}$  (donc si  $u \in L^2$ , nous retrouvons le produit scalaire  $L^2$ ).

**Hypothèse 0.1.9 (Hypothèse 2.0.8).** — Soit  $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité. Soit  $\sigma(h) > 0$ ,

$$\mathcal{M} \ni \omega \mapsto q_\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad (0.1.28)$$

une application dépendant aussi de  $h > 0$ .

Nous supposons que  $\underline{P}[q_\omega \in L^\infty] = 1$  (pour une définition de la probabilité inférieure  $\underline{P}$  voir chapitre 2), et qu'il existe  $M_0, D > 0$  indépendants de  $h$  (et de  $\sigma(h)$ ) tels que

$$\underline{P}[\|q_\omega\|_\infty \leq 1] \geq 1 - Dh^{-M_0} \sigma(h). \quad (0.1.29)$$

Nous supposons qu'il existe  $\kappa \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall z \in \Omega, \forall j, \forall t > 0$ ,

$$\overline{P} [ |\langle q_\omega, (e_-^j)^2(z) \rangle| \leq t ] \leq \frac{t^2}{\sigma(h)^2 h^\kappa}. \quad (0.1.30)$$

Soit finalement  $\delta = \delta(h)$  un paramètre de perturbation avec

$$e^{-\frac{1}{D_0 h}} < \delta < \frac{1}{C_0} h^{\frac{3}{2}}, \quad (0.1.31)$$

où  $C_0 > 0$  et  $D_0 > 0$  sont assez grands.



Si  $q_\omega \in L^\infty$ ,  $\|q_\omega\|_\infty \leq 1$ , nous définissons

$$Qu(x) := q_\omega(x)u(x), \quad \|Q\| \leq 1. \quad (0.1.32)$$

Dans le chapitre 2, nous montrons aussi qu'il est possible de choisir  $q(x) = \sum_{l \leq N(h)} \alpha_l q_l(x)$ , où  $N(h) = \frac{C}{h}$  avec  $C > 0$  assez grand,  $q_l$  sont les fonctions d'Hermite et  $\alpha_l$  sont des variables aléatoires complexes indépendantes identiquement distribuées d'après une loi normale centrée en 0 et de variance  $\sigma^2$ .

**Théorème 0.1.10 (Théorème 2.0.9).** — Soit  $p \in S(\mathbb{R}^2; m)$  remplissant les hypothèses 0.1.6, 0.1.7 et 0.1.8, et soient  $q$ ,  $\delta$  comme dans l'hypothèse 0.1.9. Alors, pour tout domaine  $\Gamma \subset\subset \Omega$ ,  $\partial\Gamma \in C^\infty$ ,  $\exists C > 0$ ,  $\exists D' > 0$  tel que si  $h$  est assez petit, nous avons, avec une probabilité inférieure minorée par

$$1 - D' \frac{(\delta)^{\frac{2}{n}}}{(\ln \frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}} \sigma(h)^2 h^{\frac{3}{n} + \kappa + \frac{1}{2}}} - D\sigma(h)h^{-M_0}, \quad (0.1.33)$$

que

$$|\#(\text{Spec}(p^w + \delta Q) \cap \Gamma) - \frac{1}{2\pi h} |\Gamma_{-+}(\Gamma)|| \leq C \left(\frac{\ln \frac{1}{\delta}}{h}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (0.1.34)$$

Ici  $M_0$ ,  $D$  et  $\kappa$  sont les constantes de l'hypothèse 0.1.9.

**Corollaire 0.1.11 (Corollaire 2.0.10).** — Soit  $p \in S(\mathbb{R}^2; m)$  remplissant les hypothèses 0.1.6, 0.1.7 et 0.1.8, et soit  $\Gamma \subset\subset \Omega$  un domaine,  $\partial\Gamma \in C^\infty$ . Il existe  $0 < \epsilon_0 \ll 1$  tel que pour tout  $\tilde{\kappa}$ ,  $\exists C > 0$ ,  $\exists \kappa_0 > 0$ ,  $\exists C' > 0$  tel que  $\forall 0 < \epsilon < \epsilon_0$  il existe  $h(\epsilon, \tilde{\kappa}) > 0$  tel que si  $q$ ,  $\delta = e^{-\frac{\epsilon}{h}}$  sont comme dans l'hypothèse 0.1.9 pour  $\sigma(h) = h^{\kappa_0}$ , alors avec une probabilité inférieure minorée par  $1 - C'h^{\tilde{\kappa}}$  nous avons

$$|\#(\text{Spec}(p^w + \delta Q) \cap \Gamma) - \frac{1}{2\pi h} |\Gamma_{-+}(\Gamma)|| \leq C \frac{\sqrt{\epsilon}}{h}, \quad (0.1.35)$$

pour  $h < h(\epsilon, \tilde{\kappa})$ .

Dans le chapitre 2, nous obtenons un résultat similaire pour toute une famille de domaines (Théorème 2.0.11), ce qui implique avec une grande probabilité une distribution uniforme des valeurs propres dans des domaines à l'intérieur du pseudospectre.

Pour la preuve de ces résultats, nous procédons comme pour l'opérateur modèle. Nous construisons des quasimodes grâce à un théorème de factorisation qui nous permet de nous ramener microlocalement soit à l'opérateur modèle, soit à son adjoint.

Etant donné que nous avons plus que deux points dans la caractéristique de  $p$ , il faudra considérer un problème de Grushin plus général. Pour en montrer l'inversibilité, nous nous ramenons microlocalement à l'opérateur modèle.  $E_{-+}$  sera une matrice  $n \times n$ , et le spectre de  $P$  est relié aux zéros de  $\det(E_{-+})$ . Il s'agira ensuite de reprendre la démarche que nous avons suivi pour l'opérateur exemple pour analyser les zéros de  $\det(E_{-+}^\delta)$ , si l'on considère une perturbation fixée de  $P$ .

En insérant la perturbation aléatoire, les estimations requises pour la fonction holomorphe ayant les mêmes zéros que  $\det(E_{-+})$  (qui impliquent la loi de Weyl) seront remplies avec une certaine probabilité, que nous estimons finalement.

**0.1.3. Estimations du nombre de valeurs propres près du bord du pseudospectre.** — Ici nous obtenons un résultat complémentaire des chapitres précédents, en montrant qu'il ne peut pas y avoir trop d'accumulation des valeurs propres vers le bord du pseudospectre, pour des opérateurs plus généraux qu'avant. En combinant ces résultats, nous pouvons donc connaître la répartition asymptotique des valeurs propres avec une grande probabilité.

**Hypothèse 0.1.12 (Hypothèse 3.0.1).** — Soit  $m > 1$  une fonction d'ordre, et soit  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$  indépendant de  $h$ . Soit  $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$  un domaine tel que  $(p - z)$  est elliptique à l'infini uniformément  $\forall z \in \Omega$ , et que  $\exists z_0 \in \Omega$  tel que  $p - z_0$  est elliptique.

Si le bord du pseudospectre n'est pas « suffisamment régulier », nous avons besoin de l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 0.1.13 (Hypothèse 3.0.3).** — Nous supposons que  $\exists C > 0$  tel que  $\forall z \in \partial\Sigma \cap \Omega$ ,  $\forall \epsilon > 0$  assez petit,  $\exists z_0 \in \Sigma^c$  tel que  $|z - z_0| \leq \epsilon$  et que  $\text{dist}(z_0, \partial\Sigma) \geq \frac{\epsilon}{C}$ .

Pour  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$  nous écrivons  $p^{-1}(\tilde{\Omega}) \equiv p^{-1}(\tilde{\Omega} \cap \Sigma)$ .

**Théorème 0.1.14 (Théorème 3.0.4).** — Soit  $p$  avec les hypothèses 0.1.12 and 0.1.13. Soit  $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ . Pour  $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ , soit

$$W(\epsilon) := \{z \in \tilde{\Omega}; d(z, \partial\Sigma) < \epsilon\} , \quad (0.1.36)$$

$$\hat{W}(\epsilon_1, \epsilon_2) := \{z \in \overline{\tilde{\Omega}} + D(0, \epsilon_1); d(z, \partial\Sigma) < \epsilon_2\} .$$

Alors  $\exists C > 0, \exists \epsilon_0 > 0$  tels que  $\forall \epsilon \leq \epsilon_0, \exists h_0(\epsilon) > 0$  tel que si  $0 < h \leq h_0(\epsilon)$ ,

$$\#(\text{Spec}(p^w) \cap W(\epsilon)) \leq C \frac{\text{vol}(p^{-1}(\hat{W}(14\epsilon, 12\epsilon)))}{h} . \quad (0.1.37)$$

Ceci implique un résultat similaire pour l'opérateur perturbé par une petite perturbation (notamment  $O(e^{-\frac{1}{Ch}})$ ), voir chapitre 3.

Ensuite nous examinons le volume dans (0.1.37), et montrons le résultat suivant.

**Corollaire 0.1.15 (Corollaire 3.0.7).** — Soit  $p$  avec les hypothèses 0.1.12 et 0.1.13, et soit  $W(\epsilon)$  comme dans (0.1.36). Si de plus

$$\{p, \{p, \bar{p}\}\}(x, \xi) \neq 0 , \quad (x, \xi) \in p^{-1}(\Omega \cap \partial\Sigma) , \quad (0.1.38)$$

alors  $\exists \epsilon_0 > 0, \exists C > 0$  tel que  $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0) \exists h(\epsilon) > 0$  tel que pour  $0 < h < h(\epsilon)$ ,

$$\#(\text{Spec}(p^w) \cap W(\epsilon)) \leq C \frac{\sqrt{\epsilon}}{h} . \quad (0.1.39)$$

Pour la preuve du théorème, nous recouvrons  $W(\epsilon)$  avec des disques de rayon  $O(\epsilon)$  et y travaillons localement.

Nous construisons une perturbation de  $P$  tel que l'opérateur perturbé sera inversible pour des valeurs spectrales dans un disque, et utilisons cet opérateur pour relier le spectre de  $P$  aux zéros d'un certain déterminant majoré dans le disque. Ensuite nous utilisons la proximité de la zone d'ellipticité de  $p$  pour trouver une minoration en un point de ce déterminant. Ceci nous permettra d'appliquer la formule de Jensen dans le disque et d'estimer le nombre de zéros du déterminant.

Finalement nous explicitons dans un le cadre de la condition (0.1.38) le volume intervenant dans le théorème, ce qui impliquera le corollaire 0.1.15.



# CHAPITRE 1

## INSTABILITÉ SPECTRALE SEMICLASSIQUE POUR DES OPÉRATEURS NON-AUTOADJOINTS I : UN MODÈLE

### Introduction

Il est bien connu que pour des opérateurs non-autoadjoints, la norme de la résolvante peut être très grande même loin du spectre. Par exemple, dans la théorie des opérateurs elliptiques non-autoadjoints, ceci constitue une difficulté théorique importante (voir par exemple [1]). Le sujet a regagné de l'actualité avec des travaux sur les résonances d'une part, et d'autre part par des contributions en mathématiques appliquées et l'introduction par N. Trefethen (et quelques prédécesseurs) de la notion de pseudospectre [37]. Parmi les nombreuses autres contributions, on peut citer S. Reddy, P. Schmid et D. Henningson [26] qui ont appliqué cette notion à l'opérateur d'Orr-Sommerfeld, et ont mis en évidence numériquement l'instabilité spectrale.

E.B. Davies a étudié des opérateurs de Schrödinger à potentiel complexe ([5]), et a construit des quasimodes prouvant que le pseudospectre est dans ce cas beaucoup plus grand que le spectre. M. Zworski ([40]) a observé que la condition d'existence de ces solutions locales asymptotiques s'interprète comme une condition de commutateur de Hörmander. Ceci a servi comme point de départ pour généraliser ce résultat à des opérateurs pseudodifférentiels (dans le cadre semiclassique) et à plusieurs dimensions par N. Dencker, J. Sjöstrand et M. Zworski ([11]). Voir aussi le travail récent de L. Trefethen ([38]).

De manière équivalente, le pseudospectre peut s'introduire comme une région d'« instabilité spectrale » (voir [6]). Ceci explique l'importance de cette notion pour des calculs numériques impliquant des matrices non-normales. Notamment pour des matrices de Toeplitz, intervenant lors de

discrétisations d'opérateurs différentiels, le pseudospectre semble pouvoir jouer un rôle important dans l'étude de la stabilité du problème d'évolution discret correspondant ([37]). Davies ([7]) propose une approche directe des problèmes d'évolution utilisant le pseudospectre, et les travaux antérieurs de Tang-Zworski ([35]) et de Burq-Zworski ([4]) illustrent bien les difficultés pseudospectrales pour les problèmes d'évolution. M. Zworski observe aussi que lors du calcul numérique des valeurs propres de certains opérateurs différentiels dans le cadre semiclassique, il semble y avoir un phénomène de migration des valeurs propres vers le bord du pseudospectre, dans la limite semiclassique ([41]). Ce phénomène nous a motivé pour entreprendre une étude des perturbations d'opérateurs non-autoadjoints.

Nous allons examiner ici le comportement spectral d'un opérateur-exemple sous des perturbations à noyau oscillant, et nous allons établir une asymptotique de Weyl pour le nombre de valeurs propres de l'opérateur perturbé dans un domaine à l'intérieur du pseudospectre; pour ce genre de perturbations il n'y aurait donc dans notre cas pas forcément de migration des valeurs propres vers le bord.

De plus, nous étudions dans le théorème 1.0.3 l'étendue maximale de la zone sans valeurs propres de l'opérateur perturbé par une perturbation ayant un seul noyau oscillatoire.

Considérons l'opérateur non-formellement-autoadjoint dans  $L^2(S^1)$

$$P = hD_x + g(x) , \quad h \in (0, 1] , \quad D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} . \quad (1.0.1)$$

Nous supposons :

**Hypothèse 1.0.1.** —  $g(x)$  est une fonction analytique (à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ) tel que

$$\text{Im} g' \neq 0 , \quad (1.0.2)$$

sauf en deux points critiques  $a, b \in S^1$ , avec

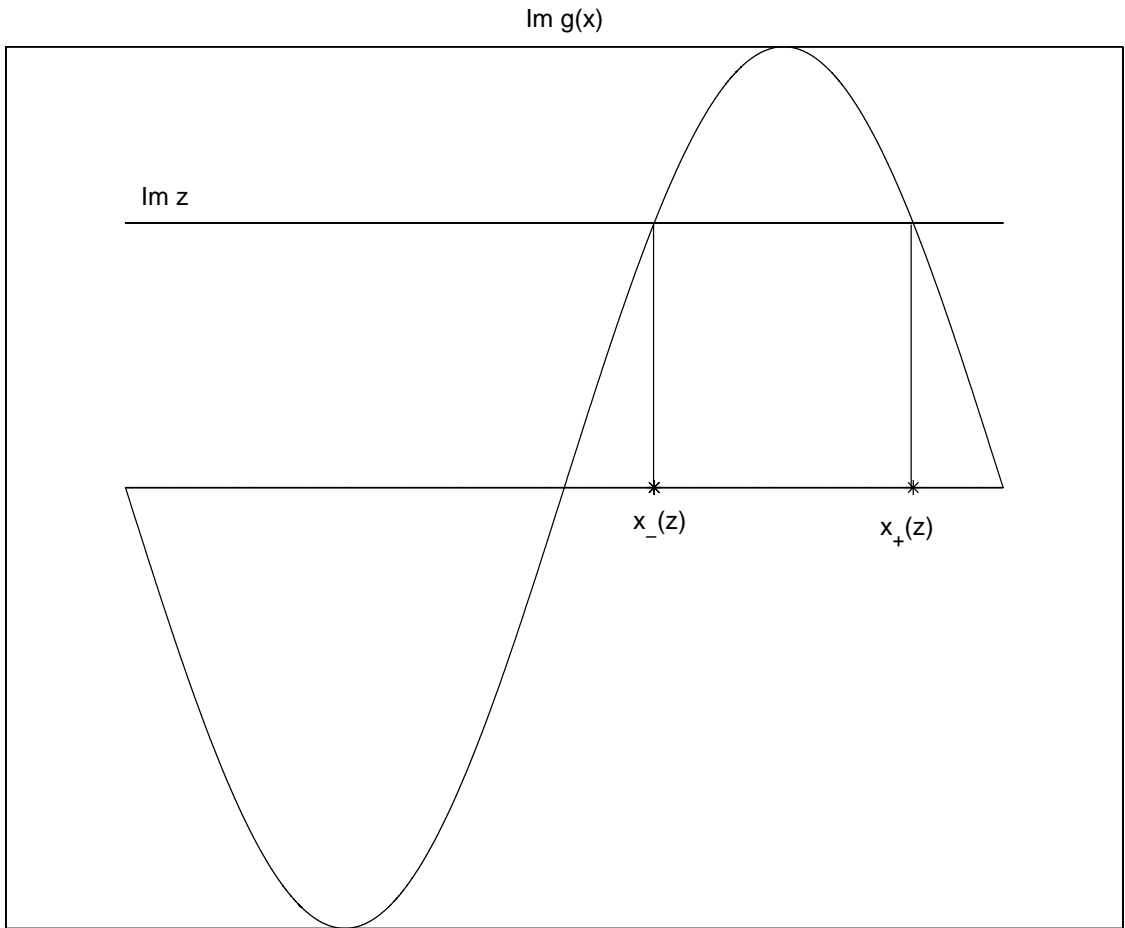
$$\text{Im} g(a) \leq \text{Im} g(x) \leq \text{Im} g(b), \quad \forall x \in S^1 .$$

Nous introduisons le symbole semiclassique

$$p(x, \xi) = \xi + g(x), \quad (x, \xi) \in T^*(S^1) . \quad (1.0.3)$$

**Définition 1.0.2.** — Le pseudospectre semiclassique  $\Sigma \subset \mathbb{C}$  de  $P$  est défini par

$$\Sigma := \overline{p(T^*(\mathbb{R}))} . \quad (1.0.4)$$



Ici ce sera la bande

$$\Sigma = \{\text{Im } g(a) \leq \text{Im } z \leq \text{Im } g(b)\} , \quad (1.0.5)$$

et le spectre se situe à l'intérieur de  $\Sigma$  (ce que nous allons montrer dans le paragraphe suivant).

Nous dénotons par  $\sigma(A)$  le spectre de  $A$ .

Pour  $z \in \overset{\circ}{\Sigma}$ , nous introduisons les points  $\rho_{\pm}(z) = (x_{\pm}, \xi_{\pm}) \in T^*(\mathbb{R})$  donnés par

$$\rho_{\pm}(z) \in p^{-1}(z); \quad \mp \text{Im } g'(x_{\pm}) > 0 . \quad (1.0.6)$$

Pour tout ensemble  $\Gamma \subset \overset{\circ}{\Sigma}$  nous définissons

$$\Gamma_{-+}(\Gamma) := \{(\rho_-(z), \rho_+(z)); z \in \Gamma\} \quad (1.0.7)$$

qui est homéomorphe à  $\Gamma$ .

Si  $\Gamma$  est un ouvert, alors  $\Gamma_{-+}(\Gamma)$  est une sous-variété symplectique de  $T^*(S^1) \times T^*(S^1)$  pour la forme symplectique  $d\xi \wedge dx - d\eta \wedge dy$  (voir (1.4.4)), et nous notons  $|\Gamma_{-+}|$  le volume symplectique correspondant.

Nous introduisons la projection

$$\begin{aligned} \Pi_{(x,y)} : T^*(S^1) \times T^*(S^1) &\rightarrow S^1 \times S^1, \\ (x, \xi, y, \eta) &\rightarrow (x, y). \end{aligned} \quad (1.0.8)$$

**Théorème 1.0.3.** — Soit  $\gamma \subset \Sigma$  une courbe de la forme

$$\text{Re } z = f(\text{Im } z), \text{Im } z \in [a', b'], \text{Im } g(a) < a' < b' < \text{Im } g(b) \quad (1.0.9)$$

où  $f$  est analytique.

Alors il existe un voisinage  $U \subset S^1 \times S^1$  de  $\tilde{\gamma} = \Pi_{(x,y)}(\Gamma_{-+}(\gamma))$ ,  $\epsilon_0 > 0$ ,  $C_0 > 0$ , une fonction  $\varphi$  analytique dans  $U$  (et indépendante de  $z$ ) avec  $\text{Im } \varphi \geq 0$ , et  $\chi \in C_c^\infty(U)$  (indépendant de  $z$ ),  $\chi = 1$  près de  $\tilde{\gamma}$  tels que :

Si  $Q : L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$  a le noyau intégral

$$k(x, y) = \chi(x, y) e^{\frac{i}{h}\varphi(x,y)}, \quad (1.0.10)$$

et si  $\delta = e^{-\frac{\epsilon}{h}}$ , pour  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ , alors pour  $h$  assez petit en fonction de  $\epsilon$  on a :

$$\sigma(P + \delta Q) \cap V_\epsilon = \emptyset, \quad (1.0.11)$$

où  $V_\epsilon = \{z \in \Sigma; \text{dist}(z, \gamma) \leq \frac{\sqrt{\epsilon}}{C_0}\}$ .

Ensuite nous considérons une perturbation  $\delta Q$ , où  $Q = Q(\epsilon)$ ,  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \ll 1$  est la somme de plusieurs termes oscillants :

**Hypothèse 1.0.4.** — Soit

$$Q := \sum_{j=1}^N Q_j : L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1) \quad (1.0.12)$$

avec

$$k_{Q_j}(x, y) = \alpha \chi(x - x_j) \chi(y - y_j) e^{\frac{i}{h}\varphi_j(x,y)}$$

le noyau intégral de  $Q_j$ , où  $\chi \in C_c^\infty((-\pi, \pi))$ ,  $\chi = 1$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , est indépendant de  $h$ . La phase est de la forme

$$\varphi_j(x, y) = \xi_j(x - x_j) + \frac{i}{2}(x - x_j)^2 - \eta_j(y - y_j) + \frac{i}{2}(y - y_j)^2,$$



avec  $(x_j, \xi_j) \neq (x_k, \xi_k)$ ,  $(y_j, \eta_j) \neq (y_k, \eta_k)$ ,  $\forall j \neq k$ , et  $\alpha$  est tel que  $\|Q_j\| = 1$  (donc  $\alpha \sim (\pi h)^{-\frac{1}{2}}$ ). Ici  $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ,  $(x_j, \xi_j), (y_j, \eta_j) \in \mathbb{R}^2$  dépendent de  $\epsilon$  mais pas de  $h$ , alors que  $\chi, \alpha$  ne dépendent pas de  $\epsilon$ .

**Hypothèse 1.0.5.** — Soit  $\Gamma \subset \subset \overset{\circ}{\Sigma}$  un ouvert simplement connexe de bord  $\gamma = \partial\Gamma \in C^\infty$ . Nous supposons alors que, pour  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ,

$$\Gamma_{-+}(\gamma) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq N(\epsilon)} B\left(\left((x_j, \xi_j), (y_j, \eta_j)\right), \frac{\sqrt{\epsilon}}{C}\right),$$

où  $C$  devra être choisi assez grand. De manière générale  $B(X_0, r)$  désigne la boule ouverte de centre  $X_0$  et de rayon  $r$ .

Finalement nous supposons pour chaque  $\epsilon > 0$  une hypothèse 1.7.4 (dans la section 1.7) satisfaite de manière générique que nous allons énoncer.

**Théorème 1.0.6.** — Nous supposons que  $P$  vérifie l'hypothèse 1.0.1, que la perturbation  $Q$  vérifie les hypothèses 1.0.4, 1.7.4, 1.0.5 et que  $\delta = e^{-\frac{\epsilon}{h}}$  avec  $\epsilon > 0$  assez petit indépendant de  $h$ . Alors le nombre de valeurs propres de  $P + \delta Q$  dans  $\Gamma$  vérifie

$$\#(\sigma(P + \delta Q) \cap \Gamma) = \frac{1}{2\pi h} |\Gamma_{-+}(\Gamma)| + O\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{h}\right) \quad (1.0.13)$$

pour  $h$  assez petit en fonction de  $\epsilon$ . Ici  $|\Gamma_{-+}(\Gamma)|$  désigne l'aire symplectique de  $\Gamma_{-+}(\Gamma)$  pour la forme  $d\xi \wedge dx - d\eta \wedge dy$ .

Pour prouver ces deux résultats, nous allons procéder de la manière suivante :

Nous commençons par prouver l'existence de solutions locales de  $(P - z)u = 0$  près de  $x_+$ , et de l'équation adjointe près de  $x_-$ . Ceci nous permettra de formuler un problème de Grushin. Nous allons d'abord montrer l'inversibilité pour les problèmes de Grushin locaux près de  $x_\pm$ . Ensuite nous allons construire un inverse exact global.

Ceci nous permettra alors de relier le spectre de  $P$  aux zéros de l'hamiltonien effectif, qui sera ici une fonction  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Nous considérons ensuite l'opérateur perturbé par une perturbation  $\delta Q$ ,  $Q$  étant borné, et montrons que le problème de Grushin reste bien posé. Nous pourrons faire un développement perturbatif de l'hamiltonien effectif, et nous allons expliciter le terme de premier ordre.

Nous construisons ensuite la perturbation du théorème 1.0.3.

Après nous considérons une perturbation remplissant les hypothèses 1.0.4, 1.7.4, 1.0.5 qui nous permettront, à l'aide de la méthode de la phase stationnaire analytique, de prouver la domination du terme de premier ordre perturbatif.

Pour terminer la preuve du théorème 1.0.6, nous allons construire des fonctions qui rendront holomorphe l'hamiltonien effectif non-perturbé, respectivement perturbé. Ceci nous permettra, avec les estimations précédentes, de relier ses zéros aux zéros d'une fonction holomorphe bornée par un poids sosharmonique, et l'atteignant presque en certains points. Le nombre de zéros pourra alors être exprimé en fonction de l'intégrale du laplacien du poids correspondant.

Nous terminons par la preuve du théorème 1.0.3.

Dans un prochain travail nous généralisons le théorème 1.0.6 en prenant un opérateur non-perturbé plus général et des perturbations « aléatoires ».

*Remerciements* : Ce travail fait partie de la thèse de l'auteur préparée sous la direction de J. Sjöstrand.

## 1.1. Pseudospectre et solutions BKW

**1.1.1. Définitions et Hypothèses.** — Toutes les normes non-indexées seront par défaut des normes  $L^2(S^1)$  respectivement  $\mathcal{L}(L^2)$ . Soit  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction analytique, et soit  $P$  donné par (1.0.1).

$P$  admet comme domaine naturel l'espace de Sobolev semiclassical

$$H_{sc}^1(S^1) := \{u \in L^2(S^1); \|u\|_{H_{sc}^1} := \|u\| + \|hD_x u\| < \infty\}. \quad (1.1.1)$$

Le spectre de  $P$  est

$$\sigma = \{z = \langle g \rangle + nh; n \in \mathbb{Z}\}, \quad \langle g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) dx. \quad (1.1.2)$$

Ceci se voit de la manière suivante : soit  $T$  la bijection sur  $H_{sc}^1$  donnée par

$$Tu(x) := e^{-\frac{i}{h} \int^x (g(y) - \langle g \rangle) dy} u(x) \quad (1.1.3)$$

(qui est bornée pour  $h \in (0, 1]$  fixé).

Alors

$$T^{-1}PT = hD_x + \langle g \rangle, \quad (1.1.4)$$

qui a le spectre ci-dessus.

Nous rappelons :

**Hypothèse 1.1.1.** —  $g(x)$  est une fonction analytique tel que

$$\operatorname{Im} g' \neq 0, \quad (1.1.5)$$

sauf en deux points critiques  $a, b \in S^1$ , avec

$$\operatorname{Im} g(a) \leq \operatorname{Im} g(x) \leq \operatorname{Im} g(b), \forall x \in S^1.$$

Dans la suite nous identifierons souvent  $a$  et  $b$  avec les points dans  $\mathbb{R}$  tels que  $a < b < a + 2\pi$  à l'aide de l'application naturelle  $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Le crochet de Poisson  $\{p, \bar{p}\}$  de  $p, \bar{p}$  est donné par

$$\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\} := \frac{1}{2i}(p_\xi \bar{p}_x - p_x \bar{p}_\xi) = \operatorname{Im}(p_\xi \bar{p}_x). \quad (1.1.6)$$

Dans notre cas  $\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\} = -\operatorname{Im} g'(x)$  et l'hypothèse 2.0.3 implique que

$$\forall z \in \overset{\circ}{\Sigma}, p^{-1}(z) = \{\rho_+(z), \rho_-(z)\}, \text{ avec } \pm \frac{1}{i}\{p, \bar{p}\}(\rho_\pm) > 0, \quad (1.1.7)$$

car  $\operatorname{Im}(g(x) - z)$  a, pour chaque valeur de  $z$ , exactement deux zéros non dégénérés  $x_+(z), x_-(z)$  avec

$$\operatorname{Im}(g(x_\pm) - z) = 0, \mp \operatorname{Im} g'(x_\pm) > 0, \quad (1.1.8)$$

et nous pouvons poser

$$\rho_\pm = (x_\pm, \xi_\pm), \quad \xi_\pm = \operatorname{Re} z - \operatorname{Re} g(x_\pm). \quad (1.1.9)$$

Nous allons restreindre la variable spectrale  $z$  à un domaine simplement connexe  $\Omega \subset \overset{\circ}{\Sigma}$  (donc avec  $\operatorname{dist}(\Omega, \partial\Sigma) > 0$  afin de séparer les points  $x_\pm$  dans l'espace).

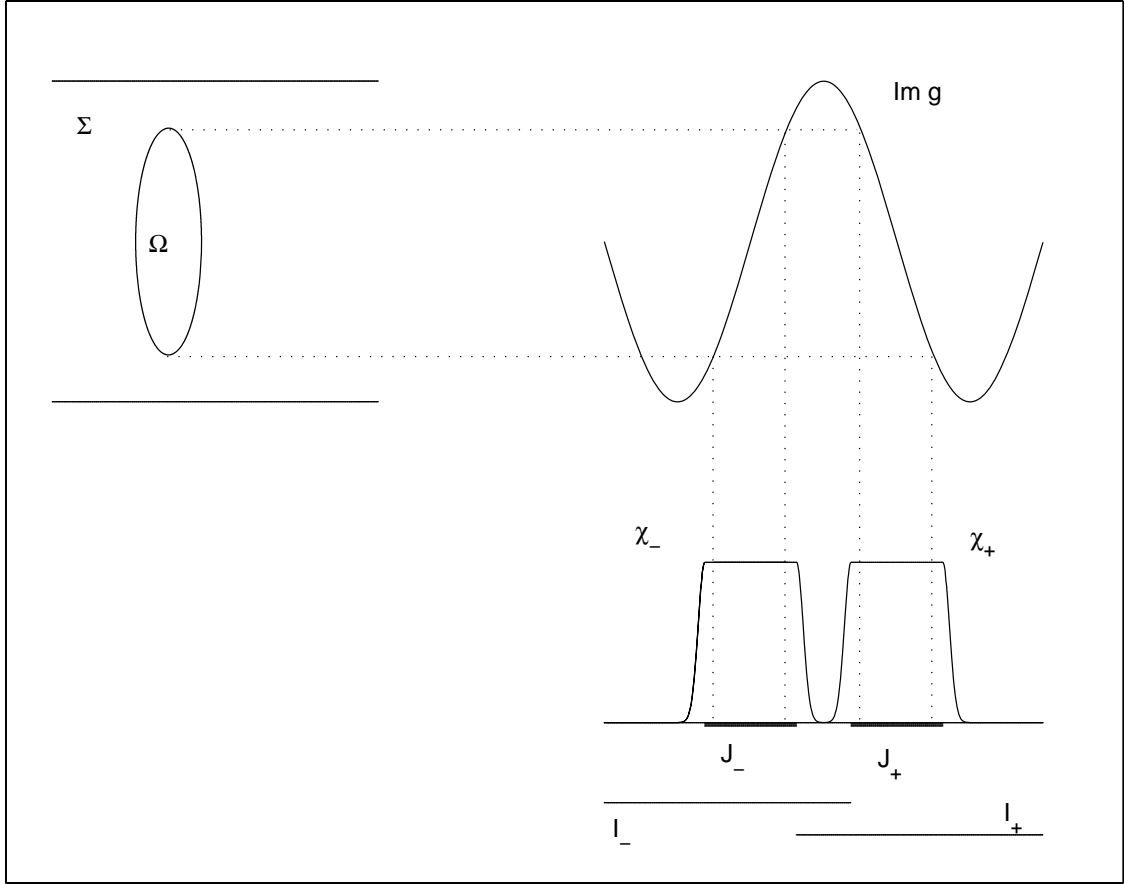
**1.1.2. Solutions locales.** — Nous allons montrer que grâce à l'hypothèse 1.0.1 il est possible de construire des solutions « BKW » locales des équations  $(P - z)u = 0$ ,  $(P^* - \bar{z})v = 0$  dont la norme  $L^2$  est concentrée près de  $x_+$  et près de  $x_-$  respectivement.

Nous cherchons une solution locale de la forme

$$u(x, z; h) = c(z; h)e^{\frac{i}{h}\varphi(x, z)}, \quad c \geq 0. \quad (1.1.10)$$

Le formalisme BKW n'est pas nécessaire dans notre cas, mais utile pour indiquer une généralisation à des opérateurs plus généraux.

Soit  $I_+$  un intervalle ouvert indépendant de  $z$  avec  $x_+(z) \in I_+$ ,  $x_-(z) \notin \overline{I_+}$ ,  $\forall z \in \overline{\Omega}$ .



**Lemme 1.1.2.** — Soit, pour  $x \in I_+$ ,

$$e_+(x) := c_+(z; h)e^{\frac{i}{h}\varphi_+} \in H_{sc}^1(I_+) , \quad (1.1.11)$$

où

$$\varphi_+ = - \int_{x_+}^x (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x} . \quad (1.1.12)$$

Alors  $e_+$  est une solution de  $(P - z)e_+ = 0$  sur  $I_+$ , et il est possible de choisir  $c_+ > 0$  tel que  $\|e_+\|_{L^2(I_+)} = 1$ .

*Démonstration.* — La phase  $\varphi_+$  remplit l'équation eikonale :

$$\varphi'(x) + g(x) = p(x, \varphi'(x)) = z , \quad (1.1.13)$$

donc  $(P - z)e_+ = 0$  sur  $I_+$ . En utilisant que  $\varphi(x_+) = 0$ , et avec  $\varphi'(x_+) = \xi_+ \in \mathbb{R}$ , la partie imaginaire de la phase (qui détermine la croissance de

$e_+$ ) est fixée par sa deuxième dérivée :

$$\operatorname{Im} \varphi'' = -\operatorname{Im} \left( \frac{p_x}{p_\xi} \right) = -\frac{1}{|p_\xi|^2} \operatorname{Im} (p_x \bar{p}_\xi) = \frac{1}{|p_\xi|^2} \frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}, \quad (1.1.14)$$

en dérivant l'équation eikonale pour la première égalité.

Donc la partie imaginaire de  $\varphi_+$  décroît (localement de manière quadratique) en s'éloignant de  $x_+$  et il est possible de choisir

$$c_+(z; h) \sim h^{-\frac{1}{4}} (c_+^0(z) + hc_+^1(z) + \dots) > 0 \quad (1.1.15)$$

tel que  $\|e_+\|_{L^2(I_+)} = 1$ .

En effet, la méthode de la phase stationnaire implique que

$$c_+^0 = \left( \frac{\operatorname{Im} \varphi_+'(x_+(z))}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (1.1.16)$$

□

Remarquons que la construction s'applique aussi si  $g$  est uniquement  $C^1$ , grâce au fait que nous avons un opérateur différentiel d'ordre 1, voir [38] pour des situations générales où on peut travailler avec peu de régularité.

**Lemme 1.1.3.** — *Soit, pour  $x \in I_-$ ,*

$$e_-(x) := c_-(z; h) e^{\frac{i}{h} \varphi_-} \in H_{sc}^1(I_+), \quad (1.1.17)$$

où

$$\varphi_- = - \int_{x_-}^x \overline{(g(\tilde{x}) - z)} d\tilde{x}. \quad (1.1.18)$$

Alors  $e_-$  est une solution de  $(P - z)^* e_- = 0$  sur  $I_-$ , et il est possible de choisir  $c_- > 0$  tel que  $\|e_-\|_{L^2(I_-)} = 1$ .

*Démonstration.* —  $\varphi_-$  vérifie l'équation eikonale pour l'adjoint  $hD_x + \overline{(g(x) - z)}$ . Etant donné que  $\frac{1}{i} \{\bar{p}, p\}(\rho_-) = -\frac{1}{i} \{p, \bar{p}\}(\rho_-) > 0$ , la partie imaginaire de la phase est positive sur  $I_-$ , et  $-\operatorname{Im} \varphi_-''$  est donnée par (1.1.14).  $c_-^0$  vérifie l'analogie de (1.1.16). □

Nous avons

$$e_- \in \mathfrak{R}((P - z)|_{C_c^\infty(I_-)})^\perp, \quad (1.1.19)$$

où  $\mathfrak{R}$  et  $\mathfrak{N}$  désignent l'image et le noyau d'un opérateur. Nous allons utiliser ces deux solutions dans le paragraphe suivant pour un problème de Grushin.

## 1.2. Enoncé et résolution du problème de Grushin

**1.2.1. Problème de Grushin.** — La question d'inversibilité de  $P - z$  peut être reformulée grâce à un problème de Grushin associé. Soit

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H_{sc}^1 \times \mathbb{C} \rightarrow L^2 \times \mathbb{C} \quad (1.2.1)$$

un opérateur borné. Le résultat suivant est bien connu :

**Proposition 1.2.1.** — *Supposons que  $\mathcal{P}$  admet un inverse borné*

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}\mathcal{E} = 1_{L^2 \times \mathbb{C}} \text{ et } \mathcal{E}\mathcal{P} = 1_{H_{sc}^1 \times \mathbb{C}}.$$

Alors  $P - z$  admet un inverse ssi  $E_{-+} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est inversible.

*Démonstration.* — Nous avons :

$$R_+E = 0 ; R_+E_+ = 1_{\mathbb{C}},$$

$$ER_- = 0 ; E_-R_- = 1_{\mathbb{C}},$$

$$(P - z)E_+ = -R_-E_{-+} ; E_-(P - z) = -E_{-+}R_+,$$

$$(P - z)E + R_-E_- = 1_{L^2} ; E(P - z) + E_+R_+ = 1_{H_{sc}^1}.$$

Si  $E_{-+}$  est inversible, alors la troisième ligne nous permet d'exprimer  $R_{\pm}$  en fonction de  $P - z$ . En insérant ceci dans la quatrième ligne nous obtenons

$$(P - z)(E - E_+E_{-+}^{-1}E_-) = 1_{L^2}$$

$$(E - E_+E_{-+}^{-1}E_-)(P - z) = 1_{H_{sc}^1}$$

ce qui donne un inverse explicite de  $P - z$ . Inversement pour  $P - z$  inversible la troisième ligne donne  $E_{\pm}$  en fonction de  $E_{-+}$ . En utilisant  $R_+E_+ = 1$  et  $E_-R_- = 1$  nous avons :

$$-(R_+(P - z)^{-1}R_-)E_{-+} = -E_{-+}(R_+(P - z)^{-1}R_-) = 1_{\mathbb{C}}.$$

□

En montrant que  $\mathcal{P}$  est inversible nous aurons donc réduit le problème spectral à déterminer le domaine d'inversibilité de  $E_{-+}$ .

Nous construisons dans les prochains paragraphes un inverse du problème de Grushin de norme  $O(\frac{1}{\sqrt{h}})$  : ceci est relié à une situation de « sous-ellipticité avec perte d'une demi-dérivée », voir [40] et les références qui y sont indiquées.

**1.2.2. Décomposition en problèmes locaux.** — Nous allons décomposer le problème de Grushin en deux problèmes locaux pour lesquels un inverse à droite va être construit.

Soient  $J_+ \subset (b, a + 2\pi)$ ,  $J_- \subset (a, b)$  des intervalles ouverts tels que

$$\overline{\{x_{\pm}(z); z \in \Omega\}} \subset J_{\pm} . \quad (1.2.2)$$

Soit  $\chi_{\pm} \in C_c^{\infty}(I_{\pm})$  avec  $\chi_{\pm} = 1$  sur  $\overline{J_{\pm}}$ , tels que  $\text{supp}(\chi_+) \cap \text{supp}(\chi_-) = \emptyset$ .

Nous fixons  $I_{\pm} = S^1 \setminus \overline{J_{\pm}}$ .

*1.2.2.1. Résolution sur  $I_+$ .* —

**Lemme 1.2.2.** — Pour  $v \in L^2(I_+)$ ,  $v_+ \in \mathbb{C}$  le problème

$$\begin{cases} (P - z)u = v \\ R_+u = v_+ \end{cases} \quad (1.2.3)$$

avec

$$R_+u := \langle u, \chi_+ e_+ \rangle = \int_{I_+} u(x) \chi_+(x) \overline{e_+}(x) dx \quad (1.2.4)$$

admet la solution unique

$$u = Fv + F_+v_+ \in H_{sc}^1(I_+) \quad (1.2.5)$$

et

$$\|F\|_{L^2(I_+) \rightarrow H_{sc}^1(I_+)} \leq \frac{C}{\sqrt{h}}, \quad \|F_+\|_{\mathbb{C} \rightarrow H_{sc}^1(I_+)} = O(1) . \quad (1.2.6)$$

*Démonstration.* — Le problème

$$\begin{cases} (P - z)u = 0 \\ R_+u = v_+ \end{cases} \quad (1.2.7)$$

admet la solution unique

$$u = F_+v_+ := \frac{1}{\langle e_+, \chi_+ e_+ \rangle} v_+ e_+, \quad (1.2.8)$$

tandis que le problème

$$\begin{cases} (P - z)u = v \\ R_+u = 0 \end{cases} \quad (1.2.9)$$

admet la solution unique

$$u = Fv := (1 - F_+R_+)\tilde{F}v, \quad (1.2.10)$$

où  $\tilde{F}$  sera défini par la suite.

En supposant  $x_+ = 0$  et  $z = 0$  pour alléger les notations, la solution générale à  $Pu = v$  s'écrit

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{i}{h} e^{-\frac{i}{h} \int_0^x g(\bar{x}) d\bar{x}} \left( \int_0^x e^{\frac{i}{h} \int_0^y g(\bar{x}) d\bar{x}} v(y) dy + \tilde{v}_+ \right) \\ &= \frac{i}{h} \int_0^x e^{-\frac{i}{h} \int_y^x g(\bar{x}) d\bar{x}} v(y) dy + \hat{v}_+ e_+ \\ &= \tilde{F}v(x) + \hat{v}_+ e_+ . \end{aligned}$$

$\tilde{F}$  admet le noyau intégral

$$k(x, y) = \frac{i}{h} e^{-\frac{i}{h} \int_y^x g(\bar{x}) d\bar{x}} \mathbf{1}_{\{0 \leq y \leq x\}} - \frac{i}{h} e^{-\frac{i}{h} \int_y^x g(\bar{x}) d\bar{x}} \mathbf{1}_{\{x \leq y \leq 0\}}$$

donc, par le lemme de Schur ([20], tome 3, p.74) sa norme  $L^2$  est majorée par

$$\left( \sup_x \int |k(x, y)| dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sup_y \int |k(x, y)| dx \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (1.2.11)$$

Grâce au fait que  $x_+$  est supposé être un zéro non-dégénéré de  $\text{Im } g$ , nous obtenons

$$\frac{1}{C} \leq -\frac{\text{Im } g(x)}{x} \leq C ,$$

ce qui implique (il suffit de considérer  $x \geq 0$ )

$$\begin{aligned} |k(x, y)| &= e^{\frac{1}{h} \int_y^x \text{Im } g(\bar{x}) d\bar{x}} \mathbf{1}_{\{0 \leq y \leq x\}} \\ &\leq e^{-\frac{1}{Ch} \int_y^x \bar{x} d\bar{x}} \mathbf{1}_{\{0 \leq y \leq x\}} \leq e^{-\frac{1}{2Ch}(x^2 - y^2)} \mathbf{1}_{\{0 \leq y \leq x\}}, \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^x |k(x, y)| dy &\leq \frac{1}{h} \int_0^x e^{-\frac{1}{2Ch}(x^2 - y^2)} dy \\ &\leq \begin{cases} \frac{1}{h} \int_0^x e^{-\frac{1}{2Ch}x(x-y)} dy \leq \frac{C'}{\sqrt{h}} & \text{pour } x \geq \sqrt{h} , \\ \frac{1}{\sqrt{h}} & \text{pour } x \leq \sqrt{h} . \end{cases} \end{aligned}$$

De manière analogue pour  $x \leq 0$  :

$$\int_x^0 |k(x, y)| dy \leq \frac{1}{h} \int_x^0 e^{-\frac{1}{2Ch}(x^2 - y^2)} dy = \frac{1}{h} \int_0^{|x|} e^{-\frac{1}{2Ch}(x^2 - y^2)} dy , \quad (1.2.13)$$



ce qui donne la même estimation.  
Nous avons donc que

$$\sup_{x \in I_+} \int_0^x |k(x, y)| dy \leq \frac{C}{\sqrt{h}}. \quad (1.2.14)$$

De manière analogue (avec la convention que  $g - z$  est nul en dehors de  $I_+$ ) nous avons pour  $0 \leq y \leq \sqrt{h}$ , avec  $\partial I_+ = \{c, d\}$ ,  $c < d$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{y \leq \sqrt{h}} \int_y^d |k(x, y)| dx &\leq \frac{1}{h} \int_0^d e^{\frac{1}{h} \int_{\sqrt{h}}^x \text{Im } g(\tilde{x}) d\tilde{x}} dx \\ &\leq \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2Ch}(x^2 - (\sqrt{h})^2)} dx \\ &\leq \frac{e^{\frac{1}{2C}}}{h} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2Ch}x^2} dx \\ &\leq \frac{1}{h} e^{\frac{1}{2C}} \sqrt{\frac{C\pi h}{2}} \leq \frac{\tilde{C}}{\sqrt{h}}, \end{aligned}$$

et pour  $y \geq \sqrt{h}$

$$\begin{aligned} \sup_{y \geq \sqrt{h}} \int_y^d |k(x, y)| dx &\leq \sup_{y \geq \sqrt{h}} \frac{1}{h} e^{\frac{1}{2Ch}y^2} \left[ -\frac{2Ch}{y} e^{-\frac{1}{2Ch}yx} \right]_{x=y}^{x=\infty} \\ &\leq \sup_{y \geq \sqrt{h}} \frac{2C}{y} \leq \frac{2C}{\sqrt{h}}. \end{aligned}$$

Pour  $y \leq 0$  on obtient les mêmes estimations.

Donc

$$\|\tilde{F}\|_{L^2(I_+) \rightarrow L^2(I_+)} \leq \frac{C}{\sqrt{h}}$$

ce qui implique, en utilisant l'identité  $P\tilde{F}v = v$ ,

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}\|_{L^2(I_+) \rightarrow H_{sc}^1(I_+)} &= \|\tilde{F}\| + \|hD\tilde{F}\| \\ &\leq \|\tilde{F}\| + \|1 - g(x)\tilde{F}\| \\ &\leq \left(1 + \frac{C}{\sqrt{h}}\right) \leq \frac{\tilde{C}}{\sqrt{h}}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^2(I_+) \rightarrow H_{sc}^1(I_+)} &\leq (1 + \|F_+ R_+\|_{H_{sc}^1(I_+) \rightarrow H_{sc}^1(I_+)}) \|\tilde{F}\|_{L^2(I_+) \rightarrow H_{sc}^1(I_+)} \\ &\leq \frac{\tilde{C}}{\sqrt{h}}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que

$$\|F_+ R_+\|_{H_{sc}^1(I_+) \rightarrow H_{sc}^1(I_+)} \leq \frac{1}{\langle e_+, \chi_+ e_+ \rangle} \|\chi_+ e_+\|_{L^2(I_+)} \|e_+\|_{H_{sc}^1(I_+)}$$

et

$$D_+ := \langle e_+, \chi_+ e_+ \rangle = 1 - |c_+|^2 \int_{I_+} (1 - \chi_+) e^{-\frac{2}{h} \text{Im} \varphi_+(x)} dx = 1 + O(e^{-\frac{1}{Ch}}), \quad (1.2.15)$$

car sur  $\text{supp}(1 - \chi_+)$  l'exposant est strictement négatif, et  $\frac{1}{D_+} = 1 + O(e^{-\frac{C}{h}})$ .  $\square$

1.2.2.2. *Résolution sur  $I_-$ .* — Près de  $x_-$  la situation est analogue pour  $(P^* - \bar{z})$  que près de  $x_+$  pour  $(P - z)$ .

**Lemme 1.2.3.** — *Pour  $v \in L_{comp}^2(I_-)$ , le problème*

$$(P - z)u + R_- u_- = v \quad (1.2.16)$$

où

$$R_- u_- := u_- \chi_- e_- , \quad u_- \in \mathbb{C} ,$$

admet une solution unique  $(u, u_-) \in H_{sc, comp}^1(I_-) \times \mathbb{C}$  :

$$u = Gv, \quad (1.2.17)$$

$$u_- = G_- v, \quad (1.2.18)$$

et, en tant qu'opérateur  $L_{comp}^2(I_-) \rightarrow H_{sc, comp}^1(I_-)$  :

$$\|G\|_{L^2 \rightarrow H_{sc}^1} \leq \frac{C}{\sqrt{h}}, \quad (1.2.19)$$

ainsi que, en tant qu'opérateur  $L_{comp}^2(I_-) \rightarrow \mathbb{C}$  :

$$\|G_-\|_{L^2 \rightarrow \mathbb{C}} = O(1) . \quad (1.2.20)$$

*Démonstration.* — Pour  $x \leq x_-$  nous avons l'unique solution à  $(P - z)u = \tilde{v}$ ,  $\tilde{v} \in L_{comp}^2(I_-)$  qui s'annule près de  $\inf(I_-)$  :

$$u_1(x) = \frac{i}{h} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{i}{h} \int_y^x (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x}} \tilde{v}(y) dy =: \tilde{G}_1 \tilde{v}(x) , \quad (1.2.21)$$

alors que pour  $x \geq x_-$  nous avons l'unique solution qui s'annule près de  $\sup(I_-)$  :

$$u_2(x) = \frac{i}{h} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{i}{h} \int_y^x (g(\tilde{x})-z)d\tilde{x}} \tilde{v}(y) dy =: \tilde{G}_2 \tilde{v}(x) , \quad (1.2.22)$$

les parties réelles des deux exposants étant négatives dans le support de  $\tilde{v}$ .

Afin d'obtenir une solution continue à support compact dans  $I_-$ , il faut imposer que

$$0 = u_1(x_-) - u_2(x_-) = \frac{i}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{h} \int_y^{x_-} (g(\tilde{x})-z)d\tilde{x}} \tilde{v}(y) dy = \frac{i}{h\bar{c}_-(h)} \langle \tilde{v}, e_- \rangle$$

(bien défini car  $\tilde{v} \in L^2_{\text{comp}}(I_-)$ ), ce qui donne, en introduisant

$$u_- = G_- v := \frac{1}{\langle \chi_{-e_-}, e_- \rangle} \langle v, e_- \rangle = \frac{1}{D_-} \langle v, e_- \rangle , \quad (1.2.23)$$

une solution continue

$$\begin{aligned} u &= Gv = \tilde{G}(I - R_- G_-)v , \\ u_- &= G_- v , \end{aligned}$$

où  $\tilde{G}$  est donné par les expressions (1.2.21), (1.2.22). En observant que  $\tilde{G}$  a le noyau intégral

$$k(x, y) = \frac{i}{h} e^{-\frac{i}{h} \int_y^x g(\tilde{x})d\tilde{x}} 1_{\{y \leq x \leq x_-\}} - \frac{i}{h} e^{-\frac{i}{h} \int_y^x g(\tilde{x})d\tilde{x}} 1_{\{x_- \leq x \leq y\}}$$

qui est semblable au noyau intégral de l'adjoint de  $F$  (en remarquant que  $\text{Im } g'(x_+) \sim -\text{Im } g'(x_-)$ ), nous pouvons utiliser les estimations du paragraphe précédent pour trouver que la norme  $L^2$  de  $\tilde{G}$  en tant qu'opérateur agissant sur  $C_c^\infty(I_-)$  vérifie

$$\|\tilde{G}\| \leq \frac{C}{\sqrt{h}} , \quad (1.2.24)$$

ainsi que

$$\|G\| \leq \frac{C}{\sqrt{h}} , \quad \|G\|_{L^2 \rightarrow H_{sc}^1} \leq \frac{C'}{\sqrt{h}} , \quad (1.2.25)$$

ce qui reste valable pour son extension à  $L^2_{\text{comp}}$ . En remarquant que

$$\text{supp } (\tilde{G}v) \subset \text{ch } (\{x_-\} \cup \text{supp } (v)) \quad (1.2.26)$$

où  $\text{ch}$  désigne l'enveloppe convexe, nous avons

$$G : L^2_{\text{comp}}(I_-) \rightarrow H^1_{sc, \text{comp}}(I_-) . \quad (1.2.27)$$

□

**1.2.3. Inverse global.** — Nous allons construire un inverse à droite à l'aide des inverses locaux sur  $I_{\pm}$ .

Nous paramétrisons  $S^1$  en identifiant  $a$  à l'origine de l'axe réel et en choisissant le sens positif de parcours. Nous choisissons une partition de l'unité  $\psi_{\pm} \in C_c^{\infty}(I_{\pm})$ ,  $\psi_+ + \psi_- = 1$ , telle que  $\chi_{\pm} \prec \psi_{\pm}$ , où  $\psi \prec \phi$  signifie

$$\text{supp}(\psi) \cap \text{supp}(1 - \phi) = \emptyset . \quad (1.2.28)$$

Nous commençons par résoudre le problème

$$\begin{cases} (P - z)u = \psi_+ v \\ R_+ u = v_+ \end{cases}$$

sur  $I_+$  :

$$\begin{aligned} u_1 &:= (1 - \chi_-)F\psi_+ v + (1 - \chi_-)F_+ v_+ , \\ R_+ u_1 &= \langle u_1, \chi_+ e_+ \rangle = v_+ , \\ (P - z)u_1 &= \psi_+ v - [P, \chi_-]F\psi_+ v - [P, \chi_-]F_+ v_+ , \end{aligned}$$

(en utilisant  $\chi_+ \prec (1 - \chi_-)$  et  $\psi_+ \prec (1 - \chi_-)$  car  $\chi_- \prec \psi_-$ ).

Avec (1.2.26), nous pouvons « corriger l'erreur » sur  $I_-$  en y résolvant le problème

$$(P - z)u_2 + R_- u_- = \psi_- v + [P, \chi_-]F\psi_+ v + [P, \chi_-]F_+ v_+ .$$

Nous avons la solution

$$\begin{aligned} u_2 &= G(\psi_- v + [P, \chi_-]F\psi_+ v + [P, \chi_-]F_+ v_+) , \\ u_- &= G_-(\psi_- v + [P, \chi_-]F\psi_+ v + [P, \chi_-]F_+ v_+) , \end{aligned}$$

et  $R_+ u_2 = 0$  car  $\text{supp}(u_2) \cap \text{supp}(\chi_+) = \emptyset$ .

**Proposition 1.2.4.** —  $\mathcal{P}$  est inversible d'inverse

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix} ,$$

donné par :

$$\begin{aligned}
E &= G \left( \psi_- + \frac{h}{i} \chi'_- F \psi_+ \right) + (1 - \chi_-) F \psi_+, \quad \|E\|_{L^2 \rightarrow H_{sc}^1} = O\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right), \\
E_+ &= (1 - \chi_-) F_+ + G \frac{h}{i} \chi'_- F_+, \quad \|E_+\| = O(1), \\
E_- &= G_-(\psi_- + \frac{h}{i} \chi'_- F \psi_+), \quad \|E_-\| = O(1), \\
E_{-+} &= G_- \frac{h}{i} \chi'_- F_+ = -\frac{h}{i D_- D_+} \langle \chi'_- e_+, e_- \rangle, \quad \|E_{-+}\| = O(e^{-\frac{1}{c\hbar}}).
\end{aligned}$$

*Démonstration.* — Avec  $\chi'_- \prec \psi_-$  il est clair que  $\mathcal{E}$  est un inverse à droite.

On montre facilement que  $\mathcal{P}$  est un opérateur de Fredholm d'indice 0 et donc  $\mathcal{E}$  est aussi un inverse à gauche.  $\square$

$E_{-+}$  sera composé de deux intégrales dans lesquelles  $\chi'_-$  est non-nulle, et en étant attentifs lors de l'identification des intervalles sur l'axe réel et sur  $S^1$  nous obtenons :

$$\begin{aligned}
E_{-+} &= -\frac{hc_+ \bar{c}_-}{i D_+ D_-} \left( \int_{I_+ \cap I_-} \chi'_- e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_-}^x (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_+}^x (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x}} dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{I_+ \cap (I_- + 2\pi)} \chi'_- e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_-}^{x-2\pi} (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_+}^x (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x}} dx \right) \\
&= \frac{hc_+ \bar{c}_-}{i D_+ D_-} \left( e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_-}^{x_+} (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x}} - e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_+}^{x_-+2\pi} (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x}} \right),
\end{aligned}$$

étant donné que l'intégrale sur  $\chi'_-$  donne  $-1$  sur  $I_+ \cap I_-$  et  $1$  sur  $I_+ \cap (I_- + 2\pi)$ . Le préfacteur est  $O(\sqrt{h})$  car  $c_{\pm} = O(h^{-\frac{1}{4}})$ .

Notons que  $E_{-+}(z)$  est exponentiellement petit dans  $\Sigma$ , mais les zéros de  $E_{-+}$  se situent exactement en  $z \in \sigma(P)$  et sont donnés par une condition de quantification de type Bohr-Sommerfeld :

$$\oint_{x_-}^{x_-+2\pi} (g(x) - z) dx = 2\pi h n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.2.29)$$

équivalente à (1.1.2).

### 1.3. Perturbation

Considérons une perturbation  $\delta Q$ , où  $Q$  est borné dans  $\mathcal{L}(L^2)$ ,  $\|Q\| \leq C$  indépendant de  $h$ , et  $\delta \geq 0$  est un paramètre de perturbation assez petit. Nous commençons par montrer que le problème de Grushin reste bien posé.

Soit

$$\mathcal{P}^\delta = \begin{pmatrix} P + \delta Q & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous écrivons  $\mathcal{P}^\delta \mathcal{E} = 1 + K$ ,

$$K = \begin{pmatrix} \delta QE & \delta QE_+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3.1)$$

Pour

$$\delta \leq \frac{\sqrt{h}}{C} \text{ avec } C \text{ assez grand,} \quad (1.3.2)$$

nous avons  $\|K\| \leq \frac{C'\delta\|Q\|}{\sqrt{h}} < \frac{1}{2}$ . Nous obtenons la série de Neumann

$$\mathcal{E}^\delta = \mathcal{E}(1 + K)^{-1} = \mathcal{E} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^j \quad (1.3.3)$$

avec

$$K^j = \begin{pmatrix} (\delta QE)^j & (\delta QE)^{j-1}(\delta QE_+) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j \geq 1. \quad (1.3.4)$$

Nous avons alors la

**Proposition 1.3.1.** — *Soit  $Q$  uniformément borné en  $h$ , et  $\delta$  vérifiant (1.3.2), alors  $\mathcal{P}^\delta$  admet un inverse*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\delta &= \begin{pmatrix} E^\delta & E_+^\delta \\ E_-^\delta & E_{-+}^\delta \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{E}^0 + \sum_{j \geq 1} (-1)^j \begin{pmatrix} E(\delta QE)^j & (E\delta Q)^j E_+ \\ E_-(\delta QE)^j & E_-(\delta QE)^{j-1}(\delta QE_+) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de norme  $O(\frac{1}{\sqrt{h}})$ .

Nous avons immédiatement le

**Corollaire 1.3.2.** —

$$\mathcal{E}^\delta - \mathcal{E}^0 = \begin{pmatrix} O(\frac{\delta}{h}) & O(\frac{\delta}{\sqrt{h}}) \\ O(\frac{\delta}{\sqrt{h}}) & O(\delta) \end{pmatrix}. \quad (1.3.5)$$

Nous écrivons

$$E_{-+}^\delta := \sum_{j \geq 0} \delta^j E_{-+}^{(j)}, \quad (1.3.6)$$

$$E_{-+}^{(0)} := G_- \frac{\hbar}{i} \chi'_- F_+, \quad E_{-+}^{(j)} := (-1)^j E_- (QE)^{j-1} QE_+, \quad j \geq 1 .$$

Alternativement nous pouvons partir de l'estimation "a priori" pour la solution du problème de Grushin non-perturbé

$$\sqrt{\hbar} \|u\|_{H_{sc}^1} + |u_-| \leq C(\|v\| + \sqrt{\hbar}|v_+|)$$

pour obtenir pour la solution du problème perturbé  $Pu = v + (P^\delta - P)u$  que

$$\sqrt{\hbar} \|u\|_{H_{sc}^1} + |u_-| \leq C(\|v\| + \sqrt{\hbar}|v_+| + \delta \|Q\|_{H^1 \rightarrow L^2} \|u\|_{H_{sc}^1}).$$

#### 1.4. Propriétés analytiques de $E_{-+}$

Nous allons d'abord trouver une fonction poids  $l$  qui nous permettra de construire une fonction holomorphe ayant les mêmes zéros que  $E_{-+}^\delta$ .

Nous partons de l'identité

$$\partial_{\bar{z}}(\mathcal{P}^\delta \mathcal{E}^\delta) = 0$$

(étant donné que  $\mathcal{P}^\delta \mathcal{E}^\delta = 1_{H_{sc}^1 \times \mathbb{C}}$ ) et avons

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} E_{-+}^\delta &= -(\mathcal{E}^\delta (\partial_{\bar{z}} \mathcal{P}^\delta) \mathcal{E}^\delta)_{22} \\ &= -(E_-^\delta (\partial_{\bar{z}} R_-) + (\partial_{\bar{z}} R_+) E_+^\delta) E_{-+}^\delta \\ &= -k^\delta(z) E_{-+}^\delta, \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

car  $\mathcal{P}_{11}^\delta = P - z + \delta Q$  est holomorphe et  $\mathcal{P}_{22} = 0$ .

$E_{-+}^\delta$  n'est donc pas analytique mais en cherchant une solution dans  $\Omega$  à

$$\frac{1}{\hbar} \partial_{\bar{z}} l^\delta(z) = k^\delta(z) \quad (1.4.2)$$

nous obtenons une fonction holomorphe  $e^{\frac{l^\delta(z)}{\hbar}} E_{-+}^\delta$  qui aura les mêmes zéros que  $E_{-+}^\delta$ .

**1.4.1. Propriétés analytiques de  $E_{-+}^{(0)}$ .** — Rappelons que

$$E_{-+}^{(0)} = \frac{hc_+c_-}{iD_-D_+} \left( e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_-}^{x_+} (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x}} - e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_+}^{x_- + 2\pi} (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x}} \right).$$

En choisissant

$$l_0(z) = -i \int_{x_-}^{x_+} (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x} \quad (1.4.3)$$

nous avons

$$e^{\frac{l_0(z)}{\hbar}} E_{-+}^{(0)} = \frac{hc_+c_-}{iD_-D_+} (1 - e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \langle g \rangle - z}),$$

où le dernier facteur est holomorphe en  $z$ .

Soit

$$l^0(z) := l_0(z) - h \ln \frac{\sqrt{\hbar} c_+ c_-}{D_- D_+} = l_0 + O(\hbar)$$

qui est bien défini car  $D_{\pm} = 1 + O(e^{-\frac{1}{\hbar}})$  et  $c_{\pm} > 0$ .

Nous obtenons une fonction holomorphe

$$e^{\frac{l^0(z)}{\hbar}} E_{-+}^{(0)} = \frac{\sqrt{\hbar}}{i} (1 - e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} \langle g \rangle - z})$$

ayant les mêmes zéros que  $E_{-+}^{(0)}$ .

**Lemme 1.4.1.** — *Rel<sub>0</sub>(z) est strictement sous-harmonique et nous avons*

$$\Delta \operatorname{Re} l_0(z) d\operatorname{Re} z \wedge d\operatorname{Im} z = d\xi_- \wedge dx_- - d\xi_+ \wedge dx_+, \quad (1.4.4)$$

où  $d\xi_- \wedge dx_- - d\xi_+ \wedge dx_+$  est la forme symplectique  $d\xi \wedge dx - d\eta \wedge dy$  restreinte à  $\Gamma_{-+}$ .

*Démonstration.* —

$$\operatorname{Re} l_0(z) = \int_{x_-(z)}^{x_+(z)} \operatorname{Im} (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x},$$

donc (avec  $\operatorname{Im} (g(x_{\pm}) - z) = 0$ )

$$\partial_{\bar{z}} \operatorname{Re} l_0(z) = \frac{1}{2i} (x_+ - x_-)$$



et

$$\begin{aligned}
\Delta \operatorname{Re} l_0(z) &= 4\partial_z \partial_{\bar{z}} \operatorname{Re} l_0(z) = \frac{2}{i}(\partial_z x_+ - \partial_z x_-) & (1.4.5) \\
&= -(\partial_{\operatorname{Im} z} x_+ - \partial_{\operatorname{Im} z} x_-) \\
&= \left( \frac{1}{\operatorname{Im} g'(x_-)} - \frac{1}{\operatorname{Im} g'(x_+)} \right) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Ici on utilise (1.1.8) qui entraine  $dx_{\pm} = \frac{1}{\operatorname{Im} g'(x_{\pm})} d\operatorname{Im} z$ .

En utilisant  $\xi_{\pm} = \operatorname{Re}(z - g(x_{\pm}))$  nous obtenons

$$d\xi_{\pm} \wedge dx_{\pm} = \frac{1}{\operatorname{Im} g'(x_{\pm})} (d\operatorname{Re} z \wedge d\operatorname{Im} z) \quad (1.4.6)$$

ce qui implique (1.4.4).  $\square$

Nous avons aussi prouvé que si  $\Gamma$  est un ouvert, alors  $\Gamma_{-+}(\Gamma)$  est symplectique pour la forme symplectique  $d\xi \wedge dx - d\eta \wedge dy$ .

**1.4.2. Propriétés analytiques de  $E_{-+}^{\delta}$ .** — Nous imposons

$$\delta \ll h^{\frac{3}{2}}, \quad (1.4.7)$$

ce qui implique (1.3.2) pour  $h$  assez petit.

L'équation (1.4.1) pour  $\partial_{\bar{z}} E_{-+}^{\delta}$  donne, en insérant la série de Neumann

$$k^{\delta}(z) = E_{-}^{\delta}(\partial_{\bar{z}} R_{-}) + (\partial_{\bar{z}} R_{+})E_{+}^{\delta} \quad (1.4.8)$$

$$= k^0(z) + \sum_{j \geq 1} (-1)^j (E_{-}^0((\delta Q E^0)^j \partial_{\bar{z}} \chi_{-} e_{-}) + \langle (E^0 \delta Q)^j E_{+}^0, \partial_z \chi_{+} e_{+} \rangle),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
|k^{\delta}(z) - k^0(z)| &\leq \sum_{j \geq 1} \left( \frac{C\delta}{\sqrt{h}} \right)^j (\|\partial_{\bar{z}} e_{-}\| + \|\partial_z e_{+}\|) \\
&\leq \frac{C\delta}{\sqrt{h}} O\left(\frac{1}{h}\right) = O\left(\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}}\right).
\end{aligned}$$

Une solution de

$$\frac{1}{h} \partial_{\bar{z}} l^{\delta}(z) = k^{\delta}(z) \quad (1.4.9)$$

dans un voisinage  $\tilde{\Omega} \subset \subset \Sigma$  de  $\Omega$  est donné par  $l^{\delta} = l^0 + (l^{\delta} - l^0)$  avec

$$(l^{\delta} - l^0)(z) = \frac{h}{\pi} \int_{\tilde{\Omega}} \frac{(k^{\delta} - k^0)(z')}{z - z'} \mathcal{L}(dz'), \quad (1.4.10)$$

où  $\mathcal{L}(dz)$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{C}$ . Nous obtenons une fonction holomorphe

$$e^{\frac{l^\delta}{h}} E_{-+}^\delta \quad (1.4.11)$$

avec

$$|l^\delta - l^0| \leq h \|k^\delta - k^0\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \left\| \frac{1}{z} \chi\left(\frac{z}{R}\right) \right\|_{L^1} = O\left(\frac{\delta}{\sqrt{h}}\right), \quad (1.4.12)$$

si  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ ,  $\chi(z) = 1$  près de  $z = 0$  et  $R \gg 1$ .

### 1.5. Analyse de $E_{-+}^\delta$

Nous allons reprendre le développement perturbatif (1.3.6) de la fonction holomorphe (en  $\delta$ )  $e^{\frac{l^\delta}{h}} E_{-+}^\delta$ , et montrer que le terme de premier ordre est rendu holomorphe par la fonction poids du problème non-perturbé.

**Lemme 1.5.1.** — *Si  $\delta > e^{-\frac{\kappa}{h}}$ ,  $\kappa > 0$  assez petit, nous avons*

$$e^{\frac{l^\delta}{h}} E_{-+}^\delta = h^{-\frac{1}{2}} \left( -\delta e^{\frac{l_0}{h}} u(z) + O\left(e^{\frac{l_0}{h}} \frac{\delta^2}{h^{\frac{3}{2}}}\right) \right), \quad (1.5.1)$$

où

$$e^{\frac{l_0}{h}} u(z) = e^{\frac{l_0}{h}} \langle Q(1 - \chi_-) e^{\frac{i}{h}\varphi_+}, \psi_- e^{\frac{i}{h}\varphi_-} \rangle \quad (1.5.2)$$

est holomorphe en  $z$ , et  $\varphi_\pm$  sont comme dans (1.1.12), (1.1.18).

*Démonstration.* — Avec les inégalités de Cauchy pour une fonction holomorphe en  $\delta$  dans un disque de rayon  $\frac{\sqrt{h}}{C}$  centré en 0, nous avons

$$E_{-+}^\delta = E_{-+}^{(0)} + \delta E_{-+}^{(1)} + O\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{h}}\right). \quad (1.5.3)$$

Puisque  $E_{-+}^{(0)} = O\left(e^{-\frac{1}{C^*h}}\right)$ , ce terme s'absorbe dans le terme de reste si on suppose que

$$e^{-\frac{1}{C^*h}} = O\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{h}}\right). \quad (1.5.4)$$

De plus, il existe  $D > 0$  indépendant de  $h$  tel que

$$\begin{aligned}
-e^{\frac{l_0}{h}} E_{-+}^{(1)} &= e^{\frac{l_0}{h}} E_- Q E_+ & (1.5.5) \\
&= e^{\frac{l_0}{h}} \frac{1}{D_+ D_-} \langle (\psi_- + \frac{h}{i} \chi'_- F \psi_+) Q ((1 - \chi_-) + G \frac{h}{i} \chi'_-) e_+, e_- \rangle \\
&= e^{\frac{l_0}{h}} \frac{c_+ \bar{c}_-}{D_+ D_-} \langle Q (1 - \chi_-) e^{\frac{i}{h} \varphi_+}, \psi_- e^{\frac{i}{h} \varphi_-} \rangle + e^{\frac{l_0}{h}} O(e^{-\frac{1}{Dh}}) \\
&= h^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{l_0}{h}} u(z) + e^{\frac{l_0}{h}} O(e^{-\frac{1}{Dh}}).
\end{aligned}$$

Le premier terme est holomorphe, car  $Q$  est indépendant de  $z$ .

Nous supposons

$$e^{-\frac{1}{Dh}} = O\left(\frac{\delta}{\sqrt{h}}\right). \quad (1.5.6)$$

En développant finalement

$$e^{\frac{l_0 - l_0}{h}} = 1 + O\left(\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (1.5.7)$$

nous avons

$$\begin{aligned}
e^{\frac{l_0}{h}} E_{-+}^\delta &= e^{\frac{l_0}{h}} E_{-+}^\delta (1 + O\left(\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}}\right)) & (1.5.8) \\
&= e^{\frac{l_0}{h}} (\delta E_{-+}^{(1)} + O\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{h}}\right)) (1 + O\left(\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}}\right)) \\
&= h^{-\frac{1}{2}} (-\delta u(z) e^{\frac{l_0}{h}} + O(e^{\frac{l_0}{h}} \frac{\delta^2}{h^{\frac{3}{2}}}),
\end{aligned}$$

car  $e^{\frac{l_0 - l_0}{h}} = O(1)$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

### 1.6. Construction de la perturbation du théorème 1.0.3

Soit  $U \subset S^1 \times S^1$  un ouvert. Considérons un opérateur  $Q : L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$  ayant un noyau intégral de la forme

$$k(x, y) = \chi(x, y) e^{\frac{i}{h} \varphi(x, y)} \quad (1.6.1)$$

où  $\chi \in C_c^\infty(U)$  est indépendant de  $z$ ,  $\varphi$  est analytique dans  $U$  et indépendant de  $z$  avec  $\text{Im } \varphi \geq 0$ ; alors, d'après le lemme de Schur,  $Q$  est borné uniformément en  $h$  et nous avons

$$u(z; h) = \iint a(x, y) e^{\frac{i}{h} (\varphi(x, y) - \bar{\varphi}^-(x, z) + \varphi_+(y, z))} dx dy, \quad (1.6.2)$$

où  $a(x, y) = \chi(x, y)\psi_-(x)(1 - \chi_-)(y)$ .

**Proposition 1.6.1.** — Soit  $\gamma \subset \Sigma$  une courbe de la forme

$$\operatorname{Re} z = f(\operatorname{Im} z), \operatorname{Im} z \in [a', b'], \operatorname{Im} g(a) < a' < b' < \operatorname{Im} g(b) \quad (1.6.3)$$

où  $f$  est analytique. Alors il existe une phase  $\varphi$  définie dans un voisinage de  $\Pi_{(x,y)}(\Gamma_{-+}(\gamma)) = \tilde{\gamma}$ , analytique, telle que la phase totale  $\varphi(x, y) - \overline{\varphi_-}(x, z) + \varphi_+(y, z)$  ait un point critique non-dégénéré dans  $\tilde{\gamma}$ , pour  $z \in \gamma$ .

*Démonstration.* — Soit

$$[a', b'] \ni t = \operatorname{Im} z \mapsto \tilde{\gamma}(t) = (x_-(t), x_+(t)) . \quad (1.6.4)$$

C'est une courbe injective à différentielle non-nulle. De plus, la forme de  $\gamma$  nous permet de paramétriser

$$[a', b'] \ni t \mapsto (\xi_-(t), -\xi_+(t)) = (\xi_-(f(t) + it), -\xi_+(f(t) + it)) . \quad (1.6.5)$$

Il s'agit alors de construire une phase  $\varphi$  analytique telle que

$$\nabla\varphi(\tilde{\gamma}(t)) = \begin{pmatrix} \xi_-(t) \\ -\xi_+(t) \end{pmatrix} . \quad (1.6.6)$$

Soit

$$\psi(\tilde{\gamma}(t)) = \psi(\tilde{\gamma}(0)) + \int_0^t \begin{pmatrix} \xi_-(t) \\ -\xi_+(t) \end{pmatrix} \cdot \tilde{\gamma}'(t) dt . \quad (1.6.7)$$

Soit  $\psi$  une extension analytique (à partie imaginaire  $\geq 0$ ). Soit

$$\varphi = \psi + \hat{g} . \quad (1.6.8)$$

Nous voulons construire une fonction analytique  $\hat{g}$  telle que  $\hat{g}|_{\tilde{\gamma}} = 0$  et que

$$\nabla\hat{g}(\tilde{\gamma}(t)) = \left( \begin{pmatrix} \xi_-(t) \\ -\xi_+(t) \end{pmatrix} - \nabla\psi(\tilde{\gamma}(t)) \right) \cdot n , \quad (1.6.9)$$

où  $n$  désigne un choix de vecteur unitaire normal à  $\tilde{\gamma}$ .

Pour ceci, nous nous plaçons dans des coordonnées géodésiques (analytiques)

$$\operatorname{vois}(\tilde{\gamma}) \ni (x, y) \rightarrow (x_1, x_2) . \quad (1.6.10)$$

Pour  $s$  une paramétrisation par longueur d'arc de  $\tilde{\gamma}$  et  $\Pi_{\tilde{\gamma}}$  la projection orthogonale sur  $\tilde{\gamma}$ , les coordonnées géodésiques sont données par :

$$x_1 = s(\Pi_{\tilde{\gamma}}(x, y)), \quad |x_2| = \operatorname{dist}((x, y), \tilde{\gamma}) \quad (1.6.11)$$

et le signe de  $x_2$  est déterminé par la condition  $\frac{\partial x_2}{\partial n} = 1$ .

Dans ces coordonnées, nous cherchons alors  $\hat{g}$  réel (ou à partie imaginaire positive), analytique avec  $\hat{g}(x_1, 0) = 0$  et

$$\nabla \hat{g}(x_1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu(x_1) \end{pmatrix}, \quad (1.6.12)$$

où  $\nu(x_1)$  est déterminé en exprimant (1.6.9) en coordonnées géodésiques. Par exemple

$$\hat{g}(x_1, x_2) = \nu(x_1)x_2 \quad (1.6.13)$$

et on peut rajouter des termes d'ordre supérieur quelconque en  $x_2$ , notamment  $i(x_2)^2$ . En revenant dans les coordonnées standard nous obtenons alors une phase analytique avec les propriétés voulues.  $\square$

De manière générale, pour que la phase totale ait un point critique, la variété lagrangienne associée à  $\varphi$

$$C_\varphi := \{(x, \varphi'_x; y, -\varphi'_y)\} \quad (1.6.14)$$

doit intersecter  $\Gamma_{-+}$ . Or, d'après (1.4.4), celle-ci est symplectique, donc si leur intersection est une variété, elle sera au maximum unidimensionnelle, ce qui est le cas du lemme précédent.

## 1.7. Perturbation par une somme de noyaux oscillants

Dans cette section on se place dans le cadre du théorème 1.0.6. L'idée est de considérer une somme de noyaux oscillants dont les lagrangiennes se rapprochent « suffisamment souvent » de  $\Gamma_{-+}$  :

**Hypothèse 1.7.1.** — *Soit*

$$Q := \sum_{j=1}^N Q_j : L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1) \quad (1.7.1)$$

avec

$$k_{Q_j}(x, y) = \alpha \chi(x - x_j) \chi(y - y_j) e^{\frac{i}{h} \varphi_j(x, y)}$$

le noyau intégral de  $Q_j$ , où  $\chi \in C_c^\infty((-\pi, \pi))$ ,  $\chi = 1$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , est indépendant de  $h$ . La phase est de la forme

$$\varphi_j(x, y) = \xi_j(x - x_j) + \frac{i}{2}(x - x_j)^2 - \eta_j(y - y_j) + \frac{i}{2}(y - y_j)^2,$$

avec  $(x_j, \xi_j) \neq (x_k, \xi_k)$ ,  $(y_j, \eta_j) \neq (y_k, \eta_k)$ ,  $\forall j \neq k$ , et  $\alpha$  est tel que  $\|Q_j\| = 1$  (donc  $\alpha \sim (\pi h)^{-\frac{1}{2}}$ ). Ici  $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ,

$(x_j, \xi_j), (y_j, \eta_j) \in \mathbb{R}^2$  dépendent de  $\epsilon$  mais pas de  $h$ , alors que  $\chi, \alpha$  ne dépendent pas de  $\epsilon$ .

**Lemme 1.7.2.** — Il existe  $q$  indépendant de  $\epsilon$  tel que  $\|Q\| \leq q$  pour  $h$  assez petit en fonction de  $\epsilon$ .

**Preuve :**

Nous omettons les troncatures en sous-entendant que nous intégrons uniquement sur leur support.

Considérons le noyau intégral de  $Q_j^* Q_k$  sans les troncatures sur  $\mathbb{R}$  (l'erreur commise est  $O(e^{-\frac{1}{\sigma h}})$ ) :

$$\begin{aligned} & \int \bar{k}_{Q_j}(x', x) k_{Q_k}(x', y) dx' \\ &= |\alpha| e^{\frac{i}{h}(\eta_j(x-y_j) + \frac{i}{2}(x-y_j)^2)} e^{\frac{i}{h}(-\eta_k(y-y_k) + \frac{i}{2}(y-y_k)^2)} e^{\frac{i}{h}(\xi_k + \xi_j) \frac{x_j - x_k}{2}} e^{-\frac{1}{4h}|\rho_j - \rho_k|^2} . \end{aligned}$$

Le lemme de Schur implique donc avec la normalisation que (toujours avec des erreurs  $O(e^{-\frac{1}{\sigma h}})$ )

$$\|Q_j^* Q_k\|^{\frac{1}{2}} \leq C_0 e^{-\frac{1}{4h}|\rho_j - \rho_k|^2} \quad (1.7.2)$$

et de manière analogue

$$\|Q_j Q_k^*\|^{\frac{1}{2}} \leq C_0 e^{-\frac{1}{4h}|\nu_j - \nu_k|^2} . \quad (1.7.3)$$

Avec

$$\sum_k \|Q_j Q_k^*\|^{\frac{1}{2}}, \sum_k \|Q_j^* Q_k\|^{\frac{1}{2}} \leq 1 + N(\epsilon) e^{-\frac{c_j(\epsilon)}{h}}, \quad c_j(\epsilon) > 0 \quad (1.7.4)$$

et

$$q_{h,\epsilon} := \sup_j (1 + N(\epsilon) e^{-\frac{c_j(\epsilon)}{h}}) < q , \quad (1.7.5)$$

$h$  assez petit en fonction de  $\epsilon$ , le lemme de Cotlar-Stein ([12]) implique

$$\|Q\| \leq q . \quad (1.7.6)$$

□

Afin de trouver les estimations sur  $e^{\frac{\delta}{h}} E_{-+}^\delta$  qui nous permettront de terminer la preuve du théorème 1.0.6, il s'agit d'évaluer

$$\begin{aligned} u(z) &= \sum_j u_j(z) \\ &= \sum_j \iint \alpha \chi(x - x_j) \chi(y - y_j) (1 - \chi_-)(y) \psi_-(x) e^{\frac{i}{h} \psi_j(x, y, z)} dx dy \end{aligned} \quad (1.7.7)$$

où

$$\begin{aligned} \psi_j(x, y, z) &:= -\bar{\varphi}_-(x, z) + \varphi_j(x, y) + \varphi_+(y, z) \\ &=: F((x, y), (\rho_-(z), \rho_+(z)), (\rho_j, \nu_j)), \end{aligned} \quad (1.7.8)$$

avec  $\rho_j := (x_j, \xi_j)$ ,  $\nu_j := (y_j, \eta_j) \in T^*(\mathbb{R})$ ;  $F$  est analytique en toutes les variables avec  $\text{Im } F \sim d((x, y), (x_-, x_+))^2 + d((x, y), (x_j, y_j))^2$ , et si  $\text{dist}(\Gamma_{-+}(z), (\rho, \nu)) \geq \omega > 0$ , alors

$$\text{Im } F + |F'_{(x, y)}| \geq c(\omega) > 0, \quad (1.7.9)$$

donc par déformation de contour  $|u_j(z)| = O(e^{-\frac{1}{Ch}})$ .

Il suffit donc de considérer les  $u_j$  avec  $\text{dist}(\Gamma_{-+}(z), (\rho_j, \nu_j))$  assez petit.

**Lemme 1.7.3.** — (*Phase stationnaire*)

Si  $\text{dist}(\Gamma_{-+}(z), (\rho_j, \nu_j))$  est assez petit, alors  $\psi_j(x, y, z)$  a un point critique  $X_c = (x_c, y_c)$  dans un voisinage complexe de  $X_j = (x_j, y_j)$ . Nous avons alors

$$u_j(z) = h \alpha e^{\frac{i}{h} \Phi_j(z)} (a_j(z) + O(h)), \quad (1.7.10)$$

où  $\Phi_j(z) = \psi_j(z, x_c, y_c)$ , et  $e^{\frac{i}{h} \Phi_j(z)}$ ,  $\Phi_j(z) - i l_0(z)$  et  $a_j(z)$  sont holomorphes en  $z$ .

Soit

$$f(\rho_-(z), \rho_+(z), \rho, \nu) := \text{Im } F(X_c, \rho_-(z), \rho_+(z), \rho, \nu), \quad (1.7.11)$$

ce qui est analytique en  $(\rho, \nu)$  et  $(\rho_-(z), \rho_+(z))$ .

Alors

$$f(\rho_-(z), \rho_+(z), \rho, \nu) \sim (\text{dist}(\Gamma_{-+}(z), (\rho, \nu)))^2, \quad (1.7.12)$$

donc  $z \mapsto f(\rho_-(z), \rho_+(z), \rho, \nu)$  admet un minimum non-dégénéré en un point  $Z(\rho, \nu)$ , et  $(\rho, \nu) \mapsto Z(\rho, \nu)$  est une submersion. Ceci implique pour  $\text{Im } \Phi_j(z) = f(\rho_-(z), \rho_+(z), \rho_j, \nu_j)$  que

$$\text{Im } \Phi_j(z) \sim (\text{dist}(\Gamma_{-+}(z), (\rho_j, \nu_j)))^2, \quad (1.7.13)$$

et cette fonction admet un minimum non-dégénéré en  $z_j = Z(\rho_j, \nu_j)$ , et l'amplitude  $a_j$  y est elliptique.

*Démonstration.* — L'holomorphie découle de (cf. (1.7.8), (1.1.11), (1.1.17), (1.4.3)) :

$$\psi_j - il_0 = \int_y^x (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x} + \varphi_j(x, y) \quad (1.7.14)$$

ce qui est manifestement holomorphe en  $z$ , et ceci est préservé dans la méthode de la phase stationnaire.

Afin de simplifier les notations, nous introduisons les nouvelles variables

$$X = (x, y); \alpha = \Gamma_{-+}(z); \beta = (\rho, \nu) . \quad (1.7.15)$$

Nous étendons  $F$  de manière naturelle à  $\alpha \in T^*(S^1) \times T^*(S^1)$  en considérant  $\rho_+(z)$  et  $\rho_-(z)$  comme des variables indépendantes dans (1.7.8), avec  $\varphi_{\pm}$  dépendant de  $\rho_{\pm}$ .

Soient  $\beta_0 = (\rho_j, \nu_j)$  et  $X_{c,0} = (x_j, y_j)$ . Pour  $\alpha = \beta = \beta_0$ ,  $X \rightarrow F(X, \beta_0, \beta_0)$  a un point critique non-dégénéré réel  $X_{c,0}$  :

$$\begin{aligned} F'_X(X_{c,0}, \beta_0, \beta_0) &= 0 , \\ \text{Im } F(X, \beta_0, \beta_0) &\sim (X - X_{c,0})^2 . \end{aligned}$$

D'après le théorème des fonctions implicites, pour  $(\alpha, \beta)$  dans un voisinage de  $(\beta_0, \beta_0)$ ,  $F$  aura un unique point critique non-dégénéré  $X_c(\alpha, \beta)$  (qui dépendra de manière analytique de  $(\alpha, \beta)$ ) ; nous posons  $\alpha = \Gamma_{-+}(z)$ .

Nous avons alors le développement de la phase stationnaire analytique ([29], Théorème 2.8), ce qui donne (1.7.10).

Pour montrer (1.7.13), nous partons de l'inégalité fondamentale ([29], Lemme 7.5)

$$\text{Im } F(X_c(\alpha, \beta), \alpha, \beta) \geq \inf_{X \in \text{vois}_{\mathbb{R}}(X_{c,0})} \text{Im } F(X, \alpha, \beta) + \frac{1}{C} |\text{Im } X_c(\alpha, \beta)|^2 \quad (1.7.16)$$

(voir [29]). Dans notre cas, il existe un  $C > 0$  tel que

$$\text{Im } F(X, \alpha, \beta) \geq \frac{1}{C} ((X - \alpha_X)^2 + (X - \beta_X)^2) \geq \frac{1}{C'} (\alpha_X - \beta_X)^2 \quad (1.7.17)$$

en désignant par  $\alpha_X$  la projection de  $\alpha$  sur la composante  $X$ . De plus,

$$|\text{Im } X_c(\alpha, \beta)| \geq \frac{1}{C} \inf_{X \in \text{vois}_{\mathbb{R}}(X_{c,0})} |F'_X| . \quad (1.7.18)$$



Pour minorer  $|F'_X|$ , soit  $Y(\alpha, \beta)$  l'unique point dans un voisinage réel de  $X_{c,0}$  tel que  $X \rightarrow \text{Im } F(X, \alpha, \beta)$  y atteint son minimum.

C'est un point critique non-dégénéré de  $\text{Im } F$ , et donc

$$|\text{Im } F'_X(X, \alpha, \beta)| \sim |X - Y(\alpha, \beta)| . \quad (1.7.19)$$

Ensuite, pour  $\alpha_X = \beta_X$  nous avons

$$\text{Re } F'_X(\alpha_X, \alpha, \beta) = \alpha_\Xi - \beta_\Xi \quad (1.7.20)$$

et donc

$$\text{Re } F'_X(X, \alpha, \beta) = \alpha_\Xi - \beta_\Xi + O(|\alpha_X - \beta_X|) + O(|X - Y(\alpha, \beta)|) . \quad (1.7.21)$$

Nous avons au total

$$\begin{aligned} |F'_X|^2(X, \alpha, \beta) &\geq |\text{Im } F'_X|^2(X, \alpha, \beta) + \frac{1}{C} |\text{Re } F'_X|^2(X, \alpha, \beta) \\ &\geq \frac{1}{C'} |\alpha_\Xi - \beta_\Xi|^2 - \tilde{C} |\alpha_X - \beta_X|^2 + \frac{1}{C''} |X - Y(\alpha, \beta)|^2 \end{aligned}$$

ce qui implique

$$|\text{Im } X_c(\alpha, \beta)|^2 \geq \frac{1}{C} |\alpha_\Xi - \beta_\Xi|^2 - \tilde{C} |\alpha_X - \beta_X|^2 , \quad (1.7.22)$$

donc d'après (1.7.16), (1.7.17),

$$f(\alpha, \beta) = \text{Im } F(X_c(\alpha, \beta), \alpha, \beta) \geq \frac{1}{C} |\alpha - \beta|^2 \quad (1.7.23)$$

qui est la minoration dans (1.7.13).

D'autre part, puisque  $\text{Im } F(X_c(\alpha, \beta), \alpha, \beta)$  est une fonction positive analytique s'annulant pour  $\alpha = \beta$ , nous avons

$$f(\beta, \alpha) = \text{Im } F(X_c(\alpha, \beta), \alpha, \beta) \leq C |\alpha - \beta|^2 . \quad (1.7.24)$$

□

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \Pi : \text{vois}_{T^*(\mathbb{R}) \times T^*(\mathbb{R})}(\Gamma_{-+}(\Omega)) &\rightarrow \Gamma_{-+}(\Omega) \\ (\rho, \nu) &\mapsto \Gamma_{-+}(Z(\rho, \nu)) \end{aligned} \quad (1.7.25)$$

qui à  $(\rho, \nu)$  associe le(s)  $Z(\rho, \nu) \in \Gamma_{-+}(\Gamma)$  réalisant le minimum de  $z \rightarrow (\text{dist}(\Gamma_{-+}(z), (\rho_j, \nu_j)))^2$ . C'est une submersion idempotente.

Fixons un voisinage  $W \subset T^*(\mathbb{R}) \times T^*(\mathbb{R})$  de  $\Gamma_{-+}(\Omega)$ . Soit

$$J(W, \epsilon) = \{j; (\rho_j, \nu_j) \in W\} . \quad (1.7.26)$$

D'après l'observation précédant le lemme 1.7.3, on a

$$\left| \sum_{j \notin J(W, \epsilon)} u_j \right| = O(e^{-\frac{1}{Ch}}) \quad (1.7.27)$$

pour  $h$  assez petit en fonction de  $\epsilon$ , où  $C$  est indépendante de  $\epsilon$ .

**Hypothèse 1.7.4.** — *Nous supposons que  $\forall j, k \in J(W, \epsilon)$ , et en écrivant  $Z(\rho_j, \nu_j) = z_j$ ,*

$$z_j \neq z_k \text{ si } j \neq k, \quad (1.7.28)$$

(ce qui implique que les minima des  $\text{Im } \Phi_j$  sont distincts).

De manière équivalente,  $\Pi(\rho_j, \nu_j) \neq \Pi(\rho_k, \nu_k)$ , pour  $j, k \in J(W, \epsilon)$ ,  $j \neq k$ .

Remarquons que pour  $\epsilon$  fixé, l'ensemble des  $(\rho_j, \nu_j)$ ,  $j = 1, \dots, N(\epsilon)$ , ne vérifiant pas cette hypothèse est une réunion de sous-variétés analytiques de codimension 2 de  $(T^*(\mathbb{R}) \times T^*(\mathbb{R}))^{N(\epsilon)}$ , ce qui implique que l'hypothèse est vérifiée génériquement.

**Hypothèse 1.7.5.** — *Soit  $\Gamma \subset \subset \overset{\circ}{\Sigma}$  un ouvert simplement connexe de bord  $\gamma = \partial\Gamma \in C^\infty$ . Nous supposons alors que pour  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ,*

$$\Gamma_{-+}(\gamma) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq N(\epsilon)} B \left( ((x_j, \xi_j), (y_j, \eta_j)), \frac{\sqrt{\epsilon}}{C} \right),$$

où  $C$  devra être choisi assez grand.

Avec (1.7.13) et pour tous les  $j$  tels que  $\text{dist}(\Gamma_{-+}(\gamma), (\rho_j, \nu_j)) \leq \frac{\sqrt{\epsilon}}{C}$ , nous avons

$$\text{Im } \Phi_j(z_j) \leq \frac{\epsilon}{4} \quad (1.7.29)$$

et  $\text{dist}(z_j, \gamma) \leq \sqrt{\epsilon}$ , si  $C$  est assez grand.

**Hypothèse 1.7.6.** — *Soit  $\delta = e^{-\frac{\epsilon}{h}}$  avec*

$$\epsilon < \frac{1}{C} \text{ indépendant de } h, \quad (1.7.30)$$

où  $C$  est assez grande pour que les conditions (1.5.4), (1.5.6) soient remplies.

Pour  $h_0$  assez petit (c'est à dire  $h_0(4 \ln(\frac{1}{h_0}) + \ln C') < \epsilon$ ), les conditions (1.3.2) et (1.4.7) sont remplies pour tout  $h \in (0, h_0]$ .

En rassemblant les estimations, nous avons

**Lemme 1.7.7.** — Pour  $h$  assez petit,

$$|e^{\frac{l_0}{h}} E_{-+}^\delta| \leq e^{\frac{\text{Re} l_0}{h}}, z \in \Omega. \quad (1.7.31)$$

Il existe  $C > 0$  et un recouvrement

$$\gamma \subset \bigcup_{j \in J} B(\tilde{z}_j, C\sqrt{\epsilon}), \quad |J| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right) \quad (1.7.32)$$

tel que

$$|e^{\frac{l_0}{h}} E_{-+}^\delta|(\tilde{z}_j) \geq e^{\frac{\text{Re} l_0 - 2\epsilon}{h}} \quad \forall j \in J \quad (1.7.33)$$

pour  $h$  assez petit.

*Démonstration.* — D'après les lemmes (1.5.1), (2.5.29) nous avons

$$\begin{aligned} |e^{\frac{l_0}{h}} E_{-+}^\delta| &\leq \frac{\delta}{\sqrt{h}} |e^{\frac{l_0}{h}}| (|u(z)| + O(\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}})) \\ &\leq e^{\frac{\text{Re} l_0}{h}} (q(\epsilon) \frac{\delta}{\sqrt{h}} + O(\frac{\delta^2}{h^2})) \leq e^{\frac{\text{Re} l_0}{h}}. \end{aligned} \quad (1.7.34)$$

Ensuite soit  $J \subset \{1, \dots, N(\epsilon)\}$  un ensemble tel que :

$$\gamma \subset \bigcup_{j \in J} D(z_j, C\sqrt{\epsilon}), \quad |J| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right), \quad (1.7.35)$$

et

$$\text{Im } \Phi_j(z_j) \leq \frac{\epsilon}{4}, j \in J. \quad (1.7.36)$$

Soit  $\tilde{J}_j$  l'ensemble des  $k$  tels que  $\phi_k(z_j)$  est bien-définie par le lemme 1.7.3, et soit

$$J_j = \{k \in \tilde{J}_j; \text{Im } \Phi_k(z_j) \leq \frac{\epsilon}{4}\}. \quad (1.7.37)$$

Alors dans tout voisinage de  $z_j$ , il existe un  $\tilde{z}_j$  et il existe un  $k_j \in J_j$  tels que

$$\text{Im}(\Phi_k - \Phi_{k_j})(\tilde{z}_j) > 0 \quad \forall k \in J_j, k \neq k_j. \quad (1.7.38)$$

En fait, les  $\text{Im } \Phi_j$  sont analytiques avec des minima distincts, donc sur tout ouvert (non-vide)  $\text{Im}(\Phi_k - \Phi_j)$  ne peut être constant si  $j \neq k$ .

Choisissant  $\tilde{z}_j$  assez près de  $z_j$ , nous avons le recouvrement (1.7.32) et

$$\text{Im } \Phi_{k_j}(\tilde{z}_j) \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \forall j \in J. \quad (1.7.39)$$

Nous avons donc, d'après le lemme 1.7.3,

$$\begin{aligned} |u(\tilde{z}_j)| &\geq |u_{k_j}(\tilde{z}_j)|(1 - e^{-\frac{1}{C(\epsilon)h}}) \\ &\geq \sqrt{h}e^{-\frac{\epsilon}{2h}} \end{aligned}$$

pour  $\epsilon$  assez petit, puis  $h$  assez petit en fonction de  $\epsilon$ .

Au total nous avons alors, d'après le lemme 1.5.1,

$$|e^{\frac{l_0}{h}} E_{-+}^\delta(\tilde{z}_j)| \geq \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}} e^{\frac{\operatorname{Re} l_0}{h} - \frac{3\epsilon}{2h}} (1 - e^{-\frac{\epsilon}{2h} - \frac{h(4 \ln h + 2 \ln C)}{2h}}) > e^{\frac{\operatorname{Re} l_0}{h} - \frac{2\epsilon}{h}} \quad (1.7.40)$$

pour  $h$  assez petit ce qui termine la preuve.  $\square$

### 1.8. Zéros de $E_{-+}^\delta$ et fin de la preuve du théorème 1.0.6

Cette section est une adaptation de la théorie classique des fonctions entières (voir [36], [24]).

Soit  $f$  une fonction holomorphe dans une domaine  $\Omega \subset \subset \mathbb{C}$  et  $\Gamma$  un domaine de bord  $\gamma = \partial\Gamma \in C^\infty$ . Si  $\gamma$  ne rencontre pas de zéros de  $f$ , alors le nombre de zéros de  $f$  dans  $\Gamma$  est donné par

$$N(\Gamma, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} dz . \quad (1.8.1)$$

**Proposition 1.8.1.** — *Soient  $\Gamma$ ,  $\gamma$  et  $\Omega$  comme ci-dessus.*

*Soit*

$$\phi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) , \quad (1.8.2)$$

*soit  $f$  une fonction holomorphe dans  $\Omega$  avec*

$$|f(z; h)| \leq e^{\frac{\phi(z)}{h}} , \quad \forall z \in \Omega , \quad (1.8.3)$$

*et nous supposons qu'il existe  $z_j \in \Omega$ ,  $0 < r_j, \epsilon_j \ll 1$ ,  $j = 1, \dots, N$  tels que*

$$B(z_j, 3r_j) \subset \Omega \text{ et } \gamma \subset \bigcup_j B(z_j, r_j) \quad (1.8.4)$$

*avec*

$$|f(z_j; h)| > e^{\frac{1}{h}(\phi(z_j) - \epsilon_j)} . \quad (1.8.5)$$

*Alors nous avons*

$$N(\Gamma, f) = \frac{1}{2\pi h} \int_\Gamma \Delta \phi \mathcal{L}(dz) + \sum_j O\left(\frac{r_j^2 + \epsilon_j}{h}\right) . \quad (1.8.6)$$

*Démonstration.* — Si  $f(z; h)$  a des zéros sur  $\gamma$ , on peut toujours perturber  $f$  arbitrairement peu (et essentiellement sans changer (1.8.3), (1.8.5)) pour envoyer ces zéros vers l'intérieur de  $\Gamma$ , ou vers l'extérieur. Il suffit alors de montrer (1.8.6) dans le cas où  $f$  n'a pas de zéros sur  $\gamma$ .

Nous décomposons  $\gamma$  en des courbes disjointes  $\gamma_j$  avec  $\gamma_j \subset B(z_j, r_j)$  et travaillons pour chaque  $j$  avec  $z \in B(z_j, 3r_j)$ .

Soit

$$i\varphi_j(z) := \phi(z_j) + 2\partial_z\phi(z_j)(z - z_j) \quad (1.8.7)$$

qui est manifestement holomorphe en  $z$ .

Alors

$$\phi(z) = \operatorname{Re} i\varphi_j(z) + R_j(z) \quad (1.8.8)$$

avec  $R_j(z) = O(|z - z_j|^2)$ .

De plus

$$\varphi_j'(z) = \partial_z\varphi_j(z) = \frac{2}{i}\partial_z\phi(z_j) = \frac{2}{i}\partial_z\phi(z) + O(r_j) . \quad (1.8.9)$$

Soit ensuite

$$v_j(z; h) := f(z; h)e^{-\frac{i}{h}\varphi_j(z)} \quad (1.8.10)$$

qui est manifestement holomorphe. Les hypothèses du théorème deviennent

$$\begin{aligned} |v_j(z; h)| &\leq e^{\frac{Cr_j^2}{h}} , \\ |v_j(z_j; h)| &\geq e^{\frac{-\epsilon_j - Cr_j^2}{h}} . \end{aligned}$$

La formule de Jensen (voir par exemple [36], p.125) nous donne une borne du nombre de zéros dans le disque de rayon  $\frac{R}{2}$  d'une fonction  $g$  holomorphe dans le disque de rayon  $R$  :

$$N(D(0, \frac{R}{2}), g) \ln 2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(Re^{i\theta})| d\theta - \ln |g(0)| . \quad (1.8.11)$$

Ceci nous donne alors (avec  $R = 3r_j$ )

$$N(D(z_j, \frac{3}{2}r_j), v) \leq \frac{\tilde{C}(r_j^2 + \epsilon_j)}{h} . \quad (1.8.12)$$

Nous effectuons un changement de coordonnées holomorphe (en omettant les indices)

$$w := \frac{z - z_j}{r_j} , \quad (1.8.13)$$

et soit  $\tilde{v}(w) = v(z)$ . Nous décomposons  $\tilde{v}$  dans  $D(0, \frac{3}{2})$  :

$$\tilde{v}(w) = g(w) \prod_{1 \leq k \leq N} (w - w_k) , \quad (1.8.14)$$

où  $w_k$  sont les zéros de  $\tilde{v}$  dans  $D(0, \frac{3}{2})$  et  $g$  est une fonction holomorphe dans  $D(0, \frac{3}{2})$ .

Nous allons montrer qu'il existe un  $r \in (\frac{4}{3}, \frac{3}{2}]$  tel que, pour  $|w| = r$  nous avons

$$\prod_{k=1}^N |w - w_k| \geq e^{-NC} . \quad (1.8.15)$$

Avec le principe du maximum et (1.8.12), pour  $|w| \leq r$  ceci implique

$$\begin{aligned} |g(w)| &\leq |\tilde{v}(w)| e^{NC} \leq e^{\frac{C(r_j^2 + \epsilon_j)}{h}} , \\ |g(0)| &\geq |\tilde{v}(0)| 2^{-N} \geq e^{\frac{-C(r_j^2 + \epsilon_j)}{h}} . \end{aligned}$$

Pour montrer (1.8.15) (voir par exemple [30], Lemme 8.5), nous avons

$$|w - w_k| \geq ||w| - |w_k|| . \quad (1.8.16)$$

Soit alors, pour  $x, x_k \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) := -\sum_{1 \leq k \leq N} \ln |x - x_k|$ . Avec

$$-\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{3}{2}} \ln |x - x_k| dx \leq -2 \int_0^{\frac{1}{12}} \ln t dt \leq \tilde{C} \quad (1.8.17)$$

nous avons

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{3}{2}} F(x) dx \leq N\tilde{C} \quad (1.8.18)$$

et donc  $\exists x \in (\frac{4}{3}, \frac{3}{2})$  tel que  $F(x) \leq NC$ , ce qui prouve l'affirmation.

Comme  $g$  est holomorphe et non-nulle,  $\ln |g|$  est une fonction harmonique.

De plus,  $\frac{C(r_j^2 + \epsilon_j)}{h} - \ln |g| \geq 0$  donc les inégalités de Harnack nous donnent sur un disque au rayon diminué (on pourra choisir  $r = \frac{5}{4}$ )

$$-\frac{C'(r_j^2 + \epsilon_j)}{h} \leq \ln |g| \leq \frac{C(r_j^2 + \epsilon_j)}{h} . \quad (1.8.19)$$

Comme  $\ln |g|$  est harmonique, on trouve après avoir diminué  $r$  légèrement :

$$\nabla \ln |g|(w) \leq \frac{C(r_j^2 + \epsilon_j)}{h} , |w| \leq 1 . \quad (1.8.20)$$

Ceci implique que (étant donné que  $g$  est holomorphe et non-nulle)

$$\partial_w \ln g(w) = \frac{(\partial_w g)\bar{g}}{|g|^2} = \frac{\partial_w |g|^2}{|g|^2} = 2\partial_w \ln |g| = O\left(\frac{r_j^2 + \epsilon_j}{h}\right). \quad (1.8.21)$$

Avec  $|\gamma_j| = O(r_j)$  nous avons, avec  $\tilde{\gamma}_j$  désignant l'image de  $\gamma_j$  dans le plan des  $w$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f'}{f} dz &= \frac{1}{2\pi h} \int_{\gamma_j} \phi'_j(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{v'_j}{v_j} dz \\ &= \frac{1}{2\pi h} \int_{\gamma_j} \frac{2}{i} \partial_z \phi(z) dz \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_j} \left( \partial_w \ln g(w) + \sum_{1 \leq k \leq N} \partial_w \ln(w - w_k) \right) dw + O\left(\frac{r_j^2}{h}\right). \end{aligned}$$

Pour estimer la contribution des derniers termes, nous remarquons d'abord que nous pouvons prendre la partie réelle étant donné que  $N$  est réel. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_j} \partial_w \ln(w - w_k) dw &= \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\gamma}_j} d\operatorname{Im} \ln(w - w_k) \quad (1.8.22) \\ &= \operatorname{var}_{\mathfrak{S}_{\tilde{\gamma}_j}}(w - w_k). \end{aligned}$$

Etant donné que  $\tilde{\gamma}_j$  est très proche d'une droite, cette variation sera bornée par  $2\pi$  et donc

$$\operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \sum_{1 \leq k \leq N} \int_{\tilde{\gamma}_j} \partial_w \ln(w - w_k) dw = O(N) = O\left(\frac{r_j^2 + \epsilon_j}{h}\right). \quad (1.8.23)$$

Nous avons alors au total, en utilisant aussi (1.8.21) :

$$N(\Gamma, f) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi h} \int_{\gamma} \frac{2}{i} \partial_z \phi(z) dz + \sum_j O\left(\frac{r_j^2 + \epsilon_j}{h}\right). \quad (1.8.24)$$

Nous appliquons le théorème de Stokes au premier terme (avec la convention d'orientation standard  $\frac{1}{2i} d\bar{z} \wedge dz = \mathcal{L}(dz)$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$ ) et obtenons

$$N(\Gamma, f) = \frac{1}{2\pi h} \operatorname{Re} \int_{\Gamma} \Delta \phi \mathcal{L}(dz) + \sum_j O\left(\frac{r_j^2 + \epsilon_j}{h}\right) \quad (1.8.25)$$

ce qui prouve la proposition.  $\square$

*Preuve du théorème 1.0.6.* — Appliquons la proposition à  $f = e^{\frac{i\delta}{h}} E_{-+}^\delta$  pour laquelle le lemme 1.7.7 donne les estimations requises avec  $r_j^2 = C\epsilon$ ,  $\epsilon_j = 2\epsilon$ , et  $N(\epsilon) \sim O(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})$ , et nous utilisons aussi (1.4.4) :

$$\begin{aligned} N(\Gamma, E_{-+}^\delta) &= \frac{1}{2\pi h} \int_{\Gamma} \Delta \operatorname{Re} l_o(z) \mathcal{L}(dz) + \sum_j O\left(\frac{r_j^2 + \epsilon_j}{h}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi h} |\Gamma_{-+}(\Gamma)| + O\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{h}\right). \end{aligned} \quad (1.8.26)$$

□

### 1.9. Preuve du théorème 1.0.3

Nous terminons par prouver le théorème 1.0.3 à l'aide de la proposition 1.6.1 et du lemme 1.7.3.

Nous supposons de nouveau que  $\delta > e^{-\frac{\kappa}{h}}$ ,  $\kappa > 0$  assez petit.

En utilisant le lemme 1.5.1, nous avons :

$$|e^{\frac{i\delta}{h}} E_{-+}^\delta| \geq h^{-\frac{1}{2}} \delta |e^{\frac{i_0}{h}} u(z)| - C |e^{\frac{i_0}{h}}| \frac{\delta^2}{h^2}. \quad (1.9.1)$$

On voit que le lemme 1.7.3 s'applique dans la nouvelle situation et nous obtenons pour un  $C' > 0$  et un  $C > 0$ , et avec  $C_\varphi$  définie dans (1.6.14) :

$$|e^{\frac{i\delta}{h}} E_{-+}^\delta| \geq \delta e^{\frac{-\operatorname{Re} l_0}{h}} \left( \sqrt{h} e^{-C' \frac{\operatorname{dist}(\Gamma_{-+}(z), C_\varphi)^2}{h}} - e^{-\frac{\epsilon}{h} - \frac{2h \ln h - h \ln C}{h}} \right), \quad (1.9.2)$$

ce qui est strictement positif pour

$$\epsilon - C' \operatorname{dist}(\Gamma_{-+}(z), C_\varphi)^2 > h \left( \ln C + 2h \ln \frac{1}{h} \right), \quad (1.9.3)$$

donc dans  $V_\epsilon$ .

□



## CHAPITRE 2

# INSTABILITÉ SPECTRALE SEMICLASSIQUE D'OPÉRATEURS NON-AUTOADJOINTS II

### Introduction

La notion de pseudospectre a été beaucoup étudié récemment (voir [6], [37] et les références qui y sont indiquées), ce qui a permis une meilleure compréhension des propriétés spectrales d'opérateurs non-autoadjoints. Les pseudospectres sont les régions délimitées par les courbes de niveau de la norme de la résolvante, et sont reliés aux valeurs spectrales possibles pour l'opérateur perturbé par une petite perturbation.

Un des opérateurs les plus étudiés dans ce contexte est l'opérateur de Schrödinger à potentiel complexe. En effet, de nombreux travaux sur les résonances ([18], [33], [30] pour n'en citer que quelques uns) traitent les problèmes d'estimation de la norme de la résolvante dans ce cadre. Davies fait en '99 une construction de ses quasimodes et analyse ainsi son pseudospectre ([5]), Boulton étudie l'oscillateur harmonique non-autoadjoint ([3]), et Zworski étudie un conjugué non-autoadjoint de l'oscillateur harmonique intervenant lors de l'étude des résonances en chimie quantique ([41]). Dans ce dernier travail, il constate aussi lors de calculs numériques une migration des valeurs propres vers le bord du pseudospectre, ce qui nous a entre autre motivé pour entreprendre ici une étude perturbative des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger non-autoadjoint. En dynamique des fluides, on est conduit dans un certain cadre à l'opérateur d'Orr-Sommerfeld ([26]) qui, après certaines simplifications, est réduit aussi à un opérateur de Schrödinger à potentiel complexe.

Dans un cadre plus général, Zworski a relié la construction de quasimodes pour des opérateurs  $h$ -pseudodifférentiels avec une condition de commutateur de Hörmander ([40]). Dencker, Sjöstrand et Zworski étudient dans ce cadre le pseudospectre semiclassique ([11]), et mettent

en évidence une région déterminée par des grandeurs classiques où la norme de la résolvante de l'opérateur quantifié correspondant sera  $\geq C_N h^{-N}$ ,  $\forall N$ , respectivement exponentiellement grande dans le cas analytique. Notre approche est fortement basée sur leur travail.

Nous avons, dans le cas d'un opérateur-modèle perturbé par des noyaux oscillants, trouvé une asymptotique de Weyl (bidimensionnelle) pour le nombre de valeurs propres (voir [15]). Ceci a été le point de départ pour « généraliser » ce résultat.

Ici nous allons examiner le comportement spectral d'opérateurs  $h$ -pseudodifférentiels à symbole analytique pair en  $\xi$  (notamment l'opérateur de Schrödinger à potentiel analytique) sous des perturbations multiplicatives « aléatoires », et nous allons trouver qu'avec une probabilité très proche de 1 le nombre de valeurs propres de l'opérateur perturbé dans des domaines à l'intérieur du pseudospectre est donné par une asymptotique de Weyl ; pour ce genre de perturbations il n'y aurait donc pas forcément de migration des valeurs propres vers le bord.

*Remerciements* : Ce travail fait partie de la thèse de l'auteur préparée sous la direction de J. Sjöstrand.

Nous commençons par préciser les hypothèses sur les opérateurs non-autoadjoints que nous considérons.

Soit  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$  (donc  $p \in C^\infty$  et  $p$  ainsi que toutes ses dérivées sont bornés par la fonction d'ordre  $m$ , cf. Définition 2.1.3) indépendant de  $h$ . Nous dénotons par  $P = p^w$  son quantifié de Weyl, que nous considérons dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Toutes les normes non-indexées seront des normes  $L^2$ , respectivement  $\mathcal{L}(L^2)$ .

**Définition 2.0.1.** —

$$\Sigma := \overline{p(T^*(\mathbb{R}))} . \quad (2.0.4)$$

Nous identifions partout  $T^*(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^2$ .

**Définition 2.0.2 (Crochet de Poisson).** — Pour  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , le crochet de Poisson est défini par

$$\{f, g\}(x, \xi) := (f_\xi g_x - f_x g_\xi)(x, \xi) . \quad (2.0.5)$$

Nous prenons la variable spectrale dans un domaine (c'est à dire un ouvert connexe) relativement compact à l'intérieur de  $\Sigma$  :

$$z \in \Omega \subset\subset \overset{\circ}{\Sigma} . \quad (2.0.6)$$

A partir de maintenant nous supposons

**Hypothèse 2.0.3.** —  $\forall z \in \Omega$  nous avons

$$p^{-1}(z) = \{\rho_-^j(z), \rho_+^j(z), j = 1, \dots, n\}$$

$$\text{où } \pm \frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(\rho_{\pm}) = \pm \text{Im}(p_{\xi} \bar{p}_x)(\rho_{\pm}) > 0 . \quad (2.0.7)$$

Nous nous contenterons souvent de traiter le cas  $n = 1$  si le cas général se traite de manière analogue.

Nous introduisons, pour  $\Gamma \subset \Omega$  un ensemble,

$$\Gamma_{-+}(\Gamma) = \{\rho_-^j(z), \rho_+^j(z), j = 1, \dots, n, z \in \Gamma\} \subset (T^*(\mathbb{R}))^{2n} . \quad (2.0.8)$$

Si  $\Gamma$  est un domaine,  $\Gamma_{-+}(\Gamma)$  est symplectique par rapport à la forme symplectique  $\sum_j (d\xi_j \wedge dx_j - d\eta_j \wedge dy_j)$ , et nous dénotons le volume correspondant par  $|\Gamma_{-+}(\Gamma)|$ , qui s'exprime aussi comme

$$|\Gamma_{-+}(\Gamma)| = \sum_j (\text{vol}(\{\rho_-^j(z), z \in \Gamma\}) + \text{vol}(\{\rho_+^j(z), z \in \Gamma\}))$$

$$= \text{vol}(p^{-1}(\Gamma)) . \quad (2.0.9)$$

**Hypothèse 2.0.4.** — Soit  $m$  une fonction d'ordre sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $m \geq 1$ .

Soit  $\tilde{\Omega} \subset\subset \mathbb{C}$  un domaine,  $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ . Soit  $(p-z) \in S(\mathbb{R}^2, m)$  indépendant de  $h$ . Nous supposons que  $(p-z)$  est elliptique à l'infini uniformément  $\forall z \in \tilde{\Omega}$  :

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall z \in \tilde{\Omega}, |p(X) - z| > \frac{1}{C} m(X), \forall X \in \mathbb{R}^2, |X| > C ,$$

et que  $\exists z_0 \in \tilde{\Omega}$  tel que  $p - z_0$  est elliptique :

$$\exists C > 0 \text{ tel que } |p(X) - z_0| > \frac{1}{C} m(X), \forall X \in \mathbb{R}^2 .$$

La condition  $m \geq 1$  garantit que  $(p-z) \in S(\mathbb{R}^2, m) \forall z \in \Omega$ . L'ellipticité à l'infini assure que  $\exists C$  tel que  $|\rho_{\pm}(z)| \leq C, \forall z \in \Omega$ . L'ellipticité à l'infini et l'ellipticité en un point impliquent que  $p^w$  a, pour  $h$  assez petit, un spectre purement discret dans  $\tilde{\Omega}$  (cf. Proposition 2.3.5).

Soit ensuite

$$\Sigma_{\infty} := \{z \in \Sigma : \exists (x_j, \xi_j) \in T^*(\mathbb{R}) \text{ t. q. } p(x_j, \xi_j) \rightarrow z, |(x_j, \xi_j)| \rightarrow \infty\} .$$

Alors nous avons pour  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ ,  $\tilde{\Omega}$  un domaine,

$$\begin{aligned} \exists z_1 \in \tilde{\Omega} \text{ t. q. } (p - z_1) \text{ est elliptique à l'infini} \quad , \quad z \in \tilde{\Omega} \setminus \Sigma_\infty \\ \Rightarrow (p - z) \text{ est elliptique à l'infini.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exists z_1 \text{ t. q. } (p - z_1) \text{ est elliptique à l'infini} \quad , \quad z \in \tilde{\Omega} \setminus \Sigma \\ \Rightarrow (p - z) \text{ est elliptique.} \end{aligned}$$

Pour le résultat final, nous avons besoin d'une hypothèse d'analyticité :

**Hypothèse 2.0.5.** — Soit  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$  indépendant de  $h$  comme dans l'hypothèse 2.0.4. Nous supposons que  $\exists c > 0$  tel que  $p$  est analytique dans un voisinage tubulaire de  $\mathbb{R}^2$

$$S_c = \{X \in \mathbb{C}^2; |Im X| < c\} \quad (2.0.10)$$

et y remplit  $|p(X)| \leq m(Re X)$ .

Remarquons que  $\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(x, -\xi) = -\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(x, \xi)$ , donc si  $p$  est pair en  $\xi$ , on peut prendre  $\rho_\pm^j = (x^j, \pm \xi^j)$ .

**Hypothèse 2.0.6.** — Nous supposons que  $p(x, -\xi) = p(x, \xi)$  et que  $x^j \neq x^k, j \neq k$ .

Il est connu pour  $p = \xi^2 + V(x) \in S(\mathbb{R}^2, m)$  (voir [5], [40], [11]) que les hypothèses 2.0.3, 2.0.4 impliquent que  $\forall z \in \Omega, \forall j$ ,

$$\exists e_+^j = e_+^j(x, z; h) \in \mathcal{S}, \|e_+^j\| = 1, \|(P - z)e_+^j\| = O(h^\infty), \quad (2.0.11)$$

où  $e_+^j$  sera « concentré près de  $\rho_+^j$  », et

$$\exists e_-^j = e_-^j(x, z; h) \in \mathcal{S}, \|e_-^j\| = 1, \|(P^* - \bar{z})e_-^j\| = O(h^\infty), \quad (2.0.12)$$

où  $e_-^j$  sera « concentré près de  $\rho_-^j$  ». Dans la section 2 nous aurons l'occasion de rétablir ce résultat. Remarquons aussi que dans le cadre de l'hypothèse 2.0.5, nous pouvons remplacer  $O(h^\infty)$  par  $O(e^{-\frac{1}{C\hbar}})$  (voir [11]). Ceci implique que dans  $\Omega$ , la norme de la résolvante sera  $\geq C_N h^{-N}, \forall N$  (respectivement  $\geq e^{\frac{1}{C\hbar}}$  pour un  $C > 0$ ) :  $\Omega$  est contenu dans le *pseudospectre semiclassique*.

Finalement, dans le cadre de l'hypothèse 2.0.6, nous avons, en écrivant  $\Gamma f(x) := \bar{f}(x)$ , que

$$\Gamma(p^w - z)\Gamma = \overline{(p(x, -\xi) - z)}^w = \overline{(p(x, \xi) - z)}^w = (p^w - z)^* \quad (2.0.13)$$

donc  $\overline{(p^w - z)^*} \Gamma e_+^j = O(h^\infty)$  (car  $\Gamma^2 = 1$ ) et nous pouvons prendre  $e_+^j = e_-^j$ .

**Exemple 2.0.7 (Opérateur de Schrödinger).** — Examinons ces hypothèses pour l'opérateur de Schrödinger

$$p(x, \xi) = \xi^2 + V(x) \in S(\mathbb{R}^2, m), \quad m(x, \xi) = \xi^2 + m_V(x). \quad (2.0.14)$$

On suppose que  $m_V$  est une fonction d'ordre sur  $\mathbb{R}$  (telle que  $V \in S(\mathbb{R}; m_V)$ ). Alors  $m$  est une fonction d'ordre sur  $\mathbb{R}^2$ . Nous avons  $p(x, -\xi) = p(x, \xi)$ , et

$$\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(x, \xi) = -2\xi \operatorname{Im} V'(x). \quad (2.0.15)$$

Soit, pour  $U \subset \mathbb{C}$  un ensemble,  $U \pm \mathbb{R}_+ = \{w = z \pm r; z \in U, r > 0\}$ ; alors l'hypothèse 2.0.3 devient :

$$\Omega \subset (V(\mathbb{R}) + \mathbb{R}_+) \setminus V(\mathbb{R}); \quad x \in V^{-1}(\Omega - \mathbb{R}_+) \Rightarrow \operatorname{Im} V'(x) \neq 0, \quad (2.0.16)$$

et nous avons  $\rho_{\pm}^j = (x^j, \pm \xi^j)$ ,  $(\xi^j)^2 = \operatorname{Re}(z - V(x^j)) \neq 0$ , donc  $p$  remplit bien l'hypothèse 2.0.6.

L'hypothèse 2.0.4 devient :  
 $m_V \geq 1$ .  $\exists C > 0$  tel que si  $|x| > C$ , alors pour

$$T = \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im} z| \leq -\frac{1}{C'} \operatorname{Re} z\}, \quad (2.0.17)$$

nous avons  $V(x) \notin \tilde{\Omega} + T$  et  $|V(x) - z| \geq \frac{1}{C} m_V(x)$ ,  $\forall z \in \tilde{\Omega}$ .  $\exists z_0 \in \tilde{\Omega}$  tel que  $(V(\mathbb{R}) - z_0) \cap T = \emptyset$  et que  $V - z_0$  est elliptique dans  $S(\mathbb{R}; m_V)$ .

En fait, il suffit de considérer  $z_0 = 0$  en remplaçant  $p$  par  $p - z_0$ . Si  $\operatorname{Re} V(x) \geq 0$ , alors  $|p(x, \xi)| \geq \frac{1}{C} m(x, \xi)$ , car tous les termes sont positifs et  $V$  est elliptique. Si  $\operatorname{Re} V(x) \leq 0$ , alors

$$\begin{aligned} |p(x, \xi)|^2 &\geq \frac{1}{2(C')^2} (|\xi^2|^2 - |\operatorname{Re} V(x)|^2) + |\operatorname{Im} V(x)|^2 \\ &\geq \frac{1}{C_2} |\xi^2|^2 + \frac{1}{C_3} (|\operatorname{Re} V(x)|^2 + |\operatorname{Im} V(x)|^2) \\ &\geq \frac{1}{C_4} m(x, \xi)^2, \end{aligned} \quad (2.0.18)$$

donc  $p - z_0$  est elliptique. L'ellipticité à l'infini se démontre de manière similaire. Ainsi la condition (2.0.17) implique l'hypothèse 2.0.4, et l'implication opposée se montre facilement avec  $p(x, 0) = V(x)$ .

Considérons finalement le cas  $V(x) = cx^2$  où  $\operatorname{Re} c, \operatorname{Im} c > 0$  pour simplifier. Cet « oscillateur harmonique non-autoadjoint » a été étudié en

détail par Davies [5], Boulton [3]. Nous voyons que

$$\Sigma(p) = \{z; \operatorname{Im} z \geq 0, \operatorname{Re} z \geq \frac{\operatorname{Re} c}{\operatorname{Im} c} \operatorname{Im} z\} . \quad (2.0.19)$$

De plus  $\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\} = -4\operatorname{Im} c \xi x$  ne s'annule pas pour  $p(x, \xi)$  à l'intérieur de  $\Sigma$ .  $p$  est elliptique à l'infini uniformément sur tout compact, donc il est possible de choisir un domaine  $\Omega \subset\subset \overset{\circ}{\Sigma}$ , et  $\Omega \subset \tilde{\Omega}$  avec  $\tilde{\Omega} \cap \Sigma^c \neq \emptyset$  tels que les hypothèses 2.0.3 et 2.0.5 soient remplies.

Nous introduisons maintenant les perturbations que nous allons considérer.

Pour les notions probabilistes nous renvoyons à la section 2.5.1. Soit  $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité. Nous introduisons, pour  $M \subset \mathcal{M}$ , la probabilité inférieure de  $M$

$$\underline{P}[M] := \sup_{A \in \mathcal{A}; A \subset M} P[A] \quad (2.0.20)$$

ainsi que la probabilité supérieure de  $M$

$$\overline{P}[M] := \inf_{A \in \mathcal{A}; M \subset A} P[A] , \quad (2.0.21)$$

afin d'éviter les questions de mesurabilité.

Pour  $p \in S(\mathbb{R}^2; m)$  vérifiant les hypothèses 2.0.3, 2.0.5 et 2.0.6, soit  $e_-^j$  comme dans (2.0.12). Nous écrivons, pour  $u \in \mathcal{S}'$ ,  $v \in \mathcal{S}$ ,  $\langle u, v \rangle := \langle u, \bar{v} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}$  (donc si  $u \in L^2$ , nous retrouvons le produit scalaire  $L^2$ ).

**Hypothèse 2.0.8.** — Soit  $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité. Soit  $\sigma(h) > 0$ ,

$$\mathcal{M} \ni \omega \mapsto q_\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad (2.0.22)$$

une application dépendant aussi de  $h > 0$ .

Nous supposons que  $\underline{P}[q_\omega \in L^\infty] = 1$ , et qu'il existe  $M_0, D > 0$  indépendants de  $h$  et de  $\sigma(h)$  tels que

$$\underline{P}[\|q_\omega\|_\infty \leq 1] \geq 1 - Dh^{-M_0} \sigma(h) . \quad (2.0.23)$$

Nous supposons qu'il existe  $\kappa \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall z \in \Omega, \forall j, \forall t > 0$ ,

$$\overline{P}[\|\langle q_\omega, (e_-^j)^2(z) \rangle\| \leq t] \leq \frac{t^2}{\sigma(h)^2 h^\kappa} . \quad (2.0.24)$$

Soit finalement  $\delta = \delta(h)$  un paramètre de perturbation avec

$$e^{-\frac{1}{D_0 h}} < \delta < \frac{1}{C_0} h^{\frac{3}{2}} , \quad (2.0.25)$$

où  $C_0 > 0$  et  $D_0 > 0$  sont assez grands.

Si  $q_\omega \in L^\infty$ ,  $\|q_\omega\|_\infty \leq 1$ , nous définissons

$$Qu(x) := q_\omega(x)u(x), \quad \|Q\| \leq 1. \quad (2.0.26)$$

**Théorème 2.0.9.** — Soit  $p \in S(\mathbb{R}^2; m)$  vérifiant les hypothèses 2.0.3, 2.0.5 et 2.0.6, et soient  $q, \delta$  comme dans l'hypothèse 2.0.8. Alors pour tout domaine  $\Gamma \subset\subset \Omega$ ,  $\partial\Gamma \in C^\infty$ ,  $\exists C > 0$ ,  $\exists D' > 0$  tel que si  $h$  est assez petit, nous avons avec une probabilité inférieure minorée par

$$1 - D' \frac{(\delta)^{\frac{2}{n}}}{(\ln \frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}} \sigma(h)^2 h^{\frac{3}{n} + \kappa + \frac{1}{2}}} - D\sigma(h)h^{-M_0} \quad (2.0.27)$$

que

$$|\#(\text{Spec}(p^w + \delta Q) \cap \Gamma) - \frac{1}{2\pi h} |\Gamma_{-+}(\Gamma)|| \leq C \left(\frac{\ln \frac{1}{\delta}}{h}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.0.28)$$

Ici  $M_0, D$  et  $\kappa$  sont les constantes de l'hypothèse 2.0.8.

**Corollaire 2.0.10.** — Soit  $p \in S(\mathbb{R}^2; m)$  vérifiant les hypothèses 2.0.3, 2.0.5 et 2.0.6, et soit  $\Gamma \subset\subset \Omega$  un domaine à bord  $C^\infty$ . Il existe  $0 < \epsilon_0 \ll 1$  tel que pour tout  $\tilde{\kappa}$ ,  $\exists C > 0$ ,  $\exists \kappa_0 > 0$ ,  $\exists C' > 0$  tel que  $\forall 0 < \epsilon < \epsilon_0$  il existe  $h(\epsilon, \tilde{\kappa}) > 0$  tel que si  $q, \delta = e^{-\frac{\epsilon}{\tilde{\kappa}}}$  sont comme dans l'hypothèse 2.0.8 pour  $\sigma(h) = h^{\kappa_0}$ , alors avec une probabilité inférieure minorée par  $1 - C'h^{\tilde{\kappa}}$  nous avons

$$|\#(\text{Spec}(p^w + \delta Q) \cap \Gamma) - \frac{1}{2\pi h} |\Gamma_{-+}(\Gamma)|| \leq C \frac{\sqrt{\epsilon}}{h}, \quad (2.0.29)$$

pour  $h < h(\epsilon, \tilde{\kappa})$ .

Nous généralisons ensuite ce résultat à une famille de domaines. Soit pour  $C > 0$ ,  $C' > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \{G \in C^\infty(\overline{\Omega}); |G| + |G'| + |G''| \leq C, |G| + |G'| > \frac{1}{C'}, \\ |G(z)| > \frac{1}{C'}, z \in \partial\Omega\}, \end{aligned} \quad (2.0.30)$$

et soit

$$\tilde{\mathcal{F}} := \{\Gamma \subset \Omega; \Gamma = \{G(z) \leq 0\}, G \in \mathcal{F}\}. \quad (2.0.31)$$

**Théorème 2.0.11.** — Soit  $p \in S(\mathbb{R}^2; m)$  vérifiant les hypothèses 2.0.3, 2.0.5 et 2.0.6, et soient  $q, \delta$  comme dans l'hypothèse 2.0.8. Alors il existe  $C > 0, D' > 0$  tels que si  $h > 0$  est assez petit, alors avec une probabilité inférieure minorée par

$$1 - D' \frac{(\delta)^{\frac{2}{n}}}{(\ln \frac{1}{\delta}) \sigma(h)^2 h^{\frac{3}{n} + \kappa + 1}} - D\sigma(h)h^{-M_0} \quad (2.0.32)$$

nous avons (2.0.28) pour tout domaine  $\Gamma \in \tilde{\mathcal{F}}$ .

Le corollaire 2.0.10 s'adapte aussi ici.

Nous examinons ensuite un exemple pour la perturbation.

**Hypothèse 2.0.12.** — Soit  $m'$  une fonction d'ordre sur  $\mathbb{R}^2$  telle que pour un  $\alpha > 0$ ,  $m'(x, \xi) \geq \langle (x, \xi) \rangle^\alpha$ ,  $\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^2$ , . Soit  $\tilde{P} = \tilde{p}^w$ ,  $\tilde{p} \in S(\mathbb{R}^2, m')$  indépendant de  $h$ , un opérateur elliptique autoadjoint,  $\tilde{P} \geq 1$ , qui admet une base orthonormée (dans  $L^2$ ) de fonctions propres  $q_l$  :

$$\tilde{P}q_l = E_l q_l, \quad (2.0.33)$$

où les  $E_l$  forment une suite croissante.

Soit  $N = N(h) = \frac{C}{h}$ ,  $C > 0$  assez grand, et soit

$$q(x) := \sum_{l \leq N} \alpha_l q_l(x), \quad (2.0.34)$$

où les  $\alpha_l$  sont des variables aléatoires complexes indépendantes identiquement distribuées selon une loi normale (centrée en 0) de variance  $\sigma(h)^2 > 0$ .

Soit finalement  $\delta$  un paramètre de perturbation comme dans (2.0.25).

Remarquons que l'oscillateur harmonique  $\tilde{p} = \xi^2 + x^2 + 1$  remplit cette hypothèse pour  $\alpha = 2$ .

Nous vérifions dans la section 2.5.5 que l'hypothèse 2.0.12 implique l'hypothèse 2.0.8, donc les théorèmes 2.0.9 et 2.0.11 sont en particulier valables pour ce type de perturbation.

Dans ce travail, nous commençons par rappeler des résultats sur le calcul  $h$ -pseudodifférentiel. Ensuite nous allons construire les quasimodes avec erreur  $O(h^\infty)$  dans (2.0.11) et (2.0.12) à l'aide d'un théorème de factorisation qui réduira  $p^w$  microlocalement à l'opérateur modèle étudié dans [15]. Ceci nous permettra de poser un problème de Grushin, qui reliera le spectre de  $p^w$  aux zéros d'une fonction. Nous examinons ensuite le problème de Grushin pour l'opérateur perturbé par une petite



perturbation, et montrons qu'il reste bien-posé. Nous obtenons aussi un développement perturbatif de la fonction dont les zéros déterminent le spectre de l'opérateur perturbé.

Il s'agira ensuite de résoudre une équation  $\bar{\partial}$  pour construire une fonction holomorphe en  $z$  ayant les mêmes zéros, pour appliquer un théorème sur les zéros d'une fonction holomorphe bornée par un poids sousharmonique, et l'atteignant presque en certains points, déjà utilisé dans [15]. Ce théorème nous permettra de retrouver le volume symplectique intervenant dans la loi de Weyl.

Finalement nous devons estimer la probabilité de pouvoir appliquer l'analyse précédente à notre perturbation aléatoire, ce qui terminera la preuve du théorème 2.0.9.

## 2.1. Quantification de Weyl, espaces de symboles et de Sobolev « semiclassiques »

Tous les résultats cités ici se retrouvent par exemple dans [12], chap.7.

Les normes sans indice se référeront aux normes  $L^2$  (respectivement  $\mathcal{L}(L^2)$ ), et il sera sous-entendu que  $h \in (0, 1]$ . Nous utilisons la convention

$$\langle u, v \rangle = \int u(x)\bar{v}(x)dx, \quad u, v \in L^2, \quad (2.1.1)$$

pour le produit scalaire  $L^2$ . Nous dénotons par  $C_b^\infty$  les fonctions lisses bornées, ayant toutes les dérivées bornées.

### 2.1.1. Quantification dans $\mathcal{S}$ . —

**Définition 2.1.1.** — La  $h$ -transformation de Fourier est définie, pour  $u \in \mathcal{S}$ , par

$$(\mathcal{F}_h u)(\xi) := \int e^{-\frac{i}{h}\xi x} u(x) dx. \quad (2.1.2)$$

La  $h$ -transformation de Fourier inverse est donnée, pour  $u \in \mathcal{S}$ , par

$$(\mathcal{F}_h^{-1} u)(x) := \frac{1}{2\pi h} \int e^{\frac{i}{h}\xi x} u(\xi) d\xi. \quad (2.1.3)$$

Nous commençons par considérer des symboles dans  $\mathcal{S}$ .

**Définition 2.1.2 (Quantification de Weyl).** — Pour  $p \in \mathcal{S}$ , le ( $h$ -) quantifié de Weyl est défini par

$$p^w u(x) := \frac{1}{2\pi h} \iint e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} p\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi . \quad (2.1.4)$$

C'est une application bien-définie, continue  $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$ ; ceci se voit en considérant le noyau de  $p$  donné par

$$K(x, y) = ((\mathcal{F}_{h,2})^{-1}p) \left( \frac{1}{2}(x+y), x-y \right) \in \mathcal{S} . \quad (2.1.5)$$

où la transformation de Fourier agit uniquement sur la deuxième variable.

Pour  $p \in \mathcal{S}'$  nous pouvons définir  $p^w : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  qui est continu (envoie toute suite convergente dans  $\mathcal{S}$  sur une suite faiblement convergente dans  $\mathcal{S}'$ ).

Remarquons inversement que si  $A$  est un opérateur continu  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ , alors son noyau de distribution  $K \in \mathcal{S}'$  permet d'introduire le symbole

$$a(x, \eta) = \int e^{-\frac{i}{h}y\eta} K\left(x + \frac{1}{2}y, x - \frac{1}{2}y\right) dy \in \mathcal{S}' , \quad (2.1.6)$$

et nous avons  $A = a^w$ .

**2.1.2. Espaces de symboles, quantification, composition, continuité.** — Nous écrivons  $\langle X \rangle := (1 + |X|^2)^{\frac{1}{2}}$ .

**Définition 2.1.3 (Fonction d'ordre et espaces de symboles)**

Nous appelons  $m \in C^0(\mathbb{R}^n, (0, \infty))$  une fonction d'ordre, si  $\exists N > 0$ ,  $\exists C > 0$  tels que

$$m(X) \leq C \langle X - Y \rangle^N m(Y), \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n . \quad (2.1.7)$$

Nous introduisons l'espace de symboles

$$S(\mathbb{R}^n, m) := \{p \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_\alpha \text{ t.q.} \quad (2.1.8) \\ |\partial_X^\alpha p(X)| \leq C_\alpha m(X), X \in \mathbb{R}^n \} .$$

Remarquons que si  $m$  est une fonction d'ordre, alors  $\frac{1}{m}$  est une fonction d'ordre aussi.

$S(\mathbb{R}^2, m)$  est un espace de Fréchet.

**Lemme 2.1.4.** —  $\mathcal{S}$  est dense dans  $S(\mathbb{R}^2, m)$  pour la topologie de  $S(\mathbb{R}^2, m \langle X \rangle^\epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ .

Nous allons montrer qu'il existe un  $\tilde{m} \in S(\mathbb{R}^2, m)$  tel que  $\tilde{m} \sim m$  (ce qui veut dire : il existe  $C > 0$  tel que  $\frac{1}{C}m \leq \tilde{m} \leq Cm$ ). Soit  $B_r(x)$  la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$ . Considérons le régularisé de  $m$  qui, pour  $\chi \in C_c^\infty(B_1(0); [0, \infty))$  avec  $\int_{B_1(0)} \chi = 1$ , est défini par

$$\tilde{m} := \chi * m \in C^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (2.1.9)$$

Alors  $\exists C'_0 > 0$  tel que

$$\tilde{m}(X) \leq \int \chi(X - Y) \langle X - Y \rangle^{N_0} dY C_0 m(X) \leq C'_0 m(X),$$

ainsi que

$$\tilde{m}(X) \geq \int \chi(X - Y) \langle X - Y \rangle^{-N_0} dY C_0^{-1} m(X) \geq (C'_0)^{-1} m(X),$$

donc  $\tilde{m} \sim m$  et  $\tilde{m}$  est une fonction d'ordre aussi.

Ceci implique que  $S(\mathbb{R}^2, \tilde{m}) = S(\mathbb{R}^2, m)$  et nous allons par la suite uniquement considérer des fonctions d'ordre  $m$  avec  $m \in S(\mathbb{R}^2, m)$ .

**Proposition 2.1.5 (Continuité dans  $\mathcal{S}$ ).** — Pour  $h \in (0, 1]$  fixé,  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ ,  $p^w$  est continu  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ .

De plus, pour toute seminorme  $n_k$  sur  $\mathcal{S}$ , il existe des seminormes  $n_j$  sur  $\mathcal{S}$ ,  $\tilde{n}_l$  sur  $S(\mathbb{R}^2, m)$  telles que

$$n_k(p^w u) \leq C_k \tilde{n}_l(p) n_j(u) \quad \forall p \in S(m), u \in \mathcal{S}. \quad (2.1.10)$$

Si  $p(x, \xi, h)$  dépend de  $h$  nous disons que  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$  si  $p(\cdot, h)$  est uniformément borné dans  $S(\mathbb{R}^2, m)$  pour  $h \in (0, 1]$ .

Soit  $S^k(\mathbb{R}^2, m) := h^{-k} S(\mathbb{R}^2, m)$ ,  $S^{-\infty}(\mathbb{R}^2, m) = \bigcap S^k(\mathbb{R}^2, m)$ .

**Définition 2.1.6 (Equivalence asymptotique)**

Pour  $a, a_k \in S(\mathbb{R}^2, m)$ ,  $k \geq 0$  nous écrivons

$$a \sim \sum_{k \geq 0} a_k h^k \quad (2.1.11)$$

pour dire que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad a(x; h) - \sum_{0 \leq k \leq N} a_k(x) h^k \in S^{-(N+1)}(\mathbb{R}^2, m). \quad (2.1.12)$$

**Lemme 2.1.7 (Resommation).** — Si  $a_j \in S(\mathbb{R}^2, m)$ ,  $j \geq 0$ , alors il existe un  $a = a(x; h) \in S(\mathbb{R}^2, m)$  (unique dans  $S(\mathbb{R}^2, m)/S^{-\infty}(\mathbb{R}^2, m)$ ) tel que

$$a \sim \sum_{k \geq 0} a_k h^k . \quad (2.1.13)$$

**Définition 2.1.8 (Symboles classiques).** — Nous appelons symbole classique un symbole dans  $S(\mathbb{R}^2, m)$  tel qu'il existe une suite  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $a_j \in S(\mathbb{R}^2, m)$  indépendant de  $h$ , telle que

$$a \sim \sum_{j \geq 0} h^j a_j \text{ dans } S(\mathbb{R}^2, m) . \quad (2.1.14)$$

Nous appelons  $a_0$  le symbole principal de  $a$ .

Soit  $S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$  l'ensemble des symboles classiques dans  $S(\mathbb{R}^2, m)$ .

**Définition 2.1.9 (Support).** — Pour  $p \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$ ,  $p \sim \sum_{j \geq 0} h^j p_j$  soit

$$\text{Supp}(p) := \overline{\bigcup_j \text{supp}(p_j)} . \quad (2.1.15)$$

Si  $p \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$  et  $\text{Supp}(p)$  est compact nous avons  $p \sim \chi p$  dans  $S(\mathbb{R}^2, m)$ , si  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  est indépendant de  $h$  avec  $\chi = 1$  dans un voisinage de  $\text{Supp}(p)$ .

**Définition 2.1.10 (Composition).** — Il est possible de définir une application bilinéaire

$$\begin{aligned} S(\mathbb{R}^2, m_1) \times S(\mathbb{R}^2, m_2) &\rightarrow S(\mathbb{R}^2, m_1 m_2) \\ (p_1, p_2) &\mapsto p_1 \# p_2 \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

par prolongement continu de l'application (bilinéaire)  $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$

$$(p_1 \# p_2)(x, \xi) := e^{\frac{i\hbar}{2} \sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)} (p_1(x, \xi) p_2(y, \eta)) \Big|_{y=x, \eta=\xi} . \quad (2.1.17)$$

Nous avons l'équivalence asymptotique

$$(p_1 \# p_2)(x, \xi) \sim \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left( \left( \frac{i\hbar}{2} (D_\xi D_y - D_x D_\eta) \right)^k p_1(x, \xi) p_2(y, \eta) \right) \Big|_{y=x, \eta=\xi} . \quad (2.1.18)$$

**Théorème 2.1.11 (Composition).** — Pour  $p_j \in S(\mathbb{R}^2, m_j)$ ,  $p_j^w : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ ,  $j = 1, 2$ , nous avons

$$p_1^w p_2^w = (p_1 \# p_2)^w : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}' . \quad (2.1.19)$$

Un résultat fondamental est le Théorème de Calderón-Vaillancourt de la continuité  $L^2$  :

**Théorème 2.1.12.** — Si  $p \in S(\mathbb{R}^2, 1)$  alors  $p^w$  est borné uniformément par rapport à  $h$   $L^2 \rightarrow L^2$ .

**Définition 2.1.13 (Ellipticité).** —  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$  est elliptique si  $\exists C > 0$  indépendant de  $h$  tel que

$$|p(X)| \geq \frac{1}{C}m(X), \quad \forall X \in \mathbb{R}^2. \quad (2.1.20)$$

**Lemme 2.1.14 (Parametrix).** — Si  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$  est elliptique, alors il existe un  $q \in S(\mathbb{R}^2, \frac{1}{m})$  tel que

$$\begin{aligned} p\#q &= 1 + r_1 \in S(\mathbb{R}^2, 1), r_1 \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^2, 1), \\ q\#p &= 1 + r_2 \in S(\mathbb{R}^2, 1), r_2 \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^2, 1), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} p^w q^w &= 1 + R_1 \in \mathcal{L}(L^2), \|R_1\| = O(h^\infty), \\ q^w p^w &= 1 + R_2 \in \mathcal{L}(L^2), \|R_2\| = O(h^\infty), \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

**Théorème 2.1.15 (Inverse).** — Si  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$  est elliptique, alors il existe un  $h_0 > 0$  tel que pour  $h \in (0, h_0]$  il existe un  $q \in S(\mathbb{R}^2, \frac{1}{m})$  tel que

$$p\#q = q\#p = 1 \text{ dans } S(\mathbb{R}^2, 1). \quad (2.1.22)$$

Ceci implique

$$p^w q^w = q^w p^w = 1_{L^2}. \quad (2.1.23)$$

La preuve de ce résultat important repose sur le lemme de Beals (voir par exemple [12]). Pour énoncer ce lemme, nous devons introduire, pour  $A : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  (et  $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ ),  $B : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ , la notation

$$ad_A B := [A, B] : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'. \quad (2.1.24)$$

**Lemme 2.1.16 (Lemme de Beals).** — Soit  $A_h : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ,  $h \in (0, 1]$ , tel que  $\forall N \in \mathbb{N}$ , pour toute suite  $l_1(x, \xi), \dots, l_N(x, \xi)$  de formes linéaires sur  $\mathbb{R}^2$  nous avons :

$$\|ad_{l_1(x, hD)} \circ \dots \circ ad_{l_N(x, hD)} A_h\|_{L^2 \rightarrow L^2} = O(h^N). \quad (2.1.25)$$

Alors  $\exists a = a(x, \xi; h) \in S(\mathbb{R}^2, 1)$  tel que  $A_h = a^w(x, hD; h)$ .

### 2.1.3. Espaces locaux. —

**Définition 2.1.17.** — Soit  $U$  un ouvert dans  $\mathbb{R}^2$ , et soit  $m$  une fonction d'ordre. Introduisons l'espace « local »

$$S(U, m) = \{p \in C^\infty(U); \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \forall A > 0, \exists C_{\alpha, A} \text{ tel que} \\ |\partial_X^\alpha p|(X) \leq C_{\alpha, A} m(X), \forall X \in U, \text{ dist}(X, U^c) \geq \frac{1}{A}\}. \quad (2.1.26)$$

Nous pouvons définir de manière analogue que dans le paragraphe précédent les espaces  $S^k(U, m)$ , ainsi que l'équivalence asymptotique, les symboles classiques et le support (définition 2.1.9).

Le lemme 2.1.7 reste valable dans  $S(U, m)$ .

De plus, avec (2.1.18), il est possible de définir une composition asymptotique

$$S(U, m_1) \times S(U, m_2) \rightarrow S(U, m_1 m_2) / S^{-\infty}(U, m_1 m_2) .$$

Remarquons qu'elle est associative.

**Définition 2.1.18 (Ellipticité à l'infini).** —  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$  est elliptique à l'infini si  $\exists C > 0$  indépendant de  $h$  tel que

$$|p(X)| \geq \frac{1}{C} m(X) , \quad |X| \geq C. \quad (2.1.27)$$

**Lemme 2.1.19.** — Si  $p \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$  est elliptique à l'infini, alors il existe un  $q \in S_{cl}(\mathbb{R}^2 \setminus p_0^{-1}(0), \frac{1}{m})$  tel que

$$q \# p \sim p \# q \sim 1 \text{ dans } S(\mathbb{R}^2 \setminus p_0^{-1}(0), 1) . \quad (2.1.28)$$

*Démonstration.* — Nous avons, avec  $\frac{1}{p} \in S(\mathbb{R}^2 \setminus p_0^{-1}(0), \frac{1}{m})$ ,

$$p \# \frac{1}{p} = 1 - hr, \quad \frac{1}{p} \# p = 1 - h\tilde{r} \text{ dans } S(\mathbb{R}^2 \setminus p_0^{-1}(0), 1) , \\ r, \tilde{r} \in S(\mathbb{R}^2 \setminus p_0^{-1}(0), 1). \quad (2.1.29)$$

Soit

$$S(\mathbb{R}^2 \setminus p_0^{-1}(0), \frac{1}{m}) \ni q \sim \frac{1}{p} \# \left( \sum_{k \geq 0} h^k r^{\#k} \right) , \quad (2.1.30)$$

et

$$S(\mathbb{R}^2 \setminus p_0^{-1}(0), \frac{1}{m}) \ni \tilde{q} \sim \left( \sum_{k \geq 0} h^k \tilde{r}^{\#k} \right) \# \frac{1}{p} . \quad (2.1.31)$$

Alors  $p\#q \sim 1$ ,  $\tilde{q}\#p \sim 1$  et, par l'associativité de la composition asymptotique, nous avons

$$\tilde{q} \sim \tilde{q}\#(p\#q) \sim (\tilde{q}\#p)\#q \sim q . \quad (2.1.32)$$

□

#### 2.1.4. Espaces de Sobolev « semiclassiques ». —

**Définition 2.1.20 (Espace de Sobolev).** — Soit  $h_m > 0$  tel que  $n^w = (m^w)^{-1}$  existe pour  $h < h_m$  (théorème 2.1.15). Pour  $h < h_m$ , l'espace de Sobolev (de base  $L^2$ , correspondant à  $m$ ) semiclassique est défini par

$$H(m) := (m^w)^{-1}(L^2) \subset \mathcal{S}' , \quad (2.1.33)$$

que nous munissons de la norme

$$\|u\|_m := \|m^w u\| , \quad u \in H(m) . \quad (2.1.34)$$

Ces espaces ont été étudiés en grande généralité par Bony et Chemin ([2]), et des espaces similaires ont été étudiés dans [18]. Nous rappelons dans notre cas quelques propriétés.

**Proposition 2.1.21 (Propriétés de  $H(m)$ ).** —  $(H(m), \|\cdot\|_m)$  est un espace de Banach, et  $\mathcal{S}$  est dense dans  $H(m)$ .

*Démonstration.* — Nous choisirons partout  $h$  assez petit.

$m^w$  est une isométrie surjective :  $H(m) \rightarrow L^2$ , donc  $H(m)$  est un espace de Banach.

Par densité de  $\mathcal{S}$  dans  $L^2$  nous savons que  $\forall u \in L^2$ ,  $\exists u_j \in \mathcal{S}$  tel que  $u_j \rightarrow u$  dans  $L^2$ . Soit alors, pour  $v = (m^w)^{-1}u \in H(m)$ ,  $u \in L^2$ ,  $v_j = (m^w)^{-1}u_j \in \mathcal{S}$ . Nous avons alors que

$$\|v - v_j\|_m = \|u - u_j\| \rightarrow 0, j \rightarrow \infty . \quad (2.1.35)$$

□

Pour des fonctions d'ordre  $\tilde{m} \sim m$ , nous avons, pour  $h < \min\{h_m, h_{\tilde{m}}\}$ , que  $H(m)$  est égal à  $H(\tilde{m})$  à une équivalence de normes près :

$$\forall u \in H(m), \quad \frac{1}{C} \leq \frac{\|u\|_m}{\|u\|_{\tilde{m}}} \leq C , \quad (2.1.36)$$

où  $C$  est indépendant de  $h$ .

Remarquons aussi que  $m \geq 1$  implique que  $H(m) \subset L^2$ .

**Théorème 2.1.22.** — Pour  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ ,  $p^w$  est continu  $H(m) \rightarrow L^2$ .

*Démonstration.* — Observons que  $p\#n \in S(\mathbb{R}^2, 1)$ , donc son quantifié de Weyl est continu  $L^2 \rightarrow L^2$ .  $v \in H(m)$  s'écrit  $v = n^w u$  pour un  $u \in L^2$  donc

$$p^w v = (p\#n)^w u \quad (2.1.37)$$

ce qui prouve le théorème avec la continuité  $L^2$ .  $\square$

De manière analogue, nous avons aussi :

**Théorème 2.1.23.** — Soit  $q$  une fonction d'ordre. Pour  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ ,  $p^w$  est continu  $H(q) \rightarrow H(\frac{q}{m})$ .

**Proposition 2.1.24.** — L'espace dual de  $H(m)$  est  $H(\frac{1}{m})$ .

*Démonstration.* — Montrons d'abord que  $H(\frac{1}{m}) \subset H(m)^*$ .

Pour  $u \in \mathcal{S}$ ,  $w = m^w f \in H(\frac{1}{m})$ ,  $f \in L^2$  nous avons

$$\langle w, u \rangle = \langle f, m^w u \rangle \leq C \|f\| \|u\|_m \quad (2.1.38)$$

donc tout  $w \in H(\frac{1}{m})$  définit une forme linéaire continue (par rapport à la norme  $\|\cdot\|_m$ ) sur  $\mathcal{S} \subset H(m)$ . Par densité, nous pouvons la prolonger à  $H(m)$  entier de manière unique. Avec (2.1.36),  $\|w\|_{\frac{1}{m}} = \|(\frac{1}{m})^w w\|$  est uniformément équivalent à  $\|f\| = \|(m^w)^{-1} w\|$ , et nous avons

$$\|w\|_{H(m)^*} \leq C \|w\|_{\frac{1}{m}} . \quad (2.1.39)$$

Pour montrer l'inclusion inverse soit  $\phi \in H(m)^*$ . Alors pour  $v = (m^w)^{-1} u \in H(m)$

$$\phi(v) = \phi((m^w)^{-1} u) =: \tilde{\phi}(u) \quad (2.1.40)$$

et  $\tilde{\phi}$  est une fonctionnelle linéaire continue sur  $L^2$ . Par le lemme de Riesz il existe un  $f \in L^2$  tel que

$$\tilde{\phi}(u) = \langle u, f \rangle \quad (2.1.41)$$

avec  $\|f\| = \|\phi\|_{H(m)^*}$ , donc

$$\phi(v) = \langle v, m^w f \rangle, \quad m^w f \in H(\frac{1}{m}) . \quad (2.1.42)$$

De plus,

$$\|m^w f\|_{\frac{1}{m}} \leq C \|f\| = C \|\phi\|_{H(m)^*} . \quad (2.1.43)$$

$\square$



**2.1.5. Propriété Fredholm de  $p^w$ .** — Nous dénotons par  $\mathfrak{R}(P)$  et  $\mathfrak{N}(P)$  l'image et le noyau de l'opérateur  $P$ .

**Proposition 2.1.25.** — Si  $p \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$ ,  $p_0$  vérifiant l'hypothèse 2.0.4, alors, pour  $h$  assez petit,  $(p^w - z)$ ,  $z \in \tilde{\Omega}$  est une famille d'opérateurs de Fredholm  $H(m) \rightarrow L^2$  d'indice 0.

*Démonstration.* — Soit  $z_0$  comme dans l'hypothèse 2.0.4 :  $|p_0 - z_0| \geq \frac{1}{C}m$ . Soit  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\chi = 1$  dans un voisinage de  $p^{-1}(\tilde{\Omega})$ . Soit

$$q(z) := \frac{\chi}{p_0 - z_0} + \frac{(1 - \chi)}{p_0 - z} \in S(\mathbb{R}^2, \frac{1}{m}). \quad (2.1.44)$$

Alors

$$\begin{aligned} (p - z)\#q(z) &= \chi \frac{p_0 - z}{p_0 - z_0} + (1 - \chi) + hr_d = 1 - \frac{(z - z_0)}{p_0 - z_0} \chi + hr_d, \\ q(z)\#(p - z) &= \chi \frac{p_0 - z}{p_0 - z_0} + (1 - \chi) + hr_g = 1 - \frac{(z - z_0)}{p_0 - z_0} \chi + hr_g, \end{aligned}$$

où  $r_d, r_g \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, 1)$ . Pour  $h$  assez petit, nous pouvons inverser  $(1 + hr_d^w)$  respectivement  $(1 + hr_g^w)$  en tant qu'opérateur  $L^2 \rightarrow L^2$ , et le lemme de Beals (lemme 2.1.16) nous dit que l'inverse est un opérateur pseudo-différentiel de symbole  $a \in S(\mathbb{R}^2, 1)$ , respectivement  $b \in S(\mathbb{R}^2, 1)$ . Soit alors  $q_d := q\#a$  et  $q_g := b\#q$ . Ceci donne

$$\begin{aligned} (p - z)\#q_d &= 1 - \left( \frac{(z - z_0)}{p_0 - z_0} \chi \right) \#a, \quad (2.1.45) \\ q_g\#(p - z) &= 1 - b\# \left( \frac{(z - z_0)}{p_0 - z_0} \chi \right). \end{aligned}$$

Or

$$\partial^\alpha \left( \left( \frac{(z - z_0)}{p_0 - z_0} \chi \right) \#a \right) \rightarrow 0, |(x, \xi)| \rightarrow \infty, \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \quad (2.1.46)$$

donc son quantifié de Weyl est un opérateur compact  $L^2 \rightarrow L^2$  (voir par exemple [25]).

De plus, étant donné que  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $b\# \left( \frac{(z - z_0)}{p_0 - z_0} \chi \right)$  sera dans  $S(\mathbb{R}^2, \tilde{m})$  pour tout  $\tilde{m}$ , donc (rappelons que  $n^w = (m^w)^{-1}$ )

$$\partial^\alpha (m\#b\# \left( \frac{(z - z_0)}{p_0 - z_0} \chi \right) \#n) \rightarrow 0, |(x, \xi)| \rightarrow \infty, \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \quad (2.1.47)$$

dont le quantifié de Weyl est un opérateur compact  $L^2 \rightarrow L^2$ . Ceci implique que  $b\# \left( \frac{(z-z_0)}{p_0-z_0} \chi \right)$  est compact  $H(m) \rightarrow H(m)$ .

Nous avons donc que  $(p^w - z)q_d^w = 1 + K_1$ ,  $K_1$  compact, et  $q_g^w(p^w - z) = 1 + K_2$ ,  $K_1, K_2$  compacts. Ceci implique que  $(p^w - z)$  est Fredholm.

Pour  $z = z_0$  comme dans l'hypothèse 2.0.4, nous avons aussi que  $|p - z_0| > \frac{1}{2C}m$ , uniformément en  $h$  pour  $h$  assez petit, donc  $(p^w - z_0)$  est inversible (d'inverse borné). Il en découle que  $\text{ind}(p^w - z_0) = 0$ . La continuité en norme de

$$\tilde{\Omega} \ni z \rightarrow p^w - z : H(m) \rightarrow L^2 \quad (2.1.48)$$

donne alors  $\text{ind}(p^w - z) = \text{ind}(p^w - z_0) = 0$  pour tout  $z \in \tilde{\Omega}$ .  $\square$

## 2.2. Factorisation et quasimodes

Soit  $p \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$ ,  $p_0$  avec les hypothèses 2.0.4 et 2.0.3. Nous omettons dans la suite d'écrire l'indice  $j$ .

**2.2.1. Théorème de préparation de Malgrange.** — Nous avons besoin du théorème de factorisation locale de Malgrange pour des fonctions  $C^\infty$  (qui est l'analogue du théorème de Weierstrass pour des fonctions analytiques que nous aurions pu utiliser en travaillant dès à présent dans le cadre de l'hypothèse 2.0.5). Notons que la décomposition ne sera pas unique. Pour les preuves nous renvoyons à [20], tome 1.

**Proposition 2.2.1.** — *Soit  $U$  un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f \in C^\infty(U)$  avec  $f(0,0) = 0$  et  $\partial_\xi f(0,0) \neq 0$ . Alors il existe un ouvert  $V$ ,  $0 \in V \subset U$  tel que dans  $V$  nous avons la factorisation*

$$f(x, \xi) = q(x, \xi)(\xi + g(x)), \quad (2.2.1)$$

où  $g, q$  sont des fonctions  $C^\infty$  avec  $q(0,0) \neq 0$ ,  $g(0) = 0$ .

Ceci permettra déjà la factorisation des symboles principaux.

### **Théorème 2.2.2 (Théorème de préparation de Malgrange)**

*Soient  $f$  et  $U$  comme dans la proposition précédente. Alors il existe un ouvert  $V$ ,  $0 \in V \subset U$ , tel que  $\forall \tilde{f} \in C^\infty(U)$  il existe  $q \in C^\infty(V)$ ,  $a \in C^\infty(\pi_x(V))$  avec*

$$\tilde{f}(x, \xi) = q(x, \xi)f(x, \xi) + a(x), \quad (x, \xi) \in V. \quad (2.2.2)$$

**Proposition 2.2.3.** — Soit  $p \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$ ,  $p_0$  remplissant l'hypothèse 2.0.3. Soit  $z_0 \in \Omega$ , et soit  $z \in \Omega$  dans un voisinage de  $z_0$ . Soient  $U_{\pm}$  des entourages de  $\rho_{\pm}(z_0)$ . Alors il existe un ouvert  $W(z_0)$  contenant  $z_0$ , des ouverts  $V_{\pm} \subset U_{\pm}$  contenant  $\rho_{\pm}(z)$ ,  $z \in W(z_0)$ , et des symboles

$$q_{\pm} \sim \sum_{k \geq 0} q_{\pm, k} h^k \in S_{cl}(V_{\pm}, 1) \quad , \quad g_{\pm} \sim \sum_{k \geq 0} g_{\pm, k} h^k \quad , \quad g_{\pm, k} \in C_b^{\infty}(\pi_x(V_{\pm})) \quad (2.2.3)$$

qui dépendent de manière  $C^{\infty}$  de  $z \in W(z_0)$  tels que

$$p(x, \xi; h) - z \sim q_+(x, \xi, z; h) \# (\xi + g_+(x, z; h)) \text{ dans } S(V_+, m) \quad , \quad (2.2.4)$$

$$p(x, \xi; h) - z \sim (\xi + g_-(x, z; h)) \# q_-(x, \xi, z; h) \text{ dans } S(V_-, m) \quad ,$$

avec  $q_{\pm, 0}(\rho_{\pm}(z), z) \neq 0$ ,  $g_{\pm, 0}(x_{\pm}(z), z) = -\xi_{\pm}(z)$ ,  $z \in W(z_0)$ .

*Démonstration.* — Afin de simplifier les notations, nous omettons les indices  $\pm$ , et nous nous concentrons sur la première partie de (2.2.4).

Nous commençons par décomposer le symbole principal.

Avec  $p_0(\rho(z)) - z = 0$ ,  $\partial_{\xi}(p_0)(\rho(z)) \neq 0$  (hypothèse 2.0.3), nous obtenons dans un entourage  $V \subset U$  de  $\rho(z_0)$  des fonctions  $q_0 \in C^{\infty}(V)$  et  $g_0 \in C^{\infty}(\pi_x(V))$  telles que, dans  $V$

$$(p_0(x, \xi) - z_0) = q_0(x, \xi)(\xi + g_0(x)) \quad (2.2.5)$$

avec  $q_0(x(z_0), \xi(z_0)) \neq 0$ ,  $g_0(x(z_0)) = -\xi(z_0)$ . On peut rajouter  $z$  aux variables et nous avons toujours une dépendance  $C^{\infty}$  de  $z$ . Les équations ci-dessus sont alors valables pour  $z \in W(z_0)$ .

Ensuite nous regroupons par ordre de  $h$  les termes provenant de la formule de composition asymptotique :

$$\begin{aligned} p_N(x, \xi) &= q_0(x, \xi)g_N(x) + q_N(x, \xi)(\xi + g_0(x)) \\ &+ \tilde{G}_N(q_0, \dots, q_{N-1}, g_0, \dots, g_{N-1}, x, \xi, z) . \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Etant donné que  $q_0(x, \xi) \neq 0$ , nous avons une équation de la forme

$$G_N(x, \xi) = \frac{q_N(x, \xi)}{q_0(x, \xi)}(g_0(x) + \xi) + g_N(x) \quad , \quad (2.2.7)$$

où  $G_N$  ne dépend que des  $q_j, g_l$  pour  $j, l < N$  et de  $p_N$ . Il est donc possible de déterminer les  $q_k, g_k$  inductivement, car avec

$$g_0(x(z)) + \xi(z) = 0, \quad \partial_{\xi}(g_0(x) + \xi) = 1, \quad (2.2.8)$$

le théorème de Malgrange nous prouve l'existence d'un ouvert  $V$  contenant  $\rho(z_0)$ , des fonctions  $C^{\infty} \frac{q_N}{q_0}$  (ce qui donne  $q_N$ ) et  $g_N$  dans  $C^{\infty}$  avec

les propriétés voulues. En prolongeant si nécessaire  $q_N$  et  $g_N$  à un ouvert légèrement plus grand, nous pouvons obtenir le même ouvert  $V$  pour chaque  $N$ .

En itérant la procédure pour chaque ordre de  $h$ , nous obtenons les solutions formelles

$$q \sim \sum_{k \geq 0} q_k h^k, \quad q_k \in C^\infty(V) \quad (2.2.9)$$

et

$$g \sim \sum_{k \geq 0} g_k h^k, \quad g_k \in C^\infty(\pi_x(V)). \quad (2.2.10)$$

La même procédure peut être appliquée pour obtenir une factorisation à gauche, ce qui montre la deuxième affirmation.  $\square$

Nous choisissons un représentant de  $g_\pm \in C^\infty$  et prolongeons  $g_\pm$  dans  $C^\infty(\mathbb{R})$  tel que

$$g_\pm(y) = \mp \frac{i}{C_\pm}(y - x_\pm), \quad |y| \geq C, \quad C_\pm > 0, \quad (2.2.11)$$

et obtenons ainsi un représentant global.

Pour  $\chi_\pm \in C_c^\infty(V_\pm)$ , ceci donne

$$\begin{aligned} \chi_+ \# (p - z) &\sim (\chi_+ \# q_+) \# (\xi + g_+), \\ (p - z) \# \chi_- &\sim (\xi + g_-) \# (q_- \# \chi_-), \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

les compositions étant au sens asymptotique dans les espaces locaux.

## 2.2.2. Quasimodes. —

*2.2.2.1. Quasimode pour  $P - z$ .* — Nous construisons d'abord une solution de l'équation

$$(hD_x + g_+(x, z; h))e_+ = 0 \quad (2.2.13)$$

de la forme

$$e_+(x, z; h) := a_+(x, z; h) e^{\frac{i}{h}\varphi_+(x, z)}, \quad \|e_+\| = 1, \quad (2.2.14)$$

avec une phase  $\varphi_+ \in C^\infty$  indépendante de  $h$ ,  $\text{Im } \varphi_+ \geq 0$ , et une amplitude admettant un développement asymptotique en puissances de  $h$  :

$$a_+(x, z; h) \sim \sum_{j \geq 0} a_{+,j}(x, z) h^j \quad \text{dans } C_b^\infty(\mathbb{R}), \quad \forall z \in \Omega. \quad (2.2.15)$$

La phase doit vérifier l'équation eikonale

$$\varphi'_+(x, z) + g_{+,0}(x, z) = 0 . \quad (2.2.16)$$

qui admet une solution unique si nous imposons  $\varphi_+(x_+(z), z) = 0$ . Étant donné que  $\varphi'_+(x_+) = \xi_+$ , c'est le signe du crochet de Poisson qui détermine le signe de la partie imaginaire de la phase près de  $x_+$  :

$$\text{Im } \varphi''_+(x_+, z) = -\text{Im } g'_{+,0}(x_+, z) = \frac{1}{2i|q_{+,0}|^2} \{p_0, \overline{p_0}\}(\rho_+) . \quad (2.2.17)$$

Près de  $\rho_+$ , le crochet est positif, donc la partie imaginaire de la phase est positive; grâce au choix du prolongement de  $g_+$ , ceci restera vrai globalement :

$$\text{Im } \varphi_+(x) \sim \frac{1}{C_+} (x - x_+)^2, \quad |x| \rightarrow \infty . \quad (2.2.18)$$

Ensuite, afin de déterminer l'amplitude, nous regroupons les termes du même ordre de  $h$  et obtenons une série d'équations de transport :

$$a'_{+,0} = 0, \quad -ia'_{+,l} + \sum_{0 \leq j \leq l-1} g_{+,l-j} a_{+,j} = 0, \quad l > 0. \quad (2.2.19)$$

Celles-ci déterminent les dérivées de  $a_{+,k}$  récursivement, qui seront à support compact, donc  $a_+$  sera constant en dehors du support de  $(g_+ - i\text{Im } g_{+,0})$ . Il est ainsi possible de normaliser  $e_+$  dans  $L^2$ , ce qui détermine les constantes  $a_{+,j}(x_+)$  par la méthode de la phase stationnaire.

Remarquons que nous avons aussi

$$e_+(x, z, h) = c(z; h) e^{-\frac{i}{h} \int_{x_+}^x g_+(y, z, h) dy} =: c(z; h) e^{\frac{i}{h} \varphi_{+,h}(y, z, h)}, \quad (2.2.20)$$

mais nous avons préféré rester proche du formalisme BKW.

**Lemme 2.2.4.** — Il existe  $e_+ \in \mathcal{S}$ ,  $\|e_+\| = 1$ , tel que

$$\|(p^w - z)e_+\| = O(h^\infty) . \quad (2.2.21)$$

Pour prouver le lemme, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.2.5.** — Pour toute fonction d'ordre  $m'$  (et  $h < h_{m'}$ ),  $e_+ \in H(m')$  et pour tout  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $\chi = 1$  près de  $\rho_+$ ,

$$\|(1 - \chi)^w e_+\|_{m'} = O(h^\infty) . \quad (2.2.22)$$

*Preuve du lemme 2.2.4.* — Par construction,  $e_+$  est normalisé dans  $L^2$ . Nous avons, avec le lemme 2.2.5,

$$\begin{aligned} (p^w - z)e_+ &= (p^w - z)\chi^w e_+ + O(h^\infty) \\ &= \chi^w (p^w - z)e_+ + [p^w, \chi^w]e_+ + O(h^\infty) . \end{aligned}$$

Le premier terme est  $O(h^\infty)$  avec la factorisation par construction. Pour le terme de commutateur observons que

$$\text{Supp}(p\#\chi - \chi\#p) \subset \text{supp } \chi' , \quad (2.2.23)$$

ce qui est disjoint d'un voisinage de  $\rho_+$ . En appliquant le lemme 2.2.5, nous voyons que ce terme sera aussi  $O(h^\infty)$ .  $\square$

*Preuve du lemme 2.2.5.* — Nous présentons ici une preuve de J. Sjöstrand, et renvoyons à l'appendice B pour une preuve plus élémentaire. Nous avons

$$hD_x + g_+ = (\xi + g_+)^w, \quad \xi + g_+ \in S(\mathbb{R}^2, \langle(\xi, x)\rangle) . \quad (2.2.24)$$

Pour  $h$  assez petit,  $\xi + g_+$  est elliptique en dehors de  $\rho_+$ . Puisque

$$(hD_x + g_+)e_+ = 0, \quad \|e_+\| = 1 , \quad (2.2.25)$$

nous avons

$$(hD_x + \overline{g_+})(hD_x + g_+)e_+ = 0 . \quad (2.2.26)$$

Soit  $\Psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, (0, 1))$ ,  $\Psi = 1$  près de  $\rho_+$ . Soit

$$Q^w = (hD_x + \overline{g_+})(hD_x + g_+) + \Psi^w . \quad (2.2.27)$$

Alors

$$Q(x, \xi) = |\xi + g_{+,0}|^2 + \Psi + O(h) \in S(\mathbb{R}^2, \langle(\xi, x)\rangle^2) \quad (2.2.28)$$

est elliptique,  $h$  assez petit, et (avec le lemme 2.1.16),  $Q^w$  admet, pour  $h$  assez petit, un inverse borné  $R^w$ ,  $R \in S(\mathbb{R}^2, \langle(\xi, x)\rangle^{-2})$ . De plus, d'après (2.2.26),

$$Q^w e_+ = \Psi^w e_+ , \quad (2.2.29)$$

donc pour toute fonction d'ordre  $m'$ ,

$$e_+ = (R\#\Psi)^w e_+ \in H(m') . \quad (2.2.30)$$

Nous choisissons maintenant, pour  $\chi$  comme dans le lemme 2.2.5,  $\Psi \prec \chi$  (ce qui veut dire que  $\text{supp } (\Psi) \cap \text{supp } (1 - \chi) = \emptyset$ ). Alors pour toute fonction d'ordre  $m'$ ,

$$(1 - \chi)\#R\#\Psi = O(h^\infty) \text{ dans } S(\mathbb{R}^2, \frac{1}{m'}) , \quad (2.2.31)$$

et  $\|(1 - \chi)^w e_+\|_{m'} = O(h^\infty)$ .  $\square$

*2.2.2.2. Quasimode pour  $(P - z)^*$ .* — Nous construisons d'abord une solution de l'équation

$$(hD_x + g_-(x, z; h))^* e_- = 0 \quad (2.2.32)$$

de la forme

$$e_-(x, z; h) := a_-(x, z; h) e^{\frac{i}{h}\varphi_-(x, z)}, \|e_-\| = 1, \quad (2.2.33)$$

avec une phase  $\varphi_- \in C^\infty$  indépendante de  $h$ ,  $\text{Im } \varphi_- \geq 0$ , et une amplitude admettant un développement comme dans (2.2.15).

La phase doit remplir l'équation eikonale

$$\varphi'_-(x, z) + \overline{g_{-,0}}(x, z) = 0, \quad (2.2.34)$$

qui admet une solution unique si nous imposons  $\varphi_-(x_-, z) = 0$ . Etant donné que  $\varphi'_-(x_-) = \xi_-$ , nous voyons que c'est le signe du crochet de Poisson qui détermine le signe de la partie imaginaire de la phase près de  $x_-$  :

$$\text{Im } \varphi''_-(x_-, z) = \text{Im } g'_{-,0}(x_-, z) = -\frac{1}{2i|q_{-,0}|^2} \{p_0, \overline{p_0}\}(\rho_-) > 0. \quad (2.2.35)$$

Grâce au choix du prolongement de  $g_-$ , nous avons :

$$\text{Im } \varphi_-(x) \sim \frac{1}{C_-} (x - x_-)^2, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (2.2.36)$$

Ensuite nous pouvons résoudre les équations de transport, et il est possible de normaliser  $e_-$  dans  $L^2$ , ce qui détermine les constantes  $a_{-,j}(x_-)$  par la méthode de la phase stationnaire.

**Lemme 2.2.6.** — *Il existe  $e_- \in \mathcal{S}$ ,  $\|e_-\| = 1$ , tel que*

$$\|(p^w - z)^* e_-\| = O(h^\infty). \quad (2.2.37)$$

*Démonstration.* — Nous avons l'analogie du lemme 2.2.5, et pouvons utiliser la factorisation

$$\chi_-^w (p^w - z)^* = (\chi_- \# \overline{q_-})^w (hD_x + g_-)^* + O(h^\infty). \quad (2.2.38)$$

$\square$

**Lemme 2.2.7.** — *Pour toute fonction d'ordre  $m'$  (et  $h < h_{m'}$ ), et pour tout  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $\chi = 1$  près de  $(x_-, 2\xi_-)$ ,*

$$\|(1 - \chi)^w (e_-)^2\|_{m'} = O(h^\infty). \quad (2.2.39)$$

*Démonstration.* — Nous avons

$$(hD_x + 2\overline{g^-})(e_-)^2 = 2((hD_x + \overline{g^-})e_-)e_- = 0 . \quad (2.2.40)$$

Donc le lemme 2.2.5 s'applique aussi ici, et avec

$$|\xi + 2\overline{g^-}(x_-)| \geq \frac{1}{C}(|\xi - 2\xi_-| + |x - x_-|) , \quad (2.2.41)$$

nous obtenons le lemme.  $\square$

### 2.3. Enoncé et résolution asymptotique du problème de Grushin

**2.3.1. Problème de Grushin.** — La question d'inversibilité de  $P - z$  peut être reformulée grâce au problème de Grushin associé.

*Définition 2.3.1.* — Soit

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p^w - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H(m) \times \mathbb{C} \rightarrow L^2 \times \mathbb{C}$$

où  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$  remplit les hypothèses 2.0.3 pour  $n = 1$  et 2.0.4, et où

$$\begin{aligned} R_+ u &:= \langle u, e_+ \rangle , \\ R_- u &:= u \cdot e_- . \end{aligned}$$

**Proposition 2.3.2.** — Supposons que  $\mathcal{P}$  admet un inverse de la forme

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix} : L^2 \times \mathbb{C} \rightarrow H(m) \times \mathbb{C} .$$

Alors  $p^w - z$  admet un inverse borné ssi  $E_{-+} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est inversible.

La preuve se trouve par exemple dans [15].

Explicitons comment on peut généraliser cette proposition au cas d'un nombre  $n$  de couples  $\rho_{\pm}$  : pour chaque  $\rho_{\pm}^j$  nous obtenons une fonction  $e_{\pm}^j$  associée comme dans les lemmes 2.2.4, 2.2.6.

*Définition 2.3.3.* — Soit

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p^w - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H(m) \times \mathbb{C}^n \rightarrow L^2 \times \mathbb{C}^n$$



où  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$  remplit les hypothèses 2.0.3 et 2.0.4, et où

$$(R_+u)_j := \langle u, e_+^j \rangle ,$$

$$R_-u_- := \sum_k u_-^k e_-^k .$$

Alors la proposition 2.3.2 reste valable et  $E_{-+}$  sera une matrice  $n \times n$  : l'inversibilité de  $p^w - z$  sera donc équivalente à  $\det E_{-+} \neq 0$ .

Une fois que l'inverse du problème de Grushin est construit, le problème spectral est réduit à déterminer les zéros de  $\det(E_{-+})$ .

Dans notre cas, la construction de l'inverse du problème de Grushin va être facilitée grâce à la proposition 2.1.25 et au résultat suivant.

**Proposition 2.3.4.** — Si  $(p^w - z)$ , pour  $(p - z) \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$ , est une famille d'opérateurs de Fredholm d'indice 0,  $\forall z \in \tilde{\Omega}$ , alors  $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(z)$  est aussi un opérateur de Fredholm d'indice 0,  $\forall z \in \tilde{\Omega}$ .

Ainsi l'existence d'un inverse à droite de  $\mathcal{P}$  implique l'inversibilité de  $\mathcal{P}$ .

*Démonstration.* — Considérons pour  $t \in [0, 1]$

$$\mathcal{P}^t = \begin{pmatrix} P - z & tR_- \\ tR_+ & 0 \end{pmatrix} : H(m) \times \mathbb{C}^n \rightarrow L^2 \times \mathbb{C}^n$$

Pour  $t = 0$ ,  $\mathcal{P}^0$  est un opérateur de Fredholm et  $\text{ind} \mathcal{P}^0 = \text{ind}(p^w - z) = 0$ . Etant donné que  $R_+$  et  $R_-$  sont des opérateurs de rang fini,  $\mathcal{P}^t$  est un opérateur de Fredholm, et  $\text{ind}(\mathcal{P}^t)$  est constant pour  $t \in [0, 1]$ , donc  $\text{ind}(\mathcal{P}) = \text{ind}(\mathcal{P}^1) = 0$ .  $\square$

**Proposition 2.3.5.** — Soit  $p \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$ ,  $p_0$  remplissant les hypothèses 2.0.3 et 2.0.4. Alors  $p^w$  a un spectre purement discret dans  $\tilde{\Omega}$ , consistant de valeurs propres (isolées) de multiplicité finie.

*Démonstration.* — Nous suivons [18].

Soit, d'après l'hypothèse 2.0.4,  $z_0 \in \tilde{\Omega}$  tel que  $p^w - z_0$  est inversible.

Soit  $z_1 \in \tilde{\Omega}$ . Nous savons que  $(p^w - z_1)$  est Fredholm,  $\text{ind}(p^w - z_1) = 0$ ; soit  $N = \dim \mathfrak{N}(p^w - z_1) = \dim \mathfrak{N}(p^w - z_1)^\perp$ . Considérons le problème de Grushin

$$\mathcal{P}_z := \begin{pmatrix} p^w - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H(m) \times \mathbb{C}^N \rightarrow L^2 \times \mathbb{C}^N$$

où  $R_+$  et  $R_-$  sont de rang maximal et

$$\begin{aligned} R_+|_{\mathfrak{R}(p^w - z_1)} \text{ est bijectif ,} \\ \mathfrak{R}(R_-) \perp \mathfrak{R}(p^w - z_1) . \end{aligned}$$

Alors  $\mathcal{P}_{z_1}$  est bijectif avec un inverse borné  $\mathcal{E}(z_1)$ , donc dans un voisinage  $V(z_1)$  de  $z_1$ ,  $\mathcal{P}_z$  aura un inverse borné  $\mathcal{E}(z)$  dont les entrées dépendent holomorphiquement de  $z$ . Donc soit  $\det E_{-+}(z)$  est identiquement nul  $\forall z \in V(z_1)$ , soit ses zéros dans  $V(z_1)$  forment un ensemble discret.

Nous pouvons maintenant prolonger  $E_{-+}(z)$  le long d'un chemin reliant  $z_1$  à  $z_0$  (en écrivant le problème de Grushin dans un nombre fini de disques recouvrant ce chemin). Etant donné que  $\det E_{-+}(z_0) \neq 0$  (car  $p^w - z_0$  est inversible),  $\det E_{-+}(z)$  ne peut être identiquement nul dans aucun des disques utilisés lors du prolongement (par identité sur l'intersection des disques).

Ceci étant valable pour tout  $z_1 \in \tilde{\Omega}$ , les zéros de  $\det E_{-+}$  (correspondant au spectre de  $p^w$ ) sont isolés. Pour prouver que l'espace propre correspondant à  $z_1$  est de dimension finie, nous renvoyons à [18].  $\square$

**2.3.2. Résolution des problèmes locaux.** — Nous posons  $n = 1$ , mais étant donné que nous énonçons des résultats locaux, tout se généralisera à  $n > 1$ .

*2.3.2.1. Parametrix.* — Commençons par la construction d'une parametrix sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\rho_+, \rho_-\}$ , où  $p$  est elliptique : les zéros de  $p_0 - z$  se situent précisément en  $\rho_{\pm}$  et  $p - z$  est elliptique à l'infini,  $z \in \tilde{\Omega}$ . Il est donc possible d'appliquer le lemme 2.1.19 pour obtenir  $M \in S(\mathbb{R}^2 \setminus \{\rho_+, \rho_-\}, \frac{1}{m})$  tel que

$$(p - z)\#M \sim 1 \text{ dans } S(\mathbb{R}^2 \setminus \{\rho_+, \rho_-\}, 1) . \quad (2.3.1)$$

*2.3.2.2. Résolution pour  $P = hD_x + g_+(x)$ .* —

**Proposition 2.3.6.** — Pour  $P = hD_x + g_+(x)$ ,  $v \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $v_+ \in \mathbb{C}$  le problème

$$\begin{cases} Pu = v \\ R_+u = v_+ \end{cases} \quad (2.3.2)$$

avec

$$R_+u := \langle u, e_+ \rangle \quad (2.3.3)$$

admet une solution unique

$$u = Fv + F_+v_+ \in H_{sc} = H(\langle(x, \xi)\rangle) , \quad (2.3.4)$$

$F_+v_+ := v_+e_+$ , et nous avons

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^2 \rightarrow H_{sc}} &= O(h^{-\frac{1}{2}}), \\ \|F_+\|_{\mathbb{C} \rightarrow H_{sc}} &= O(1). \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

*Démonstration.* — La preuve est similaire à celle dans [15]. Nous reprenons les étapes non-techniques.

L'équation homogène

$$\begin{cases} Pu = 0 \\ R_+u = v_+ \end{cases} \quad (2.3.6)$$

admet la solution unique

$$u = F_+v_+, \quad (2.3.7)$$

alors que

$$\begin{cases} Pu = v \\ R_+u = 0 \end{cases} \quad (2.3.8)$$

admet la solution

$$u = Fv := (1 - F_+R_+)\tilde{F}v, \quad (2.3.9)$$

avec  $R_+u = 0$  et où  $\tilde{F}$  sera défini par la suite.

En supposant  $x_+ = 0$  pour alléger les notations,  $\tilde{F}$  admet un noyau intégral

$$k(x, y) = \frac{i}{h} e^{-\frac{i}{h} \int_y^x g_+(\tilde{x}) d\tilde{x}} 1_{\{x_+ \leq y \leq x\}} - \frac{i}{h} e^{-\frac{i}{h} \int_y^x g_+(\tilde{x}) d\tilde{x}} 1_{\{x \leq y \leq x_+\}},$$

et  $P\tilde{F}v = v$ . Par le lemme de Schur (cf. [20], tome 3) la norme  $L^2$  de  $\tilde{F}$  est majorée par

$$\left( \sup_x \int |k(x, y)| dy \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sup_y \int |k(x, y)| dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3.10)$$

En utilisant et adaptant les estimations de la preuve dans [15], nous avons, en utilisant aussi l'identité  $(hD_x + g_+)\tilde{F}w = w$ ,

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}\| &\leq \frac{C}{\sqrt{h}}, \quad \|x\tilde{F}\| \leq \frac{C'}{\sqrt{h}}, \\ \|hD_x\tilde{F}\| &\leq \|1 - g_+(x)\tilde{F}\| \leq \|\tilde{F}\| + C\|x\tilde{F}\| \leq \frac{C''}{\sqrt{h}}. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Avec  $\|F_+R_+\| = O(1)$ , nous avons les mêmes estimations pour  $F$ , ce qui implique

$$\|F\|_{L^2 \rightarrow H_{sc}} = \|F\| + \|\tilde{h}D_x F\| + \|xF\| \leq \frac{\tilde{C}}{\sqrt{h}}. \quad (2.3.12)$$

□

**Lemme 2.3.7.** — *(Non-propagation des supports)*

Pour  $\psi_1, \psi_2 \in S(\mathbb{R}^2, 1)$  indépendants de  $h$  et à supports disjoints nous avons

$$\psi_1^w F \psi_2^w = O(h^\infty) \text{ dans } \mathcal{L}(L^2, H_{sc}). \quad (2.3.13)$$

Ceci implique que nous avons le même résultat pour  $\psi_j \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, 1)$  tels que  $\text{Supp}\psi_1 \cap \text{Supp}\psi_2 = \emptyset$ , car nous pouvons, en chaque ordre de  $h$ , appliquer le lemme précédent.

*Démonstration.* — Soit  $P = hD_x + g_+(x) = p^w$ .

Soient  $\chi, \tilde{\chi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $\chi \prec \tilde{\chi}$ ,  $\chi = 1$  près de  $\rho_+$ . Considérons

$$P\tilde{\chi}^w F \chi^w v = [P, \tilde{\chi}^w] F \chi^w v + \chi^w v + O(h^\infty)v, \quad (2.3.14)$$

$$\|R_+ \tilde{\chi}^w F \chi^w v - R_+ F \chi^w v\| = O(h^\infty)\|v\|. \quad (2.3.15)$$

$\text{Supp}(p\#\chi - \chi\#p)$  est disjoint de  $\rho_+$ . Comme dans la preuve du lemme 2.2.5, nous avons

$$|\xi + g_{+,0}|^2 \geq \frac{1}{C} ((\xi - \xi_+)^2 + (x - x_+)^2), \quad (2.3.16)$$

donc il existe  $q \in S(\mathbb{R}^2 \setminus \rho_+, \frac{1}{\langle(x,\xi)\rangle})$  tel que

$$p\#q \sim 1 \text{ dans } S(\mathbb{R}^2 \setminus \rho_+, 1). \quad (2.3.17)$$

Soit  $q\#(1 - \chi)$  un représentant du composé asymptotique, et soit

$$F' := (q\#(1 - \chi))^w + \tilde{\chi}^w F \chi^w - (q\#(p\#\tilde{\chi} - \tilde{\chi}\#p))^w F \chi^w. \quad (2.3.18)$$

Alors

$$\begin{aligned} P F' v &= v + r_1(v), \quad \|r_1\| = O(h^\infty), \\ R_+ F' v &= r_2(v), \quad \|r_2\|_{L^2 \rightarrow \mathbb{C}} = O(h^\infty). \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

L'unicité dans la proposition 2.3.6 implique alors que

$$F' v = F v + F r_1(v) + F_+ r_2(v) =: F v - R_3 v, \quad (2.3.20)$$

où  $R_3 : L^2 \rightarrow H_{sc}$ ,  $\|R_3\|_{L^2 \rightarrow H_{sc}} = O(h^\infty)$ .

Nous avons donc, pour  $\psi_1, \psi_2 \in S(1)$  à supports disjoints

$$\psi_2^w F \psi_1^w = \psi_2^w F' \psi_1^w + O(h^\infty) \quad (2.3.21)$$

et il suffit de montrer l'affirmation pour  $F'$ .

Le premier terme dans  $F'$  est un opérateur pseudodifférentiel à symbole dans  $S(\mathbb{R}^2, \frac{1}{\langle(x,\xi)\rangle})$ , donc

$$\psi_2^w (q\#(1-\chi))^w \psi_1^w = O(h^\infty) : L^2 \rightarrow H_{sc} \quad (2.3.22)$$

Pour les deux termes restants, nous distinguons les cas :

$\rho_+ \notin \text{supp } \psi_2$  : alors  $\psi_2^w \tilde{\chi}^w = O(h^\infty)$  et  $\psi_2^w [P, \tilde{\chi}^w] = O(h^\infty)$  pour  $\tilde{\chi}$  assez localisée, donc  $\psi_2^w F' \psi_1^w = O(h^\infty) : L^2 \rightarrow H_{sc}$  (car  $F = O(\frac{1}{\sqrt{h}}) : L^2 \rightarrow H_{sc}$ ).

$\rho_+ \notin \text{supp } \psi_1$  : alors  $\chi^w \psi_1^w = O(h^\infty)$  pour  $\chi$  assez localisée, donc  $\psi_2^w F' \psi_1^w = O(h^\infty) : L^2 \rightarrow H_{sc}$ .  $\square$

*2.3.2.3. Résolution pour  $P = hD_x + g_-(x)$ .* — Ici nous avons la situation analogue pour l'adjoint formel.

**Proposition 2.3.8.** — *Pour  $P = hD_x + g_-(x)$ ,  $v \in L^2$  le problème*

$$Pu + R_- u_- = v, \quad (2.3.23)$$

avec

$$R_- u_- := u_- e_-, \quad u_- \in \mathbb{C},$$

admet une solution unique dans  $H_{sc} \times \mathbb{C}$ , donnée par

$$u = Gv, \quad (2.3.24)$$

$$u_- = G_- v := \langle v, e_- \rangle, \quad (2.3.25)$$

avec

$$\|G\|_{L^2 \rightarrow H_{sc}} \leq \frac{C}{\sqrt{h}}. \quad (2.3.26)$$

*Démonstration.* — Pour  $x \leq x_-$  nous avons la solution à  $(hD_x + g_-)u = \tilde{v}$

$$u_1(x) = \frac{i}{h} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{i}{h} \int_y^x (g_-(\tilde{x})-z) d\tilde{x}} \tilde{v}(y) dy =: \tilde{G}_1 \tilde{v}(x),$$

alors que pour  $x \geq x_-$  nous avons

$$u_2(x) = \frac{i}{h} \int_{\infty}^x e^{-\frac{i}{h} \int_y^x (g_-(\tilde{x})-z) d\tilde{x}} \tilde{v}(y) dy =: \tilde{G}_2 \tilde{v}(x),$$

les deux exposants étant décroissants (à partie réelle strictement négative loin de  $x_-$ ) dans le domaine d'intégration .

Afin d'obtenir une solution continue, il faut imposer que

$$\begin{aligned} 0 &= u_1(x_-) - u_2(x_-) = \frac{i}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{h} \int_y^{x_-} (g_-(\tilde{x})-z)d\tilde{x}} \tilde{v}(y) dy , \\ &= \frac{i}{ha_-(x_-, z; h)} \langle \tilde{v}, e_- \rangle \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

donc, avec

$$u_- = G_- v ,$$

on peut prendre  $\tilde{v} = v - R_- u_-$ , car par construction

$$\langle v - R_- u_-, e_- \rangle = 0 .$$

Nous avons alors la solution

$$\begin{aligned} u &= Gv = \tilde{G}(I - R_- G_-)v , \\ u_- &= G_- v , \end{aligned}$$

où  $\tilde{G}$  est donné par  $\tilde{G}_{1/2}$  dans les zones correspondantes.

En observant que  $\tilde{G}$  a le noyau intégral

$$k(x, y) = \frac{i}{h} e^{-\frac{i}{h} \int_y^x g_-(\tilde{x})d\tilde{x}} \mathbf{1}_{\{y \leq x \leq x_-\}} - \frac{i}{h} e^{-\frac{i}{h} \int_y^x g_-(\tilde{x})d\tilde{x}} \mathbf{1}_{\{x_- \leq x \leq y\}} ,$$

qui s'estime de la même manière que le noyau intégral de  $F$  (en remarquant que  $\text{Im } g'_+(x_+) \sim -\text{Im } g'_-(x_-)$ ) nous pouvons utiliser les estimations du paragraphe précédent pour trouver que

$$\|\tilde{G}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{h}} \quad (2.3.28)$$

ainsi que

$$\|G\|_{L^2 \rightarrow H_{sc}} \leq \frac{C}{\sqrt{h}} . \quad (2.3.29)$$

□

**Lemme 2.3.9.** — *(Non-propagation des supports)*

Pour  $\psi_1, \psi_2 \in S(1)$  indépendants de  $h$  et à supports disjoints nous avons

$$\psi_1^w G \psi_2^w = O(h^\infty) \text{ dans } \mathcal{L}(L^2, H_{sc}) . \quad (2.3.30)$$

La preuve est analogue à celle du paragraphe précédent.

**2.3.3. Recollement des morceaux et inverse.** — La prochaine étape sera de recoller les solutions afin d'obtenir un inverse à droite approximatif sur tout l'espace.

Soient  $U_{\pm} \subset \mathbb{R}^2$  des voisinages de  $\rho_{\pm}$  à adhérences disjointes ,

$$\chi_{\pm} \in C_c^{\infty}(U_{\pm}) \text{ indépendantes de } h, \chi_{\pm} = 1 \text{ près de } \rho_{\pm}, \quad (2.3.31)$$

et  $\chi := (1 - \chi_+ - \chi_-) \in S(\mathbb{R}^2, 1)$ .

Nous décomposons  $L^2 \ni v \sim \chi_+^w v + \chi_-^w v + \chi^w v$  pour résoudre le problème de Grushin grâce aux inverses des paragraphes précédents.

Soient  $\chi_{\pm} \prec \tilde{\chi}_{\pm} \in C_c^{\infty}(U_{\pm})$ ,  $\chi \prec \tilde{\chi} \in S(\mathbb{R}^2, 1)$ ,  $\tilde{\chi} = 0$  près de  $\rho_{\pm}$ , et soient  $T_{\pm} \in S_{cl}(U_{\pm}, 1)$  tels que

$$Q_+ \# T_+ \sim 1 \text{ dans } S(U_+, 1), \quad (2.3.32)$$

$$T_- \# Q_- \sim 1 \text{ dans } S(U_-, 1). \quad (2.3.33)$$

Nous désignons par

$$T_+ \# \chi_+ \in C_c^{\infty}(U_+), \quad (2.3.34)$$

$$\tilde{\chi}_- \# T_- \in C_c^{\infty}(U_-), \quad (2.3.35)$$

des représentants à support compact des composés asymptotiques. Ceci implique qu'ils seront continus  $L^2 \rightarrow H(n)$  pour toute fonction d'ordre  $n$ .

Soit  $M$  la parametrix dans la zone elliptique, et soit  $M \# \chi$  un représentant du composé asymptotique dont le support est contenu dans un voisinage du support de  $\chi$ .

**Proposition 2.3.10.** — *Soit  $\mathcal{P}$  comme dans la définition 2.3.1, où  $p$  vérifie les hypothèses 2.0.3 pour  $n = 1$  et 2.0.4. Soit*

$$\mathcal{E}_0 := \begin{pmatrix} E_0 & F_+ \\ G_- & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.36)$$

où

$$E_0 = (\tilde{\chi} \# M \# \chi)^w + \tilde{\chi}_+^w F(T_+ \# \chi_+)^w + (\tilde{\chi}_- \# T_-)^w G \chi_-^w = O\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\right). \quad (2.3.37)$$

Alors

$$\mathcal{P} \mathcal{E}_0 = 1 - K \quad (2.3.38)$$

avec  $K = O(h^{\infty})$  dans  $\mathcal{L}(L^2 \times \mathbb{C}, L^2 \times \mathbb{C})$ .

*Démonstration.* — L'estimation de la norme de  $E_0$  découle directement des estimations établies pour les problèmes locaux.

Commençons par :

$$(p - z)\#\tilde{\chi}\#M\#\chi = \tilde{\chi}\#(p - z)\#M\#\chi + r = \chi + r' . \quad (2.3.39)$$

Nous avons  $r \in S^{-\infty}(1)$ , car

$$\text{Supp}((p - z)\#\tilde{\chi} - \tilde{\chi}\#(p - z)) \subset \text{supp } \tilde{\chi}' \quad (2.3.40)$$

est disjoint de  $\text{supp}(M\#\chi)$ . Ceci implique, avec  $\tilde{\chi}\#\chi \sim \chi$  dans  $S(1)$ , que nous avons aussi  $r' \in S^{-\infty}(1)$ . Il en découle que  $r'^w = O(h^\infty)$  dans  $\mathcal{L}(L^2)$ .

Ensuite, en utilisant le lemme 2.3.7 et la remarque d'après,

$$\begin{aligned} (P - z)\tilde{\chi}_+^w F(T_+\#\chi_+)^w &= [P, \tilde{\chi}_+^w]F(T_+\#\chi_+)^w + \tilde{\chi}_+^w(P - z)F(T_+\#\chi_+)^w \\ &= O(h^\infty) + (\tilde{\chi}_+\#Q_+)^w(hD_x + g_+(x))F(T_+\#\chi_+)^w \\ &= \chi_+^w + O(h^\infty) \end{aligned}$$

dans  $\mathcal{L}(L^2)$ .

Finalement, en utilisant le lemme 2.3.9 et que  $G_- \sim G_- \chi_-$ ,

$$\begin{aligned} (P - z)(\tilde{\chi}_-\#T_-)^w G \chi_-^w + R_- G_- \\ &= (hD_x + g_-(x))(Q_-\#\tilde{\chi}_-\#T_-)^w G \chi_-^w + R_- G_- + O(h^\infty) \\ &= (hD_x + g_-(x))G \chi_-^w + O(h^\infty) + R_- G_- \chi_-^w \\ &= \chi_-^w + O(h^\infty) \end{aligned}$$

dans  $\mathcal{L}(L^2)$ .

Au total

$$\begin{aligned} (P - z)((\tilde{\chi}\#M\#\chi)^w + \tilde{\chi}_+^w F(T_+\#\chi_+)^w + (\tilde{\chi}_-\#T_-)^w G \chi_-^w) + R_- G_- \\ = 1 + O(h^\infty) \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

dans  $\mathcal{L}(L^2)$ .

Ensuite, le lemme 2.2.4 implique

$$\begin{aligned} (P - z)F_+ &= O(h^\infty) , \\ R_+ F_+ &= 1 . \end{aligned}$$

Grâce au lemme 2.2.5

$$\begin{aligned} R_+((\tilde{\chi}\#M\#\chi)^w + \tilde{\chi}_+^w F(T_+\#\chi_+)^w + (\tilde{\chi}_-\#T_-)^w G \chi_-^w) \\ &= R_+ \tilde{\chi}_+^w F(T_+\#\chi_+)^w + O(h^\infty) \\ &= R_+ F(T_+\#\chi_+)^w + O(h^\infty) = O(h^\infty) \end{aligned}$$



et la proposition est prouvée.  $\square$

Il est possible, pour  $h$  assez petit, de trouver un inverse à droite exact de  $\mathcal{P}$  en inversant  $1 - K$  avec une série de Neumann :

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}_0 \sum_{j \geq 0} (K)^j . \quad (2.3.42)$$

On trouve alors un inverse à droite  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{P}$ . D'autre part,  $\mathcal{P}$  est Fredholm d'indice 0 d'après les propositions 2.1.25 et 2.3.4. Donc  $\mathcal{E}$  est aussi un inverse à gauche. On obtient :

**Corollaire 2.3.11.** — *Il existe*

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} O(\frac{1}{\sqrt{h}}) & O(1) \\ O(1) & O(h^\infty) \end{pmatrix} : L^2 \times \mathbb{C} \rightarrow H(m) \times \mathbb{C}$$

tel que  $\mathcal{P}\mathcal{E} = 1_{L^2 \times \mathbb{C}}$ , et  $\mathcal{E}\mathcal{P} = 1_{H(m) \times \mathbb{C}}$ .

Les estimations des normes découlent immédiatement de la série de Neumann, de la forme de  $\mathcal{E}_0$  et des estimations établies pour le problèmes locaux.

Considérons maintenant le cas  $n > 1$  : soient  $U_\pm^j \subset \mathbb{R}^2$  des voisinages de  $\rho_\pm^j$  à adhérences disjointes,

$$\chi_\pm^j \in C_c^\infty(U_\pm^j) \text{ indépendantes de } h, \chi_\pm^j = 1 \text{ près de } \rho_\pm^j, \quad (2.3.43)$$

et  $\chi := (1 - \sum_j (\chi_+^j + \chi_-^j)) \in S(1)$ .

Ceci nous permet de résoudre les problèmes « locaux » de manière analogue à ce qui précède, et nous introduisons  $T_\pm^j, \tilde{\chi}_\pm^j$  et  $M$  comme avant.

Nous avons aussi

$$\langle e_\pm^j, e_\pm^k \rangle = \delta_{jk} + O(h^\infty) . \quad (2.3.44)$$

**Théorème 2.3.12.** — *Soit  $\mathcal{P}$  comme dans la définition 2.3.3, où  $p$  vérifie les hypothèses 2.0.3 et 2.0.4. Soit*

$$\mathcal{E}_0 = \begin{pmatrix} E_0 & F_+ \\ G_- & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.45)$$

où

$$\begin{aligned}
E_0 &= (\tilde{\chi} \# M \# \chi)^w + \sum_j ((\tilde{\chi}_+^j)^w F^j (T_+^j \# \chi_+^j)^w + (\tilde{\chi}_-^j \# T_-^j)^w G^j (\chi_-^j)^w) , \\
F_+ v_+ &:= \sum_k v_+^k e_+^k , \\
(G_- v)_k &:= \langle v, e_-^k \rangle .
\end{aligned} \tag{2.3.46}$$

Alors

$$\mathcal{P} \mathcal{E}_0 = 1 - K \tag{2.3.47}$$

avec  $K = O(h^\infty)$  dans  $\mathcal{L}(L^2 \times \mathbb{C}^n, L^2 \times \mathbb{C}^n)$ .

Nous avons aussi l'analogie du corollaire 2.3.11.

### 2.3.4. Cas analytique. —

**Lemme 2.3.13.** — Soit  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$  indépendant de  $h$  avec les hypothèses 2.0.3 et 2.0.5. Alors  $\forall j = 1, \dots, n$  il existe  $e_+^j = a_+^j(x, z; h) e^{\frac{i}{h} \varphi_+^j(x, z)} \in \mathcal{S}$ ,  $\|e_+^j\| = 1$ , tel que

$$\|(p^w - z)e_+^j\| = O(e^{-\frac{1}{Ch}}) . \tag{2.3.48}$$

Nous avons de plus que  $\text{Im} \varphi_+^j \sim (x - x_+^j)^2$ .

Pour la preuve, nous renvoyons à [11].

**Lemme 2.3.14.** — Soit  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$  indépendant de  $h$  avec les hypothèses 2.0.3 et 2.0.5. Alors  $\forall j = 1, \dots, n$  il existe  $e_-^j = a_-^j(x, z; h) e^{\frac{i}{h} \varphi_-^j(x, z)} \in \mathcal{S}$ ,  $\|e_-^j\| = 1$ , tel que

$$\|(p^w - z)^* e_-^j\| = O(e^{-\frac{1}{Ch}}) . \tag{2.3.49}$$

Nous avons de plus que  $\text{Im} \varphi_-^j \sim (x - x_-^j)^2$ .

Nous avons

$$\langle e_\pm^j, e_\pm^k \rangle = \delta_{jk} + O(e^{-\frac{1}{Ch}}) . \tag{2.3.50}$$

**Proposition 2.3.15.** — Soit  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$  indépendant de  $h$ , vérifiant les hypothèses 2.0.3 et 2.0.5, et soit

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p^w - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H(m) \times \mathbb{C}^n \rightarrow L^2 \times \mathbb{C}^n ,$$

où

$$\begin{aligned} (R_+u)_j &:= \langle u, e_+^j \rangle, \\ R_-u_- &:= \sum_k u_-^k e_-^k. \end{aligned}$$

Alors  $\mathcal{P}$  admet un inverse de la forme

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 + O(h^\infty) & F_+ + O(e^{-\frac{1}{c\hbar}}) \\ G_- + O(e^{-\frac{1}{c\hbar}}) & O(e^{-\frac{1}{c\hbar}}) \end{pmatrix}, \quad (2.3.51)$$

où  $E_0 = O(\frac{1}{\sqrt{h}})$  est comme dans (2.3.46) et

$$\begin{aligned} F_+v_+ &:= \sum_k v_+^k e_+^k, \\ (G_-v)_k &:= \langle v, e_-^k \rangle. \end{aligned} \quad (2.3.52)$$

*Démonstration.* — Nous commençons par montrer que  $E_{-+} = O(e^{-\frac{1}{c\hbar}})$  et que  $E_+v_+ = F_+v_+ + O(e^{-\frac{1}{c\hbar}})|v_+|$ . Nous cherchons  $(u^*, u_-^*)$  tel que

$$\begin{cases} (P - z)u^* + R_-u_-^* = 0 \\ (R_+u^*)_j = \delta_{jk} \end{cases}. \quad (2.3.53)$$

Alors  $u^* = E_+e_k$  où  $e_k \in \mathbb{C}^n$ ,  $(e_k)_j = \delta_{jk}$  et  $u_-^* = [E_{-+}]_k$  où  $[A]_k$  désigne la  $k$ -ième colonne de la matrice  $A$ .

Nous avons, en utilisant  $\langle e_+^j, e_+^k \rangle = \delta_{jk} + O(e^{-\frac{1}{c\hbar}})$ ,

$$\begin{cases} (P - z)e_+^k = O(e^{-\frac{1}{c\hbar}}) \\ (R_+e_+^k)_j = \delta_{jk} + O(e^{-\frac{1}{c\hbar}}) \end{cases}. \quad (2.3.54)$$

Le corollaire 2.3.11 nous dit que pour la solution  $(u, u_-)$  de

$$\begin{cases} (P - z)u + R_-u_- = v \\ R_+u = v_+ \end{cases}, \quad (2.3.55)$$

nous avons

$$\sqrt{h}\|u\| + |u_-| \leq C(\|v\| + \sqrt{h}|v_+|). \quad (2.3.56)$$

Ceci implique que

$$\sqrt{h}\|u^* - e_+^k\| + |u_-^*| = O(e^{-\frac{1}{c\hbar}}), \quad (2.3.57)$$

donc  $E_+e_k = e_+^k + O(e^{-\frac{1}{c\hbar}})$  et  $|[E_{-+}]_k| = O(e^{-\frac{1}{c\hbar}})$ . En sommant sur  $k$ , nous obtenons donc que  $E_+v_+ = \sum_k v_+^k e_+^k + O(e^{-\frac{1}{c\hbar}})|v_+|$  et que  $E_{-+} = O(e^{-\frac{1}{c\hbar}})$ .

Nous montrons ensuite que  $(E_-v)_k = \langle v, e_-^k \rangle + O(e^{-\frac{1}{c\hbar}})\|v\|$ . Pour ceci soit  $(u^*, u_-^*)$  la solution de

$$\begin{cases} (P - z)u^* + R_-u_-^* = v \\ R_+u^* = 0 \end{cases}, \quad (2.3.58)$$

donc  $u_-^* = E_-v$ . Nous avons

$$\langle (P - z)u^* + R_-u_-^*, e_-^k \rangle = \langle v, e_-^k \rangle. \quad (2.3.59)$$

Donc

$$\langle (P - z)u^*, e_-^k \rangle = \langle u^*, (P - z)^*e_-^k \rangle = O(e^{-\frac{1}{c\hbar}})\|u^*\|, \quad (2.3.60)$$

et grâce à  $\langle e_-^j, e_-^k \rangle = \delta_{jk} + O(e^{-\frac{1}{c\hbar}})$  nous obtenons

$$(u_-^*)_k + O(e^{-\frac{1}{c\hbar}})(\|u^*\| + |u_-^*|) = \langle v, e_-^k \rangle. \quad (2.3.61)$$

En utilisant (2.3.56), nous avons

$$(E_-v)_k = (u_-^*)_k = \langle v, e_-^k \rangle + O(e^{-\frac{1}{c\hbar}})\|v\|. \quad (2.3.62)$$

□

**2.3.5. Problème de Grushin perturbé.** — Nous considérons  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$  avec les hypothèses 2.0.3 et 2.0.5.

Nous considérons une perturbation  $\delta Q$ , où  $Q : L^2 \rightarrow L^2$  avec  $\|Q\| \leq 1$ , et  $\delta \ll \sqrt{\hbar}$  est un paramètre de perturbation.

**Proposition 2.3.16.** — *Soit, pour  $p$  et  $\delta Q$  comme ci-dessus,*

$$\mathcal{P}^\delta = \begin{pmatrix} p^w - z + \delta Q & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H(m) \times \mathbb{C}^n \rightarrow L^2 \times \mathbb{C}^n.$$

Alors il existe  $\mathcal{E}^\delta$  de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\delta &= \mathcal{E}^0 + \begin{pmatrix} \sum_{j \geq 1} E(\delta Q E)^j & \sum_{j \geq 1} (E \delta Q)^j E_+ \\ \sum_{j \geq 1} E_-(\delta Q E)^j & \sum_{j \geq 1} E_-(\delta Q E)^{j-1} (\delta Q E_+) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O(\frac{1}{\sqrt{\hbar}}) & O(1) \\ O(1) & O(\sqrt{\hbar}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.63)$$

tel que  $\mathcal{P}^\delta \mathcal{E}^\delta = 1_{L^2 \times \mathbb{C}^n}$ ,  $\mathcal{E}^\delta \mathcal{P}^\delta = 1_{H(m) \times \mathbb{C}^n}$ .

*Démonstration.* — Nous avons  $\mathcal{P}^\delta \mathcal{E} = 1 + K$  où

$$K = \begin{pmatrix} \delta Q E & \delta Q E_+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.64)$$

et

$$\|K\| < C\delta\|Q\|\|E\| \ll 1. \quad (2.3.65)$$

Alors nous obtenons la série de Neumann

$$\mathcal{E}^\delta = \mathcal{E}(1 + K)^{-1} = \mathcal{E} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^j. \quad (2.3.66)$$

□

Nous avons immédiatement le

**Corollaire 2.3.17.** —

$$\mathcal{E}^\delta - \mathcal{E}^0 = \begin{pmatrix} O(\frac{\delta}{h}) & O(\frac{\delta}{\sqrt{h}}) \\ O(\frac{\delta}{\sqrt{h}}) & O(\delta) \end{pmatrix}. \quad (2.3.67)$$

Nous obtenons aussi un développement perturbatif de l'hamiltonien effectif :

$$E_{-+}^\delta = E_{-+}^0 + \delta E_{-+}^{(1)} + O\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{h}}\right). \quad (2.3.68)$$

De plus, en utilisant aussi la proposition 2.3.15,

$$(E_{-+}^{(1)})_{ij} = -E_-^i Q E_+^j = -\langle Q e_+^j, e_-^i \rangle + O(e^{-\frac{1}{C}h}). \quad (2.3.69)$$

Nous supposons alors que  $\frac{\delta^2}{\sqrt{h}} > e^{-\frac{1}{D_0 h}}$ , pour  $D_0$  assez grand, ce qui résulte de l'hypothèse 2.0.8.

Ceci implique que

$$\det E_{-+}^\delta = \delta^n \sum_{\pi \in S_n} \left( \prod_j \langle Q e_+^{\pi(j)}, e_-^j \rangle (\text{sign}(\pi)) + O\left(\frac{\delta^{n+1}}{\sqrt{h}}\right) \right). \quad (2.3.70)$$

## 2.4. Propriétés d'holomorphic de $E_{-+}$

En écrivant  $\partial_{\bar{z}}(\mathcal{P}\mathcal{E}) = 0$ , nous obtenons

$$\partial_{\bar{z}} E_{-+} = -E_{-+}(\partial_{\bar{z}} R_+) E_+ - E_- (\partial_{\bar{z}} R_-) E_{-+}. \quad (2.4.1)$$

Le déterminant de  $E_{-+}$  n'est pas holomorphe, mais vérifie (pour  $\det E_{-+} \neq 0$ ) l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} \det E_{-+} &= \text{tr} \left( (\partial_{\bar{z}} E_{-+}) E_{-+}^{-1} \right) \det E_{-+} \\ &= -\text{tr} \left( (\partial_{\bar{z}} R_+) E_+ + E_- (\partial_{\bar{z}} R_-) \right) \det E_{-+} \\ &=: -k(z) \det E_{-+}, \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

en utilisant la cyclicité de la trace. Pour l'opérateur non-perturbé, ceci implique

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} \det E_{-+}^0 &= -\left(\sum_j (\langle e_+^j, \partial_z e_+^j \rangle + \langle \partial_{\bar{z}} e_-^j, e_-^j \rangle) + O(e^{-\frac{1}{c\hbar}})\right) \det E_{-+}^0 \\ &=: -k_0(z) \det E_{-+}^0(z) . \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Nous choisissons alors une solution  $l_0$  de l'équation

$$\frac{1}{\hbar} \partial_{\bar{z}} l_0 = k_0 \quad (2.4.4)$$

dans un voisinage de  $\Omega$  et nous obtenons une fonction holomorphe  $e^{\frac{l_0}{\hbar}} \det E_{-+}^0$ .

**Lemme 2.4.1.** — *Pour  $h$  assez petit, et en notant  $\mathcal{L}(dz) = d\operatorname{Re} z \wedge d\operatorname{Im} z$ ,*

$$(\Delta \operatorname{Re} l_0(z) + O(h)) \mathcal{L}(dz) = \sum_j (d\xi_-^j \wedge dx_-^j - d\xi_+^j \wedge dx_+^j) , \quad (2.4.5)$$

et  $\operatorname{Re} l_0$  est strictement sousharmonique :

$$\Delta \operatorname{Re} l_0(z) > 0 . \quad (2.4.6)$$

*Démonstration.* — En utilisant la proposition 2.3.15 et (2.4.2), nous avons

$$\frac{1}{\hbar} \partial_{\bar{z}} l_0 = -\sum_j (\langle e_+^j, \partial_z e_+^j \rangle + \langle \partial_{\bar{z}} e_-^j, e_-^j \rangle) + O(e^{-\frac{1}{c\hbar}}) . \quad (2.4.7)$$

Nous omettons l'indice  $j$ . Soit  $e_+^{hol}$  tel que  $\|(P-z)e_+^{hol}\| = O(e^{-\frac{1}{c\hbar}})\|e_+^{hol}\|$ ,  $\partial_{\bar{z}} e_+^{hol} = 0$ , de la forme

$$e_+^{hol} = a_+(x, z; \hbar) e^{\frac{i}{\hbar} \varphi_+(x, z)} , \quad (2.4.8)$$

avec  $a_+$ ,  $\varphi_+$  holomorphes en  $z$ . Une telle fonction peut se trouver localement en  $z$ . Nous avons  $p(x, \varphi'_+) = z$ , ce qui implique

$$\varphi'_+(x_+) = \xi_+, \quad \operatorname{Im} \varphi''_+(x_+) > 0, \quad \partial_z \varphi'_+(x_+) = \frac{1}{p_\xi(x_+)} . \quad (2.4.9)$$

Donc  $x_+$  est le seul point réel où  $\varphi'_+$  est réel, et  $\operatorname{Im} \varphi_+$  y a un point critique non-dégénéré. Soit

$$\Phi_+(z) = \sup_{x \in \operatorname{vois}_{\mathbb{R}}(x_+)} (-\operatorname{Im} \varphi_+(x, z)) = -\operatorname{Im} \varphi_+(x_+(z), z) . \quad (2.4.10)$$

Alors  $\Phi_+$  est sousharmonique en tant que supremum de fonctions harmoniques. De plus, grâce à (2.4.9),

$$\kappa : (x, -\partial_x \varphi_+(x, z)) \rightarrow (z, \partial_z \varphi_+(x, z)) \quad (2.4.11)$$

est une transformation canonique complexe, et

$$\kappa(\mathbb{R}^2) = \Lambda_{\Phi_+} := \left\{ \left( z, \frac{2}{i} \partial_z \Phi_+(z) \right) \right\} \quad (2.4.12)$$

est une sous-variété IR au sens de [28] (symplectique par rapport à  $\text{Re } \sigma$ , lagrangienne par rapport à  $\text{Im } \sigma$ , où  $\sigma$  désigne la forme symplectique complexe), donc  $\Phi_+$  est strictement sousharmonique. En fait, en utilisant que  $x_+$  est un point critique de  $\text{Im } \varphi_+$  et que  $\varphi_+$  est holomorphe,

$$\begin{aligned} \frac{2}{i} \partial_z \Phi_+(z) &= \frac{2}{i} \partial_z (-\text{Im } \varphi_+(x_+(z), z)) = -\left( \frac{2}{i} \partial_z \text{Im } \varphi_+ \right)(x_+(z), z) \\ &= (\partial_z \varphi_+)(x_+(z), z), \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

et  $\kappa(x_+(z), -\xi_+(z)) = (z, \frac{2}{i} \partial_z \Phi_+(z))$ . Ceci implique que

$$\begin{aligned} -d\xi_+ \wedge dx_+ &= d\zeta \wedge dz|_{\Lambda_{\Phi_+}} = \left( \frac{2}{i} \partial_{\bar{z}} \partial_z \Phi_+ \right) d\bar{z} \wedge dz \\ &= (4\partial_{\bar{z}} \partial_z \Phi_+) \frac{1}{2i} d\bar{z} \wedge dz = \Delta \Phi_+ \mathcal{L}(dz), \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

et  $\Phi_+$  est strictement sousharmonique.

Ensuite nous avons  $e_+ = \frac{e_+^{hol}}{\|e_+^{hol}\|} e^{-\frac{i}{h} \theta_+(z)}$ , où  $\theta_+(z)$  est réel. Etant donné que

$$\begin{aligned} \text{Re } \partial_z \langle e_+ e^{\frac{i}{h} \theta_+(z)}, \partial_z e_+ e^{\frac{i}{h} \theta_+(z)} \rangle &= \text{Re } \partial_z \langle e_+, \partial_z e_+ \rangle - \text{Re} \left( \frac{i}{h} \partial_z \partial_{\bar{z}} \theta_+ \right) \\ &= \text{Re } \partial_z \langle e_+, \partial_z e_+ \rangle, \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

$\theta_+$  ne contribuera pas à  $\Delta \text{Re } l_0$  et nous pouvons supposer que  $\theta_+ = 0$ .

Donc

$$\langle e_+, \partial_z e_+ \rangle = \left\langle \frac{e_+^{hol}}{\|e_+^{hol}\|}, \partial_z \left( \frac{e_+^{hol}}{\|e_+^{hol}\|} \right) \right\rangle. \quad (2.4.16)$$

Or

$$2(\partial_z \|e_+^{hol}\|) \|e_+^{hol}\| = \partial_z \|e_+^{hol}\|^2 = \langle \partial_z e_+^{hol}, e_+^{hol} \rangle, \quad (2.4.17)$$

donc

$$\partial_z \frac{1}{\|e_+^{hol}\|} = -\frac{1}{2} \frac{\langle \partial_z e_+^{hol}, e_+^{hol} \rangle}{\|e_+^{hol}\|^3}. \quad (2.4.18)$$

Ceci implique que

$$\langle e_+, \partial_z e_+ \rangle = \frac{1}{2 \|e_+^{hol}\|^2} (\langle e_+^{hol}, \partial_z e_+^{hol} \rangle) = \frac{1}{2} \partial_{\bar{z}} (\ln \|e_+^{hol}\|^2) . \quad (2.4.19)$$

En utilisant la méthode de la phase stationnaire, nous avons :

$$\|e_+^{hol}\|^2 \sim A(z; h) e^{-\frac{2}{h} \text{Im} \varphi_+(x_+, z)} , \quad (2.4.20)$$

et donc

$$h \langle e_+, \partial_z e_+ \rangle = h \frac{1}{2} \partial_{\bar{z}} \left( -\frac{2}{h} \text{Im} \varphi_+(x_+, z) \right) + \ln A = \partial_{\bar{z}} \Phi_+(z) + \frac{h \partial_{\bar{z}} A}{2A} . \quad (2.4.21)$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} 4 \partial_z h (\langle e_+, \partial_z e_+ \rangle) \mathcal{L}(dz) &= (4 \partial_z \partial_{\bar{z}} \Phi_+(z) + O(h)) \mathcal{L}(dz) \\ &= -d\xi_+ \wedge dx_+ + O(h) \mathcal{L}(dz) . \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

Pour  $\langle \partial_{\bar{z}} e_-, e_- \rangle = -\langle e_-, \partial_{\bar{z}} e_- \rangle$  nous nous ramenons à  $e_-^{ahol}$  tel que  $\|(P-z)^* e_-^{ahol}\| = O(e^{-\frac{1}{ch}}) \|e_-^{ahol}\|$ , avec  $\partial_z(e_-^{ahol}) = 0$ . Nous obtenons le résultat similaire. En rassemblant les termes, nous avons donc que

$$(\Delta \text{Re} l_0(z) + O(h)) \mathcal{L}(dz) = \sum_j (d\xi_-^j \wedge dx_-^j - d\xi_+^j \wedge dx_+^j) , \quad (2.4.23)$$

et  $\text{Re} l_0(z)$  est strictement sousharmonique.  $\square$

Pour l'opérateur perturbé, nous avons

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} \det E_{-+}^\delta &= -\text{tr} \left( (\partial_{\bar{z}} R_+) E_+^\delta + E_-^\delta (\partial_{\bar{z}} R_-) \right) \det E_{-+}^\delta \\ &=: -k^\delta(z) \det E_{-+}^\delta . \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

En utilisant le corollaire 2.3.17 et (2.4.2), on trouve

$$|k^\delta - k^0| \leq O\left(\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}}\right) . \quad (2.4.25)$$

Alors nous pouvons aussi construire une solution  $l^\delta = l^0 + (l^\delta - l^0)$  de l'équation  $\frac{1}{h} \partial_{\bar{z}} l^\delta = k^\delta$ , avec

$$|l^\delta - l^0| = O\left(\frac{\delta}{\sqrt{h}}\right) , \quad (2.4.26)$$

et  $\partial_{\bar{z}}(e^{\frac{l^\delta}{h}} \det E_{-+}^\delta) = 0$ .



## 2.5. Preuve des théorèmes 2.0.9 et 2.0.11

Nous commençons par rappeler quelques notions probabilistes.

**2.5.1. Rappels de notions probabilistes.** — Soit  $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité.

Une variable aléatoire réelle est une application mesurable

$$X : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n . \quad (2.5.1)$$

Il est possible de considérer une variable aléatoire complexe en identifiant  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}^2$  ( $x + iy \equiv (x, y)$ ). La distribution de  $X$  est la mesure  $P_X$  (l'image directe de la mesure  $P$  par l'application  $X$ ) ; si elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$P_X = f(x)\mathcal{L}(dx) , \quad (2.5.2)$$

alors  $f$  est appelée la densité de distribution de  $X$  (c'est le seul cas que nous allons considérer ici). Si

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} , \quad (2.5.3)$$

alors nous disons que  $X$  est distribué selon une loi normale (centrée en 0, de variance  $n\sigma^2$ ).

Si  $X$  est  $P$ -intégrable, nous définissons l'espérance

$$E[X] := \int X dP = \int x f(x) \mathcal{L}(dx) . \quad (2.5.4)$$

Si  $X$  est de carré sommable, nous définissons la variance

$$\sigma^2(X) := E[(X - E[X])^2] . \quad (2.5.5)$$

Considérons maintenant  $m$  variables aléatoires  $X_i$ . Les  $X_i$  sont appelés indépendants si leur distribution jointe se décompose en produit :

$$P_{\otimes X_i} = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_m} . \quad (2.5.6)$$

Considérons, dans le cas où les  $X_i$  sont des variables indépendantes réelles (complexes), leur somme : la distribution sera

$$P_{X_1+\dots+X_m} = P_{X_1} * \dots * P_{X_m} . \quad (2.5.7)$$

Il en découle que si  $X_i$  est distribué selon une loi normale centrée en 0 de variance  $\sigma_i^2$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ , alors la somme des  $X_i$  sera distribué selon une loi normale centrée en 0 de variance  $\sum_i \sigma_i^2$ .

**2.5.2. Analyse des zéros d'une fonction holomorphe.** — Pour terminer la preuve du théorème 2.0.9, nous avons besoin d'une proposition concernant les zéros d'une fonction holomorphe : il s'agit de la proposition 1.8.1.

**2.5.3. Preuve du théorème 2.0.9.** — A partir de maintenant, nous supposons partout que  $q \in L^\infty$ , sans perte sur les estimations de probabilités : pour  $M \subset \mathcal{M}$ ,

$$\underline{P}[\{q \in L^\infty\} \cap M] = \underline{P}[M] . \quad (2.5.8)$$

**Lemme 2.5.1.** — Soient  $p$ ,  $q$  et  $\delta$  comme dans le théorème 2.0.9. Il existe  $\tilde{D} > 0$  tel que si  $z_k$ ,  $k \in J$  sont des points dans  $\Omega$ , alors pour  $h$  assez petit

$$\begin{aligned} \underline{P}\left[\|q\|_\infty \leq 1 \text{ et } |e^{\frac{i\delta}{h}} \det E_{-+}^\delta(z_k)| > e^{\frac{\operatorname{Re} l_0(z_k)}{h}} \delta^{n+1}, \forall k \in J\right] \\ \geq 1 - Dh^{-M_0} \sigma(h) - \left(\frac{\tilde{D}\delta}{h^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{n}} \frac{n|J|}{\sigma(h)^2 h^\kappa} . \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

*Démonstration.* — Supposons que  $\|q\|_\infty \leq 1$ . Alors, avec  $\delta\|Q\| \leq \delta$  et (2.0.25), les résultats de la section 2.3.5 s'appliquent.

Reprenons (2.3.70). En utilisant  $e_+^j = \bar{e}_-^j \in \mathcal{S}$ , et en étendant le produit scalaire  $\langle u, v \rangle$ ,  $u \in L^2$ ,  $v \in \mathcal{S}$ , à  $u \in \mathcal{S}'$ , nous avons

$$\begin{aligned} \det(E_{-+}^\delta) &= \delta^n \sum_{\pi \in S_n} \left( \prod_j \langle q(x), e_-^{\pi(j)} e_-^j \rangle \right) \operatorname{sign}(\pi) + O\left(\frac{\delta^{n+1}}{\sqrt{h}}\right) \\ &= \delta^n \prod_j \langle q, (e_-^j)^2 \rangle + \delta^n O\left(e^{-\frac{1}{Ch}}\right) + O\left(\frac{\delta^{n+1}}{\sqrt{h}}\right), \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

car  $e_-^i e_-^j = O\left(e^{-\frac{1}{Ch}}\right)$ ,  $i \neq j$ . Ceci implique, en utilisant aussi (2.4.26) et l'hypothèse 2.0.8, qu'il existe  $\tilde{D}$  tel que

$$|e^{\frac{i\delta}{h}} \det E_{-+}^\delta| > e^{\frac{\operatorname{Re} l_0}{h}} \delta^n \left( \prod_j |\langle q, (e_-^j)^2 \rangle| - \frac{\tilde{D}}{2} \frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (2.5.11)$$

Si  $\prod_j |\langle q, (e_-^j)^2(z_k) \rangle| > \frac{\tilde{D}\delta}{h^{\frac{3}{2}}}$ , alors  $|e^{\frac{i\delta}{h}} \det E_{-+}^\delta(z_k)| \geq e^{\frac{\operatorname{Re} l_0(z_k)}{h}} \delta^{n+1}$ , donc (en posant  $t := (\frac{\tilde{D}\delta}{h^{\frac{3}{2}}})^{\frac{1}{n}}$ )

$$\begin{aligned}
& \underline{P} \left[ \|q\|_\infty \leq 1 \text{ et } |e^{\frac{i\delta}{h}} \det E_{-+}^\delta(z_k)| > e^{\frac{\operatorname{Re} l_0(z_k)}{h}} \delta^{n+1}, \forall k \in J \right] \\
& \geq \underline{P} \left[ \{\|q\|_\infty \leq 1\} \cap \left\{ \prod_{k \in J} \prod_j |\langle q, (e_-^j)^2(z_k) \rangle| > t^n \right\} \right] \\
& \geq \underline{P} \left[ \{\|q\|_\infty \leq 1\} \cap \left\{ |\langle q, (e_-^j)^2(z_k) \rangle| > t \right\} \right] \\
& \geq \underline{P}[\|q\|_\infty \leq 1] - \sum_{k,j} \overline{P} \left[ |\langle q, (e_-^j)^2(z_k) \rangle| \leq t \right] \\
& \geq 1 - Dh^{-M_0} \sigma(h) - \left( \frac{\tilde{D}\delta}{h^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{n}} \frac{n|J|}{\sigma(h)^2 h^\kappa}, \tag{2.5.12}
\end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse 2.0.8 pour la dernière inégalité.  $\square$

*Preuve du théorème 2.0.9.* — Supposons que  $\|q\|_\infty \leq 1$ . Nous voulons appliquer la proposition 1.8.1 à  $f := e^{\frac{i\delta}{h}} E_{-+}^\delta$  qui est holomorphe, où  $\phi = \operatorname{Re} l_0$ .

En utilisant (2.5.10) la remarque après, nous avons la majoration (1.8.3) dans  $\Omega$  :

$$|e^{\frac{i\delta}{h}} E_{-+}^\delta| \leq \delta^n |e^{\frac{l_0}{h}}| (1 + O(\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}})) \leq e^{\frac{\operatorname{Re} l_0}{h}}, \tag{2.5.13}$$

car  $\delta < \frac{1}{C_0} h^{\frac{3}{2}}$ .

Ensuite nous choisissons un ensemble de points  $z_k \in \Omega$ ,  $k \in J$ ,  $|J| = O(\frac{1}{\sqrt{h \ln \frac{1}{\delta}}})$ , tel que pour le domaine  $\Gamma$  du théorème 2.0.9 nous avons

$$\partial\Gamma \subset \bigcup_{k \in J} B(z_k, \sqrt{h \ln \frac{1}{\delta}}). \tag{2.5.14}$$

Soit  $\epsilon_k := (n+1)h \ln \frac{1}{\delta}$ ,  $\forall k \in J$  (donc  $e^{-\frac{\epsilon_k}{h}} = \delta^{n+1}$ ). Alors la condition (1.8.5) devient

$$|e^{\frac{i\delta}{h}} \det E_{-+}^\delta(z_k)| \geq e^{\frac{\operatorname{Re} l_0(z_k)}{h}} \delta^{n+1}, \forall k \in J. \tag{2.5.15}$$

Donc si  $\|q\|_\infty \leq 1$  et que (2.5.15) est valable, la proposition 1.8.1 implique

$$\begin{aligned} \#(\text{Spec}(p^w + \delta Q) \cap \Gamma) &= \frac{1}{2\pi h} \int_\Gamma \Delta \text{Re} l_0(z) \mathcal{L}(dz) + |J| O\left(\frac{h \ln \frac{1}{\delta}}{h}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi h} (|\Gamma_{-+}(\Gamma)| + O(\sqrt{h \ln \frac{1}{\delta}})), \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

en utilisant (2.4.5) pour la dernière égalité. En utilisant le lemme 2.5.1, nous pouvons minorer la probabilité inférieure d'avoir (2.5.16) par

$$\begin{aligned} &\underline{P}\left[\|q\|_\infty \leq 1 \text{ et } |e^{\frac{\delta}{h}} \det E_{-+}^\delta(z_k)| > e^{\frac{\text{Re} l_0(z_k)}{h}} \delta^{n+1}, \forall k \in J\right] \\ &\geq 1 - Dh^{-M_0} \sigma(h) - \left(\frac{\tilde{D}\delta}{h^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{n}} \frac{n|J|}{2\sigma(h)^2 h^\kappa} \\ &\geq 1 - Dh^{-M_0} \sigma(h) - D' \left(\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{n}} \frac{1}{\sqrt{h \ln \frac{1}{\delta}} \sigma(h)^2 h^\kappa}. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

□

#### 2.5.4. Preuve du théorème 2.0.11. —

*Preuve du théorème 2.0.11.* — Nous voulons adapter la preuve du théorème 2.0.9 à tous les domaines  $\Gamma \in \tilde{\mathcal{F}}$ .

La proposition 1.8.1 est valable uniformément pour l'ensemble  $\tilde{\mathcal{F}}$  : nous reprenons ici les étapes à généraliser dans la preuve de cette proposition dans [15] (chapitre 1, proposition 1.8.1).

Puisque  $|G| > \frac{1}{C'}$  sur  $\partial\Omega$ , nous savons que  $d(\bar{\Gamma}, \partial\Omega) > 0$ . Nous savons aussi qu'il existe  $D > 0$  tel que  $L(\partial\Gamma) \leq D, \forall \Gamma \in \mathcal{F}$ .

Avec  $\partial\Gamma = \{G(z) = 0\}$ ,  $|G| + |G'| > \frac{1}{C'}$ , et pour  $r$  assez petit,  $z \in \Omega$ ,  $d(z, \partial\Gamma) \leq \frac{r}{2}$ , nous pouvons paramétrer  $\partial\Gamma \cap B(z, r)$  soit par  $x : y = y(x)$  avec  $|y'(x)| \leq \tilde{C}$ , soit par  $y : x = x(y)$  avec  $|x'(y)| \leq \tilde{C}$ . Nous obtenons alors que  $\frac{r}{2} \leq L(\partial\Gamma \cap B(z, r)) \leq \tilde{C}r$ .

Donc si nous choisissons un réseau de points  $z_k \in \Omega$  de maille  $\frac{r}{2}$  tels que

$$\Omega \subset \bigcup_{k \in J} B(z_k, \frac{r}{2}), \quad |J| \leq \frac{C}{r^2}, \quad (2.5.18)$$

et que si

$$\tilde{J}_\Gamma := \{z_k; d(z_k, \partial\Gamma) < \frac{r}{2}\}, \quad (2.5.19)$$

alors  $\exists C''' > 0$  tel que

$$|\tilde{J}_\Gamma| \leq C''' \frac{1}{r}, \quad \forall \Gamma \in \tilde{\mathcal{F}}, \quad (2.5.20)$$

et  $\partial\Gamma \subset \bigcup_{k \in \tilde{J}_\Gamma} B(z_k, r)$ .

Nous pouvons alors appliquer les résultats locaux dans  $B(z_k, r)$ . Jusqu'à l'équation (1.8.21), nous avons travaillé indépendamment de  $\Gamma$ . Nous utilisons alors que  $L(\partial\Gamma \cap B(z, r)) \leq \tilde{C}r$ , et en utilisant les paramétrisations ci-dessus, nous voyons que

$$\text{var arg}_{\partial\Gamma \cap B(z, r)}(w - w^*) \leq 2\pi, \quad \forall \Gamma \in \tilde{\mathcal{F}}, \quad w^* \in \Omega \setminus \partial\Gamma. \quad (2.5.21)$$

Le théorème de Stokes s'applique aussi avec un contour  $C^2$ , donc la proposition 1.8.1 est valable  $\forall \Gamma \in \tilde{\mathcal{F}}$  avec un reste uniforme.

Posons maintenant  $r = \sqrt{h \ln \frac{1}{\delta}}$ . Il existe  $\tilde{C} > 0$  tel que si  $\|q\|_\infty \leq 1$  et que (2.5.15) est valable  $\forall k \in J$ , alors  $\forall \Gamma \in \tilde{\mathcal{F}}$

$$\begin{aligned} |\#(\text{Spec}(p^w + \delta Q) \cap \Gamma) - \frac{1}{2\pi h} |\Gamma_{-+}(\Gamma)|| &\leq |\tilde{J}_\Gamma| \tilde{C} \frac{h \ln \frac{1}{\delta}}{h} \\ &\leq \tilde{C} C''' \frac{\sqrt{h \ln \frac{1}{\delta}}}{h}. \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

En utilisant le lemme 2.5.1, nous avons donc avec une probabilité inférieure minorée par

$$\begin{aligned} &\underline{P} \left[ \|q\|_\infty \leq 1 \text{ et } |e^{\frac{\delta}{h}} \det E_{-+}^\delta(z_k)| > e^{\frac{\text{Re } l_0(z_k)}{h}} \delta^{n+1}, \quad \forall k \in J \right] \\ &\geq 1 - D\sigma(h) h^{-M_0} - \left( \frac{\tilde{D}\delta}{h^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{n}} \frac{n|J|}{2\sigma^2 h^\kappa} \\ &\geq 1 - D\sigma(h) h^{-M_0} - D' \left( \frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{n}} \frac{1}{h \ln \frac{1}{\delta} \sigma(h)^2 h^\kappa} \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

que (2.5.22) est valable  $\forall \Gamma \in \tilde{\mathcal{F}}$ . □

**2.5.5. Exemple de perturbation.** — Nous montrons dans ce paragraphe que l'hypothèse 2.0.12 implique l'hypothèse 2.0.8.

Commençons par rappeler que si  $\tilde{P}$  est comme dans l'hypothèse 2.0.12, alors le nombre de valeurs propres  $E_l$  de  $\tilde{P}$  dans un intervalle  $[\alpha, \beta]$  vérifie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi h} \lim_{\epsilon \searrow 0} \left( \iint_{\tilde{p}^{-1}([\alpha+\epsilon, \beta-\epsilon])} dx d\xi + O(1) \right) &\leq N_h(\alpha, \beta) \\ &\leq \frac{1}{2\pi h} \lim_{\epsilon \searrow 0} \iint_{\tilde{p}^{-1}([\alpha-\epsilon, \beta+\epsilon])} dx d\xi + O(1) , \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

(Corollaire 9.7 dans [12]), donc si  $N(h) = \frac{C}{h}$ , alors

$$E_{N(h)} = O(1) . \quad (2.5.25)$$

Ce résultat est dû à Helffer et Robert ([17]).

**Lemme 2.5.2.** — *Soit  $q$  comme dans l'hypothèse 2.0.12. Alors il existe  $M_0, C > 0$  tel que*

$$\underline{P}[q \in L^\infty \text{ et } \|q\|_\infty \leq 1] \geq 1 - Ch^{-M_0} \sigma(h) . \quad (2.5.26)$$

*Démonstration.* — Nous avons

$$\|q\|_\infty \leq \sum_{l \leq N} |\alpha_l| \|q_l\|_\infty , \quad (2.5.27)$$

et  $\{\sum_{l \leq N} |\alpha_l| \|q_l\|_\infty \leq 1\} \in \mathcal{A}$  donc

$$\underline{P}[\|q\|_\infty \leq 1] \geq P[\{\sum_{l \leq N} |\alpha_l| \|q_l\|_\infty \leq 1\}] . \quad (2.5.28)$$

Ensuite nous avons

$$\begin{aligned} P[\sum_{l \leq N} |\alpha_l| \|q_l\|_\infty \leq 1] &\geq 1 - P[\sum_{l \leq N} |\alpha_l| \|q_l\|_\infty > 1] \\ &\geq 1 - E[\sum_{l \leq N} |\alpha_l| \|q_l\|_\infty] \geq 1 - \sum_{l \leq N} \|q_l\|_\infty \sqrt{\frac{\pi \sigma^2}{2}} . \end{aligned} \quad (2.5.29)$$

Nous allons montrer que  $\exists C' > 0$  tel que

$$\|q_l\|_\infty \leq \frac{C'}{h^2} , l \leq N(h) , \quad (2.5.30)$$

ce qui termine la preuve du lemme en utilisant  $N(h) = \frac{C}{h}$ .

En fait, nous avons pour  $M$  assez grand, avec  $(\tilde{p}^w)^{-M} = (p_{-M})^w$ ,  $p_{-M} \in S(\mathbb{R}^2, \langle (x, \xi) \rangle^{-M\alpha})$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_l^M} \|q_l\|_\infty &\leq \sup_x |(\tilde{p}^w)^{-M} q_l| \\ &\leq \frac{1}{2\pi h} \sup_{\sqrt{hx}} \left| \int e^{i(x-\frac{y}{\sqrt{h}})\frac{\xi}{\sqrt{h}}} (p_{-M}(\frac{x\sqrt{h}+y}{2}, \xi)) q_l(y) dy d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi\sqrt{h}} \sup_{\sqrt{hx}} \int \left( \int \langle (\frac{x\sqrt{h}+y}{2}, \xi\sqrt{h}) \rangle^{-2M\alpha} dy \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \|q_l\| \\ &\leq \frac{1}{2\pi h^{\frac{1}{4}}} \sup_{\sqrt{hx}} \int \left( \int h^{-M\alpha} \langle (\frac{x+y}{2}, \xi) \rangle^{-2M\alpha} dy \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \\ &\leq C'' h^{-\frac{M\alpha}{2} - \frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Il suffit de choisir  $M$  tel que  $M\alpha \geq 3$ , donc pour  $l \leq N(h)$ , et en utilisant (2.5.25),

$$\|q_l\|_\infty \leq \frac{C''}{h^2} (E_{N(h)})^{\frac{3}{\alpha}} \leq \frac{C'}{h^2}. \quad (2.5.31)$$

□

**Lemme 2.5.3.** — *Il existe  $\kappa$  tel que  $\forall z \in \Omega, \forall j, \forall t > 0$ , et pour  $h$  assez petit,*

$$P \left[ |\langle q, (e_-^j)^2(z) \rangle| \leq t \right] \leq \frac{t^2}{2h^\kappa \sigma^2}.$$

*Démonstration.* — Nous avons

$$P \left[ |\langle q, (e_-^j)^2(z) \rangle| \leq t \right] = P \left[ \left| \sum_l \alpha_l \langle q_l, (e_-^j)^2(z) \rangle \right| \leq t \right].$$

Soit  $\beta_l := \langle q_l, (e_-^j)^2(z) \rangle$ ; la variable aléatoire  $\sum_l \alpha_l \beta_l$  est distribuée d'après une loi normale (complexe, centrée en 0) de variance  $\sigma^2 \sum_l |\beta_l|^2$ , donc

$$\begin{aligned} P \left[ |\langle q, (e_-^j)^2(z) \rangle| \leq t \right] &= 1 - \exp \left\{ - \frac{t^2}{2\sigma^2 \sum_l |\beta_l|^2} \right\} \\ &\leq \frac{t^2}{2\sigma^2 \sum_l |\beta_l|^2}. \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

Nous allons montrer que  $\exists \kappa$  tel que  $\forall z \in \Omega, \forall j, \sum_{l \leq N} |\beta_l|^2 \geq h^\kappa$ , ce qui terminera la preuve du lemme.

Soit  $U \subset\subset \mathbb{R}^2$  un ouvert tel que

$$\bigcup_j \overline{\{(x_-^j(z), 2\xi_-^j(z)); z \in \Omega\}} \subset U, \quad (2.5.33)$$

et soit  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$  telle que  $f = 1$  sur  $\tilde{p}(U)$ . Nous fixons (en utilisant (2.5.25))

$$N(h) := \min\{l; \text{supp}(f) \subset [0, E_l]\} = O\left(\frac{1}{h}\right). \quad (2.5.34)$$

Avec le calcul fonctionnel (voir [12], chapitre 8),

$$f(\tilde{p}^w) = F^w, F \in S(\mathbb{R}^2, (m')^{-k}), \forall k, \quad (2.5.35)$$

et  $F(x, \xi) = 1 + O(h^\infty)$  si  $(x, \xi) \in U$ . En fait,  $F(x_0, \xi_0)$  ne dépend que de  $\tilde{p}$  et de ses dérivées au point  $(x_0, \xi_0) = \rho_0$  (modulo  $O(h^\infty)$ ). Soient  $U_1, U_2$  des voisinages de  $\rho_0 \in U$ ,  $U_1 \subset U_2 \subset\subset U$ , et soit  $\chi \in C_c^\infty(U_2)$ ,  $\chi = 1$  sur  $U_1$ . Soit  $\hat{p} = p(x, \xi)\chi + p(x_0, \xi_0)(1 - \chi)$ . Alors  $f(\hat{p}^w) = 1$ . De plus,  $F(x, \xi)$  est égal au symbole de  $f(\hat{p}^w)$  près de  $(x_0, \xi_0)$ , modulo  $O(h^\infty)$ , donc  $F(x_0, \xi_0) = 1 + O(h^\infty)$ .

Ceci et le lemme 2.2.7 impliquent que  $\forall z \in \Omega, \forall j$

$$F^w(e_-^j)^2(z) = (e_-^j)^2(z) + O(h^\infty) \text{ dans } L^2. \quad (2.5.36)$$

Nous avons donc, pour  $l \geq N(h)$ ,

$$\langle (e_-^j)^2(z), q_l \rangle = f(E_l) \langle (e_-^j)^2(z), q_l \rangle + O(h^\infty) = O(h^\infty). \quad (2.5.37)$$

De plus

$$\langle (e_-^j)^2(z), q_l \rangle = \langle (\tilde{p}^w)^N (e_-^j)^2(z), (\tilde{p}^w)^{-N} q_l \rangle \leq \frac{C}{(E_l)^N \sqrt{h}}. \quad (2.5.38)$$

Observons qu'il existe  $K, C > 0$  tel que

$$E_l \geq \frac{1}{C} (hl)^{\frac{1}{2K}}. \quad (2.5.39)$$

En effet, si  $K$  est assez grand, on a :

$$\sum_l E_l^{-2K} = \|(p^w)^{-K}\|_{HS}^2 \sim \frac{1}{2\pi h} \int |p(x, \xi)|^{-2K} dx d\xi \leq \frac{C}{h}. \quad (2.5.40)$$

Donc (en utilisant que les  $E_l$  forment une suite croissante)

$$lE_l^{-2K} \leq \sum_k E_k^{-2K} \leq \frac{C}{h}. \quad (2.5.41)$$



Ceci implique

$$\begin{aligned} \sum_{l \leq N} |\beta_l|^2 &= \sum_{l \leq N(h)} |\langle (e_-^j)^2(z), q_l \rangle|^2 \\ &= \|(e_-^j)^2(z)\|^2 - \sum_{l > N(h)} |\langle (e_-^j)^2(z), q_l \rangle|^2 \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{h}} - O(h^\infty) \geq \frac{1}{C}, \end{aligned} \tag{2.5.42}$$

pour  $h$  assez petit. □



## CHAPITRE 3

# BOUND ON THE NUMBER OF EIGENVALUES NEAR THE BOUNDARY OF THE PSEUDOSPECTRUM

For non-selfadjoint operators, the norm of the resolvent may be large even far away from the spectrum. Pseudospectra are regions delimited by the level curves of the resolvent norm (for a general introduction, see [6], [37]), and for semiclassical pseudodifferential operators one may study the region where this norm is larger than any negative power of  $h$  (or even exponentially large in  $h$  in the analytic case), see [5], [40], [11]. In vicinity of the boundary of the semiclassical pseudospectrum (which means next to a region where one can get better resolvent estimates), it is possible to estimate the number of eigenvalues. This observation has already been used for estimates of the number of resonances in a neighbourhood of the real axis (see [32], [33], [30], [18] and we refer to the first work for a historical overview as well as more references). The techniques we apply here are very similar.

In numerical calculations of the eigenvalues of some non-selfadjoint operators, an accumulation of these to the boundary of the pseudospectrum has been observed ([41]), whereas the spectrum is known to be in its interior. This phenomenon has been a motivation for us to study in previous works the perturbative behaviour of the spectrum of semiclassical non-selfadjoint operators ([15], [16]), perturbed by a perturbation that is exponentially small in  $h$ , and we found a twodimensional Weyl-type law in a domain inside the pseudospectrum. This implies already that not all the eigenvalues accumulate to the boundary. We prove here a complementary result, showing a bound on the accumulation of the eigenvalues of the (perturbed) operator near the boundary.

**Assumption 3.0.1.** — Let  $m \in C^\infty(\mathbb{R}^2, [1, \infty))$  be such that  $\exists C_0, N_0 > 0$  with

$$m(X) \leq C_0 \langle X - Y \rangle^{N_0} m(Y), \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2. \quad (3.0.1)$$

Let  $p \in S(\mathbb{R}^2, m) = \{q \in C^\infty(\mathbb{R}^2); \forall \alpha \in \mathbb{N}^2 \exists C_\alpha > 0 : |\partial^\alpha q(X)| \leq C_\alpha m(X), \forall X \in \mathbb{R}^2\}$  be independent of  $h$ .

Let  $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$  be a domain (i.e. an open connected set) such that  $(p - z)$  is elliptic at infinity uniformly  $\forall z \in \Omega$  :

$$\exists C > 0 \text{ such that } \forall z \in \Omega, |p(X) - z| > \frac{1}{C} m(X), \quad \forall X \in \mathbb{R}^2, |X| > C,$$

and  $\exists z_0 \in \Omega$  such that  $p - z_0$  is elliptic :

$$\exists C > 0 \text{ such that } |p(X) - z_0| > \frac{1}{C} m(X), \quad \forall X \in \mathbb{R}^2.$$

We let  $P = p^w$  be the  $h$ -Weyl-quantization of  $p$ , acting in  $L^2(\mathbb{R})$  :

$$p^w u(x) := \frac{1}{2\pi h} \iint e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} p\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi. \quad (3.0.2)$$

All norms without index are  $L^2$ -norms (respectively  $\mathcal{L}(L^2)$ -norms). Assuming without loss of generality that  $m \in S(\mathbb{R}^2; m)$  (see for example [16]), and for  $h$  small enough, we endow  $p^w$  with the domain

$$H(m) := (m^w)^{-1}(L^2), \quad \|u\|_m := \|m^w u\|, \quad u \in H(m). \quad (3.0.3)$$

The assumptions of ellipticity at infinity and ellipticity at a point imply that  $p^w$  has, for  $h$  small enough, a purely discrete spectrum in  $\Omega$  (cf. [16]).

Let  $\Sigma(p) := \overline{p(\mathbb{R}^2)}$ . We call  $\Sigma(p)$  the semiclassical pseudospectrum of  $P$ . In fact, under certain additional assumptions there is a dense open subset of  $\Sigma(p)$  where the resolvent norm is larger than any negative power of  $h$  (exponentially large in the analytic case) and we refer to [11] for the precise statements. We mention that if  $z \in \Omega \setminus \Sigma$ , then  $p - z$  is elliptic.

**Example 3.0.2.** — Let  $p = \xi^2 + i\xi + x^2 \in S(\mathbb{R}^2; \langle(x, \xi)\rangle^2)$ ,  $p^w = (hD_x)^2 + h\partial_x + x^2$  (which is the operator studied numerically by Zworski in [41]). The domain of  $p^w$  is the semiclassical Sobolev-space

$$H(\langle(x, \xi)\rangle^2) := \{u \in L^2; \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2; |\alpha| \leq 2} \|(hD_x)^{\alpha_1} x^{\alpha_2} u\| < \infty\}. \quad (3.0.4)$$

We have  $\Sigma = \{\operatorname{Re} z \geq (\operatorname{Im} z)^2\}$ , whereas  $\operatorname{Spec}(p^w) \subset [\frac{1}{4}, \infty)$  (as one sees using a formal conjugation by  $e^{\frac{x}{2h}}$ ), and we can choose  $\Omega$  to be any bounded domain containing some  $z_0 \notin \Sigma$ .

For  $z, z_1 \in \mathbb{C}$  we write  $d(z, z_1) = |z - z_1|$ , and for  $U \subset \mathbb{C}$  we write  $d(z, U) = \inf_{z_1 \in U} d(z, z_1)$ . For  $z \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  we write  $D(z, r) := \{w \in \mathbb{C}; d(z, w) < r\}$ . Let also  $U^c = \mathbb{C} \setminus U$ .

**Assumption 3.0.3.** — *Let  $p, \Omega$  be as in Assumption 3.0.1.*

*Suppose  $\exists C > 0$  such that  $\forall z \in \partial\Sigma \cap \Omega, \forall \epsilon > 0$  small enough,  $\exists z_0 \in \Sigma^c$  such that  $d(z, z_0) \leq \epsilon$  and  $d(z_0, \partial\Sigma) \geq \frac{\epsilon}{C}$ .*

If one assumes the exterior cone condition :  $\exists r_0 > 0, \theta_0 > 0$  such that  $\forall z \in \partial\Sigma \cap \Omega, \exists \theta(z)$  with

$$\{z + re^{i\theta}, 0 < r \leq r_0, |\theta - \theta(z)| \leq \theta_0\} \cap \Sigma = \emptyset, \quad (3.0.5)$$

then Assumption 3.0.3 is satisfied.

One immediately sees that this condition is verified for the example 3.0.2 with  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  and every  $r_0 > 0$ .

For  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$  we write  $p^{-1}(\tilde{\Omega}) \equiv p^{-1}(\tilde{\Omega} \cap \Sigma)$ .

**Theorem 3.0.4.** — *Let  $p$  satisfy the assumptions 3.0.1 and 3.0.3. Let  $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ . For  $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ , let*

$$W(\epsilon) := \{z \in \tilde{\Omega}; d(z, \partial\Sigma) < \epsilon\}, \quad (3.0.6)$$

$$\hat{W}(\epsilon_1, \epsilon_2) := \{z \in \tilde{\Omega} + D(0, \epsilon_1); d(z, \partial\Sigma) < \epsilon_2\}.$$

*Then  $\exists C > 0, \exists \epsilon_0 > 0$  such that  $\forall \epsilon \leq \epsilon_0, \exists h_0(\epsilon) > 0$  such that for  $0 < h \leq h_0(\epsilon)$ ,*

$$\#(\operatorname{Spec}(p^w) \cap W(\epsilon)) \leq C \frac{\operatorname{vol}(p^{-1}(\hat{W}(14\epsilon, 12\epsilon)))}{h}. \quad (3.0.7)$$

This and the proof implies a similar result for small perturbations.

**Corollary 3.0.5.** — *Let  $p, W(\epsilon), \hat{W}(\epsilon_1, \epsilon_2)$  be as in Theorem 3.0.4. Let  $Q = O(1) : L^2 \rightarrow L^2, H(m) \rightarrow H(m)$ . Then  $\exists \epsilon_0 > 0, \exists D > 0, \exists C > 0$  such that  $\forall \epsilon \leq \epsilon_0$ , and for  $\delta < \frac{\epsilon}{D}, \exists h_0(\epsilon) > 0$  such that for  $0 < h \leq h_0(\epsilon)$ ,*

$$\#(\operatorname{Spec}(p^w + \delta Q) \cap W(\epsilon)) \leq C \frac{\operatorname{vol}(p^{-1}(\hat{W}(14\epsilon, 12\epsilon)))}{h}. \quad (3.0.8)$$

We investigate the volume appearing in (3.0.7). For  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , the Poisson bracket is given by

$$\{f, g\}(x, \xi) := (f_\xi g_x - f_x g_\xi)(x, \xi) . \quad (3.0.9)$$

Suppose that

$$\{p, \{p, \bar{p}\}\}(x, \xi) \neq 0 , \quad (x, \xi) \in p^{-1}(\partial\Sigma \cap \Omega) . \quad (3.0.10)$$

We show that this implies that  $\forall \Omega' \subset\subset \Omega$ ,  $p^{-1}(\partial\Sigma \cap \Omega')$  consists of isolated curves in  $\mathbb{R}^2$ .

Let  $\rho_0 \in p^{-1}(\partial\Sigma \cap \Omega')$  be fixed. In this paragraph, let  $\rho \in \text{neigh}(\rho_0)$ . For  $\rho \in p^{-1}(\partial\Sigma \cap \Omega')$ ,  $\{p, \bar{p}\}(\rho) = 0$ . Assume without loss of generality that  $\{\text{Re } p, \{p, \bar{p}\}\}(\rho) \neq 0$ , which implies  $\text{Re } p'(\rho) \neq 0$ . Therefore there exists  $g \in C^\infty(\text{neigh}(\rho_0); \mathbb{R})$  such that  $\{\text{Re } p, g\}(\rho) = 1$ , and

$$\kappa : \mathbb{R}^2 \ni \rho \mapsto (y, \eta) = (g(\rho), \text{Re } p(\rho)) \quad (3.0.11)$$

is a canonical transformation. We have (identifying  $p \circ \kappa^{-1}$  with  $p$ )

$$p(y, \eta) = \eta + i f(y, \eta), \quad f \in C^\infty(\text{neigh}(\kappa(\rho_0)); \mathbb{R}) . \quad (3.0.12)$$

Since  $\{p, \bar{p}\}(\rho) = 2i f'_y(y, \eta)$ , and

$$0 \neq \{\text{Re } p, \{p, \bar{p}\}\}(\rho) = 2i f''_{yy}(y, \eta) , \quad (3.0.13)$$

$y \rightarrow f(y, \eta)$  has a unique non-degenerate critical point  $y(\eta)$ . In a neighbourhood of  $\kappa(\rho_0)$ , we have

$$f(y, \eta) = F(y, \eta)(y - y(\eta))^2 + f_0(\eta), \quad F(y(\eta), \eta) \neq 0 . \quad (3.0.14)$$

The application  $(y, \eta) \rightarrow p(y, \eta)$  maps a neighbourhood of  $\kappa(\rho_0)$  to a one-sided neighbourhood of the curve  $\eta \mapsto p(y(\eta), \eta)$ , which will be part of  $\Sigma$ . We can therefore identify  $p^{-1}(\partial\Sigma \cap \Omega')$  with a union of sets of the form  $\{(y(\eta), \eta)\}$ .

We formulate a condition which implies that Assumption 3.0.3 is satisfied by showing the exterior cone condition.

As we have just shown, for  $z^* \in \partial\Sigma \cap \Omega'$ , we have  $p^{-1}(z^*) = \{\rho_1^*, \dots, \rho_n^*\}$ , with  $\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\rho_j^*) = 0$ .  $H_{\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}}$  is a real vectorfield tangent to the set  $\{\rho; \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(\rho) = 0\}$ . Therefore

$$(-T_1, T_0) \ni t \mapsto \rho_j(t) := \exp(tH_{\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}})(\rho_j^*) \subset \{\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\} = 0\} \quad (3.0.15)$$

is an oriented curve, and  $\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}$  is positive to the left of this curve, and negative to the right. In fact,  $\{(y(\eta), \eta)\} = \{\kappa(\exp(tH_{\frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}})(\rho))\}$ .

$p(\rho_j(t))$  is also an (oriented) curve, since

$$\nabla(p(\rho_j(t))) = (H_{\frac{1}{2i}\{p,\bar{p}\}}p)(\rho_j(t)) = -\{p, \frac{1}{2i}\{p,\bar{p}\}\}(\rho_j(t)) \neq 0 \quad (3.0.16)$$

by assumption.

Furthermore,  $d\text{Im } p \wedge d\text{Re } p = \frac{1}{2i}\{p,\bar{p}\}d\xi \wedge dx$ , so  $\rho \rightarrow p(\rho)$  preserves the orientation to the left of  $\rho_j(t)$  and reverses it to the right. This implies that  $p(\rho)$  is on the left of the curve  $p(\rho_j(t))$ ,  $\rho \in \text{neigh}(\rho_j(t))$ ,  $\forall j$ , and  $\Sigma$  is the union of these regions. This could have been seen by doing the same analysis for (3.0.12) and with (3.0.14) as well.

We write  $(H_{\frac{1}{2i}\{p,\bar{p}\}}p)(\rho_j^*) := r_j^* e^{i\theta_j^*}$ .

**Assumption 3.0.6.** — *There exists  $L \in (0, \pi)$  such that for all  $z^* \in \partial\Sigma \cap \Omega$ , there exists an interval  $I_{z^*} \subset \mathbb{R}$  of length  $L$ ,  $\exists \alpha \in \mathbb{Z}^n$  such that*

$$\{\theta_1^* + \alpha_1 2\pi, \dots, \theta_n^* + \alpha_n 2\pi\} \subset I_{z^*} . \quad (3.0.17)$$

Of course this assumption is trivially fulfilled if  $p^{-1}(z^*)$  consists of only one point.

Therefore the union of the regions to the left of the curves  $p(\rho_j(t))$  leave a conical region in  $\mathbb{C}$  uncovered, with opening angle  $\theta > 0$ .

This implies that  $\exists r_0 > 0$ ,  $\exists \theta_0 \in (0, \frac{\theta}{2})$  such that  $\forall z^* \in \partial\Sigma \cap \Omega'$ ,  $\exists \theta(z^*)$  such that we have

$$\{z_* + r e^{i\theta}; 0 < r \leq r_0, 0 \leq |\theta - \theta(z^*)| \leq \theta_0\} \cap \Sigma = \emptyset , \quad (3.0.18)$$

which is the exterior cone condition.

**Corollary 3.0.7.** — *Let  $p$  satisfy Assumption 3.0.1, and let  $W(\epsilon)$  be as in (3.0.6). If moreover*

$$\{p, \{p,\bar{p}\}\}(x, \xi) \neq 0 , \quad (x, \xi) \in p^{-1}(\Omega \cap \partial\Sigma) , \quad (3.0.19)$$

*and Assumption 3.0.6 is fulfilled, then for  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ , with  $\epsilon_0$  sufficiently small, there exists  $h(\epsilon) > 0$  such that for  $0 < h < h(\epsilon)$ ,*

$$\#(\text{Spec}(p^w) \cap W(\epsilon)) = O\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{h}\right) , \quad (3.0.20)$$

*uniformly with respect to  $h, \epsilon$ .*

Let us verify that this corollary applies to Example 3.0.2.  $\partial\Sigma = \{\text{Re } z = (\text{Im } z)^2\}$ ,  $p^{-1}(\partial\Sigma) = \{x = 0\}$ , and

$$\{p, \{p,\bar{p}\}\}(0, \xi) = 8i\xi - 4 \quad (3.0.21)$$

which is non-vanishing.

*Proof.* — Since for  $\epsilon$  small enough,  $(\tilde{\Omega} + D(0, 14\epsilon)) = \Omega' \subset\subset \Omega$ , for any  $z^* \in \partial\Sigma \cap (\tilde{\Omega} + D(0, 14\epsilon))$ , we have a finite number of curves  $\rho_j(t) = \exp(tH_{\frac{1}{2t}\{p, \bar{p}\}})(\rho_j^*)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , with  $p(\rho_j^*) = z^*$ . Therefore

$$\begin{aligned} & \text{vol}(p^{-1}(\hat{W}(14\epsilon, 12\epsilon) \cap \text{neigh}(z^*))) \\ & \leq \sum_{j=1}^n \text{vol}(\{\rho \in p^{-1}(\hat{W}(14\epsilon, 12\epsilon)); \rho \in \text{neigh}(\rho_j(t)), t \in (-t_0, t_1)\}) . \end{aligned} \quad (3.0.22)$$

Using the representation (3.0.12) and (3.0.14), we have

$$\begin{aligned} & \text{vol}(p^{-1}(\hat{W}(14\epsilon, 12\epsilon) \cap \text{neigh}(z^*))) \\ & \leq \sum_j \text{vol}(\{(y, \eta); \eta \in (a, b), 0 < |F_j(y, \eta)(y - y_j(\eta))^2| < \epsilon\}) \\ & = O(\sqrt{\epsilon}). \end{aligned} \quad (3.0.23)$$

We can cover  $\hat{W}(14\epsilon, 12\epsilon)$  by a finite number of such neighbourhoods, hence the same estimate holds for  $\hat{W}(14\epsilon, 12\epsilon)$ .  $\square$

For the proof of Theorem 3.0.4, we need the following lemma.

**Lemma 3.0.8.** — *Let  $p$  satisfy Assumptions 3.0.1 and 3.0.3. Let  $\epsilon_0 > 0$  be small enough. Then there exists  $C' > 0$  such that, for  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ , and  $z_0 \in \Omega \setminus \Sigma$  such that  $\frac{\epsilon}{C} \leq d(z_0, \Sigma) \leq \epsilon$ ,  $d(z_0, \overline{\Omega}) \leq 2\epsilon$ ,  $\exists h_0(\epsilon) > 0$  such that for  $0 < h \leq h_0(\epsilon)$ ,*

$$\#(\text{Spec}(p^w) \cap D(z_0, \epsilon)) \leq C' \frac{V(3\epsilon)}{h}, \quad (3.0.24)$$

where  $V(\epsilon) = \text{vol}(p^{-1}(D(z_0, \epsilon)))$ .

*Proof.* — From now on we assume  $z \in D(z_0, 2\epsilon)$ . For  $\epsilon$  small enough,  $D(z_0, 3\epsilon) \subset \Omega$ .

Let  $K_\epsilon := k_\epsilon^w$ , where

$$k_\epsilon(x, \xi) = 2\epsilon \frac{p - z_0}{|p - z_0|} \chi_\epsilon(x, \xi), \quad (3.0.25)$$

$\chi_\epsilon \in C_c^\infty(p^{-1}(D(z_0, 3\epsilon) \cap \Sigma); [0, 1])$  such that  $\chi_\epsilon = 1$  on  $p^{-1}(D(z_0, \frac{5}{2}\epsilon) \cap \Sigma)$  (this is possible in view of Assumption 3.0.1).



Consider  $P_\epsilon := p^w + k_\epsilon^w$ . We have

$$\begin{aligned} |p + k_\epsilon - z| &\geq |p + k_\epsilon - z_0| - |z - z_0| \\ &\geq |p - z_0| + |k_\epsilon| - 2\epsilon \\ &\geq \begin{cases} \frac{\epsilon}{2}, & |p - z_0| \geq \frac{5}{2}\epsilon \\ \frac{\epsilon}{C} + 2\epsilon - 2\epsilon, & |p - z_0| \leq \frac{5}{2}\epsilon \end{cases} \end{aligned} \quad (3.0.26)$$

where we have used for the last equality that  $d(z_0, \Sigma) \geq \frac{\epsilon}{C}$ . Moreover,  $p - z$  is elliptic at infinity, so we even get (using the above estimate in a compact set)

$$|p + k_\epsilon - z| \geq \frac{\epsilon}{C} m. \quad (3.0.27)$$

Therefore, for  $\epsilon > 0$  fixed,  $p + k_\epsilon - z \in S(\mathbb{R}^2; m)$  is elliptic and  $(p + k_\epsilon - z)^w : H(m) \rightarrow L^2$  is invertible, if  $h$  is small enough depending on  $\epsilon$  (see [16]).

Using the semiclassical sharp Gårding inequality (for  $P^*P$ , see for example [12]), we have  $\forall z \in D(z_0, 2\epsilon)$

$$\|(P_\epsilon - z)^{-1}\| \leq \sup(|p + k_\epsilon - z|^{-1}) + C(\epsilon)h \leq \frac{\tilde{C}}{\epsilon}, \quad (3.0.28)$$

if  $h$  is small enough with respect to  $\epsilon$ . We have

$$p^w - z = (1 - K_\epsilon(P_\epsilon - z)^{-1})(P_\epsilon - z). \quad (3.0.29)$$

We are going to prove that for the trace class norm of  $K_\epsilon$

$$\|K_\epsilon\|_{tr} \leq \frac{\tilde{C}V(3\epsilon)\epsilon}{h}. \quad (3.0.30)$$

In fact we have for  $a \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\|Op^w(a)\|_{tr} \leq C \sum_{|\alpha| \leq 3} \|\partial_{(x,\xi)}^\alpha a\|_{L^1}, \quad (3.0.31)$$

where  $Op^w(a)$  denotes the Weyl-quantization of  $a$  for  $h = 1$  (see for example [12], theorem 9.4).  $k_\epsilon^w$  is unitarily equivalent to  $Op^w(k_{\epsilon,h})$ , where  $k_{\epsilon,h}(x, \xi) = k_\epsilon(\sqrt{h}x, \sqrt{h}\xi)$ . Therefore

$$\begin{aligned} \|k_\epsilon^w\|_{tr} &\leq C \sum_{|\alpha| \leq 3} \|\partial_{(x,\xi)}^\alpha k_{\epsilon,h}\|_{L^1} \\ &\leq C \sum_{|\alpha| \leq 3} h^{\frac{|\alpha|}{2}-1} \|\partial_{(x,\xi)}^\alpha k_\epsilon\|_{L^1}. \end{aligned} \quad (3.0.32)$$

We have

$$\|\partial_{(x,\xi)}^\alpha k_\epsilon\|_{L^1} \leq CV(3\epsilon)\epsilon^{1-|\alpha|}, \quad (3.0.33)$$

which yields (3.0.30) if  $h \leq h(\epsilon)$ . Therefore  $K_\epsilon(P_\epsilon - z)^{-1}$  is of trace class, with

$$\|K_\epsilon(P_\epsilon - z)^{-1}\|_{tr} \leq \|(P_\epsilon - z)^{-1}\| \|K_\epsilon\|_{tr} \leq \tilde{C} \frac{V(3\epsilon)}{h}. \quad (3.0.34)$$

Following [13], we can introduce

$$D(z) := \det(1 - K_\epsilon(P_\epsilon - z)^{-1}), \quad (3.0.35)$$

with (cf [13])

$$|D(z)| \leq \exp(\|K_\epsilon(P_\epsilon - z)^{-1}\|_{tr}) \leq e^{\frac{\tilde{C}V(3\epsilon)}{h}}. \quad (3.0.36)$$

The eigenvalues of  $p^w$  are given by the zeros of  $D(z)$ . We want to apply Jensen's formula (see for example [36]) to  $D(z)$  in  $D(z_0, 2\epsilon)$ , and need a lower bound on  $|D(z_0)| \neq 0$ , or equivalently an upper bound on  $|D(z_0)|^{-1}$ .

$p^w - z_0$  is invertible, and (with the same argument as before)

$$\|(p^w - z_0)^{-1}\|_{L^2 \rightarrow H(m)} \leq O\left(\frac{1}{\epsilon}\right). \quad (3.0.37)$$

Let  $\tilde{K}_\epsilon := K_\epsilon(P_\epsilon - z_0)^{-1}$ ,  $\|\tilde{K}_\epsilon\| = O(1) : L^2 \rightarrow L^2$ . Using (3.0.29), we see that  $1 - \tilde{K}_\epsilon$  is invertible and that

$$(1 - \tilde{K}_\epsilon)^{-1} = (P_\epsilon - z_0)(p^w - z_0)^{-1}, \quad (3.0.38)$$

which is  $O(1) : L^2 \rightarrow L^2$ .

We have (see [13])

$$|D(z_0)|^{-1} = |\det(1 - \tilde{K}_\epsilon)^{-1}|. \quad (3.0.39)$$

Using

$$(1 - \tilde{K}_\epsilon)^{-1} = 1 + \tilde{K}_\epsilon + (1 - \tilde{K}_\epsilon)^{-1} \tilde{K}_\epsilon^2, \quad (3.0.40)$$

we get

$$|D(z_0)|^{-1} \leq \exp \|\tilde{K}_\epsilon + (1 - \tilde{K}_\epsilon)^{-1} \tilde{K}_\epsilon^2\|_{tr}. \quad (3.0.41)$$

Since

$$\begin{aligned} \|\tilde{K}_\epsilon + (1 - \tilde{K}_\epsilon)^{-1} \tilde{K}_\epsilon^2\|_{tr} &\leq (1 + \|(1 - \tilde{K}_\epsilon)^{-1}\| \|\tilde{K}_\epsilon\|) \|\tilde{K}_\epsilon\|_{tr} \\ &\leq C \|\tilde{K}_\epsilon\|_{tr} \\ &\leq \|(P_\epsilon - z_0)^{-1}\| \|K_\epsilon\|_{tr} \leq \frac{C'V(3\epsilon)}{h}, \end{aligned} \quad (3.0.42)$$

we obtain

$$|D(z_0)| \geq e^{-\frac{C'V(3\epsilon)}{h}}. \quad (3.0.43)$$

Applying Jensen's formula to  $D(z)$  in  $D(z_0, 2\epsilon)$ , together with (3.0.36), (3.0.43) as for instance in [30], [31] finishes the proof.  $\square$

*Proof of Theorem 3.0.4.* — Let  $\{D(z_k, \epsilon), k \in K\}$  be a maximal family of disjoint open discs such that  $z_k \in \Omega \setminus \Sigma$  with  $\frac{\epsilon}{C} \leq d(z_k, \Sigma) \leq \epsilon$ ,  $d(z_k, \overline{\Omega}) \leq 2\epsilon$ ,  $k \in K$ .

Then  $W(\epsilon) \subset \bigcup_k D(z_k, 4\epsilon)$ , which we will prove by a contradiction argument.

Let  $z \in W(\epsilon)$  be such that  $|z - z_k| \geq 4\epsilon$ ,  $\forall k$ . Let  $z^* \in \partial\Sigma \cap \Omega$  fulfill  $|z - z^*| \leq \epsilon$ . Let  $\tilde{z} \in \Omega \setminus \Sigma$  be such that  $|\tilde{z} - z^*| \leq \epsilon$ ,  $d(\tilde{z}, \partial\Sigma) \geq \frac{\epsilon}{C}$ . Then  $\forall k$ ,

$$|\tilde{z} - z_k| \geq |z - z_k| - |z^* - z| - |\tilde{z} - z^*| \geq 2\epsilon, \quad (3.0.44)$$

and  $d(\tilde{z}, \partial\Sigma) \leq \epsilon$ ,  $d(\tilde{z}, \overline{\Omega}) \leq 2\epsilon$ . Hence  $\{D(z_k, \epsilon), k \in K\} \cup D(\tilde{z}, \epsilon)$  is a family of disjoint discs as above. This is in contradiction to the maximality of  $\{D(z_k, \epsilon), k \in K\}$ .

For  $\epsilon$  small enough,  $D(z_k, 12\epsilon) \subset \Omega$ . Using Lemma 3.0.8, we get

$$\#(\text{Spec}(p^w) \cap W(\epsilon)) \leq \frac{C}{h} \sum_k \text{vol}(p^{-1}(D(z_k, 12\epsilon))) . \quad (3.0.45)$$

Since  $d(z_k, z_j) \geq 2\epsilon$ ,  $\forall k \neq j$ ,  $k, j \in K$ , we see that  $\exists C > 0$  such that every  $z \in \bigcup_k D(z_k, 12\epsilon)$  is contained in at most  $C$  discs. Therefore, using also  $d(z_k, \Sigma) \geq \frac{\epsilon}{C}$ ,

$$\sum_k \text{vol}(p^{-1}(D(z_k, 12\epsilon))) \leq C \text{vol}(p^{-1}(\hat{W}(14\epsilon, 12\epsilon))) . \quad (3.0.46)$$

$\square$

*Proof of Corollary 3.0.5.* — Let  $P^\delta := p^w + \delta Q$ . Let  $P_\epsilon^\delta := p^w + \delta Q + k_\epsilon^w$ , where  $k_\epsilon$  is as in the proof of Lemma 3.0.8. For  $\delta < \frac{\epsilon}{D}$ ,  $D > 0$  big enough, we can (via a Neumann-series) construct an inverse of  $P_\epsilon^\delta - z$ ,  $z \in \Omega$ , of  $(\mathcal{L}(L^2)$ -)norm  $O(\frac{1}{\epsilon})$ . Furthermore, if  $z_0 \in \Omega \setminus \Sigma$  fulfills  $d(z_0, \partial\Sigma) \geq \frac{\epsilon}{C}$ , then using  $\delta < \frac{\epsilon}{D}$ ,  $D$  large enough,  $P^\delta - z_0$  is invertible, and the norm of its inverse is  $O(\frac{1}{\epsilon}) : L^2 \rightarrow H(m)$ . Therefore it is possible to generalize Lemma 3.0.8 for  $P^\delta$ . The last part of the proof of Theorem 3.0.4 also holds in this situation.  $\square$



# CHAPITRE 4

## CALCULS NUMÉRIQUES

Nous allons ici montrer des calculs numériques illustrant le théorème 0.1.5. Nous considérons  $P = hD_x + e^{ix}$  dans  $L^2(S^1)$  qui remplit bien l'hypothèse 0.1.1,  $p(x, \xi) := \xi + e^{ix}$ . Nous avons

$$\Sigma(p) = \{-1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\} . \quad (4.0.1)$$

Soit  $\mathcal{F} : L^2(S^1) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$  la transformation de Fourier discrète unitaire :

$$(\mathcal{F}u)(k) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} u(x) dx =: \hat{u}_k , u \in L^2(S^1) , \quad (4.0.2)$$

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{u})(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k e^{ikx} , \hat{u}_k \in l^2(\mathbb{Z}) . \quad (4.0.3)$$

Soit  $\hat{P} = \mathcal{F}P\mathcal{F}^{-1}$ ,  $\operatorname{Spec}(\hat{P}) = \operatorname{Spec}(P)$ . Nous avons

$$(\hat{P}\hat{u})_l = h l \hat{u}_l + \hat{u}_{l-1} . \quad (4.0.4)$$

Soit  $\Pi_N : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^{2N+1}$ ,  $\Pi_N a = (a_{-N}, \dots, a_N)$ ,  $a \in l^2(\mathbb{Z})$ . Soit

$$\hat{P}_N := \Pi_N \hat{P} \Pi_N = \begin{pmatrix} -hN & & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & hN \end{pmatrix} \in M_{2N+1}(\mathbb{C}) . \quad (4.0.5)$$

Pour générer  $\hat{P}_N$  en matlab nous utilisons la commande « sparse » : `sparse(k, l, s, n, m)` génère une matrice  $M \in M_{(n,m)}(\mathbb{C})$  avec  $M_{k_i l_i} = s_i$ .

Nous allons choisir une perturbation  $Q = \sum_j Q_j$  qui remplit les hypothèses 3, 4 et 5 pour des domaines  $\Gamma$  du théorème 0.1.5 contenus dans  $(-1, 1) \times (-i, i)$ . Pour ceci nous modifions d'abord légèrement la forme

de la perturbation (d'après une idée de C. Stolk) : plutôt que de tronquer avec  $\chi$  nous sommions tous les translatés de  $2\pi$  et obtenons ainsi un noyau

$$k_{Q_j}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \sum_{m,n} e^{\frac{i}{h}\varphi_j(x,y,m,n)}, \quad (4.0.6)$$

où

$$\begin{aligned} \varphi_j(x, y, m, n) = & \xi_j(x - x_j + 2\pi m) + \frac{i}{2}(x - x_j + 2\pi m)^2 \\ & - \eta_j(y - y_j + 2\pi n) + \frac{i}{2}(y - y_j + 2\pi n)^2. \end{aligned} \quad (4.0.7)$$

Soit  $\hat{Q} := \mathcal{F}Q\mathcal{F}^{-1} = \sum_j \hat{Q}_j$ . Nous écrivons  $(\hat{Q}\hat{u})_k =: \sum_l \hat{Q}_{kl}\hat{u}_l$ . Alors

$$\begin{aligned} (\hat{Q}_j)_{kl} = & \frac{1}{2\pi} \iint e^{-ikx+ily} k_{Q_j}(x, y) dx dy \\ = & \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\pi}2\pi} e^{-ikx_j+ily_j - \frac{i}{2h}((kh-\xi_j)^2 + (lh-\eta_j)^2)}, \end{aligned} \quad (4.0.8)$$

et nous restreignons de nouveau  $-N \leq k, l \leq N$ . Nous choisissons  $\rho_j = (x_j, \xi_j) = \rho_-(z_j)$  et  $\nu_j = (y_j, \eta_j) = \rho_+(z_j)$ , où  $z_j, j \in J$  est un réseau de points de maille  $\sqrt{\epsilon}$  dans  $(-1, 1) \times (-i, i)$ , et avons ainsi rempli les hypothèses 3, 4 et 5.

Considérons  $p(x_{\pm}, \xi_{\pm}) = z$  avec  $\pm \frac{1}{2i}\{p, \bar{p}\}(x_{\pm}, \xi_{\pm}) = -\cos x_{\pm}$ . Nous avons

$$\begin{aligned} x_- = \arcsin(\operatorname{Im} z) & \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \cos(x_-) > 0, \\ \xi_- = \operatorname{Re} z - \cos(x_-) & = \operatorname{Re} z - \sqrt{1 - (\operatorname{Im} z)^2}, \\ x_+ = \arcsin(\operatorname{Im} z) & \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \cos(x_+) < 0 \\ \xi_+ = \operatorname{Re} z - \cos(x_+) & = \operatorname{Re} z + \sqrt{1 - (\operatorname{Im} z)^2}. \end{aligned} \quad (4.0.9)$$

Soit  $z_{mn} = \sqrt{\epsilon}m + i\sqrt{\epsilon}n$ , où  $-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} < m, n < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$  sont des entiers (les indices  $m, n$  remplacent l'indice  $j$ ). Alors nous avons (en utilisant les conventions de matlab que  $\arcsin \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ )

$$\begin{aligned} x_{mn} = \arcsin(\sqrt{\epsilon}n), \quad \xi_{mn} & = \sqrt{\epsilon}m - (1 - (\sqrt{\epsilon}n)^2)^{\frac{1}{2}}, \\ y_{mn} = \pi - \arcsin(\sqrt{\epsilon}n), \quad \eta_{mn} & = \sqrt{\epsilon}m + (1 - (\sqrt{\epsilon}n)^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.0.10)$$

Au total nous pouvons écrire

$$\hat{Q}_{kl} = \sum_{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} < m, n < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \hat{Q}_{kl}(m, n), \quad (4.0.11)$$

où (en insérant (4.0.10) dans (4.0.8))

$$\hat{Q}_{kl}(m, n) \sim e^{-ik \arcsin(\sqrt{\epsilon n}) + il(\pi - \arcsin(\sqrt{\epsilon n})) - \frac{1}{2h} f(k, l, m, n)}, \quad (4.0.12)$$

avec

$$f(k, l, m, n) = (kh - \sqrt{\epsilon}m + (1 - (\sqrt{\epsilon}n)^2)^{\frac{1}{2}})^2 + (lh - \sqrt{\epsilon}m - (1 - (\sqrt{\epsilon}n)^2)^{\frac{1}{2}})^2. \quad (4.0.13)$$

$f$  est pair en  $n$ , donc

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{kl} &= e^{il\pi - \frac{1}{2h}(kh+1)^2 - \frac{1}{2h}(lh-1)^2} \\ &+ \sum_{0 < m, n < \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \left( e^{-ik \arcsin(\sqrt{\epsilon n}) + il(\pi - \arcsin(\sqrt{\epsilon n}))} + e^{-ik \arcsin(-\sqrt{\epsilon n}) + il(\pi - \arcsin(-\sqrt{\epsilon n}))} \right) \\ &\quad \left( e^{-\frac{1}{2h} f(k, l, m, n)} + e^{-\frac{1}{2h} f(k, l, -m, n)} \right). \end{aligned} \quad (4.0.14)$$

Pour générer  $\hat{Q}_{kl}$  en matlab, nous générons la matrice  $\hat{Q}_{kl}(m, n) \equiv A(m, n)$  et utilisons la commande « sum » :  $\text{sum}(\text{sum}(A)) = \sum_{m, n} A(m, n)$ . Le programme total sera un fichier nommé « opp.m ». Il suffira alors d'écrire « eig(opp(h, N, ε)) » dans le terminal pour calculer les valeurs propres de  $(\hat{P} + \delta\hat{Q})_N$ , et la commande « plot(eig(opp(h, N, ε)), '\*') » produira un graphe représentant les valeurs propres.

Pour  $N = \frac{1}{h} = 100$ ,  $\epsilon = 0.1$  nous obtenons la figure 1.

Pour comparer ce résultat avec le théorème 2, nous calculons le volume symplectique de  $\Gamma_{-+}(\Gamma)$  pour un domaine  $\Gamma = [-b, b] \times i[-c, c]$ ,  $0 < b, c < 1$ . Avec (4.0.9) nous avons

$$\begin{aligned} \int_{z \in \Gamma} (d\xi_- \wedge dx_- - d\xi_+ \wedge dx_+) &= \int_{\substack{x \in [-b, b] \\ y \in [-c, c]}} \left( d(x + \sqrt{1 - y^2}) \wedge d(\arcsin(y)) \right. \\ &\quad \left. - d(x - \sqrt{1 - y^2}) \wedge d(-\arcsin(y)) \right) \\ &= 2b \int_{-\arcsin(c)}^{\arcsin(c)} 2d\theta \\ &= 8b \arcsin(c). \end{aligned} \quad (4.0.15)$$

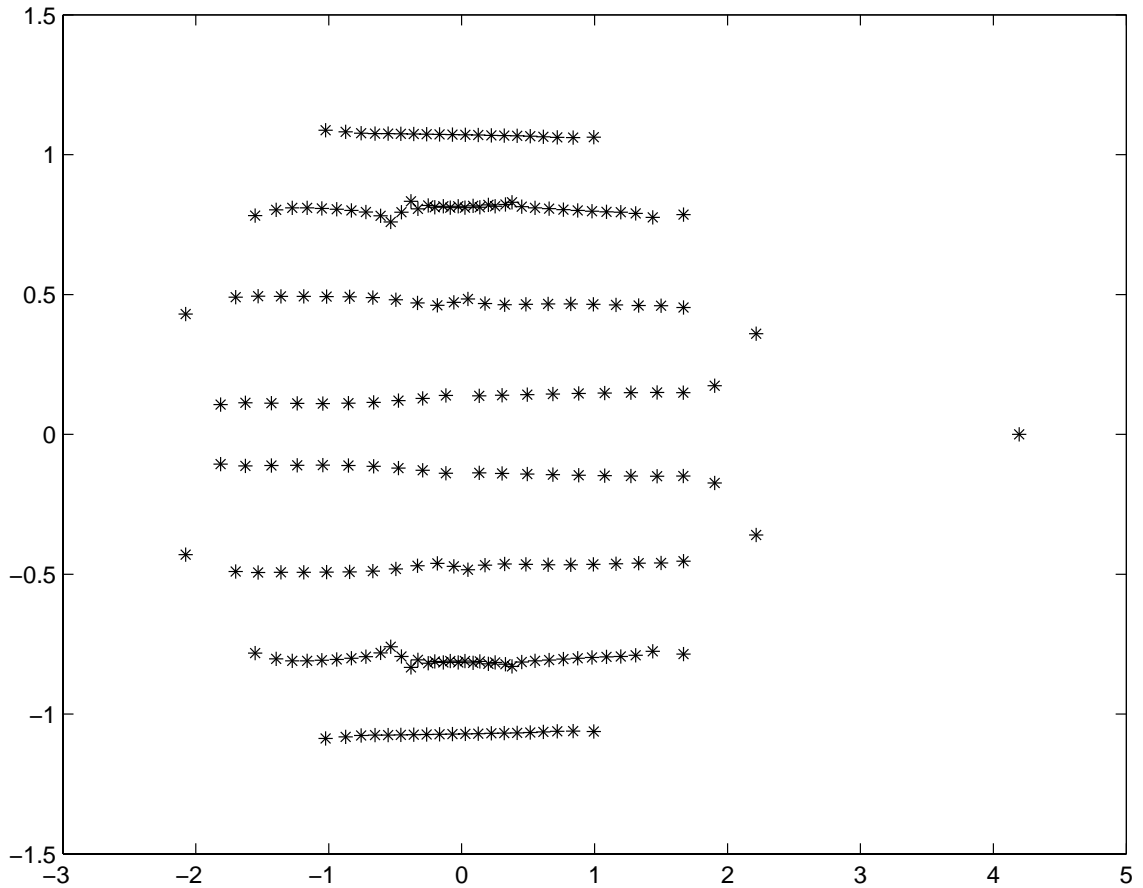


FIGURE 1. Valeurs propres d'un discrétisé de  $hD_x + e^{ix} + \delta Q$  pour  $N = \frac{1}{h} = 100$ ,  $\epsilon = \frac{1}{10}$ .

Nous posons  $b = \frac{1}{2}$  et prenons  $c$  variable. Ceci nous a permis de tracer dans la figure 2 l'enveloppe de taille  $\frac{\sqrt{c}}{2\pi h}$  autour de  $\frac{1}{2\pi h}|\Gamma_{-+}(\Gamma)|$  en fonction de  $c$ . Nous avons compté le nombre de valeurs propres observé dans la figure 1 pour  $c = \frac{1}{10}$ ,  $c = \frac{1}{4}$  et  $c = \frac{1}{2}$  et les avons indiqué sur la figure 2 ; nous obtenons une bonne coïncidence.



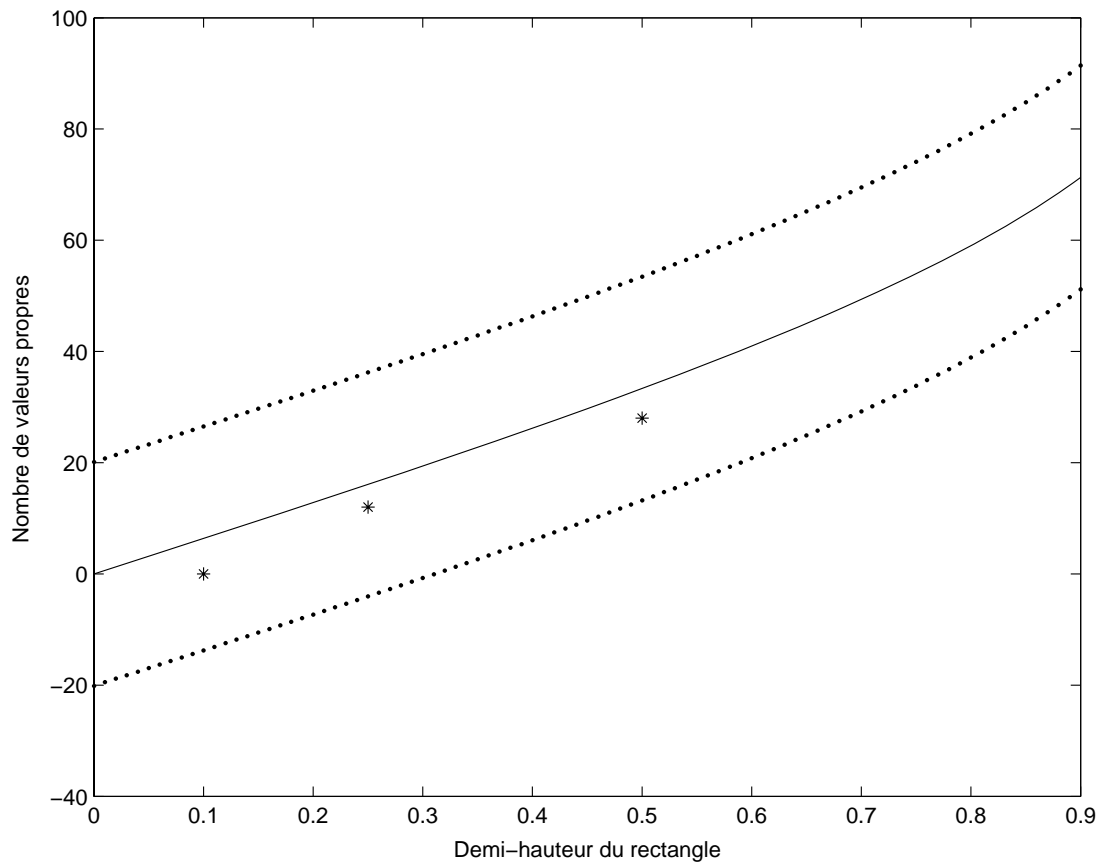


FIGURE 2. Nombre de valeurs propres dans un rectangle centré en 0 de largeur 1 et de hauteur variable : enveloppe théorique, valeurs numériques.

Fichier matlab :

```

function Y = opp(h, N, u)
d = []; for j = 2 : 2 * N, d = [d, j]; end;
k = [1d2 * N + 1d2 * N + 1];
l = [1d2 * N + 11d];
f = []; for j = -N : N, f = [f, j]; end;
a = []; for j = 1 : 2 * N, a = [a, 1]; end;
s = [h * fa];
P = sparse(k, l, s, 2 * N + 1, 2 * N + 1);
for k = -N : N,
    for l = -N : N, A = []; m = 1; n = 1;
        while m * sqrt(u) < 1,
            while n * sqrt(u) < 1,
                A(m, n) = (exp(-i * k * asin(sqrt(u) * n) + i * l * (pi - asin(sqrt(u) * n)))
                    + exp(-i * k * asin(sqrt(u) * (-n)) + i * l * (pi - asin(sqrt(u) * (-n)))))
                    * (exp((-1)/(2 * h)) * ((k * h - sqrt(u) * m + (1 - u * (n^2))^(1/2))^2
                        + (l * h - sqrt(u) * m - (1 - u * (n^2))^(1/2))^2))
                    + exp((-1)/(2 * h)) * ((k * h + sqrt(u) * m + (1 - u * (n^2))^(1/2))^2
                        + (l * h + sqrt(u) * m + (1 - u * (n^2))^(1/2))^2));
                m = m + 1; n = n + 1;
            end;
        end;
        Q(k + N + 1, l + N + 1) = exp(i * l * pi - (1/(2 * h)) * ((k * h + 1)^2 + (l * h - 1)^2))
            + sum(sum(A));
    end;
end;
Y = P + (sqrt(h/pi)/(2 * pi)) * exp((-u)/h) * Q;

```

# APPENDICE A

## ESQUISSE D'UNE PREUVE ALTERNATIVE DE LA DÉCROISSANCE EXPONENTIELLE DE $E_{-+}$ DANS LE CADRE ANALYTIQUE

Nous donnons ici une esquisse de preuve alternative du fait que  $E_{-+} = O(e^{-\frac{1}{\sigma\hbar}})$  dans le cadre de la proposition 2.3.15.

### A.1. Transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer

Nous commençons par rappeler quelques généralités sur les transformations de FBI « de type Bargmann » d'après [28], où l'on peut également retrouver les preuves.

Soit  $\phi(x, y)$  une forme quadratique (holomorphe) sur  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  telle que

$$\det \phi''_{xy} \neq 0, \quad \text{Im } \phi''_{yy} > 0. \quad (\text{A.1.1})$$

Soit

$$\Phi(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}} (-\text{Im } \phi(x, y)). \quad (\text{A.1.2})$$

$\Phi$  est strictement plurisousharmonique (st.plsh.). En tant que supremum de fonctions harmoniques, elle est sousharmonique; le « strictement » va être prouvé plus loin.

Nous introduisons, pour  $u \in \mathcal{S}'$ , la transformation de FBI

$$Tu(x; h) := Ch^{-\frac{3}{4}} \int e^{\frac{i}{h}\phi(x,y)} u(y) dy. \quad (\text{A.1.3})$$

**Lemme A.1.1.** —  $Tu(x; h)$  est holomorphe en  $x$ .  $\forall u \in \mathcal{S}'$ , il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$|Tu(x; h)| = O_h(1) \langle x \rangle^{N_0} e^{\frac{1}{h}\Phi(x)}. \quad (\text{A.1.4})$$

Pour  $u \in \mathcal{S}$ , nous avons :

$$|Tu(x; h)| = O_{h,N}(1) \langle x \rangle^{-N} e^{\frac{1}{h}\Phi(x)}, \quad \forall N \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.1.5})$$

*Démonstration.* — L'holomorphie découle de l'holomorphie de  $\phi$ . Pour  $u \in \mathcal{S}$ , nous observons que

$$\langle x \rangle^N e^{\frac{i}{\hbar}\phi(x,y)} = \langle (\phi''_{xy})^{-1}(hD_y - \phi''_{yy}y) \rangle^N e^{\frac{i}{\hbar}\phi(x,y)}, \quad (\text{A.1.6})$$

ce qui implique l'estimation ci-dessus en intégrant par parties.  $\square$

Soit

$$L^2_{\Phi} := L^2(\mathbb{C}, e^{-\frac{2\Phi}{\hbar}} \mathcal{L}(dx)) \quad (\text{A.1.7})$$

et soient  $\|\cdot\|_{\Phi}$  sa norme naturelle,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Phi}$  son produit scalaire naturel. Soit  $H_{\Phi} := \text{Hol}(\mathbb{C}) \cap L^2_{\Phi}$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{\Phi}$  et du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Phi}$ .

**Proposition A.1.2 (Unitarité).** — *Il existe une constante  $C$  telle que  $T$  se prolonge en une application unitaire  $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow H_{\Phi}$ .*

*Démonstration.* — Voir [28].  $\square$

**Lemme A.1.3.** —  *$T(\mathcal{S})$  est dense dans  $H_{\Phi}$ .*

Soit

$$\kappa_T : (y, -\phi'_y(x, y)) \mapsto (x, \phi'_x(x, y)) \quad (\text{A.1.8})$$

la transformation canonique complexe associée à  $T$ .

$$\kappa_T(\mathbb{R}^2) = \Lambda_{\Phi} := \left\{ \left( x, \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right); x \in \mathbb{C} \right\} \quad (\text{A.1.9})$$

est une variété IR (symplectique par rapport à  $\text{Re } \sigma$ , lagrangienne par rapport à  $\text{Im } \sigma$ , où  $\sigma = d\xi \wedge dx$  désigne la forme symplectique sur  $\mathbb{C}^2$ ) en tant qu'image de  $\mathbb{R}^2$  sous une transformation canonique. Ceci implique que  $\Phi$  est strictement plsh., car

$$0 \neq \text{Re } \sigma|_{\Lambda_{\Phi}} = \frac{2}{i} \Phi''_{x\bar{x}} d\bar{x} \wedge dx. \quad (\text{A.1.10})$$

## A.2. Opérateurs

Soit  $S(\Lambda_{\Phi}, 1)$  l'espace des fonctions  $C^{\infty}$  sur  $\Lambda_{\Phi}$  dont toutes les dérivées sont bornées.

Soit, pour  $\Omega_{\Phi} \subset \Lambda_{\Phi}$  un ouvert,  $S(\Omega_{\Phi}, 1)$  l'espace des fonctions  $C^{\infty}$  sur  $\Omega_{\Phi}$ , dont toutes les dérivées sont bornées (uniformément sur tout  $U \subset \Omega_{\Phi}$  tel que  $\text{dist}(\bar{U}, \partial\Omega_{\Phi}) \geq \frac{1}{C}$  pour un  $C > 0$ ).

Soit pour  $u \in T(\mathcal{S})$ ,  $q \in S(\Lambda_{\Phi}; 1)$ ,

$$q^w u(x) := \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\Gamma} e^{\frac{i}{\hbar}(x-y)\theta} q\left(\frac{x+y}{2}, \theta\right) u(y) dy d\theta. \quad (\text{A.2.11})$$

où  $\Gamma$  est le contour donné par  $\theta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left( \frac{x+y}{2} \right)$ .

**Lemme A.2.1.** —  $q^w$  est bien défini  $T(\mathcal{S}) \rightarrow T(\mathcal{S})$  et  $T(\mathcal{S}') \rightarrow T(\mathcal{S}')$ .

*Démonstration.* — Nous avons

$$\operatorname{Re} \left( -\Phi(x) + \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left( \frac{x+y}{2} \right) (x-y) + \Phi(y) \right) = 0, \quad (\text{A.2.12})$$

en utilisant le développement de  $\Phi(x)$ ,  $\Phi(y)$  autour du point  $\frac{x+y}{2}$  et que  $\Phi$  est quadratique. Pour  $u \in T(\mathcal{S})$ , l'intégrale est donc convergente.

Pour l'holomorphie, observons que le noyau  $k$  de  $q^w$  remplit  $\partial_{\bar{x}} k(x, y) = \partial_{\bar{y}} k(x, y)$ , donc par intégration par partie et en utilisant l'holomorphie de  $u$  nous voyons que  $q^w u$  est holomorphe.

Pour voir que l'image de  $T(\mathcal{S})$  sous  $q^w$  sera dans  $T(\mathcal{S})$ , nous écrivons

$$\langle x \rangle^M \leq C \langle x-y \rangle^M \langle y \rangle^M. \quad (\text{A.2.13})$$

$\langle y \rangle^M u \in T(\mathcal{S})$  et pour estimer le noyau nous faisons une déformation de contour. Nous suivons ici [28].

Soit  $\tilde{q} \in C^\infty$  une extension presque analytique de  $q$  à support dans un voisinage tubulaire de  $\Lambda_\Phi$  (c'est à dire que  $\partial_{\bar{X}} \tilde{q}(X + \delta) = O(|\delta|^N)$   $\forall N \in \mathbb{N}$ ,  $X \in \Lambda_\Phi$ ,  $\delta \in \Lambda_\Phi^\perp$ ) avec toutes ses dérivées bornées dans ce voisinage.

Alors nous faisons la déformation de contour

$$\Gamma \rightarrow \Gamma_t : \theta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left( \frac{x+y}{2} \right) + it \overline{(x-y)}, t \in [0, 1]. \quad (\text{A.2.14})$$

Nous avons

$$q^w u(x) = Ru(x) + \frac{1}{2\pi h} \int_{\Gamma_1} e^{\frac{i}{h}(x-y)\theta} \tilde{q} \left( \frac{x+y}{2}, \theta \right) u(y) dy d\theta. \quad (\text{A.2.15})$$

Le noyau du deuxième terme a la décroissance voulue. Il nous reste à estimer le noyau de

$$Ru(x) = \frac{1}{2\pi h} \int_{\Gamma_t \times t, t \in [0, 1]} e^{\frac{i}{h}(x-y)\theta} u(y) \bar{\partial} \left( \tilde{q} \left( \frac{x+y}{2}, \theta \right) \right) \wedge dy \wedge d\theta. \quad (\text{A.2.16})$$

Sur  $\Gamma_t \times t, t \in [0, 1]$  nous avons en insérant (A.2.14) :

$$d\theta = -it d\bar{y} + O(1) d\bar{y} + O(1) dy + i \overline{(x-y)} dt. \quad (\text{A.2.17})$$

En développant  $\bar{\partial} \left( \tilde{q} \left( \frac{x+y}{2}, \theta \right) \right) \wedge dy \wedge d\theta$ , nous voyons que les termes qui ne s'annulent pas doivent comporter un facteur  $dt$ . Donc cette forme peut

être écrite comme  $|x - y|O(1)\mathcal{L}(dy)dt$ , et nous avons

$$|Ru(x)| \leq \frac{1}{2\pi h} \int_0^1 dt \int h^{-n} e^{\frac{1}{h}(-t|x-y|^2 + \Phi(x) - \Phi(y))} (t|x-y|)^N |x-y|u(y)\mathcal{L}(dy). \quad (\text{A.2.18})$$

Si  $K : L_{\Phi_1}^2 \rightarrow L_{\Phi_2}^2$  a le noyau  $k(x, y)$ , alors nous appelons

$$e^{-\frac{\Phi_2(x)}{h}} k(x, y) e^{\frac{\Phi_1(y)}{h}} \quad (\text{A.2.19})$$

son noyau réduit. Si c'est (comme ici) un noyau de convolution, alors sa norme  $L^1$  majore la norme  $\|K\|_{L_{\Phi_1}^2 \rightarrow L_{\Phi_2}^2}$ . L'intégrale en  $y$  dans (A.2.18) définit donc un opérateur  $L_{\Phi}^2 \rightarrow L_{\Phi}^2$  de norme

$$O(1)h^{-n} \int e^{-\frac{t}{h}|y|^2} t^N |y|^{N+1} \mathcal{L}(dy) = O_N(1)t^{\frac{N-1}{2}-1} h^{\frac{N+1}{2}}, \quad (\text{A.2.20})$$

et nous avons aussi

$$O(1)h^{-n} \int e^{-\frac{t}{h}|y|^2} t^N |y|^{N+1} \langle y \rangle^M \mathcal{L}(dy) \leq O_N(1)t^{\frac{N-1}{2}-1-M} h^{\frac{N+1}{2}}, \quad (\text{A.2.21})$$

ce qui est  $O(h^\infty)$ .

Nous avons donc :  $\langle x \rangle^M p^w u = O_h(1)$  dans  $H_\Phi$ ,  $\forall M$ ,  $u \in T(\mathcal{S})$ , donc au total  $p^w u \in T(\mathcal{S})$ .

Le cas  $T(\mathcal{S}') \rightarrow T(\mathcal{S}')$  peut se traiter de manière similaire.  $\square$

Nous avons aussi l'analogie du théorème de Calderon-Vaillancourt :

**Proposition A.2.2.** —  $q^w$  est bien-défini et borné (uniformément par rapport à  $h$ )  $H_\Phi \rightarrow H_\Phi$ .

*Démonstration.* — Nous obtenons le résultat par déformation de contour.  $\square$

**Proposition A.2.3 (Invariance métaplectique)**

Soit  $\tilde{q} \in S(\mathbb{R}^2; 1)$ ,  $q := \tilde{q} \circ \kappa_T^{-1} \in S(\Lambda_\Phi; 1)$ . Alors

$$T \circ \tilde{q}^w = q^w \circ T. \quad (\text{A.2.22})$$

*Démonstration.* — Soit d'abord  $\tilde{q} \in \mathcal{S}$ . Soit  $l(y, \eta) := y^*y + \eta^*\eta$  une forme linéaire réelle sur  $\mathbb{R}^2$  (donc  $(y^*, \eta^*) \in \mathbb{R}^2$ ), et soit  $m \circ \kappa_T = l$ .  $m$  est une forme linéaire réelle sur  $\Lambda_\Phi$ . L'opérateur  $l(y, hD) = l^w$  est essentiellement autoadjoint sur  $\mathcal{S}$ . Nous avons

$$e^{-\frac{i}{h}l(x, hD)} = (e^{-\frac{i}{h}l(x, \xi)})^w. \quad (\text{A.2.23})$$

La même chose est valable du côté des transformés FBI. Ensuite remarquons que

$$m(x, hD) \circ T = T \circ l(y, hD) , \quad (\text{A.2.24})$$

ce qui implique que

$$e^{-\frac{i}{h}m(x, hD)} \circ T = T \circ e^{-\frac{i}{h}l(y, hD)} . \quad (\text{A.2.25})$$

Nous utilisons maintenant la formule d'inversion de Fourier

$$\tilde{q}(y, \eta) = \frac{1}{(2\pi h)^2} \iint e^{\frac{i}{h}l(y, \eta)} \hat{q}(y^*, \eta^*) dy^* d\eta^* , \quad (\text{A.2.26})$$

qui reste vraie au niveau des opérateurs avec convergence uniforme dans  $\mathcal{L}(L^2)$ . En effectuant un changement de variables  $(x^*, \xi^*) = \kappa_T^{-1}((y^*, \eta^*))$  et en utilisant (A.2.25), nous obtenons une expression du type (A.2.26) sur  $\Lambda_\Phi$ . Donc  $\exists q \in S(\Lambda_\Phi, 1)$  tel que  $T \circ \tilde{q}^w = q^w \circ T$ , et  $q = \tilde{q} \circ \kappa_T^{-1}$ . Avec la continuité de l'application  $S(\mathbb{R}^2, 1) \ni \tilde{q} \mapsto \tilde{q}^w$  (cf. lemme 2.1.5), nous pouvons élargir notre résultat à  $\tilde{q} \in S(\mathbb{R}^2, 1)$ .  $\square$

**Proposition A.2.4 (Composition).** — *Il est possible de définir une application bilinéaire*

$$\begin{aligned} S(\Lambda_\Phi, 1) \times S(\Lambda_\Phi, 1) &\rightarrow S(\Lambda_\Phi, 1) \\ (p_1, p_2) &\mapsto p_1 \# p_2 \end{aligned} \quad (\text{A.2.27})$$

par prolongement continu de l'application (bilinéaire)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Lambda_\Phi) \times \mathcal{S}(\Lambda_\Phi) &\rightarrow \mathcal{S}(\Lambda_\Phi) \\ (p_1, p_2) &\mapsto p_1 \# p_2 , \end{aligned} \quad (\text{A.2.28})$$

donnée par

$$(p_1 \# p_2)(x, \xi) := e^{\frac{i}{2h}\sigma(hD_x, hD_\xi; hD_y, hD_\eta)} (p_1(x, \xi) p_2(y, \eta)) \Big|_{y=x, \eta=\xi} . \quad (\text{A.2.29})$$

Nous avons l'équivalence asymptotique

$$(p_1 \# p_2)(x, \xi) \sim \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left( \left( \frac{ih}{2} (D_\xi D_y - D_x D_\eta) \right)^k p_1(x, \xi) p_2(y, \eta) \right) \Big|_{y=x, \eta=\xi} , \quad (\text{A.2.30})$$

qui nous permet aussi de définir une composition asymptotique sur les espaces locaux  $S(\Omega_\Phi, 1)$ .

*Démonstration.* — Il suffit de remarquer que la formule de composition est invariante sous transformation métaplectique. En fait,  $\kappa_T$  est une transformation canonique, donc  $(\kappa_T)_* \sigma = \sigma$ .  $\square$

Soit  $\lambda_\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \Lambda_\Phi$ ,  $\lambda_\Phi(x) := (x, \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x))$ .

**Proposition A.2.5 (Produit scalaire).** — Soit  $q \in S(\Lambda_\Phi; 1)$ . Alors  $\forall u, v \in H_\Phi$  nous avons

$$\langle q^w u, v \rangle_\Phi = \langle (q \circ \lambda_\Phi) u, v \rangle_\Phi + O(h) \|u\|_\Phi \|v\|_\Phi . \quad (\text{A.2.31})$$

Pour la preuve, nous énonçons (sans preuve, voir [28]) le

**Lemme A.2.6 (Résolution de l'identité).** — Pour  $u \in H_\Phi$ , nous avons

$$u(x) = \frac{1}{2\pi h} \int_{\theta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\frac{x+y}{2})} e^{\frac{i}{h}(x-y)\theta} u(y) dy d\theta . \quad (\text{A.2.32})$$

*Preuve de la proposition A.2.5.* — Soit  $\xi(x) := \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x)$ . Considérons le développement de Taylor de  $q$  :

$$\begin{aligned} q\left(\frac{x+y}{2}, \theta\right) &= q(x, \xi(x)) + q'_x(x, \xi(x))\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ &\quad + q'_\xi(x, \xi(x))(\theta - \xi(x)) + r(x, y, \theta; h) . \end{aligned} \quad (\text{A.2.33})$$

Nous avons :

$$\theta - \xi(x) = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\left(\frac{y-x}{2}\right) = O(|x-y|) , \quad (\text{A.2.34})$$

donc  $r(x, y, \theta; h) = O(|x-y|^2)$ . Après déformation de contour, l'opérateur associé à  $r$  a le noyau réduit  $H_\Phi \rightarrow L_\Phi^2$

$$e^{-\frac{1}{c\hbar}|x-y|^2} O(|x-y|^2) \frac{1}{h} + O(h^\infty) , \quad (\text{A.2.35})$$

donc l'opérateur correspondant est de norme  $O(h)$ .

Ensuite, pour  $u \in T(\mathcal{S})$ , nous avons avec la résolution de l'identité :

$$q'_x(x, \xi(x)) \int e^{\frac{i}{h}(x-y)\theta} \left(\frac{x-y}{2}\right) u(y) dy d\theta = 0 . \quad (\text{A.2.36})$$

Nous obtenons, toujours pour  $u \in T(\mathcal{S})$  et avec la résolution de l'identité :

$$\begin{aligned} \langle q^w u, v \rangle_\Phi &= \langle (q \circ \lambda_\Phi) u, v \rangle + O(h) \|u\|_\Phi \|v\|_\Phi \\ &\quad + \int q'_\xi(x, \xi(x)) ((hD_x - \xi(x))u(x)) \overline{v(x)} e^{-\frac{2}{h}\Phi(x)} \mathcal{L}(dx) . \end{aligned} \quad (\text{A.2.37})$$



En intégrant par parties dans le dernier terme, nous voyons qu'il est  $O(h)\|u\|_{\Phi}\|v\|_{\Phi}$ , car  $\bar{v}$  est antiholomorphe et  $(hD_x - \frac{2}{i}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x))e^{-\frac{2}{h}\Phi(x)} = 0$ . Finalement, par densité de  $T(\mathcal{S})$  dans  $H_{\Phi}$ , nous obtenons le résultat.  $\square$

**Lemme A.2.7 (Lemme de la diagonale).** — Soit  $p^w$  l'opérateur réalisé avec le contour  $\theta = \frac{2}{i}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(\frac{x+y}{2}) + i(x-y)$ . Soient  $\psi_1, \psi_2 \in C_b^{\infty}(\mathbb{C})$  tels que  $\exists C > 0$  avec  $\text{dist}(\text{supp } \psi_1, \text{supp } \psi_2) \geq \frac{1}{C}$ . Alors

$$\psi_1 p^w \psi_2 = O(h^{\infty}) : H_{\Phi} \rightarrow L_{\Phi}^2 . \quad (\text{A.2.38})$$

*Démonstration.* — Nous obtenons l'estimation pour le noyau réduit de  $\psi_1 p^w \psi_2 : H_{\Phi} \rightarrow L_{\Phi}^2$  :

$$O\left(\frac{1}{h}\right)\psi_1(x)e^{-\frac{1}{C_h}|x-y|^2}\psi_2(y) . \quad (\text{A.2.39})$$

En utilisant  $\text{dist}(\text{supp } \psi_1, \text{supp } \psi_2) \geq \frac{1}{C}$ , ceci est  $O(e^{-\frac{1}{Ch}})$ .  $\square$

### A.3. Fonctions d'ordre, espaces de Sobolev

Soit  $m \in C^{\infty}$  une fonction d'ordre sur un sous-espace réel-linéaire de  $\mathbb{C}^2$ , c'est à dire que  $m > 0$  et

$$m(X) \leq C\langle X - Y \rangle^N m(Y) . \quad (\text{A.3.40})$$

Remarquons que si  $\tilde{m}$  est une fonction d'ordre sur  $\mathbb{R}^2$ , et que  $m \circ \kappa_T = \tilde{m}$ , alors (par linéarité de  $\kappa_T$ )  $m$  est une fonction d'ordre sur  $\Lambda_{\Phi}$ .

Soit, pour  $m$  une fonction d'ordre sur  $\Lambda_{\Phi}$ ,  $S(\Lambda_{\Phi}, m)$  l'espace des fonctions  $C^{\infty}$  sur  $\Lambda_{\Phi}$ , dont toutes les dérivées sont bornées par  $m$ .

Considérons, pour  $q \in S(\Lambda_{\Phi}; m)$ ,  $u \in T(\mathcal{S})$ ,

$$q^w u(x) := \frac{1}{2\pi h} \int_{\Gamma} e^{\frac{i}{h}(x-y)\theta} q\left(\frac{x+y}{2}, \theta\right) u(y) dy d\theta . \quad (\text{A.3.41})$$

**Lemme A.3.1.** —  $q^w$  est bien défini  $T(\mathcal{S}) \rightarrow T(\mathcal{S})$  et  $T(\mathcal{S}') \rightarrow T(\mathcal{S}')$ .

*Démonstration.* — De manière analogue qu'au paragraphe précédant, nous obtenons ce résultat par déformation de contour. En fait, il sera possible de trouver une extension presque analytique  $\tilde{q}$  telle que toutes ses dérivées soient bornées par  $m$  (évalué au point de  $\Lambda_{\Phi}$  correspondant). En utilisant que  $m(X) \leq C\langle X - Y \rangle^N m(Y)$ , nous devons estimer des noyaux réduits avec des facteurs  $\langle x - y \rangle^{N_0}$  supplémentaires, ce qui se fait de manière strictement analogue.  $\square$

Nous rappelons sans preuve qu'il est possible de définir une composition  $S(\Lambda_\Phi, m_1) \times S(\Lambda_\Phi, m_2) \rightarrow S(\Lambda_\Phi, m_1 m_2)$ , et que l'invariance métaplectique reste valable :

$$\tilde{q} \in S(\mathbb{R}^2, m), q \circ \kappa_T = \tilde{q} \Rightarrow q^w \circ T = T \circ \tilde{q}^w . \quad (\text{A.3.42})$$

Soit

$$L_{\Phi, m}^2 := L^2(\mathbb{C}, m^2|_{\Lambda_\Phi} e^{-\frac{2\Phi}{h}} \mathcal{L}(dx)) , \quad (\text{A.3.43})$$

et soit  $\|\cdot\|_{\Phi, m}$  la norme induite. Soit  $H_{\Phi, m} = \text{Hol}(\mathbb{C}) \cap L_{\Phi, m}^2$  muni de la même norme.

**Proposition A.3.2 (Produit scalaire).** — Soit  $q \in S(\Lambda_\Phi; m)$ . Alors pour  $u \in T(\mathcal{S})$ ,  $v \in H_\Phi$  nous avons

$$\langle q^w u, v \rangle_\Phi = \langle (q \circ \lambda_\Phi) u, v \rangle_\Phi + O(h) \|u\|_{\Phi, m} \|v\|_\Phi . \quad (\text{A.3.44})$$

*Démonstration.* — En adaptant la preuve du paragraphe précédent, nous obtenons le résultat.  $\square$

Remarquons qu'après avoir montré que  $q^w : H_{\Phi, m} \rightarrow H_\Phi$ , la proposition reste valable (par densité) pour  $u \in H_{\Phi, m}$ .

**Proposition A.3.3.** — Soit  $\tilde{m}$  une fonction d'ordre sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $m \circ \kappa_T = \tilde{m}$ .  $T$  est borné (de norme  $C_m$ ) et bijectif  $H(\tilde{m}) \rightarrow H_{\Phi, m}$ .

*Démonstration.* — Soit  $u \in \mathcal{S} \subset H(\tilde{m})$ . Alors il existe  $v \in \mathcal{S}$  tel que  $u = \tilde{n}^w v$ ,  $\tilde{n}^w = (\tilde{m}^w)^{-1}$ . L'invariance métaplectique implique que si  $n \circ \kappa_T = \tilde{n}$ , alors

$$Tu = n^w Tv . \quad (\text{A.3.45})$$

De plus,  $\|m^w Tu\|_\Phi = \|v\|_{L^2} = \|u\|_{\tilde{m}}$ . Or

$$\begin{aligned} \|m^w Tu\|_\Phi^2 &= \langle m^2|_{\Lambda_\Phi} Tu, Tu \rangle_\Phi + O(h) \|Tu\|_{\Phi, m}^2 \\ &= (1 + O(h)) \|Tu\|_{\Phi, m}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.3.46})$$

donc les normes sont équivalentes pour  $u \in \mathcal{S}$ ,  $h$  assez petit. Par densité de  $\mathcal{S}$  dans  $H(\tilde{m})$ , nous avons l'affirmation et  $T(H(\tilde{m}))$  est isomorphe à  $H_{\Phi, m}$ .  $\square$

**Lemme A.3.4.** — Si  $p \in S(\Lambda_\Phi; m)$ , alors  $p^w : H_{\Phi, m} \rightarrow H_\Phi$  est bien défini et borné.

*Démonstration.* — Soit  $u \in H_{\Phi, m}$ ; alors il existe  $v \in L^2(\mathbb{R})$  tel que (avec les mêmes notations que ci-dessus)  $u = T\tilde{n}^w v$ . Avec l'invariance métaplectique nous avons

$$p^w u = T\tilde{p}^w \tilde{n}^w v, \quad (\text{A.3.47})$$

où  $\tilde{p} = p \circ \kappa_T \in S(\mathbb{R}^2; \tilde{m})$ . Or  $\tilde{p}\#\tilde{n} \in S(\mathbb{R}^2; 1)$ , donc son quantifié est borné  $L^2 \rightarrow L^2$ . L'expression à droite dans (A.3.47) sera donc un élément de  $H_{\Phi}$ , de norme  $C\|v\| = \tilde{C}\|u\|_{\Phi, m}$ .  $\square$

**Corollaire A.3.5.** — Si  $p \in S(\Lambda_{\Phi}; m)$ , alors  $p^w : H_{\Phi, mm_1} \rightarrow H_{\Phi, m_1}$  est bien défini et borné.

*Démonstration.* — Il suffit de composer partout avec  $m_1$ .  $\square$

Finalement nous obtenons

**Lemme A.3.6 (Lemme de la diagonale).** — Soit  $p^w$  l'opérateur réalisé avec le contour  $\theta = \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left( \frac{x+y}{2} \right) + i \overline{(x-y)}$ . Soient  $\psi_1, \psi_2 \in C_b^\infty$  tels que  $\exists C > 0$  avec  $\text{dist}(\text{supp } \psi_1, \text{supp } \psi_2) \geq \frac{1}{C}$ . Alors

$$\psi_1 p^w \psi_2 = O(h^\infty) : H_{\Phi, mm_1} \rightarrow L_{\Phi, m_1}^2. \quad (\text{A.3.48})$$

La preuve est strictement analogue qu'avant.

#### A.4. Quasimodes

Nous allons considérer les transformés de FBI des solutions BKW  $e_{\pm}$  de la section 2.

**Lemme A.4.1.** — Soit  $\hat{x}_+ := \Pi_x(\kappa_T(\rho_+))$ . Pour  $x$  dans un voisinage assez petit de  $\hat{x}_+$ ,

$$Te_+(x; h) \sim h^{-\frac{1}{2}} \left( \sum_{k \geq 0} d_{+,k}(x) h^k \right) e^{\frac{i}{h} \psi_+(x)}, \quad (\text{A.4.49})$$

avec  $d_{+,0}(\hat{x}_+) \neq 0$ , et il existe  $C > 0$  tel que (dans ce voisinage)

$$\text{Im } \psi_+(x) \sim -\Phi(x) + \frac{1}{C} |x - \hat{x}_+|^2. \quad (\text{A.4.50})$$

Pour  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ ,  $\chi = 1$  près de  $\hat{x}_+$ , et pour toute fonction d'ordre  $m$  sur  $\Lambda_{\Phi}$ , nous avons

$$\|(1 - \chi)Te_+(x)\|_{\Phi, m} = O(h^\infty). \quad (\text{A.4.51})$$

*Démonstration.* — Nous omettons d'expliciter la dépendance en  $z$ .

$$e^{-\frac{1}{h}\Phi(x)}Te_+(x; h) = \alpha_h \int e^{\frac{i}{h}(\phi(x,y)+i\Phi(x)+\varphi_+(y))}c_+(y, z; h)dy . \quad (\text{A.4.52})$$

Nous écrivons  $(\phi + i\Phi + \varphi_+)(x, y) := \phi(x, y) + i\Phi(x) + \varphi_+(y)$ .

Nous avons  $\hat{x}_+ = -(\phi''_{xy})^{-1}(\xi_+ + \phi''_{yy}x_+)$ , donc  $\nabla_y(\phi + \varphi_+)(\hat{x}_+, x_+) = 0$  (ceci même par définition de  $\hat{x}_+$ ). De plus, comme  $\text{Im}(\phi''_{yy} + \varphi''_+(x_+)) > 0$ , nous voyons que  $y \rightarrow (\phi + i\Phi + \varphi_+)(\hat{x}_+, y)$  admet un point critique non-dégénéré en  $y = x_+$ .

Si  $x$  est dans un voisinage assez petit de  $\hat{x}_+$ ,  $y \rightarrow (\phi + i\Phi + \varphi_+)(x, y)$  admettra donc un point critique non-dégénéré  $y_c(x)$  dans un voisinage complexe de  $x_+$ . Ceci nous donne le développement de phase stationnaire (A.4.49).

Pour (A.4.50), nous partons de l'inégalité fondamentale

$$\begin{aligned} \text{Im} \psi(x) &= \text{Im}(\phi + i\Phi + \varphi_+)(x, y_c(x)) & (\text{A.4.53}) \\ &\geq \frac{1}{C_1} \inf_{y \in \text{vois}_{\mathbb{R}}(x_+)} \text{Im}(\phi + i\Phi + \varphi_+)(x, y) + \frac{1}{C_2} |\text{Im} y_c(x)|^2 . \end{aligned}$$

Soit  $y_*(x)$  le point critique (réel, non-dégénéré) de  $y \rightarrow \text{Im}(\phi + i\Phi)(x, y)$  :

$$y_*(x) = -(\text{Im} \phi''_{yy})^{-1}(\text{Im}(\phi''_{xy}x)) . \quad (\text{A.4.54})$$

Alors

$$\inf_{y \in \text{vois}_{\mathbb{R}}(x_+)} \text{Im}(\phi + i\Phi + \varphi_+)(x, y) \geq \frac{1}{C_1} |y_*(x) - x_+|^2 . \quad (\text{A.4.55})$$

D'autre part, nous avons

$$|\text{Im} y_c(x)|^2 \geq \frac{1}{C_3} \inf_{y \in \text{vois}_{\mathbb{R}}(x_+)} |\nabla_y(\phi + \varphi_+)(x, y)|^2 . \quad (\text{A.4.56})$$

Or

$$\begin{aligned}
|\nabla_y(\phi + \varphi_+)(x, y)|^2 &\geq |\operatorname{Re}(\phi''_{xy}x + \phi''_{yy}y) + \xi_+ + O(|y - x_+|)|^2 \\
&\quad + |\operatorname{Im}(\phi''_{xy}x + \phi''_{yy}y) + c(y - x_+)|^2 - O(|y - x_+|^3) \\
&\geq \frac{1}{C_4} |\operatorname{Re}(\phi''_{xy}(x - \hat{x}_+))|^2 - O(|y - x_+|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2C_5} |\operatorname{Im}(\phi''_{xy}(x - \hat{x}_+))|^2 - O(|y - x_+|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2C_5} |\operatorname{Im}(\phi''_{xy}x + \phi''_{yy}y_*(x)) + \operatorname{Im}(\phi''_{yy})(y - y_*(x)) + c(y - x_+)|^2 \\
&\geq \frac{1}{C_6} |x - \hat{x}_+|^2 - \frac{C}{C_7} |y - x_+|^2 + \frac{1}{C_8} |y - x_+|^2 - \frac{1}{C_9} |y_*(x) - x_+|^2 .
\end{aligned}$$

Nous pouvons choisir d'abord  $C_9 > C_1' C_1$ , et ensuite, quitte à augmenter  $C_6$ , nous pouvons choisir  $C_8 < \frac{C_7}{C}$ , ce qui donne l'estimation voulue.

Considérons maintenant, pour  $\chi$  comme dans le lemme,  $\|(1 - \chi)Te_+\|_{\Phi, m}^2$ .

En utilisant le lemme 2.2.5 et l'invariance métaplectique, nous avons pour tout  $\chi_+ \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $\chi_+ = 1$  près de  $\rho_+$ , et pour toute fonction d'ordre  $m$  sur  $\Lambda_\Phi$

$$O(h^\infty) = \|T(1 - \chi_+)^w e_+\|_{\Phi, m} = \|(1 - \tilde{\chi}_+)^w Te_+\|_{\Phi, m} , \quad (\text{A.4.57})$$

où  $(1 - \tilde{\chi}_+) = (1 - \chi_+) \circ \kappa_T^{-1}$  s'annule près de  $\lambda_\Phi(\hat{x}_+)$ . En choisissant  $\chi_+$  tel que  $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(1 - \chi), \operatorname{supp}\tilde{\chi}_+ \circ \lambda_\Phi) > \frac{1}{C}$ , nous avons (A.4.51).  $\square$

De manière similaire, nous obtenons :

**Lemme A.4.2.** — Soit  $\hat{x}_- := \Pi_x(\kappa_T(\rho_-))$ .

Pour  $x$  dans un voisinage assez petit de  $\hat{x}_-$ ,

$$Te_-(x; h) \sim h^{-\frac{1}{2}} \left( \sum_{k \geq 0} d_{-,k}(x) h^k \right) e^{\frac{i}{h} \psi_-(x)} , \quad (\text{A.4.58})$$

avec  $d_{-,0}(\hat{x}_-) \neq 0$ , et il existe  $C > 0$  tel que (dans ce voisinage)

$$\operatorname{Im} \psi_-(x) \sim -\Phi(x) + \frac{1}{C} |x - \hat{x}_-|^2 . \quad (\text{A.4.59})$$

Pour  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ ,  $\chi = 1$  près de  $\hat{x}_-$  et pour toute fonction d'ordre  $m$  sur  $\Lambda_\Phi$ , nous avons

$$\|(1 - \chi)Te_-(x)\|_{\Phi, m} = O(h^\infty) . \quad (\text{A.4.60})$$

Ensuite, soit  $\chi \in C_c^\infty(\text{vois}(\hat{x}_+))$ ,  $\chi = 1$  près de  $\hat{x}_+$ . Soit  $\Psi = \Phi - \frac{1}{C}\langle(x - x_+)\rangle^2 \in C^\infty$ ,  $C$  assez grand, st.plsh.. Soit

$$\hat{e}_+(x; h) := \chi(x)h^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k \geq 0} d_{+,k}(x)h^k\right)e^{\frac{i}{h}\psi_+(x)} + w_+(x) \in H_{\Phi,m}, \quad (\text{A.4.61})$$

où  $w_+$  est une solution dans  $H_\Psi$  de

$$\bar{\partial}w_+ = -(\bar{\partial}\chi)h^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k \geq 0} d_{+,k}h^k\right)e^{\frac{i}{h}\psi_+}. \quad (\text{A.4.62})$$

D'après [21], Lemme 4.4.1, ceci implique qu'il existe  $w_+$  avec

$$\|w_+\|_\Psi \leq C\sqrt{h}\|(\bar{\partial}\chi)h^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k \geq 0} d_{+,k}h^k\right)e^{\frac{i}{h}\psi_+}\|_{\Psi, \text{supp}(\chi')} = O(1), \quad (\text{A.4.63})$$

car pour  $\text{vois}(\hat{x}_+)$  assez petit nous avons

$$\text{Im } \psi_+(x) + \Phi(x) \geq \frac{1}{C}|x - \hat{x}_+|^2, \quad (\text{A.4.64})$$

ce qui est strictement positif dans le support de  $\bar{\partial}\chi$ .

Nous avons donc

$$\|Te_+ - \hat{e}_+\|_{\Phi,m} = O(h^\infty) \quad (\text{A.4.65})$$

pour toute fonction d'ordre  $m$ .

De manière analogue, nous introduisons

$$\hat{e}_- := \chi(x)h^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k \geq 0} d_{-,k}(x)h^k\right)e^{\frac{i}{h}\psi_-(x)} + w_- \in H_{\Phi,m}, \quad (\text{A.4.66})$$

avec

$$\|Te_- - \hat{e}_-\|_{\Phi,m} = O(h^\infty) \quad (\text{A.4.67})$$

pour toute fonction d'ordre  $m$ .

## A.5. Problème de Grushin reformulé

Nous pouvons maintenant introduire notre problème de Grushin.

**Proposition A.5.1.** — Soit  $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$  remplissant les hypothèses 2.0.3 et 2.0.5, et soit  $\hat{p} \circ \kappa_T = p$ .

Soit  $\mathcal{P}$  comme dans la définition 2.3.1, et soit  $\mathcal{E}$  comme dans le corollaire 2.3.11. Soit

$$\hat{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \hat{p}^w - z & \hat{R}_- \\ \hat{R}_+ & 0 \end{pmatrix} : H_{\Phi,m} \times \mathbb{C} \rightarrow H_\Phi \times \mathbb{C}$$

où

$$\begin{aligned}\hat{R}_+ u &:= \langle u, \hat{e}_+ \rangle_{\Phi} , \\ \hat{R}_- u_- &:= u_- \hat{e}_- .\end{aligned}$$

Soit

$$\hat{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} TET^{-1} & TE_+ \\ E_- T^{-1} & E_{-+} \end{pmatrix} .$$

Alors  $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{E}} = 1 + O(h^\infty)$ ,  $\hat{\mathcal{E}}\hat{\mathcal{P}} = 1 + O(h^\infty)$ .

*Démonstration.* — Etant donné que  $\hat{R}_+ u = \langle u, Te_+ \rangle + O(h^\infty)\|u\|_{\Phi}$ ,  $R_- u_- = u_- Te_- + O(h^\infty)|u_-|$  dans  $H_{\Phi}$ , nous avons

$$\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{T}\mathcal{P}\mathcal{T}^{-1} + O(h^\infty) , \quad (\text{A.5.68})$$

où

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

L'unitarité de  $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow H_{\Phi}$  et la proposition A.3.3 impliquent que l'inverse de  $\mathcal{T}\mathcal{P}\mathcal{T}^{-1}$  est  $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{T}^{-1} = \hat{\mathcal{E}}$ . Donc  $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{E}} = 1 + O(h^\infty)$ ,  $\hat{\mathcal{E}}\hat{\mathcal{P}} = 1 + O(h^\infty)$ .  $\square$

Notons que le norme de  $\hat{\mathcal{E}}$  dépendra uniquement de la norme de  $T : H(m) \rightarrow H_{\Phi, m}$  et de la norme de  $\mathcal{E}$ .

Ensuite nous allons modifier le poids. Soient  $\Omega_{\pm}$  des voisinages ouverts de  $\hat{x}_{\pm}$ . Introduisons  $\tilde{\Phi} \in C^\infty$  st. plsh. telle que pour  $c$  assez petit

$$\begin{aligned}|\tilde{\Phi} - \Phi| &\leq c , \quad |\nabla(\tilde{\Phi} - \Phi)| \leq c , \quad \|(\tilde{\Phi} - \Phi)''\| \leq c , \\ (\tilde{\Phi} - \Phi)(x) &= a_{\pm} , \quad x \in \Omega_{\pm} , \quad |(\tilde{\Phi} - \Phi)(x)| = 0 , \quad |x| \geq C .\end{aligned}$$

Nous supposons que  $a_- < a_+$ .

Nous voyons que

$$\|e^{\frac{a_{\pm}}{h}} \hat{e}_{\pm}\|_{\tilde{\Phi}} = O(1) , \quad (\text{A.5.69})$$

car  $\hat{e}_{\pm}$  sont exponentiellement petits en dehors de  $\Omega_{\pm}$ .

Il est donc possible de prolonger  $e^{-\frac{a_+}{h}} \hat{R}_+$  à un opérateur borné  $H_{\tilde{\Phi}, m} \rightarrow \mathbb{C}$ . Soient

$$\begin{aligned}\tilde{R}_+ &= e^{-\frac{a_+}{h}} \hat{R}_+ = O(1) : H_{\tilde{\Phi}, m} \rightarrow \mathbb{C} , \\ \tilde{R}_- &:= e^{\frac{a_-}{h}} \hat{R}_- = O(1) : \mathbb{C} \rightarrow H_{\tilde{\Phi}} .\end{aligned} \quad (\text{A.5.70})$$

**Lemme A.5.2.** —  $\hat{p}^w$  est borné  $H_{\tilde{\Phi}, m} \rightarrow H_{\tilde{\Phi}}$ .

*Démonstration.* — Pour  $u \in T(\mathcal{S})$ , considérons  $\hat{p}^w u$ . Pour  $c$  assez petit dans la définition de  $\tilde{\Phi}$ ,  $C'$  assez grand, nous pouvons déformer le contour

$$\Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma} : \theta = \frac{2}{i} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} \left( \frac{x+y}{2} \right) + \frac{i}{C'} \frac{\overline{x-y}}{\langle x-y \rangle} \quad (\text{A.5.71})$$

tout en restant dans le domaine d'analyticité de  $\hat{p}$ . Considérons alors le noyau réduit de  $\hat{p}^w : H_{\tilde{\Phi}, m} \rightarrow H_{\tilde{\Phi}}$

$$\frac{1}{2\pi h} e^{\frac{i}{h}(x-y) \left( \frac{2}{i} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} \left( \frac{x+y}{2} \right) + \frac{i}{C'} \frac{\overline{x-y}}{\langle x-y \rangle} \right) - \frac{\tilde{\Phi}(x) + \tilde{\Phi}(y)}{h}} \left| \hat{p} \left( \frac{x+y}{2}, \theta \right) \right| m^{-1} \left( y, \frac{2}{i} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} (y) \right). \quad (\text{A.5.72})$$

Nous commençons par estimer la partie réelle de la phase pour  $|x-y|$  petit. Nous avons, en faisant un développement de Taylor,

$$\left| -\tilde{\Phi}(x) + \tilde{\Phi}(y) + 2 \operatorname{Re} \left( (x-y) \frac{2}{i} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} \left( \frac{x+y}{2} \right) \right) \right| \leq c|x-y|^2, \quad (\text{A.5.73})$$

donc pour  $|x-y|$  assez petit la partie réelle de la phase sera plus petite que  $-\frac{1}{c}|x-y|^2$ . Etant donné que

$$\left| \hat{p} \left( \frac{x+y}{2}, \theta \right) \right| m^{-1} \left( y, \frac{2}{i} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} (y) \right) \leq C, \quad (\text{A.5.74})$$

pour  $|x-y|$  petit, le noyau est estimé par

$$\frac{C}{2\pi h} e^{-\frac{1}{c'h}|x-y|^2} \mathbf{1}_{\{|x-y| \leq \delta\}}, \quad (\text{A.5.75})$$

donc l'opérateur correspondant est de norme  $O(1)$ . Pour  $|x-y|$  grand, nous soustrayons

$$0 = 2 \operatorname{Re} \left( (x-y) \frac{2}{i} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} \left( \frac{x+y}{2} \right) \right) + \tilde{\Phi}(x) - \tilde{\Phi}(y) \quad (\text{A.5.76})$$

à la partie réelle de la phase. Elle sera donc bornée par

$$c|x-y| + 2c - \frac{1}{C'}|x-y| \leq -\frac{1}{C'}|x-y| \quad (\text{A.5.77})$$

pour  $c$  assez petit,  $|x-y|$  grand. Nous avons aussi

$$\left| \hat{p} \left( \frac{x+y}{2}, \theta \right) \right| m^{-1} \left( y, \frac{2}{i} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} (y) \right) \leq C \langle x+y \rangle^M \langle y \rangle^{-M} \leq C' \langle x-y \rangle^M. \quad (\text{A.5.78})$$

Le noyau s'estime par

$$\frac{C'}{2\pi h} \langle x-y \rangle^M e^{-\frac{1}{c'h}|x-y|} \mathbf{1}_{\{|x-y| \geq 1\}} \quad (\text{A.5.79})$$



et l'opérateur correspondant est de norme  $O(h^{-M}e^{-\frac{1}{Ch}})$ .  $\square$

**Conjecture A.5.3.** — *Soit*

$$\tilde{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \hat{p}^w - z & \tilde{R}_- \\ \tilde{R}_+ & 0 \end{pmatrix} : H_{\tilde{\Phi},m} \times \mathbb{C} \rightarrow H_{\tilde{\Phi}} \times \mathbb{C},$$

où  $\tilde{R}_{\pm}$  sont comme dans (A.5.70). Alors  $\tilde{\mathcal{P}}$  admet un inverse

$$\tilde{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} O(\frac{1}{\sqrt{h}}) & O(1) \\ O(1) & O(h^\infty) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5.80})$$

Nous remettons la preuve (incomplète) au prochain paragraphe.

*Preuve de la proposition 2.3.15 à partir de la conjecture A.5.3*

Ecrivons

$$\tilde{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{a_+}{h}} \end{pmatrix} \circ \hat{\mathcal{P}} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{a_-}{h}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5.81})$$

Nous pouvons exprimer  $\tilde{\mathcal{E}}$  en fonction de  $\hat{\mathcal{E}}$  :

$$\tilde{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} TET^{-1} & e^{\frac{a_+}{h}}TE_+ \\ e^{-\frac{a_-}{h}}E_-T^{-1} & e^{\frac{a_+ - a_-}{h}}E_{-+} \end{pmatrix},$$

donc

$$e^{\frac{a_+ - a_-}{h}}E_{-+} = O(h^\infty). \quad (\text{A.5.82})$$

Etant donné que nous avons supposé que  $a_- < a_+$ , ceci implique que  $E_{-+} = O(e^{-\frac{1}{Ch}})$ .  $\square$

## A.6. Preuve de la conjecture A.5.3 à partir de la conjecture A.6.3

Nous partons de la proposition 2.3.2 : pour  $(\tilde{v}, \tilde{v}_+) \in H_{\Phi} \times \mathbb{C}$ , le problème

$$\begin{cases} (\hat{p}^w - z)\tilde{u} + \hat{R}_-\tilde{u}_- = \tilde{v} \\ \hat{R}_+\tilde{u} = \tilde{v}_+ \end{cases} \quad (\text{A.6.83})$$

admet une solution unique  $(\tilde{u}, \tilde{u}_-) \in H_{\Phi,m} \times \mathbb{C}$ , et

$$h^{\frac{1}{2}}\|\tilde{u}\|_{\Phi,m} + |\tilde{u}_-| \leq C(\|\tilde{v}\|_{\Phi} + h^{\frac{1}{2}}|\tilde{v}_+|). \quad (\text{A.6.84})$$

Soient  $\Omega_{\pm}^j$ ,  $j = 0, 1, 2$  des voisinages ouverts de  $\hat{x}_{\pm}$  tels que

$$\Omega_{\pm}^2 \subset \subset \Omega_{\pm}^1 \subset \subset \Omega_{\pm}^0 = \Omega_{\pm}. \quad (\text{A.6.85})$$

Soient  $\chi_{\pm} \in C_c^\infty(\Omega_{\pm}^1)$  avec  $\chi_{\pm} = 1$  sur  $\text{vois}(\overline{\Omega_{\pm}^2})$ .

Soient  $\Omega^j$ ,  $j = 0, 1, 2$  des ouverts à adhérence disjointe de  $\{\hat{x}_+, \hat{x}_-\}$  tels que

$$(\Omega_+^2 \cup \Omega_-^2)^c \subset \Omega^2 \subset \subset \Omega^1 \subset \subset \Omega^0 = \Omega . \quad (\text{A.6.86})$$

Soit de plus  $P_\Gamma$  l'opérateur  $\hat{p}^w$  avec le contour fixé  $\Gamma : \theta = \frac{2}{i} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \left( \frac{x+y}{2} \right) + \frac{i}{C} \frac{\overline{x-y}}{\langle x-y \rangle}$ .

Nous notons  $\|u\|_\Omega := \|1_\Omega u\|$ .

**Affirmation A.6.1 (E.a.p. dans  $\Omega_+$ ).** — *Considérons, pour  $(v, v_+) \in H_{\bar{\Phi}} \times \mathbb{C}$ ,  $u \in H_{\bar{\Phi}}$ , dans  $\Omega_+^1$ ,*

$$\begin{cases} (P_\Gamma - z)1_{\Omega_+} u = v \\ \tilde{R}_+ 1_{\Omega_+} u = v_+ \end{cases} \quad (\text{A.6.87})$$

Alors

$$\sqrt{h} \|u\|_{\Omega_{+, \bar{\Phi}}^2} \leq C(\|v\|_{\Omega_{+, \bar{\Phi}}^1} + \|u\|_{\Omega_+ \setminus \Omega_{+, \bar{\Phi}}^2} + \sqrt{h}|v_+|) . \quad (\text{A.6.88})$$

*Démonstration.* — Dans ce paragraphe,  $\chi = \chi_+$ . Soit  $\tilde{u} = \chi u + w$ , où  $\bar{\partial} w = -(\bar{\partial} \chi)u$  dans  $H_\Psi$ ,  $\Psi \in C^\infty$  st. plsh. est tel que

$$\begin{aligned} |\Psi - \Phi| &\leq c, \quad \Psi \leq \Phi, \\ \Psi(x) &= \Phi(x), \quad x \in \text{supp}(\bar{\partial} \chi), \\ \Psi(x) - \Phi(x) &< -c, \quad c > 0, \quad x \in \Omega_+^2, \\ \Psi(x) - \Phi(x) &\sim -\frac{1}{C} \langle x \rangle^2, \quad x \in \Omega_+^c. \end{aligned} \quad (\text{A.6.89})$$

Alors on peut choisir  $w$  tel que ([21])

$$\|w\|_\Phi \leq \|w\|_\Psi \leq C\sqrt{h} \|(\bar{\partial} \chi)u\|_\Psi \leq C'\sqrt{h} \|u\|_{\Omega_+^1 \setminus \Omega_{+, \bar{\Phi}}^2}. \quad (\text{A.6.90})$$

Donc

$$\begin{aligned} \|w\|_{\Omega_{+, \bar{\Phi}}^2} &\leq O(e^{-\frac{1}{Ch}}) \|u\|_{\Omega_+^1 \setminus \Omega_{+, \bar{\Phi}}^2}, \\ \|w\|_{\Omega_{+, \bar{\Phi}}^c, m} &\leq O(e^{-\frac{1}{Ch}}) \|u\|_{\Omega_+^1 \setminus \Omega_{+, \bar{\Phi}}^2}, \quad \forall m. \end{aligned} \quad (\text{A.6.91})$$

Notamment nous obtenons

$$\|u - \tilde{u}\|_{\Omega_{+, \bar{\Phi}}^2} \leq O(e^{-\frac{1}{Ch}}) \|u\|_{\Omega_+^1 \setminus \Omega_{+, \bar{\Phi}}^2}. \quad (\text{A.6.92})$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= (P_\Gamma - z)\tilde{u} = (P_\Gamma - z)\chi u + (P_\Gamma - z)w \\ &= v + (P_\Gamma - z)1_{\Omega_+}(\chi - 1)u + (P_\Gamma - z)w \text{ dans } \Omega_+^1. \end{aligned} \quad (\text{A.6.93})$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|\tilde{v}\|_{\Phi} &\leq \|v\|_{\Omega_+^1, \Phi} + \|(P_{\Gamma} - z)1_{\Omega_+}(\chi - 1)u\|_{\Omega_+^1, \Phi} \\
&\quad + \|(P_{\Gamma} - z)\chi u\|_{(\Omega_+^1)^c, \Phi} + \|(P_{\Gamma} - z)w\|_{\Phi} \\
&\leq \|v\|_{\Omega_+^1, \Phi} + O(h^{\infty})\|u\|_{\Omega_+^2, \Phi} + C\|u\|_{\Omega_+ \setminus \Omega_+^2, \Phi}
\end{aligned} \tag{A.6.94}$$

en utilisant le lemme de la diagonale et les estimations précédentes. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_+ &= \hat{R}_+ \tilde{u} = \langle \chi u, \hat{e}_+ \rangle + \langle w, \hat{e}_+ \rangle = v_+ + \langle (\chi - 1_{\Omega_+})u, \hat{e}_+ \rangle + \langle w, \hat{e}_+ \rangle \\
&= v_+ + O(e^{-\frac{1}{C\hbar}})\|u\|_{\Omega_+ \setminus \Omega_+^2, \Phi}.
\end{aligned} \tag{A.6.95}$$

En utilisant (A.6.84), nous avons

$$\begin{aligned}
\sqrt{\hbar}\|u\|_{\Omega_+^2, \Phi} &\leq \sqrt{\hbar}(\|\tilde{u}\|_{\Omega_+^2, \Phi} + O(h^{\infty})\|u\|_{\Omega_+^1 \setminus \Omega_+^2, \Phi}) \\
&\leq C(\|\tilde{v}\|_{\Phi} + \sqrt{\hbar}|\tilde{v}_+|) + O(h^{\infty})\|u\|_{\Omega_+^1 \setminus \Omega_+^2, \Phi} \\
&\leq \tilde{C}(\|v\|_{\Omega_+^1, \Phi} + \|u\|_{\Omega_+ \setminus \Omega_+^2, \Phi} + \sqrt{\hbar}|v_+| + O(h^{\infty})\|u\|_{\Omega_+^2, \Phi}).
\end{aligned} \tag{A.6.96}$$

Au total nous obtenons

$$\sqrt{\hbar}\|u\|_{\Omega_+^2, \Phi} \leq C(\|v\|_{\Omega_+^1, \Phi} + \|u\|_{\Omega_+ \setminus \Omega_+^2, \Phi} + \sqrt{\hbar}|v_+|). \tag{A.6.97}$$

Considérons maintenant le problème, pour  $u_1, v_1 \in H_{\tilde{\Phi}}, v_{+,1} \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{cases} (P_{\Gamma} - z)1_{\Omega_+}u_1 = v_1 \\ \tilde{R}_+1_{\Omega_+}u_1 = v_{+,1} \end{cases} \tag{A.6.98}$$

dans  $\Omega_+^1$ .

Etant donné que  $\tilde{\Phi} - \Phi = a_+$  sur  $\Omega_+$ , et que  $\tilde{R}_+ = e^{-\frac{a_+}{\hbar}}\hat{R}_+$ , nous posons  $u_1 := e^{\frac{a_+}{\hbar}}u \in H_{\tilde{\Phi}}, v_1 := e^{\frac{a_+}{\hbar}}v \in H_{\tilde{\Phi}}$  et  $v_{+,1} := e^{\frac{a_+}{\hbar}}v_+$ . En insérant ceci dans (A.6.97), nous obtenons (A.6.88).  $\square$

**Affirmation A.6.2 (E.a.p. dans  $\Omega_-$ ).** — *Considérons, pour  $v \in H_{\tilde{\Phi}}, (u, u_-) \in H_{\tilde{\Phi}} \times \mathbb{C}$ , dans  $\Omega_-^1$*

$$(P_{\Gamma} - z)1_{\Omega_-}u + \tilde{R}_-u_- = v. \tag{A.6.99}$$

Alors

$$\sqrt{\hbar}\|u\|_{\Omega_-^2, \tilde{\Phi}} + |u_-| \leq C(\|v\|_{\Omega_-^1, \tilde{\Phi}} + \|u\|_{\Omega_- \setminus \Omega_-^2, \tilde{\Phi}}). \tag{A.6.100}$$

*Démonstration.* — Dans ce paragraphe,  $\chi = \chi_-$ . Soit  $\tilde{u} = \chi u + w$  en suivant la même construction que dans le paragraphe précédent, et soit  $\tilde{u}_- = u_-$ .

Alors

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= (P_\Gamma - z)\tilde{u} + \hat{R}_- \tilde{u}_- = (P_\Gamma - z)\chi u + (P_\Gamma - z)w + \hat{R}_- \tilde{u}_- \\ &= v + (P_\Gamma - z)1_{\Omega_-}(\chi - 1)u + (P_\Gamma - z)w \text{ dans } \Omega_-^1 .\end{aligned}\quad (\text{A.6.101})$$

Donc

$$\begin{aligned}\|\tilde{v}\|_\Phi &\leq \|v\|_{\Omega_-^1, \Phi} + \|(P_\Gamma - z)1_{\Omega_-}(\chi - 1)u\|_{\Omega_-^1, \Phi} \\ &\quad + \|(P_\Gamma - z)\chi u\|_{(\Omega_-^1)^c, \Phi} + \|(P_\Gamma - z)w\|_\Phi + |\tilde{u}_-| \|\hat{e}_-\|_{(\Omega_-^1)^c} \\ &\leq \|v\|_{\Omega_-^1, \Phi} + O(h^\infty) \|u\|_{\Omega_-^1, \Phi} + C \|u\|_{\Omega_- \setminus \Omega_-^2, \Phi} + O(e^{-\frac{1}{C\hbar}}) |\tilde{u}_-| .\end{aligned}\quad (\text{A.6.102})$$

D'autre part,

$$\tilde{v}_+ = \langle \chi u, \hat{e}_+ \rangle + \langle w, \hat{e}_+ \rangle = O(e^{-\frac{1}{C\hbar}}) \|u\|_{\Omega_-^1, \Phi} .$$

En utilisant (A.6.84), nous avons de manière similaire qu'avant

$$\sqrt{\hbar} \|u\|_{\Omega_-^2, \Phi} + |u_-| \leq C (\|v\|_{\Omega_-^1, \Phi} + \|u\|_{\Omega_- \setminus \Omega_-^2, \Phi}) .\quad (\text{A.6.103})$$

Considérons le problème, pour  $u_1, v_1 \in H_{\tilde{\Phi}}$ ,  $u_{-,1} \in \mathbb{C}$

$$(P_\Gamma - z)1_{\Omega_-} u_1 + \tilde{R}_- u_{-,1} = v_1 .\quad (\text{A.6.104})$$

dans  $\Omega_-^1$ . Etant donné que  $\tilde{\Phi} - \Phi = a_-$  sur  $\Omega_-$ , et que  $\tilde{R}_- = e^{\frac{a_-}{\hbar}} \hat{R}_-$ , nous posons  $u_1 = e^{\frac{a_-}{\hbar}} u \in H_{\tilde{\Phi}}$ ,  $u_{-,1} = e^{\frac{a_-}{\hbar}} u_-$  et  $v_1 = e^{\frac{a_-}{\hbar}} v \in H_{\tilde{\Phi}}$ .

En insérant ceci dans (A.6.103), nous obtenons (A.6.100).  $\square$

### **Conjecture A.6.3 (E.a.p. dans la zone elliptique)**

*Considérons, pour  $v \in H_{\tilde{\Phi}}$ ,  $u \in H_{\tilde{\Phi}, m}$ ,  $(P_\Gamma - z)u = v$  dans  $\Omega^1$ .*

*Alors  $\forall N \in \mathbb{N}$  il existe  $C_N$  tel que*

$$\|u\|_{\Omega^2, \tilde{\Phi}, m} \leq C \|v\|_{\Omega^1, \tilde{\Phi}} + C_N h^N \|u\|_{\Omega \setminus \Omega^2, \tilde{\Phi}} .\quad (\text{A.6.105})$$

Ici se situe la lacune de notre preuve. Il s'agit de montrer qu'il existe une réalisation avec contour d'une parametrix  $Q$  :

$$1_{\Omega_2} P_\Gamma Q 1_{\Omega} \sim 1_{\Omega_2} .\quad (\text{A.6.106})$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\|u\|_{\Omega^2, \tilde{\Phi}, m} &= \|Qv\|_{\Omega^2, \tilde{\Phi}, m} + O(h^\infty) \|u\|_{\tilde{\Phi}, m} \\ &\leq C \|v\|_{\tilde{\Phi}} + O(h^\infty) \|u\|_{\tilde{\Phi}, m} ,\end{aligned}\quad (\text{A.6.107})$$

ce qui implique (A.6.105).

*Preuve de la conjecture A.5.3 à partir de la conjecture A.6.3*

Considérons, pour  $(\tilde{v}, \tilde{v}_+) \in H_{\tilde{\Phi}} \times \mathbb{C}$ ,  $(\tilde{u}, \tilde{u}_-) \in H_{\tilde{\Phi}, m} \times \mathbb{C}$

$$\begin{cases} (\hat{p}^w - z)\tilde{u} + \tilde{R}_-\tilde{u}_- = \tilde{v} \\ \tilde{R}_+\tilde{u} = \tilde{v}_+ \end{cases} . \quad (\text{A.6.108})$$

Sur  $\Omega_+^1$ , nous avons

$$\begin{cases} v = (P_\Gamma - z)1_{\Omega_+}\tilde{u} = \tilde{v} - \tilde{u}_-e^{\frac{a_-}{h}}\hat{e}_- - (P_\Gamma - z)1_{(\Omega_+)^c}\tilde{u} \\ v_+ = \tilde{R}_+1_{\Omega_+}u = \tilde{v}_+ - e^{-\frac{a_+}{h}}\langle 1_{(\Omega_+)^c}\tilde{u}, \hat{e}_+ \rangle \end{cases} \quad (\text{A.6.109})$$

Insérons  $\|e^{\frac{a_-}{h}}\hat{e}_-\|_{\Omega_+, \tilde{\Phi}} = O(e^{-\frac{1}{Ch}})$ , le lemme de la diagonale et  $\langle 1_{(\Omega_+)^c}\tilde{u}, e^{-\frac{a_+}{h}}\hat{e}_+ \rangle = O(e^{-\frac{1}{Ch}})$ . En utilisant (A.6.88) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sqrt{h}\|\tilde{u}\|_{\Omega_+^2, \tilde{\Phi}} &\leq C(\|\tilde{v}\|_{\Omega_+^1, \tilde{\Phi}} + \sqrt{h}|\tilde{v}_+| + \|\tilde{u}\|_{\Omega_+ \setminus \Omega_+^2, \tilde{\Phi}}) \\ &\quad + O(h^\infty)(|\tilde{u}_-| + \|\tilde{u}\|_{\tilde{\Phi}, m}) . \end{aligned} \quad (\text{A.6.110})$$

Sur  $\Omega_-^1$ , nous avons

$$v = (P_\Gamma - z)1_{\Omega_-}\tilde{u} + \tilde{R}_-\tilde{u}_- = \tilde{v} - (P_\Gamma - z)1_{(\Omega_-)^c}\tilde{u} . \quad (\text{A.6.111})$$

En utilisant le lemme de la diagonale et (A.6.100) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sqrt{h}\|\tilde{u}\|_{\Omega_-^2, \tilde{\Phi}} + |\tilde{u}_-| &\leq C(\|\tilde{v}\|_{\Omega_-^1, \tilde{\Phi}} + \|\tilde{u}\|_{\Omega_- \setminus \Omega_-^2, \tilde{\Phi}}) \\ &\quad + O(h^\infty)\|\tilde{u}\|_{\tilde{\Phi}, m} . \end{aligned} \quad (\text{A.6.112})$$

Sur  $\Omega^1$ , nous avons :

$$v = (P_\Gamma - z)1_{\Omega}\tilde{u} = \tilde{v} - (P_\Gamma - z)1_{(\Omega)^c}\tilde{u} - \tilde{R}_-\tilde{u}_- . \quad (\text{A.6.113})$$

En utilisant le lemme de la diagonale et (A.6.105), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{\Omega^2, \tilde{\Phi}, m} &\leq C\|\tilde{v}\|_{\Omega^1, \tilde{\Phi}} + C_N h^N \|\tilde{u}\|_{\Omega \setminus \Omega^2, \tilde{\Phi}} \\ &\quad + O(h^\infty)(|\tilde{u}_-| + \|\tilde{u}\|_{\tilde{\Phi}, m}) . \end{aligned} \quad (\text{A.6.114})$$

Etant donné que  $\|f\|_{\hat{\Omega}}^2 + \|f\|_{\hat{\Omega}^c}^2 = \|f\|_{\Omega \cup \hat{\Omega}}^2$ , nous savons qu'il existe  $C \geq 0$  tel que

$$\frac{1}{C}\|f\|_{\Omega \cup \hat{\Omega}} \leq \|f\|_{\Omega} + \|f\|_{\hat{\Omega}} \leq C\|f\|_{\Omega \cup \hat{\Omega}} . \quad (\text{A.6.115})$$

En combinant les estimations (A.6.110), (A.6.112) et (A.6.114), tout en multipliant la dernière par une constante  $D$  assez grande, nous avons :

$$\begin{aligned}
& \sqrt{h}\|\tilde{u}\|_{\Omega_+^2 \cup \Omega_-^2, \tilde{\Phi}} + D\|\tilde{u}\|_{\Omega^2, \tilde{\Phi}, m} + |\tilde{u}_-| \leq C(D\|\tilde{v}\|_{\tilde{\Phi}} + \sqrt{h}|\tilde{v}_+|) \\
& + DC_N h^N \|\tilde{u}\|_{\Omega \setminus \Omega^2, \tilde{\Phi}} + C(\|\tilde{u}\|_{\Omega_+ \setminus \Omega_+^2, \tilde{\Phi}} + \|\tilde{u}\|_{\Omega_- \setminus \Omega_-^2, \tilde{\Phi}}) \\
& + O(h^\infty)(|\tilde{u}_-| + \|\tilde{u}\|_{\tilde{\Phi}, m}) . \tag{A.6.116}
\end{aligned}$$

Choisissant  $D > C + 1$ , nous avons

$$\begin{aligned}
& \sqrt{h}\|\tilde{u}\|_{\Omega_+^2 \cup \Omega_-^2, \tilde{\Phi}} + \|\tilde{u}\|_{\Omega^2, \tilde{\Phi}, m} + |\tilde{u}_-| \\
& \leq C(D\|\tilde{v}\|_{\tilde{\Phi}} + \sqrt{h}|\tilde{v}_+|) + D' C_N h^N \|\tilde{u}\|_{\Omega \setminus \Omega^2, \tilde{\Phi}} , \tag{A.6.117}
\end{aligned}$$

ce qui donne, pour  $h$  assez petit,

$$\sqrt{h}\|\tilde{u}\|_{\Omega_+^2 \cup \Omega_-^2, \tilde{\Phi}} + \|\tilde{u}\|_{\Omega^2, \tilde{\Phi}, m} + |\tilde{u}_-| \leq C'(\|\tilde{v}\|_{\tilde{\Phi}} + \sqrt{h}|\tilde{v}_+|) . \tag{A.6.118}$$

Avec (A.6.115), la conjecture est prouvée.  $\square$

## APPENDICE B

### PREUVE ALTERNATIVE DU LEMME 2.2.5

*Preuve du lemme 2.2.5.* — Pour montrer que  $e_+ \in H(m')$ , nous écrivons

$$e_+ = \chi^w e_+ + (1 - \chi)^w e_+ , \quad (\text{B.0.1})$$

où  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $\chi = 1$  près de  $\rho_+$ . Pour simplifier l'écriture, nous omettons d'écrire la dépendance en  $h$  et en  $z$ .

Nous avons

$$(1 - \chi)^w e_+(x) = \frac{1}{2\pi h} \iint e^{\frac{i}{h}\{(x-y)\eta + \varphi_+(y)\}} a_+(x) (1 - \chi)\left(\frac{x+y}{2}, \eta\right) dy d\eta . \quad (\text{B.0.2})$$

Nous disons « dans le support de  $(1 - \chi)$  » pour désigner l'adhérence des  $(x, y, \eta)$  tels que  $\chi\left(\frac{x+y}{2}, \eta\right) \neq 1$ .

Remarquons que la phase totale  $\phi = (x - y)\eta + \varphi_+(y)$  n'a pas de point critique dans le support de  $(1 - \chi)$ . En fait,

$$A = |\nabla_{(y,\eta)} \phi|^2 = |\eta + g_{+,0}(y)|^2 + (x - y)^2 . \quad (\text{B.0.3})$$

**Affirmation B.0.4.** — *Il existe  $D_1, D_2, D_3 > 0$  tels que*

$$A \geq \frac{1}{D_1}(\eta - \xi_+)^2 + \frac{1}{D_2}(y - x_+)^2 + \frac{1}{D_3}(x - x_+)^2 . \quad (\text{B.0.4})$$

*De plus, dans le support de  $(1 - \chi)$ ,  $\exists C \geq 0$  tel que*

$$A \geq \frac{1}{C}(\langle x - x_+ \rangle^2 + \langle y - x_+ \rangle^2 + \langle \eta - \xi_+ \rangle^2) . \quad (\text{B.0.5})$$

*Preuve de l'affirmation B.0.4.* — En fait, nous avons

$$\begin{aligned} (\eta + \operatorname{Re} g_{+,0}(y))^2 &= (\eta - \xi_+ + O((y - x_+)))^2 \\ &\geq \frac{1}{D_4}(\eta - \xi_+)^2 - O((y - x_+)^2) . \end{aligned} \quad (\text{B.0.6})$$

De plus, en utilisant  $(\operatorname{Im} g_{+,0}(y))^2 \sim \frac{1}{C_+^2}(y - x_+)^2$ , nous avons

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{1}{D_1}((\eta - \xi_+)^2 - C(y - x_+)^2) + \frac{1}{C_+^2}(y - x_+)^2 + (x - y)^2 \\ &\geq \frac{1}{D_1}(\eta - \xi_+)^2 + \frac{1}{D_5}(y - x_+)^2 + (x - y)^2 \\ &\geq \frac{1}{D_1}(\eta - \xi_+)^2 + \frac{1}{D_2}(y - x_+)^2 + \frac{1}{D_3}(x - x_+)^2 , \end{aligned}$$

en choisissant  $D_1$  assez grand en fonction de  $C, C_+$ .

Dans le support de  $(1 - \chi)$ , nous avons

$$\frac{1}{C_\chi} \leq \left( \frac{x+y}{2} - x_+ \right)^2 + (\eta - \xi_+)^2 , \quad (\text{B.0.7})$$

ce qui implique (B.0.5).  $\square$

Nous pouvons donc intégrer par parties à l'aide de

$$L^T = \frac{1}{A}((x - y)hD_\eta - (\eta + \overline{g_{+,0}(y)})hD_y) , \quad (\text{B.0.8})$$

où  $T$  désigne le transposé réel, et  $L^T(e^{\frac{i}{h}\{(x-y)\eta + \varphi_+(y)\}}) = e^{\frac{i}{h}\{(x-y)\eta + \varphi_+(y)\}}$ .

**Affirmation B.0.5.** — Dans le support de  $(1 - \chi)$ ,

$$L = \left( \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}} \right) (-ahD_\eta + bhD_y + \frac{hc}{A^{\frac{1}{2}}}) , \quad a, b, c \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2) . \quad (\text{B.0.9})$$

En fait, nous avons

$$\begin{aligned} a &= \frac{(x - y)}{A^{\frac{1}{2}}} , \quad b = \frac{(\eta + \overline{g_{+,0}(y)})}{A^{\frac{1}{2}}} \\ c &= \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}}(aD_\eta A + bD_y A) + \frac{\overline{g_{+,0}'(y)}}{i} . \end{aligned}$$

Pour prouver l'affirmation B.0.5, nous commençons par montrer :

**Affirmation B.0.6.** —

$$D^\alpha A = O(A^{\frac{1}{2}}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^3 . \quad (\text{B.0.10})$$



*Preuve de l'affirmation B.0.6.* — Rappelons que  $g'_{+,0} \in C_b^\infty$ . Nous avons, pour  $k > 0$  un entier :

$$\begin{aligned} \partial_\eta A &= 2(\eta + \operatorname{Re} g_{+,0}(y)) = O(A^{\frac{1}{2}}) ; \quad \partial_\eta^k A = O(1), \quad k > 1; \\ \partial_y^k \partial_\eta A &= 2\operatorname{Re} g_{+,0}^{(k)}(y) = O(1) ; \quad \partial_x^k \partial_\eta A = 0 ; \\ \partial_y A &= 2(y - x) + 2\operatorname{Re} g'_{+,0}(y)(\eta + \operatorname{Re} g_{+,0}(y)) + 2\operatorname{Im} g'_{+,0}(y)\operatorname{Im} g(y) = \\ &O(A^{\frac{1}{2}}); \\ \partial_y^k A &= O(A^{\frac{1}{2}}) ; \quad \partial_x \partial_y^k A = O(1) ; \\ \partial_x A &= -2(y - x) = O(A^{\frac{1}{2}}) ; \quad \partial_x^k A = O(1), \quad k > 1 ; \end{aligned}$$

□

*Preuve de l'affirmation B.0.5.* — Avec l'affirmation B.0.4 et (B.0.5),  $a, b \in C_b^\infty$  implique  $c \in C_b^\infty$ .

De plus, l'affirmation B.0.6 donne :

$$\begin{aligned} \partial^\alpha (A^{-\frac{1}{2}}) &= \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_k = \alpha} c_{\beta_1, \dots, \beta_k} (A^{-\frac{1}{2}-k} (\partial^{\beta_1} A) \dots (\partial^{\beta_k} A)) \\ &= \sum O(A^{-\frac{1}{2}-k+\frac{k}{2}}) = O(A^{-1}) . \end{aligned}$$

Alors, pour  $|\alpha| \geq 1$  nous avons

$$\partial^\alpha a = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} d_{\alpha_1, \alpha_2} (\partial^{\alpha_1} (x - y)) (\partial^{\alpha_2} A^{-\frac{1}{2}}) = O(A^{-\frac{1}{2}}), \quad (\text{B.0.11})$$

(car soit  $|\alpha_1| \geq 1$ , soit  $|\alpha_2| \geq 1$ ). En utilisant aussi  $g'_{+,0} \in C_b^\infty$ , nous obtenons de manière analogue que  $\partial^\alpha b = O(A^{-\frac{1}{2}})$ .

Avec l'affirmation B.0.4 et (B.0.5), ceci prouve que  $a, b \in C_b^\infty$ . □

Les affirmations B.0.5 et B.0.6 impliquent que

$$(L)^k = \frac{h^k}{A^{\frac{k}{2}}} \sum_{l_1 + l_2 \leq k} \gamma_{l_1 l_2} D_y^{l_1} D_\eta^{l_2}, \quad \gamma_{l_1 l_2} \in C_b^\infty(\mathbb{R}^3). \quad (\text{B.0.12})$$

En utilisant que dans le support de  $1 - \chi$

$$A^{\frac{k}{2}} \geq \frac{1}{C_k} (\langle x \rangle^2 + \langle y \rangle^2 + \langle \eta - \xi_+ \rangle^2)^{\frac{k}{2}} \geq \frac{1}{C'_k} \langle x \rangle^{k-4} \langle y \rangle^2 \langle \eta \rangle^2 \quad (\text{B.0.13})$$

nous avons, en intégrant par parties

$$\begin{aligned} |(1 - \chi)^w e_+| &\leq \frac{1}{2\pi h} \int \frac{h^k}{A^{\frac{k}{2}}} \tilde{C}_k dy d\eta \\ &\leq O(h^{k-1} \langle x \rangle^{k-4}) \quad \forall k, \end{aligned}$$

et donc

$$(1 - \chi)^w e_+ = O(h^\infty) \text{ dans } L^2. \quad (\text{B.0.14})$$

On peut supposer que  $m'(x, \eta) \sim \langle x \rangle^N \langle \eta \rangle^N$ . Avec les estimations précédentes, il suffit de choisir  $k$  encore plus grand, et nous avons prouvé que  $\|(1 - \chi)^w e_+\|_{m'} = O(h^M) \quad \forall M$ .

Finalement,  $(m')^w \chi^w e_+ = (m' \# \chi)^w e_+ \in L^2$  pour tout  $m'$ . Il en découle que  $e_+ \in H(m'), \forall m'$ .  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Agmon, lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand mathematical studies, Van Nostrand (1965), Princeton.
- [2] J.-M. Bony, J.-Y. Chemin, Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander, Bull. SMF 122 (1994).
- [3] L. Boulton, Non-self-adjoint harmonic oscillator, compact semigroups and pseudospectra, J. Operator Theory 47 (2002), no. 2, 413-429.
- [4] N. Burq, M. Zworski, Resonance Expansion in Semi-Classical Propagation, Commun. Math. Phys. 223 (2001), 1-12.
- [5] E.B. Davies, Semiclassical states for Non-Self-Adjoint Schrödinger Operators, Commun. Math. Phys. 200 (1999), 35-41
- [6] E.B. Davies, Pseudospectra of differential operators, J. Operator theory 43 (2000), 243-262.
- [7] E.B. Davies, Semigroup growth bounds, preprint, <http://xxx.lanl.gov/abs/math.SP/0302144>.
- [8] E.B. Davies, Eigenvalues of an elliptic system, Math. Z. 243 (2003), no.4, 719-743.
- [9] E.B. Davies, One-parameter semigroups, Academic Press (1980).
- [10] E.B. Davies, Spectral theory and differential operators, Cambridge University press (1995).

- [11] N. Dencker, J. Sjöstrand, M. Zworski, Pseudospectra of semiclassical (pseudo-) differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* 57 (2004), 384-415.
- [12] M. Dimassi, J. Sjöstrand, *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit*, LMS LN 268, Cambridge University press (1999).
- [13] I.C. Gohberg, M.G. Krein, *Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators*, Translation of mathematical monographs 18, AMS (1969).
- [14] A. Grigis, J. Sjöstrand, *Microlocal Analysis for Differential Operators*, LMS LN 196, Cambridge University press (1994).
- [15] M. Hager, *Instabilité spectrale semiclassique d'opérateurs non-autoadjoints I : un exemple*, *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, à paraitre, preprint : [hal.ccsd.cnrs.fr](http://hal.ccsd.cnrs.fr).
- [16] M. Hager, *Instabilité spectrale semiclassique d'opérateurs non-autoadjoints II*, preprint : [hal.ccsd.cnrs.fr](http://hal.ccsd.cnrs.fr).
- [17] B. Helffer, D. Robert, *Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles*, *J. Funct. Anal.*, 53 (3) (1983), 246-68.
- [18] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Résonances en limite semiclassique*, *Bulletin de la SMF* (1986).
- [19] F. Hérau, J. Sjöstrand, C. Stolk, *Semiclassical analysis for the Kramers-Fokker-Planck equation*, preprint : <http://arxiv.org/abs/math.SP/0406275>.
- [20] L. Hörmander, *The analysis of Linear Partial Differential Operators* vols. 1-3, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* 256, 257, 274, Springer-Verlag (1983-1985).
- [21] L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, North Holland/American Elsevier (1973).
- [22] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer (1995).
- [23] N. Lerner, *Solving Pseudo-Differential Equations*, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, Higher Ed. Press (2002), 711-720.

- [24] B. Ja. Levin, Distribution of Zeros of entire functions, Translations of mathematical Monographs, AMS (1964), Providence.
- [25] A. Martinez, An introduction to semiclassical and microlocal analysis, Universitext, Springer-Verlag (2002).
- [26] S. Reddy, P. Schmid, D. Henningson, Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator, Siam J. Appl. Math. 53 (1993), 15-45.
- [27] J. Sjöstrand, Operators of principal type with interior boundary condition, Acta mathematica 130 (1973), 1-51.
- [28] J. Sjöstrand, Function spaces associated to global I-Lagrangian manifolds, (in : « Structure of solutions of differential equations », Katata/Kyoto 1995) World Sci. Publishing (1996), River Edge , NJ, 369-423.
- [29] J. Sjöstrand, Singularités analytiques microlocales, Astérisque 95 (1982).
- [30] J. Sjöstrand, Lectures on resonances,  
<http://daphne.math.polytechnique.fr/~sjostrand/>.
- [31] J. Sjöstrand, Resonances for bottles and trace formulae, Math. Nachr. 221 (2001), 95-149.
- [32] J. Sjöstrand, Geometric bounds on the density of resonances for semiclassical problems, Duke mathematical journal 60 (1990), 1-57.
- [33] J. Sjöstrand, M. Zworski, Complex scaling and the distribution of scattering poles, Jour. Amer. Math. Soc. 4 (1991), 729-769.
- [34] J. Sjöstrand, M. Zworski, Elementary linear algebra for advanced spectral problems, preprint :  
<http://xxx.lanl.gov/abs/math.SP/0312166>.
- [35] S.H. Tang, M. Zworski, Resonance expansion of scattered waves, Comm. Pure Appl. Math. 53 (2000), 1305-1334.
- [36] E.C. Titchmarsh, The theory of functions, Oxford University Press (1939).
- [37] L.N. Trefethen, Pseudospectra of linear operators, SIAM rev. 39 (1997), 383-406.

- [38] L.N. Trefethen, Wave packet Pseudomodes of variable coefficient differential operators, preprint (2004).
- [39] L.N. Trefethen, Spectra and pseudospectra, to appear, Princeton University press (2005).
- [40] M. Zworski, A remark on a paper of E.B. Davies , Proceedings of the AMS 129 (1999), 2955-2957.
- [41] M. Zworski, Numerical linear algebra and solvability of partial differential equations, Comm. Math. Phys. 229 (2002), 293-307.