HAL
open science

Instabilités crées par mélange à quatre ondes dans une vapeur atomique. Chaos et morphogénèse.

Agnès Maître

To cite this version:

Agnès Maître. Instabilités crées par mélange à quatre ondes dans une vapeur atomique. Chaos et morphogénèse.. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Ecole Polytechnique X, 1994. Français. NNT : . tel-00011896

HAL Id: tel-00011896

https://pastel.hal.science/tel-00011896v1

Submitted on 9 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LABORATOIRE KASTLER BROSSEL

Thèse présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité: Optique non-linéaire

par

Agnès MAITRE

Titre :

INSTABILITÉS CRÉÉES PAR MÉLANGE À QUATRE ONDES DANS UNE VAPEUR ATOMIQUE

CHAOS ET MORPHOGÉNÈSE

Soutenue le 30 Juin 1994 devant le jury composé de :

M.	G. GRYNBERG	Président
MME.	A. TALLET	Rapporteur
M.	D. DANGOISSE	Rapporteur
M.	D. BLOCH	Examinateur
M.	J.L. OUDAR	Examinateur

LABORATOIRE KASTLER BROSSEL

Thèse présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité: Optique non-linéaire

par

Agnès MAITRE

Titre :

INSTABILITÉS CRÉÉES PAR MÉLANGE À QUATRE ONDES DANS UNE VAPEUR ATOMIQUE

CHAOS ET MORPHOGÉNÈSE

Soutenue le 30 Juin 1994 devant le jury composé de :

M.	G. GRYNBERG	Président
MME.	A. TALLET	Rapporteur
M.	D. DANGOISSE	Rapporteur
M.	D. BLOCH	Examinateur
M.	J.L. OUDAR	Examinateur

Ce travail a été réalisé au laboratoire Kastler-Brossel de l'Ecole Normale Supérieure et de l'Université Pierre et Marie Curie. Je tiens à remercier Jacques Dupont-Roc et Michèle Leduc pour m'y avoir accueilli et pour les conditions de travail extraordinaires qu'ils m'ont offertes. Je remercie Gilbert Grynberg pour m'avoir encadré durant ce travail de thèse.

Je tiens tout particulièrement à remercier Michel Pinard pour sa grande disponibilité et sans lequel ce travail n'aurait pu aboutir. Son aide tant sur le plan théorique qu'expérimental m'aura été essentielle aussi bien dans la compréhension des phénomènes physiques que dans la conduite de mon travail expérimental.

Je souhaite également remercier Alain Blouin, Laurent Dambly et tout particulièrement Artem Petrossian qui m'ont aidé dans mon travail expérimental et avec lesquels j'ai pris grand plaisir à travailler. François Biraben et François Nez ont su également m'apporter des conseils précieux sur le fonctionnement du laser.

Toute ma reconnaissance va également à Dominique Delande et Antoine Heidman pour leur aide en informatique et leur très grande patience.

Francis Théhin par sa très grande disponibilité, a beaucoup contribué à la réalisation de ce travail expérimental. Jean-Claude Bernard et Bertrand Legaut m'ont apporté une aide précieuse en électronique et en informatique. Je souhaite également remercier l'ensemble du personnel technique Guy Flory, Bernard Rodriguez et les secrétaires Blandine Moutiers et Karine Vasseur.

Je souhaite également remercier Andrée Tallet, Didier Dangoisse, Jean-Louis Oudar et Daniel Bloch pour avoir accepté de participer à ce jury de thèse et qui par leurs remarques m'ont aidé dans la rédaction de ma thèse. Béatrice de Beauvoir, Lucile Julien, François Nez et Laurent Dambly par leurs relectures patientes ont largement contribué à l'écriture de ce mémoire. Je remercie également M. Amar d'en avoir assuré le tirage.

Je tiens enfin à remercier tous les autres membres du laboratoire qui par leur sympathie et leur soutien m'ont aidé à mener à bien ce travail de thèse.

J'ai bénéficié durant ces trois années du soutien financier de l'Ecole Polytechnique et du M.R.T. Je remercie Mme Guibert et toute l'équipe des Etudes Doctorales d'avoir géré mon dossier.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale 1

Chapitre I

Instabilités générées en présence d'un miroir de rétroaction.

Etude théorique 7

Chapitre II

Instabilités générées en présence d'un miroir de rétroaction

Etude expérimentale 101

Chapitre III

Instabilités générées par deux pompes se propageant en sens opposé.

Etude expérimentale 163

Conclusion générale 231

Annexe 1

Polarisation induite par deux champs de polarisation linéaire orthogonale

Système 1/2 → 1/2 235

Annexe 2

Mélange à quatre ondes dans un milieu Kerr 249

Références 261

Chapitre I

Instabilités générées en présence d'un miroir de rétroaction.

Etude théorique 7

1) **Propagation de deux ondes de polarisations linéaires orthogonales** 13

1.1) **Description du système.** 13

1.1.1) Décomposition du champ sur la base circulaire 13

1.1.2) Description du milieu non-linéaire 14

1.2) **Equations d'évolution des populations** 17

1.3) **Expression de la polarisation** 19

2) **Mélange à quatre ondes en polarisations linéaires orthogonales** 20

2.1) **Mélange de quatre ondes dans le milieu non-linéaire** 20

2.1.1) Description des champs en présence 20

2.1.2) Taux de pompage optique 21

a) Interaction entre les ondes $\vec{E}_{\pm}$ et $\vec{E}'_{\pm}$ 22

b) Taux de pompage optique global 22

2.1.3) Polarisation et susceptibilité induite par les champs 23

2.1.4) Equation d'évolution des champs dans le milieu non-linéaire 24

2.2) **Principe du miroir à contraste de phase** 25

2.2.1) Description du problème 26

2.2.2) Onde intense à la sortie de la cellule 27

2.2.3) Traitement à l'ordre 1 en champ faible 28

2.2.4) Miroir à contraste de phase 29

Conclusion 31

3) **Instabilités générées par des ondes planes.** 32

3.1) **Seuil d'oscillation pour des instabilités polarisées linéairement et orthogonalement aux ondes pompes** 33

3.1.1) Champs en présence 34

a) Ondes intenses 34

b) Angle d'oscillation 35

c) Ondes d'intensité faible 36

3.1.2) Oscillation dans la cavité 37
a) Réflexion sur le miroir à contraste de phase 37
b) Equation de seuil d'oscillation 39
3.1.3) Conditions d'oscillation 40
a) Conditions sur le milieu non linéaire 40
b) Conditions sur la cavité 41
c) Intensité seuil et angle d'oscillation 42
3.2) Seuil d'oscillation pour des ondes polarisées parallèlement aux ondes pompes. 42
3.2.1) Non-linéarités optiques et polarisation parallèle 43
3.2.2) Seuil d'oscillation dans la cavité 43
a) Approximations sur le milieu non-linéaire et les champs. 44
b) Coefficients de réflectivité du miroir à contraste de phase 44
3.3) Forme des instabilités émises 46

4) Instabilités générées par un faisceau de distribution d'intensité gaussienne 47

4.1) Cas général 48
4.1.1) Oscillation dans la cavité constituée par le miroir à contraste de phase et le miroir normal 48
4.1.2) Modes de Laguerre-Gauss 49
a) Base complète des modes de Laguerre-Gauss 50
b) Expression des modes de Laguerre-Gauss dans notre configuration expérimentale 51
c) Représentation transverse d'un mode de Laguerre-Gauss. 51
4.1.3) Seuil d'oscillation pour des modes de Laguerre-Gauss 52
4.1.4) Cas limite près du seuil 55
a) Milieu très saturé 55
b) milieu Kerr (b If <<1) 56
4.2) Simulation numérique 56
4.2.1) Domaine de validité 57
4.2.2) Comportement au seuil. 60
a) Méthode 60
b) seuil d'oscillation pour l=0 60
4.2.3) Comportement au-dessus du seuil 62
a) Méthode 62

b) Résultats 63
4.3) Conclusion **79**
4.3.1) Résultats obtenus dans le cas d'un faisceau gaussien 79
4.3.2) Comparaisons avec les résultats obtenus dans le cas des ondes planes. 80

5) Aspects temporels de l'instabilité **82**

5.1) Description des champs **83**
5.1.1) Ondes intenses 83
5.1.2) Ondes peu intenses 85
a) Vecteur d'onde 85
b) Réflexion sur le miroir plan 87
c) Aspect dynamique 88
d) Approximation sur l'intensité et la polarisation des champs entrants. 89
5.1.3) Champ faible dans la cavité 90
a) Expression des champs faibles sortants 90
b) Expression des champs faibles entrants 91
5.2) Oscillation dans la cavité **91**
5.2.1) Méthode 92
5.2.2) Taux de pompage optique 93
5.2.3) Expression de <Jz> 95
5.2.4) Equation de seuil 95
5.2.5) Discussion 96
a) Fréquence d'évolution 96
b) Angle d'oscillation au seuil 97
c) Intensité au seuil 97
5.2.6) Conclusion 97

6) Conclusion **99**

Chapitre II

Instabilités générées en présence d'un miroir de rétroaction

Etude expérimentale 101

1) Dispositif expérimental **105**

1.1) Milieu non-linéaire **106**

1.2) Source lumineuse **107**

1.2.1) Laser Titane-Saphir et faisceau laser 108

1.2.2) Mesure et asservissement de la fréquence laser. 108

a) Asservissement en fréquence 108

b) Absorption saturée 109

c) Echelle de fréquence 110

1.3) Schéma expérimental **111**

1.3.1) Préparation du faisceau 112

1.3.2) Oscillation dans la cavité 112

1.3.3) Analyse de l'instabilité 113

2) Génération d'instabilités de type "marguerites" **114**

2.1) Observation des marguerites **114**

2.1.1) Description 114

2.1.2) Interprétation en termes de modes de Laguerre-Gauss 115

a) Phase relative de deux pétales successifs. 116

b) Champ proche et champ lointain 119

2.2) Variation du nombre de pétales en fonction de la distance **121**

2.2.1) Principe de l'expérience 121

2.2.2) Etude pour un diamètre de faisceau de 0,8 mm 122

2.3) Evolution avec l'intensité **125**

2.3.1) Montage expérimental 125

2.3.2) Mesure et résultats. 126

4) Conclusion **128**

3) Génération d'instabilités loin des résonances. **130**

3.1) Instabilités observées **130**

3.1.1) Dépendance en fréquence 130

a) Expérience 130

b) Analyse 134

c) Conclusion 135
3.1.2) Variation des instabilités avec l'intensité de la pompe 135
3.2) Instabilités expérimentales et modèle théorique 138
3.2.1) Théorie 138
3.2.2) Résultats expérimentaux 138
3.2.3) Polarisation de l'instabilité 138
3.2.4) Modèle théorique et angles d'oscillation 140
a) théorie 140
b) Expérience 141
3.2.5) Conclusion 142
3.3) Aspects temporels de l'instabilité 142
3.3.1) Influence de la géométrie des pompes sur la périodicité du signal. 143
a) Dépendance de la fréquence d en fonction de l'angle a 144
b) Variation de la fréquence en fonction de l'intensité 145
3.3.2) Méthode expérimentale 146
a) Montage 146
b) Détection du signal 146
c) Echantillonnage 147
d) Protocole expérimental 150
3.3.3) Résultats expérimentaux 153
a) Présentation générale 153
b) Courbes 154
c) Analyse 158
3.4) Conclusion 160

4) Conclusion 161

Chapitre III

Instabilités générées par deux pompes se propageant en sens opposé.

Etude Expérimentale 163

Introduction **165**

1) Instabilités spatiales **167**

1.1) Diagramme de phase **167**

1.1.1) Dispositif expérimental 167

1.1.2) Construction du diagramme de phase 169

1.2) Champ proche **173**

1.3) Diagrammes de bifurcation **175**

1.3.1) Différents types de diagrammes de bifurcations 175

1.3.2) Résultats expérimentaux 178

2) Corrélations **184**

2.1) Définition **184**

2.1.1) Echantillonnage 184

2.1.2) Relation mathématique 185

2.2) Instabilités sur l'axe et hors d'axe **186**

2.2.1) Cas particulier: hexagones 186

2.2.2) Etude générale 187

2.3) Corrélations entre deux points d'une même figure **190**

2.3.1) Anneaux 190

a) Dispositif expérimental 190

b) Résultats 192

2.3.2) Hexagones 196

2.3.3) Rouleaux 197

2.4) Conclusion **198**

3) Chaos **199**

3.1) Notions théoriques **200**

3.1.1) Routes vers le chaos 200

a) Cascade sous-harmonique 200

b) Quasipériodicité 201

c) Intermittence 201

3.1.2) Attracteur étrange 202
a) Espace des phases 202
b) Attracteur 203
c) Attracteur étrange 204
d) Reconstruction d'un attracteur par la méthode des délais 206
3.1.3) Analyse dimensionnelle 207
a) Définition de la dimension fractale d'un attracteur 207
b) Algorithme de Grassberger-Procaccia 210
3.2) Résultats expérimentaux 212
3.2.1) Faisceau de diamètre à mi-hauteur 0.2 mm. F=2 213
a) Méthode 213
b) Resultats expérimentaux 214
3.2.2) Faisceau de diamètre à mi-hauteur de 0.4 mm. F=7 219
a) Anneaux 220
b) Hexagones 221
3.2.3) Faisceau de diamètre à mi-hauteur de 0.8 mm. F=28 226
3.2.4) Conclusion 227

Conclusion 229

Annexe I

Polarisation induite par deux champs de polarisations linéaires orthogonales

Système $1/2 \rightarrow 1/2$ 235

A1.1) Description du système. 237

1) Décomposition du champ selon les polarisations circulaires 237
2) Description du milieu non-linéaire 239

A1.2) Equations de Bloch 241

1) Matrice densité 241
2) Equation d'évolution de la matrice densité 242

A1.3) Expression des cohérences optiques 243

1) Expression de ρ_{eg} 243
2) Taux de pompage optique 244
3) Emission spontanée 245
4) Expression de la polarisation 246

Annexe II
Mélange à quatre ondes dans un milieu Kerr 249

A2.1) Description du champ et de la polarisation induite 251

1) Champ total 251
2) Polarisation 251
3) Equation de Maxwell 252
4) Champ rayonné par la polarisation 252

A2.2) Conditions sur les champs 253

1) Conservation de l'énergie 253
2) Accord de phase 254

A2.3) Interaction de trois ondes dans un milieu Kerr 255

1) Présentation du problème 255
2) Les différents processus de mélange à quatre ondes 255
a) Phase non linéaire 256
b) Mélange à quatre ondes vers l'arrière 256
c) Mélange à quatre ondes vers l'avant 257
d) Répartition distribuée 257

A2.4) Interprétation en termes de réseau d'interférences 257

1) Milieu Kerr 257
2) Vapeur atomique 259
a) Système à deux niveaux 259
b) Système $1/2 \rightarrow 1/2$ 259
c) Effets du mouvement des atomes 259

Introduction générale

Depuis le début des années 60, une nouvelle physique que nous pouvons qualifier de turbulente ou erratique s'est développée dans de nombreux domaines de la physique. En hydrodynamique, en climatologie [Vos89], en biologie, en chimie[Ber88]..., des observations expérimentales ont mis en évidence une évolution temporelle chaotique des signaux étudiés. En hydrodynamique, par exemple, l'expérience réalisée par Bénard en 1900 et intyerprétée par Lord Rayleigh en 1916 [Ber88] consiste à placer un fluide entre deux plaques horizontales soumises à des températures T_0 et T_1 différentes et à mesurer la température T en un point donné du fluide. L'évolution temporelle de la température T peut être statique, périodique ou chaotique suivant la valeur de la différence de température entre les deux plaques. Le passage d'un comportement périodique à un comportement chaotique suit un scénario classique qui a été observé aussi dans d'autres domaines de la physique. De manière générale, l'étude approfondie des comportements chaotiques montre des similitudes importantes [Tho86] au sein des différentes branches de la physique. Le comportement de tels phénomènes non-linéaires a fait l'objet de nombreuses études [Cro93] et la théorie mathématique des systèmes dynamiques différentiables a permis une unification des concepts développés dans des domaines aussi variés. En 1963, E. N. Lorentz [Lor63] a montré l'existence de phénomènes chaotiques engendrés par un système d'équations déterministes. L'universalité du comportement dynamique dans les phénomènes non-linéaires a également été mise en évidence par Hénon [Hén76], Ruelle et Takens [Rue71]. Il est aujourd'hui posssible de caractériser la dynamique de systèmes non-linéaires [Eck85].

Une caractéristique importante de ces systèmes non-linéaires est la possiblité de d'évoluer, en faisant varier un paramètre de contrôle, d'un état d'équilibre à un autre état d'équilibre qui est appelé alors instabilité. Dans l'expérience de Rayleigh et Bénard, la température en un point donné du fluide est statique pour une faible différence de température entre les deux plaques et peut devenir pour une différence de température plus importante, périodique ou même chaotique. On parle alors d'instabilité dynamique. De même, les particules du fluide, pour une différence de température suffisante entre les deux plaques, sont soumises à un mouvement de convection qui peut devenir spatialement inhomogène. Les particules de fluide en mouvement constituent alors de nouvelles structures appelées instabilités convectives.

De manière générale, le comportement temporel des variables d'un système non-linéaire peut être associé à un comportement spatial. Il sera souvent possible d'observer des structures dans les variables détectées.

Des instabilités ont été observées dans d'autres domaines de la physique et en particulier en optique non-linéaire[Abr90]: Deux ondes intenses de même fréquence se propageant en sens contraire dans un milieu non-linéaire peuvent générer lorsque leur intensité est suffisante, de nouvelles ondes appelées instabilités. Ces instabilités s'inscrivent sur un cône dont l'axe correspond à la direction de propagation des ondes pompes. Leur intensité peut avoir une dynamique temporelle éventuellement chaotique et leur distribution d'intensité possède une structure transverse. De telles expériences ont été réalisées en utilisant comme milieu non-linéaire des vapeurs atomiques, des cristaux liquides [Kre91], des matériaux photoréfractifs [Dam94] ou des fibres optiques [Yu93]... De nombreux travaux tant théoriques que expérimentaux ont été consacrés à l'étude de ces instabilités transverses et de leur comportement dynamique. Ces instabilités, obtenues avec des milieux non-linéaires différents, possèdent des caractères communs , mais l'origine et les caractéristiques de la non-linéarité permettent de mettre en évidence leur spécificité. Dans une vapeur atomique par exemple, la nonlinéarité est fonction de la fréquence et de l'intensité de l'onde pompe.

Ce mémoire est consacré à l'étude des instabilités transverses créées par deux ondes intenses se propageant en sens inverse dans une cellule de Rubidium. Cette étude est réalisée dans deux configurations différentes. Dans la première configuration, une onde intense polarisée linéairement se propage dans la vapeur atomique. Elle est réfléchie sur elle-même par un miroir de rétroaction et peut ainsi se propager à nouveau dans le milieu non-linéaire. Des instabilités sont alors émises. Elles pourront également se réfléchir sur le miroir de rétroaction et être réinjectés dans le milieu non-linéaire. Il est alors possible de dissocier les effets de propagation des ondes entre le miroir et le milieu non-linéaire des effets non linéaires au sein de la cellule. Dans la deuxième configuration, deux ondes se propagent en sens opposé et il n'y a plus de miroir de rétroaction. Les effets non-linéaires et les effets de propagation s'observent au sein de la cellule et ne peuvent alors pas être dissociés comme dans l'expérience précédente.

Dans ce mémoire, nous décrirons le comportement spatio-temporel des instabilités générées dans ces deux géométries. Nous nous intéresserons aussi bien à la structure transverse en fonction des différents paramètres du système qu'à l'intensité dynamique des instabilités. Nous étudierons en particulier les phénomènes de chaos dans de tels systèmes. Nous montrerons aussi des similitudes entre ces deux expériences et des expériences réalisées dans d'autres systèmes.

Dans le chapitre I, nous étudierons théoriquement les instabilités générées par une onde se réfléchissant sur un miroir de rétroaction. Les phénomènes de pompage optique sont là responsables de non-linéarité de la vapeur atomique et la génération d'instabilités de polarisation orthogonale à celle des pompes est interprétées en termes de mélange à quatre ondes. Notre modèle nous permettra de prédire la structure transverse des instabilités en fonction des caractéristiques du faisceau laser et du milieu non-linéaire. Nous prédirons aussi un comportement dynamique de ces instabilités.

Le chapitre II consiste en l'étude expérimentale du système présenté dans le chapitre I. Nous aborderons les aspects temporels et spatiaux des instabilités. Nous confronterons la théorie développée au premier chapitre avec nos résultats expérimentaux. Nous montrerons dans un deuxième temps que la dynamique des instabilités peut être aussi chaotique et nous réaliserons une étude qualitative de cette dynamique.

Dans le chapitre III, nous exposerons les résultats expérimentaux obtenus dans la configuration où deux ondes intenses se propagent dans le milieu non-linéaire. Il ne sera plus possible dans cette expérience de négliger les effets de propagation dans la cellule et l'interprétation théorique est beaucoup plus difficile. Aussi, nous réaliserons une étude expérimentale des instabilités. Nous décrirons encore l'aspect spatial des instabilités transverses en fonction des divers paramètres mais nous réaliserons ici une étude quantitative de la dynamique des instabilités: nous caractériserons, d'une part, les corrélations spatiales au sein d'une même instabilité et, d'autre part, le chaos associé aux instabilités au delà de leur seuil de formation.

L'annexe 1 exposera les phénomènes de pompage optique dans une vapeur atomique sous l'action de deux ondes de polarisation linéaire orthogonale. Nous y établirons les taux de pompage optique et l'expression de la polarisation. L'annexe 2 introduira les notions de mélange à quatre ondes dans un milieu Kerr.

Chapitre I

Instabilités générées en présence d'un miroir de rétroaction.

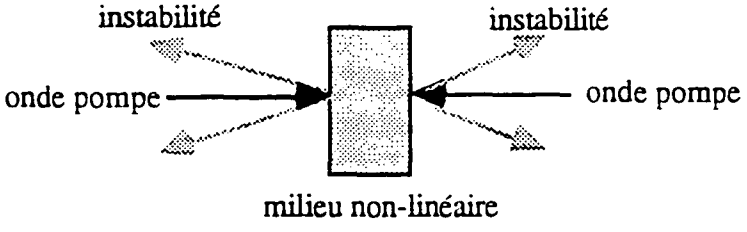
Etude théorique

Introduction

En optique non-linéaire, certains systèmes initialement stables peuvent devenir, en modifiant un paramètre, instables, présenter une bistabilité optique ou générer de nouvelles ondes cohérentes appelées instabilités optiques. De nombreux dispositifs ont permis depuis la fin des années 70 d'étudier de tels phénomènes.

Un des premiers dispositifs étudiés théoriquement [Gib76] est constitué par une cavité Fabry-Pérot [Lug87] contenant un milieu non-linéaire comme par exemple, un absorbant à deux niveaux. Gibbs a montré que sous certaines conditions, l'intensité de la lumière transmise présentait un comportement bistable. Par ailleurs, Bonifacio et Lugiato [Bon78] ont mis en évidence un comportement bistable lorsque l'absorbant à deux niveaux est placé dans une cavité en anneau. Leur étude théorique tient compte des effets de propagation dans la cavité. K. Ikeda en 1979 [Ike79], à partir d'une même cavité en anneau et en prenant en compte le temps de réaction du matériau, a montré qu'une telle cavité optique bistable pouvait donner naissance à des instabilités. Ces instabilités pouvent présenter elles-mêmes un comportement chaotique.

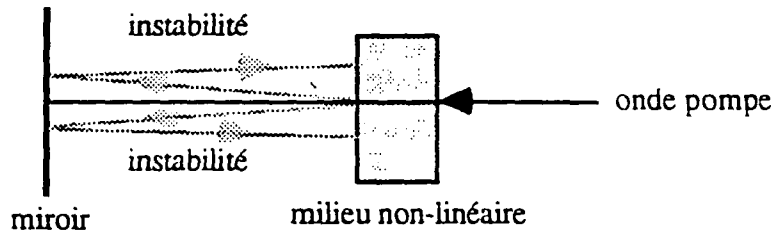
A partir des années quatre-vingt, les études ont aussi porté sur le comportement transverse de ces instabilités. Dans les cavités en anneau , P. Mandel [Man93] décrit les effets transverses dans le cas d'une cavité passive et d'une cavité active. Un autre dispositif courant consiste en un milieu non-linéaire dans lequel se propagent en sens inverse deux ondes intenses appelées les ondes pompes. L'interaction de ces ondes avec le milieu peut, au-delà d'un certain seuil, conduire à l'émission de nouvelles ondes [Gry88a] émises dans la direction de chaque faisceau pompe et en faisant éventuellement un petit angle avec l'axe des pompes.



FigI.0.1: Configuration générale

Ces instabilités peuvent conduire à l'émission de structures de formes variées et qui peuvent aussi présenter un comportement dynamique. Ces études théoriques ont été menées aussi bien pour des milieux non-linéaires constitués par des matériaux solides tel que des matériaux Kerr [Fir88] que par une vapeur atomique dont le temps de réponse est bien plus court [Cou92], [Pen89]. Des études ont prédit le seuil d'apparition de ces instabilités [Gry89] ainsi que leur comportement juste au-dessus du seuil [Cha92].

D'autres études théoriques ont encore été réalisées mais en plaçant après le milieu non-linéaire un miroir de rétroaction [LeB90].



FigI.0.2: génération d'instabilités dans un système comportant un milieu non-linéaire, une onde pompe et un miroir de rétroaction

Un faisceau pompe se propage dans le milieu non-linéaire, se réfléchit ensuite sur le miroir placé après la cellule et se propage ainsi à nouveau dans le matériau mais dans le sens contraire. Les instabilités sont émises et pourront aussi se réfléchir sur le miroir et être réinjectées à leur tour dans la cellule. Les études théoriques supposent généralement que le milieu non-linéaire est un milieu Kerr, c'est-à-dire un milieu dont la non-linéarité est proportionnelle à l'intensité de l'onde pompe et que le miroir est placé à une distance du milieu non-linéaire grande devant la longueur de ce milieu. Les effets non-linéaires dans le milieu sont alors dissociés des effets de propagation entre le milieu et le miroir. Les études théoriques prévoient l'intensité seuil permettant d'observer ces instabilités et leur caractéristique au-dessus du seuil [D'Al92], [Fir90].

Notre étude a été réalisée avec un dispositif très similaire à cette dernière configuration mais en remplaçant le milieu Kerr par une vapeur alcaline. Les non-linéarités impliquées dans une vapeur atomique sont usuellement soit les non-linéarités dues à la saturation d'une transition atomique soit les non-linéarités dues au pompage optique [Pin94]. Lorsqu'une transition atomique est saturée, des atomes des niveaux fondamentaux sont portés dans les niveaux excités. Les non-linéarités dues au pompage optique s'observent pour des intensités bien plus faibles que pour les non-linéarités dues à la saturation de la transition atomique. Pour cette raison, notre étude a donc porté sur ces non-linéarités dues à la saturation du pompage optique [Val92]. Lorsque la

fréquence de l'onde pompe est très différente de la fréquence de résonance de la vapeur atomique, ou lorsque l'intensité est faible, la vapeur se comportera comme un matériau Kerr, dispersif présentant toutefois une non-linéarité tensorielle [Pin94]. Dans ce cas, la projection des instabilités sur un écran lointain correspondra à des images variées comme des anneaux ou des hexagones [Gry93a]. Près des résonances, lorsque les effets d'absorption sont plus importants, les instabilités observées sont très différentes et ressemblent à des "marguerites" (figures comportant un nombre pair de taches réparties sur un cercle) [Gry94a]. Pour pouvoir comprendre la formation de ces instabilités et prédire leur comportement, il est donc nécessaire de bien décrire le milieu non-linéaire et les champs en présence.

Pour qu'il y ait pompage optique, il est nécessaire que le niveau fondamental comporte plus d'un sous-niveau Zeeman. Nous avons donc choisi la transition la plus simple se rapprochant de notre situation expérimentale, une transition $J_g = 1/2 \rightarrow J_e = 1/2$. Expérimentalement, nous avons en effet choisi de travailler sur la raie D_1 du Rubidium 85 couplant les niveaux $5S_{1/2}$ aux niveaux $5P_{1/2}$. Comme le Rubidium a un spin nucléaire I=5/2, la transition atomique est toutefois plus complexe que la transition $1/2 \rightarrow 1/2$ et les résultats du calculs ne restent valables que pour un désaccord à la résonance grand devant la structure hyperfine du niveau excité. Expérimentalement, l'onde pompe est polarisée linéairement et l'instabilité est, au seuil, polarisée linéairement et orthogonalement aux ondes pompes. Nous réaliserons toute notre étude théorique dans une base appropriée, appelée base circulaire, prenant en compte le couplage entre les ondes de polarisations croisées. L'action sur la vapeur atomique des différentes composantes du champ dans cette base permet de comprendre le peuplement d'un sous-niveau Zeeman du fondamental aux dépens d'un autre sous-niveaux Zeeman. Une nouvelle interaction des ondes pompes avec le milieu ainsi préparé permettra de créer une polarisation électronique susceptible d'engendrer l'instabilité optique. Ces différents processus peuvent souvent aussi être décrits en termes de mélange à quatre ondes [Abr78], [Gry88a].

Nous cherchons dans cette première partie à expliquer la formation de ces instabilités et à caractériser leur comportement près du seuil. Les parties 1 et 2 permettront d'établir les équations régissant la génération des instabilités. Les parties 3 et 4 caractériseront le comportement des instabilités et leur structure transverse. La partie 5 permettra d'aborder les aspects dynamiques de l'instabilité. Dans la partie 1, nous considérerons l'interaction de deux ondes de polarisations linéaires croisées se propageant dans le même sens au sein du milieu non-linéaire. Dans la deuxième partie, nous considérerons d'abord l'interaction dans le milieu de deux paires d'ondes présentant les mêmes caractéristiques que celles de la première partie mais se

propageant en sens contraire. Nous nous rapprocherons ensuite de la situation expérimentale en considérant que deux de ces ondes sont intenses, qu'une troisième est d'intensité plus faible et nous chercherons dans quelles conditions l'interaction de ces trois ondes peut générer la quatrième onde, l'instabilité. Dans la partie 3 ainsi que dans la partie 5, les ondes seront considérées comme des ondes planes. Dans la partie 4 les ondes seront considérées comme des ondes gaussiennes.

1) Propagation de deux ondes de polarisations linéaires orthogonales

Cette partie consistera tout d'abord en une description des champs électriques et de la vapeur atomique. Nous nous attacherons particulièrement à une description en termes de niveaux d'énergie de l'atome. Les divers processus permettant le couplage entre les différents sous-niveaux Zeeman seront présentés. En particulier, nous approfondirons les mécanismes de pompage optique qui permettent à un atome de passer d'un état fondamental à un état excité. Une décomposition des champs sur la base circulaire et le formalisme des équations de Bloch optique, présentés dans l'annexe 1 nous permettront de connaître, ensuite, l'évolution des populations des différents sous-niveaux Zeeman. Enfin, nous pourrons accéder à la polarisation induite par deux champs de polarisations croisées se propageant dans le même sens dans une vapeur atomique.

1.1) Description du système.

Nous donnerons d'abord l'expression du champ défini comme une onde plane. Nous décrirons ensuite la vapeur atomique en précisant la transition étudiée puis les processus impliqués dans les excitations et desexcitations de l'atome.

1.1.1) Décomposition du champ sur la base circulaire

Dans cette partie, nous considérerons deux ondes planes $\bar{E}_x$ et $\bar{E}_y$, de même fréquence et de polarisations linéaires orthogonales, se propageant le long de l'axe (Oz) et dans le même sens au sein d'un milieu non-linéaire (voir figure (I.1.1)).

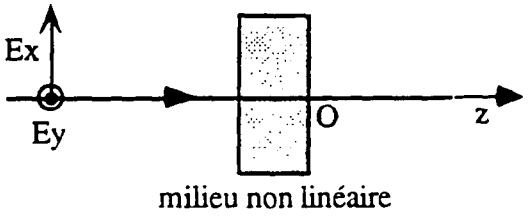


Fig I.1.1: Propagation des champs dans le milieu non-linéaire.

Ces ondes se décomposent de la manière suivante:

$$\boxed{\bar{E}_x = \mathrm{Re}\left(\sqrt{I_x}e^{-i(\omega t - kz + \varphi_x)}\right)\bar{e}_x} \qquad (I.1.1)$$

$$\boxed{\bar{E}_y = \mathrm{Re}\left(\sqrt{I_y}e^{-i(\omega t - kz + \varphi_y)}\right)\bar{e}_y} \qquad (I.1.2)$$

I_x et I_y correspondent à l'intensité des champs $\bar{E}_x$ et $\bar{E}_y$. L'origine O de l'axe(Oz) est placée à la sortie de la cellule.

1.1.2) Description du milieu non-linéaire

Le milieu non-lineaire est constitué d'une vapeur atomique comportant une densité N d'atomes. Nos expériences étant faites avec des atomes alcalins, nous considérons des atomes dont le moment cinétique électronique dans le niveau fondamental J_g vaut 1/2. La fréquence ω des ondes $\bar{E}_x$ et $\bar{E}_y$ est très proche de la fréquence de résonance ω_{at} d'une transition couplant un niveau J_g=1/2 à un niveau J_e=1/2. L'écart à résonance est noté

$$\Delta=\omega-\omega_{at} \qquad (I.1.3)$$

Nous choisirons comme axe de quantification des observables la direction de propagation des ondes. La projection J_z du moment cinétique de l'atome sur cet axe orienté peut alors prendre dans les niveaux fondamental et excité les valeurs $\hbar/2$ et $-\hbar/2$. La figure (I.1.2) représente les différents sous niveaux Zeeman de cette transition.

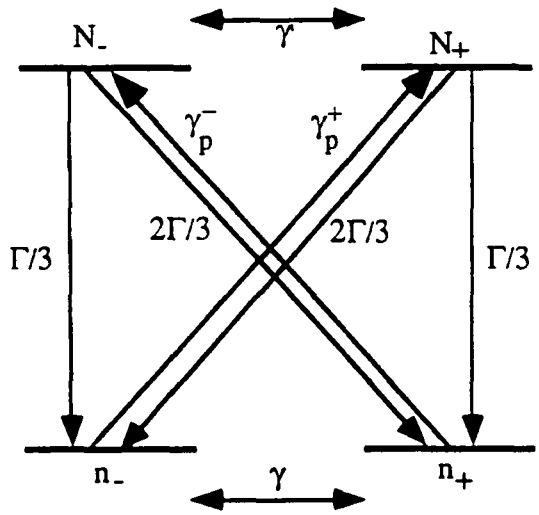


Fig I.1.2: Sous -niveaux Zeeman et divers processus impliqués dans la transition 1/2->1/2

Nous choisissons de travailler sur la base circulaire $(\bar{e}_+, \bar{e}_-)$, où

$$\bar{e}_\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{e}_x \pm i\bar{e}_y\right) \tag{I.1.4}$$

Cette base permet de prendre en compte simplement les effets de couplages entre l'onde polarisée suivant $\bar{e}_x$ et l'onde polarisée suivant $\bar{e}_y$.

Le champ à l'intérieur de la cellule peut se décomposer sur cette base en une onde polarisée σ_+ (suivant $\bar{e}_+$) et une onde polarisée σ_- (suivant $\bar{e}_-$). Une onde polarisée σ_+ couple le sous-niveau Zeeman fondamental $|g_-\rangle$ où $J_z=-\hbar/2$ au sous-niveau Zeeman excité $|e_+\rangle$ pour lequel J_z vaut $\hbar/2$. Inversement sous l'action d'une onde polarisée σ_-, le sous-niveau fondamental $|g_+\rangle$ correspondant à $J_z=\hbar/2$ est couplé au sous-niveau excité $|e_-\rangle$ ($J_z=-\hbar/2$). Le taux de pompage optique γ_p^- est défini comme le taux d'atomes quittant par seconde le sous niveau $|g_+\rangle$ vers le sous niveau $|e_-\rangle$ sous l'effet de la composante σ_- du champ. Réciproquement γ_p^+ correspond au taux de transition des atomes du niveau $|g_-\rangle$ vers le niveau $|e_+\rangle$ sous l'effet de la composante σ_+ du champ. Nous voyons ainsi que dans cette description, le champ ne peut pas coupler le niveau $|g_+\rangle$ (resp $|g_-\rangle$) au niveau $|e_+\rangle$ (resp $|e_-\rangle$).

Les populations des niveaux excités peuvent par émission spontanée d'un photon retomber dans les niveaux fondamentaux $|g_+\rangle$ et $|g_-\rangle$. On définit ainsi la largeur naturelle Γ des niveaux excités correspondant à l'inverse de leur temps de vie. Les populations des sous-niveaux Zeeman du niveau fondamental (respectivement excité) peuvent aussi s'équilibrer sous l'effet d'autres processus de relaxation (les collisions

par exemple) avec un taux γ (respectivement γ'). Tous ces processus sont résumés dans la figure (I.1.2).

Nous supposerons que les taux de retour à l'équilibre des populations des sous niveaux Zeeman (γ pour le niveau fondamental et γ' pour le niveau excité) sont bien plus petits que la largeur naturelle des niveaux excités. Nous supposerons de plus que les taux de pompage optique sont aussi très inférieurs à la largeur naturelle des niveaux excités:

$$\gamma_p^{\pm}, \gamma, \gamma' << \Gamma \qquad \text{(I.1.5.a)}$$

Nous supposerons ainsi qu'au cours d'un cycle de pompage optique, les atomes portés dans un état excité se desexcitent quasi-instantanément. Nous pourrons donc négliger les populations des niveaux excités (N_+ et N_- pour les niveaux $|e_+\rangle$ et $|e_-\rangle$) devant les populations des niveaux fondamentaux (n_+ et n_- pour les niveaux $|g_+\rangle$ et $|g_-\rangle$). Nous supposerons désormais que

$$N_{\pm} << n_{\pm} \qquad \text{(I.1.5.b)}$$

Il n'y a pas de saturation de la transition optique.

Dans un tel système, les seules observables non nulles en régime stationnaire sont donc les populations de chaque sous-niveau Zeeman et les cohérences optiques entre un niveau de moment cinétique $J_g=1/2$ et un niveau de moment cinétique $J_e=1/2$. Des calculs détaillés dans l'annexe 1, permettent à partir des équations de Bloch de connaître l'évolution de ces observables et ainsi d'accéder aux taux de pompage optique [Coh90] qui sont donnés par la formule suivante:

$$\boxed{\gamma_p^{\pm} = \frac{\Gamma}{24} \frac{d^2\left(I_x + I_y \pm 2\sqrt{I_x I_y}\sin(\varphi)\right)}{\hbar^2\left(\frac{\Gamma^2}{4} + \Delta^2\right)}} \qquad \text{(I.1.6)}$$

où φ correspond au déphasage relatif entre les deux champs.

$$\varphi = \varphi_x - \varphi_y \qquad \text{(I.1.7)}$$

d est l'élément de matrice réduit de l'opérateur dipolaire électrique défini dans l'annexe 1.

1.2) Equations d'évolution des populations

On peut aisément déduire du diagramme de la figure (I.1.2), les équations d'évolution des populations des différents sous-niveaux Zeeman:

$$\begin{aligned}
\frac{dn_-}{dt} &= -\left(\gamma+\gamma_p^+\right)n_- + \gamma n_+ + \frac{\Gamma}{3}N_- + \frac{2\Gamma}{3}N_+ \\
\frac{dn_+}{dt} &= -\left(\gamma+\gamma_p^-\right)n_+ + \gamma n_- + \frac{\Gamma}{3}N_+ + \frac{2\Gamma}{3}N_- \\
\frac{dN_-}{dt} &= -\left(\gamma'+\Gamma\right)N_- + \gamma' N_+ + \gamma_p^- n_+ \\
\frac{dN_+}{dt} &= -\left(\gamma'+\Gamma\right)N_+ + \gamma' N_- + \gamma_p^+ n_-
\end{aligned} \tag{I.1.8}$$

Cherchons maintenant à connaître les populations des différents sous-niveaux Zeeman dans l'état stationnaire. D'après les relations (I.1.5) et (I.1.8), $1/\Gamma$ est un temps très court devant les temps caractéristiques d'évolution des populations. Au bout de quelques $1/\Gamma$, les populations des niveaux excités ont atteint leur régime stationnaire. On peut donc dire que N_+ et N_- suivent adiabatiquement [Coh90] l'évolution du champ. L'évolution des populations des niveaux excités $N_\pm$ est alors donnée d'après (I.1.8) par la relation suivante puisque $\gamma' << \Gamma$:

$$N_\pm = \frac{\gamma_p^\pm}{\Gamma} n_\mp \tag{I.1.9}$$

Nous retrouvons ici la relation $N_\pm << n_\pm$ de telle sorte que le niveau excité peut être négligé.

La valeur moyenne de J_z sur la population totale du niveau fondamental, est égale à la somme des moments cinétiques des n_+ atomes dans le niveau m=1/2 et des moments cinétiques des n_- atomes dans le niveau m=-1/2, moyenné sur le nombre d'atomes dans le niveau fondamental. Pour une transition $1/2 \rightarrow 1/2$, la valeur moyenne de J_z est donc égale à:

$$\langle J_z \rangle = \frac{\hbar}{2}\frac{n_+ - n_-}{n_+ + n_-} \tag{I.1.10}$$

Les équations d'évolution de la valeur moyenne de J_z et de la somme $S=n_++n_-$ des populations du niveau fondamental se déduisent des relations (I.1.8) et (I.1.9):

$$\frac{dS}{dt} = 0 \tag{I.1.11}$$

Nous négligeons ici les populations N_+ et N_- des sous-niveaux excités.

Le nombre total d'atomes est bien conservé puisque le système est fermé. On trouve pour $\langle J_z \rangle$

$$\frac{d\langle J_z \rangle}{dt} = -\left(2\gamma + \gamma_p\right)\langle J_z \rangle + \left(\frac{\gamma_p^+ - \gamma_p^-}{3}\right)\frac{\hbar}{2} \tag{I.1.12.a}$$

avec

$$\gamma_p = \frac{\gamma_p^+ + \gamma_p^-}{3} = \frac{\Gamma}{36}\frac{d^2\left(I_x + I_y\right)}{\hbar^2\left(\frac{\Gamma^2}{4} + \Delta^2\right)} \tag{I.1.12.b}$$

En régime permanent, $\langle J_z \rangle$s'exprime de la façon suivante:

$$\frac{\langle J_z \rangle}{\hbar} = \frac{\gamma_1}{2\gamma + \gamma_p} \tag{I.1.13}$$

avec

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma}{36}\frac{d^2\sqrt{I_x I_y}\sin\varphi}{\hbar^2\left(\frac{\Gamma^2}{4} + \Delta^2\right)} \tag{I.1.14}$$

La valeur moyenne de J_z [Gry90] est appelée aussi orientation du niveau fondamental [Omo77]. γ_1 s'interprète comme un terme de construction de l'orientation et est proportionnel à la différence I_+-I_- des intensités des ondes polarisées σ_+ et σ_-. L'orientation est maximum lorsque les ondes $\bar{E}_x$ et $\bar{E}_y$ sont en quadrature. $(2\gamma+\gamma_p)$ correspond à la relaxation du niveau fondamental et peut s'interpréter comme un terme de destruction de l'orientation. γ correspond à la destruction due à la relaxation des sous-niveaux fondamentaux sous l'action des processus autres que le pompage optique. $\gamma_p$traduit la destruction de l'orientation du fondamental sous l'action du pompage optiqe dû aux ondes polarisées linéairement. Ce terme de saturation du pompage optique sera par la suite essentiel dans notre étude.

1.3) Expression de la polarisation

Appelons χ_0 la susceptibilité diélectrique linéaire du milieu pour un milieu non orienté ($n_+ = n_-$). La polarisation, créée par un champ $\bar{E}$ qui interagit de manière uniforme avec l'ensemble des atomes, a pour expression:

$$\bar{P} = \varepsilon_0 \chi_0 \bar{E} \tag{I.1.15}$$

Le champ peut se décomposer en deux ondes $\bar{E}_+$ et $\bar{E}_-$ polarisées respectivement σ_+ et σ_-. L'onde $\bar{E}_+$ n'est couplée qu'avec les n_- atomes de $J_z = -\hbar/2$ et l'onde $\bar{E}_-$ n'est couplée qu'avec les n_+ atomes de $J_z = \hbar/2$. La polarisation peut alors s'exprimer comme la somme d'une polarisation σ_+ et d'une polarisation σ_-. On obtient alors

$$\bar{P} = \varepsilon_0 \frac{n_+}{n_+ + n_-} \chi_0 \bar{E}_- + \varepsilon_0 \frac{n_-}{n_+ + n_-} \chi_0 \bar{E}_+ = \varepsilon_0 \chi_- \bar{E}_- + \varepsilon_0 \chi_+ \bar{E}_+ \tag{I.1.16}$$

avec

$$\boxed{\chi_\pm = \chi_0 \left(1 \pm \frac{2}{\hbar} \langle J_z \rangle\right)} \tag{I.1.17}$$

Des calculs présentés dans l'annexe 1 donnent la valeur de χ_0

$$\chi_0 = \frac{-Nd^2}{6\varepsilon_0 \hbar \left(\Delta + i\frac{\Gamma}{2}\right)} \tag{I.1.18}$$

Notons que que la susceptibilité et donc la polarisation sont fonction par l'intermédiaire de $\langle J_z \rangle$ de la saturation du pompage optique.

Dans cette première partie, nous avons étudié l'action sur une vapeur atomique de deux champs de polarisation linéaire orthogonale et dont la fréquence est proche de la fréquence de la résonance d'une transition $1/2 \rightarrow 1/2$. En particulier, nous avons exprimé la susceptibilité non-linéaire et donné l'équation d'évolution de la valeur moyenne du moment cinétique du niveau fondamental $\langle J_z \rangle$.

2) Mélange à quatre ondes en polarisations linéaires orthogonales

Dans cette partie, nous généraliserons les expressions des taux de pompage optique et de la polarisation établis dans la partie précédente. Alors que dans la première partie, nous avions décrit le cas où une seule paire d'onde se propageait dans le milieu non-linéaire, dans cette partie nous traiterons le cas où une deuxième paire d'ondes possédant les mêmes caractéristiques se propage dans le milieu en sens contraire. Le moment cinétique global des atomes résulte des actions sur le milieu de chacune des deux paires d'ondes. Le taux de pompage optique, la moyenne sur l'ensemble des atomes de J_z et ainsi la polarisation totale induite par les ondes peuvent alors se déduire des résultats de la partie précédente. La polarisation induite permet ensuite d'accéder à l'expression des champs sortants. Enfin nous expliquerons en détail le principe du miroir à contraste de phase, miroir constitué d'un milieu non linéaire, de deux ondes pompes et sur lequel peut se réfléchir une troisième onde.

2.1) Mélange de quatre ondes dans le milieu non-linéaire

Nous considérons ici la propagation dans le milieu non-linéaire de deux paires d'ondes de polarisations linéaires croisées se propageant dans des sens opposés sans faire aucune approximation sur leurs intensités respectives. Nous établirons l'expression du taux de pompage optique, puis celle de la polarisation induite par les quatre champs dans le milieu et nous en déduirons à l'aide des équations de Maxwell, les équations d'évolution des champs dans le milieu non-linéaire.

2.1.1) Description des champs en présence

Considérons deux ondes électromagnétiques $\bar{E}_x$ et $\bar{E}_y$, de même fréquence ω et de polarisations linéaires orthogonales, se propageant suivant une direction z et deux

autres ondes $\bar{E}'_x$ et $\bar{E}'_y$ évoluant également à la même fréquence ω mais se propageant dans la direction opposée. $\bar{E}'_x$ et $\bar{E}'_y$ ont chacun une polarisation respectivement parallèle à $\bar{E}_x$ et $\bar{E}_y$.

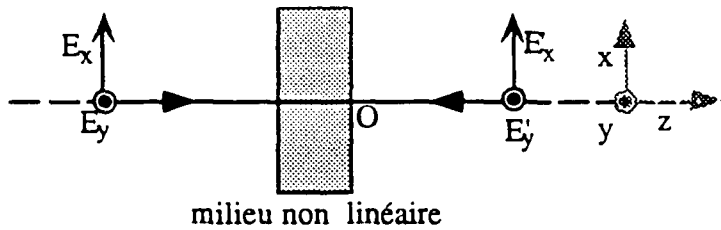


Fig I.2.1: Propagation des champs dans le milieu non linéaire

$$\boxed{\begin{aligned}
\bar{E}_x &= \mathrm{Re}\left(\sqrt{I_x}e^{-i(\omega t-kz+\varphi_x)}\right)\bar{e}_x \\
\bar{E}_y &= \mathrm{Re}\left(\sqrt{I_y}e^{-i(\omega t-kz+\varphi_y)}\right)\bar{e}_y \\
\bar{E}'_x &= \mathrm{Re}\left(\sqrt{I'_x}e^{-i(\omega t+kz+\varphi'_x)}\right)\bar{e}_x \\
\bar{E}'_y &= \mathrm{Re}\left(\sqrt{I'_y}e^{-i(\omega t+kz+\varphi'_y)}\right)\bar{e}_y
\end{aligned}} \qquad (I.2.1)$$

Nous reprenons les mêmes notations que dans la partie I.1 pour l'amplitude et la phase des ondes $\bar{E}_x$ et $\bar{E}_y$ et des notations similaires pour les ondes $\bar{E}'_x$ et $\bar{E}'_y$. Nous notons φ' la phase relative entre ces ondes et φ'' la demie somme de leurs phases.

$$\varphi' = \varphi'_x - \varphi'_y \qquad \text{et} \qquad \varphi'' = \frac{\varphi'_x + \varphi'_y}{2} \qquad (I.2.2)$$

2.1.2) Taux de pompage optique

Les taux de pompage optique établis dans la partie (I.1) ont pour origine l'interaction d'une paire d'ondes de polarisations linéaires croisées, se propageant dans le même sens dans le milieu non-linéaire. Dans cette partie, nous considérons l'interaction de deux paires d'ondes, chaque paire d'onde étant constituée de deux ondes de polarisations linéaires et orthogonales, se propageant dans le même sens dans le milieu non-linéaire. Par conséquent dans cette configuration, les taux de pompage optique dus à l'interaction des quatre champs avec le milieu sont la somme des taux de pompage optique créés indépendamment par chaque paire d'ondes et d'un éventuel taux de pompage optique dû à l'interaction dans le milieu non-linéaire de deux ondes de polarisations linéaires orthogonales mais se propageant dans des sens opposés.

Nous choisissons comme dans les parties précédentes, l'axe orienté (Oz) comme axe de quantification des observables. Le caractère σ_+ ou σ_- de l'onde étant relatif à l'atome indépendamment de la direction de propagation des champs, les taux de pompage optique, dus à chaque paire d'ondes prise séparément, sont directement déduits de la partie (I.1). Nous allons maintenant montrer que nous pouvons négliger toutes les interactions entre ondes se propageant dans des sens opposés.

a) Interaction entre les ondes $\bar{E}_\pm$ et $\bar{E}'_\pm$

Un taux de pompage optique correspond à la proportion d'atomes quittant un sous-niveau fondamental sous l'effet des champs. Les processus physiques à l'origine de ces taux de pompage exposés en détail dans l'annexe 1 peuvent être interprétés de la manière suivante [Coh90]. L'interaction des atomes dans le sous-niveau fondamental $|g_+\rangle$ (respectivement $|g_-\rangle$) avec l'onde $\bar{E}_-$ (respectivement $\bar{E}_+$), crée d'abord une cohérence optique $\rho_{eg}=\tilde{\rho}_{eg}\, e^{-i(\omega t-kz)}$. Celle-ci interagit à son tour avec le champ et crée un taux de pompage optique. L'interaction de la cohérence optique avec l'onde $\bar{E}_-$ (respectivement $\bar{E}_+$), crée le taux de pompage optique déjà établi dans la partie (I.1) et dû à l'interaction d'une seule paire d'onde dans le milieu. Par contre, l'interaction de la cohérence ρ_{eg} avec l'onde $\bar{E}'_-$ (respectivement $\bar{E}'_+$), crée un taux de pompage optique modulé spatialement en e^{2ikz}. Un réseau de population du niveau fondamental et de pas $\lambda/2$ est ainsi constitué. Sa durée de vie correspond à la durée de vie $1/(2\gamma+\gamma_p)$ de $\langle J_z\rangle$. Le mouvement des atomes tend à détruire ce réseau de pas égal à $\lambda/2$ si durant la durée de vie du réseau, le déplacement des atomes n'est pas négligeable devant le pas du réseau. Pour détruire ce réseau de petit pas, il faut que la largeur Doppler ku vérifie, l'inégalité suivante:

$$ku \gg \gamma, \gamma_p \qquad \text{(I.2.3)}$$

Nous nous placerons toujours dans le cas où cette inégalité est vérifiée. Les interactions entre deux ondes se propageant en sens contraire seront négligées.

Nous ne considérerons donc que les taux de pompage optique dus aux deux paires d'ondes prises séparement.

b) Taux de pompage optique global

Les atomes dans le niveau fondamental peuvent être pompés optiquement par suite de leur interaction avec les ondes $\bar{E}_x$ et $\bar{E}_y$ ou $\bar{E}'_x$ et $\bar{E}'_y$. Le pompage optique sous l'effet des quatre ondes est donc la somme des pompages optiques obtenus pour

chaque paires d'ondes. D'après la relation (I.1.6), et compte tenu des remarques faites dans les paragraphes précédents, le taux de pompage optique s'exprime de la façon suivante:

$$\gamma_p^{\pm} = \frac{\Gamma}{24} \frac{d^2\left(I_x + I_y + I'_x + I'_y \pm 2\sqrt{I_x I_y}\sin(\varphi) \pm 2\sqrt{I'_x I'_y}\sin(\varphi')\right)}{\hbar^2\left(\frac{\Gamma^2}{4} + \Delta^2\right)} \tag{I.2.4}$$

2.1.3) Polarisation et susceptibilité induite par les champs

Dans la partie précédente, nous avions à partir de la valeur moyenne de $\langle J_z \rangle$ établi l'expression de la susceptibilité non-linéaire vue par une onde polarisée σ_+ ou σ_- et ainsi de la polarisation induite par les ondes dans le milieu. Nous allons donc généraliser ces résultats à notre nouvelle configuration.

La moyenne du moment cinétique $\langle J_z \rangle$ des atomes en régime stationnaire dans le niveau fondamental est obtenue par une formule généralisant les relations (I.1.13) et (I.1.14):

$$\frac{\langle J_z \rangle}{\hbar} = \frac{\gamma_1}{2\gamma + \gamma_p} \tag{I.2.5}$$

avec

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma}{36} \frac{d^2\left(\sqrt{I_x I_y}\sin\varphi + \sqrt{I'_x I'_y}\sin\varphi'\right)}{\hbar^2\left(\frac{\Gamma^2}{4} + \Delta^2\right)} \tag{I.2.6}$$

et

$$\gamma_p = \frac{\gamma_p^+ + \gamma_p^-}{3} = \frac{\Gamma}{36} \frac{d^2\left(I_x + I_y + I'_x + I'_y\right)}{\hbar^2\left(\frac{\Gamma^2}{4} + \Delta^2\right)} \tag{I.2.7}$$

La polarisation totale du milieu $\bar{P}_{tot}$ se décompose en deux termes $\bar{P}$ et $\bar{P}'$ l'un correspondant à une propagation suivant les z croissants et l'autre suivant les z décroissants, chacun pouvant à son tour se décomposer sur la base circulaire $(\bar{e}_+, \bar{e}_-)$:

$$\bar{P}_{tot} = \bar{P} + \bar{P}' = \bar{P}^+ + \bar{P}^- + \bar{P}'^+ + \bar{P}'^- \tag{I.2.8}$$

où $\bar{P}^+$ et $\bar{P}'^+$ sont les projections de $\bar{P}$ et $\bar{P}'$ sur $\bar{e}_+$ et $\bar{P}^-$ et $\bar{P}'^-$ les projections sur $\bar{e}_-$. Enfin il est possible d'exprimer ces polarisations à l'aide de l'expression des susceptibilités non-linéaires et des champs:

$$\bar{P}^{\pm} = \varepsilon_0 \frac{n_{\pm}}{n_+ + n_-} \chi_0 \bar{E}^{\pm} = \varepsilon_0 \chi_{\pm} \bar{E}^{\pm} \tag{I.2.9.a}$$

$$\bar{P}'^{\pm} = \varepsilon_0 \frac{n_{\pm}}{n_+ + n_-} \chi_0 \bar{E}'^{\pm} = \varepsilon_0 \chi_{\pm} \bar{E}'^{\pm} \tag{I.2.9.b}$$

La susceptibilité $\chi_{\pm}$ d'une onde polarisée $\sigma^{\pm}$ se définit alors de la manière suivante:

$$\chi_{\pm} = \chi_0 \left(1 \pm \frac{2}{\hbar}\langle J_z \rangle\right) \qquad \text{avec} \qquad \chi_0 = \frac{-Nd^2}{6\varepsilon_0 \hbar\left(\Delta + i\frac{\Gamma}{2}\right)} \tag{I.2.10}$$

2.1.4) Equation d'évolution des champs dans le milieu non-linéaire

Le champ total dans le milieu est solution de l'équation suivante qui se déduit des équations de Maxwell:

$$\Delta\bar{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} \tag{I.2.11}$$

En projetant cette équation sur la base $(\bar{e}_+, \bar{e}_-)$ et en identifiant les composantes en $e^{\mp i(\omega t - kz)}$ d'une part et les composantes en $e^{\mp i(\omega t + kz + \varphi'')}$ d'autre part, il est possible de déterminer les équations d'évolution de l'amplitude des ondes polarisées σ^+ et σ^-.

Nous choisirons dans la suite les notations adoptées dans l'annexe 1. Le champ et la polarisation se décomposent alors de la manière suivante sur la base $(\bar{e}_+, \bar{e}_-)$:

$$\begin{aligned}
\bar{E} &= (-E_-\bar{e}_+ - E_+\bar{e}_-)e^{-i(\omega t - kz)} + c.c. \\
\bar{P} &= (-P_-\bar{e}_+ - P_+\bar{e}_-)e^{-i(\omega t - kz)} + c.c. \\
\bar{E}' &= (-E'_-\bar{e}_+ - E'_+\bar{e}_-)e^{-i(\omega t + kz + \varphi'')} + c.c. \\
\bar{P}' &= (-P'_-\bar{e}_+ - P'_+\bar{e}_-)e^{-i(\omega t + kz + \varphi'')} + c.c.
\end{aligned} \tag{I.2.12}$$

Les équations d'évolution des différentes amplitudes se déduisent alors des relations (I.2.11) et (I.2.12):

$$\begin{aligned}
&\Delta_\perp E_\pm + \frac{\partial^2 E_\pm}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_\pm}{\partial t^2} + 2ik\frac{\partial E_\pm}{\partial z} + \frac{2i\omega}{c^2}\frac{\partial E_\pm}{\partial t} = -\mu_0\omega^2 P_\pm + 2i\mu_0\omega\frac{\partial P_\pm}{\partial t} + \mu_0\frac{\partial^2 P_\pm}{\partial t^2} \\
&\Delta_\perp E'_\pm + \frac{\partial^2 E'_\pm}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E'_\pm}{\partial t^2} - 2ik\frac{\partial E'_\pm}{\partial z} + \frac{2i\omega}{c^2}\frac{\partial E'_\pm}{\partial t} = -\mu_0\omega^2 P'_\pm + 2i\mu_0\omega\frac{\partial P'_\pm}{\partial t} + \mu_0\frac{\partial^2 P'_\pm}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{I.2.13}$$

En régime stationnaire, $E_\pm$, $E'_\pm$ ainsi que $P_\pm$ et $P'_\pm$, ne varient pas en fonction du temps. Les dérivées temporelles des équations (I.2.13) sont donc nulles. L'approximation de l'enveloppe lentement variable [She84] nous permet de négliger $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$ par rapport à $2ik\frac{\partial E}{\partial z}$. Dans ces conditions, les équations (I.2.13) se réduisent en négligeant le laplacien transverse à:

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{\partial E_\pm}{\partial z} &= \frac{ik}{2}\chi_\pm E_\pm \\
\frac{\partial E'_\pm}{\partial z} &= -\frac{ik}{2}\chi_\pm E'_\pm
\end{aligned}} \tag{I.2.14}$$

Ces équations sont alors facilement intégrables. En particulier lorsque la susceptibilité est constante, l'expression des champs à la sortie de la cellule est facilement calculable comme nous le verrons dans la partie suivante.

2.2) Principe du miroir à contraste de phase

Le mélange dans une vapeur non-linéaire de deux ondes intenses, les ondes pompes et d'une onde moins intense appelée onde sonde peut donner naissance dans certaines conditions à une quatrième onde possédant deux composantes: l'amplitude de la première est proportionnelle à celle de l'onde sonde et l'amplitude de la seconde est proportionnelle à la conjuguée de phase de l'amplitude de l'onde sonde. Dans cette partie, nous allons préciser ce phénomène physique et expliquer comment il peut mener à la notion de miroir à contraste de phase.

2.2.1) Description du problème

Supposons que les ondes $\vec{E}_x$ et $\vec{E}'_x$ correspondent aux ondes intenses que nous appelerons respectivement $\vec{E}_f$ et $\vec{E}_b$ et que l'onde $\vec{E}'_y$ orrespond à l'onde sonde d'intensité bien plus faible appelée maintenant $\vec{E}'$. Cherchons à savoir sous quelles conditions l'onde $\vec{E}'$ en interaction dans le milieu non-linéaire avec les deux autres ondes, peut donner naissance à une onde réfléchie $\vec{E}_y$ appelée maintenant $\vec{E}$. Ces ondes peuvent se décomposer de la manière suivante:

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{E}_f &= \mathrm{Re}\left(\sqrt{I_f}\, e^{-i(\omega t - kz + \varphi_f)}\right)\vec{e}_x \\
\vec{E}_b &= \mathrm{Re}\left(\sqrt{I_b}\, e^{-i(\omega t + kz + \varphi_b)}\right)\vec{e}_x \\
\vec{E} &= \mathrm{Re}\left(\sqrt{I}\, e^{-i(\omega t - kz + \varphi)}\right)\vec{e}_y \\
\vec{E}' &= \mathrm{Re}\left(\sqrt{I'}\, e^{-i(\omega t + kz + \varphi')}\right)\vec{e}_y
\end{aligned}} \qquad \text{(I.2.15)}$$

Choisissons l'origine de l'axe z au niveau de la face de sortie de la cellule. Les phases φ_f, φ_b, φ' et φ correspondent aux phases des différents champs en z=0

Plaçons nous dans la situation où le champ réfléchi $\vec{E}$ a une intensité faible comparée aux trois autres champs et susceptible d'être négligée par la suite. Les relations (I.2.6, I.2.7 et I.2.14) permettent d'exprimer la susceptibilité [Val91b] pour une onde polarisée $\sigma_\pm$:

$$\chi_\pm = \frac{-N d^2}{6\varepsilon_0 \hbar\left(\Delta + i\frac{\Gamma}{2}\right)}\left(1 \pm 2\frac{\gamma_1}{2\gamma + \gamma_p}\right) = \chi_0\left(1 \pm \frac{2}{\hbar}\langle J_z\rangle\right) \qquad \text{(I.2.16)}$$

avec

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma}{36}\frac{d^2\sqrt{I_b I'}\sin(\varphi_b - \varphi')}{\hbar^2\left(\frac{\Gamma^2}{4} + \Delta^2\right)} \quad \text{et} \quad \gamma_p = \frac{\Gamma}{36}\frac{d^2(I_f + I_b + I')}{\hbar^2\left(\frac{\Gamma^2}{4} + \Delta^2\right)} \qquad \text{(I.2.17)}$$

Projetons maintenant sur la base circulaire le champ total $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_f + \vec{E}$ se propageant dans le sens des z positifs Les composantes circulaires du champ $\vec{E}_{tot}$ définies dans l'annexe 1 et d'expression $\frac{\left(-\sqrt{I_f}\, e^{-i\varphi_f} \mp i\sqrt{I}\, e^{-i\varphi}\right)}{\sqrt{2}}$ vérifient les équations de propagation:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{ik}{2}\chi_{\pm}\right)\left(\sqrt{I_f}\,e^{-i\varphi_f}\pm i\sqrt{I}\,e^{-i\varphi}\right)=0 \qquad (I.2.18)$$

Notons également que la susceptibilité $\chi_{\pm}$ dépend de l'écart à résonance, du milieu non-linéaire mais ne dépend pas de z. Il est donc possible d'intégrer directement cette expression sous la forme:

$$\sqrt{I_f(0)}\,e^{-i\varphi_f}\pm i\sqrt{I(0)}\,e^{-i\varphi}=$$
$$e^{\frac{ik\chi_{\pm}\ell}{2}}\sqrt{I_f(-\ell)}\,e^{-i\varphi_f(-\ell)}=e^{\frac{ik\chi_0\ell}{2}}\,e^{\pm\frac{ik\chi_0(J_z)\ell}{h}}\sqrt{I_f(-\ell)}\,e^{-i\varphi_f(-\ell)} \qquad (I.2.19)$$

Nous avons intégré sur la longueur de la cellule en supposant que le champ $\bar{E}$ était nul à l'entrée de la cellule. Les phases $\varphi_f(-\ell)$ et $\varphi(-\ell)$ correspondent aux phases de $\bar{E}_f$ et $\bar{E}$ à l'entrée de la cellule, en $z=-\ell$.

Développons maintenant les exponentielles de cette expression en nous limitant à l'ordre 1 en champ faible $\sqrt{\frac{I'}{I_f}}$ et déduisons-en l'expression aux ordres 0 et 1 en $\sqrt{\frac{I'}{I_f}}$ des champs se propageant de la cellule vers le miroir.

2.2.2) Onde intense à la sortie de la cellule

A l'ordre 0 en $\sqrt{\frac{I'}{I_f(-\ell)}}$, $\sqrt{I_f(0)}$ obéit à l'équation:

$$\sqrt{I_f(0)}\,e^{-i\varphi_f}=e^{\frac{ik\chi_0\ell}{2}}\sqrt{I_f(-\ell)}\,e^{-i\varphi_f(-\ell)} \qquad (I.2.20)$$

soit

$$\sqrt{I_f(0)}\,e^{-i\varphi_f}=\sqrt{I_f(-\ell)}\,e^{-i\varphi_f(-\ell)}\left(e^{-\frac{ikNd^2}{2}\frac{\Delta\ell}{6\varepsilon_0\hbar\left(\Delta^2+\Gamma^2/4\right)}}.e^{-\frac{kNd^2}{4}\frac{\Gamma\ell}{6\varepsilon_0\hbar\left(\Delta^2+\Gamma^2/4\right)}}\right) \qquad (I.2.21)$$

Le premier terme dans la parenthèse décrit le déphasage φ_p dû à la propagation dans le milieu et le deuxième terme correspond à l'absorption. Le milieu est considéré comme optiquement mince et l'absorption dans le milieu sera par la suite considérée comme négligeable. Cette approximation reste valable tant que l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{k\chi_0\ell}{2}\right)<<1 \qquad (I.2.22.a)$$

soit

$$\frac{k}{4}\frac{Nd^2}{6\varepsilon_0\hbar}\frac{\Gamma\ell}{\left(\Delta^2+\Gamma^2/4\right)}<<1 \qquad \text{(I.2.22.b)}$$

Cette inégalité peut également s'écrire sous la forme suivante où α_0 est défini comme un terme d'absorption linéaire

$$\alpha_0\ell/2<<1 \qquad \text{(I.2.22.c)}$$

On peut alors poser :

$$\sqrt{I_f(0)}\,e^{-i\varphi_f} \equiv \sqrt{I_f(-\ell)}\,e^{-i\left(\varphi_p+\varphi(-\ell)\right)} \qquad \text{(I.2.23.a)}$$

En identifiant les termes de phase et les amplitudes, on déduit de l'équation (I.2.23.a) les deux relations suivantes:

$$\begin{aligned}\sqrt{I_f(0)} &\equiv \sqrt{I_f(-\ell)}\\ \varphi_f &= \varphi_p+\varphi(-\ell)\end{aligned} \qquad \text{(I.2.23.b)}$$

D'après ces relations, l'approximation du milieu optiquement mince revient donc à négliger la déplétion des pompes et à considérer que la propagation dans le milieu non-linéaire ne fait que déphaser les ondes pompes. Ce déphasage dû à la propagation est caractéristique du milieu et ne dépend pas dans le cas d'une transition $1/2 \rightarrow 1/2$ que nous considérons ici, de la polarisation de l'onde. Il est donc identique pour toutes les ondes du milieu à condition qu'elles évoluent toutes à la même fréquence ω et qu'elles soient polarisées linéairement. En particulier, l'onde $\vec{E}$ subira le même déphasage que l'onde $\vec{E}_f$ au cours de sa propagation.

2.2.3) Traitement à l'ordre 1 en champ faible

A l'ordre 1 en $\sqrt{I'/I_f}$, en considérant le milieu comme optiquement mince et donc en négligeant la déplétion des pompes, $\sqrt{I}\,e^{-i\varphi}$ suit au seuil l'équation d'évolution:

$$\sqrt{I(0)}e^{-i\varphi} = e^{\frac{ik\chi_0\ell}{2}}\,k\chi_0\frac{\langle J_z\rangle}{\hbar}\ell\sqrt{I_f(-\ell)}\,e^{-i\varphi_f(-\ell)} \qquad \text{(I.2.24)}$$

donc $\sqrt{I}\,e^{-i\varphi}$ s'exprime sous la forme synthétique suivante (φ et φ_f sont les phases en z=0 et nous ne tenons pas compte du déphasage φ_p dû à la propagation qui est le même pour toutes les ondes considérées ici):

$$\boxed{\sqrt{I}\,e^{-i\varphi} = \frac{a\,e^{i\eta}\sqrt{I_b I'}\sin(\varphi_b - \varphi')\sqrt{I_f}\,e^{-i\varphi_f}}{1 + b(I_f + I_b)}} \qquad (I.2.25)$$

où a, b et η caractérisent le milieu non linéaire.

$$\boxed{a = \frac{k N d^4 \Gamma}{432\,\varepsilon_0 \hbar^3 \gamma \left(\frac{\Gamma^2}{4} + \Delta^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \ell} \qquad (I.2.26)$$

a est proportionnel à la longueur ℓ de la cellule et au terme d'absorption linéaire α_0 défini dans les relations (I.2.22).

$$\boxed{e^{i\eta} = \frac{-\Delta + i\frac{\Gamma}{2}}{\left(\frac{\Gamma^2}{4} + \Delta^2\right)^{1/2}}} \qquad (I.2.27)$$

η vaut $\pi/2$ à la résonance lorsque le milieu est purement absorptif, dans le cas d'un milieu purement dispersif, η vaut π pour un désaccord entre la fréquence du laser et la fréquence atomique positif et 0 pour un désaccord négatif.

$$\boxed{b = \frac{1}{\gamma}\frac{\Gamma}{72}\frac{d^2}{\hbar^2\left(\frac{\Gamma^2}{4} + \Delta^2\right)}} \qquad (I.2.28)$$

b est équivalent à l'inverse d'une intensité de saturation. Le terme de saturation b $(I_f + I_b)$ est le rapport entre le taux de pompage optique dans le fondamental et le taux de relaxation γ associé à d'autres processus. Lorsque b $(I_f + I_b) \ll 1$, le milieu se comporte comme un milieu Kerr. Lorsque b $(I_f + I_b) \gg 1$, le pompage optique est saturé.

2.2.4) Miroir à contraste de phase

L'expression (I.2.25) peut s'écrire également:

$$\boxed{\sqrt{I}\,e^{-i\varphi} = r_c\left(\sqrt{I'}\,e^{-i\varphi'}\right)^* + r_d\left(\sqrt{I'}\,e^{-i\varphi'}\right)} \qquad (I.2.29)$$

où

$$\boxed{r_c = -\frac{a e^{i\eta}\sqrt{I_f}\, e^{-i\varphi_f}}{2i\left(1+b\left(I_f+I_b\right)\right)}\sqrt{I_b}\, e^{-i\varphi_b}} \qquad \text{(I.2.30.a)}$$

et

$$\boxed{r_d = \frac{a e^{i\eta}\sqrt{I_f}\, e^{-i\varphi_f}}{2i\left(1+b\left(I_f+I_b\right)\right)}\left(\sqrt{I_b}\, e^{-i\varphi_b}\right)^*} \qquad \text{(I.2.30.b)}$$

$\sqrt{I}\, e^{-i\varphi}$ est donc la somme d'un premier terme proportionnel à $\left(\sqrt{I_b}\, e^{-i\varphi_b}\right)^*$ et d'un second terme proportionnel à $\left(\sqrt{I_b}\, e^{-i\varphi_b}\right)$. En adoptant une description du phénomène en terme de processus de mélange à quatre ondes, le premier terme correspond au terme de mélange à quatre ondes vers l'arrière [Yar77], [Abr78] et le deuxième au terme de répartition distribuée (voir annexe 2). Le champ $\bar{E}$ étant supposé nul à l'entrée de la cellule, nous n'avons donc ici pas de terme correspondant au mélange à quatre ondes vers l'avant. Le champ $\bar{E}$ est donc ici la somme de deux champs, l'un ayant pour phase (φ'-φ_b) et l'autre la phase opposée. L'intensité I associée au champ $\bar{E}$ varie donc en $\sin^2(\varphi'-\varphi_b)$. Toute variation de phase du champ $\bar{E}'$ est ainsi transformée dans le champ réfléchi $\bar{E}$ en variation d'intensité. Le milieu non linéaire constitue ainsi un miroir appelé miroir à contraste de phase. Un tel miroir a été mis en évidence et étudié dans le laboratoire [Gry92]. Les ondes $\bar{E}_f$ et $\bar{E}_b$ pouvant céder de l'énergie à l'onde $\bar{E}$, la réflectivité d'un tel miroir peut être très supérieure à 100%.

Le principe du miroir à contraste de phase peut également s'interpréter de la façon suivante: l'onde $\bar{E}'$ interagit dans le milieu non-linéaire avec l'onde $\bar{E}_b$ pour créer une différence de population dans le niveau fondamental proportionnelle à $\langle J_z \rangle$ [Gry90] et que nous appelerons une orientation. Le champ $\bar{E}_f$ interagit à son tour avec le milieu ainsi préparé. Sous l'action de l'orientation du niveau fondamental, le champ $\bar{E}_f$ voit sa polarisation tourner d'un petit angle θ proportionnel à $\langle J_z \rangle$ et à la longueur de la cellule. D'après la relation (I.2.19), θ vérifie la relation

$$\theta = k\chi\ell\frac{\langle J_z \rangle}{\hbar} \qquad \text{(I.2.31)}$$

A la sortie de la cellule, l'onde se propageant dans le sens des z positifs peut se décomposer en deux ondes polarisées orthogonalement. L'une est polarisée suivant (Ox) et son amplitude est égale à $\sqrt{I_f}\cos\theta$ La déplétion des pompes est bien négligeable au premier ordre en θ. La deuxième onde est polarisée suivant (Oy) et son amplitude est égale à $\sqrt{I_f}\sin\theta$. Il s'agit de l'onde faible $\bar{E}$ générée dans le milieu non-

linéaire. Au premier ordre en θ, nous retrouvons bien les résultats de notre étude précédente.
La rotation de la polarisation de l'onde $\vec{E}_f$ au cours de sa propagation dans le milieu non-linéaire est appelée effet Faraday [Val91a] et est à l'origine de la génération de l'onde $\vec{E}$.

Conclusion

Dans cette partie, nous avons généralisé les résultats de la partie précédente en nous plaçant dans la situation correspondant au cas de deux paires d'ondes contrapropagatives. Nous avons expliqué comment un milieu non-linéaire dans lequel se propagent dans des sens opposés deux ondes intenses de même polarisation linéaire, peut constituer un miroir à contraste de phase pour une onde d'intensité plus faible et polarisée orthogonalement. En particulier nous avons déterminé les coefficients de réflexion du miroir à contraste de phase et donné l'expression de l'onde générée par ces trois ondes lors de leur interaction dans le milieu, en fonction de l'intensité des pompes et des caractéristiques de la vapeur atomique.

3) Instabilités générées par des ondes planes.

Les instabilités générées dans un milieu non-linéaire sous l'action de deux pompes intenses ont fréquemment été interprétées en termes de mélange à quatre ondes [Giu88], [Fir88]. Dans les vapeurs atomiques, l'intensité pompe nécessaire pour observer ces instabilités appelées intensité seuil est bien plus faible dans le cas où la polarisation des instabilités est orthogonale à celle des ondes pompes. Dans cette situation, le mélange à quatre ondes est interprété en termes de pompage optique [Gry90], [Val91]. Les deux parties précédentes nous ont permis d'introduire les notions de pompage optique et de miroir à contraste de phase. Nous avons ainsi expliqué la génération d'une onde faible lors de l'interaction dans la vapeur atomique de deux ondes intenses et d'une onde faible polarisées linéairement orthogonalement.

Les dispositifs expérimentaux permettant l'observation d'instabilités optiques, sont toujours constitués de milieux non-linéaires, placés éventuellement dans des cavités Fabry-Perot, dans des cavités en anneaux ou simplement soumis à l'action de deux ondes pompes contrapropagatives. Un dispositif courant consiste également à placer un miroir de rétroaction après le milieu non-linéaire [LeB90], [Fir90]. L'onde pompe ayant traversé le milieu non-linéaire se réfléchit sur le miroir et est ainsi réinjectée dans le milieu. Les effets non-linéaires étant dissociés des effets de propagation, l'étude théorique est ainsi considérablement simplifiée par rapport au cas de deux ondes contrapropagatives où ces deux types d'effets se conjuguent au sein de la cellule. Nous allons dans cette partie adopter cette configuration où à une distance d du miroir à contraste de phase est placé un miroir plan. Nous montrerons dans les parties (I.3) et (I.4) comment l'association du miroir plan et du miroir à contraste de phase peut consituer une cavité. Dans la partie (I.3), nous ferons l'approximation des ondes planes alors que dans la partie (I.4), nous considérerons que les ondes sont des ondes de profil d'intensité gaussien.

Dans cette partie, nous nous intéressons tout d'abord à des instabilités polarisées orthogonalement aux ondes pompes et émises dans des directions formant un angle θ avec la direction de propagation des ondes pompes. Le système possède une symétrie de révolution si bien que les instabilités émises doivent vérifier la symétrie du groupe

O(2). Il nous sera par la suite toujours possible de décomposer les instabilités transverses en champ lointain (anneaux par exemple) comme une superposition de paires de points diamétralement opposés et nous étudierons le cas où en champ lointain la projection de ces instabilités est constituée par deux points diamétralement opposés et en champ proche, la répartition transverse est formée par une succession de raies brillantes et sombres appelées rouleaux [Lug87]. Nous utiliserons à partir de maintenant l'appelation 'rouleaux' pour de telles instabilités transverses y compris quand nous nous intéresserons à leur structure en champ lointain. Nous commencerons par donner l'expression de ces 'rouleaux' et exprimer leur déphasage après leur réflexion sur le miroir plan et au bout d'un aller-retour dans la cavité. Ces ondes pourront se réfléchir dans le miroir à contraste de phase et osciller dans la 'cavité'. Nous établirons ainsi l'équation de seuil d'oscillation et nous la discuterons. En dernier lieu, nous expliquerons comment des instabilités polarisées parallèlement aux ondes pompes peuvent osciller dans la cavité et nous discuterons également leur équation de seuil.

3.1) Seuil d'oscillation pour des instabilités polarisées linéairement et orthogonalement aux ondes pompes

Dans cette partie nous aborderons uniquement le cas des instabilités de polarisation orthogonale à celle de la pompe émises dans un plan donné et dans lequel est inclus l'axe de symétrie de la 'cavité' formée par le miroir plan et le miroir à contraste de phase. Nous établirons et discuterons l'équation de seuil d'oscillation de l'instabilité dans la 'cavité'.

3.1.1) Champs en présence

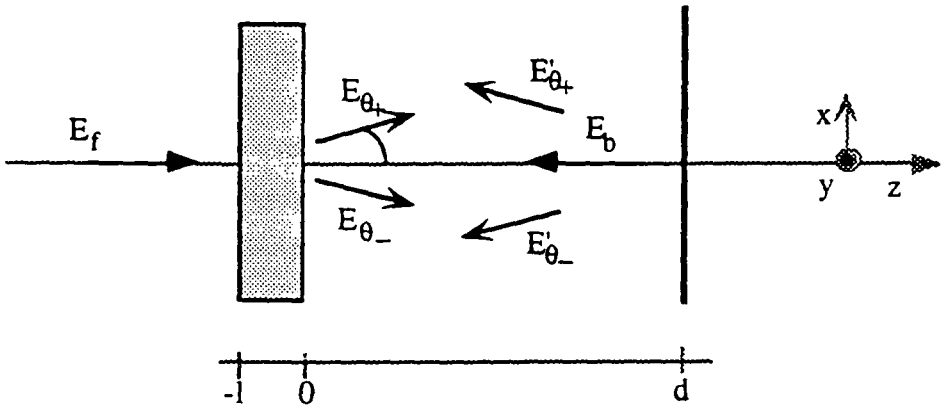


Fig I.3.1: Schéma expérimental

a) Ondes intenses

Considérons maintenant qu'à la distance d de la cellule est placé un miroir plan de réflectivité $r=\sqrt{R}$. Une onde plane $\bar{E}_f$ d'intensité I_f intense, linéairement polarisée, de phase φ_f, et de fréquence ω, se propage au sein de la cellule de longueur ℓ et se réfléchit ensuite sur le miroir plan. Elle crée ainsi l'onde plane $\bar{E}_b$ de même fréquence ω, et de même polarisation, d'intensité $I_b=RI_f$, de phase φ_b, se propageant dans la même direction mais en sens contraire. Choisissons la base $(\bar{e}_x,\bar{e}_y,\bar{e}_z)$ où $\bar{e}_z$ correspond à la direction de propagation de ces deux ondes appelées ondes pompes. L'origine du repère est placée au centre de la face de sortie de la cellule. $\bar{E}_f$ et $\bar{E}_b$ ont alors comme expression:

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{E}_f &= \mathrm{Re}\left(\sqrt{I_f}\,e^{-i(\omega t-kz+\varphi_f)}\right)\bar{e}_x\\ \bar{E}_b &= \mathrm{Re}\left(\sqrt{RI_f}\,e^{-i(\omega t+kz+\varphi_b)}\right)\bar{e}_x\end{aligned}} \qquad \text{(I.3.1)}$$

Nous définirons par la suite E_f et E_b comme le produit de l'amplitude par le terme de phase des ondes $\bar{E}_f$ et $\bar{E}_b$ respectivement.

$$\begin{aligned}E_f &= \sqrt{I_f}\,e^{-i\varphi_f}\\ E_b &= \sqrt{RI_f}\,e^{-i\varphi_b}\end{aligned} \qquad \text{(I.3.2)}$$

E_f et E_b correspondent ainsi à la valeur des champs en z=0 et t=0.
$\bar{E}_b$ étant obtenu par réflexion de $\bar{E}_f$ sur le miroir plan, φ_b se déduit facilement de φ_f:

$$\varphi_b = \varphi_f - 2kd \qquad \text{(I.3.3)}$$

Le terme de phase en -2 k d correspond au déphasage dû à la propagation de l'onde dans la cavité de longueur d.

b) Angle d'oscillation

α) Accord de phase

Dans la partie précédente, une onde faible se propageant dans la même direction que deux ondes pompes contrapropagatives, se réfléchissait sur le miroir à contraste dont nous avions déterminé les coefficients de réflectivité. Considérons maintenant le cas plus général où le vecteur de propagation de l'onde faible se réfléchissant sur le miroir à contraste de phase, n'est plus colinéaire aux vecteurs de propagation des ondes pompes et forme un angle θ avec l'axe (Oz). La conjugaison de phase est un processus de mélange à quatre ondes toujours accordé en phase. Par conséquent, lorsque les atomes peuvent être considérés comme immobiles, la réflectivité due à la conjugaison de phase est indépendante de l'angle θ. Par contre, le mélange à quatre ondes par répartition distribuée n'est pas accordé en phase quand $\theta \neq 0$. La réflectivité due à la répartition distribuée est proportionnelle à $\sin_c\left(\frac{k\theta^2\ell}{2}\right)$ [Val91]. Expérimentalement l'angle θ est de l'ordre de 10^{-3}rad et ℓ=3cm. Nous considérerons donc que les coefficients de réflectivité r_c et r_d ont la même expression que dans les relations (I.2.30) et ne dépendent en particulier pas de θ.

β) Mouvement des atomes

La réflexion sur un miroir à contraste de phase peut s'interpréter en termes de mélange à quatre ondes comme nous l'avons vu dans la partie (I.2). Le mélange à quatre ondes peut s'expliquer par des interférences entre les différentes ondes. L'interférence de deux ondes polarisées orthogonalement, $\bar{E}'$ et $\bar{E}_b$ par exemple, permet la modulation spatiale du pompage optique dans le milieu non-linéaire [Gry93b] et crée ainsi un réseau d'atomes orientés. L'interfrange est de $\lambda/(2\sin\theta)$, θ étant l'angle entre $\bar{E}'$ et $\bar{E}_b$ (voir annexe 2). L'onde $\bar{E}_f$ pourra ensuite se diffracter sur ce réseau pour donner l'onde $\bar{E}$. Ce processus sera efficace tant que les atomes seront immobiles. Par contre quand les atomes évolueront chacun avec leur vitesse propre, leur mouvement tendra à détruire le réseau généré par les champs. La génération de l'instabilité sera alors bien moins efficace. Plus l'angle θ sera grand, plus l'interfrange sera petite et plus le réseau sera sensible aux mouvements des atomes. Plus précisément, comme nous l'avons vu dans la partie (I.2), la durée de vie du réseau correspond à la durée de vie de $\langle J_z \rangle$ soit $1/(\gamma+\gamma_p)$. Durant la durée de vie du réseau, le

déplacement des atomes doit être négligeable devant le pas du réseau. L'inégalité suivante doit donc être vérifiée:

$$k\,u\,\theta << \gamma, \gamma_p \qquad (I.3.7)$$

Par conséquent les oscillations d'angle θ trop grand ne seront pas possibles. Nous supposerons désormais que l'angle θ est suffisamment petit pour que nous puissions nous limiter à l'ordre 2 en θ. Les calculs suivants justifieront cette approximation.

c) Ondes d'intensité faible

Considérons donc l'onde $\bar{E}'_{\theta+}$ de fréquence ω, polarisée orthogonalement et d'intensité faible par rapport aux ondes intenses et qui se propage dans le sens des z négatifs en faisant un angle θ avec l'axe (Oz). Elle se réfléchit sur le miroir à contraste de phase en deux ondes de même polarisation orthogonale et de fréquence ω. L'onde $\bar{E}_{\theta-}$ correspondant au terme dû à la conjugaison de phase a une phase opposée à celle de l'onde incidente et se réfléchit suivant la même direction que l'onde incidente mais dans le sens opposé. L'onde $\bar{E}_{\theta+}$ correspondant au terme de répartition distribuée a la même phase que l'onde incidente et se réfléchit dans la direction symétrique par rapport à l'axe optique.

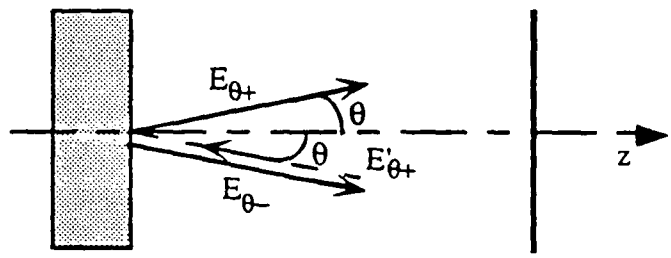


Fig I.3.2: Réflexion de l'onde $\bar{E}'_{\theta+}$ sur le miroir à contraste de phase en $\bar{E}_{\theta+}$ et $\bar{E}_{\theta-}$

Les ondes $\bar{E}_{\theta-}$ et $\bar{E}_{\theta+}$ peuvent se réfléchir sur le miroir plan respectivement en $\bar{E}'_{\theta+}$ et $\bar{E}'_{\theta-}$, où $\bar{E}'_{\theta-}$ polarisée orthogonalement aux ondes pompes et de même fréquence ω se propage dans la direction symétrique par rapport à l'axe optique, à la direction de propagation de l'onde $\bar{E}'_{\theta+}$.

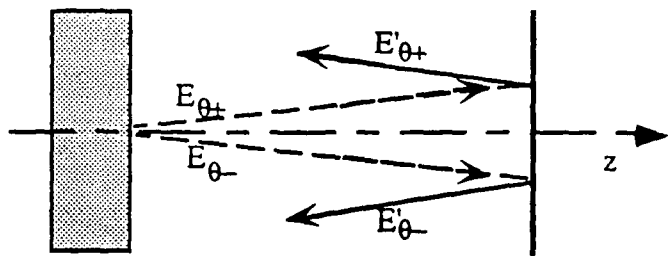


Fig I.3.3: Réflexion sur le miroir plan des ondes $\bar{E}_{\theta+}$ et $\bar{E}_{\theta-}$ en $\bar{E}'_{\theta+}$ et $\bar{E}'_{\theta-}$

Les ondes $\bar{E}'_{\theta+}$ et $\bar{E}'_{\theta-}$ se réfléchiront à leur tour sur le miroir à contraste de phase pour redonner les ondes $\bar{E}_{\theta-}$ et $\bar{E}_{\theta+}$. Les ondes effectuent ainsi des aller-retours dans la cavité. Nous pouvons donc ainsi définir le gain sur un aller-retour. La réflectivité du miroir à contraste de phase pouvant être supérieure à 1, le gain peut être suffisamment grand pour permettre l'oscillation des champs dans la cavité formée par le miroir à contraste de phase et le miroir plan.

Le champ oscillant dans la cavité se décompose donc en deux champs formant respectivement les angles θ et -θ avec l'axe (Oz). L'onde $\bar{E} = \bar{E}_{\theta+} + \bar{E}_{\theta-}$, corespondant à l'instabilité se propageant dans le sens des z positifs et l'onde $\bar{E}' = \bar{E}'_{\theta+} + \bar{E}'_{\theta-}$ obtenue par réflexion de l'onde $\bar{E}$ sur le miroir plan peuvent alors se définir de la façon suivante:

$$\bar{E} = \mathrm{Re}\left(\sqrt{I}\, e^{-i(\omega t - kz.\cos\theta + \varphi)} \cos(k\, x \sin\theta + \varphi')\right)\bar{e}_y \qquad \text{(I.3.4.a)}$$

$$\bar{E}' = \mathrm{Re}\left(\sqrt{RI}\, e^{-i(\omega t + kz.\cos\theta + \varphi'')} \cos(k\, x \sin\theta + \varphi')\right)\bar{e}_y \qquad \text{(I.3.4.b)}$$

avec

$$\varphi'' = \varphi - 2kd.\cos\theta \qquad \text{(I.3.5)}$$

De la même façon que précédemment, nous définirons E et E' comme le produit de l'amplitude par le terme de phase des ondes $\bar{E}$ et $\bar{E}'$ respectivement:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{I}\cos(k\, x \sin\theta + \varphi')e^{-i\varphi} \\ E' &= \sqrt{R}\, E e^{i2kd\cos\theta} \end{aligned} \qquad \text{(I.3.6)}$$

3.1.2) Oscillation dans la cavité

Cette partie nous permettra d'établir la condition de seuil d'oscillation dans la cavité formé par le miroir à contraste de phase et le miroir plan. Nous attacherons d'abord à la réflexion de l'instabilité sur le milieu non-linéaire et nous établirons ensuite la condition de seuil d'oscillation de l'instabilité dans la cavité.

a) Réflexion sur le miroir à contraste de phase

D'après l'annexe 2, l'instabilité $\bar{E}$ émise dans la direction des z positifs peut être due à l'interaction de l'onde $\bar{E}'$ avec les ondes pompes par des processus de

conjugaison de phase ou de répartition distribuée ou due à l'interaction de l'onde $\bar{E}$ elle-même avec les ondes pompes par mélange à quatre ondes vers l'avant. Or dans notre configuration expérimentale, en $z=-\ell$ le champ $\bar{E}_f$ est l'unique champ incident dans la cellule et I est nulle à l'entrée de la cellule. Les champs faibles oscillent entre le miroir plan et la cellule si bien que le champ $\bar{E}'$ se propageant dans le sens des z négatifs n'est pas nul en z=0 à son entrée dans la cellule. Par conséquent, au seuil, l'intensité I de l'instabilité se propageant dans le sens des z positifs qui est nulle à l'entrée du milieu, est très faible dans le milieu non linéaire par rapport à l'intensité I' de l'instabilité se propageant dans le sens des z négatifs. Les processus de conjugaison de phase et de mélange à quatre ondes vers l'arrière dus à l'interaction entre les ondes pompes et le champ $\bar{E}'$ sont ainsi responsables de la génération du champ $\bar{E}$ alors que le processus de mélange à quatre ondes vers l'avant dus à l'interaction du champ $\bar{E}$ et des ondes pompes a une contribution négligeable dans l'amplification de l'onde $\bar{E}$. L'onde $\bar{E}$ est donc due à la réflexion de l'onde $\bar{E}'$ sur le miroir à contraste de phase défini en première partie et dont nous avons établi les coefficients r_c et r_d de réflectivité.

Les relations (I.2.30.a-b) et (I.3.2) nous permettent d'établir les expressions de r_c et r_d:

$$r_c = -\frac{a e^{i\eta}\sqrt{R}\, I_f\, e^{-2i\varphi_f} e^{2ikd}}{2i\left(1+b(1+R)I_f\right)} = -i\, r_0\, e^{-2i\varphi_f+2ikd} \qquad \text{(I.3.8.a)}$$

$$r_d = \frac{a e^{i\eta}\sqrt{R}\, I_f\, e^{-2ikd}}{2i\left(1+b(1+R)I_f\right)} = i\, r_0\, e^{-2ikd} \qquad \text{(I.3.8.b)}$$

avec

$$r_0 = -\frac{a e^{i\eta}\sqrt{R}\, I_f}{2\left(1+b(1+R)I_f\right)} \qquad \text{(I.3.9)}$$

Nous négligerons comme dans les études précédentes la déplétion des pompes.

L'onde $\bar{E}'^{(n)}$ au $n^{\text{ième}}$ aller-retour peut interagir avec les ondes pompes au sein du milieu non-linéaire, selon les mécanismes de mélange à quatre ondes décrits en première partie, et générer l'onde $\bar{E}^{(n+1)}$ du $(n+1)^{\text{ième}}$ aller-retour. La relation (I.2.29) donnant l'expression du champ réfléchi par un miroir à contraste de phase en fonction du champ incident, nous permet alors d'exprimer le champ faible après sa réflexion sur le miroir à contraste de phase.

$$E^{(n+1)} = r_d\, E'^{(n)} + r_c \left(E'^{(n)}\right)^* \qquad \text{(I.3.10)}$$

Le champ E après réflexion est somme d'un champ proportionnel au champ E' incident et d'un champ proportionnel à la conjuguée de phase de E'.
Il est maintenant possible d'exprimer le seuil d'oscillation dans la cavité formée par le miroir plan et le miroir à contraste de phase.

b) Equation de seuil d'oscillation

Les relations (I.3.6) et (I.3.10) nous permettent d'extraire l'expression en z=0 de l'amplitude du champ $\bar{E}$ au $(n+1)^{ième}$ aller-retour en fonction de l'amplitude du champ $\bar{E}$ au $n^{ième}$ aller-retour. En substituant $E'^{(n)}$ par son expression en fonction de $E^{(n)}$, et en supposant que l'angle θ est suffisamment petit pour que nous puissions nous limiter à l'ordre 2 en θ, on obtient alors la relation suivante:

$$E^{(n+1)} = i r_0 r e^{-ik\theta^2 d} E^{(n)} - i r_0 r e^{ik\theta^2 d} \left(E^{(n)}\right)^* e^{-2i\varphi_r} \qquad (I.3.11)$$

Au seuil d'oscillation dans la cavité, l'onde $\bar{E}$ au $(n+1)^{ième}$ aller-retour doit être identique à l'onde $\bar{E}$ au $n^{ième}$ aller-retour. On aura alors

$$E^{(n)} = E^{(n+1)} \qquad (I.3.12)$$

Le seuil d'oscillation sera atteint pour des valeurs de (r_0, θ, d) telles que l'équation (I.3.11) admette des solutions stables. Nous cherchons donc une solution $E^{(n)}$ au système:

$$0 = \left(i r_0 r e^{-ik\theta^2 d} - 1\right) E^{(n)} - i r_0 r e^{ik\theta^2 d} \left(E^{(n)}\right)^* e^{-2i\varphi_r} \qquad (I.3.13)$$

En remarquant que le système formé par l'équation (I.3.13) précédente et l'équation conjuguée n'admet de solutions non nulles que si le déterminant est nul, il est possible d'extraire la condition de seuil suivante:

$$\left(i r_0 r e^{-ik\theta^2 d} - 1\right)\left(-i r_0^* r e^{ik\theta^2 d} - 1\right) - \left(-i r_0 r e^{ik\theta^2 d}\right)\left(i r_0^* r e^{-ik\theta^2 d}\right) = 0 \qquad (I.3.14)$$

Remarquons bien que d'après la relation (I.3.9), r_0 est proportionnel à $-e^{i\eta}$ où η, donné explicitement dans la formule (I.2.27), vaut $\pi/2$ à la résonance, π pour des fréquences supérieures à la résonance et 0 pour des fréquences inférieures à la résonance. Cette équation peut se réduire en l'équation de seuil suivante:

$$1 - 2|r_0| r \sin\left(\eta - k\theta^2 d\right) = 0 \qquad (I.3.15)$$

En remplaçant r_0 par sa valeur en fonction des coefficients a, b et η, on obtient l'équation de seuil finale:

$$\boxed{1 = \frac{aRI_f}{(1+b(1+R)I_f)} \sin(\eta - k\theta^2 d)} \qquad \text{(I.3.16)}$$

3.1.3) Conditions d'oscillation

Après avoir établi la condition de seuil d'oscillation, les paragraphes suivants vont permettre de discuter cett relation. En particulier, nous discuterons ici des conditions nécessaires sur le milieu non-linéaire et sur la cavité pour observer une oscillation. Nous déterminerons aussi l'intensité de l'onde pompe au seuil ainsi que l'angle d'émission de l'instabilité.

a) Conditions sur le milieu non linéaire

Le sinus étant une fonction toujours inférieure à 1, le seuil ne pourra être atteint que si l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\frac{aRI_f}{(1+b(1+R)I_f)} \geq 1 \qquad \text{(I.3.17.a)}$$

Soit

$$(aR - b(1+R))I_f \geq 1 \qquad \text{(I.3.17.b)}$$

Il faudra donc que l'inégalité suivante suivante soit vérifiée

$$aR > b(1+R) \qquad \text{(I.3.18)}$$

b) Conditions sur la cavité

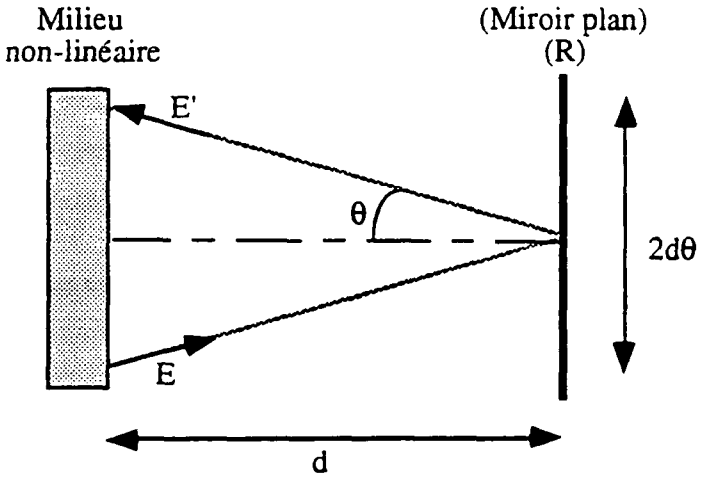


Fig I.3.4: propagation d'une onde faisant un angle θ avec l'axe optique sur un aller-retour dans la cavité

Toutes nos expériences sont réalisées avec des faisceaux de dimension finie, de rayon ρ. Le dessin ci-dessus illustre le déplacement latéral de $2d.\tan\theta \approx 2d\theta$ au deuxième ordre en θ subi par un faisceau faisant un angle θ avec l'axe optique au bout d'un aller-retour dans la cavité. Au bout de n allers-retours dans la cavité ce faisceau aura donc subi un déplacement latéral de $2nd\theta$. Si ce déplacement latéral $2nd\theta$ est supérieur au diamètre 2ρ du faisceau pompe, il ne pourra plus y avoir interaction entre les faisceaux pompes et les faisceaux oscillant dans la cavité. Le gain dans la cavité sera d'autant plus important, que le nombre n d'aller-retours pour lesquels il y aura interaction avec les ondes pompes sera important. Le gain dans la cavité ne sera suffisant que si l'inégalité suivante est vérifiée:

$$d\theta << \rho \quad \text{où } \theta \text{ est l'angle d'oscillation} \qquad (I.3.19)$$

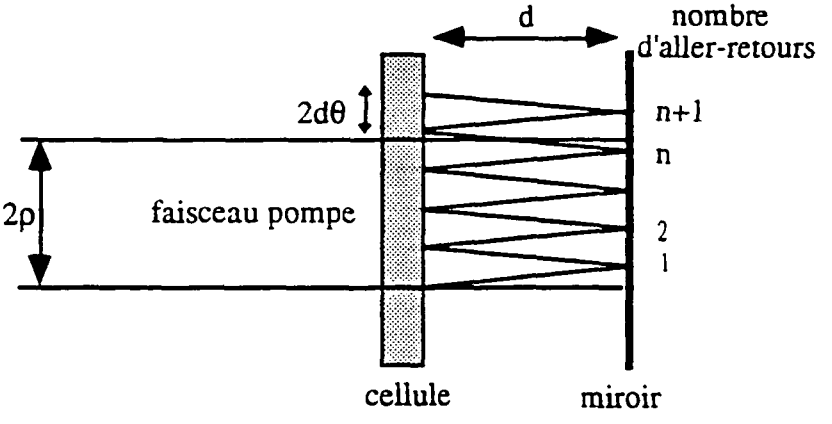


Fig I.3.5: Interaction de l'instabilité avec le faisceau pompe

c) Intensité seuil et angle d'oscillation

La fonction qui associe à I_f la valeur $\frac{aRI_f}{(1+b(1+R)I_f)}$ est une fonction croissante de I_f. L''intensité pompe $I_{f,seuil}$ minimum qui permet une oscillation se déduit donc de l'équation de seuil (I.3.16) en attribuant la valeur 1 maximum à la fonction $\sin(\eta - k\theta^2 d)$ et ainsi une valeur minimum égale à 1 à $\frac{aRI_f}{(1+b(1+R)I_f)}$. On en déduit alors l'intensité au seuil $I_{f,seuil}$ ainsi que les angles d'oscillation au seuil

$$\boxed{I_{f,seuil} = \frac{1}{(aR - b(1+R))}} \qquad \text{(I.3.20.a)}$$

$$\boxed{\theta^p_{seuil} = \sqrt{\frac{1}{kd}\left(\eta - \frac{\pi}{2} + 2p\pi\right)}} \qquad \text{(I.3.20.b)}$$

p correspond aux entiers naturels tels que $\left(\eta - \frac{\pi}{2} + 2p\pi\right)$ soit bien positif. La réflectivité diminuant avec l'angle θ, p ne pourra pas prendre des valeurs trop grandes.

Nous avons donc ici établi l'équation de seuil d'oscillation pour des instabilités polarisées orthogonalement aux ondes pompes. Nous en avons déduit l'intensité et l'angle d'oscillation au seuil. Nous allons maintenant décrire la génération d'instabilités parallèles.

3.2) Seuil d'oscillation pour des ondes polarisées parallèlement aux ondes pompes.

Nous allons dans un premier temps expliquer la génération d'instabilités parallèles et préciser les non-linéarités impliquées. Nous allons ensuite étudier l'oscillation de ces instabilités dans la cavité.

3.2.1) Non-linéarités optiques et polarisation parallèle

Nous n'avons travaillé jusqu'ici que dans des situations où l'apparition de l'instabilité était liée à des phénomènes de pompage optique et où l'instabilité était polarisée orthogonalement aux ondes pompes. Expérimentalement, nous observons au-dessus du seuil aussi des instabilités polarisées parallèlement aux ondes pompes. l'approche utilisée jusqu'ici ne peut pas justifier cette polarisation. Cette polarisation pourrait être expliquée par des non-linéarités d'origines différentes ou des processus d'ordre supérieur.

En effet, la non-linéarité d'une vapeur atomique peut être due à la saturation de la transition atomique. Ce processus passe par un peuplement réel des niveaux excités et fait intervenir des ondes de même polarisation. Lorsque la transition atomique est saturée, il est possible de générer des instabilités de polarisation parallèle à celle des pompes. Notons cependant que la saturation de la transition atomique ne s'observe que pour des intensités beaucoup plus importantes que les intensités seuil des instabilités induites par pompage optique.

Des processus de pompage optique d'ordre supérieur peuvent aussi être impliqués dans la génération d'instabilités de polarisation parallèle. En effet, les instabilités orthogonales créées par pompage optique à l'ordre le plus bas en champ 'faible' pourraient si elles deviennent assez intenses générer à un ordre supérieur de nouvelles instabilités de polarisation orthogonale à leur propre polarisation et donc de polarisation parallèle à la polarisation des ondes pompes. L'angle d'émission de ces instabilités de polarisation parallèle à celle des pompes doit alors être le double de l'angle d'émission des instabilités de polarisation orthogonale.

Dans un système autre qu'un système $1/2 \rightarrow 1/2$, plus exactement dont le moment cinétique J_g du niveau fondamental est supérieur à 1/2, il est possible de réaliser du pompage optique avec des ondes de polarisation linéaire. Il est alors possible de générer des instabilités de polarisation parallèle à celle des ondes pompes. Le paragraphe suivant nous permettra d'établir les caractéristiques de l'oscillation dans la cavité dans le cas où tous les faisceaux sont de même polarisation linéaire.

3.2.2) Seuil d'oscillation dans la cavité

Nous allons dans cette partie décrire la génération d'instabilités de polarisation parallèle à la pompe. La démarche étant très similaire à celle adoptée pour les ondes de

polarisation orthogonale, nous nous contenterons d'établir les grandes lignes de ce calcul et d'en donner les conclusions [Gry93a].

a) Approximations sur le milieu non-linéaire et les champs.

Tous les champs considérés étant de polarisations parallèles, nous ferons abstraction de l'aspect vectoriel des champs. Nous nous contenterons sans détailler les processus impliqués dans la non-linéarité de décrire le milieu non linéaire par un indice n_2. Le champ total $E_{f,t}$ (pompe et instabilité) se propageant dans la sens des z positifs vérifiera alors l'équation suivante:

$$\frac{\partial E_{f,t}}{\partial z} = i k n_2 \left(E_{f,t} E_{f,t}^* + E_{b,t} E_{b,t}^* \right) E_{f,t} \qquad \text{(I.3.21)}$$

$E_{b,t}$ correspond au champ total se propageant dans le sens des z négatifs. Notons que l'intensité totale dans le système I_{tot} vérifie la relation suivante:

$$I_{tot} = E_{f,t} E_{f,t}^* + E_{b,t} E_{b,t}^* \qquad \text{(I.3.22)}$$

Nous réaliserons cette étude loin des résonances. L'indice n_2 est donc réel. Nous supposerons que le milieu est optiquement mince. Nous pourrons alors négliger les effets d'absorption dans le milieu. Les intensités totales $I_{f,t}$ des ondes dans le sens des z positifs et et $I_{b,t}$ des ondes se propageant dans le sens des z négatifs seront donc constantes. Nous considererons que les instabilités ont une intensité faible par rapport à celle des ondes pompes. Nous travaillerons au premier ordre en champ faible et nous négligerons donc la déplétion des pompes.

Ces approximations sont les mêmes que celles que nous avions faites en polarisation orthogonale et correspondent bien à notre situation expérimentale.

b) Coefficients de réflectivité du miroir à contraste de phase

Nous considérons toujours le même système que dans la partie (I.3.1) (voir figure(I.3.1)) constitué par le milieu non-linéaire de longueur ℓ, le miroir plan situé à une distance d et les ondes précédentes E_f, E_b, E et E'. La relation (I.3.21) nous permet d'établir l'expression de l'instabilité E en fonction des trois autres champs à la sortie de la cellule et ainsi d'établir l'expression des coefficients de réflectivité du miroir à contraste de phase:

$$r_d = i\alpha E_f E_b^* = i r_0 e^{-i(\varphi_f - \varphi_b)}$$
$$r_c = i\alpha E_f E_b = i r_0 e^{-i(\varphi_f + \varphi_b)} \qquad \text{(I.3.23)}$$

où r_0 est un réel vérifiant la relation suivante:

$$r_0 = k n_2 \ell |E_b E_f| = k n_2 \ell \sqrt{R} I_f \qquad \text{(I.3.24)}$$

Remarquons ici que $kn_2\ell$ joue le même rôle que $-\frac{a e^{i\eta}}{2(1+b(1+R)I_f)}$ dans la relation (I.3.9) où η peut valoir 0 où π suivant le signe de l'écart à résonance. Dans le cas des non-linéarités dues à la saturation du pompage optique ainsi que dans le cas de la saturation d'une transition $1/2 \rightarrow 1/2$ [Pin94], n_2 est négatif pour des fréquences des ondes pompes inférieures à la résonance, et positif pour des fréquences supérieures. Tous les calculs de la partie précédente peuvent être repris en remplaçant r_c et r_d par leurs nouvelles valeurs. On obtient en particulier l'équation de seuil suivante:

$$1 - 2 k n_2 \ell R I_f \sin\left(k\theta^2 d\right) = 0 \qquad \text{(I.3.25)}$$

Les angles d'oscillation θ se déduisent aisément de la relation (I.3.25). Dans le cas d'un milieu auto-défocalisant pour lequel $n_2<0$, ils sont donnés par la formule suivante:

$$\theta = \sqrt{\frac{1}{kd}\left(3\frac{\pi}{2} + 2p\pi\right)} \qquad \text{(I.3.26)}$$

Lorsque n_2 est positif, le milieu est auto-focalisant et les angles d'oscillation sont donnés par la formule suivante:

$$\theta = \sqrt{\frac{1}{kd}\left(\frac{\pi}{2} + 2p\pi\right)} \qquad \text{(I.3.27)}$$

Les angles d'oscillation sont constants loin des résonances et nous retrouvons là les résultats que nous avions dans le cas orthogonal.

Nous avons donc établi ici les conditions de seuil d'oscillation dans le cas des instabilités de polarisation parallèle et montré que les angles d'oscillation au seuil de part et d'autre de la résonance atomique sont les mêmes dans les cas parallèle et orthogonal. Par contre les non-linéarités impliquées sont très différentes dans les cas parallèle et orthogonal et les instabilités parallèles ne peuvent osciller que pour des intensités des ondes pompes plus importantes que dans le cas orthogonal. Au-dessus du

seuil d'oscillation, les instabilités aussi bien parallèles qu'orthogonales ont des distributions transverses très similaires que nous allons présenter dans le paragraphe suivant.

3.3) Forme des instabilités émises

Le système cellule, miroir plan et onde pompe ainsi étudié est symétrique par rapport à l'axe de propagation de l'onde pompe (symétrie cylindrique). On s'attend donc à ce que la symétrie des instabilités émises appartienne à un sous-groupe de symétrie du groupe de symétrie de la cavité. L'étude précédente a été réalisée pour une instabilité se propageant dans un plan en faisant un angle θ avec l'axe optique. La projection de ces instabilités sur un écran lointain correpond à une figure à deux taches diamétralement opposées que nous appelerons par analogie avec l'hydrodynamique (Man90) des rouleaux. Cependant expérimentalement, d'autres figures que des rouleaux ont été aussi observées et en particulier des anneaux(voir Partie II.2). En effet, tant que la symétrie cylindrique est parfaitement vérifiée, aucun plan n'est privilégié. L'instabilité rayonnée devrait s'inscrire sur un cône de génératrice l'axe des pompes et d'angle θ. Au seuil en particulieroù toutes les directions de propagation sont encore équivalentes, la structure transverse d'une telle instabilité serait donc un anneau. Cependant nous pouvons aussi observer d'autres figures que des anneaux, telles que des rouleaux, des figures à quatre taches [Giu88] et que nous appelerons carrés et des figures à six taches équiréparties sur un cercle [Thü93]. Nous appelerons ces figures des hexagones. Ces figures privilégient certaines directions qui ont bien souvent une origine expérimentale: Les faisceaux peuvent ne pas être parfaitement symétriques, les faces de la cellule peuvent avoir de petites imperfections, le miroir plan peut ne pas être parfaitement orthogonal à l'axe des pompes si bien que la pompe retour $\vec{E}_b$ fait alors un petit angle avec la pompe aller $\vec{E}_f$... Toutes ces raisons expérimentales peuvent favoriser certaines figures aux dépends des anneaux. Ces figures sont bien souvent en compétition [Pam93] les unes avec les autres. Certaines approches théoriques [Fir90], [D'Al91-92] montrent que des figures comme des hexagones apparaissent avec un seuil moins élevé que les autres. Pour certaines fréquences du laser, des figures constituées d'un nombre pair de taches équiréparties sur un cercle, peuvent également être observées. Nous allons dans la partie suivante expliquer la formation de ces instabilités et caractériser leur comportement au-dessus du seuil.

4) Instabilités générées par un faisceau de distribution d'intensité gaussienne

Dans la partie précédente, nous avons approximé les ondes se propageant dans le milieu par des ondes planes. La structure tranverse en champ lointain de ces instabilités correspondait alors à des anneaux, des rouleaux ou des hexagones. Cependant dans certaines conditions, de nouvelles structures transverses ont été mis en évidence [Akh92]. F. Papoff [Pap93] a montré théoriquement des différences importantes entre les instabilités générées par une onde plane et une onde de profil d'intensité gaussien. Dans le cas des ondes planes, les instabilités respectent en champ proche une symétrie de translation (rouleaux, réseaux hexagonaux...) alors que lorsque les ondes pompes ont une distribution gaussienne d'intensité, le système doit être symétrique par rotation dans le plan transverse. Dans notre situation expérimentale [Gry94a] comportant un milieu non-linéaire et un miroir de rétroaction, des structures appelées "marguerites" constitués par un nombre pair de taches, de "pétales" disposés sur des cercles concentriques ont été mis en évidence. Ces structures observées en champ proche et en champ lointain, ne respectent pas la symétrie de translation et ne peuvent donc pas être approximées par des ondes planes mais pourraient être approximées par des ondes de distribution d'intensité gaussienne.

Dans cette partie, les ondes seront considérées comme des ondes de distribution d'intensité gaussienne. Le système ayant une symétrie cylindrique, nous choisirons de décrire les instabilités dans la base complète des modes de Laguerre-Gauss [Abr64]. Nous chercherons dans cette partie à déterminer le seuil d'oscillation de ces modes dans la cavité et nous chercherons par des simulations numériques à étudier au dessus du seuil les transitions d'un mode à un autre.

4.1) Cas général

Nous établirons ici l'expression des modes oscillant dans la cavité et nous en déduirons le seuil d'oscillation d'un mode de Laguerre-Gauss dans la cavité. Nous discuterons enfin cette équation de seuil dans la limite des faibles et des fortes saturations.

4.1.1) Oscillation dans la cavité constituée par le miroir à contraste de phase et le miroir normal

Nous considérons le même milieu non-linéaire que dans les parties 2 et 3, constitué d'une vapeur alcaline avec une densité N d'atomes et un miroir plan de réflectivité R est placé à une distance d de la cellule. Nous choisissons comme origine de l'axe (Oz) de propagation de l'onde $\bar{E}_f$ le point situé à la sortie de la cellule.

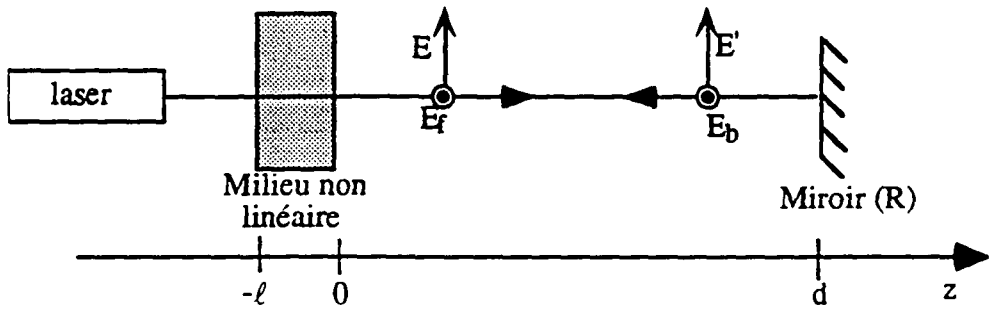


Fig I.4.1: Schéma de l'expérience

Comme dans la partie 3, l'onde $\bar{E}_b$ est obtenue par réflexion de l'onde $\bar{E}_f$ sur le miroir plan. En revanche l'onde pompe $\bar{E}_f$ n'est plus considérée comme une onde plane mais comme une onde d'intensité gaussienne de rayon de pincement w_f. L'onde $\bar{E}_b$ est alors également une onde d'intensité gaussienne dont le rayon de pincement sera noté w_b. Nous supposerons que la distance d entre la cellule et le miroir est très petite devant la longueur de Rayleigh z_R du faisceau ($d \ll z_R = kw_f^2/2$). Lors de sa propagation entre le milieu non-linéaire et le miroir plan, la taille transverse locale w(z) (avec $w(z) = w_f\left(1+\frac{z^2}{z_r^2}\right)^{1/2}$) de l'onde $\bar{E}_f$ ne varie alors presque pas. Le miroir est parfaitement plan afin que le diamètre du faisceau réfléchi $\bar{E}_b$ soit pratiquement égal au diamètre du faisceau incident $\bar{E}_f$. Les tailles transverses w_f et w_b des deux ondes sont donc égales. Nous noterons alors $w=w(z)=w_f=w_b$. Nous appelerons R_f et R_b les rayons

de courbure locaux des ondes $\bar{E}_f$ et $\bar{E}_b$ respectivement. Après un aller-retour, les ondes $\bar{E}_f$ et $\bar{E}_b$ peuvent alors s'exprimer de la manière suivante:

$$\begin{aligned}\bar{E}_f(z) &= \sqrt{I_f}\, e^{-\frac{r^2}{w^2}}\, e^{-i\frac{kr^2}{2R_f}}\, e^{\frac{2iz}{kw^2}}\, e^{-i(\omega t - kz + \varphi_f)}\, \bar{e}_x \\ \bar{E}_b(z) &= \sqrt{RI_f}\, e^{-\frac{r^2}{w^2}}\, e^{-i\frac{kr^2}{2R_b}}\, e^{-\frac{2iz}{kw^2}}\, e^{-i(\omega t + kz + \varphi_b)}\, \bar{e}_x\end{aligned} \tag{I.4.1}$$

où

$$\varphi_b = \varphi_f - 2\left(kd - \frac{2d}{kw^2}\right) \tag{I.4.2}$$

La phase φ_b comporte un premier terme, -2kd, dû à la propagation de l'onde sur un aller-retour et un second terme, $4d/kw^2$ (phase de Gouy) lié au caractère gaussien de l'onde.

Comme dans les parties 2 et 3, une onde peu intense $\bar{E}'$ est supposée se réfléchir sur le miroir à contraste de phase et génère l'onde $\bar{E}$. A son tour celle-ci se réfléchit sur le miroir plan pour donner une onde se superposant à l'onde $\bar{E}'$. Ces deux ondes peu intenses peuvent ainsi pour des conditions que nous allons décrire maintenant osciller dans la cavité formée par le miroir à contraste de phase et le miroir plan.

Nous chercherons dans la partie suivante sous quelles conditions des modes de Laguerre-Gauss de même taille transverse et donc de même longueur de Rayleigh z_R que les ondes pompes peuvent osciller dans la cavité. Ces ondes $\bar{E}$ et $\bar{E}'$ auront alors le même rayon de courbure ($R = z + \frac{z_R^2}{z}$) en chaque point que les ondes $\bar{E}_f$ et $\bar{E}_b$ respectivement et les fronts d'onde des ondes $\bar{E}$ et $\bar{E}_f$ ainsi que des ondes $\bar{E}'$ et $\bar{E}_b$ se superposeront.

4.1.2) Modes de Laguerre-Gauss

Le système formé par la cellule, le miroir plan et les ondes pompes possèdant une symétrie cylindrique, il est astucieux de travailler dans une base de modes possédant la même symétrie cylindrique. Une base usuelle est la base complète des modes de Laguerre-Gauss $M_{\ell,m,j}(r,\theta,z)$ [Sie71] où (O,r,θ,z) correspond à un système de coordonnées cylindriques. z correspond à la direction de propagation du mode de

Laguerre-Gauss. r et θ correspondent respectivement au rayon et à l'angle d'un système polaire centré sur l'origine 0 du repère située au centre de la face de sortie de la cellule.

a) Base complète des modes de Laguerre-Gauss

Les modes de Laguerre-Gauss sont définis de la façon suivante:

$$M_{\ell,m,j}(r,\theta,z) = \frac{2}{\sqrt{\pi\left(1+\delta_{0,m}\right)}}\frac{1}{w(z)}\sqrt{\frac{\ell!}{(m+\ell)!}}\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{w(z)}\right)^m L_\ell^m\left(\frac{2r^2}{w(z)^2}\right) e^{-\frac{r^2}{w^2}} e^{-i\frac{kr^2}{2R(z)}} e^{i(2\ell+m+1)\mathrm{Arctan}\frac{2z}{kw_0^2}} G_{m,j}(\theta) \tag{I.4.3}$$

où

$$\delta_{0,m} \text{ vaut 1 si } m=0 \text{ et 0 sinon} \tag{I.4.4}$$

j ne peut prendre que les valeurs 1 et 2 et $G_{m,j}(\theta)$ vérifie

$$G_{m,1}(\theta)=e^{im\theta} \text{ et } G_{m,2}(\theta)=e^{-im\theta} \tag{I.4.5}$$

Les fonctions L_ℓ^m sont les polynômes de Laguerre généralisés qui vérifient la relation de Rodrigue's [Abr64].

$$L_\ell^m(x) = \frac{e^x x^{-m}}{\ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(e^{-x}x^{m+\ell}\right) \tag{I.4.6}$$

ainsi que la relation d'orthogonalité

$$\int_0^{+\infty} L_\ell^m(x)L_{\ell'}^m(x)x^m e^{-x}\,dx = \delta_{\ell,\ell'}\frac{(\ell+m)!}{\ell!} \tag{I.4.7}$$

La base des modes de Laguerre-Gauss est une base complète et orthonormée en m, ℓ et j.

m et ℓ sont les indices azimuthal et radial du mode. Nous définirons alors les familles de modes de Laguerre-Gauss ayant même indice $q=2\ell+m$. Ces familles sont dégénérées en fréquence [Lug90].

b) Expression des modes de Laguerre-Gauss dans notre configuration expérimentale

Dans notre situation expérimentale, le terme de phase en $(2\ell+m+1)\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{z}{z_R}\right)$ où $z_R=kw^2/2$, sera approximé par la suite par $\frac{2z(2\ell+m+1)}{kw^2}$ car ici $z<<z_R$ et $z_R=kw^2/2$.

De plus, si un mode $M_{\ell,m,j}(r,\theta,z)$ oscille dans la cavité, il se réfléchira sur le miroir à contraste de phase. Or nous avons montré dans la partie 2 qu'une onde incidente se réfléchit sur un miroir à contraste de phase en deux ondes, une en phase et l'autre en opposition de phase avec l'onde incidente. Un miroir à contraste de phase mélange ainsi la composante en phase et en opposition de phase de l'onde incidente. Par conséquent si l'onde incidente possède une dépendance en $e^{im\theta}$, l'onde réfléchie sera une superposition linéaire d'une onde en $e^{im\theta}$ et d'une onde en $e^{-im\theta}$. Une onde en $e^{im\theta}$ ne sea donc pas un mode propre de la cavité. Une dépendance des ondes $\bar{E}$ et $\bar{E}'$ en fonction de $\cos(m\theta)$ est par contre appropriée à la symétrie de notre système. Nous noterons alors le mode (ℓ,m) par $M_{\ell,m}(r,\theta,z)=(M_{\ell,m,j}(r,\theta,z)+M_{\ell,m,-j}(r,\theta,z))/2$.

c) Représentation transverse d'un mode de Laguerre-Gauss.

La projection de l'intensité d'un mode de Laguerre-Gauss de paramètre (ℓ,m) sur une section transverse est une figure à symétrie centrale comportant 2m pétales répartis sur $(\ell+1)$ cercles concentriques. La figure suivante représente la structure transverse du mode $(\ell=0, m=5)$.

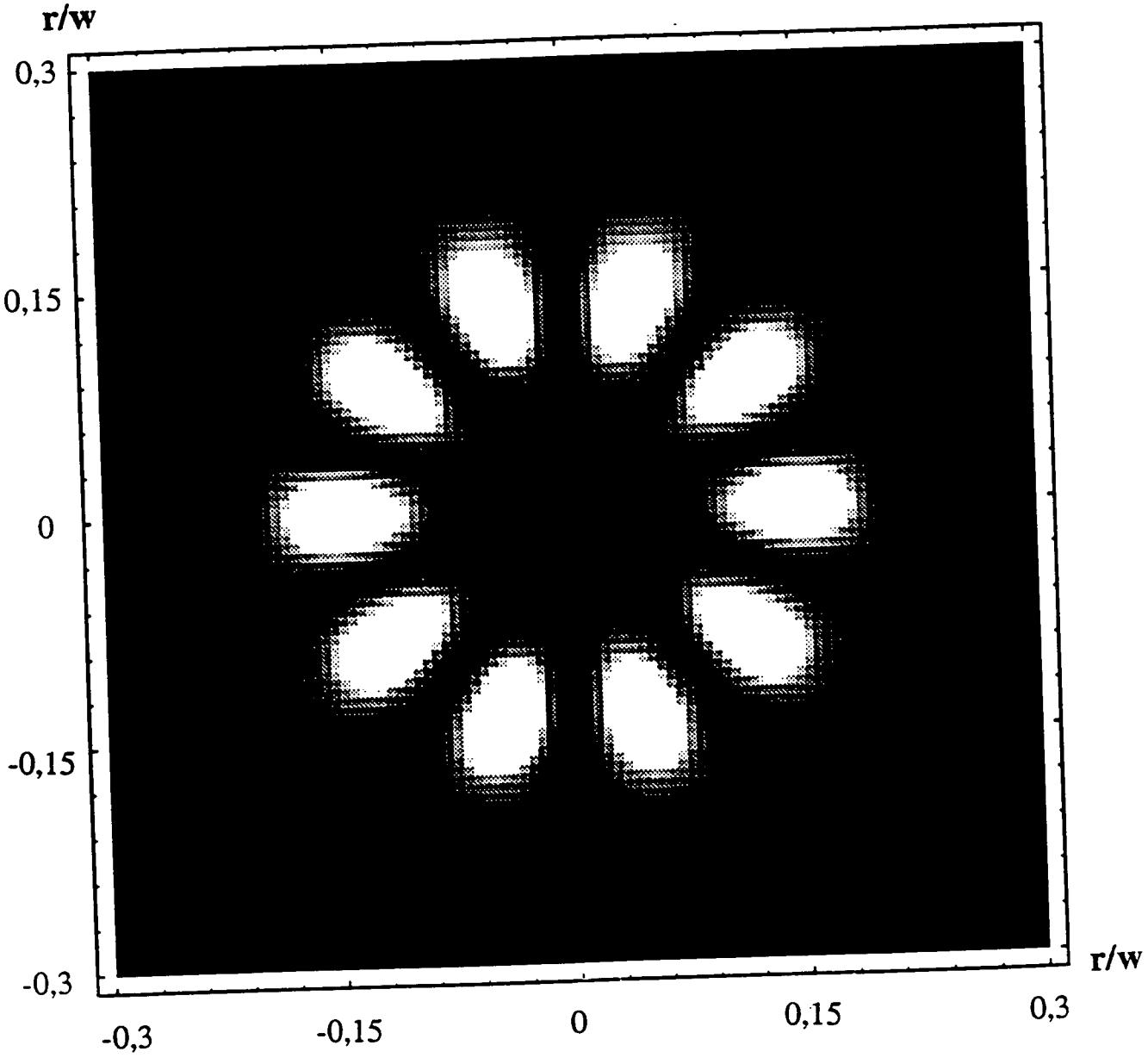


Fig I.4.2: structure transverse d'un mode de Laguerre-Gauss (ℓ=0,m=5) en unité normalisée (r/w).

4.1.3) Seuil d'oscillation pour des modes de Laguerre-Gauss

L'onde $\bar{E}$ peut s'exprimer dans cette base comme une superposition linéaire de modes de Laguerre Gauss:

$$\boxed{\bar{E} = \sqrt{I}\sum_{\ell,m} A_{\ell,m} M_{\ell,m}(r,\theta,z) e^{-i(\omega t - kz + \varphi)} \bar{e}_y} \qquad \text{(I.4.8)}$$

L'onde $\bar{E}'$ obtenue après réflexion de l'onde $\bar{E}$ sur le miroir plan de coefficient de réflectivité R, se déduit de l'expression de l'onde $\bar{E}$ et s'exprime aussi comme une superposition linéaire de modes de Laguerre Gauss:

$$\bar{E}' = \sqrt{RI}\sum_{\ell,m} A_{\ell,m} M_{\ell,m}(r,\theta,z)e^{-i(\omega t+kz+\varphi')}\bar{e}_y \qquad (I.4.9)$$

où la phase φ' comporte encore un terme lié à la propagation de l'onde et un terme correspondant à la phase de Gouy.

$$\varphi' = \varphi - 2\left(kd - \frac{2d(2\ell+m+1)}{kw^2}\right) \qquad (I.4.10)$$

Cherchons maintenant la condition de seuil pour un mode (ℓ_0,m). Si le champ $\bar{E}$ est une superposition linéaire de modes de Laguerre-Gauss, le champ $\bar{E}'$ obtenu par réflexion sur le miroir plan sera lui aussi une superposition linéaire de modes de Laguerre-Gauss. Ce champ $\bar{E}'$ pourra à son tour se réfléchir sur le miroir à contraste de phase, pour redonner le champ $\bar{E}$. Les champs $\bar{E}'$ et $\bar{E}$ vont ainsi osciller et effectuer des aller-retours dans la cavité. L'expression de E en fonction des trois autres champs est donnée dans la relation (I.2.25). En remplaçant dans cette formule, E_f, E_b par leurs expressions (I.4.1), $\bar{E}'$ et $\bar{E}$ par les combinaisons linéaires des modes de Laguerre-Gauss données ci-dessus dans les relations (I.4.8) et (I.4.9), Il est possible de donner l'expression de $\bar{E}$ en z=0 au $n^{ième}$ aller-retour en fonction de son expression au $(n-1)^{ième}$ aller-retour dans la cavité:

$$\sum_{\ell,m} A_{\ell,m}^{(n)} \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{0,m}}}\sqrt{\frac{\ell!}{(m+\ell)!}}\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{w}\right)^m L_\ell^m\left(\frac{2r^2}{w^2}\right)e^{-i\varphi} =$$

$$\frac{aRI_f\, e^{i(\eta-\varphi_f)}e^{-\frac{2r^2}{w^2}}}{1+bI_f(1+R)e^{-\frac{2r^2}{w^2}}}\sum_{\ell,m} A_{\ell,m}^{(n-1)} \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{0,m}}}\sqrt{\frac{\ell!}{(m+\ell)!}}\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{w}\right)^m L_\ell^m\left(\frac{2r^2}{w^2}\right)\sin(\varphi_b-\varphi') \qquad (I.4.11)$$

Les coefficients $A_{\ell,m}^{(n)}$ et $A_{\ell,m}^{(n-1)}$ sont respectivement caractéristiques du $n^{ième}$ et du $(n-1)^{ième}$ aller-retour de l'onde $\bar{E}$ dans la cavité.
En égalant les termes de phase, on en déduit la relation suivante:

$$\varphi = \varphi_f - \eta \qquad (I.4.12)$$

En remplaçant dans cette équation, φ_f par son expression en fonction de φ_b donnée dans la relation (I.4.2) et φ' par son expression en fonction de φ donnée dans la relation (I.4.10), nous pouvons en déduire l'expression de φ_b-φ':

$$\varphi_b - \varphi' = \eta - \frac{4d(2l+m)}{kw^2} \tag{I.4.13}$$

Intéressons nous maintenant à ce que serait le seuil d'oscillation pour le mode (ℓ_0,m_0) isolé. Les polynômes de Laguerre généralisés sont des polynômes orthogonaux. Il est donc possible de projeter une combinaison linéaire de modes de Laguerre-Gauss sur un seul mode (ℓ_0,m_0) de Laguerre-Gauss. En multipliant par exemple les deux membres de l'équation (I.4.11) par $e^{-\frac{2r^2}{w^2}}\left(\frac{\sqrt{2}\,r}{w}\right)^{m_0} L_{\ell_0}^{m_0}\left(\frac{2r^2}{w^2}\right)\frac{4\,r}{w^2}dr$ et en intégrant de 0 à $+\infty$, on réalise une projection sur le mode (ℓ_0,m_0). L'orthogonalité de ces modes par rapport aux indices m permet d'établir l'équation suivante:

$$A_{\ell_0,m_0}^{(n)}\sqrt{\frac{(\ell_0+m_0)!}{\ell_0!}} = \int_0^{+\infty}\frac{aRI_f\,e^{-2u}}{1+bI_f(1+R)e^{-u}}\sum_{\ell}A_{\ell,m_0}^{(n-1)}\sqrt{\frac{\ell!}{(m_0+\ell)!}}\,u^{m_0}\,L_{\ell}^{m_0}(u)\,L_{\ell_0}^{m_0}(u)\sin(\varphi_b-\varphi')\,du \tag{I.4.14.a}$$

avec

$$u = \frac{2r^2}{w^2} \tag{I.4.14.b}$$

Expérimentalement, nous n'observons l'oscillation que d'un seul mode à la fois dans la cavité. Si seul le mode (ℓ_0,m_0) évolue dans la cavité, tous les coefficients $A_{\ell,m}^{(n-1)}$ sont nuls pour $\ell\neq\ell_0$ et $m\neq m_0$. On peut déduire de l'équation précédente le quotient $\frac{A_{\ell_0,m_0}^{(n)}}{A_{\ell_0,m_0}^{(n-1)}}$ le gain $G(\ell_0,m_0)$ du mode (ℓ_0,m_0) sur un aller-retour:

$$G(\ell_0,m_0) = \frac{aR}{b(1+R)}C_{\ell_0,m_0}(I_f)\sin\left(\eta-(2\ell_0+m_0)\frac{4d}{kw^2}\right) \tag{I.4.15.a}$$

avec $$C_{\ell_0,m_0}(I_f) = \frac{\ell_0!}{(\ell_0+m_0)!}bI_f(1+R)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2u}\,u^{m_0}\left|L_{\ell_0}^{m_0}(u)\right|^2}{1+bI_f(1+R)e^{-u}}du \tag{I.4.15.b}$$

Les coefficients $C_{\ell_0,m_0}(I_f)$ sont des intégrales de recouvrement. Remarquons que le terme en $bI_f(1+R)e^{-u}$ correspond à l'intensité de la pompe $\bar{E}_b$ au point $(r=w\sqrt{\frac{u}{2}},\theta,z)$

La condition de seuil d'oscillation du mode (ℓ_0,m_0) est donnée par l'inéquation suivante:

$$G(\ell_0,m_0)\geq 1 \qquad (I.4.16)$$

4.1.4) Cas limite près du seuil

a) Milieu très saturé

L'extension radiale d'un mode (ℓ_0,m) de Laguerre-Gauss correspond à la valeur limite r_0 de r au delà de laquelle l'intensité $I(r>r_0,\theta,z)$ du mode est très faible. En posant $u=\frac{2r^2}{w^2}$, $I(u)=e^{-u}u^m\left|L^m_{\ell_0}(u)\right|^2$ est donc quasiment nul pour $u>u_0=\frac{2r_0^2}{w^2}$. Par conséquent, la contribution à l'intégrale de recouvrement des termes en $\frac{e^{-2u}u^m\left|L^m_{\ell_0}(u)\right|^2}{1+bI_f(1+R)e^{-u}}$ pour $u>u_0$ est négligeable. La valeur de l'intégrale de recouvrement $C_{\ell_0,m}(I_f)$ peut donc se calculer en n'intégrant que pour des valeurs de u comprises entre 0 et u_0.

Plaçons nous maintenant dans le cas où la saturation du pompage optique est importante, c'est à dire lorsque $bI_f(1+R)>>1$. La pompe $\bar{E}_b$ ayant une distribution gaussienne d'intensité, l'intensité de la pompe au point $(r=w\sqrt{\frac{u}{2}},\theta,z)$ est égale à $I_f(1+R)e^{-u}$. Dans le cas d'un milieu très saturé, l'intensité de la pompe reste importante sur les ailes de sa distribution gaussienne d'intensité et pour u suffisamment petit (e^{-u} ne doit pas devenir trop petit), le facteur $bI_f(1+R)e^{-u}$ est donc très supérieur à 1. Par conséquent tant que l'extension radiale u_0 du mode (ℓ_0,m) considéré est suffisament faible, 1 est négligeable devant $bI_f(1+R)e^{-u}$ pour toutes les valeurs de u comprises entre 0 et u_0. En n'intégrant que sur l'extension radiale de ce mode (ℓ_0,m) et en négligeant 1 devant $bI_f(1+R)e^{-u}$, on établit alors que le coefficient $C_{\ell_0,m}(I_f)$ est très proche de 1. La condition de seuil peut alors s'exprimer de la façon suivante:

$$\frac{aR}{b(1+R)}\sin\left(\eta-(2\ell_0+m)\frac{4d}{kw^2}\right)=1 \qquad (I.4.17)$$

Notons bien que l'équation de seuil (I.4.17) précédente ne sera valable que si le pompage optique est très saturé et s'il est effectivement saturé sur toute l'extension radiale du mode. Il ne suffira donc pas que la pompe sature le pompage optique au

centre de sa distribution gaussienne d'intensité mais qu'elle le sature également sur toute l'extension radiale du mode donc y compris sur les ailes de sa distribution gaussienne d'intensité. Le milieu ne peut donc être très saturé que pour des modes donnés et le gain sera alors proportionnel à $G_0 = \frac{aR}{b(1+R)}$.

b) milieu Kerr ($b\, I_f \ll 1$)

L'intégrale de recouvrement peut alors s'approximer par la formule suivante:

$$C_{\ell_0,m_0}(I_f) = \frac{\ell_0!}{(\ell_0+m_0)!} b I_f (1+R) \int_0^{+\infty} e^{-2u} u^{m_0} \left|L_{\ell_0}^{m_0}(u)\right|^2 du \qquad (I.4.18)$$

e^{-2u} étant toujours inférieur à e^{-u}, les coefficients $C_{\ell_0,m_0}(I_f)$ seront donc toujours inférieurs à 1. La décroissance de la fonction e^{-2u} étant très rapide, la valeur des coefficients $C_{\ell_0,m_0}(I_f)$ et donc du gain $G(\ell_0,m_0)$ diminueront d'autant plus vite que l'extension radiale du mode (ℓ_0,m_0) sera grande. Les seuls modes oscillant dans la cavité seront des modes pour lesquels le gain est supérieur à 1, donc des modes à ℓ_0 et m_0 petits. Un nombre de modes très restreint sera donc autorisé à osciller dans la cavité.

Alors que dans le cas saturé, le terme en $\frac{aR}{b(1+R)} \sin\left(\eta - (2\ell_0+m)\frac{4d}{kw^2}\right)$ était prépondérant dans la sélection des modes, dans le cas non saturé la valeur de l'intégrale de recouvrement jouera un rôle essentiel dans la sélection du mode et limitera le nombre de modes oscillant.

4.2) Simulation numérique

Les simulations numériques suivantes vont nous permettre de mieux comprendre les processus impliqués dans l'oscillation de ces modes gaussiens. Ces études seront d'abord réalisées au seuil d'oscillation puis au-dessus du seuil. Nous soulignerons en particulier l'importance du signe de l'écart à résonance et de la saturation de la transition atomique. Nous montrerons ensuite l'influence de divers paramètres comme le diamètre du faisceau ou l'intensité de l'onde pompe.

4.2.1) Domaine de validité

Compte tenu de l'orthogonalité en m des modes de Laguerre-Gauss, l'interaction entre modes de m différents est toujours nulle. La simulation numérique a été réalisée dans l'hypothèse où les couplages entre modes de différents ℓ sont suffisamment faibles pour que l'on puisse négliger toutes les interactions entre modes de ℓ différents et que l'on puisse considérer que seul le mode (ℓ_0,m_0) oscille dans la cavité. Plus précisément nous ne considérerons que des modes de Laguerre-Gauss correspondant à $\ell=0$ ce qui correspond à notre situation expérimentale la plus courante. En effet le gain sur un aller-retour est dû à la contribution de différents termes. L'intégrale $I_{\ell_0,\ell}$ suivante traduit le gain du mode (ℓ_0,m_0) sur un aller-retour sous l'action du couplage avec le mode (ℓ,m_0):

$$I_{\ell_0,\ell} = \sqrt{\frac{\ell!\ell_0!}{(m_0+\ell)!(\ell_0+m_0)!}}\sin(\varphi_b-\varphi')\int_0^{+\infty}\frac{aRI_f\,e^{-2u}}{1+bI_f(1+R)e^{-u}}u^{m_0}L_\ell^{m_0}(u)L_{\ell_0}^{m_0}(u)du \qquad (I.4.19)$$

Nous allons calculer l'intégrale ci-dessus pour différentes valeurs de ℓ_0 et $\ell=\ell_0$. La valeur du $\sin(\varphi_b-\varphi')$ dépendant de la famille considérée (la famille est définie par le paramètre $q=2\ell+m$) et de la distance d, nous ne nous intéresserons qu'à une seule famille et nous choisirons ici pour notre simulation numérique, q=8. Nous choisirons alors une distance d telle que $\sin(\varphi_b-\varphi')=1$. Nous calculerons l'intégrale normalisée $I_{\ell_0,\ell}/G_0$ qui ne dépend plus de aR mais qui dépend de $b(1+R)I_fe^{-u}$. Nous prendrons une valeur de 10^7 pour le facteur $b(1+R)I_f$. Nous montrerons par la suite qu'une telle valeur numérique permet de donner sur l'extension du mode de Laguerre-Gauss une valeur proche de 1 au facteur $b(1+R)I_fe^{-u}$ où I_fe^{-u} est l'intensité de la pompe aux points de coordonnées $(r=w\sqrt{\frac{u}{2}},\theta,z)$ donc sur les ailes de sa distribution gaussienne d'intensité. Par conséquent cette valeur de 10^7 très importante est intrinséquement liée à la forme du faisceau. Dans le cas d'un faisceau expérimental dont l'intensité sur les ailes de sa distribution est très supérieure à celle d'un faisceau gaussien, il s'agirait de prendre une valeur de $b(1+R)I_f$ (où I_f est l'intensité au centre) bien plus faible. Le graphe suivant donne le gain normalisé sur un aller-retour pour ces valeurs des paramètres pour $\ell=\ell_0$ et ℓ_0=0,1,2,3.

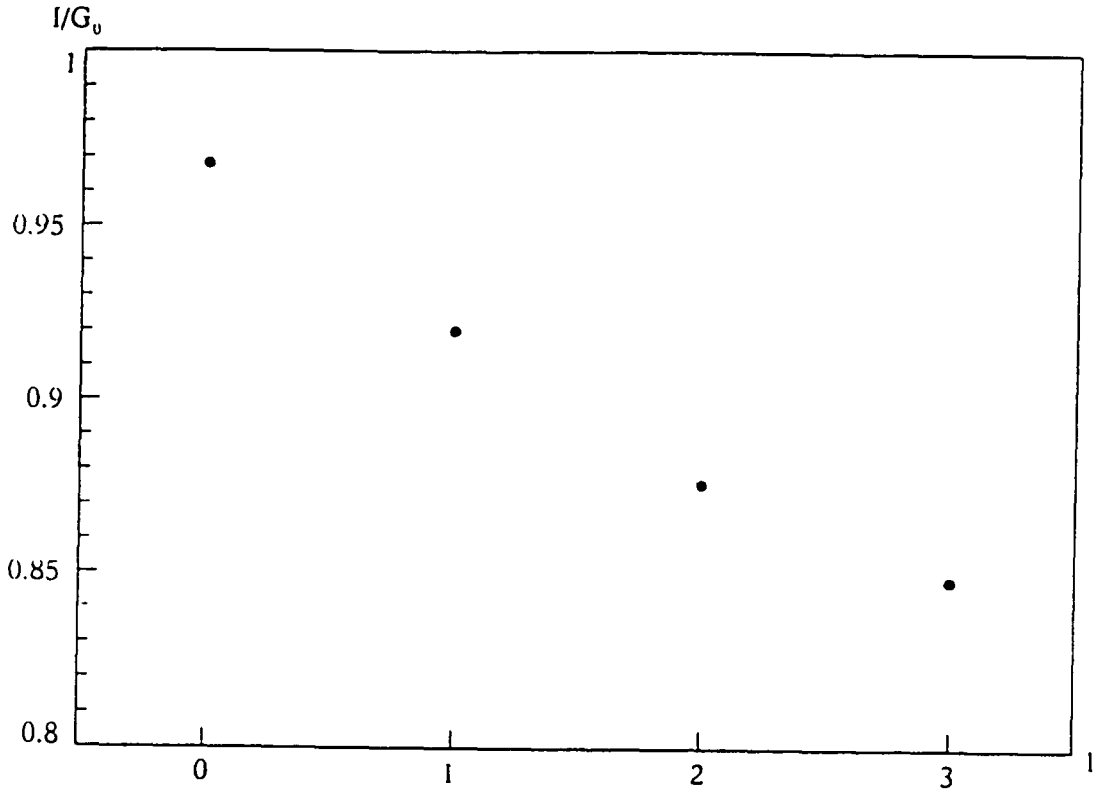


fig I.4.3.: Gain sur un aller -retour au sein de la même famille q=8 dû aux seuls modes ℓ_0 variant entre 0 et 3 et $\ell=\ell_0$, w=0.67mm, $b(1+R)I_f=10^7$

Remarquons ici que le gain du mode $\ell_0=0$ est supérieur au gain des autres modes. De plus des effets d'absorption dont nous ne tenons pas compte dans cette théorie peuvent aussi contribuer à favoriser dans notre situation expérimentale les modes $\ell=0$. En effet l'énergie d'un mode (ℓ,m) se répartie sur 2 m (ℓ+1) "pétales". A intensité totale égale, la densité d'énergie des modes (ℓ=0,m) dans chaque pétale est bien supérieure à la densité d'énergie dans chaque pétale d'un mode ($\ell\neq0$,m). Les modes $\ell=0$ saturent mieux l'absorption et sont moins absorbés que les autres modes. Si le couplage avec les modes de $\ell\neq0$ est faible sur un aller-retour, le gain du mode (ℓ=0,m) sur un aller-retour sera plus important que le gain des autres modes et nous observerons l'oscillation préférentielle de ce mode dans la cavité formée par le miroir plan et la cellule.

Cherchons à voir si les effets de couplage dus aux modes de $\ell\neq0$ sont importants. Le graphe suivant donne le logarithme de la valeur absolue du gain normalisé $\mathrm{Log}\left(\left|I_{\ell,\ell_0} / G_0\right|\right)$ dû au couplage des modes (ℓ_0=0,m_0) et (ℓ,m_0) sur un aller-retour pour ces valeurs des paramètres pour ℓ=0,1,2,3 et ℓ_0=0.

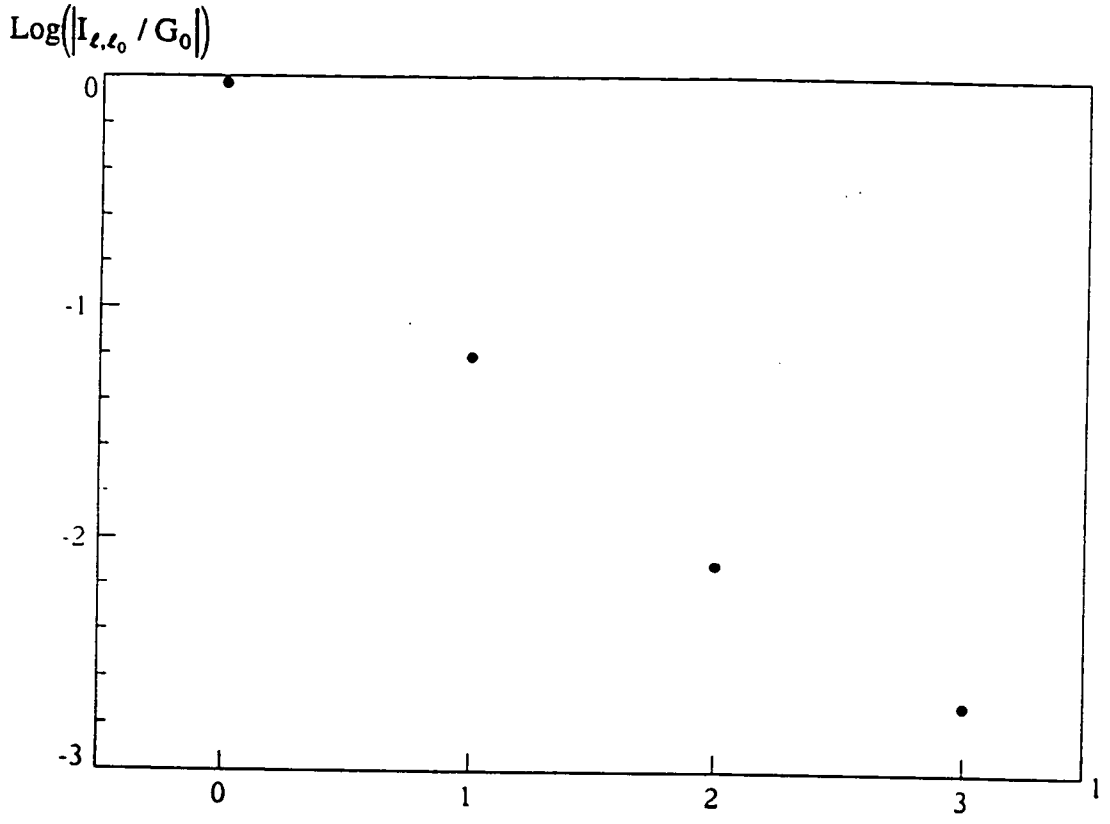


fig I.4.4: Logarithme du gain normalisé sur un aller -retour au sein de la même famille $q=8$ dû au couplage entre les modes $\ell_0=0$, et ℓ variant entre 0 et 3, $w=0.67mm$, $b(1+R)I_f=10^7$

Nous voyons ici que, à intensité égale, le gain dû aux couplage entre les modes de ℓ différents de $\ell_0=0$ est bien plus faible que le gain dû au seul mode ($\ell_0=0,m_0$). Nous pourrons donc négliger tous les effets de couplage entre les modes de ℓ différents. Nous pourrons donc considérer qu'en régime stationnaire et donc au bout d'un certain nombre d'aller-retours, les modes ($\ell_0\neq0,m_0$) auront une intensité bien plus faible que le mode ($0,m_0$).

Par conséquent, **les modes (0,m) oscillent préférentiellement dans la cavité.** Ceci correspond bien à notre situation expérimentale.

Nous avons vu de plus qu'**un milieu très saturé permettait l'oscillation d'un nombre important de modes** alors qu'un milieu peu saturé ne permettait l'oscillation que d'un nombre restreint de modes. Nous choisirons de nous placer dans la situation la plus proche de notre expérience où le milieu est très saturé et où l'on observe en général l'oscillation d'un nombre assez important de modes. Nous nous limiterons toujours à

des paramètres m compris entre 5 et 12 qui correspondent à nos observations expérimentales.

4.2.2) Comportement au seuil.

a) Méthode

Le seuil pour le mode (ℓ,m) est attteint lorsque le gain G(ℓ,m) prend la valeur 1. Le produit $C_{\ell,m}(I_f)\sin\left(\eta-(2\ell+m)\frac{4d}{kw^2}\right)$ étant toujours inférieur ou égal à 1, le seuil ne pourra être atteint que pour des valeurs de a et de b telles que a R ≥ b (1+R).

Pour chaque distance d donnée entre le miroir plan et la cellule, la résolution de l'équation G(ℓ,m)=1 permet de déterminer l'intensité pompe $I_{f,s}(\ell,m)$ minimum nécessaire pour atteindre le seuil d'oscillation du mode (ℓ,m). Le seuil absolu d'oscillation pour une distance d donnée correspondra au seuil du mode oscillant pour l'intensité pompe la plus faible. Notons également que le gain est proportionnel à $\frac{aR}{b(1+R)}$. Au seuil, plus le rapport $\frac{aR}{b(1+R)}$ sera grand, plus le terme $C_{\ell,m}(I_f)\sin\left(\eta-(2\ell+m)\frac{4d}{kw^2}\right)$ sera donc petit et plus l'intensité nécessaire pour atteindre le seuil d'oscillation sera faible.

Pour une distance d telle que $I_{f,s}(\ell,m+1)$ devient inférieure à $I_{f,s}(\ell,m)$, il est naturel de penser que le mode (ℓ,m+1) oscille au seuil au détriment du mode (ℓ,m). On observera donc des transitions d'un mode à un autre pour certaines valeurs de d.

b) seuil d'oscillation pour ℓ=0

Dans la simulation suivante, nous avons cherché à calculer le seuil pour des modes de Laguerre Gauss correspondant à ℓ=0. Nous avons donc cherché les valeurs de l'intensité seuil I_s en fonction de la distance d entre la cellule et le miroir pour lesquelles le gain est égal à 1. Nous choisirons ici un écart à résonance suffisamment grand pour que l'angle η puisse être pris égal à π. Nous prendrons comme valeur des paramètres aR et b(1+R) respectivement 5 10^9 et 10^8. Le rapport $G_0=\frac{aR}{b(1+R)}$ est alors de 50. Enfin nous considérerons un faisceau de rayon de pincement w=0.7mm qui correspond à notre situation expérimentale courante. Le schéma suivant représente

$Log(b(1+R)I_s)$ en fonction de la distance entre la cellule et le miroir pour des valeurs de m variant entre 1 et 4.

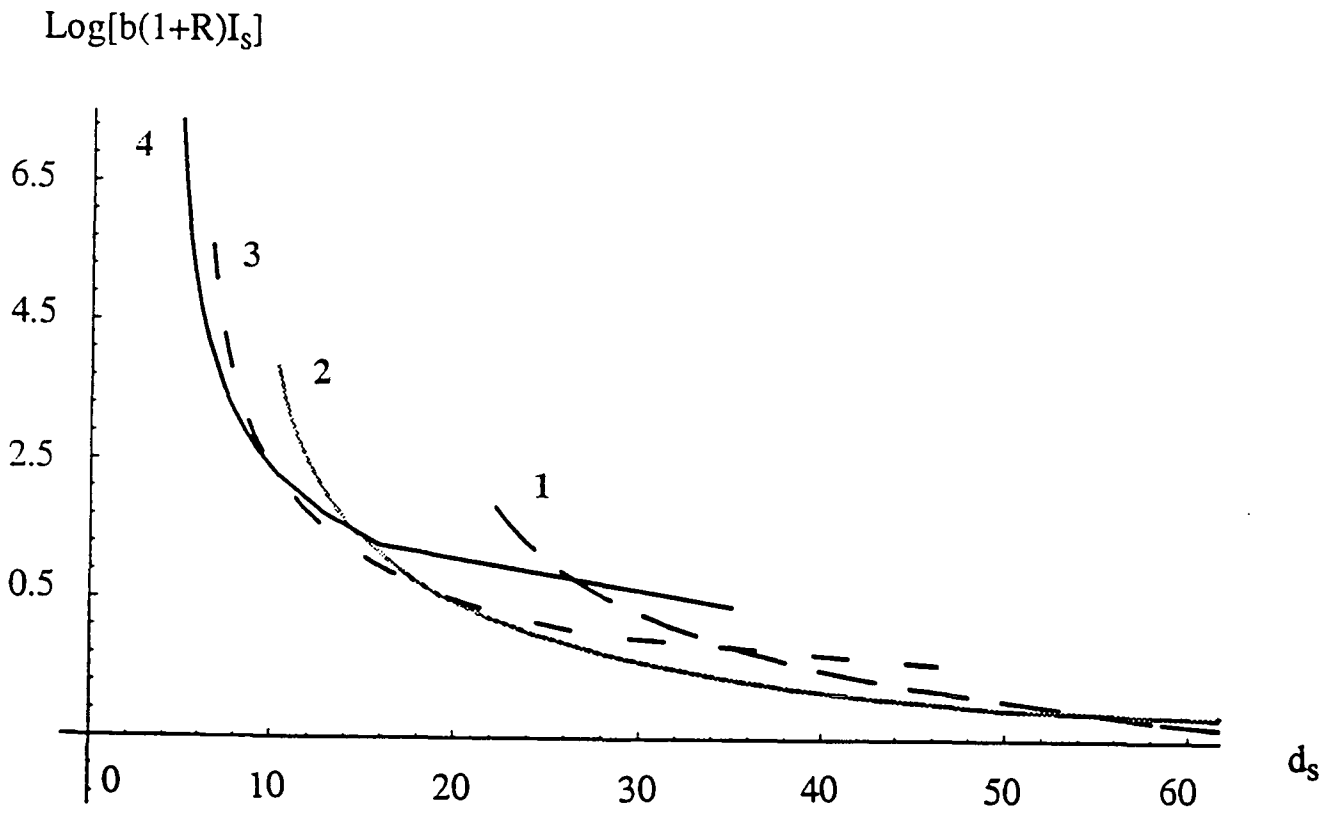


*Fig 1.4.5: **Log(b(1+R)I_s)** en fonction de la distance d en cm w=0.7mm, G_0=50, b=5 10^7, $\eta=\pi$ et $\ell=0$.*

Remarquons que plus d diminue, plus les modes oscillant au seuil sont des modes de grand m et plus l'intensité au seuil augmente. En effet, le gain est le produit de $\sin(m\frac{4d}{kw^2})$ par le coefficient $C_{\ell,m}(I_f)$. Lorsque d diminue, le terme $\sin(m\frac{4d}{kw^2})$ diminue aussi et le gain ne pourra donc continuer à être égal à 1 que si le coefficient $C_{\ell,m}(I_f)$ augmente. Or ce dernier terme croit avec I_f, donc l'intensité seuil augmentera lorsque d diminue.

Dans le cas où $\ell=0$, les polynômes de Laguerre $L^m_{\ell=0}(u)$ sont égaux à 1. Par conséquent l'intensité des modes de Laguerre-Gauss associés peut s'écrire sous la forme suivante:

$$I\left(u = 2\frac{r^2}{w^2}\right) = e^{-u}\,u^m \qquad (I.4.20)$$

L'intensité des modes de Laguerre-Gauss (0,m) est maximum en u=m. Nous pouvons remarquer que pour des intensités de l'ordre de grandeur de l'**intensité seuil,** le terme de saturation en u=m. **b I_f (1+R) e^{-m} est voisin de 1.**

Le seuil d'oscillation correspond donc à une situation intermédiaire entre le cas Kerr et le cas saturé.

L'intensité au seuil d'oscillation augmente donc avec d, distance entre le miroir et la cellule, mais n'est pas suffisante pour saturer le pompage optique.

4.2.3) Comportement au-dessus du seuil

a) Méthode

Au-dessus du seuil, plus exactement pour une intensité I_f fixée et pour une distance d donnée, le mode oscillant est à priori celui ayant le plus fort gain. La transition d'un mode (ℓ, m) à un mode (ℓ, m+1) se produit donc pour des valeurs de d pour lesquelles G (ℓ, m+1) devient supérieur à G (ℓ, m). On observera donc des transitions d'une figure à 2m pétales à une figure à 2m+2 pétales. Ceci n'exclut bien sûr pas la possibilité de compétition entre deux modes au voisinage des zones de transitions mais nous n'aborderons pas ici ces problèmes.

Lorsque le milieu est très saturé, l'intégrale de recouvrement est très proche de 1. Le gain maximum sera alors obtenu pour $\sin\left(\eta - (2\ell + m)\frac{4d}{kw^2}\right)=1$ soit

$$\left(\eta - \frac{\pi}{2}\right)\frac{kw^2}{4d} = 2\ell + m \qquad (I.4.21)$$

Le coefficient q=(2 ℓ + m) caractéristique du mode (ℓ, m) oscillant dans la cavité, **doit donc en moyenne varier linéairement en 1/d tant que le terme de saturation b I_f (1+R) e^{-u} reste très supérieur à 1 sur l'extension radiale du mode.**

Nous tracerons dans toutes ces simulations numériques les courbes de gain normalisé G/G_0 pour chaque mode (ℓ, m) et nous en déduirons les valeurs d pour

lesquelles s'opèrent les transitions d'un mode à un autre. Nous construirons alors le graphe donnant la valeur de m du mode oscillant en fonction de 1/d. Nous tracerons également la droite d'équation $\left(\eta - \frac{\pi}{2}\right)\frac{k w^2}{4d} = 2\ell + m$. ℓ étant toujours nul dans notre étude, nous ne nous intéresserons donc qu'à la variation de m en fonction de 1/d.

b) Résultats

Les simulations numériques suivantes ont cherché à mettre en évidence le rôle de différents paramètres. Dans un premier temps, les études seront réalisées à intensité pompe I_f constante mais pour des distances d variables. Nous montrerons d'abord le rôle de la saturation. Nous étudierons ensuite l'influence du diamètre du faisceau. Dans un deuxième temps, la distance d est fixée et l'intensité pompe varie. Nous chercherons à analyser les transitions de modes en fonction de l'intensité pompe.

Dans la partie 2 de ce chapitre, nous avons défini l'angle η: il peut prendre toutes les valeurs entre 0 et π, 0 et π correspondant à un milieu purement dispersif et $\pi/2$ à un milieu purement absorptif. Expérimentalement les instabilités s'observent du côté auto-focalisant de la résonance pour lequel le désaccord est positif et l'angle η est compris entre $\pi/2$ et π. Nous considérerons que l'angle η vaut π ce qui correspond à notre situation expérimentale.

α) Influence de la saturation

Nous cherchons ici à mesurer l'importance de la saturation. L'étude est réalisée de la même façon que dans le paragraphe précédent mais avec les valeurs des paramètres suivantes: le rayon de pincement du faisceau w vaut 0.67 mm et η prend la valeur π. Le paramètre de saturation $b(1+R)I_f$ varie et vaut successivement 10^6, 10^7 et 10^8. Les figures (I.4.6.a-b-c) représentent encore les courbes de gain normalisé en fonction de d pour respectivement $b(1+R)I_f=10^6$, $b(1+R)I_f=10^7$ et $b(1+R)I_f=10^8$.

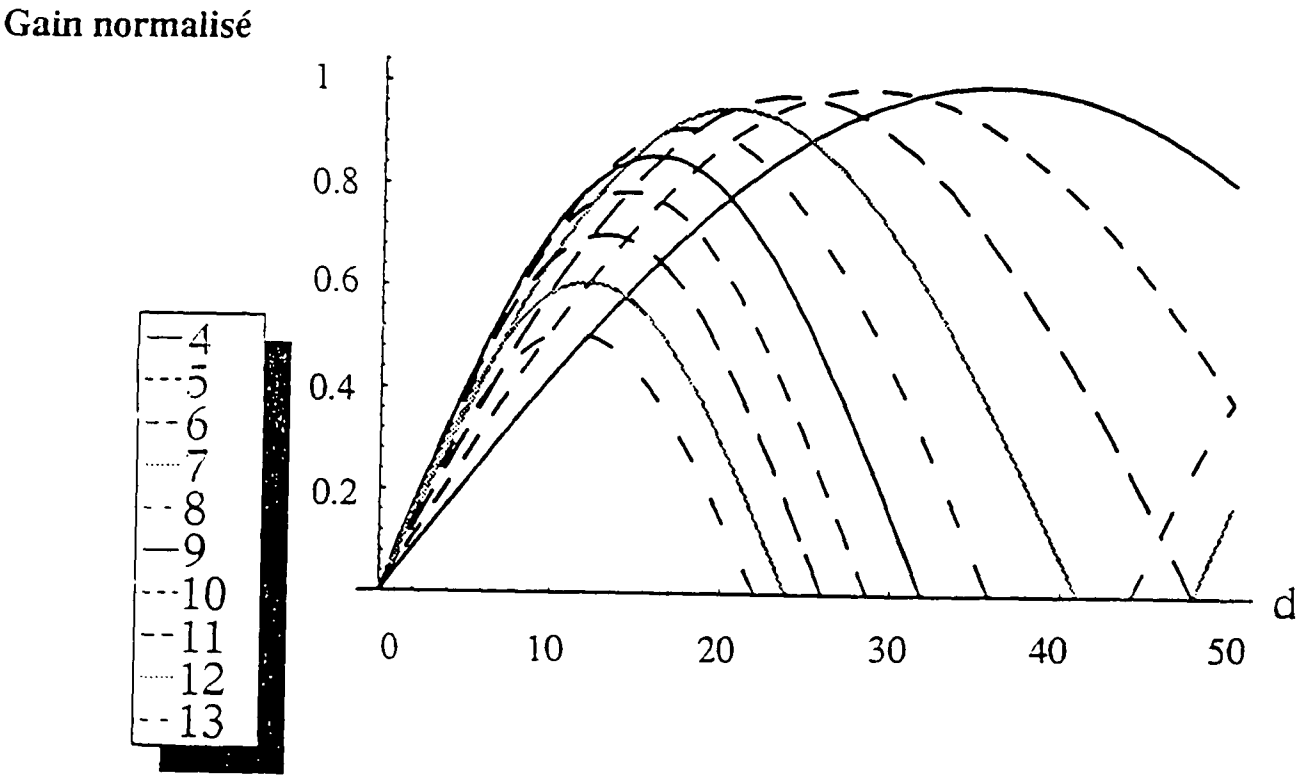


Fig I.4.6.a:Courbes de gain normalisé des modes de Laguerre Gauss (0,m) en fonction de d(cm) pour $4 \leq m \leq 13$, $b(1+R)I_f=10^6$, $w=0.67mm$, et $\eta=\pi$.

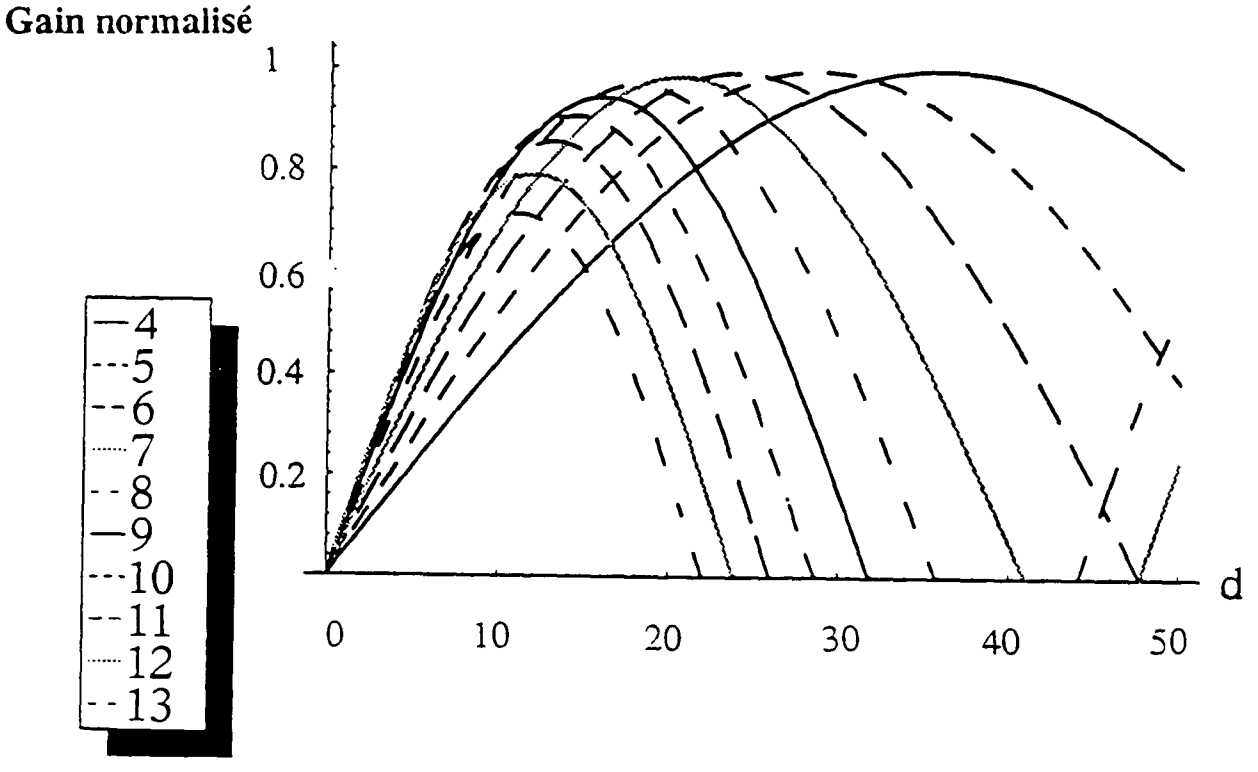


Fig I.4.6.b:Courbes de gain normalisé des modes de Laguerre Gauss (0,m) en fonction de d(cm) pour $4 \leq m \leq 13$, $b(1+R)I_f=10^7$, $w=0.67mm$, et $\eta=\pi$.

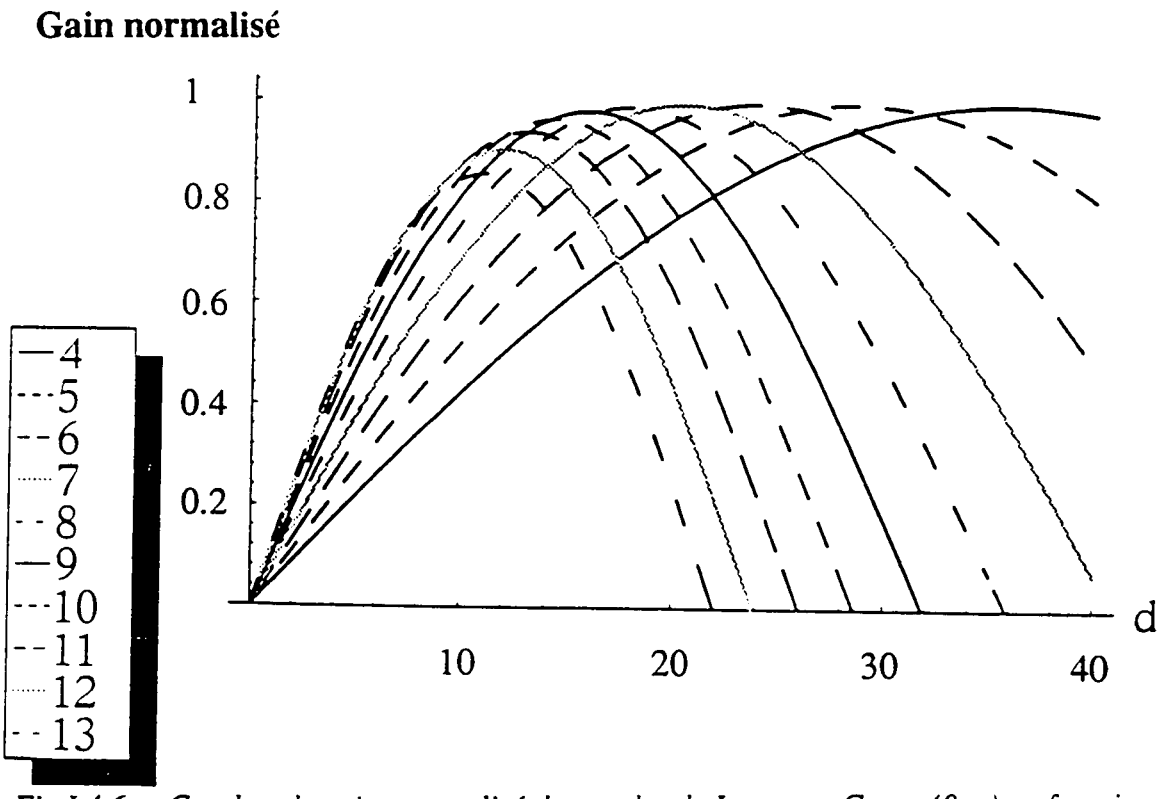


Fig I.4.6.c: Courbes de gain normalisé des modes de Laguerre Gauss (0,m) en fonction de d(cm) pour $4 \leq m \leq 13$, $b(1+R)I_f=10^8$, w=0.67mm,, et $\eta=\pi$.

Analyse

Lorsque $b(1+R)I_f=10^6$, le gain associé à chaque mode de Laguerre-Gauss est saturé tant que m<8. Les courbes de gain correspondent alors à des sinusoïdes. Par contre pour des modes correspondants à des m supérieurs à 10, la saturation est loin d'être atteinte et le gain de ces modes est inférieur au gain des modes correspondant à des valeurs de m inférieures à 10.

Pour $b(1+R)I_f=10^7$, la saturation est atteinte pour des modes de m inférieur ou égal à 10. Tous les modes de m variant entre 5 à 12 peuvent osciller.

Pour $b(1+R)I_f=10^8$, la figure (I.4.6.a) montre que tous les modes de m inférieur ou égal à 12 saturent et peuvent donc osciller.

Les courbes suivantes (I.4.7.a-b-c) montrent l'évolution de m en fonction de 1/d pour les mêmes valeurs de paramètres. La droite en trait plein correspond à la droite d'équation $m = \frac{\pi}{2}\frac{kw^2}{4d}$.

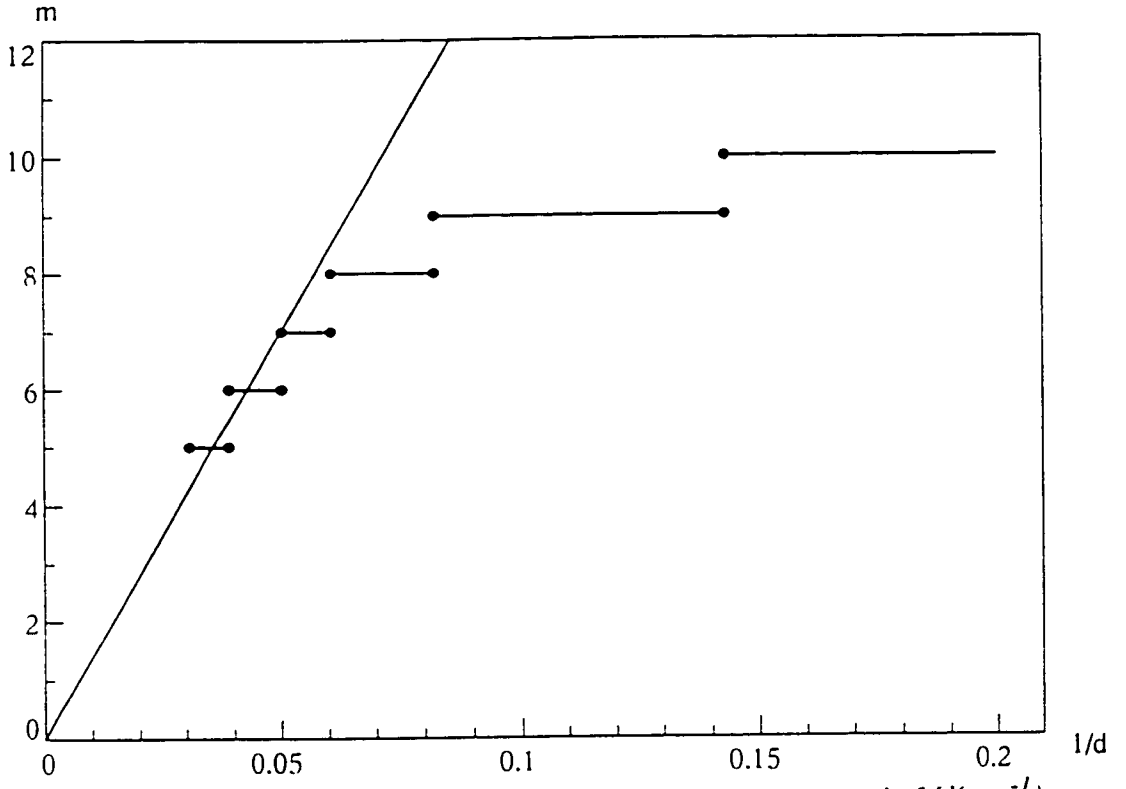


Fig I.4.7.a: Valeurs de m associées aux modes (0,m) en fonction de 1/d(cm^{-1}) pour $4 \leq m \leq 13$, $b(1+R)I_f=10^6$, w=0.67mm, $\eta=\pi$.

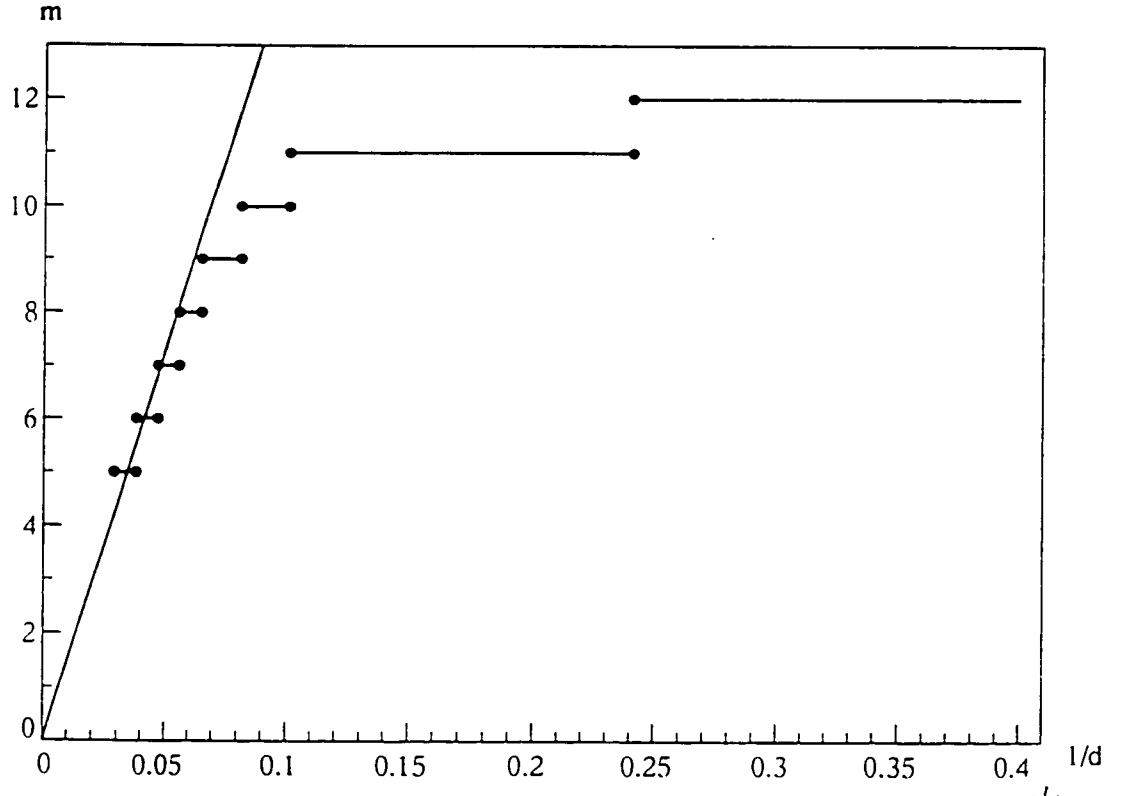


Fig I.4.7.b: Valeurs de m associées aux modes (0,m) en fonction de 1/d(cm^{-1}) pour $4 \leq m \leq 13$, $b(1+R)I_f=10^7$, w=0.67mm et $\eta=\pi$.

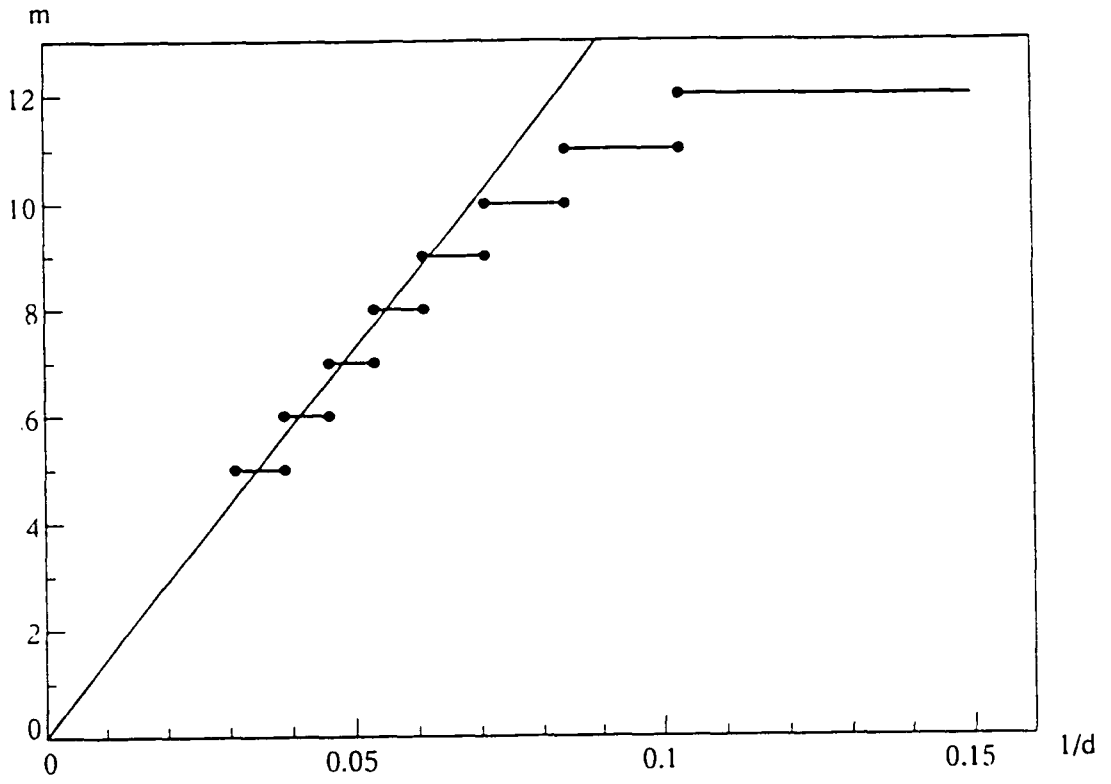


Fig I.4.7.c: Valeurs de m associées aux modes (0,m) en fonction de 1/d(cm $^{-1}$) pour $4 \leq m \leq 13$, $b(1+R)I_f=10^8$, w=0.67mm et $\eta=\pi$.

Analyse

-Remarquons dans un premier temps que la transition d'un mode (ℓ=0.m) à un mode (ℓ=0.m+1) s'effectue bien par saut pour des valeurs de d bien déterminées.

-Lorsque la distance entre le miroir plan et la cellule est grande, les modes oscillants sont des modes correspondant à des valeurs de m petit. A l'inverse, lorsque la distance d est petite, les modes favorisés sont les modes de grand m.

-Lorsque le terme de saturation $b(1+R)I_f$ augmente, le nombre de modes pouvant osciller augmente aussi ($m \leq 10$ pour $b(1+R)I_f=10^6$. Pour $b(1+R)I_f=10^7$ et $b(1+R)I_f=10^8$, tous les modes jusqu'à m=12 peuvent osciller).

-Lorsque m reste petit ($m<7$ pour $b(1+R)I_f=10^6$, $m<9$ pour 10^7 et $m<10$ pour 10^8), la distance pour laquelle le mode (ℓ=0.m) peut osciller ne dépend pas du terme en $b(1+R)I_f$ et vérifie en moyenne l'équation $m=\left(\eta-\frac{\pi}{2}\right)\frac{kw^2}{4d}$. La droite correspondante a été tracée dans les trois figures (I.4.7a-b-c). Par contre, pour des m grands, les valeurs de m se situent en-dessous de cette droite. Cet écart est d'autant plus important que le milieu est peu saturé.

Interprétation

-En effet, le gain est égal au produit de l'intégrale de recouvrement $C_{\ell,m}(I_f)$ par le terme en $\sin\left(\pi - m\frac{4d}{kw^2}\right)$. L'oscillation s'observe pour les valeurs des paramètres tels que le gain soit maximum et donc tels que le sinus soit proche de 1. Par conséquent si pour un couple (m,d) le sinus est égal à 1, le sinus restera égal à 1 si quand m augmente, d diminue.

L'oscillation des modes de grand m s'observera donc à des petites distances d entre le miroir et la cellule et l'oscillation des modes de petit m s'observera pour des grandes distances.

-Le terme en sinus ne dépend pas de l'intensité et donc de la saturation du pompage optique. Par contre, l'intégrale de recouvrement $C_{\ell,m}(I_f)$ croît avec l'intensité de l'onde pompe jusqu'à la saturation où elle vaut 1. Le pompage optique est saturé pour u variant sur l'extension radiale du mode (ℓ=0,m) considéré, lorsque le terme en $b\,(1+R)\,I_f e^{-u}$ reste très supérieur à 1. $I_f e^{-u}$ correspond à l'intensité de la pompe au point $\left(w\sqrt{\frac{u}{2}},\theta,z\right)$ donc sur les ailes de sa distribution gaussienne d'intensité. Par conséquent, l'intégrale $C_{\ell,m}(I_f)$ sera maximum pour des valeurs de l'intensité de la pompe permettant la saturation du pompage optique sur les ailes de sa distribution gaussienne.

Nous pouvons donc en conclure que **la saturation favorise l'oscillation d'un nombre plus important de modes.**

-De plus, les modes correspondant à des valeurs de m petites ont une extension radiale moins importante que les modes correspondant à des grands m. En effet, la relation (I.4.20) nous montre que pour un mode (ℓ=0,m) l'intensité maximum du mode est obtenue en u=m. Le terme en $b\,(1+R)\,I_f e^{-u}$ est d'autant plus grand et le gain sature donc d'autant plus facilement que m est petit.

L'oscillation des modes de m grand sera donc plus difficile que celle des modes de petit m.

-Par ailleurs, lorsqu'il y a saturation le gain vérifie l'équation:

$$G(0,m)=\frac{aR}{b(1+R)}\sin\left(\pi - m\frac{4d}{kw^2}\right) \qquad \text{(I.4.22)}$$

L'oscillation d'un mode (0,m) s'observant pour des valeurs des paramètres telles que le gain soit maximum, les valeurs de m pour lesquelles l'oscillation est permise s'inscrivent autour de la droite d'équation $m = \frac{\pi}{2}\frac{kw^2}{4d}$ comme nous le voyons sur les graphes (I.4.7). Lorsque m augmente, l'extension radiale du mode augmente et le pompage optique ne sature plus. L'intégrale de recouvrement $C_{0,m}(I_f)$ est alors inférieure à 1. Or dans le cas où le gain est saturé et donc où $C_{0,m}(I_f)=1$, pour les petites distances, les modes de petit m sont défavorisés par rapport aux modes de grand m. Cet effet est dû uniquement au terme du gain variant en sinus. Par conséquent dans notre cas présent, la diminution du gain due à une saturation moins forte pour les modes de m grand, sera compensée par une oscillation pour des distances inférieures à celles prévues dans le cas saturé. Ainsi la courbe donnant les valeurs de m en fonction de 1/d se situera en dessous de la droite théorique.

-Lorsque le milieu est saturé, on a $m = \frac{\pi}{2}\frac{kw^2}{4d}$, où w est le rayon de pincement du faisceau. Or l'intensité des modes de Laguerre-Gauss de paramètre (ℓ=0,m) considérés dans cette est maximum en tout point (r,θ,z), vérifiant $u=\frac{2r^2}{w^2}=m$ et $\cos(m\theta)=\pm 1$. Par conséquent, à une distance D grande devant la longueur de Rayleigh z_R, le diamètre $2r_0$ des instabilités est de

$$2r_0 = D\sqrt{\frac{\pi}{kd}} \qquad \text{(I.4.23)}$$

β) Influence du diamètre du faisceau

Le diamètre du faisceau est un paramètre important de ce système et permet d'une part de modifier l'intensité de la pompe et d'autre part de modifier la longueur de Rayleigh $\frac{kw^2}{2}$. En effet quelque soit le diamètre ρ du faisceau, la puissance du faisceau reste identique. La puissance étant proportionnelle au produit de l'intensité par la section du faisceau, en augmentant la taille du faisceau, l'intensité en chaque point et donc la saturation diminuent. La taille du faisceau jouera alors un rôle important dans la valeur de l'intégrale de recouvrement $C_{0,m}(I_f)$. De plus le terme en $\sin\left(\pi - m\frac{4d}{kw^2}\right)$ dépend crucialement de la longueur de Rayleigh et varie donc avec la taille du faisceau. Le gain étant dû à la contribution de ces deux termes varie donc avec la taille du faisceau.

$b(1+R)I_f$ sera égal à $10^7 *(0.67)^2/w^2$. Pour w=0.67mm, le paramètre $b(1+R)I_f$ sera égal à 10^7 comme dans une de nos études précédentes. Le rayon de pincement w prend successivement les valeurs 0.3mm, 0.67mm et 1.3 mm et $b(1+R)I_f$ prend alors respectivement les valeurs de $4\ 10^7$, 10^7 et $2.5\ 10^6$.

Les courbes de gain sont dans ces trois cas très similaires. Elles se déduisent l'une de l'autre pour des valeurs de m suffisamment petites pour que le gain sature, par une homothétie suivant l'axe des abscisses et ayant comme rapport le quotient des diamètres. En effet, lorsque le milieu est saturé, donc tant que m reste suffisamment petit, le gain est proportionnel à $\sin\left(\pi - m\frac{4d}{kw^2}\right)$. La courbe de gain correspondant à un rayon de pincement de 0.67mm a été précédemment donnée dans la figure (I.4.6.b). Nous ne présenterons pas les courbes de gain pour les autres diamètres et nous nous contenterons de commenter les graphes donnant m en fonction de 1/d.

Les graphes suivants (I.4.8-a-b) correspondent à l'évolution des valeurs de m associées aux modes (0,m) en fonction de 1/d(cm $^{-1}$) pour m variant entre 5 et 12, $\eta=\pi$ Le graphe correspondant à un rayon de pincement de 0.67mm est donné par la figure (I.4.7.b). Comme dans les parties précédentes, la droite théorique donnant la variation de m en fonction de 1/d est tracée en traits pleins.

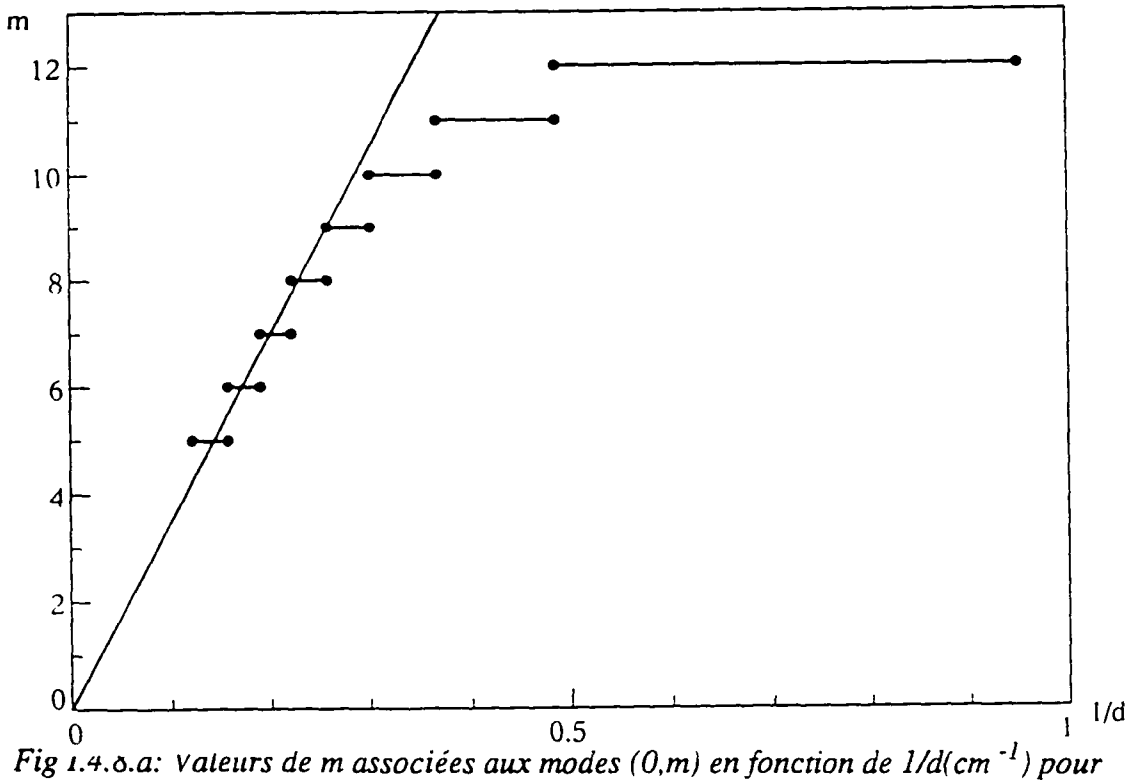


Fig I.4.8.a: Valeurs de m associées aux modes (0,m) en fonction de 1/d(cm $^{-1}$) pour $5 \leq m \leq 12$, $b(1+R)I_f=4\ 10^7$, w=0.3mm, et $\eta=\pi$.

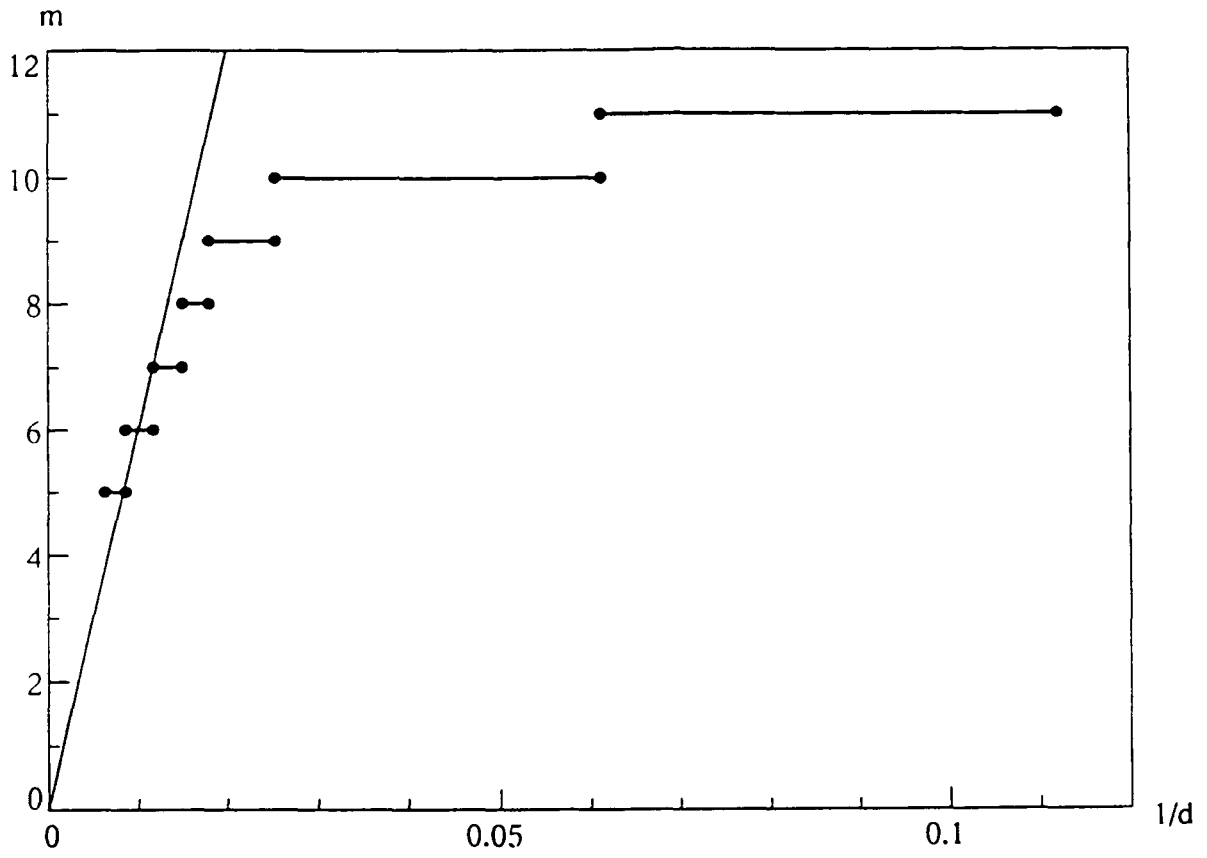


Fig I.4.8.b: Valeurs de m associées aux modes (0,m) en fonction de 1/d(cm^{-1}) pour $5 \leq m \leq 12$, $b(1+R)I_f = 2.5\ 10^6$, w=1.3mm, et $\eta=\pi$.

Analyse

-L'augmentation du diamètre du faisceau s'accompagne d'une diminution du nombre de modes oscillant dans la cavité: pour w=1.3mm les modes de m supérieurs à 11 ne pourront pas osciller alors que le mode m=12 oscille pour des faisceaux de rayon e pincement 0.67 mm et 0.3mm.

-Les valeurs de m s'inscrivent bien en moyenne et tant que m n'est pas trop grand autour de la droite théorique donnant m en fonction de 1/d. La pente de cette droite varie en fonction du carré du diamètre des faisceaux. Pour des valeurs de m grandes, les plages (1/d,m) se situeront en-dessous de la droite théorique. Cet écart sera d'autant plus important que le diamètre du faisceau est grand.

Interprétation

-En effet, lorsque le diamètre du faisceau augmente, l'intensité et donc la saturation diminuent. Le nombre de modes susceptibles d'osciller diminuera donc également.

-Lorsque le diamètre du faisceau augmente, la longueur de Rayleigh augmente avec le carré du diamètre du faisceau. L'écart à la droite théorique pour des m grands sera d'autant plus important, que le paramètre de saturation $b(1+R)I_f$ est faible et donc que le diamètre est grand.

Les figures (I.4.9.a-b) donnent pour une distance d typique de 10cm, le nombre m en fonction de w^2 c'est à dire de la surface du faisceau pompe pour deux valeurs de la saturation. Nous avons jusqu'ici travaillé principalement avec des faisceaux dont le rayon de pincement était égal à 0.67 mm. Le paramètre $(1+R)\, b\, I_f$ sera pris successivement égal à $10^8*(0.67)^2/w^2$, et à $10^7*(0.67)^2/w^2$ de telle sorte que pour w=0.67 mm, le paramètre de saturation prenne les valeurs 10^8 et 10^7 précédentes. La droite en traits plein correspond à la droite d'équation $m = \frac{\pi}{2}\frac{k}{4d}\frac{\rho^2}{2\ln 2}$.

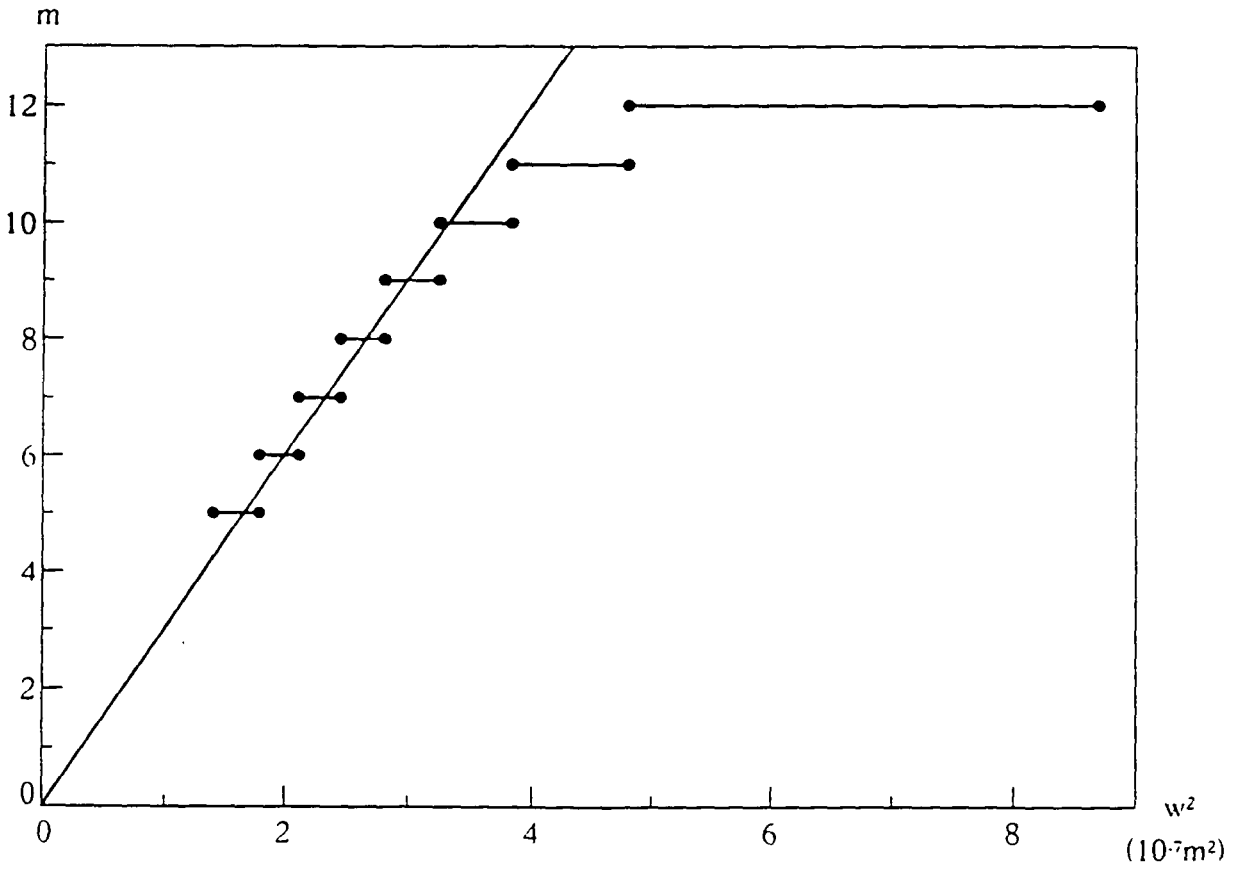


Fig I.4.9.a: valeurs de m en fonction de w^2 pour d=10 cm, $b\,(1+R)\,I_f=10^8(0.67)^2/w^2$

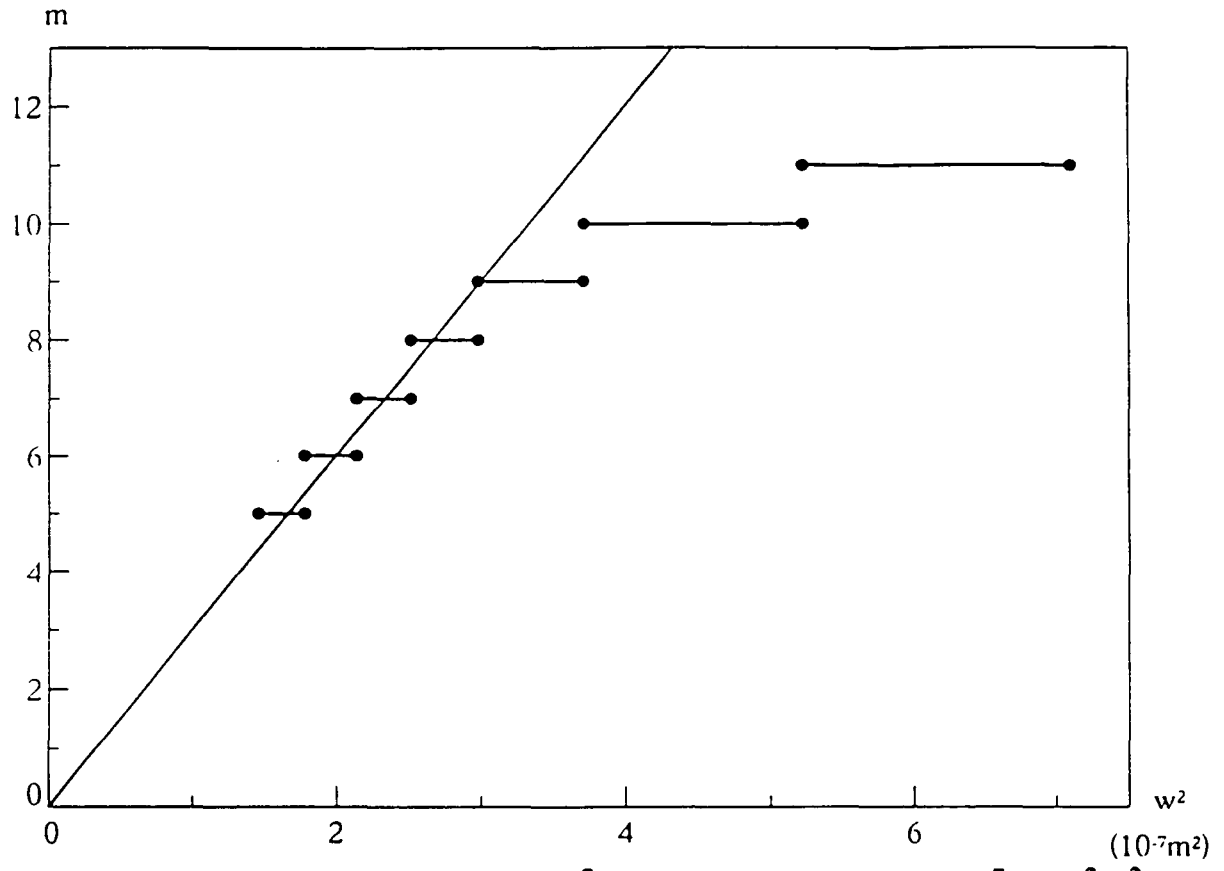


Fig I.4.9.b: valeurs de m en fonction de w^2pour d=10 cm , b (1+R) I_f=$10^7(0.67)^2/w^2$

Analyse

-Lorsque le diamètre augmente, le nombre de pétales 2m augmente aussi. Lorsque le milieu est assez saturé et donc pour des valeurs de m suffisamment petites (m<9 pour la figure (I.4.9.a) et m<8 pour la figure (I.4.9.b)), il varie proportionnellement au carré du rayon de pincement.

-Plus b est petit, plus l'oscillation des modes de m élevés est difficile: Pour b=5 10^7, les modes de m supérieurs à 11 ne pourront plus ociller. Pour des valeurs de m grandes, les couples(1/d,m) se situent bien en dessous de la droite tracée en trait plein et d'autant plus en dessous que b est faible.

Interprétation

-La variation du nombre m en fonction du carré du diamètre du faisceau peut se déduire de la relation (I.4.21): Nous pouvons écrire la condition de seuil pour un milieu très saturé:

$$m = \left(\eta - \frac{\pi}{2}\right)\frac{kw^2}{4d} \qquad (I.4.24)$$

m doit donc varier proportionnellement au carré w^2 du rayon de pincement du faisceau.

-Plus les valeurs de b sont petites, plus la saturation est faible et plus les modes de grand m oscilleront difficilement. L'écart à la droite théorique sera d'autant plus important que la saturation est faible (m grand ou b petit).

χ) *Evolution en fonction de l'intensité.*

Dans cette étude, la distance entre le miroir et la cellule est fixée mais l'intensité de la pompe augmente progressivement. Les simulations suivantes sont réalisées pour un rayon de pincement de 0.67 mm, pour aR/b(1+R)=50. La distance d entre la cellule et le miroir sera prise successivement égale à 9cm et à 18cm. Nous représenterons à chaque fois les courbes de gain non normalisé en fonction de $b(1+R)I_f$ pour diverses valeurs de m. Nous représenterons ensuite la variation de m en fonction de $Ln(b(1+R)I_f)$, pour m variant entre 1 et 12.

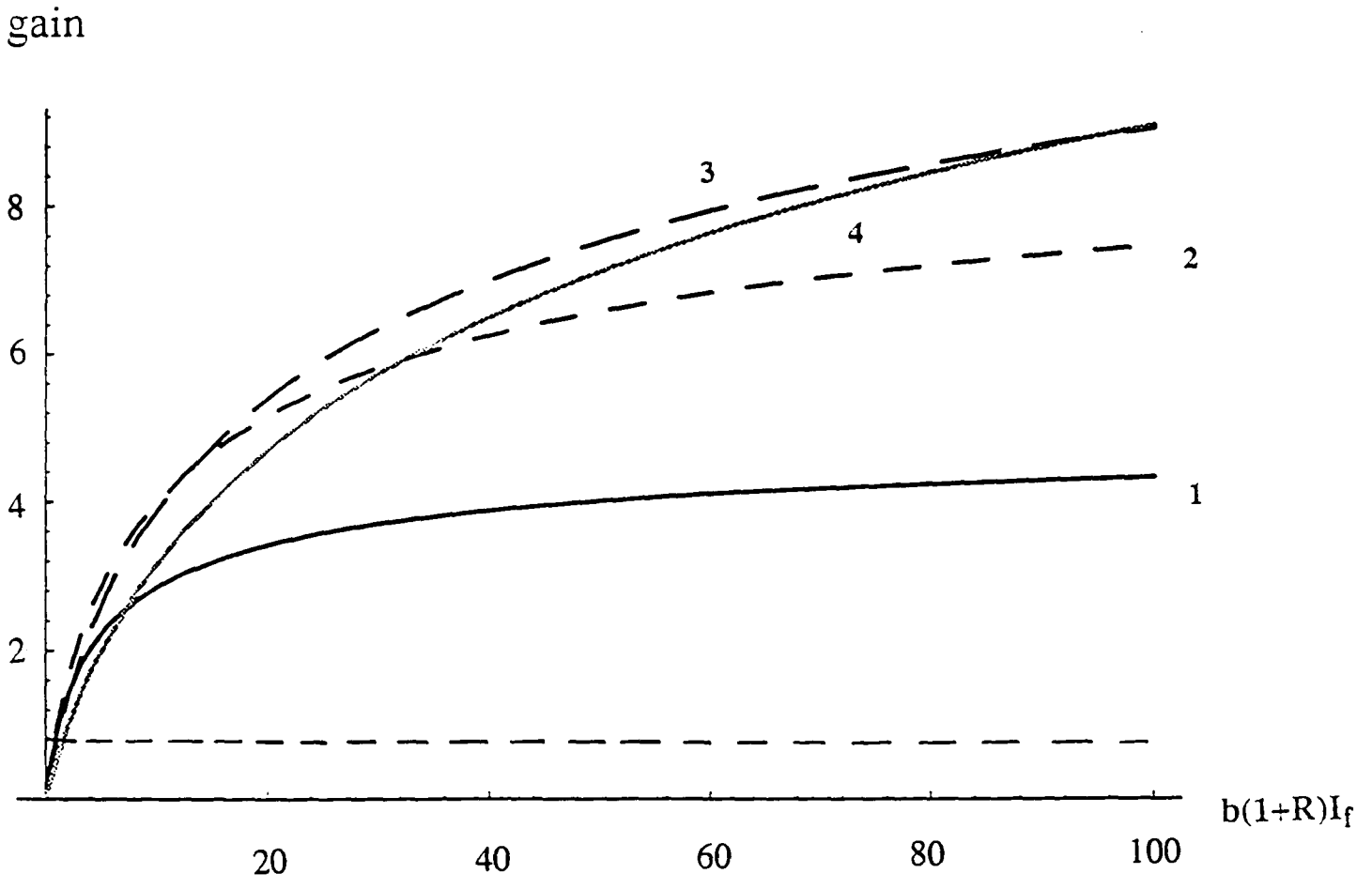


Fig I.4.10.a: gain des différents modes pour m variant entre 1 et 4 en fonction de $b(1+R)I_f$ avec $G_0=50$, $\eta=\pi$, w=0.67mm, d=9cm

Analyse

Considérons dans un premier temps la figure (I.4.10.a) correspondant à une distance d de 9cm. Le trait horizontal en pointillés correspond à un gain de 1. Lorsque le gain d'un mode est supérieure à 1, l'oscillation est possible. Lorsque l'intensité I_f augmente progressivement, le premier mode ayant un gain supérieur à 1 et susceptible d'osciller est le mode m=2. Pour une telle intensité, $b(1+R)I_f$ est de l'ordre de 5. L'intensité du mode (0,2) est maximum en $u=\frac{2r^2}{w^2}=2$ et le facteur $b(1+R)I_f e^{-2}$ est de l'ordre de 0.7 et n'est donc pas très supérieur à 1. .Le gain n'est donc pas saturé. En augmentant progressivement l'intensité, le gain $G(\ell=0,m=2)$ sature et devient inférieur au gain $G(\ell=0,m=3)$. A son tour le mode m=3 pourra osciller jusqu'au moment où le gain du mode m=4 deviendra plus important.

Interprétation

En effet le gain d'un mode (ℓ_0, m) est dû à la contribution de deux termes: Un terme en $\sin\left(\pi - m\frac{4d}{kw^2}\right)$ et les coefficients $\frac{aR}{b(1+R)}C_{0,m}(I_f)$ définis dans la formule (I.4.11). L'augmentation de l'intensité I_f de l'onde pompe permet d'augmenter la valeur du gain en augmentant la valeur de l'intégrale de recouvrement $C_{0,m}(I_f)$ jusqu'au moment où celle-ci sature. Sa valeur est alors proche de 1. Le mode (0,m) ayant une plus grande extension radiale que le mode (0,m-1), l'intensité de saturation du gain G(0,m) est supérieure à l'intensité de saturation du gain G(0,m-1). Pour des intensités inférieures à son intensité de saturation, le gain du mode (0,m-1) sera toujours supérieur au gain du mode (0,m). le mode (0,m-1) oscillera donc préférentiellement au mode (0,m) tant que l'intensité de saturation de son gain G(0,m-1)ne sera pas atteinte.

Une fois atteinte l'intensité de saturation du gain, le terme en sinus va jouer un rôle prépondérant dans la sélection des modes. Le $\sin\left(\pi - m\frac{4d}{kw^2}\right)$ ne varie pas pas avec l'intensité de la pompe mais il augmente avec m tant que $\left(\pi - m\frac{4d}{kw^2}\right)$ n'atteint pas la valeur $\pi/2$. Pour une distance d de 9cm et un diamètre du faisceau de 0.8mm, $m\frac{4d}{kw^2}$ vaut $1.2<\pi/2$ pour m=12. Jusqu'à m=12, c'est donc le terme en sinus qui permettra au gain G(0,m) de devenir supérieur au gain G(0,m-1) pour des intensités telles que le gain G(0,m-1) sature. En augmentant l'intensité I_f de la pompe, nous verrons donc successivement osciller des modes (0,m) de m de plus en plus grand et ce pour $m\leq 12$.

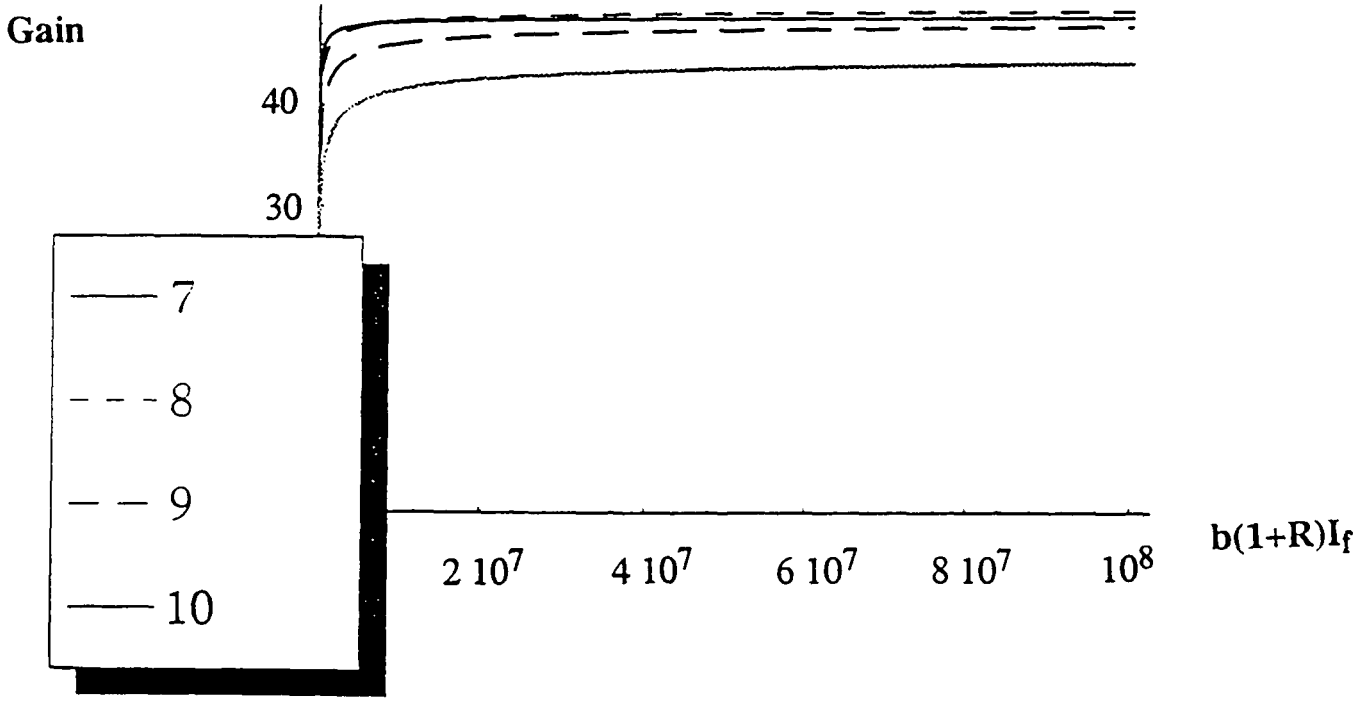


Fig I.4.10.b: gain des différents modes pour m variant entre 7 et 10 en fonction de $b(1+R)I_f$ avec $G_0=50$, $\eta=\pi$, $w=0.67mm$, $d=18cm$

Par contre pour une distance d=18cm, à partir de m=8, le $\sin\left(\pi - m\frac{4d}{kw^2}\right)$ décroit avec m ($m\frac{4d}{kw^2}=1.6$ pour m=8). Les courbes de gain pour m>8 sont donc inférieures à la courbe de gain G(0,m=8), comme nous le voyons dans la figure (I.4.10.b). Nous n'observerons donc pas d'oscillation pour m>8.

Dans les deux figures suivantes, la variation de m en fonction de $Ln(b(1+R)I_f)$ est représentée pour les mêmes valeurs des paramètres et pour des distances d égales successivement à 9 et 18 cm.

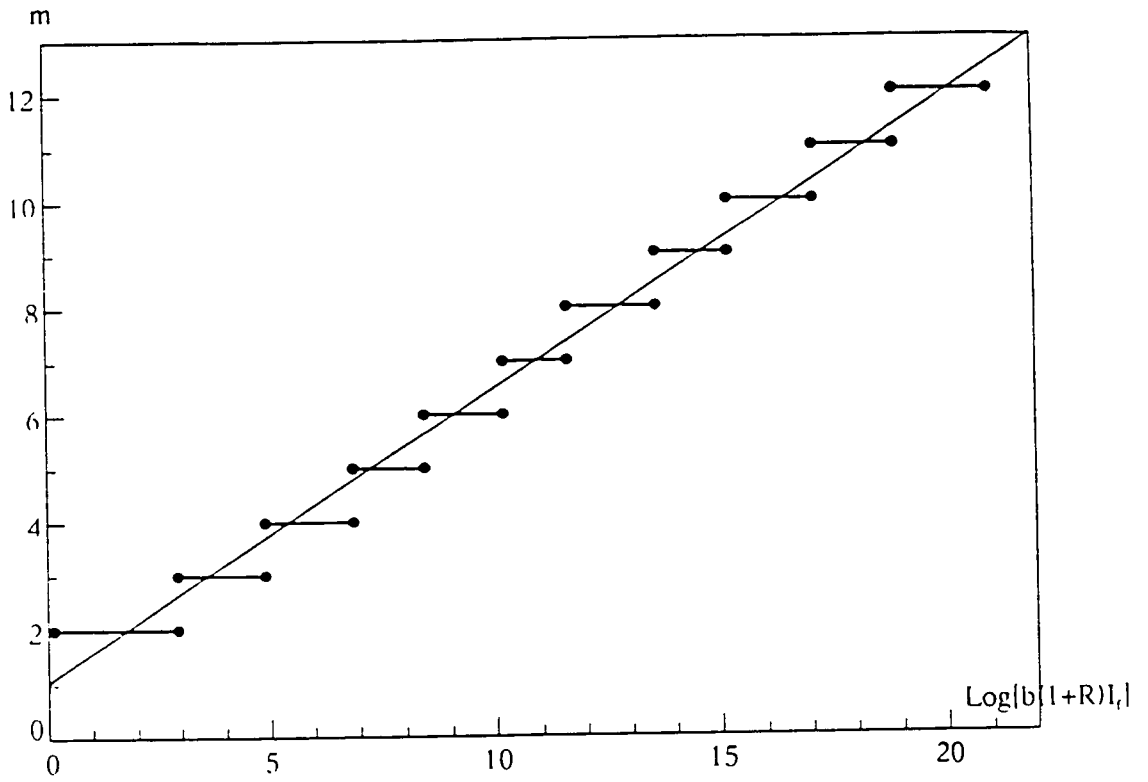


Fig I.4.11.a: variation de m enfonction de Ln(b(1+R)I_f) avec G_0=50, $\eta=\pi$, w=0.67mm, ***d=9cm***

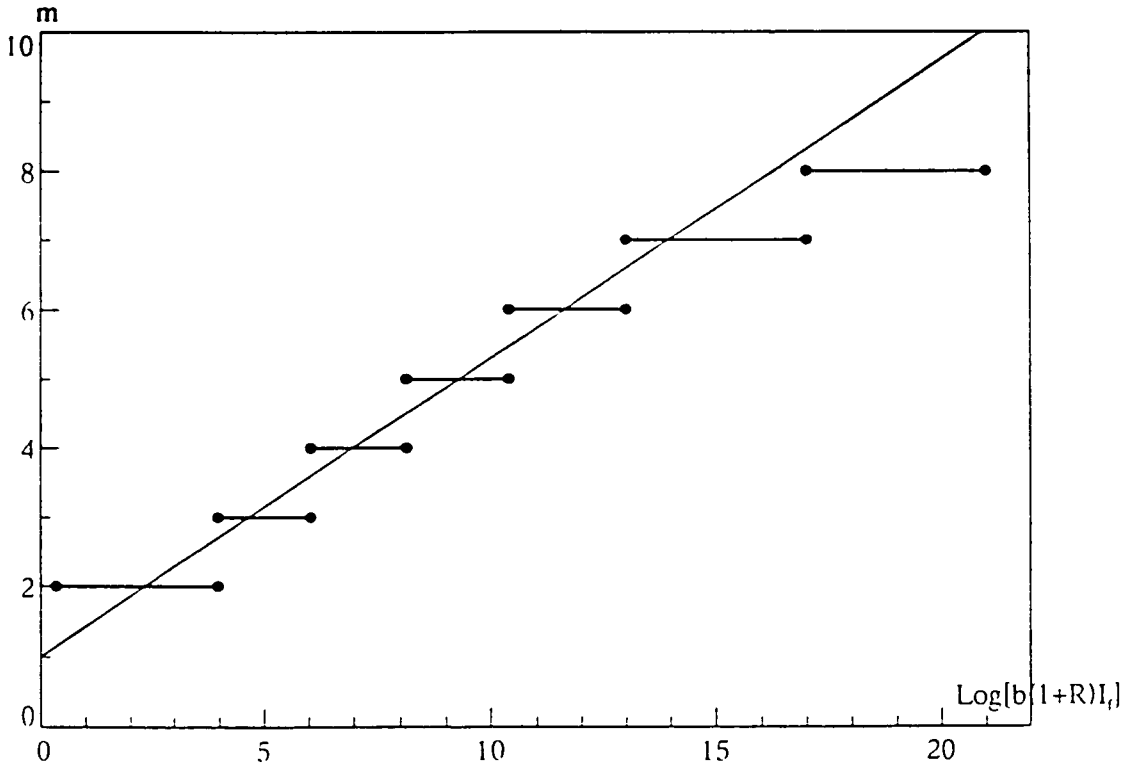


Fig I.4.11.b: variation de m enfonction de Ln(b(1+R)I_f) avec G_0=50, $\eta=\pi$, w=0.67mm, ***d=18cm***

Analyse

-A faible intensité, seuls les modes correspondant à m petit pourront osciller. Lorsque l'intensité augmente, les modes de m supérieurs pourront à leur tour successivement osciller. Alors que pour une distance de 9cm, tous les modes de m=2 à m=12 pourront osciller quand l'intensité sera suffisante, nous n'observerons pas d'oscillation pour des m supérieurs à 8 pour une distance d de 18cm.

-La variation de m, pour m>2, est proportionnelle à $Ln(b(1+R)I_f)$. La droite en trait plein a pour pente le coefficient de proportionnalité et relie entre elles les différentes plages $(Ln(b(1+R)I_f),m)$. Pour une distance d de 18cm, la plage d'oscillation des modes correspondant à des valeurs de m égales à 7 et à 8 se situe en dessous de la droite en trait plein.

Interprétation

-L'augmentation du nombre de pétales 2m avec l'intensité a été précédemment commentée dans notre interprétation des courbes de gain.

-Nous avons précédemment expliqué que la transition d'un mode (0,m-1) à un mode (0,m) s'observait pour une intensité proche de l'intensité de saturation du gain G(0,m-1). L'intensité de saturation du gain d'un mode (0,m) est définie comme l'intensité I_f nécessaire pour que le terme de saturation $b(1+R)I_f e^{-u}$ soit très supérieur à 1 sur l'extension radiale du mode (0,m) considéré. L'intensité de ce mode (0,m) étant maximum en u=m, on s'atttendra donc à une variation du logarithme de l'intensité de saturation proportionnelle à m.

- Pour une distance de 18cm, la transition du mode (0,7) au mode (0,8) s'effectue pour des intensités bien supérieures à l'intensité de saturation du gain G(0,7) (voir la courbe de gain (I.4.10.b). Par conséquent la plage d'intensité sur laquelle s'observe l'oscillation du mode (0,8) se situera en dessous de la droite en trait plein.

Le nombre de taches du mode transverse oscillant dans la cavité augmente donc avec l'intensité, proportionnellement à $Ln(b(1+R)I_f)$.

4.3) Conclusion

4.3.1) Résultats obtenus dans le cas d'un faisceau gaussien

Expérimentalement, nous avons observé la génération d'instabilités dont la distribution transverse comporte un nombre pair de taches réparties sur un cercle. Nous avons baptisé de telles figures dont la répartition transverse d'intensité fait penser à une fleur, des 'marguerites'. Ces modes transverses ressemblent à des modes de Laguerre-Gauss de paramètres (ℓ=0,m) comportant 2m pétales répartis sur un anneau de rayon R_0(m). Nous avons exposé dans cette partie un modèle expliquant l'oscillation de modes de Laguerre-Gauss dans une cavité constituée par un miroir plan et un miroir à contraste de phase situé à une distance d l'un de l'autre. Nous avons défini alors le gain d'un mode (0,m) sur un aller-retour dans la cavité. Pour une intensité de l'onde pompe suffisante sur les ailes de sa distribution gaussienne d'intensité et plus exactement autour de r=R_0(m) correspondant à l'extension radiale du mode (0,m), le gain du mode (0,m) sature. Cette saturation du gain est une condition essentielle pour favoriser l'oscillation d'un mode (0,m).

Dans un deuxième temps, nous avons étudié l'influence des différents paramètres du système et en particulier l'influence de la saturation. Le terme de saturation dépend bien sûr de l'intensité mais également du milieu non-linéaire. L'oscillation des modes de grand m ne sera possible que lorsque le terme de saturation sera suffisamment grand. Plus il sera important, plus le nombre de modes autorisés à osciller sera donc important. L'intensité de la pompe joue donc un rôle déterminant. En augmentant l'intensité de la pompe, on augmente le terme de saturation et on favorise l'oscillation des modes de grand m.

Un autre paramètre déterminant est la distance d. Les modes de petit m oscilleront pour des distances plus grandes que les modes de grand m. Lorsque le gain est saturé, condition plus facilement remplie pour des modes de m petit, de plus faible extension radiale, m varie linéairement autour de 1/d. m varie également linéairement avec le carré du rayon de pincement.

Nous avons donc prédit théoriquement la forme de l'instabilité en fonction de divers paramètres. Il nous reste maintenant à tester expérimentalement la validité de

notre modèle. De plus, nous avions développé dans la troisième partie de ce chapitre, un autre modèle où les ondes étaient décrites comme des ondes planes. Nous pouvons maintenant nous demander si un tel modèle est compatible avec le modèle développé ici et dans quelle mesure l'approximation des ondes planes peut être appliquée.

4.3.2) Comparaisons avec les résultats obtenus dans le cas des ondes planes.

Les distributions transverses des instabilités observées dans le cas étudié ici où un mode pur de Laguerre-Gauss oscille dans la cavité et dans le cas étudié auparavant où les ondes sont approximées par des ondes planes sont différentes. Cependant dans ces deux cas, elles respectent la symétrie cylindrique du système. De plus d'après les relations (I.4.20) et (I.3.21) à une distance D grande devant les dimensions de la cavité, le diamètre de l'instabilité observé est dans les deux cas proportionnel à $D\sqrt{\frac{\pi}{kd}}$. Remarquons également que les équations de seuil (I.3.16) et (I.4.17) présentent de grandes similitudes. Le terme de gain est dans le deux cas le produit d'un terme de gain dû à la réflectivité sur les deux miroirs par un terme en sinus lié au déphasage dû à la propagation dans la cavité. Nous ne pousserons pas beaucoup plus loin cette comparaison. En effet, dans la cas des ondes gaussiennes, nous avons étudié le comportement des insabilités au-delà du seuil alors que nous nous sommes contentés de l'étudier au seuil dans le cas des ondes planes.

Notons également que dans le cas des modes de Laguerre-Gauss considérés ici, le champ étant proportionnel à $\cos(m\theta)$, deux pétales successifs sont en opposition de phase. La superposition de l'instabilité polarisée orthogonalement à l'onde pompe et de l'onde pompe donne un champ polarisé σ_+ dans un pétale et σ_- dans le pétale suivant. Il a été établi [Tam77], [Hol92] que lorsque un champ est presque résonnant avec la transition D_1 , des filaments de lumière polarisés circulairement se propagent avec une absorption minimum. Par conséquent les marguerites constituant des filaments disposés régulièrement se propagent dans le milieu non-linéaire avec une transmission maximum. Les marguerites seront donc favorisées pour des fréquences proches de la résonance atomique, comme nous l'observons expérimentalement. Par ailleurs le paramètre b de saturation donné dans la relation (I.2.28) diminue beaucoup quand l'écart à résonance augmente. Comme nous l'avons montré dans notre étude les marguerites ne peuvent osciller que lorsque la saturation est suffisante. Par conséquent loin des résonances, notre étude portant sur l'oscillation de modes propres de Laguerre-Gauss ne sera plus valide.

Avant la vérification expérimentale des autres résultats théoriques dans la partie suivante, nous aborderons les aspects dynamiques de cette instabilité.

5) Aspects temporels de l'instabilité

Jusqu'ici nous n'avions considéré dans cette étude que des instabilités dites stationnaires dont la fréquence d'évolution était la même que celle des ondes pompes. Cependant plusieurs études expérimentales [Giu88] et théoriques ont mis en évidence l'existence d'instabilités dynamiques évoluant à des fréquences différentes de celles des ondes pompes. Ces instabilités évoluaient typiquement à des fréquences de l'ordre de $c/2\tau_R$ où τ_R correspond au temps d'un aller-retour dans la cavité. Dans ces différents modèles théoriques, la cavité pouvait être une cavité de type Fabry Pérot [Fir81], une cavité en anneau [Ike80] contenant un milieu non-linéaire ou bien une cavité formée par l'association d'un miroir de rétroaction et du milieu non-linéaire[LeB90], [Fir90]. Au delà d'un certain seuil, lorsque l'intensité du laser augmentait, ces instabilités pouvaient devenir chaotiques [Kai93].Y. Silberberg et I. Bar-Joseph [Sil82] ont montré l'importance du temps de réponse τ du milieu non-linéaire et mis en évidencedes instabilités dynamiques dont la fréquence caractéristique est de l'ordre de $1/\tau$ [Sil84].

Expérimentalement, les instabilités observées ne sont pas toujours statiques [Gau88]. Dans notre expérience [Blo93], elles peuvent évoluer à des fréquences de l'ordre de quelques centaines de kHz. De telles fréquences sont bien plus faibles que les fréquences prédites par les modèles théoriques précédents. Celles-ci étant de l'ordre de grandeur des fréquences d'évolution des observables du fondamental, sont probablement dues au pompage optique des niveaux fondamentaux. Nous avons ainsi généralisé le modèle développé dans les parties précédentes en considérant cette fois-ci des instabilités dynamiques. Les ondes ne se propagent plus de manière symétrique par rapport à l'axe optique et les instabilités n'évoluent plus à priori à la fréquence des ondes pompes.

Dans un premier temps, nous donnerons l'expression des ondes dans une telle géométrie. Dans un deuxième temps, nous utiliserons les résultats des parties (I.1) et (I.2) pour déterminer l'orientation $\langle J_z \rangle$ du niveau fondamental. Nous en déduirons la condition de seuil d'oscillation dans la cavité et la fréquence d'évolution des instabilités.

Nous supposerons que l'écart à résonance des ondes pompes est suffisamment important pour que le paramètre de saturation soit trop faible pour permettre l'oscillation des modes purs de Laguerre-Gauss (cf Partie(I.4)). Comme dans la partie (I.3), nous approximerons dans cette partie toutes les ondes de pompe par des ondes planes.

5.1) Description des champs

Nous n'avons considéré jusqu'ici que des instabilités statiques évoluant donc à la même fréquence que les ondes pompes. Nous allons maintenant nous placer dans cette partie dans le cas plus général où les instabilités n'évoluent plus forcément à la fréquence des ondes pompes. Dans la partie (I.3), nous avons établi dans le cas où les champs étaient symétriques par rapport à l'axe optique, l'équation de seuil d'oscillation pour des instabilités statiques et dans l'approximation des ondes planes. Pour établir l'équation de seuil pour des instabilités dynamiques, nous nous placerons dans le cas plus général où les champs ne sont plus symétriques par rapport à l'axe optique de la cavité.

Nous établirons d'abord l'expression des ondes pompes dans la configuration où elles ne sont pas symétriques par rapport à l'axe optique et nous donnerons ensuite l'expression générale des instabilités générées par ces ondes pompes. L'expression du champ total, nous permettra ensuite dans la deuxième partie, de préciser les conditions pour lesquelles les instabilités définies dans la première partie peuvent osciller.

5.1.1) Ondes intenses

Dans la partie (I.3), nous avons considéré une cavité formée par un milieu non-linéaire constituant un miroir à contraste de phase et un miroir plan placé à une distance d du milieu non-linéaire et jouant le rôle de miroir de rétroaction. L'axe optique d'un tel système est la normale au miroir de rétroaction. Nous avons montré comment une onde plane intense se propageant suivant l'axe optique dans le milieu non-linéaire et dans la cavité, pouvait permettre l'oscillation dans cette même cavité d'ondes faibles dont la direction de propagation forme un angle θ avec l'axe optique.

Nous considérerons dans cette partie que l'onde plane intense ne se propage plus suivant l'axe optique mais en faisant un angle α avec cet axe. Nous allons chercher

dans quelles conditions cette onde intense peut permettre l'oscillation d'une onde d'intensité plus faible et dont la direction de propagation forme un angle θ avec l'axe de propagation de l'onde pompe.

Nous définissons le repère (O,x,y,z) où O correspond au centre de la face de sortie de la cellule et (Oz) correspond à l'axe optique. L'onde intense $\bar{E}_f$ est polarisée linéairement suivant la direction (Ox) et se propage dans le plan (yOz) dans le sens des z croissants et en formant un petit angle α avec l'axe (Oz). Elle se réfléchit sur le miroir de rétroaction en une onde $\bar{E}_b$ également polarisée linéairement suivant (Ox), formant un angle $-\alpha$ avec l'axe optique et se propageant aussi dans le plan (yOz).

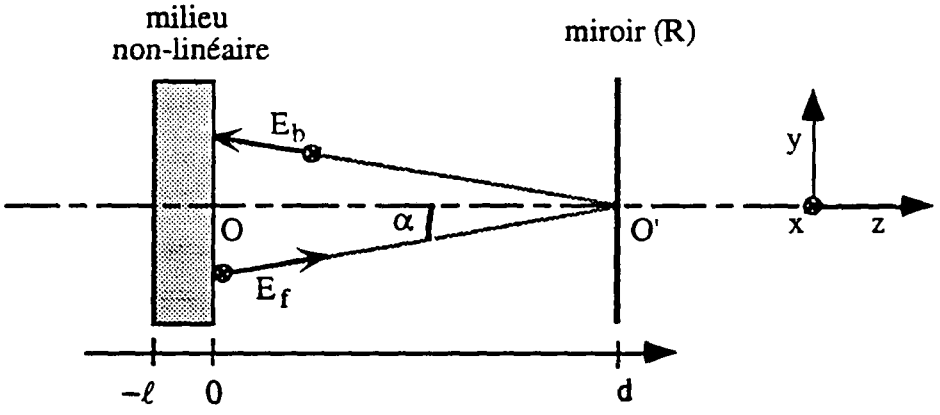


Fig I.5.1: Représentation dans le plan (yOz) des ondes pompes

Les ondes $\bar{E}_f$ et $\bar{E}_b$ peuvent alors s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \bar{E}_f &= \mathrm{Re}\left(\sqrt{I_f}\, e^{ik y \sin\alpha}\, e^{ikz\cos\alpha}\, e^{-i(\omega t+\varphi_f)}\right)\bar{e}_x \\ \bar{E}_b &= \mathrm{Re}\left(\sqrt{R I_f}\, e^{ik y \sin\alpha}\, e^{-ikz\cos\alpha}\, e^{-i(\omega t+\varphi_b)}\right)\bar{e}_x \end{aligned} \qquad (I.5.1)$$

L'angle α sera par la suite suffisamment petit pour que nous puissions nous limiter à l'ordre 2 en α. Nous pouvons alors estimer par un raisonnement semblable à celui que nous avons adopté dans la partie (I.3.1.2) que sur un aller-retour dans la cavité l'onde s'est déphasée de $2kd\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)$. Nous pouvons alors écrire la relation suivante entre les phases φ_b et φ_f des ondes $\bar{E}_b$ et $\bar{E}_f$ en z=0:

$$\varphi_b = \varphi_f - 2kd\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right) \qquad (I.5.2)$$

5.1.2) Ondes peu intenses

a) Vecteur d'onde

Dans la partie (I.3), nous cherchions une instabilité de polarisation orthogonale à celle des ondes pompes, oscillant dans la cavité. Cette instabilité était la somme de deux ondes se propageant respectivement dans des directions formant des angles θ et $-\theta$ avec l'axe de propagation des ondes pompes et leurs phases étaient opposées. Ces ondes se propageaient dans le plan (x0z) où (Ox) est la direction de la polarisations des ondes pompes.

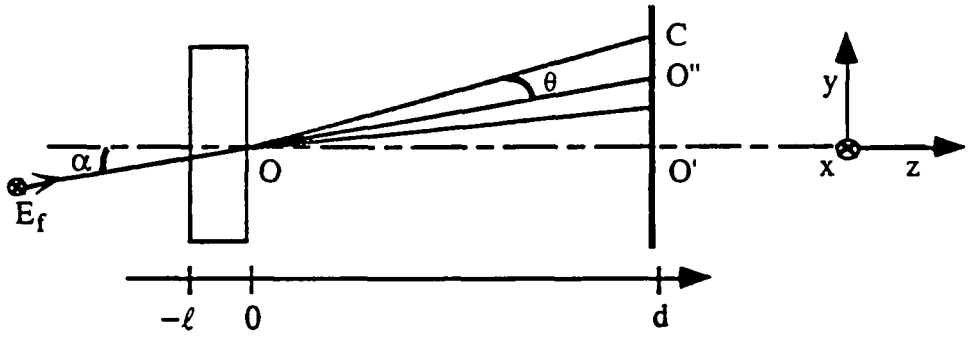


Fig I.5.2: Schéma expérimental: représentation dans le plan (y,O,z)

Dans notre situation, l'onde pompe fait un angle α avec l'axe (Oz)=(O,O') et est polarisée suivant (Ox). Nous cherchons là encore l'expression d'une instabilité composée de deux ondes $\bar{E}_{\theta+}$ et $\bar{E}_{\theta-}$ de polarisation orthogonale à la direction (Ox) et se propageant dans des directions symétriques à l'axe de propagation (O,O") de l'onde pompe. Mais cette fois-ci, nous considérerons le cas plus général où l'instabilité ne se propage pas forcément dans le plan (xOz). Représentons maintenant dans un plan lointain parallèle au plan (x0y) les instabilités $\bar{E}_{\theta+}$ et $\bar{E}_{\theta-}$. Nous appelerons Ω" (respectivement Ω'), le point de ce plan lointain tel que la direction (OΩ") (respectivement (OΩ')) soit confondue avec la direction (OO") (respectivement (OO')).

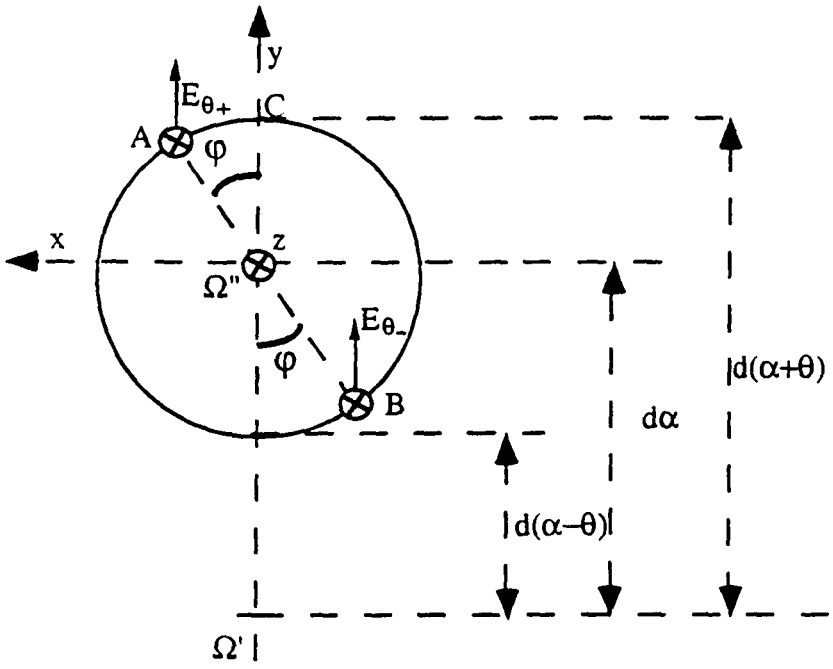


Fig I.5.3: Schéma expérimental: représentation de l'instabilité dans le plan (x, Ω", y)

Les points A et B correspondent respectivement à l'intersection entre le plan (xΩ'y) et la direction de propagation des ondes $\bar{E}_{\theta+}$ et $\bar{E}_{\theta-}$. φ correspond à l'angle (Ω"AΩ'y). Les instabilités $\bar{E}_{\theta+}$ et $\bar{E}_{\theta-}$ se propagent respectivement dans des directions (OA) et (OB) faisant un angle β_+ ou β_- avec l'axe (Oz). Lorsque φ est nul, $\beta_+=\alpha+\theta$ et $\beta_-=\alpha-\theta$. Dans le cas général, on a:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tan}(\beta_+) &= \frac{(O'A)}{d} \\ \mathrm{Tan}(\beta_-) &= \frac{(O'B)}{d} \end{aligned} \qquad (I.5.3)$$

Calculons les distances (O'A) et (O'B).
(OC) forme un angle (α+θ) avec l'axe (Oz). On en déduit alors (O'C) en se limitant au deuxième ordre en α et θ:

$$(O'C)=d\ \tan(\alpha+\theta)\sim d\ (\alpha+\theta) \qquad (I.5.4)$$

De même, (O,O") formant un angle α avec l'axe (Oz), on en déduit au deuxième ordre en α et θ les distance (O'O") et (O"C).

$$(O'O")\sim d\ \alpha \qquad (I.5.5)$$

$$(O"C)\sim d\ \theta \qquad (I.5.6)$$

Par conséquent, (O'A) et (O'B) vérifient les relations suivantes:

$$(O'A)^2 = ((O'O'') + (O''C)\cos\varphi)^2 + ((O''C)\sin\varphi)^2$$
$$(O'B)^2 = ((O'O'') - (O''C)\cos\varphi)^2 + ((O''C)\sin\varphi)^2 \qquad (I.5.7)$$

Nous supposerons par la suite que les angles α et θ sont suffisamment petits pour que nous puissions limiter tous nos calculs à l'ordre 2 en α et θ. Nous pouvons dès lors déduire de la relation (I.5.7) au deuxième ordre en α et θ les angles β_+ et β_-:

$$\beta_+ = \left(\alpha^2 + \theta^2 + 2\alpha\theta\cos\varphi\right)^{1/2}$$
$$\beta_- = \left(\alpha^2 + \theta^2 - 2\alpha\theta\cos\varphi\right)^{1/2} \qquad (I.5.8)$$

Nous appelerons $\vec{k}_{\theta+}$ et $\vec{k}_{\theta-}$ les vecteurs de propagation respectifs des ondes $\vec{E}_{\theta+}$ et $\vec{E}_{\theta-}$. Ces vecteurs ont la même direction que les axes (OA) et (OB). Les projections de ces vecteurs sur les axes (Ox), (Oy) et (Oz) vérifient alors d'après les relations (I.5.5-6-8) les relations suivantes:

$$\vec{k}_{\theta\pm} \cdot \vec{e}_x = \pm k\theta\sin\varphi$$
$$\vec{k}_{\theta\pm} \cdot \vec{e}_y = k\alpha \pm k\theta\cos\varphi \qquad (I.5.9)$$
$$\vec{k}_{\theta\pm} \cdot \vec{e}_z = k\left(1 - \frac{\alpha^2 + \theta^2 \pm 2\alpha\theta\cos\varphi}{2}\right)$$

b) Réflexion sur le miroir plan

Les ondes $\vec{E}_{\theta+}$ et $\vec{E}_{\theta-}$ se réfléchissent sur le miroir plan parallèle au plan (xOy) pour donner les ondes $\vec{E}'_{\theta+}$ et $\vec{E}'_{\theta-}$ dont les vecteurs de propagation $\vec{k}'_{\theta+}$ et $\vec{k}'_{\theta-}$ vérifient les relations suivantes:

$$\vec{k}'_{\theta\pm} \cdot \vec{e}_x = \pm k\theta\sin\varphi$$
$$\vec{k}'_{\theta\pm} \cdot \vec{e}_y = k\alpha \pm k\theta\cos\varphi \qquad (I.5.10)$$
$$\vec{k}'_{\theta\pm} \cdot \vec{e}_z = -k\left(1 - \frac{\alpha^2 + \theta^2 \pm 2\alpha\theta\cos\varphi}{2}\right)$$

Seule la projection sur (Oz) du vecteur de propagation est modifiée. Sur un aller-retour dans la cavité de longueur d, les ondes $\vec{E}'_{\theta\pm}$ se seront donc déphasées de $2kd\left(1 - \frac{\alpha^2 + \theta^2 \pm 2\alpha\theta\cos\varphi}{2}\right)$. Si $\varphi_{\theta+}$, $\varphi_{\theta-}$, $\varphi'_{\theta+}$ et $\varphi'_{\theta-}$ sont les phases respectives des ondes $\vec{E}_{\theta+}$, $\vec{E}_{\theta-}$, $\vec{E}'_{\theta+}$ et $\vec{E}'_{\theta-}$ en z=0, nous pouvons alors écrire la relation suivante:

$$\varphi'_{\theta\pm} = \varphi_{\theta\pm} - 2kd\left(1 - \frac{\alpha^2 + \theta^2 \pm 2\alpha\theta\cos\varphi}{2}\right) \qquad (I.5.11)$$

Nous avons donc réussi à établir dans cette partie le vecteur de propagation et la phase de ces ondes. Il ne nous reste plus pour établir l'expression complète des ondes $\bar{E}_{\theta+}$, $\bar{E}_{\theta-}$, $\bar{E}'_{\theta+}$ et $\bar{E}'_{\theta-}$ qu'à nous intéresser à leur fréquence d'évolution.

c) Aspect dynamique

Dans cette partie, nous nous intéressons à la fréquence d'évolution des instabilités que nous ne supposerons pas à priori égale à la fréquence ω d'évolution des ondes pompes. Considérons d'abord par exemple qu'une onde $\bar{E}'_{\theta+}$ évolue à la fréquence $\omega+\delta$ et qu'elle se propage dans le sens des z négatifs dans une direction formant un angle θ avec l'axe des pompes. Nous la représentons en traits pointillés sur la figure suivante. Elle se réfléchit sur le miroir à contraste de phase en deux ondes $\bar{E}_{\theta+}$ et $\bar{E}_{\theta-}$ représentées en traits pleins. La relation (I.2.29) donne l'expression de ces deux ondes en fonction du champ incident. Le champ réfléchi par le milieu non-linéaire est somme d'un terme dû à la conjugaison de phase et d'un terme dû à la répartition distribuée.

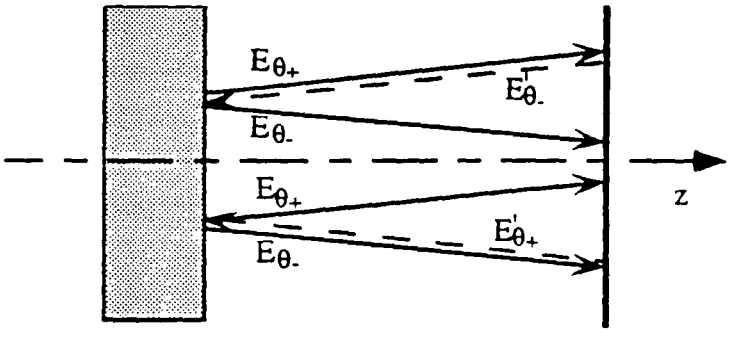


Fig I.5.4.a: Chaque onde $E'_{\theta+}$ et $E'_{\theta-}$ se réfléchit sur le miroir à contraste de phase en $E_{\theta+}$ et $E_{\theta-}$

Nous avons omis de représenter dans ces dessins les ondes pompes et l'angle α.

$\bar{E}_{\theta+}$ se propage dans la direction symétrique à la direction de l'instabilité incidente $\bar{E}'_{\theta+}$ et dans le sens opposé. $\bar{E}_{\theta+}$ correspond au terme de répartition distribuée (annexe 2) proportionnel au champ incident $\bar{E}'_{\theta+}$ et évoluera donc à la même fréquence $\omega+\delta$ que $\bar{E}'_{\theta+}$.

$\bar{E}_{\theta-}$ se propage par contre dans la même direction que l'onde $\bar{E}'_{\theta+}$ mais dans le sens opposé. $\bar{E}_{\theta-}$ est proportionnel à la conjuguée de phase de l'onde $\bar{E}'_{\theta+}$. Par conséquent,

l'onde $\bar{E}_{\theta-}$ évoluera à la fréquence $\omega-\delta$. La réflexion sur le milieu non-linéaire correspond là à de la conjugaison de phase.
A son tour, l'onde $\bar{E}_{\theta-}$ se réfléchira alors sur le miroir plan en l'onde $\bar{E}'_{\theta-}$ qui évoluera donc aussi à la fréquence $\omega-\delta$ et l'onde $\bar{E}'_{\theta+}$ en l'onde $\bar{E}_{\theta+}$ évoluant bien à la fréquence $\omega+\delta$.

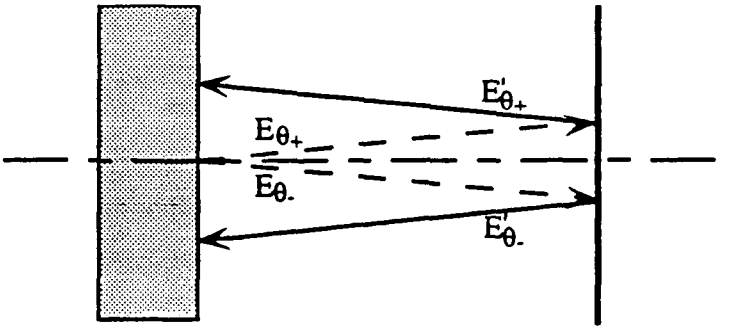


Fig I.5.4.b: les ondes $E_{\theta+}$ et $E_{\theta-}$ se réfléchissent sur le miroir plan respectivement en $E'_{\theta+}$ et $E'_{\theta-}$

En régime stationnaire, les ondes $\bar{E}_{\theta+}$ et $\bar{E}'_{\theta+}$ évolueront à la fréquence $\omega+\delta$ et les ondes $\bar{E}_{\theta-}$ et $\bar{E}'_{\theta-}$ évolueront à la fréquence $\omega-\delta$.

d) Approximation sur l'intensité et la polarisation des champs entrants.

Remarquons également que les coefficients de réflectivité, r_c pour la conjugaison de phase et r_d pour la répartition distribuée, du miroir à contraste de phase ne dépendant d'après les relations (I.2.30.a-b) que des ondes pompes et du milieu non-linéaire; ces coefficients seront donc identiques pour les ondes $\bar{E}'_{\theta+}$ et $\bar{E}'_{\theta-}$. L'onde $\bar{E}'_{\theta+}$ se réfléchissant en l'onde $\bar{E}_{\theta+}$ avec un coefficient r_d et en $\bar{E}_{\theta-}$ avec un coefficient r_c, et inversement l'onde $\bar{E}'_{\theta-}$ se réfléchissant en l'onde $\bar{E}_{\theta-}$ avec un coefficient r_d et en $\bar{E}_{\theta+}$ avec un coefficient r_c, nous pouvons considérer que notre système est parfaitement symétrique. Par conséquent, nous considérerons que les ondes $\bar{E}_{\theta+}$ et $\bar{E}_{\theta-}$ ont la même intensité.

La non-linéarité de notre vapeur atomique étant due à la saturation du pompage optique, les ondes $\bar{E}_{\theta+}$ et $\bar{E}_{\theta-}$ sont de polarisation orthogonale à celle des ondes pompes et orthogonale à leur direction de propagation. Les ondes faibles $\bar{E}_{\theta+}$ et $\bar{E}_{\theta-}$. peuvent donc chacunes se décomposer en une onde polarisée suivant (Oy) et une onde polarisée suivant (Oz). Or les effets non-linéaires que nous considérerons par la suite sont des effets du premier ordre en champ faible. Les angles α et θ étant de l'ordre de

10^{-2} radians, la composante de la polarisation de ces instabilités suivant (Oz) a une intensité négligeable devant l'intensité de la composante suivant (Oy). Nous la négligerons donc et nous considérerons qu'elles sont polarisées suivant $\bar{e}_y$.

5.1.3) Champ faible dans la cavité

a) Expression des champs faibles sortants

Les relations (I.5.9) donnant l'expression des vecteurs d'onde et les remarques précédentes nous permettent alors d'établir l'expression des instabilités $\bar{E}_{\theta+}$ et $\bar{E}_{\theta-}$. nous pourrons alors en déduire l'expression du champ $\bar{E}=\bar{E}_{\theta+}+\bar{E}_{\theta-}$:

$$\bar{E} = \mathrm{Re}\left[\sqrt{I_f}\, e^{iky\alpha}\, e^{ikz\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)} f(\bar{r},t) e^{-i(\omega t+\varphi_y)}\bar{e}_y\right] \tag{I.5.12}$$

avec

$$\boxed{f(\bar{r},t) = \sqrt{\frac{I}{I_f}}\, e^{-ikz\left(\frac{\theta^2}{2}\right)} \cos\left(-kz\alpha\theta\cos\varphi + k\theta\bar{r}.\bar{u}_\varphi - \delta t + \varphi'_y\right)} \tag{I.5.13}$$

Nous avons posé ici:

$$\varphi_y = \frac{\varphi_{\theta+}+\varphi_{\theta-}}{2} \quad \text{et} \quad \varphi'_y = \frac{\varphi_{\theta-}-\varphi_{\theta+}}{2} \tag{I.5.14}$$

Nous avons défini les vecteurs $\bar{u}_\varphi$ et $\bar{r}$ par:

$$\bar{r} = x\bar{e}_x + y\bar{e}_y \tag{I.5.15}$$

$$\bar{u}_\varphi = \sin\varphi\, \bar{e}_x + \cos\varphi\, \bar{e}_y \tag{I.5.16}$$

La projection de ces instabilités sur un écran lointain parallèle au plan (xOy) et à une distance D du milieu non-linéaire correspond à deux points distants de $2D\theta$, diamétralement opposés et tels que la droite reliant ces deux points est orientée dans la direction $\bar{u}_\varphi$.

b) Expression des champs faibles entrants

Les expressions des champs $\bar{E}'_{\theta+}$ et $\bar{E}'_{\theta-}$ obtenus par réflexion sur le miroir plan, se déduisent directement de l'expression des champs $\bar{E}_{\theta+}$ et $\bar{E}_{\theta-}$, en tenant compte des termes de déphasage dus à la propagation dans la cavité et donné dans la relation (I.5.11). Nous pouvons en déduire l'expresion de $\bar{E}' = \bar{E}'_{\theta+} + \bar{E}'_{\theta-}$:

$$\bar{E}' = \mathrm{Re}\left[\sqrt{R I_f}\, e^{iky\alpha} e^{-ik(z-2d)\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)} g(\bar{r},t) e^{-i(\omega t+\varphi_y)}\right]\bar{e}_y \qquad \text{(I.5.17)}$$

avec

$$\boxed{g(\bar{r},t) = \sqrt{\frac{I}{I_f}}\, e^{ik(z-2d)\left(\frac{\theta^2}{2}\right)} \cos\left(k(z-2d)\alpha\theta\cos\varphi + k\theta\bar{r}.\bar{u}_\varphi - \delta t + \varphi'_y\right)} \qquad \text{(I.5.18)}$$

Nous avons trouvé l'expression des champs $\bar{E}_f$ et $\bar{E}_b$se propageant dans le sens des z positifs en nous appuyant sur des arguments géométriques et sur quelques propriétés du miroir à contraste de phase. Nous en avons déduit l'expression des ondes $\bar{E}_b$ et $\bar{E}'$ se propageant dans le sens des z négatifs en s'appuyant sur leur réflexion sur le miroir plan. nous allons maintenant traduire la réflexion de ces ondes $\bar{E}'$ sur le miroir à contraste de phase et nous allons ainsi établir les conditions d'oscillation dans la cavité de l'instabilité décrite dans cette partie.

5.2) Oscillation dans la cavité

Dans cette partie nous considérerons le système entier constitué par le miroir plan et le miroir à contraste de phase et nous chercherons à établir la condition d'oscillation dans la cavité. Nous reprendrons une approche assez similaire à celle utilisée dans la partie (I.3). La condition de seuil nous permettra de connaître la fréquence d'oscillation de l'instabilité en fonction des paramètres du système.

5.2.1) Méthode

Dans les parties (I.1) et (I.2), nous avions établi que l'onde $\bar{E}'$ pouvait interagir dans le milieu avec l'onde $\bar{E}_b$ et créer une orientation $\langle J_z \rangle$ dans les niveaux fondamentaux. L'onde $\bar{E}_f$ sous l'effet de cette orientation voyait sa polarisation tourner par effet Faraday au cours de sa propagation dans le milieu non-linéaire et l'onde $\bar{E}$ était ainsi générée. Au premier ordre en champ faible, le champ $\bar{E}$ généré peut s'exprimer dans le plan z=0 de la façon suivante:

$$\bar{E} = k\chi_0 \frac{\langle J_z \rangle}{\hbar} \ell E_f \bar{e}_y \tag{I.5.19}$$

où à l'entrée de la cellule, en z= $-\ell$,

$$\bar{E}_f = E_f \bar{e}_x \tag{I.5.20}$$

L'orientation $\langle J_z \rangle$ vérifiait d'après la relation (I.1.12) l'équation suivante:

$$\frac{d\langle J_z \rangle}{dt} = -(2\gamma + \gamma_p)\langle J_z \rangle + \left(\frac{\gamma_p^+ - \gamma_p^-}{3}\right)\frac{\hbar}{2} \tag{I.5.21}$$

avec des taux de pompage optiques $\gamma_p^{\pm}$ obtenus à partir de la relation (I.2.4) en remarquant que I_y, l'intensité de l'onde faible se propageant dans le sens des z positifs, est nulle à l'entrée de la cellule:

$$\gamma_p^{\pm} = \frac{\Gamma}{24} \frac{d^2\left(I_f + I_b + I_y' \pm 2\sqrt{I_b I_y'}\sin(\varphi')\right)}{\hbar^2\left(\frac{\Gamma^2}{4} + \Delta^2\right)} \tag{I.5.22}$$

I_f et I_b correspondent aux intensités des ondes intenses, I_y' à l'intensité de l'onde faible se propageant dans le sens des z négatifs, φ' correspond au déphasage entre les deux ondes se propageant dans le sens des z négatifs.
γ défini dans la première partie correspond aux relaxations liées aux autres phénomènes que le pompage optique.

L'orientation $\langle J_z \rangle$ est due à l'interaction des ondes $\bar{E}_b$ et $\bar{E}'$ dans le milieu non-linéaire. Or lorsqu'il y a oscillation des ondes faibles dans la cavité, l'onde $\bar{E}'$ est obtenue par réflexion de l'onde $\bar{E}$ sur le miroir plan. Par conséquent le champ $\bar{E}$ obtenu par effet Faraday lors de la propagation de l'onde $\bar{E}_f$ dans le milieu, se déduit de l'expression de $\langle J_z \rangle$ et donc de l'expression de $\bar{E}$ à l'aller-retour précédent. Au seuil d'oscillation dans la cavité, l'expression de $\bar{E}$ ne change pas d'un aller-retour à l'autre.

Nous avons ainsi pu établir dans les parties précédentes l'équation de seuil d'oscillation.

Nous avions. dans les parties (I.3) et (I.4), présupposé l'expression du champ $\bar{E}$ au $n^{ième}$ aller-retour. Nous en avions déduit l'expression du champ $\bar{E}'$ et du champ total (pompe et instabilité) et les taux de pompage optique $\gamma_p^{\pm}$. Nous avions pu connaître ainsi l'expression de $\langle J_z \rangle$ en fonction de l'expression de $\bar{E}'$ et donc de $\bar{E}$ au $n^{ième}$ aller-retour. Nous avions enfin écrit que le champ $\bar{E}$ obtenu au $(n+1)^{ième}$ aller-retour par effet Faraday et défini en z=0 par la relation (I.5.19) avait la même expression que celle que nous avions présupposé pour l'aller-retour précédent. Nous avions ainsi établi l'équation de seuil.

Nous allons dans cette partie chercher sous quelles conditions l'onde polarisée suivant la direction (Oy) et définie dans la partie (I.5.1.2) peut osciller dans la cavité. Nous allons donc en présupposant l'expression de cette onde reprendre une démarche similaire à celle utilisée dans les parties précédentes. L'expression de l'onde $\bar{E}$ au $n^{ième}$ aller-retour donnée dans la partie précédente nous a permis de connaître l'expression de l'onde $\bar{E}'$ après la réflexion sur le miroir plan et au $n^{ième}$ aller-retour. . Nous allons d'abord en déduire les taux de pompage optique $\gamma_p^{\pm}$. Nous en en déduirons l'expression de $<J_z>$, et à partir de cette expresssion de $<J_z>$, nous donnerons l'expression explicite du champ $\bar{E}$ obtenu au $(n+1)^{ième}$ aller-retour. Au seuil d'oscillation cette expression au champ $\bar{E}$ au $(n+1)^{ième}$ aller-retour devra être similaire à l'expression du champ $\bar{E}$ au $n^{ième}$ aller-retour établie en début de cette partie. Certaines conditions devront donc être respectées. Ces conditions nous permettront de connaître la fréquence d'évolution de l'instabilité et la condition de seuil.

5.2.2) Taux de pompage optique

Pour connaître l'expression de $<J_z>$, il est nécessaire de calculer les taux de pompage optique après le $n^{ième}$ aller-retour.

Toute cette étude étant réalisée loin des résonances, l'absorption dans la vapeur atomique est négligeable. L'intensité totale des ondes se propageant dans le sens des z positifs ne varie donc pas au cours de leur propagation dans le milieu non-linéaire et reste égale à I_f. Les ondes se propageant dans le sens des z positifs se réfléchissent sur le miroir plan de réflectivité R. L'intensité totale des ondes se propageant dans le sens des z négatifs sera égale à RI_f. Par conséquent l'intensité totale dans la cavité sera égale à $(1+R)I_f$. Nous pouvons donc écrire la relation suivante:

$$I_f+I_b+I'=(1+R)I_f \tag{I.5.23}$$

A partir des relations (I.5.22-23), nous pouvons définir les taux de pompage optique et en particulier $\gamma_p = \frac{\gamma_p^+ + \gamma_p^-}{3}$:

Au premier ordre en champ faible, d'après la relation (I.1.6) donnant l'expression des taux de pompages, γ_p vérifie la relation suivante:

$$\boxed{\gamma_p = \frac{\Gamma}{36}\frac{d^2(1+R)I_f}{\hbar^2\left(\frac{\Gamma^2}{4}+\Delta^2\right)}} \tag{I.5.24}$$

Il est également possible de définir $\gamma_p^+ - \gamma_p^-$. En effet, le déphasage φ' entre les deux ondes se propageant dans le sens des z négatifs et donné dans les relations (I.5.22) et (I.2.2) vérifie en utilisant la relation (I.5.2), la relation suivante:

$$\varphi' = \left(\varphi_b - \left(\varphi_y - 2kd\left(1-\frac{\alpha^2+\theta^2}{2}\right)\right)\right) = \left(\varphi_f - \varphi_y - kd\theta^2\right) \tag{I.5.25}$$

En remplaçant dans la relation (I.5.22), l'expression $\sqrt{I_y}$ de l'intensité de l'onde polarisée suivant (Oy) par l'intensité de l'instabilité donnée dans les formules (I.5.17-18):

$$\sqrt{I_y} = \sqrt{RI}\cos\left(k\theta\vec{r}.\vec{u}_\varphi - \delta t - 2\alpha kd\theta\cos\varphi + \varphi_y'\right) \tag{I.5.26}$$

Nous pouvons alors en déduire l'expression de $\gamma_p^+ - \gamma_p^-$:

$$\boxed{\gamma_p^+ - \gamma_p^- = 6\gamma_p \frac{R}{1+R}\sqrt{\frac{I}{I_f}}\cos\left(k\theta\vec{r}.\vec{u}_\varphi - \delta t - 2\alpha kd\theta\cos\varphi + \varphi_y'\right)\sin\left(\varphi_f - \varphi_y - kd\theta^2\right)}$$

(I.5.27)

Nous poserons :

$$\cos\left(k\theta\vec{r}.\vec{u}_\varphi - \delta t - 2\alpha kd\theta\cos\varphi + \varphi_y'\right) = \cos(\psi - \delta t) \tag{I.5.28}$$

L'évolution de $\langle J_z \rangle$ d'après la relation (I.5.21) dépend des taux de pompage optique. Il nous sera donc possible de connaître l'expression explicite de $\langle J_z \rangle$ en fonction des champs oscillant dans la cavité.

5.2.3) Expression de $<J_z>$

A partir de l'expression de $<J_z>$ en z=0, nous pourrons évaluer le champ $\bar{E}$ en z=0 $(n+1)^{ième}$ aller-retour et ainsi déterminer la condition de seuil. Commençons donc par exprimer $<J_z>$ à partir de la relation (I.5.21).

A la limite des temps longs donc pour des temps t vérifiant

$$t >> \frac{1}{2\gamma + \gamma_p} \tag{I.5.29}$$

$\gamma_p^+ - \gamma_p^-$ évoluant en $\cos(\psi - \delta t)$, $\langle J_z \rangle$ évolue en $A\cos(\psi\text{-}\delta t)+B\sin(\psi\text{-}\delta t)$ où A et B sont des constantes. En remplaçant cette expression de $\langle J_z \rangle$ dans la relation (I.5.25), les coefficients A et B peuvent alors être déterminés. $\langle J_z \rangle$ obéit donc à la relation suivante:

$$\frac{\langle J_z \rangle}{\hbar} = \frac{R\sqrt{I/I_f}}{1+R} \frac{\gamma_p}{\sqrt{(2\gamma+\gamma_p)^2 + \delta^2}} \cos\left(k\theta\,\bar{r}.\bar{u}_\varphi - \delta t - 2\alpha k d\theta \cos\varphi + \xi + \varphi_y'\right) .\sin\left(\varphi_f - \varphi_y - k d\theta^2\right) \tag{I.5.30}$$

où

$$\tan\xi = \frac{\delta}{2\gamma + \gamma_p} \tag{I.5.31}$$

5.2.4) Equation de seuil

L'équation de seuil est obtenue en remplaçant dans la relation (I.5.19), $<J_z>$ par son expression donnée dans la relation (I.5.30) et le champ faible E par son expression présupposée dans les relations (I.5.12-13). En remplaçant dans un premier temps l'onde intense E_f par son expression donnée dans la relation (I.5.1) et E par son expression donnée dans (I.5.12-13), nous exprimons que l'onde E en z=0 et au $(n+1)^{ième}$ aller-retour est identique à l'onde E en z=0 et au $n^{ième}$ aller-retour. Nous obtenons la relation suivante:

$$\sqrt{I}\cos\left(k\theta\,\bar{r}.\bar{u}_\varphi - \delta t + \varphi_y\right)e^{-i\varphi} = k\chi_0\,\ell\frac{\langle J_z \rangle}{\hbar}\sqrt{I_f}\;e^{-i\varphi_f} \tag{I.5.32}$$

χ_0 représente la susceptibilité linéaire du milieu définie dans l'annexe 1 et vérifie la relation suivante:

$$\chi_0 = \frac{N d^2 e^{i\eta}}{6\varepsilon_0 \hbar \left(\Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}\right)^{1/2}} = \chi e^{i\eta} \tag{I.5.33}$$

En remplaçant maintenant $\langle J_z \rangle$ par son expression (I.5.30) dans la relation (I.5.32), nous obtenons alors les équations de seuil suivantes:

$$\varphi_y = \varphi_f - \eta \tag{I.5.34.a}$$

$$\boxed{\tan(2\alpha k d \theta \cos\varphi) = \tan\xi = \frac{\delta}{2\gamma + \gamma_p}} \tag{I.5.34.b}$$

$$\boxed{\frac{R}{1+R} k \chi \ell \frac{\gamma_p}{2\gamma + \gamma_p} \sin\left(\eta - k d \theta^2\right) \left|\cos(2\alpha k d \theta \cos\varphi)\right| = 1} \tag{I.5.34.c}$$

5.2.5) Discussion

a) Fréquence d'évolution

La relation (I.5.34.b) donne la fréquence d'évolution $\omega \pm \delta$ de l'instabilité en fonction des angles α, θ et φ. Cette fréquence δ augmente avec α. Elle est maximum lorsque φ est nul donc quand les instabilités évoluent dans le même plan que les ondes pompes. La fréquence δ sera nulle lorsque l'angle φ vaudra $\pi / 2$ ou lorsque l'angle α sera nul. Lorsque α=0, ce qui correspond au cas étudié dans la partie (I.3), les relations (I.5.34.b-c) montrent que la valeur de l'angle φ est n'a pas d'influence sur l'équation de seuil. Notre choix de donner à φ la valeur $\pi / 2$ dans la partie (I.3), était donc sans conséquences sur l'équation de seuil. De plus dans la partie (I.3), l'angle α était nul et nous avions supposé que les instabilités étaient statiques. L'équation (I.5.34.b) nous permet de vérifier à postériori que cette hypothèse était valide.

Dans le cas où la projection de l'instabilité sur un écran lointain ne représente pas deux points diamétralement opposés mais un anneau, nous pouvons décomposer cet anneau en paires de deux points diamétralement opposés. Chaque paire évoluera par contre à une fréquence $\omega \pm \delta$ différente avec δ variant entre $\left(2\gamma + \gamma_p\right)\tan(2\alpha k d \theta)$ et 0. Le spectre de fréquence de l'intensité d'un anneau sera donc très étendu et d'autant plus étendu que γ_p et donc que l'intensité pompe seront importants.

Notons également que la fréquence δ augmente avec γ_p et donc l'intensité de la pompe.

b) Angle d'oscillation au seuil

La relation (I.5.33.c) correspond à l'équation de seuil et donne l'angle d'oscillation θ en fonction de l'angle η. L'angle θ au seuil vérifie comme dans la partie (I.3) l'équation

$$\sin\left(\eta - k d \theta^2\right) = 1. \qquad \text{(I.5.35)}$$

L'angle θ est différent de part et d'autre de la résonance atomique. Pour des fréquences bien supérieures à la résonance($\Delta >> \Gamma$), $\eta = \pi$ et $k\,\theta^2\,d = \pi/2$ alors que pour des fréquences très inférieures à la résonance $\eta = 0$ et $k\,\theta^2\,d = 3\pi/2$.

c) Intensité au seuil

Lorsque l'angle φ vaut $\pi / 2$ nous retrouvons la condition de seuil donnée dans la relation (I.3.19). L'intensité seuil minimum sera donc obtenue pour $\varphi = \pi / 2$ et donc pour des instabilités statiques.

Remarquons ausi que si α est très petit, la valeur absolue du cosinus de l'équation (I.5.34.c) sera quasiment égale à 1. L'intensité au seuil ne dépendra alors quasiment pas du $\cos(\varphi)$ alors que la fréquence d'évolution δ en dépendra. Des fluctuations dans les conditions aux limites pourraient alors permettre l'oscillation de paires d'ondes dans des directions autres que $\varphi = \pi / 2$ mais dont la fréquence varie en fonction de la valeur de φ. Si nous ne considérons plus, par exemple, une onde tout à fait plane mais une onde dont le front d'onde est légèrement modulé (de longueur caractéristique très supérieure à λ/θ afin de de pas brouiller le réseau d'atomes orientés créé dans le milieu par les ondes $\bar{E}_b$ et $\bar{E}'$), nous pourrions observer l'oscillation d'instabilités pour des angles φ différents de $\pi / 2$. Les instabilités observées auraient alors une large gamme de fréquence.

5.2.6) Conclusion

Nous avons ici donc établi que l'angle d'oscillation au seuil dépendait de l'écart à la résonance et que la fréquence d'évolution δ augmentait avec l'intensité de la pompe et avec l'angle α entre la pompe et l'axe optique et variait avec l'orientation φ de l'instabilité. Nous avons donc dans cette partie présenté un modèle rendant compte du comportement dynamique des instabilités.

Dans notre étude, les deux ondes se propageant dans le sens des z négatifs interfèrent en une onde se propageant en z=0 dans la direction $\bar{u}_\varphi = \sin\varphi\,\bar{e}_x + \cos\varphi\,\bar{e}_y$ avec la vitesse de phase $v = \frac{\delta}{k\theta}$. Elle induit dans le milieu un réseau d'atomes orientés. Si au bout d'un aller-retour dans la cavité, le réseau induit par ces deux ondes a eu le temps de se déplacer, le milieu ayant un temps de réponse $\tau=(2\gamma+\gamma_p)^{-1}$, les fréquences très supérieures à τ^{-1} ne seront pas vues par le milieu. Elles ne pourront donc pas être amplifiées par le milieu non-linéaire et osciller dans la cavité. il est alors difficile d'observer dans notre système des oscillations de l'ordre de c/4d prédites dans d'autres études atomiques. Cependant toute cette analyse a été réalisée dans le cas d'une vapeur atomique et aurait pu être réalisée pour tout autre matériau non-linéaire possédant une susceptibilité non-linéaire χ_3 et un temps de réponse τ. Si le temps de réponse est beauoup plus petit (non-linéarités électroniques, ou résonances hyperfines de l'ordre de c/4d) des oscillations de ce type pourraient alors être observées.

Des expériences ultérieures présentées dans la partie (II) nous permettront de tester la validité de notre modèle.

6) Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'exposer un modèle où des non-linéarités dues au pompage optique permettaient la génération par mélange à quatre ondes d'instabilités de polarisation linéaire et orthogonale par rapport à celle des ondes pompes. L'oscillation de ces instabilités dans une cavité formée par un miroir plan et un miroir à contraste de phase, nous a permis d'étudier le comportement de ces instabilités près du seuil d'oscillation dans la cavité. En particulier, cette étude a été réalisée d'abord dans l'approximation des ondes planes puis en considérant des ondes d'intensité gaussienne. Malgré des différences importantes dans leur structure transverse, ces instabilités dans ces deux cas de figure présentent un certains nombre de points communs dans leur évolution. Nous avons enfin en considérant une situation où la symétrie cylindrique du sytème était brisée mis en évidence des fréquences d'oscillation de l'ordre de grandeur de la durée de vie du niveau fondamental. Dans la partie suivante nous allons tester expérimentalement la validité de ce modèle.

Chapitre II

Instabilités générées en présence d'un miroir de rétroaction

Etude Expérimentale

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons développé une théorie basée sur le pompage optique et nous permettant d'expliquer la génération d'instabilités dans une vapeur atomique. Dans le cas où une cavité était réalisée entre le milieu non-linéaire et un miroir de rétroaction, nous avions prédit l'évolution de ces instabilités en fonction de divers paramètres du système.

Des expériences fondées elles aussi sur l'association d'un milieu non-linéaire et d'un miroir de rétroaction ont été réalisées dans d'autres laboratoires. Certaines utilisent des cristaux liquides comme milieu non-linéaire. Ces expériences ont mis en évidence des instabilités dont la structure transverse présente de nombreux points communs avec les structures transverses prédites théoriquement dans le chapitre précédent. Par ailleurs, le comportement spatio-temporel de ces instabilités observées expérimentalement dépend des paramètres du système, et en particulier de la distance d entre le miroir et le milieu non-linéaire [Mac92], [Tam93]. Cette distance d jouait également un rôle crucial dans notre modèle théorique précédent. De plus, au delà d'un certain seuil, le comportement des instabilités peut être turbulent [Thü93].

Dans ce deuxième chapitre, nous allons présenter l'expérience que nous avons réalisée dans le laboratoire. Comme dans les expériences précédentes, elle comporte un miroir de rétroaction mais le milieu non-linéaire est là constitué par une vapeur de rubidium. Nous allons étudier les instabilités générées dans ce système ainsi que leur comportement en fonction des différents paramètres du système et comparer ce comportement avec les prédictions de notre modèle théorique.

Dans une première partie, nous présenterons le dispositif expérimental qui comporte principalement une source lumineuse, le milieu non-linéaire ainsi que les éléments optiques permettant de d'analyser les instabilités. Dans une deuxième partie, nous nous intéresserons aux instabilités générées pour des fréquences proches des fréquences de résonance. Nous étudierons si ces instabilités dont la structure transverse ressemble à celles des 'marguerites' de la partie (I.4) évoluent en accord avec la théorie lorsque les paramètres du système sont modifiés. Dans la partie (II.3), nous nous intéresserons aux instabilités générées loin des résonances. Nous confronterons nos résultats expérimentaux avec les prédictions théoriques de la partie (I.3). Enfin dans la

quatrième partie nous aborderons les aspects dynamiques de ces instabilités. Nous mettrons en évidence des instabilités statiques ou périodiques ainsi que des instabilités chaotiques. Nous testerons si le comportement périodique des instabilités est en bon accord avec notre modèle développé dans la partie (I.5). Nous réaliserons également une première étude des phénomènes chaotiques apparaissant dans le comportement temporel de nos instabilités.

1) Dispositif expérimental

Le montage expérimental se décompose en deux parties. La première est constituée par la source lumineuse: un laser à Argon ionisé permet de pomper un laser Titane-Saphir, ce dernier laser étant utilisé pour générer les instabilités dans une vapeur atomique dans la deuxième partie de l'expérience.

Pour que la source lumineuse soit utilisable, plusieurs Fabry-Pérots et un dispositif d'absorption saturée dans le Rubidium permettent de connaître et d'asservir la fréquence du laser. L'intensité de sortie du laser peut être modulée par un acousto-optique et un isolateur de Faraday assure un bon fonctionnement du laser. Cette première partie du dispositif ne sera pas modifiée au cours de nos différentes mesures. Suivant les expériences en cours, certains éléments (absorption saturée, acousto-otique,...) pourront être ou ne pas être utilisés.

La deuxième partie du dispositif consiste en l'étude de l'émission des instabilités proprement dites. Elle comporte donc le milieu non-linéaire ainsi que le miroir de rétroaction et tout le dispositif d'analyse des instabilités: écran, caméra, photodiode... Cette deuxième partie comporte aussi un certain nombre d'éléments permettant d'agir sur la taille du faisceau, sur sa forme ainsi que sur son intensité. Contrairement à la première partie du dispositif, le valeur de ces différents paramètres peut être modifié pour chaque type de mesure. Nous pourrons ainsi sonder l'influence de différents paramètres (taille du faisceau, intensité, distance entre le miroir et la cellule) sur les instabilités générées dans le milieu non-linéaire.

Dans la partie suivante (II.1.1), nous décrirons le milieu non-linéaire et les transitions atomiques utilisées dans l'expérience. Nous décrirons ensuite la source lumineuse ainsi que les différents éléments qui lui sont associés et qui constituent la première partie du sispositif expérimental. Enfin nous présenterons la deuxième partie du dispositif qui permet la génération des instabilités et leur étude.

1.1) Milieu non-linéaire

Le milieu non-linéaire utilisé est constitué par une vapeur atomique de rubidium. La configuration électronique du rubidium [Ari77], [Rea80] à l'état fondamental est ($1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^{10}\,4s^2\,4p^6\,5s^1$). Le rubidium naturel comporte deux isotopes ^{85}Rb et ^{87}Rb dont l'abondance relative est de 73% pour le rubidium 85 et de 27% pour le rubidium 87. Leur spin nucléaire vaut respectivement 5/2 et 3/2.

La raie D_1 ($5S_{1/2} \rightarrow 5P_{1/2}$) est représentée sur la figure (II.1.1)

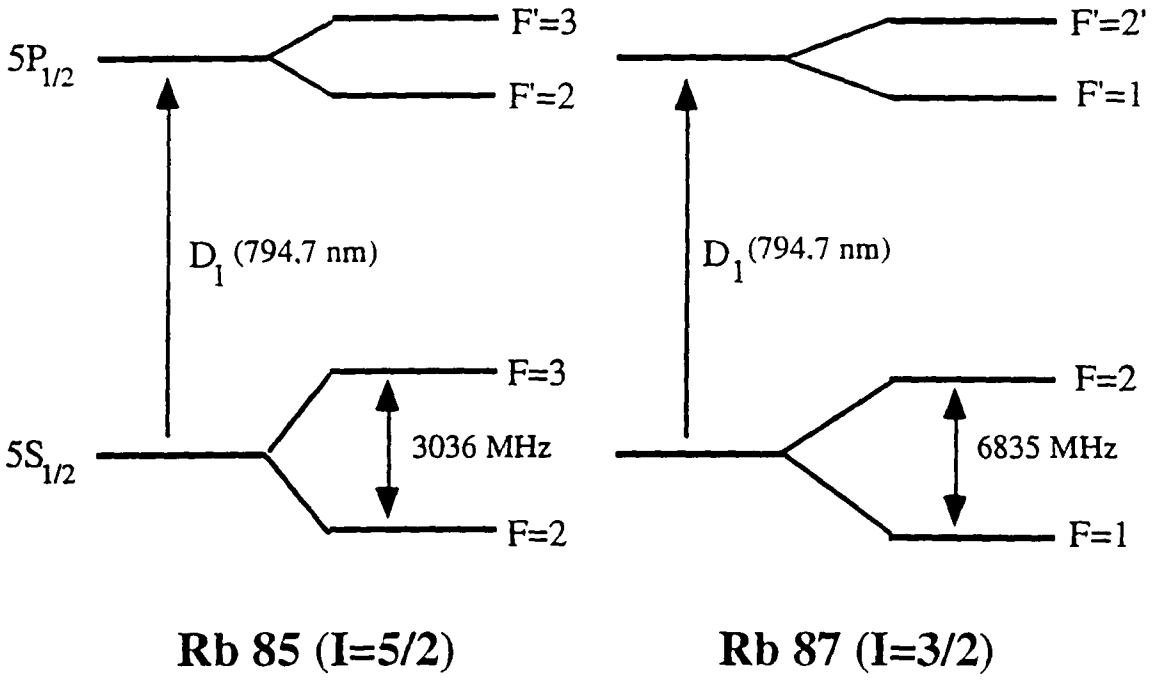


Fig II.1.1: Transition D_1 pour les deux isotopes du rubidium

Nous travaillerons à des fréquences proches ou supérieures à la fréquence de la transition $F = 3 \rightarrow F' = 2$ du rubidium 85. Nous supposerons que nous sommes suffisamment loin des résonances pour négliger la structure hyperfine de l'état excité et nous pourrons ainsi assimiler la transition à une transition $1/2 \rightarrow 1/2$.

Les températures de la vapeur seront de l'ordre de 100°C ce qui correspond à une densité atomique de 5.5 10^{18} atomes.m^{-3}. La largeur Doppler est de 340 MHz.
La largeur du niveau excité Γ est de 6 MHz.

1.2) Source lumineuse

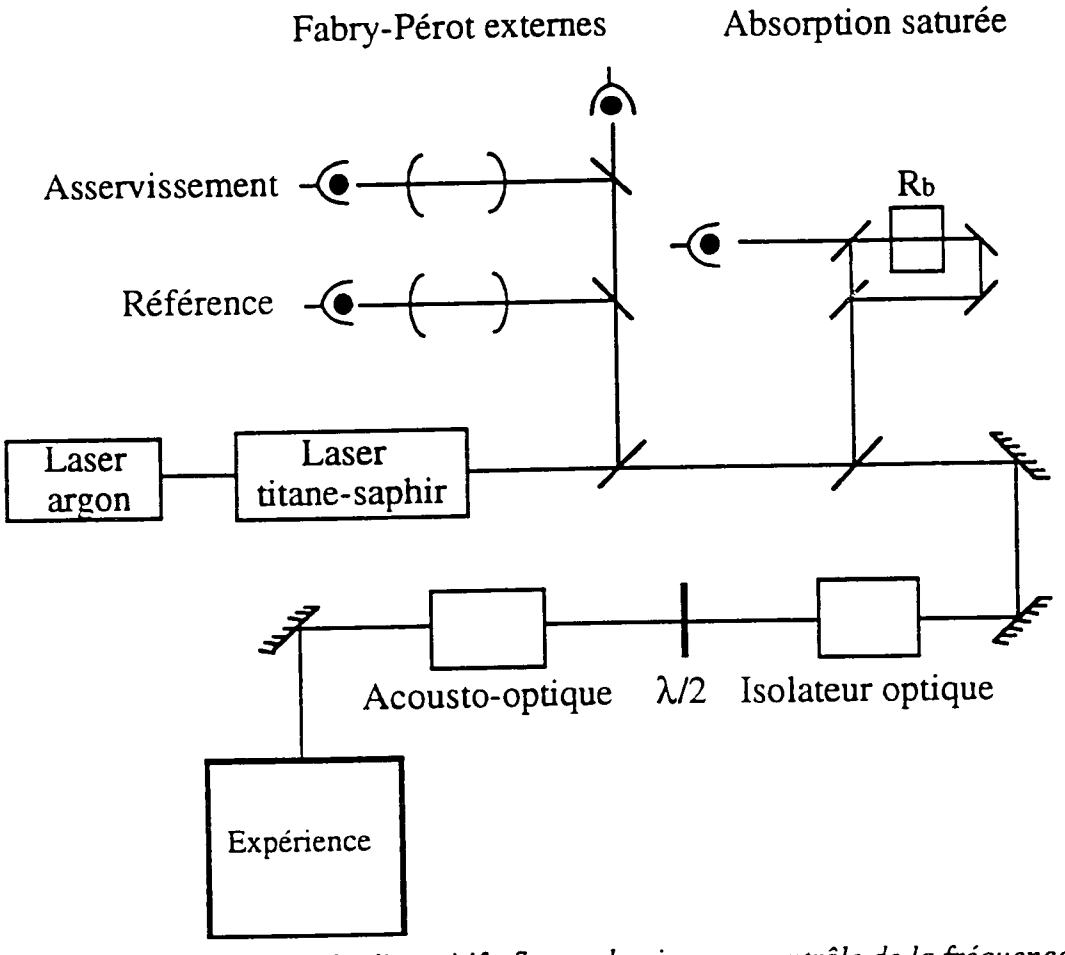


Fig II.1.2: Première partie du dispositif : Source lumineuse, contrôle de la fréquence et de l'intensité.

1.2.1) Laser Titane-Saphir et faisceau laser

Nous utiliserons dans toutes ces expériences, un laser Titane-Saphir continu et monomode mis au point au laboratoire par François Biraben [Bou93], [Val91b]. Il est pompé par un laser à Argon multi-raies Spectra Physics délivrant une puissance de 10 W. Le laser Titane-Saphir a une puissance de sortie de l'ordre de 1 W et sa largeur avant asservissement externe est de 1 MHz. Sa fréquence est accordable dans la gamme 750-850 nm. La lumière émise à la sortie de ce laser est polarisée linéairement et horizontalement. Un isolateur optique placé après le laser permet d'éviter qu'un faisceau parasite réfléchi par la deuxième partie de l'expérience soit réinjecté dans le laser. Cependant le rotateur fait tourner la polarisation du laser de 45° si bien qu'une lame demi-onde est nécessaire pour rendre la polarisation du faisceau du laser à nouveau horizontale. Enfin un modulateur acousto-optique permet de moduler l'intensité du laser si nécessaire.

1.2.2) Mesure et asservissement de la fréquence laser.

a) Asservissement en fréquence

La fréquence du laser est asservie sur le flanc d'un Fabry-Perot externe d'intervalle spectral libre de 600 MHz. Une petite partie du faisceau laser est prélevée de telle sorte que son intensité soit égale à l'intensité à mi-hauteur du pic d'Airy de transmission du Fabry-Pérot. Un signal d'erreur est obtenu en faisant la différence entre ces intensités. Si la fréquence du laser varie, l'intensité du signal de transmission du Fabry-Pérot varie également avec la fréquence et le signal d'erreur n'est alors plus nul. Ce signal d'erreur peut être utilisé pour ramener la fréquence du laser à sa valeur initiale. Par contre, si l'intensité du laser varie, l'intensité du signal de transmission du Fabry-Pérot varie également et dans le même rapport. Le signal d'erreur reste donc nul. Cette méthode illustrée par la figure (II.1.3) et permettant de réduire les fluctuations de fréquence du laser à environ 100 kHz est donc insensible aux fluctuations d'intensité.

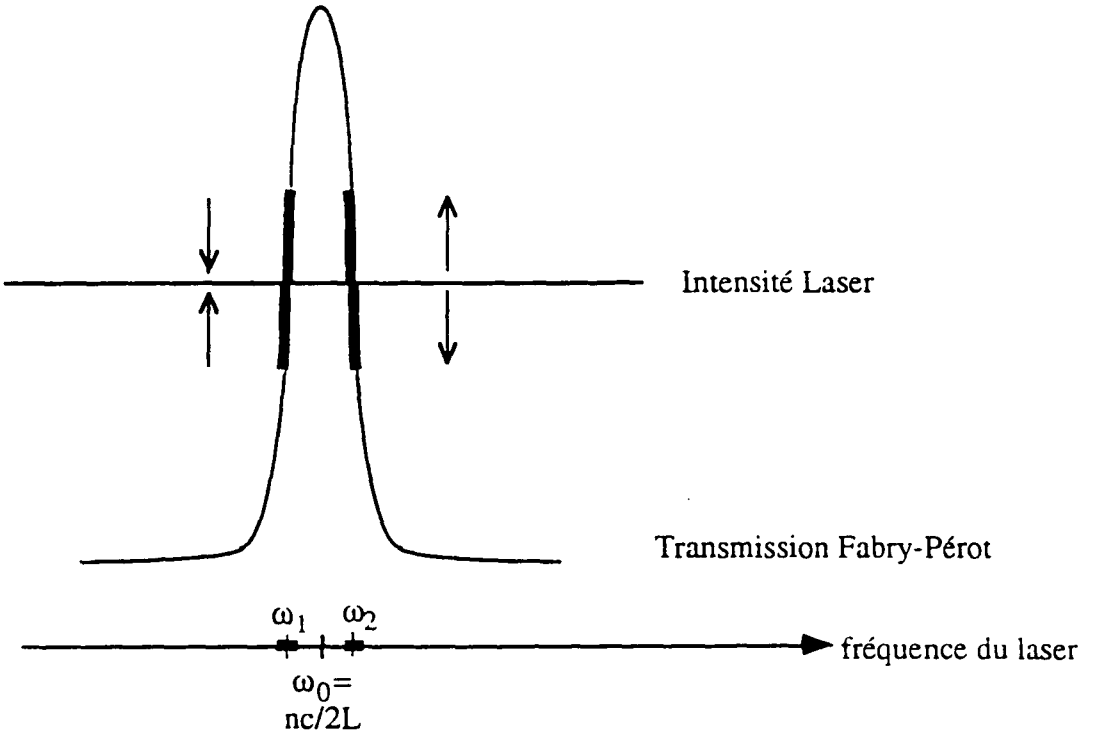


Fig II.1.3: Schéma de principe de l'asservissement sur le flanc d'un pic d'Airy

A la variation de la fréquence du laser représentée en traits épais est associée une variation de l'intensité transmise par le Fabry-Pérot.. L'asservissement permet ici de diminuer la fréquence du laser quand le signal d'erreur (Intensité transmise -` Intensité laser) est positif et de l'augmenter quand il est négatif. Le laser peut ainsi être asservi à la fréquence ω_1 mais ne peut pas être asservi à la fréquence ω_2.

b) Absorption saturée

La méthode de l'absorption saturée est utilisée pour repérer la fréquence du laser par rapport aux résonances atomiques. Cette méthode consiste à faire interagir avec une vapeur atomique une pompe intense et une sonde de même fréquence ω qui se propagent dans des sens opposés. Pour une fréquence quelconque, elles excitent chacune des classes d'atomes différentes. La pompe de vecteur d'onde $\vec{k}$ excite les atomes dont la vitesse $\vec{v}$ vérifie $\vec{k} \bullet \vec{v} = \omega - \omega_0$ et la sonde excite les atomes dont la vitesse $\vec{v}'$ vérifie $\vec{k} \bullet \vec{v}' = -(\omega - \omega_0)$ Par conséquent, tant que $\omega \neq \omega_0$, la sonde et la pompe excitent des classes différentes d'atomes. Lorsque $\omega = \omega_0$, la sonde et la pompe excitent la même classe d'atomes de vitesse nulle. La pompe intense ayant excité une partie des atomes de vitesse nulle rend le milieu plus transparent pour la sonde de sorte que l'observe un pic dans l'intensité de transmission de la sonde. Un signal d'absorption saturée sur une vapeur de rubidium nous permet de connaître la fréquence

absolue du laser par rapport aux raies du rubidium. Le diagramme suivant représente un spectre d'absorption du rubidium obtenu expérimentalement. Les différentes résonances présentées dans la partie (II.1.1) sont représentées sur ce diagramme.

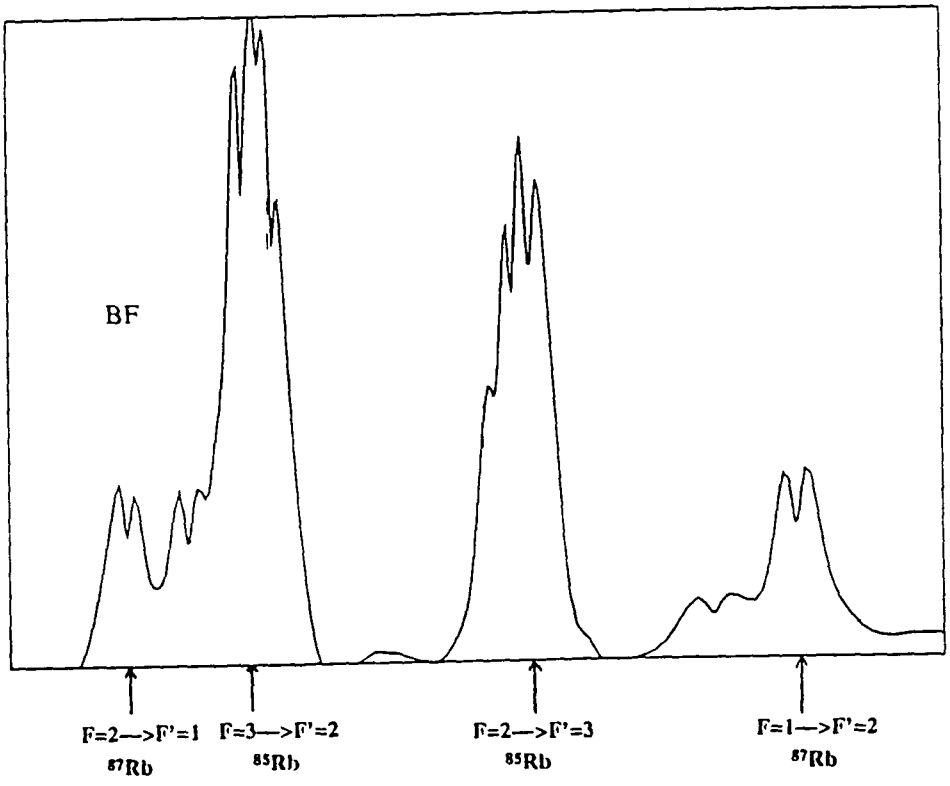


Fig II.1.4:Spectre d'absorption saturée du rubidium.
Quelques transitions entre niveaux hyperfins sont indiquées (Il y a en principe 4 transitions hyperfines par isotope sans compter les résonances croisées ('cross-over')

c) Echelle de fréquence

L'absorption saturée permet de connaître de façon précise la fréquence du laser lorsque celle-ci est proche des fréquences de résonance de la vapeur atomique. En revanche, pour des fréquences se situant par exemple entre les résonances $F=3 \rightarrow F'=3$ et $F=2 \rightarrow F'=2$ du rubidium 85, il est difficile de connaître précisément la fréquence du laser. Un deuxième Fabry-Pérot externe dit "de référence" constitue une échelle de fréquence de pas 150 MHz. En balayant la fréquence du laser et en enregistrant d'une part le signal de transmission de ce Fabry-Pérot et d'autre part l'absorption saturée, nous pourrons ainsi connaître l'écart à la résonance en comptant le nombre de pic d'Airy de transmission du Fabry-Pérot entre la résonance et la fréquence laser considérée. Expérimentalement, nous nous attacherons dans certaines expériences à connaître la dépendance en fréquence des instabilités. Nous effectuerons alors plusieurs mesures successives en modifiant à chaque fois la fréquence du laser de

150 MHz grâce au Fabry-Pérot de référence. Le laser sera alors asservi en fréquence grâce au Fabry-Pérot d'asservissement amené à l'accord à l'aide de sa cale piézo-électrique.

1.3) Schéma expérimental

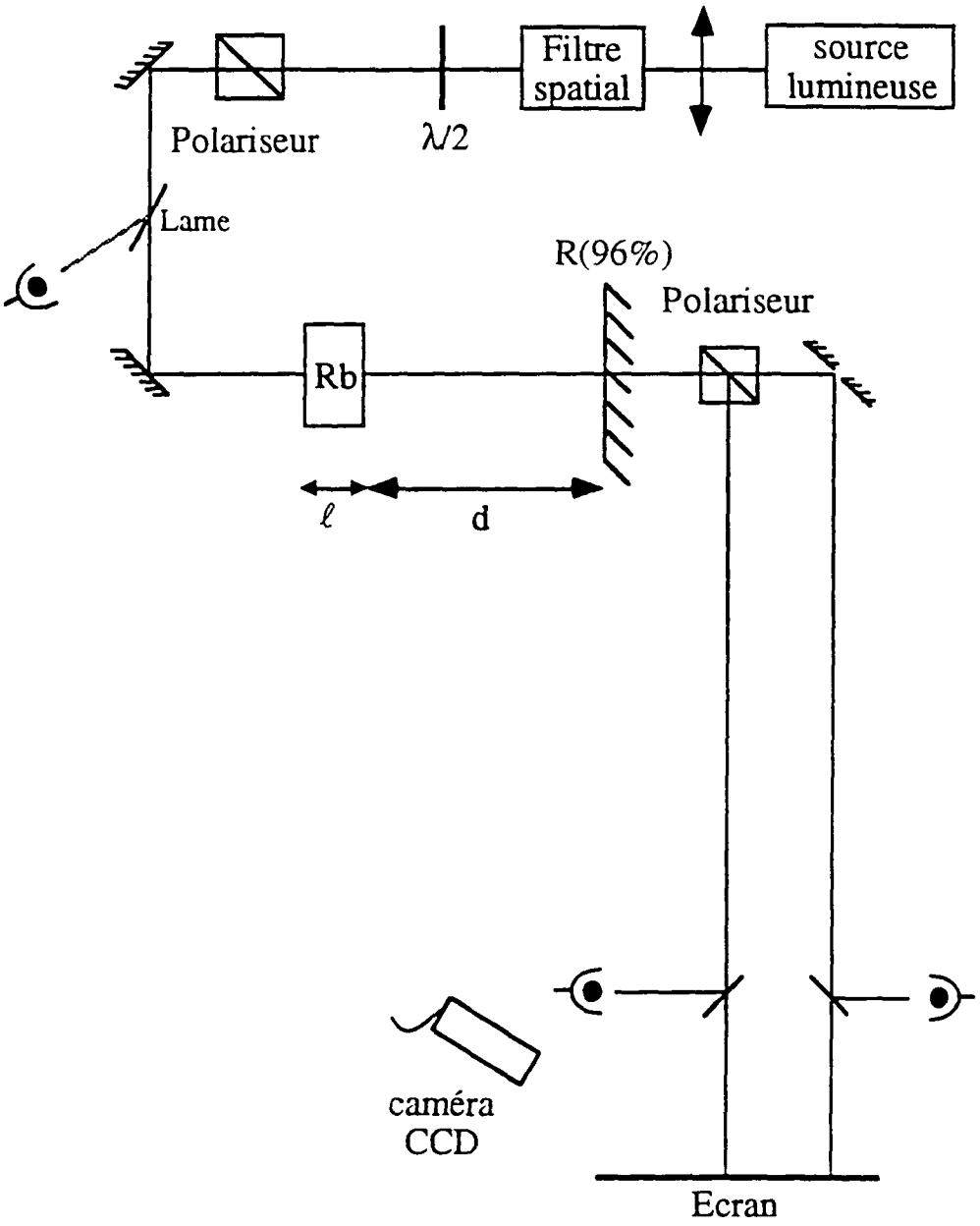


Fig II.1.5: Montage expérimental

1.3.1) Préparation du faisceau

La source lumineuse et les différents éléments qui y sont associés dans la première partie du dispositif ont été décrits dans les paragraphes précédents. Le premier élément de la deuxième partie du dispositif est constitué d'une lentille qui permet d'adapter la taille du faiceau. Le rayon de pincement du faiceau sera successivement égal à 0.35 mm, 0.7 mm et 1.3 mm et sera positionné au niveau de la cellule.

Le faisceau issu du laser passe ensuite dans un filtre spatial constitué de deux lentilles de focale 50 mm et situées à une distance de 10 cm l'une de l'autre, et d'un diaphragme situé à égale distance des deux lentilles. Ce filtre spatial permet en principe d'éliminer les modes transverses éventuellement présents dans le faisceau émis par le laser Titane-Saphir et de ne sélectionner que le mode TEM_{00}.

Le faisceau traverse ensuite un ensemble constitué d'une lame demi-onde et d'un polariseur. En effet, au cours de la propagation dans les différents éléments du dispositif, la polarisation du faisceau peut être légèrement modifiée. Le polariseur permet de s'assurer que la polarisation du faisceau pompe à l'entrée de la cellule est parfaitement horizontale. La lame demi-onde permet de faire varier l'intensité du faisceau pompe.

Une lame de verre placée de telle sorte que l'angle d'incidence du faisceau soit presque égal à l'angle de Brewster réfléchit une très faible partie du faisceau pompe dont nous mesurons l'intensité à l'aide d'une photodiode. Dans des expériences ultérieures où nous modulerons l'intensité du laser, il nous sera ainsi possible de contrôler l'intensité de la pompe.

1.3.2) Oscillation dans la cavité

Le faisceau pénètre ensuite dans la cellule contenant la vapeur atomique. Cette cellule en quartz de longueur 3 cm possède des fenêtres à incidence de Brewster. Ainsi nous minimisons pour les ondes pompes les pertes par réflexion sur les faces de la cellule. Un miroir diélectrique plan et de réflectivité 96% est placé à une distance d de la cellule. Cette distance d variera suivant les expériences entre 10 et 30 cm. Au delà d'un certain seuil en intensité, nous observerons ainsi l'apparition de l'instabilité. Une faible fraction (4%) du faisceau pompe ainsi que, au dessus du seuil d'oscillation, 4% de l'instabilité sont transmis par le miroir plan. Nous analyserons cette fraction des différents faisceaux transmis.

1.3.3) Analyse de l'instabilité

Les différents éléments présentés dans ce paragraphe nous permettent d'étudier différents aspects de l'instabilité. Un prisme de glan polariseur permet tout d'abord de séparer les composantes de polarisation horizontale et verticale du faisceau transmis par le miroir plan. La composante de l'instabilité polarisée verticalement dite 'orthogonale' est donc séparée du faisceau pompe et d'une éventuelle instabilité polarisée horizontalement. L'instabilité est projetée sur un écran placé à une distance de 4 m de la cellule. Cette distance est en général grande devant la longueur de Rayleigh du faisceau. Une petite partie de l'instabilité orthogonale est prélevée et envoyée sur une photodiode qui en mesure son intensité. Par ailleurs, la composante parallèle du faisceau est réfléchie par un miroir plan percé en son centre. La partie centrale du faisceau correspondant principalement à la pompe est éliminée et seule l'instabilité parallèle hors d'axe pourra se réfléchir sur le miroir percé. Une petite partie de ce faisceau est prélevée et envoyée sur une deuxième photodiode. L'instabilité parallèle est elle aussi projetée sur le même écran lointain. Une caméra CCD permet d'observer les instabilités parallèles et orthogonales.

2) Génération d'instabilités de type "marguerites"

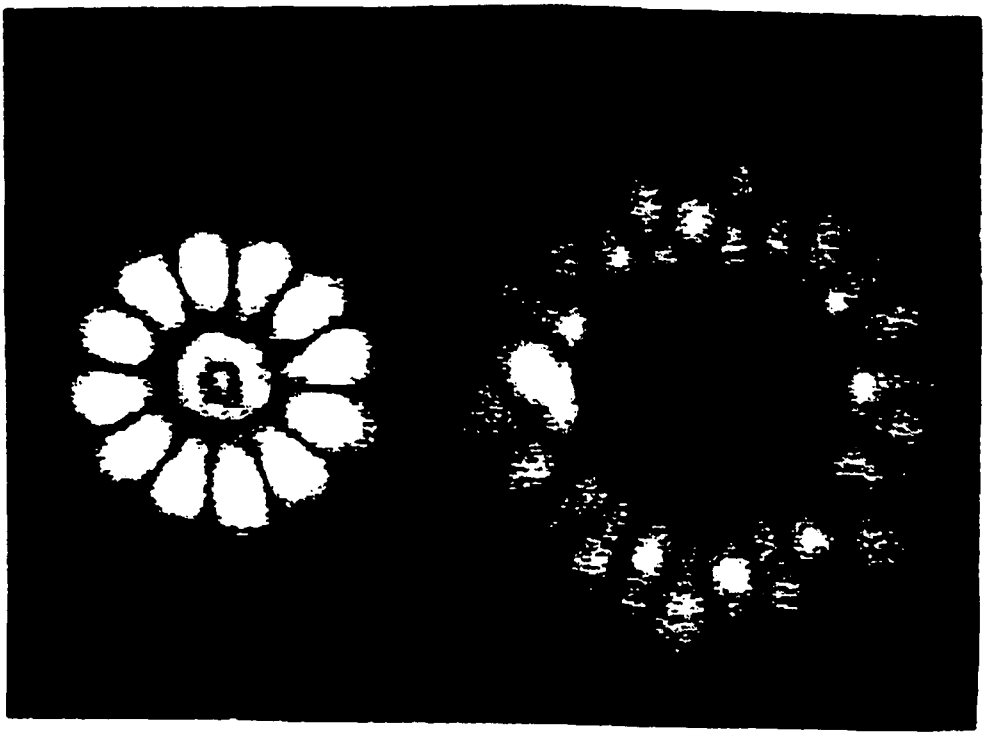
2.1) Observation des marguerites

2.1.1) Description

Dans toute cette série d'expériences, le laser est asservi à une fréquence supérieure de 150 MHz à la fréquence de résonance de la transition $F = 3 \rightarrow F' = 2$. Pour cette fréquence particulière, on observe pour des intensités suffisantes la génération d'instabilités de polarisation orthogonale dont la projection sur un écran lointain est constituée par un nombre pair de taches réparties sur un cercle. Ces taches peuvent être vues comme des pétales d'une fleur et nous appellerons cette instabilité une 'marguerite'. Le nombre de pétales augmente en augmentant l'intensité de la pompe ou en diminuant la distance d entre le miroir plan et la cellule.

La plage de fréquence sur laquelle s'observe ces marguerites est très étroite (de l'ordre de 50 MHz). Nous nous placerons systématiquement à la fréquence où le nombre de pétales est maximum et où ces instabilités orthogonales sont très contrastées et lumineuses.

Sur la polarisation parallèle, des instabilités de structures voisines peuvent être observées mais elles apparaissent pour une intensité seuil beaucoup plus élevée. Pour la même intensité pompe, leur intensité est beaucoup plus faible que celle des instabilités orthogonales. Leur diamètre en champ lointain est le double du diamètre obtenu avec des marguerites de polarisation orthogonale. Les marguerites en polarisation parallèle sont probablement des harmoniques des marguerites en polarisation orthogonale. En effet, si l'intensité de l'instabilité orthogonale est suffisamment importante, elle peut alors jouer un rôle de pompe et générer dans le milieu non linéaire des instabilités orthogonales à sa propre polarisation et donc de polarisation parallèle aux pompes.



(a) (b)

Fig II.2.1: En champ lointain , marguerite expérimentale à 12 pétales et de polarisation orthogonale (a) et marguerite de polarisation parallèle associée (b).

2.1.2) Interprétation en termes de modes de Laguerre-Gauss

La structure transverse de ces instabilités ressemble beaucoup à la structure transverse des modes de Laguerre-Gauss. L'expression complète de ces modes a été donnée dans la partie (I.4).

Effectuons d'abord quelques rappels sur la structure de ces modes. Les modes $M_{\ell,m,j}(r,\theta,z)$ de Laguerre-Gauss sont définis dans un système de coordonnées cylindriques où z correspond à la direction de propagation du mode et où r et θ sont les rayon et angle d'un système polaire dont le centre est confondu avec le centre de symétrie du mode. La structure transverse du mode compte $\ell+1$ cercles concentriques sur lesquels s'inscrivent 2m noeuds (points d'intensité $| M_{\ell,m,j}(r,\theta,z) |^2$ nulle) alternant avec 2m points d'intensité maximum. Le paramètre j précise si le mode $M_{\ell,m,j}(r,\theta,z)$ est proportionnel à $\cos(m\theta)$ ou $\sin(m\theta)$. Deux points successifs d'intensité maximum ont ainsi des phases opposées.

A une homothétie de rapport $w(z_1)/w(z_2)$ près où $w(z)$ correspond à la taille transverse locale au point d'abscisse z, les modes transverses de Laguerre-Gauss correspondent à une distribution d'intensité identique en $z=z_1$ et en $z=z_2$. A une homothétie près, les figures de champ proche correspondant à l'instabilité au niveau de la face de sortie de la cellule et les figures de champ lointain observées sur l'écran situé à une distance grande devant la distance de Rayleigh sont donc identiques.

Expérimentalement, la structure transverse de nos marguerites s'inscrit sur un seul cercle et non pas sur plusieurs cercles concentriques. Ces instabilités s'apparentent donc à des modes de Laguerre-Gauss pour $\ell=0$. Deux pétales successifs correspondant à deux points d'intensité maximum dans le structure transverse de l'instabilité sont-ils en opposition de phase? Les figures de champ proche et de champ lointain sont-elles comparables?

a) Phase relative de deux pétales successifs.

Nous avons réalisé une expérience d'interférence afin de connaître la phase relative de deux pétales successifs. Nous étudions la figure d'interférence entre l'instabilité orthogonale et un faisceau de référence également polarisé orthogonalement aux ondes pompes. Au cours de sa propagation à travers les différents élements optiques, la polarisation du faisceau issu du laser subit une légère dépolarisation et une petite partie de ce faisceau sera polarisée orthogonalement. Cette petite partie du faisceau est défléchie par le prisme de Glan situé avant la cellule. Ce faisceau d'intensité faible et polarisé orthogonalement aux pompes, nous sert pour réaliser des interférences avec l'instabilité orthogonale. Pour obtenir le meilleur contraste possible, un filtre permet d'en diminuer encore l'intensité afin de la rendre comparable à l'intensité de l'instabilité. Une lentille de focale 100 mm permet d'adapter la taille du faiceau à la taille de l'instabilité. Un système de deux miroirs en baïonnette permet de modifier l'angle entre le faisceau de référence et l'instabilité et ainsi de modifier l'interfrange dans les figures d'interférence. La lame semi-transparente permet ensuite de réaliser cette interférence sur l'écran lointain et nous l'observons à l'aide de la caméra CCD.

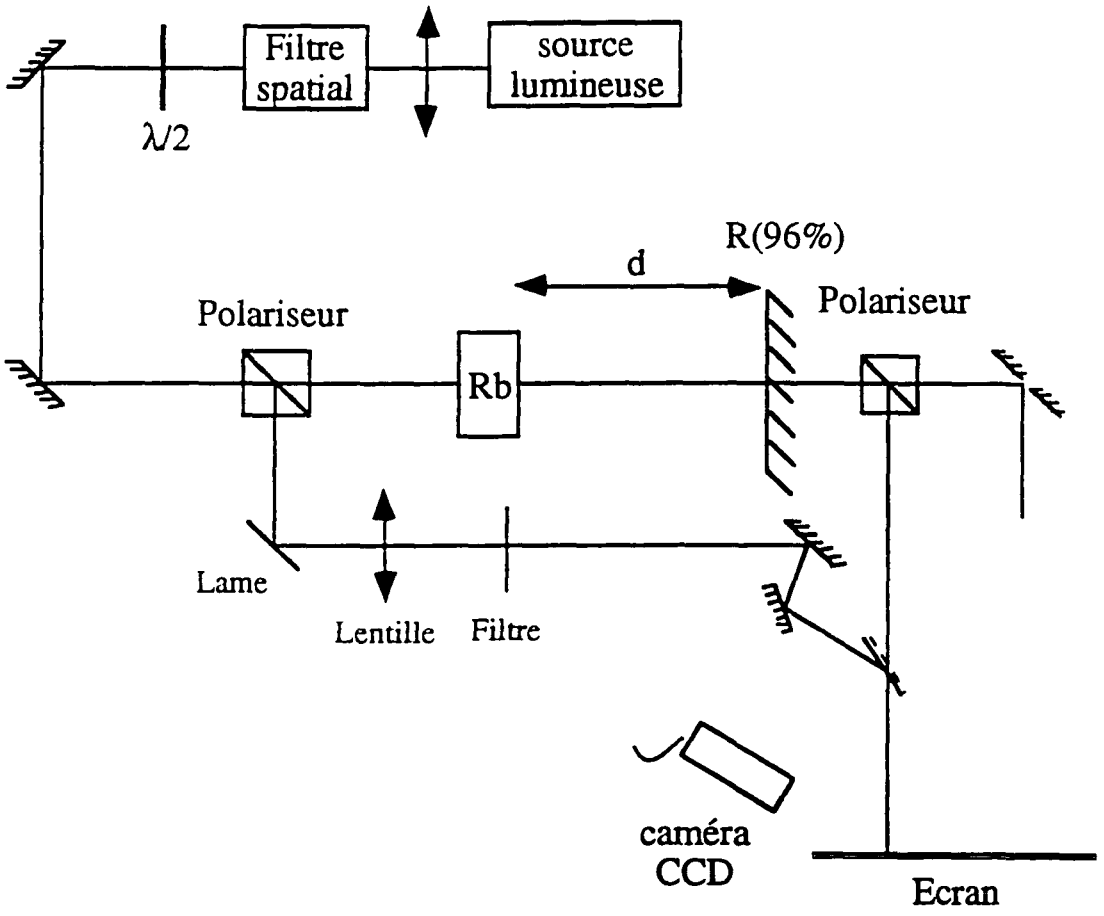


Fig II.2.2: Interférences entre le faisceau de référence et l'instabilité

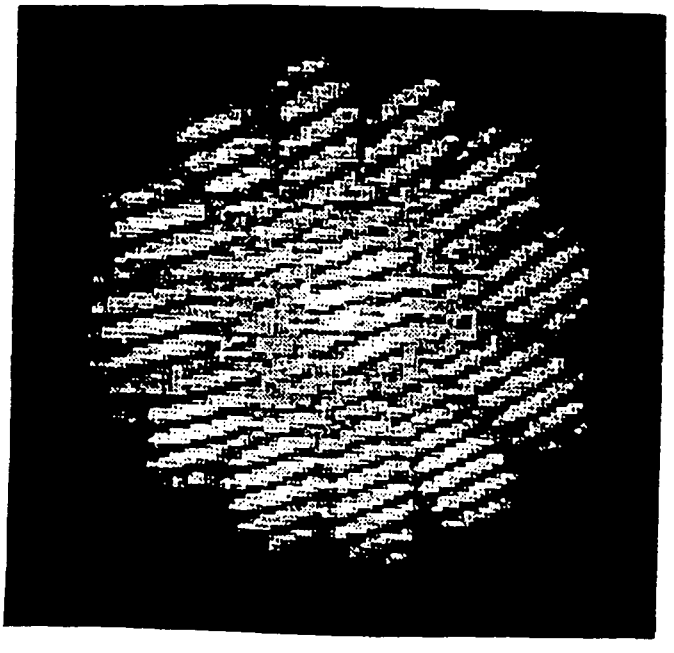


Fig II.2.3.a: Interférences obtenues avec une marguerite à 12 pétales.

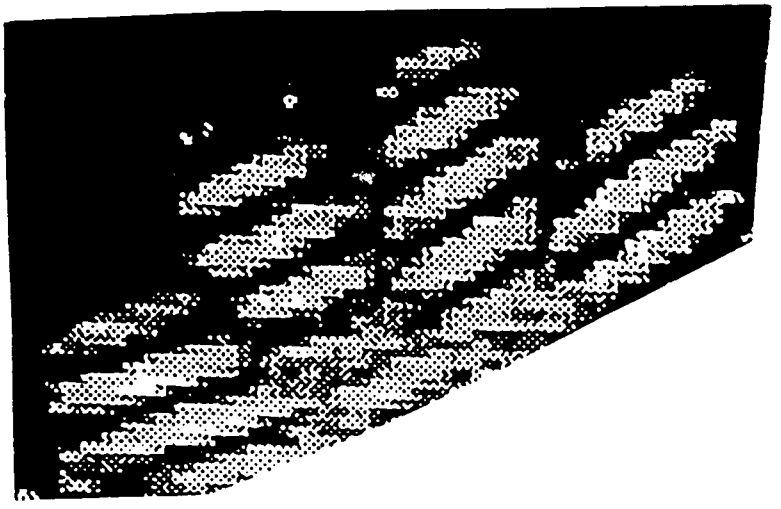


Fig II.2.3.b: Interférences obtenues avec une marguerite à 12 pétales (détail).

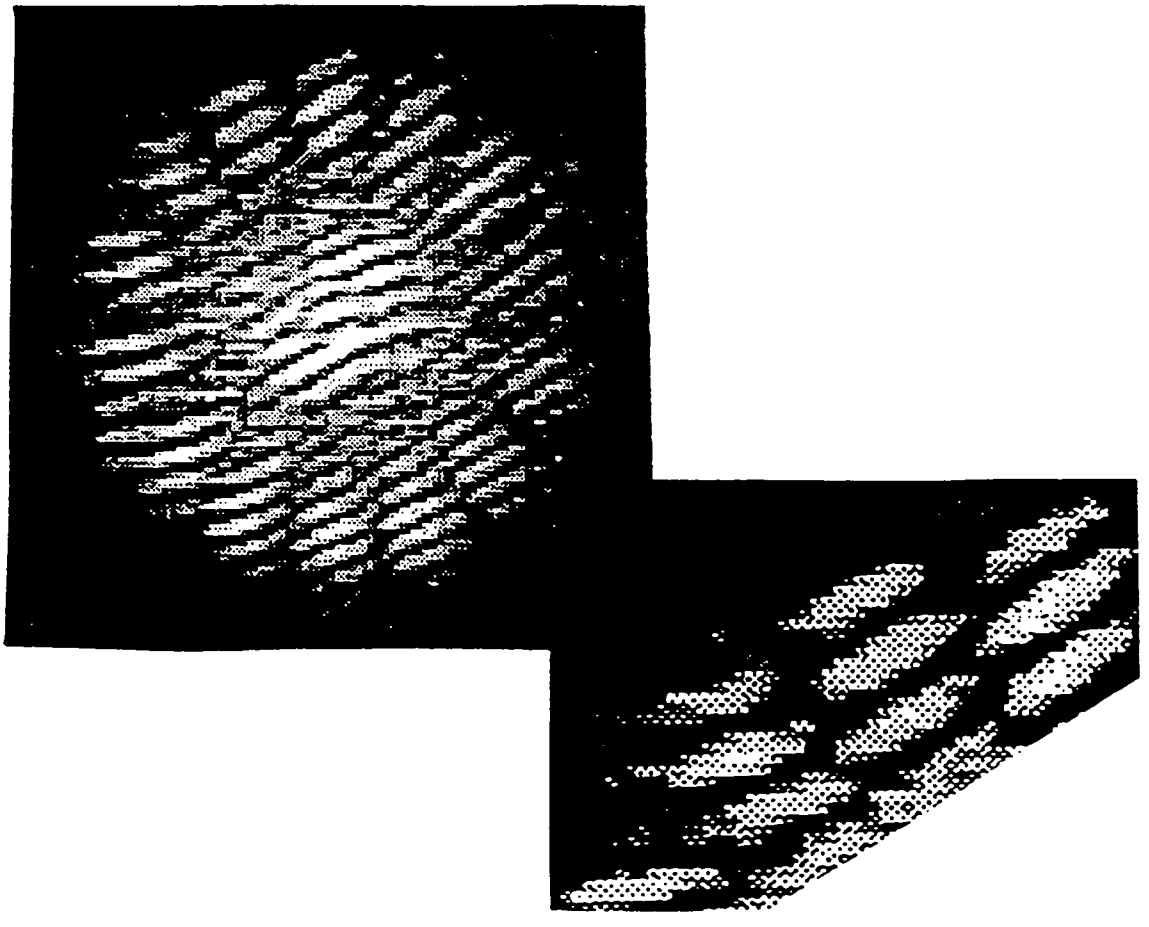


Fig II.2.3.c: Interférences obtenues avec une marguerite à 14 pétales et détail.

Les figures présentées ci-dessus correspondent aux interférences obtenues et à un agrandissement de ces interférences, obtenues pour des maguerites à 12 et 14 pétales. Les figures d'interférences obtenues représentent des marguerites striées dont l'interfrange diminue en augmentant l'angle θ entre le faisceau de référence et l'instabilité. Une frange sombre dans un pétale succède à une frange brillante dans le pétale précédent, et réciproquement. Deux pétales successifs sont donc en opposition de phase.

b) Champ proche et champ lointain

Le montage suivant permet d'observer sur l'écran lointain à la fois le champ proche et le champ lointain. Une lentille de focale 40 cm est placée à une distance d'~40 cm de la cellule. Cette lentille fait ainsi l'image à l'infini de l'instabilité à la sortie de la cellule.

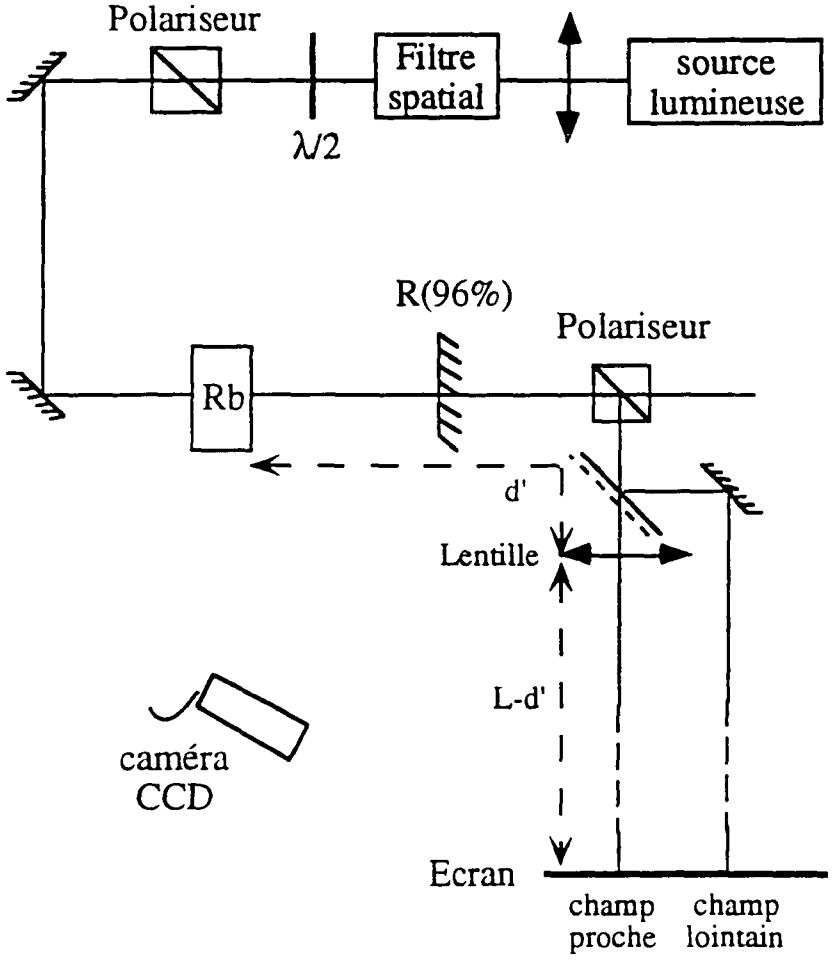
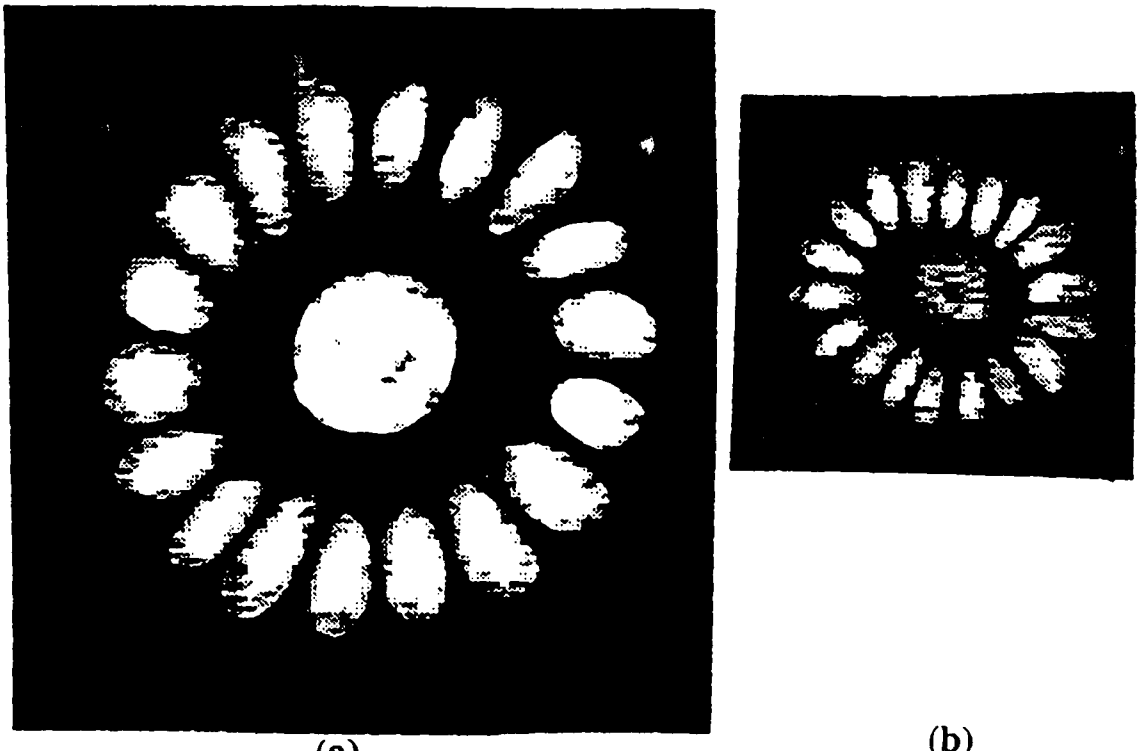


Fig II.2.4: Schéma expérimental permettant d'observer les figures en champ proche et en champ lointain.

Les instabilités observées ont des structures tranverses très voisines en champ proche et en champ lointain.



(a) (b)

Fig II.2.5: Figure en champ proche (a) et figure en champ lointain (b) pour une marguerite à 18 pétales.

Les expériences précédentes ont montré que les instabilités observées à cette fréquence du laser pouvaient être raisonnablement bien décrites par des modes de Laguerre-Gauss. Nous allons maintenant étudier la variation de ces instabilités en fonction de la distance d entre la cellule et le miroir plan, de l'intensité et du diamètre de la pompe et confronter ces résultats à nos prévisions théoriques.

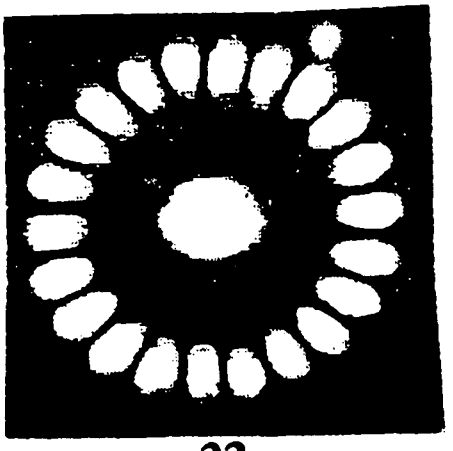
2.2) Variation du nombre de pétales en fonction de la distance

2.2.1) Principe de l'expérience

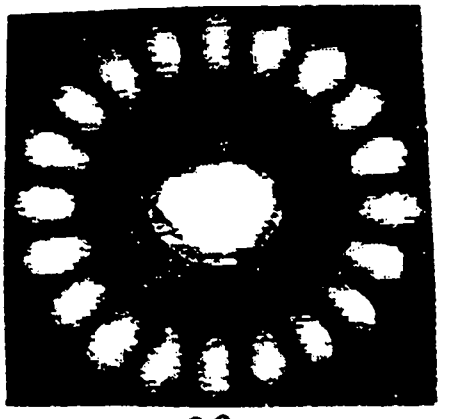
Dans cette série d'expériences, le laser est asservi à une fréquence pour laquelle les marguerites sont les plus lumineuses et les plus contrastées. L'écart entre cette fréquence et la fréquence de résonance de la transition $F = 3 \rightarrow F' = 2$ est de 150 MHz. Le diamètre à mi-hauteur du faisceau sera successivement pris égal à 0,8 et à 0,4 mm et la puissance du laser sera toujours égale à 200 mW. Le miroir plan est perpendiculaire à l'axe optique. Le miroir plan se déplace le long d'un réglet parallèle à l'axe optique de manière à pouvoir faire varier la distance entre la cellule et le miroir plan tout en gardant ce dernier perpendiculaire à l'axe optique. La distance d mesurée entre le centre de la cellule et le miroir plan varie entre 8 cm et 30 cm par pas de 0,5 cm. Expérimentalement, nous avons observé que l'intensité des marguerites est très sensible à un tout petit angle entre les faisceaux pompes aller et retour, la pompe retour étant obtenue par réflexion de la pompe aller sur le miroir plan. Lorsque le miroir est bien réglé, c'est à dire lorsque l'angle entre les deux pompes est nul, l'instabilité est statique et l'intensité des marguerites est constante. Par conséquent, l'orientation du miroir plan sera réglée à chaque mesure afin que l'intensité des instabilités reste statique. Les instabilités sont projetées sur un écran lointain situé à 4 m de la cellule et filmées à l'aide d'une caméra CCD. Le nombre de pétales augmente lorsque la distance diminue. Nous notons alors les distances critiques pour lesquelles le nombre de pétales augmente.

Les résultats expérimentaux sont présentés dans les graphes suivants. Les figures (II.2.7.a) et (II.2.7.b) donnent dans le cas d'un faisceau de diamètre de 0,8 mm et 0,4 mm respectivement, le nombre de pétales de la marguerite en fonction de la distance entre le centre de la cellule et le miroir plan. La figure (II.2.6) représente les marguerites obtenues en champ lointain dans les conditions expérimentales de (II.2.7.a).

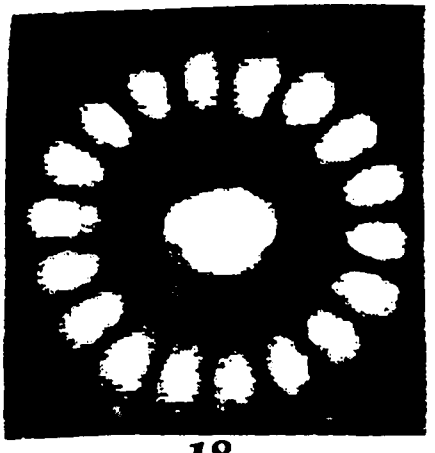
2.2.2) Etude pour un diamètre de faisceau de 0,8 mm



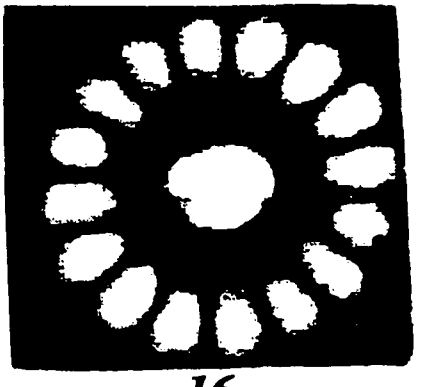
22



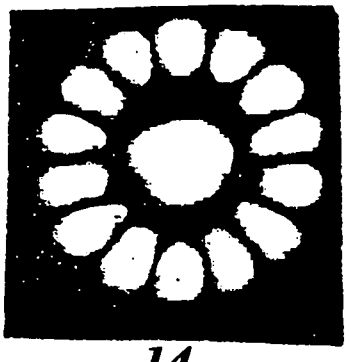
20



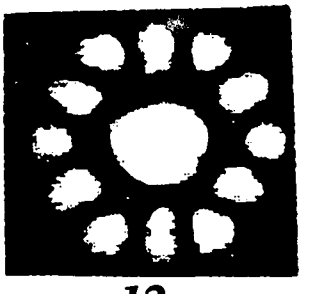
18



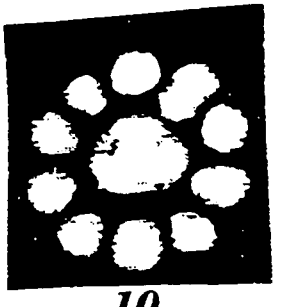
16



14



12



10

Fig II.2.6: Marguerites obtenues en champ lointain pour un diamètre de 0,8 mm et I=200 mW et des distances comprises entre 8 et 30 cm.

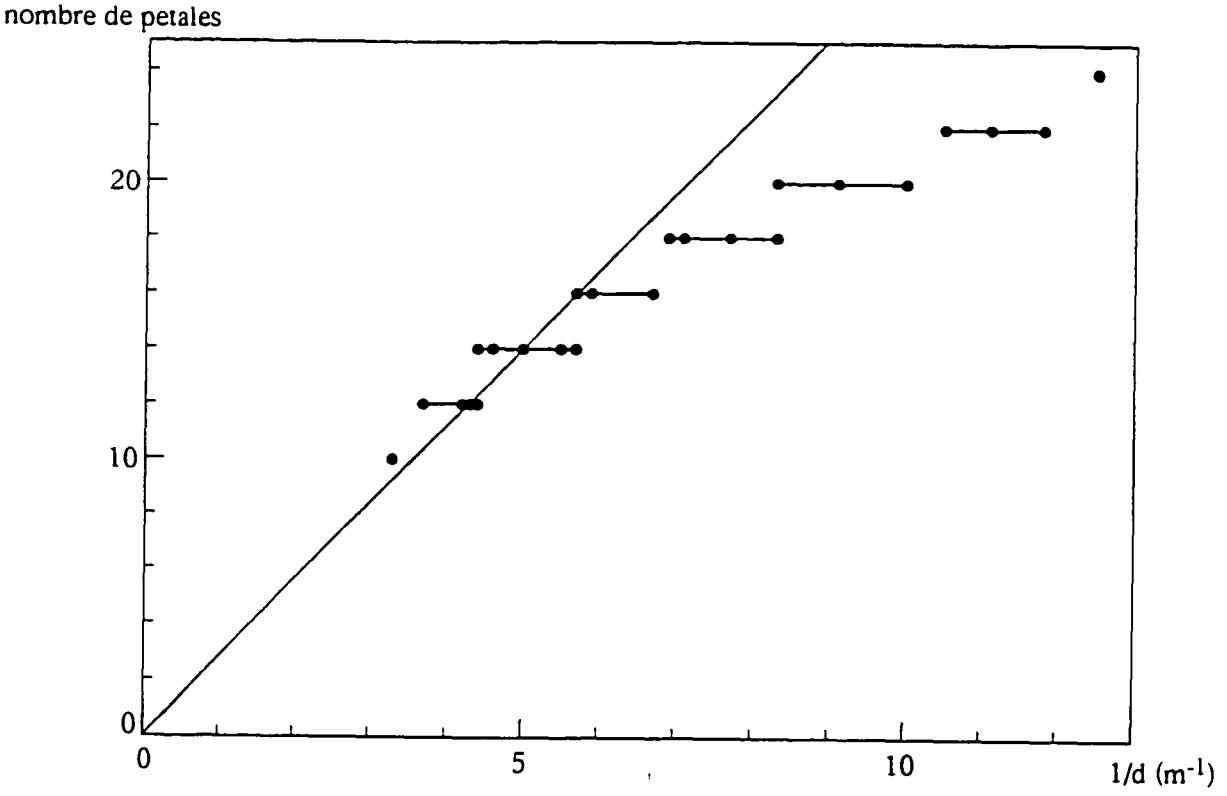


Fig II.2.7.a: Nombre de pétales en fonction de 1/d pour un diamètre de faisceau de 0.8 mm et une puissance du faisceau pompe de 0,2 W.

Analysons tout d'abord la figure (II.2.7.a) obtenue pour un diamètre du faisceau de 0,8 mm. La courbe expérimentale ci-dessus se rapproche beaucoup des courbes théoriques étudiées dans la partie (I.4). Le nombre de pétales reste constant pour plusieurs valeurs consécutives de 1/d puis varie brusquement pour des valeurs de 1/d supérieures. Lorsque le nombre de pétales n'est pas trop important (inférieur ou égal à 14), le nombre de pétales s'inscrit autour d'une droite dont la pente est proportionnelle à 1/d et qui passe par l'origine. Nous avons tracé en traits pleins la droite correspondant à cette variation linéaire. La pente de cette droite est de 2,4. Au delà de 14 pétales le nombre de pétales est inférieur à celui prédit par cette variation linéaire.

Nous pouvons donc en déduire que pour m inférieur à 8, d varie autour de la valeur moyenne d=1,2/m. La relation théorique (I.4.17) donne la pente de la droite correspondant à cette variation linéaire en fonction du diamètre du faisceau et de l'angle η caractéristique de l'écart à résonance. En utilisant cette relation dans le cas où le diamètre à mi-hauteur du faisceau pompe est de 0,8 mm, nous avons pu, à partir de la pente de notre droite expérimentale, en déduire la valeur expérimentale de l'angle η. Cette valeur de 0,93 π est très proche de la valeur $\eta=\pi$ que nous avions adoptée dans notre étude théorique.

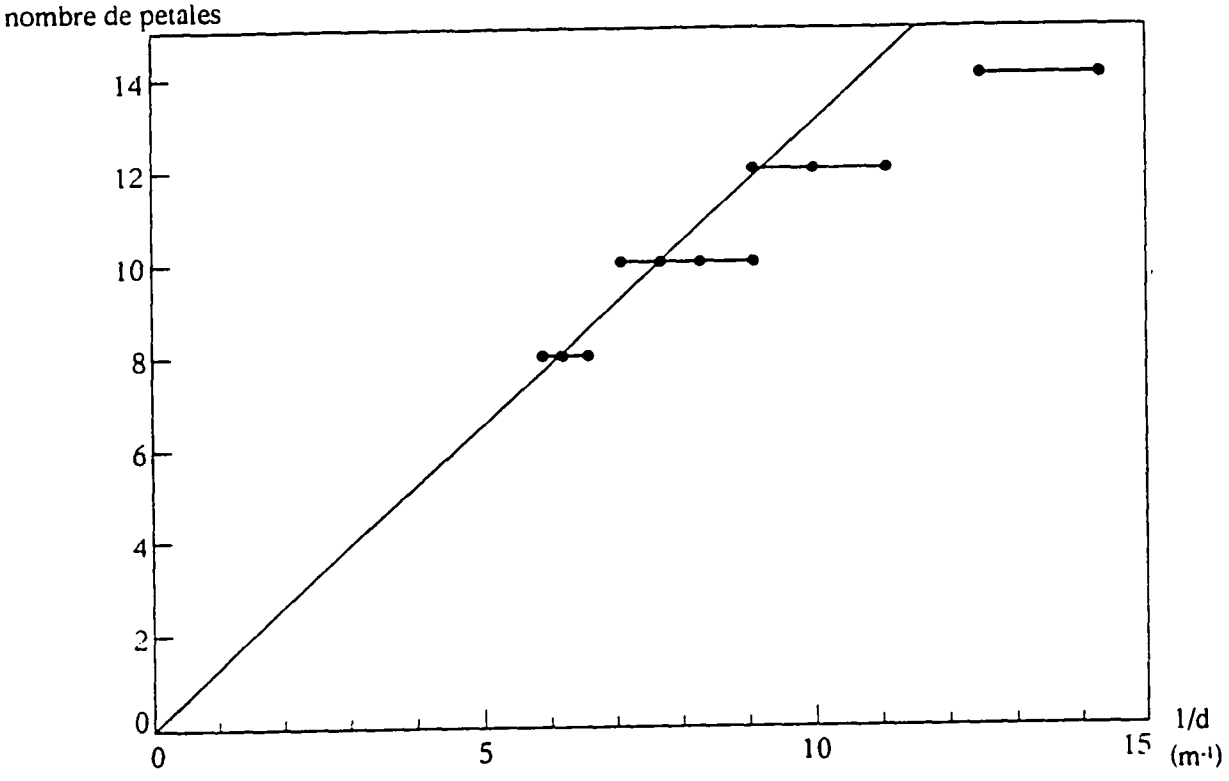


Fig II.2.7.b: Nombre de pétales en fonction de 1/d pour un diamètre de faisceau de 0,4 mm et une intensité de 200 mW

Analysons maintenant la figure obtenue pour un faisceau de diamètre à mi-hauteur égal à 0,4 mm et une intensité de 200 mW. Remarquons tout d'abord que le nombre de modes oscillant dans la cavité est bien plus faible que pour un diamètre de faisceau de 0,8 mm. Cependant pour une puissance du faisceau pompe constante, l'intensité de l'onde pompe au centre du faisceau est bien plus importante pour un faisceau peu étendu que pour un faisceau de grand diamètre. Le terme de saturation en b I_f (1+R) devrait donc être plus grand pour un faisceau de diamètre 0,4 mm et devrait permettre l'oscillation de modes de paramètre m plus importants que pour un faisceau de diamètre 0,8 mm.

Un point important consiste à noter que le nombre de pétales varie bien linéairement tant que m n'est pas trop grand en 1/d. La pente de la droite correspondant à cette variation linéaire est de 1,2. Cette pente est bien comme prévu plus petite que celle observée pour 0,8 mm. Cependant le rapport entre les deux pentes est de 2 alors que le modèle théorique prédit que le rapport est égal au carré des diamètres c'est à dire 4.

Notons encore que pour une même distance d, le nombre de pétales obtenus pour un faisceau de diamètre de 0,4 mm est inférieur au nombre de pétales obtenus pour un faisceau de diamètre de 0,8 mm, conformément à la théorie. Enfin, remarquons que dans le cas d'un faisceau de 0,4 mm de diamètre à mi-hauteur, les distances sur lesquelles s'observent les oscillations des modes de Laguerre-Gauss sont supérieures aux distances prédites théoriquement.

Même si l'évolution générale est conforme à celle attendue dans le cadre du modèle décrit au chapitre I, l'évolution quantitative présente des différences significatives. Un paramètre important est la longueur de Rayleigh qui dans le cas d'un faisceau de diamètre 0,4 mm vaut 45 cm et n'est plus négligeable devant la distance d entre le miroir et la cellule. Toute notre étude théorique précédente avait été réalisée dans l'approximation où la distance d était suffisamment petite devant la distance de Rayleigh pour pouvoir considérer la taille transverse locale w(z) comme constante sur la longueur de la cellule. Expérimentalement, il est difficile de repérer la position exacte du rayon de pincement. Si celui-ci se situe avant la cellule, le faisceau retour ayant effecté un aller-retour dans la cellule peut avoir une taille locale transverse plus grande que le faisceau aller. La distance d permetttant l'oscillation d'un mode (0,m) dépend principalement de la phase de Gouy du faisceau après un aller-retour et croit avec w(z). Nous observerons donc l'oscillation des modes (0,m) pour des distances supérieures à celles prévues par la théorie où $w(z)=w_0$. D'autre part, le recouvrement entre les faisceaux dans la cellule sera moins bon. Un nombre moins important de modes pourra donc osciller.

2.3) Evolution avec l'intensité

Dans cette partie, nous allons étudier la dépendance en intensité des instabilités obtenues. Nous étudierons les diagrammes de bifurcation donnant l'intensité de l'instabilité en fonction de l'intensité de la pompe.

2.3.1) Montage expérimental

Une petite partie du faisceau pompe est prélevée à l'aide de la lame de verre placée entre le polariseur et la cellule. Ce faisceau peu intense est ensuite envoyé sur une première photodiode. Par ailleurs l'instabilité orthogonale se réfléchit sur un miroir percé situé après le miroir plan de la cavité de réflectivité égale à 96% et le prisme de

Glan polariseur (voir figure II.1.4). La composante centrale du faisceau orthogonal est ainsi supprimée et seule subsiste l'instabilité orthogonale hors d'axe c'est-à-dire la marguerite. Une partie de ce faisceau de polarisation orthogonale est projetée sur l'écran lointain et observée à l'aide de la caméra. Une autre partie de ce signal est détecté par une deuxième photodiode. L'oscilloscope est utilisé en mode XY, le signal de la première photodiode étant envoyé sur la voie X et le signal de la deuxième photodiode étant envoyé sur la voie Y. Nous connaîtrons ainsi l'intensité de l'instabilité en fonction de l'intensité de la pompe.

Dans cette expérience, l'intensité de la pompe est modulée à l'aide du modulateur acousto-optique (Voir figure II.1.2). Nous travaillerons sur l'ordre 1 généré par ce modulateur et nous choisirons l'amplitude de la tension appliquée à ce modulateur de telle sorte que l'intensité maximum de la pompe soit de 110 mW. Le laser est asservi en fréquence. Le faisceau pompe a un diamètre à mi-hauteur de 0,8 mm, la distance d est égale à 9 cm. L'intensité des marguerites étant principalement statique, nous utiliserons les sorties DC des photodiodes et nous amplifierons les signaux de sortie par 100.

2.3.2) Mesure et résultats.

Lorque l'intensité de l'onde pompe est modulée, nous observons sur l'écran lointain des transitions de marguerites à (2p) pétales en des marguerites à (2p±2) pétales. Conformément à ce que nous avions montré dans la partie théorique, le nombre de pétales augmente bien avec l'intensité de la pompe. Le nombre de pétales observés varie dans cette expérience entre 6 et 22. Le diagramme de bifurcation obtenu à l'aide de l'oscilloscope est présenté dans la figure suivante où I_i correspond à l'intensité de l'instabilité et I_p à l'intensité de la pompe.

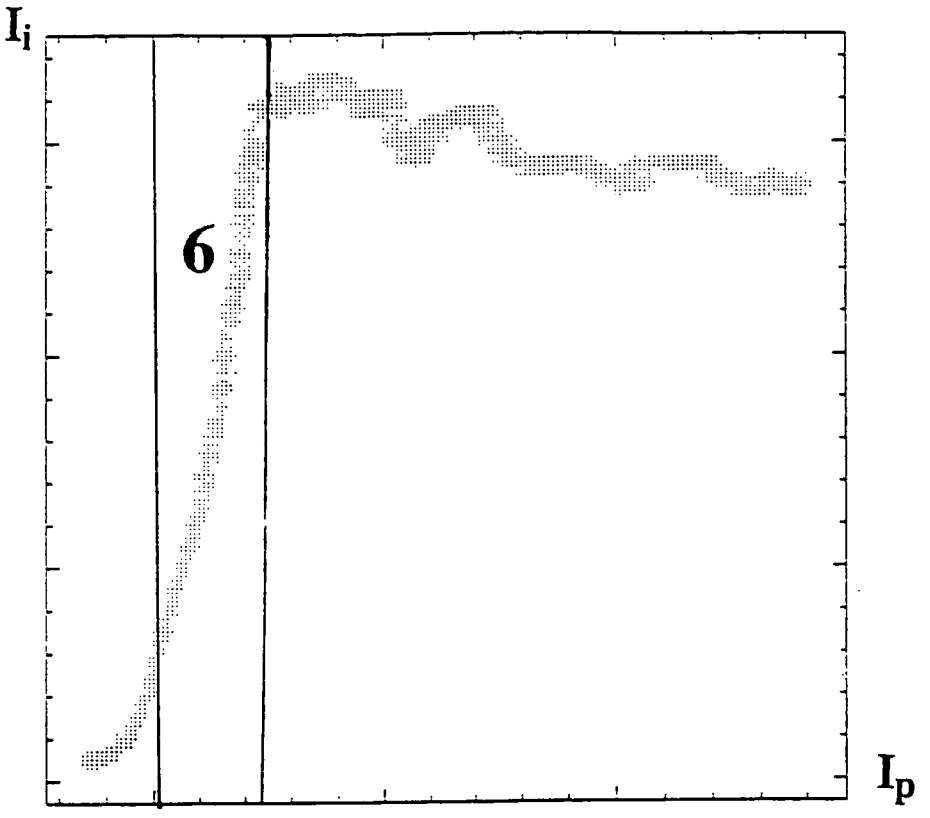


Fig II.2.8: Diagramme de bifurcation

Cette courbe peut se décomposer en deux parties: au-dessus du seuil, quand l'intensité de la pompe augmente, l'intensité de l'instabilité croît d'abord rapidement puis, lorsque l'intensité de la pompe dépasse une certaine valeur, l'intensité de l'instabilité ne varie plus beaucoup.

Au début de la phase de croissance rapide de l'intensité de l'instabilité, l'intensité de l'instabilité reste trop faible pour qu'il soit possible de distinguer facilement la structure transverse de l'instabilité en champ lointain. Celle-ci s'apparente à un anneau. Pour des intensités un peu plus importantes et toujours dans cette phase de croissance rapide de l'intensité de l'instabilité, la structure transverse en champ lointain correspond à une marguerite à 6 pétales. Cette marguerite devient de plus en plus intense lorsque l'intensité de la pompe augmente. Pour des intensités de la pompe supérieures à l'intensité nécessaire pour que s'opère la transition d'une marguerite à 6 pétales à une marguerite à 8 pétales, l'intensité de l'instabilité ne varie plus de manière notable alors que le nombre de pétales augmente jusqu'à m=12.

Qualitativement nous pouvons donner l'interprétation suivante: le terme essentiel dans la sélection des modes de Laguerre-Gauss n'est pas l'intensité de l'onde pompe au centre mais plutôt l'intensité de l'onde pompe sur les ailes de sa distribution d'intensité

et plus exactement aux points où le mode de Laguerre-Gauss considéré est maximum. Quand le nombre de pétales augmente, l'extension radiale du mode de Laguerre-Gauss augmente et l'intensité utile de la pompe diminue donc. L'augmentation de l'intensité pompe permettant d'augmenter le nombre de pétales, compense donc le fait que l'on observe des ailes de plus en plus lointaines du profil de l'onde pompe.

La première partie de la courbe correspondant à une variation rapide de l'intensité s'interprète d'une manière différente. Pour de telles intensités, les transitions d'une marguerite à une autre ne se produisent pas encore. L'intensité de l'instabilité augmente avec l'intensité de la pompe.

4) Conclusion

Le modèle développé dans le premier chapitre analysant les marguerites observées comme des modes de Laguerre-Gauss oscillant dans une cavité formée par un miroir plan et un miroir à contraste de phase, est globalement en bon accord avec notre étude expérimentale. Qualitativement, les marguerites présentent les même caractéristiques que des modes de Laguerre-Gauss, tant du point de vue de la phase relative de chaque pétale que par la similitude entre les figures obtenues en champ proche et en champ lointain. Certains paramètres, comme la distance entre le miroir plan et la cellule, la taille du faisceau ou l'intensité de l'onde pompe, jouent comme prévu un rôle important dans la sélection des modes oscillant dans la cavité.

Ces marguerites, observées lorsque la fréquence du faisceau pompe est proche de la fréquence de résonance de la transition $F=3 \rightarrow F'=2$ du rubidium 85, sont intimement liées à la saturation de la non-linéarité. L'intensité de la pompe aux points où ces marguerites sont les plus intenses doit être suffisante pour que la non-linéarité en ces points ne s'apparente pas à une non-linéarité Kerr. Ces marguerites sont d'ailleurs très différentes de celles obtenues dans le cas d'un matériau Kerr [Tam93]. Nous pouvons par ailleurs espérer observer des marguerites dans d'autres configurations expérimentales et éventuellement dans une configuration ne possédant pas de miroir de rétroaction et comptant deux pompes contrapropagatives, à condition que la non-linéarité soit suffisament saturée. Loin des résonances des transitions atomiques, la non-linéarité est plus faible. Comme nous l'avions montré dans la partie (I.3), l'oscillation des modes de Laguerre-Gauss n'est pas privilégiée: nous avions théoriquement mis en évidence des instabilités telles que des rouleaux. Nous allons dans la partie suivante

présenter expérimentalement les instabilités obtenues loin des résonances et comparer ces résultats avec la théorie développée dans la partie (I.3).

3) Génération d'instabilités loin des résonances.

Les instabilités dites 'marguerites' ne s'observent que lorsque l'écart à résonance du faisceau pompe est d'environ 150 MHz. Expérimentalement plus loin des résonances, nous avons observé des instabilités dont la distribution transverse est différente et est constituée d'anneaux concentriques. Nous pouvons interpréter ces anneaux par la théorie développée dans la partie (I.3). Dans la partie suivante, nous allons dans un premier temps décrire les instabilités observées. Dans un deuxième temps, nous testerons l'influence de différents paramètres tels que l'intensité ou la distance d entre le miroir et la cellule ce qui nous permettra de tester la validité de notre modèle théorique. Enfin, nous nous attacherons à décrire le comportement temporel de ces instabilités et sa dépendance en fonction du diamètre et de l'intensité du faisceau pompe.

3.1) Instabilités observées

Nous décrivons les instabilités observées tout d'abord en fonction de la fréquence du faisceau pompe puis en fonction de son intensité. Nous préciserons également la polarisation de ces instabilités.

3.1.1) Dépendance en fréquence

a) Expérience

Le montage expérimental est le même que dans la partie précédente et a été présenté dans les figures (II.1.2) et (II.1.5). Les instabilités orthogonales et parallèles sont projetées sur l'écran lointain et observées à l'aide d'une caméra CCD.

Les instabilités s'observent sur une très large bande de fréquences, typiquement comprises entre les fréquences de résonance $F = 3 \rightarrow F' = 2,3$ et $F = 2 \rightarrow F' = 2,3$. La figure (II.3.1) présente les figures observées en champ lointain lorsque la fréquence du laser varie. Ce diagramme est obtenu pour un faisceau de diamètre 1.6 mm de puissance de 200 mW et pour une distance d égale à 10 cm.

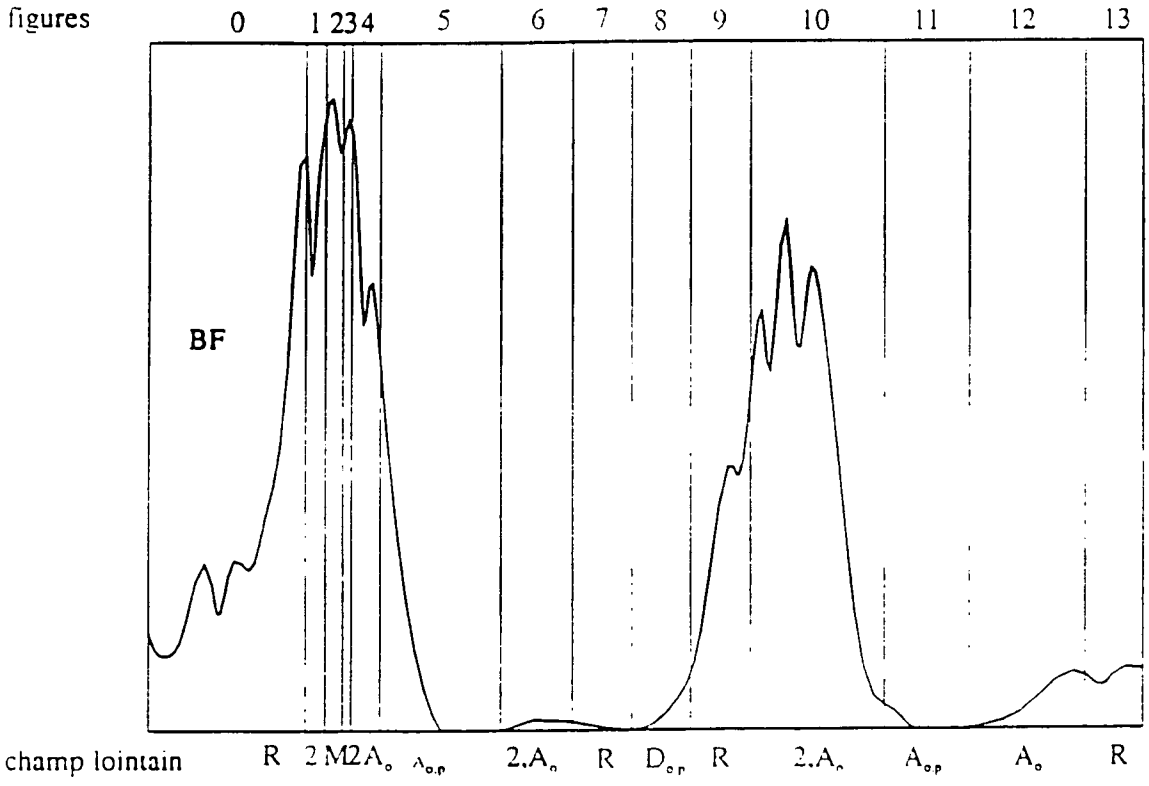


Fig II.3.1:Instabilités générées en champ lointain sur différentes plages de fréquences

A=Anneaux, 2=Rouleaux, M=Marguerites, D=Disque, R=pas d'instabilités,
$_o$=polarisation orthogonale, $_p$=polarisation parallèle

	Orthogonale	Parallèle		Orthogonale	Parallèle
0			5		
1			5		
2			5		
3			6		
4			6		

	Orthogonale	Parallèle		Orthogonale	Parallèle
6			11		
7			11		
8			12		
9			13		
10					

b) Analyse

Décrivons maintenant l'évolution de l'instabilité lorsque la fréquence du laser augmente progressivement en décrivant toute la gamme de fréquence autour des transitions $F = 2,3 \rightarrow F = 2,3$ du rubidium 85.

Dans la plage de fréquence **0**, nous n'observons aucune instabilité. La forme en champ lointain de polarisation orthogonale, correspond à la dépolarisation de la pompe sur les fenêtres de la cellule. Le miroir percé n'élimine pas dans cette expérience tout le faisceau pompe. Il a été donc nécessaire de réaliser sur l'écran lointain un trou rond afin de supprimer cette composante très lumineuse due à la pompe et qui saturerait la caméra.

Jusquà la plage de fréquence numéro 5, les instabilités ne sont polarisées qu'orthogonalement. Ces quatre premières plages sont centrées autour des fréquences de résonance $F = 3 \rightarrow F = 2,3$. Nous observons d'abord la formation de rouleaux, puis de marguerites. Notons que celles-ci dans cette expérience sont associées à des rouleaux émis en faisant un angle très faible par rapport à l'axe des pompes.

Sur une large bande de fréquence, à partir de la zone numéro **4** et jusqu'à la zone numéro **6**, nous observons des anneaux. Ceux-ci ne sont pour les zones **4** et **6**, que polarisé orthogonalement aux pompes. Dans la zone intermédiaire **5**, on observe des anneaux polarisés parallèlement aux pompes. L'intensité de ces anneaux de polarisation parallèle pourra alors être supérieure à l'intensité des anneaux de polarisation orthogonale. Dans la zone **6**, les anneaux ne sont pas parfaitement symétriques. Ils sont souvent plus intenses suivant une direction donnée et pour certaines fréquences, ils s'apparentent à des rouleaux.

Dans les zones **7** et **9**, nous n'observons pas d'instabilités.

Dans la zone **8**, nous observons des disques très intenses de polarisation parallèle et orthogonale.

Dans la zone **10** correspondant à des fréquences voisines des fréquences de résonance de résonance des transitions $F = 2 \rightarrow F' = 2,3$, nous observons encore des instabilités dont la direction de propagation est très proche de la direction de propagation des ondes pompes. Il s'agit là d'anneaux et de rouleaux.

Dans les zones **11** et **12** , nous observons encore des anneaux. En zone **11**, les anneaux de polarisation parallèle sont bien plus intenses que les anneaux de polarisation

orthogonale. En zone **12**, nous n'observons plus que des anneaux de polarisation orthogonale.

Enfin à partir de la zone **13**, nous n'observons plus d'instabilités.

c) Conclusion

Les instabilités sont le plus souvent de polarisation orthogonale à celle des ondes pompes. Les plages de fréquence où s'observent des instabilités de polarisation parallèle sont toujours incluses dans les plages de fréquences où s'observent les instabilités de polarisation orthogonale.

Autour des fréquences de résonance, nous observons principalement des rouleaux et des anneaux de faible angle d'émission ainsi que des marguerites pour des fréquences proches de la fréquence de résonance $F = 3 \rightarrow F' = 2{,}3$. Nous n'avons pas observé de marguerites autour de l'autre résonance. Loin des résonances, nous observons des anneaux que nous allons décrire dans la suite.

3.1.2) Variation des instabilités avec l'intensité de la pompe

La fréquence et l'intensité de l'onde pompe sont initialement choisies de telle sorte que l'oscillation des instabilités dans la cavité soit clairement visible (voir par exemple la figure (II.3.1)). L'intensité de la pompe est diminuée progressivement en tournant la lame demi-onde. Au seuil d'oscillation, les instabilités sont polarisées orthogonalement. Pour des intensités plus fortes, une instabilité ayant une composante parallèle apparait. L'intensité des instabilités parallèles et orthogonales augmente alors quand on augmente l'intensité de l'onde pompe. Par contre le diamètre des anneaux ne varie pas avec l'intensité et ne dépend que de la fréquence et de la distance d entre le miroir plan et la cellule. La figure suivante présente une reproduction des anneaux de polarisation orthogonale obtenus lorsque l'intensité de la pompe est respectivement de 100 mW, 200 mW et 400 mW pour une distance d et une fréquence fixées.

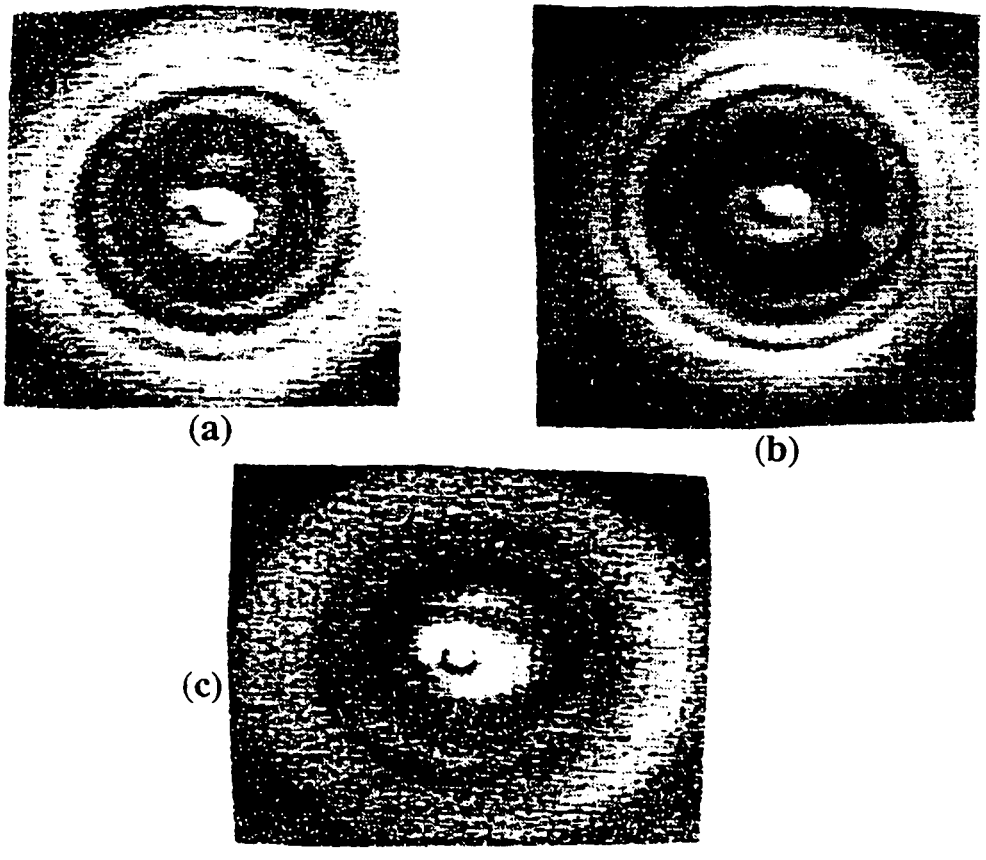


Fig II.3.3: Anneaux obtenus pour des intensités de 400 mW (a), 200 mW (b) et 100 mW(c)

Nous avons également réalisé des diagrammes de bifurcation. Nous utiliserons le dispositif présenté dans les figures (II.1.2) et (II.1.4) ainsi que dans la partie (II.2.3.2). Un oscilloscope en mode XY nous permettra de représenter l'intensité de l'instabilité en fonction de l'intensité de la pompe. Ces diagrammes de bifurcation sont obtenus pour différentes fréquences du laser. L'intensité de l'instabilité croit avec l'intensité de la pompe. Un cycle d'hystérésis est souvent observé comme le montrent les diagrammes de bifurcation obtenus pour trois fréquences différentes et présentés sur la figure (II.3.5.b).

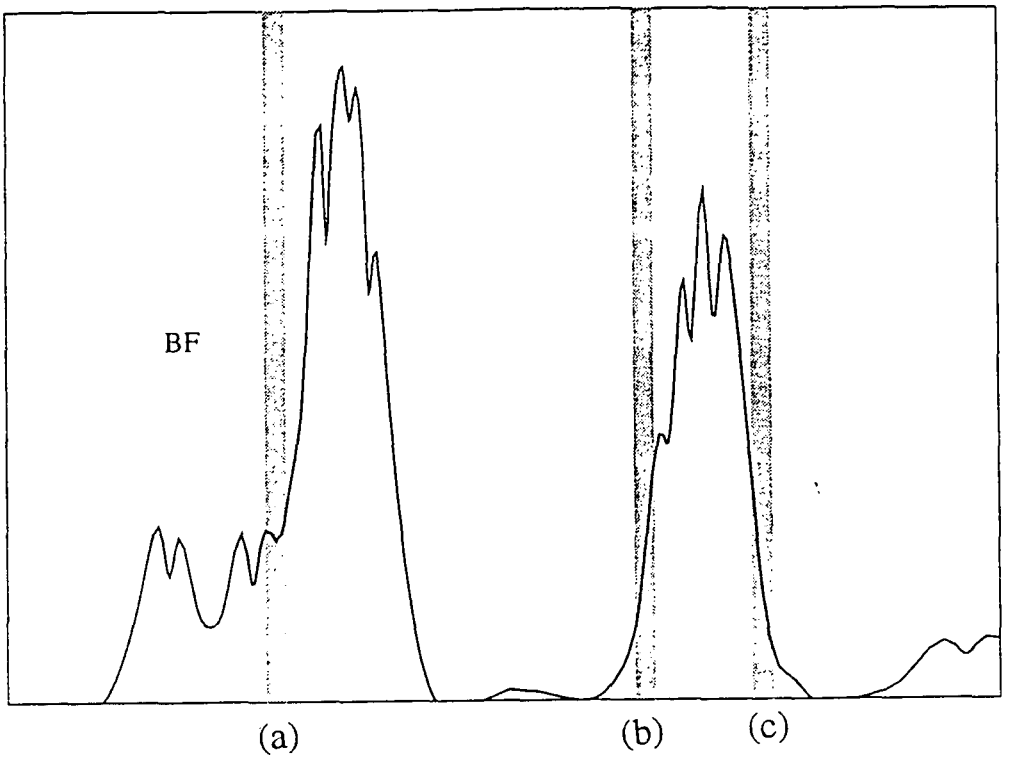


Fig II.3.4.a: Plages de fréquences sur lesquelles s'observent les cycles d'hystérésis

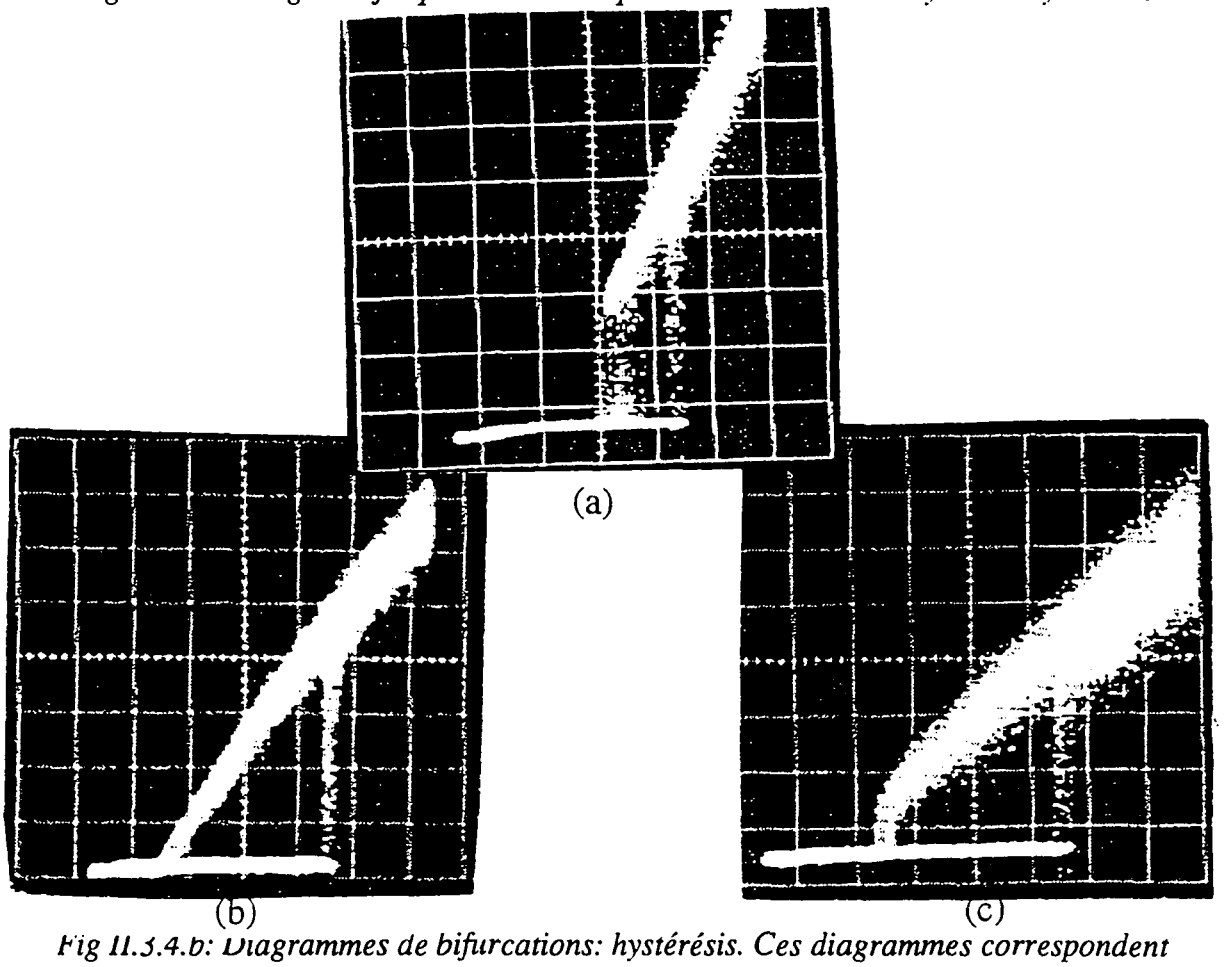


Fig II.3.4.b: Diagrammes de bifurcations: hystérésis. Ces diagrammes correspondent respectivement aux points (a), (b), (c) de la figure précédente.

3.2) Instabilités expérimentales et modèle théorique

Nous nous proposons dans cette partie d'expliquer à l'aide du modèle théorique présenté dans la partie (I.3) quelques caractéristiques de ces instabilités. En particulier, nous étudierons la dépendance du diamètre des anneaux en fonction de la distance d entre le miroir et la cellule. La variation de l'angle d'émission des instabilités en fonction de la distance d ayant été prédite dans la partie (I.3), nous pourrons ainsi tester le modèle théorique.

3.2.1) Théorie

Dans la théorie développée dans la partie (I.3), nous avions montré comment deux faisceaux de polarisation orthogonale à celle des ondes pompes émis dans des directions symétriques par rappport à l'axe des pompes pouvaient osciller. L'angle entre ces nouveaux faisceaux et l'axe optique est donné au seuil par la formule suivante

$$\theta^{p}_{seuil} = \sqrt{\frac{1}{kd}\left(\eta - \frac{\pi}{2} + 2p\pi\right)} \qquad \text{(II.3.1)}$$

Rappelons que η dépend de l'accord à la résonance. Loin de la résonance, lorsque l'absorption est négligeable il vaut 0 ou π suivant le signe de l'écart à résonance. p peut prendre toutes les valeurs entières telles que le signe du terme sous la racine reste positif. La projection de ces instabilités sur un écran lointain est constituée par deux taches diamétralement opposées.

3.2.2) Résultats expérimentaux

Expérimentalement nous n'observons en général à grande distance non pas deux points diamétralement opposés mais des anneaux concentriques. Ceux-ci ne s'observent que lorsque l'écart à résonance est suffisamment grand. Au seuil d'oscillation, la polarisation de ces anneaux est orthogonale à celle des ondes pompes. Au delà du seuil, il est possible d'observer des instabilités de polarisation parallèle.

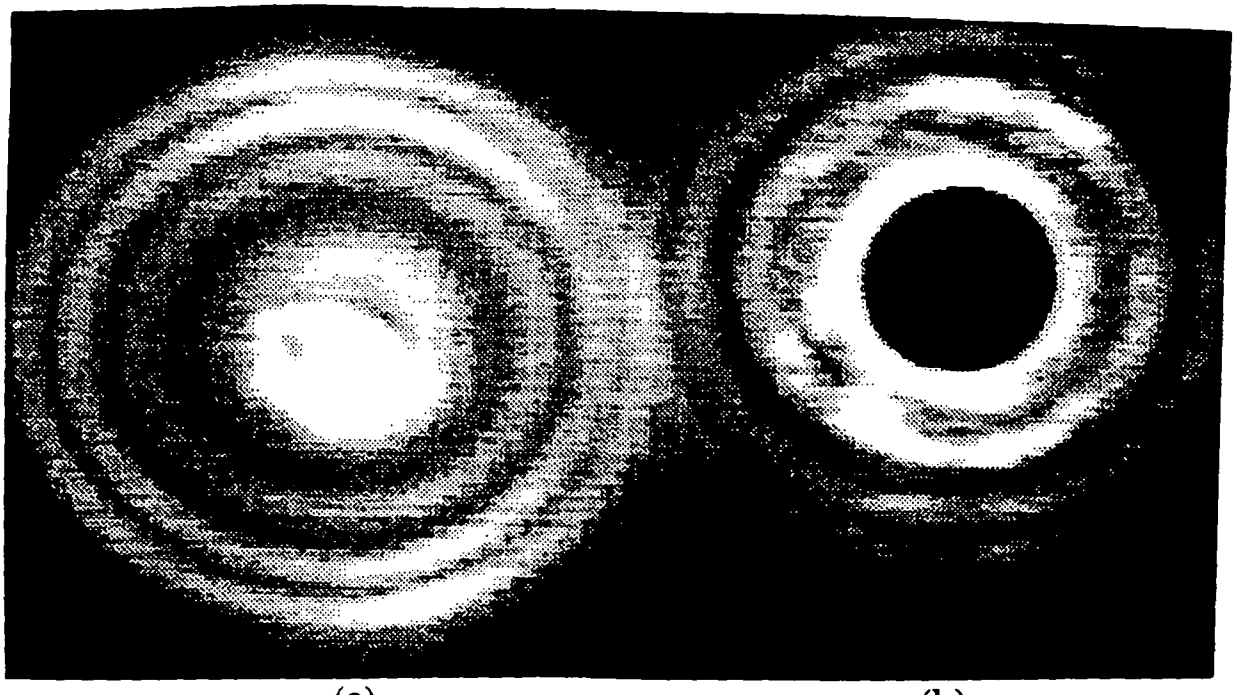
3.2.3) Polarisation de l'instabilité

L'instabilité au seuil d'oscillation est bien polarisée orthogonalement aux ondes pompes conformément à notre modèle développé dans la partie (I.3) basé sur du

pompage optique dans un système 1 / 2 → 1 / 2. Ce modèle ne prédit pas la génération d'instabilités de polarisation parallèle. Cependant, pour certaines fréquences, des instabilités orthogonales et parallèles sont émises et leur angle d'émission est comparable.

D'après l'étude que nous avons réalisée dans le paragraphe (I.3.2.1), l'angle d'émission des instabilités parallèles étant comparable à celui des instabilités orthogonales, des effets linéaires d'ordre supérieur (les instabilités orthogonales seraient suffisamment intenses pour générer des instabilités de polarisation orthogonale à leur propre polarisation et donc de polarisation parallèle à la pompe) ne pourraient expliquer la génération d'instabilités parallèles. De même, une non-linéarité due à une saturation de la transition atomique nécessite une intensité de la pompe beaucoup plus importante que la saturation du pompage optique, et n'est probablement pas responsable de la génération de l'instabilité parallèle. Il serait donc raisonnable d'attribuer l'origine de ces instabilités parallèles à des processus de pompage optique réalisés pour une transition telle que le moment cinétique J_g du niveau fondamental soit supérieur à 1/2. En effet, bien que pour des raisons évidentes de simplicité, nous ayons réalisé notre modèle dans le système 1 / 2 → 1 / 2, les transitions physiques autour desquelles sont générées les instabilités correspondent à des transitions $F = 2,3 \rightarrow F' = 2,3$. Il est alors possible dans ces système plus complexe dont le J_g est supérieur à 1/2 de générer par pompage optique des instabilités de polarisation parallèle à celle des pompes. Notons que ces processus de pompage optique par des ondes de même polarisation linéaire nécessitent en général une intensité des pompes supérieure à celle nécessaire pour réaliser du pompage optique avec des ondes de polarisation circulaire. Ceci permettrait d'expliquer que pour certaines fréquences et intensité de la pompe, il soit possible d'observer uniquement des anneaux de polarisation orthogonale alors que les instabilités parallèles sont toujours associées à des instabilités orthogonales.

La figure (II.3.6) présente des anneaux en champ lointain de polarisations parallèle et orthogonale obtenus pour une intensité du faisceau pompe de 400 mW et de diamètre à mi-hauteur égal à 0,8 mm.



(a) (b)

Fig II.3.5: anneaux de polarisation orthogonale(a) et parallèle (b)

3.2.4) Modèle théorique et angles d'oscillation

a) théorie

L'émission d'une paire de faisceaux symétriques par rapport à l'axe optique privéligie un plan particulier. Les anneaux concentriques observés expérimentalement ne privilégient aucune direction et nous pouvons les décomposer comme un ensemble de paires d'ondes symétriques par rapport à l'axe optique et formant le même angle θ avec cet axe. Les angles d'oscillation de ces anneaux doivent vérifier la même loi que pour deux points diamétralement opposés. Cette loi avait été établie au seuil d'oscillation mais nous avons remarqué expérimentalement que le diamètre des anneaux ne variait pas avec l'intensité de la pompe. Par conséquent. la relation théorique établie au seuil peut être appliquée dans des conditions expérimentales très loin du seuil. Nous nous limiterons dans cette étude aux seules instabilités orthogonales.

b) Expérience

L'expérience suivante a été réalisée pour un faisceau de diamètre 1.6mm de puissance 400 mW. La fréquence du laser est asservie au cours de cette expérience et est supérieure à la fréquence de résonance de la transition $F = 3 \rightarrow F' = 3$. η vaut alors π. Nous effectuons plusieurs mesures du diamètre des premiers anneaux concentriques obtenus en projetant les instabilités orthogonales sur un écran lointain situé à une distance de 4 m de la cellule. A chaque mesure, nous ferons varier la distance d entre le miroir et la cellule. Nous en déduirons l'angle d'oscillation correspondant aux premiers anneaux. Si ces anneaux ont un diamètre trop faible, il sera difficile de les distinguer de la tache centrale due à une éventuelle instabilité sur l'axe ou à une légère dépolarisation de la pompe. La figure (II.3.6) donne le carré de l'angle d'oscillation de deux anneaux concentriques successifs en fonction du facteur 1/kd. La théorie prévoit une variation linéaire. Pour un angle $\eta=\pi$, le coefficient de proportionnalité entre θ^2 et 1/kd doit respectivement être de 1,57 pour p=0, 7,85 pour p=1 et 14,1 pour p=2.

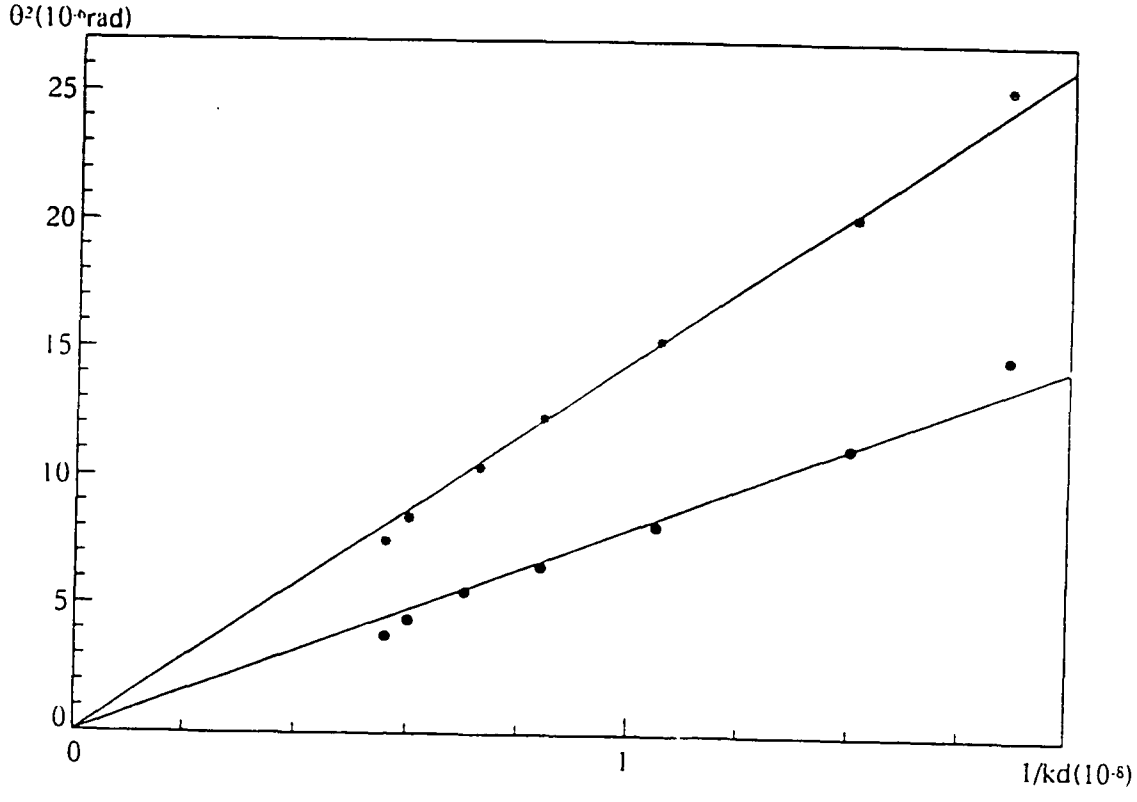


Fig II.3.6: θ^2 en fonction de 1/kd pour les deux anneaux successifs du coté HF de la résonance BF.

Le carré de l'angle d'oscillation des anneaux est bien proportionnel à 1/kd pour les deux anneaux considérés. Les pentes expérimentales obtenues sont de 15 et de 8,6 et sont compatibles avec des valeurs de p égales à 2 et 1 respectivement. L'anneau correspondant à p=0 est de diamètre beaucoup plus faible. Il correspond à l'instabilité de faible diamètre montrée dans les figures (II.3.1).

3.2.5) Conclusion

Nous avons ici comparé le modèle théorique développé dans la partie (I.3) avec les résultats expérimentaux. Bien que le modèle ne soit en toute rigueur valable que près du seuil, nos expériences, réalisées loin du seuil d'oscillation, portaient sur des mesures d'angle d'oscillation des instabilités qui expérimentalement ne dépendent pas notablement de l'intensité de la pompe. Ces mesures se sont révélées en bon accord avec la théorie. Des calculs menés à un ordre supérieur [Gry93a] permettent de déterminer les diagrammes de bifurcation pour différentes figures. Les études expérimentales correspondantes mériteraient d'être faites et permettraient d'expliquer certains écarts entre la théorie et l'expérience. L'aspect temporel de ces instabilités n'a également pas été abordé dans cette partie et fera l'objet de la partie suivante.

3.3) Aspects temporels de l'instabilité

La dépendance spatio-temporelle de l'instabilité est souvent très complexe. Plusieurs études expérimentales ont mis en évidence un comportement des formes observées s'apparentant à de la turbulence. Ainsi, au delà d'un certain seuil, dans un système comportant un cristal liquide et un miroir de rétroaction [Thü93], l'augmentation d'un paramètre comme l'intensité du laser provoque une désorganisation de la structure hexagonale initiale et l'observation sur un écran lointain de taches lumineuses se déplaçant dans un désordre apparent. D'autres études expérimentales [Cip93] ont mis un évidence un comportement chaotique dans l'intensité des instabilités émises. Il s'agit là simplement de chaos temporel. Dans notre étude, la forme des anneaux n'évolue pas en augmentant l'intensité si ce n'est par l'augmentation du nombre des anneaux observés. Par contre, l'enregistrement de l'intensité de l'instabilité met en évidence un comportement temporel très riche et bien souvent chaotique.

Nous présentons dans cette partie l'évolution du comportement temporel des instabilités en fonction de l'intensité de la pompe et du diamètre de faisceau. Nous montrerons en particulier que dans certaines conditions les instabilités observées peuvent être statiques ou périodiques et que dans d'autres conditions les instabilités temporelles présentent un comportement d'apparence chaotique.

Nous commencerons par montrer comment des instabilités statiques peuvent devenir périodiques lorsque l'axe de propagation des pompes et l'axe optique ne sont plus confondus. Nous chercherons ainsi à tester la théorie développée en (I.5). Nous chercherons ensuite à décrire la dynamique pour toute la gamme de fréquences du laser sur laquelle s'observent des instabilités. Nous exposerons tout d'abord notre méthode expérimentale. Nous décrirons le dispositif mis en place permettant de mesurer l'intensité des instabilités. Nous soulignerons en particulier les problèmes liés à l'échantillonage du signal par les oscilloscopes. Enfin nous exposerons nos résultats expérimentaux. Nous préciserons les plages de fréquences sur lesquelles s'observent les instabilités, les plages sur lesquelles elles sont périodiques et nous étudierons la dépendance des instabilités temporelles en fonction des paramètres de l'expérience.

3.3.1) Influence de la géométrie des pompes sur la périodicité du signal.

Pour certaines fréquences du laser des formes de type rouleaux sont engendrées par le milieu. Pour un faisceau de rayon de pincement 1,4 mm, ces rouleaux sont obtenus par exemple pour des fréquences dans la zone 3 ou la zone 10 de la figure (II.3.1). Ces instabilités sont en général statiques. Cependant, lorsque l'axe de propagation de la pompe fait un angle très faible avec l'axe optique de la cavité, ces instabilités deviennent dynamiques, de telles observations étant qualitativement conformes à la théorie développée en (I.5). Nous allons maintenant étudier si cette évolution suit quantitativement la loi théorique.

Toute notre étude sera réalisée pour un faisceau de rayon de pincement 0,7 mm et pour une distance entre le miroir et la cellule de 10 cm. Nous réaliserons deux expériences successives. La première aura pour but d'étudier l'influence de l'angle α entre le faisceau et l'axe optique et la deuxième permettra d'évaluer la dépendance de la fréquence en fonction de l'intensité de la pompe.

a) Dépendance de la fréquence δ en fonction de l'angle α

La relation (I.5.34.b) prédit la variation suivante de la fréquence δ d'oscillation de l'instabilité en fonction de divers paramètres du système:

$$\delta = \left(2\gamma + \gamma_p\right)\tan\left(2\alpha k d \theta \cos\varphi\right)$$

La théorie prévoit donc une variation de δ linéaire en α si $2\alpha k d \theta \cos\varphi << 1$. θ est de l'ordre de 10^{-4} rad, $d=10^{-1}$ m, k est de l'ordre de 10^{7} m^{-1} et α sera toujours de l'ordre du milliradian. La variation attendue de δ/cosφ en fonction de α doit donc peu s'écarter d'une droite.

L'intensité de la pompe est de 400 mW et nous choisissons une fréquence proche des transitions $F = 3 \rightarrow F' = 2,3$. La courbe expérimentale représentant δ/cosφ en fonction de α est donnée dans le graphique suivant. Les points expérimentaux s'inscrivent bien autour d'une droite passant par l'origine.

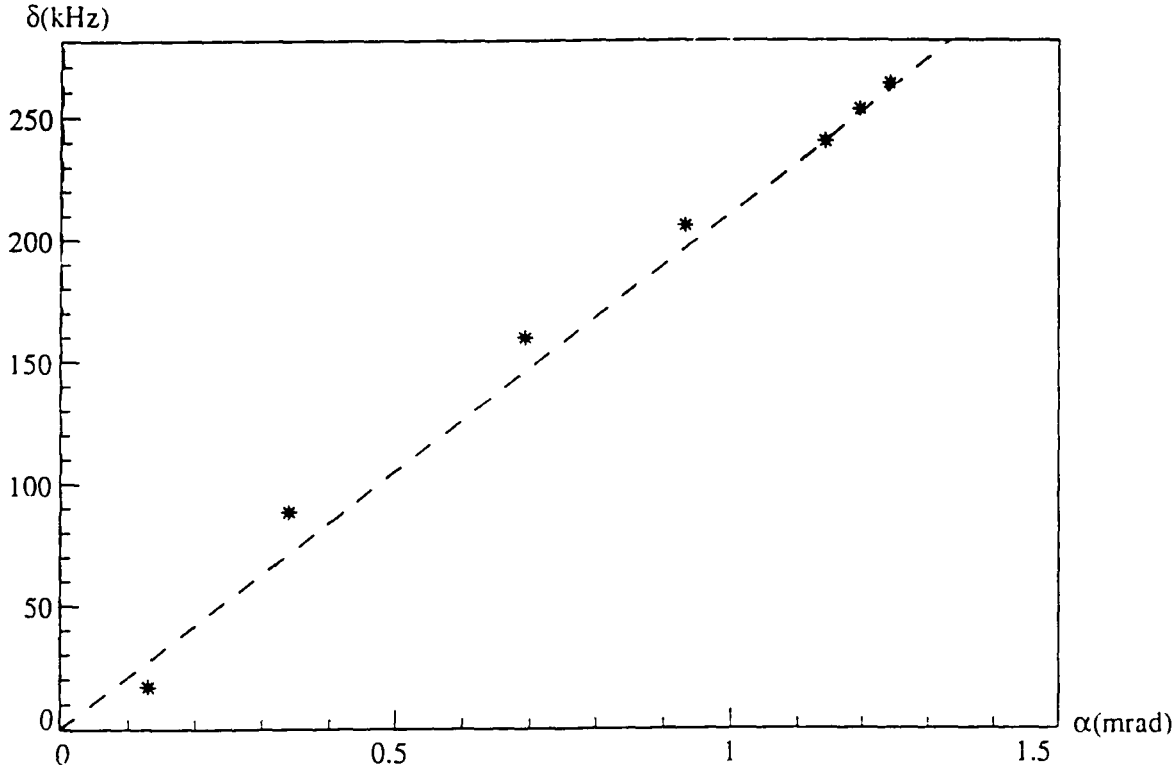


Fig II.3.7: variation de δ/cosφ en fonction de l'angle α.

Expérimentalement, on observe également conformément à la théorie que lorsque φ=π/2, δ est nul.

b) Variation de la fréquence en fonction de l'intensité

La relation (I.5.24) donne la valeur de γ_p en fonction de l'intensité de la pompe I_f

$$\gamma_p = \frac{\Gamma}{36} \frac{d^2(1+R)I_f}{\hbar^2\left(\frac{\Gamma^2}{4}+\Delta^2\right)}$$

La variation de δ doit donc être linéaire en I_f. Le graphe suivant a été obtenu pour une même fréquence du laser, un angle α égal à 10^{-3} rad et une distance de 10 cm.

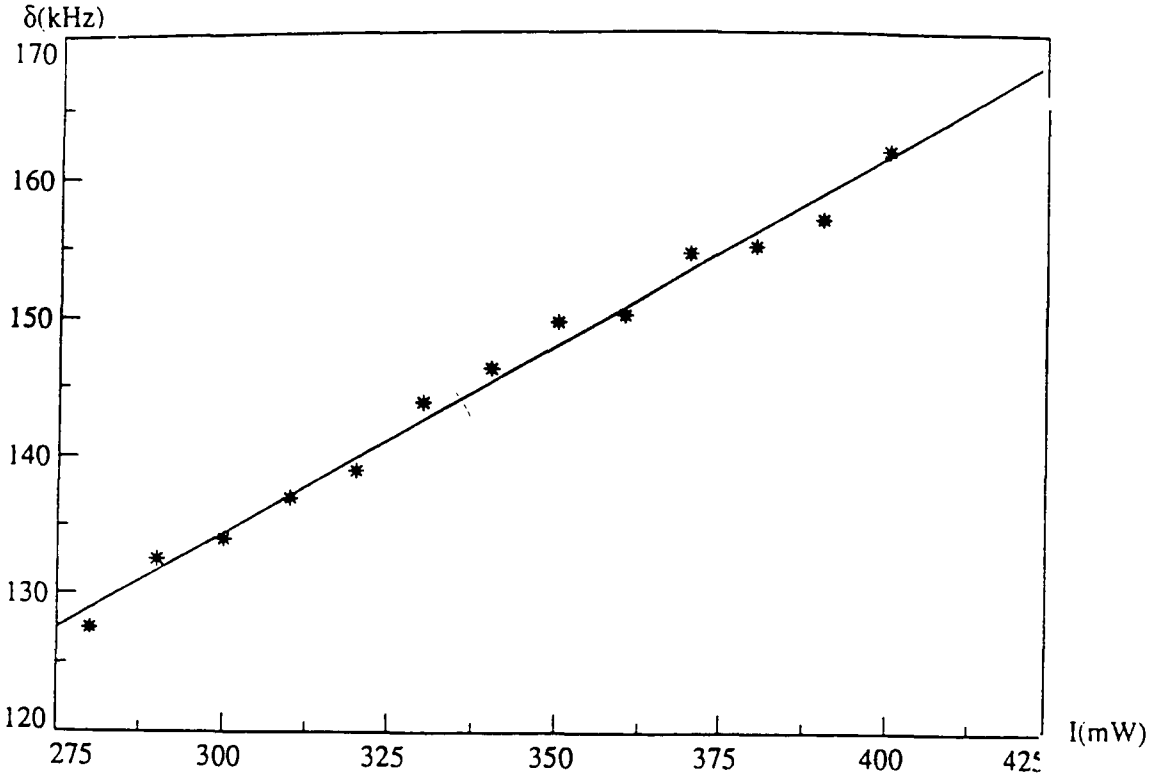


Fig II.3.8: variation de la fréquence δ en fonction de l'intensité pompe I_f

La fréquence δ varie linéairement en fonction de l'intensité pompe I_f.

Ces résultats expérimentaux montrent bien la validité de notre modèle lorsque la figure en champ lointain correspond à des rouleaux émis dans des directions très proches de l'axe optique. Un tel modèle peut servir de guide pour les situations plus complexes étudiées maintenant où les instabilités ne sont plus périodiques mais d'apparence chaotique.

3.3.2) Méthode expérimentale

Expérimentalement, nous chercherons dans cette partie à caractériser le comportement temporel des instabilités. Nous avons mis au point un dispositif permettant de les observer en champ lointain tout en enregistrant leur intensité. Ce dispositif comprend un système de détection adapté présenté dans le paragraphe b). La partie c) nous permettra d'exposer les problèmes liés à l'échantillonage. Enfin nous exposerons dans la dernière partie notre protocole expérimental. La partie (3.3.3) permettra ensuite d'exposer les résultats de nos mesures.

a) Montage

Pour une analyse en polarisation parallèle, le faisceau se propageant suivant l'axe optique correspond pour une grande partie au faisceau pompe. En polarisation orthogonale, une partie de ce faisceau correspond à la dépolarisation du faisceau pompe sur les faces de la cellule. Notre étude portant avant tout sur les instabilités hors d'axe, nous avons chercher à nous affranchir de ces parasites dus à la pompe et nous avons donc placé un miroir percé sur le trajet de l'instabilité parallèle ainsi que sur le trajet de l'instabilité orthogonale. Pour certaines fréquences du faisceau pompe, la tache centrale en champ pouvant devenir très large, le miroir percé ne permet alors plus d'éliminer tout le faisceau central. Cet effet est particulièrement sensible pour la polarisation parallèle qui contient l'essentiel du faisceau pompe.

b) Détection du signal

Pour détecter des éventuelles instabilités temporelles, il est important d'utiliser des diodes dont la bande passante est suffisamment large. La fréquence des instabilités étudiées se situe typiquement dans la gamme 0-1 MHz. Par conséquent, la bande passante des diodes et des amplificateurs utilisés doit être bien supérieure à 1 MHz. Nous utiliserons un système de détection (diodes + amplificateur) réalisé au laboratoire [Hil92] et dont la bande passante varie entre 6,5 et 7,75 MHz suivant les diodes utilisées. A ce système de détection nous pourrons associer si nécessaire un

amplificateur Nuclétude SCD-5-30-1 dont la bande passante est de 500 MHz et le gain de 30 dB. Le signal continu pourra lui aussi être amplifié avec un gain de 10 ou de 100 dB. Le système de détection ainsi réalisé nous permettra de détecter dans nos instabilités des fréquences se situant dans la gamme 0-6 MHz.

Nous enregistrerons alors l'intensité dynamique des instabilités hors d'axe parallèles et orthogonales en envoyant le signal transmis par l'ensemble diode+amplificateur d'abord sur un oscilloscope numérique de la marque Lecroy 9310M. Par la suite, les expériences seront réalisées en utilisant un détecteur numérique réalisé au laboratoire par J. C. Bernard et B. Legaut qui permet un transfert des données plus rapide.

c) Echantillonnage

Les oscilloscopes et détecteurs numériques fonctionnent en réalisant un échantillonnage du signal. Chaque enregistrement est caractérisé par une fréquence d'échantillonnage f_e et un nombre de points N_0. Durant l'enregistrement, l'oscilloscope mesure toutes les $(1/f_e)$ secondes la tension du signal et réalise ainsi N_0 mesures. A partir de ces mesures, il est alors possible de réaliser le spectre de Fourier du signal. Un premier problème posé par l'échantillonnage est que la durée de l'enregistrement N_0/f_e est finie et la précision en fréquence du spectre de Fourier est ainsi limitée. Un deuxième problème est lié au théorème de Shannon dont nous donnerons une illustration par la suite: la fréquence d'échantillonnage limite la fréquence maximum que nous pouvons détecter. Nous montrerons également comment une fréquence d'échantillonnage trop basse peut conduire à des résultats erronés.

α) Précision de la mesure

La fréquence du signal minimum que nous pourrons détecter correspond à un signal qui n'évoluera que d'une seule période durant toute la durée de l'enregistrement. La durée de l'enregistrement étant de N_0/f_e, la fréquence minimumν_{min} vérifiera alors la relation suivante:

$$\nu_{min} = \frac{f_e}{N_0}$$

De plus toutes les fréquences vues par le détecteur seront donc des multiples de f_e/N_0.

β) *Fréquence maximum et théorème de Shannon*

La fréquence maximum du signal que nous pourrons détecter est obtenue lorsque, sur une durée d'enregistrement, il est possible de détecter un nombre maximum de périodes. Un nombre de points d'échantillonnage minimum sera donc nécessaire pour décrire une période du signal. L'intervalle de temps entre deux échantillonnages est égal à $1/f_e$. Le graphe suivant nous permettra (cas **a**) et **b**)) de déterminer la fréquence maximum vue par le détecteur. Le cas **c**) nous permettra d'illustrer une mesure erronée de fréquence dans le cas où la fréquence d'échantillonnage est trop basse.

-Cas a): les périodes du signal physique et de l'échantillonnage étant égales, le détecteur numérique verra un signal constant. L'échantillonnage donnera alors une indication erronée sur le caractère statique du signal.

-Cas b): Le signal physique a dans ce cas pour période $2/f_e$ et l'échantillonneur verra aussi un signal de période $2/f_e$. Le détecteur verra ainsi la période réelle du signal physique.

-Cas c):Considérons maintenant un signal de fréquence $f_e/3$. Le signal ainsi échantillonné verra sa valeur d'abord décroître puis réaugmenter en repassant par sa valeur initiale et décroître à nouveau. La période vue par le détecteur sera alors égale à $3/f_e$ ce qui correspond bien à la période réelle du signal.

-Cas d): Le signal a là une période réelle de $4/(3\ f_e)$. Cependant le signal échantillonné commencera par décroître pendant un temps égal à $2/f_e$ puis réaugmentera pendant un temps de $2/f_e$ et rediminuera ensuite en repassant par sa valeur initiale. La période de ce signal échantillonné sera alors égale à $4/f_e$ alors que sa période réelle est de $4/(3\ f_e)$.

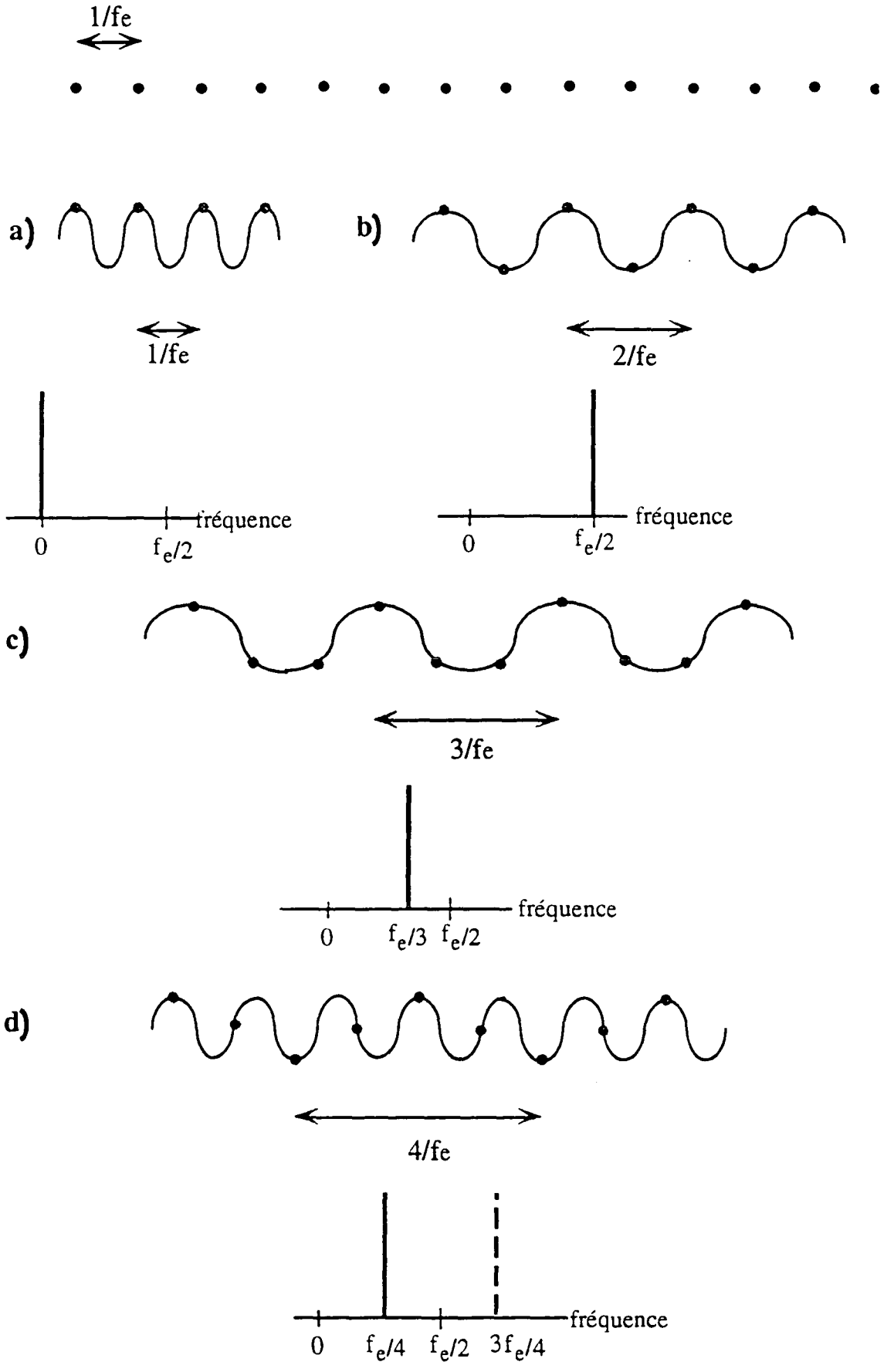


Fig II.3.9 : Echantillonnage d'un signal et spectres de Fourier associés

Nous avons réussi à montrer sur ces quelques exemples que la fréquence maximale vue par l'échantillonneur est de $f_e/2$ et que tout signal dont la fréquence réelle était supérieure à $f_e/2$ était analysé comme un signal de fréquence inférieure à $f_e/2$. Le théorème de Shannon précise en effet que l'échantillonneur ne peut voir que des fréquences incluses dans l'intervalle $[-f_e/2, f_e/2]$. Tout signal de fréquence ν vérifiant $\nu=p\ f_e+f$ avec $-f_e/2<f<f_e/2$ et p entier, est alors analysé comme un signal de fréquence f comme nous l'avons vu dans l'exemple donné en **d)**.

Par conséquent si aucun filtre en fréquence n'est adapté au préalable avant l'échantillonneur, certains signaux échantillonnés à une fréquence f_e et dont la fréquence réelle est supérieure à $f_e/2$ seraient analysés comme des signaux dont la fréquence est comprise dans l'intervalle $[0, f_e/2]$. Il sera donc nécessaire d'adapter un filtre coupant sur le signal physique non encore échantillonné les fréquences supérieures à $f_e/2$ pour ne conserver que les signaux dont la fréquence réelle est effeectivement inférieure à $f_e/2$.

En résumé, un échantillonnage de faible fréquence permettra une meilleure finesse dans l'étude du spectre. La précision de la mesure en fréquence sera de f_e/N_0. La fréquence maximum pouvant être vue par l'échantillonneur sera de $f_e/2$. Il sera important de mettre au point un dispositif permettant de distinguer les signaux dont les fréquences sont effectivement inférieures à $f_e/2$ et les signaux de fréquence ν supérieure à $f_e/2$.

d) Protocole expérimental

Le but de cette partie sera de présenter nos méthodes de mesures. Nous expliquerons comment nous avons fixé et choisi les différents paramètres du système (intensité, diamètre, fréquence de la pompe, distance d entre le miroir et la cellule). Nous préciserons également les paramètres de l'échantilloneur (fréquence f_e de l'échantillonage et nombre de points N_0 dans l'échantillon). Enfin nous expliquerons comment nous analysons nos données et comment nous nous affranchissons des problèmes posés par le théorème de Shannon.

α) Mesure

Le but de toutes ces mesures est d'analyser l'intensité des instabilités parallèles et orthogonales hors d'axe pour différentes fréquences, différentes intensités et différents

diamètres du faisceau pompe. Pour chaque série de mesures, nous choisissons une intensité, un diamètre du faisceau pompe et une distance d entre le miroir et la cellule. Dans chaque série de mesure, ces paramètres resteront inchangés mais nous faisons varier la fréquence de l'onde pompe.

Les deux Fabry-Pérot externes décrits dans la partie (II.1) nous permettront de balayer et de repérer la fréquence du laser. Pour chaque mesure, le laser sera asservi en fréquence à l'aide du Fabry-Pérot d'asservissement. Après chaque mesure, nous balaierons la fréquence du laser sur un intervalle spectral libre du Fabry-Pérot de référence soit 150 MHz. Nous amenerons alors le Fabry-Pérot d'asservissement à l'accord et nous asservirons le laser en fréquence. Nous réalisons ainsi une mesure tous les 150 MHz.

Pour chaque mesure à une fréquence donnée, nous effectuons alors trois enregistrements successifs à des fréquences d'échantillonages de 10^6, 5.10^6 et de 2.10^7 échantillons par seconde. Nous enregistrerons des séquences de 50000 points sur le Lecroy et 65536 sur le le détecteur numérique. Nous utiliserons par la suite des algorithmes de calculs de transformée de Fourier rapide qui nécessitent que le nombre de points utilisé soit égal à une puissance de 2. Par conséquent, dans les études suivantes ou nous ne nous intéresserons qu'aux fréquences de l'instabilité dynamique, nous n'utiliserons pas les 50000 points du Lecroy mais simplement 32768. Le diagramme suivant donne pour chaque fréquence d'échantillonage, les gammes de fréquences susceptibles d'être vues par les analyseurs.

Echantillonage	Fréquence minimum (Lecroy)	Fréquence minimum (analyseur maison)	Fréquence maximum
10^6pts/s	30 Hz	15 Hz	500 kHz
5 10^6pts/s	132 Hz	76 Hz	2.5 MHz
2 10^7pts/s	610 Hz	305 Hz	10 MHz

En conclusion, un échantillonnage de faible fréquence permet bien une meilleure définition dans l'espace de Fourier mais ne permet pas de voir des fréquences trop importantes. A l'inverse, un enregistrement réalisé à une grande fréquence d'échantillonnage ne permet pas d'avoir une très bonne résolution mais permet de voir des fréquences importantes.

β) *Analyse des données*

Cette méthode consistant à réaliser trois enregistrements à trois fréquences d'échantillonnage f_e différentes permet de s'affranchir des problèmes présentés dans le théorème de Shannon et de ne s'intéresser qu'aux signaux dont la fréquence se situe réellement dans la gamme [0, f_e/2].

En effet un échantillonnage à une fréquence de f_e=2 10^7 pts/s, ne permet de voir que des fréquences inférieures à 10 MHz. La fréquence de coupure des diodes étant de l'ordre de 7 MHz, le spectre de fréquence du signal transmis par la diode est compris dans la gamme [0 , 7 MHz]. Par conséquent le spectre de fréquence vu par l'échantillonneur corresppond exactement au spectre de fréquence du signal réel.

Par contre, un échantillonnage de fréquence 5 10^6 pts/s ne permet de voir que les fréquence inférieures à 2.5 MHz. Par conséquent, toutes les signaux de fréquence supérieure à 2.5 MHz sont alors analysés comme des signaux de fréquence inférieure à 2.5 MHz. Notre analyse en fréquence du signal est faussée par l'échantillonnage. Si par contre la mesure réalisée avec l'échantillonnage de 2 10^7 pts/s nous montre que les fréquences caractéristiques du signal sont inférieures à 2.5 MHz, nous pouvons en déduire que le spectre de fréquence obtenu avec un échantillonage de fréquence 5 10^6 pts/s correspond bien au spectre réel. Nous sommes alors assurés que l'échantillonnage n'a pas faussé notre analyse en fréquence. Nous aurons ainsi accès à un spectre de Fourier de moins grande largeur mais de meilleure précision.

Si enfin le spectre de fourier du signal obtenu avec un échantillonnage de fréquence 5 10^6 pts/s par exemple, a une amplitude négligeable au delà de 500 kHz par rapport à son amplitude maximum, nous pourrons utiliser la troisième mesure réalisée à une fréquence d'échantillonnage de 10^6 pts/s. La précision de notre analyse en fréquence sera ainsi bien meilleure sans que nos résultats soient faussés par l'échantillonnage.

Ce protocole expérimental nous permettra d'enregister l'intensité des instabilités et de connaître leur comportement temporel dans la gamme [0 , 7 MHz]. Un protocole similaire sera également utilisé dans la partie suivante où nous étudierons le comportement temporel des instabilités créées par deux pompes se propageant dans des sens opposés.

3.3.3) Résultats expérimentaux

a) Présentation générale

Cette partie nous permettra de présenter quelques résultats expérimentaux. Plusieurs séries de mesures ont été réalisées en adoptant la démarche décrite dans les paragraphes précédents. Dans chaque série de mesures, nous avons fixé les valeurs des différents paramètres suivants: le diamètre du faisceau pompe sera pris successivement égal à 0,4 mm, 0,8 mm et 1,6 mm, la puissance de la pompe sera égale successsivement à 100 mW, 200 mW et 400 mW, enfin la distance d vaudra suivant les expériences 8 et 16 cm. Nous enregistrerons l'intensité des instabilités hors d'axe parallèles et orthogonales. Les plages de fréquence pour lesquelles s'observent les instabilités parallèles sont incluses dans les plages de fréquence pour lesquelles s'observent les instabilités orthogonales (voir paragraphe (II.3.1.1)). Les courbes expérimentales suivantes préciseront les fréquences pour lesquelles il est possible d'observer des instabilités orthogonales. Les plages de fréquence du laser correspondantes seront représentées en gris sur les spectres de la figure (II.3.10).

De plus pour certaines fréquences du faisceau pompe, les instabilités observées sont principalement périodiques. Pour d'autres fréquences, le spectre de ces instabilités est large et leur dépendance temporelle est chaotique. La figure suivante présente des spectres obtenus pour les paramètres suivants: d=16 cm, diamètre du faisceau=0,8 mm, Puissance de la pompe=400 mW. Les fréquences de l'onde pompe pour lesquelles ces spectres chaotique, périodique et 'presque périodique' sont obtenus, seront notées dans la figure (II.3.10) suivante.

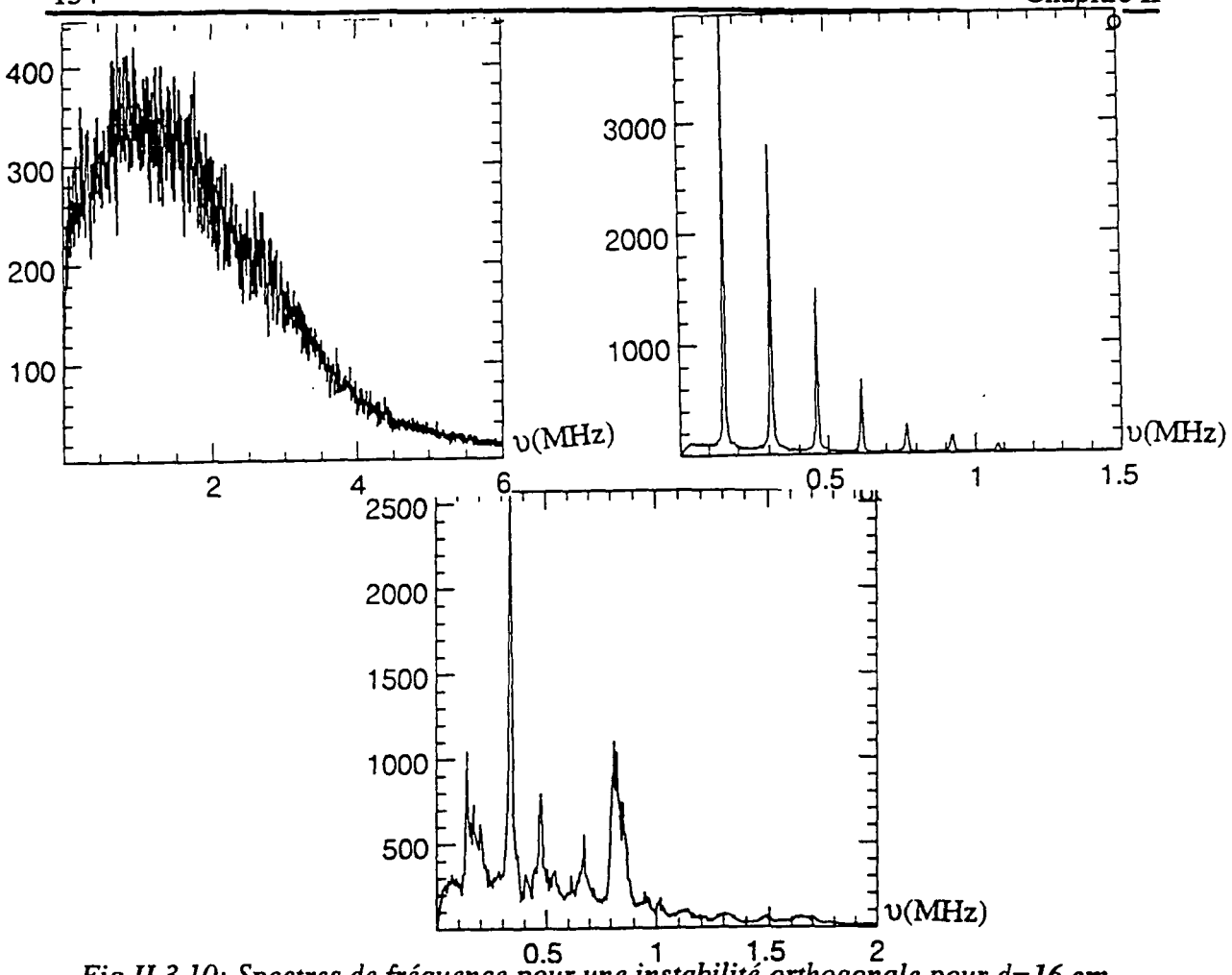


*Fig II.3.10: Spectres de fréquence pour une instabilité orthogonale pour d=**16 cm**, diamètre du faisceau=**0,8 mm**, Puissance de la pompe=**400 mW***

Nous nous attachons principalement à l'intensité des instabilités polarisées orthogonalement. En particulier, nous préciserons sur les figures suivantes les plages où l'intensité des instabilités n'est pas fortement chaotique. Sur ces plages les instabilités sont soit statiques, soit périodiques ou éventuellement possèdent une fréquence caractéristique dont l'amplitude est très supérieure aux amplitudes des autres fréquences de Fourier. Même si ces derniers signaux ne sont pas périodiques, ils s'apparentent plus à un signal périodique qu'à un signal chaotique tel que nous l'avons présenté dans la figure (II.3.10). Nous préciserons l'ordre de grandeur de la fréquence caractéristique mais nous ne ferons pas ici d'analyse quantitative du chaos observé. Nous ne donnerons que quelques résultats des plus caractéristiques.

b) Courbes

Toutes les courbes présentées ici correspondent au diagramme d'absorption saturée du rubidium décrit dans la partie (II.1.2.2), les plus basses fréquences se situant

à gauche. Les zones grisées correspondent aux plages de fréquences sur lesquelles s'observent les instabilités orthogonales. Les traits épais et plus sombres situés en haut du graphe indique les fréquences pour lesquelles l'intensité de l'instabilité est périodique ou à peu près périodique.

α) Dépendance de l'instabilité temporelle en fonction de l'intensité de la pompe.

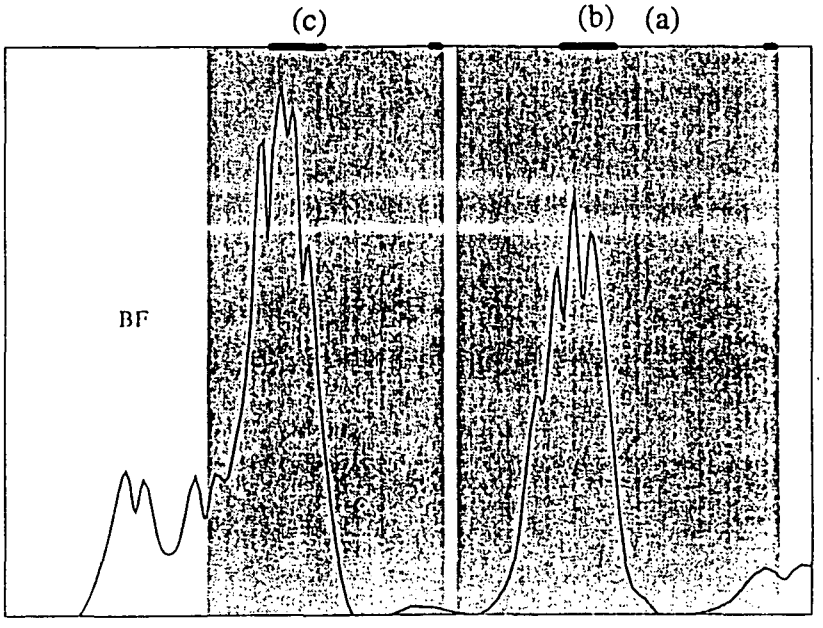


*Fig II.3.11.a: Spectre d'absorption saturée du rubidium et instabilité orthogonale pour d=**16 cm**, diamètre du faisceau=**0,8 mm**, Puissance de la pompe=**400 mW***

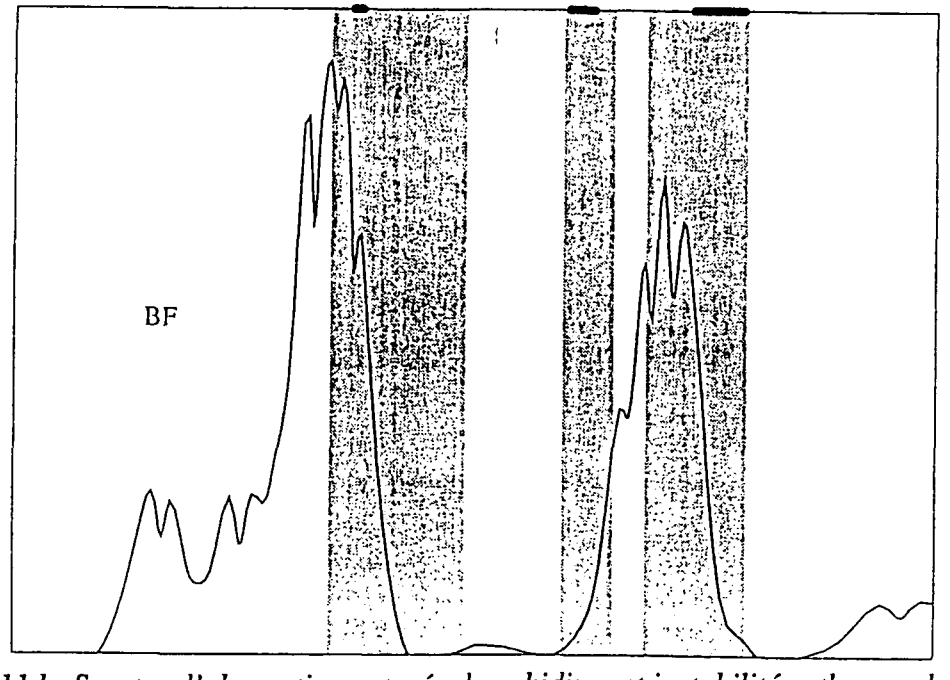


*Fig II.3.11.b: Spectre d'absorption saturée du rubidium et instabilité orthogonale pour d=**16 cm**, diamètre du faisceau=**0,8 mm**, Puissance de la pompe=**100 mW***

β) *Dépendance de l'instabilité temporelle en fonction de la distance d*

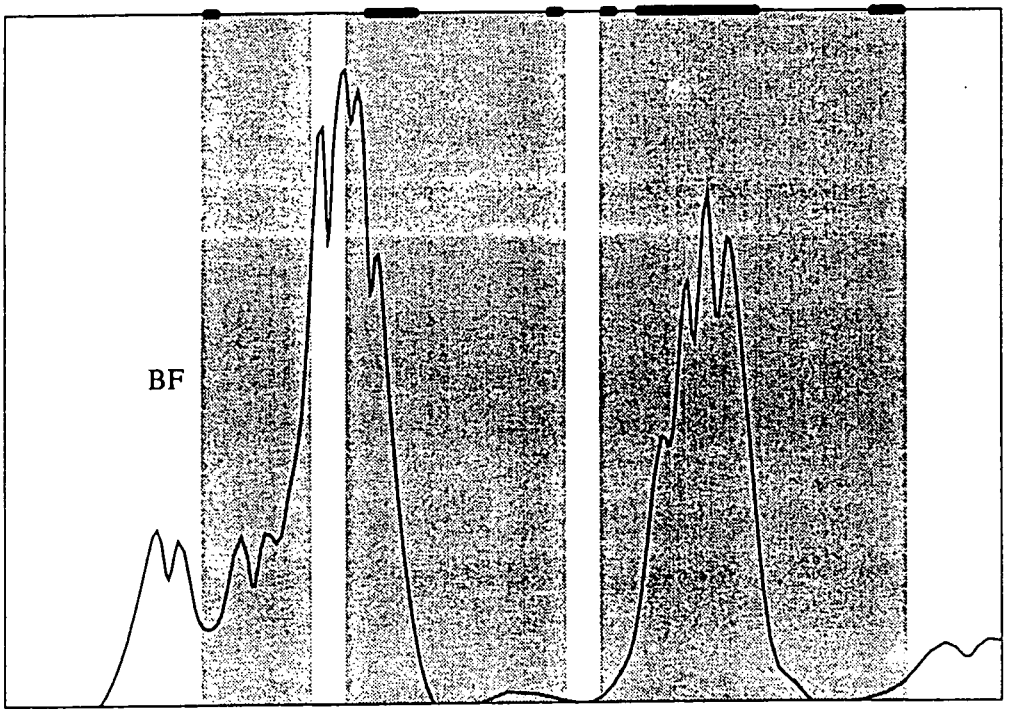


Fig II.3.12.a: Spectre d'absorption saturée du rubidium et instabilité orthogonale pour d=8 cm, diamètre du faisceau=0,4 mm, Puissance de la pompe=200 mW

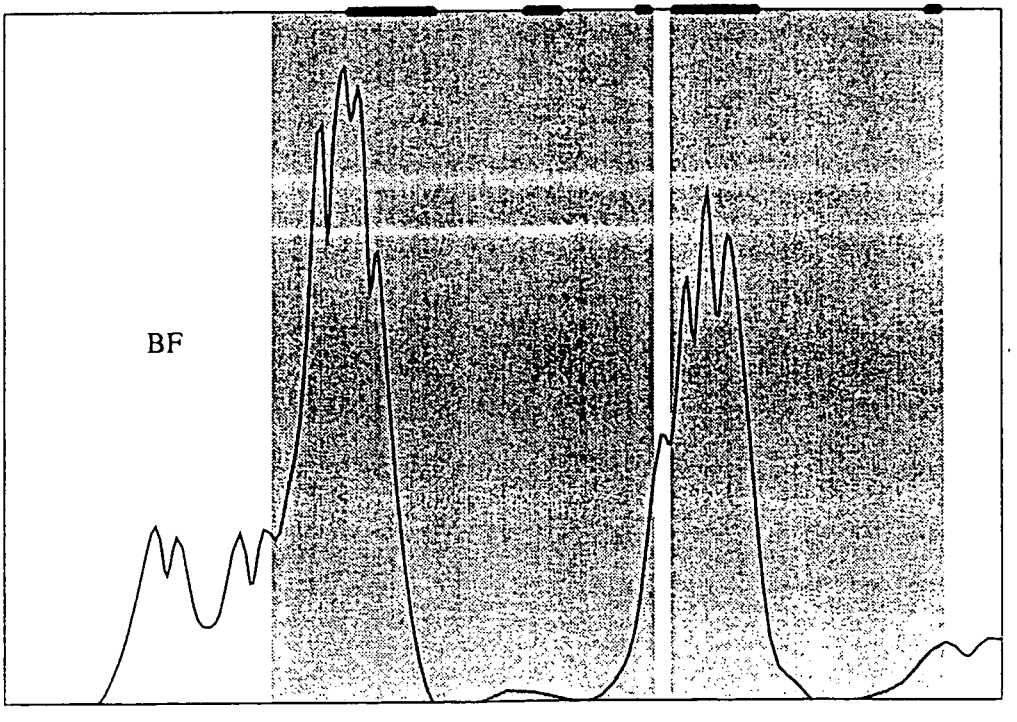


Fig II.3.12.b: Spectre d'absorption saturée du rubidium et instabilité orthogonale pour d=16c m, diamètre du faisceau=0,4 mm, Puissance de la pompe=200 mW

χ) *Dépendance de l'instabilité temporelle en fonction du diamètre du faisceau pompe*

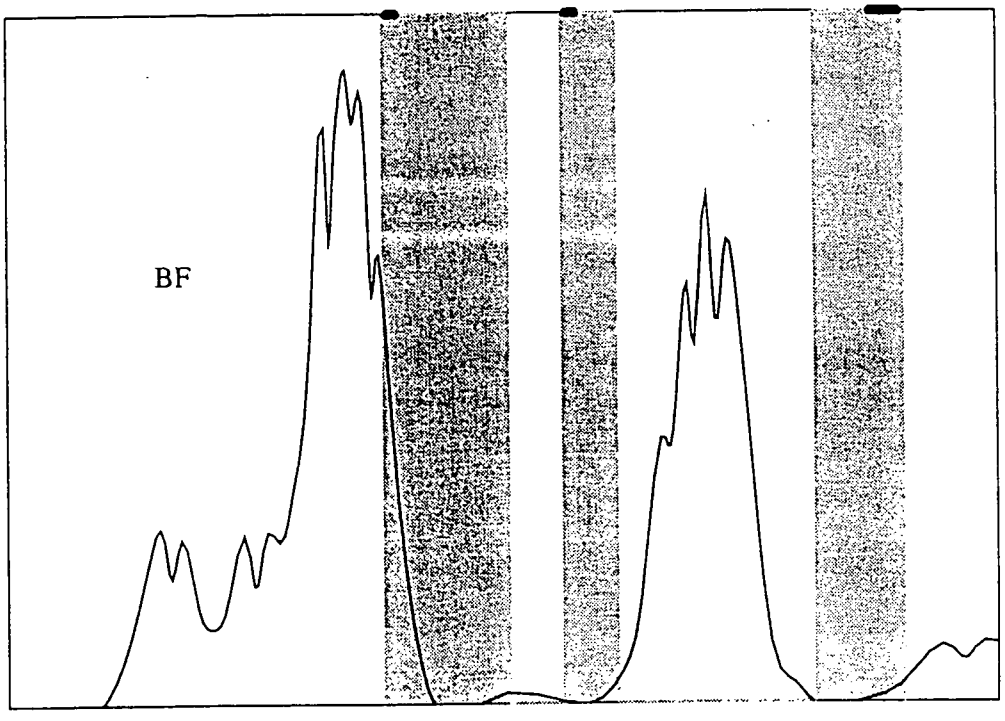


*Fig II.3.13.a: Spectre d'absorption saturée du rubidium et instabilité orthogonale pour d=**16 cm**, diamètre du faisceau=**0,4 mm**, Puissance de la pompe=**100 mW***

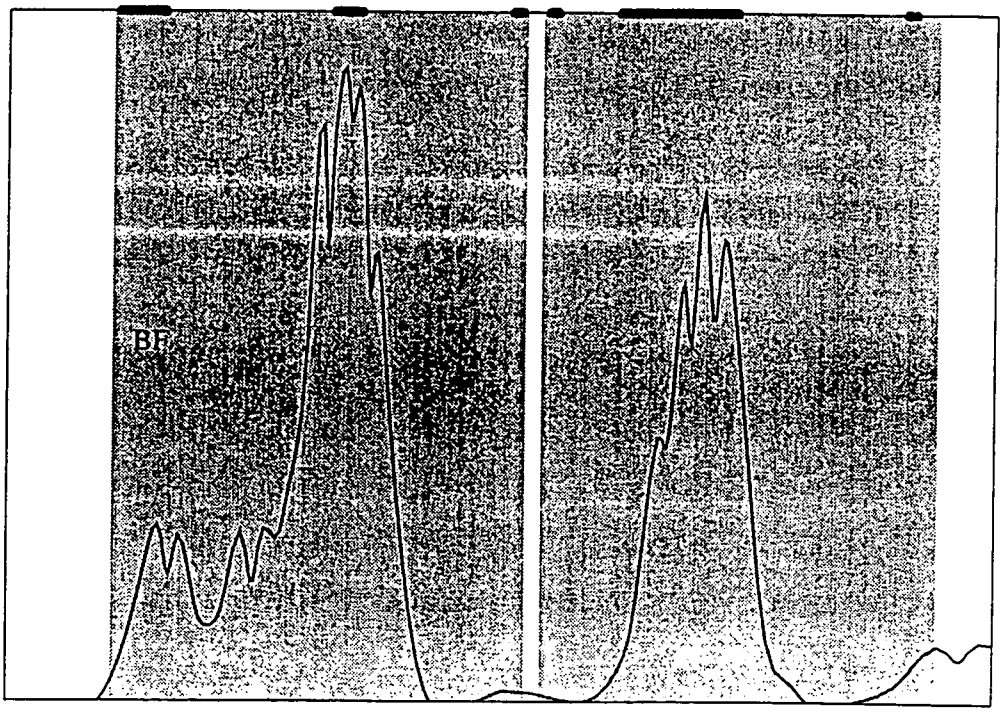


*Fig II.3.13.b: Spectre d'absorption saturée du rubidium et instabilité orthogonale pour d=**16 cm**, diamètre du faisceau=**0,4 mm**, Puissance de la pompe=**400 mW***

c) Analyse

α) *Quelques remarques générales*

- Les enregistrements ayant été réalisés tous les 150 MHz, certaines plages avec ou sans instabilités mais de largeur inférieure à 150 MHz, peuvent ne pas avoir été notées dans les diagrammes précédents.

- Sur des plages de fréquences importantes, le signal est d'apparence chaotique. Dans la partie (I.5), nous avions prédit que l'intensité des rouleaux pouvait être périodique. Leur période dépendait de l'angle entre les directions des faisceaux pompes aller et retour mais aussi de l'orientation des rouleaux. Les fréquences pour lesquelles nous observons des instablités périodiques correspondent aux fréquences pour lesquelles nous observons des rouleaux.

- Au voisinage des résonances, le signal est périodique, presque périodique ou même statique. Aux fréquences seuil pour lesquelles s'observent les instabilités , le signal est encore périodique sauf pour les fréquences seuil situées du côté basse fréquence des transitions $F = 3 \rightarrow F' = 2,3$. La fréquence caractéristique est de l'ordre de quelques centaines de kHz. Pour une fréquence du faisceau pompe comprise entre les fréquences de résonances des transitions $F = 3 \rightarrow F' = 2,3$ et $F = 2 \rightarrow F' = 2,3$ le signal est aussi périodique et l'ordre de grandeur de sa fréquence caractéristique est généralement de l'ordre du MHz.

- Pour des fréquences seuil situées du côté basse fréquence des transitions $F = 3 \rightarrow F' = 2,3$, le signal est en général chaotique. La structure des instabilités pour de telles fréquences correspond en fait à un agrandissement de la tache centrale qui devient alors de trop grand diamètre pour disparaître lors de la réflexion sur les miroirs percés. Il pourrait s'agir d'un processus d'autodéfocalisation du faisceau sur l'axe associé à une instabilité temporelle similaire à celle étudiée par Boyd et ses collaborateurs [Gae87].

β) *Dépendance de l'instabilité temporelle en fonction de l'intensité de la pompe.*

Alors que les instabilités s'observent dans le cas où la puissance du faisceau est 400 mW (figure (II.3.10.a)) sur presque toute la bande de fréquence entre les deux pics de l'absorption saturée, pour une puissance de 100 mW (figure (II.3.10.b)), les instabilités ne s'observent que sur des plages très réduites au voisinage des fréquences de résonance et pour des fréquences situées entre les deux principaux pics de résonance.

Par conséquent, lorsque l'intensité du faisceau pompe augmente, nous observons des instabilités sur des plages beaucoup plus grandes. Le spectre de fréquence est aussi beaucoup plus riche et plus large lorsque l'intensité du faisceau pompe est importante.

χ) Dépendance de l'instabilité temporelle en fonction de la distance d

Les deux séries de figures montrées ici ne mettent pas en évidence des différences importantes entre des mesures réalisées pour une distance d égale à 8 cm et pour une distance d égale à 16 cm, tous les autres paramètres restant bien sûr identiques. Là encore nous remarquons que les instabilités sont périodiques au voisinage des résnances, la période étant de l'ordre de 100 kHz dans la figure (II.3.11.b) et de l'ordre de 300 kHz dans la figure (II.3.11.a). Du coté haute fréquence, les instabilités sont périodiques près du seuil et la fréquence est de l'ordre de 500 kHz pour (II.3.11.a) et 600 kHz pour (II.3.11.b). Cependant dans les deux cas de figures, les plages de fréquences sur lesquelles s'observent les instabilités ainsi que celles sur lesquelles les instabilités sont périodiques, sont comparables.

Dans la petite gamme étudiée, la distance d ne joue donc pas de rôle important dans la forme générale des instabilités temporelles.

δ) Dépendance de l'instabilité temporelle en fonction du diamètre du faisceau pompe

Dans notre étude théorique précédente, l'intensité du faisceau pompe était un paramètre essentiel. Dans un faisceau d'extension finie qui correspond à notre situation expérimentale, l'intensité du faisceau au centre est proportionnelle à sa puissance et inversement proportionnelle à la surface de sa section transverse. Par conséquent à puissance égale du faisceau, l'intensité au centre du faisceau sera 4 fois plus importante dans le cas d'un faisceau de diamètre 0,4 mm que dans le cas d'un faisceau de 0,8 mm. Nous pourrions nous attendre à observer des instabilités temporelles comparables dans le cas où le faisceau a une puissance de 100 mW et un diamètre de 0,4 mm et dans le cas d'un faisceau de puissance 400 mW et de diamètre 0,8 mm. Cependant les figures (II.3.12.a) et (II.3.10.a) nous montrent que la réalité est toute autre. Alors que les instabilités obtenues pour un diamètre de 0,8 mm et une intensité de 400 mW s'observent sur une large bande de fréquence et sont très chaotiques, les instabilités obtenues pour un faisceau de 0,4 mm et une intensité de 100 mW s'observent sur une plage de fréquence très restreinte et sont principalement périodiques. Cet effet se comprend bien si on se rappelle que le nombre de degrés de liberté indépendants dans le

plan transverse croît comme le carré de la dimension du faisceau. Ce problème est étudié dans le chapitre suivant. Notons également que pour des fréquences proches des fréquences de résonance et pour une intensité de 100 mW, nous n'observons pas d'instabilités car les effets d'absorption doivent être là importants.

Par contre, les instabilités temporelles obtenues pour une intensité de 400 mW et un diamètre de faisceau de 0,8 mm (figure (II.3.10.a)) et les instabilités obtenues pour une intensité de 400 mW et un diamètre de 0,4 mm (figure (II.3.12.b)), sont très comparables. De même la figure (II.3.10.b) obtenue pour une intensité de 200 mW et un diamètre de 0,4 mW, ne présente pas de différences importantes. L'observation des spectres obtenus pour ces différentes situations montre que les spectres de Fourier obtenus avec un faisceau de diamètre de 0,8 mm sont dans l'ensemble plus larges que les spectres obtenus avec un faisceau de diamètre 0,4 mm.

Des études similaires réalisées pour une puissance de 100 mW montrent de la même façon que même si les plages de fréquences restent comparables, les spectres de fréquence sont plutôt plus larges lorsque le faisceau a un diamètre plus important. Dans cette partie nous n'aborderons pas les différentes méthodes pour analyser la largeur du spectre de fréquence et ainsi le chaos. Mais ces études préliminaires semblent déjà montrer que bien au delà du seuil le paramètre essentiel gouvernant ces instabilités temporelles n'est plus l'intensité qui sature probablement la non-linéarité mais plutôt l'extension du faisceau.

3.4) Conclusion

L'ordre de grandeur de la fréquence caratéristique des instabilités est de quelques centaines de kHz. Cet ordre de grandeur correspond bien à l'ordre de grandeur des fréquences caractéristiques des observables du fondamental. Ces observations semblent confirmer que le pompage optique est à l'origine des instabilités. Cependant nous n'expliquons pas pourquoi l'intensité des anneaux est toujours chaotique. D'autre part nos observations expérimentales ne remettent pas en question les prédictions théoriques qui prévoyaient des instabilités temporelles de l'ordre de $c/2\tau_R$ où τ_R correspond au temps d'un aller-retour dans la cavité. Compte-tenu de la longueur de notre cavité, ces fréquences seraient de l'ordre du GHz que nous ne pourrions pas détecter avec notre dispositif expérimental. D'autres expériences [Giu88] réalisées dans le sodium ont permis de mettre en évidence de telles instabilités temporelles.

4) Conclusion

Ce chapitre nous a permis de comparer les résultats de l'expérience à la théorie développée dans le premier chapitre. Nous avons ainsi mis en évidence l'existence d'instabilités appelées 'marguerites'. La structure de ces instabilités et leur évolution avec les paramètres du système présentent de grandes similitudes avec celles des modes de Laguerre-Gauss présentés dans le premier chapitre. Les instabilités, telles que des anneaux observés loin des résonances sont au niveau spatial en assez bon accord avec la théorie. Certaines prédictions théoriques comme le diamètre des anneaux ont ainsi pu être vérifiées mais le caractère chaotique de l'intensité des instabilités observé expérimentalement au-dessus du seuil n'est pas expliqué. Notons que des instabilités chaotiques ont été observées dans de nombreuses autres expériences ([Gib81], [Cip93], [Are90],...).

Chapitre III

Instabilités générées par deux pompes se propageant en sens opposé.

Etude expérimentale

Introduction

Notre étude a porté jusqu'ici sur un système comportant un miroir de rétroaction. La possibilité de négliger les effets de propagation dans le milieu non-linéaire permettait de simplifier grandement l'étude théorique. Historiquement, cette expérience comportant une seule onde pompe et un miroir de rétroaction a été réalisée après une autre expérience comportant deux ondes pompes indépendantes contrapropagatives. Théoriquement cette expérience est de fait beaucoup plus difficile à interpréter. Yariv et Pepper [Yar77] ont montré que l'interaction d'une onde stationnaire avec un milieu non-linéaire pouvait induire, par conjugaison de phase, la génération spontanée de nouvelles ondes, quand la réflectivité du miroir à conjugaison de phase était infinie. Dans des études ultérieures, G. Grynberg [Gry88a] montra que tous les termes de mélange à quatre ondes interféraient dans cette géométrie constructivement pour un certain angle θ_0. Il était alors possible d'observer une émission spontanée dans cette direction sans que la réflectivité soit infinie. Des études plus complètes réalisées par G. Grynberg et J. Paye[Gry89] ont montré que le seuil d'apparition des instabilités était plus bas du côté auto-focalisant de la résonance. W. J. Firth et ses collaborateurs firent des simulations numériques sur ce système [Fir88], [Fir90] et confimèrent que la seule figure stable au seuil était des hexagones [Fir90]. Y. Silberberg et I. Bar Joseph [Sil82], [Sil84], [Bar87] étudièrent le comportement temporel des faisceaux transmis et prédirent un comportement périodique puis chaotique au delà d'un certain seuil quand l'intensité des instabilités augmentait. En 87, R. W. Boyd et A. L. Gaeta [Gae87] prédirent l'existence dans un milieu Kerr d'un comportement périodique ou chaotique dans la polarisation des faisceaux transmis. Malheureusement, ces modèles théoriques prenaient en compte l'une ou l'autre des caractéristiques de l'instabilité (spatiale, temporelle ou polarisation) mais ne rendaient pas compte simultanément de toute la richesse des résultats obtenus expérimentalement.

Les premières expériences réalisées dans le sodium par R. W. Boyd et D. J. Gauthier [Gau89] montrèrent l'existence d'instabilités de polarisation sur les faisceaux transmis qui pouvaient présenter un comportement périodique ou chaotique [Gau87], [Gau88] et pour certaines valeurs des paramètres du système de la bistabilité [Gau90]. En champ lointain , la structure spatiale de l'émission spontanée hors d'axe correspondait à des anneaux, deux points ou des hexagones selons les conditions

expérimentales aussi bien dans le sodium [Gry88b], [Pen90] que dans un photoréfractif [Hon93].

Ces premières expériences ayant été faites en impulsion, il était difficile, voire impossible, de préciser les conditions qui favoriseraient l'émergence de telle ou telle forme. De surcroît, l'étude du comportement temporel de l'instabilité était très délicate à cause de la durée finie de l'impulsion laser. Nous avons donc poursuivi les expériences avec un laser Titane-Saphir continu et balayable en fréquence dans une gamme correspondant aux fréquences de résonance du Rubidium. Nous avons commencé par étudier le comportement spatial [Pet92] des instabilités émises et en particulier leur structure transverse. Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à l'aspect dynamique [Blo93] de ces instabilités. Nous cherchons ainsi à mieux comprendre la formation de ces instabilités et à tester l'influence de divers paramètres comme l'extension radiale du faisceau ou l'intensité des ondes pompes. Notons que ces expériences diffèrent de celles de Gauthier [Gau89] qui étudiait l'onde pompe transmise alors que nous nous intéressons au comportement temporel de l'onde émise dans une direction différente de la pompe.

1) Instabilités spatiales

Dans cette partie, nous aborderons tout d'abord différents aspects spatiaux des instabilités. Nous chercherons à caractériser leur structure transverse en champ lointain et en champ proche en fonction de l'intensité et de la fréquence des ondes pompes. Nous étudierons également leur comportement près de leur seuil de formation en réalisant des diagrammes de bifurcation.

1.1) Diagramme de phase

Nous exposerons ici notre méthode permettant d'étudier la structure transverse des instabilités en champ lointain en fonction de l'intensité et de la fréquence des ondes pompes.

1.1.1) Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé dans ces expériences se décompose en deux parties. La première partie du dispositif est constituée par la source lumineuse décrite dans le paragraphe (II.1.2) et reste strictement identique. La deuxième partie du dispositif permet d'étudier les instabilités générées par l'interaction de la vapeur de Rubidium avec deux ondes pompes progressives contrapropagatives.

La deuxième partie du dispositif expérimental est représentée dans le schéma suivant. Ce dispositif expérimental nous permettra d'observer les instabilités en champ lointain et en champ proche.

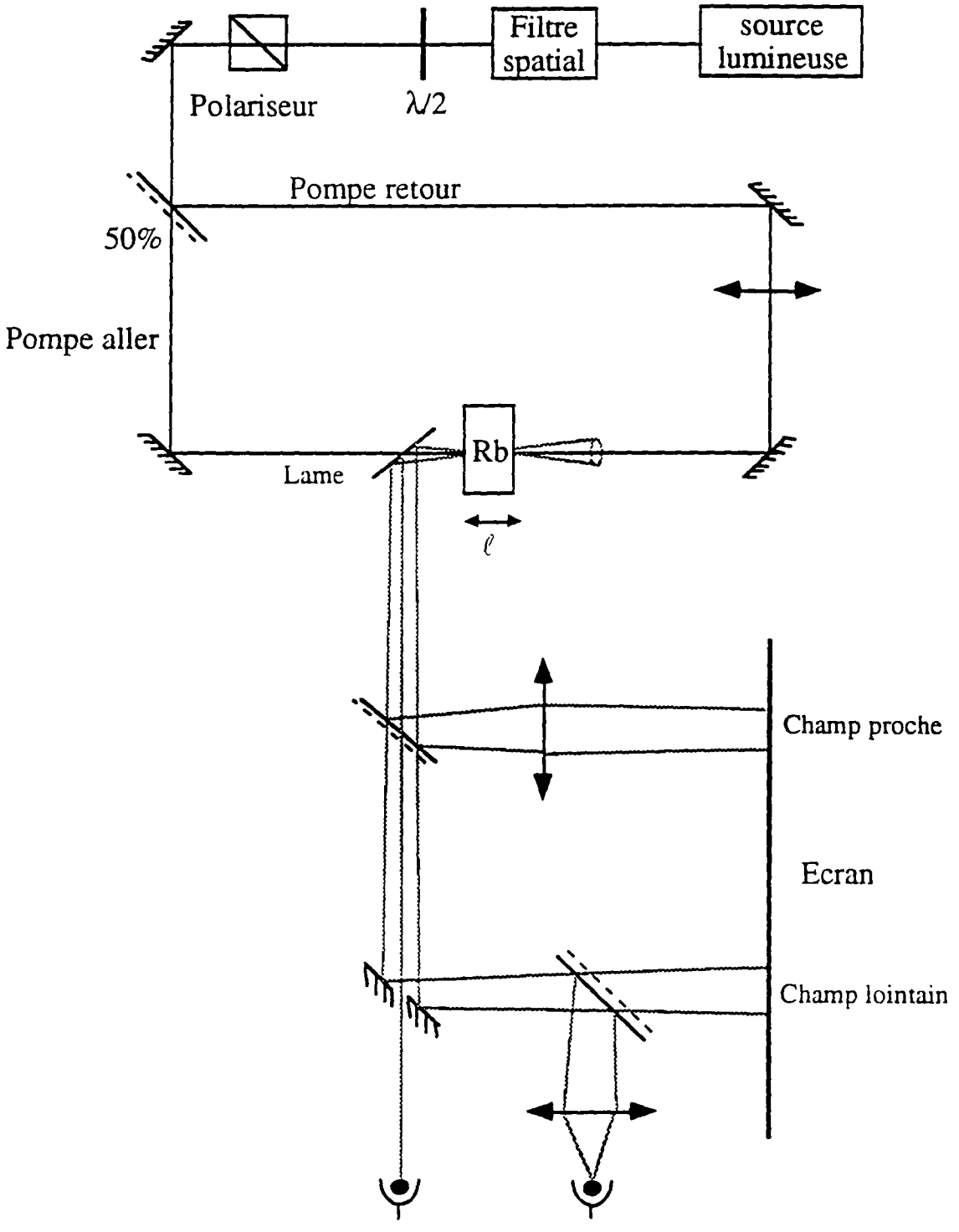


Fig III.1.1: Dispositif expérimental

Le filtre spatial, la lame demi-onde et le polariseur restent identiques dans cette nouvelle expérience. Le faisceau pompe est par contre divisé grâce à une lame semi-transparente en deux faisceaux d'égale intensité. Leur intensité I_p est au maximum de 300 mW. Ces deux faisceaux pompes se contrepropagent dans la cellule déjà utilisée dans l'expérience précédente. Cependant les deux faisceaux ne parcourent pas le même trajet optique entre la lame semi-transparente et la cellule. Le rayon de pincement du

faisceau pompe ayant le plus cours trajet optique et que nous appelons désormais pompe aller, se situe au niveau de la cellule. Une lentille est placée sur le trajet de l'autre faisceau pompe appelé pompe retour, afin que son rayon de pincement se situe également au niveau de la cellule et soit égal à celui de la pompe aller. Nous maximisons ainsi le recouvrement des faisceaux. Dans cette partie (III.1), le rayon de pincement des faisceaux est toujours égal à 0,7 mm.

Des instabilités s'inscrivant sur des cônes de génératrices l'axe de propagation des pompes et d'angle θ constant sont émises de part et d'autre de la cellule. Une lame de verre placée sous incidence de Brewster par rapport au faisceau pompe est placée à proximité de la cellule. Le faisceau pompe polarisé parallèlement au plan d'incidence ne sera alors pas réfléchi sur cette lame. Par contre, les instabilités polarisées orthogonalement au plan d'incidence sont partiellement réfléchies et analysées.

Nous formons sur un écran placé à une distance de 4 m de la cellule, l'image des instabilités en champ proche et en champ lointain. Une première lame séparatrice permettra de prélever une partie de ce faisceau de polarisation orthogonale. Une lentille placée à une distance de la cellule voisine de sa distance focale fait l'image sur l'écran du champ proche associé à l'instabilité. La partie du faisceau transmis par cette première lame séparatrice se réfléchit sur un miroir percé. Le faisceau sur l'axe est ainsi séparé de l'instabilité hors d'axe. Ce faisceau polarisé orthogonalement aux pompes peut avoir plusieurs origines: une éventuelle dépolarisation de la pompe sur les faces de la cellule ou bien une instabilité sur l'axe. Une photodiode permet de mesurer l'intensité de ce faisceau sur l'axe. Une partie de l'instabilité hors d'axe réfléchie par le miroir percé est projetée sur l'écran lointain et permet ainsi de réaliser l'image en champ lointain de l'instabilité. L'autre partie du faisceau sera focalisée par une lentille sur une photodiode.

1.1.2) Construction du diagramme de phase

Le diagramme de phase consiste à décrire l'état d'un système par des variables caractéristiques. Expérimentalement, nous déterminerons la forme en champ lointain de l'instabilité en fonction de l'intensité et de la fréquence du faisceau pompe.

Une première expérience a consisté à choisir l'intensité des faiceaux pompe et à faire varier la fréquence du laser entre les fréquences de résonance des transitions $F = 3 \rightarrow F' = 2$ et $F = 2 \rightarrow F' = 3$. Nous pouvons ainsi repérer les plages de fréquences sur lesquelles s'observent des instabilités orthogonales. Pour une intensité I_p égale à 200 mW, nous obtenons le diagramme suivant:

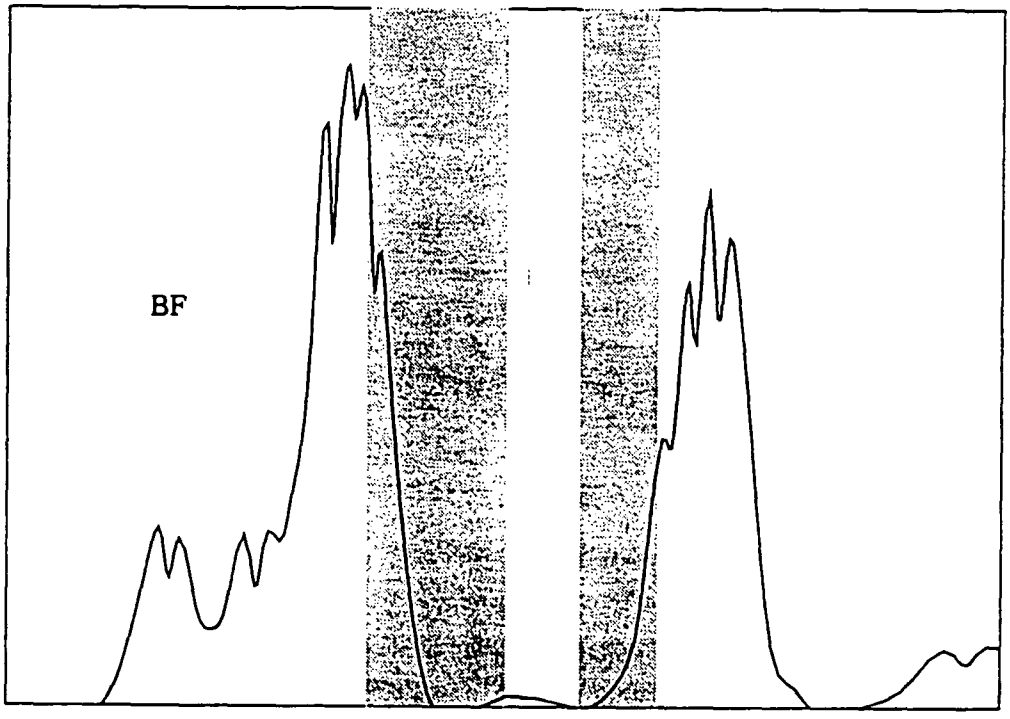


Fig III.1.2: Instabilités en fonction de la fréquence de la pompe pour I_p=200mW

Nous observons donc des instabilités autour des fréquences de résonance des transitions $F=2 \rightarrow F'=2,3$ et $F=3 \rightarrow F'=2,3$. Sur une plage de fréquences de l'ordre de 600 MHz située entre ces résonances, nous n'observons pas d'instabilités. Les instabilités orthogonales pour des fréquences proches de la transition $F=2 \rightarrow F'=2,3$ sont en général assez diffuses et leur forme en champ lointain s'apparente à un disque. Par contre pour des fréquences voisines des fréquences de résonance des transitions $F=3 \rightarrow F'=2,3$, les instabilités observées en champ lointain sont plus structurées. Nous pouvons observer en champ lointain des anneaux, des hexagones, des rouleaux ou des carrés, tels que nous les avions définis dans les deux chapitres précédents. Cependant, cette expérience, ne met pas en évidence d'harmoniques dans la structure transverse des instabilités. En champ lointain, cette structure transverse s'inscrit sur un unique cercle dont le diamètre ne varie pas avec la fréquence ou la structure tranverse considérée.

Nous avons alors réalisé des expériences plus précises permettant de connaître la structure transverse en champ lointain en fonction de la fréquence et de l'intensité des ondes pompes. Nous avons alors réalisé plusieurs séries de mesures où nous fixions

l'intensité des pompes et nous faisions varier la fréquence du laser dans la première zone de fréquence où s'observent des instabilités dont les structures transverses en champ lointain sont les plus variées et les plus riches (voir fig III.1.2). L'intensité sera modifiée à chaque nouvelle série en tournant la lame demi-onde placée devant le polariseur. Nous réaliserons ainsi 7 séries de mesures pour des intensités I_p égales à 210, 180, 150, 120, 90, 60 et 30 mW. Les résultats sont présentés dans le diagramme suivant:

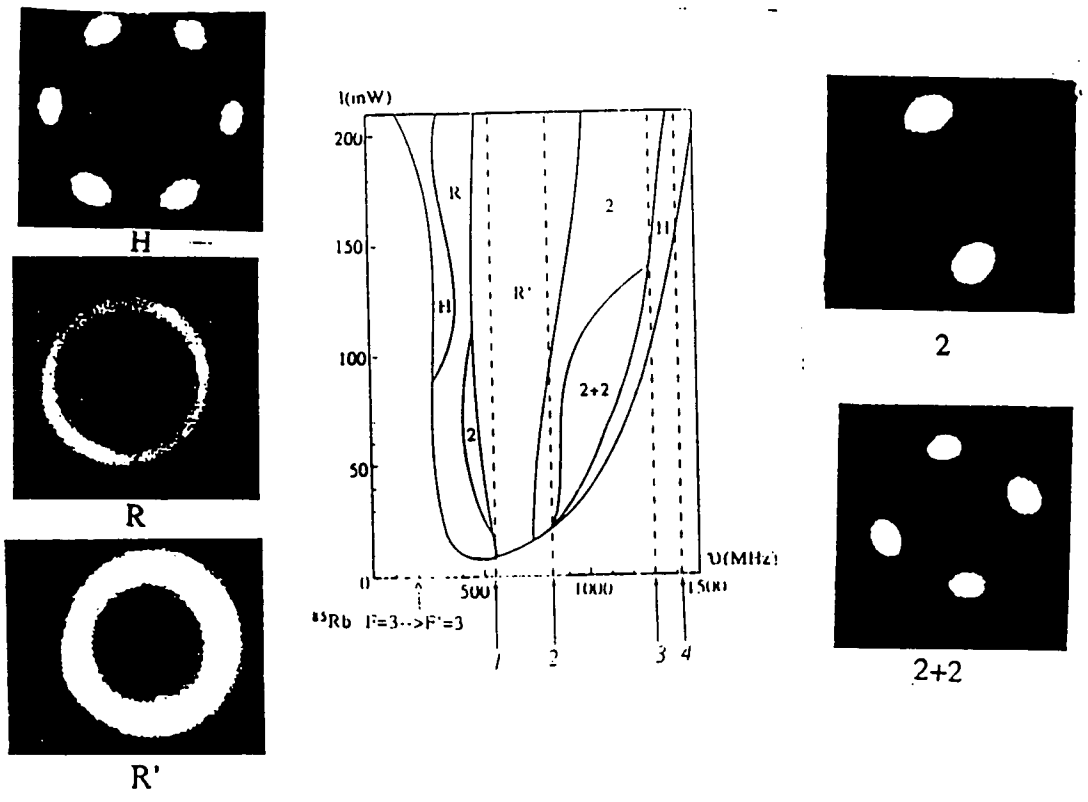


Fig III.1.3: Figures en champ lointain en fonction de la fréquence et de l'intensité de la pompe.

Dans le diagramme présenté ci-dessus, nous avons omis par souci de simplification de représenter les formes des instabilités dans les zones de transition. Nous avons toujours assimilé les instabilités à la forme voisine la plus pure. Une transition importante est la transition anneaux épais-rouleaux dont la structure transverse en champ lointain se présente sous forme de deux 'croissants' et que nous présentons dans la figure suivante:

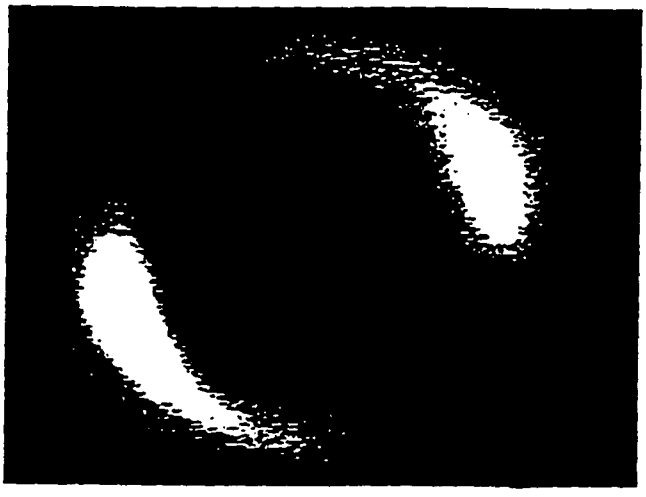


Fig III.1.4: Figure en champ lointain associée à une transition anneaux épais-deux taches

Intéressons nous maintenant à l'évolution des formes en fonction de la fréquence, pour une puissance donnée que nous supposerons supérieure à 130 mW. En champ lointain, les instabilités au seuil pour les fréquences les plus basses sont des hexagones. Si nous augmentons progressivement la fréquence du laser, les hexagones se transforment en des anneaux fins. En augmentant encore la fréquence, ces anneaux fins se transforment brusquement en anneaux épais. Ceux-ci pour des fréquences bien supérieures vont se fragmenter en deux croissants (Fig III.1.4). La longueur de ces croissants diminue quand la fréquence augmente pour se transformer progressivement en deux points diamétralement opposés. Cette figure de type rouleaux va ensuite se transformer en hexagones près du seuil des instabilités. Pour des fréquences encore supérieures, nous n'observons plus d'instabilités. Au seuil du côté haute fréquence ou du côté basse fréquence, la figure en champ lointain correspond donc à un hexagone. Ce résultat est conforme à des simulations numériques [Fir92]. Lorsque chaque pompe a une puissance inférieure à 130 mW, nous pouvons observer pour certaines fréquences des instabilités dont la structure transverse en champ lointain correspond à un carré. Ces quatre taches semblent correspondre en fait à deux paires de taches en compétition.

Lorsque l'intensité des pompes augmente, l'intensité des instabilité augmente aussi. Nous aborderons ce point plus précisément dans la partie (III.1.3). Au seuil, l'intensité des instabilités est très faible et il est alors plus difficile de les identifier.

1.2) Champ proche

Dans la partie précédente, nous avons étudié la structure transverse des instabilités en champ lointain. Nous allons ici nous attacher à leur structure en champ proche, c'est à dire à la structure de l'instabilité dans la cellule. Une lentille permet de faire sur l'écran l'image du champ proche. Nous pourrons donc observer en même temps les figures en champ proche dans la cellule et en champ lointain qui sont présentées dans la figure (III.1.5). Le champ lointain est la transformée de Fourier du champ proche; les figures en champ proche correspondent à un réseau hexagonal pour les hexagones et à des rouleaux pour la paire de points.

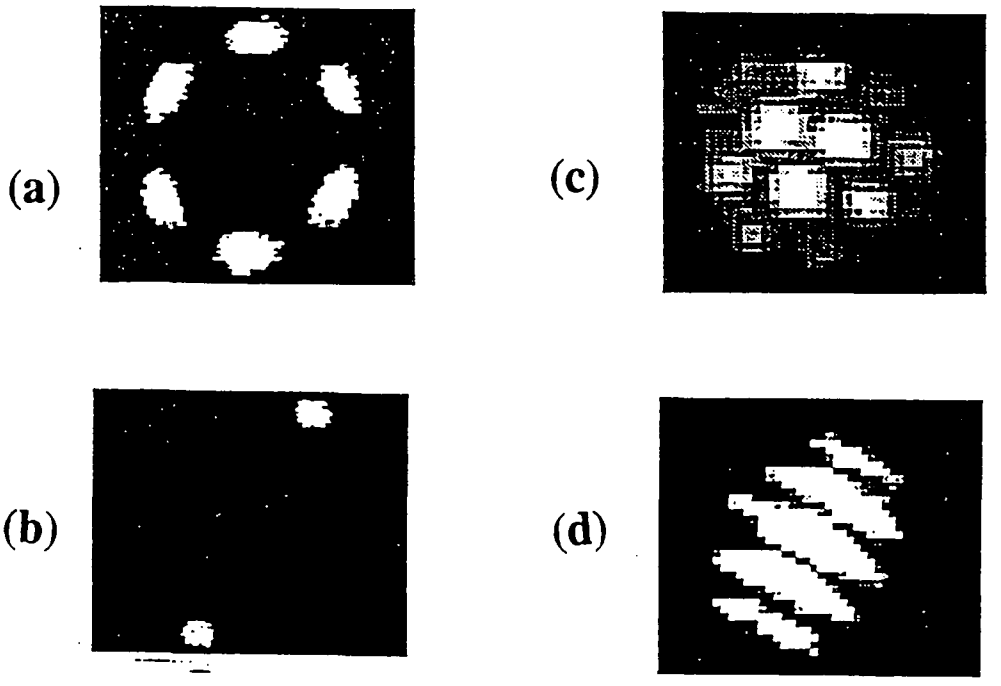


Fig III.1.5:Figures expérimentales en champ lointain: (a) hexagone (b) double point, et figures associées en champ proche : (c) Réseau hexagonal (d) Rouleaux.

Notons que les figures expérimentales en champ proche présentées ci-dessus sont relativement difficile à obtenir. En effet, la caméra ne permet de voir que l'intensité des instabilités. Si la phase des instabilités est modulée, le champ proche étant la transformée de Fourier du champ lointain, cette modulation de phase se traduit en champ proche par un déplacement de la structure. Alors que la figure en champ lointain restera nette, la figure en champ proche sera alors brouillée. Expérimentalement, l'intensité des instabilités n'est généralement pas statique et l'obtention d'une figure

telle que la figure (III.1.5) nécessite des réglages délicats. Cette modulation de l'intensité de l'ordre du MHz ne brouille donc pas la figure en champ lointain alors qu'elle brouille la figure en champ proche. Dans la partie (III.3), nous étudierons plus précisément cette modulation temporelle de l'intensité.

D'autre part, l'image en champ proche montre que l'extension transverse de l'instabilité est bien plus petite que l'extension transverse des faisceaux pompe. Les instabilités se forment donc au centre des faisceaux, c'est-à-dire là où l'intensité est maximum.

Remarquons également que les figures transverses en champ proche observées ici présentent de nombreuses analogies avec les cellules de convection de Rayleigh Bénard observées en hydrodynamique [Man90]. Ces cellules sont présentées dans la figure (III.1.7) suivante:

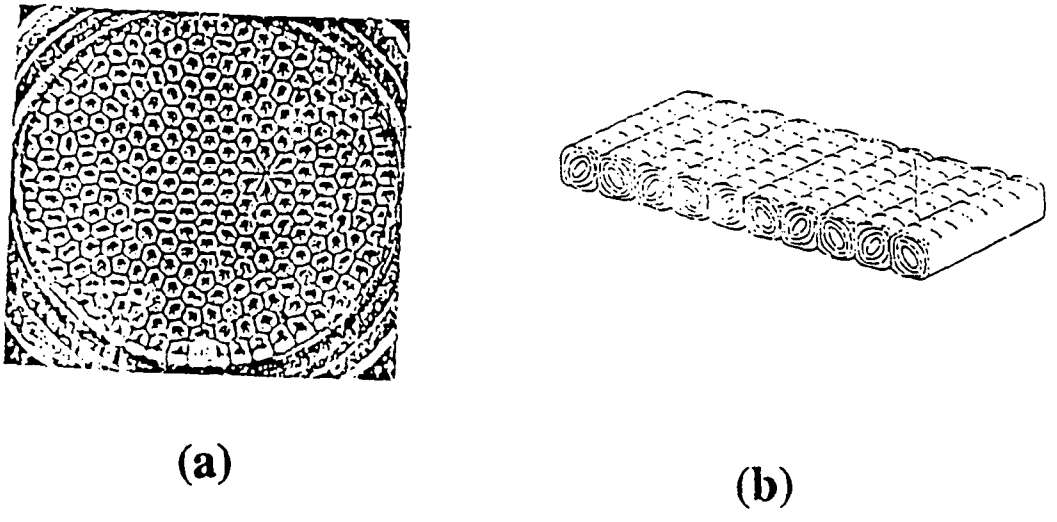


Fig III.1.6: Cellules convectives de Rayleigh-Bénard associées à des hexagones (a) et des rouleaux (b)

D'autres similitudes entre ces instabilités optiques et des phénomènes hydrodynamiques seront encore mis en évidence dans la suite de ce chapitre. Nous adopterons alors par la suite des approches voisines de celles utilisées en hydrodynamique. En particulier, nous nous attacherons à décrire les bifurcations d'un régime stable en dessous du seuil de formation des instabilités vers un autre régime stable où nous observons des instabilités.

1.3) Diagrammes de bifurcation

Cette expérience a pour but d'étudier le comportement de l'instabilité au voisinage du seuil en fonction de l'intensité de la pompe.

1.3.1) Différents types de diagrammes de bifurcations

Les diagrammes de bifurcations se rencontrent dans de nombreux phénomènes non-linéaires [Nic81]. Ils consistent à donner en fonction d'un paramètre de contrôle qui sera dans notre expérience l'intensité des pompes, la valeur d'une variable caractéristique du système qui sera pour nous l'intensité de l'instabilité. Suivant les valeurs du paramètre de contrôle, une ou plusieurs solutions stables sont possibles. Une analyse de stabilité est nécessaire pour préciser si l'état du système associé à une solution est stable ou instable. Une situation typique est illustrée dans le diagramme suivant. Lorsque le paramètre de contrôle λ est inférieur à une valeur critique λ_c, il n'existe qu'une seule solution à l'équilibre S_0 appelée aussi état de référence. Sous l'action d'une petite perturbation, le système retourne naturellement à la solution S_0. Cette stabilité de la solution est représentée par les flèches. Au delà de la valeur critique λ_c, il existe deux nouvelles solutions baptisées S_1 et S_{-1} et intitulées branches bifurcantes. Ces solutions sont stables alors que la solution S_0 ne l'est plus. Il y a en λ_c appelé point de bifurcation, branchement de nouvelles solutions.

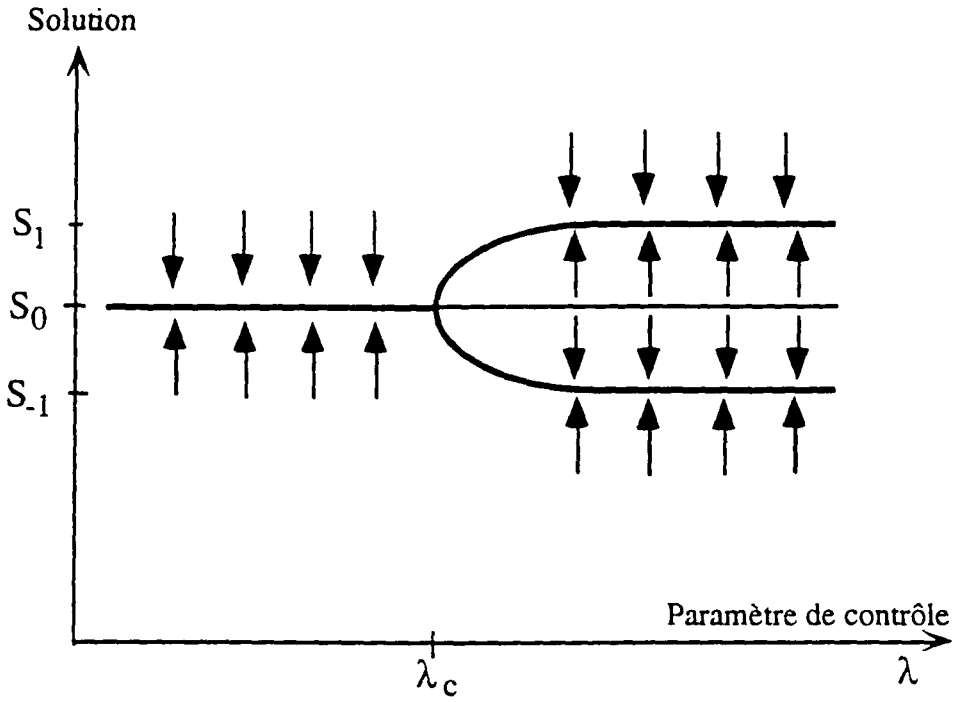


Fig III.1.7: Solutions stables et instables et diagramme de bifurcation

Ces diagrammes de bifurcation peuvent se cataloguer en bifurcations transcritiques, supercritiques et sous-critiques. En optique, les solutions étudiées correspondent au champ électrique E. Cependant expérimentalement nous ne détectons pas le champ électromagnétique mais l'intensité du champ E^2. Dans la figure suivante nous représenterons quelques types de bifurcations obtenus en représentant le champ électrique en fonction du paramètre de contrôle. Nous donnerons également les diagrammes obtenus en représentant l'intensité en fonction du paramètre de contrôle.

Les traits en gris correspondent aux solution asymptotiquement instables alors que les traits en noir correspondent aux solutions asymptotiquement stables.

Dans le cas d'une bifurcation transcritique, les branches bifurcantes apparaissent de part et d'autre de λ_c et varient au voisinage de λ_c linéairement avec le paramètre de contrôle. Au delà du paramètre de contrôle, seules les branches bifurcantes sont stables. L'intensité observée après le point de bifurcation varie donc paraboliquement.

Dans le cas d'une bifurcation supercritique, les branches bifurcantes apparaissent pour des valeurs du paramètre de contrôle supérieur à λ_c et varient en $\sqrt{(\lambda-\lambda_c)}$. Pour des valeurs du paramètre de contrôle supérieur à λ_c, l'état de référence est instable alors que les branches bifurcantes sont stables.

Pour une bifurcation sous-critique, les branches bifurcantes apparaissent pour des valeurs du paramètre de contrôle, tels que l'état de référence S_0 garde sa stabilité

initiale. Elles varient en $\sqrt{(\lambda_c - \lambda)}$. Au voisinage de la valeur critique λ_c et pour des valeurs du paramètre de contrôle supérieures à λ_c il n'y a plus de solutions stables.

La figure (d) nous permet d'illustrer un phénomène de bistabilité. Les branches bifurcantes ne sont pas stables au voisinage des points de rebroussement. Si nous augmentons progessivement le paramètre de contrôle, le système restera dans l'état de référence jusqu'au moment où celui-ci deviendra instable et le paramètre de contrôle sera alors égal à λ_{c2}. Le système passera alors dans l'état d'une des branches bifurcantes. Notons ici que ce passage d'une solution à l'autre se fera de manière discontinue. Si maintenant, alors que la solution d'équilibre correspond à une branche bifurcante, nous diminuons progressivement le paramètre de contrôle, l'équilibre correspondra toujours à aux solutions des branches bifurcantes jusqu'au moment où celles-ci deviennent instables. Le système basculera alors dans l'état de référence($\lambda=\lambda_{c1}$) permettant d'observer de la bistabilité.

Dans le cas (e), le passage de l'état de référence aux branches bifurcantes s'opère de manière discontinue. Nous observerons alors un saut.

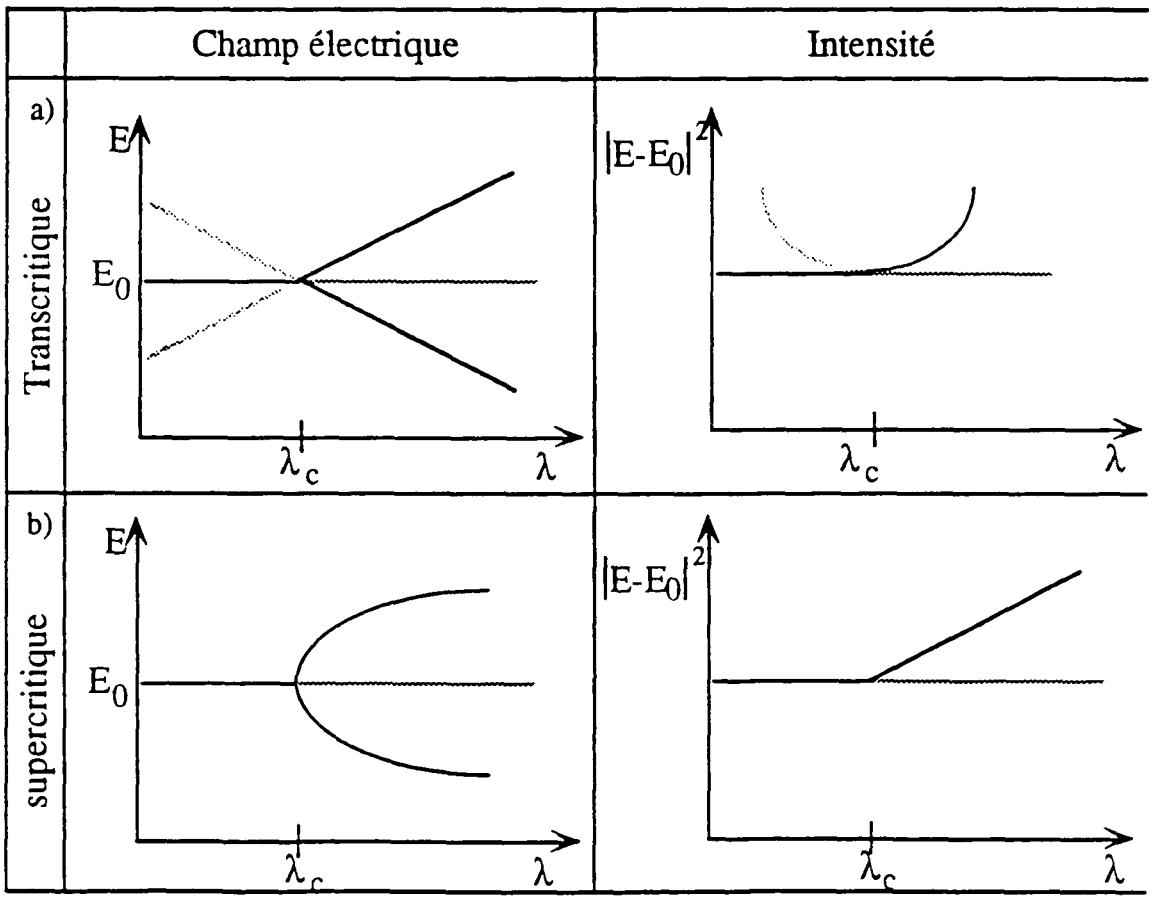


Fig III.1.8.a: Bifurcations trancritique(a) , supercritique(b).

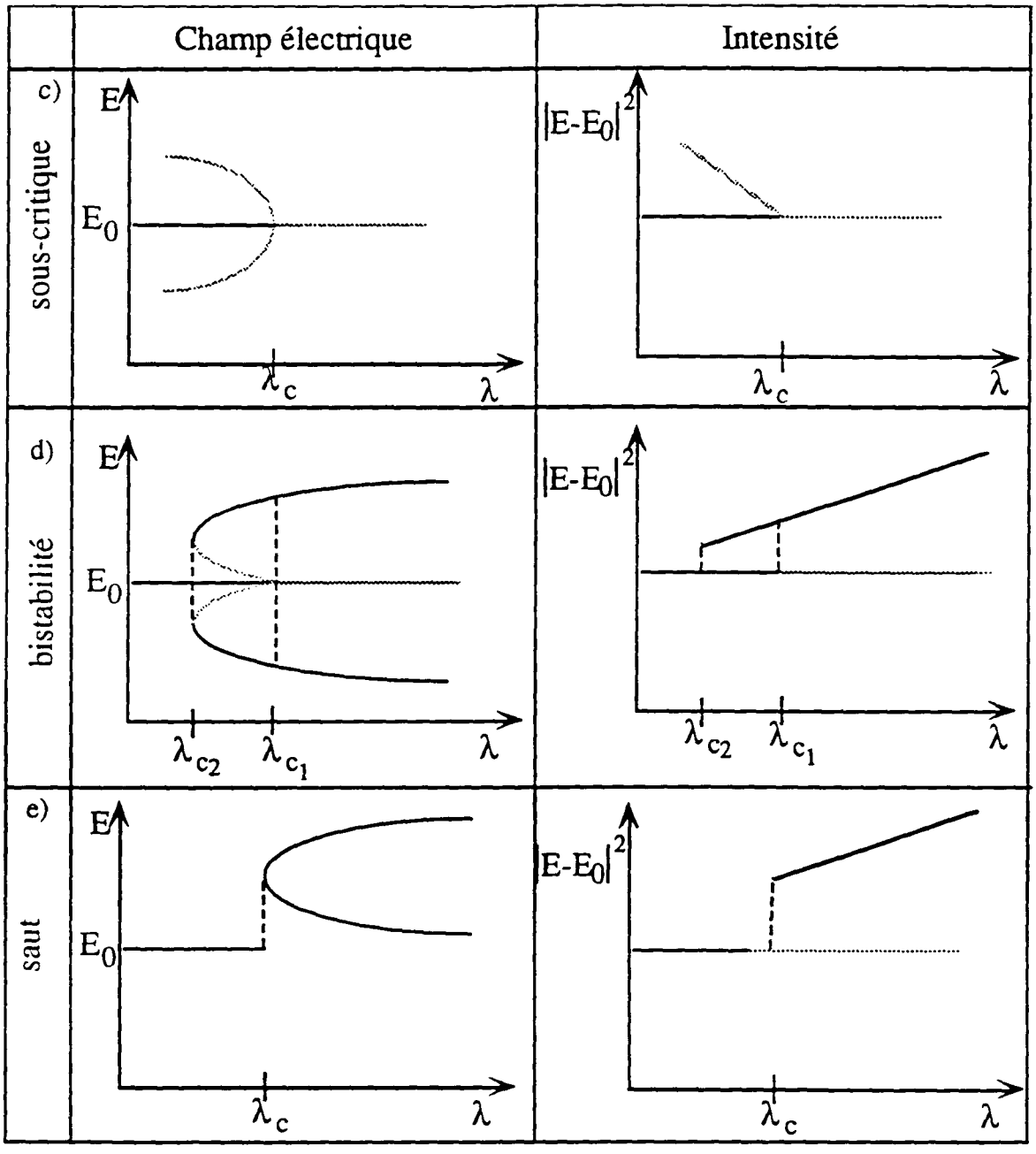


Fig III.1.8.b: Bifurcations souscritique(c) bistabilité(d), bifurcations avec saut(e)

Ce formalisme nous permettra d'aborder maintenant l'aspect théorique et expérimental des bifurcation de notre système.

1.3.2) Résultats expérimentaux

J.Y. Courtois et G. Grynberg [Cou92] ont établi un modèle analytique permettant d'étudier les diagrammes de bifurcation associés aux instabilités générées par deux ondes deux ondes contrapropagatives dans un milieu Kerr isotrope et purement dispersif. Ce modèle prédit que la bifurcation associée aux rouleaux est supercritique

alors que les hexagones apparaissent avec une intensité non nulle (saut). Des résultats similaires ont été obtenus dans le cas des cellules convectives de Rayleigh-Bénard.

Les résultats théoriques précédents obtenus pour un milieu Kerr et des instabilités d'amplitude ne peuvent pas s'appliquer directement à notre expérience où le pompage optique permet la formation d'instabilités de polarisation. La saturation de la non-linéarité tensorielle joue aussi un rôle important et cet effet n'a pas été pris en compte dans la théorie précédente. Cependant nous espérons que les bifurcations obtenues théoriquement aient une portée plus générale et soient valables pour une famille plus large d'équations non-linéaires.

Pour réaliser la mesure, il est nécessaire de connaître à la fois l'intensité de la pompe et de l'instabilité. Dans le paragraphe (III.1.1), nous avons expliqué comment une partie de l'instabilité était prélevée et focalisée sur une photodiode PD_1. Pour avoir accès à l'intensité de la pompe, nous avons légèrement déréglé la lame à Brewster placée à proximité de la cellule. Une petite partie de la pompe aller est ainsi réfléchie et envoyée sur une photodiode PD_2. Les signaux enregistrés sur les deux photodiodes sont envoyés sur un oscilloscope fonctionnant en mode XY. L'acousto-optique décrit dans la partie (II.1) permet de moduler l'intensité de la pompe. Cette modulation est réalisée à faible fréquence (1 à 100 Hz) de telle sorte que le milieu puisse suivre adiabatiquement. Nous asservissons à chaque mesure la fréquence du laser et nous observons sur l'écran l'instabilité en champ lointain. Le dispositif expérimental utilisé dans ces expériences est représenté dans la figure suivante.

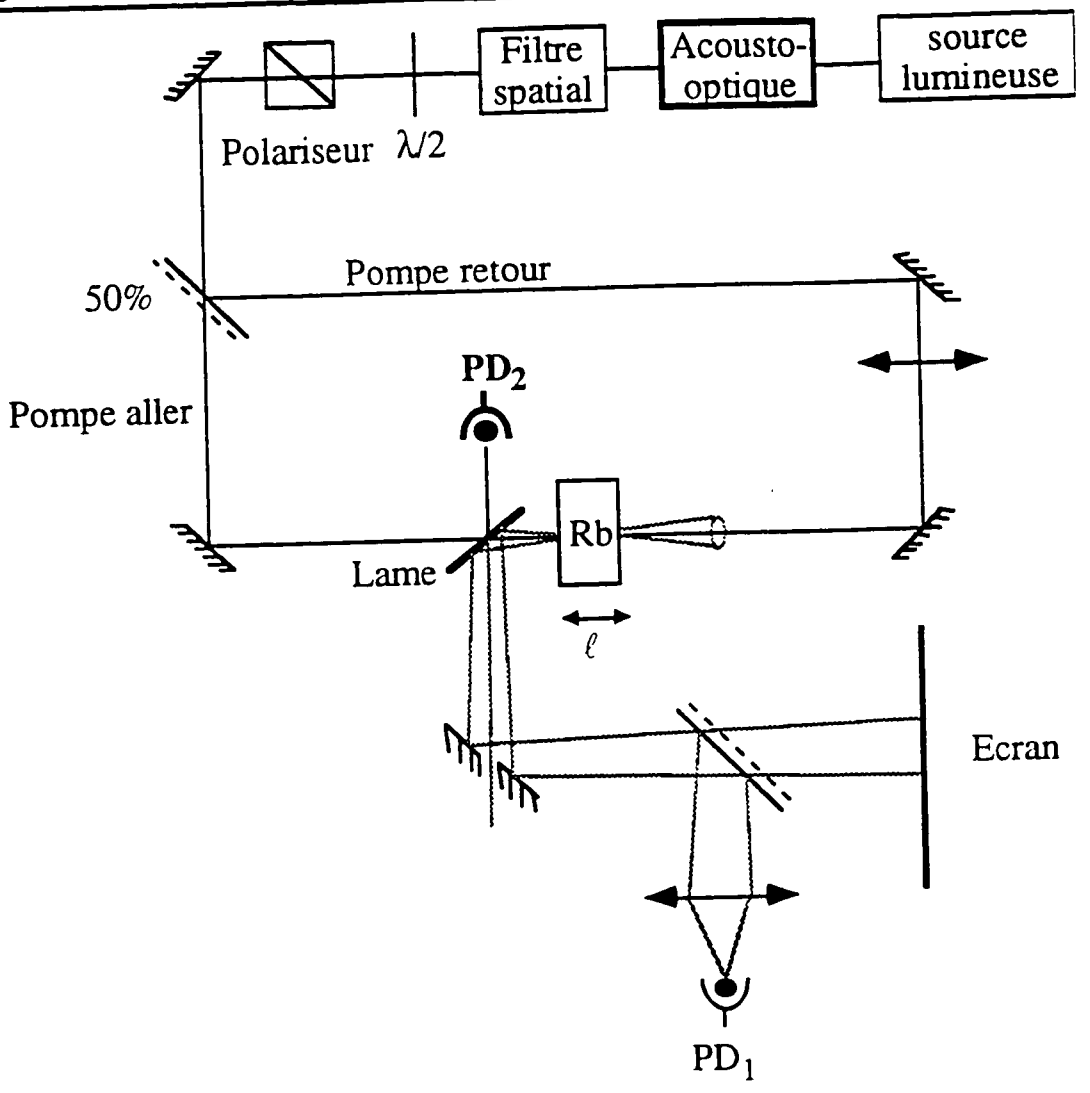


Fig III.1.10: Dispositif expérimental permettant d'étudier des diagrammes de bifurcation

Les diagrammes de bifurcation a), b), c), suivants ont été obtenus pour trois fréquences du laser différentes et correspondant aux positions 2, 4 et 1 et représentées sur la figure (III.1.11).

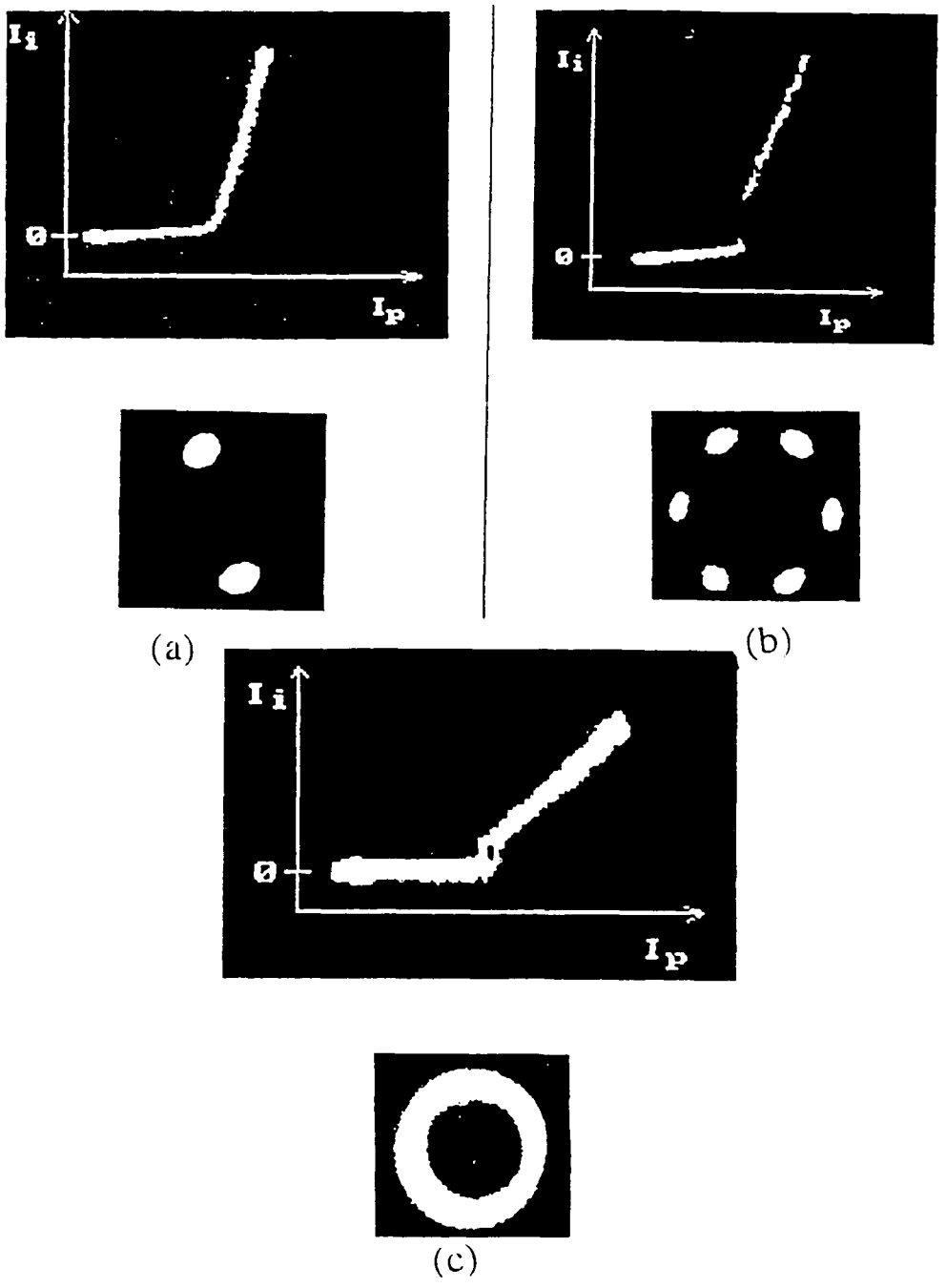


Fig III.1.11: Diagrammes de bifurcation et figures en champ lointain.

Les rouleaux présentés sur la figure (a) sont obtenus pour une intensité de la pompe variant entre 10 et 25 mW. Ils sont bien associés à une bifurcation supercritique.

Les hexagones sont obtenus pour une fréquence du laser proche de la fréquence indiquée par la position 4 sur le diagramme de phase (III.1.3) et pour une intensité de la pompe variant entre 120 et 180 mW. La discontinuité du diagramme de bifurcation est conforme à la théorie.

La figure (c) correspond à une bistabilité obtenue pour une fréquence du laser correspondant à la position 1 de la figure (III.1.3) pour laquelle la figure en champ lointain associée correspond à des anneaux.

Nous avons également étudié les diagrammes de bifurcation obtenus lors d'une transition d'une figure à une autre. De manière générale, lors d'une transition d'une figure à une autre, nous observons un changement de pente et éventuellement une discontinuité ou une bistabilité. La figure (III.1.12.a) suivante correspond à une transition rouleaux hexagones et a été obtenue pour une fréquence du laser proche de la fréquence correspondant à la position 3 du diagramme de phase (III.1.3). Nous avons là une compétition rouleaux hexagones qui a été étudiée dans d'autres expériences aussi bien en optique [Pam93] qu'en hydrodynamique [Cil90]. La figure (III.1.12.b) présente une zone de bistabilité spatiale lors d'une transition hexagone-anneau. Dans la zone 1, la figure en champ lointain associée correspond à un hexagone, dans la zone 3, elle correspond à un anneau et la zone 2 correspond à une zone de bistabilité spatiale où il est possible d'observer des anneaux ou des hexagones.

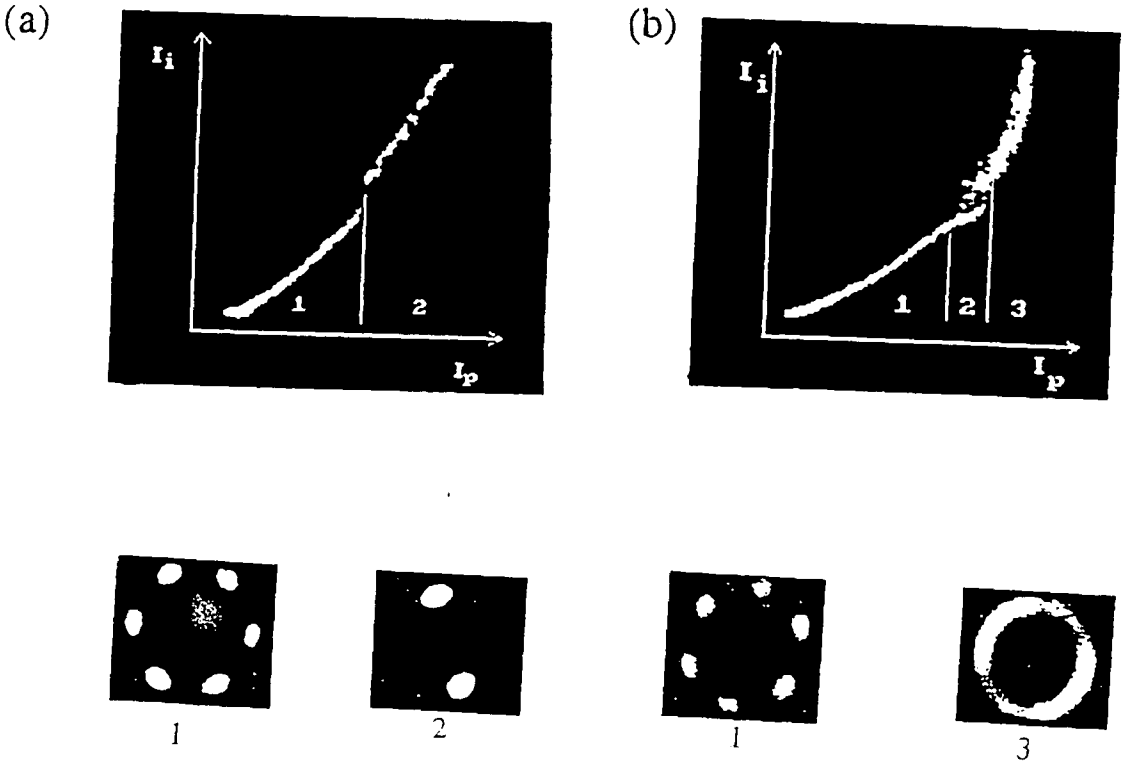


Fig III.1.13: Bifurcation associée à des transitions d'une figure à une autre.

Nous avons dans cette partie présenté les structures tranverses des instabilités en champ proche et en champ lointain et établi un diagramme de phase spécifiant la structure transverse en fonction de l'intensité et de la fréquence du laser. Nous avons ensuite réalisé des diagrammes de bifurcation conformes aux diagrammes théoriques. Dans l'expérience précédente, leur comportement temporel jouait un rôle important. Nous pouvons maintenant nous demander si ces instabilités spatiales sont dans cette nouvelle expérience également associées à des instabilités temporelles.

2) Corrélations

Les instabilités obtenues dans cette deuxième expérience possèdent également un comportement dynamique qui peut suivant les valeurs de différents paramètres être soit statique, soit périodique, soit chaotique. L'étude de ces phénomènes dynamiques sera réalisée dans la partie (III.3) et nous commencerons par étudier les corrélations entre deux parties spatiales des instabilités. Nous montrerons comment un échantillonnage de l'intensité dynamique des instabilités peut nous donner une indication sur le nombre de degrés de liberté du système. En effet, l'étude de la corrélation entre deux signaux est une mesure du couplage entre ces deux signaux.

Nous allons dans cette partie donner tout d'abord une définition de la corrélation. Nous allons ensuite nous attacher à décrire la corrélation entre les instabilités hors d'axe et sur l'axe pour différentes fréquences. Dans un deuxième temps, nous attacherons aux corrélations entre différents points d'une même instabilité hors d'axe. Nous étudierons le cas des anneaux, puis des hexagones et enfin des rouleaux.

2.1) Définition

2.1.1) Echantillonnage

La corrélation est une comparaison entre deux signaux. Il s'agit donc d'une mesure statistique réalisée à partir de N_{be} points. Nous réaliserons donc un échantillonnage de ces signaux à une fréquence $1/\tau$ où τ est l'intervalle de temps écoulé entre l'enregistrement de deux points successifs. Nous comparerons en chaque point les valeurs des intensités des deux signaux. La fréquence d'échantillonnage devra être suffisamment rapide pour que les signaux soient décrits avec précision mais aussi sufisamment lente pour permettre, durant la durée $N_{be}\tau$ de l'enregistrement où N_{be} est fixé, au signal d'évoluer suffisamment. Les intensités des signaux étudiés dans notre expérience présenteront des fréquences caractéristiques de l'ordre de 100 kHz à 1 MHz.

Par conséquent pour une fréquence d'échantillonnage de 10^7 points par seconde un nombre de points d'enregistrement N_{be} égal à 50000 points, de 10 à 100 points par période seront enregistrés et de 500 à 5000 périodes seront décrites. De telles conditions permettent d'obtenir une statistique correcte.

2.1.2) Relation mathématique

Les signaux enregistrés par l'oscilloscope peuvent pour des raisons instrumentales posséder des valeurs moyennes et des variances différentes. Par conséquent, pour comparer ces signaux, il est important de les ramener à des signaux de même valeur moyenne et de même variance.

Appelons $(x_i)_{1\le i\le N_{be}}$ et $(y_i)_{1\le i\le N_{be}}$ les valeurs des signaux échantillonnés sur N_{be} = 50000 points. Nous avons par définition $x_i=x(t_0+i\tau)$ où t_0 correspond au temps du début de l'enregistrement et τ est le temps s'écoulant entre l'enregistrement de deux points successifs. Nous définirons les valeurs moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$ de ces signaux de la façon suivante:

$$\bar{x}=\frac{1}{N_{be}}\sum_{i=1,N_{be}} x_i \quad \text{et} \quad \bar{y}=\frac{1}{N_{be}}\sum_{i=1,N_{be}} y_i \qquad \text{(III.2.1)}$$

Nous définirons leurs variances respectives Var(x) et Var(y) par

$$\mathrm{Var}(x)=\frac{1}{N_{be}}\sum_{i=1,N_{be}}(x_i-\bar{x})^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(y)=\frac{1}{N_{be}}\sum_{i=1,N_{be}}(y_i-\bar{y})^2 \qquad \text{(III.2.2)}$$

La variance appelée aussi dispersion correspond à la grandeur absolue moyenne des fluctuations des différents signaux. La racine carrée de cette variance est aussi appelée écart quadratique moyen.

Nous définirons alors les signaux normalisés $(\tilde{x}_i)_{i=1,N_{be}}$ et $(\tilde{y}_i)_{i=1,N_{be}}$ par les relations suivantes:

$$\tilde{x}_i=\frac{x_i-\bar{x}}{\left(\frac{1}{N_{be}}\sum_{i=1,N_{be}}(x_i-\bar{x})^2\right)^{1/2}} \quad \text{et} \quad \tilde{y}_i=\frac{y_i-\bar{y}}{\left(\frac{1}{N_{be}}\sum_{i=1,N_{be}}(y_i-\bar{y})^2\right)^{1/2}} \qquad \text{(III.2.3)}$$

Ces signaux normalisés $(\tilde{x}_i)_{i=1,N_{be}}$ et $(\tilde{y}_i)_{i=1,N_{be}}$ possèdent la même moyenne égale à 0 et la même variance égale à 1. Ils sont donc comparables. Nous pouvons donc définir la corrélation $C_0(x,y)$ entre les signaux (x) et (y):

$$C_0(x,y) = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{N_{be}} \sum_{i=1,N_{be}} (\tilde{x}_i - \tilde{y}_i)^2 - 2\right) \qquad \text{(III.2.4)}$$

Lorsque les signaux sont en phase ils sont complètement corrélés,

$$\forall i,\ \tilde{x}_i = \tilde{y}_i \text{ et } C_0=1. \qquad \text{(III.2.5.a)}$$

Lorsque les signaux sont en opposition de phase, ils sont dits anticorrélés,

$$\forall i,\ \tilde{x}_i = -\tilde{y}_i \text{ et } C_0=-1. \qquad \text{(III.2.5.b)}$$

Lorsque les signaux sont décorrélés, $\sum_i \tilde{x}_i\, \tilde{y}_i = 0$ et $C_0=0$. (III.2.5.c)

Les signaux en phase ($C_0=1$) et en opposition de phase ($C_0=-1$)correspondent toujours à un couplage maximum entre les signaux (x) et (y). Par conséquent le degré de corrélation que nous intitulerons $D_0(x,y)$ est une mesure plus pertinente du couplage entre (x) et (y). Nous le définirons de la façon suivante:

$$D_0(x,y) = |C_0(x,y)| \qquad \text{(III.2.6)}$$

Pour des signaux complètement décorrélés, $D_0(x,y)=0$. Lorsque les signaux sont parfaitement corrélés ou anticorrélés, $D_0(x,y)=1$.

Nous appliquons maintenant ce formalisme dans l'étude des corrélations entre différentes parties des instabilités transverses.

2.2) Instabilités sur l'axe et hors d'axe

2.2.1) Cas particulier: hexagones

Intéressons-nous à titre d'exemple à l'intensité des instabilités hors d'axe et sur l'axe obtenues pour des fréquences correspondant à la position 3 de la figure (III.1.3). il s'agit en champ lointain pour l'instabilité hors d'axe des hexagones.

(a)

(b)

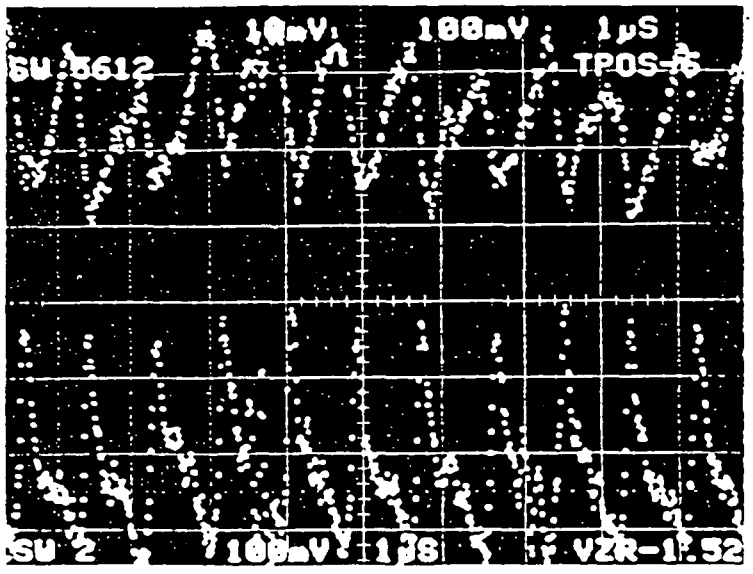


Fig III.2.1: Dépendance temporelle des instabilités sur l'axe (a) et hors d'axe (b) pour une fréquence correspondant à la position 3 de la figure (III.1.3)

Les signaux sur l'axe et hors d'axe sont en opposition de phase. De même les signaux sur l'axe et hors d'axe pour les hexagones obtenus pour les fréquence les plus basses sont en phase. Il y a dans ces deux cas de figure un fort couplage.

2.2.2) Etude générale

Cette expérience permettra de calculer la corrélation entre les intensités des instabilités hors d'axe et sur l'axe dans la première zone des instabilités présentée dans la figure (III.1.3).

Nous allons ici introduire la notion de retard dans le calcul de la corrélation. En effet si le signal (x) est couplé au signal (y) mais avec un retard $n\tau$ où $1/\tau$ est la fréquence d'échantillonnage, le calcul de la corrélation tel que nous l'avions exposé en (III.2.1) ne permettra pas de mettre en évidence ce couplage. Si par contre nous décidons de comparer les signaux x(t) et $y(t+n\tau)$ au lieu de comparer x(t) et y(t), le calcul de cette nouvelle corrélation permettra de mettre en évidence ce couplage. Ainsi la corrélation correspondra ici à

$$C_n(x,y) = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{N_{be}} \sum_{i=1,N_{be}} (\tilde{x}_i - \tilde{y}_{i+n})^2 - 2\right) \qquad \text{(III.2.6)}$$

Nous calculerons la corrélation entre les signaux sur l'axe et hors d'axe pour plusieurs retards $n\tau$ différents. et nous définirons $c(x,y)=Sup\{C_n(x,y)\}$. Cette quantité $C(x,y)$ correspond à la corrélation maximum entre les signaux.

Nous réaliserons plusieurs mesures en changeant la fréquence du laser de 150 MHz à chaque fois mais en gardant toujours la même intensité sur chaque pompe soit 280 mW. Le diamètre de la pompe est de 0,8 mm. L'intensité de la pompe étant plus grande que l'intensité maximum du diagramme de phase de la figure (III.1.3), la zone de fréquences sur laquelle s'observent les instabilités est plus large. Cette zone est représentée entre les deux traits verticaux de la figure (III.2.2) suivante. La zone grisée correspond à la zone pour laquelle le retard nécessaire pour obtenir un degré de corrélation maximum est nul. La zone hachurée correspond aussi à une zone d'absorption.

Le diagramme (III.2.3) présente le degré de corrélation entre les instabilités sur l'axe et hors d'axe en fonction de la fréquence.

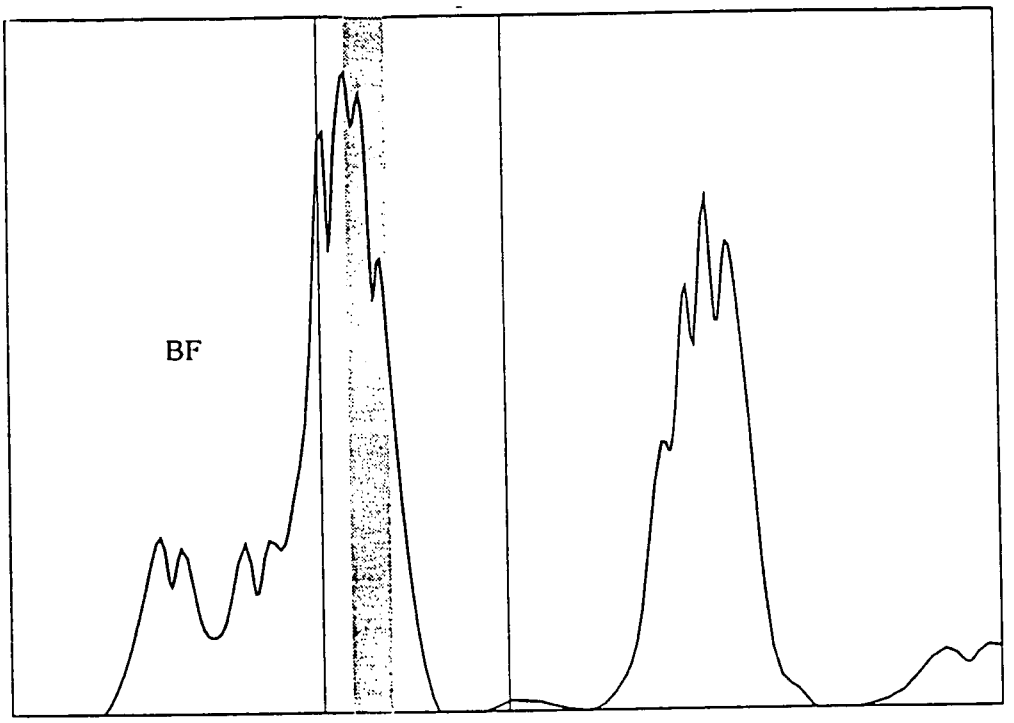


Fig III.2.2: Zone de fréquences sur lesquelles seront étudiées les corrélations.

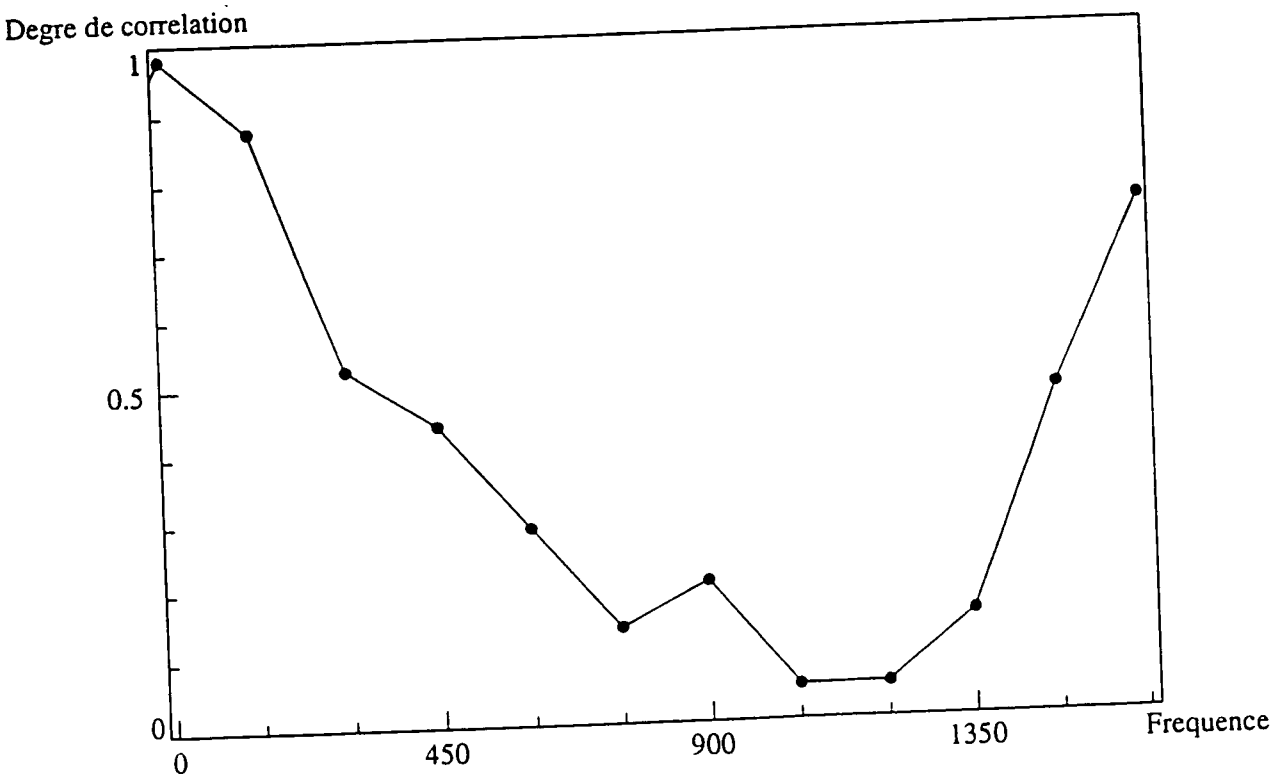


Fig III.2.3: Degré de corrélation entre les instabilités hors d'axe et sur l'axe en fonction de la fréquence.

La corrélation n'est importante que près du seuil des instabilités. Loin du seuil, la décorrélation est totale.

Nous allons maintenant étudier la corrélation pour différents points d'une même figure et en particulier étudier si, là aussi, la corrélation augmete près du seuil des instabilités.

2.3) Corrélations entre deux points d'une même figure

Nous pouvons dans notre expérience analyser les instabilités en champ lointain comme des ensembles de points et il est alors intéressant de déterminer le couplage existant entre ces différents points.

2.3.1) Anneaux

a) Dispositif expérimental

L'expérience suivante permettra d'étudier la corrélation entre deux points d'un même anneau en champ lointain en fonction de la position respective des deux points, ainsi que de l'intensité et du diamètre des faisceaux pompes. Le dispositif expérimental est présenté dans les figures (III.2.4).

Le faisceau hors d'axe prélevé par la lame à Brewster se réfléchit successivement sur deux lames semi-transparentes. Derrière chacune de ces lames seront placés deux diaphragmes D_1 et D_2 constitués par un disque percé d'un trou. Ils prélèveront une partie de l'anneau. Le diaphragme D_2 sera placé de telle sorte qu'en le tournant le trou décrive tout l'anneau. Le diaphragme D_2 sera donc mobile alors que le diaphragme D_1 sera fixe. Les positions respectives des diaphragmes seront définies par l'angle φ présenté dans la figure (III.2.4.b). Enfin, une partie de ce faisceau sera projetée sur l'écran lointain nous pourrons ainsi nous placer à une fréquence telle que la figure en champ lointain soit un anneau.

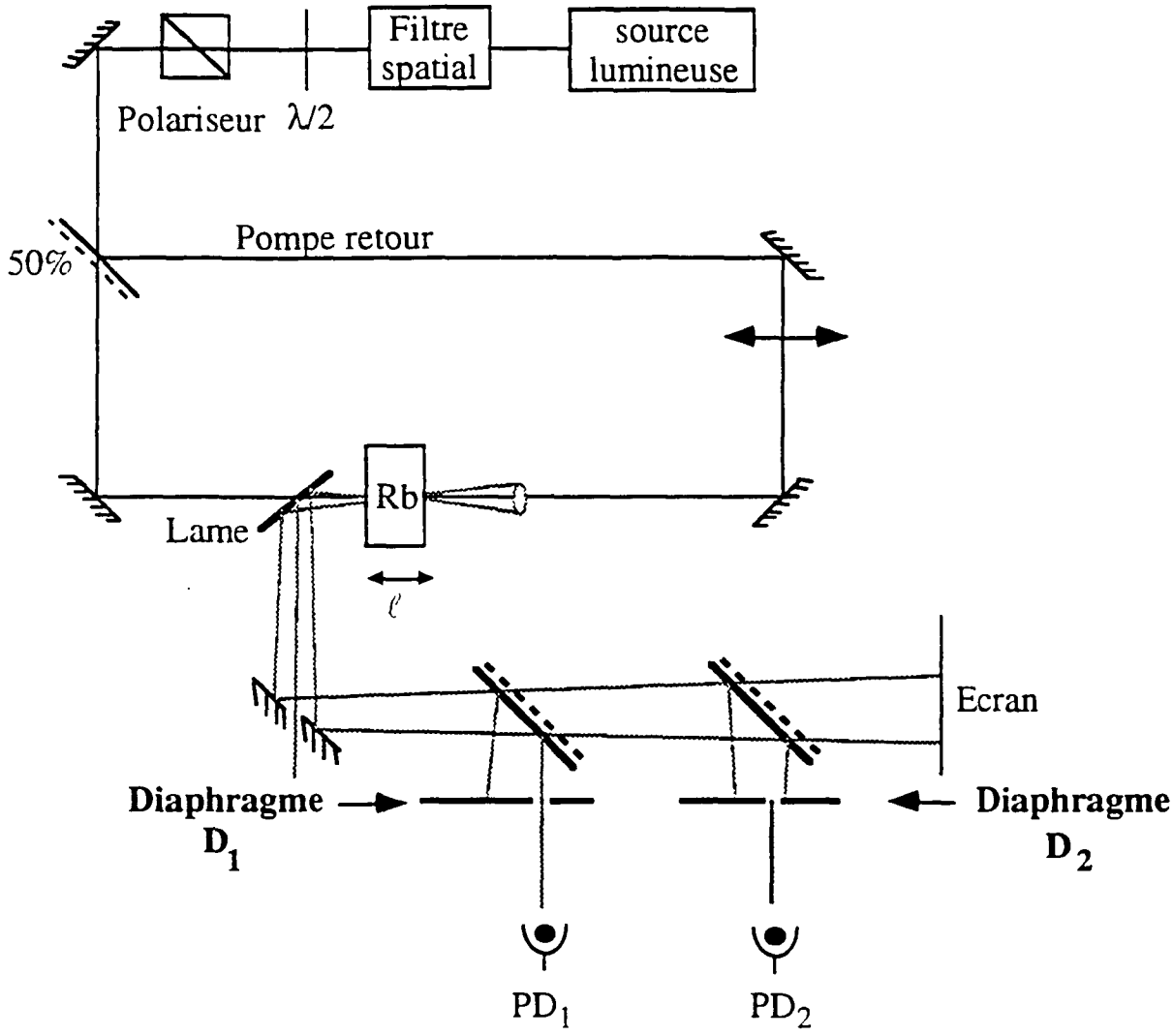


Fig III.2.4.a: Diagramme expérimental

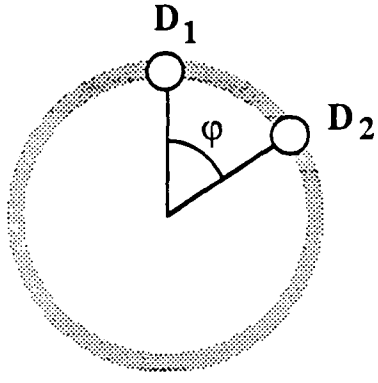


Fig III.2.4.b: Ecart angulaire entre les deux diaphragmes

b) Résultats

Nous réalisons plusieurs séries de mesures pour des intensités et des diamètres des faisceaux pompes différents en asservissant à chaque fois la fréquence du laser. Compte tenu de la symétrie du système, nous ne chercherons à ne faire varier l'écart angulaire φ entre les deux diaphragmes que sur la gamme 0°-180°. Expérimentalement, pour chaque série de mesures, φ varie entre -20° et 200°. Compte tenu de la difficulté du repérage précis de la position relative des diaphragmes correspondant à un écart angulaire de 0°, nous serons ainsi assurés de décrire tous les angles compris entre 0° et 180°. A 0°, la corrélation devra être parfaite. Ceci nous permettra de déterminer précisément la position 0°.

Les corrélations seront calculées à partir de données échantillonnées à une fréquence de 5 10^6 pts/s en tenant compte d'un éventuel retard dans le couplage entre différents points. Les deux figures suivantes représentent les corrélations obtenues en tenant compte d'un éventuel phénomène de retard et sans en tenir compte pour un faisceau de rayon de pincement w de 0,7 mm et des intensités de 200 et 100 mW.

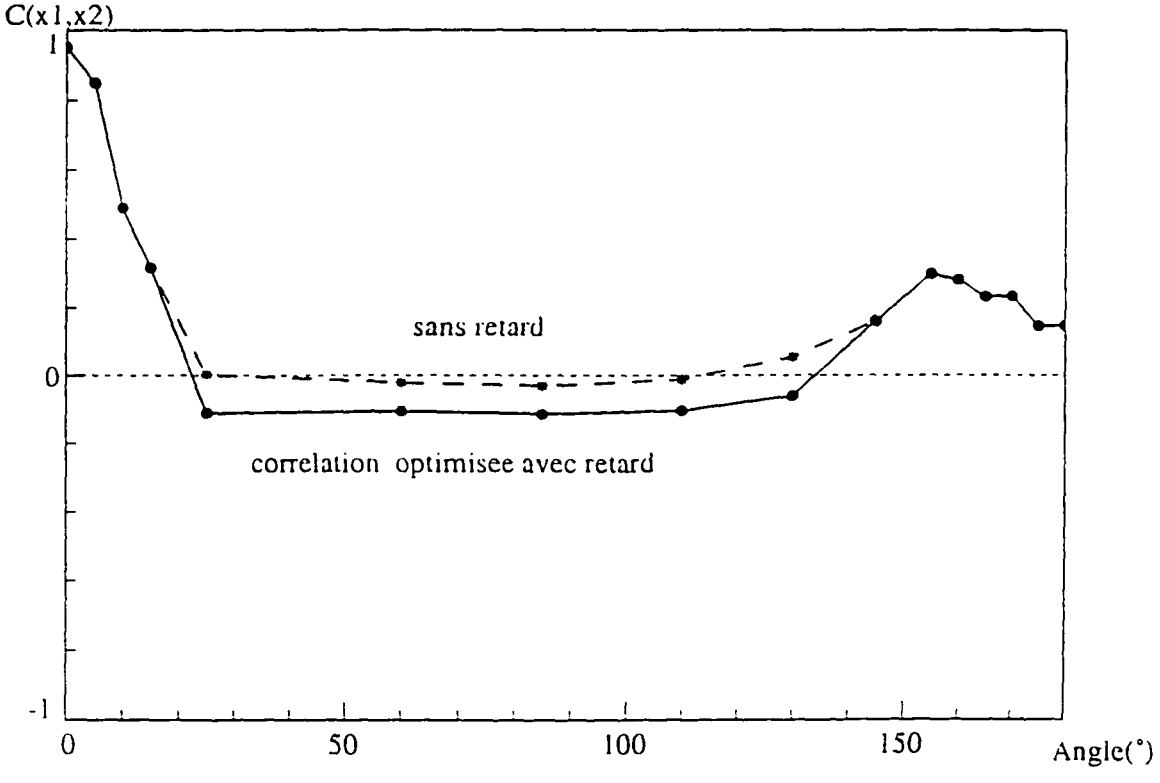


Fig III.2.5.a: Corrélation avec et sans retard pour I_p=200 mW et w=0,7 mm

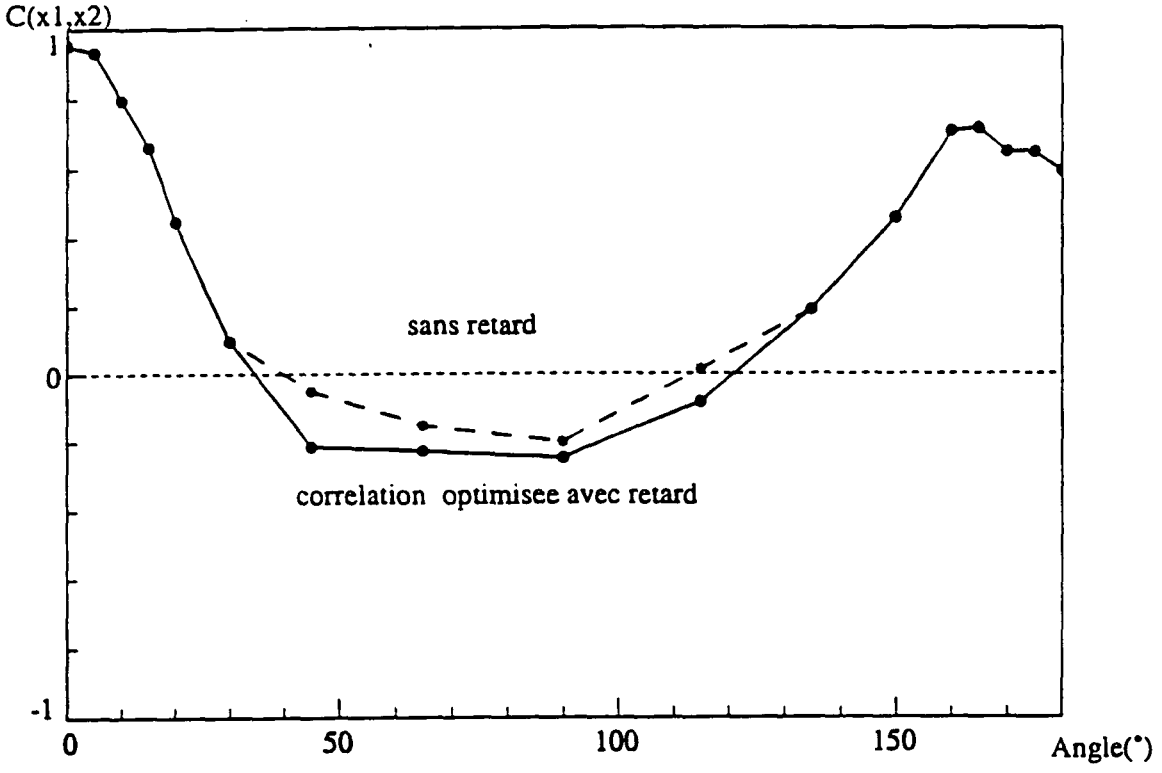


Fig III.2.5.b: Corrélation avec et sans retard pour I_p=100 mW et w=0,7 mm

- Discutons tout d'abord la forme générale de ces courbes.

En 0°, les signaux enregistrés par les deux photodiodes sont parfaitement corrélés: il s'agit du même signal. La corrélation diminue dans un premier temps quand l'angle φ augmente. Les signaux sont quasiment décorrélés et sont même légèrement anticorrélés pour des angles intermédiaires. La corrélation augmente à nouveau quand l'angle se rapproche de 180°. Par conséquent le couplage entre des faisceaux émis dans des directions symétriques par rapport à l'axe optique est important. Le mélange à quatre ondes vers l'avant permet d'émettre deux photons simultanément dans des directions symétriques et semble être à l'origine de cette corrélation pour des points diamétralement opposés. Par ailleurs, la légère anticorrélation pour des angles intermédiaires indique l'existence d'une compétition entre des directions orthogonales.

-Comparons maintenant les courbes de corrélations en tenant ou en ne tenant pas compte d'un temps de retard.

Ces deux courbes montrent que la corrélation obtenue sans tenir compte de l'effet de retard et la corrélation obtenue en tenant compte de ce retard ne diffèrent que pour des angles compris entre 25 et 130° pour des faisceaux d'intensité 200 mW et pour des

angles compris entre 45 et 115° pour des faisceaux d'intensité 100 mW. Ce retard est alors de l'ordre de 0,2 µs. Il permet alors d'accentuer une anticorrélation. L'effet néfaste de l'émission d'une instabilité dans une direction donnée sur l'émission d'une instabilié dans une direction orthogonale est donc maximum au bout d'un temps de l'ordre de 0,2 µs. Pour un faisceau de puissance 200 mW, pour des angles intermédiaires, les signaux seront très décorrélés et l'effet d'un retard tout au moins pour cet échantillonage ne se fait pas sentir.

Caractérisons maintenant l'influence de l'intensité et du rayon de pincement w du faisceau sur la corrélation. Nous donnerons là à chaque fois les corrélations obtenues en introduisant un retard entre les deux signaux.

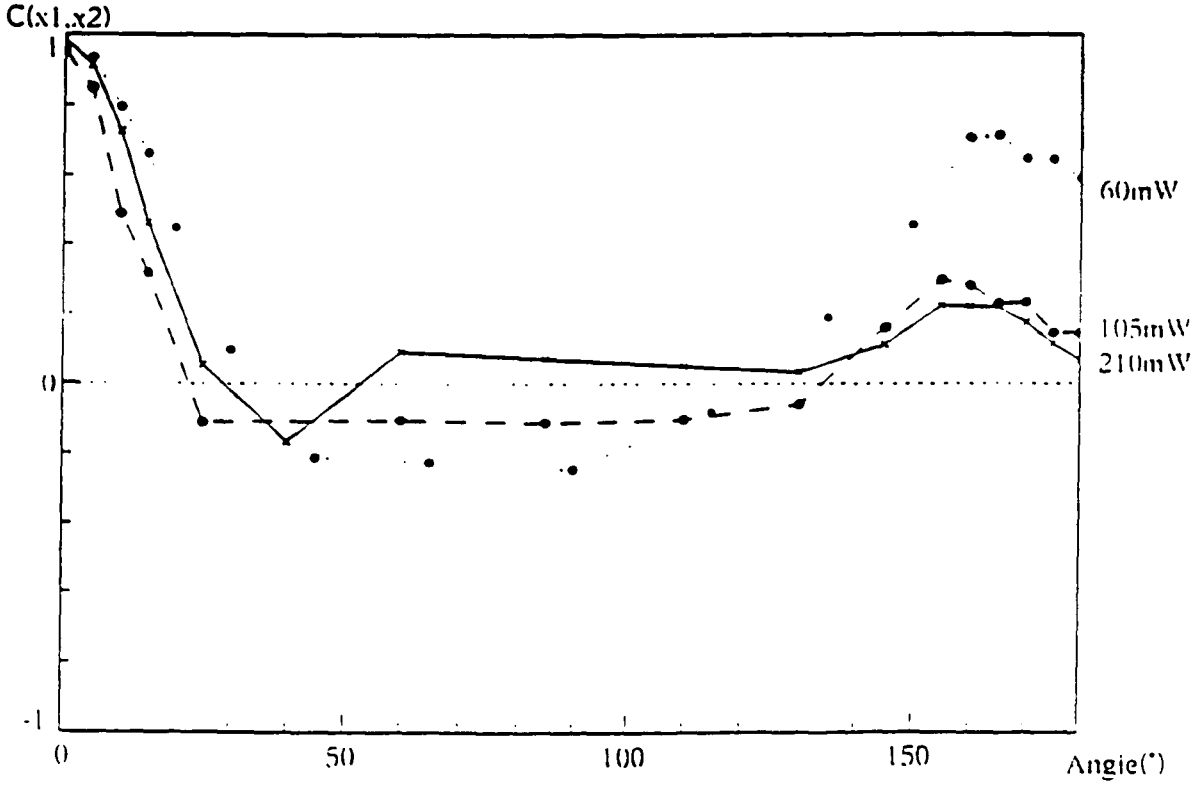


Fig III.2.6a: Corrélation entre deux points d'un anneau en fonction de l'angle φ. w=0,8 mm, I=210 mW, 105 mW, 60 mW

Pour des angles voisins de 0° (<40°) et voisins de 180° (>140°), la corrélation est plus importante pour des faisceaux de faible intensité. Pour des angles compris entre 40 et 140°, et pour une intensité de 60 mW, les faisceaux sont légèrement anticorrélés alors que pour une intensité maximum l'anticorrélation est très faible voire nulle. Lorsque les faisceaux pompes sont peu intenses, la corrélation est meilleure. Nous sommes en effet plus près du seuil de formation des instabilités. Le couplage entre les différents points de l'anneau sera plus important. Le nombre de variables dynamiques excitées est plus faible.

Analysons maintenant l'influence du rayon de pincement w:

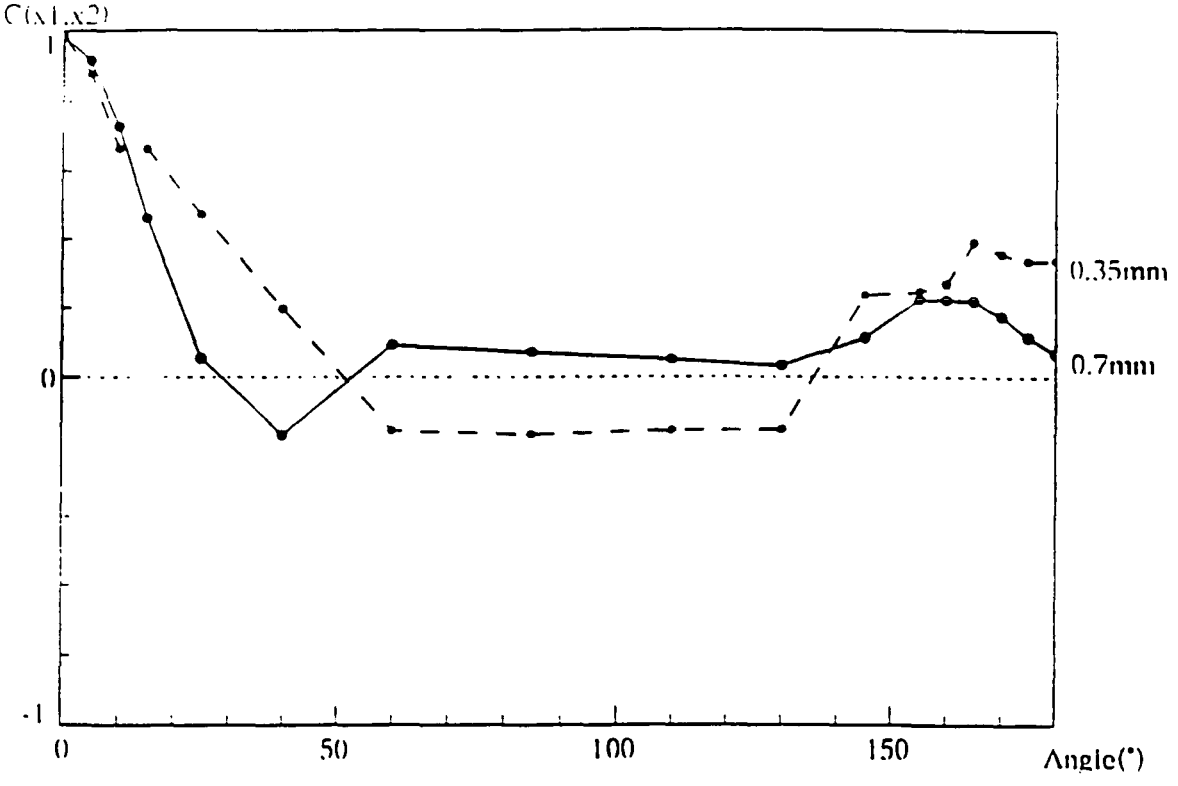


Fig III.2.6.b: Corrélation entre deux points d'un anneau en fonction de l'angle φ.
w=0,35 mm, 0,7 mm, I=400 mW

La corrélation augmente quand w diminue. Le nombre de degrés de liberté transverses associés à l'anneau diminue donc avec w. Une estimation du nombre de degrés de liberté transverse du faisceau pompe est le nombre de Fresnel F défini par $F = \frac{w^2}{\lambda \ell}$ où ℓ est la longueur de la cellule et qui est bien une fonction décroissante de w. Remarquons aussi que le facteur important n'est pas l'intensité en chaque point du

faisceau pompe mais plutôt la puissance totale du faisceau. Nous retrouvons là les mêmes conclusions que dans la partie (II.4).

Les corrélations entre différents points d'un même anneau sont donc maximum quand ces deux points sont très proches l'un de l'autre ou quand ils sont diamétralement opposés. La corrélation augmente quand l'intensité ou le rayon de pincement du faisceau diminue.

2.3.2) Hexagones

Nous adopterons la même démarche pour des instabilités dont la figure en champ lointain est un hexagone. L'échantillonage se fera là à une fréquence de 10^7 points/s. Le rayon de pincement du faisceau est de 0.35 mm et nous effectuerons des mesures pour plusieurs intensités différentes.

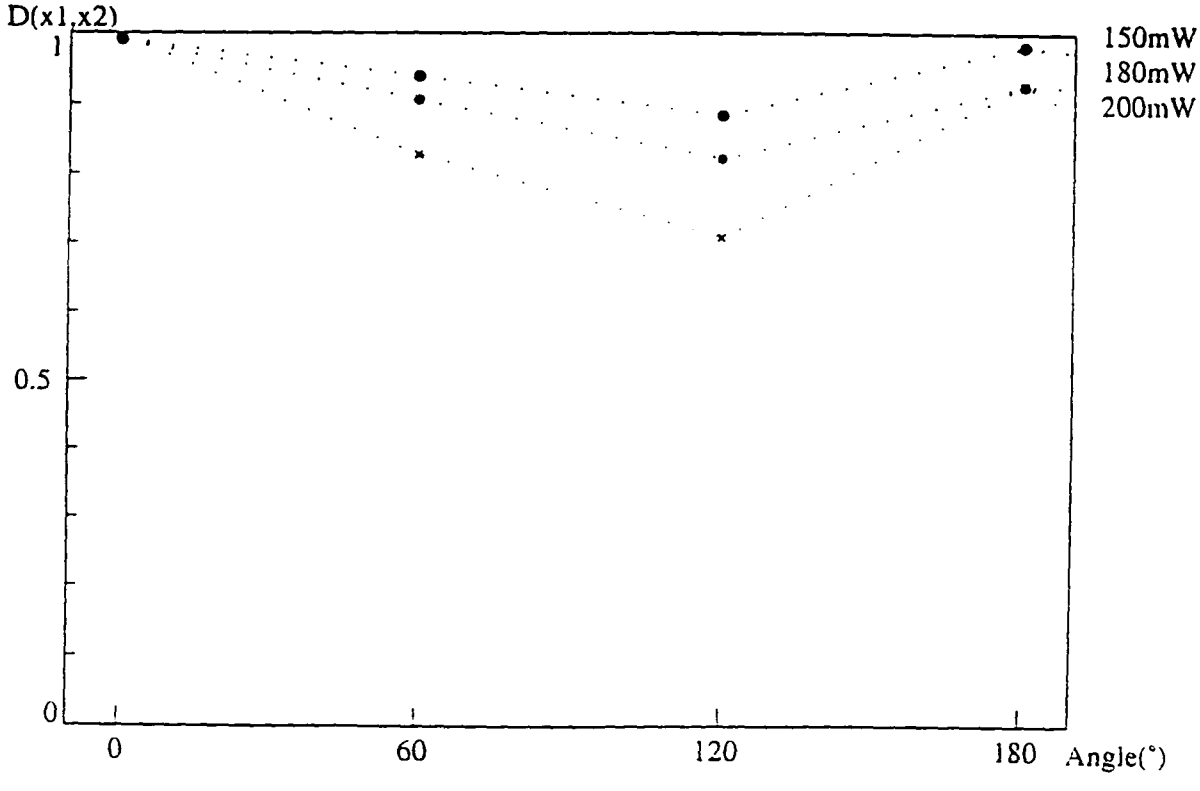


Fig III.2.7: Degré de corrélation entre différents points d'un hexagone pour plusieurs intensité différentes

Le degré de corrélation entre les différents points en champ lointain de l'hexagone est bonne. Elle augmente avec l'écart angulaire φ, passe par un minimum pour φ=120° et se rapproche de 1 pour un angle de 180°. Le degré de corrélation est d'autant plus important que l'intensité des pompes est faible. Nous retrouvons là les mêmes conclusions que pour les anneaux.

2.3.3) Rouleaux

Une étude comparable a été réalisée sur les rouleaux dans plusieurs situations. Une première expérience réalisée avec un faisceau dont le rayon de pincement est égal à 0,35 mm montre que les instabilités émises symétriquement par rapport à l'axe optique sont parfaitement corrélées.

Nous avons également réalisé des mesures en fonction de l'intensité pour des rayons de pincement des faisceaux pompes égaux à 0,35 et 0,17 mm. Ce dernier rayon de pincement ne permet en effet de n'obtenir que des rouleaux. Il ne sera pas nécessaire dans le calcul de la corrélation d'introduire le moindre retard entre les faisceaux.

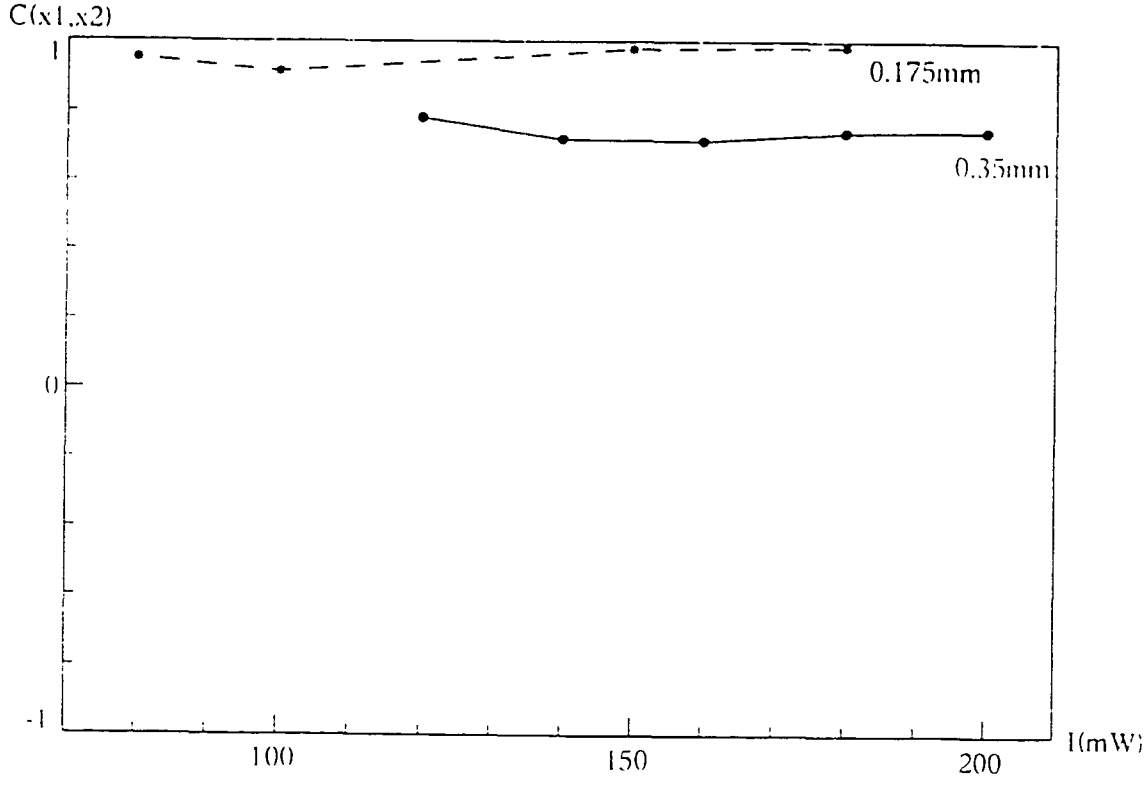


Fig III.2.6: Corrélations entre les deux points des rouleaux en champ lointain en fonction de l'intensité des pompes pour w=0.175mm et w=0.35mm

2.4) Conclusion

Nous avons dans cette partie étudié les corrélations entre les instabilités sur l'axe et hors d'axe ainsi que les corrélations entre différents points d'une même figure. Ces corrélations nous ont donné une indication sur le couplage entre ces différents signaux et donc sur l'influence de l'émission de l'instabilité dans une direction sur l'émission dans une autre direction. En particulier les signaux émis symétriquement par rapport à l'axe optique sont couplés alors qu'ils sont assez bien décorrélés des faisceaux émis dans la direction orthogonale. Dans tous les cas étudiés, la corrélation est toujours meilleure dans des zones proches du seuil de formation des instabilités. De plus la corrélation augmente quand le nombre de Fresnel diminue. Nous pouvons maintenant nous demander si la dynamique de nos instabilités et la dimension du chaos ne pourrait pas aussi être une indication du nombre de degrés de liberté dans notre système. Nous allons donc dans la partie suivante analyser la dynamique de nos signaux et nous allons décrire le chaos observé.

3) Chaos

Nous n'avons analysé jusqu'ici que des signaux stationnaires ou périodiques. Cependant dans la partie 2. nous avions présenté des signaux dont le spectre de puissance continu (Fig II.3.9) et donc d'apparence chaotique. Une caractéristique principale du chaos est la perte de mémoire du signal. La connaissance du signal pendant un temps éventuellement long ne permettra pas de prédire son évolution ultérieure. L'imprédictabilité est la caractéristique principale du chaos.

Depuis une trentaine d'années le développement des calculs et des moyens numériques ont permis l'étude théorique et expérimentale des phénomènes chaotiques. Des études fondamentales menées par S. Smale [Sma67] ou D. Ruelle et F. Takens [Rue71] ainsi que des développements numériques du chaos déterministe menés par Lorentz [Lor63], Hénon [Hen76] ou Rössler [Rös79] ont permis d'établir qu'un processus non prévisible n'avait pas forcément une origine aléatoire. Ces études ont permis de développer les notions d'attracteur étrange, de dimension fractale.

Parallèlement à ces études théoriques, dans le domaine expérimental les études de phénomènes chaotiques ont connu un grand développement. Tous les domaines de la science que ce soit en climatologie[Vos89], en chimie (Réaction de Belousov-Zhabotinsky) [Vid82], en hydrodynamique (Convection de Rayleigh-Bénard) [Tho86] ou en optique [Gau89] ont mis en évidence des phénomènes chaotiques. Les études théoriques précédentes et des moyens numériques plus puissants ont permis ces dernières années de caractériser ces phénomènes turbulents.

Dans cette partie nous exposerons tout d'abord les outils de base permettant d'étudier des phénomènes chaotiques [Lef92], [Ber88]. Nous appliquerons ensuite ces méthodes à nos signaux expérimentaux.

3.1) Notions théoriques

Nous allons ici développer les notions théoriques liées au chaos. Nous expliquerons tout d'abord comment s'opère une transition d'un régime statique ou périodique à un régime chaotique. Nous développerons ensuite les notions d'attracteur étrange et de dimension fractale et nous expliquerons comment à partir d'une série temporelle, il est possible de reconstruire un attracteur étrange et d'en calculer la dimension.

3.1.1) Routes vers le chaos

Jusqu'à ces dernières décades où l'étude des phénomènes chaotiques a pris une grande importance, les physiciens s'intéressaient essentiellement aux phénomènes ayant un comportement régulier. Une question naturelle consiste à se demander comment un régime chaotique peut s'instaurer à partir d'un régime périodique. Trois scénarios classiques permettent d'expliquer cette transition vers le chaos. Il s'agit des mécanismes de cascade sous-harmonique, de quasipériodicité ou d'intermittence.

a) Cascade sous-harmonique

Considérons un signal initialement périodique de fréquence f et supposons que l'augmentation d'un paramètre μ donné permette de rendre ce signal chaotique. Pour une valeur μ_1 du paramètre de contrôle, il apparaît dans le spectre de Fourier du signal une deuxième fréquence égale à f/2. Pour $\mu=\mu_2$, il apparaît une fréquence égale à f/4. Ces cascades sous-harmoniques se produiront jusqu'à une certaine valeur μ_∞ du paramètre de contrôle pour laquelle le signal devient chaotique. Un exemple de cette cascade sous-harmonique est présentée dans la figure suivante.

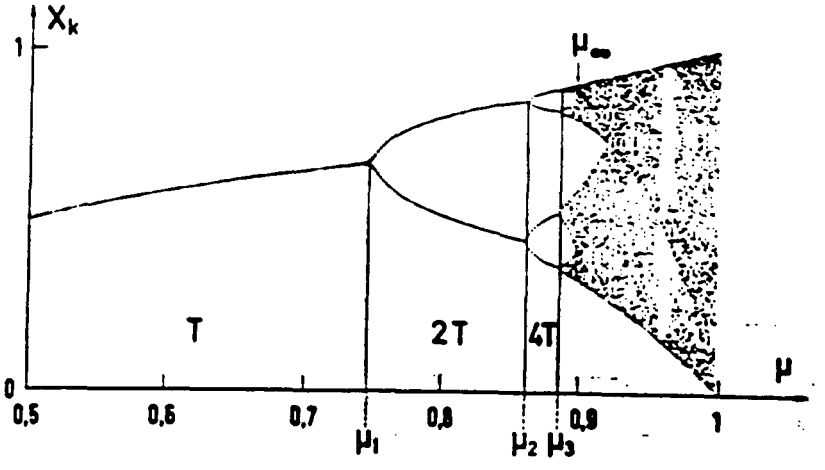


Fig III.3.1: cascade sous-harmonique pour un signal de la forme $x_{k+1}=4\mu x_k(1-x_k)$. D'après [Ber88]

b) Quasipériodicité

Le signal est initialement périodique et de fréquence f_1. Lorsque le paramètre de contrôle augmente, une deuxième fréquence f_2 incommensurable avec f_1 apparaît dans le spectre de Fourier du signal. Pour des valeurs du paramètre de contrôle encore supérieures, le comportement du signal devient chaotique.

c) Intermittence

Le comportement périodique du signal est pertubé par des bouffées de turbulence. Lorsque le paramètre de contrôle augmente, ces bouffées de turbulence sont de plus en plus fréquentes et le signal finit par être complètement chaotique. Un exemple de signal intermittent est donné dans la figure (III.3.20).

Ces trois routes vers le chaos s'observent également dans la convection de Rayleigh-Bénard en fonction de la valeur du nombre de Rayleigh qui est une mesure adimensionnelle de la température. Nous verrons par la suite que ce nombre de Rayleigh joue un rôle similaire au nombre de Fresnel dans notre expérience.

3.1.2) Attracteur étrange

Les attracteurs étranges très connus par leur structure `feuilletée' sont une signature du chaos déterministe. Dans cette partie nous expliquerons la notion d'attracteur étrange. Nous commencerons par introduire la notion d'espace des phases. Nous aborderons ensuite la notion d'attracteur et nous expliquerons en quoi consiste le caractère étrange d'un attracteur . Enfin nous donnerons une méthode pratique pour reconstituer à partir d'une série temporelle un attracteur étrange.

a) Espace des phases

La théorie des systèmes dynamiques que nous allons développer ici consiste à remplacer l'étude temporelle trop complexe par une représentation géométrique des lois d'évolution. Nous espérons ainsi que cette représentation géométrique permettra de mettre en évidence des propriétés intrinsèques du chaos étudié. Nous faisons ainsi implicitement l'hypothèse que le système est descriptible par un faible nombre de variables. Supposons par exemple que le système soit décrit par N variables $(X_1, X_2, \ldots X_N)$ régies par un système d'équations différentielles

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(\mu, X_1, X_2, \ldots, X_N, t) \quad \text{où} \quad 1 \leq i \leq N \qquad \text{(III.3.1)}$$

μ représente le ou les paramètres de contrôle. L'évolution du système est donc là déterministe. L'ensemble de ces équation différentielles constitue un flot de l'espace des phases. L'état du système à l'instant t et aux instants ultérieurs est caractérisé par la valeur des variables $(X_1, X_2, \ldots X_N)$ et nous pouvons représenter l'état du système à l'instant t par un point M de coordonnées $(X_1, X_2, \ldots X_N)$. L'espace à N dimensions ainsi défini s'appelle espace des phases. L'évolution du système au cours du temps est représentée géométriquement par la trajectoire décrite par M dans l'espace des phases au cours du temps. Si le régime est stationnaire, la trajectoire correspond à un point. Si le regime est périodique , elle décrit une courbe fermée(cycle limite). Si le système compte n fréquences incommensurables(régime quasi-périodique), elle s'inscrit sur un tore T^n (voir figure ci-dessous)

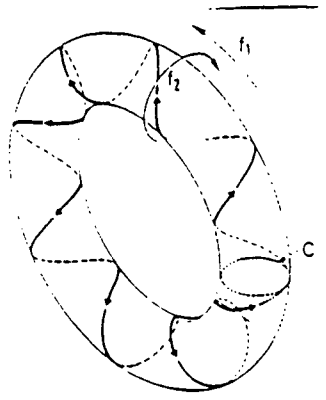


Fig III.3.2: Tore T^2 et trajectoire du point M en présence de deux fréquences incommensurables f_1 et f_2. (D'après [Ber88])

b) Attracteur

Les systèmes dissipatifs sont des systèmes qui ne conservent pas l'énergie. Dans un système dissipatif, tout flot possède un attracteur. L'attracteur est un ensemble de l'espace des phases possédant les propriété suivantes:

-L'attracteur est invariant par l'action du flot. Par conséquent, si le point descriptif M du système se situe sur l'attracteur, il y restera dans les instants ultérieurs.

-La dimension de l'attracteur est inférieure à la dimension de l'espace des phases. On dit qu'il y a contraction des volumes dans l'espace des phases.

-L'attracteur est inclus dans un domaine plus vaste appelé le bassin d'attraction. Le bassin correspond à l'ensembles des trajectoires qui tendent vers l'attracteur à la limite des temps longs. L'attracteur a une structure géométrique plutôt simple alors que le bassin peut avoir une structure très compliquée.

Un point, un cycle limite, un tore,..., constituent des attracteurs classiques.

La contraction des volumes ne se produit pas forcément dans toutes les directions de l'espace des phases. Certaines directions peuvent être contractées alors que d'autres directions sont dilatées. Les trajectoires de points proches divergent donc suivant ces dernières directions.

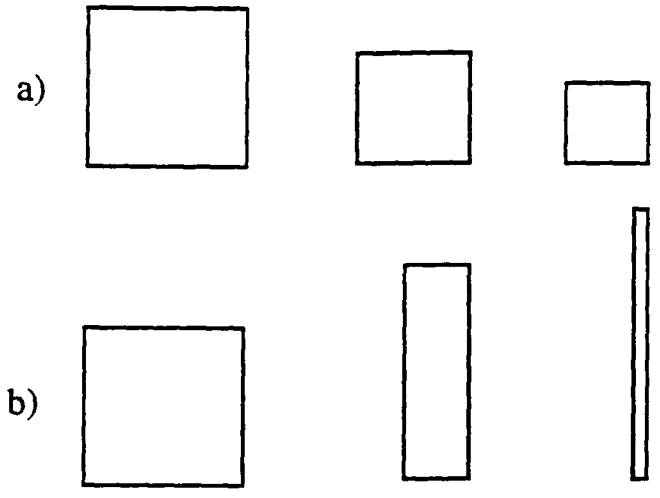


Fig III.3.3:Contraction des volumes dans l'espace des phases :a)contractions identiques dans toutes les directions, b) Contraction dans une direction et dilatation dans une autre direction

Si le régime dynamique est chaotique, et si le système est dissipatif, la trajectoire dans l'espace des phases correspond à un attracteur étrange.

c) Attracteur étrange

Un attracteur étrange est caractérisé par le fait que les trajectoires associées à des conditions initiales voisines divergent. Il possède donc au moins une direction dans laquelle l'espace des phases est étiré. Pour que les trajectoires restent dans un espace borné, il est alors nécessaire que cette divergence soit compensée par un repliement ramenant des régions de l'espace des phases sur des régions distinctes de l'espace des phases. Ces séquences d'étirement repliement donnent à l'attracteur étrange cet aspect feuilleté qui lui est caractéristique. De telles structures sont dites fractales.

La figure suivante représente l'attracteur de Hénon, célèbre par la permanence de sa structure à différentes échelles.

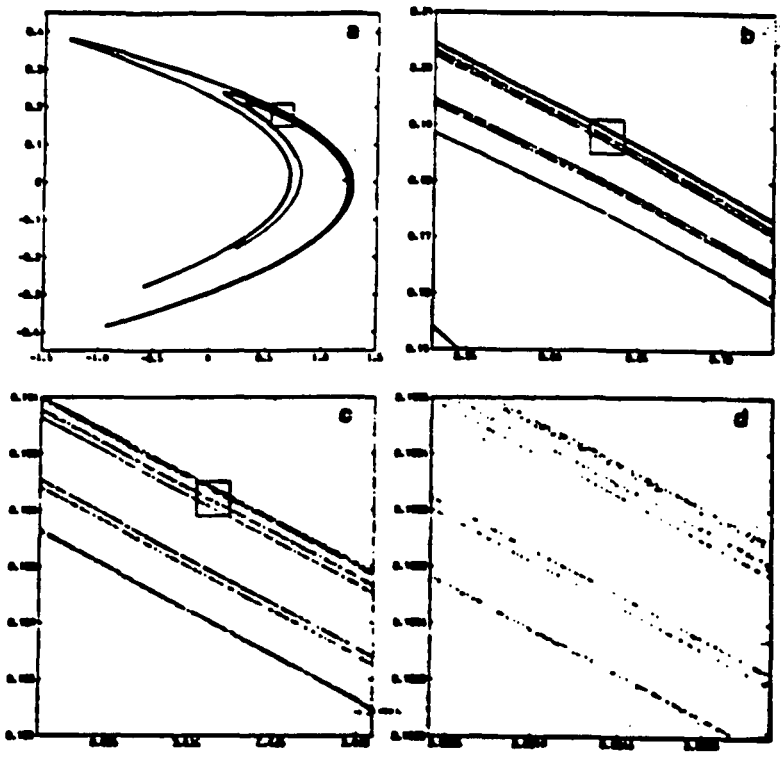


Fig III.3.4: Attracteur de Hénon. Chaque carré est l'agrandissement du carré de la figure précédente.(d'après [Hen76])

La divergence des trajectoires se manifeste par une grande sensibilité aux conditions initiales (SCI). Deux trajectoires très voisines divergent très rapidement dans une direction donnée. Si l'écart entre les deux trajectoires était initialement de δx_0, au temps t l'écart sera alors en moyenne de $\delta x(t)=\delta x_0\, e^{\lambda t}$. L'exposant λ appelé exposant de Lyapunov correspond au taux de divergence des trajectoires dans une direction donnée. Une direction de contraction correspond à un exposant négatif alors qu'une direction de dilatation à un exposant positif. L'existence d'un seul exposant de Lyapunov positif, suffit pour entraîner la divergence des trajectoires. Deux points initialement très proches suivent au bout d'un temps relativement court des trajectoires très différentes sur l'attracteur. La moindre incertitude sur l'état initial modifiera donc totalement la trajectoire ultérieure. Cette sensibilité aux conditions initiales a pour conséquence qu'une trajectoire n'est pas prévisible sur un attracteur étrange.

Un attracteur étrange est la signature géométrique du chaos.

Un moyen de caractériser ce chaos pourrait être le calcul des exposants de Lyapunov et en particulier des exposants positifs. Les algorithmes [Eck86], [Wol85] de calcul de ces exposants convergent lentement et nécessitent une forte puissance de calcul. Nous choisirons de caractériser notre chaos expérimental par d'autres méthodes.

d) Reconstruction d'un attracteur par la méthode des délais

Il n'est en général pas possible de mesurer l'intégralité des variables pertinentes du système. Il serait par exemple nécessaire pour pouvoir décrire parfaitement notre système expérimental de connaître le champ (amplitude et phase) en tout point d'un front d'onde. Par contre nous avons facilement accès à l'intensité du rayonnement. De manière générale, les données obtenues au cours d'une expérience consistent en une série temporelle d'une seule variable x(t). Cette serie temporelle doit nous permettre d'accéder à toute l'information sur la dynamique globale du système dans l'espace des phases. En effet, le système dans l'espace des phases est décrit par un ensemble d'équations couplées. L'évolution de chaque variable dépend donc de l'évolution de toutes les autres variables. Par conséquent la série temporelle d'une variable donnée reflète l'évolution temporelle de toutes les autres variables. Il s'agit maintenant de reconstruire à partir de cette série temporelle une série de N variables indépendantes qui peuvent être considérées comme les coordonnées du point M représentatif du système dans l'espace des phases. La méthode des délais suivante a été proposée par Packard [Pac80] et justifiée théoriquement par Takens [Tak81]: L'état du système dans l'espace des phases R^d est décrit à chaque instant par le vecteur suivant:

$$X(t)=\{x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau), x(t+3\tau), \ldots, x(t+(d-1)\tau)\} \qquad \text{(III.3.2)}$$

où τ est un délai temporel multiple du temps écoulé entre deux échantillonnages successifs.

Si nous appelons D la dimension de l'attracteur dans l'espace des phases naturel, d appelé dimension de plongement doit être supérieure à D. Si d est inférieure à D, l'attracteur ainsi reconstruit ne possèdera pas toute l'information sur la dynamique du système. Pour éviter des singularités eventuelles dues à la reconstruction de l'attracteur, on montre qu'il est nécessaire de prendre la condition plus large suivante:

$$d \geq 2D+1 \qquad \text{(III.3.3)}$$

Nous appliquerons dans notre étude expérimentale cette méthode de reconstruction d'un attracteur.

Nous avons ici développé la notion d'attracteur étrange, objet fractal caractéristique du chaos. Nous avons montré comment il était possible de reconstruire cet attracteur à partir d'une série temporelle. Dans la partie suivante nous allons

expliquer comment l'étude de la dimension de cet objet fractal peut donner une indication du nombre de degrés de liberté du système.

3.1.3) Analyse dimensionnelle

Un objet fractal possède une structure lacunaire. Considérons par exemple un objet fractal comme l'ensemble triadique de Cantor présenté ci-dessous et obtenu en enlevant successivement à chaque segment son tiers central.

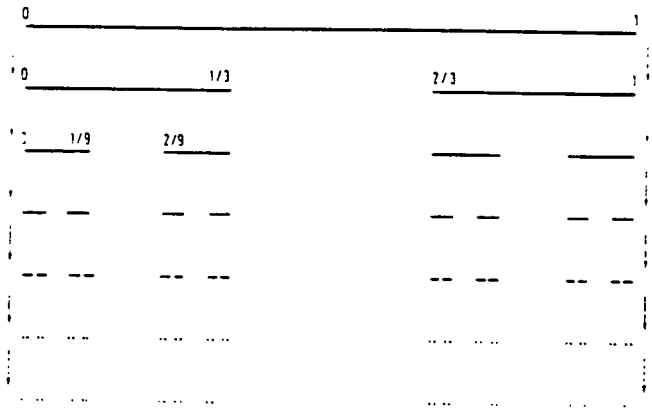


Fig III.3.5: Ensemble triadique de Cantor (d'après [Ber88])

L'ensemble obtenu en répétant une infinité de fois cette opération n'est ni de dimension 0 (un point) ni de dimension 1(une ligne). Il sera donc important de définir une nouvelle dimension [Far83] qui permette de rendre compte de cette structure lacunaire d'un objet fractal.

a) Définition de la dimension fractale d'un attracteur

La dimension usuelle d'un objet tel qu'une ligne, une surface ou un volume est donnée par une loi de puissance reliant la mesure de la "taille" de cet objet et ses dimensions linéaires. Des illustrations de cette proposition seront données dans le paragraphe suivant où nous chercherons une généralisation de la définition usuelle avec la dimension d'Haussdorf. Le dernier paragraphe permettra de généraliser encore cette dernière définition.

α) *Dimension de Haussdorf*

Considérons par exemple un ensemble de points répartis sur une ligne de longueur L. Si nous essayons de recouvrir cette ligne par des cubes d'arête ε, le nombre de cubes nécessaire sera proportionnel à 1/ε.

$$N(\varepsilon) \sim L/\varepsilon$$

Par contre si les points sont répartis sur une surface S, nous aurons la relation suivante:

$$N(\varepsilon) \sim S/\varepsilon^2$$

Si les points sont répartis sur un volume V, $N(\varepsilon) \sim V/\varepsilon^3$
Ces situations sont illustrées dans la figure suivante.

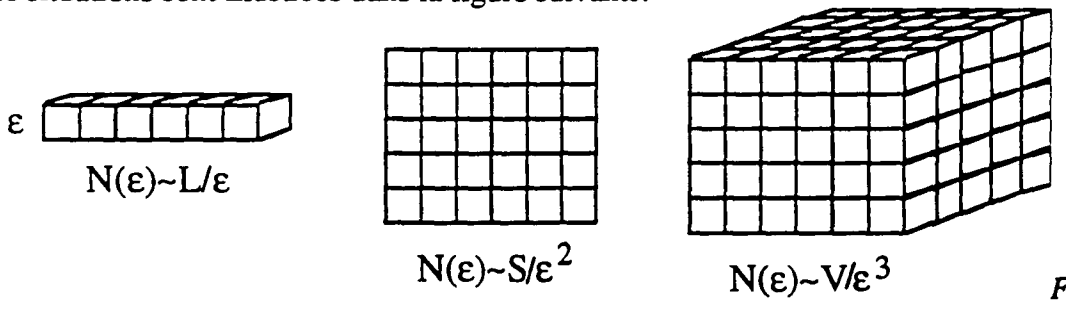


Fig III.3.6: Recouvrement d'une ligne et d'une surface et d'un volume par des cubes de rayon ε

Considérons maintenant un ensemble de points dans un espace à p dimensions et recouvrons cet ensemble par des hypercubes de coté ε. N(ε) correspond au nombre minimum de cubes nécessaire pour recouvrir cet ensemble de points. La dimension de Haussdorf-Besicovitch appelée aussi D_0 est définie de la façon suivante:

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \qquad \text{(III.3.4)}$$

Cette définition de la dimension permet de donner des valeurs non-entières à un objet fractal. L'ensemble triadique de Cantor précédent a par exemple une dimension de 0.63 qui est bien comprise entre 0 et 1.

Une dimension non-entière est la signature d'un chaos déterministe.

Pour calculer la dimension de Haussdorf d'un ensemble, on suppose que tous les points sont équiprobables. Or certaines régions d'un attracteur peuvent être plus peuplées que

d'autres. Les dimensions généralisées [Bad85] permettent de rendre compte de cette inhomogénéité de l'attracteur.

β) *Dimensions généralisées*

Les dimensions généralisées D_q sont définies à partir des entropies de Renyi $S_q(\varepsilon)$ [Ren70]:

$$D_q = \frac{1}{1-q}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\left(\sum_{i=1,N(\varepsilon)} p_i^q\right)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{S_q(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (q \neq 1) \tag{III.3.5.a}$$

$$D_1 = \lim_{q\to 1} D_q = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{S_1(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad \text{avec} \quad S_1(\varepsilon) = \sum_{i=1,N(\varepsilon)} p_i \ln p_i \tag{III.3.5.b}$$

p_i correspond à la fraction de points de l'attracteur appartenant au $i^{ème}$ cube d'arête ε. $S_1(\varepsilon)$ représente la quantité d'information nécessaire pour caractériser un point sur l'attracteur avec une précision ε. D_1 est alors appelée quantité d'information.

Les D_q sont des fonctions décroissantes de q et la variation des D_q en fonction de q donne une idée de l'inhomogénéité de l'attracteur. En effet si l'attracteur est homogène et p_i une constante on trouve que tous les D_q sont égaux à D_0. Par contre si l'attracteur est très inhomogène D_∞ sera calculé à partir des régions les plus denses ($D_\infty = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(\mathrm{Max}\, p_i)}{\ln(\varepsilon)}$) de l'attracteur alors que $D_{-\infty}$ correspondra aux régions les moins denses($D_{-\infty} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(\mathrm{Min}\, p_i)}{\ln(\varepsilon)}$). La différence entre leurs valeurs respectives caractérisera l'inhomogénéité du système.

On observe en général $D_0 \sim D_1 \sim D_2$ où D_2 est la dimension de corrélation. Certains algorithmes [Bad85], [Bro88] permettent à partir d'une série temporelle d'obtenir tout le spectre des D_q. Ces algorithmes convergent lentement et nécessitent un nombre important de points. Aussi bien qu'ils fournissent un grand nombre d'informations, nous ne les utiliserons pas et nous nous contenterons de calculer la dimension de corrélation D_2. Celle-ci correspond à la dimension la plus aisée à calculer et nous utiliserons des algorithmes développés par P. Grassberger et I. Proccaccia [Gras83a, b, c].

b) Algorithme de Grassberger-Procaccia

α) *Dimension d'un attracteur*

D'après la formule (III.3.4) précédente, D_2 se définit par la relation suivante:

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln\left(\sum_i p_i^2\right)}{\ln(\varepsilon)} \qquad \text{(III.3.6)}$$

$\sum_i p_i^2$ correspond à la probabilité pour que deux points quelconques de l'attracteur se trouvent dans le même cube de coté ε. Cette probabilité est à peu près équivalente à la probabilité pour que deux points de l'attracteur se trouvent l'un et l'autre à une distance inférieure à ε. L'intégrale de corrélation C(N,ε) définie dans la relation suivante permettra de calculer cette probabilité:

$$C_d(N,\varepsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i<j} \theta\left(\varepsilon - \left\|x_i - x_j\right\|\right) \qquad \text{(III.3.7)}$$

où N correspond au nombre de points x_i considérés de l'attracteur, θ(x) correspond à la fonction de Heaviside vérifiant θ(x)=0 pour x<0 et θ(x)=1 pour x≥0. d correspond à la dimension de l'espace fictif (dimension de plongement) dans laquelle est mené le calcul.
D_2 vérifie alors

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln\left(C_d(N,\varepsilon)\right)}{\ln(\varepsilon)} \qquad \text{(III.3.8)}$$

D_2 dépend ici de la dimension de l'attracteur que nous avons reconstruit dans R^d. Notre but ici n'est pas tant de connaître les dimensions de corrélations des différents attracteurs que nous pouvons reconstruire mais plutôt d'évaluer la dimension du chaos associé à notre signal.

β) *Evaluation pratique de la dimension du chaos*

- Les attracteurs seront reconstruits dans nos expériences dans un espace de dimension d à partir de séries temporelles. Leur dimension sera donc inférieure à d. Dans un premier temps, la dimension de ces attracteurs reconstruits dans R^d augmentera avec d. A partir d'une certaine valeur d_c de d, en théorie lorsque la dimension des attracteurs reconstruits aura atteint la dimension D de l'attracteur dans

l'espace des phases réel, leur dimension arrêtera de croître avec d. Ces attracteurs reconstruits décriront alors toute la dynamique du système.

- Le calcul de la dimension est une mesure statistique. Par conséquent, il faudra choisir un nombre de points N de l'attracteur suffisamment grand pour que la statistique soit bonne mais aussi suffisamment petit pour que le temps de calcul qui croit en $O(N^2)$ reste raisonnable. Nous choisirons en général de travailler sur $N=10^4$ ou $5\ 10^4$ points.

- Pratiquement, nous calculerons les intégrales de corrélation $C_d(N,\varepsilon)$ et nous tracerons les graphes $\ln(C_d(N,\varepsilon))$ en fonction de $\ln(\varepsilon)$ pour des valeurs de d croissantes. Si le nombre de points de notre série était infini, la dimension D_2 serait donnée par la pente de ces courbes lorsque d est suffisamment grand et quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Or le nombre de points est fini. Par conséquent, pour de trop petites valeurs de ε, le nombre de paires de points incluses dans une boule de rayon ε sera faible et la statistique sera alors mauvaise. Pour des valeurs de ε trop grandes, tous les points de l'attracteurs sont contenus dans les boules de rayon ε et l'intégrale de correlation saturera à la valeur 1. Par conséquent seule une zone intermédiaire de distances ε nous permettra d'accéder à la dimension de l'attracteur. En pratique, si nous observons une loi d'échelle de la forme $C_d(N,\varepsilon)\sim\varepsilon^D$ pour ε suffisamment petit, nous supposerons que ce comportement se prolonge pour des distances arbitrairement petites. Nous ne nous intéresserons aux courbes $C_d(N,\varepsilon)$ telles que d soit suffisamment grand pour que l'attracteur reconstruit corresponde à l'attracteur réel.

- Un problème crucial est le choix du délai τ et de la dimension de plongement maximum d_{max} permettant de reconstruire l'attracteur. Si le délai τ choisi est trop petit, pour les N points définis précédemment, seule une toute petite partie de l'attracteur sera décrite. Les points successifs étant de plus très proches les uns des autres, l'intégrale de corrélation tendra vers 1. Nous ne pourrons donc pas connaître la dimension de l'attracteur. A l'inverse si le délai τ est trop long, les points seront décorrélés sous l'action du bruit. Il ne sera encore pas possible d'estimer la dimension de l'attracteur.

Tant que l'attracteur reste suffisamment homogène, les intégrales de corrélation sont fonctions du produit $(d-1)\tau$ qui correspond à l'écart temporel entre la première et la dernière composante du vecteur reconstruit. On montre expérimentalement [Hüb89a] que le produit $d_c\tau$ est de l'ordre de T où d_c corespond à la première valeur de d pour laquelle les intégrales de corrélation vérifient la loi d'échelle $C_d(N,\varepsilon)\sim\varepsilon^D$. T correspond à la période moyenne du signal. Pour minimiser le temps de calcul, nous avons intérêt à prendre un temps τ long et une dimension de plongement maximum petite. Un choix optimum [Hüb89b] semble être de prendre un délai τ de l'ordre de T/7.

Par conséquent d_c sera de l'ordre de 7. Nous choisirons en général un d_{max} égal à 40 ou à 80 si nécessaire pour permettre une meilleure convergence.

L'échantillonnage [Möl89], le bruit et même le filtrage de ce bruit [Bad88], [Mit88] peuvent en effet amener des imprécisions dans l'estimation des dimensions. De plus, cet algorithme ne permet pas, compte tenu du faible nombre de points utilisés, de déterminer des dimensions fractales supérieures à 4 ou 5.

La détermination d'une dimension fractale est une signature du chaos déterministe. Lorsque ces algorithmes ne convergent pas, on parle alors de chaos à grand nombre de degrés de liberté ou encore turbulence. Les approches précédentes ne sont alors plus adaptées. Nous n'aborderons pas ici les méthodes permettant de caractériser cette turbulence.

Nous avons dans cette partie développé un formalisme permettant d'étudier des phénomènes chaotiques. Nous avons en particulier exposé des méthodes permettant d'étudier un chaos déterministe. Nous avons expliqué comment à partir d'une série temporelle il était possible de reconstruire un attracteur étrange et comment réaliser son analyse dimensionelle. Il nous reste maintenant à appliquer ces techniques à l'étude du chaos déterministe de nos signaux expérimentaux.

3.2) Résultats expérimentaux

Les techniques mises au point dans la partie précédente ont permis de caractériser dans de nombreuses expériences le chaos observé. En optique, le signal étudié est en général une intensité lumineuse échantillonnée et à partir de laquelle il est possible de constituer une série temporelle. Il est alors possible d'analyser des dimensions fractales, de reconstituer des attracteurs [Hüb89a]. D.J. Gauthier et R. W. Boyd, dans une expérience voisine de la nôtre [Gau88] mais réalisée avec un très petit nombre de Fresnel ont mis en évidence des instabilités temporelles périodiques ou chaotiques et ont réalisé l'étude de ce chaos. Nos résultats expérimentaux montrent également un comportement temporel très riche et nous essaierons de comparer ces résultats avec ceux obtenus par Gauthier. Nous nous attacherons en particulier à décrire les routes vers le chaos et à donner lorsque cela sera possible la dimension du chaos. Enfin nous

présenterons quelques attracteurs étranges. Toute notre étude sera réalisée pour plusieurs extensions radiales du faisceau. Nous testerons ainsi l'influence du nombre de Fresnel.

3.2.1) Faisceau de diamètre à mi-hauteur 0,2 mm. F=2

Dans le cas d'un faisceau d'aussi faible extension les instabilités observées en champ lointain correspondent le plus souvent à deux tâches symétriques c'est à dire à des rouleaux. Dans la première expérience, nous asservissons le laser à une fréquence correspondant aux rouleaux et nous faisons varier l'intensité des pompes.

a) Méthode

Nous enregistrons l'intensité de l'instabilité hors d'axe en l'échantillonnant à $f_{e1}=20.10^6$ points/s et à $f_{e2}=5.10^6$ points/s.

Nous réalisons pour chaque enregistrement une analyse dimensionnelle.

- Nous commençons par trouver le spectre de fréquence du signal échantillonné à 20.10^6 points/s et nous en déduirons la valeur d'une fréquence caractéristique ou d'une valeur moyenne du spectre de fréquence du signal.

- Nous chercherons donc à analyser un signal échantillonné à une fréquence f_e au moins 7 fois supérieure à cette fréquence caractéristique. Pour un signal échantillonné initialement à la fréquence f_{e1} (ou f_{e2}), nous aurons toujours la possibilité de n'utiliser qu'un point sur deux ou trois. Nous modifierons ainsi artificiellement la fréquence d'échantillonnage qui sera égale à $f_{e1}/2$, $f_{e1}/3$... Nous choisirons alors l'enregistrement correspondant à la fréquence d'échantillonnage f_{e1} ou f_{e2} la plus adaptée. Par exemple, pour un signal de fréquence caractéristique 250 kHz, nous choisirons une fréquence d'échantillonnage initiale $f_{e2} = 5.10^6$ points/s et nous ne prendrons qu'un point sur deux. Nous échantillonnerons ainsi en moyenne 10 points durant une période caractérisque.

- Avec ce nouvel échantillonnage, nous réaliserons une nouvelle série temporelle. Cette série devra compter encore au moins 10000 points. Nos séries temporelles comptant initialement 50000 points, il ne sera donc pas possible de prendre moins d'un point sur 5. Par conséquent un échantillonnage de $f_{e2} = 5.10^6$ points/s ne permettra pas d'obtenir un échantillonnage de fréquence inférieure à 10^6 points/s.

-La dimension de plongement sera en général de 40 mais nous l'augmenterons parfois à 80. De même si nécessaire nous analyserons parfois des séries de 50000 points.

- Pour des raisons d'optimisation de l'algorithme, le rayon ε de l'hypersphère permettant de recouvrir l'attracteur sera toujours une puissance de 2. Il sera compris entre 1 et 2^{10}.

Cette méthode sera utilisée dans toute cette partie expérimentale.

b) Resultats expérimentaux

Les résultats suivants ont été obtenus pour des intensités pompe de 100(a), 150(b), 180(c) et 210 mW(d). Les intégrales de corrélations ont été obtenues avec 50000 points sauf pour le signal réalisé avec une intensité pompe de 100 mW où seuls 10000 points ont été utilisés. Nous donnerons dans les quatre graphes suivants la valeur de $Ln(C_d(N,\varepsilon))$ en fonction de $Ln(\varepsilon)$ pour différentes dimensions de plongement d. La dimension maximum sera de 80.

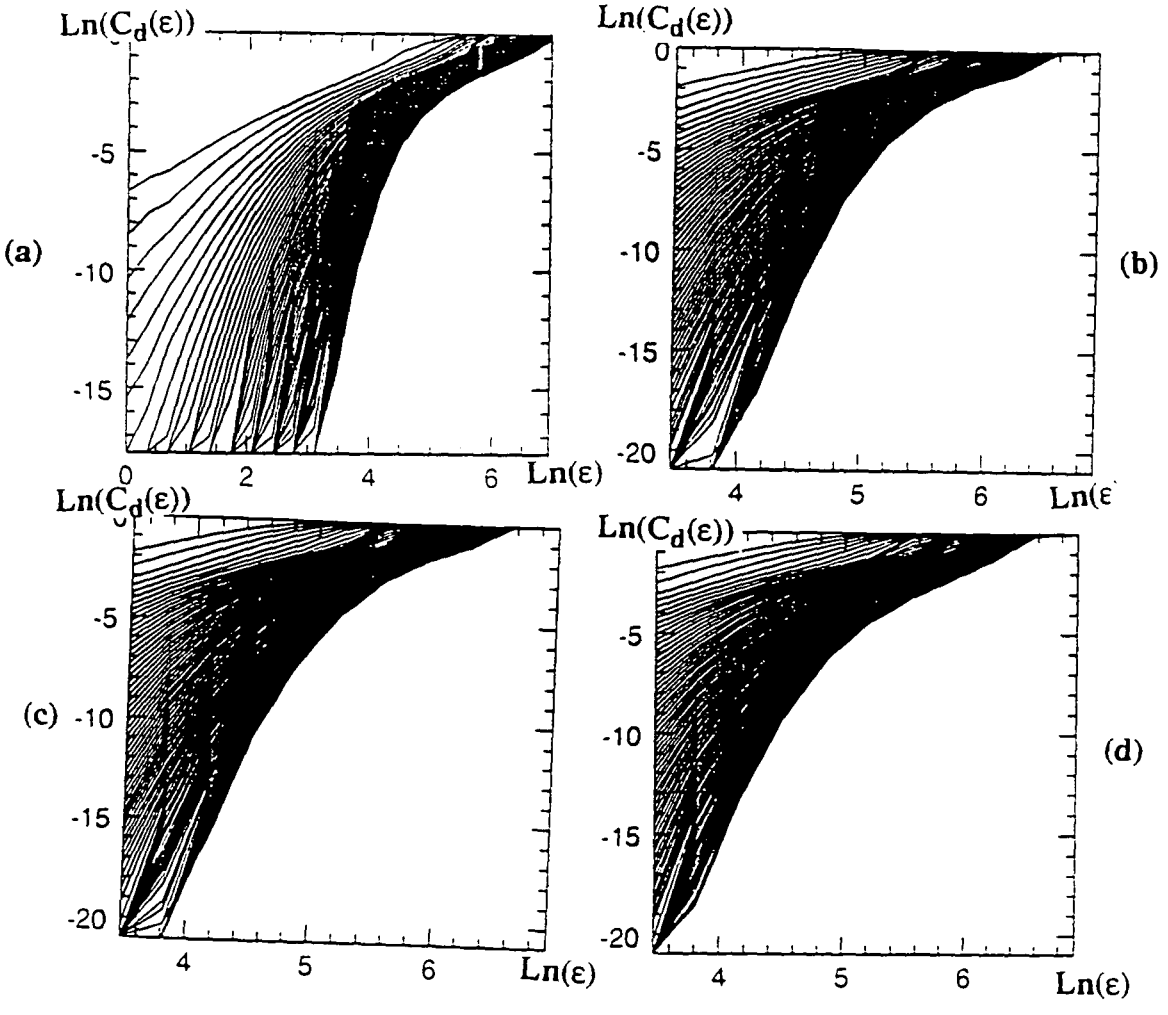


Fig III.3.7: $Ln(C_d(\varepsilon))$ en fonction de $Ln(\varepsilon)$ pour différentes valeurs de d et pour I= (a) 100 mW, (b) 150 mW, (c) 180 mW, (d) 210 mW

Les différentes courbes correspondent à des valeurs de d différentes comprises entre 2 et 80. Les courbes supérieures correspondent aux plus petites valeurs de d.

Les quatre graphes suivants se déduisent des quatre graphes précédents en calculant à chaque point d'abscisse ε, la pente du graphe $Ln(C_d(N,\varepsilon))$ en fonction de $Ln(\varepsilon)$ pour différentes dimensions de plongement d. La pente au point d'abscisse ε sera obtenue à partir de la moyenne de $Ln(C_d(N,\varepsilon))$ sur trois valeurs consécutives de ε. Il s'agira donc d'une approximation de la pente que nous aurions obtenue en prenant une meilleure précision sur ε. Lorsque cette pente ne variera plus en fonction de d, elle correspondra à cette dernière approximation près à la dimension de l'attracteur. Notons également que le bruit du système pourra donner une valeur de la dimension supérieure à la dimension réelle.

Les quatre graphes suivants seront constitués de différentes courbes obtenues chacunes pour une valeur de ε différente. Chacune de ces courbes correspondra à la pente obtenue pour une valeur de ε considérée, en fonction de la dimension de plongement d.

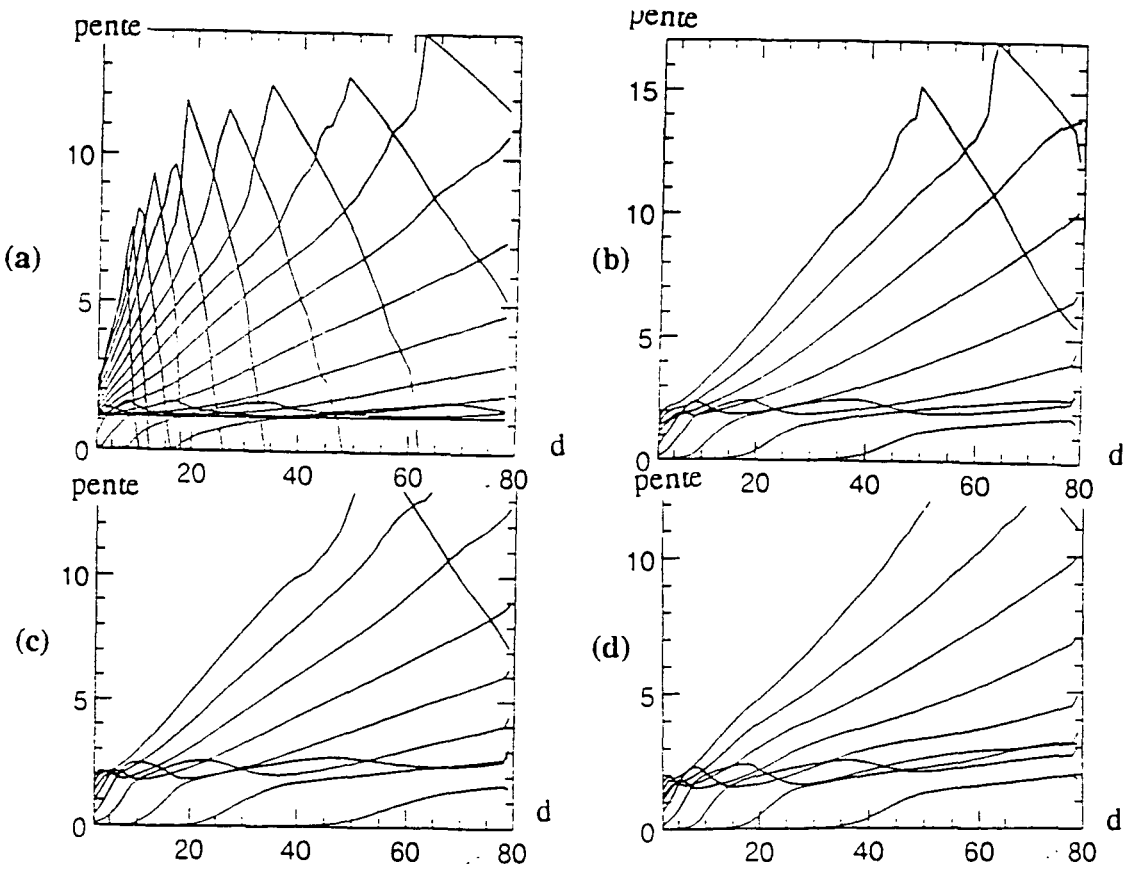


Fig III.3.8: Pentes des courbes précédentes en fonction de d pour différentes valeurs de ε pour I= (a) 100 mW, (b) 150 mW, (c) 180 mW, (d) 210 mW

(a) Plusieurs courbes convergent autour de la valeur 1. Dans un espace des phases au moins tridimensionnel qui correspond à notre situation expérimentale, il n'est pas possible d'obtenir des dimensions fractales inférieures à 2. La dimension de l'attracteur est bien de 1 ce qui correspond bien à un signal périodique.

(b) la dimension de l'attracteur est de l'ordre de 2,5. Pour trois valeurs de ε différentes, les courbes des pentes en fonction de d sont relativement horizontales, le bruit du système pouvant empêcher une parfaite horizontalité.

(c) La dimension de l'attracteur est de 2,8

(d) La dimension de l'attracteur est de 3,1

La série de graphes suivante correspond au spectre de Fourier des signaux considérés.

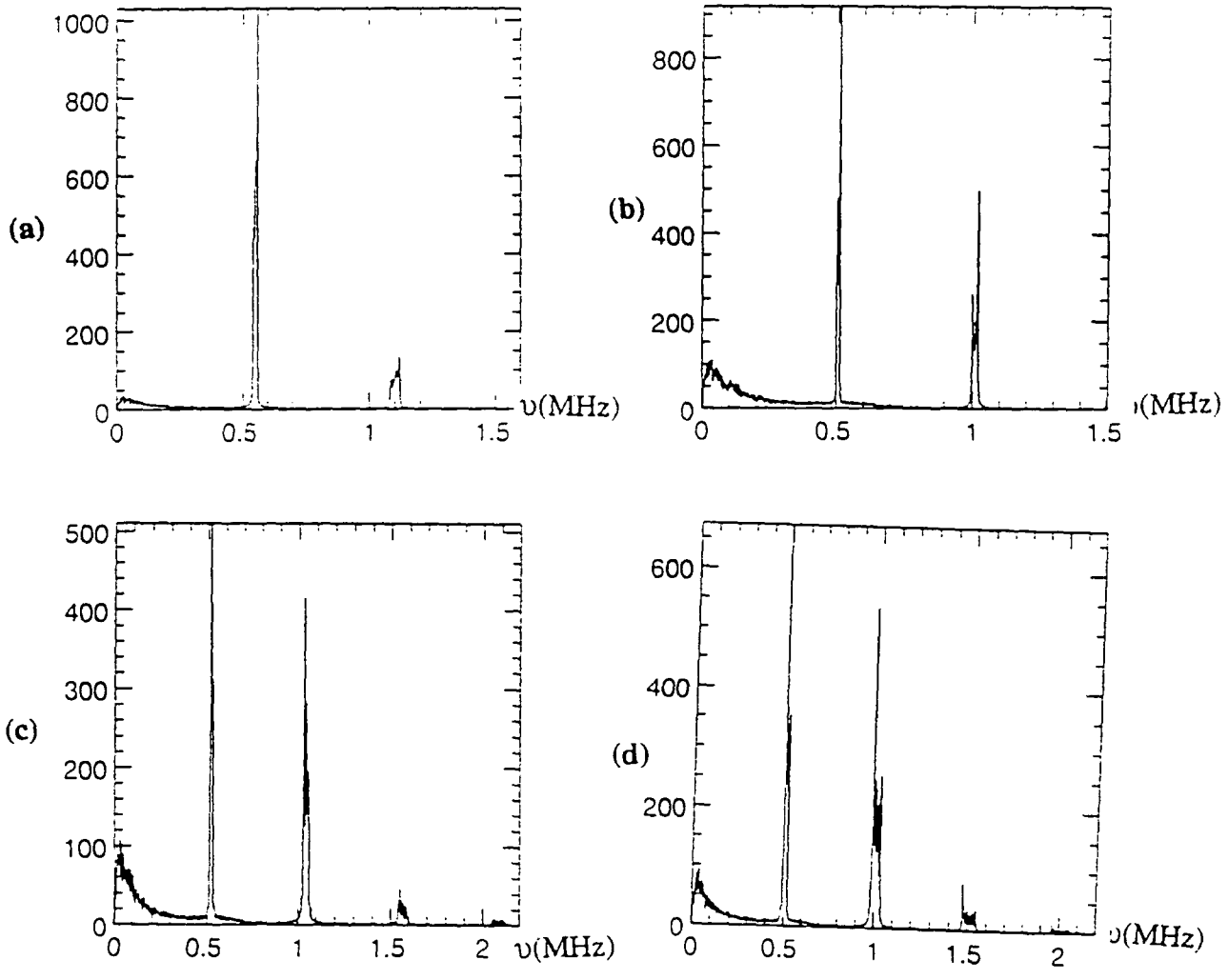


Fig III.3.9: Spectres de Fourier des signaux pour I= (a) 100 mW, (b) 150 mW, (c) 180 mW, (d) 210 mW

(a) Le signal apparaît comme périodique ou voisin d'un signal périodique.

(b) Nous distinguons deux fréquences très proches l'une de l'autre ainsi qu'un fond autour de la fréquence nulle.

(c) et (d) Les pics s'élargissent

La dernière série de graphes est constituée par les signaux temporels obtenus dans les quatre expériences. L'intensité dynamique obtenue sur l'oscilloscope (sa valeur varie entre -128 et +128) est représentée en fonction du temps.

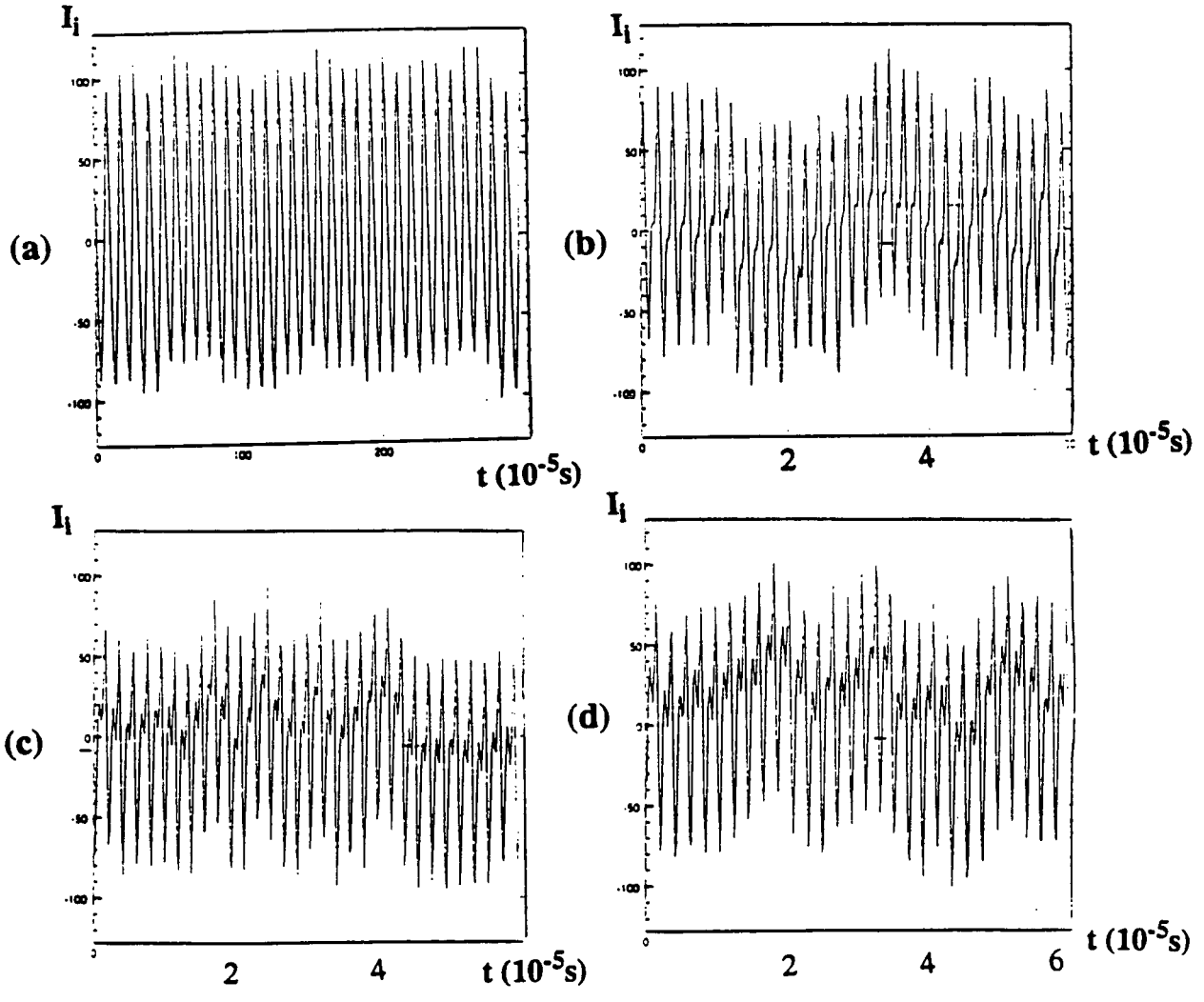


Fig III.3.10: Intensité dy namique de l'instabilité en fonction deu temps pour une intensité de la pompe I=(a) 100 mW, (b) 150 mW, (c) 180 mW, (d) 210 mW

Pour une intensité des pompes de 100 mW, le signal est périodique. L'évolution des signaux temporels est plus complexe lorsque l'intensité des pompes augmente mais

leur évolution reste encore assez régulière. Dans le paragraphe (III.3.2.2), nous les comparerons à un signal temporel obtenu quand le chaos est de plus grande dimension.

Nous avons ici pu calculer pour plusieurs intensités pompes différentes, la dimension fractale du signal. Celui-ci prenait successivement les valeurs 1, 2.5, 2.8 et 3.1 pour des intensités de 100, 150, 180 et 210 mW. Nous n'avons dans cette expérience pas obtenu de dimension égale à 2. Par contre, dans une autre série d'expériences réalisée à une fréquence légèrement différente, nous avions obtenu successivement des dimensions de 2 et 2.5. Nous pouvons donc supposer que si nous avions fait une mesure à une puissance intermédiaire entre 100 et 150 mW, nous aurions obtenu une dimension de 2. Il est très difficile de prévoir à priori en fonction de l'intensité la dimension de l'attracteur, celle-ci étant très sensible à la fréquence de laser. La figure suivante donne la dimension de l'attracteur en fonction de l'intensité de la pompe. Le point grisé correspond à la seconde série d'expérience mentionnée et qui est prévu entre 100 et 150 mW dans cette série. Il semble donc que pour cette petite valeur du diamètre, le chaos est déterministe et la transition vers le chaos se fait par quasi-péridocité.

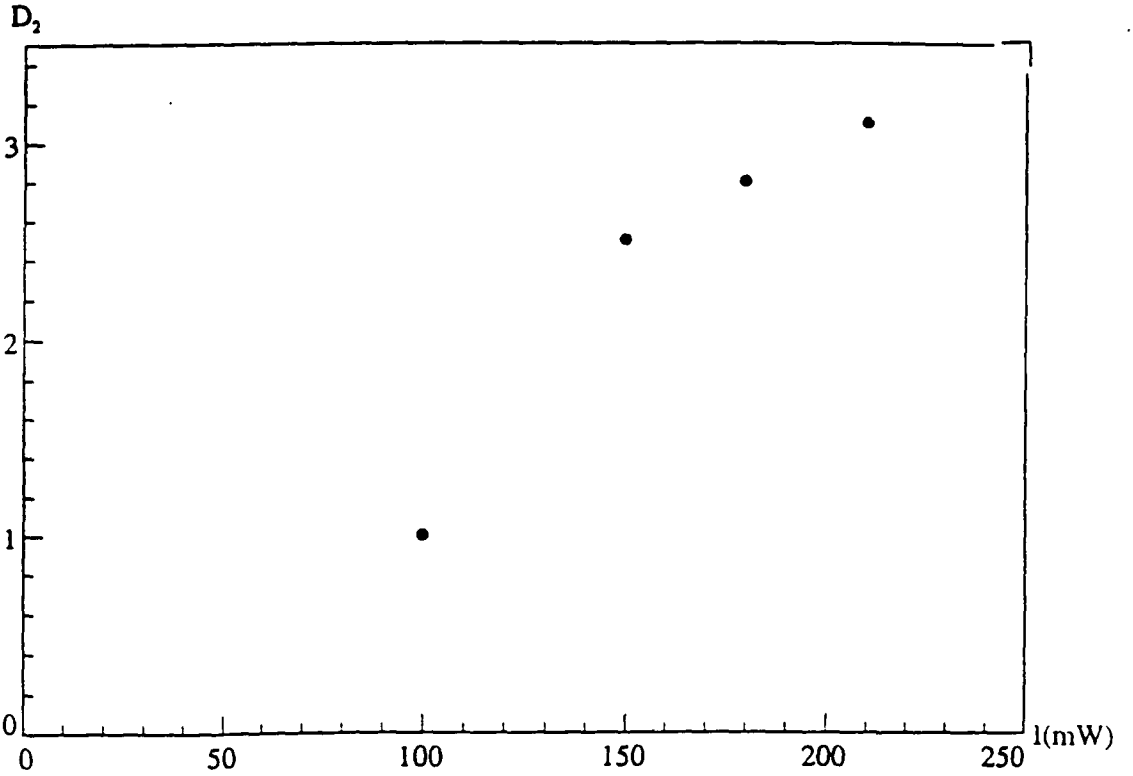


Fig III.3.11: Dimension de l'attracteur en fonction de l'intensité de la pompe

Les figures ci-dessous correspondent aux projections des attracteurs reconstruits à partir d'une série temporelle. Nous reconstruisons ces attracteurs en dimension 2 ($x(t+\tau)$ en fonction de $x(t)$ où τ est un délai multiple de l'inverse de la fréquence

d'échantillonage) si bien que la structure lacunaire d'un attracteur étrange se verra d'autant mieux que la dimension fractale sera plus proche de 2 (par valeurs supérieures). Ces attracteurs ont été obtenus pour une fréquence différente de la fréquence précédente, pour une intensité de 210 mW et reconstruits à partir de séries temporelles de 3000 points. Leur dimension fractale est de 2.2. Les deux attracteurs correspondent à la même série temporelle mais τ est égal à 0.5 µs dans le cas (a) alors qu'il est égal à 0.25 µs dans le cas (b).

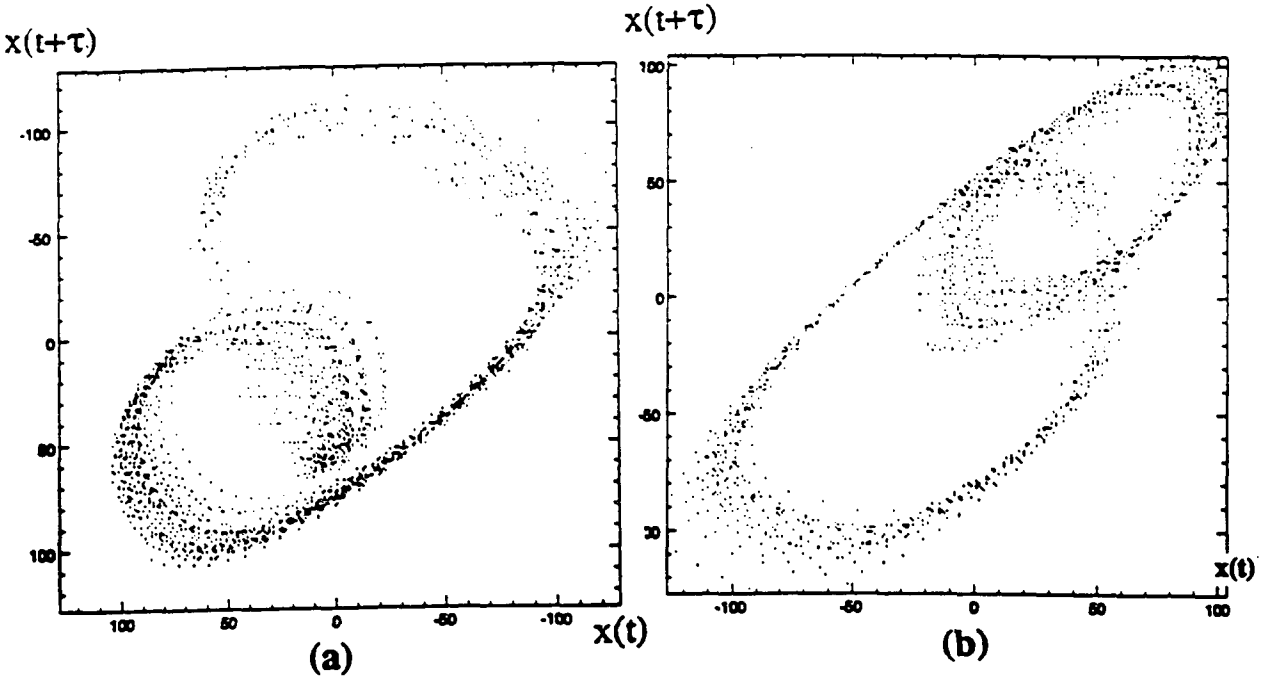


Fig III.3.12: Attracteurs étranges de dimension fractale 2,2 . (a) τ =0,5 µs , (b)τ =0,25 µs

En conclusion, nous pouvons donc affirmer que pour un faisceau de diamètre à mi-hauteur égal à 0,2 mm (pour un nombre de Fresnel de l'ordre de 2), le chaos s'il existe est le plus souvent déterministe.

3.2.2) Faisceau de diamètre à mi-hauteur de 0,4 mm. F=7

Deux expériences ont été réalisées. La première a été réalisée pour une fréquence pour laquelle on observe des anneaux en champ lointain. Nous avons enregistré l'intensité associée à un point de l'anneau. La deuxième expérience a été réalisée pour une fréquence associée en champ lointain à des hexagones.

a) Anneaux

Des enregistrements ont été réalisés pour des intensités de 200 mW, 100 mW et 70 mW. Le calcul de l'intégrale de corrélation a toujours donné le même genre de résultats. Nous présentons ici une série de graphes typiques obtenus pour une intensité de 100 mW: le premier correspond à l'intégrale de corrélation $Ln(C_d(N,\varepsilon))$ en fonction de $Ln(\varepsilon)$ pour différentes valeurs de la dimension de plongement d. La deuxième figure correspond à la pente de ces dernières courbes en fonctions de d pour différentes valeurs de ε. La troisième correspond au spectre de Fourier du signal, la quatrième donne la trace temporelle du signal.

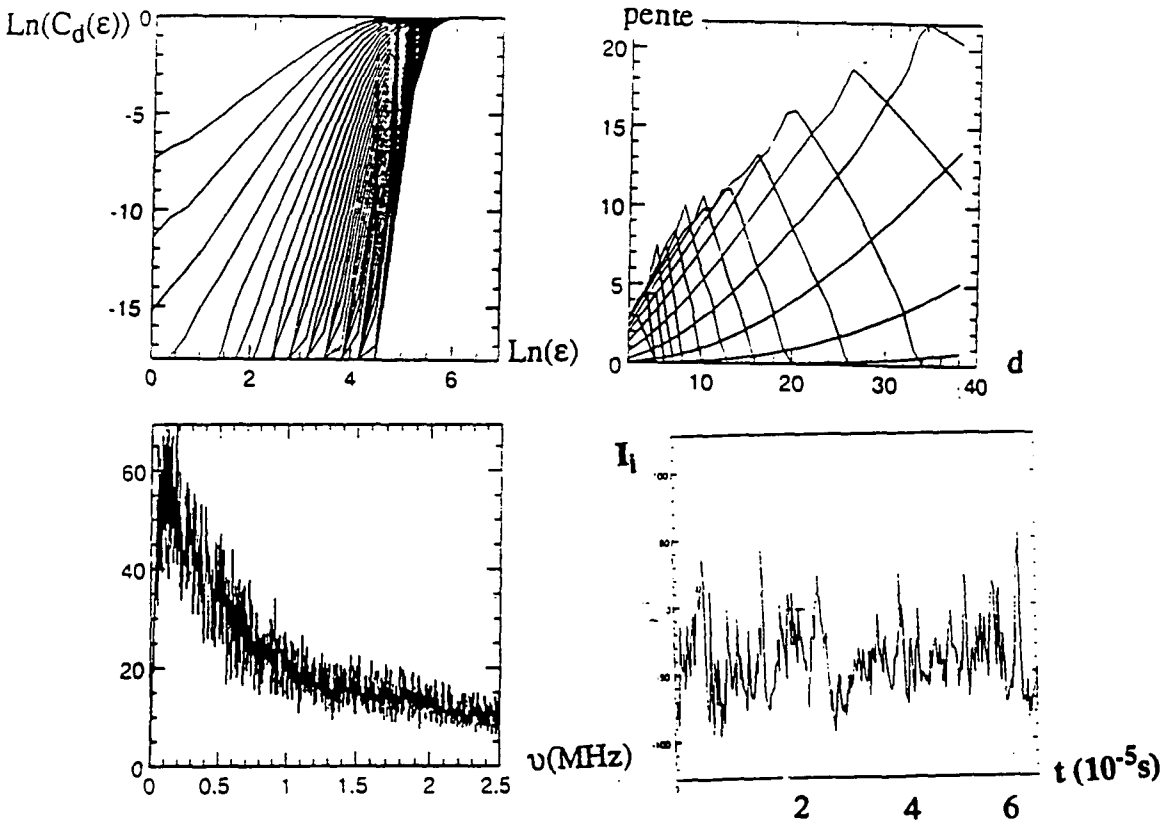


Fig III.3.13: I=100 mW, figure en champ lointain: anneaux. Intégrale de corrélation en fonction de ε pour différentes valeurs de d et pentes associés en fonction de d pour différentes valeurs de ε. Spectre du signal. Trace temporelle

L'algorithme de Grassberger-Procaccia ne converge pas. Pour des fréquences permettant d'observer des anneaux en champ lointain, le chaos est probablement à

grand nombre de degrés de liberté. L'intensité dynamique du signal est là beaucoup plus chaotique que l'intensité dynamique des signaux obtenus pour F=2 (voir III.3.2.1)

b) Hexagones

Le laser est asservi à une fréquence pour laquelle la figure en champ lointain, pour des intensités des pompes de 150 mW, 180 mW, 200 mW et 250 mW, correspond toujours à un hexagone. Nous enregistrons pour ces différentes intensités des ondes pompes, les intensités associées aux différentes taches de l'hexagone. Nous ne présentons ci-dessous les graphes, les plus caractéristiques de notre expérience, associés aux intégrales de corrélation, aux pentes de ces intégrales, aux spectres de Fourier et aux signaux temporels.

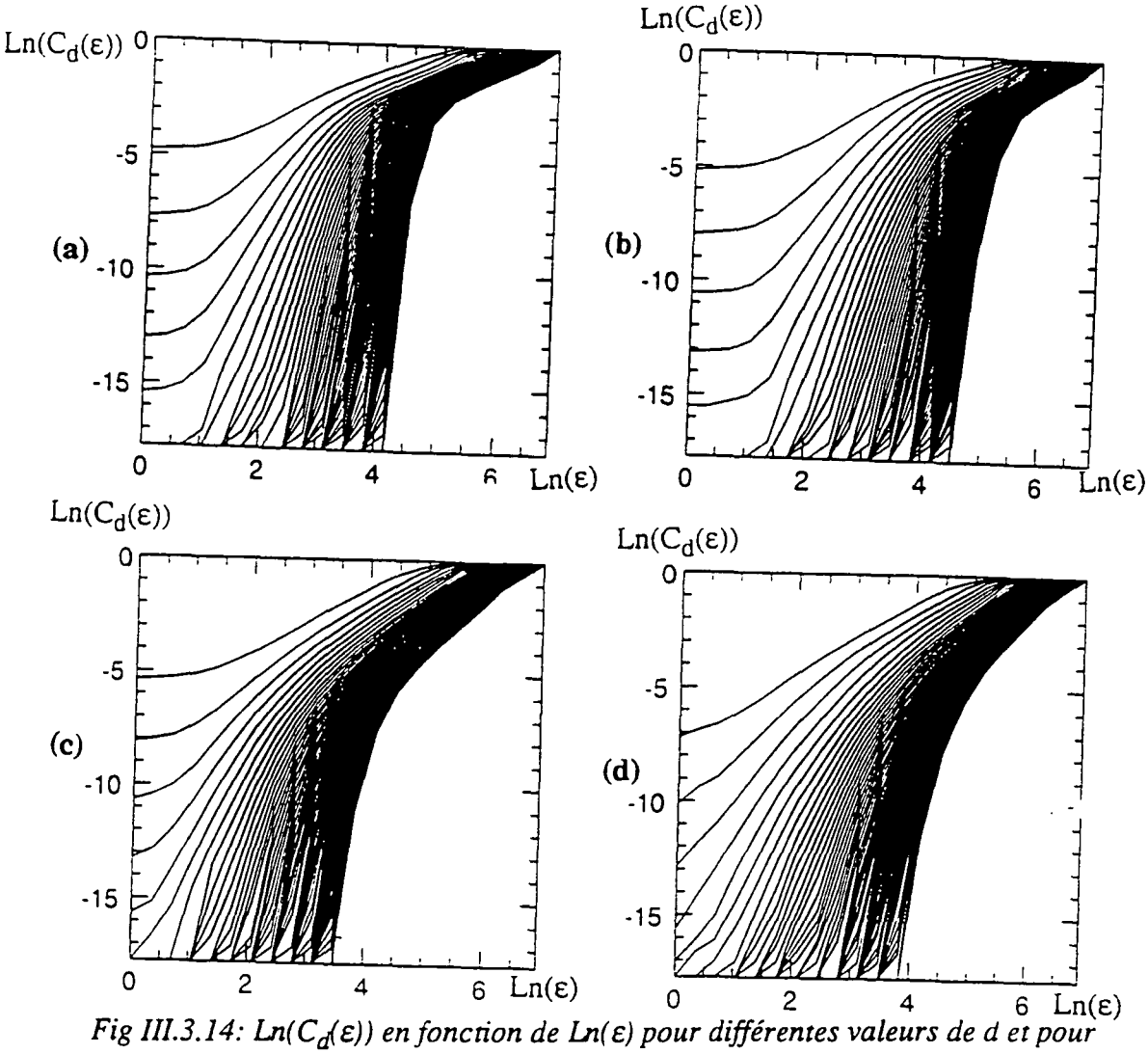


Fig III.3.14: Ln(C_d(ε)) en fonction de Ln(ε) pour différentes valeurs de d et pour I= (a) 150 mW, (b) 180 mW, (c) 200 mW, (d) 250 mW.

Figure en champ lointain: hexagone.

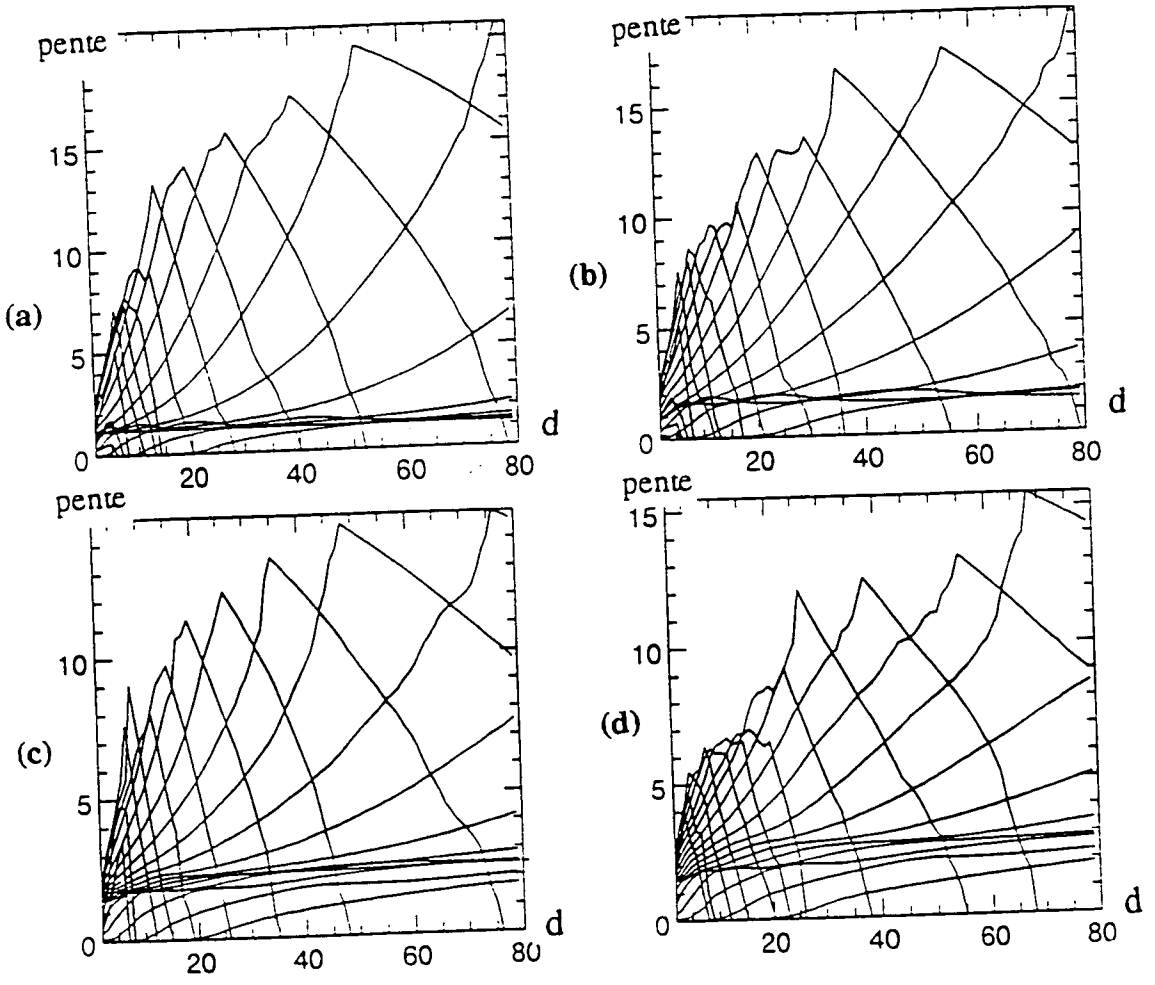


Fig III.3.15: pentes des courbes précédentes en fonction de d pour différentes valeurs de ε pour I= (a) 150 mW, (b) 180 mW, (c) 200 mW, (d) 250 mW.
Figure en champ lointain: hexagone

(a) Dimension de 1, (b) Dimension de 2, (c) Dimension de 2,5, (d) Dimension de 2,8

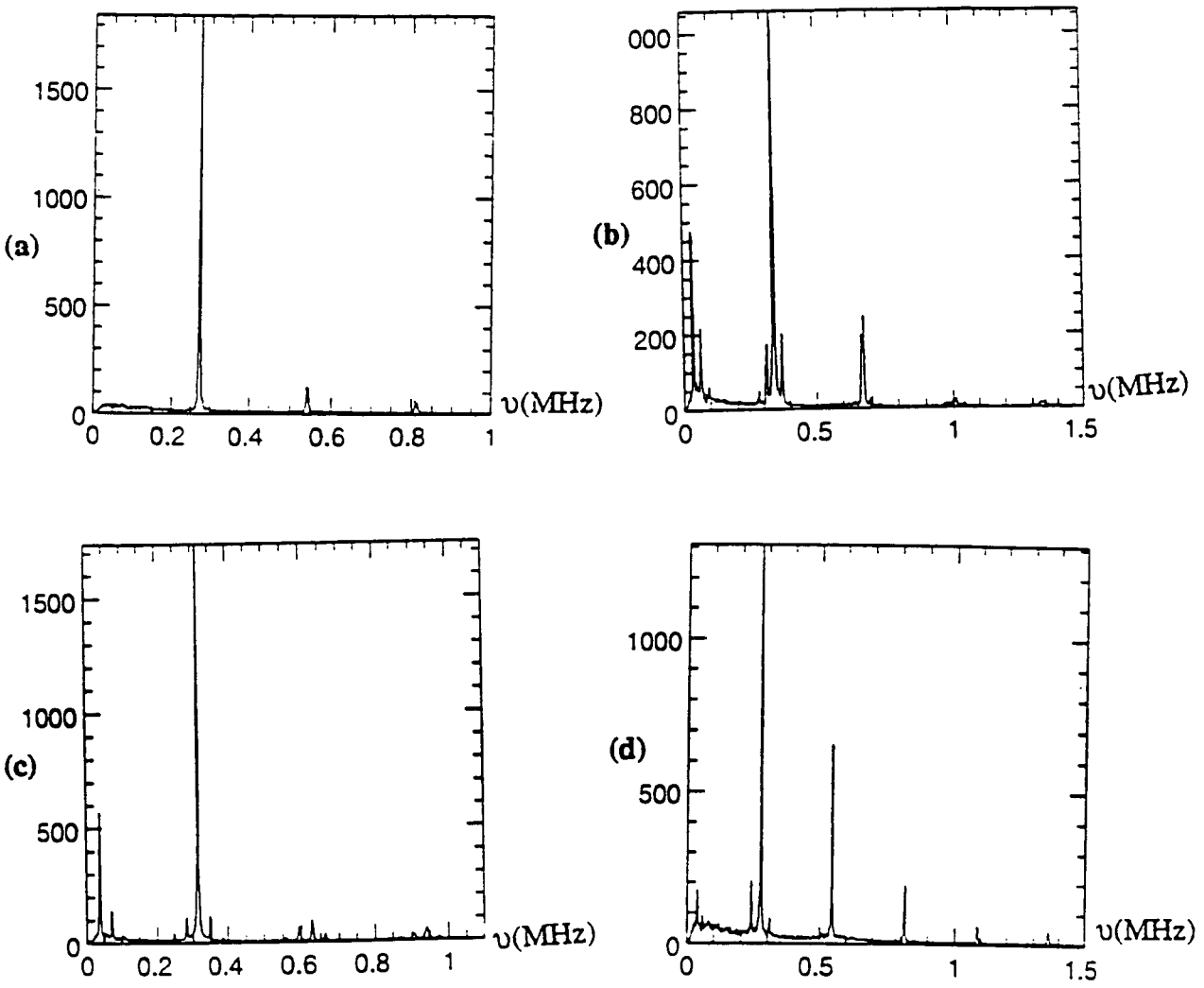


Fig III.3.16: Spectre de Fourier pour I= (a) 150 mW, (b) 180 mW, (c) 200 mW, (d) 250 mW. Figure en champ lointain: hexagone.

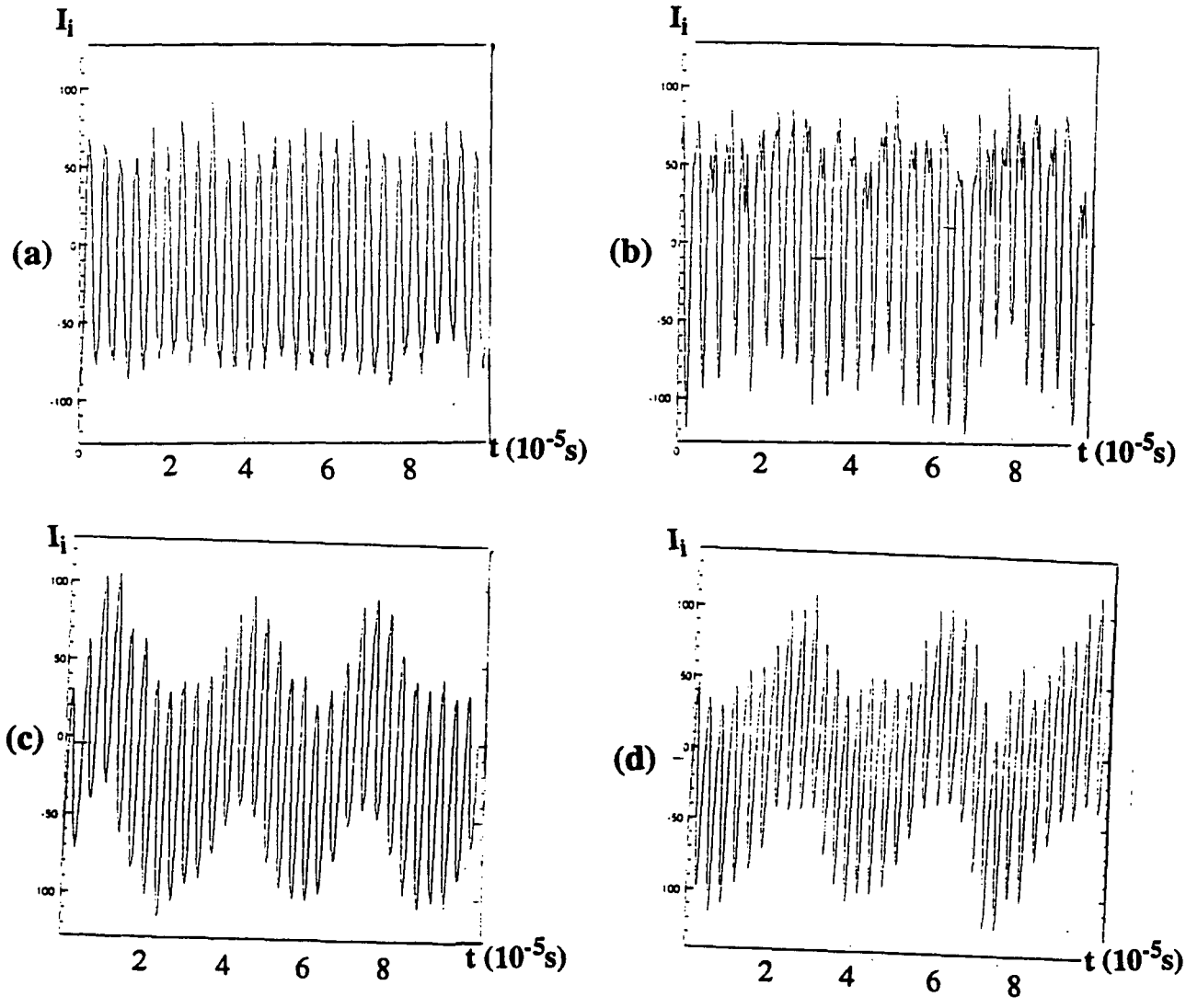


Fig III.3.17: Intensité dynamique de l'instabilité pour une intensité des pompes I= (a) 150 mW, (b) 180 mW, (c) 200 mW, (d) 250 mW.
Figure en champ lointain: hexagone

Les signaux temporels restent tous assez réguliers. La dimension fractale du signal reste toujours faible.

La figure suivante donne les dimensions calculées ci-dessus en fonction de l'intensité de la pompe.

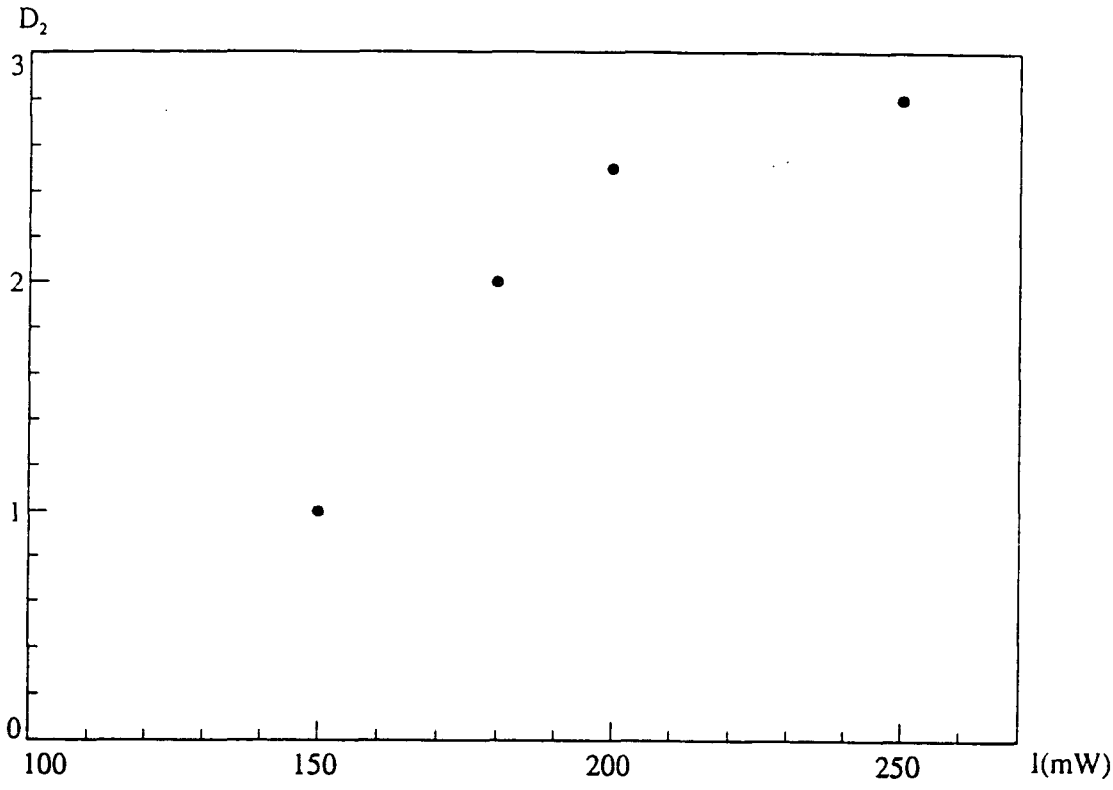


Fig III.3. 18: Dimension de corrélation en fonction de l'intensité de la pompe. Figure en champ lointain: hexagone

Pour des fréquences pour lesquelles la figure en champ lointain est un hexagone, donc pour des fréquences proches des fréquences seuil, le signal correspond à un chaos à petit nombre de degrés de liberté. La route vers le chaos correspond à de la quasipériodicité.

Les figures ci-dessous correspondent aux attracteurs reconstruits à partir de séries temporelles correspondant au cas (c) (3000 points, τ=0.3 µs) et (d) (2000 pts,τ=0.3 µs) de la figure (III.3.) précédente. le troisième attracteur correspond à un attracteur de dimension 2,4 obtenu pour une fréquence légérement différente mais correspondant toujours à des hexagones et reconstruit à partir de 3000 points avec un délai τ égal à 0.2 µs.

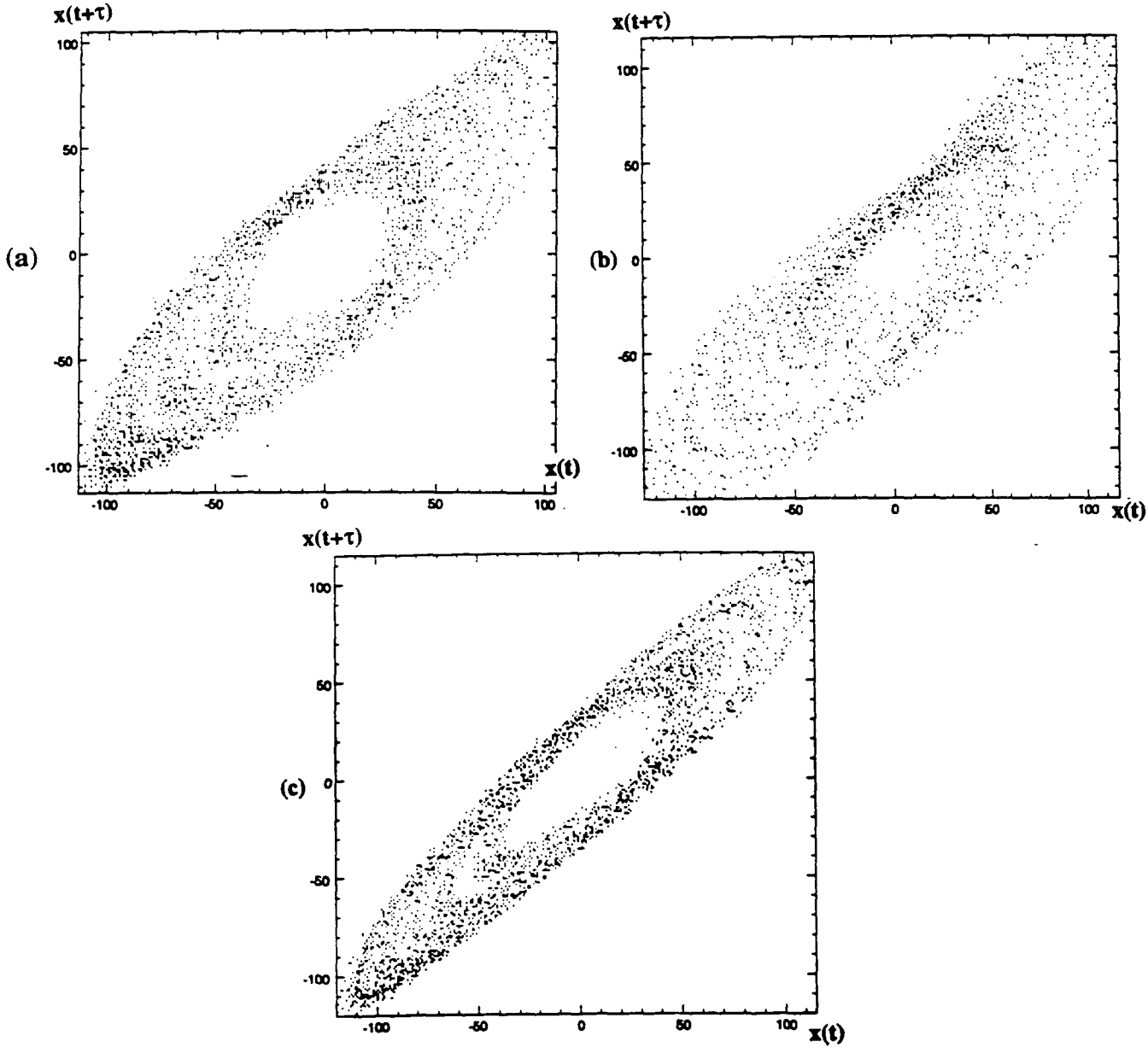


Fig III.3.19: Attracteurs étranges (a)d=2,5,τ=0,3 µs, 3000 pts,(b) d=2,8 ,τ=0,3 µs, 2000 pts, (c) d=2,4, τ=0,2 µs, 2000 pts

Au voisinage du seuil d'oscillation, le chaos est déterministe alors que loin du seuil nous observons du chaos de plus grande dimension. La route vers le chaos correspond à de la quasipériodicité.

3.2.3) Faisceau de diamètre à mi-hauteur de 0,8 mm. F=28

Si au seuil d'oscillation pour les basses fréquences, le comportement dynamique des instabilité est périodique, l'intensité des instabilités devient très vite chaotique et l'algorithme de Grassberger Procaccia ne converge plus. Les figures sont semblabes à

celles obtenues dans le cas d'un faisceau de diamètre 0.4mm pour une fréquence correspondant aux anneaux. Par conséquent en dehors d'une plage très étroite près du seuil, nous n'observons que du chaos de grande dimension. Notons également que près du seuil quand le comportement est périodique, nous observons quelques bouffées de turbulence. Il est donc également possible qu'une route vers le chaos soit là due à des intermittences.

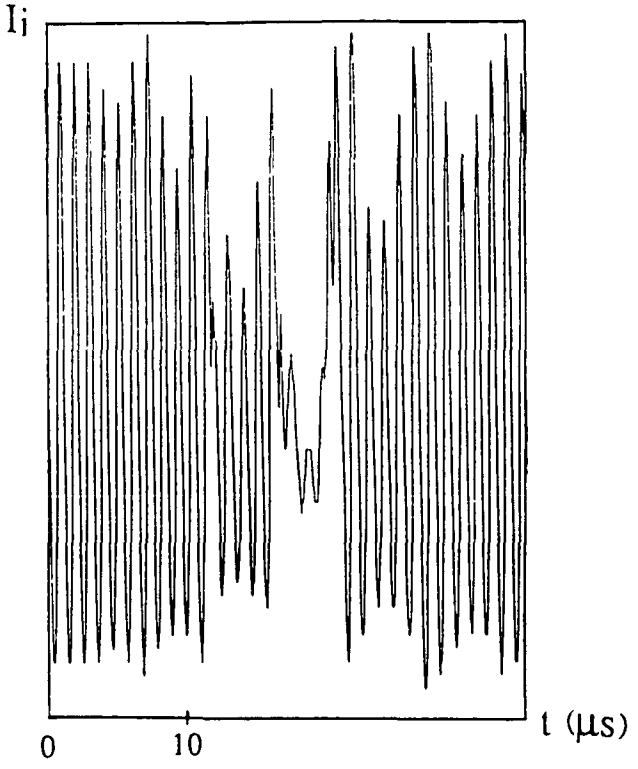


Fig III.3.20: Bouffées de turbulence dans un signal périodique. F=28

3.2.4) Conclusion

Les instabilités temporelles étudiées dans cette expérience présentent souvent un comportement chaotique. La route vers le chaos correspond en général à de la quasipériodicité. Lorsque le nombre de Fresnel est égal à 2, le chaos est presque toujours de petite dimension. Pour un nombre de Fresnel égal à 7, il n'est de petite dimension que près du seuil de formation des instabilités et sa dimension est plus grande loin du seuil. Pour un nombre de Fresnel égal à 28, le chaos est toujours de dimension suffisamment grande pour que nous ne puissions pas l'évaluer par notre algorithme. Comme dans notre étude des corrélations, le nombre de Fresnel qui est une

évaluation du nombre de degrés de liberté du système joue un rôle fondamental et détermine la nature du chaos.

Conclusion

Les instabilités générées par deux pompes contrapropagatives dans une vapeur atomique présentent un comportement spatial et temporel très riche. Spatialement leur structure transverse en champ lointain correspond à des anneaux, deux points diamétralement opposés ou des hexagones. Nous retrouvons là des structures voisines de celles que nous avions observées dans l'expérience précédente où les deux pompes contrapropagatives étaient constituées par une seule onde se réfléchissant sur un miroir de rétroaction. Cependant alors qu'un facteur déterminant dans cette expérience était la distance de propagation entre le miroir et la cellule, dans l'expérience étudiée dans ce chapitre ce facteur n'existe plus et la longueur sur laquelle se recouvrent les ondes dans le milieu non-linéaire est un facteur crucial. De même la présence d'un miroir de rétroaction permettait dans la première expérience exposée dans ce mémoire de réinjecter dans la cellule les instabilités générées et ainsi d'abaisser le seuil de formation des instabilités. Ainsi la structure transverse des instabilités était plus complexe dans cette expérience que dans l'expérience exposée dans ce chapitre. Malgré la géométrie très simple de l'expérience présentée ici, l'étude théorique reste très complexe et notre approche a été avant tout expérimentale.

Nous nous sommes en particulier intéressés à la formation de ces instabilités et à leur nombre de degrés de liberté. L'étude des corrélations entre plusieurs composantes spatiales d'une même instabilité a montré que près de leur seuil de formation, ces instabilités étaient corrélées. Ces études ont souligné l'importance du nombre de Fresnel, facteur proportionnel à la section transverse des faisceaux pompes et qui est une estimation des degrés de liberté transverses du système: la corrélation entre plusieurs composantes spatiales était bien meilleure pour un nombre de Fresnel petit. Sur le plan temporel, ce nombre joue aussi un rôle important. L'intensité des instabilités d'abord statique puis périodique devient par quasipériodicité chaotique au-delà du seuil. Le chaos ainsi généré est de petite dimension pour un petit nombre de Fresnel et de plus grande dimension pour un nombre de Fresnel élevé. Nous retrouvons là des résultats expérimentaux que nous avions abordés dans le deuxième chapitre.

Ces résultats aussi bien temporels que spatiaux présentent aussi de nombreuses analogies avec des expériences réalisées dans d'autres domaines de la physique comme

en hydrodynamique. Les analogies avec des résultats obtenus dans la convection de Rayleigh-Bénard, par exemple, sont une indication du caractère très général de ce type d'expérience. Tant du point de vue spatial que temporel, cette expérience présente des résultats caractérisques du domaine de la physique non-linéaire.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié les instabilités générées dans une vapeur de Rubidium par deux pompes intenses contrapropagatives. Nous avons considéré deux géométries différentes.

Dans la première configuration, une onde pompe se réfléchissait après sa traversée du milieu non-linéaire sur un miroir plan de rétroaction. L'onde ainsi réfléchie se propageait dans le milieu non-linéaire dans le sens opposé. Sous l'action de ces deux ondes contrepropagatives, le milieu non-linéaire se comportait comme un miroir à contraste de phase. Une cavité était ainsi constituée par le miroir de rétroaction et le milieu non-linéaire. Comme le coefficient de réflexion d'un miroir à contrate de phase peut être plus grand que 1, des instabilités de polarisation orthogonale à celle des pompes peuvent osciller dans cette cavité. Dans cette expérience, le facteur déterminant est la distance sur laquelle se propage l'onde sur un aller retour dans la cavité.

Dans le chapitre 1, nous avons développé une théorie nous permettant de prédire certains aspects des comportements spatiaux et temporels des instabilités. Nous avons en particulier prédit l'oscillation d'instabilités du type Laguerre-Gauss. Nous avons étudié en fonction de divers paramètres tels que la distance entre le miroir et la cellule ou la valeur du coefficient de saturation du mélange à quatre ondes dans une vapeur atomique, le mode oscillant dans la cavité. Nous avons montré aussi l'existence dans d'autres conditions expérimentales, d'une instabilité hors d'axe dont la structure transverse en champ lointain correspond à des anneaux concentriques ou à des rouleaux. Nous avons étudié l'angle d'oscillation au seuil et montré que des rouleaux pouvaient présenter un comportement périodique lorsque les ondes pompes n'étaient pas parfaitement alignées.

Dans le chapitre 2, nous avons étudié expérimentalement cette configuration. Nous avons montré pour des fréquences proches des fréquences de résonance de la transition atomique l'existence de 'marguerites' que nous avons assimilées à des modes de Laguerre-Gauss. Nous avons étudié l'évolution de ces marguerites en fonction de différents paramètres du système et montré que cette évolution était en bon accord avec la théorie. Pour d'autres fréquences, nous avons bien observé des rouleaux et des anneaux.

Le chapitre 3 nous a permis d'exposer les résultats obtenus dans la deuxième configuration. Les ondes pompes contrepropagatives étaient là indépendantes l'une de l'autre. Le facteur essentiel permettant la génération de l'instabilité était cette fois-ci la longueur de recouvrement des faisceaux dans la cellule. Notre approche avant tout expérimentale a permis de montrer l'existence de structures transverses telles que des

anneaux, des rouleaux ou des hexagones. Nous avons également étudié le comportement dynamique des instabilités, qui est généralement chaotique lorsqu'on s'éloigne du seuil.

Ces expérience illustrent les possibilités de l'optique pour l'étude du chaos spatio-temporel. Il est certain toutefois que des améliorations notables sont possibles. Par exemple, le milieu non-linéaire choisi est particulièrement complexe à cause de la structure hyperfine Zeeman, isotopique ainsi qu'à cause de l'élargissement Doppler. Les simplifications faites pour décrire le milieu sont beaucoup trop importantes pour espérer une compréhension quantitative de tous les phénomènes. Le fait que certaines de nos expériences soient en accord qualitatif avec les prédictions du modèle prouve peut-être que, dans certaines circonstances, ce modèle contient les ingrédients essentiels mais il serait beaucoup plus satisfaisant de disposer d'un milieu plus simple. De ce point de vue, les atomes refroidis par laser offrent des possibilités intéressantes. De surcroît, comme la stabilité d'un nuage d'atomes froids est assurée par la lumière, la génération de nouveaux faisceaux peut modifier l'équilibre voire déstabiliser le nuage. La stabilité mécanique du nuage dans ces conditions est un problème ouvert qui mériterait certainement d'être étudié

Annexe 1

Polarisation induite par deux champs de polarisations linéaires orthogonales.

Système $1/2 \rightarrow 1/2$

Lorsque des ondes se propagent dans une vapeur atomique, elles cèdent de l'énergie aux atomes qui peuvent ainsi être excités. Les populations des différents sous-niveaux Zeeman des atomes de cette vapeur peuvent ainsi être modifiées sous l'action des champs. Nous considérerons en particulier, le cas de deux ondes de polarisations linéaires orthogonales qui se propagent dans le même sens au sein de la vapeur atomique. Nous considérerons de plus le cas d'une transition atomique simple, la transition couplant un niveau fondamental dont le moment cinétique J_g vaut 1/2 à un niveau excité dont le moment cinétique J_e vaut aussi 1/2. Nous chercherons dans cette annexe à décrire l'évolution des populations des deux sous-niveaux Zeeman du niveau fondamental sous l'action de la paire d'ondes et à établir les équations du pompage optique [Coh90]. Nous décrirons dans un premier temps les champs en présence dans une base adaptée à la symétrie de notre problème ainsi que le milieu non-linéaire constitué par la vapeur atomique. Le formalisme de Bloch nous permettra ensuite de définir les cohérences optiques, de connaître leurs équations d'évolution, et d'accéder ainsi à l'évolution des population des sous-niveaux Zeeman.

A1.1) Description du système.

1) Décomposition du champ selon les polarisations circulaires

Considérons deux ondes $\bar{E}_x$ et $\bar{E}_y$, de même fréquence mais de polarisations linéaires orthogonales, se propageant dans la même direction z et le même sens au sein d'un milieu non-linéaire constitué par une vapeur atomique.

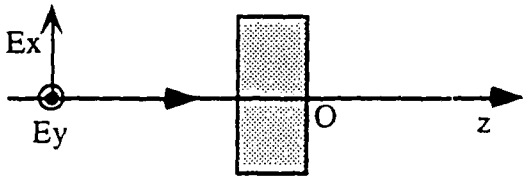


Fig (AI.1.1): Schéma expérimental

Ces ondes peuvent se décomposer dans la base $(\bar{e}_x,\bar{e}_y,\bar{e}_z)$ de la manière suivante:

$$\bar{E}_x = \mathrm{Re}\left(\sqrt{I_x}e^{-i(\omega t-kz+\varphi_x)}\right)\bar{e}_x \qquad \text{(AI.1.1)}$$

$$\bar{E}_y = \mathrm{Re}\left(\sqrt{I_y}e^{-i(\omega t-kz+\varphi_y)}\right)\bar{e}_y \qquad \text{(AI.1.2)}$$

L'origine de l'axe (z',z) est placée au centre de la face de sortie de la cellule contenant le milieu non-linéaire. L'origine des temps est choisie telle que $\varphi_x+\varphi_y=0$. Nous appelerons par la suite φ le déphasage relatif entre les deux champs:

$$\varphi=\varphi_x-\varphi_y \qquad \text{(AI.1.3)}$$

Le couplage des deux ondes au sein du milieu non-linéaire permet d'exciter les atomes. Il est donc important pour décrire les phénomènes physiques de travailler dans une base appropriée où les effets de couplage s'expriment de manière naturelle. Dans la base $(\bar{e}_x,\bar{e}_y,\bar{e}_z)$, le champ total se décompose sous la forme de deux champs polarisés suivant $\bar{e}_x$ et $\bar{e}_y$. Cette décomposition ne rend pas compte du couplage entre les deux polarisations du champ. Une base plus appropriée serait donc une base traduisant le couplage des deux ondes comme la base circulaire $(\bar{e}_+,\bar{e}_-,\bar{e}_z)$, où

$$\bar{e}_\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{e}_x \pm i\bar{e}_y\right) \qquad \text{(AI.1.4)}$$

Nous choisirons par la suite une approche très semblable à celle utilisée par Albert Messiah [Mes59]. En particulier nous utiliserons ses notations relatives à la base circulaire.

Le champ résultant $\bar{E}_{int}$ à l'intérieur de la cellule contenant le milieu non-linéaire correspond ainsi à la somme de ces deux champs de polarisations linéaires orthogonales.

$$\bar{E}_{int} = \bar{E}_x + \bar{E}_y \qquad \text{(AI.1.5)}$$

Dans la base circulaire, le champ résultant à l'intérieur de la cellule peut s'écrire d'après les formules (AI.1.1) à (AI.1.5):

$$\bar{E}_{int} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Re}\left\{\left[\left(-\sqrt{I_x}e^{-i\frac{\varphi}{2}} + i\sqrt{I_y}e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)\bar{e}_+ + \left(\sqrt{I_x}e^{-i\frac{\varphi}{2}} + i\sqrt{I_y}e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)\bar{e}_-\right]e^{-i(\omega t - kz)}\right\} \quad \text{(AI.1.6)}$$

En choisissant comme axe de quantification la direction commune de propagation des ondes, le champ intérieur se décompose sous la forme d'une onde polarisée σ_+ suivant le vecteur $\bar{e}_+$ et d'une onde polarisée σ_- suivant le vecteur $\bar{e}_-$

$$\bar{E}_{int} = \mathrm{Re}\left(\bar{E}e^{-i(\omega t - kz)}\right) = \mathrm{Re}\left((-E_-\bar{e}_+ - E_+\bar{e}_-)e^{-i(\omega t - kz)}\right) \quad \text{(AI.1.7)}$$

avec $$E_- = \frac{\sqrt{I_x}e^{-i\frac{\varphi}{2}} - i\sqrt{I_y}e^{i\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad E_+ = \frac{-\sqrt{I_x}e^{-i\frac{\varphi}{2}} - i\sqrt{I_y}e^{i\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{2}} \quad \text{(AI.1.8)}$$

2) Description du milieu non-linéaire

Le milieu non-linéaire est constitué par une vapeur atomique comportant une densité N d'atomes. Le moment cinétique électronique de ces atomes vaut $J_g=1/2$ dans le niveau fondamental et $J_e=1/2$ dans le niveau excité. La fréquence ω des ondes $\bar{E}_x$ et $\bar{E}_y$ est très proche de la fréquence de résonance ω_{at} de la transition couplant le niveau fondamental au niveau excité. Nous noterons l'écart à la résonance:

$$\Delta = \omega - \omega_{at} \quad \text{(AI.1.9)}$$

L'interaction entre le milieu non-linéaire et le champ électromagnétique incident pour des fréquences proches de cette transition atomique, peut être décrite par un modèle d'atomes à quatre niveaux couplés par des ondes de polarisations σ_+ et σ_- et d'amplitude respectivement E_- et E_+ [Coh90].

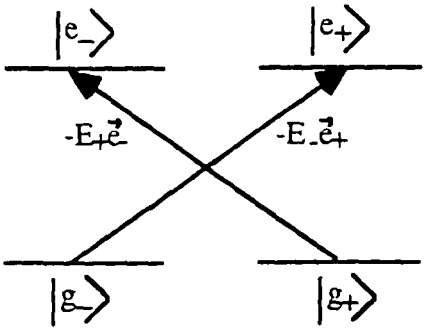


Fig AI.1.2: couplage entre les différents sous-niveaux Zeeman sous l'action des champs polarisés σ_+ et σ_-

Dans une telle configuration, le champ polarisé σ_+ couple le niveau fondamental $|g_-\rangle$dont la projection J_z du moment cinétique J_g sur l'axe(z',z) vaut $-\hbar/2$ au niveau excité $|e_+\rangle$ de J_z égal à $\hbar/2$. Le champ polarisé σ_- couple le niveau fondamental $|g_+\rangle$ de J_z égal à $\hbar/2$ au niveau excité $|e_-\rangle$ de J_z égal à $-\hbar/2$. Ces deux champs créent ainsi lors de leur première interaction avec les atomes dans le fondamental une cohérence ρ_{eg} entre les niveaux fondamentaux et excités. Cette cohérence est proportionnelle au champ. En interagissant une deuxième fois avec ces atomes, le champ leur cède de l'énergie et les atomes sont excités. Nous appelerons γ_p^- le taux de pompage optique correspondant au taux d'atomes quittant par seconde le sous-niveau Zeeman $|g_+\rangle$ vers le sous-niveau Zeeman $|e_-\rangle$ sous l'effet de la composante σ_- du champ et γ_p^+ le taux de pompage des atomes du niveau $|g_-\rangle$ dans le niveau $|e_+\rangle$ sous l'effet de la composante σ_+ du champ. Nous établirons dans la suite les expressions explicites des taux de pompage optique γ_p^+ et γ_p^-. Appelons Γ la largeur naturelle du niveau excité. Au bout d'un temps de l'ordre de $1/\Gamma$, les atomes se seront désexcités par émission spontanée et se seront répartis des niveaux excités dans les deux sous-niveaux Zeeman du fondamental. Dans la partie (2.2.c), nous préciserons la proportion d'atomes qui quittent un niveau excité pour peupler un niveau fondamental donné.

Notons enfin les taux γ et γ' de relaxation des sous-niveaux Zeeman du fondamental et des sous-niveaux excités respectivement. Au bout d'un temps $1/\gamma$, et en l'absence d'autres processus, les populations des sous-niveaux Zeeman du fondamental s'équilibrent. Cette relaxation est souvent due aux collisions. Tous ces processus sont résumés dans le schéma suivant:

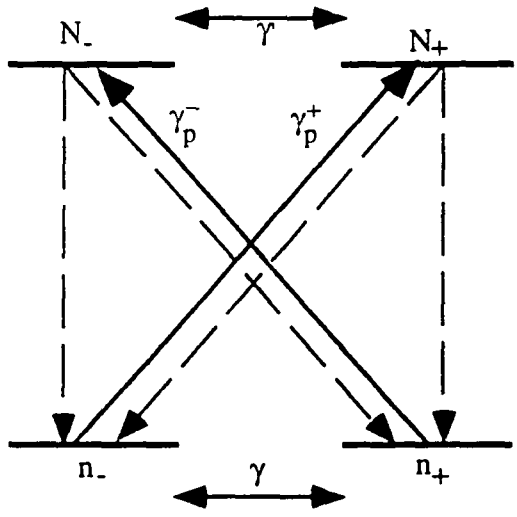


Fig A.I.1.3 :évolution des population des différents sous-niveaux Zeeman

Nous appelons là n_+ et n_- les populations respectives des niveaux $|g_+\rangle$ et $|g_-\rangle$ et N_+ et N_- les populations respectives des niveaux $|e_+\rangle$ et $|e_-\rangle$. La partie suivante nous permettra à l'aide du formalisme de Bloch, de connaître l'évolution de ces populations.

A1.2) Equations de Bloch

1) Matrice densité

Nous avons parlé dans la partie précédente de cohérences optiques entre les niveaux fondamentaux et excités et de population des sous-niveaux Zeeman. Nous définirons l'opérateur densité ρ de la façon suivante et nous le décomposons sur la base $(|g\rangle,|e\rangle)$des états fondamentaux et des états excités

$$\rho = \rho_{gg}|g\rangle\langle g| + \rho_{ee}|e\rangle\langle e| + \rho_{eg}|e\rangle\langle g| + \rho_{ge}|g\rangle\langle e| \qquad \text{(AI.2.1)}$$

Donc la matrice densité peut donc s'écrire sur la base $\{|J_g, m_g\rangle,|J_e, m_e\rangle\}$.

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{gg} & \rho_{ge} \\ \rho_{eg} & \rho_{ee} \end{pmatrix} \qquad \text{(AI.2.2)}$$

Pour une transition $J_g=1/2 \rightarrow J_e=1/2$, l'état fondamental et l'état excité comptent chacun respectivement deux sous-niveaux Zeeman. Les quatre termes composant la matrice densité ρ sont donc des sous-matrices 2*2 dans la base $(|g_-\rangle,|g_+\rangle,|e_-\rangle,|e_+\rangle)$. ρ_{gg} (respectivement ρ_{ee}) traduit le couplage entre les différents sous-niveau Zeeman du niveau fondamental (respectivement excité) et se décompose sur la base $\left\{\left|J_g,m_g=-\frac{1}{2}\right\rangle,\left|J_g,m_g=\frac{1}{2}\right\rangle\right\}$ (respectivement $\left\{\left|J_e,m_e=-\frac{1}{2}\right\rangle,\left|J_e,m_e=\frac{1}{2}\right\rangle\right\}$). Sur cette base, les termes diagonaux de ρ_{gg} correspondent aux populations n_+ et n_-. Les termes non diagonaux correspondent aux cohérences optiques entre les sous-niveaux du fondamental. Ces termes sont nuls dans le cas d'une transition $J_g=1/2 \rightarrow J_e=1/2$. ρ_{eg} (respectivement ρ_{ge}) traduit la cohérence entre les niveaux fondamentaux (respectivement excités) et les niveaux excités (respectivement fondamentaux). ρ_{eg} (respectivement ρ_{ge}) est encore une matrice 2*2 mais dont les seuls termes non nuls sont des termes non-diagonaux. En effet, les composantes σ_+ et σ_- du champ couplent entre eux uniquement les sous niveaux excités et fondamentaux dont les projections J_z du moment cinétique sont opposées. Etudions maintenant l'évolution de la matrice densité.

2) Equation d'évolution de la matrice densité

L'équation d'évolution de la matrice densité est donnée par la formule suivante:

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{1}{i\hbar}[H_a+V,\rho]+\left.\frac{d\rho}{dt}\right|_{relax} \qquad \text{(AI.2.3)}$$

où H_a représente le hamiltonien atomique propre du système, V le hamiltonien d'interaction entre le système atomique et le champ électromagnétique et ρ la matrice densité.

$$H_a=\hbar\omega_a P_e \qquad \text{(AI.2.4)}$$

$$V=-\vec{D}.\vec{E}=\begin{pmatrix} 0 & -\vec{D}^-.\vec{E} \\ -\vec{D}^+.\vec{E} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(AI.2.5)}$$

où $\vec{D}^+$ (respectivement $\vec{D}^-$) correspond à la partie montante de l'opérateur dipolaire électrique $\vec{D}$ (respectivement descendante). Plus précisément si P_e (respectivement P_g) est le projecteur sur le niveau excité (respectivement sur le niveau fondamental)

$$\vec{D}^+=P_e.\vec{D}.P_g \text{ et } \vec{D}^-=P_g.\vec{D}.P_e \qquad \text{(AI.2.6)}$$

Là encore $\vec{D}^-.\vec{E}$ et $\vec{D}^+.\vec{E}$ sont des sous-matrices 2*2 dont les seuls éléments non nuls sont les termes non-diagonaux.

$\vec{D}^+$ se décompose sur la base $(\vec{e}_+,\vec{e}_-)$ sous la forme [Omo77]:

$$\vec{D}^+ = -D_-^+\vec{e}_+ - D_+^+\vec{e}_- \qquad \text{(AI.2.7)}$$

A1.3) Expression des cohérences optiques

1) Expression de ρ_{eg}

D'après les équations (AI.2.1) à (AI.2.6), ρ_{eg}, obéit à l'équation d'évolution suivante:

$$\frac{d\rho_{eg}}{dt} = -\frac{1}{i\hbar}\left(\left(\vec{D}^+\ \vec{E}\right)\rho_{gg} - \rho_{ee}\left(\vec{D}^+\ \vec{E}\right) - \hbar\omega_{at}\ \rho_{eg}\right) - \frac{\Gamma}{2}\rho_{eg} \qquad \text{(AI.2.8)}$$

Le champ $\vec{E}_{int}$ est somme de deux termes conjugués, l'un évoluant à la fréquence ω et l'autre à la fréquence $-\omega$. Par conséquent ρ_{eg} sera aussi somme de deux termes évoluant l'un à la fréquence ω et l'autre à la fréquence $-\omega$. Le terme évoluant à la fréquence $-\omega$ est anti-résonnant. Nous le négligerons donc par la suite (approximation quasi-résonnante [Coh88]) et ne nous intéresserons qu'aux termes évoluant en $e^{-i\omega t}$. Posons $\rho_{eg} = \tilde{\rho}_{eg}e^{-i(\omega t - kz)}$.

Dans cet espace hermitien, il est possible de calculer le produit scalaire entre deux vecteurs de la base circulaire:

$$\begin{aligned} \vec{e}_+ \cdot \vec{e}_+ = \vec{e}_- \cdot \vec{e}_- = 0 \\ \vec{e}_+ \cdot \vec{e}_- = -1 \end{aligned} \qquad \text{(AI.2.9)}$$

La formule (AI.2.8) permet alors d'établir l'équation d'évolution de $\tilde{\rho}_{eg}$:

$$\frac{d\tilde{\rho}_{eg}}{dt} = -\left(\frac{\Gamma}{2} - i\Delta\right).\tilde{\rho}_{eg} - \frac{1}{i\hbar}\left(\left(-D_+^+.E_- - D_-^+.E_+\right).\rho_{gg} - \rho_{ee}.\left(-D_+^+.E_- - D_-^+.E_+\right)\right) \qquad \text{(AI.2.10)}$$

Nous supposerons maintenant que Γ, la largeur naturelle des niveaux excités, est bien supérieure aux taux de retour à l'équilibre des populations des sous niveaux Zeeman (γ pour le niveau fondamental et γ' pour le niveau excité) et aux taux de pompage optique. Ces conditions se résument dans l'inégalité suivante:

$$\bar{\gamma}_p^{\pm}, \gamma << \Gamma \quad \text{où} \quad \bar{\gamma}_p^{\pm} \text{ est la moyenne temporelle de } \gamma_p^{\pm}. \qquad \text{(AI.2.11)}$$

$1/\Gamma$ est donc un temps très court face au temps d'évolution du système. Au bout d'un temps court, de l'ordre de quelques $1/\Gamma$, $\bar{\rho}_{eg}$ a atteint sa valeur stationnaire et suit instantanément les variations du champ électromagnétique (approximation adiabatique [Coh90]). Les populations des niveaux excités sont supposées négligeables face aux populations des niveaux fondamentaux.

A partir de la formule (AI.2.10) et en utilisant les approximations quasi-résonnante et adiabatique, il est possible d'exprimer la cohérence ρ_{m_e,m_g} entre un niveau $|J_e,m_e\rangle$ et un niveau $|J_g,m_g\rangle$:

$$\rho_{m_e,m_g} = \frac{1}{2i\hbar\left(\frac{\Gamma}{2} - i\Delta\right)}\left(\left(\langle m_e|D_+^+|m_g\rangle.E_-\langle m_e|D_-^+|m_g\rangle.E_+\right).\rho_{mg,mg}\right)e^{-i(\omega t - kz)} \qquad \text{(AI.2.12)}$$

La cohérence entre un niveau $|J_g,m_g\rangle$ et un niveau $|J_e,m_e\rangle$ vérifie

$$\rho_{m_g m_e} = \rho_{m_e m_g}^{*}. \qquad \text{(AI.2.13)}$$

2) Taux de pompage optique

En reportant l'expression de ρ_{eg} et de ρ_{ge}, dans l'expression (AI.2.3) et en ne conservant que les termes séculaires, ρ_{gg} vérifie l'équation matricielle suivante:

$$\frac{\partial \rho_{gg}}{\partial t} = \frac{-1}{4\hbar^2}\left(\frac{(\vec{D}^-.\vec{E}^*)(\vec{D}^+.\vec{E})}{\left(\frac{\Gamma}{2} - i\Delta\right)}\rho_{gg} + \rho_{gg}\frac{(\vec{D}^-.\vec{E}^*)(\vec{D}^+.\vec{E})}{\left(\frac{\Gamma}{2} + i\Delta\right)}\right) \qquad \text{(AI.2.14)}$$

$\vec{D}^+.\vec{E}$ traduit l'absorption et de $\vec{D}^-.\vec{E}^*$ l'émission de photons dans l'onde $\vec{E}$.

Notons $d_{+-} = \langle e_+|D_+^+|g_-\rangle$ et $d_{-+} = \langle e_-|D_-^+|g_+\rangle$ les seuls éléments de matrice non nuls de l'opérateur dipolaire $\vec{D}^+$. En appliquant le théorème de Wigner-Eckart, on trouve:

$$d_{-+} = -d\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}d \qquad \text{(AI.2.15)}$$

$$d_{+-} = d\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}}d \qquad \text{(AI.2.16)}$$

où d est l'élément de matrice réduit de l'opérateur dipolaire électrique. et vérifie $\vec{D}^{\pm} = d.\vec{d}^{\pm}$ où $\vec{d}^{\pm}$ est un opérateur unitaire proportionnel à $\vec{D}^{\pm}$. Il est possible de choisir d réel en choisissant convenablement la phase relative entre les fonctions radiales associées aux niveaux J_g et J_e. Les coefficients matriciels de l'expression ci-dessus correspondent à des coefficients 3j [Rot59].

Les relations (AI.2.14) à (AI.2.16) permettent de calculer les taux de pompage optique:

$$\gamma_p^- = \frac{\Gamma}{4}\frac{d_{+-}^2|E_+|^2}{\hbar^2\left(\frac{\Gamma^2}{4}+\Delta^2\right)} \quad \text{et} \quad \gamma_p^+ = \frac{\Gamma}{4}\frac{d_{-+}^2|E_-|^2}{\hbar^2\left(\frac{\Gamma^2}{4}+\Delta^2\right)} \qquad \text{(AI.2.17)}$$

soit

$$\boxed{\gamma_p^{\pm} = \frac{\Gamma}{24}\frac{d^2\left(I_x + I_y \pm 2\sqrt{I_x I_y}\sin(\varphi)\right)}{\hbar^2\left(\frac{\Gamma^2}{4}+\Delta^2\right)}} \qquad \text{(AI.2.18)}$$

3) Emission spontanée

La largeur des niveaux excités étant égale à Γ, le taux de retombée du niveau excité $|e, J_e, m_e\rangle$ sur le niveau fondamental $|g, J_g, m_g\rangle$ est égal à:

$$\Gamma\sum_q\left(\vec{d}^-.\vec{e}_q^*\right).\rho_{m_e,m_e}.\left(\vec{d}^+.\vec{e}_q\right) = 2\Gamma\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ m_g & m_e - m_g & -m_e \end{pmatrix}^2 \qquad \text{(AI.2.19)}$$

On peut alors déduire de cette formule les taux de retombée par émission spontanée. Tous ces résultats sont présentés dans la figure (AI.2.1) qui complète le diagramme de la figure (AI.1.3).

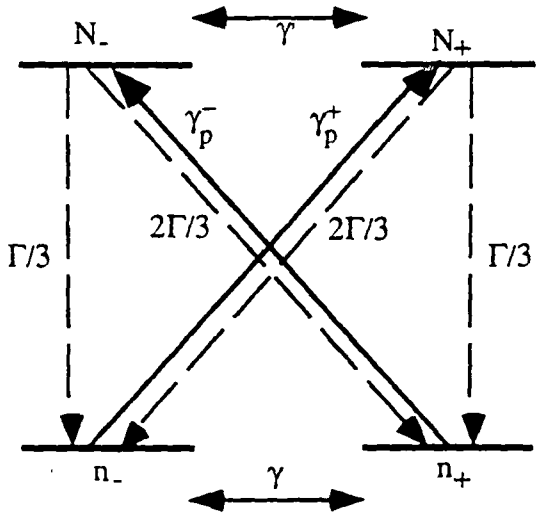


Fig (AI.2.1) : Evolution des populations

Il est alors possible de déduire de la figure (AI.2.1) et des relations (AI.2.8) et (AI.2.9), les équations d'évolution des populations des différents sous-niveaux Zeeman:

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{dn_-}{dt} &= -\left(\gamma+\gamma_p^+\right)n_- + \gamma n_+ + \frac{\Gamma}{3}N_- + \frac{2\Gamma}{3}N_+ \\
\frac{dn_+}{dt} &= -\left(\gamma+\gamma_p^-\right)n_+ + \gamma n_- + \frac{\Gamma}{3}N_+ + \frac{2\Gamma}{3}N_- \\
\frac{dN_-}{dt} &= -\left(\gamma'+\Gamma\right)N_- + \gamma' N_+ + \gamma_p^- n_+ \\
\frac{dN_+}{dt} &= -\left(\gamma'+\Gamma\right)N_+ + \gamma' N_- + \gamma_p^+ n_-
\end{aligned}} \qquad \text{(AI.2.20)}$$

Nous pourrons par la suite accéder aux populations des différents sous-niveaux dans l'état stationnaire. A partir de ces populations, nous pouvons en déduire l'expression de la polarisation.

4) Expression de la polarisation

La polarisation a pour expression

$$\vec{P} = N\langle\vec{D}\rangle = N\,\mathrm{Tr}\left(\rho\vec{D}\right) = N\left(\mathrm{Tr}\left(\rho_{ge}\vec{D}^+\right) + \mathrm{Tr}\left(\rho_{eg}\vec{D}^-\right)\right) \qquad \text{(AI.2.21)}$$

où N est le nombre d'atomes par unité de volume.

Les deux composantes de la polarisation sont conjuguées l'une de l'autre. Il suffit donc de réaliser les calculs pour la composante de fréquence positive. D'après les relations (AI.2.12-13-21), la polarisation s'exprime sous la forme:

$$\vec{P} = 2\,N\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{-i(\omega t-kz)}}{2\,i\,\hbar\left(\frac{\Gamma}{2}-i\Delta\right)}\sum_{m_e,m_g}\rho_{m_g,m_g}\left(\left(\langle m_e|D_+^+|m_g\rangle\right)^2 E_-\vec{e}_+ + \left(\langle m_e|D_-^+|m_g\rangle\right)^2 E_+\vec{e}_-\right)\right) \quad \text{(AI.2.22)}$$

soit

$$\vec{P} = \frac{N\,d^2}{3\hbar}\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{-i(\omega t-kz)}}{\Delta+i\frac{\Gamma}{2}}\,\frac{\left(n_-E_-\vec{e}_+ + n_+E_+\vec{e}_-\right)}{n_- + n_+}\right\} \quad \text{(AI.2.23)}$$

Nous définirons alors la susceptibilité linéaire χ_0 par

$$\chi_0 = -\frac{Nd^2}{6\varepsilon_0\hbar\left(\Delta+i\frac{\Gamma}{2}\right)} \quad \text{(AI.2.24)}$$

Les susceptibilités vues par les ondes polarisées σ_+ et σ_- seront donc proportionnelles à χ_0 mais aussi respectivement aux populations n_+ et n_-. La modification des populations des sous-niveaux Zeeman du fondamental induira donc des polarisations différentes pour les deux composantes de la base circulaire. Cette propriété sera essentielle dans la génération d'instabilités de polarisations orthogonales dans une vapeur atomique comme nous allons le voir dans ce travail de thèse.

Annexe 2

Mélange à quatre ondes dans un milieu Kerr

A2.1) Description du champ et de la polarisation induite

1) Champ total

Le champ total $\vec{E}$ dans le milieu est décrit comme la somme de quatre ondes planes $\vec{E}_i$ d'amplitude E_i, de fréquence ω_i et de direction de propagation $\vec{k}_i$. Toutes ces ondes auront ici la même polarisation linéaire $\vec{u}$.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{1\leq i\leq 4} E_i\, e^{-i\left(\omega_i t - \vec{k}_i\cdot\vec{r}\right)}\right)\vec{u} \qquad \text{(AII.1)}$$

Nous supposerons de plus que les angles entre les différentes directions de propagation de ces ondes sont tous très petits devant 1 ou proches de π et que l'amplitude E_i des différents champs ne varie pas au cours du temps.

2) Polarisation

Dans un milieu isotrope tel qu'une vapeur atomique, la polarisation $\vec{P}$ s'exprime de la façon suivante

$$\vec{P}(\vec{E}) = \varepsilon_0\left(\chi_0 + \chi^{(3)}I + \chi^{(5)}I^2 + \ldots\right)\vec{E} \qquad \text{(AII.2)}$$

Le premier terme en $\varepsilon_0\chi_0\vec{E}$ est un terme linéaire en $\vec{E}$, alors que les termes suivants sont tous non-linéaires. L'approximation Kerr consiste à considérer que l'intensité I est assez faible pour que nous puissions nous limiter à l'ordre 3. La non-linéarité est alors proportionnelle à l'intensité I. on appelle indice non-linéaire le terme variant en $\varepsilon_0\,\chi^{(3)}I$.

La polarisation non-linéaire d'ordre 3 peut alors s'exprimer sous la forme suivante

$$\vec{P}^{(3)}(\vec{r},t) = \varepsilon_0\,\mathrm{Re}\left(\sum_{1\leq i,j,k\leq 4}\chi^{(3)}\left(\omega_i,\omega_j,\omega_k\right)\left(E_i\,E_j^*\right)E_k\, e^{i\left(\left(\omega_i-\omega_j+\omega_k\right)t-\left(\vec{k}_i-\vec{k}_j+\vec{k}_k\right)\cdot\vec{r}\right)}\right)\vec{u} \qquad \text{(AII.3)}$$

où $\chi^{(3)}(\omega_i,\omega_j,\omega_k)$ est la susceptibilité d'ordre 3. Notons que cette susceptibilité n'est pas nécessairement invariante par une permutation des fréquences $(\omega_i,\omega_j,\omega_k)$.

3) Equation de Maxwell

Le champ rayonné par la polarisation se déduit de l'équation de Maxwell suivante

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} \qquad \text{(AII.4)}$$

Nous supposerons que l'approximation de l'enveloppe lentement variable [Ams61] s'applique c'est à dire que Λ l'échelle de variation spatiale de l'onde $\vec{E}_i$ est grande devant λ la longueur d'onde optique. Lorsque cette hypothèse est vérifiée, on a:

$$\left|\frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2}\right| << \left|k_i \frac{\partial E_i}{\partial z}\right| \qquad \text{(AII.5)}$$

Compte tenu de ces approximations, l'équation de Maxwell (AII.4) en régime stationnaire ($\frac{\partial E_i}{\partial z} = 0$)peut s'écrire:

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{1\le i\le 4} 2ik_i \frac{\partial E_i}{\partial z} e^{-i(\omega_i t - \vec{k}_i\cdot\vec{r})}\right)\vec{u} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \qquad \text{(AII.6)}$$

4) Champ rayonné par la polarisation

Projetons l'équation (AII.6) précédente sur le mode $\vec{E}_i$:

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{1\le j\le 4} 2ik_j \frac{\partial E_j}{\partial z} e^{-i((\omega_j-\omega_i)t-(\vec{k}_j-\vec{k}_i)\cdot\vec{r})}\right)\vec{u} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_+}{\partial t^2} e^{i(\omega_i t - \vec{k}_i\cdot\vec{r})} \qquad \text{(AII.7)}$$

où P_+ est la composante de fréquence positive de P.L

La période spatiale du premier terme de cette équation a un pas de $\frac{1}{|\vec{k}_j - \vec{k}_i|}$. Intégrons maintenant l'équation (AII.7) précédente sur un volume V dont les dimensions sont très inférieures à Λ l'échelle de variation spatiale des champs et très supérieures au pas $\frac{1}{|\vec{k}_i - \vec{k}_j|}$. Nous pouvons ainsi supposer que le terme en $\frac{\partial E_i}{\partial z}$ est constant sur le volume d'intégration. Les dimensions de V étant très supérieures à $\frac{1}{|\vec{k}_i - \vec{k}_j|}$, l'intégrale du

premier membre de l'équation (AII.7) est nulle si $i \neq j$. Par conséquent, l'équation d'évolution du champ $\vec{E}_i$ s'exprime après intégration sur le volume V de la façon suivante:

$$2ik_i \frac{\partial E_i}{\partial z} = \frac{(\omega_i + \Delta\omega)^2}{Vc^2} \int_V \left(\sum_{1 \leq j,k,l \leq 4} \chi^{(3)}(\omega_j, \omega_k, \omega_l)(E_j E_k^*) E_l e^{-i(\Delta\omega \cdot t - \Delta\vec{k} \cdot \vec{r})} dv \right) \quad \text{(AII.8)}$$

avec

$$\Delta\omega = \omega_j - \omega_k + \omega_l - \omega_i \quad \text{et} \quad \Delta\vec{k} = \vec{k}_j - \vec{k}_k + \vec{k}_l - \vec{k}_i \quad \text{(AII.9)}$$

Le deuxième terme de l'équation (AII.8) représente le terme source du champ $\vec{E}_i$.

A2.2) Conditions sur les champs

1) Conservation de l'énergie

Le terme source du champ $\vec{E}_i$ est constitué par une somme de termes en $(E_j E_k^*)E_l$. Chacun de ces termes représente un processus d'absorption d'un photon dans l'onde $\vec{E}_j$, d'émission d'un photon dans l'onde $\vec{E}_k$ et d'absorption d'un photon dans l'onde $\vec{E}_l$ qui crée un dipôle qui peut rayonner et émettre un photon dans l'onde $\vec{E}_i$ [Coh88].

Dans un système atomique à deux niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$, les processus de mélange à quatre ondes peuvent se représenter de la façon suivante, où une flèche montante représente l'absorption d'un photon et une flèche descendante l'émission d'un photon:

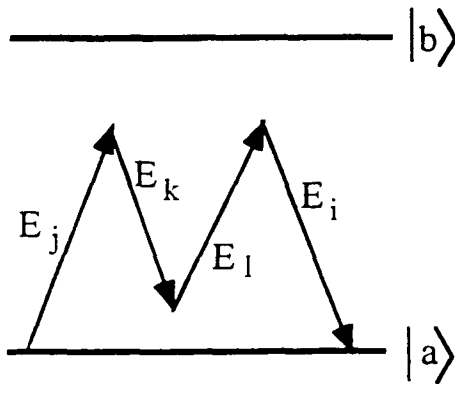


Fig AII.1: Cycle d'absorption-émission de photons dans un système à deux niveaux

Par conséquent, l'échange d'énergie échangée par les photons au cours de l'interaction est égale à

$$\hbar\left(\omega_j - \omega_k + \omega_l - \omega_i\right) \qquad \text{(AII.10)}$$

La conservation de l'énergie au cours de l'interaction entre les champs implique que

$$\Delta\omega = 0 \qquad \text{(AII.11)}$$

2) Accord de phase

L'intégrale de la relation (AII.8) et donc le terme source du champ $\vec{E}_j$ est maximum lorsque la condition d'accord de phase suivante est vérifiée:

$$\Delta\vec{k} = \vec{0} \qquad \text{(AII.12)}$$

En effet, lorsque les processus sont accordés en phase, les divers dipôles générés en différents points de la vapeur émettent tous des champs en phase qui pourront interférer constructivement. Par contre, quand l'accord de phase n'est pas respecté, les dipôles vont émettre de façon partiellement destructive et l'émission ne sera pas optimum.

A2.3) Interaction de trois ondes dans un milieu Kerr

1) Présentation du problème

Nous considérons ici le cas de deux ondes intenses $\vec{E}_f$ et $\vec{E}_b$ se propageant dans des sens opposés dans un milieu Kerr et d'une onde $\vec{E}_p$ d'intensité plus faible et dont la direction de propagation forme un angle θ petit avec la direction de propagation de $\vec{E}_f$.

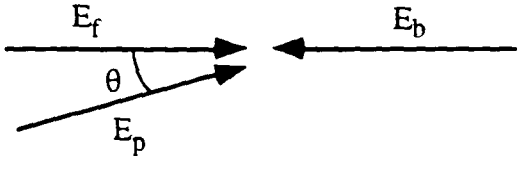


Fig AII.2: Champs en présence

Nous considérerons dans un premier temps que toutes ces ondes ont la même polarisation linéaire et nous ne tiendrons plus compte de leur aspect vectoriel. Nous décrirons ici les différents processus qui rentrent en jeu dans l'émission d'une onde E_4 par mélange à quatre ondes.

2) Les différents processus de mélange à quatre ondes

Les divers processus permettant la génération d'une onde E_4 sont représentés dans la figure suivante [Val91b]: une flèche montante correspond à l'absorption d'un photon et une flèche descendante à l'émission d'un photon. Nous négligerons ici dans la polarisation tous les termes d'ordre 2 en champ faible c'est à dire les polarisations comportant des termes en $(E_p E_p^*)$ ou $(E_p E_p)$

Processus	Cycles d'absorption émission	Fréquence	Accord de phase
Phase non linéaire	E_p E_f E_f E_p	ω_p	Toujours respecté
Mélange à quatre ondes vers l'arrière	E_f E_p E_b E_c	$\omega_c = \omega_f - \omega_p + \omega_b$	E_f E_p E_c E_b
Mélange à quatre ondes vers l'avant	E_f E_p E_f E_a	$\omega_a = 2\omega_f - \omega_p$	E_f E_p E_f E_a
Répartition distribuée	E_p E_f E_b E_d	$\omega_d = \omega_p - \omega_f + \omega_b$	E_d E_f E_p E_b

Fig AII.3: Processus de mélange à quatre ondes

a) Phase non linéaire

le processus de phase non-linéaire consiste en l'absorption de deux photons dans l'onde pompe E_f et dans l'onde pompe E_p et l'émission de deux photons dans les ondes E_f et E_p. Ce processus est toujours accordé en phase.

b) Mélange à quatre ondes vers l'arrière

Le processus de mélange à quatre ondes vers l'arrière appelé aussi conjugaison de phase consiste en l'absorption de deux photons dans les ondes pompes E_f et E_b et l'émission de deux photons dans les ondes E_p et E_c=E_4. L'onde E_c est appelée onde conjuguée de phase. Ce processus est toujours accordé en phase.

c) Mélange à quatre ondes vers l'avant

Ce processus consiste en l'absorption de deux photons dans les ondes pompes E_f et E_f et émission de deux photons dans les ondes E_p et E_a=E_4. L'amplitude du champ E_a est proportionnelle à la conjuguée de l'amplitude du champ E_p.Ce processus n'est généralement pas accordé en phase. La relation d'accord de phase impose que la direction de propagation de l'onde E_a soit symétrique à la direction de propagation de l'onde E_p. On supprime ainsi le désaccord de phase dans les directions transversales. L'intégrale (AII.8) est alors égale à [Val91b]:

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} e^{ik\theta^2 z}\,dz = i\ \mathrm{sinc}\left(\frac{k\theta^2\ell}{2}\right) \qquad \text{(AII.13)}$$

où ℓ est la longueur de la cellule.

L'efficacité de ce processus diminue donc lorsque l'angle entre les ondes augmente.

d) Répartition distribuée

Ce processus consiste en l'absorption de deux photons dans les ondes E_p et E_b et l'émission de deux photons dans les ondes E_f et E_d=E_4. Ce processus n'est en général pas accordé en phase. Le calcul de $\Delta\vec{k}$ donne ici un résultat opposé à celui que nous avions obtenus dans le cas du mélange à qutre ondes vers l'avant. La relation d'accord de phase sur les directions transversales impose ainsi la même condition que dans le processus de mélange à quatre ondes vers l'avant. L'efficacité de ce processus est donc

proportionnelle à $\operatorname{sinc}\left(\frac{k\theta^2\ell}{2}\right)$. L'amplitude du champ E_a est proportionnelle à l'amplitude du champ E_p.

A2.4) Interprétation en termes de réseau d'interférences

1) Milieu Kerr

Nous garderons dans cette partie la configuration des trois ondes $\vec{E}_f$, $\vec{E}_b$ et $\vec{E}_p$ ainsi que les notations que nous avions adoptés dans la partie (1.3). Le mélange à quatre ondes peut s'expliquer en termes réseaux d'intensité créés par interférence entre les différentes ondes. L'interférence des ondes $\vec{E}_f$ et $\vec{E}_p$ crée une modulation d'intensité dans le plan $(\vec{k}_f, \vec{k}_p)$. En effet l'intensité totale du champ $\vec{E} = \vec{E}_f + \vec{E}_p$ peut s'exprimer de la façon suivante:

$$|\vec{E}|^2 = |\vec{E}_f|^2 + |\vec{E}_p|^2 + 2|\vec{E}_f||\vec{E}_p|\cos\left((\vec{k}_f - \vec{k}_p).\vec{r}\right)$$

L'indice non-linéaire dépendant de l'intensité, le réseau d'intensité induit un réseau d'indice sur lequel peut se diffracter l'onde $\vec{E}_b$ ou l'onde $\vec{E}_f$ et ainsi générer la quatrième onde.

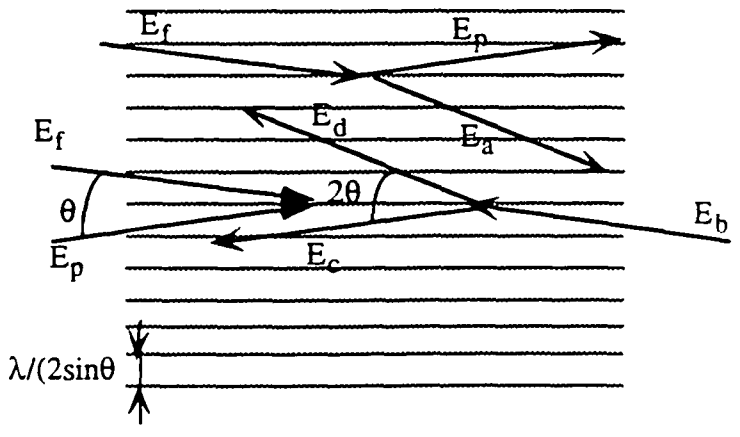


Fig AII.4.: Reseau créé par l'interférence de E_b et E' et diffraction de E_f sur ce réseau

L'onde $\vec{E}_b$ se diffracte sur le réseau à l'ordre 1 en l'onde $\vec{E}_c$ conjuguée de phase, et à l'ordre -1 en l'onde $\vec{E}_d$ due à la répartition distribuée. L'onde $\vec{E}_f$ se diffracte sur ce même réseau à l'ordre 1 en l'onde $\vec{E}_p$ et à l'ordre -1 en l'onde $\vec{E}_a$ due au mélange à quatre ondes vers l'avant. les ordres supérieurs de la diffraction correspondent aux effets non-linéaires d'ordre supérieur.

De la même façon, on peut considérer un réseau créé par les ondes $\vec{E}_b$ et $\vec{E}_p$ sur lequel peuvent se diffracter les ondes $\vec{E}_b$ et $\vec{E}_f$. Une construction similaire à celle de la figure (AII.4) montre que ces ondes se diffractent aux ordres 1 et -1 en les ondes $\vec{E}_c$, $\vec{E}_d$ et $\vec{E}_a$.

Les processus de mélange à quatre ondes résultent donc de la contribution de la diffraction des ondes due à ces deux réseaux d'intensité.

2) Vapeur atomique

a) Système à deux niveaux

Considérons un atome à deux niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$ interagissant avec une onde lumineuse. Sous l'action de cette onde, les atomes sont portés du niveau $|a\rangle$ vers le niveau $|b\rangle$. L'indice non-linéaire étant proportionnel à la différence de population entre les deux niveaux est donc une fonction de l'intensité dans le milieu. Une modulation spatiale de l'intensité va ainsi induire un réseau d'indice sur lequel peut se diffracter la troisième onde.

b) Système $1/2 \rightarrow 1/2$

Nous considérerons ici un système $1/2 \rightarrow 1/2$ que nous détaillerons dans ce mémoire et principalement dans les parties (I.1) et (I.2). Les ondes $\vec{E}_b$ et $\vec{E}_f$.sont de même polarisation linéaire et l'onde $\vec{E}_p$ est de polarisation linéaire orthogonale. La non-linéarité est fonction des populations des niveaux fondamentaux de m_g =-1/2 et m_g =1/2. Les interférences entre les ondes $\vec{E}_f$ et $\vec{E}_p$ par exemple modifient les populations des niveaux fondamentaux et créent un réseau d'atomes orientés sur lequel peut se diffracter la troisième onde, ici $\vec{E}_b$.

c) Effets du mouvement des atomes

Considérons le réseau créé par les interférences entre l'onde $\vec{E}_f$ et l'onde $\vec{E}_p$. L'interfrange est de $\lambda/(2\sin\theta)$, θ étant l'angle entre $\vec{E}_p$ et $\vec{E}_f$. Le réseau d'indice créé par ce réseau lumineux dépend du mouvement des atomes et son amplitude est maximum lorsqu'ils sont immobiles. En effet, le mouvement des atomes pendant leur durée de vie tend à brouiller le réseau atomique. Ce brouillage est d'autant plus important que le pas du réseau est petit et donc que l'angle θ est grand. La diffraction des ondes $\vec{E}_f$ et $\vec{E}_b$ sur ce réseau pour donner l'onde $\vec{E}$ ne sera efficace que lorsque l'angle θ est petit.

Références

Abr64 M. Abramowitz, I. A. Segun, 'Handbook of Mathematical Functions', Dover Publication Inc., N. Y. (1964).

Abr78 R. L. Abrams, R. C. Lind, Opt. Lett. **2**, 94 (1978).

Abr90 N. B. Abraham, W. J. Firth, J. Opt. Soc. Am. B **7**, 186 (1990).

Akh92 S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov, V. Yu. Ivanov, A. V. Larichev, N. I. Zheleznykh, J. Opt. Soc. Am. B **9**, 78, (1992).

Ams61 J.A. Amstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing et P. S. Pershan, Phys. Rev. **127**, 1918, (1961).

Are90 F. T. Arecchi, G. Giacomelli, P. L. Ramezza, S. Residori, Phys. Rev. Lett. **65**, 2531, (1990).

Are93 F. T. Arecchi, S. Boccaletti, P. L. Ramezza, S. Residori, Phys. Rev. Lett. **70**, 2277, (1993).

Ari77 E. Arimondo, M. Inguscio, P. Violino, Rev. of Mod. Phys., **49**, 31 (1977).

Bad85 R. Badii, A. Politi, Journ. of Stat. Phys., **40**, 725 (1985).

Bad88 R. Badii, C. Broggi, B. Derighetti, M. Ravani, S. Ciliberto, A. Politi, M. A. Rubio, Phys. Rev. Lett. **60**, 979 (1988).

Bar87 I. Bar Joseph, Y. Silberberg, Phys. Rev. A **36**, 1731, (1987).

Ber88 P. Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal, 'L'ordre dans le chaos, vers une approche déterministe de la turbulence', Hermann ed. des Sciences et des Arts (1988)

Blo93 A. Blouin, A. Maître, M. Pinard, J. R. Rios Leite, R. W. Boyd, J.-Y. Courtois, G. Grynberg, Nonlinear Opt. **5**, 469, (1993).

Bon78 R. Bonifacio, L. A. Lugiato, Phys. Nuo. Cim. 21,505, (1978).

Bou93 S. Bourzeix, M. D. Plimmer, F. Nez, L. Julien, F. Biraben, Opt. Com. **99**, 89 (1993).

Bra92 M. Brambilla, G. Broggi, F. Pratti, Physica D **58**, 339, (1992).

Bro88 G. Broggi, J. Opt. Soc. Am. B, **5**, 1020 (1988).

Cil90 S. Ciliberto, P. Coullet, J. Lega, E. Pampolini, C. Perez-Garcia, Phys. Rev. Lett., **65**, 2370 (1990).

Cip93 G. Cipparrone, V. Carbone, C. Versace, C. Umeton, R. Bartolino, F. Simoni, Phys. Rev A **47**, 3741, (1993).

Cha92 R. Chang, W. J. Firth, R. Indik, J. V. Moloney, E. M. Wright, Opt. Com **88**, 167, (1992).

Coh88 C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, 'Processus d'Interaction entre Photons et Atomes', Inter ed. C.N.R.S. (1988).

Coh90 C. Cohen-Tannoudji, Atomic motion in laser light, eds Les Houches, Session LIII, (1990).

Cou92 J. Y. Courtois, G. Grynberg, Opt. Com. **87**, 186 (1992).

Cro93 M.C. Cross, P.C. Hohenberg ; Rev. Mod. Phys. **65**, 851, (1993).

D'Al91 D'Alessandro, W. J. Firth, Phys. Rev. Lett. **66**, 2597, (1991).

D'Al92 D'Alessandro, W. J. Firth, Phys. Rev. A **46**, 537, (1992).

Dam94 L. Dambly, Thèse de Doctorat de l'Université des Sciences et des Technologies de Lille, Février 1994.

Eck85 J. P. Eckmann, D. Ruelle, Rev. Mod. Phys. **57**, 617 (1985).

Eck86 J. P. Eckmann, S. Oliffson Kamphorst, D. Ruelle, S. Ciliberto, Phys. Rev. A **34**, 4971 (1986).

Far83 J. D. Farmer, E. Ott, J. A. Yorke, Physica 7D, 153 (1983).

Fir86 W. J. Firth, R. G. Harrison, I. A. Al-Saidi, Phys. Rev. A **33**, 2449, (1986).

Fir88 W. J. Firth, C. Paré, Opt. Lett. **13**, 1096, (1988).

Fir90 W. J. Firth, J. Mod. Phys. **37**, 151, (1990).

Fir92 W. J. Firth, A. J. Scroggie, G. S. McDonald, L. A. Lugiato, Phys. Rev. A **46**, 3609, (1992).

Gae87 A. L. Gaeta, R. W. Boyd, J. R. Ackerhalt, P. W. Milonni, Phys. Rev. Lett. **58**, 2432, (1987).

Gae93 A.L. Gaeta, R.W. Boyd Phys. Rev. A **48**, 1610, 1993.

Gau87 D.J. Gauthier, P. Narum, R.W. Boyd Phys. Rev. Lett **58**, 1640, (1987).

Gau88 D.J. Gauthier, M.S. Malcuit, R.W. Boyd Phys. Rev. Lett **61**, 1827, 1988.

Gau89 D.J. Gauthier, Thèse de Doctorat, Institute of Optics University of Rochester, USA , Mai 89.

Gau90 D. J. Gauthier, M. S. Malcuit, A. L. Gaeta, R. W. Boyd, Phys. Rev. Lett. **64**, 1721, (1990).

Gib76 H.M. Gibbs, S. L. McCall, T.N.C. Venkatesen, Phys. Rev. Lett. **36**, 1135 (1976).

Gib81 H.M. Gibbs, F. A. Hopf, D. L. Kaplan, R. L. Shoemaker, Phys. Rev. Lett. **46**, 474 (1981).

Giu88 G. Giusfredi, J. F. Valley, R. Pon, G. Khitrova, H. M. Gibbs, J. Opt. Soc. Am. B **5**, 1181, (1988).

Gra83a P. Grassberger, I. Procaccia, Physica **9**D, 189 (1983).

Gra83b P. Grassberger, I. Procaccia, Phys. Rev. Lett. **50**, 346 (1983).

Gra83c P. Grassberger, I. Procaccia, Phys. Rev. A **28**, 2591 (1983).

Gry88a G. Grynberg, Opt. Com. **66**, 321, (1988).

Gry88b G. Grynberg et *al*, Opt. Com. **67**, 363, (1988).

Gry89 G. Grynberg, J. Paye, Eur. Lett. **8**, 29 (1989).

Gry90 G. Grynberg, M. Vallet, M. Pinard, Phys. Rev. Lett. **65**, 701, (1990).

Gry92 G. Grynberg, A. Petrossian, M. Pinard, M. Vallet, Eur. Lett. **17**, 215, (1992).

Gry93a G. Grynberg, J. Phys. III France **3**, 1345, (1993).

Gry93b G. Grynberg, Int. J. Nonlin. Opt. Phys. **2**, 117, (1993).

Gry94a G. Grynberg, A. Maître, A. Petrossian, Phys. Rev. Lett. (à paraître) (1994).

Gry94b G. Grynberg, (soumis à publication) (1994).

Guy91 E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, 'Hydrodynamique Physique', InterEdition/Editions du CNRS, (1991).

Hae93 M. Haelterman, Opt. Com. **100**, 389, (1993).

Har83 R. G. Harrison, W. J. Firth, C. A. Emshary, I. A. Al-Saidi, Phys. Rev. Lett. **51**, 562 (1983).

Har84 R. G. Harrison, W. J. Firth, I. A. Al-Saidi, Phys. Rev. Lett. **53**, 258 (1984).

Hén76 M. Hénon, Commun. Math. Phys. **50**, 69 (1976)

Hil92 L. Hilico, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Septembre 92

Hol92 R. Holzner, P. Eschle, A. W. McCord, D. W. Warington, Phys. Rev. Lett. **69**, 2192, (1992).

Hon93 T. Honda, Opt. Lett. **18**, 598 (1993).

Hüb89a U. Hübner, N. B. Abraham, C. O. Weiss, Phys. Rev. A **40**, 6354 (1989).

Hüb89b U. Hübner, W. Klische, N. B. Abraham, C. O. Weiss, 'Measures of Complexity and Chaos', 133, ed N. B. Abraham et al, Plenum Press, New York.

Ike79 K. Ikeda, Opt. Com. **30** , 257, (1979).

Ike82 K. Ikeda, O. Akimoto, Phys. Rev. Lett. **48**, 617, (1979).

Kai93 W. Kaige, N. B. Abraham, L. A. Lugiato, Phys. Rev. A **47**, 1263, (1993).

Kre91 M. Kreuzer, W. Balzer, T. Tschudi, Mol. Cryst. **198**, 231, (1991).

LaP93 *P. LaPenna, G. Giusfredi, Phys. Rev. A (1993).*

Law91 C. T. Law, A. E. Kaplan, J. Opt. Soc. Am. B **8**, 58 (1991)

LeB90 M. LeBerre, E. Ressayre, A. Tallet, J. J. Zondy, J. Opt. Soc. Am. B **7**, 1346, 1990

LeB91 M. LeBerre, E. Ressayre and A. Tallet Phys. Rev. A **43**, 6345, 1991.

Lef92 M. Lefranc, Thèse de Doctorat de l'Université des Sciences et des Technologies de Lille, Décembre 1992.

Lei86 J. R. R. Leite, P. Simoneau, D. Bloch, S. Le Boiteux, M. Ducloy, Eur. Phys. Lett. **2**, 747 (1986).

Lep93 C. Lepers-Speleers, Thèse de Doctorat de l'Université des Sciences et des Technologies de Lille, Janvier 1993.

Lor63 E. N. Lorentz, J. Atmos. Sci. **20**, 130 (1963).

Lug87 L. A. Lugiato, R. Lefever, Phys. Rev. Lett. **58**, 2209 (1987).

Lug90 L. A. Lugiato, JOSA B **7**, 1019 (1990).

Lug92 L.A. Lugiato ; Phys. Rep. **219**, 293, 1992.

Mac92 R. Macdonald, H. J. Eichler, Opt. Com. **89**, 289, (1992).

Man90 P. Maneville, Dissipative Structures and Weak Turbulence, Academic Press, San Diego, (1990).

Man93 P. Mandel, M. Georgiou, T. Erneux, Phys. Rev. A **47**, 4277, (1993).

Mes59 A. Messiah, Mécanique Quantique II, Dunod (1959).

Mit88 F. Mitschke, M. Möller, W. Lange, Phys. Rev. A **37**, 4518 (1988).

Möl89 M. Möller, W. Lange, F. Mitschke, N. B. Abraham, U. Hübner, Phys. Lett. A **138**, 176 (1989)

Nic81 G. Nicolis, C. Baesens, 'Phénomènes non-linéaires' (1981).

Nov86 A. D. Novikov, V. V. Obukhovskii, S. G. Odulov, B. I. Sturman, JETP Lett. **44**, 538, (1986).

Omo77 A. Omont, Prog. Quantum. Electr. **5**, 69 Pergamon Press (1977).

Pac80 N.H. Packard, J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, R.S. Shaw, Phys. Rev. Lett. **45**, 712 (1980)

Pam93 E. Pampaloni, S. Residori, F. T. Arecchi, Eur. Lett. **24**, 647, (1993).

Pap93 F. Papoff, G. D'Alessandro, G. L. Oppo, W. J. Firth, Phys. Rev. A **48**, 634 (1993).

Pen90 J. Pender, L. Hesselink, J. Opt. Soc. Am. B **7**, 1361, (1990).

Pen93 C. Penman, W. J. Firth, C. Paré, Opt. Com. **96**, 174, (1993).

Pet92 A. Petrossian, M. Pinard, A. Maître, J.-Y. Courtois, G. Grynberg, Eur. Lett. **18**, 689, (1992).

Pin94 M. Pinard, R. W. Boyd, G. Grynberg, Phys. Rev. A **49**, 1326 (1994).

Rea80 J. Reader, C. H. Corliss, W. L. Wiese, G. A. Martin, "Wavelengths and Transition Probabilities fot Atom sand Atomic Ions", NSRDS-NBS 68, Washington (1980).

Ren70 *A. Renyi, 'Probability Theory,' North-Holland, Amsterdam (1970).*

Rös79 O. E. Rössler, Ann. N. Y. Acad. Sci. **316**, 376 (1979).

Rot59 M. Rotenberg, R. Bivins, N. Metropolis, J. K. Wooten Jr., 'The 3-j and the 6-j symbols, Technology Press', M.I.T. (1959).

Rue71 D. Ruelle, F. Takens, Commun. Math. Phys. **20**, 167 (1971).

She84 Y. R. Shen, 'The Principles of Non-Linear Optics', Wiley Interscience (1984).

Sie71 A. E. Siegman, 'An Introduction to Lasers and Masers', McGraw-Hill (1971).

Sie83 A. E. Siegman, P. A. Belanger, A. Hardy, Optical phase conjugaison, ed. R. A. Fischer (Academic Press, New York, NY, 1983).

Sil82 Y. Silberberg, I. Bar Joseph, Phys. Rev. Lett. **48**, 1541, (1982).

Sil82 Y. Silberberg, I. Bar Joseph, J. Opt. Soc. Am. B **1**, 662, (1984).

Sma67 S. Smale, Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 283 (1967).

Tam77 A.C. Tam, W. Happer, Phys. Rev. Lett. **38**, 278 (1977).

Tam93 M. Tamburrini, M. Bonavita, S. Wabnitz, E. Santamato, Opt. Lett. **18**, 855, (1993).

Tak81 F. Takens, 'Dynamical Systems and Turbulence', p366, Lecture Notes in Mathematics, vol 1125, Springer (1981).

Tho86 J. M. T. Thomson, H. B. Stewart , 'Nonlinear Dynamics and Chaos', ed John Wiley and Sons, (1986).

Thü93 B. Thüring, R. Neubecker, T. Tschudi, Opt. Com. **102**, 111, (1993).

Val91a M. Vallet, M. Pinard, G. Grynberg, Opt. Com. **81**, 403, (1991).

Val91b M. Vallet, Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, Juillet 91.

Val92 M. Vallet, M. Pinard, G. Grynberg, Opt. Com. **87**, 340, (1992).

Vid82 C. Vidal, S. Bachelart, A. Rossi, J. de Phys. **43**, 7 (1982).

Vos89 F. Voss, Physica D **38**, 362 (1989).

Wol85 A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, Physica D **16**, 258 (1985).

Yar77 A. Yariv, D. M. Pepper, Opt. Lett. **1**, 16 (1977).

Yu93 Dejin Yu, R. G. Harrison, Phys. Rev. A **47**, 790, (1993).

Agnès MAITRE

Instabilities generated by four wave mixing in an atomic vapor
Transverse patterns and temporal chaos

Abstract

The interaction of two counterpropagating electromagnetic waves of same frequency and same linear polarisation induces the generation of new waves when the intensity of these pump beams exceeds a threshold value. These new waves are called instabilities and are emitted in directions different from the direction of propagation of the pump beams. In this PhD work, the instabilities generated by two counterpropagating beams in a Rubidium vapor are studied in two different experiments.

In the first experiment, an intense beam propagates in the non linear medium and is reflected on a feedback mirror so that the reflected field propagates also in the non linear medium. When the intensity exceeds a threshold value and the frequency of the beam is tuned near the D_1 transition of Rubidium 85, off-axis instabilities are emitted. They propagate between the non linear medium and the feedback mirror and are reflected by this mirror. Their transverse pattern in far field consists of concentric rings, double spots or of 'Flowers' consisting of an odd number of spots ('petals') distributed on a circle. The theoritical and experimental study of such instabilities makes it possible to predict and observe the number of petals versus the different parameters of the system. In particular, these studies show also that the intensity of the instabilities could be either static, periodic or chaotic.

In the second experiment, the laser beam is divided in two pump beams conterpropagating in the non linear medium. No feedback mirror is used. The far field patterns consist of rings, double spots or hexagons. This experiment shows important analogies with hydrodynamics.

Key Words

Non linear optics	Rubidium
Instabilities	Temporal chaos
Transverse pattern	Correlation

Agnès MAITRE

Instabilités créées par mélange à quatre ondes dans une vapeur atomique. Chaos et morphogénèse

Résumé

Deux ondes électromagnétiques intenses de même fréquence et de même polarisation se propageant dans des sens opposés dans un milieu non-linéaire génèrent au dessus d'une certaine intensité seuil, des nouvelles ondes appelées instabilités qui sont émises spontanément dans des directions différentes de celles des pompes. Ce travail de thèse a consisté en l'étude des instabilités générées dans une vapeur de Rubidium dans deux situations expérimentales différentes.

Dans la première expérience, une onde pompe intense se propage dans le milieu non-linéaire, se réfléchit sur un miroir de rétroaction et est alors réinjectée dans le milieu non-linéaire. Pour une intensité suffisante et une fréquence adaptée de l'onde pompe, des instabilités sont émises. Elles pourront se réfléchir sur le miroir de rétroaction et être réinjectées dans le milieu non-linéaire. Leur structure transverse en champ lointain est alors constituée de diverses figures telles que des anneaux concentriques, deux points diamétralement opposés ou des figures comportant un nombre pair de taches réparties sur un cercle et appelées 'marguerites'. L'étude théorique de ces instabilités associée à une étude expérimentale a permis de prédire et de décrire le comportement des différentes instabilités émises en fonction des différents paramètres du système. En particulier ces études ont montré que l'intensité des instabilités pouvait être statique, périodique ou chaotique.

La deuxième expérience ne comporte pas de miroir de rétroaction et le faisceau laser est séparé en deux ondes pompes se contrepropageant dans le milieu non-linéaire. En champ lointain, les instabilités transverses sont constituées par un seul anneau, deux points diamétralement opposés ou des hexagones. L'intensité de ces instabilités peut être chaotique et l'étude de ce chaos été réalisée.

Mots clefs:

Optique non-linéaire	Rubidium
Instabilités	Chaos temporel
Structures transverses	Corrélation