HAL open science

Dynamique de l'appariement tourbillonnaire en milieu stratifie et stratifie tournant

Pantxika Othéguy

To cite this version:

Pantxika Othéguy. Dynamique de l'appariement tourbillonnaire en milieu stratifie et stratifie tournant. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Ecole Polytechnique X, 2005. Français. NNT : . tel-00011962

HAL Id: tel-00011962

https://pastel.hal.science/tel-00011962v1

Submitted on 16 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Dynamique de l'appariement tourbillonnaire en milieu stratifié et stratifié tournant

Pantxika Otheguy Mendionde

8 décembre 2005

Table des matières

1 Introduction **7**
Les tourbillons dans l'univers . . . 7
Dynamique des fluides géophysiques . . . 14
Effet de la stratification : une structure en couches . . . 22
Présentation du manuscript . . . 28

2 Introduction à la dynamique de tourbillons **29**
Choix du profil des tourbillons . . . 29
Dynamique bidimensionnelle de deux tourbillons co-rotatifs . . . 29
Stabilité tridimensionnelle de tourbillons . . . 34

I Étude de la stabilité linéaire d'une paire de tourbillons verticaux co-rotatifs en milieu stratifié **43**

3 Analyse numérique de stabilité tridimensionnelle d'une paire de tourbillons co-rotatifs **45**
3.1 Introduction . . . 46
3.2 Two-dimensional simulation . . . 48
3.2.1 Numerical method . . . 48
3.2.2 The two-dimensional evolution . . . 49
3.3 Numerical method of the three-dimensional stability analysis . . . 50
3.4 Three-dimensional stability . . . 53
3.4.1 Unstratified and weakly stratified flow ($F_h > 10$) . . . 54
3.4.2 Zigzag instability for $F_h < 2.85$ . . . 57
3.5 Effects of the Reynolds number and of the ratio α_b on the zigzag instability 62
3.5.1 The effect of the Reynolds number . . . 62
3.5.2 The effect of the ratio $\alpha_b = a_b/b_b$. . . . 62
3.6 Summary and conclusions . . . 63
3.7 Annexe A : Computational accuracy . . . 65

4 Analyse asymptotique de l'instabilité zigzag **67**
4.1 Introduction . . . 68
4.2 Stability problem . . . 69
4.2.1 Governing equations . . . 69
4.2.2 Basic state . . . 70

4.2.3 Scaling analysis . . . 72
4.2.4 Linearized equations . . . 72
4.3 Asymptotic problem . . . 73
4.3.1 Formulation of the asymptotic problem . . . 73
4.3.2 Order F_v^0 problem . . . 73
4.3.3 Order F_v^2 problem : determination of $\tilde{\boldsymbol{u}}_{20}$ . . . 75
4.4 Stability analysis . . . 80
4.5 Comparison between theoretical and numerical results . . . 81
4.5.1 Growth rate as a function of the wavenumber and Froude number . . 82
4.5.2 Maximum growth rate and corresponding wavenumber as a function of $1/\Lambda$ . . . 83
4.5.3 Shape of the eigenmode as a function of $k_z F_h$ . . . 83
4.6 Summary and conclusions . . . 84
4.7 Annexe A : Adjoint . . . 85
4.8 Annexe B : Determination of ψ_{20} . . . 86

II Étude de l'appariement de deux tourbillons verticaux en milieu stratifié 87

5 Mise en évidence expérimentale de l'instabilité zigzag 89
5.1 Comparaison entre la longueur d'onde observée et les études linéaires . . . 96
5.2 Dispositif expérimental et protocole utilisé . . . 97
5.2.1 Stratification . . . 97
5.2.2 Génération des tourbillons . . . 98
5.2.3 Visualisation tridimensionnelle des tourbillons . . . 100
5.2.4 Mesure des champs de vitesse instantanée par PIV . . . 101
5.2.5 Détermination des caractéristiques des tourbillons . . . 104

6 Simulations numériques de l'appariement de tourbillons verticaux en milieu stratifié 109
6.1 Introduction . . . 110
6.2 Numerical method . . . 112
6.2.1 DNS code . . . 112
6.2.2 Basic state . . . 112
6.3 Qualitative behaviour of the pairing of vortices in a stratified flow . . . 113
6.4 Description of merging in a strongly stratified fluid . . . 114
6.5 Analysis of a stratified pairing and comparison with a 2D pairing . . . 119
6.5.1 Evolution of the separation distance b and of the core size of the vortices a . . . 119
6.5.2 Shape of the final vortex . . . 122
6.5.3 Effect of the amplitude perturbation, of the Reynolds number Re and of the Froude number F_h on the stratified merging . . . 122
6.6 Energy and enstrophy analysis . . . 128
6.6.1 Space and time evolutions . . . 128
6.6.2 Comparison with two-dimensional merging . . . 133

6.7 Conclusion 138

III Application aux fluides géophysiques et conclusion 139

7 Effet de la rotation planétaire sur l'instabilité zigzag 141
7.1 Introduction 142
7.2 Linear stability analysis 143
7.3 Discussion 149
7.4 Conclusion 150

8 Conclusion et perspectives 151

Chapitre 1

Introduction

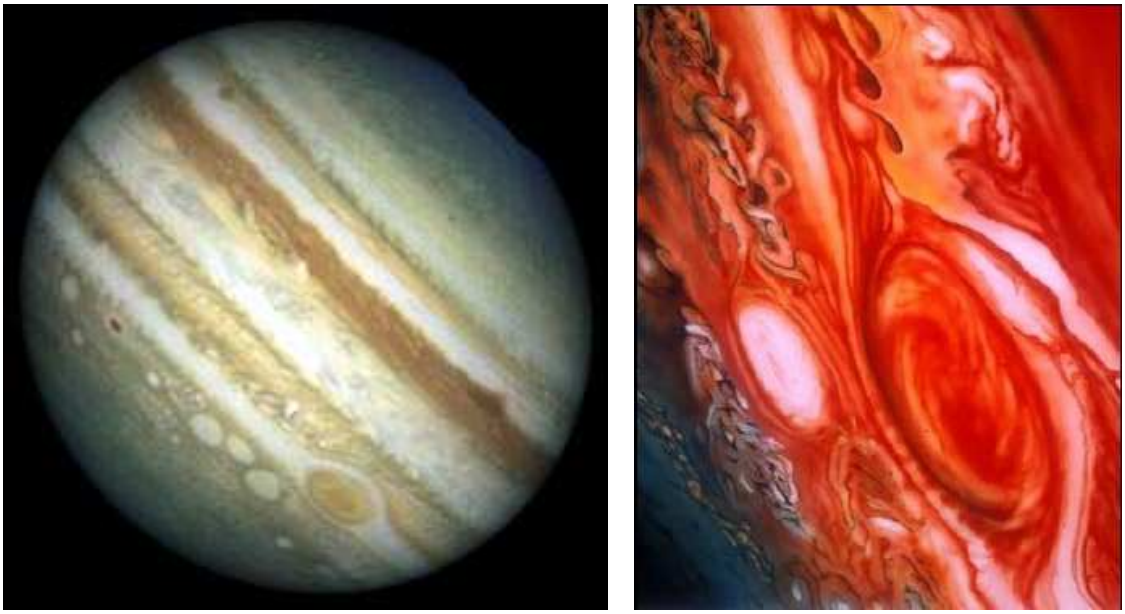
Les tourbillons dans l'univers

De l'importance des tourbillons

Les tourbillons sont observés dans l'atmosphère terrestre, dans les océans, les lacs, les rivières mais aussi dans l'atmosphère d'autres planètes comme Saturne et Jupiter... Bref dans tous les fluides (liquides ou gazeux) que l'on trouve à l'état naturel. A titre d'exemple, plus de 80 immenses structures tourbillonnaires ont été identifiées dans l'atmosphère de Jupiter, dont la plus grosse, appelée Point Rouge de Jupiter, dès 1665 (Hook, 1665). On la distingue sur la figure 1.1 comme un très gros tourbillon de couleur rouge situé près de l'équateur de Jupiter. Au sud-ouest du Point Rouge, trois tourbillons blancs appelés Ovales Blanches sont clairement identifiables. Ces structures sont gigantesques : le Point Rouge mesure 30000 km de long, et représentent une énergie considérable : le Point Rouge pourrait engloutir deux ou trois fois la Terre. Dans l'atmosphère terrestre, des structures tourbillonnaires sont observées tous les jours et sont visibles sur les images satellites du bulletin météorologique. Les anticyclones (respectivement les dépressions) sont des courants d'air qui s'enroulent autour des perturbations hautes (respectivement basses) pressions. L'image satellite de la figure 1.2 (a) montre par exemple une dépression polaire, structure tourbillonnaire d'air rendue visible par la présence de la vapeur d'eau contenue dans les nuages, au-dessus de la Mer de Barents dans la région polaire Arctique. On remarque qu'une dépression tourne dans le sens cyclonique, c'est-à-dire anti-horaire dans l'Hémisphère Nord, et donc identique au sens de rotation de la Terre qui se fait d'ouest en est. Bien que leur observation nous soit moins familière, des tourbillons peuvent aussi être identifés dans l'océan comme sur la figure 1.2 (b) où le tourbillon est rendu visible de par la nature de l'eau qui le compose. Cette eau est de couleur plus verte que l'eau environnante, probablement en raison d'une remontée de phytoplancton engendrée par la rotation anticyclonique du tourbillon.

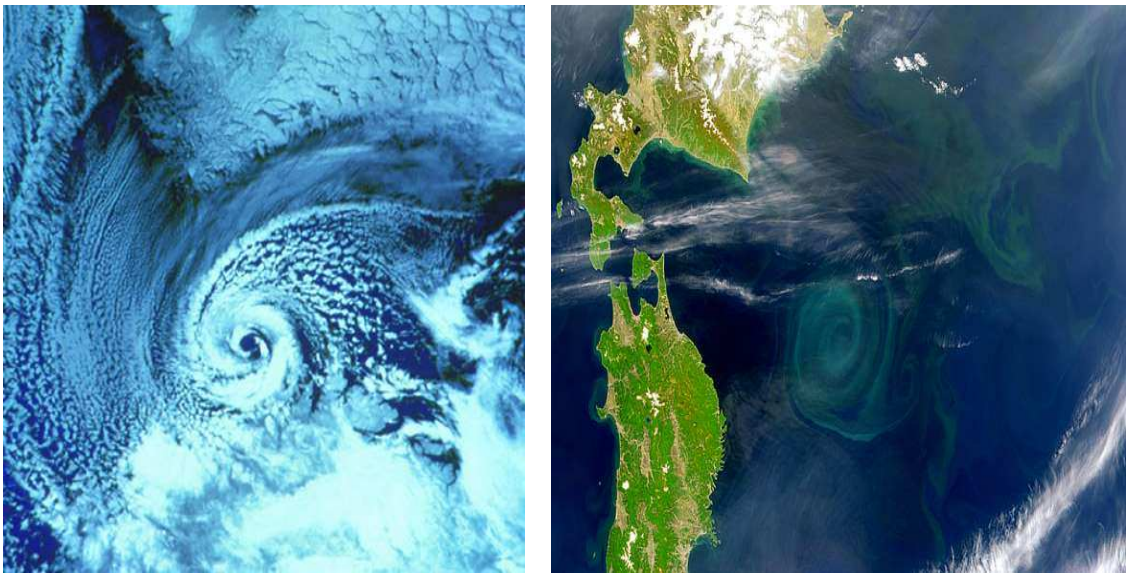
De l'importance de l'appariement tourbillonnaire

L'observation récente d'interactions entre structures tourbillonnaires de même signe, c'est-à-dire tournant dans le même sens, éveille un intérêt croissant en astrophysique comme en géophysique. Deux tourbillons de même signe peuvent s'apparier : ils tournent



(a) (b)

FIG. 1.1 – (a) Image de Jupiter montrant ses trois Ovales Blanches et son Point Rouge (en bas à droite). (b) Zoom sur le Point Rouge et une Ovale Blanche. D'après Hubble, NASA.

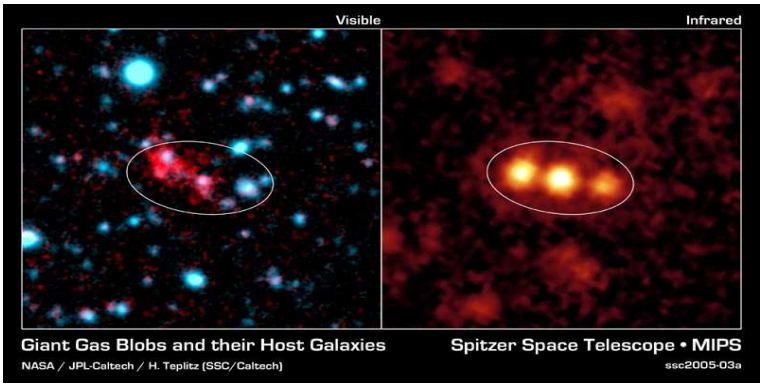


(a) (b)

FIG. 1.2 – (a) Image satellite d'une dépression polaire au-dessus de la Mer de Barents le 27 février 1987. La pointe sud du Spitsberg est visible en haut de l'image. D'après S. Businger, University of Hawaii. (b) Un tourbillon océanique au large de la côte est du Japon le 22 mai 1999. D'après Goddard Space Flight Center et ORBIMAGE, NASA. Le Nord est orienté vers le haut dans ces deux images.

l'un autour de l'autre de plus en plus vite et en se rapprochant et finissent par fusionner en un unique tourbillon plus grand. Cette dynamique a en particulier pour effet de transférer de l'énergie des petites échelles (deux petits tourbillons au départ) vers des échelles plus grandes (un grand tourbillon final). Ce processus d'appariement a été observé très récemment à deux reprises à l'échelle de galaxies (figure 1.3). Cette fusion galactique dégage un rayonnement équivalent au rayonnement de trillions (10^{12}) de soleils. Ce sont les galaxies les plus brillantes observées jusqu'ici. L'origine de cette énergie considérable, l'énergie la plus grande que l'on soit d'ailleurs capable d'évaluer à l'heure actuelle, est encore inexpliquée mais son existence nourrit l'hypothèse d'un rôle majeur de l'appariement tourbillonnaire dans la dynamique des galaxies. L'étude de ce phénomène pourrait nous permettre de mieux comprendre comment les galaxies se forment, et en particulier comment notre galaxie, La Voie Lactée, s'est formée.

(a)



(b)

FIG. 1.3 – (a) Deux galaxies spirales connues sous le nom de galaxies "antennes" en train de s'apparier. Lors de l'appariement de galaxies, les trous noirs qui sont en leur centre interagissent et s'apparient. Les contours vert à gauche correspondent aux limites de l'image zoomée à droite. D'après Hubble, Space Telescope Science Institute et NASA. (b) Trois galaxies en train de s'apparier le 11 janvier 2005. Ces galaxies sont entourées de nuages d'Hydrogène 10 fois plus gros que les galaxies elle-mêmes qui émettent une lumière équivalente à des trillions (10^{12}) de soleils. Elles sont situées à 11 billions (10^9) d'années-lumière. À gauche, image émise dans le rayonnement visible, à droite dans l'infra-rouge. D'après J. Colbert et al., Spitzer Space Telescope, NASA.

À plus petite échelle, on a observé avec surprise l'appariement des Ovales Blanches de Jupiter (entre 8000 et 12000 km de diamètre) entre 1997 et 2000. Ces Ovales Blanches s'étaient formées dans les années 30 et avaient étaient observées continuellement pendant 60 ans, sans qu'aucun changement majeur n'y soit repéré. Selon Marcus (2004*a*), la disparition de ces Ovales Blanches n'est pas un phénomène isolé mais fait partie d'un cycle climatique récurrent qui devrait pousser la plupart des tourbillons observés dans l'atmosphère de Jupiter à s'apparier dans les dix prochaines années. La fusion de ces tourbillons aurait un impact direct sur le climat de la planète : la diminution du nombre de tourbillons ralentirait considérablement le transport de chaleur de l'équateur vers les pôles. Il en résulterait un changement de température de l'ordre de $10°C$, le climat se réchauffant à l'équateur et se refroidissant aux pôles. Ce changement de température déstabiliserait alors l'atmosphère et provoquerait la formation de nouveau tourbillons, initiant ainsi un nouveau cycle climatique de 70 ans environ.

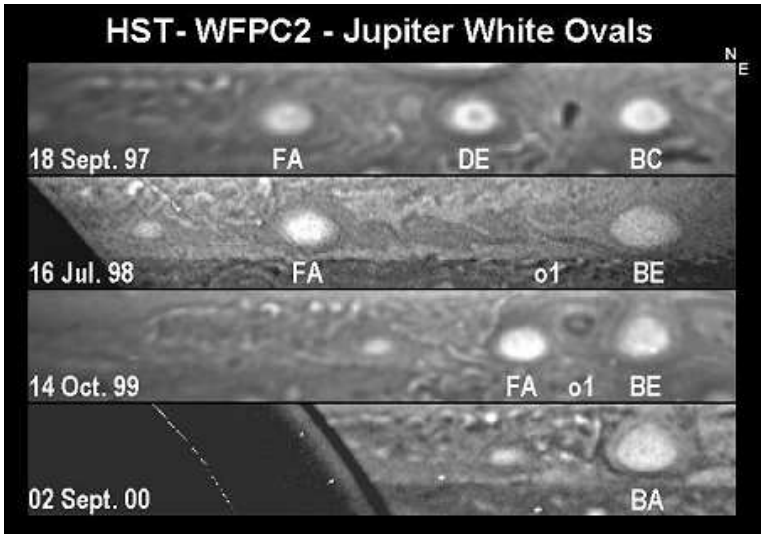


Fig. 1.4 – Quatre images des tempêtes appelées Ovales Blanches de Jupiter prises entre septembre 1997 et septembre 2000 par le télescope Hubble. Le diamètre des Ovales Blanches varie entre 8000 km et 12000 km. Sur l'image du haut, on distingue trois Ovales Blanches. En 1998, les deux tempêtes les plus à l'est se sont appariées. En octobre 1999, les dernières images montrent que les deux Ovales Blanches restantes se rapprochent et s'apparient. D'après le Space Telescope Science Institute of Baltimore, NASA, ESA.

Mais Jupiter n'est pas la seule planète dont l'atmosphère est le théâtre de tels phénomènes : la sonde Cassini, trois mois avant son arrivée sur Saturne, en approchant à 30 millions de kilomètres de cette planète, a mis en évidence un appariement entre deux tempêtes tourbillonnaires de 1000 km de diamètre entre février et mars 2004 (figure 1.5). Un mouvement vers l'ouest de ces deux tempêtes, relatif à la rotation de Saturne, a été observé pendant un mois avant leur appariement. La figure 1.5 ne permet pas de se rendre compte de se mouvement relatif. Elle permet par contre de voir les deux tempêtes se rapprocher progressivement avant de fusionner. Une photo prise deux mois après cet appariement (1.6) et montrant l'existence de deux autres paires de tempêtes tourbillonnaires confirme que ce

phénomène n'est pas exceptionnel et qu'il semble au contraire être un des processus élémentaires de la dynamique de cette atmosphère.
Sur Terre, on observe aussi des paires de structures tourbillonnaires co-rotatives comme en témoigne la figure 1.7 qui représente une paire de tornades traversant l'Oklahoma et le Kansas le 3 mai 1999. Les tornades sont des tourbillons de petite dimension mais très intenses et en contact avec le sol. Une des tornades était classifiée F-5, classe répertoriant les tornades les plus puissantes. Aucune mesure directe de vitesse n'est réalisable sur une telle tornade mais on estime que le vent autour d'elle peut atteindre 500 km/h. C'est parce que de telles tornades sont bien sûr meurtrières qu'il paraît essentiel d'essayer de comprendre leur formation et leur dynamique. Bien que l'apparition de telles structures atmosphériques ne se fasse généralement pas par paire, il n'est pas exceptionnel de voir des interactions entre tourbillons co-rotatifs comme en atteste la figure 1.8 qui présente un couple de typhons au sud du Japon et quatre cyclones au large de Madagascar. Les cyclones sont des tourbillons très intenses d'une centaine de kilomètres de diamètre qui naissent en général près de l'équateur. Le terme typhon est d'origine chinoise et désigne les cyclones du nord-ouest du Pacifique dont les vents dépassent $100km/h$. Des appariements de cyclones ont aussi été observés, en particulier au-dessus de l'océan pacifique (Prieto *et al.*, 2002).

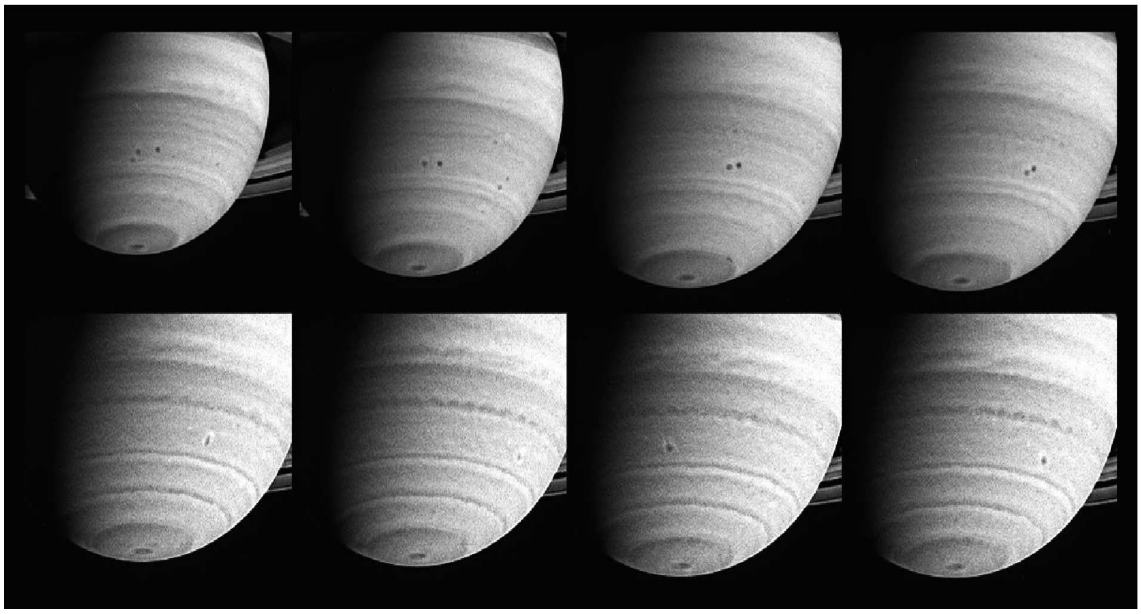


Fig. 1.5 – Appariement de deux tempêtes d'environ 1000 km de diamètre dans l'atmosphère de l'hémisphère sud de Saturne. Photos prises entre le 22 février et le 22 mars 2004. Dans les quatres images du haut, les deux tempêtes s'approchent lentement avant de s'apparier. En bas, les quatre images ont été prises à quatre jours d'intervalle et montrent la rapide axisymétrisation de la structure appariée. D'après le Space Science Institute of Boulder, NASA, ESA, ISA.

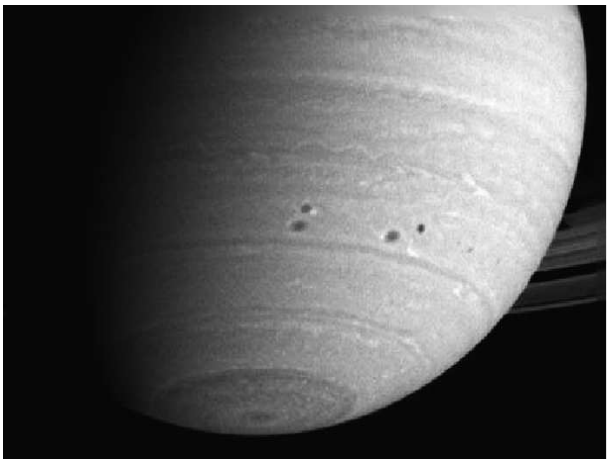


Fig. 1.6 – Deux paires de tempêtes dans l'atmosphère de Saturne repérées par des images infra-rouges prises par Cassini le 5 mai 2004 à 29.5 millions de kilomètres de Saturne. D'après le Space Science Institute of Boulder, NASA, ESA et ISA.

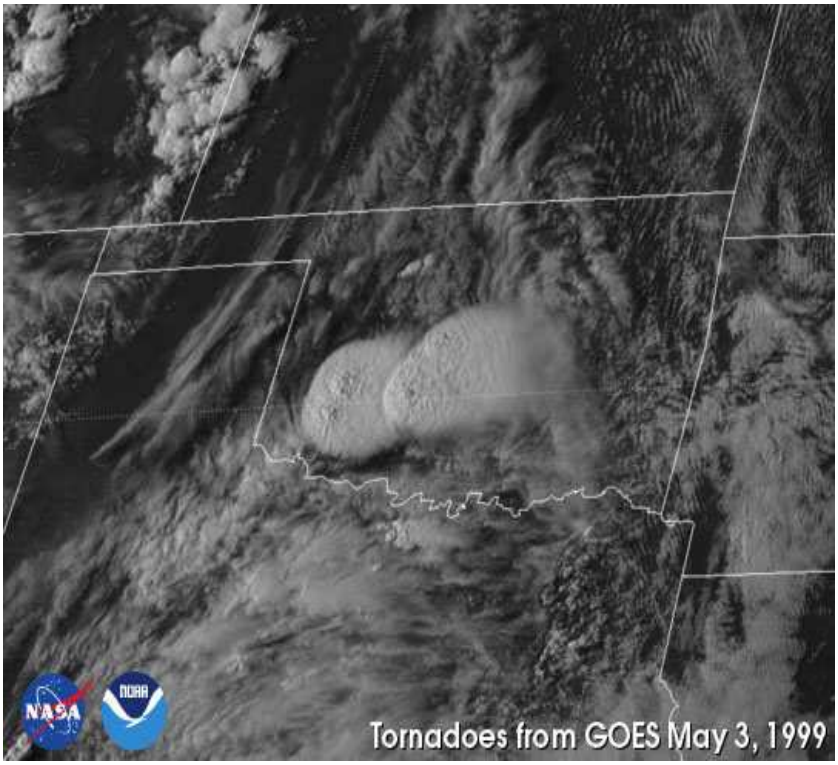
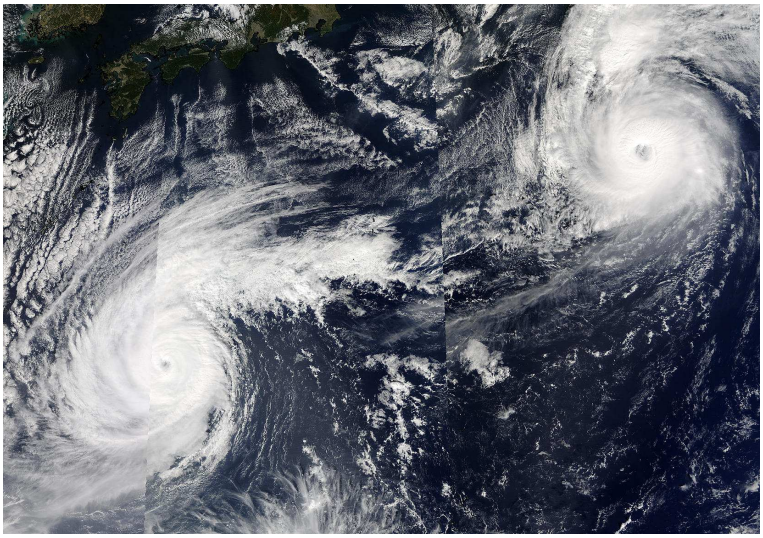
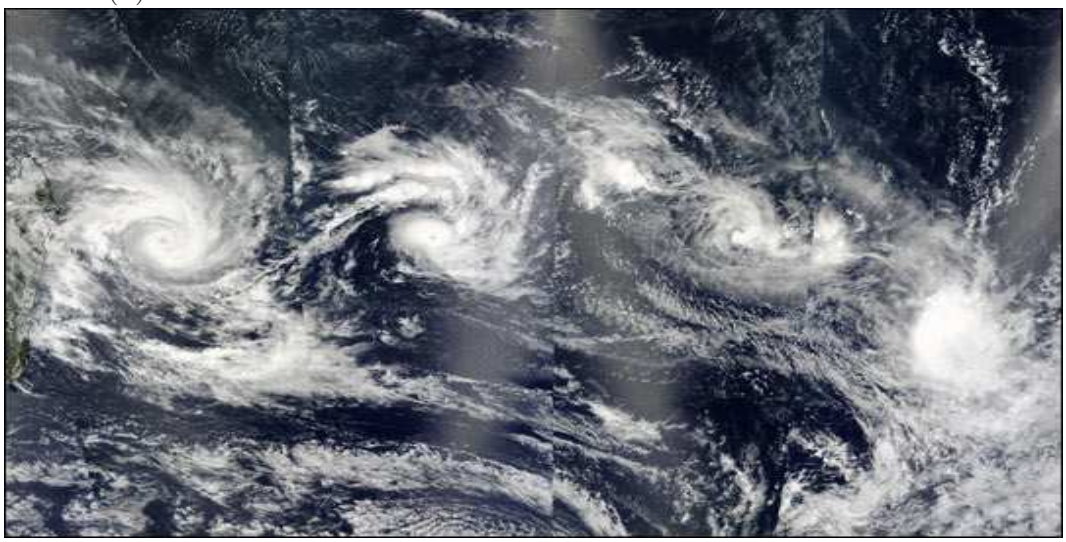


Fig. 1.7 – Paire de tornades qui a traversé l'Oklahoma et le Kansas le 3 mai 1999 faisant 40 victimes. D'après R. Simmon, Goddars, GOES, NASA.



(*a*)



(*b*)

Fig. 1.8 – (*a*) Typhons Parma (à droite, vents de 170 km/h) et Ketsana (à gauche, vents de 250 km/h) au Sud du Japon le 24 octobre 2003. (*b*) Cyclones Gerry, Hape, 18S et Fiona sur l'océan Indien à l'est de Madagascar (visible à gauche) le 12 février 2003. D'après J. Schmaltz, MODIS, satellites Terra et Aqua de la NASA.

Dynamique des fluides géophysiques

La stratification

La dynamique des océans, de l'atmosphère terrestre, des atmosphères de Saturne et de Jupiter, du plasma solaire et des poussières d'étoiles dans les disques d'accrétion est gouvernée par deux caractéristiques essentielles : la rotation planétaire et la stratification du fluide qui les compose, c'est-à-dire une variation de sa densité selon la direction de la gravité : le fluide léger se place en équilibre stable au-dessus du fluide lourd.

Sur Terre, la densité varie en général en décroissant avec l'altitude. Cette variation de densité peut être due par exemple à une variation de température ou de pression dans l'atmosphère, à une variation de température ou de salinité dans l'océan. Le rayonnement solaire étant absorbé le long de sa traversée par l'atmosphère puis par l'océan, c'est lui qui induit en particulier les gradients thermiques. Dans les océans, l'eau est par exemple plus froide et donc plus dense avec la profondeur. En présence de stratification stable, lorsqu'une particule est légèrement déplacée sur la verticale, elle se retrouve au sein d'un milieu qui n'a pas la même densité qu'elle, un milieu plus léger si la particule a été déplacée vers le haut, un milieu plus lourd si elle a été déplacée vers le bas. La poussée d'Archimède tend alors à la ramener à sa position d'équilibre et fait osciller la particule autour de sa position initiale à une fréquence N, appelée fréquence de Brunt-Väisälä, qui caractérise la stratification. La fréquence de Brunt-Väisälä est fonction de l'accélération de la gravité g, de la densité du milieu ρ et de son gradient vertical telle que $N = \sqrt{-(g/\rho)d\rho/dz}$. On défini alors le nombre de Froude F, tel que $F = U/NL_h$ qui évalue l'importance de la stratification sur la dynamique des structures considérées en fonction de leur échelle horizontale L_h et de leur vitesse caractéristique U. Plus le nombre de Froude est petit, plus la stratification joue un rôle important dans la dynamique.
Dans la configuration de stratification stable, les mouvements verticaux sont fortement inhibés. Deux types de mouvements privilégiés apparaissent alors, tous les deux visibles sur la figure 1.9 : les ondes de gravité internes et des structures tourbillonnaires, dont les échelles caractéristiques horizontales sont beaucoup plus étendues que l'échelle verticale, et qui sont donc qualifiées de quasi-bidimensionnelles (Q2D), d'axe vertical parallèle au gradient de densité.
Les ondes de gravité se propagent de proche en proche grâce à de petites oscillations de particules à la fréquence N. La période caractéristique de la dynamique de ces ondes est donc $1/N$ et peut varier de plusieurs minutes à une journée (Staquet & Sommeria, 2002*a*). Ces ondes sont en général engendrées par l'interaction des écoulements, eau ou air, avec la topographie, comme c'est le cas sur la figure 1.9, ou par le forçage du vent à la surface de l'eau. Ces ondes ont fait l'objet de nombreuses études (voir Staquet & Sommeria 2002*a* pour une revue).
On s'intéresse ici à la dynamique des tourbillons Q2D dont le mouvement est caractérisé par l'échelle de temps a/U, a étant la taille du coeur du tourbillon et U sa vitesse horizontale. Ces tourbillons au rapport d'aspect aplati sont très largement observés dans l'océan et l'atmosphère.

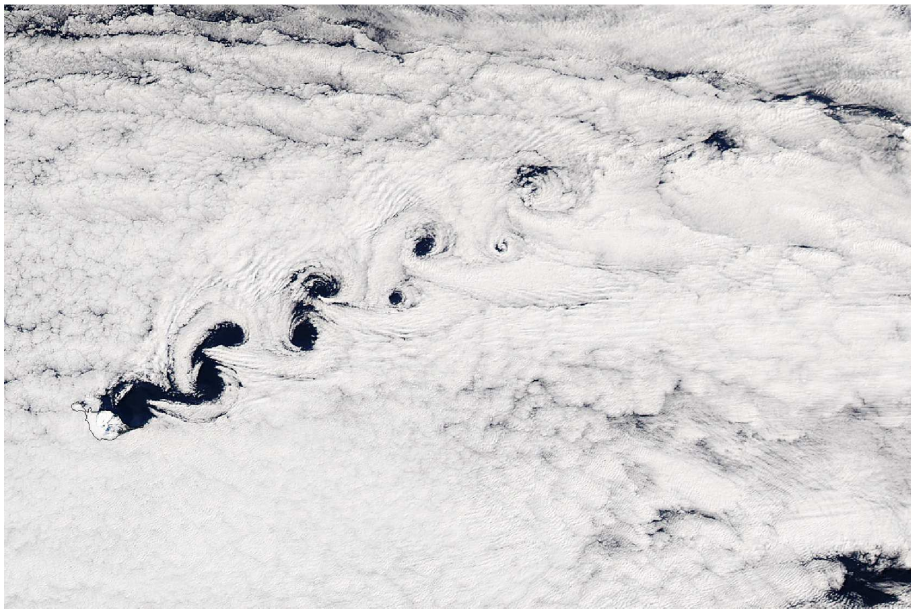


FIG. 1.9 – Allée de von Kárman (tourbillons dans les nuages) créée derrière l'île de Heard au sud de l'océan Indien le 30 septembre 2004. On peut aussi distinguer des ondes de gravités se propageant de chaque côté de l'allée tourbillonnaire. D'après J. Schmaltz, MODIS, satellite Aqua, NASA.

La rotation

La rotation planétaire locale est caractérisée par le paramètre de Coriolis f, égal à deux fois la vitesse de rotation de la Terre Ω_T projetée sur la verticale locale ; ce qui donne, à la latitude ϕ, $f = 2\Omega_T \sin\phi$. À nos latitudes, on approxime f à $f = 10^{-4}s^{-1}$. On définit alors le nombre de Rossby $Ro = U/fL_h$ qui évalue l'importance de la rotation sur la dynamique des structures considérées en fonction de leur échelle horizontale L_h et de leur vitesse caractéristique U. Plus le nombre de Rossby est petit, plus la rotation joue un rôle important dans la dynamique. Bien que la Terre tourne lentement au rythme d'une révolution par jour, l'échelle caractéristique des structures atmosphériques est si grande que le nombre de Rossby devient petit. Il est par exemple typiquement de 0.1 dans le jet stream atmosphérique et dans le Gulf stream océanique. La présence de rotation dans le milieu donne par ailleurs naissance aux ondes inertielles (analogues aux ondes de gravité en présence de stratification) dont la période caractéristique est $1/f$. Un très fort taux de rotation allonge les échelles verticales. D'après le théorème de Taylor-Proudman (voir Tritton (1988) pour plus de détails) les dérivées de la vitesse s'annulent dans la direction parallèle à l'axe de rotation et a tendance a rendre la dynamique bidimensionnelle. Bien que ce théorème ne puisse s'appliquer qu'en négligeant les non-linéarités de l'écoulement et son instationnarité, le caractère bidimensionnel des écoulements turbulents fortement tournant a été observé expérimentalement (Baroud, Plapp, She & Swinney 2003) et numériquement (voir Hopfinger, Browand & Gagne 1982 pour une revue). Notons cependant que l'approche de la turbulence d'ondes (Bellet, 2003), qui consisite à considèrer les non-linéarités comme un

ensemble d'interactions entre ondes, remet en cause la transition complète de la turbulence en rotation vers une dynamique bidimensionnelle.

Le régime quasi-géostrophique

Selon l'échelle des structures et l'échelle des temps que l'on considère et selon la nature des fluides, la rotation ou la stratification peuvent dominer la dynamique. Un fort taux de rotation a tendance à allonger les échelles verticales alors qu'une forte stratification a au contraire tendance à les réduire (voir Riley & Lelong 2000 et Cambon 2001 pour une revue). Le paramètre qui mesure l'importance relative de la rotation et de la stratification est le rapport $F/Ro = f/N$. La stratification moyenne est à peu près uniforme dans la troposphère, portion de l'atmosphère entre 0 et 10-15 km d'altitude où la plupart des phénomènes météorologiques se produisent, grâce à une décroissance approximativement linéaire de la température avec l'altitude comme le montre la figure 1.10. L'atmosphère terrestre ainsi est caractérisée par un rapport $f/N = 0.01$ aux latitudes moyennes. Si on s'intéresse à la dynamique de structures de taille inférieure à environ $500km$, le nombre de Rossby est généralement assez grand pour pouvoir négliger en première approximation la rotation de la Terre. La stratification devient alors le facteur dominant de la dynamique. Dans l'océan il existe un très fort gradient de densité dans la couche de surface d'environ $150m$ de profondeur appelée thermocline. Celle-ci est caractérisée par une fréquence de flottabilité N environ 10 fois plus élevée que dans les abysses due en particulier à l'action directe du rayonnement solaire. La thermocline est alors typiquement caractérisée par un rapport $f/N = 0.01$ alors que les océans présentent en moyenne un rapport $f/N = 0.1$. Le rôle de la rotation par rapport à la stratification est donc relativement plus important dans les océans (sauf dans la thermocline) que dans l'atmosphère et il ne peut être négligé que pour des structures plus petites que $50km$ environ.
Au-delà de $500km$ dans l'atmosphère et de $50km$ dans l'océan, la rotation ne peut pas être négligée et le régime est à la fois fortement tournant et fortement stratifié : les nombres de Froude et de Rossby sont tous les deux petits devant l'unité. On défini alors le régime quasi-géostrophique pour lequel le nombre de Froude vertical F_v (c'est-à-dire le nombre de Froude basé sur l'échelle verticale du fluide H : $F_v = U/NH$) et le nombre de Rossby Ro vérifient $F_v^2 < Ro < 1$. Notons que le régime quasi-géostrophique peut être valide à n'importe quelle échelle si cette condition est vérifiée.
En régime quasi-géostrophique, les tourbillons prennent une forme de "pancake" : leur extension verticale H est faible comparée à leur extension horizontale L tel que leur rapport d'aspect H/L soit proportionnel à f/N (Charney 1948 ; Griffiths & Linden 1981 ; Dritschel & de la Torre Juárez 1996). La figure 1.11 (b) d'un ouragan dans l'Océan Atlantique nous permet d'appréhender son rapport d'aspect très aplati. Un ouragan est un tourbillon cyclonique dont les vents ont une vitesse supérieure à $30ms^{-1}$ et situé dans l'Atlantique Nord ou dans le nord-est du Pacifique, le terme ouragan venant du nom du dieu Maya de la tempête "hunraken".
Pour des échelles horizontales supérieures à $L_R = NH_t/f$, appelé rayon de déformation de Rossby, où H_t est la hauteur totale du fluide, le rapport d'aspect des structures tourbillonnaires H/L ne peux plus être proportionnel à f/N. La profondeur totale du fluide modifie alors ce rapport d'aspect ou contraint l'extension horizontale des tourbillons. Le rayon de déformation dans la troposphère est de l'ordre de $O(1000km)$. Il est donc de l'ordre de

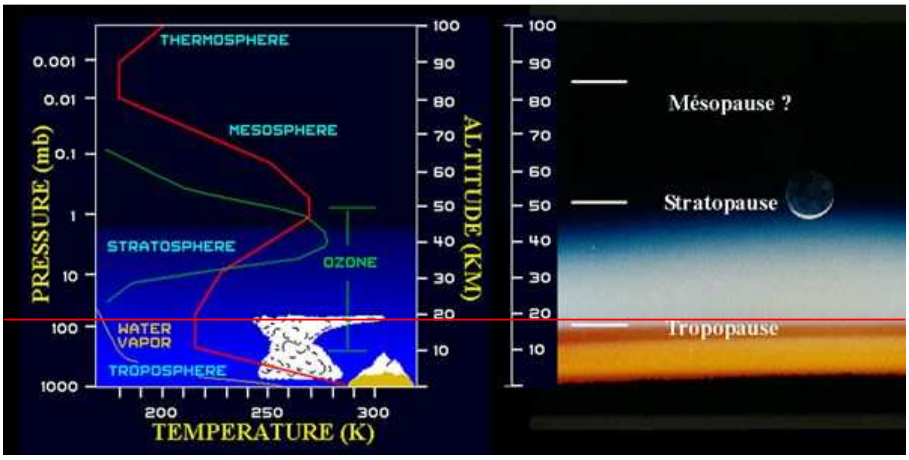


FIG. 1.10 – À gauche, schématisation de la structure de l'atmosphère. La courbe rouge représente le profil de température, la courbe verte le profil d'ozone et la courbe jaune le profil de vapeur d'eau. La stratification approximativement linéaire de la troposphère est due à la décroissance approximativement linéaire de la température entre 0 et $20km$ (sous le trait rouge horizontal). À droite, image prise par une navette spatiale à 400km d'altitude. La couleur rouge de la troposphère est due à l'absorption des plus courtes longueurs d'onde de la lumière solaire par une importante épaisseur de la troposphère contenant de la vapeur d'eau. Dans la stratosphère, le dégradé du blanc vers le bleu est lié à la variation de pression. On distingue la lune à droite.

la taille du domaine. La taille horizontale des structures tourbillonnaires n'est donc pas limitée et peut être très étendue comme en témoigne par exemple la figure 1.12. Par contre dans l'océan, la profondeur de l'océan, environ $H_T = 5km$ en moyenne, limite beaucoup la taille des structures tourbillonnaires. Le rayon de déformation est de l'ordre de $O(50km)$, beaucoup plus petit que la taille des bassins, et les tourbillons de taille supérieure ressentent donc fortement l'influence de la profondeur finie de l'océan.

Les méso-échelles

Le développement d'outils d'observations de plus en plus précis, en particulier par satellites, permet d'observer des échelles de plus en plus petites. Durant les dernières décennies, il a été démontré que les tourbillons méso-échelle jouent un rôle majeur en particulier en dynamique océanique. Tout d'abord, ces tourbillons $(10 - 300km)$ sont apparus comme étant très nombreux et ayant un impact profond sur les activités chimique et biologique des eaux océaniques (Smith *et al.*, 1996) : ils peuvent transporter les propriétés d'une eau sur de très longues distances, créant ainsi des systèmes écologiques isolés. Ils peuvent aussi augmenter la production biologique (dans le cas de tourbillons anticycloniques) grâce à une remontée de nutriments dans la couche photique, c'est-à-dire la couche éclairée par le rayonnement du soleil et qui permet donc de générer de la production primaire de phytoplancton par photosynthèse (Rodriguez *et al.* 2001 ; Falkowski *et al.* 1991 ; McGillicuddy *et al.* 1998 ; Levy, Klein & Treguier 2001).

(a) (b)

FIG. 1.11 – Ouragan Erin (a) vue de dessus à l'est des Bermudes le 12 septembre 2001 ; (b) vue de côté le 9 septembre 2001. La côte nord-est de l'Amérique est visible. D'après J. Descloitres, MODIS et Goddard Space Flight Center et ORBIMAGE, NASA.

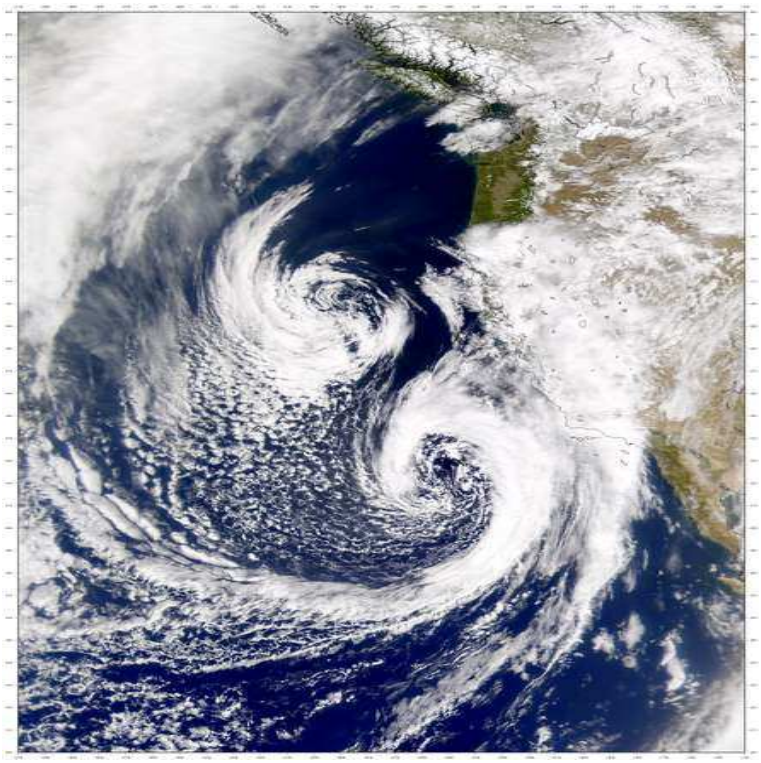


FIG. 1.12 – Paire de dépressions atmosphériques co-rotatives de plusieurs centaines de km de rayon au large de la côte West des États-Unis. D'après NASA, Visible Earth, SeaWifs.

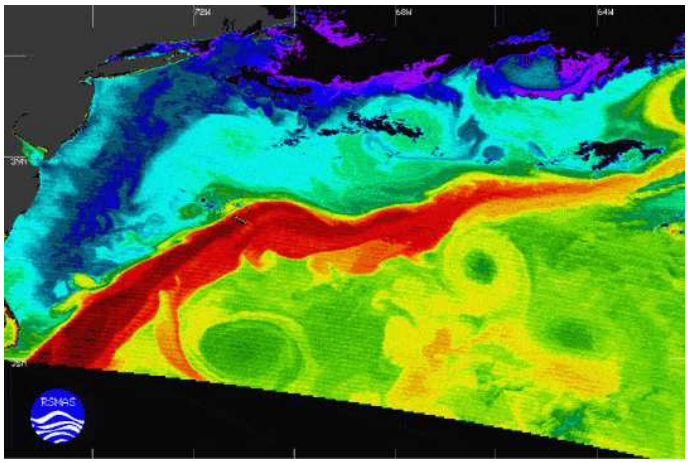


FIG. 1.13 – Température de l'eau de surface déduite de mesures infra-rouge MODIS sur la côte Est des États-Unis (visible en haut de l'image) le 8 mai 2000. La température croît du violet au rouge de 7 à 22°C. Au nord du Golf Stream se détachent des tourbillons cycloniques chauds, au sud des tourbillons anti-cycloniques froids. D'après Evans, Minnett et al., Université de Miami, NASA, Visible Earth.

Les tourbillons méso-échelle dans l'océan ont été par exemple largement observés dans le Gulf Stream (figure 1.13), dans la Mer Méditerranée (Richardson, 1993), dans la Mer Hawaiienne (Chavanne *et al.*, 2002) ou dans la Baie de Biscay (Pingree & Le Cann, 1992). Ils présentent généralement un rayon d'environ $a = 150km$, une circulation de $\Gamma = 1km^2s^{-1}$ et une profondeur d'environ $H = 1000m$. Nous approximons le paramètre de Coriolis à $f = 10^{-4}s^{-1}$ aux latitudes moyennes et la fréquence de Brunt-Väisälä à $N = 10^{-3}s^{-1}$. Ils sont donc caractérisés par un nombre de Rossby et un nombre de Froude typiquement de l'ordre de $Ro = 0.15$ et $Fh = 0.015$, ce qui les place dans le régime de la dynamique quasi-géostrophique. Les Meddies (Mediterranean Eddies) par exemple ont été découverts il y a une vingtaine d'année par Dowell & Rossby (1978). Ce sont des tourbillons anticyloniques d'eau de la Méditerrannée avec une forme de lentille qui sont éjectés vers l'océan Atlantique au niveau du détroit de Gibraltar à $1000m$ de profondeur et qui "vivent" plusieurs années. Ils sont notamment observés en nombre dans le bassin des Canaries (jusqu'à 25 tourbillons). Étant en général formés périodiquement au même endroit et possédant une longue durée de vie, on peut donc s'attendre à des interactions fortes entre ces tourbillons.

Munk, Armi, Fischer & Zacharianen (2000) ont récemment mis en évidence l'existence de tourbillons plus petits (méso ou sous-méso-échelle) appelés spirales et présentant un rayon inférieur à 25km (figures 1.14, 1.15). Ces tourbillons se sont avérés extrêmement nombreux et présents à travers tout le globe terrestre. Leur dynamique est encore très mal connue. Quelques études locales détaillée ont été menées sur ces tourbillons, notamment en Mer Ligure (entre la Corse et l'Italie) (Marullo, Salusti & Viola, 1985) et au sud de la Baie de Californie (DiGiacomo & Holt, 2001). Dans ce derniers cas, ces tourbillons ont un rayon d'environ $a = 5km$ (figure 1.16), et une profondeur d'environ $H = 150m$. Ils sont localisés

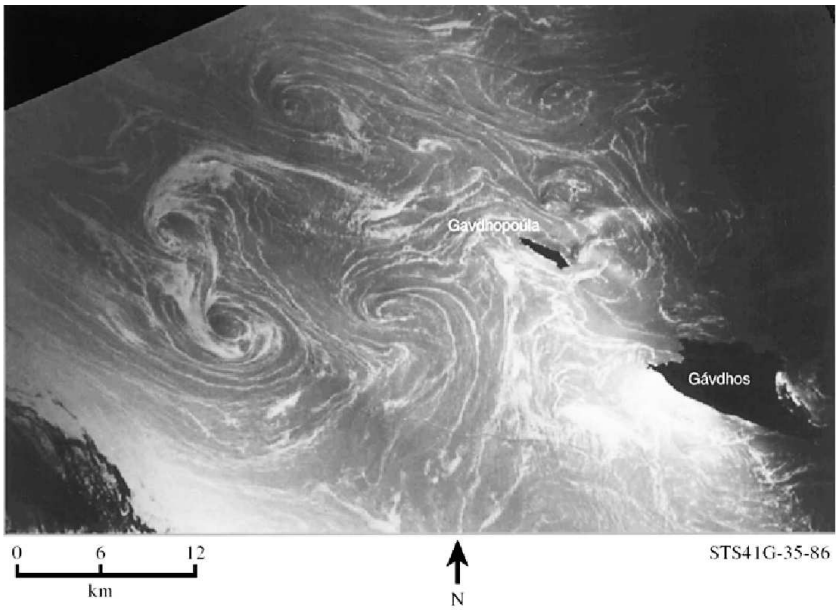


FIG. 1.14 – Mer Méditerranée au sud de la Crête. Une paire de spirales interconnectées se distingue en particulier à gauche. On distingue clairement le point de stagnation entre ces deux tourbillons. Les images ont été prises par des navettes volant entre 200 et 400km d'altitude et la visualisation des spirales est rendue possible par la réflexion des rayons du soleil. D'après Munk *et al.* (2000).

en surface c'est-à-dire dans la thermocline où la stratification est approximativement $N \approx 10^{-2}s^{-1}$. Les nombres de Rossby et de Froude qui leur sont associés sont donc $Ro \approx 2$ et $F_h \approx 0.02$ et ces tourbillons sortent du cadre de l'approximation quasi-géostrophique puisque la rotation planétaire joue ici un rôle moindre. Du fait de leur petite taille ($a \ll L_R$), leur extension verticale n'est pas limitée par la profondeur de l'océan. Peu d'observations existent à ces petites échelles à cause de la résolution élevée nécessaire. Cependant, les observations de DiGiacomo & Holt (2001) répertorient que 75% des tourbillons observés ont un rayon plus petit que 5km. En conséquence, on peut penser que le rôle joué par ces petites structures peut être considérable en terme de transfert global d'énergie dans l'océan. Par ailleurs ces tourbillons ont une durée de vie suffisamment grande, environ deux semaines, pour leur permettre d'interagir entre eux. De plus, ils ont été observés en nombre dans des zones géographiques peu étendues et peuvent donc se situer à faible distance les uns des autres, exacerbant leur influence réciproque. Les interactions sont presque exclusivement des interactions entre tourbillons de même signe dans le cas de DiGiacomo & Holt (2001) puisque 94% des tourbillons observés sont cycloniques. Ce déséquilibre entre cyclones et anticyclones n'est pas exceptionnel. Klein, Hua & Carton (2003) ont en particulier montré qu'une brisure de la symétrie cyclone-anticyclone favorise dans le cas de tourbillons méso-échelle l'émergence de structures cycloniques. Les interactions entre tourbillons de même signe, pouvant donner lieu à des appariements, semblent donc être privilégiées.

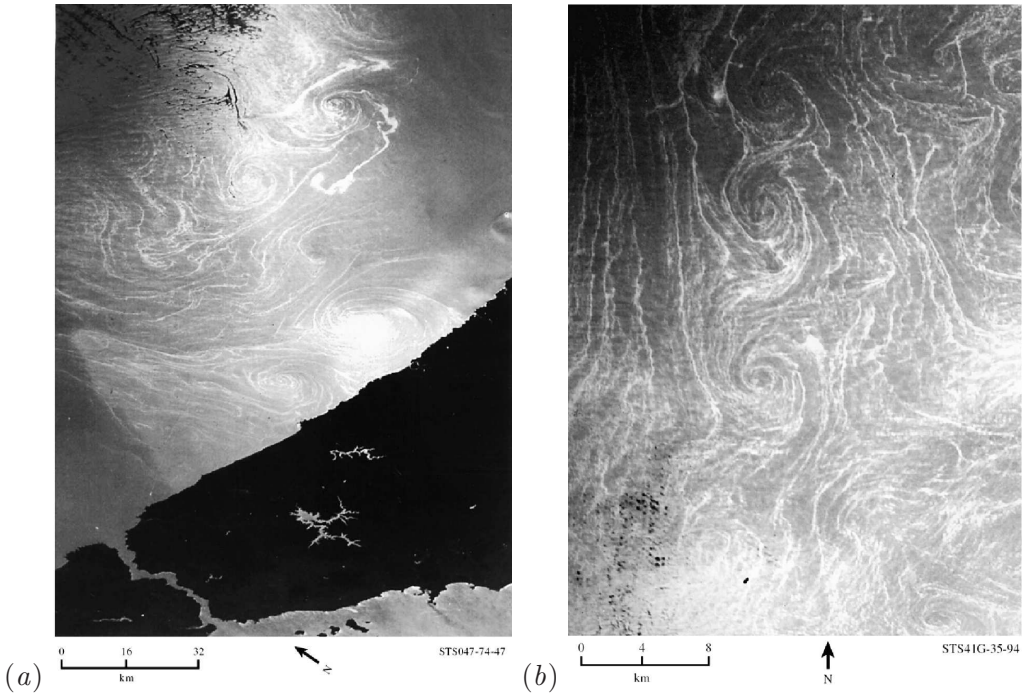


Fig. 1.15 – (a) Spirales dans la Mer Noire au large d'Istanbul le 18 septembre 1992. Une première paire à $20km$ de la côte, une deuxième paire à $50km$. (b) Quatre spirales interconnectées en Mer Méditerranée au large de l'Egypte le 7 octobre 1984. D'après Munk *et al.* (2000).

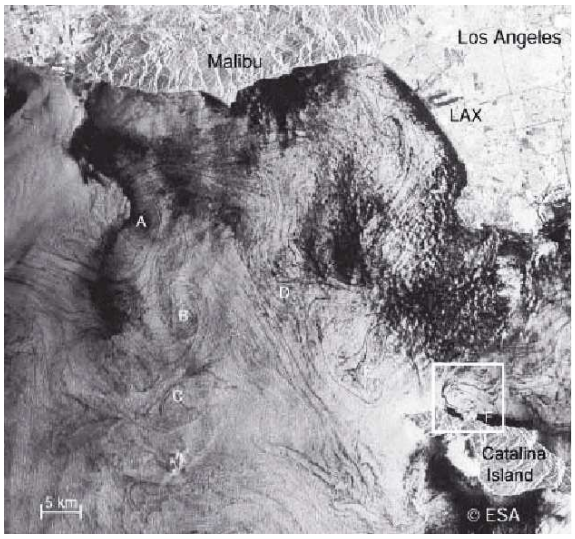


Fig. 1.16 – Petits tourbillons côtiers dans la Baie de Santa Monica en Californie le 19 décembre 1994. Les tourbillons A et B sont les plus gros (rayon de 8km environ), les tourbillons C, D, E et F sont plus petits (rayon de 3 km environ). D'après ERS-1 SAR, DiGiacomo & Holt (2001).

Effet de la stratification : une structure en couches

On s'intéresse dans l'essentiel de cette thèse à des structures de petite taille ($< 500km$ dans l'atmosphère et $< 50km$ dans l'océan) telles que le nombre de Froude qui leur est associé soit petit ($F < 1$) et que le nombre de Rossby soit grand ($Ro > 1$). La rotation de la Terre est ainsi négligeable en première approximation et la stratification est la caractéristique essentielle du milieu. La dynamique de ces échelles n'est pas stable et peut être décrite par des mouvements turbulents. En pratique, ces échelles ne sont que marginalement résolues dans les modèles de prédictions météorologiques ou les modèles de circulation globale de l'océan. En conséquence, l'effet global de ces échelles est en général paramétrisé par une viscosité artificielle très élevée appelée viscosité turbulente qui assure la stabilité numérique des modèles. Cependant, ces petites échelles jouent par exemple un rôle majeur de mélange chimique dans le processus de raréfication de l'ozone dans l'atmosphère (Holton, Haynes, McIntyre, Douglass, Rood & Pfister 1995). Dans les océans, elles contiennent la plus grosse partie de l'énergie cinétique (Wunsch & Stammer 1995).

Structure en couche des fluides géophysiques

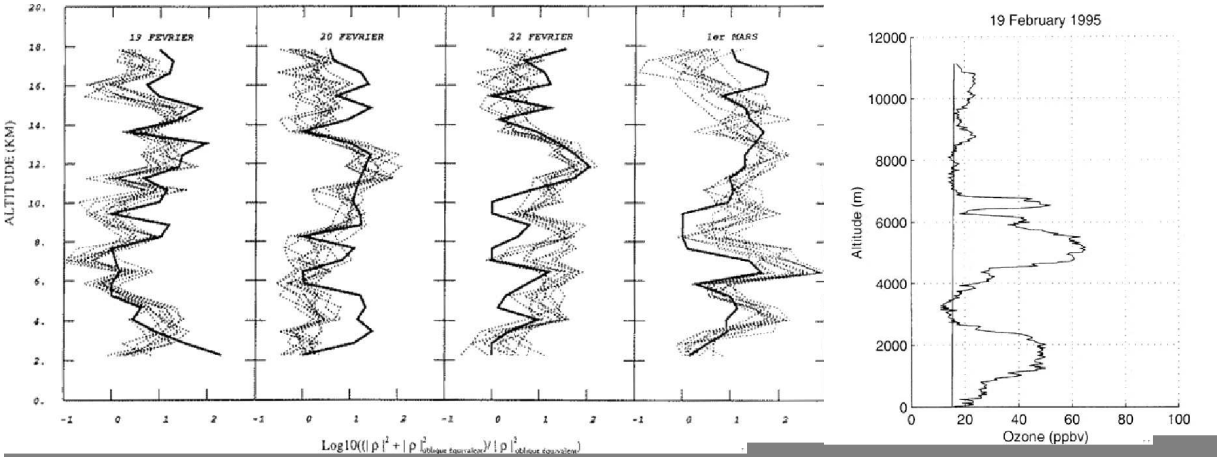
Une forte stratification inhibant les mouvements verticaux, le champ de vitesse est quasi-horizontal et la dynamique s'organise en fines couches horizontales. Les fluides géophysiques sont ainsi structurés en couches comme l'ont montré les mesures par ballon de la température de l'atmosphère effectuées pendant les campagnes MUTSI (MU radar, Temperature Sheets and Interferometry ; Dalaudier, Sidi, Crochet & Vernin 1994 ; Luce, Crochet, Dalaudier & Sidi 1995 ; Luce, Crochet & Dalaudier 2001 ; voir figure 1.17 *b*), les mesures des constituants de l'atmosphère pendant la campagne MOZAIC (Thouret, Cho, Newell, Marenco & Smit 2000, voir figure 1.17 *a*), les mesures de turbulence in-situ effectuées par hélicoptère (Muschinski & Wode, 1997), les mesures du radar planétaire NASA/GPL Goldstone (Cho *et al.*, 1996), ou encore les mesures effectuées dans l'océan (Gregg 1987 ; Woods 1968 ; Dugan 1984 ; figure 1.18) et dans les lacs (Thorpe 1977 ; Imberger & Ivey 1991).

Structure en couche de la turbulence stratifiée

De nombreuses expériences de laboratoire ont étudié diverses configurations de turbulence stratifiée et ont observé la formation de couches similaires en tractant par exemple un cylindre vertical (Park, Whitehead & Gnanadeskian 1994) ou une rangée de cylindres verticaux, appelée peigne (Fincham, Maxworthy & Spedding 1996, Holford & Linden 1999).

Ce qui est frappant dans ces expériences, c'est que le forçage est uniforme selon la verticale et qu'il induit pourtant spontanément la formation de couches (figure 1.19).

Enfin les simulations numériques de turbulence stratifiée (Riley, Metcalfe & Weissman 1981 ; Lilly 1983 ; Herring & Métais 1989 ; Riley & Lelong 2000 ; Godeferd & Staquet 2003 ; Waite & Bartello 2004 ; Praud, Fincham & Sommeria 2005) ont elles aussi fait apparaître l'émergence de ces couches (figure 1.20). La dissipation d'énergie s'effectue alors principalement par le fort cisaillement vertical qui sévit entre les couches.



(a) (b)

FIG. 1.17 – (a) Profils de température mesurés dans l'atmosphère lors de la campagne MUTSI d'après Luce, Crochet & Dalaudier (2001) laissant apparaître une succession de fines couches horizontales. (b) Mesure de la quantité d'ozone en fonction de l'altitude lors de la campagne Mozaic d'après Thouret, Cho, Newell, Marenco & Smit (2000) montrant là encore une succession de couches d'environ $2km$ d'épaisseur.

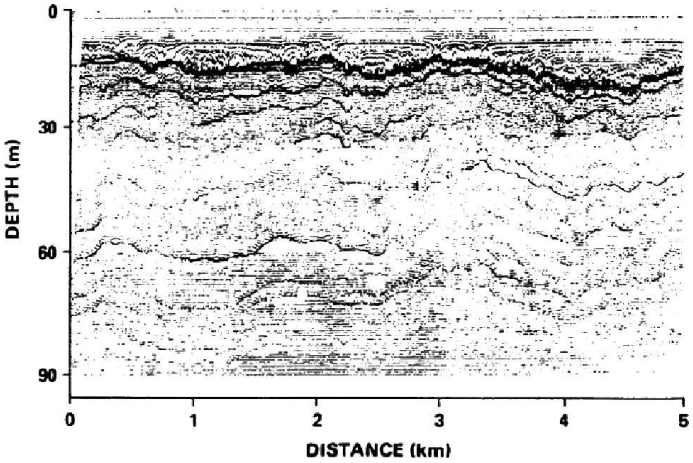
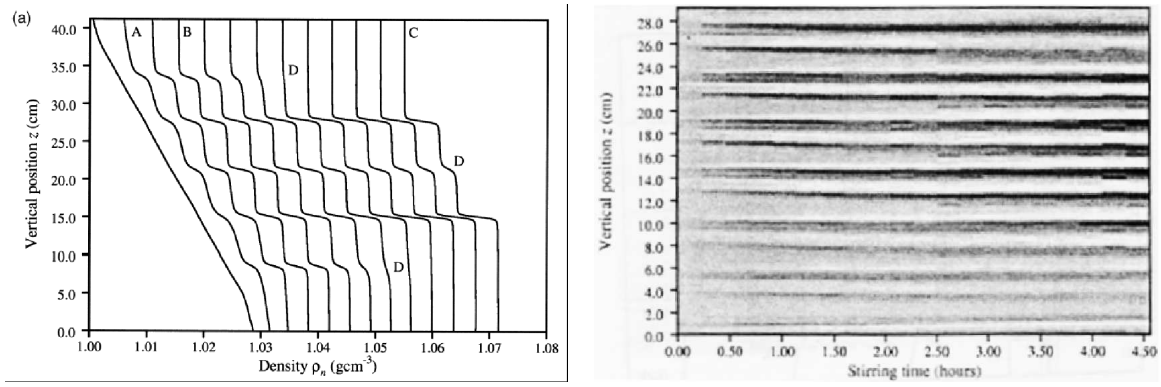
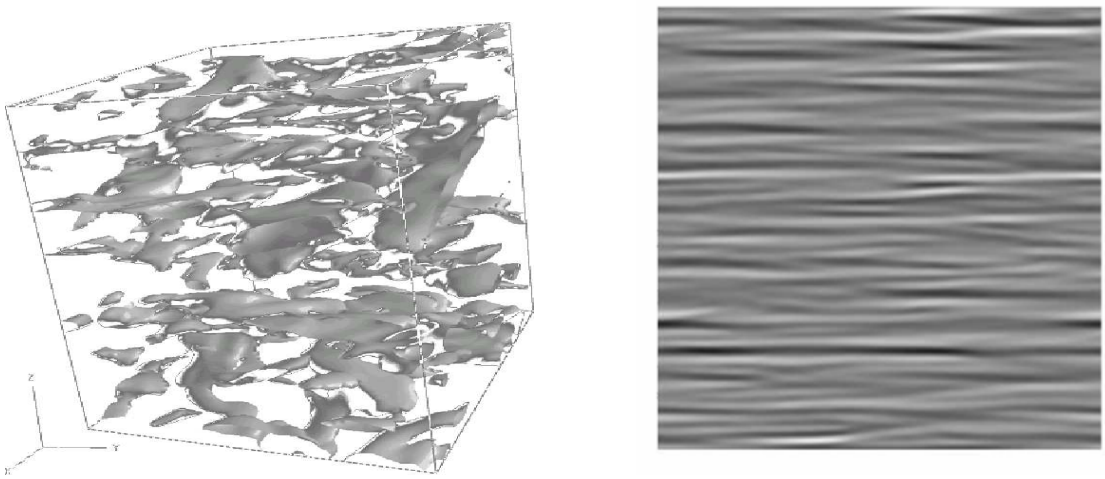


FIG. 1.18 – Gradient vertical de température mesuré dans la thermocline océanique à l'aide d'un quadrillage vertical de sondes séparées de $50cm$. Les régions foncées représentent les régions présentant un fort gradient de température. D'après Dugan (1984).



(*a*) (*b*)

FIG. 1.19 – (*a*) Profils de densité obtenus en tractant une rangée de barres verticales dans un fluide initialement linéairement stratifié. D'après Holford & Linden (1999). (*b*) Shadowgraphie obtenue en tractant une rangée de barres verticales dans un fluide initialement linéairement stratifié. D'après Holford & Linden (1998).



(*a*) (*b*)

FIG. 1.20 – (*a*) Contour (égal à 25 % du maximum) de la dérivée d'une composante de vitesse horizontale par rapport à z obtenue en turbulence stratifiée non entretenue d'après Godeferd & Staquet (2003) (*b*) Coupe verticale du champ de vorticité ω_y obtenu en turbulence stratifiée d'après Waite & Bartello (2004).

De nombreuses interrogations accompagnent l'observation de ces couches : la dynamique y est-elle 2D ou 3D ? En d'autres termes, ces couches sont-elles indépendantes ou corrélées ? Comment se forment-elles ? Comment leur épaisseur est-elle sélectionnée ?

Dynamique des couches

L'analyse d'échelles de Riley *et al.* (1981) a introduit une nouvelle approximation des équations de Navier-Stokes dans le cas d'un fluide fortement stratifié qui tient compte du fait que le champ de vitesse est quasi-horizontal. Riley *et al.* (1981) ont proposé qu'en supposant les échelles verticales et horizontales de l'écoulement très grandes comparées à l'échelle de flottabilité définie comme U/N, alors la dynamique est bidimensionnelle en première approximation. En utilisant cette approximation, Lilly (1983) et Gage & Nastrom (1986) ont interprété le spectre de l'énergie cinétique observé dans l'atmosphère à méso-échelle (Gage, 1979) par des avions de ligne entre 9 et $14km$ d'altitude, comme une manifestation de dynamique bidimensionnelle. En particulier, ils l'ont interprété comme un transfert d'énergie, appelé cascade inverse d'énergie, des petites ($\sim 1\ km$) vers les grandes échelles ($\sim 500km$) en $k_h^{-5/3}$, où k_h est le nombre d'onde horizontal (figure 1.21). Ce transfert d'énergie signifie que les petites structures ont tendance à se rassembler pour former des structures plus grandes : les petits tourbillons s'apparient pour devenir plus grands. Notons à titre indicatif que ce spectre n'est observé que pour les méso-échelles car pour des échelles supérieures à $500km$, la stratification et la rotation terrestres sont toutes deux importantes et on atteint le régime quasi-géostrophique où Charney (1971) a montré que la dynamiques est analogue à la dynamique 2D. Un spectre en k_h^{-3} est alors observé correspondant à un transfert d'énstrophie des grandes vers les petites échelles.

Lindborg (1999) a au contraire montré que la cascade d'énergie aux méso-échelles va des grandes vers les petites échelles en calculant des moments statistiques d'ordre élevé à partir de mesures faites dans l'atmosphère. Il a aussi montré que l'épaisseur des couches dépend de N, c'est-à-dire du niveau de la stratification. Cette dépendance en N a aussi été observée dans certaines expériences de laboratoire et simulations numériques (Park *et al.* 1994 ; Holford & Linden 1999 ; Waite & Bartello 2004 ; Lindborg 2004). Remarquons que des cas contraires où l'échelle verticale est indépendante de N et ne dépend que du nombre de Reynolds ont aussi été observés dans des expériences de décroissance de turbulence de grille par exemple (Fincham, Maxworthy & Spedding 1996 ; Bonnier, Eiff & Bonneton 2000 ; Praud, Fincham & Sommeria 2005).

Sur la verticale, Smith, Fritts & Van Zandt (1987) ont trouvé un spectre de la forme k_z^-3. Ce spectre vertical a classiquement été attribué à une cascade inverse due aux interactions d'ondes de gravité non-linéaires (voir Staquet & Sommeria (2002*a*) pour une revue). Cependant, Billant & Chomaz (2001) ont montré que les équations de Boussinesq pour un fluide non-visqueux sont auto-similaires par rapport à la variable zN/U, où z est la coordonnée verticale et U l'échelle de vitesse horizontale, et ont ainsi prédit un spectre vertical en $N^2k_z^{-3}$ pour la turbulence stratifiée, independemment de la considération d'ondes de gravité. Godeferd & Cambon (1994) ont de plus montré que des interactions de vorticité sont responsables de l'émergence de structures anisotropes dans une stratification stable, empêchant la cascade inverse de la turbulence bidimensionnelle de se produire. Ces interactions entre tourbillons transfèrent de l'énergie dans l'espace spectral vers les

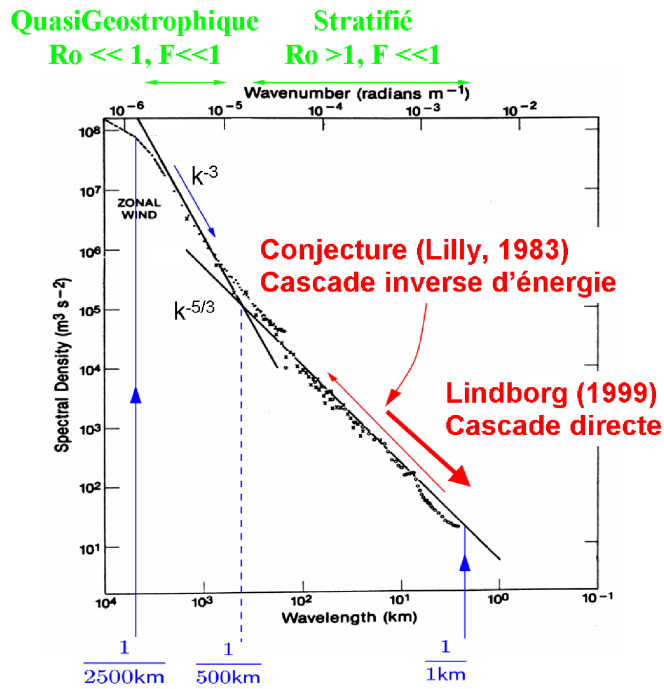


FIG. 1.21 – Spectres de vitesses zonale et méridienne dans la haute atmosphère (entre 9 et $14km$) en fonction du nombre d'onde horizontal. Mesures collectées par des avions de ligne Boeing 747 en service normal. D'après Gage & Nastrom (1986).

nombres d'onde verticaux, correspondant à l'émergence d'une structure en couches.

Billant & Chomaz (2001) et Lindborg (2002) ont proposé une dynamique 3D pour les fluides stratifiés reposant sur le fait que l'échelle verticale caractéristique sélectionnée par le fluide est précisément l'échelle de flottabilité U/N, résultat qui invalide l'hypothèse de Riley *et al.* (1981) qui avait mené à la conclusion d'une dynamique 2D.

De plus, l'existence d'une instabilité 3D agissant sur une paire de tourbillons contra-rotatifs en présence de stratification a été découverte par Billant & Chomaz (2000a). Cette instabilité, dite instabilité zigzag, décorrèle spontanément une paire de tourbillons contra-rotatifs sur la verticale (figure 1.22) pour créer des dipôles de type "pancake" dont l'échelle verticale est proportionelle à l'échelle de flottabilité (Billant & Chomaz 2000b, figure 1.23). Cette instabilité pourrait donc être le mécanisme physique responsable de la formation de couches dans un fluide stratifié. De plus, elle montre que la dynamique d'une paire de tourbillons contra-rotatifs en milieu stratifié est 3D.

Par ailleurs, une instabilité similaire en régime quasi-géostrophique, appelée instabilité "tall-column", a été découverte par Dritschel & de la Torre Juárez (1996). Cette instabilité agit sur des paires de tourbillons co-rotatifs en milieu stratifié tournant et a aussi

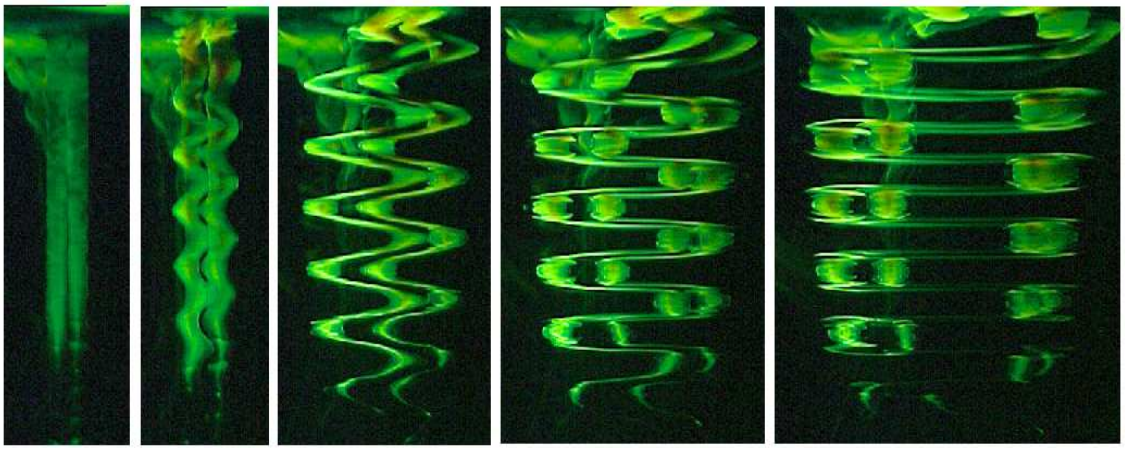


FIG. 1.22 – Développement de l'instabilité zigzag agissant sur une paire de tourbillons contra-rotatifs verticaux dans un fluide fortement stratifié. Les tourbillons sont visualisés par de la fluorescéine. D'après Billant & Chomaz (2000*a*).

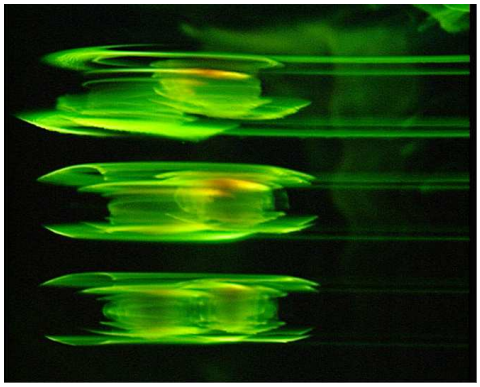


FIG. 1.23 – Zoom des dipôles "pancakes" obtenus à un stade avancé de développement de l'instabilité zigzag agissant sur deux tourbillons contra-rotatifs en milieu fortement stratifié. Les tourbillons sont visualisés par de la fluorescéine. On observe que les tourbillons sont découpés sur la verticale par l'instabilité zigzag. D'après Billant & Chomaz (2000*a*).

pour effet de décorréler l'écoulement sur la verticale en sélectionnant une échelle verticale proportionnelle à $L_h f/N$, où L_h est l'échelle horizontale caractéristique de l'écoulement.

Présentation du manuscript

Dans le but de savoir si l'instabilité zigzag est un mécanisme générique pouvant mener à la formation des couches en turbulence stratifiée, nous avons cherché à savoir si elle affecte une paire de tourbillons co-rotatifs, écoulement prototype complémentaire du dipôle contra-rotatif. Si c'est le cas, nous cherchons en particulier à savoir si l'échelle verticale sélectionnée sera là aussi proportionnelle à l'échelle de flottabilité. Par ailleurs, les tourbillons co-rotatifs étant plus souvent observés dans les fluides géophysiques, il est particulièrement intéressant d'étudier cette configuration afin d'essayer de relier la décorrélation verticale engendrée par l'instabilité zigzag et l'organisation en couches des fluides géophysiques. Enfin, le processus d'appariement de tourbillons de même signe joue un rôle clé en turbulence 2D et est responsable de la cascade d'énergie vers les grandes échelles. Si le processus d'appariement est altéré par la stratification, on pourra alors montrer que la turbulence stratifiée diffère de la turbulence 2D.
Le deuxième chapitre est une introduction à la dynamique des tourbillons et à quelques outils d'analyse qui seront utiles dans la suite du manuscript.
Le manuscript est ensuite divisé en trois parties. L'ensemble des travaux est présenté sous forme d'articles, soumis ou en préparation, indépendants et pouvant donc être lus séparément.
• La première partie est l'étude linéaire de la stabilité de deux tourbillons co-rotatifs en milieu stratifié. Cette partie est elle-même divisée en deux chapitres.
Le premier chapitre présente l'analyse numérique de stabilité linéaire d'une paire de tourbillons co-rotatifs en milieu stratifié. Ce chapitre permet en particulier d'étudier la transition entre fluide homogène et fluide stratifié.
Le second chapitre est l'étude asymptotique de l'instabilité zigzag affectant deux tourbillons co-rotatifs découverte au premier chapitre. Ce chapitre permet d'appréhender l'origine physique de cette instabilité.
• La deuxième partie est l'étude non-linéaire de l'instabilité zigzag de deux tourbillons co-rotatifs.
Le premier chapitre présente la mise en évidence expérimentale de cette instabilité et montre en particulier que l'échelle verticale sélectionnée par l'instabilité est proportionnelle à l'échelle de flottabilité.
Le deuxième chapitre étudie numériquement le processus d'appariement en milieu stratifié.
• Enfin, la troisième partie ouvre l'étude de l'instabilité vers les fluides géophysiques et conclue.
Le premier chapitre présente une analyse numérique de stabilité linéaire similaire à celle du chapitre 3 d'une paire de tourbillons co-rotatifs en milieu stratifié en présence de rotation planétaire. Cette étude permet de faire le lien entre l'instabilité "tall-column" et l'instabilité zigzag.
Le dernier chapitre conclue l'ensemble des travaux et présente quelques perspectives.

Chapitre 2

Introduction à la dynamique de tourbillons

Choix du profil du tourbillon

Le choix d'un profil gaussien de vorticité est motivé par le rôle particulier que jouent les tourbillons gaussiens en dynamique tourbillonnaire. Tout d'abord, les tourbillons gaussiens sont les "attracteurs" universels de tout profil bidimensionnel de vorticité axisymétrique. En effet, tout tourbillon axisymétrique tend par diffusion visqueuse vers un profil gaussien. Cette propriété est également vérifiée pour des écoulements constitués de plusieurs tourbillons comme l'ont montré Sipp, Jacquin & Cossu (2000) dans le cas de deux tourbillons contra-rotatifs et Le Dizès & Verga (2002) dans le cas de deux tourbillons co-rotatifs. Par ailleurs, les tourbillons gaussiens sont aussi une bonne description des tourbillons rencontrés en turbulence bidimensionnelle (Jiménez, Moffatt & Vasco 1996). Enfin, Meunier, Ehrenstein, Leweke & Rossi (2002) ont montré que ces tourbillons décrivent en bonne approximation les tourbillons expérimentaux engendrés par des flaps. Il est aussi important de souligner que les profils gaussiens ont la propriété de rester gaussiens malgré l'effet de la diffusion visqueuse. La viscosité modifie seulement le rayon du tourbillon. Pour l'ensemble de ces raisons, nous choisissons donc des tourbillons au profil de vorticité verticale ω_z gaussien avec une vitesse azimutale $\boldsymbol{u}_\theta$ correspondante :

$$\begin{aligned} \omega_z &= \frac{\Gamma}{\pi a^2}\exp(-\frac{r^2}{a^2}) \\ \boldsymbol{u}_\theta &= \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1-\exp(-\frac{r^2}{a^2})\right)\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned} \tag{2.1}$$

où a est le rayon du coeur du tourbillon, Γ sa circulation et r la distance radiale au centre du tourbillon.

Dynamique bidimensionnelle de deux tourbillons co-rotatifs

Interaction entre deux tourbillons de même signe

Au premier ordre, le deuxième tourbillon est advecté par le premier à une vitesse égale à $\Gamma/2\pi b\vec{\boldsymbol{e}}_{y1}$, où b est la distance entre les tourbillons et $\vec{\boldsymbol{e}}_{y1}$ est le vecteur unitaire

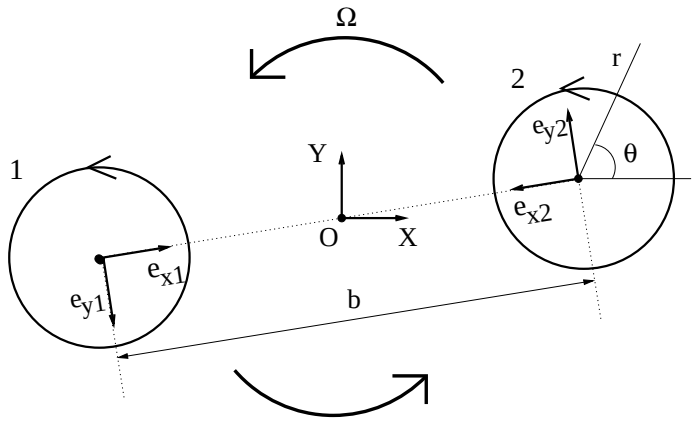


FIG. 2.1 – Schéma du système de deux tourbillons co-rotatifs tournant à la vitesse angulaire Ω.

perpendiculaire à ligne joignant les tourbillons définis sur la figure 2.1. Les deux tourbillons étudiés étant co-rotatifs et de même circulation, cette vitesse d'advection engendrée par chaque tourbillon sur son compagnon entraîne une rotation uniforme de l'ensemble des deux tourbillons à une vitesse angulaire $\Omega = \Gamma/\pi b^2$ autour du centre O entre les deux toubillons.

Le deuxième tourbillon crée de plus un champ d'étirement qui agit sur le premier tourbillon. Moore & Saffman (1975), Moffatt, Kida & Ohkitani (1994), Eloy & Le Dizès (1999), Le Dizès & Laporte (2002) ont montré qu'un tourbillon axisymétrique soumis à un champ d'étirement uniforme est déformé mais reste une solution stationnaire des équations d'Euler. L'interaction entre le champ d'étirement et la vorticité entraîne une amplification du champ d'étirement à l'intérieur du coeur du tourbillon mais la vorticité n'est pas modifiée. Dans le cas d'un tourbillon gaussien dans un référentiel non-tournant, le champ d'étirement interne est égal à 2.52 fois le champ d'étirement externe $S = \Gamma/2\pi b^2$ (Eloy & Le Dizès, 1999). Le Dizès (2000) a étendu cette analyse au cas d'un tourbillon dans un champ d'étirement tournant qui correspond au cas de deux tourbillons co-rotatifs.

Fusion bidimensionnelle de deux tourbillons

Le mouvement de deux tourbillons ponctuels est linéairement stable en deux dimensions : les tourbillons tournent sur eux-mêmes à la vitesse angulaire constante Ω. Lorsque les deux tourbillons sont de taille finie, la dynamique devient plus complexe. Les tourbillons s'adaptent d'abord rapidement l'un à l'autre, et plus précisément au champ d'étirement créé par l'autre, en devenant légèrement elliptiques (Le Dizès & Verga 2002) comme le montre la deuxième image de la figure 2.2. La paire de tourbillons co-rotatifs évolue ensuite à travers différentes phases décrites par Melander, Zabusky & McWilliams (1988), Le Dizès & Verga (2002), Meunier *et al.* (2002) et Cerretelli & Williamson (2003). Nous allons ici décrire en particulier l'interprétation physique de ces phases présentée par Meunier (2001) et Cerre-

telli & Williamson (2003). La première phase est une évolution visqueuse des tourbillons : la distance entre les deux tourbillons b reste quasi-constante et seule la taille de leur coeur a grossit sous l'effet de la viscosité. Pendant cette phase, si l'on regarde les lignes de courant dans un référentiel tournant à la même vitesse que les tourbillons (figure 2.3 a), on peut définir une région interne et une région externe de l'écoulement (figure 2.3 b) limitées par des lignes de courant passant par les points hyperboliques : les séparatrices. Lorsque le coeur des tourbillons a suffisamment grossi pour que de la vorticité atteigne les régions externes, alors de la vorticité antisymétrique ω_A, définie comme $\omega_A(x,y) = (\omega(x,y) - \omega(x,-y))/2$, est créée : on observe l'apparition de bras autour des tourbillons (figure 2.2 à $t = 750$, $t = 800$, figure 2.4 a). Cette vorticité antisymétrique consiste en une paire de dipôles (figure 2.4 b) qui poussent les tourbillons l'un vers l'autre entraînant le début de la seconde phase : l'appariement convectif. Cette phase consiste en un rapprochement des centres des tourbillons indépendant de la viscosité. À la fin de cette phase, la vorticité antisymétrique diminue (figure 2.2 à $t = 950$). Les deux filaments ou bras de vorticité qui avaient été éjectés s'enroulent autour de la structure. Cette filamentation permet de conserver le moment angulaire ($J = \int \omega r^2 dS$) de l'écoulement et est à la base de l'axisymétrisation du tourbillon final (Melander *et al.* 1987 ; Melander *et al.* 1988). L'appariement complet ne se fait qu'après une seconde étape diffusive, appelée troisième phase. La taille du coeur du tourbillon final est égal à $\sqrt{2}$ fois la taille des deux tourbillons selon les observations de Meunier & Leweke (2001). Enfin, la quatrième et dernière phase est l'évolution visqueuse du tourbillon final résultant de l'appariement (figure 2.2 à $t = 2000$). Meunier & Leweke (2001) ont défini un critère permettant de repérer le passage au merging convectif : c'est un rapport critique entre la taille des tourbillons a et la distance qui les sépare b. Tant que $a/b < (a/b)_c$, les tourbillons tournent l'un autour de l'autre à la vitesse Ω. Lorsque le rapport a/b atteint une valeur critique $(a/b)_c = 0.29$, l'appariement convectif débute.

Autres interactions de deux tourbillons de même signe

Si les deux tourbillons n'ont pas la même taille, la dynamique est plus complexe. Dritschel & Waugh (1992) ont montré par des simulations numériques de dynamique de contour que des patches de même vorticité asymétriques pouvaient fusionner totalement ou partiellement ou s'étirer totalement ou partiellement, selon les valeurs relatives des rayons des tourbillons a_1 et a_2 et la distance qui les sépare. La figure 2.5 (a) classifie la nature des interactions en fonction de la valeur a_2/a_1 et de b/a_1, a_1 étant le tourbillon le plus grand des deux. La figure 2.5 (b) présente deux exemples d'interactions partielles. En haut, a_1/a_2 est proche de un et la distance b entre les tourbillons est grande. Le tourbillon de plus petite taille se coupe en deux : une partie fusionne et une partie se reconcentre en un tourbillon. En bas, a_1/a_2 est faible et le petit tourbillon est étiré partiellement : une partie du tourbillon s'enroule autour du gros tourbillon sans fusionner avec lui et finit par se détacher du petit tourbillon.

Pour des raisons de simplicité, on se limitera ici à l'étude de deux tourbillons identiques.

Turbulence 2D

La présence de tourbillons cohérents dans les écoulements turbulents bidimensionnels a été mise en évidence par Mc Williams (1984). L'appariement des tourbillons de même

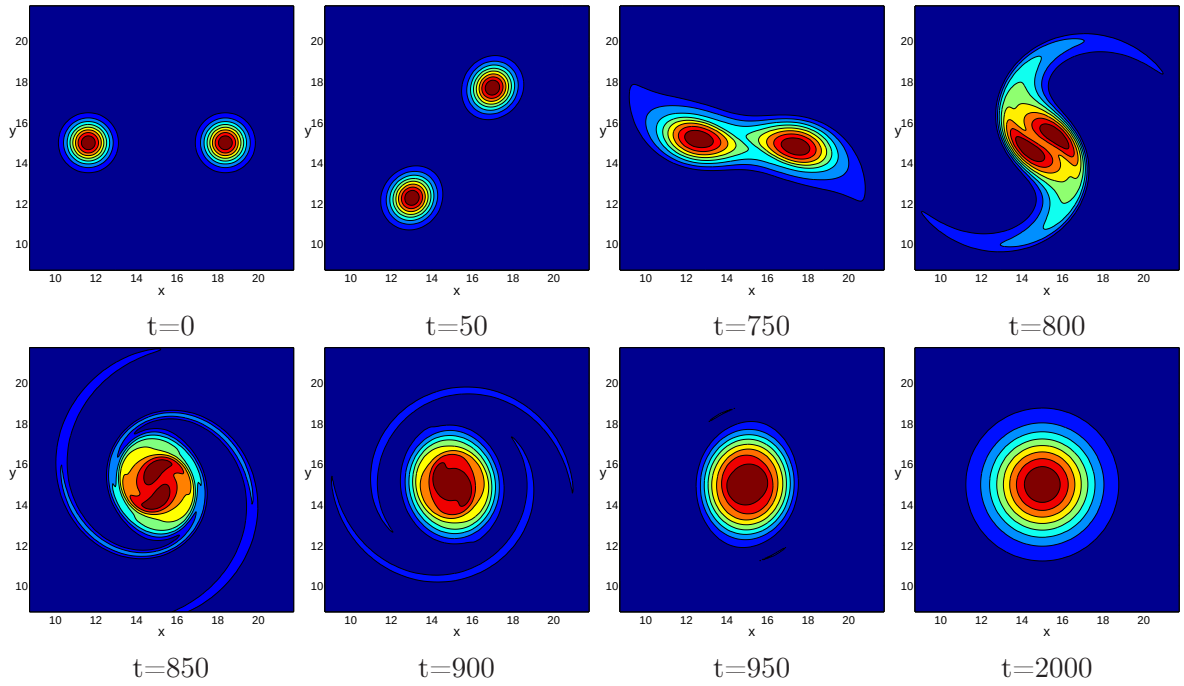
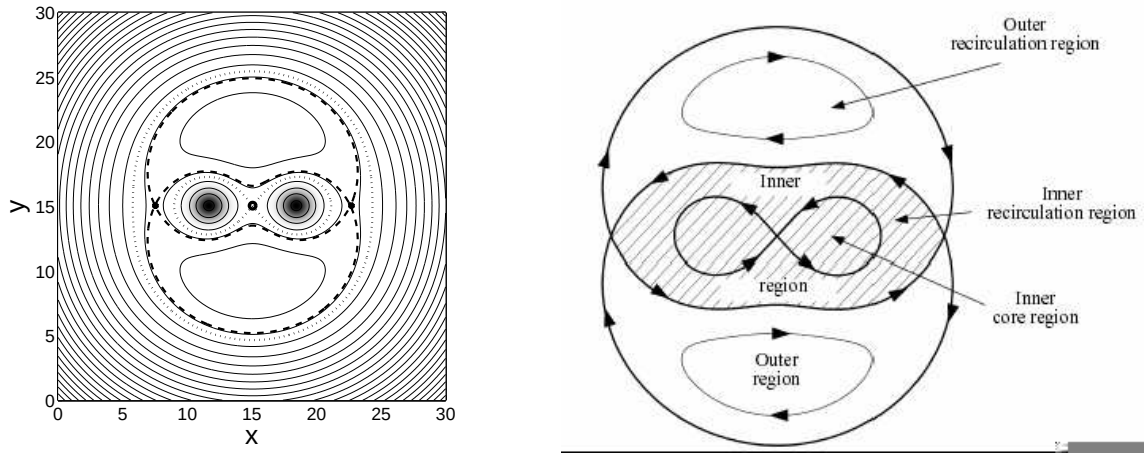
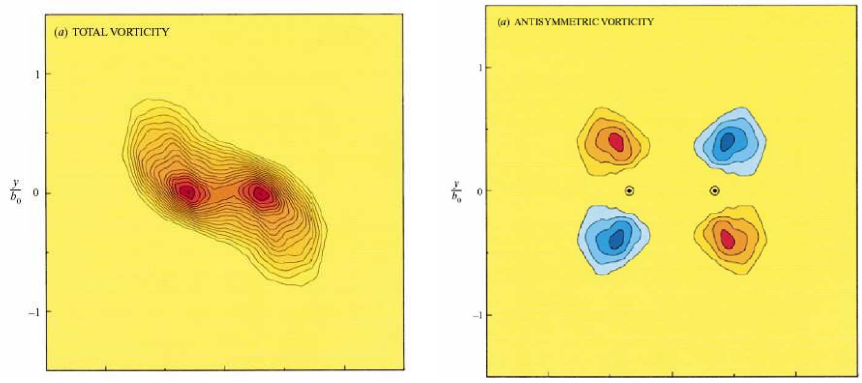


FIG. 2.2 – Contours de vorticité de deux tourbillons co-rotatifs d'une simulation numérique bidimensionnelle correspondant à $Re = 2000$. Le rapport de la taille des tourbillons sur leur distance est initialement $a/b = 0.15$. La vorticité maximale varie de 1 s^{-1} pour la première image à 0.24 s^{-1} pour la dernière image du fait de la diffusion visqueuse. Le code utilisé pour cette simulation sera décrit au chapitre 3.



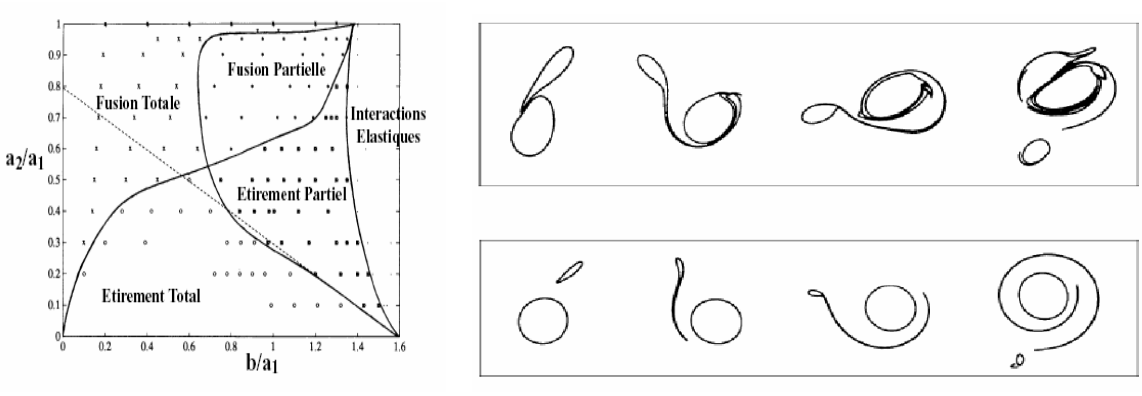
a *b*

FIG. 2.3 – (*a*) Lignes de courant (contours) et champ de vorticité (niveaux de gris) d'une paire de tourbillon dans le référentiel tournant à la même vitesse que les tourbillons. Les séparatrices sont dessinées en pointillés. Le code utilisé pour cette simulation sera décrit au chapitre 3. (*b*) Définition des régions externes et internes. D'après Cerretelli & Williamson (2003).



a *b*

FIG. 2.4 – (*a*) Vorticité totale et (*b*) vorticité antisymétrique correspondante obtenue expérimentalement par Digital Particle Image Velocimetry (DPIV) pour $Re = 530$. D'après Cerretelli & Williamson (2003).



a *b*

FIG. 2.5 – (*a*) Classification de l'évolution de deux patches de vorticité asymétriques et fonction de leur taille a_1 et a_2 et de la distance b qui les sépare. (*b*) Fusion (en haut) et étirement (en bas) partiels de deux patches de vorticité asymétriques. D'après Dritschel & Waugh (1992).

signe domine la dynamique et est à l'origine d'une cascade inverse de l'énergie des petites vers les grandes échelles. Carnavale *et al.* (1991) ont montré par une étude dimensionnelle que le nombre de tourbillons diminue alors en $n(t) = t^{-\xi}$, avec $\xi \sim 0.75$, résultat vérifié numériquement par Weiss & Williams (1993) et Bracco, Williams, Murante, Provenzale & Weiss (2000) et expérimentalement par Tabeling, Burkhart, Cardoso & Willaime (1991).

Stabilité tridimensionnelle de tourbillons

La dynamique tridimensionnelle de paires de tourbillons est complexe à cause de l'apparition d'instabilités tridimensionnelles qui brisent la symétrie par translation axiale de tourbillons infinis. Le concept d'instabilité traduit la croissance exponentielle d'une perturbation au cours du temps, atteignant ensuite un état saturé sous l'influence des non-linéarités. Dans le cas de notre étude de deux tourbillons co-rotatifs en milieu stratifié, nous verrons par ailleurs que les effets de la rotation et de la stratification modifient la structure des tourbillons et leur stabilité (Cambon, 2001).

Analyse de stabilité linéaire d'un tourbillon. Ondes de Kelvin.

Dès 1880, Kelvin analyse la stabilité linéaire d'un écoulement de base $\boldsymbol{u}_b$ en lui ajoutant une petite perturbation $\boldsymbol{u}_p$. Il s'agit de voir si l'écoulement tend à revenir vers l'écoulement de base malgré l'effet de la perturbation auquel cas il est stable, ou au contraire à s'en éloigner auquel cas il est instable. La perturbation étant supposée très petite, on linéarise les équations de Navier-Stokes qui régissent la dynamique de cet écoulement autour de l'écoulement de base. Si l'on suppose l'écoulement de base invariant par translation selon la direction z et invariant par rotation d'angle θ, la perturbation peut être décomposée sur une famille de solutions orthogonales appelées modes de Kelvin :

$$\boldsymbol{u}_p = \tilde{\boldsymbol{u}}(r) \exp^{i(kz+m\theta-\omega t)} \tag{2.2}$$

où k est le nombre d'onde axial, m le nombre d'onde azimutal, ω la valeur propre de l'opérateur d'évolution temporel du système et $\tilde{\boldsymbol{u}}(r)$ le vecteur propre associé.
Les conditions aux limites (Saffman, 1992) imposent que la perturbation tende vers zéro lorsque $r \to \infty$ et que $\tilde{u}_r \cos\theta - \tilde{u}_\theta \sin\theta$, $\tilde{u}_r \sin\theta + \tilde{u}_\theta \cos\theta$ et $\tilde{u}_z$ soient exprimables analytiquement quand $r \to 0$ c'est à dire que

$$\tilde{u}_r \sim \alpha r^{|m|-1} \quad \tilde{u}_\theta \sim i\alpha r^{|m|-1} \quad \tilde{u}_z \sim \beta r^{|m|} \tag{2.3}$$

où α et β sont des constantes complexes. Si m=0 alors $\alpha = 0$. Si $\Im(\omega) > 0$ le tourbillon est instable ; sinon le tourbillon n'est pas déstabilisé par des perturbations infinitésimales. Pour un tourbillon de Rankine, c'est-à-dire pour un patch uniforme de vorticité ($u_\theta = \Omega r$, $\omega = \Omega$ pour $r < a$ et $u_\theta = \Omega a^2/r$, $\omega = 0$ pour $r > a$), Saffman (1992) obtient une relation de dispersion $D(k, m, \omega)$ qui permet d'exprimer la pulsation des modes ω en fonction des nombres d'ondes axial k et azimutal m. Cette relation de dispersion est représentée figure 2.6 pour deux nombres d'onde azimutaux $m = \pm 1$. Il existe une infinité de modes de Kelvin paramétrés par k, m et le nombre de zéros du profil de vitesse radiale $\tilde{u}_r(r)$.

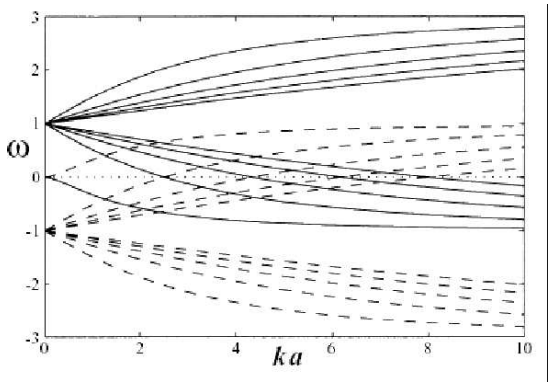


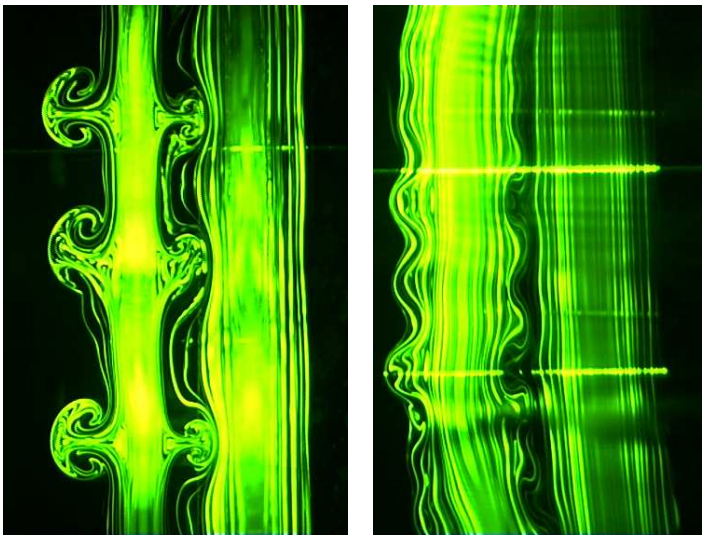
FIG. 2.6 – Relation de dispersion pour les modes de Kelvin d'un tourbillon de Rankine pour $m = 1$ (trait plein) et $m = -1$ (pointillés). Les multiples bandes correspondent à différents profils de perturbations de vitesse $\tilde{u}_\theta(r)$ comportant un nombre croissant de zéros (seules les 10 premières branches ont été représentées). D'après Eloy & Le Dizès (1999).

La nature de la perturbation dépend du nombre d'onde azimutal m. Pour $m = 0$, la perturbation imposée est axisymétrique et la forme de la déformation est qualifiée de mode "saucisson". Pour $|m| \geq 2$, on parle de mode flûté. Pour $m = 2$, les coupes dans le plan perpendiculaire à l'axe sont déformées en ellipses qui tournent avec z. Dans tous les cas précédents, $\tilde{u}_r(r) = \tilde{u}_\theta(r) = 0$ en $r = 0$ et l'axe du tourbillon n'est pas perturbé. En revanche, pour $m = \pm 1$, les modes de Kelvin sont appelés des modes de déplacement, ils déforment l'axe des tourbillons, mais pas le coeur des tourbillons qui est juste déplacé dans le plan perpendiculaire à l'axe z, et la vitesse des perturbations ne s'annule pas en $r = 0$.

Dans le cas d'un tourbillon de Rankine, la fréquence ω est toujours réelle. Le tourbillon de Rankine est donc marginalement stable par rapport à chaque mode de Kelvin. Les modes de Kelvin peuvent aussi être calculés dans le cas d'un tourbillon gaussien ou tourbillon de Lamb-Oseen, caractérisé par un profil de vorticité continu, mais le problème ne possède alors pas de solution analytique simple (Eloy & Le Dizès, 1999) et l'existence de couches critiques aux endroits où la vitesse azimutale des ondes de Kelvin égale la vitesse angulaire de rotation du tourbillon doit être prise en compte (Sipp & Jacquin 2003 ; Le Dizès & Lacaze 2005).

Stabilité centrifuge

Le premier critère de stabilité pour un tourbillon axisymétrique a été formulé en 1916 par Rayleigh (1916) et impose que le carré du moment angulaire $r^2 v_\theta^2$ doit être une fonction croissante de r, r étant la distance radiale au centre du tourbillon et v_θ la vitesse ortho-radiale. Cette condition est toujours vérifiée si la vorticité est de signe constant dans tout l'espace. On note que c'est le cas du tourbillon de Lamb-Oseen et qu'il n'est donc pas sujet à l'instabilité centrifuge. Si ce n'est pas le cas, des anneaux de vorticité apparaîssent dans les zones où la circulation, prise en valeur absolue ($|\Gamma| = 2\pi r v_\theta$), décroît. Ces anneaux de vorticité azimutale positive et négative sont caractéristiques de l'instabilité centrifuge et ont



(*a*) (*b*)

Fig. 2.7 – (*a*) Exemple d'instabilité centrifuge agissant sur un tourbillon anticyclonique (à gauche) dans une cuve tournante. Un tourbillon cyclonique (à droite), moins visible car moins chargé en fluorescéine est stable centrifuge. (*b*) Instabilité centrifuge asymétrique oscillante correspondant à m=1. D'après Billant *et al.* (2004).

été mis en évidence par Taylor (1923). Une des manifestations très connue de l'instabilité centrifuge se développe lors de l'expérience de Taylor-Couette. Une autre manifestation de cette instabilité a été observée par Billant, Colette & Chomaz (2004) lors de l'étude expérimentale d'une paire de tourbillons contra-rotatifs créés par la fermeture de deux flaps dans une cuve tournante (figure 2.7). La rotation d'ensemble contribue à rendre les tourbillons anticycloniques instables et les tourbillons cycloniques stables. Les déformations axisymétriques du tourbillon anticyclonique ne sont autres que des paires d'anneaux contra-rotatifs autour du tourbillon. Lorsqu'on augmente la stratification dans la cuve, Billant *et al.* (2004) ont observé que l'instabilité centrifuge correspondant au mode m=0 se stabilise. Le mode m=1 devient alors le plus instable et une instabilité centrifuge asymétrique oscillante apparaît alors.

Instabilité de Crow agissant sur des tourbillons contra-rotatifs en milieu homogène

En 1970, Crow a identifié une instabilité qui apparaît dans les sillages d'avion (figure 2.8) et a analysé pour la première fois la stabilité d'une paire de tourbillons. L'instabilité de Crow (Crow, 1970) est une instabilité de grande longueur d'onde qui agit sur des paires de tourbillons contra-rotatifs en milieu homogène. Le mode propre de cette instabilité est un mode de déplacement qui déplace les coeurs de tourbillons sans les déformer symétriquement par rapport au plan séparant les tourbillons à mi-distance. La longueur d'onde de cette instabilité est proportionnelle à la distance entre les deux tourbillons et l'origine physique de l'instabilité a été identifiée comme étant la résonance d'une onde

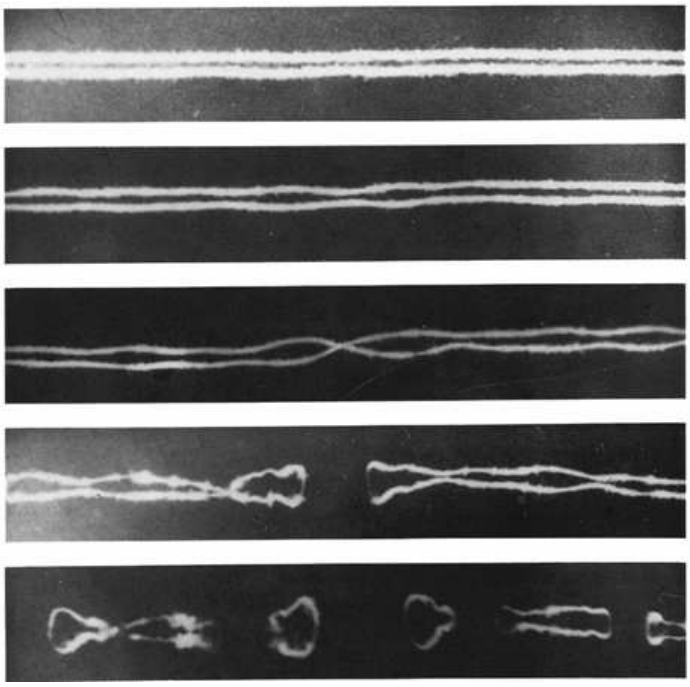
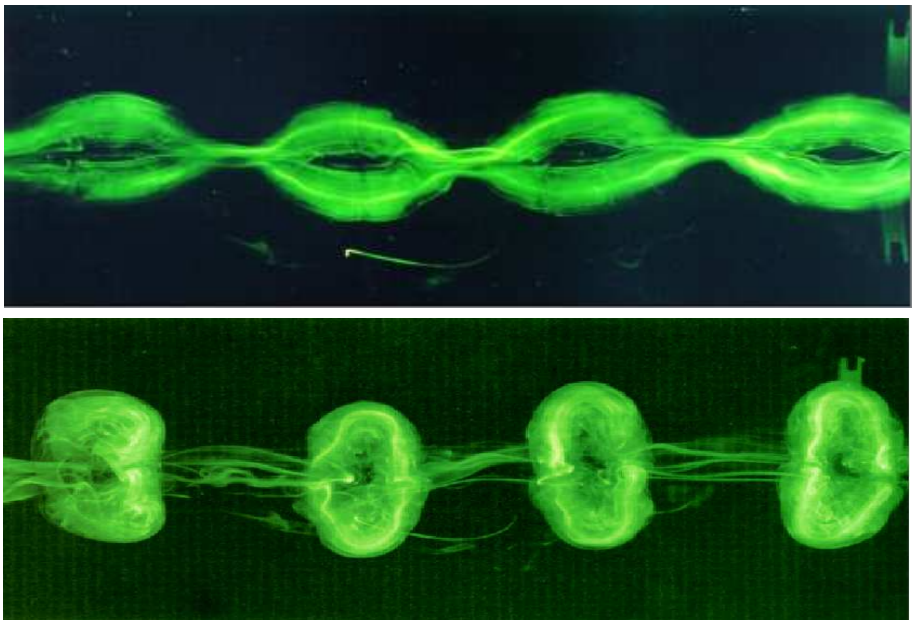


FIG. 2.8 – Instabilité de Crow se développant sur les tourbillons contra-rotatifs générés par le sillage d'un avion B-47. Les photos sont prises à intervalles de 15s après le passage de l'avion. D'après van Dyke (1982).

de Kelvin de grande longueur d'onde avec le champ d'étirement créé par le tourbillon voisin. Cette instabilité rapproche et éloigne les deux tourbillons alternativement toutes les demi-longueurs d'onde comme le montre l'expérience de Williamson & Leweke (1996) (figure 2.9 *a*). Cette expérience montre aussi que l'instabilité de Crow ne sature pas, c'est-à-dire que la croissance exponentielle de son taux de croissance ne semble pas limitée par la présence des non-linéarités. Elle montre aussi qu'à un stade avancé de son développement, l'instabilité de Crow donne naissance à des anneaux de vorticité (figure 2.9 *b*), phénomène expliqué par Klein & Majda (1993). Jimenez (1975) a montré que contrairement aux tourbillons contra-rotatifs, deux tourbillons co-rotatifs ne sont pas déstabilisés par des perturbations de grande longueur d'onde en milieu homogène.

Instabilité elliptique agissant sur des paires de tourbillons co et contra-rotatifs en milieu homogène ou faiblement stratifié

Moore & Saffman (1975) et Tsai & Widnall (1976) ont étudié la stabilité d'un tourbillon axisymétrique dans un champ d'étirement soumis à des perturbations de petite longueur d'onde. Ils ont montré à l'aide d'une analyse à échelles de temps multiples basée sur un petit taux d'étirement ϵ que chaque mode de Kelvin est solution des équations de Navier-Stokes linéarisées autour de l'écoulement de base à l'ordre zéro en ϵ. A l'ordre 1 en ϵ, ils ont montré qu'une instabilité linéaire, appelée instabilité elliptique, peut se



(a)

(b)

FIG. 2.9 – Instabilité de Crow se développant sur des tourbillons contra-rotatifs générés expérimentalement par des flaps dans une cuve de laboratoire. Les tourbillons sont visualisés par de la fluorescéine. (a) Début du développement de l'instabilité, (b) stade avancé. D'après Williamson & Leweke (1996).

développer grâce à la résonance du champ d'étirement avec deux ondes de Kelvin de même nombre d'onde axial k, de même fréquence ω et de nombres d'onde azimutaux m et $m+2$. Cette condition entraîne une croissance exponentielle de la perturbation et correspond pour les mode $m = +1$ et $m = -1$ aux points d'intersection entre les courbes en trait plein et les courbes en pointillés de la figure 2.6 (Eloy & Le Dizès, 1999). Plusieurs résonances de ce type peuvent se produire dans le cas du tourbillon de Rankine avec par exemple des ondes de Kelvin ($m = -1$, $m + 2 = +1$), ($m = -2$, $m + 2 = 0$) ou ($m = 1$, $m + 2 = 3$).
De manière plus générale, l'instabilité elliptique (voir Kerswell, 2002 pour une revue complète) est une instabilité linéaire qui rend tridimensionnel un écoulement bidimensionnel comportant des lignes de courant elliptiques (Pierrehumbert 1986 ; Bayly 1986 ; Waleffe 1990). Sa longueur d'onde est proportionnelle à la taille du coeur des tourbillons et elle est dite de courte longueur d'onde. Deux modes propres sont instables : l'un présentant la même symétrie que l'état de base dit mode symétrique, l'autre présentant la symétrie opposée dit antisymétrique. Ils correspondent à des perturbations symétriques et antisymétriques et sont concentrés autour du point de stagnation elliptique. Le mode qui apparaît spontanément dans les expériences de Leweke & Williamson (1998) est le mode antisymétrique car son taux de croissance est le plus élevé (Billant *et al.*, 1999). Cette instabilité se manifeste visuellement par la déformation du coeur des tourbillons jusqu'à son éclatement, créant ainsi généralement beaucoup de petites échelles (figure 2.11). Son taux de croissance est proportionnel au taux d'étirement de l'écoulement (Tsai & Widnall 1976 ; Waleffe 1990).

L'instabilité elliptique restant concentrée dans le coeur du tourbillon, il est possible d'analyser localement la dynamique de ce coeur (Pierrehumbert 1986 ; Bayly 1986 ; Waleffe 1990). Waleffe (1990) a retrouvé avec cette technique locale un taux de croissance proche de celui trouvé par Tsai & Widnall (1976) et a montré qu'en sommant plusieurs modes il est possible d'obtenir une perturbation localisée définie par des fonctions de Bessel, retrouvant ainsi le résultat de l'analyse par les modes de Kelvin.
Les observations de Leweke & Williamson (1998) suggéraient que cette instabilité de courte longueur d'onde ne sature pas, c'est-à-dire que la croissance exponentielle de son taux de croissance ne semble pas limitée par la présence des non-linéarités. Cependant, l'analyse faiblement non-linéaire de cette instabilité (Sipp, 2000) semble indiquer qu'elle sature mais que l'amplitude de saturation est élevée pour des valeurs du paramètre a/b grandes.

Cette instabilité a été observée expérimentalement dans le cas de deux tourbillons contra-rotatifs par exemple par Leweke & Williamson (1998) (figure 2.10) et de deux tourbillons co-rotatifs par Meunier & Leweke (2001) (figure 2.11) créés par des flaps dans une cuve de laboratoire. La présence de deux tourbillons crée une interaction entre ces tourbillons, le premier générant un champ d'étirement sur le deuxième. Les déformations internes du coeur des tourbillons se font en phase : c'est un développement coopératif de l'instabilité. Dans le cas de deux tourbillons co-rotatifs, le phénomène d'appariement est accéléré en présence de l'instabilité et le tourbillon final en résultant est plus gros qu'en l'absence de l'instabilité (quand l'instabilité est amortie par la diffusion visqueuse à petit nombre de Reynolds).

En présence de rotation et de stratification, les propriétés de l'instabilité elliptique sont modifiées (Miyazaki 1993, Godeferd, Cambon & Leblanc 2001). Dans le cas de deux tourbillons co-rotatifs, chaque tourbillon est plongé dans un champ d'étirement tournant à la vitesse Ω, vitesse de rotation de la paire de tourbillons. La résonance apparaît alors pour deux ondes de Kelvin vérifiant (k_1, m_1, ω_1)-(k_2, m_2, ω_2)=$(0, 2, 2\Omega)$. Le taux de croissance de cette instabilité dans le cas de deux tourbillons co-rotatifs gaussiens a été prédit et vérifié numériquement par Le Dizès & Laporte (2002) et vérifié expérimentalement par Meunier & Leweke (2001).
Plus généralement, Miyazaki (1993) prévoit que l'instabilité elliptique est stabilisée pour :

$$\begin{array}{lll} F > 2 & \text{et} & -2 < Ro < -2/3 \\ F < 2 & \text{et} & Ro < -2 \text{ ou } Ro > -2/3 \end{array} \tag{2.4}$$

où F est le nombre de Froude et Ro le nombre de Rossby de l'écoulement. Le taux de croissance prédit pour l'instabilité elliptique est alors pour un tourbillon de Rankine (Kerswell, 2002) :

$$\sigma = \frac{9}{16}\epsilon\frac{(3Ro+2)^2(F^2-4)}{9[F^2(Ro+1)^2-Ro^2]} \tag{2.5}$$

où ϵ est le taux d'étirement du tourbillon.

Cette instabilité a été observée par Billant & Chomaz (2000a) dans le cas de deux tourbillons contra-rotatifs créés par des flaps dans une cuve de laboratoire en milieu faiblement stratifié. Billant & Chomaz (2000a) ont aussi montré que l'instabilité elliptique (comme l'instabilité de Crow) est inhibée à forte stratification.

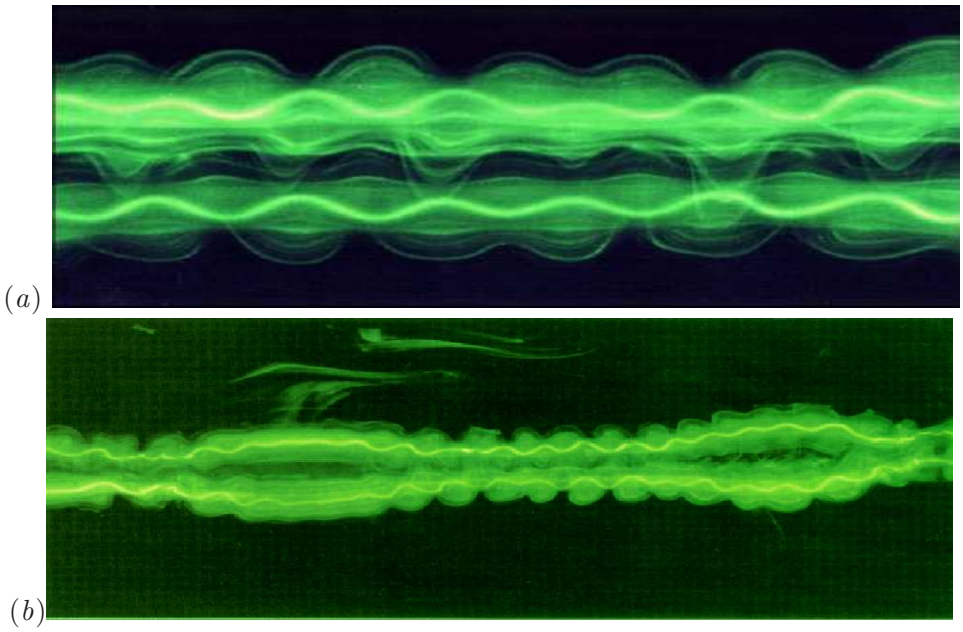
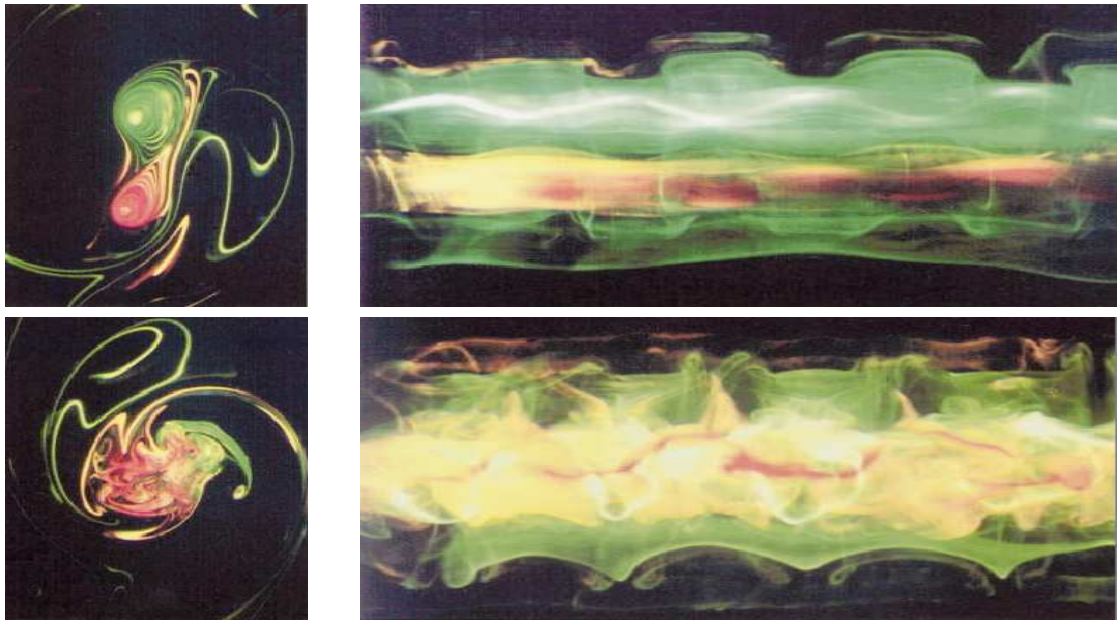


FIG. 2.10 – (a) Instabilité elliptique et (b) Instabilité elliptique (courte longueur d'onde) et instabilité de Crow (grande longueur d'onde) se développant sur des tourbillons contra-rotatifs générés expérimentalement par des flaps dans une cuve de laboratoire. Les tourbillons sont visualisés par de la fluorescéine. D'après Williamson & Leweke (1996).

Instabilité zigzag de tourbillons contra-rotatifs dans un fluide fortement stratifié.

En milieu fortement stratifié, Billant & Chomaz (2000a) ont découvert l'existence d'une instabilité dite zigzag agissant sur une paire de tourbillons contra-rotatifs verticaux. Cette instabilité consiste en un mode déplacement qui ne déforme pas le coeur des tourbillons contrairement à l'instabilité elliptique. Elle provoque une décorrélation verticale de la paire de tourbillons contra-rotatifs : la direction de propagation des dipôles est modifiée par l'instabilité zigzag et déplacée en alternance de chaque côté de la direction de propagation initiale (figure 1.22). Une étude de stabilité asymptotique non-visqueuse basée sur l'analyse dimensionnelle de Riley *et al.* (1981), dans la limite de petits nombres de Froude et d'une grande longueur d'onde, a montré que l'instabilité résulte en une rotation et une translation du dipôle par rapport à sa direction de propagation.
La décorrélation de l'écoulement sur la verticale (figure 1.22) met en évidence la longueur d'onde de l'instabilité proportionnelle à U/N, où U est la vitesse horizontale caractéristique du dipôle. En conséquence, plus la stratification est forte, plus l'échelle verticale sélectionnée par cette instabilité zigzag est petite.
L'instabilité zigzag ne sature pas et engendre finalement une succession de couches comportant des dipôles "pancakes" individuels, c'est-à-dire d'extension verticale très réduite par rapport à leur extension horizontale (figure 1.23).



(a) (b)

FIG. 2.11 – Instabilité elliptique se développant sur des tourbillons co-rotatifs générés expérimentalement par des flaps dans une cuve de laboratoire. (a) Coupe horizontale, (b) Vue de côté. Les tourbillons sont visualisés par de la fluorescéine. D'après Meunier & Leweke (2000).

Première partie

Étude de la stabilité linéaire d'une paire de tourbillons verticaux co-rotatifs en milieu stratifié

Chapitre 3

Analyse numérique de stabilité tridimensionnelle d'une paire de tourbillons co-rotatifs

Ce chapitre reprend l'article à paraître dans le *Journal of Fluid Mechanics* : Elliptic and zigzag instabilities on co-rotating vertical vortices in a stratified fluid.

La stabilité tridimensionnelle d'une paire de tourbillons co-rotatifs en milieu stratifié a été étudiée numériquement à l'aide d'un code pseudo-spectral résolvant les équations de Navier-Stokes linéarisées autour d'un état de base dans l'approximation de Boussinesq. Cet état de base est constitué de deux tourbillons gaussiens qui se sont chacun adapté l'un à l'autre, et plus précisément au champ d'étirement engendré par chaque tourbillon sur son voisin. Pour une faible stratification, nous avons observé les deux modes symétrique et antisymétrique de l'instabilité elliptique. Le taux de croissance de cette instabilité chute brutalement aussitôt que le fluide devient stratifié. Pour une forte stratification, nous avons mis en évidence une nouvelle instabilité qui courbe les deux tourbillons de manière symétrique.

Cette instabilité, appelée instabilité zigzag, correspond à un mode de déplacement qui, comme son nom l'indique, déplace les coeurs des tourbillons sans pratiquement les déformer contrairement à l'instabilité elliptique qui, elle, les déforme très fortement. Le déplacement se fait dans des directions parallèles et opposées pour les deux tourbillons. Une première composante de ce déplacement varie la distance entre ces deux tourbillons. La composante perpendiculaire fait tourner la paire de tourbillons.

Le taux de croissance de l'instabilité est proportionnel au champ d'étirement créé par un tourbillon sur son compagnon et est indépendant de la stratification dans la limite non-visqueuse. La longueur d'onde la plus instable est proportionnelle au nombre de Froude multiplié par la distance entre les tourbillons. En d'autres termes, cette longueur d'onde diminue quand la stratification augmente. Nous montrons que cette instabilité est similaire à l'instabilité zigzag découverte lors de l'étude de deux tourbillons contra-rotatifs en milieu stratifié (Billant & Chomaz, 2000*c*) et qu'elle sélectionne la même échelle verticale, suggérant ainsi que l'instabilité zigzag serait une instabilité générique affectant tout écoulement stratifié comportant plus d'un tourbillon.

Elliptic and zigzag instabilities on co-rotating vertical vortices in a stratified fluid.

By PANTXIKA OTHEGUY, JEAN-MARC CHOMAZ and PAUL BILLANT
LadHyX, CNRS - École Polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex, France
J. Fluid Mech. (in press)

Abstract

We present a three-dimensional linear stability analysis of a couple of co-rotating vertical vortices in a stratified fluid. When the fluid is non-stratified, the two vortices are unstable to the elliptic instability due to the elliptic deformation of their core (Kerswell, 2002). These elliptic instability modes persist for weakly stratified flow : $F_h > 10$, where F_h is the horizontal Froude number ($F_h = \Gamma_b/\pi a_b^2 N$ where Γ_b is the circulation of the vortices, a_b their core radius and N the Brunt-Väisälä frequency). For strong stratification ($F_h < 2.85$), a new instability is found that bends each vortex symmetrically with almost no internal deformation of the basic vortices. This instability may modify the vortex merging since at every half wavelength along the vertical the vortices are alternatively brought closer, accelerating the merging, and moved apart, delaying the merging. The most unstable vertical wavelength λ_m of this new instability is shown to be proportional to $F_h b_b$, where b_b is the distance between the vortices, implying that λ_m decreases with increasing stratification. The maximum growth rate however is independent of the stratification and proportional to the strain $S = \Gamma_b/2\pi b_b^2$. These scaling laws and the bending motion induced by this instability are similar to those of the zigzag instability of a counter-rotating vortex pair in a stratified fluid (Billant & Chomaz, 2000*c*).

3.1 Introduction

Geophysical flows often exhibit stable stratification which limits vertical displacements and favors the formation of a layered structure. Horizontal layers have been identified in the atmosphere (Dalaudier *et al.* 1994 ; Cho, Jurgens & Slade 1996 ; Muschinski & Wode 1997 ; Thouret *et al.* 2000 ; Luce, Crochet & Dalaudier 2001), in the oceans (Dugan 1984 ; Gregg 1987) and in lakes (Thorpe 1977 ; Imberger & Ivey 1991). Laboratory experiments of stratified turbulence generated by towing a vertical rod (Park, Whitehead & Gnanadeskian 1994), or a rake of vertical bars (Fincham, Maxworthy & Spedding 1996 ; Holford & Linden 1999 ; Praud, Fincham & Sommeria 2005) as well as direct numerical simulations of stratified turbulence (Riley, Metcalfe & Weissman 1981 ; Herring & Métais 1989 ; Riley & Lelong 2000 ; Godeferd & Staquet 2003 ; Waite & Bartello 2004) also show the formation of layers, in which energy dissipation is mostly achieved by the strong vertical shear. The scaling of Riley *et al.* (1981) accounts for the fact that when the stratification is strong the velocity field is mainly horizontal. These authors have further suggested that if both the horizontal

and the vertical lengthscales of the flow are large compared to the buoyancy lengthscale U/N (where U is the horizontal velocity scale and N the Brunt-Väisälä frequency), the leading order dynamics are two-dimensional. Using this result, Lilly (1983) has proposed that the kinetic energy spectrum observed in the atmosphere at mesoscale is a manifestation of two-dimensional dynamics with an inverse cascade of energy from small ($\sim$ 1 km) to large ($\sim$ 500 km) scales. Recently, Cho & Lindborg (2001) have contradicted this interpretation and have shown that the energy cascade is in the downscale direction by computing high order statistical moments of airborne turbulence measurements. Billant & Chomaz (2001) and Lindborg (2002) have proposed that the dynamics are not two-dimensional because the vertical lengthscale selected by the flow is the local buoyancy lengthscale U/N, invalidating the hypothesis of Riley *et al.* (1981) of a vertical lengthscale large compared to U/N.

In the particular case of a counter-rotating vortex pair, Billant & Chomaz (2000*a*) have shown that an instability, refered to as the zigzag instability, is responsible for the formation of layers with a vertical scale proportional to the buoyancy length scale. However co-rotating vortices are more frequently encountered in turbulent flows than counter-rotating vortices. Furthermore, pairing of like-signed vortices is believed to be a dominant process in two-dimensional turbulence and to account for both the upscale energy transfer and the downscale enstrophy cascade through filamentation. Therefore it is of high interest to investigate whether co-rotating vertical vortices in a stratified fluid are subject to a similar three-dimensional zigzag instability, which would imply that the pairing process and the inherent cascade could be substantially modified by stratification.

In the present paper, we show by a numerical stability analysis that for weak stratification, co-rotating vortices are subject to the elliptic instability (Kerswell, 2002) as observed experimentally by Meunier & Leweke (2001) and described theoretically by Le Dizès & Laporte (2002). However, for strong stratification, a new instability affects co-rotating vortex pairs that tends to decorrelate the flow on the buoyancy lengthscale. Its growth rate scales like the external strain that each vortex induces on the other and we argue that this instability belongs to the zigzag type.

The paper is organized as follows. In section 3.2, a quasi-steady two-dimensional solution is first obtained from a two-dimensional numerical simulation initialized by two co-rotating gaussian vortices. In section 3.3, the three-dimensional stability of this basic state is then determined using a linearized pseudo-spectral numerical code combined with a Krylov method. Section 3.4 describes the three-dimensional instabilities observed when the stratification is varied. The effects of the Reynolds number and of the ratio between the vortices core size and their separation distance are further investigated in section 3.5. Finally, some consequences of the zigzag instability on vortex merging are discussed in the concluding section.

3.2 Two-dimensional simulation

3.2.1 Numerical method

The initial vorticity field ω_0^f in the fixed laboratory frame consists of two identical co-rotating axisymmetric Lamb-Oseen vortices which have gaussian vorticity distributions :

$$\omega_0^f = \frac{\Gamma_0}{\pi a_0^2}\left(\exp\left(-\frac{(x-\frac{b_0}{2})^2+y^2}{a_0^2}\right)+\exp\left(-\frac{(x+\frac{b_0}{2})^2+y^2}{a_0^2}\right)\right), \tag{3.1}$$

where (x, y) are the cartesian coordinates in the horizontal plane, Γ_0 the initial circulation of each vortex, a_0 the initial vortex core size and b_0 the initial distance between the vortex centers.
The two vortices initially rotate around each other at the angular velocity $\Omega_0 = \Gamma_0/\pi b_0^2$. In the frame of reference rotating at the angular velocity Ω_0, the two-dimensional Navier-Stokes equations read :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \omega \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla}\dfrac{\boldsymbol{u}^2}{2} + 2\Omega_0 \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla} p + \nu \boldsymbol{\Delta u}, \\ \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{3.2}$$

where $\boldsymbol{u}$ is the velocity vector in the rotating frame, p the pressure, ω the vertical vorticity component in the rotating frame and ν the kinematic viscosity. The initial vorticity in the rotating frame is then $\omega_0 = \omega_0^f - 2\Omega_0$.

In order to solve these equations using a pseudo-spectral code, we have made a further decomposition. Indeed the Fourier decomposition and the associated periodic boundary conditions require that the computed flow has no mean vorticity and therefore no circulation on the domain boundaries. As shown recently by Pradeep & Hussain (2004), such a periodic simulation of a flow with non-zero circulation can lead to partially incorrect results. A simple solution to circumvent this problem consists of treating separately the mean vorticity in the rotating frame $\bar{\omega} = \dfrac{1}{L_x L_y}\displaystyle\int\int \omega dxdy$ (here equal to $\dfrac{2\Gamma_0}{L_x L_y} - 2\Omega_0$) and the associated solid body rotation $\dfrac{\bar{\omega}}{2}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{x}$ from the remaining periodic vorticity and velocity fields (ω_p,$\boldsymbol{u}_p$) which can be properly decomposed on a Fourier basis, i.e.

$$\begin{cases} \omega = \bar{\omega} + \omega_p, \\ \boldsymbol{u} = \dfrac{\bar{\omega}}{2}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_p. \end{cases} \tag{3.3}$$

Inserting this decomposition into (3.2) gives

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_p}{\partial t} + (\omega_p + \bar{\omega} + 2\Omega_0)\,\boldsymbol{e}_z \times \left(\boldsymbol{u}_p + \dfrac{\bar{\omega}}{2}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{x}\right) + \boldsymbol{\nabla}\dfrac{\boldsymbol{u}_p^2}{2} = -\boldsymbol{\nabla} P + \nu \boldsymbol{\Delta u}_p, \\ \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{u}_p = \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{3.4}$$

where $P = p + \dfrac{1}{2}(\dfrac{\bar{\omega}}{2}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{x})^2 + \boldsymbol{u}_p \cdot (\dfrac{\bar{\omega}}{2}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{x})$. These equations are solved using a pseudo-spectral code adapted from the one used by Delbende, Chomaz & Huerre (1998). The

Fourier transform of a given function g is denoted by a hat :

$$\hat{\boldsymbol{g}}(k_x, k_y, t) = \int\int \boldsymbol{g}(x, y, t) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy, \tag{3.5}$$

where the wavenumber is $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$. Eliminating the pressure and enforcing the incompressibility condition gives

$$\frac{\partial \widehat{\boldsymbol{u}}_p}{\partial t} = -P(\boldsymbol{k}) \left[(\omega_p + \bar{\omega} + 2\Omega_0) \widehat{\boldsymbol{e}_z \times \left(\boldsymbol{u}_p + \frac{\bar{\omega}}{2} \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{x} \right)} \right] - \boldsymbol{k}^2 \nu \widehat{\boldsymbol{u}}_p, \tag{3.6}$$

where $P(\boldsymbol{k}) = (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\boldsymbol{k}^2}) \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j$ is the projection operator on the solenoidal space. The cross-product $\mathcal{A} = (\omega_p + \bar{\omega} + 2\Omega_0) \boldsymbol{e}_z \times \left(\boldsymbol{u}_p + \frac{\bar{\omega}}{2} \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{x} \right)$ is evaluated in the physical space and then transformed to the spectral space. It is worth noting that even if the total velocity $\boldsymbol{u} = \frac{\bar{\omega}}{2} \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}_p$ is not periodic, the cross-product $\mathcal{A}$ fulfills the periodic boundary conditions since the absolute vorticity $\omega_p + \bar{\omega} + 2\Omega_0$ tends to zero outside the vortex cores. Thus, the decomposition (3.3) allows us to properly simulate a flow with non-zero circulation using a pseudo-spectral code. Time integration is performed with a second order Adams-Bashforth scheme. Dissipative terms are integrated exactly. The 2/3 rule is applied for de-aliasing. The Reynolds number, defined as $Re_0 = \frac{\Gamma_0}{\pi \nu}$ is equal to 16000. The size of the computational domain is chosen large $L_x = L_y = 60$ (i.e. 60 times the vortex radius) enough to minimize the effects of the periodic boundary conditions. The number of collocation points in the x and y directions is $M_x = M_y = 512$ in order to have a fine mesh ($\delta x = \delta y = 0.1172$) in the vortex core and the time step is $\delta t = 0.01$.

3.2.2 The two-dimensional evolution

The time evolution of the vortex pair is analysed by fitting the vorticity ω by two elliptic gaussian distributions separated by a distance b, with an instantaneous circulation Γ, a major semi-axis a_M and a minor semi-axis a_m (figure 3.1). The vortex core size is then $a = \sqrt{({a_M}^2 + {a_m}^2)/2}$ and the eccentricity is $e = \sqrt{1 - (\frac{a_m}{a_M})^2}$. The aspect ratio between the vortex core size and the separation distance between the vortices is defined as $\alpha = a/b$. This analytical vorticity field fits the simulated vorticity with an error typically less than 0.1%. The vortex axis makes an angle θ with the x axis. This angle is initially zero but evolves very slowly at the rate $(\Omega - \Omega_0)$, where $\Omega = \Gamma/\pi b^2$, since computations are made in the frame rotating at the initial rotation rate of the vortex pair Ω_0. As described by Melander, Zabusky & McWilliams (1988), Le Dizès & Verga (2002), Meunier *et al.* (2002) and Cerretelli & Williamson (2003), the two-dimensional evolution of the vortices before merging exhibits three distinct phases. In the first inertial phase, each vortex deforms in order to adapt to the strain field generated by the other vortex. The vortex cores become elliptical on the inertial timescale $T_0 = \frac{\pi {a_0}^2}{\Gamma_0}$, with the major axis a_M aligned with the line joining the centers of the vortices. As seen in figure 3.2*c*, the eccentricity makes a large jump at the very beginning of the simulation and rapidly relaxes towards equilibrium while

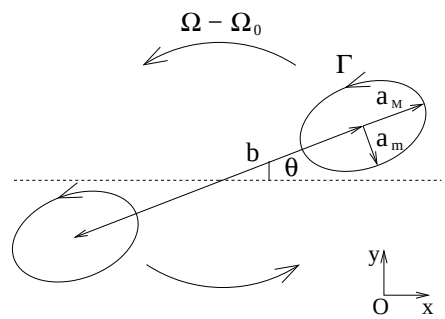


FIG. 3.1 – Sketch of the vortex pair evolution in the frame rotating at $\Omega_0 = \dfrac{\Gamma_0}{\pi b_0^2}$.

exhibiting small and rapidly damped oscillations (barely visible in figure 3.2).

In the second viscous phase, the vortex pair remains quasi-steady with a distance b decreasing slowly (figure 3.2a). This implies that the vortices rotate in the computational domain since their mutual induction is no more exactly compensated by the rotation of the reference frame. The small undulations with a long period slightly visible in figures 3.2a and 3.2b are artefacts of this late rotation of the vortices in a square box. The vortex radius evolves slowly by viscous diffusion according to the law (Batchelor 1967)

$$a = \sqrt{{a_0}^2 + 4\nu t}. \tag{3.7}$$

In this viscous phase, the eccentricity e increases almost linearly with time (figure 3.2c). Figure 3.2d shows also that e is a function of only $\alpha = a/b$ during this phase independently of the initial conditions. As analysed in detail by Sipp, Jacquin & Cossu (2000) and Le Dizès & Verga (2002), the vorticity distribution has relaxed towards a unique family of solutions parametrized by α. The two-dimensional basic state ($\boldsymbol{u}_b$, ω_b) for the following three-dimensional stability analysis (section 3.3) is chosen in this regime for the particular aspect ratio $\alpha_b = a_b/b_b$ equal to 0.15 (filled symbols in figure 3.2). In appendix 3.7, it is checked that basic states with the same α_b but computed from different initial α_0 have identical stability properties even if α_0 is very close to α_b (for exemple $\alpha_0 = 0.148$). The basic state with $\alpha_b = 0.15$ obtained from $\alpha_0 = 0.125$ will be used as the reference state for the stability analysis.

The final phase ends by the merging of the two vortices (not shown in figure 3.2) when α reaches the value 0.24 approximately (Le Dizès & Verga, 2002).

3.3 Numerical method of the three-dimensional stability analysis

We now investigate the three-dimensional stability of the two-dimensional flow $(\boldsymbol{u}_b, \omega_b)$ corresponding to the instant where the parameter α has reached the desired value α_b. At

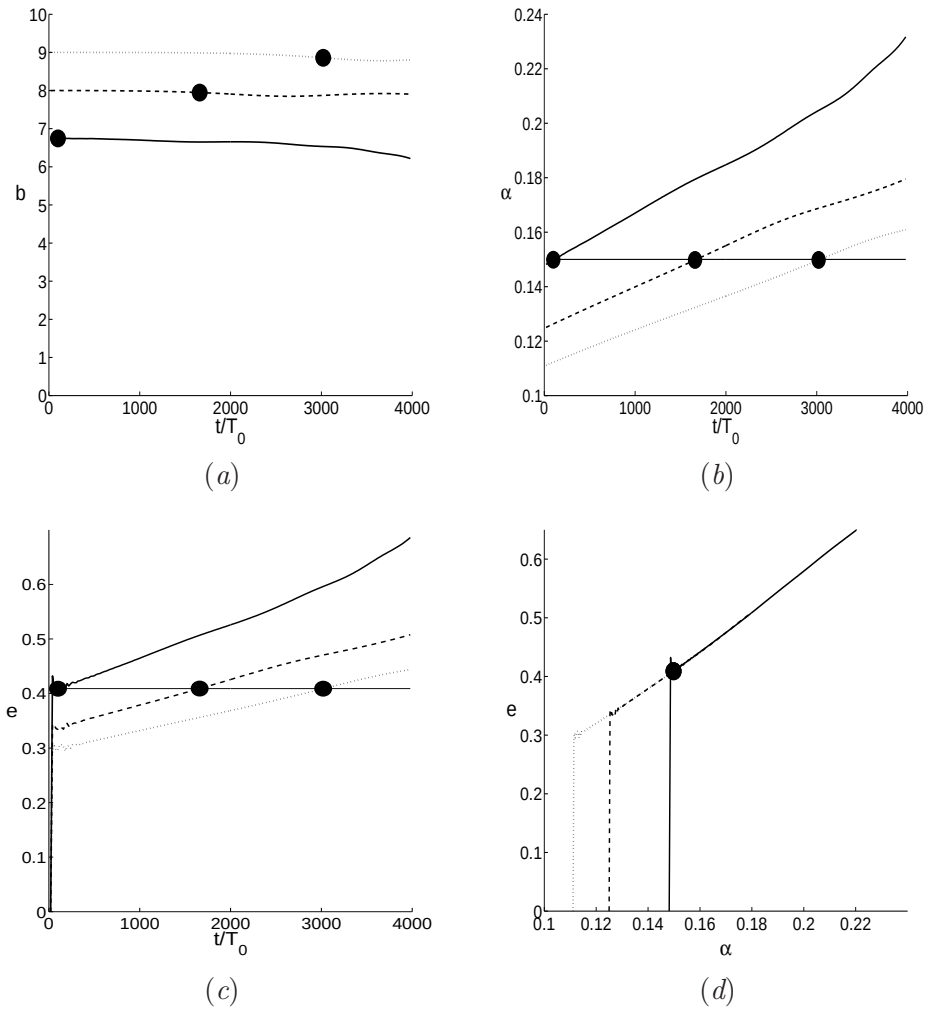


FIG. 3.2 – Time evolution of the characteristic parameters of the co-rotating vortex pair : (a) the separation distance b between the vortices ; (b) the ratio $\alpha = a/b$ between the vortex radius a and the separation distance b ; (c) the eccentricity e of one vortex. (d) Evolution of the eccentricity e as a function of α. The solid, dashed and dotted lines correspond to three simulations where α_0, the initial value of α, is respectively 0.148, 0.125 and 0.111. The other parameters of the simulation are : $M_x = M_y = 512$, $L_x = L_y = 60$, $a_0 = 1$, $Re_0 = 16000$. The filled circles represent the time where $\alpha = 0.15$ chosen for the stability analysis.

this instant, the actual rotation rate of the two vortices differs slightly from Ω_0. Therefore the 3D stability computations are not done in the frame rotating at the velocity Ω_0 but in the frame rotating at the actual rotation rate Ω_b. To ease the reading the notation has not been changed.

We consider that this basic state is embedded in a linearly stratified fluid with the mean density gradient aligned along the vortex axes. The total density ρ_t is expressed as the sum of a constant reference density ρ_0, a basic density profile $\bar{\rho}(z)$ and a perturbation density $\rho'(\boldsymbol{x}, t)$

$$\rho_t(\boldsymbol{x}, t) = \rho_0 + \bar{\rho}(z) + \rho'(\boldsymbol{x}, t). \tag{3.8}$$

The Brunt-Väisälä frequency $N = \sqrt{-(g/\rho_0)d\bar{\rho}/dz}$ is assumed to be constant.

In the following, space and time are respectively non-dimensionalized by the vortex radius a_b and by $\tau = \pi a_b^2/\Gamma_b$, the inverse of the vorticity at the center of the vortex. The pressure is rescaled by $\rho_0(\Gamma_b/\pi a_b)^2$ and the density by $\rho_0\Gamma_b^2/g\pi^2 a_b^3$. We recall that a_b and Γ_b are the actual vortex radius and circulation determined by fitting the basic vorticity field by two elliptic gaussian distributions. The same notation is kept for the non-dimensional variables for the sake of simplicity.
The basic state $(\boldsymbol{u}_b, \omega_b)$ is subjected to infinitesimal three-dimensional perturbations of the velocity $\boldsymbol{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$, vorticity $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}'$, density ρ' and pressure p'. The linearized non-dimensional Navier-Stokes equations under the Boussinesq approximation in the frame rotating at Ω_b are :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t'} + \omega_b \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{u}_b + 2\Omega_b \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{u}' = -\boldsymbol{\nabla}(p' + \boldsymbol{u}_b \cdot \boldsymbol{u}') - \rho' \boldsymbol{e}_z + \dfrac{1}{Re}\Delta \boldsymbol{u}', \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}' = 0, \\ \dfrac{\partial \rho'}{\partial t'} + \boldsymbol{u}_b \cdot \boldsymbol{\nabla}\rho' - \dfrac{1}{F_h^2} u'_z = \dfrac{1}{ScRe}\Delta \rho', \end{cases} \tag{3.9}$$

where $Sc = \nu/D$ is the Schmidt number, D being the molecular diffusivity of the stratifying agent, $Re = \Gamma_b/\pi\nu$ is the Reynolds number and the horizontal Froude number is defined as

$$F_h = \frac{\Gamma_b}{\pi a_b^2 N}. \tag{3.10}$$

As the basic state is uniform along the z-axis, the Fourier modes in the z-direction will not couple to each other and the perturbations can be written as follows :

$$[\boldsymbol{u}'; \boldsymbol{\omega}'; p'; \rho'](x, y, z, t) = [\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\omega}; p; \rho](x, y, k_z, t)e^{ik_z z} + cc, \tag{3.11}$$

where k_z is the vertical wavenumber and cc denotes the complex conjugate.

A pseudo-spectral Gallerkin-collocation code similar to the one described in section 3.2.1 has been used to integrate equation (7.1) for each value of k_z. For that purpose, the complex perturbation $[\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\omega}; p; \rho]$ corresponding to a particular value of k_z is decomposed in Fourier series in the horizontal directions as

$$[\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\omega}; p; \rho](x, y, k_z, t) = \int\int [\hat{\boldsymbol{u}}; \hat{\boldsymbol{\omega}}; \hat{p}; \hat{\rho}](k_x, k_y, k_z, t)e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \tag{3.12}$$

As in the two-dimensional case, the equations (7.1) are projected on the plane perpendicular to $\boldsymbol{k}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}{\partial t} = P(\boldsymbol{k})\left[(\widehat{\boldsymbol{u}\times\omega_b}\boldsymbol{e}_z + \widehat{\boldsymbol{u}_b\times\boldsymbol{\omega}} - 2\Omega_b\boldsymbol{e}_z\times\hat{\boldsymbol{u}} - \hat{\rho}\boldsymbol{e}_z\right] - \dfrac{\boldsymbol{k}^2}{Re}\hat{\boldsymbol{u}} \\ \dfrac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -i\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{u}_b\rho} + \dfrac{1}{F_h^2}\hat{u}_z - \dfrac{\boldsymbol{k}^2}{ScRe}\hat{\rho} \end{array}\right. \tag{3.13}$$

where $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$. The products between the perturbation quantities and the basic state are evaluated in the physical space. The time step is $\delta t = 0.01$. The size of the computational domain and the number of collocation points are both halved compared to section 3.2 : $L_x = L_y = 30$, $M_x = M_y = 256$ in order to have a reasonable computational cost keeping the same resolution $\delta x = \delta y = 0.1172$. This is done either by running two-dimensional calculations in a $L_x = L_y = 30$ box either by cropping the basic state computed in the box $L_x = L_y = 60$ to a $L_x = L_y = 30$ box. In appendix 3.7, we show that these parameters give good accuracy and convergence of the numerical results. After integrating equation (7.1) for a sufficiently long time, typically $T = 500$ (i.e. 50000 iterations with a time step equal to $\delta t = 0.01$), the most unstable eigenmode dominates the perturbation. The computation is generally initialized by divergence-free white noise. To speed up convergence time, the computation can also be initialized by an eigenmode already computed for another value of k_z. The results do not depend significantly on the initialization chosen.
In order to retrieve not only the most unstable eigenmode, but also the q most unstable eigenmodes, a Krylov method is applied (Edwards, Tuckerman, Friesner & Sorensen 1994, Julien, Ortiz & Chomaz 2004). At the end of the simulation, the perturbation fields $\boldsymbol{u}'$ are saved at q distinct times separated by $\Delta T = 10$ time units. The vectors $U(T - j\Delta T)$, with $0 \le j \le q-1$ are then orthonormalized to form the basis of a so-called Krylov subspace of dimension q and we compute the eigenvalues of the evolution operator projected in this Krylov subspace.

3.4 Three-dimensional stability

Because of the central symmetry of the basic state with respect to the middle point between the vortex centers, the eigenmodes separate in two families : symmetric, defined by the same symmetry as the basic state,

$$[u_x, u_y, u_z, \rho](x, y) = [-u_x, -u_y, u_z, \rho](-x, -y), \tag{3.14a}$$

$$[\omega_x, \omega_y, \omega_z](x, y) = [-\omega_x, -\omega_y, \omega_z](-x, -y). \tag{3.14b}$$

and antisymmetric, defined by the opposite symmetry,

$$[u_x, u_y, u_z, \rho](x, y) = [u_x, u_y, -u_z, -\rho](-x, -y), \tag{3.15a}$$

$$[\omega_x, \omega_y, \omega_z](x, y) = [\omega_x, \omega_y, -\omega_z](-x, -y). \tag{3.15b}$$

In this section, the horizontal Froude number is varied in the range $[0.2, \infty]$, the Reynolds number $Re = 16000$, the Schmidt number $Sc = 1$, and the ratio $\alpha_b = 0.15$. We first present the elliptic instability which is observed for large Froude numbers $F_h > 10$. The zigzag instability, observed for small Froude numbers $F_h < 2.85$, will be described in section 3.4.2.

3.4.1 Unstratified and weakly stratified flow ($F_h > 10$)

For Froude numbers larger than 10, both symmetric and antisymmetric modes are unstable. The instability mechanism corresponds to the elliptic instability described by Moore & Saffman (1975) and Tsai & Widnall (1976) as the resonance between two Kelvin modes and the elliptic deformation of the vortex core. Figure 3.3 shows the perturbation vorticity field of the most unstable symmetric and antisymmetric modes in the non-stratified case ($F_h = \infty$). The vertical vorticity perturbation inside each vortex core is similar to the elliptic instability mode reported by Pierrehumbert (1986) and Waleffe (1990) with a dipole structure surrounded by a weak opposite vorticity (figure 3.3 *a*, *d*). This perturbation corresponds to a deformation of the vortex core in opposite phase to the vortex periphery as illustrated in figures 3.4 *a*, 3.4 *b*. The x and y vorticity components of the perturbation are also displayed in figure 3.3 for later comparison with the zigzag instability. The growth rate of the symmetric and antisymmetric modes are shown in figure 3.5 as a function of the vertical wavenumber. In the range of wavenumbers investigated, three distinct bands of instability have been found for each mode. These bands correspond to three first wavenumbers for which the resonance condition leading to the elliptic instability is satisfied (Tsai & Widnall 1976 ; Eloy & Le Dizès 1999). Our numerical results are in good agreement with the theoretical inviscid growth rate predicted by Le Dizès & Laporte (2002)[1]. In particular, the growth rate of the most unstable mode $\sigma_m = 0.01771$ at $k_z = 1.9$ obtained for $Re = 16000$ differs by only 2% from the predicted inviscid value $\sigma = 0.01741$ and by 9% from the growth rate measured in the Large Eddy numerical Simulation of Le Dizès & Laporte (2002). The symmetric and antisymmetric modes have approximately the same growth rates for most of the wavenumbers investigated as expected since α_b is small. Other weakly unstable modes have been identified. They are about four times less unstable than the elliptic modes and they will not be described here.

The elliptic modes are stabilized in the presence of stratification in agreement with the theoretical studies of Miyazaki (1993), Miyazaki & Fukumoto (1992), Kerswell (2002) and Leblanc (2003). Kerswell (2002) and Leblanc (2003) have derived asymptotically the inviscid growth rate σ_a of the elliptic instability in a stratified and rotating fluid in the limit of small strain and for an unbounded uniform vortex. In this local approximation, the elliptic instability corresponds to the parametric forcing of inertial gravity waves by the external strain field as described by Kerswell (2002). Using the present definition of non-dimensional variables and the fact that the non-dimensional rotation rate of the vortex pair is $\Omega_b = \alpha_b^2$, the asymptotic growth rate reads

$$\sigma_a = \frac{9}{16}\epsilon\frac{(3+4\alpha_b^2)^2(1-4/{F_h}^2)}{9[(1+2\alpha_b^2)^2-1/{F_h}^2]}, \tag{3.16}$$

where ϵ is the non-dimensional local strain rate.

For a Lamb-Oseen vortex, Le Dizès & Laporte (2002) have derived an approximation for the constant of proportionality between the local strain ϵ inside the vortex core and the

[1] a misprint has been corrected in Le Dizès & Laporte (2002) : b^2/a_i^2 should be replaced by b^4/a_i^4 in equations 6.1 and 6.2

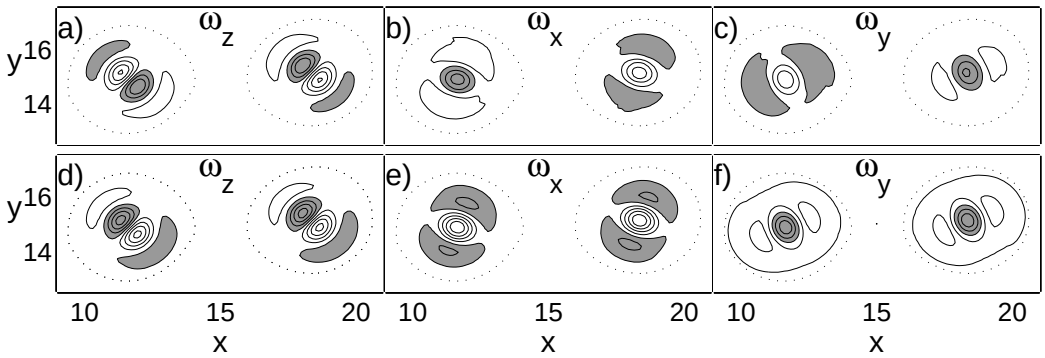


FIG. 3.3 – Contours of the three vorticity components of the elliptic instability : (a, b, c) symmetric mode and (d, e, f) antisymmetric mode for $k_z = 1.9$, $Re = 16000$ and $F_h = \infty$. The shaded regions indicate positive vorticity. The perturbation enstrophy has been normalized to one and the contour level is 0.013 for all the components except for the antisymmetrical ω_z (figure d) for which it is 0.006. We precise that in non-dimensional variable, the basic state vorticity maximum is unity. The dotted line superimposed is the vorticity isocontour 0.05 of the non-dimensional basic state vorticity.

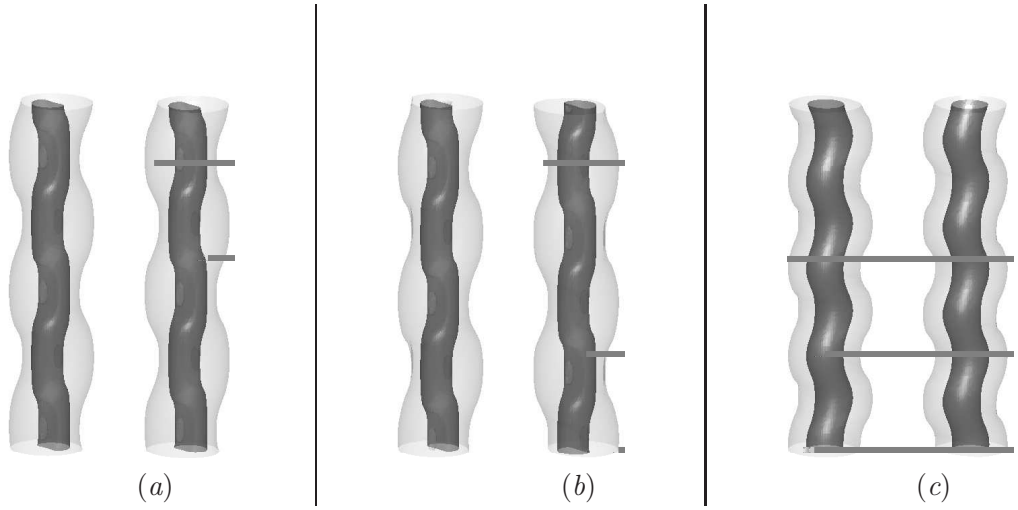


FIG. 3.4 – Vertical vorticity isosurfaces of the co-rotating vortex pair perturbed by (a) antisymmetric elliptic instability ($F_h = \infty$), (b) symmetric elliptic instability ($F_h = \infty$), (c) zigzag instability ($F_h = 0.5$). The elliptic instability corresponds to a deformation of the vortex core whereas the zigzag instability is associated with a displacement of the vortex as a whole at each level z. The deformations have been obtained by adding to the basic flow the most unstable eigenmode with a small but finite amplitude. The black isosurfaces correspond to the vorticity value 50% of the maximum vorticity and transparent surfaces to 5% of the maximum vorticity.

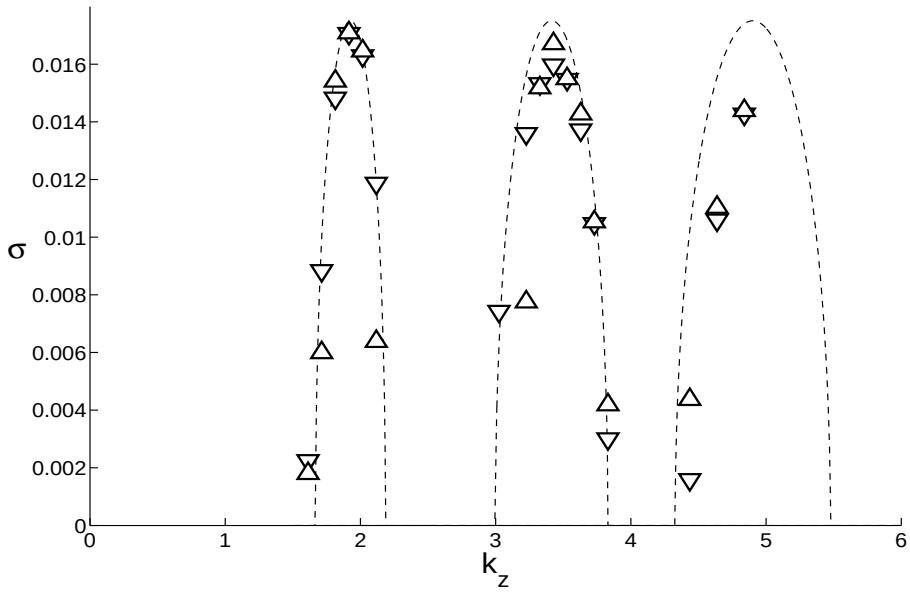


FIG. 3.5 – Plots of the growth rate of the elliptic instability as a function of the vertical wavenumber k_z for $Re = 16000$, $F_h = \infty$, and $\alpha_b = 0.15$. $\triangle$ and $\triangledown$ symbols show the growth rates of the symmetric and antisymmetric modes respectively. The dash-dotted line represents the inviscid prediction of Le Dizès & Laporte (2002).

external strain rate S imposed by the other vortex

$$\epsilon = \left(1.5 + 0.038(0.16 - \alpha_b^2)^{-9/5}\right) S, \tag{3.17}$$

where the non-dimensional external strain rate is according to our definitions $S = \dfrac{\alpha_b^2}{2}$. Consequently, the asymptotic growth rate can be expressed solely as a function of α_b and F_h. In the non-stratified case ($F_h = \infty$), and for $\alpha_b = 0.15$, equation (3.16) predicts an asymptotic growth rate $\sigma_a = 0.0175$, which is remarkably close to the maximum growth rate obtained numerically $\sigma_m = 0.0171$ despite the fact that the vortex is bounded and not uniform and that this growth rate is observed at a finite k_z ($k_z = 1.9$) for which the local approximation is not valid.

The asymptotic formula (3.16) predicts that the growth rate of the elliptic instability decreases as the Froude number decreases and vanishes for $F_h \leq 2$. We have determined numerically the most unstable wavenumber k_{zm} (figure 3.6*b*) and the corresponding maximum growth rate σ_m (figure 3.6*a*) when the Froude number decreases keeping the Reynolds number constant. When F_h decreases, the maximum growth rate σ_m drops more abruptly than the asymptotic growth rate σ_a and vanishes beyond the threshold : $F_h < 10$, i.e. sooner than predicted by equation (3.16).

A possible explanation for this discrepancy is that the Lamb-Oseen vortex has a distributed vorticity profile while equation (3.16) pertains to a uniform and unbounded vorticity profile. The abrupt stabilization could be due to the presence of critical point singularities which may damp the Kelvin modes involved in the elliptic instability when the fluid is

stratified and the vorticity is distributed. As shown in the non-stratified case by Sipp & Jacquin (2003) and Le Dizès & Lacaze (2005) critical points occur for Kelvin modes of a Lamb-Oseen vortex at a radial location r_c where the local angular velocity $V_\theta(r_c)/r_c$ equals the azimuthal phase velocity w/m, where w is the mode frequency and m its azimuthal wavenumber. These waves are then damped in contrast to those of a uniform vortex. For the $m = 1$ Kelvin waves, the waves with a frequency in the band $0 < w < \Omega_{\max}$ (where $\Omega_{\max}$ is the maximum angular velocity) are damped. This damping does not affect the elliptic instability since the resonance between $m = \pm 1$ Kelvin waves occurs for $w = 0$. This explains to some extent why, in the non-stratified case, the growth rates of the elliptic instability for a uniform vortex and for the Lamb-Oseen vortex are very close. In contrast, the elliptic instability due to the resonance between the $m = 0$ and $m = 2$ Kelvin modes is observed for uniform vorticity (Rankine vortex) (Eloy & Le Dizès, 1999) and not for distributed vorticity (Lamb-Oseen vortex) (Sipp & Jacquin, 2003) since the $m = 2$ Kelvin mode at the resonant frequency exhibits a critical point and is damped in the case of the Lamb-Oseen vortex. We propose that a similar damping phenomenon occurs for the $m = \pm 1$ waves in the presence of stratification. Indeed, a critical point should occur when the local frequency $w - m\Omega(r)$ equals the Brunt-Väisälä frequency N. Therefore the range of frequencies where the Kelvin mode $m = +1$ has a critical point is extended to the range $-N < w < \Omega\max + N$. Thus, as soon as a weak stratification is present, the resonant $m = \pm 1$ waves of frequency $w = 0$ participating in the elliptic instability may have a singularity and be damped. This could explain why the growth rate pertaining to equation (3.16) for an uniform and unbounded vortex which predicts so well the instability growth rate for $N = 0$ no longer agrees with the numerical results when $N > 0$. A detailed analysis of the Kelvin modes structure of Lamb-Oseen vortex in the presence of stratification would be necessary to prove this conjecture.

In the gap $2.85 < F_h < 10$, weakly unstable modes have been observed with a growth rate nearly four times smaller than the growth rate of the modes studied in the present paper. They will not be discussed here. For F_h lower than 2.85, a new mode appears which corresponds to the zigzag instability.

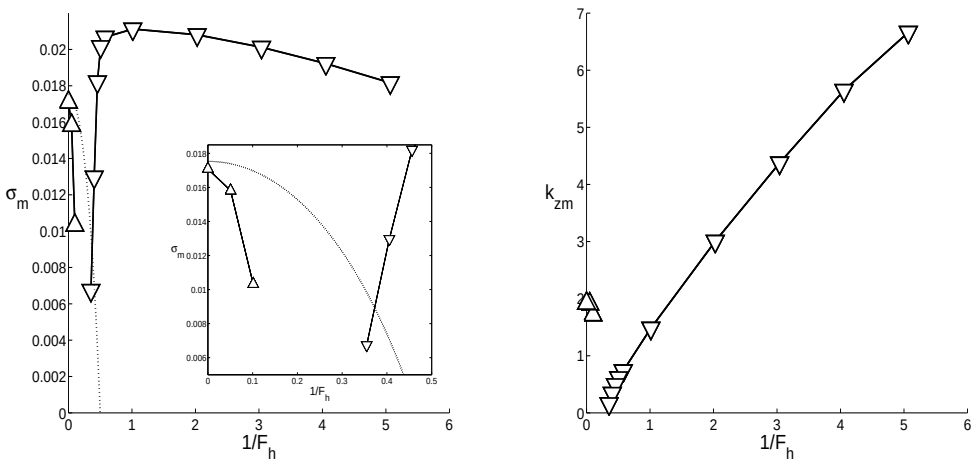
3.4.2 Zigzag instability for $F_h < 2.85$

As seen in figure 3.6, the maximum growth rate of the zigzag instability levels off abruptly for $F_h = 2.85$, reaches a value larger than the elliptic instability growth rate and then remains almost constant with decreasing F_h while the most unstable vertical wavenumber increases like $1/F_h$.

A displacement mode

The perturbation vorticity fields of the zigzag instability (figure 3.7) differs from those of the elliptic instability (figure 3.3). The horizontal vorticity components ω_x and ω_y are no longer confined in the vortex cores since the baroclinic torque can produce horizontal vorticity outside the vortex cores in contrast to the case of non-stratified fluids where horizontal vorticity may be only produced by tilting of the basic flow vorticity.

The vertical vorticity component ω_z continues to be localized in the vortex core (figure 3.7*c*) since it is either due to the transport of the basic flow vorticity or to the stretching



(*a*) (*b*)

FIG. 3.6 – Evolution of (*a*) the maximum growth rate σ_m and (*b*) of the corresponding wavenumber k_{zm} as a function of the inverse of the horizontal Froude number for $Re = 16000$ and $\alpha_b = 0.15$. The symbols $\triangle$ and $\bigtriangledown$ represent the elliptic and zigzag instabilities respectively. The dotted line corresponds to the asymptotic value given by equation (3.16). A zoom on small $1/F_h$ is included in (*a*) in the right bottom part.

of the basic flow vorticity, both tilting and baroclinic terms being only horizontal. The vertical vorticity field ω_z exhibits a single dipole that occupies the whole vortex core (dotted line in figure 3.7*c*) in contrast to the elliptic instability (figure 3.3*a*) for which a smaller dipole surrounded by opposite vorticity was observed. This eigenmode is symmetric, the antisymmetric mode is stable in contrast to the elliptic instability where both the symmetric and the antisymmetric modes were unstable. The deformations induced by the zigzag instability are very different from the deformations induced by the elliptic instability as illustrated in figure 3.4 (*c*). The shape of the eigenmode within each basic vortex (figure 3.7*c*) resembles strongly the structure of the zigzag instability of a counter-rotating vortex pair in a stratified fluid (Billant & Chomaz, 2000*c*). For the latter basic flow, it was shown that the zigzag eigenmode corresponds to a translation as a whole of each vortex with almost no internal deformation, which is equivalent to a bending of each vortex. In the present case, the dipolar shape of the vertical vorticity perturbation corresponds also to a uniform translation of each vortex. Indeed, figure 3.8 showing the perturbation associated with a uniform translation of a Lamb-Oseen vortex in an arbitrary direction θ has a striking resemblance to the pattern observed in each vortex in figure 3.7*c*. The zigzag instability induces therefore mainly a bending of each vortex in opposite directions obliquely with an angle θ relative to the axis joining the vortex centers (figure 3.7*c*). This motion may be decomposed as a small rotation of the vortex pair and a variation of the distance between the vortices. We may anticipate that this instability will favor or delay the merging of the vortices alternatively along the vertical since the vortices will be brought closer or moved apart alternatively along the vertical. The non-linear evolution of the zigzag instability and its impact on the vortex merging will be reported in the future.

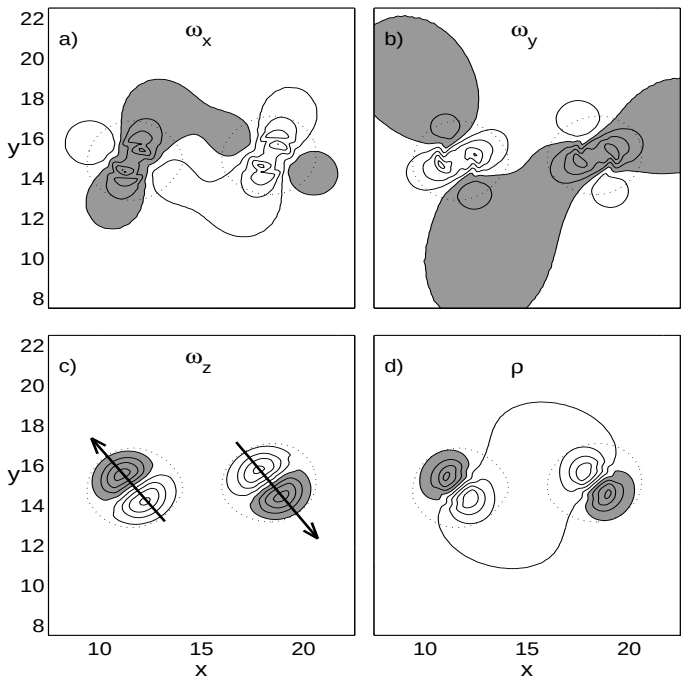


FIG. 3.7 – Contours of (a, b, c) the three vorticity components ω_x, ω_y, ω_z and (d) density field ρ of the zigzag instability for $F_h = 1$, $k_z = 1.5$ and $Re = 1000$. Shaded regions indicate positive value. The perturbation enstrophy has been normalized to one and the contour level of the three vorticity components is 0.007. The contour level of the density field is 0.028. The dotted line superimposed on the perturbation components is the isocontour 0.05 of the maximum basic state vorticity. The plain arrows in (c) indicate the directions of bending of the two vortices due to the zigzag instability.

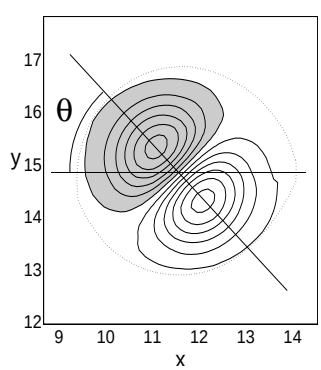


FIG. 3.8 – Vertical vorticity perturbation corresponding to an infinitesimal translation of a Lamb-Oseen vortex in the direction θ that is to say $\omega_z \propto (-cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + sin\theta\frac{\partial}{\partial y})\Delta\omega_b$. For other details see the legend of figure 3.7.

Self-similarity of the growth rate of the zigzag instability

The growth rate of the zigzag instability is displayed in figure 3.9*a*, as a function of the vertical wavenumber for various Froude numbers. A single bell-shaped curve is observed for each Froude number in contrast to the elliptic instability where several isolated peaks were present (figure 3.6). This curve is shifted toward larger vertical wavenumbers when the Froude number decreases but the maximum growth rate remains almost constant. As will be shown later, the slight decrease for small Froude numbers is due to viscous effects which may be approximated by $\frac{1}{Re}k_z^2$ when k_z is large.

As already observed in figure 3.7, the vertical wavenumber corresponding to the maximum growth rate of the zigzag instability increases like $\frac{1}{F_h}$. The growth rate curves of figure 3.9*a* are replotted in figure 3.9*b* as a function of the rescaled wavenumber k_zF_h. All the growth rates are seen to collapse in a single curve to a reasonable accuracy. When the viscous damping is taken into account by plotting $\sigma + \frac{1}{ReF_h^2}(k_zF_h)^2$ as a function of k_zF_h, the collapse is even better. In particular we notice that the lower the Froude number, the better the curves collapse. This indicates that the growth rate is of the form $\sigma = f(k_zF_h) - \frac{1}{ReF_h^2}(k_zF_h)^2$ for small Froude numbers in agreement with the self-similarity law proposed by Billant & Chomaz (2000*b*, c, 2001). In the inviscid limit, the non-dimensional vertical wavelength of the zigzag instability is proportional to the Froude number F_h, decreasing as the stratification increases, and the growth rate of this instability is independent of F_h. Because of viscous effects the maximum growth rate decreases as $\frac{1}{ReF_h^2}$, and when ReF_h^2 is order unity, the zigzag instability should be inhibited by viscosity.

Self-similarity of the eigenmode structure

The self-similarity property also applies to the eigenmode structure. For a given value of k_zF_h but with different values of F_h, the vertical vorticity perturbations are nearly identical as shown in figure 3.10. The vertical vorticity perturbation exhibits a similar dipolar shape in each vortex core for all the wavenumbers and Froude numbers. Only the orientation of the dipole varies with the rescaled wavenumber k_zF_h. This implies that the instability always consists of a translation, but the direction of the translation varies with k_zF_h. For small k_zF_h, the direction of translation of each vortex tends to be perpendicular to the line joining the vortex centers. This means that the instability consists mainly of a rotation as a whole of the vortex pair without change of the distance between the vortices. When k_zF_h increases, the direction of translation rotates toward the x-axis implying that, in addition to the rotation of the vortex pair, there is a significant translation of the vortices along the x-axis in opposite directions.

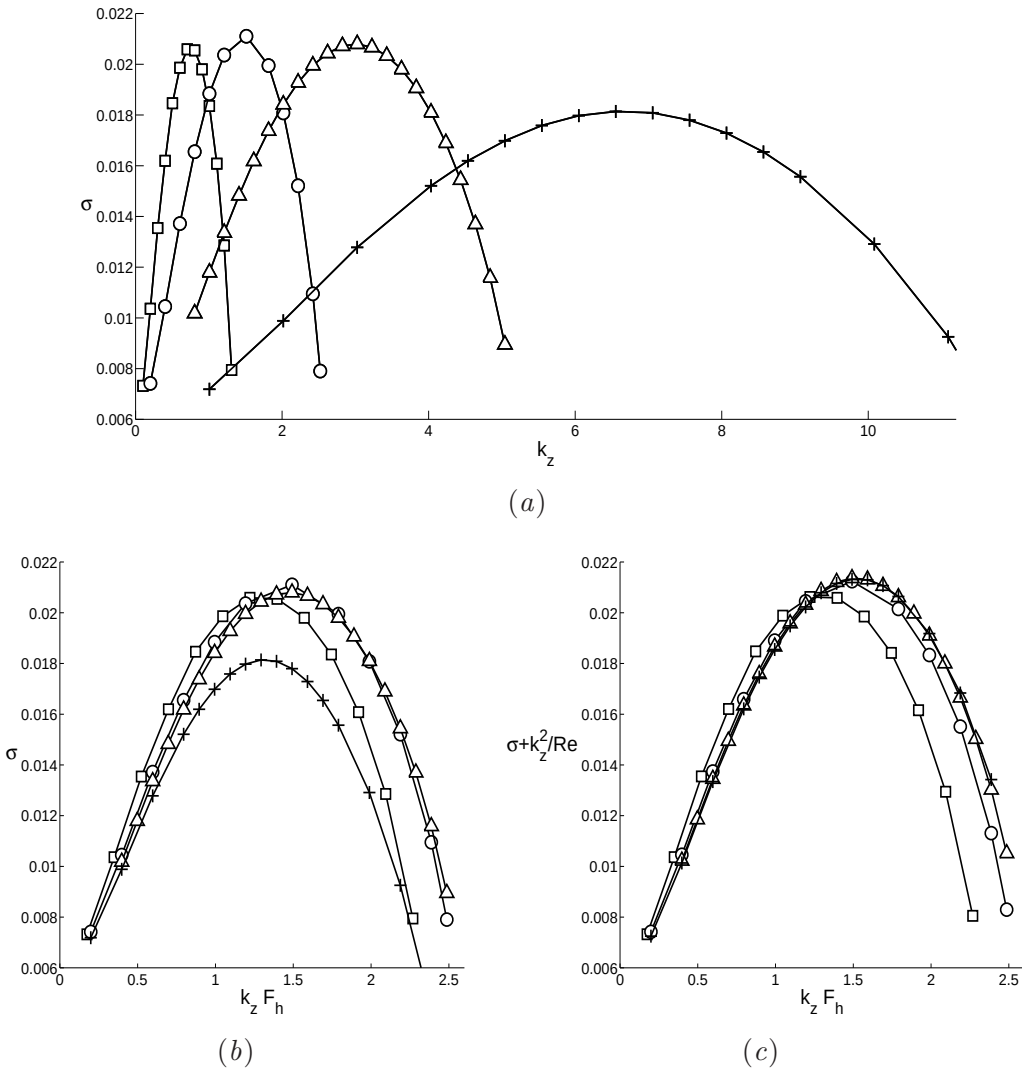


FIG. 3.9 – Plots of the growth rate of the zigzag instability for different low Froude numbers as a function of (a) the vertical wavenumber k_z, (b) the vertical wavenumber rescaled by the horizontal Froude number k_zF_h. In (c), the growth rate has been compensated for the viscous damping and plotted against k_zF_h. The symbols are : $(\square)$ $F_h = 1.7$, $(\circ)$ $F_h = 1$, $(\triangle)$ $F_h = 0.5$ and $(+)$ $F_h = 0.2$. The Reynolds number is $Re = 16000$.

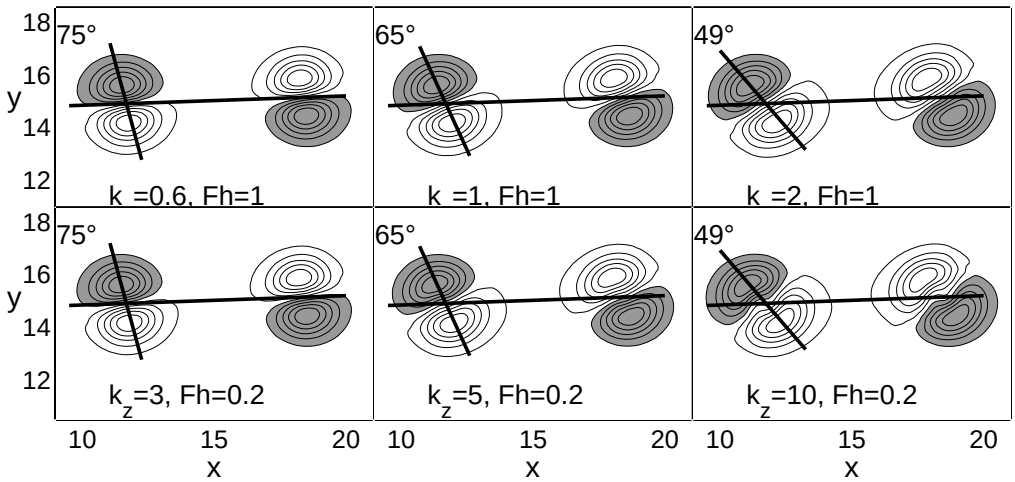


FIG. 3.10 – Evolution of the vertical vorticity of the eigenmode for two Froude numbers $F_h = 0.2$ and $F_h = 1$ and various wavenumbers such that $k_z F_h$ is equal to 0.6, 1 and 2 respectively in the first, second and third column. The Reynolds number is kept equal to 16000. The orientation of the dipolar shape in the left vortex and the line joining the centers of the basic vortices are shown by solid lines. The angle between these two lines are noted on the top left corner of each plot.

3.5 Effects of the Reynolds number and of the ratio α_b on the zigzag instability

3.5.1 The effect of the Reynolds number

Figure 3.11a shows the effect of the Reynolds number on the zigzag instability for a moderate Froude number $F_h = 1$. The maximum growth rate and its corresponding wavenumber decrease as the Reynolds number decreases. In particular, the maximum growth rate is reduced by a factor of two when the Reynolds number is decreased from $Re = 500$ to $Re = 100$. The most unstable wavenumber also decreases slightly. If, as done in figure 3.9, we compensate the growth rate by the vertical viscous diffusion $\sigma + \dfrac{k_z^2}{Re}$ (figure 3.11b), the three curves collapse satisfactorily showing that the zigzag instability is mainly affected by vertical viscous diffusion even for this moderate value of the Froude number.

3.5.2 The effect of the ratio $\alpha_b = a_b/b_b$.

Figure 3.12a displays the growth rate of the zigzag instability for $Re = 16000$ for different ratios between the vortices core size and their separation distance α_b of the basic state. The Brunt-Väisälä frequency is kept constant. Since a_b varies, the Froude number also varies in the range [0.55,1]. A single bell-shaped curve is observed for each ratio α_b with a maximum growth rate σ_m and a most amplified rescaled wavenumber $k_{zm}F_h$ which both increase when α_b increases.

Figure 3.12b shows the growth rate of the zigzag instability rescaled by α_b^2 as a function

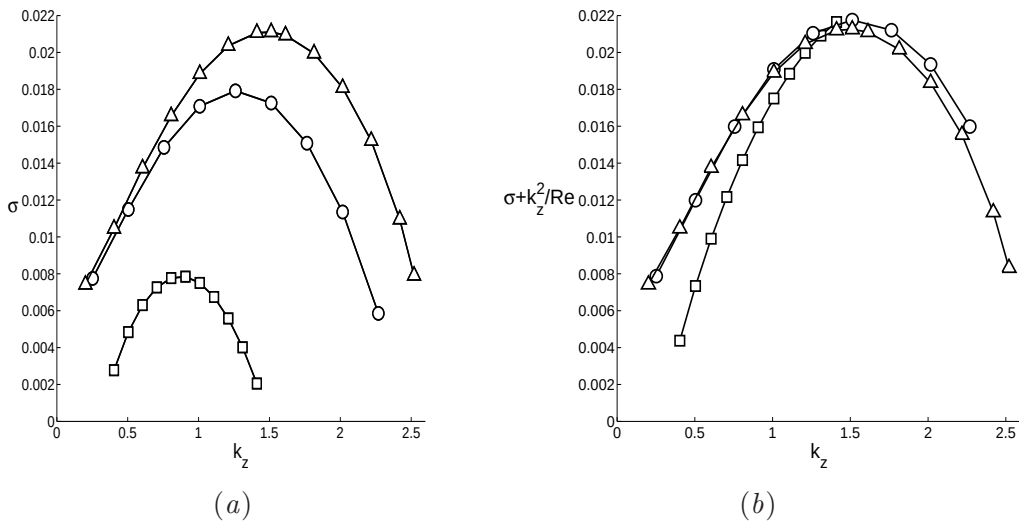
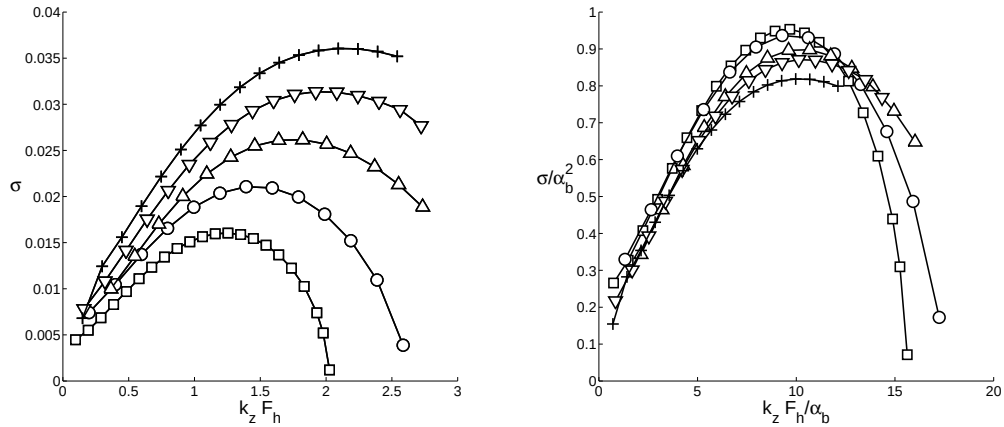


FIG. 3.11 – Plots of the growth rate of the zigzag instability for different Reynolds numbers : (a) growth rate as a function of k_z, (b) growth rate compensated for viscous damping against k_z. The symbols are : $(\square)$ $Re = 100$, $(\circ)$ $Re = 500$ and $(\triangle)$ $Re = 16000$. The Froude number is $F_h = 1$.

of the wavenumber rescaled by F_h/α_b. We observe that the curves essentially collapse on a single curve demonstrating that the growth rate scales as α_b^2 while the most unstable wavenumber scales as α_b/F_h. The growth rate of the zigzag instability scales like the strain $S = \alpha_b^2/2$ similarly to the elliptic instability (Tsai & Widnall 1976 ; Pierrehumbert 1986) and the Crow instability (Crow, 1970) of a counter-rotating vortex pair. The most unstable wavenumber of the zigzag instability increases like α_b meaning that its wavelength scales on the distance b_b between the two vortices since k_z was non-dimensionalized by a_b. This is similar to the Crow (Crow, 1970) instability and in sharp contrast to the elliptic instability for which the wavelength scales on the vortex radius a_b and is independent of the distance b_b. These scaling properties will be explained by an asymptotic analysis in the spirit of Billant & Chomaz (2000b) in a forthcoming article.

3.6 Summary and conclusions

A pair of co-rotating vertical vortices in a stratified fluid is subjected to distinct three-dimensional instabilities depending on the Froude number. For $F_h > 10$, the celebrated elliptic instability is observed. Strikingly, its growth rate decreases more abruptly than predicted for an unbounded and uniform elliptical vortex (Kerswell, 2002). A possible explanation is that the waves participating in the elliptic instability for a gaussian vortex have a singularity and are damped in the presence of stratification.
For $F_h < 2.85$, a new three-dimensional instability has been found. The numerical stability analysis shows that this instability bends the vortices like the zigzag instability reported by Billant & Chomaz (2000a) on a counter-rotating vortex pair in a stratified fluid. In the



(*a*) (*b*)

FIG. 3.12 – Plots of the growth rate of the zigzag instability for various values of α_b : (*a*) growth rate against wavenumber times F_h, (*b*) rescaled growth rate σ/α_b^2 against rescaled wavenumber $k_z F_h/\alpha_b$. The symbols are : (□) $\alpha_b = 0.13$, $F_h = 0.93$; (○) $\alpha_b = 0.15$, $F_h = 1$; (△) $\alpha_b = 0.17$, $F_h = 0.83$; (▽) $\alpha_b = 0.19$, $F_h = 0.63$ and (+) $\alpha_b = 0.21$, $F_h = 0.55$. The Reynolds number is $Re = 16000$.

present case, the shape of the eigenmode shows that the instability consists of an oblique translation of each vortex in opposite direction. This motion may be decomposed into a rotation as a whole of the vortex pair and a variation of the distance between the vortex centers. This instability may modify the vortex merging since at every half wavelength the vortices are alternatively brought closer, accelerating the merging, and moved apart, delaying the merging.

For a given value of the ratio α_b, we have shown that the wavelength of the zigzag instability is proportional to the Froude number while its growth rate is independent of F_h. Alternatively, for different ratios α_b, we have found that the wavelength of the zigzag instability scales as F_h/α_b while its growth rate scales as α_b^2. The dimensional vertical wavelength selected by the zigzag instability is therefore proportional to $F_h b_b$, which corresponds to the buoyancy length $L_B = \Gamma/\pi a N$ multiplied by b_b/a_b. It decreases for increasing stratification. The maximum dimensional growth rate is proportional to the strain $\Gamma_b/2\pi b_b^2$, i.e. independent of N as in the case of two counter-rotating vortices (Billant & Chomaz, 2000*c*). It is worth emphasizing that its maximum growth rate is slightly larger than the one of the elliptic instability in a non-stratified fluid.

Under the assumption that the vertical length scale is large compared to the buoyancy length scale L_B, strongly stratified flows are often thought to behave as two-dimensional flows (Riley *et al.* 1981 ; Lilly (1983) ; Riley & Lelong 2000). But since the vertical scale selected by the zigzag instability is of the order of the buoyancy length, the assumption at the root of the two-dimensional paradigm is not tenable. On the contrary, the present result confirms that stratified flows have a fully three-dimensional dynamics (Billant & Chomaz 2001 ; Lindborg 2002).

1	2	3	4	5
Ref. case	$\Delta t = 0.005$	$M_x = M_y = 512$	$L_x = L_y = 60$	$\Omega_b = \Omega_0$
$\sigma = 0.01883$	$\sigma = 0.01887$	$\sigma = 0.01888$	$\sigma = 0.01815$	$\sigma = 0.01921$

Tab. 3.1 – Check of the computational accuracy of the growth rate with respect to the numerical parameters for the same physical parameters $k_z = 1$, $\alpha_b = 0.15$, $Re = 16000$, $F_h = 1$. See the text for detailed explanations.

The existence of the zigzag instability on both co-rotating and counter-rotating vortex pairs suggests that it is a generic instability which may affect stratified flows containing at least two vortices. This instability could explain why stratified turbulence (Herring & Métais 1989 ; Fincham *et al.* 1996 ; Riley & Lelong 2000 ; Godeferd & Staquet 2003 ; Waite & Bartello 2004) and more generally geophysical turbulence (Dugan 1984 ; Gregg 1987 ; Dalaudier *et al.* 1994 ; Lindborg 2002) exhibit a layered structure. Interestingly, stratified flows experiments (Park *et al.* 1994 ; Holford & Linden 1999) and numerical simulations (Waite & Bartello 2004 ; Lindborg 2004) initially coherent on the vertical exhibit layers with a thickness of the order of the buoyancy length in agreement with the scaling law of the wavelength of the zigzag instability. However, it remains to confirm that the zigzag instability is the mechanism which imposes this scaling law.

Acknowledgements
We wish to thank gratefully Colm-cille Caulfield and Carlo Cossu for fruitful discussions and Daniel Guy for technical assistance. This work is supported by IDRIS (CNRS) for computational facilities under project No.41722.

3.7 Annexe A : Computational accuracy

In order to check the accuracy and convergence of the numerical results, we consider as a reference the parameter set : $M_x = M_y = 256$, $L_x = L_y = 30$, $\delta t = 0.01$, $a_0 = 1$, $b_0 = 6.75$ (we recall that the subscript 0 denotes the initial parameters of the two-dimensional simulation), $\alpha_b = 0.15$, $k_z = 1$, $Re = 16000$, $F_h = 1$. With these parameters, the growth rate has been found to be $\sigma = 0.01883$.

We have performed several tests to check the accuracy and the convergence of this result as listed in table 3.1. Dividing the time step Δt by 2 (column 2), or doubling the number of collocation points M_x, M_y (column 3) changes the value of the growth rate by less than 1%.

Table 3.1 (column 4) shows that widening the domain to $L_x = L_y = 60$ keeping the same resolution has a little more influence and changes by about 3% the growth rate value. Similarly, cropping the basic state computed in the box $L_x = L_y = 60$ to a $L_x = L_y = 30$ box for the three-dimensional simulation changes the value of the growth rate by about 3%. Since perturbations are usually localized in the core of the vortices and are associated to short range velocity perturbation, this reduction of the domain for the three-dimensional stability computation has little impact.

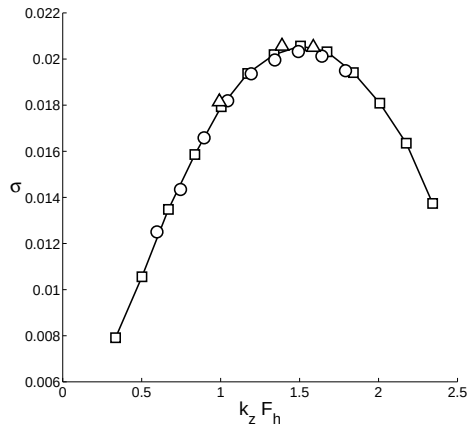


FIG. 3.13 – Plots of the growth rate as a function of the wavenumber times F_h for various initial distances between the vortices ($\triangle$) $b_0 = 6.75$, $F_h = 1$; ($\square$) $b_0 = 8$, $F_h = 0.7$ and ($\circ$) $b_0 = 9$, $F_h = 0.55$. The other parameters are kept constant : $M_x = M_y = 512$, $L_x = L_y = 60$, $\alpha_b = 0.15$, $Re = 16000$.

In order to make the basic state quasi-steady, the angular velocity of the two vortices around each other has been determined as explained in section 3.2.2. Column 5 of table 3.1 shows that even if we volontarily decrease the rotation rate Ω_b by 2%, i.e. to the rotation rate at the beginning of the two-dimensional simulation Ω_0, the instability growth rate varies only by 2%. The adjustment between the initial rotation rate Ω_0 and the actual rotation rate Ω_b is therefore important but not critical for the precision achieved.

Morever, the influence of the initial distance between the two vortices b_0 has been investigated for different basic states with the same value of α_b ($\alpha_b = 0.15$) but taken at different times shown by a filled circle in figure 3.2. Figure 3.13 shows that the growth rate is independent to a remarkable extent of the initial distance b_0. This indirectly confirms that the two-dimensional basic state depends only on α_b and can be generated by two-dimensional simulations initialized by different α_0 (Sipp *et al.* 2000 ; Le Dizès & Verga 2002).

Chapitre 4

Analyse asymptotique de l'instabilité zigzag

Ce chapitre présente un article en préparation pour le *Journal of Fluid Mechanics* : Theoretical analysis of the zigzag instability of a vertical co-rotating vortex pair in a stratified fluid.

L'étude asymptotique de la stabilité linéaire de deux tourbillons co-rotatifs est effectuée à l'aide d'un développement multi-échelle, dans l'approximation de tourbillons très éloignés et de petits nombres de Froude. Le fluide est supposé non visqueux et nous utilisons l'adimensionnement des équations d'Euler en milieu stratifié introduit par Riley *et al.* (1981). Nous montrons que l'origine physique de l'instabilité zigzag découverte au chapitre 3 est un couplage entre le mode de déplacement d'un tourbillon et le champ d'étirement externe $S = \Gamma/2\pi b^2$ (où Γ est la circulation des tourbillons et b la distance qui les sépare) généré par l'autre tourbillon. Cette analyse asymptotique prédit un taux de croissance dimensionnel σ_a :

$$\sigma_a^2 = -\frac{2\Gamma^2}{\pi^2 b^2} D_0 (F_h k_z)^2 - {D_0}^2 \frac{\Gamma^2}{\pi^2} (F_h k_z)^4 \tag{4.1}$$

où D_0 est une constante négative, F_h est le nombre de Froude horizontal, et k_z le nombre d'onde vertical. Le maximum du taux de croissance est donc égal à deux fois le champ d'étirement externe S et le nombre d'onde le plus instable k_{zm} est proportionnel à $1/F_h b$. Les prédictions de cette analyse asymptotique ont été comparées aux résultats de l'étude numérique présentée au chapitre 3 et un excellent accord a été mis en évidence aussi bien en ce qui concerne la valeur du taux de croissance que la forme du mode instable.

Theoretical analysis of the zigzag instability of a vertical co-rotating vortex pair in a stratified fluid

By PANTXIKA OTHEGUY, PAUL BILLANT and JEAN-MARC CHOMAZ
LadHyX, CNRS - École Polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex, France
(in preparation)

Abstract

A long-wavelength stability analysis of two co-rotating gaussian vertical vortices in an inviscid strongly stratified fluid is conducted for vortices separated by a large distance b compared to their radius a ($b \gg a$). This analysis recovers and explains the zigzag instability found by a numerical stability analysis in a companion paper (Otheguy, Chomaz & Billant 2005*b*). The zigzag instability results from the coupling between the bending perturbations of each vortex and the external strain that one vortex induces on the other $S = \Gamma/2\pi b^2$, where Γ is the circulation of the vortices. The analysis predicts that the maximum growth rate of the instability is twice the strain S and that the most unstable vertical wavelength λ scales as the buoyancy length defined by $L_B = \Gamma/\pi a N$ multiplied by the ratio b/a, i.e. $\lambda \propto F_h b$, where $F_h = \Gamma/\pi a^2 N$ is the horizontal Froude number. The asymptotic results are in very good agreement with the numerical results obtained by Otheguy, Chomaz & Billant (2005*b*).

4.1 Introduction

Strong stratification inhibits vertical motions so that the velocity field in stably stratified flows is mainly horizontal (Riley, Metcalfe & Weissman 1981, Lilly 1983). Two kind of motions remain possible : internal waves and horizontal advective motions. Many studies have shown that the latter motions take the form of layers or pancake vortices with a much larger lengthscale in the horizontal direction than in the vertical one (Herring & Métais 1989 ; Park, Whitehead & Gnanadeskian 1994 ; Fincham, Maxworthy & Spedding 1996 ; Spedding, Browand & Fincham 1996 ; Holford & Linden 1999 ; Riley & Lelong 2000 ; Bonnier, Eiff & Bonneton 2000 ; Billant & Chomaz 2000*a* ; Godeferd & Staquet 2003 ; Waite & Bartello 2004 ; Praud, Fincham & Sommeria 2005). Of particular interest is the vertical lengthscale that characterizes these vortices and these horizontal layers in order to know whether the dynamics is two-dimensional or not.

Most interestingly, stratified flows experiments (Park *et al.* 1994 ; Holford & Linden 1999 ; Billant & Chomaz 2000*a*) and numerical simulations (Waite & Bartello 2004 ; Lindborg 2004) initially coherent on the vertical exhibit layers with a thickness proportional to the buoyancy length. Billant & Chomaz (2001) have shown that this scaling law for the vertical lengthscale is universal for all strongly stratified flows. For this small vertical

lengthscale, the dynamics is not two-dimensional invalidating the assumption of Riley *et al.* (1981) and Lilly (1983).

In the particular case of two counter-rotating vertical vortices in a stratified fluid, Billant & Chomaz (2000*a*) discovered a three-dimensional instability, the zigzag instability, which explains how a vertically coherent stratified flow can develop spontaneously layers with a thickness of the order of the buoyancy lengthscale (Billant & Chomaz 2000*b*).

In order to show that the zigzag instability is a generic mechanism for the formation of layers, we have investigated numerically in a companion paper (Otheguy, Chomaz & Billant, 2005*b*) the linear stability of a pair of co-rotating vertical vortices in a stratified fluid. We have shown that the zigzag instability also affects such a base flow. Its growth rate scales as the external strain rate $S = \Gamma/2\pi b^2$ (where Γ is the circulation of the vortices and b the separation distance between the vortices) that each vortex induces on the other and the most unstable wavelength λ scales as the buoyancy length defined as $L_B = \Gamma/\pi a N$ multiplied by the ratio b/a, i.e. $\lambda \propto F_h b$ (where $F_h = \Gamma/\pi a^2 N$ is the horizontal Froude number, a the radius of the vortices and N the Brunt-Väisälä frequency).

In the present paper, we explain the physical mechanism of the zigzag instability and the scaling laws for its growth rate and wavelength by investigating theoretically the stability of two co-rotating vertical gaussian vortices in a strongly stratified fluid. In the spirit of the analysis of Billant & Chomaz (2000*b*) for a pair of counter-rotating vortices in a stratified fluid, we conduct an asymptotic stability analysis in the limit of small Froude numbers (horizontal F_h and vertical $F_v = \Gamma/\pi a L_v N$, where L_v is the vertical lengthscale) and small a/b. The hypothesis that F_v is small corresponds to the assumption of a vertical wavelength large compared to the buoyancy length. The limit $F_v = 0$ leads to disconnected layers where the flow dynamics is two-dimensional so that the origin of the three-dimensional instability must be found in the non-zero F_v problem. In contrast, the fact that F_h is small means that the flow is strongly stratified : the buoyancy force is large compared to inertial forces on the vertical. We also assume that a/b is small because an exact two-dimensional solution of the Euler equation describing a co-rotating vortex pair is not known. The basic state is therefore computed asymptotically for vortices separated by a large distance b compared to their radius $a/b \ll 1$.

The paper is organized as follows. The stability problem is presented in §4.2. The asymptotic analysis is carried out in §4.3. This analysis leads to two phase equations whose stability is analysed in §4.4. A detailed comparison between the asymptotic results and the numerical results of Otheguy *et al.* (2005*b*) is presented in §4.5.

4.2 Stability problem

4.2.1 Governing equations

The flow is assumed to satisfy the Boussinesq approximation for the Euler equation, to be incompressible and to conserve density :

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_r}\boldsymbol{\nabla} p - g\frac{\rho}{\rho_r}\boldsymbol{e}_z, \tag{4.2a}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{4.2b}$$

$$\frac{D\rho_t}{Dt} = 0. \tag{4.2c}$$

where $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$ is the velocity vector in Cartesian coordinates (x, y, z), p the pressure, g the gravity, $\boldsymbol{e}_z$ the unit vector pointing upward. ρ_t is the total density of the flow expressed as the sum of a constant reference density ρ_r, a linear mean density profile $\bar{\rho}(z)$ and the perturbation density $\rho(\boldsymbol{x}, t)$:

$$\rho_t(\boldsymbol{x}, t) = \rho_r + \bar{\rho}(z) + \rho(\boldsymbol{x}, t), \tag{4.3}$$

4.2.2 Basic state

We consider as basic state a pair of co-rotating vertical vortices separated by a distance b (figure 4.1) and where each vortex is taken as a Lamb-Oseen vortex of circulation Γ and radius a. In the following, horizontal length and time are non-dimensionalized by a and $\tau = \pi a^2/\Gamma$ respectively. Thus, the non-dimensional separation distance is $\Lambda = b/a$ and the non-dimensional vertical vorticity of each vortex (for example vortex 2) is

$$\omega = e^{-r^2} \tag{4.4}$$

where r is the non-dimensional radial distance in the local cylindrical coordinates (r,θ) with origin at the center of vortex 2 (figure 4.1). The corresponding velocity field of the second vortex is

$$\boldsymbol{U} = v_\theta(r)\boldsymbol{e_\theta} \tag{4.5}$$

where

$$v_\theta = \frac{1}{2r}\left(1 - e^{-r^2}\right) \tag{4.6}$$

and $\boldsymbol{e_\theta}$ is the azimuthal unit vector. A single Lamb-Oseen vortex is an exact solution of the two-dimensional Euler equation but the sum of two vortices is no longer an exact solution because each vortex feels the non-uniform velocity field induced by the other. However, if the separation distance is large compared to vortex radius (if Λ is large), the velocity field induced by the vortex 2 on the vortex 1 is at leading orders

$$U_2 = -\frac{1}{2\Lambda}\boldsymbol{e_y} - \frac{1}{2\Lambda^2}\left[x\boldsymbol{e_y} + y\boldsymbol{e_x}\right] + O\left(\frac{x^2}{\Lambda^3}, \frac{y^2}{\Lambda^3}, \frac{xy}{\Lambda^3}\right) \tag{4.7}$$

where (x,y) are the local cartesian coordinates with origin at the center of the vortex 1 and with the unit vector $\boldsymbol{e_x}$ aligned along the line joining the two vortex centers (figure 4.1). At leading order, the vortex 1 is therefore advected at the constant velocity $-1/2\Lambda\boldsymbol{e_y}$ and since the two vortices are chosen of equal circulation, the vortex 2 is advected at velocity $1/2\Lambda\boldsymbol{e_y}$ by the vortex 1. Thus the vortex pair rotates uniformly at the angular velocity $\Omega = 1/\Lambda^2$ around the middle point O between the two vortex centers. Therefore, at leading order in $1/\Lambda$, a vortex pair constituted by two axisymmetric gaussian vortices is a steady solution of the Euler equation in the frame of reference rotating at the angular velocity Ω. At next order $O(1/\Lambda^2)$, the velocity field exerted by the companion vortex is non-uniform : $-1/2\Lambda^2\left(x\boldsymbol{e_y} + y\boldsymbol{e_x}\right)$ and corresponds to a uniform external strain field $S = 1/2\Lambda^2$. Moore & Saffman (1975), Moffatt, Kida & Ohkitani (1994), Eloy & Le Dizès (1999), Le Dizès

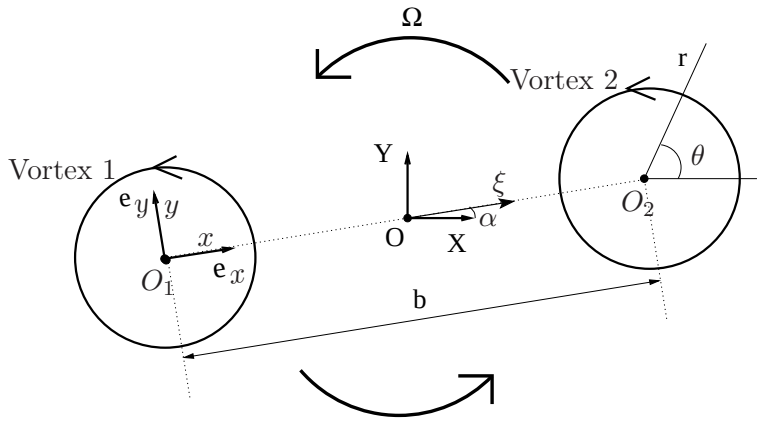


FIG. 4.1 – Sketch of the two co-rotating vortices with the different coordinate systems used.

& Laporte (2002) have shown that an axisymmetric vortex under the influence of such a uniform strain field is deformed elliptically but remains a steady solution of the Euler equation. The interaction between strain and vorticity leads to an amplification of the strain in the vortex core (so-called internal strain rate) but the core vorticity is not modified. In the case of a gaussian vortex in a non-rotating reference frame, the internal strain rate is 2.52 times the external strain $S = 1/2\Lambda^2$ (Eloy & Le Dizès, 1999).

We shall not describe further the order $1/\Lambda^2$ because its detailed solution will not be necessary in the following analysis. The important point to remember is only that two co-rotating gaussian vortices separated by a sufficiently large distance Λ adapt to each other to give a steady basic state in the reference frame rotating with the vortex pair at the angular velocity $\Omega = 1/\Lambda^2$. In this frame, the velocity field of the basic state can be written :

$$\boldsymbol{U}_b = \boldsymbol{U}_{b1} + \boldsymbol{U}_{b2} - \frac{\xi}{\Lambda^2}\boldsymbol{e}_\alpha \tag{4.8}$$

where the last term is the velocity due to the rotation of the reference frame with (ξ, α) the cylindrical coordinates centered on O (figure 4.1). $\boldsymbol{U}_{bi}$ corresponds to the velocity field of vortex i ($i = 1, 2$) adapted to the strain of the other vortex, i.e.

$$\boldsymbol{U}_{bi} = \boldsymbol{U}_{ai} + \frac{1}{\Lambda^2}\boldsymbol{U}_{ei} \tag{4.9}$$

where $\boldsymbol{U}_{ai}$ is the axisymmetric velocity field of a single Lamb-Oseen vortex as given by (4.5) and $\boldsymbol{U}_{ei}$ is the velocity due to the adaptation of this vortex to the strain induced by the companion vortex. The latter velocity vanishes rapidly outside the vortex core (Le Dizès & Laporte 2002, Eloy & Le Dizès 1999). We will see that this velocity $\boldsymbol{U}_{ei}$ plays no role in the zigzag instability in contrast to the elliptic instability.

Since the basic flow $\boldsymbol{U}_b$ is two-dimensional , it is convenient to introduce a streamfunction ψ_b such that $\boldsymbol{U}_b = -\boldsymbol{\nabla} \times (\psi_b \boldsymbol{e}_z)$. Even if its exact expression is not known, the family of basic flows considered in the present paper can be therefore written formally

$$\psi_b(\xi, \alpha, \Lambda) \tag{4.10}$$

where the separation distance Λ is a parameter describing continuously the family of solutions. This basic flow is steady and therefore satisfy the vertical vorticity equation

$$J(\psi_b, \Delta\psi_b) = \frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi_b}{\partial\xi}\frac{\partial\Delta\psi_b}{\partial\alpha} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi_b}{\partial\alpha}\frac{\partial\Delta\psi_b}{\partial\xi} = 0 \tag{4.11}$$

where J denotes the Jacobian.

4.2.3 Scaling analysis

The scaling analysis of Riley *et al.* (1981) for stratified vortical flows leads to the following non-dimensional equations when buoyancy effects are dominant in the reference frame rotating at rate Ω :

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial t} + [\boldsymbol{\nabla}_h \boldsymbol{u}_h] \cdot \boldsymbol{u}_h + F_v^2 u_z \frac{\partial \boldsymbol{u}_h}{\partial z} + 2\Omega \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{u}_h = -\boldsymbol{\nabla}_h p, \tag{4.12a}$$

$$F_h^2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + [\boldsymbol{\nabla}_h u_z] \cdot \boldsymbol{u}_h + F_v^2 u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho, \tag{4.12b}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \boldsymbol{u}_h + F_v^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{4.12c}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [\boldsymbol{\nabla}_h \rho] \cdot \boldsymbol{u}_h + F_v^2 u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} - u_z = 0. \tag{4.12d}$$

where the same notation has been kept for non-dimensional variables. As stated previously, time has been non-dimensionalized by the inverse of the maximum vorticity of the basic state $\tau = \pi a^2/\Gamma$, horizontal length by the vortex radius a. The vertical length is non-dimensionalized by L_v, horizontal velocities by $\Gamma/\pi a$, vertical velocity by $\Gamma^3/\pi^3 a^4 L_v N^2$, pressure by $\rho_r \left(\Gamma/\pi a\right)^2$ and density perturbation by $\rho_r \Gamma^2/g\pi^2 a^2 L_v$. $N = \sqrt{-(g/\rho_r) d\bar{\rho}/dz}$ is the Brunt-Väisälä frequency. $\boldsymbol{u}_h$ and $\boldsymbol{\nabla}_h$ are the horizontal components of $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{\nabla}$. The horizontal Froude number $F_h = \Gamma/\pi a^2 N$ compares the effects of inertial forces with buoyancy forces or alternatively, the time scale of internal gravity waves $1/N$ with the time scale of advective motions τ. The vertical Froude number $F_v = \Gamma/\pi a L_v N$ compares the buoyancy length $\Gamma/\pi a N$ to the vertical scale L_v. It is important to note that F_h and F_v can be small independently. In the limit $F_h = 0$, the vertical momentum equation (4.12b) reduces to the hydrostatic equilibrium. In the limit $F_v = 0$, the equations (4.12a, 4.12c) become the two-dimensional Euler equations.

4.2.4 Linearized equations

Equations (4.12) are linearized around the two-dimensional basic state (4.8) :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_h}{\partial t} + [\boldsymbol{\nabla}_h \tilde{\boldsymbol{u}}_h] \cdot \boldsymbol{U}_b + [\boldsymbol{\nabla}_h \boldsymbol{U}_b] \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_h + 2\Omega \boldsymbol{e}_z \times \tilde{\boldsymbol{u}}_h = -\boldsymbol{\nabla}_h \tilde{p}, \tag{4.13a}$$

$$F_h^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_h \tilde{u}_z \cdot \boldsymbol{U}_b \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - \tilde{\rho}, \tag{4.13b}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_h + F_v^2 \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z} = 0, \tag{4.13c}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}_h \tilde{\rho} \cdot \boldsymbol{U}_b - \tilde{u}_z = 0. \tag{4.13d}$$

where infinitesimal perturbations are denoted by tilde.

4.3 Asymptotic problem

4.3.1 Formulation of the asymptotic problem

In order to solve asymptotically the linearized equations (4.13), we write the perturbation as an expansion in the vertical Froude number F_v :

$$(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{p}, \tilde{\rho}) = (\tilde{\boldsymbol{u}}_0, \tilde{p}_0, \tilde{\rho}_0) + {F_v}^2 (\tilde{\boldsymbol{u}}_2, \tilde{p}_2, \tilde{\rho}_2) + ... \tag{4.14}$$

and each order is further expanded in $1/\Lambda^2$:

$$\begin{aligned} (\tilde{\boldsymbol{u}}_0, \tilde{p}_0, \tilde{\rho}_0) &= (\tilde{\boldsymbol{u}}_{00}, \tilde{p}_{00}, \tilde{\rho}_{00}) + \frac{1}{\Lambda^2} (\tilde{\boldsymbol{u}}_{02}, \tilde{p}_{02}, \tilde{\rho}_{02}) + ... \\ (\tilde{\boldsymbol{u}}_2, \tilde{p}_2, \tilde{\rho}_2) &= (\tilde{\boldsymbol{u}}_{20}, \tilde{p}_{20}, \tilde{\rho}_{20}) + \frac{1}{\Lambda^2} (\tilde{\boldsymbol{u}}_{22}, \tilde{p}_{22}, \tilde{\rho}_{22}) + ... \end{aligned} \tag{4.15}$$

because the basic state is known only as an expansion in $1/\Lambda$. We shall see that the instability imposes the scaling $F_v = O(1/\Lambda)$ and that the order $O(F_v^4)$ will not be necessary to describe the instability at leading orders. Therefore, it is also not necessary to determine the orders $O(1/\Lambda^4, F_v^2/\Lambda^2)$. Only the zeroth order, the orders ${F_v}^2$ and $1/\Lambda^2$ will be computed :

$$(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{p}, \tilde{\rho}) = (\tilde{\boldsymbol{u}}_{00}, \tilde{p}_{00}, \tilde{\rho}_{00}) + \frac{1}{\Lambda^2} (\tilde{\boldsymbol{u}}_{02}, \tilde{p}_{02}, \tilde{\rho}_{02}) + {F_v}^2 (\tilde{\boldsymbol{u}}_{20}, \tilde{p}_{20}, \tilde{\rho}_{20}) + O(\frac{{F_v}^2}{\Lambda^2}, {F_v}^4, \frac{1}{\Lambda^4}) \tag{4.16}$$

The time variable is expanded similarly with slow time scales t_{02} and t_{20} that can be treated as independent variables

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial}{\partial t_{02}} + {F_v}^2 \frac{\partial}{\partial t_{20}} + \dots . \tag{4.17}$$

We also consider that the horizontal Froude number is small and related to F_v by $F_h = \delta F_v$ where δ is a parameter that will be formally considered of order one in order to avoid a third expansion with the small parameter F_h.

4.3.2 Order F_v^0 problem

Even if the zeroth order perturbation in F_v, $\tilde{\boldsymbol{u}}_0$, has been further expanded in $1/\Lambda$ (see 4.14) we will determine $\tilde{\boldsymbol{u}}_0$ exactly in this section without using an expansion with the parameter $1/\Lambda$. Inserting the expansion (4.14) in the linearized equations (4.13) gives at leading order

$$\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_{h0}}{\partial t_{02}} + [\boldsymbol{\nabla}_h \tilde{\boldsymbol{u}}_{h0}] \cdot \boldsymbol{U}_b + [\boldsymbol{\nabla}_h \boldsymbol{U}_b] \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_{h0} + 2\Omega \boldsymbol{e}_z \times \tilde{\boldsymbol{u}}_{h0} = -\boldsymbol{\nabla}_h \tilde{p}_0, \tag{4.18a}$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial z} - \tilde{\rho}_0', \tag{4.18b}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_{h0} = 0, \tag{4.18c}$$

$$\frac{1}{\Lambda^2}\frac{\partial \tilde{\rho}_0}{\partial t_{02}} + \boldsymbol{\nabla}_h \tilde{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{U}_b - \tilde{u}_{z0} = 0. \tag{4.18d}$$

The horizontal momentum equations (4.18a) and (4.18c) are two-dimensional so that it is more convenient to introduce a streamfunction $\tilde{\psi}_0$ defined by $\tilde{\boldsymbol{u}}_{h0} = -\boldsymbol{\nabla} \times (\tilde{\psi}_0 \boldsymbol{e}_z)$ and to use the equation for the vertical vorticity $\Delta_h \tilde{\psi}_0$ by taking the curl of (4.18a)

$$\frac{1}{\Lambda^2}\frac{\partial}{\partial t_{02}}\Delta_h \tilde{\psi}_0 + J(\psi_b, \Delta_h \tilde{\psi}_0) + J(\tilde{\psi}_0, \Delta_h \psi_b) = 0 \tag{4.19}$$

We now choose the leading order perturbation $\tilde{\psi}_0$. As explained in Billant & Chomaz (2000*b*), several neutral modes exist associated to each of the invariances of the equation (4.19) and to each parameter describing continuously a family of basic states. In the present paper, we focus on the neutral modes deriving from the rotational invariance and from the invariance associated to the parameter Λ describing the family of co-rotating vortex pair solutions. The rotational invariance implies that if $\psi_b(\xi, \alpha, \Lambda)$ is a solution, then the same solution but rotated by a constant angle $\delta\alpha$, $\psi_b(\xi, \alpha - \delta\alpha, \Lambda)$, is also an exact and steady solution. For an infinitesimal rotation $\delta\alpha \ll 1$, a Taylor expansion gives

$$\psi_b(\xi, \alpha - \delta\alpha, \Lambda) = \psi_b(\xi, \alpha, \Lambda) - \delta\alpha \frac{\partial \psi_b}{\partial \alpha} \tag{4.20}$$

The last term is therefore a neutral perturbation corresponding to a small rotation of the basic state. The invariance linked to the parameter Λ implies that $\psi_b(\xi, \alpha, \Lambda(1+\delta\Lambda))$, where $\delta\Lambda$ is a constant, is also an exact solution. However, $\psi_b(\xi, \alpha, \Lambda(1+\delta\Lambda))$ will not be steady in the original frame of reference rotating at the angular velocity $\Omega = 1/\Lambda^2$ but rotates at the constant angular velocity $\delta\Omega = \dfrac{1}{\Lambda^2(\Lambda+\delta\Lambda)^2} - \dfrac{1}{\Lambda^2}$. This invariance is therefore coupled to the rotational invariance described above. Thus, we choose the leading order perturbation as

$$\tilde{\psi}_0 = -\delta\alpha(t_{02}, t_{20}, z)\frac{\partial}{\partial \alpha}(\psi_b + \frac{\xi^2}{2\Lambda^2}) + \Lambda\delta\Lambda(t_{02}, t_{20}, z)\frac{\partial}{\partial \Lambda}(\psi_b + \frac{\xi^2}{2\Lambda^2}) \tag{4.21}$$

The term $\xi^2/2\Lambda^2$ is added to ψ_b in (4.21) because only the flow due to the vortex pair is perturbed, not the flow resulting from the rotation of the reference frame at angular velocity $1/\Lambda^2$. The phase variables ($\delta\alpha$, $\delta\Lambda$) are functions of the slow times (t_{02}, t_{20}) and also of the vertical coordinate z because of the vertical decoupling of the equations of motion (4.18a, 4.18c) in the limit $F_v = 0$.

Inserting this perturbation in (4.19) leads to

$$-\frac{\partial \delta\alpha}{\partial t_{02}}\frac{\partial \Delta\psi_b}{\partial \alpha} + \Lambda\frac{\partial \delta\Lambda}{\partial t_{02}}\frac{\partial \Delta\psi_b}{\partial \Lambda} - 2\delta\Lambda\frac{\partial \Delta\psi_b}{\partial \alpha} = 0 \tag{4.22}$$

where we have used the fact that $J(\dfrac{\partial \psi_b}{\partial \alpha}, \Delta\psi_b) + J(\psi_b, \dfrac{\partial \Delta\psi_b}{\partial \alpha}) = 0$ and $J(\dfrac{\partial \psi_b}{\partial \Lambda}, \Delta\psi_b) + J(\psi_b, \dfrac{\partial \Delta\psi_b}{\partial \Lambda}) = 0$ since the basic flow ψ_b satisfies $J(\psi_b, \Delta\psi_b) = 0$. The leading order perturbation (4.21) is therefore a solution of (4.19) if ($\delta\alpha$, $\delta\Lambda$) satisfy the phase equations

$$\frac{\partial \delta\alpha}{\partial t_{02}} = -2\delta\Lambda \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial \delta\Lambda}{\partial t_{02}} = 0 \tag{4.24}$$

It is remarkable that the explicit expression of ψ_b has not been necessary to derive these phase equations. They simply describe the fact that if the separation distance between the two vortices Λ is slightly perturbed $\Lambda \to \Lambda(1+\delta\Lambda)$, then the vortex pair will rotate at velocity $\delta\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial\Lambda}\delta\Lambda = -\frac{2}{\Lambda^2}\delta\Lambda$ in the original frame of reference rotating at angular velocity $1/\Lambda^2$.

Using (4.21), we can now determine the pressure $\tilde{p}_0$ from (4.18a)

$$\tilde{p}_0 = -\delta\alpha\left[\frac{\partial p_b}{\partial\alpha} + \frac{2}{\Lambda^2}\frac{\partial\psi_b}{\partial\alpha}\right] + \Lambda\delta\Lambda\left[\frac{\partial p_b}{\partial\Lambda} - \frac{4}{\Lambda^3}\psi_b + \frac{2}{\Lambda^2}\frac{\partial\psi_b}{\partial\Lambda} - 2\frac{\xi^2}{\Lambda^5}\right] \tag{4.25}$$

where p_b is the pressure of the basic state. The density perturbation is then obtained from the hydrostatic balance (4.18b)

$$\tilde{\rho}_0 = \frac{\partial\delta\alpha}{\partial z}\left[\frac{\partial p_b}{\partial\alpha} + \frac{2}{\Lambda^2}\frac{\partial\psi_b}{\partial\alpha}\right] - \Lambda\frac{\partial\delta\Lambda}{\partial z}\left[\frac{\partial p_b}{\partial\Lambda} - \frac{4}{\Lambda^3}\psi_b + \frac{2}{\Lambda^2}\frac{\partial\psi_b}{\partial\Lambda} - 2\frac{\xi^2}{\Lambda^5}\right] \tag{4.26}$$

and the density equation (4.18d) gives the vertical velocity

$$\tilde{u}_{z0} = \frac{\partial\delta\alpha}{\partial z}J(\psi_b, \frac{\partial p_b}{\partial\alpha} + \frac{2}{\Lambda^2}\frac{\partial\psi_b}{\partial\alpha}) - \Lambda\frac{\partial\delta\Lambda}{\partial z}\left[J(\psi_b, \frac{\partial p_b}{\partial\Lambda} + \frac{2}{\Lambda^2}\frac{\partial\psi_b}{\partial\Lambda}) + \frac{2}{\Lambda^3}\left(\frac{\partial p_b}{\partial\alpha} + \frac{4}{\Lambda^2}\frac{\partial\psi_b}{\partial\alpha}\right)\right] \tag{4.27}$$

4.3.3 Order F_v^2 problem : determination of $\tilde{\boldsymbol{u}}_{20}$

We now consider the order F_v^2. As explained previously, the second order perturbations in F_v are further expanded in $1/\Lambda^2$. Here, we need to determine only the leading order solution $(\tilde{\boldsymbol{u}}_{20}, \tilde{p}_{20}, \tilde{\rho}_{20})$ because the next order F_v^2/Λ^2 is in fact $O(F_v^4)$ since the instability will finally impose the scaling $1/\Lambda = O(F_v)$. To determine $(\tilde{\boldsymbol{u}}_{20}, \tilde{p}_{20}, \tilde{\rho}_{20})$, we need to take into account only the limits of the leading order perturbation $(\tilde{\boldsymbol{u}}_0, \tilde{p}_0, \tilde{\rho}_0)$ and the basic state $\boldsymbol{U}_b$ for $\Lambda \to \infty$, that is to say when the two vortices are separated by an infinite distance. In this limit, if we are for example in the neightbourhood of the vortex 2 (figure 4.2), the basic flow $\boldsymbol{U}_b$ becomes

$$\boldsymbol{U}_b = \boldsymbol{U}_{a2} + O(\frac{1}{\Lambda^2}) \tag{4.28}$$

where we recall that $\boldsymbol{U}_{a2}$ is the axisymmetric velocity profile of the Lamb-Oseen vortex (4.5). The strain due to the vortex 1 and the adaptation of the vortex 2 to this strain are both of order $1/\Lambda^2$ and therefore negligible. In other words, the presence of the vortex 1 can be neglected to compute the order F_v^2/Λ^0 perturbation of the vortex 2 and conversely, near the vortex 1, we can neglect the presence of the vortex 2. Similarly, in the neighbourhood of the vortex 2, the leading order perturbation approximates to

$$\tilde{\psi}_0 = \tilde{\psi}_{00} + O(\frac{1}{\Lambda^2}) \tag{4.29}$$

with

$$\tilde{\psi}_{00} = -\frac{\Lambda}{2}\left[\delta\Lambda\frac{\partial\psi_{a2}}{\partial x} + \delta\alpha\frac{\partial\psi_{a2}}{\partial y}\right] \tag{4.30}$$

where ψ_{a2} is the streamfunction associated to $\boldsymbol{U}_{a2}$, i.e. $\boldsymbol{U}_{a2} = -\boldsymbol{\nabla}\times(\psi_{a2}\boldsymbol{e}_z)$. Thus, the perturbation of the vortex 2 at leading order consists in a small translation ($\beta_2 = \frac{\Lambda}{2}\delta\Lambda$, $\eta_2 = \frac{\Lambda}{2}\delta\alpha$) in the x and y directions modulated along the vertical coordinate. The rotational invariance and the invariance linked to the parameter Λ becomes in this limit equivalent to the translational invariances in the horizontal plane of a single axisymmetric vortex. The problem at order F_v^2/Λ^0 reduces therefore to the determination of a long-wavelength bending perturbation on a single axisymmetric vortex in a strongly stratified fluid. Note also that the background rotation is negligible since $\Omega = O(1/\Lambda^2)$. Because the two basic vortices are symmetric, it is sufficient to consider the bending perturbations (β_2, η_2) on the vortex 2, those on vortex 1 (β_1, η_1) can be simply obtained by symmetry (figure 4.2) :

$$\begin{cases} \beta_1 = -\frac{\Lambda}{2}\delta\Lambda = -\beta_2 \\ \eta_1 = -\frac{\Lambda}{2}\delta\alpha = -\eta_2 \end{cases} \tag{4.31}$$

Using the fact that $\psi_{a2} = \int v_\theta(r)dr$, $\tilde{\psi}_{00}$ can be simplified to

$$\tilde{\psi}_{00} = -\left[\beta_2\cos\theta + \eta_2\sin\theta\right]v_\theta \tag{4.32}$$

and the density perturbation (4.26) reduces to

$$\tilde{\rho}_{00} = \frac{v_\theta^2}{r}\left[\frac{\partial\beta_2}{\partial z}\cos\theta + \frac{\partial\eta_2}{\partial z}\sin\theta\right] \tag{4.33}$$

while the vertical velocity (4.27) becomes

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{z00} = \frac{v_\theta^3}{r^2}\left[-\frac{\partial\beta_2}{\partial z}\sin\theta + \frac{\partial\eta_2}{\partial z}\cos\theta\right] \tag{4.34}$$

The physical meaning of these equations is the following. Because of the vertical modulation of η_2 and β_2, the low pressure region located at the center of the vortex is no longer vertically straight. The pressure anomalies are compensated by isopycnal distortions as described by equation (4.33). A physical representation is given in figure 4.3 (a) for the case of a small unidirectional bend η in the y-direction. These deformations of the isopycnal surfaces generate a vertical velocity field given by (4.34). As represented in figure 4.3 (b), this vertical velocity can be interpreted physically by the fact that fluid particles as they rotate should follow the isopycnal surfaces in order to satisfy density conservation. Thus, they move up and down along the distortions of the isopycnal surfaces producing a vertical velocity field.

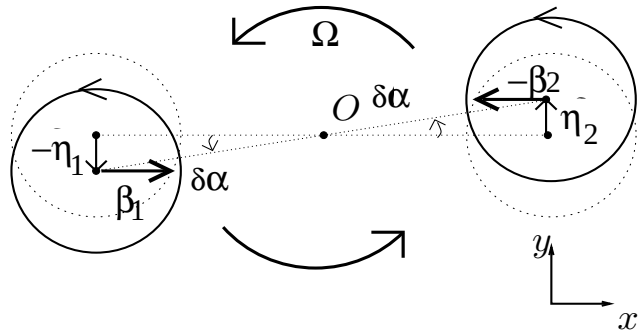


FIG. 4.2 – The vortex pair (dotted line) is perturbed by a small rotation $\delta\alpha$ (solid lines). Since $\delta\alpha$ is small, the perturbation is equivalent to a y-translation of the two vortices in opposite directions.

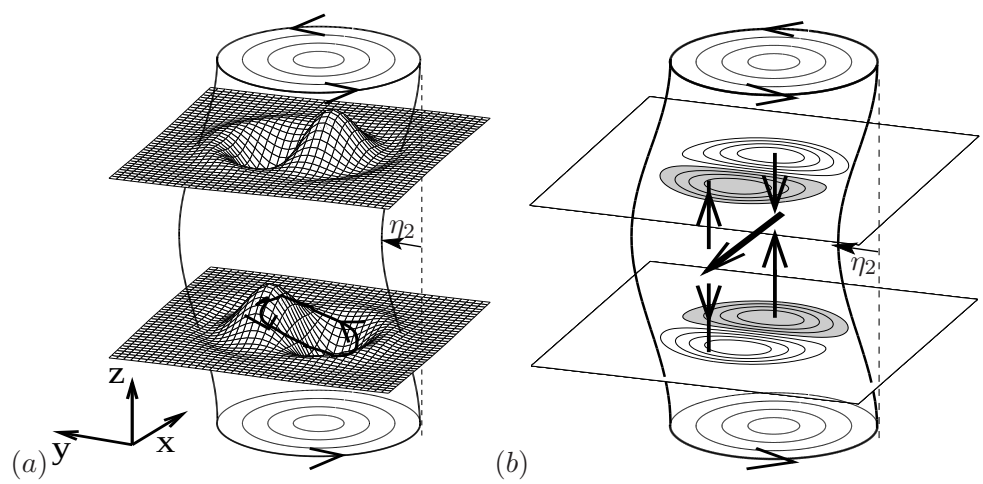


FIG. 4.3 – (a) Isopycnals given by (4.33) on either side of a sinusoidal bend η_2 in the y-direction of a single axisymmetric vortex (the perturbation β_2 in the x-direction is assumed equal to 0). The amplitude of the deformation has been exaggerated. The trajectory of a particle has been represented in plain line on the lower surface. (b) Contours of the vertical velocity $\tilde{u}_{z00}$ given by (4.34). Shaded regions indicate upward motions. The vertical arrows show the direction of the vertical velocity. This vertical velocity field induces a divergence on one side and a convergence on the other side. The larger horizontal arrow indicates the direction of the potential flow along the x axis that is generated at order F_v^2 in order to satisfy mass conservation. The vertical velocity also stretches and squeezes the basic state vertical vorticity. In order to conserve potential vorticity at $O(F_v^2)$, the vortex tends to be displaced also in the direction of the horizontal arrow.

Using (4.32-4.34), we can now determine the order F_v^2/Λ^0 for the vortex 2 :

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}_{h00}}{\partial t_{20}} + [\boldsymbol{\nabla}_h \tilde{\boldsymbol{u}}_{h20}] \cdot \boldsymbol{U}_{2a} + [\boldsymbol{\nabla}_h \boldsymbol{U}_{2a}] \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_{h20} = -\boldsymbol{\nabla}_h \tilde{p}_{20}, \tag{4.35a}$$

$$\delta^2 \left(\boldsymbol{\nabla}_h \tilde{u}_{z00} \cdot \boldsymbol{U}_{2a}\right) = -\frac{\partial \tilde{p}_{20}}{\partial z} - \tilde{\rho}_{20}, \tag{4.35b}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_{h20} + \frac{\partial \tilde{u}_{z00}}{\partial z} = 0, \tag{4.35c}$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_{00}}{\partial t_{20}} + \boldsymbol{\nabla}_h \tilde{\rho}_{20} \cdot \boldsymbol{U}_{2a} - \tilde{u}_{z20} = 0. \tag{4.35d}$$

where $\delta = F_h/F_v$. We notice that a forcing term appears in the divergence equation (4.35c) due to the leading order vertical velocity variation $\tilde{u}_{z00}$. This implies that an horizontal velocity field is generated at order ${F_v}^2$ in order to satisfy mass conservation.

In order to solve (4.35a) and (4.35c), we first decompose the horizontal velocity into rotational and potential components with a streamfunction ψ_{20} and a potential function χ_{20}

$$\tilde{\boldsymbol{u}}_{h20} = -\boldsymbol{\nabla} \times (\psi_{20} \boldsymbol{e}_z) + \boldsymbol{\nabla}_h \chi_{20}. \tag{4.36}$$

By inserting this Helmholtz decomposition in the divergence equation (4.35c), one obtains

$$\Delta_h \chi_{20} = -\frac{\partial \tilde{u}_{z00}}{\partial z} \tag{4.37}$$

with the boundary conditions that the velocity $\boldsymbol{\nabla}_h \chi_{20}$ vanishes at infinity and that $\frac{\partial^2 \chi_{20}}{\partial r^2}(0) = 0$. The latter condition imposes that the velocity $\boldsymbol{\nabla}_h \chi_{20}$ should be constant at $r = 0$ but not necessarily zero since the vortex center can move in the case of a displacement mode (Leibovich *et al.*, 1986). The solution is of the form :

$$\chi_{20} = \chi(r) \left(\cos\theta \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial z^2} - \sin\theta \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial z^2} \right) \tag{4.38}$$

where the function χ can be determined analytically

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{\exp(-3r^2)}{64r^3} \left(3r^2(-1+\exp(r^2))^2 - (-1+\exp(r^2))^3\right) + \frac{3}{32r} \ln(\frac{4}{3}) \\ & + \frac{3}{64r} \left((2+3r^2) Ei(-3r^2) - 4(1+r^2) Ei(-2r^2) + (2+r^2) Ei(-r^2)\right) \end{aligned} \tag{4.39}$$

where Ei is the exponential integral. The horizontal velocity $\boldsymbol{\nabla}_h \chi_{20}$ is shown on figure 4.3 (b) by an horizontal arrow. In order to satisfy mass conservation, this flow goes from the source to the sink created by the zeroth order vertical velocity $\tilde{u}_{z00}$.

We now take the curl of (4.35a) in order to eliminate the pressure and we insert the decomposition of the horizontal velocity (4.36)

$$L(\psi_{20}) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\theta}{r} \Delta_h \psi_{20} - \frac{1}{r} \psi_{20} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = -\boldsymbol{\nabla}_h \cdot (\omega \boldsymbol{\nabla}_h \chi_{20}) + \frac{\partial \omega}{\partial r} \left[\sin\theta \frac{\partial \eta_2}{\partial t_{20}} + \cos\theta \frac{\partial \beta_2}{\partial t_{20}} \right] \tag{4.40}$$

The Fredholm alternative tells us that this equation has a solution only if the right-hand side is orthogonal to the kernel of the adjoint $L^\dagger$ of the linear operator L. The adjoint $L^\dagger$ for the scalar product defined as

$$< f|g >= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} fgrdrd\theta \tag{4.41}$$

is given in appendix 4.7. Billant & Chomaz (2000*b*) have shown that the functions $f = r\sin\theta$, $g = r\cos\theta$ and any function $h(r)$ are part of the kernel of $L^\dagger$. This leads to two solvability conditions

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t_{20}} = D_0 \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial z^2} \tag{4.42}$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial t_{20}} = -D_0 \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial z^2} \tag{4.43}$$

where

$$D_0 = -\frac{< \boldsymbol{\nabla}_h \cdot (\omega \boldsymbol{\nabla}_h \chi \sin\theta) \, |r\sin\theta >}{< \dfrac{\partial \omega}{\partial r} \sin\theta | r\sin\theta >}. \tag{4.44}$$

After some simplifications, we have :

$$D_0 = \int_0^{\infty} r \frac{\partial \omega}{\partial r} \chi dr \tag{4.45}$$

that can be calculated exactly thanks to the exact expression (4.39) of χ

$$D_0 = \frac{7}{8} \ln 2 - \frac{9}{16} \ln 3 \approx -1.15 \; 10^{-2} \tag{4.46}$$

We notice that if we insert in (4.42-4.43) perturbations of the form

$$\begin{pmatrix} \eta_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_2 \\ \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix} e^{\sigma t_{20} + ikz}, \tag{4.47}$$

a purely imaginary growth rate σ is obtained

$$\sigma^2 = -{D_0}^2 k^2. \tag{4.48}$$

In other words, a single axisymmetric vortex in a strongly stratified fluid is neutral with respect to small translations in the long wavelength limit. In addition, it is worth mentioning that D_0 is negative. This means that the horizontal flow generated at order $O(F_v^2)$ tends to rotate the bending perturbation in the same sense of rotation as the basic vortex (as seen by the horizontal arrow on figure 4.3 *b*). This is similar to the case of the Rankine vortex (Billant *et al.* 2005).

Once the stability conditions (4.42-4.43) are satisfied, ψ_{20} can be determined from (4.40). This is carried out in appendix 4.8. The horizontal flow associated to ψ_{20} is in the same direction as the potential flow $\boldsymbol{\nabla}_h \chi_{20}$ (arrow on figure 4.3 *b*). The stretching and squeezing of the basic potential vorticity by the vertical velocity tends indeed to displace the bending

perturbation in the negative x direction in order to satisfy potential vorticity conservation (figure 4.3 b).

For large radius r, the potential χ_{20} and the streamfunction ψ_{20} behaves like $1/r$ implying that the associated velocity varies like $1/r^2$. Therefore, the second order perturbation $O(F_v^2/\Lambda^0)$ of one vortex has an effect $O(F_v^2/\Lambda^2)$ on the other vortex which is separated by distance Λ. This effect can be neglected at the level of approximation considered in the present paper justifying a posteriori that it was fully legitimate to consider an isolated vortex to determine the second order perturbation $O(F_v^2/\Lambda^0)$.

4.4 Stability analysis

The slow time scales t_{02} and t_{20} are now re-expressed in term of the fast time t :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\Lambda^2}\frac{\partial}{\partial t_{02}} + {F_v}^2\frac{\partial}{\partial t_{20}} + \dots . \tag{4.49}$$

Then, the equations (4.23-4.24) and (4.42-4.43) can be combined to give

$$\frac{\partial \delta\alpha}{\partial t} = -2\frac{\delta\Lambda}{\Lambda^2} + D_0 F_h^2 \frac{\partial^2 \delta\Lambda}{\partial \tilde{z}^2} + O(F_h^4, \frac{F_h^2}{\Lambda^2}) \tag{4.50}$$

$$\frac{\partial \delta\Lambda}{\partial t} = -D_0 F_h^2 \frac{\partial^2 \delta\alpha}{\partial \tilde{z}^2} + O(F_h^4, \frac{F_h^2}{\Lambda^2}) \tag{4.51}$$

where we have used the relation ($\beta_2 = \frac{\Lambda}{2}\delta\Lambda$, $\eta_2 = \frac{\Lambda}{2}\delta\alpha$) and where the vertical coordinate $\tilde{z}$ is now non-dimensionalized by the vortex radius so that $\tilde{z} = \frac{F_h}{F_v}z$ where z is the previous vertical coordinate non-dimensionalized by L_v. For this reason, the horizontal Froude number appears in (4.50-4.51) instead of the vertical Froude number.

Inserting a perturbation of the form $(\delta\alpha, \delta\Lambda) = (\delta\alpha_0, \delta\Lambda_0)e^{\sigma t + ik_z\tilde{z}}$ yields

$$\sigma^2 = -\frac{2}{\Lambda^2}D_0(F_h k_z)^2 - {D_0}^2(F_h k_z)^4 + O(F_h^6, \frac{F_h^2}{\Lambda^4}, \frac{F_h^4}{\Lambda^2}) \tag{4.52}$$

Quite strikingly, we see in equation (4.52) that there is an instability in the small wavenumber limit since D_0 is negative. The higher order term $O(F_h^4 k_z^4)$ is however negative and thus stabilizing. The dispersion is self-similar with respect to the variable $F_h k_z$ in agreement with Billant & Chomaz (2001). The maximum amplification $\sigma_m = 1/\Lambda^2$ (in dimensional form $\Gamma/\pi b^2$) is equal to twice the external strain $S = 1/2\Lambda^2$ independently of the Froude number F_h. It is reached for a finite wavenumber $k_m = \sqrt{-\frac{1}{D_0}}\frac{1}{F_h\Lambda}$ proportional to $1/F_h\Lambda$ meaning that the dimensional wavelength λ of the instability is proportional to the buoyancy length $\Gamma/\pi a N$ multiplied by the ratio b/a : $\lambda \propto F_h b$. This scaling implies that $k_z F_h = O(F_v) = O(1/\Lambda)$ confirming the hypothesis formulated in section 4.3.1.

The physical mechanism of the instability can be easily understood. As sketched on figure 4.2, a small perturbation of the orientation of the vortex pair ($\delta\alpha > 0$) implies a y-translation $\eta_1 = -\delta\alpha\frac{\Lambda}{2}$ of the vortex 1 and an opposite y-translation $\eta_2 = \delta\alpha\frac{\Lambda}{2}$ of the vortex 2. In the two-dimensional case, such perturbation is neutral because of the

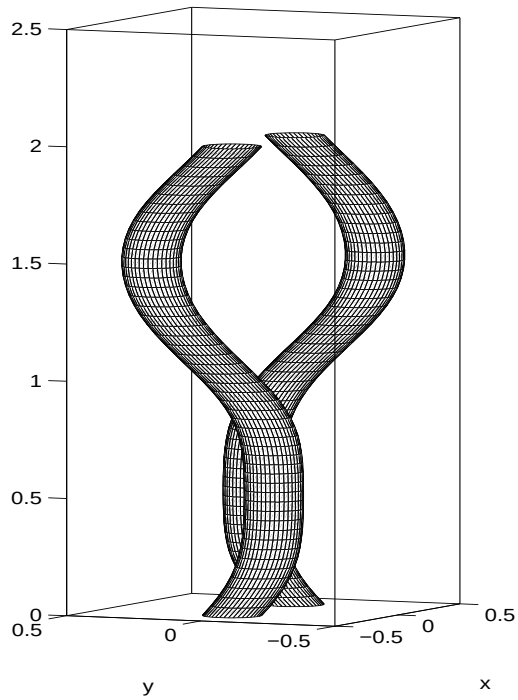


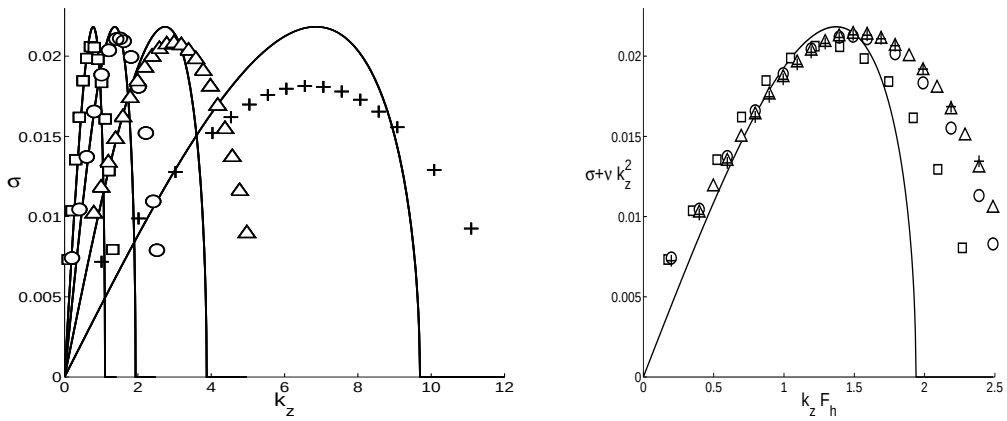
FIG. 4.4 – Shape of the bending deformations induced by the zigzag instability.

rotational invariance. However, according to (4.42-4.43), if η_1 and η_2, vary slowly with z, a positive translation η_2 in the y-direction of a vortex rotating in the positive sense generates by self-induction at order ${F_h}^2 k_z^2$ a displacement β_2 in the negative x-direction ($\beta_2 < 0$). By symmetry, a negative y-translation $\eta_1 < 0$ induces a displacement ($\beta_1 > 0$) in the positive x-direction. As seen on figure 4.2, the two vortices thus move closer ($\delta\Lambda < 0$) so that they will rotate faster around each other amplifying the initial perturbation $\delta\alpha$.
Conversely, a negative perturbation of the orientation of the vortex pair ($\delta\alpha < 0$) implies an increase of the distance between the vortices ($\delta\Lambda > 0$). They will therefore rotate slower increasing the initial phase shift $|\delta\alpha|$.

According to these results, the two vortices will move closer or move apart every half a wavelength along the vertical as sketched on figure 4.4. Thus, the vortex merging will be enhanced and delayed alternatively along the vertical.

4.5 Comparison between theoretical and numerical results

In this section, we compare the numerical results of the linear stability analysis of the zigzag instability (Otheguy *et al.*, 2005*b*) and the present asymptotic theory.



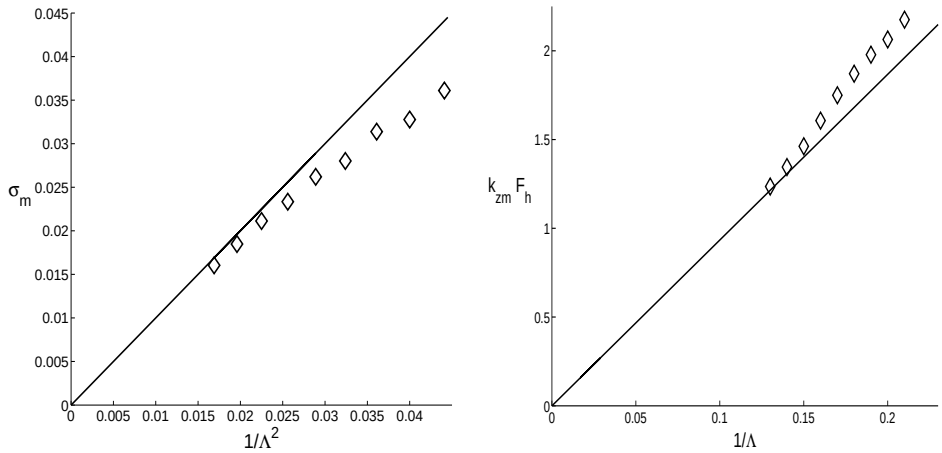
(*a*) (*b*)

FIG. 4.5 – (*a*) Comparison between the theoretical growth rate (4.52) (plain line) and the growth rate obtained numerically as a function of the vertical wavenumber k_z. (*b*) The same growth rate curves but compensated for the vertical viscous damping and represented as a function of the vertical wavenumber rescaled by the horizontal Froude number k_zF_h. The symbols represent the numerical growth rates for (□) $F_h = 1.7$, (○) $F_h = 1$, (△) $F_h = 0.5$ and (+) $F_h = 0.2$, the Reynolds number being $Re = 16000$ and the ratio $1/\Lambda = 0.15$.

4.5.1 Growth rate as a function of the wavenumber and Froude number

Figure 4.5 (*a*) compares the asymptotic growth rate of the zigzag instability (4.52) as a function of the wavenumber k_z with the growth rate obtained in the numerical linear stability analysis for a high Reynolds number $Re = 16000$, a given ratio $1/\Lambda = 0.15$ and for several small horizontal Froude numbers. The asymptotic and numerical results are in good agreement for each F_h. The agreement is better for small wavenumber for two reasons : the viscous damping in the numerical stability analysis increases with k_z and the long wavelength approximation used in the asymptotic analysis works better for small k_z.

In order to take into account the viscous effects, figure 4.5 (*b*) compares the asymptotic growth rate as a function of k_zF_h to the growth rate obtained numerically and compensated for the viscous damping on the vertical $(\sigma + \nu k_z^2)$. By this way, the numerical growth rates tend to the inviscid growth rate. The asymptotic analysis perfectly predicts the inviscid maximum growth rate. The agreement of the evolution of the growth rate as a function of k_zF_h is very good for $0.5 \swarrow k_zF_h \swarrow k_{zm}F_h$, where k_{zm} is the most unstable wavenumber. The asymptotic and numerical growth rates depart for $k_zF_h > k_{zm}F_h$, owing to the small wavenumber assumption $k_zF_h = O(F_v) \ll 1$ used in the asymptotic analysis. For small wavenumber $k_zF_h < 0.5$, there is a slight difference probably because of viscous damping on the horizontal in the numerical stability analysis.



(a) (b)

FIG. 4.6 – Comparison of (a) the maximum growth rate against $1/\Lambda^2$ and (b) of the most amplified wavenumber against $1/\Lambda$ obtained numerically (diamonds) for $F_h = 1$ and $Re = 16000$ and asymptotically (plain line).

4.5.2 Maximum growth rate and corresponding wavenumber as a function of $1/\Lambda$

In this subsection, we further investigate the effect of the ratio $1/\Lambda$ characterizing the basic state on the maximum growth rate and on the most unstable wavenumber for a given Froude number $F_h = 1$. As seen in figure 4.6, the agreement between the asymptotic and numerical results are very good for small $1/\Lambda$ both for the maximum unstable growth rate (figure 4.6 a) and for the most unstable wavenumber (figure 4.6 b). This confirms that the maximum growth rate of the zigzag instability is twice the strain $S = 1/2\Lambda^2$ and the most amplified wavenumber is inversely proportional to $F_h\Lambda$. As the asymptotic analysis is valid only for small $1/\Lambda$, it is not surprising to see that the discrepancy increases when $1/\Lambda$ increases. The maximum growth rate obtained numerically tends to be smaller than the theoretical prediction while the most amplified wavenumber is larger than the theoretical prediction.

4.5.3 Shape of the eigenmode as a function of $k_z F_h$

The vertical vorticity of the eigenmode of the zigzag instability can be obtained from (4.21) in the limit $\Lambda \to \infty$ and $F_v = 0$ using the phase equations (4.50-4.51) and the dispersion relation (4.52) which couples $\delta\alpha$ and $\delta\Lambda$:

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\psi}_0 = &-\frac{\Lambda}{2}\delta\alpha\left[\frac{\partial\Delta\psi_{a2}}{\partial y} - F_h k_z\sqrt{\frac{-D_0}{2/\Lambda^2 + D_0(F_h k_z)^2}}\frac{\partial\Delta\psi_{a2}}{\partial x}\right]\\ &+\frac{\Lambda}{2}\delta\alpha\left[\frac{\partial\Delta\psi_{a1}}{\partial y} - F_h k_z\sqrt{\frac{-D_0}{2/\Lambda^2 + D_0(F_h k_z)^2}}\frac{\partial\Delta\psi_{a1}}{\partial x}\right]\end{aligned} \tag{4.53}$$

We see that the perturbation consists in a translation of both vortices along the x and y

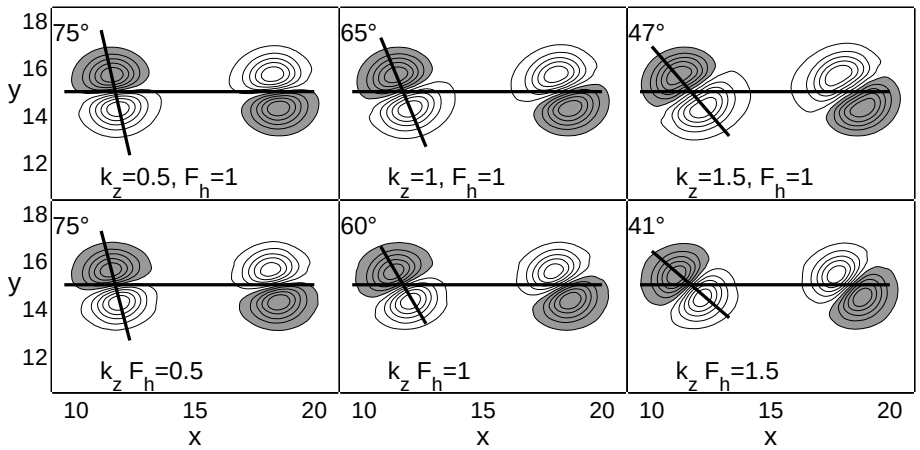


FIG. 4.7 – Comparison between the vertical vorticity of the eigenmodes obtained numerically (top line) and the asymptotic eigenmodes (bottom line) for various products $k_z F_h$. The value of the angle between the x-axis and the line joining the extrema of vorticity of the dipole pattern is specified in the left top corner. The numerical simulations correspond to $Re = 500$; $1/\Lambda = 0.15$.

directions but the relative importance of the x-translation compared to the y-translation increases when $F_h k_z$ increases. Figure 4.7 shows that the eigenmode given by (4.53) is in very good agreement with the vertical vorticity of the eigenmode obtained numerically for different vertical wavenumbers and horizontal Froude numbers. The dipole pattern observed in each vortex of the basic state corresponds to a translation along an oblique direction whose angle ζ decreases similarly in the numerical and asymptotical eigenmodes when the product $k_z F_h$ increases. Figure 4.8 compares further this angle ζ predicted theoretically, i.e.

$$\tan(\zeta) = \frac{\delta\alpha}{\delta\Lambda} = \sqrt{\frac{2/\Lambda^2 + D_0(F_h k_z)^2}{-D_0}}\frac{1}{F_h k_z} \tag{4.54}$$

to the values measured for the eigenmodes obtained numerically. The agreement is very good except at large $k_z F_h$ for which the assumption $k_z F_h \ll 1$ used in the asymptotic theory is no longer valid.

4.6 Summary and conclusions

In this paper, we have performed a multiple-scale stability analysis of two co-rotating gaussian vortices in a stratified fluid for small horizontal and vertical Froude numbers ($F_h \ll 1$ and $F_v = F_h k_z \ll 1$) and well-separated vortices ($a/b \ll 1$). This analysis fully explains qualitatively and quantitatively the zigzag instability found numerically by Otheguy *et al.* (2005*b*).

The zigzag instability is driven by the coupling between bending waves on a single axisymmetric vortex in a stratified fluid and the strain field due to the companion vortex. If the co-rotating vortex pair is twisted along the vertical with respect to the rotation

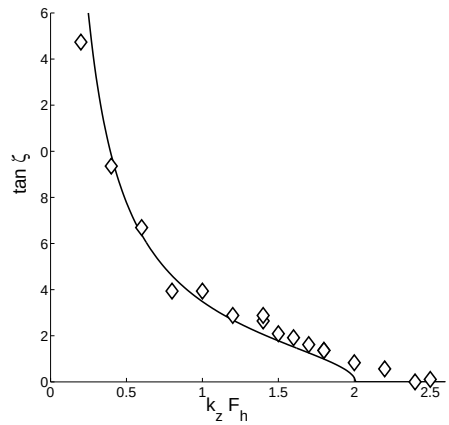


FIG. 4.8 – Comparison between the orientation of the dipole pattern (line joining the minimum and maximum vertical vorticity of the dipole pattern) obtained asymptotically (plain line) and numerically (diamonds) as a function of $k_z F_h$. The numerical simulations correspond to $Re = 16000$; $1/\Lambda = 0.15$.

center, the bending waves on each vortex tend to bring the two vortices closer (farther) at the vertical location where the angle of the vortex pair is increased (decreased). The vortices will rotate faster (slower) alternatively along the vertical, increasing the initial twist in an unstable manner.

The asymptotic analysis is in excellent quantitative agreement with the numerical linear stability analysis (Otheguy *et al.*, 2005*b*). The dimensional growth rate of the zigzag instability is twice the strain rate ($S = \Gamma/2\pi b^2$) generated by each vortex on the other independently of the stratification. The most unstable wavelength λ scales as the buoyancy length $L_B = \Gamma/\pi a N$ multiplied by the ratio b/a, $\lambda \propto F_h b$. In other words, the most unstable vertical scale is inversely proportional to the Brunt-Väisälä frequency and increases with the separation distance between the vortices.

4.7 Annexe A : Adjoint

The adjoint operator $L^\dagger$ is defined by

$$< f|L(g) >=< L^\dagger(f)|g > \tag{4.55}$$

where the scalar product is defined in (4.41) and the operator L in (4.40). We obtain after several integrations by part :

$$L^\dagger(f) = 2\frac{\partial f}{\partial \theta}\left(\frac{v'_\theta}{r^2} - \frac{v_\theta}{r^3}\right) - \frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3}\frac{v_\theta}{r^3} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r}\left(\frac{v_\theta}{r^2} - 2\frac{v'_\theta}{r}\right) - \frac{\partial^3 f}{\partial^2 r \partial \theta}\frac{v_\theta}{r} \tag{4.56}$$

where f is assumed to be 2π periodic, and $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ and $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial r}$ are both assumed to be finite when r goes to zero and to infinity.

4.8 Annexe B : Determination of ψ_{20}

Equation (4.40) suggests to write ψ_{20} in the form

$$\psi_{20} = \psi(r)\left(\cos\theta\frac{\partial^2\beta_2}{\partial z^2} + \sin\theta\frac{\partial^2\eta_2}{\partial z^2}\right) \tag{4.57}$$

The function ψ is then determined numerically as the solution of

$$\frac{v_\theta}{r}\psi'' + \frac{v_\theta}{r^2}\psi' - \left(\frac{v_\theta'}{r^2} + \frac{v_\theta''}{r}\right)\psi = \left(-\chi' - D_0\right)\omega' + \omega\frac{{v_\theta}^3}{r^2} \tag{4.58}$$

assorted with the boundary conditions $\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\psi}{r})(0) = 0$ and $\psi'(r) \to 0$ when r goes to infinity.

Deuxième partie

Étude de l'appariement de deux tourbillons verticaux en milieu stratifié

Chapitre 5

Mise en évidence expérimentale de l'instabilité zigzag

Ce chapitre reprend tout d'abord un article soumis à *Nature* : Why atmospheric turbulence at mesoscales differs from two-dimensional turbulence, qui décrit les observations expérimentales de l'instabilité zigzag. Il présente ensuite plus en détails le dispositif expérimental mis en place et le protocole utilisé.

L'existence de l'instabilité zigzag sur des tourbillons co-rotatifs a été mise en évidence expérimentalement. Dans une grande cuve en verre remplie d'eau salée linéairement stratifiée, deux tourbillons co-rotatifs sont générés par la rotation rapide de deux flaps verticaux (dispositif similaire à celui de Meunier 2001).

L'étude quantitative des caractéristiques des tourbillons (leur distance b, leur rayon a, et leur circulation Γ) permettant de définir précisément les nombres de Froude et de Reynolds de l'expérience, a été effectuée par PIV (Particule Image Velocimetry) dans des plans horizontaux.

La visualisation tri-dimensionnelle de l'instabilité et la mesure de la longueur d'onde la plus instable a été faite par visualisation des tourbillons à l'aide d'un colorant : la fluorescéine. Juste après leur formation, les deux tourbillons tournent l'un autour de l'autre et sont rectilignes selon la verticale. Après une rotation complète de la paire de tourbillons, on observe que l'instabilité zigzag déforme symétriquement les tourbillons selon la verticale tel que la distance entre les tourbillons varie de manière sinusoïdale, engendrant des couches où l'appariement est alternativement accéléré ou ralenti. L'instabilité ne semble pas saturer et la longueur d'onde mesurée est en très bon accord avec les études linéaires des chapitres 3 et 4.

Why atmospheric turbulence at mesoscales differs from two-dimensional turbulence.

By PANTXIKA OTHEGUY, PAUL BILLANT and JEAN-MARC CHOMAZ
LadHyX, CNRS - École Polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex, France
(submitted to Nature)

Large vortices are ubiquitous in the planetary atmospheres (Saturn (NASA, 2004), Jupiter (Marcus, 2004*b*)) and in the oceans (Gulf stream, Meddies). They are known to play a major role in the transport processes and climate dynamics, not only on earth but also on Jupiter (Marcus, 2004*b*). The associated large scale dynamics is analogous to a two-dimensional (2D) dynamics owing to the combined effect of the Coriolis force, resulting from the rotation of the planet and the buoyancy force, resulting from the stable density stratification along the vertical (light fluid above heavy fluid) (Nastrom, Gage & Jasperson 1984 ; Charney 1948). At mesoscales (1-100 km) in the earth's atmosphere, the Coriolis force is negligible while the buoyancy force is dominant and it is an open issue whether or not the dynamics is 2D(Riley *et al.* (1981), Lilly (1983), Lindborg (1999)). To answer this crucial question, we investigate experimentally the merging of co-rotating vertical vortices in a stably stratified fluid. We show that a three-dimensional instability decorrelates the flow along the vertical. This finding invalidates the 2D assumption and forces to reconsider the energy transfer in the atmosphere.

The merging of co-rotating vortices is the key mechanism in 2D turbulent flows by which energy is transferred from small to large vortices : phenomenon that is also called the inverse energy cascade. This merging process has recently been observed at large scales (10 000 km) in Saturn's (NASA, 2004) and Jupiter's (Marcus, 2004*b*) atmospheres. If at large scales, the consensus is to consider the flow 2D, at mesoscales the idea (Riley *et al.* (1981), Lilly (1983)) that the flow is 2D as supported by the kinetic energy spectrum (Nastrom *et al.*, 1984) has recently become controversial. Based on wind measurements made on board of commercial airlines, Lindborg (1999) has concluded from the use of high order statistical moments that the energy transfer is in the opposite direction, i.e. from large to small scales, suggesting a three-dimensional (3D) dynamics. At mesoscales in the atmosphere, the stable stratification is dominant and the Coriolis force negligible. In order to determine whether the dynamics is 2D or not, we have studied experimentally the merging of two co-rotating vertical vortices in a tank filled with linearly stratified salt water. The experiments are performed in a 1.1 m wide, 1.1 m long and 0.8 m deep glass tank filled with linearly stratified salt water with a 65cm working depth (Figure 5.1). The density gradient is characterized by the Brunt-Väisälä frequency $N = \sqrt{-(g/\rho)d\bar{\rho}/dz} = 1.24s^{-1}$, where g is the gravity, ρ the density and $\bar{\rho}$ its mean value. Two co-rotating columnar vortices are created by moving once two initially

facing flaps in opposite directions from 0 to 55°. The angular velocity of the flaps decreases linearly to zero during the course of the motion. The flaps consist of two aluminium plates (0.01 m wide, 0.2 m long and 1 m high) with one vertical edge sharpened and the other one hinged. The two sharpened edges are initially separated by 6.5 cm. The flaps are driven by a computer controlled stepper motor.

The flow is visualized using a fluorescent dye released at the edges of the flaps and illuminated by a UV light (Laser Induced Fluorescence (LIF) method). In a given horizontal cross-section, the vortices first rotate around each other at a constant angular velocity. Their separation distance remains approximately constant while their core size grows slowly by viscous diffusion. This slow evolution is followed by a fast regime where the two vortices get closer and merge into a single larger vortex. 3D dye visualization shows that the merging does not occur uniformly along the vertical when the fluid is strongly stratified. The initially straight vortices (Figure 5.2 a) are spontaneously deformed by a 3D instability which drives alternatively the vortices closer and farther along the vertical (Figure 5.2 b) such that the distance between the two vortex axes varies sinusoidally along the vertical. Horizontal cross-sections show that the core of the vortices are not deformed but only displaced horizontally by the instability. The instability does not saturate and as a result the merging is decorrelated on the vertical (Figure 5.2 c) generating a succession of layers where the two vortices have merged in a single larger vortex and where two distinct vortices are still rotating around each other. This process results in a complex 3D entanglement of the two vortices (Figure 5.2 d). This instability is named zigzag instability since it corresponds to horizontal displacement of the vortices without a modification of their flow field as observed for counter-rotating vortices (Billant & Chomaz, 2000*a*). The stratified case therefore strongly differs from the homogeneous case (Meunier & Leweke, 2001) where the elliptic instability destroys the core of the vortices.

In order to precisely describe the zigzag instability properties, the characteristics of the vortices (core radius of the vortices a, circulation Γ and their separation distance b are measured using a standard Particle Image Velocimetry (PIV) technique. The flow is seeded with small TiO2 particules (200 μm) and illuminated by a laser sheet produced by a continuous 7W Argon laser chopped with an optoacoustic device into flashes of 8 ms duration separated by a dt=50 ms time interval. The velocity field is obtained by correlating the two successive frames, acquired by a double-frame camera fixed on top of the tank, with a 1280 x 1024 resolution and a 12-bit dynamic range, by means of the software FlowMaster 3S by La Vision. These velocity fields allow to measure precisely the horizontal Froude number, $F = \Gamma/\pi a^2 N$ which compares the effects of the inertial forces to the effects of the buoyancy force. Here, the Froude number is small, approximately of order one, strong stratification effects. From flow visualization similar to Figure 5.2, we have also measured the vertical wavelength λ of the zigzag instability and investigated its variation with the Froude number F by varying the velocity at which the flaps are rotated. F varies from 0.6 to 1.9 and the Reynolds number ($Re = \Gamma/\pi\nu$) varies from 300 to 1100. Figure 5.3 shows that the wavelength λ rescaled by the separation distance between the vortices b is nearly proportional to the Froude number F and follows the law $\lambda/b = 0.7F$. The vertical scale selected by this instability is therefore proportional to the buoyancy length scale Fb. As

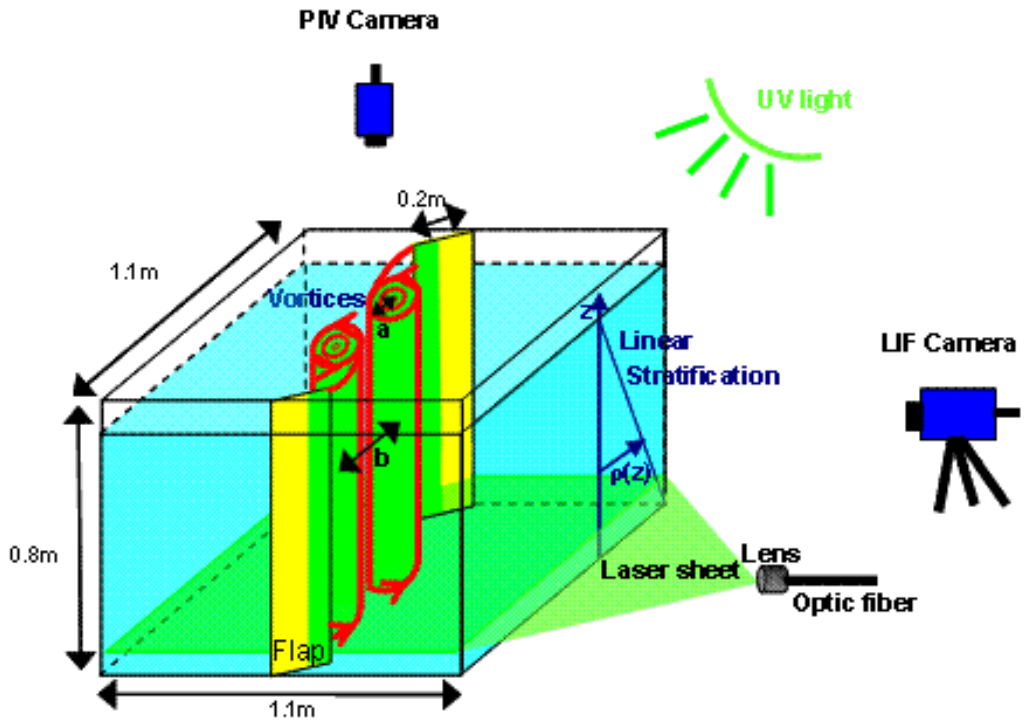


FIG. 5.1 – Sketch of the experimental set-up. Two co-rotating vortices of core size a separated by a distance b are created by moving two vertical flaps (in yellow) in a tank filled with linearly stratified salt water. A fluorescent dye released at the edge of the flaps (in green) is used to visualize the vortices under UV light. The LIF Camera records a side view of the three-dimensional evolution of the vortex pair. A laser illuminates a horizontal cross-section (in green) by short flashes allowing the PIV Camera to record pairs of images separated by a very short time interval in order to measure the velocity field.

shown by Billant & Chomaz (2000*a*), this scaling s the equipartition between potential and kinetic energy invalidating the hypothesis of a 2D dynamics for which potential energy should be negligible.

This new 3D zigzag instability on co-rotating vortices suggests that the dynamics of the atmosphere is 3D at mesoscales with a cascade process that involves decorrelation of the flow on the vertical and generation of small vertical scalesese results are in agreement with the analysis of airborne measurements of a direct cascade by Lindborg (1999) and call for a refundation of the turbulence models of the atmosphere at mesoscales. They should be crucial to improve turbulence parametrization used in atmospheric and oceanic general circulation models for global climate change predictions.

We thank A. Garcia and D. Guy for technical assistance and C. Cossu and A.-V. Salsac for discussions. Correspondence and requests for materials should be addressed to Pantxika Otheguy (e-mail : pantxika.otheguy@ladhyx.polytechnique.fr).

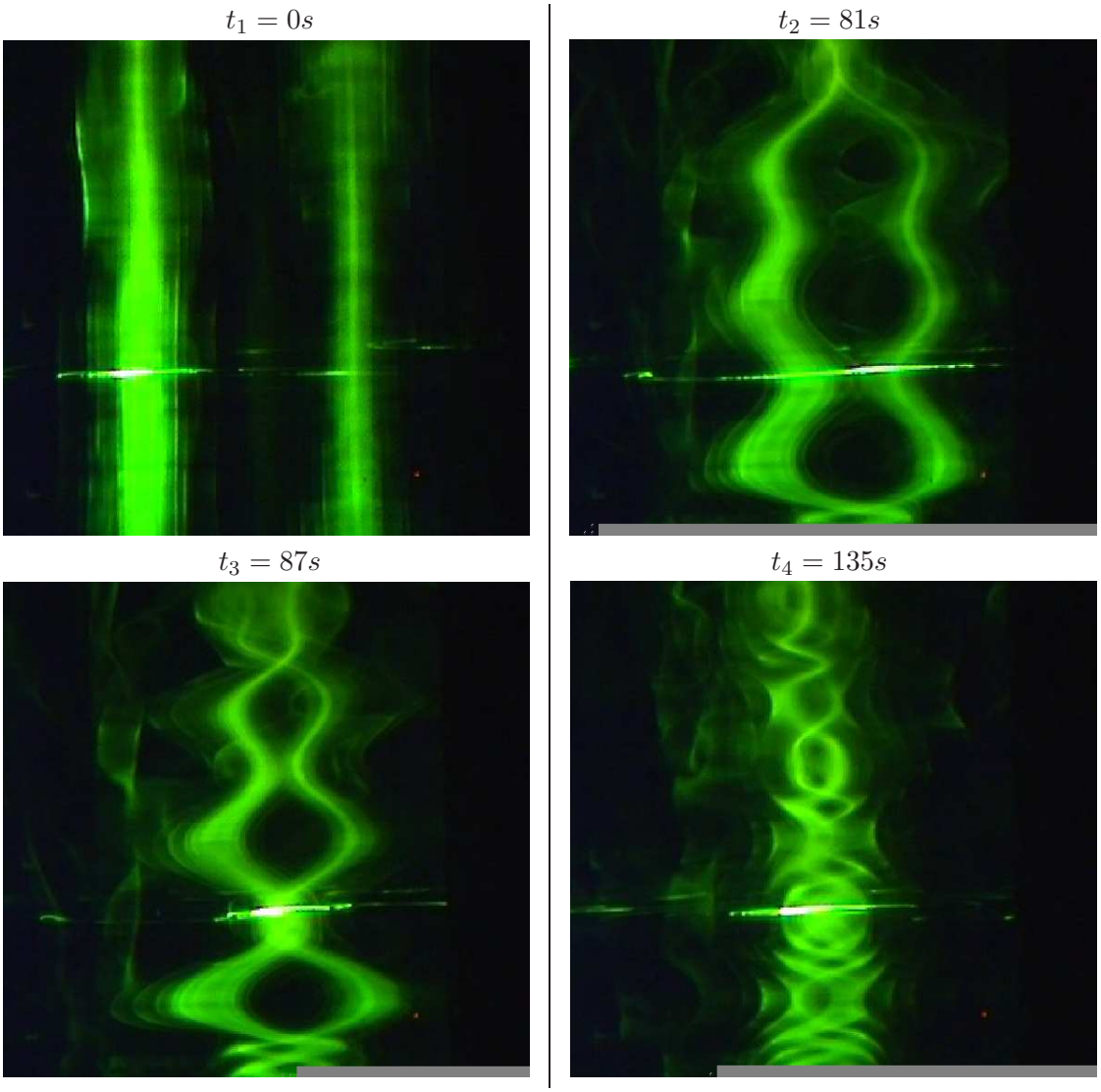


FIG. 5.2 – Side view visualizations of the zigzag instability of two co-rotating vortices in a strongly stratified fluid. The flow is visualized by fluoresceine dye released at the flap edges and illuminated by UV light. Recording time starts at the end of the flapping motion. At time t=0s (a), the vortices are straight along the vertical. At t=81s (b), the instability distorts symmetrically the two vortices. At time t=87s (c), the merging has started in the layer indicated by a white arrow. Finally, at t=135s, image d shows the complex entanglement of the vortices resulting from the decorrelation of the merging on the vertical.

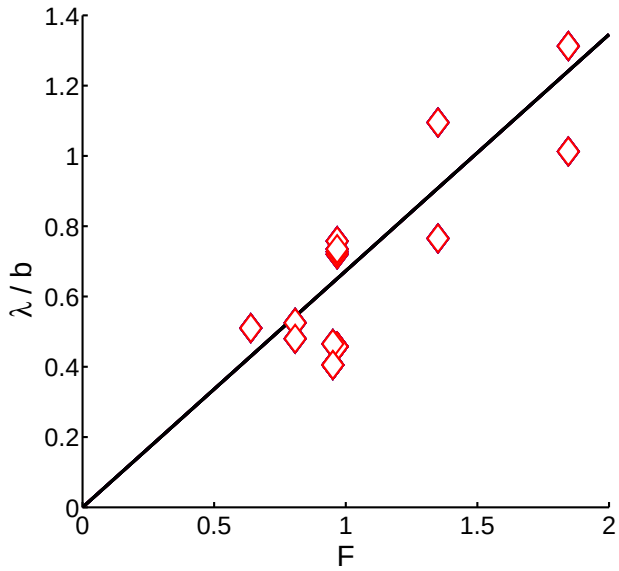


FIG. 5.3 – Evolution of the wavelength λ of the zigzag instability rescaled by the separation distance between the vortices b as a function of the Froude number F. The red diamonds represent the experimental data and the black plain line is a linear fit through the data $\lambda/b = 0.7F$. Each symbol corresponds to the vertically averaged wavelength measured on one experimental set. Since the instability is not forced but occurs naturally, the measured wavelength varies slightly from one experiment to the next.

5.1 Comparaison entre la longueur d'onde observée et les études linéaires

La figure 5.4 compare la longueur d'onde de l'instabilité zigzag mesurée expérimentalement, obtenue par l'étude de stabilité numérique du chapitre 3 et prévue par l'analyse asymptotique du chapitre 4. Elle met en évidence un très bon accord entre ces différentes approches et montre ainsi que la sélection de la longueur d'onde est pilotée par le comportement linéaire de l'instabilité zigzag.
On rappelle que les mesures expérimentales sont faites à des nombres de Reynolds relativement faibles, engendrant un amortissement visqueux qui a tendance à diminuer le nombre d'onde le plus instable. Cela explique la tendance générale à observer expérimentalement une longueur d'onde légèrement plus grande que la prévision asymptotique.

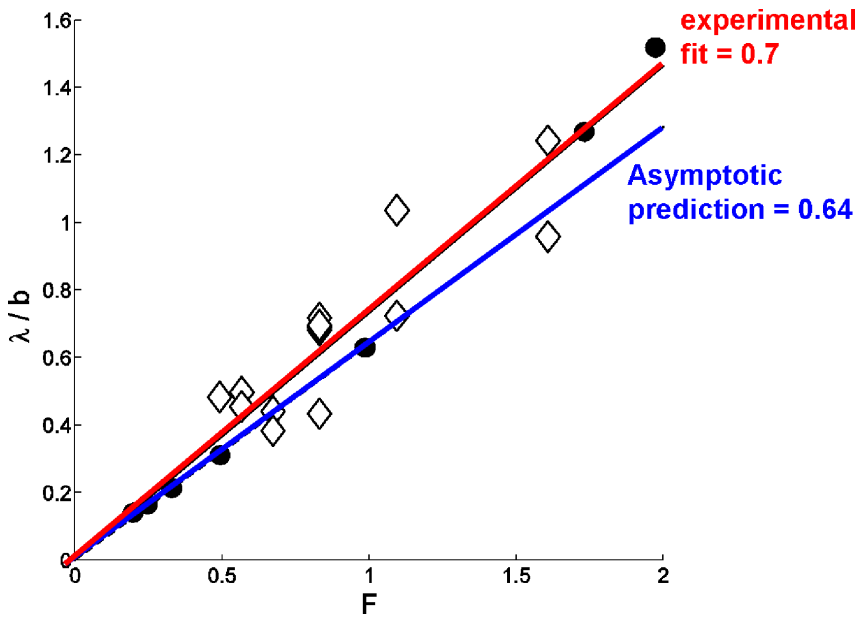


FIG. 5.4 – Évolution de la longueur d'onde de l'instabilité zigzag λ adimensionnée par la distance de séparation entre les tourbillons b en fonction du nombre de Froude F. Les losanges représentent les mesures expérimentales de cette longueur d'onde et la ligne rouge le fit linéaire de ces points $\lambda/b = 0.7F$. Les points noirs représentent les points obtenus par l'analyse de stabilité numérique présentée au chapitre 3. Enfin, la droite bleue représente la prévision asymptotique de cette longueur d'onde.

5.2 Dispositif expérimental et protocole utilisé

Les expériences ont été réalisées dans une cuve de verre de 1.1m de large, 1.1m de long et 0.8m de profondeur remplie d'eau salée linéairement stratifiée (figure 5.5).

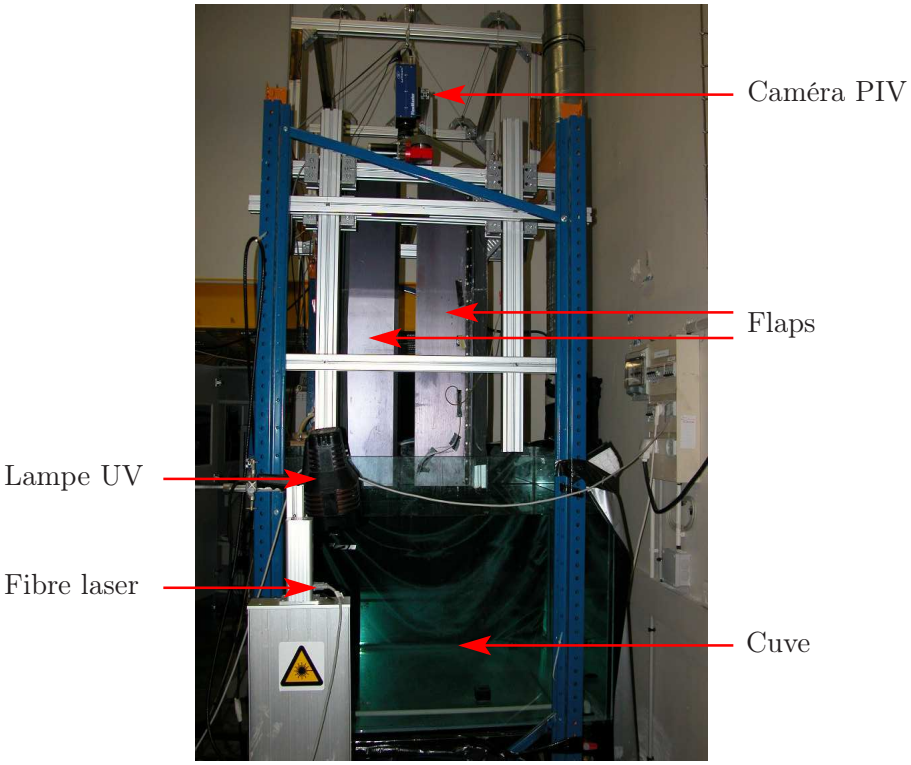


FIG. 5.5 – Photo du dispositif expérimental utilisé pour créer les tourbillons co-rotatifs. La hauteur totale du dispositif est d'environ 2m50.

5.2.1 Stratification

Le profil de stratification est déterminé précisément à l'aide de la méthode classique des deux réservoirs (Oster & Yamamoto, 1963). Le réservoir 1 (figure 5.6) est initialement rempli d'eau saturée en sel et le réservoir 2 d'eau claire. Une première pompe de débit q_1 est utilisée pour transvaser de l'eau salée du réservoir 1 vers le réservoir 2. Une deuxième pompe de débit q_2 permet de remplir la cuve à partir du réservoir 2, à l'aide d'un tuyau diffuseur fixé à l'horizontal au bas de la cuve (figure 5.7). Les deux pompes étant des pompes volumétriques à débit contrôlé, on peut réaliser n'importe quel profil de densité stable à partir des fonctions $q_1(t)$ et $q_2(t)$ (Hill, 2002). Une stratification linéaire est obtenue pour $q_2 = 2q_1$. L'intérêt pratique d'une telle stratification est qu'elle n'est pas affectée par la diffusion saline (régie par une dérivée spatiale d'ordre 2). Le profil de densité est en revanche érodé par les bords, le fond de la cuve et la surface de l'eau, où le gradient vertical de densité ne peut être constant. Le profil de densité a été mesuré à l'aide d'un densimètre en prélevant des échantillons d'eau à différents niveaux de profondeur. Le profil

de stratification linéaire est caractérisé par une fréquence de Brunt-Väisälä N constante ($N = \sqrt{-(g/\rho)d\bar{\rho}/dz}$, où g est l'accélération de la pesanteur, ρ la masse volumique de l'eau, $\bar{\rho}$ sa moyenne spatiale et z la coordonnée verticale). Les expériences présentées ici ont été menées avec une fréquence $N = 1.24s^{-1}$.

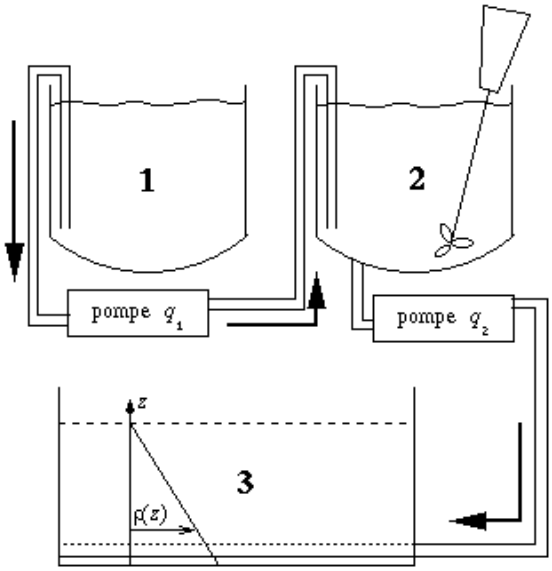


FIG. 5.6 – Méthode des deux réservoirs. Le réservoir 1 est rempli d'eau saturée en sel, le réservoir 2 d'eau claire. D'après **??**.

5.2.2 Génération des tourbillons

La méthode de génération des tourbillons est similaire à celle utilisée par Meunier (2001) en fluide homogène. On utilise deux flaps (figure 5.5), plaques d'aluminium mesurant 1m de haut, 0.2m de large et 0.01m d'épaisseur. Un de leur côté est fixé à un support vertical et l'autre est mobile avec un bord biseauté. Les biseaux des deux flaps sont initialement séparés de 6.5cm et disposés face à face. Les flaps effectuent un mouvement de rotation dans le même sens dans un fluide initialement au repos. Le mouvement de ces flaps provoque deux enroulements de fluide au niveau des bords biseautés (figure 5.8) : deux tourbillons d'environ $0.65m$ de haut sont créés. Par induction mutuelle, la paire de tourbillons co-rotatifs tourne alors sur elle-même dans le même sens de rotation que les tourbillons. Dans toutes les expériences, l'origine temporelle $t = 0s$ est définie à la fin du mouvement des flaps.

La vitesse de rotation des flaps, pilotée par un moteur pas à pas lui-même contrôlé par un ordinateur, décroît linéairement vers zéro au cours du mouvement. Nous avons observé une grande variation des caractéristiques des tourbillons générés en fonction de l'angle de rotation des flaps. Les tourbillons des expériences reportées ici ont été créés par une rotation des flaps de 0 (initialement face à face) à 55° (figure 5.8). Seul le temps de rotation T des

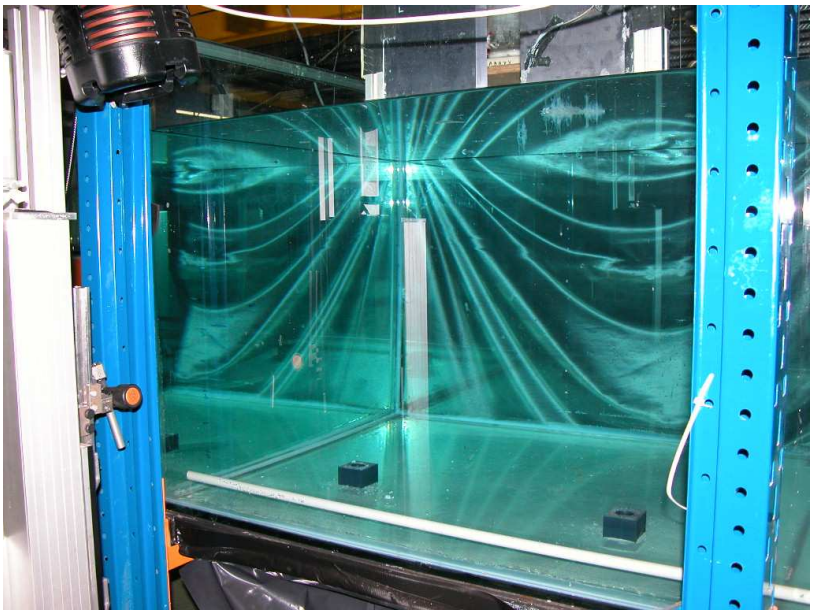


FIG. 5.7 – Gros plan sur la cuve. On peut voir le tuyau blanc servant au remplissage de la cuve fixé au fond de celle-ci. Les deux socles noirs en caoutchouc réceptionnent les flaps quand ils arrivent au fond de la cuve. En haut à gauche on peut voir une lampe UV. A gauche le banc de translation metallique gris sert à positionner avec précision la fibre laser. Les reflets dans la cuve sont dûs aux rideaux noirs qui l'entourent pour éviter les reflets lorsque la lumière est éteinte.

flaps varie selon les expériences. Deux petits tourbillons d'arrêt sont générés à la fin du mouvement au bord des flaps mais ils sont expulsés vers l'extérieur de la zone où les deux tourbillons principaux tournent l'un autour de l'autre.

Les flaps sont solidarisés au sommet par un cadre rectangulaire (figure 5.5) qui est lui-même tracté par l'intermédiaire d'une poulie à l'aide d'un moteur. L'ensemble du dispositif peut ainsi être entièrement sorti de l'eau. En pratique, il est utile de pouvoir sortir le dispositif de l'eau lorsque l'expérience est au repos pendant plusieurs jours pour préserver la propreté de l'eau. En effet, bien que les flaps soient en aluminium anodisé et que tous les éléments de la structure soient en aluminium, une réaction d'oxydo-réduction, certainement due à l'impureté de la composition d'un ou de plusieurs éléments du montage, a été observée produisant d'importants dépôts. Par ailleurs, l'ensemble du dispositif constituant les flaps étant lourd, il est équilibré par l'intermédiaire d'une poulie par un ensemble de poids d'environ 20kg de telle sorte qu'en position basse, l'ensemble des flaps ne repose pas de tout son poids sur le fond de la cuve.

Cette cuve aux dimensions imposantes est le théâtre de mouvements résiduels de recirculation importants après chaque expérience. Il faut donc attendre au moins 30 min entre deux manipulations afin que le fluide puisse être considéré au repos. En revanche, nous n'avons pas été gênés par des mouvements de convection dûs à des variations de température, sans doute grâce à la présence d'une stratification stable dans le milieu.

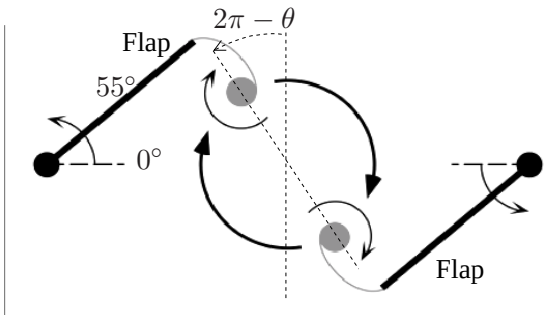
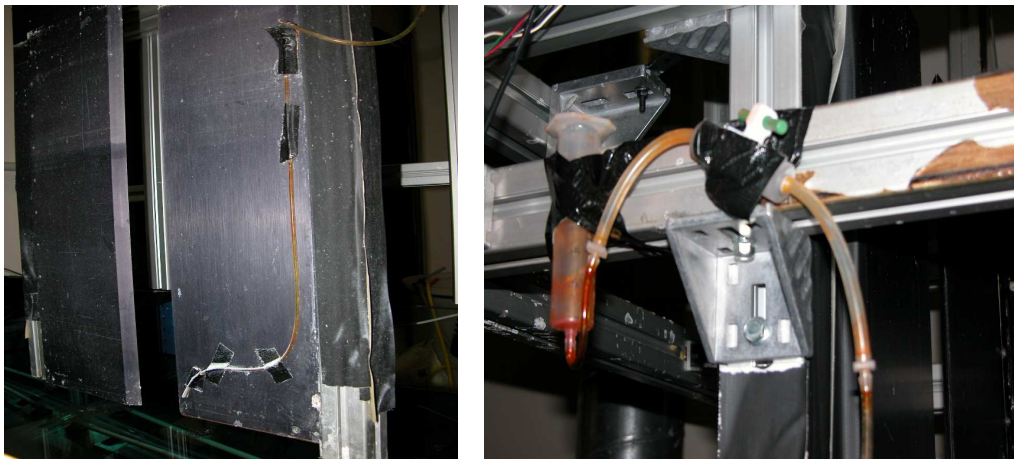


FIG. 5.8 – Méthode de génération de la paire de tourbillons co-roratifs. Vue de dessus. Adapté d'après **??**.

5.2.3 Visualisation tridimensionnelle des tourbillons

La visualisation tridimensionnelle de la paire de tourbillons est effectuée à l'aide d'un colorant : la fluorescéine qui, comme son nom l'indique, fluoresce sous un éclairage au rayonnement Ultra-Violet (UV). Une première technique de visualisation consiste à peindre le bord biseauté des flaps avec une solution épaisse obtenue empiriquement par mélange de fluorescéine en poudre, d'eau et de sucre. Les flaps sont peints à l'extérieur de la cuve, puis insérés très lentement dans l'eau une fois le colorant sec. Après quelques minutes de repos, l'expérience peut commencer. Lorsque les flaps tournent, la fluorescéine se dissout dans l'eau et est entraînée par la rotation du fluide rendant les tourbillons visibles. Les expériences sont effectuées dans l'obscurité pour avoir une meilleure visualisation de la fluorescéine éclairée par trois lampes UV de $100W$. Cette technique donne de bons résultats qualitatifs mais n'assure pas une visualisation précise de la longueur d'onde de l'instabilité à chaque expérience. Nous avons donc mis en place un système de visualisation plus précis et plus reproductif. Deux petits tuyaux à débit contrôlé ont été collés le long de chaque flap (figure 5.9 *a*) au niveau du bord fixe. Leur ouverture est ramenée vers le bord biseauté au bas des flaps. Les tuyaux sont alimentés en fluorescéine (mélange d'eau et de florescéine en poudre) par des seringues (figure 5.9 *b*) placées en hauteur pour assurer un écoulement naturel grâce à l'effet de la gravité. Les flaps sont initialement hors de l'eau. On les insère très lentement dans la cuve tout en injectant de la fluorescéine à débit constant à l'aide de robinets comme celui de la figure 5.9 *b*. Le colorant est ainsi équi-réparti selon la verticale et les deux tourbillons dégagent à peu près la même intensité lumineuse. Pour que la visualisation soit finalement réussie, il s'agit de trouver un bon compromis entre la vitesse de descente des flaps (qui doit rester lente), la concentration en fluorescéine de la solution utilisée et le débit des petits tuyaux.
Afin de mesurer avec précision la longueur d'onde de l'instabilité, nous calibrons les distances mesurées par la caméra à l'aide de graduations dessinées le long des flaps. La calibration est faite avant le début de l'expérience. La longueur d'onde est ensuite mesurée lorsque les axes des deux tourbillons sont alignés comme les flaps l'étaient avant leur mouvement ($\theta = 90°$ figure 5.8).

Lorsqu'on varie le temps de rotation T des flaps, on observe différents comportements de l'écoulement. Pour une rotation des flaps en un temps $T \leq 15s$, on observe l'instabilité elliptique étudiée en détails par Meunier & Leweke (2001) (figure 5.10 *a*). Pour une rotation



a *b*

FIG. 5.9 – (*a*) Petit tuyau collé le long du flap permettant de diffuser la fluorescéine. (*b*) Gros plan sur la seringue et le robinet qui permettent de contrôler le débit de fluorescéine. La fluorescéine très concentrée est de couleur orange comme sur la figure. Elle fluoresce en vert (figure 5.10).

plus lente, on observe l'instabilité zigzag dont la longueur d'onde varie en fonction de la vitesse de rotation des flaps (figure 5.10 *b*,*c*, *d*). L'observation de cette instabilité est détaillée en début de chapitre.

5.2.4 Mesure des champs de vitesse instantanée par PIV

Afin de définir avec précision la taille des coeurs des tourbillons a, leur circulation Γ et la distance entre les axes des deux tourbillons b, nous avons mesuré le champ de vitesse par Vélocimétrie par Image de Particules (PIV). La PIV permet de mesurer quantitativement et de façon non intrusive le champ de vitesse instantanée d'un écoulement dans une surface plane. Le principe consiste à prendre, dans un intervalle de temps δt très court, deux photos d'un écoulement visualisé par la présence de petites particules éclairées par un plan laser (figure 5.11 *a*). Les deux images sont ensuite analysées par un logiciel de PIV (FlowMaster 3S de La Vision) qui recherche les pics de corrélation entre des fenêtres d'interrogation de même taille des les images prises au temps t et des images prises au temps $t+\delta t$, permettant de déterminer le déplacement de chaque particule entre ces deux images. L'algorithme utilisé par La Vision est détaillé dans Gallaire (2002). Il comprend en particulier une technique dite "adaptative multipass" qui consiste à réduire progressivement à chaque itération la taille des fenêtres d'interrogation qui sont comparées aux temps t et $t+\delta t$ (de 256x256 pixels à 32x32 pixels). Le logiciel permet aussi le post-traitement de ces champs de vitesse obtenus, permettant par exemple d'obtenir les lignes de courant de l'écoulement (figure 5.11 *b*) ou le champ de vorticité verticale (figure 5.12).

Les particules utilisées pour la visualisation de l'écoulement sont des particules de TiO_2. Ces particules sont légèrement plus lourdes que l'eau saturée en sel mais se déposent très lentement (plusieurs heures) du fait de leur petite taille (200 μm), ce qui permet de supposer qu'elles sont au repos aux échelles de temps mises en jeu dans une expérience. En pratique,

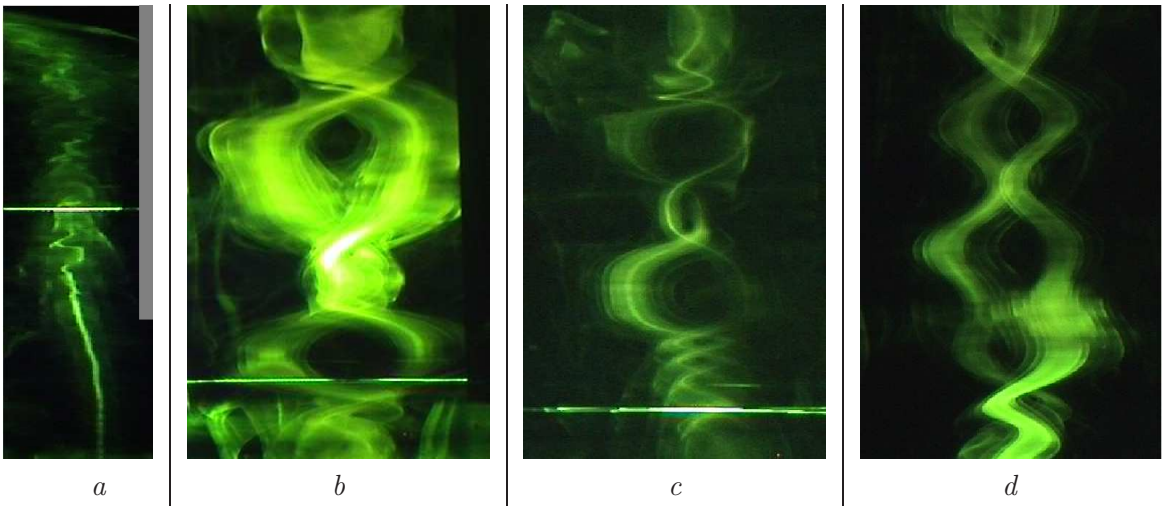
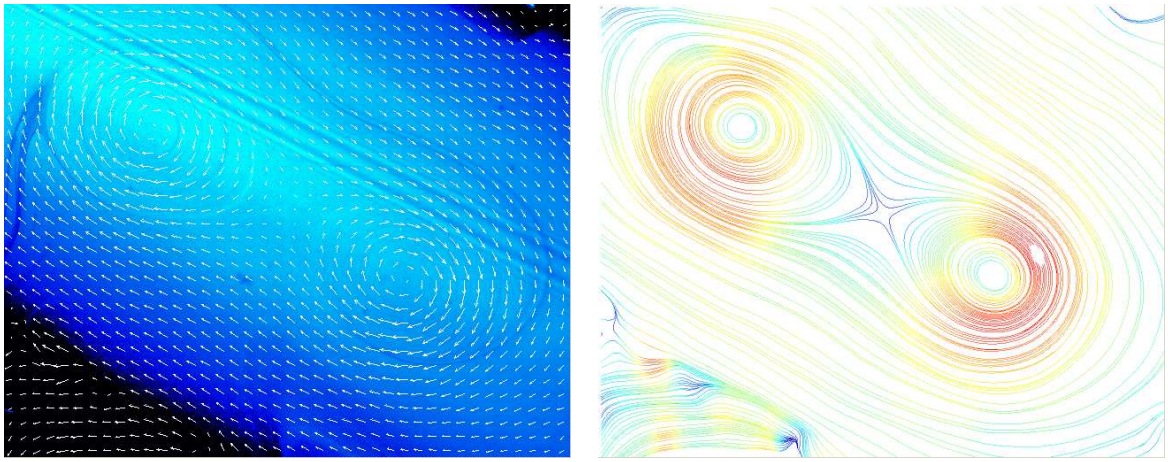


FIG. 5.10 – (a) Distortion du coeur d'un tourbillon due à l'instabilité elliptique pour $T =$ 15s. Cette image a été fortement zoomée sur le coeur d'un tourbillon. (b), (c), (d) Instabilité zigzag observée sur la paire de tourbillons co-rotatifs pour des rotations de flaps de durées respectives $T = 20$s, $T = 30$s, $T = 40$s. Le même cadrage a été respecté pour ces trois expériences.

la poudre commerciale de TiO_2 utilisée présente une dispersion importante de la taille des particules qui étale leur sédimentation dans le temps. Parvenir à une répartition uniforme des particules dans la zone d'étude n'est pas chose facile en milieu stratifié car le brassage du fluide risque de détruire la stratification. Par ailleurs, lorsque les mesures sont faites dans un plan horizontal, la caméra visualise tout le volume d'eau situé au-dessus du plan laser. Il faut donc éviter de déposer des particules au-dessus du niveau étudié. En pratique, on choisit de prélever dans un premier temps de l'eau de la cuve au niveau de profondeur que l'on désire étudier. On y mélange les particules. Le mélange brassé en continue est réinjecté dans la cuve à la profondeur voulue. Prélèvements et injections sont effectués à l'aide d'une sonde de fabrication artisanale avec sorties latérales pour éviter de perturber le profil de densité par des jets verticaux. Le mélange eau-particules inséré avec une vitesse horizontale dans un écoulement de densité voisine (fluide à la même température et à même teneur en sel) a tendance à rester en équilibre, ralentissant ainsi la sédimentation des particules.

Le logiciel de PIV contrôle l'acquisition des images en synchronisant l'ouverture d'une caméra CCD (Charge Coupled Device), disposée au-dessus de la cuve (figure 5.5), et les flashes lasers intenses très courts permettant d'obtenir deux images quasi-instantanées séparées par un temps δt très court. La caméra CCD dispose d'une résolution 1280x1024 pixels, d'une gamme dynamique de 12 bits et d'une fréquence pouvant aller jusqu'à 8 Hz. Un soin particulier doit être apporté à la mise au point de l'objectif. Deux modes d'acquisition sont possibles. Le mode simple-trame permet de calculer la corrélation entre deux images successives séparées par un δt supérieur à 0.2s. Le mode double-trame prend des paires d'images correspondant à deux expositions séparées par un temps δt très court (jusqu'à 10ms). La première image est enregistrée quasi-instantanément (<1 μs) dans la mémoire tampon de la caméra. Le temps d'exposition de la deuxième image (environ 125 ms) est déterminé par le temps de transfert de la première image vers l'ordinateur. L'éclairage du



a *b*

FIG. 5.11 – (*a*) Particules éclairées par le plan laser à $t = 28s$ pour une vitesse de fermeture des flaps de $T = 30s$. La couleur mesure la densité de particules. Les vecteurs calculées par le logiciel de PIV sont superposés au champ de particules (vecteurs blancs). Les deux traits foncés qui traversent l'écran en diagonale témoignent d'une imperfection de l'éclairage dûe à un défaut de la fibre laser. (*b*) Lignes de courant calculées par le logiciel de PIV au même instant que la figure (*a*). La valeur de la fonction de courant augmente du bleu vers le rouge.

plan horizontal par des flashes laser de très courte durée permet alors d'obtenir un temps d'exposition "efficace" suffisamment petit pour que le mouvement des particules pendant cette exposition soit négligeable. Les paires d'images sont séparées entre elles par un temps Δt supérieur ou égal à 0.5s. En pratique nous avons utilisé le mode double-trame avec un $\delta t = 50$ms entre deux images d'une même paire et un $\Delta t = 1$s entre deux paires. Le choix de δt est un paramètre crucial dans ces expériences. En particulier, les vitesses caractéristiques des tourbillons évoluent au cours de l'expérience : elles diminuent à cause de la diffusion visqueuse. On s'est attaché ici à résoudre au mieux les tourbillons juste après leur formation afin de définir avec précision les caractéristiques de l'état initial considéré. δt doit être assez grand pour que le déplacement des particules soit détectable par le logiciel de PIV mais δt doit aussi être assez petit pour que les particules ne se déplacent pas trop, c'est-à dire qu'elles ne sortent pas de la fenêtre d'interrogation pendant l'intervalle de temps qui sépare les deux images.

La nappe laser est produite à partir d'un laser Argon continu de 7W. Le faisceau de ce laser est ensuite pulsé par l'intermédiaire d'un déflecteur opto-acoustique placé à la sortie du laser et commandé par le logiciel de PIV. On utilisera ici des paires de flashes de 8ms de durée et séparés par $\delta t = 50$ms. Une fibre optique guide ensuite le faisceau pulsé qui est diffusé en nappe par une lentille cylindrique disposée à l'extrémité de la fibre. La position de cette lentille par rapport à la sortie du faisceau commande l'épaisseur de la nappe laser qui joue à la fois sur l'intensité de l'éclairage et sur la quantité de particules éclairées. L'épaisseur de la nappe laser est ici réglée à environ 5mm dans la région d'intérêt. L'horizontalité de la nappe laser est à régler avec précision d'une part pour éviter que les images prises en vue de dessus ne soient déformées, d'autre part parce que les mouvements en fluide stratifié se font essentiellement dans un plan horizontal. Les mouvements ne sont en effet pas isotropes

car la vitesse verticale des particules est très faible à cause de la stratification. Si la nappe laser est oblique, les particules filmées sortiront en partie du champ éclairé entre les deux images conduisant à des erreurs de corrélation importantes.

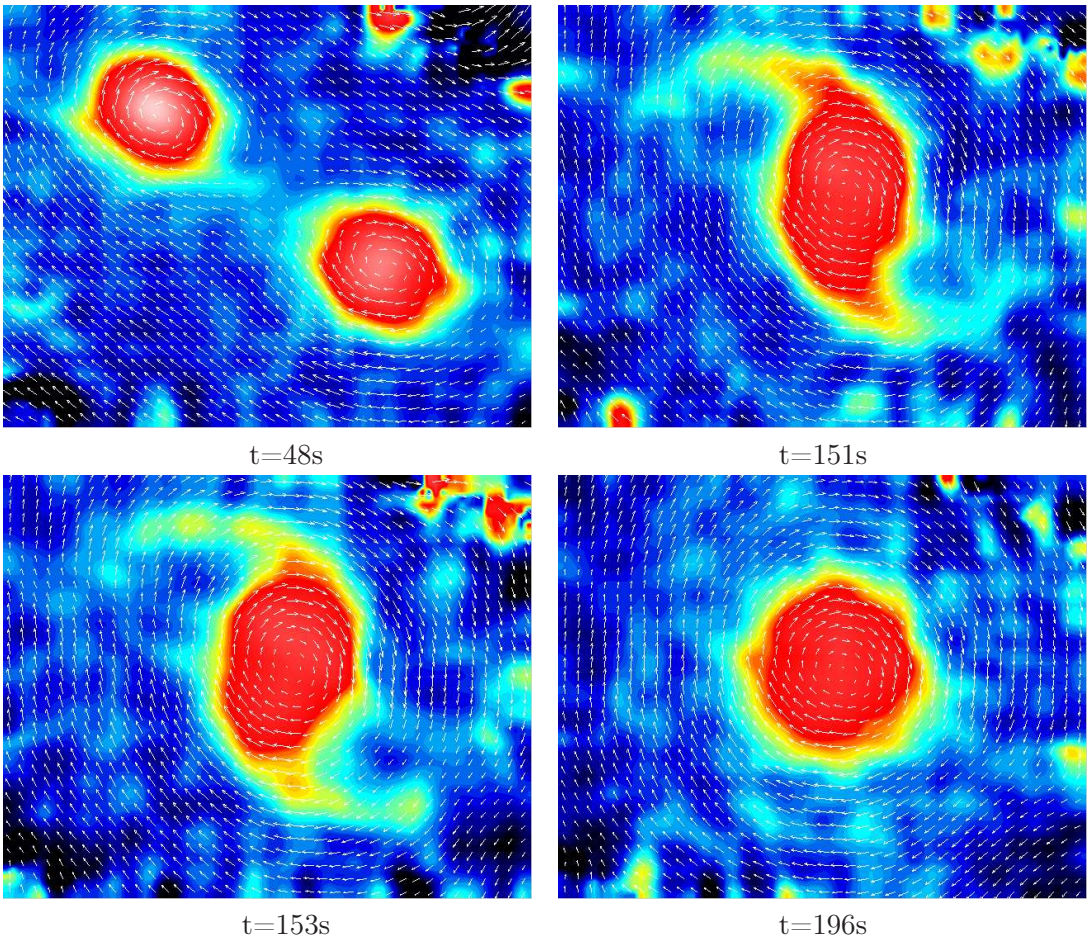


Fig. 5.12 – Coupes horizontales de l'écoulement obtenues par PIV. Les flèches blanches indiquent les champs de vitesse, la couleur indique la valeur de la vorticité verticale qui croît du bleu vers le rouge. La première image représente les deux tourbillons vite après leur formation. Dans la deuxième et la troisième image, les tourbillons sont en train de s'apparier et on peut observer la formation de bras autour de la zone d'appariement. La quatrième image montre le tourbillon résultant de l'appariement.

5.2.5 Détermination des caractéristiques des tourbillons

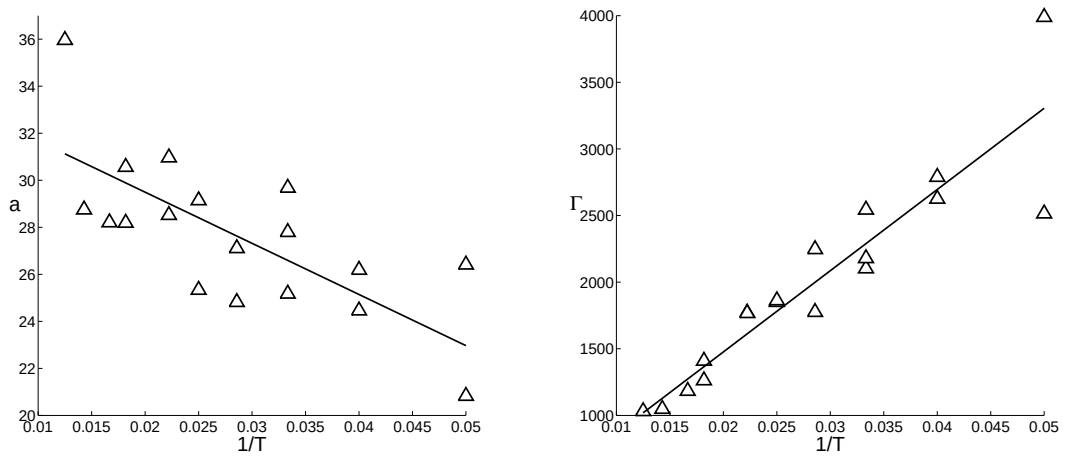
Afin de déterminer les caractéristiques des tourbillons à partir des mesures par PIV, on implémente sous matlab un programme de minimisation de l'erreur entre un champ de vorticité verticale obtenu par PIV et la vorticité verticale ω correspondant à deux tourbillons

Gaussiens identiques de rayon a, de circulation Γ et séparés par une distance b :

$$\omega = \frac{\Gamma}{\pi a^2}\left(\exp\left(-\frac{(x-\frac{b}{2})^2+y^2}{a^2}\right)+\exp\left(-\frac{(x+\frac{b}{2})^2+y^2}{a^2}\right)\right). \tag{5.1}$$

La même méthode de minimisation de l'erreur a été appliquée aux champs de vitesse, champs présentant le désavantage d'être moins localisés que les champs de vorticité mais l'avantage d'avoir été directement mesurés par le logiciel de PIV. Les résultats se sont avérés très proches. Nous discutterons des différents résultats à partir du champ de vorticité. L'erreur qui résulte de ce fit est comprise entre 5% et 9% selon les expériences. En fittant les champs de vorticité à chaque instant enregistré durant l'expérience, nous en déduisons l'évolution temporelle des caractéristiques des tourbillons $a(t)$, $b(t)$ et $\Gamma(t)$. Le post-traitement des champs obtenus par un filtre passe-bas permet d'éliminer les petites structures du bruit et joue peu sur les résultats.

Nous avons observé que la taille du coeur des tourbillons augmente du fait de la diffusion visqueuse à partir de $t = 0s$ et leur circulation reste à peu près constante. La taille a_i et la circulation Γ_i des toubillons sont alors définies comme les moyennes de $a(t)$ et $\Gamma(t)$ entre $t = 10s$ et $t = 20s$ pour chaque expérience indicée par i. Les nombres de Froude $F_i = \Gamma_i/\pi a_i^2 N$ et de Reynolds $Re_i = \Gamma_i/\pi\nu$ qui caractérisent la paire de tourbillons d'une expérience peuvent alors être calculés. Nous fittons l'évolution de a_i et Γ_i en fonction de l'inverse du temps de rotation des flaps $1/T$. Les fonctions résultant du fit sont indexées par la lettre f. Nous avons observé une diminution linéaire de la taille des coeurs $a_f(1/T)$ (figure 5.13 *a*) et une augmentation linéaire de la circulation $\Gamma_f(1/T)$ (figure 5.13 *b*) avec la vitesse de rotation des flaps. Nous utilisons ces deux fits pour définir les fonctions nombre de Froude $F_f(1/T)$ et de Reynolds $Re_f(1/T)$ qui correspondent à une durée de rotation des flaps T. La figure 5.14 montre que les valeurs Re_i et F_i qui avaient été calculées pour chaque expérience sont bien distribuées autour de ces fonctions. Nous avons utilisé la fonction $F_f(1/T)$ pour tracer la longueur d'onde de l'instabilité zigzag en fonction du nombre de Froude car nous ne pouvons pas, pour des raisons pratiques, mesurer le nombre de Froude par PIV et la longueur d'onde par visualisation à la fluorescéine au cours de la même manipulation.
On note que pour une autre stratification caractérisée par une fréquence N^*, la fonction nombre de Froude $F_f^*(1/T)$ serait simplement l'image de $F_f(1/T)$ par une homothétie de rapport N/N^*. La fonction $Re(1/T)$ est invariante. En d'autres termes, pour une stratification donnée et donc un N fixé, un nombre de Froude correspond à un unique nombre de Reynolds. Si on change la stratification de l'expérience, on change cette correspondance et le même nombre de Froude correspondra à un autre nombre de Reynolds.



a *b*

FIG. 5.13 – Évolution de (a) la taille des coeurs des tourbillons a (en mm) et (b) de leur circulation Γ (en mm^2s^{-1}) en fonction de la vitesse de rotation des flaps. a_i et Γ_i sont représentés par les symboles $\triangle$. Les fits a_f et Γ_f sont représentés en traits pleins.

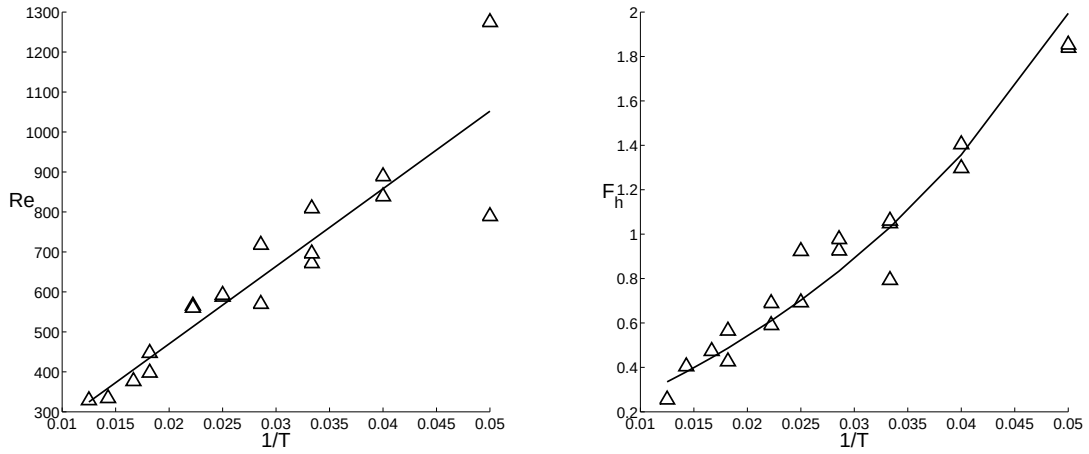


FIG. 5.14 – Évolution (a) du nombre de Reynolds Re et (b) du nombre de Froude F en fonction de la vitesse de rotation des flaps. Les valeurs calculées pour chaque expérience Re_i et F_i sont représentées par les symboles $\triangle$. Les fonctions calculées $Re_f(1/T)$ et $F_f(1/T)$ à l'aide des fits des figures 5.13 (a) a_f et (b) Γ_f sont représentées en traits pleins.

L'évolution de la distance entre les tourbillons est plus complexe à déterminer. Tout d'abord, on a observé une variabilité de la distance initiale entre les tourbillons, notée b_0, à $t = 0s$. On considère donc l'évolution de la distance des tourbillons b adimensionnée par b_0. Une première phase d'ajustement est observée juste aprés la création des tourbillons (figure 5.15) où la distance entre les deux tourbillons diminue. Cette phase d'ajustement

avait également été observée dans les expériences de Meunier (2001) en milieu homogène. Ici, elle correspond à une rotation de la paire de tourbillons d'environ un quart de tour (figure 5.15). Ensuite apparaît une seconde phase où la distance entre les deux tourbillons reste en bonne approximation constante et reste en moyenne sur toutes les expériences égale à $0.75b_0$. À cause de la variabilité de b_0, nous avons mesuré la distance entre les tourbillons b_{mes} lors de chaque expérience visualisée à la fluorescéine au moment où les axes des deux tourbillons sont dans le plan de la caméra LIF (Laser Induced Fluorescence), c'est-à dire quand $\theta = \pi/2$ et avant que les tourbillons ne soient déformés par l'instabilité zigzag. On adimensionne donc ensuite la longueur d'onde mesurée par $b_0 = b_{mes}/0.75$. Le rapport d'aspect entre la taille des deux tourbillons et leur distance est calculé comme $a_f(1/T)/b_0$.

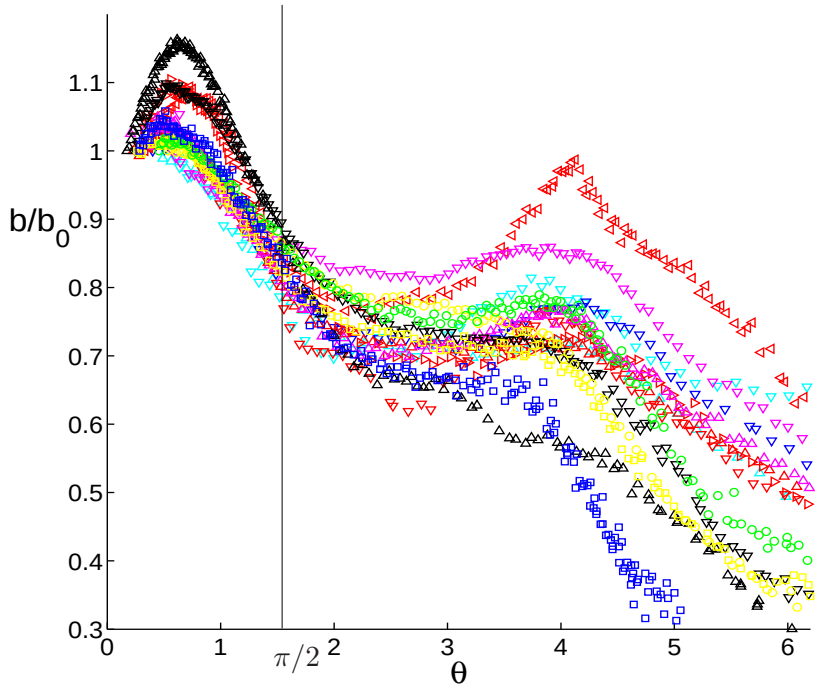


FIG. 5.15 – Évolution de la distance entre les deux tourbillons en fonction de leur angle de rotation θ défini figure 5.8 comme l'angle de rotation de la paire de tourbillon à partir de la direction perpandiculaire à la direction des flaps avant leur rotation, pour différentes expériences où la rotation des flaps est effectuée en un temps (△, ▽) $T = 20s$, (▽) $T = 25s$, (△, ▽, ◁, ▷) $T = 30s$, (△, ▽) $T = 35s$, (△, ▽) $T = 40s$, (○, □) $T = 45s$, (○) $T = 55s$, (□) $T = 70s$.

Chapitre 6

Simulations numériques de l'appariement de tourbillons verticaux en milieu stratifié

Ce chapitre présente un article en préparation : Pairing of two vertical columnar vortices in a stratified fluid.

L'étude numérique de l'appariement de deux tourbillons co-rotatifs verticaux en milieu stratifié est effectuée à l'aide de simulations numériques directes qui résolvent les équations non-linéaires de Navier-Stokes sous l'approximation de Boussinesq. On a observé la formation de couches horizontales dont l'épaisseur est en accord avec la longueur d'onde de l'instabilité zigzag prédite par l'étude linéaire du chapitre 3.

L'appariement a lieu plus tôt que dans le cas d'un appariement bidimensionnel mais il est alternativement accéléré ou ralenti selon les couches, c'est-à-dire toutes les demi-longueur d'onde selon la verticale. À l'intérieur d'une couche, on observe au contraire une recorrélation de l'écoulement selon la verticale et l'appariement y est quasi-simultané. De forts gradients verticaux sont ainsi créés à la base et au sommet de ces couches générant beaucoup d'enstrophie horizontale. On note aussi une perte d'énergie cinétique d'environ 20% au cours de l'appariement stratifié, ce qui diffère de l'appariement bidimensionnel. Enfin, le tourbillon final résultant de cette appariement désynchronisé sur la verticale présente une variation de la taille de son coeur : il est plus gros dans les couches où l'appariement a été retardé et inversement.

Pairing of two vertical columnar vortices in a stratified fluid

By PANTXIKA OTHEGUY[1], JEAN-MARC CHOMAZ[1], YOSHIFUMI KIMURA[2,3] and PAUL BILLANT[1]

[1] LadHyX, CNRS - École Polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex, France

[2] Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464-8602, Japan

[3] National Center for Atmospheric Research, P.O. Box 3000, Boulder, CO 80307, USA

(in preparation)

Abstract

We present a high resolution numerical simulation of the pairing of two vertical columnar vortices in a stratified fluid. We observe that the development of the zigzag instability described in Otheguy, Chomaz & Billant (2005*b*) induces the rapid merging of vortices. The merging of the vertical vortices occurs sooner than in the two-dimensional case at any vertical location but it does not occur simultaneously along the vertical resulting in the formation of horizontal layers decorrelated on the vertical with a thickness scaling on the buoyancy length scale $L_B = F_h b$, where F_h is the horizontal Froude number ($F_h = \Gamma/\pi a^2 N$ with a the core size of the vortices, Γ their circulation and N the Brunt-Väisälä frequency) and b is the separation distance between the vortices. The merging is more and less accelerated alternately every half a wavelength along the vertical generating layers within which the flow is surprisingly uniform. High vertical gradients are expulsed in between these layers, the associated strong shear generates a substantial creation of horizontal enstrophy that dissipates energy. The vortex resulting from this desynchronized merging is not uniform along the vertical even at late time. The core size is larger (respectively smaller) where the merging occurred later (respectively sooner).

6.1 Introduction

In the atmospheres, the oceans and astrophysical fluids, flow is usually stably stratified (see Riley & Lelong (2000) and Cambon (2001) for a review). At mesoscales in Earth atmosphere between 1km and 500 km, the effect of planetary rotation can be neglected and stratification is the dominant feature of the dynamics. Nastrom, Gage & Jasperson (1984) reported that the horizontal wavenumber spectra is of the form $k_h^{-5/3}$ for atmosphere mesoscales, whereas it is of the form k_h^{-3} at larger scales. Gage & Nastrom (1986) and Lilly (1983) suggested that the $k_h^{-5/3}$ spectrum might be due to an inverse cascade of energy from small ($\sim$ 1 km) to large ($\sim$ 500 km) scales, similar to the energy cascade of two-dimensional (2D) turbulence. In 2D turbulence this inverse cascade is achieved by the phenomenon of vortex merging that transfers energy to larger and larger structures. This idea of an

inverse energy cascade at mesoscales in the atmosphere has recently been contradicted by Lindborg (1999), who by computing high order statistical moments of airborne turbulence measurements, has shown on the contrary that the energy cascade is direct, i.e. from large to small scales.

On the vertical, Smith, Fritts & Van Zandt (1987) found a vertical spectra of the form k_z^{-3}. This vertical spectrum has been attributed to a direct cascade of non-linearly interacting gravity waves (see Staquet & Sommeria 2002*b* for a review). However, Billant & Chomaz (2001) showed that the inviscid Boussinesq equations are self-similar with respect to the variable zN/U, where z is the vertical coordinate, N the Brunt-Väisälä frequency and U the horizontal velocity scale of the motion, and assuming that this scaling is valid at every vertical scale, they have predicted the vertical spectrum $N^2\, k_z^{-3}$ for strongly stratified turbulence, independently of wave processes. Godeferd & Cambon (1994) showed further that the resonant wave interactions have a limited effect and that pure vortical interactions generate irreversible anisotropy under stable stratification preventing the inverse cascade of 2D turbulence. These vortex interactions act to transfer energy in spectral space toward vertical wave vectors, corresponding to strong layering.

Furthermore, laboratory experiments (Park, Whitehead & Gnanadeskian 1994 ; Holford & Linden 1999) of stratified turbulence have interestingly shown that a forcing homogeneous on the vertical can induce the spontaneous formation of a strong layering on the vertical and that the thickness of the layers depends strongly on the stratification and scales as U/N. The simulations of stratified turbulence by Waite & Bartello (2004) and Lindborg (2004) also found a formation of layers with a thickness obeying the same scaling law.

The zigzag instability, described by Billant & Chomaz (2000*a*) in the case of counter-rotating vortices, has been proposed to explain this scaling law since it has been shown to decorrelate the flow vertically via differential displacements of the vortices creating layers whose thickness is proportional to U/N. Otheguy, Chomaz & Billant (2005*b*) have extended the stability analysis to pairs of co-rotating vortices and obtained that the zigzag instability is also present with a most unstable wavelength scaling on the buoyancy length scale $L_B \propto F_h b$, where b is the distance between the vortices and F_h the horizontal Froude number ($F_h = \Gamma/\pi a^2 N$, where a is the vortex cores size and Γ their circulation).

In 2D turbulent flows, presence of coherent vortices has been highlighted by Mc Williams (1984) and merging of co-rotating vortices has been shown to dominate the dynamics by transferring energy from small to large scales (Kraichnan, 1967). Since the zigzag instability affects co-rotating vortex pairs and has a growth rate scaling like twice the external strain field generated by one vortex on the other ($S = \Gamma/2\pi b^2$), this instability is as fast as the intrinsic rotation dynamics of one co-rotating vortex pair at the rate $\Omega = \Gamma/\pi b^2$. As a consequence, this instability should strongly affect the non-linear merging between vortices, and should therefore modify the turbulence dynamics.

In the present paper, we investigate the study of a single pairing event in a strongly stratified fluid in order to figure out to which extent stratification modifies this process. In particular, we will compare stratified merging to two-dimensional merging. The second section presents the numerical method used to study a pairing event in details by a high-resolution calculation. The third section shows the qualitative behaviour of the instability. The fourth, fifth and sixth sections describe and analyse in details the pairing event in a stratified fluid.

6.2 Numerical method

6.2.1 DNS code

We use a pseudo-spectral solver of the non-linear incompressible Navier-Stokes equations under the Boussinesq approximation adapted from the unstratified code used by Gallaire & Chomaz (2003). The numerical domain is a parallelepipedic box with a square horizontal base (L_x=L_y where L_x and L_y are the dimensions of the box respectively in the x and y directions). The vertical size of the box L_z is (except when precised otherwise) equal to the most unstable wavelength $L_z = \lambda_{max}$ as predicted by the linear stability theory (Otheguy *et al.*, 2005*b*), i.e. proportional to bF_h. The spatial resolution is chosen to be about the same in all directions implying that the number of collocation points on the horizontal are equal $n_x = n_y$ and on the vertical is $n_z \sim n_x L_z/L_x$. The density field is initialized by a constant density ρ_0 plus a linear profile $\bar{\rho}(z)$ with a Brunt-Väisälä frequency N equal to $N = \sqrt{-(g/\rho_0)d\bar{\rho}/dz}$ and a perturbation ρ. The velocity field is initialized as $\boldsymbol{u}(x, y, z, t = 0) = \boldsymbol{U}_{2D}(x, y) + \epsilon\, \boldsymbol{U}_p(x, y, z)$, where $\boldsymbol{U}_{2D}$ is a 2D initial flow referred to as the "basic state", $\boldsymbol{U}_p$ is a three-dimensional (3D) perturbation and ϵ its initial amplitude. The time evolution is given by :

$$\text{div } \boldsymbol{u} = 0 \tag{6.1}$$

and :

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{\omega} - \nabla \left[p + \frac{\boldsymbol{u}^2}{2} \right] - \rho \boldsymbol{e}_z + \nu \Delta \boldsymbol{u} \tag{6.2}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = N^2 u_z + \nu \Delta \rho \,. \tag{6.3}$$

where p is the pressure field, $\boldsymbol{e}_z$ the unit vector in the z-direction, ν the kinematic viscosity. Here the density has been rescaled by the gravity acceleration g in order to avoid an extra constant in equation (6.2).

Equations (6.2-6.3) are expressed in the Fourier space :

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{u}}}{dt} = P(\boldsymbol{k}) \left[\widehat{\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{\omega}} - \hat{\rho} \boldsymbol{e}_z \right] - \nu \boldsymbol{k}^2 \hat{\boldsymbol{u}} \tag{6.4}$$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = N^2 \hat{u}_z + \nu \boldsymbol{k}^2 \hat{\rho} \,. \tag{6.5}$$

where the Fourier transform is denoted by a hat and $P(\boldsymbol{k})$ is the projection operator on the solenoidal space.
Time integration is performed with a second order Adams-Bashforth scheme. Dissipative terms are integrated exactly. The 2/3 rule is applied for de-aliasing.

6.2.2 Basic state

A quasi-steady two-dimensional solution $\boldsymbol{U}_{2D}$ is first obtained from a two-dimensional non-linear simulation initialized by two identical co-rotating gaussian vortices of radius a_i, circulation Γ_i, separated by a distance b_i. The corresponding vorticity field reads :

$$\omega_i = \frac{\Gamma_i}{\pi a_i^2}\left(\exp\left(-\frac{(x-\frac{b_i}{2})^2+y^2}{a_i^2}\right)+\exp\left(-\frac{(x+\frac{b_i}{2})^2+y^2}{a_i^2}\right)\right). \tag{6.6}$$

The two-dimensional simulation is conducted for the same set of parameters (n_x, n_y, L_x, L_y, ν) as the 3D simulation. Each gaussian vortex adapts rapidly its shape to the strain field created by the companion vortex to become slightly elliptical (Moore & Saffman 1975, Moffatt, Kida & Ohkitani 1994, Eloy & Le Dizès 1999, Le Dizès & Laporte 2002). Then, the vortex cores a increase by viscous diffusion whereas their distance b stays constant. $\boldsymbol{U}_{2D}$ is then defined as the snapshot of the flow when the ratio between the vortex core size and their separation distance has reached the desired value (a_0/b_0). The same two-dimensional simulation is then continued and will be used for comparison with the 3D numerical simulation from this time.
Space and time are next non-dimensionalized respectively by the core size a_0 and $\tau = \pi a_0^2/\Gamma_0$, the inverse of the vorticity at the center of each vortex. The density is rescaled by $\rho_0\Gamma_0^2/g\pi^2 a_0^3$. The same notation is kept for the non-dimensional variables for the sake of simplicity. The Reynolds number is defined as $Re = \dfrac{\Gamma_0}{\pi\nu}$. The Froude number is $F_h = \dfrac{\Gamma_0}{\pi a_0^2 N}$.
A numerical linear stability analysis is next conducted based on $\boldsymbol{U}_{2D}$ for the set of parameters (n_x, n_y, L_x, L_y, Re, F_h, a_0/b_0) to find the more unstable eigenmode $\boldsymbol{U}'$ and the vertical wavenumber k_{zm} associated (see Otheguy *et al.* 2005*b* for details on the numerical method). $\boldsymbol{U}'$ is normalized so that the density energy perturbation is equal to 1. A three-dimensional basic state $\boldsymbol{U}$ is then built as :

$$\boldsymbol{U}(x,y,z) = \boldsymbol{U}_{2D}(x,y) + A * \Re e(e^{ik_{zm}z} * \boldsymbol{U}'(x,y)) \tag{6.7}$$

where A is the amplitude of the perturbation, and where z varies from 0 to $L_z = 2\pi/k_{zm}$. We recall that the scaling of Otheguy *et al.* (2005*b*) predicts that $k_{zm} \sim 9.8/b_0F_h$. The DNS computation is finally initialized by $\boldsymbol{U}$.
To sum up, the initial flow is made of a quasi-steady basic state homogeneous along the vertical corresponding to a pair of co-rotating vortices adapted to each other and perturbed by the most unstable mode predicted by the linear stability theory.

6.3 Qualitative behaviour of the pairing of vortices in a stratified flow

The dynamics of the merging of two co-rotating vortices in a linearly stratified flow has been first computed without the sophisticated machinery described above by simply computing in a cubic box at moderate resolution 128^3 the evolution of two gaussian vertical vortices perturbed by low amplitude white noise. The low-storage third-order Runge-Kutta method is used for time advancement in the present case. The initial vortices are characterized by a ratio between their initial core size $a_0 = 1$ and their initial separation distance $b_0 = 6.75$, $a_0/b_0 = 0.15$. The Froude number is $F_h = 1.33$ and the Reynolds number is $Re = 2120$. The size of the domain is $L_x = L_y = L_z = 10\pi$.

Figure 6.1 shows the temporal evolution of the pair of co-rotating vortices in the presence of strong stratification. At the beginning of the simulation (t=0), the vortices are

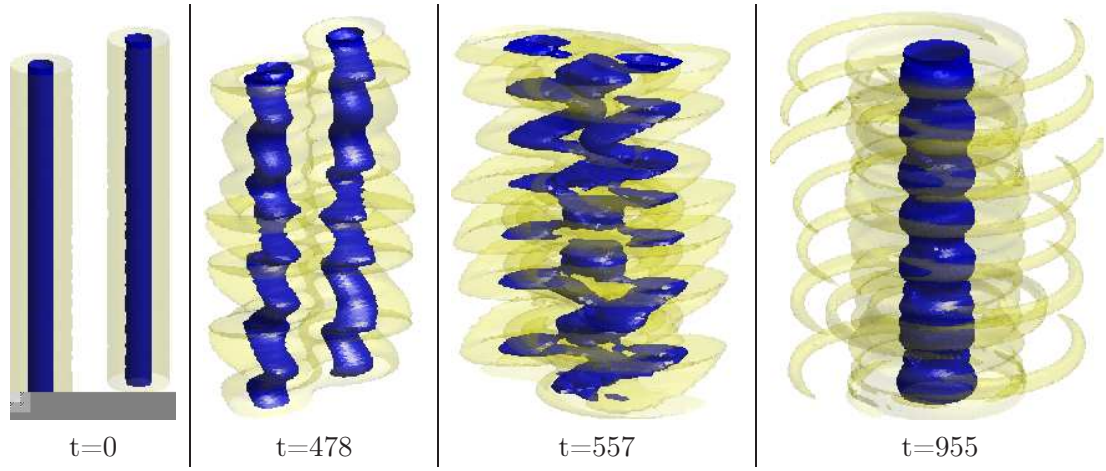


FIG. 6.1 – Vertical vorticity contours (yellow and blue contours represent respectively 5% and 50% of the maximum vorticity) obtained by DNS of two co-rotating vertical vortices for $a_0/b_0 = 0.15$, $F_h = 1.33$ and $Re = 2120$.

straight along the vertical. Then they rotate one around the other at an initial angular velocity $\Omega_0 = \Gamma_0/\pi b_0^2$, where Γ_0 is the initial circulation of the vortices. At time t=478, the zigzag instability described by Otheguy *et al.* (2005*b*) has developed and reached a finite amplitude without saturating. The two vortices are displaced symmetrically in a direction making a well defined angle with the line joining the vortex centers. The vortices are drived alternately closer and farther along the vertical such that the distance between the two vortex axes oscillates on the vertical. At t=557, the flow decorrelates on the vertical. The pairing of the vortices has occurred in layers where they were brought closer by the instability. This layers alternate with layers where two well-separated vortices are still rotating one around the other. Finally at t=955, the two vortices have merged all along the vertical. The final vortex displays a variation of core size along the vertical reminiscent of the desynchronized pairing. This modulated core is surrounded by low intensity spiral arms.

The vertical wavelength that shows up spontaneously is $\lambda/bF_h = 0.5$ with a variability about 16%. This wavelength is in good agreement with the wavelength $\lambda/bF_h = 0.64$ predicted by the linear stability analysis by Otheguy *et al.* (2005*b*) for small F_h despite that the present simulation is at a moderate Froude number ($F_h = 1.33$). That means that the non-linear dynamics of the pairing is controlled by the linear zigzag instability. Therefore applying the procedure described in section 6.2 with the choice of a carefully controlled perturbation should not impact on the dynamics of the flow and allows high numerical accuracy by the use of a very flat box and fine spatial resolution.

6.4 Description of merging in a strongly stratified fluid

In this section, the horizontal size of the computational domain is chosen large $L_x = L_y = 30$ (i.e. 30 times the vortex radius) enough to minimize the effects of the periodic

boundary conditions. The number of horizontal collocation points is $n_x = n_y = 512$ in order to have a fine mesh in the vortex core and the time step is $\delta t = 0.01$. The ratio between the initial core size of the vortices $a_0 = 1$ and their initial separation distance $b_0 = 6.75$ is $a_0/b_0 = 0.15$. The Froude number is $F_h = 1$ and the Reynolds number is $Re = 2000$. $L_z = 4.2$ and $n_z = 72$ with this set of parameters. The perturbation amplitude is $A = 0.001$. Figures 6.2, 6.3 and 6.4 display respectively the temporal evolution of the total, vertical and horizontal vorticity contours. At time t=10 (figure 6.2 ; figure 6.3), the vortices are straight along the vertical. The initial perturbation induces a bending of the vortices too small to be visible on vertical or total vorticity contours but visible by the induced horizontal vorticity perturbation (figure 6.4) although its amplitude is small. The maximum value of the horizontal vorticity ($M_h = 0.008$) is small compared to the maximum value of the total vorticity ($M_t \approx 1$).

At t=290 (figure 6.3), the zigzag instability distorts symmetrically the two vortices and drives them alternately closer and farther every half a wavelength along the vertical. The horizontal vorticity magnitude has strongly increased ($M_h = 0.481$) and is now almost equal to the vertical vorticity magnitude ($M_z = 0.488$), strongly modifying the shape of the total vorticity (figure 6.2 at t=290). As shown on figure 6.4, horizontal vorticity has been generated away from the two vortices axes by the baroclinic torque probably because the zigzag instability creates horizontal density gradient through cyclostrophic balance by breaking the vertical alignment of the vortex center.

At time t=350 (figure 6.3), the flow is splitted on the vertical in two layers : let us call $\mathcal{L}_1$ the layer where the merging has occurred and $\mathcal{L}_{1/2}$ the layer where two well-separated vortices are still rotating around each other. $\mathcal{L}_1$ is constituted by the top and the bottom of the periodic box and corresponds to the vertical location where the vortices were brought closer at $t = 290$. $\mathcal{L}_{1/2}$ is central in the box and corresponds to the vertical location where the vortices were moved apart at $t = 290$. This succession of layers is evidenced on figure 6.5 where, in the horizontal slice in the middle of layer $\mathcal{L}_{1/2}$ (section $\mathcal{S}_{1/2}$) at $z = 1.8$, the two vortices are well separated whereas they have merged on the three other cross-sections. Figure 6.4 at t=350 displays a complex entanglement of thin horizontal structures of horizontal vorticity. At this instant, the horizontal vorticity magnitude ($M_h = 0.404$) is larger than the vertical vorticity one ($M_z = 0.324$) : the horizontal component dominates the total vorticity as shown by the resemblance of figure 6.2 at t=350 and figure 6.4 at t=350.

At time t=480, figure 6.3 shows that layer $\mathcal{L}_{1/2}$ is still composed of two well-separated vortices that rotate one around the other whereas the two vortices have already merged outside this layer at any vertical location. Thin horizontal structures are still visible on figure 6.4 at t=480 and a large part of these structures are localized within layer $\mathcal{L}_{1/2}$. The magnitude of the horizontal vorticity ($M_h = 0.139$) has decreased dramatically and is smaller than the vertical vorticity ($M_z = 0.225$).

At t=600, the merging has occurred in all the layers. The horizontal vorticity has decreased even more ($M_h = 0.062$) whereas the vertical vorticity keeps similar value ($M_z = 0.213$). Arms and a few thin horizontal structures are still visible on figure 6.4 within layer $\mathcal{L}_{1/2}$. The total vorticity (figure 6.2 at t=600) ressembles now sharply the vertical vorticity (figure 6.3 at t=600) and their magnitude are approximately equal.

At t=750, the merged vortex displays variations of the core size along the vertical (figure 6.3). The horizontal vorticity is small ($M_h = 0.045$, to be compared to $M_z = 0.206$) but

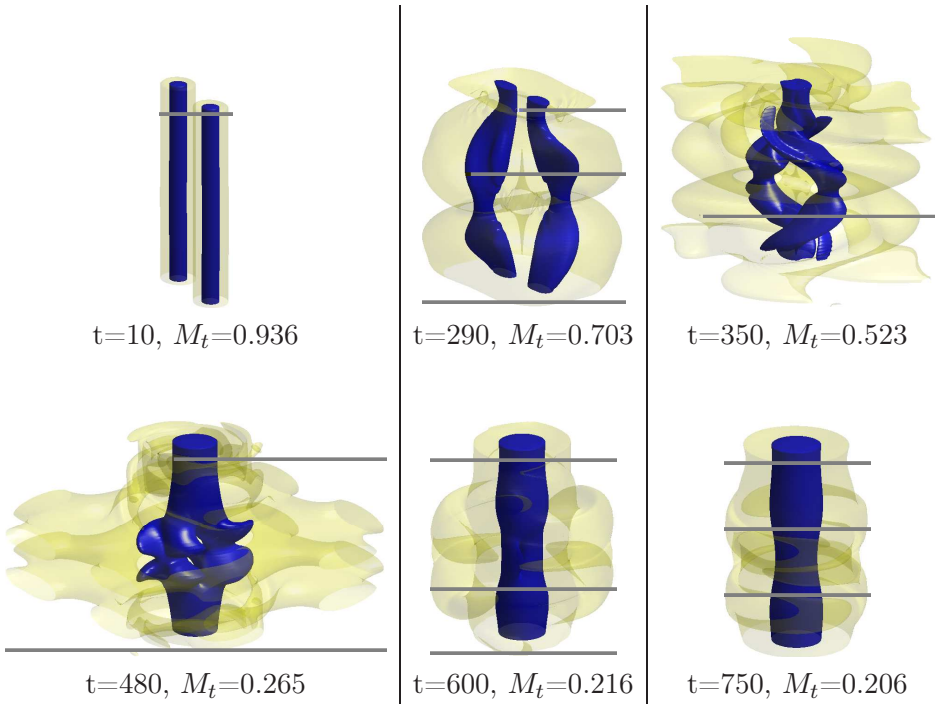


FIG. 6.2 – Total vorticity contours (yellow and blue contours represent respectively 5% and 50% of the vertical mean of the maximum total vorticity M_t) obtained by DNS of two co-rotating vertical vortices for $a_0/b_0 = 0.15$, $F_h = 1$, $Re = 2000$ and $A = 0.001$.

still exhibit two separated layers of thickness half a wavelength.

In summary, the zigzag instability makes the merging non-simultaneous along the vertical creating strong horizontal shear between layers where the merging occurs respectively sooner and later.

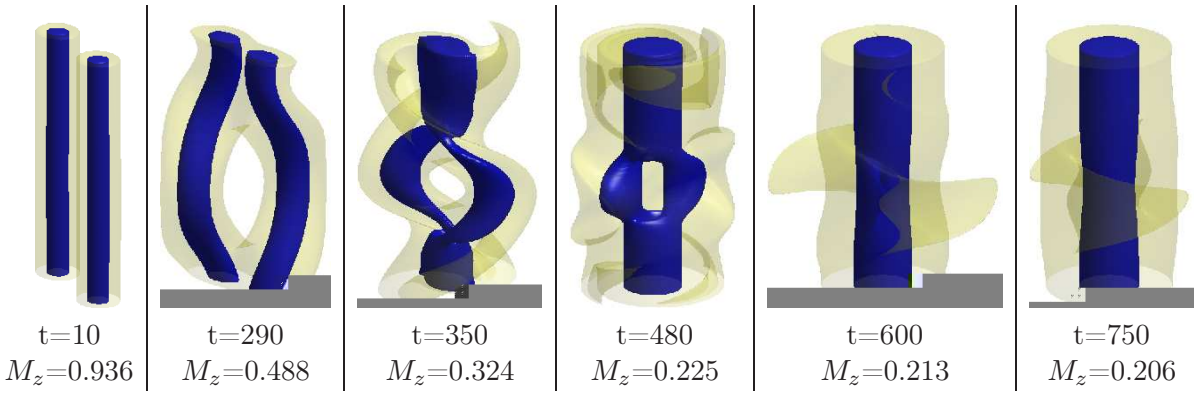


FIG. 6.3 – Vertical vorticity contours (yellow and blue contours represent respectively 5% and 50% of the vertical mean of maximum vertical vorticity M_z) obtained by DNS of two co-rotating vertical vortices for $a_0/b_0 = 0.15$, $F_h = 1$, $Re = 2000$ and $A = 0.001$.

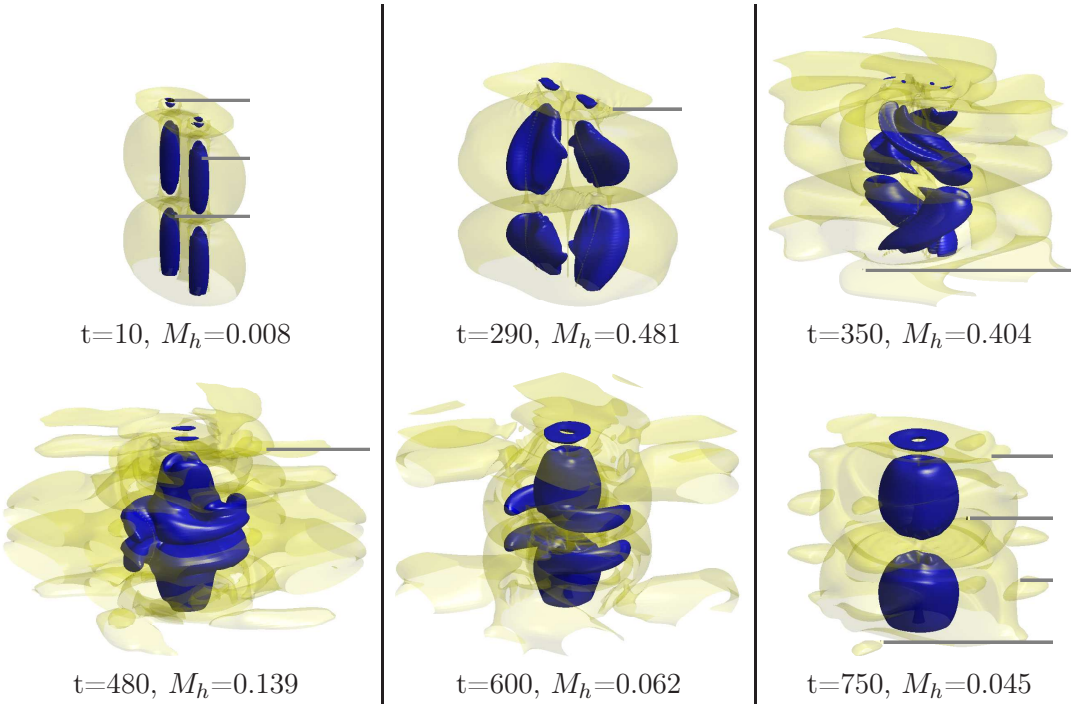
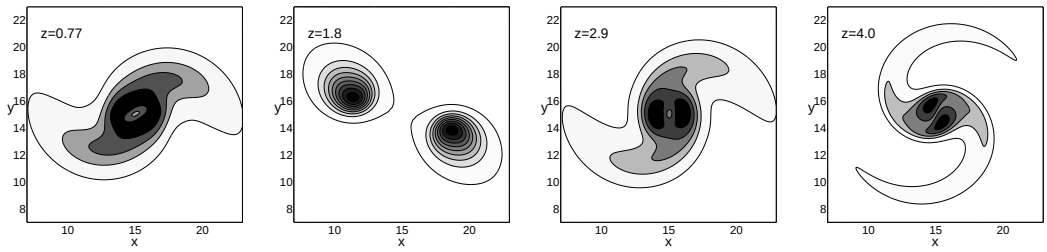


FIG. 6.4 – Horizontal vorticity contours (yellow and blue contours represent respectively 5% and 50% of the vertical mean of the maximum horizontal vorticity M_h) obtained by DNS of two co-rotating vertical vortices for $a_0/b_0 = 0.15$, $F_h = 1$, $Re = 2000$ and $A = 0.001$.



$\mathcal{S}_{1/2}$ $\mathcal{S}_1$

FIG. 6.5 – Horizontal cross-sections of the vertical vorticity of the two co-rotating vortices at the same time t=350 and at four different vertical locations separated by quarter a wavelength : at $z = 0.77$, at $z = 1.8$ in section $\mathcal{S}_{1/2}$ within $\mathcal{L}_{1/2}$, at $z = 2.9$, at $z = 4.0$ in section $\mathcal{S}_1$ within $\mathcal{L}_1$. We recall the set of parameters used in the numerical simulation : $a_0/b_0 = 0.15$, $F_h = 1$, $Re = 2000$ and $A = 0.001$.

6.5 Analysis of a stratified pairing and comparison with a 2D pairing

6.5.1 Evolution of the separation distance b and of the core size of the vortices a

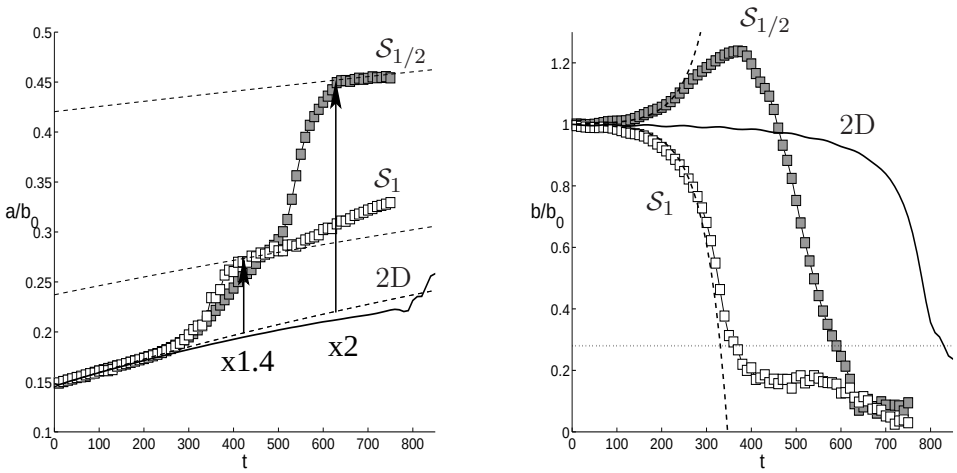
The time-evolution of the vortex pair is analyzed by fitting the vertical vorticity ω_z in horizontal cross-sections at each vertical station by two gaussian vortices separated by a distance b, with an instantaneous circulation Γ and a core size a. This fit on the vorticity is approximately 5% accurate showing that all along their evolution the vortices do not deform much except at the very instant they merge.

This fit is first performed on the 2D simulation and the results are plotted in full line on figure 6.6. In two-dimension, the evolution of the vortices before merging exhibits several distinct phases as described by Melander, Zabusky & McWilliams (1988), Le Dizès & Verga (2002), Meunier, Ehrenstein, Leweke & Rossi (2002) and Cerretelli & Williamson (2003). These results are well recovered by our 2D numerical simulation. In the first short inertial phase (not presented here since the vortices are already adapted), each vortex deforms becoming elliptical in order to adapt to the strain field generated by the presence of the companion vortex. In the second viscous phase, the separation distance between the vortices b (figure 6.6 b) remains almost constant and the vortex core size a (figure 6.6 a) evolves only by viscous diffusion. The third phase is a convective process where the separation distance between the vortices falls rapidly that we will call the merging. Meunier *et al.* (2002) showed that this convective merging is initiated when the ratio between the vortex radius a and the separation distance between the vortices b reaches a critical value $(a/b)_c \sim 0.29$. Cerretelli & Williamson (2003) identified a fourth stage (not visible on figure 6.6) where two vorticity maxima are present inside the merged vortex and moves slowly toward the origin by diffusion. In that phase, the distance between the vorticity maxima oscillates about 0.28 b_0 with decreasing amplitude. After merging, the final vortex evolves slowly by viscous diffusion.

Results from the three-dimensional stratified simulation are also reported on figure 6.6. Figure 6.6 b compares the evolution of the separation distance between the vortex centers b as a function of time for two vertical positions $\mathcal{S}_{1/2}$ (z=1.8) and $\mathcal{S}_1$ (z=4) at the center of the layers $\mathcal{L}_{1/2}$ and $\mathcal{L}_1$ to the two-dimensional simulation corresponding to the same set of parameters. We consider that the vortices have merged when their separation distance reaches the value $b_c = 0.28 b_0$, i.e. at the end of the abrupt fall of b caracterizing the convective merging phase in 2D. We observe that in $\mathcal{S}_{1/2}$ and in $\mathcal{S}_1$ the merging occurs sooner in the three-dimensional stratified simulation than in the two-dimensional case but is not synchronous along the vertical as already observed in figures 6.2, 6.3 and 6.4. In a first stage, the separation distances $b_{1/2}$ and b_1 between the two vortices in the cross-sections $\mathcal{S}_{1/2}$ and $\mathcal{S}_1$ follow the laws predicted by the linear stability analysis (dashed line in figure 6.6 b) :

$$b_{1/2}(t) = b_0 + A_b * A \exp(\sigma t) \tag{6.8}$$

$$b_1(t) = b_0 - A_b * A \exp(\sigma t) \tag{6.9}$$



(*a*) (*b*)

FIG. 6.6 – Evolution of (*a*) the vortex cores size a non-dimensionalized by b_0, (*b*) the separation distance between the vortex centers b non-dimensionalized by b_0, (*c*) of the ratio a/b as a function of time for $a_0/b_0 = 0.15$, $F_h = 1$, $Re = 2000$, $A = 0.001$. The solid line represent the 2D case and symbols the 3D stratified case with ■ section $\mathcal{S}_{1/2}$ and □ section $\mathcal{S}_1$. Predictions of the zigzag instability linear theory (eq. 6.8-6.9) are represented by dashed lines and the merging criterium $b_c = 0.28b_0$ is plotted by a dotted line in figure (*b*) giving $t_1 \approx 365$ and $t_{1/2} \approx 590$. The viscous diffusion law (eq. 6.10) is represented by a dashed line in figure (*a*) and translated several times to the merged vortices evolution.

where $A_b = 6.5$ is not a fit parameter but the displacement in the direction of the line joining the vortex centers induced by the zigzag instability eigenmode computed, for this set of parameters, by the numerical linear stability analysis to build the basic state and $\sigma = 0.02$ its growth rate.

Amazingly, the exponential decay of b_1 predicted by the linear theory (6.9) stays valid until the vortices merge in $\mathcal{L}_1$ at time $t_1 \approx 365$ suggesting that the pairing in $\mathcal{L}_1$ is not driven by the usual convective merging process but by the instability (figure 6.6 *b*). In the section $\mathcal{S}_{1/2}$ where the vortices initially moved apart, the distance $b_{1/2}$ starts increasing slower than the exponential evolution (6.8) and then decreases. The pairing is also anticipated compared to the two-dimensional simulation, but occurs later than in $\mathcal{S}_1$ at the time $t_{1/2} = 590$ (figure 6.6 *b*).

During the first stage, the core size of the vortices a follows the two-dimensional viscous evolution according to the diffusion law (Batchelor, 1967) (figure 6.6 *a*) :

$$a(t) = \sqrt{a_0^2 + 4\nu t} \tag{6.10}$$

The core size of the vortices a increases rapidly in section $\mathcal{S}_1$ (figure 6.6 *a*) while the pairing occurs (from $t \approx 300$ to $t \approx 400$) and nearly return to a slow viscous evolution afterwards. The core size in $\mathcal{S}_{1/2}$ also starts increasing at the same time as in $\mathcal{S}_1$ but keeps increasing till

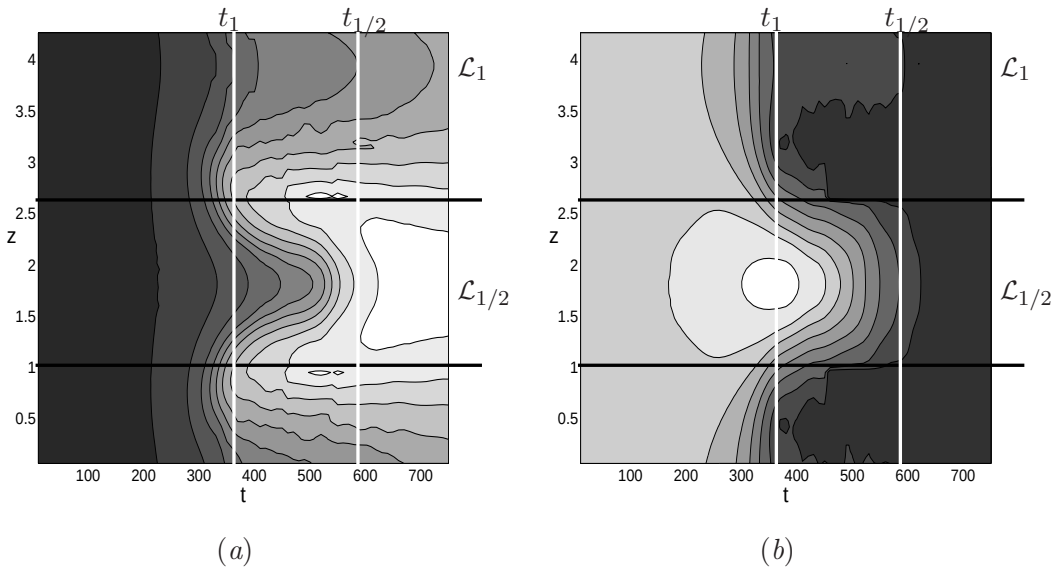


FIG. 6.7 – (a) Evolution of the vortex cores size a and (b) of the separation distance between the vortex centers b rescaled by b_0 as a function of time and of vertical location. The contour level is equal to 0.03 in figure (a) and to 0.15 in figure (b). The white color represents the larger values.

the pairing is completed in $\mathcal{S}_{1/2}$ ($t_{1/2} \approx 590$). Approximating and extrapolating the vortex cores evolution before and after the merging by the diffusion law (6.10), we estimate an increase of the core size by a factor 1.4 in section $\mathcal{S}_1$ and by a factor 2 in $\mathcal{S}_{1/2}$ (figure 6.6 b) at the time when the vortices have just merged. In an homogeneous fluid, Meunier & Leweke (2001) observed experimentally that the size of the merged vortex core is about $\sqrt{2}$ times the size of the vortices before the merging in the absence of the elliptical instability. When the elliptical instability is active and distorts the vortex cores before the pairing occurs, they observe a jump in the vortex core size by a factor 1.9. The jump in size in section $\mathcal{S}_1$ where the vortices merge first is similar to the stable merging of Meunier & Leweke (2001) whereas the jump in section $\mathcal{S}_{1/2}$ is even larger than the unstable merging of Meunier & Leweke (2001). Moreover, one should keep in mind that the elliptic instability in their case totally disorganizes the vortex cores whereas in the stratified flow the zigzag instability displaces the vortices without deforming them initially. The 3D complex twisting resulting from the desynchronized pairing seems responsible for this large increase in merged vortex core size.

Figure 6.7 shows the evolution of the vortex cores size (figure 6.7 a) and of the separation distance between the vortices rescaled by b_0 (figure 6.7 b) as a function of time and of the vertical location, data of figure 6.6 corresponding to the cross-sections $\mathcal{S}_{1/2}$ at $z = 1.8$ and $\mathcal{S}_1$ at $z = 4$ of these surfaces. Notably, the distance b/b_0 falls below the value 0.3 (figure 6.7 b) simultaneously in the whole layer $\mathcal{L}_1$ (from z=0 to z=1 and from z=2.6 to z=4.2) meaning that the pairing is synchronized in the layer $\mathcal{L}_1$ and occurs at the time $t_1 \approx 365$. Even if the synchronization is more progressive, the pairing also occurs almost simultaneously around $t_{1/2} \approx 590$ in layer $\mathcal{L}_{1/2}$ that ranges between $z = 1$ and $z = 2.6$. Sharp vertical gradients are formed on the frontier between $\mathcal{L}_{1/2}$ and $\mathcal{L}_1$. The evolution of the vortex core size (figure

6.7 *a*) is more complex with a slow viscous diffusion followed by extremely fast evolutions at the frontier between $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_{1/2}$ (around $t_1 = 365$) where the vertical shear due to the decorrelation induced by the zigzag instability is maximum and then inside the layer $\mathcal{L}_{1/2}$ just before the pairing occurs ($t_{1/2} = 590$).

6.5.2 Shape of the final vortex

Figure 6.8 displays the variation of the core size of the vortex at time $t = 750$, calculated by fitting the vertical vorticity of horizontal cross-sections at each vertical coordinate ω_z by a single gaussian distribution with an accuracy better than 5%. As it was already obvious from figures 6.6 *a* and 6.7 *a*, the core size of the final vortex, after pairing is completed, varies on the vertical by a factor 1.5, this variation relaxing very slowly with time. The circulation (figure 6.8 *b*) of the vortex is nearly uniform along the vertical. The vertical variation of the core size measured on the vertical vorticity means that the associated horizontal velocity field

$$\boldsymbol{u} = u_\theta \boldsymbol{e}_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - \exp(-\frac{r^2}{a^2})\right)\boldsymbol{e}_\theta \tag{6.11}$$

varies along the vertical. The resulting vertical shear corresponds to the horizontal vorticity field :

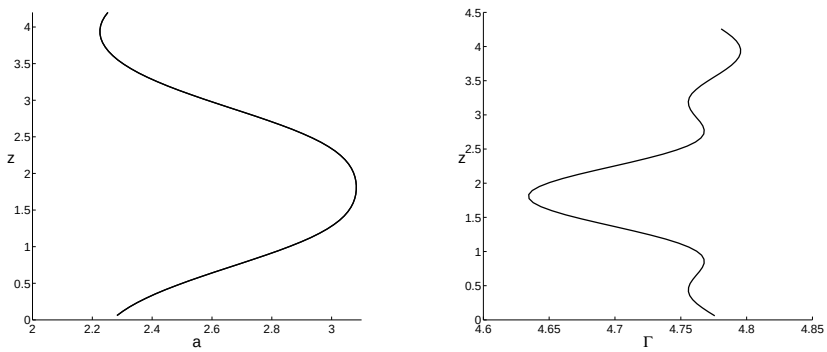
$$\boldsymbol{\omega}_{hc} = -\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\boldsymbol{e}_r = \frac{da}{dz}\frac{\Gamma r}{\pi a^3}\exp(-\frac{r^2}{a^2})\boldsymbol{e}_r. \tag{6.12}$$

The horizontal vorticity field given by (6.12) using the measured values of da/dz is plotted on figure 6.9 (*a*) and ressembles closely the computed horizontal vorticity of figure 6.4 (for the same instant t=750). Figure 6.9 (*b*) shows the difference between these two fields. Its magnitude is 19% of the ω_h field confirming that the horizontal vorticity is mainly due to the vertical variation of the vortex core size at this time. This remaining field (figure 6.4 *b*) may be seen as the scoria of the arms generated during the pairing where the filamentation occurs.

6.5.3 Effect of the amplitude perturbation, of the Reynolds number Re and of the Froude number F_h on the stratified merging

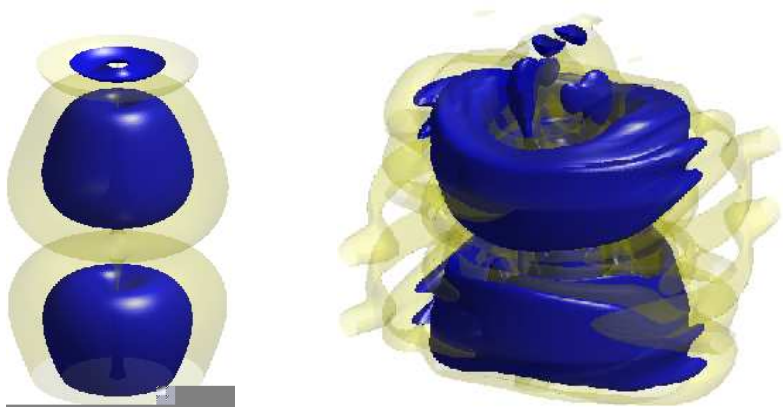
Figure 6.10 (*a*) investigates the effect of the amplitude of the initial perturbation A. The curves representing b are simply time-shifted in every layer so that the higher A, the sooner the merging occurs in section $\mathcal{S}_1$ as well as in section $\mathcal{S}_{1/2}$. The time shift $\Delta t = t_1 - t_{1/2}$ between the mergings in the different layers remains almost the same and so does the maximum separation distance between the vortices reached in $\mathcal{S}_{1/2}$. This consolidates the idea that, in a stratified fluid, the zigzag instability controles the pairing. In particular, the pairing in $\mathcal{L}_1$ seems to be only function of the initial amplitude of the perturbation and of the growth rate of the instability. The instant t_1 of the pairing in $\mathcal{L}_1$ may be then estimated by the instant when b_1 given by equation (6.9) vanishes implying that

$$t_1 \approx \frac{1}{\sigma}\ln(\frac{b_0}{A_b A}) \tag{6.13}$$



(a) (b)

FIG. 6.8 – Vertical evolution of (a) the size a and (b) of the circulation Γ of the vortex resulting from the merging for $F_h = 1$, $a_0/b_0 = 0.15$ and $Re = 2000$ at t=750.



$(a) M_{hc}$=0.0405 $(b) M_{hd}$=0.0086

FIG. 6.9 – Horizontal vorticity contours (a) obtained by equation (6.12) (yellow and blue contours represent respectively 5% and 50% of the vertical mean of the maximum horizontal vorticity M_{hc} of ω_{hc}) and (b) ω_{hd} obtained by the difference between equation (6.12) and the horizontal vorticity field resulting from DNS plotted in figure 6.4 (t=750) (yellow and blue contours represent respectively 5% of M_{hc} and 50% of M_{hd} the vertical mean of the maximum horizontal vorticity of ω_{hd}).

Figure 6.10 (b) investigates the effect of the Reynolds number on the stratified merging for the same parameter values as figure 6.10 (a) and the smaller perturbation amplitude. When the Reynolds number increases, the time t_1 of the merging in section $\mathcal{S}_1$ decreases whereas in the two-dimensional case plotted in full line for $Re = 2000$ and in dashed line for $Re = 5000$, the time to pair increases largely with Re from $t \approx 800$ to $t \approx 1700$. The acceleration of the merging with Re in $\mathcal{L}_1$ is

$$\frac{t_1(Re = 5000)}{t_1(Re = 2000)} \approx 0.80 \tag{6.14}$$

and seems due to the increase in the zigzag instability growth rate from $\sigma = 0.016$ at $Re = 2000$ to $\sigma = 0.019$ at $Re = 5000$ as predicted by equation (6.13) :

$$\frac{\sigma(Re = 2000)}{\sigma(Re = 5000)} \approx 0.84 \tag{6.15}$$

The evolution of $b_{1/2}$, the distance between the vortices in the layer $\mathcal{S}_{1/2}$, increases faster initially when the Reynolds number is higher as a result of the increase in the zigzag instability growth rate. The linear regime brings $b_{1/2}$ to a maximum value that increases strongly with the Reynolds number. This maximum value is reached at about the same time for both Re and is followed by a similar rapid decrease that corresponds to the occurrence of the pairing in $\mathcal{S}_{1/2}$. As a result of the larger value of $b_{1/2}$ reached for larger Re, the pairing is accomplished at a time $t_{1/2}$ that increases with the Reynolds number. The delay $\Delta t = t_{1/2} - t_1$ in the pairing between $\mathcal{S}_1$ and $\mathcal{S}_{1/2}$ increases sharply with Re from $\Delta t = 85$ for $Re = 2000$ to $\Delta t = 215$ for $Re = 5000$.

Figure 6.10 (c) is similar to figure 6.10 (b) but for $F_h = 1$. In that case, the difference between the growth rates of the instability for $Re = 2000$ ($\sigma = 0.01995$) and $Re = 5000$ ($\sigma = 0.0206$) is much smaller and the merging in section $\mathcal{S}_1$ occurs only slightly sooner

$$\frac{t_1(Re = 5000)}{t_1(Re = 2000)} \approx 0.90 \tag{6.16}$$

in reasonable agreement with the prediction of (6.13)

$$\frac{\sigma(Re = 2000)}{\sigma(Re = 5000)} \approx 0.97 \tag{6.17}$$

As for $F_h = 0.5$ (figure 6.10 b), the distance $b_{1/2}$ in $\mathcal{S}_{1/2}$ reaches a maximum value that increases with Re and reaches $1.5b_0$ for $Re = 5000$. The delay $\Delta t = t_{1/2} - t_1$ between the mergings in $\mathcal{S}_1$ and $\mathcal{S}_{1/2}$ increases from $\Delta t = 225$ at $Re = 2000$ to $\Delta t = 400$ at $Re = 5000$. This strong dependence of Δt on Re suggests that the merging in $\mathcal{S}_{1/2}$ is viscously conducted by the merging in $\mathcal{S}_1$. The viscous time scale $t_v = L_z^2/4\nu$ built on $L_z/2$ equals $t_v = 8820$ for $Re = 2000$ and $F_h = 1$, $t_v = 22050$ for $Re = 5000$ and $F_h = 1$, $t_v = 2205$ for $Re = 2000$ and $F_h = 0.5$, $t_v = 5513$ for $Re = 5000$ and $F_h = 1$ and is from 26 to 55 times larger than Δt suggesting that the pairing in $\mathcal{S}_{1/2}$ involves a cooperation between viscous and inertial or buoyancy effects. Furthermore, it is noteworthy that once the decrease of $b_{1/2}$ initiated, the slope of this decrease is independent of the Reynolds number.

Figure 6.10 (d) investigates the effect of the stratification on the evolution of the separation distance b as a function of time in both layers $\mathcal{L}_{1/2}$ and $\mathcal{L}_1$. Since the vertical size of the computational domain is the most unstable wavelength of the zigzag instability, it

varies with F_h according to the scaling law $L_z/F_h = 4.2$, i.e. such that $L_z = 4.2$, $n_z = 72$ for $F_h = 1$ and $L_z = 2.1$, $n_z = 36$ for $F_h = 0.5$ and $L_z = 1.4$, $n_z = 24$ for $F_h = 0.3$. We define the sections $\mathcal{S}_{1/2}$ and $\mathcal{S}_1$ for the horizontal cross-sections corresponding respectively to the rescaled vertical locations $z/F_h = 1.8$ and $z/F_h = 4.0$. We define in the same manner $\mathcal{L}_{1/2}$ from $z/F_h = 1$ to $z/F_h = 2.6$ and $\mathcal{L}_1$ from $z/F_h = 0$ to $z/F_h = 1$ and from $z/F_h = 2.6$ to $z/F_h = 4.2$. We observe that increasing stratification increases t_1 due to the decrease in the growth rate of the zigzag instability. This decrease has been linked by Otheguy *et al.* (2005*b*) to the vertical viscous diffusion that increases as the Froude number decreases because the most unstable wavelength of the zigzag instability decreases like F_h. The numerical linear analysis conducted to obtain the basic states at $Re = 2000$ gave a growth rate $\sigma = 0.02$ for $F_h = 1$, $\sigma = 0.016$ for $F_h = 0.5$ and $\sigma = 0.011$ for $F_h = 0.3$.

To sum up, when the flow is strongly stratified, the merging of two co-rotating vortices is induced by the growth of the zigzag instability. In the layer where the zigzag instability moves the vortices closer, the merging time t_1 is well predicted by the exponential growth of the zigzag perturbation and thus seems to depend on F_h and Re only through the zigzag instability growth rate. The dynamics in the layer $\mathcal{L}_{1/2}$ where the vortices initially move appart due to the zigzag instability is more complex since once the pairing completed in $\mathcal{L}_1$, the vertical inhomogeneity of the flow forces the pairing in that layer. The time delay Δt between the pairings in $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_{1/2}$ is a function of both F_h and Re and seems roughly proportional to Re.

Figure 6.11 presents the evolution of the horizontal distance b between the vortex cores as a function of z and t and for two Froude numbers and two Reynolds numbers. For $F_h = 0.5$, the vertical domain is half that of $F_h = 1$ in order to account for the doubling in the most unstable wavelength. Figure 6.10 (b) corresponds to a cut of the surfaces 6.11 (a) and 6.11 (b) and figure 6.10 (c) to cuts through figures 6.11 (c) and 6.11 (d). In the four cases, the pairing is sharply synchronized in layer $\mathcal{L}_1$ and in the center of layer $\mathcal{L}_{1/2}$ with a synchronized area that decreases strongly with Re. The vertical gradient of b increases sharply with Re at fixed F_h and, taking into account the differences in vertical scales the vertical gradient at $t = t_1 + \Delta t/2$ seems nearly constant with F_h. The vertical shear seems thus expulsed in a zone viscously controlled of thin size.

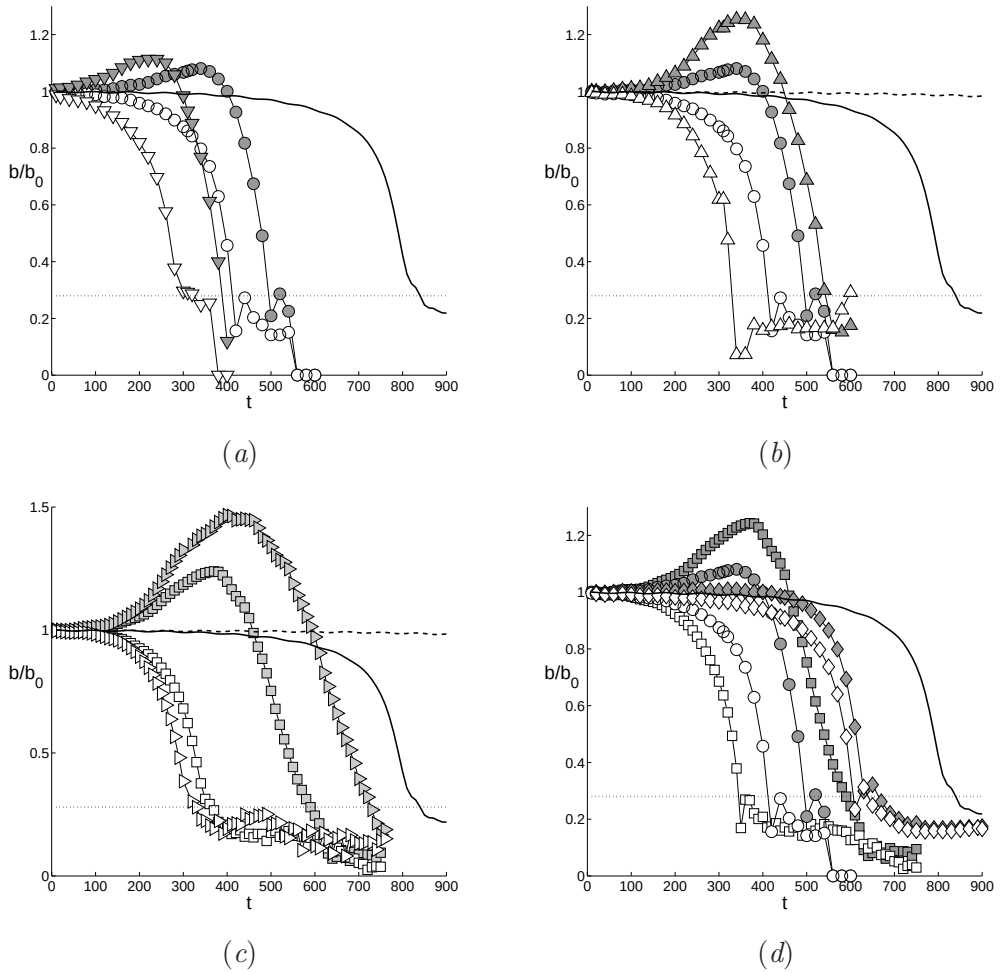
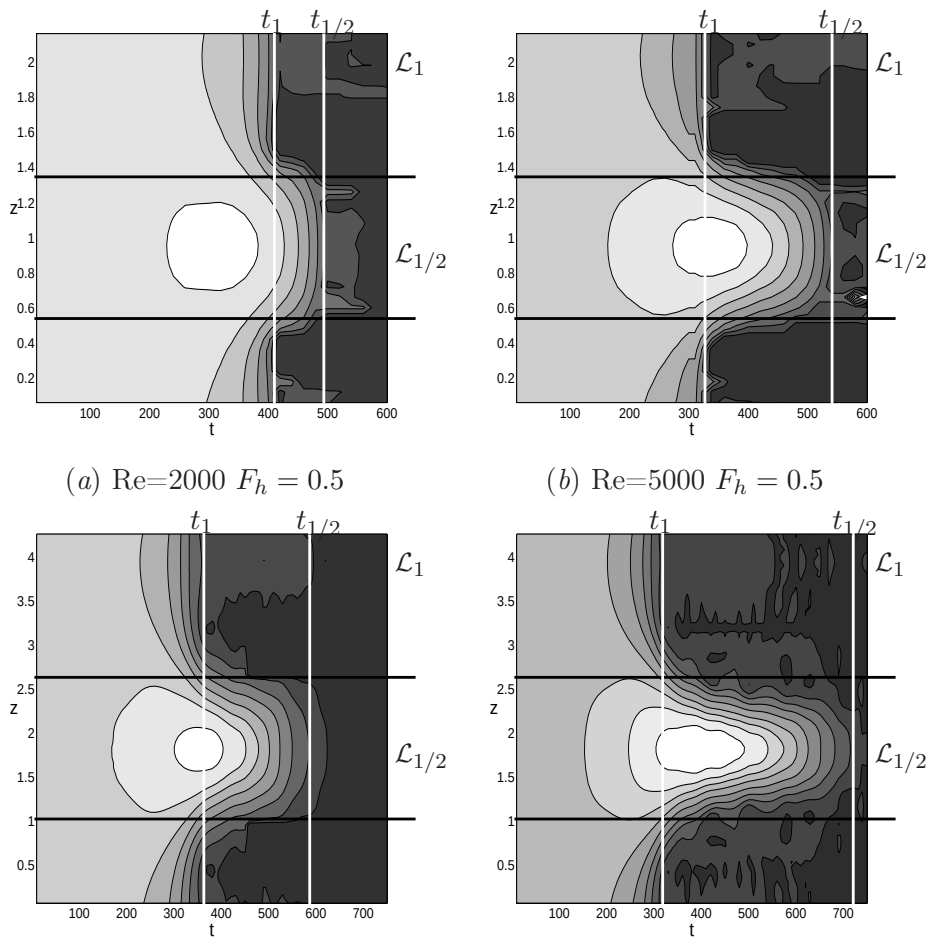


FIG. 6.10 – Evolution of the separation distance between the vortex centers b non-dimensionalized by b_0 as a function of time every half a wavelength along the vertical : closed symbols represent $b_{1/2}$ in layer $\mathcal{L}_{1/2}$ and open symbols b_1 in layer $\mathcal{L}_1$ for $a_0/b_0 = 0.15$ and for (a) $F_h = 0.5$, $Re = 2000$ and for different perturbation amplitude $(\triangle)$ $A = 0.001$; $(\triangledown)$ $A = 0.005$; (b) $A = 0.001$, $F_h = 0.5$ and for different Reynolds numbers $(\circ)$ $Re = 2000$ and $(\triangle)$ $Re = 5000$; (c) $A = 0.001$, $F_h = 1$ and for different Reynolds numbers $(\square)$ $Re = 2000$ and $(\triangleright)$ $Re = 5000$; (d) $A = 0.001$, $Re = 2000$ and for different levels of stratification $(\square)$ $F_h = 1$; $(\circ)$ $F_h = 0.5$; $(\diamond)$ $F_h = 0.3$. The solid and dashed lines represent respectively the two-dimensional simulation corresponding to $Re = 2000$ and $Re = 5000$ with $a_0/b_0 = 0.15$. The merged criterium $b_c = 0.28b_0$ is plotted by dotted lines.



(a) Re=2000 $F_h = 0.5$ (b) Re=5000 $F_h = 0.5$

(c) Re=2000 $F_h = 1$ (d) Re=5000 $F_h = 1$

FIG. 6.11 – Evolution of the distance between the vortex axes b rescaled by b_0 as a function of time and of vertical location for $a_0/b_0 = 0.15$, $A = 0.001$ and (a) for $F_h = 0.5$, $Re = 2000$, (b) for $F_h = 0.5$, $Re = 5000$, (c) for $F_h = 1$, $Re = 2000$, (d) for $F_h = 1$, $Re = 5000$. The contour level is equal to 0.15 in all figures. The white color represents the larger values.

6.6 Energy and enstrophy analysis

6.6.1 Space and time evolutions

We consider the numerical simulation described in section 6.5 defined by the set of parameters ($a_0/b_0 = 0.15$, $F_h = 1$, $Re = 2000$, $A = 0.001$). Figure 6.12 (a) shows the potential energy density $e_p(z,t)$ as a function of time and of the vertical location. It is calculated as :

$$e_p(z,t) = \frac{F_h^2}{2n_x n_y} \sum_{x,y} \rho^2. \tag{6.18}$$

Figure 6.12 (b) displays the evolution of the kinetic energy $e_k(z,t)$ calculated in each horizontal layer as a function of time and of the vertical coordinate as

$$e_k(z,t) = \frac{1}{2n_x n_y} \sum_{x,y} \left(u_x^2(x,y,z,t) + u_y^2(x,y,z,t) + u_z^2(x,y,z,t) \right). \tag{6.19}$$

The evolution of the enstrophy $w(z,t)$ calculated as

$$w(z,t) = \frac{1}{2n_x n_y} \sum_{x,y} \left(\omega_x^2(x,y,z,t) + \omega_y^2(x,y,z,t) + \omega_z^2(x,y,z,t) \right). \tag{6.20}$$

is shown on figure 6.12 (c).

The amplitude of potential energy is very weak ($7\ 10^{-5}$) compared to the amplitude of the kinetic energy ($4\ 10^{-3}$, figure 6.12 b). The scaling of Billant & Chomaz (2001) predicts that the potential energy is approximately F_v^2 times the kinetic energy with $F_v = \Gamma/\pi a L_v N$, where L_v is the characteristic vertical scale of the flow. As here $L_v = F_h b_0$ is the zigzag instability wavelength predicted by Otheguy *et al.* (2005b), F_v is a_0/b_0. The ratio between potential and kinetic energy magnitudes $max(e_p)/max(e_k) \approx 0.02$ is in very good agreement with $F_v^2 \approx (a_0/b_0)^2 \approx 0.02$. As a result, potential energy will be negligible herein compared to kinetic energy. We note nevertheless a very localized distribution of this potential energy (figure 6.12 a) : in time during the time delay Δt between the mergings in layer $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_{1/2}$, in space in the sharp gradient areas separating $\mathcal{L}_1$ from $\mathcal{L}_{1/2}$.

From $t = 0$ to $t = 150$, the kinetic energy (figure 6.12 b) remains approximately homogeneous along the vertical and is steadily dissipated by viscosity. After $t = 150$, the kinetic energy increases in the layer $\mathcal{L}_1$ and decreases in layer $\mathcal{L}_{1/2}$. This energy transfer is due to the zigzag instability development. The energy stops increasing in $\mathcal{L}_1$ once the pairing is completed (after $t_1 \approx 365$). The energy in $\mathcal{L}_1$ then decreases steadily toward the end of the computation. The decrease of kinetic energy in $\mathcal{L}_{1/2}$ is rapid till $t = t_1 + \Delta t/2$ and then slows down and vanishes when the pairing occurs in $\mathcal{L}_{1/2}$. After the pairing completed in layer $\mathcal{L}_{1/2}$, it seems that the kinetic energy remains constant in the intermediate layers between $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_{1/2}$. This suggests that the strong shear that develops at the frontier between $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_{1/2}$ is transfering kinetic energy from $\mathcal{L}_1$ to $\mathcal{L}_{1/2}$ to recorrelate the flow on the vertical. This transfer of kinetic energy might explain that the pairing in $\mathcal{L}_1$ seems to drive the pairing in $\mathcal{L}_{1/2}$ in agreement with the observations of the separation distance between the vortices in section 6.5.3.

Figure 6.12 (c) shows that a substantial enstrophy creation occurs at the frontier between $\mathcal{L}_{1/2}$ and $\mathcal{L}_1$. This enstrophy creation begins simultaneously with the merging process in

layer $\mathcal{L}_1$ (around t=250) and ends approximately when the two vortices of layer $\mathcal{L}_{1/2}$ stop moving apart (around t=400, see figure 6.6 *a* for reference). This indicates that the pairing process in $\mathcal{L}_{1/2}$ is associated to enstrophy creation eventually through vortex stretching due to the entanglement of the vortices that rotate faster and merge earlier in the layer $\mathcal{L}_1$ than in the layer $\mathcal{L}_{1/2}$ and to the baroclinic torque associated with the shear due to the decorrelation of the layers. Enstrophy starts decreasing after the pairing in $\mathcal{L}_1$ ($t_1 \approx 365$) and is returned to its original value everywhere after $t = 450$ indicating that the total dissipation of kinetic energy is very weak after the $\mathcal{L}_1$ pairing.

Figure 6.13 shows respective horizontal and vertical vorticity contributions to the total enstrophy. The vertical vorticity (figure 6.13 *b*) decreases slowly and almost uniformly along the vertical whereas the enstrophy creation localized in between layers $\mathcal{L}_{1/2}$ and $\mathcal{L}_1$ comes exclusively from horizontal vorticity creation and is therefore probably due to the baroclinic torque since vortex stretching would amplify both the vertical and horizontal components.

Figure 6.14 is similar to figure 6.12 for a larger Reynolds number $Re = 5000$. The iso-contours of the total enstrophy $w(z,t)$ are in a first stay vertical and then bend horizontally at the border of $\mathcal{L}_{1/2}$ (figure 6.14 *c*). The first phase when the enstrophy raises in regions shifted by a quarter wavelength compared to $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_{1/2}$ begins around $t = 200$ and ends at $t_1 \approx 330$ when the pairing is completed in $\mathcal{L}_1$. The growing part of the first phase is driven by the zigzag instability which moves the vortices closer in layer $\mathcal{L}_1$ and farther in layer $\mathcal{L}_{1/2}$ creating horizontal vorticity in between. In the linear stability analysis of Otheguy *et al.* (2005*b*), this generation of horizontal vorticity is described and is in quadrature with vertical vorticity perturbation. In the linear theory, this horizontal vorticity comes mainly from the vertical variation of the horizontal flow and its production mechanism is barocline. The production of horizontal vorticity by the linear zigzag instability should be exponential in time and modulated sinusoidally in z. It explains reasonably well the first increase in enstrophy but not the extremely fast decrease after $t = 280$ that is the manifestation of the vertical recorrelation of the flow in the layer $\mathcal{L}_1$ once the instability has reached finite amplitude. Once the pairing completed in $\mathcal{L}_1$ (i.e at $t_1 = 330$ in figure 6.14 *c* and $t_1 = 365$ in figure 6.13 *c*), the enstrophy is back to small values in the entire layer $\mathcal{L}_1$. The horizontal shear at that time has been expulsed in a thin layer at the periphery of $\mathcal{L}_1$, the vertical size of it being measured at $t = t_1 + \Delta t/2$ decreasing sharply between $Re = 2000$ and $Re = 5000$ and therefore being controlled by viscosity. This viscous layer propagates slowly toward the middle of $\mathcal{L}_{1/2}$. Amazingly the maximum of the enstrophy occurs at the same time the distance $b_{1/2}$ stops increasing suggesting a link between the viscous dissipation induced by the strong shear in the periphery of $\mathcal{L}_{1/2}$ and the evolution of the flow at the center of $\mathcal{L}_{1/2}$. The enstrophy in this layer at the boundary of the $\mathcal{L}_1$ region goes back to small value before $t_{1/2}$ i.e. when the flow has nearly recorrelate on the vertical.

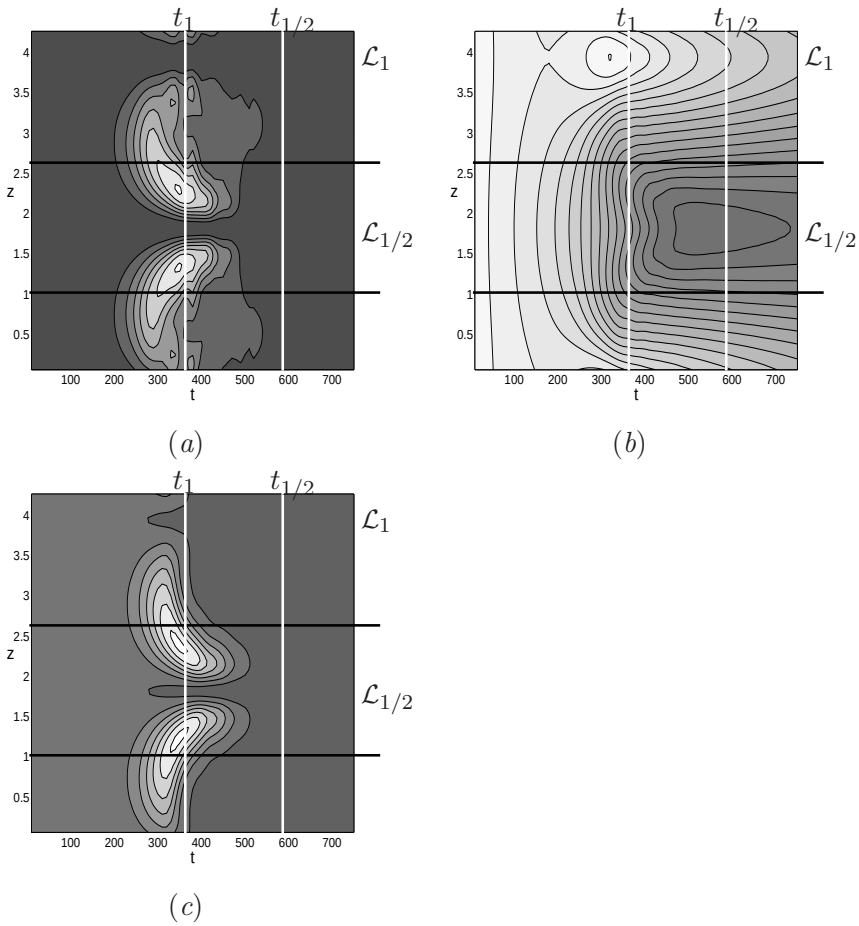
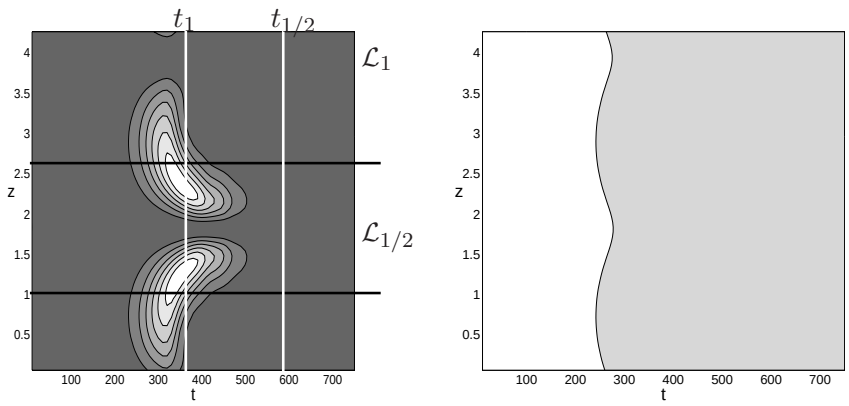


FIG. 6.12 – (a) Potential energy $e_p(z,t)$, (b) kinetic energy $e_k(z,t)$ and (c) enstrophy $w(z,t)$ of the flow as a function of time and vertical location for $a_0/b_0 = 0.15$, $F_h = 1$, $Re = 2000$ and $A = 0.001$. The range of potential energy is $[0,\ 7\ 10^{-5}]$ and the contour level is 10^{-5} in figure (a). The range of kinetic energy is $[0.002,\ 0.004]$ and the contour level is 10^{-4} in figure (b). The range of enstrophy is $[0,\ 0.008]$ and the contour levels is 0.001 in figure (c). White color represents the maximum values.



(a) (b)

FIG. 6.13 – (a) Horizontal $w_h(z,t)$ and (b) vertical $w_z(z,t)$ components of the enstrophy of the flow as a function of time and vertical location for $a_0/b_0 = 0.15$, $F_h = 1$, $Re = 2000$ and $A = 0.001$. Enstrophy is calculated at one time and at one vertical location as the sum of the mean in an horizontal cross-section of the vorticity (horizontal in figure a and vertical in figure b) square components. The range of horizontal enstrophy is [0, 0.014]. The range of vertical enstrophy is [0.0004, 0.003]. The contour level is 0.002 in both figures (a) and (b). White color represents the maximum values.

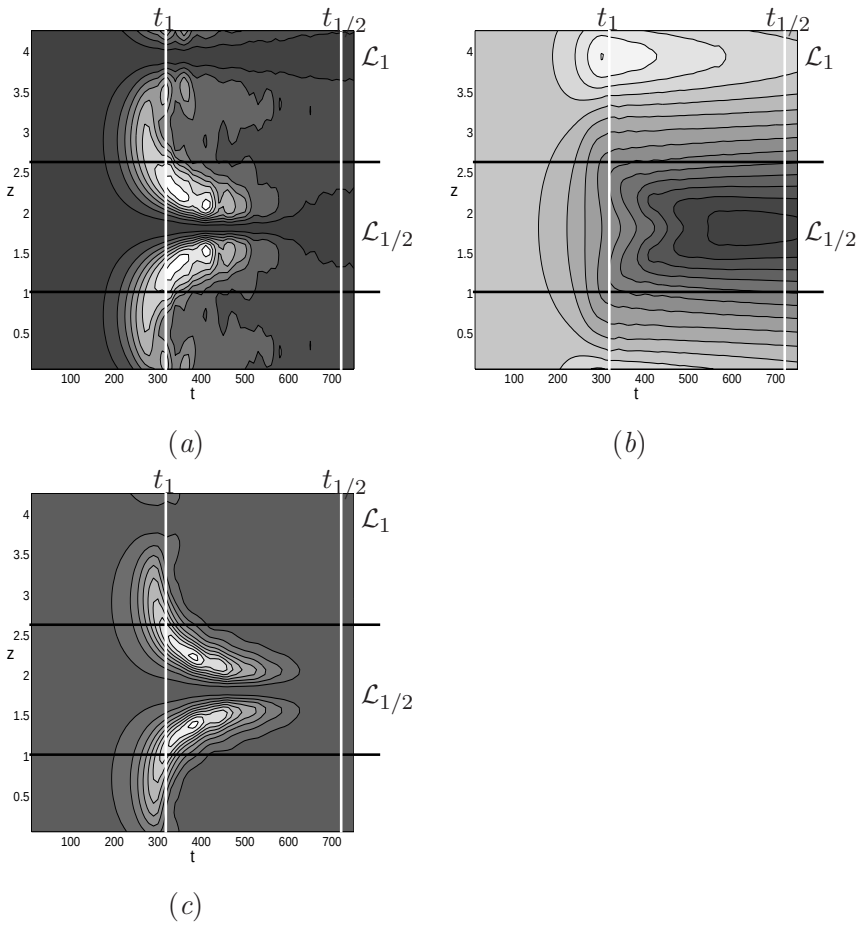
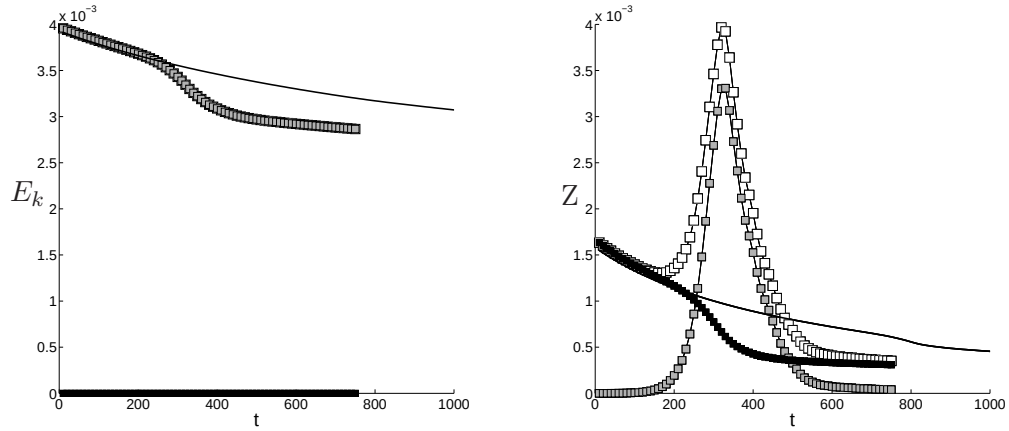


FIG. 6.14 – (a) Potential energy $e_p(z,t)$, (b) kinetic energy $e_k(z,t)$ and (c) enstrophy $w(z,t)$ of the flow as a function of time and vertical location for $a_0/b_0 = 0.15$, $F_h = 1$, $Re = 5000$ and $A = 0.001$. The range of potential energy is [0, 1.6 10^{-4}] and the contour level is 2 10^{-5} in figure (a). The range of kinetic energy is [0.003, 0.004] and the contour level is 2 10^{-4} in figure (b). The range of enstrophy is respectively [0, 0.018] and the contour levels is 0.002 in figure (c). White color represents the maximum values.



(a) (b)

FIG. 6.15 – (a) Total kinetic energy $E_k(t)$ (mean of $e_k(z,t)$ on the vertical) and (b) total enstrophy $Z(t)$ (mean of $w(z,t)$ on the vertical) of the flow as a function of time for $a_0/b_0 = 0.15$, $F_h = 1$, $Re = 2000$ and $A = 0.001$ (white symbols). The horizontal part of the kinetic energy E_k and of the enstrophy Z are represented by gray symbols. The vertical part of the kinetic energy E_k and of the enstrophy Z are represented by black symbols. The kinetic energy and enstrophy of the two-dimensional simulation corresponding to the same set of parameters is plotted by a plain line in both figures (a) and (b).

6.6.2 Comparison with two-dimensional merging

For the stratified case corresponding to figure 6.12, the total kinetic energy $E_k = \sum_z e_k(z,t)/n_z$ and enstrophy $Z = \sum_z w(z,t)/n_z$, means of e_k and w on the vertical, are represented in figure 6.15 and the contributions of the vertical and horizontal components are given. The vertical velocity contribution to the total kinetic energy is completely negligible (the continuous line at zero on figure 6.15 a). The vertical velocity component is actually one hundred times smaller than the horizontal velocity component in agreement with the scaling proposed by Billant & Chomaz (2001). The evolution of the total kinetic energy can be divided into three phases. During the first phase (from t=0 to t=250), the total kinetic energy slowly dissipates as does its 2D counterpart. Around t=250, i.e. when the zigzag instability amplitude reaches order unity, the kinetic energy decreases till the pairing in $\mathcal{L}_1$ is completed ($t_1 \approx 365$). The loss of kinetic energy is then about 20%. During the third phase (from t=250 to t=750), the kinetic energy remains lower than the corresponding two-dimensional kinetic energy and follows a similar decrease, the gap between the two decreasing very slowly.

The vertical enstrophy (figure 6.15 b) follows the same trend as the kinetic energy : it departs from its 2D counterpart around $t = 250$ decreases by about 50% till the pairing is completed in $\mathcal{L}_1$ and then remains smaller than the two-dimensional enstrophy, with a gap also decreasing on time. The horizontal enstrophy displays a strickingly different behaviour. It is approximately zero at the beginning and at the end of the simulation, when the position of the vortex centers does hardly vary on the vertical. It bursts out around t=200 to reach twice the initial value of the total enstrophy around $t_1 = 365$, when the vortices in layer $\mathcal{L}_1$

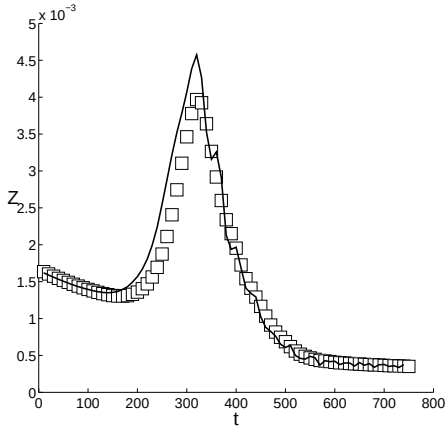


FIG. 6.16 – Total enstrophy $Z(t)$ ($\square$), $-\dfrac{1}{2\nu}\dfrac{dE_k}{dt}$ in plain line as a function of time for $a_0/b_0 = 0.15$, $F_h = 1$, $Re = 2000$ and $A = 0.001$.

just merged. Then it decreases rapidly to vanish again after $t_{1/2} = 590$ when the pairing is complete in layer $\mathcal{L}_{1/2}$. As already argued, this horizontal vorticity creation traduces the strong horizontal shearing generated by the shift on the position of the vortices in layers $\mathcal{L}_{1/2}$ and $\mathcal{L}_1$.

From the energy balance equation we know that :

$$\frac{dE_k}{dt} = -2\nu Z + T_{P\to K} \tag{6.21}$$

where $T_{P\to K}$ is the transfer term from potential energy to kinetic energy. Figure 6.16 compares the evolution of $-\dfrac{1}{2\nu}\dfrac{dE_k}{dt}$ and Z. As anticipated from the smallness of the potential energy in figure 6.12 and 6.14, the transfer term $-\dfrac{1}{2\nu}T_{P\to K}$ measured by the distance between the two curves $-\dfrac{1}{2\nu}\dfrac{dE_k}{dt}$ and Z is negligible.

Figures 6.17 (a) and 6.18 (a) investigate the effect of the amplitude of the initial perturbation respectively on the energy loss and enstrophy production. They show that increasing the perturbation amplitude only shifts to early time the phenomena. The enstrophy creation is slightly larger when initial amplitude is larger certainly because the pairing occurs then while the vortices are stronger, the viscous diffusion having acted on a shorter time.

Figure 6.17 (b) investigates the effect of the Reynolds number for Froude number $F_h = 0.5$ and figure 6.17 (c) for $F_h = 1$. We observe that the energy lost compared to the corresponding two-dimensional reference case is the same for $Re = 5000$ than for $Re = 2000$ and seems therefore independent of the Reynolds number.

In sharp contrast, the enstrophy creation (figure 6.18 b, c) respectively triples and doubles when increasing the Reynolds number from $Re = 2000$ to $Re = 5000$. Comparing figure 6.18 (b) and (c), the enstrophy creation for $Re = 5000$ is two times larger for $F_h = 0.5$

than for $F_h = 1$ whereas from figures 6.17 (b) and (c), the energy lost is only 25% larger for smaller F_h. This is coherent with the fact that the vertical scale generated in the boundary layer of $\mathcal{L}_1$ is the same for the space in the box since the vertical box size for $F_h = 0.5$ is half that for $F_h = 1$. This is coherent with the thickness of the boundary layer measured from $w(z,t)$ at $t = t_1 + \Delta t/2$, that is very close for $F_h = 0.5$ and $F_h = 1$ and seems to depend only on Re.

Figure 6.17 (d) shows the evolution of the total kinetic energy for $Re = 2000$ and different Froude numbers. The curves corresponding to $F_h = 1$ and $F_h = 0.5$ nearly superimpose whereas the curve corresponding to $F_h = 0.3$ exhibits a much smaller decrease in energy. Figure 6.18 (d) displays the evolution of total enstrophy as a function of time for different levels of stratification and $Re = 2000$. We observe that for this moderate Reynolds number, the enstrophy creation for $F_h = 0.5$ is only slightly larger than for $F_h = 1$. This difference of behaviour compared to Reynolds $Re = 5000$ indicates that $Re = 2000$ is not large enough to reach the asymptotic limit. The enstrophy creation is compensated by a decrease of the growth rate (equal to $\sigma = 0.02$ for $F_h = 1$ and to $\sigma = 0.016$ for $F_h = 0.5$). The curve corresponding to $F_h = 0.3$ is much closer to the two-dimensional evolution because in this case the growth rate is very low ($\sigma = 0.011$). $Re = 2000$ is neither large enough to present a separation of scales between the viscous scale of the sheared layer and the buoyancy scale of the instability. This is corroborated looking at $w(z,t)$ in figure 6.12 c for $F_h = 1$ and $Re = 2000$ where the shear scale computed at $t = t_1 + \Delta t/2$ is comparable to $L_z/2$.

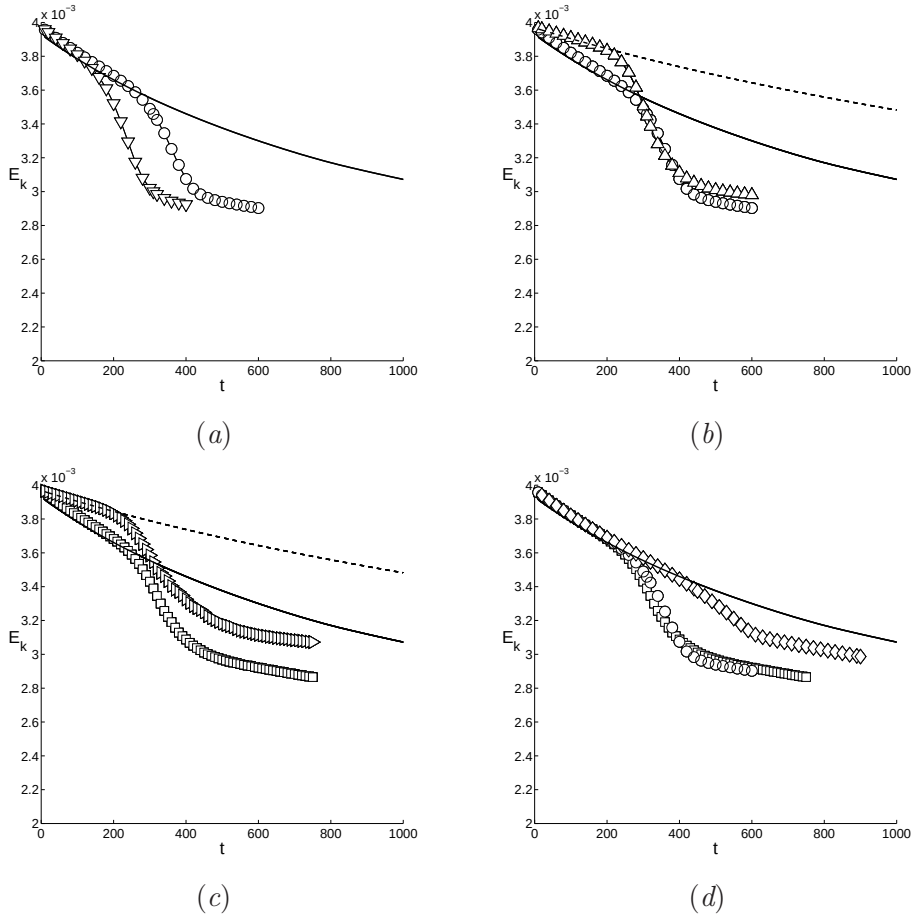


FIG. 6.17 – Evolution of the kinetic energy E_k as a function of time for $a_0/b_0 = 0.15$ and for (a) $F_h = 0.5$, $Re = 2000$ and for different perturbation amplitude $(\triangle)$ $A = 0.001$; $(\triangledown)$ $A = 0.005$; (b) $A = 0.001$, $F_h = 0.5$ and for different Reynolds numbers $(\circ)$ $Re = 2000$ and $(\triangle)$ $Re = 5000$; (c) $A = 0.001$, $F_h = 1$ and for different Reynolds numbers $(\square)$ $Re = 2000$ and $(\triangleright)$ $Re = 5000$; (d) $A = 0.001$, $Re = 2000$ and for different levels of stratification $(\square)$ $F_h = 1$; $(\circ)$ $F_h = 0.5$; $(\diamond)$ $F_h = 0.3$. The solid and dashed lines represent respectively the two-dimensional simulation corresponding to $Re = 2000$ and $Re = 5000$ for $a_0/b_0 = 0.15$.

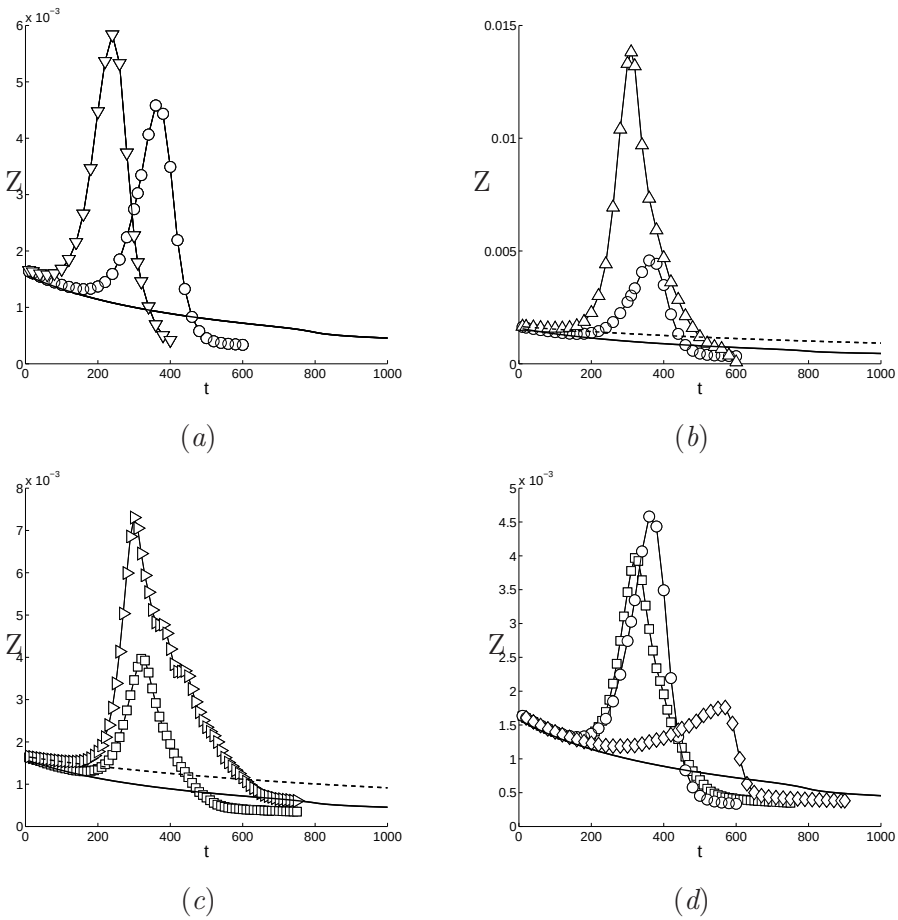


FIG. 6.18 – Evolution of the enstrophy Z as a function of time for $a_0/b_0 = 0.15$ and for (a) $F_h = 0.5$, $Re = 2000$ and for different perturbation amplitude $(\triangle)$ $A = 0.001$; $(\triangledown)$ $A = 0.005$; (b) $A = 0.001$, $F_h = 0.5$ and for different Reynolds numbers $(\circ)$ $Re = 2000$ and $(\triangle)$ $Re = 5000$; (c) $A = 0.001$, $F_h = 1$ and for different Reynolds numbers $(\square)$ $Re = 2000$ and $(\triangleright)$ $Re = 5000$; (d) $A = 0.001$, $Re = 2000$ and for different levels of stratification $(\square)$ $F_h = 1$; $(\circ)$ $F_h = 0.5$; $(\diamond)$ $F_h = 0.3$. The solid and dashed lines represent respectively the two-dimensional simulation corresponding to $Re = 2000$ and $Re = 5000$ for $a_0/b_0 = 0.15$.

6.7 Conclusion

The merging of co-rotating columnar vertical vortices in a strongly stratified flow is governed by the development of the linear zigzag instability as described in Otheguy *et al.* (2005*b*). The zigzag instability translates the vortices closer together and farther apart alternately every half a wavelength on the vertical. The merging occurs first in the layer $\mathcal{L}_1$ where the instability brings the vortices closer and the merging time t_1 is only function of the initial perturbation and of the instability growth rate. The instability literally pushes the vortices together until they pair.

Once the pairing effective in $\mathcal{L}_1$, it dynamically drives the pairing in the layer $\mathcal{L}_{1/2}$ where the vortices were initially moved appart. Amazingly, the pairing is nearly synchronized every half a wavelength. It results in a very intense horizontal shear that dissipates energy mainly till the pairing is completed in both layers and that generates a large enstrophy creation localized in between the layers before $\mathcal{L}_1$ merging, and at large Reynolds number localized in thin viscous layers surrounding $\mathcal{L}_{1/2}$ between $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_{1/2}$ mergings.

Acknowledgements
We wish to thank gratefully Daniel Guy for technical assistance. This work is supported by IDRIS (CNRS) for computational facilities under project No.41722.

Troisième partie

Application aux fluides géophysiques et conclusion

Chapitre 7

Effet de la rotation planétaire sur l'instabilité zigzag

Ce chapitre reprend l'article à paraître dans le *Journal of Fluid Mechanics* : The effect of planetary rotation on the zigzag instability of co-rotating vortices in a stratified fluid.

L'étude numérique de l'instabilité zigzag en milieu stratifié réalisée dans le chapitre 3 a été étendue aux fluides stratifiés tournants (présence d'une force de Coriolis due à la rotation planétaire en plus de la force de flottabilité due à la stratification) caractéristiques des fluides géophysiques à grande échelle. Nous avons montré que l'instabilité zigzag est toujours active en milieu stratifié tournant. Son taux de croissance est indépendant du taux de rotation planétaire et la longueur d'onde la plus instable obéit à la loi d'échelle universelle $\lambda_m = F_h b/f(Ro)$, où f est une fonction universelle du nombre de Rossby Ro mesurant les effets des forces inertielles par rapport à la force de Coriolis.

Pour un taux de rotation élevé (Ro petit), la longueur d'onde la plus instable est alors proportionnelle à $F_h b/Ro$, en accord avec la théorie quasi-géostrophique de Charney (1948). L'instabilité zigzag est similaire à l'instabilité "tall-column" mise en évidence par Dritschel & de la Torre Juárez (1996) en régime quasi-géostrophique.

L'instabilité zigzag restant active quel que soit le nombre de Rossby de l'écoulement, elle pourrait donc affecter une très large gamme d'échelles dans les fluides géophysiques. Si on cherche à observer une manifestation de cette instabilité dans l'océan par exemple, il apparaît que la longueur d'onde sélectionnée par l'instabilité zigzag pour les tourbillons méso-échelles (rayon de l'ordre de 100km) est plus grande que la profondeur de l'océan. Cela ne veut pas dire que l'instabilité n'affecte pas ces tourbillons mais si on veut observer l'échelle verticale sélectionnée par l'instabilité zigzag il faut s'intéresser à des tourbillons plus petits (de l'ordre de 5km de rayon) comme par exemple ceux observés dans la baie de Californie par DiGiacomo & Holt (2001). On observe dans ce cas précis que l'extension verticale des tourbillons est alors du même ordre de grandeur que la demi-longueur d'onde de l'instabilité zigzag.

The effect of planetary rotation on the zigzag instability of co-rotating vortices in a stratified fluid.

By PANTXIKA OTHEGUY, PAUL BILLANT and JEAN-MARC CHOMAZ
LadHyX, CNRS - École Polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex, France
J. Fluid Mech. (in press)

Abstract

This paper investigates the three-dimensional stability of a pair of co-rotating vertical vortices in a rotating strongly stratified fluid. In a companion paper (Otheguy, Chomaz & Billant, 2005*b*), we have shown that such a basic flow in a strongly stratified fluid is affected by a zigzag instability which bends the two vortices symmetrically. In the non-rotating flow, the most unstable wavelength of this instability scales as the buoyancy length and its growth rate scales as the external strain that each vortex induces on the other one. Here, we show that the zigzag instability remains active whatever the magnitude of the planetary rotation and is therefore connected to the tall-column instability in quasi-geostrophic fluids (Dritschel & de la Torre Juárez, 1996). Its growth rate is almost independent of the Rossby number. The most amplified wavelength follows the universal scaling $\lambda = 2\pi F_h b\sqrt{\gamma_1/Ro^2 + \gamma_2/Ro + \gamma_3}$, where b is the separation distance between the two vortices, (γ_1,γ_2,γ_3) are constants, F_h is the horizontal Froude number and Ro the Rossby number ($F_h = \Gamma/\pi a^2 N$, $Ro = \Gamma/\pi a^2 f$, where Γ is the circulation of each vortex, a the vortex radius, N the Brunt-Väisälä frequency and f the Coriolis parameter). When $Ro = \infty$, the scaling $\lambda \propto F_h b$ found by Otheguy *et al.* (2005*b*) is recovered. When $Ro \to 0$, $\lambda \propto bf/N$ in agreement with the quasi-geostrophic theory. In contrast to previous results, the wavelength is found to depend on the separation distance between the two vortices b, and not on the vortex radius a.

7.1 Introduction

Oceanic and atmospheric flows are characterized by two important features : a stable density stratification measured by the Brunt-Väisälä frequency N, and the planetary rotation measured by the Coriolis parameter f. The atmosphere is typically characterized by a ratio $f/N = 0.01$ and the oceans by $f/N = 0.1$. A strong stratification reduces the vertical scale to the buoyancy scale U/N, where U is the horizontal velocity scale, whereas a rapid rotation tends to increase the vertical scale. Indeed, turbulence in stratified fluids is organized into thin horizontal layers (Fincham, Maxworthy & Spedding 1996 ; Park, Whitehead & Gnanadeskian 1994 ; Godeferd & Staquet 2003 ; Waite & Bartello 2004), while turbulence in rotating fluids is organized into tall eddy columns (Hopfinger, Browand & Gagne 1982 ; Baroud, Plapp, She & Swinney 2003). In the joint conditions of rapid rotation and strong stratification (quasi-geostrophic), the vortices have a lens-like shape with a height-to-width

aspect ratio H/L proportional to f/N (Charney 1948 ; Griffiths & Linden 1981 ; Dritschel & de la Torre Juárez 1996). In order to understand the transition between strongly stratified flows and quasi-geostrophic flows as well as the selection of the vertical scale in geophysical flows, we investigate the three-dimensional stability of co-rotating vertical vortices. Such a flow plays a major role in turbulence through the merging process.

The three-dimensional stability of a pair of co-rotating vertical vortices has been first investigated in a stratified fluid in the absence of planetary rotation (Otheguy *et al.*, 2005*b*). We have observed the elliptic instability when the horizontal Froude number $F_h = \Gamma/\pi a^2 N$ (where Γ is the vortex circulation and a the vortex radius) is large : $F_h > 10$. In contrast, we have found that for strong stratification ($F_h < 2.85$) the most unstable three-dimensional instability is a zigzag instability similar to the instability observed for counter-rotating vortices (Billant & Chomaz, 2000*a*). The most unstable wavelength of this instability is proportional to $F_h b$, where b is the separation distance between the two vortices. Its growth rate scales like the external strain rate $S = \Gamma/2\pi b^2$. The instability consists in a symmetric bending of the two vortices which generates horizontal layers of thickness proportional to the buoyancy length. In the successive layers, the vortices are alternatively brought closer or farther from each other every half a wavelength along the vertical.
A similar bending instability, named tall-column instability has been observed by Dritschel & de la Torre Juárez (1996) and Dritschel (2002) in quasi-geostrophic fluids (strong stratification and rapid rotation) where the most unstable wavelength is proportional to $L_h f/N$, where L_h is the characteristic horizontal length scale. In the case of two co-rotating vortices, this instability has been shown to enhance or delay (even inhibit) the vortex merging depending on the vertical location.

In order to understand the transition between strongly stratified flows and quasi-geostrophic flows and the selection of the vertical length scale for finite Rossby numbers, we investigate herein the effect of the planetary rotation on the zigzag instability of a pair of co-rotating vertical gaussian vortices.

7.2 Linear stability analysis

In Otheguy *et al.* (2005*b*), a two-dimensional quasi-steady basic state (figure 7.1) has been obtained numerically using a two-dimensional numerical simulation at a large Reynolds number ($Re = \Gamma/\pi\nu = 16000$) and initialized by two co-rotating axisymmetric vortices with a gaussian distribution of vorticity. From this initial condition, the two vortices adapt to each other and evolve quickly towards a quasi-steady state in the frame of reference rotating at the angular velocity $\Omega_b = \Gamma/\pi b^2$. The vortex axes are vertical and the ratio of the vortex radius a and the separation distance b between the vortices is $a/b = 0.15$. Note that this flow remains a quasi-steady basic state in the presence of a Coriolis force (representing the effect of a planetary rotation) since the flow is two-dimensional and incompressible.

The three-dimensional stability analysis of this basic flow is investigated here for a strongly stratified and rotating fluid. The linearized Navier-Stokes equations under the Boussinesq approximation governing the perturbations of velocity $\boldsymbol{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z)$, vorticity $\boldsymbol{\omega}'$, pressure p' and density ρ' are

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t} + \omega_b \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{u}_b + (2\Omega_b + f)\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{u}' = -\boldsymbol{\nabla}(\dfrac{p'}{\rho_0} + \boldsymbol{u}_b \cdot \boldsymbol{u}') - g\dfrac{\rho'}{\rho_0}\boldsymbol{e}_z + \nu\Delta\boldsymbol{u}', \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}' = 0, \\ \dfrac{\partial \rho'}{\partial t} + \boldsymbol{u}_b \cdot \boldsymbol{\nabla}\rho' - \dfrac{\rho_0}{g}N^2 u'_z = D\Delta\rho', \end{cases} \tag{7.1}$$

where $\boldsymbol{u}_b$ is the velocity of the basic state, ω_b its vorticity, $\boldsymbol{e}_z$ the unit vector in the upward vertical direction, f the Coriolis parameter equal to twice the local planetary rotation rate in the f-plane approximation, ρ_0 a constant reference density, g the gravity, ν the kinematic viscosity, N the Brunt-Väisälä frequency and D the molecular diffusivity of the stratifying agent. As the basic state is uniform along the z-axis, the perturbations can be written as follows :

$$[\boldsymbol{u}'; \boldsymbol{\omega}'; p'; \rho'](x, y, z, t) = [\boldsymbol{u}; \boldsymbol{\omega}; p; \rho](x, y, k_z, t)e^{ik_z z} + cc, \tag{7.2}$$

where k_z is the vertical wavenumber and cc denotes the complex conjugate. A pseudo-spectral code has been used to integrate equation (7.1) for each value of k_z. The size of the computational domain is large in order to minimize the effect of the periodic boundary conditions : $L_x = L_y = 30a$. The number of collocation points is $M_x = M_y = 256$ and the time step is $\delta t = 0.01\pi a^2/\Gamma$. The perturbation of velocity $\boldsymbol{u}$ is initialized by a divergence-free white noise and after integrating equation (7.1) for a sufficiently long time, the most unstable eigenmode dominates the perturbation (see Otheguy *et al.* (2005*b*) for further details).

In the present paper, this stability analysis is performed mostly for a single Froude number $F_h = \Gamma/\pi a^2 N = 1$ as a function of the Rossby number Ro defined as

$$Ro = \frac{\Gamma}{\pi a^2 f}, \tag{7.3}$$

The Reynolds number is $Re = 16000$ and the Schmidt number is $Sc = \nu/D = 1$.

Figure 7.2 represents the evolution of the growth rate of the zigzag instability as a function of the vertical wavenumber k_z for various cyclonic rotations for which the Rossby number is positive, and anticyclonic rotations for which the Rossby number is negative. When $Ro = \infty$, the zigzag instability destabilizes a large band of vertical wavenumbers $0 \lesssim k_z b \lesssim 18$. The maximum growth rate has been shown in Otheguy *et al.* (2005*b*) to be approximately equal to twice the external strain $S = \Gamma/2\pi b^2$ and the most amplified wavenumber is around $k_z b = 10$ for $F_h = 1$. When the planetary rotation is present, all the curves keep the same shape with a maximum growth rate varying very little, but the most amplified wavenumber varies considerably depending on the Rossby number Ro. For large Ro ($Ro = \pm 5$), the effects of cyclonic and anticyclonic rotations are different. The cyclonic rotation tends to shift the curve relative to the $Ro = \infty$ curve towards smaller wavenumbers while the anticyclonic rotation displaces the curves towards higher wavenumbers. For smaller Ro ($Ro = \pm 2.5$), both cyclonic and anticyclonic rotations shift the curves towards smaller wavenumbers but not by the same amount. For $Ro = \pm 0.5$, the effect of the anticyclonic rotation is the same as for the cyclonic rotation : the two growth rate curves are almost superimposed.

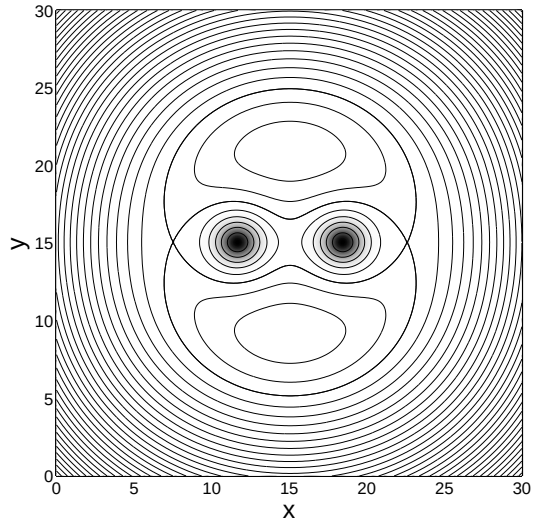


FIG. 7.1 – Streamlines (contour lines) and vorticity field (background grey levels) of the basic state. The shaded regions indicate positive vorticity. The vorticity contours are superimposed on the streamlines showing that this basic state is quasi-steady.

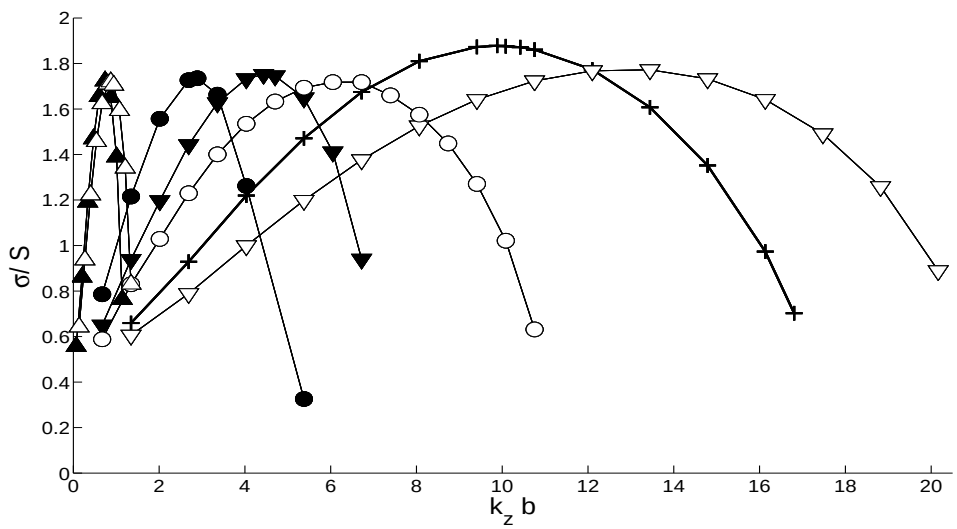
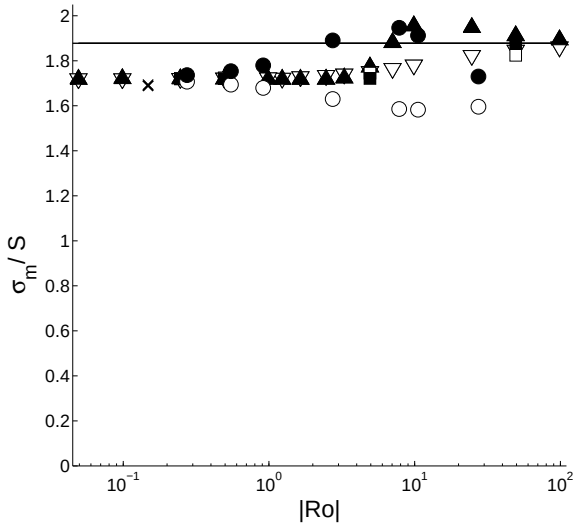
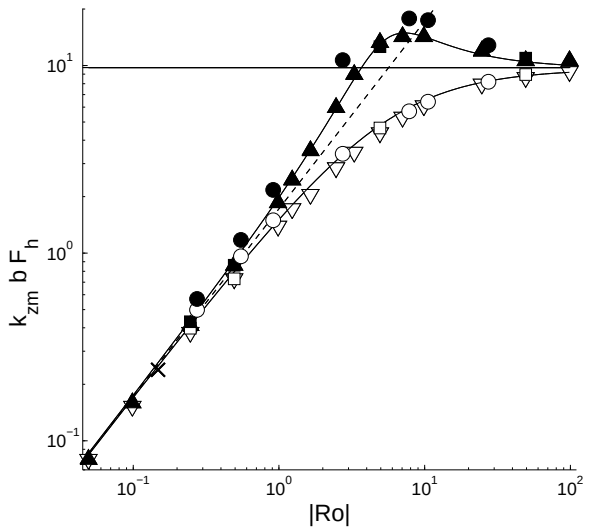


FIG. 7.2 – Growth rate of the zigzag instability σ normalized by the strain rate $S = \Gamma/2\pi b^2$ plotted against the vertical wavenumber k_z scaled by the separation distance b for $F_h = 1$, $Re = 16000$, $a/b = 0.15$ and $Ro = \infty$ (+), $Ro = \pm 5$ ($\bigtriangledown$), $Ro = \pm 2.5$ ($\circ$) and $Ro = \pm 0.5$ ($\bigtriangleup$). Cyclonic rotations are represented by filled symbols whereas anticyclonic rotations are represented by open symbols.



(a)



(b)

FIG. 7.3 – (a) Maximum growth rate normalized by the external strain rate σ_m/S and (b) most amplified wavenumber $F_h k_{zm} b$ plotted against the Rossby number Ro for $Re = 16000$. The asymptotic values $\sigma_m(Ro = \infty)$ and $k_{zm}(Ro = \infty)$ are represented by a horizontal plain line. The dotted line in (b) represents the high rotation rate approximation : $k_{zm} b F_h = 1.74 Ro$. The plain lines display the fit $k_{zm} = f(Ro)/F_h b$. The symbols (▲,▽) represent $F_h = 1$ and $a/b = 0.15$; (□, ■) represent $F_h = 0.5$ and $a/b = 0.15$ and (○, ●) $F_h = 1$ and $a/b = 0.21$ for cyclonic rotation (open symbols) and anticyclonic rotation (filled symbols). The symbols x correspond to the point $Ro = 0.15$ and $F_h = 0.015$, which are typical parameter values characterizing most of mesoscale eddies in the ocean.

Figure 7.3 shows the maximum growth rate and the corresponding most amplified vertical wavenumber as a function of the Rossby number. As already seen in figure 7.2, the maximum growth rate is almost independent of the planetary rotation (figure 7.3 *a*) although it is slightly smaller for positive Rossby numbers and small negative Rossby numbers than for $Ro = \infty$. For anticyclonic rotations $Ro \lesssim -1$, the maximum growth rate is slightly enhanced. In contrast, the most unstable wavenumber varies strongly with Ro (figure 7.3 *b*). For small Rossby numbers, the most unstable wavenumber increases linearly with Ro with the same slope for cyclonic and anticyclonic rotations. For positive Rossby numbers, the wavenumber continues to increase monotonically and tends to the non-rotating value $k_{zm}(Ro = \infty)$ as the Rossby number increases. In contrast, the most unstable wavenumber reaches a maximum for negative Rossby numbers and then decreases asymptotically towards $k_{zm}(Ro = \infty)$.

Strikingly, the entire dependence of the most unstable wavenumber k_{zm} on the Rossby number Ro for a constant horizontal Froude number ($F_h = 1$) follows the law

$$k_{zm}b = f(Ro) = \left(\frac{\gamma_1}{Ro^2} + \frac{\gamma_2}{Ro} + \gamma_3\right)^{-1/2} \tag{7.4}$$

where the constants $\gamma_1 = 0.33$, $\gamma_2 = 0.09$, $\gamma_3 = 0.01$ are the same both for cyclonic ($Ro > 0$) and anticyclonic ($Ro < 0$) rotations. The function $f(Ro)$ is always real even for negative Ro.

Alternatively, when the horizontal Froude number F_h is varied, it has been shown in Otheguy *et al.* (2005*b*) that $k_{zm} \propto 1/F_h b$ when there is no rotation ($Ro = \infty$). Without further argument, these two scaling laws can be combined in the general form $k_{zm} = F(Ro, F_h)/F_h b$ where F is *a priori* a function of F_h and Ro. However, the scaling analysis of Billant & Chomaz (2001) for strongly stratified rotating flows has proved that the function $F(Ro, F_h)$ does not depend on F_h when $F_h \ll 1$ whatever the Rossby number Ro is. This implies

$$k_{zm} = \frac{f(Ro)}{F_h b} \tag{7.5}$$

for any Rossby number and any small Froude number. This scaling law has been checked by considering the case $F_h = 0.5$ for finite Rossby numbers. Figure 7.3 *b* shows indeed that the scaled wavenumber $k_{zm}F_h b$ follows strikingly the curve $f(Ro)$. Another value of the ratio a/b has also been considered, $a/b = 0.21$, for $F_h = 1$. Varying a/b corresponds to varying the strain S. Again, the wavenumber follows the same universal scaling law. The growth rate normalized by the strain remains also approximately the same although it is slightly reduced, in particular for large Rossby numbers as already noted in Otheguy *et al.* (2005*b*) for $Ro = \infty$.

In the limit of small Rossby numbers, the most unstable wavenumber becomes proportional to the ratio of the Rossby number to the Froude number :

$$k_{zm} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}\frac{Ro}{F_h b} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}\frac{N}{fb} \tag{7.6}$$

i.e. to the ratio N/f in agreement with the quasi-geostrophic theory (Charney, 1948). However, a crucial difference with the scaling laws reported previously (Dritschel &

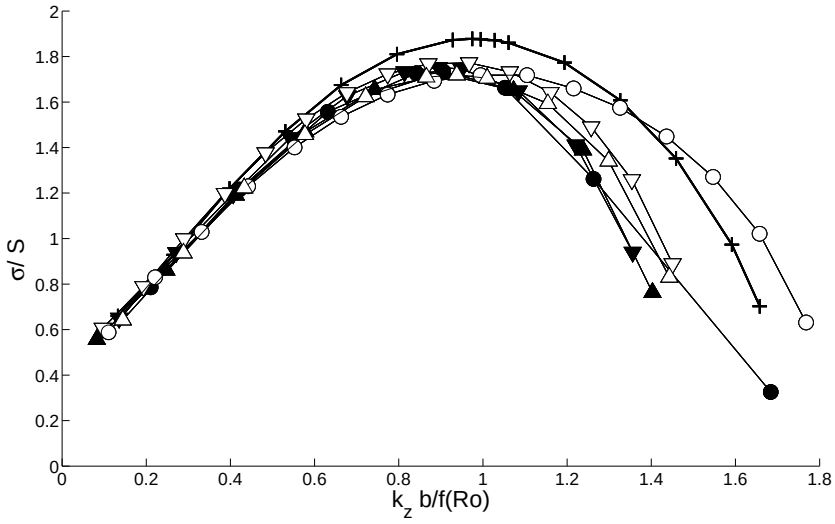


FIG. 7.4 – Growth rate of the zigzag instability normalized by the strain rate σ/S plotted against the vertical wavenumber k_z rescaled by $b/f(Ro)$ for $F_h = 1$, $Re = 16000$, $a/b = 0.15$ and $Ro = \infty$ (+), $Ro = \pm 5$ (▽, ▼), $Ro = \pm 2.5$ (○, ●) and $Ro = \pm 0.5$ (△, ▲). Cyclonic rotations are represented by filled symbols whereas anticyclonic rotations are represented by open symbols.

de la Torre Juárez, 1996) in quasi-geostrophic fluid is that the most unstable wavelength $\lambda_m = 2\pi/k_{zm} \approx 3.6bf/N$ is proportional to the separation distance b and not to the vortex radius a. This dependence on b has also been noted by Dritschel (2002) and might explain why different constant of proportionality have been reported in quasi-geostrophic turbulence since the wavelength was scaled by fa/N (Mc Williams 1990 ; Reinaud, Dritschel & Koudella 2003 ; Mc Williams, Weiss & Yavneh 1999).

The distribution of vorticity inside each vortex is also expected to affect the constant of proportionality (here 3.6) but not the scaling of the wavelength on b. Here, a gaussian vorticity profile has been chosen while in Dritschel & de la Torre Juárez (1996), the vorticity is taken constant inside the vortex core. A further possible reason for these differences in the literature is that the height of the computational domain is often smaller than the most amplified wavelength so that the top and bottom boundary conditions might influence the wavelength selection.

Figure 7.4 displays the growth rate curves of figure 7.2 plotted as a function of the rescaled wavenumber $k_z b/f(Ro)$. The collapse is very good for all the wavenumbers but better for small wavenumbers. This means that the scaling is not only valid for the most unstable wavenumber but also for all the wavenumbers i.e. $\sigma(k_z, b, Ro) \approx S\tilde{\sigma}(k_z b/f(Ro))$, where $\tilde{\sigma}$ is a single function of the rescaled wavenumber.

Figure 7.5 shows the vertical vorticity of the eigenmode for different Rossby numbers and for the most unstable wavenumber. The same dipolar shape in each vortex core with the same orientation (angle between the dipole axis and the line joining the vortices) is observed for all the Rossby numbers. As explained in Otheguy *et al.* (2005*b*) this shape corresponds to

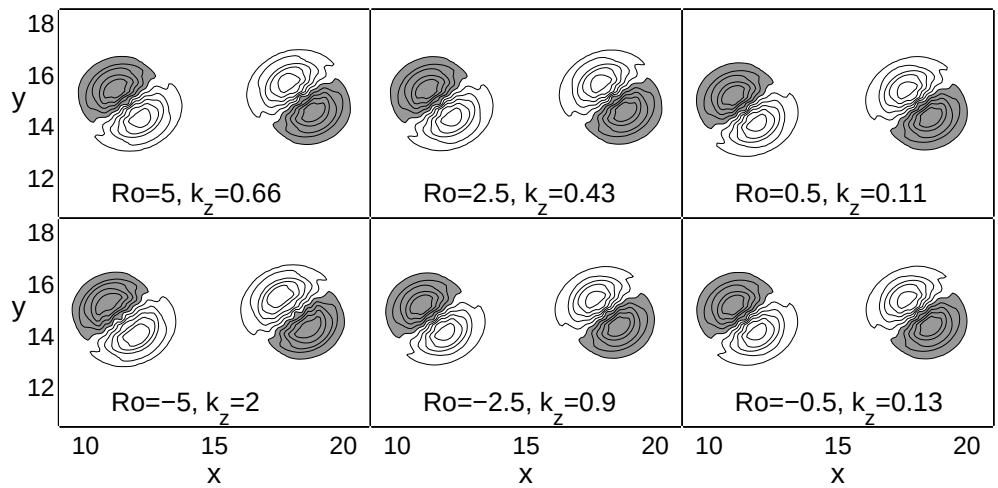


FIG. 7.5 – Vertical vorticity of the eigenmode for different Rossby numbers for the most unstable wavenumber. The Froude number is $F_h = 1$ and the Reynolds number $Re = 16000$.

a bending of each vortex obliquely in opposite directions, with no deformation of their core. Together with the results found in Otheguy *et al.* (2005*b*) where the Rossby number was infinite and the Froude number was varied, we conclude that the self-similarity property of the zigzag instability on the single variable $k_z f(Ro)/F_h b$ is therefore a fundamental property of the growth rate as well as the shape of the eigenmode of the instability.

7.3 Discussion

Oceanic and atmospheric flows at large scales ($> 500km$) have both a small Froude number and a small Rossby number so that the quasi-geostrophic approximation is valid. The typical value $f/N = 0.1$ for the oceans corresponds to a wavelength $\lambda = 0.36b$ for the zigzag or tall-column instability while in the atmosphere, the typical value is $f/N = 0.01$ leading to $\lambda = 0.036b$. With solid boundary conditions, the zigzag or tall-column instability could be observed on co-rotating gaussian columnar vortices of equal intensity in the atmosphere or oceans only if the instability wavelength is smaller or at least of the same order as the fluid height H : $\lambda \lesssim H$. This put a strong constraint on the size of the vortices on which the zigzag or tall-column instability could be observed. However, it should be noted that the zigzag or tall-column instability is a long wavelength instability which destabilizes all the wavelengths in the band $[\lambda_{cutoff}, \infty]$ so that large vortices can still be affected if $H \gtrsim \lambda_{cutoff}$. Furthermore, in the case of free boundary conditions, the vortices can be bent even if a wavelength does not fit in the fluid height.

For an ocean $5km$ deep, the maximum value of the separation distance b allowing to observe one entire wavelength is $b = 14km$ meaning that the zigzag instability will display one entire wavelength only for vortices of scale about $10km$ and smaller. For example, mesoscale eddies observed in the Gulf Stream, Mediteranean sea (Richardson, 1993), Hawaiian sea (Chavanne *et al.*, 2002) or in the Bay of Biscay (Pingree & Le Cann, 1992) have a typical radius around $150km$, and are characterized by typical $Ro = 0.15$ and $Fh = 0.015$. The

zigzag or tall-column instability scaling then predicts (figure 7.3 *b*) $\lambda \approx 0.36b > O(100)$ km, a far too large depth to fit a wavelength in the ocean since b should be larger than $2a$. It should be mentioned however that this estimate has been obtained by assuming the constant ratio $f/N = 0.1$ while in practice this ratio can be smaller and varies spatially.

Smaller vortices observed in the Ligurian Sea (Marullo, Salusti & Viola 1985) or in the Southern California Bight (DiGiacomo & Holt, 2001) have a radius of about $5km$, a typical velocity of $0.5ms^{-1}$ and are approximately $150m$ deep. They are localized mainly in the thermocline where the stratification is approximately $N \approx 10^{-2}\ s^{-1}$ so that $f/N \approx 0.01$. The Rossby and Froude numbers corresponding to these eddies are about $Ro \approx 2$ and $F_h \approx 0.02$. The scaling (7.5) can be applied and yield $\lambda \approx 0.04b$. Most eddies are typically separated by a distance $O(10km)$ which gives half a wavelength of order $\lambda/2 \sim O(200m)$, in agreement with their typical depth. The zigzag or tall-column instability is probably very active since cyclonic vortices are found to be numerous in small areas (DiGiacomo & Holt, 2001) promoting vortex interactions and thereby the instability.

7.4 Conclusion

We have shown that the zigzag instability remains active on a co-rotating pair of vortices in the presence of planetary rotation. It is therefore of the same physical nature as the tall-column instability shown by Dritschel & de la Torre Juárez (1996) (see also Dritschel, de la Torre Juárez & Ambaum 1999 ; Dritschel 2002 ; Reinaud & Dritschel 2005) to cause the breakdown of columnar vortices in the presence of strain in a quasi-geostrophic fluid. Its growth rate is proportional to the strain rate $S = \Gamma/2\pi b^2$ and almost independent of the Rossby number but the vertical wavelength varies according to the universal scaling $\lambda = 2\pi F_h b\sqrt{\gamma_1/Ro^2 + \gamma_2/Ro + \gamma_3}$, i.e. from $\lambda/b \propto F_h$ for $Ro = \infty$ to $\lambda/b \propto F_h/Ro \propto f/N$ for $Ro \ll 1$. This instability therefore should play a major role for a wide range of geophysical scales since its existence requires only that the Froude number is low. A striking result is that the wavelength is proportional to the distance between the vortices and independent of the vortex radius. This might explain why different scaling laws in term of the vortex radius have been reported for quasi-geostrophic fluids (Dritschel & de la Torre Juárez 1996 ; Mc Williams 1990 ; Reinaud, Dritschel & Koudella 2003 ; Mc Williams, Weiss & Yavneh 1999). Because of this dependence on the separation distance b, the wavelength of the zigzag or tall-column instability in the quasi-geostrophic regime is relatively large compared to the height of the atmosphere or the oceans except when the vortices are close to one another.

Acknowledgements
We wish to thank gratefully David Dritschel, Colm-cille Caulfield and Anne-Virginie Salsac for fruitful discussions and Daniel Guy for technical assistance. This work is supported by IDRIS (CNRS) for computational facilities under project No.41722.

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

Cette thèse tente de contribuer à une meilleure compréhension de la dynamique des fluides géophysiques. On s'est intéressé ici en particulier à l'étude d'un écoulement prototype constitué de deux tourbillons co-rotatifs en milieu fortement stratifié. Cette étude a été motivée par les travaux de Lindborg (1999) et Billant & Chomaz (2001) qui ont proposé que la dynamique des fluides stratifiés est tridimensionnelle et non bidimensionnelle et par la découverte de l'instabilité zigzag par Billant & Chomaz (2000*a*) dans le cas d'un autre écoulement prototype constitué de deux tourbillons contra-rotatifs en milieu fortement stratifié. Cette instabilité ayant pour effet de générer des couches d'épaisseur proportionnelle à U/N, où U est la vitesse horizontale de l'écoulement et N la fréquence de Brunt-Väisälä, elle pourrait être le mécanisme physique responsable de la formation des couches en turbulence stratifiée.

Étude numérique de stabilité linéaire

Le premier chapitre décrit l'étude numérique de la stabilité linéaire de l'écoulement constitué de deux tourbillons co-rotatifs en milieu stratifié. Pour un milieu homogène ou faiblement stratifié, nous avons observé les deux modes symétrique et antisymétrique de l'instabilité elliptique. Celle-ci se trouve amortie pour des stratifications beaucoup plus faibles (pour un nombre de Froude $F_h \leq 10$) que ne le prédit la théorie asymptotique ($F_h \leq 2$) (Kerswell, 2002). Pour une stratification suffisamment forte ($F_h < 2.85$), nous avons découvert une instabilité de type mode de déplacement. Cette instabilité consiste en une translation oblique des deux tourbillons dans des directions opposées qui courbe l'axe des deux tourbillons de manière symétrique par rapport à l'axe de rotation autour duquel la paire de tourbillons tourne sur elle-même. Le taux de croissance de l'instabilité est proportionnel à l'étirement créé par le premier tourbillon sur le second et indépendant de la stratification. La longueur d'onde la plus instable est proportionnelle au nombre de Froude multiplié par la distance entre les tourbillons. En particulier, cette longueur d'onde diminue quand la stratification augmente. L'auto-similarité du taux de croissance et du mode propre le plus instable de l'instabilité en $k_z F_h b$, où k_z désigne le nombre d'onde vertical et b la distance entre les tourbillons, montre que cette instabilité est similaire à l'instabilité zigzag découverte lors de l'étude de deux tourbillons contra-rotatifs en milieu stratifié (Billant & Chomaz, 2000*c*) et qu'elle sélectionne la même échelle verticale. L'instabilité zigzag semble donc être une instabilité générique affectant tout écoulement stratifié constitué de plus d'un

tourbillon.

Analyse asymptotique

L'étude asymptotique de la stabilité linéaire de deux tourbillons co-rotatifs soumis à des perturbations de grande longueur d'onde dans un milieu fortement stratifié a été menée dans l'esprit de Billant & Chomaz (2000*b*). Le développement multi-échelle des équations d'Euler, dans l'approximation de tourbillons très éloignés et de petits nombres de Froude, nous a permis de comprendre le mécanisme physique de l'instabilité zigzag de deux tourbillons co-rotatifs. C'est le couplage entre l'onde de déplacement d'un tourbillon en milieu stratifié et le champ d'étirement, bidimensionnel au premier ordre, créé par le deuxième tourbillon qui est à l'origine de l'instabilité. Si une petite déformation verticale, et en particulier une petite rotation $\delta\theta$, est appliquée sur la paire de tourbillons co-rotatifs, l'équilibre hydrostatique déforme alors les surfaces d'iso-densité. En réponse, une translation secondaire des deux tourbillons, dans des directions opposées telles que la distance entre les tourbillons b varie, apparaît pour satisfaire la conservation de la masse et de la vorticité potentielle (figure 8.1 *b*). La vitesse angulaire de rotation de la paire de tourbillons étant inversement proportionnelle à b^2, la petite rotation initiale $\delta\theta$ est alors amplifiée et le système est instable. L'instabilité zigzag se traduit par le rapprochement et l'éloignement des deux tourbillons toutes les demi-longueur d'onde alternativement sur la verticale. Une rotation de la paire de tourbillons plus ou moins rapide y sera associée.
Une comparaison détaillée des résultats de cette analyse asymptotique et de l'étude numérique de stabilité linéaire a révélé un très bon accord qualitatif et quantitatif entre les deux approches.

Le mécanisme physique de cette instabilité zigzag de tourbillons co-rotatifs en milieu stratifié est très similaire à celui de l'instabilité de Crow (Crow, 1970) de tourbillons contra-rotatifs en milieu homogène. Au premier stade de leur développement, ces deux instabilités se manifestent d'ailleurs visuellement de la même manière (figure 2.9 *a*, figure 5.2) : la distance entre les tourbillons varie de manière sinusoïdale selon l'axe des tourbillons. Cela peut être interprété qualitativement par le fait qu'une onde de Kelvin déplace un tourbillon en sens inverse de son sens de rotation en milieu homogène mais dans le même sens que son sens de rotation en milieu stratifié. En conséquence, deux perturbations différentes peuvent avoir le même effet sur deux tourbillons contra-rotatifs en milieu homogène et sur deux tourbillons co-rotatifs en milieu stratifié comme le schématise la figure 8.1.

Observations expérimentales

L'existence de l'instabilité zigzag sur des tourbillons co-rotatifs a été confirmée par son observation expérimentale. Dans une cuve de 1m de large, 1m de long et 50cm de profondeur, on a introduit une solution d'eau salée linéairement stratifiée. Deux tourbillons co-rotatifs sont alors engendrés par la rotation rapide de deux flaps verticaux, dispositif similaire à celui de Meunier & Leweke (2001). L'étude quantitative des caractéristiques des tourbillons : leur distance b, leur rayon a, et leur circulation Γ, permettant de définir précisément les nombres de Froude et de Reynolds, a été effectuée par PIV (Particule Image Velocimetry).

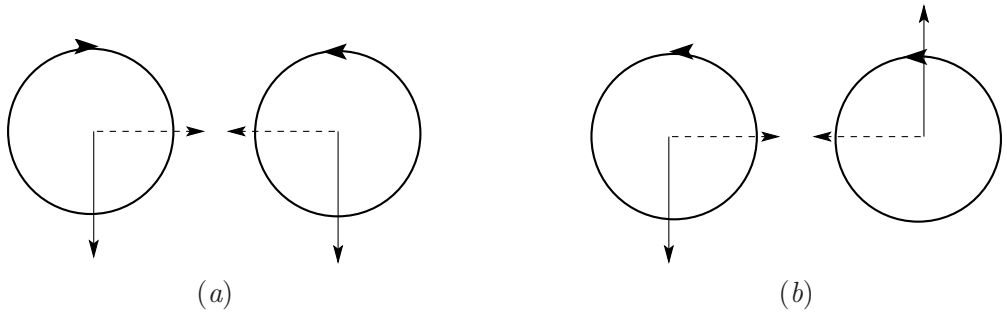


FIG. 8.1 – (a) Coupe horizontale de deux tourbillons contra-rotatifs soumis à l'instabilité de Crow en milieu homogène. (b) Coupe horizontale de deux tourbillons co-rotatifs soumis à l'instabilité zigzag en milieu stratifié. Les perturbations appliquées sont dessinées en trait plein. Les déplacements induits sont dessinés en pointillés.

La visualisation des tourbillons à l'aide de fluorescéine éclairée par des lampes UV a permis l'observation tridimensionnelle du développement spontanné de l'instabilité zigzag. Juste après leur formation, les deux tourbillons tournent l'un autour de l'autre en restant rectilignes selon la verticale. L'instabilité zigzag déforme ensuite symétriquement les tourbillons selon la verticale tel que la distance entre les tourbillons varie de manière sinusoïdale engendrant des couches où l'appariement est alternativement accéléré ou ralenti. Cet appariement décorrélé sur la verticale résulte en un entortillement complexe. Cette observation nous a permis de bien confirmer l'existence de cette instabilité et de montrer que son développement n'est pas inhibé par l'effet des non-linéarités.
Par ailleurs, en faisant varier la vitesse de fermeture des flaps nous avons pu faire varier le nombre de Reynolds entre 300 et 1100 et le nombre de Froude entre 0.6 et 1.9. L'instabilité n'étant pas forcée, nous avons pu étudier l'évolution de sa longueur d'onde en fonction du nombre de Froude. Nous avons observé un très bon accord entre la loi d'échelle mise en évidence par l'expérience et celle prédite par les études linéaires. La sélection de l'échelle verticale dans le milieu, c'est-à-dire de l'épaisseur des couches formées, est donc assurée par le comportement linéaire de l'instabilité.

Étude d'un appariement en milieu stratifié

Dans ce chapitre, nous avons voulu faire un pas vers l'étude de la turbulence stratifiée. En particulier, l'appariement de tourbillons étant un processus essentiel de la cascade d'énergie des petites vers les grandes échelles, nous avons voulu comprendre l'effet de la stratification sur ce processus. Une première simulation numérique directe dans une boîte cubique nous a permis de mettre en évidence l'émergence de l'instabilité zigzag qui rend l'appariement pleinement tridimensionnel et de vérifier que sa longueur d'onde est bien en accord avec les études précédentes. Nous avons ensuite implémenté des simulations numériques haute résolution dans des boîtes parallélipédiques modélisant une seule longueur d'onde sur la verticale. Il est tout d'abord apparu que l'appariement en milieu stratifié est accéléré par rapport à l'appariement bidimensionnel, mais cette accélération n'est pas uniforme sur la verticale. Durant le premier stade de développement de l'instabilité, stade linéaire, l'insta-

bilité zigzag rapproche et éloigne les tourbillon alternativement toutes les demi-longueur d'ondes sur la verticale. Durant le deuxième stade non-linéaire, les tourbillons s'apparient dans la couche où l'instabilité les avait rapprochés. Dans la couche où les tourbillons avaient été éloignés, l'évolution non-linéaire de l'instabilité stoppe leur divergence et les approche à nouveau. Ils s'apparient ainsi plus tôt que les tourbillons bidimensionnels. Par ailleurs, l'écoulement reste bien corrélé sur la verticale au sein de chaque couche si bien que l'appariement est quasi-simultané à l'intérieur d'une couche. Les gradients verticaux et les zones de cisaillement sont expulsés à l'exterieur de ces couches dans des zones de transition. Cette observation suggère alors que les fluides stratifiés sont organisés en couches cohérentes sur la verticale, d'épaisseur proportionnelle à l'échelle de flottabilité, et séparées par des zones de transition dominées par la viscosité verticale.

Effet de la rotation de la Terre sur l'instabilité zigzag

Pour savoir sur quelles échelles géophysiques l'instabilité zigzag peut exister, nous avons étudié l'effet de la rotation planétaire sur cette instabilité. Nous avons alors découvert que cette instabilité reste active quel que soit le taux de rotation considéré du moment que le milieu est fortement stratifié. Son taux de croissance est indépendant du taux de rotation, contrairement à la longueur d'onde la plus instable qui, elle, en dépend fortement. Pour une rotation très forte, c'est-à-dire pour un nombre de Rossby Ro petit, cette longueur d'onde est proportionnelle à $F_h b/Ro$, soit à f/N en accord avec la théorie quasi-géostrophique de Dritschel *et al.* (1999). Il est ainsi apparu que l'instabilité zigzag observée est en fait la même instabilité que l'instabilité "tall-column" découverte par Dritschel & de la Torre Juárez (1996) et qui décorrèle bien la paire de tourbillons sur la verticale de la même manière (figure 8.2).

Pour des taux de rotation intermédiaires, c'est-à-dire pour des nombres de Rossby finis supérieurs à 1, nous avons trouvé que la transition entre régime fortement stratifié et régime quasi-géostrophique est continue. Une fonction continue $f(Ro)$ permet en effet de donner la longueur d'onde la plus instable $\lambda_m \propto F_h b/f(Ro)$ quelle que soit le nombre de Rossby Ro, du moment que le nombre de Froude F_h est petit.
En conséquence, cette instabilité peut exister à toutes les échelles quel que soit le taux de rotation considéré pourvu que la stratification reste importante (petit nombre de Froude) et la dynamique de ces échelles est tridimensionnelle, en accord avec Dritschel *et al.* (1999) qui ont montré l'inadéquation des modèles 2D pour simuler la dynamique des fluides stratifiés tournants tant que la stratification ne peut être négligée.

Perspectives

De nombreuses études pourraient compléter ce travail.

L'étude de stabilité linéaire a mis en évidence l'existence de nouveaux modes instables en milieu homogène et faiblement stratifié. Ces modes sont des modes oscillants, moins instables que les modes elliptiques mais qui pourraient jouer un rôle intéressant de couplage avec ces derniers. L'étude de cette instabilité est en cours de réalisation. Il est possible que ces modes correspondent à une instabilité hyperbolique.

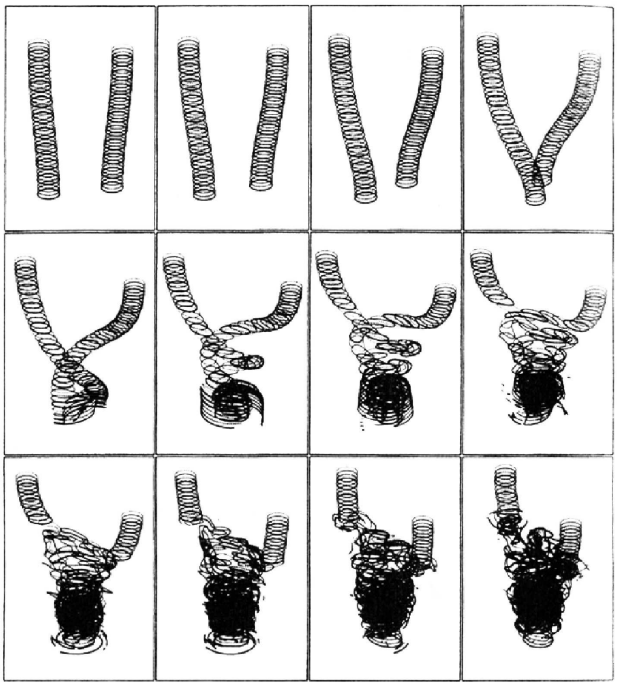


Fig. 8.2 – Evolution de deux tourbillons colonnes identiques en régime quasi-géostrophique. D'après Dritschel & de la Torre Juárez (1996).

L'analyse asymptotique pourrait être généralisée à l'étude d'une paire de tourbillons en milieu stratifié tournant.

Il serait également intéressant de poursuivre l'étude expérimentale en forçant la longueur d'onde de l'instabilité afin de bien maîtriser l'apparition des couches et de comparer les appariements dans quatre plans séparés par un quart de longueur d'onde.

Enfin, l'étude non-linéaire de cette instabilité demande à être poursuivie en particulier en terme de transferts d'énergie pour essayer de mieux comprendre le lien entre instabilité zigzag et turbulence stratifiée. Ce projet est en cours de réalisation en collaboration avec le Pr. Y. Kimura, de l'université de Nagoya (Japon). Il pourrait en particulier nous permettre de quantifier le transfert d'énergie des grandes échelles vers les petites échelles verticales engendré par l'instabilité zigzag.

Par ailleurs, l'étude de plusieurs tourbillons, en cours au LadHyX par A. Deloncle, P. Billant et J.-M. Chomaz, permet de se rapprocher de la configuration turbulente et permettra peut-être de montrer que l'instabilité zigzag est bien responsable de la formation des couches en turbulence stratifiée. Elle permettra peut-être aussi de s'affranchir du particularisme de la paire de tourbillons qui rend l'épaisseur des couches dépendante de la distance entre les deux tourbillons.

Les résultats obtenus ouvrent des perspectives intéressantes en terme d'application à la dynamique des fluides géophysiques et astrophysiques.

Si l'échelle verticale sélectionnée par l'instabilité zigzag est proportionnelle à $F_h b$, le coefficient de proportionalité dépend du profil de vorticité des tourbillons et aussi sans doute du rapport des tailles des deux tourbillons. Nous avons en effet conduit toute l'étude dans le cas de deux tourbillons gaussiens identiques, ce qui n'est bien sûr pas toujours le cas dans la nature. L'étude d'autres configurations en milieu stratifié tournant montre que l'instabilité tall-column ou zigzag reste active. Dritschel & de la Torre Juárez (1996) ont étudié le cas de tourbillons colonnes au profil elliptique. Dritschel (2002) et Reinaud & Dritschel (2005) ont montré que des tourbillons ellipsoidaux sont aussi sujets à l'instabilité tall-column ou zigzag. Si la hauteur de ces tourbillons dépasse bf/N, ils s'apparient et cet appariement est tridimensionnel.

Il serait intéressant de tenter d'observer plus précisément une manifestation de l'instabilité zigzag directement dans l'océan ou l'atmosphère. Nous avons vu en introduction que la configuration de tourbillons co-rotatifs était fréquemment observée, en particulier dans l'océan, rendant possible l'étude des intéractions entre tourbillons. Pour tenter d'observer un appariement et le cas échéant, sa décorrélation verticale, c'est-à-dire pour observer au moins une longueur d'onde de l'instabilité zigzag ou tall-column, nous avons vu dans le chapitre **??** (Otheguy, Billant & Chomaz, 2005*a*) que la profondeur des océans limite grandement la taille des structures à considérer. C'est pourquoi nous proposons de s'intéresser à des tourbillons petits (de quelques km de rayon) et localisés dans la thermocline qui présente un gradient de densité plus important que le reste de l'océan. Les tourbillons de DiGiacomo & Holt (2001) et Marullo *et al.* (1985) seraient de bons exemples.

Pour finir, une instabilité récemment découverte (Barranco & Marcus, 2005) dans les disques protoplanétaires, c'est-à-dire les disques d'accrétion qui rassemblent les étoiles lors de la formation d'une planète, semble présenter des similitudes avec l'instabilité zigzag. Cette instabilité a en effet été expliquée par l'étude de la stabilité d'un coeur de tourbillon anticyclonique entourré par de la vorticité cyclonique en présence de stratification, une configuration sur laquelle l'instabilité zigzag pourrait être active.

Résumé

Une des caractéristiques les plus remarquables des fluides géophysiques est la présence de stratification, c'est-à dire d'un gradient vertical de densité, qui induit une structure en couches horizontales. Lindborg (1999) et Billant & Chomaz (2001) ont proposé que la dynamique au sein de ces couches est tridimensionnelle et non bidimensionnelle comme cela était supposé auparavant. Les derniers ont aussi proposé un mécanisme de sélection de l'épaisseur de ces couches : l'instabilité zigzag qu'ils ont observée dans le cas particulier d'une paire de tourbillons contra-rotatifs. Cependant, les paires de tourbillons contra-rotatifs sont rarement observées dans l'océan et l'atmosphère contrairement aux couples de tourbillons co-rotatifs. De plus, l'appariement de tourbillons co-rotatifs est le processus dominant en turbulence bidimensionnelle responsable du transfert d'énergie des petites vers les grandes échelles. Au cours de ma thèse, je me suis donc intéressée à la dynamique de tourbillons co-rotatifs verticaux dans un fluide stratifié. Une instabilité associée au même effet physique que l'instabilité zigzag a été découverte. Elle décorrèle verticalement

l'appariement de ces tourbillons, suggérant que l' instabilité zigzag est générique et affecte tout écoulement stratifié constitué de plus d'un tourbillon. L'analyse numérique de stabilité linéaire a montré que cette instabilité consiste en un mode déplacement et sélectionne une échelle verticale proportionnelle à l'échelle de flottabilité définie comme $F_h b$, où F_h est le nombre de Froude horizontal et b la distance entre les deux tourbillons. Son taux de croissance est proportionnel au champ détirement créé par un tourbillon sur son compagnon. L'origine physique de cette instabilité a été identifiée grâce à une étude asymptotique : elle provient du couplage entre le mode de déplacement d'un tourbillon et le champ d'étirement généré par l'autre tourbillon. Observations expérimentales et Simulations Numériques Directes montrent que les non-linéarités n'inhibent pas le développement de l'instabilité qui entraîne bien une décorrelation verticale de l'écoulement selon une échelle proportionnelle à l'échelle de flottabilité. Enfin, l'effet de la rotation de la Terre a été étudié et nous avons montré que l'instabilité Zigzag reste active en présence de la force de Coriolis. Son taux de croissance est indépendant du taux de rotation. En régime fortement tournant, on retrouve l'approximation quasi-géostrophique : l'instabilité zigzag est similaire à l'instabilité "tall-column" découverte par Dritschel & de la Torre Juárez (1996) et la longueur d'onde la plus instable est proportionnelle à $F_h b/Ro$, où Ro est le nombre de Rossby. Cette instabilité affecte donc les écoulements géophysiques sur une large gamme d'échelles aussi bien dans l'océan que dans l'atmosphère.

Bibliographie

Baroud, C. N., Plapp, B. B., She, Z.-S. & Swinney, H. L. 2003 Scaling in three-dimensional and quasi-two-dimensional rotating turbulent flows. *Phys. Fluids* **15**, 2091–2104.

Barranco, J. A. & Marcus, P. S. 2005 3d vortices in stratified protoplanetary disks. *The Astrophys. Journ.* **623**, 1157–1170.

Batchelor, G. K. 1967 *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.

Bayly, B. J. 1986 Three-dimensional instability of elliptical flow. *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2160.

Bellet, F. 2003 étude asymptotique de la turbulence d'ondes en rotation. PhD thesis, École Centrale de Lyon, France.

Billant, P., Brancher, P. & Chomaz, J.-M. 1999 Three-dimensional stability of a vortex pair. *Phys. Fluids* **11**, 2069–2077.

Billant, P. & Chomaz, J.-M. 2000*a* Experimental evidence for a new instability of a vertical columnar vortex pair in a strongly stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **418**, 167–188.

Billant, P. & Chomaz, J.-M. 2000*b* Theoretical analysis of the zigzag instability of a vertical columnar vortex pair in a strongly stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **419**, 29–63.

Billant, P. & Chomaz, J.-M. 2000*c* Three-dimensional stability of a vertical columnar vortex pair in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **419**, 65–91.

Billant, P. & Chomaz, J.-M. 2001 Self-similarity of strongly stratified inviscid flows. *Phys. Fluids* **13**, 1645–1651.

Billant, P., Chomaz, J.-M. & Otheguy, P. 2005 A general theory for the zigzag instability of vortices in stratified fluids. In preparation.

Billant, P., Colette, A. & Chomaz, J.-M. 2004 Instabilities of a vortex pair in a stratified and rotating fluid. In *Proceedings of the XXI International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*.

Bonnier, M., Eiff, O. & Bonneton, P. 2000 On the density structure of far-wake vortices in a stratified fluid. *Dyn. Atmos. Ocean* **31**, 117–137.

Bracco, A., Williams, J. C. M., Murante, G., Provenzale, A. & Weiss, J. B. 2000 Revisiting freely decaying turbulence at millenial resolution. *Phys. Fluids* **12**, 2931–2941.

Cambon, C. 2001 Turbulence and vortex structures in rotating stratified flows. *Euro. J. Mech. B-Fluids* **20**, 489–510.

Carnavale, G. F., Williams, J. C. M., Pomeau, Y., Weiss, J. B. & Young, W. R. 1991 Evolution of vortex statistics in two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2735–2737.

Cerretelli, C. & Williamson, C. H. K. 2003 The physical mechanism for vortex merging. *J. Fluid Mech.* **475**, 41–77.

Charney 1948 On the scale of atmospheric motion. *Geofys. Publ.* **17**, 2,1–17.

Charney, J. G. 1971 Geostrophic turbulence. *J. Atm. Sci.* **28**, 1087–1095.

Chavanne, C., Flament, P., Lumpkin, R., Dousset, B. & Bentamy, A. P. 2002 Scatterometer observations of wind variations induced by oceanic islands : Implications for wind-driven ocean circulation. *Can. J. Remote Sensing* **28**, 466–474.

Cho, J. Y. N., Jurgens, R. F. & Slade, M. A. 1996 High-resolution stratospheric dynamics measurements with the NASA/JPL goldstone solar system radar. *Geophys. Res. Lett.* **23**, 1909–1912.

Cho, J. Y. N. & Lindborg, E. 2001 Horizontal velocity structure functions in the upper troposphere and lower stratosphere : 1. observations. *J. Geophys. Res.* **106**, 10,223–10,232.

Crow, S. C. 1970 Stability theory for a pair of trailing vortices. *AIAA* **8**, 2172–2179.

Dalaudier, F., Sidi, C., Crochet, M. & Vernin, J. 1994 Direct evidence of "sheets" in the atmospheric temperature field. *J. Atmos. Sci.* **51**, 237–248.

Delbende, I., Chomaz, J.-M. & Huerre, P. 1998 Absolute/convective instabilities in the batchelor vortex : a numerical study of the linear impulse response. *J. Fluid Mech.* **355**, 229–254.

DiGiacomo, P. M. & Holt, B. 2001 Satellite observations of small coastal ocean eddies in the southern california bight. *J. Geoph. Res.* **106**, 22,521–22,543.

Dowell, S. M. & Rossby, H. 1978 Mediterranean water : An intense mesoscale eddy off the bahamas. *Science* **202**, 1085–1087.

Dritschel, D. 2002 Vortex merger in rotating stratified flows. *J. Fluid Mech.* **455**, 83–101.

Dritschel, D. & de la Torre Juárez, M. 1996 The instability and breakdown of tall columnar vortices in a quasi-geostrophic fluid. *J. Fluid Mech.* **328**, 129–160.

Dritschel, D., de la Torre Juárez, M. & Ambaum, M. H. P. 1999 The three-dimensional vortical nature of atmospheric and oceanic turbulent flows. *Phys. of Fluids* **11**, 1512–1520.

Dritschel, D. & Waugh, D. W. 1992 Quantification of the inelastic interaction of unequal vortices in two-dimensional vortex dynamics. *Phys. of Fluids A* **4**, 1737–1744.

Dugan, J. P. 1984 Towed observation of internal gravity waves and patches of finescale turbulence, in internal gravity waves and small scale turbulence. *Proc. Aha Huliko's Hawaiian winter workshop, Eds. P. Muller and R. Pujalet* pp. 51–64.

van Dyke, M. 1982 *An album of fluid motion*. Parabolic Press, Stanford.

Edwards, W. S., Tuckerman, L. S., Friesner, R. A. & Sorensen, D. C. 1994 Krylov methods for the incompressible navier-stokes equations. *J. Comput. Phys.* **110**, 82–102.

Eloy, C. & Le Dizès, S. 1999 Three-dimensional instability of burgers and lamb-oseen vortices in a strain field. *J. Fluid Mech.* **378**, 145–166.

Falkowski, P. G., Ziemann, D., Kolber, Z. & Bienfang, P. K. 1991 Role of eddy pumping in enhancing primary production in the ocean. *Nature* **353**, 55–58.

Fincham, A. M., Maxworthy, T. & Spedding, G. R. 1996 Energy dissipation and vortex structure in freely decaying, stratified grid turbulence. *Dyn. Atmos. Oceans* **23**, 155–169.

Gage, K. S. 1979 Evidence for a $k^{-5/3}$ law inertial range in mesoscale two-dimensional turbulence. *J. Atmos. Sci.* **36**, 1950 – 1954.

Gage, K. S. & Nastrom, G. 1986 Theoretical interpretation of atmospheric wavenumber spectra wind and temperature observed by commercial aircraft during gasp. *J. Atmos. Sci.* **43**, 729 – 740.

Gallaire, F. 2002 Instabilités dans les jets tournants et contrôle de l'éclatement tourbillonnaire. PhD thesis, École Polytechnique, France.

Gallaire, F. & Chomaz, J.-M. 2003 Mode selection in swirling jets : an experimentally based instability analysis. *J. Fluid Mech.* **494**, 223–253.

Godeferd, F. S. & Cambon, C. 1994 Detailed investigation of energy transfers in homogeneous stratified turbulence. *Phys. Fluids* **6**, 2084–2100.

Godeferd, F. S., Cambon, C. & Leblanc, S. 2001 Zonal approach to centrifugal, elliptic and hyperbolic instabilities in stuart vortices with external rotation. *J. Fluid Mech.* **449**, 1–37.

Godeferd, F. S. & Staquet, C. 2003 Statistical modelling and direct numerical simulations of decaying stably stratified turbulence. part 2. large-scale and small-scale anisotropy. *J. Fluid Mech.* **486**, 115–159.

Gregg, M. C. 1987 Diapycnal mixing in the thermocline : a review. *J. Geophys. Res.* **92**, 5249–5286.

Griffiths, R. W. & Linden, P. F. 1981 The stability of buoyancy-turbulent mixing in a stratified fluid. *Dynamics of Atmospheres and Oceans* **5**, 281–306.

Herring, J. R. & Métais, O. 1989 Numerical experiments in forced stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech.* **202**, 97–115.

Hill, D. 2002 General density gradients in general domains : the 'two-tank' method revisited. *Exp. Fluids* **32**, 434–440.

Holford, J. M. & Linden, P. F. 1998 The development of layers in a stratified fluid. In *Proc. 5th IMA Conf. Stratified Flows. Dundee, UK.D*.

Holford, J. M. & Linden, P. F. 1999 Turbulent mixing in a stratified fluid. *Dyn. Atmos. Oceans* **30**, 173 – 198.

Holton, J. R., Haynes, P. H., McIntyre, M. E., Douglass, A. R., Rood, R. B. & Pfister, L. 1995 Stratosphere-troposphere exchange. *Rev. Geophys.* **33**, 403–440.

Hook, R. A. 1665 A spot in one of the belts of jupiter. *Phil. Trans.* **1**, 3.

Hopfinger, E. J., Browand, F. K. & Gagne, Y. 1982 Turbulence and torsional waves in a rotating tank. *J. Fluid Mech.* **125**, 505–534.

Imberger, J. & Ivey, G. N. 1991 On the nature of turbulence in stratified fluid, II, applications to lakes. *J. Phys. Ocean.* **21**, 659–680.

Jimenez, J. 1975 Stability of a pair of co-rotating vortices. *Phys. Fluids* **18**, 1580–1582.

Jiménez, J., Moffatt, H. K. & Vasco, C. 1996 The structure of the vortices in freely decaying two dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.* **313**, 209–222.

Julien, S., Ortiz, S. & Chomaz, J.-M. 2004 Secondary instability mechanisms in the wake of a flat plate. *Eur. J. Mech.* B*/Fluids* **23**, 157–165.

Kerswell, R. R. 2002 Elliptical instability. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **34**, 83–113.

Klein, P., Hua, B. L. & Carton, X. 2003 Emergence of cyclonic structures due to the interaction between near-inertial oscillations and mesoscale eddies. *Q. J. Roy. Meteo. Soc* **129**, 2513–2525.

Klein, R. & Majda, A. J. 1993 An asymptotic theory for the nonlinear instability of antiparallel pairs. *Phys. Fluids A* **5**, 369.

Kraichnan, R. H. 1967 Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids* **10**, 1417–1423.

Le Dizès, S. 2000 Three-dimensional instability of a multipolar vortex in a rotating flow. *Phys. Fluids* **12**, 2762–2774.

Le Dizès, S. & Lacaze, L. 2005 An asymptotic description of vortex kelvin modes. *J. Fluid Mech.* (in press).

Le Dizès, S. & Laporte, F. 2002 Theoretical predictions for the elliptical instability in a two-vortex flow. *J. Fluid Mech.* **471**, 169–201.

Le Dizès, S. & Verga, A. 2002 Viscous interaction of two co-rotating vortices before merging. *J. Fluid Mech.* **467**, 389–410.

Leblanc, S. 2003 Internal wave resonances in strain flows. *J. Fluid Mech.* **477**, 259–283.

Leibovich, S., Brown, S. N. & Patel, Y. 1986 Bending waves on inviscid columnar vortices. *J. Fluid Mech.* **173**, 595–624.

Levy, M., Klein, P. & Treguier, A. M. 2001 Impact of sub-mesoscale physics on production and subduction of phytoplankton in an oligotrophic regime. *J. Mar. Res.* **59**, 535–565.

Leweke, T. & Williamson, C. H. K. 1998 Cooperative instability of a vortex pair. *J. Fluid. Mech.* **360**, 85–119.

Lilly, D. K. 1983 Stratified turbulence and the mesoscale variability of the atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **40**, 749–761.

Lindborg, E. 1999 Can the atmospheric kinetic energy spectrum be explained by two-dimensional turbulence ? *J. Fluid Mech.* **388**, 259–288.

Lindborg, E. 2002 Strongly stratified turbulence : A special type of motion. In *Advances in turbulence IX, Proceedings of the Ninth European Turbulence Conference*.

Lindborg, E. 2004 The energy cascade in a strongly stratified fluid. *J. Fluid Mech.* (accepted).

Luce, H., Crochet, M. & Dalaudier, F. 2001 Temperature sheets and aspect sensitive radar echoes. *Annales Geophysicae* **19**, 899–920.

Luce, H., Crochet, M., Dalaudier, F. & Sidi, C. 1995 Interpretation of vhs st radar vertical echoes from in situ temperature sheet observations. *Radio Sci.* **30**, 1003–1025.

Marcus, P. S. 2004*a* Prediction of a global climate change on jupiter. *Nature* **428**, 828–831.

Marcus, P. S. 2004*b* Prediction of a global climate change on jupiter. *Nature* **428**, 828–831.

Marullo, S., Salusti, E. & Viola, A. 1985 Observations of a small-scale baroclinic eddy in the ligurian sea. *Deep Sea Res. A* **32**, 215–222.

Mc Williams, J. C. 1984 The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.* **146**, 21–43.

Mc Williams, J. C. 1990 The vortices of geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.* **219**, 387–404.

Mc Williams, J. C., Weiss, J. & Yavneh, I. 1999 The vortices of homogeneous geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.* **401**, 1–26.

McGillicuddy, D. J., Robinson, A. R., D. A. Siegel, D., Jannasch, H. W., Johnson, R., Dickey, T. D., McNeil, J., Michaels, A. F. & Knap, A. H. 1998 Influence of the mesoscale eddies on new production in the sargasso sea. *Nature* **394**, 263–266.

Melander, M. V., Zabusky, N. J. & McWilliams, J. C. 1988 Symmetric vortex merger in two-dimensions : causes and conditions. *J. Fluid Mech.* **195**, 303–340.

Melander, M. V., Zabusky, N. J. & Williams, J. C. 1987 Asymmetric vortex merger in two dimensions : which is victorious ? *Phys. Fluids* **30**, 2610–2612.

Meunier, P. 2001 étude expérimentale de deux tourbillons corotatifs. PhD thesis, Université de Provence Aix-Marseille I, France.

Meunier, P., Ehrenstein, U., Leweke, T. & Rossi, M. 2002 A merging criterion for two-dimensional co-rotating vortices. *Phys. Fluids* **14**, 2757–2766.

Meunier, P. & Leweke, T. 2000 Unstable vortex merger. *Phys. Fluids* **12**, S6.

Meunier, P. & Leweke, T. 2001 Three-dimensional instability during vortex merging. *Phys. Fluids* **13**, 2747–2750.

Miyazaki, T. 1993 Elliptical instability in a stably stratified rotating fluid. *Phys. Fluids* **5**, 2702–2709.

Miyazaki, T. & Fukumoto, Y. 1992 Three-dimensional instability of strained vortices in a stably stratified fluid. *Phys. Fluids* **4**, 2515–2522.

Moffatt, H. K., Kida, S. & Ohkitani, K. 1994 Stretched vortices-the sinews of turbulence-large reynolds number asymptotics. *J. Fluid Mech.* **259**, 241–264.

Moore, D. W. & Saffman, P. 1975 The instability of a straight vortex filament in a strain field. *Proc. R. Soc. Lond.* **346**, 413–425.

Munk, Armi, Fischer & Zacharianen 2000 Spirals on the sea. *Proc. R. Soc. Lond. A* **456**, 1217–1280.

Muschinski, A. & Wode, C. 1997 First in situ evidence for coexisting submeter temperature and humidity sheets in the lower free troposphere. *J. Atmos. Sci.* **55**, 2893–2906.

NASA 2004 Nasa/jpl/space science institute, cassini spacecraft. merging saturnian storms. http ://saturn.jpl.nasa.gov/multimedia/images /image-details.cfm ?imageid=511. *web* **511**, 511.

Nastrom, G. D., Gage, K. S. & Jasperson, W. H. 1984 Kinetic energy spectrum of large- and mesoscale atmospheric processes. *Nature* **310**, 36–38.

Oster, G. & Yamamoto, M. 1963 Density gradient techniques. *Chem. Rev.* **63**, 257–268.

Otheguy, P., Billant, P. & Chomaz, J.-M. 2005*a* The effect of planetary rotation on the zigzag instability of co-rotating vortices in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.* (in press).

Otheguy, P., Chomaz, J.-M. & Billant, P. 2005*b* Elliptic and zigzag instabilities on co-rotating vertical vortices in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.* (in press).

Park, Y.-G., Whitehead, J. & Gnanadeskian, A. 1994 Turbulent mixing in stratified fluids : layer formation and energetics. *J. Fluid Mech.* **279**, 279 – 311.

Pierrehumbert, R. T. 1986 Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid. *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2157–2159.

Pingree, R. D. & Le Cann, B. 1992 Three anticylonic slope water oceanic eddies (swoddies) in the southern bay of biscay. *Deep-Sea Res.* **39**, 1147–1175.

Pradeep, D. S. & Hussain, F. 2004 Effects of boundary condition in numerical simulations of vortex dynamics. *J. Fluid Mech.* **516**, 115–124.

Praud, O., Fincham, A. & Sommeria, J. 2005 Decaying grid turbulence in a strongly stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **522**, 1 – 33.

Prieto, R., McNoldy, B. D., Fulton, S. R. & Schubert, W. H. 2002 A classification of binary tropical cyclone-like vortex interactions. *Mon. Wea. Rev.* **131**, 2656–2666.

Rayleigh, L. 1916 On the dynamics of revolving fluids. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **93**, 148–154.

Reinaud, J. & Dritschel, D. 2005 The critical merger distance between two co-rotating quasi-geostrophic vortices. *J. Fluid Mech.* **522**, 357–381.

Reinaud, J., Dritschel, D. & Koudella, C. R. 2003 The shape of vortices in quasi-geostrophic turbulence. *J. Fluid Mech.* **474**, 175–192.

Richardson, P. L. 1993 Tracking ocean eddies. *American Scientist* **81**, 261–271.

Riley, J. J. & Lelong, M.-P. 2000 Fluid motions in the presence of strong stable stratification. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, 617–657.

Riley, J. J., Metcalfe, W. & Weissman, M. A. 1981 Direct numerical simulations of homogeneous turbulence in density-stratified fluids. *Proc. AIP Conf. Nonlinear Properties of Internal Waves, Bruce J. West, Ed.* pp. 79–112.

Rodriguez, J., Tintore, J., Allen, J. T., Blanco, J. M., Gomis, D., Reul, A., Ruiz, J., Rodriguez, V., Echevarria, F. & Jimenez-Gomez, F. 2001 Mesoscale vertical motion and the size structure of phytoplancton in the ocean. *Nature* **410**, 360–363.

Saffman, P. G. 1992 *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press.

Sipp, D. 2000 Weakly nonlinear saturation of short-wave instabilities in a strained lamb-oseen vortex. *Phys. Fluids* **12**, 1715–1729.

Sipp, D. & Jacquin, L. 2003 Widnall instabilities in vortex pairs. *Phys. Fluids* **15**, 1861–1874.

Sipp, D., Jacquin, L. & Cossu, C. 2000 Self-adaptation and viscous selection in concentrated two-dimensional vortex dipoles. *Phys. Fluids* **12**, 245–248.

Smith, C., Richards, K. & Fasham, M. 1996 The impact of mesoscale eddies on plankton dynamics in the upper ocean. *Deep-Sea Res.* **43**, 1807–1832.

Smith, S. A., Fritts, D. C. & Van Zandt, T. E. 1987 Evidence for a saturated spectrum of atmospheric gravity waves. *J. Atmos. Sci.* **44**, 1404–1410.

Spedding, G. R., Browand, F. K. & Fincham, A. M. 1996 Turbulence, similarity scaling and vortex geometry in the wake of a sphere in a stably-stratified fluid. *J. Fluid Mech.* **314**, 53–103.

Staquet, C. & Sommeria, J. 2002*a* Internal gravity waves, from instabilities to turbulence. *Annu. Rev. Fluid. Mech.* **34**, 559–593.

Staquet, C. & Sommeria, J. 2002*b* Internal gravity waves : From instabilities to turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **34**, 559–593.

Tabeling, P., Burkhart, S., Cardoso, O. & Willaime, H. 1991 Experimental study of freely decaying two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3772–3775.

Taylor, G. I. 1923 Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **223**, 289–343.

Thorpe, S. A. 1977 Turbulence and mixing in a scottish loch. *Phil. Trans. Royal Soc. London* A **286**, 125–181.

Thouret, V., Cho, J. Y. N., Newell, R. E., Marenco, A. & Smit, H. G. J. 2000 General characteristics of tropospheric trace constituent layers observed in the mozaic program. *J. Geophys. Res.* **105**, 17,379–17,392.

Tritton, D. 1988 *Physical Fkuid Dynamics*. Clarendon Press, Oxford.

Tsai, C.-Y. & Widnall, S. E. 1976 The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field. *J. Fluid Mech.* **73**, 721–733.

Waite, M. & Bartello, P. 2004 Stratified turbulence dominated by vortical motion. *J. Fluid Mech.* **517**, 281 – 308.

Waleffe, F. 1990 On the three-dimensional instability of strained vortices. *Phys. Fluids* A **2**, 76–80.

Weiss, J. B. & Williams, J. C. M. 1993 Temporal scaling behavior of decaying two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids A* **5**, 608–621.

Williamson, C. H. K. & Leweke, T. 1996 The long and short of vortex pair instability. *Phys. Fluids* **8**, S5.

Woods, J. D. 1968 An investigation of some physical processes associated with the vertical flow of heat through the upper ocean. *Meteor. Mag.* **97**, 65–72.

Wunsch, C. & Stammer, D. 1995 The global frequency-wavenumber spectrum of oceanic variability estimated from topex/poseidon altimetric measurements. *J. Geophys. Res.* **100**, 895–910.