HAL
open science

Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel appliquée à l'imagerie et à la caractérisation ultrasonore

Jean-Gabriel Minonzio

To cite this version:

Jean-Gabriel Minonzio. Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel appliquée à l'imagerie et à la caractérisation ultrasonore. Acoustique [physics.class-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2006. Français. NNT : . tel-00128772v1

HAL Id: tel-00128772

https://pastel.hal.science/tel-00128772v1

Submitted on 2 Feb 2007 (v1), last revised 5 Sep 2011 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS 7- DENIS DIDEROT

UFR de physique

Année 2006

Ecole Doctorale :

Physique Macroscopique

Spécialité :

Acoustique Physique

Présentée par :

Jean-Gabriel Minonzio

Pour l'obtention du diplôme de Docteur de l'Université Paris 7

Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel appliquée à l'imagerie et à la caractérisation ultrasonore

---

Sous la direction de Claire Prada et Mathias Fink

Soutenue le 11 décembre 2006, devant le jury composé de

Pierre Calmon	
Jean-Marc Conoir	**Rapporteur**
Mathias Fink	
Claire Prada	
Marc Saillard	**Rapporteur**
Armand Wirgin	**Président du jury**

Mention très honorable, avec les félicitations du jury.

Remerciements

Je tiens à remercier tous ceux qui ont rendus cette thèse possible, en premier lieu mes deux co-directeurs, Claire Prada-Julia et Mathias Fink. Je remercie la DGA (Direction Générale de l'Armement) pour avoir financé mes travaux. Je tiens également à remercier les rapporteurs Jean-Marc Conoir et Marc Saillard, ainsi que les examinateurs Pierre Calmon et Armand Wirgin.

Je remercie l'ensemble du personnel du Laboratoire Ondes et Acoustique et particulièrement Arnaude Cariou, Patricia Daenens et Vera Da Costa sans qui le laboratoire ne pourrait fonctionner aussi bien. Je tiens remercier l'ensemble des permanents pour leur présence et leurs conseils. Je remercie les collègues thésards sans qui l'ambiance du laboratoire ne serait pas la même ainsi que tous les stagiaires qui sont passés par le laboratoire.

Je remercie toute l'équipe des essais en mer de décembre 2004 et du printemps 2005, notamment l'équipe d'Atlantide. Enfin, j'adresse mes remerciements à tous ceux que j'ai oubliés dans cette liste qui m'ont aidé, soutenu et encouragé durant ces trois années de thèse.

Table des Matières

I. INTRODUCTION, PRINCIPE DE LA METHODE 7

I.1 PRESENTATION DU PROBLEME : CARACTERISATION ULTRASONORE 8

I.2 MATRICE DE TRANSFERT **K** 9

I.3 OPERATEUR DE RETOURNEMENT TEMPOREL 10

I.4 DECOMPOSITION EN VALEURS SINGULIERES 11

Bibliographie 13

II. DIFFUSION ACOUSTIQUE 15

II.1 PRESSION DIFFUSEE PAR UN CYLINDRE ELASTIQUE 15
- II.1.1 Géométrie du problème 15
- II.1.2 Expression des coefficients de diffusion R_n 22
- II.1.3 Limite solide infiniment rigide et infiniment mou 24
- II.1.4 Exemples : cylindres d'acier et de nylon 32
- II.1.5 Limite petit objet, $x << 1$ 38

II.2 PRESSION DIFFUSEE PAR UN TUBE ELASTIQUE 44
- II.2.1 Géométrie du problème 44
- II.2.2 Expression des coefficients R_n 45
- II.2.3 Limite petit objet, $x << \mathrm{l}$ 49

II.3 PRESSION DIFFUSEE PAR UNE SPHERE ELASTIQUE 52
- II.3.1 Géométrie du problème 52
- II.3.2 Expression des coefficients R_n 55
- II.3.3 Limite solide infiniment rigide et infiniment mou 58
- II.3.4 Exemples : sphères d'acier et de nylon 61
- II.3.5 Limite petit objet, $x << \mathrm{l}$ 65

II.4 DIFFUSION ACOUSTIQUE PAR DEUX CYLINDRES ELASTIQUES 69
- II.4.1 Géométrie du problème 69
- II.4.2 Calcul des coefficients de diffusion A_n et B_n 71
- II.4.3 Exemples : deux cylindres identiques d'acier ou de nylon 76
- II.4.4 Ordres de diffusion multiple 79

Bibliographie 82

III. DECOMPOSITION DE L'OPERATEUR DE RETOURNEMENT TEMPOREL APPLIQUEE A LA CARACTERISATION 85

III.1 CARACTERISATION DE CYLINDRES ELASTIQUES 85
III.1.1 Géométrie du problème 85
III.1.2 Ecriture de la matrice de transfert **K** en fonctions des modes projetés 88
III.1.3 Approximation diffusion isotrope 97
III.1.4 Limite petit objet pour un cylindre élastique 99
III.1.5 Généralisation dans la limite de Rayleigh 106
III.1.6 Résultats expérimentaux avec un réseau en quart de cercle 113
III.1.7 Résultats expérimentaux avec un réseau linéaire 125

III.2 CARACTERISATION DE TUBES 135

III.3 CARACTERISATION DE SPHERES 141

III.4 CARACTERISATION DE DEUX CYLINDRES ELASTIQUES 145
III.4.1 Géométrie du problème 145
III.4.2 Modèle complet 147
III.4.3 Approximation de la diffusion isotrope 148
III.4.3 Approximation 0° et 90° 151
III.4.4 Comparaison des trois modèles 153
III.4.5 Résultats expérimentaux 156
Bibliographie 159

IV LIEN ENTRE ELECTROMAGNETISME ET ACOUSTIQUE 161

IV.1 DIFFUSION ELECTROMAGNETIQUE PAR UN CYLINDRE DIELECTRIQUE 161
IV.1.1 Expression du champ diffusé 162
IV.1.2 Exemple : cylindre diélectrique $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_1$ 164

IV.2 CARACTERISATION AU MOYEN DE LA METHODE DORT 166
IV.2.1 Exemple : cylindre diélectrique $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_1$ 166
IV.2.2 Limite petit objet pour un cylindre électromagnétique (cas $E^{\|}$) 169
Bibliographie 170

V. GUIDE D'ONDE 171

V.1 EXPERIENCE EN CUVE 171
V.1.1 Géométrie du problème 171
V.1.2 Modélisation du guide d'onde 172
V.1.3 Séparation de deux cibles 174

V.2 EXPERIENCE EN MER 176
V.2.1 Séparation deux cibles à 253 m 177
Bibliographie 178

Conclusion **179**

I. Introduction, principe de la méthode

L'analyse de la diffusion acoustique est un outil important dans les domaines de l'imagerie et de la caractérisation. Les applications concernent principalement le contrôle non-destructif, l'imagerie médicale et l'acoustique sous-marine. La méthode présentée dans la thèse est la Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel, ou méthode DORT. Elle a été initiée par Claire Prada et développée au Laboratoire Ondes et Acoustique (LOA) depuis 1994. Elle est issue de l'étude du phénomène de Retournement Temporel engagée par Mathias Fink à partir du début des années 1990. Le principe est de déterminer les invariants de l'Opérateur de Retournement Temporel, obtenus par décomposition en valeur singulières de la matrice de transfert **K**. Cette matrice relie la réponse d'un milieu, enregistrée par un réseau, à une émission du même réseau.

La première application a été la détection et la focalisation dans un milieu non homogène contenant plusieurs cibles.[1] La méthode a également été appliquée au contrôle non-destructif (CND)[2] et à la caractérisation de tubes grâce à l'analyse des ondes de Lamb circonférencielles.[3] Parallèlement, la méthode DORT a été employée dans le cadre de la détection et la résolution en guide d'onde, expérimentalement [4,5,6] et théoriquement.[7,8] Cette méthode peut s'appliquer à tous types d'ondes en régime linéaire, comme les ondes électromagnétiques.[9,10] Elle permet également de compléter les techniques d'imagerie et de super-résolution.[11,12] Les invariants du Retournement Temporel ont été utilisés aussi pour caractériser des sphères[13] et des cylindres.[14]

Le sujet de cette thèse concerne cette dernière application, c'est à dire utiliser les invariants du Retournement Temporel pour caractériser un milieu. Dans la première partie, est exposé le principe de la méthode DORT. La diffusion acoustique des objets étudiés, cylindres, sphère et tubes, est présentée dans la seconde partie. La caractérisation de ces objets au moyen de la méthode DORT est illustrée dans la troisième partie de façon théorique et expérimentale. La quatrième partie présente les liens et analogies avec l'électromagnétisme. Enfin, le cas du guide d'onde et les expériences en mer sont abordés dans la dernière partie.

I.1 Présentation du problème : caractérisation ultrasonore

L'objectif de cette étude est de caractériser un milieu diffusant les ondes ultrasonores, au moyen d'une barrette échographique. La barrette est composée de N transducteurs, émetteurs et récepteurs d'ultrasons. Dans cette étude, leur nombre est généralement égal à 96 ou 128. Le réseau de transducteurs peut être linéaire ou courbé. A une émission quelconque de la barrette correspond une réponse spécifique du milieu due à l'écho rétro-diffusé vers la barrette (figure 1.1). En analysant une série d'émissions réceptions, on désire remonter aux caractéristiques du milieu.

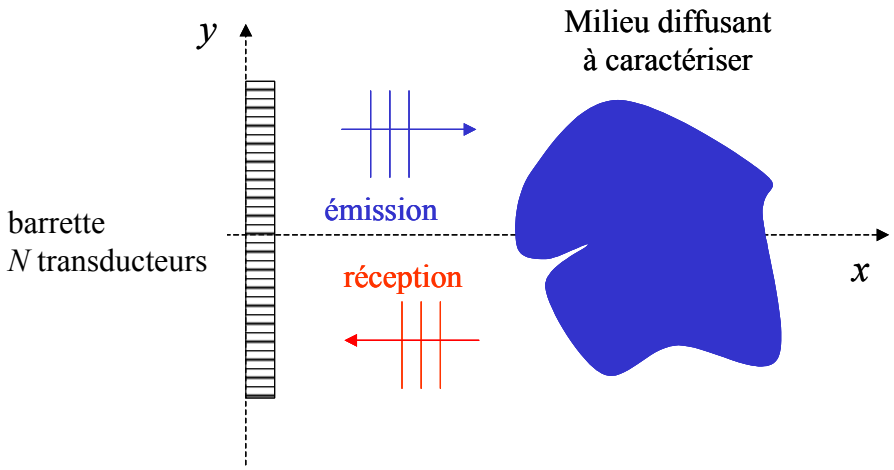


figure 1.1 présentation du problème

Dans un premier temps, le milieu observé est un cylindre de rayon a, plongé dans l'eau, perpendiculaire au plan d'insonification, placé à une distance F de la barrette. En analysant les échos rétro-diffusés, on désire mesurer, outre le rayon, la densité ρ ainsi que les célérités des ondes longitudinale et transverse c_L et c_T. Par la suite, les objets observés sont un tube, une sphère, deux cylindres, éventuellement placés dans un guide d'onde. Dans tous les cas, l'objectif est de remonter aux caractéristiques physiques du milieu considéré.

I.2 Matrice de transfert K

Le transducteur i émet un Dirac temporel $\delta(t)$, le signal diffusé par le milieu est enregistré par le transducteur j. Le terme $k_{ij}(t)$ désigne la réponse du milieu, ce signal est la réponse impulsionnelle inter-élément (figure 1.2). Cette notation permet d'employer le formalisme des produits de convolution : le signal reçu en j, $r_j(t)$, est égal au produit de convolution, noté $\otimes$, entre la réponse impulsionnelle et le signal émis $e_i(t)$. Cette relation s'écrit

$$r_j(t) = k_{ij}(t) \otimes e_i(t)\ , \qquad 1 \le i, j \le N. \tag{1.1}$$

Remarque : r et e sont de même dimension tandis que k est sans dimension.

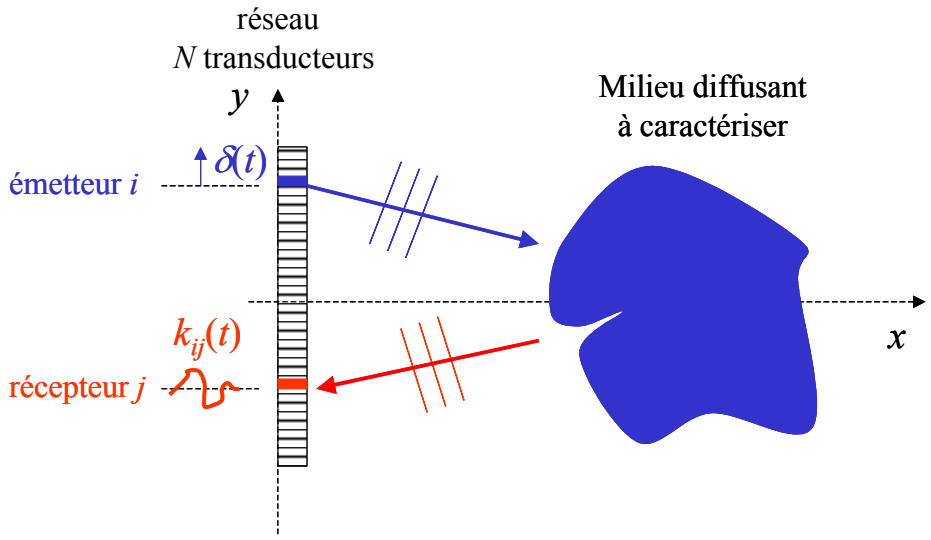


figure 1.2 réponse impulsionnelle inter-élément

La transformée de Fourier de la relation précédente s'écrit, pour un couple i-j, à la pulsation ω

$$R_j(\omega) = K_{ij}(\omega)E_i(\omega), \qquad 1 \le i, j \le N. \tag{1.2}$$

En adoptant une écriture matricielle, cette relation s'écrit

$$\mathbf{R}(\omega) = \mathbf{K}(\omega)\mathbf{E}(\omega)\ . \tag{1.3}$$

La matrice **K**, de dimension $N\times N$, est nommée matrice de transfert,[1] elle caractérise le système « barrette-milieu diffusant ». Elle est également nommée suivant les auteurs matrice d'acquisition multi-statique (multistatic data matrix)[12], noyau de diffusion (scattering kernel)[13] ou matrice de réponse du réseau (array response matrix).[14] La matrice **K** relie le vecteur d'émission **E**, contenant les N émissions $E_j(\omega)$ à la pulsation ω, au vecteur réception **R**, contenant les N émissions $R_j(\omega)$ à la pulsation ω. L'indice j est compris entre 1 et N ; les vecteurs **E** et **R** sont de dimension $N\times 1$. Du fait de la réciprocité, $k_{ij}(t)$ est égal à $k_{ji}(t)$, ce qui impose que la matrice **K** est symétrique. De plus, **K** est sans dimension.

I.3 Opérateur de Retournement Temporel

Le formalisme de l'Opérateur de Retournement Temporel (ORT) a été introduit pour décrire une itération du processus de Retournement Temporel.[1]

Itération du Retournement Temporel

Considérons l'itération du processus de Retournement Temporel. Les vecteurs $\mathbf{E}_n$ et $\mathbf{R}_n$ correspondent aux émission et réception à l'itération n. Pour une émission initiale $\mathbf{E}_0$, le vecteur réception correspondant $\mathbf{R}_0$ s'écrit $\mathbf{KE}_0$ (figure 1.3)

Pour une pulsation ω, l'opération de Retournement Temporel équivaut à une opération de conjugaison de phase. L'émission à la première itération $\mathbf{E}_1$ correspond au retourné temporel de $\mathbf{R}_0$, soit $\mathbf{R}_0^*$ ou $\mathbf{K}^*\mathbf{E}_0^*$. L'émission à l'itération suivante $\mathbf{E}_2$ s'écrit $\mathbf{K}^*\mathbf{KE}_0$. Il est possible de généraliser l'expression qui relie les émissions aux itérations $n + 2$ et n suivant[1]

$$\mathbf{E}_{n+2} = \mathbf{K}^*\mathbf{KE}_n \,. \qquad (1.4)$$

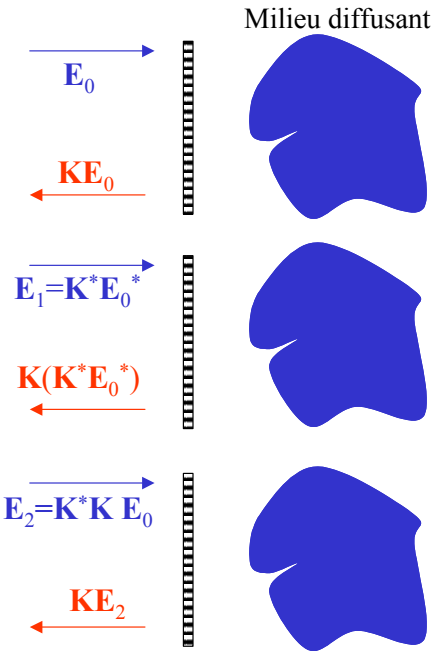


figure 1.3 itération du Retournement Temporel

Opérateur de Retournement Temporel en émission

Si à chaque itération, les répartitions en amplitude et en phase des émissions successives se conservent, l'émission est considérée comme un invariant du Retournement Temporel. Mathématiquement, $\mathbf{E}_{n+2}$ est proportionnel à $\mathbf{E}_n$, où μ est la constante de proportionnalité

$$\mathbf{E}_{n+2} = \mu\mathbf{E}_n \,. \qquad (1.5)$$

Ce qui revient et à écrire en utilisant les équations (1.4) et (1.5)

$$\mathbf{K}^*\mathbf{KE}_n = \mu\mathbf{E}_n \,, \qquad (1.6)$$

Du fait de la symétrie de $\mathbf{K}$, l'opérateur $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$ est à symétrie hermitienne et donc diagonalisable. D'après l'équation précédente, $\mathbf{E}_n$, l'émission à la $n^{ième}$ itération, est vecteur propre de l'opérateur $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$ associé à la valeur propre μ. La matrice $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$ est nommée Opérateur de Retournement Temporel.

La diagonalisation peut s'écrire comme

$$\mathbf{K}^*\mathbf{K} = \mathbf{V}\,\mathbf{M}\,{}^t\mathbf{V}^*, \tag{1.7}$$

où la matrice **V** contient les vecteurs propres en émission $\mathbf{V}_j$ associés aux valeurs propres μ_j, contenues dans la matrice diagonale **M**.

Remarques :

1) Du fait de la symétrie $\mathbf{V}^{-1}$ est égale à ${}^t\mathbf{V}^*$.

2) La relation entre deux vecteur réceptions aux itérations $n + 2$ et n s'écrit

$$\mathbf{R}_{n+2} = \mathbf{K}\mathbf{K}^*\mathbf{R}_n\,. \tag{1.8}$$

Si $\mathbf{R}_n$ est un invariant du Retournement Temporel, il est vecteur propre de l'Opérateur $\mathbf{K}\mathbf{K}^*$. La diagonalisation de $\mathbf{K}\mathbf{K}^*$ s'écrit comme

$$\mathbf{K}\mathbf{K}^* = \mathbf{U}\,\mathbf{M}\,{}^t\mathbf{U}^*. \tag{1.9}$$

La matrice **U** contient les vecteurs propres en réception $\mathbf{U}_j$. Les valeurs propres μ_j de $\mathbf{K}\mathbf{K}^*$ et $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$ sont identiques. De plus, elles sont sans dimensions.

3) Les matrices **U** et **V** forment des bases orthonormées.

4) La dimension des matrices **K**, $\mathbf{K}\mathbf{K}^*$ et $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$ est égale à N, le nombre de transducteurs. Le nombre de valeurs propres et de vecteurs propres est égal au rang r_g de **K**, qui inférieur ou égal à N. Dans le cas idéal de diffuseurs de Rayleigh idéalement résolus, dans l'approximation de Born, le rang de **K** est égal au nombre de diffuseurs.[1]

I.4 Décomposition en valeurs singulières

Il est possible de relier les deux diagonalisations précédentes [équations (1.7) et (1.9)] en une relation, en utilisant le formalisme de la décomposition en valeurs singulières, noté SVD pour *Singular Value Decomposition*. Cette décomposition s'écrit pour la matrice de transfert **K**

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}\,\mathbf{\Sigma}\,{}^t\mathbf{V}^*\,. \tag{1.10}$$

La matrice **U** contient les vecteurs singuliers en réception $\mathbf{U}_j$ (identiques aux vecteurs propres de $\mathbf{K}\mathbf{K}^*$). De même, la matrice **V** contient les vecteurs singuliers en émission $\mathbf{V}_j$ (identiques aux vecteurs propres de $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$). La matrice $\mathbf{\Sigma}$ est diagonale réelle positive. Elle contient les valeurs singulières σ_j égales à la racine carrée des valeurs propres μ_j de $\mathbf{K}\mathbf{K}^*$ et $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$, soit $\sigma_j = \sqrt{\mu_j}$. Les valeurs singulières sont sans dimension.

Du fait de la réciprocité, on peut montrer que $\mathbf{U}_j$ est égal au conjugué de $\mathbf{V}_j$ multiplié par un terme de phase indéfini, soit $\mathbf{U}_j = \mathbf{V}_j^* \, e^{i\phi_j}$. Cela revient à dire que le trajet aller (associé à l'émission) est le retourné temporel du trajet retour (associé à la réception), ce qui est en accord avec le principe de réciprocité. L'incertitude sur la phase provient en partie du déphasage lors de la diffusion. Par simplicité et pour imposer l'unicité, cette phase ϕ_j peut être choisie nulle dans les calculs analytiques. Dans ce cas, $\mathbf{U}_j$ est égal à $\mathbf{V}_j^*$ et la décomposition en valeurs singulières s'écrit

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}\,\mathbf{\Sigma}\,{}^t\mathbf{U}. \tag{1.11}$$

Propriété de la SVD

Considérons une matrice $\mathbf{K}$ de rang r_g. Elle possède r_g valeurs singulières et vecteurs singuliers et se décompose sous la forme

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^{r_g} \mathbf{U}_j \sigma_j \, {}^t\mathbf{V}_j^* \, . \tag{1.12}$$

Les vecteurs singuliers sont normés et orthogonaux. On peut noter le produit scalaire hermitien pour les vecteurs propres d'émission $<\mathbf{V}_j,\mathbf{V}_i> = {}^t\mathbf{V}_j^*.\mathbf{V}_i = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker : δ_{ij} est égal à 0 pour $i \neq j$ et 1 pour $i = j$. La relation est identique pour les vecteurs propres d'émissions $\mathbf{U}_j$. Les relations entre les vecteurs singuliers d'émissions et réceptions s'écrivent

$$\mathbf{K}\mathbf{V}_j = \sigma_j \mathbf{U}_j \, , \qquad 1 \leq j \leq r_g \, , \tag{1.13a}$$

$${}^t\mathbf{K}^*\mathbf{U}_j = \sigma_j \mathbf{V}_j \, , \qquad 1 \leq j \leq r_g \, . \tag{1.13b}$$

D'un point de vue matricielle, ces deux relations s'écrivent $\mathbf{KV} = \mathbf{U\Sigma}$ et ${}^t\mathbf{K}^*\mathbf{U} = \mathbf{V\Sigma}$. Dans le cas d'une matrice $\mathbf{K}$ symétrique, si $\mathbf{U} = \mathbf{V}^*$, les relations précédentes s'écrivent

$$\mathbf{K}\mathbf{U}_j^* = \sigma_j \mathbf{U}_j \, , \qquad 1 \leq j \leq r_g \, . \tag{1.13c}$$

D'un point de vue matricielle, cette relation s'écrit $\mathbf{KU}^* = \mathbf{U\Sigma}$. Ce point de vue sera utilisé dans la partie III pour caractériser des objets dont la diffusion acoustique sera auparavant décrite dans la partie II.

Bibliographie

[1] C. Prada and M. Fink, "Eigenmodes of the time reversal operator: a solution to selective focusing in multiple-target media," Wave Motion **20**, 151–163 (1994).

[2] E. Kerbrat, C. Prada, D. Cassereau, R. K. Ing, and M. Fink, "Detection and imaging in complex media with the D.O.R.T. method," IEEE Ultrasonic Symposium Proceedings, 779–783 (2000).

[3] C. Prada and M. Fink, "Separation of interfering acoustic scattered signals using the invariant of the time-reversal operator. Application to Lamb waves characterization," J. Acoust. Soc. Am. **104**(2), 801–807 (1998).

[4] D. R. Jackson and D. R. Dowling**,** "Phase conjugation in underwater acoustics," J. Acoust. Soc. Am. **89**(1), 171–181 (1991).

[5] W. A. Kuperman, W. S. Hodgkiss, H. C. Song, T. Akal, C. Ferla and D. R. Jackson "Phase conjugation in the ocean: Experimental demonstration of an acoustic time-reversal mirror," J. Acoust. Soc. Am., **103**(1), 25–40, (1998).

[6] C. F. Gaumond, D. M. Fromm, J. F. Lingevitch, R. Menis, G. F. Edelmann, D. C. Calvo, and . Kim, "Demonstration at sea of the decomposition-of-the-time-reversal-operator technique" J. Acoust. Soc. Am. **119**(2), 976–990 (2006).

[7] N. Mordant, C. Prada and M. Fink, "Highly resolved detection and selective focusing in a waveguide using the D.O.R.T. method," J. Acoust. Soc. Am. **105**, 2634–2642 (1999).

[8] T. Folégot, C. Prada, and M. Fink, "Resolution enhancement and separation of reverberation from target echo with the time reversal operator decomposition," J. Acoust. Soc. Am. **113,** 3155–5160 (2003).

[9] G. Micolau, and M. Saillard, "DORT method as applied to electromagnetic subsurface sensing," Radio Science **38**, 1038–1049 (2003).

[10] D. H. Chambers and J. G. Berryman, "Time-reversal analysis for scatterer characterization," Phys. Rev. Lett. **92**, 023902 (2004).

[11] S. K. Lehman and A. J. Devaney "Transmission mode time-reversal super-resolution imaging," J. Acoust. Soc. Am. **113**(5), 2742–2753 (2003).

[12] A. J. Devaney, E. A. Marengo and F. K. Gruber, "Time-reversal-based imaging and inverse scattering of multiply scattering point targets," J. Acoust. Soc. Am. **118**(5), 3129–3138 (2005).

[13] D. H. Chambers and A. K. Gautesen, "Time reversal for a single spherical scatterer," J. Acoust. Soc. Am. **109,** 2616–2624 (2001).

[14] J. G. Minonzio, C. Prada, D. Chambers, D. Clorennec and M. Fink, "Characterization of subwavelength elastic cylinders with the decomposition of the time-reversal operator: Theory and experiment," J. Acoust. Soc. Am. **117**, 789–798 (2005).

II. Diffusion acoustique

Dans cette partie, est présentée la diffusion acoustique de différents objets dont les moyens de caractérisation seront explicités dans la partie III. Ces objets sont le cylindre, le tube, la sphère et enfin deux cylindres. Les différentes notations de la littérature ont été reprises et mises en perspective.

II.1 Pression diffusée par un cylindre élastique

Le problème de la diffusion acoustique a d'abord été abordé par Rayleigh dans son ouvrage *Theory of Sound* paru en 1877-1878. Le cas de la sphère est étudié au moyen du formalisme des modes normaux.[1] Dans les années 1940, le problème de la diffusion acoustique par des objets cylindriques a été résolus théoriquement en termes de rupture d'impédance par Bauer *et al*.[2] Ce modèle a été vérifié expérimentalement pour un cylindre fluide dans l'eau.[3] En 1951, Faran décrit le problème de la diffusion par un cylindre et une sphère en prenant en compte les conditions aux limites élastiques.[4] En 1966, Doolittle et Überall complète le modèle au cas du tube.[5] Dans les années 1970, Flax *et al*. étudient les résonances en s'appuyant sur le formalisme de la matrice **S** issu de la mécanique quantique.[6,7] En 1987, de nombreux résultats sont regroupés dans l'ouvrage « N. Gespa, la diffusion acoustique par des cibles géométriques de forme simple ».[8,9]

II.1.1 Géométrie du problème

Considérons un cylindre comme un solide élastique, de section droite circulaire, de rayon a, supposé infini suivant la direction (Oz). Le matériau du cylindre est supposé homogène et isotrope vis à vis des lois de l'élasticité. Il est caractérisé par sa masse volumique ρ_1, et par les vitesses des ondes longitudinale et transverse c_L et c_T. Il est plongé dans le milieu 0, de densité ρ_0 et de vitesse de l'onde longitudinale c_0 (figure 2.1).

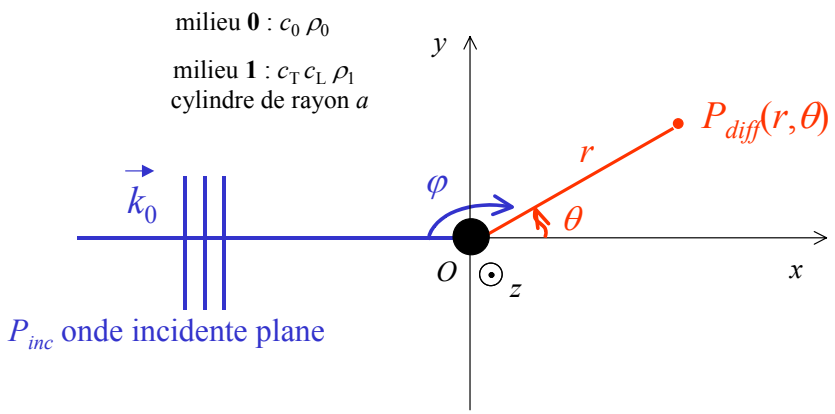


figure 2.1 géométrie du problème : diffusion acoustique par un cylindre parallèle à l'axe (Oz)

Le cylindre élastique est éclairé par une onde plane $P_0 e^{i(\vec{k}_0\vec{r}-\omega t)}$ de pulsation ω et de nombre d'onde $k_0 = \omega/c_0$ dans le milieu environnant et la pression diffusée est notée P_{diff}. Pour cela, le référentiel cylindrique (O,r,θ) centré sur le cylindre est utilisé (figure 2.1). Le problème est invariant par translation suivant l'axe (Oz). L'angle θ est repéré à partir de la direction de l'onde incidente, représentée par l'axe (Ox). Ainsi, le produit scalaire $\vec{k}_0\vec{r}$ est égal à $k_0 r\cos\theta$.

Les pressions se décomposent sur la base des modes normaux de vibrations cylindriques et s'écrivent comme une somme infinie. Ainsi, la pression incidente s'exprime [5,8]

$$P_{inc} = \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n i^n \mathrm{J}_n(k_0 r)\cos(n\theta). \qquad (2.1a)$$

Les fonctions $\mathrm{J}_n(k_0 r)$ sont les fonctions de Bessel cylindriques, ou à 2 dimensions, d'ordre n. Le coefficient de Neumann ε_n vaut 1 pour $n = 0$ et 2 sinon. Ce coefficient n'existe pas si la somme est développée pour n variant de $-\infty$ à $+\infty$ [Eq. (2.2)]. La pression diffusée par le cylindre élastique s'écrit [5,6,8]

$$P_{diff}(r,\theta) = \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n i^n R_n \mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r)\cos(n\theta)\ . \qquad (2.1b)$$

La fonction de Hankel cylindrique de première espèce, d'ordre n s'écrit $\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r)$. Le coefficient de diffusion R_n pondère le mode normal dont la dépendance angulaire est en $\cos(n\theta)$. Ce coefficient dépend des paramètres physiques du cylindre et du milieu environnant, c'est à dire, les vitesses des ondes longitudinale et transverse c_L et c_T, le rayon a, la masse volumique ρ_1 pour le cylindre, la vitesse du son c_0 et la masse volumique ρ_0 pour l'eau. L'expression des coefficients R_n est donnée dans le paragraphe II.1.2 .

Remarque :

Les modes normaux et les coefficients R_n sont sans dimension. La dimension de pression est portée par le terme P_0 dont la dimension est celle d'une pression.

Les modes normaux de vibrations cylindriques

Le premier mode normal ($n = 0$) correspond à une diffusion monopolaire. Le second mode normal ($n = 1$) correspond à une diffusion dipolaire dont la direction est à celle de l'onde incidente. Le mode normal suivant ($n = 2$) correspond à une diffusion quadripolaire, et ainsi de suite (figure 2.2). Chaque mode normal a une amplitude et un déphasage donné par le coefficient de diffusion correspondant R_n. Le nombre de modes normaux significatifs est de l'ordre de k_0a. Par la suite, m désigne l'ordre du dernier mode normal significatif.

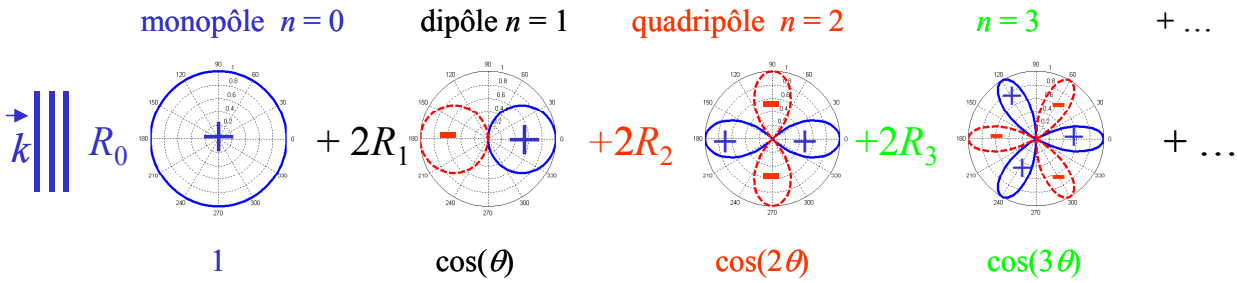


figure 2.2 : les modes normaux de vibrations cylindriques

Remarques : notations et conventions

1) Les fonctions de Bessel et Hankel cylindriques sont décrites dans le livre de Abramowitz et Stegun [11] au chapitre 9 (page 358 et suivantes).

2) Les fonctions de Bessel et de Hankel vérifient les relations $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ et $H_{-n}(x) = (-1)^n H_n(x)$. Il est possible d'écrire les pressions incidente et diffusée en développant la somme pour n variant de $-\infty$ à $+\infty$

$$P_{inc} = \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \mathrm{J}_n\left(k_0 r\right)e^{in\theta} \ , \qquad (2.2a)$$

$$P_{diff}\left(r,\theta\right) = \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n R_n \mathrm{H}_n^{(1)}\left(k_0 r\right)e^{in\theta} \ . \qquad (2.2b)$$

Dans ce cas, R_n est égal à R_{-n}. Cette formulation sera utilisée par la suite dans le cas de la diffusion acoustique par deux cylindres dans le paragraphe II.4 .

3) Si l'onde incidente s'écrit $P_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_0 \vec{r})}$ au lieu de $P_0 e^{i(\vec{k}_0 \vec{r} - \omega t)}$, les pressions incidente et diffusée deviennent

$$P_{inc} = \left(P_0 e^{i\omega t}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{-n} \mathrm{J}_n(k_0 r) \cos(n\theta), \tag{2.3a}$$

$$P_{diff}(r,\theta) = \left(P_0 e^{i\omega t}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{-n} R_n \mathrm{H}_n^{(2)}(k_0 r) \cos(n\theta). \tag{2.3b}$$

Cette convention a notamment été utilisée par Faran [4] et Junger.[10] Elle ne sera pas utilisée dans la suite du manuscrit.

4) Les fonctions de Hankel cylindriques de première et deuxième espèce sont conjuguées l'une de l'autre et sont définies par

$$\mathrm{H}_n^{(1)}(x) = \mathrm{J}_n(x) + i\mathrm{Y}_n(x), \tag{2.4a}$$

$$\mathrm{H}_n^{(2)}(x) = \mathrm{J}_n(x) - i\mathrm{Y}_n(x), \tag{2.4b}$$

où $\mathrm{Y}_n(x)$ est la fonction de Neumann cylindrique.

Approximation champ lointain

Pour chaque mode normal d'indice n, l'approximation champ lointain est valable si la distance d'observation r et l'ordre n vérifient la condition suivante : $n << k_0 r$. Dans ce cas, les fonctions de Hankel cylindriques ont pour expression approchée [6,8]

$$\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r) \approx i^{-n} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}} e^{ik_0 r}, \qquad n << k_0 r. \tag{2.5}$$

La seule dépendance en n est le terme i^{-n}. Le module et la phase des fonctions de Hankel et de leur valeur approchée sont tracés sur la figure 2.3.

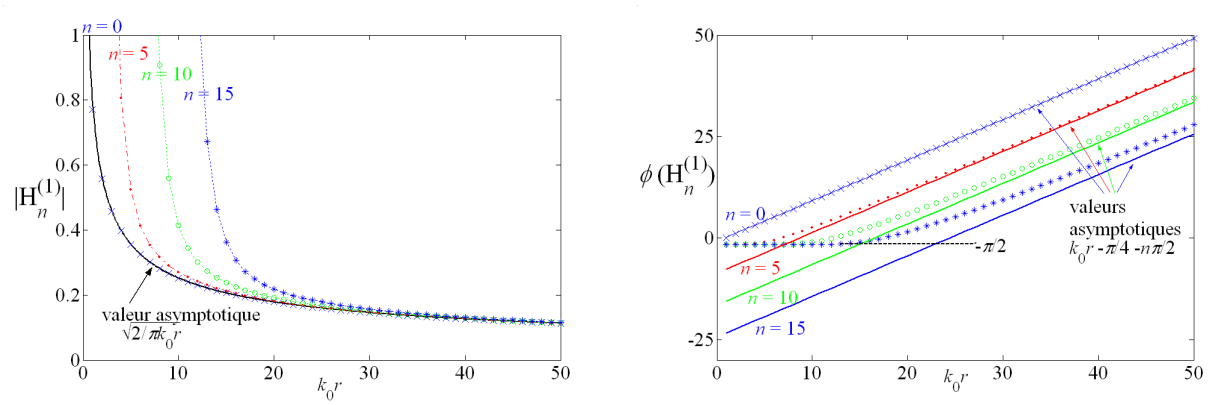


figure 2.3 : module et phase des fonctions de Hankel $\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r)$
et leur valeur approchée en champ lointain

L'expression en champ lointain du module des fonctions de Hankel est égale à $\sqrt{2/\pi k_0 r}$. Pour une fonction d'ordre n, la valeur asymptotique est atteinte pour $k_0 r$ de l'ordre de n. La phase de la fonction de Hankel d'ordre n est égale à $-\pi/2$, pour $k_0 r$ inférieur à n. La valeur asymptotique d'ordre n, $k_0 r - \pi/4 - n\pi/2$, est atteinte pour des valeurs de $k_0 r$ grandes devant l'ordre n du mode normal.

Dans l'expression de la pression diffusée, le nombre de termes significatifs de la somme est de l'ordre de $k_0 a$, où a est le rayon du cylindre. Cette valeur est explicitée dans le paragraphe II.1.2 [Eq. (2.25)]. L'ordre du dernier mode normal significatif est noté m. L'expression champ lointain des fonctions de Hankel est valable si chaque ordre n, compris entre 0 et m, est petit devant $k_0 r$

$0 \leq n \leq m \approx k_0 a << k_0 r$

soit $a << r$

Remarque : Cette limite ne dépend plus de la fréquence, elle dépend de la taille de l'objet a et de la distance d'observation r.

Dans ce cas, l'expression de la pression diffusée donnée par l'équation (2.1b) se simplifie en champ lointain selon

$$P_{diff}(r,\theta) \approx \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}}\, e^{ik_0 r} \sum_{n=0}^{m} \varepsilon_n R_n \cos(n\theta), \qquad a << r. \tag{2.6}$$

Prise en compte de la position de la source

En prenant en compte θ_{inc}, la direction de l'onde plane incidente (figure 2.4), la pression diffusée [Eq. (2.6)] s'écrit

$$P_{diff}(r,\theta-\theta_{inc}) \approx \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}}\, e^{ik_0 r}\sum_{n=0}^{m}\varepsilon_n R_n \cos\{n(\theta-\theta_{inc})\}, \quad a << r. \tag{2.7}$$

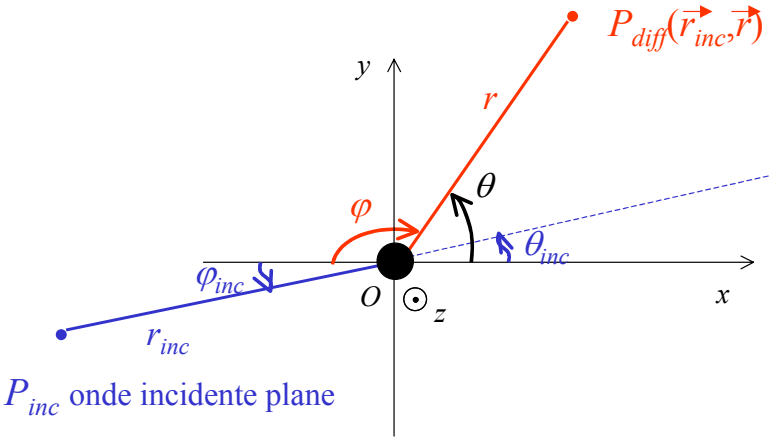


figure 2.4 : prise en compte de la position de la source

L'angle φ de rétro-diffusion est égal à $\pi-\theta$: $\cos\{n(\theta-\theta_{inc})\}$ est égal à $(-1)^n\cos\{n(\varphi-\varphi_{inc})\}$. L'expression de la pression retro-diffusée s'écrit, en fonction de la direction de l'onde plane incidente φ_{inc}

$$P_{diff}(r,\varphi) \approx \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}}\, e^{ik_0 r}\sum_{n=0}^{m}\varepsilon_n (-1)^n R_n \cos\{n(\varphi-\varphi_{inc})\}\ , \qquad a << r. \tag{2.8}$$

De plus, en prenant en compte la distance entre la source et le cylindre r_{inc}, la réponse entre deux points s'écrit

$$P_{diff}(\vec{r}_{inc},\vec{r}) \approx \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r_{inc}}}\, e^{ik_0 r_{inc}}\sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}}\, e^{ik_0 r}\sum_{n=0}^{m}\varepsilon_n (-1)^n R_n \cos\{n(\varphi-\varphi_{inc})\}\ ,$$

$$\text{pour } a << r \text{ et } a << r_{inc} \tag{2.9}$$

Le rayon a est petit devant r et r_{inc} . Cette expression sera utilisée dans le cadre de l'étude de petits cylindres pour calculer la réponse entre deux éléments du réseau dans la partie III.1.

Onde incidente cylindrique

Si le rayon a du cylindre n'est pas négligeable devant les distances d'observation, la pression incidente ne peut être considérée comme une onde plane (figure 2.5). La pression incidente cylindrique s'écrit [8]

$$P_{inc}(\vec{r}_{inc},\vec{r}) = \frac{1}{4i}\left(P_0^{(c)}e^{-i\omega t}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(-1)^n \mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r_{inc})\mathrm{J}_n(k_0 r)\cos(n\theta)\ ,\ \ a \le r \le r_{inc}\,. \qquad (2.10a)$$

De même, la pression diffusée par le cylindre élastique s'écrit

$$P_{diff}(\vec{r}_{inc},\vec{r}) = \frac{1}{4i}\left(P_0^{(c)}e^{-i\omega t}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(-1)^n R_n \mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r_{inc})\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r)\cos(n\theta),\ \ a \le r\,. \qquad (2.10b)$$

Les coefficients de diffusion R_n sont identiques au cas précédent de l'onde plane incidente. Il existe également un dernier mode significatif m, de l'ordre de $k_0 a$ [Eq. (2.25)].

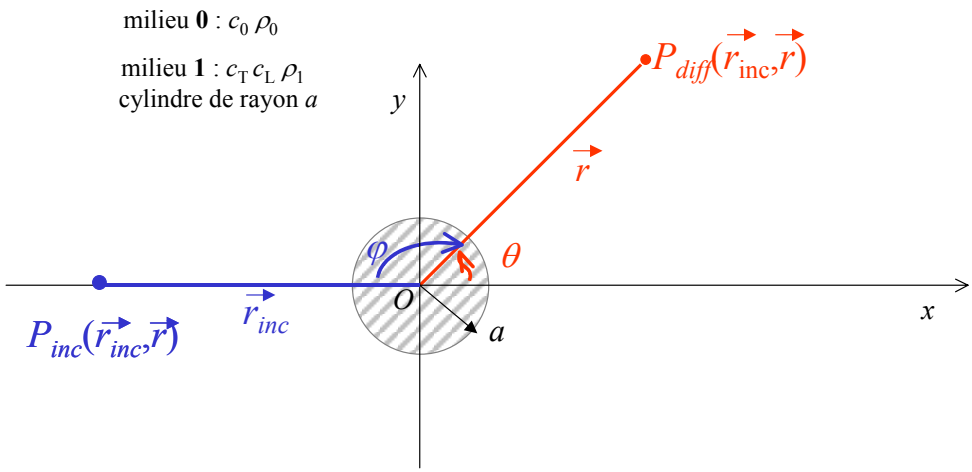


figure 2.5 : géométrie du problème : onde incidente cylindrique

En prenant en compte l'angle de rétro-diffusion φ, le terme $(-1)^n$ disparaît. Si de plus, la direction de l'onde incidente φ_{inc} est prise en compte, la pression diffusée s'écrit

$$P_{diff}(\vec{r}_{inc},\vec{r}) = \frac{1}{4i}\left(P_0^{(c)}e^{-i\omega t}\right)\sum_{n=0}^{m}\varepsilon_n R_n \mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r_{inc})\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r)\cos\{n(\varphi-\varphi_{inc})\}. \qquad (2.11)$$

Cette expression sera utilisée dans le cadre de l'étude des tubes dans le paragraphe II.2 et repris dans la partie III.1 pour calculer la réponse entre deux éléments du réseau.

II.1.2 Expression des coefficients de diffusion R_n

Les coefficients de diffusion R_n sont obtenus en écrivant les conditions aux limites entre le cylindre et le milieu environnant, en $r = a$, le rayon du cylindre.[6,8] Leur expression dépend des fonctions cylindriques de Bessel J_n et de Hankel de première espèce $\mathrm{H}_n^{(1)}$ à l'ordre n et de leur dérivée première. La variable x est égale à $k_0a = \omega a/c_0$. Les variable x_L et x_T sont égales à $k_\mathrm{L}a = \omega a/c_\mathrm{L}$ et $k_\mathrm{T}a = \omega a/c_\mathrm{T}$ respectivement, où c_L et c_T sont les vitesses des ondes longitudinale et transverse dans le cylindre. L'expression des coefficient R_n proposée ici est adaptée de celle donnée par Flax *et al.*[6]

$$R_n = -\frac{\mathrm{J}_n(x)\zeta_n - x\mathrm{J}_n'(x)}{\mathrm{H}_n^{(1)}(x)\zeta_n - x\mathrm{H}_n^{(1)\prime}(x)} \ . \tag{2.12}$$

L'expression du coefficient ζ_n est

$$\zeta_n = \frac{\rho_0}{\rho_1} x_\mathrm{T}^{\ 2} \frac{A_n / B_n - C_n / D_n}{E_n / B_n - F_n / D_n} \ . \tag{2.13}$$

Les différents termes A_n à F_n s'écrivent

$$A_n = x_\mathrm{L}\mathrm{J}_n'(x_\mathrm{L}) \ , \tag{2.14a}$$

$$B_n = 2n\left[\mathrm{J}_n(x_\mathrm{L}) - x_\mathrm{L}\mathrm{J}_n'(x_\mathrm{L})\right] \ , \tag{2.14b}$$

$$C_n = n\mathrm{J}_n(x_\mathrm{T}) \ , \tag{2.14c}$$

$$D_n = \left(x_\mathrm{T}^{\ 2} - 2n^2\right)\mathrm{J}_n(x_\mathrm{T}) + 2x_\mathrm{T}\mathrm{J}_n'(x_\mathrm{T}) \ , \tag{2.14d}$$

$$E_n = \left(x_\mathrm{T}^{\ 2} - 2n^2\right)\mathrm{J}_n(x_\mathrm{L}) + 2x_\mathrm{L}\mathrm{J}_n'(x_\mathrm{L}) \ , \tag{2.14e}$$

$$F_n = 2n\left[\mathrm{J}_n(x_\mathrm{T}) - x_\mathrm{T}\mathrm{J}_n'(x_\mathrm{T})\right] \ . \tag{2.14f}$$

Dans le cas d'un cylindre fluide, il n'y a pas d'onde transverse : le terme ζ_n ne dépend plus de l'ordre n et est égal au rapport des impédances acoustiques $Z_i = \rho_i c_i$, ($i = 0$ ou 1) [2,3,10]

$$\zeta_n = \frac{Z_0}{Z_1} = \frac{\rho_0 c_0}{\rho_1 c_\mathrm{L}} \ . \tag{2.16}$$

Cette expression est donnée par Junger à l'équation (16) de la référence 10.

Remarques :

1) Les dérivées premières sont obtenues par les relations [11]

$$\mathrm{J}_n'(x) = \mathrm{J}_{n-1}(x) - \frac{n}{x}\mathrm{J}_n(x), \tag{2.15a}$$

$$\mathrm{H}_n^{(1)}{}'(x) = \mathrm{H}_{n-1}^{(1)}(x) - \frac{n}{x}\mathrm{H}_n^{(1)}(x). \tag{2.15b}$$

2) D'après les équations (2.12) à (2.14) les coefficients R_n sont complexes et sans dimension.

3) Léon *et al*. ont montré en 2004 qu'il est possible de calculer la diffusion de cylindre de section non circulaire, comme des ellipsoïdes. La décomposition en modes normaux cylindrique reste valable, cependant l'expression des coefficients de diffusion est différente.[12]

4) Les coefficients de diffusion R_n du tube sont donnés au paragraphe II.2.2.

II.1.3 Limite solide infiniment rigide et infiniment mou

Tout d'abord, la masse volumique du cylindre ρ_1 est considérée comme très grande devant celle du milieu environnant ρ_0, soit $\rho_1 >> \rho_0$. Dans ce cas, les coefficients ζ_n tendent vers 0, et les coefficients de diffusion deviennent, d'après les équations (2.12) et (2.13)

$$R_n = -\frac{\mathrm{J}_n'(x)}{\mathrm{H}_n^{(1)}{}'(x)} \ , \qquad \rho_1 >> \rho_0 . \qquad (2.17a)$$

Comme précédemment, x désigne le coefficient k_0a. Cette approximation est utile car elle est proche du cas des métaux : elle est nommée limite solide infiniment **rigide**, ou condition de Neumann.[2, 6]

Une analyse identique peut être menée en considérant la masse volumique de l'objet comme négligeable devant celle du milieu environnant, soit $\rho_1 << \rho_0$. Ce cas est proche d'un cylindre d'air dans l'eau, en régime linéaire. L'expression du coefficient de diffusion R_n est, pour ζ_n grand dans les équations (2.12) et (2.13)

$$R_n = -\frac{\mathrm{J}_n(x)}{\mathrm{H}_n^{(1)}(x)} \ , \qquad \rho_1 << \rho_0 . \qquad (2.17b)$$

Cette approximation est nommée limite solide infiniment **mou**, ou condition de Dirichlet.[2,6]

Etude des fonctions de Bessel et Hankel pour $x << n$

Les expressions approchées des fonctions de Bessel et Hankel sont tirées du livre d'Abramowitz et Stegun.[11] Pour x très petit devant n, l'ordre du mode normal, les expressions approchées de la fonction de Bessel J_n et de sa dérivée première sont

$$\mathrm{J}_0(x) \approx 1 - x^2/4 \ , \qquad x << 1 \text{ et } n = 0, \qquad (2.18a)$$

$$\mathrm{J}_0'(x) \approx -x/2 \ , \qquad x << 1 \text{ et } n = 0, \qquad (2.18b)$$

$$\mathrm{J}_n(x) \approx \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n \ , \qquad x << n \text{ et } n \geq 1 \qquad (2.18c)$$

$$\mathrm{J}_n'(x) \approx \frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \ , \qquad x << n \text{ et } n \geq 1 \qquad (2.18c)$$

La fonction de Hankel de première espèce est définie par la relation $\mathrm{H}_n^{(1)}(x) = \mathrm{J}_n(x) + i\mathrm{Y}_n(x)$, où Y_n est la fonction de Neumann qui diverge pour x petit devant n, alors que la fonction de Bessel J_n reste bornée. Donc, pour $x << n$, la fonction de Hankel vérifie $\mathrm{H}_n^{(1)}(x) \approx i\mathrm{Y}_n(x)$. La fonction de Hankel et sa dérivée première tendent vers les expressions

$$\mathrm{H}_0^{(1)} \approx i\mathrm{Y}_0(x) \approx i\frac{2}{\pi}\left(\ln\left(\frac{1}{2}x\right) + \gamma\right), \qquad x << 1 \text{ et } n = 0, \qquad (2.19a)$$

$$\mathrm{H}_0^{(1)}{}' \approx i\mathrm{Y}_0{}'(x) \approx i\frac{2}{\pi x}, \qquad x << 1 \text{ et } n = 0. \qquad (2.19b)$$

$$\mathrm{H}_n^{(1)} \approx i\mathrm{Y}_n(x) \approx -i\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n, \qquad x << n \text{ et } n \geq 1, \qquad (2.19c)$$

$$\mathrm{H}_n^{(1)}{}' \approx i\mathrm{Y}_n{}'(x) \approx i\frac{1}{2}\frac{n!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^{n+1}, \qquad x << n \text{ et } n \geq 1. \qquad (2.19d)$$

Le terme γ est la constante d'Euler-Mascheroni, elle vaut environ 0,577. Elle est nécessaire au développement limité [figure 2.6(c)].

Expressions des coefficients de diffusion R_n pour $x << n$

Les expressions approchées, pour $x << n$, des coefficients de diffusion R_n sont obtenues en remplaçant les fonctions de Bessel et de Hankel par leur expression approchée dans l'équation (2.17) .

Dans le cadre de l'approximation solide infiniment **rigide**, l'expression approchée du coefficient R_n est pour les ordres n différents de 0

$$R_n \approx i\pi\frac{1}{n!(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \qquad x << n \text{ et } n \geq 1. \qquad (2.20a)$$

Les expressions approchées des premiers termes s'écrivent

$$R_0 \approx -i\frac{\pi}{4}x^2, \qquad x << 1 \text{ et } n = 0. \qquad (2.20b)$$

$$R_1 \approx i\frac{\pi}{4}x^2, \qquad x << n = 1, \qquad (2.20c)$$

$$R_2 \approx i\frac{\pi}{32}x^4, \qquad x << n = 2, \qquad (2.20d)$$

$$R_3 \approx i\frac{\pi}{768}x^6, \qquad x << n = 3, \qquad (2.20e)$$

Dans le cadre de la limite solide infiniment **mou**, l'expression approchée du coefficient de diffusion R_0 est

$$R_0 \approx i\frac{\pi}{2(\ln(x/2)+\gamma)}\ , \qquad x << 1 \text{ et } n = 0. \qquad (2.21a)$$

A l'ordre n, l'expression est opposée au cas infiniment rigide [Eq. (2.20a)]

$$R_n \approx -i\pi\frac{1}{n!(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\ , \qquad x << n \text{ et } n \geq 1. \qquad (2.21b)$$

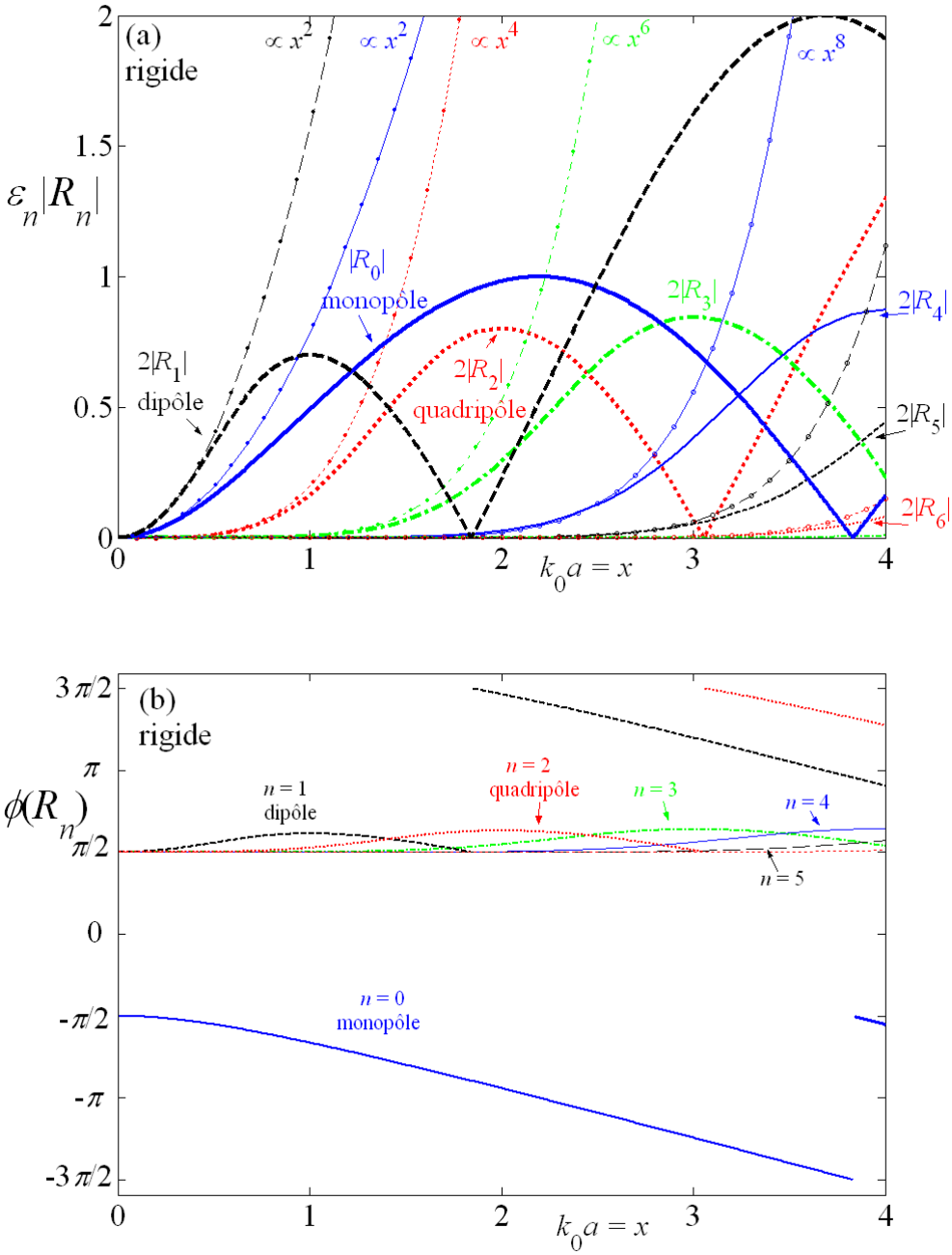


figure 2.6(a) et (b) : module (a) et phase (b) des coefficients R_n,
limite solide infiniment **rigide**, valeurs exactes (traits) et approchées (•).

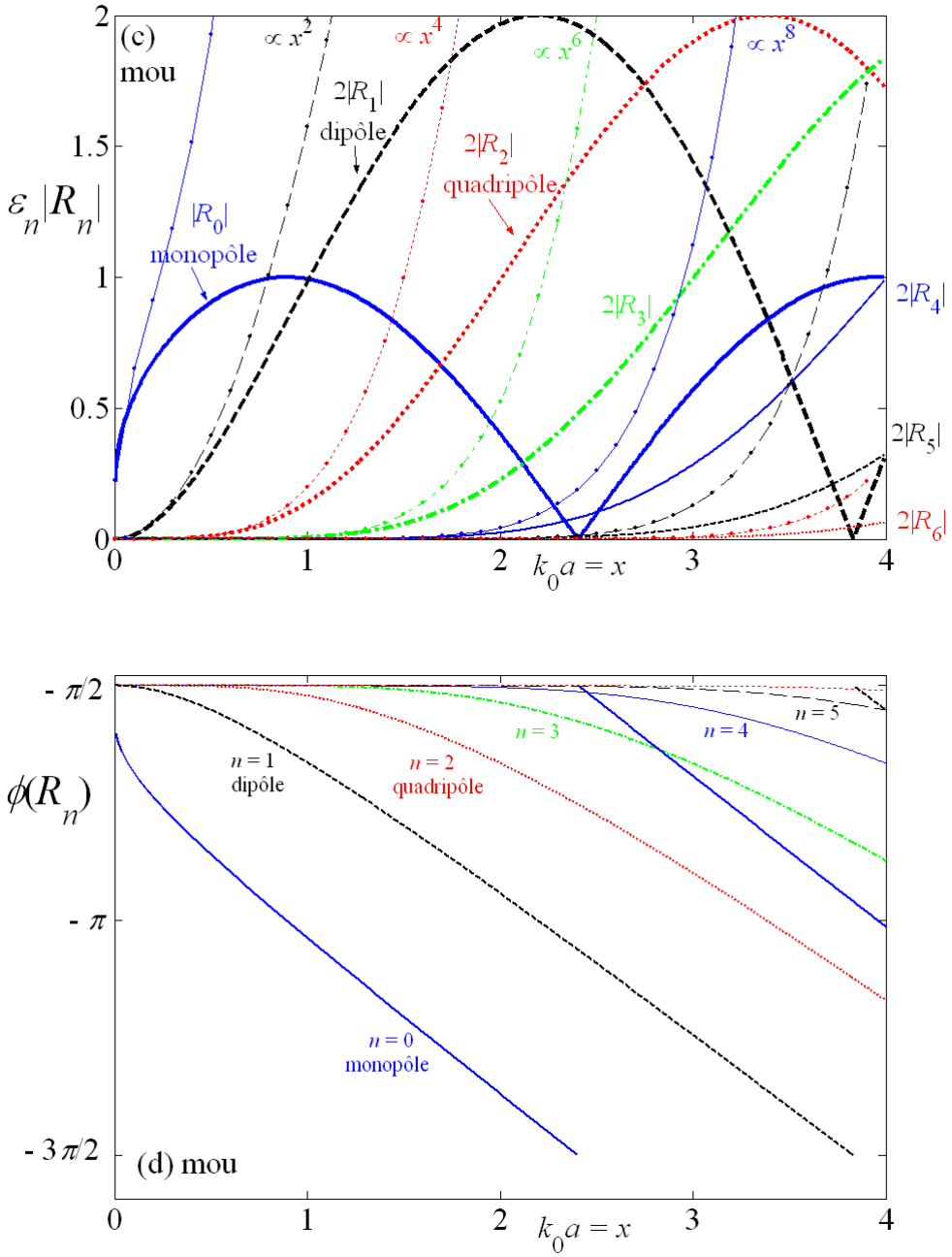


figure 2.6(c) et (d) : module (c) et phase (d) des coefficients R_n,
limite solide infiniment **mou**, valeurs exactes (traits) et approchées (•).

Le module et la phase des coefficients de diffusion R_n et leur valeur approchée sont tracés sur les figure 2.6(a) à (d) pour les deux cas limites.

Dans le cas solide infiniment **rigide**, pour x petit devant 1, les deux premiers termes R_0 et R_1 sont équivalents en x^2 [Eq. (2.20)]. Les termes suivants R_n (en x^{2n}) sont négligeables. Le coefficient R_2 devient significatif à partir de x de l'ordre de 1. Plus x augmente, plus le nombre de termes non négligeables augmente. Pour chaque ordre, le premier maximum est

atteint pour $x = n$. Les phases des coefficients R_n tendent vers $+\pi/2$ pour $x << n$ et pour $n \geq 1$. La phase de R_0 tend vers $-\pi/2$ pour $x << 1$. Lorsque le module du coefficient R_n s'annule, sa phase présente un saut de π, comme par exemple R_1 pour $x = 1{,}9$.

Dans le cas solide infiniment **mou**, pour $x << 1$, le terme monopolaire R_0 est prépondérant, les autres sont négligeables [Eq. (2.21)], contrairement au cas rigide pour lequel les deux premiers termes sont équivalents. Plus x augmente, plus le nombre de termes significatifs augmente. Toutes les phases des coefficients R_n tendent vers $-\pi/2$ pour $x << 1$, contrairement au cas rigide où elles tendent vers $+\pi/2$, sauf pour R_0.

Expressions des coefficients R_n pour $x >> n$

Pour x grand devant n l'ordre du mode normal, les expressions approchées de la fonction de Bessel J_n et de sa dérivée première sont [11]

$$\mathrm{J}_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \qquad x >> n, \tag{2.22a}$$

$$\mathrm{J}_n'(x) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \qquad x >> n. \tag{2.22b}$$

De même, les expressions approchées de la fonction de Hankel $\mathrm{H}_n^{(1)}$ et de sa dérivée sont

$$\mathrm{H}_n^{(1)}(x) \approx i^{-n} \sqrt{\frac{2}{i\pi x}} e^{ix}, \qquad x >> n, \tag{2.23a}$$

$$\mathrm{H}_n^{(1)\prime}(x) \approx i^{-(n-1)} \sqrt{\frac{2}{i\pi x}} e^{ix}, \qquad x >> n. \tag{2.23b}$$

Le coefficient R_n dans la limite solide infiniment **rigide** [Eq. (2.17a)] tend vers

$$R_n \approx \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{-i(x-(n-1)\pi/2-\pi/4)}, \qquad x >> n. \tag{2.24a}$$

Le coefficient R_n dans la limite solide infiniment **mou** [Eq. (2.17b)] tend vers

$$R_n \approx -\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{-i(x-n\pi/2-\pi/4)}, \qquad x >> n. \tag{2.24b}$$

Dans les deux cas, le module des coefficients R_n est compris entre 0 et 1.

Le module et phase des coefficients R_0 et R_4 dans la limite solide infiniment **rigide** sont tracés sur la figure 2.7. Pour $n = 0$, la valeur asymptotique donnée par l'équation (2.24a) est atteinte pour x de l'ordre de 2. Pour $n = 4$, la valeur asymptotique est atteinte pour x de l'ordre de 30.

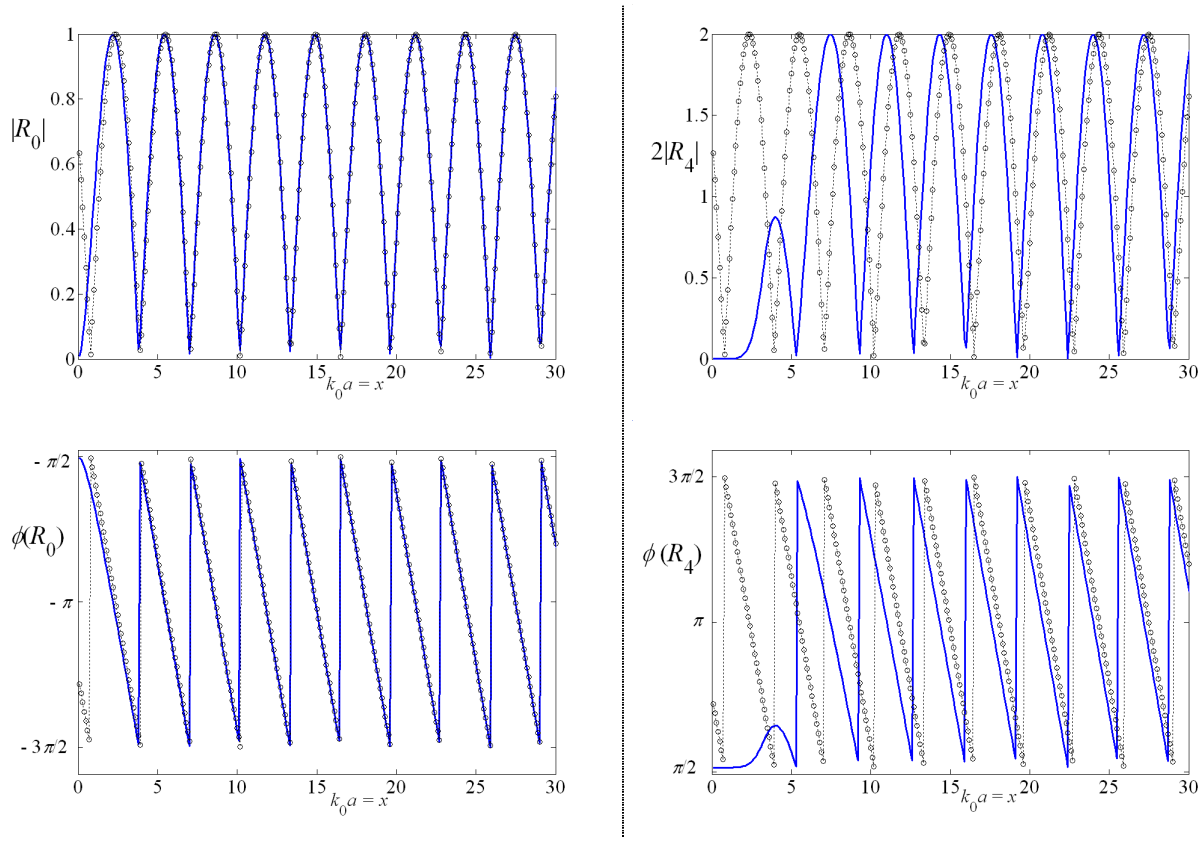


figure 2.7 : module et phase des coefficients R_0 (gauche) et $2R_4$ (droite)
limite solide infiniment **rigide** (–) et valeur approchée pour $x >> n$ (o)

Etude du nombre de coefficients R_n significatifs en fonction de x

Soit r l'ordre de grandeur des distance d'observation. D'après l'équation (2.11), la pression diffusée en champ proche, pour r supérieur et de l'ordre de a, est donnée par une somme infinie de modes dont l'ordre de grandeur de chacun de ces modes est donné par $2R_n\left\{\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0r)\right\}^2$.

Pour $n << x = k_0a$, les coefficients de diffusion R_n sont de l'ordre de 1 [Eq. (2.24)]. Pour $n << k_0r$, l'ordre de grandeur de la fonction de Hankel au carré est $2/\pi k_0r$ [Eq. (2.5)]. La somme des modes normaux entre 0 et $n = x$ est de l'ordre

$$\left|\sum_{n=0}^{x} 2R_n\left\{\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0r)\right\}^2\right| \le \sum_{n=0}^{x}\left|2R_n\left\{\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0r)\right\}^2\right| \approx \sum_{n=0}^{x}\frac{4}{\pi}\frac{1}{k_0r} \approx \sum_{n=0}^{x}\frac{1}{x}\frac{a}{r} = \frac{a}{r}. \qquad (2.25a)$$

Pour $n >> x = k_0 a$, les coefficients de diffusion R_n sont petit devant 1 [Eq. (2.20a) et (2.21b)]. Pour $n >> k_0 r$, la fonction de Hankel diverge d'après l'équation (2.19c). En combinant ces deux équations, l'ordre de grandeur des modes normaux vérifie pour $n >> x$

$$R_n \left\{ \mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r) \right\}^2 \approx \frac{1}{\pi n} \left(\frac{a}{r} \right)^n , \qquad n >> x \text{ et } r > a. \tag{2.25b}$$

Ce terme est petit devant 1. L'ordre de grandeur de la somme des termes d'ordre supérieurs à x est

$$\left| \sum_{n=x}^{\infty} 2R_n \left\{ \mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r) \right\}^2 \right| \leq \sum_{n=x}^{\infty} \left| 2R_n \left\{ \mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r) \right\}^2 \right| \leq \frac{1}{\pi x} \sum_{n=x}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \approx \frac{1}{\pi x} \left(\frac{a}{r} \right)^x \frac{1}{1 - a/r} . \tag{2.25c}$$

Pour x grand, cette somme devient négligeable devant la somme des termes entre 0 et x.

Donc, pour un x fixé, les coefficients R_n sont significatifs pour $n \leq x$ et négligeables pour $n > x$. L'ordre du dernier terme significatif est noté m, sa valeur dépend de la précision désirée sur la pression diffusée : m est de l'ordre de $x = k_0 a$. Le reste de la somme est de l'ordre du premier terme négligé [Eq. (2.25c)]. Les expressions des coefficients R_n sont reprises dans le tableau 1 dans les limites $n << x$ et $n >> x$.

limite	**rigide** $\rho_1 >> \rho_0$	**mou** $\rho_1 << \rho_0$	
	$R_n = -\dfrac{\mathrm{J}_n'(x)}{\mathrm{H}_n^{(1)\prime}(x)}$	$R_n = -\dfrac{\mathrm{J}_n(x)}{\mathrm{H}_n^{(1)}(x)}$	
$n << x$	$R_n \approx \sin\left(x - \dfrac{n\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} \right) e^{-i(x-(n-1)\pi/2-\pi/4)}$	$R_n \approx -\cos\left(x - \dfrac{n\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} \right) e^{-i(x-n\pi/2-\pi/4)}$	coeff. significatifs
$n = m$	$m \approx k_0 a = x$ (la somme tend vers a/r)		dernier ordre significatif
$n >> x$ $n \geq 1$	$R_n \approx i\pi \dfrac{1}{n!(n-1)!} \left(\dfrac{x}{2} \right)^{2n}$	$R_n \approx -i\pi \dfrac{1}{n!(n-1)!} \left(\dfrac{x}{2} \right)^{2n}$	coeff. négligeables

Tableau 1 : expressions des coefficients de diffusion R_n
dans les limites solide infiniment **rigide** et **mou**.

Le module des coefficients de diffusion $x\frac{r}{a}R_n\left\{\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r)\right\}^2$ en fonction de n à x fixé est représenté sur la figure 2.8, pour x égal à 30 et 50 et pour r/a égal à 2 et 100. Pour les ordres n supérieurs à x + 10, les coefficients sont négligeables. Le module de la somme $\frac{r}{a}\sum_{n=0} R_n\left\{\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r)\right\}^2$ est également tracé sur la figure 2.8. La somme converge à partir de n égal à x.

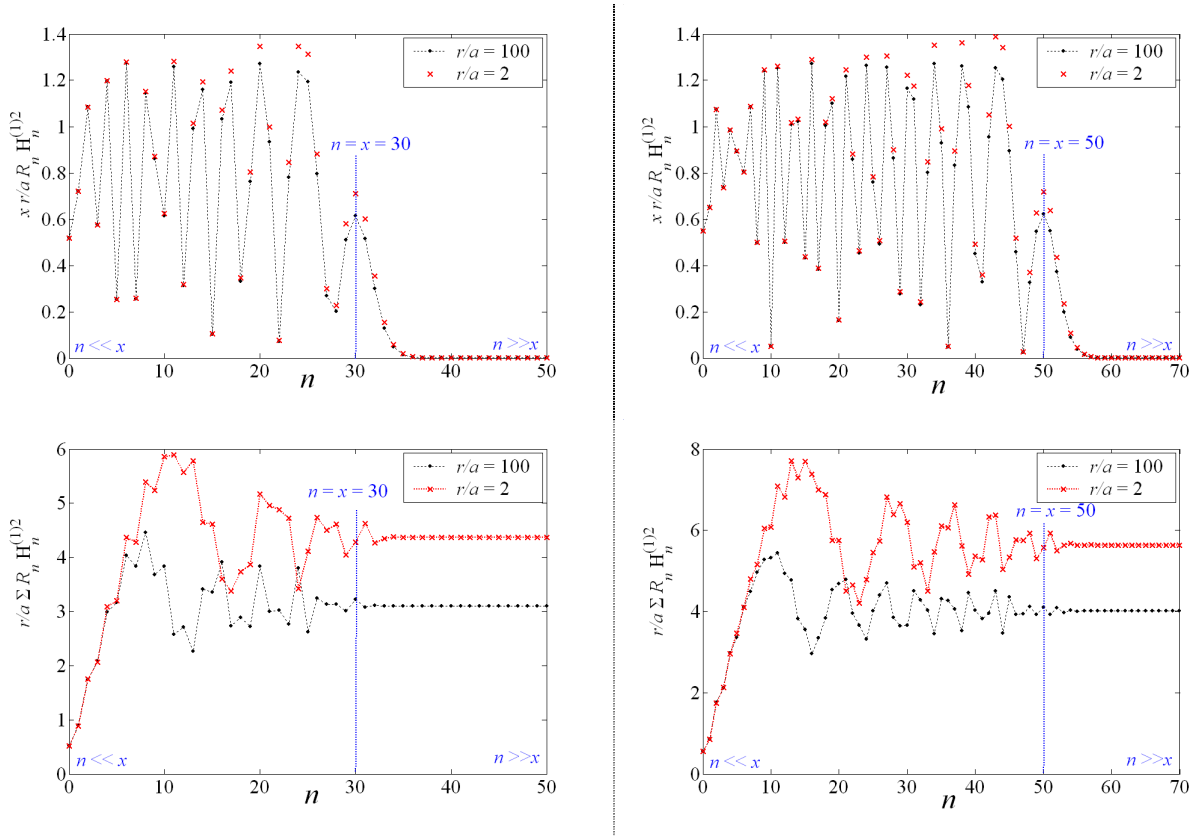


figure 2.8 : module des coefficients $x\frac{r}{a}R_n\left\{\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r)\right\}^2$ et de la somme $\frac{r}{a}\sum_{n=0} R_n\left\{\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r)\right\}^2$ en fonction de n à x fixé : x = 30 (gauche) et x = 50 (droite), pour r/a = 2 (×) et r/a = 100 (•).

L'étude de ces comportements limite a permis de quantifier les ordres de grandeur et le nombre des coefficients de diffusion R_n. Ces résultats seront utiles pour l'étude de la diffusion acoustique de cylindre réel.

II.1.4 Exemples : cylindres d'acier et de nylon

Deux cas typiques sont étudiés : les cylindres d'**acier** et de **nylon**. Dans la partie III, des résultats expérimentaux concernant des cylindres métalliques et de nylon sont présentés.

Cas de l'acier

Le comportement de l'**acier**, comme celui de la plupart des métaux, est proche du cas infiniment rigide, du fait du contraste important de masse volumique avec l'eau, soit $\rho_1 >> \rho_0$. Le module et la phase des coefficients R_n (n compris entre 0 et 6) de l'acier et de la limite rigide sont comparés sur la figure 2.9 pour x compris entre 0 et 4.

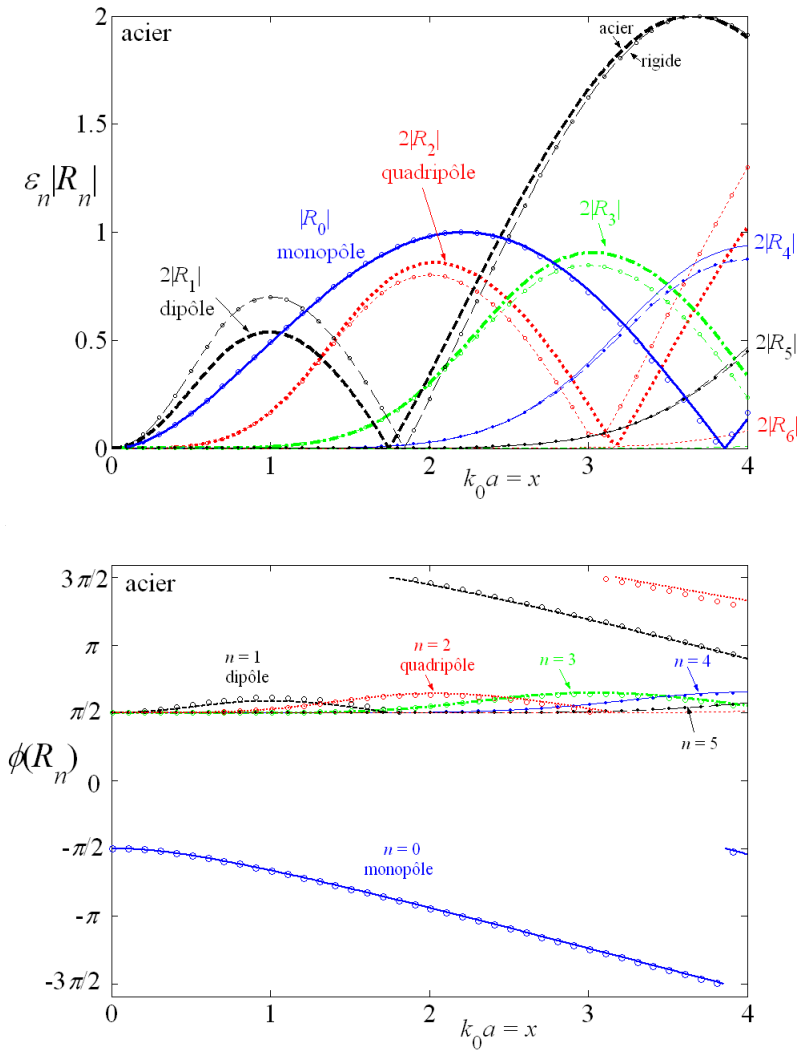


figure 2.9 : module et phase des coefficients R_n de l'**acier** (trait) comparés à la limite solide infiniment **rigide** (o et •) pour x entre 0 et 4.

Le coefficient R_0 de l'acier est très proche du coefficient rigide. Le coefficient R_1 de l'acier est inférieur coefficient rigide pour $x < 2$, du fait que la masse volumique de l'acier n'est pas infinie (§ II.1.5). Les autres coefficients R_n sont proches du cas rigide pour $x << n$.

Pour les grandes valeurs de x, il existe des phénomènes de résonance dépendant des paramètres physiques du cylindre, la densité ρ_1 et les vitesses c_T et c_L.[7,8,9] Ces résonances, marquées par les flèches sur la figure 2.10 pour R_0 et R_4, ne sont pas prises en compte par le modèle infiniment rigide. La phase présente alors un saut de π. Dans les domaines où les coefficients de diffusion élastiques sont égaux aux coefficients rigides, le cylindre est considéré comme « impénétrable ». Au contraire, pour une fréquence de résonance, l'onde « pénètre » dans le cylindre.[7,8]

Remarque : un changement de signe correspond également à un saut de π.

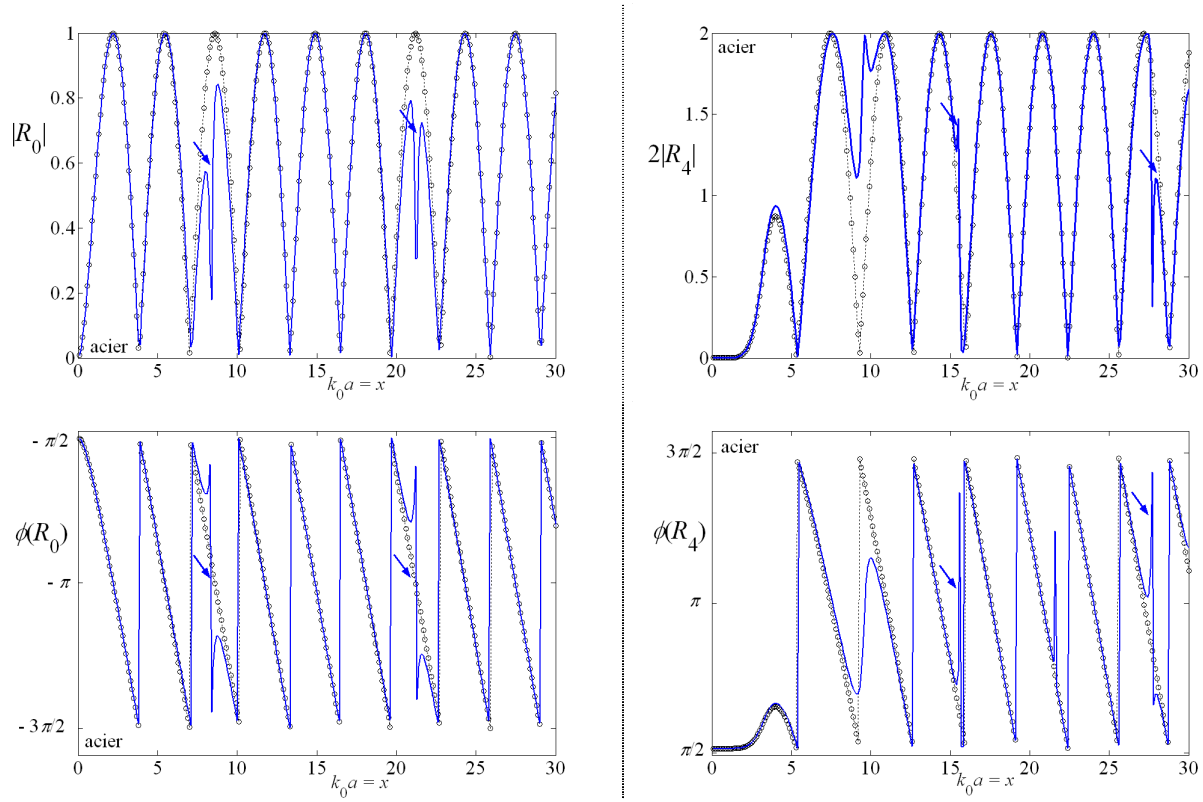


figure 2.10 : module et phase des coefficients R_0 (gauche) et $2R_4$ (droite).
L'acier (–) est comparé à la limite solide infiniment rigide (o).
Les résonances sont marquées par une flèche.

Cas du nylon

Le comportement du **nylon** est très différent du cas infiniment rigide, du fait du faible contraste de masse volumique avec l'eau, soit $\rho_1 \approx \rho_0$. La masse volumique du nylon est de 1,1 g.cm^{-3} environ. Il existe un phénomène de résonance du terme dipolaire R_1 pour x égal à 2 ainsi que du terme quadripolaire R_2 pour x égal à 3,2 (figure 2.11). La phase présente alors un saut de π.

Remarque : un changement de signe correspond également à un saut de π.

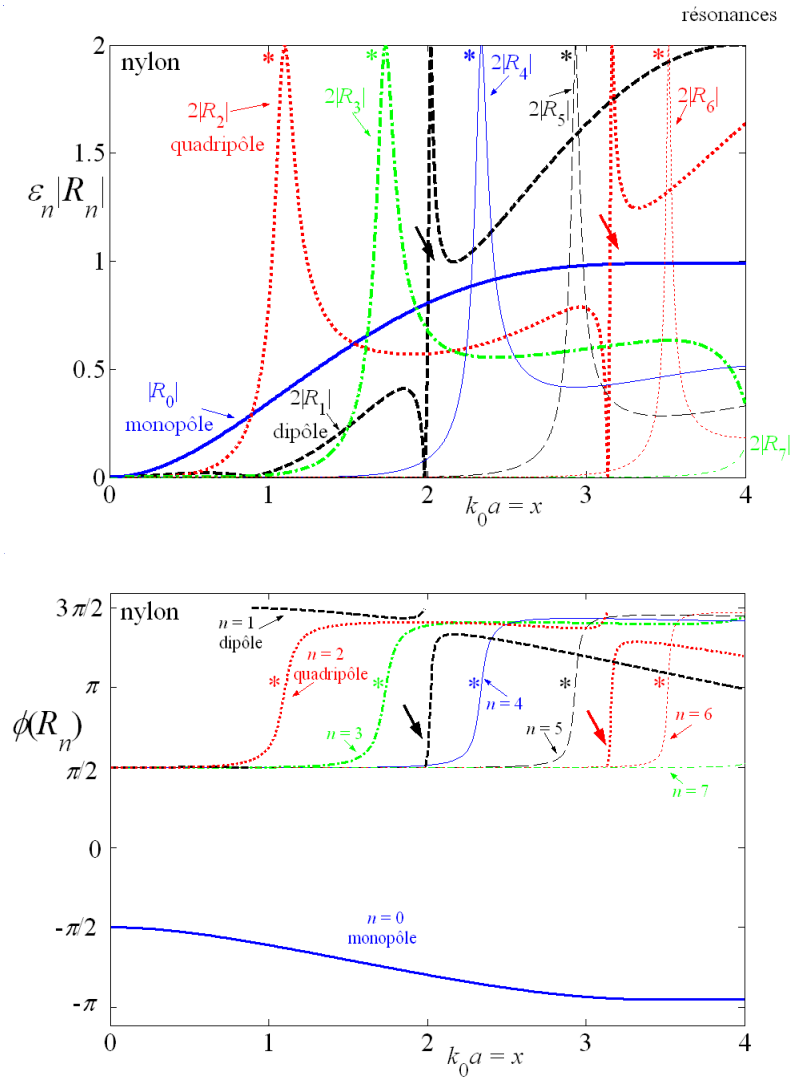


figure 2.11 : module et phase des coefficients R_n du **nylon**, pour x compris entre 0 et 4.

Le pic du terme quadripolaire R_2 pour $x = 1{,}1$ n'est pas une « résonance » comme celles décrites précédemment. La phase passe de $\pi/2$ à $3\pi/2$ de façon continue pour x compris entre 0,9 et 1,3. Des phénomènes identiques sont observés pour R_3 (x = 1,7), R_4 (x = 2,3), R_5 (x = 2,9) et R_6 (x = 3,5). Ils sont marqués par une étoile (*).

Ces pics correspondent au coefficient R_n égal à -1, soit $|R_n| = 1$ et $\phi(R_n) = \pi$. D'après les équations (2.4) et (2.12), le terme ζ_n vérifie dans ce cas

$$R_n = -1 \Leftrightarrow \zeta_n = \frac{x\mathrm{Y}_n'(x)}{\mathrm{Y}_n(x)} \ . \qquad (2.26)$$

Les fonctions ζ_n et $x\mathrm{Y}_n'/\mathrm{Y}_n$ sont tracées sur la figure 2.12, pour $n = 2$ et $n = 3$. Dans le cas du **nylon**, l'équation (2.26) a une solution, marquée par un cercle. Dans le cas de l'**acier**, l'équation n'a pas de solution.

Remarque : pour le nylon, l'équation n'a pas de solution pour $n = 0$ et $n = 1$.

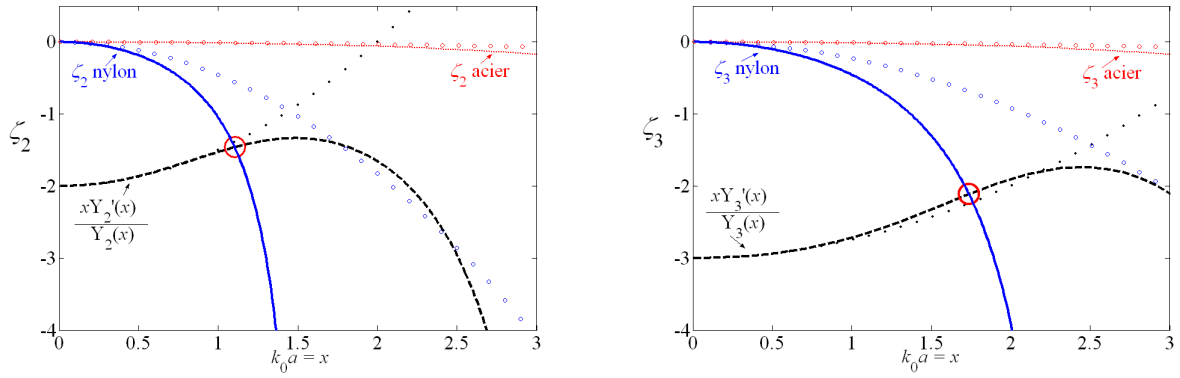


figure 2.12 : ζ_n et $x\mathrm{Y}_n'/\mathrm{Y}_n$ pour l'acier et le nylon ($n = 2$ et $n = 3$) et valeurs approchées (o et •)
cercle : intersections correspondant à un pic du coefficient R_n du nylon

En utilisant les valeurs approchées des fonctions de Neumann pour $x << n$ [Eq. (2.19)], la partie gauche de l'équation (2.26) a pour valeur approchée

$$\frac{x\mathrm{Y}_n'(x)}{\mathrm{Y}_n(x)} \approx -n + \frac{x^2}{2(n-1)}, \qquad x << n \text{ et } n \geq 2, \qquad (2.27a)$$

En utilisant les valeurs approchées des fonctions de Bessel pour $x << n$ [Eq. (2.18)] dans la définition de ζ_n [Eqs. (2.13) et (2.14)], la partie droite de l'équation (2.26) a pour valeur approchée

$$\zeta_n \approx -\frac{\rho_0 c_0^{\ 2}}{\rho_1 c_{\mathrm{T}}^{\ 2}} \frac{x^2}{4(n-1)}, \qquad x << n \text{ et } n \geq 2. \qquad (2.27b)$$

Ce qui permet d'obtenir un ordre de grandeur du point d'intersection, en combinant les deux équations précédentes

$$x_{pic}(n) \approx 2\sqrt{\frac{n(n-1)}{2 + \frac{\rho_0 c_0^{\ 2}}{\rho_1 c_{\mathrm{T}}^{\ 2}}}}, \qquad x << n \text{ et } n \geq 2. \qquad (2.28)$$

Cette égalité est vérifiée si l'intersection se trouve dans le domaine compris entre $x = 0$ et la divergence de la fonction $x\mathrm{Y}_n'/\mathrm{Y}_n$, soit $x_{pic}(n) < n + 1$. Si $\rho_1 c_\mathrm{T}^2 < 1/2\rho_0 c_0^2$, cette égalité est toujours vérifiée. Pour les premiers ordres n, pour $\rho_1 c_\mathrm{T}^2 < \rho_0 c_0^2$, des solutions existent. Le rapport $\rho_1 c_\mathrm{T}^2 / \rho_0 c_0^2$ est égal à 0,54 dans le cas du nylon et de 32 dans le cas de l'acier.

Etude de la fonction de forme

La fonction de forme cylindrique F_∞ est définie par

$$F_\infty(\theta) \approx \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 a}} \sum_{n=0}^{m} \varepsilon_n R_n \cos(n\theta) \ . \tag{2.29}$$

Le module et la phase de la fonction de forme F_∞, ainsi que la contributions des premiers termes $\sqrt{2/\pi k_0 a}\,\varepsilon_n R_n \cos(n\theta)$ sont tracés pour différentes valeurs de $k_0 a$ entre 0,1 et 1,5 (figure 2.13). Pour l'**acier**, pour $k_0 a$ égal à 0,1, seuls les premiers termes R_0 et R_1 sont significatifs. La pression est principalement rétro-diffusée (pour θ autour de 180°). Pour $k_0 a$ supérieur, l'apparition des termes d'ordre supérieur (R_2 à partir de 0,5, R_3 à partir de 1,5 …) modifie la dépendance angulaire de la pression diffusée.

Pour le **nylon**, pour $k_0 a$ égal à 0,1, seul le premier terme R_0 est significatif. La pression est diffusée de façon quasiment isotrope. Pour $k_0 a$ égal à 1, le terme quadripolaire R_2 est prépondérant : la pression diffusée est quasiment quadripolaire. Ces différences de comportement entre le nylon et les métaux seront utilisées dans la partie III pour caractériser les cylindres.

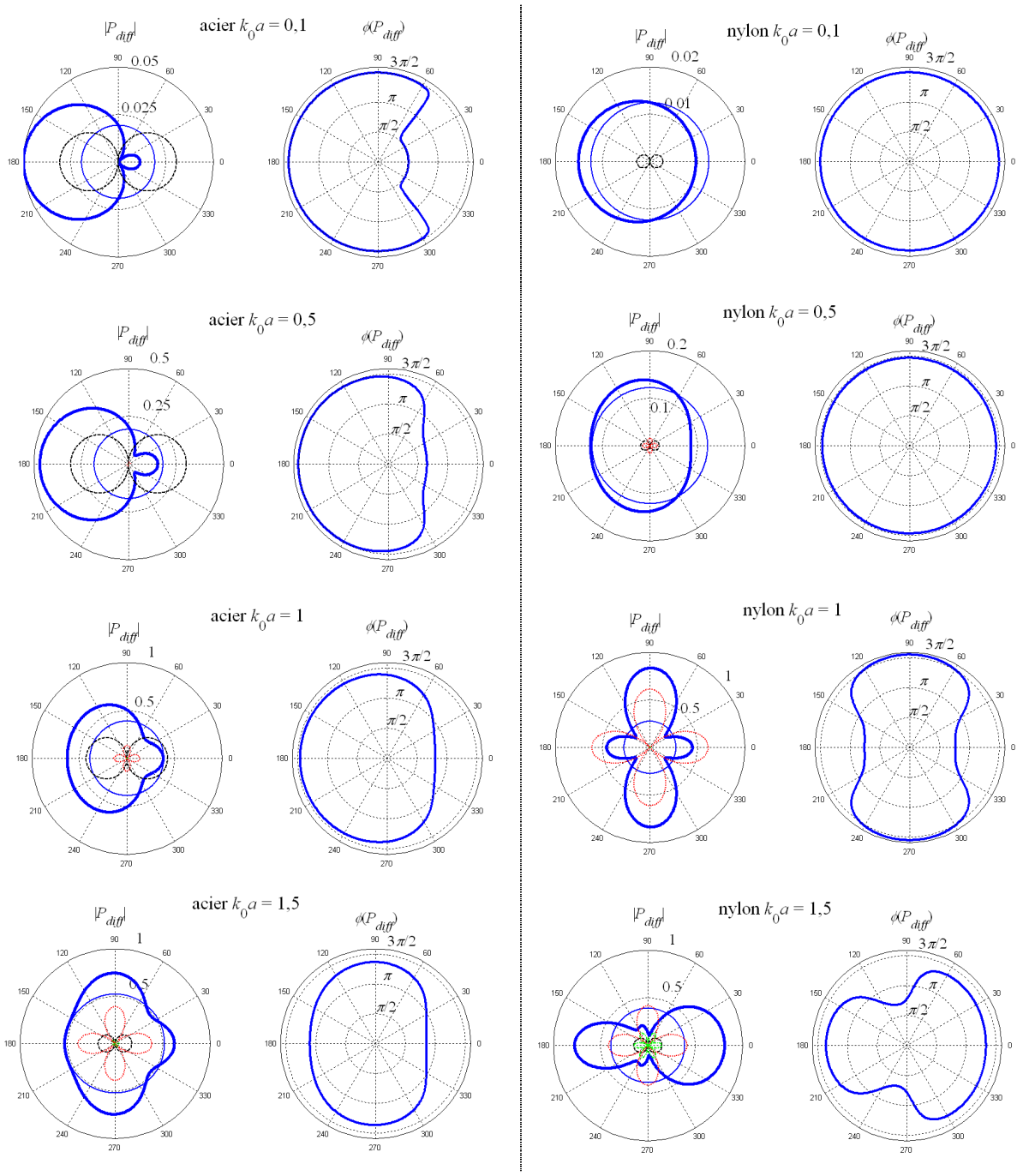


figure 2.13 : module et phase de la fonction de forme cylindrique F_∞
de l'**acier** (gauche) et du **nylon** (droite) pour k_0a compris entre 0,1 et 1,5.
La contribution des modes normaux est également représentées.

II.1.5 Limite petit objet, $x << 1$

Pour les cas étudiés, dans la limite $x << 1$, les deux premiers coefficients de diffusion sont proportionnels à x^2, les suivants sont proportionnels à x^{2n} [Eq. (2.20)]. Dans la limite $x << 1$, ainsi que $x_L = \omega a/c_L << 1$, les deux premiers termes de la série R_0 et R_1 sont donc prépondérants. Les suivants à partir de R_2 sont négligeables. La pression retro-diffusée en champ lointain a pour expression

$$P_{diff}(r,\varphi) = \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}}\, e^{ik_0 r}\left(R_0 - 2R_1\cos\varphi + o\left(x^4\right)\right), \quad x << 1,\ a << r\,. \qquad (2.30a)$$

En remplaçant les coefficients de diffusion par leur valeur approchée, la pression retro-diffusée s'écrit

$$P_{diff}(r,\varphi) = \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}}\, e^{ik_0 r}\left(\alpha c + \beta c\cos\varphi + o\left(x^4\right)\right), \quad x << 1,\ a << r\,. \qquad (2.30b)$$

Les valeurs approchées des deux premiers termes de la somme s'expriment selon

$$\alpha c \approx R_0\,, \qquad (2.31a)$$

$$\beta c \approx -2R_1. \qquad (2.31b)$$

Chambers et Gautesen ont utilisé le formalisme α et β dans la cas de petites sphères.[17] Les expressions des termes α, β et c sont adaptées des valeurs approchées de R_0 et R_1 données par Doolittle et Überall [5,18]

$$\alpha = 1 - \frac{\rho_0 c_0^{\ 2}}{\rho_1\left(c_L^{\ 2} - c_T^{\ 2}\right)}\,, \qquad (2.32a)$$

$$\beta = 2\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + \rho_0}\,, \qquad (2.32b)$$

$$c = -\,i\pi\,(k_0 a)^2/4\,. \qquad (2.32c)$$

Le calcul conduisant à ces expressions est présenté par la suite [Eqs. (2.33) à (2.35)].

Remarque : les termes α, β et c sont sans dimension. Ceci est en accord avec le fait que les coefficients R_n sont également sans dimension.

Signification physique des termes α et β

Le module de compressibilité isotrope de l'eau est égal à $\rho_0 c_0^2$. Celui du cylindre vaut $\rho_1(c_L^2 - c_T^2)$ ou $\lambda + \mu$ en fonction des coefficients de Lamé. Il s'agit du module de compressibilité isotrope d'un solide élastique à deux dimensions.

La compressibilité χ est définie comme l'inverse du module de compressibilité. La compressibilité de l'eau est notée χ_0, celle du cylindre χ_1. Le terme α s'exprime également

$$\alpha = 1 - \frac{\chi_1}{\chi_0}. \qquad (2.32d)$$

Le terme α est appelé **contraste de compressibilité** et β contraste de masse volumique ou de **contraste de densité**. Le terme c est le **coefficient de diffusion**, proportionnel à $(k_0 a)^2$.

Remarques :

1) Le module de compressibilité s'exprime en Pascal (Pa). La compressibilité s'exprime en Pa^{-1}.

2) A trois dimensions, le module de compressibilité isotrope d'un solide élastique est égal à $\lambda + 2/3\mu$. Cette expression sera utilisée dans le cas de la sphère.

3) La vitesse de l'onde longitudinale dans un fluide dépend des paramètres physiques suivant $c_0 = 1/\sqrt{\rho_0 \chi_0}$.

4) Dans la limite infiniment rigide ($\rho_1 >> \rho_0$), R_0 et $-R_1$ sont égaux à c, pour $x << 1$ [Eqs. (2.20b) et (2.20c)]. Dans ce cas, α et β sont égaux à 1 et 2, respectivement.

matériau	ρ (g.cm^{-3})	c_L (mm.μs^{-1})	c_T (mm.μs^{-1})	$1/\chi$ (GPa)	α	β
nylon	1,2	2,5	1,1	6	**0,62**	**0,14**
aluminium	2,7	6,4	3,0	86	0,97	0,92
acier	7,8	5,8	3,0	188	**0,99**	**1,55**
nickel	8,8	5,6	3,0	198	0,99	1,59
cuivre	8,9	5,0	2,3	178	0,99	1,60
argent	10,5	3,6	1,6	109	0,98	1,65
tungstène	19,3	5,2	2,9	360	0,99	1,80
air	$1{,}3.10^{-3}$	0,34		15.10^{-3}	**-15.10^{3}**	**-1,99**
Eau	1,0	1,5		2		

Tableau 2 : paramètres physiques du nylon et de métaux

Ordre de grandeur des coefficients α et β

Les paramètres physiques, masse volumique et vitesses, sont donnés dans le tableau 2 dans le cas de l'air, du nylon et de certains métaux dans l'eau. Les valeurs correspondantes des coefficients α et β sont également présentées. Le coefficient α tend vers +1 si le module de compressibilité du cylindre est très grand devant celui du milieu environnant, soit $\chi_1 << \chi_0$ [Eq. (2.32d)]. C'est le cas des métaux dans l'eau. Le coefficient α vaut 0.62 pour le nylon.

Au contraire le coefficient β est borné, compris entre –2 et 2. Il est positif si la densité du cylindre est supérieure à celle de l'eau, soit $\rho_1 > \rho_0$, et négatif sinon. Pour les métaux, le coefficient β est compris entre 0,9 pour l'aluminium et 1,8 pour le tungstène. Pour le nylon, la différence de masse volumique est faible β vaut 0,14. Pour l'air, β est égal à –2 [Eq. (2.32b)].

Les coefficients α et β dépendent uniquement des propriétés physiques du cylindre par rapport au milieu environnant : ils ne dépendent pas de k_0a. Les deux coefficients de diffusion R_0 et $-2R_1$ sont donc proportionnels à $(k_0a)^2$, par le coefficient c, dans la limite petit cylindre [Eq. (2.32c)].

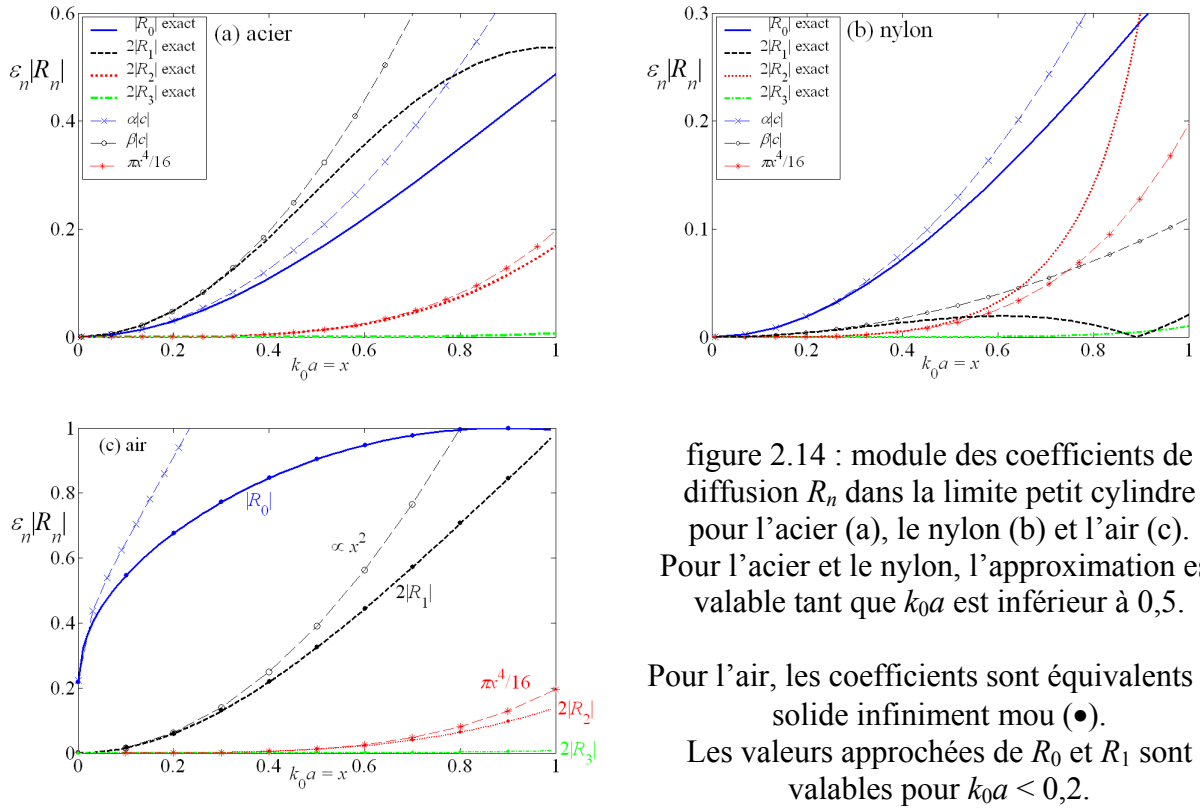


figure 2.14 : module des coefficients de diffusion R_n dans la limite petit cylindre pour l'acier (a), le nylon (b) et l'air (c). Pour l'acier et le nylon, l'approximation est valable tant que k_0a est inférieur à 0,5.

Pour l'air, les coefficients sont équivalents au solide infiniment mou (•).
Les valeurs approchées de R_0 et R_1 sont valables pour $k_0a < 0{,}2$.

Les modules des coefficients R_0 et $2R_1$ et leur valeur approchée sont tracés sur la figure 2.14 pour l'acier, le nylon et l'air. Pour l'acier et le nylon, l'approximation petit objet est valable pour l'acier et le nylon tant que k_0a est inférieur à 0,5 : dans ce cas, les deux premiers coefficients augmentent de façon quadratique avec x et les autres coefficients sont négligeables.

Remarque : cas de l'air en régime linéaire

Si le module de compressibilité du cylindre est très petit devant celui du milieu environnant, α devient très grand devant 1. C'est le cas d'un cylindre d'air dans l'eau, α est de l'ordre $-15\,000$ (tableau 2). Pour l'air, le modèle fluide [Eq. (2.16)] est équivalent au solide infiniment mou (•), du fait du fort contraste d'impédance, $Z_1 << Z_0$ [Eq. (2.36) et figure 2.14(c)]. Dans ce cas, l'approximation petit objet n'est pas valable, R_0 n'est pas proportionnel à x^2. De plus, le terme monopolaire est prépondérant devant le terme dipolaire.

Dépendance angulaire (fonction de forme)

Dans la limite $x << 1$, la diffusion est la somme de deux termes, monopolaire et dipolaire, reliés aux contrastes de compressibilité et de densité α et β. La diffusion monopolaire est due à une *variation de volume sans changement de forme* (variation du rayon) ; cela correspond à une compression isotrope autour du cylindre. Le cylindre se contracte dans les zones de sur-pression et de se dilate dans les zones de sous-pression. Le caractère isotrope est dû au fait que le périmètre du cylindre est petit devant la longueur d'onde ($2\pi a << \lambda$).

La diffusion dipolaire est due à une *variation de forme sans changement de volume* ; cela correspond à un déplacement relatif du cylindre par rapport au milieu environnant dans la direction de l'onde incidente.

Dans le cas des métaux, les deux termes sont équivalents : α est de l'ordre de 1 et β de 1,6. Dans la limite petit objet, pour k_0a inférieur à 0,5, la pression retro-diffusée $P_{diff}(r,\varphi)$ est proportionnelle $\alpha c + \beta c\cos\varphi$ d'après l'équation (2.30b). La fonction de forme correspondante est montrée sur la figure 2.15.

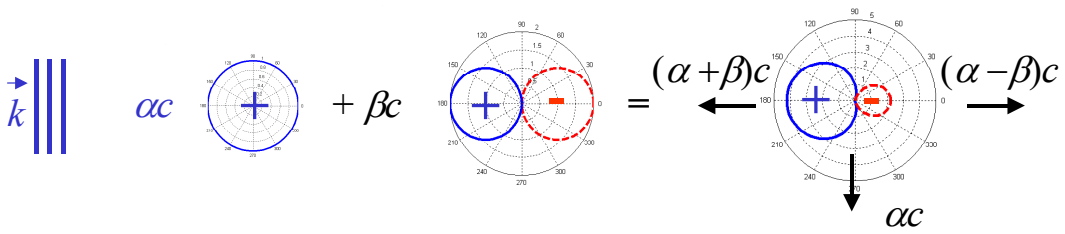


figure 2.15 : fonction de forme des métaux dans la limite petit cylindre ($\alpha \approx 1$, $\beta \approx 1.6$)

La pression rétro-diffusée, pour ($\theta = \pi$ ou $\varphi = 0$) s'écrit $P_{diff}(r, 0) \propto (\alpha + \beta)c$. La pression diffusée vers l'avant, dans le sens de la pression incidente ($\theta = 0$ ou $\varphi = \pi$) s'écrit $P_{diff}(r, \pi) \propto (\alpha - \beta)c$. Enfin la pression diffusée pour $\theta = \pm\pi/2$ s'écrit $P_{diff}(r, \pm\pi/2) \propto \alpha c$. Le déphasage est égal à $-\pi/2$ en rétro-diffusion et $+\pi/2$ vers l'avant. Ces observations seront utiles pour l'étude de la diffusion multiple entre deux petits cylindres.

Dans le cas d'un cylindre d'air dans l'eau le coefficient R_0 est très grand devant le coefficient R_1 : la diffusion est alors isotrope. Pour le nylon, β est faible, du fait du faible contraste de densité : la diffusion est alors quasi-isotrope. Le terme quadripolaire est de l'ordre du terme dipolaire à partir de $x = 0{,}5$.

Calcul des deux premiers termes R_0 et R_1 pour $x << 1$

Dans le cas élastique, le coefficient R_0 a pour expression d'après les équations (2.12) et (2.13)

$$R_0 = -\frac{\mathrm{J}_0(x)\zeta_0 - x\mathrm{J}_0'(x)}{\mathrm{H}_0^{(1)}(x)\zeta_0 - x\mathrm{H}_0^{(1)\prime}(x)} \ . \qquad (2.33a)$$

Il dépend du terme ζ_0 qui s'écrit, C_0 et F_0 étant nuls [Eq. (2.14)]

$$\zeta_0 = \frac{\rho_0}{\rho_1} x_{\mathrm{T}}^{\ 2} \frac{A_0}{E_0} \ . \qquad (2.33b)$$

Pour $x << 1$, A_0 est égal à $-x_{\mathrm{L}}^2/2$ et E_0 à $x_{\mathrm{T}}^2 - x_{\mathrm{L}}^2$. Les valeurs approchées des fonctions de Bessel sont données par l'équation (2.18). Le terme ζ_0 s'écrit alors en fonction de x

$$\zeta_0 \approx -\frac{x^2}{2} \frac{\rho_0 c_0^{\ 2}}{\rho_1 \left(c_{\mathrm{L}}^{\ 2} - c_{\mathrm{T}}^{\ 2}\right)}, \qquad x << 1. \qquad (2.34a)$$

Pour $x << 1$, x^2H_0 est négligeable devant xH_0' et x^2J_0 est du même ordre que xJ_0'. L'expression approchée du coefficient R_0 est

$$R_0 \approx -\frac{\zeta_0 + x^2/2}{-2i/\pi}, \qquad x << 1. \tag{2.34b}$$

On retrouve les expressions de α et c telles que $\alpha c \approx R_0$ [Eq. (2.32)].

Il est possible de faire la même analyse pour R_1. Le terme ζ_1 tend vers ρ_0/ρ_1 pour $x << 1$. Le terme H_1 est du même ordre que xH_1'. De même J_1 est du même ordre que xJ_1'. Le coefficient R_1 tend vers

$$R_1 \approx -\frac{\frac{x}{2}(\zeta_1 - 1)}{-2i/\pi x(\zeta_1 + 1)}, \qquad x << 1. \tag{2.35}$$

On retrouve les expression de β et c telles que $\beta c \approx -2R_1$ [Eq. (2.32)].

Pour $n \geq 2$, le terme ζ_n est proportionnels à $x^2/(n-1)$ d'après l'équation (2.27b). Pour $x << n$, les termes J_n et H_n étant du même ordre que xJ_n' et xH_n' respectivement , les termes x^2J_n et x^2H_n sont négligeables devant xJ_n' et xH_n'. Les coefficients R_n tendent donc vers la limite infiniment rigide : leur expression est donné par l'équation (2.20). Sur les figures 2.9 et 2.14, les modules de coefficients R_2 et suivant tendent effectivement vers la limite rigide pour $x << n$.

Dans le cas d'un cylindre fluide, les expressions approchées des deux premiers coefficients sont d'après les équations (2.16), (2.18) et (2.19)

$$R_0 \approx \frac{i\pi}{2}\frac{1}{\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma - \frac{Z_1}{Z_0}}, \qquad x << 1, \tag{2.36a}$$

$$R_1 \approx -i\frac{\pi}{4}x^2\frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}, \qquad x << 1. \tag{2.36b}$$

Ces approximations sont valables pour k_0a inférieur à 0,2.

II.2 Pression diffusée par un tube élastique

Dans ce paragraphe, le cas du tube cylindrique est étudié. Le développement de la pression diffusée en modes normaux de vibrations cylindriques est encore valable en considérant les conditions aux limites pour les faces internes et externes du tube. Cependant, si le rayon est de du même ordre que les distances d'observation, l'approximation champ lointain n'est plus vérifiée.

II.2.1 Géométrie du problème

Considérons un tube de rayon externe a, de rayon interne b, d'épaisseur e, supposé infini suivant la direction (Oz), plongé dans un milieu homogène, de densité ρ_0 et de vitesse de l'onde longitudinale c_0. Le matériau du tube est homogène et isotrope vis à vis des lois de l'élasticité. Il est caractérisé par sa masse volumique ρ_1, et par les vitesses des ondes longitudinale et transverse c_L et c_T. Le milieu interne est un fluide caractérisé par une densité ρ_2 et une de vitesse de l'onde longitudinale c_2 (figure 2.16).

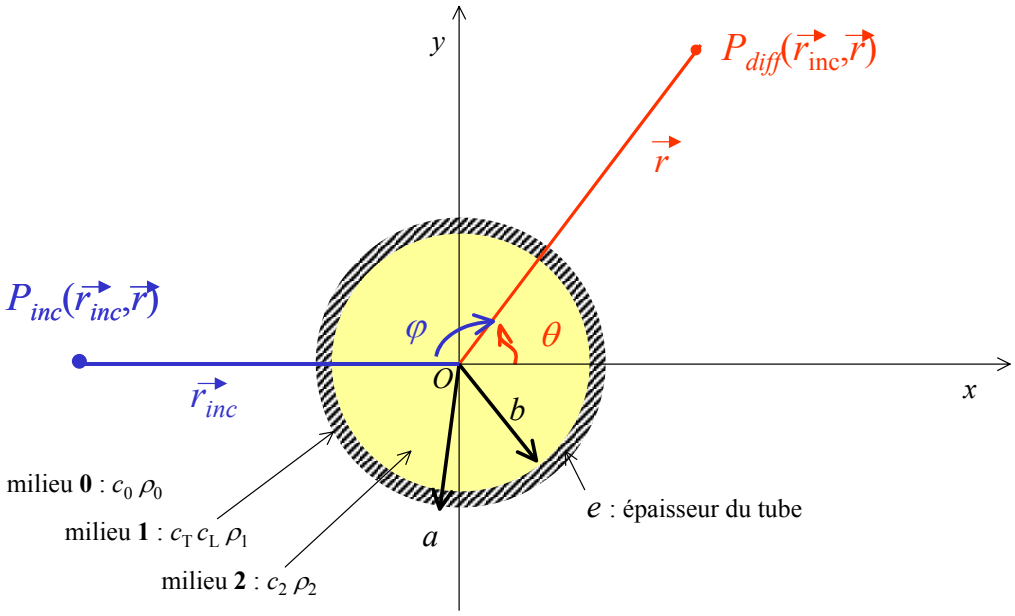


figure 2.16 : géométrie du problème

L'expression de la pression diffusée par un tube élastique est formellement identique à la pression diffusée par un cylindre élastique : une somme infinie de modes normaux de vibrations cylindriques, pondérés par des coefficients R_n [équation (2.2)]. Cependant, les expressions de ces coefficients de diffusions sont différentes. Elles sont obtenues par l'étude des conditions aux limites entre le cylindre et les milieux interne et externe, pour $r = a$ et $r = b$, les rayons du tube.

Dans la plupart des cas étudiés par la suite, le rayon a n'est pas négligeable devant les distances r et r_{inc}. Le formalisme utilisé sera celui de l'onde incidente cylindrique : l'équation de la pression diffusée est de la forme de l'équation (2.11), soit

$$P_{diff}\left(\vec{r}_{inc},\vec{r}\right)=\frac{1}{4i}\left(P_0^{(c)}e^{-i\omega t}\right)\sum_{n=0}^{m}\varepsilon_n R_n \mathrm{H}_n^{(1)}\left(k_0 r_{inc}\right)\mathrm{H}_n^{(1)}\left(k_0 r\right)\cos\left\{n\left(\varphi-\varphi_{inc}\right)\right\}.$$

II.2.2 Expression des coefficients R_n

Le coefficient de diffusion R_n, où n est l'ordre du mode normal, s'écrit comme le rapport de deux déterminants.[5,9] L'expression des coefficient R_n proposée ici est adaptée de celle donnée par Rousselot [9]

$$R_n=\frac{D_n^{[1]}}{D_n}\ , \tag{2.37a}$$

où le déterminant D_n a pour expression

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha_{11}(a) & \alpha_{12}(a) & \dots & \alpha_{15}(a) & 0 \\ \alpha_{21}(a) & \alpha_{22}(a) & & \alpha_{25}(a) & 0 \\ 0 & \dfrac{\alpha_{32}(a)}{\alpha_{12}(b)} & - & \dfrac{\alpha_{35}(a)}{\alpha_{15}(b)} & 0 \\ 0 & \alpha_{22}(b) & & \alpha_{25}(b) & \alpha_{46}(b) \\ 0 & \alpha_{32}(b) & \dots & \alpha_{35}(b) & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.37b}$$

Les trois premières lignes du déterminant concernent les conditions aux limites entre le milieu environnant et le tube, en $r = a$. Les trois suivantes concernent les conditions aux limites entre le milieu interne et le tube, en $r = b$.

Les expressions des coefficients centraux, colonnes 2 à 5, dépendent des fonctions cylindriques d'ordre n de Bessel J_n et de Neumann Y_n et de leur dérivée première. Les variable x_L et x_T sont égales à $k_\mathrm{L}r = \omega r/c_\mathrm{L}$ et $k_\mathrm{T}r = \omega r/c_\mathrm{T}$ respectivement, où c_L et c_T sont les

vitesses des ondes longitudinale et transverse dans le cylindre. La variable r est égale à a ou b, les rayons externe et interne du tube.

Les coefficients de la première ligne s'écrivent, en fonction de r

$$\alpha_{12}(r) = \left(x_{\mathrm{T}}^{\ 2} - 2n^2\right)\mathrm{J}_n(x_{\mathrm{L}}) + 2x_{\mathrm{L}}\mathrm{J}_n'(x_{\mathrm{L}}) \ , \tag{2.38a}$$

$$\alpha_{13}(r) = \left(x_{\mathrm{T}}^{\ 2} - 2n^2\right)\mathrm{Y}_n(x_{\mathrm{L}}) + 2x_{\mathrm{L}}\mathrm{Y}_n'(x_{\mathrm{L}}) \ , \tag{2.38b}$$

$$\alpha_{14}(r) = -2n\left[\mathrm{J}_n(x_{\mathrm{T}}) - x_{\mathrm{T}}\mathrm{J}_n'(x_{\mathrm{T}})\right] \ , \tag{2.38c}$$

$$\alpha_{15}(r) = -2n\left[\mathrm{Y}_n(x_{\mathrm{T}}) - x_{\mathrm{T}}\mathrm{Y}_n'(x_{\mathrm{T}})\right] \ , \qquad r = a \text{ ou } b \ . \tag{2.38d}$$

Les coefficients de la deuxième ligne s'écrivent

$$\alpha_{22}(r) = -x_{\mathrm{L}}\mathrm{J}_n'(x_{\mathrm{L}}) \ , \tag{2.39a}$$

$$\alpha_{23}(r) = -x_{\mathrm{L}}\mathrm{Y}_n'(x_{\mathrm{L}}) \ , \tag{2.39b}$$

$$\alpha_{24}(r) = n\mathrm{J}_n(x_{\mathrm{T}}) \ , \tag{2.39c}$$

$$\alpha_{25}(r) = n\mathrm{Y}_n(x_{\mathrm{T}}) \ , \qquad r = a \text{ ou } b \ . \tag{2.39d}$$

Les coefficients de la troisième ligne s'écrivent

$$\alpha_{32}(r) = -2n\left[\mathrm{J}_n(x_{\mathrm{L}}) - x_{\mathrm{L}}\mathrm{J}_n'(x_{\mathrm{L}})\right], \tag{2.40a}$$

$$\alpha_{33}(r) = -2n\left[\mathrm{Y}_n(x_{\mathrm{L}}) - x_{\mathrm{L}}\mathrm{Y}_n'(x_{\mathrm{L}})\right], \tag{2.40b}$$

$$\alpha_{34}(r) = \left(x_{\mathrm{T}}^{\ 2} - 2n^2\right)\mathrm{J}_n(x_{\mathrm{T}}) + 2x_{\mathrm{T}}\mathrm{J}_n'(x_{\mathrm{T}}), \tag{2.40c}$$

$$\alpha_{35}(r) = \left(x_{\mathrm{T}}^{\ 2} - 2n^2\right)\mathrm{Y}_n(x_{\mathrm{T}}) + 2x_{\mathrm{T}}\mathrm{Y}_n'(x_{\mathrm{T}}), \qquad r = a \text{ ou } b \ . \tag{2.40d}$$

Les éléments de la première colonne dépendent des variables x et x_{T} égales à $k_0a = \omega a/c_0$ et $\omega a/c_{\mathrm{T}}$, des densités des milieux 0 et 1, ρ_0 et ρ_1, ainsi que la fonction de Hankel et de sa dérivée première. Ils ont pour expressions

$$\alpha_{11}(a) = x_{\mathrm{T}}^{\ 2}\mathrm{H}_n^{(1)}(x), \tag{2.41a}$$

$$\alpha_{21}(a) = -\frac{\rho_1}{\rho_0}x\mathrm{H}_n^{(1)\prime}(x), \qquad r = a \ . \tag{2.41b}$$

Les éléments de la dernière colonne dépendent des variables $x_2 = k_2b = \omega b/c_2$ et $x_{\mathrm{T}} = \omega b/c_{\mathrm{T}}$, des densités des milieux 1 et 2, ρ_1 et ρ_2, ainsi que la fonction de Bessel et de sa dérivée en x_2.

Ils ont pour expressions

$$\alpha_{46}(b) = x_{\mathrm{T}}{}^{2}\mathrm{J}_n(x_2), \tag{2.42a}$$

$$\alpha_{56}(b) = -\frac{\rho_1}{\rho_2} x_2 \mathrm{J}_n'(x_2), \qquad r = b\ . \tag{2.42b}$$

L'expression du déterminant $D_n^{[1]}$ est identique à celle de D_n à l'exception des éléments $\alpha_{11}(a)$ et $\alpha_{21}(a)$ de la première colonne remplacés par les éléments $\beta_1(a)$ et $\beta_2(a)$

$$\beta_1(a) = -x_{\mathrm{T}}{}^{2}\mathrm{J}_n(x), \tag{2.43a}$$

$$\beta_2(a) = \frac{\rho_1}{\rho_0} x \mathrm{J}_n'(x), \qquad r = a\ . \tag{2.43b}$$

Remarque : l'expression des coefficients de diffusion du cylindre est obtenue par passage à la limite lorsque b tend vers 0. Cela revient à conserver la partie supérieure du déterminant ($r = a$) et en retirant les termes avec des fonctions de Neumann (α_{13}, α_{23} et α_{33} ainsi que α_{15}, α_{25} et α_{35}). Dans ce cas, le déterminant se réduit à

$$D_n^{cyl} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}(a) & \alpha_{12}(a) & \alpha_{14}(a) \\ \alpha_{21}(a) & \alpha_{22}(a) & \alpha_{24}(a) \\ 0 & \alpha_{32}(a) & \alpha_{34}(a) \end{vmatrix}\ . \tag{2.44}$$

Le coefficient R_n donné par le rapport des déterminants est alors identique à celui donné précédemment pour un cylindre élastique par les équations (2.12) à (2.14), avec $A_n = -\alpha_{22}$, $B_n = -\alpha_{32}$, $C_n = \alpha_{24}$, $D_n = -\alpha_{34}$, $E_n = -\alpha_{12}$, $F_n = -\alpha_{14}$.

Lien avec la limite solide infiniment rigide

Pour un tube métallique plongé dans l'eau et rempli d'air, pour $x >> 1$, les coefficients de diffusion R_n sont proches de ceux donnés par l'approximation infiniment rigide à l'équation (2.17a), soit $R_n \approx -J_n'(x)/H_n^{(1)\prime}(x)$. Cela revient à considérer le cas de la réflexion totale ou qu'aucune énergie ne pénètre dans l'objet en négligeant les résonances.[7,8,9] Dans la limite $x << 1$, le cylindre d'acier est plus proche du cas limite solide infiniment rigide que le tube.

La figure 2.17 présente le module et phase des coefficients R_0 et R_4 pour deux tubes d'acier rempli d'air (e/a = 5 % et 10 %) comparés au cas d'un cylindre d'acier de même rayon a. Les coefficients de l'acier sont identiques à ceux présentés sur la figure 2.10.

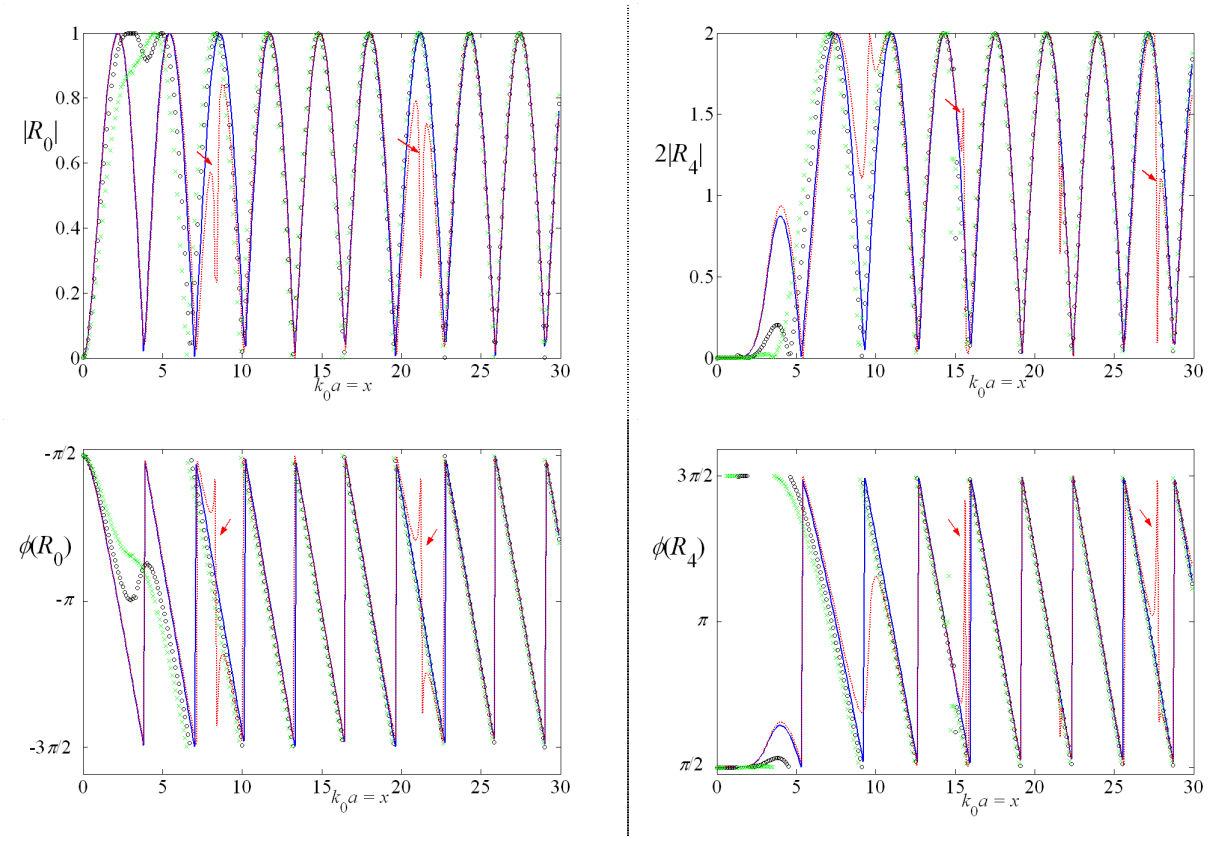


figure 2.17 : module et phase de R_0 (gauche) et $2R_4$ (droite):
limite solide infiniment rigide (–), tube e/a = 10 % (o), e/a = 5 % (×) et cylindre d'acier (--).
Les résonances du cylindre sont marquées par des flèches.

II.2.3 Limite petit objet, $x \ll 1$

Considérons un tube rempli d'air, placé dans l'eau, dont l'épaisseur e est petite devant le rayon a. La compressibilité isotrope du tube, en deux dimensions s'écrit [13]

$$\tilde{\chi}_1 = 2\frac{a}{e}\frac{\left(1-\nu^2\right)}{E}, \qquad e \ll a,\ \rho_2 \ll \rho_0,\ \rho_1 . \tag{2.45a}$$

où E est le module d'Young et ν le coefficient de Poisson du tube. En fonction de la densité du tube et des vitesses des ondes longitudinale et transverse, la compressibilité s'écrit

$$\tilde{\chi}_1 = \frac{1}{2}\frac{a}{e}\frac{c_{\mathrm{L}}{}^2 / c_{\mathrm{T}}{}^2}{\rho_1\left(c_{\mathrm{L}}{}^2 - c_{\mathrm{T}}{}^2\right)}, \qquad e \ll a,\ \rho_2 \ll \rho_0,\ \rho_1 . \tag{2.45b}$$

Comme précédemment, la compressibilité du fluide environnant est notée χ_0 et vaut $1/\rho_0 c_0^2$. En considérant le tube comme vide, la masse d'une section du tube est égale à $\rho_1 \pi\, e(2a - e)$. En divisant par la surface de la section πa^2, la masse volumique du tube, notée $\tilde{\rho}_1$, s'écrit

$$\tilde{\rho}_1 = \rho_1 \frac{e}{a}\left(2 - \frac{e}{a}\right), \qquad \rho_2 \ll \rho_1 . \tag{2.46}$$

Comme pour le cas du cylindre élastique, on peut écrire les valeurs approchées des deux termes significatifs de la somme, pour $x \ll 1$, R_0 et R_1 [Eq. (2.31)]. Ces coefficients vérifient $R_0 \approx \alpha c$ et $-2R_1 \approx \beta c$. Les expressions des termes α et β et c sont formellement identiques aux expressions du cylindre données à l'équation (2.32)

$$\alpha = 1 - \frac{\tilde{\chi}_1}{\chi_0}, \tag{2.47a}$$

$$\beta = 2\frac{\tilde{\rho}_1 - \rho_0}{\tilde{\rho}_1 + \rho_0}, \tag{2.47b}$$

$$c = -\, i\pi (k_0 a)^2/4 . \tag{2.47c}$$

Leur signification est également identique au cas du cylindre élastique : α est le *contraste de compressibilité*, β le *contraste de densité* et c le *coefficient de diffusion*. La pression rétro-diffusée en champ lointain est identique au cas du petit cylindre donnée par l'équation (2.30b)

$$P_{diff}(r,\theta) \approx \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}}\, e^{ik_0 r}\left(\alpha c + \beta c \cos\varphi + o\left(x^4\right)\right), \qquad x \ll 1,\ a \ll r.$$

e/a	1 %	5 %	10 %	15 %	20 %
α	–1,19	0,57	0,79	0,86	0,89
β	–1,46	-0,27	0,39	0,74	0,95

Tableau 3 .Valeurs des coefficients α et β de l'acier en fonction du rapport de l'épaisseur au rayon du tube (*e*/*a*)

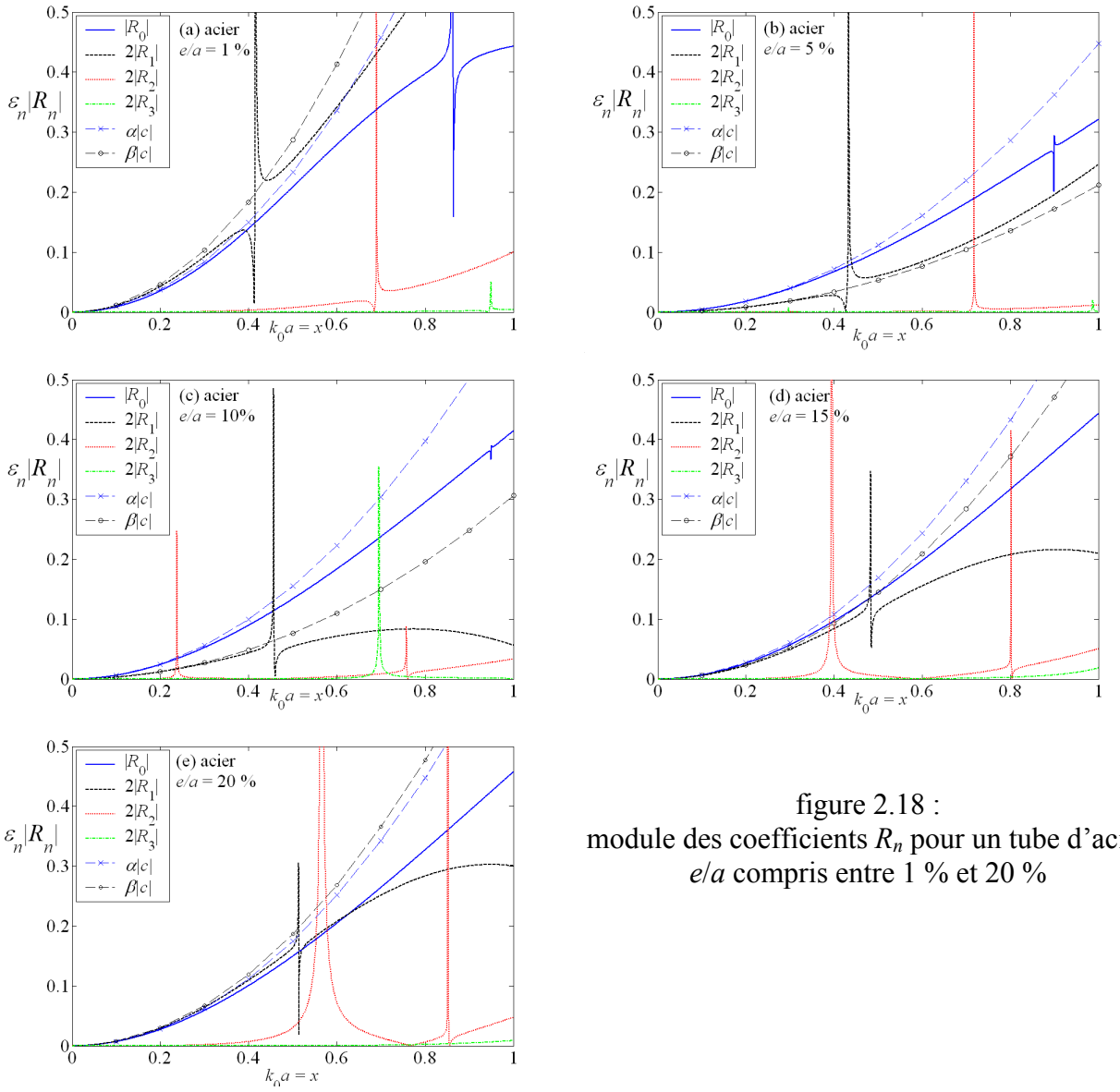


figure 2.18 :
module des coefficients R_n pour un tube d'acier *e*/*a* compris entre 1 % et 20 %

Les valeurs de α et β pour un rapport e/a variant entre 1 % et 20 % sont données dans le tableau 3 pour un tube d'acier. Les modules des coefficients de diffusion et de leur valeur approchée sont tracés sur la figure 2.18. Les coefficients de diffusion présentent des résonances, comme par exemple R_1 pour $x = 4{,}1$, dans le premier cas $e/a = 1\%$. La phase du coefficient présente alors un saut de π. Ce développement est formellement identique au cas des petits cylindres pour $x << 1$. L'approximation est valable tant que $k_0 a$ est inférieur à 0,5.

Remarque : le module d'Young et le coefficient de Poisson s'expriment en fonction de ρ_1, c_L et c_T suivant [14]

$$E = \rho_1 c_T^{\ 2} \frac{3-4r}{1-r}, \tag{2.48}$$

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{1-2r}{1-r}\right). \tag{2.49}$$

Le terme r a pour expression $r = \left(\frac{c_T}{c_L}\right)^2$. Cette expression permet d'exprimer la compressibilité en fonction de ρ_1, c_L et c_T [Eq. (2.45b)].

II.3 Pression diffusée par une sphère élastique

Dans ce paragraphe, la diffusion acoustique d'une sphère élastique est étudiée. Le formalisme utilisé est celui des modes normaux de vibrations sphériques, ou à trois dimensions (3D). Le problème de la diffusion élastique a été résolu par Faran en 1951,[4] puis corrigé par Hickling en 1962.[15] L'étude des résonances des coefficients de diffusion a également été entreprise dans les années 1970 et 1980, en utilisant le formalisme de la physique quantique, notamment par Williams et Marston.[16]

II.3.1 Géométrie du problème

Considérons une sphère de rayon a, plongée dans un milieu homogène, de densité ρ_0 et de vitesse de l'onde longitudinale c_0, dont le matériau est homogène et isotrope vis à vis des lois de l'élasticité. La sphère est caractérisé par sa masse volumique ρ_1, et par les vitesses des ondes longitudinale et transverse c_L et c_T. Au moyen d'un formalisme identique, il est possible d'exprimer la pression incidente $P_0 e^{i(\vec{k}_0\vec{r}-\omega t)}$ par une somme de modes normaux sphériques [15]

$$P_{inc} = \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^n \mathrm{P}_n(\cos\theta)\mathrm{j}_n(k_0 r) \ . \qquad (2.50a)$$

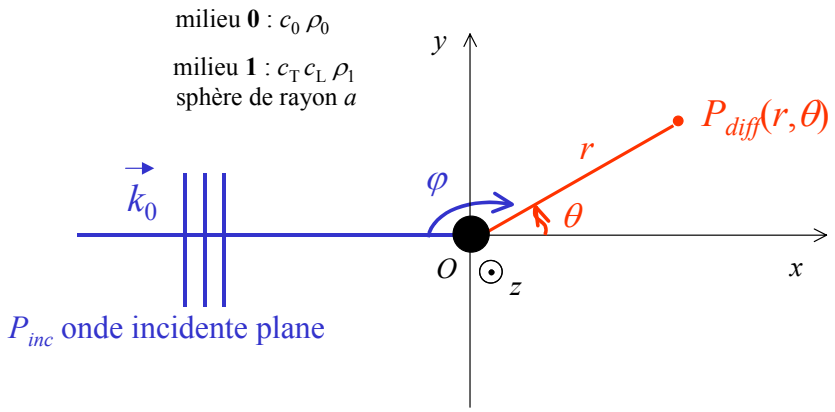


figure 2.19 : géométrie du problème

De même, la pression diffusée par la sphère s'exprime [15]

$$P_{diff}(r,\theta) = \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) R_n \mathrm{P}_n(\cos\theta)\mathrm{h}_n^{(1)}(k_0 r). \qquad (2.50b)$$

Remarque : la dépendance suivant la composante z ou suivant l'angle φ du repère (O,r,θ,φ) n'est pas étudiée ici. L'angle φ continue de représenter l'angle de rétro-diffusion $\pi - \theta$.

Le coefficient de Neumann ε_n est remplacé par le terme $2n+1$, qui correspond au nombre de vibrations indépendantes à l'ordre n : il existe un mode sphérique ($n = 0$), trois modes dipolaires ($n = 1$), cinq modes pour l'ordre 2 … Comme dans le cas cylindrique, les modes normaux de vibrations, ou ondes partielles, sont pondérés par un terme R_n dépendant des paramètres physiques du diffuseur et du milieu environnant. L'expression des coefficients de diffusion R_n est donnée par la suite (§ II.3.2).

Les modes normaux de vibrations sphériques

La dépendance angulaire n'est plus en $\cos(n\theta)$ mais dépend du polynôme de Legendre d'ordre n : $P_n(\cos\theta)$. Les polynômes de Legendre $P_n(x)$ sont définis pour x compris entre –1 et 1. Les premiers ordres s'expriment (ref. 11 chap. 8 p. 333)

$$P_0(x) = 1 \,, \tag{2.51a}$$

$$P_1(x) = x \,, \tag{2.51b}$$

$$P_2(x) = 1/2\,(3x^2 - 1) \,, \tag{2.51c}$$

$$P_3(x) = 1/2\,(5x^3 - 3x) \,\ldots \tag{2.51d}$$

En fonction des $\cos(n\theta)$, les polynômes de Legendre s'expriment

$$P_0(\theta) = 1 \,, \tag{2.52a}$$

$$P_1(\theta) = \cos\theta \,, \tag{2.52b}$$

$$P_2(\theta) = 1/4\,(\,3\cos(2\theta) + 1\,) \,, \tag{2.52c}$$

$$P_3(\theta) = 1/8\,(\,5\cos(3\theta) + 3\cos\theta\,) \,\ldots \tag{2.52d}$$

Les polynômes de Legendre ont la même parité que l'ordre n : $P_n(-\theta) = (-1)^n P_n(\theta)$. Les premiers modes normaux sont représentés sur la figure 2.20. Les deux premiers modes ont la même dépendance angulaire que dans le cas cylindrique (1 et $\cos\theta$).

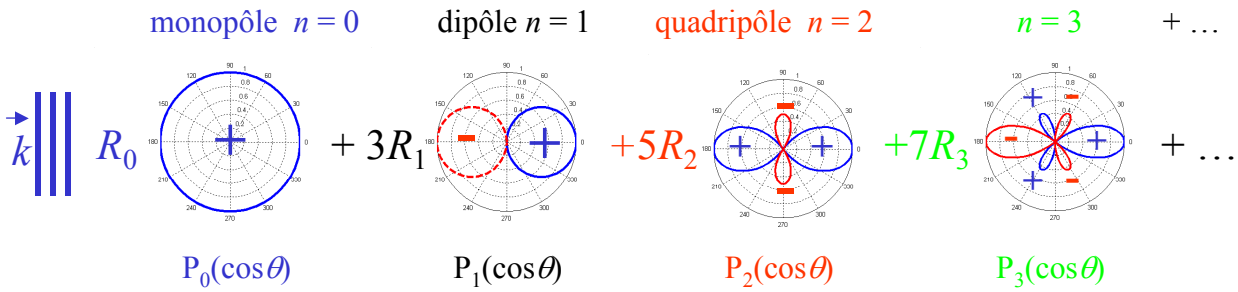


figure 2.20 : les modes normaux de vibrations sphériques dans le plan (O,r,θ)

Approximation champ lointain

Le terme propagatif est la fonction de Hankel sphérique d'ordre n et de première espèce : $\mathrm{h}_n^{(1)}(k_0 r)$. De même, la fonction $\mathrm{j}_n(k_0 r)$ correspond à la fonction de Bessel sphérique. Les fonctions de Bessel sphériques sont décrites dans le livre d'Abramowitz et Stegun [11] au chapitre 9 (pages 437 et suivantes). Les liens entre les fonctions de Bessel et Hankel sphériques (3D) et cylindriques (2D) s'écrivent

$$\mathrm{j}_n(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}}\mathrm{J}_{n+1/2}(k_0 r), \tag{2.53a}$$

$$\mathrm{h}_n^{(1)}(k_0 r) = \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}}\mathrm{H}_{n+1/2}^{(1)}(k_0 r). \tag{2.53b}$$

A l'ordre 0, la fonction de Bessel sphérique $\mathrm{j}_0(x)$ est égal au sinus cardinal $\sin(x)/x$, noté $\mathrm{sinc}(x)$. La fonction de Hankel à l'ordre 0 vérifie $\mathrm{h}_0^{(1)}(x) = e^{ix}/ix$. On retrouve l'expression classique de la fonction de Green à trois dimensions. En champ lointain, la fonction de Hankel sphérique d'ordre n a pour expression approchée, d'après l'équation (2.5)

$$\mathrm{h}_n^{(1)}(k_0 r) \approx i^{-n}\frac{1}{ik_0 r}e^{ik_0 r}, \qquad n \ll k_0 r. \tag{2.53c}$$

En notant m l'ordre du dernier mode significatif, de l'ordre de $k_0 a$, l'expression de la pression diffusée en champ lointain devient :

$$P_{diff}(r,\theta) \approx \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\frac{e^{ik_0 r}}{ik_0 r}\sum_{n=0}^{m}(2n+1)R_n \mathrm{P}_n(\cos\theta), \qquad a \ll r. \tag{2.54}$$

Comme exprimé précédemment, la dépendance suivant la composante z n'est pas étudiée ici. L'angle φ désigne l'angle de rétro-diffusion, soit $\varphi = \pi - \theta$. La pression retro-diffusée s'écrit, en fonction de φ

$$P_{diff}(r,\varphi) \approx \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\frac{e^{ik_0 r}}{ik_0 r}\sum_{n=0}^{m}(2n+1)R_n(-1)^n \mathrm{P}_n(\cos\varphi), \qquad a \ll r. \tag{2.55a}$$

En prenant en compte la position de la source, on obtient

$$P_{diff}(\vec{r}_{inc},\vec{r}) \approx \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\frac{e^{ik_0 r_{inc}}}{ik_0 r_{inc}}\frac{e^{ik_0 r}}{ik_0 r}\sum_{n=0}^{m}(2n+1)R_n(-1)^n \mathrm{P}_n\{\cos(\varphi-\varphi_{inc})\},$$

$$a \ll r \text{ et } a \ll r_{inc}. \tag{2.55b}$$

Cette expression sera utilisée dans la partie III pour calculer la réponse inter-élément du réseau.

Remarque : si le rayon de la sphère n'est pas négligeable devant les distances d'observation, la pression diffusée s'écrit

$$P_{diff}(\vec{r}_{inc},\vec{r}) \approx \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\sum_{n=0}^{m}(2n+1)R_n \mathrm{P}_n\{\cos(\varphi-\varphi_{inc})\}\mathrm{h}_n^{(1)}(k_0 r_{inc})\mathrm{h}_n^{(1)}(k_0 r). \qquad (2.55c)$$

II.3.2 Expression des coefficients R_n

L'expression du coefficient R_n dépend des fonctions de Bessel et Hankel sphériques j_n et $\mathrm{h}_n^{(1)}$ à l'ordre n et de leur dérivée première. La variable x est égale à $k_0a = \omega a/c_0$. Les variables x_L et x_T sont égales à $k_\mathrm{L}a = \omega a/c_\mathrm{L}$ et $k_\mathrm{T}a = \omega a/c_\mathrm{T}$ respectivement, où c_L et c_T sont les vitesses des ondes longitudinale et transverse dans la sphère. L'expression des coefficients de diffusion R_n proposée ici est adaptée de celle donnée par Williams et Marston [16]

$$R_n = -\frac{\mathrm{j}_n(x)\zeta_n - x\mathrm{j}_n'(x)}{\mathrm{h}_n^{(1)}(x)\zeta_n - x\mathrm{h}_n^{(1)\prime}(x)} \ . \qquad (2.56)$$

L'expression du coefficient ζ_n est

$$\zeta_n = \frac{\rho_0}{\rho_1} x_\mathrm{T}^{\ 2} \frac{A_n/B_n - C_n/D_n}{E_n/B_n - F_n/D_n} \ , \qquad (2.57)$$

dont les différents coefficients s'écrivent

$$A_n = x_\mathrm{L}\mathrm{j}_n'(x_\mathrm{L}) \ , \qquad (2.58a)$$

$$B_n = 2\left(\mathrm{j}_n(x_\mathrm{L}) - x_\mathrm{L}\mathrm{j}_n'(x_\mathrm{L})\right) \ , \qquad (2.58b)$$

$$C_n = n(n+1)\mathrm{j}_n(x_\mathrm{T}) \ , \qquad (2.58c)$$

$$D_n = 2x_\mathrm{T}\mathrm{j}_n'(x_\mathrm{T}) + \left(x_\mathrm{T}^{\ 2} - 2n(n+1) + 2\right)\mathrm{j}_n(x_\mathrm{T}) \ , \qquad (2.58d)$$

$$E_n = \left(x_\mathrm{T}^{\ 2} - 2n(n+1)\right)\mathrm{j}_n(x_\mathrm{L}) + 4x_\mathrm{L}\mathrm{j}_n'(x_\mathrm{L}) \ , \qquad (2.58e)$$

$$F_n = 2n(n+1)\left[\mathrm{j}_n(x_\mathrm{T}) - x_\mathrm{T}\mathrm{j}_n'(x_\mathrm{T})\right] \ . \qquad (2.58f)$$

En utilisant les définitions des fonctions sphériques [Eq. (2.53)] et de la dérivée des fonctions cylindriques [Eq. (2.15)], les dérivées premières des fonctions de Bessel et Hankel sphériques sont

$$\mathrm{j}_n'(x) = \mathrm{j}_{n-1}(x) - \frac{n+1}{x}\mathrm{j}_n(x), \qquad (2.59a)$$

$$\mathrm{h}_n^{(1)\prime}(x) = \mathrm{h}_{n-1}^{(1)}(x) - \frac{n+1}{x}\mathrm{h}_n^{(1)}(x). \qquad (2.59b)$$

Dans le cas d'une sphère fluide, il n'y a pas d'onde transverse : le terme ζ_n ne dépend plus de l'ordre n et est égal au rapport des impédances acoustiques $\zeta_n = \frac{Z_0}{Z_1} = \frac{\rho_0 c_0}{\rho_1 c_L}$, comme dans le cas cylindrique. Cette expression est donnée par Junger à l'équation (35) de la référence 10.

II.3.3 Limite solide infiniment rigide et infiniment mou

Dans la mesure où l'on considère la masse volumique de la sphère très supérieure à celle de l'eau, $\rho_1 >> \rho_0$, le terme ζ_n devient négligeable et le terme R_n vérifie [Eq. (2.56)]

$$R_n = -\frac{\mathrm{j}_n'(x)}{\mathrm{h}_n^{(1)}{}'(x)}\ , \qquad \rho_1 >> \rho_0\ . \qquad (2.60a)$$

Cette condition correspond à la limite solide infiniment **rigide**, ou condition de Neumann.[15]

Au contraire, si l'on considère la masse volumique de la sphère très inférieure à celle de l'eau, $\rho_1 << \rho_0$, le terme ζ_n devient grand et le terme R_n vérifie [Eq. (2.56)]

$$R_n = -\frac{\mathrm{j}_n(x)}{\mathrm{h}_n^{(1)}(x)}\ , \qquad \rho_1 << \rho_0\ . \qquad (2.60b)$$

Cette condition correspond à la limite solide infiniment **mou**, ou condition de Dirichlet.[15]

Expressions approchées des fonctions de Bessel et Hankel pour $x << n$

Les expressions approchées des fonctions sphériques de Bessel s'écrivent pour $x << n$ [11]

$$\mathrm{j}_0(x) \approx 1 - x^2/6, \qquad x << 1 \text{ et } n = 0, \qquad (2.61a)$$

$$\mathrm{j}_0'(x) \approx -x/3, \qquad x << 1 \text{ et } n = 0, \qquad (2.61b)$$

$$\mathrm{j}_n(x) \approx \frac{1}{1.3.5...(2n+1)} x^n\ , \qquad x << n \text{ et } n \geq 1, \qquad (2.61c)$$

$$\mathrm{j}_n'(x) \approx \frac{n}{1.3.5...(2n+1)} x^{n-1}\ , \qquad x << n \text{ et } n \geq 1. \qquad (2.61d)$$

La fonction de Hankel sphérique de première espèce est définie par la relation $\mathrm{h}_n^{(1)}(x) = \mathrm{j}_n(x) + i\mathrm{y}_n(x)$, où $\mathrm{y}_n(x)$ est la fonction de Neumann sphérique. Pour $x << n$, la fonction de Neumann diverge et la fonction de Bessel est bornée. La fonction de Hankel vérifie

$$\mathrm{h}_n^{(1)}(x) \approx i\mathrm{y}_n(x) \approx -i1.3.5...(2n-1)x^{-n-1}\ , \qquad x << n \text{ et } n \geq 0. \qquad (2.62a)$$

$$\mathrm{h}_n^{(1)}{}'(x) \approx i\mathrm{y}_n'(x) \approx i(n+1)1.3.5...(2n-1)x^{-n-2}\ , \qquad x << n \text{ et } n \geq 0. \qquad (2.62b)$$

Expressions approchées des coefficients de diffusion R_n pour $x << n$

Dans la limite solide infiniment **rigide**, l'expression approchée du coefficient de diffusion R_n est

$$R_n(x) \approx \frac{in}{[1.3.5...(2n-1)]^2(2n+1)(n+1)} x^{2n+1}, \qquad x << n \text{ et } n \geq 1. \qquad (2.63a)$$

Pour $x << n$, les premiers termes s'expriment

$$R_0 \approx -ix^3/3, \qquad x << 1, n = 0, \qquad (2.63b)$$

$$R_1 \approx ix^3/6, \qquad x << n = 1, \qquad (2.63c)$$

$$R_2 \approx ix^5 2/135, \qquad x << n = 2, \qquad (2.63d)$$

$$R_3 \approx ix^7/1350, \qquad x << n = 3. \qquad (2.63e)$$

Dans la cadre de la limite solide infiniment **mou**, pour $x << n$, l'expression approchée du coefficient de diffusion R_n est

$$R_n(x) \approx \frac{-i}{[1.3.5...(2n-1)]^2(2n+1)} x^{2n+1}, \qquad x << n, n \geq 0. \qquad (2.64a)$$

Pour $x << n$, les premiers termes s'expriment

$$R_0 \approx -ix, \qquad x << 1, n = 0, \qquad (2.64b)$$

$$R_1 \approx -ix^3/3, \qquad x << 1, n = 1, \qquad (2.64c)$$

$$R_2 \approx -ix^5/45, \qquad x << 2, n = 2, \qquad (2.64d)$$

$$R_3 \approx -ix^7/1575, \qquad x << 3, n = 3. \qquad (2.64e)$$

Dans le cas de la petite bulle d'air dans l'eau, en régime linéaire, le terme monopolaire R_0 est prépondérant. Le module et phase des coefficients de diffusion R_n sont représentés sur la figures 2.21 et 2.22 pour les deux conditions aux limites.

Dans le cas solide infiniment **rigide**, pour x petit devant 1, les deux premiers termes R_0 et R_1 sont équivalents en x^3. Les termes suivants R_n (en x^{2n+1}) sont négligeables. Le coefficient R_2 devient significatif à partir de x de l'ordre de 1. Plus x augmente, plus le nombre de termes non négligeables augmente. Pour chaque ordre, le premier maximum est atteint pour x de l'ordre de n+1/2. Les phases des coefficients R_n tendent vers $\pi/2$ pour $x << n$ et pour $n \geq 1$. La phase de R_0 tend vers $-\pi/2$ pour $x << 1$. Lorsque le module du coefficient R_n s'annule, sa phase présente un saut de π, comme par exemple R_1 pour $x = 2{,}1$.

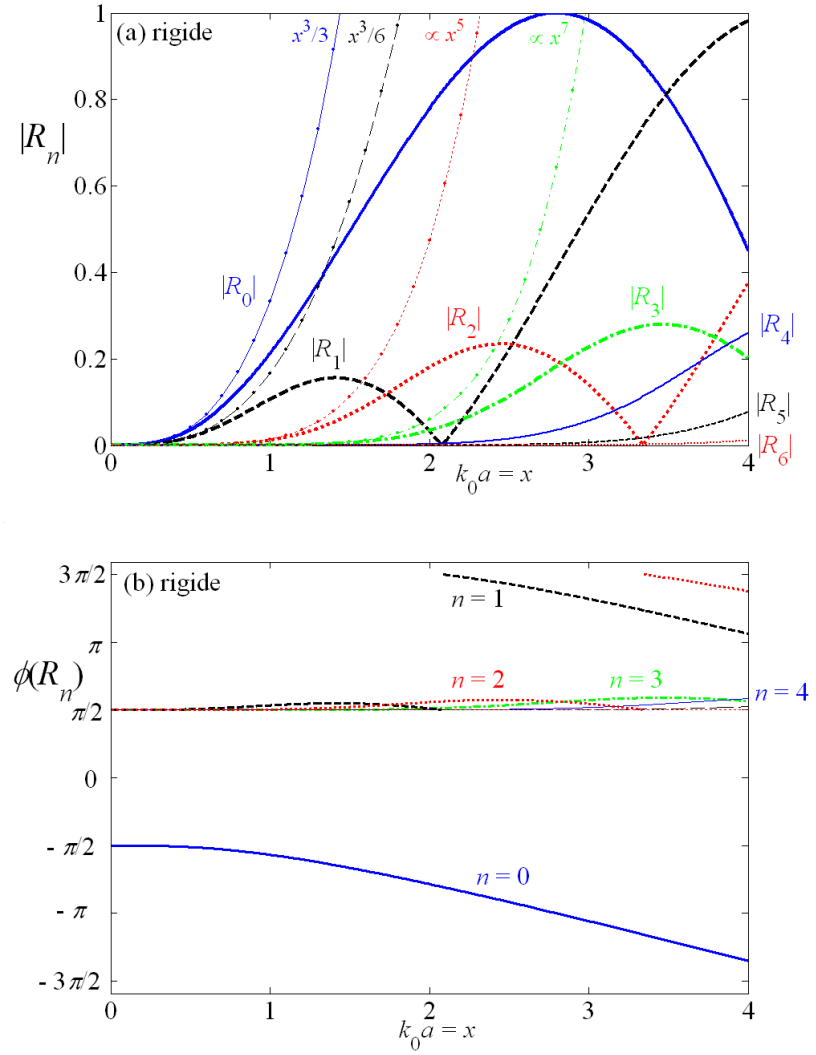


figure 2.21 : module (a) et phase (b) des coefficients R_n sphériques
limite infiniment **rigide**, valeurs exactes (traits) et approchées pour $x << n$ (•)

Dans le cas solide infiniment **mou**, pour $x << 1$, le terme monopolaire R_0 est prépondérant en x, les autres coefficients en x^{2n+1} sont négligeables, contrairement au cas rigide pour lequel les deux premiers termes sont équivalents. Plus x augmente, plus le nombre de termes significatifs augmente. Toutes les phases des coefficients R_n tendent vers $-\pi/2$ pour $x << 1$, contrairement au cas rigide où elles tendent vers $+\pi/2$, sauf pour R_0.

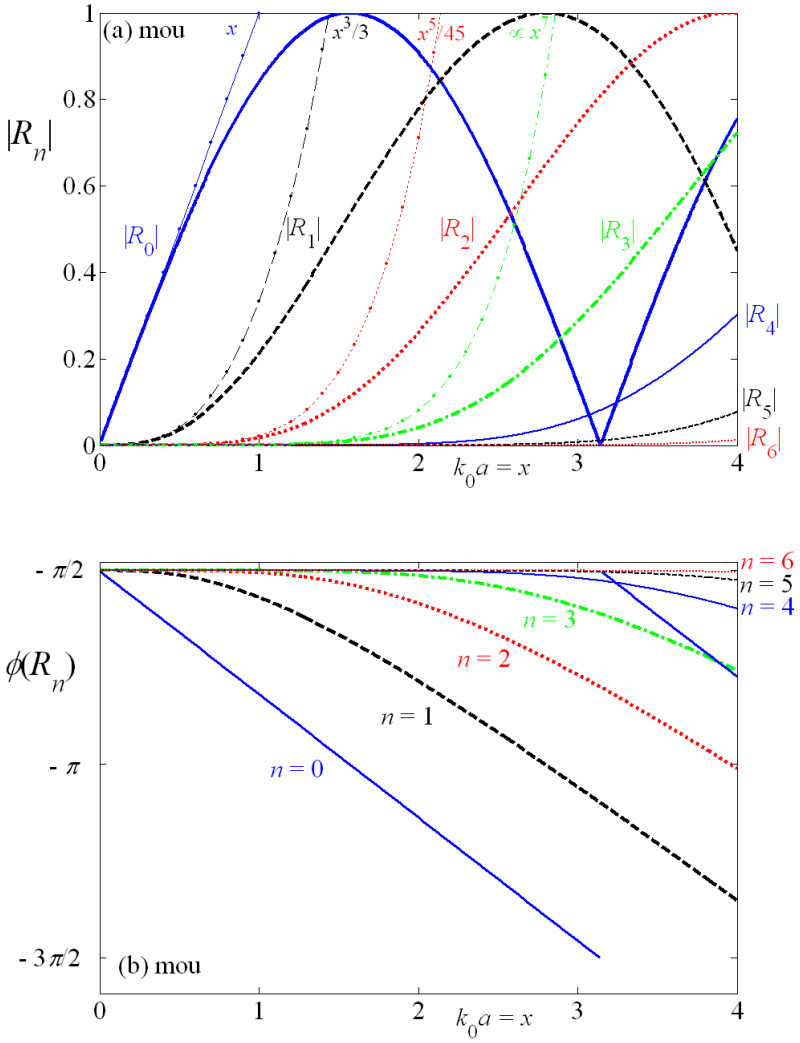


figure 2.22 : module (a) et phase (b) des coefficients R_n sphériques limite infiniment **mou**, valeurs exactes (traits) et approchées pour $x << n$ (•)

Etude du nombre de termes significatifs

Soit r l'ordre de grandeur des distance d'observation. D'après l'équation (2.55c), la pression diffusée en champ proche, pour r supérieur et de l'ordre de a, est donnée par une somme infinie de modes dont l'ordre de grandeur de chacun de ces modes est donné par $2R_n\left\{\mathrm{h}_n^{(1)}(k_0 r)\right\}^2$.

Pour $n << x = k_0 a$, les coefficients de diffusion R_n sont de l'ordre de 1 [Eqs. (2.24) et (2.53)]. Pour $n << k_0 r$, l'ordre de grandeur de la fonction de Hankel sphérique au carré est $1/(k_0 r)^2$ [Eq. (2.53c)]. La somme des modes normaux entre 0 et $n = x$ est de l'ordre

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n=0}^{x}(2n+1)R_n\left\{\mathrm{h}_n^{(1)}(k_0 r)\right\}^2\right| \le \sum_{n=0}^{x}\left|(2n+1)R_n\left\{\mathrm{h}_n^{(1)}(k_0 r)\right\}^2\right| \\ &\approx \sum_{n=0}^{x}(2n+1)\frac{1}{(k_0 r)^2}^{2} \approx \sum_{n=0}^{x}(2n+1)\frac{1}{x^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \approx \frac{1}{2}\frac{x(2x+2)}{x^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \approx \left(\frac{a}{r}\right)^2 .\end{aligned} \tag{2.65a}$$

Pour $n >> x = k_0 a$, les coefficients de diffusion R_n sont petit devant 1 [Eq. (2.63) et (2.64)]. Pour $n >> k_0 r$, la fonction de Hankel diverge d'après l'équation (2.62a). En combinant ces deux équations, l'ordre de grandeur des modes normaux vérifie pour $n >> x$

$$(2n+1)R_n\left\{\mathrm{h}_n^{(1)}(k_0 r)\right\}^2 \approx \frac{1}{k_0 r}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}, \qquad n >> x \text{ et } r > a. \tag{2.65b}$$

Ce terme est petit devant 1. L'ordre de grandeur de la somme des termes d'ordre supérieurs à x est

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n=x}^{\infty}(2n+1)R_n\left\{\mathrm{h}_n^{(1)}(k_0 r)\right\}^2\right| \le \sum_{n=x}^{\infty}\left|(2n+1)R_n\left\{\mathrm{h}_n^{(1)}(k_0 r)\right\}^2\right| \\ &\le \frac{1}{k_0 r}\sum_{n=x}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} \approx \frac{1}{k_0 r}\left(\frac{a}{r}\right)^{2x+1}\frac{1}{1-(a/r)^2}\end{aligned} . \tag{2.65c}$$

Pour x grand, cette somme devient négligeable devant la somme des termes entre 0 et x.

Comme dans le cas cylindrique, pour un x fixé, les coefficients R_n sont significatifs pour $n \le x$ et négligeables pour $n > x$. L'ordre du dernier terme significatif est noté m, sa valeur dépend de la précision désirée sur la pression diffusée : m est de l'ordre de $x = k_0 a$. Le reste de la somme est de l'ordre du premier terme négligé [Eq. (2.65c)].

II.3.4 Exemples : sphères d'acier et de nylon

Le comportement de l'**acier**, comme celui de la plupart des métaux, est proche du cas infiniment rigide, du fait du contraste important de masse volumique, $\rho_1 >> \rho_0$. Pour les grandes valeurs de x, il existe également des phénomènes de résonance dépendant des valeurs des vitesses c_T et c_L. Ces résonances ne sont pas prises en compte par le modèle infiniment rigide. La phase présente alors un saut de π. [7,8,9]

Remarques : 1) un changement de signe correspond également à un saut de π.
2) ces résonances se sont pas présentées ici.

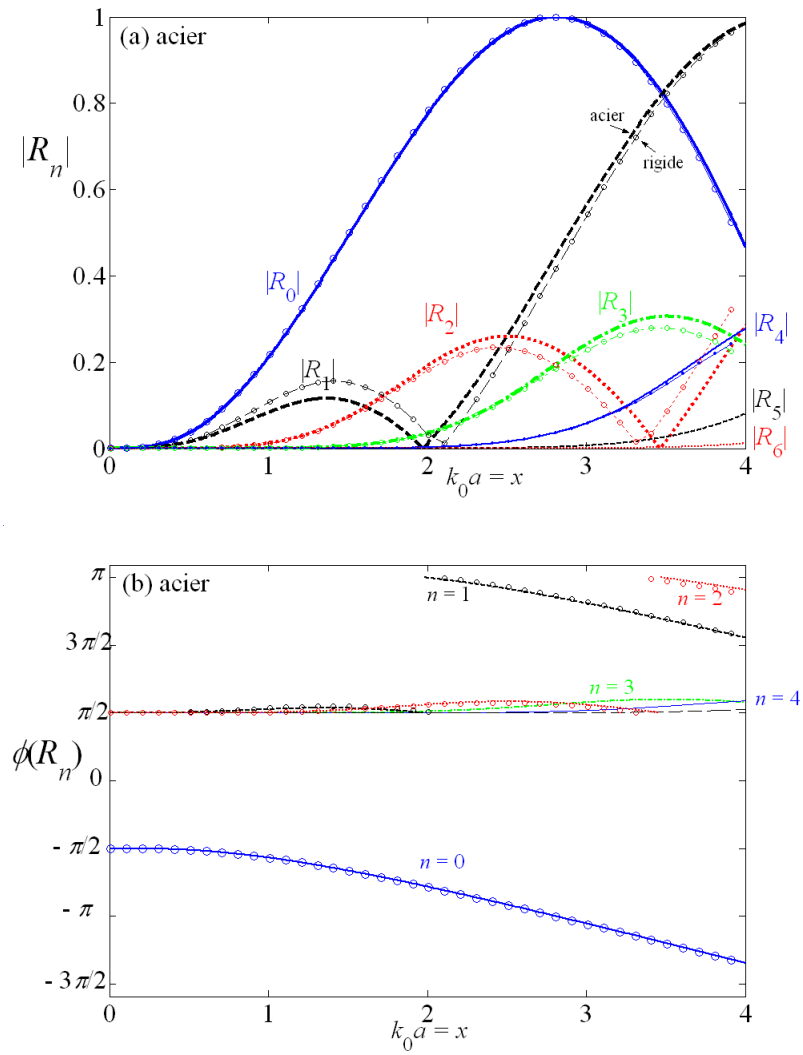


figure 2.23 : module (a) et phase (b) des coefficients R_n
d'une sphère d'**acier** (traits) et limite **rigide** (o et •) pour x entre 0 et 4.

Le comportement du **nylon** est différent du cas infiniment rigide, du fait du faible contraste de masse volumique, $\rho_1 \approx \rho_0$. On observe un phénomène de résonance du terme dipolaire R_1 pour k_0a égal 2,5 ainsi que du terme quadripolaire R_2 pour k_0a égal 3,6. La phase présente alors un saut de π.

Le module et phase des coefficients de diffusion R_n sont représentés sur les figures 2.23 et 2.24 pour des sphères d'acier et de nylon, pour k_0a compris entre 0 et 4. Les résonances du nylon sont marquées par une flèche. L'étoile (*) marque un « pic », décrit dans le cas du cylindre de nylon (§ II.1.4), tel que $R_n = -1$.

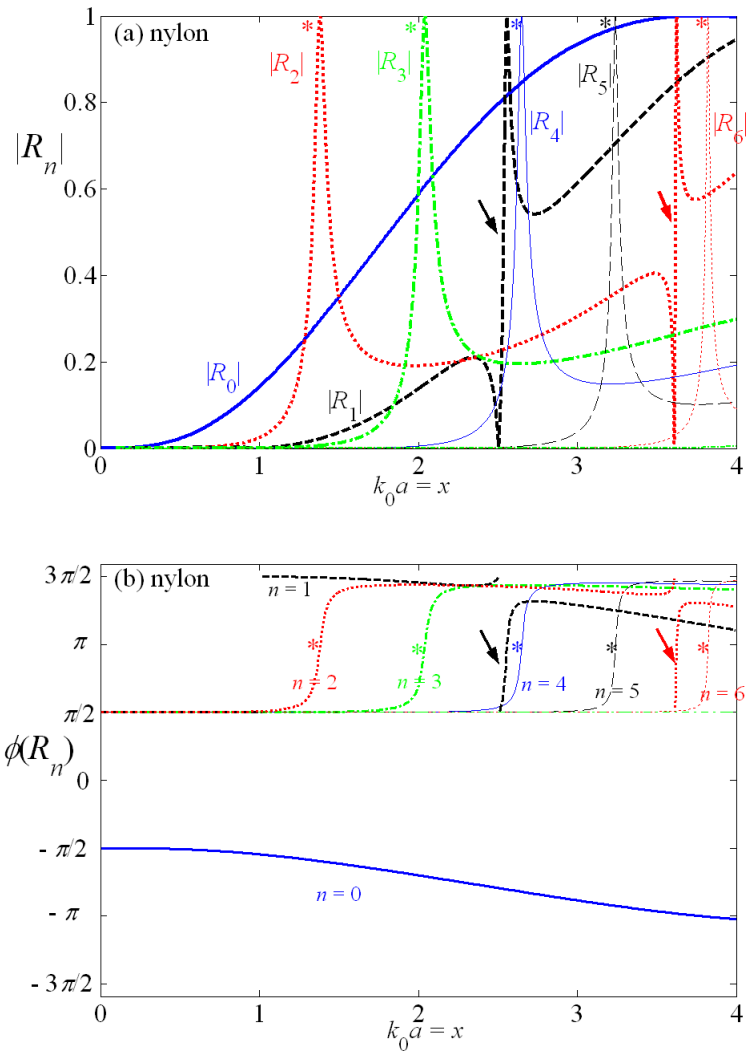


figure 2.24 : module (a) et phase (b) des coefficients R_n d'une sphère de **nylon** (traits) pour x entre 0 et 4.

Etude de la fonction de forme

La fonction de forme sphérique f_∞ a pour expression

$$f_\infty(\theta) = \frac{1}{ik_0 a} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) R_n P_n(\cos\theta) \ . \tag{2.66}$$

Le module de la fonction de forme sphérique est tracé pour différentes valeurs de k_0a entre 0,1 et 1,5 pour des sphères d'acier de nylon (figures 2.25). Pour l'**acier**, pour k_0a = 0,1, les seuls premiers termes R_0 et R_1 sont significatifs. La pression est principalement rétro-diffusée (pour θ autour de 180°). Pour k_0a supérieur, l'apparition des termes d'ordres supérieurs (R_2 à partir de 0,5, R_3 à partir de 1,5 …) modifie la dépendance angulaire de la pression diffusée.

Pour le **nylon**, à k_0a = 0,1, seul le premier terme R_0 est significatif. La pression est diffusée de façon quasiment isotrope. Pour k_0a = 1,5, le terme quadripolaire R_2 est prépondérant : la pression diffusée présente la même dépendance angulaire que le mode normal sphérique quadripolaire (figure 2.20).

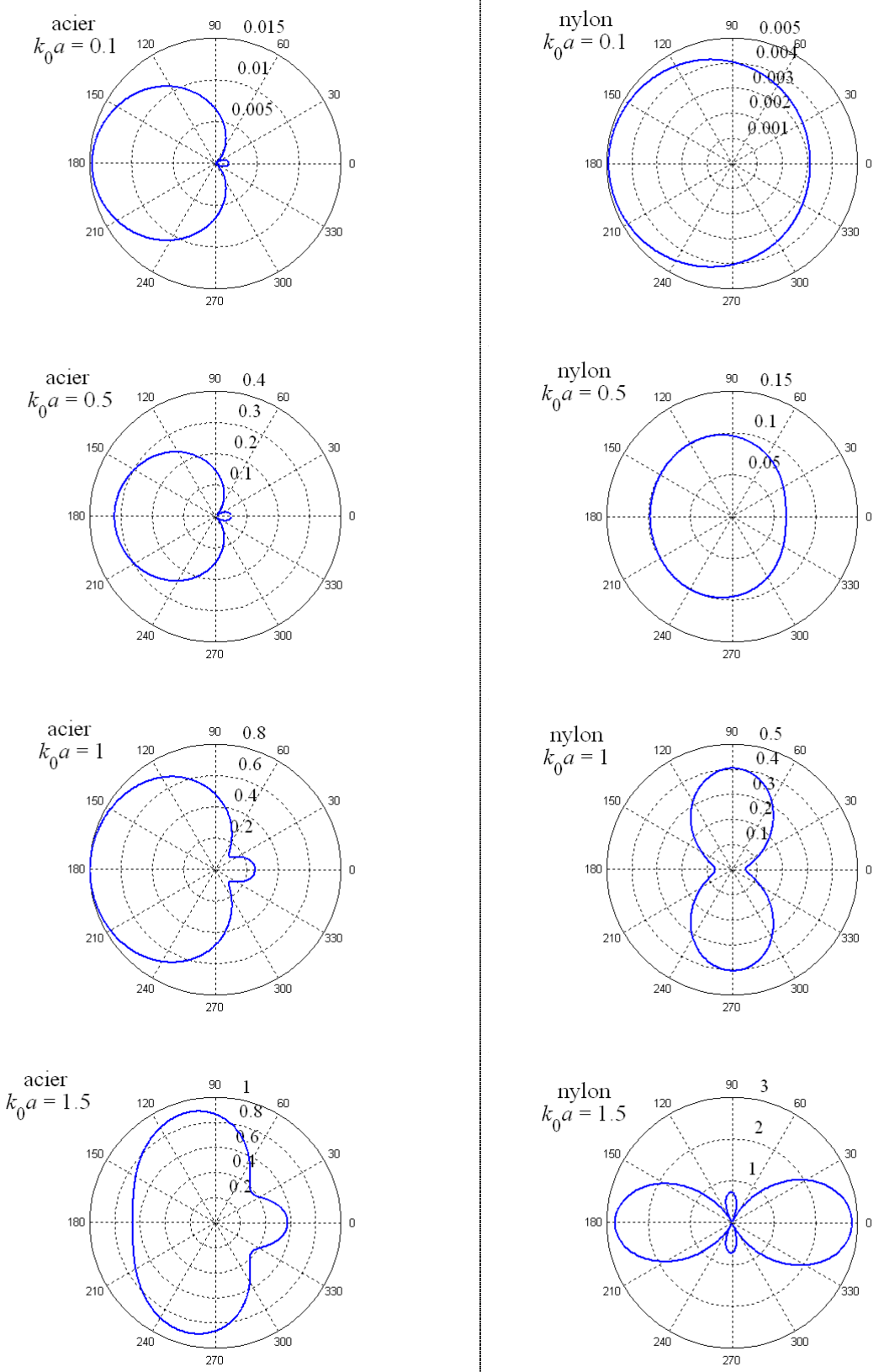


figure 2.25 : module de la fonction de forme de sphères d'**acier** (gauche) et de **nylon** (droite) pour k_0a compris entre 0,1 et 1,5

II.3.5 Limite petit objet, $x << 1$

Dans la limite $x << 1$ ainsi que $x_L = k_L a << 1$, les deux premiers coefficients de diffusion sont proportionnels à x^3, les suivants sont proportionnels à x^{2n+1} (figures 2.21 et 2.23). Les deux premiers coefficients R_0 et R_1 de la série sont donc prépondérants, les suivants à partir de R_2 sont négligeables. La pression rétro-diffusée en champ lointain s'exprime

$$P_{diff}(r,\varphi) = \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\frac{e^{ik_0 r}}{ik_0 r}\left(R_0 - 3R_1\cos\varphi + o\left(x^5\right)\right), \qquad x << 1,\ a << r\,. \tag{2.67}$$

Comme dans le cas cylindrique, les valeurs approchées des deux premiers termes de la somme sont exprimées suivant

$$\alpha c \approx R_0\,, \tag{2.68a}$$

$$\beta c \approx -3R_1\,. \tag{2.68b}$$

Chambers et Gautesen[17] ont développé le formalisme α et β à partir de l'expression de la pression diffusée par une petite sphère donnée par Rayleigh (Eq. (12) § 335)[1] et reprise par Morse et Ingard [Eq. (8.2.19)].[19] Les expressions des termes α, β et c sont dans le cas sphérique sont données ici en fonction des paramètres physiques de la sphère et du milieu environnant

$$\alpha = 1 - \frac{\rho_0 c_0^{\,2}}{\rho_1\left(c_L^{\,2} - 4/3\,c_T^{\,2}\right)}, \tag{2.69a}$$

$$\beta = 3\frac{\rho_1 - \rho_0}{2\rho_1 + \rho_0}, \tag{2.69b}$$

$$c = -\,i(k_0 a)^3/3\,. \tag{2.69c}$$

Le calcul permettant d'obtenir ces expressions est donné par la suite [Eqs. (2.71) à (2.73)].

Le module de compressibilité isotrope à trois dimensions en fonction des coefficients de Lamé a pour expression : $1/\chi_1 = \lambda + 2/3\mu = \rho_1(c_L^2 - 4/3c_T^2)$. Le module de compressibilité de l'eau, égal à $\rho_0 c_0^2$, est notée $1/\chi_0$ comme précédemment. Le terme α peut s'écrire sous la forme

$$\alpha = 1 - \frac{\chi_1}{\chi_0}\,. \tag{2.69d}$$

L'expression de la pression rétro-diffusée en champ lointain devient

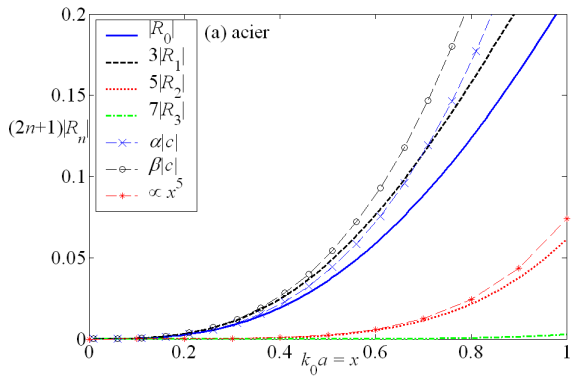
$$P_{diff}(r,\varphi) = \left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\frac{e^{ik_0 r}}{ik_0 r}\left(\alpha c + \beta c\cos\varphi + o\left(x^5\right)\right), \qquad x << 1,\ a << r\,. \qquad (2.70)$$

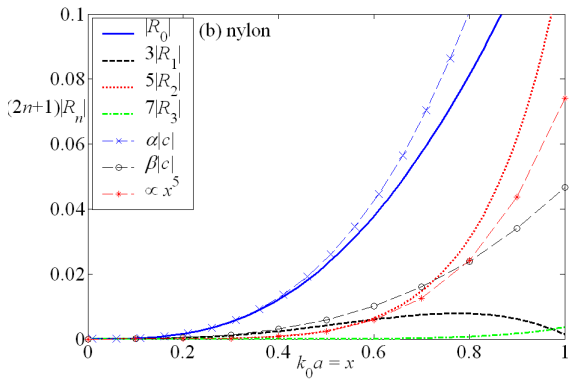
La signification des termes est identique au cas du cylindre élastique : α est le *contraste de compressibilité*, β le *contraste de densité* et c le *coefficient de diffusion*. Les valeurs des coefficients α et β dans le cas sphérique sont données dans le tableau 4. Le coefficient α est compris entre $-\infty$, pour la bulle d'air, et 1 pour les métaux. Le coefficient β est compris entre –3 et 1,5. Les valeurs de α et β pour des sphères de différents matériaux dans l'eau sont donnés dans le tableau 4.

matériau	ρ (g.cm^{-3})	c_L (mm.μs^{-1})	c_T (mm.μs^{-1})	$1/\chi$ (GPa)	α	β
nylon	1,2	2,5	1,1	5	**0,59**	**0,14**
aluminium	2,7	6,4	3,0	78	0,97	0,80
acier	7,8	5,8	3,0	164	**0,99**	**1,23**
tungstène	19,3	5,2	2,9	305	0,99	1,39
air	1,3 10^{-3}	0,34		15 10^{-3}	**-15 10^{3}**	**-3**
eau	1,0	1,5		2		

Tableau 4 : paramètres physiques du nylon et des métaux
et coefficients α et β pour les sphères.

Les deux premiers termes de diffusion sont proportionnels à $(k_0a)^3$, au lieu de $(k_0a)^2$ dans le cas cylindrique [Eq. (2.32)]. L'approximation est valable tant que k_0a est inférieur à 0,5. Pour l'air, en régime linéaire, le modèle fluide est équivalent au solide infiniment mou (•), du fait du fort contraste d'impédance, $Z_1 << Z_0$ [Eq. (2.74)]. Le module des coefficients de diffusion et leur valeur approchée sont tracés sur la figure 2.26.





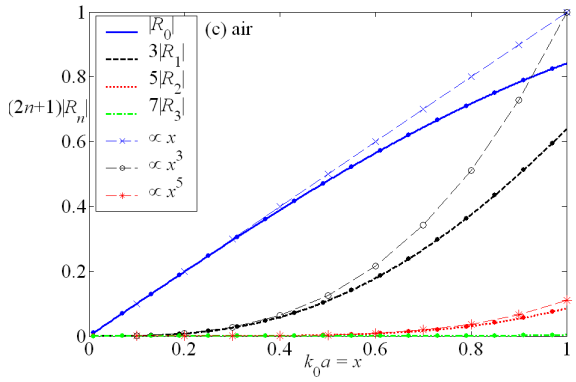


figure 2.26 : module des coefficients de diffusion R_n dans la limite petit objet pour un sphère d'acier (a) de nylon (b) et un bulle d'air (c).

Pour l'air, les coefficients sont équivalents au solide infiniment mou (•).
Les valeurs approchées de R_0 et R_1 sont valables pour $k_0a < 0{,}5$.

Calcul des deux premiers termes R_0 et R_1

Le coefficient de diffusion R_0 s'écrit d'après l'équation (2.56)

$$R_0 = -\frac{\mathrm{j}_0(x)\zeta_0 - x\mathrm{j}_0'(x)}{\mathrm{h}_0^{(1)}(x)\zeta_0 - x\mathrm{h}_0^{(1)\prime}(x)} \ . \qquad (2.71)$$

Il dépend du terme ζ_0 qui a pour expression, les termes C_0 et F_0 étant nuls, d'après les équations (2.57) et (2.58)

$$\zeta_0 = \frac{\rho_0}{\rho_1} x_{\mathrm{T}}{}^2 \frac{A_0}{E_0} \ . \qquad (2.72a)$$

Pour $x << 1$, A_0 est égal à $-x_{\mathrm{L}}{}^2/3$ et E_0 à $x_{\mathrm{T}}{}^2 - 4/3x_{\mathrm{L}}{}^2$. En fonction de x, le terme ζ_0 s'exprime

$$\zeta_0 \approx -\frac{x^2}{3}\frac{\rho_0 c_0{}^2}{\rho_1\left(c_{\mathrm{L}}{}^2 - 4/3\, c_{\mathrm{T}}{}^2\right)}, \qquad x << 1. \qquad (2.72b)$$

Pour $x << 1$, $x^2\mathrm{h}_0$ est négligeable devant $x\mathrm{h}_0'$ et $x^2\mathrm{j}_0$ est du même ordre que $x\mathrm{j}_0'$. L'expression approchée du coefficient R_0 est

$$R_0 \approx -\frac{\zeta_0 + x^2/3}{-i/x}, \qquad x << 1 \ . \qquad (2.73a)$$

On retrouve les expressions de α et c telles que $\alpha c \approx R_0$ [Eq. (2.69)].

Il est possible de faire la même analyse pour R_1. Le terme ζ_1 tend vers ρ_0/ρ_1 pour $x << 1$. Le terme h_1 est du même ordre que xh_1'. De même, j_1 est du même ordre que xj_1'. Le coefficient R_1 tend vers

$$R_1 \approx -\frac{\frac{x}{3}(\zeta_1 - 1)}{-i/x^2(\zeta_1 + 2)}, \qquad x << 1 . \tag{2.73b}$$

On retrouve les expressions β et c telles que de $\beta c \approx -3R_1$ [Eq. (2.69)].

Dans le cas d'un cylindre fluide, les expressions approchées des deux premiers coefficients sont

$$R_0 \approx -ix\frac{1}{1+\frac{Z_1}{Z_0}}, \qquad x << 1, \tag{2.74a}$$

$$R_1 \approx -i\frac{x^3}{3}\frac{Z_1 - Z_0}{2Z_1 + Z_0}, \qquad x << 1. \tag{2.74b}$$

Ces approximations sont également valables pour k_0a inférieur à 0,5.

II.4 Diffusion acoustique par deux cylindres élastiques

Le problème de la diffusion acoustique par deux cylindres parallèles a d'abord été abordé par Twersky en 1952.[20] L'approximation de son modèle pour deux cylindres n'est valable que si la distance entre les deux cylindres est grande devant leur rayon ; cette approximation prend en compte les modes normaux cylindriques, des conditions aux limites rigide et la limite petit objet. En 1975, Young et Bertrand [21] considèrent les conditions aux limites rigides du système des deux cylindres : ce point de vue est valable quelque soit la distance entre les cylindres. Le modèle a été complété par Deccanini *et al.*[22] en 1998, en incluant les conditions aux limites élastiques.

II.4.1 Géométrie du problème

Considérons deux cylindres élastiques identiques de rayons a, parallèles entre eux suivant la direction (Oz) et espacés d'une distance d. L'origine O du repère est placée entre les deux cylindres, l'axe (Oy) passe par les deux cylindres (figure 2.27). Ils sont caractérisés par leur masse volumique ρ_1 et les vitesses des ondes longitudinale et transverse c_L et c_T. Ils sont placés dans l'eau, de densité ρ_0 et de vitesse de l'onde longitudinale c_0.

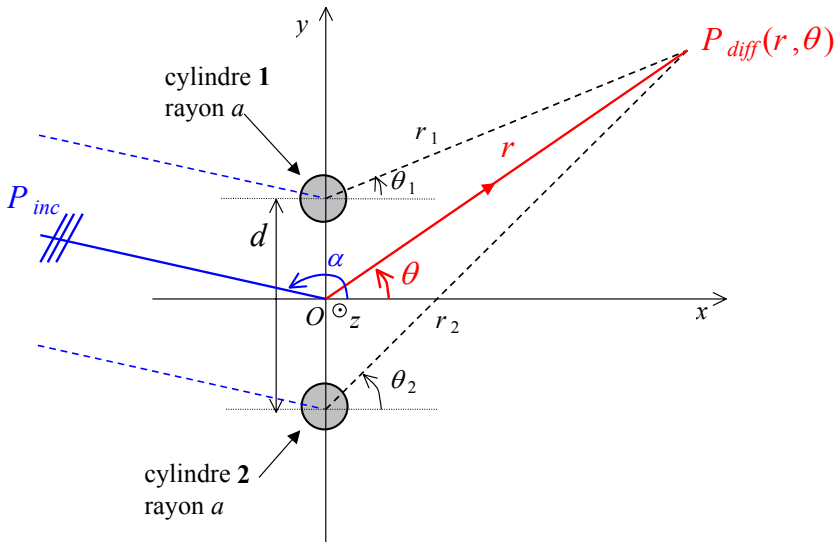


figure 2.27 : géométrie du problème

Les cylindres sont éclairés par une incidente plane $P_0 e^{i\left(\vec{k}_0\vec{r}-\omega t\right)}$ inclinée d'un angle α, repéré à partir de l'axe (Ox). Comme dans le cas du cylindre et du tube, les expressions des différentes pressions sont développées sur la base des modes normaux de vibrations cylindriques, numérotés ici de $-\infty$ à $+\infty$. Le déphasage subi par l'onde incidente entre le centre du repère (O,r,θ) et les centres des repères des cylindres (O_1,r_1,θ_1) et (O_2,r_2,θ_2) est noté $\pm\phi(\alpha)$. L'onde incidente étant considérée comme plane, ce déphasage est égal à

$$\phi(\alpha) = k_0 \frac{d}{2}\sin(\alpha) \ . \tag{2.75}$$

Au niveau du cylindre 1, le déphasage est égal à $-\phi(\alpha)$. L'onde incidente s'écrit

$$P_{inc}(r_1,\theta_1) = \left(P_0 e^{-i\omega t}\right) e^{-i\phi(\alpha)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^{-n} \mathrm{J}_n(k_0 r_1) e^{in(\theta_1-\alpha)} \ . \tag{2.76a}$$

De même, l'onde incidente au niveau du cylindre 2, associée au déphasage $+\phi(\alpha)$, s'écrit

$$P_{inc}(r_2,\theta_2) = \left(P_0 e^{-i\omega t}\right) e^{+i\phi(\alpha)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^{-n} \mathrm{J}_n(k_0 r_2) e^{in(\theta_2-\alpha)} \ . \tag{2.76b}$$

Les angles θ et α sont en situation de rétro-diffusion l'un par rapport à l'autre, c'est pourquoi on note i^{-n} et non i^n comme dans le cas du cylindre seul au paragraphe II.1 [Eqs. (2.2a) et (2.3a)]. Par la suite, le terme $P_0 e^{-i\omega t}$ sera omis. Les pressions diffusées par les cylindres 1 et 2 sont également décomposées suivant les modes normaux de vibrations cylindriques

$$P_{diff1}(r_1,\theta_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r_1) e^{in\theta_1} \ , \tag{2.77a}$$

$$P_{diff2}(r_2,\theta_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r_2) e^{in\theta_2} \ . \tag{2.77b}$$

Les termes A_n et B_n sont les coefficients de diffusion des cylindres 1 et 2, respectivement. Ils remplacent les coefficients $i^{-n}R_n$ décrits précédemment pour un cylindre seul [Eqs. (2.2b) et (2.8)].

II.4.2 Calcul des coefficients de diffusion A_n et B_n

Dans ce paragraphe sont présentés les calculs permettant d'obtenir les coefficients de diffusion A_n et B_n et d'exprimer ainsi par la pression diffusée par les deux cylindres [Eq. (2.77)]. Ces calculs sont adaptés de ceux présentés par Young et Bertrand dans la référence 21. Ce modèle limité aux conditions aux limites rigides a été complété par Deccanini *et al*. qui ont généralisé aux conditions aux limites élastiques et ont décrit le problème en terme de groupe de symétrie.[22]

Comme dans le cas d'un seul diffuseur, m désigne l'ordre du dernier mode normal significatif. Le terme m est de l'ordre de k_0a en champ lointain, pour $a << r$ [Eqs. (2.6) et (2.25)]. Dans les équations (2.76) et (2.77), les sommes contiennent $2m+1$ modes normaux de vibrations significatifs, d'indices n compris entre $-m$ et $+m$. Afin d'exploiter la symétrie du système, les termes C_n^+ et C_n^- sont définis comme

$$C_n^- = A_n \ , \qquad -m \le n \le m \ , \tag{2.78a}$$

$$C_n^+ = (-1)^n B_{-n} \ , \qquad -m \le n \le m \ . \tag{2.78b}$$

Les signes + et – correspondent au signe du déphasage de l'onde incidente $\pm\phi(\alpha)$: – pour le cylindre 1 (coefficients A_n) et + pour le cylindre 2 (coefficients B_n).

Par le théorème d'addition de Graf (équation 9.1.79 d'Abramowitz et Stegun [11]), il est possible d'exprimer les fonctions de Hankel d'un repère d'un cylindre dans celui de l'autre. En prenant en compte les conditions aux limites des deux cylindres, une relation symétrique entre les termes C_n^+ et C_n^-, donnée par l'équation (7) de la référence 21, est ainsi obtenue

$$C_n^{\pm} = e^{\pm i\phi(\alpha)} D_n^{\pm} + \sum_{l=-m}^{+m} M_{nl} C_n^{\mp} \ , \qquad -m \le n,\, l \le m \ , \tag{2.79}$$

où les éléments $D_n^{\pm}$ et M_{nl} sont définis par

$$D_n^{\pm} = i^{-n} R_n e^{\pm in\alpha} \ , \qquad -m \le n \le m \ , \tag{2.80a}$$

$$M_{nl} = i^{n-l} R_n \mathrm{H}_{n+l}^{(1)}(k_0 d). \qquad -m \le n,\, l \le m \ . \tag{2.80b}$$

D'après l'équation (2.79), le coefficient de diffusion d'un cylindre $C_n^{\pm}$ est égal à la somme de deux termes. Le terme de gauche $e^{\pm i\phi(\alpha)}D_n^{\pm}$ correspond au coefficient de diffusion d'un cylindre seul : ce terme décrit la **diffusion simple**. Le terme de droite décrit l'influence de l'autre cylindre, il dépend de chaque coefficient de diffusion $C_n^{\mp}$ et fonction de Hankel $\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 d)$. Ce terme décrit la **diffusion multiple**.

Remarques :

1) Les coefficients de diffusion R_n d'un cylindre seul sont donnés dans le paragraphe II.1.2 par les équations (2.12) à (2.15).

2) Pour un cylindre seul, les coefficients R_n vérifient : $R_n = R_{-n}$ [Eq. (2.2)].

3) Changer de signe l'angle d'incidence α revient à inverser C_n^{+} et C_n^{-}. La relation entre coefficients A_n et B_n pour des angles opposés est : $A_n(-\alpha) = (-1)^n B_{-n}(\alpha)$.

Résolution, écriture matricielle

Les coefficients $C_n^{\pm}$ sont les éléments des vecteurs $\mathbf{C}^+$ et $\mathbf{C}^-$ de dimension $1\times(2m+1)$, où m est l'ordre du dernier mode normal significatif. Les vecteurs de *diffusion simple* $\mathbf{D}^+$ et $\mathbf{D}^-$ sont également de dimension $1\times(2m+1)$. La matrice de *diffusion multiple* $\mathbf{M}$ est de dimension $(2m+1)\times(2m+1)$. L'équation (2.79) couplant $\mathbf{C}^+$ et $\mathbf{C}^-$ s'écrit sous forme matricielle

$$\mathbf{C}^{\pm} = e^{\pm i\phi(\alpha)}\mathbf{D}^{\pm} + \mathbf{M}\mathbf{C}^{\mp} . \tag{2.81}$$

Par substitution, les vecteurs $\mathbf{C}^+$ et $\mathbf{C}^-$ sont obtenues par la relation

$$\mathbf{C}^{\pm} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{M}^2\right)^{-1}\left(e^{\pm i\phi(\alpha)}\mathbf{D}^{\pm} + e^{\mp i\phi(\alpha)}\mathbf{M}\mathbf{D}^{\mp}\right) , \tag{2.82}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité. Cette équation peut être séparé en deux composantes suivant le déphasage $\pm\phi(\alpha)$ en définissant les vecteurs $\mathbf{W}^{\pm}$ et $\mathbf{X}^{\pm}$ suivant

$$\mathbf{W}^{\pm} = (\mathbf{I} - \mathbf{M}^2)^{-1}\,\mathbf{D}^{\pm} , \tag{2.83a}$$

$$\mathbf{X}^{\pm} = (\mathbf{I} - \mathbf{M}^2)^{-1}\,\mathbf{M}\mathbf{D}^{\pm} . \tag{2.83b}$$

Hypothèse de faible diffusion multiple, $a << d$

Si les cylindres sont suffisamment éloignés, la *diffusion multiple* est faible. En effet, le module des fonctions de Hankel $\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 d)$ tend vers $1/\sqrt{k_0 d}$, pour $k_0 d >> n$, avec n compris entre 0 et $m \approx k_0 a$ [figure 2.3 et Eq. (2.5)]. Donc, pour $d >> a$, le terme de droite devient petit devant le terme de gauche [Eq. (2.80)] et la matrice $(\mathbf{I} - \mathbf{M}^2)^{-1}$ est proche de la matrice identité $\mathbf{I}$. Dans ce cas, l'expression approchée de l'équation (2.83) est

$$\mathbf{W}^{\pm} \approx \mathbf{D}^{\pm}, \qquad a << d, \tag{2.84a}$$

$$\mathbf{X}^{\pm} \approx \mathbf{M}\mathbf{D}^{\pm}. \qquad a << d, \tag{2.84b}$$

Le vecteur $\mathbf{W}^{\pm}$ décrit alors la *diffusion simple* et le vecteur $\mathbf{X}^{\pm}$ la *diffusion multiple*. Le coefficient $W_n^{\pm}$ est dans ce cas égal à $i^{-n} R_n e^{\pm in\alpha}$, soit le coefficient de diffusion d'un cylindre isolé [Eq. (2.80a)]. Si la diffusion multiple est importante, il n'est pas possible de séparer nettement ces deux composantes.

Expression de la pression diffusée

D'après l'équation (2.78) reliant $C_n^{\pm}$ à A_n et B_n, les coefficients de diffusion des cylindres 1 et 2 vérifient : $A_n = C_n^{-}$ et $B_n = (-1)^n C_{-n}^{+}$. En utilisant les équations (2.82) et (2.83), reliant $C_n^{\pm}$ à $W_n^{\pm}$ et $X_n^{\pm}$, il est possible d'exprimer les coefficients de diffusion A_n et B_n en fonction de $W_n^{\pm}$ et $X_n^{\pm}$, soit

$$A_n = e^{-i\phi(\alpha)} W_n^{-} + e^{+i\phi(\alpha)} X_n^{+}, \tag{2.85a}$$

$$B_n = (-1)^n \left(e^{+i\phi(\alpha)} W_{-n}^{+} + e^{-i\phi(\alpha)} X_{-n}^{-} \right). \tag{2.85b}$$

D'après l'équation (2.77), la pression diffusée par deux cylindres élastiques éclairés par une onde plane a pour expression, en fonction des coefficients de diffusion A_n et B_n

$$P_{diff} = \sum_{n=-m}^{+m} \left[A_n \mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r_1) e^{in\theta_1} + B_n \mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r_2) e^{in\theta_2} \right]. \tag{2.85c}$$

Expression de la pression diffusée en champ lointain, a, $d << r$

Comme dans le cas d'un cylindre, pour un rayon a petit devant la distance d'observation r, il est possible d'écrire la valeur approchée des fonctions de Hankel en champ lointain et d'ainsi simplifier la somme [Eqs. (2.5) et (2.6)]. De plus, pour une distance de séparation d petite devant r, il est possible d'écrire les approximations géométriques suivantes

$$r_1 \approx r - d/2\sin\theta, \qquad d << r, \tag{2.86a}$$

$$r_2 \approx r + d/2\sin\theta, \qquad d << r, \tag{2.86b}$$

$$\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta, \qquad d << r. \tag{2.86c}$$

Le déphasage $\pm\phi(\theta)$ subi par l'onde diffusée plane entre le centre du repère (O,r,θ) et les centres des repères des cylindres (O_1,r_1,θ_1) et (O_2,r_2,θ_2) est défini par

$$\phi(\theta) = k_0 \frac{d}{2}\sin\theta \ . \tag{2.87}$$

Ce déphasage est défini de même façon que celui subi par l'onde incidente [Eq. (2.75)] : $-\phi(\theta)$ pour le cylindre 1 et $+\phi(\theta)$ pour le cylindre 2. En développant l'équation (2.85c), la pression diffusée par les deux cylindres s'exprime en champ lointain

$$P_{diff}(r,\theta) = \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}} e^{ik_0 r} \sum_{n=-m}^{+m} i^{-n} [A_n e^{-i\phi(\theta)} + B_n e^{+i\phi(\theta)}] e^{in\theta} \ , \quad a << r \text{ et } d << r. \tag{2.88a}$$

Cela revient à considérer le système des deux fils comme un unique objet diffusant, au centre du repère (O,r,θ). En prenant en compte la position r_{inc} de la source, l'expression de la pression diffusée devient

$$P_{diff}(\vec{r}_{inc},\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r_{inc}}} e^{ik_0 r_{inc}} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}} e^{ik_0 r} \sum_{n=-m}^{+m} i^{-n} [A_n e^{-i\phi(\theta)} + B_n e^{+i\phi(\theta)}] e^{in\theta} \ ,$$

$$a << r \text{ et } d << r. \tag{2.88b}$$

Cette formule sera utilisée pour calculer la réponse inter-élément d'un réseau dans la partie III. En fonction des coefficients $X_n^{\pm}$ et $W_n^{\pm}$ [Eqs. (2.83) et (2.85)] la pression diffusée donnée par l'équation (2.88a) s'écrit

$$P_{diff}(r,\theta) = \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}} e^{ik_0 r} \sum_{n=-m}^{+m} i^{-n} [W_n^- e^{-i\{\phi(\theta)+\phi(\alpha)\}} + (-1)^n W_{-n}^+ e^{+i\{\phi(\theta)+\phi(\alpha)\}} \ldots$$

$$\ldots + X_n^+ e^{-i\{\phi(\theta)-\phi(\alpha)\}} + (-1)^n X_{-n}^- e^{+i\{\phi(\theta)-\phi(\alpha)\}}] e^{in\theta} \ ,$$

$$a << r \text{ et } d << r. \tag{2.88c}$$

Interprétation des termes $W_n^{\pm}$ et $X_n^{\pm}$

Pour le cylindre 1, associé au déphasage de l'onde incidente $-\phi(\alpha)$, le coefficient de diffusion A_n, définie par l'équation (2.85a), a pour expression

$$A_n = e^{-i\phi(\alpha)} W_n^- + e^{+i\phi(\alpha)} X_n^+ \ .$$

Le terme W_n^- est associé au même déphasage $-\phi(\alpha)$ alors que le terme X_n^+ est associé déphasage opposé $+\phi(\alpha)$, celui de l'onde incidente arrivant sur le cylindre 2. Les contributions de ces deux termes sont illustrées dans la partie gauche de la figure 2.28.

La partie droite de la figure illustre le coefficient B_n du cylindre 2 donné par l'équation (2.85b)

$$B_n = e^{+i\phi(\alpha)} (-1)^n W_{-n}^+ + e^{-i\phi(\alpha)} (-1)^n X_{-n}^- .$$

Le terme W_n^+ est associé au même déphasage que l'onde incidente et le terme X_n^- au déphasage opposé.

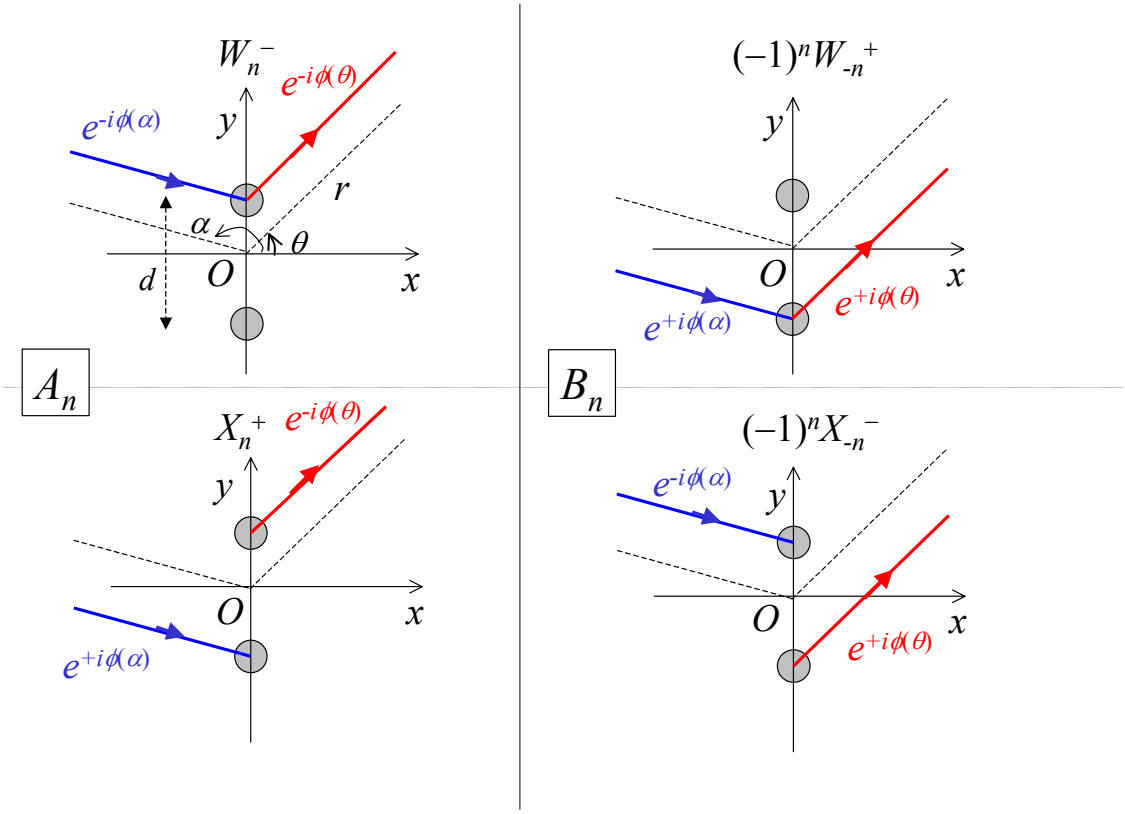


figure 2.28 contributions des différents termes $X_n^{\pm}$ et $W_n^{\pm}$
aux coefficients de diffusion A_n et B_n .

De même, en champ lointain [Eq. (2.88c)], les termes $W_n^{\pm}$ sont associés à des déphasages de même signe : $-\{\phi(\theta)+\phi(\alpha)\}$ pour le cylindre 1, $+\{\phi(\theta)+\phi(\alpha)\}$ pour le cylindre 2. Les termes $X_n^{\pm}$ sont associés à des déphasages de signe opposé $-\{\phi(\theta)-\phi(\alpha)\}$ pour le cylindre 1 et $+\{\phi(\theta)-\phi(\alpha)\}$ pour le cylindre 2. Ces points de vue sont en accord avec le commentaire de l'équation (2.84) : les termes $W_n^{\pm}$ décrivent globalement la *diffusion simple* et les termes $X_n^{\pm}$ la *diffusion multiple*.

II.4.3 Exemples : deux cylindres identiques d'acier ou de nylon

Les deux cas étudiés précédemment sont repris : les cylindres d'**acier** et de **nylon**. Dans la partie III, les résultats expérimentaux correspondant seront présentés.

Le cas présenté ici correspond à un angle d'incidence α égal à 0° ou 180°. Le système se simplifie par symétrie suivant : $\mathbf{X}^+ = \mathbf{X}^-$ et $\mathbf{W}^+ = \mathbf{W}^-$. Ces termes sont notés **X** et **W**. De même, $\mathbf{C}^+$ est égal à $\mathbf{C}^-$ soit $A_n = (-1)^n B_{-n}$. Le coefficient A_n vérifie [Eq. (2.85)] alors

$$A_n = W_n + X_n, \qquad \alpha = 0°, 180°. \tag{2.89}$$

Les modules des coefficients W_n et X_n sont tracés dans le cas de deux cylindres d'**acier** ou de **nylon** sur les figures 2.29 et 2.30. Dans les deux cas, le rapport entre la distance et le rayon d/a est égal à 8 ou 16. Les coefficients W_n et X_n sont comparés aux coefficients donnés par l'équation (2.84) dans le cas de la faible diffusion multiple, soit **W** = **D** et **X** = **MD**. Le module $|W_n|$ est ainsi comparé au module du coefficient de diffusion du cylindre seul $|R_n|$. Les indices positifs sont tracés en trait continus et les indices négatifs en traits discontinus.

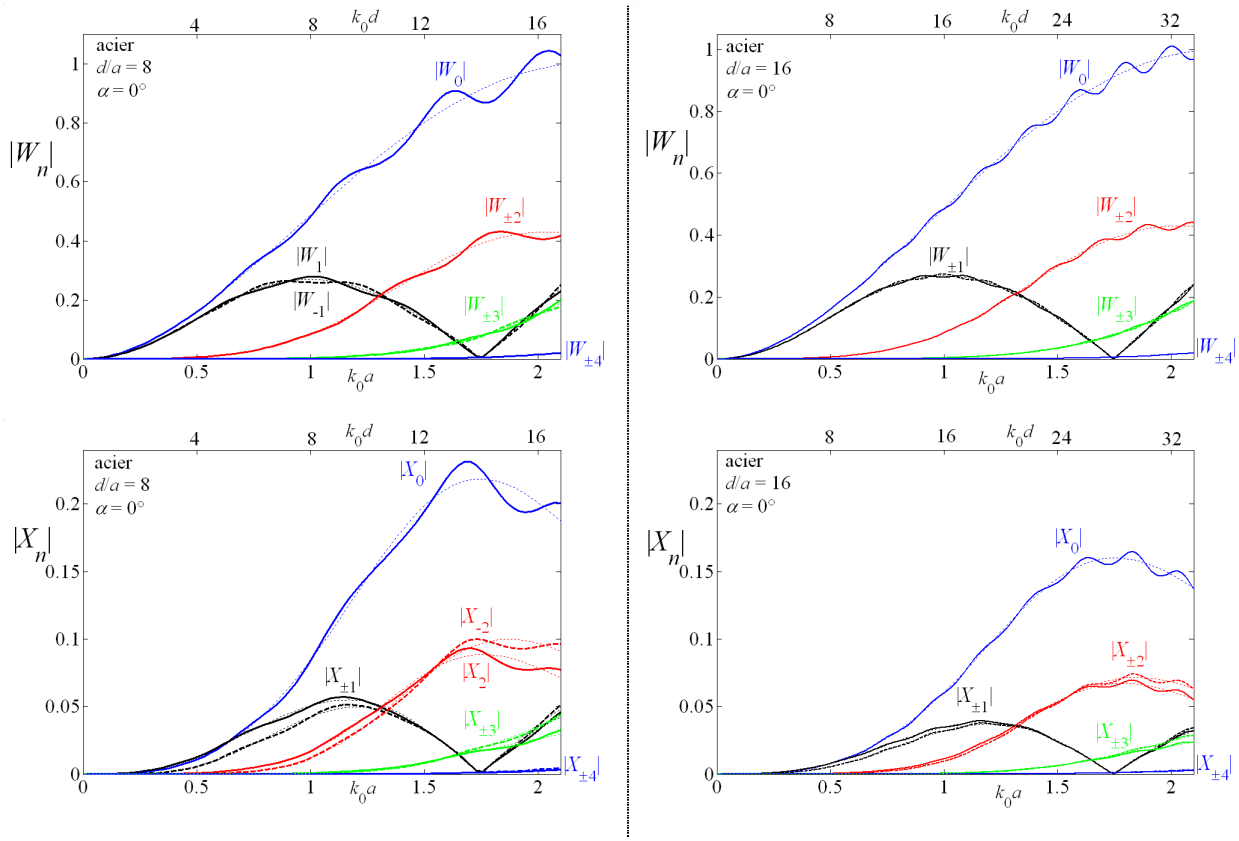


figure 2.29 : modules des coefficients de diffusion $|W_n|$ et $|X_n|$ ($A_n = W_n + X_n$) pour deux cylindres d'**acier** de rayon a, séparés de d (d/a = 8 à gauche et 16 à droite), en pointillé : $|W_n|$ et $|X_n|$ faible diffusion multiple [Eq. (2.84)].

Dans le deux cas (**acier** et **nylon**), les modules des coefficients W_n et X_n présentent des oscillations autour des coefficients de faible diffusion multiple. Les coefficients W_n sont proches des coefficients R_n du cylindre seul, soit du cas de la diffusion simple. Les coefficients X_n sont inférieurs aux coefficients R_n, ils illustrent le poids de la diffusion multiple. Ces remarques sont en accord avec l'interprétation de la figure 2.28 et de l'équation (2.84). Dans le cas de l'**acier**, les coefficients X_n sont de l'ordre du quart des coefficients W_n pour d/a égal à 8. Pour d/a égal à 16, ce rapport est de l'ordre de 15 %. Le poids de la diffusion multiple diminue avec la distance.

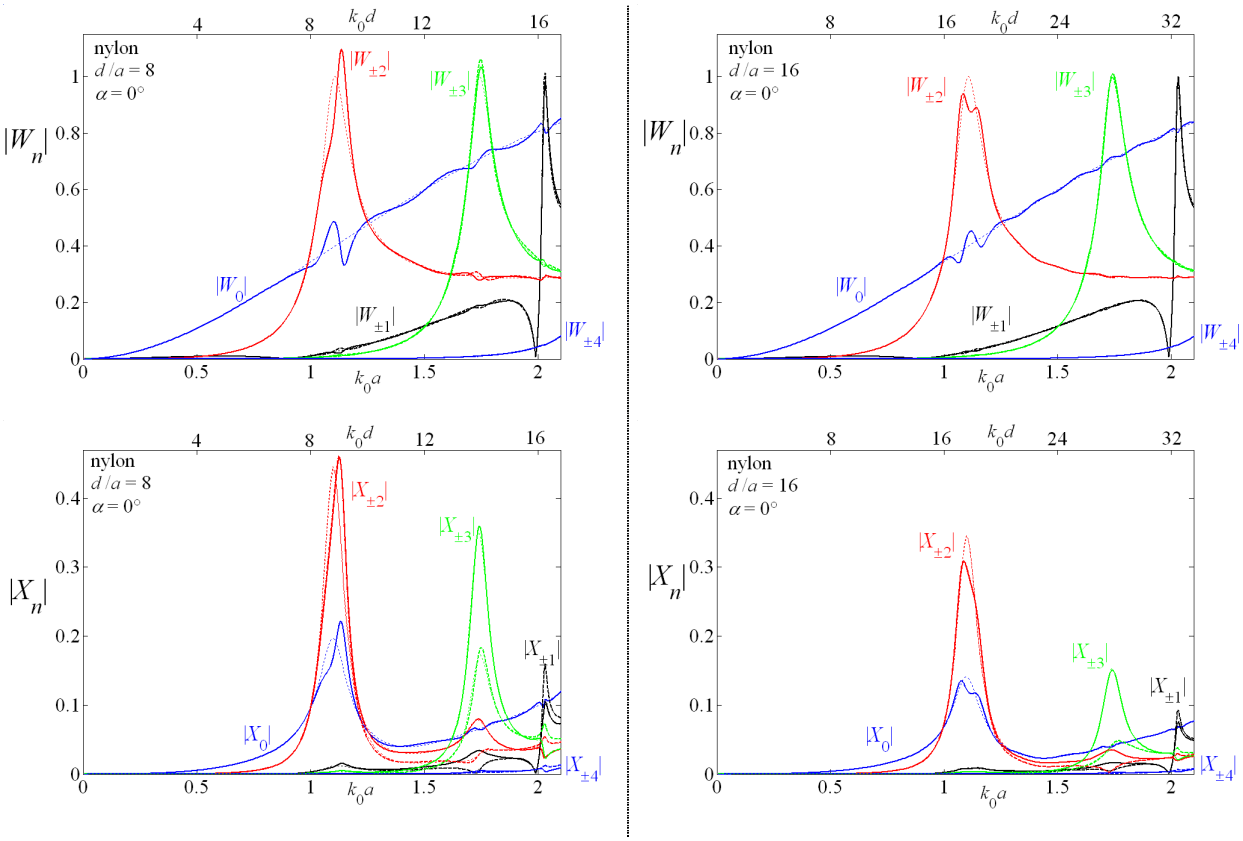


figure 2.30 : modules des coefficients de diffusion $|W_n|$ et $|X_n|$ ($A_n = W_n + X_n$) pour deux cylindres de **nylon** de rayon a, séparés de d (d/a = 8 à gauche et 16 à droite), en pointillé : $|W_n|$ et $|X_n|$ faible diffusion multiple [Eq. (2.84)].

Dans le cas du **nylon**, les coefficients X_n sont très inférieurs aux coefficients W_n sauf dans le cas des « pics » décrits au paragraphe II.1.4. Pour d/a = 8, les coefficients $X_{\pm 2}$ sont égaux à la moitié du coefficient de diffusion quadripolaire R_2 de l'ordre de $W_{\pm 2}$ pour k_0a autour à 1,1. Dans ce cas, comme l'illustre la figure 2.13b, la diffusion d'un cylindre de nylon est quasiment quadripolaire, ce qui favorise la diffusion multiple. Ce cas est étudié dans la partie expérimentale.

Des phénomènes similaires sont observés pour $X_{\pm 3}$ et $W_{\pm 3}$ autour du pic de R_3 à k_0a = 1,7 et pour $X_{\pm 1}$ et $W_{\pm 1}$ autour de la résonance de R_1 à k_0a = 2,1. Dans ce cas, la diffusion multiple et les coefficients X_n sont importants.

II.4.4 Ordres de diffusion multiple

Dans le cas où la distance d est grande devant le rayon a, les cylindres sont en situation champ lointain l'un par rapport à l'autre. Il est alors possible de séparer les différents ordres de diffusion. La valeur approchée champ lointain de la fonction de Hankel d'ordre 0 $H_0^{(1)}(k_0 d)$ est notée h

$$h = \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 d}} e^{ik_0 d} . \qquad (2.90)$$

Ce terme correspond la propagation de l'onde sur la distance d, soit un trajet entre les deux cylindres. Le nombre de trajets détermine l'ordre de diffusion. La **diffusion simple** correspond à la diffusion directe, sans trajet entre les cylindres. La **diffusion double** est associée à un trajet, elle est proportionnelle à h. La **diffusion triple** est associée à un « aller-retour » entre les cylindres soit deux trajets ou h^2. Ainsi, la pression diffusée s'exprime comme une série d'**ordre de diffusion** en h^n. L'expression suivante est adaptée de l'équation (6) proposée par Twersky [20]

$$P_{diff} = \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}} e^{ik_0 r} \left[C^{(1)} + h\Gamma_e + h^2 C_0 \Gamma_o + h^3 C_0{}^2 \Gamma_e + h^4 C_0{}^3 \Gamma_o + ... \right], \quad a << d. \qquad (2.91)$$

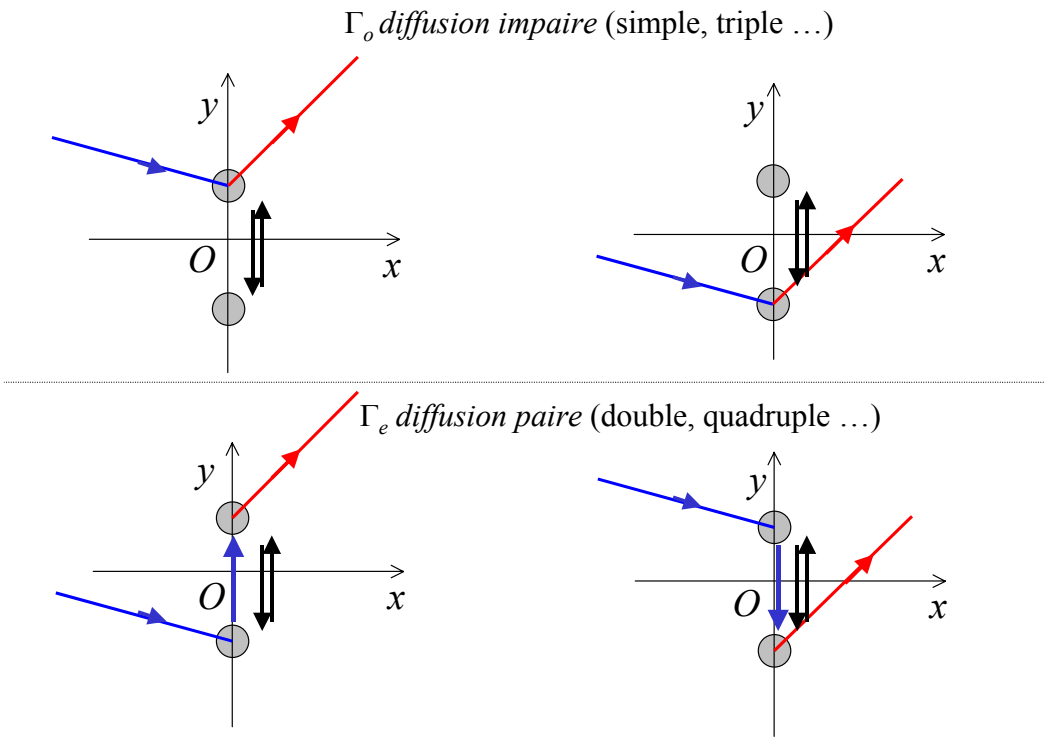


figure 2.31 : différents ordre de diffusion multiple

Le terme $C(\varphi)$ correspond à la somme des modes normaux pour un cylindre, suivant l'angle de rétro-diffusion φ

$$C(\varphi) = \sum_{n=-m}^{m} (-1)^n R_n e^{in\varphi} . \tag{2.92}$$

Le terme correspond $C^{(1)}$ à la diffusion simple et s'écrit

$$C^{(1)} = 2C(\theta - \alpha)\cos\{\phi(\alpha) + \phi(\theta)\} . \tag{2.93a}$$

Le terme C_0 est égal à la retro-diffusion d'un cylindre sur l'autre, pour $\varphi = 0°$ (ou $\theta = 180°$)

$$C_0 = \sum_{n=-m}^{m} (-1)^n R_n . \tag{2.93b}$$

Le terme Γ_o correspond aux diffusions d'ordre *impair* (*odd* en anglais) et s'écrit

$$\Gamma_o = C\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) C'\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\left[(-1)^{n+n'} e^{-i(\phi(\alpha)+\phi(\theta))} + e^{i(\phi(\alpha)+\phi(\theta))}\right]. \tag{2.93c}$$

Ce cas est illustré sur la partie supérieure de la figure 2.31 : les cylindres d' « entrée » et « sortie » sont identiques, ce qui correspond à des déphasages $\pm\{\phi(\alpha)+\phi(\theta)\}$ comme dans le cas des coefficients $W_n^{\pm}$ (figure 2.28). Le nombre de trajets entre les cylindres est pair : les termes Γ_o sont en h^{2n} dans l'équation (2.91).

Le terme Γ_e correspond aux diffusions d'ordre *pair* (*even* en anglais) et s'écrit

$$\Gamma_e = C\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) C'\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\left[(-1)^{n+n'} e^{-i(\phi(\alpha)-\phi(\theta))} + e^{i(\phi(\alpha)-\phi(\theta))}\right]. \tag{2.93d}$$

Ce cas est illustré sur la partie inférieure de la figure 2.31 : les cylindres d' « entrée » et « sortie » sont différents, ce qui correspond à des déphasages $\pm\{\phi(\alpha)-\phi(\theta)\}$ comme dans le cas des coefficients $X_n^{\pm}$. Le nombre de trajets entre les cylindres est impair : les termes Γ_e sont en h^{2n+1} dans l'équation (2.91).

Un « aller-retour », représenté par une double flèche sur la figure 2.31, correspond à deux trajets et deux retro-diffusions soit $h^2C_0^2$. La diffusion d'ordre $2n+2$ est égale à la diffusion d'ordre $2n$ multipliée par $h^2C_0^2$, à partir de la diffusion double. Il est possible d'exprimer l'équation (2.91) en fonction de la limite de la somme des termes $h^2C_0^2$

$$P_{diff} = \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}} e^{ik_0 r}\left[C^{(1)} + \left(h\Gamma_e + h^2 C_0 \Gamma_o\right)\frac{1}{1 - h^2 C_0^{\,2}}\right], \quad a << d. \tag{2.94}$$

Remarques :

1) La notation $'$ indique que l'indice n' correspond à la somme C'.

2) Dans le cas de l'approximation petit objet, le terme $C(\varphi)$ [Eq. (2.92)] est donné par l'équation (2.30b) soit $\alpha c + \beta c\cos(\varphi)$. Twersky donne l'expression de la pression diffusée dans ce cas à l'équation (18) de la référence 20. Ce point de vue sera utilisé dans la partie III.

3) Il également possible d'écrire un développement en ordre de diffusion des coefficients $X_n^{\pm}$ et $W_n^{\pm}$ donnés à l'équation (2.83) sachant que $(1-\mathbf{M}^2)^{-1} \approx 1 + \mathbf{M}^2 + \mathbf{M}^4 + \ldots$

Approximation diffusion isotrope, $m = 0$

Seul l'ordre normal de diffusion isotrope ($n = 0$) est considéré comme significatif, les autres modes normaux sont supposés négligeables. Cela revient à fixer l'ordre m à 0. Dans ce cas, l'équation (2.94) devient

$$P_{diff} = \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}} e^{ik_0 r} \left[2R_0 \cos\{\phi(\alpha) + \phi(\theta)\} + 2R_0{}^2 h \cos\{\phi(\alpha) - \phi(\theta)\} \right] \frac{1}{1 - h^2 R_0{}^2},$$

$$a << d,\ m = 0 \qquad (2.95)$$

Cette expression est équivalente à l'équation (10) donnée par Twersky.[20]

Il est possible de retrouver cette expression en utilisant le point de vue de Young et Bertrand. Dans le cas de l'approximation diffusion isotrope, la relation entre C_n^+ et C_n^- [Eq. (2.79)] se réduit à

$$C_0^{\pm} = R_0 e^{\pm i\phi(\alpha)} + hR_0 C_0^{\mp} \ . \qquad (2.96)$$

On en déduit les expressions de $W_0^{\pm}$ et $X_0^{\pm}$, d'après les équations (2.83) et (2.85)

$$W_0^+ = W_0^- = \frac{R_0}{1 - R_0{}^2 h^2}, \qquad (2.97a)$$

$$X_0^+ = X_0^- = \frac{R_0{}^2 h}{1 - R_0{}^2 h^2}. \qquad (2.97b)$$

Ce point sera utile pour exprimer les vecteurs singuliers et les valeurs singulières de façon analytique dans la partie III.

Bibliographie

[1] Lord Rayleigh, “Theory of Sound,” (Dover Publications, New York 1945), volume II, (chapter XVII, application of Laplace’s function).

[2] L. Bauer, P. Tamarkin, and R. B. Lindsay, “The Scattering of Ultrasonic Waves in Water by Cylindrical Obstacles,” J. Acoust. Soc. Am. **20**, 858–868 (1948).

[3] Paul Tamarkin, “Scattering of an Underwater Ultrasonic Beam from Liquid Cylindrical Obstacles” J. Acoust. Soc. Am. **21**, 612–616 (1949).

[4] James J. Faran, Jr., “Sound Scattering by Solid Cylinders and Spheres,” J. Acoust. Soc. Am. **23**, 405–418 (1951).

[5] R. D. Doolittle and H. Überall, “Sound Scattering by Elastic Cylindrical Shells,” J. Acoust. Soc. Am. **39**, 272-275 (1966).

[6] L. Flax, G. Gaunard, and H. Überall, “Theory of resonance scattering,” *Physical Acoustics*, edited by W. Mason and R. Thurston (Academic Press, New York, 1976) Vol. XV, pp. 191–294.

[7] L. Flax, L. R. Dragonette, and H. Überall, “Theory of elastic resonance excitation by sound scattering,” J. Acoust. Soc. Am. **63**, 723–731 (1978).

[8] A. Derem, “N. Gespa La diffusion acoustique par des cibles géométriques de forme simple Théories et expériences,” (Cedocar 1987), chapitre 9 Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson dans la diffusion acoustique, 196–200.

[9] J.-L. Rousselot, “N. Gespa La diffusion acoustique par des cibles géométriques de forme simple Théories et expériences,” (Cedocar 1987), chapitre 12 Etude numérique de la diffusion par des objets cylindriques et sphériques au moyen des résonances 334–351.

[10] M. C. Junger, “Sound scattering by thin elastic shell,” J. Acoust. Soc. Am. **24**, 366–373 (1952).

[11] M. Abramowitz and I. A. Stegun, “Hanbook of Mathematical Functions,” Dover Publications, Inc., New York (1972).

[12] F. Léon, F. Chati, and J.-M. Conoir, “Modal theory applied to the acoustic scattering by elastic cylinders of arbitrary cross section,” J. Acoust. Soc. Am. **116**, 686–692 (2004).

[13] C. F. Gaumond and L. R. Dragonette, “Form function dependence on rigidity and mass,” J. Acoust. Soc. Am. 90 (5), 1991, 2692-2696.

[14] D. Royer et E. Dieulesaint, “Ondes Elastiques dans les Solides tome 1,” Masson, 121 (1996).

[15] Robert Hickling, “Analysis of Echoes from a Solid Elastic Sphere in Water,” J. Acoust. Soc. Am. **34** (10) 1582-1592 (1962).

[16] K. L. Williams and P. L. Marston, “Backscattering from an elastic sphere: Sommerfeld-Watson transformation and experimental confirmation,” J. Acoust. Soc. Am. **78** (3) 1093-1102 (1985).

[17] D. H. Chambers and A. K. Gautesen, “Time reversal for a single spherical scatterer,” J. Acoust. Soc. Am. **109,** 2616–2624 (2001).

[18] J. G. Minonzio, C. Prada, D. Chambers, D. Clorennec and M. Fink, "Characterization of subwavelength elastic cylinders with the decomposition of the time-reversal operator: Theory and experiment," J. Acoust. Soc. Am. **117**, 789–798 (2005).

[19] P. M. Morse and K. U. Ingard, "Theoretical Acoustics," (Princeton U. P., Princeton, NJ, 1968), chapter 8.2 scattering by spheres.

[20] V. Twersky "Multiple Scattering of Radiation by an Arbitrary Planar Configuration of Parallel Cylinders and by Two Parallel Cylinders," J. Appl. Phys. **23**(4), 407–414 (1952).

[21] J. W. Young and J. C. Bertrand "Multiple scattering by two cylinders," J. Acoust. Soc. Am. **58**(6), 1190–1195 (1976).

[22] Y. Deccanini, A. Folacci, E. Fournier, and P. Gabrielli "Exact S-matrix for N-disc systems and various boundary conditions: I. Generalization of the Korringa–Kohn–Rostoker–Berry method," J. Phys. A: Math. Gen. **31** 7865–7889 (1998).

III. Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel appliquée à la caractérisation

Différents moyens de caractérisation utilisant la méthode DORT sont présentés dans cette partie. Le principe de la méthode, qui consiste à déterminer les invariants du retournement temporel, a été présenté dans la partie I. Les objets étudiés sont ceux dont la diffusion a été décrite dans la partie II, c'est à dire : le cylindre, le tube, la sphère et les deux cylindres. Les approximations proposées en partie II sont reprises. Les valeurs singulières et les vecteurs singuliers sont obtenus de deux façons, soit par décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice de transfert **K** théorique, soit par diagonalisation de l'opérateur projeté. Il sera montré que dans certains cas, il est possible d'écrire des expressions analytiques des valeurs et vecteurs singuliers.

Dans les premiers travaux sur la méthode DORT la diffusion est supposée isotrope.[3,5] L'utilisation du formalisme des modes normaux de vibrations pour décrire les invariants du retournement temporel a été proposée par Tortel *et al*. en 1999, pour un réseau circulaire en électromagnétisme.[2] Le cas du réseau linéaire a été traité par Chambers et Gautesen en 2001 pour une sphère élastique.[6] Le cas du cylindre éclairé par un réseau linéaire a été traité en électromagnétisme, en 2003, par Micolau et Saillard[7] et en acoustique, en 2005, par Minonzio *et al*.[8]

III.1 Caractérisation de cylindres élastiques

La diffusion acoustique du cylindre a été présentée au paragraphe II.1. Cette étude est reprise dans cette partie, pour écrire la matrice de transfert **K** théorique, notamment en fonction des modes projetés (III.1.2). Les valeurs et vecteurs singuliers sont exprimés de façon analytique suivant différentes approximations : diffusion isotrope (§ III.1.3), limite petit objet (§ II.1.4) et critère de Rayleigh (§ III.1.5). Ces valeurs théoriques ainsi obtenues sont comparées à des résultats expérimentaux pour un réseau en quart de cercle (§ III.1.6) puis un réseau linéaire (§ III.1.7) : elles constituent une des principales originalités de ce manuscrit.

III.1.1 Géométrie du problème

La barrette est composée de N transducteurs, dont la hauteur est grande devant largeur : le problème est considéré comme bidimensionnel (2D). Le milieu contient un cylindre élastique de rayon a, placé à une distance F du réseau perpendiculairement au plan d'insonification (figure 3.1). La barrette et le fil sont plongés dans l'eau. Comme précédemment, $k_0 = \omega/c_0$ désigne le nombre d'onde dans le milieu environnant de vitesse de l'onde longitudinale c_0.

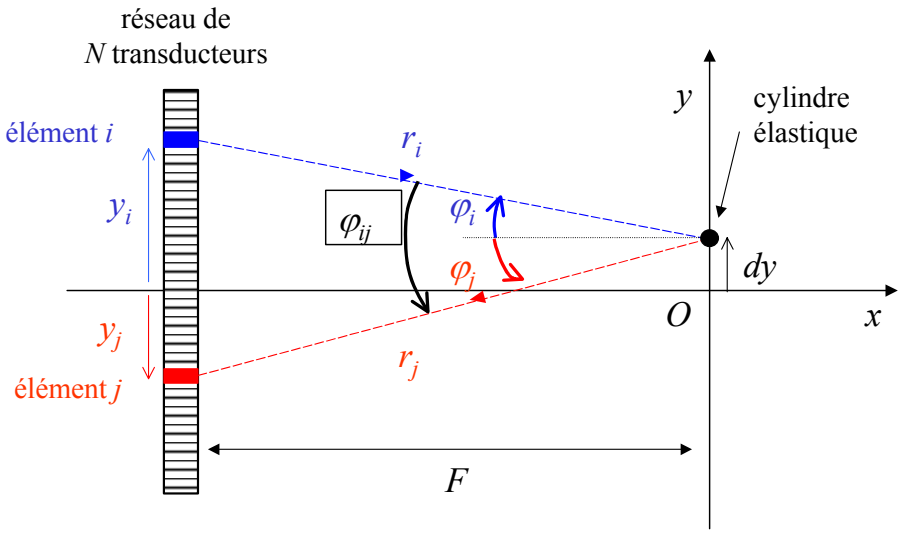


figure 3.1 : géométrie du problème.

Comme illustrée sur la figure 3.1, la distance entre le transducteur j et le centre du diffuseur, notée r_j, s'écrit

$$r_j = \sqrt{F^2 + (y_j - dy)^2} \ . \tag{3.1}$$

De même, on définit l'angle φ_j sous lequel le cylindre est vu par le transducteur j par

$$\tan\varphi_j = (y_j - dy)/F \ . \tag{3.2}$$

L'angle φ_j est du même signe que la coordonnée $y_j - dy$. L'angle φ_{ij} est défini selon

$$\varphi_{ij} = \varphi_j - \varphi_i \ . \tag{3.3}$$

Le terme O_j correspond à la fonction d'ouverture du $j^{ième}$ transducteur définie par

$$O_j = \mathrm{sinc}[A(y_j - dy)/r_j], \tag{3.4}$$

La pression émise par la transducteur i, puis rétro-diffusée par le cylindre vers le transducteur j s'écrit, dans le cas général [Eq. (2.11)]

$$P_{diff}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \frac{1}{4i}\left(P_0^{(c)} e^{-i\omega t}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n R_n \mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r_i)\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r_j)\cos(n\varphi_{ij}). \tag{3.5}$$

Le nombre de modes normaux est théoriquement infini. Cependant, m désigne l'ordre du dernier mode significatif. Ce terme est de l'ordre de k_0a [Eq. (2.25)]. Les modes normaux sont illustrés sur la figure (2.2).

Un élément K_{ij} de la matrice de transfert **K** est défini comme la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle inter-élément [Eq. (1.2)]. En utilisant les équations (3.4) et (3.5), un élément K_{ij} a pour expression

$$K_{ij} = O_i O_j \sum_{n=0}^{m} \varepsilon_n R_n \mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r_i) \mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r_j) \cos(n\varphi_{ij}) \,, \quad 0 \le i, j \le N \,. \tag{3.6}$$

Remarques :

1) La fonction cosinus étant paire, l'équation (3.6) est réciproque : i et j sont interchangeables. La matrice **K** est symétrique.

2) Dans la partie théoriques, les applications numériques seront effectuées pour un réseau de 96 éléments et de pas 0,5 mm. La largeur du réseau D est égale à 48 mm. La fréquence centrale est de 1,5 MHz, soit une longueur d'onde dans l'eau λ de 1 mm.

Si le réseau entoure complètement le cylindre, les vecteurs singuliers et les valeurs singulières dépendent directement des modes normaux de vibrations. En effet, ceux-ci étant orthogonaux, ils forment la base des vecteurs singuliers. Les valeurs singulières correspondantes σ_n sont proportionnelles aux coefficients de diffusion R_n. Ce résultat a été démontré par Tortel *et al*. en 1999 en électomagnétisme[2] et est utilisé en imagerie avec un réseau circulaire.[1]

Si le réseau n'entoure pas complètement le cylindre, les projections des modes normaux sur le réseau ne sont pas orthogonales. Ces projections correspondent à la façon dont les modes normaux sont « vus » par le réseau : elles sont appelées modes projetés. Dans ce cas, les vecteurs singuliers sont des combinaisons des modes projetés. Cette combinaison est obtenue en exprimant la matrice de transfert **K** dans la base des modes projetés. Ces projections sont exprimées dans la paragraphe suivant.

Le problème de dimension N, le nombre de transducteurs, est réduit à un problème de dimension $2m+1$, soit le rang de **K**, dans la mesure où $2m+1$ est inférieur à N. Dans ce cas, la projection permet de gagner du temps de calcul par à la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice de transfert **K** donnée par l'équation (3.6). Les deux points de vue sont équivalents tant que l'ordre des valeurs singulières est conservé.

III.1.2 Ecriture de la matrice de transfert K en fonctions des modes projetés

D'après l'équation (3.6), un élément K_{ij} de la matrice de transfert dépend de la somme des modes normaux, dont les ordres n significatifs sont compris entre 0 et m. La dépendance angulaire de ces modes est en $\cos(n\varphi_{ij})$ (figure 2.2). Ces modes normaux sont « alignés » suivant la direction de l'onde incidente φ_i (figure 3.2 haut). Ils peuvent être décomposés suivant la direction (Ox) définie par la symétrie du réseau (figure 3.2 bas). L'angle φ_{ij} étant égal à $\varphi_j - \varphi_i$ [Eq. (3.3)], cette décomposition s'écrit

$$\cos\{n(\varphi_j - \varphi_i)\} = \cos(n\varphi_j)\cos(n\varphi_i) + \sin(n\varphi_j)\sin(n\varphi_i),$$
$$0 \le i, j \le N \text{ et } 0 \le n \le m\,. \qquad (3.7)$$

Les termes en cosinus sont symétriques par rapport à l'axe de symétrie, parallèle à l'axe (Ox) (figure 3.2). Les termes en sinus sont anti-symétriques.

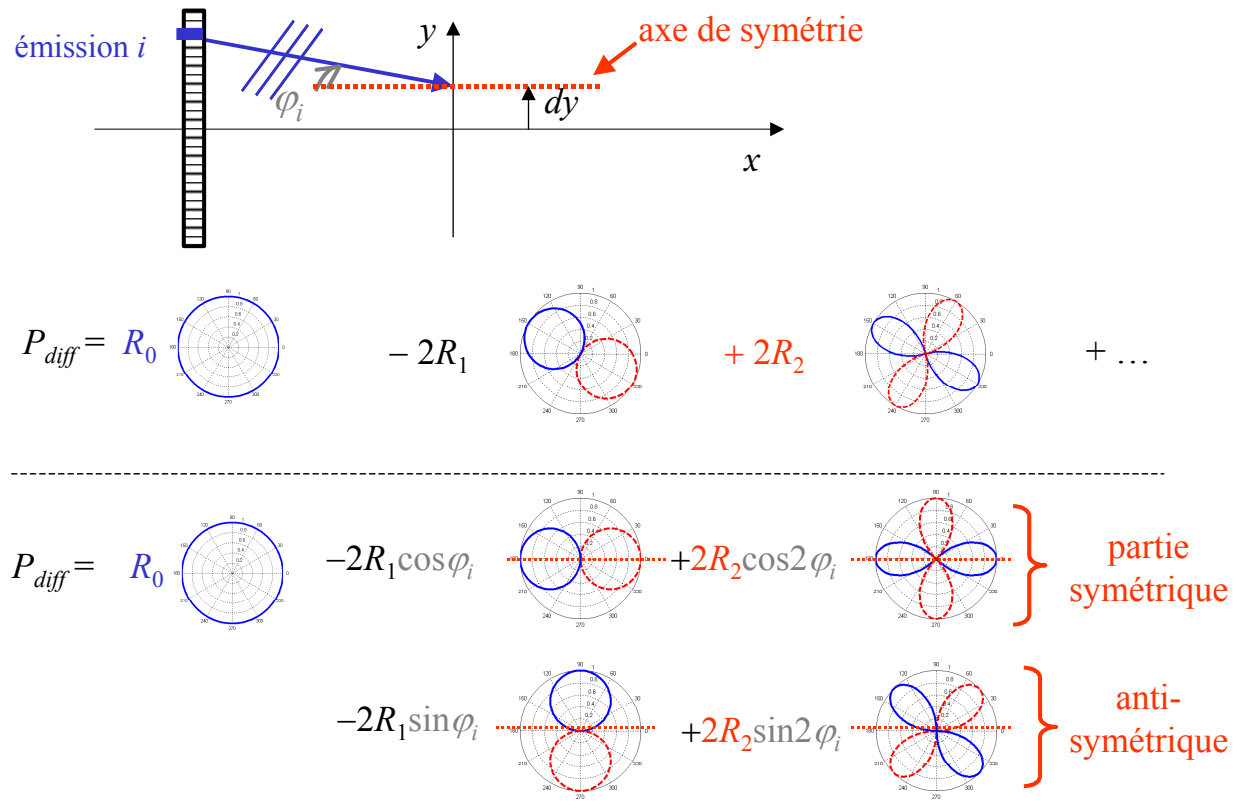


figure 3.2 : développement sur la base des modes normaux symétriques et anti-symétriques.

Réponses symétriques et anti-symétriques

Les réponses des modes symétriques et anti-symétriques entre le transducteur j et le cylindre sont définies suivant

$$H_{\mathrm{S}n,j} = i^n O_j \cos(n\varphi_j)\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r_j), \qquad 1 \le j \le N \text{ et } 0 \le n \le m \tag{3.8a}$$

$$H_{\mathrm{A}n,j} = i^n O_j \sin(n\varphi_j)\mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r_j), \qquad 1 \le j \le N \text{ et } 1 \le n \le m \tag{3.8b}$$

Ils correspondent au modes normaux « vus » par le réseau. Les lettres S et A désignent les modes normaux symétriques et antisymétriques respectivement. L'indice n, compris entre 0 et m, correspond à l'ordre du mode normal. A l'ordre 0, il n'y a qu'une réponse symétrique, les ordres suivants, de 1 à m, présentent les deux réponses (figure 3.2). Ainsi, pour m+1 modes normaux, le nombre de réponses est égale à 2m+1.

Avec ces notations, un élément K_{ij} de la matrice de transfert [Eq. (3.6)] s'écrit

$$K_{ij} = \sum_{n=0}^{m} \varepsilon_n (-1)^n R_n H_{\mathrm{S}n,i} H_{\mathrm{S}n,j} + \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n (-1)^n R_n H_{\mathrm{A}n,i} H_{\mathrm{A}n,j} \ . \tag{3.9}$$

Les réponses sont des éléments de vecteurs $\mathbf{H}_{\mathrm{S}n}$ et $\mathbf{H}_{\mathrm{A}n}$ de dimension $N\times1$. La matrice de transfert $\mathbf{K}$ s'écrit comme

$$\mathbf{K} = \sum_{n=0}^{m} \varepsilon_n (-1)^n R_n \mathbf{H}_{\mathrm{S}n}{}^t \mathbf{H}_{\mathrm{S}n} + \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n (-1)^n R_n \mathbf{H}_{\mathrm{A}n}{}^t \mathbf{H}_{\mathrm{A}n} \ . \tag{3.10}$$

Remarque : le choix du terme i^n dans l'équation (3.8) permet de simplifier les calculs en champ lointain.

Ecriture des modes projetés

Les modes projetés sont définis par normalisation des réponses symétriques et anti-symétriques

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}n} = \frac{\mathbf{H}_{\mathrm{S}n}}{\|\mathbf{H}_{\mathrm{S}n}\|} \ , \qquad 0 \le n \le m \ , \tag{3.11a}$$

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}n} = \frac{\mathbf{H}_{\mathrm{A}n}}{\|\mathbf{H}_{\mathrm{A}n}\|} \ , \qquad 1 \le n \le m \ . \tag{3.11b}$$

Le « poids » associé à chaque mode projeté est défini de la façon suivante

$$\widetilde{\sigma}_{\mathrm{S}n} = \varepsilon_n (-1)^n R_n \|\mathbf{H}_{\mathrm{S}n}\|^2 \ , \qquad 0 \le n \le m \ , \tag{3.12a}$$

$$\widetilde{\sigma}_{\mathrm{A}n} = \varepsilon_n (-1)^n R_n \|\mathbf{H}_{\mathrm{A}n}\|^2 \ , \qquad 1 \le n \le m \ . \tag{3.12b}$$

Les modes normaux, les modes projetés et leur poids sont illustrés sur la figure 3.3.

Remarques :

1) La notation $\|\mathbf{H}_{Sn}\|$ correspond à la norme du vecteur réponse $\mathbf{H}_{Sn}$. Les modes projetés sont normalisées comme les vecteurs singuliers [Eq. (1.12)]. Ils sont de taille $N\times 1$.

2) Les poids des modes projetés sont sans dimension, comme les valeurs singulières [Eq. (1.12)]. Cependant une valeur singulière est définie réelle positive [Eq. (1.10)] ; les poids sont complexes comme les coefficient de diffusion R_n (§ II.1.2).

La matrice de transfert **K** s'écrit alors comme une somme de modes projetés normalisés, pondérés par leur poids respectif. L'équation (3.10) devient

$$\mathbf{K} = \sum_{n=0}^{m} \tilde{\sigma}_{Sn} \tilde{\mathbf{U}}_{Sn}\, {}^t\tilde{\mathbf{U}}_{Sn} + \sum_{n=1}^{m} \tilde{\sigma}_{An} \tilde{\mathbf{U}}_{An}\, {}^t\tilde{\mathbf{U}}_{An} \,. \tag{3.13}$$

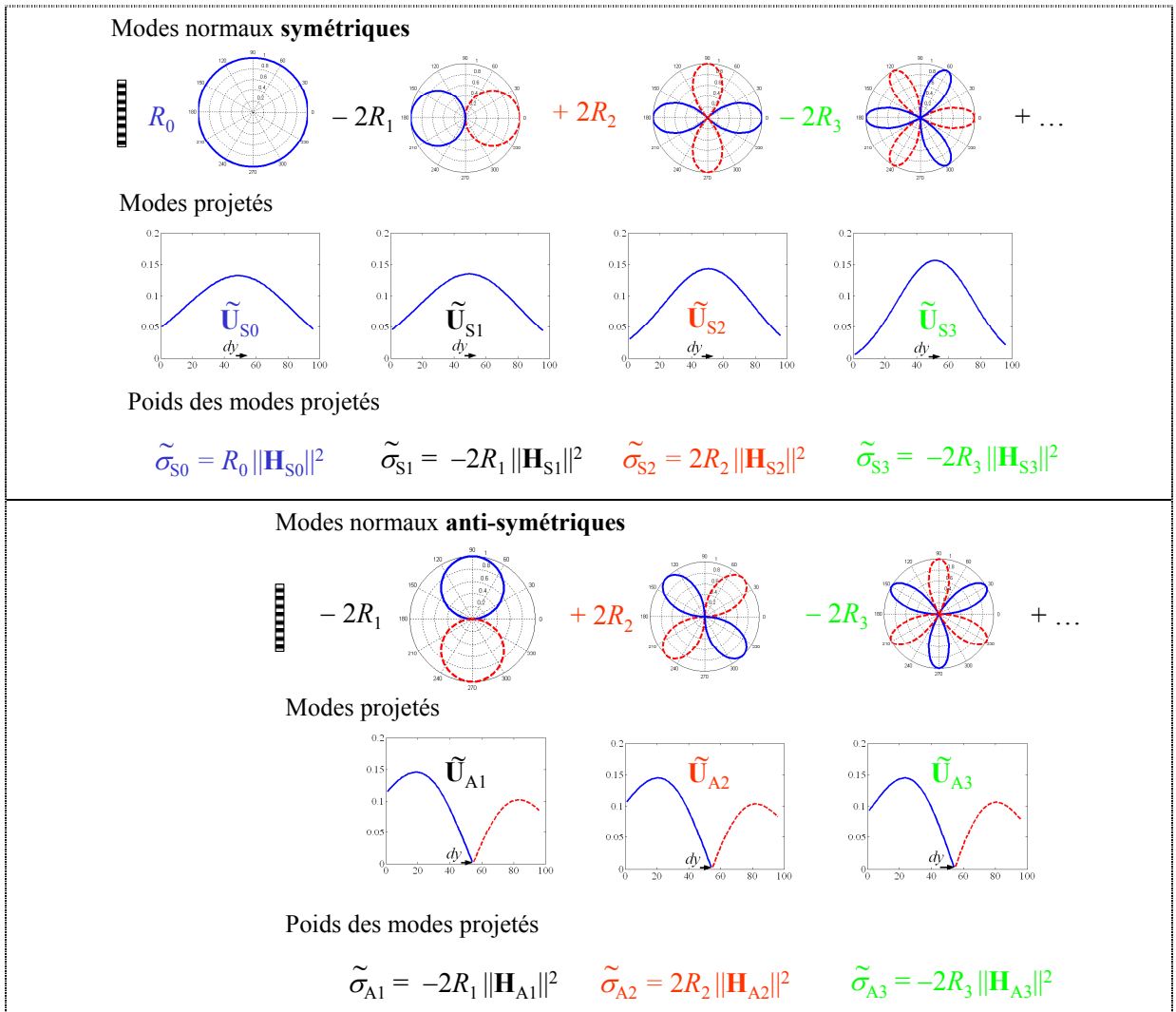


figure 3.3 : modes normaux et modes projetés **symétriques** (haut) et **anti-symétriques** (bas) et leur poids respectifs $\tilde{\sigma}_{Sn}$ et $\tilde{\sigma}_{An}$.

Expression de K dans la base des modes projetés

D'après l'équation (3.13), la matrice de transfert **K** est combinaison de $2m$+1 modes projetés : son rang est égal à la dimension de l'espace engendré par les modes projetés symétriques et anti-symétriques $\left\{\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}0},...,\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}m},\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}1},...,\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}m}\right\}$. Il est donc inférieur ou égal à $2m$+1. Cette base n'est pas orthogonale, elle ne permet pas d'exprimer directement les invariants du Retournement Temporel décrits à la partie I [Eq. (1.6)]. Ceux-ci sont obtenus par décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice de transfert **K**. En effet **K** se décompose suivant $2m$+1 vecteurs singuliers $\mathbf{U}_j$, associés aux valeurs singulières σ_j [Eq. (1.11)].

L'équation reliant le vecteur singulier $\mathbf{U}_j$ à la valeur singulière σ_j est $\mathbf{K}\mathbf{U}_j^* = \sigma_j\mathbf{U}_j$ [Eq. (1.13)]. L'objectif est d'exprimer les vecteurs singuliers et les valeurs singulières en fonction des modes projetés $\widetilde{\mathbf{U}}$, de leurs poids $\widetilde{\sigma}$, définis aux équations (3.11) et (3.12). Ainsi, un vecteur singulier $\mathbf{U}_j$ est recherché sous forme d'une combinaison linéaire des $2m$ +1 modes projetés $\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}i}$ et $\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}i}$ sous la forme

$$\mathbf{U}_j = \sum_{i=0}^{m} \chi_{\mathrm{S}i,j}\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}i} + \sum_{i=1}^{m} \chi_{\mathrm{A}i,j}\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}i} \ , \qquad 1 \le j \le 2m+1. \tag{3.14}$$

Le produit scalaire hermitien w_{AB} entre deux vecteurs complexes **A** et **B** est défini par $w_{\mathrm{AB}} = \langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle = {}^t\mathbf{A}^*.\mathbf{B}$. Par définition, w_{AB} est égal à w_{BA}^*. Les modes projetés étant normés [Eq. (3.11)], pour deux modes projetés **A** et **B**, on a $w_{\mathrm{AA}} = w_{\mathrm{BB}} = 1$.

En utilisant, les équations (3.13) et (3.14), l'équation $\mathbf{K}\mathbf{U}_j^* = \sigma_j\mathbf{U}_j$, pour j compris entre 1 et $2m$+1, se projette dans l'espace engendré par les $2m$+1 modes projetés. Suivant le mode projeté symétrique $\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}n}$, cette projection s'écrit, pour n compris entre 0 et m

$$\widetilde{\sigma}_{\mathrm{S}n}\left(\sum_{i=0}^{m} \chi_{\mathrm{S}i,j}{}^* w_{\mathrm{S}n\mathrm{S}i}{}^* + \sum_{i=1}^{m} \chi_{\mathrm{A}i,j}{}^* w_{\mathrm{S}n\mathrm{A}j}{}^*\right) = \chi_{\mathrm{S}n,j}\sigma_j , \tag{3.15a}$$

avec $0 \le n \le m$ et $1 \le j \le 2m+1$.

De même, la projection de l'équation $\mathbf{K}\mathbf{U}_j^* = \sigma_j\mathbf{U}_j$ suivant $\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}n}$ s'écrit, pour n compris entre 1 et m

$$\widetilde{\sigma}_{\mathrm{A}n}\left(\sum_{i=0}^{m} \chi_{\mathrm{S}i,j}{}^* w_{\mathrm{A}n\mathrm{S}i}{}^* + \sum_{i=1}^{m} \chi_{\mathrm{A}i,j}{}^* w_{\mathrm{A}n\mathrm{A}i}{}^*\right) = \chi_{\mathrm{A}n,j}\sigma_j , \tag{3.15b}$$

avec $1 \le n \le m$ et $1 \le j \le 2m+1$.

Afin de rassembler les deux équations (3.15) en une relation matricielle, quatre matrices de dimension $2m+1$ sont définies. La matrice $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}$ est diagonale et contient les poids des modes projetés $\widetilde{\sigma}_{\mathrm{S}n}$ et $\widetilde{\sigma}_{\mathrm{A}n}$ [Eq. (3.16a)]. La matrice $\mathbf{\Sigma}$ est également diagonale et contient les valeurs singulières σ_j [Eq. (3.16b)]. La matrice $\mathbf{W}$ contient les produits scalaires w_{AB} entre modes projetés [Eq. (3.16c)]. La matrice $\boldsymbol{\chi}$ contient les vecteurs $\boldsymbol{\chi}_j$ d'éléments $\chi_{\mathrm{S}i,j}$ et $\chi_{\mathrm{A}i,j}$ permettant d'exprimer les vecteurs singuliers en fonction des modes projetés [Eqs. (3.14) et (3.16d)]. Ces matrices s'écrivent

$$\widetilde{\mathbf{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\sigma}_{\mathrm{S}0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{\sigma}_{\mathrm{S}m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{\sigma}_{\mathrm{A}1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{\sigma}_{\mathrm{A}m} \end{pmatrix} \tag{3.16a}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{2m+1} \end{pmatrix} \tag{3.16b}$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & w_{\mathrm{S0S}m} & w_{\mathrm{S0A1}} & \dots & w_{\mathrm{S0A}m} \\ \dots & 1 & \dots & \dots & & \dots \\ w_{\mathrm{S}m\mathrm{S0}} & & 1 & w_{\mathrm{S}m\mathrm{A1}} & \dots & w_{\mathrm{S}m\mathrm{A}m} \\ w_{\mathrm{A1S0}} & & w_{\mathrm{A1S}m} & 1 & \dots & w_{\mathrm{A1A}m} \\ \dots & & \dots & \dots & 1 & \dots \\ w_{\mathrm{A}m\mathrm{S0}} & \dots & w_{\mathrm{A}m\mathrm{S}m} & w_{\mathrm{A}m\mathrm{A1}} & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{3.16c}$$

$$\boldsymbol{\chi}_j = \begin{pmatrix} \chi_{\mathrm{S01}} & \dots & \chi_{\mathrm{S}mj} & \dots & \chi_{\mathrm{S}m,2m+1} \\ \dots & & & & \dots \\ \chi_{\mathrm{S}m1} & & \chi_{\mathrm{S}mj} & & \chi_{\mathrm{S}m,2m+1} \\ \chi_{\mathrm{A11}} & & \chi_{\mathrm{A1}j} & & \chi_{\mathrm{A1},2m+1} \\ \dots & & & & \dots \\ \chi_{\mathrm{A}m1} & \dots & \chi_{\mathrm{A}mj} & \dots & \chi_{\mathrm{A}m,2m+1} \end{pmatrix} \tag{3.16d}$$

Remarque : la matrice $\mathbf{W}$ est à symétrie hermitienne : ${}^t\mathbf{W} = \mathbf{W}^*$.

Avec ces notations, les deux équations (3.15) peuvent être réunies en une relation matricielle de dimension $2m+1$:

$$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{W}^{*}\boldsymbol{\chi}_{j}^{*} = \sigma_{j}\boldsymbol{\chi}_{j} \ . \tag{3.17}$$

En posant $\mathbf{S} = \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{W}^{*}$, l'équation précédente devient $\mathbf{S}\boldsymbol{\chi}_{j}^{*} = \sigma_{j}\boldsymbol{\chi}_{j}$. Cette relation concerne la $j^{ième}$ valeur singulière σ_j. Il est possible d'écrire une relation concernant les $2m+1$ valeurs singulières σ_j contenues dans la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\mathbf{S}\boldsymbol{\chi}^{*} = \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\Sigma} \ . \tag{3.18}$$

En combinant l'équation précédente avec sa conjuguée, la relation de diagonalisation de la matrice $\mathbf{SS}^{*}$ est obtenue, soit

$$\mathbf{SS}^{*} = \boldsymbol{\chi}\,\boldsymbol{\Sigma}^{2}\boldsymbol{\chi}^{-1} \ . \tag{3.19}$$

Remarque : la notation **S** a été utilisée en Prada *et al*. en 1996 dans le cadre de l'étude de deux diffuseurs.[5]

Interprétation

D'après l'équation (3.19), les valeurs propres de la matrice $\mathbf{SS}^{*}$ sont égales à σ_j^2 , soit le carré des valeurs singulières de **K**. Elles sont associées aux vecteurs propres $\boldsymbol{\chi}_j$ qui contiennent les coordonnées des vecteurs singuliers $\mathbf{U}_j$ dans la base des modes projetés $\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}n}$ et $\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}n}$ [Eq. (3.14)].

L'équation $\mathbf{S}\boldsymbol{\chi}^{*} = \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\Sigma}$ correspond à la projection de la relation $\mathbf{KU}^{*} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}$ dans le sous espace engendré par les modes projetés $\left\{\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}0},...,\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}m},\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}1},...,\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}m}\right\}$. La matrice **S** est la projection de la matrice de transfert **K** sur cet espace. De même, la matrice $\mathbf{SS}^{*}$ correspond à la projection de l'Opérateur de Retournement Temporel $\mathbf{KK}^{*}$.

Les valeurs singulières et les vecteurs singuliers de **K** sont obtenus par diagonalisation de l'opérateur projeté $\mathbf{SS}^{*}$: le problème de dimension N, le nombre de transducteurs, est réduit à un problème de dimension $2m+1$, soit la dimension de l'espace des modes projetés.

Ecriture en champ lointain $a << F$

L'approximation des fonctions de Hankel cylindriques de première espèce et d'ordre n $H_n^{(1)}(k_0 r_j)$, est valable pour $n << k_0 r_j$ [figure 2.3 et Eq. (2.5)]

$$\mathrm{H}_n^{(1)}\left(k_0 r_j\right) \approx i^{-n} \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r_j}} e^{ik_0 r_j} \qquad n << k_0 r_j \text{ et } 1 \le j \le N \ . \qquad (3.20)$$

Les ordres n sont compris entre 0 et m. L'approximation champ lointain est valable si tous les ordres n sont très petits devant $k_0 r_j$. Sachant que m est de l'ordre de $k_0 a$ [Eq. (2.25)] et que r_j est de l'ordre de F, la limite de l'approximation champ lointain correspond à

$$0 \le n \le m \approx k_0 a << k_0 r_j \approx k_0 F \text{ soit } a << F \ .$$

Remarque : Cette limite ne dépend plus de la fréquence, elle dépend de la taille de l'objet a et de la distance d'observation F.

En prenant en compte la fonction ouverture du transducteur O_j [Eq. (3.4)], la réponse approchée du premier mode symétrique entre le transducteur j et le cylindre s'écrit

$$H_{\mathrm{S}0,j} \approx O_j \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r_j}} e^{ik_o r_j} , \qquad 1 \le j \le N \text{ et } n = 0 \ . \qquad (3.21)$$

D'après les équations (3.8) et (3.20), les réponses approchées des modes symétriques $H_{\mathrm{S}n,j}$ et anti-symétriques $H_{\mathrm{A}n,j}$ entre le transducteur j et le cylindre sont proportionnelles à la réponse $H_{\mathrm{S}0,j}$. Elles ont pour expression

$$H_{\mathrm{S}n,j} \approx \cos\left(n\varphi_j\right) H_{\mathrm{S}0,j} , \qquad 1 \le j \le N \text{ et } 0 \le n \le m. \qquad (3.22a)$$

$$H_{\mathrm{A}n,j} \approx \sin\left(n\varphi_j\right) H_{\mathrm{S}0,j} , \qquad 1 \le j \le N \text{ et } 1 \le n \le m. \qquad (3.22b)$$

Les modes projetés sont définies de même façon qu'à l'équation (3.11). Ils sont égaux aux réponses normalisées, soit $\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A,S}n} = \mathbf{H}_{\mathrm{A,S}n} \big/ \left\|\mathbf{H}_{\mathrm{A,S}n}\right\|$. Leur poids s'écrivent de même façon qu'à l'équation (3.12), soit

$$\widetilde{\sigma}_{\mathrm{S}n} \approx \varepsilon_n \left(-1\right)^n R_n \left\|\mathbf{H}_{\mathrm{S}n}\right\|^2 , \qquad 0 \le n \le m ,$$

$$\widetilde{\sigma}_{\mathrm{A}n} \approx \varepsilon_n \left(-1\right)^n R_n \left\|\mathbf{H}_{\mathrm{A}n}\right\|^2 , \qquad 1 \le n \le m \ .$$

L'expression de $\mathbf{K}$ est alors identique à celle de l'équation (3.10)

$$\mathbf{K} = \sum_{n=0}^{m} \widetilde{\sigma}_{\mathrm{S}n} \widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}n}{}^t \widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}n} + \sum_{n=1}^{m} \widetilde{\sigma}_{\mathrm{A}n} \widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}n}{}^t \widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}n} \ .$$

La projection dans l'espace des modes projetés et le calcul des vecteurs singuliers et valeurs singulières sont identiques au cas général décrit précédemment. Cependant, d'après les équations (3.21) et (3.22), les produits scalaires w_{AB} sont réels dans ce cas : la matrice **W** est alors symétrique réelle [Eq. (3.16c)]. L'équation (3.17) devient $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{W}\boldsymbol{\chi}_j^* = \sigma_j \boldsymbol{\chi}_j$, avec $\mathbf{W}^* = \mathbf{W}$.

Un élément K_{ij} de la matrice de transfert s'écrit en champ lointain, d'après les équations (3.6) et (3.22)

$$K_{ij} \approx H_{S0,j} H_{S0,i} \sum_{n=0}^{m} \varepsilon_n (-1)^n R_n \cos(n\varphi_{ij}) , \qquad 1 \le i, j \le N . \tag{3.23}$$

Un élément C_{ij} de matrice de diffusion **C** est défini comme

$$C_{ij} = \sum_{n=0}^{m} \varepsilon_n (-1)^n R_n \cos(n\varphi_{ij}) , \qquad 1 \le i, j \le N . \tag{3.24}$$

Avec ces notations, la matrice de transfert s'écrit

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}_{S0}\, \mathbf{C}\, {}^t\mathbf{H}_{S0} . \tag{3.25}$$

Le vecteur ${}^t\mathbf{H}_{S0}$, d'éléments $H_{S0,j}$, décrit la propagation entre les N transducteurs et le diffuseur. D'après le principe de réciprocité, la propagation du diffuseur aux transducteurs, est la transposée de ${}^t\mathbf{H}_{S0}$**,** soit $\mathbf{H}_{S0}$. Il ressort qu'en champ lointain, le phénomène de diffusion, décrit par la matrice **C**, est découplé du phénomène de propagation, décrit par le vecteur $\mathbf{H}_{S0}$.

Remarque : un élément C_{ij} peut s'écrire en développant la somme entre $-m$ et $+m$ [Eq. (2.2)]

$$C_{ij} = \sum_{n=-m}^{m} (-1)^n R_n e^{in\varphi_{ij}} .$$

Rang de la matrice de transfert

D'après l'équation (1.12), le nombre de valeur singulières est égal au rang de la matrice de transfert **K**. Ce rang dépend du nombre de modes normaux significatifs. Avec m l'ordre du mode normal le plus élevé, de l'ordre de k_0a, le rang de **K** est inférieur ou égal à $2m+1$, soit la dimension de l'espace engendré par les modes normaux de 0 à m. En effet, l'espace engendré par le monopôle est de dimension 1, ceux engendrés par le dipôle, le quadripôle et les modes suivants sont de dimension 2 [Eq. (3.8)].

Deux approximations sur le nombre de modes normaux sont étudiées par la suite : l'approximation diffusion isotrope et la limite petit objet. En considérant uniquement le premier mode ($m = 0$), seule la partie isotrope de la diffusion est prise en compte: on parle d' « approximation diffusion isotrope. » Dans ce cas, la matrice de transfert est de rang 1. Cette approximation est valable dans le cas d'un petit cylindre d'air en régime linéaire dans l'eau, du fait du très fort contraste de compressibilité, et dans le cas d'un petit cylindre de nylon, du fait du faible contraste de densité (figure 2.14). Ce cas est étudié au paragraphe III.1.3.

Dans le cas d'un petit objet « solide » dans l'eau, comme un cylindre métallique, cette approximation n'est pas physiquement valable. En effet, même dans la limite petit objet (§ II.1.5), les deux premiers modes normaux sont du même ordre de grandeur et les suivants sont négligeables. Le mode monopolaire dépend du *contraste de compressibilité* α et le mode dipolaire du *contraste de densité* β. Dans ce cas, $m = 1$: l'ordre des modes normaux n varie entre 0 et 1. La matrice de transfert est alors de rang inférieur ou égal à 3. Ce cas est étudié au paragraphe III.1.4. Les notations développées dans la limite objet sont généralisées au cylindre plus grands dans le paragraphe III.1.5. Les expériences correspondantes sont présentées aux paragraphes III.1.6 et III.1.7 dans le cas de réseaux courbé ou linéaire.

III.1.3 Approximation diffusion isotrope

Considérons un milieu contenant un diffuseur, placé à une distance F du réseau. La diffusion est supposée isotrope, ou de Rayleigh, caractérisée par le coefficient de diffusion R_0. Les autre coefficients de diffusion R_n sont supposés négligeables, soit $m = 0$. Cette approximation est utilisée dans les premières références sur la méthode DORT[3] et dans la plupart des références en imagerie acoustique.[4] Cette approximation est reprise au paragraphe III.4.3 dans le cas de deux cylindres.

Le vecteur ${}^t\mathbf{H}_{S0}$ contient toutes les réponses entre le réseau et le cylindre $H_{S0,j}$ décrites à l'équation (3.21). Ces réponses sont illustrées sur la figure 3.4(a). Le vecteur ${}^t\mathbf{H}_{S0}$ est représenté sur la figure 3.4(b). Ce vecteur focalise au niveau du diffuseur ; la largeur de la tache de focalisation est de l'ordre de $\lambda F/D$, où λ est la longueur d'onde, F la distance objet barrette et D la largeur de la barrette. Le diffuseur est supposé petit devant la longueur d'onde, la tache focale est grande devant le diffuseur [figure 3.4(c)]. La propagation retour est décrite par le vecteur $\mathbf{H}_{S0}$ [figure 3.4(d)]. Le vecteur mesuré sur la barrette, correspondant à la partie rétro-diffusée, présente les mêmes variations de phase et d'amplitude que le vecteur émis : ce vecteur est un **invariant du Retournement Temporel** décrit dans la partie I.

Remarque : Les applications numériques sont effectuées pour un réseau de 96 éléments à la fréquence centrale est de 1,5 MHz. La distance F est de 50 mm et l'ouverture D du réseau de 48 mm. Le rapport F/D est de l'ordre de 1.

Dans le cadre de l'approximation diffusion isotrope, la somme des modes normaux [Eq. (3.24)] est réduite au terme monopolaire R_0, de module $|R_0|$ et de phase ϕ_0, soit $R_0 = |R_0|e^{i\phi_0}$. La matrice de transfert $\mathbf{K}$ s'écrit $\mathbf{H}_{S0}\, R_0\, {}^t\mathbf{H}_{S0}$. En fonction des modes projetés de leur poids [Eqs. (3.11) et (3.12)], elle s'écrit $\mathbf{K} = \widetilde{\mathbf{U}}_{S0}\widetilde{\sigma}_{S0}\, {}^t\widetilde{\mathbf{U}}_{S0}$. Cette matrice est de rang 1 et sa décomposition en valeurs singulières (SVD) s'écrit $\mathbf{U}_1\sigma_1{}^t\mathbf{U}_1$ [Eq. (1.11)], où $\mathbf{U}_1$ est le vecteur singulier en réception et σ_1 la valeur singulière réelle positive. Leur expression sont obtenues par identification, soit

$$\sigma_1 = |\widetilde{\sigma}_{S0}| = |R_0|\,\|\mathbf{H}_{S0}\|^2 . \tag{3.26a}$$

$$\mathbf{U}_1 = e^{i\phi_0/2}\widetilde{\mathbf{U}}_{S0} . \tag{3.26b}$$

Le vecteur singulier $\mathbf{U}_1$ est normalisé et contient la moitié de la phase du coefficient de diffusion ϕ_0.

La valeur singulières σ_1 dépend du coefficient de diffusion du cylindre R_0 ainsi que de la propagation entre le cylindre et le réseau $\mathbf{H}_{S0}$. Elle peut être interprétée comme la réflectivité apparente, vue par le réseau. Comme les deux termes R_0 et $\mathbf{H}_{S0}$ [Eqs. (2.12) et (3.21)], la valeur singulière σ_1 est sans dimension.

Dans la limite $k_0a << 1$, le coefficient R_0 est proportionnel à $(k_0a)^2$ [Eq. (2.32)] et le coefficient $||\mathbf{H}_{S0}||^2$ est proportionnel à $1/k_0$ [Eq. (3.21)]. La valeur singulière σ_1 est donc proportionnelle à k_0a^2. Ceci est également vrai pour les cylindres dans la limite petit objet (§ III.1.4).

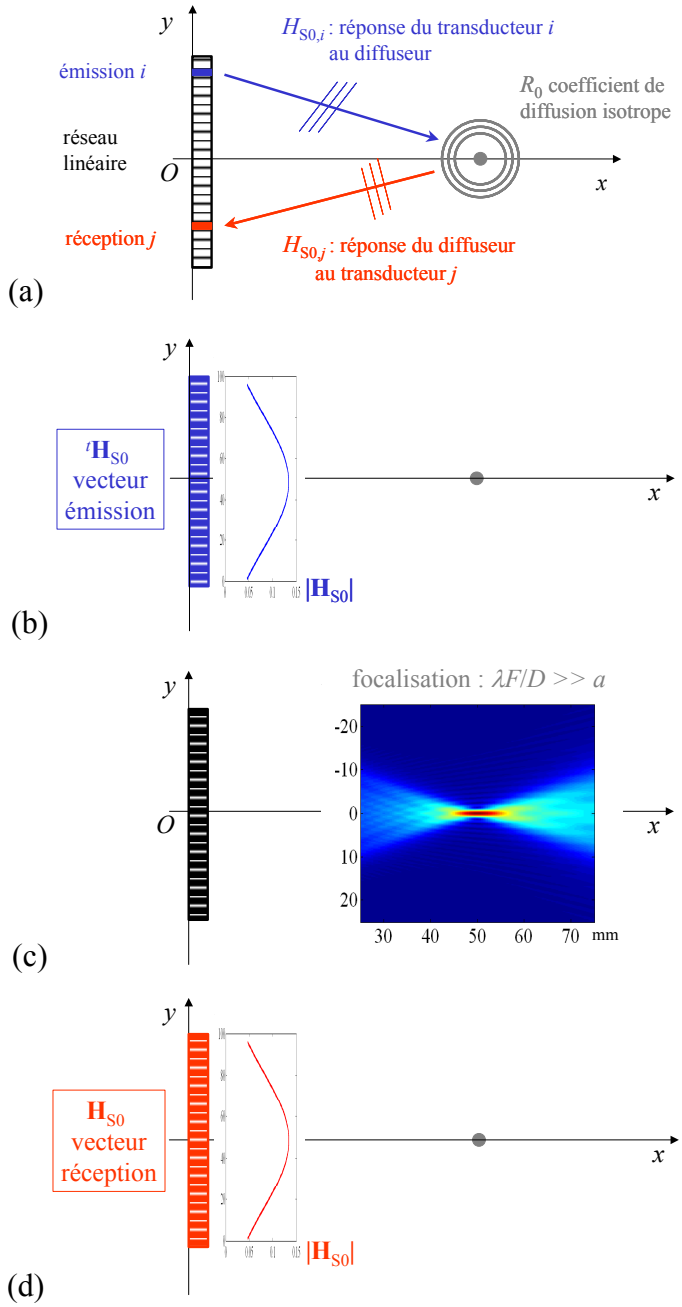


figure 3.4 : approximation diffusion isotrope, réponse $H_{S0,j}$ (a), vecteur émission $^t\mathbf{H}_{S0}$ (b), focalisation (c) et vecteur réception $\mathbf{H}_{S0}$ (d).

III.1.4 Limite petit objet pour un cylindre élastique

Dans la limite $k_0a << 1$, les deux premiers coefficients R_0 et R_1 de la série de diffusion sont significatifs. Le mode normal monopolaire ($n = 0$) dépend du contraste de compressibilité α. Le mode dipolaire ($n = 1$) dépend du contraste de densité β. Cette limite est valable tant que k_0a est inférieur à 0,5. Cette approximation est décrite au paragraphe II.1.5. Les exemples des cylindres métalliques et de nylon sont repris dans la partie expérimentale (§ III.1.6 et 7). Ce problème a d'abord été résolu par Chambers et Gautesen en 2001 dans le cas d'une sphère (3D).[6] Le problème en 2D a été résolu en électromagnétisme par Micolau et Saillard en 2003,[7] puis en acoustique par Minonzio *et al* en 2005.[8] Le cas électromagnétique est repris dans la partie IV.

Ecriture de la matrice de transfert K en champ lointain

Considérons un milieu contenant un cylindre élastique de rayon a perpendiculaire au plan d'insonification, situé à une distance F de la barrette et à une distance dy de l'axe (Ox) (figure 3.3). La distance d'observation F est considérée comme grande devant le rayon a ce qui correspond à l'approximation champ lointain. Les deux premiers modes normaux sont significatifs : m est égal à 1 et la matrice de transfert **K** est de rang inférieur ou égal à $2m+1$, soit 3. Un élément C_{ij} de la matrice de diffusion a pour expression [Eq. (3.24b)]

$$C_{ij} = R_0 - 2R_1\cos\varphi_{ij}, \qquad 1 \le i, j \le N. \qquad (3.27)$$

La réponse du mode normal monopolaire $H_{S0,j}$ est donnée à l'équation (3.21). Les réponses des modes normaux dipolaires $H_{S1,j}$ et $H_{A1,j}$ sont pour $n = 1$ [Eq. (3.22)]

$$H_{S1,j} = \cos(\varphi_j)\, H_{S0,j}, \qquad 1 \le j \le N. \qquad (3.28a)$$

$$H_{A1,j} = \sin(\varphi_j)\, H_{S0,j}, \qquad 1 \le j \le N. \qquad (3.28b)$$

Avec ces notations, la matrice de transfert **K** s'écrit comme la somme des trois réponses

$$\mathbf{K} = R_0\, {}^t\mathbf{H}_{S0}\mathbf{H}_{S0} - 2R_1\, {}^t\mathbf{H}_{S1}\mathbf{H}_{S1} - 2R_1\, {}^t\mathbf{H}_{A1}\mathbf{H}_{A1}. \qquad (3.29)$$

Les modes projetés sont égaux aux réponses normalisées [Eq. (3.11)] : $\widetilde{\mathbf{U}}_{A,Sn} = \mathbf{H}_{A,Sn} \big/ \left\|\mathbf{H}_{A,Sn}\right\|$.

Ils sont associés aux « poids » $\widetilde{\sigma}$, suivant [Eq. (3.12)]

$$\widetilde{\sigma}_{S0} = R_0 \left\|\mathbf{H}_{S0}\right\|^2, \qquad n = 0, \qquad (3.30a)$$

$$\widetilde{\sigma}_{S1} = -2R_1 \left\|\mathbf{H}_{S1}\right\|^2, \qquad n = 1, \qquad (3.30b)$$

$$\widetilde{\sigma}_{A1} = -2R_1 \left\|\mathbf{H}_{A1}\right\|^2, \qquad n = 1. \qquad (3.30c)$$

Les modes normaux, les modes projetés et leur poids correspondants sont illustrés sur la figure 3.5. Finalement, l'équation (3.29) donnant l'expression de la matrice de transfert **K** devient

$$\mathbf{K} = \tilde{\sigma}_{S0}\tilde{\mathbf{U}}_{S0}\,{}^t\tilde{\mathbf{U}}_{S0} + \tilde{\sigma}_{S1}\tilde{\mathbf{U}}_{S1}\,{}^t\tilde{\mathbf{U}}_{S1} + \tilde{\sigma}_{A1}\tilde{\mathbf{U}}_{A1}\,{}^t\tilde{\mathbf{U}}_{A1}. \qquad (3.31)$$

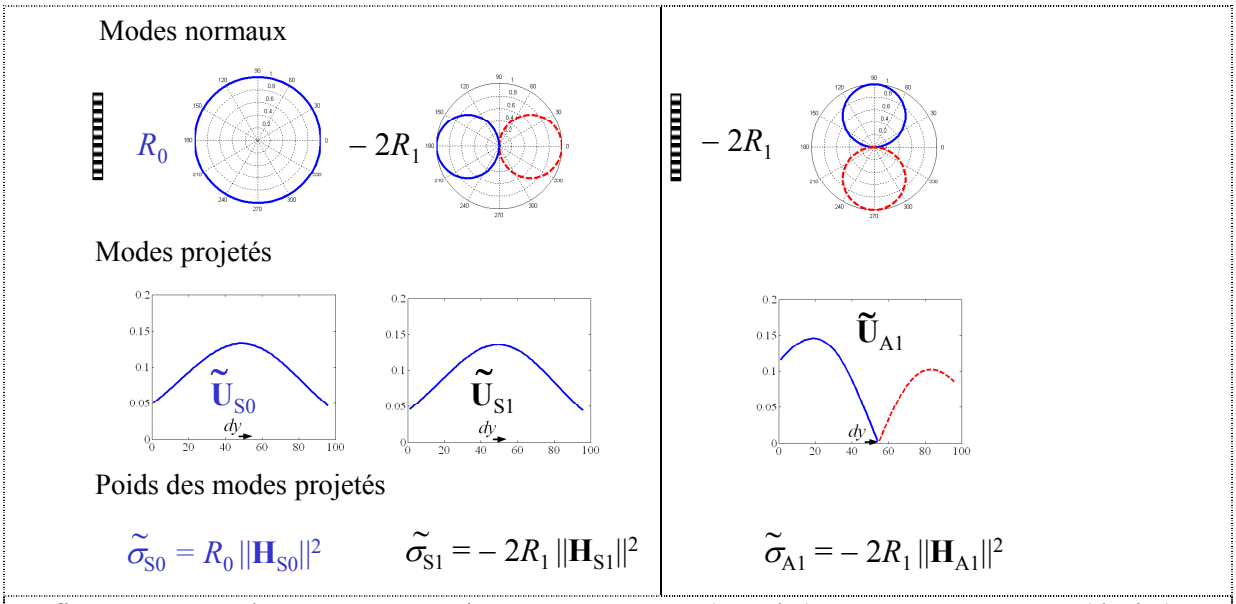


figure 3.5 : modes normaux, projetés **symétriques** (gauche) et **anti-symétrique** (droite).

Projection dans l'espace engendré par les modes projetés

D'après l'équation (3.31), la matrice de transfert **K** est combinaison des trois modes projetés : elle est de rang inférieur ou égal à 3. Par SVD, **K** se décompose également suivant trois vecteurs singuliers $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_3$, associés aux valeurs singulières σ_1, σ_2, σ_3 d'après l'équation (1.11). Cette décomposition s'écrit

$$\mathbf{K} = \sigma_1\,\mathbf{U}_1\,{}^t\mathbf{U}_1 + \sigma_2\mathbf{U}_2\,{}^t\mathbf{U}_2 + \sigma_3\,\mathbf{U}_3\,{}^t\mathbf{U}_3\,. \qquad (3.32)$$

L'objectif est d'exprimer ces vecteurs singuliers et ces valeurs singulières en fonction des modes projetés $\tilde{\mathbf{U}}$ de leurs poids $\tilde{\sigma}$ définis à l'équations (3.30). Ainsi, un vecteur singulier $\mathbf{U}_j$, avec $j = 1$, 2 ou 3, est exprimé sous forme d'une combinaison linéaire des modes projetés. Cette combinaison est écrite sous la forme suivante

$$\mathbf{U}_j = \chi_{1j}\tilde{\mathbf{U}}_{S0} + \chi_{2j}\tilde{\mathbf{U}}_{S1} + \chi_{3j}\tilde{\mathbf{U}}_{A1}, \qquad 1 \le j \le 3. \qquad (3.33)$$

En utilisant l'expression de la matrice **K** et d'un vecteur singulier en fonction des modes projetés [Eqs. (3.31) et (3.33)], il est possible de projeter l'équation $\mathbf{K}\mathbf{U}_j^* = \sigma_j\mathbf{U}_j$ dans l'espace engendré par les trois modes projetés $\{\tilde{\mathbf{U}}_{S0}, \tilde{\mathbf{U}}_{S1}, \tilde{\mathbf{U}}_{A1}\}$. Cette projection s'écrit

$\mathbf{S}\boldsymbol{\chi}_j^* = \sigma_j \boldsymbol{\chi}_j$ d'après l'équation (3.17). L'expression de la matrice $\mathbf{S} = \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{W}$ est dans ce cas d'après l'équation (3.16)

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \widetilde{\sigma}_{\mathrm{S0}} & \widetilde{\sigma}_{\mathrm{S0}} w_{\mathrm{S0S1}} & \widetilde{\sigma}_{\mathrm{S0}} w_{\mathrm{S0A1}} \\ \widetilde{\sigma}_{\mathrm{S1}} w_{\mathrm{S0S1}} & \widetilde{\sigma}_{\mathrm{S1}} & \widetilde{\sigma}_{\mathrm{S1}} w_{\mathrm{S1A1}} \\ \widetilde{\sigma}_{\mathrm{A1}} w_{\mathrm{S0A1}} & \widetilde{\sigma}_{\mathrm{A1}} w_{\mathrm{S1A1}} & \widetilde{\sigma}_{\mathrm{A1}} \end{pmatrix}. \tag{3.34}$$

En champ lointain, la matrice **W** des produits scalaires est réelle symétrique. La matrice **S** est la projection de la matrice de transfert **K** sur l'espace engendré par les trois modes projetés. De même, la matrice $\mathbf{SS}^*$ correspond à la projection de l'Opérateur de Retournement Temporel $\mathbf{KK}^*$.

Les valeurs singulières et les vecteurs singuliers de **K** sont obtenus par diagonalisation de l'opérateur projeté $\mathbf{SS}^*$: le problème de dimension N, le nombre de transducteurs, est réduit à problème de dimension $2m+1 = 3$, soit la dimension de l'espace des modes projetés.

Résolution dans le cas centré et dans la limite petit objet

Dans le cas où le fil est centré, soit $dy = 0$ (figure 3.5), les modes projetés symétriques et le mode antisymétrique sont orthogonaux : $w_{\mathrm{S0A1}} = w_{\mathrm{S1A1}} = 0$. Ceci est dû à la différence de parité entre les fonction sinus et cosinus par rapport à l'axe de symétrie du réseau (figure 3.5). Il est possible de traiter les modes projetés symétriques et anti-symétriques séparément.

De plus, dans la limite petit objet, pour $k_0 a < 0{,}5$, les coefficients de diffusion s'écrivent $R_0 = \alpha c$ et $-2R_1 = \beta c$ [Eq. (2.31)]. Les termes α et β correspondent aux contrastes de compressibilité et de densité et c est le coefficient de diffusion. Les contrastes α et β sont réels tandis que le terme c est imaginaire pur, proportionnel à $-i$ [Eq. (2.32c)].

La matrice **W** étant réelle en champ lointain, la matrice $\mathbf{S} = \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{W}$ [Eq. (3.34)] est également proportionnelle à $-i$. La matrice **S** est donc proportionnelle à une matrice réelle symétrique diagonalisable $\mathbf{S}_{\mathrm{Re}}$, dont les valeurs propres sont égales aux valeurs singulières σ_j. La matrice $\mathbf{S}_{\mathrm{Re}}$ est donnée par le produit de **W** par la matrice diagonale contenant les normes des poids des modes projetés [Eq. (3.16a)]. D'après l'équation (3.30), les normes des poids s'écrivent

$$\widetilde{\sigma}_{\mathrm{S0}} = \alpha\,|c|\,\|\mathbf{H}_{\mathrm{S0}}\|^2 , \tag{3.35a}$$

$$\widetilde{\sigma}_{\mathrm{S1}} = \beta\,|c|\,\|\mathbf{H}_{\mathrm{S1}}\|^2 , \tag{3.35b}$$

$$\widetilde{\sigma}_{\mathrm{A1}} = \beta\,|c|\,\|\mathbf{H}_{\mathrm{A1}}\|^2 . \tag{3.35c}$$

La matrice $\mathbf{S}_{\mathrm{Re}}$ a pour expression [Eq. (3.34)]

$$\mathbf{S}_{\mathrm{Re}} = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{\mathrm{S0}} & \tilde{\sigma}_{\mathrm{S0}} w_{\mathrm{S0S1}} & 0 \\ \tilde{\sigma}_{\mathrm{S1}} w_{\mathrm{S0S1}} & \tilde{\sigma}_{\mathrm{S1}} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\sigma}_{\mathrm{A1}} \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

Remarque : Dans la cas général, les valeurs singulières σ_j sont obtenues par diagonalisation de $\mathbf{SS}^*$ [Eq. (3.34)]. Ici, dans la limite petit objet, elles sont obtenues par diagonalisation de la $\mathbf{S}_{\mathrm{Re}}$.

D'après l'équation (3.36), la partie antisymétrique donne directement la valeur singulière suivante, notée σ_{A}

$$\sigma_{\mathrm{A}} = \tilde{\sigma}_{\mathrm{A1}} . \tag{3.37a}$$

Elle est associée au vecteur singulier anti-symétrique $\mathbf{U}_{\mathrm{A}}$

$$\mathbf{U}_{\mathrm{A}} = \tilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A1}} \ . \tag{3.38b}$$

La diagonalisation de la partie symétrique donne les valeurs singulières [Eq. (3.36)]

$$\sigma_{\mathrm{S}\pm} = \frac{1}{2}\left(\tilde{\sigma}_{\mathrm{S0}} + \tilde{\sigma}_{\mathrm{S1}}\right)\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\tilde{\sigma}_{\mathrm{S0}}\tilde{\sigma}_{\mathrm{S1}}}{\left(\tilde{\sigma}_{\mathrm{S0}} + \tilde{\sigma}_{\mathrm{S1}}\right)^2}\left(1 - w_{\mathrm{S0S1}}{}^2\right)}\right), \tag{3.39a}$$

associées aux vecteurs singuliers symétriques $\mathbf{U}_{\mathrm{S}\pm}$

$$\mathbf{U}_{\mathrm{S}\pm} = \frac{\tilde{\sigma}_{\mathrm{S0}} w_{\mathrm{S0S1}} \tilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S0}} + \left(\sigma_{\pm} - \tilde{\sigma}_{\mathrm{S0}}\right)\tilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S1}}}{\left\| \tilde{\sigma}_{\mathrm{S0}} w_{\mathrm{S0S1}} \tilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S0}} + \left(\sigma_{\pm} - \tilde{\sigma}_{\mathrm{S0}}\right)\tilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S1}} \right\|} \ . \tag{3.39b}$$

Valeurs approchées des valeurs singulières et vecteurs singuliers

Les deux modes projetés symétriques $\tilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S0}}$ et $\tilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S1}}$ se « ressemblent » (figure 3.5). Leur produit scalaire w_{S0S1} est proche de 1. Le terme $\varepsilon = 1 - w_{\mathrm{S0S1}}{}^2$ est donc très petit devant 1. D'après la figure 3.6(a), ε est inférieur à 10^{-3} pour F supérieur à $D/2$ [figure 3.6(a)]. Cette limite correspond à F de l'ordre de 25 mm, pour $D = 48$ mm.

Remarque : les modes projetés étant normés, les produits scalaire w ne dépendent pas de la fréquence. Le terme ε ne dépend donc pas de la fréquence. Il dépend du rapport F/D. Les normes des réponses $\|\mathbf{H}_{\mathrm{S,A}n}\|^2$ dépendent elles de la fréquence.

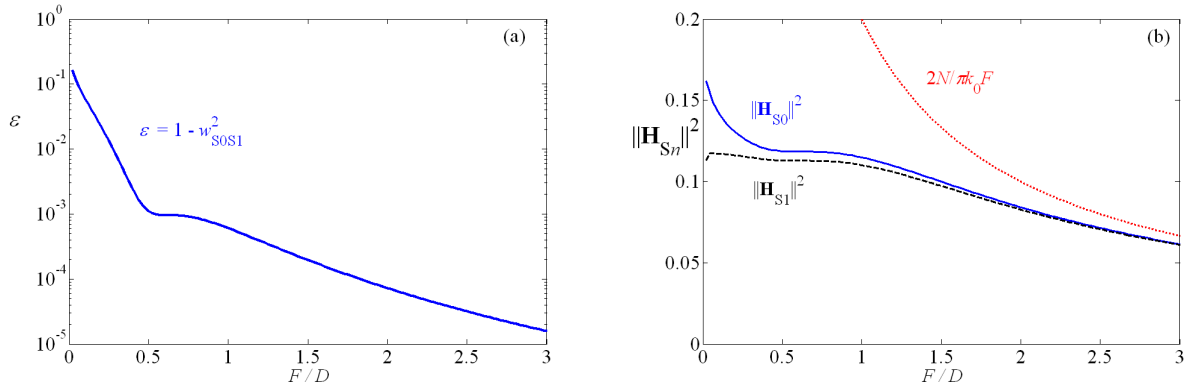


figure 3.6 : terme $\varepsilon = 1 - w_{S0S1}{}^2$ (a) et normes des modes projetés symétriques $||\mathbf{H}_{Sn}||^2$ (b).

Il est alors possible de faire un développement limité en ε de la racine carrée de l'équation (3.39a). Les valeurs singulières symétriques s'écrivent dans ce cas

$$\sigma_{S+} \approx \tilde{\sigma}_{S0} + \tilde{\sigma}_{S1} - \varepsilon \frac{\tilde{\sigma}_{S0}\tilde{\sigma}_{S1}}{(\tilde{\sigma}_{S0} + \tilde{\sigma}_{S1})} \ , \tag{3.40a}$$

$$\sigma_{S-} \approx \varepsilon \frac{\tilde{\sigma}_{S0}\tilde{\sigma}_{S1}}{(\tilde{\sigma}_{S0} + \tilde{\sigma}_{S1})} \ . \tag{3.40b}$$

Elles sont associées aux vecteurs singuliers

$$\mathbf{U}_{S+} \approx \frac{\tilde{\sigma}_{S0}\tilde{\mathbf{U}}_{S0} + \tilde{\sigma}_{S1}\tilde{\mathbf{U}}_{S1}}{\left\|\tilde{\sigma}_{S0}\tilde{\mathbf{U}}_{S0} + \tilde{\sigma}_{S1}\tilde{\mathbf{U}}_{S1}\right\|} \ , \tag{3.41a}$$

$$\mathbf{U}_{S-} \approx \frac{\tilde{\mathbf{U}}_{S0} - \tilde{\mathbf{U}}_{S1}}{\left\|\tilde{\mathbf{U}}_{S0} - \tilde{\mathbf{U}}_{S1}\right\|} \ . \tag{3.41b}$$

Les normes $||\mathbf{H}_{S0}||^2$ et $||\mathbf{H}_{S1}||^2$ sont proches pour $F > D/2$ [figure 3.6(b)]. Les termes α et β sont du même ordre de grandeur (Tableau 2). Les poids des modes symétriques $\tilde{\sigma}_{S0}$ et $\tilde{\sigma}_{S1}$ sont donc du même ordre [Eq. (3.35)]. Pour $\varepsilon << 1$, la valeur singulière σ_{S-} est négligeable (en ε) devant la valeur singulière $\sigma_{S+} = \tilde{\sigma}_{S0} + \tilde{\sigma}_{S1}$ [Eq. (3.40)]. Il est donc possible de classer les valeurs singulières par ordre décroissant $\sigma_{S+} > \sigma_A > \sigma_{S-}$ et ainsi les numéroter σ_1, σ_2 et σ_3.

En utilisant les expressions des poids des modes projetés en fonction des termes α, β et c [Eq. (3.35)], les valeurs singulières ont pour expression

$$\sigma_1 \approx (\alpha+\beta)\,|c|\,||\mathbf{H}_{S0}||^2 \ , \qquad k_0 a < 0{,}5 \tag{3.42a}$$

$$\sigma_2 \approx \beta\,|c|\,\|\mathbf{H}_{\mathrm{A1}}\|^2\,, \qquad k_0a < 0{,}5 \qquad (3.42b)$$

$$\sigma_3 \approx \varepsilon\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)}|c|\,\|\mathbf{H}_{\mathrm{S0}}\|^2\,, \qquad k_0a < 0{,}5. \qquad (3.42c)$$

avec $\sigma_3 << \sigma_1$ et σ_2 . Le premier vecteur singulier peut s'écrire

$$\mathbf{U}_1 \approx \frac{\alpha\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S0}} + \beta\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S1}}}{\left\|\alpha\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S0}} + \beta\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S1}}\right\|}\,. \qquad k_0a < 0{,}5. \qquad (3.43a)$$

Dans la mesure où les deux modes projetés symétriques $\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S0}}$ et $\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S1}}$ se « ressemblent », soit w_{S0S1} proche de 1, le premier vecteur singulier vérifie

$$\mathbf{U}_1 \approx \widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S0}}\,. \qquad k_0a < 0{,}5. \qquad (3.43b)$$

On retrouve le cas de diffusion isotrope [Eq. (3.26b)]. La phase ϕ_0 dans ce cas est égal à $-\pi/2$, soit la phase du coefficient c [Eq. (2.32c)].

De plus, la norme des réponses $\|\mathbf{H}_{\mathrm{S,A}n}\|^2$ est proportionnelle k_0^{-1} et le coefficient de diffusion c est proportionnel à $(k_0a)^2$. Les deux premières valeurs singulières, dans le cadre de la limite petit objet sont proportionnelles à k_0a^2. Ce résultat est illustré dans la partie expérimentale.

Hypothèse de faible ouverture (F/D >> 1)

D'après les équations (3.21) et (3.28), pour $F >> D$, dans la mesure où la fonction d'ouverture O_j tend vers 1, la norme des vecteurs symétriques tend vers

$$\left\|\mathbf{H}_{\mathrm{S}n}\right\|^2 \approx \frac{2N}{\pi k_0 F}, \qquad F/D >> 1,\ n = 0,\ 1. \qquad (3.44a)$$

N est le nombre de transducteur du réseau. Cette limite est illustrée sur la figure 3.6(b). La norme de la réponse anti-symétrique tend vers [Eq. (3.52b)]

$$\left\|\mathbf{H}_{\mathrm{A1}}\right\|^2 \approx \frac{N}{6\pi k_0 F}\left(\frac{D}{F}\right)^2, \qquad F/D >> 1. \qquad (3.44b)$$

Cette approximation est valable pour $F > 2D$ (figure 3.11). Les valeurs singulières tendent vers, d'après l'équation (3.42)

$$\sigma_1 \approx (\alpha+\beta)\frac{N}{2F}k_0a^2, \qquad F/D >> 1,\ k_0a < 0{,}5, \qquad (3.44c)$$

$$\sigma_2 \approx \beta\frac{N}{24F}\left(\frac{D}{F}\right)^2 k_0a^2, \qquad F/D >> 1,\ k_0a < 0{,}5. \qquad (3.44d)$$

Les trois premiers vecteurs singuliers $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ et $\mathbf{U}_3$, ainsi que leur tache de focalisation sont illustrés sur la figure 3.7. Le premier vecteur singulier $\mathbf{U}_1$ est similaire au cas de diffusion isotrope (figure 3.4). Le second vecteur singulier $\mathbf{U}_2$ est nul au centre du réseau et présente deux bosses de signes opposés. La tache de focalisation présente la même variation, de même que le vecteur rétro-diffusé. De même, le troisième vecteur $\mathbf{U}_3$ présentent trois bosses. Ces deux vecteurs singuliers $\mathbf{U}_2$ et $\mathbf{U}_3$ sont également des **invariants du Retournement Temporel**.

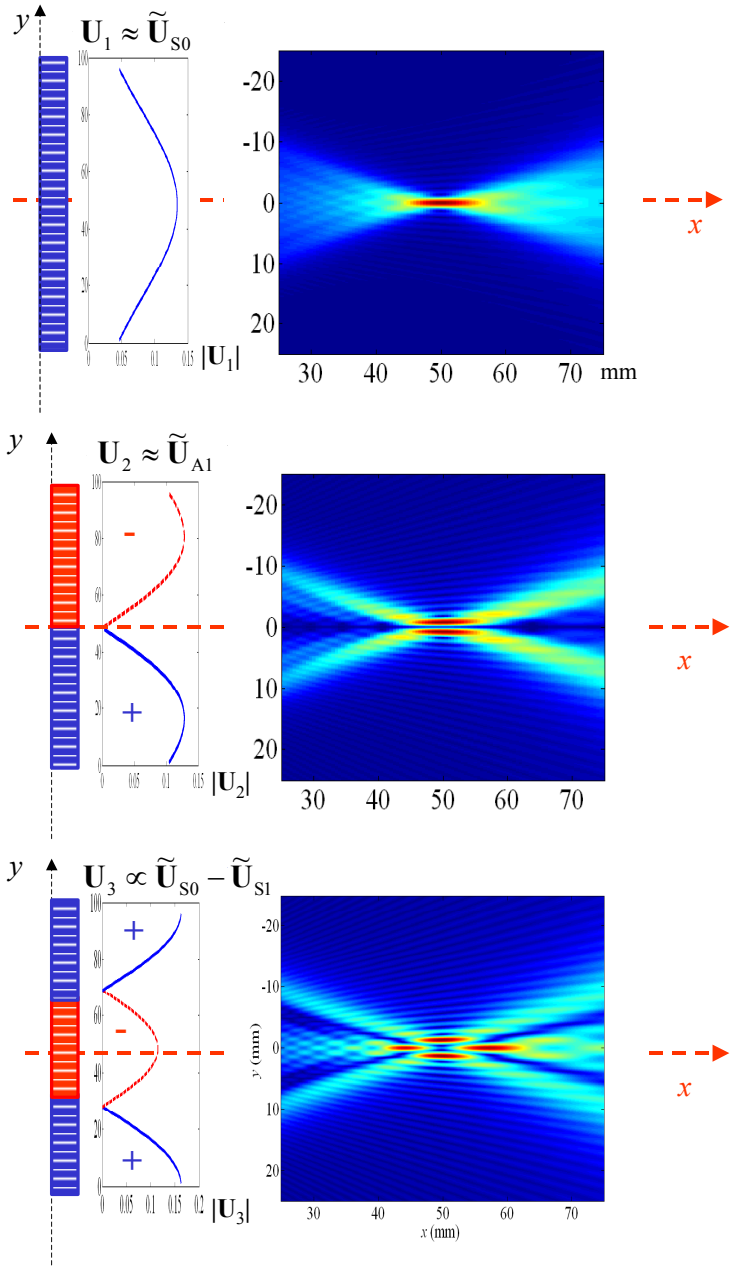


figure 3.7 : vecteurs singuliers **symétriques** ($\mathbf{U}_1$ et $\mathbf{U}_3$) et **anti-symétrique** ($\mathbf{U}_2$), ainsi que les taches de focalisation correspondante.

III.1.5 Généralisation dans la limite de Rayleigh

Considérons un cylindre élastique de rayon a perpendiculaire au plan d'insonification et situé à une distance F de la barrette. D'après l'équation (3.10), les ordres des modes normaux nécessaires pour décrire la pression diffusée par le cylindre sont compris entre 0 et m de l'ordre de k_0a.

Les valeurs singulières et les vecteurs singuliers de **K** sont obtenus par diagonalisation de l'opérateur projeté $\mathbf{SS}^*$: le problème de dimension N est réduit à problème de dimension $2m+1$, soit la dimension de l'espace des modes projetés [Eq. (3.19)]. La matrice $\mathbf{SS}^*$ correspond à la projection de l'Opérateur de Retournement Temporel $\mathbf{KK}^*$ sur l'espace engendré par les modes projetés $\left\{\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}0},...,\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}m},\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}1},...,\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}m}\right\}$. Dans la limite de Rayleigh, il est possible d'obtenir l'expression analytique des deux premières valeurs singulières en généralisant les expressions de la limite petit objet [Eq. (3.40)]. Cette généralisation a été proposée Micolau et Saillard pour la première valeur singulière[7] et complétée par Minonzio *et al.*[9]

Résolution dans le cas centré

Comme dans la limite petit objet, dans le cas où le fil est centré (dy = 0 dans la figure 3.1), les modes symétriques et antisymétriques sont orthogonaux : $w_{\mathrm{S}n\mathrm{A}n'} = 0$ pour tout entier n, n'. Ceci est dû à la différence de parité entre les fonctions sinus et cosinus par rapport à l'axe de symétrie du réseau.

Dans ce cas, la matrice **W** des produits scalaires est alors diagonale par blocs [Eq. (3.16c)]. Le problème se simplifie en séparant les modes projetés symétriques et les modes projetés antisymétriques. L'équation (3.18) $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{W}^*\boldsymbol{\chi}^* = \boldsymbol{\chi}\mathbf{\Sigma}$ peut s'écrire

$$\widetilde{\mathbf{\Sigma}}_{\mathrm{S}}\mathbf{W}_{\mathrm{S}}^*\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{S}}^* = \boldsymbol{\chi}_{\mathrm{S}}\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{S}} \tag{3.45a}$$

$$\widetilde{\mathbf{\Sigma}}_{\mathrm{A}}\mathbf{W}_{\mathrm{A}}^*\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{A}}^* = \boldsymbol{\chi}_{\mathrm{A}}\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{A}} \tag{3.45b}$$

La première relation correspond à la projection sur l'espace des modes projetés symétriques $\left\{\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}0},...,\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}m}\right\}$ et fournit les valeurs singulières associées aux vecteurs singuliers symétriques. De même, la seconde relation correspond à la projection sur l'espace des modes projetés antisymétriques $\left\{\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}1},...,\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}m}\right\}$ et permet d'obtenir les valeurs singulières associées aux vecteurs singuliers anti-symétriques.

Approximation deux valeurs singulières, critère de Rayleigh ($2a < \lambda F/D$)

Pour un mode symétrique d'ordre n, la direction d'annulation du mode correspond à un angle θ_n de $\pi/2n$ [figure 3.8(a)]. Pour un mode anti-symétrique d'ordre n, cette direction correspond à un angle θ_n de π/n [figure 3.8(b)]. L'angle maximum $\theta_{\max}$ vue par la barrette d'ouverture D à une distance F est égal à arctan($D/2F$), soit $\approx D/2F$ (figure 3.8).

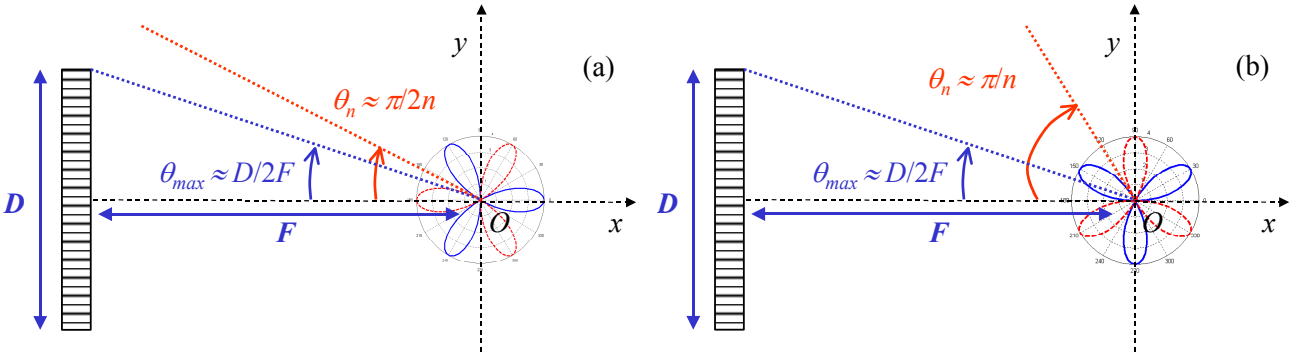


figure 3.8 : détermination de $\theta_{\max}$ pour les modes normaux symétriques (a) et anti-symétriques (b) dans le cas $n = 3$.

Pour $\theta_{\max} \leq \theta_n$, la première annulation d'un mode projeté symétrique n'est pas « vue » par le réseau (figure 3.3). Cette relation s'écrit

$$\theta_{\max} = \arctan\left(\frac{D}{2F}\right) \leq \theta_n = \frac{\pi}{2n} \ , \tag{3.46a}$$

Cette inégalité permet de déterminer l'ordre $n_{\max}$ correspondant à l'angle $\theta_{\max}$, soit

$$n \leq n_{\max} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\arctan(D/2F)} \approx \pi\frac{F}{D} \ . \tag{3.46b}$$

Le terme $n_{\max}$ est de l'ordre de $\pi F/D$ pour $F >> D/2$. D'après la figure 3.9, cette approximation est valable pour $F > D$. Pour les applications numériques, D est de l'ordre de F qui est égal à 50 mm.

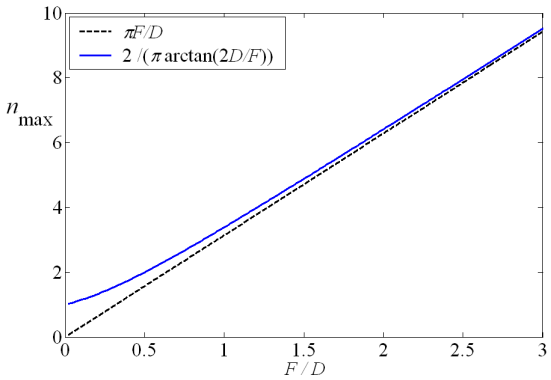


figure 3.9 : détermination de $n_{\max}$.

Pour les ordres n inférieurs à n_{max}, les modes projetés symétriques $\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}n}$ ne présentent pas d'annulation sur le réseau (figure 3.3) : ils se « ressemblent ». Dans ce cas, leurs produits scalaires $w_{\mathrm{S}n\mathrm{S}n'}$ sont très proches de 1 et le terme $\varepsilon = 1 - w_{\mathrm{S}n\mathrm{S}n'}^2$ est petit devant 1. Ces produits scalaires sont illustrés sur la figure 3.10(a).

Remarques :

1) ε est inférieur à 10^{-2} pour $w_{\mathrm{S}n\mathrm{S}n'}$ supérieur à 0,98.

2) Les modes projetés étant normés, les produits scalaires w ne dépendent pas de la fréquence. Ils dépendent uniquement de la géométrie entre le réseau et le diffuseur, par le rapport F / D.

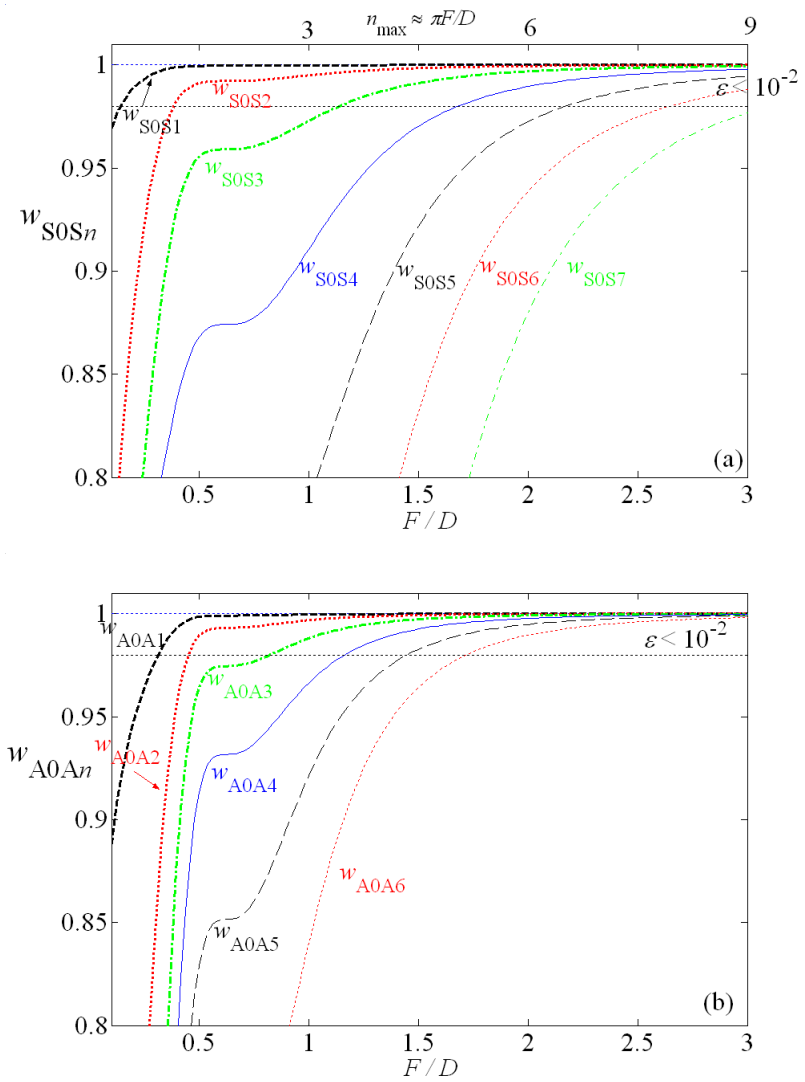


figure 3.10 : produit scalaire entre modes projetés symétriques $w_{\mathrm{S0S}n}$ (a) et anti-symétriques $w_{\mathrm{A1A}n}$ (b).

D'après la figure 3.9, pour F de l'ordre de $2D$, $n_{\max}$ est de l'ordre 6. Les produits scalaires w_{S0Sn} pour n compris entre 1 et 5 sont supérieurs à 0.98 [figure 3.10(a)]. Les produits scalaires w_{S0Sn} pour $n \geq 6$ sont inférieurs à 0.98. La limite θ_n étant supérieure pour les modes anti-symétriques, soit $n_{\max} \approx 2\pi F/D$, les produits scalaires correspondants sont plus proches de 1 que pour le cas symétrique, [figure 3.10(b)].

Critère de Rayleigh

Considérons le cas où l'ordre m du dernier mode significatif est inférieur ou égal à $n_{\max}$. Or, m est de l'ordre de $k_0 a$ [Eq. (2.25)]. L'ordre m vérifie alors

$$m \approx 2\pi a/\lambda \leq n_{\max} \approx \pi F/D \,, \tag{3.47a}$$

$$\text{soit } 2a \leq \lambda F/D \,. \tag{3.47b}$$

Cette limite correspond au critère de Rayleigh. Donc, pour $2a$ plus petit que la taille de focalisation $\lambda F/D$, les modes projetés symétriques ne s'annulent pas sur la barrette et les modes projetés antisymétriques n'ont qu'une annulation au centre de la barrette. Dans ce cas, leurs produits scalaires w sont proches de 1, soit $1 - w_{S0Sn}^2 << 1$ et $1 - w_{A0An}^2 << 1$. On peut considérer que les matrices $\mathbf{W}_S$ et $\mathbf{W}_A$ sont de rang 1, et ne contiennent que des produits scalaires w égaux à 1 [Eq. (3.16c)]. Les matrices $\mathbf{S}_S$ et $\mathbf{S}_A$ correspondantes [Eq. (3.45)] s'écrivent

$$\mathbf{S}_S \approx \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{S0} & \tilde{\sigma}_{S0} & \dots & \tilde{\sigma}_{S0} \\ \tilde{\sigma}_{S1} & \tilde{\sigma}_{S1} & \dots & \tilde{\sigma}_{S1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\sigma}_{Sm} & \tilde{\sigma}_{Sm} & \dots & \tilde{\sigma}_{Sm} \end{pmatrix}, \qquad 2a \leq \lambda F/D \,, \tag{3.48a}$$

$$\mathbf{S}_A \approx \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{A1} & \tilde{\sigma}_{A1} & \dots & \tilde{\sigma}_{A1} \\ \tilde{\sigma}_{A2} & \tilde{\sigma}_{A2} & \dots & \tilde{\sigma}_{A2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\sigma}_{Am} & \tilde{\sigma}_{Am} & \dots & \tilde{\sigma}_{Am} \end{pmatrix}. \qquad 2a \leq \lambda F/D \,. \tag{3.48b}$$

Ces matrices sont de rang 1. La diagonalisation de $\mathbf{S}_S\mathbf{S}_S^*$ et $\mathbf{S}_A\mathbf{S}_A^*$ donne les deux valeurs singulières, égales au module de la trace des matrices $\mathbf{S}_S$ et $\mathbf{S}_A$, soit

$$\sigma_S = \left| \sum_{n=0}^{m} \tilde{\sigma}_{Sn} \right| , \qquad 2a \leq \lambda F/D \,, \tag{3.49a}$$

$$\sigma_A = \left| \sum_{n=1}^{m} \tilde{\sigma}_{An} \right| , \qquad 2a \leq \lambda F/D \,. \tag{3.49b}$$

associées au vecteurs singuliers

$$\mathbf{U}_{\mathrm{S}} = \frac{\sum_{n=0}^{m} \widetilde{\sigma}_{\mathrm{S}n} \widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}n}}{\left\| \sum_{n=0}^{m} \widetilde{\sigma}_{\mathrm{S}n} \widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}n} \right\|}, \qquad 2a \le \lambda F/D, \quad (3.50\mathrm{a})$$

$$\mathbf{U}_{\mathrm{A}} = \frac{\sum_{n=1}^{m} \widetilde{\sigma}_{\mathrm{A}n} \widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}n}}{\left\| \sum_{n=1}^{m} \widetilde{\sigma}_{\mathrm{A}n} \widetilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}n} \right\|}. \qquad 2a \le \lambda F/D. \quad (3.50\mathrm{b})$$

Dans la plupart des cas, la première valeur singulière σ_1 est associée aux modes projetés symétriques et la seconde σ_2 aux modes projetés antisymétriques, soit $\sigma_1 = \sigma_{\mathrm{S}}$ et $\sigma_2 = \sigma_{\mathrm{A}}$, avec $\sigma_1 > \sigma_2$. Cet ordre est dû au fait que les normes des réponses anti-symétriques sont inférieures aux normes des réponses symétriques, soit $\|\mathbf{H}_{\mathrm{A}n}\| < \|\mathbf{H}_{\mathrm{S}n}\|$, dans la limite de Rayleigh (figure 3.11). Une exception est montrée dans la partie expérimentale dans le cas d'un un cylindre de nylon pour k_0a autour de 1,8.

D'après l'équation (3.12a), les poids des modes projetés symétriques sont définis comme $\widetilde{\sigma}_{\mathrm{S}n} \approx \varepsilon_n (-1)^n R_n \|\mathbf{H}_{\mathrm{S}n}\|^2$. D'après la figure 3.11(a), les normes des modes projetés symétriques $\|\mathbf{H}_{\mathrm{S}n}\|^2$ sont proches de $\|\mathbf{H}_{\mathrm{S}0}\|^2$ pour les ordres n inférieurs à $n_{\max}$. Dans ce cas, l'équation (3.49a) se simplifie suivant

$$\sigma_1 \approx \|\mathbf{H}_{\mathrm{S}0}\|^2 \left| \sum_{n=0}^{m} \varepsilon_n (-1)^n R_n \right|, \qquad 2a \le \lambda F/D. \qquad (3.51\mathrm{a})$$

Cette équation est identique à celle donnée par Micolau et Saillard en électromagnétisme au paragraphe 27 de la référence 7 et reprise dans la partie IV. Cette approximation n'est pas valable pour les modes projetés anti-symétriques. D'après la figure 3.11(b), les normes $\|\mathbf{H}_{\mathrm{A}n}\|^2$ ne sont pas proches. La seconde valeur singulière s'écrit dans ce cas

$$\sigma_2 \approx \left| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n (-1)^n R_n \|\mathbf{H}_{\mathrm{A}n}\|^2 \right|, \qquad 2a \le \lambda F/D. \qquad (3.51\mathrm{b})$$

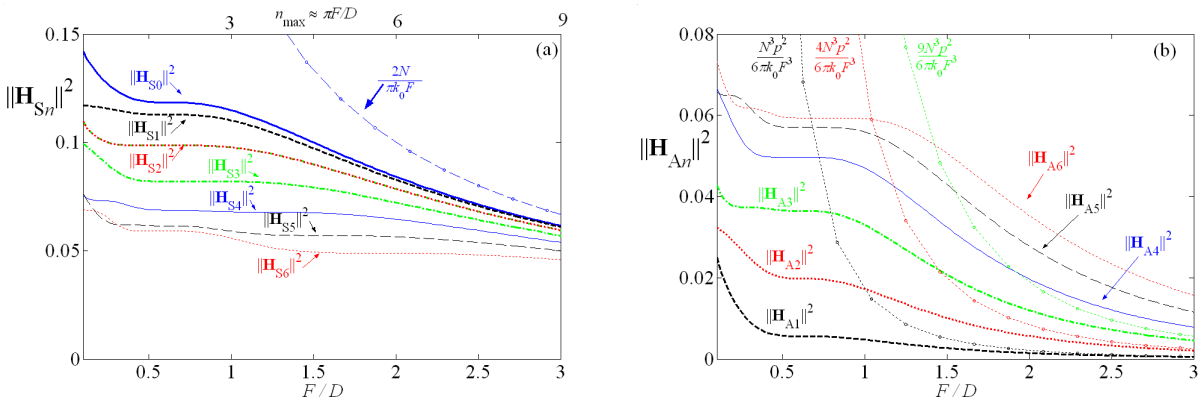


figure 3.11 : normes des modes projetés symétriques $\|\mathbf{H}_{Sn}\|^2$ (a) et anti-symétriques $\|\mathbf{H}_{An}\|^2$ (b).

Hypothèse de faible ouverture ($F/D >> 1$)

En utilisant l'expression approchée de la norme de $\|\mathbf{H}_{S0}\|$ [Eq. (3.42)], pour $F/D >> 1$, la valeur singulière σ_1 est approchée par

$$\sigma_1 \approx \frac{2N}{\pi k_0 F}\left|\sum_{n=0}^{m}\varepsilon_n(-1)^n R_n\right|, \qquad 2a \le \lambda F/D\,, \quad F/D >> 1. \qquad (3.52a)$$

D'après l'équation (3.22b), un élément d'une réponse anti-symétrique $H_{An,j}$ est égal à $\sin(n\varphi_j)H_{S0,j}$ soit de l'ordre de $n\frac{jp}{F}\sqrt{\frac{2}{\pi k_0 F}}$ pour $F/D >> 1$. Le terme p désigne le pas du réseau. La norme du vecteur vérifie alors $\|H_{An}\|^2 \approx n^2 N^3 p^2 / 6\pi k_0 F^3$ (figure 3.11). L'expression approchée de la seconde valeur singulière en faible ouverture est [Eq. (3.51b)]

$$\sigma_2 \approx \frac{N}{6\pi k_0 F}\left(\frac{D}{F}\right)^2\left|\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n(-1)^n R_n n^2\right|, \qquad 2a \le \lambda F/D\,, \quad F/D >> 1. \qquad (3.52b)$$

La première valeur singulière dépend de l'inverse de la distance F au réseau, la seconde dépend de $F^{-1}(D/F)^2$ [Eq. (3.52)]. La seconde valeur singulière décroît donc beaucoup plus vite que la première lorsque la distance au réseau augmente. Le rapport des deux valeurs singulières s'écrit alors

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \approx 12\left(\frac{F}{D}\right)^2 \frac{\left|\sum_{n=0}^{m}\varepsilon_n(-1)^n R_n\right|}{\left|\sum_{n=1}^{m}\varepsilon_n(-1)^n R_n n^2\right|}, \qquad 2a \le \lambda F/D\,, \quad F/D >> 1. \qquad (3.52c)$$

Lien avec la fonction de forme

La fonction de forme cylindrique définie à l'équation (2.29) a pour expression

$$F_\infty(\theta) \approx \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 a}} \sum_{n=0}^{m} \varepsilon_n R_n \cos(n\theta).$$

La valeur singulière peut s'exprimer en fonction de la norme de la fonction de forme en rétro-diffusion

$$\sigma_1 \approx N\sqrt{\frac{a}{F}}\sqrt{\frac{2}{\pi k_0 F}}\left|F_\infty(\theta = 180°)\right|. \qquad 2a \le \lambda F/D\,, \quad F >> D. \qquad (3.53)$$

En champ lointain du réseau, la première valeur singulière σ_1 est associée au champ rétro-diffusé dans la direction du réseau, soit θ = 180°. L'ouverture angulaire étant faible, on retrouve le cas « diffusion isotrope » de l'équation (3.26a) $\sigma_1 = |R_0|\ \|\mathbf{H}_0\|^2$. Dans ce cas, le coefficient R_0 est remplacé par la somme des modes normaux en rétro-diffusion $C_0 = \sum_{n=0}^{m} \varepsilon_n (-1)^n R_n$ [Eq. (3.51)], soit $\sigma_1 \approx |C_0|\ \|\mathbf{H}_{S0}\|^2$. Ce terme correspond également à un élément C_{ii} de la diagonale de la matrice de diffusion **C** [Eq. (3.24)]. Cette approximation sera reprise dans le cas de deux cylindres au paragraphe III.4.3.

Le vecteur singulier $\mathbf{U}_1$ associé à la première valeur singulière est dans ce cas, proportionnel au premier mode projeté symétrique $\widetilde{\mathbf{U}}_{S0}$ comme dans le cas « diffusion isotrope » [Eq. (3.26b)]. Le facteur de proportionnalité est $e^{i\phi_S/2}$, où ϕ_S est la phase de la somme des coefficients de diffusion significatifs en rétro-diffusion [Eq. (3.52a)].

Cette approximation sera utilisée dans l'étude de deux cylindres (§ III.4) . Elle est utilisée dans la plupart des références d'imagerie acoustique. La seconde valeur singulière σ_2 est associée au vecteur singulier $\mathbf{U}_2 \approx e^{i\phi_A/2}\widetilde{\mathbf{U}}_{A1}$, où ϕ_A est la phase de la somme des coefficients de diffusion significatifs multipliés par n^2 [Eq. (3.52b)]. Ces deux approximations sont identiques à celles présentées dans la limite petit objet et illustrées sur la figure 3.7.

III.1.6 Résultats expérimentaux avec un réseau en quart de cercle

Deux types de réseaux sont utilisés pour la partie expérimentale : focalisé ou linéaire. Un réseau en quart de cercle est employé pour étudier la limite petit objet ($k_0a < 1$). Ces résultats ont été présentés dans la référence 9. Le réseau linéaire est utilisé pour observer des objets plus gros jusqu'à k_0a de l'ordre de 3. Le diamètre reste cependant inférieur à la tache de focalisation.[8] Les résultats avec le réseau linéaire sont présentés au paragraphe III.1.7.

Afin d'augmenter le rapport entre les normes des réponses symétrique et anti-symétrique $||\mathbf{H}_{S0}||$ et $||\mathbf{H}_{A1}||$, une barrette en quart de cercle a été utilisée (figure 3.12). Elle comporte N = 96 éléments, de fréquence centrale 1,5 MHz, et de bande passante comprise entre 0,8 et 3 MHz. Le diamètre des fils observés, métal et nylon, est de l'ordre de 0,1 mm, soit k_0a inférieur à 1. Le cylindre est situé au foyer du réseau, soit à une distance F de 100 mm. La tache de focalisation, de l'ordre de 1,25 mm, est donc largement supérieure aux diamètres des cylindres. Trois cylindres sont étudiés : nickel (diamètre 0,07 mm), cuivre (0,13 mm) et nylon (0,10 mm). Une mesure de la densité pour des cylindres de même diamètre est également présentée.

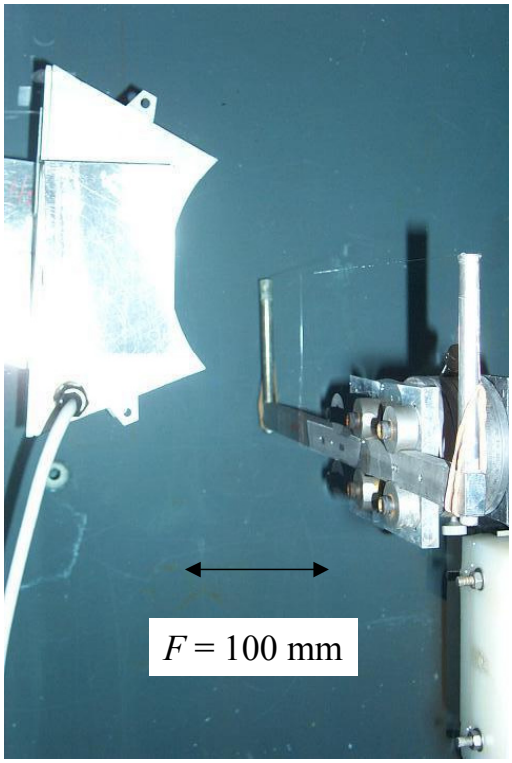


figure 3.12 : montage expérimental, réseau en quart de cercle.

Remarques :

1) Un calibrage a été effectué avec un fil d'acier de 0,2 mm de diamètre afin de corriger la bande passante.

2) Pour la barrette quart de cercle (F = 100 mm), le rapport $\|\mathbf{H}_{S0}\|^2 / \|\mathbf{H}_{A1}\|^2$ est de l'ordre de 9. Pour la barrette linéaire (§ III.1.7), il vaut 25 pour F = 50 mm et 60 pour F = 100 mm. Au delà de $F/D > 2$, ce rapport est de l'ordre de $12(F/D)^2$ [Eq. (3.44)].

3) Du fait du faible diamètre des fils, le niveau de signal rétro-diffusé est très faible. C'est pourquoi, la base d'émission d'Hadamard ainsi que des moyennes sont utilisées afin d'améliorer le niveau signal à bruit.[8,9]

Cylindre de nickel de diamètre 0.07 mm

Le premier cas concerne un cylindre de nickel de diamètre 0,07 mm : k_0a est compris entre 0,1 et 0,45. Ce cas correspond à la limite petit objet décrite aux paragraphes II.1.5 et III.1.4. En effet, cette limite est valable tant que $k_0a < 0{,}5$.

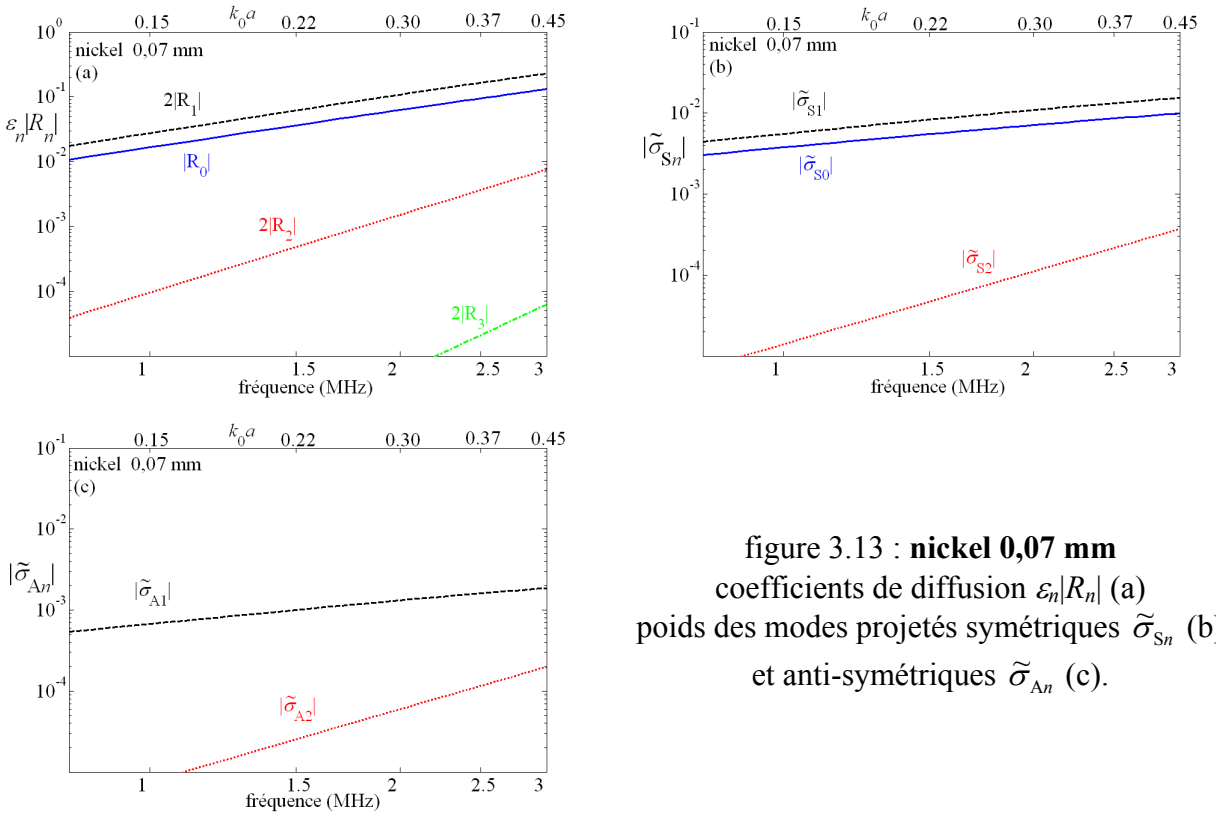


figure 3.13 : **nickel 0,07 mm**
coefficients de diffusion $\varepsilon_n|R_n|$ (a)
poids des modes projetés symétriques $\tilde{\sigma}_{Sn}$ (b)
et anti-symétriques $\tilde{\sigma}_{An}$ (c).

Les deux premiers coefficients de diffusion R_0 et $2R_1$ sont prépondérants, les suivants $2R_2$ et $2R_3$ sont de l'ordre de 10^2 et 10^4 fois plus petits dans le domaine de fréquence considéré [figure 3.13(a)]. Aux coefficients prépondérants sont associés deux modes projetés symétriques et un mode anti-symétrique [Eqs. (3.28) et (3.30)]. Leurs poids $\tilde{\sigma}_{S0}$, $\tilde{\sigma}_{S1}$ et $\tilde{\sigma}_{A1}$ sont tracés sur les figures 3.13(b) et (c). Les autres poids $\tilde{\sigma}_{Sn}$ et $\tilde{\sigma}_{An}$ à partir de $n = 2$ sont négligeables.

Les valeurs singulières théoriques et expérimentales sont illustrées sur la figure 3.14. Deux valeurs théoriques sont tracées : celles du modèle complet (mod. compl.) obtenues par diagonalisation de l'opérateur projeté $\mathbf{SS}^*$ et les valeurs approchées de la limite petit objet (petit obj.) . D'après l'équation (3.40a), la première valeur singulière σ_1 est égale à la norme de la somme des poids des modes projetés symétriques $|\tilde{\sigma}_{S0} + \tilde{\sigma}_{S1}|$. Ces deux poids possèdent la même phase dans la limite petit objet, leur amplitude s'ajoutent. D'après l'équation (3.37), la seconde valeur singulière σ_2 est égale à la norme du poids mode projeté symétrique $|\tilde{\sigma}_{A1}|$. La troisième valeur singulière σ_3 est négligeable [Eq. (3.40b)].

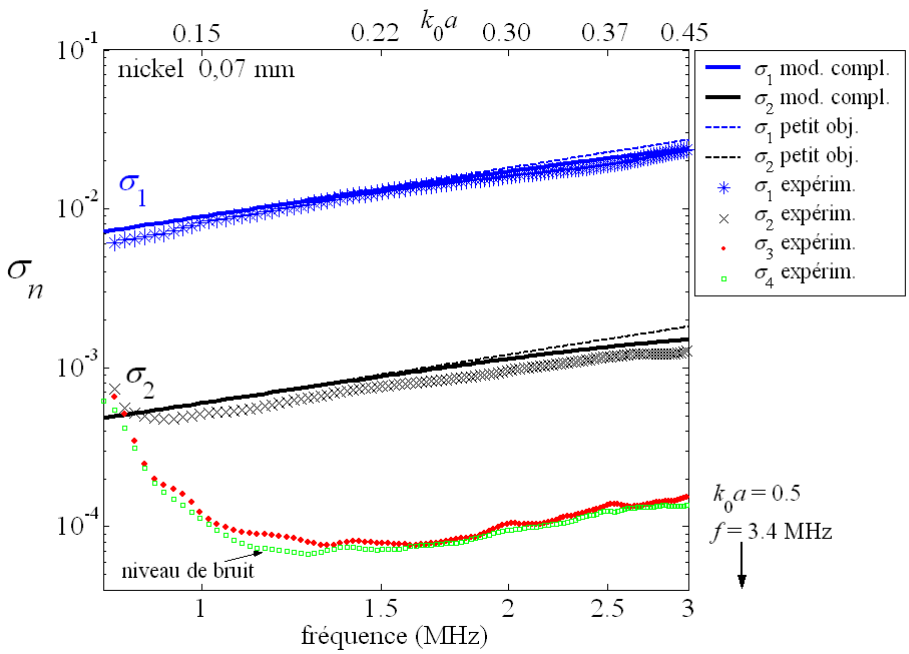


figure 3.14 valeurs singulières théoriques et expérimentales σ_n
pour un fil de **nickel** de diamètre **0,07 mm**
(correction en fréquence et échelle log-log).

On vérifie bien que le modèle complet et la limite petit objet donnent des résultats identiques pour $k_0a < 0{,}3$ et très proches au delà. Les deux premières valeurs singulières expérimentales sont en très bon accord avec le modèle complet : elles présentent une évolution linéaire avec la fréquence en accord avec l'équation (3.43), $\sigma_1 = (\alpha + \beta)|c|\ \|\mathbf{H}_{S0}\|^2$ et $\sigma_2 = \beta|c|\ \|\mathbf{H}_{A1}\|^2$. Dans le cas d'un graphique log-log, les droites sont de pente 1, les fonctions puissance en x^n sont de pente n. Le niveau de bruit est donné ici par les valeurs singulières expérimentales 3 et 4 : il est au dessus de la troisième valeur singulière théorique σ_3, elle n'est donc pas mesurée.

Remarque : la bande passante des transducteurs a été corrigée, grâce à l'étalonnage.

Cylindre de cuivre de diamètre 0,13 mm

Le comportement du cuivre est très proche de celui du nickel, comme la plupart des métaux (§ II.1.4). Le diamètre est ici plus important 0,13 mm. La limite $k_0a = 0{,}5$ est dans ce cas dans la bande passante (1,8 MHz). Le coefficient quadripolaire $2R_2$ est significatif alors que les suivants à partir de $2R_3$ sont négligeables [figure 3.15(a)]. Les poids des modes projetés correspondant sont tracés sur les figures 3.15(b) et (c).

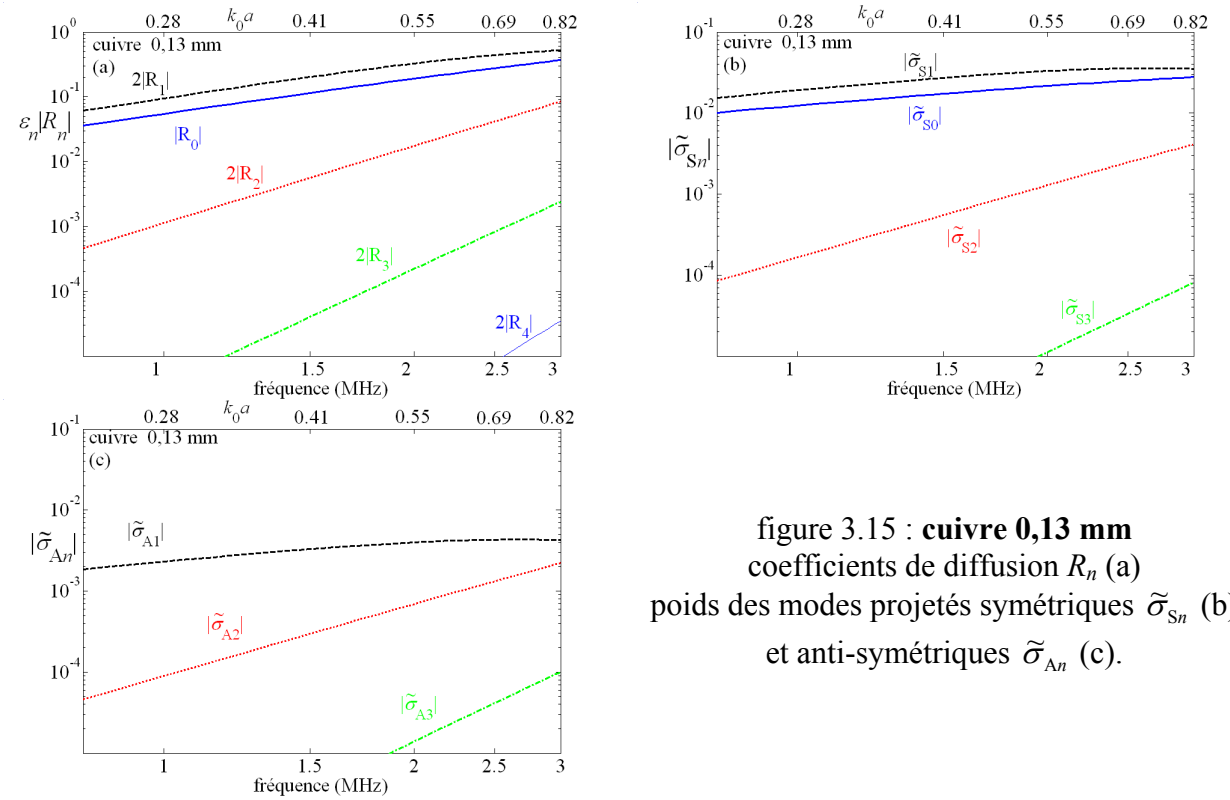


figure 3.15 : **cuivre 0,13 mm**
coefficients de diffusion R_n (a)
poids des modes projetés symétriques $\tilde{\sigma}_{Sn}$ (b)
et anti-symétriques $\tilde{\sigma}_{An}$ (c).

D'après l'équation (3.49), les deux premières valeurs singulières vérifient $\sigma_1 \approx \left|\tilde{\sigma}_{S0} + \tilde{\sigma}_{S1} + \tilde{\sigma}_{S2}\right|$ et $\sigma_2 \approx \left|\tilde{\sigma}_{A1} + \tilde{\sigma}_{A2}\right|$. En utilisant les expressions en champ lointain des poids [Eqs. (3.25) et (3.51)], les valeurs singulières sont égales à

$$\sigma_1 = \|\mathbf{H}_{S0}\|^2 \, | R_0 - 2R_1 + 2R_2 | \, , \tag{3.54a}$$

$$\sigma_2 = | -2R_1 \|\mathbf{H}_{A1}\|^2 + 2R_2 \|\mathbf{H}_{A2}\|^2 | \, . \tag{3.54b}$$

D'après la figure 2.9, la phase du coefficient R_0 ($-\pi/2$) est opposée à la phase des coefficients R_1 et R_2 ($+\pi/2$). Dans la limite petit objet, les termes $R_0 - 2R_1$ s'ajoutent. Ici le terme $+2R_2$ se retranche à la somme précédente, c'est pourquoi on observe une diminution des valeurs singulières σ_1 et σ_2 à partir de $k_0a = 0{,}5$, qui correspond à la limite supérieure du modèle petit objet. Les valeurs singulières théoriques et expérimentales sont tracées sur la figure 3.16.

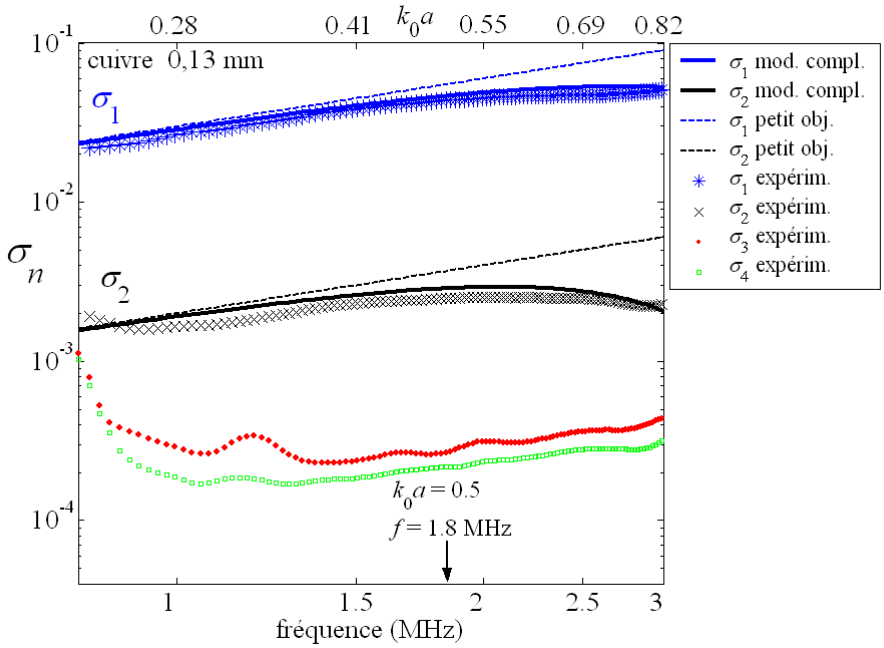


figure 3.16 valeurs singulières théoriques et expérimentales σ_n
pour un fil de **cuivre** de diamètre **0,13 mm**
(correction en fréquence et échelle log-log).

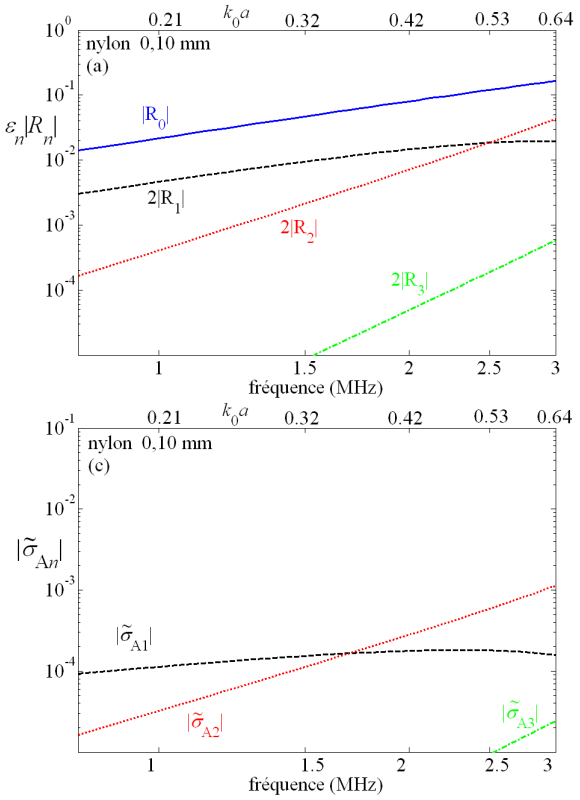
Dans le domaine $k_0a < 0{,}5$, le modèle complet et la limite petit objet donnent des résultats identiques, les deux valeurs singulières dépendent linéairement de la fréquence. Les deux premières valeurs singulières sont en très bon accord avec le modèle complet et l'équation (3.54) pour $k_0a > 0{,}5$. Le niveau de bruit est au dessus de la troisième valeur singulière théorique σ_3, elle n'est donc pas mesurée.

Remarque :

Dans la partie où l'approximation petit objet est valable, le rapport entre la première valeur singulière du cuivre 0,13 mm et celle nickel 0,07 mm est égal au rapport des rayons a au carré, soit 3,5 environ [Eq. (3.43)]. Le terme α vaut 1 pour les métaux (tableau 2) et le terme c est proportionnel à a^2 [Eq. 2.32(c)]. Ceci est valable dans la mesure où le terme β varie peu. Ce rapport est bien vérifié expérimentalement et permet de déterminer le diamètre d'un cylindre de métal si le système est étalonné.

Cylindre de nylon diamètre 0,10 mm

Le comportement du nylon est différent de celui des métaux qui sont proches de la limite infiniment rigide (§ II.1.4). Cela est dû au fait que la densité du nylon est proche de celle de l'eau (Tableau 2). Le coefficient de diffusion dipolaire $2R_1$ est cinq fois plus petit que le coefficient monopolaire R_0. Les autres coefficients sont négligeables [figure 3.17(a)]. Les poids des modes projetés correspondant sont tracés sur les figures 3.17(b) et (c).



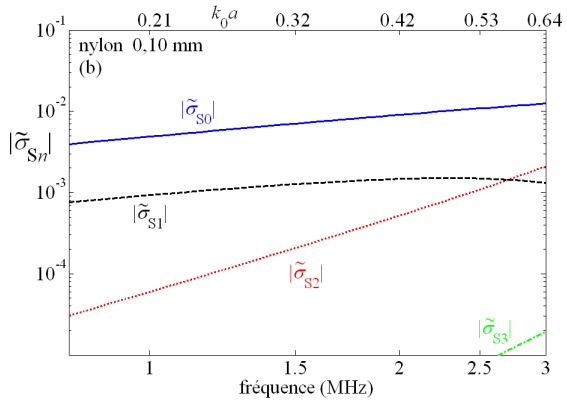


figure 3.17 : **nylon 0,10 mm**
coefficients de diffusion R_n (a)
poids des modes projetés symétriques $\tilde{\sigma}_{Sn}$ (b)
et anti-symétriques $\tilde{\sigma}_{An}$ (c).

Les valeurs singulières théoriques et expérimentales sont représentées sur la figure 3.18. La première valeur singulière σ_1 est due principalement au terme monopolaire dans la limite petit objet, pour $k_0a < 0{,}5$. On retrouve le cas de diffusion isotrope [Eq .(3.26)],

soit $\sigma_1 \approx |\tilde{\sigma}_{S0}|$ ou $\sigma_1 \approx \alpha|c|\ \|\mathbf{H}_{S0}\|^2$. Comme dans le cas du cuivre, la première valeur singulière diminue lorsque le terme quadripolaire $2R_3$ augmente, du fait de l'opposition de phase illustrée sur la figure 2.11.

La seconde valeur singulière σ_2, de l'ordre de $|\tilde{\sigma}_{A1}| \approx \beta|c|\ \|\mathbf{H}_{A1}\|^2$ est en dessous du niveau de bruit pour $k_0a < 0{,}5$, du fait de la faible valeur de β. Pour $k_0a > 0{,}5$, elle est au dessus du niveau de bruit à cause du terme quadripolaire. Dans ce cas, σ_2 est de l'ordre de $|\tilde{\sigma}_{A2}| \approx 2|R_2|\ \|\mathbf{H}_{A2}\|^2$. De plus, σ_2 présente un creux à la fréquence 1,7 MHz. A cette fréquence les poids des modes A1 et A2 sont opposées, soit $\tilde{\sigma}_{A1} \approx -\tilde{\sigma}_{A2}$ [Eq. (3.54b)].

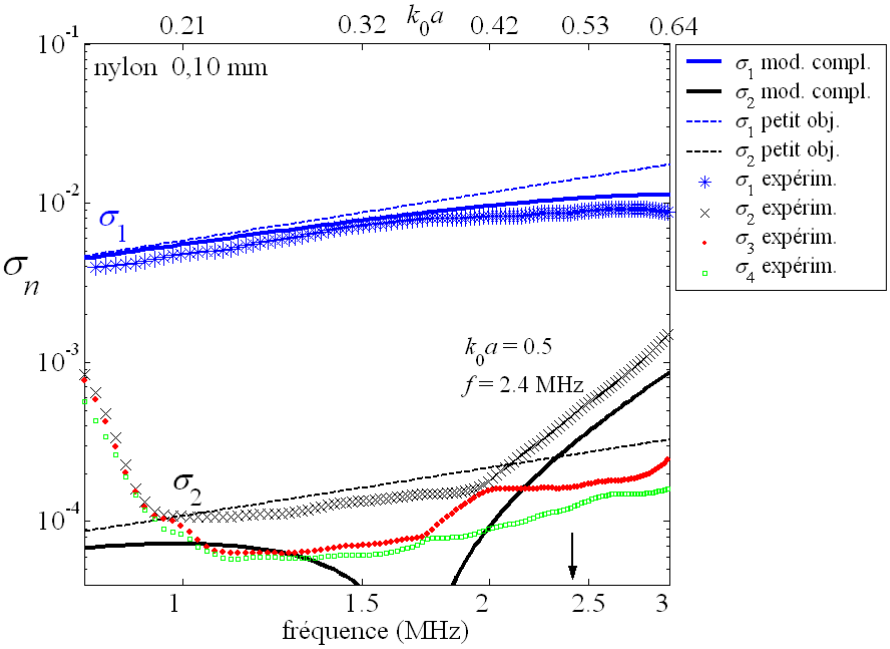


figure 3.18 : valeurs singulières théoriques et expérimentales σ_n
pour un fil de **nylon** de diamètre **0,1 mm**.
(correction en fréquence et échelle log-log).

Dans le domaine $k_0a < 0{,}5$, le modèle complet et la limite petit objet donnent des résultats identiques pour la première valeur singulière, qui dépend linéairement de la fréquence. Cet accord est moins bon pour la seconde valeur singulière du fait du faible contraste de densité β. Les deux premières valeurs singulières expérimentales sont en très bon accord avec le modèle complet pour $k_0a > 0{,}5$. Le niveau de bruit est au dessus de la troisième valeur singulière théorique σ_3, elle n'est donc pas mesurée.

Caractérisation, mesure de la densité

Un série de mesures ont été effectuées sur différents cylindres métalliques dont la liste se trouve dans le tableau 5. Les masses volumiques sont comprises entre 2,7 g.cm^{-3} pour l'aluminium et 19,3 g.cm^{-3} pour le tungstène. Tous les cylindres ont même diamètre, égal à 0,13 mm. Dans le cas des métaux, le contraste de compressibilité α est très proche de 1. D'après le tableau 5, il est compris entre 0,97 et 0,99.

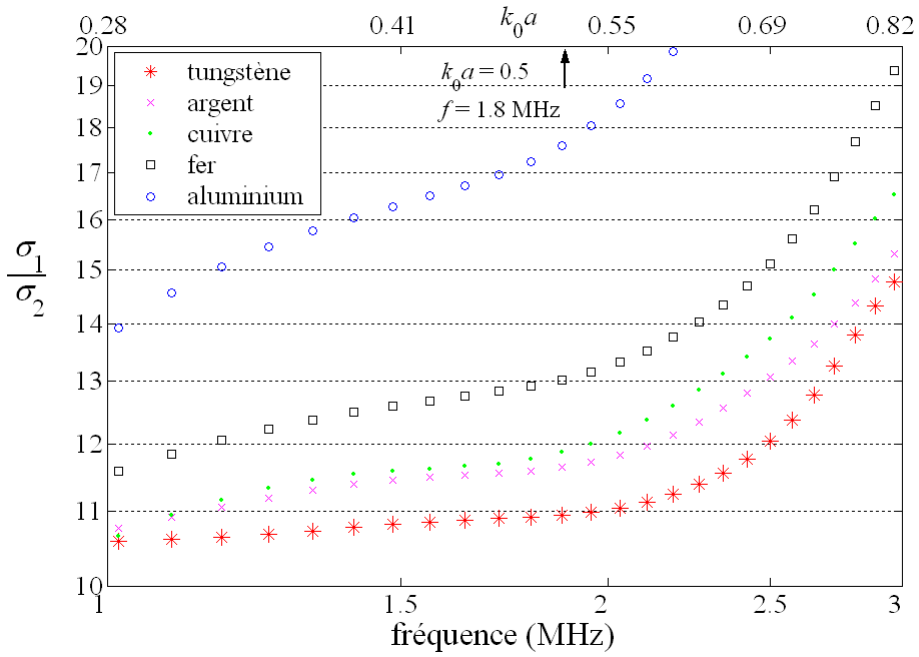


figure 3.19 : rapport expérimental entre les deux premières valeurs singulières pour les métaux du tableau 5 (échelle log-log).

D'après l'équation (3.43), dans la limite petit objet, le rapport entre les deux premières valeurs singulières s'écrit

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{(\alpha+\beta)}{\beta}\frac{\|\mathbf{H}_{S0}\|^2}{\|\mathbf{H}_{A1}\|^2}, \qquad k_0a < 0{,}5. \qquad (3.55)$$

Ces rapports expérimentaux sont illustrés sur la figure 3.19 pour les métaux du tableau 5. Pour le nylon, la deuxième valeur singulière n'est pas mesurée expérimentalement (figure 3.18). Le rapport des normes des réponses **H** ne dépend pas du cylindre, il ne dépend que de la géométrie entre le réseau et le cylindre, soit de F et de D [Eqs. (3.21) et (3.24)]. Le rapport $(\alpha+\beta)/\beta$ dépend lui des paramètres physiques du cylindre (tableau 5). Le terme α étant proche de 1, la mesure du rapport des valeurs singulières permet de déterminer β

$$\beta \approx \frac{1}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\|\mathbf{H}_{A1}\|^2}{\|\mathbf{H}_{S0}\|^2}-1}. \tag{3.56a}$$

D'après l'équation (2.32b), la masse volumique ρ_1 du cylindre dépend de β selon

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{2+\beta}{2-\beta}, \tag{3.56b}$$

$$\rho_1 \approx \rho_0 \frac{2\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \frac{\|\mathbf{H}_{S0}\|^2}{\|\mathbf{H}_{A1}\|^2}}{2\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 3\frac{\|\mathbf{H}_{S0}\|^2}{\|\mathbf{H}_{A1}\|^2}}. \tag{3.56c}$$

Le rapport $\|\mathbf{H}_{S0}\|^2 / \|\mathbf{H}_{A1}\|^2$ expérimental est estimé à 7,0. Le rapport des valeurs singulières est estimé à la fréquence centrale, 1,5 MHz. Les facteurs β et les densités ρ_1 calculés par l'équation (3.56) sont présentés dans le tableau 5. L'erreur sur l'estimation de la densité est relativement important, de l'ordre de 20 %. Cependant, l'ordre des densités est bien respecté . Les cylindres sont bien classés suivant leur densité. Pour gagner en précision, une meilleure calibration du système est à envisager, notamment pour mieux appréhender les problèmes de linéarité de dynamique et la variabilité du rapport $\|\mathbf{H}_{S0}\|^2 / \|\mathbf{H}_{A1}\|^2$.

métal	ρ_1 **th.**	α th.	β th.	σ_1/σ_2 exp.	β exp.	ρ_1 **exp.**	erreur %
nylon	**1,15**	0,62	0,14	…	…	…	…
Aluminium	**2,7**	0,97	0,92	16,2	0,76	**2,2**	- 17
Fer	**7,8**	0,99	1,55	12,6	1,25	**4.3**	- 44
Nickel	**8,8**	0,99	1,59	…	…	…	…
Cuivre	**8,9**	0,99	1,60	11,6	1,52	**7,4**	- 17
Argent	**10,5**	0,98	1.65	11,4	1,59	**8,7**	- 16
Tungstène	**19,3**	0,99	1,80	10,8	1,84	**24.3**	+ 26

Tableau 5 : paramètres physiques théoriques et mesurés.

Vecteurs singuliers

Dans le cas du quart de cercle, toutes les distances entre les transducteurs et le centre du cylindre r_j sont égales à F. De plus, le cylindre se trouve en face de chaque transducteur, la fonction d'ouverture O_j est donc égale à 1. La réponse du premier mode symétrique $H_{S0,j}$ est constante le long du réseau en quart de cercle [Eq. (3.21)]. Dans la mesure où le produit scalaire entre les deux premiers modes projetés w_{S0S1} est très proche de 1 (ou ε proche de 0), le premier vecteur singulier $\mathbf{U}_1$ est égal au mode projeté $\widetilde{\mathbf{U}}_{S0}$ [Eq. (3.43)]. Ce mode projeté étant égal à la réponse $\mathbf{H}_{S0}$ normalisée [Eq. (3.11a)], il est donc constant le long du réseau.

Le second vecteur singulier $\mathbf{U}_2$ est orthogonal au premier et s'annule au centre du réseau (figure 3.7). Dans le cas du quart de cercle, $\mathbf{U}_2$ est une droite passante par 0 au centre du réseau. Les deux vecteurs singuliers expérimentaux sont montrés sur la figure 3.20 dans le cas du fil de cuivre de 0,13 mm (figure 3.16) à la fréquence centrale 1,5 MHz.

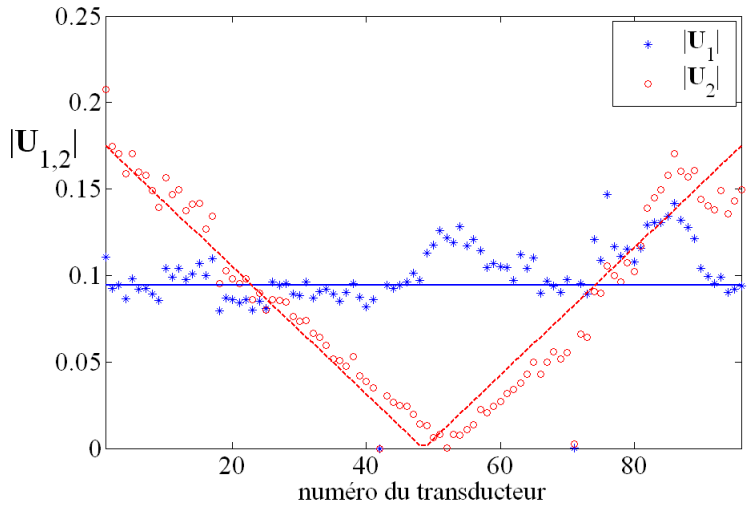


figure 3.20 norme des vecteurs singuliers $\mathbf{U}_1$ et $\mathbf{U}_2$
pour un fil de **cuivre** de diamètre **0,13 mm** à 1,5 MHz.

Ces deux vecteurs singuliers sont les deux premiers polynômes de Legendre 1 et x le long du réseau [Eq. (2.51)]. Les polynômes de Legendre peuvent être généralisés aux vecteurs singuliers suivants, pour le réseau en quart de cercle.

Vecteurs singuliers et polynômes de Legendre

Une expérience a été menée avec le réseau en quart de cercle sur un cylindre de nylon de diamètre 0,35 mm. Le diamètre est plus petit que la tache de focalisation. Les valeurs singulières correspondantes sont illustrées sur la figure 3.21. Entre 1 et 1,4 MHz, quatre valeurs singulières sont au-dessus du bruit. Pour des fréquences supérieures, seules les trois premières valeurs singulières sont hors bruit.

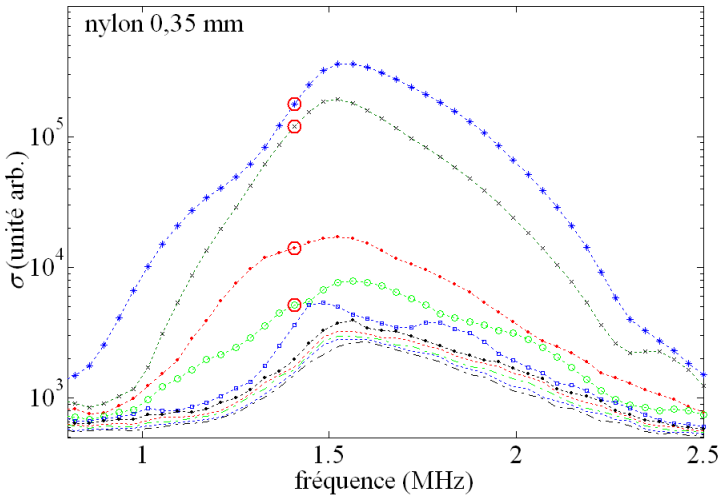


figure 3.21 : valeurs singulières théoriques et expérimentales σ_n
pour un fil de **nylon** de diamètre **0,35 mm**
(sans correction de bande passante et échelle semi log).

Les normes des quatre premiers vecteurs singuliers expérimentaux $\mathbf{U}_1$ à $\mathbf{U}_4$ sont représentés sur la figure 3.22. La fréquence correspondante, 1,4 MHz, est marquée par un cercle sur les valeurs singulières (figure 3.21). Les valeurs théoriques des vecteurs singuliers sont donnés par les polynômes de Legendre $P_n(x)$, pour x variant entre –1 et 1. Les polynômes de Legendre ont pour expressions en fonction de x [Eq. (2.51)]

$P_0(x) = 1$,

$P_1(x) = x$,

$P_2(x) = 1/2\ (3x^2 - 1)$,

$P_3(x) = 1/2\ (5x^3 - 3x)$,

…

Remarque : ces polynômes sont orthogonaux entre eux, mais ne sont pas normalisés.

En fonction de j le numéro de transducteur variant de 1 à N, la variable x_j s'écrit

$$x_j = \frac{2j - N - 1}{N - 1}, \qquad 1 \le j \le N. \qquad (3.57)$$

La variable x_j varie entre $-N/2$ et $N/2$. Il est possible de décrire un vecteur $\mathbf{P}_n$ de dimension $N\times1$, dont le $j^{ième}$ élément est donné par $P_n(x_j)$. Dans ce cas, les vecteurs singuliers théoriques $\mathbf{U}_n$ sont donnés par

$$\mathbf{U}_n = \frac{\mathbf{P}_{n-1}}{\|\mathbf{P}_{n-1}\|}, \qquad n \ge 1. \qquad (3.58)$$

Ces vecteurs sont illustrés sur la figure 3.22.

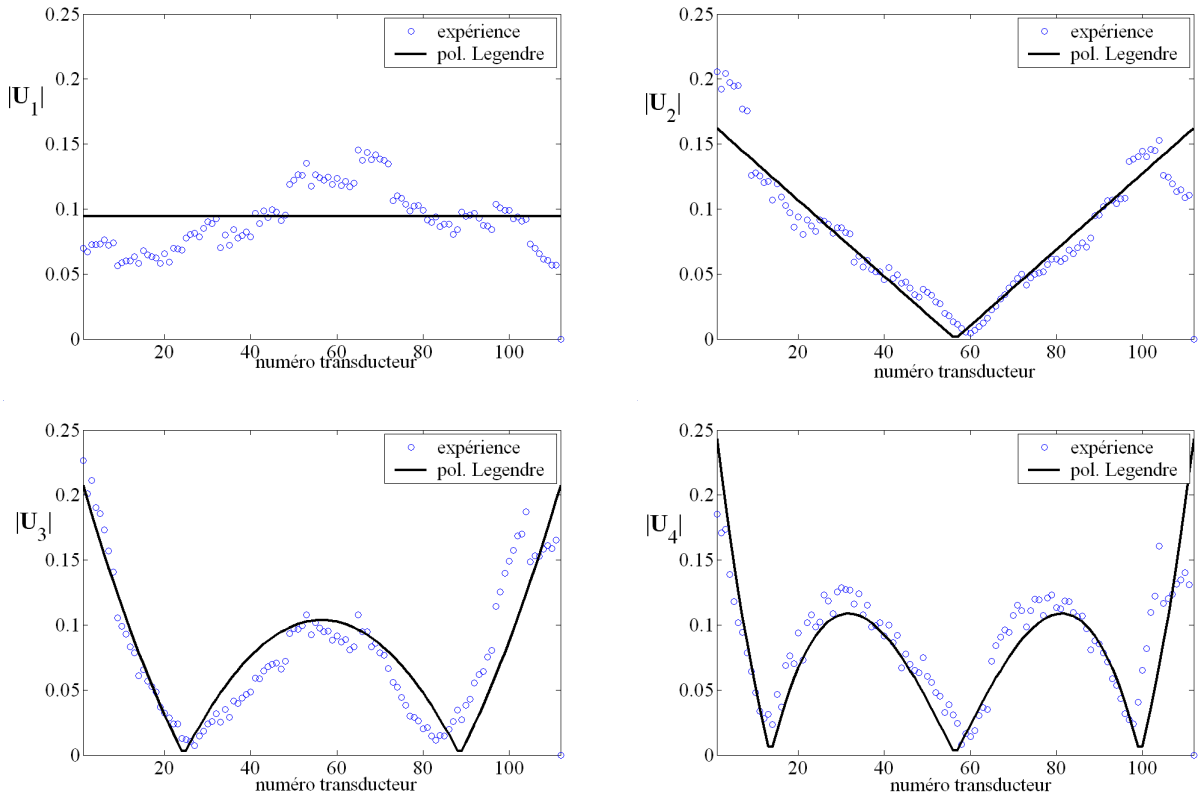


figure 3.22 norme des vecteurs singuliers $\mathbf{U}_1$ à $\mathbf{U}_4$
pour un fil de **nylon** de diamètre **0.35 mm** à 1,4 MHz.

Remarque : on retrouve les polynômes de Legendre pour un réseau linéaire dans le cas de faible ouverture, $F >> D$.[12]

III.1.7 Résultats expérimentaux avec un réseau linéaire

Les résultats expérimentaux ont été obtenus au moyen d'une barrette échographique linéaire de fréquence centrale 1,5 MHz et de pas inter-éléments 0,5 mm (figure 3.23). La base d'Hadamard a été utilisée pour 96 transducteurs. Le signal d'émission est un signal modulé linéairement en fréquence adaptée à la bande passante du transducteur (chirp). La distance F entre le réseau et le cylindre est choisie égale 50 mm. Il s'agit d'un optimum entre l'ouverture des transducteurs et l'atténuation due à la propagation. La tache de focalisation est alors de l'ordre de 1 mm : elle est supérieure aux diamètres des cylindres observés, compris entre 0,25 mm et 0,5 mm. Quatre cylindres sont étudiés : acier (diamètre 0,32 mm) et nylon (0,25 mm, 0,35 mm et 0,46 mm). Pour les trois cylindres de nylon, une synthèse en fonction de k_0a est montrée. Ces résultats ont été présentés par Minonzio *et al*. dans la référence 8.

figure 3.23 : réseau linéaire : barrette échographique à 1,5 MHz.

Remarque :

Le paramètre d'ouverture A [Eq. (3.4)] a été mesuré expérimentalement avec un hydrophone. Il est constant dans toute la bande passante et est de l'ordre de $1{,}6\pi$. Cela signifie que l'ouverture dépend non pas d'un élément mais de trois. Cela est dû au couplage entre transducteurs.

Cylindre d'acier diamètre 0,32 mm

Pour cette géométrie, le rapport des réponses $||\mathbf{H}_{S0}||^2$ / $||\mathbf{H}_{A1}||^2$ est de l'ordre de 25, pour un réseau linéaire à 50 mm. Il n'est pas possible avec ce système de mesurer les deux valeurs singulières dans la limite petit objet. La première mesure est effectuée sur un cylindre d'acier de diamètre 0,32 mm. La limite petit objet est réduite aux basses fréquences de la bande passante. En effet, k_0a = 0,5 correspond à la fréquence 0,75 MHz. Le coefficient quadripolaire $2R_2$ est non négligeable à partir de 1 MHz, et $2R_3$ à partir de 2 MHz. Les coefficients suivants à partir de $2R_4$ sont négligeables [figure 3.24(a)]. Les poids des modes projetés symétriques et anti-symétriques correspondants sont tracés sur les figures 3.24(b) et (c).

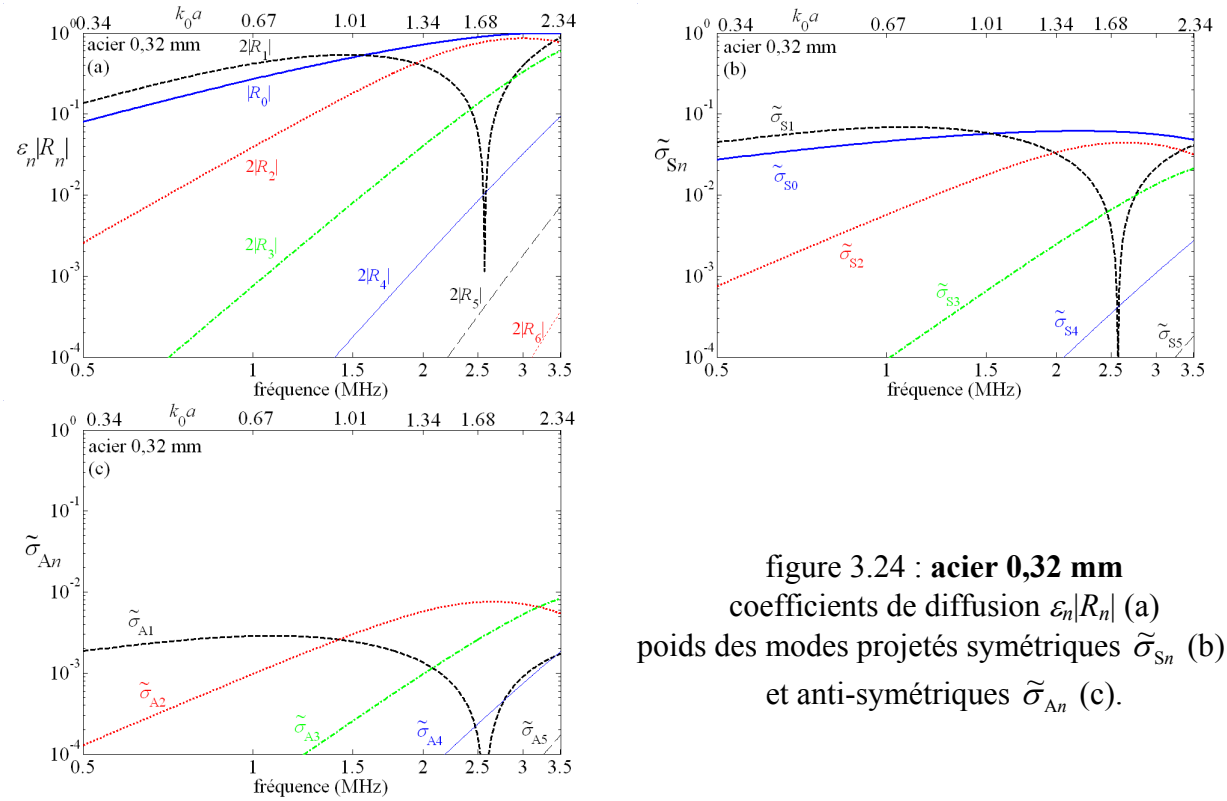


figure 3.24 : **acier 0,32 mm**
coefficients de diffusion $\varepsilon_n|R_n|$ (a)
poids des modes projetés symétriques $\tilde{\sigma}_{Sn}$ (b)
et anti-symétriques $\tilde{\sigma}_{An}$ (c).

Les valeurs singulières théoriques et expérimentales sont représentées sur la figure 3.25. Les deux premières valeurs singulières sont données par l'équation (3.54) avec un terme de plus, soit

$$\sigma_1 = ||\mathbf{H}_{S0}||^2 \, | R_0 - 2R_1 + 2R_2 - 2R_3 | \, , \tag{3.59a}$$

$$\sigma_2 = | -2R_1 \, ||\mathbf{H}_{A1}||^2 + 2R_2 \, ||\mathbf{H}_{A2}||^2 - 2R_3 ||\mathbf{H}_{A3}||^2 \, | \, . \tag{3.59b}$$

La première valeur singulière diminue à partir de 1 MHz. Ceci provient du fait que le coefficient de diffusion $2R_2$ est en opposition de phase avec $R_0 - 2R_1$ d'après la figure 2.9

[Eq. (3.59a)]. Il existe un phénomène identique, entre 1 et 1,5 MHz, pour la seconde valeur singulière du fait que $-2R_1$ et $2R_2$ ont des phases opposées [Eq. (3.59b)]. La deuxième valeur singulière augmente au delà de 1,5 MHz suivant l'augmentation du coefficient $2R_3$.

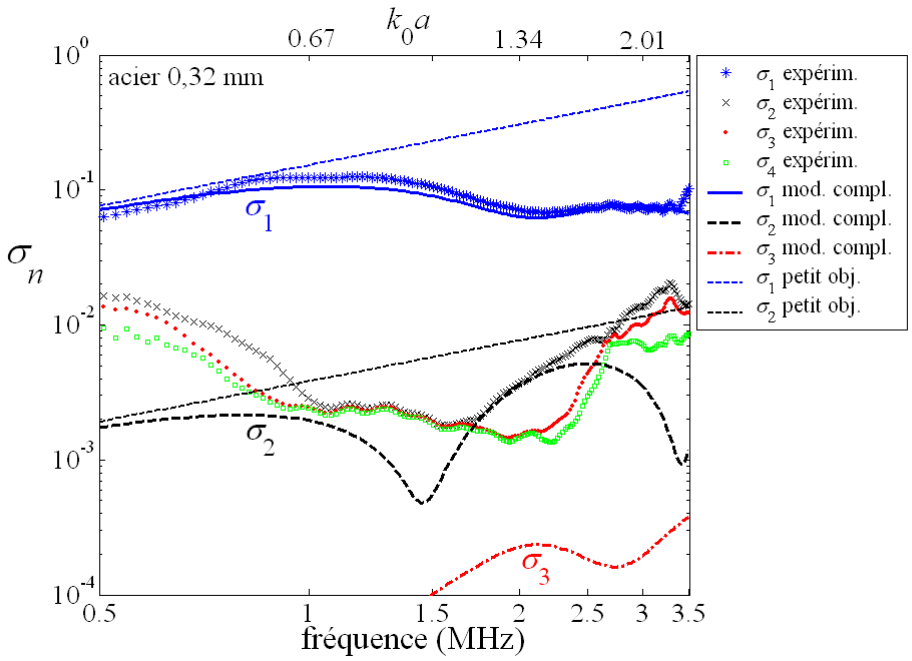


figure 3.25 : valeurs singulières théoriques et expérimentales σ_n
pour un cylindre d'**acier** de diamètre **0,32 mm**.
(correction en fréquence et échelle log-log).

Dans le domaine $k_0a < 0{,}5$, soit les fréquences inférieures à 0,75 MHz, le modèle complet et la limite petit objet donnent des résultats identiques : les deux valeurs singulières varient linéairement avec la fréquence. La première valeur singulière σ_1 est en très bon accord avec le modèle complet et l'équation (3.59a) pour $k_0a > 0{,}5$. La seconde valeur singulière σ_2 sort du bruit entre 1,8 et 2,5 MHz, elles s'écarte de la troisième valeur singulière expérimentale. Elle est alors en accord avec le modèle complet et l'équation (3.59b). La troisième valeur singulière théorique est encore au dessous du niveau de bruit, donné ici par les valeurs singulières expérimentales 3 et 4 : elle n'est donc pas mesurée.

Cylindre de nylon de diamètre 0,25 mm

La seconde expérience avec le réseau linéaire concerne un fil de nylon de diamètre 0,25 mm. Comme dans le cas du fil de nylon de 0,1 mm, le terme dipolaire $-2R_1$ est petit par rapport au terme monopolaire R_0 du fait du faible contraste de densité β. Le terme dipolaire devient significatif à partir de 2 MHz. Les termes $2R_2$ et $2R_3$ deviennent significatifs à partir de 1 et 2 MHz respectivement [figure 3.26(b)]. De plus, ces termes présentent des « pics » pour 2,1 et 3,3 MHz. Ces pics ont été décrits au paragraphe II.1.4 [Eqs. (2.26) à (2.28)]. Les poids des modes projetés symétriques et anti-symétriques correspondants sont représentés sur les figures 3.26(b) et (c).

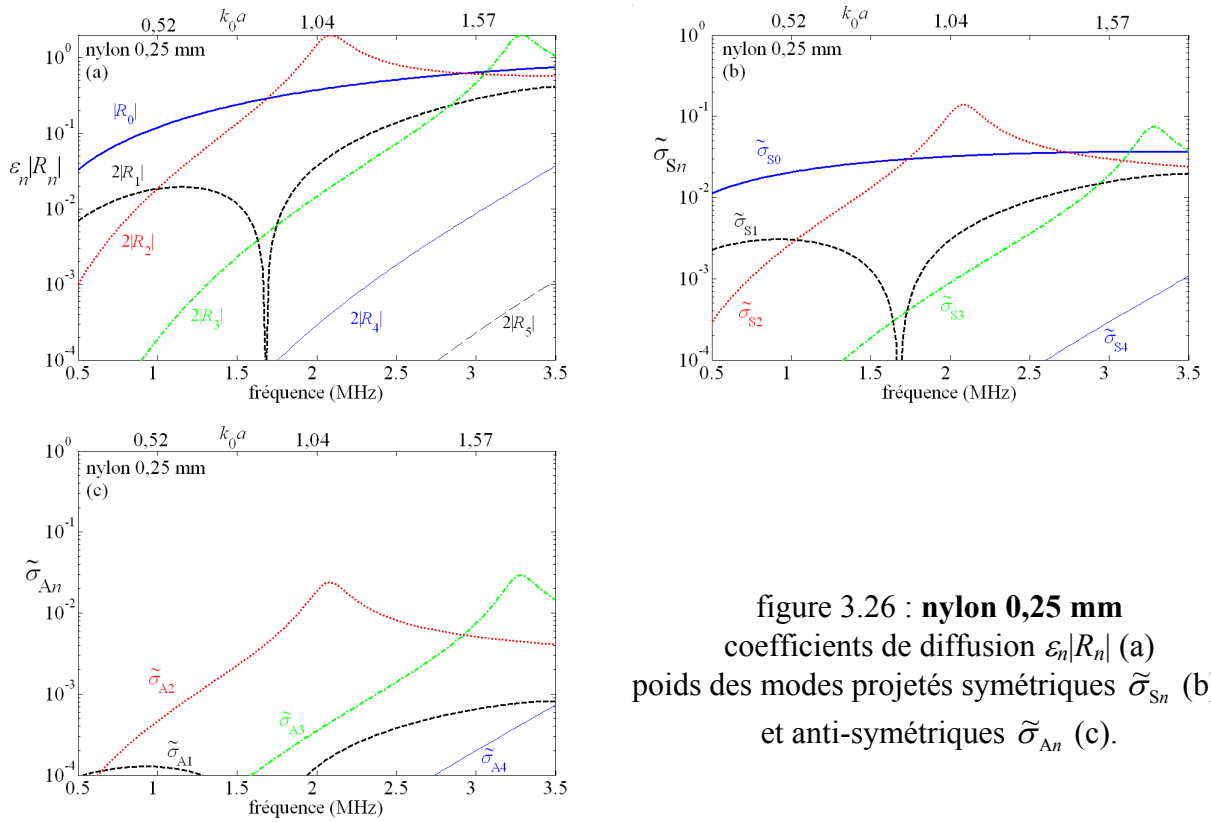


figure 3.26 : **nylon 0,25 mm**
coefficients de diffusion $\varepsilon_n|R_n|$ (a)
poids des modes projetés symétriques $\tilde{\sigma}_{Sn}$ (b)
et anti-symétriques $\tilde{\sigma}_{An}$ (c).

Les valeurs singulières théoriques et expérimentales sont tracées sur la figure 3.27. La première valeur singulière σ_1 est principalement due au terme monopolaire R_0 et quadripolaire R_2 pour les fréquences inférieures à 2 MHz, suivant $\sigma_1 \approx \|\mathbf{H}_{S0}\|^2 \mid R_0 + 2R_2 \mid$. Ces deux termes étant de phases opposées (figure 2.11), la valeur singulière commence par diminuer puis augmente lorsque $2R_2$ devient supérieur à R_0. Autour du pic à 2,1 MHz, la première valeur singulière est essentiellement due au terme quadripolaire, soit $\sigma_1 \approx |\tilde{\sigma}_{S2}| \approx |2R_2| \, \|\mathbf{H}_{S0}\|^2$. La distribution angulaire de la fonction de forme F_∞ correspondante est illustrée sur la figure

2.13. Pour le second pic à 3,3 MHz, la première valeur singulière est essentiellement due à $2R_3$: la valeur singulière vérifie alors $\sigma_2 \approx |\tilde{\sigma}_{S3}| \approx |2R_3|\ ||\mathbf{H}_{S0}||^2$.

Un phénomène identique est observé pour la seconde valeur singulière. Le terme dipolaire étant faible, jusqu'à 2,5 MHz, la seconde valeur singulière vérifie $\sigma_2 \approx |\tilde{\sigma}_{A2}| \approx |2R_2|\ ||\mathbf{H}_{A2}||^2$. Autour du pic de R3, elle vérifie $\sigma_2 \approx |\tilde{\sigma}_{A3}| \approx |2R_3|\ ||\mathbf{H}_{A3}||^2$.

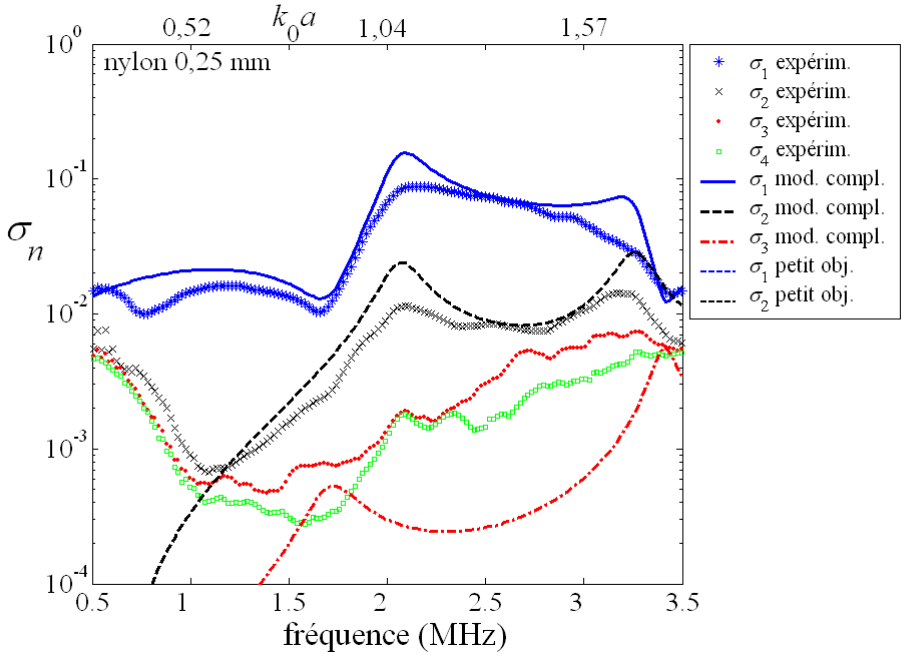


figure 3.27 : valeurs singulières théoriques et expérimentales σ_n
pour un cylindre de **nylon** de diamètre **0,25 mm**
(correction en fréquence et échelle semi log) .

Ces résultats sont en bon accord avec les résultats du modèle complet présentés à la figure 3.27. Toutefois, les « pics » ne sont pas très bien mesurés expérimentalement. Cela peut être dû à des phénomènes de dissipation qui ne sont pas pris en compte par le modèle.

La troisième valeur singulière σ_3 est non négligeable et semble passer au-dessus du niveau de bruit autour de 1,8 MHz. Elle correspond à un vecteur singulier symétrique. Dans ce cas pour lequel quatre coefficients de diffusion sont significatifs (de R_0 à R_3), il n'existe pas d'expression simple de σ_3. Sa valeur est obtenue par diagonalisation de l'opérateur projeté symétrique $\mathbf{S}_S\mathbf{S}_S^*$ [Eq. (3.48)].

Cylindres de nylon de 0,35 et 0,46 mm

Deux autres cylindres de nylon sont présentés, pour des diamètres de 0,35 et 0,46 mm. A 1,5 MHz, pour F = 50 mm, la tache de focalisation est de l'ordre de 1 mm. Elle est supérieure au diamètre du fil. Les deux premières valeurs singulières sont données par le modèle complet et par l'équation (3.49), soit par la somme des poids des modes projetés symétriques (pour σ_1) et anti-symétriques (pour σ_2). Les valeurs singulières expérimentales et théoriques sont tracées sur la figure 3.28.

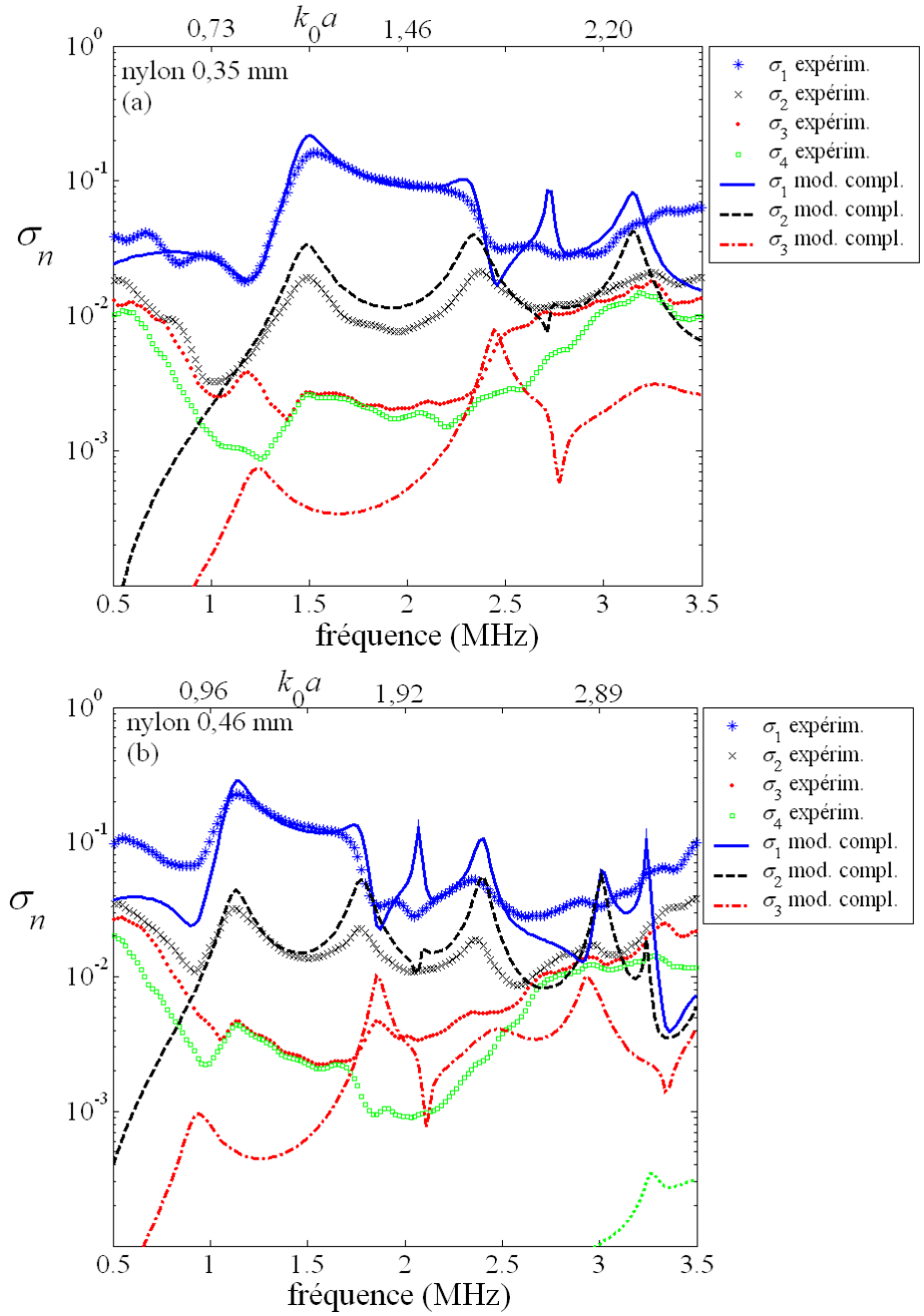


figure 3.28 : valeurs singulières théoriques et expérimentales σ_n
pour un cylindre de **nylon** de diamètre **0,35 mm** (a) et **0,46 mm** (b).
(correction en fréquence et échelle semi log) .

Le calcul conduisant à la diagonalisation de $\mathbf{SS}^*$ reste valable tant que l'ordre des valeurs singulières ne change pas, c'est à dire tant que σ_1 est associé à un vecteur singulier symétrique et σ_2 à un vecteur singulier anti-symétrique. La décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice de transfert **K** donne en effet les valeurs singulières par ordre d'importance, soit $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ … Un croisement est observé autour de la fréquence 2,5 MHz pour le cylindre de nylon de 0,35 mm (ou 1,9 MHz pour 0,46 mm). La troisième valeur singulière présente alors un pic. La troisième valeur singulière présente également un pic autour de 1,3 MHz (pour 0,35 mm) et 0,9 MHz (pour 0,46 mm).

Le pic quadripolaire des deux premières valeurs singulières, décrit pour le cylindre de nylon de 0,25 mm, pour k_0a de l'ordre 1, se retrouve pour les deux autres cylindres autour de 1,6 et 1,1 MHz, pour les cylindres de 0,35 et 0,46 mm respectivement. De même, le pic associé au coefficient de diffusion $2R_3$ se retrouve aux fréquences 2,3 et 1,8 MHz. Ces pics sont associés à des valeurs identiques de k_0a = 1,1 et 1,7 (figure 2.11).

Le pic suivant est associé à la résonance du terme dipolaire $2R_1$, présentée sur la figure 2.11 pour k_0a = 2. La première valeur singulière expérimentale présente alors un « creux » au lieu du pic théorique, à 2 MHz pour le cylindre de 0,46 mm. Cela peut être dû au fait que, pour une résonance, une partie de l'énergie acoustique « pénètre » dans le cylindre. Le pic suivant est mesuré expérimentalement à 2,4 MHz pour le cylindre de 0,46 mm. Il correspond au pic du coefficient $2R_4$ pour k_0a = 2,3 (figure 2.11).

Les pics sont placés pour les mêmes k_0a pour les trois cylindres de nylon. Ces valeurs dépendent du comportement des coefficient de diffusion $\varepsilon_n R_n$ qui sont des fonctions de k_0a [figure 2.11 et Eqs. (2.12) à (2.14)]. Cependant, l'amplitude de ces pics n'est pas la même, elle augmente avec le rayon. Cela est dû au fait que le module des réponses $||\mathbf{H}_{Sn}||^2$ et $||\mathbf{H}_{An}||^2$ ne dépend pas de k_0a mais de $1/k_0r_j$ [Eq. (3.21)]. Les diamètres des cylindres de nylon étant inférieurs à la tache de focalisation, l'équation (3.49) est valable : les deux premières valeurs singulières sont égales à une somme de coefficients de diffusion multipliés par le module des réponses $||\mathbf{H}_{Sn}||^2$ ou $||\mathbf{H}_{An}||^2$. Les deux premières valeurs singulières sont donc égales à une fonction f de k_0a multiplié par le rayon a, soit

$$\sigma_n(k_0a) = a\, f_n(k_0a)\ , \qquad n = 1, 2. \tag{3.60}$$

Ce comportement est illustré sur la figure 3.29. Les trois premières valeurs singulières des trois cylindres de nylon sont représentées en fonction de k_0a. Le niveau de référence est celui du cylindre de 0,25 mm. Pour les deux autres cylindres, les valeurs singulières sont multipliées par le rapport des diamètres. L'accord entre les trois cylindres est particulièrement bon pour la première valeur singulière, hors des domaines des pics. Pour la seconde valeur singulière, l'accord est moins bon. Cela peut être dû à un problème de linéarité de dynamique. La troisième valeur singulière présente un niveau constant qui est celui du bruit, sauf pour les pics en k_0a = 0,9 et k_0a = 1,8. Les trois vecteurs singuliers $\mathbf{U}_1$ à $\mathbf{U}_3$ sont tracés dans ces deux cas au paragraphe suivant.

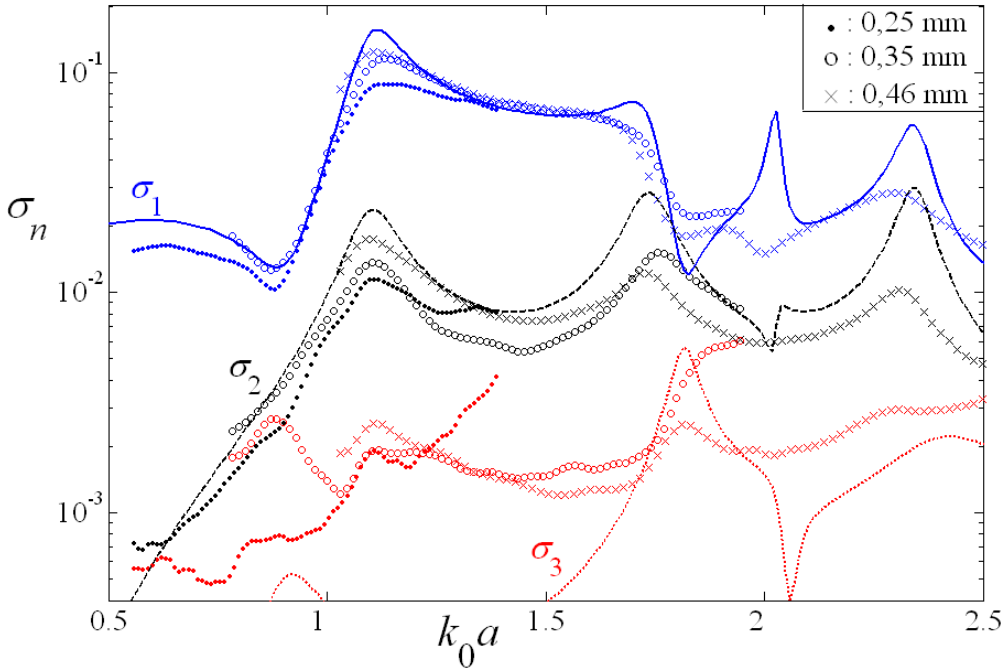


figure 3.29 : valeurs singulières théoriques et expérimentales σ_n en fonction de k_0a pour les trois cylindre de **nylon** 0,25 (•) 0,35 (o) et 0,46 mm (×). (correction en fréquence et échelle semi log) .

Vecteurs singuliers

Comme il a été montré précédemment à partir des figures 3.28 et 3.29, il existe deux exemples pour lesquelles les trois premières valeurs singulières sont mesurées expérimentalement, soit 1,05 MHz pour le cylindre de 0,35 mm et 1,9 MHz pour le cylindre de 0,46 mm (k_0a égal à 0,9 et 1,8). L'amplitude des trois vecteurs correspondants pour ces deux fréquences est tracée sur la figure 3.30.

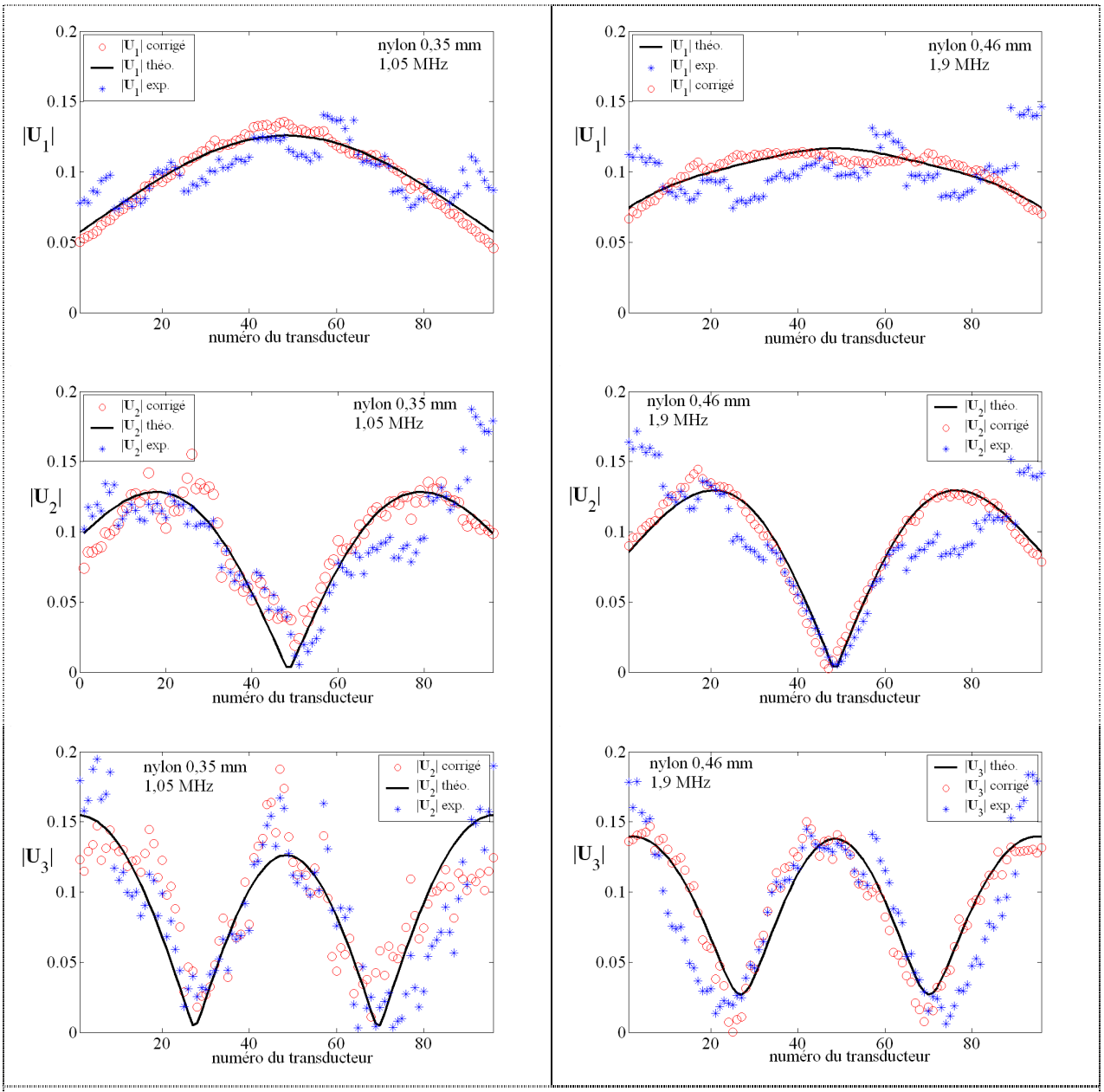


figure 3.30 : trois premiers vecteur singulier $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ et $\mathbf{U}_3$ d'un cylindre de nylon à 1,05 MHz (0,35 mm gauche) et 1,9 MHz (0,46 mm droite).

Dans les deux cas, il existe un couplage entre les deux vecteurs singuliers symétriques $\mathbf{U}_1$ et $\mathbf{U}_3$ du fait de la proximité des valeurs singulières σ_1 et σ_3. Le vecteur $\mathbf{U}_2$ n'est pas concerné, car il est anti-symétrique. Il est donc orthogonal à $\mathbf{U}_1$ et $\mathbf{U}_3$ et vérifie $\mathbf{U}_2 \approx \widetilde{\mathbf{U}}_{A1}$. Ce couplage est plus fort dans le second cas, car les valeurs singulières σ_1 et σ_3 sont plus proches (figure 3.29). Dans le premier cas, le couplage est faible : les vecteurs singuliers sont de la forme de ceux de la limite petit objet (figure 3.7), soit $\mathbf{U}_1 \approx \widetilde{\mathbf{U}}_{S0}$ et $\mathbf{U}_3 \approx \widetilde{\mathbf{U}}_{S0} - \widetilde{\mathbf{U}}_{S1}$. Pour le second cas, le couplage est plus important, le premier vecteur singulier est plus « plat » et troisième ne s'annule pas.

Remarque : les polynômes de Legendre, présentés dans le cas du réseau en quart de cercle (figure 3.22), ne sont pas valables dans ce cas. En effet, du fait de l'ouverture des éléments et que les distances r_j ne sont pas égales entre elles, le premier vecteur singulier n'est pas constant le long du réseau. Pour $F/D >> 1$, toutes les distances sont de l'ordre de F, et l'ouverture joue un faible rôle. Les polynômes de Legendre sont alors valables comme l'ont montré Aubry *et al*. [12]

III.2 Caractérisation de tubes

La diffusion acoustique par un tube a été décrite au paragraphe II.2. L'objet étudié dans ce paragraphe est un tube métallique, de diamètre 20 mm, d'épaisseur e = 1 mm et rempli d'air. Il est placé dans l'eau perpendiculairement au plan d'insonification du réseau à une distance F de 70 mm (figure 3.31). L'approximation champ lointain ($F >> a$) n'est pas donc valable. Le réseau possède 124 éléments, son pas est de 0,417 mm et sa fréquence centrale de 3 MHz. Le diamètre de l'objet est largement supérieur à la tache de focalisation qui est égale 0,8 mm. Le critère de Rayleigh n'est pas vérifié et l'équation (3.59) donnant les deux premières valeurs singulières n'est pas valable.

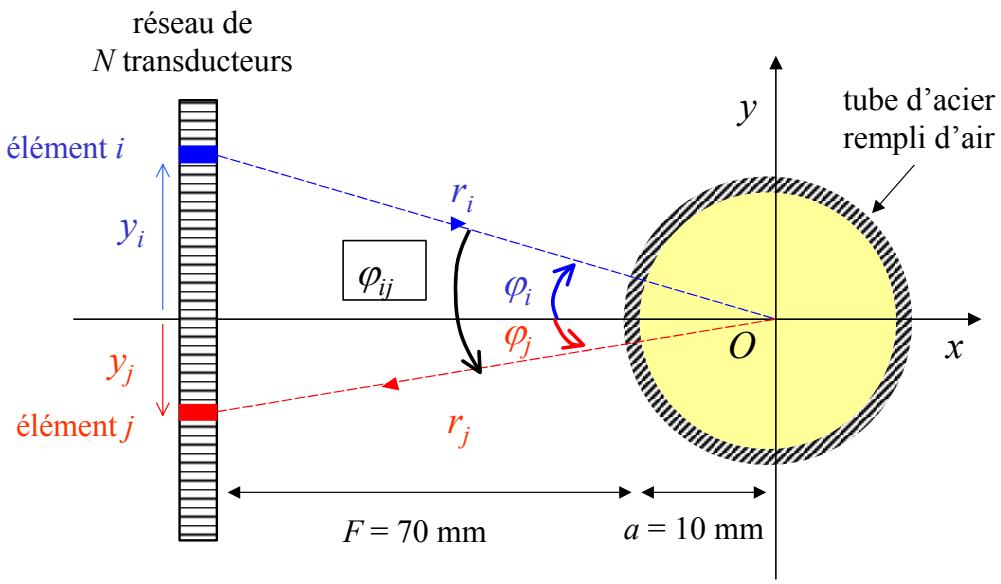


figure 3.31 : géométrie du problème, caractérisation de tube.

Cette étude s'appuie sur deux études effectuées à dix ans d'intervalle. La première a été menées par Stéphane Komilikis et Claire Prada en 1996 et a donné lieu à la référence 10. La diffusion était alors modélisée par une réflexion totale, ce qui correspond à la limite solide infiniment rigide (§ II.1.3). Cette approximation est valable pour un tube rempli d'air dans l'eau, dans la limite des grandes valeurs de k_0a (figure 2.17). Ce modèle est suffisant pour décrire des vecteurs singuliers théoriques en accord les vecteurs singuliers expérimentaux dépendant de l'écho spéculaire. Ce travail a également montré l'existence de vecteurs singuliers reliés aux ondes circonférentielles des modes de Lamb. Ces vecteurs dépendent de

l'épaisseur e du tube. Ce cas a été plus particulièrement étudié et expliqué en 1998 par Claire Prada dans la référence 11.

L'étude des invariants liés à l'écho spéculaire a été reprise en 2005 en collaboration avec Alexandre Aubry et Julien de Rosny. Mon travail a consisté à obtenir les valeurs singulières et les vecteurs singuliers par la méthode présentée au paragraphe III.1.2, c'est à dire par diagonalisation de l'opérateur projeté $\mathbf{SS}^*$ (modèle complet). Les coefficients de diffusion R_n utilisés dans ce cas sont ceux du tube (§ II.2.2) ou ceux de la limite infiniment rigide $R_n = -\mathrm{J}_n'/\mathrm{H}_n'$ [Eq. (2.17a)]. Dans le cas du tube de 20 mm à 3 MHz, le nombre de termes significatifs est de l'ordre de 140, pour $k_0a \approx 125$.

Ces résultats ont été comparés à ceux obtenus par la méthode des modes hermito-gaussiens. Cette méthode s'appuie sur une analogie avec les modes d'une cavité laser formée de deux miroirs paraboliques. En effet, le système présenté ici est également formé de deux « miroirs » : le réseau et le tube. De plus, d'après l'approximation de Fresnel, les fronts d'onde cylindriques ainsi que le tube sont bien décrits par une approximation parabolique. Les faisceaux gaussiens sont bien adaptés dans ce cas pour décrire les invariants du Retournement Temporel. Ce travail a donné lieu à la référence 12. Il a été montré que ce modèle est valabale dans la limite $\sqrt{\lambda a} > \lambda F/D$.

Expression des vecteurs singuliers

Un élément j du $n^{ième}$ vecteur singulier $\mathbf{U}_n$ est donné par le mode hermito-gaussien à deux dimensions (2D), d'ordre n. Il s'exprime en fonction de y_j la coordonnée du transducteur j (figure 3.31) [12]

$$U_n(y_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2}}\,\xi_{n-1}^{\mathrm{H}}\left(\frac{\sqrt{2}y_j}{w}\right)\exp\left(-i\frac{k_0 y_j^{\,2}}{2q}\right). \tag{3.61}$$

Le terme ξ_{n-1}^{H} correspond au polynôme d'Hermite d'ordre $n-1$. Les quatre premiers ordres ont pour expression, pour tout x réel (Abramowitz et Stegun Eq. 22.3.10)

$$\xi_0^{\mathrm{H}}(x) = 1\ , \tag{3.62a}$$

$$\xi_1^{\mathrm{H}}(x) = 2x\ , \tag{3.62b}$$

$$\xi_2^{\mathrm{H}}(x) = 4x^2 - 2\ , \tag{3.62c}$$

$$\xi_3^{\mathrm{H}}(x) = 8x^3 - 12x\ . \tag{3.62d}$$

Une famille de modes hermito-gaussiens est déterminée par le rayon de courbure complexe q à la position y_j. Il est relié à la largeur w et au rayon de courbure R du faisceau par la relation

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i\frac{\lambda}{\pi w^2}, \tag{3.63}$$

où λ est la longueur d'onde. Les termes w et R sont obtenus par une méthode issue de l'analyse des rayons dans une cavité laser (ray transfer matrix).[12] Ils s'écrivent de la façon suivante

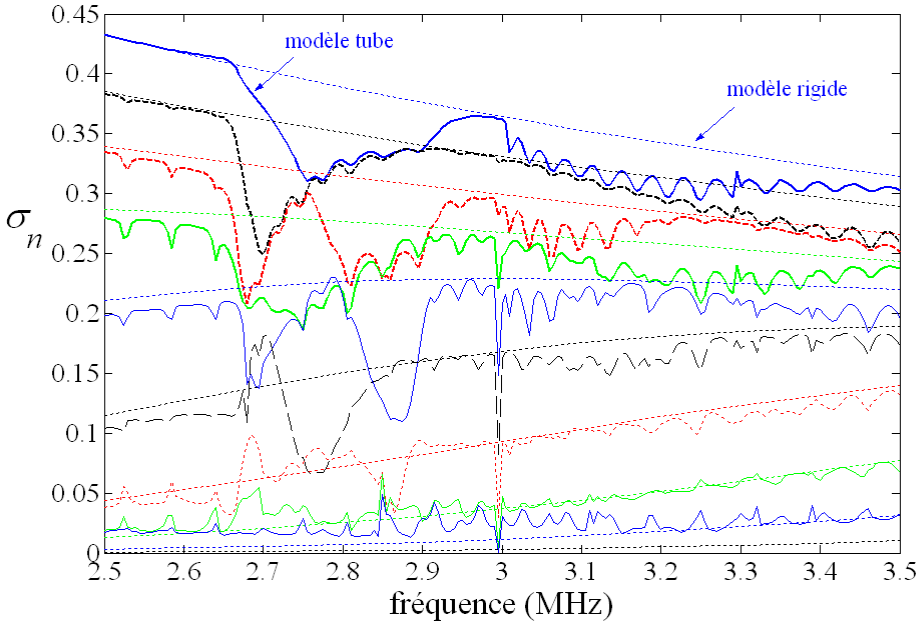
$$w^2 = 2F\left(1 + \frac{F}{a}\right)\frac{\lambda}{\pi}, \tag{3.64a}$$

$$R = -2F\frac{1 + F/a}{1 + 2F/a}. \tag{3.64b}$$

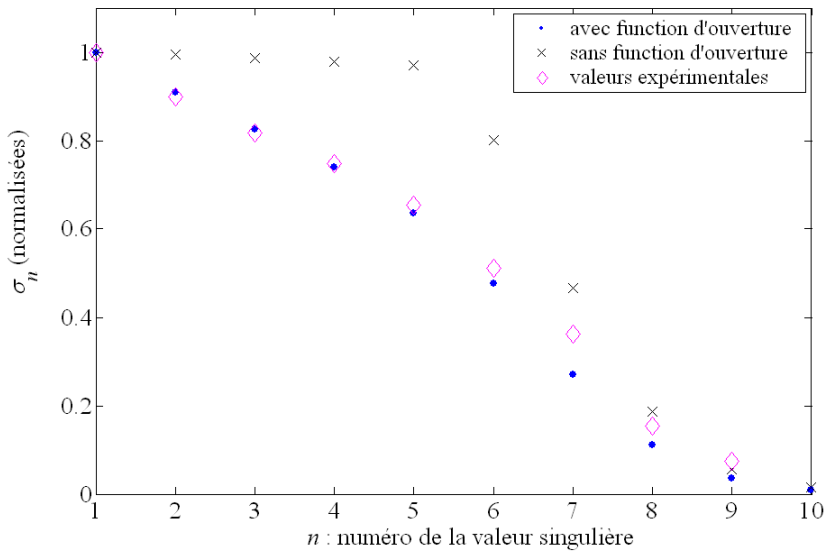
La mesure expérimentale de w et R permet donc de remonter au rayon a du tube et à la distance F entre le réseau et le bord du tube.

Etude des valeurs singulières

Les valeurs singulières théoriques sont tracées sur la figure 3.32(a). Elles sont obtenues par diagonalisation de l'opérateur projeté $\mathbf{SS}^*$ (modèle complet), dans le cas du tube et de la limite infiniment rigide. Expérimentalement, en conservant uniquement l'écho spéculaire par fenêtrage temporel, les résonances liés aux modes de Lamb sont éliminées et les valeurs singulières suivent le modèle rigide. La décroissance des dix premières valeurs singulières est montrée sur la figure 3.32(b) pour la fréquence 3 MHz. Les valeurs expérimentales sont comparées à celle de la limite rigide avec et sans fonction d'ouverture O [Eq. (3.4)]. Sans fonction d'ouverture, les quatre premières valeurs singulières théoriques sont très proches [× figure 3.32(b)]. En prenant en compte, la fonction d'ouverture, un bon accord entre les valeurs singulières théoriques et expérimentales est obtenu.



(a)



(b)

figure 3.32 : valeurs singulières σ_n en fonction de la fréquence (a) et normalisées à 3 MHz (b)

Les huit premiers vecteurs singuliers sont représentés sur la figure 3.33, pour la fréquence 3 MHz. Les valeurs expérimentales sont comparées aux vecteurs du modèle complet et aux modes hermito-gaussiens. Le modèle complet donnent des résultats en très bon accord avec les vecteurs expérimentaux. Les modes hermito-gaussiens sont en accord pour les quatre premiers vecteurs, qui s'annulent au bord de réseau. En effet, les modes gaussiens ne sont plus invariants du système s'ils ne sont pas entièrement enregistrés par le réseau : la condition d'orthogonalité n'est alors plus vérifiée.

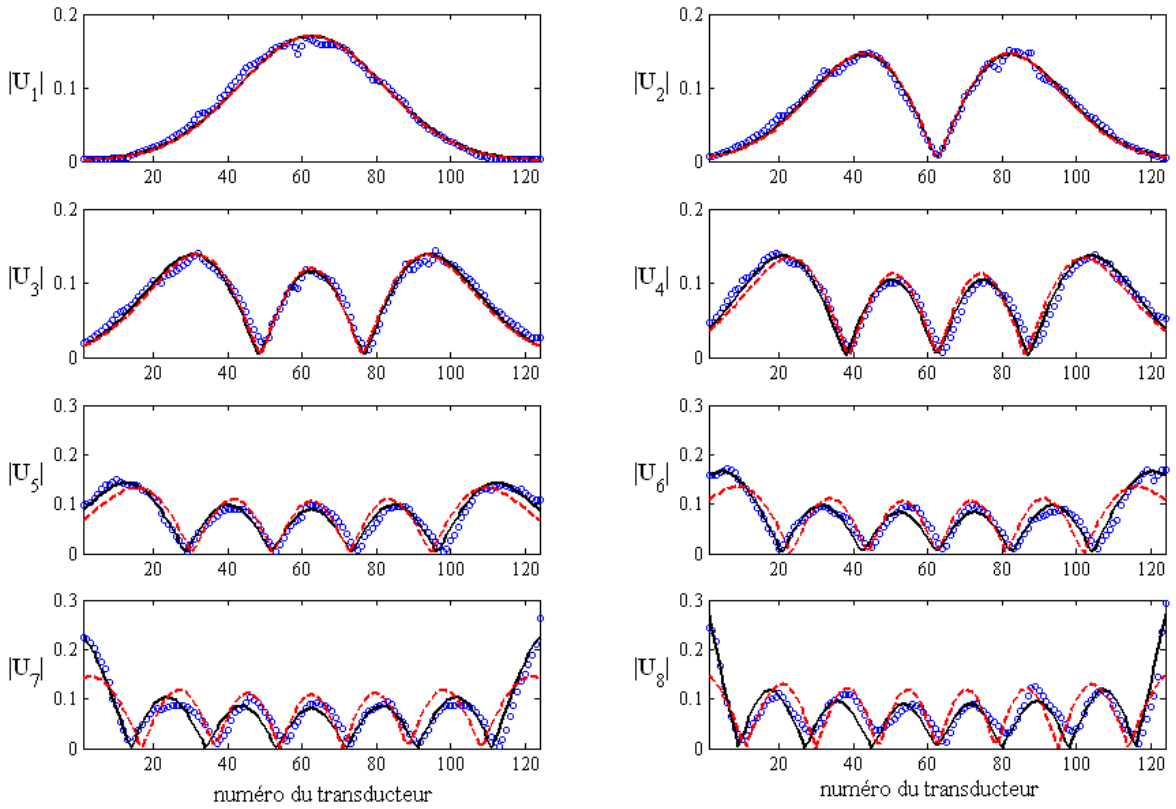


figure 3.33 : normes des vecteur singuliers $|\mathbf{U}_1|$ à $|\mathbf{U}_8|$, valeurs expérimentales (o), modes hermito-gaussiens (--) et vecteurs singuliers théoriques modèle complet (–).

Les différentes approximations à deux dimensions (2D) présentées aux paragraphes III.1 et III.2 sont reprises dans le tableau 6 : diffusion isotrope, limite petit objet, critère de Rayleigh, polynômes de Legendre et modes hermito-gaussiens. Les limites de validité en fonction des paramètres du réseau et du cylindre sont également montrées, ainsi que les expressions des valeurs singulières et des vecteurs singuliers.

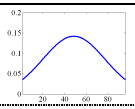
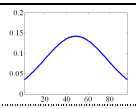
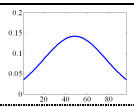
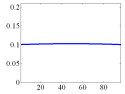
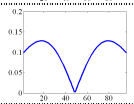
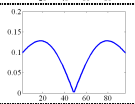
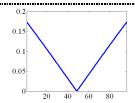
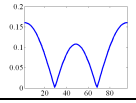
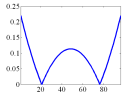
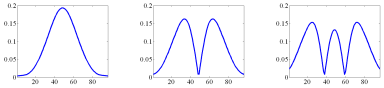
	diffusion isotrope	**petit objet**	**Rayleigh**	**Legendre**	**modes hermito-gaussien**
limite	$k_0a << 1$	$k_0a < 0{,}5$	$2a < \lambda F/D$	$2a < \lambda F/D$	$\sqrt{\lambda a} > \lambda F/D$
ouverture du réseau	$F/D \sim 1$	$F/D \sim 1$	$F/D \sim 1$	$F/D >> 1$ ou quart de cercle	$F/D \sim 1$
m	$= 0$	$= 1$	$\approx k_0a$	$\approx k_0a$	$\approx k_0a$
$\sigma_1 \approx$	$\lvert R_0\rvert \, \lVert \mathbf{H}_{S0}\rVert^2$	$(\alpha+\beta)\,\lvert c\rvert \, \lVert \mathbf{H}_{S0}\rVert^2$	$\left\lvert \sum_{n=0}^{m} \varepsilon_n (-1)^n R_n \lVert \mathbf{H}_{Sn}\rVert^2 \right\rvert$	$\frac{2N}{\pi k_0 F} \left\lvert \sum_{n=0}^{m} \varepsilon_n (-1)^n R_n \right\rvert$	…
$\sigma_2 \approx$	×	$\beta \lvert c\rvert \, \lVert \mathbf{H}_{A1}\rVert^2$	$\left\lvert \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n (-1)^n R_n \lVert \mathbf{H}_{An}\rVert^2 \right\rvert$	$\frac{N}{6\pi k_0 F} \left(\frac{D}{F}\right)^2 \left\lvert \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n (-1)^n R_n n^2 \right\rvert$	…
$\sigma_3 \approx$	×	$<< \sigma_1$ et σ_2	…	…	…
$\mathbf{U}_1 \approx$	$\tilde{\mathbf{U}}_{S0}$ 	$\tilde{\mathbf{U}}_{S0}$ 	$\tilde{\mathbf{U}}_{S0}$ 	$\propto 1$ 	$\mathbf{U}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2}}\, \xi_{n-1}^{H}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) e^{\left(-i\frac{k_0 x}{2q}\right)}$
$\mathbf{U}_2 \approx$	×	$\tilde{\mathbf{U}}_{A1}$ 	$\tilde{\mathbf{U}}_{A1}$ 	$\propto x$ 	
$\mathbf{U}_3 \approx$	×	$\tilde{\mathbf{U}}_{S0} - \tilde{\mathbf{U}}_{S1}$ 	…	$\propto 3x^2 - 1$ 	
§	III.1.2	III.1.3	III.1.4	III.1.4 et 5	III.2

Tableau 6 : résumé des différentes approximations à 2D.

III.3 Caractérisation de sphères

La diffusion acoustique par des sphères élastiques est décrite au paragraphe II.3. Des expériences ont été menées sur trois sphères d'acier de diamètre 2 mm, 2,4 mm et 3 mm avec le même réseau linéaire que pour les cylindres (figure 3.34). La fréquence centrale étant de 1,5 MHz, le diamètre des sphères est supérieur à la tache de focalisation. Cependant, il reste petit par rapport à la distance d'observation F = 50 mm, l'approximation champ lointain est donc valable. La sphère est maintenue par un fil de nylon de 0,1 mm de diamètre, perpendiculaire au plan insonifié par le réseau. La contribution du fil à la pression rétro-diffusée vers le réseau est supposée négligeable. Le réseau linéaire est identique au cas cylindrique (§ III.1.6)

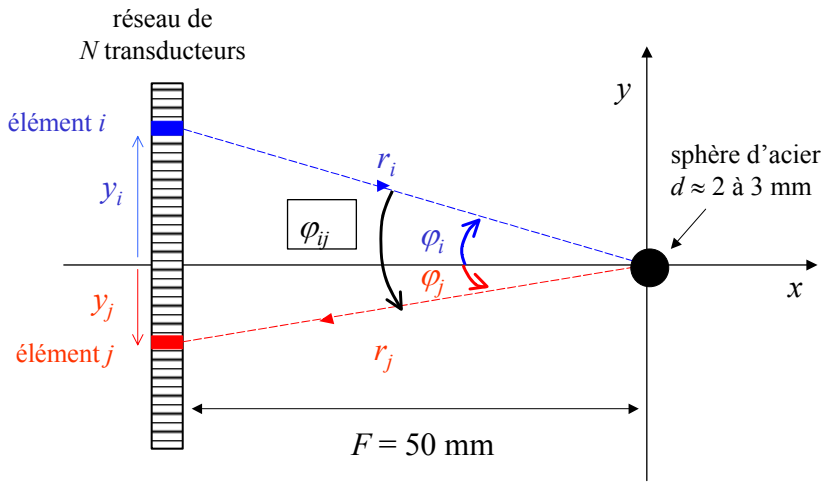


figure 3.34 : géométrie du problème : caractérisation de sphère.

Les valeurs singulières et les vecteurs singuliers théoriques sont obtenus par décomposition en valeurs singulières de la matrice de transfert théorique **K** en champ lointain. Par analogie avec l'équation (3.25) à 2D, l'expression de **K** à 3D est

$$\mathbf{K} = \mathbf{h}_{S0}\, \mathbf{c}\, {}^t\mathbf{h}_{S0}\,. \tag{3.65}$$

Le vecteur $\mathbf{h}_{S0}$ contient la réponse entre le réseau et la sphère du premier mode sphérique. Un élément $h_{S0,j}$ de ce vecteur s'écrit, par analogie avec la réponse $H_{S0,j}$ à 2D [Eq. (3.21)]

$$h_{S0,j} = O_j \frac{e^{ik_0 r_j}}{ik_0 r_j}\,. \tag{3.66}$$

Un élément c_{ij} de la matrice de diffusion sphérique **c** est donnée par l'équation (2.55b), soit

$$c_{ij} = \sum_{n=0}^{m} (2n+1) R_n (-1)^n \mathrm{P}_n \{\cos(\varphi_i - \varphi_j)\}\,. \tag{3.67}$$

Le terme P_n désigne le polynôme de Legendre [Eq. (2.51)]. Les coefficients de diffusion R_n de la sphère sont donnés par les équations (2.56) à (2.58). L'ordre du dernier coefficient de diffusion significatif m est de l'ordre de k_0a comme dans la cas cylindrique [Eq. (2.65)].

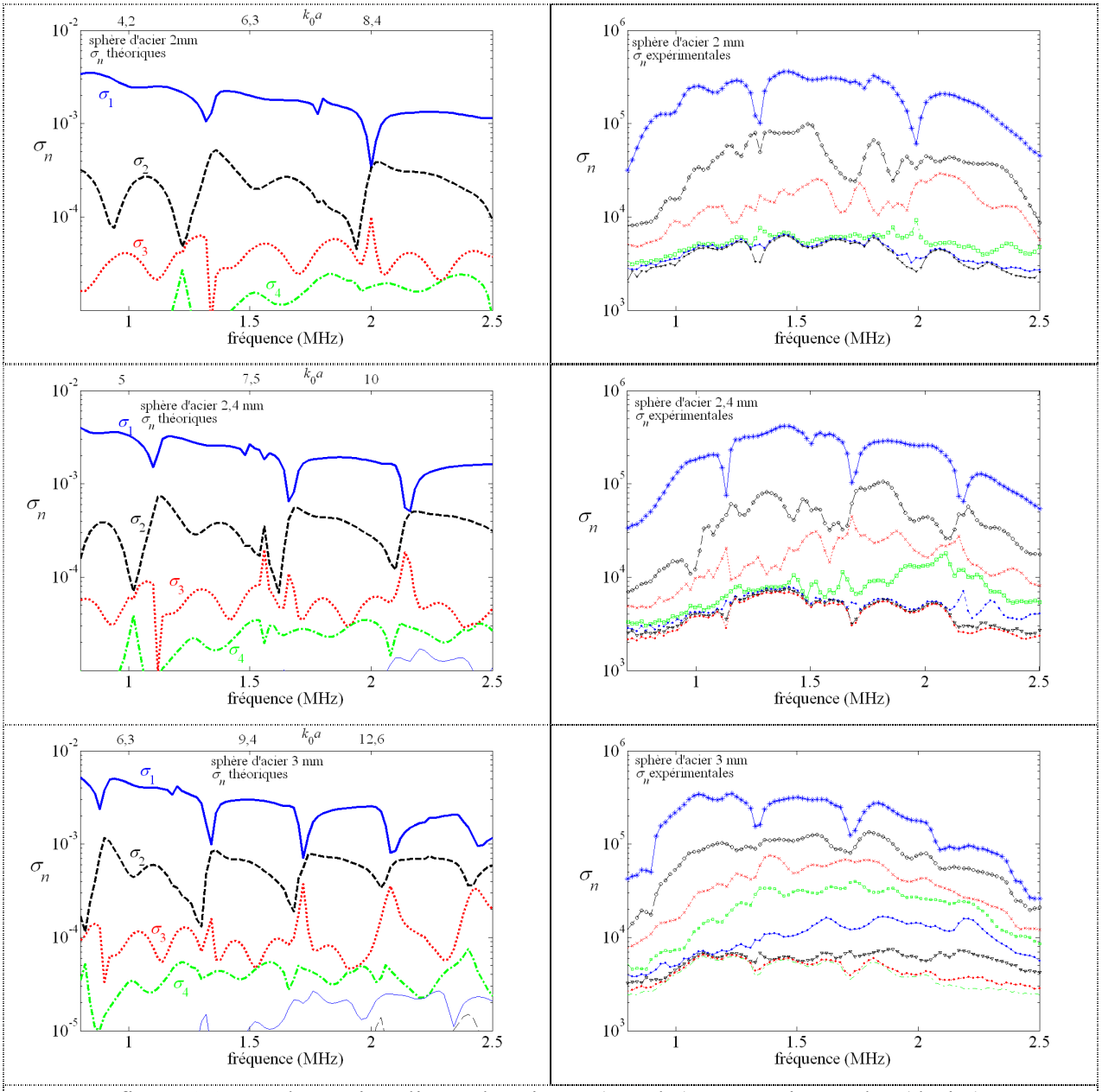


figure 3.35 : valeurs singulières théoriques (gauche) et expérimentales (droite) de sphères d'**acier** de diamètre **2** mm, **2,4** mm et **3** mm (échelle semi log, sans correction de bande passante)

Les valeurs singulières théoriques et expérimentales sont illustrées sur la figure 3.35. Les valeurs théoriques sont obtenues par SVD de la matrice de transfert [Eq. (3.65)]. Dans les trois cas, l'accord entre les premières valeurs singulières σ_1 expérimentales et théoriques est très bon. Notamment les « creux », se trouvent à des fréquences identiques.

L'accord est moins bon pour les valeurs singulières suivantes. Cependant le nombre de valeurs singulières expérimentales au-dessus du niveau de bruit est en accord avec le modèle. La sphère de 2 mm présente trois valeurs singulières hors bruit, et la sphère de 2,4 mm en présente quatre. La sphère de 3 mm semble avoir jusqu'à six valeurs singulières au delà de 1,8 MHz. La norme des six vecteurs singuliers correspondant sont tracés sur la figure 3.36 à la fréquence 2 MHz. Les six vecteurs sont significatifs. L'écart entre les niveaux des valeurs singulières théoriques et expérimentales peut être dû à un problème de linéarité de dynamique de l'électronique de mesure.

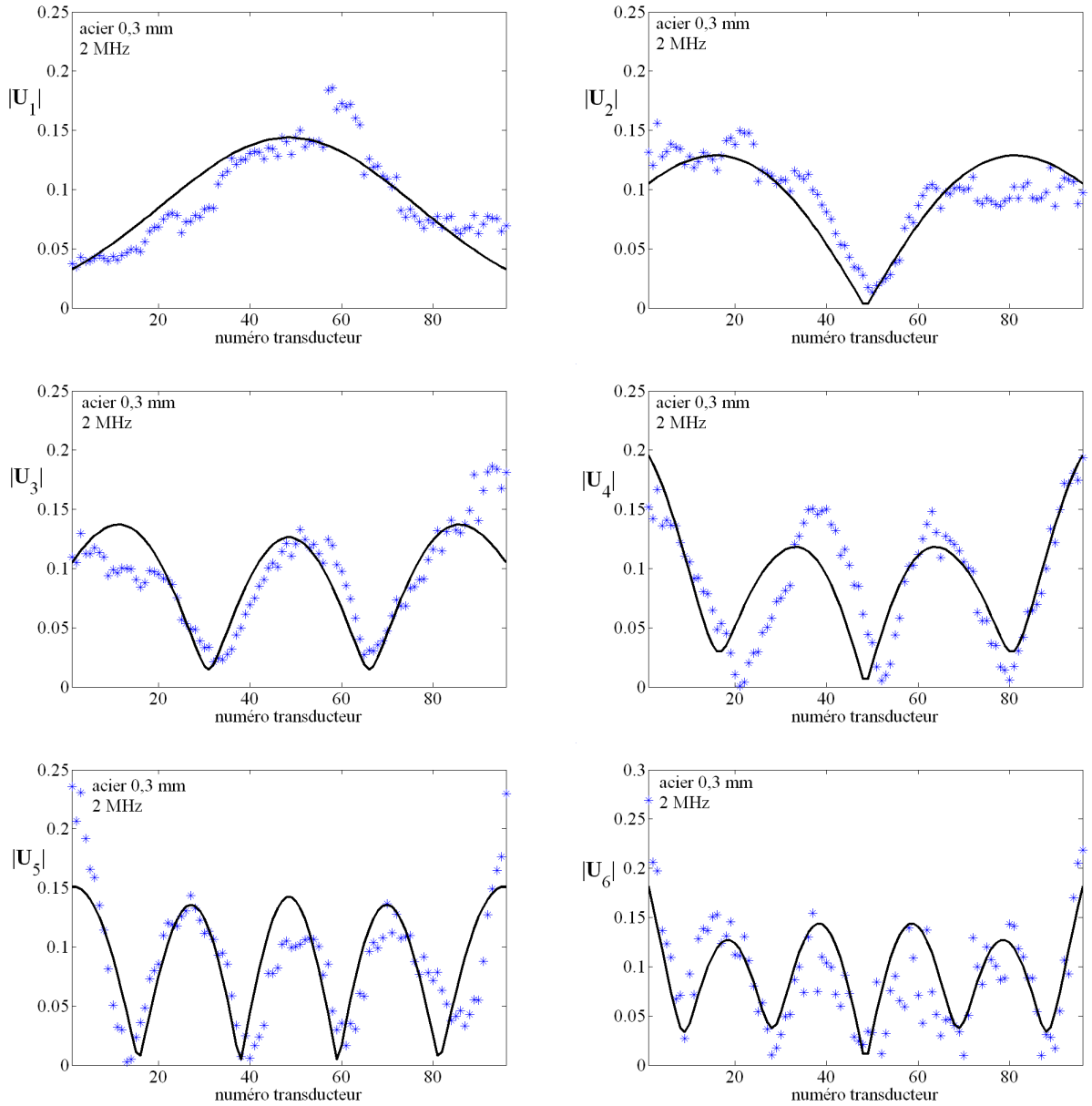


figure 3.36 : norme des six premiers vecteurs singuliers $\mathbf{U}_1$ à $\mathbf{U}_6$ à 2 MHz expérimentaux et théoriques (obtenus par SVD de **K**), pour la sphère d'**acier** de **3 mm** de diamètre.

Limite petit objet et généralisation

Il n'est pas possible d'écrire la même décomposition des modes normaux que dans le cas cylindrique (figure 3.2). Cependant dans la limite petit objet, sachant que les deux premiers polynômes de Legendre vérifient $P_0(\cos\theta) = 1$ et $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$, la résolution des valeurs singulières et des vecteurs singuliers est identique au cas cylindrique de la limite petit objet (§ III.1.3). Ce cas a été étudié théoriquement par Chambers et Gautesen,[6] mais il ne nous pas a été possible de l'étudier expérimentalement, du fait de la difficulté de manipuler des sphères dont le rayon est de l'ordre de 0,1 mm. L'expression des valeurs singulières est formellement identique à l'équation (3.43)

$$\sigma_1 \approx (\alpha + \beta)\, |c|\, \|\mathbf{h}_{S0}\|^2 , \qquad k_0 a < 0{,}5. \qquad (3.68a)$$

$$\sigma_2 \approx \beta\, |c|\, \|\mathbf{h}_{A1}\|^2 . \qquad k_0 a < 0{,}5. \qquad (3.68b)$$

L'expression du vecteur $\mathbf{h}_{S0}$ est donnée à l'équation (3.66). Un élément du vecteur anti-symétrique vérifie

$$h_{A1,j} = \sin(\varphi_j)\, h_{S0,j} . \qquad (3.68c)$$

Les expressions des coefficients sphériques sont données à l'équation (2.69)

$$\alpha = 1 - \frac{\rho_0 c_0^{\,2}}{\rho_1\left(c_L^{\,2} - 4/3\, c_T^{\,2}\right)},$$

$$\beta = 3\frac{\rho_1 - \rho_0}{2\rho_1 + \rho_0},$$

$$c = -\, i(k_0 a)^3/3 .$$

Les termes c et $\|\mathbf{h}\|^2$ sont proportionnels à $(k_0 a)^3$ et k_0^{-2} respectivement. Les deux valeurs singulières sont proportionnelles à $k_0 a^3$ dans la limite petit objet. Dans le cas cylindrique, elles sont proportionnelles à $k_0 a^2$.

Une généralisation de l'expression de la première valeur singulière est possible tant que la diamètre de la sphère est inférieur à la tache de focalisation, par analogie avec l'équation (3.51)

$$\sigma_1 \approx \|\mathbf{h}_{S0}\|^2 \left| \sum_{n=0}^{m} (2n+1)(-1)^n R_n \right|, \qquad 2a \le \lambda F/D. \qquad (3.69a)$$

$$\sigma_2 \approx \left| \sum_{n=1}^{m} (2n+1)(-1)^n R_n \|\mathbf{h}_{An}\|^2 \right|, \qquad 2a \le \lambda F/D. \qquad (3.69b)$$

Les valeurs singulières σ_1 et σ_2 sont associées aux vecteurs singuliers $\mathbf{U}_1 \approx \tilde{\mathbf{u}}_{S0} = \mathbf{h}_{S0}/\|\mathbf{h}_{S0}\|$ et $\mathbf{U}_2 \approx \tilde{\mathbf{u}}_{A1} = \mathbf{h}_{A1}/\|\mathbf{h}_{A1}\|$.

III.4 Caractérisation de deux cylindres élastiques

Une première étude a été menée en 1996 par Prada, Manneville *et al*. dans la cas de deux diffuseurs isotropes en diffusion simple.[5] Cette approximation est couramment utilisée en imagerie. L'effet de la diffusion multiple a été observé par Prada et Thomas en 2003 dans un étude sur la super-résolution[13] puis pris en compte par Devaney *et al*. en imagerie.[4] Dans ces deux études, la diffusion est supposée isotrope. Les résultats présentés dans ce paragraphe correspondent à la publication de Minonzio *et al*. de 2006, prenant en compte l'anisotropie de diffusion dans le cas de deux cylindres élastiques.[14] La diffusion du système formé par les deux cylindres a été décrite au paragraphe II.4.

III.4.1 Géométrie du problème

Le milieu contient deux cylindres élastiques identiques, de rayon a, parallèles au plan d'insonification. Ils sont séparés d'une distance d et repérés par les abscisses dy_1 et dy_2 (figure 3.37). La distance entre les cylindres et le réseau est notée F. La barrette est identique à celle employée précédemment : un réseau linéaire de 96 éléments de fréquence centrale 1,5 MHz. Dans les cas étudiés, F est égal à 50 mm, le rayon a à 0,25 mm et l'écart maximum à 3 mm. L'approximation champ lointain est donc vérifiée, soit $a << F$ et $d << F$.

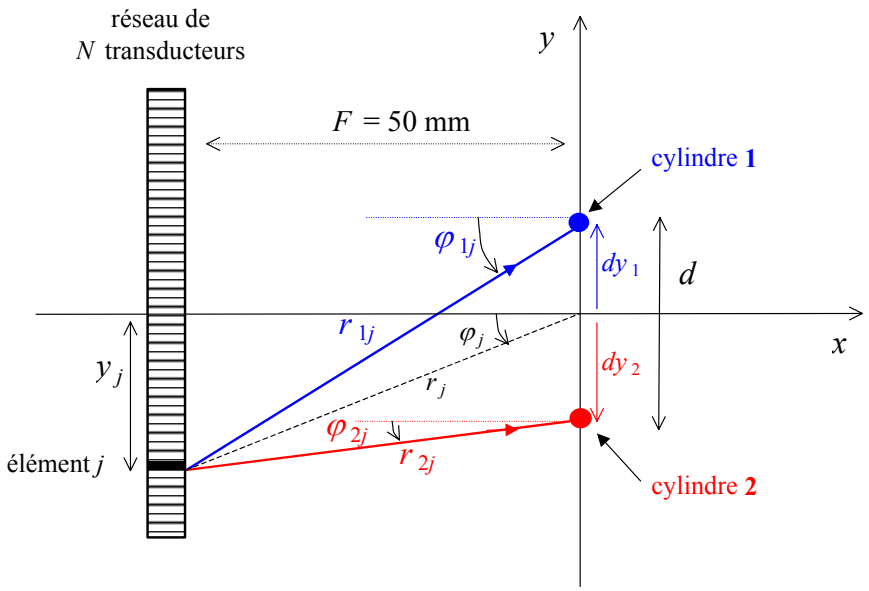


figure 3.37 : géométrie du problème, caractérisation de deux cylindres.

La distance entre le transducteur j et le cylindre 1 est notée r_{1j} (figure 3.37). L'angle correspond est noté φ_{1j}. De même, r_{2j} et φ_{2j} correspondent à la distance et l'angle entre le transducteur j et le cylindre 2. De même façon, r_j et φ_j désignent la distance et l'angle entre le transducteur j et le centre du repère (Oxy). Du fait des conditions de champ lointain ($d << F$), ces grandeurs sont reliées suivant [Eq. (2.86)]

$$r_{1j} \approx r_j - dy_1 \sin(\varphi_j) \,, \tag{3.70a}$$

$$r_{2j} \approx r_j - dy_2 \sin(\varphi_j) \,, \tag{3.70b}$$

$$\varphi_{1j} \approx \varphi_{2j} \approx \varphi_j \,. \tag{3.70c}$$

La distance r_j et l'angle φ_j sont donnés par les équations (3.1) et (3.2) dans le cas d'un cylindre unique centré : $r_j = \sqrt{F^2 + y_j^{\,2}}$ et $\tan\varphi_j = y_j / F$. L'équation (3.21) donne la réponse $H_{S0,j}$ entre le transducteur j et le centre du repère du premier mode normal symétrique. Les réponses $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ correspondent aux réponses entre le transducteur j et les centres des cylindres 1 et 2. Ces réponses dépendent de la réponse $\mathbf{H}_{S0}$ et des déphasages ϕ_1 et ϕ_2

$$\phi_{1j} = k_0\, dy_1 \sin(\varphi_j) \,, \qquad 1 \le j \le N \,,\ d << F. \tag{3.71a}$$

$$\phi_{2j} = k_0\, dy_2 \sin(\varphi_j) \,. \qquad 1 \le j \le N \,,\ d << F. \tag{3.71b}$$

Les éléments $H_{1,j}$ et $H_{2,j}$ vérifient

$$H_{1,j} = H_{S0,j}\, e^{-i\phi_{1j}} \,, \qquad 1 \le j \le N \,,\ d << F. \tag{3.72a}$$

$$H_{2,j} = H_{S0,j}\, e^{-i\phi_{2j}} \,, \qquad 1 \le j \le N \,,\ d << F. \tag{3.72b}$$

III.4.2 Modèle complet

Pour le cylindre 1 seul, d'après l'équation (3.25), la matrice de transfert **K** a pour expression $\mathbf{H}_1\,\mathbf{C}_1\,{}^t\mathbf{H}_1$. De même pour le cylindre 2 seul, la matrice de transfert est égale à $\mathbf{H}_2\,\mathbf{C}_2\,{}^t\mathbf{H}_2$. Pour les deux cylindres, la matrice de diffusion simple $\mathbf{K}^{(1)}$ s'écrit

$$\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{H}_1\,\mathbf{C}_1\,{}^t\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2\,\mathbf{C}_2\,{}^t\mathbf{H}_2 \,. \tag{3.73a}$$

L'exposant (1) est utilisé pour marquer la diffusion simple. Par analogie, dans le cas de deux cylindres, la matrice de transfert s'écrit

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}_1\,\mathbf{C}_1'\,{}^t\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2\,\mathbf{C}_2'\,{}^t\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1\,\mathbf{C}_{1\text{-}2}'\,{}^t\mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_2\,\mathbf{C}_{2\text{-}1}'\,{}^t\mathbf{H}_1 \,. \tag{3.73b}$$

Les expressions des éléments C_{ij}' de ces quatre matrices sont données par des sommes de modes normaux compris entre $-m$ et $+m$, d'après l'équation (2.88)

$$C_{1ij}' = \sum_{n=-m}^{+m} i^{-n} W_n^- e^{in\varphi_{ij}} \,, \tag{3.74a}$$

$$C_{2ij}' = \sum_{n=-m}^{+m} i^{n} W_{-n}^+ e^{in\varphi_{ij}} \,, \tag{3.74b}$$

$$C_{1-2ij}' = \sum_{n=-m}^{+m} i^{n} X_{-n}^- e^{in\varphi_{ij}} \,, \tag{3.74c}$$

$$C_{2-1ij}' = \sum_{n=-m}^{+m} i^{-n} X_{n}^+ e^{in\varphi_{ij}} \,, \tag{3.74d}$$

D'après l'équation (2.88c) et la figure 2.28, la matrice de diffusion $\mathbf{C}_1'$ est reliée aux coefficients W_n^- . De même, la matrice de diffusion $\mathbf{C}_2'$ est reliée aux coefficients W_n^+ . Dans ces deux cas, les vecteurs de propagation $\mathbf{H}_1$ ou $\mathbf{H}_2$ sont identiques, ces termes décrivent globalement la *diffusion simple*. Les deux matrices $\mathbf{C}_{1\text{-}2}'$ et $\mathbf{C}_{2\text{-}1}'$ contiennent les termes « croisés », les vecteurs de propagation sont différents entre l'aller et le retour. Ils décrivent globalement la *diffusion multiple*. Les coefficients $W_n^\pm$ et $X_n^\pm$ sont donnés par les équations (2.80) et (2.83) et illustrés sur les figures 2.29 et 2.30 pour l'acier et le nylon. Ce modèle prend en compte les conditions aux limites élastiques du système formé par les deux cylindres.

Remarques :

1) comme précédemment, m est de l'ordre de k_0a et l'angle φ_{ij} est égal à $\varphi_i - \varphi_j$.

2) pour le cylindre 1, la matrice $\mathbf{K} = \mathbf{H}_1\,\mathbf{C}_1\,{}^t\mathbf{H}_1$ est de rang inférieur ou égale à $2m+1$. Pour deux cylindres, les matrices $\mathbf{K}^{(1)}$ **et** $\mathbf{K}$ données par les équations (3.73) et (3.74) sont de rang inférieur ou égal à $2(2m+1)$. La diffusion multiple ne modifie pas le rang de la matrice de transfert.[14]

III.4.3 Approximation de la diffusion isotrope

L'approximation de la diffusion isotrope a été décrite dans le cas d'un seul cylindrique au paragraphe III.1.3. Les sommes des modes normaux de l'équation (3.74) sont limités aux termes monopolaires, soit $n = m = 0$. Le rang de $\mathbf{K}$ est alors inférieur ou égal à 2. Le principal intérêt de cette approximation est qu'il est possible de mener à bien les calculs exacts des valeurs et vecteurs singuliers. De plus, les interprétations physiques qui en découlent restent valables dans le cas général. Le terme R_0 est le coefficient de diffusion monopolaire d'un cylindre seul. Le terme h a été décrit à l'équation (2.90) et correspond au trajet de l'onde entre les deux cylindres soit l'expression approchée de $\mathrm{H}_0^{(1)}(k_0d)$.

Les matrices C′ de l'équation (3.74) se limitent aux coefficients d'ordre 0, $W_0^{\pm}$ et $X_0^{\pm}$, dont les expressions sont données à l'équation (2.97), soit

$$W_0^+ = W_0^- = \frac{R_0}{1 - R_0{}^2 h^2},$$

$$X_0^+ = X_0^- = \frac{R_0{}^2 h}{1 - R_0{}^2 h^2}.$$

La matrice de transfert peut s'écrire

$$\mathbf{K} = \left(\mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)}\right)\frac{1}{1 - R_0{}^2 h^2}. \tag{3.75}$$

La matrice $\mathbf{K}^{(1)}$ correspond à la diffusion simple et $\mathbf{K}^{(2)}$ à la diffusion double suivant

$$\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{H}_1 R_0\,{}^t\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2\,R_0\,{}^t\mathbf{H}_2\,. \tag{3.76a}$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{H}_2\,hR_0{}^2\,{}^t\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_1\,hR_0{}^2\,{}^t\mathbf{H}_2\,. \tag{3.76b}$$

La matrice $\mathbf{K}$ est égale à la limite de la somme des diffusion paire et impaire comme illustrée sur la figure 2.31. Le terme R_0h correspond à un trajet entre les deux cylindres et une réflexion. Le terme $R_0{}^2h^2$ décrit un aller-retour.

Expression de K dans la base des modes projetés

Les modes projetés et leur poids sont définis comme aux équations (3.11) et (3.12) dans le cas d'un cylindre seul, et pour $n = 0$

$$\widetilde{\mathbf{U}}_j = \mathbf{H}_j \big/ \left\| \mathbf{H}_j \right\|, \qquad j = 1, 2, \tag{3.77a}$$

$$\widetilde{\sigma}_j = R_0 \left\| \mathbf{H}_j \right\|^2 , \qquad j = 1, 2. \tag{3.77b}$$

Ces expressions sont identiques, à une phase près, au cas de la diffusion isotrope pour un cylindre [Eq. (3.26)]. Avec ces notations, la matrice de diffusion simple $\mathbf{K}^{(1)}$ [Eq. (3.76a)] s'écrit

$$\mathbf{K}^{(1)} = \widetilde{\mathbf{U}}_1 \widetilde{\sigma}_1 {}^t\widetilde{\mathbf{U}}_1 + \widetilde{\mathbf{U}}_2 \widetilde{\sigma}_2 {}^t\widetilde{\mathbf{U}}_2 . \tag{3.78}$$

Par analogie avec le poids du mode projeté [Eq. (3.77b)], le poids de la diffusion double $\widetilde{\sigma}_{12}$ est définie suivant

$$\widetilde{\sigma}_{12} = hR_0{}^2 \left\| \mathbf{H}_1 \right\| \left\| \mathbf{H}_2 \right\| . \tag{3.79}$$

Dans ce cas, la matrice de diffusion double $\mathbf{K}^{(2)}$ [Eq. (3.76b)] s'écrit

$$\mathbf{K}^{(2)} = \widetilde{\mathbf{U}}_1 \widetilde{\sigma}_{12} {}^t\widetilde{\mathbf{U}}_2 + \widetilde{\mathbf{U}}_2 \widetilde{\sigma}_{12} {}^t\widetilde{\mathbf{U}}_1 . \tag{3.80}$$

La matrice de transfert **K** est une combinaison linéaire des modes projetés $\widetilde{\mathbf{U}}_1$ et $\widetilde{\mathbf{U}}_2$ [Eqs. (3.75), (3.78) et (3.80)]. **K** est donc de rang inférieur ou égal à 2. Il est possible de réduire le problème de dimension N à un problème de dimension 2 en projetant **K** dans le sous espace engendré par les modes projetés $\left\{ \widetilde{\mathbf{U}}_1, \widetilde{\mathbf{U}}_2 \right\}$. Les valeurs singulières et les vecteurs singuliers sont alors obtenus par diagonalisation de l'opérateur projeté $\mathbf{SS}^*$.

La matrice **S** est égale au produit

$$\mathbf{S} = \left(\widetilde{\mathbf{\Sigma}} \mathbf{W}_1 + \widetilde{\sigma}_{12} \mathbf{W}_2 \right) \frac{1}{1 - R_0{}^2 h^2} . \tag{3.81}$$

La matrice $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}$ est diagonale et contient le poids des modes projetés. Les matrices $\mathbf{W}_1$ et $\mathbf{W}_2$ contiennent les produits scalaire w_{ij} entre les modes projetés $\widetilde{\mathbf{U}}_1$ et $\widetilde{\mathbf{U}}_2$. Les expressions de ces matrices sont

$$\widetilde{\mathbf{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\sigma}_1 & 0 \\ 0 & \widetilde{\sigma}_2 \end{pmatrix} , \tag{3.82a}$$

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} 1 & w_{12}^{\ *} \\ w_{12} & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.82b}$$

$$\mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} w_{12} & 1 \\ 1 & w_{12}^{\ *} \end{pmatrix}. \tag{3.82c}$$

Remarques :

1) Comme dans le cas du cylindre seul, on a $w_{ii} = 1$.

2) D'après l'équation (3.72), le produit scalaire w_{12} est complexe, alors qu'il est réel en champ lointain pour un cylindre.

3) La matrice $\widetilde{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{W}_1$ est la projection de $\mathbf{K}^{(1)}$ dans le sous espace $\{\widetilde{\mathbf{U}}_1, \widetilde{\mathbf{U}}_2\}$. Elle correspond à la matrice $\mathbf{S}'$ de l'appendice de la référence 5 proposée par Prada *et al*.

Résolution dans le cas centré

Dans le cas centré, soit $dy_1 = -dy_2 = d/2$, les normes $\|\mathbf{H}_1\|$ et $\|\mathbf{H}_2\|$ sont égales (figure 3.37), ainsi que les deux poids $\widetilde{\sigma}_1$ et $\widetilde{\sigma}_2$ notés $\widetilde{\sigma}$. De plus, le produit scalaire w_{12} est réel ce qui simplifie les produits matriciels $\mathbf{W}_i\mathbf{W}_j$ ($i, j = 1, 2$) suivant

$$\mathbf{W}_1^2 = \mathbf{W}_2^2 = \begin{pmatrix} 1+w_{12}^{\ 2} & 2w_{12} \\ 2w_{12} & 1+w_{12}^{\ 2} \end{pmatrix}, \tag{3.83a}$$

$$\mathbf{W}_1\mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_2\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} 2w_{12} & 1+w_{12}^{\ 2} \\ 1+w_{12}^{\ 2} & 2w_{12} \end{pmatrix}. \tag{3.83b}$$

Dans ce cas, l'expression de l'opérateur projeté $\mathbf{SS}^*$ est

$$\mathbf{SS}^* = |\widetilde{\sigma}|^2 \left[\left(1+|R_0 h|^2\right)\mathbf{W}_1^{\ 2} + \left(R_0 h + (R_0 h)^*\right)\mathbf{W}_1\mathbf{W}_2 \right] \frac{1}{\left|1-(R_0 h)^2\right|^2}. \tag{3.84}$$

La matrice $\mathbf{SS}^*$ est symétrique de forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres $\sigma_\pm^{\ 2}$ s'écrivent $a+b$ et $a-b$, et sont associées aux vecteurs propres $1/\sqrt{2}\,{}^t(1 \quad 1)$ et $1/\sqrt{2}\,{}^t(1 \quad -1)$. Les valeurs singulières de $\mathbf{K}$ sont les racines carrées des valeurs propres de $\mathbf{SS}^*$.

L'expression des valeurs singulières est

$$\sigma_+ = |\tilde{\sigma}|(1+w_{12})\left|\frac{1}{1-R_0 h}\right| , \tag{3.85a}$$

$$\sigma_- = |\tilde{\sigma}|(1-w_{12})\left|\frac{1}{1+R_0 h}\right| . \tag{3.85b}$$

Elles sont associées aux vecteurs singuliers

$$\mathbf{U}_+ \propto \left(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \tilde{\mathbf{U}}_2\right)/\left\|\tilde{\mathbf{U}}_1 + \tilde{\mathbf{U}}_2\right\| , \tag{3.86a}$$

$$\mathbf{U}_- \propto \left(\tilde{\mathbf{U}}_1 - \tilde{\mathbf{U}}_2\right)/\left\|\tilde{\mathbf{U}}_1 - \tilde{\mathbf{U}}_2\right\| . \tag{3.86b}$$

III.4.3 Approximation 0° et 90°

Le modèle présenté ici permet d'affiner les résultats de l'approximation isotrope présentés au paragraphe précédent, en modifiant légèrement les calculs. La diffusion pour l'angle φ égal à 0° et 90° varie peu dans un angle correspondant à l'ouverture du réseau : la retro-diffusion (0°) et la diffusion d'un fil vers l'autre (90°) sont considérées comme constantes. En reprenant l'équation (2.92), le terme $C(\varphi)$ est défini par

$$C(\varphi) = \sum_{n=-m}^{m} (-1)^n R_n e^{in\varphi} .$$

Les éléments C_0 et C_{90} désignent les valeurs de C en rétro-diffusion ($\varphi = 0°$) et sur le côté ($\varphi = 90°$). Leur expression sont

$$C_0 = \sum_{n=-m}^{m} (-1)^n R_n , \qquad \varphi = 0°. \tag{3.87a}$$

$$C_{90} = \sum_{n=-m}^{m} (-1)^n R_n e^{in\frac{\pi}{2}} , \qquad \varphi = 90°. \tag{3.87b}$$

Avec ces notations, le poids $\tilde{\sigma}$ est égal à $C_0 \|\mathbf{H}_1\|^2$ et le poids de la diffusion double $\tilde{\sigma}_{12}$ [Eq. (3.79)] est égal à $\tilde{\sigma}\, C_{90}{}^2 h/C_0$. Le terme d'aller-retour $(R_0 h)^2$ est remplacé par $(C_0 h)^2$. L'expression de l'opérateur projeté **S** est [Eq. (3.81)]

$$\mathbf{S} = \tilde{\sigma}\left(\mathbf{W}_1 + h\frac{C_{90}{}^2}{C_0}\left(\mathbf{W}_2 + C_0 h \mathbf{W}_1\right)\frac{1}{1-(C_0 h)^2} \right) . \tag{3.88}$$

Les calculs sont identiques au cas de la diffusion isotrope par diagonalisation de l'opérateur $\mathbf{SS}^*$. Les valeurs singulières sont

$$\sigma_+ = |\tilde{\sigma}|(1+w_{12})\left|1+h\frac{C_{90}{}^2}{C_0}\frac{1}{1-C_0h}\right| , \tag{3.89a}$$

$$\sigma_- = |\tilde{\sigma}|(1-w_{12})\left|1-h\frac{C_{90}{}^2}{C_0}\frac{1}{1+C_0h}\right| . \tag{3.89b}$$

Elles sont associés au mêmes vecteurs singuliers $\mathbf{U}_+$ et $\mathbf{U}_-$ [Eq. (3.86)].

Remarques :

1) Dans la limite petit objet, $C(\varphi)$ est égal à $(\alpha c + \beta c \cos\varphi)$ soit $C_0 = (\alpha+\beta)c$ et $C_{90} = \alpha c$. Dans les deux cas, la phase est égale à $-\pi/2$ [Eq. (2.32)].

2) La première valeur singulière d'un cylindre seul s'écrit en champ lointain d'après l'équation (3.51a) $\sigma_1 = |C_0|\ ||\mathbf{H}_{S0}||^2$. Le terme C_0 correspond à un élément diagonal C_{ii} de la matrice de diffusion $\mathbf{C}$ [Eq. (3.24)], pour lesquels $\varphi_{ij} = 0°$. Cela revient à considérer la rétro-diffusion comme constante le long du réseau.

III.4.4 Comparaison des trois modèles

Les valeurs singulières sont comparées sur la figure (3.38). Elles sont données par trois modèles : l'approximation diffusion isotrope [Eq. (3.85)], l'approximation 0° et 90° [Eq. (3.89)] et le modèle complet. Ce dernier modèle s'appuie sur la décomposition en valeur singulière (SVD) de la matrice de transfert théorique donnée aux équations (3.73) et (3.74). Les valeurs singulières sont normalisées par la valeur singulière d'un cylindre seul, soit $|\tilde{\sigma}|$. Elles sont représentées en fonction de la distance d séparant les cylindres, à une fréquence fixée. Deux exemples sont montrés : deux cylindres de cuivre (a) ou de nylon (b). Dans les deux cas, le diamètre est de 0,25 mm et la fréquence de 1,5 MHz, soit $k_0a = 0{,}8$. La distance d varie de 0,25 mm à 4 mm, soit k_0d variant de 1,6 à 18.

La courbe en traits discontinus correspond à la diffusion simple, soit l'absence d'interaction entre les cylindres [Eq. (3.73a)]. Pour les deux approximations, les valeurs singulières de diffusion s'écrivent : $\sigma_{\pm}^{(1)} = |\tilde{\sigma}|(1 \pm w_{12})$. Si d est petit devant la tache de focalisation $\lambda F/D$, le produit scalaire w_{12} entre les vecteurs $\tilde{\mathbf{U}}_1$ et $\tilde{\mathbf{U}}_2$ tend vers 1. La première valeur singulière $\sigma_{+}^{(1)}$ tend vers $2|\tilde{\sigma}|$ et la seconde $\sigma_{-}^{(1)}$ tend vers 0. Cela correspond au cas non résolu. Le cas résolu correspond à la limite $d >> \lambda F/D$. Dans ce cas, w_{12} tend vers 0, les deux vecteurs $\tilde{\mathbf{U}}_1$ et $\tilde{\mathbf{U}}_2$ sont orthogonaux. Les deux valeurs singulières $\sigma_{\pm}^{(1)}$ sont alors équivalentes, de l'ordre de $|\tilde{\sigma}|$, la valeur singulière d'un cylindre seul.

Pour les trois modèles, les valeurs singulières $\sigma_{\pm}$ présentent des oscillations par rapport aux valeurs singulières de la diffusion simple $\sigma_{\pm}^{(1)}$. Ainsi, pour $d < 0{,}6$ et $d > 1{,}1$, σ_{+} est supérieure à $\sigma_{+}^{(1)}$. Pour $0{,}6 < d < 1{,}1$, σ_{+} est inférieure à $\sigma_{+}^{(1)}$ (figure 3.38). La seconde valeur singulière σ_{-} présente un comportement opposé : on a $\sigma_{-} < \sigma_{-}^{(1)}$ pour $0{,}6 < d < 1{,}1$. Il est possible d'expliquer ces oscillations par un développement de Taylor d'ordre 2 des équations (3.85) et (3.89), soit

$$\sigma_{\pm} = |\tilde{\sigma}|(1 \pm w_{12})\{1 \pm |x||h|\cos(k_0d - \pi/4 + \phi_x) + o(h^2)\}, \qquad (3.90)$$

où x est égal à R_0 ou C_{90}^2/C_0 [Eqs. (3.85) et (3.89)] et ϕ_x est la phase de x. La phase de h est égale à $k_0d - \pi/4$ [Eq. (2.90)]. L'expression approchée de h est

$$h \approx \sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 d}}\, e^{ik_0d}.$$

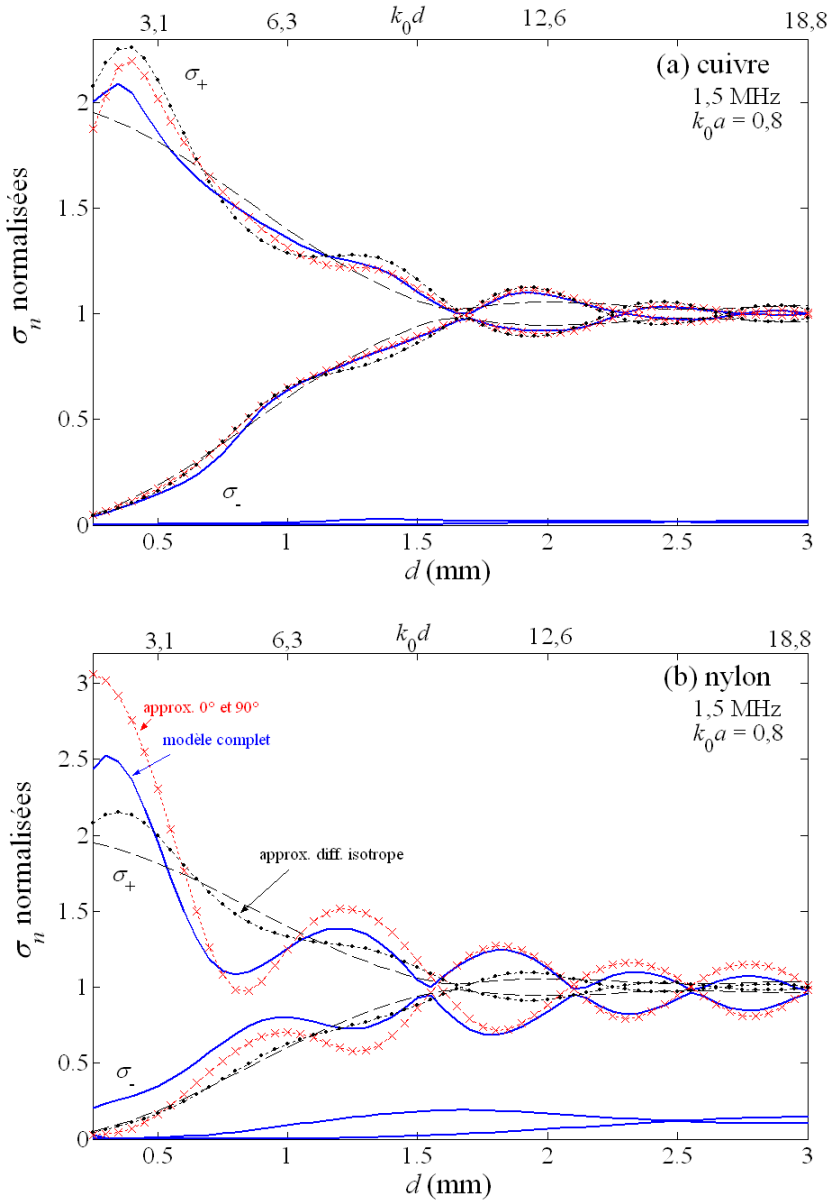


figure 3.38 : valeurs singulières normalisées σ_n en fonction de d à 1,5 MHz comparaison des trois modèles, modèle complet (–), diffusion simple (––) approximation de la diffusion isotrope (•) et approximation 0° et 90° (×).

Pour $\phi_x = -\pi/2$, les oscillations données par l'équation (3.90) sont en bon accord avec celles du modèle complet (figure 3.38). Les deux premières annulations du cosinus correspondent à $k_0d = 5\pi/4$ et $9\pi/4$ ($k_0d = 3{,}9$ et 7 ou $d = 0{,}6$ et 1,1 mm). De même, les extrema correspondent à $k_0d = 3\pi/4$ et $7\pi/4$ ($k_0d = 2{,}3$ et 5,5 ou $d = 0{,}4$ et 0,9 mm). Dans ce cas, la phase pour la limite petit objet donnée par la coefficient de diffusion c est correcte. Le domaine pour lequel le cosinus est positif correspond à des interférences positives entre la diffusion simple et la diffusion multiple. Au contraire, le domaine négatif correspond à des interférences destructives.

Cependant, l'amplitude des oscillations donnée par l'approximation de la diffusion isotrope [Eq. (3.85)] diffère de celle donnée par le modèle complet. Cette différence peut être expliquée par les diagrammes de diffusion illustrés sur la figure 3.39. Dans le cas du cuivre [figure 3.39(a)], la rétro-diffusion est supérieure à la diffusion de côté, soit $|C_0| > |C_{90}|$. Les oscillations de l'approximation diffusion isotrope sont donc de plus forte amplitude que celles du modèle complet [figure 3.38(a)]. Pour les métaux, tant que le coefficient de diffusion R_2 reste petit ($k_0a < 1$), la limite petit objet est une bonne approximation.

Le nylon présente un comportement différent, soit $|C_0| < |C_{90}|$ [figure 3.39(b)]. Les oscillations de l'approximation diffusion isotrope sont alors inférieures à celles du modèle complet [figure 3.38(b)]. L'approximation 0° et 90° permet de compenser une partie de cette différence. L'accord avec le modèle complet est très bon pour d supérieur à la cellule de résolution (de l'ordre de 1 mm).

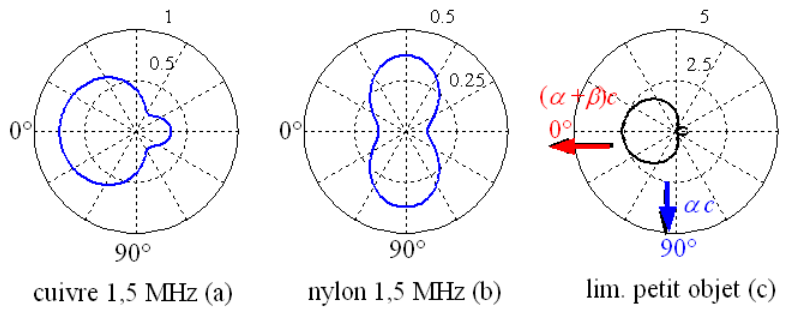


figure 3.39 : module du diagramme de diffusion $|C(\varphi)|$:
cylindre de 0,25 mm de diamètre à 1,5 MHz **cuivre** (a) et **nylon** (b).
Pour la **limite petit objet** (c) le diagramme correspond à $|\alpha + \beta\cos\varphi|$.

Les valeurs singulières suivantes σ_3 et σ_4 présentent des oscillations similaires dans le cas du cuivre. Ces oscillations sont absentes dans le cas du nylon [figure 3.38(b)]. Pour un cylindre de cuivre, dans la limite petite objet, la seconde valeur singulière est associée à la réponse du premier mode anti-symétrique $\mathbf{H}_{A1}$ [Eq. (3.38)] correspondant au mode normal dipolaire de dépendance angulaire $\sin(\varphi)$, maximum pour $\varphi = \pm 90°$(figure 3.2). Dans le cas du nylon, le terme dipolaire R_1 est négligeable. La seconde valeur singulière est alors associée à la réponse du second mode anti-symétrique $\mathbf{H}_{A2}$. Le mode normal correspondant est quadripolaire en $\sin(2\varphi)$ et donc nul pour $\varphi = \pm 90°$ (figure 3.2). Ceci semble expliquer le faible effet de la diffusion multiple sur les valeurs singulière σ_3 et σ_4 dans le cas du nylon.

III.4.5 Résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux ont été menés avec Alexandre Aubry dans le cadre d'un stage de troisième année de l'ESPCI. Ils ont été obtenus avec le même réseau linéaire que pour un cylindre ou une sphère, de fréquence centrale 1,5 MHz. Le nombre d'éléments utilisés est de 96 afin de pouvoir employer la base d'Hadamard-Walsch. Le dispositif n'est pas symétrique : un cylindre est fixe et l'autre est relié à un moteur. La distance entre les deux cylindres varie du contact à 3 mm. La séparation d maximale étant faible devant l'ouverture du réseau (48 mm), l'écart avec le cas symétrique reste faible. La distance F entre le réseau et les cylindres est de 50 mm. Une loi de correction de l'amplitude en réception est employée comme dans le cas d'un cylindre (figure 3.30). Deux types de cylindres sont étudiées, cuivre et nylon. Dans les deux cas, les diamètres sont égaux à 0,25 mm.

Deux cylindres de cuivre

La première expérience a été réalisée avec deux cylindres de cuivre de diamètre 0,25 mm. Les valeurs singulières normalisées sont données en fonction de la distance d de séparation pour trois fréquences entre 1,5 et 2 MHz (figure 3.40). Les valeurs expérimentales sont en bon accord avec le modèle complet. Dans ce cas, la limite petit objet est valable et l'équation (3.89) suffit à décrire le système. De plus, le développement de Taylor de l'équation 3.90 est valable pour d supérieure à la cellule de résolution. Ces résultats expérimentaux sont accord avec ceux présentés par Prada et Thomas en 2003, la diffusion multiple n'avait cependant pas été modélisée.[13]

Remarque : les coefficients $W_n^{\pm}$ et $X_n^{\pm}$ de l'acier, dont le comportement est proche du cuivre, sont illustrés sur la figure 2.29.

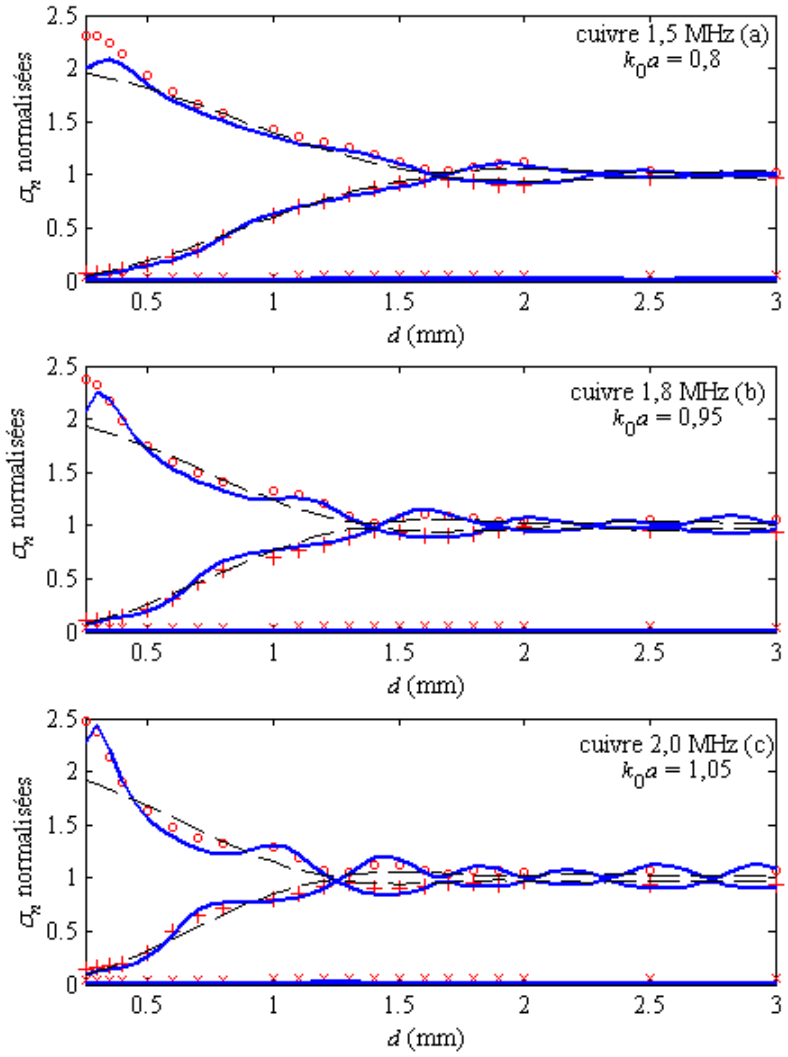


figure 3.40 : deux cylindres de **cuivre** de 0,25 mm de diamètre
valeurs singulières normalisées σ_n en fonction de d entre 1,5 MHz (a) et 2,0 MHz (c),
modèle complet (–), diffusion simple (––), valeurs expérimentales (o + ×).

Deux cylindres de nylon

La seconde expérience concerne deux cylindres de nylon de diamètre 0,25 mm. Les valeurs singulières normalisées sont données en fonction de la distance d de séparation pour six fréquences entre 1,2 et 2 MHz (figure 3.40). Les valeurs expérimentales sont en bon accord avec le modèle complet. La fréquence 2 MHz correspond au pic du terme quadripolaire R_2 pour k_0a = 1,05. Ce pic est tracé sur la figure 2.11. Il est mesuré expérimentalement pour un cylindre seul de nylon 0,25 mm (figure 3.27). Dans ce cas, la diffusion est quadripolaire, soit $C(\varphi) \approx 2R_2\cos(2\varphi)$ (figure 2.13). Le déphasage est égal à $-\pi$ alors qu'il vaut $-\pi/2$ dans la limite petit objet. Dans ce cas, le premier maximum apparaît pour $k_0d = 5\pi/4$ au lieu de $3\pi/4$. Ceci est bien vérifiée expérimentalement sur la figure 3.41(f). La limite petit objet n'est pas valable dans ce cas.

Remarques :

1) Comme montré lors de la comparaison des modèles, les valeurs singulières σ_3 et σ_4 du nylon sont peu affectées par la diffusion multiple.

2) Les coefficients $W_n^{\pm}$ et $X_n^{\pm}$ du nylon sont illustrés sur la figure 2.30.

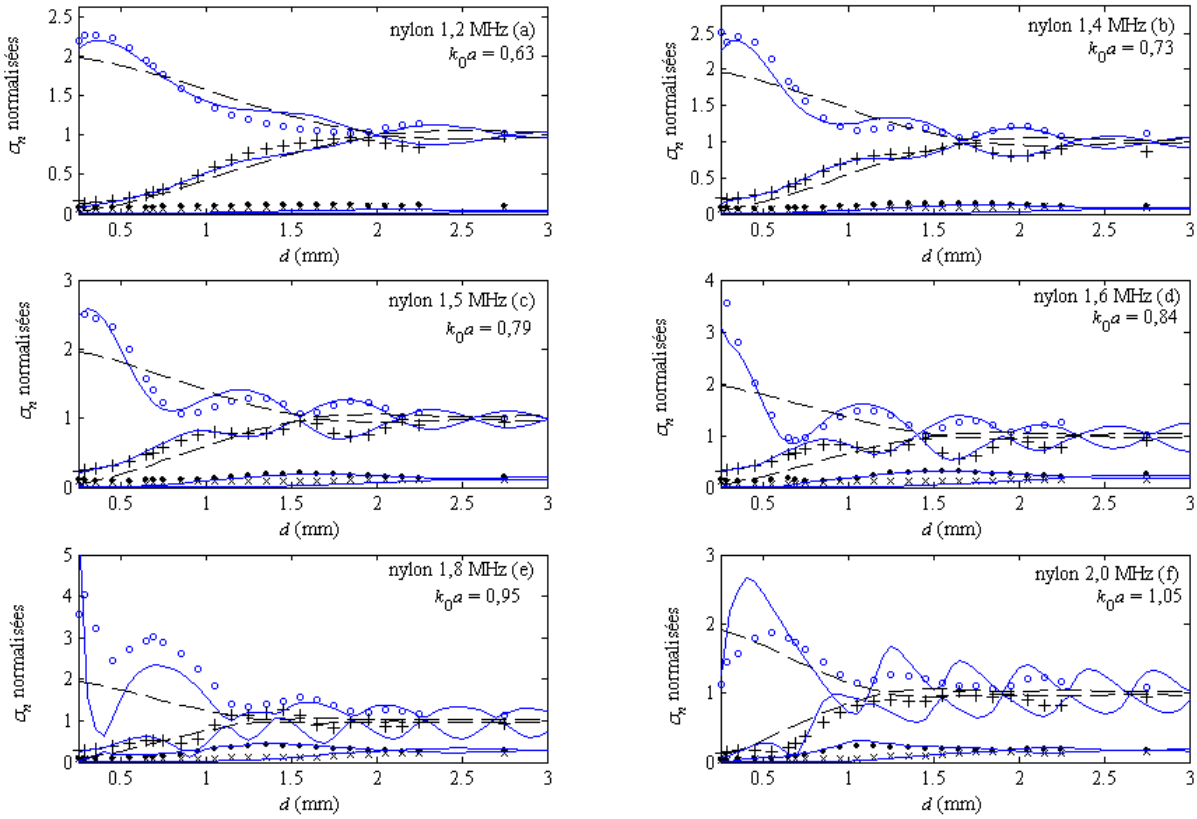


figure 3.41 : deux cylindres de **nylon** (0,25 mm)
valeurs singulières normalisées σ_n en fonction de d entre 1,2 MHz (a) et 2 MHz (f),
modèle complet (–), diffusion simple (––), valeurs expérimentales (o + • ×).

Bibliographie

[1] F. Lin, A. I. Nachman, and R. C. Waag, "Quantitative imaging using a time-domain eigenfunction method," J. Acoust. Soc. Am. **108**, 899–912 (2000)

[2] H. Tortel, G. Micolau, and M. Saillard, "Decomposition of the time reversal operator for electromagnetic scattering," Journal of Electromagnetic Waves and Applications, **13**, 687–719 (1999)

[3] C. Prada and M. Fink, "Eigenmodes of the time reversal operator: a solution to selective focusing in multiple-target media," Wave Motion **20**, 151–163 (1994).

[4] A. J. Devaney, E. A. Marengo and F. K. Gruber, "Time-reversal-based imaging and inverse scattering of multiply scattering point targets," J. Acoust. Soc. Am. **118**, 3129–3138 (2005).

[5] C. Prada, S. Manneville, D. Spoliansky, and M. Fink, "Decomposition of the time reversal operator: Application to detection and selective focusing on two scatterers," J. Acoust. Soc. Am. **99**, 2067–2076 (1996).

[6] D. H. Chambers and A. K. Gautesen, "Time reversal for a single spherical scatterer," J. Acoust. Soc. Am. **109,** 2616–2624 (2001).

[7] G. Micolau, and M. Saillard, "DORT method as applied to electromagnetic subsurface sensing," Radio Science **38**, 1038–1049 (2003).

[8] J. G. Minonzio, C. Prada, D. Chambers, D. Clorennec and M. Fink, "Characterization of subwavelength elastic cylinders with the decomposition of the time-reversal operator: Theory and experiment," J. Acoust. Soc. Am. **117**, 789–798 (2005).

[9] J. G. Minonzio, C. Prada, and M. Fink, "Decomposition of the time-reversal operator applied to quantitative characterization of small elastic cylinders," Ultrasonics Symposium, 2005 IEEE, Volume 2, 1147–1150 (2005).

[10] S. Komilikis, C. Prada, and M. Fink, "Characterization of extended objects with the D.O.R.T. method", IEEE Ultrasonics Symposium **20**, 1401–1404 (1996).

[11] C. Prada and M. Fink, "Separation of interfering acoustic scattered signals using the invariant of the time-reversal operator. Application to Lamb waves characterization," J. Acoust. Soc. Am. **104**, 801–807 (1998).

[12] A. Aubry, J. de Rosny, J. G. Minonzio, C. Prada, and M. Fink, "Gaussian beams and Hermite-Polynomials as invariants of the time reversal operator for a large rigid cylinder," J. Acoust. Soc. Am. **120**, 2749-2754 (2006).

[13] C. Prada and J. L. Thomas, "Experimental subwavelength localization of scatterers by decomposition of the time reversal operator interpreted as a covariance matrix," J. Acoust. Soc. Am. **114**, 235–243 (2003).

[14] J. G. Minonzio, C. Prada, A. Aubry and M. Fink, "Multiple scattering between two elastic cylinders and invariants of the time-reversal operator: Theory and experiment," J. Acoust. Soc. Am. **120**, 875–883 (2006).

IV Lien entre électromagnétisme et acoustique

Le cas de l'électromagnétisme est traité ici suivant le même plan que précédemment : l'étude de la diffusion puis caractérisation au moyen de la méthode DORT. A deux dimensions (2D), les champs électriques et magnétiques E et H sont découplés et peuvent être considérés comme scalaires. De ce fait, il existe des analogies avec les résultats de l'acoustique présentés aux paragraphes II.1 et III.1 dans le cas de la diffusion d'objets cylindriques. A trois dimensions (3D), du fait du couplage entre polarisations, il n'y pas d'analogie directe avec l'acoustique. Ce cas n'est pas abordé.

L'exemple du cylindre diélectrique est adapté de la thèse de Gilles Micolau, sous la direction de Marc Saillard ainsi que l'article de Radioscience de 2003 correspondant.[1] Le cas d'un cylindre électromagnétique dans la limite petit objet est adapté de la référence de Ammari *et al*.[3] de 2005. Les résultats théoriques sont commentés au moyen des outils décrits précédemment dans le cas de l'acoustique.

IV.1 Diffusion électromagnétique par un cylindre diélectrique

Considérons un cylindre infini, de rayon a, de permittivité complexe ε_2, supposé infini suivant la direction (Oz). Il est plongé dans un milieu 1, caractérisé par sa permittivité complexe ε_1 (figure 4.1). Pour les deux milieux, la perméabilité magnétique est supposée constante et égale à celle du vide μ_0. Comme le problème est à deux dimensions (2D), les polarisations $E^{\|}$ (ou polarisation s) et $H^{\|}$ (ou polarisation p) ne sont pas couplées et peuvent être traitées séparément, comme des champs scalaires. Dans les deux cas, la composante suivant l'axe (Oz) des champs électriques et magnétiques est notée Φ. La géométrie est identique au cas du cylindre élastique décrit au paragraphe II.1.1.

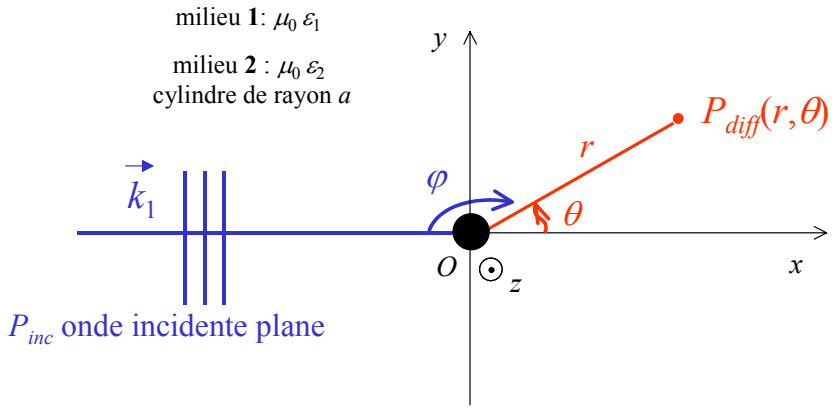


figure 4.1 : géométrie du problème.

Le cylindre est éclairé par une onde plane $\Phi_0 e^{i(\vec{k}_1\vec{r}-\omega t)}$, de pulsation ω et de nombre d'onde k_1. Le nombre d'onde k_j dans le milieu j, avec j = 1 ou 2, est donné par la relation

$$k_j^{\,2} = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_j\,, \qquad j = 1 \text{ ou } 2. \tag{4.1}$$

La permittivité complexe ε_j du milieu j dépend de sa conductivité σ_j, de sa permittivité relative $\varepsilon_{r,j}$ selon la relation

$$\varepsilon_j = \varepsilon_0 \varepsilon_{r,j} + i\frac{\sigma_j}{\omega}, \quad j = 1 \text{ ou } 2. \tag{4.2}$$

Le terme ε_0 correspond à la permittivité électrique du vide.

IV.1.1 Expression du champ diffusé

Comme dans le cas du cylindre élastique [Eq. (2.1)], le champ incident $\Phi_0 e^{i(\vec{k}_1\vec{r}-\omega t)}$ s'exprime comme une somme de modes normaux de vibrations cylindriques

$$\Phi_{inc} = \left(\Phi_0 e^{-i\omega t}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \mathrm{J}_n(k_1 r)\cos(n\theta). \tag{4.3a}$$

Le terme Φ correspond au champ $\mathrm{E}^{\|}$ ou $\mathrm{H}^{\|}$. Le champ diffusé par le cylindre diélectrique s'écrit

$$\Phi_{diff}(r,\theta) = \left(\Phi_0 e^{-i\omega t}\right)\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n R_n \mathrm{H}_n^{(1)}(k_1 r)\cos(n\theta)\ . \tag{4.3b}$$

Le coefficient ε_n désigne encore le coefficient de Neumann, égal 1 pour n = 0 et 2 sinon. L'expression de la pression diffusée est formellement identique au cas de la diffusion acoustique d'un cylindre élastique : une somme de modes normaux de vibrations cylindriques

pondérés par les coefficients R_n. Cependant, l'expression de ces coefficients est spécifique au cas électromagnétique. Ils dépendent du rayon a et la permittivité ε_2 du cylindre, de la permittivité ε_1 du milieu environnant, ainsi que de la polarisation de l'onde incidente, $E^{\parallel}$ (polarisation s) ou $H^{\parallel}$ (polarisation p).

L'expression des coefficients de diffusion R_n est adaptée des équations (3) et (4) de la référence 1, par analogie avec l'équation (2.12) du cas acoustique. Le coefficient de diffusion R_n est donné par,[2] avec $x_1 = k_1 a$

$$R_n = -\frac{\mathrm{J}_n(x_1)\zeta_n - x_1 \mathrm{J}_n'(x_1)}{\mathrm{H}_n^{(1)}(x_1)\zeta_n - x_1 \mathrm{H}_n^{(1)\prime}(x_1)}. \tag{4.4}$$

Dans le cas $E^{\parallel}$, ou polarisation s, le terme ζ_n a pour expression avec $x_2 = k_2 a$

$$\zeta_n = x_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \frac{\mathrm{J}_n'(x_2)}{\mathrm{J}_n(x_2)} \ . \tag{4.5a}$$

Dans le cas $H^{\parallel}$, ou polarisation p, le terme ζ_n a pour expression

$$\zeta_n = x_1 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \frac{\mathrm{J}_n'(x_2)}{\mathrm{J}_n(x_2)}. \tag{4.5b}$$

Pour un **cylindre infiniment conducteur**, la conductivité σ_2, et donc la permittivité ε_2 sont infinies [Eq. (4.2)]. Dans le cas $E^{\parallel}$, ζ_n tend vers l'infini, le coefficient R_n vérifie

$$R_n = -\frac{\mathrm{J}_n(x_1)}{\mathrm{H}_n^{(1)}(x_1)}. \tag{4.6a}$$

Dans le cas $H^{\parallel}$, ζ_n tend vers zéro, le coefficient R_n est égal à

$$R_n = -\frac{\mathrm{J}_n'(x_1)}{\mathrm{H}_n^{(1)\prime}(x_1)}. \tag{4.6b}$$

Ces deux équations sont identiques aux équations (2.17a) et (2.17b) correspondant aux limites solide infiniment **rigide** (pour le cas $H^{\parallel}$) et **mou** (pour le cas $E^{\parallel}$) de l'acoustique.

IV.1.2 Exemple : cylindre diélectrique $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_1$

L'exemple choisi par Micolau et Saillard est repris soit un cylindre diélectrique vérifiant $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_1$.[1] Les coefficients de diffusion sont d'abord calculés pour le cas $E^{\parallel}$ puis $H^{\parallel}$. Dans les deux cas, certains coefficients présentent des « pics » similaires à ceux décrits dans le cas du nylon à l'équation (2.26).

Cas E$^{\|}$

Dans le cas E$^{\|}$, pour $x_1 << n$, les premiers coefficients vérifient [Eqs. (4.4) et (4.5a)]

$$R_n \approx -\frac{i\pi}{2^{2n+2}(n+1)!n!}\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)x_1^{\,2n+2}\ , \qquad x_1 << n \text{ et} \geq 0. \qquad (4.7a)$$

Les trois premiers coefficients de diffusion s'écrivent

$$R_0 \approx -\frac{i\pi}{4}\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)x_1^{\,2}\ , \qquad x_1 << 1 \text{ et } n = 0, \qquad (4.7b)$$

$$R_1 \approx -\frac{i\pi}{32}\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)x_1^{\,4}\ , \qquad x_1 << n = 1, \qquad (4.7c)$$

$$R_2 \approx -\frac{i\pi}{768}\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)x_1^{\,6}\ , \qquad x_1 << n = 2. \qquad (4.7d)$$

Les modules et les phases des coefficients de diffusion R_n sont illustrés sur la figure 4.2. Pour $x_1 << 1$, le coefficient R_0 est prédominant, en x_1^2, contrairement au cylindre élastique où les deux premiers coefficients sont du même ordre en x^2 [Eq. (2.20)]. Toutes les phases tendent vers $+\pi/2$ pour $x_1 << n$, contrairement à l'acoustique où la phase de R_0 tend vers $-\pi/2$ et toutes les phases suivantes vers $+\pi/2$. Pour x_1 supérieur à 1, les coefficients présentent des « pics » pour lesquels la phase est égale à π et le module à 1 : $x_1 = 1{,}1$ pour R_1, $x_1 = 1{,}6$ pour R_2, $x_1 = 2{,}2$ pour R_3 … Ces pics ont été décrits dans le cas du nylon à l'équation (2.26).

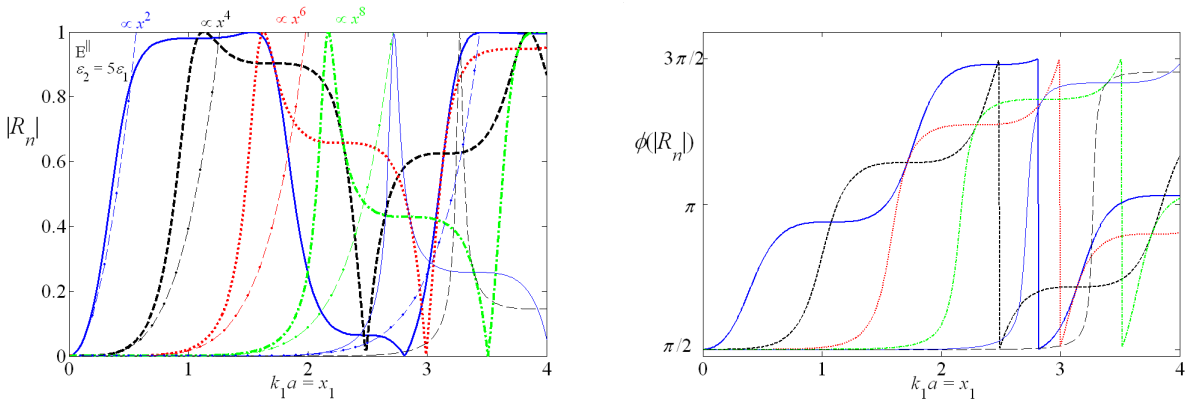


figure 4.2 : amplitude et phase des coefficients de diffusion R_n dans le cas E$^{\|}$, pour $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_1$.

Remarque : le terme $\left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)$ est négatif dans le cas choisi ici, $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_1$.

Cas H$^{\|}$

Dans le cas H$^{\|}$, pour $x_1 << n$, les premiers coefficients vérifient [Eqs. (4.4) et (4.5b)]

$$R_n \approx \frac{i\pi}{2^{2n}(n-1)!n!}\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}x_1^{\,2n}\ , \qquad x_1 << n \text{ et } n \geq 1. \qquad (4.8a)$$

Cette relation est valable pour $n \geq 1$. Les trois premiers coefficient s'écrivent

$$R_0 \approx \frac{i\pi}{4}\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}x_1^{\,4}\ , \qquad x_1 << 1 \text{ et } n = 0, \qquad (4.8b)$$

$$R_1 \approx \frac{i\pi}{4}\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}x_1^{\,2}\ , \qquad x_1 << n = 1, \qquad (4.8c)$$

$$R_2 \approx \frac{i\pi}{32}\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}x_1^{\,4}\ , \qquad x_1 << n = 2. \qquad (4.8d)$$

Les modules et les phases de ces coefficients sont illustrés sur la figure 4.3. Dans le cas H$^{\|}$, pour $x_1 << 1$, le terme prédominant est le coefficient dipolaire R_1 en x_1^2. Le module du coefficient monopolaire R_0 évolue en x_1^4. Ce cas n'a pas été rencontré en acoustique. Toutes les phases tendent vers $+\pi/2$ pour $x_1 << n$, comme dans le cas E$^{\|}$. Pour $x_1 > 1$, comme dans le cas E$^{\|}$, les coefficients présentent également des « pics » pour lesquels $R_n = -1$: $x_1 = 1{,}1$ pour R_0, $x_1 = 1{,}6$ pour R_1, $x_1 = 2{,}1$ pour R_2 , $x_1 = 2{,}6$ pour R_3 …

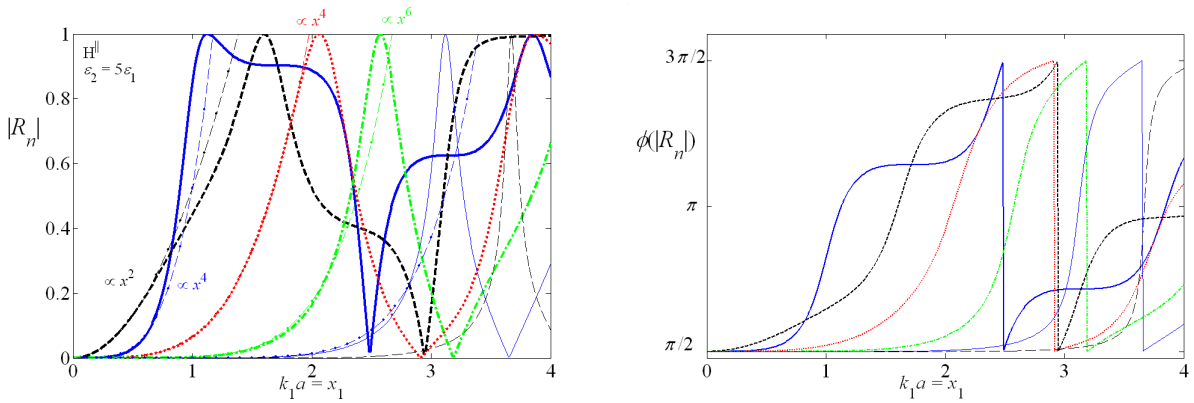


figure 4.3 : amplitude et phase des coefficients de diffusion R_n dans le cas H$^{\|}$, pour $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_1$.

Remarque : le terme $\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}$ est positif dans le cas choisi ici, $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_1$.

IV.2 Caractérisation au moyen de la méthode DORT

Le calcul des valeurs et vecteurs singuliers est identique au cas acoustique : ils sont obtenus par diagonalisation de l'opérateur projeté $\mathbf{SS}^*$ (§ III.1). Les valeurs singulières et les vecteurs singuliers ont été calculés analytiquement par Micolau et Saillard avec deux coefficients de diffusion, R_0 et R_1. Puis, l'expression de la première valeur singulière a été généralisée comme à l'équation (3.51a), en fonction de la somme des modes normaux significatifs en rétro-diffusion.[1] Ce point de vue est en accord avec celui de l'acoustique 2D et peut être complété par les résultats regroupés dans le tableau 6.

La limite petit objet ($x_1 << 1$) est également décrite dans le cas d'un cylindre électromagnétique,[3] c'est à dire un cylindre présentant à la fois une discontinuité de permittivité ε et de perméabilité μ. Ces deux grandeurs sont les analogues de la compressibilité χ et de la densité ρ en acoustique.

IV.2.1 Exemple : cylindre diélectrique $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_1$

Cet exemple correspond au cas traité au paragraphe IV.1. Les coefficients de diffusion correspondant ont été tracés sur les figures 4.2 et 4.3. Dans la mesure où le diamètre est inférieur à la tache de focalisation, les deux premières valeurs singulières sont données par les équations (3.49a) et (3.49b), soit la somme des poids des modes normaux symétriques $\tilde{\sigma}_{\mathrm{S}n}$ pour σ_1 et anti-symétriques $\tilde{\sigma}_{\mathrm{A}n}$ pour σ_2. Ces deux valeurs singulières sont associées aux vecteurs singuliers symétrique et anti-symétrique $\tilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{S}0}$ et $\tilde{\mathbf{U}}_{\mathrm{A}1}$.

cas $\mathbf{E}^{\|}$

Dans la limite $k_1a << 1$, le coefficient de diffusion monopolaire R_0 est prépondérant, les coefficients suivants sont négligeables [Eq. (4.7)]. La diffusion est quasi isotrope et la première valeur singulière vérifie $\sigma_1 \approx |\tilde{\sigma}_{S0}| = |R_0| \|\mathbf{H}_{S0}\|^2$. Entre $k_1a = 0{,}5$ et 1, la première valeur singulière diminue au fur et à mesure que le coefficient dipolaire $-2R_1$ augmente. En effet, dans ce cas, σ_1 est de l'ordre de $|\tilde{\sigma}_{S0} + \tilde{\sigma}_{S1}|$ soit $|R_0 - 2R_1| \|\mathbf{H}_{S0}\|^2$ et les coefficients R_1 et R_2 possèdent des phases proches (figure 4.2). Au delà, les poids $\tilde{\sigma}_{S3}$ puis $\tilde{\sigma}_{S4}$ s'ajoutent à la valeur singulière.

Dans la limite $k_1a << 1$, le coefficient R_1 étant négligeable devant R_0, la seconde valeur singulière σ_2 négligeable devant la première. En effet, σ_2 vérifie dans ce cas $\sigma_2 \approx |\tilde{\sigma}_{A1}| = |2R_1| \|\mathbf{H}_{A1}\|^2$. Au delà, on a $\sigma_2 \approx |\tilde{\sigma}_{A1} + \tilde{\sigma}_{A2} + ...| = \left| -2R_1 \|\mathbf{H}_{A1}\|^2 + 2R_2 \|\mathbf{H}_{A2}\|^2 + ... \right|$. La troisième valeur singulière σ_3 reste négligeable, environ cent fois plus petite que σ_1 et dix fois plus petite que σ_2.

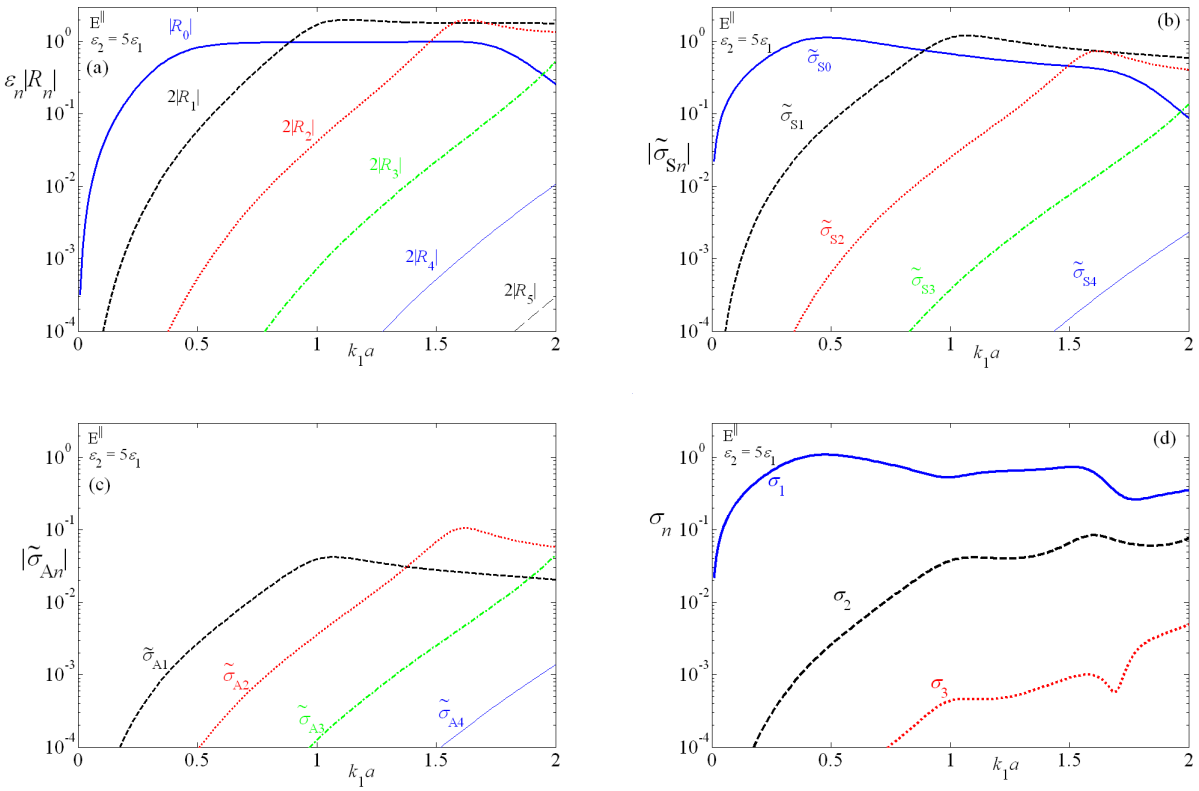


figure 4.4 : coefficients de diffusion $\varepsilon_n|R_n|$ (a), poids des modes projetés symétriques $\tilde{\sigma}_{Sn}$ (b) et anti-symétriques $\tilde{\sigma}_{An}$ (c) et valeurs singulières σ_n (d), pour un cylindre diélectrique, dans le cas $\mathrm{E}^{\|}$, pour $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_1$.

cas H$^{\|}$

Dans la limite $k_1a << 1$, le coefficient dipolaire R_1 est prépondérant, contrairement au cas E$^{\|}$ où R_0 est prépondérant [Eqs. (4.7) et (4.8)]. La première valeur singulière σ_1 vérifie alors $\sigma_1 \approx |\tilde{\sigma}_{S1}| = |2R_1| \|\mathbf{H}_{S0}\|^2$. Pour k_1a autour de 1, la première valeur présente un creux. Dans ce cas, R_0 est très proche de R_1 et σ_1 est de l'ordre de $|\tilde{\sigma}_{S0} + \tilde{\sigma}_{S1}|$ soit $|R_0 - 2R_1| \|\mathbf{H}_{S0}\|^2$. Au delà, les poids $\tilde{\sigma}_{S3}$ puis $\tilde{\sigma}_{S4}$ s'ajoutent à la valeur singulière.

Comme précédemment, dans la limite $k_1a << 1$, la seconde valeur singulière σ_2 vérifie dans ce cas $\sigma_2 \approx |\tilde{\sigma}_{A1}| = |2R_1| \|\mathbf{H}_{A1}\|^2$. Elle est non négligeable, contrairement au cas E$^{\|}$. Au delà, on a $\sigma_2 \approx |\tilde{\sigma}_{A1} + \tilde{\sigma}_{A2} + ...| = \left| -2R_1 \|\mathbf{H}_{A1}\|^2 + 2R_2 \|\mathbf{H}_{A2}\|^2 + ... \right|$.

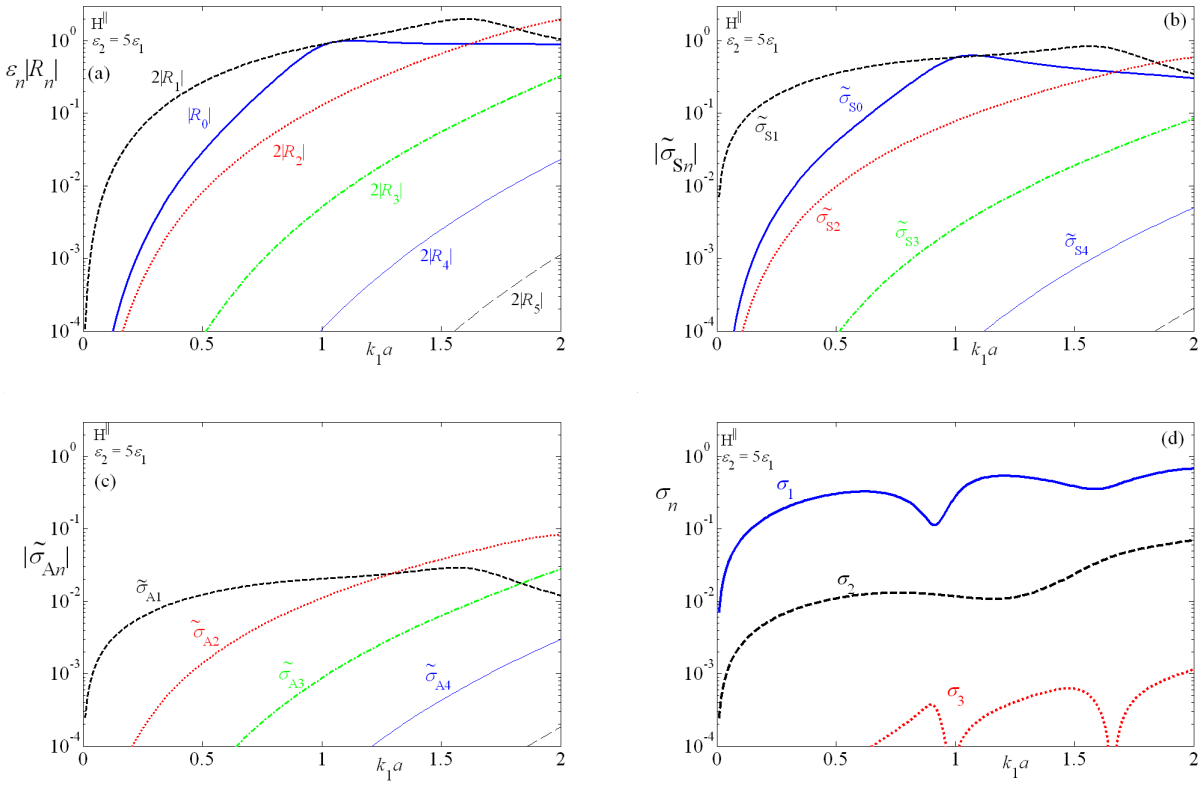


figure 4.5 : coefficients de diffusion $\varepsilon_n|R_n|$ (a), poids des modes projetés symétriques $\tilde{\sigma}_{Sn}$ (b) et anti-symétriques $\tilde{\sigma}_{An}$ (c) et valeurs singulières σ_n (d), pour un cylindre diélectrique, dans le cas H$^{\|}$, pour $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_1$.

IV.2.2 Limite petit objet pour un cylindre électromagnétique (cas $E^{\|}$)

Considérons un cylindre présentant cette fois-ci à la fois une discontinuité de permittivité électrique ε_2 et de perméabilité magnétique μ_2 par rapport au milieu de propagation, de caractéristique ε_1 et μ_1. Le nombre d'onde du cylindre est donné par $k_2{}^2 = \omega^2\varepsilon_2\mu_2$; celui du milieu environnant par $k_1{}^2 = \omega^2\varepsilon_1\mu_1$.

Le cylindre est éclairé par une onde $E^{\|}$. D'après Ammari *et al.*[3] dans la limite petit objet ($x_1 << 1$), les deux premiers coefficients de diffusion R_0 et R_1 sont prédominants et proportionnels à $x_1{}^2$. Les suivants sont négligeables. En effet, il a été montré que l'expression de R_1 est identique au cas diélectrique $H^{\|}$, dans lequel la variation de ε joue le même rôle que la variation de μ [Eq. (4.8c)].[3] Le coefficient R_0 est identique au cas diélectrique $E^{\|}$ de l'équation (4.7b).

Les expressions des coefficients sont alors formellement identiques à celles de l'acoustique décrites au paragraphe II.1.5. En notant $R_0 = \alpha c$, et $-2R_1 = \beta c$, comme à l'équation (2.31), le champ retro-diffusé s'écrit alors de même façon qu'à l'équation (2.30) soit

$$\Phi_{diff}(r,\varphi) = \left(\Phi_0 e^{-i\omega t}\right)\sqrt{\frac{2}{i\pi k_0 r}}\, e^{ik_0 r}\left(\alpha c + \beta c\cos\varphi + o\left(x_1{}^4\right)\right),\ x_1 << 1,\ a << r\ . \tag{4.9}$$

Les expressions des termes α, β et c sont d'après les équations (4.7b) et (4.8c)

$$\alpha = 1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\ , \tag{4.10a}$$

$$\beta = 2\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}\ , \tag{4.10b}$$

$$c = -\frac{i\pi}{4}\left(k_1 a\right)^2 . \tag{4.10c}$$

Ces équations sont de même forme que les équations (2.32) donnant les termes α, β et c de la limite petit objet en acoustique

$$\alpha = 1 - \frac{\chi_2}{\chi_1}\ , \tag{4.10a}$$

$$\beta = 2\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}\ , \tag{4.10b}$$

$$c = -\frac{i\pi}{4}\left(k_1 a\right)^2 . \tag{4.10c}$$

Ainsi, les analogues de la compressibilité χ et de la masse volumique ρ en l'acoustique sont la permittivité électrique ε et la perméabilité magnétique μ.

Les calculs de valeurs singulières sont formellement identiques au cas de l'acoustique. Les expressions des deux premières valeurs singulières sont données par l'équation (3.43), soit

$$\sigma_1 = (\alpha + \beta)\, |c|\, \|\mathbf{H}_{S0}\|^2 ,$$

$$\sigma_2 = \beta\, |c|\, \|\mathbf{H}_{A1}\|^2 .$$

Elles sont associées aux vecteurs singuliers symétrique et anti-symétrique $\tilde{\mathbf{U}}_{S0}$ et $\tilde{\mathbf{U}}_{A1}$. La troisième singulière σ_3 est négligeable.

Remarques :

1) Dans la plupart des cas, μ_2 est proche de μ_0 : le contraste de perméabilité β est donc faible. La diffusion est quasi-isotrope et la seconde valeur singulière est négligeable. On retrouve le cas d'un cylindre diélectrique $E^{\|}$ (figure 4.4). Ce cas est équivalent au nylon dans la limite petit objet acoustique.

2) Dans ce paragraphe, les caractéristiques du cylindre sont notées avec l'indice 2, celles du milieu environnant avec l'indice 1. Les indices utilisés en acoustique sont 0 et 1.

Bibliographie

1. G. Micolau, and M. Saillard, "DORT method as applied to electromagnetic subsurface sensing," Radio Science **38**, 1038–1049 (2003).
2. H. Tortel, G. Micolau, and M. Saillard, "Decomposition of the time reversal operator for electromagnetic scattering," Journal of Electromagnetic Waves and Applications, **13**, 687–719 (1999)
3. H. Ammari, E. Iakovleva, and D. Lesselier, "A MUSIC algorithm for locating small inclusions buried in a half-space from the scattering amplitude at a fixed frequency," Multiscale Model. Simul. **3**, 597–628 (2005).

V. Guide d'onde

Les premières expériences de Retournement Temporel dans le domaine de l'acoustique sous marine ont été réalisées par Kuperman *et al*. en 1998.[1] La méthode DORT en guide d'onde a d'abord été testée en laboratoire, par Nicolas Mordant *et al*.[2] en 1999, par Thomas Folégot *et al*.[3] en 2003 puis par Minonzio *et al*.[4] en 2005. Les premiers essais en mer ont été effectués à Brest au printemps 2005 par le LOA avec la collaboration avec l'entreprise Atlantide de Brest, dans le cadre d'un projet PEA financé par la DGA.[5] Une équipe américaine, dirigée par Charles Gaumont, travaille également actuellement sur le sujet.[6]

V.1 Expérience en cuve

De nombreuses expériences ont été menées pour appliquer la méthode DORT à la détection sous-marine, tant en cuve qu'en bord de mer à Brest. L'expérience exposée ici est représentative de ma contribution au travail mené avec l'équipe du laboratoire et celle d'Atlantide. L'objectif de cette expérience est de séparer deux cibles, situées à une même distance du réseau, dans la hauteur du guide d'onde.

V.1.1 Géométrie du problème

Le réseau réel possède 24 éléments de fréquence centrale 12 kHz, soit une longueur d'onde λ de 125 mm. En cuve, le réseau a une fréquence centrale de 3,9 MHz, soit λ = 0,39 mm. Le rapport des longueurs d'onde est de 325. Ainsi, une hauteur d'eau en mer de 10 m correspond à 31 mm en cuve (figure 5.1). Un élément sur deux est utilisé. Le pas inter-élément étant de 0,5 mm, la hauteur du réseau est donc de 24 mm pour 24 éléments.

Les diffuseurs sont placés à une distance F de 900 mm, soit 2300 λ, ou 300 m en mer. La position d'un diffuseur est repérée par rapport à la surface par la coordonnée dy. Le fond du guide est constitué d'une plaque de Plexiglas.

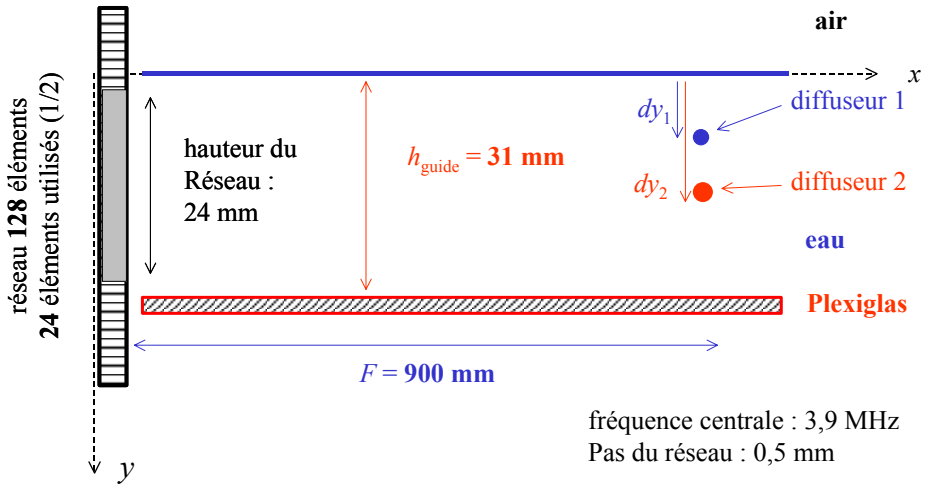


figure 5.1 : géométrie du problème, expérience de guide d'onde en cuve.

V.1.2 Modélisation du guide d'onde

La taille des diffuseurs, de l'ordre de quelques λ, est toujours très petite devant la distance au réseau F, de l'ordre de 1000λ. La condition champ lointain ($a << F$) est donc vérifiée. L'équation (3.25) est donc valable dans ce cas. En espace libre, l'expression de la matrice de transfert est donnée par

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}_1\, \mathbf{C}\, {}^t\mathbf{H}_1 \,. \tag{5.1}$$

Le vecteur $\mathbf{H}_1$ décrit la propagation entre le réseau et le diffuseur et la matrice $\mathbf{C}$ décrit le phénomène de diffusion [Eq. (3.24)].

Dans le cas du guide, la propagation entre le réseau et le diffuseur dépend des réflexions aux interfaces du guide (figure 5.2). Par exemple, en prenant en compte la première réflexion à chaque interface, la réponse entre le transducteur i est le diffuseur est la somme de trois termes :

- $H_0(i)$: trajet direct,
- $r_1H_1(i)$: trajet avec une réflexion à l'interface air-eau, de coefficient de réflexion r_1.
- $r_2H_2(i)$: trajet avec une réflexion à l'interface eau-plexiglas, de coefficient de réflexion r_2.

Le vecteur réponse $\mathbf{H}^{guide}$ entre le réseau et le diffuseur s'écrit dans ce cas

$$\mathbf{H}^{guide} = \mathbf{H}_0 + r_1\mathbf{H}_1 + r_2\mathbf{H}_2 \,. \tag{5.2a}$$

Le nombre de réflexions enregistrées par le réseau dépend de la fonction d'ouverture O des éléments du réseau [Eq. (3.4)] et de la distance F. Avec N_{ref} ce nombre de réflexions, la réponse du guide $\mathbf{H}^{guide}$ s'écrit

$$\mathbf{H}^{guide} = \sum_{n=0}^{Nref} r_n \mathbf{H}_n \ , \tag{5.2b}$$

où chaque coefficient r_n dépend des deux coefficients de réflexions r_1 et r_2.

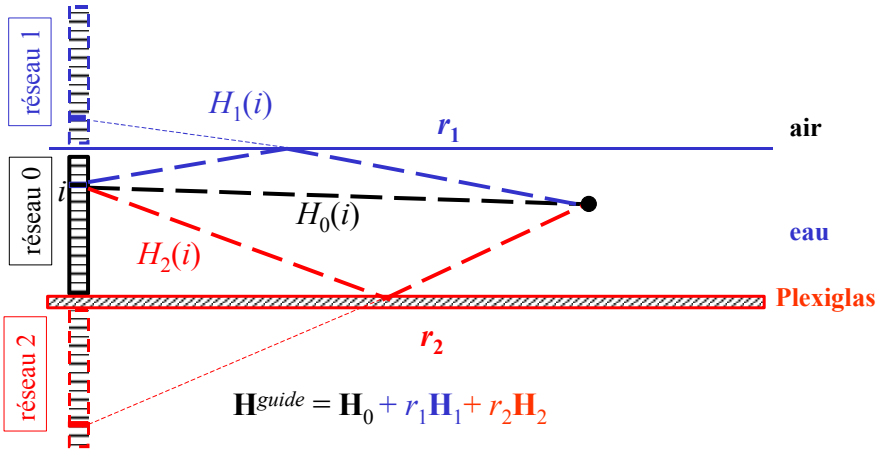


figure 5.2 : modélisation du guide, exemple avec les deux premières réflexions.

Si la diffusion est considérée comme isotrope (§ III.1.3), de coefficient de diffusion R_0, la matrice de transfert $\mathbf{K}$ s'écrit

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^{guide} R_0 \, {}^t\mathbf{H}^{guide}. \tag{5.3}$$

Cette approximation est décrite au paragraphe III.1.2. La matrice $\mathbf{K}$ donnée par l'équation (5.3) est de rang 1. La présence du guide d'onde ne modifie donc pas le rang de $\mathbf{K}$.

Si la diffusion est considérée comme non isotrope, les angles de rétro-diffusion φ_{ij} [Eq.(3.23)] dépendent de chaque réponse $r_n H_{n,i}$ et $r_m H_{m,j}$ [Eq. (5.2)] correspondant à l'aller et au retour de l'onde dans le guide. La matrice de transfert a alors pour expression

$$\mathbf{K} = \sum_{m=0}^{Nref} \sum_{n=0}^{Nref} r_n \mathbf{H}_n \mathbf{C}_{nm} \, r_m \, {}^t\mathbf{H}_m \ . \tag{5.4}$$

Dans le cas, où deux diffuseurs se trouvent dans la guide d'onde, le modèle de la diffusion simple est considéré. En effet, dans la mesure où la distance séparant les deux cibles est supérieure à la longueur d'onde, la diffusion multiple peut être négligée (§ III.4). La matrice de diffusion a la même expression que dans l'équation (3.73a), soit

$$\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2. \tag{5.5}$$

La matrice $\mathbf{K}_1$ est donnée par l'équation (5.4) et concerne le premier diffuseur. La matrice $\mathbf{K}_2$ concerne le second diffuseur. L'indice (1) indique la diffusion simple.

V.1.3 Séparation de deux cibles

Expérimentalement, les deux diffuseurs sont des sphères d'acier de diamètres 2 et 3 mm. Elles sont placées à F = 920 mm du réseau dans une même hauteur d'eau (figure 5.1). La sphère de 2 mm se trouve au milieu du guide (dy_1 = 16 mm), celle de 3 mm est posée au fond (dy_2 = 31 mm). L'expression de la matrice de diffusion **C** des sphères élastiques est décrite aux paragraphes II.3 et III.3. Les valeurs singulières sont obtenues par SVD de la matrice de transfert théorique donnée par les équations (5.4) et (5.5). En espace libre, la tache de focalisation théorique est de 14 mm. Expérimentalement, elle vaut 2 mm. Le réseau « virtuel » formé par les images du réseau est 7 fois plus grand que le réseau réel. Le nombre de réflexions prises en compte dans l'équation (5.4) est de 4.

Les valeurs singulières sont tracées sur la figure 5.3. Un bon accord relatif entre les valeurs expérimentales et théoriques est observé : la forme des « bosses » et « creux » est bien respectée. Les valeurs singulières étant proches, on observe des croisements, comme par exemple aux fréquences 3,6 et 3,8 MHz. C'est à dire, que la première valeur singulière est associée à l'une ou à l'autre des sphères suivant le domaine de fréquence considérée.

L'existence de ces croisements peut être vérifiée, par repropagation des vecteurs singuliers expérimentaux. La repropagation numérique prend en compte les caractéristiques physiques du guide d'onde grâce au modèle RAM (Range-dependent Acoustic Model) décrit à la référence 7. Ces calculs ont été effectués par Alexandre Aubry lors de son stage de DEA. Les taches de focalisation des deux premiers vecteurs singuliers, moyennées sur la bande passante, sont représentées sur la figure 5.4. Le premier vecteur focalise principalement sur la sphère se trouvant au milieu du guide et partiellement sur la sphère au fond. Le second vecteur focalise principalement sur la sphère au fond et partiellement sur la sphère au milieu

du guide. Il est possible d'améliorer ces images en sélectionnant les bandes de fréquences, comme cela a été montré dans la référence 4.

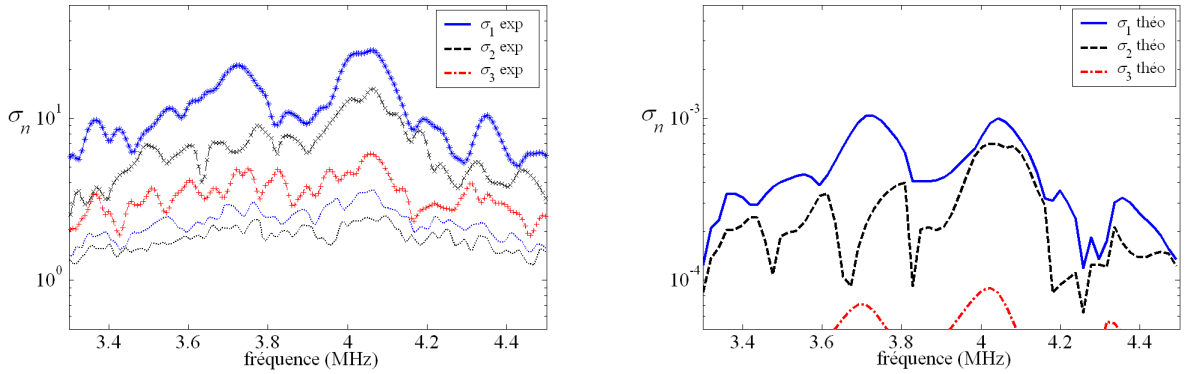


figure 5.3 : valeurs singulières expérimentales (gauche) et théoriques (droite) :
deux sphères d'**acier** de **2 mm** de diamètre (au milieu du guide) et **3 mm** (au fond)
pour F = 900 mm (échelle semi log).

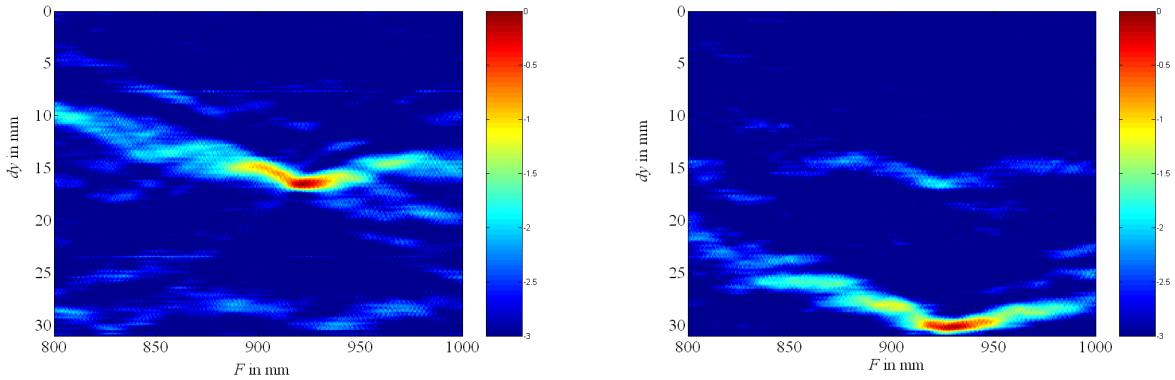


figure 5.4 : repropagation des deux premiers vecteurs singuliers expérimentaux
(moyenne sur la bande passante) :
$\mathbf{U}_1$ focalise sur la sphère d'**acier** de **2 mm** (au milieu du guide, dy_1 = 16 mm),
$\mathbf{U}_2$ focalise sur la sphère d'**acier** de **3 mm** (au fond du guide, dy_2 = 31 mm).

Cette expérience à petite échelle montre la capacité de la méthode DORT à séparer deux cibles dans une même hauteur. Une caractérisation s'appuyant sur la forme des valeurs singulières suivant la fréquence est également possible. Cependant ce guide d'onde reste très simple par rapport au milieu marin. Il ne prend pas en compte les variations du milieu causées par les marées, les courants, les vagues, les variations du fond …

V.2 Expérience en mer

Une antenne de 12 m de hauteur a été fabriquée en collaboration avec l'entreprise Atlantide de Brest, dans le cadre d'un projet PEA financé par la DGA. Cette antenne possède 24 éléments de fréquence centrale 12 kHz (figure 5.5). Elle a d'abord été testée dans le bassin de l'IFREMER à Brest en décembre 2004. Les expériences ont été ensuite menées en avril et juin 2005 dans la baie de St Anne du Portzic, près de Brest (figure 5.6). Les deux cibles utilisées sont représentées sur le figure 5.5. Leur envergure est de l'ordre de cinq longueurs d'onde, soit 60 cm environ.

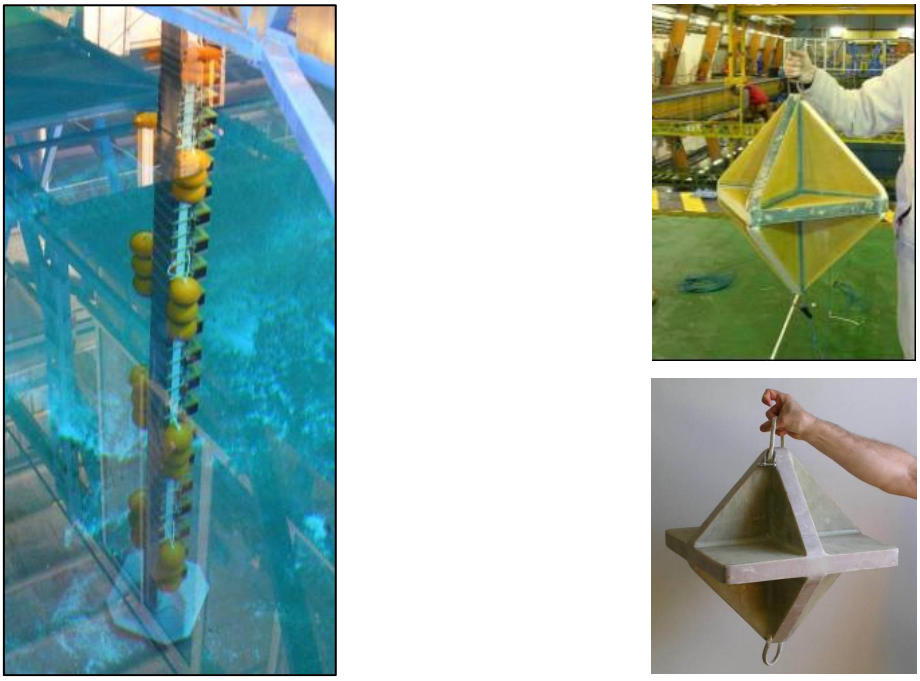


figure 5.5 : antenne et cibles.

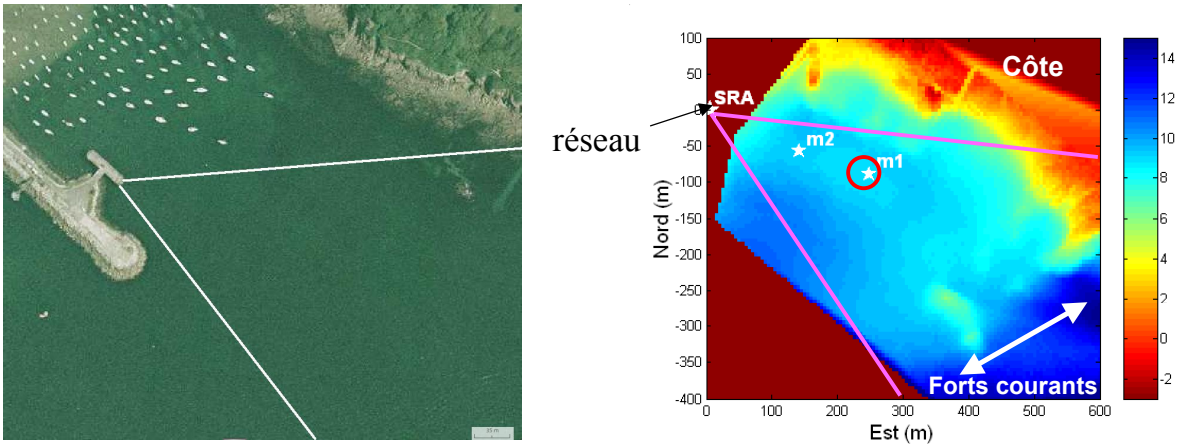


figure 5.6 : Digue de Sainte Anne du Portzic et bathymétrie (droite), la position des deux cibles est marquée par un cercle rouge.

V.2.1 Séparation deux cibles à 253 m

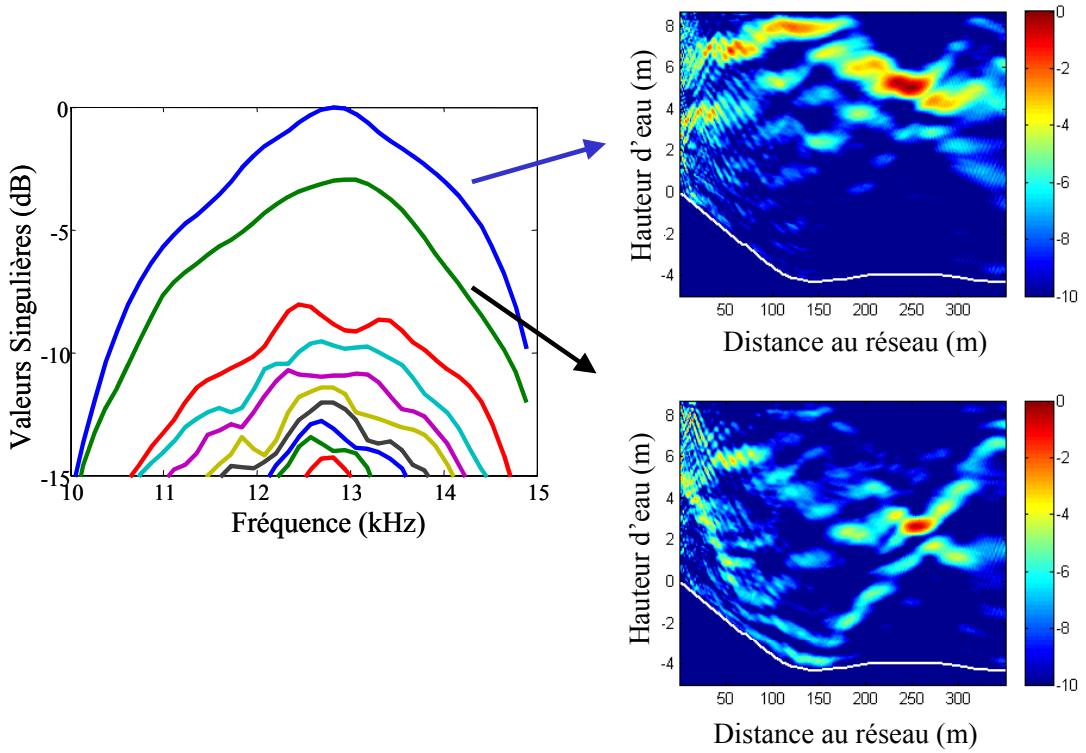


figure 5.7 : valeurs singulières (gauche)
et repropagation des deux premiers vecteurs singuliers (droite).

Dans l'expérience montrée ici, les deux cibles ont été placées à 253 m du réseau. Elles sont séparées de 2 m, soit 16 longueurs d'onde. La hauteur d'eau est de l'ordre de 13 m au niveau des cibles. Les valeurs singulières expérimentales sont tracées sur la figure 5.7. Deux valeurs singulières sont nettement au-dessus des autres valeurs singulières liées à la réverbération puis au bruit. Les deux premières valeurs singulières sont associées aux deux cibles, comme le montrent les deux repropagations correspondantes tracées sur la figure 5.7.

Cette expérience montre la capacité de la méthode DORT à séparer deux cibles dans une même hauteur en environnement marin. Les niveaux enregistrés étant faibles et bruités notamment du fait de la forte réverbération du fond, il ne semble pas encore possible de caractériser les cibles en utilisant la répartition des valeurs singulières. Cela devrait être possible dans les prochaines études.

Bibliographie

[1] W. A. Kuperman, W. S. Hodgkiss, H. C. Song, T. Akal, C. Ferla and D. R. Jackson "Phase conjugation in the ocean: Experimental demonstration of an acoustic time-reversal mirror," J. Acoust. Soc. Am., **103**(1), 25–40, (1998).

[2] N. Mordant, C. Prada and M. Fink, "Highly resolved detection and selective focusing in a waveguide using the D.O.R.T. method," J. Acoust. Soc. Am. **105**, 2634–2642 (1999).

[3] T. Folégot, C. Prada, and M. Fink, "Resolution enhancement and separation of reverberation from target echo with the time reversal operator decomposition," J. Acoust. Soc. Am. **113,** 3155–5160 (2003).

[4] J-G Minonzio, D. Clorennec, T. Pelican, T. Folegot, C. Prada, J. de Rosny, and M. Fink, "Application of the DORT method to the detection and characterization of two targets in a shallow water waveguide," IEEE Oceans 2005-Europe, 1001–1006 (2005).

[5] C. Prada, L. Bernière, S. Herbral, J. de Rosny, D. Clorennec, J.-G. Minonzio, M. Fink, and T. Folégot, "High Frequency detection and focusing using the Time Reversal Operator in a real shallow water environment," Eight Conference on Underwater Acoustic, ECUA, 12-15 juin 2006 Carvoeiro Portugal.

[6] C. F. Gaumond, D. M. Fromm, J. F. Lingevitch, R. Menis, G. F. Edelmann, D. C. Calvo, and . Kim, "Demonstration at sea of the decomposition-of-the-time-reversal-operator technique" J. Acoust. Soc. Am. **119**(2), 976–990 (2006).

[7] M.D. Collins and E.K. Westwood "A higher-order energy-conserving parabolic equation for range-dependent ocean depth, sound speed, and density" J.Acoust.Soc.Am. **89**, 1068-1075 (1991).

Annexe : la matrice S en acoustique

Les résultats suivants sont adaptés de ceux données par Derem dans le chapitre 9 du GESPA.[1] D'après l'équation (2.1), la pression totale, pour un cylindre élastique, s'écrit

$$P_{tot} = P_{inc} + P_{diff} = \frac{1}{2}\left(P_0 e^{-i\omega t}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n i^n \left\{\mathrm{H}_n^{(2)}(k_0 r) + S_n \mathrm{H}_n^{(1)}(k_0 r)\right\}\cos(n\theta). \qquad \text{(A.1)}$$

La pression totale est la somme d'une onde entrante, proportionnelle à $\mathrm{H}_n^{(2)}$ et d'une onde sortante, proportionnelle à $S_n\mathrm{H}_n^{(1)}$. La matrice **S** contient les coefficients S_n ; elle relie l'entrée à la sortie du « système diffusant». La relation entre S_n et le coefficient de diffusion R_n [Eqs. (2.1) et (2.12)] est [1]

$$S_n = 1 + 2R_n\,. \qquad \text{(A.2)}$$

La matrice **T**, de transition, vérifie $S_n = 1 + 2iT_n$, soit $R_n = iT_n$.[1] Les trois coefficients R_n, S_n et T_n sont représentés dans le plan complexe sur le figure A1.

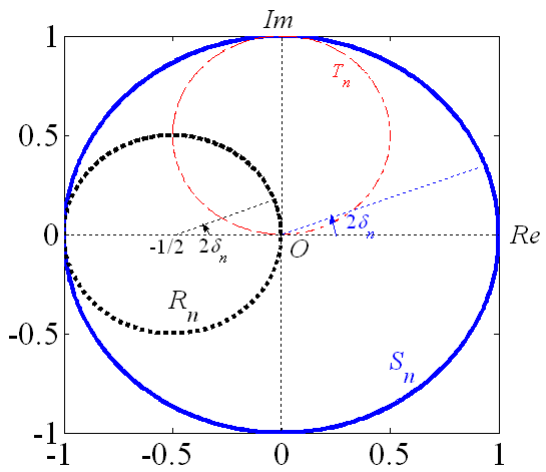


figure A.1 : diagramme d'Argand, représentation dans le plan complexe des coefficients R_n, S_n et T_n.

D'après l'équation (2.12), un coefficient de diffusion a pour expression

$$R_n = -\frac{\zeta_n \mathrm{J}_n(x) - x\mathrm{J}_n'(x)}{\zeta_n \mathrm{H}_n^{(1)}(x) - x\mathrm{H}_n^{(1)\prime}(x)},$$

avec $x = k_0 a = \omega\, a/c_0$. Le coefficient S_n s'écrit $1 + 2R_n$ [Eq. (A.2)], soit

$$S_n = -\frac{\zeta_n \mathrm{H}_n^{(2)}(x) - x\mathrm{H}_n^{(2)\prime}(x)}{\zeta_n \mathrm{H}_n^{(1)}(x) - x\mathrm{H}_n^{(1)\prime}(x)}. \qquad \text{(A.3)}$$

Remarques :

1) Sans perte, du fait de la conservation d'énergie **S,** est unitaire. Les coefficients S_n sont de norme 1, soit $|S_n| = 1$. La phase est notée $2\delta_n$, soit $S_n = e^{2i\delta n}$. Avec cette notation, il est possible d'écrire le coefficient sous forme [1]

$$S_n = \frac{\text{cotan}\delta_n + i}{\text{cotan}\delta_n - i}. \qquad \text{(A.4)}$$

2) Pour un cylindre, il n'y pas de couplage entre modes : $S_{nm} = 0$ pour $n \neq m$. Dans ce cas, la matrice **S** est diagonale.

Les résonances acoustiques

Il est possible de factoriser la partie résonnante de la matrice **S** en séparant *diffusion potentielle*, notée (0) et *diffusion typiquement résonante*, notée (*) suivant [1]

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(0)}\,\mathbf{S}^{(*)}. \qquad \text{(A.5)}$$

Les coefficients $S_n^{(0)}$ et $S_n^{(*)}$ vérifient

$$S_n^{(0)} = e^{2i\delta_n^{(0)}}, \qquad \text{(A.6a)}$$

$$S_n^{(*)} = e^{2i\delta_n^{(*)}}. \qquad \text{(A.6b)}$$

Les déphasages vérifient donc

$$\delta_n = \delta_n^{(0)} + \delta_n^{(*)}. \qquad \text{(A.6c)}$$

Dans le cas de cylindre métallique (§ II.1.4), la diffusion potentielle correspond à la limite solide infiniment rigide (§ II.1.3). [1]

La matrice $\mathbf{S}^{(*)}$ contient les pôles de la matrice **S** à variation rapide. D'après l'équation (A.3), les pôles de S_n, identiques à ceux de R_n, vérifient l'équation

$$\zeta_n = \frac{x\mathrm{H}_n^{(1)\prime}(x)}{\mathrm{H}_n^{(1)}(x)}. \qquad \text{(A.7)}$$

Le coefficient ζ_n est réel d'après les équations (2.13) et (2.14). La fonction de Hankel étant complexe, les racines de l'équation précédente, notées $\tilde{x}_{nl}$ sont complexes. La partie imaginaire est reliée à l'énergie rayonnée vers le fluide.

Détermination de la résonance

En 1936, dans le cadre de l'étude des résonances nucléaires Breit et Wigner ont proposé une description approchée du phénomène de résonance. L'équation (A.4) donnant le coefficient S_n peut également s'écrire

$$S_n = -\frac{\mathrm{H}_n^{(2)}{}'(x)}{\mathrm{H}_n^{(1)'}(x)} \frac{[\zeta_n]^{-1} - \left[{}^d\mathrm{H}_n^{(2)}(x)\right]^{-1}}{[\zeta_n]^{-1} - \left[{}^d\mathrm{H}_n^{(1)}(x)\right]^{-1}}, \tag{A.8a}$$

avec

$${}^d\mathrm{H}_n^{(1,2)}(x) = \frac{x\mathrm{H}_n^{(1,2)}{}'(x)}{\mathrm{H}_n^{(1,2)}(x)}. \tag{A.8b}$$

Avec les notations suivantes

$$p_n = [\zeta_n]^{-1}, \tag{A.9a}$$

$$q_n = Re\{\, [{}^d\mathrm{H}^{(1)}{}_n]^{-1}\}, \tag{A.9b}$$

$$r_n = Im\{\, [{}^d\mathrm{H}^{(1)}{}_n]^{-1}\}, \tag{A.9c}$$

le coefficient S_n s'exprime [Eq. (A.8a)]

$$S_n = -\frac{\mathrm{H}_n^{(2)}{}'(x)}{\mathrm{H}_n^{(1)}{}'(x)} \frac{p_n - q_n + ir_n}{p_n - q_n - ir_n}. \tag{A.9d}$$

Une résonance, notée $x^{(*)}$, vérifie l'équation

$$p_n(\, x^{(*)}) = q_n(\, x^{(*)}). \tag{A.10}$$

Cette équation est réelle et possède des racines réelles successives notées x_{nl} liée à la partie réelle des pôles $\tilde{x}_{nl}$, obtenue par l'équation (A.7), suivant

$$x_{nl} = Re\{\, \tilde{x}_{nl}\}. \tag{A.11}$$

L'équation (A.10) s'écrit également

$$\frac{1}{\zeta_n} = \frac{\mathrm{J}_n(x)\mathrm{J}_n(x)' + \mathrm{Y}_n(x)\mathrm{Y}_n(x)'}{x\left([\mathrm{J}_n'(x)]^2 + [\mathrm{Y}_n'(x)]^2\right)}. \tag{A12}$$

Expression des coefficients S_n et R_n autour de la résonance

Le coefficient résonant $S_n^{(*)}$ est de même forme que le coefficient S_n donné par l'équation (A.4). L'angle $\delta_n^{(*)}$ vérifie, d'après l'équation (A.9d)

$$\cot an\left\{\delta_n^{(*)}(x)\right\} = \frac{p_n(x) - q_n(x)}{r_n(x)}. \tag{A13}$$

Par un développement limité à l'ordre 1 autour d'une fréquence de résonance, notée $x^{(*)}$

$$\cot an\left\{\delta_n^{(*)}(x)\right\} \approx \frac{2}{\Gamma}\left(x^{(*)} - x\right). \tag{A14}$$

Le terme Γ est appelé largeur de résonance, il ne dépend pas de $x = k_0 a$ autour de la résonance. Les coefficients résonants $S_n^{(*)}$ et $R_n^{(*)}$ sont donnés par formules de Breit-Wigner, autour de la résonance $x^{(*)}$, suivant

$$S_n^{(*)} = \frac{x^{(*)} - x - i\Gamma/2}{x^{(*)} - x + i\Gamma/2}, \tag{A15a}$$

$$R_n^{(*)} = \frac{i\Gamma/2}{x^{(*)} - x - i\Gamma/2}. \tag{A15b}$$

Exemples : cylindres d'acier et de nylon

Les exemples du paragraphe II.1.4 sont repris : les cylindres d'acier et de nylon. Le cas du coefficient R_0 de l'acier de la figure 2.10 est présenté sur la figure A.2. Les coefficient R_1 et R_2 du nylon de la figure 2.11 sont présentés sur la figure A.3.

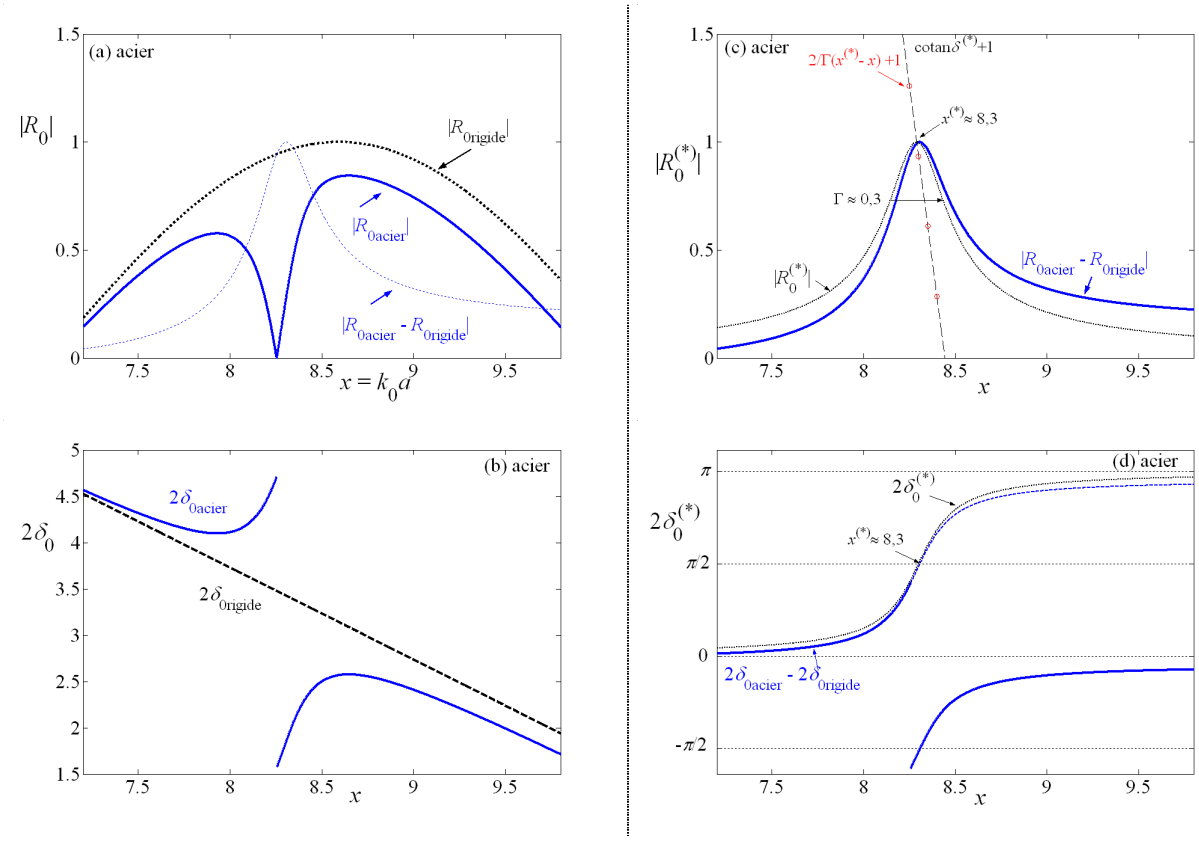


figure A.2 : module et phase des coefficients R_0 de l'acier et infiniment rigide (a) et (b). module et phase des coefficients $R_0^{(*)}$ comparé à l'équation (A.15b) (c) et (d).

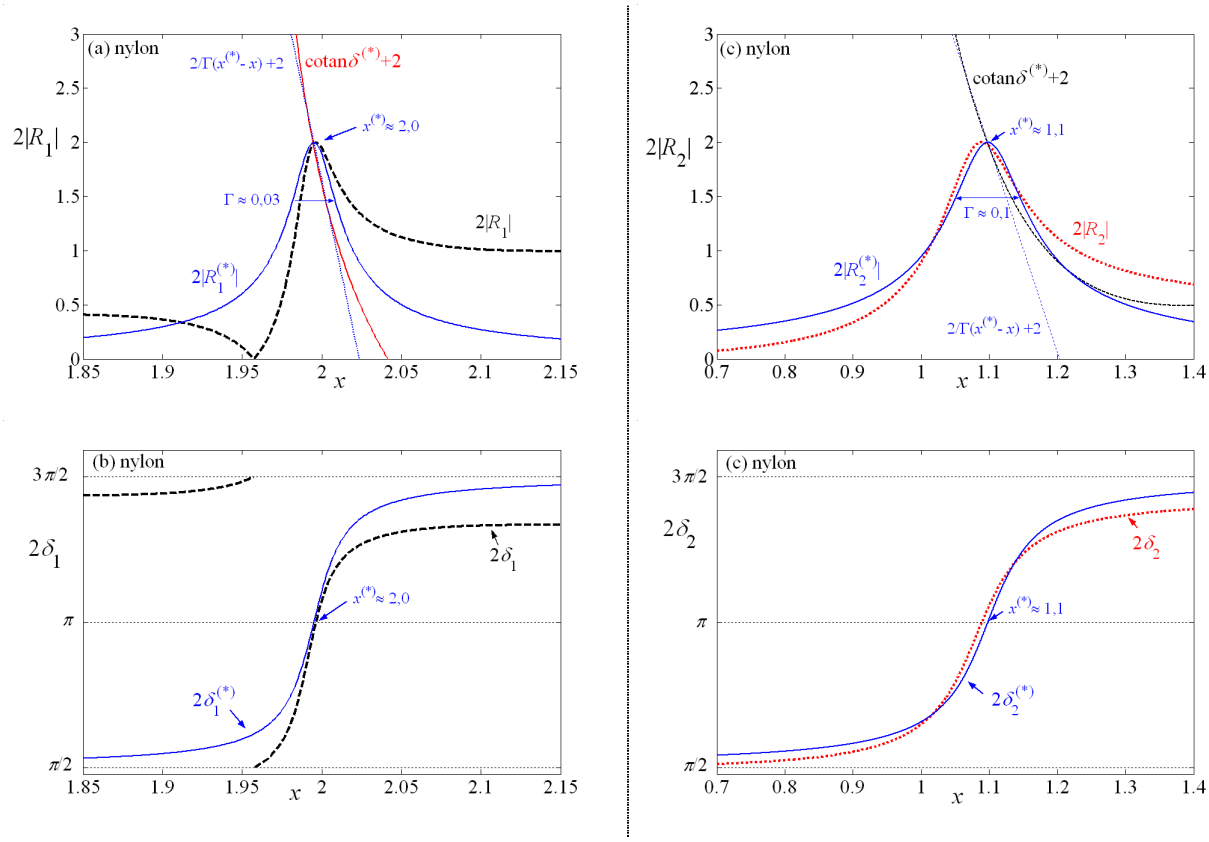


figure A.3 : module et phase des coefficients R_n comparé à l'équation (A.15b)
R_1 (a) et (b), R_2 (c) et (d).

Bibliographie

[1] A. Derem, "N. Gespa La diffusion acoustique par des cibles géométriques de forme simple Théories et expériences," (Cedocar 1987), chapitre 9 Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson dans la diffusion acoustique, 243–252.

Conclusion

Ce travail de thèse s'inscrit dans la continuité des thématiques développées au laboratoire depuis le milieu des années 1990 autour de la méthode DORT, l'imagerie, le contrôle non destructif, l'acoustique sous-marine.

Une étude plus fine des phénomènes de diffusion acoustique, prenant appui sur les nombreuses études précédentes, a été développée dans la partie II. Le formalisme de décomposition en modes normaux de vibrations, pondérés par des coefficients de diffusion R_n a été utilisé pour décrire le cas du cylindre, du tube, de la sphère et de deux cylindres.

Cette étude a permis d'écrire de façon plus précise l'expression théorique de la matrice de transfert **K** dans la partie III. Les invariants du Retournement Temporel peuvent être alors obtenus par décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice de transfert théorique. Il a également été montré qu'il est possible de réduire le problème de dimension N, le nombre de transducteurs du réseau, à un problème dont la dimension est liée au rapport entre la taille de l'objet et la longueur d'onde. Cette dimension est de l'ordre de $2k_0a + 1$.

Ce point de vue permet non seulement de gagner du temps de calcul, dans la mesure où la dimension $2k_0a + 1$ est inférieure à N. Il permet également d'exprimer les valeurs singulières de façon analytique. Notamment dans la limite petit objet, soit k_0a inférieur à 0,5, le problème est de dimension 3 et les trois valeurs singulières s'expriment en fonction des contrastes de compressibilité et de densité α et β entre le diffuseur et le milieu. Ces résultats ont été généralisés à la limite de Rayleigh : tant que la taille de l'objet est inférieure à la tache de focalisation, les deux premières valeurs singulières s'expriment facilement en fonction des coefficients de diffusion R_n et des projections des modes de normaux vibrations symétriques et anti-symétriques. Si la distance d'observation F est grande devant l'ouverture D du réseau, les vecteurs singuliers peuvent être facilement exprimés par les polynômes de Legendre. Ceci est également valable pour un réseau en quart de cercle.

Pour l'essentiel, ces résultats ont pu être verifié par des expériences. ils sont en cohérence avec le point de vue qui prévalait jusqu'alors : pour un petit diffuseur (sous entendu plus petit que la tache de focalisation), il existe une valeur singulière principale associée au vecteur propre focalisant de façon isotrope sur l'objet. En particulier, ce résultat est toujours bien vérifié dans le cas de cylindres métalliques insonifiés par un réseau linéaire de transducteurs.

Le problème de la diffusion multiple entre deux cylindres élastiques a également été abordé. La prise en compte de l'anisotropie de la diffusion s'est montrée essentielle pour bien modéliser les résultats expérimentaux et compléter les études faites précédemment au laboratoire.

Deux perspectives ont été proposées dans les parties IV et V : appliquer les résultats à l'électromagnétisme pour des objets à 2D et à l'acoustique sous-marine. Dans le cas de l'électromagnétisme, les analogies et les différences, dues notamment au caractère vectoriel des champs, ont été mises en évidence. Les expériences correspondantes seront menées au laboratoire cette année. Pour l'acoustique sous-marine, le traitement des données expérimentales obtenues à Brest au printemps 2005 est en cours. Des expériences complémentaires permettront d'utiliser les techniques de caractérisation présentées dans ce manuscrit.

Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel appliquée à l'imagerie et à la caractérisation ultrasonore

Résumé

L'analyse de la diffusion acoustique est un outil important pour l'imagerie et la caractérisation. Les applications concernent le contrôle non-destructif, l'imagerie médicale ou l'acoustique sous-marine. La méthode employée dans ce manuscrit est la Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel ou méthode DORT. Elle consiste à étudier les invariants du Retournement Temporel. Pour un réseau donné de transducteurs, ceux-ci correspondent aux vecteurs singuliers obtenus par décomposition en valeur singulières de la matrice **K** des réponses inter-éléments du réseau. Chaque vecteur est associé à une valeur singulière. La méthode DORT est ici utilisée pour caractériser différents objets élastiques : cylindre, tube, sphère et deux cylindres. Le formalisme de décomposition du champ diffusé en modes normaux de vibrations ou harmoniques, permet de déterminer les invariants du Retournement Temporel théoriques. Il est alors possible de réduire le problème de dimension N, le nombre de transducteurs du réseau, à un problème de dimension d'ordre $2k_0a+1$, où a est la dimension caractéristique de l'objet et k_0 le nombre d'onde dans le fluide environnant. Cette approche fournit des expressions analytiques des valeurs singulières, notamment dans la limite petit objet ($k_0a < 0,5$) et dans la limite de Rayleigh ($2a$ inférieur à la tache de focalisation). Ces résultats, bien vérifiés expérimentalement, sont en accord avec le point de vue qui prévalait jusqu'alors : pour un petit diffuseur, il existe une valeur singulière principale associée au vecteur singulier focalisant de façon isotrope sur l'objet. De plus, les analogies avec l'électromagnétisme à deux dimensions sont également présentées.

Mots-clés : Acoustique physique, imagerie ultrasonore, diffusion acoustique, retournement temporel, diffusion électromagnétique, méthode DORT, caractérisation, contrôle non destructif (CND), acoustique sous-marine.

Decomposition of the Time Reversal Operator applied to ultrasonic characterization and imaging

Abstract

Acoustic scattering analysis is an important tool in acoustic imaging and characterization with applications among non-destructive testing, medical imaging or underwater acoustics. The method employed in the manuscript is the Decomposition of the Time Reversal Operator or DORT method. It consists in the study of the Time Reversal invariants. For a given transducers array, the invariants correspond to the singular vectors obtained by singular value decomposition of the array response matrix **K**. Each vector is associated with a singular value. The DORT method is here used to characterize different elastic object such as cylinder, tube, sphere and two cylinders. The formalism of decomposition of the scattered pressure in normal modes of vibrations or harmonics allows to determine the theoretical Time Reversal invariants. The N dimension problem, where N is the number of transducers, is reduced to a problem which dimension is about $2k_0a+1$, where a is the characteristic object dimension and k_0 the wave number in the surrounding fluid. This approach gives analytical expressions of the singular values and vectors in the small object limit ($k_0a < 0,5$) and in the Rayleigh limit ($2a$ less than the focal spot). Theses results are experimentally verified and in agreement with the previous point of view : for a small cylinder, it exists a main singular value associated with the singular vector which focuses isotropicly on the scatterer. Furthermore, analogies with the two dimensional electromagnetism are also shown.

Key words : physical acoustic, imaging, acoustic scattering, time reversal, electromagnetic scattering, DORT method, characterisation, non-destructive testing, underwater acoustic.