



**HAL**  
open science

# Localisation et décroissance des champs de la mécanique des fluides et des plasmas. Espaces fonctionnels associés à une famille de champs de vecteurs.

Francois Vigneron

## ► To cite this version:

Francois Vigneron. Localisation et décroissance des champs de la mécanique des fluides et des plasmas. Espaces fonctionnels associés à une famille de champs de vecteurs.. Mathématiques [math]. Ecole Polytechnique X, 2006. Français. NNT: . tel-00136144

**HAL Id: tel-00136144**

**<https://pastel.hal.science/tel-00136144>**

Submitted on 12 Mar 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Thèse de doctorat de l'École polytechnique

Spécialité : Mathématiques

Présentée par François VIGNERON

pour obtenir le titre de  
Docteur de l'École polytechnique.

*Sujet de la thèse :*

**Localisation et décroissance des champs  
de la mécanique des fluides et des plasmas**

&

**Espaces fonctionnels associés  
à une famille de champs de vecteurs**

*présentée le 22 novembre 2006 devant le jury composé de :*

CLAUDE BARDOS	<i>Examineur</i>
JEAN-MICHEL BONY	<i>Examineur</i>
JEAN-YVES CHEMIN	<i>Directeur de thèse</i>
GUY DAVID	<i>Rapporteur</i>
HERVÉ PAJOT	<i>Examineur</i>
VLADIMIR SVERAK	<i>Rapporteur<sup>†</sup></i>

<sup>†</sup> A cause de ses obligations à Minneapolis, le Professeur V. Sverak n'a pu se joindre au jury.



## Résumé

La première partie est consacrée à l'étude du comportement asymptotique des solutions de Navier-Stokes incompressible à l'infini de la variable d'espace. On obtient des résultats optimaux de propagation de la décroissance en terme d'espaces à poids, ainsi qu'un développement asymptotique de la vitesse et de la pression analogue à la loi de Bernoulli. La théorie s'étend à un modèle de la MHD.

**Mot-clés** : localisation, décroissance, comportement asymptotique, Navier-Stokes, MHD, espaces à poids.

\* \* \*

La seconde partie est consacrée à l'étude des espaces de Sobolev associés à une famille de champs de vecteurs, de type sous-elliptique. Les principaux résultats sont la description des régularités fractionnaires avec la distance de Carnot, la démonstration d'inégalités de Hardy et, dans le cas du groupe de Heisenberg, la théorie des traces sur une hypersurface caractéristique générique.

**Mot-clés** : espaces de Sobolev, régularités fractionnaires, condition de crochet (Hörmander), somme de carrés de champs de vecteurs, inégalité de Hardy, traces, groupe de Heisenberg.



# Préambule

*I do not know what I may appear to the world ;  
but to myself I seem to have been only like a boy  
playing on the seashore, and diverting myself in  
now and then finding a smoother pebble or a pret-  
tier shell than ordinary, whilst the great ocean of  
truth lay all undiscovered before me.*

Sir Isaac Newton<sup>1</sup> (1642-1727)

Cette thèse comporte deux parties indépendantes : l'étude de la localisation des solutions de deux problèmes paraboliques (Navier-Stokes incompressible et son extension magnéto-hydrodynamique) et l'analyse d'espaces fonctionnels associés à une famille de champs de vecteurs.

Le premier axe de recherche m'a été proposé par Jean-Yves Chemin dans le cadre de mon D.E.A. Il s'agissait alors d'étudier la thèse de Lorenzo Brandolese et d'étendre aux espaces  $L^p$  à poids les résultats qu'il avait obtenus pour  $p = +\infty$ . J'ai ensuite eu la chance de rencontrer Lorenzo et nous avons décidé de poursuivre ensemble l'étude de la localisation des solutions. Actuellement, ce travail a donné lieu aux publications suivantes :

- F. Vigneron, *Spatial decay of the velocity field of an incompressible viscous fluid in  $\mathbb{R}^d$* , Non-linear Analysis T.M.A. 63 (2005), 525–549.
- L. Brandolese, F. Vigneron, *On the localization of the magnetic and the velocity fields in the equations of magnetohydrodynamics*, Proceedings Edinburgh Math. Soc. (à paraître).
- L. Brandolese, F. Vigneron, *New asymptotic profiles of nonstationary solutions of the Navier-Stokes system*, École polytechnique, CMLS (2006, preprint).
- F. Vigneron, *Decay theorems for the Navier-Stokes system with elementary O.D.E. techniques*, (en préparation).

L'extension du dernier article avec Lorenzo dans le cadre de domaines extérieurs est à l'étude. Un des objectifs est la justification mathématique du modèle d'écoulement potentiel (irrotationnel), à grand nombre de Reynolds, loin de la couche limite et du sillage.

L'intitulé initial de la thèse était : *Localisation et microlocalisation en mécanique des fluides*. Les travaux de Lorenzo Brandolese ayant mis en évidence la propagation de taux de décroissance arbitrairement élevés pour le tourbillon ainsi que la stabilité d'une décomposition atomique convenable (voir [15]), la question principale était de déterminer le devenir d'une information fréquentielle additionnelle. En d'autres termes, trouver une définition convenable de la propriété "le tourbillon initial est microlocalisé autour de  $(x, \pm\xi)$ " et démontrer un théorème de propagation. A cause de la viscosité, on ne peut espérer au mieux qu'un théorème avec paramètre, exprimant une forme de

---

<sup>1</sup>In David Brewster, *Memoirs of the Life, Writings and Discoveries of Sir Isaac Newton*, vol. 2, ch. 27 (1855).

confinement au voisinage de l'image de  $(x, \pm\xi)$  après transport-diffusion par le champ de vitesse. Ce problème reste ouvert.

Cependant, afin d'acquérir les techniques de l'analyse microlocale, Jean-Yves Chemin m'a proposé d'étendre des résultats d'analyse fonctionnelle obtenus avec Hajer Bahouri et C.-J. Xu pour les espaces de Sobolev sur le groupe de Heisenberg (voir [4] et [5]). La description des traces des espaces d'ordre fractionnaire fut une surprise, avec l'apparition de poids dépendant de l'indice de régularité au voisinage des points caractéristiques (*i. e.* là où la structure de dérivation est tangente à la surface de trace). L'étude a aussi nécessité une description des espaces de régularité fractionnaire au moyen de la distance de Carnot-Carathéodory. La preuve de l'équivalence entre ce point de vue géométrique et celui de l'analyse fonctionnelle abstraite nécessite des techniques variées, et n'aurait pas abouti sans l'aide amicale de Sami Mustapha. L'essentiel de ce travail est contenu dans deux articles :

- **S. Mustapha, F. Vigneron**, *Construction of Sobolev spaces of fractional order in a subriemannian case*, Annales de l'Institut Fourier 57 (2007).
- **F. Vigneron**, *The trace problem for Sobolev spaces over the Heisenberg group*, École polytechnique, CMLS (2006).

Quelques résultats non publiés sont inclus dans le développement de cette thèse, en particulier au sujet de l'inégalité de Hardy.

Un certain nombre de difficultés techniques subsistent, en particulier pour les familles de champs vérifiant la condition de Hörmander d'ordre supérieur à 3. L'étude des espaces de Sobolev non hilbertiens est, elle aussi, assez largement ouverte. Cependant, les résultats déjà obtenus peuvent être appliqués dès maintenant, à la constitution d'une théorie hilbertienne complète pour le problème de Dirichlet sous-elliptique, sur un domaine borné régulier générique. Ce travail semble être un des objectifs de la thèse de H. Mokrani, sous la direction de C.J. Xu.

Les énoncés non attribués sont personnels. Les énoncés indiqués "avec X" sont le fruit d'une collaboration. Les autres sont dûs à des tiers ; la référence permet alors de retrouver l'article original. Un renvoi à une équation (P.Q.R) de la thèse désigne le chapitre P, section §P.Q, équation R. Les énoncés sont numérotés, sans distinction de nature, par ordre croissant ; le compteur est remis à zéro au début de la deuxième partie.

Vu l'indépendance des deux thèmes de recherche et afin de simplifier la lecture de la bibliographie, celle-ci a été scindée en deux. Un index thématique, commun aux deux parties, permet enfin de retrouver les définitions, les notations et les principaux résultats.

# Remerciements

Je souhaite exprimer mon amitié à tous ceux qui, par leur gentillesse et leur disponibilité, ont rendu ce travail possible. Un grand merci à Jean-Yves Chemin, pour la pédagogie de ses enseignements, pour les si nombreuses heures qu'il m'a consacrées, pour les moments de détente musicale et simplement, pour son amitié. J'adresse un salut spécial à mes collaborateurs principaux, Lorenzo Brandolese et Sami Mustapha, pour la pertinence de leurs conseils, la gentillesse et la patience avec laquelle ils m'ont partagé leur savoir.

Je m'incline aussi devant tous ceux qui ont pris un peu de temps pour écouter et répondre à mes questions. Quelques noms me reviennent à l'esprit : Nalini Anantharaman, Ramona Anton, Hajer Bahouri, Jean Barges, Fabrice Bethuel, Jean-Michel Bony, Yann Brenier, Frederic Charves, Raphaël Danchin, Fabrice Debbasch, Emmanuel Ferrand, Isabelle Gallagher, Thiery Gallay, Paul Gauduchon, Patrick Gérard, Pierre Germain, Olivier Glass, Taoufik Hmidi, Vincent Humilière, Christophe Margerin, Luc Miller, Marius Paicu, Fabrice Planchon, Vittoria Pierfelice, David Renard, Delphine Salort, Jean-Claude Saut, Claude Zuily. Merci à tous et pardon à ceux que j'oublie ! Un grand merci aux secrétaires et informaticiens du laboratoire Laurent-Schwartz, pour leur disponibilité, leur compétence hors du commun, leur gentillesse même au delà des heures de service, et une multitude de cafés : Stéphane Aicardi, Claudine Harmide, Florence Hamet, Carole Juppín, Michèle Lavalette, Alain Royer. Pour la bonne humeur et la qualité scientifique des colloques de Forges-les-Eaux, de Pise, de Hammamet, de Nice, d'Evian, de Rennes, merci aux organisateurs et aux participants !

Merci à ma famille, à ceux qui de mon enfance à aujourd'hui m'ont appris la science et l'humanisme. J'exprime tout mon amour à Sarah, pour sa confiance passionnée, son soutien patient, sa tendresse, ses attentions de tous les instants. Et c'est une joie que de lui offrir aujourd'hui le résultat de mon travail.



J'étends avec plaisir ces remerciements aux professeurs qui ont acceptés de participer à mon jury de thèse : Claude Bardos, Jean-Michel Bony, Guy David, Hervé Pajot, Vladimir Sverak et bien sûr encore Jean-Yves Chemin. Leur présence constitue pour moi un grand honneur. Merci pour vos remarques, vos critiques, vos conseils et simplement, pour l'intérêt que vous portez à mon travail.



# Table des matières

<b>Partie I – Localisation et décroissance des champs en mécanique des fluides et des plasmas</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>3</b>
1.1 Cadre fonctionnel . . . . .	5
1.1.1 Espaces à poids : $L^p_{\vartheta}(\mathbb{R}^d)$ . . . . .	5
1.1.2 Décroissance au sens faible : taux $\eta_p(f)$ . . . . .	7
1.1.3 Notations diverses . . . . .	7
1.2 Principaux résultats . . . . .	8
<b>2 Décroissance du champ de vitesse en mécanique des fluides</b>	<b>11</b>
2.1 Modèles mathématiques de la mécanique des fluides . . . . .	11
2.2 Propriétés du noyau hydrodynamique . . . . .	19
2.2.1 Propriétés de symétrie . . . . .	19
2.2.2 Estimations ponctuelles . . . . .	20
2.2.3 Estimations intégrales . . . . .	22
2.2.4 Opérateur de convolution dans les espaces à poids . . . . .	22
2.3 Conservation des propriétés de localisation spatiale . . . . .	29
2.3.1 Existence de solutions localisées . . . . .	30
2.3.2 Localisation dans plusieurs espaces à poids . . . . .	33
2.3.3 Propagation de la localisation des solutions faibles . . . . .	36
2.3.4 Localisation des dérivées . . . . .	37
2.3.5 Conservation de certains profils anisotropes . . . . .	38
2.4 Décroissance en temps grand . . . . .	39
2.4.1 Décroissance en temps, sans contrôle spatial . . . . .	40
2.4.2 Classification de la décroissance en temps par les symétries du flot . . . . .	45
2.4.3 Propagation de la localisation pour certaines solutions fortes . . . . .	46
2.5 Développement asymptotique des solutions spatialement bien localisées . . . . .	47
2.5.1 Développement du champ de vitesse en “diffusion+gradient” . . . . .	47
2.5.2 Développement du terme de pression : loi de Bernoulli généralisée . . . . .	48
2.5.3 Correction exponentielle en temps long . . . . .	49
2.5.4 Preuves . . . . .	50
2.6 Obstructions à la décroissance . . . . .	56
2.6.1 Bornes inférieures ponctuelles et diffusion instantanée . . . . .	57
2.6.2 Bornes inférieures en temps grand dans les espace à poids . . . . .	59
2.6.3 Isotropie des solutions exceptionnellement bien localisées . . . . .	60
2.7 Application à l’écoulement autour d’un obstacle aérodynamique . . . . .	61
2.8 Remarques sur la localisation du tourbillon . . . . .	64

<b>3</b>	<b>Un système couplé : la magnéto-hydrodynamique</b>	<b>67</b>
3.1	Description du modèle et énoncé du résultat principal . . . . .	67
3.1.1	Forme intégrale de (MHD) . . . . .	68
3.1.2	Théorème de propagation de la localisation . . . . .	69
3.2	Une loi de convolution pour les espaces à poids . . . . .	71
3.3	Localisation spatiale du couple $(u, B)$ . . . . .	74
3.3.1	Propagation de la décroissance, au sens faible . . . . .	75
3.3.2	Propagation de la décroissance, au sens fort . . . . .	76
3.3.3	Loi du tout ou rien . . . . .	78
3.4	Obstruction à la décroissance, de type hydrodynamique . . . . .	80
3.5	Exemples de solutions exceptionnellement bien localisées . . . . .	82
▷	<b>Bibliographie de la partie I</b>	<b>83</b>
 <b>Partie II – Espaces fonctionnels associés à une famille de champs de vecteurs</b>		<b>89</b>
<b>4</b>	<b>Définitions et hypothèses</b>	<b>91</b>
4.1	Présentation générale . . . . .	91
4.2	Espaces fonctionnels associés à une famille de champs . . . . .	92
4.3	Éléments de géométrie sous-riemannienne . . . . .	93
4.4	Utilisation du calcul de Weyl-Hörmander . . . . .	95
4.4.1	Semi-normes de confinement . . . . .	95
4.4.2	Calcul symbolique dans les classes de confinement . . . . .	96
4.4.3	Quantification de Weyl . . . . .	97
4.4.4	Espaces de Sobolev et classes de symboles . . . . .	98
4.4.5	Exemples classiques . . . . .	99
4.5	Exemple fondamental : le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^d$ . . . . .	100
4.5.1	Structure de dérivation naturelle sur le groupe de Heisenberg . . . . .	100
4.5.2	Distance de Carnot . . . . .	100
4.5.3	Espaces de Sobolev . . . . .	101
4.6	Principaux résultats . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Etude d'un problème modèle</b>	<b>103</b>
5.1	Espaces de Sobolev anisotropes, invariants par translation . . . . .	103
5.2	Exemples d'applications . . . . .	104
5.3	Propriété d'intégrabilité du taux d'accroissement . . . . .	105
5.4	Inclusion dans $L^p$ . . . . .	106
5.5	Théorie des traces . . . . .	107
5.5.1	Exemples de traces sur un hyperplan affine . . . . .	108
5.5.2	Problème géométrique associé aux traces sur une sous-variété . . . . .	109
<b>6</b>	<b>Réalisation des espaces de Sobolev d'indice fractionnaire</b>	<b>111</b>
6.1	Énoncé principal . . . . .	111
6.2	Estimation inférieure de la dérivée faible, via le calcul fonctionnel . . . . .	113
6.3	Estimation supérieure de la dérivée faible, via le calcul de Weyl . . . . .	116
6.4	Remarques sur la régularité microlocale associée à une famille de champs . . . . .	124

<b>7</b>	<b>Autour de l'inégalité de Hardy</b>	<b>127</b>
7.1	Système de coordonnées adapté à la géométrie sous-riemannienne . . . . .	128
7.1.1	Expression des champs dans des coordonnées adaptées . . . . .	129
7.1.2	Jauge adaptée $\rho$ et classe de symboles $S_{\tilde{x},\rho}^k$ . . . . .	129
7.1.3	Hypothèse de structure . . . . .	131
7.1.4	Dilatations anisotropes . . . . .	133
7.2	Densité des fonctions régulières dont le support évite un point . . . . .	134
7.3	Inégalité de Hardy pour une famille de champs de vecteurs . . . . .	135
7.3.1	Construction du champ "radial" $\Lambda$ . . . . .	136
7.3.2	Intégration par partie avec $\Lambda$ . . . . .	137
7.4	Translation de l'inégalité de Hardy dans l'échelle de régularité . . . . .	138
7.5	Application : éclatement de $H^s(\mathbb{H}^d)$ en couronnes dyadiques . . . . .	139
<b>8</b>	<b>Théorie des traces sur le groupe de Heisenberg</b>	<b>145</b>
8.1	Résultats classiques . . . . .	146
8.2	Géométrie du problème . . . . .	147
8.2.1	Hypothèse de non-dégénérescence des points caractéristiques . . . . .	147
8.2.2	Projection de la structure de dérivation . . . . .	149
8.2.3	Sous-ellipticité de la structure projetée . . . . .	150
8.2.4	Espaces de Sobolev sur $\Sigma^*$ . . . . .	151
8.3	Description des traces de $H^s(\mathbb{H}^d)$ . . . . .	152
8.4	Preuve du théorème de trace . . . . .	153
8.4.1	Eclatement autour des points caractéristiques . . . . .	153
8.4.2	Description des traces sur la couronne renormalisée $\Sigma_m$ . . . . .	154
8.4.3	Reconstruction de l'espace de traces . . . . .	155
8.5	Complément : un théorème de traces pour le calcul de Weyl . . . . .	162
<b>9</b>	<b>Exploration informatique d'un système sous-riemannien</b>	<b>167</b>
9.1	Code source . . . . .	167
9.2	Exemples de simulations . . . . .	171
9.3	Remarques . . . . .	173
▷	<b>Bibliographie de la partie II</b>	<b>175</b>
	<b>Index thématique général</b>	<b>177</b>



**Première partie**

**Localisation et décroissance des champs  
en mécanique des fluides et des plasmas**



# Chapitre 1

## Introduction

La première partie est consacrée à l'étude de la décroissance des solutions des EDP paraboliques et plus spécifiquement à l'équation de Navier-Stokes pour des fluides incompressibles.

L'archétype des EDP paraboliques est l'équation de la chaleur sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  :

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u = 0 \\ u(0, x) = a(x) \end{cases}$$

Une part des enjeux peut aussi bien s'illustrer sur ce problème plus simple pour lequel on dispose d'une solution explicite :

$$u(t, x) = e^{\nu t \Delta} a(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{g}_{\nu t}(x - y) a(y) dy$$

avec  $\mathfrak{g}_\lambda(x) = (4\pi\lambda)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\lambda}\right)$ .

Cette équation modélise la diffusion de la grandeur  $u$  : par exemple, le refroidissement d'un matériau isotrope de conductivité thermique  $\nu$  ayant un profil thermique initial  $a(x)$ . Le processus est d'autant plus rapide que le paramètre  $\nu > 0$  est élevé. L'évolution est irréversible : le problème de Cauchy dans  $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^d$  est mal posé.

La question de la localisation de la solution  $u(t, x)$  se scinde a priori en deux sous-problèmes. Si le profil initial tend vers zéro à l'infini de  $\mathbb{R}^d$ , celui de la solution conserve-t-il cette propriété ? La solution tend-elle vers zéro en temps grand ? Un calcul élémentaire et le simple bon sens indiquent que les deux réponses sont positives. Cependant, l'existence de solutions constantes montre aussi que ces questions ne sont pas indépendantes mais que, au contraire, la décroissance spatiale permet la décroissance en temps.

Dans un contexte non-linéaire, par exemple pour l'équation de Navier-Stokes, des phénomènes nouveaux d'obstruction à la décroissance peuvent apparaître.

Il est temps d'illustrer par quelques énoncés mathématiques cette discussion informelle.

L'équation de la chaleur propage l'information à vitesse infinie : même si  $a$  est à support compact, le support de  $u(t, x)$  n'est, en général, pas compact dès que  $t > 0$ . Cependant, à grande distance du profil initial, la solution reste exponentiellement petite. En effet, si  $a$  est à support compact, la solution de l'équation de la chaleur vérifie :

$$|u(t, x)| \leq C (\nu t)^{-d/2} \exp(-c|x|^2/\nu t) \|a\|_{L^1}.$$

La distance caractéristique de la diffusion est donc  $|x| \sim \sqrt{\nu t}$ .

En l'absence de force extérieure, la solution de l'équation de la chaleur associée à une donnée d'énergie finie tend vers zéro :

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq C t^{-d/4} \|a\|_{L^2}.$$

La nature parabolique de l'équation induit un couplage des deux notions de décroissance : la localisation du champ accélère sa diffusion. Par exemple, lorsque  $0 < \vartheta < d$ , on a la propriété suivante (voir [63]) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |a(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^\vartheta} \implies \forall t > 0, \quad \|e^{t\Delta} a\|_{L^\infty} \leq C' (1+t)^{-\vartheta/2}.$$

De même, on a aussi (voir [13]) :

$$\sup_{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} (1+|x|)^\vartheta |e^{t\Delta} a(x)| < \infty \implies \forall t > 0, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1+|x|)^\vartheta |e^{t\Delta} a(x)| \leq C(1+t)^{-\vartheta/2}.$$

Cependant, la décroissance en temps peut aussi être induite par de fortes oscillations :

$$\text{supp } \hat{a} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d; |\xi| \geq \lambda\} \implies \|e^{t\Delta} a\|_{L^2} \leq e^{-t\lambda^2} \|a\|_{L^2}.$$

Elle n'entraîne donc pas nécessairement un contrôle spatial.

En mécanique des fluides, la première obstruction à la décroissance des champs est liée à l'incompressibilité. Un champ bien localisé dans  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ) et à divergence nulle vérifie nécessairement des conditions de moment :

$$\begin{cases} u \in L^1(\mathbb{R}^d) \\ \text{div } u = 0 \end{cases} \implies \forall j \in \{1, \dots, d\}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} u_j(x) dx = 0.$$

En effet, en variable de Fourier,  $\hat{u} \in C^0(\mathbb{R}^d)$  et  $\sum \xi_j \hat{u}_j(\xi) \equiv 0$  entraînent  $\hat{u}_j(0) = 0$ . On contourne cependant assez facilement ce problème. Il suffit par exemple de considérer des champs de la forme :

$$u_j(x) = \sum_i \partial_i \Phi_{i,j}(x)$$

où  $\Phi$  est une matrice antisymétrique dont la décroissance peut être choisie arbitrairement rapide.

La seconde obstruction est liée à la dynamique non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes :

$$\partial_t u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p.$$

Le fluide étant incompressible, son champ de vitesse est à divergence nulle. L'interaction de ces deux propriétés détermine implicitement le champ de pression :

$$-\Delta p = \text{div}((u \cdot \nabla) u).$$

La pression s'avère être un facteur limitant de la décroissance en la variable d'espace. En effet, si le champ est convenablement localisé à l'instant initial, on montrera (cf. Théorèmes 30 et 32) que le premier ordre de son développement asymptotique est solution du problème :

$$\partial_t u - \nu \Delta u = -\nabla p.$$

Dans ce cas, la décroissance du champ de vitesse ne peut donc pas excéder celle du gradient de pression.

Avant d'énoncer plus précisément nos résultats, il convient d'introduire quelques définitions.

## 1.1 Cadre fonctionnel

La description mathématique de la localisation spatiale d'une fonction peut s'exprimer de façons très différentes, et dépend, en particulier, de l'information de régularité dont on dispose déjà. Par exemple, le flot de l'équation de la chaleur dans  $\mathbb{R}^d$  vérifie :

$$\|e^{t\Delta}u\|_{L^1} + t^{d/2} \|e^{t\Delta}u\|_{L^\infty} \leq c \|u\|_{L^1}.$$

La norme  $L^1$  exprime une forme de décroissance spatiale ; le second terme exprime une décroissance uniforme en temps. Cependant, si  $\vartheta > 0$ , l'invariance par translation interdit tout contrôle général de la norme

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^\vartheta |e^{t\Delta}u(x)|$$

par la norme  $L^1$  de  $u$ . Le problème vient des fonctions "convergeant faiblement" vers zéro à l'infini. L'exemple fondamental est la fonction lacunaire

$$u(x) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{\{|x-x_n| \leq \varepsilon_n\}}(x)$$

où  $(x_n)_{n \geq 0}$  est une suite divergente de  $\mathbb{R}^d$  et  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels strictement positifs, de limite nulle. Cette fonction est mal localisée, au sens de la norme uniforme, mais en choisissant convenablement son support, on peut rendre arbitrairement petite sa norme  $L^1$ .

Cette remarque conduit à définir plusieurs notions de localisation.

### 1.1.1 Espaces à poids : $L^p_\vartheta(\mathbb{R}^d)$

Pour  $p \geq 1$  et  $\vartheta \geq 0$ , l'espace  $L^p_\vartheta(\mathbb{R}^d)$  est l'ensemble des fonctions mesurables sur  $\mathbb{R}^d$  telles que

$$(1 + |x|)^\vartheta u(x) \in L^p(dx).$$

C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{L^p_\vartheta}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^p (1 + |x|)^{p\vartheta} dx \quad (1.1.1)$$

avec, si  $p = +\infty$ , la convention  $\|u\|_{L^\infty_\vartheta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|)^\vartheta |u(x)|$ .

Deux espaces de même paramètre  $\vartheta + \frac{d}{p}$  doivent être considérés comme équivalents du point de vue de la localisation. On a une inclusion continue  $L^{p_1}_{\vartheta_1} \hookrightarrow L^{p_2}_{\vartheta_2}$  lorsque

$$1 \leq p_2 \leq p_1 \quad \text{et} \quad \vartheta_2 + \frac{d}{p_2} < \vartheta_1 + \frac{d}{p_1}.$$

C'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Hölder :

$$\|u\|_{L^{p_2}_{\vartheta_2}} = \|(1 + |x|)^{\vartheta_2} u\|_{L^{p_2}} \leq \|(1 + |x|)^{\vartheta_2 - \vartheta_1}\|_{L^r} \|(1 + |x|)^{\vartheta_1} u\|_{L^{p_1}} \leq C \|u\|_{L^{p_1}_{\vartheta_1}}$$

avec  $r \geq 1$  défini par  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}$ . La constante du second membre est finie car  $(\vartheta_1 - \vartheta_2)r > d$ .

**Remarque** - Dans les problèmes d'évolution, l'espace  $C([0, T]; L^p_\vartheta)$  est constitué des fonctions  $u(t, x)$  dont toutes les composantes sont de classe  $L^p_\vartheta$  pour tout  $t \in [0, T]$  et telles que

$$\lim_{t' \rightarrow t} \|u(t') - u(t)\|_{L^p_\vartheta} = 0$$

pour tout  $t \in [0; T]$ . Lorsque  $p = +\infty$ , on doit affaiblir la régularité à l'origine en supposant seulement que  $u(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} u(0)$  au sens des distributions, puisqu'il en est ainsi pour le flot de la chaleur. On le note alors  $C_w([0, T]; L_\vartheta^\infty)$ .  $\diamond$

Le résultat suivant est une extension naïve de la loi de convolution de Young dans le cadre des espaces à poids. Ce résultat n'est pas optimal. Des généralisations convenables seront utilisées dans la suite de cette étude (voir §2.2.4 et §3.2). On peut aussi consulter [54] pour une extension aux espaces de Lorentz, [6] pour une discussion sur les cas d'égalité de l'inégalité de Young et [79] pour une théorie générale des espaces à poids.

**Proposition 1** *Etant donnés  $p, q \geq 1$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$  et  $\vartheta \geq 0$ , on a :*

$$\|u * v\|_{L_\vartheta^{\mathbb{Y}(p,q)}} \leq 2^\vartheta \|u\|_{L_\vartheta^p} \|v\|_{L_\vartheta^q} \quad (1.1.2)$$

avec  $\mathbb{Y}(p, q) = \frac{pq}{p+q-pq}$  l'exposant de Young associé au couple  $(p, q)$ .

**Preuve** L'estimée (1.1.2) repose sur l'inégalité de Peetre :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \Phi(x, y) := \frac{(\ell + |x - y|)(\ell + |y|)}{\ell + |x|} \geq \frac{\ell}{2}. \quad (1.1.3)$$

Posant  $U(x) := (\ell + |x|)^\vartheta |u(x)|$  et  $V(y) := (\ell + |y|)^\vartheta |v(y)|$ , on a alors

$$U * V(x) = (\ell + |x|)^\vartheta \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, y)^\vartheta |u(x - y)| |v(y)| dy.$$

Le théorème de convolution standard de Young entraîne donc

$$\begin{aligned} \|u * v\|_{L_\vartheta^{\mathbb{Y}(p,q)}} &\leq \ell^{-\vartheta} (2/\ell)^\vartheta \|U * V\|_{L^{\mathbb{Y}(p,q)}} \\ &\leq 2^\vartheta / \ell^{2\vartheta} \|U\|_{L^p} \|V\|_{L^q} = 2^\vartheta \|u\|_{L_\vartheta^p} \|v\|_{L_\vartheta^q}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.  $\blacksquare$

Bien qu'élémentaire, la Proposition 1 fournit une estimation des solutions de l'équation de la chaleur.

**Corollaire 2** *Pour tout  $p \geq 1$  et  $\vartheta \geq 0$ , il existe une constante  $\kappa > 0$  telle que :*

$$\forall T > 0, \quad \forall u \in L_\vartheta^p, \quad \sup_{t \in [0, T]} \|e^{t\Delta} u\|_{L_\vartheta^p} \leq \kappa (1 + T)^{\vartheta/2} \|u\|_{L_\vartheta^p}. \quad (1.1.4)$$

La constante  $\kappa$  ne dépend que de  $\vartheta$  et de la dimension  $d$ .

**Preuve** Il suffit d'appliquer (1.1.2) :

$$\|e^{\nu t \Delta} u\|_{L_\vartheta^p} \leq 2^\vartheta \|\mathfrak{g}_t\|_{L_\vartheta^1} \|u\|_{L_\vartheta^p}$$

puis de calculer la norme à poids du noyau de convolution :

$$\|\mathfrak{g}_t\|_{L_\vartheta^1} = (4\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \sqrt{t}|\xi|\right)^\vartheta e^{-|\xi|^2/4} d\xi \leq C_d (1 + t)^{\vartheta/2}. \quad \blacksquare$$

### 1.1.2 Décroissance au sens faible : taux $\eta_p(f)$

Comme nous l'avons remarqué au début de cette section, il est parfois nécessaire de comparer l'information de localisation exprimée dans le cadre  $L^p$  en faisant varier l'indice  $p$ . Dans ce cas, la notion de *taux de décroissance faible* se substitue avantageusement à celle d'espace à poids.

Pour  $1 \leq p \leq +\infty$  et  $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ , on définit le taux de décroissance  $p$ -faible de  $f$  par :

$$\eta_p(f) = \sup \left\{ \eta \in \mathbb{R} ; \lim_{R \rightarrow +\infty} R^\eta \left( \int_{1 \leq |x| \leq 2} |f(Rx)|^p dx \right)^{1/p} = 0 \right\}. \quad (1.1.5)$$

On vérifie immédiatement que, pour  $1 \leq q \leq p$  :

$$\eta_p(f) \leq \eta_q(f) \leq \eta_1(f).$$

Lorsque l'une des inégalités est stricte, la fonction  $f$  présente une structure lacunaire à l'infini : la fonction se concentre dans des régions où elle décroît peu, mais dont la mesure totale est faible.

Cette inégalité signifie naïvement qu'on accède à une information de décroissance potentiellement meilleure en considérant l'espace qui exige la régularité minimale. Le taux 1-faible se généralise d'ailleurs naturellement aux distributions positives car

$$\eta_1(f) = \sup \left\{ \eta \in \mathbb{R} ; \lim_{R \rightarrow +\infty} R^{\eta-d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \varphi\left(\frac{x}{R}\right) dx = 0 \right\}$$

où  $\varphi$  est une fonction positive régulière, égale à 1 et supportée au voisinage de la couronne unité. Cependant, dans un contexte non-linéaire d'ordre  $k$ , le taux  $k$ -faible sera généralement plus approprié que le taux calqué sur  $L^1$  (cf. les énoncés du chapitre 3).

Le lien avec les espaces à poids est donné par les identités suivantes :

$$\eta_p(f) = \sup \left\{ \vartheta + \frac{d}{p} ; f \in L^p_\vartheta \right\} = \sup \left\{ \vartheta + \frac{d}{q} ; q \geq p \text{ et } f \in L^q_\vartheta \right\}. \quad (1.1.6)$$

Etant entendu que  $f \in L^p_{\text{loc}}$ , on a aussi :

$$\eta_p(f) = \inf \left\{ \vartheta + \frac{d}{p} ; f \notin L^p_\vartheta \right\}. \quad (1.1.7)$$

### 1.1.3 Notations diverses

1. Lorsque  $\eta = \eta_p(f)$  est fini, on note  $f \stackrel{L^p}{\sim} |x|^{-\eta}$ . Par extension, la notation

$$f \stackrel{L^p}{=} \mathcal{O}(|x|^{-\eta}) \quad \text{pour } |x| \rightarrow +\infty$$

signifie que  $\eta_p(f) \geq \eta$ . Cette notation est consistante car si  $f \in L^p_\vartheta$ , alors  $f \stackrel{L^p}{=} \mathcal{O}(|x|^{-(\vartheta+d/p)})$  à l'infini pour  $1 \leq q \leq p$ .

2. Si  $f(\lambda, x)$  et  $g(x)$  sont deux fonctions numériques sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{R}^d$  respectivement, la notation

$$f(\lambda, x) = \mathcal{O}_\lambda(g(x)) \quad \text{pour } |x| \rightarrow +\infty$$

signifie que  $|f(\lambda, x)| \leq C(\lambda)g(x)$  où  $C$  est une fonction positive, localement bornée sur  $\mathbb{R}$ .

3. Si  $A$  et  $B$  sont deux expressions dépendant d'un paramètre  $\alpha$ , on écrit

$$A \leq B - \varepsilon_\alpha \quad (1.1.8)$$

pour signifier que  $A \leq B$  si  $\alpha = 0$  et que  $A < B$  si  $\alpha \neq 0$ . En particulier, la notation  $A \leq B - \varepsilon_{1/p}$  signifie que l'inégalité doit être stricte pour  $p$  fini, mais que le cas d'égalité est autorisé lorsque  $p = +\infty$ .

4. La partie positive d'un réel  $x \in \mathbb{R}$  est  $(x)_+ = \max\{x; 0\}$ .

## 1.2 Principaux résultats

Le chapitre 2 est consacré à l'étude de la décroissance du champ de vitesse dans le modèle d'un fluide visqueux incompressible, régi par les équations de Navier-Stokes.

Les premiers résultats concernent la persistance de l'information de localisation spatiale. Lorsqu'on suppose que la solution est régulière, on a les résultats suivants.

1. En temps fini, l'information de localisation se propage tant qu'elle n'excède pas  $|x|^{-d-1}$  (ou une décroissance similaire dans  $L^p$ ) :

$$\eta_p(u(t)) \geq \min\{\eta_p(u(0)); d+1\}.$$

2. Si  $\eta_1(u) > d+1$  sur  $[T, T']$ , alors  $(u_h|u_k)_{L^2} = \lambda(t)\delta_{h,k}$ . Autrement dit, génériquement, l'excès de localisation ne se propage pas mais est instantanément diffusé.

Lorsque  $u$  est seulement une solution faible d'énergie finie  $\|u(t)\|_{L^2} \leq \|u(0)\|_{L^2}$ , on montre que :

$$\eta_1(u(t)) \geq \min\{\eta_1(u(0)); d\}.$$

La limitation à  $d$  (et pas  $d+1$ ) est d'ordre technique mais est reliée au fait qu'on ne sait pas non plus propager, avec une constante uniforme en temps, le contrôle des normes de localisation.

En collaboration avec Lorenzo Brandolese, nous avons obtenu un développement asymptotique de la solution pour des données modérément décroissantes :

$$\begin{aligned} u(t, x) &\simeq e^{\nu t \Delta} u_0(x) - \gamma_d \nabla_x \left( \sum_{h,k} \frac{d x_h x_k - \delta_{h,k} |x|^2}{d|x|^{d+2}} \int_0^t (u_h(t')|u_k(t'))_{L^2} dt' \right) \\ p(t, x) &\simeq p_0 + \gamma_d \sum_{h,k} \frac{d x_h x_k - \delta_{h,k} |x|^2}{d|x|^{d+2}} \cdot (u_h(t)|u_k(t))_{L^2} \end{aligned}$$

où  $p_0$  et  $\gamma_d$  sont des constantes numériques. Dans ce régime asymptotique, le flot se comporte alors presque comme un écoulement potentiel. Pour des solutions globales convenables, le profil des vitesses est valide uniformément dans la région  $|x|^2 \geq t+1$ .

Sur le plan mathématique, ce résultat améliore la compréhension du phénomène de diffusion instantanée : pour  $t$  assez petit et  $|x|$  assez grand (la borne dépend de  $t^{-1}$ ), on obtient ainsi :

$$c t |x|^{-(d+1)} \leq |u(t, x)| \leq c' t |x|^{-(d+1)}$$

avec une borne inférieure valide dans presque toutes<sup>1</sup> directions. On peut facilement en déduire des bornes inférieures sur les normes de la solution. Par exemple, si  $1 \leq p \leq \infty$  et  $\vartheta \geq 0$  vérifient :

$$\vartheta + \frac{d}{p} \leq d + 1 - \varepsilon_{1/p}, \quad (1.2.1)$$

alors pour  $t$  assez grand et une donnée de Cauchy décroissante :

$$\|u(t)\|_{L^p_\vartheta} \geq C t^{-\frac{1}{2}(d+1-\vartheta-\frac{d}{p})}. \quad (1.2.2)$$

Jusqu'à présent, cette inégalité n'était connue que dans certains cas particuliers (par exemple  $p = 2$  et  $0 \leq \vartheta \leq 2$  pour [74], [44], [4] ou  $1 \leq p \leq \infty$  et  $\vartheta = 0$  dans [36]). La restriction sur  $\vartheta + d/p$  peut être omise lorsque les champs ne présentent pas de symétries particulières car alors  $\|u(t)\|_{L^p_\vartheta} = +\infty$  si l'inégalité (1.2.1) n'est pas vérifiée.

Ce développement est aussi susceptible d'une interprétation physique. Tout manuel de mécanique des fluides affirme que, aux grands nombres de Reynolds, le flot autour d'un obstacle mince se comporte, hors du sillage et de la couche limite, comme un écoulement potentiel (donc irrotationnel). En d'autres termes, les effets de la viscosité n'affectent pas le comportement à l'infini de l'écoulement. Le développement asymptotique précédent exprime la consistance de cette hypothèse et constitue un premier pas vers la justification rigoureuse de ce genre d'approximation.

Pour ce qui est de la décroissance en temps, on doit (pour des raisons techniques) ou bien considérer des solutions fortes, ou bien se restreindre à des espaces invariants par translation. En particulier, on peut étendre l'inégalité d'énergie de la manière suivante (avec  $\nu = 1$  pour simplifier). Si  $u$  est une solution de Leray issue d'une donnée  $u_0 \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)$ , il existe  $t_0 \geq 0$  tel que

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^3} e^{(t-t_0)_+^{1/2}|\xi|} |\hat{u}(t, \xi)|^2 d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 e^{(\tau-t_0)_+^{1/2}|\xi|} |\hat{u}(\tau, \xi)|^2 d\xi d\tau \leq C \|u_0\|_{L^2}^2. \quad (1.2.3)$$

L'originalité de ce résultat réside dans sa preuve qui ne fait intervenir qu'une technique d'équation différentielle ordinaire, due à Jean-Yves Chemin.

Une partie de la théorie précédente a été étendue à la magnéto-hydrodynamique. L'enjeu mathématique est alors l'étude d'un système anisotrope couplé, le champ hydrodynamique n'ayant aucune raison a priori de décroître comme le champ magnétique. Au chapitre 3, on montre que si le champ magnétique est suffisamment bien localisé, l'effet de la force de Lorentz est négligeable à l'infini ; l'évolution du plasma est alors comparable à celle de Navier-Stokes. Dans le cas contraire, l'évolution est asymptotiquement contrôlée par celle du champ magnétique.

Ces deux chapitres reposent grandement sur l'intuition et les résultats antérieurs de Lorenzo Brandolese. Une partie des résultats présentés ici est le fruit de notre collaboration.

---

<sup>1</sup>En fait, à l'extérieur d'un ensemble de directions, de mesure arbitrairement petite sur  $\mathbb{S}^{d-1}$  si  $c \rightarrow 0$ .



## Chapitre 2

# Décroissance du champ de vitesse en mécanique des fluides

L'objectif de la section §2.1 est de présenter, de manière élémentaire, la modélisation d'un fluide de température constante. Le lecteur intéressé uniquement par les questions mathématiques peut se reporter directement à la page 18 où sont introduites les notations utilisées dans le reste de ce chapitre.

### 2.1 Modèles mathématiques de la mécanique des fluides

Il existe de nombreuses façons de justifier les modèles de la mécanique des fluides, en particulier à partir de modèles microscopiques de la matière. Dans les pages qui suivent, on adopte un point de vue classique : appliquer les principes physiques "à la Newton", c'est-à-dire en faisant le bilan des forces s'exerçant sur une portion infinitésimale du fluide, isolée par la pensée. Pour plus de détails sur les enjeux physiques, on peut consulter [3], [10], [30] ou [47].

Un fluide de température constante est caractérisé par la donnée d'un champ de vecteur  $v(t, x)$  représentant la vitesse moyenne des particules se situant au voisinage du point  $x$  à l'instant  $t$  et d'un champ scalaire  $\rho(t, x) > 0$  indiquant la densité de matière. On désigne par  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^d$  représentant le domaine (indéformable) dans lequel le fluide est confiné.

La description *eulérienne* de ce fluide consiste à analyser son évolution dans un système de coordonnées de référence, associé à un référentiel galiléen. Par exemple, si la durée d'observation est relativement brève, le référentiel terrestre est adapté.

#### Mouvement du fluide : le flot

Le mouvement du fluide s'exprime mathématiquement par l'existence d'un flot pour le champ de vitesse, c'est-à-dire d'une fonction  $\phi_t(x) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \Omega$  solution du système :

$$\begin{cases} \dot{\phi}_t(x) = v(t, \phi_t(x)), \\ \phi_0 = \text{Id}_\Omega. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Généralement, le flot transforme  $\Omega$  par difféomorphisme. Par exemple, si  $\text{div } v \in L^1([0, T]; L^\infty(\Omega))$ , on vérifie immédiatement que le déterminant jacobien est donné par :

$$J(t, x) \equiv \det \left[ \frac{\partial \phi^i}{\partial x_j} \right]_{i,j} = \exp \left( \int_0^t \text{div } v(\tau, \phi_\tau(x)) d\tau \right) > 0.$$

La question de la légitimité mathématique du flot est difficile et, à l'heure actuelle, seulement partiellement résolue. Dans cette section de modélisation, nous admettrons donc son existence et sa régularité comme hypothèse de travail. Cela revient à supposer, par exemple, que le champ de vitesse est de classe  $\mathcal{C}([0, T]; \text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega))$ . Dans la suite de ce chapitre, nous aurons cependant l'occasion d'étudier le champ de vitesse dans des classes de fonctions moins régulières afin de mettre en évidence certaines propriétés spécifiques, comme la décroissance à l'infini du champ.

### Trajectoires et particules de fluide

L'expérience de pensée la plus naturelle consiste à isoler une partie du fluide à un instant donné, puis à suivre son évolution au cours du temps. Du point de vue mathématique, la donnée d'un réel  $t \in [0, T]$  et d'un sous-ensemble  $\mathcal{D}_t \subset \Omega$  définit une *particule de fluide* : c'est l'application

$$\tau \mapsto \mathcal{D}_\tau = \phi_\tau \circ \phi_t^{-1}(\mathcal{D}_t). \quad (2.1.2)$$

Lorsque  $\mathcal{D}_t$  est une sous-variété de dimension  $r$ , il en est de même pour  $\mathcal{D}_\tau$  à tout instant  $\tau \geq 0$ .

Lorsque  $\mathcal{D}_0 = \{x_0\}$ , la "particule de fluide" s'identifie à une courbe intégrale du champ de vitesse  $v(t, x)$  ; on parle alors simplement de la *trajectoire* issue de  $x_0$ . La particule de fluide peut être visualisée expérimentalement en déposant une goutte de colorant au point  $x_0$  à l'instant  $t = 0$  et en photographiant le flot avec un long temps de pose.

Lorsque la mesure de  $\mathcal{D}_0$  est positive, la particule est dite *matérielle* et on peut lui appliquer les lois générales de la physique. Le passage de la formulation intégrale des lois de conservation, qui doivent être vérifiées pour toutes particules matérielles de fluide, à une formulation infinitésimale en termes d'EDP est rendue possible par un résultat élémentaire de théorie de la mesure.

**Proposition 3** *Soit  $f$  une fonction localement intégrable sur  $\Omega$ , d'intégrale nulle sur tout ouvert borné régulier, de mesure positive. Alors  $f$  est nulle presque partout sur  $\Omega$ .*

### Grandeurs observables dans un fluide en mouvement

On s'intéresse aux propriétés quantitatives de la matière emportée par le flot. Les grandeurs physiques extensives (*i.e.* proportionnelles à la quantité de matière) se représentent mathématiquement par l'intégrale d'un champ, scalaire ou vectoriel, dépendant des paramètres d'état  $\rho$  et  $v$ .

La donnée d'une particule de fluide  $\mathcal{D}$ , d'une mesure  $\mu_0$  sur  $\mathcal{D}_0$  et d'un champ  $\Psi(t, x)$  sur  $\Omega$  définit une *observable* ; c'est la fonction  $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par la formule :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\Psi)(t) = \int_{\mathcal{D}_t} \Psi(t, y) d\mu_t(y) \quad (2.1.3)$$

où  $\mu_t$  est la mesure transportée sur  $\mathcal{D}_t$  définie par :

$$\int_{\mathcal{D}_t} f(y) d\mu_t(y) = \int_{\mathcal{D}_0} f(\phi_t(x)) J(t, x) d\mu_0(x).$$

Quand la particule de fluide se réduit à une trajectoire ponctuelle issue du point  $x$ , la mesure naturelle est la mesure de Dirac et on a

$$\mathcal{O}_{\{x\}}(\Psi)(t) = \Psi(t, \phi_t(x)) \times J(t, x).$$

Lorsque la particule de fluide est matérielle (*i.e.* de mesure de Lebesgue positive), on choisit  $\mu_t(x) = dx$  car c'est une mesure invariante. Les observables les plus courantes sont données dans le tableau 2.1.

Champ $\Psi$	Observable $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\Psi)$
$\mathbb{1}$	volume
$\rho$	masse
$\rho v$	impulsion
$\frac{1}{2}\rho v^2$	énergie
$x \wedge \rho v$	moment

TAB. 2.1 – Observables d'une particule de fluide  $\mathcal{D}$ .

Rappelons quelques règles élémentaires de calcul. La variation d'une observable au cours du temps est elle-même une observable donnée par la formule suivante :

$$\dot{\mathcal{O}}_{\mathcal{D}}(\Psi) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}} \left( \frac{D\Psi}{Dt} + \Psi \operatorname{div} v \right), \quad (2.1.4)$$

avec  $\frac{D\Psi}{Dt} = \partial_t \Psi + (v \cdot \nabla) \Psi$ , la *dérivée particulaire* (ou *convective*) du champ. En particulier, si  $\lambda$  est une fonction scalaire, on a :

$$\dot{\mathcal{O}}_{\mathcal{D}}(\lambda \Psi) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}} \left( \lambda \cdot \frac{D\Psi}{Dt} + \Psi \cdot (\partial_t \lambda + \operatorname{div}(\lambda v)) \right). \quad (2.1.5)$$

Lorsque  $\lambda$  et  $\Psi$  sont deux fonctions scalaires, cette formule est symétrique en  $(\lambda, \Psi)$ .

Soit  $\mathcal{D}$  une particule matérielle de fluide (munie de la mesure de Lebesgue) et  $\partial\mathcal{D}$  son bord, supposé suffisamment régulier pour pouvoir y définir une normale sortante  $\mathbf{n}$  ainsi que la mesure de surface. Le théorème de Stokes prend alors la forme suivante :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\operatorname{div} \Psi) = \mathcal{O}_{\partial\mathcal{D}}(\Psi \cdot \mathbf{n}) \quad (2.1.6)$$

pour tout champ régulier  $\Psi(t, x) \in \mathbb{R}^d$ .

### Conservation de la masse et équation de la densité

La conservation de la masse d'une particule de fluide  $\mathcal{D}$  signifie que  $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\rho) = \text{Cte}$ . En appliquant la formule (2.1.5) et la Proposition 3, on obtient :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \quad (2.1.7)$$

En termes naïfs, l'identité précédente signifie que la matière est bien transportée par le flot :

$$\rho(t, \phi_t(x)) = \rho_0(x) \exp \left( - \int_0^t \operatorname{div} v(\tau, \phi_\tau(x)) d\tau \right).$$

On remarque aussi que la formule (2.1.5) se simplifie notablement lorsque  $\lambda = \rho$  :

$$\dot{\mathcal{O}}_{\mathcal{D}}(\rho \Psi) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}} \left( \rho \frac{D\Psi}{Dt} \right).$$

### Forces agissant sur une particule de fluide

Dans la suite de ce chapitre, on suppose que les forces s'exerçant sur une particule de fluide peuvent être classées de la manière suivante (voir [3, chap. 6]).

1. Les forces agissant de manière extensive sur la matière (par exemple, la gravitation terrestre) sont représentées par un champ vectoriel de densité  $f$ , c'est-à-dire par l'observable

$$F_{\text{ext}} = \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\rho f).$$

2. Les contraintes de surface dues au caractère non uniforme du champ de vitesse sont représentées par un opérateur linéaire  $T$ , *i.e.* par l'observable

$$F_{\text{surf}} = \mathcal{O}_{\partial\mathcal{D}}(Tn).$$

A priori,  $T$  dépend du champ de vitesse et devrait être une fonction de  $\nabla v$ . Cependant, il n'est pas nécessaire de choisir déjà une expression particulière de  $T$ , car ce qui suit n'en dépend pas encore.

Ce modèle revient à négliger toute interaction gravitationnelle ou magnétique interne au fluide. Il est donc inadapté pour décrire un plasma comme, par exemple, la matière stellaire, ou une suspension de particules ferro-magnétiques plongée dans un champ magnétique. Il est par contre pertinent pour de nombreuses phases liquides, comme les écoulements d'air ou d'eau.

### Equation de Cauchy

Le référentiel étant supposé galiléen, la relation fondamentale de la mécanique s'écrit :

$$\dot{\mathcal{O}}_{\mathcal{D}}(\rho v) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\rho f) + \mathcal{O}_{\partial\mathcal{D}}(Tn).$$

Un calcul immédiat et la RP]osition 3 entraînent l'équation de *Cauchy* :

$$\partial_t v + (v \cdot \nabla)v = \frac{\text{div } T}{\rho} + f. \quad (2.1.8)$$

Les différents modèles de la mécanique des fluides consistent à postuler une relation particulière entre  $T$  et  $\nabla v$ . Le modèle d'Euler est une approximation d'ordre zéro, celui de Navier-Stokes est d'ordre un. On peut cependant remarquer que, dans tout modèle admissible, le tenseur  $T$  est nécessairement symétrique. En effet, la loi de conservation du moment cinétique s'écrit :

$$\dot{\mathcal{O}}_{\mathcal{D}}(x \wedge \rho v) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(x \wedge \rho f) + \mathcal{O}_{\partial\mathcal{D}}(x \wedge Tn).$$

La formule (2.1.5) et l'équation de Cauchy entraînent alors :

$$\mathcal{O}_{\partial\mathcal{D}}(x \wedge Tn) - \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(x \wedge \text{div } T) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}}\left(x \wedge \left[\rho \frac{Dv}{Dt} - \rho f - \text{div } T\right]\right) = 0.$$

On en déduit que  $\text{div}(x \wedge T) - x \wedge \text{div } T = \sum_{i,j} T_i^j e_i \wedge e_j = 0$ . Cette relation exprime la symétrie du tenseur  $T$ .

### Hypothèse d'incompressibilité

Un fluide est dit *incompressible* lorsque le volume occupé par une particule de fluide est indépendant du temps :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\mathbb{1}) = \text{Cte.}$$

La formule (2.1.4) entraîne alors l'équation de conservation :

$$\text{div } v = 0. \quad (2.1.9)$$

Dans ce cas, la densité se calcule par la formule  $\rho(t, \phi_t(x)) = \rho_0(x)$ .

Désormais, on suppose que le fluide est incompressible, de densité constante.

### Hypothèses des fluides parfaits : le modèle d'Euler

Un fluide est dit *parfait* lorsque le tenseur des contraintes est diagonal, c'est-à-dire qu'il existe une fonction scalaire  $\sigma(t, x)$  telle que :

$$\mathbb{T}(t, x) = -p(t, x) \text{Id.}$$

Le scalaire  $p(t, x)$  quantifie la contrainte exercée par le fluide, de manière normale, sur une surface d'appui infinitésimale située au point  $x$ , à l'instant  $t$  : c'est la *pression*.

L'équation de Cauchy (2.1.8) se réduit alors à celle d'*Euler* :

$$\partial_t v + (v \cdot \nabla)v = -\frac{\nabla p}{\rho} + f. \quad (2.1.10)$$

Lorsque la force extérieure est conservative ( $f = -\nabla V$ ) et si le fluide est à température constante, on peut mettre le second membre sous la forme  $-\nabla \pi$  avec  $\pi = g + V$  où  $g$  est l'*énergie libre de Gibbs*. Cela résulte immédiatement de l'identité thermodynamique :

$$\frac{dp}{\rho} = dg + SdT.$$

Par exemple, si le fluide est incompressible de densité constante :

$$\pi(t, x) = \frac{p(t, x)}{\rho} + V(t, x).$$

Le flot d'un fluide parfait incompressible de densité constante  $\rho$  est caractérisé par la propriété suivante (cf. [2] ou [26, chap. 1] et ses références) : c'est un champ de difféomorphismes préservant la mesure et qui réalise une extrémale de l'action :

$$\mathcal{A}_{t,t'}(\phi) = \frac{1}{2} \rho \int_t^{t'} \int_{\Omega} |\partial_t \phi(\tau, x)|^2 dx d\tau.$$

Cela signifie que pour tout  $t \geq 0$  et toute fonction régulière  $h$  sur  $[-\epsilon, \epsilon]$  à valeurs dans l'ensemble des champs de difféomorphismes préservant la mesure et telle que  $h(0) = \phi(t)$ , on a :

$$D\mathcal{A}_{\phi}(\dot{h}) \equiv \rho \int_0^t \int_{\Omega} \partial_t \phi(\tau, x) \partial_t \dot{h}(\tau, x) dx d\tau = 0.$$

L'équation d'Euler décrit donc un système hamiltonien de dimension infinie.

La faiblesse du modèle d'Euler est qu'il ne dégrade pas l'énergie. En effet, la variation de l'énergie cinétique d'une particule de fluide incompressible est donnée par la formule :

$$\dot{\mathcal{O}}_{\mathcal{D}} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}} \left( \rho v \cdot \frac{Dv}{Dt} \right) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\rho v \cdot f) + \mathcal{O}_{\partial \mathcal{D}}(v \cdot Tn).$$

Le premier terme décrit le travail de la force extérieure et le second, celui des forces de surface. C'est un système conservatif.

**Hypothèses des fluides newtoniens visqueux : le modèle de Navier-Stokes**

Un fluide est dit *newtonien* lorsque le tenseur des contraintes prend la forme suivante :

$$T(t, x) = -p(t, x) \text{Id} + \eta \left( \frac{\nabla v + \nabla v^t}{2} \right) \tag{2.1.11}$$

pour une certaine constante  $\eta \geq 0$ . Reportant cette définition dans l'équation de Cauchy (2.1.8), on obtient l'équation de Navier-Stokes :

$$\partial_t v - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v = -\frac{\nabla p}{\rho} + f \tag{2.1.12}$$

avec  $\nu = \eta/\rho$ . On dit que  $\nu$  est la *viscosité* (cinématique) du fluide. Comme précédemment, le second membre s'écrit aussi  $-\nabla \pi$  lorsque la température est constante.

Fluide	$\nu$ ( $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ )
Mercure .....	0.12
Eau .....	1
Alcool .....	2.2
Air (1 atm, 27°C) ...	14
Glycérine .....	680

TAB. 2.2 – Ordre de grandeur de la viscosité.

Bien que la viscosité soit un "petit" paramètre numérique (voir Tab. 2.2), elle modifie radicalement les propriétés qualitatives du fluide. Le bilan d'énergie d'une particule incompressible devient :

$$\dot{\mathcal{O}}_{\mathcal{D}} \left( \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(\rho v \cdot f) + \mathcal{O}_{\partial \mathcal{D}}(v \cdot (-\nabla p)) - \eta \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(|\nabla v|^2).$$

Le nouveau terme, négatif, exprime la diffusion de l'énergie cinétique.

Il est malheureusement indéniable que l'hypothèse (2.1.11) résulte d'avantage d'un compromis entre la simplicité et le réalisme du modèle mathématique que d'une évidence expérimentale. Dans l'esprit du VI<sup>ème</sup> problème de Hilbert, on peut chercher à justifier l'approximation hydrodynamique à partir de modèles microscopiques de nature statistique. Ce programme est encore en cours de réalisation et repose sur de nombreuses contributions mathématiques. Nous ne citerons que le résultat de F. Golse et L. Saint-Raymond [46] sur la convergence des suites renormalisées de solutions faibles de type DiPerna-Lions du modèle cinétique de Boltzmann, vers les solutions faibles de type Leray du modèle de Navier-Stokes. Pour plus de détails sur ce sujet passionnant et difficile, nous ne pouvons qu'inviter le lecteur à consulter la synthèse de C. Vilani [83].

### Conditions aux limites

Lorsque le fluide est confiné dans une enceinte, la composante de la vitesse, transversale au bord, doit être nulle. La condition de Neumann

$$v \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\partial\Omega)$$

est donc nécessaire. Cette condition aux limites est naturelle pour l'équation d'Euler : elle ne prend pas en compte la résistance que le bord oppose à l'écoulement.

A l'échelle microscopique, le bord présente toujours une multitude d'irrégularités. Sans entrer dans les spécificités physiques des matériaux, on peut se représenter ces irrégularités comme autant de micro-facettes orientées aléatoirement et le long desquelles la condition de Neumann est vérifiée. A l'échelle macroscopique, la seule façon de ne pas développer de singularités dans le champ de vitesse consiste alors à imposer la condition de Dirichlet :

$$v = 0 \quad (\partial\Omega).$$

Cette condition aux limites est naturelle pour Navier-Stokes. L'intuition précédente peut être rendue rigoureuse grâce au résultat suivant, emprunté à [23, Thm 1].

**Théorème 4 (J. Casado-Diaz, E. Fernández-Cara, J. Simon)** Soient  $\mathcal{U}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^{d-1}$  et  $\Sigma$  une fonction  $C^1$  sur  $\mathcal{U}$ , uniformément positive. Soit aussi  $\eta$  une fonction  $C^1$  périodique sur  $\mathbb{R}^{d-1}$ . On définit :

$$\Lambda_\varepsilon = \left\{ (x', x_d) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R} ; 0 < x_d < \Sigma(x') + \varepsilon \eta \left( \frac{x'}{\varepsilon} \right) \right\}.$$

On suppose que  $\eta$  présente des fluctuations dans toutes les directions :

$$\forall \xi' \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus \{0\}, \quad \exists x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \exists \lambda > 0, \quad \eta(x' + \lambda \xi') \neq \eta(x').$$

On se donne enfin une famille  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  de fonctions  $H^1(\Lambda_\varepsilon)$  vérifiant la condition de Neumann au bord de  $\Lambda_\varepsilon$  et telles que :

$$\sup_{\varepsilon>0} \int_{\Lambda_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx < +\infty.$$

Si  $u_\varepsilon$  converge (pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) dans  $L^2_{\text{loc}}(\Lambda_0)$ , alors  $\tilde{u} = \lim u_\varepsilon$  vérifie la condition de Dirichlet le long de la surface d'équation  $x_d = \Sigma(x)$ .

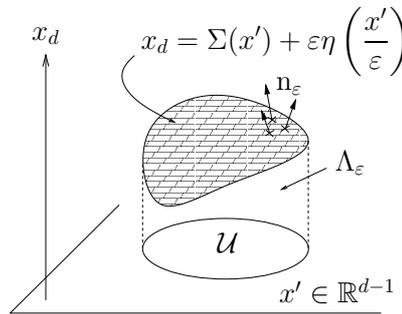


FIG. 2.1 – Condition de Neumann sur un bord irrégulier.

La différence de nature entre les conditions au bord modifie radicalement les propriétés de l'écoulement. Dans le modèle d'Euler tridimensionnel, la force exercée par le fluide sur un obstacle

est identiquement nulle (paradoxe de D'Alembert) et un fluide initialement irrotationnel ( $\text{rot } v = 0$ ) jouira indéfiniment de cette propriété.

Au contraire, dans le modèle de Navier-Stokes la vorticité prend naissance au voisinage des bords donnant naissance à une *couche limite* où les effets de la viscosité sont prépondérants. Le fluide oppose alors une certaine résistance à l'avancement d'un corps étranger. Cette zone se prolonge aussi derrière l'obstacle et forme le *sillage*.

### Hypothèses simplificatrices

Dans la suite de ce chapitre, on considère un fluide newtonnien, incompressible, de densité et de température constantes. Le système d'équation dont on veut étudier les propriétés de localisation spatiale est donc celui-ci :

$$\begin{cases} \partial_t u + \text{div}(u \otimes u) - \nu \Delta u = -\nabla p \\ \text{div } u = 0. \end{cases} \quad (\text{NS})$$

L'équation a un sens dans l'espace des distributions dès que  $u \in L^2_{\text{loc}}$ .

Dans la quasi-totalité du chapitre, on supposera que le fluide emplit tout l'espace  $\mathbb{R}^d$ , essentiellement par souci de simplification. Certains théorèmes seront aussi valables dans le demi-espace. La question d'étendre ces résultats à des domaines extérieurs plus généraux est encore ouverte.

La pression est donnée par la formule suivante :

$$-\Delta p = \sum_{i,j} (\partial_j u^i)(\partial_i u^j). \quad (2.1.13)$$

Dans  $\mathbb{R}^d$ , modulo des hypothèses de croissance raisonnable à l'infini, elle se calcule donc à partir du champ de vitesse par convolution avec la solution fondamentale du laplacien :

$$(2\pi)^{-1} \log |x| \quad \text{ou} \quad -\frac{(d-2)\Gamma(\frac{d}{2})}{2\pi^{d/2}|x|^{d-2}}$$

selon respectivement que  $d = 2$  ou  $d \geq 3$ .

L'équation de Navier-Stokes (NS) est invariante par translation et rotation. Le changement d'échelle qui préserve la viscosité est le suivant :

$$v(t, x) \text{ est solution} \iff \forall \lambda > 0, \quad \lambda v(\lambda^2 t, \lambda x) \text{ est solution.} \quad (2.1.14)$$

Pour tout couple  $(p, q) \in [1; \infty]^2$  tel que

$$\frac{2}{q} + \frac{d}{p} = 1,$$

la norme de l'espace  $L^q(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^d))$  est invariante sous la transformation (2.1.14).

### Equation intégrale

Le projecteur de Leray-Hopf sur les champs à divergence nulle

$$\mathbb{P}v = (\text{Id} - \nabla \Delta^{-1} \text{div})v = \sum_{k=1}^d \int_{T^*\mathbb{R}^d} \left( \delta_{jk} - \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \right) e^{i(x-y)\cdot \xi} v_j(y) \frac{dy d\xi}{(2\pi)^d} e_k, \quad (2.1.15)$$

ramène (NS) à une équation de la chaleur, avec coefficient de diffusion  $\nu$  et un terme source quadratique. La formule de Duhamel conduit alors à l'équation intégrale du champ de vitesse :

$$u(t) = e^{\nu t \Delta} a - \int_0^t e^{\nu(t-s)\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u)(s) ds \quad (\text{NSi})$$

où  $a(x)$  est la donnée de Cauchy à  $t = 0$ , supposée à divergence nulle. On démontre que les équations (NS) et (NSi) ont les mêmes solutions distribution (cf. [58]).

L'opérateur intégral du second membre de (NSi) agit par convolution. Les composantes du champ de vitesse vérifient :

$$u_j(t) = \mathfrak{g}_{\nu t} * a_j - \sum_{h=1}^d \sum_{k=1}^d \int_0^t F_{j;h,k}(\nu(t-s)) * (u_h u_k)(s) ds. \quad (2.1.16)$$

La fonction  $\mathfrak{g}$  est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur (cf p. 3). Il y a une légère ambiguïté dans la définition du *noyau hydrodynamique*  $F_{j;h,k}(t, x)$ ; la normalisation naturelle consiste à choisir une matrice symétrique en  $(h, k)$ . Le noyau est composé de fonctions réelles, de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^d$  définies par :

$$F_{j;h,k}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} i e^{-t|\xi|^2 + ix \cdot \xi} \left( \frac{1}{2} [\xi_h \delta_{j,k} + \xi_k \delta_{j,h}] - \frac{\xi_j \xi_h \xi_k}{|\xi|^2} \right) \frac{d\xi}{(2\pi)^d}. \quad (2.1.17)$$

La fréquence  $\xi = 0$  est singulière puisque  $\widehat{F}_{j;h,k}(t, \xi)$  est le produit de  $e^{-t|\xi|^2}$  et d'une fonction homogène de degré 1. Le comportement asymptotique de  $F(t, x)$  dans la zone  $|x|^2 \gg t$  est donc comparable à  $|x|^{-d-1}$  (voir (2.2.7)).

## 2.2 Propriétés du noyau hydrodynamique

L'étude de la décroissance du champ de vitesse repose sur une analyse précise des propriétés du noyau  $F_{j;h,k}$  et en particulier celles de l'opérateur de convolution associé.

### 2.2.1 Propriétés de symétrie

Le noyau hydrodynamique présente un certain nombre d'invariants.

**Proposition 5** *Les fonctions  $F_{j;h,k}$  jouissent des propriétés suivantes.*

1. *Condition de divergence nulle : pour tout couple  $(h, k)$  fixé,*

$$\sum_{j=1}^d \partial_j F_{j;h,k} = 0. \quad (2.2.1)$$

2. *Formules d'anti-symétrie : pour toute famille  $\mu_j \in \{0, 1\}$ ,*

$$F_{j;h,k}((-1)^{\mu_1} x_1, \dots, (-1)^{\mu_d} x_d) = (-1)^{\mu_j + \mu_h + \mu_k} F_{j;h,k}(x). \quad (2.2.2)$$

3. *Loi d'échelle : pour tout  $\lambda > 0$ ,*

$$F_{j;h,k}(t, x) = \lambda^{d+1} F_{j;h,k}(\lambda^2 t, \lambda x). \quad (2.2.3)$$

4. Loi du temps : pour tout  $t, t' > 0$  et  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$F_{j;h,k}(t) * \mathfrak{g}_{t'} = F_{j;h,k}(t + t'). \quad (2.2.4)$$

**Preuve** Les trois premières vérifications sont immédiates. Démontrons la dernière. Le noyau hydrodynamique s'exprime en fonction de la gaussienne standard  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1$  de la manière suivante :

$$F_{j;h,k}(t, x) = F_{j;h,k}^{(1)}(t, x) + F_{j;h,k}^{(2)}(t, x) \quad (2.2.5)$$

avec

$$F_{j;h,k}^{(1)}(t, x) = \frac{1}{2} [(\partial_h \mathfrak{g}_t) \delta_{j,k} + (\partial_k \mathfrak{g}_t) \delta_{j,h}], \quad F_{j;h,k}^{(2)}(t, x) = \int_t^\infty \partial_j \partial_h \partial_k \mathfrak{g}_s(x) ds.$$

Comme la famille  $(\mathfrak{g}_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe de convolution, *i.e.*  $\mathfrak{g}_t * \mathfrak{g}_{t'} = \mathfrak{g}_{t+t'}$ , on en déduit :

$$F_{j;h,k}^{(1)}(t) * \mathfrak{g}_{t'} = \frac{1}{2} [(\partial_h \mathfrak{g}_t) \delta_{j,k} + (\partial_k \mathfrak{g}_t) \delta_{j,h}] * \mathfrak{g}_{t'} = F_{j;h,k}^{(1)}(t + t')$$

$$\text{et } F_{j;h,k}^{(2)}(t) * \mathfrak{g}_{t'} = \int_t^\infty \partial_j \partial_h \partial_k \mathfrak{g}_{s+t'}(x) ds = \int_{t+t'}^\infty \partial_j \partial_h \partial_k \mathfrak{g}_s(x) ds = F_{j;h,k}^{(2)}(t + t'). \quad \blacksquare$$

### 2.2.2 Estimations ponctuelles

Le comportement du noyau hydrodynamique est très différent selon qu'on observe l'échelle diffusive  $|x|^2 \leq t$  ou l'échelle  $|x|^2 \geq t$  à laquelle la pression et la condition d'incompressibilité sont prépondérantes. Rappelons que le noyau (2.1.17) ne dépend pas de la viscosité ; la variable  $x$  est donc ici une grandeur renormalisée, homogène à  $t^{1/2}$ .

**Proposition 6** *Le noyau hydrodynamique vérifie l'estimation suivante :*

$$|F_{j;h,k}(x)| \leq C \frac{\delta_{j,h}|x_k| + \delta_{j,k}|x_h| + \delta_{h,k}|x_j|}{t^{(d+2)/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{|x|^2}{t^{(d+3)/2}}\right). \quad (2.2.6)$$

*Le comportement asymptotique est donné par le développement suivant :*

$$F_{j;h,k}(t, x) = \gamma_d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_h x_k}{|x|^{d+2}} - \frac{\delta_{h,k}}{d|x|^d} \right) + |x|^{-(d+1)} \Psi_{j;h,k} \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \quad (2.2.7)$$

avec  $\gamma_d = \pi^{-d/2} \Gamma(\frac{d+2}{2})$ . Le terme de reste est exponentiellement décroissant : il existe deux constantes positives  $C$  et  $c$  ne dépendant que de la dimension  $d$ , telles que

$$|\Psi_{j;h,k}(x)| + |\nabla \Psi_{j;h,k}(x)| \leq C e^{-c|x|^2}. \quad (2.2.8)$$

Les fonctions  $\Psi_{j;h,k}$  sont de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

#### Remarques

1. Des calculs de ce type apparaissent, dès le début du XX<sup>ème</sup> siècle, dans les travaux de C.W. Oseen (voir en particulier [68, §5.9 et §7.3]).
2. Le passage formel à la limite  $\nu \rightarrow 0$  dans (NS) revient à figer le noyau à  $t = 0$  :

$$F_{j;h,k}^0(x) = \lim_{t \rightarrow 0} F_{j;h,k}(t, x) = \gamma_d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_h x_k}{|x|^{d+2}} - \frac{\delta_{h,k}}{d|x|^d} \right) + \frac{1}{2} [\delta_{j,k} \partial_h + \delta_{j,h} \partial_k] \delta_0(x)$$

avec  $\delta_0(x)$  la masse de Dirac à l'origine.  $\diamond$

Grâce à (2.2.7), l'équation intégrale (NSi) s'écrit :

$$u(t) = e^{\nu t \Delta} a + \nabla w(t) + \int_0^t \tilde{F}(\nu(t-s)) * (u \otimes u)(s) ds \quad (2.2.9)$$

avec  $\tilde{F}(t, x) = |x|^{-d-1} \Psi(x/\sqrt{t})$  et

$$w(t, x) = \gamma_d \sum_{h,k} \left( \frac{x_h x_k}{|x|^{d+2}} - \frac{\delta_{h,k}}{d|x|^d} \right) * \int_0^t (u_h u_k)(s, \cdot) ds.$$

Dans certaines conditions (si  $u$  est bien localisé), le terme d'écoulement potentiel domine le troisième. Cette remarque sera développée au paragraphe §2.5.

La formule (2.2.7) ne contredit pas le fait que le noyau est régulier pour  $t > 0$ . De même, la formule (2.2.9) n'est pas contradictoire avec la condition de divergence nulle. Pour  $h, k$  fixés, (2.2.1) donne simplement :

$$\forall t > 0, \quad \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( |x|^{-(d+1)} \Psi_{j;h,k} \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \right) = -\gamma_d \Delta \left( \frac{x_h x_k}{|x|^{d+2}} - \frac{\delta_{h,k}}{d|x|^d} \right).$$

**Preuve** Reprenons la notation (2.2.5). Pour tout triplet  $(j, h, k) \in \{1, \dots, d\}$ , on a :

$$F_{j;h,k}^{(1)}(t, x) = -\frac{\delta_{j,k} x_h + \delta_{j,h} x_k}{4(4\pi)^{d/2} t^{(d+2)/2}} e^{-|x|^2/4t},$$

donc  $F_{j;h,k}^{(1)}(t, x) = |x|^{-(d+1)} \Psi_{j;h,k}^{(1)}(x/\sqrt{t})$ , avec

$$\Psi_{j;h,k}^{(1)}(x) = -2^{-d-1} \pi^{-d/2} (\delta_{j,k} x_h + \delta_{j,h} x_k) |x|^{d+1} e^{-|x|^2/4}. \quad (2.2.10)$$

Le second terme du noyau s'écrit :

$$F_{j;h,k}^{(2)}(t, x) = \int_t^\infty \left( \frac{\sigma_{j,h,k}(x)}{(2s)^2} - \frac{x_j x_h x_k}{(2s)^3} \right) \mathfrak{g}_s(x) ds$$

avec  $\sigma_{j,h,k}(x) = \delta_{j,h} x_k + \delta_{j,k} x_h + \delta_{h,k} x_j$ . Le changement de variable  $\lambda = |x|/\sqrt{4s}$  donne

$$\mathfrak{g}_s(x) = \pi^{-d/2} |x|^{-d} \lambda^d e^{-\lambda^2}$$

et donc :

$$F_{j;h,k}^{(2)}(t, x) = 2\pi^{-d/2} \int_0^{|x|/\sqrt{4t}} \left( \frac{\sigma_{j,h,k}(x)}{|x|^{d+2}} \lambda^{d+1} - \frac{2x_j x_h x_k}{|x|^{d+4}} \lambda^{d+3} \right) e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

On en déduit immédiatement (2.2.6). D'autre part, pour tout  $A > 0$  :

$$\int_0^A \lambda^{d+n} e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{2} \Gamma \left( \frac{d+n+1}{2} \right) - \int_A^\infty \lambda^{d+n} e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

En appliquant cette formule avec  $A = |x|/\sqrt{t}$ , on obtient :

$$\pi^{d/2} F_{j;h,k}^{(2)}(t, x) = \frac{\sigma_{j,h,k}(x)}{|x|^{d+2}} \Gamma \left( \frac{d+2}{2} \right) - \frac{2x_j x_h x_k}{|x|^{d+4}} \Gamma \left( \frac{d+4}{2} \right) + |x|^{-(d+1)} \Psi_{j;h,k}^{(2)} \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right)$$

avec

$$\Psi_{j;h,k}^{(2)}(x) = -\frac{2\sigma_{j,h,k}(x)}{|x|} \int_{|x|/2}^{\infty} \lambda^{d+1} e^{-\lambda^2} d\lambda + \frac{4x_j x_h x_k}{|x|^3} \int_{|x|/2}^{\infty} \lambda^{d+3} e^{-\lambda^2} d\lambda. \quad (2.2.11)$$

La formule  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$  entraîne alors la formule (2.2.7) en remarquant que :

$$\frac{\sigma_{j,h,k}(x)}{|x|^{d+2}} - (d + 2) \frac{x_j x_h x_k}{|x|^{d+4}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_h x_k}{|x|^{d+2}} - \frac{\delta_{h,k}}{d|x|^d} \right).$$

Le reste  $\Psi_{j;h,k} = \Psi_{j;h,k}^{(1)} + \Psi_{j;h,k}^{(2)}$  vérifie l'estimation exponentielle (2.2.8). ■

**Corollaire 7** *Il existe une constante  $C > 0$ , ne dépendant que de la dimension, telle que :*

$$|F_{j;h,k}(t, x)| \leq \frac{C|x|}{(|x| + \sqrt{t})^{d+2}}. \quad (2.2.12)$$

Lorsque  $x$  est fixé dans  $\mathbb{R}^d$ , l'estimation précédente est une fonction décroissante de  $t$ .

### 2.2.3 Estimations intégrales

La norme  $L^1$  du noyau est contrôlée de la manière suivante :

**Proposition 8** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\forall t > 0, \quad \|F_{j;h,k}(t)\|_{L^1} \leq C t^{-1/2}. \quad (2.2.13)$$

**Preuve** C'est une conséquence immédiate de (2.2.12). ■

La moyenne en temps du noyau hydrodynamique est contrôlée par (cf. [81]) :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |F_{j;h,k}(t, x)| dt \leq \frac{C_d}{|x|^{d-1}(|x| + \sqrt{T})^2}. \quad (2.2.14)$$

D'après (2.2.12), cette estimation domine aussi, ponctuellement, le noyau  $F_{j;h,k}$ .

### 2.2.4 Opérateur de convolution dans les espaces à poids

L'étude de la propagation de l'information de décroissance repose sur l'analyse, dans les espaces à poids, des opérateurs de convolution :

$$\Lambda_{j;h,k} w(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} F_{j;h,k}(\nu(t-s), x-y) w(s, y) dy ds. \quad (2.2.15)$$

Dans ce qui suit,  $\Lambda$  désigne l'un quelconque de ces opérateurs et  $F$  le noyau correspondant.

**Théorème 9 (F.V. [81])** *Soient  $(p, \vartheta)$  et  $(q, \mu)$  deux couples d'indices tels que  $p \geq q$  et :*

$$\vartheta \leq \mu, \quad (2.2.16a)$$

$$\frac{1}{q} < \frac{1}{p} + \frac{1}{d}, \quad (2.2.16b)$$

$$\vartheta + \frac{d}{p} < d + 1 - \frac{m}{1 + \frac{q}{p(q-1)}}, \quad (2.2.16c)$$

avec  $m = \max\{d + 1 - \mu; 0\}$ . Alors, il existe une fonction localement bornée  $C_{\nu T}$  telle que :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\Lambda w(t)\|_{L^p_\vartheta} \leq \frac{C_{\nu T}}{\nu} (\nu T)^{\frac{1}{2}(1 + \frac{d}{p} - \frac{d}{q})} \sup_{t \in [0, T]} \|w(t)\|_{L^q_\mu}. \quad (2.2.17)$$

De plus, si  $p < d/(d-1)$ , l'hypothèse (2.2.16b) peut être remplacée par  $q \geq 1$ . Lorsque  $p = \infty$ , on peut admettre l'égalité dans (2.2.16c).

### Remarques

1. Le fait que l'opérateur  $\Lambda$  commute avec les translations contrairement aux normes de  $L^p_\vartheta$  et  $L^q_\mu$  nécessite l'hypothèse (2.2.16a). L'inégalité (2.2.16b) signifie qu'il existe un indice  $r$  tel que

$$1 \leq r < \frac{d}{d-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{p}. \quad (2.2.16b')$$

Cette inégalité entraîne que  $\Lambda$  tend vers zéro quand  $T \rightarrow 0^+$ . Enfin, (2.2.16c) exprime la limitation due à la faible décroissance du noyau  $F_{j,h,k}$  à l'infini.

2. L'hypothèse (2.2.16b) n'autorise pas le cas limite  $\vartheta = \mu = 0$  et  $(p, q) = (d, d/2)$ . Ce point ne peut être atteint car F. Oru a montré (voir [66, chap. III]) que l'application bilinéaire  $(u, v) \mapsto \Lambda(uv)$  n'est pas continue sur  $L^\infty([0, T]; L^3) \times L^\infty([0, T]; L^3)$  en dimension  $d = 3$ .  $\diamond$

Les hypothèses sur les indices sont illustrées par les figures 2.2 et 2.3.

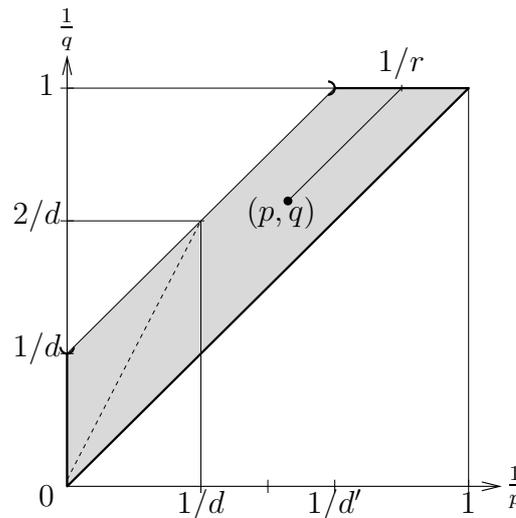


FIG. 2.2 – Indices  $(p, q)$  admissibles.  
La ligne discontinue correspond à  $q = p/2$ .

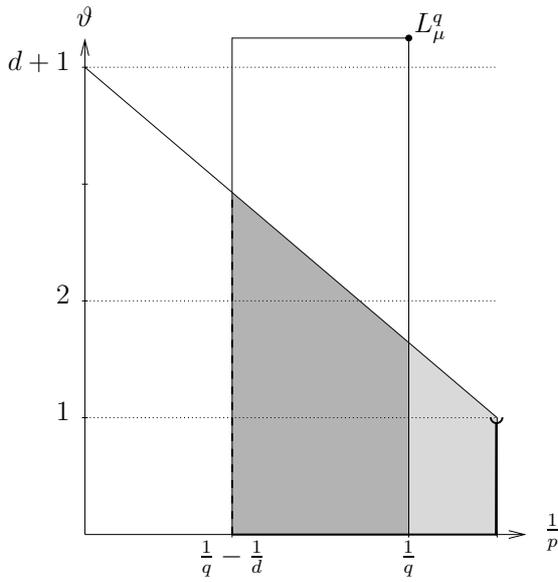


Fig.a - Cas  $\mu \geq d + 1$

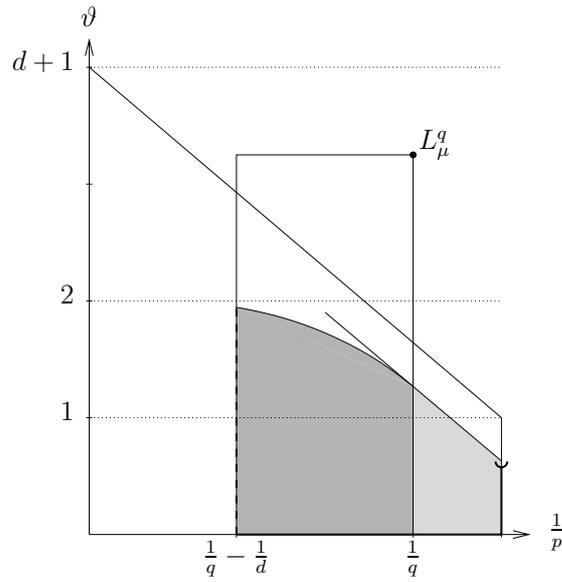


Fig.b - Cas  $2 \leq \mu < d + 1$

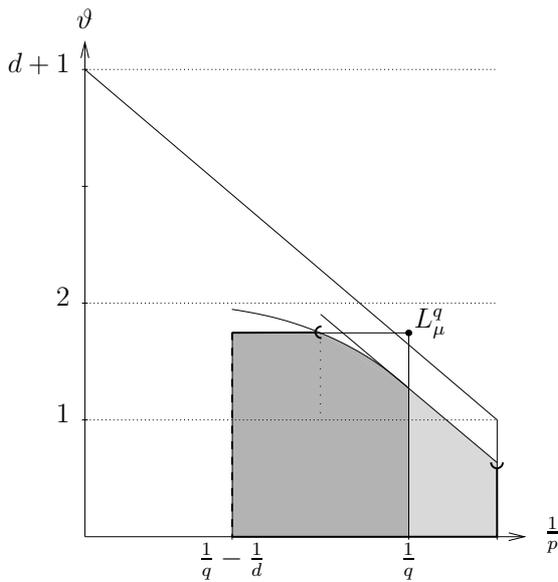


Fig.c - Cas  $1 < \mu < 2$

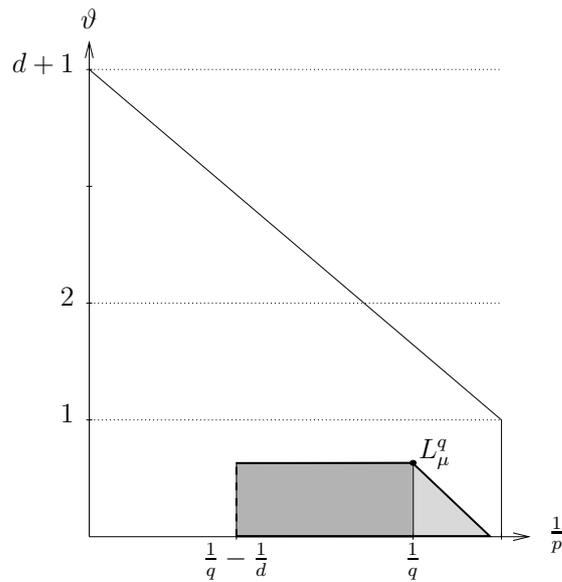


Fig.d - Cas  $\mu \leq 1$

FIG. 2.3 – Poids  $(\vartheta, \mu)$  admissibles.

La famille de diagrammes illustre les divers choix possibles de  $(p, \vartheta)$  pour la continuité

$$\Lambda : L^\infty([0, T]; L_\mu^q) \rightarrow L^\infty([0, T]; L_\vartheta^p).$$

Les bords gauches et supérieurs du domaine gris foncé sont exclus, sauf si  $p = \infty$  ou si  $\vartheta = \mu$ . La partie gris clair (*i.e.*  $p < q$ ) résulte de l'inclusion naturelle des espaces à poids.

La preuve du Théorème 9 nécessite quelques étapes.

L'approche naïve consiste à utiliser une généralisation de la loi de convolution de Young, comme pour la Proposition 1. On est alors conduit à estimer  $\|F_{j;h,k}\|_{L^1([0,T];L^r_\vartheta)}$  avec  $r$  donné par la formule (2.2.16b'). Malheureusement, cette technique n'utilise que l'information  $w \in L^q_\vartheta$ , même si  $\mu > \vartheta$ . Par exemple, pour  $q = p/2$ , l'application directe de (1.1.2) ne conduit à (2.2.17) que lorsque

$$\vartheta < 1 + \frac{d}{p}.$$

L'idée que nous allons mettre en oeuvre est de remplacer l'étude des espaces à poids par un problème équivalent : celui de la continuité  $L^q \rightarrow L^p$  d'un opérateur intégral dont le noyau est asymétrique. On peut alors appliquer le critère suivant.

**Proposition 10 (F.V. [81])** Soient  $p, q$  deux nombres réels tels que  $1 \leq q \leq p < \infty$ . On définit  $r \in [1; \infty]$  par  $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{p}$ . Pour toutes fonctions mesurables positives  $K$  et  $F$ , on a :

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^d} K(\cdot, y) F(y) dy \right\|_{L^p} \leq \sup_y \left( \int_{\mathbb{R}^d} K^r(x, y) \|K(x, \cdot)\|_{L^r}^{p-r} dx \right)^{1/p} \|F\|_{L^q}. \quad (2.2.18)$$

Quand  $p = +\infty$ , la définition de  $r$  devient  $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$  et on a :

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^d} K(\cdot, y) F(y) dy \right\|_{L^\infty} \leq \left( \sup_x \|K(x, \cdot)\|_{L^r} \right) \|F\|_{L^q}. \quad (2.2.19)$$

**Preuve** La loi de Hölder donne l'inégalité ponctuelle suivante :

$$\begin{aligned} \int K(x, y) F(y) dy &= \int [K(x, y)^r]^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} [F(y)^q]^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} [K(x, y)^r F(y)^q]^{\frac{1}{p}} dy \\ &\leq \left( \int K(x, y)^r dy \right)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} \left( \int F(y)^q dy \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \left( \int K(x, y)^r F(y)^q dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

On obtient alors (2.2.18) en calculant la norme  $L^p(dx)$  :

$$\int \left( \int K(x, y) F(y) dy \right)^p dx \leq \iint \|K(x, \cdot)\|_{L^r}^{p-r} K(x, y)^r F(y)^q dx dy \cdot \|F\|_{L^q}^{p-q}. \quad \blacksquare$$

**Remarques** (sur la Proposition 10)

1. Quand  $K(x, y)$  est une fonction de  $x - y$ , le critère se réduit à la loi de convolution de Young.
2. Si  $p = +\infty$ , le critère correspond au lemme de Schur.
3. Par dualité, la Proposition 10 donne :

$$\|K\|_{\mathcal{L}(L^q, L^p)} \leq \min \left\{ \sup_x \left( \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y)^r \|K(\cdot, y)\|_{L^r}^{q'-r} dy \right)^{1/q'} ; \sup_y \left( \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y)^r \|K(x, \cdot)\|_{L^r}^{p-r} dx \right)^{1/p} \right\}.$$

Cette expression est dominée par la formule multiplicative :

$$\|K\|_{\mathcal{L}(L^q, L^p)} \leq \left( \sup_x \int_{\mathbb{R}^d} K^r(x, y) dy \right)^{1/q'} \left( \sup_y \int_{\mathbb{R}^d} K^r(x, y) dx \right)^{1/p} \quad (2.2.20)$$

qui, pour  $p = q = 2$ , se réduit au critère de continuité de Holmgren.  $\diamond$

L'avantage de la formule (2.2.18) sur (2.2.20) apparaît lorsque  $\|K(x, \cdot)\|_{L^r}$  n'est pas simplement borné en  $x$ , mais décroît à l'infini. Cette remarque est la clef de la preuve du Théorème 9.

□ **Preuve du Théorème 9**

Pour démontrer (2.2.17), il suffit de démontrer l'inégalité ponctuelle suivante :

$$\forall t \in [0, T], \quad \| |F(\nu t)| * w \|_{L^p_\vartheta} \leq \tilde{C}_{\nu t} (\nu t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{d}{p}+\frac{d}{q})} \|w\|_{L^q_\mu} \quad (2.2.21)$$

avec une fonction localement bornée  $\tilde{C}_{\nu t}$  puis d'intégrer pour  $t \in [0, T]$ .

On introduit  $W(y) = (1 + |y|)^\mu w(y)$ . Le problème (2.2.21) revient alors à montrer que :

$$\forall t \in [0, T], \quad \left\| \int_{\mathbb{R}^d} K_{\nu t}(\cdot, y) W(y) dy \right\|_{L^p} \leq \tilde{C}_{\nu t} (\nu t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{d}{p}+\frac{d}{q})} \|W\|_{L^q} \quad (2.2.22)$$

pour la même constante  $\tilde{C}_{\nu t}$  et le noyau asymétrique :

$$K_{\nu t}(x, y) = \frac{(1 + |x|)^\vartheta}{(1 + |y|)^\mu} \cdot |F(\nu t, x - y)|.$$

En fait, la preuve n'utilise pas toute la spécificité du noyau hydrodynamique puisqu'elle demeure valable pour tout noyau dominé en module par :

$$\tilde{K}_{\nu t}(x, y) = \frac{(1 + |x|)^\vartheta (1 + |y|)^{-\mu}}{|x - y|^{d-1} (|x - y| + \sqrt{\nu t})^2}.$$

En particulier, d'après (2.2.14), la preuve démontre aussi la continuité de l'opérateur à noyau :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |F(t)| dt : L^p_\vartheta \longrightarrow L^q_\mu.$$

Commençons par éliminer les unités physiques par un changement d'échelle convenable. On pose  $\lambda = \sqrt{\nu t}$ . On a alors l'identité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{K}_{\nu t}(\sqrt{\nu t} \xi, \sqrt{\nu t} \eta) W(\eta) d\eta = (\nu t)^{-\frac{d+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{R}_\lambda(\xi, \eta) W(\eta) d\eta$$

avec  $\mathcal{R}_\lambda(\xi, \eta) = \frac{(1 + \lambda|\xi|)^\vartheta (1 + \lambda|\eta|)^{-\mu}}{|\xi - \eta|^{d-1} (1 + |\xi - \eta|)^2}$ . On en déduit que, pour tout  $t > 0$  :

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^d} K_{\nu t}(\cdot, y) W(y) dy \right\|_{L^p} \leq (\nu t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{d}{p}+\frac{d}{q})} \|\mathcal{R}_\lambda\|_{\mathcal{L}(L^q; L^p)} \|W\|_{L^q}. \quad (2.2.23)$$

Il suffit donc de vérifier que la famille d'opérateurs  $\mathcal{R}_\lambda$  est uniformément bornée de  $L^q$  dans  $L^p$  lorsque  $0 \leq \lambda < 1$ .

L'application de la Proposition 10 nécessite alors quelques calculs.

**Lemme 11** Pour  $\lambda > 0$  et  $r$  défini par (2.2.16b'), on a les estimations suivantes :

$$\|\mathcal{R}_\lambda(\xi, \cdot)\|_{L^r} \leq C(1 + \lambda)^2 (1 + \lambda|\xi|)^{-s} \quad (2.2.24)$$

avec  $s = \min \{\mu; d + 1\} - \vartheta \geq 0$ . De plus, si  $p < \infty$  :

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{R}_\lambda^r(\xi, \eta) \|\mathcal{R}_\lambda(\xi, \cdot)\|_{L^r}^{p-r} d\xi \leq C' \Phi(\lambda)^p. \quad (2.2.25)$$

La fonction  $\Phi$  est localement bornée; elle est donnée par :

$$\Phi(\lambda) = \begin{cases} (1 + \lambda)^{\vartheta - \frac{p-r}{p}\mu} & \text{when } \mu < \frac{d}{r} \\ (1 + \lambda)^{\vartheta - d(1 - \frac{1}{q})} (\log(1 + \lambda))^{1 - \frac{1}{q}} & \text{when } \mu = \frac{d}{r} \\ (1 + \lambda)^{\vartheta - d(1 - \frac{1}{q}) - \frac{p-r}{p}[d+1-\mu]^+} & \text{when } \mu > \frac{d}{r}. \end{cases}$$

La Proposition 10 entraîne alors que  $\|\mathcal{R}_\lambda\|_{\mathcal{L}(L^q; L^p)} \leq C \Phi(\lambda)$  en général. Si  $p = +\infty$ , on obtient plutôt  $\|\mathcal{R}_\lambda\|_{\mathcal{L}(L^q; L^\infty)} \leq C(1 + \lambda)^2$  et dans ce cas, l'égalité  $\vartheta = \min\{\mu; d + 1\}$  est possible.

**Remarque** - La constante  $\tilde{C}_{\nu t}$  des inégalités (2.2.21) et (2.2.22) est donnée par  $\tilde{C}_{\nu t} = \Phi(\sqrt{\nu t})$ . Celle du Théorème 9 est  $C_{\nu T} = C \sup_{t \in [0, T]} \Phi(\sqrt{\nu t})$  avec  $C$  ne dépendant que de  $d, p, q, \vartheta$  et  $\mu$ .  $\diamond$

La démonstration de la Proposition 9 se ramène donc à la seule vérification du lemme précédent.

□ **Preuve de (2.2.24) : une estimation hypergéométrique**

La principale difficulté de (2.2.24) consiste à estimer convenablement  $\mathcal{R}_\lambda(\xi, \eta)$  lorsque  $\eta$  est négligeable devant  $\xi$ . On utilise alors le résultat élémentaire suivant :

**Lemme 12** *Etant donnés  $\alpha > 0$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , on a l'identité remarquable suivante :*

$$\int_0^t \frac{\tau^\alpha}{(1 + \lambda\tau)^\beta} \frac{d\tau}{\tau} = \frac{t^\alpha}{(1 + \lambda t)^{\min\{\alpha, \beta\}}} \phi_{\alpha, \beta}(\lambda t), \quad (2.2.26)$$

avec une fonction  $\phi_{\alpha, \beta}$  bornée lorsque  $\alpha \neq \beta$  et à croissance logarithmique dans le cas contraire.

**Preuve** On désigne par  $F_\lambda(\alpha, \beta; t)$  le membre de gauche de (2.2.26). Le changement de variable  $\sigma = (\lambda\tau)^\alpha$  donne

$$F_\lambda(\alpha, \beta; t) = \frac{\lambda^{-\alpha}}{\alpha} \int_0^{(\lambda t)^\alpha} \frac{d\sigma}{(1 + \sigma^{1/\alpha})^\beta}.$$

Comme  $\alpha > 0$ , on a  $1 + \sigma \lesssim (1 + \sigma^{1/\alpha})^\alpha$ . A un facteur multiplicatif borné près, l'intégrale est donc contrôlée par

$$\int_0^{(\lambda t)^\alpha} \frac{d\sigma}{(1 + \sigma)^{\beta/\alpha}} = \frac{(1 + (\lambda t)^\alpha)^{1 - \beta/\alpha} - 1}{1 - \beta/\alpha} \leq C_{\alpha, \beta} \frac{(\lambda t)^\alpha}{(1 + \lambda t)^{\min(\alpha, \beta)}}$$

si  $\alpha \neq \beta$ , ou bien par

$$\int_0^{(\lambda t)^\alpha} \frac{d\sigma}{1 + \sigma} = \log(1 + (\lambda t)^\alpha)$$

lorsque  $\alpha = \beta$ . ■

Revenons à la preuve de (2.2.24). La partie facile est l'estimée suivante :

$$\int_{|\eta| > \frac{|\xi|}{2}} \mathcal{R}_\lambda^r(\xi, \eta) d\eta \leq (1 + \lambda|\xi|)^{r(\vartheta - \mu)} \int_0^\infty \frac{\omega_d d\rho}{\rho^{(r-1)(d-1)} (1 + \rho)^{2r}}$$

avec  $\omega_d$  le volume de la sphère unité de  $\mathbb{R}^d$ . Cette estimation nécessite que  $\frac{d}{d+1} < r < \frac{d}{d-1}$ ; cette hypothèse est compatible avec (2.2.16b'). Dans l'autre cas, on utilise la formule hypergéométrique (2.2.26) :

$$\int_{|\eta| \leq \frac{|\xi|}{2}} \mathcal{R}_\lambda^r(\xi, \eta) d\eta \leq B |\xi|^{d-r(d-1)} (1 + |\xi|)^{-2r} (1 + \lambda|\xi|)^{r\vartheta - \min(\mu r, d)}$$

avec  $B = \omega_d \phi(\lambda|\xi|)$  et  $\phi$  bornée ou (si  $\mu r = d$ ) à croissance logarithmique. On en déduit :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{R}_\lambda^r(\xi, \eta) d\eta \leq (1 + \lambda|\xi|)^{r(\vartheta-\mu)} \left\{ A + B \frac{|\xi|^{d-r(d-1)} (1 + \lambda|\xi|)^{[\mu r - d]^+}}{(1 + |\xi|)^{2r}} \right\}. \quad (2.2.27)$$

Pour simplifier cette expression, on discute suivant la taille de  $\mu$  :

- Si  $0 \leq \mu < \frac{d}{r}$ , on remarque que

$$1 + \frac{|\xi|^{d-r(d-1)}}{(1 + |\xi|)^{2r}} \leq 2,$$

donc le membre de droite de (2.2.27) est borné par  $C (1 + \lambda|\xi|)^{-r(\mu-\vartheta)}$ .

- Si  $\mu = \frac{d}{r}$ , on prend en compte la croissance logarithmique de  $B$  :

$$\frac{|\xi|^{d-r(d-1)}}{(1 + |\xi|)^{2r}} \log(1 + \lambda|\xi|) \leq \frac{\log(1 + \lambda|\xi|)}{(1 + |\xi|)^{(d+1)r-d}} \left( \frac{|\xi|}{1 + |\xi|} \right)^{d-r(d-1)} \leq \log(1 + \lambda).$$

Le membre de droite de (2.2.27) est alors borné par  $C \log(1 + \lambda) (1 + \lambda|\xi|)^{-r(\mu-\vartheta)}$ .

- Si  $\frac{d}{r} < \mu$  de nouvelles puissances de  $\lambda|\xi|$  apparaissent au numérateur et le membre de droite de (2.2.27) est contrôlé par :

$$\begin{aligned} (1 + \lambda|\xi|)^{r(\vartheta-\mu)} \left\{ 1 + \frac{(1 + \lambda|\xi|)^{\mu r - d}}{(1 + |\xi|)^{(d+1)r-d}} \left( \frac{|\xi|}{1 + |\xi|} \right)^{d-r(d-1)} \right\} \\ \leq (1 + \lambda|\xi|)^{r(\vartheta-\mu)} + (1 + \lambda|\xi|)^{r(\vartheta-d-1)} \left( \frac{1 + \lambda|\xi|}{1 + |\xi|} \right)^{(d+1)r-d} \\ \leq (1 + \lambda)^{(d+1)r-d} (1 + \lambda|\xi|)^{r(\vartheta-\min\{\mu; d+1\})}. \end{aligned}$$

Comme  $(d+1)r - d < 2r$ , le premier facteur est borné par  $(1 + \lambda)^{2r}$ . Ce calcul achève la preuve de l'estimée (2.2.24).

□ **Preuve de (2.2.25) : le principe de "moins localisation" pour la convolution**

Considérons maintenant le cas où  $p < \infty$ . On veut démontrer (2.2.25). Grâce à (2.2.24), il suffit de vérifier que l'intégrale

$$I(\lambda, \eta) = \frac{1}{(1 + \lambda|\eta|)^{\mu r}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(1 + \lambda|\xi|)^\alpha}{|\xi - \eta|^{(d-1)r} (1 + |\xi - \eta|)^{2r}} d\xi$$

est uniformément bornée par  $C (1 + \lambda)^\alpha$  pour  $\lambda > 0$  et  $\eta \in \mathbb{R}^d$ . Les exposants sont donnés par :

$$r = \frac{pq}{p(q-1) + q} \quad \alpha = r\vartheta - (p-r)s \quad \text{et} \quad s = \min\{\mu; d+1\} - \vartheta.$$

On vérifie immédiatement que cette intégrale converge lorsque

$$\alpha < (d+1)r - d. \quad (2.2.28)$$

Cette contrainte est satisfaite par (2.2.16c).

L'intégrale  $I(\lambda, \eta)$  étant un produit de convolution, son comportement à l'infini est dicté par le facteur le moins localisé, conformément au lemme suivant.

**Lemme 13** Si  $\beta \geq \alpha \geq 0$ , on a :

$$\|u * v\|_{L^\infty_{-\alpha}} \leq 2^\alpha \|u\|_{L^\infty_{-\alpha}} \|v\|_{L^1_\beta}. \quad (2.2.29)$$

**Preuve** L'éclatement des exposants donne, pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  :

$$\begin{aligned} & (1 + |x|)^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x - y|)^\alpha |v(y)| dy \\ & \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \left\{ \frac{1}{(1 + |y|)^{\beta - \alpha}} \cdot \left( \frac{1 + |x - y|}{(1 + |x|)(1 + |y|)} \right)^\alpha \right\} \|v\|_{L^1_\beta} \leq 2^\alpha \|v\|_{L^1_\beta}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant de celle de Peetre (1.1.3). ■

Terminons la preuve de (2.2.25) La convolution étant une opération commutative, on a :

$$I(\lambda, \eta) = \frac{1}{(1 + \lambda|\eta|)^{\mu r}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(1 + \lambda|\xi - \eta|)^\alpha}{|\xi|^{(d-1)r} (1 + |\xi|)^{2r}} d\xi.$$

Le calcul qui démontre (2.2.29) donne cette fois :

$$I(\lambda, \eta) \leq \frac{1}{(1 + \lambda|\eta|)^{\mu r - \alpha}} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left( \frac{1 + \lambda|\xi - \eta|}{(1 + \lambda|\xi|)(1 + \lambda|\eta|)} \right)^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(1 + \lambda|\xi|)^\alpha}{|\xi|^{(d-1)r} (1 + |\xi|)^{2r}} d\xi.$$

Le premier facteur est uniformément inférieur à 1 car  $\alpha \leq \mu r$ . En effet, si  $\mu \leq d + 1$ , on a  $\alpha = p\vartheta - (p - r)\mu \leq r\mu$  grâce à (2.2.16a) et si  $\mu > d + 1$ , l'hypothèse (2.2.16c) implique  $\vartheta < d + 1 - \frac{d}{p}$  et donc  $-\frac{d}{p} < r \left( \mu - \frac{d+1}{p} \right)$ . L'inégalité de Peetre (1.1.3) borne le second facteur par  $2^\alpha$ . La factorisation de  $(1 + \lambda)^\alpha$  dans la dernière intégrale donne alors :

$$I(\lambda, \eta) \leq 2^\alpha (1 + \lambda)^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(1 + |\xi|)^\alpha}{|\xi|^{(d-1)r} (1 + |\xi|)^{2r}} d\xi,$$

et (2.2.25) en découle immédiatement.

### Remarques

1. Contrairement au cas  $p = +\infty$ , le cas d'égalité de (2.2.16c) n'est pas acceptable car (2.2.28) doit être une inégalité stricte.
2. Pour souligner l'importance de l'asymétrie du critère (2.2.18) dans la preuve précédente, il est instructif de comprendre ce qui se serait passé si on avait utilisé la formule symétrique (2.2.20). Cela revient à utiliser seulement (2.2.24), *i.e.* le fait que  $\int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{R}_\lambda(\cdot, \eta)|^r d\eta$  est uniformément borné. Pour borner l'intégrale en  $d\xi$ , on aurait dû alors estimer à nouveau  $I(\lambda, \eta)$  mais cette fois avec  $\alpha = r\vartheta$ . Dans ce cas, (2.2.28) entraînerait  $\vartheta < 1 + \frac{d}{q} - \frac{d}{p}$ . Cette dernière condition est malheureusement trop restrictive et ne conduirait pas au Théorème 9.

Le critère de la Proposition 10 est donc bien le point crucial de la preuve précédente. ◇

## 2.3 Conservation des propriétés de localisation spatiale

On est maintenant en mesure d'étudier la propagation de l'information de localisation spatiale. Dans un premier temps, on ne s'intéresse qu'à l'étude d'un intervalle de temps fini. La question de la localisation uniforme de la solution dans l'espace et dans le temps sera discutée au paragraphe §2.4.3.

### 2.3.1 Existence de solutions localisées

La question de la propagation de l'information de localisation est connue pour les espace  $L_{\vartheta}^{\infty}$ .

**Théorème 14 (L. Brandolese)** *Soit  $d \geq 2$ . Il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que pour tout champ de vecteur  $a \in L^{\infty}(\mathbb{R}^d)$  à divergence nulle, on peut trouver*

$$T \geq \gamma \min \{1; \nu \|a\|_{L^{\infty}}^{-2}\}$$

*et une unique solution  $u \in C_w([0, T]; L^{\infty})$  de (NSi). Cette solution est régulière pour  $t > 0$ . De plus, si  $a \in L_{\vartheta}^{\infty}$  avec  $\vartheta \geq 0$ , on a aussi :*

$$u \in C_w([0, T]; L_{\vartheta}^{\infty}) \tag{2.3.1}$$

avec  $\vartheta = \min\{\vartheta; d + 1\}$ .

**Preuve** Voir par exemple [58, chapitre 25], ou ci-dessous. ■

Le premier objectif est de généraliser ce résultat aux espaces à poids  $L_{\vartheta}^p$  avec  $p \neq +\infty$ .

**Théorème 15 (F.V. [81])** *On suppose que  $\vartheta \geq 0$  et  $p > d \geq 2$  vérifient :*

$$\vartheta + \frac{d}{p} < d + 1. \tag{2.3.2}$$

*Si  $p = \infty$ , l'égalité est possible dans (2.3.2). Il existe une constante  $\gamma > 0$ , indépendante de  $\nu$ , telle que pour tout champ  $a \in L_{\vartheta}^p(\mathbb{R}^d)$  et à divergence nulle, il existe un réel  $T > 0$  vérifiant*

$$T^{1-\frac{d}{p}} \geq \gamma \min \{1; \nu^{1+\frac{d}{p}} \|a\|_{L_{\vartheta}^p}^{-2}\} \tag{2.3.3}$$

*et une unique solution  $u \in C([0, T]; L_{\vartheta}^p)$  de (NSi).*

*On désigne par  $T_{p,\vartheta}^*(a)$  le temps de vie dans  $L_{\vartheta}^p$  (i.e. la longueur de l'intervalle de définition du prolongement maximal de la solution). Si de plus  $a \in L_{\mu}^q$  où  $(q, \mu)$  est un autre couple d'indices vérifiant l'hypothèse (2.3.2), alors*

$$T_{p,\vartheta}^*(a) = T_{q,\mu}^*(a) \tag{2.3.4}$$

*et les deux solutions coïncident.*

#### Remarques

1. Comme  $(q, \mu) = (p, 0)$  est un couple admissible pour (2.3.2), ce théorème démontre la propagation de l'information initiale de décroissance tant que la solution existe dans  $L^p$ . En particulier, si la solution est globale et régulière (voir [58, chap. 14-16]), on a  $u(t) \in L_{\vartheta}^p$  pour tout  $t > 0$ .
2. Comme  $T^*(u(t)) = T^*(u(0)) - t$ , on peut intégrer (2.3.3) sur  $[0, T]$ . On obtient alors :

$$\int_0^T \|u(t)\|_{L_{\vartheta}^p}^{\vartheta} dt < +\infty \quad \text{avec} \quad \frac{2}{\vartheta} + \frac{d}{p} \leq 1 \quad \implies \quad T_{p,\vartheta}^*(u(0)) > T.$$

◇

La condition (2.3.2) est optimale pour le problème de la propagation de la décroissance. L. Brandolese et Y. Meyer [12] ont en effet démontré que, sous une hypothèse technique mineure, une solution  $u = (u_1, \dots, u_d)$  de (NS) telle que :

$$\sup_{t \in [T, T']} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|) |u(t, x)| dx < +\infty \quad (2.3.5a)$$

doit nécessairement vérifier aussi les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\forall t \in [T, T'], \quad \exists \lambda(t) \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} u_h u_k(t, x) dx = \lambda(t) \delta_{h,k} \quad (2.3.5b)$$

qui ne sont génériquement pas satisfaites. Autrement dit, aucune solution stable ne peut décroître strictement plus vite à l'infini que  $|x|^{-d-1}$  et dans ce cas, l'excès de localisation est instantanément diffusé. On reviendra plus en détail sur ce phénomène au paragraphe §2.6, dans lequel on montrera en particulier que (2.3.5a) entraîne (2.3.5b) sans aucune hypothèse technique supplémentaire.

Le fait qu'une propriété de forte localisation spatiale d'une donnée de Cauchy n'est pas, en général, propagée par le flot de Navier-Stokes n'empêche pas qu'il puisse exister des solutions instables exceptionnellement décroissantes.

Par exemple, pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, le champ  $a \in \mathbb{R}^3$  défini par

$$\begin{cases} a_1(x) = \varepsilon x_1 (x_3^2 - x_2^2) e^{-|x|^2} \\ a_2(x) = \varepsilon x_2 (x_1^2 - x_3^2) e^{-|x|^2} \\ a_3(x) = \varepsilon x_3 (x_2^2 - x_1^2) e^{-|x|^2} \end{cases}$$

est associé à une solution régulière  $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L_6^\infty(\mathbb{R}^3))$  (voir §2.4.3).

### Preuve du Théorème 15

L'équation (NSi) est un problème de point fixe dans l'espace  $X_T = C_w([0, T]; L_\vartheta^\infty)$  défini au §1.1.1 :

$$u(t) = e^{\nu t \Delta} a + \mathbb{B}(u, u)$$

avec

$$\mathbb{B}(u, v) = - \sum_{h=1}^d \sum_{k=1}^d \int_0^t F_{j;h,k}(\nu(t-s)) * (u_h v_k)(s) ds.$$

On construit donc une solution sur un intervalle  $[0, T]$  avec le théorème de Picard (voir par exemple [20, chap. 1 - §2] ou [58, chap. 15]).

D'après le Corollaire 2, on a déjà :

$$\|e^{\nu t \Delta} a\|_{X_T} \leq \kappa \max \left\{ 1, \sqrt{\nu T} \right\}^\vartheta \|a\|_{X_0} \quad (2.3.6)$$

avec  $\kappa \geq 1$ . Le point crucial est la continuité de  $\mathbb{B}$  sur l'espace  $X_T$ .

**Lemme 16** *Pour  $\nu T < 1$ , il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $p$ ,  $\vartheta$  et  $d$  telle que :*

$$\|\mathbb{B}(u, v)\|_{X_T} \leq \mathcal{B}_T \|u\|_{X_T} \|v\|_{X_T} \quad (2.3.7)$$

avec  $\mathcal{B}_T = C \nu^{-1} (\nu T)^{\frac{1}{2}(1-\frac{d}{p})}$ .

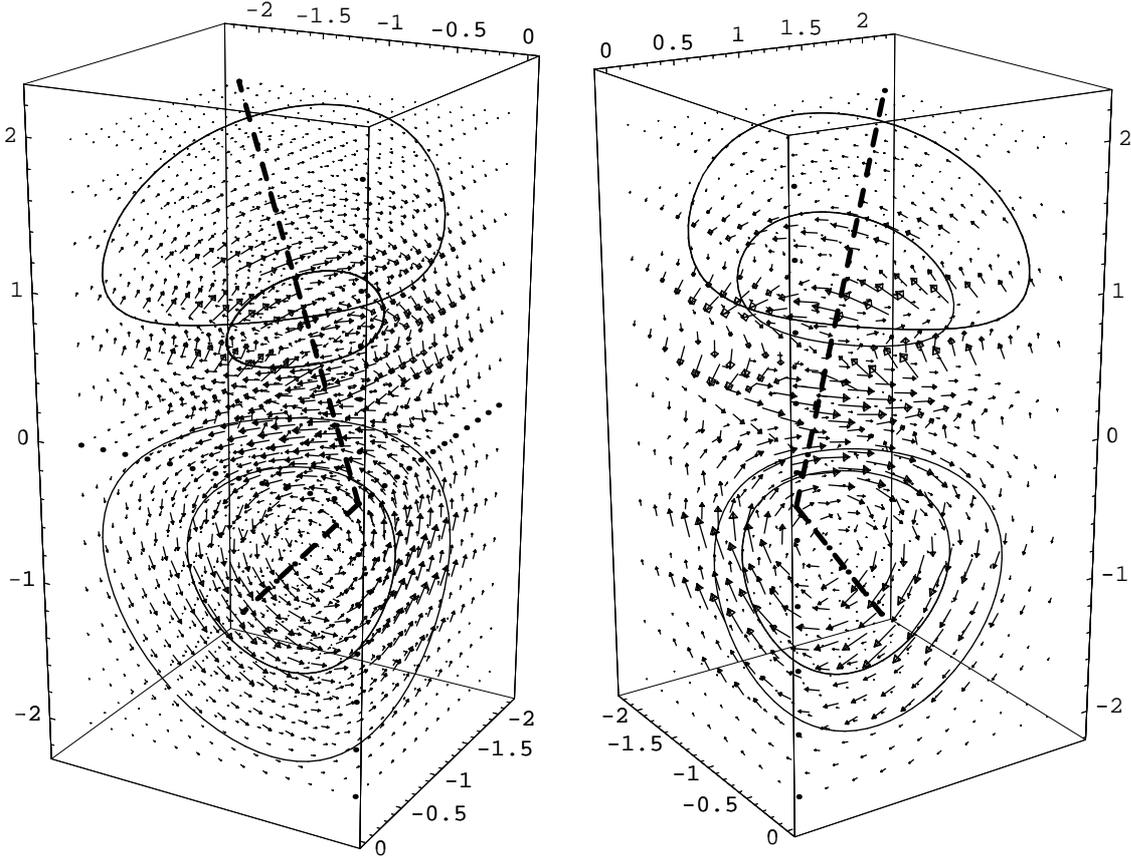


FIG. 2.4 – Champ symétrique  $a \in \mathbb{R}^3$  avec quelques courbes intégrales.

**Preuve** L'inégalité de Hölder donne :

$$\|uv\|_{L^\infty([0,T];L^{p/2}_\theta)} \leq \|u\|_{L^\infty([0,T];L^p_\theta)} \|v\|_{L^\infty([0,T];L^p_\theta)}$$

Comme  $\mathcal{B}_j(u, v) = -\sum_{h,k} \Lambda_{j;h,k}(u_h u_k)$ , il suffit d'appliquer l'inégalité (2.2.17) du Théorème 9 :

$$\|\Lambda_{j;h,k} w\|_{L^\infty([0,T];L^p_\theta)} \leq \frac{C}{\nu} (\nu T)^{\frac{1}{2}(1-\frac{d}{p})} \|w\|_{L^\infty([0,T];L^{p/2}_\theta)}.$$

avec  $w = u_h v_k$ . ■

Lorsque  $T > 0$  est assez petit pour vérifier simultanément  $\nu T < 1$  et

$$4\kappa \mathcal{B}_T \|a\|_{X_0} < 1, \tag{2.3.8}$$

l'opérateur

$$v \mapsto \mathbb{B}(e^{\nu t \Delta} a, e^{\nu t \Delta} a) + 2\mathbb{B}(e^{\nu t \Delta} a, v) + \mathbb{B}(v, v)$$

est contractant ; il a donc un point fixe  $v \in X_T$ . On pose alors :

$$u(t) = e^{\nu t \Delta} a + v(t).$$

Par construction,  $u$  est une solution de l'équation (NSi) définie sur  $[0, T]$ .

Si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions de (NSi) dans  $X_T$ , définies respectivement sur  $I_1$  et  $I_2$ , on vérifie immédiatement, grâce à (2.3.7), que l'ensemble

$$I := \{t \geq 0 \text{ s.t. } \forall \tau \in [0, t], u_1(\tau) = u_2(\tau)\}$$

est simultanément ouvert, fermé et non vide ; c'est donc  $I_1 \cap I_2$ . On peut donc définir le temps de vie  $T_{p,\vartheta}^*$  comme la longueur de l'intervalle de définition du prolongement maximal de la première solution construite. Cette solution est d'ailleurs unique dans l'ensemble  $\bigcup_{0 \leq T < T_{p,\vartheta}^*} X_T$ .

La solution maximale étant une extension de la solution construite par le théorème de Picard, le temps de vie  $T_{p,\vartheta}^*$  vérifie l'inégalité contraire à (2.3.8), c'est-à-dire (2.3.3).

On doit vérifier la continuité de la solution à l'instant initial. L'inégalité (2.3.7) entraîne

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|v(t)\|_{L_{\vartheta}^p} = 0$$

donc  $u(t) = a + (e^{\nu t \Delta} - \text{Id}) a + v(t)$  converge vers la donnée de Cauchy lorsque  $t \rightarrow 0^+$  (éventuellement seulement au sens faible si  $p = +\infty$ ).

Le dernier point est l'affirmation de l'identité des temps de vie (2.3.4). La démonstration fait l'objet du paragraphe suivant.

### 2.3.2 Localisation dans plusieurs espaces à poids

L'inclusion naturelle des espaces à poids pour  $p \geq q$  et  $\vartheta + \frac{d}{p} > \mu + \frac{d}{q}$  :

$$\|u(t)\|_{L_{\mu}^q} \leq \|u(t)\|_{L_{\vartheta}^p} \quad (2.3.9)$$

entraîne  $T_{p,\vartheta}^* \leq T_{q,\mu}^*$ . L'inégalité inverse repose sur un lemme de Gronwall.

**Théorème 17 (F.V. [81])** Soient  $(p, \vartheta)$  et  $(q, \mu)$  deux couples d'indices tels que  $\mu \geq 0$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ ,

$$q > d, \quad \vartheta + \frac{d}{p} < d + 1 \quad \text{et} \quad \vartheta < 1 + \frac{d}{q} + \left(\frac{p}{q'} - 1\right) \mu \quad (2.3.10)$$

la dernière condition n'étant nécessaire que si  $\vartheta + \mu < d + 1$ . Toute solution  $u$  de (NSi) vérifie :

$$\|u(t)\|_{L_{\vartheta}^p} \leq C \|a\|_{L_{\vartheta}^p} \exp \left( \frac{C t^{1-\sigma}}{\nu^\sigma} \sup_{s \in [0, t]} \|u(s)\|_{L_{\mu}^q} \right) \quad (2.3.11)$$

avec  $\sigma = \frac{1}{2}(1 + \frac{d}{q})$  et  $C$  une fonction localement bornée (positive) de  $\nu t$ . L'égalité  $\vartheta = d + 1$  est possible lorsque  $p = +\infty$ . Lorsque  $1 \leq p < \frac{d}{d-1}$ , l'hypothèse  $q > d$  résulte des autres.

**Remarque** - L'hypothèse  $q > d$  interdit fort heureusement d'utiliser la norme  $L^2$  pour contrôler les autres normes. . . Ce résultat ne fournit donc une information pertinente que si la solution est a priori supposée régulière.  $\diamond$

**Corollaire 18** Soit  $u$  une solution de (NS) avec donnée de Cauchy  $a \in L_{\vartheta}^p \cap L^\infty$  avec  $p \geq 1$  et

$$\vartheta + \frac{d}{p} \leq d + 1 - \varepsilon_{1/p}.$$

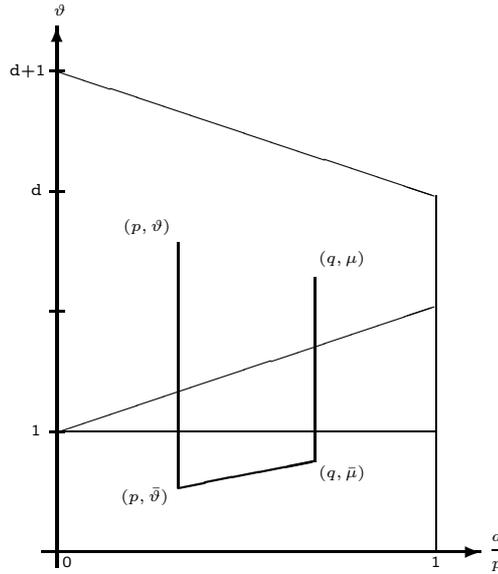


FIG. 2.5 – Étapes dans la preuve de (2.3.4) – Échelle :  $d = 3$ .

Alors  $u(t) \in L^p_\vartheta$  tant que la solution reste bornée dans  $L^\infty([0, t] \times \mathbb{R}^d)$ . De plus, si  $0 \leq \vartheta < 1$ , on a pour tout  $t > 0$  :

$$\|u(t)\|_{L^p_\vartheta} \leq C \|a\|_{L^p_\vartheta} \exp \left( C \sqrt{\frac{t}{\nu}} \|u\|_{L^\infty([0, t] \times \mathbb{R}^d)} \right). \quad (2.3.12)$$

Lorsque  $\vartheta > 1$  (donc  $p \neq 1$ ), on dispose aussi d'une inégalité de normes, mais avec un très mauvais contrôle de la croissance de la constante avec le temps (exponentielles itérées). Ce résultat est cependant exactement complémentaire de la propriété de diffusion instantanée (2.3.5).

□ Application : fin de la preuve du Théorème 15

Le Théorème 17 implique que  $T^*_{p, \vartheta}$  est indépendant de  $\vartheta$  pourvu que  $\vartheta + \frac{d}{p} < d + 1$  (avec égalité si  $p = \infty$ ). En effet, pour  $p = q > d$  et  $0 \leq \mu \leq \vartheta$ , les inégalités (2.3.9) et (2.3.11) entraînent que  $T^*_{p, \vartheta} = T^*_{p, \mu}$  si

$$\vartheta + \frac{d}{p} < d + 1 \quad \text{et} \quad \vartheta < 1 + \frac{d}{p} + (p - 2)\mu.$$

Une première application avec  $\mu = 0$  donne  $T^*_{p, \vartheta} = T^*_{p, 0}$  lorsque  $\vartheta < 1 + \frac{d}{p}$ . Une seconde avec  $\mu = d/p$  donne ensuite  $T^*_{p, \vartheta} = T^*_{p, d/p}$  pour  $1 + \frac{d}{p} \leq \vartheta < d + \frac{d}{p^2}$ .

Par ailleurs, l'hypothèse (2.3.10) est vérifiée pour tous les couples  $(p, \vartheta)$  et  $(q, \mu)$  tels que  $\vartheta, \mu < 1$  et  $p, q > d$ . Dans ce cas, on a aussi  $T^*_{p, \vartheta} = T^*_{q, \mu}$ .

La conclusion générale (2.3.4) s'obtient alors par transitivité de l'égalité.

□ Preuve du Théorème 17

Soit  $u \in L^\infty([0, T]; L^q_\mu)$  une solution de (NSi) avec  $u(0) = a \in L^p_\vartheta$ . Pour tout  $s \leq t$ , on a aussi :

$$u_j(t) = e^{\nu(t-s)\Delta} u_j(s) + \sum_{h,k} \int_s^t F_{j;h,k}(\nu(t-t')) * (u_h u_k(t')) dt'.$$

Si  $u = 0$ , (2.3.11) est évident ; on suppose désormais que  $u \neq 0$ .

L'inégalité (2.3.6) garantit l'existence d'une constante  $A > 0$  ne dépendant que de  $d$ , de  $\vartheta$  et de  $\nu T$  telle que

$$\sup_{\tau \in [0, T]} \|e^{\nu\tau\Delta} v\|_{L_{\vartheta}^p} \leq A \|v\|_{L_{\vartheta}^p}. \quad (2.3.13a)$$

Le terme non-linéaire est contrôlé par l'inégalité de Hölder :

$$\|u_h u_k(s)\|_{L_{\vartheta+\mu}^{\mathbb{H}(p,q)}} \leq \|u_h(s)\|_{L_{\vartheta}^p} \|u_k(s)\|_{L_{\mu}^q},$$

avec  $\mathbb{H}(p, q) = \frac{pq}{p+q}$ . D'après (2.2.21), on a en particulier :

$$\|F_{j;h,k}(t) * w\|_{L_{\vartheta}^p} \leq B (\nu t)^{-\sigma} \|w\|_{L_{\vartheta+\mu}^{\mathbb{H}(p,q)}}.$$

avec  $\sigma = \frac{1}{2}(1 + \frac{d}{q})$  et  $B > 0$  ne dépendant que des paramètres  $d, p, \vartheta, q, \mu$  et  $\nu T$ . On a donc :

$$\|F_{j;h,k}(\nu(t-\tau)) * (u_h u_k)(\tau)\|_{L_{\vartheta}^p} \leq B (\nu(t-\tau))^{-\sigma} \|u_h(\tau)\|_{L_{\vartheta}^p} \|u_k(\tau)\|_{L_{\mu}^q} \quad (2.3.13b)$$

pour  $\tau \leq t \leq T$ .

En combinant (2.3.13a) et (2.3.13b), on obtient :

$$\|u(t)\|_{L_{\vartheta}^p} \leq A \|u(s)\|_{L_{\vartheta}^p} + \frac{B}{\nu^{\sigma}} \cdot \frac{(t-s)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \cdot \sup_{\tau \in [s, t]} \|u(\tau)\|_{L_{\vartheta}^p} \times \sup_{\tau \in [s, t]} \|u(\tau)\|_{L_{\mu}^q} \quad (2.3.14)$$

pour tout couple  $(s, t) \in [0, T]^2$  tel que  $s \leq t$ .

On définit alors une suite croissante  $(T_n)_{n \geq 0}$  par

$$T_n = n\Delta \quad \text{avec} \quad \Delta^{1-\sigma} = A \left( \frac{B}{(1-\sigma)\nu^{\sigma}} \sup_{\tau \in [0, T]} \|u(\tau)\|_{L_{\mu}^q} \right)^{-1}.$$

On introduit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $T_N \leq T < T_{N+1}$  et  $I_n = [T_n, T_{n+1}] \cap [0, T]$ . On pose enfin :

$$M_n = \sup_{\tau \in I_n} \|B(\tau)\|_{L_{\vartheta}^p}.$$

Par construction,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L_{\vartheta}^p} = \max_{0 \leq i \leq N} M_i.$$

L'inégalité (2.3.14) pour  $s = T_n$  et  $t \in I_n$  donne :

$$M_0 \leq 2A \|a\|_{L_{\vartheta}^p} \quad \text{et} \quad M_n \leq 2A M_{n-1} \quad (1 \leq n \leq N).$$

On a donc

$$\max_{0 \leq i \leq N} M_i \leq (2A)^{N+1} \|a\|_{L_{\vartheta}^p},$$

ce qui démontre (2.3.11).

### 2.3.3 Propagation de la localisation des solutions faibles

L'équation (NS) possède des solutions faibles, globales en temps.

**Théorème 19 (J. Leray [60])** *Pour toute donnée initiale  $a \in L^2$  à divergence nulle, il existe une solution  $u$  au sens des distributions de (NS), vérifiant l'inégalité d'énergie :*

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \frac{1}{2} \|a\|_{L^2}^2. \quad (2.3.15)$$

On peut montrer que la régularité des solutions de Leray est équivalente à leur unicité (voir [77]). La question de savoir si ces solutions sont nécessairement régulières est ouverte (voir [35] pour le problème mis à prix). Pour un tour d'horizon rapide des résultats connus, on peut par exemple consulter les traités [25], [58], [61], [78] ainsi que, par exemple, les articles [21], [24], [27], [31], [40], [53], [55], [65] et les références internes.

La question de la localisation des solutions faibles se formule de façon plus naturelle en utilisant le taux de décroissance  $\eta_1$  défini par (1.1.5).

On a démontré précédemment que si  $u$  est une solution de (NSi), l'alternative suivante est vérifiée tant que  $u(t) \in L^\infty$  :

1. si  $\eta_1(a) \leq d + 1$ , alors  $\eta_1(u(t)) \geq \eta_1(a)$ , *i.e.* l'information de localisation se propage ;
2. si  $\eta_1(u) > d + 1$  sur  $[T, T']$ , alors  $(u_h|u_k)_{L^2} = \lambda(t)\delta_{h,k}$ , *i.e.* génériquement, l'excès de localisation ne se propage pas.

Ceci est une simple reformulation de (2.3.5) et (2.3.12) avec  $p = 1$ . La question est maintenant de comprendre ce qui se passe lorsqu'on omet l'hypothèse que  $u$  est bornée.

**Théorème 20** *Soit  $u$  une solution faible de (NS) telle que  $\|u(t)\|_{L^2} \leq \|a\|_{L^2}$  pour tout  $t > 0$ . On a alors :*

$$\eta_1(u(t)) \geq \min\{d; \eta_1(a)\}. \quad (2.3.16)$$

Une part de l'information de localisation est donc propagée par le flot. Le cas  $\eta_1(a) \in ]d; d + 1[$  est ouvert.

**Preuve** On écrit (NS) sous forme intégrale. On a donc

$$u_j(t) = e^{\nu t \Delta} a_j + \sum_{h,k} \int_0^t F_{j;h,k}(\nu(t-s)) * (u_h u_k(s)) ds.$$

Par hypothèse, le produit  $u_h u_k$  est uniformément borné dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^d))$ . Le Théorème 9 appliqué avec  $p = q = 1$  et  $\vartheta = \mu = 0$  entraîne donc :

$$\|u(t) - e^{\nu t \Delta} a\|_{L^1} \leq C(\nu t) \sqrt{\frac{t}{\nu}} \|a\|_{L^2}^2$$

avec  $C \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ . Ainsi, on a  $\eta_1(u(t) - e^{\nu t \Delta} a) \geq d$ ; d'où (2.3.16). ■

### 2.3.4 Localisation des dérivées

La localisation des dérivées du champ a été peu étudiée. On peut citer le résultat de G. Furioli et E. Terraneo [41] qui construisent des solutions  $L^2_{\vartheta}$  pour  $\vartheta < \frac{d}{2} + 1$  en utilisant aussi de la décroissance sur les dérivées.

D'une manière générale et en dimension  $d \geq 2$ , les dérivées d'une fonction sont toujours "mieux" localisées que la fonction elle-même : si les dérivées d'une fonction sont localisées, alors la fonction initiale le sera aussi. On peut illustrer ce phénomène par l'inclusion de Sobolev :

$$\{f; \nabla f \in L^2(\mathbb{R}^d)\} \subset L^{2d/(d-2)} \quad (\text{ou BMO si } d = 2).$$

Le membre de gauche signifie que  $\eta_2(\nabla f) \geq \frac{d}{2}$  et celui de droite que  $\eta_2(f) \geq \frac{d}{2} + 1$ . On a aussi le résultat plus précis suivant.

**Proposition 21 (avec L. Brandolese)** Soient  $d \geq 2$ ,  $\varepsilon \geq 0$  et  $f$  est une fonction sur  $\mathbb{R}^d$ . Alors :

$$\nabla f \in L^1_{1+\varepsilon} \implies \exists c \in \mathbb{R}, \quad f - c \in L^1_{\varepsilon}.$$

Si  $f$  est de classe  $C^1$ , alors :

$$\nabla f \in L^{\infty}_{1+\varepsilon} \implies \exists c \in \mathbb{R}, \quad f - c \in L^{\infty}_{\varepsilon}.$$

**Preuve** La première partie est un résultat de la thèse de L. Brandolese [11, p. 39]. La seconde est un calcul élémentaire. Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}^d$ ,  $|\omega| = 1$ , on considère

$$\ell_{\omega} \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} f(r\omega) = f(0) + \int_0^{\infty} \nabla f(s\omega) \cdot \omega ds.$$

Si  $\tilde{\omega}$  est un autre point de la sphère unité et  $r > 0$  on a :

$$|\ell_{\omega} - \ell_{\tilde{\omega}}| \leq \int_r^{\infty} |\nabla f(s\omega)| ds + Cr \sup_{|x| \geq r} |\nabla f(x)| + \int_r^{\infty} |\nabla f(s\tilde{\omega})| ds.$$

En faisant tendre  $r \rightarrow \infty$  on en déduit que  $c \equiv \ell_{\omega}$  est indépendant de  $\omega$ . Mais alors,

$$|f(r\omega) - c| \leq \int_r^{\infty} |\nabla f(s\omega)| ds \leq C(1+r)^{-\alpha+1}$$

d'ou la conclusion. ■

Cette propriété est évidemment fausse en dimension  $d = 1$ .

Le théorème suivant indique que la localisation des dérivées se propage comme le champ de vitesse. Pour simplifier, on énonce le résultat en termes de décroissance uniforme.

**Proposition 22 (avec L. Brandolese [17])** Soit  $u \in L^{\infty}([0, T]; L^{\infty}_{\vartheta})$  une solution de (NS) avec donnée de Cauchy  $a = u(0)$  et  $\vartheta \leq d + 1$ . Si, pour un indice  $i \in \{1, \dots, d\}$ , on a aussi  $\partial_i a \in L^{\infty}_{\vartheta}$ , alors :

$$\partial_i u \in L^{\infty}([0, T]; L^{\infty}_{\vartheta}). \quad (2.3.17)$$

De plus, si  $\partial_i a \in L^{\infty}_{\vartheta}$  pour tous les indices  $i \in \{1, \dots, d\}$  et si  $\Delta a \in L^{\infty}_{\vartheta}$  alors

$$t^{1/2} \partial_t u \in L^{\infty}([0, T]; L^{\infty}_{\vartheta}). \quad (2.3.18)$$

**Preuve** Traitons d'abord le cas des dérivées spatiales. En dérivant (NSi) suivant  $x_i$ , on est ramené à un problème de point fixe affine :

$$\partial_i u = \Theta(\partial_i u)$$

avec  $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_d)$  et

$$\Theta_j w = e^{t\Delta}(\partial_i a_j) + 2 \sum_{h,k} \int_0^t F_{j;h,k}(t-s) * (u_h w_k)(s) ds.$$

Le Théorème 9 implique que  $\Theta$  opère continûment sur  $X = L^\infty([0, T_0]; L_\vartheta^p)$  et que

$$\|\Theta(w - w')\|_X \leq C_0 T_0^{\frac{1}{2}} \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L_\vartheta^\infty} \|w - w'\|_X.$$

On peut donc choisir  $T_0 > 0$  de sorte que  $\Theta$  soit une contraction de l'espace de Banach  $X$ . Son unique point fixe  $w = \partial_i u$  appartient donc aussi à cet espace. Le même argument s'applique ensuite à  $[T_0, 2T_0]$ ,  $[2T_0, 3T_0]$ , ... et entraîne finalement que  $\partial_i u \in L^\infty([0, T]; L_\vartheta^p)$ .

Pour la dérivée temporelle, on utilise l'identité  $\partial_t u = \tilde{\Theta}(\partial_t u)$  avec

$$\tilde{\Theta}_j(w) = -\Delta a_j + \sum_{h,k} F_{j;h,k}(t) * (a_h a_k) + 2 \sum_{h,k} \int_0^t F_{j;h,k}(s) * (u_h w_k)(t-s) ds.$$

L'espace de Banach à considérer est

$$Y = \{w; t^{1/2} \|w(t)\|_{L_\vartheta^\infty} \in L^\infty([0, T_0])\}.$$

Le Théorème 9 implique alors que

$$-\Delta a_j + \sum_{h,k} F_{j;h,k}(t) * (a_h a_k) \in Y$$

et que

$$\|\tilde{\Theta}(w - w')\|_X \leq \pi C_0 T_0^{\frac{1}{2}} \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L_\vartheta^\infty} \|w - w'\|_X.$$

Dans cette dernière estimation, on a utilisé :

$$\forall t > 0, \quad \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s(t-s)}} = \pi. \quad (2.3.19)$$

La conclusion s'ensuit alors par un argument similaire au précédent. ■

### 2.3.5 Conservation de certains profils anisotropes

Le Théorème 15 implique aussi que les solutions de (NS) peuvent hériter de propriétés anisotropes de localisation de la donnée de Cauchy, du moins tant qu'elles ne violent pas la limite de diffusion instantanée (2.3.5). Pour simplifier l'énoncé, on n'étudie à nouveau que les profils uniformes.

**Théorème 23** Soient  $a$  un champ de vecteur à divergence nulle et  $u$  la solution correspondante de (NS) dans  $C_w([0, T]; L^\infty)$ . On suppose qu'il existe une fonction  $m$  telle que

$$|e^{t\Delta} a(x)| \leq C_t (1 + |x|)^{-\vartheta} m(x)^{-1} \quad (2.3.20)$$

avec  $\frac{d+1}{2} < \vartheta \leq d+1$  et  $1 \leq m(x) \leq C(1+|x|)^{d+1-\vartheta}$ . Il existe alors une constante  $C' > 0$  telle que :

$$|u(t, x)| \leq C' (1+|x|)^{-\vartheta} m(x)^{-1} \quad (2.3.21)$$

pour tout  $t \in [0; T]$ .

**Preuve** D'après le Théorème 15 et puisque  $2\vartheta \geq d+1$ , on a :

$$u(t, x) = e^{\nu t \Delta} a + \mathcal{O}_t \left( (1+|x|)^{-d-1} \right)$$

sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ . La décroissance de  $u$  est donc dictée par le profil de  $e^{\nu t \Delta} a$ . ■

Voici quelques exemples de poids vérifiant (2.3.20). Un *poids de Peetre* est une fonction mesurable  $m : \mathbb{R}^d \rightarrow [1; +\infty)$  telle que

$$\exists C_0 > 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad m(x+y) \leq C_0 m(x)m(y). \quad (2.3.22)$$

La classe de Peetre contient (pour  $\alpha_i \geq 0$ ) :

$$m_1(x) = 1 + |x_1|^{\alpha_1} + \dots + |x_d|^{\alpha_d} \quad \text{et} \quad m_2(x) = e^{\alpha|x|}.$$

Elle est stable par sommes et produits finis, par translation et par transformation orthogonale.

**Lemme 24** Soit  $m$  un poids de Peetre tel que  $m(x) \leq C \exp(c|x|)$ . Pour tout  $T > 0$ , il existe une constante  $C_T > 0$  telle que

$$\|m(e^{t\Delta} a)\|_{L^\infty} \leq C_T \|ma\|_{L^\infty}. \quad (2.3.23)$$

**Preuve** C'est un calcul élémentaire :

$$m(x) |e^{t\Delta} a(x)| \leq C_0 [(mg_t) * (m|a|)](x) \leq C_0 (4\pi)^{-d/2} \|ma\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^d} m(\sqrt{t}y) e^{-y^2/4} dy.$$

L'intégrale converge car  $m(\sqrt{t}y) \leq C \exp(cT|y|)$ . ■

## 2.4 Décroissance en temps grand

Après avoir étudié la propagation en temps fini de la décroissance spatiale, on s'intéresse naturellement à l'uniformité en temps de l'information de localisation. Pour les solutions de Leray, ce problème s'avère difficile et n'a pas, à ce jour, de réponse connue. Des réponses partielles existent, mais uniquement sous l'hypothèse additionnelle que la solution est régulière.

Un problème connexe consiste à estimer à quelle vitesse les normes de la solution tendent vers zéro lorsque le système se relaxe librement (*i.e.* en l'absence de forces extérieures). La borne supérieure, génériquement optimale, est donnée par les solutions spatialement bien localisées. La question de l'existence de solutions exceptionnelles non triviales, décroissant plus vite que le taux générique, a motivé une littérature considérable. On sait aujourd'hui que les solutions exceptionnellement décroissantes en temps se classifient par leur groupe de symétrie (voir [14]).

Hormis une nouvelle estimation sur la décroissance des solutions faibles (Théorème 26) et la présentation synthétique, cette section n'a pas de prétention à l'originalité et ne vise qu'à la complétude de l'exposé.

2.4.1 Décroissance en temps, sans contrôle spatial

On s'intéresse à la décroissance en temps grand des solutions faibles de Navier-Stokes associées à des données initiales  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$  et vérifiant l'inégalité d'énergie "classique" :

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|u(s)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|u_0\|_{L^2}^2. \tag{2.4.1}$$

M. Wiegner [85] a montré que, pour des forces extérieures raisonnablement décroissantes, l'énergie cinétique  $\|u(t)\|_{L^2}$  tend vers zéro lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Pour simplifier, on supposera qu'il n'y a pas de terme de force.

En dimension  $d = 3$  ou  $4$ , l'inégalité (2.4.1) entraîne l'existence d'un temps  $t_0 > 0$  tel que

$$\|u(t_0)\|_{\dot{H}^{-1+\frac{d}{2}}} \ll \nu.$$

Pour  $t \geq t_0$ , on peut donc appliquer la théorie des petites solutions et affirmer que cette dernière reste régulière. Cette remarque implique (au moins si  $d \leq 4$ ) qu'il suffit d'étudier le comportement en temps grand des petites solutions fortes pour décrire aussi celui de toutes les solutions faibles.

□ Le résultat de Wiegner

Un progrès important dans la compréhension de (NS) consiste à étudier ce système dans le cadre d'espaces de Besov d'indice négatif. Pour  $\sigma > 0$ , l'espace de Besov  $\dot{B}_{p,r}^{-\sigma}$  est caractérisé par :

$$t^{\sigma/2} \|e^{t\Delta} a\|_{L^p} \in L^r \left( \mathbb{R}_+; \frac{dt}{t} \right). \tag{2.4.2}$$

On a une inclusion  $\dot{B}_{p_1,r_1}^{-\sigma_1} \subset \dot{B}_{p_2,r_2}^{-\sigma_2}$  si  $p_1 \geq p_2$ ,  $r_1 \leq r_2$  et  $\sigma_1 + d/p_1 = \sigma_2 + d/p_2$ .

La définition (2.4.2) suggère que les termes de régularité négative doivent être considérés comme asymptotiquement négligeables lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . À bien des égards, cette intuition se révèle correcte, puisque des conditions du type

$$\|u_0\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-1+\frac{d}{p}}} \ll \nu \quad \text{avec} \quad d < p < \infty \tag{2.4.3}$$

ou l'existence d'une matrice  $V_0$  telle que

$$u_0 = \operatorname{div} V_0 \quad \text{avec} \quad \|V_0\|_{\text{BMO}} \ll \nu \tag{2.4.4}$$

sont désormais connues pour garantir l'existence, l'unicité et la régularité de la solution au problème de Cauchy (voir [19], [69], [27], [55]).

Inversement, l'effet régularisant de (NS) constitue une obstruction à la décroissance de l'énergie. Le résultat suivant indique en effet que la décroissance de la norme  $L^2$  ne peut pas être arbitrairement rapide. Pour simplifier, on suppose que  $\nu = 1$ .

**Proposition 25 (Wiegner [85])** *Soit  $u_0 \in L^2 \cap \dot{B}_{2,\infty}^{-\sigma}$  avec  $\sigma > 0$ . Toute solution faible vérifiant l'inégalité d'énergie (2.4.1) vérifie aussi :*

$$\|u(t) - e^{t\Delta} u_0\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\min\{\sigma+\frac{d-2}{4}; \frac{d+2}{4}\}} \tag{2.4.5}$$

avec un facteur multiplicatif  $\ln(e+t)$  lorsque  $\sigma = 1$ . En particulier :

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\min\{\frac{\sigma}{2}; \frac{d+2}{4}\}}. \tag{2.4.6}$$

Le caractère génériquement optimal de l'obstruction à la décroissance de l'énergie est apparu lentement, mais est aujourd'hui fermement établi. T. Miyakawa et M. Schonbek [64] démontrent ainsi que la propriété

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{d+2}{4}} \|u(t)\|_{L^2} = 0$$

est essentiellement équivalente au fait que la matrice d'énergie

$$\mathcal{K}_{h,k}^* = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} u_h(s, y) u_k(s, y) dy ds$$

est proportionnelle à la matrice identité. L. Brandolese [13], [14] a construit des exemples non triviaux de flots exceptionnels possédant cette propriété. Il a aussi démontré que les flots pour lesquels (2.4.6) n'est pas optimal se classifient par leur groupe de symétries.

□ **Les espaces de Besov de régularité négative contiennent les fonctions décroissantes**

Les interprétations de l'indice  $\sigma$  dans  $\dot{B}_{p,r}^{-\sigma}$  sont multiples. C'est bien sûr un indice de *régularité* car  $|D| : \dot{B}_{p,r}^{-\sigma} \rightarrow \dot{B}_{p,r}^{-\sigma-1}$  et le théorème de Wiegner montre qu'il peut être affecté par l'effet régularisant de Navier-Stokes.

Il mesure aussi le *degré d'oscillation* des fonctions puisque (voir [5])

$$\left\| e^{ix \cdot \omega / \varepsilon} a(x) \right\|_{\dot{B}_{p,r}^{-\sigma}} \leq C_a \varepsilon^\sigma$$

si  $0 < \sigma < d(1 - \frac{1}{p})$ . Enfin, les espaces de Besov sont invariants par translation.

Cependant,  $\dot{B}_{p,r}^{-\sigma}$  ne contient pas uniquement des fonctions irrégulières et oscillantes, mais aussi une large classe de fonctions *décroissantes*. En effet, si  $a \in \dot{B}_{p,r}^{-\sigma}$ , la transformée de Fourier  $\hat{a}(\xi)$  doit être relativement plate au voisinage de  $\xi = 0$  de manière à avoir

$$2^{-j\sigma} \|\phi(2^{-j}D)a\|_{L^p} \in \ell^r (j \in \mathbb{Z})$$

où  $\phi$  est une fonction positive régulière, supportée dans la couronne unité. Cette propriété exprime une forme de décroissance de  $a(x)$  lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$ . Par exemple, pour  $0 < \vartheta < d$  et  $\sigma \geq 0$ , on a une inclusion :

$$L_{\vartheta}^\infty(\mathbb{R}^d) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ a; (1 + |x|)^\vartheta a(x) \in L^\infty \right\} \subset \dot{B}_{p,\infty}^{-\sigma}$$

si  $\sigma + \frac{d}{p} < \vartheta$  (avec égalité si  $p = \infty$ ). En ajoutant essentiellement l'hypothèse que  $a$  est de moyenne nulle (ou plus généralement, en supposant la nullité des premiers moments de  $a$ ), T. Miyakawa [63] a montré que les fonctions fortement décroissantes à l'infini appartiennent aussi à des espaces de Besov  $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\sigma}$  avec  $\sigma > d$ .

□ **Une inégalité logarithmique**

L'objectif de cette section est de démontrer de manière élémentaire la généralisation suivante de l'inégalité d'énergie (2.4.1) avec  $\nu = 1$ .

**Théorème 26** *Il existe une constante numérique  $C > 0$  telle que pour toute fonction  $u_0$  de classe  $L^2(\mathbb{R}^3)$  de norme  $\dot{H}^{1/2}$  suffisamment petite, on ait, pour tout  $t \geq 0$  :*

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{R}^3} e^{\sqrt{t}|\xi|} |\hat{u}(t, \xi)|^2 d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 e^{\sqrt{\tau}|\xi|} |\hat{u}(\tau, \xi)|^2 d\xi d\tau \leq C \|u_0\|_{L^2}^2. \quad (2.4.7)$$

On en déduit immédiatement l'inégalité suivante :

$$\forall s \geq 1, \quad \int_0^\infty \tau^s \|u(\tau)\|_{\dot{H}^s}^2 \frac{d\tau}{\tau} \leq C \|u_0\|_{L^2}^2.$$

En prenant  $u(t/2)$  comme donnée initiale, on obtient aussi :

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\alpha} \implies \forall s > 0, \quad \|u(t)\|_{\dot{H}^s} \leq C_s(1+t)^{-\alpha-s/2}. \quad (2.4.8)$$

Dans le dernier cas et grâce à l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg ( $s > d/2$ )

$$\|a\|_{L^\infty} \leq \|a\|_{L^2}^{1-d/2s} \|a\|_{\dot{H}^s}^{d/2s},$$

on a en particulier :

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-\alpha-d/4}. \quad (2.4.9)$$

Une partie de ces résultats est déjà connue. L'estimation de l'intégrale en temps qui figure au premier membre de (2.4.7) est due à J.-Y. Chemin [28]. Le corollaire (2.4.8) a été démontré par M. Schonbek et M. Wiegner [76] en utilisant une technique de découpage parabolique temps-fréquence. L'originalité du Théorème 26 réside donc surtout dans le caractère élémentaire de sa preuve, par une méthode d'EDO.

La preuve consiste à établir des estimations uniformes à partir du schéma de Friedrichs. Dans la suite de cette section  $u$  désignera donc, par abus, une solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = -\chi_\varepsilon(Q) \\ u|_{t=0} = \chi_\varepsilon(u_0) \end{cases} \quad (2.4.10)$$

où  $\chi_\varepsilon = \chi(\varepsilon D)$  avec  $\chi$  l'indicatrice de la boule unité et  $Q(t) = -\mathbb{P} \operatorname{div}(u(t) \otimes u(t))$ . Après transformation de Fourier, ce problème se réduit à une équation différentielle ordinaire (non linéaire) dans l'espace

$$L_{\operatorname{div};\varepsilon}^2 = \{v \in L^2; \operatorname{div} v = 0 \text{ et } \operatorname{supp} \hat{v} \subset \mathcal{B}(0, \varepsilon^{-1})\}.$$

Comme cette famille de solutions converge faiblement vers la solution de (NS), il suffit, d'après l'inégalité de Fatou, de démontrer (2.4.7) avec une constante indépendante de  $\varepsilon > 0$ .

Soient  $\lambda > 0$  et  $\phi_\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  la solution de l'EDO :

$$\phi'_\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{(2t^{1/2} - \lambda\phi_\lambda(t)) \cdot |\xi|} |\xi|^2 |\hat{u}(t, \xi)|^2 d\xi$$

avec  $\phi_\lambda(0) = 0$ . Cette solution est bien définie et globale car le second membre est une fonction bornée et lipschitzienne de  $\phi$  avec une constante de Lipschitz inférieure à  $C_\varepsilon e^{2\varepsilon^{-1}t^{1/2}} \|u\|_{L^2}^2$ .

On pose

$$T_\lambda^* = \inf \left\{ t \geq 0; \forall \tau \leq t, \quad \lambda\phi_\lambda(\tau) \leq \tau^{1/2} \right\}.$$

Ainsi, pour  $t \leq T_\lambda^*$ ,

$$\phi'_\lambda(t) \geq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 e^{|\xi| t^{1/2}} |\hat{u}(t, \xi)|^2 d\xi.$$

Comme  $\phi_\lambda$  est de classe  $C^1$ , nulle pour  $t = 0$ , on remarque que  $T_\lambda^* > 0$ .

**Remarque** - L'hypothèse de petitesse de la norme  $\dot{H}^{1/2}$  n'est pas nécessaire : en toute généralité, le Théorème 26 reste vrai pour  $t < T_{\lambda_0}^*$  et une constante  $\lambda_0$  donnée par le Lemme 27 ci-dessous.  $\diamond$

**Preuve de l'estimation intégrale en temps.** Bien que cette partie du résultat soit déjà connue, la preuve est instructive et nous aurons besoin des estimations intermédiaires pour obtenir la nouvelle estimation ponctuelle. Le point clef est le lemme suivant :

**Lemme 27 (J.-Y. Chemin, [28])** *Il existe  $\lambda_0 > 0$  et  $c_0 > 0$  (indépendants de  $\varepsilon$ ) tels que*

$$\phi_{\lambda_0}(t) \leq c_0 \int_0^t \|e^{\tau\Delta/2} u_0\|_{\dot{H}^1}^2 d\tau \quad (2.4.11)$$

pour tout  $t < T_{\lambda_0}^*$ .

Admettons provisoirement ce résultat. Un calcul immédiat donne

$$\int_0^t \|e^{\tau\Delta/2} u_0\|_{\dot{H}^1}^2 d\tau \leq K \min \left\{ \|u_0\|_{L^2}^2 ; t^{1/2} \|u_0\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 \right\}.$$

Pour tout  $t < T_{\lambda_0}^*$ , on a :

$$\phi'_{\lambda_0}(t) \geq \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 e^{\sqrt{t}|\xi|} |\hat{u}(t, \xi)|^2 d\xi.$$

En intégrant sur  $[0, t]$ , on en déduit

$$\forall t < T_{\lambda_0}^*, \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 e^{\sqrt{s}|\xi|} |\hat{u}(s, \xi)|^2 d\xi ds \leq \phi_{\lambda_0}(t) \leq (c_0 K) \|u_0\|_{L^2}^2. \quad (\mathbf{E}'_2)$$

Supposons de plus que  $\|u_0\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 \leq c/\lambda_0$  avec  $c < (c_0 K)^{-1}$ . Alors, pour tout  $t < T_{\lambda_0}^*$ , on a

$$\lambda_0 \phi_{\lambda_0}(t) \leq (c c_0 K) t^{1/2}$$

et donc  $T_{\lambda_0}^* = +\infty$ . Sans l'hypothèse de petitesse de la norme  $\dot{H}^{1/2}$ , le Théorème 26 reste vrai pour  $t < T_{\lambda_0}^*$ .

**Preuve [Lemme 27]** Il suffit de trouver des constantes  $c_0$  et  $c_1$  telles que :

$$\forall \lambda > 0, \quad \phi_{\lambda}(t) \leq c_0 \int_0^t \|e^{\tau\Delta/2} u_0\|_{\dot{H}^1}^2 d\tau + c_1 \frac{\phi_{\lambda}(t)}{\lambda}. \quad (2.4.12)$$

On choisit alors  $\lambda_0 = 2c_1$ . La démonstration est un calcul élémentaire.

Comme  $u$  est solution de (2.4.10), la formule de Duhamel donne :

$$\phi'_{\lambda}(t) \leq 2 \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{u}_0(\xi)|^2 e^{-t|\xi|^2 + 2\sqrt{t}|\xi|} d\xi + I_{\lambda}(t) \quad (2.4.13)$$

avec  $I_{\lambda}(t) = 2 \int_{\mathbb{R}^3} J_{\lambda}(t, \xi)^2 d\xi$  et  $J_{\lambda}(t, \xi) = |\xi| \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2 + [\sqrt{t} - \frac{\lambda}{2}\phi_{\lambda}(t)] \cdot |\xi|} \widehat{\chi_{\varepsilon} Q}(s, \xi) ds$ .

Le premier terme de (2.4.13) est majoré par celui de (2.4.12) avec  $c_0 = 2e^2$  car

$$-t|\xi|^2 + 2\sqrt{t}|\xi| \leq -\frac{1}{2}t|\xi|^2 + 2.$$

On va donc montrer que

$$\int_0^t I_{\lambda}(s) ds = 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} J_{\lambda}(s, \xi)^2 d\xi ds \leq c_1 \frac{\phi_{\lambda}(t)}{\lambda}. \quad (2.4.14)$$

On remarque que  $|\widehat{\chi_\varepsilon Q}(s, \xi)| \leq 2|\xi| |(\widehat{u^2(s)})(\xi)|$  et que la phase s'écrit aussi

$$\left[2\sqrt{t} - \lambda \phi_\lambda(t)\right] \cdot |\xi| = \Psi_\lambda(0, t, \xi)$$

avec, pour  $s < t$  :

$$\Psi_\lambda(s, t, \xi) = |\xi| \int_s^t \tau^{-1/2} - \lambda \phi'_\lambda(\tau) d\tau.$$

On a bien sûr  $\Psi_\lambda(0, t, \xi) = \Psi_\lambda(0, s, \xi) + \Psi_\lambda(s, t, \xi)$ . On en déduit :

$$J_\lambda(t, \xi) \leq 2|\xi|^2 \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2 + \frac{1}{2}\Psi_\lambda(s, t, \xi)} \times \left| \widehat{u^2(s)}(\xi) \right| e^{\frac{1}{2}\Phi_\lambda(0, s, \xi)} ds.$$

Majorons indépendamment chaque facteur. Pour le premier, on remarque simplement que :

$$-(t-s)|\xi|^2 + \frac{1}{2}\Psi_\lambda(s, t, \xi) \leq -\frac{1}{2}(t-s)|\xi|^2 + 4 - \lambda|\xi| \int_s^t \phi'_\lambda(\tau) d\tau$$

en distinguant les deux cas  $(\sqrt{t} + \sqrt{s})|\xi| \leq 2$  et  $(\sqrt{t} + \sqrt{s})|\xi| \geq 2$ .

Pour le second facteur, l'inégalité triangulaire  $\Psi_\lambda(0, s, \xi) \leq \Psi_\lambda(0, s, \xi - \eta) + \Psi_\lambda(0, s, \eta)$  entraîne :

$$\left| \widehat{u^2(s)}(\xi) \right| e^{\frac{1}{2}\Phi_\lambda(0, s, \xi)} = |\widehat{u}(s)^{*2}(\xi)| e^{\frac{1}{2}\Phi_\lambda(0, s, \xi)} \leq \left( |\widehat{u}(s)| e^{\frac{1}{2}\Phi_\lambda(0, s, \cdot)} \right)^{*2}(\xi)$$

avec la notation  $f^{*2} = f * f$ . Par définition, on a :

$$\phi'_\lambda(t) = \left\| e^{\Psi_\lambda(0, t, D)} u \right\|_{\dot{H}^1}^2.$$

En dimension  $d = 3$ , la loi de produit  $\dot{H}^1 \times \dot{H}^1 \rightarrow \dot{H}^{1/2}$  entraîne :

$$\left| \widehat{u^2(s)}(\xi) \right| e^{\frac{1}{2}\Phi_\lambda(0, s, \xi)} \leq C |\xi|^{-1/2} \phi'_\lambda(t) f(t, \xi)$$

avec  $\|f(t, \cdot)\|_{L^2} = 1$  et  $C$  la constante de la loi de produit.

On obtient donc :

$$\begin{aligned} J_\lambda(t, \xi) &\leq C |\xi|^{3/2} \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(t-s)|\xi|^2 + 4 - \lambda|\xi| \int_s^t \phi'_\lambda(\tau) d\tau} \phi'_\lambda(s) f(s, \xi) ds \\ &\leq C e^4 |\xi|^{3/2} \left( \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \phi'_\lambda(s) f(s, \xi)^2 ds \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left( \int_0^t e^{-2\lambda|\xi| \int_s^t \phi'_\lambda(\tau) d\tau} \phi'_\lambda(s) ds \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{C' |\xi|}{\lambda^{1/2}} \left( \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \phi'_\lambda(s) f(s, \xi)^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Alors, en intégrant d'abord la variable  $\tau$  dans l'expression suivante

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} J_\lambda(\tau, \xi)^2 d\xi d\tau \leq \frac{C}{\lambda} \int_{[0, t]^2 \times \mathbb{R}^3} 1_{s \leq \tau} |\xi|^2 e^{-(\tau-s)|\xi|^2} \phi'_\lambda(s) f(s, \xi)^2 d\tau ds d\xi$$

on obtient exactement (2.4.14). Ceci entraîne (2.4.12) et achève la preuve du Lemme 27. ■

**Preuve de l'estimation ponctuelle en temps.** Pour conclure la preuve de (2.4.7), il ne reste plus qu'à vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{\sqrt{t}|\xi|} |\hat{u}(t, \xi)|^2 d\xi \leq C \|u_0\|_{L^2}^2.$$

L'estimation de la solution libre est immédiate. Pour toute fonction  $a \in L^2$ , on a en effet :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{t}|\xi|} |e^{-t|\xi|^2} \hat{a}(\xi)|^2 d\xi \leq 2 \|a\|_{L^2}^2$$

pour tout  $t > 0$ , puisque  $r - 2r^2 \leq 1/16$  et  $e^{1/16} < 2$ .

On s'intéresse maintenant à la partie non-linéaire  $Q(t) = (u \otimes u)(t)$ . Il suffit de démontrer un résultat légèrement plus fort, à savoir que  $\|V(t)\|_{L^2} \leq C \|u_0\|_{L^2}$ , avec

$$V(t, \xi) = \int_0^t e^{\frac{1}{2}\Psi_{\lambda_0}(0, t, \xi) - (t-s)|\xi|^2} |\hat{Q}(s, \xi)| ds.$$

Comme  $\Psi_{\lambda_0}(0, t, \xi) \geq t^{1/2}|\xi|$  sur  $[0; T_{\lambda_0})$ , on aura bien démontré (2.4.7). Cette estimation cruciale est déjà implicitement contenue dans l'argument précédent. Par définition, on a :

$$V(t, \xi) = |\xi|^{-1} J_{\lambda_0}(t, \xi)$$

donc :

$$V(t, \xi)^2 \leq \frac{C}{\lambda_0} \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \phi'_{\lambda_0}(s) f(s, \xi)^2 ds.$$

En intégrant en  $\xi \in \mathbb{R}^3$ , on obtient bien (puisque  $\|f(s)\|_{L^2} = 1$ ) :

$$\|V(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{C \phi_{\lambda_0}(t)}{\lambda_0} \leq C' \|u_0\|_{L^2}^2.$$

## 2.4.2 Classification de la décroissance en temps par les symétries du flot

Dans  $\mathbb{R}^3$ , le problème de Cauchy associé à une donnée initiale à divergence nulle et à décroissance rapide a une solution forte dans  $L_4^\infty(\mathbb{R}^3)$ . L. Brandolese [14] a démontré que, si la donnée initiale est invariante sous certains groupes de symétrie, alors la solution aura une meilleure localisation spatiale. Si de plus, le flot est global en temps, alors la décroissance de la norme  $L^p$  sera exceptionnellement rapide ( $3/2 < p \leq +\infty$ ). Le tableau récapitule les valeurs précises des paramètres.

Groupe de symétrie	Solution $u(t, x)$	Borne de $\ u(t)\ _{L^p}$
SO(3)	$u = 0$	—
Prisme, Cylindre	$L_4^\infty(\mathbb{R}^3)$	$t^{-2 + \frac{3}{2p}}$
Tétraèdre	$L_5^\infty(\mathbb{R}^3)$	$t^{-\frac{5}{2} + \frac{3}{2p}}$
Cube, Octaèdre	$L_6^\infty(\mathbb{R}^3)$	$t^{-3 + \frac{3}{2p}}$
Icosaèdre, Dodécaèdre	$L_8^\infty(\mathbb{R}^3)$	$t^{-4 + \frac{3}{2p}}$

TAB. 2.3 – Classification décroissance-symétrie d'après [14, Théorème 1.2].

### 2.4.3 Propagation de la localisation pour certaines solutions fortes

Le problème de la propagation uniforme de l'information de localisation est en partie résolu par les deux résultats suivants. Dans cette section, on suppose que le problème de Cauchy possède déjà une solution globale, unique et régulière.

**Théorème 28 (Brandolese [13])** *Soit  $u_0 \in L_{\vartheta}^{\infty}$  un champ à divergence nulle avec  $1 \leq \vartheta \leq d + 3$ . Lorsque  $\vartheta > d$ , on suppose que ce champ est symétrique, i.e.*

$$\begin{cases} u_{0,1}(x) = u_{0,2}(\sigma(x)) = \dots = u_{0,d}(\sigma^{d-1}(x)) \\ u_{0,j}((-1)^{\gamma_1}x_1, \dots, (-1)^{\gamma_d}x_d) = (-1)^{\gamma_j}u_{0,j}(x) \end{cases} \quad (2.4.15)$$

où  $\sigma(x_1, \dots, x_d) = (x_d, x_1, \dots, x_{d-1})$  et  $\gamma_j \in \{0, 1\}$ . De plus, si  $\vartheta \in \{d, d+1, d+2, d+3\}$ , on suppose aussi que

$$e^{t\Delta}u_0 \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+; L_{\vartheta}^{\infty})$$

et enfin, si  $\vartheta = d$ , que  $u_0 \in \dot{B}_{\infty, \infty}^{-d}$ . On suppose enfin que le problème de Cauchy a une solution unique en imposant que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x||u_0(x)| < \eta \quad (2.4.16)$$

où  $\eta > 0$  est une constante ne dépendant que de  $\vartheta$  et  $d$ . Alors, l'unique solution  $u(t, x)$  vérifie :

$$|u(t, x)| \leq C(1+t)^{-\alpha/2}(1+|x|)^{-\beta} \quad (2.4.17)$$

avec  $\alpha, \beta \geq 0$  tels que  $\alpha + \beta \leq \vartheta$ .

En dimension  $d \geq 3$ , le champ défini par

$$u_{0,j}(x) = \varepsilon x_j(x_{j-1}^2 - x_{j+1}^2) e^{-|x|^2}$$

avec la convention  $x_{d+1} = x_1$  est un exemple non-trivial de donnée symétrique vérifiant les hypothèses du théorème précédent. La condition de petitesse est vérifiée dès que  $4e^{-2}\varepsilon < \eta$ .

Pour des flots modérément décroissants, on peut relaxer la condition de petitesse précédente. Par contre, la régularité de la solution reste une hypothèse.

**Théorème 29 (Amrouche, Girault, Schonbek, Schonbek [1])** *En dimension  $2 \leq d \leq 5$ , soit  $u$  une solution forte de Navier-Stokes, associée à une donnée initiale  $u_0$ . On fait les hypothèses suivantes :*

1.  $u_0 \in L_{\vartheta}^{\infty}$  avec  $\vartheta \leq d/2$
2. Il existe  $\mu > \frac{d-2}{4}$  tel que

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\mu}. \quad (2.4.18)$$

3.  $u_0 \in H^1 \cap W^{m,r}$  avec  $r > d$ ,  $0 \leq \delta < d$ ,  $2 \leq r_1 \leq r$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  et

$$\frac{1}{q} < \frac{\delta}{2} - \frac{d}{2r} + \frac{1}{2} \quad \frac{1}{r} \leq \frac{1}{r_1} + \frac{\delta}{d} < 1 - \frac{1}{r}. \quad (2.4.19)$$

Alors, la solution  $u$  vérifie l'inégalité suivante pour tout multi-indice  $\alpha$  de longueur au plus  $m$  :

$$|\nabla^{\alpha}u(t, x)| \leq C_{\vartheta, \alpha}(1+t)^{-\rho}(1+|x|)^{-\vartheta} \quad (2.4.20)$$

avec  $\rho = (1 - \frac{2\vartheta}{d}) \left( \mu + \frac{d}{4} + \frac{|\alpha|}{2} \right)$ .

La preuve est assez complexe et repose sur l'étude des classes de Morey. Rappelons aussi que l'inclusion  $L_{\vartheta}^{\infty} \subset \dot{B}_{2, \infty}^{-(d-2)/2}$  est vérifiée lorsque  $\vartheta > d - 1$ .

L'article de I. Kukavica et J. J. Torres [57] contient aussi d'autres résultats généraux.

## 2.5 Développement asymptotique des solutions spatialement bien localisées

On peut trouver des profils asymptotiques des solutions de Navier-Stokes dans  $\mathbb{R}^d$ , par exemple dans les travaux de T. Miyakawa, M. Schonbek [64], A. Carpio [22], Y. Fujigaki, T. Miyakawa [36] ou de T. Gallay et E. Wayne [43]. Cependant, ces profils permettent surtout d'étudier le comportement en temps grand du champ de vitesse.

Les profils auto-similaires ont été étudiés en particulier par F. Planchon [70]. Mais dès lors qu'on considère un champ qui décroît plus vite à l'infini que  $|x|^{-1}$  le seul profil possible est identiquement nul.

Dans la suite de ce paragraphe, la matrice d'énergie de l'écoulement joue un rôle important. Pour  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^d))$ , on définit :

$$\mathcal{E}_{h,k}(t) = (u_h(t)|u_k(t))_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^d} (u_h u_k)(t, x) dx$$

ainsi que la matrice "moyenne" (non renormalisée par  $1/t$ ) :

$$\mathcal{K}_{h,k}(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (u_h u_k)(s, x) dx ds. \quad (2.5.1)$$

Nous allons d'abord énoncer les résultats sans démonstration, les preuves étant reportées au paragraphe §2.5.4

### 2.5.1 Développement du champ de vitesse en "diffusion+gradient"

L'identité (2.2.9) donne déjà un développement du champ de vitesse de la forme

$$u(t) = e^{\nu t \Delta} a + \nabla w + R.$$

Le terme de reste est un produit de convolution entre  $u \otimes u$  et un noyau singulier à l'origine (homogène à  $|x|^{-d-1}$ ) mais exponentiellement décroissant à l'infini. Sous cette forme, il est difficile d'en déduire un résultat précis ; on peut néanmoins conjecturer que, sous des hypothèses convenables, le terme de reste pourrait être négligeable à l'infini.

**Théorème 30 (avec L. Brandolese [17])** Soient  $\vartheta > \frac{d+1}{2}$  et  $a$  un champ à divergence nulle, dans  $L^\infty_\vartheta$ . La solution  $u \in \mathcal{C}_w([0, T]; L^\infty_\vartheta)$  de (NS) donnée par le Théorème 14 vérifie, pour  $|x| \rightarrow +\infty$  :

$$u(t, x) = e^{\nu t \Delta} a(x) + \nabla \Pi(t, x) + \mathcal{O}_t \left( |x|^{-\min\{2\vartheta; d+2\}} \right) \quad (2.5.2)$$

avec  $\Pi(t, x)$  donné par :

$$\Pi(t, x) = \gamma_d \sum_{h,k} \frac{\delta_{h,k} |x|^2 - d x_h x_k}{d |x|^{d+2}} \cdot \mathcal{K}_{h,k}(t) \quad (2.5.3)$$

et  $\gamma_d = \pi^{-d/2} \Gamma(\frac{d+2}{2})$ .

Le terme potentiel s'écrit aussi  $\nabla \Pi(t, x) = |x|^{-d-4} P(t, x)$ . Chaque composante  $P_j(t, x)$  est un polynôme homogène de degré 3 :

$$P_j(t, x) = \gamma_d \sum_{h,k} \left( (d+2) x_j x_h x_k - |x|^2 \sigma_{j,h,k}(x) \right) \mathcal{K}_{h,k}(t), \quad (2.5.4)$$

avec  $\sigma_{j,h,k}(x) = \delta_{j,h} x_k + \delta_{j,k} x_h + \delta_{h,k} x_j$ .

Remarques

1. L'inégalité d'énergie (2.4.1) entraîne :

$$|\nabla\Pi(t, x)| \leq C t \|a\|_{L^2} |x|^{-d-1}.$$

En particulier, même si  $u(t, x)$  développe une singularité en temps fini, le terme  $\nabla\Pi$  restera uniformément borné sauf au voisinage de zéro. Cependant, ce résultat ne fournit aucune information sur la singularité elle-même, ni sur son éventuelle formation.

2. Tant que la solution est régulière, le terme de reste de (2.5.2) compense la singularité à l'origine de  $\nabla\Pi(t, x)$ .
3. La décroissance du terme de reste ne peut excéder  $|x|^{-d-2}$ . En effet, l'équation (NS) étant invariante par translation, le choix de l'origine est arbitraire. On vérifie facilement que

$$\nabla\Pi(x - x_0, t) - \nabla\Pi(t, x)$$

décroît à l'infini comme  $|x|^{-d-2}$  lorsque  $\Pi \neq 0$  et  $x_0 \neq 0$ .

4. La fonction  $\Pi(t, x)$  ne dépend qu'indirectement de la viscosité à travers la matrice d'énergie  $K(t)$  de la solution. ◇

L'annulation de  $\nabla\Pi$  n'est possible que si la matrice d'énergie de l'écoulement est proportionnelle à la matrice identité.

**Proposition 31** *Sous les hypothèses et avec les notations du Théorème 30 et pour tout  $t \in [0, T)$ , le terme  $\nabla\Pi(t, x)$  s'annule identiquement sur  $\mathbb{R}^d$  si et seulement si la matrice  $K(t)$  vérifie :*

$$\forall h, k \in \{1, \dots, d\}, \quad \mathcal{K}_{h,k}(t) = \alpha(t) \delta_{h,k}. \tag{2.5.5}$$

Le coefficient  $\alpha$  est donné par  $\alpha(t) = \frac{1}{d} \text{Tr } \mathcal{K}(t)$ .

Comme l'annulation du terme  $\nabla\Pi$  conditionne la possibilité d'une décroissance exceptionnellement rapide du champ de vitesse, le critère précédent indique que si cette propriété se réalise, alors toutes les composantes du champ seront simultanément concernées (voir Proposition 37).

Un critère semblable à (2.5.5) apparaît aussi dans l'article de T. Miyakawa et M. Schonbek [64] où il est démontré qu'une décroissance exceptionnellement rapide de l'énergie  $\|u(t)\|_{L^2}^2$  est essentiellement équivalente au fait que la matrice  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{K}(t)$  est proportionnelle à l'identité.

### 2.5.2 Développement du terme de pression : loi de Bernoulli généralisée

Le profil suivant indique que la pression se comporte (à une constante près) comme  $-\partial_t\Pi$  à l'infini. Ce résultat présente une certaine analogie avec la loi de Bernoulli pour les écoulements potentiels :

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho U^2.$$

où  $U$  est la valeur numérique de la vitesse. Cette formule exprime un bilan d'énergie et est valable pour les solutions stationnaires de l'équation d'Euler en l'absence de force extérieure. Elle est cependant utilisée par les physiciens pour décrire des écoulements visqueux à nombre de Reynolds élevé autour d'un obstacle bien profilé, dans la zone située "loin" de l'obstacle (cf. l'exposé de la théorie de Prandtl dans [47, §9.3.1], ou [10, Chap. VI]). Nous reviendrons sur cette interprétation au paragraphe §2.7. On rappelle que la densité du fluide a été supposé constante égale à  $\rho_0 = 1$ .

**Théorème 32 (avec L. Brandolese [17])** Soient  $\vartheta > \frac{d+1}{2}$  et  $a \in L_{\vartheta}^{\infty}$  un champ à divergence nulle tel que  $\partial_i a$  et  $\partial_i \partial_j a$  soient aussi de classe  $L_{\vartheta}^{\infty}$ . La pression  $p(t, x)$  définie (à une fonction arbitraire de  $t$  près) par (NS) vérifie alors :

$$p(t, x) = p_0(t) + \gamma_d \sum_{h,k} \frac{d x_h x_k - \delta_{h,k} |x|^2}{d |x|^{d+2}} \cdot (u_h(t) |u_k(t))_{L^2} + q(t, x) \quad (2.5.6)$$

avec, pour tout  $t > 0$  :

$$\eta_1(q(t, x)) \geq \min\{2\vartheta - 1; d + 1\}. \quad (2.5.7)$$

Le taux de décroissance du terme principal est  $d$ . Une variante immédiate de la Proposition 31 entraîne que  $\eta_1(p(t)) > d$  si et seulement si :

$$\forall h, k \in \{1, \dots, d\}, \quad (u_h(t) |u_k(t))_{L^2} = \frac{1}{d} \|u(t)\|_{L^2}^2 \delta_{h,k}. \quad (2.5.8)$$

Au terme de reste près, on remarque que la pression  $p(t, x)$  ne dépend de la viscosité que par l'intermédiaire de la matrice d'énergie du champ de vitesse.

### 2.5.3 Correction exponentielle en temps long

Sous une hypothèse de petitesse convenable, comme (cf. [63]) :

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |x| |a(x)| \leq \varepsilon_0 \nu,$$

la solution  $u(t, x)$  est définie pour tout temps  $t \in \mathbb{R}_+$ . Le Théorème 28 garantit alors la persistance uniforme des propriétés de localisation (avec éventuellement une hypothèse sur  $e^{\nu t \Delta} a$  si  $\vartheta = d$  ou  $d + 1$  et une constante  $C$  qui dépend de la viscosité) :

$$|u(t, x)| \leq C (1 + |x|)^{-\alpha} (1 + t)^{-\beta/2}$$

pour  $\alpha, \beta \geq 0$  avec  $\alpha + \beta \leq \min\{\vartheta; d + 1\}$ .

Le théorème suivant indique que le flot se comporte asymptotiquement comme un écoulement potentiel dans la zone  $|x|^2 \gg \nu t + 1$ .

**Théorème 33 (avec L. Brandolese [17])** Soient  $\vartheta > \frac{d+1}{2}$  et  $u(t, x)$  une solution de (NS) sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  vérifiant

$$|u(t, x)| \leq C_0 (1 + |x|)^{-\alpha} (1 + t)^{-\beta/2} \quad (2.5.9)$$

pour tout  $\alpha, \beta \geq 0$  tel que  $\alpha + \beta \leq \vartheta = \min\{\vartheta; d + 1\}$ . On a alors :

$$u(t, x) = e^{\nu t \Delta} a(x) + \nabla \Pi(t, x) + \nu |x|^{-d-1} E\left(\nu t; \frac{x}{\sqrt{\nu t + 1}}\right) + \mathcal{R}_{\nu}(t, x) \quad (2.5.10)$$

avec les estimations suivantes :

$$|\nu E(\nu t, \eta)| \leq C e^{-c|\eta|^2} \|u\|_{L^2([0,t] \times \mathbb{R}^d)}^2 \quad \text{et} \quad |\mathcal{R}_{\nu}(t, x)| \leq C_{\gamma} |x|^{-d-1-\gamma} (1 + t)^{-\delta/2} \quad (2.5.11)$$

où  $0 < \gamma \leq \min\{1; \vartheta - \frac{d+1}{2}\}$

$$\delta = \begin{cases} 2\left(\vartheta - \frac{d+2}{2}\right) - \gamma - 2\epsilon & \text{si } \frac{d+1}{2} < \vartheta \leq \frac{d+3}{2} \\ 1 - \gamma & \text{si } \vartheta > \frac{d+3}{2} \end{cases} \quad (2.5.12)$$

et  $\epsilon > 0$  arbitraire.

**Remarques**

1. Le profil donné par ce théorème est relié à celui de [36] mais fournit une meilleure information ponctuelle.
2. Les singularités à l'origine des différents termes se compensent. Cette recombinaison des singularités a lieu dans la zone où  $|x|^2 \leq t+1$  de sorte que le champ de vitesse tend uniformément vers zéro lorsque  $t \rightarrow +\infty$  (cf. Théorème 26).  $\diamond$

Lorsque  $\vartheta > (d+2)/2$ , le reste  $\mathcal{R}_\nu(t, x)$  décroît simultanément en la variable  $t$  et plus vite que  $|x|^{-d-1}$  en la variable  $x$ . L'hypothèse (2.5.9) entraîne en particulier :

$$\|u\|_{L^2([0,t] \times \mathbb{R}^d)}^2 \leq \begin{cases} C & \text{si } \vartheta > \frac{d+2}{2} \\ C_\epsilon (1+t)^{\frac{d+2}{2}-\vartheta+\epsilon} & \text{si } \vartheta \leq \frac{d+2}{2} \end{cases}$$

avec  $\epsilon > 0$  arbitraire. En fait, on peut même choisir  $\epsilon = 0$  si  $\vartheta \neq \frac{d+2}{2}$  : l'inégalité de Young pour les espaces de Lorentz donne l'inégalité pour  $e^{\nu t \Delta} a$  et il suffit alors d'appliquer le Théorème 25 (voir [13]). Ainsi, lorsque  $\vartheta \leq (d+2)/2$ , le reste  $\mathcal{R}_\nu(t, x)$  explose moins vite que le terme principal  $|x|^{-d-1} E(t, x/\sqrt{t+1})$  dans la zone où  $|x|^2 \leq t+1$ . Le facteur de gain est  $(1+t)^{-(\frac{d+2}{2}-\vartheta)}$ .

**2.5.4 Preuves**

Nous allons démontrer successivement les Théorèmes 30, 32 et 33 puis la Proposition 31. L'essentiel de la méthode et des calculs est commun aux quatre énoncés et est donc exposé d'abord. A-priori, toutes les constantes de ce paragraphe dépendent de la viscosité.

**Elimination de la viscosité**

La transformation d'échelle

$$u(t, x) = \nu \tilde{u}(\nu t, x)$$

permet de faire les calculs avec une viscosité  $\nu = 1$ , ce qui simplifie un peu les formules.

**Décomposition du terme non-linéaire**

On utilise une décomposition de la non-linéarité de (NS) inspirée par l'article de M. Schonbek [74] qui donne une borne inférieure de l'énergie lorsque  $t \rightarrow +\infty$  :

$$(u \otimes u)(t, x) = \left( \int_{\mathbb{R}^d} (u \otimes u)(t, y) dy \right) \mathbf{g}(x) + v(t, x)$$

où  $\mathbf{g}$  est la fonction gaussienne standard. Comme  $\int_{\mathbb{R}^d} v(t, x) dx = 0$ , la fonction  $e^{t\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div} v$  a un meilleur comportement à l'infini que la non-linéarité initiale  $e^{t\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u)$ . Le choix d'une gaussienne plutôt qu'une fonction arbitraire d'intégrale 1 est dicté par la propriété (2.2.4).

Plus précisément, on pose :

$$(u_h u_k)(t, x) = \mathcal{E}_{h,k}(t) \mathbf{g}(x) + v_{h,k}(t, x) \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{h,k}(t) = (u_h(t) | u_k(t))_{L^2}. \tag{2.5.13}$$

Grâce à (2.2.4), l'équation (NSi) prend donc la forme suivante (rappel, ici  $\nu = 1$ ) :

$$u_j(t) = e^{t\Delta} a_j - \sum_{h,k} \int_0^t \mathcal{E}_{h,k}(s) F_{j;h,k}(t+1-s) ds - \sum_{h,k} \int_0^t v_{h,k}(s) * F_{j;h,k}(t-s) ds.$$

Le développement asymptotique (2.2.7) du noyau  $F_{j;h,k}$  donne :

$$u_j(t, x) = e^{t\Delta} a_j(x) + \frac{P_j(t, x)}{|x|^{d+4}} + R_j(t, x), \quad (2.5.14)$$

où  $P_j$  vérifie (2.5.4) et

$$R_j(t, x) = - \sum_{h,k} \left( R_{j;h,k}^{(1)}(t, x) + R_{j;h,k}^{(2)}(t, x) \right)$$

avec :

$$R_{j;h,k}^{(1)}(t, x) = |x|^{-(d+1)} \int_0^t \mathcal{E}_{h,k}(t-s) \Psi_{j;h,k} \left( \frac{x}{\sqrt{s+1}} \right) ds, \quad (2.5.15a)$$

$$R_{j;h,k}^{(2)}(t, x) = \int_0^t v_{h,k}(s) * F_{j;h,k}(t-s) ds. \quad (2.5.15b)$$

Les fonctions  $\Psi_{j;h,k}$  sont celles définies par (2.2.7).

Le tourbillon de  $\tilde{P}(t, x) = |x|^{-d-4} P(t, x)$  est identiquement nul :

$$\text{rot } \tilde{P} = (\partial_i \tilde{P}_j - \partial_j \tilde{P}_i)_{i,j} = 0.$$

Ce terme est donc un champ de gradient. On vérifie immédiatement que le potentiel est donné par la formule (2.5.3).

**Remarque** - La décomposition précédente fournit une bonne approximation d'une non-linéarité gaussienne "en temps moyen". Précisément, le carré de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur (avec viscosité  $\nu = 1$ ) s'écrit

$$\mathfrak{g}_t^2(x) = \left( \int_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{g}_t(y)^2 dy \right) \mathfrak{g} + \Delta(t, x).$$

avec

$$\Delta(t, x) = \left\{ 1 - \left( \frac{t}{2} \right)^{d/2} e^{(2-t)|x|^2/4t} \right\} \mathfrak{g}_t^2(x).$$

Pour  $x \in \mathbb{R}^d$  fixé, cette approximation est donc mauvaise à la fois pour  $t \rightarrow 0$  et pour  $t \rightarrow +\infty$ . Cependant, si

$$t = 2 \quad \text{ou} \quad |x|^2 = 2d \frac{t}{t-2} \ln \frac{t}{2},$$

on a  $\Delta(t, x) = 0$ . ◇

#### □ Estimations du terme de reste $R_{j;h,k}$

La formule (2.5.14) n'a d'intérêt que dans la mesure où on est capable d'estimer le terme de reste. Remarquons d'ailleurs que le reste doit compenser exactement le terme homogène de degré  $-d-1$  lorsque  $x \rightarrow 0$  et  $t > 0$  ou pour  $x \in \mathbb{R}^d$  fixé et  $t \rightarrow +\infty$ . Les calculs de ce paragraphe sont communs aux différents résultats qu'on se propose de démontrer.

**Borne supérieure de  $R_{j;h,k}^{(1)}(t, x)$ .** L'estimation (2.2.8) donne :

$$\Psi_{j;h,k} \left( \frac{x}{\sqrt{4(s+1)}} \right) \leq C \exp \left( -\frac{c|x|^2}{4(s+1)} \right),$$

donc

$$|R_{j;h,k}^{(1)}(t, x)| \leq C |x|^{-d-1} \exp \left( -\frac{c|x|^2}{4(t+1)} \right) \int_0^t \|u(s)\|_{L^2}^2 ds. \quad (2.5.16)$$

Borne supérieure de  $R_{j;h,k}^{(2)}(t, x)$ . Comme  $\int_{\mathbb{R}^d} v_{h,k}(s, x) dx = 0$ , le second terme de reste s'écrit :

$$R_{j;h,k}^{(2)}(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} v_{h,k}(s, y) (F_{j;h,k}(x - y, t - s) - F_{j;h,k}(t - s, x)) ds dy.$$

La formule de Taylor donne :

$$\begin{aligned} |R_{j;h,k}^{(2)}(t, x)| &\leq \int_0^t \int_{|y| \leq |x|/2} |y| |v_{h,k}(s, y)| \sup_{|z| \leq |x|/2} |\nabla F_{j;h,k}(x + z, t - s)| ds dy \\ &\quad + \int_0^t \left( \int_{|y| \geq |x|/2} |v_{h,k}(s, y)| dy \right) |F_{j;h,k}(t - s, x)| ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{|y| \geq |x|/2} |v_{h,k}(s, y)| |F_{j;h,k}(x - y, t - s)| ds dy. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

Grâce à (2.2.7)–(2.2.8), on a  $|\nabla F_{j;h,k}(t, x)| \leq C|x|^{-(d+2)}$  uniformément pour  $t > 0$ . On obtient :

$$\begin{aligned} |R_{j;h,k}^{(2)}(t, x)| &\leq C \left( \int_0^t \int_{|y| \leq |x|/2} |y| |v_{h,k}(s, y)| dy ds \right) |x|^{-(d+2)} \\ &\quad + \left( \int_0^t \int_{|y| \geq |x|/2} |v_{h,k}(s, y)| dy ds \right) |x|^{-(d+1)} \\ &\quad + \int_0^t (t - s)^{-1/2} \sup_{|y| \geq |x|/2} |v_{h,k}(s, y)| ds. \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

Dans la dernière intégrale, on a utilisé la propriété (2.2.13).

Il reste maintenant à combiner les hypothèses de localisation de  $u$  aux formules (2.5.16), (2.5.17) ou (2.5.18) pour obtenir les résultats annoncés.

□ **Asymptotique en temps fini**

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du Théorème 30. On cherche donc à contrôler les restes ci-dessus sans se préoccuper de l'accroissement des constantes avec  $t > 0$ . Cependant, on doit apporter un soin particulier à l'asymptotique  $t \rightarrow 0$  afin de pouvoir en déduire ultérieurement des bornes inférieures sur  $u$  comme (2.6.5).

Le terme  $R_{j;h,k}^{(1)}$  vérifie

$$|R_{j;h,k}^{(1)}(t, x)| \leq \frac{C(t+1)^{1/2}}{|x|^{\min\{2\vartheta; d+2\}}} \int_0^t \|u(s)\|_{L^2}^2 ds. \quad (2.5.19)$$

En effet, si  $(d+1)/2 < \vartheta \leq d+2/2$ , on a

$$\exp\left(-\frac{c|x|^2}{4(t+1)}\right) \leq C'|x|^{d+1-2\vartheta} (t+1)^{\vartheta - \frac{d+1}{2}}$$

et si  $\vartheta \geq d+2/2$ , on a aussi

$$\exp\left(-\frac{c|x|^2}{4(t+1)}\right) \leq C'|x|^{-1} (t+1)^{1/2}.$$

Dans les deux cas, la pénalisation en temps est moindre que  $(1+t)^{1/2}$ .

Pour contrôler  $R_{j;h,k}^{(2)}$ , on peut remarquer que, par définition de  $v$  :

$$|v_{h,k}(s, y)| \leq |u(s, y)|^2 + \|u(s)\|_2^2 \mathfrak{g}(y) \leq C(1 + |y|)^{-2\vartheta} \|u(s)\|_{L_{\vartheta}^{\infty}}^2$$

avec  $\vartheta = \min\{\vartheta; d + 1\}$ . En conséquence et puisque  $2\vartheta > d + 1$  :

$$\begin{aligned} |R_{j;h,k}^{(2)}(t, x)| &\leq C|x|^{-d-2} \int_0^t \|u(s)\|_{L_{\vartheta}^{\infty}}^2 ds \\ &\quad + |x|^{-1-2\vartheta} \left( \int_0^t \|u(s)\|_{L_{\vartheta}^{\infty}}^2 ds \right) \\ &\quad + (1 + |x|)^{-2\vartheta} \int_0^t \|u(s)\|_{L_{\vartheta}^{\infty}}^2 (t-s)^{-1/2} ds. \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $|x| \geq 1$  :

$$|R_{j;h,k}^{(2)}(t, x)| \leq \frac{C(t + \sqrt{t})}{|x|^{\min\{2\vartheta; d+2\}}} \sup_{s \leq t} \|u(s)\|_{L_{\vartheta}^{\infty}}^2. \quad (2.5.20)$$

Ce calcul achève la preuve du Théorème 30.

**Remarque** - Lorsque  $0 \leq t < \min\{1; T\}$ , on a en particulier :

$$|R(t, x)| \leq \frac{C\sqrt{t} \|a\|_{L_{\vartheta}^{\infty}}^2}{|x|^{\min\{2\vartheta; d+2\}}}. \quad (2.5.21)$$

Rappelons au passage que  $L_{\vartheta}^{\infty} \subset L^2$  puisque  $\vartheta > d/2$ . ◇

#### □ Développement asymptotique de la pression

Démontrons maintenant le Théorème 32. La pression est définie, à une fonction arbitraire de  $t$  près, par :

$$-\nabla p = (\partial_t - \Delta)u + \operatorname{div}(u \otimes u).$$

Dans les termes linéaires, on remplace  $u$  par le profil (2.5.14). On obtient alors :

$$-\nabla p = \nabla(\partial_t - \Delta)\Pi + (\partial_t - \Delta)R + \operatorname{div}(u \otimes u)$$

d'où (2.5.6) avec

$$-\nabla q = -\nabla\Delta\Pi + (\partial_t - \Delta)R + \operatorname{div}(u \otimes u).$$

Grâce à la Proposition 21, il suffit donc de vérifier que

$$t^{1/2} \nabla q \in L^{\infty}([0, T]; L_{1+\varepsilon}^1(\mathbb{R}^d \setminus \{|x| < 1\}))$$

avec  $\varepsilon = \min\{2\vartheta' - d - 1; 1\}$  et  $\vartheta' < \vartheta$ .

Pour tout  $t > 0$ , le terme  $\nabla\Delta\Pi$  est une fonction homogène de degré  $-d - 3$  dont les coefficients sont bornés par  $\|a\|_{L^2}^2$ . Il est donc borné uniformément dans  $L^{\infty}([0, T]; L_{3-\alpha}^1(\mathbb{R}^d \setminus \{|x| < 1\}))$  avec  $\alpha > 0$  arbitraire.

L'hypothèse  $\partial_i a \in L_{\vartheta}^{\infty}$  et (2.3.17) impliquent que le terme  $\operatorname{div}(u \otimes u) = (u \cdot \nabla)u$  est uniformément borné dans  $L_{2\vartheta}^{\infty} \subset L_{2\vartheta'-1}^1$ .

Le reste  $R(t, x)$  est la somme de deux termes. Le premier étant exponentiellement décroissant, voici les détails des calculs pour le second :

$$(\partial_t - \Delta)R_{j;h,k}^{(2)}(t, x) = v_{h,k}(0) * F_{j;h,k}(t) + \int_0^t (\partial_t - \Delta)v_{h,k}(t-s) * F_{j;h,k}(s) ds$$

avec  $v_{h,k}(t, x) = u_h u_k - (u_h|u_k)_{L^2} g(x) \in L^\infty([0, T]; L_{2\vartheta}^\infty)$ . On a aussi :

$$\partial_t v_{h,k} = (\partial_t u_h)u_k + u_h(\partial_t u_k) - (\partial_t u_h|u_k)_{L^2} g(x) - (u_h|\partial_t u_k)_{L^2} g(x).$$

Ainsi,  $t^{1/2}\partial_t v_{h,k} \in L^\infty([0, T]; L_{2\vartheta}^\infty)$ . Pour contrôler les produits scalaires on utilise le fait que  $\vartheta > d/2$  donc que la norme  $L_{\vartheta}^\infty$  contrôle la norme  $L^2$ .

Le Théorème 9 et plus exactement l'inégalité (2.2.21) impliquent alors

$$t^{1/2}v_{h,k}(0) * F_{j;h,k}(t) \in L^\infty([0, T]; L_{\min\{2\vartheta; d+1\}}^\infty).$$

En utilisant la formule (2.3.19), on obtient aussi :

$$\int_0^t (\partial_t - \Delta)v_{h,k}(t-s) * F_{j;h,k}(s) ds \in L^\infty([0, T]; L_{\min\{2\vartheta; d+1\}}^\infty).$$

Ainsi  $t^{1/2}(\partial_t - \Delta)R^{(2)} \in L^\infty([0, T]; L_{\min\{2\vartheta; d+1\}}^\infty) \subset L^\infty([0, T]; L_{\min\{2\vartheta'-d; 1\}}^1)$ . On remarque que la constante peut grandir avec  $T$ .

Ceci achève la preuve du Théorème 32.

#### □ Asymptotique en temps long

On considère une solution globale  $u$  de (NS) vérifiant (2.5.9) et on souhaite démontrer le Théorème 33. Comme on s'est ramené au cas  $\nu = 1$ , l'équation (2.5.14) implique le profil (2.5.10) avec

$$E_j(t, y) = - \sum_{h,k} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (u_h u_k)(t-s, y) \Psi_{j;h,k} \left( \sqrt{\frac{t+1}{s+1}} y \right) dz ds$$

et

$$\mathcal{R}_j(t, x) = - \sum_{h,k} R_{j;h,k}^{(2)}.$$

La borne exponentiellement décroissante (2.2.8) fournit immédiatement la première inégalité (2.5.11). Pour démontrer la deuxième partie de (2.5.11), on utilise (2.5.17). L'hypothèse (2.5.9) implique en particulier :

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq C_\epsilon (1+t)^{-(\vartheta-\frac{d}{2}-\epsilon)}$$

pour tout  $\epsilon > 0$ . Ainsi :

$$|v_{h,k}(s, y)| \leq |u(s, y)|^2 + \|u(s)\|_2^2 g(y) \leq C (1+|y|)^{-2\alpha} (1+s)^{-(\vartheta-\alpha)}$$

pour  $d/2 < \alpha \leq \vartheta$ . D'autre part, l'inégalité (2.2.7) entraîne, pour  $0 \leq \beta \leq d+1$  et  $0 \leq \gamma \leq 1$  :

$$\begin{aligned} |F_{j;h,k}(t, x)| &\leq C|x|^{-\beta} t^{-(d+1-\beta)/2}, \\ |\nabla F_{j;h,k}(t, x)| &\leq |x|^{-(d+1+\gamma)} t^{-(1-\gamma)/2}. \end{aligned}$$

La Proposition 8 donne aussi  $\|F_{j;h,k}(t)\|_{L^1} \leq C t^{-1/2}$ . Ainsi, (2.5.17) entraîne :

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}(t, x)| &\leq C \left( \int_0^t \int_{|y| \leq |x|/2} (1+|y|)^{1-2\alpha} (1+s)^{-\vartheta+\alpha} (t-s)^{-\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}} dy ds \right) |x|^{-(d+1+\gamma)} \\ &\quad + C \left( \int_0^t \int_{|y| \geq |x|/2} (1+|y|)^{-2\alpha} (1+s)^{-\vartheta+\alpha} |x|^{-\beta} (t-s)^{-\frac{d+1-\beta}{2}} dy ds \right) \\ &\quad + C \int_0^t (t-s)^{-1/2} (1+|x|)^{-2\alpha} (1+s)^{-\vartheta+\alpha} ds. \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

On désigne respectivement par  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  les intégrales du second membre. Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être choisis indépendamment pour contrôler chaque intégrale.

On décompose  $I_1$  en  $I_{1,1} + I_{1,2}$  en découpant l'intégrale  $\int_0^t$  en  $\int_0^{t/2}$  et  $\int_{t/2}^t$ . On choisit  $\alpha = \frac{d+1}{2} + \epsilon$  avec  $\epsilon > 0$ . Alors, pour tout  $t \geq 1$ ,

$$I_{1,1} \leq C_\gamma |x|^{-(d+1+\gamma)} \times \begin{cases} t^{\frac{d+2+\gamma}{2}-\vartheta} & \text{si } \frac{d+1}{2} < \vartheta \leq \frac{d+3}{2} \\ t^{-\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}} & \text{si } \vartheta > \frac{d+3}{2} \end{cases}$$

et

$$I_{1,2} \leq C_{\gamma,\epsilon} |x|^{-(d+1+\gamma)} t^{\frac{d+2+\gamma}{2}+\epsilon-\vartheta}.$$

En conséquence :

$$I_1 \leq C_{\gamma,\epsilon} |x|^{-(d+1+\gamma)} \times \begin{cases} t^{\frac{d+2+\alpha}{2}-\vartheta+\epsilon} & \text{si } \frac{d+1}{2} < \vartheta < \frac{d+3}{2} \\ t^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}} & \text{si } \vartheta > \frac{d+3}{2}. \end{cases} \quad (2.5.23)$$

Pour  $I_2$ , on choisit  $\alpha = \frac{d+1}{2} + \epsilon$  et  $\beta = d + \gamma$ . Pour  $I_3$ , on choisit plutôt  $\alpha = \frac{d+1+\gamma}{2}$ . Dans les deux cas, un calcul analogue au précédent conduit encore à l'estimation (2.5.23). Ceci achève la preuve du Théorème 33.

#### □ Critère d'annulation de $\nabla\Pi$

La preuve de la Proposition 31 consiste à vérifier un résultat un peu plus complet : on considère une famille de polynômes homogènes

$$Q_j(x) = \sum_{h,k} (|x|^2 \sigma_{j,h,k}(x) - (d+2)x_j x_h x_k) \mathcal{K}_{h,k} \quad (2.5.24)$$

où  $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_{h,k})$  une matrice réelle donnée.

**Proposition 34** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. La matrice  $\mathcal{K}$  est proportionnelle à l'identité, i.e.

$$\forall h, k \in \{1, \dots, d\}, \quad \mathcal{K}_{h,k} = \alpha \delta_{h,k} \quad (2.5.25)$$

avec  $\alpha = \frac{1}{d} \text{Tr } \mathcal{K}$ .

2.  $Q_j \equiv 0$  pour tout indice  $j \in \{1, \dots, d\}$ .
3. Il existe un indice  $j \in \{1, \dots, d\}$  tel que  $Q_j \equiv 0$ .
4. Il existe un indice  $j \in \{1, \dots, d\}$  tel que  $\partial_j Q_j \equiv 0$ .

**Preuve** En mettant en facteur le terme  $x_j x_\ell^2$  dans (2.5.24), la  $j^{\text{ème}}$  composante de  $Q$  s'écrit :

$$Q_j(x) = x_j \sum_{\ell=1}^d \{ \text{Tr } \mathcal{K} - d\mathcal{K}_{\ell,\ell} + 2(\mathcal{K}_{j,j} - \mathcal{K}_{\ell,\ell}) \} x_\ell^2 + 2|x|^2 \tilde{\mathcal{K}}(e_j, x) - (d+2)x_j \tilde{\mathcal{K}}(x, x)$$

où  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^d$  et  $\tilde{\mathcal{K}}$  est la forme bilinéaire associée aux coefficients extra-diagonaux de  $\mathcal{K}$  :

$$\tilde{\mathcal{K}}(u, v) = \sum_{h \neq k} \mathcal{K}_{h,k} u_h v_k.$$

Les relations (2.5.25) signifient que la matrice  $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_{h,k})_{1 \leq h, k \leq d}$  est proportionnelle à la matrice identité. Dans ce cas, on vérifie immédiatement que  $Q_j(x) = 0$ .

Montrons inversement que  $\partial_j Q_j \equiv 0$  implique  $\mathcal{K} = \alpha \text{Id}$ . On a :

$$\partial_j Q_j(x) = \sum_{\ell=1}^d \{ (1 + 2\delta_{j,\ell})(\text{Tr } \mathcal{K} - d\mathcal{K}_{\ell,\ell}) + 2(\mathcal{K}_{j,j} - \mathcal{K}_{\ell,\ell}) \} x_\ell^2 - 2dx_j \tilde{\mathcal{K}}(e_j, x) - (d+2)\tilde{\mathcal{K}}(x, x).$$

Par hypothèse,  $\partial_j Q_j(e_i) = 0$  pour tout  $i$ , donc

$$\forall \ell \in \{1, \dots, d\}, \quad (1 + 2\delta_{j,\ell})(\text{Tr } \mathcal{K} - d\mathcal{K}_{\ell,\ell}) + 2(\mathcal{K}_{j,j} - \mathcal{K}_{\ell,\ell}) = 0.$$

Tous les termes diagonaux de  $\mathcal{K}$  sont donc égaux. En conséquence :

$$\partial_j Q_j(x) = -2dx_j \tilde{\mathcal{K}}(e_j, x) - (d+2)\tilde{\mathcal{K}}(x, x).$$

Par hypothèse, cette expression est identiquement nulle ; en dérivant par rapport à  $x_j$ , on obtient alors :

$$\partial_j^2 Q_j = -4(d-1)\tilde{\mathcal{K}}(e_j, x) = 0$$

donc  $\tilde{\mathcal{K}}(e_j, x) = 0$  puisque  $d \geq 2$ . Finalement,  $\tilde{\mathcal{K}}(x, x) \equiv 0$  et  $\mathcal{K}_{i,i} = \frac{1}{d} \text{Tr } \mathcal{K}$  pour  $i \in \{1, \dots, d\}$ . ■

## 2.6 Obstructions à la décroissance

Lorsque la donnée de Cauchy est suffisamment régulière et décroissante, on a (cf. Théorème 15) :

$$u(t, x) = \mathcal{O}_t((1 + |x|)^{-(d+1)}). \tag{2.6.1}$$

Il est légitime de poser le problème de la validité de la borne inférieure correspondante.

Une première difficulté est la suivante : la borne supérieure implique que  $u(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . La condition de divergence nulle entraîne donc :

$$\forall t > 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} u_j(t, x) dx = 0.$$

En particulier, comme  $u$  est régulière pour  $t > 0$ , aucune borne inférieure non triviale par une fonction positive donnée n'est possible.

Des bornes inférieures de nature intégrale sont déjà connues. Par exemple, L. Brandolese et Y. Meyer [12] ont démontré que si la donnée initiale ne présente pas de symétries particulières et plus précisément s'il existe  $j \neq k$  dans  $\{1, \dots, d\}$  tels que

$$\int_{\mathbb{R}^d} a_j(x) a_k(x) dx \neq 0 \quad (2.6.2a)$$

ou

$$\int_{\mathbb{R}^d} a_j^2(x) dx \neq \int_{\mathbb{R}^d} a_k^2(x) dx \quad (2.6.2b)$$

alors, pour  $t > 0$  arbitrairement petit, la solution de (NS) vérifie

$$R \int_{R \leq |x| \leq 2R} |u(t, x)| dx \not\rightarrow 0 \quad \text{lorsque } R \rightarrow +\infty. \quad (2.6.3)$$

En particulier, (cf. [58, Théorème 25.2]), on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x| |u(t, x)| dx = +\infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^d} |x|^{d+2} |u(t, x)|^2 dx = +\infty$$

même si la donnée initiale est à décroissance rapide.

Le Théorème 30 permet à la fois de simplifier la preuve de ce résultat et de le généraliser par des bornes inférieures ponctuelles. Les exemples de flots symétriques décroissant exceptionnellement vite (cf. §2.4.2) montrent qu'on ne peut pas s'affranchir des hypothèses (2.6.2).

### 2.6.1 Bornes inférieures ponctuelles et diffusion instantanée

Le résultat suivant complète la description du phénomène de diffusion instantanée (cf. [12] ou [58]).

**Proposition 35** *Pour  $\vartheta > d + 1$ , soit  $a \in L_{\vartheta}^{\infty}$  un champ de vecteur à divergence nulle. On considère la solution  $u$  de (NS) dans  $C_w([0, T]; L_{d+1}^{\infty})$ . On pose  $T' = \min\{1; T\}$  et*

$$\vartheta^* = \max\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{\vartheta - d - 1}\right\}.$$

1. Il existe une constante  $c > 0$  telle que, pour  $t$  assez petit et  $|x| \geq C t^{-\vartheta^*}$  :

$$|u(t, x)| \leq c t |x|^{-(d+1)}. \quad (2.6.4)$$

2. Si les relations de non-symétrie (2.6.2) sont satisfaites pour un couple  $(j, k)$ , alors, pour tout  $x$  situé dans un voisinage conique de l'axe  $x_j$  ou de l'axe  $x_k$ , avec  $|x| \geq C t^{-\vartheta^*}$ , on a :

$$|u_j(t, x)| \geq c' t |x|^{-(d+1)}. \quad (2.6.5)$$

De plus, pour une solution non-symétrique, la borne inférieure (2.6.5) vaut dans presque toute direction :

$$\Sigma = \left\{ \sigma \in \mathbb{S}^{d-1}; \liminf_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ |x| \rightarrow +\infty \\ x \in \mathbb{R}\sigma}} \left( t^{-1} |x|^{d+1} |u_j(t, x)| \right) = 0 \right\} \quad (2.6.6)$$

est un sous-ensemble fermé et de mesure nulle de la sphère  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

Ce résultat montre que, pour les flots non-symétriques (*i.e.* génériques), chaque composante du champ de vitesse diffuse instantanément dans toutes les directions. Pour  $t > 0$  assez petit :

$$R \geq C t^{-\vartheta^*} \implies \int_{R \leq |x| \leq 2R} |u_j(t, x)| dx \geq \frac{c_0 t}{R}.$$

En particulier, si  $1 \leq p < +\infty$  et  $\vartheta + \frac{d}{p} \geq d + 1$  :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x_k|^{\vartheta p} |u_j(t, x)|^p dx = +\infty, \tag{2.6.7}$$

pour tout couple  $(j, k) \in \{1, \dots, d\}^2$ . La propriété (2.6.7) est complémentaire de l'inégalité donnée par le Corollaire 18 (p.33) : pour  $1 \leq p \leq \infty$  et  $\vartheta + \frac{d}{p} \leq d + 1 - \varepsilon_{1/p}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|)^{\vartheta p} |u(t, x)|^p dx \leq C_u(t) \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|)^{\vartheta p} |a(x)|^p dx \tag{2.6.8}$$

avec  $C_u(t) < +\infty$  tant que la solution est régulière.

**Preuve** La borne supérieure (2.6.4) résulte par exemple du Théorème 30 et de la formule (2.5.21) :

$$|u(t, x) - e^{t\Delta} a(x)| \leq C t |x|^{-(d+1)} + C \sqrt{t} |x|^{-(d+2)} \leq C t |x|^{-(d+1)}$$

pour  $(t, x) \in [0; T'] \times \mathbb{R}^d$  et  $|x| \geq t^{-1/2}$ . De plus, si  $|x| \geq t^{-1/(\vartheta-d-1)}$ , on a :

$$|e^{t\Delta} a(x)| \leq C |x|^{-\vartheta} \leq \frac{1}{2} C t |x|^{-d-1}. \tag{2.6.9}$$

Intéressons-nous maintenant à la borne inférieure (2.6.5). On doit distinguer deux cas.

1. Il existe  $j \neq k$  tels que  $\alpha = \int_{\mathbb{R}^d} (a_j a_k) dx \neq 0$ . Alors, pour  $t > 0$  assez petit,

$$|\mathcal{K}_{j,k}(t)| \geq \frac{|\alpha|t}{2}.$$

Pour  $\epsilon > 0$ , l'ensemble  $\Gamma_k = \{x; |x_r| < \epsilon |x_k| \ (r \neq k)\}$  est un voisinage conique de l'axe  $x_k$ . L'identité (2.5.4) donne alors

$$\forall x \in \Gamma_k, \quad |x| \geq R \implies |P_j(t, x)| \geq \frac{|\alpha|t}{3} |x_k|^3$$

si  $\epsilon$  est choisi assez petit et  $R$  assez grand. En combinant (2.5.14), (2.5.21) et (2.6.9) on obtient donc

$$|u(t, x)| \geq |u_j(t, x)| \geq \frac{|\alpha|t}{4} |x_k|^{-(d+1)} \geq \frac{|\alpha|t}{4} |x|^{-(d+1)}$$

pour  $x \in \Gamma_k$  et  $|x| \geq C t^{-\vartheta^*}$ , *i.e.* (2.6.5).

2. Dans le deuxième cas, il existe  $j \neq k$  tels que  $\int_{\mathbb{R}^d} a_j^2 dx \neq \int_{\mathbb{R}^d} a_k^2 dx$ . Quitte à échanger  $j$  et  $k$ , on peut alors supposer que :

$$\beta = \sum_{m=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} a_m^2 dx - d \int_{\mathbb{R}^d} a_j^2 dx \neq 0.$$

Le même argument s'applique alors à  $x \in \Gamma_j$  et  $|x| \geq C t^{-\vartheta^*}$  :

$$|u(t, x)| \geq |u_j(t, x)| \geq \frac{|\beta|t}{4} |x_j|^{-(d+1)} \geq \frac{|\beta|t}{4} |x|^{-(d+1)}.$$

Ceci démontre (2.6.5).

Il reste à prouver la dernière assertion de la Proposition 35. L'application  $s \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} (u_h u_k)(s, x) dx$  est continue ; (2.5.4) implique donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} P(t, x) = \mathcal{P}(x)$$

avec  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_d)$  défini par

$$\mathcal{P}_j(t, x) = \gamma_d \sum_{h,k} \left( \int_{\mathbb{R}^d} a_h a_k \right) ((d+2)x_j x_h x_k - |x|^2 \sigma_{j,h,k}(x)).$$

La convergence de  $t^{-1} P(t, x)$  vers  $\mathcal{P}(x)$  est uniforme lorsque  $x$  décrit la sphère unité. Sous l'hypothèse (2.6.2), la Proposition 31 entraîne que  $\mathcal{P}_j \neq 0$  donc que c'est un polynôme homogène de degré 3 pour tout  $j = 1, \dots, d$ .

On considère la famille suivante d'ouverts denses de la sphère unité :

$$\Omega_j = \{\omega \in \mathbb{S}^{d-1} : \mathcal{P}_j(\omega) \neq 0\}$$

et pour  $\omega \in \Omega_j$ , on définit  $T_\omega > 0$  comme la borne supérieure des  $t \leq T'$  tels que

$$\frac{1}{t} |P_j(\omega, t)| \geq \frac{1}{2} |\mathcal{P}_j(\omega)|.$$

On pose enfin  $c_\omega = \frac{1}{4} |\mathcal{P}_j(\omega)|$ .

Si  $\omega = x/|x| \in \Omega_j$ , les inégalités (2.5.14), (2.5.21) et la majoration élémentaire  $|e^{t\Delta} a(x)| \leq C|x|^{-\vartheta}$  entraînent :

$$|u_j(t, x)| \geq 2c_\omega t |x|^{-(d+1)} - C t^{1/2} |x|^{-(d+2)} - C |x|^{-\vartheta} \geq c_\omega t |x|^{-(d+1)}$$

pour  $0 \leq t \leq T_\omega$  et  $|x| \geq C_\omega t^{-\vartheta^*}$ . Autrement dit,  $\Sigma \subset \Omega_j^c$ . C'est donc une surface algébrique et en particulier, un sous-ensemble de mesure nulle de  $\mathbb{S}^{d-1}$ . ■

## 2.6.2 Bornes inférieures en temps grand dans les espace à poids

Dans cette section, on se place dans le cadre d'application du Théorème 33. On suppose de plus que  $a \in L_{\vartheta}^{\infty}$  avec  $\vartheta > \frac{d+2}{2}$ . Comme  $L_{\vartheta}^{\infty} \subset \dot{B}_{2,\infty}^{-1-\epsilon}$ , le Théorème 25 entraîne alors que la solution est  $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$  ; on peut donc définir :

$$\nabla \Pi_{\infty}(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \nabla \Pi(t, x).$$

La Proposition 31 assure que  $\nabla \Pi_{\infty}$  est génériquement non nul. Le profil (2.5.10) entraîne donc que, pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\left| u(t, x) - e^{t\Delta} a(x) - \nabla \Pi_{\infty}(x) \right| \leq C e^{-|x|^2/(t+1)} + C_{\varepsilon} |x|^{-d-1} t^{-(\vartheta-\varepsilon-(d+2)/2)}. \quad (2.6.10)$$

On se propose d'en déduire des bornes inférieures des normes de  $u$ .

**Proposition 36** Soit  $a \in L_{d+1+\varepsilon}^{\infty}$  et  $u$  la solution correspondante de (NS) dans  $L_{d+1}^{\infty}$ . On suppose que le Théorème 33 s'applique et que  $\nabla \Pi_{\infty} \neq 0$ . Alors, on a :

$$\|u(t)\|_{L_{\vartheta}^p} \geq c(1+t)^{-\frac{1}{2}(d+1-\vartheta-\frac{d}{p})} \quad (2.6.11)$$

pour  $1 \leq p \leq \infty$  et  $0 \leq \vartheta \leq d+1 - \varepsilon_{1/p}$ .

**Remarques**

1. Cette borne inférieure était déjà connue dans certains cas : lorsque  $p = 2$  et  $0 \leq \vartheta \leq 2$  (cf. [74], [4]) ou lorsque  $1 \leq p \leq \infty$  et  $\vartheta = 0$  (cf. [36]).
2. L'hypothèse (2.5.9) implique en particulier :

$$\|u(t)\|_{L^p_\vartheta} \leq C_\varepsilon (1+t)^{-\frac{1}{2}(d+1-\vartheta-\frac{d}{p}-\varepsilon)}$$

pour tout  $\varepsilon > 0$ . En fait, la borne optimale (*i.e.* avec  $\varepsilon = 0$ ) a été obtenue par plusieurs auteurs, au moins lorsque  $p \geq 2$  et avec quelques restrictions supplémentaires sur  $\vartheta$  (cf. §2.4.3 ou [57] et les références auxquelles il renvoie).  $\diamond$

**Preuve** Pour  $A > 0$ , on définit :

$$\mathcal{D}_A(t) = \{x \in \mathbb{R}^d; |x|^2 \geq A(t+1)\}.$$

L'inégalité (2.6.10) entraîne :

$$\begin{aligned} \|u(t) - e^{t\Delta}a\|_{L^p_\vartheta}^p &\geq \int_{\mathcal{D}_A(t)} |u(t,x) - e^{t\Delta}a(x)|^p (1+|x|)^{p\vartheta} dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}_A(t)} |\nabla \Pi_\infty(x)|^p (1+|x|)^{p\vartheta} dx \\ &\geq C (A(t+1))^{-\frac{p}{2}(d+1-\vartheta-\frac{d}{p})} \end{aligned} \tag{2.6.12}$$

la dernière inégalité résultant du fait que  $\nabla \Pi_\infty \neq 0$ . On peut en effet trouver un cône  $\Gamma$  tel que

$$\forall x \in \Gamma, \quad |\nabla \Pi_\infty(x)| \geq \frac{c_0}{|x|^{d+1}}$$

avec  $c_0$  qui ne dépend que de la constante  $C_0$  dans (2.5.9).

D'autre part, comme  $a \in L^1(\mathbb{R}^d)$  et  $\operatorname{div} a = 0$ , on a  $\int a(y) dy = 0$ . On en déduit :

$$|e^{t\Delta}a(x)| \leq C(1+|x|)^{-\vartheta} (1+t)^{(\vartheta-d-1)/2}$$

par un calcul analogue à (2.5.17). Alors,

$$\int_{\mathcal{D}_A(t)} |e^{t\Delta}a(x)|^p (1+|x|)^{\alpha p} dx \leq C A^{-\frac{p}{2}(\vartheta-\alpha-\frac{d}{p})} t^{-\frac{p}{2}(d+1-\alpha-\frac{d}{p})}.$$

L'exposant de  $A$  étant ici strictement inférieur à celui de (2.6.12), la comparaison de ces deux inégalités implique (2.6.11) si  $A$  est choisi assez grand.  $\blacksquare$

### 2.6.3 Isotropie des solutions exceptionnellement bien localisées

On a vu que le flot de Navier-Stokes propage certains profils anisotropes, dans la mesure où ils sont compatibles avec le flot de la chaleur et qu'ils ne violent pas la limite de diffusion instantanée (cf. Théorème 23).

Au contraire, le résultat suivant indique que la décroissance à l'infini des solutions exceptionnellement bien localisées est nécessairement isotrope.

**Proposition 37** Soit  $a \in L_{d+1+\varepsilon}^\infty$  un champ de vecteur à divergence nulle avec  $0 < \varepsilon < 1$ . On désigne par  $u$  la solution correspondante de (NS) dans  $C_w([0, T]; L_{d+1}^\infty)$ . Pour tout  $t > 0$  (fixé), s'il existe un indice  $j \in \{1, \dots, d\}$  et un sous-ensemble  $\Sigma \subset \mathbb{S}^{d-1}$  de mesure positive tels que

$$\forall \sigma \in \Sigma, \quad \lim_{\substack{|x| \rightarrow +\infty \\ x \in \mathbb{R}\sigma}} |x|^{d+1} u_j(t, x) = 0, \quad (2.6.13)$$

alors, toutes les composantes  $u_k$  ( $k = 1, \dots, d$ ) du champ de vitesse vérifient :

$$|u_k(t, x)| \leq C(1 + |x|)^{-(d+1+\varepsilon)}. \quad (2.6.14)$$

De plus, lorsque (2.6.13) vaut sur un intervalle de temps fini  $t \in [T_0, T_1]$ , la constante  $C$  peut être choisie indépendamment de  $t$ .

**Preuve** L'hypothèse implique que  $\partial_j \Pi(t, x) \equiv 0$ . La Proposition 31 entraîne alors que toutes les autres composantes s'annulent :  $\nabla \Pi(t, x) \equiv 0$ . Le résultat découle alors immédiatement du développement asymptotique (2.5.2). ■

## 2.7 Application à l'écoulement autour d'un obstacle aérodynamique

Voici une dernière application du Théorème 30. Dans le demi-espace

$$\mathbb{R}_+^d = \{(x', x_d) : x' \in \mathbb{R}^{d-1}, x_d > 0\},$$

on considère le semi-groupe  $\{e^{-tA'}\}_{t \geq 0}$  engendré par  $-A' = \nu \Delta$  avec les conditions de Neumann :

$$\partial_d u' |_{\partial \mathbb{R}_+^d} = 0, \quad u_d |_{\partial \mathbb{R}_+^d} = 0. \quad (2.7.1)$$

On pose  $u' = (u_1, \dots, u_{d-1})$  et  $x' = (x_1, \dots, x_{d-1})$ .

Les conditions de Neumann ne sont pas standard pour Navier-Stokes puisque la condition naturelle est celle de Dirichlet (cf. le Théorème 4). Les conditions de Neumann suppriment le phénomène de couche limite. Cependant, on peut rendre compte de l'hypothèse (2.7.1) dans le cadre de l'approximation laminaire pour les corps bien profilés (voir plus bas) ; cette approximation suppose que les effets de la viscosité sont asymptotiquement négligeables à l'extérieur de la couche limite et du sillage.

Examinons maintenant le cadre mathématique. Les conditions de Neumann entraînent, au moins formellement, la conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla u\|_{L^2}^2 = 0.$$

La formulation intégrale de Navier-Stokes dans  $\mathbb{R}_+^d$  devient :

$$u(t) = e^{-tA'} a - \int_0^t e^{-(t-s)A'} \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u)(s) ds, \quad (2.7.2)$$

étant entendu que la donnée de Cauchy vérifie  $\operatorname{div} a = 0$ . On peut alors construire des solutions faibles et des solutions fortes avec des techniques classiques (cf. [37]).

Le résultat qu'on se propose de démontrer est le suivant.

**Proposition 38** Soit  $a \in L^\infty_{\vartheta}(\mathbb{R}_+^d)$  avec  $\vartheta > \frac{(d+1)}{2}$ . Il existe  $T > 0$  et une unique solution forte  $u \in \mathcal{C}_w([0, T); L^\infty_{\vartheta}(\mathbb{R}_+^d))$  de (2.7.2) avec  $\vartheta = \min\{\vartheta; d+1\}$ . Cette solution vérifie :

$$u(t, x) = e^{\nu t \Delta} a(x) + H(t, x) + \mathcal{O}_t(|x|^{-\min\{2\vartheta; d+2\}}), \quad (2.7.3)$$

où  $H = (H_1, \dots, H_d)$  est homogène de degré  $-(d+1)$  et

$$|H_j(t, x)| \leq C|x'| \cdot |x|^{-(d+2)}, \quad (1 \leq j \leq d-1) \quad (2.7.4)$$

$$|H_d(t, x)| \leq C|x_d| \cdot |x|^{-(d+2)}. \quad (2.7.5)$$

Les constantes dépendent de la viscosité. De plus,  $H$  est un champ de gradient.

La Proposition 38 entraîne les estimations anisotropes suivantes :

$$\begin{aligned} u_d(t, x) &= \mathcal{O}(|x'|^{-(d+2)}) \quad \text{et} \quad u'(t, x) = \mathcal{O}(|x'|^{-(d+1)}) && \text{si } |x'| \rightarrow +\infty \text{ avec } x_d \text{ fixé} \\ u_d(t, x) &= \mathcal{O}(|x_d|^{-(d+1)}) \quad \text{et} \quad u'(t, x) = \mathcal{O}(|x_d|^{-(d+2)}) && \text{si } x_d \rightarrow +\infty \text{ avec } x' \text{ fixé.} \end{aligned}$$

Ceci n'est pas contradictoire avec la Proposition 37 car ces taux de décroissance sont valables dans une région cylindrique et non conique.

**Preuve** La preuve est très simple. Si  $u$  est une solution de (2.7.2), on peut construire une solution de (NS) dans  $\mathbb{R}^d$  en posant (cf. [37]) :

$$\begin{cases} \tilde{u}_j(x_1, \dots, x_{d-1}, -x_d, t) = u_j(x_1, \dots, x_{d-1}, x_d, t) & \text{si } j \neq d \\ \tilde{u}_d(x_1, \dots, x_{d-1}, -x_d, t) = -u_d(x_1, \dots, x_{d-1}, x_d, t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les hypothèses de la Proposition 38 étant vérifiées, on peut appliquer (2.5.2) à  $\tilde{u}$ . Or, par construction

$$\tilde{\mathcal{K}}_{j,d}(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} (\tilde{u}_j \tilde{u}_d)(s, x) dx ds \equiv 0$$

si  $j \neq d$ . L'identité (2.5.4) entraîne alors que  $\nabla \tilde{\Pi}(t, x) = |x|^{-d-4} |P(t, x)|$  est borné par une fonction  $H(t, x)$  qui vérifie (2.7.4). ■

L'interprétation physique de ce résultat est la suivante. Considérons un corps aérodynamique  $\Omega$  se déplaçant à la vitesse  $V$  dans un fluide au repos. La dimension  $L$  du corps étant fixée, le nombre de Reynolds de l'écoulement est

$$Re = \frac{VL}{\nu}$$

donc proportionnel à  $V$ . La théorie de Prandtl (cf. [47, Chapitre 9] ou [10, Chapitre VI]) indique que le fluide ne devrait être vraiment perturbé que dans un voisinage mince du bord du corps (la couche limite), d'épaisseur  $\varepsilon \sim \sqrt{\nu L/V}$ . Pour vérifier la consistance de cette hypothèse, on considère le domaine extérieur à  $\Omega + \mathcal{B}_\varepsilon$ . On désigne par  $\mathbf{n}$  la normale au bord et on pose

$$u = u_h + (u \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

L'absence d'interaction avec la couche limite se traduit par les conditions aux limites :

$$u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_h}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

Dans le cas d'un bord rectiligne, on retrouve (2.7.1).

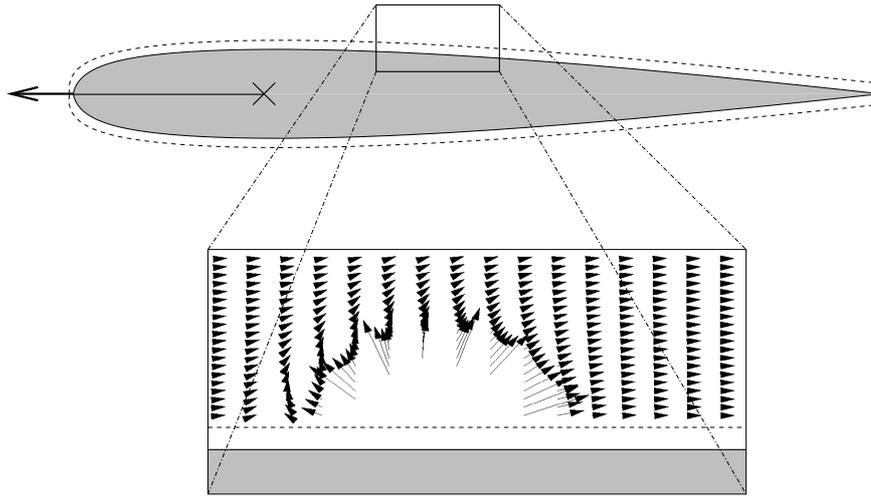


FIG. 2.6 – Perturbation de l’approximation laminaire au-delà de la couche limite de Prandtl.

Dans le référentiel du corps (qui est galiléen puisqu’en translation rectiligne uniforme) le champ de vitesse apparent du fluide s’écrit :

$$u(t, x) = V + v(t, x)$$

et vérifie l’équation (NS).

On modélise une petite perturbation de l’approximation laminaire par une donnée de Cauchy  $u(0, x) = V + a(x)$  où  $a$  est une fonction très bien localisée (par exemple à support compact). On pose alors  $v(t, x) = w(t, x + Vt)$  et  $w(t, y)$  vérifie (NS) avec la donnée de Cauchy  $w(0, y) = a(y)$ . L’application du Théorème 38 à la solution  $w(t, y)$  s’interprète de la façon suivante.

1. Asymptotiquement loin de la couche limite, l’écoulement perturbé est potentiel (*i.e.* est un champ gradient). En particulier, c’est un champ irrotationnel. Cette propriété est en accord avec l’observation physique que le tourbillon prend naissance dans la couche limite.
2. A une unité de distance de la couche limite, la perturbation du champ de vitesse est de l’ordre de  $|a|^2$ . En conséquence, l’approximation laminaire est stable si et seulement si  $V \gg \frac{t}{L} |a|^2$ , c’est-à-dire si le nombre de Reynolds est suffisamment grand, par exemple  $Re \gg \frac{t}{\nu} |a|^2$ . Cette conclusion est aussi en accord avec l’observation expérimentale (voir [47, Chapitre 9]).

En bref, la discussion précédente permet de conclure que lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment élevé, l’approximation laminaire est *mathématiquement consistante* le long des parois latérales d’un corps bien profilé.

Bien entendu, ce résultat ne justifie pas, à lui seul, l’approximation laminaire. Il serait beaucoup plus convaincant de démontrer un théorème d’approximation dans le cadre de conditions de Dirichlet, mais ce problème est aujourd’hui encore ouvert.

Dans le cas d’un écoulement stationnaire, des profils ont été obtenus par F. Haldi et P. Wittwer [48], [86]. Ils modélisent l’effet d’aspiration derrière un obstacle (“wake flow” en anglais). Cependant, eux non plus ne travaillent pas directement avec l’obstacle ; ils se placent dans un demi-plan perpendiculaire au flot principal, situé en retrait du corps, et imposent des conditions aux limites dictées par des modèles expérimentaux.

Pour les écoulements instationnaires, les travaux récents de Y. Kozono [56] et C. He, T. Miyakawa [49] suggèrent que les conditions de non-symétrie (2.6.2) doivent être remplacées par la non-annulation de la résultante des forces exercées par le fluide sur l'obstacle :

$$\int_{\partial\Omega} T[u, p] \cdot n \neq 0$$

où  $T_{j,k}[u, p] = \frac{\eta}{2}(\partial_j u_k + \partial_k u_j) - \delta_{j,k} p$  désigne le tenseur des déformations (2.1.11).

## 2.8 Remarques sur la localisation du tourbillon

L'essentiel de ce chapitre a été consacré à l'étude de la décroissance du champ de vitesse et de ses dérivées, conduisant aussi à une description du champ de pression.

Avant de clore ce chapitre, il est donc nécessaire de rappeler quelques résultats sur la décroissance du *tourbillon*. C'est la matrice antisymétrique :

$$\Omega_{ij} = \partial_i u_j - \partial_j u_i. \tag{2.8.1}$$

En dimension  $d = 2$ , c'est une grandeur scalaire et pour  $d = 3$ , on l'identifie au rotationnel  $\omega = \text{rot } u$ .

Le tourbillon satisfait l'équation suivante :

$$\partial_t \Omega_{ij} - \nu \Delta \Omega_{ij} + (u \cdot \nabla) \Omega_{ij} = - \sum_k \partial_k (u_j \partial_i - u_i \partial_j) u_k = - \sum_k (\Omega_{i,k} \partial_j - \Omega_{j,k} \partial_i) u_k. \tag{2.8.2}$$

Le second membre est identiquement nul en dimension 2. La loi de Biot-Savart permet de recalculer le champ de vitesse à partir du tourbillon. Par exemple, en dimension  $d = 3$  :

$$u(t, x) = - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - y}{|x - y|^3} \wedge \omega(t, y) dy.$$

Le caractère antisymétrique du tourbillon lui permet d'être très bien localisé alors que le champ de vitesse ne l'est pas. On peut citer par exemple le résultat suivant.

**Théorème 39 (L. Brandolese, [11] - Chap. 3)** *Soit  $\omega_0$  un champ à divergence nulle et de classe  $L^\infty_\vartheta(\mathbb{R}^3)$  pour tout  $\vartheta \geq 0$ . Il existe  $T > 0$  et une unique solution régulière de (NS) sur  $[0, T]$  telle que  $\text{rot } u(0) = \omega_0$ . De plus,*

$$u \in L^\infty([0, T]; L^\infty_3(\mathbb{R}^3)) \quad \text{et} \quad \omega \in \bigcap_{\vartheta \geq 0} L^\infty([0, T]; L^\infty_\vartheta(\mathbb{R}^3)).$$

*Enfin, si  $\int x_j \omega_0(x) dx = 0$  pour  $j = 1, 2, 3$ , alors  $u \in L^\infty([0, T]; L^\infty_4(\mathbb{R}^3))$ .*

En dimension 2 et lorsque  $\nu t$  est suffisamment petit, R. Danchin [32] a montré aussi que la localisation du tourbillon est exponentiellement proche de celle de la solution de l'équation d'Euler, avec convergence lorsque  $\nu \rightarrow 0$ .

En temps grand, et dans des variables convenables, le tourbillon converge vers un tourbillon d'Oseen, *i.e.* la solution correspondant à une vorticité initiale concentrée à l'origine (cf. [45] pour  $\mathbb{R}^2$ , [44] pour  $\mathbb{R}^3$  et [72] pour le cas de  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ ). Ce déplacement vers les basses fréquences correspond à l'observation physique que le tourbillon tend à s'organiser en structures cohérentes et que les petits tourbillons sont "absorbés" par les plus gros.

La Proposition 35 implique que pour une donnée de Cauchy générique, supportée dans la boule unité, une fraction non négligeable de l'énergie est transportée immédiatement à l'infini. La convergence vers un tourbillon d'Oseen tend alors à indiquer que ce phénomène de diffusion instantanée est "minimal" au sens où il ne transporte pas plus de masse à l'infini que le strict nécessaire exigé par la loi de Biot et Savart.

La théorie de T. Gallay et E. Wayne [44] repose sur des techniques de système dynamique et permet aussi de caractériser les flots dont le champ de vitesse vérifie  $\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = o(t^{-5/4})$  comme éléments d'une variété invariante de codimension 11 dans un espace de fonction adapté.

L'un des objectifs initiaux de mon travail était d'étudier la propagation de l'information fréquentielle des tourbillons bien localisés ; par exemple, étant donné un tourbillon initial  $\Omega_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  dans la classe de Schwartz tel que

$$\text{supp } \hat{\Omega}_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d ; |\xi \pm \xi_0| \leq \varepsilon |\xi_0|\},$$

étudier l'évolution ultérieure de  $\hat{\Omega}(t, \xi)$  en fonction du paramètre fréquentiel  $|\xi_0| \gg 1/\sqrt{\nu t}$ . La question reste pour le moment essentiellement ouverte, mais a été une motivation importante de l'apprentissage de l'analyse microlocale, qui fait l'objet de la deuxième partie de cette thèse.



## Chapitre 3

# Un système couplé : la magnéto-hydrodynamique

Au chapitre 2, on a étudié des champs vectoriels dont toutes les composantes répondaient au *même* profil de décroissance, que ce dernier soit isotrope ou anisotrope. L'enjeu mathématique du chapitre 3 est d'étudier un problème parabolique vectoriel dont les composantes ont des profils de localisation différents.

La magnéto-hydrodynamique (MHD) fournit un exemple naturel de système dont les composantes, étant de nature différentes, présentent spontanément des propriétés de localisation différentes. Par ailleurs, ce système est une extension de Navier-Stokes ; on peut donc mettre à profit cette parenté pour réutiliser les techniques du chapitre précédent.

### 3.1 Description du modèle et énoncé du résultat principal

Les équations de la magnéto-hydrodynamique sont un des modèles classiques de la physique des plasmas, décrivant l'interaction entre un champ magnétique et un fluide constitué de particules électriquement chargées.

Les réacteurs *Tokamaks* en sont une application particulièrement impressionnante : le but de ces engins est de confiner un plasma dans une région suffisamment dense et chaude pour pouvoir entretenir des réactions de fusion thermonucléaire. Le confinement est assuré par des champs magnétiques intenses. Ce modèle s'applique aussi à l'étude de la dynamique de la couronne solaire. Pour plus de détails le lecteur est invité à consulter, par exemple, l'ouvrage de E.R. Priest [71].

Sous forme adimensionnée, les équations qu'on se propose d'étudier sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\Delta u}{Re} + (u \cdot \nabla)u - \sigma(B \cdot \nabla)B = -\nabla \left( p + \frac{\sigma}{2}|B|^2 \right) \\ \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\Delta B}{Rm} + (u \cdot \nabla)B - (B \cdot \nabla)u = 0 \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} B = 0 \\ u(0) = u_0 \quad \text{et} \quad B(0) = B_0. \end{cases} \quad (\text{MHD})$$

Les inconnues sont le champ de vitesse  $u$ , la pression  $p$  et le champ magnétique  $B$ . Comme précédemment, on pose le problème dans  $\mathbb{R}^d$  avec  $d \geq 2$ .

Les constantes  $Re$  et  $Rm$  sont respectivement le nombre de Reynolds hydrodynamique et le nombre de Reynolds magnétique. On pose  $\sigma = M^2/(Re Rm)$  où  $M$  est le nombre de Hartman.

Après un changement d'échelle convenable, on peut supposer que  $S = Re = 1$ . Etant entendu que l'enjeu principal de ce chapitre est l'étude du couplage de localisations différentes, on peut simplifier les notations en supposant aussi que  $Rm = 1$ . Les résultats obtenus sont cependant valables en toute généralité en ajoutant convenablement les constantes.

Lorsque  $B \equiv 0$ , le système (MHD) se réduit à l'équation de Navier–Stokes (NS). On peut construire des solutions faibles de (MHD), globales en temps, mais, comme pour Navier–Stokes, leur unicité est un problème ouvert lorsque  $d \geq 3$ . On peut trouver des résultats de régularité dans [50], sous la forme de bornes supérieures de la dimension de Hausdorff de l'ensemble singulier des solutions. La théorie de P. Constantin et C. Fefferman [24] reliant la régularité du flot à la direction de la vorticité a aussi été étendu au cadre magnéto-hydrodynamique par C. He, Z. Xin [51]. Enfin, l'asymptotique en temps grand est assez bien comprise : par exemple, [75] calcule le taux de décroissance optimal de la norme  $L^2$  de  $u$  et  $B$  pour une classe importante de flots.

   l'inverse, l'étude de la décroissance des solutions de (MHD) par rapport à la variable d'espace semble n'avoir encore jamais été réalisée. L'objectif de ce chapitre est donc de décrire en quelle mesure la présence du champ magnétique affecte les propriétés de localisation spatiale du champ hydrodynamique.

### 3.1.1 Forme intégrale de (MHD)

En appliquant le projecteur de Leray (2.1.15) et la formule de Duhamel, on obtient la version intégrale de (MHD) :

$$\begin{cases} u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u - B \otimes B)(s) ds \\ B(t) = e^{t\Delta}B_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \operatorname{div}(u \otimes B - B \otimes u)(s) ds \\ \operatorname{div} u_0 = \operatorname{div} B_0 = 0. \end{cases} \quad (\text{MHDi})$$

On introduit les noyaux  $F_{j;h,k}$  et  $G_{j;h,k}$  des opérateurs  $e^{t\Delta}\mathbb{P} \operatorname{div}$  et  $e^{t\Delta} \operatorname{div}$ . L'équation devient :

$$v = e^{t\Delta}v_0 - \mathbb{V}(v, v)$$

avec  $v = (u, B)$ ,  $v_0 = (u_0, B_0)$  et  $\mathbb{V} = (\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2) : \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$  défini par :

$$\mathbb{V}_1(w, w') = \mathbb{U}(w_1, w'_1) - \mathbb{U}(w_2, w'_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}_2(w, w') = \mathbb{B}(w_1, w'_1) - \mathbb{B}(w_2, w'_2).$$

On note  $w = (w_1, w_2)$  la décomposition canonique de  $\mathbb{R}^{2d} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ . Les opérateurs  $\mathbb{U}$  et  $\mathbb{B}$  sont bilinéaires sur  $\mathbb{R}^d$  et définis par :

$$\begin{aligned} \mathbb{U}_j(f, g)(t, x) &= \sum_{h,k} \int_0^t F_{j;h,k}(t-s) * (f_h g_k)(s) ds, \\ \mathbb{B}_j(f, g)(t, x) &= \sum_{h,k} \int_0^t G_{j;h,k}(t-s) * (f_h g_k)(s) ds. \end{aligned}$$

Les propriétés de  $F = (F_{j;h,k})$  ont été étudiées en détail au paragraphe §2.2. En particulier,

$$F(t, x) = t^{-(d+1)/2} \Phi(x/\sqrt{t}) \quad \text{avec} \quad |\Phi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-(d+1)}. \quad (3.1.1)$$

Le faible taux de décroissance de  $\Phi$  exprime que  $F(t, \cdot) \notin L^1_1(\mathbb{R}^d)$ ; sinon,  $\widehat{F}(t, \cdot)$  aurait été une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^d$ . Le noyau  $G = (G_{j;h,k})$  vérifie :

$$G(t, x) = t^{-(d+1)/2} \Psi(x/\sqrt{t}) \quad \text{avec} \quad |\Psi(x)| \leq C_N(1 + |x|)^{-N} \quad (3.1.2)$$

pour tout  $N \geq 0$ .

### 3.1.2 Théorème de propagation de la localisation

Le problème peut se formuler mathématiquement de la façon suivante. Étant donnés deux champs à divergence nulle

$$(u_0, B_0) \in L_{\vartheta_0}^{p_0}(\mathbb{R}^d) \times L_{\vartheta_1}^{p_1}(\mathbb{R}^d), \quad (3.1.3)$$

la solution – localement unique – de (MHD) est-elle aussi bien localisée que la donnée de Cauchy ? Pour des raisons techniques, il n'est pas possible de donner une réponse universellement satisfaisante dans le cadre des espaces à poids.

Cependant, pour que l'équation ait un sens, il est nécessaire que les solutions soient localement de carré sommable dans  $\mathbb{R}^d$ . On a donc recours à la notion de taux de décroissance  $L^2$ -faible introduite au Chapitre 1. La question revient alors à montrer ou infirmer que

$$u(t) \stackrel{L^2}{\equiv} \mathcal{O}(|x|^{-(\vartheta_0+d/p_0)}) \quad \text{et} \quad B(t) \stackrel{L^2}{\equiv} \mathcal{O}(|x|^{-(\vartheta_1+d/p_1)}) \quad \text{lorsque } |x| \rightarrow +\infty.$$

Cette formulation contourne les problèmes techniques puisqu'elle permet d'obtenir une réponse positive sans nécessairement avoir à démontrer que

$$(u, B) \in L^\infty \left( [0, T]; L_{\vartheta_0}^{p_0} \times L_{\vartheta_1}^{p_1} \right). \quad (3.1.4)$$

Le résultat est le suivant.

**Théorème 40 (avec L. Brandolese [16])** Soient  $u_0 \in L_{\vartheta_0}^{p_0}(\mathbb{R}^d)$ ,  $B_0 \in L_{\vartheta_1}^{p_1}(\mathbb{R}^d)$  deux champs à divergence nulle dans  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ). On suppose que :

$$\begin{cases} \vartheta_0 \geq 0 \\ d < p_0 \leq +\infty \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vartheta_1 \geq 0 \\ d < p_1 \leq +\infty. \end{cases} \quad (3.1.5a)$$

On définit  $\eta_0 = \vartheta_0 + d/p_0$ ,  $\eta_1 = \vartheta_1 + d/p_1$  et  $\delta = \left(\frac{2d}{p_1} - 1\right)^+$  et on suppose que

$$\delta + \varepsilon_\delta \leq \eta_0 \leq \min \{d + 1; 2\eta_1 - \delta\}. \quad (3.1.5b)$$

Alors, il existe  $T > 0$  et une unique solution régulière  $(u, B)$  de (MHDi) dans

$$C([0, T]; L^{p_0^*} \times L^{p_1})$$

avec  $p_0^* = \min\{p_0; \frac{d}{\delta} - \varepsilon_\delta\}$ . Cette solution vérifie :

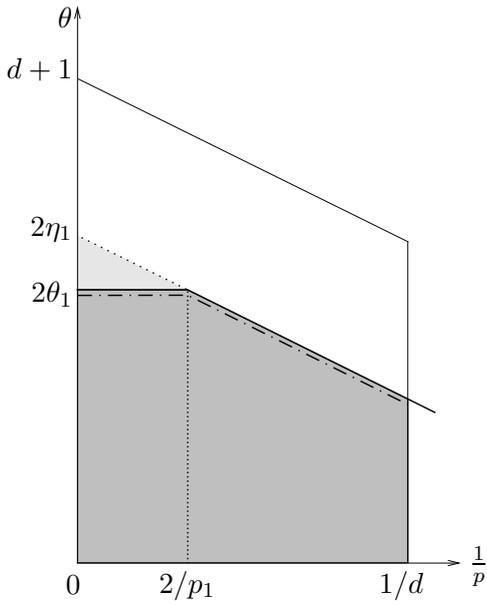
$$u(t) \stackrel{L^2}{\equiv} \mathcal{O}(|x|^{-\eta_0}) \quad \text{et} \quad B(t) \stackrel{L^2}{\equiv} \mathcal{O}(|x|^{-\eta_1}) \quad \text{lorsque } |x| \rightarrow +\infty. \quad (3.1.6)$$

La propriété (3.1.6) persiste au-delà de  $[0, T]$  tant que la solution est régulière. Si  $d = 2$ , on peut choisir  $T$  arbitrairement grand.

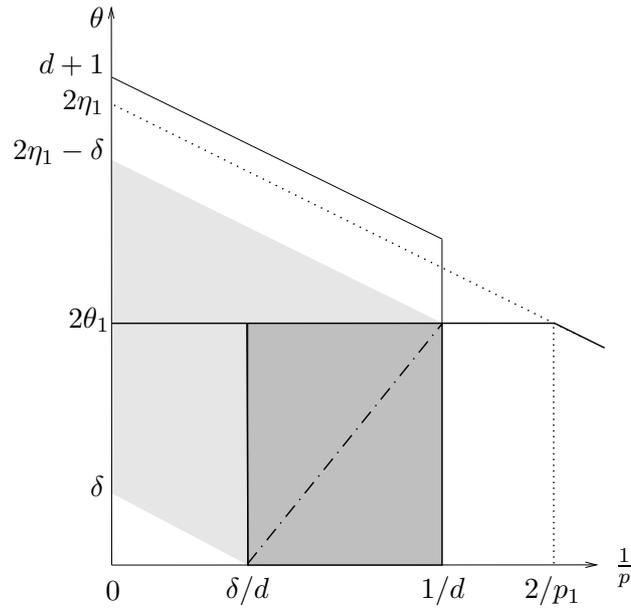
Ce théorème précise le fondement mathématique d'un certain nombre d'observations expérimentales. On peut en tirer les conclusions suivantes.

1. Le flot préserve toujours la localisation initiale du champ magnétique. En effet, il n'y a pas de contrainte supérieure sur le taux  $\eta_1$ .

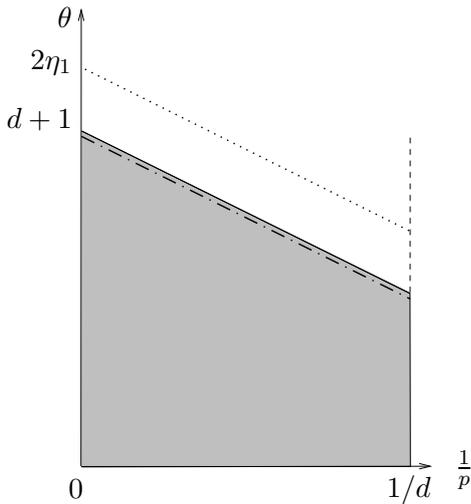
La propagation de la localisation du champ  $u$  est par contre soumise à quelques restrictions.



$$\begin{cases} \eta_1 \leq (d+1)/2 \\ p_1 \geq 2d \end{cases}$$



$$\begin{cases} \eta_1 \leq (d+1+\delta)/2 \\ d < p_1 < 2d \end{cases}$$



$$\begin{cases} \eta_1 \geq (d+1+\delta)/2 \\ p_1 > d \end{cases}$$

L'union des zones grisées indique les valeurs admissibles de  $(p_0, \vartheta_0)$  entraînant (3.1.6) une fois que  $(p_1, \vartheta_1)$  est donné.

GRIS FONCÉ : Paramètres pour lesquels on peut démontrer (3.1.4). La ligne pointillée représente les espaces utilisés pour en déduire le Théorème 40.

EN HAUT :  $B$  décroît faiblement. Le couplage dépend légèrement de la régularité de  $B$  via

$$\delta = \left( \frac{2d}{p_1} - 1 \right)^+.$$

EN BAS À GAUCHE :  $B$  décroît rapidement. Le champ de vitesse a un comportement hydrodynamique (cf. Chapitre 1).

FIG. 3.1 – Couplages  $(u, B)$  admissibles permettant la propagation de la décroissance.

2. Lorsque le champ magnétique est faiblement localisé (précisément si  $\eta_1 \leq (d+1+\delta)/2$ ), le comportement asymptotique de  $u$  à l'infini de  $\mathbb{R}^d$  est dicté par celui de  $B$ . Le taux de décroissance maximal qui puisse être propagé par le flot excède  $2\eta_1 - 1$  car  $0 \leq \delta < 1$  dans (3.1.5b). La théorie mathématique devient plus facile lorsque  $p_1$  augmente avec  $\eta_1 = \vartheta_1 + d/p_1$  fixé, c'est-à-dire lorsque la décroissance du champ est plus régulière et se rapproche uniformément de  $|x|^{-\eta_1}$ . Par exemple, lorsque  $p_1 \geq 2d$ , on a  $\delta = 0$ . Le taux de décroissance

maximal de  $u$  capable d'être propagé atteint alors sa borne naturelle, à savoir deux fois celui du champ magnétique. La borne inférieure pathologique  $\eta_0$  disparaît aussi dans ce cas.

3. Lorsque le champ magnétique décroît suffisamment vite, l'asymptotique de  $u$  n'est plus affectée par  $B$ , mais est donnée par les lois de l'hydrodynamique. En effet, si  $\eta_1 \geq (d+1+\delta)/2$ , la contrainte (3.1.5b) se réduit à  $\eta_0 \leq d+1$ . Cette restriction est exactement celle qui est apparue au Chapitre 1 (voir Théorème 15).

En termes physiques, la conclusion peut s'interpréter de la manière suivante. D'après l'équation d'induction, les lignes de champ magnétique sont simultanément transportées par le flot et atténuées par diffusion. Ce processus essentiellement local ne parvient pas à étaler le champ magnétique ; la localisation de  $B$  se propage donc toujours.

Le champ magnétique agit sur le champ de vitesse via la force de Lorentz. Lorsque  $B$  décroît suffisamment vite à l'infini, son influence s'estompe et le fluide se comporte asymptotiquement comme le flot de Navier-Stokes. A l'inverse, si  $B$  décroît peu, la force de Lorentz reste importante et modifie radicalement le comportement asymptotique de  $u$ .

### 3.2 Une loi de convolution pour les espaces à poids

Comme pour Navier-Stokes, la propagation en temps fini de la décroissance résulte d'une loi de convolution convenable dans les espaces à poids. La proposition suivante étend le critère de continuité donné par la Proposition 10 pour les opérateurs de noyau :

$$\Gamma_\lambda^N(x) = (\lambda + |x|)^{-N}$$

où  $N > d$  est un réel fixé et  $\lambda > 0$  un paramètre arbitraire. Par abus de notation, on identifie le noyau à l'opérateur de convolution  $f \mapsto \Gamma_\lambda^N * f$ .

**Proposition 41** *On suppose  $N > d$ . Soient  $p, q \in [1; +\infty]$  et  $\vartheta, \mu \geq 0$ .*

1. Alors  $\Gamma_\lambda^N \in \mathcal{L}(L_\mu^q; L_\vartheta^p)$  dès que

$$\vartheta \leq \mu \quad \text{et} \quad \vartheta + \frac{d}{p} \leq \min \left\{ N - \varepsilon_{1/p}; \mu + \frac{d}{q} - \varepsilon_{\mu-\vartheta} \right\}. \quad (3.2.1)$$

Si  $N \neq d(1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})$ , il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\lambda > 0$  telle que

$$\|\Gamma_\lambda^N * f\|_{L_\vartheta^p} \leq C \lambda^{-N} (1 + \lambda)^N \|f\|_{L_\mu^q}. \quad (3.2.2)$$

Sinon, l'inégalité (3.2.2) est valable avec un facteur multiplicatif  $1 + |\log \lambda|$  au second membre.

2. Si on suppose (3.2.1) et

$$\frac{1}{q} < \frac{1}{p} + \frac{1}{d}, \quad (3.2.3)$$

on peut trouver  $\epsilon > 0$  et deux constantes  $C$  et  $m > 0$ , indépendantes de  $\lambda$ , telles que

$$\|\Gamma_\lambda^N * f\|_{L_\vartheta^p} \leq C \lambda^{-N+d-1+\epsilon} (1 + \lambda)^m \|f\|_{L_\mu^q} \quad (3.2.4)$$

avec à nouveau un facteur logarithmique lorsque  $N = d(1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q})$ .

Au terme de la preuve, on verra qu'on peut prendre :

$$\epsilon = \min \left\{ \frac{d}{p} - \frac{d}{q} + 1; \frac{N - d + 1}{2} \right\},$$

$$m = \max \left\{ N - d + 1 - 2\epsilon; -N + d \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + 1 \right) \right\}.$$

**Preuve** On décompose l'opérateur de la façon suivante :

$$(1 + |x|)^\vartheta |\Gamma_\lambda^N * f(x)| \leq \left[ \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_\lambda^N(x - y) |f(y)| dy \right] (1 + |x|)^\vartheta = I_{\vartheta, \lambda}(x) + J_{\vartheta, \lambda}(x) + K_{\vartheta, \lambda}(x),$$

avec

$$I_{\vartheta, \lambda}(x) = \left( \int_{|y| \geq |x|/2} \Gamma_\lambda^N(x - y) |f(y)| dy \right) (1 + |x|)^\vartheta,$$

$$J_{\vartheta, \lambda}(x) = \left( \int_{|y| \leq |x|/2} \Gamma_\lambda^N(x - y) |f(y)| dy \right) (1 + |x|)^\vartheta \mathbb{1}_{B(0,1)}(x),$$

$$K_{\vartheta, \lambda}(x) = \left( \int_{|y| \leq |x|/2} \Gamma_\lambda^N(x - y) |f(y)| dy \right) (1 + |x|)^\vartheta \mathbb{1}_{B(0,1)^c}(x).$$

Rappelons que l'inégalité de Hölder donne :

$$\|f\|_{L^r} \leq C \|f\|_{L_\mu^q} \quad \text{si} \quad \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r} \leq \min \left\{ 1; \frac{1}{q} + \frac{\mu}{d} - \varepsilon_\mu \right\}. \quad (3.2.5)$$

On note  $B(0, 1)$  la boule unité de  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{1}_E$  la fonction indicatrice d'un sous-ensemble  $E \subset \mathbb{R}^d$ .

**Contrôle de  $K_{\vartheta, \lambda}$ .** Comme  $|y| \leq |x|/2$ , on a :

$$(\lambda + |x - y|)^{-N} \leq 2^N (\lambda + |x|)^{-N}.$$

Alors, utilisant (3.2.5) avec  $\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{r} = (1 - \frac{\mu}{d} - \frac{1}{q} + \varepsilon_\mu)^+$ , on obtient :

$$\begin{aligned} 0 \leq K_{\vartheta, \lambda}(x) &\leq C (\lambda + |x|)^{-(N-\vartheta)} \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} |f(y)| dy \\ &\leq C (\lambda + |x|)^{-(N-\vartheta)} \|f\|_{L^r} \|\mathbb{1}_{B(0, |x|/2)}\|_{L^{r'}} \\ &\leq C (\lambda + |x|)^{-(N-\vartheta)} |x|^{[d - (\mu + \frac{d}{q}) + \varepsilon_\mu]^+} \|f\|_{L_\mu^q}. \end{aligned}$$

Par définition de ce terme,  $|x| \geq 1$  donc  $\|K_{\vartheta, \lambda}\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L_\mu^q}$  avec une constante indépendante de  $\lambda > 0$ , pourvu que

$$\vartheta + \frac{d}{p} \leq N - \left[ d - \left( \mu + \frac{d}{q} \right) + \varepsilon_\mu \right]^+ - \varepsilon_{1/p}. \quad (3.2.6)$$

Ayant supposé  $N > d$ , cette condition est plus faible que (3.2.1).

**Contrôle de  $J_{\vartheta, \lambda}$ .** On utilise à nouveau (3.2.5), mais avec  $r = q$  :

$$\begin{aligned} 0 \leq J_{\vartheta, \lambda}(x) &\leq C \mathbb{1}_{B(0,1)}(x) (\lambda + |x|)^{-N} \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} |f(y)| dy \\ &\leq C \mathbb{1}_{B(0,1)}(x) (\lambda + |x|)^{-N} |x|^{d(1-1/q)} \|f\|_{L^q}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \|J_{\vartheta,\lambda}\|_{L^p} \leq C \left[ \lambda^{-Np} \int_{|x|\leq\lambda} |x|^{dp(1-1/q)} dx + \mathbb{1}_{\{\lambda < 1\}} \int_{\lambda \leq |x| \leq 1} |x|^{-Np+dp(1-1/q)} dx \right]^{1/p} \|f\|_{L^q}.$$

Ainsi, pour  $\vartheta \geq 0$  et  $p \in [1, +\infty]$ , on a

$$\begin{aligned} \|J_{\vartheta,\lambda}\|_{L^p} &\leq C \left(1 + \lambda^{-N+d+\frac{d}{p}-\frac{d}{q}}\right) \|f\|_{L^q} && \text{si } N \neq d \left(1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), \\ \text{et } \|J_{\vartheta,\lambda}\|_{L^p} &\leq C(1 + |\log \lambda|) \|f\|_{L^q} && \text{si } N = d \left(1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right). \end{aligned}$$

On contrôle donc  $\|J_{\vartheta,\lambda}\|_{L^p}$  par le membre de droite de (3.2.2). Il l'est aussi par celui de (3.2.4) lorsque  $\frac{1}{q} < \frac{1}{p} + \frac{1}{d}$  et  $0 < \epsilon \leq d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{d})$ .

**Contrôle de  $I_{\vartheta,\lambda}$ .** On pose  $F(x) = (1 + |x|)^\mu |f(x)|$  donc  $F \in L^q(\mathbb{R}^d)$  et

$$0 \leq I_{\vartheta,\lambda}(x) \leq C(1 + |x|)^{-(\mu-\vartheta)} \int_{\mathbb{R}^d} \Gamma_\lambda^N(x-y) F(y) dy.$$

D'autre part,  $\Gamma_\lambda^N \in L_\beta^b(\mathbb{R}^d)$  pour tout paramètre  $b \in [1, +\infty]$  et  $\beta \geq 0$  tels que

$$\beta + \frac{d}{b} \leq N - \epsilon_{1/b}$$

et on a :

$$\|\Gamma_\lambda^N\|_{L_\beta^b} \leq C \lambda^{-N+\frac{d}{b}} (1 + \lambda)^\beta. \quad (3.2.7)$$

Le reste de la preuve de la Proposition 41 repose sur le lemme suivant.

**Lemme 42** Soient  $a, b, p \in [1, +\infty]$  et  $\alpha, \beta, \vartheta \geq 0$ . Pour  $f \in L_\alpha^a(\mathbb{R}^d)$ ,  $g \in L_\beta^b(\mathbb{R}^d)$ , on définit

$$I_\vartheta(x) = (1 + |x|)^{-(\alpha-\vartheta)} F * g(x)$$

avec  $F(x) = (1 + |x|)^\alpha |f(x)|$ . S'il existe  $s \in [1, +\infty]$  tel que :

$$\begin{cases} \vartheta \leq \alpha \\ \frac{d}{s} \leq \min \left\{ \frac{d}{a}; \left( \alpha + \frac{d}{a} \right) - \left( \vartheta + \frac{d}{p} \right) - \epsilon_{\alpha-\vartheta}; d \left( 1 - \frac{1}{b} \right) \right\} \\ \frac{d}{s} \geq \max \left\{ \frac{d}{a} - \frac{d}{p}; \left[ d - \left( \beta + \frac{d}{b} \right) + \epsilon_\beta \right]^+ \right\} \end{cases} \quad (3.2.8)$$

alors  $I_\vartheta \in L^p(\mathbb{R}^d)$  et

$$\|I_\vartheta\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L_\alpha^a} \|g\|_{L_\beta^b}. \quad (3.2.9)$$

Continuons la preuve de la Proposition 41. Pour la première partie, on applique le lemme avec  $g = \Gamma_\lambda^N$ ,  $b = +\infty$ ,  $\beta = N$  et  $I_\vartheta = I_{\vartheta,\lambda}$ . On distingue alors deux cas :

- Si  $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p}$ , on choisit  $s = +\infty$  et (3.2.8) se réduit à la seule restriction  $\vartheta + \frac{d}{p} \leq \mu + \frac{d}{q} - \epsilon_{\mu-\vartheta}$ .
- Si  $\frac{1}{q} > \frac{1}{p}$ , on choisit  $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ . Dans ce cas, (3.2.8) devient  $\vartheta \leq \mu$ .

Combinant les estimations de  $I_{\vartheta,\lambda}$ ,  $J_{\vartheta,\lambda}$  et  $K_{\vartheta,\lambda}$ , on obtient alors la première partie de la Proposition 41.

Pour démontrer (3.2.4), on fixe  $\epsilon$  tel que  $0 < \epsilon \leq \frac{N-d+1}{2}$  et on applique le Lemme 42 avec  $g = \Gamma_\lambda^N$ ,  $I_\vartheta = I_{\vartheta,\lambda}$  et

$$\frac{d}{b} = d - 1 + \epsilon, \quad \beta = N - d + 1 - 2\epsilon.$$

D'après (3.2.7), on a  $\Gamma_\lambda^N \in L_\beta^b(\mathbb{R}^d)$  avec  $\|\Gamma_\lambda^N\|_{L_\beta^b} \leq \lambda^{-N+d-1+\epsilon}\phi(\lambda)$  et  $\phi \in L_{loc}^\infty([0; +\infty))$ . Comme précédemment,

– si  $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p}$ , on choisit  $s = +\infty$  dans (3.2.8) et le Lemme 42 implique

$$\|I_{\vartheta,\lambda}\|_{L_\beta^b} \leq \lambda^{-N+d-1+\epsilon}\phi(\lambda)\|f\|_{L_\mu^q}, \quad (3.2.10)$$

pourvu que  $\vartheta + \frac{d}{p} \leq \mu + \frac{d}{q} - \epsilon_{\mu-\vartheta}$ .

– Si  $\frac{1}{q} > \frac{1}{p}$ , alors  $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$  entraîne encore (3.2.10) à condition que  $\vartheta \leq \mu$  et  $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{d} - \frac{\epsilon}{d}$ .

Ceci achève la preuve de la Proposition 41.  $\blacksquare$

**Preuve [Lemme 42]** D'après (3.2.5), on a  $g \in L^{s'}(\mathbb{R}^d)$  pour tout  $s' \in [1; +\infty]$  tel que

$$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{s'} \leq \min \left\{ 1; \frac{1}{b} + \frac{\beta}{d} - \epsilon_\beta \right\}.$$

On pose  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ . Comme  $\frac{1}{a} - \frac{1}{s} \geq 0$ , l'exposant conjugué de Young  $\mathbb{Y}(a, s')$  est bien défini par  $\frac{1}{\mathbb{Y}(a, s')} = \frac{1}{a} - \frac{1}{s}$ . De plus, on a  $F * g \in L^{\mathbb{Y}(a, s')}(\mathbb{R}^d)$ , *i.e.*

$$I_\vartheta \in L_{\alpha-\vartheta}^{\mathbb{Y}(a, s')}.$$

Comme  $\vartheta \leq \alpha$ , l'inclusion (3.2.5) implique que  $I_\vartheta \in L^p(\mathbb{R}^d)$  pour tout  $p$  tel que

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{s} \leq \frac{1}{p} \leq \min \left\{ 1; \frac{1}{a} - \frac{1}{s} + \frac{\alpha - \vartheta}{d} - \epsilon_{\alpha-\vartheta} \right\},$$

d'où (3.2.9).  $\blacksquare$

### 3.3 Localisation spatiale du couple $(u, B)$

La preuve du Théorème 40 repose sur un énoncé plus technique. Le problème est qu'on ne sait pas toujours montrer que

$$(u, B) \in L^\infty \left( [0, T]; L_{\vartheta_0}^{p_0} \times L_{\vartheta_1}^{p_1} \right)$$

même si on s'attend à ce que  $u$  et  $B$  soient respectivement localisés comme  $u_0 \in L_{\vartheta_0}^{p_0}$  et  $B_0 \in L_{\vartheta_1}^{p_1}$ .

Heureusement, on peut alors trouver d'autres choix des paramètres exprimant la même décroissance (au moins au sens faible) et pour lesquels on va pouvoir démontrer la propagation de la localisation dans un espace à poids. Cette technique est illustrée sur la figure 3.1 (p. 70).

**Théorème 43 (avec L. Brandolese [16])** Soient  $u_0 \in L_{\vartheta_0}^{p_0}(\mathbb{R}^d)$ ,  $B_0 \in L_{\vartheta_1}^{p_1}(\mathbb{R}^d)$  deux champs de vecteurs à divergence nulle dans  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ). On suppose que  $\vartheta_0, \vartheta_1 \geq 0$ ,  $d < p_0 \leq +\infty$  et

$$\frac{2}{p_1} < \frac{1}{p_0} + \frac{1}{d}. \quad (3.3.1)$$

Alors il existe  $T > 0$  (et si  $d = 2$ , on peut prendre  $T = +\infty$ ) et une unique solution de (MHD) :

$$(u, B) \in C([0, T]; L^{p_0} \times L^{p_1}). \quad (3.3.2)$$

Si les taux de décroissance de  $u_0$  et  $B_0$  définis respectivement par  $\eta_0 = \vartheta_0 + d/p_0$  et  $\eta_1 = \vartheta_1 + d/p_1$  vérifient

$$\eta_0 \leq \min \left\{ d + 1 - \varepsilon_{1/p_0}; 2\eta_1 - \varepsilon_{2\vartheta_1 - \vartheta_0}; 2\eta_1 + \frac{d}{p_0} - \frac{2d}{p_1} \right\}, \quad (3.3.3)$$

alors on a aussi :

$$(u, B) \in C([0, T]; L_{\vartheta_0}^{p_0} \times L_{\vartheta_1}^{p_1}). \quad (3.3.4)$$

De plus, si une autre solution forte existe dans  $L_{\vartheta_0}^{\tilde{p}_0} \times L_{\vartheta_1}^{\tilde{p}_1}$  avec des indices vérifiant aussi (3.3.1) et (3.3.3), alors les deux solutions coïncident.

**Remarque** - L'hypothèse (3.3.1) n'est pas vraiment reliée au problème de la localisation des champs, mais plutôt à celui de l'existence d'une solution régulière. Elle reflète en particulier l'invariance du problème par changement d'échelle :

$$u_\lambda(t, x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad B_\lambda(t, x) = \lambda B(\lambda^2 t, \lambda x) \quad (\lambda > 0).$$

On peut s'attendre à ce que le Théorème 43 subsiste dans les cas limites  $p = d$  ou  $\frac{2d}{p_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{d}$  mais cette extension nécessiterait des modifications importantes dans la démonstration comme l'introduction des normes de Kato (voir [20, chap. 3] ou [21]). Cette technique est bien maîtrisée pour Navier-Stokes et n'apporterait que peu de lumières sur le problème du couplage des localisations spatiales de  $u$  et  $B$ . De même, l'utilisation de normes homogènes est possible à condition d'imposer des restrictions plus sévères, comme :

$$\vartheta + \frac{d}{p} < 1.$$

A nouveau, ce raffinement semble inutile à la compréhension du problème. ◇

### 3.3.1 Preuve du Théorème 40 – Propagation de la décroissance, au sens faible

Avant de démontrer le Théorème 43, on peut vérifier qu'il entraîne bien le Théorème 40 comme corollaire. Soient  $p_0, p_1$  et  $\vartheta_0, \vartheta_1$  vérifiant (3.1.5a) et (3.1.5b).

Lorsque  $\vartheta_0 \leq 2\vartheta_1$ ,  $p_0 \leq d/\delta - \varepsilon_\delta$  et  $\eta_0 \leq d + 1 - \varepsilon_{1/p_0}$ , alors les hypothèses (3.3.1) et (3.3.3) du Théorème 43 sont vérifiées, et il n'y a rien à démontrer puisque la conclusion de ce théorème est plus forte que celle du Théorème 40.

Dans tous les autres cas compris dans le Théorème 40 on a une inclusion  $L_{\vartheta_0}^{p_0} \subset L_\mu^q$  avec un couple  $(q, \mu)$  tel que le Théorème 43 puisse être appliqué à

$$(u_0, B_0) \in L_\mu^q \times L_{\vartheta_1}^{p_1} \quad \text{avec} \quad \mu + \frac{d}{q} = \eta_0 - \epsilon$$

et  $\epsilon > 0$  arbitrairement petit (voir ci-dessous). L'application de ce théorème entraîne donc

$$u \stackrel{L^2}{\ll} \mathcal{O}(|x|^{-(\eta_0 - \epsilon)}) \quad \text{et} \quad B \stackrel{L^2}{\ll} \mathcal{O}(|x|^{-\eta_1})$$

si  $|x| \rightarrow +\infty$ . On peut alors faire tendre  $\epsilon \rightarrow 0$  pour obtenir le Théorème 40.

De nombreux couples  $(q, \mu)$  conviennent pour l'inclusion  $L_{\vartheta_0}^{p_0} \subset L_{\mu}^q$ . On a choisi d'utiliser ceux qui sont représentés par la ligne pointillée de la Figure 3.1 (p. 70).

1. Si  $\eta_1 \geq (d+1+\delta)/2$ , le seul cas à ne pas être déjà contenu dans le Théorème 43 est celui où  $\eta_0 = d+1$  avec  $p_0$  fini. Dans ce cas, on peut prendre.

$$(q, \mu) = (p_0, \vartheta_0 - \epsilon).$$

2. Si  $\eta_1 \leq (d+1+\delta)/2$  et  $p_1 \geq 2d$ , on distingue deux cas.

– Si  $\vartheta_0 > 2\vartheta_1$ , alors

$$\frac{d}{q} = \vartheta_0 - 2\vartheta_1 + \frac{d}{p_0} - \epsilon \quad \text{et} \quad \mu = 2\vartheta_1$$

conviennent.

– Si  $\vartheta_0 \leq 2\vartheta_1$  et  $\eta_0 = 2\eta_1$ , on choisit à nouveau  $(q, \mu) = (p_0, \vartheta_0 - \epsilon)$ .

3. Si  $d < p_1 < 2d$  et  $\eta_1 \leq (d+1+\delta)/2$ , on utilise :

$$\frac{d}{q} = 1 - (1 - \delta)\kappa \quad \mu = 2\vartheta_1(1 - \kappa) \quad \text{et} \quad \kappa = 1 - \frac{\eta_0 - \delta - \epsilon}{2(\eta_1 - \delta)}.$$

Ceci achève la preuve du Théorème 40 comme corollaire du Théorème 43.

### 3.3.2 Preuve du Théorème 43 – Propagation de la décroissance, au sens fort

La preuve du Théorème 43 consiste à appliquer un théorème de point-fixe à l'équation intégrale (MHDi) dans une boule convenable de l'espace  $\mathcal{C}([0, T], L_{\vartheta_0}^{p_0} \times L_{\vartheta_1}^{p_1})$ . La seule difficulté est la continuité de l'opérateur bilinéaire sous-jacent pour laquelle on utilise le critère donné par la Proposition 41.

Posant  $v = (u, B)$ ,  $v_0 = (u_0, B_0)$ , le système (MHDi) se met sous la forme :

$$v = e^{t\Delta} v_0 - \mathbb{V}(v, v) \tag{3.3.5}$$

avec  $\mathbb{V}$  défini p. 68. Il est alors bien connu (voir par exemple [20, Lemma 1.2.6] ou le paragraphe §2.3.1 de cette thèse) que si  $X$  est un espace de Banach, la résolution de (3.3.5) nécessite seulement de vérifier que

$$e^{t\Delta} v_0 \in \mathcal{C}([0, T]; X) \tag{3.3.6a}$$

et

$$\mathbb{V} : \mathcal{C}([0, T]; X) \times \mathcal{C}([0, T]; X) \rightarrow \mathcal{C}([0, T]; X), \tag{3.3.6b}$$

avec la norme de l'opérateur  $\mathbb{V}$  qui tend vers 0 lorsque  $T \rightarrow 0$ . Alors, l'existence et l'unicité d'une solution  $v \in \mathcal{C}([0, T]; X)$  est garantie, au moins pour  $T > 0$  suffisamment petit.

On considère l'espace  $X = L_{\vartheta_0}^{p_0} \times L_{\vartheta_1}^{p_1}$ . La condition (3.3.6a) et la continuité en temps étant immédiate, on ne développe ici que la continuité de  $\mathbb{V}$  sur  $X_T = L^\infty([0, T]; X)$ .

Les hypothèses du Théorème 43 entraînent  $p_0, p_1 \geq 2$ . L'inégalité de Hölder donne donc :

$$\|u \otimes u\|_{L_{2\vartheta_0}^{p_0/2}} \leq \|u\|_{L_{\vartheta_0}^{p_0}}, \quad \|B \otimes B\|_{L_{2\vartheta_1}^{p_1/2}} \leq \|B\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}}$$

et, avec  $\frac{1}{\mathbb{H}(p_0, p_1)} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1}$  l'exposant de Hölder,

$$\|u \otimes B\|_{L_{\vartheta_0 + \vartheta_1}^{\mathbb{H}(p_0, p_1)}} \leq \|u\|_{L_{\vartheta_0}^{p_0}} \|B\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}}.$$

Pour  $\lambda > 0$ , on pose :

$$\Gamma_\lambda^N(x) = (\lambda + |x|)^{-N}.$$

Les propriétés (3.1.1) et (3.1.2) des noyaux de convolution entraînent ( $N \geq 0$  arbitraire) :

$$\begin{aligned} \|\mathbb{U}(u, u)(t)\|_{L_{\vartheta_0}^{p_0}} &\leq C \int_0^t \|\Gamma_{\sqrt{t-s}}^{d+1} * (u \otimes u)(s)\|_{L_{\vartheta_0}^{p_0}} ds \\ \|\mathbb{U}(B, B)(t)\|_{L_{\vartheta_0}^{p_0}} &\leq C \int_0^t \|\Gamma_{\sqrt{t-s}}^{d+1} * (B \otimes B)(s)\|_{L_{\vartheta_0}^{p_0}} ds \\ \|\mathbb{B}(u, B)(t)\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}} &\leq C_N \int_0^t \|\Gamma_{\sqrt{t-s}}^N * (u \otimes B)(s)\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}} (t-s)^{\frac{1}{2}(N-d-1)} ds. \end{aligned}$$

Or la Proposition 41 entraîne pour  $0 < \lambda \leq 1$  :

$$\begin{aligned} \|\Gamma_\lambda^{d+1} * f\|_{L_{\vartheta_0}^{p_0}} &\leq C \lambda^{\sigma_0} \|f\|_{L_{2\vartheta_0}^{p_0/2}}, \\ \|\Gamma_\lambda^{d+1} * f\|_{L_{\vartheta_0}^{p_0}} &\leq C \lambda^{\sigma'_0} \|f\|_{L_{2\vartheta_1}^{p_1/2}} \\ \text{et } \|\Gamma_\lambda^N * f\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}} &\leq C_N \lambda^{\sigma_1} \|f\|_{L_{\vartheta_0+\vartheta_1}^{\mathbb{H}(p_0, p_1)}} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

avec des constantes indépendantes de  $\lambda$  et des exposants  $\sigma_0, \sigma'_0, \sigma_1$  vérifiant :

$$\sigma_0 > -2, \quad \sigma'_0 > -2, \quad \sigma_1 > -N + d - 1. \quad (3.3.8)$$

En effet, on peut appliquer (3.2.4) avec  $N = d + 1$  et  $\epsilon = 1 - \frac{d}{p_0}$  ou  $\epsilon = 1 - \left(\frac{2d}{p_1} - \frac{d}{p_0}\right)^+$ . On obtient alors les deux premières inégalités avec

$$\sigma_0 = -1 - \frac{d}{p_0} \quad \text{et} \quad \sigma'_0 = -1 - \left(\frac{2d}{p_1} - \frac{d}{p_0}\right)^+.$$

Une nouvelle application de (3.2.4) avec  $N \geq \max\{d + 1; \vartheta_1 + \frac{d}{p_1}\} + \varepsilon_{1/p_1}$  et  $\epsilon = 1 - \frac{d}{p_0}$  donne la troisième avec  $\sigma_1 = -N + d - d/p_0$ . L'hypothèse (3.3.1) implique (3.3.8).

En combinant ces résultats, on obtient :

$$\|\mathbb{U}(u, u)\|_{L^\infty([0, T]; L_{\vartheta_0}^{p_0})} \leq C_T \|u\|_{L^\infty([0, T]; L_{\vartheta_0}^{p_0})}^2 \quad (3.3.9a)$$

$$\|\mathbb{U}(B, B)\|_{L^\infty([0, T]; L_{\vartheta_0}^{p_0})} \leq C_T \|B\|_{L^\infty([0, T]; L_{\vartheta_1}^{p_1})}^2 \quad (3.3.9b)$$

$$\|\mathbb{B}(u, B)\|_{L^\infty([0, T]; L_{\vartheta_1}^{p_1})} \leq C_T \|u\|_{L^\infty([0, T]; L_{\vartheta_0}^{p_0})} \|B\|_{L^\infty([0, T]; L_{\vartheta_1}^{p_1})} \quad (3.3.9c)$$

avec une constante  $C_T$  qui tend vers zéro lorsque  $T \rightarrow 0$ . On en déduit :

$$\|\mathbb{V}\|_{X_T} \leq C \max \left\{ T^{1+\frac{\sigma_0}{2}}; T^{1+\frac{\sigma'_0}{2}}; T^{1+\frac{1}{2}(\sigma_1+N-d-1)} \right\}.$$

Le temps de vie maximal  $T^*$  de la solution forte dans  $X = L_{\vartheta_0}^{p_0} \times L_{\vartheta_1}^{p_1}$  est donc minoré par :

$$T^* \geq c \min \left\{ 1; \|(u_0, B_0)\|_X^{-2/(1-\frac{d}{p_0})}; \|(u_0, B_0)\|_X^{-2/(1-\left[\frac{2d}{p_1} - \frac{d}{p_0}\right]^+)} \right\}, \quad (3.3.10)$$

avec une constante  $c > 0$  dépendant a priori de tous les paramètres, mais pas de  $u_0$  ni de  $B_0$ . Ceci démontre les conclusions (3.3.2) et (3.3.4) du Théorème 43.

## 3.3.3 Fin de la preuve du Théorème 43 – Loi du tout ou rien

Il reste à démontrer que le temps de vie est indépendant de la paire d'indices choisis pour construire la solution.

**Proposition 44** Soient  $u_0 \in L_{\vartheta_0}^{p_0}(\mathbb{R}^d) \cap L_{\tilde{\vartheta}_0}^{\tilde{p}_0}(\mathbb{R}^d)$  et  $B_0 \in L_{\vartheta_1}^{p_1}(\mathbb{R}^d)$  avec  $d \geq 2$ . On pose

$$\eta_0 = \vartheta_0 + d/p_0, \quad \tilde{\eta}_0 = \tilde{\vartheta}_0 + d/\tilde{p}_0 \quad \text{et} \quad \eta_1 = \vartheta_1 + d/p_1.$$

On suppose aussi que :

$$\left\{ \begin{array}{l} d < p_0, \tilde{p}_0 \leq +\infty \\ \frac{2}{p_1} < \min \left\{ \frac{1}{p_0} + \frac{1}{d}; \frac{1}{\tilde{p}_0} + \frac{1}{d} \right\} \\ \eta_0 \leq \min \left\{ d + 1 - \varepsilon_{1/p_0}; 2\eta_1 - \varepsilon_{2\vartheta_1 - \vartheta_0}; 2\eta_1 + \frac{d}{p_0} - \frac{2d}{p_1} \right\} \\ \tilde{\eta}_0 \leq \min \left\{ d + 1 - \varepsilon_{1/\tilde{p}_0}; 2\eta_1 - \varepsilon_{2\vartheta_1 - \tilde{\vartheta}_0}; 2\eta_1 + \frac{d}{\tilde{p}_0} - \frac{2d}{p_1} \right\}. \end{array} \right. \quad (3.3.11)$$

On définit les temps de vie dans les espaces à poids par :

$$T^* = \sup \left\{ T > 0 \text{ t.q. } (u, B) \in C([0, T]; L_{\vartheta_0}^{p_0} \times L_{\vartheta_1}^{p_1}) \right\},$$

$$\tilde{T} = \sup \left\{ T > 0 \text{ t.q. } (u, B) \in C([0, T]; L_{\tilde{\vartheta}_0}^{\tilde{p}_0} \times L_{\vartheta_1}^{p_1}) \right\}.$$

Alors  $\tilde{T} = T^*$ .

**Remarque** - On a un résultat analogue si  $u_0 \in L_{\vartheta_0}^{p_0}(\mathbb{R}^d)$  et  $B_0 \in L_{\vartheta_1}^{p_1}(\mathbb{R}^d) \cap L_{\tilde{\vartheta}_1}^{\tilde{p}_1}(\mathbb{R}^d)$ , avec les modifications évidentes dans (3.3.11) :

$$\left\{ \begin{array}{l} d < p_0 \leq +\infty \\ \max \left\{ \frac{2}{p_1}; \frac{2}{\tilde{p}_1} \right\} < \frac{1}{p_0} + \frac{1}{d} \\ \eta_0 \leq \min \left\{ d + 1 - \varepsilon_{1/p_0}; 2\eta_1 - \varepsilon_{2\vartheta_1 - \vartheta_0}; 2\tilde{\eta}_1 - \varepsilon_{2\tilde{\vartheta}_1 - \vartheta_0} \right\}. \\ \eta_0 \leq \min \left\{ 2\eta_1 + \frac{d}{p_0} - \frac{2d}{p_1}; 2\tilde{\eta}_1 + \frac{d}{p_0} - \frac{2d}{\tilde{p}_1} \right\}. \end{array} \right. \quad (3.3.11')$$

◇

**Preuve** La preuve est similaire à celle du Théorème 17. Supposons par exemple que  $\tilde{T} < T^*$ . L'unicité des solutions fortes entraîne qu'elles coïncident sur  $[0, \tilde{T}[$  et on va montrer que

$$\sup_{t \in [0, \tilde{T}[} \left( \|u(t)\|_{L_{\tilde{\vartheta}_0}^{\tilde{p}_0}} + \|B(t)\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}} \right) < +\infty.$$

Alors (3.3.10) impliquera que la solution  $(u, B) \in L_{\tilde{\vartheta}_0}^{\tilde{p}_0} \times L_{\vartheta_1}^{p_1}$  puisse être étendue au-delà de  $\tilde{T}$  contredisant ainsi la définition de  $\tilde{T}$ . Sans restreindre la généralité, on peut supposer que  $u \neq 0$  sur  $[0, \tilde{T}]$ .

Rappelons aussi (Corollaire 2) l'existence d'une constante  $C_0 > 0$  ne dépendant que de  $d$  et de  $\vartheta$ , telle que :

$$\sup_{\tau \in [0, \tilde{T}]} \|e^{\tau \Delta} v\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}} \leq C_0 (1 + \tilde{T})^{\vartheta_1/2} \|v\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}}. \quad (3.3.12)$$

Dans ce qui suit, on pose  $A = C_0 (1 + \tilde{T})^{\vartheta_1/2}$ .

**Contrôle du champ magnétique.** D'après la seconde équation du système (MHDi), on a :

$$\forall s \in [0; \tilde{T}], \quad B(t) = e^{(t-s)\Delta} B(s) - \int_s^t G(t-\tau) * (u \otimes B - B \otimes u)(\tau) d\tau.$$

La troisième formule de (3.3.7) donne pour  $\tau \leq t \leq \tilde{T}$ ,

$$\|G(t-\tau) * (u \otimes B)(\tau)\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}} \leq K(t-\tau)^{-\sigma} \| (u \otimes B)(\tau) \|_{L_{\vartheta_0+\vartheta_1}^{\mathbb{H}(p_0, p_1)}}$$

avec  $\sigma = \frac{1}{2}(1 + \frac{d}{p_0})$ . La constante  $K$  peut dépendre de  $T^*$  et de tous les paramètres figurant dans (3.3.11), mais pas de  $\tilde{T}$ . On remarque que  $\sigma < 1$ . Ainsi, pour tout  $t \in [0; \tilde{T}]$ ,

$$\|B(t)\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}} \leq A \|B(s)\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}} + K \frac{(t-s)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \sup_{\tau \in [s, t]} \|u(\tau)\|_{L_{\vartheta_0}^{p_0}} \cdot \sup_{\tau \in [s, t]} \|B(\tau)\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}}. \quad (3.3.13)$$

Pour  $n \geq 0$ , on pose :

$$T_n = n\Delta \quad \text{avec} \quad \Delta = \left( \frac{2K}{1-\sigma} \sup_{\tau \in [0, \tilde{T}]} \|u(\tau)\|_{L_{\vartheta_0}^{p_0}} \right)^{-1/(1-\sigma)}.$$

On définit  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $T_N \leq \tilde{T} < T_{N+1}$ . Pour  $0 \leq n \leq N$ , on définit

$$I_n = [T_n, T_{n+1}] \cap [0, \tilde{T}[ \quad \text{et} \quad M_n = \sup_{\tau \in I_n} \|B(\tau)\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}}.$$

On applique alors (3.3.13) avec  $s = T_n$  et  $t \in I_n$  :

$$M_0 \leq 2A \|B_0\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}} \quad \text{et} \quad M_n \leq 2AM_{n-1} \quad (1 \leq n \leq N),$$

donc

$$\sup_{t \in [0, \tilde{T}[} \|B(t)\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}} = \max_{0 \leq n \leq N} M_n \leq (2A)^{N+1} \|B_0\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}}.$$

On obtient finalement :

$$\sup_{t \in [0, \tilde{T}[} \|B(t)\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}} \leq C \|B_0\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}} \exp \left( \left( 1 + \tilde{T} \sup_{s \in [0, \tilde{T}]} \|u(s)\|_{L_{\vartheta_0}^{p_0}} \right)^{2/(1-\frac{d}{p_0})} \left( 1 + \vartheta_1 \log(1 + \tilde{T}) \right) \right).$$

Le membre de droite est fini puisqu'on a supposé que  $\tilde{T} < T^*$ .

**Contrôle du champ de vitesse.** Pour  $0 \leq s \leq t < \tilde{T}$ , on a :

$$u(t) = e^{(t-s)\Delta} u(s) - \int_s^t F(t-\tau) * (u \otimes u)(\tau) d\tau + \int_s^t F(t-\tau) * (B \otimes B)(\tau) d\tau.$$

Les formules (3.3.7) entraînent :

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L_{\vartheta_0}^{\tilde{p}_0}} &\leq A \|u(s)\|_{L_{\vartheta_0}^{\tilde{p}_0}} + K \frac{(t-s)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \sup_{\tau \in [s, t]} \|u(\tau)\|_{L_{\vartheta_0}^{p_0}} \cdot \sup_{\tau \in [s, t]} \|u(\tau)\|_{L_{\vartheta_0}^{\tilde{p}_0}} \\ &\quad + K \frac{(t-s)^{1-\tilde{\sigma}}}{1-\tilde{\sigma}} \left( \sup_{\tau \in [s, t]} \|B(\tau)\|_{L_{\vartheta_1}^{p_1}} \right)^2 \end{aligned}$$

avec  $\sigma = \frac{1}{2}(1 + \frac{d}{p_0}) < 1$ ,  $\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}(1 + (\frac{2d}{p_1} - \frac{d}{p_0})^+) < 1$  et  $K$  dépendant de tous les paramètres sauf  $\tilde{T}$ .

Grâce au contrôle du champ magnétique, le dernier terme est borné par :

$$L = \frac{K \widetilde{T}^{1-\widetilde{\sigma}}}{1-\widetilde{\sigma}} \left( \sup_{\tau \in [0, \widetilde{T}[} \|B(\tau)\|_{L^{\frac{p_1}{\vartheta_1}}} \right)^2.$$

On définit  $(T_n)_{n \geq 0}$  et  $I_n$  comme précédemment et

$$\widetilde{M}_n = \sup_{\tau \in I_n} \|u(\tau)\|_{L^{\frac{p_0}{\vartheta_0}}}.$$

L'entier  $N$  est la partie entière de  $\widetilde{T}/\Delta$ . Alors, pour  $1 \leq i \leq N$ , on a

$$\widetilde{M}_0 \leq 2A \|u_0\|_{L^{\frac{p_0}{\vartheta_0}}} + 2L \quad \text{et} \quad \widetilde{M}_n \leq 2A \widetilde{M}_{n-1} + 2L,$$

d'où  $\sup_{t \in [0, \widetilde{T}[} \|u(t)\|_{L^{\frac{p_0}{\vartheta_0}}} = \max_{0 \leq n \leq N} \widetilde{M}_n \leq (2A)^{N+1} \|u_0\|_{L^{\frac{p_0}{\vartheta_0}}} + 2L [1 + \dots + (2A)^{N-1} + (2A)^N] < +\infty$ .

Combinée à l'estimation du champ magnétique, cette inégalité entraîne que  $\widetilde{T} \geq T^*$ . En échangeant les rôles de  $\widetilde{T}$  et  $T^*$  on obtient finalement  $\widetilde{T} = T^*$ . ■

Le Théorème 43 est maintenant complètement démontré.

### 3.4 Obstruction à la décroissance, de type hydrodynamique

Dans cette section on s'intéresse au phénomène d'instabilité induit par un excès de localisation du champ de vitesse, en l'absence de symétries particulières. Cette propriété a déjà été rencontrée en hydrodynamique (voir §2.6).

Les hypothèses du Théorème 40 sont de deux types : certaines expriment les restrictions nécessaires pour garantir le caractère bien posé du problème de Cauchy ; d'autres, comme

$$\eta_0 \leq \min\{d+1; 2\eta_1 - \delta\},$$

sont liées à la localisation spatiale des données. Le théorème suivant implique l'optimalité de la restriction  $\eta_0 \leq d+1$ . On s'attend aussi à ce que l'inégalité  $\eta_0 \leq 2\eta_1$  soit optimale pour une classe assez générale de solutions, mais ce problème est encore ouvert.

**Théorème 45 (avec L. Brandolese [16])** *Soit  $(u, B)$  une solution de (MHD) dans  $C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d))$  telle que, pour un certain  $\varepsilon > 0$ ,*

$$\sup_{t \in [0, T]} |u(t, x)| \stackrel{L^2}{\equiv} \mathcal{O}(|x|^{-(d+1+\varepsilon)}) \tag{3.4.1a}$$

$$\text{et} \quad \sup_{t \in [0, T]} |B(t, x)| \stackrel{L^2}{\equiv} \mathcal{O}(|x|^{-(d+1+\varepsilon)/2}). \tag{3.4.1b}$$

*Alors, pour tout  $t \in [0, T]$ , il existe une constante  $C(t) \geq 0$  telle que les composantes de  $u(t)$  et  $B(t)$  soient reliées par l'identité :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (u^h u^k - B^h B^k)(t, x) dx = \delta_{h,k} C(t) \quad (h, k = 1, \dots, d). \tag{3.4.2}$$

Le Théorème 43 permet de satisfaire l'hypothèse (3.4.1b) par exemple dès que  $u_0$  et  $B_0$  appartiennent à  $L^p_{\vartheta}(\mathbb{R}^d)$  avec  $p > d$ ,  $\vartheta + \frac{d}{p} = (d + 1 + \varepsilon)/2$ , et  $\varepsilon > 0$ . En particulier, si  $(u_0, B_0)$  est une donnée de Cauchy bien localisée mais ne vérifiant pas (3.4.2) à  $t = 0$ , alors (3.4.1a) ne peut être réalisé. L'excès de localisation du champ de vitesse est alors *instantanément diffusé*.

S'inspirant de [12], on définit l'espace  $E$  des fonctions  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$  telles que

$$\|f\|_E \stackrel{\text{def}}{=} \int_{|x| \leq 1} |f(x)| dx + \sup_{R \geq 1} R \int_{|x| \geq R} |f(x)| dx \quad (3.4.3)$$

est fini et

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R \int_{|x| \geq R} |f(x)| dx = 0.$$

L'inégalité de Hölder implique :

$$L^{p_0}_{\vartheta_0}(\mathbb{R}^d) \subset E \quad \text{dès que} \quad \begin{cases} \vartheta_0 + \frac{d}{p_0} \geq d + 1 & (p_0 < +\infty) \quad \text{ou} \\ \vartheta_0 > d + 1 & (p_0 = +\infty). \end{cases}$$

La solution ne peut pas, en général, rester uniformément bornée dans  $E$ .

**Proposition 46** Soit  $(u, B) \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d))$  une solution de (MHD) telle que

$$u \in L^\infty([0, T]; E) \quad (3.4.4a)$$

$$|u|^2 + |B|^2 \in L^\infty([0, T]; E). \quad (3.4.4b)$$

Alors il existe une constante  $c \geq 0$  telle que

$$\forall j, k \in \{1, \dots, d\}, \quad \int_{\mathbb{R}^d} u_0^j u_0^k - B_0^j B_0^k = c \delta_{j,k}. \quad (3.4.5)$$

**Preuve** La preuve est une adaptation immédiate des arguments de [12]. On commence par réécrire l'équation (MHD) sous la forme suivante (les constantes physiques ont été supposées égales à 1) :

$$u(t) - e^{t\Delta} u_0 + \sum_{j=1}^d \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \partial_j (u^j u - B^j B) ds = - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \nabla P(s) ds \quad (3.4.6)$$

avec  $P = p + \frac{|B|^2}{2}$ . On vérifie facilement que (3.4.4) implique que chaque terme du membre de gauche de (3.4.6) appartient à  $L^\infty([0, T]; E)$ . Ainsi, on a :

$$\nabla \tilde{P} \in L^\infty([0, T]; E) \quad \text{avec} \quad \tilde{P}(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} P(s) ds.$$

on pose

$$\tilde{u}^{j,k}(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} u^j u^k(s) ds \quad \text{et} \quad \tilde{B}^{j,k}(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} B^j B^k(s) ds.$$

On applique alors l'opérateur  $\text{div}$  à (3.4.6), ce qui donne :

$$-\Delta \tilde{P} = \sum_{j,k=1}^d \partial_j \partial_k (\tilde{u}^{j,k} - \tilde{B}^{j,k}).$$

Le Lemme 2.3 et la Proposition 2.4 de [12] entraînent alors (3.4.5). ■

La preuve du Théorème 45 est maintenant très simple.

**Preuve [Théorème 45]** L'inclusion naturelle des espaces à poids et la définition (1.1.6) impliquent, sous les hypothèses du Théorème 45, l'existence de  $\varepsilon' > \varepsilon'' > 0$  tels que :

$$\sup_{t \in [0, T]} |u(t, \cdot)| \in L^2_{\frac{d}{2}+1+\varepsilon'} \subset L^1_{1+\varepsilon''} \subset E.$$

D'autre part, la définition (1.1.5) du taux de décroissance  $L^2$ -faible implique

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{d+2+2\varepsilon'} \int_{R \leq |x| \leq 2R} |u(t, x)|^2 dx = 0$$

et

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{1+\varepsilon'} \int_{R \leq |x| \leq 2R} |B(t, x)|^2 dx = 0,$$

uniformément pour  $t \in [0, T]$ . Ainsi,

$$\sup_{t \in [0, T]} (|u(t, \cdot)|^2 + |B(t, \cdot)|^2) \in L^1_{1+\varepsilon''} \subset E.$$

La conclusion (3.4.2) est alors une conséquence de la Proposition 46. ■

### 3.5 Exemples de solutions exceptionnellement bien localisées

Cette brève section contient quelques indications pour construire des champs de vitesse dont la localisation excède celle autorisée par (3.1.5b).

De telles solutions peuvent être construites à partir d'une donnée initiale ayant des propriétés de symétrie particulières. Supposons par exemple que  $u_0$  et  $B_0$  sont à décroissance rapide (*i.e.* plus vite que toute puissance négative de  $|x|$ ) et que

$$Au_0(x) = u_0(Ax), \quad AB_0(x) = B_0(Ax)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  et toute matrice  $A \in G$  où  $G$  désigne un sous-groupe du groupe orthogonal  $O(d)$ .

La solution de (MHD) hérite alors de cette propriété car le problème est invariant par rotation. Si le groupe  $G$  est suffisamment non-trivial, ces propriétés de symétrie entraînent les relations d'orthogonalité (3.4.2). On remarque d'ailleurs que le taux de décroissance en temps de la norme d'énergie de  $(u_0, B_0)$  se classe par le groupe de symétries de l'écoulement (voir §2.4.2).

En dimension  $d = 2, 3$  des modifications mineures de la preuve des résultats du paragraphe §2.4.2 indiquent que le taux de décroissance optimale du flot est en fait *identique* à celui donné par Navier-Stokes. En effet, ayant supposé  $B_0$  à décroissance rapide, cette propriété est propagée et l'écoulement est alors qualitativement très proche de celui de (NS).

Par exemple, en dimension  $d = 2$  et si  $G$  est le groupe cyclique d'ordre  $n$ , on a :

$$\forall t \in [0, T^*), \quad u(t, x) = \mathcal{O}(|x|^{-(n+1)})$$

lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$ . En particulier, la propriété d'être simultanément isotrope (*i.e.*  $G = SO(2)$ ) et à décroissance rapide est propagée.

En dimension  $d = 3$ , on construit des champs présentant le taux de décroissance maximal du champ de vitesse (*i.e.* celui de  $|x|^{-8}$  à l'infini) en considérant le groupe de symétries de l'icosahédre.

On doit cependant remarquer que toutes ces solutions sont instables puisque la moindre perturbation du champ de vitesse peut détruire les propriétés de symétrie et donc provoquer la diffusion instantanée du champ  $u$ .

## Bibliographie de la partie I

- [1] C. Amrouche, V. Girault, M. & P. Schonbek, *Pointwise Decay of Solutions and of Higher Derivatives to Navier-Stokes Equations*, SIAM J. Math. Anal. *31* (2000), N.4, 740–753.
- [2] V. Arnold, *Sur la géométrie différentiable des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Annales de l'Institut Fourier *16* (1966), 319–361.
- [3] D.J. Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford (1990).
- [4] H.-O. Bae, B.J. Jin, *Upper and lower bounds of temporal and spatial decays for the Navier-Stokes equations*, J. Diff. Eq. *209* (2005), 365–391.
- [5] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, I. Gallagher, *Inégalités de Hardy précisées*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris *341* (2005), N.2, 89–92.
- [6] F. Barthe, *Optimal Young's inequality and its converse : a simple proof*, Geom. Funct. Anal. *8* (1998), N.2, 234–242.
- [7] G. Battle, P. Federbush, *Divergence-free Vector Wavelets*, Michigan Math. Journ. *40* (1993), 181–195.
- [8] H. Beirão da Veiga, *Existence and Asymptotic Behaviour for Strong Solutions of the Navier-Stokes Equations*, Indiana Univ. Math. Journ. *36* (1987), N.1, 149–166.
- [9] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces - An Introduction*, Springer-Verlag (1976).
- [10] J. Bouttes, *Mécanique des fluides*, Cours de l'École polytechnique, Ellipses (1988).
- [11] L. Brandolese, *Localisation, oscillations et comportement asymptotique pour les équations de Navier-Stokes*, Thèse de doctorat, ENS Cachan (2001).
- [12] L. Brandolese, Y. Meyer, *On the instantaneous spreading for the Navier-Stokes system in the whole space*, ESAIM Contr. Optim. Calc. Var. *8* (2002), 273–285.
- [13] L. Brandolese, *Asymptotic behavior of the energy and pointwise estimates for solutions to the Navier-Stokes equations*, Rev. Mat. Iberoamericana *20* (2004), 223–256.
- [14] L. Brandolese, *Space-time decay of Navier-Stokes flows invariant under rotations*, Math. Ann. *329* (2004), 685–706.
- [15] L. Brandolese, *Atomic decomposition for the vorticity of a viscous flow in the whole space*, Math. Nachr. *273* (2004), 28–42.
- [16] L. Brandolese, F. Vigneron, *On the localization of the magnetic and the velocity fields in the MHD equations*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (à paraître).
- [17] L. Brandolese, F. Vigneron, *Asymptotic profiles and applications to the unisotropic decay of solutions to the Navier-Stokes equations*, en préparation.
- [18] C.P. Calderón, *Existence of Weak Solutions for the Navier-Stokes Equations with Initial Data in  $L^p$* , Trans. Amer. Math. Soc. *318* (1990), N.1 179–200.

- [19] M. Cannone, Y. Meyer, F. Planchon, *Solutions auto-similaires des équations de Navier-Stokes*, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles École Polytech. *Exp. VIII* (1994).
- [20] M. Cannone, *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes*, Diderot Editeur (1995).
- [21] M. Cannone, G. Karch, *Smooth or singular solutions to the Navier-Stokes system ?*, J. Diff. Eq. *197* (2004), 247–274.
- [22] A. Carpio, *Large time behavior in the incompressible Navier-Stokes equations*, SIAM J. Math. Anal. *27* (1996), N.2, 449–475.
- [23] J. Casado-Diaz, E. Fernández-Cara, J. Simon, *Why viscous fluids adhere to rugose walls : a mathematical explanation*, J. Diff. Equations *189* (2003), 526–537.
- [24] P. Constantin, C. Fefferman, *Directions of the vorticity and the problem of global regularity for Navier-Stokes equations*, Indiana Univ. Math J. *42* (1993), 775–789.
- [25] P. Constantin, C. Foias, *Navier-Stokes equations*, University of Chicago Press (1988).
- [26] J.-Y. Chemin, *Perfect Incompressible Fluids*, Oxford Univ. Press (1998).
- [27] J.-Y. Chemin, *Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel*, J. Anal. Math. *77* (1999), 27–50.
- [28] J.-Y. Chemin, *Le système de Navier-Stokes incompressible soixante dix ans après Jean Leray* in *Actes des journées mathématiques à la mémoire de Jean Leray* (Nantes, 2002). S.M.F., coll. Séminaires et Congrès *9* (2004).
- [29] J.-Y. Chemin, N. Lerner, *Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes*, J. Diff. Equations *121* (1995) ; N.2, 314–328.
- [30] A.J. Chorin, J.E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, *3<sup>rd</sup>* ed. (1998).
- [31] P. Constantin, *A Few Results and Open Problems Regarding Incompressible Fluids*, AMS Notices *42* (1995), N.6, 568–663.
- [32] R. Danchin, *Poches de tourbillon visqueuses*, J. Math. Pures Appl. (9) *76* (1997), N.7, 609–647.
- [33] S.Y. Dobrokhotov, A.I. Shafarevich, *Some Integral Identities and Remarks on the Decay at Infinity of the Solutions to the Navier-Stokes Equations in the Entire Space*, Russ. J. Math. Phys. *2* (1994), N.1, 133–135.
- [34] E. Fabes, B.F. Jones, N. Rivière, *The Initial Value Problem for the Navier-Stokes Equations with Data in  $L^p$* , Arch. Rat. Mech. Anal. *45* (1972), 222–240.
- [35] C.L. Fefferman, *Existence & Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, Princeton University (2000).
- [36] Y. Fujigaki, T. Miyakawa, *Asymptotic profiles of non stationary incompressible Navier-Stokes flows in  $\mathbb{R}^n$* , SIAM J. Math. Anal. *33* (2001), 523–544.
- [37] Y. Fujigaki, T. Miyakawa, *On solutions avec fast decay of nonstationary Navier-Stokes equations in the Half space*, Nonlinear problems in mathematical physics and related topics I, Int. Math. Ser. (N.Y.) *1* (2002), Kluwerth Plenum, New-York, 91–120.
- [38] H. Fujita, T. Kato, *On the non-stationary Navier-Stokes System*, Rend. Sem. Math. Univ. Padova *32* (1962) 243–260.
- [39] T. Furioli, P.G. Lemarié-Rieusset, E. Terraneo, *Sur l'unicité dans  $L^3(\mathbb{R}^3)$  des solutions "mild" des équations de Navier-Stokes*, C.R. de l'Acad. des Sciences de Paris *325* (1997), N.12, 1247–1340.

- [40] T. Furioli, P.G. Lemarié-Rieusset, E. Terraneo, *Unicité  $L^3(\mathbb{R}^3)$  et d'autres espaces fonctionnel limites pour Navier-Stokes*, Rev. Math. Iberoamericana 16 (2000), N.3, 605–667.
- [41] G. Furioli, E. Terraneo, *Molecules of the Hardy space and the Navier-Stokes Equations*, Funkcial Ekvacioj 45 (2001), N.1, 141–160.
- [42] Y. Giga, T. Miyakawa, *Solutions in  $L^r$  of the Navier-Stokes initial value problem*, Arch. Rational Mech. Anal. 89 (1985), 267–281.
- [43] T. Gallay, C. E. Wayne, *Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier-Stokes equations on  $\mathbb{R}^2$* , Arch. Rat. Mech. Anal. 163 (2002), 209–258.
- [44] T. Gallay, C. E. Wayne, *Long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on  $\mathbb{R}^3$* , Phil. Trans Roy. Soc. Lond. 360 (2002), 2155–2188.
- [45] T. Gallay, C. E. Wayne, *Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation*, Comm. Math. Phys. 255 (2005), N.1, 97–129.
- [46] F. Golse, L. Saint-Raymond, *The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels*, Invent. Math. 155 (2004), N.1, 81–161.
- [47] E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences (2001).
- [48] F. Haldi, P. Wittwer, *Leading order down-stream asymptotics of non-symmetric stationary Navier-Stokes flows in two dimensions*, J. Math. Fluid Mech. 7 (2005), 611–648.
- [49] C. He, T. Miyakawa, *On  $L^1$  summability and asymptotic profiles for smooth solutions to Navier-Stokes equations in a 3D exterior domain*, Math. Z. 245 (2003) 387–417.
- [50] C. He, Z. Xin, *Partial regularity of suitable weak solutions to the incompressible magneto-hydrodynamic equations*, J. of Funct. Anal. 227 (2005), N.1, 113–152.
- [51] C. He, Z. Xin, *On the regularity of weak solutions on the magnetohydrodynamics equations*, J. Diff. Eq. 213 (2005), 235–254.
- [52] B.B. Kadomtsev, *Tokamak plasma : a complex physical system*, Institute of Physics Publishing, Bristol (1992).
- [53] T. Kato, *Strong  $L^p$  Solutions of the Navier-Stokes Equation in  $\mathbb{R}^m$ , with Applications to Weak Solutions*, Math. Z. 187 (1984), 471–480.
- [54] R.A. Kerman, *Convolution theorems with weights*, Trans. Amer. Math. Soc. 280 (1983), N.1, 207–219.
- [55] H. Koch, D. Tataru, *Well-posedness for the Navier-Stokes equations*, Advances in Maths 157 (2001), 22–35.
- [56] Y. Kozono,  *$L^1$  solutions of the Navier-Stokes equations in exterior domains*, Math. Ann. 312 (1998), 319–340.
- [57] I. Kukavica, J. J. Torres, *Weighted bounds for velocity and vorticity for the Navier-Stokes equations*, Nonlinearity 19 (2005), 293–303.
- [58] P.G. Lemarié-Rieusset, *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Chapman & Hall, CRC Press Boca Raton (2002).
- [59] J. Leray, *Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*, J. Math. Pures. Appl. 12 (1933), 1–82.
- [60] J. Leray, *Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Mathematica 63 (1934), 193–248.
- [61] P.L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, Oxford Univ. Press (1996,1998).

- [62] Y. Meyer, *Wavelets, Paraproducts and Navier-Stokes Equations*. Current Developments in Mathematics, Cambridge, MA (1996), 105–212.
- [63] T. Miyakawa, *On space time decay properties of nonstationary incompressible Navier-Stokes flows in  $\mathbb{R}^n$* , Funkcialaj Ekvacioj 32 (2000), N.2, 541–557.
- [64] T. Miyakawa, M. E. Schonbek, *On Optimal Decay Rates for Weak Solutions to the Navier-Stokes Equations*, Mathematica Bohemica 126 (2001).
- [65] S. Montgomery-Smith, *Finite Time Blow Up for A Navier-Stokes Like Equation*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), N.10, 3025–3029.
- [66] F. Oru, *Rôle des oscillations dans quelques problèmes d'analyse non-linéaire*, Thèse de doctorat, ENS Cachan, 1998.
- [67] C.W. Oseen, *Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodynamique et sur quelques-unes de leurs applications*, Acta Mathematica 34 (1911), 205–284 et 35 (1912), 97–192.
- [68] C.W. Oseen, *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*, Leipzig (1927).
- [69] F. Planchon, *Global Strong Solutions in Sobolev or Lebesgue Spaces for the Incompressible Navier-Stokes Equations in  $\mathbb{R}^3$* , Ann. Institut H. Poincaré (1996).
- [70] F. Planchon, *Asymptotic Behavior of Global Solutions to the Navier-Stokes Equations*, Rev. Mat. Iberoamericana 14 (1998), N.1, 71–93.
- [71] E.R. Priest, *Solar magnetohydrodynamics*, Geophysics and astrophysics monographs 21, D. Reidel Publishing, Dodrecht (1982).
- [72] V. Roussier-Michon, *Long-time asymptotics of Navier-Stokes and vorticity equations in a three-dimensional layer*, Comm. Part. Diff. Eq. 29 (2004), N.9-10, 1555–1605.
- [73] P.G. Saffman, *Vortex Dynamics*, Cambridge (1992).
- [74] M. E. Schonbek, *Lower Bounds of Rates of Decay for Solutions to the Navier-Stokes Equations*, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), N.3, 423–449.
- [75] M.E. Schonbek, T.P. Schonbek, E. Süli, *Large time behavior of solutions to the magnetohydrodynamics equations*, Math. Ann. 304 (1996), N.4, 717–756.
- [76] M. Schonbek, M. Wiegner, *On the decay of higher order norms of the solutions of Navier-Stokes equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 126 (1996), 677–685.
- [77] J. Serin, *The Initial Value Problem for the Navier-Stokes Equations*, in *Nonlinear Problems*, proc. symp. ed. by R.E. Langer, Univ. of Wisconsin Press (1963), 69–98.
- [78] R. Temam, *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*, AMS Chelsea Publishing (2001).
- [79] B.O. Turesson, *Nonlinear Potential Theory and Weighted Sobolev Spaces*, Springer-Verlag, coll. Lect. Notes in Maths 1736 (2000).
- [80] F. Vigneron, *Localisation des solutions de Navier-Stokes dans les  $L^p$  à poids*, Mémoire de DEA (non publié).
- [81] F. Vigneron, *Spatial decay of the velocity field of an incompressible viscous fluid in  $\mathbb{R}^d$* , Nonlinear Analysis T.M.A. 63 (2005) 525–549.
- [82] F. Vigneron, *Decay theorems for the Navier-Stokes system with elementary O.D.E. techniques*, (en préparation).

- [83] C. Villani, *Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann (d'après C. Bardos, F. Golse, C. D. Levermore, P.-L. Lions, N. Masmoudi, L. Saint-Raymond)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001. Exp. No. 893, ix. Astérisque 282 (2002), 365–405.
- [84] F.B. Weissler, *The Navier-Stokes Initial Value Problem in  $L^p$* , Arch. Rat. Mecha. Anal. 74 (1980), 219–230.
- [85] M. Wiegner, *Decay Results for Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations on  $\mathbb{R}^n$* , J. London Math. Soc. 2 (1987), N.35, 303–313.
- [86] P. Wittwer, *Leading order down-stream asymptotics of non-symmetric stationary Navier-Stokes flows in three dimensions*, Comm. Math. Phys. 226 (2002), 455–474.



**Deuxième partie**

**Espaces fonctionnels associés  
à une famille de champs de vecteurs**



# Chapitre 4

## Définitions et hypothèses

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels dans lesquels la régularité d'une fonction est exprimée par l'appartenance simultanée de la fonction et d'un certain nombre de dérivées (éventuellement calculées au sens des distributions) à un espace de référence, par exemple  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

La deuxième partie de ce travail consiste à étudier des espaces de Sobolev dont les dérivations sont données par une famille de champs de vecteurs. On souhaite en particulier comprendre l'influence de la structure géométrique des champs sur la régularité qu'il est possible d'exprimer dans le cadre de ces espaces.

### 4.1 Présentation générale

Soit  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m)$  une famille de champs de vecteurs réguliers sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^q$ . Chaque champ agit sur les fonctions à travers sa dérivée de Lie :

$$(\mathcal{X}_j f)(x) = df(x) \cdot \mathcal{X}_j(x).$$

Le modèle des espaces fonctionnels qu'on souhaite étudier est :

$$H^1(\Omega; \mathcal{X}) = \{f \in L^2(\Omega); \forall j \in \{1, \dots, m\}, \mathcal{X}_j f \in L^2(\Omega)\}. \quad (4.1.1)$$

Le seul cas non-trivial est celui où le rang de la famille  $\mathcal{X}$  est strictement inférieur à la dimension ambiante. Dans ce cas, la régularité n'est pas isotrope et la notion de *régularité microlocale* s'y substitue avantageusement. Une fonction  $f$  est dite microlocalement de classe  $H_{x_0, \xi_0}^s$  en un point  $(x_0, \xi_0)$  de l'espace des phases  $T^* \Omega$  si

$$\langle \xi \rangle^s |\widehat{\phi f}(\xi)| \in L^2 \left( \left| \frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\xi_0}{|\xi_0|} \right| < \varepsilon \right) \quad (4.1.2)$$

pour un certain  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit (en fait aussi, pour tout  $\varepsilon' \leq \varepsilon$ ) et une fonction de troncature  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  telle que  $\phi(x_0) = 1$ . Ici et dans toute la suite, on note

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^q} e^{ix \cdot \xi} f(x) dx$$

la transformée de Fourier d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^q$ . On pose aussi  $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ .

La suite de ce chapitre est consacrée aux définitions précises des espaces fonctionnels et s'achève par un résumé des principaux résultats qu'on se propose de démontrer.

### Hypothèse de Hörmander

En termes naïfs, un commutateur exprime au niveau infinitésimal la conjugaison des déplacements suivant le flot de deux champs de vecteurs. L'hypothèse de Hörmander signifie que toutes les directions peuvent être atteintes, au moins indirectement, de cette manière.

Plus précisément, l'hypothèse de Hörmander (ou *condition de crochet*) exige que les  $\mathcal{X}_j$  et leurs commutateurs itérés jusqu'à un ordre fini, prescrit à l'avance, engendrent la totalité de l'espace tangent ; autrement dit, c'est l'existence d'un entier  $n_0 \geq 2$  tel que tout champ de vecteur  $\mathcal{Y}$  puisse être décomposé (mais pas nécessairement de façon unique) sous la forme :

$$\mathcal{Y} = \sum \alpha_j^1 \mathcal{X}_j + \sum \alpha_{j_1, j_2}^2 [\mathcal{X}_{j_1}, \mathcal{X}_{j_2}] + \dots + \sum \alpha_{j_1, \dots, j_{n_0}}^{n_0} [\mathcal{X}_{j_1}, [\mathcal{X}_{j_2}, [\dots [\mathcal{X}_{j_{n_0-1}}, \mathcal{X}_{j_{n_0}}]]]] \quad (4.1.3)$$

avec des fonctions localement bornées  $\alpha_{j_1, \dots, j_k}^k$  sur  $\Omega$ . On dit que  $n_0$  est le *degré de non-holonomie* de la famille  $\mathcal{X}$ .

La famille est dite *régulière* (au voisinage de  $x_0$ ) si le drapeau de  $T_x \Omega$  constitué des sous-espaces

$$\mathcal{V}_k(x) = \text{Vect} \{ \mathcal{X}_j(x), \dots, [\mathcal{X}_{j_1}, [\dots [\mathcal{X}_{j_{k-1}}, \mathcal{X}_{j_k}]]](x) \} \quad (4.1.4)$$

est régulier, *i.e.* si chaque  $\mathcal{V}_k$  est de rang constant pour tout  $k \leq n_0$ .

Sauf mention explicite du contraire, on supposera dans toute la suite que la famille  $\mathcal{X}$  est régulière et vérifie la condition d'ordre 2. Certains résultats pourront se généraliser au cas d'une hypothèse d'ordre fini. Dans d'autres cas, au contraire, on se limitera au cas du groupe de Heisenberg (voir §4.5).

## 4.2 Espaces fonctionnels associés à une famille de champs

Afin d'unifier la présentation des espaces de Sobolev (et en particulier, ceux du chapitre 8), on observe que l'espace (4.1.1) ne dépend pas explicitement de la famille  $\mathcal{X}$  mais seulement du  $C^\infty$  module engendré par les champs. Cette remarque nous amène à modifier légèrement le concept ainsi que les notations.

On considère, en toute généralité, une variété  $C^\infty$ , notée  $\Omega$ , munie d'une mesure de Radon  $\mu$  sur la tribu borélienne. Comme précédemment, on note  $Xf = i_X(df)$  la dérivation associée à un champ de vecteur  $X$ .

**Définition** – Une structure de dérivation sur  $(\Omega, \mu)$  est la donnée simultanée d'un anneau  $A$  de fonctions  $\mu$ -mesurables et d'un  $A$ -module  $\mathfrak{X}$  de champs de vecteurs sur  $\Omega$ , tels que :

1.  $C^\infty(\Omega) \subset A \subset L^\infty(\Omega; \mu)$ , *i.e.*  $A$  contient les fonctions régulières et

$$\forall f \in A, \exists R > 0, \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| > R\}) = 0,$$

2.  $\mathfrak{X}$  est de type fini sur  $A$ ,
3.  $A$  est stable sous les dérivées de Lie  $\mathfrak{X}$ .

**Remarque** - Comme  $A$  contient les fonctions  $C^\infty$ , les coefficients des champs de vecteurs appartiennent à  $A$  et l'ensemble

$$\mathfrak{X}(x) = \{X(x); X \in \mathfrak{X}\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $T_x \Omega$ . En toute généralité, la dimension de ces sous-espaces pourrait varier avec  $x$  ; ce n'est pas le cas si on suppose que la famille de champs est régulière. Dans l'étude

des espaces de traces, on rencontrera un exemple assez naturel de structure de dérivation dont l'anneau  $A$  est constitué de fonctions quasi-homogènes de degré zéro (voir p. 149).  $\diamond$

Le module  $\mathfrak{X}$  étant de type fini sur  $A$ , on considère une famille génératrice  $\hat{\mathfrak{X}}$ . Pour tout multi-indice de longueur  $k \geq 1$ , i.e. toute application  $\alpha : \{1, \dots, k\} \rightarrow \hat{\mathfrak{X}}$ , on note  $\hat{\mathfrak{X}}^\alpha$  la dérivée de Lie  $\alpha(1) \circ \dots \circ \alpha(k)$ . Par convention  $\hat{\mathfrak{X}}^0 = \text{Id}$ .

**Définition** – L'espace de Sobolev  $H^k(\Omega; \mathfrak{X}; \mu) = \{u; \hat{\mathfrak{X}}^\alpha u \in L^2(\Omega; \mu) \text{ si } |\alpha| \leq k\}$  est muni de la norme hilbertienne

$$\|u\|_{H^k(\Omega; \mathfrak{X}; \mu)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\hat{\mathfrak{X}}^\alpha u\|_{L^2(\Omega; \mu)}^2, \quad (4.2.1)$$

la somme étant étendue à tous les multi-indices de longueur au plus  $k$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , l'espace  $H^k(\Omega; \mathfrak{X}; \mu)$  et sa norme ne dépendent pas, à isomorphisme hilbertien près, du choix de la famille génératrice  $\hat{\mathfrak{X}}$ .

**Notation.** Dans la suite, on s'efforcera de noter  $\mathcal{X}$  la famille de champs de vecteurs lorsqu'on ne l'associe pas spécifiquement à une structure de dérivation et  $\hat{\mathfrak{X}}$  lorsqu'on souhaite insister sur le fait que c'est un choix particulier d'une famille génératrice d'une structure de dérivation  $\mathfrak{X}$ .

### 4.3 Éléments de géométrie sous-riemannienne

La donnée d'une famille de champs de vecteurs vérifiant la condition de Hörmander (6.1.1) fournit naturellement une structure sous-riemannienne. L'idée fondamentale est que les seuls déplacements possibles sont contraints à suivre les flots des champs de vecteurs.

**Définition** – Un chemin absolument continu  $\gamma \in W^{1,1}([0, T]; \Omega)$  est dit  $\mathfrak{X}$ -horizontal s'il existe une famille génératrice  $\hat{\mathfrak{X}}$  et des fonctions bornées  $(a_X)_{X \in \hat{\mathfrak{X}}}$  telles que

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{X \in \hat{\mathfrak{X}}} a_X(t) X(\gamma(t))$$

pour presque tout  $t \in [0, T]$ . Il est dit sous-unitaire si  $\sum a_X^2 \leq 1$ . On définit une quasi-distance, dite de Carnot-Theodory, par :

$$\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}}(x, y) = \inf \left\{ T \geq 0; \exists \gamma \in W^{1,1}([0, T]; \Omega) \text{ t.q. } \left. \begin{array}{l} \gamma \text{ sous-unitaire,} \\ \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(T) = y \end{array} \right\}$$

avec la convention que  $\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}}(x, y) = +\infty$  si  $x$  et  $y$  ne peuvent pas être connectés par un chemin  $\mathfrak{X}$ -horizontal.

Si  $\hat{\mathfrak{Y}} = \Xi \cdot \hat{\mathfrak{X}}$  est une autre famille génératrice (avec une matrice de passage  $\Xi$ ), alors

$$\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}}(x, y) \leq \|\Xi\|_{L^\infty} \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{Y}}}(x, y).$$

Ainsi, le choix d'une autre famille génératrice conduit, au moins localement, à une distance uniformément équivalente.

L'analogie avec la géométrie riemannienne est la suivante. Pour  $v \in T_x \Omega$ , on pose :

$$\|v\|_{\hat{\mathfrak{X}},x}^2 = \inf \left\{ \sum a_X^2 \text{ t.q. } v = \sum_{X \in \hat{\mathfrak{X}}} a_X X(x) \right\},$$

en convenant que  $\|v\|_{\hat{\mathfrak{X}},x} = \infty$  si  $v \notin \mathfrak{X}(x)$ . La  $\mathcal{X}$ -longueur d'un chemin absolument continu  $\gamma$  est alors définie comme

$$\mathcal{L}_{\hat{\mathfrak{X}}}(\gamma) = \int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\|_{\hat{\mathfrak{X}},\gamma(t)} dt.$$

La distance de Carnot-Theodory définie ci-dessus est équivalente à :

$$\inf \{ \mathcal{L}_{\hat{\mathfrak{X}}}(\gamma) \mid \gamma \text{ chemin sous-unitaire de } x \text{ à } y \}. \quad (4.3.1)$$

Cette propriété justifie l'appellation de géométrie sous-riemannienne.

Sous l'hypothèse de Hörmander (6.1.1) d'ordre  $n_0 = 2$  et en supposant de plus que  $\Omega$  est un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^q$ , le théorème de W.L. Chow [8, thm. 2.4] entraîne que la distance de Carnot est finie pour tout couple de points dans  $\Omega^2$ .

La forme des boules  $\mathcal{B}_\rho^x = \{y \in \Omega \text{ t.q. } \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}}(x, y) < \rho\}$  peut être très compliquée. Cependant, le théorème "boîte-boule" (Ball-Box theorem, [25, thm. 2.10]) implique l'estimation locale suivante :

$$\exists \beta > 1, \quad \beta^{-1}|x - y| \leq \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}}(x, y) \leq \beta|x - y|^{1/2} \quad (4.3.2)$$

pour  $|x - y| \leq 1$ . L'exposant  $\frac{1}{2}$  reflète l'ordre  $n_0 = 2$  de la condition de Hörmander.

La borne inférieure reste vraie sans hypothèses particulières sur les champs, même si  $x$  et  $y$  sont très éloignés l'un de l'autre :

$$\forall x, y \in K, \quad \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}}(x, y) \geq \beta_K^{-1}|x - y| \quad (4.3.3)$$

pour tout compact  $K \subset \Omega$ . Si  $\Omega = \mathbb{R}_q$  et si les coefficients des champs sont bornés, la constante  $\beta_K$  peut être choisie indépendamment du compact  $K$ .

Le volume  $\text{Vol}(\mathcal{B}_\rho^x)$  s'estime assez facilement. En effet, les boules sous-riemanniennes de petit rayon vérifient la propriété de doublement du volume (voir [24, équation 3.1]) :

$$\exists c \geq 1, \quad \forall \rho \in [0, 1], \quad \text{Vol}(\mathcal{B}_{2\rho}^x) \leq c \text{Vol}(\mathcal{B}_\rho^x), \quad (4.3.4)$$

donc  $\text{Vol} \mathcal{B}_\rho^x \geq \rho^{\frac{\ln c}{\ln 2}} \text{Vol} \mathcal{B}_1^x$ .

**Définition** – Pour un système régulier vérifiant la condition de crochet de rang 2, on définit la dimension homogène

$$Q = r + 2(n - r) \quad (4.3.5)$$

où  $r = \text{rg}_{\mathbb{R}} \hat{\mathfrak{X}}(x)$  est, par hypothèse, indépendant de  $x \in \Omega$  et du choix de la famille génératrice.

Le volume de la boule sous-riemannienne se calcule alors à une constante près :

$$\exists \bar{C} \geq \underline{C} > 0, \quad \forall \rho \in [0, 1], \quad \underline{C} \rho^Q \leq \text{Vol}(\mathcal{B}_\rho^x) \leq \bar{C} \rho^Q. \quad (4.3.6)$$

Pour un résultat plus général voir par exemple [25, théorème 2.17] (théorème de Mitchell).

## 4.4 Utilisation du calcul de Weyl-Hörmander

Un des résultats essentiels de la théorie classique des espaces de Sobolev est le fait que la transformation de Fourier réalise une isométrie d'espace de Hilbert entre  $H^s(\mathbb{R}^q)$  et  $L^2(\langle \xi \rangle^s d\xi)$ . Dans le contexte précédent, l'analyse de Fourier doit être convenablement généralisée puisque la régularité microlocale des fonctions  $H^k(\Omega; \mathfrak{X})$  est inhomogène et anisotrope.

Lorsque  $\mathfrak{X}$  vérifie la condition de crochet de rang 2, on peut utiliser, par exemple, le calcul de Weyl-Hörmander, dans l'esprit de J.-M. Bony et J.-Y. Chemin [12] (voir aussi [17], [14]).

A. Nagel et E. Stein ont proposé une approche légèrement différente qui privilégie l'étude des opérateurs à noyau grâce à un calcul symbolique spécifique [28].

Enfin, lorsque la structure sous-riemannienne est induite par un groupe de Carnot (en fait, plus précisément, sur le groupe de Heisenberg), H. Bahouri, P. Gérard et C.J. Xu [7] ont proposé une généralisation directe de la théorie de Littlewood-Paley (voir aussi [6]).

Le calcul de Weyl semble offrir un bon compromis entre la simplicité de mise en oeuvre et la généralité des résultats. En voici quelques rappels succincts.

### 4.4.1 Semi-normes de confinement

La notion de confinement est définie par une famille de semi-normes sur l'espace des phases, *i.e.* le fibré cotangent  $T^*\Omega$ , muni de sa structure symplectique naturelle.

Soit  $g$  une métrique sur un espace symplectique  $(\mathbb{R}^{2q}, \sigma)$ ; la métrique duale est

$$g^\sigma(S) = \sup_{T \neq 0} \frac{\sigma(S, T)^2}{g(T)}$$

ou, en termes matriciels :  $G^\sigma = -\Sigma G^{-1} \Sigma$ .

**Définition** – Pour tout ensemble borélien  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2q}$  et tout entier  $N \in \mathbb{N}$ , on définit la semi-norme :

$$\|\phi\|_{N; \text{Conf}_{\mathcal{U}}(g)} = \sup_{\substack{X \in T^*\mathbb{R}^q \\ k \leq N; T_i \neq 0}} (1 + g^\sigma(X - \mathcal{U}))^N \frac{|\partial_{T_1} \dots \partial_{T_k} \phi(X)|}{g(T_1)^{1/2} \dots g(T_k)^{1/2}}. \quad (4.4.1)$$

Cette famille munit l'ensemble des fonctions  $C^\infty(\mathbb{R}^{2q})$  d'une structure d'espace de Fréchet.

Par construction :  $\|\phi\|_{N; \text{Conf}_{\mathcal{U}}(g)} \leq \|\phi\|_{N+1; \text{Conf}_{\mathcal{U}}(g)}$ .

Revenons à l'espace des phases  $T^*\mathbb{R}^q$ , identifié à  $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ . Soit  $\mathcal{X}$  une famille de champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^q$ . A tout point  $X = (x, \xi)$ , on associe la métrique :

$$g_X = \frac{\langle \xi \rangle^2 dx^2 + d\xi^2}{m^2(X)} \quad (4.4.2)$$

avec

$$m(X)^2 = \langle \xi \rangle + \sum |\langle \mathcal{X}_j(x) | \xi \rangle|^2. \quad (4.4.3)$$

La famille  $(g_Y)_{Y \in T^*\mathbb{R}^q}$  vérifie les hypothèses classiques du calcul de Weyl-Hörmander, à savoir, le principe d'incertitude  $g \leq g^\sigma$  et les conditions de lenteur et de tempérance qu'on résume par l'inégalité :

$$\forall T \neq 0, \quad \left( \frac{g_X(T)}{g_Y(T)} \right)^{\pm 1} \leq C_0 \left( 1 + g_Y^\sigma(X - \mathcal{U}_Y^\delta) \right)^{N_0}$$

avec  $\mathcal{U}_Y^\delta = \{X \in T^*\mathbb{R}^q; g_Y(X-Y) \leq \delta^2\}$ . Pour les détails des calculs, voir la preuve du Lemme 1.2.1 dans [14].

**Remarque** - Le poids microlocal (4.4.3) exprime une régularité microlocale  $H^{1/2}$  isotrope en plus de la régularité associée à la famille  $\mathcal{X}$ . Sous l'hypothèse de Hörmander d'ordre  $n_0 = 2$ , ce n'est pas une contrainte puisque le théorème de sous-ellipticité entraîne  $H^s(\mathcal{X}) \subset H_{\text{loc}}^{s/2}(\mathbb{R}^q)$ . D'autres remarques concernant le cas d'ordre  $n_0 \geq 3$  sont incluses au paragraphe §6.4, ainsi qu'à la suite de la Proposition 24 du Chapitre 7.  $\diamond$

Dans ce qui suit, le rayon de confinement est  $\delta \in ]0, \delta_0[$ . On utilise la métrique  $g_Y$  et les boules  $\mathcal{U}_Y^\delta$ . On abrège alors la notation  $\text{Conf}_{\mathcal{U}_Y^\delta(g_Y)}$  en  $\text{Conf}_Y$ . On utilise aussi de préférence une famille équivalente de semi-normes, donnée par le lemme suivant.

**Lemme 1** *Les semi-normes*

$$\|\phi\|_{N; \text{Conf}'_Y} = \sup_{\substack{X \in T^*\mathbb{R}^q \\ k \leq N; T_i \neq 0}} (1 + g_Y^\sigma(X - \mathcal{U}_Y^\delta))^N \frac{|\partial_{T_1} \dots \partial_{T_k} \phi(X)|}{g_X(T_1)^{1/2} \dots g_X(T_k)^{1/2}} \quad (4.4.4)$$

définissent le même espace de Frechet que  $\|\cdot\|_{N; \text{Conf}_Y}$ .

**Preuve** On a  $C_0^{-N/2} \|\phi\|_{N; \text{Conf}'_Y} \leq \|\phi\|_{(1+N_0)N; \text{Conf}_Y} \leq C_0^N \|\phi\|_{(1+N_0)^2N; \text{Conf}'_Y}$ .  $\blacksquare$

#### 4.4.2 Calcul symbolique dans les classes de confinement

La loi de composition des symboles est définie par :

$$(\phi \# \psi)(X) = \pi^{-2q} \iint e^{-2i[X-S, X-T]} \phi(S) \psi(T) dS dT.$$

où  $[X, Y] = y \cdot \xi - x \cdot \eta$  désigne la structure symplectique de  $\mathbb{R}^{2q}$ .

L'espace des phases admet une partition de l'unité  $(\vartheta_Y)_{Y \in T^*\mathbb{R}^q}$  en symboles confinés :

$$\int_{T^*\mathbb{R}^q} \vartheta_Y d_g Y = 1 \quad \text{et} \quad \forall N, \quad \sup_{Y \in T^*\mathbb{R}^q} \|\vartheta_Y\|_{N; \text{Conf}_Y} < \infty. \quad (4.4.5)$$

On note  $d_g Y = |\det G_Y|^{1/2} dY$  la renormalisation naturelle de la métrique symplectique, avec  $G_Y$  la matrice de  $g_Y$  dans les coordonnées locales dans lesquelles on exprime l'élément de volume  $dY$ .

La métrique  $g$  définie par (4.4.2) est dominée par la métrique fortement tempérée du calcul symbolique  $S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^m$  (voir [12, déf. 7.1]) :

$$\tilde{g}_X = \langle \xi \rangle dx^2 + \langle \xi \rangle^{-1} d\xi^2.$$

On peut donc supposer que  $\vartheta_Y$  se décompose en  $\vartheta_Y = \psi_Y \# \varphi_Y$  avec une autre partition de l'unité  $(\varphi_Y)_{Y \in T^*\mathbb{R}^q}$  et des fonctions  $(\psi_Y)_{Y \in T^*\mathbb{R}^q}$  uniformément confinées (voir [12, §7]). Cette propriété remplace l'intuition classique que toute fonction à support compact s'écrit comme un produit de deux fonctions à support à peine plus gros, la seconde étant égale à 1 au voisinage de la première.

Le calcul symbolique repose sur la propriété de multiconfinement des symboles composés.

**Théorème 2 (J.-M. Bony, N. Lerner [13, §3.2])** *Il existe une fonction symétrique  $\Delta$  telle que pour tout entier  $N$ , il existe  $M \geq 0$  et une constante  $C_N > 0$  vérifiant :*

$$\|\phi\#\psi\|_{N; \text{Conf}_X} + \|\phi\#\psi\|_{N; \text{Conf}_Y} \leq C_N \Delta(X, Y)^{-N} \|\phi\|_{M; \text{Conf}_X} \|\psi\|_{M; \text{Conf}_Y} \quad (4.4.6)$$

pour tous symboles  $\phi, \psi$ . De plus,  $\Delta(X, Y) \geq 1$  et il existe un entier  $N_0$  tel que :

$$\sup_X \int_{\mathbb{T}^* \mathbb{R}^q} \Delta(X, Y)^{-N_0} d_g Y < \infty. \quad (4.4.7)$$

**Corollaire 3** *Le produit de composition des symboles admet le développement asymptotique suivant :*

$$\phi\#\psi(X) = \phi(X) \psi(X) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \left( \frac{1}{2i} [\partial_Y, \partial_Z] \right)^k \phi(Y) \psi(Z) \Big|_{X=Y=Z} + R_m(\phi, \psi)(X) \quad (4.4.8)$$

avec  $[\partial_Y, \partial_Z] = \sum \partial_{y_i} \partial_{z_i} - \partial_{z_i} \partial_{y_i}$  en coordonnées symplectiques, et l'estimation du reste :

$$\lambda_g(X)^m \|R_m(\phi, \psi)\|_{N; \text{Conf}_X} \leq C_N \Delta(X, Y)^{-N} \|\phi\|_{M; \text{Conf}_X} \|\psi\|_{M; \text{Conf}_Y} \quad (4.4.9)$$

$$\text{où } \lambda_g(X) = \inf_{T \in \mathbb{T}^* \mathbb{R}^q} \sqrt{\frac{g_X^\sigma(T)}{g_X(T)}} = \frac{\mathfrak{m}(X)^2}{\langle \xi \rangle} \geq 1.$$

#### 4.4.3 Quantification de Weyl

La quantification de Weyl d'un symbole  $\phi$  est définie par :

$$\phi^{\text{w}} u(x) = \iint e^{i(x-z|\zeta)} \phi\left(\frac{x+z}{2}; \zeta\right) u(z) \frac{dz d\zeta}{(2\pi)^q}.$$

On a  $\phi^{\text{w}} \circ \psi^{\text{w}} = (\phi\#\psi)^{\text{w}}$ . Le symbole de Weyl d'un champ de vecteur est donné par la formule :

$$\sum_{j=1}^q a_j(x) \partial_{x_j} = \left( a(x) \cdot (i\xi) + \frac{1}{2} \text{div } a \right)^{\text{w}} \quad (4.4.10)$$

où  $a = (a_1, \dots, a_q)$ .

**Proposition 4 (J.-M. Bony, N. Lerner [13, 2.4.1])** *Les symboles confinés définissent des opérateurs bornés sur  $L^2$  :*

$$\|\phi^{\text{w}}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_1 \inf_X \|\phi\|_{N_1; \text{Conf}_X}. \quad (4.4.11)$$

La métrique  $g_X$  définie par (4.4.2) est scindée, *i.e.* de la forme  $a(X) dx^2 + b(X) d\xi^2$ . On peut donc généraliser le lemme de Cotlar de la manière suivante.

**Théorème 5 (J.-Y. Chemin, C.J. Xu [17, 2.16])** *Soit  $(\psi_Y)_{Y \in \mathbb{T}^* \mathbb{R}^q}$  une famille uniformément confinée pour la métrique (4.4.2). Soit  $f_Y : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{C}$  une famille de fonctions  $L^2$ , mesurablement paramétrée par  $Y \in \mathbb{T}^* \mathbb{R}^q$ . On définit*

$$u(x) = \int_{\mathbb{T}^* \mathbb{R}^q} (\psi_Y^{\text{w}} f_Y)(x) d_g Y. \quad (4.4.12)$$

Alors, il existe une constante  $C_\psi > 0$  ne dépendant que de la famille  $\psi_Y$  telle que :

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq C_\psi \int_{\mathbb{T}^* \mathbb{R}^q} \|f_Y\|_{L^2}^2 d_g Y. \quad (4.4.13)$$

#### 4.4.4 Espaces de Sobolev et classes de symboles

On introduit des classes de symboles adaptés à la métrique (4.4.2).

**Définition** – *Un poids  $\mathfrak{M}$  est une fonction régulière telle que :*

$$\left( \frac{\mathfrak{M}(X)}{\mathfrak{M}(Y)} \right)^{\pm 1} \leq \bar{C} (1 + g_Y^\sigma(X - \mathcal{U}_Y^{\delta_0}))^{\bar{N}}.$$

On définit la classe de symbole  $S(\mathfrak{M})$  par la famille de semi-normes :

$$\|\phi\|_{N;S(\mathfrak{M})} = \sup_{\substack{X \in T^*\mathbb{R}^q \\ k \leq N; T_i \neq 0}} \mathfrak{M}(X)^{-1} \frac{|\partial_{T_1} \dots \partial_{T_k} \phi(X)|}{g_X(T_1)^{1/2} \dots g_X(T_k)^{1/2}}. \quad (4.4.14)$$

Le poids  $\mathfrak{M}$  est dit régulier si  $\mathfrak{M} \in S(\mathfrak{M})$ .

Le poids  $m$  défini par (4.4.3) est un poids admissible régulier (voir [14, lemme 1.2.1]).

Si  $\mathfrak{M}_1$  et  $\mathfrak{M}_2$  sont deux  $g$ -poids, on a un calcul symbolique. Le produit de deux symboles respectivement de classe  $S(\mathfrak{M}_1)$  et  $S(\mathfrak{M}_2)$  est de classe  $S(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)$ . L'inverse d'un symbole  $\phi$  de classe  $S(\mathfrak{M})$  vérifiant  $|\phi| \geq c > 0$  est de classe  $S(\mathfrak{M}^{-1})$ . Le développement asymptotique du Corollaire 3 est complété par les estimations suivantes du terme de reste :

$$\lambda_g(X)^m \|R_m(\phi, \psi)\|_{N; \text{Conf}_X} \leq C_N \mathfrak{M}(X) \|\phi\|_{M; \text{Conf}_X} \|\psi\|_{M; S(\mathfrak{M})} \quad (4.4.15a)$$

$$\lambda_g(X)^m \|R_m(\phi, \psi)\|_{N; S(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)} \leq C_N \|\phi\|_{M; S(\mathfrak{M}_1)} \|\psi\|_{M; S(\mathfrak{M}_2)} \quad (4.4.15b)$$

En particulier, pour tout entier  $N$ , il existe  $M \in \mathbb{N}$  et une constante structurelle  $C$  tels que :

$$\|\phi\psi\|_{N; \text{Conf}_X} + \|\phi\#\psi\|_{N; \text{Conf}_X} + \lambda_g(X) \|\phi\#\psi - \phi\psi\|_{N; \text{Conf}_X} \leq C \mathfrak{M}(X) \|\phi\|_{M; \text{Conf}_X} \|\psi\|_{S(\mathfrak{M})}.$$

La définition “fréquentielle” des espaces de Sobolev s’inspire de l’analyse de Fourier sur  $\mathbb{R}^q$  en considérant le poids comme une fréquence.

**Définition** – *Soit  $\mathfrak{M}$  un poids régulier. Pour  $s \geq 0$ , l’espace  $H(\mathfrak{M}^s)$  est constitué des fonctions  $u$  de  $L^2(\mathbb{R}^q)$  telles que :*

$$\|u\|_{H(\mathfrak{M}^s)}^2 = \int_{T^*\mathbb{R}^q} \mathfrak{M}(Y)^{2s} \|\vartheta_Y^w u\|_{L^2}^2 d_g Y < \infty \quad (4.4.16)$$

pour une partition de l’unité  $(\vartheta_Y)_{Y \in T^*\mathbb{R}^q}$  de l’espace des phases en symboles confinés.

L’espace  $H(\mathfrak{M}^s)$  ne dépendant pas du choix de la partition de l’unité (voir [12, proposition 4.3]).

Le lien entre  $H(\mathfrak{M}^s)$  et  $S(\mathfrak{M}^s)$  est donné par le théorème suivant.

**Théorème 6 (J.-M. Bony, J.-Y. Chemin [12, corollaires 6.6 & 6.7])** *Soit  $\mathfrak{M}$  un poids régulier. Une fonction  $u$  appartient à  $H(\mathfrak{M}^s)$  si et seulement si  $a^w u \in L^2$  pour tout symbole  $a \in S(\mathfrak{M}^s)$ .*

*De plus il existe deux symboles  $b \in S(\mathfrak{M}^s)$  et  $h \in S(\mathfrak{M}^{-s})$  tels que :*

$$h\#b = b\#h = 1. \quad (4.4.17)$$

L’application  $h^w : L^2 \rightarrow H(\mathfrak{M}^s)$  est un isomorphisme d’espaces de Hilbert, d’inverse  $b^w$ .

### 4.4.5 Exemples classiques

La mise en oeuvre effective du calcul de Weyl nécessite d'identifier quelques espaces classiques.

1. L'espace  $H(1)$  coïncide avec  $L^2(\mathbb{R}^q)$  et les normes sont équivalentes.
2. L'espace  $H(\langle \xi \rangle^s)$  est l'espace de Sobolev usuel  $H^s(\mathbb{R}^q)$ .
3. **Proposition 7 (J.-Y. Chemin, C.J. Xu [17])** *Soit  $\mathfrak{X}$  une famille de champs vérifiant uniformément la condition de Hörmander d'ordre 2 sur  $\mathbb{R}^q$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$  et le poids  $\mathfrak{m}$  défini par (4.4.3) l'espace  $H(\mathfrak{m}^k)$  du calcul de Weyl coïncide avec l'espace  $H^k(\mathbb{R}^q; \mathfrak{X})$  défini par (4.2.1).*  
La famille  $\{H(\mathfrak{m}^s)\}_{s \geq 0}$  étant stable par interpolation complexe (voir [12, remarque 4.2]), ces espaces constituent donc une généralisation naturelle des espaces d'indice entier.

La preuve de la Proposition 7 est un exemple significatif de la mise en oeuvre du calcul de Weyl. En voici les grandes lignes, les détails des calculs pouvant être retrouvés dans [4]. Voir aussi [17] pour une autre démonstration utilisant le Théorème 6.

**Preuve** Le symbole des champs  $Z_i \in \hat{\mathfrak{X}}$  est donné par (4.4.10). C'est une fonction de classe  $S_{1,0}^1$  bornée par  $\mathfrak{m}$  donc de classe  $S(\mathfrak{m})$  (voir le Lemme 16 p.117). En conséquence :

$$\|u\|_{H^{k/2}(\mathbb{R}^q)}^2 + \sum_{|\alpha| \leq k} \|\hat{\mathfrak{X}}^\alpha u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H(\mathfrak{m}^k)}^2.$$

Inversement, il existe une partition de l'espace des phases dépendant d'un paramètre  $A > 0$  :

$$T^*\mathbb{R}^q \subset \bigcup_j E_j$$

définie par  $E_0 = \{(x, \xi) ; Q(x, \xi) \leq A \langle \xi \rangle\}$  et pour  $1 \leq j \leq \text{rg } \mathfrak{X}$  :

$$E_j = \{(x, \xi) ; r^2 |Z_j(x, \xi)|^2 \geq Q(x, \xi) \geq A \langle \xi \rangle\}$$

où  $r = \text{rg } \mathfrak{X}$  est le nombre de champs d'une base  $(Z_1, \dots, Z_r)$  de  $\mathfrak{X}$  et  $Q(x, \xi) = \sum |Z_j(x) \cdot \xi|^2$ . Comme  $\mathfrak{m}^2(X) = Q(x, \xi) + \langle \xi \rangle$ , on a donc :

$$\|u\|_{H(\mathfrak{m}^k)}^2 \leq (1 + A) \|u\|_{H^{k/2}(\mathbb{R}^q)}^2 + \sum_{j=1}^r \int_{E_j} \mathfrak{m}(Y)^{2k} \|\varphi_Y^{\mathfrak{w}} u\|_{L^2}^2 d_g Y.$$

On note  $a_j$  le symbole de  $Z_j$  et on définit :

$$\pi_{j,\ell,Y}(X) = \left( \frac{\mathfrak{m}(Y)}{a_j(X)} \right)^\ell \varphi_Y(X) \quad \vartheta_{j,\ell,Y}(X) = \lambda_g(Y) \left( \varphi_Y - \frac{\varphi_Y}{a_j^\ell} \# a_j^{\#\ell} \right) (X)$$

où  $\lambda_g(X) = \mathfrak{m}(X)^2 / \langle \xi \rangle$  désigne le "gain" du calcul. Le Corollaire 3 et les formules (4.4.15) assurent que  $(\pi_{j,\ell,Y})_{Y \in E_j}$  et  $(\vartheta_{j,\ell,Y})_{Y \in E_j}$  sont deux familles de symboles uniformément confinés. Par construction,

$$\varphi_Y^{\mathfrak{w}} = \mathfrak{m}(Y)^{-\ell} \pi_{j,\ell,Y}^{\mathfrak{w}} \circ Z_j^\ell + \lambda_g(Y)^{-1} \vartheta_{j,\ell,Y}^{\mathfrak{w}}.$$

On en déduit pour  $\ell = k$  :

$$\|u\|_{H(\mathfrak{m}^k)}^2 \leq (1 + A) \|u\|_{H^{k/2}(\mathbb{R}^q)}^2 + \sum_{j=1}^r \int_{E_j} \|\pi_{k,\ell,Y}^{\mathfrak{w}}(Z_j^k u)\|_{L^2}^2 + \lambda_g(Y)^{-2} \mathfrak{m}(Y)^{2k} \|\vartheta_{k,\ell,Y} u\|_{L^2}^2 d_g Y.$$

Or  $\lambda_g(Y)^{-1} \leq \frac{1}{A}$  si  $Y \in E_j$ . Ainsi, en choisissant un paramètre  $A$  suffisamment grand, on en déduit :

$$\|u\|_{H(m^k)}^2 \leq C \|u\|_{H^{k/2}(\mathbb{R}^q)}^2 + C \sum_{|\alpha| \leq k} \|\hat{\mathfrak{X}}^\alpha u\|_{L^2}^2.$$

Enfin, comme la famille de champs vérifie uniformément la condition de crochet d'ordre 2, le terme  $\|u\|_{H^{k/2}}^2$  est contrôlé par la norme  $L^2$  des  $\mathfrak{X}$ -dérivées de  $u$ . D'où le résultat annoncé. ■

### 4.5 Exemple fondamental : le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^d$

Avant d'aller plus loin, on peut illustrer les définitions précédentes sur un exemple concret, le plus simple des groupes de Carnot, celui de Heisenberg (voir [1] ou [30]).

Le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^d$  peut être identifié à son algèbre de Lie  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  grâce à des coordonnées exponentielles  $x = (p, q; t)$ . La structure de groupe est non commutative :

$$(p, q; t) \cdot (p', q'; t') = (p + p', q + q'; t + t' - 2(q \cdot p' - p \cdot q')).$$

La mesure de Haar est la mesure de Lebesgue induite par  $\mathbb{R}^{2d+1}$  et sera donc notée encore  $dx$ .

Les champs :

$$\hat{\mathfrak{X}} : \begin{cases} X_i = \partial_{p_i} + 2q_i \partial_t \\ Y_i = \partial_{q_i} - 2p_i \partial_t \end{cases} \quad (1 \leq i \leq d) \tag{4.5.1}$$

sont invariants à gauche. On vérifie immédiatement que  $\partial_t = \frac{1}{4}[Y_i, X_i]$ .

#### 4.5.1 Structure de dérivation naturelle sur le groupe de Heisenberg

La propriété suivante fait le lien avec les espaces de Sobolev "abstraites" du paragraphe §4.2.

**Proposition 8** *Le  $C^\infty$ -module engendré par les champs de vecteurs qui annulent la 1-forme canonique*

$$\kappa = dt + 2(pdq - qdp) \tag{4.5.2}$$

*est une structure de dérivation sur  $\mathbb{H}^d$ . La famille  $\hat{\mathfrak{X}}$  définie par (4.5.1) est une base.*

Sur le groupe de Heisenberg, la notation  $\mathfrak{X}$  désigne systématiquement cette structure de dérivation.

La structure  $\hat{\mathfrak{X}}$  vérifie uniformément la condition de crochet de rang 2. On a en effet :

$$\sum_{T \in \hat{\mathfrak{X}} \cup [\hat{\mathfrak{X}}, \hat{\mathfrak{X}}]} |T(x) \cdot \xi|^2 \geq \frac{1}{2}(\xi_p^2 + \xi_q^2) + 2(2 + p^2 + q^2)\xi_t^2 \geq C|\xi|^2$$

pour tout  $x = (p, q; t)$  dans  $\mathbb{H}^d$  et  $\xi = (\xi_p, \xi_q; \xi_t)$  dans  $T_x^* \mathbb{H}^d$ .

#### 4.5.2 Distance de Carnot

La distance de Carnot associée à  $\hat{\mathfrak{X}}$  est notée  $\mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(x, y)$ . Elle est invariante à gauche et uniformément équivalente à la distance de gauge  $\|x^{-1} \cdot y\|_g$  où

$$\|(p, q; t)\|_g = \sqrt[4]{(p^2 + q^2)^2 + t^2}. \tag{4.5.3}$$

On peut calculer explicitement les géodésiques lorsque  $d = 1$  (voir [15, §4]).

### 4.5.3 Espaces de Sobolev

On démontrera ultérieurement (voir le Théorème 13 p.112) que les espaces de Sobolev  $H^s(\mathbb{H}^d)$  définis par interpolation complexe ou par le calcul de Weyl ont une norme équivalente à :

$$\|u\|_{H^{k+\sigma}(\mathbb{H}^d)}^2 = \|u\|_{H^k(\mathbb{H}^d)}^2 + \sum_{|\alpha|=k} \iint_{\Delta_0} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}^\alpha u(x) - \hat{\mathfrak{X}}^\alpha u(y)|^2}{\mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(x,y)^{Q+2\sigma}} dx dy \quad (4.5.4)$$

avec  $(k, \sigma) \in \mathbb{N} \times ]0; 1[$ . L'entier  $Q = 2d + 2$  est la dimension homogène. Dans cette formule, on note

$$\Delta_0 = \{(x, y); \mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(x, y) \leq c_0\}$$

et le choix d'une autre constante  $c_0 \in ]0, +\infty[$  conduit simplement à une norme équivalente.

Rappelons aussi que la théorie de Littlewood-Paley a été généralisée au groupe de Heisenberg par H. Bahouri, P. Gerard et C.J. Xu (voir [7] et [6]).

## 4.6 Principaux résultats

Le chapitre 5 est consacré à l'étude d'un problème élémentaire, celui des espaces de Sobolev définis en variable de Fourier par un poids anisotrope. Bien qu'élémentaire, ce modèle est assez représentatif des idées que nous utiliserons dans le cas général.

Au chapitre 6, on considère une famille de champs vérifiant uniformément la condition de crochet d'ordre 2. On démontre alors que les espaces de Sobolev d'ordre fractionnaires définis par l'analyse fonctionnelle abstraite peuvent être caractérisés par la distance de Carnot. Un exemple d'application est la formule (4.5.4) précédente. Ce résultat est le fruit d'une collaboration avec Sami Mustapha (voir [27]). Le théorème repose à la fois sur une analyse microlocale précise des opérateurs de translation et sur des estimations classiques du noyau de la chaleur associé au Laplacien sous-elliptique.

Le chapitre 7 est centré sur l'inégalité de Hardy et ses applications à l'éclatement des espaces de Sobolev de faible régularité. L'inégalité de Hardy sous-riemannienne peut être démontrée dans un contexte très général, par exemple seulement sous l'hypothèse de Hörmander d'ordre 2 ou 3 et sur certains exemples d'ordre arbitraire. Pour des raisons techniques, le théorème d'éclatement nécessite une inégalité plus forte, translatée dans l'échelle de régularité, et qui semble beaucoup plus difficile à démontrer. Ainsi, on ne sait démontrer le résultat d'éclatement pour toutes les régularités fractionnaires naturelles (*i.e.* pour  $s < Q/2$  où  $Q$  est la dimension homogène) que dans le cadre du groupe de Heisenberg. Dans les autres cas, on doit imposer des restrictions plus sévères sur  $s$  comme, par exemple, être inférieur au plus grand entier minorant strictement  $Q/2$ .

Au chapitre 8, on envisage le problème de la restriction d'une fonction  $H^s(\mathbb{H}^d)$  à une hypersurface  $\Sigma$  du groupe de Heisenberg. La restriction peut en effet développer des singularités aux points caractéristiques, c'est-à-dire lorsque  $\Sigma$  est parallèle au noyau de la 1-forme canonique (4.5.2). En supposant que la surface  $\Sigma$  vérifie une certaine hypothèse géométrique générique, on peut mettre en oeuvre une technique d'éclatement autour des points caractéristiques. On obtient alors l'existence de traces pour tout  $s > 1/2$ , ainsi qu'un théorème de relèvement. Lorsque l'indice de régularité est inférieur à 1, l'espace de traces n'est pas contenu dans  $L_{loc}^2(\Sigma)$ .

Le chapitre 9 contient enfin quelques illustrations produites par un petit programme informatique personnel. Ce programme n'a guère plus d'ambition que d'être un « jeu éducatif » : il simule le déplacement d'un mobile sous-riemannien dans  $\mathbb{R}^4$ , permettant ainsi d'expérimenter la difficulté à joindre deux points par des déplacements  $\mathfrak{X}$ -horizontaux.



## Chapitre 5

# Etude d'un problème modèle

L'objet de ce chapitre est d'exposer l'essentiel des idées qui seront développées dans les chapitres suivants, tout en s'affranchissant des difficultés techniques inhérentes aux familles de champs de vecteurs.

Les espaces de Sobolev construits avec des champs de vecteurs expriment une régularité microlocale anisotrope : les notations étant celles du paragraphe §4.1, les fonctions de  $H^s(\mathcal{X})$  sont, en effet, microlocalement de classe  $H_{x,\xi}^{s/k}$  lorsque  $\xi \in \mathcal{V}_k(x)$ . La difficulté majeure est que le champ de surfaces  $\mathcal{V}_k$  n'est, par hypothèse, pas intégrable et ne peut donc pas être réalisé comme l'espace tangent à une sous-variété de  $\mathbb{R}^q$  de dimension  $r_k$ . Ce défaut de platitude rend nécessaire l'utilisation de techniques "avancées" comme le calcul fonctionnel des opérateurs sous-elliptiques, ou le calcul symbolique de Weyl-Hörmander.

Dans ce chapitre, on considère des espaces fonctionnels exprimant une régularité anisotrope invariante par translation euclidienne, ce qui permet d'utiliser seulement l'analyse de Fourier "classique" sur  $\mathbb{R}^q$ .

### 5.1 Espaces de Sobolev anisotropes, invariants par translation

Soient  $1 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_q$  des nombres réels. Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^q$ , on pose :

$$m(\xi) = 1 + \sum_{j=1}^q |\xi_j|^{1/\omega_j}. \quad (5.1.1)$$

**Définition** – Pour  $s \geq 0$ , l'espace  $H(m^s)$  est l'espace constitué des fonctions  $u \in L^2(\mathbb{R}^q)$  telles que :

$$\|u\|_{H(m^s)}^2 = \int_{\mathbb{R}^q} m(\xi)^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty. \quad (5.1.2)$$

C'est un espace de Hilbert séparable contenu dans l'espace usuel  $H^{s/\omega_q}(\mathbb{R}^q)$ .

**Remarques**

1. Par exemple, lorsque  $\omega_1 = \dots = \omega_q = 1$ , on retrouve l'espace usuel  $H^s(\mathbb{R}^q)$ .
2. La régularité microlocale d'une fonction  $u \in H(m^s)$  est  $H_{x,\xi}^{s/\omega_k}$  lorsque

$$\xi \in \mathcal{V}_k = \{\eta \in \mathbb{R}^q; \eta_1 = \dots = \eta_{k-1} = 0 \text{ et } \eta_k \neq 0\}. \quad (5.1.3)$$

Cette propriété ne coïncide pas avec la zone où la  $k^{\text{ème}}$  composante est dominante :

$$E_k = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^q ; |\xi_k|^{1/\omega_k} \geq \sum_{j \neq k} |\xi_j|^{1/\omega_j} \right\}.$$

Cependant,  $\mathcal{V}_k$  est la direction asymptotique de  $E_k$  car :

$$\mathcal{V}_k = \{ \xi \in \mathbb{R}^q ; \exists R_0 > 0, \forall R \geq R_0 \Rightarrow R\xi \in E_k \}.$$

Cette discussion est illustrée sur la Figure 5.1 en dimension 2 et 3. Dans ce dernier cas, on remarque en particulier que  $E_1$  et  $E_3$  ont une frontière commune ; ce phénomène est en partie responsable des difficultés techniques qui apparaissent lorsqu'on cherche à développer un calcul symbolique avec des champs vérifiant la condition de crochet d'ordre 3 ou plus (voir aussi la Proposition 24 p.130 et les remarques qui suivent).  $\diamond$

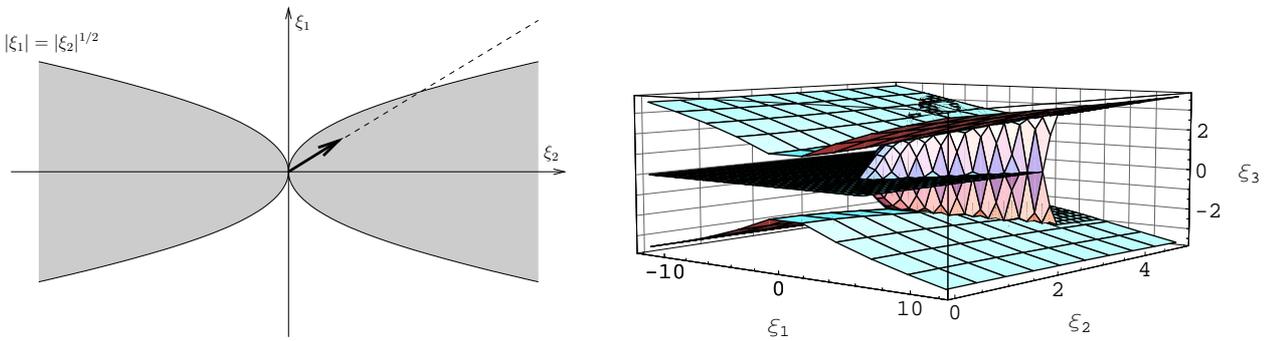


FIG. 5.1 – Zone sous-elliptique et régularité microlocale.

## 5.2 Exemples d'applications

Considérons par exemple le problème élémentaire suivant : déterminer la régularité de la solution causale (*i.e.* nulle si  $t < 0$ ) de l'équation de la chaleur

$$(\partial_t - \Delta)u = f \tag{5.2.1}$$

lorsque  $f \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^q)$  est connue et supportée dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^q$ . On dispose bien sûr d'une solution explicite :

$$|\hat{u}(t, \xi)|^2 \leq \left( \int_0^t e^{-2t'|\xi|^2} dt' \right) \|f\|_{L^2([0,t] \times \mathbb{R}^q)}^2 \leq C \min\{t, |\xi|^{-2}\} \|f\|_{L^2([0,t] \times \mathbb{R}^q)}^2,$$

donc  $\|u(t)\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^q)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^q)}$ .

La vraie question est donc de retrouver ce résultat sans utiliser la formule de Duhamel. On réalise la transformation de Fourier en variables  $(t, x) \in \mathbb{R}^{q+1}$  et on note  $(\tau, \xi)$  les variables duales. Par hypothèse,

$$(i\tau + |\xi|^2) \hat{u}(\tau, \xi) \in L^2(\mathbb{R}^{q+1})$$

donc  $u \in H(\mathfrak{m}^2)$  où  $\mathfrak{m}(\tau, \xi)^4 = \tau^2 + |\xi|^4$ . D'autre part,  $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2)$  donc

$$u(t, x) \chi(t) \in H(\mathfrak{m}^2)$$

avec le poids inhomogène  $m^4 = 1 + \dot{m}^4$  et  $\chi$  une fonction de classe  $C^\infty$  à support compact, égale à 1 sur  $[0, T]$ . On conclut alors en appliquant un théorème de traces :

$$\text{Tr}_{\{t=\text{Cte}\}} (H(m^2)) = H^1(\mathbb{R}^q)$$

qui sera démontré ci-dessous (voir Théorème 12).

Les espaces  $H(m^s)$  apparaissent aussi dans l'étude d'opérateurs d'ordre anisotrope. Par exemple, le problème elliptique :

$$\begin{cases} \left( \text{Id} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) u = f, \\ f \in L^2(\mathbb{R}^2) \end{cases} \quad (5.2.2)$$

admet une solution unique  $u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\xi)/(1 + \xi_1^2 + \xi_2^4))$  qui est de classe  $H(1 + \xi_1^2 + \xi_2^4)$ . Si on considère le problème de Dirichlet sur un domaine borné régulier, avec l'opérateur  $\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^4$ , la question des traces devient essentielle puisque sa réponse détermine les conditions aux limites admissibles.

Le problème parabolique correspondant est l'équation d'évolution :

$$\left( \partial_t - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) u = f \quad (5.2.3)$$

dont la solution est donnée par  $u(t) = \int_0^t e^{(t-t')(\partial_1^2 - \partial_2^4)} f(t') dt'$ . Si  $f \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ , on vérifie facilement que  $u(t) \in H((1 + \xi_1^2 + \xi_2^4)^{1/2})$  pour tout  $t > 0$ .

### 5.3 Propriété d'intégrabilité du taux d'accroissement

Lorsque  $0 < s < 1$ , l'espace  $H^s(\mathbb{R}^q)$  décrit une régularité fractionnaire qu'il est possible de caractériser par une estimation intégrale du taux d'accroissement. Dans le cas général, on introduit la distance anisotrope suivante :

$$\delta(x, y) = \sum_{j=1}^q |x_j - y_j|^{1/\omega_j} \quad (5.3.1)$$

et on note  $Q = \sum \omega_j$  la dimension homogène correspondante. Pour  $\lambda > 0$ , le déterminant jacobien de la dilatation anisotrope :

$$(x_1, \dots, x_q) \mapsto (\lambda^{\omega_1} x_1, \dots, \lambda^{\omega_q} x_q)$$

est  $\lambda^Q$ .

**Théorème 9** Pour tout  $s \in ]0, 1[$ , il existe une constante  $C_s$  telle que :

$$C_s^{-1} \|u\|_{H(m^s)}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 + \iint_{\mathbb{R}^{2q}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{\delta(x, y)^{Q+2s}} dx dy \leq C_s \|u\|_{H(m^s)}^2. \quad (5.3.2)$$

**Preuve** Le contrôle de la norme  $L^2$  étant immédiat, il suffit de démontrer seulement l'inégalité homogène. On commence par utiliser l'invariance par translation. Le changement de variable  $x = y + h$  donne :

$$\iint_{\mathbb{R}^{2q}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{\delta(x, y)^{Q+2s}} dx dy = \int_{\mathbb{R}^q} \frac{\|(T_h^* - \text{Id})u\|_{L^2}^2}{(\sum |h_j|^{1/\omega_j})^{Q+2s}} dh$$

avec  $T_h^* v(x) = v(x + h)$ . L'identité de Parseval et le théorème de Fubini entraînent alors :

$$\int_{\mathbb{R}^q} \frac{\|(T_h^* - \text{Id})u\|_{L^2}^2}{(\sum |h_j|^{1/\omega_j})^{Q+2s}} dh = \int_{\mathbb{R}^q} \mu(\xi) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

où  $\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}^q} |e^{ih \cdot \xi} - 1|^2 (\sum |h_j|^{1/\omega_j})^{-Q-2s} dh$ . Grâce à l'homogénéité de  $\delta(0, h)$ , on a :

$$\forall \lambda > 0, \quad \mu(\xi) = \lambda^{2s} \mu\left(\frac{\xi_1}{\lambda^{\omega_1}}, \dots, \frac{\xi_q}{\lambda^{\omega_q}}\right).$$

Enfin, on remarque que  $\mu$  est une fonction régulière vérifiant :

$$0 < \mu(\xi) \leq 4\omega_1 \cdots \omega_q \left( |\xi|^2 \sum \int_0^1 |\vartheta_j|^{2\omega_j} \frac{d\vartheta}{|\vartheta|^{q+2s}} + \int_1^\infty \frac{d\vartheta}{|\vartheta|^{q+2s}} \right) \leq C \langle \xi \rangle^2$$

avec  $C < +\infty$  puisque  $s < 1 \leq \omega_j$ . En particulier,  $\mu$  est bornée supérieurement et inférieurement sur le compact :

$$\left\{ \xi \in \mathbb{R}^q ; \sum |\xi_j|^{1/\omega_j} = 1 \right\}.$$

L'identité d'homogénéité appliquée avec  $\lambda = \sum |\xi_j|^{1/\omega_j}$  donne alors le résultat. ■

**Remarque** - Le Théorème 9 sera étendu au chapitre 6. L'invariance par translation et l'homogénéité de la distance dicteront alors le choix d'un système de coordonnées convenables (voir §6.3). ◇

### 5.4 Inclusion dans $L^p$

Le deuxième résultat fondamental de la théorie classique des espaces de Sobolev est l'inclusion :

$$H^s(\mathbb{R}^q) \subset L^p \quad \text{si} \quad \frac{q}{p} = \frac{q}{2} - s > 0. \tag{5.4.1}$$

Ce résultat se généralise à condition d'utiliser la dimension homogène  $Q = \sum \omega_j$ .

**Théorème 10** Soient  $s$  un réel positif et  $p \geq 2$  tels que

$$\frac{Q}{p} = \frac{Q}{2} - s > 0. \tag{5.4.2}$$

Alors  $H(\mathfrak{m}^s) \subset L^p(\mathbb{R}^q)$  et l'inclusion est un opérateur continu.

**Preuve** A nouveau, il suffit de démontrer l'inégalité homogène. On suppose que  $\|u\|_{H(\mathfrak{m}^s)} = 1$  avec  $\mathfrak{m} = \sum |\xi_j|^{1/\omega_j}$ . Le théorème de Fubini permet d'écrire la norme  $L^p$  sous la forme :

$$\|u\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^q ; |u(x)| > \lambda\}| d\lambda$$

où  $|E|$  désigne la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^q$ . On pose :

$$u = \underline{u}_\lambda + \bar{u}_\lambda \quad \text{avec} \quad \underline{u}_\lambda = \mathcal{F}^{-1} (\mathbb{1}_{\mathfrak{m}(\xi) \leq A_\lambda} \hat{u}(\xi))$$

et  $A_\lambda > 0$  un paramètre fixé ultérieurement et  $\mathcal{F}$  la transformée de Fourier. Comme  $\|u\|_{H(\dot{m}^s)} = 1$ , on contrôle uniformément  $\underline{u}_\lambda$  :

$$\|\underline{u}_\lambda\|_{L^\infty}^2 = \left| \int_{\mathbb{R}^q} \hat{u}_\lambda(\xi) d\xi \right|^2 \leq \int_{\dot{m} \leq A_\lambda} \frac{d\xi}{\dot{m}(\xi)^{2s}}.$$

On choisit  $A_\lambda$  de manière à avoir :

$$\int_{\dot{m} \leq A_\lambda} \frac{d\xi}{\dot{m}(\xi)^{2s}} = \frac{\lambda^2}{4}. \quad (5.4.3)$$

En effet, la mesure de la boule  $\{\dot{m}(\xi) \leq \rho\}$  est comparable à  $\rho^Q$  donc la mesure de surface de la sphère vérifie :

$$c\rho^{Q-1} \leq |\{\dot{m}(\xi) = \rho\}| \leq C\rho^{Q-1}.$$

On en déduit immédiatement que  $\int_{\dot{m} \leq A_\lambda} \frac{d\xi}{\dot{m}(\xi)^{2s}} \simeq \int_0^{A_\lambda} \rho^{Q-2s} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{A_\lambda^{Q-2s}}{Q-2s}$ . Alors, en utilisant

l'estimation de Tchebychev  $|\{f > \mu\}| \leq \mu^{-2} \|f\|_{L^2}^2$  :

$$\|u\|_{L^p}^p \leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^q; |\bar{u}_\lambda(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| d\lambda \leq 4p \int_0^\infty \lambda^{p-3} \|\bar{u}_\lambda\|_{L^2}^2 d\lambda.$$

La formule de Parseval et le théorème de Fubini donnent enfin :

$$\|u\|_{L^p}^p \leq 4p \int_{\mathbb{R}^q} \left( \int_0^\infty \lambda^{p-3} \mathbb{1}_{\dot{m}(\xi) > A_\lambda} d\lambda \right) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

On conclut en utilisant que  $(\frac{Q}{2} - s)(p - 2) = 2s$  et l'inégalité  $A_\lambda^{Q-2s} \geq C\lambda^2$ . ■

Les inclusions dans *BMO* pour  $s = Q/2$  et les classes de Hölder associées à la distance anisotrope  $\delta(x, y)$  si  $s > Q/2$  se généralisent sans surprise (voir [17] pour une généralisation incluant les espaces du calcul de Weyl) mais nous n'en aurons pas besoin dans la suite de cette étude. Il en est de même pour la compacité de l'inclusion  $H(m^s) \subset H(m^{s'})$  si  $s > s'$  et si les fonctions sont à support dans un compact fixe.

## 5.5 Théorie des traces

On cherche ensuite à définir une extension convenable de la notion de « restriction à une hypersurface ».

Le résultat classique (voir [29]) est que la trace sur une sous-variété  $\Sigma$  de codimension 1 des fonctions appartenant à  $H^s(\mathbb{R}^q)$  est bien définie si  $s > 1/2$ . Dans ce cas, la régularité de la restriction est  $H^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ . A l'inverse, il existe des fonctions dans  $H^{1/2}(\mathbb{R}^q)$  qui ne sont pas bornées le long d'un hyperplan. On a cependant le résultat suivant valable même pour  $s$  négatif.

**Proposition 11** Soient  $s \leq \frac{1}{2}$  et  $\varepsilon > 0$ . On considère un point  $x_0 \in \Sigma$  et un vecteur  $\nu \in T_{x_0} \mathbb{R}^q$  normal à  $\Sigma$  en  $x_0$  (i.e.  $\nu \cdot \xi = 0$  pour tout  $\xi \in T_{x_0} \Sigma$ ). Alors toute fonction  $u \in H^s(\mathbb{R}^q)$  microlocalement  $H_{(x_0, \nu)}^{1/2+\varepsilon}$  admet une restriction à  $\Sigma$  de classe  $H^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ .

**Preuve** On pose  $\xi = (\xi_\nu, \xi')$  des coordonnées dont la première direction est  $\nu$ . On note  $\mathcal{F}_{\xi_\nu}$  et  $\mathcal{F}_{\xi'}$  les transformées de Fourier partielles et  $\hat{u} = \mathcal{F}_{\xi_\nu} \circ \mathcal{F}_{\xi'}(u)$  la transformée de Fourier complète. Par hypothèse, il existe un voisinage conique  $\Gamma_\nu$  de  $\nu$  tel que

$$M(\xi) \widehat{\chi u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^q) \quad \text{avec} \quad M(\xi) = \begin{cases} \langle \xi \rangle^{\frac{1}{2} + \varepsilon} & \text{si } \xi \in \Gamma_\nu \\ \langle \xi \rangle^s & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $\chi$  une fonction de troncature au voisinage de  $x_0$ . On a donc :

$$\mathcal{F}_{\xi'}((\chi u)|_\Sigma)(\xi') = \mathcal{F}_{\xi_\nu}^{-1}(\widehat{\chi u}(\cdot, \xi'))(0) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\chi u}(\xi_\nu, \xi') d\xi_\nu.$$

On en déduit l'estimation ponctuelle :

$$\left| \mathcal{F}_{\xi'}((\chi u)|_\Sigma)(\xi') \right| \leq C \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_\nu}{M(\xi_\nu, \xi')^2} \right)^{1/2} \|M(\xi) \widehat{\chi u}(\xi)\|_{L^2(d\xi_\nu)}.$$

La constante se calcule facilement :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_\nu}{M(\xi_\nu, \xi')^2} = \int_0^{A|\xi'|} \frac{d\xi_\nu}{(|\xi_\nu| + \langle \xi' \rangle)^{2s}} + \int_{A|\xi'|}^\infty \frac{d\xi_\nu}{(|\xi_\nu| + \langle \xi' \rangle)^{1+2\varepsilon}} \leq C \left( \langle \xi' \rangle^{1-2s} + \langle \xi' \rangle^{-2\varepsilon} \right).$$

Comme  $s \leq 1/2$  et  $\varepsilon > 0$ , le dernier terme est équivalent à  $\langle \xi' \rangle^{1-2s}$ . ■

Le problème de la description des traces appelle la définition suivante.

**Définition** – Soit  $\Sigma$  une sous-variété de codimension 1 de  $\mathbb{R}^q$  ; on dit que l'espace  $H(\mathfrak{m}^s)$  admet des traces sur  $\Sigma$  s'il existe un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  tel que :

1. L'application naturelle de restriction à  $\Sigma$  se prolonge en un opérateur borné :

$$\text{Tr}_\Sigma : H(\mathfrak{m}^s) \rightarrow \mathcal{H}.$$

2. Il existe un opérateur borné  $J : \mathcal{H} \rightarrow H(\mathfrak{m}^s)$  tel que  $\text{Tr}_\Sigma \circ J = \text{Id}_\Sigma$ .

Dans ce cas on note  $\mathcal{H} = \text{Tr}_\Sigma(H(\mathfrak{m}^s))$ . On dit que  $J$  est un opérateur de relèvement.

### 5.5.1 Exemples de traces sur un hyperplan affine

Le cas le plus proche de la théorie classique est celui où  $\Sigma$  est un hyperplan affine parallèle aux axes.

**Théorème 12** Soit  $\Sigma$  un hyperplan affine de  $\mathbb{R}^q$  ( $q \geq 2$ ) d'équation  $x_k = c$ . L'espace  $H(\mathfrak{m}^s)$  a des traces si  $s > \omega_k/2$ . De plus, on a :

$$\text{Tr}_\Sigma(H(\mathfrak{m}^s)) = H(m^{s - \frac{\omega_k}{2}}) \tag{5.5.1}$$

avec  $m(\xi') = 1 + \sum_{j \neq k} |\xi'_j|^{1/\omega_j}$  et  $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_q)$ .

**Remarque** - La direction normale à  $\Sigma$  est  $\partial_{x_k} \in \mathcal{V}_k$  (voir (5.1.3)). ◇

**Preuve** On note  $\mathcal{F}_{\xi_k}$  et  $\mathcal{F}_{\xi'}$  les transformées de Fourier partielles et  $\hat{u} = \mathcal{F}_{\xi_k} \circ \mathcal{F}_{\xi'}(u)$  la transformée de Fourier complète. Pour  $u$  régulière et  $v = u|_{\Sigma}$ , on a donc :

$$\mathcal{F}_{\xi'} v(\xi') = \mathcal{F}_{\xi_k}^{-1}(\hat{u}(\cdot, \xi'))(0) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) d\xi_k.$$

Par Cauchy-Schwartz, on en déduit :

$$|\mathcal{F}_{\xi'} v(\xi')| \leq C \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_k}{m^{2s}(\xi)} \right)^{1/2} \|m^s(\xi) \hat{u}(\xi)\|_{L^2(d\xi_k)}$$

donc  $\mu \mathcal{F}_{\xi'} v \in L^2(\Sigma)$  avec :

$$\mu(\xi') = \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_k}{m^{2s}(\xi)} \right)^{-1/2} = C \left( 1 + \sum_{j \neq k} |\xi_j|^{1/\omega_j} \right)^{s - \frac{\omega_k}{2}} = C m^{s - \frac{\omega_k}{2}}$$

le calcul étant valable si  $s > \omega_k/2$ .

Un opérateur de relèvement est donné par la formule :

$$Jv(x) = \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}(\chi(x_k m(\xi')^{\omega_k}) \mathcal{F}_{\xi'} v)(x')$$

avec  $\chi$  une fonction  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , égale à 1 à l'origine et dont la transformée de Fourier est à support compact. On vérifie immédiatement sa continuité en remarquant que :

$$\widehat{Jv}(\xi) = C m(\xi')^{-\omega_k} \hat{\chi}(\xi_k/m(\xi')^{\omega_k}) (\mathcal{F}_{\xi'} v)$$

$$\text{donc } \|Jv\|_{H(m^s)}^2 \leq C \int m(\xi')^{2s - \omega_k} |\mathcal{F}_{\xi'} v|^2 d\xi' \leq C \|v\|_{H(m^{s - \omega_k/2})}^2. \quad \blacksquare$$

## 5.5.2 Problème géométrique associé aux traces sur une sous-variété

La théorie générale des traces sur une sous-variété de codimension 1 est difficile. En effet, la normale à la surface peut ne pas appartenir au même ensemble  $\mathcal{V}_k$  le long de  $\Sigma$ , ce qui modifie radicalement la nature de l'espace de traces. Ce problème apparaît par exemple systématiquement si la surface est le bord d'un domaine borné régulier, par exemple la boule unité.

Plus précisément, on dit qu'un point  $x_0 \in \Sigma$  est caractéristique si  $\nu(x_0) \in \mathcal{V}_k$  mais il existe des points arbitrairement proches tels que  $\nu(x) \in \mathcal{V}_\ell$  avec  $\ell < k$ . En termes naïfs, la surface cesse d'être transverse à une direction de plus haute régularité microlocale. La singularité qui apparaît au voisinage d'un point caractéristique dépend de l'ordre du contact entre  $\Sigma$  et les surfaces de régularité.

L'exemple le plus simple est celui de  $\mathbb{R}^2$  avec le poids  $m = (1 + |\xi_1|^4 + |\xi_2|^2)^{1/4}$  et la surface  $\Sigma$  d'équation  $x_1^2 - x_2 = 0$ . L'origine est un point caractéristique. Le Théorème 12 indique que, le long de  $\Sigma$ , la régularité microlocale d'une fonction  $u \in H(m^s)$  est

$$\begin{cases} \frac{s}{2} - \frac{1}{4} & \text{si } x \neq 0, \\ s - 1 & \text{à l'origine.} \end{cases}$$

Le premier cas exige  $s > 1/2$  et le second n'est démontré que pour  $s > 1$ . Lorsque  $1/2 < s \leq 1$ , la trace sur  $\Sigma$  des fonctions de  $H(m^s)$  est bien définie dans  $L_{\text{loc}}^2(\Sigma \setminus \{0\})$  mais peut présenter une singularité à l'origine.

Sur la couronne  $\mathcal{C}_0 = \{c_0 < |x_1| < c_1\}$ , les Théorèmes 12 et 9 donnent pour  $1/2 < s < 1$  :

$$\iint_{\mathcal{C}_0^2} \frac{|v(x_1) - v(x'_1)|^2}{|x_1 - x'_1|^{1+(s-\frac{1}{2})}} \leq C \iint_{\mathcal{C}_0^2} \frac{|u(x) - u(x')|^2}{\delta(x, x')^{3+2s}} + C \int_{\mathcal{C}_0} |u(x)|^2$$

en notant  $v(x_1) = u(x_1, x'_1)$  la restriction à  $\Sigma$  et  $\delta(x, x') = |x_1 - x'_1| + |x_2 - x'_2|^{1/2}$ . Par dilatation anisotrope  $(x_1, x_2) \mapsto (\lambda^{-1}x_1, \lambda^{-2}x_2)$ , on en déduit l'estimation suivante :

$$\iint_{\mathcal{C}_\lambda^2} \frac{|v(x_1) - v(x'_1)|^2}{|x_1 - x'_1|^{1+(s-\frac{1}{2})}} \leq C \lambda^{\frac{3}{2}-s} \iint_{\mathcal{C}_\lambda^2} \frac{|u(x) - u(x')|^2}{\delta(x, x')^{3+2s}} + C \lambda^{\frac{3}{2}+s} \int_{\mathcal{C}_\lambda} |u(x)|^2$$

avec  $\mathcal{C}_\lambda = \lambda^{-1}\mathcal{C}_0$ . On peut donc décrire les traces de  $H(\mathfrak{m}^s)$  par :

$$\sum_{\lambda \in 2^{\mathbb{N}}} \lambda^{s-\frac{3}{2}} \iint_{\mathcal{C}_\lambda^2} \frac{|v(x_1) - v(x'_1)|^2}{|x_1 - x'_1|^{s+\frac{1}{2}}} dx_1 dx'_1 \leq C \|u\|_{H(\mathfrak{m}^s)}^2 + C \int \frac{|u(x)|^2}{\delta(x, 0)^{2s}} dx. \quad (5.5.2)$$

Le contrôle du dernier terme nécessite une inégalité de Hardy anisotrope :

$$\forall s < 3/2, \quad \int \frac{|u(x)|^2}{\delta(x, 0)^{2s}} dx \leq C_s \|u\|_{H(\mathfrak{m}^s)}^2. \quad (5.5.3)$$

L'entier 3 qui borne  $2s$  est la dimension homogène associée à la distance  $\delta$ . L'étude de cette inégalité et de ces généralisations aux familles de champs de vecteurs fait l'objet du Chapitre 7.

Il est important de remarquer que, dans cet exemple, le changement d'échelle anisotrope adapté à l'espace de Sobolev laisse aussi la surface de trace invariante. Cette méthode se généralise à des surfaces  $\Sigma$  d'équation  $g(x_1, x_2) = 0$  pourvu que  $\partial_{x_1}^2 g \neq 0$  en chaque point caractéristique. Cette technique sera développée au chapitre 8 pour décrire les traces des espaces de Sobolev sur le groupe de Heisenberg, avec une hypothèse analogue pour le contact champs-surface.

## Chapitre 6

# Réalisation des espaces de Sobolev d'indice fractionnaire

Dans son cours sur les espaces fonctionnels, H. Triebel [31] décrit la construction d'espaces d'ordre fractionnaire au dessus d'une variété riemannienne ou d'un groupe de Lie et en donne une caractérisation intrinsèque au moyen d'estimations intégrales sur des opérateurs de translation. Cependant, ces espaces sont essentiellement de nature "isotrope" puisque le nombre de dérivations localement indépendantes est, en tout point, maximal.

L'objectif de ce chapitre est de donner une description "effective et calculable" des espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire, lorsque les dérivations sont associées à une famille de champs de vecteurs vérifiant la condition de Hörmander de rang 2.

Etant donné que la régularité est un problème de nature locale, on ne s'intéresse pas ici aux éventuels problèmes qui pourraient apparaître à l'infini ou être induits par la présence d'un bord. Le lecteur intéressé plutôt par les questions globales pourra éventuellement consulter le chapitre 8 (en particulier, la remarque p.162), mais ce problème est essentiellement ouvert.

### 6.1 Enoncé principal

Soit  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m)$  une famille de champs de vecteurs réguliers sur un ouvert connexe  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^q$ , de rang constant  $r$ . On suppose que tout champ de vecteur  $\mathcal{X}$  peut se décomposer (mais pas nécessairement de façon unique) :

$$\mathcal{X} = \sum \alpha_j \mathcal{X}_j + \sum \beta_{k,l} [\mathcal{X}_k, \mathcal{X}_l] \quad (6.1.1)$$

avec des fonctions localement bornées  $\alpha_j, \beta_{k,l}$  sur  $\Omega$ . La distance de Carnot-Carathéodory définie sur  $\Omega$  par (4.3.1) sera notée  $d$ .

Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , on considère l'espace :

$$H_K^1(\mathcal{X}) = \{ u \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \mathcal{X}_j u \in L^2(\Omega) \ (j = 1, \dots, m), \text{ avec } \text{supp } u \subset K \}. \quad (6.1.2)$$

L'analyse fonctionnelle abstraite décrit les espaces intermédiaires entre  $L^2(K)$  et  $H_K^1(\mathcal{X})$  :

$$H_K^s(\mathcal{X}) = [L^2(K); H_K^1(\mathcal{X})]_s$$

l'espace et la norme étant définie par interpolation complexe (voir [9]).

**Théorème 13 (avec S. Mustapha [27])** *Pour  $0 < s < 1$  et  $K$  sous-ensemble compact de  $\Omega$ , il existe une constante  $C_{s,K} > 0$  telle que :*

$$C_{s,K}^{-1} \|u\|_{H_K^s(\mathcal{X})}^2 \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \iint_{\substack{\Omega \times \Omega \\ d(x,y) < 1}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{d(x,y)^{2s}} \frac{dx dy}{\text{Vol}(\mathcal{B}_{d(x,y)}^x)} \leq C_{s,K} \|u\|_{H_K^s(\mathcal{X})}^2 \quad (6.1.3)$$

*pour toute fonction mesurable  $u$  supportée dans  $K$ , les trois expressions étant simultanément finies ou infinies.*

Le membre de gauche de (6.1.3) entraîne en particulier :

$$\tilde{C}_{s,K}^{-1} \iint_{|x-y| < 1} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2n+1+s}} dx dy \leq \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \iint_{d(x,y) < 1} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{d(x,y)^{2n+2+2s}} dx dy. \quad (6.1.4)$$

En effet, le théorème de Hörmander appliqué à l'opérateur hypoelliptique  $-\Delta_{\mathcal{X}} = \sum \mathcal{X}_j^* \mathcal{X}_j$  entraîne une inclusion continue  $H_{\text{loc}}^s(\mathcal{X}) \subset H_{\text{loc}}^{s/2}(\mathbb{R}^q)$ .

**Remarque** - Le Théorème 13 peut être vu comme une extension de ceux de [17], à savoir l'inclusion de  $H_{\text{loc}}^s(\mathcal{X})$  dans les espaces de Hölder construits avec la distance de Carnot lorsque  $s > Q/2$ .  $\diamond$

### Idées et structure de la preuve

La démonstration du Théorème 13 met en oeuvre deux approches complémentaires.

Très approximativement, le membre de gauche de (6.1.3) signifie qu'on est capable de contrôler les puissances fractionnaires de  $-\Delta_{\mathcal{X}} = \sum \mathcal{X}_j^* \mathcal{X}_j$  par une expression faisant intervenir des puissances négatives de la distance de Carnot. L'outil approprié est le calcul fonctionnel avec le semi-groupe  $e^{t\Delta_{\mathcal{X}}}$  et plus précisément, l'estimation exponentiellement décroissante du noyau de convolution associé.

La preuve du membre de droite de (6.1.3) s'inspire de celle de l'inégalité (5.3.2), à savoir l'analyse fréquentielle de la différence  $u(y) - u(x)$  vue comme opérateur de translation  $(T_{y-x}^* - \text{Id})u$ . On peut alors faire abstraction des notions de chemins  $\mathcal{X}$ -horizontaux et de géodésiques, en ne retenant que l'idée de "bonnes" ou "mauvaises" directions.

On peut remarquer que, contrairement au cas modèle étudié au chapitre 5, l'anisotropie induite par la distribution de plans  $\mathcal{X}(x) \subset T_x \Omega$  ne peut pas être redressée car (6.1.1) est incompatible avec le théorème de Darboux. L'analyse de Fourier classique doit donc laisser la place à un calcul microlocal convenable.

### Réduction du problème

On peut réduire arbitrairement la taille de support de  $u$  puisque si le résultat est démontré sur deux compacts  $K$  et  $K'$ , il s'étend de manière évidente à  $K \cup K'$ . On peut alors supposer que  $K$  est contenu dans un ouvert de carte.

Le cas  $\Omega = \mathbb{R}^q$  suffit à démontrer le théorème en toute généralité. En effet, étant donnée un sous-ensemble compact  $K \subset \Omega$ , on choisit une fonction régulière  $\chi$  à support compact dans  $\Omega$  et égale à 1 au voisinage de  $K$ . On considère alors la famille de champs

$$\widetilde{\mathcal{X}} = (\chi \mathcal{X}_1, \dots, \chi \mathcal{X}_m, (1 - \chi)\nabla) \text{ sur } \mathbb{R}^q.$$

Elle est de rang constant  $r$  sur  $K$  et vérifie la condition de Hörmander (6.1.1) sur  $\mathbb{R}^q$ . L'augmentation du rang de  $\mathcal{X}$  sur  $\text{supp}(1 - \chi)$  n'est pas un problème car l'hypothèse de rang constant ne servira en fait que sur  $K$ . Par abus mais afin de simplifier les notations, la famille  $\mathcal{X}$  sera notée  $\mathcal{X}$  dans la suite de ce chapitre.

On procède aussi à l'identification naturelle  $T^*\mathbb{R}^q \simeq \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ .

## 6.2 Estimation inférieure de la dérivée faible, via le calcul fonctionnel

Ce paragraphe démontre le membre de gauche de (6.1.3). On utilise le calcul fonctionnel et la théorie du noyau de la chaleur associé au sous-laplacien :

$$\Delta_{\mathcal{X}} = - \sum \mathcal{X}_j^* \mathcal{X}_j = \sum \mathcal{X}_j^2 + (\text{div } \mathcal{X}_j) \mathcal{X}_j. \quad (6.2.1)$$

C'est un opérateur sous-elliptique, symétrique donc fermable sur  $L^2$ . Et comme  $-\Delta_{\mathcal{X}}$  est positif, on peut considérer ses puissances fractionnaires.

Pour  $0 < s < 1$ , l'espace d'interpolation complexe

$$H_K^s(\mathcal{X}) = [L^2(K); H_K^1(\mathcal{X})]_s$$

coïncide avec la complétion de  $\mathcal{D}(K)$  pour la norme

$$\|u\|_{s, \mathcal{X}}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta_{\mathcal{X}})^{s/2} u\|_{L^2}^2. \quad (6.2.2)$$

Les normes  $\|\cdot\|_{s, \mathcal{X}}$  et  $\|\cdot\|_{H^s(\mathcal{X})}$  sont équivalentes.

Avant de détailler les calculs, voici un résumé de l'idée principale. Le semi-groupe  $\{e^{t\Delta_{\mathcal{X}}}\}_{t \geq 0}$  engendré par  $(-\Delta_{\mathcal{X}})$  est holomorphe et contractant sur  $L^2$ . Pour tout  $s \in ]0, 1[$  on a

$$(-\Delta_{\mathcal{X}})^s = -\Delta_{\mathcal{X}} \circ (-\Delta_{\mathcal{X}})^{s-1}$$

avec  $s - 1 < 0$ . D'autre part, le calcul fonctionnel donne :

$$\forall \sigma > 0, \quad \exists c_\sigma > 0, \quad (-\Delta_{\mathcal{X}})^{-\sigma} = c_\sigma \int_0^\infty t^\sigma e^{t\Delta_{\mathcal{X}}} \frac{dt}{t} \quad (6.2.3)$$

donc  $(-\Delta_{\mathcal{X}})^s = -c_{1-s} \int t^{1-s} \Delta_{\mathcal{X}} (e^{t\Delta_{\mathcal{X}}}) \frac{dt}{t}$ . C'est un opérateur à noyau :

$$(-\Delta_{\mathcal{X}})^s u(x) = -c_{1-s} \int_{\mathbb{R}^q} \int_0^\infty t^{1-s} \frac{\partial p_t}{\partial t}(x, y) u(y) \frac{dt}{t} dy$$

avec  $p_t(x, y)$  le noyau de la chaleur défini par :

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = \Delta_{\mathcal{X}} p_t \quad (y \text{ fixé}), \quad \text{et} \quad p_0(x, y) = \delta_0(x - y).$$

L'estimation exponentielle de  $p_t(x, y)$  est déjà connue (voir [23]) et fait intervenir la distance de Carnot-Carathéodory. En calculant convenablement la norme  $L^2$ , on en déduit la partie gauche de (6.1.3).

**Une formule exacte pour**  $\|(-\Delta_{\mathcal{X}})^{s/2}u\|_{L^2}$

Développant l'idée précédente, on calcule la norme  $\|\cdot\|_{s,\mathcal{X}}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \|(-\Delta_{\mathcal{X}})^{s/2}u\|_{L^2}^2 &= ((-\Delta_{\mathcal{X}})^2 \circ (-\Delta_{\mathcal{X}})^{s-2}u | u)_{L^2} \\ &= c'_s \left( (-\Delta_{\mathcal{X}})^2 \left( \int_0^\infty t^{2-s} e^{2t\Delta_{\mathcal{X}}} \frac{dt}{t} \right) u | u \right)_{L^2} \end{aligned}$$

avec  $c'_s = 2^{2-s}c_{2-s}$ . Comme  $\Delta_{\mathcal{X}}$  commute à l'opérateur  $e^{t\Delta_{\mathcal{X}}}$ , on a :

$$\|(-\Delta_{\mathcal{X}})^{s/2}u\|_{L^2}^2 = c'_s \int_0^\infty t^{2-s} \|\Delta_{\mathcal{X}}(e^{t\Delta_{\mathcal{X}}}u)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{t}.$$

On distingue alors la dynamique en temps court du régime asymptotique  $t \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c'_s} \|(-\Delta_{\mathcal{X}})^{s/2}u\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^q} \int_0^1 t^{2-s} \left| \frac{\partial}{\partial t}(e^{t\Delta_{\mathcal{X}}}u)(x) \right|^2 \frac{dt}{t} dx \\ &\quad + \int_1^\infty t^{2-s} \|\Delta_{\mathcal{X}}(e^{t\Delta_{\mathcal{X}}}u)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{t}. \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

### Décroissance en temps grand

Comme  $e^{t\Delta_{\mathcal{X}}}$  est un semi-groupe holomorphe, on a (voir [18, Lemme 2.38]) :

$$\|\Delta_{\mathcal{X}}(e^{t\Delta_{\mathcal{X}}})\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \frac{C}{t}. \tag{6.2.5}$$

En particulier, l'intégrale correspondant à  $t \geq 1$  dans (6.2.4) est bornée par  $\frac{C}{s} \|u\|_{L^2}^2$ .

### Dynamique en temps fini

Considérons maintenant l'intégrale pour  $t \in [0, 1]$ . On commence par remarquer que :

$$\forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^q, \quad \int_{\mathbb{R}^q} p_t(x, y) dy = 1,$$

donc  $\int_{\mathbb{R}^q} \partial_t p_t(x, y) dy = 0$ . On peut alors faire apparaître la différence  $u(y) - u(x)$  :

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{t\Delta_{\mathcal{X}}}u)(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \frac{\partial p_t(x, y)}{\partial t} u(y) dy = \int_{\mathbb{R}^q} \frac{\partial p_t(x, y)}{\partial t} [u(y) - u(x)] dy.$$

La dérivée du noyau est alors contrôlée par le Lemme suivant.

**Lemme 14** *Le noyau  $p_t(x, y)$  de  $e^{t\Delta_{\mathcal{X}}}$  vérifie l'inégalité ponctuelle :*

$$\forall t \in ]0, 1[, \quad \left| \frac{\partial p_t(x, y)}{\partial t} \right| \leq \frac{\kappa}{t} p_{\gamma t}(x, y) \leq \frac{\bar{\kappa} e^{-\bar{\gamma}d^2(x,y)/t}}{t \text{Vol}(\mathcal{B}_{\sqrt{t}}^x)} \tag{6.2.6}$$

avec des constantes  $\kappa, \bar{\kappa}, \gamma, \bar{\gamma} > 0$ .

**Preuve** Rappelons les estimations classiques (voir [23, Théorèmes 3 et 4]) :

$$\left| \partial_t^k p_t(x, y) \right| \leq \frac{C_k}{t^k} \frac{e^{-\nu d(x, y)^2/t}}{\text{Vol}(\mathcal{B}_{\sqrt{t}}^x)} \quad (k = 0, 1) \quad \text{et} \quad p_t(x, y) \geq C'_0 \frac{e^{-\nu' d(x, y)^2/t}}{\text{Vol}(\mathcal{B}_{\sqrt{t}}^x)}.$$

On pose  $\gamma = \nu'/\nu \geq 1$ ,  $\bar{\gamma} = \nu^2/\nu'$  et  $\bar{\kappa} = C_0\kappa$  avec

$$\kappa = \frac{C_1}{C'_0} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^q \\ 0 < t < 1}} \frac{\text{Vol}(\mathcal{B}_{\sqrt{\gamma t}}^x)}{\text{Vol}(\mathcal{B}_{\sqrt{t}}^x)}.$$

Comme les boules sous-riemanniennes de petit rayon jouissent de la propriété de doublement du volume (4.3.6),  $\kappa$  est bornée par  $C_1 C'_0{}^{-1} \bar{C} \bar{C}^{-1} \gamma^{Q/2}$  et (6.2.6) s'ensuit immédiatement. ■

La première partie de (6.2.6) et l'inégalité de Hölder appliquée à la mesure de probabilité

$$p_{\gamma t}(x, y) dy$$

donnent l'estimation ponctuelle suivante :

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (e^{t\Delta_{\mathcal{X}}} u)(x) \right|^2 \leq \frac{\kappa^2}{t^2} \int_{\mathbb{R}^q} p_{\gamma t}(x, y) |u(y) - u(x)|^2 dy. \quad (6.2.7)$$

En remplaçant dans (6.2.4), on obtient :

$$c'_s{}^{-1} \|(-\Delta_{\mathcal{X}})^{s/2} u\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{s} \|u\|_{L^2}^2 + \kappa^2 \iiint_{[0,1] \times \mathbb{R}^{2d}} p_{\gamma t}(x, y) |u(x) - u(y)|^2 \frac{dt dx dy}{t^{1+s}}.$$

La deuxième partie de (6.2.6) et le changement de variables  $t = \bar{\gamma} d^2(x, y) \tau$  donnent alors :

$$\kappa^2 \int_0^1 p_{\gamma t}(x, y) \frac{dt}{t^{1+s}} \leq \frac{\kappa \bar{\kappa}}{\bar{\gamma}^s d(x, y)^{2s}} \int_0^{\frac{1}{\bar{\gamma} d(x, y)^2}} \frac{\tau^{-s} e^{-1/\tau}}{\text{Vol}(\mathcal{B}_{d(x, y)\sqrt{\bar{\gamma}\tau}}^x)} \frac{d\tau}{\tau}. \quad (6.2.8)$$

On remarque que le rayon de la boule sous-riemannienne est toujours inférieur à 1.

Lorsque  $d(x, y) < 1$ , on utilise la version (4.3.4) de la propriété de doublement du volume :

$$\int_0^{\frac{1}{\bar{\gamma} d(x, y)^2}} \frac{\tau^{-s} e^{-1/\tau}}{\text{Vol}(\mathcal{B}_{d(x, y)\sqrt{\bar{\gamma}\tau}}^x)} \frac{d\tau}{\tau} \leq \frac{\text{Cte}}{\text{Vol}(\mathcal{B}_{d(x, y)}^x)} \int_0^\infty \tau^{-s-\frac{Q}{2}} e^{-1/\tau} \frac{d\tau}{\tau} \leq \frac{\text{Cte}'}{\text{Vol}(\mathcal{B}_{d(x, y)}^x)}.$$

Lorsque  $d(x, y) \geq 1$ , on réutilise (4.3.6) :

$$\text{Vol}(\mathcal{B}_{d(x, y)\sqrt{\bar{\gamma}\tau}}^x) \geq \bar{C} \bar{\gamma}^{Q/2} \tau^{Q/2} d(x, y)^Q.$$

La distance de Carnot étant naturellement plus grande que la distance euclidienne :

$$\int_0^{\frac{1}{\bar{\gamma} d(x, y)^2}} \frac{\tau^{-s} e^{-1/\tau}}{\text{Vol}(\mathcal{B}_{d(x, y)\sqrt{\bar{\gamma}\tau}}^x)} \frac{d\tau}{\tau} \leq \frac{\text{Cte}}{|x - y|^Q} \int_0^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} \tau^{-s-\frac{Q}{2}} e^{-1/\tau} \frac{d\tau}{\tau} \leq \frac{\text{Cte}'}{|x - y|^Q}.$$

Dans ce dernier cas, on remarque que  $|x - y| \geq \beta^{-2}$  (avec  $\beta$  donné par (4.3.3)) car sinon, on aurait  $d(x, y) \leq \beta|x - y|^{1/2} < 1$ , ce qui serait contradictoire.

Fin de la preuve du membre de gauche de (6.1.3)

En combinant les calculs précédents, on obtient :

$$\begin{aligned} \|(-\Delta_{\mathcal{X}})^{s/2}u\|_{L^2}^2 &\leq C_1 \left( \|u\|_{L^2}^2 + \iint_{|x-y|\geq\beta^{-2}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{Q+2s}} dx dy \right) \\ &\quad + C_2 \iint_{d(x,y)<1} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{d(x,y)^{2s}} \frac{dx dy}{\text{Vol}(\mathcal{B}_{d(x,y)}^x)} \\ &\leq C'_1 \|u\|_{L^2}^2 + C_2 \iint_{d(x,y)<1} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{d(x,y)^{2s}} \frac{dx dy}{\text{Vol}(\mathcal{B}_{d(x,y)}^x)} \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du membre de gauche de (6.1.3).

**Remarque** - Les nombres réels  $C_1, C'_1, C_2 > 0$  ne dépendent de  $s \in ]0, 1[$  et de  $\mathcal{X}$  qu'à travers les constantes apparaissant dans (4.3.3), (4.3.4), (4.3.6) et (6.2.6). En particulier, cette partie de la démonstration resterait inchangée pour des champs vérifiant une condition de Hörmander d'ordre fini, et pas spécifiquement d'ordre 2 comme l'exige (6.1.1).  $\diamond$

### 6.3 Estimation supérieure de la dérivée faible, via le calcul de Weyl

La démonstration du membre de droite de (6.1.3) met en jeu l'analyse dans l'espace des phases. Le point crucial est la définition d'une troncature fréquentielle paramétrée par l'amplitude "sous-riemannienne" de la translation  $T_{y-x}^* - \text{Id}$ . Cette amplitude n'a de sens que dans un calcul microlocal convenable, par exemple le calcul de Weyl. Cette idée est la clef d'une démonstration élémentaire des inclusions de Sobolev (voir §5.4 ou [17]).

#### Projecteurs et translations anisotropes

On commence par introduire une décomposition de chaque espace tangent  $T_x \Omega$  adaptée à la géométrie locale de la famille  $\mathcal{X}$ . Comme  $\Omega = \mathbb{R}^q$ , le plan tangent est aussi identifié à  $\mathbb{R}^q$ ; cette décomposition induit donc une famille de translations anisotropes.

L'hypothèse de rang constant au voisinage du support de  $u$  (éventuellement réduit par partition de l'unité) permet de choisir une base régulière de champs de vecteurs  $(\mathfrak{X}_j)_{1 \leq j \leq q}$  et des entiers  $n_j$  et  $n'_j$  tels que

$$\begin{cases} \mathfrak{X}_j = \mathcal{X}_{n_j} & \text{for } 1 \leq j \leq r, \\ \mathfrak{X}_k = [\mathcal{X}_{n_k}, \mathcal{X}_{n'_k}] & \text{for } r+1 \leq k \leq q \end{cases} \quad (6.3.1)$$

sur  $\text{supp } u$ .

Pour tout point  $\underline{x} \in \text{supp } u$ , les flots  $e^{x_j \mathfrak{X}_j} \underline{x}$  de ces champs définissent une carte locale  $(x_j)_{1 \leq j \leq q}$  centrée au point  $\underline{x}$ . Ce système est *privilegié* au sens de Bellaïche [8], c'est-à-dire que si  $(x_j)$  sont les coordonnées d'un point  $x$  :

$$C^{-1} \left( \sum_{1 \leq j \leq r} |x_j| + \sum_{r < k \leq q} |x_k|^{1/2} \right) \leq d(x, \underline{x}) \leq C \left( \sum_{1 \leq j \leq r} |x_j| + \sum_{r < k \leq q} |x_k|^{1/2} \right).$$

Les constantes peuvent être choisies uniformément par rapport à  $\underline{x}$  car ce point est *régulier*, *i.e.* la famille de champs et le drapeau des commutateurs itérés sont de rang constant (voir [21, Lemme 1] pour un énoncé plus général). Cette propriété est une variante du théorème Boîte-Boule (voir [25, Proposition 2.14], “Ball-Box Theorem”).

La décomposition de l'espace tangent est maintenant naturelle :

$$T_x \Omega = \mathcal{N}_1(x) \oplus \mathcal{N}_2(x) \quad \text{where} \quad \begin{cases} \mathcal{N}_1(x) = \text{Vect}\{\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_r\}, \\ \mathcal{N}_2(x) = \text{Vect}\{\mathfrak{X}_{r+1}, \dots, \mathfrak{X}_n\}. \end{cases} \quad (6.3.2)$$

On désigne par  $\pi_i^x$  ( $i = 1, 2$ ) le projecteur sur  $\mathcal{N}_i$ . Les sous-espaces  $\mathcal{N}_i(x)$  sont lisses en la variable  $x$  (*i.e.*  $\mathcal{N}_i$  est un sous-fibre de  $T\Omega$ ).

**Remarque** - Dans cette notation, l'indice  $i$  indique la longueur des commutateurs itérés qu'on doit nécessairement calculer pour engendrer  $\mathcal{N}_i$ . Plus l'indice est élevé et plus la direction est difficile à atteindre du point de vue de la métrique sous-riemannienne.  $\diamond$

Le projecteur  $\pi_1$  est intimement lié au poids microlocal  $\mathfrak{m}$  défini par (4.4.3).

**Proposition 15** *La fonction  $(x, \xi) \mapsto \langle \pi_1^x \nu | \xi \rangle$  est un symbole de classe  $S(\mathfrak{m})$ , uniformément vis-à-vis du paramètre  $\nu \in \mathbb{S}^{q-1}$ . On a aussi  $\langle \pi_2^x \nu | \xi \rangle \in S(\mathfrak{m}^2)$ .*

La preuve repose sur le lemme suivant. On rappelle qu'une fonction  $a(x, \xi)$  est un symbole de classe  $S_{1,0}^1$  lorsque

$$\left| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{1-|\alpha|}$$

pour tous multi-indices  $\alpha, \beta$ .

**Lemme 16** *On a une inclusion d'espaces de Frechet :*

$$S_{1,0}^1 \hookrightarrow S(\mathfrak{m}^2). \quad (6.3.3a)$$

De plus, si  $a \in S_{1,0}^1$  est un symbole classique tel que

$$|a(X)| \leq C \mathfrak{m}(X) \quad (6.3.3b)$$

pour une certaine constante  $C > 0$ , alors  $a \in S(\mathfrak{m})$ .

**Preuve** On remarque que

$$|a(x, \xi)| \leq C_0 \langle \xi \rangle \leq C_0 \mathfrak{m}^2(X).$$

D'autre part, il suffit de considérer les dérivations  $D_x^{\mathfrak{m}} = \frac{\mathfrak{m}(X)}{\langle \xi \rangle} \partial_x$  et  $D_\xi^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}(X) \partial_\xi$  car

$$\forall T \in T^* \mathbb{R}^q, \quad g_X(T)^{-1/2} |\partial_T \phi(X)| \leq |D_x^{\mathfrak{m}} \phi(X)| + |D_\xi^{\mathfrak{m}} \phi(X)|.$$

Le calcul est élémentaire :

$$D_x^{\mathfrak{m}}(a(x, \xi)) = b(X) \mathfrak{m}(X) \quad \text{et} \quad D_\xi^{\mathfrak{m}}(a(x, \xi)) = c(X) \mathfrak{m}(X)$$

avec  $b(X) = \partial_x a / \langle \xi \rangle$  et  $c(X) = \partial_\xi a$ . On vérifie immédiatement que  $b, c \in S_{1,0}^0$ . D'autre part, [14, Lemme 1.2.1] implique que  $m \in S(m)$ . Cette structure se transmet aux dérivées d'ordre supérieur car si  $f \in S_{1,0}^0$  et  $h \in S(m)$  :

$$D_x^m(f(X) \cdot h(X)) = \partial_x f(X) \cdot \frac{m(X)}{\langle \xi \rangle} h(X) + f(X) \cdot D_x^m h(X)$$

et

$$D_\xi^m(f(X) \cdot h(X)) = \langle \xi \rangle \partial_\xi f(X) \cdot \frac{m(X)}{\langle \xi \rangle} h(X) + f(X) \cdot D_\xi^m h(X).$$

Chaque terme est encore de la forme  $\tilde{f}(X) \tilde{h}(X)$  avec  $\tilde{f} \in S_{1,0}^0$  et  $\tilde{h} \in S(m)$ . ■

On peut alors terminer la preuve de la Proposition 15.

**Preuve [Proposition 15]** Pour tout  $\nu \in \mathbb{S}^{q-1}$ , on peut trouver des fonctions régulières  $\alpha_j$  telles que

$$\pi_1^x \nu = \sum_{1 \leq j \leq r} \alpha_j(x) \mathfrak{X}_j(x)$$

avec  $\mathfrak{X}_j(x) = \sum_{1 \leq k \leq q} X_j^k(x) \partial_k$  défini par (6.3.1). Pour tout  $\xi = (\xi_k)_{1 \leq k \leq q} \in \mathbb{R}^q$ , le produit scalaire avec  $\xi$  est donné par :

$$\langle \pi_1^x \nu | \xi \rangle = \sum_{j,k} \alpha_j(x) X_j^k(x) \xi_k = \sum_{1 \leq j \leq r} \alpha_j(x) \langle \mathfrak{X}_j(x) | \xi \rangle, \quad (6.3.4)$$

donc  $|\langle \pi_1^x \nu | \xi \rangle| \leq m(X) \left( \sum \|\alpha_j\|_{L^\infty}^2 \right)^{1/2}$ . Proposition 15 découle alors du lemme précédent. ■

Comme  $\Omega = \mathbb{R}^q$ , l'espace tangent est naturellement identifié à  $\mathbb{R}^q$  et on peut définir des translations anisotropes :

$$\forall \nu \in \mathbb{S}^{q-1}, \quad \forall \rho > 0, \quad D_{\nu,\rho}(x) = x + \rho \pi_1^x(\nu) + \rho^2 \pi_2^x(\nu). \quad (6.3.5)$$

On note  $D_{\nu,\rho}^* u = u \circ D_{\nu,\rho}$  l'opérateur de translation associé.

**Proposition 17** Il existe une constante  $C > 1$  telle que

$$\forall \nu \in \mathbb{S}^{q-1}, \quad \forall \rho \in [0, 1], \quad C^{-1} \rho \leq d(x, D_{\nu,\rho}(x)) \leq C \rho, \quad (6.3.6)$$

uniformément pour  $x$  au voisinage de  $\text{supp } u$ .

**Preuve** C'est une reformulation de la remarque précédant (6.3.2). ■

### Coordonnées polaires sous-riemanniennes

Grâce à la propriété de doublement du volume (4.3.6), on se ramène à estimer l'intégrale :

$$\mathfrak{S}_s u = \iint_{d(x,y) < 1} |u(x) - u(y)|^2 d(x,y)^{-Q-2s} dx dy. \quad (6.3.7)$$

Pour cela, on utilise des coordonnées polaires adaptées, centrées en  $x$ .

**Lemme 18** Pour tout  $x \in \Omega$ , l'application  $(\nu, \rho) \mapsto D_{\nu, \rho}(x)$  est un difféomorphisme

$$\mathbb{S}^{q-1} \times ]0, +\infty[ \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^q \setminus \{x\}$$

de déterminant jacobien uniformément équivalent à  $\rho^{Q-1}$ .

**Preuve** Dans les “coordonnées polaires” centrées en  $\underline{x}$  définies au début de §6.3, le point  $D_{\nu, \rho}(\underline{x})$  est représenté par  $(\rho\nu_1, \dots, \rho\nu_r, \rho^2\nu_{r+1}, \dots, \rho^2\nu_n)$  où  $(\nu_i)$  sont les coordonnées de  $\nu$ . Le déterminant jacobien croît comme  $\rho^{Q-1}$  avec  $Q = r + 2(n - r)$ . Les champs  $\mathfrak{X}_i$  définis par (6.3.1) sont lisses; la matrice de passage vers un système fixe de coordonnées est aussi une application régulière. ■

Le lemme précédent et le théorème de Fubini donnent alors :

$$\mathfrak{S}_s u \leq C \sup_{\nu \in \mathbb{S}^{q-1}} \int_0^R \|(D_{\nu, \rho}^* - \text{Id})u\|_{L^2}^2 \rho^{-1-2s} d\rho \quad (6.3.8)$$

avec  $R > 0$ .

**Remarque** - L'expression (6.3.8) suggère l'appartenance de  $\rho \mapsto D_{\nu, \rho}^* u$  aux espaces  $H^s([0, 1]; L^2)$ . En général, ce n'est pas le cas car  $D_{\nu, \rho+\rho'} \neq D_{\nu, \rho} \circ D_{\nu, \rho'}$  comme on s'y attendrait, par exemple, dans le cas euclidien. ◇

### Décomposition microlocale

Pour tout  $\rho > 0$ , on introduit une décomposition

$$u = \underline{u}_\rho + \bar{u}_\rho$$

dont le but est de dissocier les “hautes” et “basses” fréquences de  $u$ . L'invariance par translation de la norme  $L^2$  donne alors :

$$C^{-1} \mathfrak{S}_s u \leq \sup_{\nu \in \mathbb{S}^{q-1}} \int_0^R \|(D_{\nu, \rho}^* - \text{Id})\underline{u}_\rho\|_{L^2}^2 \rho^{-1-2s} d\rho + 2 \int_0^R \|\bar{u}_\rho\|_{L^2}^2 \rho^{-1-2s} d\rho. \quad (6.3.9)$$

Dans ce contexte général, le poids microlocal  $m(X)$  défini par (4.4.3) se substitue naturellement à la notion classique de “fréquence” et la longueur  $\rho$  représente l'inverse de la fréquence de coupure.

Avec les notations classiques (voir p. 95), on considère une partition de l'unité  $(\vartheta_Y)_{Y \in T^* \mathbb{R}^q}$  de l'espace des phases. Les symboles  $\vartheta_Y$  sont des fonctions réelles uniformément confinées dans les  $g_Y$ -boules  $\mathcal{U}_Y^\delta$  de rayon  $\delta \in ]0, \delta_0[$ . De plus, on peut écrire  $\vartheta_Y = \psi_Y \# \varphi_Y$ . On définit alors la troncature basses-fréquences de  $u$  par :

$$\underline{u}_\rho = \int_{m(Y) \leq \frac{c_0}{\rho}} \vartheta_Y^w u(x) d_g Y. \quad (6.3.10)$$

Le paramètre  $c_0$  est arbitraire, mais devra être choisi dans  $]0, 1[$ .

### Estimation des hautes fréquences

L'estimation des hautes fréquences est un calcul classique, utilisant la décomposition des symboles  $\vartheta_Y$ . L'équivalence entre la norme  $L^2$  et la norme  $H(1)$  donne :

$$\|\bar{u}_\rho\|_{L^2}^2 = \iint_{\substack{\rho m(Y) > c_0 \\ \rho m(Z) > c_0}} ((\psi_Z \# \psi_Y)^{\mathbb{W}} \circ \varphi_Y^{\mathbb{W}} u \mid \varphi_Z^{\mathbb{W}} u)_{L^2} d_g Y d_g Z.$$

Les estimations (4.4.6), (4.4.11) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz impliquent :

$$\|\bar{u}_\rho\|_{L^2}^2 \leq C_N \iint_{\substack{\rho m(Y) > c_0 \\ \rho m(Z) > c_0}} \|\varphi_Y^{\mathbb{W}} u\|_{L^2} \|\varphi_Z^{\mathbb{W}} u\|_{L^2} \frac{d_g Y d_g Z}{\Delta(Y, Z)^N} \leq C' \int_{m(Y) > \frac{c_0}{\rho}} \|\varphi_Y^{\mathbb{W}} u\|_{L^2}^2 d_g Y.$$

On calcule d'abord l'intégrale en  $\rho$ . La formule  $\int_A^R \rho^{-1-2s} d\rho \leq \frac{1}{2s} A^{-2s}$  pour  $s > 0$  et  $A \leq R$  donne alors :

$$\int_0^R \|\bar{u}_\rho\|_{L^2}^2 \rho^{-1-2s} d\rho \leq C_s \|u\|_{H(m^s)}^2. \quad (6.3.11)$$

### Estimations des basses fréquences

Il reste à borner l'intégrale dépendant de  $\underline{u}_\rho$  dans (6.3.9). La famille  $(\vartheta_X)$  étant une partition de l'unité de  $T^*\mathbb{R}^q$ , on a :

$$(D_{\nu, \rho}^* - \text{Id}) \underline{u}_\rho = \iint_{m(Y) \leq \frac{c_0}{\rho}} \vartheta_Z^{\mathbb{W}} \circ (D_{\nu, \rho}^* - \text{Id}) \circ \vartheta_Y^{\mathbb{W}} u \, d_g Y \, d_g Z.$$

Comme  $\vartheta_X = \psi_X \# \varphi_X$ , le lemme de Cotlar microlocal (Théorème 5) implique :

$$\|(D_{\nu, \rho}^* - \text{Id}) \underline{u}_\rho\|_{L^2}^2 \leq \iint_{m(Y) \leq \frac{c_0}{\rho}} \|\varphi_Z^{\mathbb{W}} \circ (D_{\nu, \rho}^* - \text{Id}) \circ \psi_Y^{\mathbb{W}} \circ \varphi_Y^{\mathbb{W}} u\|_{L^2}^2 d_g Y d_g Z.$$

Le coeur du calcul est alors donné par le lemme suivant.

**Lemme 19** *Pour tout entier  $N$ , il existe une constante  $C'_N > 0$  telle que  $m(Y) \leq \frac{c_0}{\rho}$  implique :*

$$\|\Theta_{\nu, \rho}(Y, Z)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C'_N \frac{\rho m(Y)}{\Delta(Y, Z)^N} \quad (6.3.12)$$

avec  $\Theta_{\nu, \rho}(Y, Z) = \varphi_Z^{\mathbb{W}} \circ (D_{\nu, \rho}^* - \text{Id}) \circ \psi_Y^{\mathbb{W}}$  et  $\Delta$  la fonction symétrique apparaissant dans (4.4.7).

**Remarque** - Ce lemme est une version microlocale de l'inégalité classique :

$$\|(T_h^* - \text{Id})\Delta_q u\|_{L^2} \leq C 2^q |h| \|\Delta_q u\|_{L^2}$$

de la théorie de Littlewood-Paley (*i.e.*  $\Delta_q u = \mathcal{F}^{-1}[\varphi(2^{-q}\xi)\hat{u}(\xi)]$  et  $\varphi$  une fonction régulière supportée dans la couronne). Dans (6.3.12), la fréquence est remplacée par le poids  $m(Y)$ . Les restrictions sur l'amplitude de la translation et le "sandwich" de  $\psi_Y^{\mathbb{W}}$  et  $\varphi_Z^{\mathbb{W}}$  expriment les difficultés techniques dues au défaut de commutativité entre les translations et les opérateurs de confinement du calcul de Weyl.  $\diamond$

Admettons momentanément ce lemme. On choisit  $2N \geq N_0$  dans (4.4.6) :

$$\begin{aligned} \|(D_{\nu,\rho}^* - \text{Id})\underline{u}_\rho\|_{L^2}^2 &\leq C'_N{}^2 \iint_{\mathfrak{m}(Y) \leq \frac{c_0}{\rho}} \rho^2 m(Y)^2 \|\varphi_Y^{\mathbb{w}} u\|_{L^2}^2 \frac{d_g Y d_g Z}{\Delta(Y, Z)^{2N}} \\ &\leq C' \int_{\mathfrak{m}(Y) \leq \frac{c_0}{\rho}} \rho^2 m(Y)^2 \|\varphi_Y^{\mathbb{w}} u\|_{L^2}^2 d_g Y. \end{aligned}$$

Comme  $s < 1$ , on a  $\int_0^B \rho^{1-2s} d\rho = \frac{1}{2(1-s)} B^{2(1-s)}$ . En conséquence, pour tout  $\nu \in \mathbb{S}^{q-1}$  :

$$\begin{aligned} \int_0^R \|(D_{\nu,\rho}^* - \text{Id})\underline{u}_\rho\|_{L^2}^2 \rho^{-1-2s} d\rho &\leq C' \iint_{\rho \leq c_0 \mathfrak{m}(Y)^{-1}} m(Y)^2 \|\varphi_Y^{\mathbb{w}} u\|_{L^2}^2 \rho^{1-2s} d\rho d_g Y \\ &\leq C_s \|u\|_{H(\mathfrak{m}^s)}^2. \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

En combinant (6.3.9), (6.3.11) et (6.3.13), on obtient :

$$\iint_{d(x,y) < 1} |u(x) - u(y)|^2 d(x,y)^{-Q-2s} dx dy \leq C_s \|u\|_{H(\mathfrak{m}^s)}^2. \quad (6.3.14)$$

Ceci achève la preuve de (6.1.3), à condition de vérifier le Lemme 19.

### Preuve du Lemme 19

Le calcul qui va suivre, joint à la caractérisation des classes de symboles donnée par [12, Théorème 5.5], implique que les symboles des opérateurs  $(D_{\nu,\rho}^* - \text{Id}) \circ \psi_Y^{\mathbb{w}}$  sont uniformément de classe  $S(\rho \mathfrak{m}(Y))$  lorsque les paramètres décrivent

$$\left\{ (\nu, \rho, Y) \in \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}_+ \times \text{T}^* \mathbb{R}^q \mid \rho \leq c_0 \mathfrak{m}(Y)^{-1} \right\}.$$

Ce domaine correspond aux translations  $D_{\nu,\rho}^*$  de la variable d'espace qui ne détruisent pas la microlocalisation de  $\psi_Y^{\mathbb{w}} u$ .

Venons-en aux détails techniques. La translation  $D_{\nu,\rho}^*$  se décompose en une somme de petites translations grâce à la formule de Taylor :

$$\Theta_{\nu,\rho}(Y, Z) = \varphi_Z^{\mathbb{w}} \circ \left( \int_0^\rho \frac{\partial}{\partial t} D_{\nu,t}^* dt \right) \circ \psi_Y^{\mathbb{w}}.$$

On calcule la dérivée de  $D_{\nu,\rho}^*$  en revenant à la définition (6.3.5) :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} D_{\nu,\rho}^* = D_{\nu,\rho}^* \circ (\partial_{\pi_1^x \nu} + 2\rho \partial_{\pi_2^x \nu}).$$

Les dérivées et translatées de la quantification de Weyl se calculent facilement :

$$\partial_{x_k} \circ \phi^{\mathbb{w}} = \left[ (i\xi_k + \frac{1}{2} \partial_{x_k}) \phi \right]^{\mathbb{w}} \quad \text{et} \quad T_h^* \circ \phi^{\mathbb{w}} = \phi(x + h, \xi)^{\mathbb{w}} \circ T_h^*$$

avec ici  $T_h^*v(x) = v(x+h)$ . En combinant toutes ces formules, on obtient :

$$\Theta_{\nu,\rho}(Y, Z) = \int_0^\rho \left( \varphi_Z \# \phi_Y^{\nu,t}(\mathbb{D}_{\nu,t}(x), \xi) \right)^w \circ \mathbb{D}_{\nu,t}^* dt \quad (6.3.15)$$

avec

$$\phi_Y^{\nu,\rho}(x, \xi) = \left( i \langle \pi_1^x \nu | \xi \rangle + 2i\rho \langle \pi_2^x \nu | \xi \rangle + \frac{1}{2} (\pi_1^x \nu + 2\rho \pi_2^x \nu) \cdot \nabla_x \right) \psi_Y(x, \xi).$$

Le premier problème est que  $\phi_Y^{\nu,\rho}$  n'est pas calculé en  $X = (x, \xi)$  mais au point  $(\mathbb{D}_{\nu,\rho}(x), \xi)$ .

**Lemme 20** Pour tout  $T \in \mathbb{T}^* \mathbb{R}^q$  tel que  $g_Y^\sigma(T) \leq c^2$  et tout symbole  $\phi$ , on a :

$$\|\phi(X+T)\|_{N; \text{Conf}_Y} \leq C^N \|\phi(X)\|_{N; \text{Conf}_Y} \quad (6.3.16)$$

avec  $C = \max(2; 1 + 2c^2)$  et le même rayon de confinement  $\delta$ .

**Preuve** En reprenant la définition des semi-normes  $\|\cdot\|_{\text{Conf}_Y}$ , on obtient :

$$\|\phi(X+T)\|_{N; \text{Conf}_Y} = \sup_{\substack{X \in \mathbb{T}^* \mathbb{R}^q \\ k \leq N; T_i \neq 0}} \left( 1 + g_Y^\sigma((X-T) - \mathcal{U}_Y^\delta) \right)^N \frac{|\partial_{T_1} \dots \partial_{T_k} \phi(X)|}{g_Y(T_1)^{1/2} \dots g_Y(T_k)^{1/2}}.$$

Comme  $g_Y^\sigma(T) \leq c^2$ , on a :

$$g_Y^\sigma((X-T) - \mathcal{U}_Y^\delta) \leq 2g_Y^\sigma(X - \mathcal{U}_Y^\delta) + 2g_Y^\sigma(T) \leq 2c^2 + 2g_Y^\sigma(X - \mathcal{U}_Y^\delta),$$

d'où (6.3.16). ■

La suite de la preuve utilise à plusieurs reprises l'estimation de calcul symbolique suivante qu'on rappelle pour la commodité du lecteur.

**Lemme 21** Soient  $A$  et  $B$  deux symboles et  $\mathfrak{M}$  un poids. Pour tout entier  $N$ , il existe une constante  $C$  et des entiers  $K, M$  tels que :

$$\|AB\|_{N; \text{Conf}_Y} \leq C \mathfrak{M}(Y) \|A\|_{K; S(\mathfrak{M})} \|B\|_{M; \text{Conf}_Y} \quad (6.3.17)$$

uniformément pour  $Y \in \mathbb{T}^* \mathbb{R}^q$ . A nouveau, le rayon de confinement  $\delta$  est inchangé.

**Preuve** Cette fois, les semi-normes (4.4.4) s'avèrent plus pratiques. D'après la formule de Leibnitz :

$$\frac{\partial_{T_1} \dots \partial_{T_k} (A(X)B(X))}{g_X(T_1)^{1/2} \dots g_X(T_k)^{1/2}} = \sum \frac{\partial_{T_{\sigma(1)}} \dots \partial_{T_{\sigma(\ell)}} A(X)}{g_X(T_{\sigma(1)})^{1/2} \dots g_X(T_{\sigma(\ell)})^{1/2}} \cdot \frac{\partial_{T_{\sigma(\ell+1)}} \dots \partial_{T_{\sigma(k)}} B(X)}{g_X(T_{\sigma(\ell+1)})^{1/2} \dots g_X(T_{\sigma(k)})^{1/2}}$$

la somme étant étendue aux permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_k$  telles que

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(\ell) \quad \text{et} \quad \sigma(\ell+1) < \dots < \sigma(k).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial_{T_1} \dots \partial_{T_k} (A(X)B(X))}{g_X(T_1)^{1/2} \dots g_X(T_k)^{1/2}} &\leq C \mathfrak{M}(X) \frac{\|A\|_{k; S(\mathfrak{M})} \|B\|_{N+\bar{N}; \text{Conf}'_Y}}{(1 + g_Y^\sigma(X - \mathcal{U}_Y^\delta))^{N+\bar{N}}} \\ &\leq \frac{C \bar{C} \mathfrak{M}(Y)}{(1 + g_Y^\sigma(X - \mathcal{U}_Y^\delta))^N} \|A\|_{k; S(\mathfrak{M})} \|B\|_{N+\bar{N}; \text{Conf}'_Y}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

La dernière étape est l'étude du confinement de  $\phi_Y^{\nu,\rho}$ .

**Lemme 22** *Pour tout entier  $N$ , il existe une constante  $C_N$  et un entier  $M$  tels que :*

$$\sup_{\rho \mathfrak{m}(Y) \leq c_0} \mathfrak{m}(Y)^{-1} \|\phi_Y^{\nu,\rho}\|_{N; \text{Conf}_Y} \leq C_N \|\psi_Y\|_{M; \text{Conf}_Y}. \quad (6.3.18)$$

**Preuve** On étudie séparément chaque terme de  $\phi_Y^{\nu,\rho}$ .

\* Le terme "elliptique" est  $\langle \pi_1^x \nu | \xi \rangle \psi_Y(X)$ . La Proposition 15 indique que  $\langle \pi_1^x \nu | \xi \rangle \in S(\mathfrak{m})$  donc

$$\|\langle \pi_1^x \nu | \xi \rangle \psi_Y(X)\|_{N; \text{Conf}_Y} \leq C \mathfrak{m}(Y) \|\langle \pi_1^x \nu | \xi \rangle\|_{K; S(\mathfrak{m})} \|\psi_Y\|_{M; \text{Conf}_Y} \quad (6.3.19a)$$

d'après le Lemme 21.

\* Pour le terme "sous-elliptique"  $\rho \langle \pi_2^x \nu | \xi \rangle \psi_Y(X)$ , le Lemme 21 donne :

$$\|\rho \langle \pi_2^x \nu | \xi \rangle \psi_Y(x, \xi)\|_{N; \text{Conf}_Y} \leq C \rho \mathfrak{m}(Y)^2 \|\langle \pi_2^x \nu | \xi \rangle\|_{K; S(\mathfrak{m}^2)} \|\psi_Y\|_{M; \text{Conf}_Y}.$$

L'hypothèse  $\rho \mathfrak{m}(Y) \leq c_0$  implique

$$\|\rho \langle \pi_2^x \nu | \xi \rangle \psi_Y(x, \xi)\|_{N; \text{Conf}_Y} \leq C c_0 \mathfrak{m}(Y) \|\langle \pi_2^x \nu | \xi \rangle\|_{K; S(\mathfrak{m}^2)} \|\psi_Y\|_{M; \text{Conf}_Y}. \quad (6.3.19b)$$

\* Pour le dernier terme, on utilise simplement la définition (4.4.1) :

$$\begin{aligned} \|(\pi_1^x \nu + 2\rho \pi_2^x \nu) \cdot \nabla_x \psi_Y\|_{N; \text{Conf}_Y} &\leq g_Y(T)^{1/2} \|\psi_Y\|_{N+1; \text{Conf}_Y} \\ &\leq (1 + 2\rho) \mathfrak{m}(Y) \|\psi_Y\|_{N+1; \text{Conf}_Y} \end{aligned} \quad (6.3.19c)$$

avec  $T = (\pi_1^x \nu + 2\rho \pi_2^x \nu, 0)$  et  $g_Y(\partial_x)^{1/2} = \frac{\langle \eta \rangle}{\mathfrak{m}(Y)} \leq \mathfrak{m}(Y)$ . ■

Terminons la preuve du Lemme 19.

Comme  $\rho \leq \frac{c_0}{\mathfrak{m}(Y)} \leq c_0 < 1$ , on a  $\rho^2 \leq \rho$ . La longueur euclidienne de la translation vérifie :

$$|x - D_{\nu,\rho}(x)| = |\rho \pi_1^x \nu + \rho^2 \pi_2^x \nu| \leq 2\rho \leq \frac{2c_0}{\mathfrak{m}(Y)}.$$

donc  $g_Y^\sigma(\rho \pi_1^x \nu + \rho^2 \pi_2^x \nu, 0) \leq 4c_0^2$ . On peut donc bien appliquer le Lemme 20.

Le Lemme 22 entraîne alors que la famille  $(\mathfrak{m}(Y)^{-1} \phi_Y^{\nu,\rho}(D_{\nu,t}(x), \xi))_{Y \in \mathbb{T}^* \mathbb{R}^q}$  est uniformément confinée dans le domaine  $\rho \mathfrak{m}(Y) \leq c_0$ .

On conclut alors en appliquant (4.4.6) et (4.4.11) à la formule (6.3.15) :

$$\|\Theta_{\nu,\rho}(Y, Z)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_1 \int_0^\rho \|\varphi_Z \# \phi_Y^{\nu,t}(D_{\nu,t}(x), \xi)\|_{N_1; \text{Conf}_Y} dt \leq C'_N \frac{\rho \mathfrak{m}(Y)}{\Delta(Y, Z)^N},$$

d'où (6.3.12).

## 6.4 Remarques sur la régularité microlocale associée à une famille de champs

Comme remarqué au terme de la section §6.2, la preuve du membre de gauche de (6.1.3) ne requiert pas spécifiquement la condition de Hörmander de rang 2, mais seulement une condition d'ordre fini (4.1.3). En effet, l'estimation (6.2.6) du noyau de la chaleur est encore valable dans ce cas ; la preuve se généralise donc sans changement.

A l'inverse, la preuve du membre de droite de (6.1.3) utilise le calcul de Weyl-Hörmander pour décrire la régularité microlocale car, par définition, la "bonne" direction ne peut pas être redressée : il est impossible de réaliser  $\mathcal{X}(x)$  comme l'espace tangent d'une sous-variété de dimension  $r$ . Malheureusement, le calcul de Weyl supporte difficilement des sauts de régularité microlocale de  $H_{x,\xi}^{s_1}$  à  $H_{x,\xi}^{s_2}$  lorsque  $s_2 > 2s_1$  ou  $s_2 < s_1/2$ .

Illustrons le problème sur l'exemple de la famille de Goursat dans  $\mathbb{R}^4$  :

$$U = \partial_{x_1} + x_3\partial_{x_2} + x_4\partial_{x_3} \quad \text{et} \quad V = \partial_{x_4}. \quad (6.4.1)$$

Le degré d'holonomie de ce système est 3 car :

$$[V, U] = \partial_{x_3} \quad \text{et} \quad [[V, U], U] = \partial_{x_2}.$$

Tous les points sont réguliers. Le poids microlocal naturellement associé est :

$$m(X) = \left( (\xi_1 + x_3\xi_2 + x_4\xi_3)^2 + \xi_4^2 + \xi_3^6 + \langle \xi \rangle^4 \right)^{1/12}. \quad (6.4.2)$$

La difficulté principale est due au résultat négatif suivant.

**Proposition 23** *Il n'existe pas de métrique  $g$  sur l'espace des phases  $T^*\mathbb{R}^4$  de la forme :*

$$g_X = \sum_j \frac{dx_j^2}{a_j(X)^2} + \frac{d\xi_j^2}{b_j(X)^2}, \quad (6.4.3)$$

*vérifiant à la fois le principe d'incertitude  $g_X \leq g_X^\sigma$  et telle que  $m \in S(m, g)$ .*

**Preuve** Le principe d'incertitude a ici une expression très simple :

$$a_j(X)b_j(X) \geq 1 \quad (j = 1, \dots, 4).$$

L'appartenance du poids  $m$  à la classe de symboles  $S(m, g)$  signifie que :

$$\begin{cases} a_j(X)|\partial_{x_j}m(X)| \leq C m(X), \\ b_j(X)|\partial_{\xi_j}m(X)| \leq C m(X). \end{cases}$$

En conséquence, pour tout  $j \in \{1, \dots, 4\}$  :

$$|\partial_{x_j}m(X)| |\partial_{\xi_j}m(X)| \leq C^2 m(X)^2. \quad (6.4.4)$$

D'autre part, un calcul élémentaire donne :

$$\partial_{x_3}m(X) = \left( \frac{\xi_1 + x_3\xi_2 + x_4\xi_3}{m(X)} \right)^{11} \xi_2$$

et

$$\partial_{\xi_3} m(X) = \left( \frac{\xi_1 + x_3 \xi_2 + x_4 \xi_3}{m(X)} \right)^{11} x_4 + \frac{2 \langle \xi \rangle^2 \xi_3 + 3 \xi_3^5}{6 m(X)^{11}}.$$

Sur le domaine défini par :

$$x_3 = 0, \quad \xi_1 = \lambda, \quad \xi_2 = \lambda^3, \quad \xi_3 = 0 \quad \text{et} \quad |\xi_4| \leq \lambda$$

on a, pour une constante  $C > 1$  suffisamment grande :

$$(\lambda^{12} + \lambda^4 + 1)^{1/12} \leq m(X) \leq C (\lambda^{12} + \lambda^4 + 1)^{1/12}.$$

En particulier, pour  $\lambda \geq 1$ , on obtient :

$$|x_4| \lambda^3 \leq C' |\partial_{x_j} m(X)| |\partial_{\xi_j} m(X)| \quad \text{et} \quad m(X)^2 \leq C'' \lambda^2,$$

en contradiction avec (6.4.4) lorsque  $\lambda |x_4| \rightarrow \infty$ . ■

**Remarque** - Si on avait tronqué le saut de régularité dans la direction  $\partial_{x_2}$  en remplaçant  $\langle \xi \rangle^4$  par  $\langle \xi \rangle^6$  dans la définition de  $m(X)^{12}$ , on aurait réalisé  $m(X) \sim \lambda$  en imposant :

$$\xi_1 = \lambda \quad \text{et} \quad \xi_2 = \lambda^2.$$

Mais dans ce cas, le produit  $(\partial_{x_3} m)(\partial_{\xi_3} m)$  serait de l'ordre de  $|\xi_2| |x_4| \sim \lambda^2$  ce qui ne serait pas contradictoire. En fait, on sait bien (voir [14, lemme 1.2.1]) que le poids serait alors admissible pour le calcul de Weyl. ◇

D'autres exemples de familles de champs vérifiant la condition de crochet d'ordre supérieur à 3 sont donnés dans les remarques qui suivent la Proposition 24 du Chapitre 7 (p. 130).



## Chapitre 7

# Autour de l'inégalité de Hardy

Dans  $\mathbb{R}^q$ , l'inégalité de Hardy pour la norme  $L^2$  est :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^q} \frac{|u(x)|^2}{|x|^{2k}} dx \leq C_k \|\nabla^k u\|_{L^2}^2. \quad (7.0.1)$$

Cette inégalité est valable pour tout entier naturel  $k < q/2$ . Elle se généralise aux valeurs fractionnaires  $0 \leq s < q/2$ , pourvu que le membre de droite soit remplacé par la norme :

$$\|u\|_{\dot{H}^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^q} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

L'inégalité de Hardy n'est pas valide lorsque  $s = q/2$  puisque alors, pour toute fonction  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^q)$  égale à 1 au voisinage de l'origine, le membre de gauche de (7.0.1) vaut  $+\infty$ . En dimension impaire, l'inégalité de Hardy est cependant vérifiée pour  $s \geq q/2$ , à condition de ne considérer *que* les fonctions  $u$  qui sont dans l'adhérence de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^q \setminus \{0\})$  pour la norme  $H^s$ .

Sur le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^d$  (voir §4.5), la distance à l'origine doit être remplacée par une grandeur équivalente à la distance de Carnot, comme la distance de jauge (4.5.3). Plusieurs inégalités de Hardy figurent dans la littérature. Dans [33], on trouve :

$$\int_{\mathbb{H}^d} \frac{|u(x)|^2}{\|x\|_g^2} \phi(x) dx \leq C \sum_{j=1}^d \|X_j u\|_{L^2}^2 + \|Y_j u\|_{L^2}^2$$

où  $\phi$  est une fonction homogène de degré zéro, nulle le long de l'axe  $(0, 0; t)$  et égale à 1 le long du plan  $(p, q; 0)$ . Plus précisément,  $\phi$  est donnée par :

$$\phi(p, q; t) = \frac{p^2 + q^2}{\|p, q; t\|_g^2}.$$

En fait, on peut aussi contrôler la direction sous-elliptique (voir [2] et [4]) :

$$\int_{\mathbb{H}^d} \frac{|u(x)|^2}{\|x\|_g^2} dx \leq C \sum_{j=1}^d \|X_j u\|_{L^2}^2 + \|Y_j u\|_{L^2}^2. \quad (7.0.2)$$

Dans ce chapitre, on se propose de généraliser cette inégalité aux familles de champs de vecteurs vérifiant la condition de crochets de Hörmander (6.1.1), en s'inspirant d'une technique classique pour démontrer (7.0.1), à savoir l'intégration par parties contre un champ "radial" bien choisi.

On suppose, au début du chapitre, que la condition de crochet est vérifiée à un ordre fini arbitraire. La légère surcharge de notations et de calculs permet de mettre en évidence les difficultés techniques qui apparaissent lorsque  $n_0 \geq 3$  (voir la Proposition 24 p.130).

La dernière section contient un théorème d'éclatement des espaces de Sobolev, qui sera utile au chapitre 8, et qui est une application directe de l'inégalité de Hardy.

### 7.1 Système de coordonnées adapté à la géométrie sous-riemannienne

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^q$  et  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_i)_{1 \leq i \leq m}$  une famille de champs de vecteurs sur  $\Omega$ , vérifiant la condition de Hörmander (6.1.1) d'ordre fini *arbitraire*. On considère un point régulier  $\underline{x} \in \Omega$ , c'est-à-dire tel que pour  $k \leq n_0$ , le sous-espace de  $T_x \Omega$  engendré par les commutateurs d'ordre au plus  $k$ , *i.e.*

$$\mathcal{V}_k(x) = \text{Vect} \{ \mathcal{X}_j(x), \dots, [\mathcal{X}_{j_1}, [\dots [\mathcal{X}_{j_{k-1}}, \mathcal{X}_{j_k}]]](x) \}$$

soit de dimension constante  $r_k$  au voisinage de  $\underline{x}$  (voir (4.1.4)). On convient de poser  $r_0 = 0$ . L'hypothèse de Hörmander entraîne  $r_{n_0} = q$ .

On choisit une famille libre de champs de vecteurs  $Z_j$ , tels que

$$Z_j \in \mathcal{V}_k \quad \text{si } r_{k-1} < j \leq r_k. \tag{7.1.1}$$

Localement, la famille  $(Z_j)_{1 \leq j \leq q}$  est donc une base de l'espace des champs de vecteurs sur  $\Omega$  dont les  $r_1$  premiers engendrent la famille initiale.

**Définition** – Un système de coordonnées locales  $(x_j)_{1 \leq j \leq q}$  est dit adapté à la famille  $\mathcal{X}$  s'il est centré en un point régulier  $\underline{x}$  et vérifie

$$Z_j(\underline{x}) = \partial_j \tag{7.1.2}$$

pour un choix des  $Z_j$  en accord avec (7.1.1). On pose alors :

$$\omega_j = k \quad \text{si } r_{k-1} < j \leq r_k. \tag{7.1.3}$$

On note enfin  $Q = \sum_{j=1}^q \omega_j$  la dimension homogène. Lorsque le système n'est pas euclidien, on a  $Q \geq 3$  (voir aussi (4.3.5)).

Cette terminologie est conforme à [8]. On remarquera cependant qu'un système de coordonnées *adaptées* n'est pas nécessairement *privilegié*, *i.e.* que le point de coordonnées  $(x_j)$  ne coïncide pas nécessairement à l'image de  $\underline{x}$  sous l'action composée des flots  $e^{x_j Z_j}$  (pour un choix de l'ordre de composition). Voir aussi §6.3 pour un exemple de coordonnées privilégiées.

**Remarque** - Un système de coordonnées étant un difféomorphisme entre  $\Omega$  et  $T_x \Omega$ , on peut légitimement considérer que toute notion exprimée en coordonnées adaptées se rapporte en fait à l'espace tangent. M. Gromov [20] a d'ailleurs montré qu'on peut effectivement munir cet espace d'une structure sous-riemannienne qui, en un sens précis, est asymptotique à la structure de la famille  $\mathcal{X}$  au point  $\underline{x}$ . ◇

### 7.1.1 Expression des champs dans des coordonnées adaptées

On se place dans un système de coordonnées adaptées centré en  $\underline{x}$ . Les champs  $Z_j$  définis par (7.1.1) sont donc de la forme :

$$Z_i(x) = \partial_i + \sum_{j=1}^q \zeta_{i,j}(x) \partial_j \quad (1 \leq i \leq q) \quad (7.1.4)$$

avec  $\zeta(\underline{x}) = 0$ . Rappelons que les  $r_1$  premiers engendrent la famille initiale et que les autres sont des commutateurs.

En vue des applications, on aura aussi besoin de la formule suivante, valable pour  $1 \leq i \leq r_1$  :

$$Z_i(x) = \partial_i + \sum_{j=1}^{r_1} \varepsilon_{i,j}(x) \partial_j + \sum_{j>r_1} \varepsilon_{i,j}(x) Z_j(x) \quad (7.1.5)$$

Les coefficients sont définis matriciellement par :

$$\varepsilon = \zeta \cdot \left\{ \text{Id}_{\mathbb{R}^q} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \zeta_{r_1+1,1} & \dots & \zeta_{r_1+1,q} \\ \zeta_{q,1} & \dots & \zeta_{q,q} \end{pmatrix} \right\}^{-1}. \quad (7.1.6)$$

Comme  $\zeta(\underline{x}) = 0$ , cette relation est bien définie au voisinage de  $\underline{x}$ .

### 7.1.2 Jauge adaptée $\rho$ et classe de symboles $S_{\underline{x},\rho}^k$

Dans un système de coordonnées adaptées, on peut définir une pseudo-norme anisotrope.

**Définition** – Une jauge adaptée à la famille  $\mathfrak{X}$  est une fonction positive  $\rho$  définie au voisinage d'un point régulier  $\underline{x}$ , telle qu'il existe un système de coordonnées adaptées dans lequel elle prend la forme suivante :

$$\rho(x) = \left( \sum_{j=1}^q |x_j|^{\theta/\omega_j} \right)^{1/\theta} \quad (7.1.7)$$

où  $\theta = 2 \text{ppcm}(\omega_1, \dots, \omega_{n_0})$ .

On prendra garde au fait qu'une jauge adaptée n'est pas nécessairement équivalente à la distance de Carnot  $\mathcal{D}_{\underline{x}}(x, \underline{x})$ , à moins que le système de coordonnées ne soit privilégié au sens donné par [8].

Dans un systèmes de coordonnées adaptées, on a :

$$|x_j| \leq \rho^{\omega_j}. \quad (7.1.8)$$

En particulier, toute fonction régulière  $\varphi$  qui s'annule en  $\underline{x}$  vérifie

$$|\varphi(x)| \leq C\rho(x) \quad (7.1.9)$$

pour  $\rho(x) < 1$ .

La "bonne" notion de platitude au voisinage de  $\underline{x}$  s'exprime de la manière suivante. On rappelle que la famille  $\mathfrak{X}$  est engendrée par  $\mathcal{X} = (Z_1, \dots, Z_{r_1})$  et qu'un multi-indice de longueur  $k \geq 1$  est une application  $\alpha : \{1, \dots, k\} \rightarrow \mathcal{X}$ . On note  $\mathcal{X}^\alpha$  la composée des dérivées de Lie  $\alpha(1) \circ \dots \circ \alpha(k)$ . Par convention  $\mathcal{X}^0 = \text{Id}$  et  $|\alpha| = k$ .

**Définition** – Une fonction  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^q \setminus \{\underline{x}\})$  supportée dans la boule  $\rho(x) < 1$  est de classe  $S_{\underline{x},\rho}^k$  si

$$|(Z_1, \dots, Z_{r_1})^\alpha a| \leq C_\alpha \rho^{k-|\alpha|} \tag{7.1.10}$$

pour tout multi-indice  $\alpha$ .

La formule de Leibnitz assure que le produit d'un symbole  $S_{\underline{x},\rho}^k$  et d'un symbole  $S_{\underline{x},\rho}^{k'}$  est de classe  $S_{\underline{x},\rho}^{k+k'}$ . De même, les dérivations  $Z_1, \dots, Z_{r_1}$  envoient  $S_{\underline{x},\rho}^k$  dans  $S_{\underline{x},\rho}^{k-1}$ .

D'après (7.1.9), une fonction régulière qui s'annule en  $\underline{x}$  est de classe  $S_{\underline{x},\rho}^1$ . L'autre exemple fondamental est la fonction  $\rho$  elle-même.

**Proposition 24** Si la famille  $\mathfrak{X}$  vérifie la condition de Hörmander d'ordre  $n_0 = 2$ , toute jauge adaptée à  $\mathfrak{X}$  est de classe  $S_{\underline{x},\rho}^1$ .

**Preuve** C'est un calcul élémentaire. Pour  $1 \leq i \leq r_1$ , la formule (7.1.4) et les estimations (7.1.8) et (7.1.9) donnent :

$$Z_i \rho = \frac{1}{4} \frac{Z_i \rho^4}{\rho^3} = \frac{x_i^3}{\rho^3} + \sum_{j=1}^{r_1} \frac{\zeta_{i,j} x_j^3}{\rho^3} + \frac{1}{2} \sum_{j>r_1} \frac{\zeta_{i,j} x_j}{\rho^3} = O(1).$$

Par récurrence, on vérifie que  $Z_{i_1} \dots Z_{i_k} \rho$  est (pour  $i_j \leq r_1$ ) une somme finie de termes de la forme  $F_\ell / \rho^{k+\ell-1}$  où  $F_\ell \in S_{\underline{x},\rho}^\ell$ . ■

**Remarque** - Lorsque  $n_0 \geq 3$ , le calcul précédent ne peut plus aboutir sans hypothèses supplémentaires sur les coefficients  $\zeta_{i,j}$  avec  $j > r_2$ . Le problème apparaît clairement sur l'exemple suivant :

$$Z = (1 + \alpha)\partial_1 + \beta\partial_2 + \gamma\partial_3 \quad \text{et} \quad \rho = (x_1^{12} + x_2^6 + x_3^4)^{1/12},$$

avec  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  régulières nulles à l'origine. On vérifie immédiatement que :

$$Z\rho = \frac{Z(\rho^{12})}{12\rho^{11}} = (1 + \alpha)\frac{x_1^{11}}{\rho^{11}} + \frac{\beta x_2^5}{2\rho^{11}} + \frac{\gamma x_3^3}{3\rho^{11}}.$$

Comme  $|\alpha|+|\beta|+|\gamma| \leq C\rho$  et  $|x_k| \leq \rho^k$ , les deux premiers termes sont bornés. Le terme  $\gamma x_3^3 / \rho^{11}$  n'est par contre borné que comme  $1/\rho$ . En choisissant  $\gamma(x) = x_1$ , on constate qu'il n'est effectivement pas borné au voisinage de l'origine, le long de la surface  $x_1^3 = x_3$ . S'inspirant de la famille de Goursat (6.4.1), on considère

$$\mathfrak{X} = (\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_3}, \partial_{x_2} + x_4\partial_{x_3} + x_5\partial_{x_4}, \partial_{x_5}) \tag{7.1.11}$$

dans  $\mathbb{R}^5$ . C'est un exemple de système régulier vérifiant la condition de crochet de rang 3. Les coordonnées canoniques de  $\mathbb{R}^5$  sont adaptées au point  $x = 0$ . Le calcul précédent montre que la jauge :

$$\rho(x) = (|x_1|^{12} + |x_2|^{12} + |x_3|^4 + |x_4|^6 + |x_5|^{12})^{1/12}$$

n'est pas de classe  $S_{\underline{x},\rho}^1$  car  $|(\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_3})\rho| \geq c\rho^{-1}$  le long de  $x_1^3 - x_3 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$ . ■ ◇

### 7.1.3 Hypothèse de structure

La preuve de la Proposition 24 peut se généraliser lorsque  $\zeta_{i,j}$  est de classe  $S_{\mathfrak{X},\rho}^{\omega_j-1}$ . Les champs étant réguliers, cela revient en fait à faire une hypothèse légèrement plus forte (voir aussi la preuve de la Proposition 27).

**Définition** – Une famille de champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^q$  vérifiant la condition de Hörmander d'ordre  $n_0$  est dite bien structurée au voisinage d'un point  $\underline{x}$  s'il existe des coordonnées structurellement adaptées, c'est-à-dire un système de coordonnées adaptées dans lequel les champs vérifient (7.1.4) avec

$$|\mathfrak{X}^\alpha \zeta_{ij}| \leq C_{i,j,\alpha} \rho^{(\omega_j-1-|\alpha|)_+}. \quad (7.1.12)$$

La jauge  $\rho$  est celle associée à ce système de coordonnées.

La notion de famille bien structurée de champs de vecteurs exprime l'existence de coordonnées ayant certaines propriétés; elle est donc invariante par changement de cartes et, en particulier, est de nature géométrique. La caractérisation effective des familles bien structurées par des invariants géométriques n'est malheureusement pas connue en général. Voici quelques exemples.

D'après (7.1.9), toute famille régulière d'ordre  $n_0 = 2$  est bien structurée et tout système de coordonnées adaptées est structurellement adapté.

La famille de Goursat (6.4.1) est bien structurée et les coordonnées canoniques de  $\mathbb{R}^4$  sont structurellement adaptées. A l'inverse, la base canonique de  $\mathbb{R}^5$  n'est pas structurellement adaptée à la famille (7.1.11); cependant, dans le système de coordonnées :

$$y_3 = x_3 - \frac{1}{2}x_1^2, \quad y_i = x_i \quad (i \neq 3),$$

on constate que cette famille est bien structurée puisque de la forme :

$$\mathfrak{X}' = (\partial_{y_1}, \partial_{y_2} + y_4 \partial_{y_3} + y_5 \partial_{y_4}, \partial_{y_5}).$$

Cet exemple est en fait le cas général des familles vérifiant la condition de crochet d'ordre 3.

**Théorème 25** Au voisinage d'un point régulier, toute famille de champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^q$  vérifiant la condition de Hörmander d'ordre  $n_0 \leq 3$  est bien structurée.

**Preuve** Le cas  $n_0 = 2$  étant déjà connu, on suppose donc que  $n_0 = 3$  et on se place dans un système de coordonnées adaptées. On développe les coefficients des champs par la formule de Taylor. Pour  $i \leq r_1$  :

$$Z_i(x) = \partial_{x_i} + \sum_{k \leq r_1} \zeta_{i,k}(x) \partial_{x_k} + \sum_{r_1 < k \leq r_2} \zeta_{i,k}(x) \partial_{x_k} + \sum_{k > r_2} \left( \sum_{j=1}^{r_1} \frac{\partial \zeta_{i,k}}{\partial x_j}(\underline{x}) x_j + \nu_{i,k}(x) \right) \partial_{x_k}$$

avec  $\zeta_{i,k} \in S_{\mathfrak{X},\rho}^1$  et  $\nu_{i,k}(x) \in S_{\mathfrak{X},\rho}^2$ . En effet, d'après (7.1.8), les termes de la forme  $\partial \zeta_{i,k} / \partial x_j(\underline{x}) x_j$  sont de classe  $S_{\mathfrak{X},\rho}^2$  si  $j > r_1$ . Le système de coordonnées est donc structurellement adapté à la famille  $\mathfrak{X}$  si et seulement si  $\frac{\partial \zeta_{i,k}}{\partial x_j}(\underline{x}) = 0$  pour  $i, j \leq r_1$  et  $k > r_2$ . En d'autres termes, les seuls termes problématiques sont linéaires en les variables elliptiques, dans la direction d'ordre 3. Pour  $i \neq i' \leq r_1$  on calcule alors le commutateur :

$$[Z_i, Z_{i'}](\underline{x}) = V_{i,i'} + \sum_{k > r_2} \left( \frac{\partial \zeta_{i',k}}{\partial x_i}(\underline{x}) - \frac{\partial \zeta_{i,k}}{\partial x_{i'}}(\underline{x}) \right) \partial_{x_k}$$

avec  $V_{i,i'} \in \mathcal{V}_2$  (i.e. le sous-espace vectoriel engendré par les champs et les commutateurs d'ordre 2).  
On en déduit que pour tout  $k > r_2$  et  $i, i' \leq r_1$  :

$$\frac{\partial \zeta_{i',k}}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \zeta_{i,k}}{\partial x_{i'}}(x).$$

On considère alors le système de coordonnées  $(y_i)_{1 \leq i \leq q}$  dont les vecteurs de base vérifient

$$\begin{cases} \partial_{y_i} = \partial_{x_i} + \sum_{k>r_2} \sum_{j \leq r_1} \frac{\partial \zeta_{i,k}}{\partial x_j}(x) x_j \partial_{x_k} & \text{si } i \leq r_1, \\ \partial_{y_i} = \partial_{x_i} & \text{si } i > r_1. \end{cases}$$

Ce système est bien défini car les champs de vecteur du membre de droite commutent entre eux. Ce nouveau système de coordonnées est, par construction, structurellement adapté. ■

**Remarques**

1. La preuve précédente fournit aussi un algorithme pour déterminer un système de coordonnées structurellement adapté.
2. Lorsque  $n_0 \geq 4$ , les coefficients des directions d'ordre 4 qui sont quadratiques en les variables elliptiques posent problème. N'étant pas du bon ordre, ils doivent être redressés. Ces termes commutent bien avec les autres champs elliptiques au point  $\underline{x}$ , mais cette propriété ne subsiste pas nécessairement au voisinage. ◇

La famille de Goursat généralisée dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  :

$$U_n = \partial_{x_1} + \sum_{k=2}^n x_{k+1} \partial_k \quad \text{et} \quad V_n = \partial_{x_{n+1}} \tag{7.1.13}$$

est un exemple de famille vérifiant la condition de crochet d'ordre  $n$ , régulière et bien structurée. La base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$  est structurellement adaptée et la jauge associée est :

$$\rho_n(x) = \left( |x_1|^\theta + |x_2|^{\theta/n} + |x_3|^{\theta/(n-1)} + \dots + |x_k|^{\theta/(n+2-k)} + \dots + |x_{n+1}|^\theta \right)^{1/\theta}$$

avec  $\theta = 2 \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)$ .

La preuve de la Proposition 24 s'étend aux familles bien structurées.

**Proposition 26** *Si la famille  $\mathfrak{X}$  est bien structurée au voisinage d'un point  $\underline{x}$  et si  $(x_i)_{1 \leq i \leq q}$  est un système de coordonnées structurellement adapté, la jauge  $\rho$  correspondante est de classe  $S_{\underline{x}, \rho}^1$ .*

**Preuve** En reprenant la preuve de la Proposition 24, il suffit de remarquer que pour  $i \leq r_1$  :

$$Z_i \rho = \frac{x_i^{\theta-1}}{\rho^{\theta-1}} + \sum_{j=1}^q \frac{x_j^{\frac{\theta}{\omega_j}-1} \zeta_{i,j}}{\omega_j \rho^{\theta-1}}$$

est une somme finie de termes de la forme  $\rho^{1-\theta} S_{\underline{x}, \rho}^{\theta-1}$  donc bornés au voisinage de  $\underline{x}$  (on rappelle que  $\theta/\omega_j$  est entier). La propriété d'être un quotient d'un symbole et d'une puissance de  $\rho$  passe aux dérivées. On en déduit donc immédiatement que  $\rho \in S_{\underline{x}, \rho}^1$ . ■

### 7.1.4 Dilatations anisotropes

Un système de coordonnées adaptées permet enfin de définir des dilatations anisotropes.

**Définition** – *Etant donné un système de coordonnées adapté à  $\mathfrak{X}$  au point  $\underline{x}$ , on pose :*

$$\mathcal{D}_\lambda : (x_1, \dots, x_q) \mapsto (\lambda^{\omega_1} x_1, \dots, \lambda^{\omega_k} x_k, \dots, \lambda^{\omega_q} x_q) \quad (7.1.14)$$

pour tout  $\lambda > 0$ . Les  $\omega_j$  sont définis par (7.1.3).

La famille  $\mathcal{D}_\lambda$  constitue un groupe multiplicatif, isomorphe à  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ . La jauge des coordonnées adaptées est homogène :

$$\rho(\mathcal{D}_\lambda(x)) = \lambda \rho(x).$$

Pour  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , on pose  $\mathcal{D}_\lambda^* u = u \circ \mathcal{D}_\lambda$ . La dilatation anisotrope s'étend aux distributions  $u \in \mathcal{D}'$  grâce à la formule de dualité :

$$\langle \mathcal{D}_\lambda^* u | \varphi \rangle = \lambda^{-Q} \langle u | \varphi \circ \mathcal{D}_\lambda^{-1} \rangle. \quad (7.1.15)$$

où  $Q = \sum \omega_j$  est la dimension homogène. Pour la masse de Dirac en  $\underline{x}$ , on trouve ainsi :

$$\mathcal{D}_\lambda^*(\partial_x^\alpha \delta_{\underline{x}}) = \lambda^{-Q - \sum \omega_j \alpha_j} \partial_x^\alpha \delta_{\underline{x}}$$

avec  $\partial_x^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_q^{\alpha_q}$ . La norme  $L^2$  vérifie :

$$\|\mathcal{D}_\lambda^* u\|_{L^2} = \lambda^{-Q/2} \|u\|_{L^2}. \quad (7.1.16)$$

Enfin, pour tout champ de vecteur  $X$  et  $\lambda > 0$ , on introduit :

$$\lambda X_\lambda = \mathcal{D}_{\lambda^{-1}}^* \circ X \circ \mathcal{D}_\lambda^*,$$

c'est-à-dire, en coordonnées :

$$X_\lambda(x) = \sum \lambda^{\omega_j - 1} A_j(\mathcal{D}_\lambda^{-1}(x)) \partial_j$$

où  $X(x) = \sum A_j(x) \partial_j$ . On vérifie facilement que, pour  $\lambda > 1$  :

$$\|\mathcal{D}_\lambda^* u\|_{H^k(x)} \leq \lambda^{-Q/2+k} \|u\|_{H^k(x_\lambda)}. \quad (7.1.17)$$

**Proposition 27** *Soit  $\mathfrak{X}$  une famille de champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^q$ , bien structurée au voisinage d'un point  $\underline{x}$ . On considère des dilatations  $\mathcal{D}_\lambda$  associées à un système de coordonnées structurellement adaptées et les champs conjugués  $\mathfrak{X}_\lambda$  définis ci-dessus. Alors*

$$\sup_{\lambda > 1} \|\psi\|_{H^k(x_\lambda)} \leq C_k \|\psi\|_{H^k(\mathbb{R}^q)} \quad (7.1.18)$$

pour toute fonction régulière  $\psi$  et tout entier  $k$ .

**Preuve** Il suffit de vérifier que les coefficients des champs de vecteurs  $\mathfrak{X}_\lambda$  calculés dans le système de coordonnées structurellement adaptées sont uniformément bornés, ainsi que leurs dérivées, au voisinage de  $\underline{x}$ . Par définition, pour  $i \leq r_1$  :

$$(Z_i)_\lambda(x) = \partial_i + \sum_{j=1}^q \lambda^{\omega_j - 1} \zeta_{i,j}(\mathcal{D}_\lambda^{-1}(x)) \partial_j.$$

Le coefficient de  $\partial_j$  est donc borné par  $\lambda^{\omega_j - 1} |\zeta_{i,j}(\mathcal{D}_\lambda^{-1}(x))| \leq C \rho(x)^{\omega_j - 1}$ . De même, si  $k \leq r_1$ ,  $\lambda > 1$  et  $\rho < 1$  :

$$\lambda^{\omega_j - 1} |Z_k(\zeta_{i,j}(\mathcal{D}_\lambda^{-1}(x)))| \leq \lambda^{\omega_j - 2} |(Z_k \zeta_{i,j})(\mathcal{D}_\lambda^{-1}(x))| \leq \frac{C \rho(x)^{(\omega_j - 2)_+}}{\lambda^{(\omega_j - 2)_+ - (\omega_j - 2)}} \leq C'$$

en notant  $\tau_+ = \max\{\tau; 0\}$  la partie positive. ■

## 7.2 Densité des fonctions régulières dont le support évite un point

La preuve de l'inégalité de Hardy que nous donnerons dans la suite de ce chapitre nécessite de vérifier au préalable la densité des fonctions régulières dont le support évite  $\underline{x}$ . Rappelons qu'on définit toujours l'espace  $H^k(\mathfrak{X})$  par (4.2.1) et les espaces de régularité fractionnaire par interpolation complexe. La dimension homogène est définie par (7.1.3).

**Proposition 28** *Soit  $\mathfrak{X}$  une famille de champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^q$ , bien structurée au voisinage d'un point  $\underline{x}$  et de dimension homogène  $Q$ . Pour  $0 \leq s < \frac{Q}{2}$ , l'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^q \setminus \{\underline{x}\})$  est dense dans  $H^s(\mathfrak{X})$ .*

**Preuve** Soit  $u \in H^s(\mathfrak{X})$  une fonction telle que  $(u|\varphi)_s = 0$  dès que  $\text{supp } \varphi \subset \Omega \setminus \{\underline{x}\}$ . On veut montrer que  $u = 0$ . On note  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  le crochet de dualité des distributions et  $(\cdot | \cdot)_s$  le produit scalaire de  $H^s(\mathfrak{X})$ . On peut alors écrire  $(u|v)_s = \langle \tilde{u} | v \rangle$  avec

$$\tilde{u} = (\text{Id} + (-\Delta_{\mathfrak{X}})^s) u$$

et  $\Delta_{\mathfrak{X}}$  défini par (6.2.1). Le support de  $\tilde{u}$  est donc réduit à  $\{\underline{x}\}$  et le théorème de Schwartz entraîne que  $\tilde{u}$  est une somme finie de dérivées de masses de Dirac :

$$\tilde{u} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \partial_{\underline{x}}^{\alpha} \delta_{\underline{x}}.$$

Par ailleurs,  $\tilde{u} \in H^{-s}(\mathfrak{X})$ , donc :

$$|\langle \mathcal{D}_{\lambda^{-1}}^* \tilde{u} | \psi \rangle| = \lambda^Q |\langle \tilde{u} | \mathcal{D}_{\lambda}^* \psi \rangle| \leq C \lambda^Q \|\mathcal{D}_{\lambda}^* \psi\|_{H^s(\mathfrak{X})} \leq C \lambda^{\frac{Q}{2}+s} \|\psi\|_{H^s(\mathfrak{X}_{\lambda})}$$

pour toute fonction test  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^q)$  et tout réel  $\lambda > 1$ . La dernière inégalité résulte de (7.1.17), étendue par interpolation complexe aux valeurs fractionnaires de  $s$ . L'homogénéité de la masse de Dirac permet de calculer le membre de gauche :

$$\langle \mathcal{D}_{\lambda^{-1}}^* \tilde{u} | \psi \rangle = \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} c_{\alpha} \lambda^{Q+\sum \omega_j \alpha_j} \partial_{\underline{x}}^{\alpha} \psi(\underline{x}).$$

Enfin, d'après la Proposition 27 (et c'est là qu'on utilise l'hypothèse de structure) :

$$\sup_{\lambda \rightarrow \infty} \|\psi\|_{H^s(\mathfrak{X}_{\lambda})} < +\infty.$$

Ainsi, pour tout entier  $k \geq s$ , on a

$$\left| \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} c_{\alpha} \lambda^{Q+\sum \omega_j \alpha_j} \partial_{\underline{x}}^{\alpha} \psi(\underline{x}) \right| \leq C \lambda^{\frac{Q}{2}+s} \|\psi\|_{H^k(\mathbb{R}^q)}.$$

Faisant tendre  $\lambda \rightarrow \infty$  et en choisissant convenablement les moments de  $\psi$ , on en déduit que

$$c_{\alpha} \neq 0 \implies s \geq \frac{Q}{2} + \sum \omega_j \alpha_j.$$

Comme  $s < Q/2$ , tous les  $c_{\alpha}$  sont nuls donc  $\tilde{u} = 0$  et finalement  $u = 0$ . ■

Le résultat précédent reste vrai lorsque  $s = Q/2$  est un entier. Considérons par exemple une fonction régulière  $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  supportée dans  $[-1/2, 1/2]$  et égale à 1 près de l'origine. La fonction

$$u = \log(-\log \rho) \Psi(\rho)$$

n'est pas bornée au voisinage de  $\underline{x}$ . On va montrer qu'elle est pourtant de classe  $H^{Q/2}(\mathfrak{X})$ . Elle vérifie en effet les estimations ponctuelles suivantes :

$$|\mathcal{X}^\alpha u| \leq \frac{C_\alpha}{\rho^{|\alpha|} |\log \rho|} \tilde{\Psi}(\rho)$$

avec  $\tilde{\Psi}$  égale à 1 au voisinage de  $\text{supp } \Psi$ . C'est une conséquence immédiate de l'identité algébrique :

$$\frac{d^n}{d\rho^n} (\log(-\log \rho)) = \frac{(-1)^n}{\rho^n \log \rho} P_n \left( \frac{1}{\log \rho} \right)$$

avec  $P_1 = 1$  et  $P_{n+1}(X) = (n+X)P_n(X) + X^2 P_n'(X)$ .

Lorsque  $k \leq Q/2$ , les intégrales

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\rho^{Q-1}}{\rho^{2k} |\log \rho|^2} d\rho = \int_{\log 2}^{\infty} t^{-2} e^{-(Q-2k)t} dt$$

convergent. Si  $Q$  est pair, ce calcul implique  $u \in H^{Q/2}(\mathfrak{X})$ . En conséquence,  $\delta_{\underline{x}} \notin H^{-Q/2}(\mathfrak{X})$  et en reprenant la preuve précédente, on en déduit la densité de  $\mathcal{D}(\Omega \setminus \{\underline{x}\})$  dans  $H^{\tilde{Q}/2}(\mathfrak{X})$ .

**Remarque** - En dimension homogène  $Q$  impaire, les fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^q \setminus \{\underline{x}\})$  ne sont pas denses dans  $H^s(\mathfrak{X})$  lorsque  $s \geq Q/2$ . Le cas euclidien (*i.e.*  $\mathfrak{X} = \nabla$ ) fournit déjà un contre-exemple, puisque l'inégalité de Hardy (7.0.1) est alors vraie pour tout  $s \geq 0$  et  $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^q \setminus \{\underline{x}\})$ , mais qu'elle est fautive pour  $s = q/2$  et certaines fonctions  $u \in H^{d/2}(\mathbb{R}^q)$ .  $\diamond$

### 7.3 Inégalité de Hardy pour une famille de champs de vecteurs

Le principal résultat de ce chapitre est le théorème suivant.

**Théorème 29** *Soit  $\mathfrak{X}$  une famille de champs de  $\mathbb{R}^q$ , vérifiant l'hypothèse de Hörmander (6.1.1) d'ordre fini  $n_0$ . On suppose que la famille est bien structurée au voisinage d'un point  $\underline{x}$  (voir p.131). On note enfin  $Q = \sum \omega_j$  la dimension homogène ( $\omega_j$  est défini par (7.1.3)). Alors, pour  $0 \leq s < Q/2$ , on a l'inégalité suivante :*

$$\int \frac{u^2}{\rho^{2s}} \leq C_s \|u\|_{H^s(\mathfrak{X})}^2 \quad (7.3.1)$$

pour toute fonction de jauge  $\rho$  associée à des coordonnées structurelles centrées en  $\underline{x}$ .

**Remarque** - Rappelons que lorsque  $n_0 = 2$  ou  $3$ , l'hypothèse structurelle est contenue dans la condition de crochet.  $\diamond$

La preuve consiste à construire un champ  $\Lambda$  ayant des propriétés voisines de celles du champ "radial" anisotrope  $\sum \omega_j x_j \partial_j$ . Rappelons que pour tout champ  $\Lambda$ , on a

$$\frac{\delta}{\rho^{2s}} = -\frac{1}{2s} \Lambda \left( \frac{1}{\rho^{2s}} \right) \quad (7.3.2)$$

avec  $\delta = (\Lambda\rho)/\rho$  et que  $\delta \equiv 1$  si  $\Lambda$  est le champ radial.

**Lemme 30** *Il existe un champ de vecteur  $\Lambda$  tel que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\rho_\eta > 0$  vérifiant :*

$$\sup_{\rho(x) < \rho_\eta} |\operatorname{div} \Lambda(x) - Q| + |\delta(x) - 1| + |\Lambda\delta(x)| < \eta. \quad (7.3.3)$$

*Pour tout  $s \geq 1$ , tout  $\epsilon > 0$  et toute fonction régulière  $u$  à support dans  $\mathbb{R}^q \setminus \{0\}$  et dans la boule  $\rho \leq \rho_\eta$  :*

$$(Q - 2s - \epsilon) \int \frac{u^2}{\rho^{2s}} \leq C_\epsilon \int \frac{|\mathfrak{X}u|^2}{\rho^{2(s-1)}}. \quad (7.3.4)$$

**Preuve [Théorème 29]** L'inégalité de Hardy est évidente si  $s = 0$ . Le cas  $s = 1$  s'obtient en choisissant  $\epsilon = 1/2$  dans le lemme précédent. On déduit alors l'inégalité pour tout  $s \in [0, 1]$  par interpolation complexe (pour l'interpolation des espaces  $L^2(\mu(x)dx)$ , voir [9]).

Une nouvelle application du lemme donne alors, pour  $s \in [1, 2]$  et  $s < Q/2$  :

$$\int \frac{u^2}{\rho^{2s}} \leq A_s \int \frac{|\mathfrak{X}u|^2}{\rho^{2(s-1)}} \leq B_s \|u\|_{H^2(\mathfrak{X})}^2.$$

En itérant l'argument, on en déduit l'inégalité de Hardy sur chaque intervalle  $s \in [k, k+1]$ , pourvu que  $s < Q/2$ .

Le calcul n'est valable que pour les fonctions supportées dans une couronne  $\epsilon < \rho < \rho_\eta$ . Cependant, si  $\chi$  désigne une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}; [0, 1])$  à support dans  $[-1, 1]$  et égale à 1 entre  $-1/2$  et  $1/2$ , on a pour tout  $\rho_0 > 0$  :

$$\int \frac{u^2}{\rho^{2s}} \leq \int \frac{|\chi(\rho/\rho_0)u|^2}{\rho^{2s}} + \left(\frac{2}{\rho_0}\right)^{2s} \|u\|_{L^2}^2 \quad \text{et} \quad \|\chi(\rho/\rho_0)u\|_{H^s(\mathfrak{X})} \leq \frac{C_s}{\rho_0^s} \|u\|_{H^s(\mathfrak{X})}.$$

On peut donc, sans restriction, supposer que  $u$  est à support dans une couronne contenue dans un voisinage arbitrairement petit mais fixe de l'origine  $\mathfrak{x}$ . Enfin, la Proposition 28 assure que l'inégalité de Hardy passe à la limite pour toute fonction de  $H^s(\mathfrak{X})$  si elle est vraie pour les fonctions régulières à support dans  $\mathbb{R}^q \setminus \{\mathfrak{x}\}$ . ■

Pour compléter la preuve, il reste donc seulement à vérifier le lemme.

### 7.3.1 Construction du champ "radial" $\Lambda$

Dans un système de coordonnées structurellement adapté, on définit :

$$\Lambda(x) = \sum_{i=1}^{r_1} x_i Z_i(x) + \sum_{j>r_1} \left( \omega_j x_j - \sum_{i=1}^{r_1} x_i \varepsilon_{i,j}(x) \right) Z_j(x), \quad (7.3.5)$$

les coefficients  $\varepsilon_{i,j}$  étant donnés par (7.1.5). C'est une perturbation du champ radial anisotrope naturel :

$$\Lambda(x) = \sum_{k=1}^q \omega_k x_k \partial_k + \tilde{\Lambda}(x).$$

Le terme perturbatif s'écrit :

$$\tilde{\Lambda}(x) = \sum_{k=1}^{r_1} \left( \sum_{j=1}^{r_1} x_j \varepsilon_{j,k}(x) + \sum_{j>r_1} \omega_j x_j \zeta_{j,k}(x) \right) \partial_k + \sum_{k>r_1} \sum_{j>r_1} \omega_j x_j \zeta_{j,k}(x) \partial_k.$$

L'hypothèse que les coordonnées sont structurellement adaptées entraîne donc :

$$\Lambda(x) = \sum_{k=1}^q (\omega_k x_k + \sigma_k(x)) \partial_k \quad \text{avec} \quad \sigma_k \in S_{\underline{x}, \rho}^{\omega_k+1} \quad (7.3.6)$$

car  $\sigma_k$  est une somme finie de termes qui sont tous des produits de la forme  $S_{\underline{x}, \rho}^1 \times S_{\underline{x}, \rho}^{\omega_k}$  (ou  $S_{\underline{x}, \rho}^2 \times S_{\underline{x}, \rho}^{\omega_k-1}$  avec  $\omega_k \geq 2$ ). Comme  $x_k \in S_{\underline{x}, \rho}^k$ , le terme correctif est bien d'ordre inférieur dans le calcul symbolique anisotrope.

La divergence de  $\Lambda$  est donnée par :

$$\operatorname{div} \Lambda(x) = \sum_{k=1}^q \omega_k + \partial_k \sigma_k(x).$$

avec  $\partial_k \sigma_k \in \mathfrak{X}^{\omega_k} (S_{\underline{x}, \rho}^{\omega_k+1}) \subset S_{\underline{x}, \rho}^1$ . Ainsi  $\operatorname{div} \Lambda = Q + \mathcal{O}(\rho)$  diffère arbitrairement peu de  $Q$  dans un petit voisinage de  $\underline{x}$ .

On calcule  $\delta = \Lambda \rho / \rho$  grâce à la formule

$$\delta(x) = \frac{\Lambda(\rho^\theta)}{\theta \rho^\theta} = 1 + \sum_{k=1}^q \frac{\sigma_k x_k^{\frac{\theta}{\omega_k}-1}}{\omega_k \rho^\theta}$$

car  $\sum \omega_i x_i \partial_i (\rho^\theta) = \theta \rho^\theta$  et  $\sigma_k \partial_k (\rho^\theta) = \frac{\theta}{\omega_j} \sigma_k x_k^{\frac{\theta}{\omega_k}-1}$ . Ainsi,  $\delta = 1 + \rho^{-\theta} S_{\underline{x}, \rho}^{\theta+1}$  est arbitrairement proche de 1 au voisinage de  $\underline{x}$ .

Enfin, pour estimer  $\Lambda \delta$ , on utilise :

$$\Lambda \delta = \sum_{k=1}^q (\omega_k x_k + \sigma_k) \partial_k \left( \frac{\nu}{\rho^\theta} \right) = \rho^{-\theta} \sum_{k=1}^q (\omega_k x_k + \sigma_k) (\partial_k \nu - \theta \rho^{-1} \nu)$$

où  $\nu \in S_{\underline{x}, \rho}^{\theta+1}$ . En particulier,  $\partial_k \nu \in S_{\underline{x}, \rho}^{\theta+1-\omega_k}$ . On a donc  $\Lambda \delta \in S_{\underline{x}, \rho}^1$  comme attendu.

### 7.3.2 Intégration par partie avec $\Lambda$

Si  $u$  est une fonction régulière à support dans l'intersection de  $\Omega \setminus \{\underline{x}\}$  et de la boule  $\rho < \rho_\eta$ , la formule :

$$\int \frac{u^2}{\rho^{2s}} = -\frac{1}{2s} \int \delta^{-1} u^2 \Lambda \left( \frac{1}{\rho^{2s}} \right)$$

donne, après intégration par parties :

$$\int \frac{u^2}{\rho^{2s}} [(Q - 2s) + (\operatorname{div} \Lambda - Q) \delta^{-1} + (\delta^{-1} - 1) Q - \delta^{-2} \Lambda \delta] = -2 \int \frac{u \Lambda u}{\delta \rho^{2s}}.$$

Les propriétés de  $\Lambda$  entraînent pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$(Q - 2s) + (\operatorname{div} \Lambda - Q) \delta^{-1} + (\delta^{-1} - 1) Q - \delta^{-2} \Lambda \delta \geq Q - 2s - \epsilon > 0$$

pour  $s < Q/2$ ,  $\rho \leq \rho_\eta$  et un choix convenable de  $\eta$ .

La preuve de (7.3.4) se réduit donc à vérifier que :

$$\left| \int \frac{u \Lambda u}{\delta \rho^{2s}} \right| \leq \epsilon' \int \frac{u^2}{\rho^{2s}} + C_{\epsilon'} \int \frac{|\underline{x} u|^2}{\rho^{2(s-1)}}. \quad (7.3.7)$$

On utilise cette fois l'expression (7.3.5). Grâce à (7.1.6), on peut écrire :

$$\Lambda = \sum_{k=1}^q \nu_k(x) Z_k$$

avec  $\nu_k \in S_{\mathfrak{X},\rho}^{\omega_k}$ . Posant  $\vartheta_k = \delta^{-1} \rho^{-2s} \nu_k \in S_{\mathfrak{X},\rho}^{\omega_k-2s}$ , on est donc ramené à contrôler les intégrales :

$$I_{k,s} = \int \vartheta_k u (Z_k u)$$

par le membre de droite de (7.3.7).

Pour  $k \leq r_1$ , les intégrales se traitent avec Cauchy-Schwarz :

$$|I_{k,s}| \leq \int \frac{|u|}{\rho^s} \frac{|Z_k u|}{\rho^{s-1}} \leq \left( \int \frac{u^2}{\rho^{2s}} \right)^{1/2} \left( \int \frac{|\mathfrak{X}u|^2}{\rho^{2(s-1)}} \right)^{1/2}$$

puis on applique l'inégalité  $ab \leq \epsilon a^2 + C_\epsilon b^2$ .

Pour les autres intégrales, on utilise l'identité suivante, valable pour tous champs de vecteurs  $A, B$  et toutes fonctions régulières  $u$  et  $\phi$  :

$$\int \phi u [A, B]u = \int \phi u T_{A,B}u - \int (A\phi) u Bu + \int (B\phi) u Au \quad (7.3.8)$$

où  $T_{A,B} = (\operatorname{div} B)A - (\operatorname{div} A)B$ . La vérification de cette identité est élémentaire :

$$([A, B]u|\phi u)_{L^2} = (Bu|A^*(\phi u))_{L^2} - (Au|B^*(\phi u))_{L^2}$$

en notant  $X^* = -X - \operatorname{div} X$  l'adjoint pour le produit scalaire de  $L^2$ . Le terme  $\phi(Au)(Bu)$  se simplifie par antisymétrie.

On applique (7.3.8) avec  $\phi = \rho^{-2s} \theta_k \in S_{\mathfrak{X},\rho}^{\omega_k-2s}$  et  $Z_k = [A, B]$  où  $A$  est un opérateur de dérivation d'ordre  $\omega_k - 1$  et  $B$  un des champs de la famille initiale, donc un opérateur de dérivation d'ordre 1. Ainsi,  $A\phi \in S_{\mathfrak{X},\rho}^{1-2s}$  et  $B\phi \in S_{\mathfrak{X},\rho}^{\omega_k-1-2s}$ . On isole les termes contenant  $Au$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} |I_{k,s}| &\leq \left| \int \tilde{\phi} u Au \right| + C \left( \int \frac{|u|}{\rho^s} \frac{|\mathfrak{X}u|}{\rho^{s-1}} + \int \frac{|u|}{\rho^s} \frac{|\mathfrak{X}u|}{\rho^{s-\omega_k}} \right) \\ &\leq \left| \int \tilde{\phi} u Au \right| + \epsilon \int \frac{|u|^2}{\rho^{2s}} + C_\epsilon \int \frac{|\mathfrak{X}u|^2}{\rho^{2(s-1)}} \end{aligned}$$

avec  $\tilde{\phi} = B\phi + (\operatorname{div} B)\phi \in S_{\mathfrak{X},\rho}^{\omega_k-1-2s}$ . Le champ  $A$  étant un commutateur d'ordre  $\omega_k - 1$ , le premier terme se traite comme  $I_{k',s}$  avec  $\omega_{k'} = \omega_k - 1$  donc  $k' < k$  (ce terme a donc bien déjà été traité, par récurrence).

## 7.4 Translation de l'inégalité de Hardy dans l'échelle de régularité

Pour les espaces de Sobolev usuels, l'inégalité de Hardy se translate dans l'échelle de régularité. Pour  $\sigma$  et  $\varsigma \geq 0$  tels que  $\sigma + \varsigma < q/2$ , on a :

$$\left\| \frac{u}{|x|^\varsigma} \right\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^q)} \leq C_{\sigma,\varsigma} \|u\|_{H^{\sigma+\varsigma}(\mathbb{R}^q)}. \quad (7.4.1)$$

La preuve naturelle de cette inégalité repose malheureusement plus sur l'analyse de Fourier que sur la définition intégrale de la norme  $H^s$  faisant intervenir le quotient  $\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^s}$ .

En utilisant la formule de Leibnitz et l'inégalité de Hardy (7.3.1), on peut la généraliser aux espaces de Sobolev sous-riemanniens lorsque  $\sigma$  est entier.

L'inégalité de Hardy (7.3.1) étant fautive si  $s = Q/2$ , il semble impossible d'atteindre toutes les valeurs fractionnaires de  $(\sigma, \varsigma)$  avec  $\sigma + \varsigma < Q/2$  en utilisant simplement l'interpolation complexe.

Cependant, lorsque la structure sous-riemannienne est celle du groupe de Heisenberg, on peut utiliser la généralisation de la théorie de Littlewood-Paley construite par H. Bahouri, P. Gérard et C.J. Xu [7].

**Théorème 31** *Pour tout couple  $(\varsigma, \sigma) \in \mathbb{R}_+^2$  avec  $\sigma + \varsigma < Q/2$ , il existe une constante  $C_{\sigma, \varsigma} > 0$  telle que (avec les notations du paragraphe §4.5) :*

$$\left\| \frac{v}{\|x\|_g^\varsigma} \right\|_{H^\sigma(\mathbb{H}^d)} \leq C_{\sigma, \varsigma} \|v\|_{H^{\sigma+\varsigma}(\mathbb{H}^d)} \quad (7.4.2)$$

pour toute fonction  $v$  dans  $H^{\sigma+\varsigma}(\mathbb{H}^d)$ .

**Preuve** Le cas  $\varsigma = 0$  est évident. Le cas  $\sigma = 0$  est l'inégalité de Hardy du Théorème 29, énoncée dans le cas particulier du groupe de Heisenberg. On peut donc supposer que  $\sigma > 0$  et  $\varsigma > 0$ . De plus, il suffit de démontrer (7.4.2) avec des normes homogènes. Le calcul paradifférentiel sur le groupe de Heisenberg fournit la loi de produit suivante :

$$\|ab\|_{\dot{H}^\sigma(\mathbb{H}^d)} \leq C \|a\|_{\dot{B}_{2, \infty}^{\frac{Q}{2}-\varsigma}(\mathbb{H}^d)} \|b\|_{\dot{H}^{\sigma+\varsigma}(\mathbb{H}^d)}$$

valable pour  $\varsigma > 0$ ,  $\sigma > 0$  et  $\varsigma + \sigma < Q/2$  (voir [6]). De plus, sous les mêmes hypothèses (voir [3]) :

$$\frac{1}{\|x\|_g^\varsigma} \in \dot{B}_{2, \infty}^{\frac{Q}{2}-\varsigma}(\mathbb{H}^d).$$

La définition précise de l'espace de Besov est donnée par [7]. On peut aussi consulter [2] pour le cas plus simple de  $\mathbb{R}^d$ . ■

## 7.5 Application : éclatement de $H^s(\mathbb{H}^d)$ en couronnes dyadiques

Une application importante de l'inégalité de Hardy est la possibilité d'éclater les espaces de Sobolev en variable d'espace. Par exemple, pour  $k < q/2$  ( $k$  entier), on a :

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^q)}^2 \simeq \sum_{m \geq 0} \|\varphi_m u\|_{H^k(\mathbb{R}^q)}^2 \quad (7.5.1)$$

où  $\varphi_m(x) = \varphi_0(2^m x)$  désigne une partition de l'unité de  $\mathbb{R}^q \setminus \{0\}$  par des fonctions régulières vérifiant

$$\text{supp } \varphi_m \subset \{x \in \mathbb{R}^q; 2^{-m-1} \leq |x| \leq 2^{-m+1}\}.$$

La preuve est immédiate et se réduit, pour  $k$  entier, à appliquer la formule de Leibnitz et l'inégalité de Hardy (7.0.1).

Au chapitre 8, on sera amené à étudier des singularités ponctuelles par une méthode d'éclatement (voir aussi [4] ou [22]). Le succès de cette méthode repose, en grande partie, sur la possibilité de généraliser (7.5.1) aux espaces de Sobolev construits avec des champs de vecteurs sous-riemanniens.

L'inégalité de Hardy sous-riemannienne (7.3.1) est vraie sous des hypothèses assez générales, par exemple pour les familles vérifiant la condition de Hörmander d'ordre 2 ou 3. L'inégalité translatée dans l'échelle de régularité est vraie sous ces mêmes hypothèses, mais tous les indices ne sont pas nécessairement accessibles (du moins, pas avec la démonstration exposée ci-dessus). Pour simplifier l'exposé on va donc se contenter d'étudier le groupe de Heisenberg afin de pouvoir appliquer (7.4.2). L'essentiel des résultats qui vont suivre pourrait cependant se généraliser sous des hypothèses moins restrictives, quitte par exemple à renoncer aux indices fractionnaires "extrêmes".

Dans la suite, on considère le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^d$ , introduit au paragraphe §4.5. Par analogie avec (7.1.14), on définit une famille de contractions dyadiques :

$$\mathfrak{d}_m(p, q; t) = (2^{-m}p, 2^{-m}q; 2^{-2m}t). \tag{7.5.2}$$

On a  $\|\mathfrak{d}_m(x)\|_g = 2^{-m} \|x\|_g$ . Rappelons que la dimension homogène de  $\mathbb{H}^d$  est  $Q = 2d + 2$ .

**Remarque** - Certains auteurs utilisent plutôt  $\delta_{2^m} = \mathfrak{d}_m^{-1}$ . Cependant, dans une technique d'éclatement, la plupart des formules font intervenir  $\mathfrak{d}_m$  et nous assumerons ce choix pour simplifier les notations.  $\diamond$

On définit aussi deux couronnes

$$\mathcal{C}_0 = \{x; 1/12 \leq \|x\|_g \leq 10/3\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}'_0 = \{x; 3/4 \leq \|x\|_g \leq 8/3\} \tag{7.5.3}$$

avec  $\mathcal{C}'_0 \subset \mathcal{C}_0$ . Le fait que  $\mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(\mathcal{C}'_0; \mathcal{C}_0) \geq \varepsilon_0$  ne sera pas utilisé immédiatement, mais est nécessaire dans la preuve du Lemme 44 (p. 158).

**Théorème 32** *Pour  $0 \leq s < Q/2$ , il existe une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{C}'_0)$  telle que*

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2 \simeq \sum_{m \geq 0} 2^{-m(Q-2s)} \|(u \circ \mathfrak{d}_m)\varphi\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2 \tag{7.5.4}$$

pour toute fonction  $u \in H^s(\mathbb{H}^d)$  supportée dans la boule  $\|x\|_g \leq 1$ .

A la différence de (7.5.1), l'énoncé précédent contient non seulement un découpage en couronnes, mais aussi une remise à l'échelle des divers fragments.

La fin du chapitre est consacrée à la démonstration du Théorème 32. On ne distinguera les valeurs entières de  $s$  que pour certaines démonstrations de résultats intermédiaires, la stratégie générale restant largement indépendante de  $s$ .

Soit  $\varphi_0$  la fonction de base de la théorie de Littlewood-Paley dans  $\mathbb{R}$ , supportée dans  $[3/4; 8/3]$  et à valeurs dans  $[0, 1]$ . Pour une construction précise, voir par exemple [16, §2.1]. On définit alors un fonction de troncature autour de l'anneau  $\mathfrak{d}_m(\mathcal{C}_0)$  par :

$$\varphi_m = \varphi \circ \mathfrak{d}_m^{-1} \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = \varphi_0(\|x\|_g). \tag{7.5.5}$$

Ainsi, si  $u$  est supportée dans la boule  $\{x; \|x\|_g \leq 1\}$ , on a :

$$\forall x \neq 0, \quad u(x) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m(x)u(x).$$

De plus, lorsque  $|m - m'| \geq 2$ ,

$$\text{supp } \varphi_m \cap \text{supp } \varphi_{m'} = \emptyset. \quad (7.5.6)$$

On note  $\mathbb{1}_m$  la fonction caractéristique du support de  $\varphi_m$  ; on a donc  $\sum \mathbb{1}_m \leq 3$ .

La remise à l'échelle n'étant pas spécifique au découpage dyadique, on définit, pour  $\lambda \geq 1$  :

$$\mathfrak{d}'_\lambda(p, q; t) = (p/\lambda, q/\lambda; t/\lambda^2).$$

On remarque que :

$$(u \circ \mathfrak{d}_m)\varphi = (\varphi_m u) \circ \mathfrak{d}'_{2m}.$$

Le Théorème 32 résulte alors immédiatement de la conjonction des deux résultats suivants.

**Lemme 33** *Pour  $0 \leq s < Q/2$ , il existe une constante  $C_s > 0$  telle que toute fonction  $u$  de  $H^s(\mathbb{H}^d)$ , à support dans la boule  $\|x\|_g \leq 1$ , vérifie :*

$$C_s^{-1} \|u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2 \leq \sum_{m \geq 0} \|\varphi_m u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2 \leq C_s \|u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2. \quad (7.5.7)$$

**Lemme 34** *Pour  $0 \leq s < Q/2$ , il existe une constante  $C'_s > 0$  telle que pour tout  $\lambda \geq 1$  et toute fonction  $u$  dans  $H^s(\mathbb{H}^d)$  à support dans la boule  $\|x\|_g \leq \lambda^{-1}$ , on a :*

$$C'_s{}^{-1} \|u \circ \mathfrak{d}'_\lambda\|_{H^s(\mathbb{H}^d)} \leq \lambda^{\frac{Q}{2}-s} \|u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)} \leq C'_s \|u \circ \mathfrak{d}'_\lambda\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}. \quad (7.5.8)$$

### Preuve du Lemme 33 : découpage en couronnes

Le Lemme 33 contient deux affirmations : d'une part la possibilité de découper une fonction de  $H^s(\mathbb{H}^d)$  en couronnes dyadiques spatiales, et d'autre part la possibilité de la reconstruire à partir de ces blocs.

#### □ Reconstruction à partir des blocs dyadiques

La première étape de la démonstration du Lemme 33 consiste à montrer que, pour tout  $s \geq 0$  :

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2 \leq C_s \sum_{m \geq 0} \|\varphi_m u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2. \quad (7.5.9)$$

Cette partie de la démonstration ne nécessite pas que  $s < Q/2$ .

Comme le support de  $u$  est un sous-ensemble de  $\{x ; \|x\|_g \leq 1\}$ , on a  $u = \sum \varphi_m u$ , donc :

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2 = \sum_{m, m'} (\varphi_m u | \varphi_{m'} u)_{H^s(\mathbb{H}^d)}.$$

Lorsque  $|m - m'| \geq 2$ , la propriété (7.5.6) implique que  $(\varphi_m u | \varphi_{m'} u)_{H^k(\mathbb{H}^d)} = 0$  pour tout entier  $k$ . En conséquence, en reprenant la formule (4.5.4) pour calculer  $\|u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2$ , on obtient comme borne supérieure :

$$3 \sum_{m \geq 0} \|\varphi_m u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2 + \mathbb{1}_{s \notin \mathbb{N}} \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ |m-m'| \geq 2}} \iint_{\Delta_0} \frac{(\Phi_m^\alpha u(x) - \Phi_m^\alpha u(y)) (\Phi_{m'}^\alpha u(x) - \Phi_{m'}^\alpha u(y))}{\mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(x, y)^{Q+2\sigma}} dx dy.$$

Lorsque  $s$  n'est pas entier, on utilise la notation naturelle  $s = k + \sigma$  avec  $(k, \sigma) \in \mathbb{N} \times ]0, 1[$ . On a aussi posé

$$\Phi_m^\alpha u = \hat{\mathfrak{X}}^\alpha(\varphi_m u).$$

Quitte à échanger les rôles de  $x$  et  $y$ , on peut supposer que  $(x, y) \in \text{supp } \varphi_m \times \text{supp } \varphi_{m'}$  car dans tous les autres cas, la fonction à intégrer est identiquement nulle. L'inégalité de Cauchy-Schwartz permet alors de borner l'intégrale par :

$$\sum_{\substack{|\alpha|=k \\ |m-m'| \geq 2}} \iint_{\Delta_0} \frac{|\Phi_m^\alpha u(x) - \Phi_m^\alpha u(y)|^2}{\mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(x, y)^{Q+2\sigma}} \mathbb{1}_m(x) \mathbb{1}_{m'}(y) dx dy \leq 3 \sum_{m \geq 0} \|\varphi_m u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2.$$

La dernière inégalité résulte à nouveau de (7.5.6) et plus précisément du fait que  $\sum \mathbb{1}_{m'} \leq 3$ .

□ **Découpage en couronnes dyadiques**

La deuxième étape de la preuve du Lemme 33 consiste à montrer que

$$\sum_{m \geq 0} \|\varphi_m u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2 \lesssim \|u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2 \tag{7.5.10}$$

lorsque  $s < Q/2$ .

D'après la définition (7.5.5), les dérivées de  $\varphi_m$  sont données par la formule suivante :

$$(\hat{\mathfrak{X}}^\alpha \varphi_m)(x) = 2^{m|\alpha|} (\hat{\mathfrak{X}}^\alpha \varphi) \circ \mathfrak{d}_m^{-1}(x) = \frac{\varphi_{m,\alpha}(x)}{\|x\|_g^{|\alpha|}} \tag{7.5.11}$$

avec

$$\varphi_{m,\alpha} = \left( \|\cdot\|_g^{|\alpha|} (\hat{\mathfrak{X}}^\alpha \varphi) \right) \circ \mathfrak{d}_m^{-1}. \tag{7.5.12}$$

Par exemple,  $\varphi_m = \varphi_{m,0}$ .

La fonction  $\varphi_{m,\alpha}$  est supportée dans la couronne  $\mathfrak{d}_m(\mathcal{C}_0)$ . La fonction  $\varphi_{m,\alpha} \circ \mathfrak{d}_m$  ne dépend pas de  $m$ ; c'est une fonction bornée sur  $\mathcal{C}_0$ . Grâce à la propriété (7.5.6) de quasi-disjonction des supports, on en déduit :

$$\sup_{x \in \mathbb{H}^d} \sum_{m \geq 0} |\varphi_{m,\alpha}(x)|^2 < +\infty. \tag{7.5.13}$$

**Remarque** - Dans la preuve, on utilise les propriétés (7.5.11)–(7.5.13) mais pas le fait que la famille  $(\varphi_m)_{m \geq 0}$  est une partition de l'unité. En conséquence, (7.5.10) est valable aussi pour toute famille  $\varphi_m$  définie par (7.5.5) à partir d'une fonction régulière arbitraire  $\varphi$  supportée dans  $\mathcal{C}_0$ . ◊

**Premier cas :  $s = k$  est entier.** Lorsque  $s = k$  est un entier, la preuve de (7.5.10) est particulièrement simple. L'application successive de la formule de Leibnitz, puis des formules (7.5.11) et (7.5.13) et enfin de l'inégalité de Hardy (7.3.1) à l'ordre  $|\alpha| \leq k < Q/2$  donne la succession d'inégalités suivante :

$$\sum_{m \geq 0} \|\varphi_m u\|_{H^k(\mathbb{H}^d)}^2 \leq C \sum_{\substack{m \geq 0 \\ |\alpha|+|\beta| \leq k}} \int_{\mathbb{H}^d} \frac{|\varphi_{m,\alpha}(x)|^2 |\hat{\mathfrak{X}}^\beta u(x)|^2}{\|x\|_g^{|\alpha|}} dx \leq C'_k \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq k} \|\hat{\mathfrak{X}}^\beta u\|_{H^{|\alpha|}(\mathbb{H}^d)}^2.$$

Le membre de droite est borné par  $\|u\|_{H^k(\mathbb{H}^d)}^2$ .

**Deuxième cas :**  $s \in ]0, 1[$ . Comme  $Q \geq 4$ , l'étude du premier cas permet déjà d'affirmer que le Lemme 33 est vrai pour  $s = 0$  et pour  $s = 1$ . Le résultat correspondant à  $s \in ]0, 1[$  en découle par interpolation complexe.

Plus précisément, on applique le Lemme 3.3 de [5] dont on rappelle les notations. Pour  $k = 0$  et  $k = 1$ , on définit :

$$E_k = \left\{ u \in L^2(\mathbb{H}^d); \sum \|\varphi_m v\|_{E_{k,m}}^2 \right\}$$

où  $E_{k,m} = \{u \in H^k(\mathbb{H}^d); \text{supp } u \subset \mathfrak{d}_m(\mathcal{C}_0)\}$ . Ce lemme affirme que, pour  $0 < s < 1$  :

$$[E_0, E_1]_s = \left\{ u \in L^2(\mathbb{H}^d); \sum \|\varphi_m v\|_{E_{s,m}}^2 \right\} \quad (7.5.14)$$

avec  $E_{s,m} = [E_{0,m}, E_{1,m}]_s$ . En deux mots, le point clef de sa démonstration est le fait que l'opérateur  $(\text{Id} - \Delta_{\mathbb{H}^d})^{1/2}$  de domaine  $H^1(\mathbb{H}^d)$  est auto-adjoint sur  $L^2(\mathbb{H}^d)$ .

Le lemme étant déjà démontré pour  $k = 0$  et  $k = 1$ , on a donc bien  $E_k = H^k(\mathbb{H}^d)$ ,

$$[E_0, E_1]_s = H^s(\mathbb{H}^d) \quad \text{et} \quad E_{s,m} = \{u \in H^s(\mathbb{H}^d); \text{supp } u \subset \mathfrak{d}_m(\mathcal{C}_0)\}.$$

Comme (7.5.14) contient l'équivalence des normes, le Lemme 33 est maintenant démontré pour toute valeur  $s \in [0, 1]$ .

**Troisième cas :**  $s = k + \sigma$  avec  $(k, \sigma) \in \mathbb{N} \times ]0, 1[$ . On ne peut plus procéder par interpolation complexe lorsque, par exemple,  $s > \frac{Q}{2} - 1$ . En effet, l'inégalité de Hardy (7.3.1) étant fautive pour  $s = Q/2$ , il manque le "pivot" de droite nécessaire à l'interpolation. On utilise plutôt l'inégalité translatée (7.4.2).

La formule de Leibnitz donne :

$$\sum_{m \geq 0} \|\varphi_m u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2 \leq \sum_{m \geq 0} \|\varphi_m u\|_{H^k(\mathbb{H}^d)}^2 + \sum_{\substack{m \geq 0 \\ |\alpha| + |\beta| = k}} \left\| \varphi_{m,\alpha} \cdot \frac{\hat{\mathfrak{X}}^\beta u}{\|x\|_g^{|\alpha|}} \right\|_{H^\sigma(\mathbb{H}^d)}^2.$$

L'astuce consiste à appliquer maintenant le Lemme 33 dans les cas qu'on a déjà obtenus.

La première somme est bornée par  $\|u\|_{H^k(\mathbb{H}^d)}^2$  d'après le cas d'indice entier  $k$ . Pour la seconde somme, on utilise la remarque initiale, à savoir que l'inégalité (7.5.10) est vraie pour  $s \in [0, 1]$  en remplaçant  $\varphi_m$  par  $\varphi_{m,\alpha}$ . Ainsi,

$$\sum_{m \geq 0} \left\| \varphi_{m,\alpha} \cdot \frac{\hat{\mathfrak{X}}^\beta u}{\|x\|_g^{|\alpha|}} \right\|_{H^\sigma(\mathbb{H}^d)}^2 \leq C \left\| \frac{\hat{\mathfrak{X}}^\beta u}{\|x\|_g^{|\alpha|}} \right\|_{H^\sigma(\mathbb{H}^d)}^2 \leq C' \left\| \hat{\mathfrak{X}}^\beta u \right\|_{H^{|\alpha| + \sigma}(\mathbb{H}^d)}^2$$

la dernière inégalité résultant de (7.4.2).

### Preuve du Lemme 34 : changement d'échelle

Ce lemme affirme que, avec des restrictions convenables sur le support de la fonction, la norme inhomogène se comporte comme la norme homogène dans les dilatations anisotropes.

La distance  $\mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}$  étant uniformément à la distance de jauge, on a :

$$\mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(\mathfrak{d}'_\lambda(x), \mathfrak{d}'_\lambda(y)) \simeq \|\mathfrak{d}'_\lambda(x^{-1}y)\|_g = \lambda^{-1} \|x^{-1}y\|_g \simeq \lambda^{-1} \mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(x, y).$$

Le changement de variables  $x' = \mathfrak{d}'_\lambda(x)$  donne donc :

$$\|u \circ \mathfrak{d}'_\lambda\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \lambda^{Q-2|\alpha|} \|\hat{\mathfrak{X}}^\alpha u\|_{L^2}^2 + \mathbb{1}_{\sigma \neq 0} \lambda^{Q-2s} \sum_{|\alpha|=k} \iint_{\mathfrak{d}'_\lambda(\Delta_0)} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}^\alpha u(x') - \hat{\mathfrak{X}}^\alpha u(y')|^2}{\mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(x', y')^{Q+2\sigma}} dx' dy'$$

avec  $s = k + \sigma$  et  $(k, \sigma) \in \mathbb{N} \times [0, 1[$ .

□ **Borne supérieure de  $\|u \circ \mathfrak{d}'_\lambda\|_{H^s}$**

Par hypothèse, on a  $\text{supp } u \subset \{x; \lambda \|x\|_g \leq 1\}$ . Comme  $\lambda \geq 1$ , on a aussi  $\mathfrak{d}'_\lambda(\Delta_0) \subset \Delta_0$ . Ainsi :

$$\lambda^{2s-Q} \|u \circ \mathfrak{d}'_\lambda\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \int \frac{|\hat{\mathfrak{X}}^\alpha u(x)|^2}{\|x\|_g^{2(s-|\alpha|)}} dx + \mathbb{1}_{\sigma \neq 0} \sum_{|\alpha|=k} \iint_{\Delta_0} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}^\alpha u(x') - \hat{\mathfrak{X}}^\alpha u(y')|^2}{\mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(x', y')^{Q+2\sigma}} dx' dy'.$$

L'inégalité de Hardy (7.3.1) d'ordre  $s - |\alpha| \leq s < Q/2$  entraîne que chaque terme de la première somme est borné par  $\|u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2$ . L'intégrale double fait partie de la définition de la norme (4.5.4).

□ **Borne inférieure de  $\|u \circ \mathfrak{d}'_\lambda\|_{H^s}$**

Lorsque  $s = k$  est entier, on utilise simplement le fait que  $\lambda \geq 1$  :

$$\lambda^{2k-Q} \|u \circ \mathfrak{d}'_\lambda\|_{H^k(\mathbb{H}^d)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \lambda^{2(k-|\alpha|)} \|\hat{\mathfrak{X}}^\alpha u\|_{L^2}^2 \geq \sum_{|\alpha| \leq k} \|\hat{\mathfrak{X}}^\alpha u\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H^k(\mathbb{H}^d)}^2.$$

En particulier, ce sens de l'inégalité est donc vrai, sans aucune restriction sur le support de  $u$ .

Cette inégalité est équivalente au fait que l'opérateur

$$T_\lambda : u \mapsto u \circ (\mathfrak{d}'_\lambda)^{-1}$$

est borné sur  $H^k(\mathbb{H}^d)$  avec une norme inférieure à  $\lambda^{k-\frac{Q}{2}}$ . La famille d'espaces  $H^s(\mathbb{H}^d)$  est stable par interpolation complexe et le foncteur d'interpolation est exact (voir [9]). En conséquence :

$$\|T_\lambda u\|_{[H^k, H^{k+1}]_s} \leq \lambda^{s-\frac{Q}{2}} \|u\|_{[H^k, H^{k+1}]_s}.$$

D'après le Théorème 13 p. 112, la norme d'interpolation complexe est équivalente à la norme usuelle (4.5.4). Ainsi, pour tout  $u \in H^s(\mathbb{H}^d)$  :

$$\|u \circ \mathfrak{d}'_\lambda\|_{H^s(\mathbb{H}^d)} \geq C_s \lambda^{\frac{Q}{2}-s} \|u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}.$$

Ce calcul clôt la preuve du Lemme 34 et donc aussi celle du Théorème 32.

## Chapitre 8

# Théorie des traces sur le groupe de Heisenberg

Soit  $\Omega$  un ouvert régulier du groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^d$ . Le problème de Dirichlet naturel est :

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^d} u + u = f \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \quad \text{avec} \quad \Delta_{\mathbb{H}^d} = - \sum_{X \in \mathfrak{X}} X^* X. \quad (8.0.1)$$

Ce problème a été largement étudié pour des données régulières par exemple, continues ou lipschitziennes (voir [11] et [22]). Cependant, la théorie hilbertienne des données moins régulières ne semble pas avoir été développée. On s'intéresse par exemple à une donnée  $f$  de classe  $H^s(\Omega; \mathfrak{X})$  au sens des espaces de Sobolev sous-riemanniens sur  $\mathbb{H}^d$  (voir §4.5). Rappelons que la structure de dérivation  $\mathfrak{X}$  est définie par les champs qui annulent la 1-forme canonique :

$$\kappa = dt + 2(pdq - qdp).$$

L'espace naturel pour la condition aux limites  $g$  est l'espace des traces sur  $\Sigma = \partial\Omega$  de  $H^{s+2}(\Omega; \mathfrak{X})$ .

La principale difficulté (qui n'apparaît pas dans l'étude classique du problème de Dirichlet sur  $\mathbb{R}^q$ ) est qu'en certains points  $x \in \Sigma$ , le sous-espace de  $T_x \mathbb{H}^d$  engendré par les dérivations, *i.e.*  $\ker \kappa(x)$ , coïncide avec l'espace tangent  $T_x \Sigma$  à la surface de trace.

**Définition** – Un point  $x \in \Sigma$  est dit caractéristique si  $\ker \kappa(x) = T_x \Sigma$ . L'ensemble des points caractéristiques de  $\Sigma$  est noté  $\text{Car}_\Sigma$ .

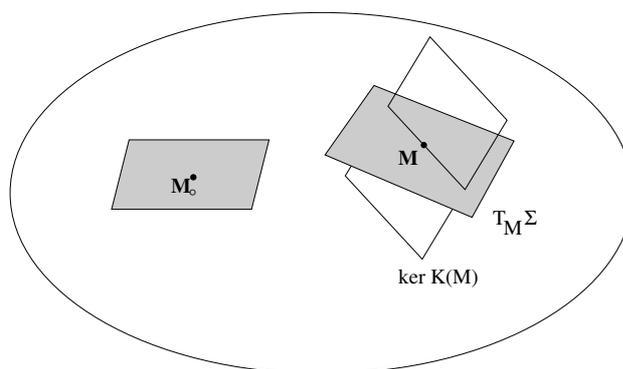


FIG. 8.1 – Points caractéristiques et points ordinaires.

Le bord d'un ouvert  $C^\infty$  possède toujours au moins un point caractéristique mais on peut montrer que  $\text{Car}_\Sigma$  est de mesure nulle (voir [19]). Cependant, lorsque  $s < Q/2$ , les restrictions à  $\Sigma$  des

fonctions  $H^s(\mathbb{H}^d)$  peuvent avoir un comportement singulier au voisinage des points caractéristiques. L'objet de ce chapitre est de donner une description exacte de ces singularités grâce à un théorème de trace et de relèvement.

Le théorème principal (Théorème 38) concerne en fait seulement une classe particulière de surfaces  $\Sigma$ , dont les points caractéristiques sont "fortement isolés" [4] ou "non dégénérés" [22]. Cependant, cette classe étant définie par la non-annulation d'un certain déterminant relié à la géométrie, ce cas est générique dans l'ensemble de toutes les surfaces. Sous cette hypothèse géométrique, il est possible de contrôler la formation de la singularité au voisinage des points caractéristiques par une méthode d'éclatement. Cette méthode a déjà été mise en oeuvre dans l'étude du "cas modèle" présentée au chapitre 5 et s'inspire de travaux antérieurs (voir [4] ou [22]).

Remarquons enfin que les résultats pourraient être étendus, au moins partiellement, à des familles sous-riemanniennes plus générales. Mais pour des raisons techniques déjà évoquées au paragraphe §7.5, on limite l'exposé au cas du groupe de Heisenberg.

### 8.1 Résultats classiques

Un certain nombre de travaux traitent du problème de la description des traces des espaces de Sobolev sous-riemanniens. Cependant, aucun travail ne semble avoir été réalisé dans le cas où simultanément  $s \neq 1$  et  $\text{Car}_\Sigma \neq \emptyset$ .

Le cas particulier  $s = 1$  a été étudié par plusieurs auteurs, éventuellement dans un contexte plus général que celui du groupe de Heisenberg. Pour le cas non-caractéristique, on peut citer les Théorèmes 1.1-1.2 de [10] ou le Corollaire 3.3 de [26]. Le Théorème 1.2 de [4] traite des points caractéristiques non dégénérés sur  $\mathbb{H}^d$ . Le cas des hypersurfaces homogènes ayant un point caractéristique dégénéré est traité dans [5]. Cependant, dans tous ces résultats, l'espace des traces est construit sur  $L^2(\Sigma)$  ou  $L^p(\Sigma)$ . Or, le Théorème 38 ci-dessous montre que le cas  $s = 1$  est en fait extrêmement particulier. Le "bon" espace de base pour décrire les traces est, en général, un espace présentant un poids au voisinage de  $\text{Car}_\Sigma$ , avec un poids qui s'exprime comme une fonction élevée à la puissance  $s - 1$ .

En l'absence de points caractéristiques, [4] donne une caractérisation de l'espace des traces, pour toute régularité  $s > 1/2$ . Ce résultat repose sur un théorème de traces abstrait en calcul de Weyl-Hörmander et s'étend en particulier à toute famille de champs de vecteurs vérifiant la condition de Hörmander d'ordre 2 (voir §8.5).

L'espace de traces peut être décrit de différentes façons. Par exemple, lorsque  $\text{Car}_\Sigma = \emptyset$ , S. Berhanu et I. Pesenson [10] décrivent les traces de  $H^1(\mathbb{H}^d)$  par

$$\|v\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \sum_{R \in \hat{\mathcal{X}}_*} \int_0^\delta \vartheta^{-2} \sup_{|\tau| \leq \vartheta} \|(e^{\tau R} - \text{Id})v\|_{L^2(\Sigma)}^2 d\vartheta \tag{8.1.1}$$

et démontrent un théorème de relèvement. Ce résultat se généralise aux espaces de Sobolev calqués sur  $L^p$  avec une famille de champs vérifiant la condition de Hörmander d'ordre fini et une surface de trace non-caractéristique.

Toujours sous l'hypothèse  $\text{Car}_\Sigma = \emptyset$ , R. Monti and D. Morbidelli [26] démontrent que les traces de  $H^1(\mathbb{H}^d)$  vérifient :

$$\|v\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \iint_{\substack{\Sigma \times \Sigma \\ d(x,y) \leq \delta}} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{\mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(x,y)} \frac{dx dy}{\text{Vol}(B_{x,y} \cap \Sigma)} < \infty \tag{8.1.2}$$

avec  $B_{x,y} = \{z \in \mathbb{H}^d; d(x,z) \leq d(x,y)\}$  et en notant Vol la mesure de surface sur  $\Sigma$ . Leur conclusion reste valable sous des hypothèses extrêmement générales. Par contre, ils ne démontrent pas de théorème de relèvement.

Il est d'ailleurs assez facile de vérifier que (8.1.2) n'est pas, en général, associé à un théorème de relèvement. Le contre-exemple le plus simple est celui du plan de Grushin  $\mathbb{R}^2$  avec les champs de vecteurs

$$\partial_{x_1} \quad \text{et} \quad x_1 \partial_{x_2}.$$

La droite  $\Sigma = \{(0, x_2); x_2 \in \mathbb{R}\}$  est non-caractéristique. Le long de  $\Sigma$ , la distance sous-riemannienne est équivalente à  $\sqrt{|x_2 - x_2'|}$ . Ainsi, (8.1.2) entraîne :

$$C^{-1} \iint_{|x_2 - x_2'| < 1} \frac{|u(0, x_2) - u(0, x_2')|^2}{|x_2 - x_2'|} dx_2 dx_2' \leq \|\partial_{x_1} u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|x_1 \partial_{x_2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Cependant, le véritable espace des traces est connu pour être  $H^{1/4}(\Sigma)$  : une preuve particulièrement simple est donnée comme exemple d'application du Théorème 1.2 de [4]; on peut aussi s'en convaincre en remarquant que la norme  $\|u(0, \cdot)\|_{\dot{H}^{1/4}(\Sigma)}$  est homogène à

$$\|\partial_{x_1} u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|x_1 \partial_{x_2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$$

pour la transformation d'échelle  $u(x_1, x_2) \mapsto u(\lambda x_1, \lambda^2 x_2)$ .

L'impossibilité d'avoir un théorème de relèvement indique que la régularité des traces sur  $\Sigma$  ne peut pas, en général, être décrite au moyen de la seule distance de Carnot ambiante et qu'il est nécessaire d'étudier plus en détail la géométrie du problème.

## 8.2 Géométrie du problème

Soit  $\Sigma$  une hypersurface bornée de  $\mathbb{H}^d$ , régulière au sens des variétés  $C^\infty$ . Le but de cette section est de définir une structure de dérivation sur  $\Sigma$  qui permette de décrire convenablement les traces de  $H^s(\mathbb{H}^d)$ .

### 8.2.1 Hypothèse de non-dégénérescence des points caractéristiques

Une définition implicite de  $\Sigma$  au voisinage d'un point  $x_0$  est une fonction  $g : \mathbb{H}^d \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, localement,  $\Sigma = g^{-1}(\{0\})$  et  $dg(x_0) \neq 0$ .

**Définition** – Soit  $x_0$  un point caractéristique de  $\Sigma$  et  $g$  une définition implicite locale de  $\Sigma$ . Le point  $x_0$  est dit non-caractéristique lorsque, pour tout  $x \in \Sigma$  suffisamment proche de  $x_0$ , on a :

$$C^{-1} \mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(x, x_0)^2 \leq \sum_{Z \in \hat{\mathfrak{X}}} |(Zg)(x)|^2 \leq C \mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(x, x_0)^2. \quad (8.2.1a)$$

Cette hypothèse est équivalente à la non dégrénescence de la matrice hessienne (non-symétrique) :

$$\text{rg}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} X_i X_j g(x_0) & X_i Y_j g(x_0) \\ Y_i X_j g(x_0) & Y_i Y_j g(x_0) \end{pmatrix} = 2d. \quad (8.2.1b)$$

**Remarque** - Soit  $x = x_0 \cdot (p, q; t)$  un point de  $\Sigma$  situé au voisinage de  $x_0$ . Comme  $x_0$  est un point caractéristique, la surface  $\Sigma$  est localement contenue dans le "cône"  $c|t| \leq p^2 + q^2$  (voir Fig. 8.2 p. 152) donc :

$$\mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(x, x_0) \simeq \sqrt{p^2 + q^2}. \quad (8.2.2)$$

En d'autres termes, la restriction de  $\mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(x, x_0)$  à  $\Sigma$  est localement équivalente à la distance euclidienne le long de  $\Sigma$ .  $\diamond$

Les points caractéristiques non dégénérés sont isolés dans  $\Sigma$ . L'hypothèse (8.2.1a) a été introduite par [22] sous le nom de *point caractéristique fortement isolé*. La forme équivalente (8.2.1b) apparaît dans [4].

Avant de continuer, voici une formulation géométrique de l'hypothèse de non-dégénérescence. La position relative de  $\Sigma$  et du champ de  $2d$ -plans défini par la 1-forme canonique  $\kappa$  est décrite par le couple  $(\pi_\kappa, \pi_\Sigma)$  :

$$\pi_\kappa : \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \rightarrow \Gamma_x \\ x \mapsto \ker \kappa(x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \pi_\Sigma : \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \rightarrow \Gamma_x \\ x \mapsto \mathcal{T}_x \Sigma \end{array} \right.$$

où  $\Gamma = \mathcal{G}_{2d}(\mathbb{T} \mathbb{H}^d)|_\Sigma$  désigne la variété Grassmannienne des hyperplans de  $\mathbb{T} \mathbb{H}^d$ , au dessus de  $\Sigma$ .

En général, on a  $\dim(\pi_\kappa(x) \cap \pi_\Sigma(x)) = 2d - 1$ , sauf aux points caractéristiques :

$$\text{Car}_\Sigma = \{x \in \Sigma; \pi_\kappa(x) = \pi_\Sigma(x)\}. \quad (8.2.3)$$

La propriété suivante unifie le point de vue de [4] et celui de [22] et implique la généricité de la notion de non-dégénérescence parmi les surfaces lisses.

**Proposition 35** *Un point caractéristique de la surface  $\Sigma$  est non-dégénéré si et seulement si le couple  $(\pi_\kappa, \pi_\Sigma)$  est transverse à la diagonale du produit fibré  $\Gamma \times_\Sigma \Gamma$ .*

**Preuve** Soit  $g$  une définition implicite de  $\Sigma$  dans un voisinage du point caractéristique  $x_0$ . L'identité

$$dg = \sum_{j=1}^d (X_j g) dp_j + (Y_j g) dq_j + (\partial_t g) \kappa$$

implique que la transversalité affirmée par la Proposition 35 est équivalente à celle de l'application

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{2d} \\ x \mapsto (X_i g(x); Y_i g(x))_{1 \leq i \leq d} \end{array} \right.$$

par rapport à l'origine de  $\mathbb{R}^{2d}$ . En d'autres termes, elle signifie que cette application est une carte de  $\Sigma$  au voisinage de  $x_0$ .

Comme  $(Z(x_0))_{Z \in \hat{\mathfrak{X}}}$  est une base de  $\mathbb{T}_{x_0} \Sigma$  sur  $\mathbb{R}$ , cette propriété est encore équivalente à l'inversibilité de la matrice hessienne (8.2.1b). L'inégalité (8.2.1a) vient alors de ce que la restriction à  $\Sigma$  de la distance  $\mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(x, x_0)$  est équivalente à la distance euclidienne  $|x - x_0|$ .  $\blacksquare$

### 8.2.2 Projection de la structure de dérivation

Dans toute la suite, on supposera que  $\Sigma$  est une surface  $C^\infty$  bornée de  $\mathbb{H}^d$  dont les points caractéristiques sont non-dégénérés. Ces hypothèses sont génériques parmi les hypersurfaces.

On note  $\text{Car}_\Sigma = \{x_1, \dots, x_N\}$  et

$$\Sigma^* = \Sigma \setminus \text{Car}_\Sigma. \quad (8.2.4)$$

Pour  $x \in \Sigma^*$ , on définit :

$$\omega(x) = \min\{1; \mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(x, x_1); \dots; \mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(x, x_N)\}. \quad (8.2.5)$$

Rappelons que  $\omega(x) \simeq \sqrt{p^2 + q^2}$  si  $x = x_n \cdot (p, q; t)$  est un point de  $\Sigma$  voisin de  $x_n$ . L'hypersurface  $\Sigma^*$  est munie de la mesure :

$$d\mu_x = \omega(x) dx|_{\Sigma^*}. \quad (8.2.6)$$

Enfin, on considère l'anneau des fonctions quasi-homogènes de degré 0 au voisinage de  $\text{Car}_\Sigma$  :

$$A = \left\{ \Phi \in C^\infty(\Sigma^*); |\nabla_\Sigma^\alpha \Phi| \leq C_\alpha \omega^{-|\alpha|} \right\} \quad (8.2.7)$$

où  $\nabla_\Sigma$  désigne une base locale des champs tangents à  $\Sigma$  au voisinage de chaque point caractéristique.

La projection sur  $\Sigma$  de la structure de dérivation naturelle de  $\mathbb{H}^d$  (voir la Proposition 8 p.100) est définie de la manière suivante.

**Définition** – *La structure de dérivation  $\mathfrak{X}_*$  sur  $(\Sigma^*; d\mu)$  est le  $A$ -module engendré par les champs de vecteurs tangents à  $\Sigma$ , qui appartiennent au noyau de la 1-forme  $\kappa$  et qui s'annulent en tout point de  $\text{Car}_\Sigma$ .*

En pratique, la structure projetée se calcule grâce à la propriété suivante.

**Proposition 36** *Si  $g$  est une définition implicite locale de  $\Sigma$ , la famille*

$$\hat{\mathfrak{X}}_* : \{R_{i,j} = (Z_i g)Z_j - (Z_j g)Z_i\}_{Z_i, Z_j \in \hat{\mathfrak{X}}} \quad (8.2.8)$$

*engendre la structure  $\mathfrak{X}$  comme  $A$ -module.*

**Preuve** C'est un calcul immédiat (voir [4]). Par construction, ces champs sont dans  $\mathfrak{X}_*$ . Inversement, si  $X \in \mathfrak{X}_*$ , on a :

$$X = \sum \alpha_j Z_j$$

avec  $Xg = 0$  et  $X(x_n) = 0$  pour tout  $x_n \in \text{Car}_\Sigma$ . Supposons que  $Z_{1g}(x_n) \neq 0$ ; alors au voisinage de  $x_n$  on a :

$$X = \sum \frac{\alpha_j}{Z_{1g}} R_{1,j} + \frac{1}{Z_{1g}} \sum \alpha_j (Z_j g) Z_1 = \sum \beta_j R_{1,j}$$

avec  $\beta_j = \frac{\alpha_j}{Z_{1g}} \in A$ . ■

La structure projetée est de rang constant. Pour tout  $x \in \Sigma^*$  :

$$\text{rg}_{\mathbb{R}} \hat{\mathfrak{X}}_*(x) = 2d - 1 \quad (8.2.9)$$

car  $\mathfrak{X}_*$  est par exemple engendrée par la sous-famille libre  $R_{1,2}, R_{1,3}, \dots, R_{1,2d}$  si  $Z_{1g} \neq 0$ .

## 8.2.3 Sous-ellipticité de la structure projetée

Lorsque  $d = 1$ , la structure projetée est de rang 1 donc n'est pas sous-elliptique. Par contre, si  $d \geq 2$ , la famille (8.2.8) vérifie (voir le Lemme 4.1 de [4] ou [10]) :

$$\forall x \in \Sigma^*, \quad \forall \xi \in T_x^* \Sigma, \quad \sum_{R \in \hat{\mathfrak{X}}_* \cup \{\hat{\mathfrak{X}}_*, \hat{\mathfrak{X}}_*\}} |R(x) \cdot \xi|^2 \geq C \omega(x)^2 |\xi|^2. \quad (8.2.10)$$

Sa dimension homogène est :

$$Q^* = 2d + 1.$$

Cette propriété est due à ce que les champs  $X_i$  et  $Y_j$  commutent entre eux lorsque  $i \neq j$ . Elle s'étend aux familles de champs de vecteurs pour lesquelles "au moins 2/3 des directions ambiantes sont elliptiques". Plus précisément, on a le résultat suivant.

**Proposition 37** *Soit  $M$  une variété de dimension  $n = p + q$  avec  $p \geq \frac{2n+1}{3}$ . On a alors aussi  $p \geq 2q + 1$ . On considère un champ de  $p$ -plans  $\mathcal{L}$  engendré par une famille libre  $(X_1, \dots, X_p)$  de champs de vecteurs vérifiant la condition de Hörmander d'ordre 2 et tels que :*

1.  $X_1$  commute avec  $X_2, X_3, \dots, X_{2q+1}$ ,
2.  $\text{rg}(X_1, \dots, X_p, [X_2, X_3], \dots, [X_{2q}, X_{2q+1}]) = p + q$

Alors, pour toute hypersurface  $\Sigma$  transverse à  $X_1$ , les sections de  $\mathcal{L}_\Sigma = \mathcal{L} \cap T\Sigma$  vérifient la condition de Hörmander de rang 2.

**Preuve** Par hypothèse, la somme :

$$\mathcal{L}_\Sigma \oplus \text{Vect}(X_1, [X_2, X_3], \dots, [X_{2q}, X_{2q+1}])$$

est directe et définit un projecteur  $\pi : T M \rightarrow \mathcal{L}_\Sigma$ . On a  $\mathcal{L}_\Sigma = \text{Vect}(\pi(X_2), \dots, \pi(X_p))$ , c'est-à-dire  $X_j = \pi(X_j) + \vartheta_j X_1$ . La première propriété entraîne alors :

$$\forall k = 1, \dots, q, \quad \pi([X_{2k}, X_{2k+1}]) = [\pi(X_{2k}), \pi(X_{2k+1})].$$

Ainsi,  $\text{rg}(\pi(X_2), \dots, \pi(X_p), [\pi(X_{2k}), \pi(X_{2k+1})]_{k=1, \dots, q}) = n - 1$ . ■

Il est instructif d'expliciter complètement le premier exemple non trivial. On considère donc le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}^2$  paramétré par  $(p_1, p_2; q_1, q_2; t) \in \mathbb{R}^5$  et la surface  $\Sigma$  d'équation  $t = 0$ . Son seul point caractéristique est l'origine; c'est un point non dégénéré.

On calcule la famille projetée avec  $R_{U,V} = \frac{1}{2}((U \cdot t)V - (V \cdot t)U)$  :

$$\begin{aligned} R_{X_1, Y_1} &= p_1 \partial_{p_1} + q_1 \partial_{q_1} & R_{X_2, Y_2} &= p_2 \partial_{p_2} + q_2 \partial_{q_2} \\ R_{X_1, Y_2} &= p_2 \partial_{p_1} + q_1 \partial_{q_2} & R_{X_2, Y_1} &= p_1 \partial_{p_2} + q_2 \partial_{q_1} \\ R_{X_1, X_2} &= q_1 \partial_{p_2} - q_2 \partial_{p_1} & R_{Y_1, Y_2} &= p_2 \partial_{q_1} - p_1 \partial_{q_2}. \end{aligned}$$

La structure de dérivation sur  $\Sigma$  est de dimension 3, les champs projetés étant tous euclidiennement orthogonaux à la direction "orthoradiale" :

$$R^\perp = -q_1 \partial_{p_1} + p_1 \partial_{q_1} - q_2 \partial_{p_2} + p_2 \partial_{q_2} = \frac{1}{2}[R_{X_1, Y_2} - R_{X_2, Y_1}, R_{X_1, X_2} - R_{Y_1, Y_2}].$$

Une base de la famille projetée est donc :

$$\hat{\mathfrak{X}}_* : \begin{cases} R_1 = p_1 \partial_{p_1} + q_1 \partial_{q_1} + p_2 \partial_{p_2} + q_2 \partial_{q_2}, \\ R_2 = p_2 \partial_{p_1} - q_2 \partial_{q_1} - p_1 \partial_{p_2} + q_1 \partial_{q_2}, \\ R_3 = -q_2 \partial_{p_1} - p_2 \partial_{q_1} + q_1 \partial_{p_2} + p_1 \partial_{q_2}. \end{cases} \quad (8.2.11)$$

Le programme informatique décrit au Chapitre 9 (p.167) permet de simuler des déplacements dans  $\mathbb{R}^4$  contraints à suivre les flots de  $\hat{\mathfrak{X}}_*$ .

#### 8.2.4 Espaces de Sobolev sur $\Sigma^*$

Les traces sur  $\Sigma$  des fonctions de classe  $H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{H}^d)$  appartiennent à des espaces de Sobolev  $\Sigma^*$  associés à la structure de dérivation  $\mathfrak{X}_*$  définie ci-dessus.

Cependant, au voisinage des points caractéristiques, il est nécessaire d'introduire un poids supplémentaire sous la forme d'une puissance de  $\omega$ , dépendant de l'indice de régularité  $s$ .

Pour  $\vartheta \geq 0$ , on définit l'espace de Lebesgue à poids :

$$L_\vartheta(\Sigma^*) = L^2(\Sigma^*; \omega^{-2\vartheta} d\mu) = \left\{ v \in L^2_{\text{loc}}(\Sigma^*); \int_{\Sigma^*} \frac{v^2}{\omega^{2\vartheta}} d\mu < +\infty \right\}.$$

L'objectif est d'exprimer rigoureusement la propriété : « une fonction et ses  $\mathfrak{X}$ -dérivées jusqu'à l'ordre  $s$  appartiennent à  $L_s(\Sigma^*)$  ».

Pour clarifier l'exposé, il est cependant préférable de commencer par dissocier l'indice de poids  $\vartheta \geq 0$  et l'indice de régularité  $k \in \mathbb{N}$ . On définit :

$$W_\vartheta^0(\Sigma^*) = L_\vartheta(\Sigma^*) \quad \text{et} \quad W_\vartheta^{k+1}(\Sigma^*) = \left\{ v \in L_\vartheta(\Sigma^*); \forall R \in \mathfrak{X}_*, Rv \in W_\vartheta^k(\Sigma^*) \right\}.$$

L'espace "candidat" pour décrire les traces de  $H^{k+\frac{1}{2}}(\mathbb{H}^d)$  est :

$$H^k(\Sigma^*) = W_k^k(\Sigma^*). \quad (8.2.12)$$

Avec les notations générales des espaces de Sobolev associés à une famille de champs, cet espace est exactement (voir p.93) :

$$H^k(\Sigma^*) = H^k(\Sigma^*; \mathfrak{X}_*; \omega^{-2k} d\mu).$$

On remarquera que grâce aux formules (8.2.8) et (8.2.2), cette norme est, en pratique, totalement explicite, à la différence, par exemple, de la norme (8.1.1).

Il reste à étendre convenablement cette définition lorsque  $k \notin \mathbb{N} + 1/2$ . Plutôt que d'invoquer une technique d'interpolation, on convient, pour  $(k, \sigma) \in \mathbb{N} \times ]0, 1[$  :

$$H^{k+\sigma}(\Sigma^*) = \left\{ v \in W_{k+\sigma}^k(\Sigma^*); \sum_{|\alpha|=k} \iint_{\Delta_*} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha v(x) - \hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha v(y)|^2}{\omega^{2k} (\omega \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(x, y))^{Q^*+2\sigma}} d\mu_x d\mu_y < +\infty \right\} \quad (8.2.13)$$

avec  $\Delta_* = \{(x, y) \in \Sigma^* \times \Sigma^*; \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(x, y) \leq c_*\}$  et  $Q^* = 2d + 1$ . La distance  $\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}$  est celle associée à la structure de dérivation  $\mathfrak{X}_*$  (voir p.93).

**Remarque** - Dans cette formule,  $\omega$  désigne indifféremment  $\omega(x)$  ou  $\omega(y)$  qui sont du même ordre de grandeur lorsque  $(x, y) \in \Delta_*$  (voir le Lemme 44 p.158). L'espace  $H^{k+\sigma}(\Sigma^*)$  ne dépend pas de  $c_* > 0$  puisqu'un autre choix de  $c_*$  donne une norme équivalente.  $\diamond$

Le paragraphe §8.4.3 contient une preuve de la stabilité par dérivation :

$$\forall s \notin \mathbb{N}, \quad \forall R \in \mathfrak{X}_*, \quad u \in H^{s+1}(\Sigma^*) \Rightarrow Ru \in H^s(\Sigma^*). \quad (8.2.14)$$

Cette propriété ne résulte pas immédiatement de la définition (8.2.13).

**Remarque** - Si on note  $L$  l'unité de longueur,  $V$  l'unité des fonctions  $v$ , la norme de  $H^s(\Sigma^*)$  est homogène à  $V \times L^{\frac{Q^*}{2}-s}$ . En effet, de même que le vecteur  $x\partial_x$  est sans unité, le fait que la structure projetée  $\mathfrak{X}_*$  s'annule aux points caractéristiques implique que les dérivations  $R \in \hat{\mathfrak{X}}_*$  et la pseudo-distance  $\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}$  sont adimensionnées. L'analyse dimensionnelle suggère donc, par analogie avec le cas euclidien, qu'il est consistant d'envisager  $H^s(\Sigma^*)$  comme un candidat raisonnable pour décrire les traces de  $H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{H}^d)$ . Le Théorème 38 ci-dessous confirme cette intuition.  $\diamond$

### 8.3 Description des traces de $H^s(\mathbb{H}^d)$

On peut maintenant énoncer le théorème principal de ce chapitre.

**Théorème 38 (F.V. [32])** *Soit  $\Sigma$  une hypersurface  $C^\infty$  bornée de  $\mathbb{H}^d$  ( $d \geq 2$ ) dont les points caractéristiques sont non-dégénérés. On munit  $\Sigma^* = \Sigma \setminus \text{Car}_\Sigma$  de la structure de dérivation projetée  $\mathfrak{X}_*$  définie p. 149. Les espaces  $H^s(\Sigma^*)$  sont définis par (8.2.12) et (8.2.13). Alors, :*

$$\forall s \in \left] \frac{1}{2}; \frac{Q}{2} \right[ , \quad \text{Tr}_\Sigma [H^s(\mathbb{H}^d)] = H^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma^*). \quad (8.3.1)$$

L'identité (8.3.1) signifie que l'opérateur de restriction est continu de  $H^s(\mathbb{H}^d)$  dans  $H^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma^*)$  et qu'il existe un opérateur de relèvement continu. Le relèvement construit dans la preuve qui va suivre est indépendant de  $s$  et fournit une fonction supportée dans le cône elliptique

$$\{x_n \cdot (p, q; t); c|t| \leq p^2 + q^2\}$$

au voisinage de  $x_n \in \text{Car}_\Sigma$ .

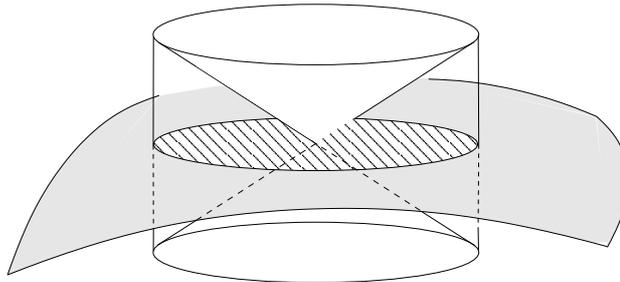


FIG. 8.2 –  $\Sigma$  est contenue dans la zone elliptique (ici, la variable verticale est  $\sqrt{t}$ ).

L'opérateur de trace réduit donc la dimension homogène d'une unité ( $Q^* = Q - 1$ ) tout en réduisant la régularité d'une demi-dérivée, exactement comme dans le cas standard (voir [29]).

**Remarque** - La régularité de  $\Sigma$  est définie au sens des variétés  $C^\infty$  et pas au sens de la structure sous-riemannienne  $\mathbb{H}^d$ . Par exemple, l'hypersurface  $t = 0$  est une variété régulière, mais l'application  $(p, q) \in \mathbb{R}^{2d} \mapsto (p, q, 0) \in \mathbb{H}^d$  n'est pas lipschitzienne pour la distance de Carnot-Caratheodory  $\mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}$ .  $\diamond$

## 8.4 Preuve du théorème de trace

Soit  $(\mathcal{V}_n)_{0 \leq n \leq N}$  une famille d'ouverts de  $\mathbb{H}^d$ , recouvrant  $\Sigma$  et telle que :

$$\mathcal{V}_0 \cap \text{Car}_\Sigma = \emptyset \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_n \cap \text{Car}_\Sigma = \{x_n\} \quad \text{si } n \neq 0.$$

Sur  $\mathcal{V}_0$ , le théorème est déjà connu (voir [4] ou le Théorème 46 présenté en annexe, au paragraphe §8.5).

En conséquence, il suffit d'analyser uniquement la situation à l'intérieur de  $\mathcal{V}_n$  ( $n \neq 0$ ). Après translation de  $x_n$  à l'origine, on peut donc supposer que  $\Sigma$  est contenue dans la boule  $\|x\|_g \leq 1$  et que  $\text{Car}_\Sigma = \{0\}$ . L'équation  $g(x) = 0$  définissant  $\Sigma$  est de la forme :

$$g(p, q; t) = t + h(p, q) + r(p, q)$$

où  $h$  est une forme quadratique et  $|r(p, q)| \leq C(|p|^3 + |q|^3)$ . On utilisera la formulation (8.2.1a) de l'hypothèse de non-dégénérescence.

### 8.4.1 Éclatement autour des points caractéristiques

On utilise une méthode d'éclatement autour de l'origine, initiée par [4] et [22]. On adopte les notations du paragraphe §7.5 et en particulier :

$$\mathfrak{d}_m(p, q; t) = (2^{-m}p, 2^{-m}q; 2^{-2m}t).$$

Le théorème 32 affirme qu'il est possible de reconstituer une fonction  $u \in H^s(\mathbb{H}^d)$  à partir de troncatures  $(u \circ \mathfrak{d}_m)\varphi$  supportées dans la couronne de référence  $\mathcal{C}'_0$ .

Dans un premier temps, on cherche donc à décrire la trace de chaque bloc, indépendamment des autres. Cependant, comme la dilatation naturelle sur le groupe de Heisenberg est celle qui laisse les champs invariants, la surface  $\Sigma$  est légèrement déformée par le processus d'éclatement.

On doit donc étudier la trace de  $(u \circ \mathfrak{d}_m)\varphi$  sur la surface :

$$\Sigma_m = \{x \in \mathcal{C}_0; \mathfrak{d}_m(x) \in \Sigma\}. \quad (8.4.1)$$

Cette hypersurface est définie par l'équation  $g_m(x) = 0$  avec  $g_m = 2^{2m}g \circ \mathfrak{d}_m$ , i.e. :

$$g_m(p, q; t) = t + h(p, q) + 2^{2m}r(2^{-m}p, 2^{-m}q).$$

En particulier, on a  $g_m = t + h(p, q) + O(2^{-m})$  sur  $\mathcal{C}_0$ .

Chacune de ces surfaces est non-caractéristique. L'hypothèse de non-dégénérescence implique que cette propriété est uniforme par rapport à  $m \geq 0$ , au sens du lemme suivant.

**Lemme 39** Pour  $Z \in \hat{\mathcal{X}}$  et  $m \geq 0$ , la dérivée de  $g_m$  est :

$$Zg_m = 2^m(Zg) \circ \mathfrak{d}_m. \quad (8.4.2)$$

Sous l'hypothèse de non-dégénérescence (8.2.1a), on a :

$$\forall m \geq 0, \quad \forall x \in \Sigma_m, \quad C^{-1} \leq \sum_{Z \in \hat{\mathcal{X}}} |(Zg_m)(x)|^2 \leq C. \quad (8.4.3)$$

**Preuve** Les champs  $\hat{\mathfrak{X}}$  définis par (4.5.1) sont de la forme

$$Z_i = \partial_{z_i} + 2z_i^* \partial_t$$

avec la notation  $z = (p, q) = (z_i)_{1 \leq i \leq 2d}$  et

$$\begin{cases} z_i^* = z_{i+d} & \text{si } 1 \leq i \leq d, \\ z_i^* = -z_{i-d} & \text{si } d+1 \leq i \leq 2d. \end{cases}$$

Ainsi :

$$Z_i g_m = 2z_i^* + \partial_{z_i} h(z) + 2^m (\partial_{z_i} r)(2^{-m} z).$$

Comme  $h$  est une forme quadratique en  $z$ , on a  $\partial_{z_i} h(z) = 2^m (\partial_{z_i} h)(2^{-m} z)$  et donc (8.4.2). De plus, si  $x \in \Sigma_m$ , on a aussi (voir (8.2.2) et (8.2.5)) :

$$\mathcal{D}_{\mathbb{H}^d}(0, \mathfrak{d}_m(x)) \simeq 2^{-m}.$$

L'inégalité (8.4.3) résulte alors immédiatement de (8.2.1a). ■

#### 8.4.2 Description des traces sur la couronne renormalisée $\Sigma_m$

La structure de dérivation naturelle sur  $\Sigma_m$  est la projection de  $\mathfrak{X}$  (voir p.149). En d'autres termes, c'est le  $C^\infty$ -module de champs de vecteurs sur  $\Sigma_m$  qui annulent la 1-forme canonique (4.5.2) de  $\mathbb{H}^d$ . La famille

$$\hat{\mathfrak{X}}_m : \{T_{i,j}^m = (Z_i g_m) Z_j - (Z_j g_m) Z_i\}_{Z_i, Z_j \in \hat{\mathfrak{X}}}$$

est génératrice.

Le lien entre  $\hat{\mathfrak{X}}_m$  et  $\mathfrak{X}_*$  est donné par le lemme suivant. Une relation plus précise impliquant la comparaison des distances de Carnot sera démontrée ultérieurement (voir le Lemme 44 p.158).

**Lemme 40** *Le champ  $T_{i,j}^m$  est l'image de  $R_{i,j}$  par le difféomorphisme*

$$\mathfrak{d}_m^{-1} : \Sigma \cap \mathfrak{d}_m(\mathcal{C}_0) \rightarrow \Sigma_m.$$

Lorsque  $d \geq 2$ , il existe une constante  $C' > 0$ , indépendante de  $m$ , telle que

$$\sum_{T \in \hat{\mathfrak{X}}_m \cup [\hat{\mathfrak{X}}_m, \hat{\mathfrak{X}}_m]} |T(x) \cdot \xi|^2 \geq C' |\xi|^2 \quad (8.4.4)$$

pour tout  $x \in \Sigma_m$  et  $\xi \in T^* \Sigma_m$ .

**Preuve** Reprenons les notations de la preuve du Lemme 39. Pour toute fonction  $w$  sur  $\mathbb{H}^d$ , on a  $Z_i(w \circ \mathfrak{d}_m) = 2^{-m} (Z_i w) \circ \mathfrak{d}_m$ , donc

$$T_{i,j}^m(w \circ \mathfrak{d}_m) = 2^{-m} [(Z_i g_m)((Z_j w) \circ \mathfrak{d}_m) - (Z_j g_m)((Z_i w) \circ \mathfrak{d}_m)] = (R_{i,j} w) \circ \mathfrak{d}_m,$$

grâce à (8.4.2). Ceci démontre la première assertion. Il s'ensuit que

$$T_{i,j}^m(x) \cdot \xi = R_{i,j}(\mathfrak{d}_m(x)) \cdot \mathfrak{d}_m^*(\xi),$$

avec  $\mathfrak{d}_m^* = \mathfrak{t}_m^{-1} : \mathbb{T}^* \Sigma_m \rightarrow \mathbb{T}^* \Sigma$ . Le commutateur vérifie une formule analogue. L'inégalité (8.2.10) entraîne donc :

$$\sum_{T \in \hat{\mathfrak{x}}_m \cup [\hat{\mathfrak{x}}_m, \hat{\mathfrak{x}}_m]} |T(x) \cdot \xi|^2 = \sum_{R \in \hat{\mathfrak{x}}_* \cup [\hat{\mathfrak{x}}_*, \hat{\mathfrak{x}}_*]} |R(\mathfrak{d}_m(x)) \cdot \mathfrak{d}_m^*(\xi)|^2 \geq C \omega^2(\mathfrak{d}_m(x)) |\mathfrak{d}_m^*(\xi)|^2 \geq C' |\xi|^2.$$

En effet,  $\omega(\mathfrak{d}_m(x)) \simeq 2^{-m}$  si  $x \in \mathcal{C}_0$  et  $|\mathfrak{d}_m^*(\xi)| \gtrsim 2^m |\xi|$  lorsque  $\xi \in \mathbb{T}^* \Sigma_m$ . ■

Grâce aux deux lemmes précédents, on peut maintenant appliquer le Théorème 46 rappelé en annexe (voir p.162) pour décrire les traces de  $H^s(\mathbb{H}^d)$  sur  $\Sigma_m$ .

**Théorème 41 (d'après H. Bahouri, J.-Y. Chemin, C.-J. Xu [4])** *On suppose  $d \geq 2$ . Pour tout  $s > 1/2$  il existe une constante  $C_s > 0$  indépendante de  $m$ , telle que l'opérateur de trace  $\text{Tr}_{\Sigma_m}$  défini pour les fonctions continues admette une extension bornée de  $H^s(\mathbb{H}^d)$  sur  $H^{s-1/2}(\Sigma_m)$  :*

$$\|\text{Tr}_{\Sigma_m} u\|_{H^{s-1/2}(\Sigma_m)} \leq C_s \|u\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}.$$

Il existe aussi un opérateur de relèvement  $J_m : H^{s-1/2}(\Sigma_m) \rightarrow H^s(\mathbb{H}^d)$  tel que

$$\|J_m v\|_{H^s(\mathbb{H}^d)} \leq C_s \|v\|_{H^{s-1/2}(\Sigma_m)},$$

et  $\text{Tr}_{\Sigma_m} \circ J_m = \text{Id}_{\Sigma_m}$ . La formule définissant  $J_m$  ne dépend pas de  $s$  et le support de  $J_m(v)$  est contenu dans la couronne  $\mathcal{C}_0$ .

**Remarque** - Dans l'énoncé précédent, la norme de Sobolev d'indice entier est

$$\|u\|_{H^k(\Sigma_m)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\hat{\mathfrak{x}}_m^\alpha u\|_{L^2(\Sigma_m)}^2. \quad (8.4.5)$$

La propriété (8.4.4) permet d'appliquer le Théorème 13 pour décrire la norme de l'espace d'interpolation complexe  $H^s(\Sigma_m)$ . Pour  $s \geq 0$  et  $s = k + \sigma$  avec  $(k, \sigma) \in \mathbb{N} \times ]0; 1[$ , la norme d'interpolation est équivalente à :

$$\|u\|_{H^{k+\sigma}(\Sigma_m)}^2 = \|u\|_{H^k(\Sigma_m)}^2 + \sum_{|\alpha|=k} \iint_{\Delta_m} \frac{|\hat{\mathfrak{x}}_m^\alpha u(x) - \hat{\mathfrak{x}}_m^\alpha u(y)|^2}{\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{x}}_m}(x, y)^{Q^*+2\sigma}} dx dy \quad (8.4.6)$$

uniformément par rapport à  $m \geq 0$ . On note  $\Delta_m = \{(x, y) \in \Sigma_m \times \Sigma_m; \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{x}}_m}(x, y) \leq c\}$  avec une constante  $c > 0$  indépendante de  $m$ . Si  $\Delta_m$  est remplacé par un sous-ensemble  $\Delta'_m$  défini par une constante  $c' > 0$  elle aussi indépendante de  $m$ , les deux normes sont uniformément équivalentes. ◇

### 8.4.3 Reconstruction de l'espace de traces

Pour  $s < Q/2$ , le Théorème 32 donne la représentation suivante de  $H^s(\mathbb{H}^d)$  :

$$H^s(\mathbb{H}^d) = \left\{ v \in L^2(\mathbb{H}^d); \sum_{m \geq 0} 2^{-m(Q-2s)} \|(v \circ \mathfrak{d}_m)\varphi\|_{H^s(\mathbb{H}^d)}^2 < +\infty \right\}.$$

En combinant ce résultat au Théorème 41, on obtient :

$$\text{Tr}_{\Sigma}(H^s(\mathbb{H}^d)) = \left\{ v \in L^2_{\text{loc}}(\Sigma^*); \sum_{m \geq 0} 2^{-m(Q-2s)} \|(v \circ \mathfrak{d}_m)\varphi|_{\Sigma_m}\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma_m)}^2 < +\infty \right\}. \quad (8.4.7)$$

L'opérateur de relèvement est donné par la formule :

$$Jv = \sum_{m \geq 0} J_m \left[ (v \circ \mathfrak{d}_m) \varphi_{\mathbb{1}_{\Sigma_m}} \right] \circ \mathfrak{d}_m^{-1}.$$

En particulier, le support de  $Jv$  est contenu dans le "cône" d'équation  $c|t| \leq p^2 + q^2$  (voir Fig. 8.2)

Pour achever la preuve du Théorème 38 il suffit donc d'établir le lien entre l'espace  $H^{s-1/2}(\Sigma^*)$  défini par (8.2.12) et (8.2.13) et la famille des espaces  $H^{s-1/2}(\Sigma_m)$  apparaissant dans la formule précédente. C'est l'objet du résultat suivant.

**Proposition 42** *Pour  $0 \leq s < Q^*/2$ , l'espace  $H^s(\Sigma^*)$  défini par (8.2.12) et (8.2.13) peut être décrit de la manière suivante :*

$$H^s(\Sigma^*) = \left\{ v \in L^2_{\text{loc}}(\Sigma^*); \sum_{m \geq 0} 2^{-m(Q^*-2s)} \left\| (v \circ \mathfrak{d}_m) \varphi_{\mathbb{1}_{\Sigma_m}} \right\|_{H^s(\Sigma_m)}^2 < +\infty \right\} \quad (8.4.8)$$

avec équivalence de normes.

**Remarque** - L'espace décrit au second membre de (8.4.7) correspond bien à celui de (8.4.8) où l'indice  $s$  est remplacé par  $s - \frac{1}{2}$  car  $Q^* = Q - 1$ .  $\diamond$

La fin du paragraphe §8.4 est consacrée à la démonstration de la Proposition 42. Quelques calculs préliminaires sont nécessaires. Comme précédemment, on suppose que

$$\text{supp } v \subset \Sigma \cap \{x; \|x\|_g \leq 1\}.$$

On utilise toujours les notations du paragraphe §7.5 et en particulier les fonctions  $\varphi_m = \varphi \circ \mathfrak{d}_m^{-1}$  définies par (7.5.5).

#### □ Calcul des normes

La norme de l'espace figurant au membre de droite de (8.4.8) est :

$$N_s(v) = \sum_{m \geq 0} 2^{-m(Q^*-2s)} \|v_m\|_{H^s(\Sigma_m)}^2 \quad (8.4.9)$$

avec

$$v_m = (v \circ \mathfrak{d}_m) \varphi_{\mathbb{1}_{\Sigma_m}} = (\bar{\varphi}_m v) \circ \mathfrak{d}_m \quad (8.4.10)$$

et  $\bar{\varphi}_m = (\varphi_m)_{\mathbb{1}_{\Sigma}}$  la troncature dans la couronne  $\mathfrak{d}_m(\mathcal{C}_0) \cap \Sigma$ .

Pour éviter les confusions, la norme de  $H^s(\Sigma^*)$  est notée ici :

$$\tilde{N}_s(v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Sigma} \frac{|\hat{\mathfrak{x}}_*^\alpha v|^2}{\omega^{2s}} d\mu + \mathbb{1}_{s \notin \mathbb{N}} \sum_{|\alpha|=k} \iint_{\Delta_*} \frac{|\hat{\mathfrak{x}}_*^\alpha v(x) - \hat{\mathfrak{x}}_*^\alpha v(y)|^2}{\omega^{2k} (\omega \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{x}}_*}(x, y))^{Q^*+2\sigma}} d\mu_x d\mu_y \quad (8.4.11)$$

avec la convention habituelle  $s = k + \sigma$  et  $(k, \sigma) \in \mathbb{N} \times [0; 1[$ .

La preuve de la Proposition 42 consiste à vérifier que  $N_s(v) \simeq \tilde{N}_s(v)$  pour toute fonction  $v$  dans, par exemple,  $L^2_{\text{loc}}(\Sigma^*)$  et  $0 \leq s < Q^*/2$ . La constante d'équivalence peut dépendre de  $s$ .

On commence par expliciter  $N_s(v)$  à l'aide des définitions (8.4.5) et (8.4.6) :

$$\|v_m\|_{H^s(\Sigma_m)}^2 = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|\hat{\mathfrak{X}}_m^\alpha v_m\|_{L^2(\Sigma_m; dx)}^2 + \mathbb{1}_{s \notin \mathbb{N}} \sum_{|\alpha|=k} \iint_{\Delta_m} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_m^\alpha v_m(x) - \hat{\mathfrak{X}}_m^\alpha v_m(y)|^2}{\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_m}(x, y)^{Q^*+2\sigma}} dx dy \right).$$

D'après le Lemme 40, les champs  $\hat{\mathfrak{X}}_m$  sont les images de  $\hat{\mathfrak{X}}_*$  par  $\mathfrak{d}_m^{-1}$ ; on convient donc de définir les multi-indices  $\alpha$  de manière à avoir aussi :

$$\hat{\mathfrak{X}}_m^\alpha v_m = \left[ \hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha (\bar{\varphi}_m v) \right] \circ \mathfrak{d}_m.$$

Le déterminant jacobien de  $\mathfrak{d}_m : \Sigma_m \rightarrow \Sigma \cap \mathfrak{d}_m(\mathcal{C}_0)$  est  $2^{-2md}$ . Ainsi,

$$N_s(v) = \sum_{\substack{m \geq 0 \\ |\alpha| \leq k}} 2^{m(2s-1)} \|\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha (\bar{\varphi}_m v)\|_{L^2(\Sigma; dx)}^2 + \mathbb{1}_{s \notin \mathbb{N}} \sum_{m \geq 0} 2^{m(2s+2d-1)} I_{m,k}(v)$$

ou encore

$$N_s(v) = \sum_{\substack{m \geq 0 \\ |\alpha| \leq k}} \int_{\Sigma^*} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha (\bar{\varphi}_m v)(x)|^2}{\omega(x)^{2s}} d\mu_x + \mathbb{1}_{s \notin \mathbb{N}} \sum_{m \geq 0} 2^{m(2s+2d-1)} I_{m,k}(v) \quad (8.4.12a)$$

avec

$$I_{m,k}(v) = \sum_{|\alpha|=k} \iint_{\mathfrak{d}_m(\Delta_m)} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha (\bar{\varphi}_m v)(x) - \hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha (\bar{\varphi}_m v)(y)|^2}{\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(\mathfrak{d}_m^{-1}(x), \mathfrak{d}_m^{-1}(y))^{Q^*+2\sigma}} dx dy. \quad (8.4.12b)$$

□ **Lemme de partition**  $\ell^2$

Le lemme technique ci-dessous repose sur l'idée très simple que les  $x\partial_x$  dérivées de  $\phi(2^m x)$  ont la même borne uniforme que  $\partial_x \phi$ . Ici, la famille  $\bar{\varphi}_m$  joue le rôle de  $\phi$  et  $\hat{\mathfrak{X}}_*$  celui de  $x\partial_x$ .

**Lemme 43** Pour tout multi-indice  $\alpha$ , on a :

$$\sum_{m \geq 0} |\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha \bar{\varphi}_m(x)|^2 \in L^\infty(\Sigma). \quad (8.4.13)$$

**Preuve** Grâce à la propriété de presque orthogonalité (7.5.6), il suffit en fait de démontrer que :

$$\sup_{m \geq 0} \|\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha \bar{\varphi}_m\|_{L^\infty} < +\infty$$

avec  $\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha \bar{\varphi}_m = (\hat{\mathfrak{X}}_m^\alpha \varphi)|_{\Sigma_m} \circ \mathfrak{d}_m^{-1}$ . Les champs de  $\hat{\mathfrak{X}}_m$  sont de la forme :

$$T_{i,j}^m = (Z_i g_m) Z_j - (Z_j g_m) Z_i$$

avec  $Z_i, Z_j \in \hat{\mathfrak{X}}$ . Il suffit donc de démontrer que les coefficients de ces champs (dans la carte  $(p, q)$ ) sont uniformément bornés sur  $\Sigma_m$ , ainsi que leurs dérivées. Enfin, les champs  $Z_i$  étant réguliers, il suffit en fait de considérer  $Z_i g_m$ . Avec les notations de la preuve du Lemme 39, on trouve :

$$Z_i g_m = 2z_i^* + 2\partial_{z_i} h + 2^m (\partial_{z_i} r)(2^{-m} z).$$

Les deux premiers termes sont linéaires en  $z$  donc bornés sur  $\mathcal{C}_0$ . Comme  $r$  est une fonction régulière dont les dérivées des deux premiers ordres s'annulent, le dernier terme est aussi uniformément borné, indépendamment de  $m$ . Les dérivées d'ordre supérieur se traitent de la même façon. ■

□ Comparaison métrique de  $\mathfrak{X}_m$  et  $\mathfrak{X}_*$ 

Le deuxième résultat préliminaire compare la structure métrique de  $\mathfrak{X}_m$  à celle de  $\mathfrak{X}_*$ .

**Lemme 44** *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

1. *Il existe une constante  $C > 0$  telle que :*

$$\forall (x, y) \in \Delta_*, \quad C^{-1} \leq \frac{\omega(x)}{\omega(y)} \leq C. \quad (8.4.14)$$

2. *Il existe une constante  $\tilde{C} > 0$  telle que, pour tout  $m \geq 0$  :*

$$\tilde{C}^{-1} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}_m}(x, y) \leq \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(\mathfrak{d}_m(x), \mathfrak{d}_m(y)) \leq \tilde{C} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}_m}(x, y) \quad (8.4.15)$$

*si  $(x, y) \in \Delta_m$  vérifie  $x \in \Sigma_m \cap \mathcal{C}'_0$  et  $y \in \Sigma_m$ .*

3. *On a enfin une double inclusion :*

$$\mathfrak{d}_m(\Delta_m) \subset \Delta_* \quad \text{et} \quad \Delta_* \subset \bigcup_{m \geq 0} \mathfrak{d}_m(\Delta_m), \quad (8.4.16)$$

*si les constantes  $c$  et  $c_*$  de (8.2.13) et (8.4.6) sont convenablement choisies.*

**Remarque** - Grâce à la première propriété, il est inutile de préciser le point d'évaluation de  $\omega$  dans la formule (8.4.11).  $\diamond$

**Preuve** Les champs  $\mathfrak{X}_*$  s'annulent à l'origine ; leurs commutateurs aussi. On a donc

$$\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(a, b) \geq \mathcal{D}_{\mathfrak{X}_0}(a, b)$$

où  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}_0}$  est associée au  $A$ -module  $\mathfrak{X}_0$  engendré par les champs  $\omega(x)\nabla_\Sigma$  ( $\nabla_\Sigma$  désigne une base locale des champs tangents à  $\Sigma$ ). Cette distance se calcule facilement :

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X}_0}(a, b) = \left| \frac{a}{|a|} - \frac{b}{|b|} \right| + \left| \ln \frac{|a|}{|b|} \right|. \quad (8.4.17)$$

Au voisinage d'un point caractéristique non-dégénéré, pris comme origine, on a déjà remarqué que :

$$C^{-1}|x| \leq \omega(x) \leq C|x|$$

(voir (8.2.2)). Ainsi, pour tout couple  $(x, y) \in \Delta_*$ , on a  $\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(x, y) \leq c_*$  donc :

$$\left| \log \frac{\omega(x)}{\omega(y)} \right| \leq \left| \log \frac{|x|}{|y|} \right| + 2 \log C \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{X}_0}(x, y) + 2 \log C \leq c_* + 2 \log C.$$

Cette inégalité entraîne (8.4.14).

Démontrons la deuxième propriété. Le Lemme 40 affirme en particulier que  $\mathfrak{d}_m$  envoie un chemin  $\mathfrak{X}_m$ -horizontal de  $\Sigma_m$  sur un chemin  $\mathfrak{X}_*$ -horizontal de  $\Sigma$ . En conséquence :

$$\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(\mathfrak{d}_m(x), \mathfrak{d}_m(y)) \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{X}_m}(x, y). \quad (8.4.18)$$

Inversement, un chemin  $\mathfrak{X}_*$ -horizontal de  $\Sigma$  n'est l'image directe d'un chemin  $\mathfrak{X}_m$ -horizontal de  $\Sigma_m$  que s'il est entièrement contenu dans la couronne  $\mathcal{C}'_0$ . On se donne donc deux points  $x, y$  dans  $\Sigma_m$

avec  $x \in \mathcal{C}'_0$  ainsi qu'un chemin  $\hat{\mathfrak{X}}_*$ -horizontal joignant  $x' = \mathfrak{d}_m(x)$  à  $y' = \mathfrak{d}_m(y)$ . Si ce chemin quittait  $\mathfrak{d}_m(\mathcal{C}'_0)$ , il y aurait un point  $z \in \mathbb{H}^d \cap \mathcal{C}'_0$  tel que

$$\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(x', y') \geq \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_0}(x', \mathfrak{d}_m(z)) \geq \left| \log \frac{|\mathfrak{d}_m(x)|}{|\mathfrak{d}_m(z)|} \right|.$$

Or  $|\mathfrak{d}_m(x)| \leq 2^{-m}$  et  $|\mathfrak{d}_m(z)| \geq 2^{-m}(1 + \varepsilon_0)$ , la constante  $\varepsilon_0 > 0$  étant fixée par le choix des couronnes (7.5.3). On a donc :

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X}_m}(x, y) \geq \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(x', y') \geq \log(1 + \varepsilon_0).$$

Cette inégalité est impossible à satisfaire si  $(x, y) \in \Delta_m$ , pourvu que la constante  $c > 0$  qui sert à définir  $\Delta_m$  soit choisie suffisamment petite. On a ainsi démontré (8.4.15).

Enfin, l'inclusion  $\mathfrak{d}_m(\Delta_m) \subset \Delta_*$  est une conséquence de (8.4.18) pourvu que  $0 < c_* \leq c$ . Inversement, si  $(\underline{x}, \underline{y}) \in \Delta_*$ , il existe un entier  $m \geq 0$  tel que  $\underline{x} \in \mathfrak{d}_m(\mathcal{C}'_0)$  et dans ce cas, on ne peut avoir  $\underline{y} \notin \mathfrak{d}_m(\mathcal{C}'_0)$  car sinon, le raisonnement précédent entraînerait :

$$c_* \geq \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(\underline{x}, \underline{y}) \geq \log(1 + \varepsilon_0),$$

contrairement au choix de  $c_*$ . Ainsi  $(x, y) \in \mathfrak{d}_m(\Delta_m)$ , d'où (8.4.16). ■

□ **Preuve de la Proposition 42 lorsque  $s$  est entier**

Supposons que  $s = k$  est un entier strictement inférieur à  $Q^*/2$ . La preuve de la Proposition 42 se réduit à montrer que pour toute fonction  $v \in L^2_{\text{loc}}(\Sigma^*)$ , les expressions

$$N_k(v) = \sum_{\substack{m \geq 0 \\ |\alpha| \leq k}} \int_{\Sigma^*} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha(\bar{\varphi}_m v)(x)|^2}{\omega(x)^{2k}} d\mu_x \quad \text{et} \quad \tilde{N}_k(v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Sigma^*} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha v(x)|^2}{\omega(x)^{2k}} d\mu_x$$

sont équivalentes.

Le premier sens de l'inégalité résulte immédiatement de la formule de Leibnitz et du Lemme 43 :

$$N_k(v) \leq \sum_{\substack{m \geq 0 \\ |\alpha| + |\beta| \leq k}} \int_{\Sigma^*} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha \bar{\varphi}_m|^2 |\hat{\mathfrak{X}}_*^\beta v|^2}{\omega^{2k}} d\mu \leq C \tilde{N}_k(v).$$

Inversement, l'hypothèse  $\text{supp } v \subset \{x; \|x\|_g \leq 1\}$  et la quasi-orthogonalité (7.5.6) entraînent :

$$\forall x \in \Sigma^*, \quad |\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha v(x)|^2 = \left| \sum_{m \geq 0} \hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha(\bar{\varphi}_m v)(x) \right|^2 \leq C \sum_{m \geq 0} |\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha(\bar{\varphi}_m v)(x)|^2.$$

Ainsi,  $\tilde{N}_k(v) \leq C N_k(v)$ . La Proposition 42 est donc démontrée pour les valeurs entières de  $s$ .

□ **Preuve de la Proposition 42 lorsque  $s = k + \sigma < Q^*/2$  avec  $(k, \sigma) \in \mathbb{N} \times ]0, 1[$**

La question est maintenant de démontrer l'équivalence entre  $N_s(v)$  donnée par (8.4.12a) et

$$\tilde{N}_s(v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Sigma^*} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha v(x)|^2}{\omega(x)^{2s}} d\mu_x + \sum_{|\alpha| = k} \iint_{\Delta_*} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha v(x) - \hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha v(y)|^2}{\omega^{2k} (\omega \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(x, y))^{Q^* + 2\sigma}} d\mu_x d\mu_y.$$

Le raisonnement du cas des indices entiers s'applique au premier terme, le seul changement consistant à remplacer  $\omega^k$  par  $\omega^s$ . On a donc :

$$\sum_{\substack{m \geq 0 \\ |\alpha| \leq k}} \int_{\Sigma^*} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha(\bar{\varphi}_m v)(x)|^2}{\omega(x)^{2s}} d\mu_x \simeq \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Sigma^*} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha v(x)|^2}{\omega(x)^{2s}} d\mu_x.$$

Intéressons-nous au second terme.

L'inégalité (8.4.15) du Lemme 44 donne :

$$I_{m,k}(v) \simeq \sum_{|\alpha|=k} \iint_{\mathfrak{d}_m(\Delta_m)} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha(\bar{\varphi}_m v)(x) - \hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha(\bar{\varphi}_m v)(y)|^2}{\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(x,y)^{Q^*+2\sigma}} dx dy. \quad (8.4.19)$$

Alors, pour tout multi-indice  $\alpha$  et  $(x,y) \in \Delta_*$  :

$$\mathfrak{X}_*^\alpha v(x) - \mathfrak{X}_*^\alpha v(y) = \sum_{m \geq 0} \mathfrak{X}_*^\alpha(\bar{\varphi}_m v)(x) - \mathfrak{X}_*^\alpha(\bar{\varphi}_m v)(y).$$

L'inclusion (8.4.16) entraîne que cette somme ne contient pour chaque valeur du couple  $(x,y)$  qu'un nombre fini et uniformément borné de termes non nuls. En conséquence,

$$\mathbb{1}_{(x,y) \in \Delta_*} |\mathfrak{X}_*^\alpha v(x) - \mathfrak{X}_*^\alpha v(y)|^2 \leq C \sum_{m \geq 0} \mathbb{1}_{(x,y) \in \mathfrak{d}_m(\Delta_m)} |\mathfrak{X}_*^\alpha(\bar{\varphi}_m v)(x) - \mathfrak{X}_*^\alpha(\bar{\varphi}_m v)(y)|^2$$

d'où  $\tilde{N}_s(v) \leq CN_s(v)$ .

Inversement, la formule de Leibnitz donne :

$$\begin{aligned} I_{m,k}(v) &\leq C \sum_{|\alpha|+|\beta|=k} \iint_{\mathfrak{d}_m(\Delta_m)} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha \bar{\varphi}_m(x) \hat{\mathfrak{X}}_*^\beta v(x) - \hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha \bar{\varphi}_m(y) \hat{\mathfrak{X}}_*^\beta v(y)|^2}{\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(x,y)^{Q^*+2\sigma}} dx dy \\ &\leq C \sum_{|\alpha|+|\beta|=k} \iint_{\mathfrak{d}_m(\Delta_m)} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha \bar{\varphi}_m(x) - \hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha \bar{\varphi}_m(y)|^2}{\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(x,y)^{Q^*+2\sigma}} |\hat{\mathfrak{X}}_*^\beta v(x)|^2 dx dy \\ &\quad + \iint_{\mathfrak{d}_m(\Delta_m)} |\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha \bar{\varphi}_m(y)|^2 \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\beta v(x) - \hat{\mathfrak{X}}_*^\beta v(y)|^2}{\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(x,y)^{Q^*+2\sigma}} dx dy. \end{aligned}$$

On désigne par  $I_{m,k}^{(1)}(v)$  et  $I_{m,k}^{(2)}(v)$  les expressions figurant au dernier membre.

**Borne supérieure de  $I_{m,k}^{(1)}(v)$**  On pose  $x = \mathfrak{d}_m(\underline{x})$  et  $y = \mathfrak{d}_m(\underline{y})$ . Comme  $x \in \mathfrak{d}_m(\mathcal{C}_0)$ , on a  $\omega(x) \simeq 2^{-m}$ . De plus, en reprenant les notations introduites au début de la preuve :

$$\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha \bar{\varphi}_m = [\hat{\mathfrak{X}}_m^\alpha \psi_m] \circ \mathfrak{d}_m^{-1}$$

avec  $\psi_m = \varphi|_{\Sigma_m}$ . La comparaison des distances donnée par la formule (8.4.15) entraîne alors :

$$\begin{aligned} &\sum_{m \geq 0} 2^{m(2s+2d-1)} I_{m,k}^{(1)}(v) \\ &\leq \sum_{\substack{m \geq 0 \\ |\alpha|+|\beta|=k}} 2^{m(2s-2d-1)} \iint_{\Delta_m} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_m^\alpha \psi_m(\underline{x}) - \hat{\mathfrak{X}}_m^\alpha \psi_m(\underline{y})|^2}{\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_m}(\underline{x},\underline{y})^{Q^*+2\sigma}} |(\hat{\mathfrak{X}}_*^\beta v) \circ \mathfrak{d}_m(\underline{x})|^2 d\underline{x} d\underline{y} \\ &\leq \sup_{\substack{m \geq 0; |\alpha| \leq k \\ \underline{x} \in \Sigma_m}} 2^{-2md} \int_{B_{\underline{x}}} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_m^\alpha \psi_m(\underline{x}) - \hat{\mathfrak{X}}_m^\alpha \psi_m(\underline{y})|^2}{\mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_m}(\underline{x},\underline{y})^{Q^*+2\sigma}} d\underline{y} \times \sum_{|\beta| \leq k} \int_{\Sigma^*} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\beta v|^2}{\omega^{2s}} d\mu \end{aligned}$$

avec  $B_{\underline{x}} = \{y \in \Sigma_m ; (\underline{x}, y) \in \Delta_m\}$ .

Les fonctions  $\hat{\mathfrak{X}}_m^\alpha \psi_m$  sont régulières sur  $\Sigma_m \subset \mathcal{C}_0$  donc uniformément bornées par rapport à  $m \geq 0$ , de même que leurs dérivées euclidiennes. On a donc :

$$|\hat{\mathfrak{X}}_m^\alpha \psi_m(\underline{x}) - \hat{\mathfrak{X}}_m^\alpha \psi_m(\underline{y})| \leq C|\underline{x} - \underline{y}|$$

avec une constante  $C > 0$  indépendante de  $m$  et de  $\alpha$ .

D'autre part, le théorème "boîte-boule" uniforme (voir [21]) s'applique puisque le rang de chaque famille  $\hat{\mathfrak{X}}_m$  est constant et ne dépend pas non plus de  $m$ . A une constante près et dans un système de coordonnées convenable, la première intégrale est donc bornée par :

$$\int_B \frac{|h_1| + |h'|}{(|h_1|^{1/2} + |h'|)^{2d+2\sigma+1}} dh$$

avec  $h = (h_1, h') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d-1}$  et  $B = \{h ; |h_1| + |h'| \leq 1\}$ . On vérifie immédiatement que cette dernière intégrale est finie. Par exemple,

$$\int_{|h_1| \leq |h'|^2 \leq 1} \frac{|h_1| + |h'|}{(|h_1|^{1/2} + |h'|)^{2d+2\sigma+1}} dh \leq \int_{|h_1| \leq |h'|^2 \leq 1} \frac{2 dh' dh_1}{|h'|^{2d+2\sigma}} \leq \frac{c}{\sigma} \int_0^1 \frac{dh_1}{h_1^\sigma} < +\infty$$

car  $0 < \sigma < 1$ . De même, on a :

$$\int_{|h'|^2 \leq |h_1| \leq 1} \frac{|h_1| + |h'|}{(|h_1|^{1/2} + |h'|)^{2d+2\sigma+1}} dh \leq \int_{|h'|^2 \leq |h_1| \leq 1} \frac{2 dh_1 dh'}{|h_1|^{d+\sigma}} \leq c' \int_{|h'| \leq 1} \frac{dh'}{|h'|^{2d-2(1-\sigma)}} < +\infty.$$

**Borne supérieure de  $I_{m,k}^{(2)}(v)$**  Soit  $(x, y) \in \mathfrak{d}_m(\Delta_m)$ . On a  $\omega(x) \simeq 2^{-m}$  et le Lemme 44 entraîne que  $\mathfrak{d}_m(\Delta_m) \subset \Delta_*$ . En conséquence :

$$\sum_{m \geq 0} 2^{m(2s+2d-1)} I_{m,k}^{(2)}(v) \leq \sum_{|\alpha|+|\beta|=k} \iint_{\Delta_*} \left( \sum_{m \geq 0} |\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha \bar{\varphi}_m(y)|^2 \right) \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\beta v(x) - \hat{\mathfrak{X}}_*^\beta v(y)|^2}{\omega(x)^{Q^*+2s} \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(x, y)^{Q^*+2\sigma}} d\mu_x d\mu_y.$$

Le Lemme 43 entraîne que la somme en  $m \geq 0$  est bornée, donc

$$\sum_{m \geq 0} 2^{m(2s+2d-1)} I_{m,k}^{(2)}(v) \leq C \sum_{|\beta| \leq k} \iint_{\Delta_*} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\beta v(x) - \hat{\mathfrak{X}}_*^\beta v(y)|^2}{\omega(x)^{Q^*+2s} \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(x, y)^{Q^*+2\sigma}} d\mu_x d\mu_y.$$

Lorsque  $|\beta| = k$ , cette somme est clairement majorée par  $\tilde{N}_s(v)$ .

La seule difficulté vient des termes d'ordre  $|\beta| < k$ .

**Lemme 45** Pour tout multi-indice  $\beta$  de longueur  $|\beta| < k$ , on a :

$$\iint_{\Delta_*} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\beta v(x) - \hat{\mathfrak{X}}_*^\beta v(y)|^2}{\omega(x)^{Q^*+2s} \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(x, y)^{Q^*+2\sigma}} d\mu_x d\mu_y \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Sigma^*} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\alpha v(x)|^2}{\omega(x)^{2s}} d\mu_x.$$

**Remarque** - Ce lemme démontre la propriété (8.2.14), i.e. que les dérivations  $R \in \mathfrak{X}_*$  envoient bien  $H^{s+1}(\Sigma^*)$  dans  $H^s(\Sigma^*)$ , ce qui n'était pas évident au vu de la définition (8.2.13).  $\diamond$

**Preuve** Lorsque  $|\beta| < k$ , on applique le début du raisonnement qui suit (8.4.19) pour découper l'intégrale de la manière suivante :

$$\iint_{\Delta_*} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\beta v(x) - \hat{\mathfrak{X}}_*^\beta v(y)|^2}{\omega(x)^{Q^*+2s} \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(x, y)^{Q^*+2\sigma}} d\mu_x d\mu_y \leq C \sum_{m \geq 0} \iint_{\mathfrak{d}_m(\Delta_m)} \frac{|\hat{\mathfrak{X}}_*^\beta(\bar{\varphi}_m v)(x) - \hat{\mathfrak{X}}_*^\beta(\bar{\varphi}_m v)(y)|^2}{2^{-m(2s+2d-1)} \mathcal{D}_{\hat{\mathfrak{X}}_*}(x, y)^{Q^*+2\sigma}} dx dy.$$

On fait le changement de variable  $x = \mathfrak{d}_m(\underline{x})$  et  $y = \mathfrak{d}_m(\underline{y})$ . La propriété de comparaison des distances (8.4.15) et l'identité (8.4.6) fournissent alors la borne supérieure suivante :

$$\sum_{m \geq 0} 2^{m(2s-2d-1)} \|\mathfrak{X}_m^\beta v_m\|_{H^\sigma(\Sigma_m)}^2.$$

De plus, la norme (8.4.6) étant équivalente à la norme d'interpolation complexe, il existe une constante indépendante de  $m$  telle que :

$$\|\mathfrak{X}_m^\beta v_m\|_{H^\sigma(\Sigma_m)} \leq C \|v_m\|_{H^{|\beta|+1}(\Sigma_m)}.$$

On perd  $1 - \sigma$  dérivée, mais cette perte est sans importance car  $|\beta| \leq k - 1$ . On termine alors la preuve en recopiant celle des indices entiers (voir p. 159), la seule modification nécessaire étant le remplacement de  $\omega^k$  par  $\omega^s$ . ■

**Remarque** - Toutes les surfaces  $\Sigma_m$  sont contenues dans une même couronne  $\mathcal{C}_0$  de  $\mathbb{R}^{2d}$ . Après translation, la preuve précédente ramène donc l'étude de la structure sous-riemannienne  $\mathfrak{X}_*$  (qui est une structure à bord, dont le bord est  $\text{Car}_\Sigma$ ) à celle d'un cylindre ayant une singularité à l'infini mais dont le comportement est calibré par l'hypothèse de non-dégénérescence (voir le Lemme 43). On peut donc considérer la Proposition 42 comme une extension globale du Théorème 13 p.112. ◇

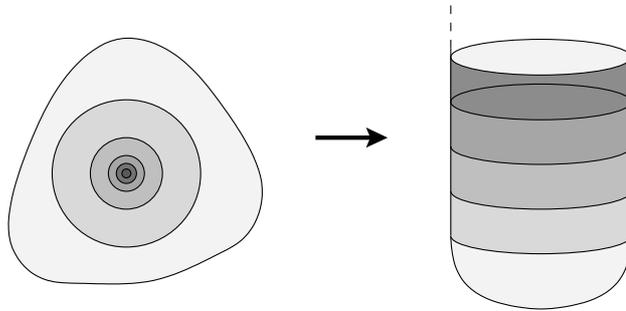


FIG. 8.3 – Methode d'éclatement (les cylindres de même couleur se correspondent)

### 8.5 Complément : un théorème de traces pour le calcul de Weyl

Voici une version plus complète du théorème de traces non caractéristiques (Théorème 41).

**Théorème 46 (H. Bahouri, J.-Y. Chemin, C.-J. Xu [4])** Soit  $\mathfrak{X}$  une famille de champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^q$ , vérifiant uniformément la condition de Hörmander :

$$\forall x \in \mathbb{R}^q, \quad \forall \xi \in T_x^* \mathbb{R}^q, \quad \sum_{Z \in \mathfrak{X} \cup \{\mathfrak{X}\}} |Z(x) \cdot \xi|^2 \geq C_0 |\xi|^2. \tag{8.5.1}$$

Alors, pour tout  $s > 1/2$  et toute surface bornée  $\Sigma$  uniformément non caractéristique, i.e. telle que

$$\forall x \in \Sigma, \quad C_1^{-1} \leq \sum_{Z \in \tilde{\mathfrak{X}}} |(Zg)(x)|^2 \leq C_1 \quad (8.5.2)$$

où  $g$  définit  $\Sigma$ , il existe une constante  $C > 0$  et une extension continue de l'application de restriction  $\text{Tr}_\Sigma$  :

$$\|\text{Tr}_\Sigma u\|_{H^{s-1/2}(\Sigma; \mathfrak{X}')} \leq C \|u\|_{H^s(\mathfrak{X})}.$$

La structure projetée  $\mathfrak{X}'$  est constituée des champs engendrés par  $\mathfrak{X}$  et tangents à  $\Sigma$ . La constante  $C$  ne dépend que de  $C_0$  et  $C_1$ . Il existe aussi un opérateur continu de relèvement :

$$J_\Sigma : H^{s-1/2}(\Sigma; \mathfrak{X}') \rightarrow H^s(\mathfrak{X}).$$

tel que  $\text{Tr}_\Sigma \circ J_\Sigma = \text{Id}_\Sigma$ .

La preuve proposée par [4] repose de manière cruciale sur un théorème de traces abstrait du calcul de Weyl-Hörmander (bien que ce dernier résultat ne soit pas énoncé tel quel dans l'article). Pour la complétude de l'exposé et la commodité du lecteur, cette section donne quelques éléments de démonstration. On reprend les notations de la section §4.4.

On considère deux métriques de Hörmander  $g$  et  $G$  respectivement sur  $T^*\mathbb{R}^{d-1}$  et  $T^*\mathbb{R}^d$ . On se donne deux partitions de l'unité en fonctions confinées :

1.  $(\varphi_{X'})_{X' \in T^*\mathbb{R}^{d-1}}$  est une partition de l'unité de  $T^*\mathbb{R}^{d-1}$  en fonctions  $g$ -confinées.
2.  $(\Phi_X)_{X \in T^*\mathbb{R}^d}$  est une partition de l'unité de  $T^*\mathbb{R}^d$  en fonctions  $G$ -confinées.

On suppose de plus que  $\Phi_X = \Theta_X \# \tilde{\Phi}_X$  avec  $\Theta_X$  et  $\tilde{\Phi}_X$  uniformément  $G$ -confinées. On note  $\Delta_g$  la fonction donnée par le théorème de biconfinement (voir (4.4.6)-(4.4.7)) pour la métrique  $g$ .

On note  $X = ((x_1, \xi_1); X')$  avec  $X' \in T^*\mathbb{R}^{d-1}$ . On suppose que la métrique  $G$  est de la forme :

$$G_X(dY) = \gamma_X(dY_1) + \Gamma_X(dY') \quad (8.5.3)$$

avec un déterminant  $|\gamma_X|^{1/2}$  uniformément borné et  $|\Gamma_X|^{1/2} \lesssim |g_{X'}|^{1/2}$ .

La restriction  $\gamma : C^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$  associée à l'inclusion  $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$  définit des opérateurs de transfert de confinement :

$$T_{X'}^Y = \varphi_{X'}^w \circ \gamma \circ \Theta_Y^w. \quad (8.5.4)$$

On considère enfin  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{M}$  deux poids admissibles, respectivement pour  $g$  et  $G$ .

**Théorème 47** Soit  $s > 1/2$ . On suppose qu'il existe une famille  $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$  de fonctions positives ayant les propriétés suivantes.

1. Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\|T_{X'}^Y\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d); L^2(\mathbb{R}^{d-1}))} \leq P_N(Y) \Delta_g(X', Y')^{-N}. \quad (8.5.5)$$

2. Il existe un fonction  $\chi_N$  telle que :

$$P_N(Y) \leq \left( \frac{\mathfrak{M}^2(Y)}{|\eta_1|^2 + \mathfrak{m}^2(Y')} \right)^{s/2} \chi_N(Y) \quad (8.5.6)$$

avec, pour  $N$  assez grand :

$$\sup_{\eta_1, Y'} \int_{\mathbb{R}} \chi_N^2(Y) dy_1 < +\infty. \quad (8.5.7)$$

Alors, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\|\gamma u\|_{H(\mathfrak{m}^{s-1/2}, g)} \leq C \|u\|_{H(\mathfrak{M}^s, g)} \quad (8.5.8)$$

pour toute fonction  $u \in H(\mathfrak{M}^s, g)$ .

Pour démontrer le théorème de traces dans le cas non-caractéristique, on se ramène alors (après redressement de la surface  $\Sigma$  et d'un champ transverse) à appliquer le Théorème 47 avec

$$\mathfrak{M}^2(X) = \mathfrak{m}^2(X') + |\xi_1|^2,$$

les métriques (4.4.2) associées à  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{M}$  et

$$P_N(Y) = \frac{\langle \eta' \rangle^{1/4}}{(1 + \langle \eta' \rangle |y_1|^2)^N}.$$

La vérification des différentes hypothèses est immédiate, à l'exception de (8.5.5) pour laquelle on renvoie à [4, §5.1].

Le coeur de la démonstration du Théorème 47 est le calcul suivant.

**Lemme 48** Soient  $(E, d\mu)$  et  $(F, d\nu)$  deux espaces mesurés et des fonctions :

$$m : E \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad M, p, v : F \rightarrow \mathbb{R}_+$$

et  $\Delta : E \times F \rightarrow [1; +\infty)$ . Alors,

$$\int_E m(x) \left( \int_F \frac{p(y) v(y)}{\Delta(x, y)} d\nu_y \right)^2 d\mu_x \leq C \int_F M(y) v^2(y) d\nu_y \quad (8.5.9)$$

avec  $C = \sup_{y \in F} \left( \iint_{E \times F} \frac{m(x) p(\bar{y})^2}{\Delta(x, y) \Delta(x, \bar{y}) M(\bar{y})} d\mu_x \otimes d\nu_{\bar{y}} \right)$ .

**Preuve** Il suffit d'appliquer convenablement Cauchy-Schwartz puis le théorème de Fubini pour les fonctions positives :

$$\begin{aligned} & \int_E m(x) \left( \int_F \frac{p(y) v(y)}{\Delta(x, y)} d\nu_y \right)^2 d\mu_x \\ & \leq \int_E m(x) \left( \int_F \frac{p^2(\bar{y})}{M(\bar{y})} \frac{d\nu_{\bar{y}}}{\Delta(x, \bar{y})} \right) \left( \int_F M(y) v^2(y) \frac{d\nu_y}{\Delta(x, y)} \right) d\mu_x \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Preuve [Théorème 47]** La norme de la trace (pour une fonction régulière) est :

$$\|\gamma u\|_{H(\mathfrak{m}^{s-1/2}, g)}^2 = \int_{T^* \mathbb{R}^{d-1}} \mathfrak{m}^{2s-1}(X') \|\varphi_{X'}^{\mathfrak{w}}(\gamma u)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}^2 d_g X'$$

avec  $\varphi_{X'}^{\mathfrak{w}}(\gamma u) = \int_{T^* \mathbb{R}^d} T_{X'}^Y \circ \tilde{\Phi}_Y^{\mathfrak{w}} u d_G Y$ , donc

$$\|\varphi_{X'}^{\mathfrak{w}}(\gamma u)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} \leq \int_{T^* \mathbb{R}^d} \|T_{X'}^Y\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d); L^2(\mathbb{R}^{d-1}))} \|\tilde{\Phi}_Y^{\mathfrak{w}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} d_G Y.$$

On applique alors (8.5.5) puis le Lemme 48 avec  $E = (T^* \mathbb{R}^{d-1}, d_g X')$ ,  $F = (T^* \mathbb{R}^d, d_G X)$

$$m = \mathfrak{m}^{2s-1}(X'), \quad M = \mathfrak{M}^{2s}(Y), \quad p = P_N(Y), \quad \Delta = \Delta_g(X', Y)^N$$

et  $v = \|\tilde{\Phi}_Y^w u\|_{L^2}$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} \|\gamma u\|_{H(m^{s-1/2}, g)}^2 &\leq \int_{T^* \mathbb{R}^{d-1}} m^{2s-1}(X') \left( \int_{T^* \mathbb{R}^d} \frac{P_N(Y) \|\tilde{\Phi}_Y^w u\|_{L^2}}{\Delta_g(X', Y')^N} d_G Y \right)^2 d_g X' \\ &\leq C_0 \int_{T^* \mathbb{R}^d} \mathfrak{M}^{2s}(Y) \|\tilde{\Phi}_Y^w u\|_{L^2}^2 d_G Y \\ &\leq C_0 C_1 \|u\|_{H(\mathfrak{M}^s, G)}^2 \end{aligned}$$

avec  $C_0 = \sup_{Z \in T^* \mathbb{R}^d} \left( \iint \frac{m^{2s-1}(X') P_M^2(Y)}{\Delta_g(X', Z')^N \Delta_g(X', Y')^N \mathfrak{M}^{2s}(Y)} d_g X' \otimes d_G Y \right)$  et une constante structurelle  $C_1 > 0$ . Pour obtenir (8.5.8), il suffit donc de vérifier que la constante  $C_0$  est finie. L'hypothèse (8.5.6) donne :

$$C_0 \leq \sup_{Z' \in T^* \mathbb{R}^d} \iint \frac{m^{2s-1}(X')}{(|\eta_1|^2 + m^2(Y'))^s} \frac{\chi_N^2(Y)}{\Delta_g(X', Z')^N \Delta_g(X', Y')^N} d_g X' \otimes d_G Y.$$

Grâce à la structure particulière de la métrique  $G$ , il suffit de contrôler :

$$\sup_{Z' \in T^* \mathbb{R}^d} \iiint_{X', Y_1, Y'} \frac{m^{2s-1}(X')}{(|\eta_1|^2 + m^2(Y'))^s} \frac{\chi_N^2(Y)}{\Delta_g(X', Z')^N \Delta_g(X', Y')^N} |g_{X'}|^{1/2} |\gamma_Y|^{1/2} |\Gamma_Y|^{1/2}.$$

Ayant supposé  $|\gamma_Y|^{1/2}$  borné et  $|\Gamma_Y|^{1/2} \lesssim |g_{Y'}|^{1/2}$ , on peut donc intégrer d'abord en  $Y_1$ . La propriété (8.5.7) et la formule

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\eta_1}{(|\eta_1|^2 + m^2(Y'))^s} = \frac{1}{m^{2s-1}(Y')} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+t^2)^s}$$

donnent alors, pour  $s > 1/2$  et une constante  $\kappa_s > 0$  finie :

$$C_0 \leq \kappa_s \sup_{Z' \in T^* \mathbb{R}^d} \iint_{X', Y'} \left( \frac{m(X')}{m(Y')} \right)^{2s-1} \frac{d_g X'}{\Delta_g(X', Z')^N} \frac{d_g Y'}{\Delta_g(X', Y')^N}.$$

Comme  $m$  est un  $g$ -poids, on conclut en choisissant  $N$  assez grand pour pouvoir appliquer la propriété (4.4.7). ■



## Chapitre 9

# Exploration informatique d'un système sous-riemannien

Le dernier chapitre est consacré au système de  $\mathbb{R}^4$  :

$$\hat{\mathcal{X}}_* : \begin{cases} R_1 = p_1 \partial_{p_1} + q_1 \partial_{q_1} + p_2 \partial_{p_2} + q_2 \partial_{q_2}, \\ R_2 = p_2 \partial_{p_1} - q_2 \partial_{q_1} - p_1 \partial_{p_2} + q_1 \partial_{q_2}, \\ R_3 = -q_2 \partial_{p_1} - p_2 \partial_{q_1} + q_1 \partial_{p_2} + p_1 \partial_{q_2}. \end{cases}$$

Cette famille de champs de vecteurs correspond à la structure de dérivation permettant de décrire les traces de  $H^s(\mathbb{H}^2)$  sur la surface  $\Sigma$  d'équation  $t = 0$  (voir p.151).

Le Théorème 13 utilise la distance de Carnot associée à  $\hat{\mathcal{X}}_*$ . Malheureusement, on ne dispose pas de formule aussi simple que sur le groupe de Heisenberg comme (4.5.3). L'objectif de ce chapitre est de remédier à ce manque d'intuition à l'aide de l'outil informatique.

Le programme présenté ici permet, sous forme de jeu, d'appréhender la distance de Carnot en "expérimentant" la difficulté à joindre deux points de  $\Sigma$  lorsque le déplacement est contraint à suivre les champs.

**Remarque** - Signalons clairement que ce programme rudimentaire n'a pas l'ambition de calculer la distance de Carnot ou de dessiner des boules sous-riemanniennes, ce qui nécessiterait l'élaboration d'algorithmes spécifiques et une programmation beaucoup plus soignée.  $\diamond$

### 9.1 Code source

Le programme est écrit en Perl/Tk. Les trajectoires sont calculées de manière "naive" par un petit déplacement dans la direction du champ (en fait, par 15 pas de calculs à un ordre inférieur, mais qui ne sont pas affichés car le déplacement serait de l'ordre du pixel). En pratique, les trajectoires sont lisses et réversibles. Le mouvement du mobile est fluide.

La touche 'h' commute l'affichage d'un trièdre coloré centré sur le mobile indiquant la direction des mouvements possibles.

```
#!/usr/bin/perl
use Tk;
```

```
my ($height,$width) = (550,550) ; # Dimensions des zones de tracé, en pixel
```

```

my ($Prange,$Qrange)= (5,5);      # Domaine initial de (p,q), en unités

# Champs de vecteurs
sub field {
    my ($n) = @_ ;
    if ( $n == 0) {
        ($p1,$q1,$p2,$q2);
    } elsif ($n == 1) {
        ($p2,-$q2,-$p1,$q1);
    } elsif ($n == 2) {
        (-$q2,-$p2,$q1,$p1);
    } else {
        die "Undefined vector field";
    }
}

# Interface graphique
$fenetre = new MainWindow ( ) ;
$fenetre -> title ( "Sub-riemannian Explorer" ) ;
$fenetre -> bind ( "<Key-q>" ,      sub { exit(0);} );
$fenetre -> bind ( "<Key-space>" ,  sub { &clean; } );
$fenetre -> bind ( "<Key-Return>" , sub { &reset; } );
$fenetre -> bind ( "<Key-h>" ,      sub { &togglehelp; } );
$b0 = $fenetre -> Label( -text =>
    'Les mouvements du bi-point suivent des champs sous-riemanniens dans R^4
    qui sont la projection des champs de Heisengerg sur la surface t=0.')
-> grid( -row => 0, -sticky=>"ew" );
$cadre = $fenetre -> Frame ( ) -> grid ( -row =>1, -sticky=>"nsew" );
$b1 = $cadre -> Canvas ( -background=>'gray95', -height=>$height,
    -width=>$width ) ->pack(-side=>'left');
$b2 = $cadre -> Canvas ( -background=>'gray90', -height=>$height,
    -width=>$width ) ->pack(-side=>'left');
$b3 = $fenetre -> Message( -width=>1.5*$width, -text =>
    'Essayez d\'atteindre le bi-point cible (en rouge) !
    Déplacez-vous avec les touches \'j,k,l\' (\'Alt\' pour reculer).
    La touche \'h\' commute l\'affichage des directions (j:jaune, k:rouge, l:vert).
    Pour effacer l\'ecran sans modifier la position, appuyez sur \'espace\' .
    Tapez \'Entrée\' pour réinitialiser et \'q\' pour sortir.')
-> grid( -row => 2, -sticky=>"ew" );

# Touches de déplacement
$fenetre -> bind ( "<Key-j>" , sub { &move(0,+1); } );
$fenetre -> bind ( "<Key-k>" , sub { &move(1,+1); } );
$fenetre -> bind ( "<Key-l>" , sub { &move(2,+1); } );

# Inversion du sens de déplacement avec 'Alt'
$fenetre -> bind ( "<Alt-Key-j>" , sub { &move(0,-1); } );

```

```

$fenetre -> bind ( "<Alt-Key-k>" , sub { &move(1,-1); } );
$fenetre -> bind ( "<Alt-Key-l>" , sub { &move(2,-1); } );

# Calcul des trajectoires
sub move { # routine principale
    my ($Nfield,$forward) = @_ ;
    my ($dp1,$dq1,$dp2,$dq2) = &field($Nfield) ;
    my $epsilon=.01; # amplitude du déplacement
    my ($x1old,$y1old,$x2old,$y2old) = &pq2coord($p1,$q1,$p2,$q2);
    my $I=0; $epsilon=$forward*$epsilon/15;
    while ($I++<15) { # boucle pour affiner la trajectoire
        $p1 += $dp1*$epsilon;
        $q1 += $dq1*$epsilon;
        $p2 += $dp2*$epsilon;
        $q2 += $dq2*$epsilon;
        my ($dp1,$dq1,$dp2,$dq2) = &field($Nfield) ;
    }
    ($x1,$y1,$x2,$y2) = &pq2coord($p1,$q1,$p2,$q2);
    $b1 -> createLine($x1old,$y1old,$x1,$y1);
    $b2 -> createLine($x2old,$y2old,$x2,$y2);
    &displaycoord;
    &help;
}

sub pq2coord { # transforme les unités (p,q) en pixels
    my ($P1,$Q1,$P2,$Q2) = @_ ;
    my $Pscale=$width/(2.5*$Prange);
    my $Qscale=$height/(2.5*$Qrange);
    ($P1*$Pscale+($width/2),($height/2)-$Q1*$Qscale,
        $P2*$Pscale+($width/2),($height/2)-$Q2*$Qscale);
}

sub displaycoord { # affiche les coordonnées des points
    $b1 -> delete('p1','q1');
    $b1 -> createText(.25*$width,10,-text=>"p1= $p1",-tags=>'p1');
    $b1 -> createText(.75*$width,10,-text=>"q1= $q1",-tags=>'q1');
    $b2 -> delete('p2','q2');
    $b2 -> createText(.25*$width,10,-text=>"p2= $p2",-tags=>'p2');
    $b2 -> createText(.75*$width,10,-text=>"q2= $q2",-tags=>'q2');
}

# Efface l'écran et dessine les points
sub clean {
    $b1 -> delete('all');
    $b2 -> delete('all');
    # départ
    ($x1,$y1,$x2,$y2) = &pq2coord($p1,$q1,$p2,$q2);

```

```

$b1 -> createRectangle($x1,$y1,$x1+2,$y1+2,-fill=>'black');
$b2 -> createRectangle($x2,$y2,$x2+2,$y2+2,-fill=>'black');
# arrivée
my ($xx1,$yy1,$xx2,$yy2) = &pq2coord($pp1,$qq1,$pp2,$qq2);
$b1 -> createRectangle($xx1,$yy1,$xx1+8,$yy1+8,-fill=>'red');
$b2 -> createRectangle($xx2,$yy2,$xx2+8,$yy2+8,-fill=>'red');
# axes
my ($x01,$y01,$x02,$y02) = &pq2coord(0,0,0,0);
$b1 -> createLine($x01-$width,$y01,$x01+$width,$y01);
$b1 -> createLine($x01,$y01-$height,$x01,$y01+$height);
$b2 -> createLine($x02-$width,$y02,$x02+$width,$y02);
$b2 -> createLine($x02,$y02-$height,$x02,$y02+$height);
&displaycoord;
&help;
}

# Générateur aléatoire de positions
sub reset {
    ($p1,$q1) = &randPQ; # point de départ
    ($p2,$q2) = &randPQ;
    ($pp1,$qq1) = &randPQ; # point d'arrivée
    ($pp2,$qq2) = &randPQ;
    $showhelp = 1; # affiche l'aide par défaut
    &clean;
}

sub randPQ {
    (rand(2*$Prange)-$Prange,rand(2*$Qrange)-$Qrange);
}

# Aide : affiche des flèches de couleur dans les directions possibles
sub help {
    $b1 -> delete ('j1','k1','l1');
    $b2 -> delete ('j2','k2','l2');
    if($showhelp) {
        my $eps=.1;
        my ($jx1,$jy1,$jx2,$jy2) = &field(0);
        my ($kx1,$ky1,$kx2,$ky2) = &field(1);
        my ($lx1,$ly1,$lx2,$ly2) = &field(2);
        ($jx1,$jy1,$jx2,$jy2) = &pq2coord($p1+$eps*$jx1,$q1+$eps*$jy1,
            $p2+$eps*$jx2,$q2+$eps*$jy2);
        ($kx1,$ky1,$kx2,$ky2) = &pq2coord($p1+$eps*$kx1,$q1+$eps*$ky1,
            $p2+$eps*$kx2,$q2+$eps*$ky2);
        ($lx1,$ly1,$lx2,$ly2) = &pq2coord($p1+$eps*$lx1,$q1+$eps*$ly1,
            $p2+$eps*$lx2,$q2+$eps*$ly2);
        $b1 -> createLine($x1,$y1,$jx1,$jy1,-tags=>'j1',-fill=>'yellow');
        $b1 -> createLine($x1,$y1,$kx1,$ky1,-tags=>'k1',-fill=>'red');
    }
}

```

```

    $b1 -> createLine($x1,$y1,$lx1,$ly1,-tags=>'l1',-fill=>'green');
    $b2 -> createLine($x2,$y2,$jx2,$jy2,-tags=>'j2',-fill=>'yellow');
    $b2 -> createLine($x2,$y2,$kx2,$ky2,-tags=>'k2',-fill=>'red');
    $b2 -> createLine($x2,$y2,$lx2,$ly2,-tags=>'l2',-fill=>'green');
  };
}

sub togglehelp {
    $showhelp = 1-$showhelp;
    &help;
}

# Exécution principale
my ($p1,$q1,$p2,$q2);      # déclare le point de départ
my ($x1,$y1,$x2,$y2);     # déclare les coordonnées
my ($pp1,$qq1,$pp2,$qq2); # déclare le point d'arrivée
my $showhelp;              # affichage des directions
&reset;                     # initialisation du tracé
MainLoop ( ) ;

```

## 9.2 Exemples de simulations

Le programme peut-être exécuté sur tout système informatique possédant une installation récente de Perl avec le module Tk. Voici quelques captures d'écran.

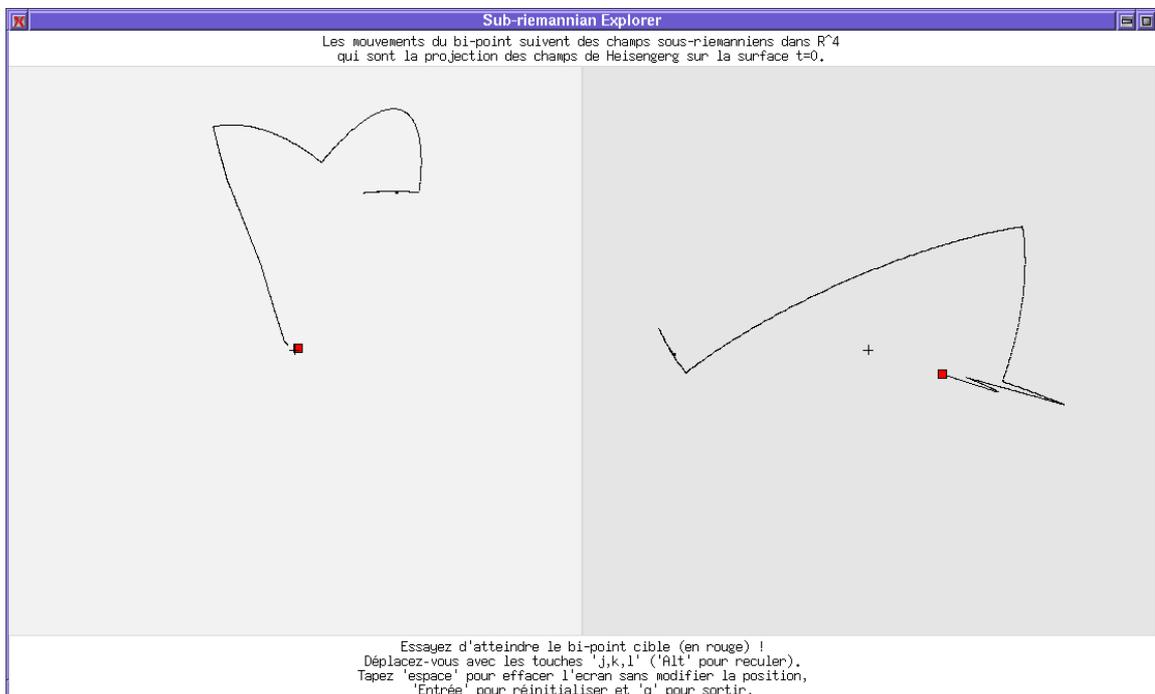


FIG. 9.1 – Capture d'écran illustrant la propriété de Hörmander.

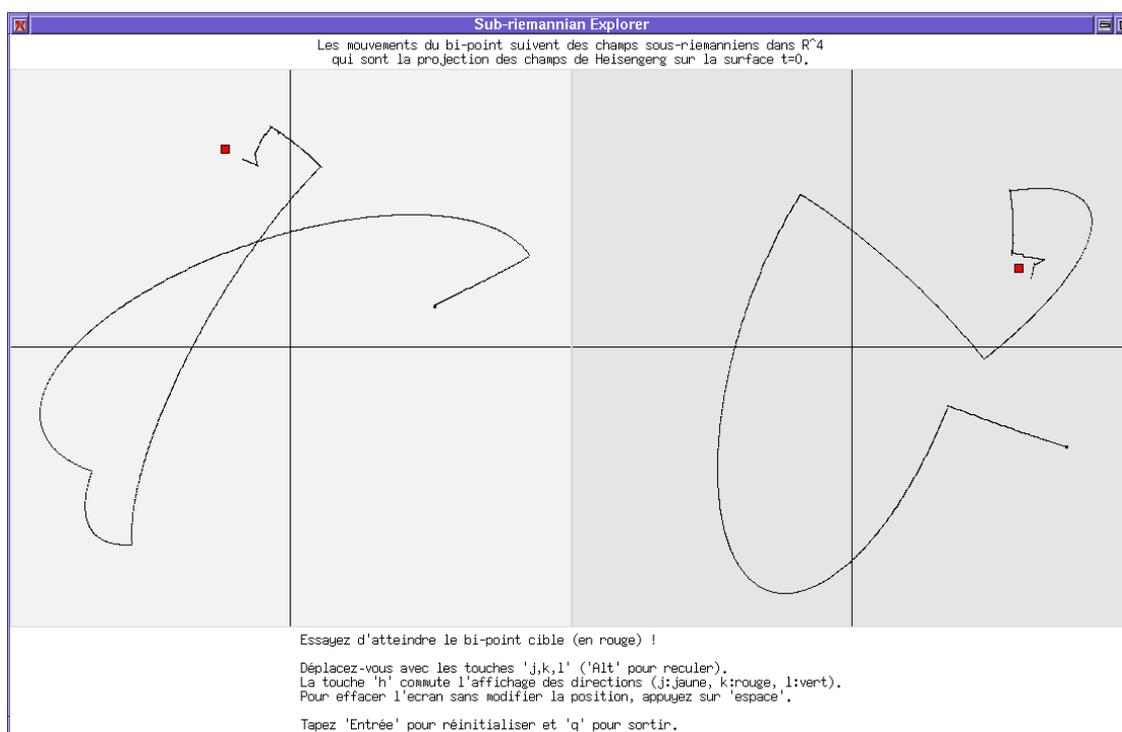
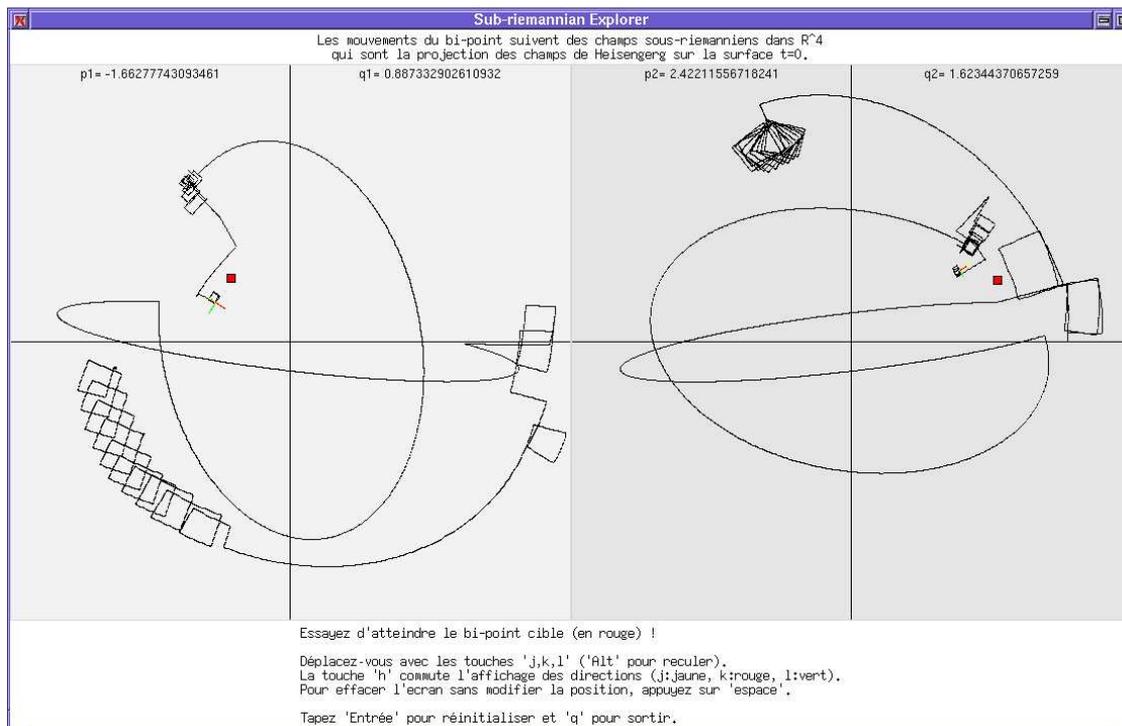


FIG. 9.2 – Exemples de trajectoires  $\hat{\mathcal{X}}_*$ -horizontale.

En haut : exemples de calculs de commutateurs. En bas : en comptant les discontinuités, on constate qu'à la sortie de la "grande boucle" du point de droite, celui de gauche n'est pas revenu dans son quadrant d'origine.

Le programme permet aussi de visualiser les champs dans  $\mathbb{R}^4$  par leurs courbes intégrales. Les champs  $R_2$  et  $R_3$  sont illustrés sur la figure ci-dessous.

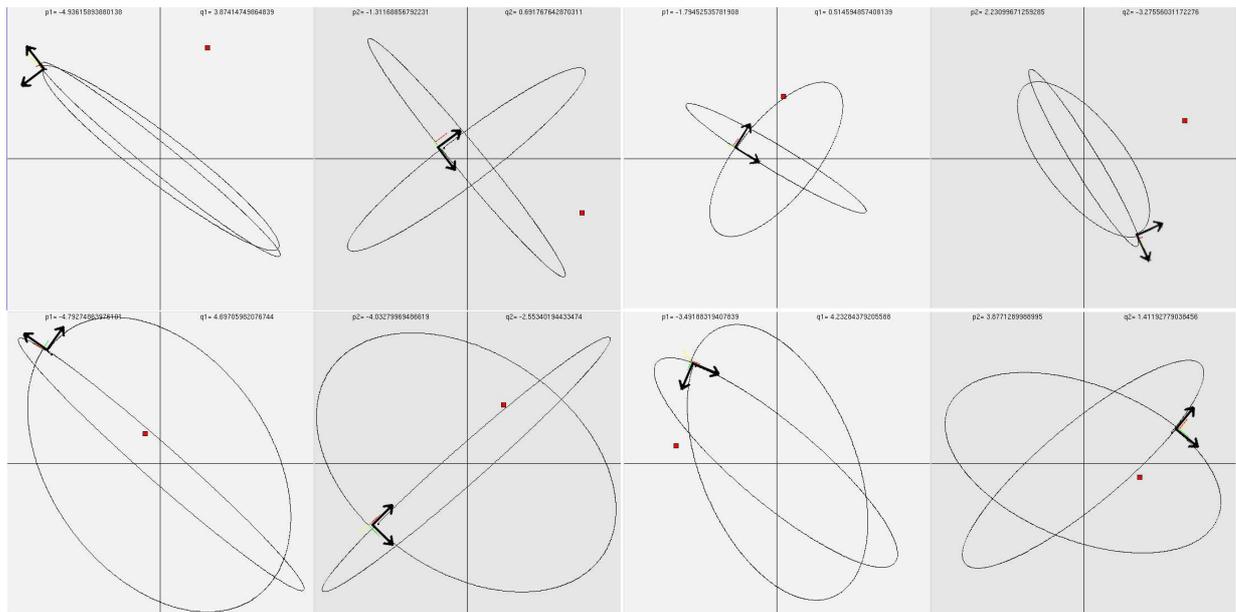


FIG. 9.3 – Structure des champs  $R_2$  et  $R_3$ .  
On identifie les vecteurs en remarquant que  $(R_2, R_3)$   
définit une base indirecte dans chaque plan  $\mathbb{R}^2$ .

### 9.3 Remarques

Ce mini-logiciel permet d'appréhender la distance associée à une famille de champs de vecteurs en autorisant des déplacements uniquement le long des champs. Cependant, on doit remarquer que cette approche est biaisée. Par exemple, dans le cas euclidien, des déplacements uniquement parallèles aux axes suggèreraient que  $(1, 1)$  est à distance  $\sqrt{2}$  de l'origine...

Un "vrai" programme devrait permettre à l'expérimentateur de se déplacer dans la direction d'une combinaison linéaire quelconque des champs de base. En théorie, on peut paramétrer les combinaisons par un point dans un polyèdre; en pratique, il faudrait programmer une manette de jeu ou les déplacements de la souris pour rendre ce polyèdre intuitif. La réalisation de cette modification dépasse le cadre de la présente thèse.

On pourrait ensuite envisager d'améliorer le moteur de calcul. L'algorithme de calcul des trajectoires est en effet particulièrement naïf. Par exemple, les trajectoires des champs  $R_2$  et  $R_3$  étant des ellipses, le fait de suivre la tangente induit une dérive systématique vers l'extérieur. On pourrait améliorer la précision en utilisant les algorithmes classiques de résolution d'EDO.

Le programme peut être modifié assez facilement pour explorer d'autres familles de champs de vecteurs. Il suffit de changer la définition des champs au début du code source. Par exemple, pour la famille de Goursat étudiée p.124 qui est d'ordre 3 :

```
sub field {
  my ($n) = @_;
  if ( $n == 0 ) {
```

```

(0,0,0,0); # ce champ n'est pas utilisé
} elsif ($n == 1) {
    (1,$p2,$q2,0);
} elsif ( $n == 2) {
    (0,0,0,$q1);
} else {
    die "Undefined vector field";
}
}

```

Voici un exemple d'exécution du programme modifié.

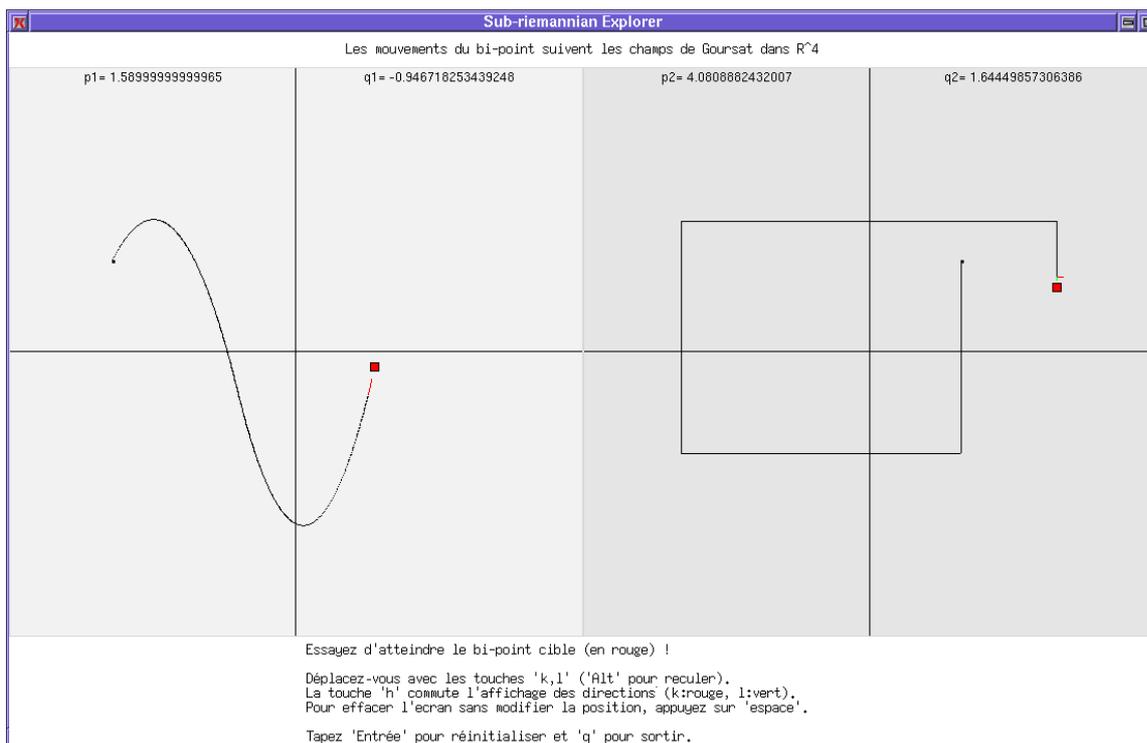


FIG. 9.4 – Famille de Goursat dans  $\mathbb{R}^4$ .

## Bibliographie de la partie II

- [1] L. Ambrosio, S. Rigot, *Optimal mass transportation in the Heisenberg group*, J. Funct. Anal. *208* (2004), N.2, 261–301.
- [2] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, I. Gallagher, *Inégalités de Hardy précisées*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris *341* (2005), N.2, 89–92.
- [3] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, I. Gallagher, *Precised Hardy Inequalities*, Univ. Paris VII (Preprint).
- [4] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, C.-J. Xu, *Trace and trace lifting theorems in weighted Sobolev spaces*, J. Inst. Math. Jussieu *4* (2005), N.4, 509–552.
- [5] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, C.-J. Xu, *Trace theorem on the Heisenberg group*, Proceedings of the Conference on Phase Space Analysis of PDE, Pienza 2005 (à paraître).
- [6] H. Bahouri, I. Gallagher, *Paraproduit sur le groupe de Heisenberg et applications*. Rev. Mat. Iberoamericana *17* (2001), N.1, 69–105.
- [7] H. Bahouri, P. Gérard, C.-J. Xu, *Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg*, J. Anal. Math. *82* (2000), 93–118.
- [8] A. Bellaïche, *The Tangent Space in Sub-Riemannian Geometry in Sub-Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Progress in Maths, Vol. 144 (1996).
- [9] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces* (Russe), Trad. par V. S. Krjuckov et P. I. Lizorkin. Mir, Moscou (1980).
- [10] S. Berhanu, I. Pesenson, *The trace problem for vector fields satisfying Hörmander's condition*, Math. Z. *231* (1999), N.1, 103–122.
- [11] J.-M. Bony, *Problème de Dirichlet et semi-groupe fortement fellerien associés à un opérateur intégro-différentiel*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B, *265* (1967), A361–A364.
- [12] J.-M. Bony, J.-Y. Chemin, *Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander*, Bull. Soc. math. France *122* (1994), 77–118.
- [13] J.-M. Bony, N. Lerner, *Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur I*, Ann. Sci. E.N.S. *4<sup>ème</sup> série*, *22* (1989), 377–433.
- [14] C.E. Cancelier, J.-Y. Chemin, C.J. Xu, *Calcul de Weyl et opérateurs sous-elliptiques*, Ann. Inst. Fourier *43* (1993), N.4, 1157–1178.
- [15] D.-C. Chang, P. Greiner, *Harmonic Analysis and Subriemannian Geometry on Heisenberg Groups*. Bull. Inst. Maths. Ac. Sinica *30* (2002), N.3, 153–190.
- [16] J.-Y. Chemin, *Perfect incompressible fluids*, Trad. I. Gallagher et D. Iftimie, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications *14* (1998).
- [17] J.-Y. Chemin, C.J. Xu, *Inclusions de Sobolev en calcul de Weyl-Hörmander et champs de vecteurs sous-elliptiques*, Ann. Sci. E.N.S. *30* (1997), 719–751.
- [18] E.B. Davies, *One parameter semi-groups*. Academic Press, New York (1980).

- [19] M. Derridj, *Un problème aux limites pour une classe d'opérateurs du second ordre hypoelliptiques*, Ann. Inst. Fourier 21 (1971), N.4, 99–148.
- [20] M. Gromov, *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*, in *Sub-Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Progress in Maths, Vol. 144 (1996).
- [21] F. Jean, *Uniform Estimations of Sub-Riemannian Balls*. Journal on Dynamical and Control Systems 7 (2001), N.4, 473–500.
- [22] D.S. Jerison, *The Dirichlet problem for the Kohn Laplacian on the Heisenberg group, I - II*, J. Funct. Anal. 43 (1981), N.1, 97–142 & N.2, 224–257.
- [23] D.S. Jerison, A. Sánchez-Calle, *Estimates for the Heat Kernel for a Sum of Squares of Vector Fields*, Indiana Univ. Math. J. 35 (1986), N.4, 835–854.
- [24] D.S. Jerison, A. Sánchez-Calle, *Subelliptic, Second Order Differential Operators*, in *Complex Analysis III*, Lect. Notes in Maths, Vol. 1277 (1986), 46–77.
- [25] R. Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, A.M.S., Math. Surveys & Monographs 91 (2002).
- [26] R. Monti, D. Morbidelli, *Trace theorems for vector fields*, Math. Z. 239 (2002), N.4, 747–776.
- [27] S. Mustapha, F. Vigneron, *Construction of Sobolev spaces of fractional order in a Subriemannian case*, Annales de l'Institut Fourier 57 (2007).
- [28] A. Nagel, E.M. Stein, *Lectures on pseudodifferential operators : regularity theorems and applications to nonelliptic problems*, Mathematical Notes 24, Princeton (1979).
- [29] E.M. Stein, *The characterization of functions arising as potentials - II*, Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 577–582.
- [30] E.M. Stein, *Harmonic analysis*, Princeton (1993).
- [31] H. Triebel, *Theory of function spaces II*, Birkhäuser, Monographs in Mathematics 84 (1992).
- [32] F. Vigneron, *The Trace Problem for Sobolev Spaces over the Heisenberg Group*, Ecole polytechnique, CMLS (preprint 2006).
- [33] N. Garofalo, E. Lanconelli, *Frequency functions on the Heisenberg group, the uncertainty principle and unique continuation*, Ann. Inst. Fourier 40 (1990), N.2, 313–356.

# Index thématique

## Espaces à poids

- Décroissance  $p$ -faible (Taux  $\eta_p$ ) ..... 7
- Espace  $L^p_\eta$  ..... 5
- Inclusions de Sobolev ..... 37
- Inclusions naturelles ..... 5

## Espaces de Sobolev

- $H^k(\Omega; \mathfrak{X}; \mu)$  ..... 93
- Calcul de Weyl :  $H(m^s)$  ..... 98
- Modèle (en Fourier) :  $H(m^s)$  ..... 103
- Régularité microlocale :  $H^s_{x,\xi}$  ..... 91
- Structure de dérivation :  $\mathfrak{X}$  ..... 92

## Espaces de traces

- Condition de non-dégénérescence ..... 147
- Espaces de Sobolev :  $H^s(\Sigma^*)$  ..... 151
- Structure de dérivation projetée :  $\mathfrak{X}_*$  ..... 149

## Famille de champs de vecteurs

- Bien structurée ..... 131
- Condition de crochet de Hörmander ... 92
- Cordonnées adaptées ..... 118, 128, 131
- Crochets de rang  $\geq 3$  ..... 124, 130
- Dimension homogène :  $Q$  ..... 94, 128
- Distance de Carnot :  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}(x, y)$  ..... 93
- Point régulier ..... 92

## Groupe de Heisenberg

- Espace de Sobolev :  $H^s(\mathbb{H}^d)$  ..... 101
- Généralités sur  $\mathbb{H}^d$  ..... 100
- Structure de dérivation naturelle ..... 100
- Structure sous-riemannienne ..... 100, 150
- Traces de  $H^s(\mathbb{H}^d)$  ..... 152

## Inégalités

- Hölder ..... voir: **Espaces à poids - Inclusions**
- Hardy (classique) ..... 127
- Hardy sous-riemannien ..... 135, 138
- Peetre ..... 6, 39
- Young ..... voir: **Théorèmes - convolution**

## Modélisation

- Eq. d'Euler ..... 15
- Eq. de la Chaleur  $e^{t\Delta}$  ..... 3
- Mécanique des fluides ..... 11-19
- Magnéto-hydrodynamique (MHD) ..... 67
- Navier-Stokes (NS) ..... 18

## Noyaux de convolution

- Hydrodynamique :  $F_{j;h,k}$  ..... 19
- Estimations ponctuelles ..... 20
- Opérateur de convolution ..... 22
- Propriétés de symétrie ..... 19
- Magnétique :  $G_{j;h,k}$  ..... 68
- Sous-riemannien :  $p_t(x, y)$  ..... 114

## Simulation numérique

- Description du modèle ..... 151
- Programme & captures d'écran ..... 167

## Théorèmes principaux

*Pour un résumé, voir p.8 et p.101*

### Convolution

- Critère asymétrique ..... 25
- Loi de Young à poids ..... 6
- Loi précisée ..... 71
- Principe de moindre localisation ..... 29

### Espaces de Sobolev (cas modèle)

- Caractérisation de  $H^s$  ( $s \notin \mathbb{N}$ ) ..... 105
- Inclusions de Sobolev ..... 106
- Traces ..... 107-110

### Espaces de Sobolev (sous-riemanniens)

- Caractérisation de  $H^s$  ( $s \notin \mathbb{N}$ ) ..... 112
- Densité des fonctions "épointées" ... 134
- Eclatement de  $H^s(\mathbb{H}^d)$  ..... 140
- Inégalité de Hardy ..... 135, 138
- Structure crochet d'ordre  $\leq 3$  ..... 131
- Traces de  $H^s(\mathbb{H}^d)$  ..... 152

### MHD

- Diffusion instantanée ..... 80
- Propagation faible de la localisation . 69

Propagation forte de la localisation ..	74
Navier-Stokes	
Développement asymptotique.....	47
Inégalité d'énergie généralisée.....	41
Localisation du tourbillon .....	64
Loi du tout ou rien, temps de vie....	33
Obstacle aérodynamique.....	61
Obstructions à la décroissance....	56-61
Propagation de profils anisotropes ...	38
Propagation faible de la localisation .	36
Propagation forte de la localisation ..	30
Propriétés du noyau .....	voir: <b>Noyaux</b>
Symétries et décroissance.....	45