



HAL
open science

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DE PROPAGATION D'UN LASER À ATOMES

Jean-Félix Riou

► **To cite this version:**

Jean-Félix Riou. ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DE PROPAGATION D'UN LASER À ATOMES. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2006. Français. NNT : . tel-00138450

HAL Id: tel-00138450

<https://pastel.hal.science/tel-00138450v1>

Submitted on 26 Mar 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LABORATOIRE CHARLES FABRY DE L'INSTITUT D'OPTIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

présentée pour obtenir
le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

par

Jean-Félix RIOU

Sujet :

**ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS DE PROPAGATION
D'UN LASER À ATOMES**

Soutenue le 6 décembre 2006 devant la Commission d'examen :

M. P. GLORIEUX	Rapporteur
M. D. GUÉRY-ODELIN	Rapporteur
M. C. BLONDEL	Président
M. C. BORDÉ	Examineur
M. K. MØLMER	Examineur
M. P. BOUYER	Membre invité
M. A. ASPECT	Directeur de thèse

Remerciements

J'ai effectué ce travail au laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, et je remercie son directeur, Pierre Chavel, de m'y avoir accueilli, et d'avoir toujours manifesté un grand intérêt pour mes travaux.

Je suis reconnaissant envers Alain Aspect, mon directeur de thèse, pour m'avoir accepté dans le groupe d'Optique Atomique et j'ai pris beaucoup de plaisir à discuter avec lui de l'évolution de l'expérience. Mon approche de la propagation des lasers à atomes présentée dans ce manuscrit n'aurait probablement pas abouti sous cette forme si je n'avais pas profité de son sens aigu des analogies optiques en physique. En particulier, je le remercie d'avoir, malgré un emploi du temps chargé, trouvé le temps de me conseiller pour la présentation effectuée pendant ma soutenance.

Je remercie Philippe Bouyer, qui a, de manière effective, co-dirigé cette thèse en étant responsable de l'expérience sur laquelle j'ai travaillé. Son sens indéniable de la physique expérimentale, sa vision d'ensemble du projet et son optimisme à toute épreuve, ont permis de donner les impulsions nécessaires lorsqu'une voie semblait sans issue. En outre, je le remercie pour avoir relu le manuscrit et pour m'avoir aidé à préparer la soutenance.

Enfin je tiens à les remercier tous deux pour la confiance qu'ils ont eue à mon égard, ainsi que pour la très grande liberté qu'ils m'ont laissée tout au long de mon travail. L'autonomie scientifique que j'ai pu acquérir me sera, sans aucun doute, précieuse pour la suite.

Je souhaite aussi exprimer ma reconnaissance aux différents autres membres de mon jury. Tout d'abord à Pierre Glorieux et David Guéry-Odelin, pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce manuscrit, et pour avoir pris le temps de le lire en détail, afin de me livrer des corrections chaque fois pertinentes. Ensuite, je remercie Christophe Blondel d'avoir porté attention à mon travail et d'avoir accepté d'être président du jury, ainsi que Christian Bordé, avec qui j'ai eu un certain nombre de discussions passionnantes et animées. Enfin, je suis reconnaissant envers Klaus Mølmer pour avoir, par une contribution théorique antérieure, stimulé les développements présentés dans ce manuscrit.

Ces recherches ont été réalisées au sein d'une équipe. Dans une première partie de ma thèse, j'ai travaillé avec Yann Le Coq et Marie Fauquembergue, au montage de l'expérience et à la mise en oeuvre des différentes techniques permettant l'obtention de la condensation. Je tiens à les remercier tous deux pour tout le savoir-faire qu'ils m'ont transmis. En particulier, même si nous avons vérifié à maintes reprises que la nature avait réellement horreur du vide, je garde un souvenir impérissable des moments passés ensemble au laboratoire, parfois la nuit, avant que le condensat ne montre le bout de son nez. C'est au cours de cette quête qu'est arrivé William Guerin, avec qui j'ai tout particulièrement travaillé pendant la seconde partie de ma thèse. Ses grandes qualités scientifiques, sa détermination et son enthousiasme ont été précieuses tout au long du travail que nous avons réalisé ensemble, au jour le jour, au laboratoire. J'ai

beaucoup apprécié sa disponibilité, qui s'est traduite par exemple, par le fait qu'il n'a pas hésité à poursuivre une discussion physique par des échanges nourris de courriers électroniques en soirée ou pendant le week-end. Je suis convaincu que la stimulation mutuelle qui a résulté de notre interaction a été un facteur déterminant dans la réussite de nos travaux. Je remercie pour sa grande gentillesse, John Gaebler, qui a passé six mois à étudier avec nous le laser guidé. Enfin je souhaite remercier Vincent Josse pour son aide à la fin de cette thèse, ainsi que pour ses conseils avisés. Je lui souhaite bonne chance pour la poursuite de l'expérience, ainsi qu'à notre nouvelle recrue, Juliette Billy.

Cette équipe est une composante du groupe d'Optique Atomique. Je tiens en premier lieu à remercier les électroniciens hors pair que nous avons la chance d'avoir, Frédéric Moron et André Villing, et dont l'expertise est précieuse aux expérimentateurs que nous sommes. Je remercie tous les autres membres passés ou présents du groupe d'Optique Atomique avec qui il m'est très souvent arrivé de discuter de physique et de bien d'autres choses dans une atmosphère chaleureuse : Isabelle, Denis, Laurent, Chris, Nathalie, Joseph, Signe, Olivier, Thorsten, Simon, Jocelyn, Hai, Carsten, André, Mathilde, Rodolphe, Fabrice, Jérôme, Guillaume, Antoine, Christine, Gaël, Andres, Jean-Baptiste, Martjin, Aurélien, Pierre, Valentina, Jose, David, Jean-François, Jean-Philippe, Thierry, Karen, Zhanchun, Rob, Ronald, Hong... Qu'ils soient tous assurés de ma sincère sympathie.

Au-delà, je souhaite saluer tous les membres de l'Institut d'Optique, et tout particulièrement Henry Benisty, Fabienne Bernard ainsi que Denis Boiron avec qui j'ai enseigné à l'École Supérieure d'Optique dans le cadre de mon monitorat. Je remercie aussi les services techniques et administratifs de l'Institut pour leur aide apportée tout au long de mon séjour et tout particulièrement Graça Martins pour le tirage du manuscrit.

Enfin, je remercie tous ceux (professeurs, conférenciers, collègues...) qui ont, par leur discours, par leur grande culture et par leur enthousiasme, éveillé ma curiosité scientifique tout au long de mon parcours, et m'ont ainsi transmis leur passion de la physique.

TABLE DES MATIÈRES

<i>Introduction</i>	1
<i>Première partie : Réalisation d'un condensat de Bose-Einstein</i>	7
Introduction à la première partie	9
I La source d'atomes froids	11
I.1 Notre expérience d'optique atomique	12
I.1.1 La matière première : le Rubidium 87	12
I.1.2 Le système à vide	14
I.1.3 Les lasers et le banc d'optique	17
I.1.4 L'observation des atomes avec l'imagerie par absorption	20
I.1.5 Automatisation de l'expérience	27
I.2 La séquence de refroidissement laser	28
I.2.1 Le four à recirculation	28
I.2.2 Le ralentissement Zeeman	29
I.2.3 Le piège magnéto-optique	34
I.2.4 La mélasse optique	42
I.2.5 Récapitulatif de la séquence expérimentale	44
I.3 Caractéristiques de notre source	45
I.3.1 Flux atomique en sortie du four	45
I.3.2 Flux utile au chargement du piège magnéto-optique	47
I.3.3 Chargement du piège magnéto-optique	52
II La condensation de Bose-Einstein dans un piège ferromagnétique hybride	57
II.1 La condensation de Bose-Einstein	58
II.1.1 Un effet de statistique quantique	58
II.1.2 Effet des interactions : l'équation de Gross-Pitaevskii	60
II.1.3 L'approximation de Thomas-Fermi	61
II.2 Le piégeage magnétique	63
II.2.1 Le piège de Ioffe-Pritchard	63
II.2.2 L'électroaimant ferromagnétique hybride	66
II.2.3 Chargement et compression du piège	68

II.2.4	Durée de vie	70
II.2.5	Chauffage dans le piège magnétique	71
II.3	L'évaporation radiofréquence	76
II.3.1	Principe	76
II.3.2	Réalisation	78
II.4	Observation de la condensation	81
II.4.1	Transition vers la condensation	81
II.4.2	Analyse des images	82
II.4.3	Durée de vie et collisions à trois corps	84
	Conclusion à la première partie	87
	 <i>Seconde partie : Le laser à atomes</i>	89
	Introduction à la seconde partie	91
III	L'onde de matière extraite du condensat	93
III.1	Méthodes de couplage des lasers à atomes	94
III.1.1	Couplage par déversement ou par effet tunnel	94
III.1.2	Les couplages radiofréquence et Raman	95
III.1.3	Différentes descriptions théoriques des propriétés de couplage	97
III.2	Description de champ moyen du laser à atomes	99
III.2.1	Équations de Gross-Pitaevskii couplées	99
III.2.2	Le continuum des états non piégés	105
III.2.3	Dynamique de couplage	112
III.3	Réalisation expérimentale	123
III.3.1	Mise en œuvre	123
III.3.2	Stabilité du biais magnétique	124
III.3.3	Effet des interactions sur le profil du laser	127
III.3.4	Dynamique non markovienne du laser	128
IV	Propagation du laser à atomes	133
IV.1	Méthode de propagation dans un potentiel défini par morceaux	135
IV.1.1	Propagateur	135
IV.1.2	Procédure de calcul adoptée	137
IV.2	Propagation dans la zone du condensat	140
IV.2.1	Calcul de l'intégrale de propagation	140
IV.2.2	Calcul à partir de l'iconale	146
IV.2.3	La fonction d'onde du laser à la surface du condensat	150
IV.3	Propagation hors de la zone du condensat	156
IV.3.1	L'intégrale de Kirchhoff pour les ondes de matière	156
IV.3.2	Application à notre cas particulier	158
IV.4	Résultats de la propagation et comparaison à une simulation numérique	160
IV.4.1	Profils obtenus à une altitude donnée	160
IV.4.2	Profils de densité dans différents plans	161
IV.4.3	Effet de l'imagerie	163

V Régime paraxial de propagation	167
V.1 L'équation de propagation paraxiale	168
V.1.1 Séparation des degrés de liberté transverses et axiaux	168
V.1.2 Approximation d'enveloppe lentement variable	169
V.1.3 Paramétrage par le temps	169
V.1.4 Domaine de validité	170
V.2 Solutions générales	171
V.2.1 Potentiels considérés	171
V.2.2 Les solutions hermito-gaussiennes	171
V.2.3 Évolution des paramètres du faisceau : la loi <i>ABCD</i>	171
V.3 Propagation à l'aide des matrices <i>ABCD</i> atomiques	173
V.3.1 Expression des matrices de propagation	173
V.3.2 Méthode générale de propagation	173
V.4 Le facteur qualité M^2	177
V.4.1 Définition	177
V.4.2 Invariance du M^2 au cours de la propagation paraxiale	179
V.4.3 Propagation utilisant le paramètre complexe généralisé	182
V.5 Caractérisation expérimentale du laser à l'aide du M^2	187
V.5.1 Méthode d'analyse	187
V.5.2 Résultat	188
Conclusion à la seconde partie	191
<i>Troisième Partie : Un guide pour le laser à atomes</i>	193
Introduction à la troisième partie	195
VI Un nouvel outil pour l'optique atomique	197
VI.1 Le piège optique	198
VI.1.1 Potentiel et taux d'émission spontanée	198
VI.1.2 La pince optique	200
VI.1.3 Mise en œuvre expérimentale	204
VI.2 Le laser à atomes guidé	209
VI.2.1 Principe	209
VI.2.2 Réalisation	213
VI.2.3 Observation de la dynamique du laser	215
Conclusion à la troisième partie	221
<i>Conclusion</i>	223

Annexes

A	L'atome de Rubidium plongé dans un champ électromagnétique	227
A.1	L'interaction avec le rayonnement	228
A.1.1	L'hamiltonien dipolaire électrique	228
A.1.2	Les coefficients de branchement	228
A.1.3	Quelques résultats dérivés du cas de l'atome à deux niveaux	233
A.1.4	L'atome plongé dans un laser fortement désaccordé	234
A.2	L'interaction avec le champ magnétique	244
A.2.1	Cas général	244
A.2.2	Cas particuliers	245
B	Effets spécifiques au ralentissement d'un atome à plusieurs niveaux	249
B.1	L'atome plongé dans les champs extérieurs	249
B.1.1	États propres dans les champs B et B_{\perp}	249
B.1.2	Couplage dipolaire électrique entre les états $ \phi_{F, m_F}\rangle$	250
B.2	Phénomènes de pompage au voisinage de $B=0$	252
B.2.1	Pompage avant l'entrée dans le premier solénoïde	252
B.2.2	Pompage entre les deux solénoïdes	254
B.3	Dynamique de dépompage	256
B.3.1	Temps caractéristique de dépompage	256
B.3.2	Probabilité de dépompage	257
B.4	Le repompage	258
B.4.1	Contrainte sur le temps caractéristique de repompage	258
B.4.2	Intensité de repompage nécessaire	259
B.4.3	Performances du repompage sur le dispositif expérimental	260
B.5	Défauts de polarisation	261
C	Quelques phénomènes intervenant pendant le refroidissement laser	265
C.1	Effets collectifs dans un piège magnéto-optique	265
C.1.1	Atténuation des faisceaux pièges	265
C.1.2	Diffusion de photons	266
C.1.3	Densité maximale du piège magnéto-optique	267
C.2	Refroidissement subdoppler par gradient de polarisation	267
C.2.1	Différents temps d'évolution	267
C.2.2	Polarisation atomique induite par la vitesse	268
C.2.3	Force de friction subdoppler	269
C.2.4	Effet d'un champ magnétique parasite	270
D	La méthode de la phase stationnaire	273
D.1	Cas de la présence d'un unique point stationnaire	273
D.2	Cas plus général	274
E	Propagation dans le potentiel harmonique inversé	279
E.1	Propagateur de l'oscillateur harmonique inversé	279
E.2	Connexion entre la solution iconale et les fonctions propres de l'oscillateur harmonique inversé à deux dimensions	280

E.3	Propagateur indépendant du temps de l'oscillateur harmonique inversé à deux dimensions	282
E.3.1	Évaluation dans différents cas de figure	283
E.3.2	Comparaison avec un calcul numérique	288
F	Résolution numérique des équations de Gross-Pitaevskii couplées	293
F.1	Réduction de la dimensionnalité de la dynamique	293
F.2	Utilisation de grandeurs adimensionnées	295
F.3	Évolution temporelle du système	296
F.4	Détermination numérique de l'état initial du système	297
F.5	Précautions liées au traitement numérique	297
F.5.1	Effet de l'accélération de l'onde sur l'échantillonnage	298
F.5.2	Effet de bord	299
<i>Bibliographie</i>		301

INTRODUCTION

L'optique atomique

L'optique atomique est une discipline qui a émergé à la croisée des chemins entre l'optique et la physique atomique. Au XIX^{ème} siècle déjà, Sir William Rowan Hamilton avait été frappé par l'identité de forme, entre le principe de Maupertuis déterminant la dynamique d'un mobile, et le principe de Fermat à la base de la propagation des rayons lumineux [1]. Pratiquement un siècle plus tard, en 1924 [2], Louis De Broglie a proposé de généraliser la dualité onde-corpuscule de l'optique à tout mobile d'impulsion p , en associant à ce dernier une longueur d'onde λ , selon la relation

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Le caractère ondulatoire de la matière a été mis en évidence pour la première fois en 1927 avec l'expérience de Davisson et Germer consistant à faire diffracter des électrons sur un cristal [3]. Ceci a donné lieu à la naissance de l'optique électronique, dont l'une des réalisations est le microscope électronique [4]. De même, rapidement, le caractère ondulatoire de neutrons a été mis en évidence [5]. En ce qui concerne les atomes neutres, la diffraction d'un faisceau thermique a été démontrée en utilisant un réseau optique [6] ou matériel [7]. On trouvera, en particulier dans [8], une introduction détaillée au domaine de l'optique atomique.

Pour manipuler les atomes, différents composants optiques ont été développés. Ainsi, des lentilles magnétiques utilisant par exemple le champ créé par une configuration hexapolaire [9], ou encore des lentilles optiques jouant sur les déplacements lumineux atomiques [10], ont permis de focaliser un faisceau atomique.

Cependant, le pouvoir focalisant de ces systèmes est d'autant plus fort que les atomes sont lents. Plus généralement, la manipulation des atomes est facilitée s'ils sont ralentis. L'essor de l'optique atomique a donc particulièrement bénéficié de la mise en œuvre des techniques de manipulation par laser, dont le développement a valu à leurs auteurs, Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji et William D. Phillips, le prix Nobel en 1997 [11, 12, 13].

Ainsi, de nouveaux composants sont apparus, avec par exemple le miroir à atomes, fondé sur la réflexion sur une onde évanescente [14, 15]. Conjugué avec un confinement transverse, la méthode a ainsi permis de faire rebondir les atomes plusieurs milliers de fois [16]. On se reportera aux articles rassemblés dans [17], pour une revue de différentes réalisations des éléments de base de l'optique atomique.

Au sein de l'optique atomique, un domaine d'étude particulier consiste à utiliser les ondes de matière pour réaliser des expériences d'interférométrie. On peut, par exemple,

noter une expérience analogue à celle des fentes d'Young [18], ou encore la réalisation de l'analogue d'un interféromètre de Mach-Zehnder [19]. Une des applications possibles de ces techniques est la réalisation d'accéléromètres ou de gyromètres à onde de matière. Dans de tels systèmes, les atomes sont utilisés comme senseurs inertiels de grande précision. On trouvera dans [20, 21, 22] une introduction détaillée au sujet de l'interférométrie atomique, et de son application à de telles mesures.

Toutefois, les sources atomiques utilisées jusqu'ici sont réalisées à partir d'échantillons d'atomes, qui, même s'ils sont refroidis, ne sont pas parfaitement cohérents. Pour améliorer les performances des interféromètres, on peut envisager d'utiliser des sources de meilleure cohérence, que sont les lasers à atomes.

Une source cohérente pour l'optique atomique : le laser à atomes

Tout comme le laser [23] a ouvert de nouvelles possibilités en optique, on peut s'attendre à ce que les lasers à atomes jouent un rôle important pour l'optique atomique. En particulier par rapport aux autres sources, ils présentent deux avantages qui sont une bonne cohérence et une bien plus forte luminance, c'est-à-dire une forte intensité canalisée dans une direction donnée.

Les lasers optiques sont issus d'une assemblée contenant un grand nombre de photons, tous stockés dans le même mode d'une cavité. Pour réaliser un laser à atomes, il faut donc disposer d'un nombre macroscopique d'atomes qui sont tous dans le même état quantique, c'est-à-dire dans un condensat de Bose-Einstein [24, 25]. Ce phénomène propre aux bosons et accessible expérimentalement à des températures de l'ordre du microkelvin, a été réalisé pour la première fois en 1995 [26, 27, 28] pour des gaz d'alcalins piégés. Son observation a valu l'attribution du prix Nobel de Physique en 2001, conjointement à Eric A. Cornell et Carl E. Wieman ainsi qu'à Wolfgang Ketterle [29, 30].

La cohérence spatiale des condensats de Bose-Einstein a été mise en évidence expérimentalement dans [31] : la superposition de deux nuages condensés présente en effet un signal clair d'interférences. Par analogie avec l'expérience d'optique des fentes d'Young, deux lasers ont été couplés de deux endroits différents d'un condensat et montrent, en se superposant, une figure d'interférence traduisant la cohérence des lasers à atomes extraits [32]. Outre l'étude des propriétés de cohérence spatiale précédentes, la cohérence temporelle du faisceau atomique a été mise en évidence [33], en observant l'onde stationnaire apparaissant à la réflexion d'un laser à atomes sur une barrière de potentiel.

De plus, on pourra noter des expériences comparant les effets de statistique entre un nuage thermique et un condensat, comme une expérience de Hanbury Brown et Twiss atomique [34]. Enfin, un laser à atomes dans un régime d'interactions négligeables a montré un comportement statistique analogue à un laser optique [35]. Une détection, atome par atome du faisceau, à l'aide d'une cavité de grande finesse, a permis de mettre en évidence la statistique poissonnienne du laser.

Notre dispositif expérimental a été développé dans le but de réaliser une source atomique cohérente, pour utiliser le laser à atomes dans des expériences d'interférométrie atomique. Une différence importante entre photons et atomes, réside dans le fait qu'aux faibles énergies que nous considérons, les atomes interagissent de manière collisionnelle dans le vide, à la différence des photons. Si ceci donne lieu à un nouveau champ d'investigation d'optique atomique non-linéaire [36], les interactions peuvent être gênantes pour des applications inter-

férométriques de précision. Ainsi, il est primordial de caractériser précisément les propriétés de propagation des lasers à atomes, et de déterminer dans quelle mesure les interactions modifient leurs propriétés.

Travaux présentés

Le travail réalisé au cours de cette thèse peut se décomposer en trois parties distinctes apportant une contribution à la réalisation d'interféromètres atomiques à base de lasers à atomes : la nécessaire obtention d'un condensat de Bose-Einstein sur notre dispositif expérimental, l'étude de la propagation d'un laser à atomes interagissant avec le condensat dont il est extrait, et la mise en œuvre d'un guide optique permettant la propagation horizontale d'un laser à atomes.

L'organisation de ce manuscrit reprend dans l'ordre chronologique, les différentes étapes du travail effectué.

Dans une première partie, nous détaillons les différentes étapes dont la mise en œuvre nous a permis d'obtenir le condensat de Bose-Einstein. Nous avons séparé cette approche expérimentale en deux chapitres.

Le premier présente les différentes étapes de refroidissement laser et tout particulièrement les caractéristiques de notre source d'atomes froids. Le second chapitre présente le phénomène de condensation, ainsi que sa réalisation expérimentale à partir du refroidissement évaporatif dans notre piège ferromagnétique hybride.

Une grande part des techniques présentées est utilisée aujourd'hui de manière courante par bon nombre de groupes à travers le monde. Dans cette partie du manuscrit, notre approche a consisté à mettre en avant différents raisonnements et ordres de grandeur qui permettent de quantifier les phénomènes mis en jeu. En particulier, nous insistons tout au long de cette partie sur les différents effets parasites qui peuvent perturber les processus présentés, effets que nous avons été amenés à considérer, tandis que nous mettons au point ces techniques sur notre expérience.

Aussi, le lecteur familier avec les méthodes de refroidissement atomique pourra-t'il, en première lecture, passer directement à la seconde partie de ce manuscrit qui constitue le cœur de cette thèse.

La seconde partie de ce manuscrit détaille donc nos études expérimentales et théoriques de la propagation et de la dynamique du laser à atomes, sous l'effet d'une interaction importante avec le condensat de Bose-Einstein dont il est issu.

Après avoir rappelé au début du chapitre trois, les différents types de lasers à atomes réalisés jusqu'ici, nous nous intéressons à la description de son extraction à partir du condensat. En particulier, nous montrons que les interactions condensat-laser jouent un rôle prépondérant, que ce soit dans la dynamique de couplage ou vis-à-vis des propriétés spatiales du faisceau. Nous montrons ainsi que notre configuration expérimentale, dans laquelle le condensat est particulièrement confiné, favorise l'observation de tels effets.

Dans le chapitre quatre, nous présentons notre étude de la propagation du laser à atomes. Contrairement aux études précédentes [37], nous ne pouvons traiter le condensat comme une lentille mince faisant diverger le laser, mais devons prendre en compte la forte déviation des rayons atomiques par rapport à l'axe de propagation. Nous présentons donc un traitement non paraxial nous permettant de calculer la fonction d'onde du laser à la fois dans le condensat et hors du condensat. Pour cela, nous nous inspirons de traitements initialement

développés en optique, en les transposant à l'optique atomique.

Au chapitre cinq, nous caractérisons de manière synthétique la propagation du laser. Pour cela, nous nous restreignons au régime paraxial, rapidement atteint sous l'effet de l'accélération de la gravité. Nous décrivons alors la propagation à l'aide de matrices $ABCD$ et d'un facteur de qualité M^2 en analogie avec le cas de l'optique photonique. Ce facteur, avec lequel nous caractérisons nos réalisations expérimentales, rend compte de la dégradation du faisceau due aux interactions initiales avec le condensat.

Enfin, dans une troisième partie, nous abordons la mise en œuvre expérimentale d'un nouvel outil pour l'optique atomique. Il s'agit d'un laser à atomes guidé qui n'est plus soumis à la gravité. Ceci est réalisé en superposant au condensat piégé magnétiquement, un guide optique, à même de recevoir le laser à atomes. Cette configuration permet, entre autres, de garder la longueur d'onde de De Broglie constante sur une distance de propagation d'un millimètre. La valeur obtenue de 500 nm est quatre ordres de grandeur au-delà de ce que l'on obtient pour un laser accéléré verticalement sur la même distance. Enfin, nous présentons succinctement quelques observations en rapport avec la dynamique du laser guidé.

Première partie

*Réalisation d'un condensat de
Bose-Einstein*

Introduction à la première partie

Une première étape de notre travail a consisté à obtenir un condensat de Bose-Einstein sur notre dispositif expérimental. Pour cela, il nous a fallu mettre en place, régler et optimiser les différentes étapes du refroidissement atomique.

Dans cette partie, nous présentons donc la séquence permettant d'obtenir le gaz quantique dégénéré à partir d'un jet atomique. Nous avons séparé notre approche expérimentale en deux chapitres.

Le premier chapitre correspond à la première moitié du chemin vers la condensation, et présente les différentes étapes de refroidissement laser. Outre une description du dispositif expérimental et des méthodes utilisées, nous mettons en relief la comparaison de nos résultats intermédiaires, avec les modèles physiques que nous présentons. C'est dans ce contexte que s'inscrit tout particulièrement, l'étude des caractéristiques de notre source atomique (§ I.3).

Le second chapitre, quant à lui, présente le transfert du nuage atomique dans le piège magnétique et la condensation qui résulte de l'étape de refroidissement évaporatif. Après une introduction au phénomène de condensation, nous présentons une spécificité de notre expérience, qui consiste en l'utilisation d'un électroaimant ferromagnétique hybride [38] pour piéger magnétiquement les atomes. Enfin, nous terminons ce chapitre par l'observation de la condensation de Bose-Einstein sur notre dispositif expérimental.

LA SOURCE D'ATOMES FROIDS

Une première étape vers la condensation de Bose-Einstein consiste à stocker un grand nombre d'atomes en un endroit donné et à une température bien plus basse que la température ambiante.

Dans le cas du gaz dilué de Rubidium que nous utilisons, cette première étape est réalisée, en manipulant les atomes, à l'aide du champ électromagnétique fourni par des lasers, en association avec différentes configurations de champ magnétique. Les étapes de refroidissement laser que nous mettons en œuvre, sont fondées sur un échange d'impulsion entre l'atome et l'onde lumineuse. Ce phénomène est particulièrement efficace, puisqu'il nous permet d'obtenir des nuages d'une température de 60 microkelvins, alors que les atomes débutent le processus à une température plus d'un million de fois plus élevée (400 K).

Après avoir donné quelques propriétés de l'atome de Rubidium, nous décrivons dans ce chapitre différents éléments de notre dispositif expérimental, comme le système à vide et le banc d'optique (§ I.1). Nous détaillons ensuite notre méthode d'observation du nuage atomique, l'imagerie par absorption.

Dans un second temps nous présentons les différentes étapes nous permettant de refroidir par des moyens optiques, les atomes vers des températures inférieures à la centaine de microkelvins (§ I.2). Enfin, nous détaillons les performances concernant le flux de notre source (§ I.3).

I.1 Notre expérience d'optique atomique

I.1.1 La matière première : le Rubidium 87

Le Rubidium (Rb) est un métal alcalin découvert par R. Bunsen et G. Kirchhoff en 1861. Il est placé à l'intersection de la cinquième période et de la première colonne du tableau de classification de Mendeleïev. Il est en particulier très électropositif, ce qui tend à faciliter sa réactivité avec l'eau par exemple. Au laboratoire, il est stocké à l'abri de l'humidité dans des ampoules de verre (figure 1). A l'état naturel, on le trouve à l'état de traces (1.5 %) dans des minerais comme la lépidolite sous la forme de deux isotopes : ^{85}Rb (72.2 %) et ^{87}Rb (27.8 %). C'est ce dernier isotope que nous manipulons, car il est plus facile à refroidir du fait de ses propriétés collisionnelles favorables. Bien que le jet issu de notre source (§ I.2.1) contienne les deux isotopes, les étapes de refroidissement par laser (§ I.2.2 et suivants) sélectionnent via la longueur d'onde utilisée l'isotope 87, le Rubidium 85 jouant le même rôle que le gaz résiduel dans l'enceinte.



FIG. 1 – Cellule contenant quelques grammes de Rubidium. De consistance molle, d'aspect gris-blanc, ce métal est conservé ainsi à l'abri de l'humidité en raison de sa forte réactivité.

Numéro atomique (Z)	37
Masse (m)	1.44×10^{-25} kg
Température de fusion	312 K
Température d'ébullition	961 K
Élément de matrice du dipôle de la transition $S \rightarrow P$ (d)	2.53×10^{-29} C.m

TAB. 1 – Grandeurs physiques du ^{87}Rb .

Le ^{87}Rb est un boson puisqu'il est constitué d'un nombre pair de fermions : 37 électrons, 37 protons et 50 neutrons. Comme beaucoup d'éléments utilisés dans le domaine des atomes froids (H, Li, Na, K, Cs), il ne possède qu'un seul électron périphérique ce qui rend sa modélisation assez simple : ses propriétés chimiques comme physiques sont, dans une bonne approximation, celles d'un élément comportant un noyau effectif (noyau réel entouré des couches électroniques remplies) et un électron périphérique. Les niveaux électroniques correspondant à la transition $S \rightarrow P$ sont présentés dans la figure 2. Le couplage entre le spin S de l'électron et son moment cinétique orbital L donne naissance à la structure fine qui lève partiellement la dégénérescence de ces niveaux et fait apparaître les raies D_1 et D_2 . Le couplage entre le spin du noyau effectif I et le moment cinétique total J de l'électron résulte en une structure hyperfine associée au moment cinétique global F . En particulier, on observe une levée de dégénérescence de l'état de plus basse énergie en deux niveaux fondamentaux $F=1$ et $F=2$ qui sont alors séparés par l'écart hyperfin Δ_{HF} .

Les raies spectrales du Rubidium sont dans l'infrarouge proche (*rubidus* signifie rouge foncé en latin) autour de 780 nm. Cette caractéristique n'est pas pour rien dans le succès de cet élément pour la manipulation d'atomes par la lumière. On dispose en effet de sources laser performantes, compactes et produites en quantités industrielles (pour les lecteurs CD par exemple) à cette longueur d'onde : les diodes laser (§ I.1.3). Le fait que tous les niveaux hyperfins soient bien séparés va faciliter la manipulation optique de cet atome, puisque l'on va pouvoir précisément ne sélectionner qu'une seule transition tout en étant assez désaccordé des autres.

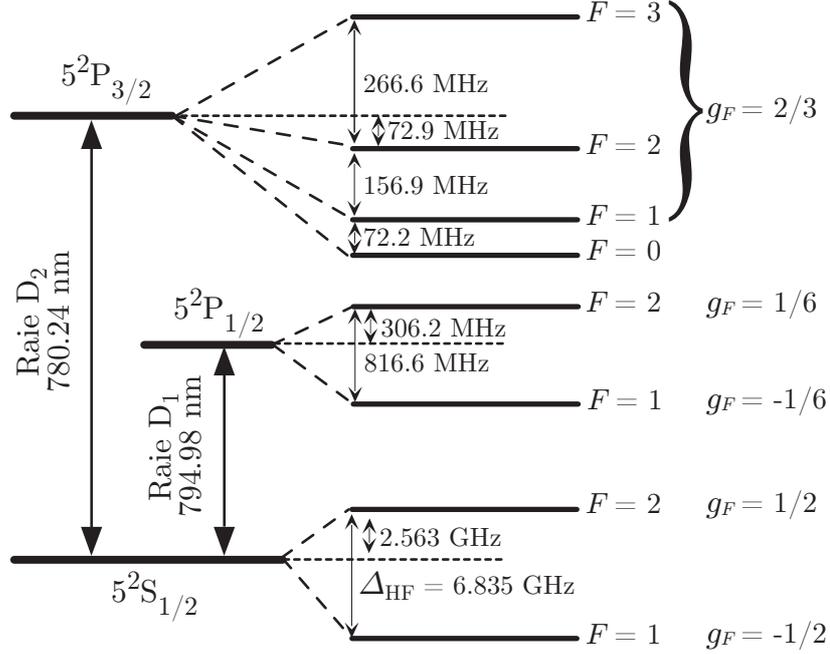


FIG. 2 – Raies D₁ et D₂ du ^{87}Rb . Les longueurs d'onde sont données pour un atome dans le vide. Pour chaque état hyperfin, on a aussi indiqué le facteur de Landé g_F intervenant dans l'énergie potentielle de l'atome placé dans un champ magnétique (équation A.62).

Tout au long de ce manuscrit, nous manipulons les atomes de Rubidium à l'aide de champs électromagnétiques et notons, si nécessaire, $|\phi\rangle_S$, un état du fondamental $5^2S_{1/2}$, et $|\phi\rangle_P$, un état excité de la multiplicité $5^2P_{3/2}$. Nous présentons en annexe A les résultats relatifs au comportement de l'atome interagissant avec un laser, ou encore en présence d'un champ magnétique statique. Une donnée essentielle est le taux d'émission spontanée Γ de l'atome dans le champ du vide. La règle d'or de Fermi appliquée au couplage vers le continuum du vide donne (p. 491 de [39])

$$\Gamma = \frac{8\pi^2 d^2}{3\epsilon_0 \hbar \lambda^3}, \quad (1)$$

avec d le dipôle associé à la transition $S \rightarrow P$ (indépendant de l'état fin ou hyperfin considéré) et λ la longueur d'onde de la transition considérée. Bien que, dans l'absolu, cette longueur d'onde dépende des états hyperfins considérés, on peut négliger en pratique les infimes variations de fréquence relatives à la structure hyperfine et associer à chaque raie D une durée de

vie $1/\Gamma$. Pour la raie D_2 que nous considérons principalement tout au long de ce manuscrit, $\Gamma = 2\pi \times 6.06$ MHz, d'où une durée de vie de 26.2 ns. Enfin, notons que le taux d'émission spontanée n'est pas une grandeur intrinsèque à l'atome, puisqu'en changeant son environnement (atome en cavité ou près d'une surface), on peut agir sur le nombre de modes du vide électromagnétique avec lesquels l'atome se couple, ce qui peut modifier grandement Γ .

I.1.2 Le système à vide

I.1.2.a Effets du gaz résiduel

Contrairement à ce que l'on peut avoir en optique photonique où un laser se propage à l'air libre, il n'est pas envisageable de propager des ondes de matière dans les conditions normales de pression. En effet, la température nécessaire à l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein est bien inférieure à la température ambiante, et l'on comprend que toute collision avec un gaz à cette température a un effet dévastateur sur le gaz quantique dégénéré. Différents pièges conservatifs sont au cœur de notre dispositif expérimental de condensation : un piège magnétique (§ II.2) et une pince optique (§ VI). Quels qu'ils soient, leur profondeur n'excède pas le millikelvin, et est bien inférieure à l'énergie cinétique des atomes thermiques à 300 K. Toute collision avec le gaz résiduel, qu'il s'agisse de Rubidium dégazé des parois, ou de tout autre espèce, peut donc produire deux résultats [40] : soit l'atome cible est expulsé du piège, soit, si la collision est suffisamment rasante, il reste piégé, tout en recevant assez d'énergie cinétique pour induire un chauffage de l'échantillon.

Durée de vie dans un piège conservatif

Dans le premier cas, la perte de l'atome induit une durée de vie τ qui s'évalue alors, en négligeant les collisions multiples, comme

$$\frac{1}{\tau} = \frac{P}{k_B T} \sigma_{\text{XRb}} \bar{v}_X, \quad (2)$$

où P est la pression du gaz résiduel composé de l'espèce X, et $\bar{v}_X = \sqrt{8k_B T / \pi m_X}$ est sa vitesse moyenne, avec m_X la masse de X. La quantité $\sigma_{\text{XRb}} \bar{v}_X / k_B T$ est relativement peu dépendante de X, pour les espèces que l'on peut espérer rencontrer dans le gaz résiduel : en utilisant les données de [40], on obtient $5.5 \times 10^7 \text{ mbar}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ pour l'Hélium, $1.1 \times 10^8 \text{ mbar}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ pour le Dihydrogène et $1.5 \times 10^8 \text{ mbar}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ pour le Rubidium. En pratique, on peut donc considérer que la durée de vie τ est inversement proportionnelle à la pression P , et que $\tau \approx 1 \text{ s}$ pour $P = 10^{-8} \text{ mbar}$. Afin d'avoir un processus d'évaporation efficace pour atteindre la condensation (§ II.3), nous souhaitons avoir une durée de vie d'au moins une centaine de secondes, ce qui nécessite d'obtenir des pressions P inférieures à 10^{-10} mbar .

Chauffage dû au gaz résiduel

Les collisions à fort paramètre d'impact avec le gaz résiduel, induisent quant à elles un chauffage, car l'atome cible n'en retire pas assez d'énergie pour être expulsé du piège. Dans la limite où l'on néglige toute collision multiple, et où la profondeur du piège U_0 est petite devant l'énergie typique collisionnelle E_{dX} entre un atome de Rubidium et un atome X du gaz, le taux de chauffage s'écrit [40]

$$\langle \dot{E} \rangle = \frac{0.37}{\tau} \frac{U_0^2}{E_{\text{dX}}}, \quad (3)$$

où τ est la durée de vie donnée par l'équation 2. Cette expression est obtenue en régime collisionnel diffractif, ce qui signifie que la section efficace de collision ne peut être évaluée classiquement : la longueur d'onde de De Broglie correspondant à l'impulsion transmise à l'atome piégé, est grande devant le paramètre d'impact. On a $E_{dX} \approx \hbar^2/m\sigma_{XRb}$ puisque les paramètres d'impact considérés pour que la collision soit rasante, sont de l'ordre de l'extension du potentiel qui est environ donnée par la racine carrée de la section efficace σ_{XRb} . La valeur des énergies est donnée dans [40] pour différentes espèces que l'on peut rencontrer dans le gaz résiduel, $E_{dRb} = k_B \cdot 2.8 \text{ mK}$, $E_{dHe} = k_B \cdot 35.1 \text{ mK}$ et $E_{dH_2} = k_B \cdot 23.6 \text{ mK}$. Dans le cas le plus défavorable où l'on considère l'atome le plus massif (le Rubidium) comme étant majoritaire dans le gaz résiduel, on peut estimer un ordre de grandeur de ce taux de chauffage pour une profondeur $U_0 = k_B \cdot 100 \mu\text{K}$. On obtient $\langle \dot{E} \rangle = k_B \cdot 2 \times 10^8 \mu\text{K.s}^{-1}.\text{mbar}^{-1}$. Comme nous souhaitons pouvoir manipuler, pendant quelques secondes, des nuages dégénérés dont la température est de l'ordre de 100 nK, ceci nécessite d'avoir une pression P typiquement inférieure à 10^{-10} mbar .

Nous avons placé les atomes que nous manipulons sous un vide descendant jusqu'à quelques 10^{-11} mbar , de telle façon à ce que les phénomènes décrits ci-dessus ne soient pas limitants. Trois paramètres sont cruciaux pour obtenir expérimentalement un vide de qualité [41] : la disposition et la capacité des éléments de pompage, ainsi que l'état de ses surfaces internes.

I.1.2.b Capacité et disposition des pompes

Pour descendre jusqu'à un ultra-vide aussi poussé, nous procédons par étapes en utilisant différentes pompes en différents endroits du système à vide (figure 3) :

- un ensemble pompe primaire/pompe turbomoléculaire permet d'atteindre dans la partie adjacente au four un vide de l'ordre de 10^{-9} mbar , à la fois limité par les capacités de pompage et par la présence d'un jet atomique dégradant le vide,
- un autre ensemble constitué d'une pompe ionique et d'une pompe à sublimation de titane permet d'obtenir dans la chambre annexe des vides de l'ordre de 10^{-11} mbar .

Il s'est avéré au cours de notre travail que cette configuration n'était pas suffisante pour pouvoir obtenir un vide assez bon au niveau de la cellule, c'est-à-dire là où l'on veut accumuler les atomes de Rubidium pour les refroidir. En effet, considérons deux enceintes (1) et (2) dans lesquelles la pression est respectivement P_1 et P_2 et qui sont séparées par un tube de longueur L . Si l'on néglige les phénomènes de dégazage à l'intérieur du tube (ce qui constitue une hypothèse favorable), la pression P en un point placé entre les deux enceintes à la distance x de la première, est donnée par

$$P(x) = P_1 + (P_2 - P_1) \frac{x}{L}. \quad (4)$$

Si l'on applique ceci à notre cas où l'enceinte (1) est au niveau du doigt froid et l'enceinte (2) est l'enceinte secondaire, on obtient comme pression au niveau de la cellule $P(x) = 0.15P_1$ avec $x/L \approx 0.85$. On voit donc, que dans une telle configuration, la pression au niveau de la cellule est limitée par la pression au niveau du four, ce qui s'est traduit expérimentalement par des difficultés vis-à-vis de l'obtention d'une bonne durée de vie du nuage atomique piégé.

Pour résoudre ce problème, la bonne solution a été de placer entre la source et la cellule une pompe à getter (figure 3), dont le rôle est d'isoler la partie ultra-vide de la partie d'ultra-

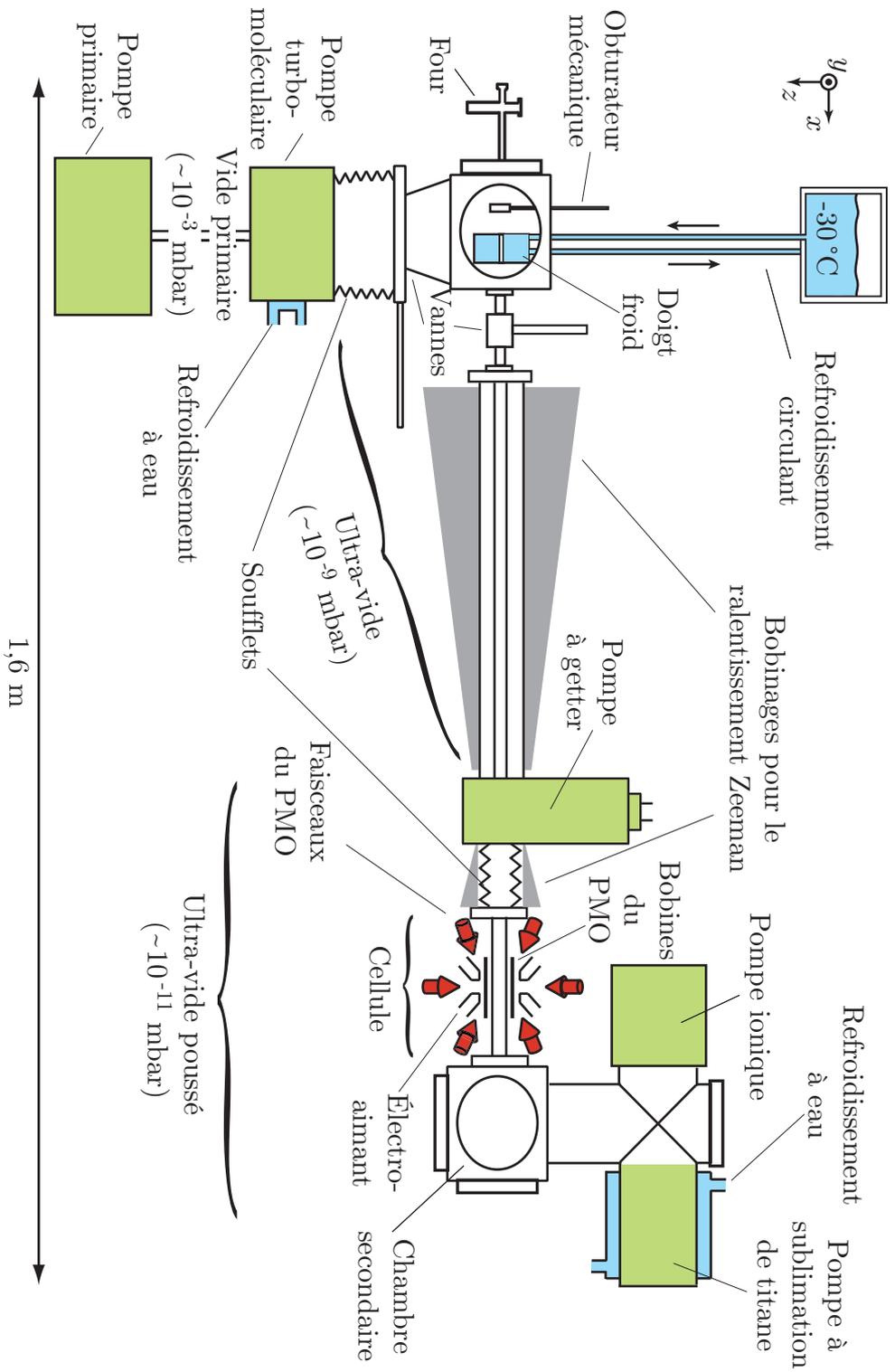


FIG. 3 – Dispositif expérimental permettant le piège magnéto-optique (PMO) et la condensation de Bose-Einstein dans la cellule. Différentes qualités de vide correspondent à différentes zones de l'expérience : environ 10^{-9} mbar près du four et quelques 10^{-11} mbar au niveau du nuage atomique piégé.

vide poussé. Cet ajout a été décisif pour multiplier la durée de vie du nuage piégé par un facteur 10 en diminuant la pression au niveau de la cellule du même facteur.

I.1.2.c L'état de surface interne de l'enceinte

Tout équilibre dans un système à vide est le résultat d'une compétition entre le pompage et le dégazage des parois¹. Pour minimiser la pression d'équilibre, il est donc tout aussi important d'avoir une capacité de pompage adaptée que des surfaces propres. Toute pièce de l'enceinte à vide est nettoyée avant d'être installée sur le système. Ensuite, étant donné que les pièces ont adsorbé à l'air libre principalement de la vapeur d'eau, il est impératif d'élever le système sous vide afin d'éliminer entre autres ce gaz résiduel. De même, s'il y a besoin de remettre à l'air libre une partie du système, il est utile de remonter à pression ambiante en injectant de l'azote gazeux propre et non de l'air ambiant, afin de faciliter la remise ultérieure sous vide.

Une autre façon de diminuer le dégazage d'une surface est de la refroidir. Ainsi, c'est ce que nous réalisons avec le doigt froid (figure 3) qui constitue une pièce portée à -30°C en permanence, et dont le rôle est d'adsorber les atomes du jet dont la divergence est trop forte pour qu'ils soient utiles au ralentissement.

I.1.3 Les lasers et le banc d'optique

Un aperçu schématique du banc d'optique est donné en figure 4 avec des détails d'acheminement au niveau de la cellule, en figure 5. Dans une première phase du refroidissement atomique, la manipulation des atomes par la lumière s'effectue au moyen de trois diodes lasers "Esclaves" (Ralentisseur, Piège et Repompeur). Ces diodes sont injectées par des diodes "Maîtres" sur réseau (Maître 1 pour les deux premiers et Maître 2 pour le dernier) afin de disposer d'une plus grande puissance que celle fournie par les diodes sur réseau, seules. Ces dernières ont une largeur en fréquence inférieure au mégahertz, grâce à l'utilisation d'une cavité étendue induite par un réseau, et elles sont asservies sur des signaux d'absorption saturée. Le lecteur intéressé trouvera de plus amples détails, entre autres sur la procédure d'asservissement, dans [42].

Les autres éléments optiques nécessaires sont :

- des lentilles, des miroirs et des prismes anamorphoseurs pour la mise en forme et l'alignement des faisceaux,
- des lames quart d'onde, demi-onde, des polariseurs et des cubes séparateurs pour le mélange et le contrôle de la polarisation des faisceaux,
- des modulateurs acousto-optiques pour le décalage en fréquence des faisceaux et l'extinction contrôlée des faisceaux en quelques microsecondes (ils sont alors secondés d'un obturateur mécanique de temps de commutation de l'ordre de la milliseconde),
- un résonateur Fabry-Pérot confocal pour vérifier la bonne injection des lasers "Esclaves",
- des isolateurs optiques pour éliminer les perturbations dues à un retour non contrôlé de la lumière dans les diodes.

Les fréquences des modulateurs acousto-optiques utilisés sont données en figure 6 avec les transitions utilisées par chaque faisceau. La diode sur réseau "Maître 1" est asservie sur le "cross-over" désaccordé de -133.6 MHz par rapport à la transition $F=2 \rightarrow F'=3$ tandis que la diode "Maître 2" est asservie sur la raie $F=1 \rightarrow F'=2$.

¹Dans la limite où le système est suffisamment hermétique pour que l'on néglige toute fuite...

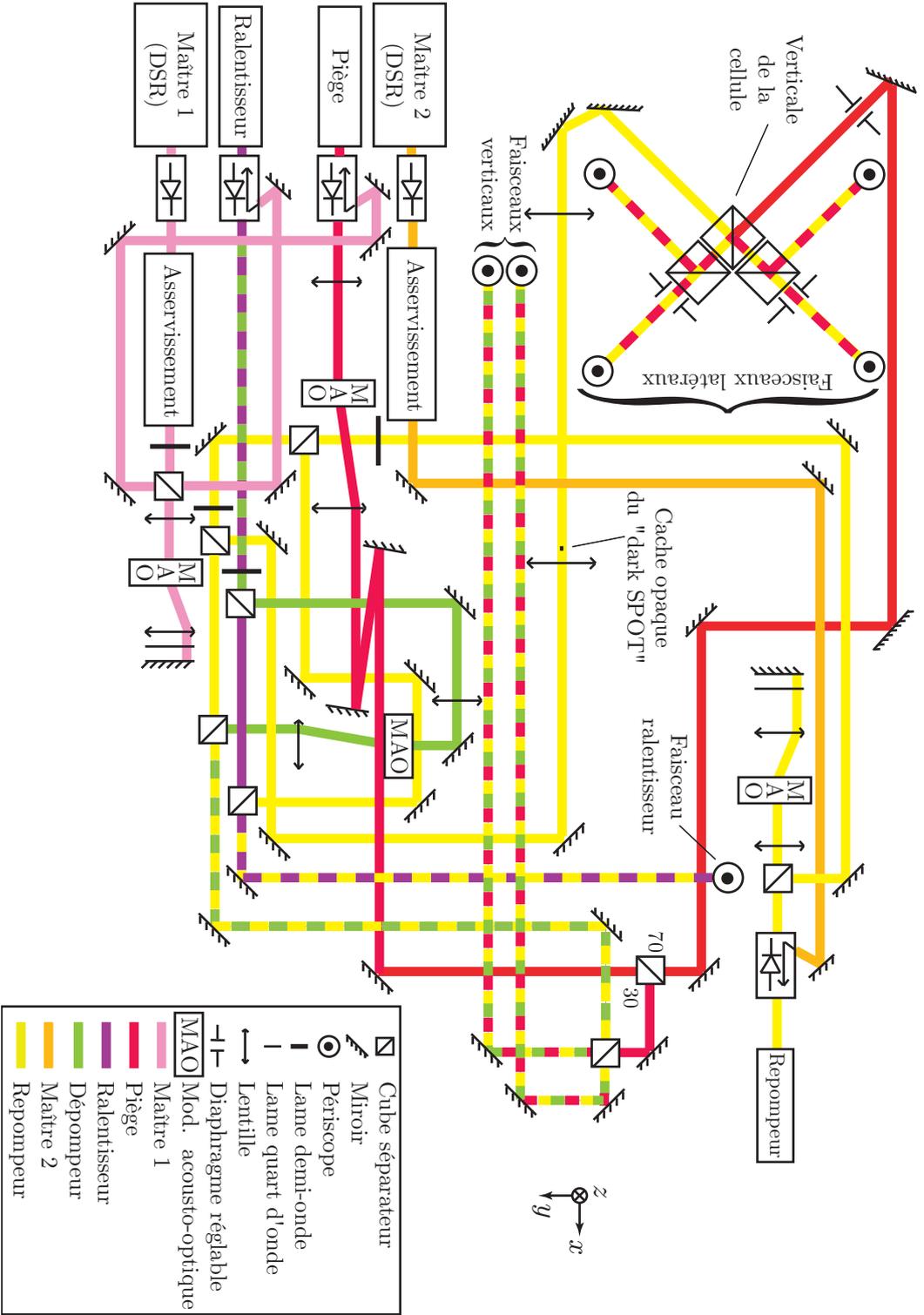


FIG. 4 – Banc d’optique nécessaire au refroidissement atomique. Deux diodes sur réseau (DSR) “Maître” injectent trois diodes “Esclaves”, et les différentes fréquences utiles sont obtenues à l’aides de modulateurs acousto-optiques (MAO). Par simplicité, nous n’avons représenté, ni les lentilles de mise en forme des faisceaux, ni la cavité Fabry-Pérot utilisée pour vérifier la qualité de l’injection, ni le laser et l’optique de l’imagerie. Cette dernière est représentée en figure 8.

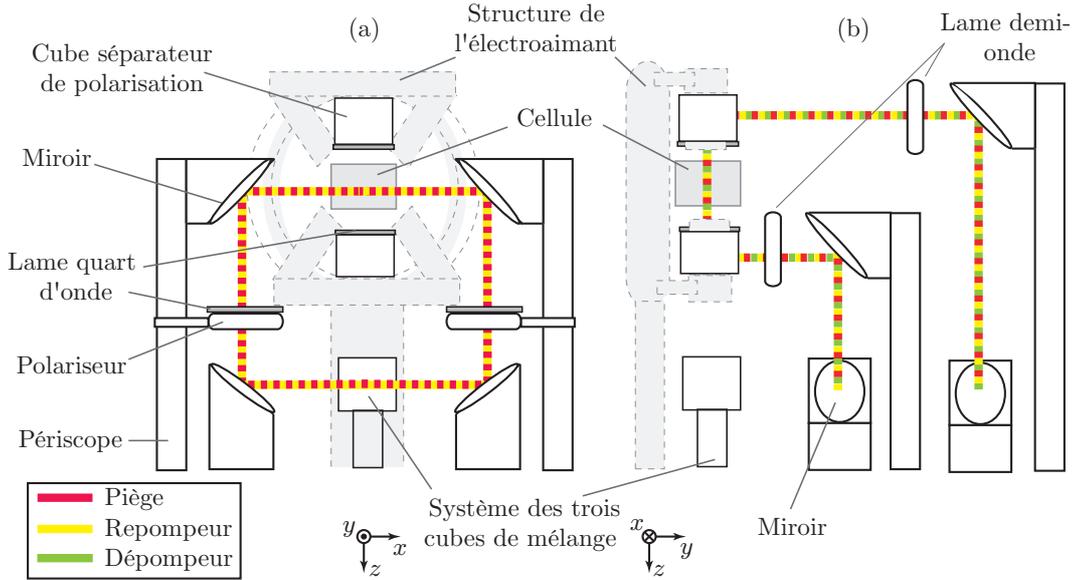


FIG. 5 – Acheminement des faisceaux de piégeage/repompage/dépompage au niveau de la cellule. (a) Les quatre faisceaux latéraux, mélangés au niveau de trois cubes à la verticale de la cellule, sont amenés via quatre périscope sur la cellule, après avoir été polarisés correctement à l'aide de polariseurs et de lames quart d'onde. (b) Les deux faisceaux verticaux sont renvoyés sur la cellule via des cubes séparateurs de polarisation insérés dans l'électroaimant (§ II.2.2), et sur lesquels une lame quart d'onde a été collée.

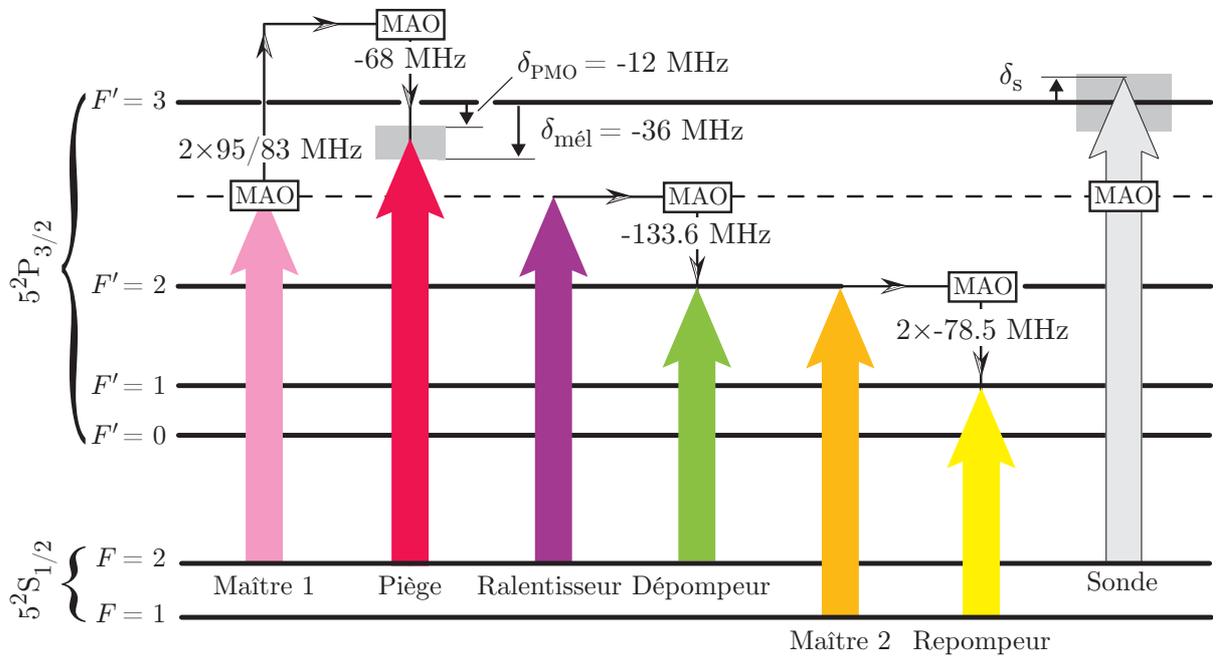


FIG. 6 – Fréquences des différents faisceaux lasers, réglées grâce aux modulateurs acousto-optiques (MAO). La plage d'accordabilité du piège et de la sonde est représentée en gris. δ_{PMO} et $\delta_{\text{mél}}$ correspondent aux désaccords utilisés, respectivement pendant le piège magnéto-optique et pendant la mélasse. δ_s est le désaccord de la sonde d'imagerie (figure 8).

I.1.4 L'observation des atomes avec l'imagerie par absorption

Pour visualiser le ralentissement, le piège magnéto-optique, ou encore régler la mélasse optique, nous utilisons la fluorescence émise par les atomes. Cependant, cette méthode n'est pas particulièrement fiable pour une description quantitative, surtout dans notre cas où l'on s'intéresse à des nuages optiquement épais : en effet, la lumière de fluorescence a tendance à être réabsorbée par les atomes (§ C.1). C'est pourquoi toutes nos études expérimentales sont fondées sur l'imagerie par absorption, quelle que soit la température du nuage piégé.

I.1.4.a Principe

Loi de Beer-Lambert

L'imagerie par absorption consiste à illuminer le nuage atomique de densité spatiale $n(x, y, z)$, à l'aide d'un faisceau laser (sonde) se propageant sur l'axe y et d'intensité $I_0(x, z)$: on observe alors après le passage à travers le nuage, l'intensité restante (celle qui n'a pas été absorbée puis rediffusée par le nuage). Quantitativement, l'énergie absorbée dans un volume élémentaire $dx dy dz$ autour de (x, y, z) , correspond au produit de l'énergie d'un photon $\hbar\omega$ ($\omega = 2\pi c/\lambda$ est la fréquence du laser) et du nombre de photons diffusés par unité de temps dans ce volume, égal $\Gamma_p n(x, y, z) dx dy dz$. Nous avons noté Γ_p le taux de pompage de la transition, donné par l'équation A.23. En négligeant un éventuel effet de lentille du nuage atomique sur la sonde (condition 13 discutée plus loin), on peut écrire l'équation différentielle suivante, donnant l'évolution de l'intensité du faisceau laser se propageant vers les $y < 0$,

$$\frac{dI(x, y, z)}{dy} - \hbar\omega \frac{\Gamma}{2} \frac{s(x, y, z)}{1 + s(x, y, z)} n(x, y, z) = 0, \quad (5)$$

où $s(x, y, z)$ le paramètre de saturation dépendant de la position

$$s(x, y, z) = \frac{C_{\text{im}} I(x, y, z) / I_{\text{sat}}}{1 + 4\delta_s^2 / \Gamma^2}. \quad (6)$$

Le paramètre $C_{\text{im}} \approx 7/15$ dépend des polarisations respectives du nuage et du laser et est évalué dans la suite (équation 11). On a noté δ_s , le désaccord du laser par rapport à la transition considérée, ici la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$. Dans le cas où $s(x, y, z) \ll 1$, l'équation 5 s'intègre pour donner l'intensité $I(x, z)$ non absorbée après le nuage atomique (en $y = -\infty$) selon une loi de Beer-Lambert

$$I(x, z) = I_0(x, z) \exp \left[-\sigma(\delta_s) \int_{-\infty}^{\infty} n(x, y, z) dy \right], \quad (7)$$

où l'on a introduit la section efficace d'interaction atome-lumière,

$$\sigma(\delta_s) = \frac{\Gamma \hbar\omega}{2I_{\text{sat}}} \frac{C_{\text{im}}}{1 + 4\delta_s^2 / \Gamma^2} = \frac{3\lambda^2}{2\pi} \frac{C_{\text{im}}}{1 + 4\delta_s^2 / \Gamma^2}. \quad (8)$$

La dépendance de l'absorption en fonction du désaccord δ_s , est la traduction de la dépendance de forme lorentzienne de la section efficace (équation 8), comme mesurée en figure 7.

L'imagerie par absorption donne donc accès à la densité intégrée selon l'axe de l'imagerie à partir de la connaissance de l'épaisseur optique $e_{\text{op}} = \ln[I_0(x, z)/I(x, z)]$, suivant la relation

$$d(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} n(x, y, z) dy = \frac{e_{\text{op}}}{\sigma(\delta_s)}. \quad (9)$$

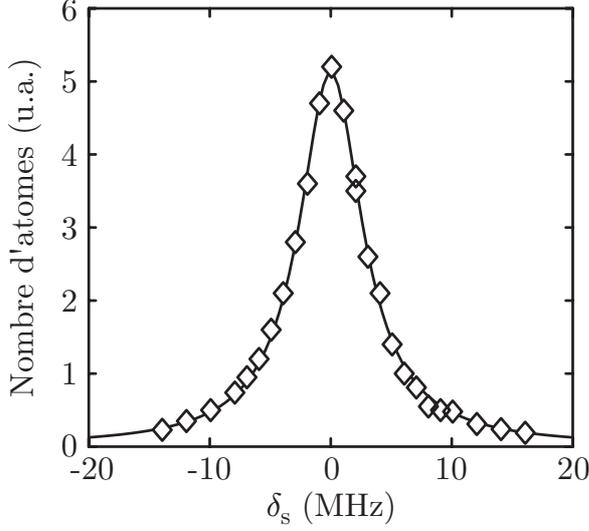


FIG. 7 – Courbe de résonance de la sonde : nombre d'atomes (unités arbitraires) observés en fonction du désaccord δ_s du laser. L'ajustement lorentzien donne une largeur de 6.3 MHz ce qui est légèrement supérieur à la largeur naturelle de la raie Γ (6.06 MHz).

Force de transition effective

Évaluons le coefficient correctif \mathcal{C}_{im} apparaissant dans la section efficace $\sigma(\delta_s)$ (équation 8), et ce, pour un laser sonde polarisé linéairement, qui illumine les atomes dont les états sont répartis de manière quelconque dans les différents sous-niveaux Zeeman. C'est en effet le cas auquel nous sommes confrontés expérimentalement, car après la coupure du piège, qu'il soit magnéto-optique ou magnétique, le champ résiduel a tendance à agir sur la polarisation du nuage de manière non contrôlée. Prenons l'axe de quantification selon l'axe d'orientation quelconque z . Les populations atomiques selon cet axe sont réparties de manière arbitraire sur les états $|F=2, m_F\rangle_S$. Par rapport à cet axe, la polarisation du laser de sonde est une combinaison des trois polarisations linéaires de l'espace : π_x selon \vec{e}_x , π_y selon \vec{e}_y et π_z selon \vec{e}_z . Ces dernières sont reliées aux polarisations $\pi \equiv \pi_z$, σ^+ , et σ^- par les relations A.4. Ainsi, une transition π_x ou π_y contient à poids égaux les transitions σ^+ et σ^- , ce qui résulte en le fait que la force de ces transitions $\pi_{x,y}$ est la moyenne des forces des transitions σ^+ et σ^- . En prenant les notations du § A.1.2, les forces des transitions s'expriment selon

$$\begin{cases} \frac{1}{2} [\mathcal{C}^2(J', F, m_F, F', q = 1) + \mathcal{C}^2(J', F, m_F, F', q = -1)] & \text{pour les polarisations } \pi_{x,y}, \\ \mathcal{C}^2(J', F, m_F, F', q = 0) & \text{pour la polarisation } \pi_z, \end{cases} \quad (10)$$

avec $J' = 3/2$, $F = 2$ et $F' = 3$. Nous donnons dans le tableau 2 la force des transitions pour les trois polarisations, et partant de chacun des cinq états m_F possibles.

	$m_F = 0$	$m_F = \pm 1$	$m_F = \pm 2$
π_x, π_y	2/5	13/30	8/15
π_z	3/5	8/15	1/3

TAB. 2 – Force des transitions π partant des états $|F=2, m_F\rangle_S$ calculées à partir des relations 10.

On voit donc que le facteur correctif \mathcal{C}_{im} vérifie toujours $1/3 \leq \mathcal{C}_{\text{im}} \leq 3/5$. Dans le cas où nous n'avons aucune raison de privilégier une transition ou un état par rapport à un(e) autre (dans le cas d'un échantillon complètement dépolarisé par exemple), on peut donner une estimation de \mathcal{C}_{im} en prenant la moyenne des forces de chaque transition possible ce qui donne

$$\mathcal{C}_{\text{im}} \approx \frac{7}{15} \pm 0.08, \quad (11)$$

où 0.08 correspond à l'écart quadratique moyen de la distribution des forces de transition. On ne peut vérifier la validité de cette estimation sur l'image d'un nuage thermique, car sa taille est indépendante du nombre d'atomes qu'il contient. Par contre, l'image d'un condensat (§ II.4.2), dont la taille dépend de son nombre d'atomes (via les interactions), nous a permis de valider cette valeur de \mathcal{C}_{im} .

Expérimentalement, nous réalisons donc deux images consécutives avec ou sans nuage atomique pendant lesquelles est réalisée une impulsion de sonde désaccordée de δ_s , de durée $t_s = 50 \mu\text{s}$ et d'intensité I_0 de quelques centaines de microwatts par centimètre carré. Le processus d'imagerie nécessite d'utiliser une transition fermée, qui est dans notre cas la transition $F=2 \rightarrow F'=3$. Notons que le temps t_s pendant lequel la sonde éclaire les atomes est assez court, pour que l'on puisse négliger les phénomènes de dépompement via la transition la plus proche $F=2 \rightarrow F'=2$. Par contre, il faut réaliser une impulsion lumineuse de repompement avant la première image, impulsion que nous prenons d'une durée de $100 \mu\text{s}$, afin de transférer vers $F=2$ les atomes qui seraient initialement dans $F=1$, comme par exemple à l'issue d'un piège magnétique (§ II.2).

I.1.4.b Le système d'imagerie

Montage expérimental

Le montage utilisé est détaillé en figure 8. Le faisceau laser est issu d'une diode sur réseau suivie d'un asservissement d'absorption saturée, calé sur le "cross-over" désaccordé de $-2\pi \times 133.6 \text{ MHz}$ par rapport à la transition $F=2 \rightarrow F'=3$. Puis il passe deux fois dans un modulateur acousto-optique qui nous sert à la fois d'obturateur et de réglage du désaccord de la sonde δ_s . Une sonde à résonance ($\delta_s=0$) sur la transition $F=2 \rightarrow F'=3$ correspond à une onde acoustique de fréquence 66.8 MHz. Le faisceau est injecté dans une fibre polarisante, en sortie de laquelle des optiques donnent au laser sonde une taille du même ordre que celle de la cellule.

L'image du nuage atomique est obtenue via un système de deux lentilles de focales $f = 120 \text{ mm}$ séparées d'une distance $2f$. L'image ainsi transportée sur une distance $4f$ est agrandie grâce à un objectif de microscope (grandissement mesuré de 4.1) sur le capteur de la caméra CCD. L'intérêt du transport d'image à l'aide des deux lentilles est double : tout d'abord, il permet de s'éloigner de la zone autour de la cellule (assez encombrée) pour pouvoir positionner la caméra. De plus, le grandissement 1 de ce montage (déterminé par la distance entre les deux lentilles), est indépendant du fait que le nuage atomique soit au foyer de la première lentille. Quoi qu'il arrive, l'image du nuage est décalée à une distance $4f$ de l'objet, sans aucun grandissement. Il suffit ensuite de faire la mise au point sur cette image, en positionnant l'ensemble caméra-objectif à l'aide d'une platine de translation agissant sur les trois directions de l'espace.

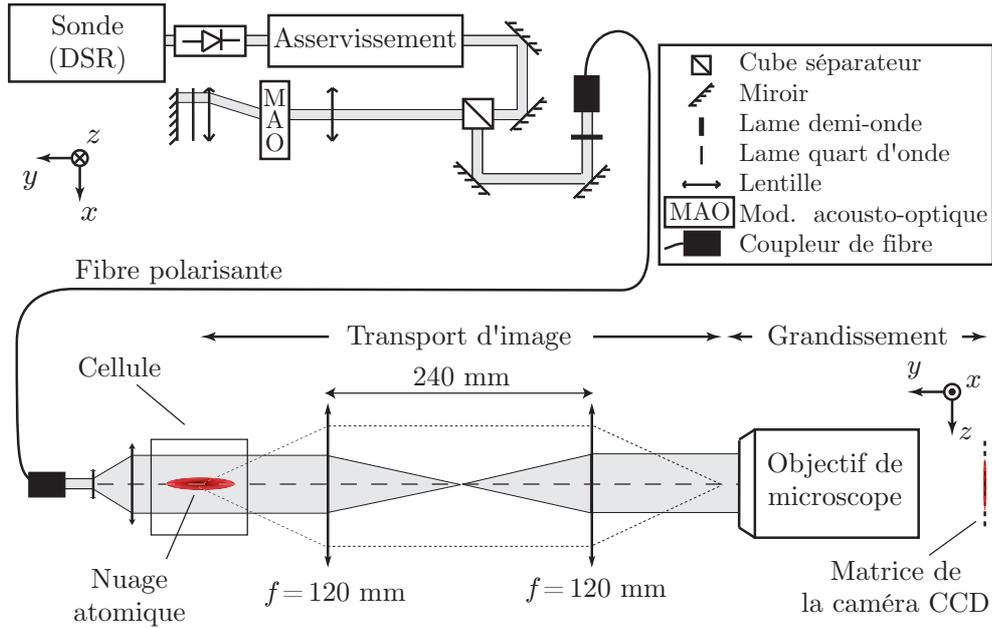


FIG. 8 – Imagerie par absorption : de la diode sur réseau (DSR) à la caméra CCD. Le faisceau sonde dont le désaccord δ_s par rapport à la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$ est contrôlé par un modulateur acousto-optique (MAO) est injecté dans une fibre optique. À la sortie de celle-ci, en se propageant vers les $y < 0$, il illumine le nuage atomique. Ce dernier est imagé via deux lentilles de focale f et séparées de $2f$ jusqu'à un objectif de microscope dont le rôle est de grossir l'image arrivant sur le capteur de la caméra CCD.

Du point de vue pratique, même si l'on réalise une division d'images qui doit en principe faire disparaître les imperfections du faisceau laser, il est important de prendre soin à la qualité du profil du faisceau sonde. En effet, il subsiste toujours des vibrations expérimentales résiduelles qui décalent légèrement, de manière non contrôlée, spatialement les images entre elles. La division d'image pose alors problème, si l'éclairage n'est pas uniforme (présence de poussières, franges, etc....). La réalisation du système d'imagerie constitue ainsi un travail minutieux de chasse à tous les phénomènes qui peuvent perturber le faisceau sonde. Par exemple, nous avons réalisé une boîte autour du banc d'imagerie, pour limiter les perturbations dues aux fluctuations de l'air, ou débranché tel ventilateur qui perturbait la prise d'images...

Résolution et profondeur de champ

Dans la limite où l'on n'est pas limité par la taille des pixels de la caméra CCD (ce qui est vérifié lorsque l'on utilise l'objectif de microscope), une donnée fondamentale du système d'imagerie est sa résolution optique. Elle est donnée par la distance minimale qui sépare deux taches que l'on peut distinguer (critère de Rayleigh)

$$R = 0.61 \frac{\lambda}{\text{O.N.}}, \quad (12)$$

où O.N. est l'ouverture numérique du système. Globalement, le système de transport d'image associé à l'objectif de microscope a une ouverture numérique valant 0.1, ce qui résulte en une

résolution théorique $R = 5 \mu\text{m}$. Il est important de noter, que ceci est la résolution du système limité par la diffraction, c'est-à-dire sans aberration. En pratique, nous avons observé sur nos optiques principalement des aberrations de champ (liées au fait que notre objet n'est pas sur l'axe du système) dont on s'affranchit, en réglant l'axe du système de transport sur les atomes.

Un autre réglage important est la focalisation de l'ensemble caméra-objectif sur le nuage atomique. La précision requise sur ce réglage pour atteindre la limite de diffraction en résolution, est donnée par la profondeur de champ de l'ordre de $\lambda/\text{O.N.}^2$, soit environ la centaine de microns. En toute rigueur, du fait de l'épaisseur du nuage atomique, son image dans le plan du capteur CCD ne peut être totalement au point. En effet, on peut considérer que l'image d'un objet est significativement floue dès que $L_y/L_\perp \gg 1/\text{O.N.}$ où L_y et L_\perp sont respectivement les tailles selon l'axe y et perpendiculairement à l'axe y . On ne peut donc faire d'images d'un objet trop anisotrope par rapport à l'ouverture numérique de l'imagerie. Ceci explique pourquoi dans notre configuration d'imagerie, nous ne pouvons espérer imager in situ des nuages issus du piège magnétique comprimé (§ II.2), c'est-à-dire dont l'anisotropie est dans le rapport des fréquences de piégeage $330/8 = 41$. En pratique nous réalisons des images après expansion balistique, c'est-à-dire avec des nuages beaucoup moins anisotropes.

Effet d'indice du nuage atomique

Le réglage de l'imagerie sur les atomes nécessite de travailler sur un objet aussi petit que la limite de diffraction R . Or, à désaccord δ_s non nul, le nuage atomique acquiert un indice de réfraction. Il se comporte alors comme une lentille vis-à-vis du faisceau sonde et perturbe le processus d'imagerie. Cet effet est négligeable, si le déphasage accumulé le long de l'axe y est petit devant 2π , c'est-à-dire si la densité intégrée $d(x, z)$ vérifie [43]

$$d(x, z) \ll \frac{8\pi^2}{3\lambda^2 \mathcal{C}_{\text{im}}} \frac{1 + 4\delta_s^2/\Gamma^2}{2\delta_s/\Gamma}. \quad (13)$$

Pour un laser à résonance, si l'on attribue le désaccord à la largeur spectrale du faisceau sonde $\delta_s \approx 2\pi \times 1 \text{ MHz}$, on ne peut imager dans de bonnes conditions un nuage, que si la densité intégrée est très inférieure à $300 \text{ at}/\mu\text{m}^2$, c'est-à-dire au plus de quelques dizaines d'atomes par microns carrés. Pour régler l'imagerie sur notre dispositif, cette condition exclut d'utiliser un condensat de Bose-Einstein encore petit qui n'a pas subi d'expansion balistique, et dont la densité intégrée est de l'ordre de $10^5 \text{ at}/\mu\text{m}^2$ (équation 119). On pourrait penser qu'augmenter le désaccord favoriserait les choses. Cependant, à fort désaccord, l'indice de réfraction décroît en $1/\delta_s$, alors que l'absorption, c'est-à-dire le signal, varie en $1/\delta_s^2$, donc beaucoup plus vite. La bonne solution consiste à travailler avec un objet atomique fin, peu dense et pas trop anisotrope : un laser à atomes issu d'un condensat dans un piège non comprimé. C'est en imageant un tel objet à résonance, que nous avons observé une résolution limitée par la diffraction (relation 12).

Dynamique de la caméra

Un des avantages de la méthode d'imagerie par absorption en faible saturation ($s \ll 1$), est qu'elle ne nécessite pas la connaissance de la valeur absolue de l'intensité I_0 de la sonde. En effet, du moment qu'elle est constante pour les deux images (avec ou sans les atomes), seulement le rapport entre les intensités récoltées est utile. Cependant, on ne peut la prendre arbitrairement faible du fait de la détectivité limitée de notre caméra Pixelfly QE [44].

Le capteur de cette caméra CCD est composé de 1392×1024 pixels de taille $6.45 \mu\text{m} \times 6.45 \mu\text{m}$. En fonction de la configuration, nous avons la possibilité de regrouper quatre pixels adjacents, et donc d'obtenir une matrice effective comportant 696×512 pixels de taille $12.9 \mu\text{m} \times 12.9 \mu\text{m}$. Les images de condensats de Bose-Einstein ou de lasers à atomes étant réalisées avec l'objectif de microscope, chaque groupe de quatre pixels représente donc un échantillonnage de $3.15 \mu\text{m} \times 3.15 \mu\text{m}$ pour l'espace objet où se trouvent les atomes, ce qui est bien inférieur à la résolution $R=5 \mu\text{m}$ de l'optique, et ne limite donc pas la qualité finale de l'image.

La caméra possède 4096 niveaux de gris et nous avons mesuré qu'un niveau correspond environ à 11.5 photons (efficacité quantique de l'ordre de 35 %) à 780 nm. Dans la configuration précédente (microscope et regroupement de pixels), le capteur sature en $t_s = 50 \mu\text{s}$, pour une intensité incidente de $2.4 \text{ mW}/\text{cm}^2$. Avec une intensité $I_0 \approx 600 \mu\text{W}/\text{cm}^2$ qui correspond à un paramètre de saturation $s \approx 0.17$, nous utilisons environ 1000 niveaux de gris du capteur. Le bruit sur la caméra est de 12 électrons r.m.s. et correspond quant à lui à 3 niveaux de gris. À résonance, on ne peut donc observer dans de bonnes conditions, une épaisseur optique supérieure à $\max(e_{\text{op}}) \approx \ln(1000/3) \approx 5.8$, ce qui correspond à une densité intégrée maximum $d_{\text{obs}} = \max(e_{\text{op}})/\sigma(\delta_s = 0) \approx 40 \text{ at}/\mu\text{m}^2$. C'est en effet la saturation que nous obtenons expérimentalement sur nos images. Si l'on utilisait toute la dynamique de la caméra, outre le fait que la condition de faible saturation serait moins bien respectée, on ne gagnerait que 25% au niveau de la densité optique maximum visible, alors que l'intensité serait multipliée par 4, car l'épaisseur optique varie logarithmiquement avec l'intensité. On remarque enfin, que si l'on ne sature pas la caméra ($d < d_{\text{obs}}$), la condition 13 est plutôt bien vérifiée, et on peut donc négliger les effets d'indice dus au nuage imagé.

I.1.4.c Effets dynamiques au cours de la prise d'image

Pendant la prise d'image, le nuage atomique n'est pas immobile et même s'il l'était, l'interaction avec le faisceau sonde le mettrait en mouvement. Nous quantifions dans ce paragraphe différents phénomènes dynamiques qui interviennent pendant la durée de l'impulsion lumineuse de la sonde.

Diffusion de photons

Les atomes éclairés par la sonde d'intensité $I_0 = 600 \mu\text{W}/\text{cm}^2$, à résonance pendant une durée $t_s = 50 \mu\text{s}$, absorbent un nombre de photons N_s donné par

$$N_s = \frac{I_0 \sigma(0) t_s}{\hbar \omega} = 160. \quad (14)$$

Il en résulte une impulsion $N_s \hbar k$ communiquée au nuage atomique dans la direction y . Ceci induit un désaccord par effet Doppler au maximum de $N_s \hbar k^2 / m = 2\pi \times 1.2 \text{ MHz}$, ce qui est proche de la largeur du faisceau sonde. De même, la diffusion de ces photons aboutit à une marche au hasard dans le plan transverse (x, z). Considérant une émission isotrope se produisant en moyenne à des intervalles de temps $\Delta t = t_s / N_s$, l'élargissement transverse Δr en taille du nuage atomique s'écrit [45]

$$\Delta r = \sqrt{\int_0^{t_s} \frac{dt}{\Delta t} \frac{2\hbar^2 k^2 (t_s - t)^2}{3m^2}} = \sqrt{\frac{2N_s}{9} \frac{\hbar k}{m} t_s} = 1.7 \mu\text{m}, \quad (15)$$

ce qui est assez petit devant la résolution R . Notons que la diffusion multiple de photons pendant l'impulsion lumineuse de sonde n'a pas d'incidence notable, quelle que soit la densité

atomique. En effet, son impact ne peut être supérieur à celui d'un rayonnement isotrope saturant, sous l'influence duquel les atomes ne peuvent émettre au maximum que $\Gamma t_s/2 = 950$ photons. La diffusion multiple ne peut donc engendrer un élargissement transverse excédant $3.5 \mu\text{m}$ et un désaccord supplémentaire supérieur à $\sqrt{950} \hbar k^2/m \approx 2\pi \times 200 \text{ kHz}$.

Il n'en reste pas moins que le processus d'imagerie est destructif : l'énergie de recul $E_R = \hbar^2 k^2/2m$ associée à un photon spontané correspond à une température $T_R = 2E_R/k_B = 360 \text{ nK}$, ce qui est assez proche de la température critique de condensation inférieure au microkelvin (équation 63). Si l'on veut observer l'évolution du condensat en fonction du temps, il faut donc recommencer l'expérience pour des temps différents. On comprend que cela impose d'avoir une expérience aussi stable et répétable que possible².

Temps de vol

On peut remarquer que l'on ne peut faire d'image d'un piège magnétique ou magnéto-optique³ sans couper le champ magnétique, c'est-à-dire sans relâcher le piège. En effet, quelle que soit la transition fermée considérée pour réaliser l'impulsion lumineuse de sonde ($F = 1 \rightarrow F' = 0$ ou $F = 2 \rightarrow F' = 3$), sa fréquence dépend du champ magnétique en fonction des niveaux hyperfins de moment m_F intervenant, et on ne peut attribuer de désaccord unique δ_s au laser sonde.

Nous ne prenons donc des images qu'après coupure des pièges, ce qui nous permet en particulier, de mesurer la température T des nuages atomiques, en regardant l'évolution de la taille du nuage en fonction du temps de chute t_v , appelé aussi temps de vol.

Dans le cas d'un nuage thermique en régime non collisionnel et décrit par la statistique de Maxwell-Boltzmann, on a pour l'évolution de la taille r.m.s. dans la direction i ,

$$\sigma_i(t_v) = \sqrt{\sigma_i^2(0) + \frac{k_B T}{m} t_v^2} \stackrel{o.h.}{=} \sigma_i \sqrt{1 + \omega_i^2 t_v^2}, \quad (16)$$

où la première égalité est valable quel que soit le piège, tandis que la seconde n'est valable que si le piège est harmonique de fréquences ω_i . Dans ce dernier cas, nous avons introduit la taille r.m.s. du nuage piégé dans la direction i , $\sigma_i = \sqrt{k_B T/m\omega_i^2}$. La densité à trois dimensions $n(x, y, z)$ dans le piège s'écrit alors

$$n(x, y, z) = N \prod_{i=x,y,z} \frac{\exp(-x_i^2/2\sigma_i^2)}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}, \quad (17)$$

où N est le nombre d'atomes considéré. L'intégration selon l'axe y après temps de vol, aboutit à la densité atomique surfacique $d(x, z, t_v)$, qui est la seule quantité à laquelle nous avons accès via l'imagerie,

$$d(x, z, t_v) = N \prod_{i=x,z} \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi(1 + \omega_i^2 t_v^2)}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma_i^2(1 + \omega_i^2 t_v^2)}\right). \quad (18)$$

Pendant le temps de vol, le nuage est en chute libre et en expansion. On peut estimer le flou résultant sur l'image pendant la durée de l'impulsion lumineuse de sonde. L'effet de la chute libre au bout d'un temps de vol t_v est de $\Delta z = g t_v t_s$, ce qui induit un flou de taille

²Des techniques d'imagerie par contraste de phase sont néanmoins possibles pour observer le condensat en temps réel [43].

³Cette remarque ne s'applique pas au cas d'un piège optique, assez désaccordé pour être relativement insensible à l'état interne atomique (chapitre VI).

r.m.s. $\sigma_z = \Delta z / 2\sqrt{3} \leq 4 \mu\text{m}$, ce qui est au plus de l'ordre de la résolution. On a pris pour l'application numérique le temps de vol maximum de 30 ms, correspondant au temps de chute nécessaire pour atteindre la paroi inférieure de la cellule disposée 5 mm en dessous du nuage atomique. Pour ce qui est du flou lié à l'expansion du nuage, que le nuage issu du piège soit thermique ou condensé, la modification relative de la taille L du nuage due à la vitesse d'expansion maximale selon la direction la plus confinée de fréquence ω est donnée par la même loi d'échelle en $\sqrt{1 + \omega^2 t_v^2}$ (relations 16 et 118). Plus précisément, dans les deux cas, pendant l'impulsion lumineuse de sonde, l'accroissement relatif de taille s'écrit

$$\frac{dL}{L} = \frac{\omega^2 t_s t_v}{1 + \omega^2 t_v^2} \leq \frac{\omega t_s}{2}, \quad (19)$$

où L est la racine de la taille quadratique moyenne pour un nuage thermique ou le rayon de Thomas-Fermi dans le cas d'un condensat. dL/L ne dépasse pas quelques pour cent pour les fréquences les plus fortes que nous ayons ($\omega = 2\pi \times 330 \text{ Hz}$ dans le piège magnétique comprimé), et nous négligeons donc cet effet sur les images.

I.1.5 Automatisation de l'expérience

L'obtention d'un condensat de Bose-Einstein demande de réaliser différentes étapes, que ce soient celles faisant intervenir des lasers (§ I.2) ou celles utilisant un piège magnétique et un champ radiofréquence (chapitre II).

Pour assurer la succession synchronisée de ce grand nombre d'étapes, nous utilisons un séquenceur piloté par ordinateur et développé par les électroniciens du groupe. Du point de vue pratique, nous écrivons la séquence expérimentale sous la forme d'un programme via l'interface Matlab[®] [46] et, une fois que le séquenceur a chargé toutes les instructions que nous lui communiquons via l'ordinateur, il effectue la séquence de manière autonome, en suivant sa propre horloge [47].

Ce séquenceur est, entre autres, constitué de cartes analogiques et numériques composées de voies cadencées sur 32 pas dont la durée est programmable à partir de $1 \mu\text{s}$. Ces cartes permettent de commander les modulateurs acousto-optiques, les obturateurs mécaniques, l'allumage et l'extinction des champs, etc.... La précision temporelle de ces opérations repose sur l'horloge interne (16 MHz) et est donc insensible aux aléas temporels des commandes informatiques, ce qui est important pour la reproductibilité des expériences. L'incertitude ("jitter") sur les durées est de l'ordre de la nanoseconde, ce qui est largement suffisant par rapport à nos contraintes expérimentales.

I.2 La séquence de refroidissement laser

Dans les paragraphes qui suivent, nous détaillons les différentes étapes de refroidissement laser, permettant d'obtenir un nuage atomique de Rubidium 87 localisé au niveau de la cellule, et dont la température est de $60 \mu\text{K}$.

Pour obtenir ce résultat, nous partons d'atomes de Rubidium issus d'un four (§ I.2.1). Ces derniers sont alors ralentis par la conjonction d'un faisceau laser et d'un champ magnétique (§ I.2.2). Le jet qui en résulte, charge le piège magnéto-optique (PMO) (§ I.2.3) qui confine les atomes au niveau de la cellule. La température du nuage est finalement abaissée par une étape de mélasse optique (§ I.2.4).

I.2.1 Le four à recirculation

Dans les conditions normales de température et de pression, le Rubidium est sous forme solide. Pour pouvoir manipuler les atomes individuellement, il est donc nécessaire de travailler à partir d'un gaz. Pour cela, nous utilisons un jet atomique issu d'un four. Son principe est de constituer un réservoir pour l'alcalin, qui une fois chauffé, s'échappe sous forme gazeuse par une petite ouverture. Il existe différentes géométries de four possibles [48] dont vont dépendre par exemple le flux, la durée de vie, ou encore le niveau de collimation.

Le four à recirculation [49] que nous utilisons est représenté sur la figure 9. Il est constitué de deux tubes en acier, perpendiculaires l'un par rapport à l'autre, dont l'un fait office de réservoir pour le Rubidium, tandis que l'autre, de forme très allongée, impose les propriétés de collimation du jet atomique qui en sort. De plus, les parois internes de cette enceinte sont recouvertes d'une grille qui donne son caractère recirculatoire au four. En effet, on impose des températures supérieures à la température de fusion (39°C) à tout le four, tel qu'en chaque point de la paroi, le Rubidium soit à l'état liquide. Aussi, en fixant un gradient de température décroissant du réservoir vers la buse, nous induisons une recirculation du liquide grâce à la grille vers les zones de plus forte température par un effet de capillarité [50] : en effet, la tension de surface liquide-vapeur diminuant lorsque la température augmente, il est énergétiquement favorable au liquide mouillant la grille de se trouver à l'endroit le plus chaud du four. Un tel système permet de remettre dans le réservoir les atomes qui sont entrés en collision avec les parois, et donc d'allonger la durée de vie du four avant qu'un rechargement soit nécessaire.

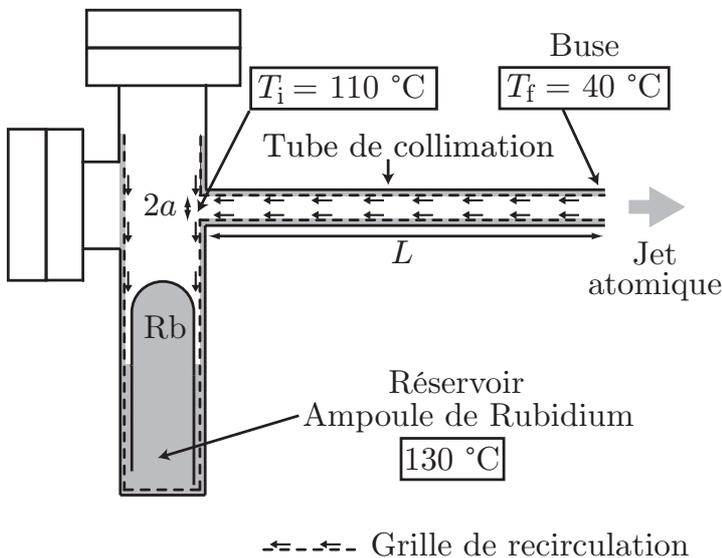


FIG. 9 – Four à recirculation utilisé comme source de Rubidium. Le gradient de température entre l'ampoule et la buse permet de faire recirculer l'alcalin liquide sur la grille qui habille les parois, selon le sens indiqué par les flèches. Le tube de collimation est de longueur $L = 11 \text{ cm}$ et le diamètre intérieur de la grille est donné par $2a = 4.5 \text{ mm}$.

Expérimentalement, nous avons remarqué que, dans des conditions normales d'utilisation, le four se vide en deux à trois années. Le Rubidium, comme les autres métaux alcalins, s'enflamme spontanément dans l'air et réagit violemment avec l'eau. La manipulation lors du chargement du four est donc délicate. Il faut tout d'abord nettoyer le four dans un endroit bien aéré, en éliminant soigneusement les traces de Rubidium à l'aide de quelques gouttes d'eau distillée. Une fois ceci réalisé, on remonte le four sur l'enceinte et on le remet sous vide, tout en l'étuvant afin de nettoyer en profondeur les parois. Celles-ci dégazées, il va falloir déposer le Rubidium dans le réservoir. Cette étape doit être réalisée rapidement, pour ne pas laisser le temps à l'alcalin de s'oxyder à l'air. Pour réduire la cinétique de toute réaction possible, on refroidit préalablement l'ampoule contenant quelques grammes de Rubidium dans de l'azote liquide (77 K), puis, après avoir ouvert le four sous azote gazeux, on casse l'ampoule que l'on dépose avec le Rubidium dans le réservoir, et l'on remet rapidement tout le système sous vide.

Une donnée importante du jet atomique issu du four est sa distribution en vitesse. L'énorme majorité des atomes utiles étant originaire du fond du four (§ I.3.1), ces derniers ont tous la même température T_i . La distribution en vitesse résultante est donnée par [48]

$$f(v) = \frac{v^3 m^2}{2k_B^2 T_i^2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T_i}\right), \quad (20)$$

où la vitesse moyenne du jet est notée $\bar{v} = \sqrt{9\pi k_B T_i / 8m}$ soit 360 m/s à 110 °C.

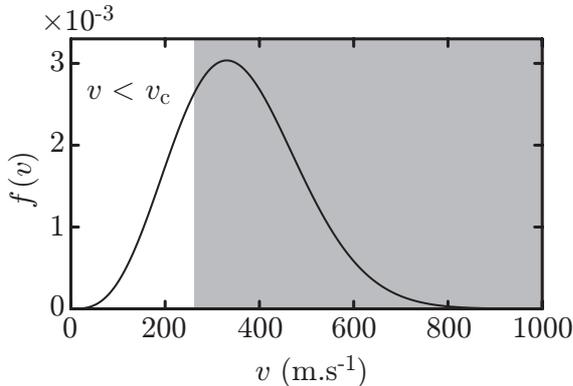


FIG. 10 – Distribution en vitesse $f(v)$ du jet pour $T_i=110$ °C. On a grisé la partie qui est au-delà de la zone de capture du ralentissement Zeeman ($v_c=260$ m/s, § I.2.2.b), et qui est inutilisable dans l'expérience.

Nous voulons utiliser le jet atomique pour charger un piège magnéto-optique. Celui-ci possède une plage de capture en vitesse de l'ordre de $v_{\text{PMO}}=20$ m/s (§ I.3.3). Si l'on essayait de piéger directement les atomes de la distribution (figure 10), qui ont une vitesse inférieure à v_{PMO} , on utiliserait seulement 0.0017% du jet. Il est donc nécessaire de ralentir ce dernier pour augmenter le nombre d'atomes que le piège magnéto-optique peut capturer.

I.2.2 Le ralentissement Zeeman

I.2.2.a Principe

Pour ralentir les atomes, on utilise un laser contrapropageant au jet atomique. Ses photons d'impulsion $\hbar\vec{k}$ exercent une force de pression radiative, dont la valeur maximale \vec{F}_{max} atteinte à résonance et à saturation vis-à-vis de la transition atomique est

$$\vec{F}_{\text{max}} = \frac{\Gamma}{2} \hbar\vec{k}. \quad (21)$$

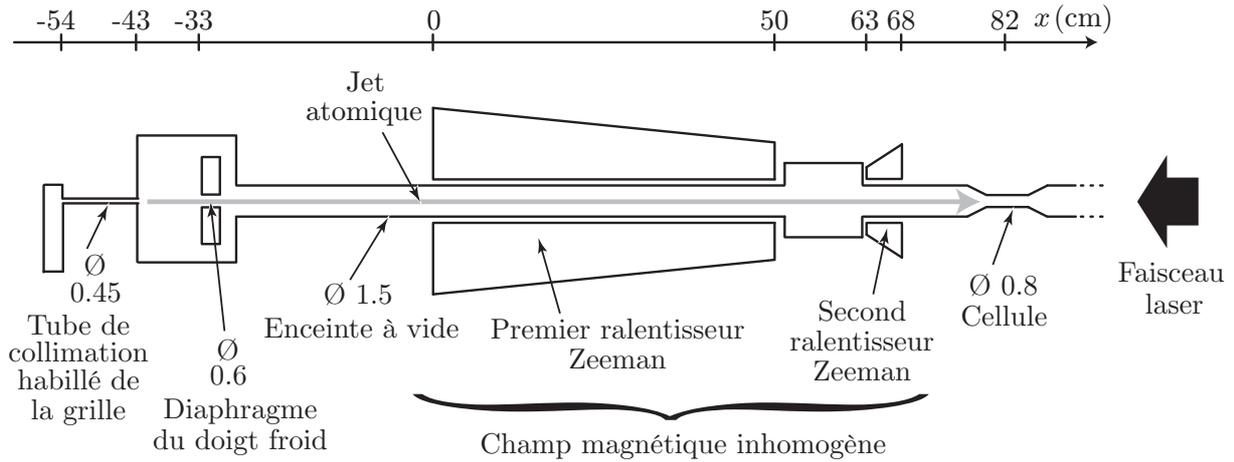


FIG. 11 – Géométrie du ralentissement Zeeman (les diamètres sont indiqués en centimètres). Partant du four, le jet atomique parcourt un long tube sous vide avant d’arriver dans la cellule, où une partie des atomes est capturée dans le piège magnéto-optique (§ I.2.3). Les atomes subissent un champ magnétique inhomogène au niveau des deux ralentisseurs Zeeman. Ce champ permet de garder les atomes en résonance avec le faisceau laser exerçant sur eux une force de pression de radiation.

Cette force correspond à une décélération $a_{\max} = F_{\max}/m \simeq 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ et est donc particulièrement efficace. Cependant, en ralentissant les atomes, elle a tendance à les mettre hors résonance du fait de l’effet Doppler, et ce, dès que la variation en vitesse δv de l’atome est de l’ordre de $\Gamma/k = 4.7 \text{ m/s}$. La force de pression radiative ne peut donc ralentir significativement les atomes se propageant à plusieurs centaines de mètres par seconde, que si l’on arrive à rester en résonance avec les atomes ralentis.

	Longueur des couches (mm)	Nombre de spires	Rayon moyen (mm)	Courant (A)
Premier ralentisseur	500, 480, 390, 330, 250, 140, 140,	100, 96, 78, 66, 50, 28, 28,	65	4.2
Second ralentisseur	50, 30, 30, 15, 15	45, 24, 24, 12, 12	26	2.6

TAB. 3 – Géométrie des spires de courant pour les deux solénoïdes.

Nous utilisons sur notre expérience la méthode du ralentissement Zeeman⁴, qui permet de compenser spatialement le désaccord dû à la variation de vitesse, par un déplacement

⁴Une autre méthode dite du laser « chirpé » [51] consiste à balayer temporellement la fréquence du laser ralentisseur de manière synchrone avec le changement de vitesse des atomes. Notons que cette méthode n’est pas totalement équivalente à celle que nous utilisons. En effet, elle produit des bouffées périodiques d’atomes ralentis au milieu d’atomes qui ne le sont pas, alors que le ralentissement Zeeman permet la production d’un jet ralenti de manière continue et donc de plus fort flux.

en énergie des niveaux atomiques de la transition, sous l'effet d'un champ magnétique inhomogène [52]. La géométrie du dispositif est décrite dans la figure 11 : Le jet atomique, diaphragmé par le doigt froid, se propage dans un long tube autour duquel, on a bobiné des solénoïdes qui créent un champ inhomogène sur l'axe du système. Les caractéristiques de ces bobinages sont données dans le tableau 3, et le champ qui en résulte sur l'axe x est représenté en figure 12(a).

Le mouvement de l'atome ralenti

Pour pouvoir effectuer un nombre de cycles important, il est nécessaire de travailler sur une transition fermée et se ramener ainsi à un système à deux niveaux. Nous utilisons la transition $|F=2, m_F=2\rangle_S \rightarrow |F'=3, m_{F'}=3\rangle_P$ du ^{87}Rb (figure 2) définie avec l'axe de quantification selon la direction x . Cette transition σ^+ est excitée par la polarisation circulaire droite du laser ralentisseur. L'effet Zeeman subi par un niveau atomique sous l'effet d'un champ magnétique $\vec{B} = B(x)\vec{e}_x$, est rigoureusement linéaire pour les deux niveaux considérés (§ A.2.2.b). La fréquence de la transition $\omega_B(x)$ est donc donnée par

$$\hbar(\omega_B(x) - \omega) = (3g_{F'=3} - 2g_{F=2})\mu_B B(x) = \mu_B B(x), \quad (22)$$

où ω est la fréquence de la transition atomique à champ magnétique nul. Il s'ensuit que la force \vec{F}_{ral} , exercée sur un atome animé d'une vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$ en x , par le laser d'intensité I et désaccordé de $\delta = \omega_\ell - \omega = -2\pi \times 133 \text{ MHz}$, s'écrit

$$\vec{F}_{\text{ral}} = \frac{s(v, x)}{1 + s(v, x)} \vec{F}_{\text{max}}, \quad (23)$$

où le paramètre de saturation $s(v, x)$, incluant l'intensité de saturation $I_{\text{sat}} = 1.67 \text{ mW/cm}^2$ (équation A.22), s'exprime par

$$s(v, x) = \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4[(\delta + kv - \mu_B B(x)/\hbar)/\Gamma]^2}. \quad (24)$$

Considérons le référentiel \mathcal{R} , dans lequel l'effet Doppler est compensé par le désaccord du laser et l'effet Zeeman. Positionné en x , il se meut à la vitesse

$$v_{\mathcal{R}} = \frac{\mu_B B(x)}{\hbar k} - \frac{\delta}{k}. \quad (25)$$

Dans ce référentiel, la vitesse $v' = v - v_{\mathcal{R}}$ du jet est solution de [53]

$$\frac{dv'}{dt} = -\frac{\hbar k \Gamma}{2m \left(1 + \frac{I_{\text{sat}}}{I} \left[1 + \left(\frac{2kv'}{\Gamma}\right)^2\right]\right)} - \frac{\mu_B}{\hbar k^2} \frac{dB}{dx} \left(\frac{\mu_B B(x)}{\hbar} - \delta\right), \quad (26)$$

où l'on a considéré $v' \ll v_{\mathcal{R}}$. La solution en régime stationnaire de cette équation est

$$v'_{\text{stat}} = -\frac{\Gamma}{2k} \sqrt{\left(1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}}\right) \left(\frac{dB/dx|_{\text{crit}}}{dB/dx} - 1\right)}, \quad (27)$$

où l'on a introduit le gradient de champ magnétique critique maximum permettant le ralentissement atomique [54]

$$\left.\frac{dB}{dx}\right|_{\text{crit}} = -\frac{\hbar^2 k^3 \Gamma}{2m\mu_B [\mu_B B(x)/\hbar - \delta] (1 + I_{\text{sat}}/I)}. \quad (28)$$

Le ralentissement étant fondé sur l'effet Doppler sur une raie atomique de largeur Γ , il n'est pas surprenant d'obtenir des vitesses dans \mathcal{R} de l'ordre de Γ/k . La solution de signe négatif et donnée par l'équation 27 est la seule stable : un atome partant de cette vitesse qui ne ralentit pas assez, va se rapprocher de résonance, et donc va absorber plus de photons, ce qui va mécaniquement diminuer sa vitesse. Au contraire, une solution positive ne présente pas ce mécanisme de rétroaction. De plus, en linéarisant l'équation 26 autour de v'_{stat} , on montre qu'outre l'effet ralentisseur, le faisceau laser induit aussi un refroidissement de la distribution longitudinale des atomes par mécanisme Doppler.

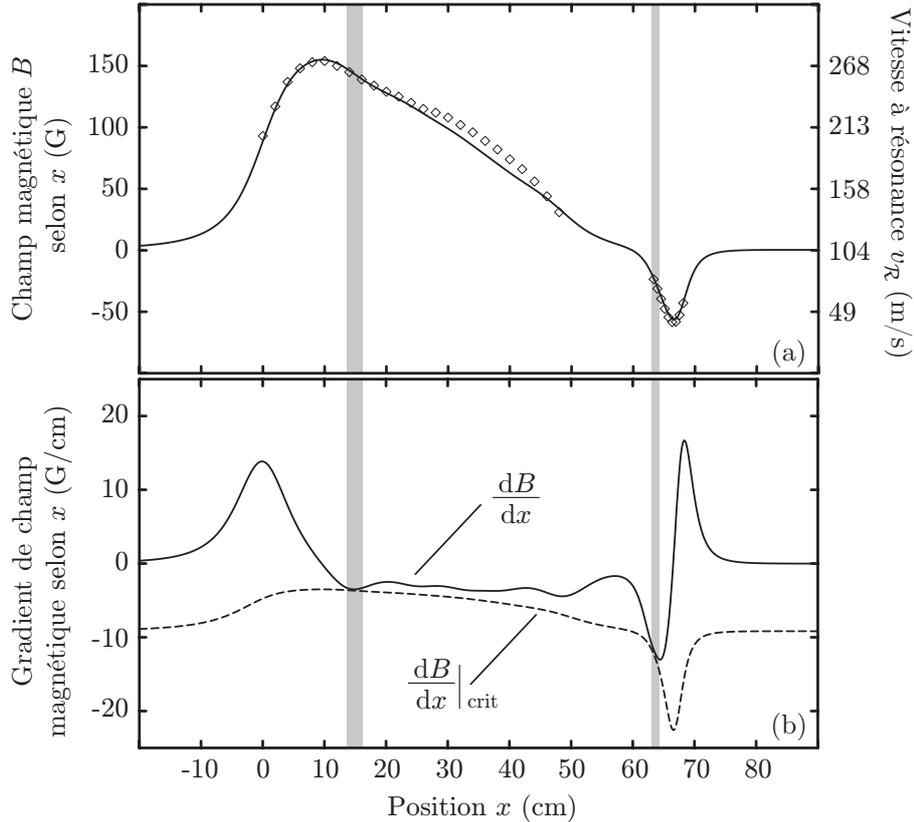


FIG. 12 – (a) Champ magnétique créé par la combinaison des deux ralentisseurs Zeeman en fonction de x . Les diamants correspondent aux champs mesurés dans les solénoïdes, alors que la ligne continue correspond au champ calculé en utilisant les données du tableau 3 sur tout l'axe x . L'axe des ordonnées de droite donne la vitesse $v_{\mathcal{R}}$, telle que les atomes sont à résonance avec le laser (équation 25). (b) Comparaison du gradient de champ magnétique (trait plein) avec le gradient de champ magnétique critique (équation 28 en trait tireté). Les zones grisées indiquent les positions pour lesquelles la condition de « non-décrochage » $\left. \frac{dB}{dx} \right|_{\text{crit}} < \frac{dB}{dx}$ n'est pas très largement vérifiée.

I.2.2.b Précautions expérimentales

Champ magnétique

Dès que le gradient magnétique excède la valeur donnée par la relation 28, il n'y a plus de solution stationnaire possible, et les atomes n'ont plus le temps d'échanger assez

d'impulsion avec le faisceau ralentisseur pour suivre adiabatiquement le référentiel \mathcal{R} . Sortant de résonance, ils ne sont plus ralentis et « décrochent ».

La figure 12 (b) compare le gradient de champ magnétique à sa valeur critique, et met ainsi en évidence deux zones (en grisé) dans lesquelles les deux sont pratiquement égaux. La première zone autour de $x = 15$ cm correspond à l'entrée dans le premier ralentisseur Zeeman. La vitesse maximale qui pourra donc être ralentie par le laser (vitesse de capture v_c du ralentisseur Zeeman) est la valeur de $v_{\mathcal{R}}$ correspondante, soit $v_c = 260$ m/s. La seconde zone (autour de $x = 64$ cm) correspond à l'entrée dans le second ralentisseur Zeeman. La vitesse $v_{\mathcal{R}}$ correspondante est de 70 m/s. Il s'agit d'une zone critique à plus d'un titre : un mauvais suivi de la transition cyclante (§ B.2.2) ou un dépompage excessif (§ B.3) réduisent l'efficacité de la force radiative, et les atomes risquent plus facilement de décrocher du processus de ralentissement.

Nous avons observé expérimentalement, qu'il existe un optimum assez critique pour le choix du courant dans le second ralentisseur Zeeman. Si le courant est trop faible, le champ en sortie ne sera pas assez négatif et la vitesse de sortie sera trop grande, ce qui rendra difficile le chargement du piège magnéto-optique. Par contre, si l'on veut un courant très fort pour obtenir une vitesse de sortie plus faible, le gradient de champ magnétique va augmenter, et les atomes vont décrocher au niveau de l'entrée dans le second ralentisseur.

Intensité lumineuse et vitesse finale

L'intensité du laser I que nous utilisons est de l'ordre de 25 mW/cm², ce qui est très supérieur à I_{sat} . D'après l'expression de la force 23, on pourrait penser que plus l'intensité est forte, plus la transition cyclante est saturée et meilleur est le ralentissement. En réalité, si l'intensité est trop forte, les atomes ralentis rebroussement chemin entre la sortie du ralentisseur $x_s = 66$ cm et la position du piège magnéto-optique (PMO) $x_{\text{PMO}} = 82$ cm. En effet, dans le cas extrême d'une saturation maximale (intensité I infinie, quel que soit le désaccord), la distance nécessaire pour stopper un atome qui sortirait du solénoïde à une vitesse de 45 m/s, est de l'ordre d'un centimètre, ce qui est bien inférieur à l'espacement $x_{\text{PMO}} - x_s = 16$ cm entre la sortie du ralentisseur et le PMO.

En pratique, il y a donc un optimum sur l'intensité à utiliser pour le faisceau ralentisseur. En intégrant numériquement l'équation du mouvement soumis à la force de ralentissement (expression 23), nous avons observé que pour I au delà d'une vingtaine de mW/cm², les atomes s'arrêtent avant la zone du PMO : l'élargissement radiatif de la transition atomique reste suffisamment grand à cette intensité, pour que même hors résonance, l'atome échange suffisamment de photons avec le laser et soit stoppé sur la distance $x_{\text{PMO}} - x_s$. On peut cependant estimer que l'intensité I maximum acceptable pour éviter ce phénomène de rebroussement, est plutôt de l'ordre de quelques fois ces 20 mW/cm². En effet, les atomes, qui sont rapidement dépolarisés entre le second solénoïde et la cellule, sont excités sur des transitions σ^+ , dont les coefficients de branchement sont inférieurs à un (§ A.1.2).

Comme observé expérimentalement, la valeur $I = 25$ mW/cm² (correspondant au maximum de la puissance disponible), n'induit donc pas de rebroussement, mais est cependant assez grande pour abaisser la vitesse finale du jet entre la sortie du solénoïde et le PMO. En effet, une mesure par fluorescence de la vitesse du jet au niveau de la cellule [42], a montré que la vitesse des atomes y était environ égale à $v_f = 20$ m/s, ce qui est bien inférieur à la vitesse $v_{\mathcal{R}} = 45$ m/s imposée par le minimum de champ magnétique en sortie du second solénoïde (figure 12 a). Outre le phénomène de ralentissement en l'absence de champ magnétique, un autre processus explique cet écart entre la vitesse finale et la vitesse au point de « décrochage ». En effet, d'après l'équation 27, dès que $I \gg I_{\text{sat}}$, $|v'_{\text{stat}}|$ croît avec l'intensité I ,

ce qui signifie que la vitesse dans le référentiel du laboratoire est bien inférieure à la vitesse $v_{\mathcal{R}}$ associée à la résonance ($v'_{\text{stat}} < 0$).

Imperfections de champ et de polarisation

Les considérations précédentes sont fondées sur un modèle d'atome à deux niveaux. En réalité, le Rubidium possède une structure hyperfine qui rend possible des phénomènes de pompage et de dépompage. La conjonction de différents processus parasites est alors à prendre en considération :

- La présence d'un champ magnétique transverse B_{\perp} qui a tendance à mélanger les sous-états hyperfins de F donné entre eux, et donc à repeupler les états $|2, m_F\rangle_{\text{S}}^{m_F \neq 2}$ et $|3, m_{F'}\rangle_{\text{P}}^{m_{F'} \neq 3}$. On peut imaginer que le champ magnétique terrestre (0.5 G) a une composante transverse. En outre, le champ transverse, résultant d'une imprécision dans le centrage des solénoïdes vis-à-vis de l'axe du jet est donné par la conservation du flux $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Le gradient le long de l'axe étant en moyenne de l'ordre de 5 G/cm (figure 12), le gradient transverse est environ de 2.5 G/cm, ce qui, pour une erreur de centrage de quelques millimètres, donne rapidement 1 G transversalement.
- L'effet Zeeman non-linéaire : nous travaillons dans des champs magnétiques B pour lesquels l'effet Zeeman n'est plus linéaire (§ A.2), particulièrement pour la multiplicité excitée. Ainsi, des états peuplés à cause de la présence d'un champ magnétique transverse, sont aussi couplés à cause de l'effet Zeeman non-linéaire vers d'autres états appartenant à des transitions non cyclantes, ce qui peut se traduire par du dépompage.
- Des défauts expérimentaux de polarisation du laser ralentisseur : entre autres, le réglage de la lame quart d'onde polarisant le faisceau σ^+ est réalisé avec une incertitude angulaire α de l'ordre de quelques degrés, ce qui donne une intensité relative polarisée σ^- ($\sin^2 \alpha$) de l'ordre du pour cent.

On trouvera en annexe B une étude détaillée de la dynamique de pompage et de dépompage. On y montre en particulier, que le dépompage sous l'effet du champ perpendiculaire n'est pas seulement significatif lorsque le champ sur l'axe $B(x)$ s'annule, mais aussi tout au long du ralentissement, à cause de l'effet conjoint de l'effet Zeeman non-linéaire. L'utilisation d'un laser de repompage d'intensité 2 mW/cm^2 , et efficace sur la plus grande plage possible du ralentissement, permet de diminuer ces pertes, en pompant pratiquement tous les atomes de Rubidium 87 dans la transition cyclante, afin d'obtenir un flux ralenti aussi important que possible (§ I.3).

I.2.3 Le piège magnéto-optique

Le ralentissement discuté précédemment a permis d'obtenir des vitesses atomiques assez faibles pour qu'il soit envisageable de piéger les atomes du jet. D'après le théorème d'Earnshaw optique [55], un arrangement quelconque de forces de pression de radiation, ne peut constituer un piège stable pour des particules neutres, du fait de la nullité de la divergence du vecteur de Poynting. Cependant, il reste possible de créer des pièges basés sur la pression de radiation, dès que le rapport entre la force et le vecteur de Poynting dépend de la position [56, 57]. Ceci a été réalisé pour la première fois en 1987 [58], où la combinaison d'un gradient de champ magnétique et de la force lumineuse, a donné naissance au piège magnéto-optique (PMO). Aujourd'hui, il s'agit d'un outil courant dans le domaine des atomes froids, qui nous permet de confiner les atomes issus du jet dans une petite zone de l'espace, tout en les refroidissant à des températures inférieures au millikelvin.

I.2.3.a Principe

Considérons un atome se déplaçant à une dimension dans un champ magnétique B proportionnel à r . Les différents sous-niveaux de la transition $F=2 \rightarrow F'=3$ sont déplacés par l'effet Zeeman linéaire (§ A.2.2.a). L'énergie des transitions σ^\pm ($|2, m_F\rangle_S \rightarrow |3, m_F \pm 1\rangle_P$) dépend donc de la position r et leur désaccord par rapport à la transition en champ nul s'écrit $\delta_{B\pm} = \pm \frac{\mu_B}{\hbar} \frac{dB}{dr} r$ (figure 13). Ajoutons à ceci deux lasers polarisés σ^+ et σ^- se propageant respectivement vers les r positifs ou négatifs. Ces lasers sont désaccordés de $\delta_{\text{PMO}} < 0$ par rapport à la transition en champ nul. On voit alors sur la figure 13 que l'atome, dans les r négatifs, sera plus à résonance avec le laser σ^+ qu'avec l'onde σ^- , tandis que pour r positif, la situation est inversée. Quelle que soit sa position, l'atome absorbe donc toujours plus d'impulsion de la part du faisceau qui a tendance à le ramener vers $r=0$, ce qui résulte en une force de rappel⁵. Le piège est donc efficace selon l'axe de deux faisceaux contrapropageants. En réalisant cette configuration pour les trois directions de l'espace (§ I.2.3.b), on obtient un piège confinant quelle que soit la direction considérée.

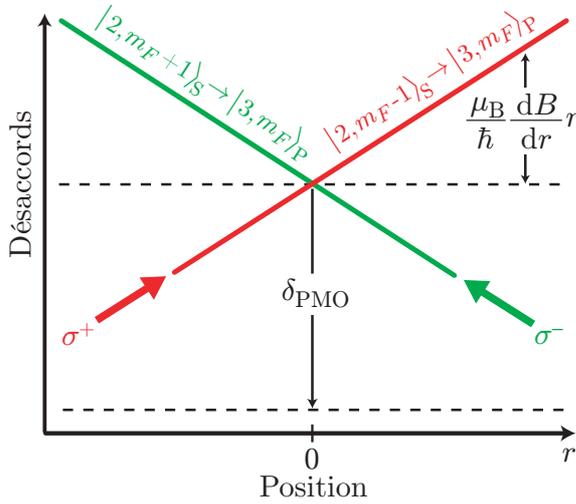


FIG. 13 – Principe du piège magnéto-optique à une dimension. Un gradient de champ magnétique combiné à deux lasers polarisés σ^+ et σ^- a pour effet de créer une force de rappel vers $r=0$. Une force de friction apparaît aussi, car l'atome absorbe majoritairement les photons de l'onde contrapropageante à son mouvement.

La configuration $\sigma^+ - \sigma^-$ des lasers donne lieu à des gradients de polarisation, et l'on pourrait s'attendre à ce que le PMO présente des mécanismes de refroidissement subdoppler (§ C.2). La description ci-dessus négligeant ces effets, n'est donc a priori pas forcément appropriée. Cependant, en considérant un piège magnéto-optique réel à trois dimensions, il s'avère [59] qu'elle prédit tout de même le bon ordre de grandeur de la constante de rappel κ associée. Cette dernière est dérivée à partir de l'expression de la force F_\pm exercée par chaque faisceau d'intensité I ,

$$F_\pm = \pm \frac{\hbar k \Gamma}{2} s_\pm, \text{ avec } s_\pm = \frac{\mathcal{C} I / I_{\text{sat}}}{1 + 4(\delta_{\text{PMO}} - \delta_{B\pm} \mp kv)^2 / \Gamma^2}. \quad (29)$$

Le coefficient \mathcal{C} est introduit pour prendre en compte le fait qu'au cours du mouvement, l'état interne de l'atome est continuellement modifié sous l'effet du pompage des différents lasers présents. En première approximation, on peut prendre pour \mathcal{C} la moyenne des coefficients de branchement des diverses transitions $|2, m_F\rangle_S \rightarrow |3, m_F \pm 1\rangle_P$, soit $\mathcal{C} \approx 0.5$. Dans l'expression 29, nous nous sommes restreints au cas de faible saturation, car l'expansion du nuage en régime stationnaire est de l'ordre du millimètre et la température est inférieure

⁵Notons que le piège magnéto-optique serait impossible, si l'atome comportait seulement deux niveaux, ce qui montre les possibilités de manipulation offertes par la complexité des structures atomiques (cf § C.2).

au millikelvin. En effet, ceci rend les désaccords dus à l'effet Zeeman et à l'effet Doppler négligeables⁶ devant $\delta_{\text{PMO}} = -2\Gamma$, ce qui aboutit, pour le paramètre de saturation, à une valeur $s_{\pm} \approx CI/17I_{\text{sat}} \ll 1$, où l'intensité de chaque faisceau est donnée par $I = 2 \text{ mW/cm}^2$. Un seul faisceau perturbe donc peu l'état interne de l'atome et par conséquent, la force totale F s'exerçant sur l'atome piégé est la somme des contributions de chaque faisceau $F = F_+ + F_- \approx -\kappa r$. Nous avons réalisé un développement limité à l'ordre 1 en r , en introduisant la constante de rappel κ , dont l'expression est, dans la limite réalisée expérimentalement ($|\delta_{\text{PMO}}| \gg \Gamma/2$),

$$\kappa = \left(-\frac{\Gamma}{\delta_{\text{PMO}}} \right)^3 \frac{CI}{I_{\text{sat}}} \frac{k}{2} \mu_B \frac{dB}{dr} \approx 3 \times 10^{-19} \text{ kg/s}^2. \quad (30)$$

La valeur numérique correspond à un gradient magnétique moyen utilisé expérimentalement, $dB/dr \approx 10 \text{ G/cm}$.

I.2.3.b Réalisation expérimentale

Configuration de piégeage

La configuration du PMO à trois dimensions représentée en figure 14, est fondée sur l'action conjointe d'un champ magnétique quadrupolaire, et de trois paires de faisceaux de piégeage polarisés circulairement, et légèrement désaccordés vers le rouge ($\delta_{\text{PMO}} = -2\Gamma$) par rapport à la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$. Le désaccord δ_{PMO} présente un optimum : Il doit être assez grand (en valeur négative) pour que la vitesse des atomes du jet que le PMO peut capturer soit assez forte (équation 50), mais pas trop, afin que la constante de raideur κ (équation 30) qui décroît rapidement en $1/\delta_{\text{PMO}}^3$ ne soit pas trop faible, le piège trop lâche et peu dense.

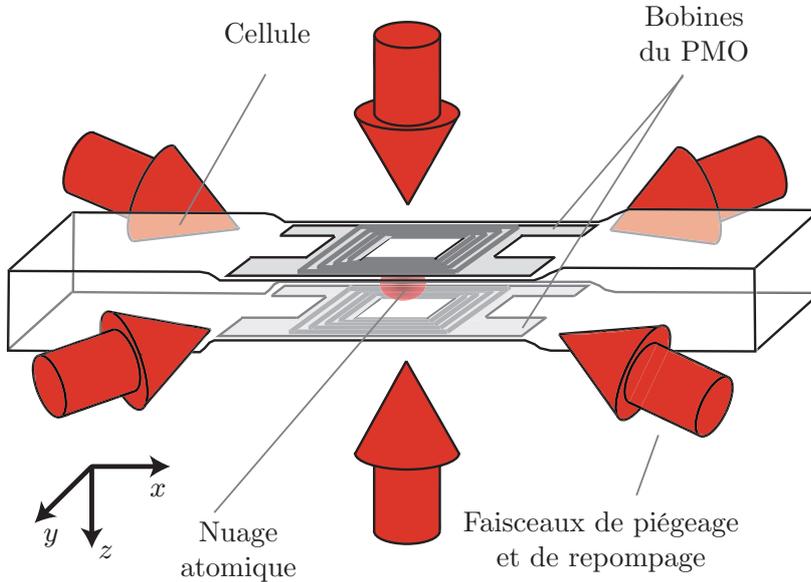


FIG. 14 – Géométrie du piège magnéto-optique : un nuage d'atomes est piégé à l'intersection de trois paires de faisceaux de piégeage et de repompage, avec le centre du champ quadrupolaire créé par deux bobines dessinées sur un circuit imprimé.

Le champ magnétique est produit par deux circuits imprimés d'épaisseur $400 \mu\text{m}$ positionnés sur l'axe z vertical en configuration anti-Helmholtz (la distance entre les bobines est du même ordre que leur taille). Chacun des circuits est constitué de 6.5 boucles de 1 mm de large et de $35 \mu\text{m}$ d'épaisseur, de telle façon que la résistance globale soit de 1Ω . Un

⁶Il n'en serait pas de même, si nous considérons le mouvement des atomes à la périphérie du PMO [60], par exemple pendant la phase de chargement (§ I.3.3).

courant de 2 A génère un gradient dépendant de la direction considérée, ce qui rend le nuage atomique légèrement anisotrope :

$$\left| \frac{dB}{dx} \right| = \left| \frac{dB}{dy} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{dB}{dz} \right| = 7.5 \text{ G/cm}. \quad (31)$$

Les six faisceaux lasers (quatre latéraux et deux verticaux) ont un rayon de l'ordre de $r_{\text{laser}} = 4 \text{ mm}$. L'intensité de piégeage par faisceau est environ $I = 2 \text{ mW/cm}^2$. Tous les lasers latéraux sont d'une circularité donnée, tandis que les faisceaux verticaux sont de la circularité opposée. Le choix absolu de la circularité, dépend du choix du sens du courant dans les bobines, et cette configuration assure que chaque paire est bien polarisée $\sigma^+ - \sigma^-$. Enfin, l'allumage et la coupure des champs magnétiques s'effectue en une centaine de microsecondes, ce qui est assez rapide pour négliger toute dynamique pendant ce temps. La figure 15 montre la disposition du piège magnéto-optique dans la géométrie de l'électroaimant.

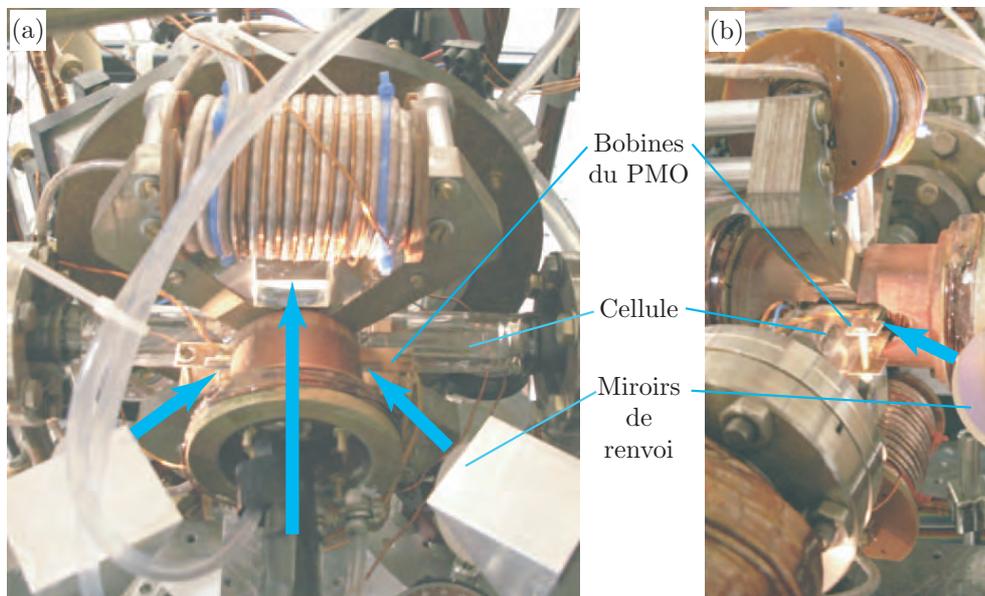


FIG. 15 – Positionnement des bobines du PMO au sein de la structure de l'électroaimant. Nous avons représenté une partie des faisceaux (un vertical arrivant sur un cube et deux latéraux). (a) Vue légèrement de dessus, (b) vue du côté gauche. D'autres détails, sur l'acheminement et le mélange des faisceaux lasers au niveau de la cellule, apparaissent en figure 5.

Robustesse du piège magnéto-optique

Le piège magnéto-optique est un système assez robuste vis-à-vis des imperfections expérimentales. Il est relativement peu sensible à un déséquilibre ΔI de l'intensité entre deux faisceaux contrapropageants. En effet, celui-ci n'a aucun effet sur κ , et ne résulte qu'en un déplacement du centre du piège magnétique donné par $\hbar k C \Delta I \Gamma^3 / 8 I_{\text{sat}} \delta^2 \kappa \approx 200 \mu\text{m}$ pour $\Delta I = I/10$. De même, on peut estimer qu'un défaut d'alignement correspondant à un angle de 2θ entre les deux faisceaux, résulte en une expression de κ où l'on a remplacé k par $k \cos \theta$. Ainsi, une force perpendiculaire apparaît : couplée au confinement transverse assuré par les autres paires de lasers, elle induit un déplacement transverse $\hbar k \sin \theta C I \Gamma^3 / 4 I_{\text{sat}} \delta^2 \kappa$.

Pour $\theta = 5^\circ$ (ce qui correspond déjà à un défaut expérimental significatif), l'effet sur κ est faible, tandis que le déplacement transverse induit est de l'ordre de $370 \mu\text{m}$.

On voit donc que, même si la position du piège magnéto-optique n'est pas rigoureusement au minimum de champ magnétique, elle n'en est pas très éloignée. Expérimentalement, lorsque le piège magnéto-optique est déséquilibré (à cause d'un mauvais réglage des intensités, ou d'un mauvais alignement des faisceaux) on observe par fluorescence des traînées déformant le nuage atomique, qui correspondent à des fuites d'atomes quittant le piège par la direction la moins bien confinante. Le nombre d'atomes piégés dépend donc beaucoup de la qualité d'alignement des faisceaux.

Effet du faisceau ralentisseur

Le piège magnéto-optique est sur le chemin du faisceau ralentisseur. Celui-ci étant très désaccordé par rapport à la transition ($\delta = -2\pi \times 133 \text{ MHz}$), la section efficace de diffusion associée est donnée par

$$\sigma_{\text{ral}} = \frac{3\lambda^2}{2\pi} \frac{\Gamma^2}{4\delta^2} = 1.5 \times 10^{-16} \text{ m}^2. \quad (32)$$

L'épaisseur optique maximum du nuage atomique est alors de $\sqrt{2\pi}\sigma_0 n \sigma_{\text{ral}} = 0.02$ ($n \approx 10^{11} \text{ at/cm}^3$), et le faisceau ralentisseur est très peu perturbé par la présence du piège magnéto-optique. Par contre, l'inverse n'est pas vrai. En effet, le déplacement du PMO, induit par la force de pression de radiation due au laser ralentisseur d'intensité I_{ral} , est donné par $\mathcal{C}I_{\text{ral}}\sigma_{\text{ral}}/\kappa c \approx 200 \mu\text{m}$. Ce déplacement n'est pas forcément négligeable, dans la mesure où il modifie le positionnement du PMO entre la phase de chargement (ralentisseur allumé) et les phases suivantes où le faisceau ralentisseur est éteint. Expérimentalement, on observe d'ailleurs non seulement ce décalage, mais aussi un effet lié aux champs magnétiques des solénoïdes de ralentissement qui ne sont pas rigoureusement nuls au niveau du PMO. Suivant que l'on est ou pas en phase de chargement, ils déplacent le zéro de champ magnétique et donc le centre du piège. Pour contrecarrer à la fois l'effet du laser ralentisseur et des champs des solénoïdes, nous avons disposé sur le montage une bobine additionnelle placée en série du deuxième solénoïde.

Repompage dans le piège

On peut aussi estimer l'intensité de repompage nécessaire pour conserver le nuage atomique piégé. Les lasers de piégeage sont désaccordés de $\delta = \delta_{\text{PMO}} + 2\pi \times 266 \text{ MHz}$ par rapport à la transition $F = 2 \rightarrow F' = 2$. Le taux de branchement moyen d'une transition σ^\pm pour $F = 2 \rightarrow F' = 2$ est de $5/24$ et le taux de désexcitation $F' = 2 \rightarrow F = 1$ est de $\Gamma/2$. Le temps de dépompage sous l'effet des 6 lasers est donc environ

$$t_{\text{dép}} = \frac{2}{\Gamma} \frac{2(1 + 4\delta^2/\Gamma^2)}{30I/24I_{\text{sat}}} = 0.5 \text{ ms}. \quad (33)$$

Le temps qu'un atome dépompé met en moyenne à sortir de la zone de piégeage est $r_{\text{PMO}}/\sigma_v = 15 \text{ ms}$, ce qui est très supérieur à $t_{\text{dép}}$. Les faisceaux de repompage sont à résonance avec la transition $F = 1 \rightarrow F' = 1$. Le taux de désexcitation $F' = 1 \rightarrow F = 2$ est de $\Gamma/6$. Le coefficient de branchement moyen de la transition $F = 1 \rightarrow F' = 1$ est de $5/12$. Le repompage sera efficace, si le temps caractéristique associé est très inférieur à $t_{\text{dép}}$, c'est-à-dire, si l'intensité totale de repompage I_{rep} vérifie

$$I_{\text{rep}} \gg \frac{9I}{4} \left(\frac{\Gamma}{\delta}\right)^2 \approx 2.5 \mu\text{W/cm}^2. \quad (34)$$

Cette condition est vérifiée expérimentalement, puisque l'intensité de repompage pour chaque faisceau latéral est $I_{\text{rep}}^{x,y} = 100 \mu\text{W}/\text{cm}^2$.

L'intensité de repompage nécessaire au chargement du PMO à partir du jet atomique (§ I.3.3), est quant à elle, est supérieure à celle estimée en 34. En effet, le temps que mettent les atomes à être ralentis vers une vitesse nulle au sein du PMO, est de l'ordre de la milliseconde. Pendant ce temps, les atomes ne peuvent se permettre d'être trop souvent dépompés, au risque de « décrocher » du processus de capture pour finalement s'échapper du piège. En pratique, nous utilisons une intensité de repompage $I_{\text{rep}}^z = 1.5 \text{ mW}/\text{cm}^2$ pour chaque faisceau vertical.

Nous observons expérimentalement la grande dépendance de la vitesse de chargement du PMO vis-à-vis de l'intensité de repompage. En effet, si l'on essaie de charger le piège à partir du jet, dans une configuration où les faisceaux de repompage verticaux sont coupés, le temps de chargement est beaucoup plus long que celui que l'on a en utilisant toute l'intensité repompeur disponible.

Température et taille du nuage

En figure 16, nous avons mesuré la température du piège magnéto-optique par temps de vol (équation 16), et nous avons obtenu des températures de l'ordre de $500 \mu\text{K}$, correspondant à des vitesses quadratiques moyennes $\sigma_v = 0.2 \text{ m/s}$. De plus, en extrapolant la courbe de temps de vol à $t_v = 0$, on obtient une taille du nuage de l'ordre de $\sigma_0 = 450 \mu\text{m}$ selon l'axe vertical, qui est l'axe le plus confinant avec un gradient magnétique de 15 G/cm .

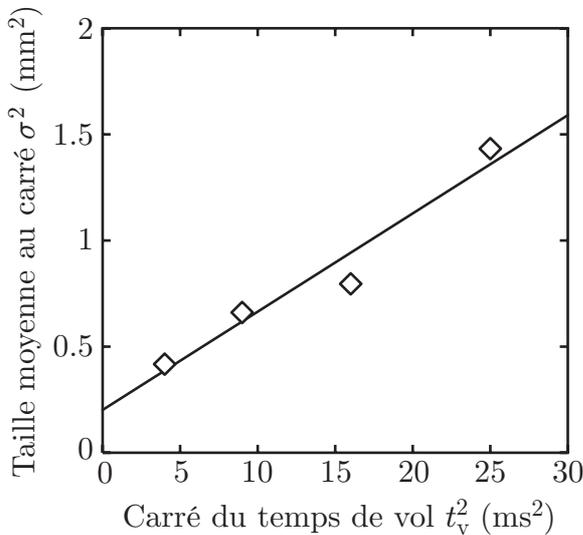


FIG. 16 – Évolution de la taille du nuage au carré en fonction du temps de vol au carré. On s'attend à une droite dont la pente donne la température des atomes. La température du PMO mesurée par l'ajustement linéaire est de $T = 500 \mu\text{K}$ et la taille à l'origine est environ $\sigma_0 = 450 \mu\text{m}$.

Ainsi, bien que la configuration des lasers donne lieu à des gradients de polarisation, les températures que nous mesurons sont très supérieures à la température Doppler $T_D = \hbar\Gamma/2k_B = 144 \mu\text{K}$. De plus, d'après le théorème d'équipartition de l'énergie dans un piège harmonique, on s'attendrait à ce que la taille du nuage soit plutôt donnée par $\sqrt{k_B T/\kappa} \approx 150 \mu\text{m}$, ce qui ne correspond pas du tout à la valeur mesurée.

La justification de ces écarts réside dans le fait que la description, que nous avons présentée dans ce paragraphe, ne prend pas en compte les effets collectifs liés aux interactions radiatives entre les atomes, ou encore, l'effet de l'absorption de la lumière par le nuage optiquement épais. Or ces effets deviennent prépondérants dès que la densité atomique dépasse $10^{10} \text{ at}/\text{cm}^3$. On montre alors qu'en présence de ces interactions radiatives (§ C.1), la densité

que l'on peut obtenir dans un piège magnéto-optique ne peut excéder une certaine valeur. Cette dernière est évaluée par l'équation C.6, dont l'application numérique donne, avec nos paramètres expérimentaux, 3.6×10^{11} at/cm³.

Expérimentalement, nous capturons au plus $N_\infty \approx 9 \times 10^8$ atomes. Le volume du piège magnéto-optique est donné par le produit des tailles sur chacun des axes. Or, le nuage piégé n'est pas symétrique, du fait de l'anisotropie du gradient magnétique. La taille selon l'axe x est plus grande que celle selon l'axe z d'environ 50 % et la taille selon y est inconnue puisque nous n'avons pas accès expérimentalement à l'évolution de la taille selon l'axe d'imagerie. En prenant la taille selon y égale à celle selon z (puisque le gradient de champ magnétique est le même), on obtient dans le cas d'un nuage gaussien, une densité pic qui serait donnée par $N_\infty/(2\pi)^{3/2}(1.5\sigma_0)^2\sigma_0 \approx 2.7 \times 10^{11}$ at/cm³, ce qui est du même ordre de grandeur que l'évaluation précédente.

Cependant, la densité réelle est probablement plus faible du fait du caractère non gaussien du profil de densité du nuage : celui-ci est plutôt plat près de son centre à cause des interactions radiatives entre atomes, ce qui, à taille r.m.s. constante, diminue la densité au centre. De plus, nous ne pouvons réaliser d'image du piège magnéto-optique in situ, à cause des champs magnétiques, et la taille initiale est donc déterminée indirectement en extrapolant la courbe 16, ce qui induit une incertitude sur la valeur réelle de σ_0 . Finalement, en termes d'ordre de grandeur, on retiendra que la densité que nous avons expérimentalement est proche de

$$n \approx 10^{11} \text{ at/cm}^3. \quad (35)$$

En ce qui concerne l'écart entre la température mesurée par temps de vol et la température Doppler, on peut noter que les mécanismes de refroidissement subdoppler ne sont efficaces dans le piège magnéto-optique, que pour des densités assez faibles [61] : les interactions radiatives ont en effet tendance à chauffer fortement le nuage. Avec nos densités, nous sommes donc expérimentalement dans un régime où la température et la taille du nuage sont dominées par les interactions radiatives entre atomes.

I.2.3.c Réduction des effets collectifs : le “dark SPOT”

La densité maximum étant limitée par la diffusion de photons, il a été proposé de s'affranchir de ce phénomène, en ne repompant pas les atomes qui sont au centre du piège [62]. Les atomes tombant dans l'état $F = 1$, ne ressentent alors plus les forces radiatives interatomiques. Pour ce faire, on place sur le trajet des faisceaux repompeur latéraux un cache circulaire de taille environ $d_{DS} = 2$ mm, dont l'image via une lentille est au centre de la cellule (figure 17). En coupant les faisceaux de repompage verticaux, il subsiste au centre du piège une zone sans repompeur. L'alignement des faisceaux doit être assez soigné pour que le volume de la zone « noire » soit maximal [63]. En pratique, on règle aussi l'intensité dans les faisceaux repompeurs latéraux à une valeur la plus basse possible, de telle façon à ce qu'elle soit suffisante pour pouvoir garder piégés les atomes qui sortent de la zone « noire », sans être trop forte, pour que les photons diffusés par les parois de la cellule ne viennent éclairer la zone centrale sombre, et donc limiter son efficacité.

Le temps typique de passage d'un atome dans la zone « noire » est $d_{DS}/\sigma_v = 10$ ms, ce qui est supérieur au temps de dépompage (0.5 ms) donné par la relation 33. On s'attend donc à ce que les atomes passant dans cette zone soient totalement dépompés. Cependant, ce schéma est perturbé par la présence d'une intensité repompeur parasite dans la zone noire. Si elle n'était, ne serait-ce que de $1 \mu\text{W}/\text{cm}^2$, c'est-à-dire seulement un pour cent de l'intensité totale d'un faisceau repompeur, la distance parcourue dans la zone « noire » avant d'être

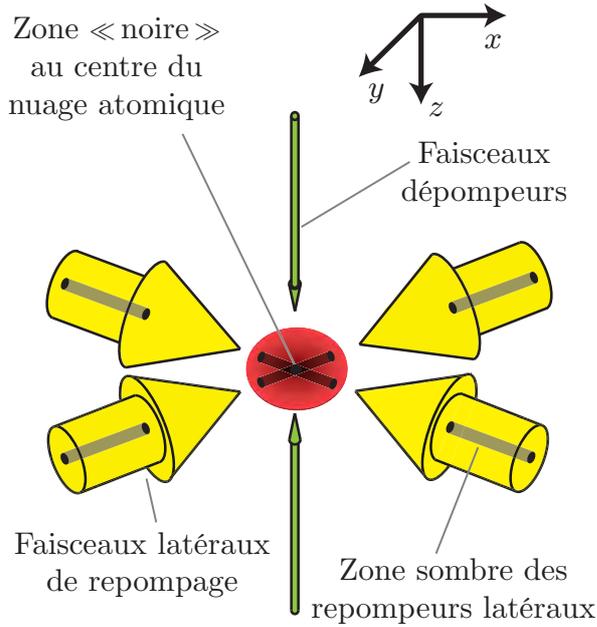


FIG. 17 – Configuration de repompage/dépompage utilisée pour limiter les interactions radiatives interatomiques. La partie centrale des quatre faisceaux de repompage (en jaune), étant occultée par un cache, la coupure des deux faisceaux repompeurs verticaux réalise une zone « noire », sans repompage au centre du nuage atomique (“dark SPOT”). Une amélioration substantielle apparaît, lorsque l’on ajoute des faisceaux de dépompage (en vert) verticaux sur la zone « noire ». Ces lasers forcent les atomes à passer dans l’état noir $F=1$ (“ultra dark SPOT”).

repompé serait de l’ordre de la centaine de microns. Le système est donc très sensible à la lumière diffusée par les parois de la cellule, et aux imperfections de l’imagerie du cache.

En effet, en pratique, nous n’observons pas toujours d’effet notable du “dark SPOT” sur la densité ou la température du nuage. C’est pourquoi, après une application de cette phase pendant 50 ms, on ajoute verticalement un faisceau dépompeur saturant (d’intensité 15 mW/cm^2) représenté en vert sur la figure 17, de taille égale à celle du “dark SPOT”, et aligné sur la zone « noire » du piège. Il force alors les atomes à tomber dans l’état noir $F=1$: c’est la phase que nous appelons l’“ultra dark SPOT”. Le laser de dépompage est accordé sur la transition $F=2 \rightarrow F'=2$ et le temps moyen de dépompage est de $4/\Gamma = 100 \text{ ns}$. Au bout de 25 ms d’application, le nuage obtenu a une température $T=140 \mu\text{K}$ (figure 18), tandis que sa densité n’a globalement pas changé. Ce dernier point se comprend par le fait que la taille du nuage est donnée par la taille du “dark SPOT”, qui est du même ordre que la taille du PMO. En effet, à l’intérieur de la zone « noire », les atomes dépompés ne sont plus soumis à la force de piégeage et avancent librement.

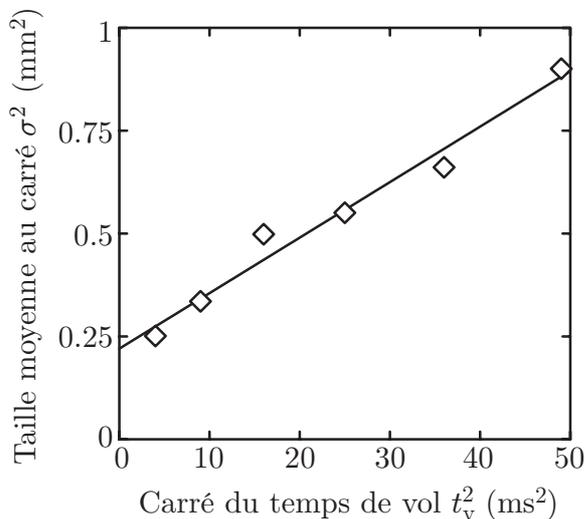


FIG. 18 – Évolution de la taille du nuage au carré, en fonction du temps de vol au carré, après la phase d’“ultra dark SPOT”. La température mesurée par l’ajustement linéaire est de $T=140 \mu\text{K}$, et la taille à l’origine, est environ la même que celle du piège magnéto-optique mesurée en figure 16 ($\sigma_0=450 \mu\text{m}$).

En outre, nous obtenons une température pratiquement égale à la température Doppler $T_D = 144 \mu\text{K}$. En effet, le refroidissement ne peut avoir lieu qu'en dehors de la zone du "dark SPOT", c'est-à-dire là où l'effet Zeeman est du même ordre que le déplacement lumineux, et donc là, où l'on s'attend à ce que les phénomènes subdoppler deviennent bien moins efficaces que le refroidissement Doppler [61]. Enfin, les temps des phases de "dark SPOT" et d' "ultra dark SPOT" sont supérieurs au temps de passage des atomes dans la zone « noire » (la dizaine de millisecondes), et sont les plus faibles possibles pour minimiser les pertes pendant ces étapes.

En principe, on pourrait gagner en densité par rapport au PMO initial, si l'on utilisait un cache de taille bien inférieure à sa taille σ_0 . Ceci impose d'avoir une zone sombre dans chaque faisceau repompeur latéral de quelques centaines de microns. Ces zones sombres des faisceaux repompeurs sont alors d'autant plus difficiles à aligner sur le centre du piège magnéto-optique. De plus, le faisceau de dépompagement doit être suffisamment bien aligné et petit pour ne pas induire de chauffage dans la zone où le repompement latéral reste présent.

I.2.4 La mélasse optique

I.2.4.a Abaissement de la température du nuage

Avec l' "ultra dark SPOT", nous sommes arrivés à une température de $140 \mu\text{K}$. Pour continuer à abaisser cette valeur, il faut faire en sorte que les mécanismes subdoppler de refroidissement deviennent prédominants. Nous réalisons ceci en mettant en œuvre une mélasse optique par gradient de polarisation [64]. Après avoir coupé le champ magnétique du PMO, la phase de mélasse consiste à désaccorder encore plus vers le rouge les faisceaux pièges, avec un désaccord $\delta_{\text{mél}} = -6\Gamma$, tout en rallumant les faisceaux de repompement verticaux (et en éteignant le faisceau de dépompement vertical). Nous choisissons empiriquement la durée de la phase de mélasse à 6 millisecondes, comme étant celle qui nous permet de descendre le plus bas en température, sans pour autant perdre trop en densité à cause de la diffusion, et ceci, afin de charger le plus efficacement possible le piège magnétique (§ II.2.3).

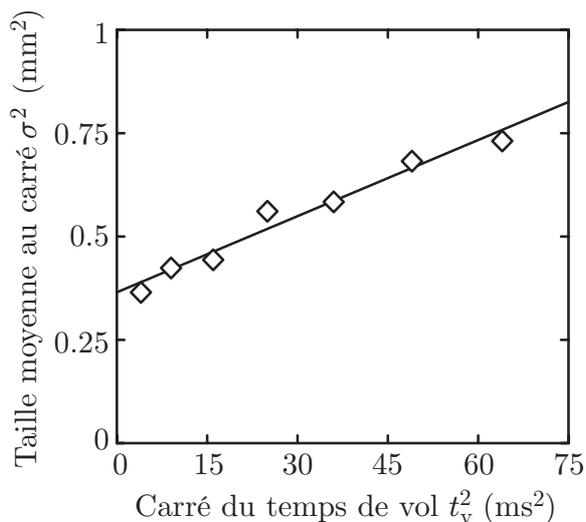


FIG. 19 – Évolution de la taille du nuage au carré, en fonction du temps de vol au carré après la phase de mélasse. La température mesurée par l'ajustement linéaire est de $T = 60 \mu\text{K}$.

En annexe C.2, nous abordons le mécanisme du refroidissement correspondant à notre configuration. Il s'agit d'un phénomène tirant parti de la présence d'une structure atomique. Deux faisceaux contrapropageants de polarisation $\sigma^+ - \sigma^-$ induisent une polarisation de l'atome proportionnelle à sa vitesse. On peut alors montrer que ce dernier, polarisé, absorbe

préférentiellement les photons de l'onde contrapropageante à son mouvement. Ceci résulte en une force de friction, particulièrement efficace, qui permet de descendre très largement en-dessous de la température Doppler, comme nous le voyons expérimentalement, puisque ce mécanisme nous permet d'obtenir des températures de l'ordre de $60 \mu\text{K}$ (figure 19).

Dans le cas idéal, la température obtenue au terme de la mélasse optique, est donnée par l'équilibre entre la friction, qui a tendance à refroidir le nuage, et la diffusion due à l'émission spontanée ou aux fluctuations de la force, qui ont tendance à chauffer le nuage. Ces seuls mécanismes donneraient plutôt des températures plus petites d'un ordre de grandeur, par rapport à celle observée (§ C.2). En réalité, d'autres phénomènes sont à prendre en compte comme la diffusion multiple de photons qui, là encore, tend à limiter le refroidissement.

I.2.4.b Compensation des champs magnétiques

Des imperfections expérimentales peuvent aussi expliquer les températures mesurées. En particulier, la présence d'un champ magnétique résiduel perturbe le refroidissement par gradient de polarisation [64]. On montre en annexe C.2 que, pour que le champ magnétique résiduel ait un effet négligeable, il faut qu'il soit de l'ordre de quelques milligauss. Les températures que nous obtenons, sont quant à elles plutôt compatibles avec des champs magnétiques résiduels de la centaine de milligauss.

Ces champs résiduels sont de deux sortes :

- le gradient rémanent dû au matériau ferromagnétique utilisé pour créer le champ quadrupolaire du piège magnétique (§ II.2.2),
- les champs ambiants du laboratoire (champ magnétique terrestre et ceux dus à l'appareillage comme celui créé par la pompe ionique).

Pour compenser au mieux ces champs magnétiques, nous observons, dans les différentes directions de l'espace, l'évolution de la mélasse optique. Pour cela, nous gardons les faisceaux allumés pendant une seconde, et enregistrons la fluorescence du nuage à l'aide d'une caméra CCD.

En ce qui concerne le gradient quadrupolaire [38], on dispose de deux bobines enroulées autour du noyau ferromagnétique, qui créent donc un gradient de même géométrie que le gradient quadrupolaire rémanent. Lorsqu'un tel gradient n'est pas nul, on observe par fluorescence, une mélasse qui tourbillonne plus ou moins vite dans la plan (x, z) , et dont le sens de rotation dépend du signe du gradient. La signature expérimentale d'un gradient correctement compensé, est l'observation d'une mélasse qui s'étend sans rotation. Nous n'utilisons pas d'autres bobines de compensation des gradients de champ, contrairement à l'expérience du laboratoire utilisant un électroaimant de génération précédente [65]. En effet, notre électroaimant ne présentant un noyau ferromagnétique que dans le plan (x, z) , il y a moins de gradients à compenser que pour un électroaimant tout ferromagnétique qui connaît des couplages entre les différentes directions.

Il reste à compenser le biais magnétique qui induit une dérive pour le nuage atomique (§ C.2). En changeant le signe de ce champ, le nuage part dans un sens ou dans l'autre. On voit donc, que l'observation d'un nuage de position moyenne à peu près constante est la signature d'un champ résiduel proche de zéro. Expérimentalement, pour compenser le biais magnétique parasite, nous utilisons une paire de bobines dans chaque direction (x, y, z) de l'espace.

Enfin, notons que tout déséquilibre des intensités des six faisceaux lasers induit aussi une vitesse de dérive sur le nuage atomique, tout en modifiant la polarisation de l'onde stationnaire, ce qui a le même effet qu'un champ magnétique parasite [66].

I.2.5 Récapitulatif de la séquence expérimentale

Nous avons rassemblé en figure 20, les configurations expérimentales utilisées dans les divers processus présentés jusqu'ici.

	Solénoïdes Ralentisseur Rep. ralentisseur	Bobines du PMO	Piège	Dépompeur	Rep. latéral	Rep. vertical
Chargement du PMO (10 s)						
PMO (1 s)						
Dark SPOT (50 ms)						
Ultra dark SPOT (25 ms)						
Mélasse (6 ms)						

FIG. 20 – Séquence temporelle de l'expérience concernant le refroidissement laser, indiquant les faisceaux et champ magnétiques utilisés en fonction des étapes considérées.

Au terme de ces étapes de refroidissement laser, le nuage est suffisamment froid et localisé, pour que nous puissions réaliser un transfert efficace dans le piège magnétique, et poursuivre notre route vers la condensation (chapitre II). Avant d'aborder ces dernières étapes, nous présentons dans les paragraphes suivants une caractérisation des capacités de notre source d'atomes froids.

I.3 Caractéristiques de notre source

Nous présentons dans les paragraphes qui suivent, une caractérisation de l'ensemble four-ralentisseur Zeeman, à partir duquel nous chargeons le piège magnéto-optique. En particulier, nous nous intéressons au flux utile que produit ce système (§ I.3.1 et I.3.2), tout en mettant en avant les phénomènes physiques déterminant et limitant la valeur de ce flux. Nous comparons finalement ces résultats avec nos observations sur le chargement du piège magnéto-optique (§ I.3.3).

I.3.1 Flux atomique en sortie du four

I.3.1.a Configuration géométrique

Comme décrit au paragraphe I.2.1, le réservoir du four où se situe la cellule de Rubidium est chauffé aux alentours de 130°C , ce qui par conduction thermique établit un gradient de température jusqu'à la buse (figure 9). En tout point du four, la pression de Rubidium $P(T)$ est donnée par la température T de l'équilibre liquide-vapeur selon la loi représentée sur la figure 21 [67]

$$\log P(T) = 15.88253 - \frac{4529.635}{T} + 0.00058663T - 2.99138 \log T, \quad (36)$$

où P est exprimé en torr et T en kelvin.

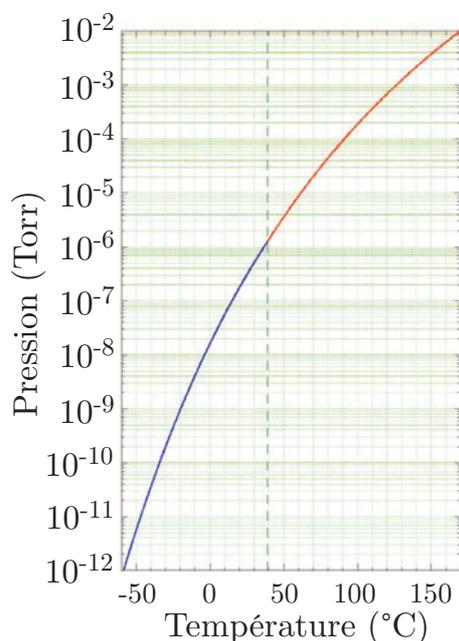


FIG. 21 – Pression de vapeur saturante de Rubidium en fonction de la température, soit en équilibre solide-gaz (en bleu) ou en équilibre liquide-gaz (en rouge). Courbe extraite de [67].

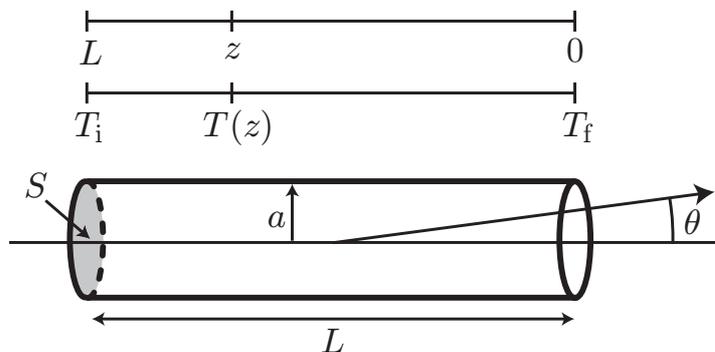


FIG. 22 – Schéma de principe équivalent du four à recirculation. Un gradient de température est établi entre T_i et T_f ($T_i > T_f$) sur la grille de section $S = \pi a^2$ et de longueur L .

On peut caractériser le jet issu de ce four par des considérations de cinétique des gaz [49, 68], en négligeant les collisions dans le tube de collimation. Les atomes du jet sont directement issus soit des parois du tube, soit du fond de ce tube. Pour des raisons géométriques évidentes (figure 9), les atomes ne peuvent provenir directement du réservoir. Donc tout se passe comme si le four avait la géométrie présentée en figure 22. Le diamètre intérieur du tube habillé par la grille de recirculation est donné par $2a = 4.5$ mm et $L = 11$ cm correspond à la longueur du tube. Les températures extrêmes T_i et T_f s'établissent quant à elles à 110°C et 40°C . Le gradient de température est pris constant sur toute la longueur du tube (de $z = 0$ à $z = L$), de telle façon que la température suit la loi

$$T(z) = T_f + \frac{T_i - T_f}{L} z. \quad (37)$$

I.3.1.b Flux et distribution angulaire

Le flux atomique $I(\theta)$ par stéradian sortant du four est la somme de deux termes : le flux $I_S(\theta)$ correspondant aux atomes ayant traversé la surface $S = \pi a^2$ en $z = L$ (c'est-à-dire provenant du fond du four),

$$I_S(\theta) = \frac{Ka^2 P(T_i) \cos \theta}{\sqrt{T_i}} \left(\arccos \kappa - \kappa \sqrt{1 - \kappa^2} \right) \Theta(1 - \kappa), \quad (38)$$

ainsi que le flux $I_{\text{parois}}(\theta)$ dû aux atomes émis directement par les parois

$$I_{\text{parois}}(\theta) = \frac{Ka}{L} \sin \theta \int_0^{\min[L; 2a/\tan \theta]} dz P(T(z)) \sqrt{\frac{L^2 - z^2 \kappa^2}{T(z)}}. \quad (39)$$

On a noté $\kappa = L \tan \theta / 2a$, $K = \sqrt{2/\pi^3 m k_B}$ et Θ la fonction de Heaviside. La dépendance angulaire du flux du four provient d'arguments géométriques, et de l'utilisation de la loi de Knudsen [48] qui donne une relation en cosinus pour la probabilité d'émission d'un atome d'une paroi, dans une direction donnée.

Nous avons tracé en figure 23 l'intensité du jet en fonction de l'angle θ . On remarque qu'aux faibles angles, les atomes du jet sont très majoritairement directement issus du fond du four (surface S) et non pas d'une réémission depuis les parois. Ceci n'est plus vérifié pour les forts angles d'observation θ . Cependant, seule la partie du jet émise dans la direction $\theta \in [0; \theta_{\text{max}}]$ (où θ_{max} est dû à la diaphragmation du doigt froid) va pouvoir entrer dans le ralentisseur Zeeman. La géométrie du système (figure 11) fixe $\theta_{\text{max}} = 15$ mrad au niveau du doigt froid.

Le flux total d'atomes sortant du four en fonction de la température T_i est donné par

$$\mathcal{F}[\theta_{\text{max}}] = \int_0^{\theta_{\text{max}}} [I_S(\theta) + I_{\text{parois}}(\theta)] 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (40)$$

et est représenté en figure 24. Ce flux correspond aux atomes de Rubidium sans aucune considération de l'isotope. Ainsi le flux de ^{87}Rb utile est donné par $0.278 \mathcal{F}$. Le résultat obtenu pour $T_i = 110^\circ\text{C}$ est de 5×10^{11} at/s, ce qui est en bon accord avec la mesure réalisée par fluorescence du jet reportée dans [42]. Plus la température est élevée, plus le flux attendu est important. On pourrait penser qu'il suffit d'augmenter la température pour avoir un jet plus fort. Cependant, un certain nombre de phénomènes sont alors à prendre en compte : une possible saturation du fonctionnement du four comme décrite en [49], la réduction de la

durée de vie du four qui entraîne un remplissage plus fréquent avec toutes les difficultés que cela sous-entend (remise à l'air d'une partie de l'enceinte, etc...), ou encore une dégradation du vide dans l'enceinte primaire due à un trop fort dégagement de Rubidium. Par précaution, nous limitons le chauffage du réservoir à 130 °C de telle façon que T_i soit autour de 110 °C. De plus, comme nous allons le voir dans le prochain paragraphe, la température T_i n'est pas le seul paramètre déterminant le nombre d'atomes que nous allons pouvoir effectivement manipuler pendant l'expérience.

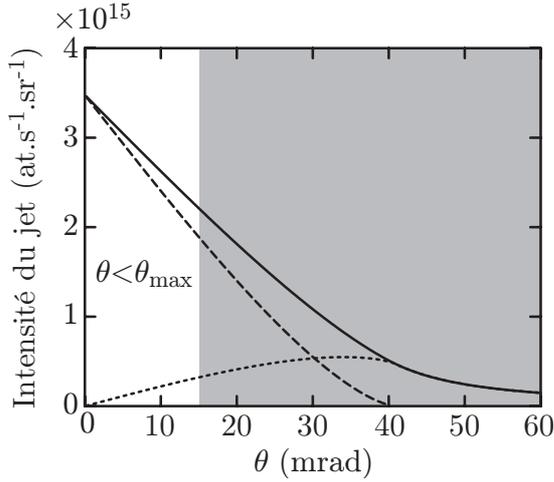


FIG. 23 – Intensité du jet en atomes par seconde par stéradian en fonction de l'angle d'émission θ pour $T_i = 110$ °C. On a représenté $I_S(\theta)$ (tirets), $I_{\text{parois}}(\theta)$ (pointillés) ainsi que la somme des deux (trait plein). La zone qui est diaphragmée par le doigt froid est grisée : seule ne peut être utile que la partie du jet telle que $\theta < \theta_{\text{max}}$.

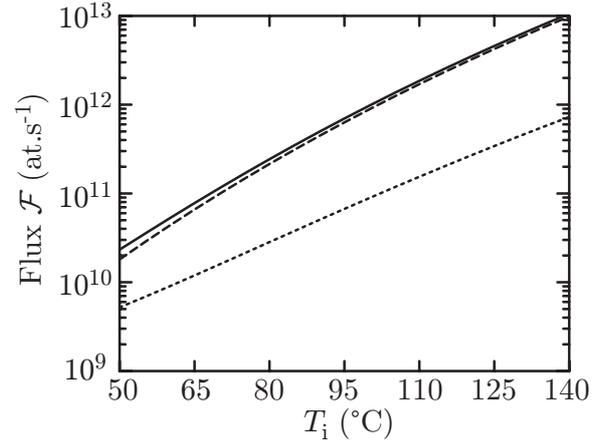


FIG. 24 – Flux total \mathcal{F} d'atomes de Rubidium de ^{85}Rb et ^{87}Rb (trait plein : équation 40) en fonction de la température T_i alors que T_f est conservée constante à 40 °C. On remarque que quelque soit la température du four, la partie relative aux parois (pointillés) est négligeable devant la partie du jet directement issue du fond du four (tirets).

I.3.2 Flux utile au chargement du piège magnéto-optique

Le ralentissement Zeeman (§ I.2.2) permet d'abaisser la vitesse d'une partie de la distribution en vitesse des atomes issus du four (figure 10). Nous étudions dans ce paragraphe les phénomènes physiques qui déterminent le flux utile arrivant au niveau de la cellule et à partir duquel on peut charger le piège magnéto-optique.

I.3.2.a Effets limitant le flux utile au terme du ralentissement

Effets liés à la structure hyperfine atomique

Avant toute chose, la structure du Rubidium permet l'apparition de phénomènes de pompage et de dépompage, comme expliqué au paragraphe I.2.2.b. La conjonction de différents processus parasites est alors à prendre en considération, comme la présence de l'effet Zeeman non-linéaire qui, couplé à un champ transverse B_{\perp} , est susceptible de perturber le caractère fermé de la transition $|F=2, m_F=2\rangle_S \rightarrow |F'=3, m_{F'}=3\rangle_P$ qui est utilisée pendant le ralentissement. Une étude détaillée (annexe B) montre, en effet, que de tels effets ne sont pas

négligeables et nécessitent de ne pas sous-estimer l'intensité de repompage nécessaire au bon fonctionnement du système.

Divergence du jet ralenti

Le flux que l'on peut capturer dans le PMO est aussi limité par des considérations géométriques (figure 11). En effet, considérons un atome partant du four ($x_i = -54$ cm) à la vitesse v avec un angle $\theta \ll 1$. Il commence le ralentissement en $x_e(v)$ et en sort en $x_s = 66$ cm. Le temps $t(v)$ qu'il met à atteindre la cellule est la somme du temps passé entre le four et l'entrée du premier solénoïde, du temps passé dans les solénoïdes, et enfin du temps de parcours entre la sortie du second solénoïde et la cellule. Il s'écrit donc comme

$$t(v) \approx \frac{x_e(v) - x_i}{v} + \int_{x_e(v)}^{x_s} \frac{dx'}{v_{\mathcal{R}}(x')} + \frac{x_{\text{PMO}} - x_s}{v_f}, \quad (41)$$

où l'on a noté $v_f \approx 20$ m/s, la vitesse en sortie du dernier ralentisseur Zeeman, et $x_{\text{PMO}} = 82$ cm, la position du piège magnéto-optique. La vitesse $v_{\mathcal{R}}$ définie par l'équation 25, est celle à laquelle se meut l'atome pour assurer que le laser soit à résonance avec la transition atomique. En moyenne, $t(v)$ est de l'ordre de la vingtaine de millisecondes. En première approximation, il est dominé par le premier terme de la somme pour les vitesses faibles, tandis que pour les fortes vitesses, le dernier terme est dominant. La durée du ralentissement à proprement parler (second terme) n'excède pas quelques millisecondes.

L'atome est capturé par le PMO si sa dérive transverse au bout du temps $t(v)$ est inférieure au rayon r_{PMO} du volume de capture du piège (§ I.3.3). Ceci impose une condition sur l'angle θ maximum utile à son chargement

$$\theta \leq \theta_{\max}(v) = \frac{r_{\text{PMO}}}{vt(v)}. \quad (42)$$

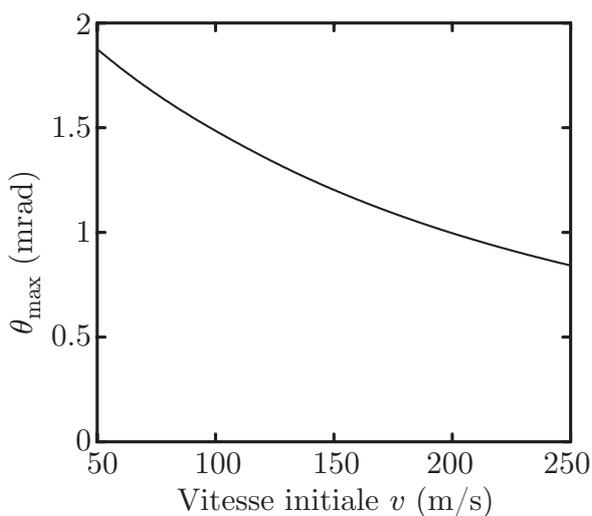


FIG. 25 – Angle θ_{\max} en fonction de la vitesse initiale v des atomes (équation 42). Il est l'angle maximum du jet permettant d'atteindre la zone de capture du piège magnéto-optique de rayon $r_{\text{PMO}} = 3$ mm.

L'angle θ est défini de la même manière qu'au paragraphe I.3.1. On a tracé en figure 25, l'angle maximum possible pour la divergence du jet à vitesse donnée. Cet angle est toujours inférieur à $r_{\text{PMO}}/(x_{\text{PMO}} - x_i) = 2.2$ mrad : en effet, le temps de parcours $t(v)$ est plus long que $(x_{\text{PMO}} - x_i)/v$ puisque les atomes sont ralentis.

Diffusion transverse

Une autre limitation géométrique du flux obtenu dans la cellule, est due au processus d'émission spontanée au cours du ralentissement, qui induit un chauffage, en particulier dans la direction r transverse à la propagation du faisceau laser. En effet, le photon spontané σ^+ est émis dans la direction $d\Omega = 2\pi \sin \alpha d\alpha$ avec une probabilité (équation A.54)

$$\mathcal{P}(\alpha) d\Omega = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \alpha) d\Omega. \quad (43)$$

On note α l'angle entre la direction d'observation et l'axe x de quantification. La composante transverse de la vitesse de recul v_{rec} pour une émission dans la direction α est $v_r = v_{\text{rec}} \sin \alpha$, et donc, en moyenne sur plusieurs réalisations, la vitesse quadratique moyenne acquise dans le plan transverse est

$$\langle \delta v_r^2 \rangle = v_{\text{rec}}^2 \frac{\int \mathcal{P}(\alpha) \sin^2 \alpha d\Omega}{\int \mathcal{P}(\alpha) d\Omega} = \frac{3}{5} v_{\text{rec}}^2. \quad (44)$$

L'atome de vitesse initiale v commence son ralentissement en x_e tel que $v_{\mathcal{R}}(x_e) = v$, et sous l'effet de la diffusion, sa vitesse transverse suit une marche au hasard. Ceci résulte [45] en une taille moyenne au carré transverse

$$\langle r^2 \rangle_{\text{ral}} = \sum_k \langle \delta v_r^2 \rangle (t - t_k)^2, \quad (45)$$

où chaque émission spontanée a lieu à l'instant t_k . La durée d'un cycle lorsque l'atome est à la position x s'écrit

$$\delta T(x) = \frac{\hbar^2 k^2}{m\mu_B \frac{dB}{dx} v_{\mathcal{R}}(x)}, \quad (46)$$

et est supérieure à la durée minimum d'un cycle donnée par $2/\Gamma$. On peut alors réécrire $\langle r^2 \rangle_{\text{ral}}$ en passant à la limite continue (l'instant t_k est paramétré par la position x de l'atome) :

$$\langle r^2 \rangle_{\text{ral}} = \int_{x_e}^x \frac{dx'}{v_{\mathcal{R}}(x') \delta T(x')} \langle \delta v_r^2 \rangle \left(\int_{x'}^{x_s} \frac{dx''}{v_{\mathcal{R}}(x'')} \right)^2. \quad (47)$$

Cette expression n'est valide que tant que l'atome reste soumis au ralentissement ($x < x_s$). Après, l'atome a une vitesse axiale v_f , et la dispersion en vitesse reste égale à $N \langle \delta v_r^2 \rangle$ où $N = m(v - v_f)/\hbar k$ est le nombre de photons diffusés au cours du ralentissement. La distance qui sépare l'atome du piège magnéto-optique étant $d_{\text{PMO}} = x_{\text{PMO}} - x_s$, la dispersion finale en position transverse est donnée par

$$\langle r^2(v) \rangle = \langle r^2 \rangle_{\text{ral}} + \frac{m(v - v_f) \langle \delta v_r^2 \rangle}{\hbar k} \left(\frac{d_{\text{PMO}}}{v_f} \right)^2. \quad (48)$$

Le premier terme concerne la dispersion pendant le ralentissement, et le second, celle qui apparaît entre la sortie du ralentisseur et la cellule. L'évaluation du premier terme donne au maximum 4 mm^2 et nous le négligeons devant le second que nous avons tracé en figure 26 en prenant $d_{\text{PMO}} \approx 16 \text{ cm}$ et $v_f \approx 20 \text{ m/s}$.

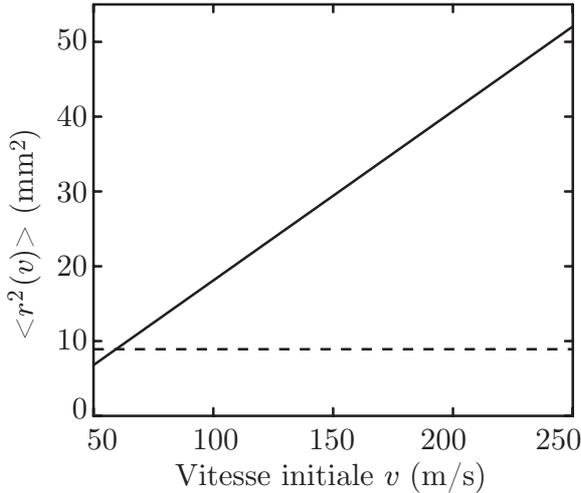


FIG. 26 – Élargissement en position dû à la diffusion d'impulsion résultant de l'émission spontanée (équation 48). L'effet prépondérant est l'élargissement apparaissant entre le ralentisseur et la cellule, où la vitesse vaut v_f et est faible. On a représenté à titre de comparaison $r_{\text{PMO}}^2 = 9 \text{ mm}^2$, la surface caractéristique transverse de la zone de capture.

L'effet d'éclatement du jet atomique devient de plus en plus important à mesure que la vitesse v augmente, puisque pour arriver à v_f , les atomes rapides ont dû réaliser beaucoup plus de cycles d'absorption-émission que les atomes lents, et ont donc beaucoup plus diffusé transversalement.

I.3.2.b Estimation du flux utile global

En prenant en compte les phénomènes présentés précédemment, on peut donner une estimation du flux que l'on attend pouvoir capturer dans le piège magnéto-optique. Le flux $\Phi(v)$ d'atomes de ^{87}Rb capturés ayant une vitesse initiale comprise entre v et $v + dv$ est le produit de cinq termes

$$\Phi(v) dv = 0.278 \times \underbrace{f(v)}_{\text{Eq. 20}} \times \underbrace{\mathcal{F}[\theta_{\text{max}}(v)]}_{\text{Eq. 40}} \times \frac{r_{\text{PMO}}^2}{r_{\text{PMO}}^2 + \underbrace{\langle r^2(v) \rangle}_{\text{Eq. 48}}} \times \underbrace{\mathcal{C}_{\text{repompage}}(B_{\perp})}_{\text{Fig. B.12}} dv. \quad (49)$$

Le premier facteur est lié à l'abondance naturelle du ^{87}Rb . Le second terme est lié à la distribution initiale en vitesse des atomes issus du four. Le produit des trois premiers termes correspond donc au flux, à vitesse donnée, qui va effectivement pouvoir atteindre la zone de capture du PMO de rayon r_{PMO} , en prenant en compte la divergence du jet après ralentissement via $\theta_{\text{max}}(v)$ (figure 25). Le quatrième terme est la probabilité qu'un atome qui devait arriver dans la zone de capture, y parvienne en tenant compte de la diffusion transverse (figure 26). Enfin, le dernier terme correspond aux pertes liées à un repompage plus ou moins efficace tout au long du ralentissement (figure B.12), et dépend, en particulier, du champ perpendiculaire B_{\perp} . Nous avons considéré que tous les atomes sont repompés dans $F = 2$ avant le ralentissement (§ B.2.1), et nous avons négligé toute autre perte (par exemple entre les deux ralentisseurs Zeeman comme discuté au paragraphe B.2.2).

Nous avons tracé en figure 27, le flux ainsi obtenu en fonction de la vitesse initiale v , pour $T_i = 110 \text{ }^{\circ}\text{C}$ et $r_{\text{PMO}} = 3 \text{ mm}$. Il s'agit d'une courbe présentant un maximum. En effet, bien que la distribution initiale en vitesse $f(v)$ (figure 10) soit croissante dans la gamme de vitesses que nous considérons, il y a une vitesse critique (environ 175 m/s), à partir de laquelle, les pertes à cause de l'expansion transverse du jet (troisième et quatrième facteur de la relation 49) prennent l'avantage sur le gain dû à la distribution initiale en vitesse.

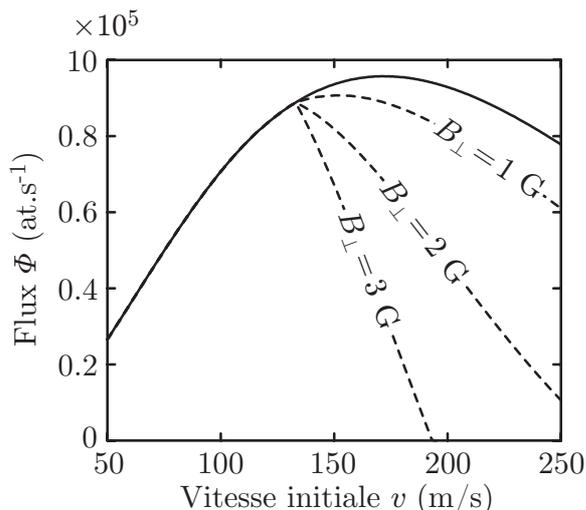


FIG. 27 – Flux $\Phi(v)$ (équation 49) pour $T_i = 110\text{ °C}$ et $r_{\text{PMO}} = 3\text{ mm}$. La courbe en trait plein correspond au cas où l'on ne prend pas en compte les pertes par dépompage, tandis que les courbes en pointillés donnent le flux en fonction du champ B_{\perp} résiduel.

Nous avons aussi reporté dans le tableau 4, les flux totaux que l'on estime pouvoir capturer dans le piège magnéto-optique, en fonction des valeurs de T_i et r_{PMO} . Pour $T_i = 110\text{ °C}$ et $r_{\text{PMO}} = 3\text{ mm}$, on obtient $R = 1.5 \times 10^8\text{ at/s}$, qui est du même ordre de grandeur que ce que l'on observe expérimentalement lors du chargement du piège magnéto-optique (§ I.3.3). Une façon d'augmenter ce flux est d'augmenter la taille de la zone de capture r_{PMO} qui est liée à la taille des faisceaux du PMO. Expérimentalement, nous sommes déjà au maximum, et c'est la petite taille de la cellule qui nous limite. Comme discuté au paragraphe I.3.3, il existe un optimum sur la température du four, car une trop forte température diminue la durée de vie du piège, et donc, le nombre d'atomes que le PMO peut charger au final.

	$T_i = 100\text{ °C}$	$T_i = 110\text{ °C}$	$T_i = 120\text{ °C}$
$r_{\text{PMO}} = 2\text{ mm}$	$1.9 \times 10^7\text{ at/s}$	$3.5 \times 10^7\text{ at/s}$	$6.3 \times 10^7\text{ at/s}$
$r_{\text{PMO}} = 3\text{ mm}$	$8.4 \times 10^7\text{ at/s}$	$1.5 \times 10^8\text{ at/s}$	$2.7 \times 10^8\text{ at/s}$
$r_{\text{PMO}} = 4\text{ mm}$	$2.2 \times 10^8\text{ at/s}$	$4.0 \times 10^8\text{ at/s}$	$7.2 \times 10^8\text{ at/s}$

TAB. 4 – Flux totaux de ^{87}Rb ($R = \int \Phi(v) dv$) obtenus pour différentes valeurs de température du four T_i et différents rayons r_{PMO} de la zone de capture, en prenant les pertes de dépompage associées à un champ $B_{\perp} = 1\text{ G}$.

Géométriquement, le flux d'atomes de ^{87}Rb arrivant dans la zone de capture du PMO est $\mathcal{F}[\theta_{\text{max}} = r_{\text{PMO}} / (x_{\text{PMO}} - x_i)] = 1.4 \times 10^{10}\text{ at/s}$. Si le ralentissement était parfait (sans pertes dues au dépompage ou à l'étalement transverse du jet), on pourrait capturer une proportion de $24\% = \int_0^{v_c} dv f(v)$ du jet, où $v_c = 260\text{ m/s}$ est la vitesse de capture du ralentissement Zeeman (§ I.2.2.b). Le flux utile serait donc au mieux de $3.4 \times 10^9\text{ at/s}$. Par contre, en l'absence de tout ralentissement, la proportion du jet en dessous de $v_{\text{PMO}} = 20\text{ m/s}$ est de 0.0017% ce qui donnerait un flux de $2.4 \times 10^5\text{ at/s}$. On observe expérimentalement un flux de chargement de l'ordre de 10^8 at/s , ce qui montre que, bien que le flux maximum idéal ne soit pas atteint, le ralentissement nous fait tout de même gagner plus de deux ordres de grandeur par rapport à un jet non ralenti.

I.3.3 Chargement du piège magnéto-optique

I.3.3.a Vitesse et taille de capture

Dans le paragraphe I.3.2.a, nous avons introduit deux grandeurs caractéristiques du phénomène de capture dans le piège magnéto-optique : la vitesse de capture v_{PMO} et le rayon de la zone de capture r_{PMO} . On définit ces grandeurs comme étant telles, que tout atome qui passe à une distance $r < r_{\text{PMO}}$ du centre du piège avec une vitesse $v < v_{\text{PMO}}$ est capturé. r_{PMO} est lié au rayon des faisceaux de piégeage ($r_{\text{laser}} = 4\text{mm}$). Nous l'avons pris à 3 mm, en considérant que le bord des faisceaux laser n'est pas efficace pour le processus de capture. On peut estimer la vitesse de capture comme étant la vitesse qui correspond au désaccord, entre la transition et le laser en entrée du piège magnéto-optique (début de l'interaction avec les faisceaux laser). En prenant cette dernière placée environ à $\delta r \approx 1\text{ cm}$ du zéro de champ magnétique, on obtient

$$v_{\text{PMO}} = \frac{\mu_{\text{B}}}{\hbar k} \frac{dB}{dr} \delta r - \frac{\delta_{\text{PMO}}}{k} \approx 20\text{ m/s}. \quad (50)$$

Nous avons utilisé dans cette relation les différents paramètres du PMO, qui sont introduits au paragraphe I.2.3.

I.3.3.b Dynamique de chargement

La dynamique de chargement du piège magnéto-optique, peut être décrite par l'équation d'évolution suivante donnant l'évolution temporelle du nombre d'atomes N piégés [69] :

$$\frac{dN}{dt} = R - \left(\frac{1}{\tau} + \beta \bar{n} \right) N, \quad (51)$$

où R est le taux de chargement évalué au paragraphe I.3.2.b, τ , la durée de vie associée aux collisions avec le gaz résiduel, β , le taux de collision à deux corps et \bar{n} , la densité moyenne du piège. Nous avons reporté en figure 28, le nombre d'atomes chargés dans le piège magnéto-optique en fonction du temps. Le PMO est chargé en une dizaine de secondes avec un taux de chargement typique $R = 10^8\text{ at/s}$. On obtient alors jusqu'à $N_{\infty} = 9 \times 10^8$ atomes piégés lorsque tous les réglages sont optimisés au maximum.

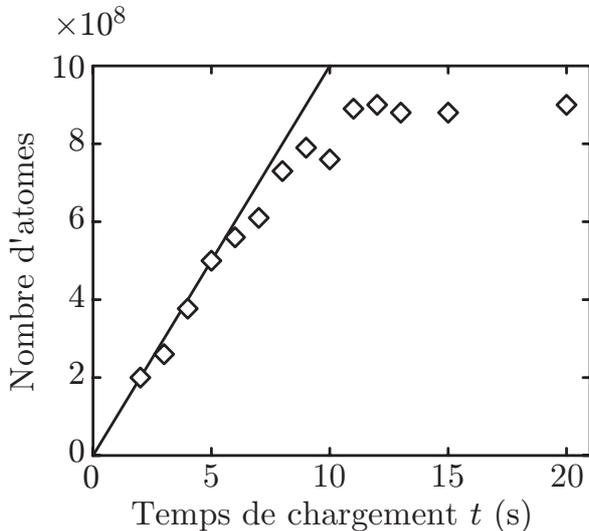


FIG. 28 – Nombre d'atomes (diamants) dans le piège magnéto-optique en fonction du temps t de chargement. La droite en trait plein correspond à un taux de chargement de 10^8 at/s .

Pertes liées à la qualité du vide

Dans l'équation 51, la durée de vie τ est a priori inférieure à la durée de vie dans le piège magnétique (§ II.2.4). En plus des collisions avec le gaz résiduel discutées au paragraphe I.1.2.a, il faut aussi considérer, pendant le chargement, les collisions avec les atomes non ralentis qui représentent 93 % du jet (tous les atomes de Rubidium 85 et 76 % des atomes de Rubidium 87 qui ont une vitesse supérieure à 260 m/s).

On peut mesurer l'effet du jet atomique en mesurant son impact sur la durée de vie d'un nuage atomique piégé magnétiquement, pour lequel il n'y a pas de pertes dues aux collisions assistées par la lumière de coefficient β . Nous obtenons ainsi $\tau \approx 50$ s. Retrouvons cet ordre de grandeur par les considérations suivantes. La section efficace de collision entre un atome de Rubidium énergétique et un atome de Rubidium froid est $\sigma_{\text{RbRb}} = 2.5 \times 10^{-17} \text{ m}^2$ [40]. Le libre parcours moyen d'un atome thermique dans un nuage de densité n est donné par $1/\sqrt{2} n \sigma_{\text{RbRb}}$, soit environ quelques dizaines de centimètres avec n la densité typique du PMO (10^{11} at/cm^3). On considère donc qu'un atome du jet n'entre en collision qu'avec un seul atome piégé, et que ce dernier acquiert une vitesse suffisante pour être expulsé du piège. Une estimation de la durée de vie associée à ce processus est alors

$$\tau \approx \frac{(x_{\text{PMO}} - x_i)^2}{0.93 I_S(0) \sigma_{\text{RbRb}}}, \quad (52)$$

où $I_S(0)$ est le flux par stéradian sortant du four sur l'axe (équation 38). On obtient $\tau = 25$ s pour un four à température⁷ $T_i = 110^\circ\text{C}$. Quoi qu'il en soit, l'effet lié aux collisions avec les atomes issus du gaz résiduel ou du jet, ne semble pas être le facteur limitant le processus de chargement, puisque le temps caractéristique de la courbe 28 est inférieur τ .

Collisions assistées par la lumière

Par contre, l'autre terme de pertes $\beta \bar{n}$ de l'équation 51, joue un rôle important dans la limitation du nombre d'atomes que l'on peut piéger. Ce terme de collisions à deux corps, est dû à deux types de phénomènes liés à des collisions exoénergétiques, entre un atome excité et un atome dans l'état fondamental [70]. Au cours de la collision, le potentiel d'interaction moléculaire peut donner lieu à un changement d'état fin excité, qui passe de $5^2\text{P}_{3/2}$ à $5^2\text{P}_{1/2}$, ou à une réémission d'un photon d'énergie inférieure à l'énergie des photons des lasers de piégeage. Dans les deux cas, le surplus d'énergie restante, est redistribué dans l'énergie cinétique des atomes considérés, qui sont alors éjectés si leur vitesse dépasse v_{PMO} . Par contre, on peut négliger les collisions entre états fondamentaux, qui ont pour effet de faire passer l'état hyperfin de $F=2$ à $F=1$. En effet, l'énergie libérée $h\Delta_{\text{HF}}$ donne à chaque atome une vitesse $\sqrt{h\Delta_{\text{HF}}/m} = 5 \text{ m/s}$ inférieure à v_{PMO} .

Ces collisions ne sont importantes que pour les faibles intensités de piégeage [71]. Nous pouvons évaluer β à partir du nombre d'atomes capturés en régime permanent

$$N_\infty = \frac{R}{\left(\frac{1}{\tau} + \beta \bar{n}\right)}. \quad (53)$$

En négligeant l'effet de la durée de vie τ et en faisant l'approximation d'une distribution gaussienne dont les tailles r.m.s. selon les trois axes sont données par $[1.5 \sigma_0, 1.5 \sigma_0, \sigma_0]$ avec

⁷En première approximation, le temps de vie lié au jet diminue d'un facteur deux chaque fois que la température est augmentée de 10°C . Une augmentation de quelques dizaines de degrés est donc préjudiciable, non seulement pour le chargement du PMO, mais aussi pour les étapes ultérieures. En effet, le jet dégrade aussi le vide en « salissant » les parois de l'enceinte.

$\sigma_0 = 450 \mu\text{m}$ (figure 16), on obtient $\beta = (4\pi)^{3/2} (1.5 \sigma_0)^2 \sigma_0 R / N_\infty^2 = 10^{-12} \text{cm}^3/\text{s}$. Ce résultat est comparable aux mesures réalisées pour le Rubidium 87 dans [72], qui, pour des intensités totales d'une dizaine de milliwatts par centimètre carré, donnent β de l'ordre de quelques $10^{-12} \text{cm}^3/\text{s}$.

En conclusion, on peut donner quelques pistes d'améliorations possibles et réalisables sur un dispositif ultérieur, pour améliorer le flux disponible afin de charger le piège magnéto-optique. Afin de minimiser la valeur de B_\perp , il peut être utile d'aligner précisément l'axe des solénoïdes sur l'axe du jet atomique. Pour contrecarrer les effets de dépompage, on peut envisager d'avoir un repompage efficace tout au long du ralentissement, par exemple, en augmentant la puissance du repompeur utilisé. Enfin, pour minimiser l'effet de l'éclatement du jet sur la fin qui touche principalement les atomes les plus énergétiques, c'est-à-dire les plus nombreux, la distance entre la sortie du dernier solénoïde et le piège magnéto-optique pourrait être réduite. On pourrait même imaginer utiliser une mélasse transverse dans cette zone [45] pour collimater le jet.

LA CONDENSATION DE BOSE-EINSTEIN DANS UN PIÈGE FERROMAGNÉTIQUE HYBRIDE

Malgré la série des étapes de refroidissement laser exposées jusqu'ici, notre échantillon atomique est encore loin de la condensation de Bose-Einstein. Le paramètre pertinent traduisant le degré de dégénérescence du gaz quantique, est la densité dans l'espace des phases donnée par

$$\mathcal{D} = n\Lambda_T^3, \quad (54)$$

où n est la densité du gaz, et $\Lambda_T = h/\sqrt{2\pi mk_B T}$, la longueur d'onde de De Broglie thermique. $\mathcal{D} \approx 8 \times 10^{-15}$ pour le jet thermique dont nous sommes partis et à l'issue de la mélasse, nous sommes arrivés à un paramètre de dégénérescence $\mathcal{D} \approx 4 \times 10^{-6}$. Nous sommes donc à la moitié du chemin vers la condensation pour laquelle \mathcal{D} est de l'ordre de l'unité.

Cependant, il est difficile de continuer à gagner en densité par des méthodes de refroidissement optique : nous avons vu, dans les paragraphes précédents, que le refroidissement laser est peu compatible avec de très fortes densités atomiques, à cause de la diffusion multiple de photons, ou encore des collisions assistées par la lumière. De plus, des processus mettant en jeu l'émission spontanée sont néfastes pour l'obtention d'un condensat. En effet, un atome condensé, absorbant un seul photon et le réémettant de manière spontanée, acquiert une énergie de recul $E_R = \hbar^2 k^2 / 2m$ correspondant à une température $T_R = 2E_R / k_B = 360$ nK, ce qui est très proche de la température critique de condensation (typiquement le microkelvin). On pourrait alors imaginer réaliser du refroidissement laser subrecul [73], mais le gain escompté en densité dans l'espace des phases, ne serait pas suffisant pour atteindre la condensation.

Pour s'affranchir de ces limitations, il est nécessaire d'abandonner le refroidissement optique, et de transférer le nuage atomique dans un piège conservatif. On peut utiliser un piège optique [74], dans lequel l'émission spontanée est suffisamment réduite pour pouvoir manipuler un condensat, comme nous le verrons au chapitre VI. Pour atteindre le régime de dégénérescence quantique, nous utilisons plutôt un piège magnétique réalisé pour la première fois en 1985, pour des atomes neutres [75], en suivant globalement le même schéma qui a permis d'observer les premiers condensats en 1995 [26, 28, 27].

Dans ce chapitre nous présentons tout d'abord le concept de condensation de Bose-

Einstein (§ II.1), et en particulier, l'allure de la fonction d'onde macroscopique associée. Puis nous montrons comment, expérimentalement, après avoir transféré le nuage dans notre piège ferromagnétique hybride (§ II.2), nous arrivons à mettre en évidence le régime de dégénérescence quantique, à partir de la méthode de refroidissement évaporatif (§ II.3). Nous concluons ce chapitre par l'observation du phénomène sur notre dispositif expérimental (§ II.4).

II.1 La condensation de Bose-Einstein

II.1.1 Un effet de statistique quantique

Considérons un ensemble d'atomes indiscernables et indépendants (c'est-à-dire sans interaction), pouvant occuper les états q d'énergie E_q du système. Nous considérons des bosons, donc un nombre quelconque d'atomes peut occuper un état donné. En particulier, le nombre d'occupation moyen N_q d'un état est donné par [76]

$$N_q = \frac{1}{e^{(E_q - \mu)/k_B T} - 1}, \quad (55)$$

où T est la température du nuage sur laquelle on agit expérimentalement à l'aide du couteau radiofréquence (§ II.3), et μ est le potentiel chimique vérifiant la relation implicite de normalisation vis-à-vis du nombre total d'atomes N du nuage

$$N = \sum_{\text{états } q} N_q. \quad (56)$$

Prenons l'énergie du fondamental comme étant nulle : $E_0 = 0$. Le potentiel chimique est alors toujours négatif car N_0 ne peut l'être. De plus, μ croît vers 0 quand la température décroît. En effet, à température nulle, on voit sur la relation 55 que μ ne peut être que nul, sans quoi, aucun état n'est peuplé.

L'état fondamental joue un rôle prépondérant lorsque l'on abaisse la température du système. Ainsi, pour écrire la somme discrète 56 sous une forme intégrale, il est nécessaire d'isoler la contribution de l'état fondamental

$$N = N_0 + N' = N_0 + \int_{E_1}^{\infty} dE \frac{\rho(E)}{e^{(E - \mu)/k_B T} - 1}, \quad (57)$$

où nous avons introduit la densité d'états $\rho(E)$ du système considéré. La quantité $\rho(E) dE$ correspond au nombre d'états dont l'énergie est comprise entre E et $E + dE$. Pour un système de hamiltonien H , la densité d'états s'écrit

$$\rho(E) = \frac{1}{h^3} \int d^3 r \int d^3 p \delta(E - H). \quad (58)$$

Dans le cas d'un piège harmonique¹ à trois dimensions (potentiel V_{oh}), le hamiltonien s'écrit

$$H = \sum_{i=x,y,z} \frac{p_i^2}{2m} + V_{\text{oh}}(\vec{r}) \quad \text{avec} \quad V_{\text{oh}}(\vec{r}) = \sum_{i=x,y,z} \frac{m\omega_i^2 x_i^2}{2}, \quad (59)$$

¹Les propriétés de condensation dépendent fortement de la géométrie du piège considéré, comme discuté en [77].

et la densité d'état est donnée par

$$\rho(E) = \frac{E^2}{2(\hbar\bar{\omega})^3}, \quad (60)$$

où l'on a utilisé la fréquence moyenne $\bar{\omega} = \sqrt[3]{\omega_x\omega_y\omega_z}$. Le second terme de l'équation 57 vaut alors [78]

$$N' = \left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 g_3(e^{\mu/k_B T}), \quad (61)$$

où l'on a introduit la fonction polylogarithme [79] $g_\gamma(u) = \sum_{l=1}^{\infty} u^l/l^\gamma$. L'argument de la fonction g_3 est compris entre 0 et 1, et donne sa valeur maximale à la fonction en 1 : $g_3(1) \approx 1.202$. À température T donnée, le nombre d'atomes N' dans les états excités, ne peut donc excéder une valeur maximale N_{\max}

$$N' \leq N_{\max} = 1.202 \left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3. \quad (62)$$

Si le nombre d'atomes N de l'échantillon est supérieur à N_{\max} , alors les atomes ne peuvent faire autrement que s'accumuler dans l'état fondamental, puisque les états excités sont saturés : c'est la condensation de Bose-Einstein. À nombre d'atomes total N donné, ce phénomène apparaît pour la température critique²

$$T_c = \frac{\hbar\bar{\omega}}{k_B} \sqrt[3]{\frac{N}{1.202}}. \quad (63)$$

Il s'agit bien d'un effet de statistique quantique, et non d'un effet thermique dans le sens où $k_B T_c \gg \hbar\bar{\omega}$: la statistique classique de Maxwell-Boltzmann, quant à elle, nécessiterait que la température soit plus faible que l'écart d'énergie entre l'état fondamental et le premier état excité, pour que le fondamental soit occupé par un nombre macroscopique d'atomes. Le nombre d'atomes N_0 dans l'état fondamental varie alors, pour des températures $T < T_c$, selon

$$N_0 = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3\right). \quad (64)$$

Pour des températures inférieures à T_c , $\mu = \partial E_{\text{tot}}/\partial N = 0$, ce qui signifie que si l'on ajoute des atomes au système, le gain en énergie totale E_{tot} est nul, et donc qu'ils s'accumulent dans l'état fondamental.

La densité dans l'espace des phases donnée par l'équation 54, s'écrit dans notre cas

$$n(\vec{r}) A_T^3 = g_{3/2}(e^{[\mu - V_{\text{oh}}(\vec{r})]/k_B T}). \quad (65)$$

À la transition $T = T_c$, le terme de droite pris au centre du piège vaut $g_{3/2}(1) \approx 2.612$, et la densité dans l'espace des phases vaut alors au centre du piège

$$\mathcal{D} = n(0) A_T^3 = 2.612. \quad (66)$$

²Cette température critique est obtenue à la limite thermodynamique, c'est-à-dire dans le cas où le nombre d'atomes N et le volume du système \mathcal{V} , tendent vers l'infini à densité N/\mathcal{V} constante. T_c connaît une correction δT_c dite « de taille finie » due au fait que le système n'est pas rigoureusement à cette limite [80] : $\delta T_c/T_c = -0.73(\omega_x + \omega_y + \omega_z)/3\bar{\omega}\sqrt[3]{N}$. L'effet, de l'ordre du pour cent, est petit pour les nombre d'atomes $N = 10^6$ que nous condensons expérimentalement.

L'interprétation de cette relation est particulièrement claire : La condensation de Bose-Einstein survient, lorsque la distance entre deux atomes $1/\sqrt[3]{n(0)}$ est de l'ordre de la longueur d'onde de De Broglie thermique Λ_T , c'est-à-dire lorsque les fonctions d'onde des différents atomes commencent à se recouvrir.

Jusqu'à présent, nous avons considéré des atomes indépendants, c'est-à-dire que nous avons négligé toute interaction due à des collisions interatomiques. En réalité, les atomes que nous manipulons interagissent de manière répulsive, et les propriétés de la condensation s'en trouvent modifiées. Ceci est particulièrement visible sur la fonction d'onde de l'état fondamental, dont la forme et la taille dépendent du nombre d'atomes : elle dévie très rapidement de la gaussienne qui est l'état fondamental de l'oscillateur harmonique (figure 29).

II.1.2 Effet des interactions : l'équation de Gross-Pitaevskii

Comme détaillé au paragraphe II.2.4.b, pour les températures que nous manipulons, on peut restreindre l'interaction interatomique, à une collision élastique se réalisant dans l'onde s [81]. Nous n'avons pas besoin de connaître précisément les détails du potentiel d'interaction et la collision est bien décrite par un seul paramètre : la longueur de diffusion $a = 5.3$ nm pour le ^{87}Rb [82]. Le signe positif (négatif) de la longueur de diffusion, indique le caractère répulsif (attractif) des interactions. Cette description est valide en régime dilué, c'est-à-dire lorsque $na^3 \ll 1$, ce qui est toujours vérifié expérimentalement, même dans un condensat où la densité n n'excède pas 10^{15} at/cm³. Nous écrivons alors le potentiel d'interaction effectif de deux atomes séparés d'une distance $|\vec{r}|$ comme un potentiel de contact

$$V_{\text{int}}(\vec{r}) = g_{\text{coll}}\delta(\vec{r}) = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\delta(\vec{r}). \quad (67)$$

Un effet particulièrement flagrant³ de ces interactions apparaît, lorsque l'on s'intéresse à la fonction d'onde du condensat, qui est très modifiée par rapport au cas de particules indépendantes.

Dans toute la suite nous nous plaçons dans le point de vue de Heisenberg (§ VIII-10 de [84]), dans lequel les opérateurs présentent une dépendance temporelle. Afin d'alléger les notations, nous ne notons pas explicitement cette dépendance en t . L'expression du hamiltonien du système en présence d'interactions est, dans le formalisme de la seconde quantification [85]

$$\hat{H} = \int d\vec{r} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\text{oh}}(\vec{r}) + \frac{g_{\text{coll}}}{2} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}) \right] \hat{\Psi}(\vec{r}), \quad (68)$$

où l'on a utilisé l'expression du terme de contact V_{int} . L'opérateur $\hat{\Psi}(\vec{r})$ ($\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})$) correspond à l'annihilation (création) d'une particule en \vec{r} dans l'état du système. Cet opérateur se décompose de manière générale sur les états propres $\phi_n(\vec{r})$ selon

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_n \hat{a}_n \phi_n(\vec{r}), \quad (69)$$

³Un autre effet est celui lié au décalage δT_c de la température critique dû aux interactions : $\delta T_c/T_c = -1.33\sqrt[3]{N_0 a}/\sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$, ce qui correspond à un décalage de l'ordre de quelques pour cent vers les températures inférieures. En effet, les interactions répulsives rendent la condensation plus difficile, et celle-ci nécessite donc des conditions de température plus favorables (plus basses), pour avoir lieu. Pour la même raison, l'expression de fraction condensée en fonction de la température (équation 64) est modifiée par les interactions [83].

où \hat{a}_n est l'opérateur d'annihilation d'une particule dans l'état ϕ_n . On a les relations de commutation suivantes

$$\begin{cases} [\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \\ [\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')] = [\hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}(\vec{r}')] = 0. \end{cases} \quad (70)$$

L'équation d'évolution de l'opérateur champ $\hat{\Psi}(\vec{r})$ dans la représentation de Heisenberg est donnée par

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} = [\hat{\Psi}, \hat{H}], \quad (71)$$

ce qui dans notre cas particulier aboutit à

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\text{oh}} + g_{\text{coll}} \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \right] \hat{\Psi}. \quad (72)$$

À température nulle, dans la limite de champ moyen où le champ est considéré comme classique, $\hat{\Psi}(\vec{r}, t) \approx \Phi_0(\vec{r}) \exp(-i\mu t/\hbar)$: tous les atomes sont dans l'état fondamental vérifiant, à l'équilibre, l'équation de Gross-Pitaevskii indépendante du temps

$$\mu \Phi_0 = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\text{oh}} + g_{\text{coll}} |\Phi_0|^2 \right] \Phi_0, \quad (73)$$

avec μ l'énergie du condensat et la condition de normalisation suivante

$$\int d\vec{r} |\Phi_0(\vec{r})|^2 = N_0. \quad (74)$$

À température non nulle, un nuage thermique non condensé est présent. On le prend en compte, en écrivant le champ comme la somme d'une partie condensée et d'une partie non condensée $\hat{\Psi} \approx \Phi_0(\vec{r}) + \delta\hat{\psi}(\vec{r})$. Dans la limite du champ moyen, l'effet du nuage thermique sur le condensat, est d'ajouter un terme d'interaction supplémentaire dans le membre de droite de l'équation de Gross-Pitaevskii, $2g_{\text{coll}} \langle \delta\hat{\psi}^\dagger \delta\hat{\psi} \rangle \Phi_0 = 2g_{\text{coll}} n(\vec{r}) \Phi_0$, avec la densité $n(\vec{r})$ donnée par l'expression 65.

II.1.3 L'approximation de Thomas-Fermi

En règle générale, pour calculer le profil de densité du condensat, il faut résoudre l'équation différentielle 73. Cependant, dans le cas où l'on peut négliger l'énergie cinétique devant l'énergie d'interaction, $g_{\text{coll}} |\Phi_0|^2 \gg |-\hbar^2/2m \Delta \Phi_0|$, cette équation devient algébrique et l'on obtient pour la fonction d'onde du condensat, dans le piège harmonique, l'expression suivante

$$\Phi_0(x, y, z) = \sqrt{n_{\text{max}} \cdot \max \left[\left(1 - \left(\frac{x}{R_x} \right)^2 - \left(\frac{y}{R_y} \right)^2 - \left(\frac{z}{R_z} \right)^2 \right); 0 \right]}, \quad (75)$$

avec

$$\begin{cases} n_{\text{max}} = \frac{\mu}{g_{\text{coll}}} = \frac{15N_0}{8\pi R_x R_y R_z} = \frac{(15N_0)^{2/5}}{8\pi a^{3/5}} \left(\frac{m\bar{\omega}}{\hbar} \right)^{6/5}, \\ \mu = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2} \left(\frac{15N_0 a}{\sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}} \right)^{2/5}, \\ R_i = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_i^2}} \quad \text{pour } i = x, y, z. \end{cases} \quad (76)$$

La densité atomique $|\Phi_0|^2$ dans le condensat a donc une forme parabolique, dont l'extension dans les différentes directions est donnée par les rayons de Thomas-Fermi $R_i|_{i=x,y,z}$ qui sont alors très supérieurs à l'extension typique de l'état fondamental dans la direction i : $\sqrt{\hbar/m\omega_i}$. Les interactions répulsives ont en effet tendance à fortement faire grossir la fonction d'onde Φ_0 . Le potentiel chimique vérifie $\mu = g_{\text{coll}}n_{\text{max}} \gg \hbar\bar{\omega}$, ce qui peut être vu comme un critère global validant le régime de Thomas-Fermi. La condition s'écrit aussi $N_0a \gg \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$ où le second terme est l'expansion de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique de fréquence $\bar{\omega}$.

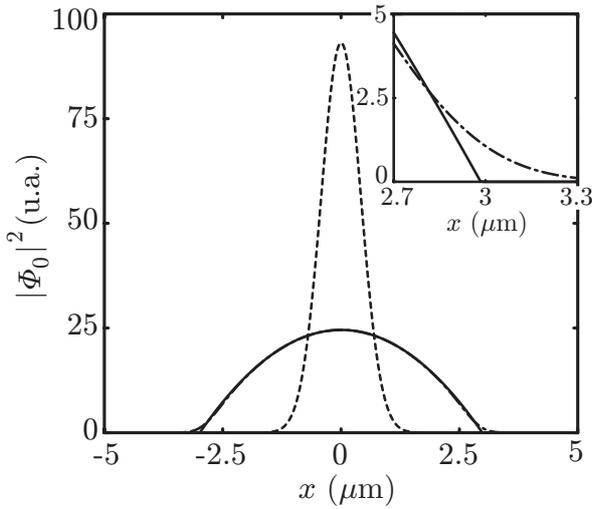


FIG. 29 – Densité $|\Phi_0|^2$ dans l'état fondamental selon la direction x : approximation de Thomas-Fermi (équation 75 en trait plein), solution numérique de l'équation 73 (tireté-pointillé), état fondamental de l'oscillateur harmonique sans interaction (en pointillé). L'encart représente la différence de comportement entre les deux premières courbes sur les bords du condensat, qui, par ailleurs, sont pratiquement confondues, montrant la validité de l'approximation de Thomas-Fermi. On a pris les fréquences du piège magnétique comprimé (§ II.2.2), et les paramètres, introduits dans le texte, sont $N_0 = 10^6$ atomes, $\omega_x = 2\pi \times 330$ Hz, $R_x = 3 \mu\text{m}$, $\mu = h \times 4.2$ kHz et $d_x = 270$ nm.

En réalité, le régime de Thomas-Fermi n'est pas atteint en tout point du condensat. Sur les bords ($x_i \approx R_i$), la densité s'annule et ne peut donc donner une énergie d'interaction plus grande que l'énergie cinétique. Plus précisément [86], sur une zone d'épaisseur $d_i = \sqrt[3]{\hbar^2 R_i / 4m\mu}$, Φ_0 ne décroît plus paraboliquement mais exponentiellement : la fonction d'onde a des « ailes », comme on le voit dans l'encart de la figure 29 où l'on a résolu numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii.

Après ces considérations générales sur le phénomène de condensation, nous présentons maintenant la mise en œuvre de méthodes expérimentales, permettant d'atteindre ce régime de dégénérescence quantique, à partir du nuage refroidi au terme de la mélasse (§ I.2.4).

II.2 Le piégeage magnétique

Le principe du piégeage magnétique est de tirer parti du fait qu'une énergie potentielle E est associée à un atome de moment magnétique $\vec{\mu}$ plongé dans un champ \vec{B} ,

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (77)$$

Le moment magnétique du Rubidium est dépendant de son état interne et le calcul quantique de l'énergie potentielle correspondante est présenté en annexe A.2.

Si, d'après le théorème de Wing [87], il ne peut y avoir de maximum de champ magnétique, par contre, un minimum local est possible, et l'on peut envisager d'y piéger les atomes neutres dont le moment magnétique est anti-aligné avec le champ.

Considérons, les atomes dans la multiplicité fondamentale $5^2S_{1/2}$. En développant la formule de Breit-Rabi (annexe A.2.2.c) au second ordre en champ B , on obtient les énergies magnétiques des états hyperfins $|F, m_F\rangle$ de cette multiplicité

$$E(F, m_F) \approx g_F \mu_B m_F B + (-1)^F \frac{(4 - m_F^2) g_F^2 \mu_B^2 B^2}{h \Delta_{\text{HF}}}, \quad (78)$$

où nous avons utilisé les relations entre les facteurs de Landé $g_I \ll g_J = 4(-1)^F g_F$. Cette relation présente un premier terme d'effet Zeeman linéaire et un second lié à l'effet Zeeman quadratique. En pratique, on peut négliger l'effet Zeeman quadratique, sauf dans le cas de m_F nul, pour lequel il constitue la contribution la plus importante⁴.

Les états piégeables au voisinage d'un minimum de B sont donc au nombre de quatre : $|F=2, m_F=2\rangle$, $|F=2, m_F=1\rangle$, $|F=2, m_F=0\rangle$ ainsi que $|F=1, m_F=-1\rangle$. Du point de vue des collisions d'échange de spin, seuls les deux états totalement polarisés $|F=2, m_F=2\rangle$ et $|F=1, m_F=-1\rangle$ sont stables (§ II.2.4.b). Cependant, les pertes par relaxation dipolaire [88] ou les pertes à trois corps, sont plus importantes pour le cas $F=2$ [89] que pour $F=1$ [90]. Enfin, du point de vue pratique, il n'y a qu'un seul état piégé de moment cinétique $F=1$: une fois les atomes dépompés dans cette multiplicité, le branchement du piège magnétique aboutit au piégeage de cet état seul, par opposition au piégeage d'un seul état de $F=2$ qui nécessiterait un pompage optique. Nous choisissons donc, par simplicité, de travailler dans la multiplicité fondamentale $F=1$.

II.2.1 Le piège de Ioffe-Pritchard

II.2.1.a Configuration de champ magnétique

Pour réaliser notre piège magnétique, nous utilisons une configuration de Ioffe-Pritchard [91] qui est la combinaison d'un confinement quadrupolaire dans le plan (x, z) invariant par translation, et d'un confinement selon l'axe y , qui est assuré par un champ dipolaire. Comme on le voit en figure 30, ceci résulte en un minimum du module du champ magnétique B en $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Dans la limite où l'on développe⁵ le champ magnétique au second ordre en $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ (coordonnée radiale) et y , il est caractérisé par trois paramètres [92] :

⁴On notera que la correction quadratique pour les états de $m_F \neq 0$, est au plus de $2\mu_B B / h \Delta_{\text{HF}}$, c'est-à-dire de quelques pour cent pour un champ B d'une centaine de gauss. Un tel champ serait exploré par des atomes de température $2\mu_B B / k_B = 13$ mK, ce qui est très grand par rapport aux températures inférieures au millikelvin des nuages piégés magnétiquement que nous manipulons.

⁵Ce développement est valable, lorsque l'on est assez proche du centre magnétique, ce qui reste toujours le cas expérimentalement.

- le biais B_0 qui correspond au minimum de champ dipolaire,
- la courbure B'' de confinement axial liée au champ dipolaire,
- le gradient B' de confinement radial du champ quadrupolaire.

Le champ magnétique total s'écrit alors

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{dip}} + \vec{B}_{\text{quad}} = B_0 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{B''}{2} \begin{vmatrix} -xy \\ y^2 - \frac{x^2+z^2}{2} \\ -zy \end{vmatrix} + B' \begin{vmatrix} z \\ 0 \\ x \end{vmatrix} . \quad (79)$$

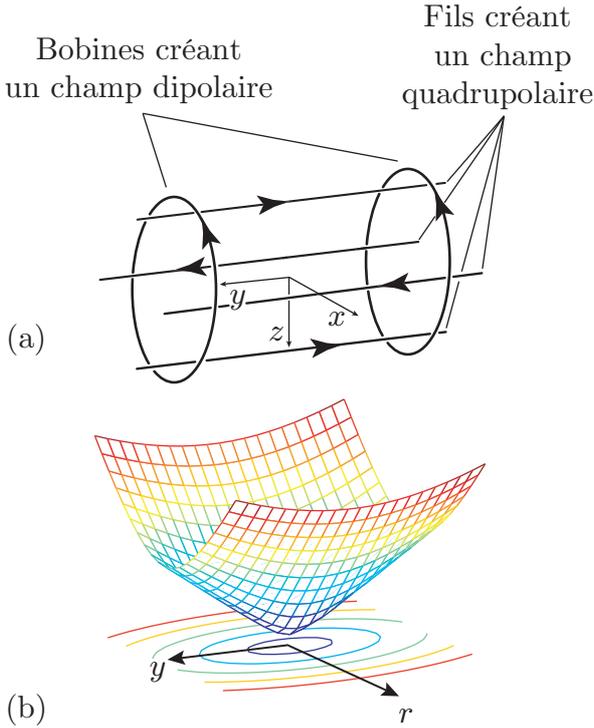


FIG. 30 – (a) Principe d'un piège de Ioffe-Pritchard : quatre fils créent un champ quadrupolaire dans le plan (x, z) , tandis que deux bobines créent un champ dipolaire selon y . Une telle configuration présente une symétrie cylindrique autour de l'axe y pour le module du champ magnétique au voisinage du centre. (b) Module du champ magnétique résultant, en fonction de la coordonnée radiale $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ et y .

La norme carrée du champ magnétique, développée au même ordre est

$$B^2 = B_0^2 + \left(B'^2 - \frac{B_0 B''}{2} \right) r^2 + B_0 B'' y^2 . \quad (80)$$

Le module du champ magnétique varie linéairement pour $r \gg B_0/B'$ et $y \gg \sqrt{B_0/B''}$, tandis que dans le cas inverse, au voisinage du minimum, le champ peut être développé quadratiquement selon

$$B = B_0 + \left(\frac{B'^2}{B_0} - \frac{B''}{2} \right) \frac{r^2}{2} + \frac{B''}{2} y^2 . \quad (81)$$

Dans la multiplicité $F=1$, le potentiel magnétique est semi-linéaire pour $m_F = \pm 1$ (premier terme de l'équation 78) et harmonique inversé pour $m_F = 0$ (second terme de l'équation 78).

II.2.1.b Fréquences de piégeage

Si l'on se limite au voisinage du centre du piège magnétique, l'énergie potentielle des états $|F=1, m_F = \pm 1\rangle$ s'écrit donc

$$E(F = 1, m_F = \pm 1) \approx \mp \frac{\mu_B B_0}{2} \mp \frac{m}{2} (\omega_r^2 r^2 + \omega_y^2 y^2) , \quad (82)$$

où l'on a introduit les fréquences de piégeage

$$\begin{cases} \omega_r = \sqrt{\frac{\mu_B}{2m} \left(\frac{B'^2}{B_0} - \frac{B''}{2} \right)}, \\ \omega_y = \sqrt{\frac{\mu_B}{2m} B''}. \end{cases} \quad (83)$$

L'énergie potentielle de l'état $|F=1, m_F=0\rangle$ s'écrit quant à elle (même dans la zone de champ linéaire)

$$E(F=1, m_F=0) = -\frac{\mu_B^2 B_0^2}{h\Delta_{\text{HF}}} - \frac{m}{2} (\omega_{Qr}^2 r^2 + \omega_{Qy}^2 y^2), \quad (84)$$

avec les fréquences de l'effet Zeeman quadratique

$$\begin{cases} \omega_{Qr} = \sqrt{\frac{2\mu_B^2}{mh\Delta_{\text{HF}}} \left(B'^2 - \frac{B_0 B''}{2} \right)}, \\ \omega_{Qy} = \sqrt{\frac{2\mu_B^2}{mh\Delta_{\text{HF}}} B_0 B''}. \end{cases} \quad (85)$$

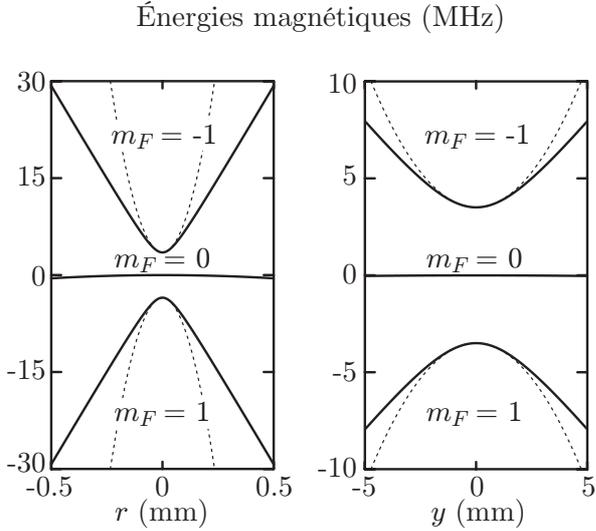


FIG. 31 – Tracé des énergies potentielles magnétiques selon les deux directions $(r, y=0)$ et $(r=0, y)$ pour les trois états $|F=1, m_F=-1, 0, 1\rangle$ (relation 78 en trait plein). On a représenté en pointillé l'approximation harmonique (équation 82) valable pour des distances $|r| \ll 60 \mu\text{m}$ et $|y| \ll 2.5 \text{ mm}$. Les applications numériques sont réalisées avec les paramètres du piège comprimé (table 6).

Lorsque nous écrivons la relation 78, nous considérons que le spin atomique suit l'orientation du champ magnétique, c'est-à-dire que l'axe de quantification, par rapport auquel sont définis les états $|F, m_F\rangle$, est défini localement par le vecteur \vec{B} . Ce suivi adiabatique n'est possible, que si la fréquence de précession du spin autour du champ \vec{B} , c'est-à-dire la fréquence de Larmor donnée par $\Omega_L = |g_F| \mu_B B_0 / \hbar = 2\pi \times 3.5 \text{ MHz}$ au centre du piège, est beaucoup plus rapide que la fréquence typique de variation de l'orientation du champ magnétique Ω_B [93]. Cette relation est vérifiée, même dans le cas le plus défavorable du piège comprimé, où la distance de variation typique de l'orientation du champ magnétique $B_0/B' = 60 \mu\text{m}$ est minimale. En effet, même pour des atomes à la température $T = 1 \text{ mK}$, Ω_B est de l'ordre de $B'/B_0 \sqrt{k_B T / m} = 2\pi \times 1 \text{ kHz}$.

II.2.1.c Effet de la gravité

Enfin, notons que le minimum de champ magnétique ne correspond au minimum du potentiel de piégeage, que selon les directions x et y . En effet, verticalement, le nuage atomique est non seulement soumis au potentiel magnétique, mais aussi à la gravité mgz . La combinaison des deux, dans la limite où il est suffisant de considérer le potentiel magnétique comme harmonique verticalement, aboutit à un potentiel de piégeage de même courbure, mais déplacé selon z d'une quantité $\sigma_M = g/\omega_r^2$, appelée le "sag" ou encore déplacement gravitationnel. En négligeant tout effet Zeeman quadratique, le potentiel total de piégeage s'écrit donc comme

$$V_{\text{ext}}(x, y, z) = \frac{m}{2} [\omega_r^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_r^2 (z - \sigma_M)^2] . \quad (86)$$

L'effet de la gravité est loin d'être négligeable : pour un piège non comprimé de fréquence radiale $\omega_r = 2\pi \times 24 \text{ Hz}$, le déplacement est de $430 \mu\text{m}$. Même pour le piège comprimé, ce décalage doit être pris en compte pour expliquer, par exemple, les propriétés d'un laser à atomes (chapitre III), ou encore, la cinétique de la fin de l'évaporation radiofréquence dans un piège décomprimé (chapitre VI).

II.2.2 L'électroaimant ferromagnétique hybride

II.2.2.a Dépendance du champ en fonction des courants

Pour créer le piège de Ioffe-Prichard, nous utilisons un électroaimant [38] dont la particularité, est d'utiliser un noyau ferromagnétique pour assurer le gradient quadrupolaire, tandis

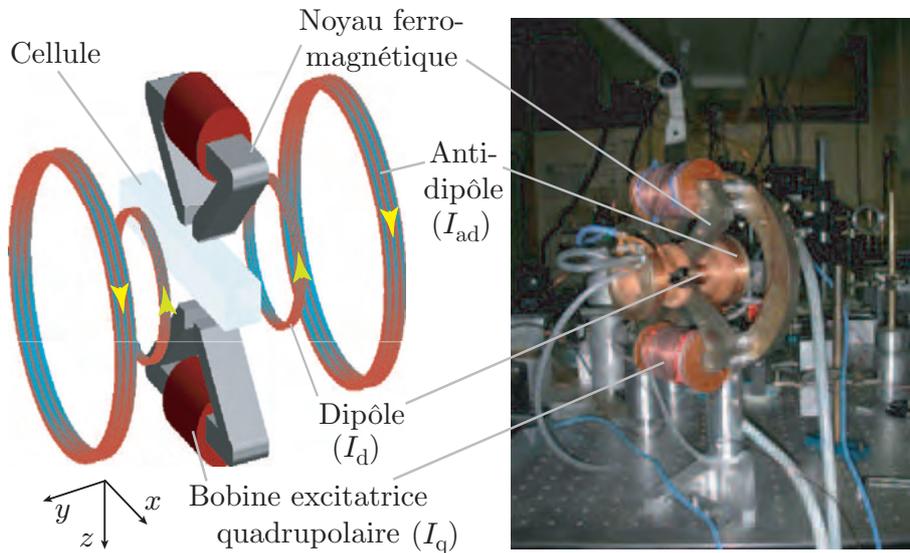


FIG. 32 – Schéma de l'électroaimant utilisé. La structure ferromagnétique, excitée par deux bobines parcourues par un courant I_q , crée le champ quadrupolaire, tandis que le confinement et le biais selon y sont assurés par deux paires de bobines en configuration dipôle (courants I_d identiques dans les deux bobines). Nous utilisons aussi une seconde paire de bobines en configuration anti-dipôle, c'est-à-dire parcourues par des courants I_{ad} tous deux de sens opposé à la première paire.

que la création du confinement dipolaire, ainsi que celle du biais est assurée par un jeu de bobines (figure 32). L'intérêt du matériau ferromagnétique, est de guider et de concentrer le flux magnétique au niveau du nuage atomique. De plus, cette optimisation du flux réduit la consommation électrique nécessaire pour créer les forts gradients dont nous avons besoin. Ceci facilite le refroidissement de telles structures par rapport à des solutions utilisant des bobines seules.

I_q (A)	5	10	15	20	25	30	40	50	60
B' (G/cm)	205	392	536	621	668	700	751	795	830

TAB. 5 – Gradient quadrupolaire B' en fonction de l'intensité I_q dans les bobines excitatrices.

	Piège non comprimé	Piège comprimé
I_q (A)	5	60
I_d (A)	15	15
I_{ad} (A)	0	15
B_0 (G)	54	5
B' (G/cm)	205	830
B'' (G/cm ²)	150	82
ω_r (Hz)	$2\pi \times 24$	$2\pi \times 330$
ω_y (Hz)	$2\pi \times 11$	$2\pi \times 8$
ω_{Qr} (Hz)	$2\pi \times 5$	$2\pi \times 20$
ω_{Qy} (Hz)	$2\pi \times 2.3$	$2\pi \times 0.5$

TAB. 6 – Configurations de piégeage utilisées.

Le champ créé par l'électroaimant est complètement caractérisé par la donnée des trois courants I_q , I_d et I_{ad} passant respectivement dans le quadrupôle, dipôle et l'anti-dipôle. La mesure de la dépendance des paramètres B_0 et B'' vis-à-vis des deux derniers courants est résumée par les deux relations suivantes

$$\begin{cases} B_0 \text{ (G)} = 3.61 I_d - 3.28 I_{ad} , \\ B'' \text{ (G/cm}^2\text{)} = 10 I_d - 4.53 I_{ad} , \end{cases} \quad (87)$$

où les courants sont exprimés en ampères. D'après la loi de Biot et Savart, on s'attend à ce que les champs créés par le dipôle et l'anti-dipôle, soient proportionnels aux courants, d'où la forme linéaire des expressions de B_0 et B'' . La dépendance de B' en I_q , quant à elle, est donnée dans la table 5. Elle présente une saturation assez marquée, puisque lorsque I_q

passé de 30 à 60 A, B' n'augmente que d'une quinzaine de pour cent. Nous donnons aussi les paramètres des deux configurations magnétiques utilisées pour aboutir à la condensation de Bose-Einstein dans la table 6.

II.2.2.b Spécificités du noyau ferromagnétique

Le matériau ferromagnétique présente un hystérésis. Expérimentalement, il est nécessaire de réaliser quelques cycles magnétiques pour avoir un champ magnétique reproductible d'une réalisation sur l'autre. De plus, même à excitation nulle ($I_q = 0$), il persiste un champ rémanent, qui peut perturber la phase de mélasse optique (§ I.2.4) en particulier. Ce champ est plus facilement compensé dans notre cas, par rapport aux électroaimants précédemment développés dans le groupe [65]. En effet, nous n'utilisons plus de noyau ferromagnétique pour le confinement dipolaire, ce qui limite les effets de couplage entre les différentes directions.

Un dernier paramètre technique important pour le piège magnétique, est son temps d'allumage et d'extinction. Le caractère laminé du matériau ferromagnétique que nous utilisons, minimise les courants de Foucault, ce qui permet d'atteindre des temps de montée et de coupure des champs de l'ordre de la centaine de microsecondes. Ceci est beaucoup plus rapide que le temps minimum d'évolution du nuage atomique donné par la fréquence radiale (3 ms), et on peut considérer la commutation des champs comme étant instantanée. On trouvera de plus amples détails, en particulier sur l'électronique utilisée dans [42, 38].

II.2.3 Chargement et compression du piège

II.2.3.a Précautions expérimentales liées au chargement

Nous chargeons le piège magnétique dans l'état à partir de la phase de mélasse (§ I.2.4). Pour ce faire, nous appliquons une impulsion lumineuse de dépompement puissant de 2 millisecondes, après avoir éteint tous les autres faisceaux, ce qui transfère les atomes dans $F = 1$, puis la brusque montée des champs magnétiques capture environ 1/3 de ces atomes dans l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$. Après la phase de mélasse, le nuage a une taille quadratique moyenne d'environ $\sigma = 0.5$ mm. La température d'un nuage ayant cette taille dans le piège magnétique non comprimé (première colonne de la table 6) est de l'ordre de

$$T = \frac{m\bar{\omega}^2\sigma^2}{k_B} \approx 40 \mu\text{K}, \quad (88)$$

ce qui est proche de la température de la mélasse (nous avons introduit la fréquence moyenne $\bar{\omega} = \sqrt[3]{\omega_r^2\omega_y}$).

Un décalage δr entre le centre du piège magnétique et le centre de la mélasse (c'est-à-dire du PMO), communique une énergie cinétique au centre de masse du nuage, qui se traduit après équilibre en un accroissement δT de la température finale dans le piège magnétique :

$$\delta T = \frac{m\bar{\omega}^2(\delta r)^2}{3k_B} = (\delta r)^2 50 \mu\text{K}/\text{mm}^2. \quad (89)$$

Un mauvais positionnement d'un millimètre, correspond donc à un doublement de la température dans le piège non comprimé. On voit qu'il est nécessaire que les centres des deux pièges soient séparés d'au plus de quelques centaines de microns, pour que cet effet de chauffage supplémentaire soit négligeable. Pour ajuster finement la position du piège magnétique par rapport à la position du piège magnéto-optique, nous avons un contrôle à l'aide de bobines

externes sur un biais supplémentaire de champ magnétique dans les différentes directions. Ce biais, qui est synchronisé avec les bobines de piégeage magnéto-optique, permet de déplacer le centre magnétique du PMO, et de l'ajuster au centre du piège magnétique. Le lecteur trouvera les détails du circuit dans [42, 38]. Notons enfin, que le réglage du positionnement du PMO se fait de manière itérative, avec la compensation des champs résiduels discutée au paragraphe I.2.4.b. En effet, ces deux réglages jouent sur le positionnement du nuage atomique.

II.2.3.b Compression adiabatique

Une fois les atomes transférés dans le piège non comprimé, nous souhaitons augmenter le taux de collisions élastiques, pour pouvoir amorcer efficacement la phase de refroidissement évaporatif (§ II.3). Pour ceci, nous comprimons le piège (seconde colonne de la table 6), en augmentant à la fois le gradient de champ magnétique et en abaissant le biais selon la séquence expérimentale représentée en figure 33. En procédant de manière adiabatique⁶, la densité dans l'espace des phases $\mathcal{D} \propto (\bar{\omega}/T)^3$ est conservée. La température au cours de la compression évolue donc proportionnellement à $\bar{\omega}$, tandis que le taux de collision au centre du piège $\gamma_{\text{coll}} = n(0)\sigma\bar{v}_{\text{rel}} \propto \bar{\omega}^3 T^{-1}$ varie comme $\bar{\omega}^2$. On a noté $n(0)$ la densité au centre, σ la section efficace de collision, et \bar{v}_{rel} la vitesse relative moyenne des atomes. Après compression, on attend donc, avec nos paramètres expérimentaux, une température multipliée environ par 5. En réalité, nous n'avons pas pris en compte deux phénomènes qui peuvent modifier ce résultat :

- Pour les températures de l'ordre de $250 \mu\text{K}$, la taille r.m.s. radiale est de $75 \mu\text{m}$ et le piège n'est plus harmonique (figure 31), mais semi-linéaire. Les lois d'échelle ci-dessus ne s'appliquent plus exactement, et l'on s'attendrait à une température plus importante, après compression adiabatique.
- La taille r.m.s. selon l'axe y est quant à elle de 3 mm , ce qui n'est pas négligeable devant la taille de la cellule. Ceci entraîne une évaporation sur les parois, qui a tendance à retirer les atomes les plus énergétiques, et donc à rabaisser la température moyenne.

Le nuage piégé obtenu contenant 2×10^8 atomes et, sa température étant au final de $250 \mu\text{K}$, les deux effets précédents semblent se contrebalancer expérimentalement.

	Pulse de dépompage (2 ms)	Chargement du piège (100 ms)	Compression du quadropole (2 s)	Abaissement du biais (1.4 s)	Piège comprimé (~27 s)
Dépompeur					
Piège magnétique					
Évaporation					

FIG. 33 – Succession des différentes étapes, entre la fin de la mélasse optique (§ I.2.4) et l'observation de la condensation de Bose-Einstein (§ II.4).

⁶C'est-à-dire en changeant les fréquences de piégeage, sur un temps beaucoup plus long que le temps caractéristique entre deux collisions, ou encore devant la période d'oscillation du nuage.

Pour que l'évaporation radiofréquence (§ II.3) aboutisse à un condensat de Bose-Einstein dans les meilleures conditions, il faut s'assurer que le piège magnétique soit suffisamment conservatif, c'est-à-dire que la durée de vie dans ce piège soit assez longue (§ II.2.4), et que le taux de chauffage résiduel soit négligeable (§ II.2.5).

II.2.4 Durée de vie

Outre l'impact de la qualité du vide discuté au paragraphe I.1.2.a, sur la durée de vie τ dans un piège conservatif, on peut noter l'influence de différents phénomènes supplémentaires, comme la présence de lumière parasite ou encore les collisions interatomiques.

II.2.4.a Effet de la lumière parasite

Pour conserver le nuage piégé, il est primordial qu'il n'interagisse pas avec de la lumière provenant des lasers de refroidissement. En effet, un atome initialement dans l'état $|F=1, m_F=-1\rangle$, qui absorbe un photon, a une probabilité importante de se désexciter dans les états $|F=1, m_F=0, 1\rangle$, et d'être ainsi perdu du piège. La lumière la plus gênante est la lumière du repompeur, car elle est la plus proche de résonance : le désaccord δ par rapport à la transition $F=1 \rightarrow F'=1$ (repompeur esclave), ou vis-à-vis de la transition $F=1 \rightarrow F'=2$ (repompeur maître), est de l'ordre de $\mu_B B_0 / \hbar \approx \Gamma$. L'intensité parasite de repompage suffisante pour qu'un atome piégé absorbe un photon par seconde, est donc environ donnée par $2 I_{\text{sat}}(1 + 4\delta^2/\Gamma^2)/\Gamma \approx 0.4 \text{ nW/cm}^2$. Des durées de vie de plusieurs minutes, nécessitent donc d'éliminer des intensités de repompage diffusées aussi faibles que quelques pW/cm². Pour cela, nous utilisons différents caches et obturateurs mécaniques qui isolent le nuage d'atomes, de la lumière parasite.

II.2.4.b Effet des collisions ultrafroides

Différents phénomènes collisionnels [78] sont possibles dans un piège magnétique : des collisions élastiques et inélastiques. Les premières, sont celles qui ne changent pas l'état interne, conservent l'énergie cinétique totale, et n'aboutissent à aucune pertes : ce sont elles qui sont utilisées pour l'évaporation radiofréquence (§ II.3). Les secondes, sont celles qui modifient l'état de la particule, ce qui peut conduire à des pertes, car la profondeur du piège est finie et le caractère piégeant du champ magnétique dépend de l'état considéré : les collisions d'échange de spin, la relaxation dipolaire ou les recombinaisons à trois corps.

Pour les températures de l'ordre de la centaine de microkelvins que nous manipulons, la barrière centrifuge pour les ondes d'ordre non nul supérieur (p, d, \dots), écrante le potentiel d'interaction. On peut donc restreindre l'interaction interatomique à une collision se réalisant dans l'onde s , c'est-à-dire dans les états, où le moment cinétique orbital relatif des atomes, qui est conservé, est nul. Pour les collisions inélastiques, faisant intervenir deux atomes (1) et (2) (les collisions d'échange de spin et la relaxation dipolaire), seule la composante m_F^{tot} du moment cinétique global $\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ est conservée en champ magnétique non nul.

Les collisions d'échange de spin entre deux atomes dans $|F=1, m_F=-1\rangle$, donnent forcément au moins un atome dans $F=2$ car $m_F^{\text{tot}} = -2$. En règle générale, pour les alcalins, ce phénomène a une constante caractéristique typiquement de $10^{-11} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui est très gênant pour les densités auxquelles nous travaillons. Mais pour le Rubidium 87, ce taux est très fortement réduit, car les déphasages collisionnels de processus se passant dans l'état

triplet ou dans l'état singulet⁷ sont pratiquement égaux. De plus, les collisions d'échange de spin peuvent être négligées pour le gaz piégé magnétiquement dans $|F=1, m_F=-1\rangle$, à cause de la conservation de l'énergie à nos faibles températures ($h\Delta_{\text{HF}}/k_B = 0.3 \text{ K}$), qui empêche de faire basculer un spin vers $F=2$.

La relaxation dipolaire consiste en un couplage entre le moment cinétique orbital et le spin, pendant la collision par l'intermédiaire de l'interaction dipolaire magnétique. Des mesures dans $|F=1, m_F=-1\rangle$ [90] donnent une borne supérieure à la constante caractéristique de ce processus : $K_{\text{dip}} \leq 1.6 \times 10^{-16} \text{ cm}^3/\text{s}$, ce qui fait qu'en pratique, pour toutes les densités que nous manipulons, ce phénomène de pertes est négligeable. Enfin, la recombinaison à trois corps n'est significative, que pour les fortes densités inhérentes aux condensats et est discutée au paragraphe II.4.3.

II.2.4.c Mesure

Pour un nuage non condensé, nous avons reporté en figure 34 le nombre d'atomes restants, en fonction du temps passé dans le piège magnétique. La durée de vie obtenue de plus de trois minutes, est compatible avec une pression résiduelle au niveau de la cellule de $5 \times 10^{-11} \text{ mbar}$, et montre que nous avons éliminé de manière satisfaisante les pertes dues à la lumière parasite. De plus, cette durée de vie est suffisante pour pouvoir réaliser la condensation de Bose-Einstein dans de bonnes conditions.

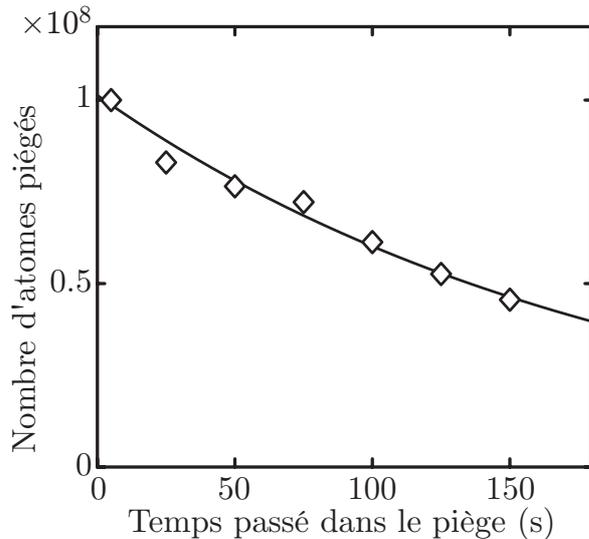


FIG. 34 – Nombre d'atomes restants, en fonction du temps passé dans le piège magnétique. Un ajustement exponentiel donne une durée de vie $\tau = 190 \text{ s}$.

II.2.5 Chauffage dans le piège magnétique

Le piège magnétique est idéalement un piège conservatif. Nous avons vu au paragraphe I.1.2.a, que les collisions d'incidence rasante avec le gaz résiduel, peuvent être à l'origine d'une augmentation de température. Outre ce phénomène, on peut noter l'intervention de phénomènes techniques comme des fluctuations du champ magnétique, ou des vibrations, qui induisent un battement ou un déplacement du piège, ce qui résulte en du chauffage.

⁷Une collision se déroulant dans l'état triplet, est un processus pour lequel le spin global $\vec{S}_{\text{tot}} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ vaut 1, tandis que dans le cas d'un état collisionnel singulet, il vaut 0.

II.2.5.a Évaluation du chauffage lié aux fluctuations des courants

Fluctuations des fréquences de piégeage

Considérons les fluctuations des courants I_d et I_q : ils induisent une modulation des fréquences de piégeage, ce qui entraîne un chauffage exponentiel. En effet, soit U le potentiel de piégeage dans la dimension i avec un bruit $\epsilon(t)$ sur la fréquence ω_i

$$U = \frac{m}{2} \omega_i^2 [1 + \epsilon(t)] x_i^2. \quad (90)$$

On peut alors montrer [94], qu'au premier ordre en perturbation, le gain d'énergie moyenne $\langle E_i \rangle$ par unité de temps s'écrit $\langle \dot{E}_i \rangle = \Gamma_i \langle E_i \rangle$, avec

$$\Gamma_i = \omega_i^2 \int_0^\infty d\tau \cos(2\omega_i\tau) \langle \epsilon(t) \epsilon(t + \tau) \rangle = \frac{\pi}{2} \omega_i^2 S_{\epsilon}(2\omega_i), \quad (91)$$

où l'on a introduit la densité spectrale de bruit $S_{\epsilon}(2\omega_i)$ à la fréquence $2\omega_i$. Seule compte cette fréquence, le facteur 2 provenant du fait, que la perturbation est en x_i^2 . Le taux de chauffage est proportionnel à l'énergie, car un nuage de forte énergie a une taille plus grande qu'un nuage très froid, et ressent donc plus les fluctuations du potentiel U qui croissent en x_i^2 .

Pour évaluer ce taux de chauffage, nous avons mesuré le spectre de bruit des circuits parcourus par les courants I_d et I_q . Nous avons utilisé un analyseur de spectre qui a mesuré la tension V aux bornes d'une résistance placée en série et de valeur faible, $R = 0.025 \Omega$, de façon à ne pas perturber le système. On obtient donc en données brutes $S_V^d(\omega)$ et $S_V^q(\omega)$, les spectres de bruit en tension associés au courant I_d et I_q .

En ce qui concerne les fluctuations de la fréquence ω_y , elles sont dues uniquement aux fluctuations du courant I_d . D'après les relations 83 et 87

$$\epsilon(t) = \frac{\delta(\omega_y^2(t))}{\omega_y^2} = \frac{\delta I_d(t)}{I_d}, \quad (92)$$

et la densité spectrale de bruit $S_{y\epsilon}(\omega)$ se déduit de $S_V^d(\omega)$ via

$$S_{y\epsilon}(\omega) = \frac{1}{R^2 I_d^2} S_V^d(\omega). \quad (93)$$

Par contre, la fréquence ω_r selon la direction radiale du piège, dépend à la fois⁸ de I_q et de I_d :

$$\epsilon(t) = \frac{\delta(\omega_r^2(t))}{\omega_r^2} = \frac{C_q \delta I_q + C_d \delta I_d}{B'^2/B_0 - B''/2}. \quad (94)$$

Nous avons réalisé un développement au premier ordre en $\delta I_{d,q}$ et introduit

$$\begin{cases} C_q = \frac{2B'}{B_0} \frac{dB'}{dI_q} \approx 1.2 \times 10^3 \text{ G.cm}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}, \\ C_d = -\frac{1}{2} \frac{dB''}{dI_d} - \frac{B'^2}{B_0^2} \frac{dB_0}{dI_d} \approx -9.1 \times 10^3 \text{ G.cm}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}, \end{cases} \quad (95)$$

⁸Notons qu'ici, nous ne prenons pas en compte, dans le calcul, des fluctuations du biais créées par les bobines de compensation externes, plus difficilement quantifiables, du fait de l'écrantage de la structure ferromagnétique. Nous avons réalisé une mesure globale de la stabilité du biais, à partir de lasers à atomes (§ III.3.2).

où les applications numériques sont obtenues pour le piège comprimé : $I_d = I_{ad} = 15$ A et $I_q = 60$ A (table 6). Les valeurs des dérivées selon I_d sont obtenues à partir des relations 87, et $dB'/dI_q \approx 3.7 \text{ G.cm}^{-1}.\text{A}^{-1}$ est évalué à partir de la table 5. La densité spectrale de bruit $S_{r\epsilon}(\omega)$ est donnée par

$$S_{r\epsilon}(\omega) = \frac{C_q^2 S_V^q(\omega) + C_d^2 S_V^d(\omega)}{R^2 (B'^2/B_0 - B''/2)^2}, \quad (96)$$

puisqu'il n'y a pas de corrélations entre δI_q et δI_d .

Nous avons reporté les spectres de bruit des circuits du dipôle et du quadrupôle en figure 35. Nous y lisons

$$\begin{cases} S_V^d(2\omega_y = 2\pi \times 16 \text{ Hz}) \approx 10^{-7.5} \text{ V}^2.\text{s}^{-1}, \\ S_V^d(2\omega_r = 2\pi \times 660 \text{ Hz}) \approx 10^{-10.8} \text{ V}^2.\text{s}^{-1}, \\ S_V^q(2\omega_r = 2\pi \times 660 \text{ Hz}) \approx 10^{-12.6} \text{ V}^2.\text{s}^{-1}. \end{cases} \quad (97)$$

On en déduit les taux de chauffage exponentiels attendus

$$\Gamma_y \approx \Gamma_r \approx 10^{-3} \text{ s}^{-1}. \quad (98)$$

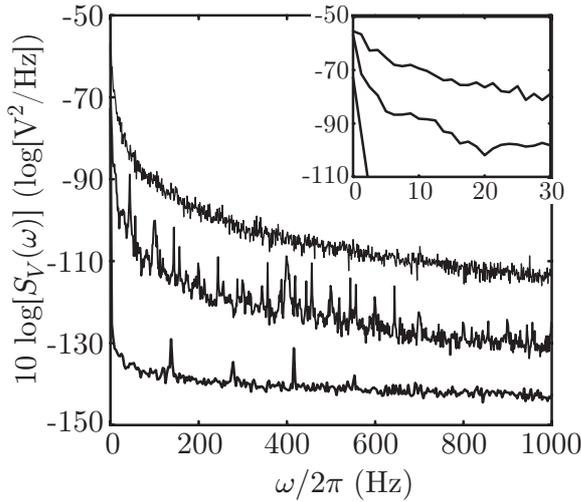


FIG. 35 – Spectre de bruit sur une plage de 1 kHz de la tension V aux bornes de la résistance R pour des circuits alimentés de telle façon à créer un piège magnétique comprimé. Du haut vers le bas : $S_V^d(\omega)$, $S_V^q(\omega)$ et le bruit de l'analyseur de spectre pour une intensité nulle. Les spectres sont exprimés en dB/Hz ($10 \log[\text{V}^2/\text{Hz}]$). L'encart montre plus précisément les faibles fréquences.

Ces deux taux de chauffage paramétrique sont du même ordre de grandeur. Remarquons qu'ils sont tous les deux dus aux fluctuations de l'intensité du dipôle I_d . En effet, dans l'expression du taux de chauffage dû au battement de la fréquence quadrupolaire Γ_r , on a $C_q^2 S_V^q(2\omega_r) \ll C_d^2 S_V^d(2\omega_r)$ et le chauffage est donc très majoritairement dû au biais créé par I_d qui fluctue. Le circuit d'alimentation le plus critique du point de vue des fluctuations d'intensité, est celui des bobines dipolaires. Le fait que les bobines du dipôle et de l'antidipôle qui créent le biais B_0 soient placées en série, favorise une diminution du bruit, par rapport au cas de deux paires indépendantes, selon le principe de réjection de mode commun. Il est aussi utile de noter que le fait que nous saturons le matériau ferromagnétique est particulièrement favorable pour limiter l'effet du bruit de I_q sur le gradient : dB'/dI_q est très faible par rapport à ce qu'il serait si le matériau n'était pas saturé.

Fluctuations en position du centre du piège

Envisageons maintenant un chauffage dû aux fluctuations en position du centre du piège magnétique. Comme discuté au paragraphe II.2.1, le nuage atomique n'est pas centré sur le

minimum du champ magnétique, mais est abaissé du “sag” $\sigma_M = g/\omega_r^2$ selon z , sous l’effet de la pesanteur. Les fluctuations de la fréquence de piégeage induisent donc aussi des fluctuations verticales de la position du centre du piège. Écrivons le potentiel de piégeage U dans la dimension z avec un bruit $\epsilon_z(t)$ sur son centre

$$U = \frac{m}{2}\omega_r^2 [z - \epsilon_z(t)]^2 . \quad (99)$$

De la même manière que précédemment [94], on peut alors montrer qu’au premier ordre en perturbation, le gain d’énergie moyenne par unité de temps s’écrit

$$\langle \dot{E}_z \rangle = m\omega_r^4 \int_0^\infty d\tau \cos(\omega_r\tau) \langle \epsilon_z(t) \epsilon_z(t + \tau) \rangle = \frac{\pi}{2} m\omega_r^4 S_{r\epsilon_z}(\omega_r) , \quad (100)$$

en introduisant la densité spectrale de bruit $S_{r\epsilon_z}(\omega_r)$ à la fréquence ω_r . Le chauffage dépend de la fréquence d’excitation du mode dipolaire (mouvement du centre de masse), et est linéaire et indépendant de la température : tous les atomes, quelle que soit leur position dans le potentiel, ressentent la même force $m\omega_r^2\epsilon_z(t)$ due au bruit. En remarquant

$$\epsilon_z(t) = \delta\sigma_M = -\sigma_M \frac{\delta(\omega_r^2(t))}{\omega_r^2} , \quad (101)$$

et en utilisant les équations 94 à 96 on obtient

$$\langle \dot{E}_z \rangle = \frac{\pi m g^2}{2} \left[\frac{C_q^2 S_V^q(\omega_r) + C_d^2 S_V^d(\omega_r)}{R^2 (B'^2/B_0 - B''/2)^2} \right] . \quad (102)$$

On lit sur la figure 35

$$\begin{cases} S_V^d(\omega_r = 2\pi \times 330 \text{ Hz}) \approx 10^{-10} \text{ V}^2 \cdot \text{s}^{-1} , \\ S_V^q(\omega_r = 2\pi \times 330 \text{ Hz}) \approx 10^{-12} \text{ V}^2 \cdot \text{s}^{-1} . \end{cases} \quad (103)$$

et on déduit le chauffage linéaire suivant

$$\frac{\langle \dot{E}_z \rangle}{3} = k_B \cdot 0.4 \text{ nK/s} . \quad (104)$$

Nous avons divisé le taux de chauffage par trois pour indiquer l’augmentation de température attendue, car l’énergie apportée au système à cause des fluctuations selon z , se répartit⁹ sur les trois degrés de liberté x , y , z .

Notons, qu’outre les fluctuations de courant, les fluctuations d’un champ externe dans le plan (x, z) , ou encore des vibrations mécaniques que subirait l’électroaimant, induiraient un déplacement de la position du centre du piège, ce qui aurait pour conséquence le même type de chauffage linéaire.

⁹En toute rigueur, dans le cas d’un piège purement harmonique, le mode dipolaire ainsi excité ne s’amortirait pas, et on ne verrait pas d’augmentation de la température, mais une oscillation du nuage. En pratique, on observe un chauffage, car les imperfections expérimentales rendent le piège légèrement anharmonique, ce qui permet de redistribuer l’énergie du mouvement du centre de masse vers les degrés de liberté internes du nuage.

II.2.5.b Comparaison avec les mesures

En partant de nuages thermiques piégés à une température de quelques microkelvins obtenus après évaporation (§ II.3), nous mesurons des taux de chauffage, à nombre d'atomes constant, de l'ordre de $0.2 \mu\text{K/s}$. Le taux observé est donc plusieurs ordres de grandeurs au-dessus de ce à quoi on s'attendrait, en prenant uniquement en compte nos mesures de fluctuations de courant (équation 98 et 104).

Nous soupçonnons que ce taux de chauffage est dû, en partie aux collisions avec le gaz résiduel (§ I.1.2.a), mais aussi aux collisions rasantes avec un nuage parasite : le nuage de Oort [95]. Il s'agit d'un nuage d'atomes peu dense et suffisamment peu énergétique pour rester piégé. Cependant, il est assez chaud pour transférer de l'énergie à notre échantillon.

Quelle que soit son origine, le chauffage mesuré n'est pas rédhibitoire pour observer la condensation de Bose-Einstein, car le taux de refroidissement induit par le processus d'évaporation discuté au paragraphe suivant est bien plus fort que le chauffage mesuré.

II.3 L'évaporation radiofréquence

Pour aboutir à la condensation de Bose-Einstein à partir du nuage magnétiquement piégé, nous utilisons la méthode l'évaporation radiofréquence qui a été proposée pour l'hydrogène polarisé dès 1986 [96]. C'est cette technique qui a permis l'obtention des premiers condensats en 1995. L'évaporation qui, depuis, a aussi été mise en œuvre dans des pièges optiques conservatifs [74], reste, aujourd'hui encore, la seule méthode efficace pour aboutir à la condensation.

II.3.1 Principe

II.3.1.a Lois d'échelle

Le principe du refroidissement évaporatif consiste à retirer du piège, préférentiellement les atomes les plus énergétiques, pour qu'après rethermalisation, les atomes restants aient une température moyenne plus faible que la température avant évaporation. Si ce phénomène est assez efficace, c'est-à-dire si les atomes retirés sont assez énergétiques pour que le gain en énergie soit appréciable, et si le gain en température est plus rapide que les pertes en nombre d'atomes, alors, globalement, la densité \mathcal{D} dans l'espace des phases augmente. Il peut aussi arriver, dans des conditions favorables, qu'à partir d'un certain moment, le gain en densité dans l'espace des phases soit auto-entretenu par le mécanisme d'évaporation. Il s'agit du phénomène d'emballlement où non seulement la densité dans l'espace des phases, mais aussi le taux de collision élastique γ_{coll} augmentent dans le temps, facilitant par là-même la rethermalisation, donc l'évaporation.

Une description quantitative complète de l'évaporation est possible à partir de l'équation de Boltzmann [97] et décrit particulièrement bien notre réalisation expérimentale comme cela a été montré dans [42]. Cependant, une telle approche nécessite l'intégration numérique d'équations d'évolution de différentes grandeurs, comme le nombre d'atomes N , la température T , etc... Nous nous limiterons ici à une approche fondée sur des lois d'échelle [98], permettant d'exhiber les paramètres clés qui font qu'une évaporation est efficace ou pas.

Considérons un gaz classique piégé harmoniquement, dont l'énergie E est donc reliée à la température par $E = 3Nk_{\text{B}}T$. La rethermalisation est plus rapide que l'évaporation, ce qui a pour conséquence, que la distribution à tout instant reste thermique. Nous supposons que nous tronquons le piège harmonique à l'énergie $\epsilon_T = \eta k_{\text{B}}T$. Ceci signifie, que tout atome ayant une énergie E supérieure à ϵ_T , est perdu du piège, et nous supposons que le rapport η reste constant au cours de l'évaporation, c'est-à-dire qu'au fur et à mesure que la température baisse, nous abaissons la profondeur du piège : l'évaporation est forcée.

L'énergie moyenne que retire du piège une quantité dN_{ev} d'atomes évaporés, est donnée par $dE = (\eta + \kappa)k_{\text{B}}TdN_{\text{ev}}$, avec κ proche de 1. L'énergie des atomes restant piégés est donc

$$E - dE = (3N - (\eta + \kappa)dN_{\text{ev}})k_{\text{B}}T = 3(N - dN_{\text{ev}})k_{\text{B}}(T - dT), \quad (105)$$

où le dernier membre correspond, après rethermalisation, à l'énergie d'équilibre du nuage contenant $N - dN_{\text{ev}}$ atomes à $T - dT$. On en déduit

$$\frac{dT}{T} = \alpha \frac{dN_{\text{ev}}}{N}, \quad (106)$$

où $\alpha = (\eta + \kappa)/3 - 1$ est l'efficacité de l'évaporation. En effet, un coefficient α supérieur à 1, traduit le fait que l'échantillon baisse plus en température que le nombre d'atomes ne diminue par évaporation.

En ce qui concerne la cinétique de l'évaporation, on peut montrer à partir de considérations sur l'équation de Boltzmann classique, que le taux d'évaporation Γ_{ev} est donné par

$$\frac{\dot{N}_{\text{ev}}}{N} = -\Gamma_{\text{ev}} = -\gamma_{\text{coll}} \frac{\eta}{\sqrt{2}} e^{-\eta}, \quad (107)$$

où l'on a introduit le taux de collision élastique au centre du piège $\gamma_{\text{coll}} = n(0)\sigma\bar{v}_{\text{rel}}$, avec $n(0)$ la densité au centre, $\sigma = 8\pi a^2$ la section efficace de collision pour les atomes indiscernables, $a = 5.3 \text{ nm}$ la longueur de diffusion, et $\bar{v}_{\text{rel}} = \sqrt{16k_{\text{B}}T/\pi m}$ la vitesse relative moyenne des atomes. Cependant, des phénomènes de pertes¹⁰ interviennent aussi et sont pris en compte dans une durée de vie τ (§ II.2.4)

$$\frac{\dot{N}_{\text{p}}}{N} = -\frac{1}{\tau}. \quad (108)$$

La diminution totale du nombre d'atomes s'écrit alors, comme la somme des contributions dues à l'évaporation et aux pertes $\dot{N} = \dot{N}_{\text{ev}} + \dot{N}_{\text{p}}$.

II.3.1.b Domaines d'évaporation

Considérons la densité dans l'espace des phases \mathcal{D}

$$\mathcal{D} \propto \frac{N}{V_r V_p}, \quad (109)$$

où V_r et V_p sont respectivement les volumes occupés dans l'espace des positions et dans l'espace des impulsions. Dans notre piège, $V_r \propto \langle r^2 \rangle^{3/2} \propto T^{3/2}$ et $V_p \propto \langle p^2 \rangle^{3/2} \propto T^{3/2}$, ce qui, en combinant les équations précédentes, aboutit à

$$\frac{\dot{\mathcal{D}}}{\mathcal{D}} = -\frac{1}{\tau} + (3\alpha - 1) \gamma_{\text{coll}} \frac{\eta}{\sqrt{2}} e^{-\eta}. \quad (110)$$

Par conséquent, pour que la densité dans l'espace des phases \mathcal{D} augmente au cours de l'évaporation, il faut que le produit $(\gamma_{\text{coll}}\tau)_{t=0}$ initial vérifie :

$$(\gamma_{\text{coll}}\tau)_{t=0} > \frac{\sqrt{2} e^{\eta}}{\eta(\eta - 3)}. \quad (111)$$

Des considérations analogues peuvent être faites sur l'évolution du taux d'évaporation

$$\Gamma_{\text{ev}} \propto \frac{N}{V_r} \sqrt[3]{V_p}, \quad (112)$$

qui aboutissent à

$$\frac{\dot{\Gamma}_{\text{ev}}}{\Gamma_{\text{ev}}} = -\frac{1}{\tau} + (\alpha - 1) \gamma_{\text{coll}} \frac{\eta}{\sqrt{2}} e^{-\eta}. \quad (113)$$

La condition pour que le taux d'évaporation augmente, c'est-à-dire, qu'il y ait emballement s'écrit alors

$$(\gamma_{\text{coll}}\tau)_{t=0} > \frac{3\sqrt{2} e^{\eta}}{\eta(\eta - 5)}. \quad (114)$$

¹⁰On néglige les pertes « par déversement », c'est-à-dire celles concernant la partie de la distribution atomique qui a une énergie ϵ_T , et qui est perdue sans rethermalisation lorsque la profondeur du potentiel diminue. Une telle approximation est valable dans notre cas, puisque l'on baisse la profondeur plus lentement que la vitesse typique de rethermalisation.

Nous avons tracé en figure 36, les domaines dans le plan $((\gamma_{\text{coll}}\tau)_{t=0}, \eta)$ pour lesquels l'évaporation est non efficace ($\dot{\mathcal{D}} < 0$ et $\dot{\Gamma}_{\text{ev}} < 0$), efficace ($\dot{\mathcal{D}} > 0$ et $\dot{\Gamma}_{\text{ev}} < 0$), ou connaît un emballement ($\dot{\mathcal{D}} > 0$ et $\dot{\Gamma}_{\text{ev}} > 0$). On cherche à être dans le dernier cas expérimentalement, afin d'être le plus efficace possible, ce qui nécessite un produit $(\gamma_{\text{coll}}\tau)_{t=0}$ supérieur à 300 et η environ de 7. En effet, à η plus faible, on perd trop d'atomes par évaporation par rapport au gain en température, tandis qu'à plus fort η , on devient limité par la durée de vie τ .

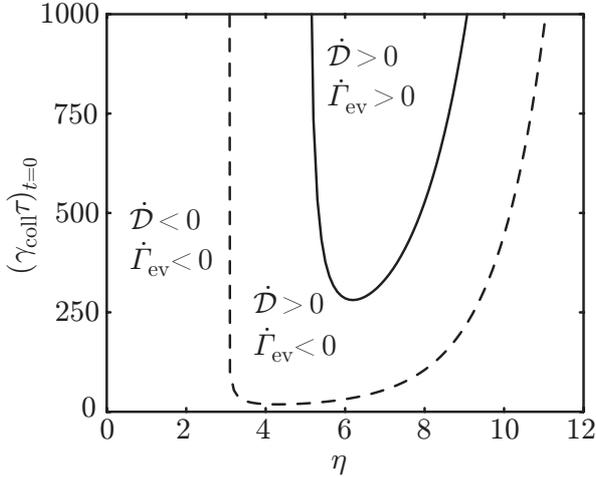


FIG. 36 – Domaines d'évaporation définis par les équations 111 et 114. La région à l'intérieur de la courbe en pointillés, correspond à une zone d'évaporation efficace, c'est-à-dire où \mathcal{D} augmente au cours du refroidissement. Le régime d'emballement a lieu pour une région plus restreinte, autour de $\eta=7$ et pour des produits $(\gamma_{\text{coll}}\tau)_{t=0}$ supérieurs à environ 300.

II.3.2 Réalisation

II.3.2.a L'atome habillé par le couteau radiofréquence

Le paramètre expérimental avec lequel nous contrôlons la profondeur du piège magnétique, est le couteau radiofréquence. Il s'agit d'un champ radiofréquence selon l'axe z , créé par les bobines du piège magnéto-optique mises cette fois-ci en configuration Helmholtz. Ce champ oscillant a une composante $\vec{B}_{\text{RF}\perp}$ perpendiculaire au champ \vec{B} du piège magnétique. Il induit donc des transitions entre les différents sous-états hyperfins $|F=1, m_F=1, 0, -1\rangle_{\vec{u}}$ qui suivent adiabatiquement l'orientation de $\vec{B} = B\vec{u}$.

En présence d'un champ radiofréquence $\vec{B}_{\text{RF}} = \vec{B}_{\text{RF}\vec{u}} + \vec{B}_{\text{RF}\perp}$ de fréquence ν_{RF} , le hamiltonien s'écrit

$$\hat{H} = \Omega \hat{F}_u + \Omega_{\text{RF}} \cos(2\pi\nu_{\text{RF}}t) \hat{F}_\perp, \quad (115)$$

où nous avons introduit les fréquences de Larmor $\Omega = |g_F|\mu_B B/\hbar$ et $\Omega_{\text{RF}} = |g_F|\mu_B B_{\text{RF}\perp}/\hbar$. Nous avons négligé la composante $\vec{B}_{\text{RF}\vec{u}}$ du champ radiofréquence selon \vec{u} devant le champ du piège. Elle est en effet de l'ordre de quelques dizaines de milligauss à comparer au champ du piège magnétique de plusieurs gauss. Nous utilisons aussi l'opérateur de moment cinétique hyperfin \hat{F}_\perp , localement aligné sur le champ radiofréquence perpendiculaire à \vec{u} .

Dans la base $|F=1, m_F=1, 0, -1\rangle_{\vec{u}}$, l'hamiltonien s'écrit, dans l'approximation du champ tournant,

$$\hat{H} = \hbar \begin{pmatrix} -\delta & \Omega_{\text{R}}/2 & 0 \\ \Omega_{\text{R}}/2 & 0 & \Omega_{\text{R}}/2 \\ 0 & \Omega_{\text{R}}/2 & \delta \end{pmatrix}, \quad (116)$$

où l'on a introduit la fréquence de Rabi $\Omega_{\text{R}} = \Omega_{\text{RF}}/\sqrt{2}$ et le désaccord $\delta = \Omega - 2\pi\nu_{\text{RF}}$ qui dépend de la position via le champ du piège magnétique apparaissant dans Ω . A priori, Ω_{R} dépend aussi de la position considérée, car l'orientation du champ radiofréquence par rapport à \vec{u} n'est pas constante. Par simplicité, nous négligeons cette dernière dépendance.

Le couplage radiofréquence lève la dégénérescence entre les trois états hyperfins, et les états propres de \hat{H} habillés par la radiofréquence ont une énergie

$$E_{\text{RF}} = \left\{ \pm \sqrt{\delta^2 + \Omega_{\text{R}}^2/2}, 0 \right\}. \quad (117)$$

Nous avons représenté en figure 37 ces énergies en fonction de la position \vec{r} . Pour les points où le désaccord δ est nul, la radiofréquence lève la dégénérescence des états $|F=1, m_F=1, 0, -1\rangle_{\vec{u}}$ sur une plage en énergie de l'ordre de $\Delta = \sqrt{2}\hbar\Omega_{\text{R}}$, permettant ainsi aux atomes piégés dans $|F=1, m_F=1\rangle_{\vec{u}}$, de s'échapper si leur énergie est assez grande. La valeur de la puissance de la radiofréquence (proportionnelle à Ω_{R}^2), peut être prise très haute, afin de s'assurer que Δ est assez grand pour que les atomes restent adiabatiquement dans l'état habillé inférieur, et ne passent pas dans l'état habillé supérieur au voisinage de la levée de dégénérescence. Cependant, sur la fin de la rampe de l'évaporation, il est nécessaire de baisser la puissance rayonnée, de telle façon à ce que la profondeur reste supérieure à $\hbar\Delta$, et afin que le piège ne soit pas trop déformé¹¹.

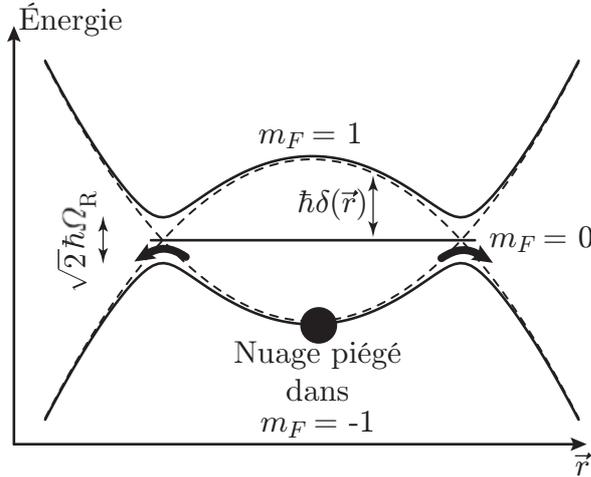


FIG. 37 – Énergie des états habillés par la radiofréquence (trait plein), et sans radiofréquence (pointillé). L'évaporation a lieu là où le désaccord δ est nul (flèches).

II.3.2.b Mise en œuvre expérimentale

Expérimentalement, nous commençons l'évaporation avec 2×10^8 atomes à une température de $250 \mu\text{K}$ dans le piège comprimé. La densité au centre du nuage¹² est de $3 \times 10^{11} \text{ at/cm}^3$ et la densité dans l'espace des phases est environ $\mathcal{D} = 4 \times 10^{-7}$. Initialement, nous avons donc un taux de collision élastique au centre $\gamma_{\text{coll}} = 70 \text{ s}^{-1}$, ce qui, combiné à la durée de vie $\tau = 190 \text{ s}$, nous permet d'être largement dans le régime d'emballement dès le début (figure 36). Le processus d'évaporation consiste alors à diminuer ν_{RF} en fonction du temps t . Sur les images, on observe un nuage atomique contenant moins d'atomes, mais plus froid. Le choix de la fonction $\nu_{\text{RF}}(t)$ se fait après optimisation de la densité \mathcal{D} dans l'espace des

¹¹Le champ radiofréquence est un outil utile pour déformer les potentiels de piégeage comme démontré, par exemple, dans [99].

¹²Nous ne pouvons utiliser la formule 17 donnant la densité $n(\vec{r})$ dans un piège harmonique, car le potentiel $U(\vec{r}) = g_F \mu_B m_F B(\vec{r})$ est semi-linéaire pour de telles températures T . On utilise donc la relation plus générale (avec N le nombre d'atomes piégés),

$$n(\vec{r}) = N \frac{e^{-U(\vec{r})/k_B T}}{\int d\vec{r} e^{-U(\vec{r})/k_B T}}.$$

phases, et du taux de collision γ_{coll} mesuré sur les images. Cependant, expérimentalement, nous nous sommes rendus compte que la forme de la rampe radiofréquence n'est pas extrêmement critique, du moment que le nuage est profondément dans le régime d'emballement ($(\gamma_{\text{coll}}\tau)_{t=0} \gg 300$). Pendant l'évaporation, il est important de s'assurer qu'il n'y a pas d'atomes qui sont piégés dans $F = 2$ à cause de la lumière parasite (§ II.2.4.a). En effet, ces atomes constituent un réservoir chaud qui perturbe fortement le processus de refroidissement. Si nécessaire, on peut envisager s'en débarrasser, en illuminant le piège magnétique avec le faisceau de dépompage, et ce, par intermittence pendant l'évaporation.

Étant donné que notre durée de vie est relativement longue, on peut se permettre d'évaporer assez lentement pour maximiser au final le nombre d'atomes condensés. Ainsi, après 27 secondes d'évaporation, nous assistons à l'apparition du nuage quantique dégénéré : le condensat de Bose-Einstein.

II.4 Observation de la condensation

II.4.1 Transition vers la condensation

En figure 38, nous avons représenté les images correspondant à la transition de Bose-Einstein, et les ajustements correspondants, mettant en valeur les parties condensées et thermiques. Le nuage contenant 3×10^6 atomes à une température proche de $T_c \approx 600$ nK (images (b)) n'a clairement plus une allure gaussienne, mais présente une densité légèrement

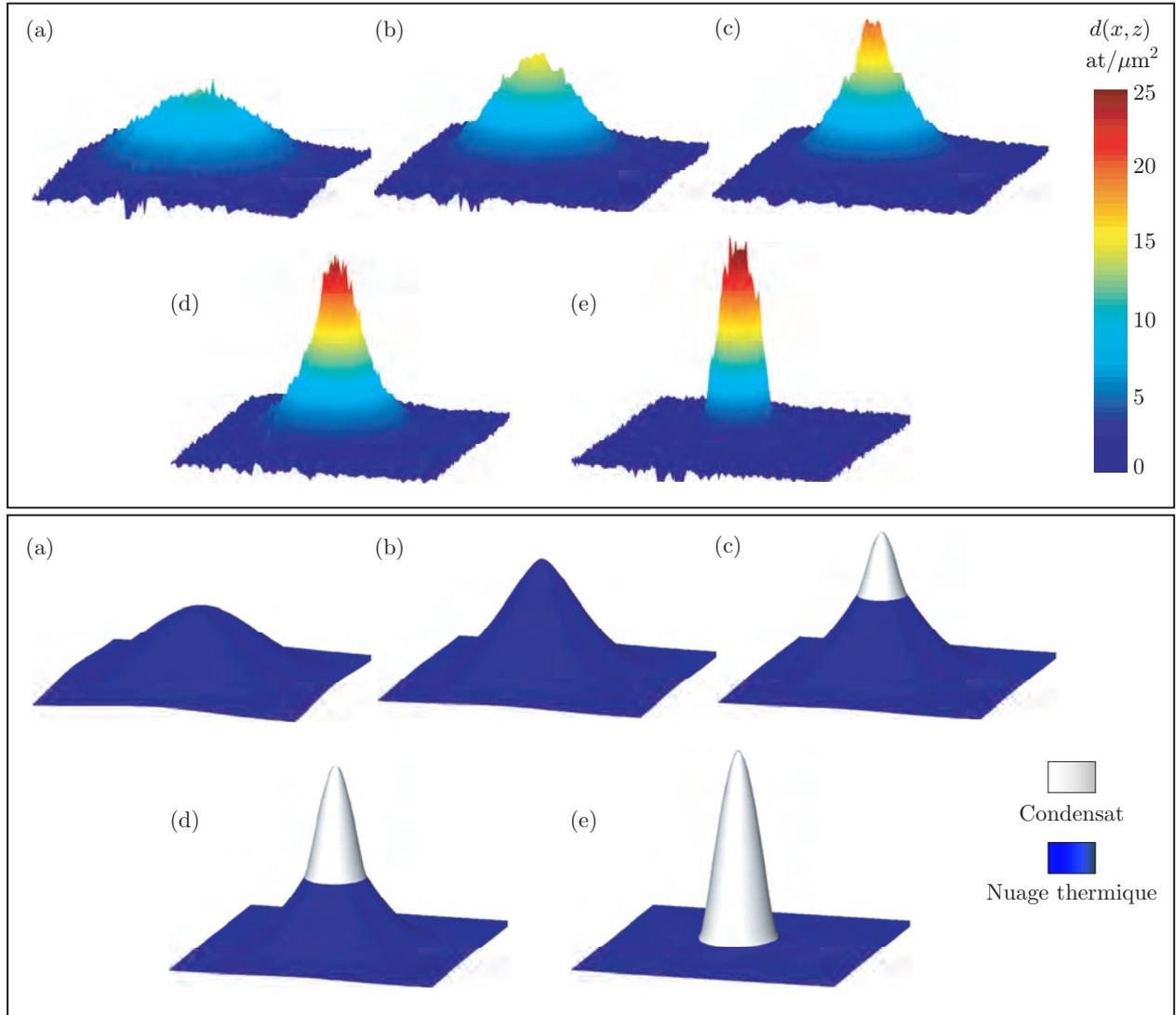


FIG. 38 – Premier cadre • Évolution de la densité atomique $d(x, z)$ intégrée en fonction de la valeur finale de la rampe radiofréquence (a) 4350 kHz ($T > T_c$), (b) 4290 kHz ($T \approx T_c$), (c) 4280 kHz ($T < T_c$), (d) 4260 kHz ($T < T_c$), (e) 4210 kHz ($T \ll T_c$). Les images correspondent à un temps de vol t_v de 28 ms et la plage considérée selon (x, z) est de $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$. Second cadre • Ajustements correspondants : (a) ajustement gaussien (équation 18), (b) ajustement par une fonction de Bose (équation 121), (c) (d) et (e) ajustement par la somme d'une fonction de Bose et d'un profil de Thomas-Fermi (relations 119 et 121).

piquée en son centre, caractéristique de la distribution 121, au contraire de l'image (a) pour laquelle $T \approx 1 \mu\text{K}$ et qui est très bien ajustée par une gaussienne. En abaissant la valeur de la radiofréquence, donc la valeur de la température, une double structure apparaît (images (c) et (d)), présentant un cœur dense entouré d'un nuage plus diffus. Plus la température baisse, plus le condensat croît, et on arrive ainsi à faire en sorte qu'un million d'atomes soit condensé (images (e)).

II.4.2 Analyse des images

II.4.2.a Expansion du condensat sous l'effet du temps de vol

Expérimentalement, on observe le condensat après un temps de vol t_v et les propriétés de son expansion sont cruciales pour comprendre cette étape. À la coupure du piège, l'énergie d'interaction se transforme progressivement en énergie cinétique. Dans la limite d'un piège très anisotrope [100], de symétrie cylindrique et de fréquences radiales et axiales ω_r et ω_y , le nuage reste parabolique, et les tailles radiales et axiales R_r et R_y évoluent selon

$$\begin{cases} \frac{R_r(t_v)}{R_r(0)} = \sqrt{1 + \tau^2} \approx \tau, \\ \frac{R_y(t_v)}{R_y(0)} = \left(1 + \left(\frac{\omega_y}{\omega_r} \right)^2 [\tau \arctan \tau - \ln(1 + \tau^2)] \right) \approx 1 + \left(\frac{\omega_y}{\omega_r} \right)^2 \frac{\pi\tau}{2}, \end{cases} \quad (118)$$

où l'on a introduit le temps réduit $\tau = \omega_r t_v$ et où les expressions approchées sont données dans la limite $\tau \gg 1$. On voit bien sur ces relations, que la partie radiale qui est la plus confinée, est aussi celle qui s'étend le plus vite. Après temps de vol, la densité intégrée selon l'axe y de l'imagerie s'écrit donc

$$d(x, z, t_v) = \frac{5N_0}{2\pi R_r^2 (1 + \omega_r^2 t_v^2)} \left(\max \left[1 - \frac{x^2 + z^2}{R_r^2 (1 + \omega_r^2 t_v^2)}; 0 \right] \right)^{3/2}. \quad (119)$$

En pratique, les caractéristiques du condensat que nous obtenons, sont les suivantes :

$$\begin{cases} N_0 = 10^6 \text{ atomes}, \\ n_{\max} = 5 \times 10^{14} \text{ atomes/cm}^3, \\ R_r = 3 \mu\text{m}, \\ R_y = 120 \mu\text{m}, \\ \mu = h \cdot 4 \text{ kHz}. \end{cases} \quad (120)$$

II.4.2.b Nuage thermique

La distribution spatiale de la partie non condensée est, quant à elle, approximée par une fonction de Bose pour un gaz idéal à saturation

$$d(x, z, t_v) = \frac{6 d(0, 0, t_v)}{\pi^2} g_2 \left[\exp \left(-\frac{x^2 + z^2}{2\sigma_r^2 (1 + \omega_r^2 t_v^2)} \right) \right], \quad (121)$$

où $\sigma_r = \sqrt{k_B T / m\omega_r^2}$ et $g_2(v)$ est une fonction polylogarithme que l'on peut approximer [101], pour $v \in [0, 1]$, par $g_2(v) = (1 - v) \ln(1 - v) + 1.98v - 0.16v^2 - 0.17v^3$. Ainsi, suivant le cas (condensat seul ou nuage thermique seul au voisinage de T_c), on utilise la relation 119 ou 121.

II.4.2.c Double structure

Dans le cas où les images présentent une double structure à la fois thermique et condensée ($T \leq T_c$), leur analyse se fait en plusieurs étapes. Il s'agit, dans un premier temps, de déterminer la température à partir des ailes de la distribution. On soustrait alors des images le nuage thermique déterminé précédemment, et l'on ajuste le résidu à une fonction de Thomas-Fermi. Ces deux étapes nous permettent d'avoir une estimation des paramètres de la double structure. Partant de ceux-ci, on ajuste globalement la distribution totale (condensat et nuage thermique : somme des relations 119 et 121) à l'image, d'où l'on tire les paramètres comme la température, la fraction condensée et les rayons de Thomas-Fermi.

Notons que la méthode d'analyse d'un nuage mixte présente un certain nombre d'imperfections :

- Le nuage thermique est traité comme un gaz parfait et sans interaction avec le condensat. En réalité, on peut montrer [101], que le condensat, à cause des interactions, a tendance à repousser le nuage thermique sur sa périphérie. En ne prenant pas en compte ce phénomène, on surestime légèrement l'importance du nuage thermique, et on sous-évalue donc la fraction condensée.
- Il est difficile de faire la différence entre un condensat pur et une fraction condensée de 80 %. En effet, pour des températures inférieures à la centaine de nanokelvin, la taille du nuage thermique est du même ordre que celle du condensat, et ce dernier le cache sur les images d'absorption. Si une partie des « ailes » reste visible, elle est facilement dans le bruit de l'imagerie, ce qui empêche de mesurer précisément la température.

Plus généralement, on trouvera dans [101] une discussion approfondie des effets des interactions sur la dynamique du nuage mixte, par exemple sur la modification de la relation 64. Dans la suite de ce manuscrit, nous ne tenons pas compte du nuage thermique dans les expériences de lasers à atomes, car nous nous plaçons toujours, expérimentalement et théoriquement, dans le cas où le nuage thermique est négligeable et n'est pas visible sur les images.

II.4.2.d Spécificités liées à l'image d'un condensat

Effet de l'intégration de la densité atomique selon l'axe long du condensat

Lorsque l'expérience est particulièrement bien optimisée, on peut obtenir des condensats contenant plus d'atomes. Cependant, la détermination directe du nombre d'atomes est rendue difficile, du fait de l'absorption totale du faisceau sonde liée au fait que l'axe de l'imagerie est confondu avec l'axe long du piège. L'évaluation du nombre d'atomes se fait alors uniquement par la mesure de l'expansion spatiale de la fonction d'onde. Nous avons cherché à éviter ce problème d'imagerie, spécifique à nos condensats contenant plus d'un million d'atomes, en diminuant le confinement du piège ω_r avant la prise d'images. Si ceci diminue la densité pic initiale, l'effet est inverse en ce qui concerne la densité pic après temps de vol. En effet, un nuage comprimé s'étend beaucoup plus vite qu'un nuage non comprimé. À nombre d'atomes N_0 constant, R_r varie en $\omega_r^{-3/5}$ et donc $d(0, 0, t_v) \propto \omega_r^{-4/5} t_v^{-2}$ (relation 119) pour notre cas pratique où t_v excède quelques millisecondes ($t_v \gg \omega_r^{-1}$). La solution consisterait à disposer d'un plus grand temps de vol, qui est limité dans notre cas par la hauteur de la cellule. On peut noter qu'on observe le même type de comportement, pour un nuage thermique, puisque si l'on décomprime adiabatiquement le piège, la température T varie en $\omega_r^{2/3}$, σ_r en $\omega_r^{-2/3}$ et donc la densité pic à long temps de vol évolue en $\omega_r^{-2/3} t_v^{-2}$.

Calibration de l'imagerie

Notons qu'un condensat pur constitue aussi un système permettant la calibration du système d'imagerie. En effet, le nombre d'atomes dans le condensat peut être obtenu de deux manières différentes :

- en intégrant la densité atomique sur l'image,
- en mesurant, à l'aide d'un ajustement de Thomas-Fermi la taille du condensat R_r directement reliée au nombre d'atomes N_0 (relations 76).

La première méthode dépend du grandissement du système d'imagerie et de la section efficace d'absorption estimée dans la relation 8, tandis que la seconde est indépendante de cette estimation. La bonne correspondance des deux résultats nous permet de valider la valeur de la section efficace d'absorption. La taille de Thomas-Fermi varie très lentement en fonction du nombre d'atomes ($R_r \propto N_0^{1/5}$) et l'incertitude sur la taille étant de l'ordre de quelques pour cent, on estime l'incertitude sur le nombre d'atomes condensés à environ 15 %, ce qui est du même ordre que l'incertitude de la relation 8. Ceci n'est cependant pas préjudiciable pour l'analyse des expériences de lasers à atomes présentées dans la suite de ce manuscrit, qui sont beaucoup moins sensibles au nombre d'atomes, qu'à la forme du condensat fixée par les caractéristiques du piège.

II.4.3 Durée de vie et collisions à trois corps

Un condensat de Bose-Einstein de Rubidium 87 gazeux, est un état métastable de la matière. En effet, à des températures aussi basses, cet élément est thermodynamiquement stable sous forme solide. Ainsi, on s'attend à ce qu'en augmentant la densité, le gaz devienne instable. Une conséquence de ceci, est qu'aux fortes densités présentes dans le condensat, des collisions à trois corps deviennent prépondérantes. Il s'agit d'un phénomène de collisions à trois atomes, dont le résultat est une molécule, et un atome seul [102, 103, 104]. L'ensemble acquiert une énergie cinétique de l'ordre de $\hbar^2/ma^2 \approx 200 \mu\text{K}$ avec a la longueur de diffusion. Les molécules sont perdues, et le troisième atome gagne une partie de cette énergie de liaison. Il est donc lui aussi soit expulsé du piège, soit il va peupler le nuage de Oort [95]. La mesure [90] de la constante caractéristique de ces pertes pour un nuage thermique dans $|F=1, m_F=-1\rangle$ donne $K_3 \approx 4 \times 10^{-29} \text{cm}^6/\text{s}$.

Considérons l'évolution du nombre d'atomes N_0 dans un condensat, sous l'effet, à la fois, des collisions avec le gaz résiduel (durée de vie τ), et sous l'effet des collisions à trois corps¹³ de constante K_3^{CBE}

$$\frac{dN_0}{dt} = -\frac{N_0}{\tau} - K_3^{\text{CBE}} \int d\vec{r} |\Phi_0(\vec{r})|^6. \quad (122)$$

Le profil du condensat suit adiabatiquement la variation de N_0 et on peut expliciter l'intégrale par [89]

$$\int d\vec{r} |\Phi_0(\vec{r})|^6 = \frac{7}{6} \left[\frac{15^{2/5}}{14\pi} \right]^2 \left[\frac{m\bar{\omega}}{\hbar\sqrt{a}} \right]^{12/5} N_0^{9/5} = c_3 N_0^{9/5}. \quad (123)$$

La solution de l'équation 122 s'écrit

$$N_0(t) = \left[\exp\left(\frac{4t}{5\tau}\right) (N_0(0)^{-4/5} + c_3 K_3^{\text{CBE}} \tau) - c_3 K_3^{\text{CBE}} \tau \right]^{-5/4}. \quad (124)$$

¹³On ne prend pas en compte les processus de relaxation dipolaire, qui ont un effet plus faible sur la durée de vie [90].

Dans la limite où la durée de vie τ est bien plus grande que le temps d'observation t , on peut simplifier cette expression en

$$N_0(t) = \left[\frac{5}{4c_3 K_3^{\text{CBE}} t + 5N_0(0)^{-4/5}} \right]^{5/4}. \quad (125)$$

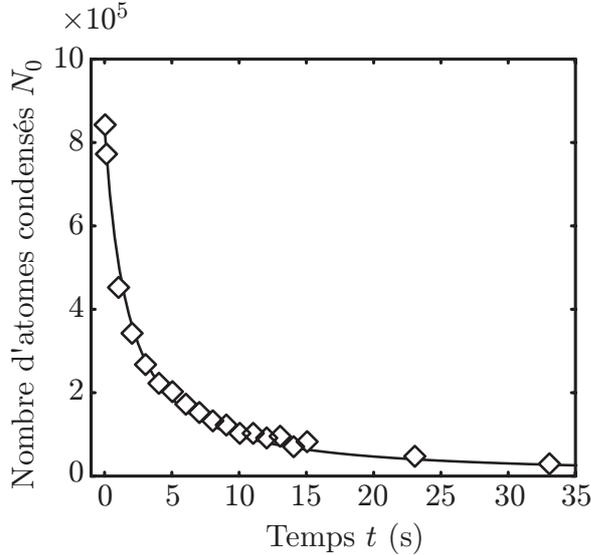


FIG. 39 – Nombre d'atomes restants dans le condensat après un temps t . La courbe correspond à un ajustement par la fonction 125, en laissant libres les paramètres K_3^{CBE} et $N_0(0)$. On obtient $K_3^{\text{CBE}} = 6 \times 10^{-30} \text{ cm}^6/\text{s}$ et $N_0(0) = 8 \times 10^5$ atomes.

Ainsi, nous avons observé la durée de vie d'un condensat contenant $N_0(0) = 8 \times 10^5$ atomes, en le conservant dans le piège comprimé, pendant un temps t variant entre 0 et 35 secondes, et l'on a reporté en figure 39 les points obtenus. Nous avons ajusté ces points par les fonctions 124 ou 125, en laissant libres respectivement soit K_3^{CBE} , $N_0(0)$ et τ , soit les deux premiers paramètres seulement. Ces deux procédures donnent les mêmes coefficients K_3^{CBE} et $N_0(0)$ et le premier donne une durée de vie τ très supérieure à ce que nous avons mesuré pour un nuage thermique $\tau = 190$ s. Ce dernier résultat montre bien que sur l'échelle de temps que nous considérons (35 s), les collisions avec le gaz résiduel sont négligeables. En réalité, ceci ne va pas de soi, car on s'attend à ce que la durée de vie due aux collisions avec le gaz résiduel soit plus faible pour un condensat que pour un gaz thermique. En effet, il est plus facile à une collision, même rasante, d'éjecter un atome du condensat plutôt qu'un atome thermique, puisque l'énergie en jeu est bien moindre. Cependant, pour éliminer les collisions avec le nuage de Oort, l'expérience a été réalisée avec un bouclier radiofréquence. Sans un tel bouclier, la durée de vie est bien moindre (de l'ordre de quelques centaines de millisecondes), car le chauffage dû au nuage de Oort est alors suffisant pour détruire rapidement le condensat.

La valeur de K_3^{CBE} obtenue est du même ordre que les valeurs mesurées dans [90] ($5.8 \times 10^{-30} \text{ cm}^6/\text{s}$) et dans [105] ($8 \times 10^{-30} \text{ cm}^6/\text{s}$). On remarquera que, du fait des effets de statistique quantique, la valeur de K_3 est réduite d'un facteur 3! pour un condensat, par rapport à un nuage thermique. En effet, pour un nuage thermique, un évènement faisant intervenir 3 atomes indiscernables dans 3 états différents peut être représenté par 6 combinaisons possibles, alors que dans un condensat, les atomes étant tous dans le même état, une seule combinaison représente l'évènement.

Une façon d'éviter ces pertes, consiste à décompresser le piège pour y faire baisser la densité atomique. Cependant, cela n'empêche pas de réaliser des expériences dans le piège comprimé, tant que la durée de ces manipulations est très courte devant la seconde.

Conclusion à la première partie

Au terme de cette partie, nous avons présenté les caractéristiques de notre dispositif expérimental qui nous a permis, en différentes étapes, d'obtenir la condensation de Bose-Einstein.

En particulier, tout au long de ces deux chapitres, nous avons mis en lumière l'importance de différents paramètres expérimentaux, dont le réglage est crucial pour l'obtention du nuage quantique dégénéré de manière fiable et répétable. Nous obtenons ainsi des condensats de Rubidium contenant un million d'atomes, et ce, malgré l'utilisation exclusive de diodes lasers de faible puissance. L'utilisation d'un électroaimant ferromagnétique hybride nous a permis de générer de forts gradients magnétiques facilitant une évaporation efficace, tout en contrôlant l'effet des champs magnétiques rémanents.

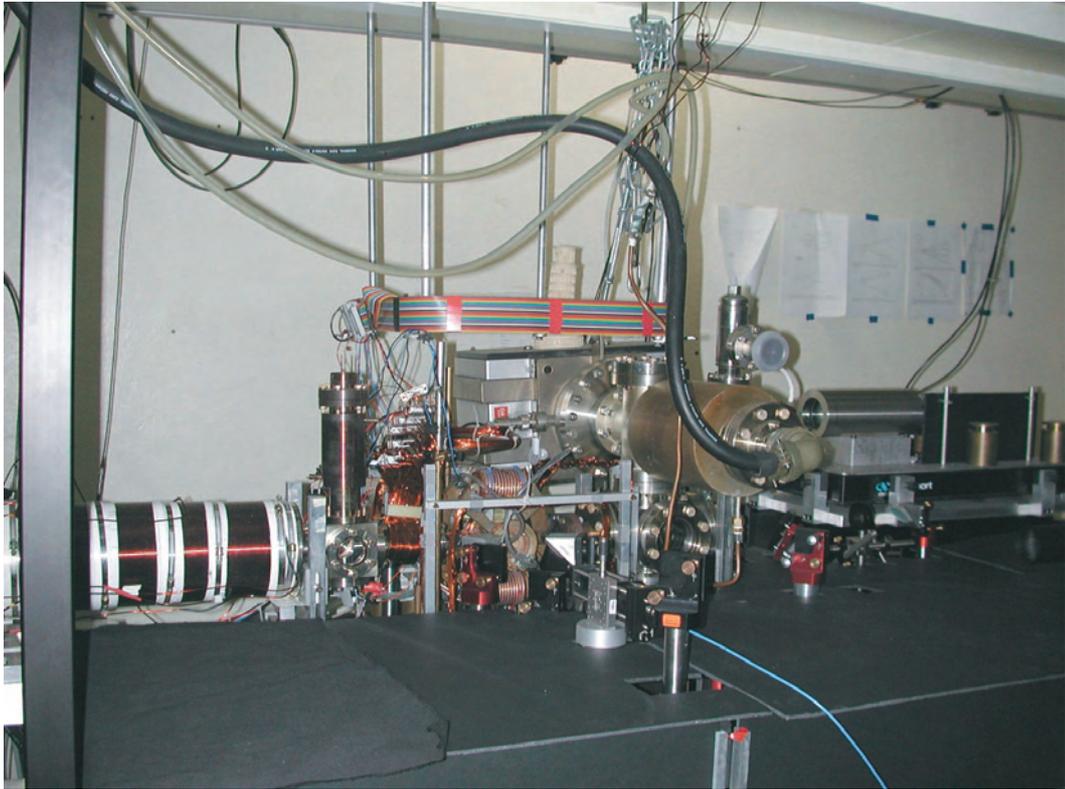


FIG. 40 – *Vue générale du dispositif expérimental.*

Au-delà de l'observation du phénomène de condensation, notre expérience a été conçue pour permettre, dans de bonnes conditions, la manipulation du nuage quantique dégénéré ainsi que son utilisation afin de réaliser un système propre à l'optique atomique : le laser à atomes.

Deuxième partie

Le laser à atomes

Introduction à la seconde partie

Le cœur de ce travail de thèse a consisté en la réalisation de laser à atomes issus de condensats de Bose-Einstein, ainsi qu'en l'étude de leur dynamique et de leur propagation.

La spécificité de notre expérience par rapport à d'autres dispositifs, consiste en le fait que nous bénéficions d'un confinement magnétique important, et ce, grâce aux forts gradients créés par notre électroaimant. La conséquence directe de cette configuration expérimentale est que les interactions jouent un rôle prépondérant entre le laser à atomes et le condensat, que ce soit pour les propriétés de couplage ou les propriétés spatiales de l'onde de matière extraite [106].

Après avoir rappelé les différents types de lasers à atomes réalisés jusqu'ici, nous nous intéressons, dans le chapitre trois de notre manuscrit, à la description de champ moyen de l'extraction de l'onde de matière. En particulier, nous discutons des propriétés de couplage vers le continuum libre, dans le cas que nous réalisons expérimentalement, où les interactions condensat-laser ne sont pas traitées de manière perturbative. Nous calculons ainsi le taux de couplage, que nous comparons à nos données expérimentales. Ceci nous permet, en particulier, de valider la stabilité du dispositif expérimental, vis-à-vis de la réalisation de lasers à atomes. Nous reportons ensuite, l'observation de la forte dépendance du profil de l'onde extraite en fonction des paramètres expérimentaux. En particulier, les fortes interactions entre le laser et le condensat produisent un profil non gaussien. Enfin, nous mettons en évidence un régime de couplage non markovien du laser à atomes, dont l'observation est facilitée par notre configuration expérimentale.

Dans le chapitre quatre, nous présentons notre étude de la propagation du laser à atomes. Contrairement à une étude précédente dans notre groupe [37], nous ne pouvons traiter le condensat comme une lentille mince vis-à-vis du laser, mais devons prendre en compte la forte déviation des rayons atomiques par rapport à l'axe. Ainsi, le début de la propagation du laser doit être traité dans un cadre non paraxial. Ceci, conjugué au fait que la propagation a lieu dans deux milieux différents (zone du condensat et hors du condensat), nécessite de séparer le traitement du problème en deux étapes correspondantes. Pour cela, nous nous sommes inspirés des traitements initialement développés en optique, en les appliquant au cas de la propagation en optique atomique. Nous montrons que la combinaison de l'iconale d'une part, et de l'intégrale de Kirchhoff d'autre part, est particulièrement adaptée à la description de notre système, et constitue une méthode de propagation alternative à la résolution numérique des équations de Gross-Pitaevskii. Tout au long de notre présentation, nous donnons donc un certain nombre de résultats analytiques permettant de calculer la fonction d'onde du laser dans tout l'espace. Enfin, nous comparons ce traitement à une simulation numérique ainsi qu'à nos images expérimentales.

Au-delà de la détermination de la fonction d'onde du laser, nous avons aussi voulu caractériser de manière synthétique la propagation du laser. Ceci est possible en restreignant notre étude au régime paraxial, qui est atteint après une propagation sous l'effet de la gravité, sur une distance d'un peu plus d'une centaine de microns. Nous pouvons alors, non

seulement simplifier la procédure de calcul de la fonction d'onde en utilisant le formalisme des matrices $ABCD$ paraxiales, mais aussi introduire un facteur de qualité M^2 en analogie avec le cas de l'optique photonique. Ce facteur intervient dans la loi d'évolution de la taille quadratique transverse du laser, évolution à laquelle nous avons accès expérimentalement. Ceci nous permet finalement de caractériser chacune de nos réalisations expérimentales, à l'aide du M^2 traduisant la dégradation du faisceau, imputable aux interactions initiales avec le condensat-source.

L'ONDE DE MATIÈRE EXTRAITE DU CONDENSAT

La réalisation des condensats de Bose-Einstein (CBE) à partir de gaz d'alcalins piégés, a suscité un renouveau d'intérêt pour l'optique atomique. En effet, le caractère cohérent de ces systèmes macroscopiques [107] en fait les meilleures sources à partir desquelles on peut envisager extraire des ondes de matières cohérentes et de grande luminance [108].

Le nom « laser à atomes » provient de la profonde analogie entre un tel système et un laser optique (figure 41). En effet, on peut mettre en parallèle la cavité optique présente dans tout laser, et le piège (magnétique ou optique) qui confine les atomes. De même, alors qu'un mode de cette cavité est macroscopiquement peuplé par les photons, le condensat de Bose-Einstein correspond à un mode (fondamental) du piège. Enfin, le rôle du miroir partiellement réfléchissant est joué dans le cas atomique par le couplage vers l'extérieur du piège.

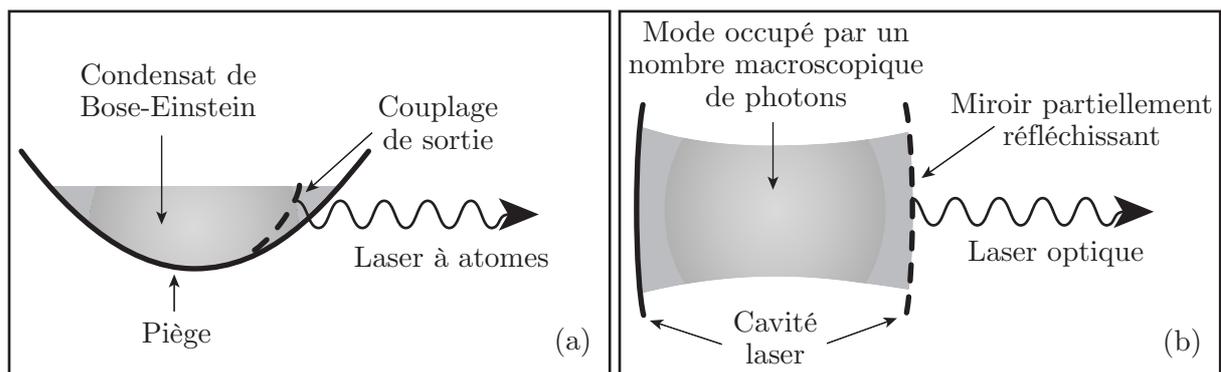


FIG. 41 – Schéma de principe d'un laser à atomes (figure a). Tout comme le laser optique (figure b), il comporte trois éléments clés : le piège qui correspond à la cavité laser, le condensat de Bose-Einstein qui joue le rôle du mode occupé par un nombre macroscopique de photons, ainsi qu'un couplage de sortie, équivalent au miroir partiellement réfléchissant.

Nous présentons tout d'abord dans ce chapitre, les différents lasers à atomes qui ont été

réalisés jusqu'ici (§ III.1), et qui se différencient par la méthode de couplage utilisée. En particulier, nous détaillons deux méthodes d'extraction très largement répandues, que sont le couplage radiofréquence et le couplage Raman.

Puis nous développons le cadre théorique de notre étude du couplage du laser à atomes, en présence d'interactions avec sa source qu'est le condensat, en englobant de manière générale les deux couplages précédemment cités. Dans le paragraphe III.2, nous détaillons la description de champ moyen du laser. À partir des équations de Gross-Pitaevskii régissant la dynamique du système, nous discutons des propriétés du continuum dans lequel il se propage, propriétés qui interviennent dans la dynamique de couplage que nous caractérisons. En particulier, nous calculons le taux de couplage dans le régime faible, réalisé expérimentalement, en appliquant le principe de Franck-Condon.

Nous présentons ensuite notre réalisation expérimentale du laser (§ III.3) à partir de couplage radiofréquence. En particulier nous insistons sur la nécessaire stabilité du biais magnétique pour réaliser des lasers à atomes quasi-continus à partir de condensats piégés magnétiquement. Enfin, nous discutons nos résultats expérimentaux concernant, d'une part, l'apparition de caustiques sur le faisceau laser, et d'autre part, la dynamique de couplage en régime intermédiaire non-markovien.

III.1 Méthodes de couplage des lasers à atomes

Si tous les lasers à atomes réalisés jusqu'à maintenant utilisent le condensat comme réservoir, c'est par la nature et la mise en œuvre du couplage de sortie qu'ils diffèrent. Il y a en effet différentes méthodes possibles pour transférer de manière cohérente les atomes du condensat vers l'onde propagative du laser. On peut, par exemple, déverser le nuage dans un potentiel non confinant, ou utiliser l'effet tunnel pour coupler vers l'extérieur du piège, ou encore transférer une impulsion à l'onde de matière au cours d'une transition initiale impliquant l'état interne (hyperfine) des atomes.

III.1.1 Couplage par déversement ou par effet tunnel

Le premier laser à atomes a été obtenu dès le premier temps de vol effectué sur un condensat de Bose-Einstein : en effet, les atomes tombant sous l'effet de la gravité forment, de fait, une onde de matière cohérente. On retiendra de cette technique rudimentaire, son caractère impulsionnel ainsi que le très faible taux de répétition des impulsions, car une fois que le condensat est lâché, il faut en recréer un nouveau dans le piège, ce qui nécessite typiquement quelques dizaines de secondes.

La contrepartie quasi-continue de ce schéma a été obtenue dans une expérience de réalisation d'un laser à atomes n'utilisant que des moyens optiques [109]. Le condensat est produit dans un piège optique fortement désaccordé. Une particularité de ce type de piège (chapitre VI) est qu'il a une profondeur finie. Ainsi, en abaissant cette dernière en dessous du potentiel chimique du condensat, une partie de ce dernier n'est plus piégée et s'échappe sous l'effet de la gravité (figure 42a).

Enfin, un schéma différent a permis de réaliser un laser impulsionnel avec un taux de répétition plus important que celui obtenu par temps de vol. Il utilise un réseau optique vertical préalablement chargé à l'aide d'un condensat [110]. Les paramètres de ce piège sont réglés de façon à ce que des ondes de matière puissent s'échapper de chaque puits par effet tunnel induit par la gravité. La phase relative entre chaque puits-source étant fixée, les ondes

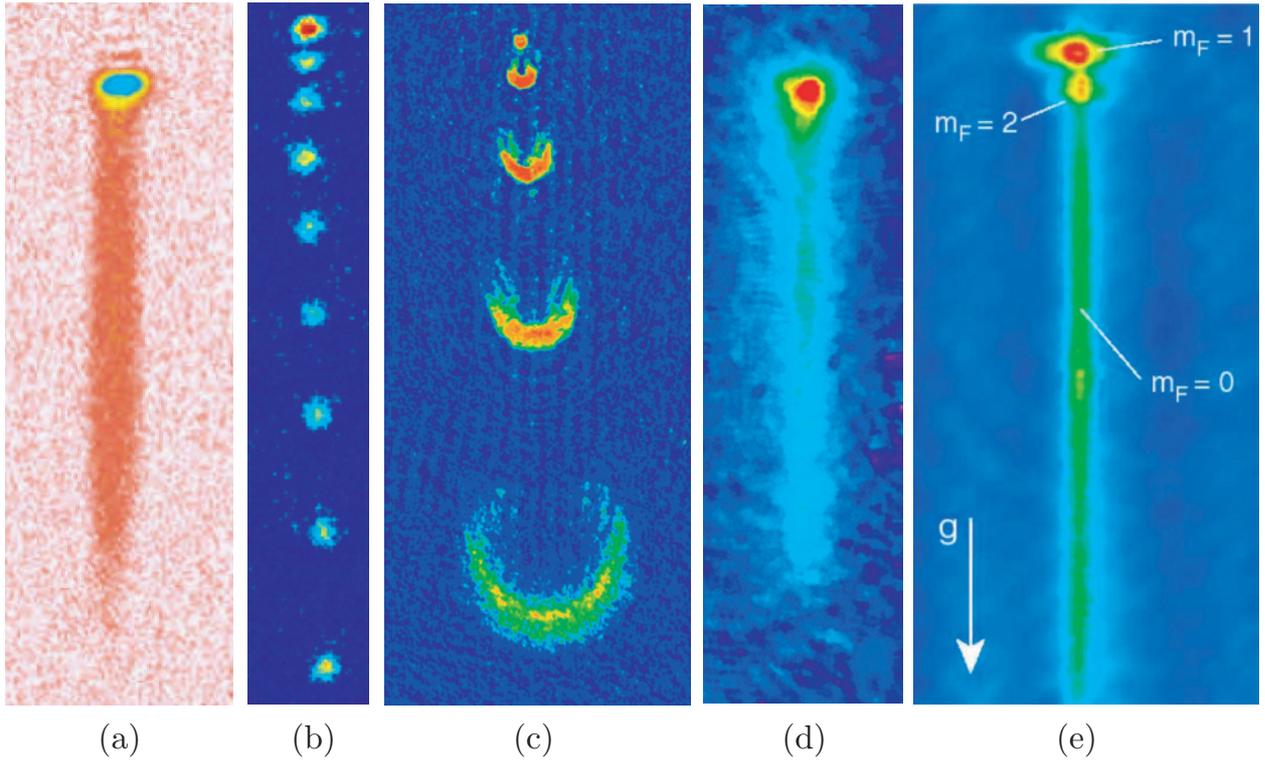


FIG. 42 – Images d’absorption de lasers à atomes obtenus par différents types de couplage : (a) laser quasi-continu extrait par déversement d’un condensat piégé optiquement [109], (b) laser impulsionnel, couplé par effet tunnel à partir d’un condensat piégé dans un réseau vertical [110], (c) laser impulsionnel couplé par radiofréquence [111], (d) laser impulsionnel à fort taux de répétition donnant un flux continu, couplé à l’aide de processus Raman [112], (e) laser quasi-continu extrait par radiofréquence [113]. Le condensat apparaît en haut de ces images, tandis que le faisceau laser se propage vers le bas, dans la direction donnée par la gravité.

extraites se superposent et l’interférence qui en résulte produit des impulsions régulièrement espacées (figure 42b).

Un point commun des couplages cités jusqu’ici est qu’ils ne font intervenir que les degrés de liberté externe des atomes condensés. Les atomes qui s’échappent du condensat par déversement ou effet tunnel, sont donc issus de la surface du condensat. Les méthodes que nous présentons dans le paragraphe suivant, permettent quant à elles de contrôler la zone d’où est issue l’onde de matière, tout en lui communiquant une impulsion initiale au moment du couplage.

III.1.2 Les couplages radiofréquence et Raman

Il s’agit des couplages les plus couramment utilisés. En effet, dans le cas du piégeage magnétique très largement répandu dans la communauté, l’état hyperfin des atomes détermine de manière univoque leur énergie potentielle (§ II.2). Le condensat étant gardé piégé, la seule façon d’extraire une onde pouvant se propager, est alors de faire basculer l’état interne d’une fraction des atomes condensés, ce que permettent les couplages radiofréquence et Raman.

III.1.2.a Schémas de principe

Nous représentons en figure 43 les schémas de principe correspondant à ces deux types de couplage. Ces derniers ont pour conséquence de transférer les atomes de l'état piégé vers un continuum d'états non piégés (§ III.2.3.a), en changeant l'état interne.

Cependant, alors que l'onde radiofréquence (figure 43a) effectue ce couplage en basculant directement le sous-état Zeeman de l'atome comme décrit au paragraphe II.3, le couplage Raman met en jeu deux lasers (figure 43b). Ceux-ci sont désaccordés par rapport à la raie atomique et n'induisent donc pas de transition au premier ordre vers l'état excité. Par contre, au second ordre, si le désaccord entre les deux lasers correspond à une transition entre deux états de la multiplicité fondamentale de l'atome, l'absorption d'un photon du laser et l'émission stimulée d'un autre dans le mode du second laser peut transférer efficacement l'atome vers un état hyperfin non piégé [114].

Même si le détail des deux processus de couplage est différent, leur principe est semblable. Dans les deux cas, il consiste en un transfert d'impulsion et d'énergie vers l'atome couplé, tout en faisant basculer son état interne, ce qui se traduit par la même perte en énergie interne au cours du couplage, $\hbar\Omega_0 = \hbar(\omega_2 - \omega_1)$. D'ailleurs, on retrouve formellement cette similitude, dans le fait que ces deux types de couplages sont pris en compte par un terme identique dans les équations dynamiques du laser (§ III.2.1.c).

III.1.2.b L'impulsion transférée au cours du couplage

Le point particulier qui différencie cependant le couplage radiofréquence du couplage Raman est la valeur de l'impulsion communiquée à l'onde de matière extraite.

Dans le cas de la radiofréquence, le transfert d'impulsion est donné par $\hbar|\vec{K}| = \hbar\Omega_0/c$ alors qu'une impulsion Raman induit un transfert d'impulsion $\hbar|\vec{k}_2 - \vec{k}_1|$. Pour des lasers non copropageants¹, ce dernier terme est de l'ordre de $\hbar\omega_{\text{at}}/c$, où ω_{at} est la fréquence optique de la transition. On voit donc que le rapport des impulsions transférées dans les deux cas est

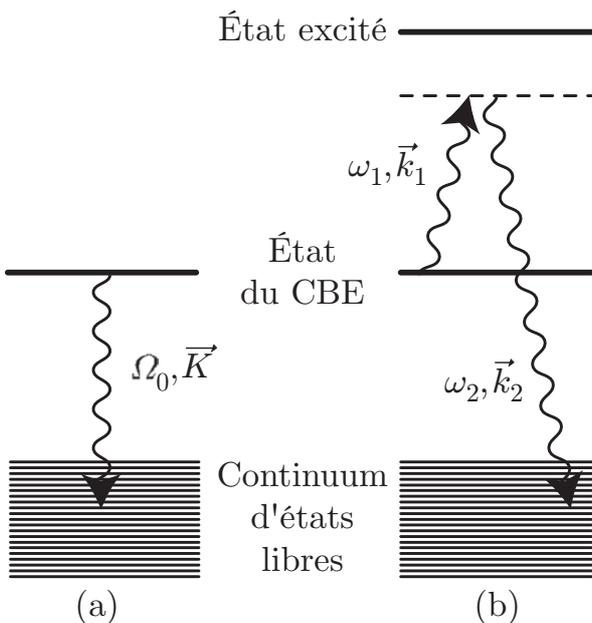


FIG. 43 – Schéma de principe des couplages de sortie changeant l'état interne des atomes du condensat. (a) Couplage radiofréquence : une onde de fréquence Ω_0 et de vecteur d'onde \vec{K} couple le condensat au continuum d'états non confinés. (b) Couplage Raman mettant en jeu deux lasers de fréquence et vecteur d'onde ω_i et \vec{k}_i . Un photon du premier est absorbé, tandis qu'un autre est émis dans le mode du second, pour transférer les atomes de l'état piégé à l'état non piégé. Les lasers sont assez désaccordés de la transition optique de l'atome pour que toute émission spontanée soit négligeable.

¹Il n'y a que dans le cas d'une impulsion Raman entre deux lasers parfaitement copropageants que l'impulsion transférée est donnée par $\hbar(\omega_2 - \omega_1)/c = \hbar\Omega_0/c$, soit la même chose que dans le cas de l'extraction par radiofréquence.

selon $\Omega_0/\omega_{\text{at}} \approx 10^{-8}$. Une transition Raman donne ainsi aux atomes une impulsion initiale de l'ordre du recul associé à la transition optique, tandis que l'impulsion donnée par le couplage rf est totalement négligeable.

De plus, on peut choisir la direction d'émission initiale d'un laser à atomes extrait par couplage Raman, alors que dans le cas radiofréquence il faut s'en remettre uniquement à l'effet de la gravité. Au chapitre VI, nous verrons que l'on peut cependant s'affranchir totalement de la gravité dans le cadre d'un laser guidé extrait par radiofréquence.

III.1.2.c Réalisations

Différents types de lasers à atomes ont été démontrés expérimentalement, en utilisant ces deux méthodes de couplage. Des impulsions radiofréquence de durée égale à quelques microsecondes, créent une superposition entre l'état condensé piégé et les états hyperfins libres [111]. Les bouffées atomiques cohérentes qui en résultent, forment alors un laser à atomes impulsionnel (figure 42c). De même, un flux périodique d'atomes issu du condensat a été obtenu à partir des impulsions Raman couplant les états hyperfins entre eux. De plus, l'augmentation de la cadence de répétition de ces impulsions, leur permet de se recouvrir et donc de constituer un faisceau laser continu [112] (figure 42d). Des lasers mettant en jeu un processus de couplage réellement quasi-continu ont été obtenus en allongeant la durée de l'impulsion, que ce soit par un couplage radiofréquence [113] ou par couplage Raman [115]. De tels lasers sont expérimentalement plus difficiles à réaliser que des lasers impulsionnels, car ils nécessitent une stabilité des paramètres expérimentaux, particulièrement du champ magnétique (§ III.3.2), sur de longues durées pour obtenir un flux réellement constant et contrôlé (figure 42e).

Enfin, notons que nous utilisons sur notre expérience le couplage radiofréquence, car il est plus simple à mettre en œuvre que le couplage Raman. Il utilise exactement les mêmes techniques que celles utilisées pour l'évaporation qui sont déjà installées pour obtenir le condensat, et ne nécessite pas l'ajout de faisceaux laser supplémentaires.

III.1.3 Différentes descriptions théoriques des propriétés de couplage

On peut trouver dans la littérature différentes approches pour traiter de la dynamique des lasers à atomes.

Une première famille de modèles considère le couplage du mode du condensat avec le continuum de modes propagatifs, et ce, à partir de l'équation de Heisenberg régissant les opérateurs de ces modes. Le spectre du laser à atomes, en l'absence d'interactions atomiques et de gravité, est ainsi dérivé dans les cas de couplage impulsionnel ou continu [116]. Par analogie avec l'optique quantique, certains auteurs [117, 118] ont aussi discuté la transposition de l'équation maîtresse traduisant le couplage d'un système à un réservoir au cas des lasers à atomes. En outre, la dynamique a été étudiée pour le cas d'un laser à atomes en fonctionnement à température non nulle. La présence des excitations a nécessité la prise en compte de nouveaux phénomènes [119], comme la présence d'une fraction thermique du laser à atomes, qui ont un effet sur la cohérence [120], ou encore le taux de couplage du laser vers différents potentiels [121]. Cependant, tous ces traitements se focalisent sur les propriétés statistiques quantiques du faisceau de sortie liées au couplage, et ne sont pas particulièrement adaptés à

l'étude de la propagation du laser après son couplage.

Un autre type très répandu d'approches théoriques traite ce système à partir de la limite de champ moyen des équations de Heisenberg : la dynamique du condensat et du laser est décrite par des équations de Gross-Pitaevskii couplées (§ III.2). Une telle méthode permet de considérer quantitativement le couplage et l'évolution spatiale du laser à atomes en prenant pleinement en compte les interactions atomiques et tout autre potentiel extérieur. Par contre, comme elle considère, d'entrée de jeu, le laser et le condensat comme des états cohérents, elle ne donne pas accès aux propriétés statistiques quantiques du système. Elle a cependant montré jusqu'à présent toute son efficacité à décrire différentes expériences de laser à atomes [122]. En particulier, elle se prête bien à des simulations numériques [123, 124, 125, 126, 127] de la dynamique du laser (annexe F). Ce formalisme a aussi été généralisé en introduisant des termes de perte et de gain, afin de se rapprocher du schéma d'un laser optique [128, 129].

Quelques résultats analytiques concernant le couplage ont été obtenus dans le cadre de la théorie de champ moyen. L'évolution de la population atomique du condensat ou encore de sa largeur spectrale a été donnée dans le cas d'un couplage impulsionnel faible sans gravité [130], et en prenant en compte l'effet de la gravité dans le cas du couplage fort [131]. Enfin, en négligeant l'effet des interactions sur le laser, le taux de couplage à trois dimensions a été calculé à partir d'une règle d'or de Fermi [132].

Nous décrivons la dynamique de notre laser à atomes à partir d'une approche de champ moyen, suffisante pour rendre compte du couplage et de la propagation de l'onde de matière. Notre configuration géométrique, due aux forts gradients magnétiques de piégeage, nous place dans un régime spécifique où les interactions entre le laser et le condensat-source sont particulièrement importantes. Dans toute la suite de ce manuscrit, ce phénomène tient une place centrale dans notre description en étant traité de manière non perturbative.

III.2 Description de champ moyen du laser à atomes

III.2.1 Équations de Gross-Pitaevskii couplées

Dans le cadre de l'approximation de champ moyen, nous dérivons, dans ce paragraphe, les équations de Gross-Pitaevskii couplées, correspondant au système composé d'un laser à atomes et d'un condensat de Bose-Einstein à température nulle. Nous adoptons le même repère que celui du paragraphe II.2 qui est centré sur le minimum de champ magnétique (figure 44). Dans un souci de généralité, nous ne négligeons pas l'impulsion transférée à l'onde couplée, et notre description prend donc en compte, à la fois le cas du couplage radiofréquence et celui du couplage Raman.

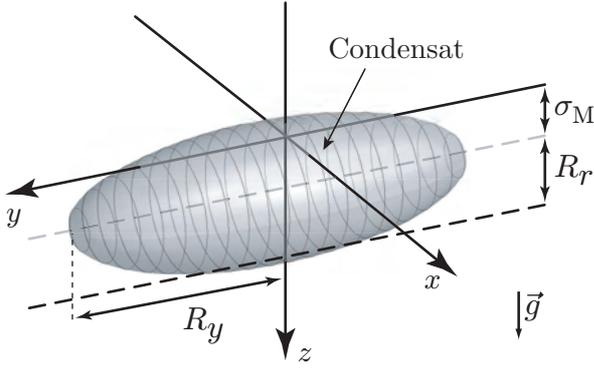


FIG. 44 – Géométrie du condensat vis-à-vis du repère employé. La fonction d'onde d'extension radiale et axiale R_r et R_y (rayons de Thomas-Fermi), voit son centre abaissé verticalement du "sag" σ_M par rapport au minimum de champ magnétique, qui correspond au centre du repère (x, y, z) . L'illustration est réalisée dans le cas du piégeage comprimé pour lequel $R_r > \sigma_M$.

Outre l'énergie cinétique, le hamiltonien global du système prend en compte des termes d'énergie potentielle, d'interaction interatomiques ainsi que des termes de couplage correspondant à l'extraction de l'onde de matière. Nous détaillons les expressions de ces différents termes dans les paragraphes suivants.

III.2.1.a Énergie potentielle

Cas du condensat

Le condensat ressent le piégeage magnétique ainsi que la gravité qui centre verticalement le piège total sur le "sag" $z = \sigma_M = g/\omega_r^2$ (équation 86). En notant V_0 , l'énergie de point zéro au centre du piège, on écrit l'énergie potentielle E_c ressentie par le condensat² comme

$$E_c(\vec{r}) = V_c(\vec{r}) + V_0 = \frac{m}{2} [\omega_r^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_r^2 (z - \sigma_M)^2] + V_0. \quad (126)$$

V_0 correspond à l'énergie magnétique de l'état $|F=1, m_F=-1\rangle$ au point $\vec{r} = (0, 0, \sigma_M)$. Dans la limite où le champ magnétique reste harmonique en ce point, c'est-à-dire pour laquelle $\sigma_M \ll B_0/B'$, soit $B' \gg 2mg/\mu_B = 30 \text{ G/cm}$ et qui est vérifiée expérimentalement, cette énergie est donnée par la relation 82,

$$V_0 = \frac{\mu_B B_0}{2} + \frac{m}{2} \omega_r^2 \sigma_M^2. \quad (127)$$

²On pourrait aussi prendre en compte les termes d'effet Zeeman quadratique donnés par l'équation 78, ce qui aurait pour conséquence de modifier très légèrement les fréquences de piégeage, sans pour autant changer la géométrie du piège, en particulier son centrage. La modification étant minime par rapport à l'effet Zeeman du premier ordre, nous négligeons ces termes ici.

Cas du laser à atomes

Le laser à atomes dans l'état interne $|F=1, m_F=0\rangle$ est quant à lui soumis à la gravité ainsi qu'à l'effet Zeeman quadratique (équation 84) qui est alors le terme d'énergie potentielle magnétique prépondérant. Ce dernier étant expulsant, la gravité a pour effet d'élever le centre du potentiel total d'une distance $\sigma_Q = g/\omega_{Qr}^2$ (figure 45), par rapport au centre du piège magnétique. Il s'ensuit que le potentiel ressenti par le laser à atomes s'écrit

$$V_\ell(\vec{r}) = -\frac{m}{2} [\omega_{Qr}^2 x^2 + \omega_{Qy}^2 y^2 + \omega_{Qr}^2 ((z + \sigma_Q)^2 - \sigma_Q^2)] . \quad (128)$$

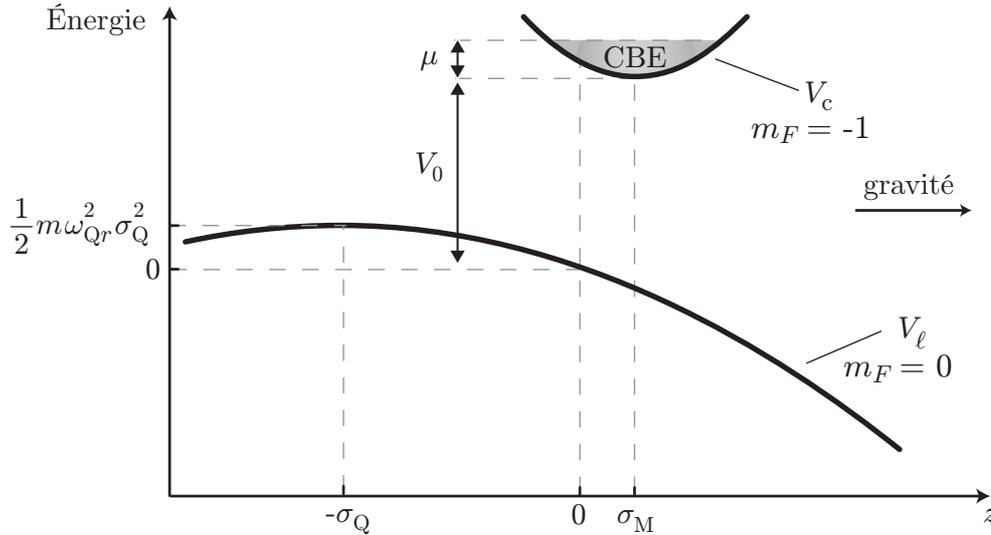


FIG. 45 – Allure des énergies potentielles du condensat $V_0 + V_c$ (équation 126) et du laser V_ℓ (équation 128), en excluant les interactions collisionnelles entre les deux fonctions d'onde. Le tracé est réalisé selon l'axe z vertical pour les deux états hyperfins considérés : $m_F = -1$ pour le condensat et $m_F = 0$ pour le laser. Par rapport à la référence énergétique dans l'état $m_F = 0$ au centre du repère, l'énergie du condensat est de $V_0 + \mu$. La courbure de l'effet Zeeman quadratique a été exagérée par souci de clarté.

Comme dans le cas du piégeage magnétique, cette expression n'est valable que si le spin atomique suit adiabatiquement le champ. Sinon, des transitions vers des états de m_F non nul sont possibles. L'énergie de l'effet Zeeman quadratique étant négligeable devant l'énergie Zeeman linéaire des états de $|m_F| = 1$, l'écart d'énergie magnétique entre les différents états hyperfins est le même qu'en l'absence d'effet quadratique, et la condition d'adiabaticité dérivée au paragraphe II.2.1 est aussi celle à considérer dans le cas présent. Le critère d'adiabaticité est vérifié sur toute l'étendue de la cellule où la vitesse atomique est au plus du mètre par seconde, du fait de la chute libre.

III.2.1.b Termes d'interaction

Cas général

Pour établir l'expression des termes d'interaction au sein du système constitué d'un condensat et d'un laser à atomes, nous partons du cas général où nous avons deux com-

posantes (1) et (2) dans le nuage de Bose

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \hat{\Psi}_{1,k_1}(\vec{r}) + \hat{\Psi}_{2,k_2}(\vec{r}). \quad (129)$$

Chaque composante (i) est représentée par son état $|i; k_i\rangle$ qui est le produit tensoriel d'un état interne $|i\rangle$, ainsi que d'un état externe $|k_i\rangle$ de fonction d'onde $\psi_i(\vec{r}) = \langle \vec{r} | k_i \rangle$. Les composantes peuvent donc différer par leur état hyperfin et/ou par leur état externe, suivant que l'atome est condensé, appartient à un laser à atomes ou encore est thermique. La constante de collision g_{coll} dans l'onde s ne dépend que de l'état interne et nous introduisons donc trois longueurs de diffusion a_{11} , a_{22} et a_{12} , qui correspondent respectivement à l'interaction entre deux atomes (1), deux atomes (2) et entre un atome (1) et un atome (2). Les constantes de collision associées selon la relation 67, sont notées g_{11} , g_{22} et g_{12} . Les collisions considérées étant élastiques, elles ne modifient pas l'état interne des particules et, dans le formalisme de la seconde quantification, le terme d'interaction global s'écrit

$$\hat{V}_{\text{int}} = \int d\vec{r} \sum_{\substack{a,b=1,2 \\ k_i, k_j}} \frac{g_{ab}}{2} \hat{\Psi}_{a,k_i}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}_{b,k_j}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}_{b,k_b}(\vec{r}) \hat{\Psi}_{a,k_a}(\vec{r}). \quad (130)$$

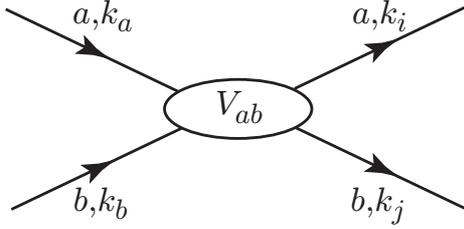


FIG. 46 – Représentation de l'interaction \hat{V}_{int} (équation 130). L'atome dans l'état $|a; k_a\rangle$ est annihilé pour être recréé dans l'état $|a; k_i\rangle$ tandis que celui initialement dans l'état $|b; k_b\rangle$ passe dans l'état $|b; k_j\rangle$, le processus d'interaction se réalisant avec une amplitude V_{ab} .

Dans la limite du champ moyen dans laquelle nous nous plaçons tout au long de ce manuscrit, seule compte la valeur moyenne de \hat{V}_{int} , prise sur l'état du système $|n_a, n_b\rangle$ correspondant à $n_{i=a,b}$ atomes dans l'état interne $|i\rangle$ et l'état externe $|k_i\rangle$. Ainsi, ne vont être utiles au final dans la somme 130 que les termes conservant le nombre d'atomes dans les états internes et externes, c'est-à-dire ceux pour lesquels $\{k_i, k_j\}$ correspondent aux couples $\{k_a, k_b\}$ et $\{k_b, k_a\}$, soit

$$\langle \hat{V}_{\text{int}} \rangle = \left\langle \int d\vec{r} \sum_{a,b=1,2} \frac{g_{ab}}{2} \left(\hat{\Psi}_{a,k_a}^\dagger \hat{\Psi}_{b,k_b}^\dagger \hat{\Psi}_{b,k_b} \hat{\Psi}_{a,k_a} + \hat{\Psi}_{a,k_b}^\dagger \hat{\Psi}_{b,k_a}^\dagger \hat{\Psi}_{b,k_b} \hat{\Psi}_{a,k_a} \right) \right\rangle. \quad (131)$$

Cas d'un condensat en interaction avec un laser à atomes

Dans le cadre de notre système composé d'un condensat ($1 = c$) et d'un laser à atomes ($2 = \ell$), les deux composantes sont dans deux états internes et externes différents. Dans l'expression 131, les termes analogues à $\hat{\Psi}_{c,k_c}^\dagger \hat{\Psi}_{\ell,k_c}^\dagger \hat{\Psi}_{\ell,k_c} \hat{\Psi}_{c,k_c}$ ne sont pas à prendre en compte dans la limite du champ moyen, car ils correspondent à la création d'un atome dans la fonction d'onde spatiale du laser ayant l'état interne du condensat et vice-versa. Il s'ensuit l'écriture du terme d'énergie d'interaction pour ce système

$$\langle \hat{V}_{\text{int}} \rangle_{\text{CBE-laser}} = \int d\vec{r} \left(\frac{g_{cc}}{2} |\psi_c(\vec{r})|^4 + \frac{g_{\ell\ell}}{2} |\psi_\ell(\vec{r})|^4 + g_{12} |\psi_c(\vec{r})|^2 |\psi_\ell(\vec{r})|^2 \right). \quad (132)$$

Les deux premiers termes correspondent à l'interaction au sein de chaque composante (diagramme 47a), tandis que le troisième terme correspond à l'interaction entre le laser et le condensat (diagrammes 47b).

Comparaison avec l'interaction entre différentes composantes

On notera que le troisième terme de l'équation 132 est deux fois plus faible que celui que l'on aurait, si l'on avait considéré pour la composante (2) un nuage thermique. En effet, dans un tel cas, l'état interne des composantes (1) et (2) est le même, et tous les termes de l'équation 131 sont à prendre en compte. Comme souligné dans [133], la littérature n'a pas toujours été unanime sur ce point délicat et un comptage minutieux des configurations de collision possibles est nécessaire pour aboutir au bon facteur.

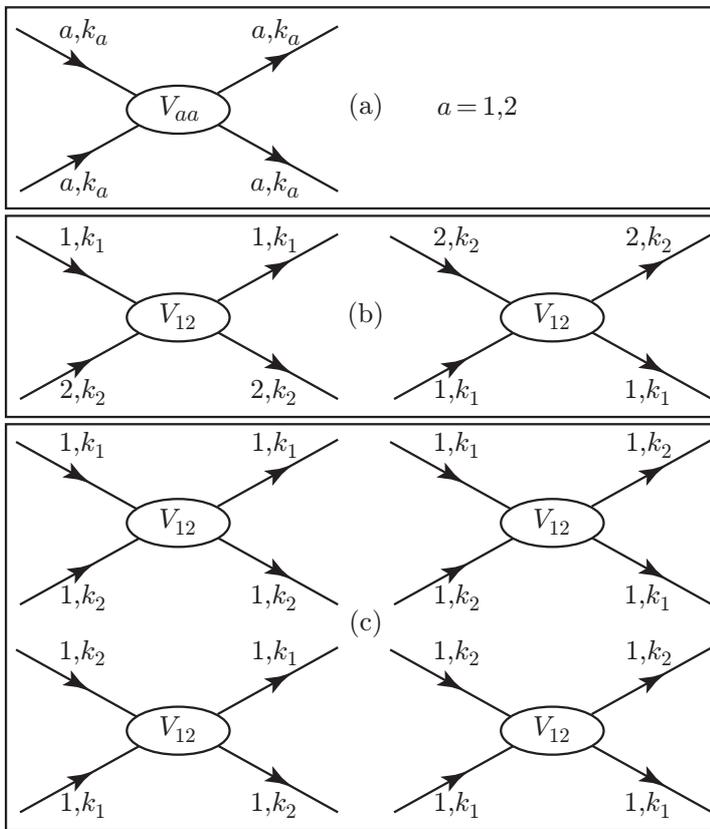


FIG. 47 – Représentation schématique des termes à prendre en compte dans $\langle \hat{V}_{\text{int}} \rangle$ (équation 131) en fonction des composantes considérées et comparaison au cas d'une interaction condensat-nuage thermique. (a) Cas de l'interaction au sein d'une même composante $|a; k_a\rangle$, l'indice a représentant le condensat ou le laser à atomes : un seul terme intervient. (b) Cas de l'interaction entre le condensat $|1; k_1\rangle$ et le laser à atomes $|2; k_2\rangle$: deux termes sont à prendre en compte. (c) Cas d'une interaction entre le condensat $|1; k_1\rangle$ et un atome du nuage thermique $|1; k_2\rangle$: le fait que les deux composantes aient le même état interne (1), a pour conséquence qu'il y a deux termes de plus par rapport au cas (b).

Simplification dans le cas du Rubidium 87

Notons enfin que, dans le cas du Rubidium 87, comme discuté dans le cadre des collisions d'échange de spin (§ II.2.4.b), il se trouve que les longueurs de diffusion dans l'état triplet et dans l'état singulet sont pratiquement identiques, ce qui rend les propriétés collisionnelles dans l'onde s , indépendantes de l'état interne considéré [133]. On peut donc, à une très bonne approximation, ne considérer qu'une seule valeur de la constante de collision g_{coll} , définie dans l'équation 67 et écrire que les constantes de collisions mettant en jeu le condensat (c) et le laser (ℓ) lui sont toutes égales,

$$g_{cc} = g_{\ell\ell} = g_{c\ell} = g_{\text{coll}} = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (133)$$

Bien que simplificatrice, cette égalité n'est pas nécessaire aux calculs présentés dans ce chapitre, et sauf pour alléger les notations ou réaliser des applications numériques, nous gardons les différentes constantes de collision dans un souci de généralité.

III.2.1.c Termes sources

Comme décrit dans le cadre de l'évaporation (§ II.3.2), le champ magnétique radiofréquence couple les états $|F=1, m_F\rangle$ entre eux. Plus précisément, il couple les états tels que $\Delta m_F = \pm 1$ selon l'élément de matrice de couplage (équations 115 et 116)

$$\hbar\Omega_R F(\vec{r}, t) \cos(\vec{K} \cdot \vec{r} - \Omega_0 t), \quad (134)$$

avec $\Omega_R = |g_F| \mu_B B_{\text{RF}\perp} / \sqrt{2} \hbar$, la fréquence de Rabi reliée à $B_{\text{RF}\perp}$, la composante du champ radiofréquence perpendiculaire au champ directeur du piège magnétique. Nous avons noté Ω_0 la radiofréquence ainsi que \vec{K} le vecteur d'onde associé et $F(\vec{r}, t)$, l'enveloppe du champ tenant compte d'une éventuelle variation spatiale et temporelle.

Contrairement, au cas de l'évaporation, nous considérons le cas d'une fréquence de Rabi faible. Ainsi, nous négligeons toute population dans l'état $|F=1, m_F=1\rangle$ qui est faiblement couplé à l'état $|F=1, m_F=0\rangle$, lui-même faiblement peuplé par le condensat piégé dans l'état $|F=1, m_F=-1\rangle$. Cette hypothèse permet de restreindre l'étude à un système à deux niveaux : le condensat et le laser. L'hamiltonien de couplage faisant intervenir les opérateurs champ du condensat $\hat{\Psi}_c$ et du laser $\hat{\Psi}_\ell$ s'écrit donc

$$\hat{W} = \int d\vec{r} \hbar\Omega_R F(\vec{r}, t) \cos(\vec{K} \cdot \vec{r} - \Omega_0 t) \left[\hat{\Psi}_\ell^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}_c(\vec{r}) + \hat{\Psi}_\ell(\vec{r}) \hat{\Psi}_c^\dagger(\vec{r}) \right]. \quad (135)$$

L'interprétation physique de cette relation est directe : le premier terme de la somme entre crochets correspond au transfert d'un atome du condensat vers le laser, tandis que son hermitique conjugué (second terme) correspond au processus inverse.

Notons que ce terme de couplage où nous ne négligeons pas le vecteur d'onde \vec{K} , est formellement identique à un terme de couplage Raman [114]. Les équations de Gross-Pitaevskii qui en découlent sont donc autant vérifiées dans le cas du couplage radiofréquence, que dans le cas du couplage induit par deux lasers, et ce, tant que seuls deux états c et ℓ rentrent en compte. On passe d'un cas à l'autre en prenant pour Ω_0 , \vec{K} et Ω_R , les valeurs correspondant au couplage étudié.

III.2.1.d Système d'équations couplées

À partir des expressions dérivées aux paragraphes précédents, on écrit $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$, avec

$$\hat{H}_0 = \int d\vec{r} \hat{\Psi}_c^\dagger \left[-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + E_c + \frac{g_{cc}}{2} \hat{\Psi}_c^\dagger \hat{\Psi}_c \right] \hat{\Psi}_c + \hat{\Psi}_\ell^\dagger \left[-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + V_\ell + \frac{g_{\ell\ell}}{2} \hat{\Psi}_\ell^\dagger \hat{\Psi}_\ell \right] \hat{\Psi}_\ell + g_{c\ell} \hat{\Psi}_c^\dagger \hat{\Psi}_\ell^\dagger \hat{\Psi}_\ell \hat{\Psi}_c, \quad (136)$$

où l'on n'a gardé que les termes qui ont une contribution non nulle dans la description de champ moyen.

L'équation de Heisenberg 71 appliquée respectivement aux opérateurs $\hat{\Psi}_c$ et $\hat{\Psi}_\ell$ nous

permet d'obtenir le système d'équations suivant

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}_c}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + E_c + g_{cc} \hat{\Psi}_c^\dagger \hat{\Psi}_c + g_{cl} \hat{\Psi}_\ell^\dagger \hat{\Psi}_\ell \right] \hat{\Psi}_c + \hbar \Omega_R F(\vec{r}, t) \cos(\vec{K} \cdot \vec{r} - \Omega_0 t) \hat{\Psi}_\ell, \\ i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}_\ell}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_\ell + g_{\ell\ell} \hat{\Psi}_\ell^\dagger \hat{\Psi}_\ell + g_{cl} \hat{\Psi}_c^\dagger \hat{\Psi}_c \right] \hat{\Psi}_\ell + \hbar \Omega_R F(\vec{r}, t) \cos(\vec{K} \cdot \vec{r} - \Omega_0 t) \hat{\Psi}_c. \end{cases} \quad (137)$$

Le passage à une description de champ moyen correspond au remplacement des opérateurs $\hat{\Psi}_c$ et $\hat{\Psi}_\ell$ par leur valeur moyenne ψ_c et ψ_ℓ . De plus, nous nous plaçons dans le référentiel tournant en effectuant la transformation $\psi_c \rightarrow e^{i\Omega_0 t} \psi_c$, et nous développons les termes oscillants en ne gardant que les termes résonants lentement variables (approximation d'onde tournante), pour finalement obtenir les équations de Gross-Pitaevskii couplées,

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi_c}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_c - \hbar\delta + g_{cc} |\psi_c|^2 + g_{cl} |\psi_\ell|^2 \right] \psi_c + \frac{\hbar \Omega_R}{2} F(\vec{r}, t) e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} \psi_\ell, \\ i\hbar \frac{\partial \psi_\ell}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_\ell + g_{\ell\ell} |\psi_\ell|^2 + g_{cl} |\psi_c|^2 \right] \psi_\ell + \frac{\hbar \Omega_R}{2} F(\vec{r}, t) e^{-i\vec{K} \cdot \vec{r}} \psi_c. \end{cases} \quad (138)$$

Dans ces relations, nous avons noté $\hbar\delta = \hbar\Omega_0 - V_0$, l'énergie du désaccord de la transition. Les fonctions d'onde sont normalisées au nombre d'atomes respectivement dans le condensat ou le laser, et par conservation de la matière, on a, à tout instant,

$$\int d\vec{r} (|\psi_c(\vec{r})|^2 + |\psi_\ell(\vec{r})|^2) = N, \quad (139)$$

où N est le nombre total d'atomes dans le système.

III.2.1.e Solutions en régime de couplage faible

Les équations 138 ne sont pas solubles analytiquement en l'état, en particulier du fait de leur non linéarité. Elles peuvent être le point de départ d'un calcul numérique, comme celui présenté en annexe F. Elles permettent aussi d'exprimer la fonction d'onde ψ_ℓ sous forme intégrale (équation 146), dans le cas où nous pouvons utiliser certaines approximations sur la dynamique, comme nous le détaillons ci-dessous.

Nous faisons tout d'abord l'hypothèse d'un laser à atomes dilué, tel que l'on puisse négliger les termes de champ moyen liés à la densité du laser, par rapport à ceux dus à la densité dans le condensat ($|\psi_\ell|^2 \ll |\psi_c|^2$). De plus, tant que l'on considère un couplage assez faible, nous pouvons négliger la rétroaction de la fonction d'onde du laser sur le condensat.

Fonction d'onde du condensat

Dans la première équation du système 138, on peut donc éliminer les termes faisant intervenir ψ_ℓ et l'on obtient alors une équation de Gross-Pitaevskii pour ψ_c

$$i\hbar \frac{\partial \psi_c}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_c - \hbar\delta + g_{cc} |\psi_c|^2 \right] \psi_c. \quad (140)$$

Ainsi, à la limite où le couplage est tellement faible que le condensat n'est pratiquement pas dépeuplé, sa fonction d'onde est prise stationnaire, et s'écrit

$$\psi_c(\vec{r}, t) = \phi_c(\vec{r}) \exp \left[-i \left(\frac{\mu}{\hbar} - \delta \right) t \right], \quad (141)$$

avec ϕ_c vérifiant l'équation de Gross-Pitaevskii indépendante du temps

$$\mu\phi_c = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_c + g_{cc}|\phi_c|^2 \right] \phi_c. \quad (142)$$

Dans le cas où le condensat est dans le régime de Thomas-Fermi (§ II.1.3), la fonction d'onde ϕ_c est exprimée avec les notations 76, selon

$$\phi_c(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\mu}{g_{cc}} \max \left[\left(1 - \left(\frac{x}{R_x} \right)^2 - \left(\frac{y}{R_y} \right)^2 - \left(\frac{z - \sigma_M}{R_z} \right)^2 \right); 0 \right]}. \quad (143)$$

Fonction d'onde du laser à atomes

La seconde équation 138 est aussi simplifiée grâce à l'hypothèse de couplage faible. L'hypothèse de dilution du laser à atomes, permet d'obtenir

$$i\hbar \frac{\partial \psi_\ell}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_\ell + g_{c\ell}|\psi_c|^2 \right] \psi_\ell + \frac{\hbar\Omega_R}{2} F(\vec{r}, t) e^{-i\vec{K}\vec{r}} \psi_c. \quad (144)$$

La fonction d'onde du laser est donc déterminée par une équation linéaire avec un second membre. Soit $K(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ le propagateur de Feynman [134] associé à cette équation. Il s'agit de la réponse impulsionnelle du système, solution de

$$i\hbar \frac{\partial K}{\partial t} - \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_\ell + g_{c\ell}|\psi_c|^2 \right] K = i\hbar \delta(t - t') \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (145)$$

ψ_ℓ s'écrit alors comme

$$\psi_\ell(\vec{r}, t) = \frac{\Omega_R}{2i} \int_{t_0}^t dt' \int d\vec{r}' K(\vec{r}, t; \vec{r}', t') e^{-i[\vec{K}\vec{r}' + (\frac{\mu}{\hbar} - \delta)t']} F(\vec{r}', t') \phi_c(\vec{r}'). \quad (146)$$

Ainsi, dans le cas où le condensat est très peu perturbé par le couplage, la connaissance du propagateur K est suffisante pour pouvoir calculer la fonction d'onde du laser à partir de celle du condensat, et ceci dans tout l'espace et le temps. Cette expression est, en particulier, le point de départ de notre étude de la propagation du laser à atomes prenant en compte de manière non perturbative l'interaction collisionnelle condensat-laser (chapitre IV).

III.2.2 Le continuum des états non piégés

La dynamique de couplage est fortement dépendante des propriétés des états vers lesquels le condensat se couple. Aussi, dans ce paragraphe, nous passons en revue différentes propriétés du continuum des états non piégés. Dans un premier temps, nous rappelons l'expression des fonctions d'onde dans le cas où seule compte la gravité. Puis nous généralisons ce résultat au cas où le potentiel est harmonique inversé incluant l'effet Zeeman quadratique. Enfin, nous partons de ce dernier cas, pour discuter la configuration où l'on ne néglige pas le potentiel d'interaction de champ moyen ressenti par le laser au niveau du condensat. Pour chacune de ces configurations, nous mettons particulièrement en relief, l'allure des fonctions d'onde au voisinage du point de couplage, allure qui joue un rôle prédominant dans la dynamique du laser à atomes. Enfin, nous donnons deux grandeurs caractéristiques du continuum, sa largeur en énergie et son temps de mémoire. Nous insistons en particulier sur les différences qui se font jour, par rapport au cas où les interactions condensat-laser sont faibles.

III.2.2.a Fonctions d'onde

On peut écrire le propagateur $K(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$, à partir des fonctions propres du potentiel non piégeant (Chap. IV de [134]),

$$K(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \int dE_k \rho(E_k) \phi_k(\vec{r}) \phi_k^*(\vec{r}') e^{-iE_k(t-t')/\hbar}, \quad (147)$$

où les fonctions $\phi_k(\vec{r})$ et énergies propres E_k , vérifient l'équation de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi_k(\vec{r}) + [V_\ell(\vec{r}) + g_{cl} |\phi_c(\vec{r})|^2] \phi_k(\vec{r}) = E_k \phi_k(\vec{r}). \quad (148)$$

$\rho(E_k) dE_k$ correspond au nombre d'états propres ayant une énergie E_k à dE_k près, où la densité d'état $\rho(E_k)$ s'écrit

$$\rho(E_k) = \frac{1}{h^3} \int d^3r \int d^3p \delta \left(E_k - \frac{p^2}{2m} - [V_\ell(\vec{r}) + g_{cl} |\phi_c(\vec{r})|^2] \right). \quad (149)$$

Notons toutefois que la dérivation du propagateur à partir de la relation 147 n'est en général pas aisée, car les fonctions propres n'ont pas d'expression simple, comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants. On montrera cependant au paragraphe IV.2.1.a, qu'une autre méthode est beaucoup plus efficace pour effectuer le calcul de K .

Examinons l'allure des fonctions d'onde du continuum. Une explicitation des solutions de l'équation 148 est en effet possible, dès que l'on néglige l'effet du champ moyen du condensat sur le laser à atomes, en prenant $g_{cl} |\phi_c(\vec{r})|^2 = 0$. Une telle approximation est valide si le potentiel chimique μ du condensat est petit devant la variation typique de $V_\ell(\vec{r})$ sur le volume du condensat. Le fait que ce potentiel soit séparable simplifie alors beaucoup le problème.

Cas de la gravité seule

Dans le cas le plus simple où l'on néglige l'effet Zeeman quadratique, seule la gravité est à prendre en compte, et $V_\ell(\vec{r}) = -mgz$, et l'expression des fonctions d'onde a été dérivée dans [132]. Transversalement, comme la dynamique est libre, la fonction d'onde est une onde plane de vecteurs d'ondes k_x et k_y . Verticalement, la solution de l'équation de Schrödinger dans le champ uniforme s'écrit à partir des fonctions d'Airy de première et seconde espèce, Ai et Bi [79] (figure 48), et la fonction $\phi_k(\vec{r})$ s'exprime finalement comme

$$\phi_k(\vec{r}) \propto e^{i(k_x x + k_y y)} [\text{Ai}(-\xi(E_z)) - i \text{Bi}(-\xi(E_z))]. \quad (150)$$

L'énergie E_z selon l'axe z et la coordonnée réduite ξ , s'écrivent à partir de la coordonnée verticale du point de rebroussement classique z_{E_z} et de la longueur l caractéristique du problème,

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = E_k - \frac{\hbar^2(k_x^2 + k_y^2)}{2m}, \\ \xi(E_z) = \frac{z - z_{E_z}}{l}, \\ z_{E_z} = -\frac{E_z}{mg}, \\ l = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{2m^2 g}}. \end{array} \right. \quad (151)$$

La solution 150 est appelée solution d'onde sortante selon z [135], car elle correspond à un flux se propageant vers $z = +\infty$. Une telle solution décrit bien le faisceau d'un laser à atomes réel se propageant en s'éloignant du condensat. Changer i en $-i$ dans l'expression 150 correspond à choisir la solution d'onde entrante se propageant vers le condensat, physiquement inacceptable.

Notons que dans les calculs de taux de couplage [132], une solution commode consiste à quantifier le système dans une boîte fictive, quitte à faire tendre la taille de cette boîte vers l'infini et à la faire disparaître du résultat physique final. On utilise alors comme fonction d'onde, la somme de l'onde entrante et sortante c'est-à-dire la fonction d'Airy de première espèce Ai . La stationnarité de cette fonction d'onde réelle est traduite par la présence de ventres et de noeuds, le premier lobe de cette fonction ayant une extension selon z de l'ordre de quelques l . On gardera à l'esprit, que la densité atomique $|\phi_k|^2$ du faisceau laser ne présente pas de tels lobes, mais décroît au fur et à mesure que la vitesse de chute augmente (figure 48).

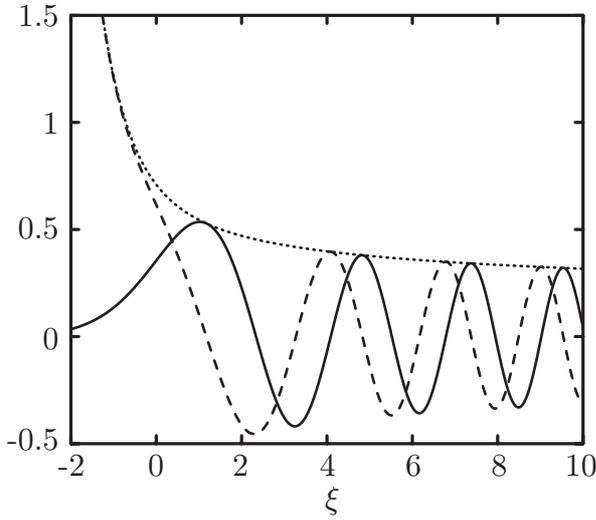


FIG. 48 – Tracé des fonctions d'Airy $\text{Ai}(-\xi)$ (trait plein), $\text{Bi}(-\xi)$ (tirets) et du module $|\phi_k|$ de la fonction d'onde (équation 150 en pointillés). Le point de rebroussement classique z_{E_z} correspond à $\xi = 0$. À son voisinage, les deux fonctions d'Airy oscillent sur une distance caractéristique de l'ordre de quelques unités pour ξ , soit quelques l en coordonnées réelles.

On peut retrouver par un raisonnement semi-classique (Chap. VII de [136]), la taille typique du lobe \mathcal{L} de la fonction d'Airy. En effet, lorsque la partie réelle de $\phi_k(\vec{r})$ oscille d'une période, la phase de $\phi_k(\vec{r})$ a été augmentée de 2π . Il s'ensuit que l'intégrale de l'impulsion semi-classique, $p(z) = \sqrt{2m(mgz - E_z)}$, sur une distance \mathcal{L} à partir du point de rebroussement z_{E_z} , vérifie

$$\int_{z_{E_z}}^{z_{E_z} + \mathcal{L}} p(z) dz \approx h. \quad (152)$$

Ceci donne $\mathcal{L} \approx (3\pi)^{2/3} l = 1.3 \mu\text{m}$, ce qui correspond à la taille observée sur le premier lobe de la fonction Ai tracée en figure 48. Dans la limite de couplage faible, la taille de ce lobe donne l'extension typique sur laquelle les atomes du condensat sont couplés vers le continuum, et nous comparons, par la suite, le résultat précédent à celui obtenu pour le cas de l'oscillateur harmonique inversé.

Cas de l'oscillateur harmonique inversé

De même, la solution est explicite pour l'oscillateur harmonique inversé, qui correspond au cas où V_ℓ est donné par la relation 128 (somme de l'effet Zeeman quadratique et de la gravité). Ce potentiel est séparable et on peut écrire la fonction d'onde totale comme

$$\phi_k(\vec{r}) = \prod_{r_i=x,y,z} \phi_{ki}(r_i), \quad (153)$$

où $\phi_{ki}(r_i)$ vérifie l'équation suivante,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \phi_{ki}(r_i)}{\partial r_i^2} - \frac{1}{2} m \omega_i^2 (r_i - r_{ic})^2 \phi_{ki}(r_i) = E_i \phi_{ki}(r_i). \quad (154)$$

Pour le cas précis du potentiel donnée par l'équation 128, $\omega_x = \omega_z = \omega_{Qr}$, $\omega_y = \omega_{Qy}$, le centre du potentiel est donné par $(x_c; y_c; z_c) = (0; 0; -\sigma_Q)$, tandis que les énergies selon les différents axes sont reliées par $E_x + E_y + E_z = E_k - m\omega_{Qr}^2 \sigma_Q^2 / 2$.

La solution de l'équation 154 peut être exprimée en choisissant de prendre des conditions d'onde sortante [137], comme dans la relation 150. On obtient alors

$$\phi_{ki}(r_i) \propto \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} + i\frac{\epsilon_i}{4}\right) e^{-i\frac{5\pi}{8}}}{\sqrt{|R_i|\pi}} \left[\frac{2\Gamma\left(\frac{3}{4} - i\frac{\epsilon_i}{4}\right) e^{\frac{\pi}{4}(\epsilon_i+i)}}{\sqrt{\pi}} M\left(-i\frac{\epsilon_i}{4}; \frac{1}{4}; iR_i^2\right) + W\left(-i\frac{\epsilon_i}{4}; \frac{1}{4}; iR_i^2\right) \right]. \quad (155)$$

Nous avons utilisé les fonctions de Whittaker M et W ainsi que la fonction Γ [79], et l'on a introduit l'énergie réduite ϵ_i , la taille de l'oscillateur σ_i et la coordonnée réduite R_i ,

$$\begin{cases} \epsilon_i = \frac{2E_i}{\hbar\omega_i}, \\ \sigma_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_i}}, \\ R_i = \frac{r_i - r_{ic}}{\sigma_i}. \end{cases} \quad (156)$$

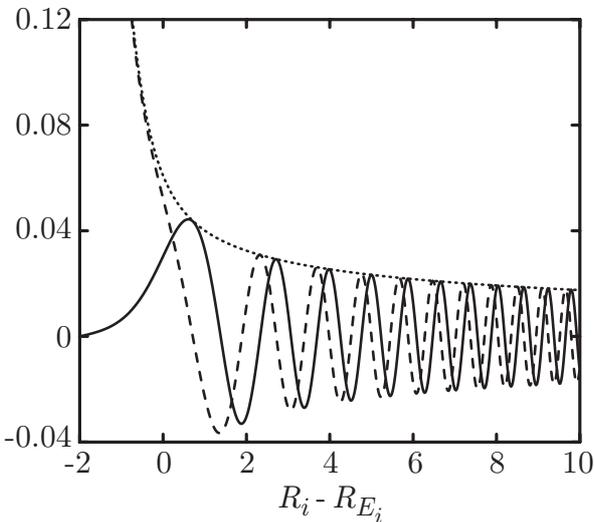


FIG. 49 – Tracés associés à l'équation 155 : partie réelle $\Re(\phi_{ki})$ en trait plein, opposé de la partie imaginaire $-\Im(\phi_{ki})$ (tirets), et $|\phi_{ki}|$ en pointillés. L'abscisse réduite R_i est recentrée sur le point de rebroussement classique R_{E_i} . Le tracé a été effectué pour $\epsilon_i = -4$ et ces fonctions étant paires, seule a été représentée la partie $R_i \geq 0$. Au voisinage du point de rebroussement classique, les parties réelles et imaginaires oscillent sur une distance caractéristique de l'ordre de l'unité, soit en unités réelles, une distance de l'ordre de σ_i , la taille de l'oscillateur harmonique.

Le point de rebroussement classique en coordonnées réduites s'écrit $R_{E_i} = \sqrt{-\epsilon_i}$. Notons que la fonction 155 est paire et correspond à une onde se propageant pour moitié vers $+\infty$ et pour moitié vers $-\infty$. Les analogues des fonctions Ai et Bi sont ici la partie réelle $\Re(\phi_{ki})$ et l'opposé $-\Im(\phi_{ki})$ de la partie imaginaire de l'expression 155. On voit en effet en figure 49 que l'allure de ces deux composantes est très proche de celle tracée en figure 48. La différence tient dans le comportement aux grandes distances $|R_i| \gg R_{E_i}$, pour lesquelles les fonctions de Whittaker oscillent beaucoup plus vite que les fonctions d'Airy, traduisant l'accélération plus rapide du potentiel harmonique expulsant par rapport à celle du potentiel linéaire.

Déterminons la taille typique du lobe de $\Re(\phi_{ki})$ en suivant le même raisonnement que celui donnant la relation 152. Cette fois-ci, l'impulsion écrite en fonction des coordonnées réduites ($R_i, R_{E_i} \geq 0$) est donnée par $p(R_i) = \sqrt{m\hbar\omega_i(R_i^2 - R_{E_i}^2)}$ et la taille du lobe \mathcal{L}_σ en unités de σ_i vérifie

$$\int_{R_{E_i}}^{R_{E_i} + \mathcal{L}_\sigma} p(R_i) dR_i \approx \frac{h}{\sigma_i}, \quad (157)$$

c'est-à-dire

$$(R_{E_i} + \mathcal{L}_\sigma) \sqrt{\mathcal{L}_\sigma (\mathcal{L}_\sigma + 2R_{E_i})} - R_{E_i}^2 \ln \left(1 + \frac{\mathcal{L}_\sigma + \sqrt{\mathcal{L}_\sigma (\mathcal{L}_\sigma + 2R_{E_i})}}{R_{E_i}} \right) = 4\pi. \quad (158)$$

On a tracé en figure 50 le comportement de \mathcal{L}_σ en fonction de R_{E_i} . Partant d'une valeur à l'origine, $\mathcal{L}_\sigma(R_{E_i} = 0) = 2\sqrt{\pi}$, \mathcal{L}_σ décroît quand R_{E_i} augmente. En $R_{E_i} = 2$, la taille est environ de $2.5 \sigma_i$ ce qui est cohérent avec le tracé 49. Si l'on développe l'équation 158 à l'ordre le plus bas en \mathcal{L}_σ , on obtient la taille du lobe dans le cas asymptotique où $R_{E_i} \gg 1$,

$$\mathcal{L}_\sigma \approx \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{2R_{E_i}}}, \quad (159)$$

ce qui correspond à la taille du lobe \mathcal{L} (définie dans le cas du potentiel gravitationnel par l'équation 152), où l'on a remplacé l'accélération g par $\omega_i^2 \sigma_i R_{E_i}$, c'est-à-dire l'accélération locale au point de rebroussement classique. On voit donc que le lobe associé à la fonction propre atomique est de taille comparable à σ_i , et ce, même lorsque le point de rebroussement est très près du centre du potentiel harmonique inversé.

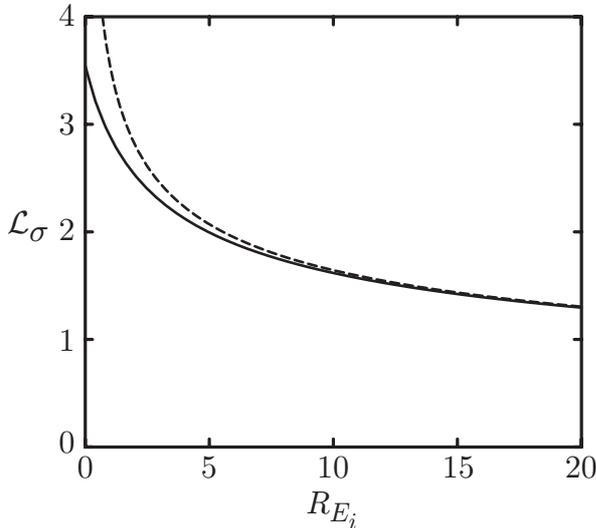


FIG. 50 – Tracé de la taille caractéristique du lobe \mathcal{L}_σ de la fonction de l'oscillateur harmonique inversé, en fonction du point de rebroussement classique R_{E_i} (équation 158 en trait plein), et comparaison à la taille du lobe de la fonction d'Airy associée à la pente en R_{E_i} (équation 159 en trait tireté) qui diverge lorsque la pente locale s'annule ($R_{E_i} = 0$). L'abscisse et l'ordonnée sont en unités de σ_i , la taille de l'oscillateur harmonique.

Cas général

Dans le cas où l'on considère le potentiel incluant les interactions du laser avec le condensat $V_\ell(\vec{r}) + g_{cl}|\phi_c(\vec{r})|^2$, on ne sait pas donner de manière exacte d'expression générale pour les fonctions propres. L'objet du chapitre IV est de montrer que l'on peut tout de même obtenir la fonction d'onde du laser en utilisant quelques approximations appropriées.

De plus, les discussions précédentes sur les tailles des lobes des différentes fonctions spéciales nous permettent d'envisager l'allure des fonctions propres d'énergie E , au voisinage

du point de rebroussement classique dans un potentiel général³ $V(x)$. Il s'agit d'une fonction présentant un lobe, tout comme la fonction d'Airy, dont l'extension \mathcal{L}_V est donnée par

$$\int_{x_E}^{x_E+\mathcal{L}_V} \sqrt{V(x_E) - V(x)} dx \approx \frac{h}{\sqrt{2m}}, \quad (160)$$

où l'on a noté x_E le point de rebroussement classique tel que $E = V(x_E)$. Enfin, notons que si le développement du potentiel sur une étendue \mathcal{L}_V autour de x_E est dominé par des termes linéaires et/ou quadratiques (comme dans le cas où l'on prend en compte les interactions, entre le condensat dans le régime de Thomas-Fermi, et le laser), les résultats explicites dérivés précédemment sont utilisables pour la fonction d'onde au voisinage de x_E . Puis, quand on s'éloigne de la zone autour du point de rebroussement classique, ces solutions se connectent alors à des solutions de type WKB, comme nous le montrons en annexe E.2.

III.2.2.b Largeur du continuum

Le continuum d'états ϕ_k sur lequel se décompose la fonction d'onde du laser à atomes n'a pas une largeur en énergie $\hbar\Delta$ infinie. En effet, seuls comptent dans la dynamique du couplage vers ce continuum, les états dont l'intégrale de recouvrement avec le terme de couplage est non nulle,

$$\int d\vec{r} \phi_k^*(\vec{r}) F(\vec{r}, t) e^{-i\vec{K}\vec{r}} \phi_c(\vec{r}) \neq 0. \quad (161)$$

Les énergies E_k de tels états s'échelonnent sur une plage de l'ordre de la différence d'énergie potentielle maximale entre deux points du condensat. Cette plage est appelée largeur du continuum. Dans le volume du condensat \mathcal{V}_{CBE} où $\phi_c(\vec{r})$ est non nul, l'énergie potentielle s'écrit

$$\begin{aligned} V_\ell(\vec{r}) + g_{\text{coll}}|\phi_c(\vec{r})|^2 &= \mu - \frac{m}{2} [(\omega_r^2 + \omega_{Qr}^2)x^2 + (\omega_y^2 + \omega_{Qy}^2)y^2 + (\omega_z^2 + \omega_{Qz}^2)z^2 + g\sigma_M], \\ &\approx \tilde{\mu} - \frac{m}{2} [\omega_r^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2], \end{aligned} \quad (162)$$

où $\tilde{\mu}$ correspond à la valeur de $V_\ell + g_{\text{coll}}|\phi_c|^2$ au centre du piège magnétique, et est donné par $\tilde{\mu} = \mu - \frac{m}{2}\omega_r^2\sigma_M^2$. Dans la suite, pour alléger les notations, nous utilisons la seconde expression qui est obtenue en négligeant l'effet Zeeman quadratique par rapport aux fréquences de piégeage ($\omega_{Qr,y}^2 \ll \omega_{r,y}^2$) : cet effet ne change que très légèrement la raideur du potentiel, sans changer sa géométrie ou son centrage.

Les points d'énergie extrême sont situés sur l'axe z . Dans le cas où le centre du piège magnétique est dans le volume du condensat ($\sigma_M \leq R_r$), il est le point d'énergie potentielle maximum, tandis que dans le cas contraire ($\sigma_M > R_r$), l'énergie est maximale au point d'altitude $z = \sigma_M - R_r$. Quel que soit le cas, le point d'énergie minimum est au bas du condensat où $z = \sigma_M + R_r$. La largeur du continuum est donc donnée par (figure 51)

$$\hbar\Delta = \begin{cases} 2mgR_r & \text{si } \sigma_M > R_r, \\ \frac{m}{2}\omega_r^2(\sigma_M + R_r)^2 & \text{si } \sigma_M \leq R_r. \end{cases} \quad (163)$$

Expérimentalement, dans le piège comprimé (§ II.2.2) que nous considérons dans toute cette partie, $\sigma_M \leq R_r$ et la largeur vaut $\Delta = 2\pi \times 13.3$ kHz.

³Nous nous restreignons à un potentiel unidimensionnel, car nous considérons que tout potentiel réaliste est localement séparable, et que la fonction d'onde totale est le produit des fonctions d'onde selon chaque axe, au moins localement.

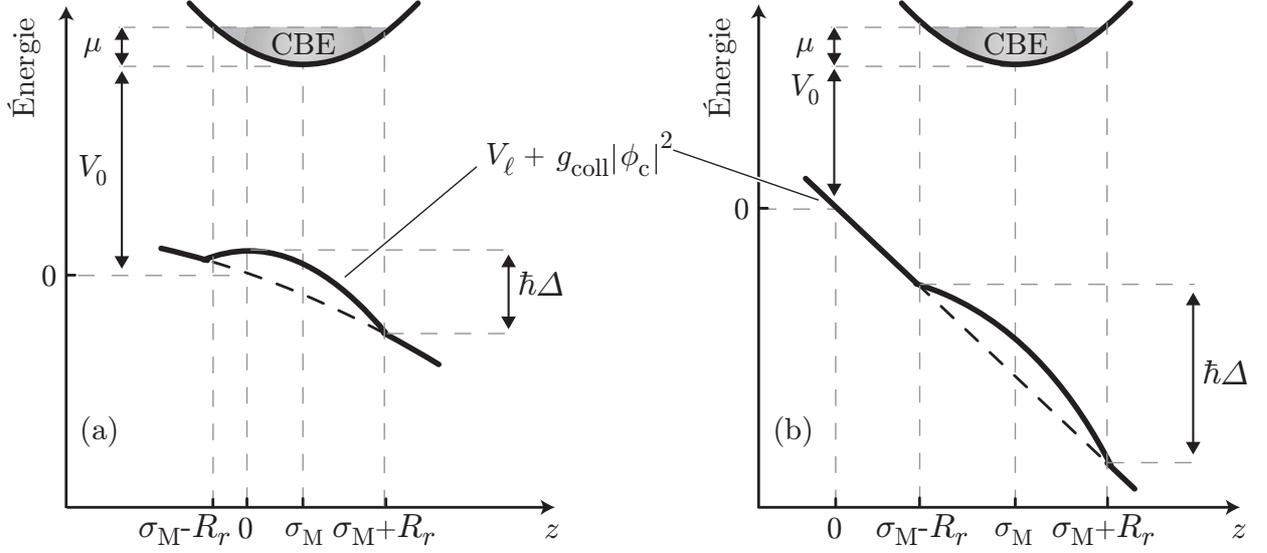


FIG. 51 – Largeur du continuum Δ lié au potentiel $V_\ell + g_{\text{coll}}|\phi_c|^2$, dans deux configurations de piégeage (équation 163). La largeur est prise entre les points du condensat d'énergie extrémale. Dans le piège comprimé (a), $\sigma_M \leq R_r$, le maximum d'énergie est atteint au niveau du centre du piège magnétique, c'est-à-dire dans le volume du condensat, alors que dans le cas d'un piège suffisamment peu comprimé (b), $\sigma_M > R_r$, le maximum est atteint en $\sigma_M - R_r$.

III.2.2.c Le temps de mémoire du continuum

Une grandeur intervenant dans la dynamique de couplage est la fonction de mémoire du continuum $f_m(t - t')$ [138],

$$f_m(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \kappa^*(\vec{r}, t) \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' K(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \kappa(\vec{r}', t'), \quad (164)$$

où

$$\kappa(\vec{r}, t) = \frac{\Omega_R}{2} e^{-i\vec{K}\vec{r}} F(\vec{r}, t) \psi_c(\vec{r}, t). \quad (165)$$

La fonction $\kappa(\vec{r}, t)$ n'est rien d'autre que le terme source apparaissant dans l'équation de Gross-Pitaevskii donnant la dynamique du laser (seconde équation 138). La fonction de mémoire correspond donc au recouvrement (intégrale sur \vec{r}) entre le terme source à l'instant t ($\kappa(\vec{r}, t)$) et le terme source propagé de l'instant t' à l'instant t (intégrale sur \vec{r}'). Si cette intégrale a une valeur faible, cela veut dire qu'après propagation pendant un temps $t - t'$, les atomes du laser ont une très faible probabilité d'être recouplés dans le condensat. Par contre, si le recouvrement est bon, il est alors possible de recoupler les atomes du laser dans le condensat.

Le sens physique de la fonction de mémoire est d'indiquer au bout de quel temps de propagation $t - t'$, le paquet d'onde des atomes du laser (intégrale sur \vec{r}'), ne ressemble plus à la fonction d'onde initiale du condensat. Ce temps caractéristique sur lequel décroît f_m , et au bout duquel les atomes ont perdu la mémoire de leur appartenance passée au condensat, s'appelle le temps de mémoire t_m . Une interprétation classique du temps de mémoire le ferait correspondre au temps que met un atome à sortir du volume du condensat. Notons toutefois

que cette approche surestime le temps de décroissance de f_m , dans le sens où elle ne prend pas en compte les effets de déphasage propres à la propagation d'un paquet d'onde dans le volume du condensat qui, eux aussi, rendent l'intégrale de recouvrement plus faible.

Le temps t_m dépend du potentiel au niveau du point de couplage (via le propagateur $K(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$) et est a priori indépendant de la largeur énergétique $\hbar\Delta$ du continuum. Ainsi, t_m est calculé dans [138] pour différentes situations. Dans le cas de condensats pas trop petits (de taille supérieure à $0.1 \mu\text{m}$ pour le Rubidium 87), couplés par radiofréquence vers le continuum de la gravité seule, le temps de mémoire est simplement relié à Δ et est donné par $t_m \approx 1/\Delta$. Par contre, dans le cas où les interactions entre le laser et le condensat sont prises en compte (le potentiel d'interaction est harmonique inversé) on obtient $t_m \approx 2/(\omega_x + \omega_y + \omega_z)$, et ce, pour un couplage qui a lieu⁴ au voisinage du maximum du potentiel.

Ainsi, dans notre cas où $V_\ell + g_{\text{coll}}|\phi_c|^2$ présente un maximum dans le volume du condensat ($\sigma_M < R_r$), on s'attend à ce que le temps de mémoire soit fortement dépendant de la position du couplage. Le temps de mémoire le plus long est atteint lorsque le couplage a lieu au sommet de la « bosse » de potentiel. En effet, classiquement, c'est bien là où l'atome couplé subit l'accélération la plus faible et met le plus de temps à sortir de la zone du condensat.

III.2.3 Dynamique de couplage

III.2.3.a Différents régimes de couplage

Le couplage du condensat (état discret) au continuum de largeur finie (Complément I.2 de [139] et C.III de [39]) induit un élargissement Γ de cet état discret, tout comme le couplage de l'état excité d'un atome au continuum du vide, induit une durée de vie radiative. Cet élargissement provient de la contamination de l'état discret par les états du continuum. Le temps $1/\Gamma$ correspond au temps caractéristique d'évolution du système. Pour déterminer le régime de couplage du laser à atomes, il faut comparer ce temps au temps de mémoire du continuum t_m . Trois cas sont alors possibles :

- Dans le cas où $\Gamma t_m \ll 1$, le laser est en régime markovien, c'est-à-dire que l'onde extraite du condensat a perdu la mémoire de son appartenance au condensat, et ce pendant le temps caractéristique d'évolution du système Γ . Il s'agit de la limite de couplage faible, pour laquelle la décroissance de la population condensée est décrite par une exponentielle obtenue à partir d'une règle d'or de Fermi (§ III.2.3.b). C'est dans ce régime de couplage, que nous étudions les effets des interactions sur le profil du laser (§ III.3.3).
- Dans le cas contraire ($\Gamma t_m \gg 1$), le laser est dans un régime fortement non markovien et il s'agit d'un régime de couplage fort. On observe alors des oscillations de Rabi qui empêchent toute émission d'une onde de matière, à part au tout début du couplage, pendant le régime transitoire [127].
- Dans le cas intermédiaire où $\Gamma t_m \approx 1$, on est dans un régime de décroissance exponentielle des oscillations de Rabi, régime dont nous reportons l'observation au paragraphe III.3.4, et où l'onde extraite a une probabilité non négligeable d'être recouplée vers le condensat.

On notera, que le critère pertinent pour déterminer le régime de couplage ne fait pas intervenir, en toute généralité, la largeur du continuum Δ . En effet, seule compte la dynamique

⁴La localisation du couplage est donnée par la conservation de l'énergie comme détaillé au paragraphe III.2.3.b. Cette dernière sélectionne les points de rebroussement classique des fonctions d'ondes du continuum qui ont une part prédominante dans le laser à atomes.

des atomes couplés, qui est caractérisée par la fonction mémoire du continuum (équation 164) et par son temps de mémoire t_m , et ce, indépendamment de Δ . Un cas particulier est celui du couplage vers le continuum de la gravité seule (sans prendre en compte les interactions du laser avec le condensat), où t_m est de l'ordre de $1/\Delta$: dans ce cas, on peut alors considérer que le couplage est faible, si l'élargissement Γ du niveau discret est bien plus petit que la largeur du continuum Δ , et fort dans le cas inverse.

III.2.3.b Taux de couplage dans le cas d'une dynamique markovienne

Principe de Franck-Condon

Nous exprimons dans ce paragraphe le taux de couplage du condensat vers le laser à atomes en nous plaçant dans le cas d'un couplage très faible, tel que $\Gamma t_m \ll 1$, c'est-à-dire que l'on néglige, en particulier, le phénomène selon lequel, un atome qui a été couplé vers l'extérieur est recouplé vers le mode du condensat. Il est alors particulièrement adapté d'utiliser la règle d'or de Fermi pour calculer le taux de transfert Γ sous l'effet du terme de couplage 134. Ceci est réalisé dans [132], pour le cas tridimensionnel incluant la gravité, où l'on néglige l'effet des interactions du condensat sur le laser, ce qui permet d'écrire explicitement les fonctions propres du laser comme le produit d'ondes planes transversales et de fonctions d'Airy verticales (équation 150). Ce calcul est validé par la comparaison avec les expériences de laser à atomes dans ce régime d'interactions peu importantes.

Une autre façon d'exprimer le taux de couplage est décrite dans [101]. Cela consiste à réaliser une approximation adiabatique [120] sur la fonction d'onde du condensat, et non pas stationnaire comme celle de l'équation 141, ce qui donne

$$\psi_c(\vec{r}, t) = \phi_c(\vec{r}, t) \exp \left[-i \int_0^t dt' \left(\frac{\mu(t')}{\hbar} - \delta \right) \right], \quad (166)$$

où nous avons pris le début du couplage en $t_0 = 0$. Cette relation traduit le fait que le condensat puisse être dépeuplé au cours du temps : le potentiel chimique et donc ϕ_c s'ajustent au nombre d'atomes restants. Ceci se réalise adiabatiquement, c'est-à-dire qu'à tout instant, les atomes d'état interne $|F=1, m_F=-1\rangle$ sont condensés et non pas dans un état excité du piège. L'évolution temporelle du nombre d'atomes condensés $N_c(t)$ est alors donnée par [101]

$$\frac{dN_c}{dt} + \Gamma(t) N_c = 0, \quad (167)$$

avec le taux de couplage $\Gamma(t)$

$$\Gamma(t) = \frac{\Omega_R^2}{4 \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}'' |\phi_c(\vec{r}'', t)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \phi_c^*(\vec{r}, t) \phi_c(\vec{r}', t) F^*(\vec{r}, t) F(\vec{r}', t) e^{i\vec{K}(\vec{r}-\vec{r}')} K(\vec{r}, t; \vec{r}', t-\tau) \exp \left[i \int_{t-\tau}^t dt' \left(\frac{\mu(t')}{\hbar} - \delta \right) \right]. \quad (168)$$

Cette expression est la même que celle obtenue par application directe de la règle d'or de Fermi. On peut s'en convaincre en remplaçant le propagateur par son expression (équation 147). Le calcul de l'intégrale 168 est très similaire à celui réalisé dans [101], pour le cas où $\vec{K} = 0$. Par rapport à ce dernier, nous avons inclus une éventuelle dépendance spatiale de l'intensité de couplage dont rend compte la présence de la fonction $F(\vec{r}, t)$, ainsi qu'un

transfert d'impulsion a priori non nul, $\vec{K} \neq 0$. L'expression 168 permet donc de calculer le taux de couplage à la fois dans le cas du couplage radiofréquence et Raman.

Nous indiquons ici très brièvement les modifications à apporter à la méthode de calcul décrite dans [101]. Le taux $\Gamma(t)$ est dominé par les valeurs de \vec{r} , \vec{r}' et τ qui sont reliées par des équations classiques du mouvement. On montre que seuls ont une contribution non nulle à cette intégrale triple, les points $\vec{r} \approx \vec{r}'$ pour lesquels $\tau \approx 0$ et qui vérifient, au premier ordre en τ

$$\vec{r}' = \vec{r} + \frac{\hbar \vec{K}}{m} \tau, \quad (169)$$

où $-\hbar \vec{K}/m$ correspond à la vitesse initiale sur la trajectoire allant de \vec{r}' à \vec{r} . Le développement en τ de la phase totale apparaissant dans l'intégrale 168, permet alors d'obtenir l'expression suivante pour le taux de couplage,

$$\Gamma(t) = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{\hbar \Omega_R}{2} \right)^2 \frac{\int d\vec{r} |F(\vec{r}, t) \phi_c(\vec{r}, t)|^2 \delta \left(V_\ell(\vec{r}) + g_{\text{coll}} |\phi_c(\vec{r}, t)|^2 + \frac{\hbar^2 \vec{K}^2}{2m} + \hbar \delta - \mu(t) \right)}{\int d\vec{r} |\phi_c(\vec{r}, t)|^2}. \quad (170)$$

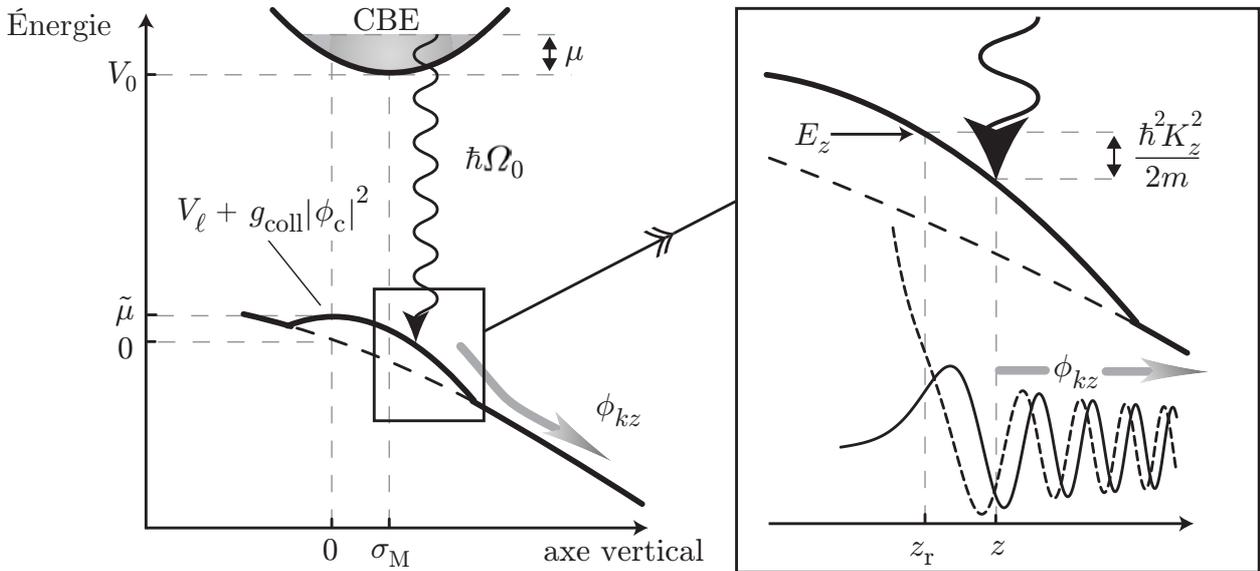


FIG. 52 – Diagramme d'énergie traduisant la condition de résonance 171. Nous nous sommes placés dans le cas du piège comprimé, et nous restreignons le tracé à l'axe z par simplicité, le potentiel étant séparable dans le volume du condensat. L'encart montre les détails de la condition de résonance qui inclut l'énergie de recul $\hbar^2 K_z^2 / 2m$. Le couplage a lieu en z vers une fonction d'onde ϕ_{kz} , d'énergie E_z et dont le point de rebroussement classique est en z_T . La différence d'énergie potentielle entre ces deux points est donnée par l'énergie de recul selon l'axe z . Le raisonnement est analogue sur les autres axes, en considérant les énergies correspondantes, de telle façon que l'énergie du laser $E_x + E_y + E_z = E$ vérifie la relation 171.

La relation 168 fait apparaître la conservation de l'énergie dans la fonction de Dirac,

$$\mu(t) - \hbar\delta = V_\ell(\vec{r}) + g_{\text{coll}}|\phi_c(\vec{r}, t)|^2 + \frac{\hbar^2 \vec{K}^2}{2m} = V_\ell(\vec{r}_r) + g_{\text{coll}}|\phi_c(\vec{r}_r, t)|^2 = E. \quad (171)$$

En se rappelant que $\hbar\delta = \hbar\Omega_0 - V_0$, l'interprétation de cette relation est claire (figure 52) : l'énergie E de la fonction d'onde du laser est égale à l'énergie du condensat $V_0 + \mu$, à laquelle on a enlevé l'énergie du couplage $\hbar\Omega_0$. Ce dernier est réalisé aux points \vec{r} vérifiant la relation 171, c'est-à-dire que seule compte dans le taux de couplage Γ , la valeur de la fonction $|F(\vec{r}, t) \phi_c(\vec{r}, t)|^2$ en ces points. Il s'agit de l'analogie du principe de Franck-Condon [140] largement utilisé en physique moléculaire.

Surface de couplage

On remarque qu'aux points \vec{r} de couplage, la fonction d'onde a un vecteur d'onde local $-\vec{K}$ et que ces points ne sont donc pas confondus⁵ avec les points de rebroussement classique \vec{r}_r en lesquels l'énergie potentielle vaut E . L'écart entre ces points est important (plusieurs microns) dans le cas où \vec{K} est de l'ordre du vecteur d'onde associé à la transition atomique⁶ (couplage Raman avec deux lasers non copropageants). Dans le cas du couplage radiofréquence, le vecteur d'onde est bien plus faible, $|K| = \Omega_0/c$, et la distance typique entre le point de couplage \vec{r} et le point \vec{r}_r de rebroussement classique du laser à atomes ($\sqrt{r_i^2 - r_{ri}^2} = \hbar K_i/m\omega_i$) est inférieure au picomètre et est totalement négligeable devant toutes les échelles du système. C'est pour cette raison que l'on considère alors que le couplage a lieu au niveau du point de rebroussement classique ($\vec{r} = \vec{r}_r$).

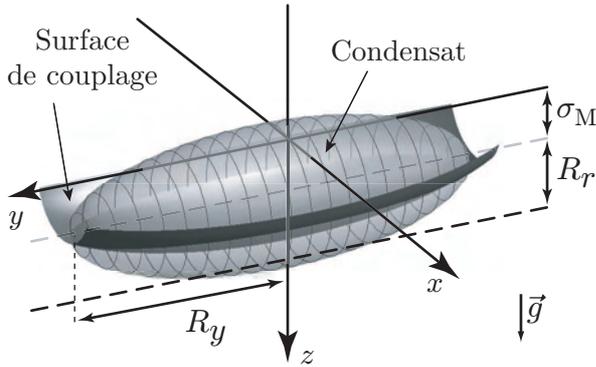


FIG. 53 – Géométrie de la surface de couplage vis-à-vis du condensat. Cette surface relie les points $(x; y; z)$ vérifiant l'équation 171 de conservation de l'énergie. Le tracé est réalisé pour notre configuration expérimentale où le potentiel dans le condensat est donné par l'équation 162. Les courbures de ce potentiel étant les mêmes que celles du piège, la surface épouse alors la forme des équipotentielles magnétiques et correspond à une portion de paraboloides centrée comme le champ magnétique, contrairement au condensat qui est décalé vers le bas par rapport à ce même centre, d'une distance σ_M .

⁵Notons qu'il n'est pas surprenant, que pour \vec{K} non négligeable, le couplage ne se fasse pas en \vec{r}_r . En effet, les points \vec{r} qui contribuent à l'intégrale de recouvrement 161 sont ceux pour lesquels la fonction d'onde du laser est localement équivalente à $\exp(-i\vec{K} \cdot \vec{r})$. Ces points qui rendent l'intégrande stationnaire, sont bien les points de couplage où le vecteur d'onde du laser à atomes est donné par l'impulsion transférée aux atomes couplés.

⁶Il se peut même qu'il n'y ait pas de point de rebroussement classique : par exemple si l'on considère $\vec{r} = \vec{0}$ et un vecteur d'onde \vec{K} ayant une composante K_x selon x . La partie de la fonction d'onde selon cet axe a une énergie $E_x = V_\ell(\vec{0}) + g_{\text{coll}}|\phi_c(\vec{0}, t)|^2 + \hbar^2 K_x^2/2m$ qui ne correspond à aucune énergie potentielle d'un point sur l'axe x étant donné que le maximum est atteint en $\vec{r} = \vec{0}$.

Ainsi, tout se passe comme si l'onde de matière était issue des points \vec{r} vérifiant 171 avec une vitesse initiale $-\hbar\vec{K}/m$. L'ensemble de ces points définit une surface que l'on appelle surface de couplage (figure 53) ou encore, dans le cas du laser créé par radiofréquence, le couteau radiofréquence. On a un contrôle expérimental sur la position de cette surface en changeant la valeur Ω_0 de la fréquence du couplage. On peut ainsi choisir la position d'extraction de l'onde de matière, ce qui a une incidence importante sur la fonction d'onde du laser à atomes, comme décrit au paragraphe III.3.3.

Validité de l'approche

L'un des intérêts de cette formulation à l'aide du principe de Franck-Condon par rapport à l'utilisation de la règle d'or de Fermi, est qu'elle ne nécessite pas la connaissance des fonctions propres du continuum, mais seulement celle du potentiel au niveau du couplage, qui lui, s'exprime bien plus simplement. Cependant, alors que la règle d'or de Fermi (équation 168) est une écriture exacte du taux Γ dans l'hypothèse de couplage très faible, l'utilisation du principe de Franck-Condon en est une approximation semi-classique.

On peut cerner sa validité, en comparant le résultat 170 à l'équation 168, dans laquelle on a remplacé le propagateur K par l'expression explicite 147. La relation obtenue fait apparaître des intégrales de recouvrement (relation 161). En développant autour des trajectoires classiques (équation 169), ces intégrales sont remplacées par la fonction de Dirac pondérée par $|F(\vec{r}, t) \phi_c(\vec{r}, t)|^2$.

Une telle approximation pour les intégrales de recouvrement n'est valide que si la phase de la fonction du laser oscille plusieurs fois sur le volume où $|F(\vec{r}, t) \phi_c(\vec{r}, t)|^2$ est non nul. Notons les dimensions de ce volume \mathcal{V} selon chaque axe, L_x , L_y et L_z . L'oscillation caractéristique de la fonction d'onde étant d'extension la taille du lobe $\mathcal{L}_i (i = x, y, z)$ donnée par l'équation 157, la relation 170 est valide si les points de couplage \vec{r} sont à une distance suffisante de la surface englobant le volume \mathcal{V} ,

$$|r_i| \ll L_i - \mathcal{L}_i, \text{ avec } i = x, y, z. \quad (172)$$

Dans cette relation, l'origine du repère est placée au centre du condensat, et seuls les points sur le bord de la zone de couplage ($r_i \approx L_i$) ne vérifient pas cette condition. Cependant, ces points correspondent à des valeurs de $|F(\vec{r}, t) \phi_c(\vec{r}, t)|^2$ négligeables par rapport à celles obtenues au cœur de la zone de couplage et ont donc un poids mineur dans le taux de couplage global. Plus précisément, on peut négliger ces points si $L_i \gg \mathcal{L}_i$.

Dans le cas du potentiel harmonique inversé au niveau du condensat, on a vu précédemment (figure 50) que la taille \mathcal{L}_i est de l'ordre de la taille de l'oscillateur harmonique σ_i . Dans le cas où la zone de couplage n'est pas trop localisée, $L_i \gg \sigma_i$, et l'approche de Franck-Condon est valide. Comme par exemple, dans notre cas expérimental de couplage radiofréquence où l'enveloppe du couplage est indépendante de la position ($|F(\vec{r}, t)| = 1$). Les tailles L_i sont alors données par les rayons de Thomas-Fermi ($L_{x,z} = R_r$ et $L_y = R_y$), qui sont bien plus grands que la taille de l'oscillateur harmonique dans chaque direction.

III.2.3.c Application du principe de Franck-Condon au cas expérimental

Géométrie du couplage

Calculons donc le taux de couplage correspondant à notre cas expérimental. Le potentiel est donné par la deuxième équation 162. Réduisons alors l'intégrale triple 170 à une intégrale

simple sur y . Pour ceci, nous travaillons en coordonnées cylindriques d'axe y , et posons

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + z^2}, \\ (x; z) = r(\sin \alpha; \cos \alpha), \\ \tilde{\delta} = \delta - \frac{mg\sigma_M}{\hbar}, \\ \frac{m}{2}\omega_r^2 r_c^2(y) = \frac{\hbar^2 \vec{K}^2}{2m} + \hbar\tilde{\delta} + \frac{m}{2}\omega_r^2 \sigma_M^2 - \frac{m}{2}\omega_y^2 y^2. \end{array} \right. \quad (173)$$

Ces différents paramètres interviennent dans la géométrie du couplage. Nous avons introduit le désaccord $\tilde{\delta}$ recentré de telle façon à ce que, dans le cas radiofréquence où $\vec{K} \approx \vec{0}$, $\tilde{\delta} = 0$ corresponde à un couplage au centre du condensat, c'est-à-dire que la surface de couplage passe par $\vec{r} = \vec{0}$.

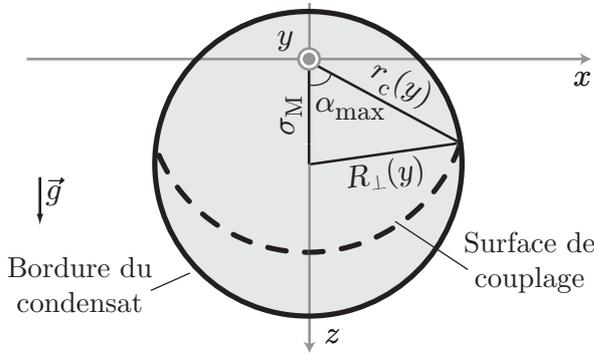


FIG. 54 – Coupe du condensat dans un plan de y donné. Son rayon dans ce plan est $R_{\perp}(y)$ et son centre est verticalement déplacé de σ_M par rapport au minimum de champ magnétique confondu avec l'origine du repère. La surface de couplage (tirets) est de rayon $r_c(y)$. On a représenté le triangle à partir duquel est dérivée la formule 179.

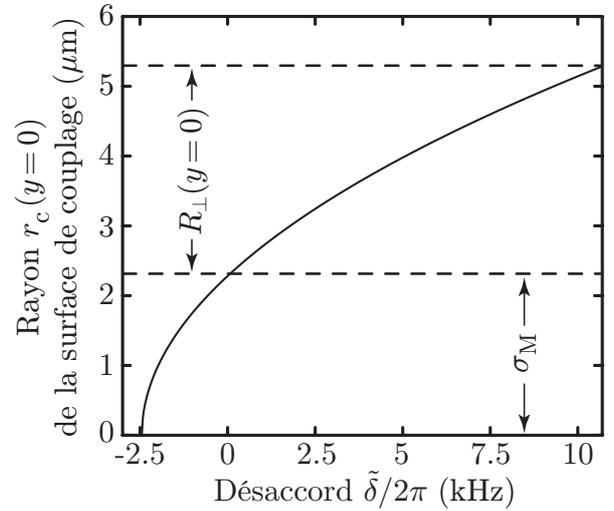


FIG. 55 – Tracé du rayon de la surface de couplage r_c en fonction du désaccord $\tilde{\delta}$ dans le plan $y = 0$ (dernière équation 173). Un désaccord nul correspond au couplage au centre du condensat $r_c = \sigma_M$. Le caractère fortement non linéaire du tracé est dû à l'effet du champ moyen. Dans le cas d'un condensat d'un million d'atomes dans le piège comprimé, $\sigma_M = 2.3 \mu m$ et $R_{\perp}(y=0) = R_r = 3 \mu m$.

Dans un plan vertical à y donné (figure 54), le rayon du condensat est donné par

$$R_{\perp}(y) = R_r \sqrt{1 - \left(\frac{y}{R_y}\right)^2}. \quad (174)$$

Plus on s'éloigne du centre, plus il diminue, en tenant compte de la forme parabolöide de la fonction d'onde du condensat.

La distance $r_c(y)$ correspond au rayon de la surface de couplage dans ce plan vertical. Ce rayon n'est défini que si le terme de droite de la dernière équation 173 est positif, ce qui donne une condition sur y . De même, les points y ayant une contribution non nulle à l'intégrale 170 doivent appartenir au volume du condensat (\mathcal{V}_{CBE}) et donc vérifier $|y| \leq R_y$. En combinant ces deux inégalités sur y , on peut écrire que seuls participent à l'intégrale, les points $|y| \leq y_{\text{max}}$ avec

$$y_{\text{max}} = \min \left\{ R_y; \sqrt{\frac{2}{m\omega_y^2} \max \left[\left(\frac{\hbar^2 \vec{K}^2}{2m} + \hbar\tilde{\delta} + \frac{m}{2}\omega_r^2\sigma_M^2 \right); 0 \right]} \right\}. \quad (175)$$

Les valeurs possibles pour $\tilde{\delta}$ telles que l'intersection entre le condensat et la surface de couplage soit non nulle, appartiennent à l'intervalle $[\tilde{\delta}_{\text{min}}; \tilde{\delta}_{\text{max}}]$ avec

$$\begin{cases} \tilde{\delta}_{\text{min}} = -\frac{\hbar\vec{K}^2}{2m} - \frac{m}{2\hbar}\omega_r^2\sigma_M^2 & \text{si } \sigma_M \leq R_r, \quad \frac{\mu}{\hbar} - \frac{\hbar\vec{K}^2}{2m} - \frac{mgR_r}{\hbar} & \text{si } \sigma_M > R_r, \\ \tilde{\delta}_{\text{max}} = \frac{\mu}{\hbar} - \frac{\hbar\vec{K}^2}{2m} + \frac{mgR_r}{\hbar} & \text{quelque soit le cas.} \end{cases} \quad (176)$$

Ces valeurs extrémales $\tilde{\delta}_{\text{min}}$ et $\tilde{\delta}_{\text{max}}$ sont obtenues en prenant dans la dernière équation 173, respectivement pour valeur minimum de r_c , soit 0 (cas $\sigma_M \leq R_r$), soit $\sigma_M - R_r$ (cas $\sigma_M > R_r$), et pour la valeur maximum $r_c = \sigma_M + R_r$. Nous avons tracé $r_c(y=0)$ en fonction du désaccord $\tilde{\delta}$ dans la figure 55, et ce, pour le cas d'un piège comprimé ($\sigma_M \leq R_r$) contenant un million d'atomes condensés. Le couplage a lieu pour un désaccord $\tilde{\delta}$ allant de $\tilde{\delta}_{\text{min}} = -2\pi \times 2.5$ kHz à $\tilde{\delta}_{\text{max}} = 2\pi \times 10.8$ kHz. Notons, que le couplage étant réalisé par radiofréquence, le terme faisant apparaître \vec{K} dans ces expressions, est négligeable devant tous les autres.

Taux de couplage

Le taux de couplage est donc réécrit avec ces nouvelles notations comme

$$\Gamma = \frac{\pi\hbar\Omega_R^2}{m\omega_r^2 N_c g_{\text{coll}}} \iiint_{\mathcal{V}_{\text{CBE}}} dr d\alpha dy r \left(\tilde{\mu} - \frac{m}{2}\omega_r^2 r^2 - \frac{m}{2}\omega_y^2 y^2 + m\omega_r^2 \sigma_M r \cos \alpha \right) \delta(r_c^2(y) - r^2). \quad (177)$$

Pour réaliser l'intégrale sur r , on utilise la relation suivante vérifiée par les fonctions de Dirac

$$\delta(f(r)) = \sum_i \frac{\delta(r - r_i)}{|f'(r_i)|}, \quad (178)$$

où les r_i sont les racines de la fonction f . La seule racine physiquement acceptable de l'argument de la fonction de Dirac dans l'équation 177 est $r = r_c(y) \geq 0$. L'angle α varie dans l'intervalle $[-\alpha_{\text{max}}(y); \alpha_{\text{max}}(y)]$, où $\alpha_{\text{max}}(y)$ vérifie la relation d'Al-Kashi (figure 54),

$$R_{\perp}^2(y) = \sigma_M^2 + r_c(y)^2 - 2\sigma_M r_c(y) \cos \alpha_{\text{max}}, \quad (179)$$

c'est-à-dire, en utilisant les relations 173,

$$\alpha_{\text{max}}(y) = \arccos \left\{ \min \left[\max \left(\frac{-\mu + mg\sigma_M + \frac{\hbar^2 \vec{K}^2}{2m} + \hbar\tilde{\delta}}{m\omega_r^2 \sigma_M r_c(y)}; -1 \right); 1 \right] \right\}. \quad (180)$$

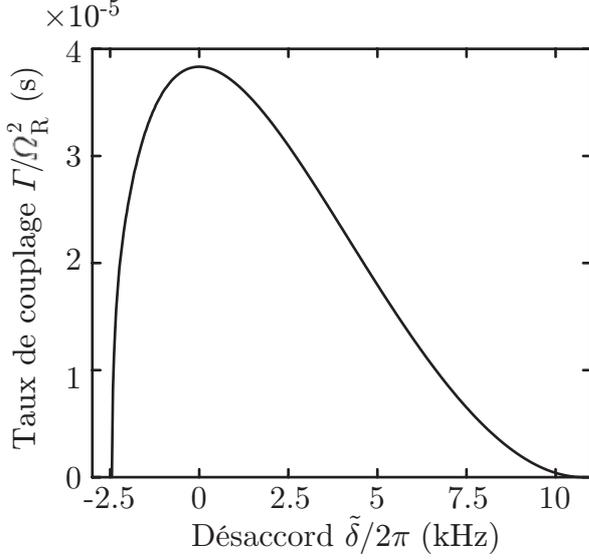


FIG. 56 – Taux de couplage pour 10^6 atomes condensés, normalisé par la fréquence de Rabi au carré Ω_R^2 (équation 181). Le désaccord $\tilde{\delta}=0$ correspond à une surface de couplage passant par le centre du condensat. La dissymétrie prononcée de la courbe est la traduction du caractère fortement confinant de notre piège comprimé.

Après intégration sur r et α , le taux de couplage s'écrit finalement

$$\Gamma = \int_{-y_{\max}}^{y_{\max}} dy \Gamma(y), \quad (181)$$

avec $\Gamma(y) dy$, le taux de couplage associé à une tranche verticale positionnée en y , et d'épaisseur dy ,

$$\Gamma(y) = \frac{\pi \hbar \Omega_R^2}{m \omega_r^2 N_c g_{\text{coll}}} \left[\left(\mu - mg\sigma_M - \frac{\hbar^2 \vec{K}^2}{2m} - \hbar \tilde{\delta} \right) \alpha_{\max}(y) + m \omega_r^2 \sigma_M r_c(y) \sin(\alpha_{\max}(y)) \right]. \quad (182)$$

Dans cette expression, nous avons tiré parti de la symétrie du système par rapport au plan (y, z) . Le taux Γ a été tracé en figure 56. Il varie comme la fréquence de Rabi au carré Ω_R^2 , c'est-à-dire comme la puissance du couplage. Le maximum est obtenu en positionnant la surface de couplage au centre du condensat ($\tilde{\delta}=0$).

La courbe est fortement dissymétrique vis-à-vis de cette valeur, à cause du champ moyen qui rend la surface de couplage de plus en plus courbée et donc petite, au fur et à mesure que l'on diminue $\tilde{\delta}$, comme on le voit sur la figure 55. Cette forte asymétrie est bien plus prononcée que celle observée jusqu'alors sur des expériences de laser à atomes extraits par radiofréquence [113]. Elle met en relief la spécificité de notre configuration expérimentale fortement comprimée, dont nous détaillons, dans la suite du manuscrit, les effets sur l'onde de matière extraite.

On peut retrouver l'ordre de grandeur de la valeur du taux de couplage par le raisonnement suivant. En effet, dans le cadre de la théorie des perturbations stationnaires au premier ordre, le terme de couplage étant donné par Ω_R et le désaccord typique de la transition entre le condensat et un état du continuum étant de Δ , on s'attend à ce que l'élargissement Γ de l'état discret soit de l'ordre de Ω_R^2/Δ . Ceci nous donne $\Gamma \propto \Omega_R^2/\Delta \approx 1.2 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} \cdot \Omega_R^2$.

Validité du couplage faible

À partir de la courbe 56, on peut estimer les valeurs des fréquences de Rabi acceptables pour que le laser opère dans le régime de Born-Markov ($\Gamma t_m \ll 1$). En prenant pour le temps de mémoire, sa valeur maximum, $t_m \approx 1/\omega_r \approx 0.5 \text{ ms}$ (§ III.2.2.c), ainsi que pour Γ , on obtient

$$\Omega_R \ll 2\pi \times 1 \text{ kHz}. \quad (183)$$

Notons cependant que cette condition ne correspond pas à la limite supérieure de la fréquence de Rabi acceptable pour réaliser un laser à atomes quasi-continu. En effet, on voit qu'en se plaçant à cette valeur, le condensat est totalement dépeuplé en un temps qui est bien inférieur au temps de fonctionnement t_c du laser que nous voulons réaliser ($t_c \approx 10$ ms). De plus, en utilisant des fréquences de Rabi trop fortes, on peut s'attendre à exciter des modes propres du condensat [141], car le dépeuplement n'est pas homogène : c'est au voisinage de la zone de couplage que le condensat est le plus dépeuplé. L'approximation d'évolution adiabatique de la fonction d'onde du condensat au cours du couplage (équation 166) n'est donc évidemment plus vérifiée, et par ricochet, le potentiel ressenti par le laser est largement altéré au cours du temps, tout comme le continuum.

Condition d'adiabaticité du couplage

Estimons donc la condition que Ω_R doit remplir pour que le couplage soit adiabatique. La surface de couplage (figure 53) étant pratiquement invariante selon y ($\omega_y \ll \omega_r$), la dynamique des excitations a lieu radialement et donc à une fréquence liée à ω_r . Du point de vue semi-classique, les atomes sont couplés par radiofréquence hors du condensat s'ils se situent au voisinage de la zone de couplage définie par la conservation de l'énergie 171. L'« épaisseur » énergétique de ce voisinage est donnée par $\hbar\Omega_R$: c'est la taille de la levée de dégénérescence des états hyperfins dans le point de vue de l'atome habillé (figure 37). La « taille » énergétique du condensat étant égale à la largeur spectrale du continuum $\hbar\Delta$, la proportion d'atomes au voisinage de la zone de couplage est de l'ordre de Ω_R/Δ . Le temps typique de dépeuplement de cette zone est donc de $\Omega_R/\Gamma\Delta$. L'évolution est adiabatique si le temps de dépeuplement de la zone de couplage est bien plus long que le temps d'amortissement des excitations, de l'ordre de $1/\omega_r$. En utilisant $\Gamma \approx \Omega_R^2/\Delta$, on obtient l'ordre de grandeur de la condition d'adiabaticité

$$\Omega_R \ll \omega_r = 2\pi \times 330 \text{ Hz}. \quad (184)$$

Cette condition est plus restrictive que la condition précédente. Elle limite la valeur de Ω_R à la centaine de hertz chaque fois que nous considérons un laser quasi-continu dans la suite de ce manuscrit.

Cependant, la proximité de cette condition avec celle validant le régime markovien ($\Omega_R \ll 2\pi \times 1$ kHz), permet d'envisager des valeurs de Ω_R de l'ordre de 700 Hz, telles que le condensat ne soit pas trop excité et telles que le régime de fonctionnement ne soit plus complètement markovien. C'est en effet ce que nous observons expérimentalement pour des fréquences de Rabi de cet ordre (§ III.3.4).

III.2.3.d Régime transitoire

Le calcul du taux de couplage précédent a été fait en régime permanent. Des simulations numériques [132] des équations de Gross-Pitaevskii montrent, qu'au début du processus de couplage, on observe un régime transitoire pendant lequel l'intensité du laser fluctue, jusqu'à arriver à un niveau stationnaire. Ce régime dure pendant un temps caractéristique de l'ordre du temps de mémoire du continuum $t_m \approx 1/\omega_r \approx 0.5$ ms.

En figure 57, nous avons simulé la dynamique du laser pour des temps de couplage t_c courts, en utilisant les paramètres du piège comprimé. On observe qu'au fur et à mesure que ce temps augmente, l'extension selon z de la fonction d'onde du laser diminue (figure 57a à d), pour épouser de mieux en mieux la forme du couteau radiofréquence (pointillé blanc). Puis le régime permanent est atteint pour $t_c \approx t_m$, et le laser commence alors à se propager (figure 57e).

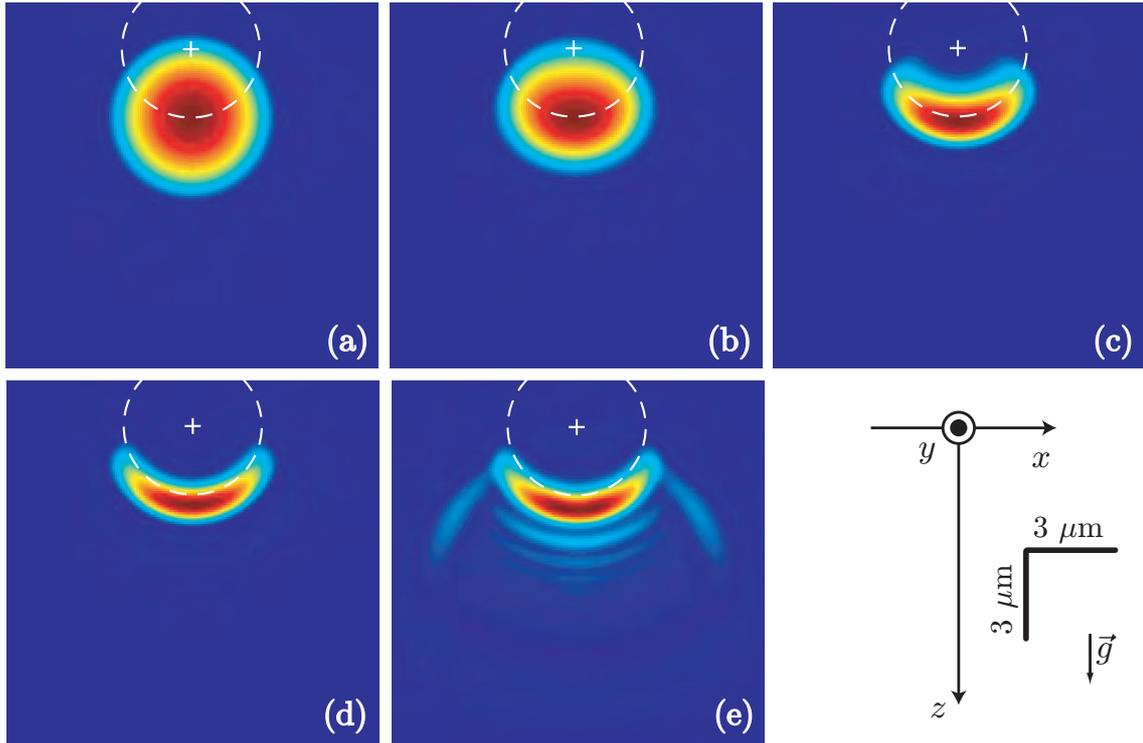


FIG. 57 – Densité atomique du laser à atomes donnée par une simulation de Gross-Pitaevskii (annexe F). Le désaccord du couteau radiofréquence a été pris à $\tilde{\delta}=0$, et nous considérons le plan central (x, z) positionné en $y=0$. Le cercle en pointillé blanc correspond à la position de la surface de couplage. Les images sont données au bout de différents temps de couplage : (a) $t_c = 0^+$, (b) $t_c = 0.1$ ms, (c) $t_c = 0.3$ ms, (d) $t_c = 0.5$ ms, (e) $t_c = 1.1$ ms. L'échelle a été renormalisée entre chaque image.

On peut comprendre ce comportement de la manière suivante. Pour t_c faible (figure 57a), l'étendue de la fonction d'onde du laser est la même que celle du condensat. En effet, un couplage de durée t_c a une décomposition spectrale dans le domaine de Fourier qui présente une largeur en fréquence de l'ordre de $1/t_c$. Ainsi, pour des temps de couplage vérifiant $t_c \ll 2\pi/\Delta \approx 100 \mu\text{s}$, le couplage est beaucoup plus large que le continuum, et toute la surface de couplage est délocalisée sur tout le volume du condensat. La fonction d'onde du laser est alors la copie conforme de la fonction d'onde du condensat, à la normalisation près. Par contre, au fur et à mesure que le temps de couplage augmente, les composantes spectrales à des fréquences différentes de Ω_0 diminuent en intensité. En particulier, dès que la largeur spectrale du coupleur de sortie est plus faible que la largeur du continuum ($t_c > 2\pi/\Delta$), la surface de couplage « s'affine » et le couplage finit par ne devenir non négligeable qu'au voisinage des points vérifiant la conservation de l'énergie 171.

Enfin, on notera qu'en pratique, le temps de mémoire est trop court pour que l'on puisse observer expérimentalement le régime transitoire⁷.

⁷La résolution de l'optique de l'imagerie (§ I.1.4) rendrait nécessaire une dilatation verticale de la partie transitoire de la fonction d'onde du laser grâce à un temps de vol. Cependant plus ce dernier est long, plus le laser à atomes est dilué du fait de l'accélération gravitationnelle, ce qui résulte en une perte de signal.

III.2.3.e Largeur spectrale du laser

Un paramètre important est la largeur spectrale du laser à atomes, qui détermine le caractère monoénergétique (monochromatique) de l'onde de matière couplée. Ainsi, même si le laser à atomes a une énergie E vérifiant la relation 171, différents phénomènes sont à l'origine d'une largeur qui fait que cette énergie n'est pas infiniment bien définie.

Du point de vue théorique, tant que l'on reste dans le régime de couplage faible, on peut faire abstraction du caractère fini de la largeur du continuum vers lequel le condensat se couple. On peut alors montrer que les états du continuum sont contaminés par l'état discret sur une largeur en énergie $\hbar\Gamma$ (Complément C.I de [39]). La largeur spectrale du laser est donc au moins limitée par cette valeur. De plus, pour un couplage de durée t_c , la relation d'incertitude temps-énergie (Chapitre XIII de [142]) nous indique, que l'on ne peut définir l'énergie E à mieux que \hbar/t_c . Dit autrement, la transformée de Fourier de l'onde sinusoïdale de durée finie t_c et de fréquence Ω_0 présente des composantes aux fréquences proches de Ω_0 à $1/t_c$ près, qui permettent un couplage vers des états du continuum d'énergie E à \hbar/t_c près. Ainsi, la largeur spectrale ΔE du laser peut s'écrire

$$\Delta E = \hbar \max\left(\Gamma; \frac{1}{t_c}\right). \quad (185)$$

En pratique, dans le régime où $\Gamma t_c < 1$, la largeur du laser est dominée par le temps de couplage, ce qui, pour des temps $t_c = 10$ ms, donne une largeur théorique⁸ $\Delta E = h \cdot 100$ Hz.

Une telle finesse n'est cependant pas atteinte à cause d'imperfections expérimentales. Comme détaillé au paragraphe III.3.2, des fluctuations techniques (par exemple du champ magnétique), ayant une incidence sur la position de la surface de couplage pendant t_c , la valeur de E n'est pas fixée aussi précisément que l'on voudrait, ce qui élargit le laser à des valeurs plus de dix fois supérieures à la limite théorique.

⁸Si l'on considérait le système au-delà de la limite du champ moyen, on devrait prendre en compte les fluctuations du nombre d'atomes dans le condensat [143], ou encore la diffusion de phase [144], pour aboutir alors à une limite fondamentale pour la largeur spectrale du laser, équivalente à la limite Schawlow-Townes en optique [145].

III.3 Réalisation expérimentale

III.3.1 Mise en œuvre

L'extraction radiofréquence d'un laser à atomes utilise exactement le même dispositif que celui mis en place pour l'évaporation (§ II.3.2). La seule différence est que cette fois-ci, le champ oscillant $B_{\text{RF}\perp}$ est d'amplitude beaucoup plus faible.

III.3.1.a Séquence

La réalisation du laser à atomes nécessite une étape supplémentaire par rapport à la séquence décrite au paragraphe I.2. À la fin de l'évaporation dans le piège comprimé, on coupe l'évaporation à l'aide d'un interrupteur radiofréquence pendant 10 millisecondes (figure 58). Pendant ce temps, la valeur de la radiofréquence Ω_0 est ajustée pour qu'elle corresponde à un désaccord $\tilde{\delta} \in [\tilde{\delta}_{\text{min}}; \tilde{\delta}_{\text{max}}]$ à résonance avec le condensat, et la valeur de la puissance rf est aussi fortement diminuée. À la fin des 10 millisecondes de transition, nous refermons l'interrupteur pendant un temps de couplage t_c , pendant lequel l'onde de matière est extraite. Enfin, après coupure de tous les champs magnétiques du piège et de radiofréquence, nous effectuons un temps de vol t_v avant de prendre les images par absorption.

	Obtention du condensat	Commutation de la rf (10 ms)	Couplage du laser à atomes (t_c)	Temps de vol (t_v) et prise d'image
Piège magnétique				
Évaporation				
Couplage radiofréquence du laser				

FIG. 58 – Séquence expérimentale de couplage du laser à atomes. Après l'obtention du condensat par évaporation forcée, la valeur et la puissance de la radiofréquence est modifiée pour réaliser un couplage de durée t_c . Par la suite, l'image par absorption est réalisée après un temps de vol t_v .

III.3.1.b Choix des paramètres

Les dix millisecondes de temporisation entre la fin de l'évaporation et le début du couplage du laser, ont pour objectif d'éliminer toute perturbation du nuage atomique à cause de la commutation de la radiofréquence du synthétiseur. Cette durée est toutefois choisie relativement courte afin de ne pas laisser le condensat se détériorer sous l'effet, par exemple du chauffage (§ II.2.5), ou encore des pertes à trois corps (§ II.4.3). Le choix du temps de couplage est fait en fonction de l'expérience considérée. On peut a priori utiliser un temps de couplage correspondant au temps de propagation de l'onde jusqu'à la paroi inférieure de la cellule positionnée en $d = 5$ mm au-dessous du condensat. Ce temps est inférieur au

temps de chute libre⁹ sur une distance de 5 mm (30 millisecondes), à cause de l'effet Zeeman quadratique qui expulse les atomes du laser dans l'état $|F=1, m_F=0\rangle$, avec une fréquence $\omega_{Qr} = 2\pi \times 20$ Hz. La valeur maximum de t_c est déduite du mouvement vertical de l'onde : le condensat est positionné à une distance $\sigma_M + \sigma_Q$ du centre du potentiel (figure 45), et on considère que les atomes sortent du bas du condensat situé en $\sigma_M + \sigma_Q + R_r$ avec une vitesse v . L'équation du mouvement hors du condensat est donnée par

$$z(t) = (\sigma_M + \sigma_Q + R_r) \cosh(\omega_{Qr}t) + \frac{v}{\omega_{Qr}} \sinh(\omega_{Qr}t) - \sigma_Q. \quad (186)$$

La vitesse v est liée à l'énergie potentielle dans la zone du condensat et dépend a priori de la position du couteau radiofréquence $\tilde{\delta}$. Elle est donc environ donnée par $v = \sqrt{2\mu/m}$. Dans le premier terme, l'élément prédominant est $\sigma_Q = g/\omega_{Qr}^2 = 6.2 \times 10^2 \mu\text{m}$, qui est bien plus grand que σ_M et R_r . Le second terme lié à la vitesse est en pratique négligeable devant le premier : une application numérique donne $v/\omega_{Qr} \ll \sigma_Q$. Il s'ensuit que le temps maximum pendant lequel le laser peut se propager sans toucher le fond de la cellule est donné par

$$t_c^{\max} = \frac{1}{\omega_{Qr}} \operatorname{arccosh} \left(\frac{d + \sigma_Q}{\sigma_Q} \right) = 23 \text{ ms}. \quad (187)$$

En pratique, on peut utiliser un tel temps de couplage dans le cas où le laser reste collimaté au cours de la propagation. Par contre, dès qu'il est divergent, il est inutile d'opérer le couplage aussi longtemps. En effet, le faisceau atomique devient de plus en plus dilué à cause, à la fois de la divergence et de l'accélération sous l'effet conjoint de la gravité et de l'effet Zeeman quadratique. Il devient alors difficile à imager à l'aide du dispositif actuellement en place sur l'expérience. Enfin, la valeur minimale de la durée du temps de vol t_v est de 1 milliseconde, de telle façon qu'elle permette le repompage des atomes dans $F=2$.

III.3.2 Stabilité du biais magnétique

Un point particulièrement critique expérimentalement est la stabilité des champs magnétiques. En effet, comme on peut le voir sur la condition de résonance 171, si, à valeur de radiofréquence Ω_0 donnée, les champs magnétiques fluctuent, la position de la surface de couplage fluctue aussi. D'une part l'énergie du laser à atomes est mal définie, ce qui a une incidence directe sur la largeur spectrale du laser (§ III.2.3.e). D'autre part, dans le cas qui nous intéresse expérimentalement, où les atomes du laser ressentent un champ moyen non négligeable de la part du condensat, la position du couplage change radicalement l'allure spatiale de la fonction d'onde du laser.

Pour ces deux raisons, il est important que le biais magnétique apparaissant dans V_0 soit aussi stable que possible. Notons que cette condition n'est réellement critique que pour la réalisation de lasers quasi-continus. En effet, dans le cas de lasers impulsions par couplage radiofréquence ou Raman, la largeur spectrale du couplage (inversement proportionnelle au temps de l'impulsion de quelques microsecondes) est beaucoup plus large que celle du condensat Δ . Les fluctuations du biais jouent donc un rôle moins important puisque la zone de couplage est beaucoup plus grande que la taille du condensat. La difficulté technique correspondant à la stabilisation des champs magnétiques est pour une bonne part responsable du léger décalage dans le temps entre les premiers lasers impulsions et les lasers

⁹Ceci n'est vrai que dans le cas du piège magnétique comprimé, où l'effet Zeeman quadratique est non négligeable.

quasi-continus. Pour résoudre ce problème de stabilité des champs, différentes solutions sont utilisées : l'utilisation d'un blindage magnétique est particulièrement efficace [113], tandis que des efforts sur la qualité électronique des alimentations du piège magnétique permettent d'aboutir à des résultats concluants [63].

III.3.2.a Caractérisation

Nous avons caractérisé la stabilité du biais magnétique pour notre électroaimant ferro-magnétique hybride (§ II.2.2). Pour cela, nous avons mesuré expérimentalement le nombre d'atomes couplés hors du condensat en fonction de la valeur de la radiofréquence Ω_0 . Dans le cas d'un système parfait, on s'attend a priori à retrouver la courbe du taux de couplage 56. En réalité, si l'on suppose un bruit gaussien, dont l'écart quadratique moyen sur la précision du désaccord du couplage est σ , le nombre d'atomes couplés \mathcal{N} est proportionnel à la convolution d'une gaussienne traduisant l'élargissement, avec le taux $\Gamma(\tilde{\delta})$,

$$\mathcal{N}(\tilde{\delta}) = \mathcal{C} \int du \Gamma(\tilde{\delta} - \tilde{\delta}_0 - u) \exp[-u^2/2\sigma^2] . \quad (188)$$

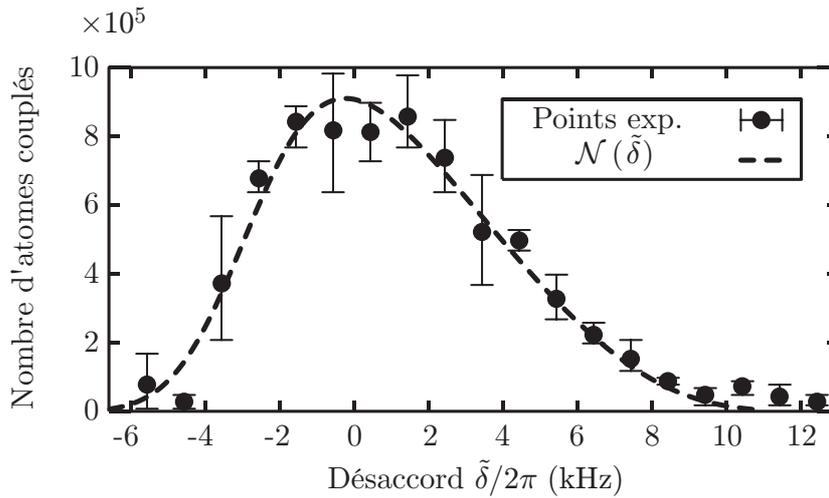


FIG. 59 – Comparaison de la courbe de couplage, élargie par des fluctuations de taille r.m.s. $\sigma = 2\pi \times 1.5$ kHz (équation 188), avec l'expérience. Ceci peut être interprété par la présence de fluctuations du biais B_0 d'une amplitude de 2 milligauss.

Outre la prise en compte dans cette expression d'une amplitude de normalisation \mathcal{C} et de la largeur σ des fluctuations, nous avons aussi introduit un éventuel décalage $\tilde{\delta}_0$, vis-à-vis du désaccord, entre les points expérimentaux et la courbe théorique. En effet, seule la valeur Ω_0 de la radiofréquence est contrôlée expérimentalement extrêmement précisément, à l'aide du synthétiseur. La valeur de V_0 , intervenant dans la définition du désaccord $\tilde{\delta}$, correspond au biais magnétique. Elle est mesurée en abaissant la valeur de la radiofréquence et en regardant le nombre d'atomes couplés hors du condensat. Idéalement, dès que plus aucun atome n'est couplé, $\hbar\Omega_0 = V_0 + \mu - \tilde{\mu}$ et $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_{\min}$. On pourrait donc alors déterminer V_0 , connaissant μ , σ_M et Ω_0 . Mais les légères fluctuations du champ magnétiques rendent la détermination du biais V_0 peu précise, et il est préférable de laisser libre le centrage $\tilde{\delta}_0$ de la courbe 188.

Nous avons ajusté la relation 188 aux points expérimentaux, en laissant comme paramètres libres, l'amplitude \mathcal{C} , le centrage $\tilde{\delta}_0$, et la taille σ des fluctuations. Le résultat est présenté en figure 59. Le centrage relatif des deux courbes en $\tilde{\delta}$ prend en compte la valeur de $\tilde{\delta}_0$ obtenue. La valeur de l'amplitude des fluctuations obtenue est $\sigma = 2\pi \times 1.5$ kHz, ce qui correspond à des fluctuations du biais B_0 de 2 milligauss. Le temps caractéristique, auquel nous devons comparer l'échelle de temps de ces imperfections expérimentales, est la durée $t_c = 10$ ms du couplage. Notre mesure prend en compte à la fois des dérives lentes et des fluctuations rapides du biais magnétique. En effet, si au cours de la prise des points, B_0 dérive lentement (par des effets thermiques par exemple), ceci peut induire un élargissement effectif de la courbe. De même, des fluctuations rapides du biais induisent une largeur effective de la surface de couplage, ce qui permet de coupler des atomes hors du condensat, même si le couteau radiofréquence n'est pas situé dans son volume, et donc d'élargir la courbe.

Nous avons aussi étudié indépendamment la dérive lente du biais, en nous fixant à une valeur de désaccord donné $\tilde{\delta} = 2\pi \times 5$ kHz. Nous avons mesuré le nombre d'atomes couplés, en prenant des points répétés à cette valeur de $\tilde{\delta}$. La modification du nombre d'atomes couplés est alors interprétée, via la courbe 59, comme une modification du biais magnétique. Nous obtenons, d'une image sur l'autre, des fluctuations d'amplitude r.m.s. $2\pi \times 700$ Hz (soit environ 1 mG), alors que la dérive lente est de $2\pi \times 500$ Hz/heure. Notons que toutes ces mesures sont réalisées en vérifiant, entre chaque réalisation de laser à atomes, que le condensat-source reste inchangé. Une façon de limiter la dérive lente du biais à ces valeurs est de faire « chauffer » l'expérience avant toute prise de points expérimentaux, afin que la température des bobines de champ magnétique se stabilise, comme on peut le vérifier en mesurant la tension à leurs bornes. Il est aussi important de réaliser les points expérimentaux à intervalles de temps réguliers, afin de rester le plus possible en régime permanent, c'est-à-dire à une température constante.

La stabilité observée peut être attribuée à deux facteurs techniques :

- Tout d'abord, les bobines dipôle et anti-dipôle à l'origine du biais magnétique, sont montées en série de telle façon que, par réjection de mode commun, les bruits électroniques des deux bobines soient corrélés et se soustraient.
- Nous n'avons pas disposé de blindage magnétique autour de notre cellule. Cependant, nous soupçonnons la structure ferromagnétique d'avoir un effet similaire.

III.3.2.b Fluctuations de la zone de couplage

Il peut être intéressant d'estimer l'effet de ces fluctuations sur la position de la zone de couplage. D'après la figure 55, on voit que des fluctuations $\sigma = 2\pi \times 1.5$ kHz, correspondent à des incertitudes sur le rayon de la surface de couplage, de l'ordre de $\delta r_c \approx 600$ nm. Par rapport au rayon de Thomas-Fermi R_r du condensat, ceci donne un positionnement relatif de l'ordre de $\delta r_c / R_r = 20\%$. On peut aussi comparer δr_c , à la taille typique du lobe de la fonction d'onde de l'oscillateur harmonique inversé (§ III.2.2.a), qui caractérise la zone dans laquelle le couplage se fait, c'est-à-dire là où l'intégrale de recouvrement avec le condensat est non nulle. Notons, dans le plan vertical (x, z) , $\sigma_r = \sqrt{\hbar/m\omega_r} = 600$ nm, la taille de l'oscillateur harmonique inversé, associé à l'interaction collisionnelle entre le laser et le condensat. Le point de rebroussement classique de la fonction d'onde du laser appartenant au condensat, la distance entre un tel point et le centre du potentiel harmonique inversé, est au plus de $R_r + \sigma_M$, ce qui, pour nos paramètres, correspond à $5.3 \mu\text{m}$, soit environ $9\sigma_r$. La figure 50 montre que, pour tous les points de couplages appartenant au volume du condensat ($R_{E_i} \leq 9$), la taille du lobe de la fonction d'onde est plus grande que σ_r . δr_c étant plus faible que cette

taille caractéristique de la fonction d'onde, la stabilité mesurée est suffisante pour considérer qu'elle n'a pas d'incidence notable sur la fonction d'onde du laser à atomes.

III.3.3 Effet des interactions sur le profil du laser

Nous avons réalisé des lasers à atomes en changeant progressivement la valeur de la radiofréquence utilisée, et en balayant ainsi toute la largeur spectrale Δ du condensat. Nous avons alors observé une modification significative de l'allure du faisceau en fonction de la position de la surface de couplage, comme on peut le voir sur la série d'images de la figure 60.

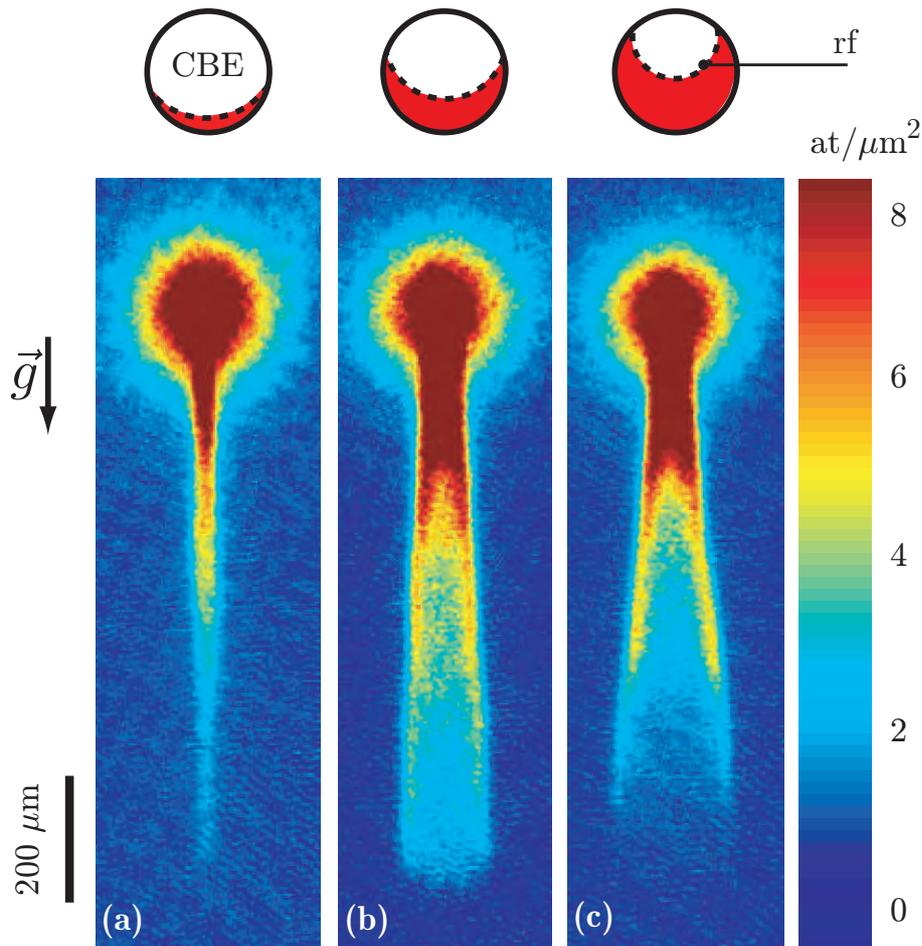


FIG. 60 – Images d'absorption de lasers à atomes, issus d'un condensat dans un piège comprimé, en fonction de la hauteur de la zone de couplage fixée par le désaccord $\tilde{\delta}$, (a) $\tilde{\delta} = 2\pi \times 8.9$ kHz, (b) $\tilde{\delta} = 2\pi \times 1.1$ kHz, (c) $\tilde{\delta} = -2\pi \times 1.1$ kHz. Nous avons représenté en tiret, la position du couteau radiofréquence correspondante, et en rouge la partie du condensat, traversée au cours de la propagation du laser à atomes. La durée du couplage pour ces trois images est $t_c = 10$ ms.

Sur l'image 60a, où le couplage se fait au bas du condensat, on observe un faisceau collimaté. Par contre, au fur et à mesure que l'onde est extraite du haut du condensat

(images 60b et c), le laser devient non seulement de plus en plus divergent, mais son profil est aussi fortement non gaussien et l'on observe une accumulation des rayons atomiques sur le bord du faisceau, formant des caustiques [106]. Des observations similaires [146] ont été publiées pendant la durée de ce travail.

Du point de vue expérimental, l'étude du comportement du laser nécessite de déterminer les paramètres associés à chaque réalisation. Les images sont réalisées par séries, en incrémentant chaque fois la valeur de la radiofréquence Ω_0 , de façon à avoir balayé, au terme de la série, toute la largeur spectrale Δ du condensat. Le tracé du nombre d'atomes couplés en fonction de Ω_0 , permet par ajustement avec le taux de couplage (courbes analogues à la figure 59) de déterminer le désaccord $\tilde{\delta}$ associé à chaque image. De plus, cette courbe nous donne accès aussi à la fréquence de Rabi utilisée. Ainsi, les trois images 60, correspondent à une fréquence de Rabi $\Omega_R = 2\pi \times 120$ Hz et un flux maximum, atteint pour un couplage près du centre (images 60b et c), égal à $\mathcal{F} = 2 \times 10^7$ at/s, soit une valeur du taux de couplage de $\Gamma = 20$ s⁻¹. Cette calibration via le nombre d'atomes couplés, nous permet, de plus, de vérifier que nous sommes bien en régime de couplage faible, et que le condensat est peu perturbé au cours des 10 millisecondes de couplage.

L'effet de divergence a été étudié dans [37] et est dû aux interactions répulsives entre le condensat et le laser à atomes. Plus le laser a à parcourir de distance avant de sortir du condensat, plus il va interagir avec celui-ci et donc, plus il va diverger. C'est bien ce que nous observons lorsque la hauteur de la surface de couplage augmente.

Il est à noter que nous n'avons pas observé de modification significative du profil du laser en changeant le nombre d'atomes N_0 du condensat. En effet, les paramètres du potentiel répulsif exercé par le condensat, varient très peu vite avec N_0 : le rayon de Thomas-Fermi varie en $N_0^{1/5}$ et le potentiel chimique en $N_0^{2/5}$. Par contre, nous avons observé expérimentalement que le paramètre le plus important est la courbure du potentiel répulsif radial. Ce dernier est uniquement fixée par le confinement ω_r , puisque le condensat est dans le régime de Thomas-Fermi, et nous avons vérifié qu'en décomprimant le piège magnétique, l'effet de caustique et de divergence disparaît très rapidement.

Le modèle introduit dans [37] ne permet cependant pas d'expliquer nos observations expérimentales concernant la détérioration du profil du faisceau. Par rapport à la configuration qui y était étudiée, nous avons un confinement plus fort et l'axe de l'imagerie est confondu avec l'axe long du condensat. Ce dernier point signifie que nous imageons les deux directions les plus confinantes du piège (les directions quadrupolaires x et z), c'est-à-dire les axes où la dynamique liée à l'interaction avec le condensat est la plus forte.

Nous ne détaillons pas dans ce paragraphe, l'interprétation liée à l'apparition de ces caustiques. Cette dernière, ainsi que l'étude détaillée de la propagation du laser prenant en compte les spécificités de notre configuration expérimentale, sont en effet l'objet du quatrième et cinquième chapitre de ce manuscrit.

III.3.4 Dynamique non markovienne du laser

Nous avons aussi réalisé des lasers à atomes en modifiant la puissance radiofréquence utilisée, c'est-à-dire la fréquence de Rabi Ω_R . En nous plaçant à un désaccord tel que le couplage se fasse en haut du condensat, nous avons obtenu les images 61. Si pour une fréquence de Rabi faible (image 61a), nous observons un laser quasi-continu présentant des caustiques, comme discuté au paragraphe III.3.3, lorsque nous augmentons la fréquence de Rabi, (image 61b), nous voyons clairement apparaître une modulation longitudinale sur toute la longueur

du faisceau. En augmentant encore la fréquence de Rabi (image 61c), non seulement la période de cette modulation diminue, mais, cette dernière ne subsiste qu'au début du couplage correspondant au bas de l'image, alors que plus haut, elle a disparu pour laisser place à un faisceau fortement excité. Ces oscillations correspondent à la transition entre un régime de décroissance exponentielle de la population du condensat et un régime d'oscillations de Rabi, et traduisent un comportement non markovien de la dynamique du laser.

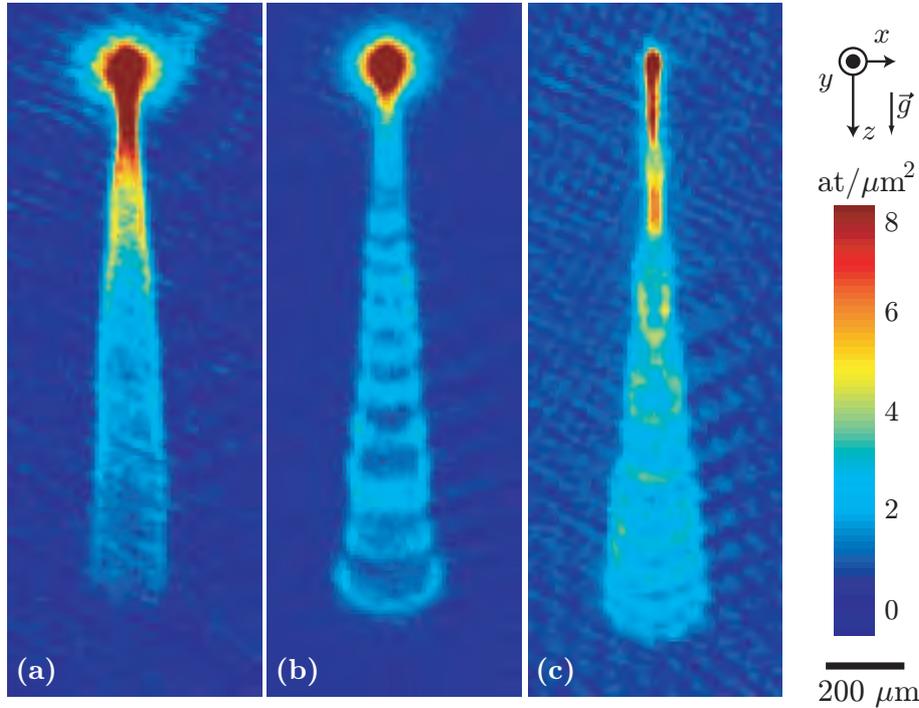


FIG. 61 – Images d'absorption de lasers à atomes divergents, issus d'un condensat dans un piège comprimé, en fonction de la puissance de couplage, (a) $\Omega_R = 2\pi \times 120$ Hz, (b) $\Omega_R = 2\pi \times 700$ Hz, (c) $\Omega_R = 2\pi \times 1$ kHz. La durée du couplage pour ces trois images est $t_c = 13$ ms.

Expérimentalement nous remarquons deux points :

- Tout d'abord, la plage de fréquence de Rabi, telles qu'une oscillation régulière tout au long du faisceau (image 61b) soit clairement visible, est tout au plus limitée à des valeurs de Ω_R , comprises entre $2\pi \times 500$ Hz et $2\pi \times 1$ kHz, soit une plage relativement faible (6 dB en puissance¹⁰).
- Un second point observé est que, le comportement correspondant à cette modulation n'est clairement visible que si l'on est dans une configuration où le laser est fortement divergent (couplage en haut du condensat).

Nous pouvons comprendre ces observations à la lumière de la discussion des paragraphes III.2.2.c et III.2.3.a. Nous sommes dans un régime où la fréquence de Rabi est assez grande

¹⁰On exprime en décibel (dB) le rapport R des puissances correspondant aux fréquences de Rabi Ω_{R1} et Ω_{R2} , selon

$$R = 20 \log \Omega_{R1} / \Omega_{R2}.$$

pour que le comportement du laser ne soit plus totalement markovien (la limite en Ω_R a été évaluée au paragraphe III.2.3.c comme étant de l'ordre de $2\pi \times 1$ kHz), mais pour autant, la puissance n'est pas trop forte, et Ω_R n'est pas trop éloigné de $\omega_r = 2\pi \times 330$ Hz) pour que le dépeuplement du condensat ne soit pas trop prononcé et que les excitations restent petites.

Notre configuration expérimentale nous permet donc d'observer le comportement non markovien du laser et ce, avant que les excitations du condensat ne finissent par brouiller le signal. Cette compétition entre les deux phénomènes est clairement visible sur l'image 61, où au début du couplage, les excitations ne sont pas encore assez développées et la modulation du faisceau est visible, tandis que plus haut (c'est-à-dire plus tard pendant le couplage), les excitations sont suffisamment significatives pour modifier profondément la distribution spatiale du condensat, donc le continuum, et brouiller totalement le signal.

La présence d'interactions non négligeables entre le condensat et le laser favorise l'observation d'un tel comportement. En effet, ces interactions modifient fortement le temps de mémoire du continuum (§ III.2.2.c). En particulier, dans le cas d'un couplage près du maximum de la « bosse » de potentiel, t_m est plus long que celui que l'on obtiendrait dans le cas où le laser ressentirait la gravité seule. Ceci explique pourquoi cet effet non markovien est particulièrement visible pour un couplage vers le haut du condensat. Le rôle des interactions est donc d'augmenter le temps de mémoire du continuum, de telle façon à ce que la transition vers le régime markovien arrive pour des fréquences de Rabi suffisamment faibles pour ne pas induire de fortes excitations qui occulteraient le comportement oscillant du laser. Notons que le point important, pour avoir accès expérimentalement à ce régime est de pouvoir coupler le laser au voisinage du maximum de la « bosse » de potentiel, et donc on s'attend à ce qu'un tel comportement ne soit particulièrement visible que si le «sag» σ_M est plus petit que le rayon de Thomas-Fermi R_r (figure 51). Ainsi, nous n'avons pas observé un tel comportement oscillant pour un laser issu d'un condensat dans le piège non comprimé pour lequel $\sigma_M \ll R_r$.

Au terme de ce chapitre, nous avons détaillé le traitement de champ moyen du couplage du laser à atomes à partir du condensat. Nous avons tout particulièrement mis l'accent sur les spécificités liées au fort confinement de notre piège magnétique. Comme observé expérimentalement, cette configuration a un effet important à la fois sur la dynamique de couplage et sur la propagation de l'onde de matière. C'est ce dernier point que nous développons dans le chapitre suivant.

PROPAGATION DU LASER À ATOMES

L'étude de la propagation des lasers à atomes est un sujet qui est relativement moins souvent abordé dans la littérature que celui du couplage (§ III.1.3). Ainsi, hormis l'utilisation de simulations numériques de Gross-Pitaevskii, on peut noter les quelques résultats suivants.

L'expression de la fonction d'onde se propageant dans le potentiel gravitationnel a été donnée dans [135, 132] sans prendre en compte l'effet des interactions (équation 150). De plus, il a été montré dans [147], que le faisceau issu d'un condensat de taille inférieure au micron pouvait exhiber une structure transverse lors de sa propagation dans le champ gravitationnel. D'autre part, un condensat en interaction faible avec le laser, agit comme une lentille mince effective, aboutissant à la divergence du faisceau [37]. Cet effet a été caractérisé analytiquement, par l'utilisation des matrices $ABCD$ de propagation en optique atomique [148], qui incluent le champ moyen, la diffraction et les effets de propagation. Cependant, comme observé au paragraphe III.3.3, cette approche ne permet pas d'expliquer la présence de caustiques sur le profil du laser à atomes que nous obtenons expérimentalement.

L'accumulation des rayons atomiques sur le bord du faisceau a été prédite précédemment [149] dans le cas d'un confinement important. L'explication du phénomène est fondée sur des considérations à partir la dynamique unidimensionnelle transverse du laser. En effet, le champ moyen du condensat expulse les atomes transversalement (figure 62). À cause de la taille finie de ce potentiel fortement répulsif, les trajectoires partant de points initialement au centre du faisceau ressentent la répulsion, plus longtemps que celles qui sont originaires de points proches de la surface du condensat. En sortie du condensat, la vitesse transverse des trajectoires est donc fortement dépendante de leur position de départ : elle est d'autant plus grande que les trajectoires sont originaires du cœur du condensat, c'est-à-dire de là où la densité atomique est la plus forte. Il arrive un moment, où les trajectoires les plus rapides rattrapent, et même dépassent, celles partant du bord du condensat, résultant en une inversion de la concavité du profil transverse du laser par rapport à celle du condensat : la densité du profil transverse du laser décroît lorsque l'on se rapproche de l'axe au contraire de la densité du condensat.

Ce raisonnement permet de reproduire qualitativement la concavité du profil transverse du faisceau. Cependant il ne prend pas en compte certaines données du problème qui ont

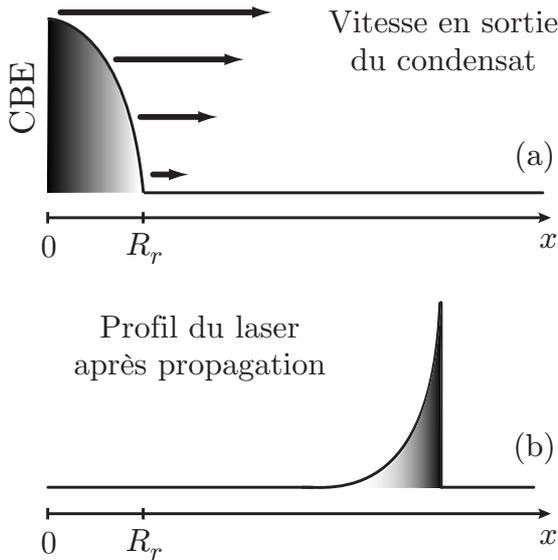


FIG. 62 – Schéma de principe du raisonnement sur la dynamique transverse (selon x) justifiant la présence de caustiques. Pour des raisons de symétrie du système, seul le cas $x > 0$ est représenté. (a) Les trajectoires partant du centre du condensat en sortent en R_r , avec une vitesse plus forte que celles partant de positions x proches de R_r . (b) Après propagation, le profil du laser qui en découle, présente un caractère concave, avec une densité croissante au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'axe $x = 0$.

un effet quantitatif important sur la fonction d'onde du laser présentant des caustiques. En particulier, comme il s'agit d'un raisonnement unidimensionnel transverse, il ne rend pas compte du fait que les trajectoires réelles présentent aussi un mouvement vertical. Ce point a son importance, car dans la direction verticale, l'étendue du condensat est finie, et les rayons atomiques sont aussi expulsés dans cette direction. Ainsi, le simple fait que les trajectoires partant près de l'axe, ont une vitesse transverse en sortie plus grande les autres, n'est pas vérifié en réalité. Un contre-exemple manifeste est le cas de la trajectoire partant exactement sur l'axe, qui n'est pas du tout déviée transversalement et dont la vitesse transverse est nulle. Notons que des simulations numériques à deux dimensions [149], ont montré un écart significatif entre une approche purement transverse unidimensionnelle et une approche associant la dynamique verticale. Nous avons vu, de plus, lors de l'étude du couplage (figure 54), que le couteau radiofréquence est courbé du fait du fort confinement, et ne peut donc être correctement décrit de manière unidimensionnelle.

Tous ces points justifient la nécessité d'une étude théorique de la propagation du laser, prenant en compte le fort couplage entre la dynamique transverse et verticale. C'est cette étude que nous présentons dans ce chapitre.

En utilisant les techniques et outils adaptés à l'optique atomique [148], nous montrons comment calculer, à trois dimensions, la fonction d'onde du laser à atomes en régime de couplage faible, en prenant en compte de manière non perturbative, les interactions collisionnelles entre le condensat et l'onde de matière.

Pour cela, nous partons de l'expression générale 146, et traitons de la propagation du laser en différentes étapes, qui chacune, correspond à un domaine de validité différent des approximations d'optique atomique utilisées. En particulier, nous traitons la discontinuité liée à la sortie du volume du condensat de Bose-Einstein, en séparant la propagation en deux parties, correspondant soit à la propagation dans le volume du condensat, soit hors du CBE (§ IV.1). Dans le volume du condensat (§ IV.2), nous montrons que la propagation peut être traitée à l'aide de l'iconale, tandis qu'hors du condensat (§ IV.3), nous utilisons l'intégrale de Kirchhoff pour calculer la fonction d'onde dans tout l'espace. Nous montrons enfin le bon accord des résultats de cette propagation, avec les résultats obtenus par une résolution numérique des équations de Gross-Pitaevskii couplées (§ IV.4).

IV.1 Méthode de propagation dans un potentiel défini par morceaux

Considérons l'équation 146 déterminant la fonction d'onde ψ_ℓ du laser à atomes,

$$\psi_\ell(\vec{r}, t) = \frac{\Omega_R}{2i} \int_{t_0}^t dt' \int d\vec{r}' K(\vec{r}, t; \vec{r}', t') e^{-i[\vec{K}\vec{r}' + (\frac{\mu}{\hbar} - \delta)t']} F(\vec{r}', t') \phi_c(\vec{r}'). \quad (189)$$

Pour calculer ψ_ℓ , nous avons donc besoin de connaître le propagateur $K(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$, où \vec{r}' appartient au volume du condensat tandis que \vec{r} est en dehors. Ce propagateur est associé au potentiel global $V_\ell(\vec{r}) + g_{\text{coll}}|\phi_c(\vec{r}, t)|^2$, qui est quadratique par morceaux. En effet, l'étendue du terme $g_{\text{coll}}|\phi_c(\vec{r}, t)|^2$ est limitée à celle du nuage atomique condensé. Notons V_i , le potentiel dans le volume du condensat, et V_o à l'extérieur. Le potentiel global V peut donc s'écrire

$$V = \begin{cases} V_i = V_\ell(\mathbf{r}) + g_{\text{coll}}|\phi_c(\mathbf{r})|^2 & \text{à l'intérieur du condensat,} \\ V_o = V_\ell(\mathbf{r}) & \text{à l'extérieur du condensat.} \end{cases} \quad (190)$$

Nous avons tracé, en figure 63, ce potentiel dans le plan central ($x, y = 0, z$). Sa dérivée présente une discontinuité au niveau de la surface du condensat, du fait de la forme parabolicoïde du condensat, liée à l'approximation de Thomas-Fermi¹. À cause de cette discontinuité, le potentiel V n'est pas séparable, ce qui nous empêche de simplifier le traitement en considérant chaque degré de liberté indépendamment.

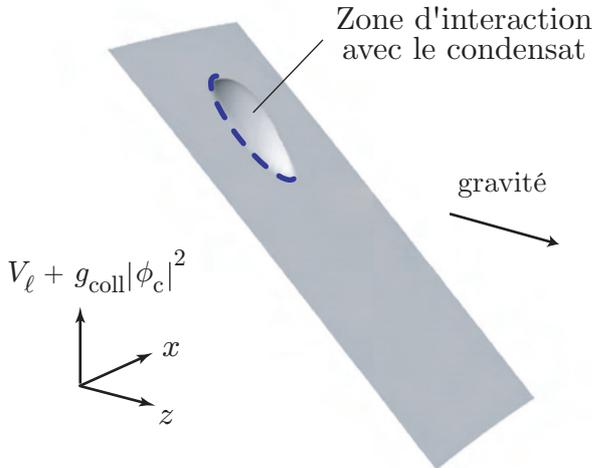


FIG. 63 – Allure du potentiel $V_\ell + g_{\text{coll}}|\phi_c|^2$ dans lequel se propage le laser à atomes. Le tracé est donné au voisinage de la zone du condensat, pour le plan vertical central ($y=0$). Les courbures liées à l'effet Zeeman quadratique ne sont pas visibles, à cause de leur faiblesse par rapport aux courbures du piège magnétique, apparaissant dans le terme $g_{\text{coll}}|\phi_c|^2$. Par un trait tireté, on a représenté la surface du condensat, projetée dans le plan (x, z) .

IV.1.1 Propagateur

IV.1.1.a Écriture générale

Nous avons déjà donné une première expression du propagateur (équation 147). Cependant, dans notre cas, où nous ne connaissons pas les fonctions propres du potentiel global V , une telle approche n'est pas utilisable.

¹Dans la réalité, cette discontinuité n'existe pas, car la fonction d'onde du condensat présente des « ailes » exponentielles (figure 29). Cependant, dans ce cas, le potentiel $g_{\text{coll}}|\phi_c(\vec{r}, t)|^2$ n'est plus quadratique, et ces effets de bord rendent l'étude du problème encore plus compliquée. Notons que de tels effets sont facilement pris en compte par l'intégration numérique des équations de Gross-Pitaevskii (§ IV.4), mais n'ont pas d'influence sur la dynamique du laser et sont donc négligés dans notre approche.

L'écriture de $K(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ peut toutefois être formulée de manière différente, et plus adaptée à notre cas. En effet, de manière générale, un tel propagateur s'écrit comme une intégrale fonctionnelle sur tous les chemins $\tilde{r}(u)$ reliant \vec{r}' à \vec{r} lorsque le temps u passe de t' à t (Chap. II de [134]),

$$K(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \int_{\vec{r}', t'}^{\vec{r}, t} \mathcal{D}\tilde{r}(u) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t; \vec{r}', t')\right). \quad (191)$$

L'élément d'intégration est noté $\mathcal{D}\tilde{r}(u)$, et l'intégrande fait apparaître l'action S

$$S(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \int_{t'}^t du L(\vec{v}, \vec{r}, u). \quad (192)$$

Cette dernière est définie comme l'intégrale temporelle du lagrangien L associé au potentiel V ,

$$L(\vec{v}, \vec{r}, u) = \frac{m}{2} \vec{v}^2(u) - V(\vec{r}, u), \quad (193)$$

où $\vec{v}(u)$ est la vitesse le long de la trajectoire $\tilde{r}(u)$. L'interprétation physique de la formule 191 est la suivante : le propagateur reliant un point \vec{r}' à \vec{r} en un temps $t - t'$, est la somme, sur chacun des chemins reliant ces points, de la phase accumulée. On voit que cette formulation intègre naturellement la notion d'interférences, liée au fait que la somme de la phase sur les chemins est nulle ou pas. Le fait que la phase accumulée sur des chemins joue ici un rôle prépondérant n'est pas sans rappeler les concepts de l'optique.

IV.1.1.b Tentatives d'écriture explicite

L'expression 191 n'est pas utilisable en l'état, car on ne sait pas calculer explicitement le propagateur associé à un potentiel défini par morceaux. On notera cependant qu'un traitement numérique du développement du propagateur, applicable au système, a été présenté dans [150].

Notre approche a consisté à traiter la propagation par d'autres moyens, en approximant l'expression 191 : nous résumons dans ce paragraphe deux tentatives d'écriture du propagateur que nous avons exploré, en mettant en relief la problématique liée au potentiel défini par morceaux.

Première piste

Tous les chemins $\tilde{r}(u)$ n'ont pas la même importance dans l'intégrale 191. En réalité, lorsqu'ils existent, les chemins classiques² $r_{cl}(u)$ sont prépondérants [152], puisqu'ils correspondent à une action S stationnaire. Une première approximation pour calculer le propagateur consisterait donc à limiter le domaine de l'intégrale 191 au voisinage de ces chemins, en écrivant

$$K(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \approx \int_{\tilde{r}(u) \approx r_{cl}(u)} \mathcal{D}\tilde{r}(u) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t; \vec{r}', t')\right). \quad (194)$$

Dans un premier temps, nous avons essayé de calculer le propagateur de cette manière. Une telle approche nécessite d'être capable d'écrire l'action $S(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$, le long du chemin clas-

²On appelle chemin classique, un chemin qui connecte les points \vec{r}' à \vec{r} , lorsque le temps u passe de t' à t , à l'aide des équations classiques du mouvement dans le potentiel V . Ces chemins sont obtenus en mécanique analytique par le principe de moindre action (Chap. I de [151]).

sique. Ceci nécessite d'être capable d'inverser analytiquement les équations du mouvement³, ce qui n'est pas forcément faisable en présence d'une discontinuité, car elle introduit des conditions de passage entre les deux zones de définition du potentiel. En particulier, dans notre cas, nous n'avons pas réussi à inverser les trajectoires classiques.

Deuxième piste

Étant donné que le noeud du problème se situe au niveau de la discontinuité à la frontière du condensat, une deuxième piste d'étude a consisté à séparer la propagation dans chaque partie. En effet, on connaît le propagateur dans chaque zone indépendamment⁴. On peut donc imaginer s'inspirer de la formule de composition des propagateurs (Chap. II de [134]),

$$K(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \int_{\text{espace}} d\vec{r}'' K(\vec{r}, t; \vec{r}'', t'') K(\vec{r}'', t''; \vec{r}', t'). \quad (195)$$

L'intégrale s'effectue sur toutes les positions \vec{r}'' de l'espace, et est indépendante du temps t'' du point intermédiaire.

Nous avons essayé d'exprimer le propagateur global K en fonction des propagateurs dans chaque zone, K_i (intérieur du condensat) et K_o (hors du condensat). Nous avons adapté l'expression 195, en restreignant l'intégrale sur \vec{r}'' à la surface du condensat,

$$K(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \stackrel{?}{=} \int_{\substack{\text{surface} \\ \text{du CBE}}} d\vec{r}'' K_o(\vec{r}, t; \vec{r}'', t'') K_i(\vec{r}'', t''; \vec{r}', t'). \quad (196)$$

Cependant, cette approche n'a pas été couronnée de succès. La raison principale est que l'on ne peut réellement éliminer de l'intégrale, les points \vec{r}'' qui ne sont pas sur la frontière, et l'expression 196 n'est absolument pas justifiée.

Ces tentatives d'écriture du propagateur global nous ont permis de bien cerner le problème lié à la discontinuité. Le fait est que l'on sait propager un paquet d'onde, soit totalement localisé dans la zone du condensat (la propagation se fait à l'aide de K_i), soit totalement à l'extérieur du condensat (à l'aide de K_o). Le problème survient lorsque le paquet d'onde est à cheval sur la surface du condensat. On comprend qualitativement qu'il n'en serait rien, si au lieu de propager des paquets d'onde tridimensionnels, on propageait des surfaces bidimensionnelles, pouvant épouser la frontière entre les deux zones du potentiel.

IV.1.2 Procédure de calcul adoptée

Pour cela, on peut s'inspirer du cas de l'optique, où l'on propage couramment le champ électromagnétique à partir de surfaces (Chap. VIII de [153]). En optique, ceci est possible car on considère des champs monochromatiques : on a donc une relation qui relie le vecteur

³L'expression de S que l'on utilise, ne doit pas dépendre explicitement de la vitesse au début de la trajectoire. Or, le lagrangien (équation 193) implique la vitesse $\vec{v}(u)$, via l'intégration de l'énergie cinétique. Cette vitesse est donnée de manière univoque, par la vitesse initiale (en \vec{r}') \vec{v}'_0 , et par les équations du mouvement dans le potentiel V . Pour calculer l'action S , on doit donc être capable d'exprimer la vitesse initiale de la trajectoire en fonction des autres paramètres, ce qui s'avère problématique en présence d'un potentiel défini par morceaux.

⁴Le potentiel y étant quadratique sans discontinuité, un développement à l'ordre deux de l'action, montre [152] que l'expression 194 est en réalité exacte, et comme nous le verrons dans la suite, on peut donner une formule analytique du propagateur dans chaque zone indépendamment.

d'onde transverse au vecteur d'onde longitudinal. Pour pouvoir réaliser la même chose en optique atomique, il faut donc nécessairement considérer un laser à atomes monoénergétique⁵.

IV.1.2.a Propagation en deux étapes

Comme décrit en figure 64, la procédure adoptée pour calculer la fonction d'onde du laser à atomes est réalisée en deux étapes, chacune correspondant à la propagation soit à l'intérieur du condensat (dans V_i), soit à l'extérieur (V_o). Les deux régions sont connectées par la connaissance de la fonction d'onde ψ_ℓ à la frontière \vec{r}_f .

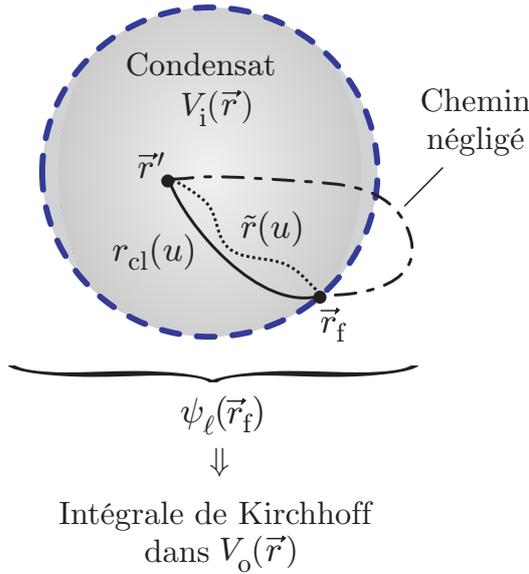


FIG. 64 – Principe du calcul de la fonction d'onde du laser à atomes vu dans un plan vertical (x, z). ψ_ℓ est d'abord évaluée à la frontière du condensat \vec{r}_f (cercle tireté), en considérant seulement les chemins totalement inclus dans la zone du condensat et qui ressentent le potentiel V_i . Ces chemins sont, soit classiques ($r_{cl}(u)$), soit non classiques ($\tilde{r}(u)$). La seconde étape consiste à calculer la fonction d'onde à partir de $\psi_\ell(\vec{r}_f)$, hors du condensat (potentiel V_o), à l'aide de l'intégrale de Kirchhoff.

Cette valeur sur la surface du condensat est calculée en utilisant la relation (189), où l'on remplace K par K_i , le propagateur à l'intérieur du condensat. On développe en particulier cette propagation au voisinage des chemins classiques, ce qui nous permet d'obtenir une expression analytique de $\psi_\ell(\vec{r}_f)$. Comme détaillé au paragraphe IV.2, un tel développement correspond à l'approximation iconale (WKB) de la propagation, bien connue en optique, et est valide, car les effets de diffraction au début de la propagation (dans le condensat) sont négligeables.

Nous calculons ensuite la fonction d'onde hors du condensat à partir de sa connaissance sur la surface du CBE, en transposant l'intégrale de Kirchhoff au cas de l'optique atomique (§ IV.3). Celle-ci fait en particulier intervenir le propagateur indépendant du temps G_E dans le potentiel V_o , que nous exprimons dans le cas du potentiel harmonique expulsant.

IV.1.2.b Récapitulatif des hypothèses nécessaires

Nous résumons dans ce paragraphe les hypothèses décisives pour mener à bien le calcul de ψ_ℓ .

⁵À trois dimensions, la partie spatiale de la fonction d'onde du laser à atomes est pleinement déterminée par la donnée de trois nombres quantiques. En fixant l'énergie E du laser, on donne une relation supplémentaire liant ces trois nombres quantiques, et on restreint donc de façon draconienne le nombre de fonctions propres ϕ_k sur lesquelles se décompose la fonction d'onde ψ_ℓ du laser. Le troisième nombre quantique est déterminé par la connaissance de E et des deux autres nombres quantiques, ce qui revient à dire qu'un degré de liberté est contraint par la valeur de l'énergie E .

- Pour pouvoir séparer la propagation en deux phases indépendantes, nous négligeons les effets de bord sur la surface du condensat. En particulier, nous négligeons les chemins qui passent plusieurs fois la surface, et dont la dynamique correspond à la succession de propagation dans V_i et V_o .
- L’hypothèse d’un laser monoénergétique est centrale dans notre traitement, car c’est elle qui nous permet de traiter convenablement la discontinuité. Le corollaire de cette hypothèse est la stationnarité de la fonction d’onde ψ_ℓ . En effet, comme on l’a discuté au paragraphe III.2.3.e, un laser à atomes ne peut être infiniment fin spectralement que si le couplage a duré infiniment longtemps. Comme nous considérons un couplage très faible tel que le condensat ne soit pas perturbé, la dimension temporelle disparaît donc du problème.
- La diffraction est négligée pour la partie du laser dans le volume du condensat, alors qu’elle est pleinement prise en compte hors du CBE dans l’intégrale de Kirchhoff. En effet, l’onde de matière n’a pas le temps de diffracter dans V_i , car elle est très rapidement expulsée de cette zone par l’effet combiné des interactions et de la gravité.

IV.2 Propagation dans la zone du condensat

Nous développons, dans cette section, les méthodes utilisées pour propager le laser dans le volume du condensat. Nous partons de l'équation 189 en remplaçant K par le propagateur K_i associé à V_i , le potentiel dans le volume du condensat seul. Nous développons le calcul sans négliger, dans un premier temps, l'impulsion pouvant être transférée à l'onde extraite ($\vec{K} \neq \vec{0}$), englobant par là-même, à la fois le couplage radiofréquence et le cas du couplage Raman. En suivant les notations de l'équation 171, on note $E = \mu - \hbar\delta$, l'énergie du laser. Comme nous considérons ψ_ℓ en régime stationnaire, on peut écrire

$$\psi_\ell(\vec{r}, t) = \psi_\ell(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}. \quad (197)$$

Dans le cadre de l'hypothèse de stationnarité, nous prenons une enveloppe de couplage indépendante du temps $F(\vec{r}', t) = F(\vec{r}')$, et étendons le domaine d'intégration temporel de l'intégrale 189 à l'infini. De plus, il est naturel d'introduire l'intervalle $\tau = t - t'$, qui est la seule variable temporelle utile (par exemple pour le propagateur), puisque le système est invariant par une translation dans le temps. Nous réécrivons donc l'équation 189 comme

$$\psi_\ell(\vec{r}) = \frac{\Omega_R}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d\vec{r}' K_i(\vec{r}, \vec{r}', \tau) e^{-i\vec{K}\cdot\vec{r}'} e^{iE\tau/\hbar} f(\vec{r}'). \quad (198)$$

Nous avons noté, dans l'équation 198, la fonction $f(\vec{r}') = F(\vec{r}') \phi_c(\vec{r}')$, prenant en compte une éventuelle dépendance spatiale du couplage, comme par exemple, dans le cas d'un couplage Raman avec des lasers focalisés sur une zone plus petite que l'extension spatiale du condensat.

Dans un premier temps, nous calculons directement, dans le paragraphe IV.2.1, l'intégrale 198. À partir de l'expression du propagateur K_i de l'oscillateur harmonique inversé, nous utilisons la méthode de la phase stationnaire pour évaluer l'intégrale 198. Nous mettons ainsi en avant les chemins prépondérants au cours de la propagation, c'est-à-dire ceux vérifiant, à la fois, la conservation de l'impulsion et de l'énergie au niveau du couplage. Nous donnons alors l'expression de la fonction d'onde du laser à la surface du condensat dans le cas où l'impulsion transmise par le couplage est négligeable, comme dans le cas réalisé expérimentalement du couplage radiofréquence.

Dans un second temps, nous montrons que l'expression obtenue correspond à l'approximation iconale en optique atomique (§ IV.2.2). Nous détaillons, en particulier, les conditions de validité de notre approche négligeant la diffraction dans le volume du condensat. Enfin, nous présentons les résultats de la propagation au niveau de la surface du condensat (§ IV.2.3).

IV.2.1 Calcul de l'intégrale de propagation

IV.2.1.a Explicitation de l'intégrale

Le potentiel ressenti par le laser dans la zone du condensat, s'écrit (équation 162)

$$V_i(\vec{r}) = \tilde{\mu} - \frac{m}{2} [\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2], \quad (199)$$

où nous avons, dans un souci de généralité, utilisé des fréquences $\omega_{j=x,y,z}$, différentes selon les trois axes⁶. Nous rappelons en annexe E.1 la dérivation du propagateur de l'oscillateur

⁶Dans notre cas expérimental, nous avons $\omega_x = \omega_z = \omega_r$.

harmonique inversé. Ainsi, le propagateur exact $K_i(\vec{r}, \vec{r}', \tau)$, associé à $V_i(\vec{r})$ s'écrit

$$K_i(\vec{r}, \vec{r}', \tau) = \frac{\Theta(\tau)}{(2\pi i \hbar)^{3/2}} \sqrt{\prod_{j=x,y,z} \frac{m\omega_j}{\sinh \omega_j \tau}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\text{cl}}(\vec{r}, \vec{r}', \tau)\right), \quad (200)$$

où Θ est la fonction de Heaviside. Cette expression fait intervenir l'action le long du chemin classique $r_{\text{cl}}(u)$ reliant \vec{r}' à \vec{r} en un temps τ , action qui s'exprime comme

$$S_{\text{cl}}(\vec{r}, \vec{r}', \tau) = -\tilde{\mu}\tau + \sum_{j=x,y,z} \frac{m\omega_j \left[(\cosh \omega_j \tau - 1)(r_j^2 + r_j'^2) + (r_j - r_j')^2 \right]}{2 \sinh \omega_j \tau}. \quad (201)$$

En séparant enveloppe et phase dans l'équation 198, on obtient pour ψ_ℓ

$$\psi_\ell(\vec{r}) = \frac{\Omega_{\text{R}}}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \mathcal{A}(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{r}' f(\vec{r}') e^{i\phi(\vec{r}, \vec{r}', \tau)}, \quad (202)$$

où la phase $\phi(\vec{r}, \vec{r}', \tau)$ et l'amplitude $\mathcal{A}(\tau)$ s'expriment comme

$$\begin{cases} \phi(\vec{r}, \vec{r}', \tau) = \frac{1}{\hbar} \left[S_{\text{cl}}(\vec{r}, \vec{r}', \tau) - \hbar \vec{K} \cdot \vec{r}' + E\tau \right], \\ \mathcal{A}(\tau) = \Theta(\tau) \sqrt{\prod_{j=x,y,z} \frac{m\omega_j}{2\pi i \hbar \sinh \omega_j \tau}}. \end{cases} \quad (203)$$

L'intégrande apparaissant dans l'équation 202 est oscillante et nous l'évaluons en utilisant la méthode de la phase stationnaire (annexe D), que ce soit pour l'intégration dans l'espace (§ IV.2.1.b) ou dans le temps (§ IV.2.1.c).

IV.2.1.b Conservation de l'impulsion

La propagation du laser dans l'espace des positions consiste en l'intégration selon la position initiale \vec{r}' , ce qui correspond à la dernière partie de l'intégrale 202,

$$I(\vec{r}, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{r}' f(\vec{r}') e^{i\phi(\vec{r}, \vec{r}', \tau)}. \quad (204)$$

Les points \vec{r}'_0 tels que la phase est stationnaire annulent la dérivée de la phase et vérifient

$$\left[\vec{\nabla}_{\vec{r}'} S_{\text{cl}} \right] (\vec{r}, \vec{r}'_0, \tau) - \hbar \vec{K} = \vec{0}. \quad (205)$$

En utilisant le fait que le dérivée spatiale de l'action le long d'un chemin classique est reliée à l'impulsion aux extrémités de ce chemin [152],

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}'} S_{\text{cl}} = -m \dot{\vec{r}}', \quad (206)$$

l'équation 205 que vérifie les points stationnaires, se réécrit comme

$$\vec{v}'_0 = -\frac{\hbar \vec{K}}{m}, \quad (207)$$

où \vec{v}'_0 est la vitesse initiale. Cette relation est interprétée comme étant la loi de conservation de l'impulsion au niveau du couplage du laser à atomes. En effet, le basculement de l'état

hyperfin, de l'état piégé vers l'état non piégé, se produit en association avec le transfert de l'impulsion $\hbar\vec{K}$, vers le champ électromagnétique couplant ces états. C'est cette loi de conservation qui détermine les trajectoires prépondérantes au cours de la propagation.

Comme \vec{r} et τ sont fixés dans l'intégrale 204, il n'y a qu'un seul point stationnaire \vec{r}'_0 vérifiant la relation 205, et ses composantes sur chaque axe j sont données par

$$r'_{j0} = \frac{r_j}{\cosh \omega_j \tau} + K_j \sigma_j^2 \tanh \omega_j \tau. \quad (208)$$

La phase $\phi(\vec{r}, \vec{r}'_0, \tau)$ prise au point stationnaire, s'exprime en fonction de \vec{r} et τ uniquement,

$$\phi(\vec{r}, \vec{r}'_0, \tau) = \frac{E - \tilde{\mu}}{\hbar} \tau + \sum_{j=x,y,z} \frac{\tanh \omega_j \tau}{\hbar \omega_j} \left[\frac{m \omega_j^2 r_j^2}{2} - \frac{\hbar^2 K_j^2}{2m} \right] - \frac{K_j r_j}{\cosh \omega_j \tau}. \quad (209)$$

La dérivée seconde de la phase est quant à elle donnée dans chaque direction j par

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r_j'^2} = \frac{m \omega_j}{\hbar \tanh \omega_j \tau}. \quad (210)$$

En utilisant le résultat D.6, l'intégrale 204, s'écrit donc finalement comme⁷

$$I(\vec{r}, \tau) = \sqrt{\prod_{j=x,y,z} \frac{2i\pi\hbar \tanh \omega_j \tau}{m \omega_j}} f(\vec{r}'_0) e^{i\phi(\vec{r}, \vec{r}'_0, \tau)}. \quad (211)$$

Notons que dans la loi de conservation 207, nous avons fait l'hypothèse que l'impulsion des atomes, piégés sur l'étendue de la zone de couplage $f(\vec{r}')$, est négligeable. Cette approximation est valide puisque la taille caractéristique de la zone de couplage est bien plus grande que la taille de l'oscillateur harmonique⁸. C'est en particulier le cas lorsque l'étendue du couplage se confond avec l'étendue du condensat dans le régime de Thomas-Fermi, c'est-à-dire pour le couplage radiofréquence réalisé expérimentalement, ou pour un couplage Raman avec des lasers non focalisés⁹.

IV.2.1.c Conservation de l'énergie

Cas général

En insérant la relation 211 dans l'équation 202, on écrit la fonction d'onde du laser comme une intégrale temporelle

$$\psi_\ell(\vec{r}) = \frac{\Omega_R}{2i} \int_0^{+\infty} d\tau \mathcal{B}(\vec{r}, \tau) e^{i\phi(\vec{r}, \vec{r}'_0, \tau)}, \quad (212)$$

⁷Nous nous attendons à ce que la méthode de phase stationnaire donne un résultat particulièrement proche du résultat exact, étant donné que la phase ϕ est quadratique en \vec{r}' . Dans la méthode de la phase stationnaire (annexe D), il n'y a donc pas lieu de tronquer le développement de l'équation D.2, et la seule approximation dans ce calcul est celle d'enveloppe lentement variable (équation D.4), qui nous permet de remplacer $f(\vec{r}')$ par $f(\vec{r}'_0)$ dans l'intégrale 204.

⁸Il s'agit de la condition D.4 apparaissant en annexe. Dans notre cas, elle s'écrit comme

$$(\Delta r'_j)^2 \gg 4\pi\sigma_j^2 \tanh \omega_j \tau,$$

avec $\Delta r'_j$, la taille caractéristique de la zone de couplage $f(\vec{r}')$ selon l'axe j , et $\sigma_j = \sqrt{\hbar/m\omega_j}$ la taille de l'oscillateur harmonique selon ce même axe.

⁹On peut envisager que cette relation ne soit pas forcément vérifiée dans le cas d'un couplage Raman à l'aide de lasers très focalisés, qui réduiraient la taille de la zone de couplage en deçà de la taille du condensat.

avec

$$\mathcal{B}(\vec{r}, \tau) = \left(\prod_{j=x,y,z} \cosh \omega_j \tau \right)^{-1/2} f(\vec{r}'_0). \quad (213)$$

Comme dans le paragraphe précédent, nous calculons l'équation 212 à l'aide de la méthode de la phase stationnaire. Nous cherchons donc les temps τ_0 annulant la dérivée de la phase, solutions de

$$\left. \frac{\partial \phi(\vec{r}, \vec{r}'_0, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau_0} = \left[\left. \frac{\partial \phi(\vec{r}, \vec{r}', \tau)}{\partial \vec{r}'} \right|_{\vec{r}'_0} \cdot \frac{\partial \vec{r}'_0(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} + \left. \frac{\partial \phi(\vec{r}, \vec{r}', \tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau_0} = 0. \quad (214)$$

Le premier terme entre crochet est nul, en vertu de la stationnarité de la phase en \vec{r}'_0 . Le second terme fait apparaître la dérivée temporelle de l'action classique, qui est reliée à l'énergie de la trajectoire $E(\vec{r}, \tau)$ [152], selon

$$\frac{\partial S_{\text{cl}}}{\partial \tau} = -E(\vec{r}, \tau). \quad (215)$$

L'équation 214 s'écrit donc finalement

$$E(\vec{r}, \tau_0) = E, \quad (216)$$

avec l'énergie de la trajectoire donnée en fonction de la position d'arrivée et du temps de parcours,

$$E(\vec{r}, \tau) = \tilde{\mu} - \sum_{j=x,y,z} \frac{1}{\cosh^2 \omega_j \tau} \left[\frac{m\omega_j^2 r_j^2}{2} - \frac{\hbar^2 K_j^2}{2m} + \hbar\omega_j K_j r_j \sinh \omega_j \tau \right]. \quad (217)$$

D'après l'équation 216, seuls les chemins dont l'énergie $E(\vec{r}, \tau_0)$ associée, est proche de l'énergie E du laser, contribuent à l'intégrale 212. Cette relation est à rapprocher de l'équation 171 discutée dans le cadre du couplage. En effet, l'énergie de départ de la trajectoire qui est la somme de l'énergie potentielle et cinétique¹⁰, est donnée par

$$E(\vec{r}', 0) = \tilde{\mu} - \sum_{j=x,y,z} \left[\frac{m\omega_j^2 r_j'^2}{2} - \frac{\hbar^2 K_j^2}{2m} \right], \quad (218)$$

Comme le potentiel est conservatif, $E(\vec{r}, \tau_0) = E(\vec{r}', 0)$, et l'équation 216, correspond donc à la relation 171 de conservation de l'énergie pendant le couplage.

Cas d'un condensat de symétrie cylindrique fortement anisotrope

L'équation 216 définit τ_0 de manière implicite. On peut exprimer explicitement les solutions de cette équation dans le cas où une seule fréquence intervient dans les arguments des fonctions hyperboliques. C'est-à-dire, si chacune des fréquences ω_j est soit égale à une valeur commune, soit nulle.

Expérimentalement, nous sommes dans le cas d'un condensat de Bose-Einstein de symétrie cylindrique, et nous pouvons prendre $\omega_x = \omega_z = \omega_r$. De plus, comme $\omega_r \gg \omega_y$, pendant le temps τ_0 de la trajectoire dans le volume du condensat, la dynamique selon l'axe y est

¹⁰ Il n'est pas surprenant que l'énergie de la trajectoire (équation 217) reliant \vec{r}' à \vec{r} en un temps τ , ne dépende pas explicitement de \vec{r}' , car on a utilisé le fait que la vitesse initiale est donnée par la conservation de l'impulsion (relation 207).

négligeable. Le temps τ_0 que met la trajectoire à sortir de la zone du condensat est de l'ordre de la milliseconde (§ IV.2.2) et $\omega_y \tau_0 \ll 1$ pour nos valeurs expérimentales ($\omega_y = 2\pi \times 8$ Hz). Nous pouvons donc approximer les expressions de $\mathcal{B}(\vec{r}, \tau_0)$ et $\phi(\vec{r}, \vec{r}'_0, \tau_0)$ (équations 213 et 209) en remplaçant $\cosh \omega_y \tau_0$ par 1 et $\tanh \omega_y \tau_0$ par $\omega_y \tau_0$. Ce qui revient à remplacer dans l'équation 216, $\omega_y \tau_0$ par 0. Notons que des simulations numériques à trois dimensions [146], ont en effet montré que dans une configuration de condensat allongé, la dynamique axiale du laser est négligeable.

Finalement, dans ce cas, l'équation 216 est écrite comme

$$\tilde{E} \sinh^2 \omega_r \tau_0 + \tilde{K} \sinh \omega_r \tau_0 + \tilde{V} = 0, \quad (219)$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{E} = E - \tilde{\mu} + \frac{m\omega_y^2 y^2}{2} - \frac{\hbar^2 K_y^2}{2m}, \\ \tilde{K} = \hbar\omega_r (K_x x + K_z z), \\ \tilde{V} = E - \frac{\hbar^2 \vec{K}^2}{2m} - V_i(\vec{r}). \end{cases} \quad (220)$$

Les solutions τ_0 de l'équation 219 sont réelles si le discriminant associé est positif

$$\Delta(\vec{r}) = \tilde{K}^2 - 4\tilde{E}\tilde{V} \geq 0. \quad (221)$$

Si $\Delta(\vec{r}) < 0$, alors il n'y a pas de point stationnaire et on peut considérer $\psi_\ell(\vec{r})$ comme nul. Opérer de la sorte consiste, en réalité, à négliger l'effet de la diffraction pour la propagation dans la zone du condensat, en se focalisant sur les rayons atomiques classiques (par analogie avec l'optique géométrique). En effet, même s'il n'y a pas de point stationnaire, en développant la phase à un ordre supérieur, on obtiendrait une contribution faible, mais non nulle à l'intégrale, ce qui est la traduction mathématique de la prise en compte de la diffraction.

Dans le cas où $\Delta(\vec{r})$ est positif, il y a deux solutions stationnaires, τ_0^\pm , données par

$$\tau_0^\pm(\vec{r}) = \frac{1}{\omega_r} \operatorname{arcsinh} \left[\frac{-\tilde{K} \pm \sqrt{\Delta}}{2\tilde{E}} \right]. \quad (222)$$

La dérivée seconde de la phase $\phi(\vec{r}, \vec{r}'_0, \tau)$ s'écrit, en ces points,

$$\left. \frac{\partial^2 \phi(\vec{r}, \vec{r}'_0, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\tau_0^\pm} = \frac{2\omega_r (\tilde{E} - \tilde{V}) \sinh \omega_r \tau_0^\pm}{\hbar \cosh^3 \omega_r \tau_0^\pm}. \quad (223)$$

On peut alors, à partir de ces données, exprimer la fonction d'onde du laser (équation 212) en découpant l'intervalle d'intégration, et en appliquant la méthode de la phase stationnaire dans chaque sous-intervalle (équation D.9). Comme la répartition sur l'axe réel des deux solutions τ_0^\pm , dépend des valeurs de \vec{K} et de E considérées, nous ne donnons pas l'expression finale, qui découle de l'étude de ces solutions, au cas par cas.

Cependant, dans le cas où le transfert d'impulsion est négligeable (comme par exemple dans le cas radiofréquence réalisé expérimentalement), nous donnons dans le paragraphe suivant l'expression de ψ_ℓ .

Cas d'un transfert négligeable d'impulsion initiale

Les expressions dérivées précédemment peuvent être simplifiées, dans le cas d'un transfert négligeable d'impulsion, c'est-à-dire si, pour les trois axes j ,

$$K_j \sigma_j \ll 1. \quad (224)$$

Pour des fréquences d'oscillation ω_j de quelques centaines de hertz, la taille $\sigma_j = \sqrt{\hbar/m\omega_j}$ de l'oscillateur harmonique est de l'ordre du micron pour le Rubidium. La longueur d'onde associée au couplage radiofréquence étant de quelques dizaines de centimètres, $K_j \sigma_j \approx 10^{-4}$, et la condition 224 est vérifiée¹¹.

Nous prenons donc $\vec{K} = \vec{0}$, ce qui a pour conséquence, en vertu de la conservation de l'impulsion (équation 207), de ne considérer que les points stationnaires associés aux chemins avec une vitesse initiale \vec{v}'_0 nulle. À partir de l'équation 208, nous retrouvons que dans une telle limite, la dynamique est totalement incluse dans le plan $y = y'_0$ donné. L'équation 219 concernant les temps stationnaires τ_0 reste valable, avec les coefficients qui s'écrivent maintenant

$$\begin{cases} \tilde{E} = -\frac{m\omega_r^2 (x_0'^2 + z_0'^2)}{2} = -\frac{m\omega_r^2 r_c^2(y_0')}{2}, \\ \tilde{K} = 0, \\ \tilde{V} = \tilde{E} + \frac{m\omega_r^2 (x^2 + z^2)}{2}. \end{cases} \quad (225)$$

où l'on a utilisé la relation 216 de conservation de l'énergie

$$E = \tilde{\mu} - \frac{m\omega_r^2 (x_0'^2 + z_0'^2)}{2} - \frac{m\omega_y^2 y_0'^2}{2}. \quad (226)$$

Comme $\tilde{E} \leq 0$, nous obtenons une solution réelle τ_0 , uniquement si $\tilde{V} \geq 0$, c'est-à-dire si

$$x^2 + z^2 \geq x_0'^2 + z_0'^2. \quad (227)$$

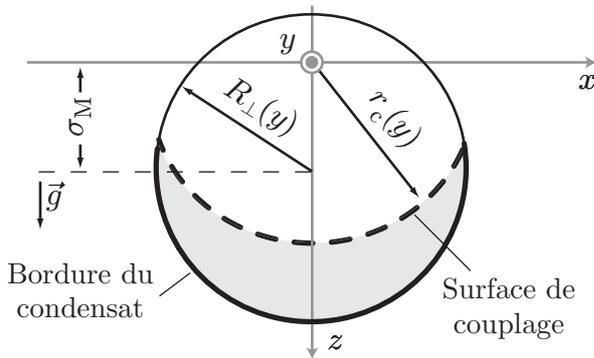


FIG. 65 – Coupe du condensat dans un plan de y donné. On a repris les notations de la figure 54. Le rayon de la surface de couplage est donné par $r_c(y) = \sqrt{x_0'^2 + z_0'^2}$. Les points dans la zone du condensat, qui vérifient la condition 227, apparaissent en grisé. En particulier, on a représenté en trait gras, la partie de la bordure du condensat sur laquelle on calcule la fonction d'onde du laser à atomes.

Les points vérifiant cette condition sont représentés en grisé dans la figure 65. V_i étant un potentiel central expulsant, les trajectoires que nous considérons, partant à vitesse nulle,

¹¹Il en serait de même dans le cas d'un couplage Raman utilisant deux lasers copropageants, mais s'il y a un angle non négligeable entre ces lasers de couplage, l'impulsion initiale ne peut être négligée (§ III.1.2).

sont des droites passant par l'origine du repère. Pour des temps de propagation τ positifs, la distance au centre ne peut qu'être plus grande que la distance initiale, ce qui est exactement l'interprétation physique de la condition 227. Les points stationnaires s'écrivent alors

$$\tau_0^\pm(\vec{r}) = \frac{\mp 1}{\omega_r} \operatorname{arcsinh} \left[\sqrt{-\tilde{V}/\tilde{E}} \right]. \quad (228)$$

Ces deux points sont symétriques par rapport à 0 qui est la borne inférieure de l'intégrale 212. Dans l'intégrale sur $[0; +\infty[$, seule compte donc la solution positive $\tau_0 = \tau_0^-$, et un développement de la phase autour de ce point donne (on prend $p_1 = 0$ et $p_2 = +\infty$ dans l'équation D.12),

$$\psi_\ell(\vec{r}) = \frac{\Omega_R}{2i} \mathcal{B}(\vec{r}, \tau_0) e^{i\phi(\vec{r}, \vec{r}'_0, \tau_0)} \sqrt{\frac{i\pi}{2\phi''(\tau_0)}} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\phi''(\tau_0)} \tau_0}{\sqrt{2i}} \right) \right]. \quad (229)$$

La dérivée seconde en τ_0 s'exprime par

$$\left. \frac{\partial^2 \phi(\vec{r}, \vec{r}'_0, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\tau_0} = \phi''(\tau_0) = \frac{2\omega_r}{\hbar} \frac{\tilde{E}}{\sqrt{1 - \tilde{E}/\tilde{V}}}, \quad (230)$$

et les différents termes intervenant dans l'expression de la fonction d'onde du laser (équation 229), s'expriment en fonction de \tilde{E} et \tilde{V} selon,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Omega_R}{2i} \mathcal{B}(\vec{r}, \tau_0) \sqrt{\frac{i\pi}{2\phi''(\tau_0)}} = \frac{\Omega_R}{4\omega_r} \left[\frac{i\pi\hbar\omega_r}{\sqrt{\tilde{V}(\tilde{V} - \tilde{E})}} \right]^{1/2} f \left(x\sqrt{\frac{\tilde{E}}{\tilde{E} - \tilde{V}}}, y'_0, z\sqrt{\frac{\tilde{E}}{\tilde{E} - \tilde{V}}} \right), \\ \phi(\vec{r}, \vec{r}'_0, \tau_0) = \frac{1}{\hbar\omega_r} \left[\sqrt{\tilde{V}(\tilde{V} - \tilde{E})} + \tilde{E} \ln \left(\frac{\sqrt{\tilde{V} - \tilde{E}} + \sqrt{\tilde{V}}}{\sqrt{-\tilde{E}}} \right) \right]. \end{array} \right. \quad (231)$$

Nous avons donc dérivé l'expression de la fonction d'onde du laser à atomes dans la zone du condensat en calculant explicitement la relation 198. Comme nous le montrons dans le paragraphe suivant, ce développement n'est pas sans rapport avec l'approximation WKB. En effet, l'expression 229 peut être retrouvée en traitant le problème directement à l'aide de cette méthode, c'est-à-dire en écrivant les équations de l'iconale pour l'optique atomique.

IV.2.2 Calcul à partir de l'iconale

Dans ce paragraphe, nous écrivons la propagation dans la zone du condensat, dans le cadre de l'approximation iconale. Ceci nous permet, non seulement de retrouver simplement le résultat précédent, mais aussi de justifier notre approche négligeant la diffraction du laser dans le condensat.

IV.2.2.a L'équation des rayons lumineux

La fonction d'onde du laser à atomes a une énergie E fixée par le couplage, et vérifie donc dans la zone du condensat, l'équation de Schrödinger indépendante du temps,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_\ell + V_i \psi_\ell = E \psi_\ell, \quad (232)$$

Nous négligeons toute dynamique selon l'axe y car $\omega_y \ll \omega_r$, et considérons l'évolution du laser indépendamment dans chaque plan (x, z) positionné en $y = y'_0$. Ceci signifie que nous prenons, dans l'équation 232,

$$\frac{\partial^2 \psi_\ell}{\partial y^2} \approx 0. \quad (233)$$

L'équation de Schrödinger bidimensionnelle s'écrit comme,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi_\ell + V_i(x, y'_0, z) \psi_\ell = E \psi_\ell. \quad (234)$$

La méthode WKB (Chap. VI de [84]) consiste à chercher des solutions à cette équation, sous la forme

$$\psi_\ell(\vec{r}) = A(\vec{r}) e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{r})}, \quad (235)$$

où les fonctions $A(\vec{r})$ et $S(\vec{r})$ sont réelles. Un développement en \hbar de l'équation de Schrödinger faisant intervenir l'expression 235, aboutit, en se restreignant à l'ordre le plus bas, aux équations suivantes sur $A(\vec{r})$ et $S(\vec{r})$

$$\begin{cases} (\vec{\nabla} S)^2 = \frac{\hbar^2}{\lambda^2}, \\ \vec{\nabla} \cdot (A^2 \vec{\nabla} S) = 0, \end{cases} \quad (236)$$

où l'on a noté λ la longueur d'onde de De Broglie associée au mouvement,

$$\lambda = \frac{1}{k(x, z)} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E - V_i)}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\left(\tilde{E} + \frac{m\omega_r^2(x^2 + z^2)}{2}\right)}}. \quad (237)$$

On reconnaît au dénominateur l'impulsion $p(x, z) = \hbar k(x, z)$, reliée au vecteur d'onde local $k(x, z)$, et qui est déterminée par la position dans le potentiel conservatif et l'énergie E ,

$$p(x, z) = \sqrt{2m \left(E - \left[\tilde{\mu} - \frac{m\omega_r^2(x^2 + z^2)}{2} - \frac{m\omega_y^2 y_0'^2}{2} \right] \right)}. \quad (238)$$

Les équations 236 sont les équations de l'iconale de l'optique géométrique (Chap. III de [153]). En effet, la première équation peut se réécrire formellement comme

$$\left(\vec{\nabla} \left[\frac{S}{\hbar} \right] \right)^2 = k^2(x, z) = n^2(x, z) \vec{K}^2, \quad (239)$$

où l'on a noté $n(x, z)$ l'indice effectif du milieu, et \vec{K} , le vecteur d'onde initial du laser au niveau du point de couplage, vecteur d'onde que conserverait le laser, s'il se propageait en l'absence de potentiel, c'est-à-dire dans le vide. Ces notations sous-entendent que l'on ne considère pas un vecteur d'onde rigoureusement nul, ce qui est le cas même avec le couplage radiofréquence où dans l'absolu, \vec{K} est non nul, bien que n'ayant aucun effet notable sur la dynamique du laser par rapport au potentiel V_i . La signification physique de la seconde équation 236 apparaît en écrivant le courant de probabilité \vec{j} associé à la fonction d'onde ψ_ℓ ,

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi_\ell^* \vec{\nabla} \psi_\ell - \psi_\ell \vec{\nabla} \psi_\ell^* \right) = \frac{A^2}{m} \vec{\nabla} S. \quad (240)$$

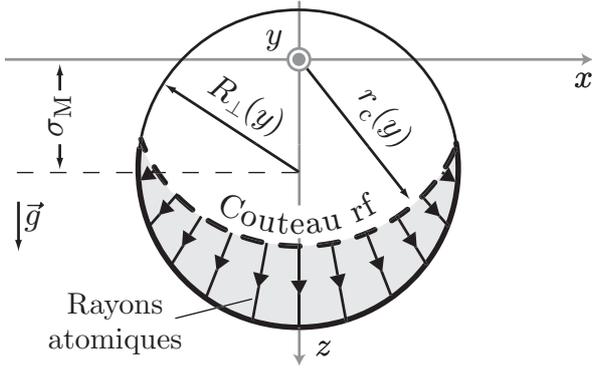


FIG. 66 – Tracé des rayons atomiques dans la zone du condensat. Partant de la surface de couplage radiofréquence avec une vitesse nulle, les rayons (flèches) sont des lignes droites passant par le centre du potentiel radial expulsant $V_i(x, y_0, z)$. L'iconale consiste à déterminer ψ_ℓ à partir de la phase accumulée le long de ces rayons.

La seconde équation 236 est donc donnée par la conservation de la densité de probabilité en régime stationnaire, $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$, de manière analogue à la loi de Poynting en optique.

Ainsi, la détermination de la fonction d'onde ψ_ℓ est identique à celle d'un champ électromagnétique scalaire se propageant dans un milieu (le condensat de Bose-Einstein) dont l'indice $n(x, z)$ dépend fortement de la position via le potentiel V_i .

IV.2.2.b Application à notre cas

Nous calculons donc ψ_ℓ , de la même manière qu'en optique géométrique, c'est-à-dire en déterminant les rayons atomiques à l'aide des équations du mouvement, et en calculant la phase accumulée le long de ces rayons (figure 66).

Les équations du mouvement sont données par la relation 208, en prenant une impulsion initiale $\hbar\vec{K}$ nulle. Les trajectoires sont donc purement radiales, et la distance parcourue depuis le couteau radiofréquence de rayon $r_c(y)$, s'écrit en fonction du temps τ , comme

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} = r_c(y) \cosh \omega_r \tau. \quad (241)$$

On obtient alors des solutions purement radiales des équations iconales 236,

$$\begin{cases} S(r) = m\omega_r \int_{r_c(y)}^r dq \sqrt{q^2 - r_c^2(y)}, \\ A(r) = \frac{\mathcal{C}(\vec{r}'_0)}{m\omega_r [r^2 (r^2 - r_c^2(y))]^{1/4}}, \end{cases} \quad (242)$$

avec $\mathcal{C}(\vec{r}'_0)$ un coefficient de normalisation de ψ_ℓ , dépendant des caractéristiques du couplage et donc du point de couplage \vec{r}'_0 . En introduisant les paramètres adimensionnés,

$$R = \frac{r}{\sigma_r} \text{ et } \epsilon = \frac{2\tilde{E}}{\hbar\omega_r} = -\frac{r_c^2(y)}{\sigma_r^2}, \quad (243)$$

on obtient finalement $\psi_\ell(R) = A(R) \exp[iS(R)/\hbar]$, avec

$$\begin{cases} S(R) = \frac{\hbar}{2} \left[R\sqrt{R^2 + \epsilon} + \epsilon \ln \left(\frac{R + \sqrt{R^2 + \epsilon}}{\sqrt{-\epsilon}} \right) \right], \\ A(R) = \frac{\mathcal{C}(\vec{r}'_0)}{\sqrt{\hbar m \omega_r} [R^2 (R^2 + \epsilon)]^{1/4}}. \end{cases} \quad (244)$$

IV.2.2.c Validité de l'approche

Dans l'approche iconale, l'effet de la diffraction est négligé perpendiculairement aux trajectoires classiques. Cette approximation est justifiée, comme le temps τ que le laser à atomes passe dans la zone du condensat, n'est pas trop long pour permettre au profil transverse de taille r.m.s. Δx_0 , de diffracter sous l'effet de sa dispersion initiale Δp_0 . En utilisant la relation d'incertitude d'Heisenberg $\Delta x_0 \Delta p_0 = \hbar/2$, l'évolution de la taille transverse sous l'effet de la diffraction, s'écrit de manière analogue à la formule de Rayleigh pour les faisceaux gaussiens

$$\Delta x^2(\tau) = \Delta x_0^2 + \frac{\Delta p_0^2}{m^2} \tau^2 = \Delta x_0^2 \left[1 + \left(\frac{\tau}{T_R} \right)^2 \right]. \quad (245)$$

On a introduit le temps $T_R = 2m\Delta x_0^2/\hbar$, un temps que l'on pourrait baptiser « temps de Rayleigh », jouant le rôle temporel de la distance de Rayleigh qui intervient dans la diffraction des faisceaux gaussiens [63]. La diffraction est donc négligeable si

$$\tau^2 \ll T_R^2. \quad (246)$$

Dans la zone du condensat, la taille typique transverse du laser à atomes est au moins de l'ordre du micron, ce qui donne T_R au moins égal à 3 ms. En comparaison, le temps typique que met l'onde à sortir de cette zone est au plus donné par le temps correspondant à la trajectoire selon l'axe z . Ce temps diverge lorsque r_c tend vers 0 : en effet, classiquement, le point $r_c = 0$ correspond à une position d'équilibre instable au maximum de la « bosse » de potentiel. Pour évaluer de manière réaliste τ , on peut remarquer qu'un couplage pour des valeurs de r_c inférieures au micron correspond à des désaccords $\tilde{\delta}$ très proches de $\tilde{\delta}_{\min}$ (figure 55). Du point de vue expérimental, de tels points ne sont pas significatifs, car ils correspondent à un taux de couplage Γ très faible, puisqu'ils sont sur le bord de la courbe de couplage (figure 56). De plus, l'idée semi-classique selon laquelle le couplage a lieu en un endroit bien déterminé n'est plus particulièrement adaptée. Près du maximum du potentiel, l'extension typique du lobe de la fonction d'onde du laser est de quelques σ_r (figure 50), et il est alors plus judicieux de considérer que l'atome couplé est délocalisé sur cette distance caractéristique. En prenant le cas le plus restrictif ($r_c = \sigma_r$), on obtient

$$\max(\tau) \approx \frac{1}{\omega_r} \operatorname{arccosh} \left(\frac{\sigma_M + R_r - \sigma_r}{\sigma_r} \right) = 1.5 \text{ ms}, \quad (247)$$

ce qui valide la condition 246. Outre la diffraction liée à l'enveloppe globale transverse de taille Δx_0 , on pourrait aussi envisager que des structures plus petites modulant l'enveloppe globale, diffractent assez fortement. Nous négligeons dans notre traitement de telles structures. En effet, elles correspondent à des interférences entre différents chemins. Les trajectoires classiques ne se coupant pas dans la zone du condensat, puisqu'elles sont radiales, de telles interférences n'apparaîtraient qu'entre des chemins non classiques, dont le poids dans notre développement est plus faible que celui des chemins classiques.

IV.2.2.d Comparaison avec la méthode utilisant le propagateur

La méthode présentée dans ce paragraphe ne détermine pas le paramètre de normalisation $\mathcal{C}(\vec{r}'_0)$. L'expression 244 est analogue à l'expression 229, si l'on remplace, dans cette dernière, la fonction d'erreur par 1. Par identification, on obtient alors le facteur de normalisation

$$\mathcal{C}(\vec{r}'_0) = m\Omega_R F(\vec{r}'_0) \sigma_r \sqrt{\frac{i\pi}{\sqrt{2}}} \phi_c(\vec{r}'_0). \quad (248)$$

Ce coefficient fait intervenir, outre l'amplitude du couplage au point initial $\Omega_R F(\vec{r}'_0)$, la valeur de la fonction d'onde du condensat en ce point $\phi_c(\vec{r}'_0)$, qui pondère ainsi chacune des trajectoires en fonction de leur point de départ.

L'intérêt d'avoir obtenu l'expression de ψ_ℓ par développement du propagateur (expression 229) est double. Tout d'abord cette méthode nous permet de déterminer le coefficient de proportionnalité $\mathcal{C}(\vec{r}'_0)$, auquel nous n'avons pas accès via l'iconale. En second lieu, le développement du propagateur permet de percevoir le domaine de validité de l'iconale. En effet, pour passer de l'expression 229 à l'expression 235, on a dû remplacer la fonction d'erreur de l'expression 229 par l'unité. Ceci est justifié, si son argument est très grand, $|\sqrt{\phi''(\tau_0)}\tau_0 \gg 1$. C'est-à-dire si τ_0 est assez grand pour que la plage du domaine d'intégration réellement significative dans l'intégrale 212, appartienne à $[0; +\infty[$. Cette condition peut être réécrite comme une condition sur l'écart Δr , entre le point de rebroussement classique \vec{r}'_0 et le point \vec{r} où l'on veut connaître la valeur de la fonction d'onde,

$$\Delta r \gg \sigma_r. \quad (249)$$

En effet, l'approximation WKB n'est plus valable au voisinage du point de rebroussement classique de la fonction d'onde. Or c'est bien le sens de la condition 249 : le voisinage est défini par le premier lobe de la fonction propre, qui est d'étendue de l'ordre de σ_r .

Pour déterminer la valeur de la fonction d'onde près du point de rebroussement classique il faut résoudre exactement l'équation de Schrödinger 234. On trouvera le détail de ce calcul en annexe E.2. Nous donnons ici le résultat final.

$$\psi(R) = \frac{\mathcal{C}(\vec{r}'_0)}{\sqrt{\hbar m \omega_r}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\epsilon}{4}\right) e^{i\epsilon[1 - \ln(-\epsilon/4)]/4}}{R} \left[e^{\pi\epsilon/8} \text{M}\left(-i\frac{\epsilon}{4}; 0; iR^2\right) - \frac{ie^{-\pi\epsilon/8}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{\epsilon}{4}\right)} \text{W}\left(-i\frac{\epsilon}{4}; 0; iR^2\right) \right]. \quad (250)$$

Cette expression utilise les paramètres adimensionnés R et ϵ (équation 243) et les fonctions de Whittaker [79] M et W. Elle se connecte correctement à la fonction ψ_ℓ (équation 244), lorsque l'on s'éloigne du point de rebroussement classique, tout en ne présentant pas sa divergence en ce point. Cette expression est donc plus appropriée que la solution iconale dans le cas de la détermination de la fonction d'onde près d'un tel point.

IV.2.3 La fonction d'onde du laser à la surface du condensat

Dans ce paragraphe, nous utilisons les résultats précédents pour calculer ψ_ℓ à la surface du condensat. Nous discutons en particulier les résultats obtenus ainsi que l'importance des effets de bord éventuels non pris en compte dans notre approche.

IV.2.3.a Paramétrage de la surface

Nous effectuons les calculs de la fonction d'onde du laser, indépendamment dans chaque plan vertical d'équation $y = y'_0$ avec $|y'_0| \leq y_{\max}$ (équation 175). Ils nous donnent en particulier accès à la valeur de la fonction d'onde sur la surface du CBE repérée par la position \vec{r}_f . C'est cette dernière donnée qui nous permet de poursuivre la propagation hors du condensat. On peut paramétrer $\psi_\ell(\vec{r}_f)$ à l'aide de l'angle $\theta \in]-\pi; \pi]$ relié aux coordonnées x_f et z_f par (figure 67)

$$[x_f; z_f] = [R_\perp(y) \sin \theta; R_\perp(y) \cos \theta + \sigma_M]. \quad (251)$$

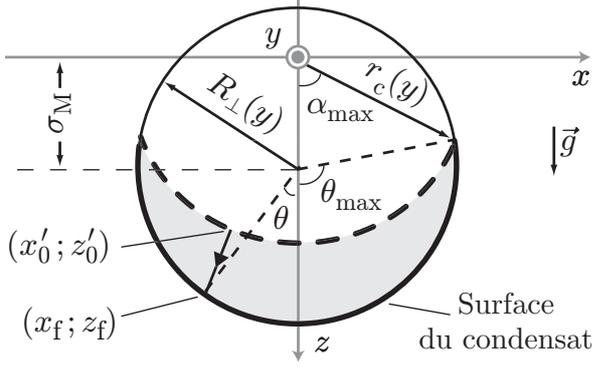


FIG. 67 – Coupe du condensat dans le plan $y = y'_0$. On paramètre les points (x_f, z_f) sur le bord du condensat par l'angle θ . La partie en trait gras de la bordure du condensat ($|\theta| \leq \theta_{\max}$) correspond à une valeur non nulle de ψ_ℓ . Par contre, la valeur de la fonction d'onde dans la partie supérieure est prise nulle (approximation iconale).

Comme nous ne considérons que les points \vec{r}_f reliés par un rayon atomique à la surface de couplage donnée par $r_c(y) = \sqrt{x_0'^2 + z_0'^2}$, on peut définir une valeur θ_{\max} au delà de laquelle la fonction d'onde est prise comme nulle,

$$\psi_\ell(|\theta| > \theta_{\max}) = 0. \quad (252)$$

Cette valeur de θ_{\max} est déterminée par l'intersection entre la surface de couplage et la bordure du condensat. On applique pour cela la formule d'Al-Kashi dans le même triangle que celui utilisé pour déterminer α_{\max} (figure 54),

$$\theta_{\max} = \arccos \left[\max \left(-1; \frac{r_c^2(y'_0) - R_\perp^2(y'_0) - \sigma_M^2}{2\sigma_M R_\perp(y'_0)} \right) \right]. \quad (253)$$

Si $r_c(y'_0) \leq R_\perp(y'_0) - \sigma_M$, le couplage a lieu sur un cercle (dans le plan vertical $(x, y = y'_0, z)$) pleinement inclus dans la zone du condensat, donc $\theta_{\max} = \pi$.

IV.2.3.b Résultats

En figure 68, nous avons tracé la densité atomique calculée en sortie du condensat, pour une zone de couplage située vers le bas du CBE (figure (a)), et pour un couplage vers le haut du nuage (figure (b)). Nous comparons la densité obtenue sur la surface à celle du condensat au début des rayons atomiques (trait tireté). Nous observons que, lorsque le couplage est assez haut dans le condensat, la propagation dans le volume du CBE a pour effet d'augmenter très fortement la densité atomique pour θ proche de θ_{\max} . En effet, même si de tels rayons excentrés sont issus d'un point de la surface de couplage où la densité atomique du condensat est faible (apparaissant au numérateur de $|\psi_\ell|^2$), leur vitesse de sortie de V_i (apparaissant au dénominateur de $|\psi_\ell|^2$) est encore plus faible, de telle façon qu'ils voient leur poids relatif augmenter dans le profil du laser. L'effet, présent dans le cas (a) est particulièrement flagrant pour la configuration (b). On entrevoit déjà sur ces résultats, la présence de caustiques sur le faisceau laser, puisque l'on a bien accumulation de la densité atomique sur les bords du profil.

Nous avons aussi comparé les deux expressions de ψ_ℓ suivant que l'on utilise l'approximation iconale (équation 244), où la solution à base des fonctions propres de l'oscillateur harmonique inversé (équation 250). Si les deux courbes se superposent, lorsque la surface de couplage est éloignée de la surface du condensat (cas (b)), il n'en est pas de même dans le cas (a), lorsque le couplage se fait près de la surface du CBE. En effet, nous avons vu que dans le cas où le point de rebroussement classique et le point d'observation sont distants de moins de $\sigma_r/2$, (figure E.1), la solution iconale n'est plus valide. Dans les encarts des

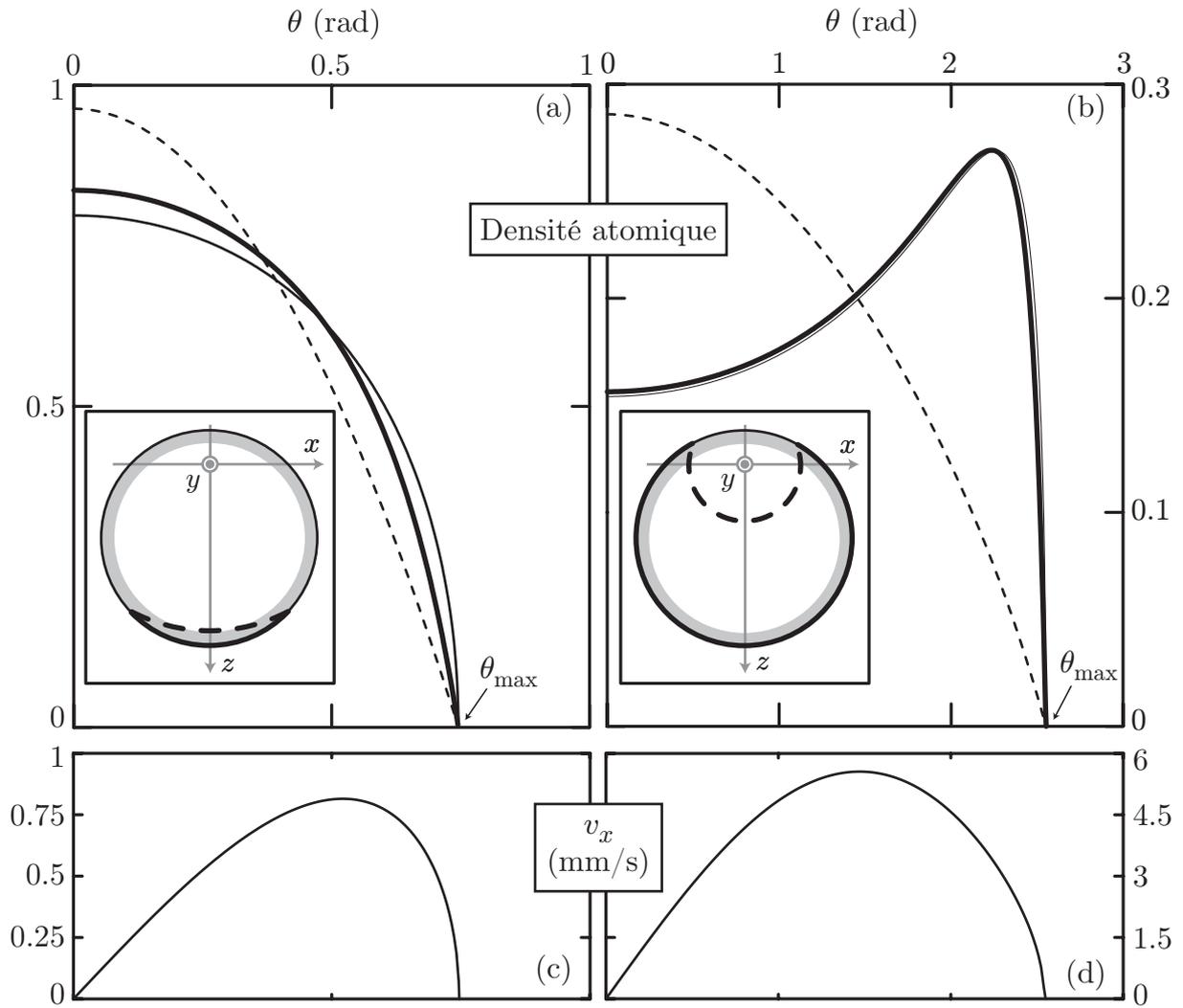


FIG. 68 – Densité atomique à la surface du condensat en fonction de l'angle $\theta < \theta_{\max}$, pour deux valeurs de désaccord : (a) $\tilde{\delta} = 2\pi \times 8.9$ kHz, (b) $\tilde{\delta} = -2\pi \times 1.1$ kHz. Pour chaque cas, nous avons représenté dans l'encart, la position du couteau radiofréquence, à l'aide d'une coupe dans le plan (x, z) central ($y'_0 = 0$). De plus, nous avons grisé la zone du condensat qui est à moins de $\sigma_r/2 = 300$ nm de la surface du CBE. Nous avons comparé le résultat donné par l'approximation iconale (équation 244 en trait fin), celui donné par la résolution exacte de l'équation de Schrödinger (équation 250 en trait épais), et la densité atomique du condensat $|\phi_c|^2$ (trait tireté), au début (i.e. sur la surface de couplage) de chaque rayon atomique paramétré par θ . Tous les profils ont été normalisés à 1 et seules les valeurs positives de θ ont été considérées, puisque le système est symétrique par la transformation $\theta \rightarrow -\theta$. Tracé du profil des vitesses transverses v_x en sortie du condensat, en (c) et (d) pour les mêmes désaccords respectivement que (a) et (b). Toutes les applications numériques correspondent au cas du piège comprimé.

figures (a) et (b), nous avons grisé la zone du condensat qui est à une distance de la surface inférieure à $\sigma_r/2$. On s'attend donc à ce que les rayons atomiques, dont les points de départ appartiennent à cette zone, ne soient pas correctement traités par l'approximation iconale¹². En particulier, dans le cas (a), où toute la zone de couplage est dans ce cas, la solution 250 donne de meilleurs résultats, comme nous le verrons sur les résultats de la propagation (§ IV.4).

Considérons maintenant la vitesse transverse (selon x) des trajectoires en sortie du condensat. Pour une valeur de θ donnée, le rayon atomique correspondant sort du condensat au point $\vec{r}_f(\theta)$, en faisant un angle α avec l'axe z , vérifiant $\tan \alpha = x_f/z_f$, relation qui relie de manière univoque α à θ . La coordonnée transverse du point de départ sur la surface de couplage s'écrit $x'_0 = r_c(y'_0) \sin \alpha$, et la vitesse de sortie transverse v_x est donc donnée par

$$v_x(\theta) = \omega_r \sqrt{x_f^2 - r_c^2(y'_0) \sin^2 \alpha} = \omega_r \sqrt{x_f^2 - \frac{r_c^2(y'_0)}{1 + (z_f/x_f)^2}}. \quad (254)$$

Nous avons tracé cette vitesse transverse en figure 68 c et d pour les désaccords correspondant aux figures a et b. On remarque tout d'abord, que la vitesse transverse ne prend pas sa valeur maximale pour des trajectoires près de l'axe, mais pour des trajectoires qui en sont relativement éloignées, ce qui est différent du cas unidimensionnel transverse représenté par le schéma 62. De plus, les courbes c et d ont la même allure, alors que le profil après propagation est très différent pour les deux désaccords (figure 72) : pour $\tilde{\delta} = 2\pi \times 8.9$ kHz, on observe un faisceau collimaté, alors que des caustiques sont clairement présentes pour $\tilde{\delta} = -2\pi \times 1.1$ kHz.

Comme discuté au paragraphe III.3.3, on ne peut donc pas attribuer l'apparition de caustiques uniquement à un effet de rattrapage des trajectoires originaires de points proches de la surface du condensat (θ proche de θ_{\max}), par les trajectoires partant du centre du condensat (θ faible). Le fait que la densité en sortie du condensat augmente pour θ proche θ_{\max} (figure 68 b), est aussi responsable du phénomène. On notera enfin, que si le potentiel était nul hors du condensat (absence de gravité), les caustiques seraient aussi présentes sur le faisceau laser, puisqu'elles apparaissent dès la sortie du condensat. La gravité n'est donc pas déterminante pour générer des caustiques sur le faisceau. L'effet de l'accélération de la gravité selon z hors du condensat, est de rabattre les trajectoires vers l'axe z , en leur permettant de se croiser et ainsi créer des interférences (§ IV.4).

IV.2.3.c Effets de bord à la surface du condensat

Une des hypothèses de notre traitement (§ IV.1) est que l'on peut propager indépendamment le laser dans V_i , puis dans V_o . En particulier, nous négligeons toute trajectoire sortant du condensat puis y réentrant une ou plusieurs fois avant de s'éloigner du CBE. Pour de tels cas, on peut imaginer que la séparation en deux étapes ne soit pas forcément une bonne approche.

On peut déterminer, à l'aide des équations du mouvement, les points du condensat tels que les trajectoires atomiques qui en sont issus à vitesse nulle, sortent et réentrent dans le potentiel V_i . Nous avons tracé, en figure 69, ces points et nous avons aussi reporté le positionnement des surfaces de couplage correspondant à différentes valeurs du désaccord.

¹²On remarquera que de tels points sur le bord du condensat, pour lesquels l'approximation iconale n'est pas utilisable, sont les mêmes que les points, pour lesquels le principe de Franck-Condon n'est pas valide pour calculer le taux de couplage (condition 172). En effet, ces approximations sont, toutes deux, de type semi-classique.

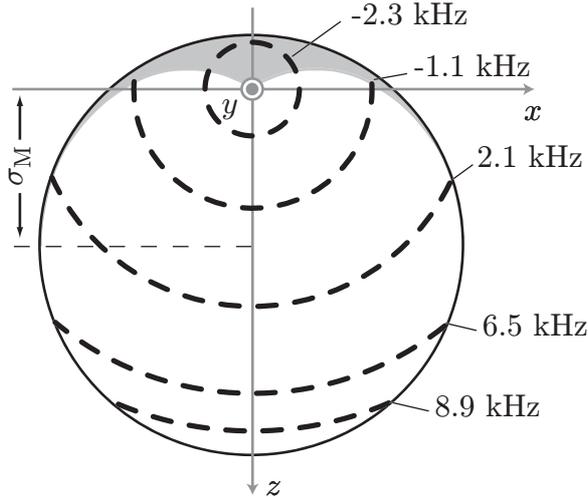


FIG. 69 – Coupe du condensat dans le plan central $y'_0 = 0$, dans la configuration de piège comprimé. Nous avons grisé les points du condensat qui sont à l'origine de trajectoires réentrant dans la zone du CBE au moins une fois après en être sortis. À titre de comparaison, nous avons tracé les surfaces de couplage (tirets), correspondant à différentes valeurs de désaccord $\tilde{\delta}/2\pi$.

Tout d'abord, nous remarquons que nous n'avons des points de la surface de couplage, qui donnent lieu à des trajectoires non prises en compte dans notre approche, que pour des valeurs de $\tilde{\delta}$ proches de $\tilde{\delta}_{\min}$. Pour chaque valeur du désaccord, on peut définir un angle θ_1 , tel que toute trajectoire correspondant à $\theta \in [\theta_1; \theta_{\max}]$ réentre à un moment ou à un autre dans la zone du condensat. Pour différentes valeurs de désaccord, nous avons comparé en figure 70, θ_1 à θ_{\max} (équation 253), et ce dans le cas du plan central ($y'_0 = 0$). On remarque que, pour $\theta_{\max} \leq \pi/2$, $\theta_1 = \theta_{\max}$, ce qui traduit le fait qu'aucune trajectoire ne réentre dans le condensat. Puis, en diminuant la valeur de $\tilde{\delta}$, c'est-à-dire en couplant de plus en plus haut dans le nuage, l'écart $\theta_{\max} - \theta_1$ augmente. Cet écart ne devient réellement significatif que lorsque le désaccord est très proche de sa valeur minimale. Notre approche ne permet donc pas de traiter correctement des désaccords aussi faibles, tels que la surface de couplage est complètement incluse dans le volume du condensat. On notera toutefois que ces valeurs extrêmes de $\tilde{\delta}$ correspondent à des valeurs du taux de couplage Γ très faibles (sur le bord de la figure 56), ce qui rend l'étude expérimentale du laser à atomes dans une telle configuration assez difficile.

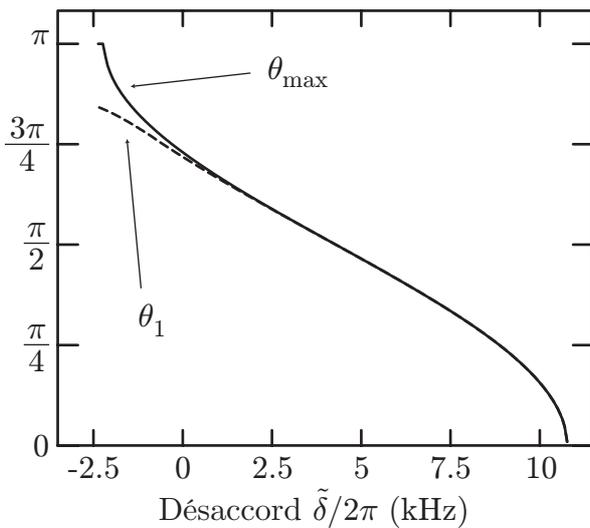


FIG. 70 – Tracé de θ_{\max} (trait plein) et de l'angle θ_1 (tirets) au-delà duquel, le couteau radiofréquence se situe dans la zone grisée, et ce, en fonction du désaccord $\tilde{\delta}$. Ces angles sont calculés dans le plan central $y'_0 = 0$, pour une configuration de piège comprimé.

Nous pouvons aussi observer qu'en première approximation, les points du condensat grisés sur la figure 69, sont ceux qui sont situés au-dessus du piège magnétique. En effet, les rayons partant de ces points sont dirigés vers le haut ($z < 0$) et une fois sortis de la zone

du condensat, peuvent facilement réentrer dans le volume du CBE. On comprend alors que ce problème serait pratiquement inexistant si le centre du piège magnétique était hors du volume du condensat, c'est-à-dire, si le "sag" σ_M était supérieur au rayon de Thomas-Fermi R_r . Ceci se produit pour un nombre équivalent d'atomes piégé avec $\omega_r \approx 2\pi \times 270$ Hz, soit une fréquence légèrement inférieure à celle avec laquelle nous travaillons expérimentalement.

Enfin, nous n'avons considéré que le plan central $y'_0 = 0$ dans ce paragraphe, car il s'agit du cas le plus défavorable que l'on puisse rencontrer. En effet, pour $y'_0 \neq 0$, le rayon du condensat vérifie $R_\perp(y'_0) < R_r$, et il devient plus facilement plus petit que le "sag". En d'autres termes, plus on s'éloigne du plan central, moins de points sont concernés par la discussion présentée dans ce paragraphe.

IV.3 Propagation hors de la zone du condensat

Une fois que le laser à atomes a quitté la zone du condensat, il ne ressent plus les interactions avec ce dernier et se propage sous l'effet du potentiel $V_o(\vec{r})$ (équation 190). Dans cette zone, nous ne pouvons plus nous limiter à un traitement fondé sur l'iconale : cette région n'est pas bornée, et en régime permanent, le temps de propagation est formellement infini. Il faut donc y déterminer ψ_ℓ , à partir de sa donnée sur la surface du condensat \vec{r}_f , en prenant cette fois-ci, pleinement en compte la diffraction. En s'inspirant de problèmes analogues que l'on rencontre en optique, où l'on détermine le champ dans tout l'espace à partir de sa connaissance sur une surface, nous utilisons une approche particulièrement adaptée, qui est l'intégrale de Kirchhoff pour les ondes de matière [154].

IV.3.1 L'intégrale de Kirchhoff pour les ondes de matière

Soit $K_o(\vec{r}, \vec{r}', \tau)$, le propagateur de Feynman associé au potentiel $V_o(\vec{r})$. Il vérifie l'équation de Schrödinger dépendante du temps,

$$i\hbar \frac{\partial K_o}{\partial \tau} - \hat{H}_{\vec{r}} K_o = i\hbar \delta(\tau) \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (255)$$

où $\hat{H}_{\vec{r}}$ est le hamiltonien hors du condensat, où nous avons explicitement noté la variable \vec{r} ,

$$\hat{H}_{\vec{r}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\vec{r}} + V_o(\vec{r}). \quad (256)$$

On définit le propagateur indépendant du temps $G_E(\vec{r}, \vec{r}')$, comme la transformée de Fourier temporelle du propagateur $K_o(\vec{r}, \vec{r}', \tau)$,

$$\begin{cases} G_E(\vec{r}, \vec{r}') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau K_o(\vec{r}, \vec{r}', \tau) e^{i\frac{E\tau}{\hbar}}, \\ K_o(\vec{r}, \vec{r}', \tau) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dE G_E(\vec{r}, \vec{r}') e^{-i\frac{E\tau}{\hbar}}. \end{cases} \quad (257)$$

En utilisant ces relations, on peut montrer que G_E est la réponse percussionnelle de l'équation de Schrödinger indépendante du temps,

$$[\hat{H}_{\vec{r}} - E] G_E(\vec{r}, \vec{r}') = -i\hbar \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (258)$$

D'après l'expression explicite du propagateur de Feynman à partir des fonctions propres (équation 147), on a la propriété de symétrie

$$K_o(\vec{r}, \vec{r}', \tau) = K_o^*(\vec{r}', \vec{r}, -\tau), \quad (259)$$

ce qui se traduit sur G_E par

$$G_E(\vec{r}, \vec{r}') = G_E^*(\vec{r}', \vec{r}). \quad (260)$$

Il s'ensuit que le propagateur indépendant du temps vérifie l'analogie de la relation 258, mais en considérant comme variable \vec{r}' ,

$$[\hat{H}_{\vec{r}'} - E] G_E(\vec{r}, \vec{r}') = -i\hbar \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (261)$$

Ces propriétés de symétrie sont une traduction pour les ondes de matière du théorème de réciprocity d'Helmholtz, qui indique qu'un point source en \vec{r}' produit en \vec{r} le même effet qu'un point source en \vec{r} produirait en \vec{r}' (Chap. VIII de [153]).

Nous considérons le laser à atomes en régime stationnaire, et la fonction d'onde ψ_ℓ d'énergie E vérifie

$$[\hat{H}_{\vec{r}'} - E]\psi_\ell(\vec{r}') = 0. \quad (262)$$

Cette équation de Schrödinger est de même structure que l'équation d'Helmholtz (Chap. XIII de [153]) pour un champ scalaire se propageant dans un milieu d'indice $n(\vec{r}')$, et dont le vecteur d'onde dans le vide est k_0 . On a en effet formellement,

$$\begin{cases} n(\vec{r}') = \sqrt{1 - \frac{V_o(\vec{r}')}{E}}, \\ \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = E. \end{cases} \quad (263)$$

En suivant donc la dérivation de l'intégrale de Kirchhoff en optique, nous construisons la quantité

$$Q = G_E(\vec{r}, \vec{r}')[\hat{H}_{\vec{r}'} - E]\psi_\ell(\vec{r}') - \psi_\ell(\vec{r}')[\hat{H}_{\vec{r}'} - E]G_E(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (264)$$

Il s'agit d'écrire Q de deux manières différentes. D'une part, on remplace le hamiltonien par son expression 256. D'autre part, on peut remarquer que le premier terme de Q est en réalité nul (équation 262), et en utilisant l'équation 261, on obtient la deuxième expression de Q . L'égalité de ces deux formulations aboutit à

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[G_E(\vec{r}, \vec{r}') \Delta_{\vec{r}'} \psi_\ell(\vec{r}') - \psi_\ell(\vec{r}') \Delta_{\vec{r}'} G_E(\vec{r}, \vec{r}') \right] = i\hbar \delta(\vec{r} - \vec{r}') \psi_\ell(\vec{r}'). \quad (265)$$

En intégrant cette égalité sur \vec{r}' , et en transformant l'intégrale de volume en une intégrale de surface grâce au théorème de Green, nous obtenons finalement

$$\psi_\ell(\vec{r}) = i\frac{\hbar}{2m} \int_S \vec{dS}' \cdot [G_E(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \psi_\ell(\vec{r}') - \psi_\ell(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} G_E(\vec{r}, \vec{r}')]. \quad (266)$$

La surface \mathcal{S} est une surface fermée entourant le point \vec{r} , et \vec{dS}' est un vecteur unitaire orienté vers l'extérieur du volume inclus dans \mathcal{S} . Cette formule de Kirchhoff pour les ondes de matière nous permet de calculer la fonction d'onde n'importe où dans le volume, à partir de la connaissance de la fonction d'onde sur la surface \mathcal{S} délimitant ce volume. Une telle formulation est particulièrement intéressante dans notre cas où les deux potentiels V_i et V_o sont séparés par la surface du condensat.

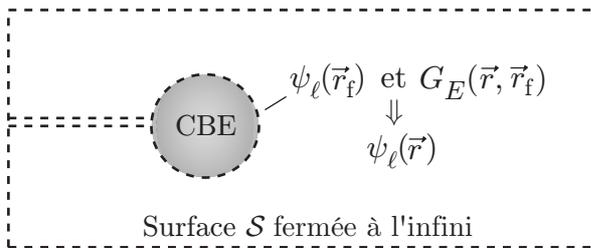


FIG. 71 – Géométrie de l'intégrale de Kirchhoff : la surface \mathcal{S} (tirets) englobe le volume du condensat et est fermée à l'infini. $\psi_\ell(\vec{r})$ est déterminé hors du condensat par le propagateur indépendant du temps $G_E(\vec{r}, \vec{r}_f)$ du potentiel $V_o(\vec{r})$, et par $\psi_\ell(\vec{r}_f)$ à la surface du condensat.

Comme montré schématiquement en figure 71, nous choisissons la surface \mathcal{S} de telle façon qu'elle soit confondue avec la surface du condensat ($\vec{r}' = \vec{r}_f$) et nous la fermons à l'infini.

Peu de points de cette surface participent à l'intégrale 266. En effet, à l'infini, l'intégrande est nulle et seuls les points de la surface du condensat qui correspondent à un rayon classique provenant de la surface de couplage ($|\theta| \leq \theta_{\max}$) sont utiles.

Pour utiliser la relation 266, il faut calculer le propagateur indépendant du temps G_{E_2} associé à la dynamique dans le potentiel V_o . Le calcul dans le cas d'une force constante \vec{F} est documenté dans la littérature. Si le potentiel s'écrit $V_o(\vec{r}) = \vec{F} \cdot \vec{r}$, G_E s'exprime par [155]

$$G_E(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{m}{2\hbar|\vec{r} - \vec{r}'|} [C(\rho^+) \text{Ai}'(\rho^-) - C'(\rho^+) \text{Ai}(\rho^-)], \quad (267)$$

avec les définitions suivantes

$$\begin{cases} \rho^\pm = - \left(\frac{E}{|\vec{F}|l} + \frac{\vec{F} \cdot (\vec{r} + \vec{r}')}{2|\vec{F}|l} \pm \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{2l} \right), \\ C(\rho) = \text{Ai}(\rho) - i\text{Bi}(\rho), \\ l = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{2m|\vec{F}|}}. \end{cases} \quad (268)$$

Le propagateur indépendant du temps fait ainsi intervenir les fonctions d'Airy de première et seconde espèce, respectivement Ai et Bi, et leurs dérivées [79]. l est la longueur caractéristique associée au potentiel linéaire. Ce résultat est particulièrement utile si l'on néglige l'effet Zeeman quadratique et considère la propagation du laser à atomes dans le potentiel gravitationnel seul, pour lequel $\vec{F} \cdot \vec{r} = mgz$.

IV.3.2 Application à notre cas particulier

Dans notre cas où de forts gradients magnétiques sont en jeu, l'effet Zeeman quadratique n'est pas négligeable sur les atomes du laser, d'état interne $|F=1, m_F=0\rangle$. Le potentiel $V_o = V_\ell$ est la somme de l'effet Zeeman quadratique expulsant et de la gravité (équation 128). Contrairement au cas de la gravité seule, nous n'avons pas trouvé dans la littérature, d'expression analytique de G_E dans le cas de l'oscillateur harmonique expulsant.

Nous nous proposons donc de calculer $G_E(\vec{r}, \vec{r}')$ à partir de la transformée temporelle du propagateur K_o (équation 257).

Ce dernier est connu, et le propagateur K_i similaire est donné au paragraphe IV.2.1.a. Comme V_o est centré en $(x=0; y=0; z=-\sigma_Q)$ (figure 45), nous utilisons un repère centré de la même manière, dont les coordonnées, dans le plan (x, z) , sont déduites des coordonnées précédentes par

$$[u_x; u_z] = [x; z + \sigma_Q]. \quad (269)$$

L'évaluation de la transformée de Fourier se fait à partir de la méthode de la phase stationnaire sur le temps. Comme au paragraphe IV.2.1.c, on ne peut exprimer explicitement les temps stationnaires associés que si les fréquences d'oscillation dans toutes les directions sont soit égales à une unique valeur, soit nulles. L'effet Zeeman quadratique est négligeable sur l'axe y ($\omega_{Qy} \ll \omega_{Qr}$) et il suffit là encore d'étudier la propagation dans chaque plan $y=y'_0$ indépendamment. Nous écrivons donc le potentiel V_o comme,

$$V_o(\vec{u}) = \frac{m\omega_{Qr}^2}{2} (\sigma_Q^2 - \vec{u}^2). \quad (270)$$

Nous effectuons alors l'intégrale de Kirchhoff (équation 266) dans chacun de ces plans, intégrale qui s'y écrit comme,

$$\psi_\ell(\vec{u}) = i \frac{\hbar}{2m} \int_{\mathcal{C}} \vec{dn}' \cdot [G_E(\vec{u}, \vec{u}') \vec{\nabla}_{\vec{u}'} \psi_\ell(\vec{u}') - \psi_\ell(\vec{u}') \vec{\nabla}_{\vec{u}'} G_E(\vec{u}, \vec{u}')]. \quad (271)$$

Le contour \mathcal{C} est l'intersection de la surface \mathcal{S} (figure 71) avec le plan $y = y'_0$, et \vec{dn}' est le vecteur unitaire orienté vers l'extérieur de la surface délimitée par le contour \mathcal{C} .

Cette restriction de l'étude de la dynamique à chaque plan vertical indépendamment, a pour conséquence, que nous travaillons avec le propagateur bidimensionnel écrit dans chaque plan $y = y'_0$, comme

$$K_o(\vec{u}, \vec{u}', \tau) = \frac{m\omega_{Qr}\Theta(\tau)}{2\pi i \hbar \sinh \omega_{Qr}\tau} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}(\vec{u}, \vec{u}', \tau)\right), \quad (272)$$

avec l'action

$$S_{cl}(\vec{u}, \vec{u}', \tau) = -\frac{m\omega_{Qr}^2 \sigma_Q^2}{2} \tau + \frac{m\omega_{Qr} [(\vec{u}^2 + \vec{u}'^2) \cosh \omega_{Qr}\tau - 2\vec{u} \cdot \vec{u}']}{2 \sinh \omega_{Qr}\tau}. \quad (273)$$

Ces expressions nous permettent de calculer explicitement, dans chaque plan vertical, le propagateur indépendant du temps G_E . On trouvera les résultats détaillés de ce calcul en annexe E.3.

IV.4 Résultats de la propagation et comparaison à une simulation numérique

À partir des expressions analytiques de G_E , et de la fonction d'onde du laser à la surface du condensat $\psi_\ell(\vec{r}_f)$, nous pouvons calculer $\psi_\ell(\vec{r})$ hors du condensat, et ce dans chaque plan $y = y'_0$ indépendamment. Pour ceci, nous calculons numériquement l'intégrale 271. La partie du contour \mathcal{C} participant effectivement à cette intégrale, est la partie en trait épais de la surface du condensat, représentée en figure 66. Il s'agit uniquement des points \vec{r}_f de la surface du condensat tels que $\psi_\ell(\vec{r}_f) \neq 0$, c'est-à-dire qui sont connectés via l'iconale à la surface de couplage.

IV.4.1 Profils obtenus à une altitude donnée

Nous avons comparé en figure 72, les profils obtenus pour différentes valeurs du désaccord $\tilde{\delta}$, donnant un aperçu des résultats de nos calculs pour différentes positions de la surface de couplage par rapport au condensat. Nous avons reporté les résultats obtenus en utilisant pour $\psi_\ell(\vec{r}_f)$ dans l'intégrale de Kirchhoff, soit l'approximation iconale (équation 244, en pointillés), soit les solutions de l'oscillateur harmonique inversé (équation 250, en trait continu). Nous avons aussi reporté les résultats d'une simulation numérique de Gross-Pitaevskii (annexe F). Notons qu'une comparaison avec des calculs négligeant l'effet Zeeman quadratique, montre que ce dernier est responsable d'un élargissement du profil selon x et d'une élongation du faisceau laser selon z , mais ne modifie en rien le caractère multimode du faisceau, qui n'est qu'une conséquence directe des interactions de ce dernier avec le condensat.

Comme discuté au paragraphe IV.2.2, la méthode de l'iconale (équation 244) n'est pas satisfaisante dans le cas d'un désaccord très grand (cas (a)) correspondant à une surface de couplage proche de la surface du condensat. Par contre, l'utilisation des solutions de l'oscillateur harmonique inversé (équation 250) règle ce problème de singularité de la fonction d'onde au voisinage du point de rebroussement classique. On remarque d'ailleurs que pour des désaccords moins extrêmes, (cas (b), (c) et (d)), les deux solutions donnent des résultats équivalents. Nous pouvons remarquer en figure (d) (couplage dans la partie haute du condensat), que le contraste des franges obtenu par notre calcul au voisinage de l'axe z est plus important que celui donné par la simulation numérique. À la vue de la discussion du paragraphe IV.2.3.c et de la figure 69, ceci s'explique par le fait que pour de telles configurations, les points sur le bord de la surface de couplage correspondent à des trajectoires classiques, qui réentrent dans le volume du condensat après en être sorties. Comme ceci n'est pas pris en compte dans notre traitement en deux étapes, ces trajectoires qui devraient être repoussées par le condensat (au deuxième passage), ne le sont pas, et restent donc près de l'axe. Elles interfèrent alors après propagation avec d'autres chemins arrivant dans cette zone, et modifient légèrement le profil obtenu au voisinage de l'axe de propagation z .

En conclusion, on peut observer sur la figure 72, que la simulation numérique donne des résultats très similaires à ceux obtenus à partir des solutions de l'oscillateur harmonique inversé, et ce dans tous les cas. Ceci valide les approximations faites au cours du calcul, comme la non prise en compte de la diffraction dans la zone du condensat, et le traitement en deux parties séparées de la propagation du laser. Notons qu'en outre, la simulation de Gross-Pitaevskii donne des résultats identiques que l'on prenne en compte ou pas les interactions intralaser, et ce du fait de notre faible flux, justifiant ainsi que dans notre régime, les interactions au sein du laser à atomes sont négligeables.

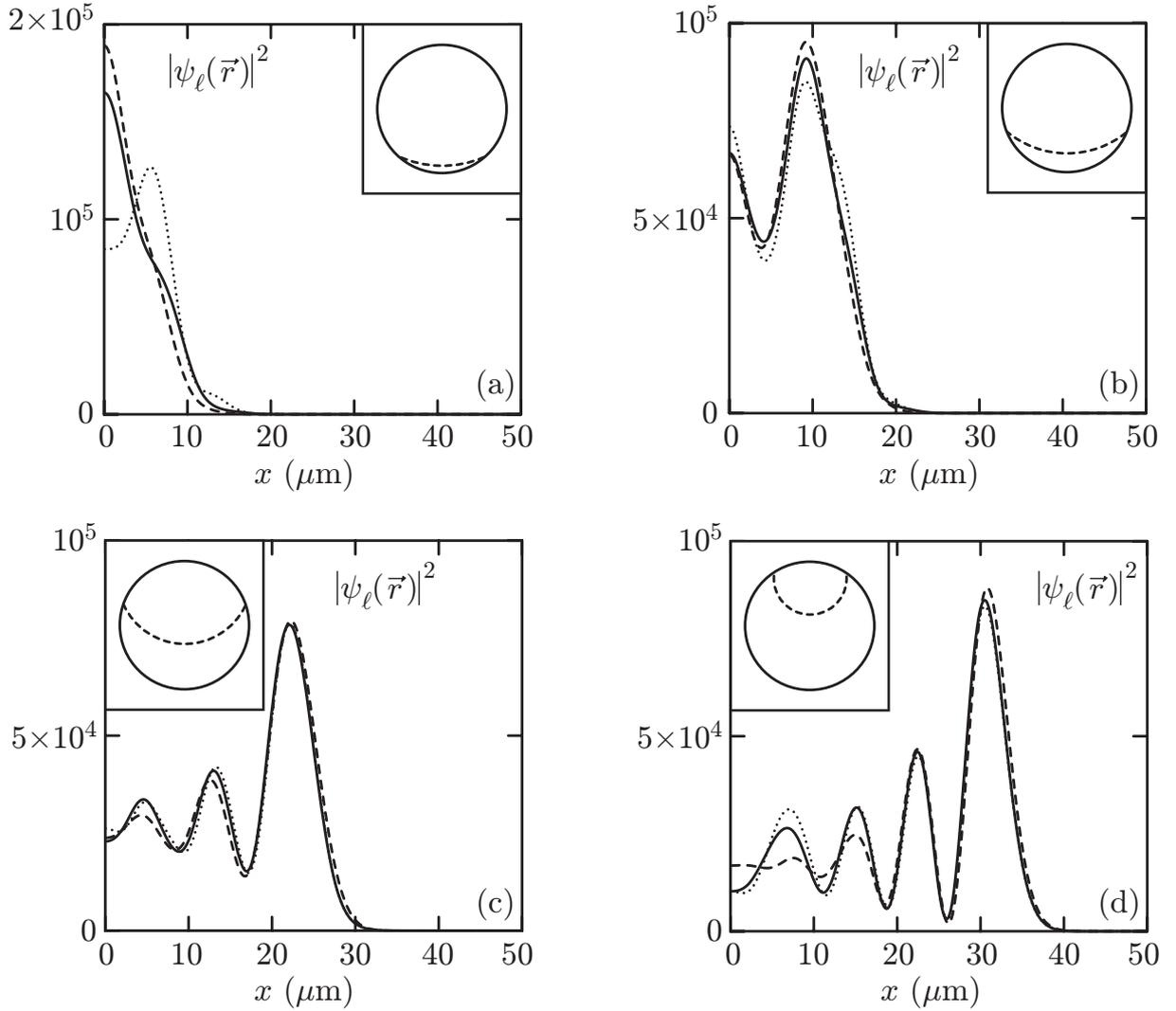


FIG. 72 – Profils de densité obtenus $150 \mu\text{m}$ en dessous du condensat ($z - \sigma_M = 150 \mu\text{m}$), pour différentes valeurs du désaccord : (a) $\tilde{\delta} = 2\pi \times 8.9 \text{ kHz}$, (b) $\tilde{\delta} = 2\pi \times 6.5 \text{ kHz}$, (c) $\tilde{\delta} = 2\pi \times 2.1 \text{ kHz}$, (d) $\tilde{\delta} = -2\pi \times 1.1 \text{ kHz}$. Pour chaque cas, nous avons représenté dans l'encart, la position du couteau radiofréquence, à l'aide d'une coupe dans le plan (x, z) central ($y'_0 = 0$), dans lequel sont calculés ces profils. Nous avons reporté les résultats obtenus en utilisant pour $\psi_\ell(\vec{r}_f)$ dans l'intégrale de Kirchhoff, soit l'approximation iconale (équation 244 en pointillés), soit les solutions de l'oscillateur harmonique inversé (équation 250 en trait continu). Les traits tiretés correspondent quant à eux aux résultats d'une simulation de Gross-Pitaevskii numérique de la dynamique du laser. Toutes les applications numériques correspondent au cas du piège comprimé et les profils sont normalisés à l'unité.

IV.4.2 Profils de densité dans différents plans

Nous pouvons réaliser ces mêmes calculs pour différentes altitudes z et pour différents plans y'_0 . Un échantillon des profils de laser à atomes, obtenus pour différents désaccords, est donné en figure 73. Le profil devient de plus en plus divergent et non gaussien, au fur et à mesure que la surface de couplage se situe haut dans le condensat. On peut voir sur

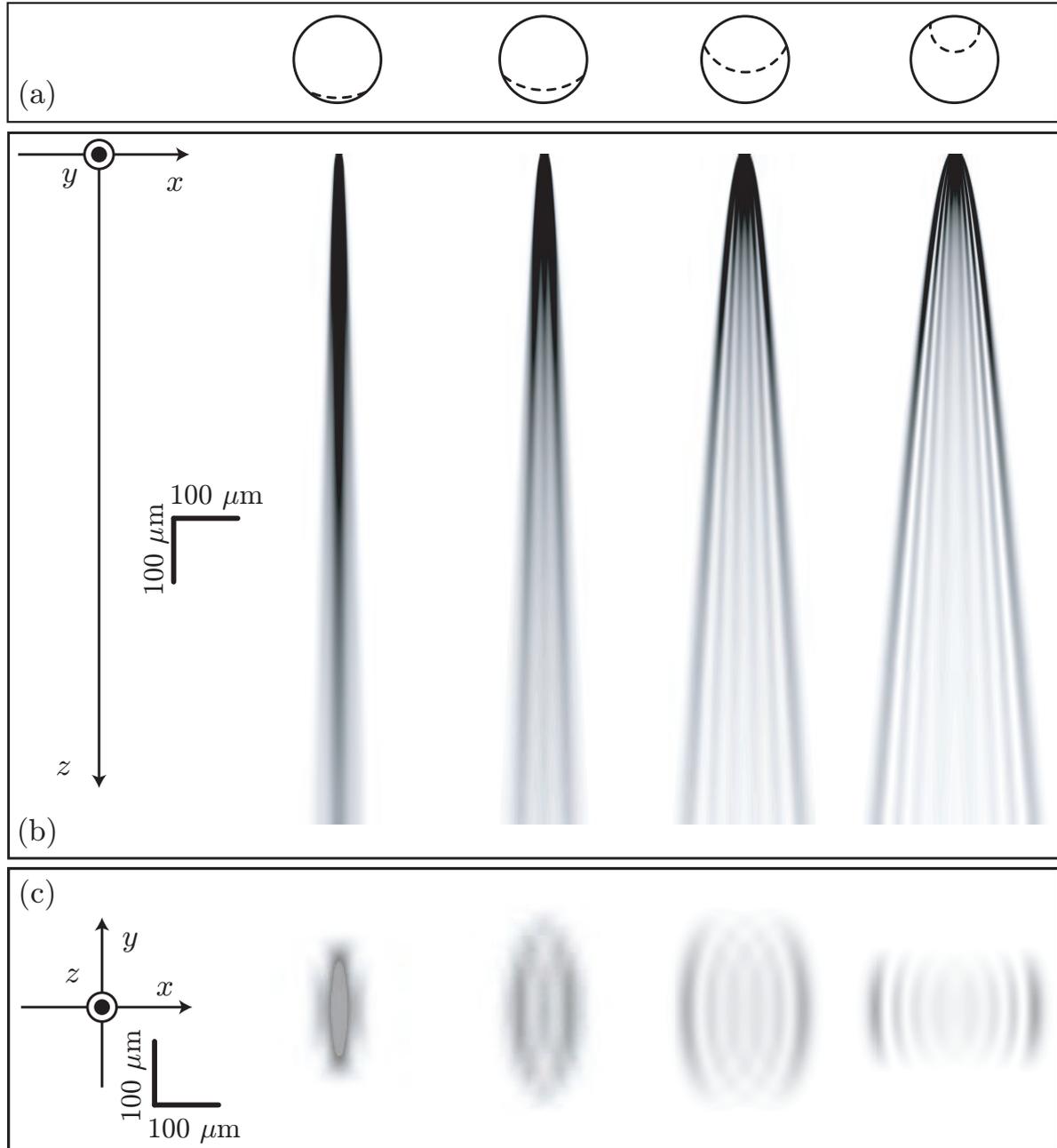


FIG. 73 – Vue dans différents plans des densités atomiques du laser à atomes, pour les désaccords (de gauche à droite) : $\tilde{\delta} = 2\pi \times 8.9 \text{ kHz}$, $\tilde{\delta} = 2\pi \times 6.5 \text{ kHz}$, $\tilde{\delta} = 2\pi \times 2.1 \text{ kHz}$ et $\tilde{\delta} = -2\pi \times 1.1 \text{ kHz}$. (a) Position de la surface de couplage, vue dans le plan (x, z) central ($y'_0 = 0$). (b) Propagation dans le plan central sur une longueur de 1 mm. (c) Profil de densité du laser à atomes dans le plan horizontal (x, y) après 1 mm de propagation.

une coupe horizontale (figure 73 c), que la densité atomique varie lentement selon l'axe y , ce qui justifie le traitement de la propagation à partir de tranches indépendantes les unes des autres, repérées par la position y'_0 . On peut remarquer aussi sur ces images, que l'extension selon y du laser dépend de la valeur du désaccord, car la taille y_{max} (équation 175) de la zone

d'intersection entre le condensat et la surface de couplage en dépend.

De plus, le profil de densité du laser à atomes montre une modulation selon x , correspondant à l'interférence entre différents chemins partant de la surface de couplage. Cette modulation n'est pas visible sur les images expérimentales correspondant aux mêmes désaccords (figure 60). Malgré de multiples efforts pour stabiliser au mieux l'expérience et le processus d'imagerie, nous ne sommes pas parvenus à observer cette modulation du profil. On peut remarquer que les profils de la figure 73b correspondent uniquement à la densité dans le plan $y'_0 = 0$, alors que ceux obtenus expérimentalement, correspondent à l'image de tout le volume du laser (différents plans y'_0) sur la caméra CCD.

IV.4.3 Effet de l'imagerie

Nous avons cherché à simuler le processus d'imagerie, c'est-à-dire, connaissant une distribution volumique de densité atomique, en déduire l'image que renvoie l'optique sur le plan du capteur de la caméra. Le lecteur trouvera des détails sur la procédure de calcul de cette simulation dans [156]. En résumé, il s'agit de propager, à l'aide des concepts de l'optique de Fourier, chaque tranche de position y de l'objet, jusqu'au plan de la caméra, et de sommer chaque image obtenue, pour déterminer le résultat. Dans le cas particulier où l'objet est le laser à atomes dont nous calculons la densité atomique dans chaque plan $y = y'_0$ indépendamment, nous n'avons pas observé de différence significative sur l'image finale, entre la méthode précédente et la simple sommation des profils du laser à atomes, le long de l'axe y . On peut expliquer cette coïncidence des résultats à la lumière de la discussion sur les propriétés de l'imagerie (§ I.1.4.b). En effet, soit L_\perp , la taille transverse des structures du profil à atomes. On voit, qu'après $150 \mu\text{m}$ de propagation (figure 72), $L_\perp \approx 10 \mu\text{m}$. La taille selon y du laser est donnée par y_{max} qui est de l'ordre de $100 \mu\text{m}$. L'anisotropie L_\perp/y_{max} des détails que nous voulons imager (les franges), est donc du même ordre que l'ouverture numérique $\text{O.N.} = 0.1$ du système d'imagerie, ce qui signifie que la profondeur de champ de l'imagerie ne joue pas sur la propagation de l'image du laser à atomes via l'optique. Une simple sommation de la densité dans les différents plans du laser suffit alors pour prédire l'image que l'on devrait obtenir.

La comparaison d'un profil dans le plan central ($y'_0 = 0$), avec celui correspondant à la

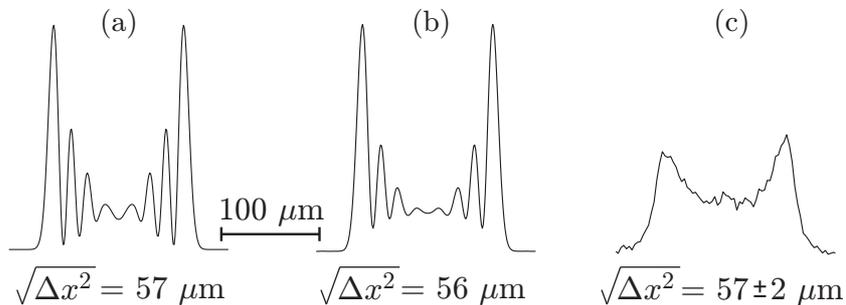


FIG. 74 – Faisceau après $600 \mu\text{m}$ de propagation pour un désaccord $\tilde{\delta} = -2\pi \times 1.1 \text{ kHz}$ (a) calculé dans le plan central $y'_0 = 0$, (b) résultant de l'intégration des profil calculés de long de l'axe de l'imagerie y , (c) obtenu expérimentalement. On a noté la taille quadratique moyenne transverse Δx^2 dans chacun des trois cas.

somme de tous les profils ($|y'_0| \leq y_{\max}$) est faite en figure 74a et b. On voit que la modulation transverse est atténuée sans pour autant disparaître, même après sommation due à l'imagerie. On aurait pu prévoir un tel résultat en considérant les profils 73c dans un plan horizontal (x, y) . Ces derniers montrent que le profil selon x change peu en fonction de y , à cause de la forme fortement anisotrope et parabolique du condensat. De plus, les points où la forme du profil est modifiée ont un poids relatif faible dans la sommation, car ils correspondent à un couplage aux extrémités du condensat ($|y| \approx y_{\max}$) où la densité atomique au niveau du couteau radiofréquence est bien plus faible qu'au centre du condensat.

Nous n'avons pas identifié, de manière claire, la raison expérimentale qui nous empêche d'observer la modulation résiduelle après sommation par l'imagerie. On peut cependant soupçonner qu'un mouvement résiduel du condensat relativement à la surface de couplage, puisse atténuer le contraste des franges sur les images finales, tout comme les fluctuations résiduelles du biais magnétique, qui déplacent la surface de couplage.

Cependant, même si les profils expérimentaux ne reproduisent pas les détails que l'on obtient sur les profils théoriques, la structure globale du faisceau est bien reproduite, comme on peut s'en rendre compte, en comparant les tailles quadratiques moyennes transverses Δx^2 , données par notre modèle et celles données par l'expérience (figure 74). En particulier, l'intégration due à l'imagerie n'a que peu d'effet sur Δx^2 . Nous utilisons cette propriété dans la suite (§ V.5), pour comparer l'évolution des tailles quadratiques moyennes au cours de la propagation, d'une part dans le plan central $y'_0 = 0$ et d'autre part sur les images expérimentales.

En conclusion, notre traitement de la propagation du laser à atomes en deux étapes nous permet de mettre en évidence différents régimes de propagation en optique atomique. Dans la zone du condensat, la diffraction peut être négligée, et nous déterminons ψ_ℓ à partir de l'accumulation de la phase le long des rayons classiques (approximation iconale), alors qu'hors du condensat, l'intégrale de Kirchhoff pour les ondes de matière permet de traiter exactement la propagation. Du point de vue pratique, cette méthode de calcul est beaucoup plus rapide que celle utilisant une simulation numérique des équations de Gross-Pitaevskii. En effet, les expressions de la fonction d'onde sur la surface du condensat et du propagateur indépendant du temps sont analytiques, et l'essentiel du temps nécessaire à la détermination de la fonction d'onde du laser propagé, est dû à l'intégration numérique de l'intégrale de Kirchhoff (équation 271), qui reste une intégrale unidimensionnelle.

RÉGIME PARAXIAL DE PROPAGATION

Le traitement précédent à l'aide de l'intégrale de Kirchhoff pour la propagation hors du condensat est général. Cependant, les lasers à atomes extraits en présence de la gravité voient leur vitesse verticale augmenter fortement au fur et à mesure qu'ils s'éloignent de la zone du condensat, ce qui a pour conséquence qu'après une certaine hauteur de chute, le vecteur d'onde transverse k_x devient négligeable comparé au vecteur d'onde vertical k_z , et l'onde de matière rentre dans le régime paraxial. Nous pouvons donc scinder la propagation hors du condensat en deux parties : jusqu'à l'altitude où le laser entre dans le régime paraxial, la fonction d'onde est calculée via l'intégrale de Kirchhoff, et au-delà, via la méthode que nous décrivons dans cette section.

L'intérêt de l'utilisation de l'approximation paraxiale (§ V.1), réside dans sa simplification du calcul de la propagation du laser qui est déduite de lois algébriques analytiques comme la loi $ABCD$ (§ V.2), et non plus d'intégrales. Du point de vue pratique, cela signifie qu'une fois que l'on connaît un profil à une altitude donnée, le calcul des profils en d'autres positions z est immédiat (§ V.3).

De plus, ce formalisme permet de dériver des lois de propagation des paramètres globaux du faisceau, comme la taille quadratique moyenne Δx^2 , paramètre auquel nous avons accès expérimentalement. Enfin, dans le cadre de la propagation de faisceaux multimodes, il introduit un facteur de qualité M^2 (§ V.4), qui indique combien de fois le laser est limité par la diffraction. L'intérêt de ce facteur de qualité, qui intervient dans la loi d'évolution de Δx^2 , est de nous permettre de caractériser de manière synthétique la dégradation du faisceau subie lors de l'interaction avec le condensat-source. Ainsi, nous mettons en évidence que le M^2 dépend très fortement de la position d'où est extraite l'onde de matière.

V.1 L'équation de propagation paraxiale

On trouvera une présentation de la propagation paraxiale d'un laser à atomes de profil gaussien dans [63]. Nous rappelons ici les idées principales d'un tel traitement et présentons sa généralisation dans le cas de la propagation d'un laser à atomes de profil quelconque. Nous nous plaçons d'entrée dans un plan $y = y'_0$ donné, car comme auparavant, nous négligeons toute dynamique selon l'axe y , qui est l'axe long du condensat.

V.1.1 Séparation des degrés de liberté transverses et axiaux

Considérons la fonction d'onde du laser $\psi_\ell(x, y'_0, z)$ en régime stationnaire. Elle a une énergie E dans le potentiel $V(x, y'_0, z)$, et vérifie l'équation de Schrödinger indépendante du temps,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi_\ell + V \psi_\ell = E \psi_\ell. \quad (274)$$

Nous faisons jouer à l'axe z , selon lequel se propage le laser, un rôle particulier, et nous décomposons la fonction d'onde et le potentiel, en une partie transverse (indice \perp) et une partie axiale (indice \parallel),

$$\begin{cases} \psi_\ell(x, y'_0, z) = \psi_\perp(x, y'_0, z) \psi_\parallel(y'_0, z), \\ V(x, y'_0, z) = V_\perp(x, y'_0, z) + V_\parallel(y'_0, z). \end{cases} \quad (275)$$

$\psi_\parallel(y'_0, z)$ est définie comme vérifiant l'équation de Schrödinger unidimensionnelle selon l'axe z ,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_\parallel}{\partial z^2} + V_\parallel \psi_\parallel = E \psi_\parallel, \quad (276)$$

et V_\parallel correspond au potentiel pris dans la direction z , à une valeur de $y = y'_0$ fixée,

$$V_\parallel(y'_0, z) = V(0, y'_0, z). \quad (277)$$

Nous exprimons la solution propagative de l'équation 276, à l'aide la méthode WKB à une dimension (Chap. VII de [136]),

$$\psi_\parallel(y'_0, z) = \sqrt{\frac{m\mathcal{F}(y'_0)}{p(z)}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{z_r}^z du p(u) \right], \quad (278)$$

où nous avons introduit le point de rebroussement semi-classique z_r défini par $p(z_r) = 0$, avec $p(z)$, l'impulsion semi-classique dépendant du plan considéré, et qui est donnée par

$$p(z) = \sqrt{2m(E - V_\parallel(y'_0, z))}. \quad (279)$$

Dans l'équation 278, nous avons aussi introduit le flux du laser $\mathcal{F}(y'_0)$ dans le plan y'_0 . Il est relié au taux de couplage $\Gamma(y'_0)$ (équation 182) dans ce même plan, par

$$\mathcal{F}(y'_0) = \Gamma(y'_0) N_c, \quad (280)$$

où N_c est le nombre d'atomes dans le condensat. Avec ces notations, nous normalisons $\psi_\parallel(y'_0, z)$ de la manière suivante,

$$\int_{-y_{\max}}^{y_{\max}} dy |\psi_\parallel(y, z)|^2 = \frac{m\mathcal{F}}{p(z)}, \quad (281)$$

où y_{\max} (équation 175) correspond à l'extension selon y de la zone de couplage qui coïncide avec celle du laser à atomes. Le flux global est lié au taux de couplage global Γ (figure 56), par la relation $\mathcal{F} = \Gamma N_c$. Nous pouvons vérifier qu'une telle normalisation rend compte du courant de probabilité du laser, orienté selon z ,

$$j_{//} = \int_{-y_{\max}}^{y_{\max}} dy \left[\frac{\hbar}{2mi} \left(\psi_{//}^* \frac{\partial \psi_{//}}{\partial z} - \psi_{//} \frac{\partial \psi_{//}^*}{\partial z} \right) \right] = \mathcal{F}. \quad (282)$$

V.1.2 Approximation d'enveloppe lentement variable

En introduisant l'expression 278 de $\psi_{//}$ dans l'équation 274, et en utilisant les définitions 275, nous obtenons l'équation suivante que vérifie l'enveloppe $\psi_{\perp}(x, y'_0, z)$,

$$i\hbar \frac{p(z)}{m} \frac{\partial \psi_{\perp}}{\partial z} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_{\perp}}{\partial x^2} + V_{\perp} \psi_{\perp} + \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{p(z)} \frac{\partial p(z)}{\partial z} \frac{\partial \psi_{\perp}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi_{\perp}}{\partial z^2} \right]. \quad (283)$$

On définit Z_p et Z_{\perp} les tailles caractéristiques selon z , sur lesquelles varient respectivement $p(z)$ et $\partial \psi_{\perp} / \partial z$,

$$\begin{cases} \frac{1}{Z_p} = \frac{1}{p(z)} \frac{\partial p(z)}{\partial z}, \\ \frac{1}{Z_{\perp}} = \frac{\partial^2 \psi_{\perp} / \partial z^2}{\partial \psi_{\perp} / \partial z}. \end{cases} \quad (284)$$

Pour négliger les deux derniers termes de l'équation 283, en particulier devant le premier, il faut pouvoir écrire

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{p(z)} \frac{\partial p(z)}{\partial z} \frac{\partial \psi_{\perp}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi_{\perp}}{\partial z^2} \right] \ll \frac{\hbar p(z)}{m} \frac{\partial \psi_{\perp}}{\partial z}. \quad (285)$$

En notant $\lambda = \hbar/p(z)$, la longueur d'onde de De Broglie réduite, associée au mouvement vertical, la condition 285 s'exprime comme,

$$Z_p, Z_{\perp} \gg \frac{\lambda}{2}. \quad (286)$$

La condition portant sur Z_p est vérifiée pour tout z , sauf au voisinage du point de rebroussement classique z_r , où $p(z)$ varie significativement sur une distance de l'ordre λ . Il s'agit du même domaine de validité que celui de l'approximation WKB utilisée en équation 278, $z - z_r \gg \lambda$. La seconde condition portant sur Z_{\perp} indique que la taille typique de variation de l'enveloppe selon z doit être bien plus grande que λ : c'est la condition d' « enveloppe lentement variable¹ ». Si ces deux conditions sont vérifiées, on peut réécrire l'équation 283 selon,

$$i\hbar \frac{p(z)}{m} \frac{\partial \psi_{\perp}}{\partial z} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_{\perp}}{\partial x^2} + V_{\perp} \psi_{\perp}. \quad (287)$$

V.1.3 Paramétrage par le temps

Une dernière étape consiste à paramétrer la coordonnée z par le temps, en écrivant les équations du mouvement dans le potentiel $V_{//}(y'_0, z)$,

$$m\ddot{z} = -\frac{\partial V_{//}(y'_0, z)}{\partial z}, \text{ avec } z(0) = z_r \text{ et } \dot{z}(0) = 0. \quad (288)$$

¹En réalité, c'est la dérivée de l'enveloppe qui doit varier lentement.

En posant $\phi_{\perp}(x, y'_0, t) = \psi_{\perp}(x, y'_0, z(t))$, on obtient comme équation pour l'enveloppe ϕ_{\perp} ,

$$i\hbar \frac{\partial \phi_{\perp}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi_{\perp}}{\partial x^2} + V_{\perp} \phi_{\perp}. \quad (289)$$

La normalisation globale de ψ étant contenue dans $\psi_{//}$, l'enveloppe ϕ_{\perp} est normalisée à l'unité,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\phi_{\perp}(x, y'_0, t)|^2 = 1. \quad (290)$$

V.1.4 Domaine de validité

Pour obtenir les équations 278 et 289 à partir de l'équation 274, nous avons fait deux hypothèses :

- La première hypothèse concerne le caractère lentement variable de l'enveloppe selon z . On peut comprendre qualitativement que cette hypothèse correspond à l'approximation paraxiale, qui est vérifiée pour un faisceau faiblement divergeant. En effet, le profil transverse ϕ_{\perp} reste normalisé à un, puisque la normalisation du laser à atomes a été entièrement reportée sur $\psi_{//}$. On voit donc, pour conserver une telle normalisation, que ϕ_{\perp} varie d'autant plus lentement en fonction de t (donc de z) qu'il s'élargit ou se rétrécit (selon x) lentement, c'est-à-dire que le faisceau est peu divergent. On peut estimer l'angle de divergence par le rapport entre l'impulsion transverse p_x et l'impulsion axiale $p(z)$. L'approximation paraxiale est donc vérifiée si

$$\frac{p_x}{p(z)} \ll 1. \quad (291)$$

Dans le cas qui nous intéresse où le mouvement vertical est bien plus accéléré que le mouvement transverse, il arrive un moment à partir duquel cette condition est vérifiée. Quantitativement en considérant la propagation dans le potentiel V_o , on peut réécrire cette condition comme,

$$\sqrt{\frac{E_x}{E_z}} \sim \sqrt{\frac{\tilde{\mu} + m\omega_{Q_r}^2 \Delta x(z)^2/2}{\tilde{\mu} + m\omega_{Q_r}^2 [(z + \sigma_Q)^2 - \sigma_Q^2]/2}} \ll 1, \quad (292)$$

où E_x et E_z sont les énergies cinétiques selon x et z . Nous avons noté $\Delta x(z)$, la taille transverse du laser à l'altitude z . Pour nos paramètres expérimentaux, les résultats de la propagation via l'intégrale de Kirchhoff (figure 72) montrent qu'en $z = 150 \mu\text{m}$, l'extension spatiale $\Delta x(z)$ est typiquement inférieure à $50 \mu\text{m}$. Nous avons $\tilde{\mu}$ de l'ordre de 2 kHz, et la condition de paraxialité 292 est bien vérifiée.

- La seconde hypothèse concerne le caractère semi-classique de la dynamique verticale. Cette hypothèse est valide dès que l'on s'intéresse à la fonction d'onde du laser loin du point de rebroussement classique. Ceci est en particulier le cas pour nous, où nous appliquons le traitement paraxial après propagation sur une centaine de microns, comme discuté précédemment.

Le traitement présenté dans ce paragraphe nous permet donc de calculer la propagation d'un laser à atomes, en découplant le degré de liberté axial z , traité semi-classiquement (équation 278), du degré de liberté transverse x dont la dynamique est donnée par l'équation 289. Cette écriture nous a permis de séparer la dépendance rapide en z du laser à atomes (contenue dans $\psi_{//}$), de la dépendance lente en z de ψ_{\perp} , ce qui en fait une formulation particulièrement propice à l'utilisation de l'approximation paraxiale.

V.2 Solutions générales

V.2.1 Potentiels considérés

Nous nous intéressons à un potentiel transverse $V_{\perp}(x, y'_0, z(t))$, au plus quadratique en x . Il peut donc s'écrire de manière générale,

$$V_{\perp}(x, y'_0, z(t)) = V_{\perp}^{(0)}(y'_0, z(t)) + V_{\perp}^{(1)}(y'_0, z(t))x + V_{\perp}^{(2)}(y'_0, z(t))\frac{x^2}{2}. \quad (293)$$

Le terme $V^{(0)}$ est nul en vertu de la définition 277. Nous prenons le terme $V_{\perp}^{(1)}$ égal à zéro. En effet, il correspond à une force uniforme en x , qui déplace transversalement le centre de masse de l'enveloppe ϕ_{\perp} . Le développement du paragraphe précédent peut alors être généralisé en considérant pour $\psi_{//}$ le mouvement semi-classique non pas selon l'axe z , mais selon le chemin qu'emprunterait un atome sous l'effet conjoint de la force transverse $f_x = -V_{\perp}^{(1)}(y'_0, z(t))$ et de la force axiale $f_z = -\partial_z V_{//}(y'_0, z)$. Il ne s'agit que d'un recentrage du profil transverse sans conséquence sur la dynamique interne (élargissement, déformation...) de ϕ_{\perp} , et qui n'est pas présent dans notre configuration expérimentale, où le potentiel transverse est centré par rapport à l'axe z . Pour étudier la dynamique transverse de l'enveloppe, nous considérons donc uniquement le troisième terme,

$$V_{\perp}(x, y'_0, z(t)) = V_{\perp}^{(2)}(y'_0, z(t))\frac{x^2}{2}. \quad (294)$$

V.2.2 Les solutions hermito-gaussiennes

Nous cherchons une base de fonctions solutions de l'équation 289, qui soit adaptée à la description de l'évolution de l'enveloppe. Notons que l'équation 289 est une équation de Schrödinger dépendant du temps, portant sur la dimension transverse x . On pourrait donc penser utiliser la base des modes propres correspondant au potentiel 294. Dans le cas où $V_{\perp}^{(2)}$ est positif, il s'agirait des modes propres de l'oscillateur harmonique, s'il était nul, cela serait la base des ondes planes, tandis que s'il était négatif, il s'agirait des modes propres de l'oscillateur harmonique inversé. On voit dans les deux derniers cas, que les bases sont mal adaptées à la description d'une enveloppe, car les fonctions propres correspondantes sont délocalisées, alors que l'enveloppe ϕ_{\perp} est localisée autour de $x=0$.

La base que nous utilisons a ses fonctions localisées autour de l'axe z , quelque soit le signe de $V_{\perp}^{(2)}$. Il s'agit de la base des modes hermito-gaussiens $\{\Phi_n(x, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$, dont les éléments s'écrivent [157],

$$\Phi_n(x, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi} \sigma(t) 2^n n!)^{1/2}} \exp\left[i \frac{x^2}{2q(t)}\right] \exp\left[i(1 + 2n)\phi(t)\right] H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2} \sigma(t)}\right), \quad (295)$$

où H_n sont les polynômes d'Hermite. Cette base est orthonormée,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_m^*(x, t) \Phi_n(x, t) dx = \delta_{mn}. \quad (296)$$

V.2.3 Évolution des paramètres du faisceau : la loi ABCD

L'expression de Φ_n fait intervenir la phase de Gouy $\phi(t)$, et le paramètre complexe $q(t)$ qui s'exprime en fonction de deux paramètres réels, la taille r.m.s. $\sigma(t)$ et la courbure $C(t)$,

$$\frac{1}{q(t)} = C(t) + \frac{i}{2\sigma^2(t)} = \frac{m}{\hbar\rho(t)} + \frac{i}{2\sigma^2(t)}. \quad (297)$$

Nous avons introduit le rayon de courbure $\rho(t) = m/\hbar C(t)$ (homogène à un temps), dont la donnée est équivalente à celle de $C(t)$. L'équation 289 appliquée à Φ_n se traduit par les relations suivantes que doivent vérifier les paramètres $\sigma(t)$, $\rho(t)$ et $\phi(t)$ [157],

$$\begin{cases} \frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{\hbar^2}{4m^2\sigma^3} - \frac{V_{\perp}^{(2)}\sigma}{m}, \\ \rho(t) = \frac{\sigma}{d\sigma/dt}, \\ \frac{d\phi}{dt} = -\frac{\hbar}{4m\sigma^2}. \end{cases} \quad (298)$$

Les deux premières équations peuvent être écrites de manière compacte en n'utilisant que le paramètre complexe $q(t)$,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\hbar}{m} + \frac{V_{\perp}^{(2)}}{\hbar} q^2. \quad (299)$$

Cette équation peut être résolue en posant

$$q(t) = \hbar \frac{X(t)}{P(t)}, \quad (300)$$

avec $P(t) = m\dot{X}(t)$. L'équation 299 est alors équivalente à

$$\frac{dP(t)}{dt} = -V_{\perp}^{(2)} X(t). \quad (301)$$

Cette relation n'est rien d'autre que l'équation du mouvement d'une particule fictive de position $X(t)$ évoluant dans le potentiel $V_{\perp}(X(t))$ [158].

Déterminer $q(t)$ et $\phi(t)$ est donc équivalent à résoudre l'équation 301. Celle-ci nous permet d'exprimer la position $X(t)$ et l'impulsion $P(t)$ en fonction de leurs valeurs en t' . On peut donc écrire une matrice de quatre coefficients dépendants de $\tau = t - t'$, telle que

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ P(t)/\hbar \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\tau) & B(\tau) \\ C(\tau) & D(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t') \\ P(t')/\hbar \end{bmatrix}. \quad (302)$$

Cette matrice est la matrice $ABCD$ contenant toute l'information nécessaire à la propagation de Φ_n de l'instant t' à l'instant t . En particulier, il découle directement de la relation 302, que le paramètre complexe $q(t)$ est exprimé en fonction de sa valeur en t' selon la loi

$$q(t) = \frac{A(\tau)q(t') + B(\tau)}{C(\tau)q(t') + D(\tau)}. \quad (303)$$

La connaissance de $q(t)$ permet alors celle de la phase de Gouy $\phi(t)$ (dernière équation 298), selon

$$\phi(t) = \phi(t') - \frac{\hbar}{2m} \int_{t'}^t du \Im \left(\frac{1}{q(u)} \right). \quad (304)$$

La loi $ABCD$ 303 est identique à celle que l'on rencontre en optique dans le cadre de la propagation paraxiale [159, 63]. Notons, qu'il existe d'autres traitements [148, 158], utilisant une loi de propagation $ABCD$ pour les ondes de matière, dans un cadre plus général que l'approximation paraxiale. L'avantage du traitement paraxial par rapport à ces traitements, est, outre sa relative simplicité, qu'il ne considère que la propagation de surfaces et non de paquets d'onde. Il s'inscrit donc plus naturellement dans le cadre d'un système présentant une discontinuité de potentiel, comme celle que nous rencontrons à la surface du condensat, discontinuité, qui à notre connaissance, n'a pas été traitée dans un cadre plus général.

V.3 Propagation à l'aide des matrices $ABCD$ atomiques

V.3.1 Expression des matrices de propagation

La première chose à calculer, pour pouvoir propager chaque mode Hermito-gaussien Φ_n du temps t' au temps t , est la matrice $ABCD$ correspondant à V_\perp . Nous donnons dans la table 7, pour différents cas, les expressions des matrices $ABCD$, que l'on obtient directement, en résolvant l'équation du mouvement de la particule fictive (relation 301) [63]. On remarquera que le déterminant $AD - BC$ de ces matrices est, dans tous les cas, égal à un [158].

Dans notre cas, le potentiel dans lequel nous considérons la propagation paraxiale est V_o , qui correspond à la somme de la gravité et de l'effet Zeeman quadratique. La décomposition du potentiel (équation 275) est alors particulièrement simple, car V_o est séparable. On a

$$\begin{cases} V_{//}(y'_0, z) = \frac{m\omega_{Qr}^2}{2} [\sigma_Q^2 - (z + \sigma_Q)^2], \\ V_\perp(x, y'_0, z) = -\frac{m\omega_{Qr}^2}{2} x^2, \end{cases} \quad (305)$$

et la matrice $ABCD$ utile à la propagation dans un tel potentiel est la troisième de la table 7,

$$\mathcal{M}(\tau) = \begin{bmatrix} \cosh \omega_{Qr}\tau & \Sigma^2 \sinh \omega_{Qr}\tau \\ \Sigma^{-2} \sinh \omega_{Qr}\tau & \cosh \omega_{Qr}\tau \end{bmatrix}, \quad (306)$$

avec $\Sigma = \sqrt{\hbar/m\omega_{Qr}}$, la taille de l'oscillateur harmonique de fréquence ω_{Qr} .

Propagation transverse considérée	Matrice $ABCD$ correspondante
Espace libre : $V_\perp^{(2)} = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & \hbar\tau/m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Oscillateur harmonique : $V_\perp^{(2)} = m\omega^2$	$\begin{bmatrix} \cos \omega\tau & \sigma_h^2 \sin \omega\tau \\ -\sigma_h^{-2} \sin \omega\tau & \cos \omega\tau \end{bmatrix}$
Oscillateur harmonique inversé : $V_\perp^{(2)} = -m\omega^2$	$\begin{bmatrix} \cosh \omega\tau & \sigma_h^2 \sinh \omega\tau \\ \sigma_h^{-2} \sinh \omega\tau & \cosh \omega\tau \end{bmatrix}$

TAB. 7 – Matrices $ABCD$ correspondant à la dynamique pendant un temps τ , pour différents potentiels transverses V_\perp . Dans les deux derniers cas, on a noté ω et $\sigma_h = \sqrt{\hbar/m\omega}$, la fréquence et la taille de l'oscillateur harmonique.

V.3.2 Méthode générale de propagation

Présentons la méthode générale à suivre pour propager le laser dans le régime paraxial. Pour nos paramètres expérimentaux, nous avons montré (condition 292), que pour

$z \geq 150 \mu\text{m}$, l'approximation paraxiale est valide. Nous partons donc de la fonction d'onde du laser obtenue en une altitude z' correspondant à au moins $150 \mu\text{m}$ de chute. Cette fonction d'onde $\psi_\ell(x, y'_0, z')$, d'énergie E est calculée en utilisant les techniques présentées précédemment, à savoir l'iconale dans la zone du condensat et l'intégrale de Kirchhoff hors du CBE.

V.3.2.a Relation altitude-temps

La donnée de l'énergie E définit le point de rebroussement classique² z_r sur l'axe z ,

$$z_r = \sqrt{\sigma_Q^2 - \frac{2E}{m\omega_{Qr}^2}} - \sigma_Q. \quad (307)$$

Le paramétrage de z par le temps t est obtenu à l'aide de la relation 288,

$$z(t) = (z_r + \sigma_Q) \cosh \omega_{Qr} t - \sigma_Q. \quad (308)$$

C'est cette relation qui lie de manière univoque le temps t apparaissant dans la propagation paraxiale et l'altitude z à laquelle on calcule le profil. Notons tout de suite que ce temps ne correspond pas au temps t_{cl} que mettrait classiquement un atome pour atteindre l'altitude $z(t)$, étant donné qu'il s'est propagé sur l'axe z en partant de la surface de couplage. En effet, ce dernier fait intervenir le potentiel V_i dans la zone du condensat (équation 351). Ce qui n'est pas le cas du temps t défini par la relation 308, qui correspond au temps qu'aurait mis le laser issu du point de rebroussement classique z_r , pour atteindre $z(t)$, en restant dans le potentiel V_o .

Le temps t' associé à l'altitude à laquelle nous connaissons $\psi_\ell(x, y'_0, z')$ est donc donné par

$$t' = \frac{1}{\omega_{Qr}} \operatorname{arccosh} \left[\frac{z' + \sigma_Q}{z_r + \sigma_Q} \right]. \quad (309)$$

Nous souhaitons calculer $\psi_\ell(x, y'_0, z)$ à une altitude z qui correspond au régime paraxial. Le temps t correspondant est donné par une relation analogue,

$$t = \frac{1}{\omega_{Qr}} \operatorname{arccosh} \left[\frac{z + \sigma_Q}{z_r + \sigma_Q} \right]. \quad (310)$$

V.3.2.b Phase accumulée le long de l'axe

L'impulsion $p(z)$ en une altitude donnée z , est donnée par la relation 279,

$$p(z) = \sqrt{2m \left(E - \frac{m\omega_{Qr}^2}{2} \left[\sigma_Q^2 - (z + \sigma_Q)^2 \right] \right)}. \quad (311)$$

L'action $S(z)$, prise entre le point z_r et le point z et qui apparaît dans la phase de $\psi_{//}(y'_0, z)$ (équation 278), s'exprime comme,

$$S(z) = \int_{z_r}^z du p(u) = \frac{\hbar z_r^2}{2\Sigma^2} \left[\frac{z}{z_r} \sqrt{\left(\frac{z}{z_r} \right)^2 - 1} - \ln \left(\frac{z}{z_r} + \sqrt{\left(\frac{z}{z_r} \right)^2 - 1} \right) \right]. \quad (312)$$

²On peut noter que ce point existe toujours en pratique, car $E \leq \tilde{\mu} < m\omega_{Qr}^2 \sigma_Q^2 / 2$, avec nos paramètres expérimentaux.

V.3.2.c Décomposition sur les modes hermito-gaussiens

La suite de la procédure de calcul de $\psi_\ell(x, y'_0, z)$ à partir de $\psi_\ell(x, y'_0, z')$, nécessite la décomposition de $\psi_\ell(x, y'_0, z')$ en sa partie axiale et transverse, cette dernière faisant intervenir les fonctions $\Phi_n(x, t')$. En notant la normalisation selon x , $\mathcal{N}(y'_0, z) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi_\ell(x, y'_0, z)|^2}$, on écrit donc

$$\psi_\ell(x, y'_0, z') = \underbrace{\left[\mathcal{N}(y'_0, z') e^{iS(z')/\hbar} \right]}_{\psi_{//}} \underbrace{\left[\sum_n c_n \Phi_n(x, t') \right]}_{\phi_\perp}, \quad (313)$$

avec chaque coefficient c_n étant le produit scalaire,

$$c_n = \frac{e^{-iS(z')/\hbar}}{\mathcal{N}(y'_0, z')} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Phi_n^*(x, t') \psi_\ell(x, y'_0, z'). \quad (314)$$

La base des fonctions $\Phi_n(x, t')$ (équation 295) est pleinement déterminée par la donnée du paramètre complexe $q(t')$ et de la phase de Gouy $\phi(t')$. Une propriété remarquable de la méthode, est, qu'en toute généralité, pour calculer la propagation dans le régime paraxial, nous n'avons pas besoin de connaître les paramètres $q(t')$ et $\phi(t')$ associés à l'altitude z' . En effet, quelques soient les valeurs de ces paramètres, il n'en reste pas moins vrai que $\{\Phi_n(x, t')\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base sur laquelle on peut toujours développer le profil transverse $\psi_\ell(x, y'_0, z')$. Cependant, on remarque que la décomposition 313 porte sur un nombre infini de fonctions $\Phi_n(x, t')$. Certains choix des paramètres $\{q(t'); \phi(t')\}$ sont plus appropriés que d'autres, car ils limitent le nombre de termes à utiliser dans la décomposition pour représenter fidèlement $\psi_\ell(x, y'_0, z')$. Ainsi, il est intéressant, du point de vue pratique, d'utiliser le couple $\{q(t'); \phi(t')\}$, tel que pour une valeur n_{\max} aussi petite que possible, l'égalité suivante soit vérifiée à une très bonne approximation,

$$\psi_\ell(x, y'_0, z') = \mathcal{N}(y'_0, z') e^{iS(z')/\hbar} \sum_{n=0}^{n_{\max}} c_n \Phi_n(x, t'). \quad (315)$$

Nous verrons au paragraphe V.4.3, que le choix des paramètres $\{q(t'); \phi(t')\}$ minimisant le nombre de termes dans cette décomposition est dicté par la donnée des caractéristiques du profil ψ_ℓ . En particulier, un choix particulièrement approprié fait intervenir un invariant de propagation du laser à atomes : le facteur M^2 caractérisant la qualité du profil.

V.3.2.d Recomposition après propagation des paramètres du faisceau

Une fois les paramètres $\{q(t'); \phi(t')\}$ choisis, et la décomposition de $\psi_\ell(x, y'_0, z')$ effectuée, on calcule les fonctions $\Phi_n(t)$. Ceci est équivalent à calculer $\{q(t); \phi(t)\}$ à partir de $\{q(t'); \phi(t')\}$. $q(t)$ est obtenu en utilisant la loi $ABCD$ (équations 303 et 306). En utilisant cette même loi, on peut déterminer $q(u)$ où $u \in [t'; t]$, c'est-à-dire finalement, la phase de Gouy $\phi(t)$, à l'aide de la relation 304.

En utilisant les coefficients c_n issus de la décomposition de $\psi_\ell(x, y'_0, z')$, on écrit la fonction $\psi_\ell(x, y'_0, z)$, comme

$$\psi_\ell(x, y'_0, z) = \mathcal{N}(y'_0, z) e^{iS(z)/\hbar} \sum_n c_n \Phi_n(x, t). \quad (316)$$

La normalisation transverse $\mathcal{N}(y'_0, z)$ est directement donnée en fonction de $\mathcal{N}(y'_0, z')$, par (équation 278)

$$\mathcal{N}(y'_0, z) = \sqrt{\frac{p(z')}{p(z)}} \mathcal{N}(y'_0, z'). \quad (317)$$

On aboutit finalement à l'expression de $\psi_\ell(x, y'_0, z)$ en fonction de $\psi_\ell(x, y'_0, z')$, et dépendant des paramètres $\{q; \phi\}$ en t et t' via Φ_n ,

$$\psi_\ell(x, y'_0, z) = \sqrt{\frac{p(z')}{p(z)}} \exp\left(i \frac{S(z) - S(z')}{\hbar}\right) \sum_n \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \Phi_n^*(x', t') \psi_\ell(x', y'_0, z') \right] \Phi_n(x, t). \quad (318)$$

Le préfacteur de cette expression fait intervenir le changement de normalisation lié à l'accélération subie entre z' et z , ainsi que le déphasage subi au cours du chemin reliant ces deux points. Les produits scalaires entre crochets sont effectués numériquement, une fois que l'on a choisi les paramètres $\{q(t'); \phi(t')\}$. Nous détaillons le calcul de la transformation de ces paramètres au paragraphe V.4.3, dans le cas où on les choisit de manière à limiter le nombre de termes dans la décomposition (315). Pour ceci, il est judicieux d'introduire le facteur de qualité M^2 du laser à atomes, qui non seulement, va faciliter le calcul de la propagation 318, mais surtout permettre de caractériser de manière synthétique le profil du laser à atomes.

V.4 Le facteur qualité M^2

En optique, la qualité du profil d'un faisceau laser arbitraire est caractérisée, dans le régime paraxial, par le facteur M^2 introduit par A. E. Siegman [160]. Le lecteur trouvera dans le cours d'optique [161], une description des concepts liés à la propagation paraxiale, aux matrices $ABCD$ et au facteur qualité M^2 . Comme nous le montrons dans ce paragraphe, il est naturel de transposer ces idées à l'étude de la propagation en optique atomique, pour caractériser l'onde de matière à l'aide du M^2 .

V.4.1 Définition

V.4.1.a Courbure moyenne d'un profil

Soit un laser à atomes dans le régime paraxial, de profil $\phi_{\perp}(x, y'_0, t)$ centré en $x = 0$ et normalisé à 1 (équation 290). On définit [162] la courbure moyenne $\mathcal{C}(t)$ associée à ce profil général, comme

$$\mathcal{C}(t) = \frac{i \int_{-\infty}^{\infty} dx x \left[\phi_{\perp} \frac{\partial \phi_{\perp}^*}{\partial x} - \frac{\partial \phi_{\perp}}{\partial x} \phi_{\perp}^* \right]}{2 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 |\phi_{\perp}|^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 |\phi_{\perp}|^2 \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\theta^{(2p)}}{(2p-1)!} x^{2p-2} \right]}{\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 |\phi_{\perp}|^2}, \quad (319)$$

où la seconde expression est obtenue en séparant module et phase dans le profil, $\phi_{\perp} = |\phi_{\perp}| e^{i\theta}$, et en utilisant le développement de Taylor de la phase,

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{(n)}}{n!} x^n. \quad (320)$$

Dans l'intégrale 319, seuls subsistent les termes liés aux dérivées d'ordre pair (dérivée seconde, quatrième, etc...). On voit que $\mathcal{C}(t)$ se réduit à la courbure $C(t)$ introduite dans le paramètre $q(t)$ (équation 297), dans le cas où la phase est quadratique, par exemple pour les modes hermito-gaussiens Φ_n (relation 295). Dans le cas où le profil de phase est quelconque, la courbure effective $\mathcal{C}(t)$ correspond à la moyenne pondérée sur le profil, des termes de phase pairs.

V.4.1.b Moments d'ordre deux en position et impulsion

Soit $\tilde{\phi}_{\perp}(k, t)$, la transformée de Fourier du profil à la position axiale $z(t)$. Nous définissons les relations entre profil et transformée de Fourier, comme

$$\begin{cases} \phi_{\perp}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{\phi}_{\perp}(k, t), \\ \tilde{\phi}_{\perp}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \phi_{\perp}(x, t). \end{cases} \quad (321)$$

Nous définissons aussi les tailles quadratiques moyennes $\Delta x^2(t)$ et $\Delta k^2(t)$, respectivement associées à $\phi_{\perp}(x, t)$ et $\tilde{\phi}_{\perp}(k, t)$,

$$\begin{cases} \Delta x^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 |\phi_{\perp}(x, t)|^2, \\ \Delta k^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk k^2 |\tilde{\phi}_{\perp}(k, t)|^2. \end{cases} \quad (322)$$

Nous avons comparé en figure 75, les valeurs de \mathcal{C} et de $\sqrt{\Delta x^2}$ extraites d'un profil dans le régime paraxial, et ce, en utilisant pour la propagation dans la zone du condensat, soit l'approximation iconale, soit les solutions de l'oscillateur harmonique inversé. Nous avons aussi reporté les paramètres extraits d'un faisceau calculé par la simulation numérique. L'accord entre ces différentes méthodes est bon, comme le montre la quasi-coïncidence des courbes. Pour les grandes valeurs de $\tilde{\delta}$, l'écart entre notre calcul et la simulation numérique est plus grand, sans toutefois dépasser quelques pour cent en valeur relative.

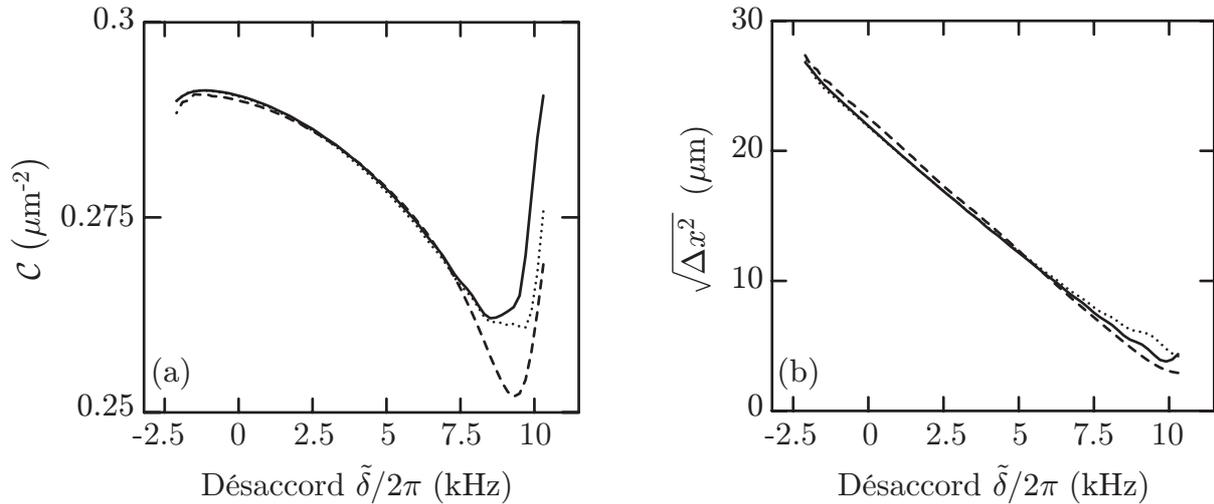


FIG. 75 – Paramètres caractéristiques du faisceau laser, calculés à partir du profil théorique obtenu $150 \mu\text{m}$ en dessous du condensat ($z - \sigma_M = 150 \mu\text{m}$), et ce, en fonction du désaccord $\tilde{\delta}$: (a) courbure moyenne \mathcal{C} (équation 319), (b) taille transverse $\sqrt{\Delta x^2}$ (équation 322). Nous avons reporté les résultats obtenus en utilisant pour la fonction d'onde en surface du condensat, soit l'approximation iconale (équation 244 en pointillés), soit les solutions de l'oscillateur harmonique inversé (équation 250 en trait continu). Nous avons aussi comparé ces résultats avec ceux obtenus à partir d'une simulation numérique (trait tireté).

V.4.1.c Le M^2 dans la relation d'incertitude de Heisenberg

Considérons le faisceau pris au niveau de son col, repéré par le temps t_w , tel que la courbure moyenne $\mathcal{C}(t_w)$ soit nulle. Le facteur de qualité M^2 est proportionnel au produit des largeurs dans l'espace des x et des k , pris au niveau du col du faisceau,

$$\sqrt{\Delta x^2(t_w) \Delta k^2(t_w)} = \frac{M^2}{2}. \quad (323)$$

Cette définition correspond à la relation d'incertitude d'Heisenberg : le facteur M^2 indique le nombre de cellules élémentaires occupées par le profil dans l'espace des phases. En d'autres termes, il dit combien de fois le faisceau atomique est limité par la diffraction. Un faisceau de profil gaussien a un M^2 égal à un, tandis que tout autre profil correspond à un M^2 supérieur. Par exemple, un faisceau totalement dans le n -ième mode excité a un M^2 égal à $2n + 1$ (Chap. V de [142]).

Le M^2 apparaît lorsque l'on cherche les invariants de la propagation paraxiale en optique. On montre alors [163], que la propagation d'un profil quelconque se décrit de la même manière

que celle d'un profil hermito-gaussien, du moment que l'on a remplacé la longueur d'onde optique λ , par $M^2\lambda$. En particulier, on montre que la propagation du faisceau est de manière générale décrite par une loi $ABCD$ (équation 303), pour un paramètre complexe $q(t)$ faisant intervenir le facteur de qualité M^2 . Nous donnons un aperçu ici de la transposition au cas atomique de ces propriétés, dont on trouvera une discussion, dans le cas optique, par exemple dans [161].

V.4.2 Invariance du M^2 au cours de la propagation paraxiale

V.4.2.a Propagateur transverse

Partons de l'équation 289 de propagation paraxiale que vérifie $\phi_{\perp}(x, t)$. Il s'agit d'une équation de Schrödinger unidimensionnelle. En utilisant $K_{\perp}(x, x', \tau)$, le propagateur de Feynman associé à cette équation, nous pouvons exprimer le profil à l'altitude $z(t)$ en fonction de celui à l'altitude $z(t'=t-\tau)$, comme

$$\phi_{\perp}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' K_{\perp}(x, x', \tau) \phi_{\perp}(x', t'). \quad (324)$$

Dans le cas des potentiels quadratiques que nous étudions ici, nous pouvons écrire le propagateur K , à l'aide des coefficients A , B , C et D de la matrice associée au potentiel considéré [148],

$$K_{\perp}(x, x', \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i B(\tau)}} \exp \left[\frac{i}{2 B(\tau)} (A(\tau) x'^2 + D(\tau) x^2 - 2 x x') \right]. \quad (325)$$

On peut facilement vérifier sur les trois matrices données en table 7, que les propagateurs coïncident avec ceux obtenus par la formule de van Vleck (équation E.2). L'équation de propagation 324 dans laquelle on a remplacé K par l'expression 325, est alors exactement de même forme que l'intégrale paraxiale de Huygens [163], à partir de laquelle est dérivée la théorie des matrices $ABCD$ en optique. Nous pouvons alors dériver l'évolution de Δx^2 et Δk^2 , et ce, de manière totalement analogue à celle présentée en [161].

V.4.2.b Évolution de $\Delta x^2(t)$

Exprimons $\Delta x^2(t)$ en fonction des caractéristiques du faisceau en $t' = t - \tau$. Pour cela, nous écrivons³ à partir de la relation 324,

$$x\phi_{\perp}(x, t) = \sqrt{\frac{iB}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[e^{\frac{i}{2B}(Ax'^2 + Dx^2)} \phi_{\perp}(x', t') \right] \frac{\partial}{\partial x'} \left[e^{-\frac{i}{B}xx'} \right]. \quad (326)$$

Après une intégration par parties sur cette expression et en utilisant le fait que ϕ_{\perp} est nul en $x = \pm\infty$, nous obtenons

$$x\phi_{\perp}(x, t) = -\sqrt{\frac{iB}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left[e^{-\frac{i}{B}xx'} \right] \frac{\partial}{\partial x'} \left[e^{\frac{i}{2B}(Ax'^2 + Dx^2)} \phi_{\perp}(x', t') \right]. \quad (327)$$

³Pour alléger les notations, nous omettons dans certaines expressions, la dépendance en τ des coefficients $ABCD$.

En explicitant la dérivée dans l'intégrande et en prenant le complexe conjugué de cette expression, on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 |\phi_{\perp}(x, t)|^2 = \frac{B}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' e^{\frac{i}{B}x(x''-x')} e^{\frac{iA}{2B}(x'^2-x''^2)} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x'} + i \frac{Ax'}{B} \right) \phi_{\perp}(x', t') \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial x''} - i \frac{Ax''}{B} \right) \phi_{\perp}^*(x'', t') \right]. \quad (328)$$

On reconnaît $\Delta x^2(t)$ dans le terme de gauche. L'intégrale sur x du terme de droite fait apparaître une fonction de Dirac,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{i}{B}x(x''-x')} = 2\pi B \delta(x'' - x'), \quad (329)$$

ce qui se traduit, après intégration sur x'' par

$$\Delta x^2(t) = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx' x'^2 |\phi_{\perp}(x', t')|^2 + ABi \int_{-\infty}^{\infty} dx' x' \left(\phi_{\perp}(x', t') \frac{\partial \phi_{\perp}^*(x', t')}{\partial x'} - \text{c.c.} \right) + B^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left| \frac{\partial \phi_{\perp}(x', t')}{\partial x'} \right|^2. \quad (330)$$

On reconnaît dans les deux premiers termes de droite, $\Delta x^2(t')$ et $[\mathcal{C} \Delta x^2](t')$. Le troisième terme est quant à lui relié à $\Delta k^2(t')$, comme on peut s'en rendre compte en appliquant la formule de Parseval à $\partial \phi_{\perp}(x', t')/\partial x'$ et à sa transformée de Fourier, $i k' \tilde{\phi}_{\perp}(k', t')$. L'équation 330 s'écrit donc finalement comme

$$\Delta x^2(t) = A^2 \Delta x^2(t') + 2AB [\mathcal{C} \Delta x^2](t') + B^2 \Delta k^2(t'). \quad (331)$$

V.4.2.c Évolution de $\Delta k^2(t)$

Pour obtenir la relation qui donne $\Delta k(t)$ en fonction des caractéristiques du faisceau en $t' = t - \tau$, on peut prendre la transformée de Fourier de la relation 324, en écrivant

$$\tilde{\phi}_{\perp}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk' K_{\perp}(k, k', \tau) \tilde{\phi}_{\perp}(k', t'), \quad (332)$$

avec le propagateur dans l'espace des k , donné par (on utilise la relation $AD - BC = 1$)

$$K_{\perp}(k, k', \tau) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi i C(\tau)}} \exp \left[-\frac{i}{2C(\tau)} (A(\tau) k^2 + D(\tau) k'^2 - 2kk') \right]. \quad (333)$$

On voit donc que pour calculer $\Delta k^2(t)$, on peut directement réécrire les équations 326 à 330, en échangeant ϕ_{\perp} et $\tilde{\phi}_{\perp}$, x et k , x' et k' , A et D , B et C , ainsi que i et $-i$. Une fois transposé, le deuxième terme de droite de l'équation 330 s'écrit

$$-iCD \int_{-\infty}^{\infty} dk' k' \left(\tilde{\phi}_{\perp}(k', t') \frac{\partial \tilde{\phi}_{\perp}^*(k', t')}{\partial k'} - \text{c.c.} \right). \quad (334)$$

En introduisant la transformée de Fourier de $\tilde{\phi}_{\perp}$ et de sa dérivée, on montre que ce terme est égal à $2CD [\mathcal{C} \Delta x^2](t')$. Finalement, on obtient l'équivalent de la relation 331, mais pour $\Delta k^2(t)$,

$$\Delta k^2(t) = D^2 \Delta k^2(t') + 2CD [\mathcal{C} \Delta x^2](t') + C^2 \Delta x^2(t'). \quad (335)$$

V.4.2.d Évolution du moment mixte $[\mathcal{C} \Delta x^2](t)$

Il nous reste à calculer l'évolution de $[\mathcal{C} \Delta x^2](t)$. On peut écrire ce terme de manière symétrique en x et k comme

$$[\mathcal{C} \Delta x^2](t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk x k \left(\phi_{\perp}(x, t) \tilde{\phi}_{\perp}^*(k, t) e^{-ikx} + \text{c.c.} \right), \quad (336)$$

où l'on a utilisé la transformée de Fourier de $\partial\phi_{\perp}(x, t)/\partial x$. En utilisant les relations 324, 332, et $AD - BC = 1$, on obtient finalement la loi concernant $[\mathcal{C} \Delta x^2](t)$,

$$[\mathcal{C} \Delta x^2](t) = AC \Delta x^2(t') + (AD + BC) [\mathcal{C} \Delta x^2](t') + BD \Delta k^2(t'). \quad (337)$$

V.4.2.e Relation d'invariance du M^2

Les équations 331, 335 et 337 relient entre eux les trois moments d'ordre deux de ϕ_{\perp} , Δx^2 , Δk^2 et le moment mixte $[\mathcal{C} \Delta x^2]$. On peut écrire de manière synthétique ces trois relations sous forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} \Delta x^2(t) & [\mathcal{C} \Delta x^2](t) \\ [\mathcal{C} \Delta x^2](t) & \Delta k^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\tau) & B(\tau) \\ C(\tau) & D(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^2(t') & [\mathcal{C} \Delta x^2](t') \\ [\mathcal{C} \Delta x^2](t') & \Delta k^2(t') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\tau) & B(\tau) \\ C(\tau) & D(\tau) \end{bmatrix}^T. \quad (338)$$

En prenant le déterminant de cette relation et en utilisant la propriété selon laquelle le déterminant de la matrice $ABCD$ est égal à un, on obtient, que lors de la propagation d'un faisceau quelconque en régime paraxial, le déterminant suivant se conserve

$$\begin{vmatrix} \Delta x^2 & [\mathcal{C} \Delta x^2] \\ [\mathcal{C} \Delta x^2] & \Delta k^2 \end{vmatrix} = \text{constante}. \quad (339)$$

Ceci se traduit en la relation suivante, valable pour toute altitude $z(t)$,

$$\Delta x^2(t) \Delta k^2(t) - [\mathcal{C} \Delta x^2]^2(t) = \Delta x^2(t_w) \Delta k^2(t_w) = \left(\frac{M^2}{2} \right)^2. \quad (340)$$

Nous avons tiré parti dans cette égalité, d'une part de l'annulation de la courbure moyenne \mathcal{C} au niveau du col du faisceau ($t = t_w$), et d'autre part de la définition du facteur de qualité M^2 (relation 323). Cette relation montre en particulier, l'invariance du M^2 lors de la propagation paraxiale d'un laser à atomes. Peu importe le plan $z(t)$ considéré. Du moment qu'il correspond au régime paraxial, la connaissance de $\Delta x^2(t)$, $\Delta k^2(t)$ et $\mathcal{C}(t)$ est suffisante pour déterminer de manière univoque M^2 . L'intérêt de la relation générale 340 par rapport à la définition 323, est qu'elle nous permet de calculer M^2 , même si l'on n'a pas accès au col du faisceau, car elle prend en compte la courbure moyenne $\mathcal{C}(t)$.

Nous avons tracé en figure 76, la variation du facteur qualité M^2 en fonction du désaccord, à partir des résultats de la figure 75. Comme observé précédemment, le faisceau devient d'autant plus multimode, que la surface de couplage est située haut dans le condensat ($\tilde{\delta}$ faible), et le facteur qualité peut prendre des valeurs aussi grandes que 18, ce qui traduit une forte dégradation du profil transverse du fait des interactions avec le condensat. Comme on s'y attend, le M^2 tend vers 1 alors que $\tilde{\delta} \approx \tilde{\delta}_{\text{max}}$, puisque le profil se rapproche de plus en plus d'une gaussienne. On notera l'excellent accord entre le M^2 déduit du profil utilisant les solutions de l'oscillateur harmonique inversé (trait continu) et la courbe en trait tireté correspondant au M^2 extrait de la simulation numérique.

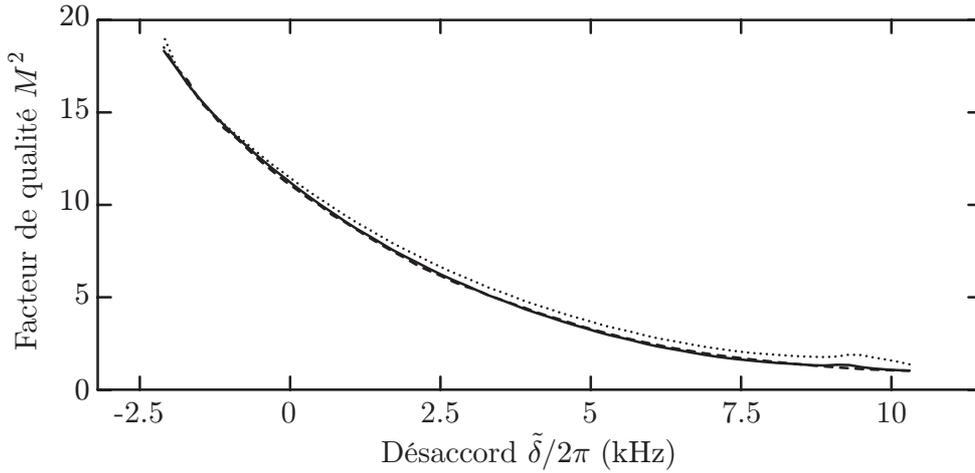


FIG. 76 – Facteur qualité M^2 calculé (équation 340) à partir du profil théorique obtenu $150\ \mu\text{m}$ en dessous du condensat ($z - \sigma_M = 150\ \mu\text{m}$), et ce, en fonction du désaccord $\tilde{\delta}$. Nous avons reporté les résultats obtenus en utilisant, pour la fonction d'onde en sortie du condensat, soit l'approximation iconale (équation 244 en pointillés), soit les solutions de l'oscillateur harmonique inversé (équation 250 en trait continu). La courbe en trait tireté correspond au M^2 extrait de la simulation numérique.

V.4.3 Propagation utilisant le paramètre complexe généralisé

V.4.3.a Paramètre $q(t)$ généralisé

En remplaçant dans les relations 331 et 337, Δk^2 par son expression faisant intervenir M^2 (équation 340), on obtient les deux équations suivantes

$$\begin{cases} \Delta x^2(t) = A^2 \Delta x^2(t') + 2AB [\mathcal{C} \Delta x^2](t') + B^2 \frac{(M^2/2)^2 + [\mathcal{C} \Delta x^2]^2(t')}{\Delta x^2(t')}, \\ [\mathcal{C} \Delta x^2](t) = AC \Delta x^2(t') + (AD + BC) [\mathcal{C} \Delta x^2](t') + BD \frac{(M^2/2)^2 + [\mathcal{C} \Delta x^2]^2(t')}{\Delta x^2(t')}. \end{cases} \quad (341)$$

La combinaison de ces deux équations est équivalente à la loi $ABCD$ (équation 303), pourvu que l'on utilise comme paramètre complexe $q(t)$,

$$\frac{1}{q(t)} = \mathcal{C}(t) + i \frac{M^2}{2\Delta x^2(t)}. \quad (342)$$

V.4.3.b Relation de Rayleigh généralisée

Aussi, en considérant un point de départ correspondant au col du faisceau ($t' = t_w$), nous obtenons les relations suivantes, donnant la taille quadratique $\Delta x^2(t)$ et la courbure moyenne $\mathcal{C}(t)$, en fonction du temps de propagation $t - t_w$ depuis le col du faisceau et de la

taille quadratique initiale $\Delta x^2(t_w)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x^2(t) = A^2(t - t_w)\Delta x^2(t_w) + B^2(t - t_w)\frac{(M^2/2)^2}{\Delta x^2(t_w)}, \\ [\mathcal{C} \Delta x^2](t) = A(t - t_w)C(t - t_w)\Delta x^2(t_w) + B(t - t_w)D(t - t_w)\frac{(M^2/2)^2}{\Delta x^2(t_w)}. \end{array} \right. \quad (343)$$

La première de ces relations constitue l'analogie d'une relation de Rayleigh généralisée à tout système dont la propagation peut être décrite par une matrice $ABCD$. Dans notre cas où le potentiel est quadratique expulsant (équation 306), elle s'écrit

$$\Delta x^2(t) = \Delta x^2(t_w) \cosh^2 \xi + \left(\frac{M^2 \Sigma^2}{2} \right)^2 \frac{\sinh^2 \xi}{\Delta x^2(t_w)}, \quad (344)$$

où nous avons posé $\xi = \omega_{Qr}(t - t_w)$. C'est cette expression qui est mise à profit pour analyser nos images expérimentales (§ V.5). Notons que le temps ξ est la variable pertinente pour paramétrer le propagation en régime paraxial, car c'est le temps qui sépare tout profil, du col du faisceau.

À partir du profil théorique à une altitude donnée $z(t)$, nous pouvons donc extraire les tailles quadratiques moyennes $\Delta x^2(t)$, $\Delta k^2(t)$ et la courbure moyenne $\mathcal{C}(t)$. Pour caractériser pleinement la propagation, il est aussi nécessaire d'en extraire le temps (en unités réduites) $\xi = \omega_{Qr}(t - t_w)$ écoulé depuis le col du faisceau, la taille quadratique moyenne $\Delta x^2(t_w)$ au point col, ainsi que la phase de Gouy $\phi(t)$ associée à l'altitude $z(t)$.

V.4.3.c Détermination du temps de propagation et de la taille au col du faisceau

Pour obtenir ξ et $\Delta x^2(t_w)$, il suffit d'utiliser les deux relations 341, en inversant le sens du temps, c'est-à-dire en remplaçant t par t_w et t' par t . Pour nos valeurs des paramètres $ABCD$, la deuxième équation 341 se réécrit comme

$$0 = -\frac{\Sigma^{-2}}{2} \Delta x^2(t) \sinh(2\xi) + [\mathcal{C} \Delta x^2](t) \cosh(2\xi) - \frac{\Sigma^2}{2} \frac{(M^2/2)^2 + [\mathcal{C} \Delta x^2]^2(t)}{\Delta x^2(t)} \sinh(2\xi). \quad (345)$$

La solution ξ s'exprime alors selon la relation

$$\xi = \omega_{Qr}(t - t_w) = \frac{1}{2} \operatorname{arctanh} \left[\frac{2 \Sigma^2 \mathcal{C}(t)}{1 + \Sigma^4 |q(t)|^2} \right]. \quad (346)$$

L'utilisation de cette valeur dans la première équation 341 transformée,

$$\Delta x^2(t_w) = \Delta x^2(t) \cosh^2 \xi - \Sigma^2 [\mathcal{C} \Delta x^2](t) \sinh(2\xi) + \Sigma^4 \frac{(M^2/2)^2 + [\mathcal{C} \Delta x^2]^2(t)}{\Delta x^2(t)} \sinh^2 \xi, \quad (347)$$

nous permet finalement de calculer $\Delta x^2(t_w)$.

V.4.3.d Évolution de la phase de Gouy

En ce qui concerne la détermination de la phase de Gouy, nous réécrivons la relation 304, en faisant intervenir le M^2 ,

$$\phi(t) = \phi(t') - \frac{\hbar M^2}{4m} \int_{t'}^t \frac{du}{\Delta x^2(u)}. \quad (348)$$

En prenant, comme pour l'optique gaussienne, la valeur de la phase de Gouy nulle au niveau du point col ($\phi(t_w) = 0$), et en appliquant la relation 348 avec $t' = t_w$, nous obtenons dans notre cas d'un potentiel quadratique expulsant,

$$\phi(t) = -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\Sigma^2 M^2}{2 \Delta x^2(t_w)} \tanh \xi\right). \quad (349)$$

V.4.3.e Récapitulatif de la méthode de propagation

En résumé, pour calculer la propagation du laser à atomes dès qu'il entre dans le régime paraxial, nous suivons la procédure détaillée au paragraphe V.3, à ceci près que nous utilisons le paramètre complexe généralisé donné par l'équation 342. Nous extrayons donc du profil, préalablement calculé en z' via l'intégrale de Kirchhoff, la courbure moyenne $\mathcal{C}(t')$ (équation 319) et les tailles quadratiques moyennes $\Delta x^2(t')$ et $\Delta k^2(t')$ (équation 322). Ceci nous permet de calculer⁴ le M^2 grâce à la relation 340, et donc d'associer de manière univoque le paramètre $q(t')$ généralisé (équation 342) à ce plan z' . De plus, nous déduisons des grandeurs précédentes, le temps ξ écoulé depuis le col du faisceau (équation 346), la taille quadratique moyenne en ce point $\Delta x^2(t_w)$ (équation 347) et la phase de Gouy $\phi(t')$ associée à l'altitude z' (équation 349). Nous avons tracé en figure 77a, la taille transverse $\Delta x^2(t_w)$ au niveau du col du faisceau, en fonction du désaccord. On pourrait penser que plus le laser est divergent ($\tilde{\delta}$ petit), plus la taille $\Delta x^2(t_w)$ est petite, ce que l'on n'observe pas sur la figure 77a. En réalité, le paramètre qui décroît lorsque la divergence augmente, n'est pas $\Delta x^2(t_w)$ mais $\Delta x^2(t_w)/M^2$, ce qui correspond à la grandeur intervenant dans la partie imaginaire du paramètre complexe $q(t)$ (équation 342).

La base des modes hermito-gaussiens sur laquelle nous décomposons le profil fait intervenir M^2 ,

$$\Phi_n(x, t) = \left(\frac{M^2}{2^{2n+1} (n!)^2 \pi \Delta x^2(t)}\right)^{1/4} \exp\left[i\frac{x^2}{2q(t)}\right] \exp\left[i(1+2n)\phi(t)\right] H_n\left(x\sqrt{\frac{M^2}{2\Delta x^2(t)}}\right), \quad (350)$$

et est déterminée de manière univoque par les calculs précédents. Cette base est particulièrement bien adaptée à la décomposition d'un faisceau de M^2 donné. En effet, la décomposition 315 est assez fidèle au profil si l'on se restreint⁵ à des valeurs de n_{\max} de l'ordre de M^2 . De plus, comme le profil est symétrique vis-à-vis de $x=0$, seuls comptent dans la décomposition les modes hermito-gaussiens de n pair.

Au final, comme nous avons des profils de M^2 inférieur à 20 (figure 76), la décomposition 315 se fait, avec une bonne précision, sur une dizaine de fonctions Φ_n . Avec une telle décomposition, les résultats de la propagation sont identiques à ceux que l'on obtient si l'on utilise l'intégrale de Kirchhoff pour calculer un profil dans le régime paraxial. Cependant, le temps de calcul pour arriver au même résultat, est bien plus important en utilisant l'intégrale de Kirchhoff qu'avec la méthode paraxiale. En effet, l'avantage pratique de cette dernière est

⁴Une autre manière totalement équivalente d'extraire le M^2 d'un profil quelconque, est présentée dans [162] : il s'agit de collimater virtuellement le profil à l'aide de la transformation $\phi_{\perp}(x, t) \rightarrow e^{-i\mathcal{C}(t)x^2/2}\phi_{\perp}(x, t)$ et de calculer M^2 via la relation 323 appliquée au profil transformé. En effet, la transformation est équivalente à l'ajout sur le trajet du faisceau d'une lentille mince virtuelle de courbure $\mathcal{C}(t)$, dont l'effet est décrit par une matrice $ABCD$. Comme le M^2 est conservé via la propagation $ABCD$, le profil final qui correspond au col du faisceau transformé est de même M^2 que le profil initial.

⁵Si le profil était purement hermito-gaussien d'ordre n , donc de M^2 égal à $2n+1$, il suffirait de prendre $n_{\max} = (M^2 - 1)/2$.

que, contrairement à l'intégrale de Kirchhoff plus générale, elle ne nécessite pas de réaliser une intégration, mais réalise la propagation en utilisant uniquement une relation algébrique, la loi $ABCD$, une fois que la décomposition du profil de départ (en $z = 150 \mu\text{m}$) sur les modes hermito-gaussiens a été réalisée.

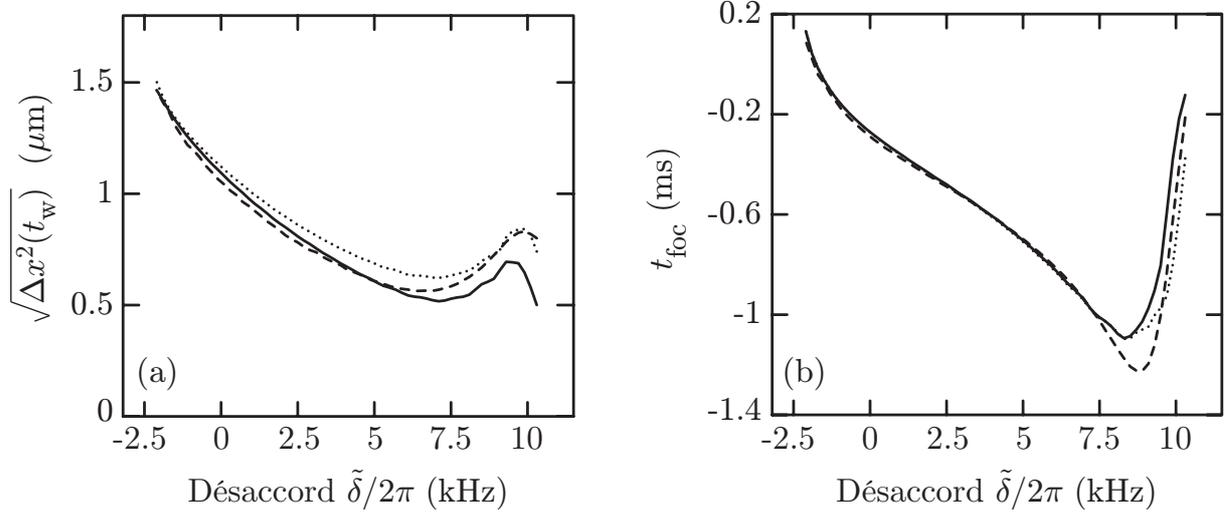


FIG. 77 – Paramètres initiaux du faisceau laser, calculés à partir du profil théorique obtenu $150 \mu\text{m}$ en dessous du condensat ($z - \sigma_M = 150 \mu\text{m}$), et ce, en fonction du désaccord $\tilde{\delta}$: (a) taille transverse au niveau du col du faisceau $\sqrt{\Delta x^2(t_w)}$ (équation 347), (b) temps t_{foc} (équation 352). Nous avons reporté les résultats obtenus en partant, soit de l'approximation iconale (équation 244 en pointillés), soit des solutions de l'oscillateur harmonique inversé (équation 250 en trait continu). Le trait tireté correspond aux paramètres extraits du profil donné par la simulation numérique.

V.4.3.f Signification du temps de propagation

Afin de mieux cerner la signification du temps associé à la propagation ξ , comparons le temps $\xi/\omega_{Qr} = t - t_w$, au temps t_{cl} qu'aurait mis un atome issu du couteau radiofréquence sur l'axe z , à rejoindre l'altitude $z(t)$. Ce dernier est la somme du temps passé dans la zone du condensat (premier terme de l'équation 351 correspondant au potentiel V_i), et de celui passé hors du condensat (second terme de l'équation 351 correspondant au potentiel V_o). L'altitude du point de rebroussement classique correspondant à l'intersection de la surface de couplage avec l'axe z , est égale à $r_c(y'_0)$, le rayon du couteau radiofréquence dans le plan fixé par y'_0 (équation 173). En notant $z_1 = R_\perp(y'_0) + \sigma_M$, l'altitude du point correspondant à la bordure du condensat, et $v_1 = \omega_r \sqrt{z_1^2 - r_c^2(y'_0)}$, la vitesse en ce point, nous obtenons, après résolution des équations du mouvement le long de l'axe z , successivement dans V_i et V_o , avec $z > z_1$,

$$t_{\text{cl}} = \frac{1}{\omega_r} \operatorname{arccosh} \left[\frac{z_1}{r_c(y'_0)} \right] + \frac{1}{\omega_{Qr}} \ln \left[\frac{z + \sigma_Q + \sqrt{(z + \sigma_Q)^2 - (z_1 + \sigma_Q)^2 + (v_1/\omega_{Qr})^2}}{z_1 + \sigma_Q + v_1/\omega_{Qr}} \right]. \quad (351)$$

Pour comparer ξ/ω_{Qr} et t_{cl} , on peut définir leur différence t_{foc} ,

$$t_{\text{foc}} = t_{\text{cl}} - \xi/\omega_{Qr}. \quad (352)$$

Nous avons tracé cette quantité en figure 77b. Qualitativement elle pourrait être interprétée comme étant similaire à une focale en optique. En effet, le point focal image d'une lentille divergente est situé dans l'espace objet. Dans notre cas où le condensat joue le rôle d'une telle lentille pour le laser à atomes, ceci correspondrait à une valeur de t_{foc} négative, puisque tout se passerait comme si le col (virtuel) du faisceau était situé en amont du couteau radiofréquence. De plus, on voit en figure 77b que plus le faisceau est divergent ($\tilde{\delta}$ faibles), plus t_{foc} se rapproche de zéro en valeur négative ce qui correspond à une focale de plus en plus faible (en valeur absolue) pour une lentille divergente.

Notons toutefois qu'une telle interprétation de t_{foc} comme l'équivalent d'une focale, est sujette à caution. En effet, comme on peut le voir sur la figure 77b, t_{foc} ne se comporte pas comme on l'attendrait dans les cas limites. Par exemple, quand $\tilde{\delta}$ est très proche de $\tilde{\delta}_{\text{min}}$, t_{foc} prend des valeurs positives. Cette anomalie est due au fait que le couteau est extrêmement courbé dans un tel cas : la caractérisation de l'effet de lentille uniquement à l'aide de la trajectoire selon z (ce qui en définitive est l'approche définissant t_{foc}) n'est pas du tout appropriée. De même, pour les désaccords tendant vers $\tilde{\delta}_{\text{max}}$, t_{foc} tend vers 0, alors que si t_{foc} était réellement la focale associée à l'épaisseur de condensat traversée par le laser à atomes, on s'attendrait à le voir tendre vers $-\infty$.

Il est assez difficile de définir une focale associée à l'effet de lentille du condensat dans notre cas, contrairement à ce qui a été réalisé dans [63], où le condensat peut être traité comme une lentille mince. En effet, le point crucial dans notre configuration est que les rayons atomiques proviennent de l'axe y passant par le centre du piège magnétique, qui est lui-même dans le volume du condensat. En particulier, on ne peut définir une taille de faisceau (virtuel) qui serait collimaté en amont du condensat, comme on le fait dans [63], avant d'être rendu divergent par la traversée du condensat. Toutes ces difficultés sont intimement liées au fait que le couteau radiofréquence est fortement courbé, alors que dans [63], il est plan, à cause d'un plus faible confinement.

V.5 Caractérisation expérimentale du laser à l'aide du M^2

Les développements théoriques précédents nous ont permis d'introduire le facteur de qualité M^2 pour décrire la propagation du laser à atomes. Tout comme en optique, le M^2 est une grandeur caractéristique du laser à atomes, et nous présentons dans ce paragraphe la détermination de ce paramètre correspondant à nos réalisations expérimentales. Cependant, contrairement au cas de l'optique, où l'on peut analyser le front d'onde d'un faisceau laser à l'aide d'un senseur de Shack-Hartman [164], nous n'avons accès, sur nos images d'absorption, qu'à la densité atomique du laser à atomes et pas à la phase de l'onde.

V.5.1 Méthode d'analyse

V.5.1.a Observation de l'évolution de la taille quadratique transverse

Nous ne pouvons donc utiliser la relation 340, car nous ne pouvons extraire des profils expérimentaux, ni la courbure \mathcal{C} , ni leur transformée de Fourier. Par contre, nous avons accès, sur les images, à l'évolution de la taille quadratique moyenne transverse $\Delta x^2(z)$, dont l'expression est donnée théoriquement par (équation 344),

$$\Delta x^2(t) = \Delta x^2(t_w) \cosh^2[\omega_{Qr}(t - t_w)] + \left(\frac{M^2 \Sigma^2}{2}\right)^2 \frac{\sinh^2[\omega_{Qr}(t - t_w)]}{\Delta x^2(t_w)}, \quad (353)$$

dès que l'approximation paraxiale est valide, c'est-à-dire environ à partir de $150 \mu\text{m}$ de propagation. Dans cette relation, le temps t est relié à l'altitude z sur les images via la relation 308. La position z est repérée par rapport à celle du centre du condensat, position donnée par $z_{\text{CBE}} = \sigma_M + gt_v^2/2 \approx 7 \mu\text{m}$, où $t_v = 1 \text{ ms}$ est le temps de vol réalisé.

Nous extrayons donc des images expérimentales, la taille quadratique transverse $\Delta x^2(t)$ en fonction du temps t . On remarque sur l'image 60, que le condensat masque le début de la propagation du laser à atomes sur la première centaine de microns environ. Cette taille est bien supérieure au rayon de Thomas-Fermi transverse R_r (même après une milliseconde de temps de vol), à cause du très fort effet d'indice que l'on rencontre en imageant de telles densités atomiques (§ I.1.4.b). Ceci a pour conséquence de faire jouer au condensat, le rôle d'une lentille vis-à-vis du faisceau sonde, et donc de perturber fortement son image. Notons que cet écrantage du début de la propagation du laser n'est pas préjudiciable pour l'analyse des images, puisque de toute façon, le laser n'entre dans le régime paraxial que pour $z > 150 \mu\text{m}$, et que seuls les profils au-delà de cette position, qui ne sont donc pas occultés par l'image du condensat, peuvent être analysés pour déterminer les propriétés de propagation paraxiale, comme le M^2 .

Pour comparer la relation $\Delta x^2(t)$ mesurée expérimentalement, et l'expression théorique 353, nous devons déterminer les trois paramètres $\Delta x^2(t_w)$, t_w et M^2 .

V.5.1.b Accès expérimental au champ lointain

Une première tentative a consisté à laisser libre ces trois paramètres, et à ajuster la fonction de l'équation 353 aux données expérimentales. Cependant, cette méthode n'a donné aucun résultat concluant. En effet, le nombre de paramètres est trop important, pour faire en sorte que la procédure numérique d'ajustement soit stable et donne des résultats significatifs. Pour une même courbe expérimentale, nous avons obtenu différents triplets $\{\Delta x^2(t_w); t_w; M^2\}$

qui ajustent les données tout aussi bien les uns que les autres. Cette grande latitude possible dans le choix des paramètres est principalement due au fait que nos courbes expérimentales n'explorent pas toute la gamme des régimes couverts par la relation 353. Cette dernière est la somme de deux termes, l'un de champ proche (terme en $\cosh^2 \xi$) et l'autre de champ lointain (terme en $\sinh^2 \xi$). le caractère proche ou lointain du champ est lié à la distance entre le col du faisceau et le point d'observation. En égalant ces deux termes, on peut déterminer la valeur ξ_{lim} correspondant à la limite entre champ lointain et champ proche,

$$\xi_{\text{lim}} = \operatorname{arctanh} \left[\frac{2 \Delta x^2(t_w)}{M^2 \Sigma^2} \right]. \quad (354)$$

Une application numérique montre que quel que soit le désaccord, $\xi_{\text{lim}}/\omega_{Qr}$ s'échelonne entre 0.3 et 2 millisecondes. Même en considérant le cas le plus favorable où $t_{\text{foc}} = 0$, ceci correspond à une transition entre champ proche et champ lointain à une distance de propagation n'excédant pas la trentaine de microns, c'est-à-dire bien en deçà du début de la zone paraxiale. Expérimentalement, nous ne pouvons donc avoir accès qu'au champ lointain. On comprend alors mieux que l'ajustement en laissant le triplet $\{\Delta x^2(t_w); t_w; M^2\}$ libre, ne permette pas de déterminer les valeurs des paramètres de manière univoque, puisque le second terme de droite de l'équation 353 est prépondérant sur le premier.

V.5.2 Résultat

Nous avons donc choisi l'approche suivante pour le traitement des données. En utilisant le désaccord $\tilde{\delta}$ associé aux images expérimentales, nous avons calculé, $\Delta x^2(t_w)$ et t_w à l'aide de notre modèle. Puis nous avons ajusté la fonction 353 aux résultats expérimentaux en laissant uniquement M^2 libre. Le résultat est donné par les points de la figure 78 pour les différentes hauteurs de la surface de couplage $h = R_r + \sigma_M - r_c(\tilde{\delta})$ repérées par rapport au bas du condensat ($z = R_r + \sigma_M$).

Le graphe 78 montre le bon accord entre l'évolution de la taille quadratique moyenne transverse calculée par notre modèle et celle mesurée sur notre dispositif expérimental, et montre en particulier que notre description de la propagation du laser à l'aide du facteur de qualité M^2 est adaptée à la situation expérimentale. Les barres d'erreur sont la traduction sur la détermination du M^2 , de l'incertitude expérimentale sur la position du couteau radiofréquence discutée au paragraphe III.3.2.

Comme discuté au paragraphe IV.4.3, on s'attend à ce que l'effet d'intégration de l'imagerie soit négligeable sur la détermination de la taille quadratique moyenne, et nous comparons donc sur la courbe 78, le M^2 calculé dans le plan central $y'_0 = 0$ au M^2 déduit des images correspondant à l'intégration du laser selon l'axe y de l'imagerie. Notons que nous négligeons aussi l'effet du temps de vol t_v sur l'évolution du profil du faisceau. En effet, la durée $t_v = 1$ ms pendant laquelle l'effet Zeeman quadratique s'annule, n'est pas assez importante par rapport au temps de couplage $t_c = 10$ ms (pendant lequel l'effet Zeeman quadratique est présent), pour que cela se traduise significativement sur les images⁶.

⁶Notons toutefois, que le formalisme des matrices $ABCD$ permet de traiter le temps de vol en utilisant comme matrice de propagation, le produit d'une matrice prenant en compte l'effet Zeeman quadratique avec celle correspondant à la propagation transverse libre. Cependant, la loi $ABCD$ qui en résulte, bien qu'analytique, est moins maniable et en particulier, la relation analogue à l'équation 353 est moins simple.

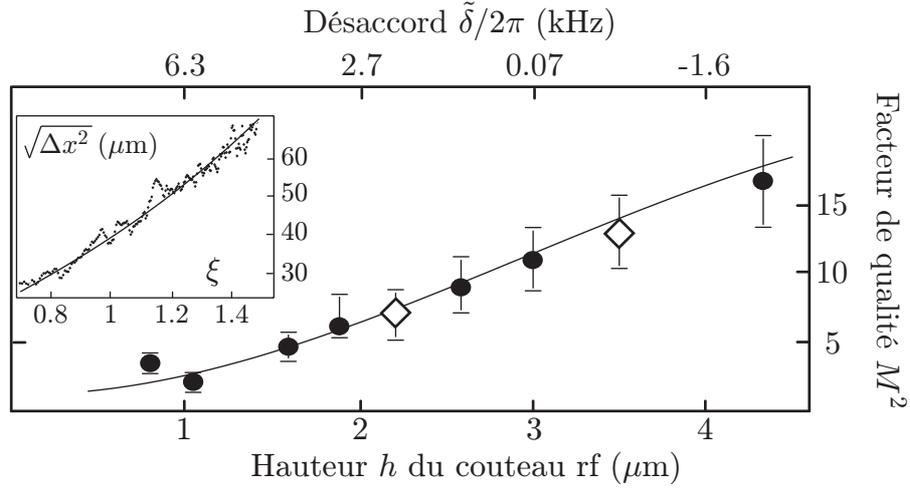


FIG. 78 – Facteur de qualité M^2 en fonction de la hauteur du couteau radiofréquence $h = R_r + \sigma_M - r_c(\tilde{\delta})$, ou de manière équivalente en fonction du désaccord $\tilde{\delta}$. Nous avons comparé le facteur de qualité déduit des images (points expérimentaux), et celui donné par notre modèle (trait continu). Les deux diamants représentent le M^2 associé aux figures 60 b et c présentant des caustiques. En encart, nous avons tracé l'évolution de la taille $\sqrt{\Delta x^2}$ en fonction de ξ extraite des images, et l'ajustement correspondant (équation 353), dans le cas $\tilde{\delta} = -2\pi \times 1.1$ kHz.

Conclusion à la seconde partie

Nous avons présenté dans cette partie notre étude de la dynamique et de la propagation du laser à atomes en prenant en compte de manière non perturbative les interactions collisionnelles entre le condensat et l'onde de matière. Nous bénéficions en effet d'un dispositif expérimental, dont le piège magnétique présente un confinement important, pour que des écarts significatifs soient observés par rapport au cas où les interactions condensat-laser sont négligeables.

Dans le chapitre trois, après avoir discuté des propriétés de couplage, nous avons en particulier montré, que nous avons accès expérimentalement à un régime de couplage non-markovien du laser à atomes, grâce aux longs temps de mémoire induits par le potentiel d'interaction.

De plus ces interactions initiales modifient profondément la structure spatiale du laser. Nous avons donc présenté au chapitre quatre une description théorique du phénomène prenant en compte non seulement la dynamique transverse, mais aussi son couplage à la dynamique verticale du laser. Deux points principaux, conséquences directes de la présence non négligeable d'interactions, sont au cœur de notre approche.

- Le laser n'est pas en régime paraxial dès le début, au contraire d'études précédentes [37]. Nous avons donc dû mettre au point un traitement plus général et adapté à notre cas.
- La surface du condensat constitue une interface séparant en deux zones distinctes le potentiel dans lequel se propage le laser. Nous avons donc dû porter un soin tout particulier à cette spécificité de notre système.

Pour traiter ce problème d'optique atomique, nous avons utilisé les approches éprouvées en optique photonique : l'approximation iconale, dans la zone du condensat où les effets de diffraction sont négligeables, et l'intégrale de Kirchhoff pour les ondes de matière, qui est adaptée à un traitement général de la propagation hors du condensat.

Au delà de ce calcul de la fonction d'onde du laser, nous avons aussi tiré parti du fait que l'accélération de la gravité fait rentrer, au bout d'un certain temps de propagation, le laser dans le régime paraxial. On peut alors profiter de la simplification qui en résulte en découplant la dynamique transverse du mouvement axial. C'est ce que nous avons réalisé au chapitre cinq, en propageant efficacement le profil multimode du laser à l'aide du formalisme des matrices $ABCD$ adapté à l'optique atomique. De plus, nous avons explicité la loi d'évolution de la taille transverse quadratique moyenne du faisceau et utilisé le facteur de qualité M^2 , afin de caractériser de manière synthétique le profil multimode du laser à atomes observé expérimentalement.

Troisième partie

Un guide pour le laser à atomes

Introduction à la troisième partie

Les guides jouent un rôle important pour pouvoir propager sur de longues distances des ondes électromagnétiques, tout en contrôlant leur dynamique transverse. L'optique atomique a vocation à profiter de la transposition de ces idées pour une meilleure manipulation des ondes de matière, par exemple dans le cadre du développement d'interféromètres [165]. Un des avantages des guides à atomes, est qu'ils permettent de s'affranchir de la gravité sans connaître, pour autant, les inconvénients inhérents aux expériences en microgravité à bord de missions spatiales. De plus, en jouant sur la forme du guide, on contrôle directement la direction de propagation de l'onde.

Ainsi, des configurations de champs magnétiques ont été réalisées, permettant non seulement de guider selon un axe donné [166], mais aussi selon des géométries courbées, comme un anneau par exemple [167]. En outre, on peut noter la réalisation de tels guides utilisant des fibres optiques [168], des puces à atomes [169] ou encore des matériaux ferromagnétiques [170]. Au-delà de ces expériences utilisant des atomes thermiques, des progrès ont été réalisés dans la direction de l'optique atomique cohérente et guidée, en faisant se propager des condensats, que ce soit dans un piège hybride composé de champs magnétiques et optiques [171], dans un potentiel optique aléatoire [172], sur une puce atomique [173, 174], ou encore dans un piège torique [175].

En ce qui concerne le guidage des lasers à atomes, on peut noter que des travaux sont en cours dans différents groupes [176, 177], pour réaliser un laser en évaporant directement un flux atomique guidé magnétiquement. À terme, cette approche permettra d'obtenir une onde de matière cohérente, guidée, et dont le flux est continu.

Sur notre dispositif expérimental, nous avons opté pour une autre approche nous permettant de guider le laser extrait du condensat, en combinant le dispositif existant de condensation et un guide optique.

Une dernière étape de notre travail a donc consisté à installer une pince optique sur le dispositif expérimental, et à l'utiliser pour réaliser un laser à atomes guidé.

Après avoir rappelé le principe du piégeage optique dans le chapitre VI, nous présentons le piège optique utilisé. Nous discutons sa mise en œuvre expérimentale, et mettons tout particulièrement l'accent sur les réglages nécessaires pour positionner, dans notre configuration, le piège optique relativement au piège magnétique.

Puis dans un second temps, nous décrivons la réalisation d'un condensat dans un piège hybride, combinant à la fois le champ magnétique et optique. Cette combinaison nous permet d'en extraire un laser quasi-continu se propageant horizontalement dans le guide optique : la longueur d'onde De Broglie associée n'est donc plus limitée par l'accélération de la gravité. Nous donnons finalement les premiers résultats obtenus sur ce nouveau système [178].

UN NOUVEL OUTIL POUR L'OPTIQUE ATOMIQUE

Par rapport à notre piège magnétique dont la géométrie est déterminée par la structure de l'électroaimant, un potentiel optique offre plus de flexibilité. En effet, on peut envisager moduler spatialement la position du faisceau lumineux assez rapidement, de sorte à modifier dynamiquement la géométrie du potentiel effectif résultant. C'est ce qui a été mis à profit, par exemple, pour séparer un condensat dans un double-puits optique [179].

Surtout, le piégeage optique apporte une souplesse expérimentale supplémentaire par rapport au piégeage magnétique. En effet, il est assez peu sensible à l'état interne atomique, alors que le piégeage magnétique est hautement sélectif vis-à-vis du niveau hyperfin considéré. Cette propriété est mise à profit, par exemple, si l'on s'intéresse à la dynamique de différents sous-niveaux hyperfins tous piégés optiquement [180] (spineur de condensat).

C'est la complémentarité guide optique-piège magnétique qui est au cœur de la technique employée pour réaliser notre laser à atomes guidé.

La partie magnétique est assurée par notre électroaimant, et a été présentée en détail au paragraphe II.2. Il nous reste donc à discuter des caractéristiques du potentiel optique utilisé, ainsi qu'à sa mise en œuvre expérimentale (§ VI.1), puis à décrire au paragraphe VI.2 notre réalisation du guidage d'un laser à atomes.

VI.1 Le piège optique

Nous avons vu au paragraphe II.2, que le piégeage magnétique était au centre du dispositif expérimental pour obtenir un condensat de Bose-Einstein. Ce processus met en jeu l'interaction entre le moment magnétique de l'atome et le champ \vec{B} créé par notre électroaimant.

De la même manière, on peut considérer l'équivalent vis-à-vis du champ électrique \vec{E} , qui interagirait avec le dipôle électrique de l'atome \vec{d} . Cependant, alors que les atomes de Rubidium ont un moment magnétique associé à leur moment cinétique interne, ils n'ont pas de moment dipolaire permanent¹.

Par contre, l'atome est polarisable sous l'effet d'un champ électrique (effet Starck) et le champ \vec{E} induit un dipôle $\vec{d} = \alpha\vec{E}$, où α est la polarisabilité atomique. Il en résulte une énergie potentielle proportionnelle à l'intensité [181],

$$V_{\text{op}} = -\frac{\alpha}{2}|\vec{E}|^2. \quad (355)$$

On voit donc grâce à ce raisonnement classique, qu'en faisant varier spatialement l'intensité du laser auquel on soumet l'atome, on va pouvoir exercer sur ce dernier une force dérivant du potentiel V_{op} . En choisissant les paramètres du faisceau de façon adaptée, on peut donc envisager faire en sorte, par exemple, que V_{op} soit un potentiel piégeant.

VI.1.1 Potentiel et taux d'émission spontanée

Nous considérons dans ce paragraphe l'effet d'un laser Nd : YAG de longueur d'onde $\lambda = 1064 \text{ nm}$, sur un atome de Rubidium. Nous donnons ici uniquement les résultats de l'étude de cette interaction avec ce laser très désaccordé, et on trouvera en annexe A.1.4 les détails des calculs correspondants. On y montre, en particulier, que différents processus sont envisageables en présence d'un tel laser.

VI.1.1.a Potentiel ressenti

Le premier processus correspond à l'absorption d'un photon du laser, suivie de l'émission stimulée d'un photon dans le mode du laser. Ceci résulte en un déplacement lumineux des niveaux atomiques, proportionnel à l'intensité du faisceau. En particulier, comme le laser est désaccordé vers le rouge de la transition atomique (la longueur d'onde λ est plus grande que la longueur d'onde atomique, que ce soit de la raie D₁ ou D₂), les états appartenant à la multiplicité fondamentale $5^2\text{S}_{1/2}$, voient leur énergie abaissée au fur et à mesure que l'atome pénètre dans des zones de fortes intensités $I(\vec{r})$.

Nous donnons en relation A.37, l'énergie potentielle ressentie par un atome dans l'état $|F, m_F\rangle$. Des applications numériques montrent, que si on se limite à une précision de quelques pour cent, ce potentiel est peu dépendant, à la fois de la polarisation du laser et de l'état considéré. Par contre le fort désaccord du laser nécessite de prendre en compte les termes anti-résonants, qui ne sont pas totalement négligeables devant les termes résonants. En négligeant les légers effets dus à la polarisation du laser, nous écrivons donc le potentiel comme,

$$V_{\text{op}}(\vec{r}) = -\frac{I(\vec{r})d^2}{3\hbar\epsilon_0c} \left[\frac{\omega_1}{(\omega_1^2 - \omega_\ell^2)} + \frac{2\omega_2}{(\omega_2^2 - \omega_\ell^2)} \right], \quad (356)$$

¹En effet, les orbitales atomiques sont de parité bien définie, alors que l'opérateur dipôle (équation A.5) est impair, ce qui rend sa valeur moyenne nulle.

où $\omega_{1,2}$ est la fréquence de la raie $D_{1,2}$ (figure 2), $\omega_\ell = 2\pi c/\lambda$ celle du laser, et d le dipôle de la transition $S \rightarrow P$ (table 1).

VI.1.1.b Taux d'émission spontanée

Le second processus apparaissant en présence d'un tel rayonnement, est le phénomène d'émission spontanée induite par le laser. Ceci correspond à l'absorption d'un photon du laser, suivie de l'émission d'un photon de même énergie, mais cette fois-ci dans un mode du vide. Là encore, le taux d'émission spontanée Γ_ℓ , induit par le laser à partir d'un état $|F, m_F\rangle$ de la multiplicité fondamentale $5^2S_{1/2}$, dépend assez peu de la polarisation considérée et de l'état $|F, m_F\rangle$. En négligeant de tels effets à partir de l'expression A.57, on obtient

$$\Gamma_\ell = \frac{2d^4 I(\vec{r}) \omega_\ell^3}{27\pi \hbar^3 c^4 \epsilon_0^2} \left[\frac{\omega_1}{(\omega_1^2 - \omega_\ell^2)} + \frac{2\omega_2}{(\omega_2^2 - \omega_\ell^2)} \right]^2. \quad (357)$$

VI.1.1.c Choix de la longueur d'onde et de la puissance

Les deux processus décrits précédemment sont la manifestation, en présence du rayonnement laser, respectivement, de la force dispersive $\vec{F}_{\text{disp}} = -\vec{\nabla}V_{\text{op}}$ et de la force dissipative $\vec{F}_{\text{diss}} = \Gamma_\ell \hbar \vec{k}_\ell$, avec \vec{k}_ℓ , le vecteur d'onde du laser (Chap. V de [39]). Ainsi, même en l'absence d'imperfections techniques, le piège n'est pas conservatif, du fait de la présence de \vec{F}_{diss} , ce qui constitue une différence notable par rapport à un piège magnétique.

Cependant, il est possible de se rapprocher du cas d'un piège parfaitement conservatif en diminuant le taux d'émission spontanée, à l'aide d'un choix approprié des paramètres du laser. On peut exprimer le taux d'émission spontanée au point d'intensité maximum, en fonction de la profondeur $V_{\text{op}0}$ du potentiel,

$$\frac{\Gamma_\ell}{V_{\text{op}0}} = \frac{2d^2 \omega_\ell^3}{9\pi \hbar^2 c^3 \epsilon_0} \left[\frac{\omega_1}{(\omega_1^2 - \omega_\ell^2)} + \frac{2\omega_2}{(\omega_2^2 - \omega_\ell^2)} \right]. \quad (358)$$

On voit sur cette expression, qu'à profondeur constante, le taux d'émission spontanée décroît avec ω_ℓ , c'est-à-dire au fur et à mesure que le désaccord est de plus en plus grand. On peut donc obtenir, en théorie, un taux d'émission spontanée aussi faible que possible, mais le corollaire de ceci est que l'intensité nécessaire pour créer un potentiel de profondeur $V_{\text{op}0}$, augmente lorsque le désaccord fait de même. On est donc limité expérimentalement par la puissance disponible, et le choix du couple intensité-désaccord est le fruit d'un compromis.

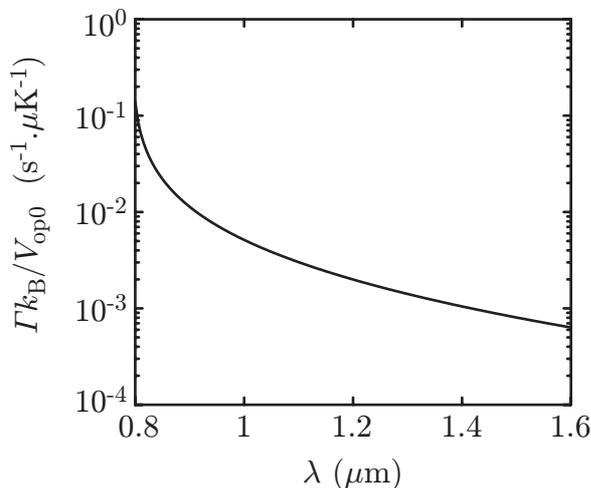


FIG. 79 – Taux d'émission spontanée Γ_ℓ , ramené à la profondeur $V_{\text{op}0}$ du piège, en fonction de la longueur d'onde λ du laser. La profondeur est exprimée en unités de température via la multiplication de l'ordonnée par k_B .

Nous pouvons justifier par des considérations d'ordres de grandeur, le choix des paramètres caractéristiques (longueur d'onde et puissance) de la source laser que nous utilisons. Pour cela, l'expression 358 a été tracée en figure 79, et ce, en fonction de la longueur d'onde λ du laser.

Nous voulons avoir la possibilité d'obtenir des profondeurs $V_{\text{op}0}/k_B$ de quelques dizaines de microkelvins, tout en pouvant conserver les atomes plusieurs secondes, sans qu'ils subissent d'émission spontanée. Pour remplir ces conditions, nous devons avoir une valeur de $\Gamma k_B/V_{\text{op}0}$ typiquement inférieure à 10^{-2} , ce qui est le cas pour notre choix de longueur d'onde ($\lambda = 1064 \text{ nm}$).

On peut alors estimer l'intensité nécessaire pour avoir une telle profondeur $V_{\text{op}0}$ à cette longueur d'onde. À partir de l'expression 356, on obtient qu'une profondeur de $k_B \cdot 15 \mu\text{K}$, correspond à une intensité de $I = 0.1 \text{ mW}/\mu\text{m}^2$. Sachant que la configuration expérimentale (§ VI.1.3) nous permet de focaliser notre faisceau laser sur des surfaces S de l'ordre de $10^3 \mu\text{m}^2$, la puissance minimum $P = I/S$ correspondant à une telle profondeur, est de l'ordre de 100 mW. Notre laser Nd : YAG qui délivre une puissance maximale de deux watts est donc suffisant pour créer des pièges de cette étendue, et de profondeur égale à plusieurs dizaines de microkelvins.

VI.1.2 La pince optique

VI.1.2.a Géométrie du faisceau

Jusqu'à la fin de ce chapitre, nous intervertissons les axes du repère associé à l'expérience, de telle façon que l'axe z du nouveau repère corresponde avec l'axe optique d'un laser parfaitement horizontal créant le potentiel optique. Le nouveau repère est donné en figure 80 et est à comparer avec celui représenté en figure 32.

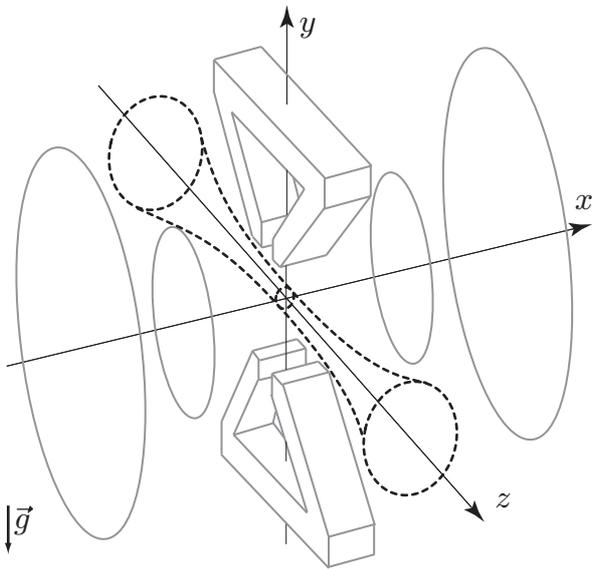


FIG. 80 – Positionnement du faisceau focalisé de la pince optique (pointillé) par rapport à l'électroaimant (en trait plein). Nous avons redéfini les axes du repère de référence par rapport à ce que nous avons jusqu'ici (figure 32).

Nous créons le potentiel dipolaire à partir d'un faisceau laser focalisé sur le nuage atomique [182]. Considérons un faisceau de profil gaussien idéal, d'axe de propagation horizontal z , et focalisé en \vec{r}_0 . Son intensité est donnée par (Complément III.2 de [139])

$$I(\vec{r}) = \frac{I_0}{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R}\right)^2} \exp\left(-2\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{w^2(z - z_0)}\right), \quad (359)$$

avec I_0 , l'intensité maximum sur l'axe de propagation du laser, et

$$w(z - z_0) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R}\right)^2}. \quad (360)$$

Nous avons noté w_0 , le col du faisceau gaussien qui correspond à l'écart à l'axe pour une intensité ayant été divisée par e^2 , et $z_R = \pi w_0^2 / \lambda$, la distance de Rayleigh. Lorsque l'on s'éloigne du point de focalisation horizontalement d'une distance z_R , la surface transverse du faisceau (proportionnelle à $w^2(z - z_0)$) double, tandis que l'intensité sur l'axe est divisée par deux. L'intensité $I(x, y, z_0)$ en un plan transverse donné, est liée à la puissance totale P du faisceau par

$$P = \iint dx dy I(x, y, z_0) = \frac{\pi w_0^2}{2}. \quad (361)$$

L'utilisation de la relation 359 dans l'expression 356, nous permet d'écrire le potentiel optique ressenti par les atomes, comme

$$V_{\text{op}}(\vec{r}) = -\frac{V_{\text{op}0}}{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R}\right)^2} \exp\left(-2\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{w^2(z - z_0)}\right), \quad (362)$$

avec

$$V_{\text{op}0} = \frac{I_0 d^2}{3\hbar\epsilon_0 c} \left[\frac{\omega_1}{(\omega_1^2 - \omega_\ell^2)} + \frac{2\omega_2}{(\omega_2^2 - \omega_\ell^2)} \right]. \quad (363)$$

VI.1.2.b Caractéristiques du piégeage harmonique

Au voisinage du point de focalisation, nous pouvons développer le potentiel $V_{\text{op}}(\vec{r})$ de manière harmonique,

$$V_{\text{op}}(\vec{r}) = -V_{\text{op}0} + \frac{m}{2} [\omega_{\perp 0}^2 ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) + \omega_{//0}^2 (z - z_0)^2], \quad (364)$$

où nous avons introduit les fréquences de piégeage radiale $\omega_{\perp 0}$ et axiale $\omega_{//0}$,

$$\begin{cases} \omega_{\perp 0} = \sqrt{\frac{4V_{\text{op}0}}{mw_0^2}}, \\ \omega_{//0} = \sqrt{\frac{2V_{\text{op}0}}{mz_R^2}}. \end{cases} \quad (365)$$

Ces fréquences sont inversement proportionnelles aux tailles caractéristiques du faisceau laser w_0 et z_R , et varient comme la racine carrée de la puissance P du laser. Pour une puissance $P = 120$ mW focalisée sur $w_0 = 30$ μm , nous obtenons des fréquences de piégeage de $2\pi \times 360$ Hz et de $\omega_{//0} = 2\pi \times 3$ Hz. Des mesures des fréquences montrent [156] qu'expérimentalement, la fréquence axiale est plus faible² et se rapproche plutôt de $2\pi \times 2$ Hz. On prendra donc dans toute la suite

$$\begin{cases} \omega_{\perp 0} = 2\pi \times 360 \text{ Hz}, \\ \omega_{//0} = 2\pi \times 2 \text{ Hz}. \end{cases} \quad (366)$$

La profondeur $V_{\text{op}0}/k_B$ est alors de 13 μK et la distance de Rayleigh est de l'ordre de 2.7 mm. Le taux d'émission spontanée au centre du piège, est quant à lui donné pour ces paramètres, par $\Gamma_\ell = 5 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, ce qui signifie que le piège peut être considéré comme conservatif sur les quelques secondes, que dure notre manipulation des atomes à l'aide de la pince optique.

²Cet écart peut être imputé à la présence d'aberrations sur le faisceau laser.

VI.1.2.c Effet de la gravité et de l'inclinaison de la pince optique

En l'absence de tout champ magnétique, les atomes ressentent la combinaison de l'effet de la pince optique et de la gravité. Cette dernière a un effet selon le confinement vertical (direction x), mais aussi selon le confinement longitudinal (direction z), si la pince n'est pas parfaitement horizontale.

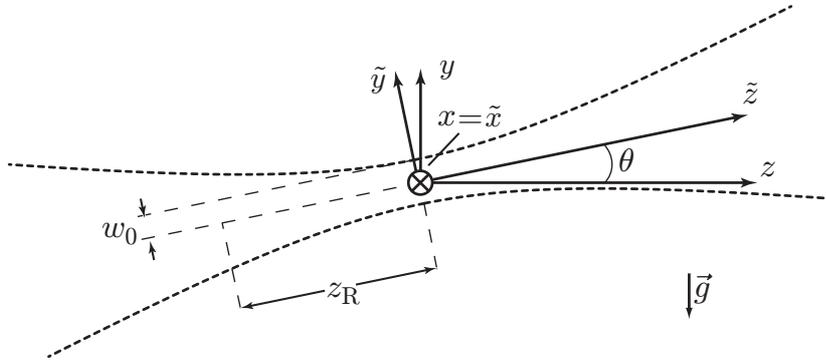


FIG. 81 – Repère $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ solidaire de la pince et incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale.

En effet, considérons le repère $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, solidaire de l'axe de propagation de la pince, et centré sur le point de focalisation (figure 81). Soit θ , l'angle que fait la pince avec la direction horizontale, c'est-à-dire l'angle entre les axes \tilde{z} et z . Le potentiel ressenti par les atomes s'écrit

$$V_{\text{tot}} = -\frac{V_{\text{op}0}}{1 + (\tilde{z}/z_R)^2} \exp\left(-2\frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{w_0^2(1 + \tilde{z}^2/z_R^2)}\right) + mg(\tilde{y} \cos \theta + \tilde{z} \sin \theta). \quad (367)$$

Le premier effet de la gravité est de déplacer le centre du piège total $[\tilde{x}_c; \tilde{y}_c; \tilde{z}_c]$, par rapport au point où l'intensité lumineuse est maximum ($\vec{r} = \vec{0}$). Dans la limite où les déplacements sont petits par rapport aux tailles caractéristiques w_0 et z_R , on a

$$\begin{cases} \tilde{x}_c = 0, \\ \tilde{y}_c = -g \cos \theta / \omega_{\perp 0}^2, \\ \tilde{z}_c = -g \sin \theta / \omega_{\parallel 0}^2. \end{cases} \quad (368)$$

La gravité induit des “sag” dans les deux directions \tilde{y} et \tilde{z} de la pince, le dernier étant nul dans le cas où la pince est parfaitement horizontale ($\theta = 0$).

Outre un déplacement du minimum de potentiel, on peut aussi noter un effet de diminution de la profondeur du puits³, comme on le voit en figure 82. À partir de l'expression 367, on observe qu'il y a un minimum local de potentiel selon l'axe $(0, \tilde{y}, 0)$, tant que

$$\frac{mgw_0 \cos \theta}{V_{\text{op}0}} \leq \frac{2}{\sqrt{e}}. \quad (369)$$

De même, en se restreignant à l'axe $(0, 0, \tilde{z})$, il n'y a piégeage le long de ce dernier que si

$$\frac{mgz_R \sin \theta}{V_{\text{op}0}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}. \quad (370)$$

³On note que l'impact de la gravité sur la profondeur est significatif car celle-ci est faible. Le même type de phénomène arrive dans le piège magnétique, si l'on considère le potentiel ressenti par les atomes habillés par la radiofréquence (figure 37). En fin d'évaporation, la gravité joue un rôle important, jusqu'à abaisser la profondeur du piège préférentiellement dans certaines directions, et ainsi modifier la dimensionnalité du processus de refroidissement.

En réalité, la condition sur $\{V_{\text{op}0}, w_0, \theta\}$ pour que le potentiel soit effectivement piégeant est plus restrictive que les conditions 369 et 370. En effet, le tracé du potentiel dans le plan (\tilde{y}, \tilde{z}) en figure 82, montre qu'il présente des points cols dans certaines directions, et que la profondeur de V_{tot} dépend donc fortement de la direction considérée.

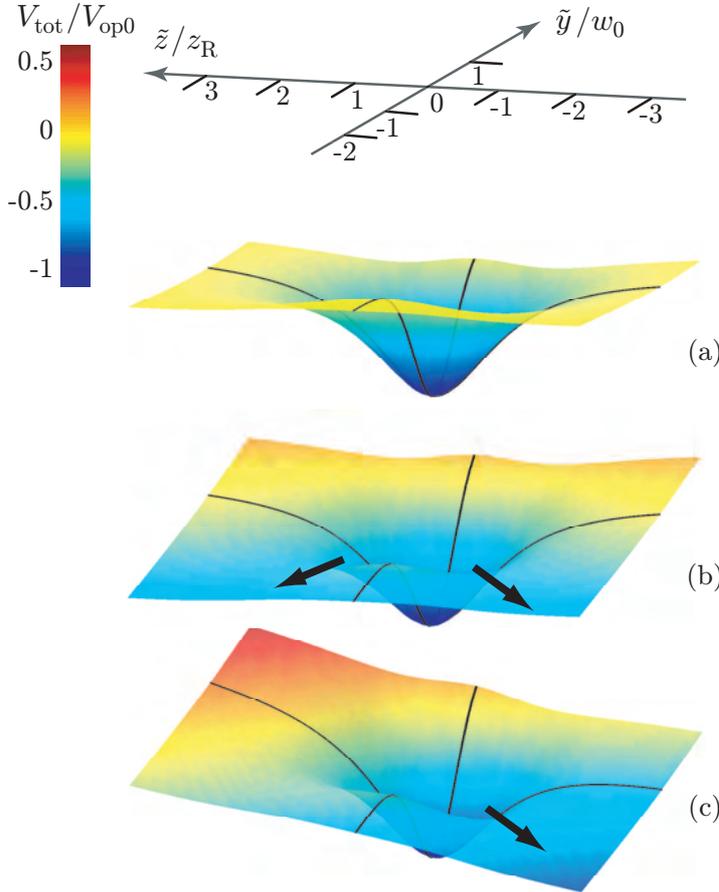


FIG. 82 – Potentiel $V_{\text{tot}}/V_{\text{op}0}$ dans le plan vertical $(x=0, \tilde{y}, \tilde{z})$, et ce en fonction des coordonnées adimensionnées \tilde{y}/w_0 et \tilde{z}/z_R . Différents cas de figure sont considérés. (a) en l'absence de gravité, (b) en présence de gravité, (c) en présence de la gravité et d'un angle d'inclinaison $\theta=0.3^\circ$. Les applications numériques sont faites pour une puissance de 120 mW focalisée sur $w_0=30 \mu\text{m}$. Les flèches indiquent les points cols limitant la profondeur, tandis que les courbes en trait plein correspondent au potentiel sur les axes \tilde{y} et \tilde{z} .

Cependant, les relations précédentes donnent un bon ordre de grandeur des paramètres $\{V_{\text{op}0}, w_0, \theta\}$ tels que le potentiel V_{tot} soit piégeant. Ainsi, en considérant une pince pratiquement horizontale ($\theta \ll 1$), de taille transverse $w_0=30 \mu\text{m}$, la condition 369 impose une puissance vérifiant $P \geq 25 \text{ mW}$, tandis que la seconde condition donne $\theta/P \leq \theta_{\text{max}}/P = 15^\circ/\text{W}$. Avec les paramètres géométriques de notre faisceau, on voit que si l'on veut que la pince optique soit piégeante, il faut une puissance minimum de plusieurs dizaines de milliwatts. Du fait du très faible confinement selon \tilde{z} , la condition la plus restrictive expérimentalement est la condition 370 : si l'on estime que l'on peut régler l'horizontalité de la pince optique typiquement au degré près (§ VI.1.3.b), une puissance de 70 mW correspond au minimum utilisable.

À partir d'une étude numérique du potentiel, nous avons tracé en figure 83, les différents paramètres du piège V_{tot} , en fonction de l'angle θ d'inclinaison. Pour un laser de puissance $P=120 \text{ mW}$ et focalisé sur $w_0=30 \mu\text{m}$, on remarque (figure 83a) que l'effet de la gravité est de réduire la profondeur du piège de manière substantielle (40 %), et ce, même dans le cas d'une pince parfaitement horizontale ($\theta=0^\circ$). Cette profondeur correspond à la différence d'énergie potentielle entre le minimum local et le point col le moins énergétique, et diminue rapidement en fonction de θ . Nous avons tracé en figure 83b, la position du centre du piège, \tilde{y}_c et \tilde{z}_c . La gravité n'ayant aucun effet selon \tilde{x} , on a, dans tous les cas de figure $\tilde{x}_c=0$. Si pour des valeurs faibles de θ , \tilde{y}_c et \tilde{z}_c varient linéairement (équations 368), il n'en est plus de

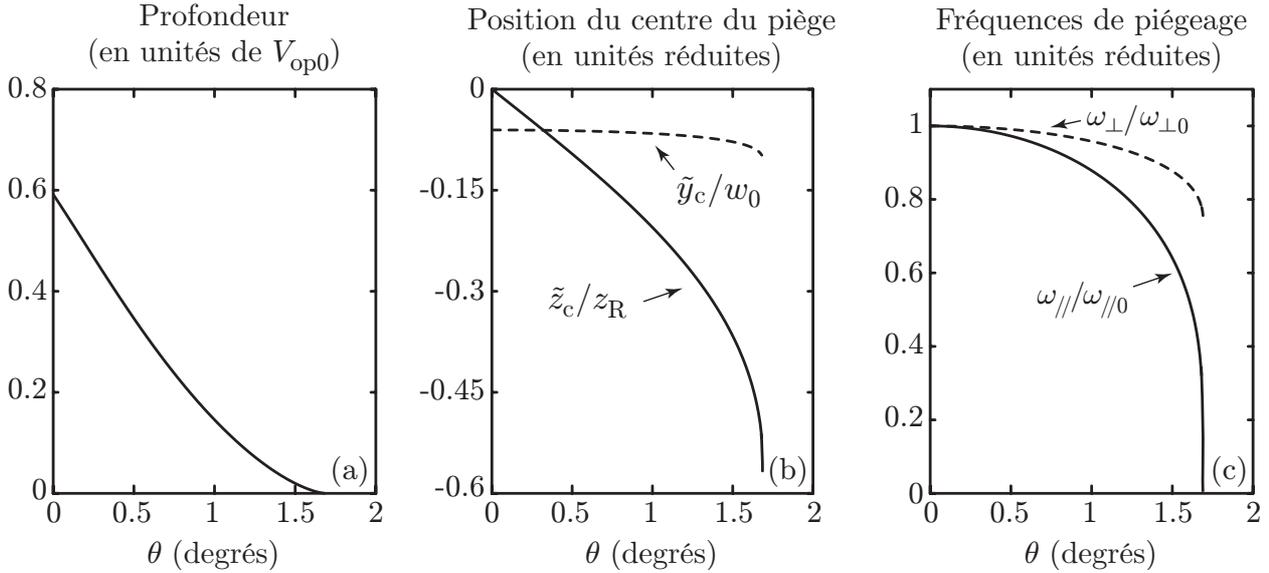


FIG. 83 – Effet de l'angle θ entre la pince optique et l'horizontale, (a) sur la profondeur du piège, (b) sur la position du minimum local de potentiel (centre du piège $(\tilde{y}_c; \tilde{z}_c)$) (c) sur les fréquences de piégeage ω_{\perp} et $\omega_{//}$. Les applications numériques sont faites pour une puissance de 120 mW focalisée sur $w_0 = 30 \mu\text{m}$. Pour ces paramètres, la valeur maximum de l'angle θ , telle que le potentiel soit piégeant, est donnée par l'égalité dans la condition 370, ($\theta = 1.7^\circ$), et correspond physiquement à la perte du confinement selon \tilde{z} .

même lorsque l'angle fait en sorte que l'on explore la partie non harmonique du potentiel. Le décentrement induit aussi une modification de la fréquence de piégeage (les courbures dépendent de \tilde{y}_c et \tilde{z}_c), comme représenté en figure 83c. Dans notre cas, les fréquences selon l'axe \tilde{x} et \tilde{y} restent très proches quelque soit θ ($\omega_{\perp} = \omega_{\tilde{y}} \approx \omega_{\tilde{x}}$). Si la puissance est plus faible, ceci n'est plus aussi bien vérifié, et la gravité a tendance à briser plus fortement la symétrie cylindrique du piège.

En conclusion, le piège peu confinant selon l'axe \tilde{z} est très sensible à la moindre inclinaison de la pince. Cependant, ce réglage fin de θ n'est nécessaire que si l'on veut utiliser le potentiel optique seul comme piège. Dans le cas du piège hybride (§ VI.2.1.a) que nous utilisons pour réaliser un laser à atomes guidé, le champ magnétique confine les atomes selon z , et l'inclinaison de la pince optique ne joue pas de rôle significatif.

VI.1.3 Mise en œuvre expérimentale

Nous avons représenté en figure 84, le montage optique associé à la pince optique et à son alignement sur l'expérience.

VI.1.3.a Montage optique

Les composants nécessaires à l'obtention du faisceau focalisé sont représentés dans le cadre gris en pointillé de la figure 84.

Le laser Nd : YAG est injecté dans une fibre monomode à maintien de polarisation. Nous utilisons deux lames en amont de l'injection :

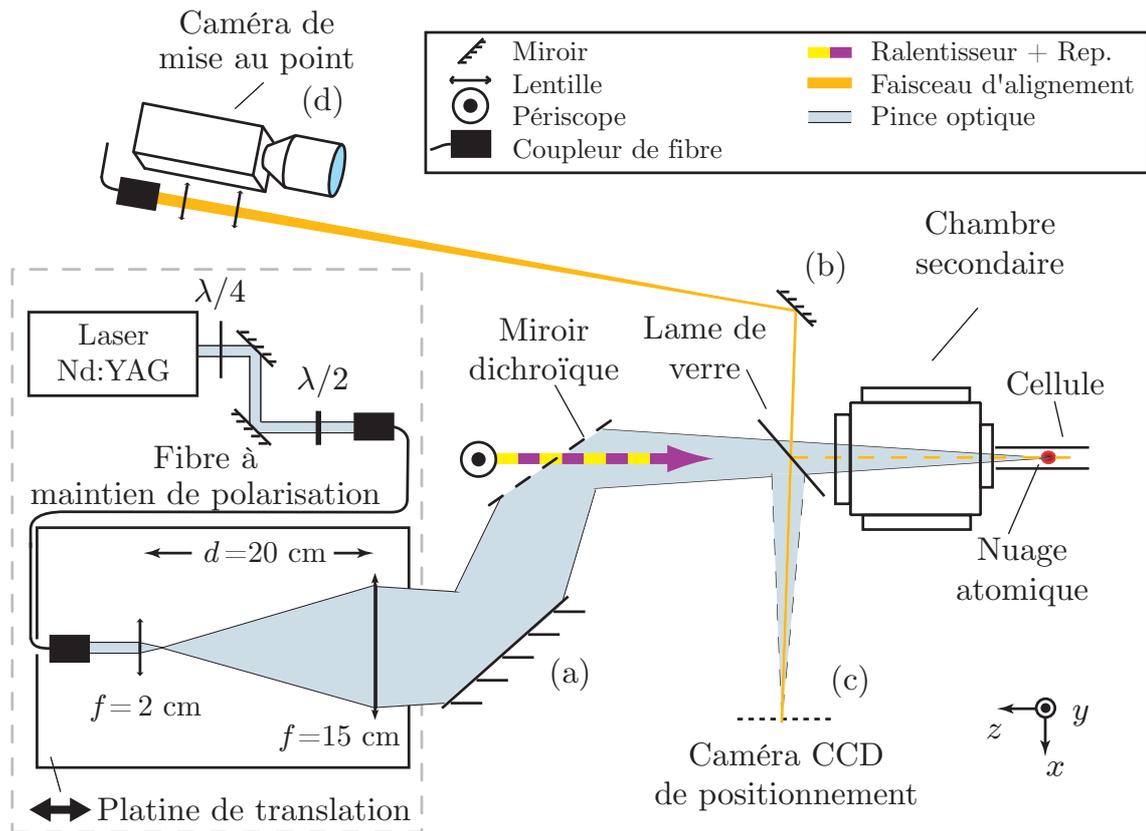


FIG. 84 – Disposition sur l'expérience de la pince optique. Nous avons montré en outre, le dispositif nécessaire à l'alignement du faisceau sur les atomes.

- une lame quart d'onde, afin de corriger le caractère légèrement elliptique de la polarisation du laser,
- une lame demi-onde, afin d'aligner la polarisation linéaire résultante sur l'un des axes propres de la fibre.

Nous utilisons une fibre pour différentes raisons. Outre un effet de filtrage spatial du mode du laser, la fibre permet de désolidariser le laser des deux lentilles focalisant le faisceau. Ceci est important, car nous fixons les lentilles sur une platine de translation, afin de pouvoir contrôler la position du col du faisceau selon l'axe z . En sortie du coupleur de la fibre, sur la platine, nous obtenons un faisceau collimaté de taille $w_s = 2\text{ mm}$.

Pour des raisons d'encombrement (présence d'une chambre secondaire, faisceaux de ralentissement sur l'axe de la pince optique...), nous ne pouvons positionner la dernière lentille du système de focalisation à moins d'un mètre du nuage atomique. Nous avons choisi un système optique relativement compact, composé de deux lentilles⁴ séparées de 20 cm, et de focales f égales à 2 cm et à 15 cm. Le faisceau est acheminé au niveau de la cellule à l'aide

⁴ On peut voir facilement, que ceci nous empêche d'utiliser une unique lentille de focale f : en effet dans le cas d'une taille w_0 au point focal, la relation de conjugaison des faisceaux gaussiens donne

$$f = \frac{\pi w_0 w_s}{\lambda},$$

ce qui impose une focale d'une dizaine de centimètres bien inférieure à la distance minimum d'un mètre.

de deux miroirs (figure 84), le second étant un miroir dichroïque permettant de superposer la pince (1064 nm) avec les faisceaux de ralentissement (780 nm). Bien que le faisceau soit linéaire en sortie de la fibre, nous n'avons pas porté de soin particulier à la polarisation du faisceau après les deux miroirs de renvoi. Ceci n'est pas dommageable, car, comme discuté en annexe A.1.4, la pince optique est tellement désaccordée par rapport à 780 nm, que le potentiel ressenti par les atomes est pratiquement insensible à la polarisation.

VI.1.3.b Procédure d'alignement de la pince sur le nuage atomique

Un réglage essentiel de la pince optique est son alignement vis-à-vis du piège magnétique. Une méthode couramment utilisée consiste à superposer l'image du point focal du faisceau à celle d'un nuage piégé magnétiquement. Cependant, cette méthode n'est pas utilisable sur notre dispositif, car l'axe de l'imagerie n'est pas confondu avec l'axe du faisceau laser. Une autre méthode consisterait à voir un effet du déplacement lumineux du potentiel optique sur la fluorescence du piège magnéto-optique. Cette approche ne donne aucun résultat dans notre cas, car notre potentiel optique est bien trop petit transversalement, et le déplacement lumineux (de l'ordre du mégahertz) trop faible, pour qu'un effet soit visible. Enfin, on ne peut espérer piéger directement des atomes issus d'une mélasse par exemple, car le volume de capture de la pince, ainsi que sa profondeur est là encore trop faible.

Nous exposons dans ce paragraphe la procédure que nous avons développée pour réaliser, de manière fiable, l'alignement du faisceau sur les atomes. Le problème central du réglage réside dans le fait que le point sur lequel nous voulons positionner le point focal de la pince est sous vide. Nous n'y avons donc pas accès directement. Pour contourner ce problème, nous réalisons l'image du centre du piège magnétique hors du système à vide.

La réalisation de cette image se fait en deux étapes, en utilisant la lame de verre disposée sur le chemin de la pince optique. Le dispositif nécessaire à chaque étape est représenté en figure 84.

Réglage de la position en z

La première étape consiste à observer la fluorescence d'un piège magnéto-optique sur la caméra « de mise au point ». On règle alors la position de la caméra en (c), de telle façon que son image soit au même niveau que celle du piège magnéto-optique. Lorsque le PMO et la matrice de la caméra (c) sont conjointement vus nets depuis la caméra « de mise au point », cela signifie que la caméra (c) est dans le même plan transverse que l'image du piège magnéto-optique via la lame de verre. L'incertitude est de quelques millimètres, et est principalement due à la difficulté que l'on a à s'assurer de la netteté de l'image du PMO⁵. En déplaçant longitudinalement la pince à l'aide de la platine de translation, on fait en sorte que le faisceau soit focalisé sur la caméra (c), ce qui signifie qu'il en est de même au voisinage du nuage atomique.

Réglage de la position en (x, y)

Pour régler transversalement la position de la pince, on utilise un faisceau auxiliaire d'alignement. Le faisceau, en sortie d'un coupleur de fibre, est focalisé sur une centaine de microns, et est mélangé à la pince grâce à la lame de verre. Quelques pour cent de l'intensité

⁵En effet, un piège magnéto-optique observé par fluorescence est intrinsèquement un objet légèrement flou.

sont donc réfléchis vers le nuage atomique, tandis que par transmission, le faisceau arrive sur la caméra (c).

Dans un premier temps, on utilise pour ce faisceau, la sortie de fibre de la sonde d'imagerie (figure 8), accordée sur $F = 2 \rightarrow F' = 3$. Cette lumière à résonance avec une transition atomique, a un effet pousseur très efficace sur le piège magnéto-optique. Ainsi, en réalisant un tel piège et en réglant le miroir (b), nous essayons de maximiser les pertes d'atomes en regardant la fluorescence du nuage. Ceci nous permet d'obtenir, à une incertitude de l'ordre du millimètre (la taille du nuage), la position transverse (selon x et y) du nuage, position que nous repérons sur la matrice CCD de la caméra (c).

Dans un second temps, pour affiner notre positionnement en (x, y) du point focal de la pince, nous sommes amenés à utiliser des nuages atomiques piégés magnétiquement, de plus en plus froids et donc petits. Nous utilisons cette fois-ci pour le faisceau d'alignement, quelques milliwatts prélevés sur le trajet de la diode repompeur sur réseau, accordée sur la transition $F = 1 \rightarrow F' = 2$. Nous observons alors le chauffage et les pertes induites par ce faisceau sur les atomes dans le piège magnétique. En partant de la position déterminée grâce au piège magnéto-optique, et en cherchant le réglage du miroir (b), dont l'impact est le plus fort, nous déterminons ainsi de plus en plus précisément la position en (x, y) du centre du piège magnétique, au fur et à mesure que le nuage est refroidi.

Rapidement, la précision que l'on a sur le pointé est de quelques dizaines de microns. Il suffit alors finalement de superposer le point focal de la pince au faisceau d'alignement sur la caméra (c), pour obtenir un premier signal d'atomes piégés optiquement.

On remarquera que cette méthode assure d'avoir positionné le piège optique au voisinage des atomes, mais ne contraint pas l'horizontalité de la pince. En effet l'alignement ne se fait qu'en un point (sur la caméra (c)). Cependant, un défaut d'horizontalité se voit simplement sur les images d'absorption des atomes piégés optiquement. S'il est assez important, il induit, pour nos faibles confinements axiaux de quelques hertz, l'écoulement des atomes dans une direction donnée : au bout de quelques centaines de millisecondes, ces derniers sortent alors du champ de l'imagerie. Même si les atomes restent piégés à cause d'un confinement suffisant selon z , la forte anisotropie du nuage, fait en sorte qu'il est facile de détecter un angle résiduel sur les images. Pour régler expérimentalement l'horizontalité, nous jouons donc finement, par itération, sur le miroir (a) et le miroir dichroïque.

Le réglage fin du positionnement selon z de la pince se fait en déplaçant la platine de translation de telle façon à ce que le centre observé du piège optique soit le même que celui du piège magnétique. Pour régler précisément selon (x, y) le potentiel optique, nous utilisons des cales piézo-électriques sur le miroir (a), en considérant que l'alignement est réalisé pour la position qui maximise le transfert des atomes du piège magnétique vers le piège optique.

Un intérêt de la méthode présentée dans ce paragraphe est que la position de la pince est repérée sur la matrice de la caméra (c). Même si, d'un jour sur l'autre, le faisceau dérive légèrement, en le réalignant directement sur la position notée, on retrouve instantanément un signal d'atomes piégés optiquement.

VI.1.3.c Précautions expérimentales

Pour éviter d'avoir de trop grandes fluctuations de pointé de la pince (fluctuations qui peuvent induire du chauffage dans le piège optique [94]), nous avons expérimentalement stabilisé le système en jouant sur deux points cruciaux

- Pour des raisons d'encombrement du dispositif expérimental, les miroirs de renvoi de

la pince optique sont placés à une trentaine de centimètres au-dessus du plan de la table optique. Nous avons donc dû utiliser des montures particulièrement stables, afin d'éviter les vibrations inhérentes à une telle surélévation.

- Le faisceau laser qui se propage sur un mètre est particulièrement sensible aux fluctuations induites par la convection de l'air dans le laboratoire. Pour isoler la zone de l'expérience du reste de la pièce, nous avons construit une boîte englobant notre dispositif expérimental.

La mise en œuvre de ces points précédents a eu un effet décisif sur le temps pendant lequel nous pouvons garder les atomes dans le piège optique. Ainsi, en partant de quelques secondes de durée de vie, l'utilisation de montures massives a augmenté la durée de vie vers quarante secondes, tandis que l'ajout d'une boîte autour de l'expérience a permis de multiplier encore par trois cette dernière valeur.

VI.2 Le laser à atomes guidé

Du fait de la forte anisotropie du piège optique, on peut considérer qu'il se comporte comme un guide tant que l'on ne s'éloigne pas du point focal d'une distance excédant le millimètre (soit environ un tiers de la distance de Rayleigh). Nous présentons dans ce paragraphe un schéma permettant d'obtenir un laser à atomes extrait du condensat par radiofréquence et guidé optiquement.

Ce schéma est fondé sur le fait que le condensat de Bose-Einstein est dans un état $|F=1, m_F=-1\rangle$, qui ressent à la fois le potentiel optique et le potentiel magnétique, alors que l'onde extraite dans l'état $|F=1, m_F=0\rangle$ ne ressent que le potentiel optique et l'effet Zeeman quadratique expulsant. Ceci signifie que le laser reste confiné transversalement (en x et y), mais que le choix d'une puissance de piégeage pas trop forte rend sa propagation selon z libre : le laser est guidé.

VI.2.1 Principe

VI.2.1.a Potentiels mis en jeu

Dans ce paragraphe nous détaillons les différents potentiels ressentis par les atomes, qu'ils soient condensés dans $|F=1, m_F=-1\rangle$, ou dans le laser (état interne $|F=1, m_F=0\rangle$).

Le piège magnétique décomprimé

Afin d'éviter les pertes par recombinaison à trois corps (§ II.4.3), résultant d'un trop fort confinement magnétique conjugué au confinement optique, nous utilisons le piège magnétique dans une configuration décomprimée. Celui-ci est obtenu en abaissant le gradient quadrupolaire, de telle façon à ce que les fréquences de piégeage soient données par

$$\begin{cases} \omega_{mx} = 2\pi \times 8 \text{ Hz} , \\ \omega_{my} = 2\pi \times 35 \text{ Hz} , \\ \omega_{mz} = 2\pi \times 35 \text{ Hz} . \end{cases} \quad (371)$$

En ce qui concerne les fréquences liées à l'effet Zeeman quadratique, elles sont données selon les axes y et z par $\omega_{zQ} = 2\pi \times 2 \text{ Hz}$, et par $\omega_{zQx} = 2\pi \times 0.5 \text{ Hz}$ selon l'axe x .

Le potentiel magnétique ressenti par l'état $|F=1, m_F=-1\rangle$, s'écrit donc

$$V_{\text{mag}}(x, y, z) = \frac{m}{2} [\omega_{mx}^2 x^2 + \omega_{my}^2 y^2 + \omega_{mz}^2 z^2] , \quad (372)$$

tandis que celui ressenti par $|F=1, m_F=0\rangle$, est donné par

$$V_{zQ}(x, y, z) = -\frac{m}{2} [\omega_{zQx}^2 x^2 + \omega_{zQ}^2 (y^2 + z^2)] . \quad (373)$$

Le condensat dans le piège hybride

Le potentiel V_{CBE} ressenti par le condensat est la somme du potentiel magnétique (équation 372), du potentiel optique (équation 364) et de la gravité $mg y$,

$$V_{\text{CBE}}(\vec{r}) = V_{\text{mag}}(\vec{r}) + V_{\text{op}}(\vec{r}) + mg y , \quad (374)$$

ce qui s'écrit

$$V_{\text{CBE}}(\vec{r}) = V_0 + \frac{m}{2} [\omega_x^2 (x - x_m)^2 + \omega_y^2 (y - y_m)^2 + \omega_z^2 (z - z_m)^2] , \quad (375)$$

où l'on a noté l'énergie au centre du piège par V_0 .

Nous avons introduit les fréquences totales de piégeage, ressenties par le condensat,

$$\begin{cases} \omega_x = \sqrt{\omega_{mx}^2 + \omega_{\perp 0}^2} \approx 2\pi \times 360 \text{ Hz}, \\ \omega_y = \sqrt{\omega_{my}^2 + \omega_{\perp 0}^2} \approx 2\pi \times 360 \text{ Hz}, \\ \omega_z = \sqrt{\omega_{mz}^2 + \omega_{//0}^2} \approx 2\pi \times 35 \text{ Hz}, \end{cases} \quad (376)$$

ainsi que le décalage (x_m, y_m, z_m) du piège total par rapport au centre du champ magnétique (en $\vec{r} = \vec{0}$),

$$\begin{cases} x_m = \frac{\omega_{\perp 0}^2}{\omega_x^2} x_0, \\ y_m = \frac{\omega_{\perp 0}^2}{\omega_y^2} y_0 - \frac{g}{\omega_y^2}, \\ z_m = \frac{\omega_{//0}^2}{\omega_z^2} z_0. \end{cases} \quad (377)$$

Ces ‘‘sag’’ dans les trois directions de l'espace sont dues aux déplacements induits, pour partie, par la pince optique non parfaitement centrée sur le champ magnétique, mais aussi par la gravité.

On considère le condensat dans le régime de Thomas-Fermi (§ II.1.3) : l'énergie potentielle contrebalance donc l'effet des interactions, de telle façon que la somme des énergies correspondantes soit constante. En utilisant le potentiel chimique μ , la fonction d'onde du condensat, ϕ_c , vérifie

$$g_{\text{coll}}|\phi_c|^2 + V_{\text{CBE}}(\vec{r}) = V_0 + \mu. \quad (378)$$

La fonction ϕ_c s'écrit

$$\phi_c(x, y, z) = \sqrt{\frac{\mu}{g_{\text{coll}}} \cdot \max \left[\left(1 - \left(\frac{x - x_m}{R_x} \right)^2 - \left(\frac{y - y_m}{R_y} \right)^2 - \left(\frac{z - z_m}{R_z} \right)^2 \right); 0 \right]}, \quad (379)$$

avec, pour un condensat contenant 10^5 atomes, les paramètres suivants

$$\begin{cases} \mu = h \cdot 3.2 \text{ kHz}, \\ R_x \approx R_y = 2.4 \mu\text{m}, \\ R_z = 25 \mu\text{m}. \end{cases} \quad (380)$$

Le laser à atomes dans le guide optique

Dans la zone du condensat (c'est-à-dire là où la densité $|\phi_c|^2$ est non nulle), le potentiel $V_{\ell 1}$ dans lequel évolue le laser à atomes est la somme du potentiel optique, de la gravité et du champ moyen, soit,

$$V_{\ell 1}(\vec{r}) = V_{\text{op}}(\vec{r}) + mgy + g_{\text{coll}}|\phi_c|^2, \quad (381)$$

$$= \mu - \frac{m}{2} [\omega_{mx}^2 x^2 + \omega_{my}^2 y^2 + \omega_{mz}^2 z^2]. \quad (382)$$

Nous voyons, comme dans le cas du laser extrait sous l'effet de la gravité (III.2.1.a), que le potentiel ressenti par le laser est un potentiel expulsant de mêmes fréquences que celles du piège magnétique seul, et qu'il est centré comme le champ magnétique.

Hors du condensat, le potentiel $V_{\ell 2}$ dans lequel se propage le laser à atomes est la somme du potentiel optique, de la gravité et de l'effet Zeeman quadratique. Contrairement aux expressions précédentes, nous ne pouvons négliger ici l'effet Zeeman quadratique selon z , puisque la courbure correspondante est du même ordre de grandeur que celle de la pince sur le même axe. On a donc, en négligeant l'effet Zeeman quadratique dans les autres directions,

$$V_{\ell 2}(\vec{r}) = \frac{m}{2} [\omega_{\perp 0}^2 ((x - x_{\ell})^2 + (y - y_{\ell})^2) + (\omega_{//0}^2 - \omega_{ZQ}^2) z^2] + m\omega_{//0}^2 z_{\ell} z + V_{0\ell}. \quad (383)$$

$V_{0\ell}$ est une constante positionnant le potentiel par rapport au zéro de l'échelle d'énergie, et le centre du potentiel optique décalé sous l'effet de la gravité, est donné par

$$\begin{cases} x_{\ell} = x_0, \\ y_{\ell} = y_0 - \frac{g}{\omega_{\perp 0}^2}, \\ z_{\ell} = z_0. \end{cases} \quad (384)$$

Nous avons représenté en figure 85, les différents potentiels dans lesquels se propage le laser.

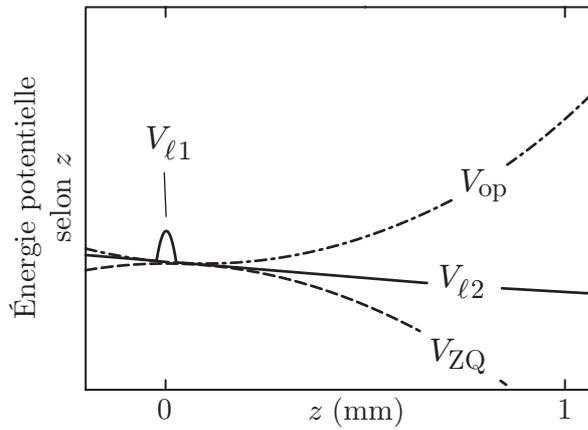


FIG. 85 – Potentiels intervenant dans la dynamique du laser à atomes selon l'axe z . Dans la zone de recouvrement avec le condensat, le laser se propage dans le potentiel répulsif $V_{\ell 1}$. Hors du condensat, la somme du potentiel optique V_{op} et du potentiel V_{ZQ} donne un potentiel $V_{\ell 2}$ linéaire selon z , dans le cas réalisé expérimentalement où $\omega_{//0} = \omega_{ZQ}$.

On voit sur l'expression 383, qu'en choisissant $\omega_{//0} = \omega_{ZQ}$, on annule le terme quadratique en z . On rend donc la direction axiale non-piégeante, alors que les directions transverses sont confinantes avec une fréquence $\omega_{\perp 0}$, c'est-à-dire que l'on obtient un guide selon z . Expérimentalement, à champ magnétique fixé, l'annulation de la courbure selon z s'effectue en prenant une intensité lumineuse adéquate pour la pince optique.

De plus, la combinaison de l'effet Zeeman quadratique faiblement expulsant et du potentiel optique légèrement piégeant résulte en un potentiel linéaire selon z (avant dernier terme de l'équation 383), dont l'accélération associée a_{guide} est donnée par

$$a_{\text{guide}} = \omega_{//0}^2 z_0. \quad (385)$$

En choisissant, à l'aide de la platine de translation, la position z_0 du potentiel optique, on peut régler l'accélération ressentie dans le guide selon l'axe z . Dans le cas où l'on positionne z_0 dans le même plan transverse que celui auquel appartient le centre du champ magnétique ($z = 0$), on peut annuler a_{guide} . Dans cette configuration spécifique, notre guide permet à une onde de matière de se propager à longueur d'onde de De Broglie constante.

VI.2.1.b Effets induits par le positionnement transverse de la pince

La position transverse (en x et z) de la pince, a deux effets sur la configuration géométrique des potentiels : un premier effet sur le centrage relatif des différents potentiels, et un autre sur la forme du potentiel ressentie dans la zone du condensat.

Décalage entre le centre du guide et celui du condensat

En utilisant les relations 377 et 384, on obtient les écarts suivants entre les centrages transverses du condensat et du guide optique :

$$\begin{cases} x_\ell - x_m = \frac{\omega_{mx}^2}{\omega_x^2} x_0 \approx 5 \times 10^{-4} x_0, \\ y_\ell - y_m = \frac{\omega_{my}^2}{\omega_y^2} \left(y_0 - \frac{g}{\omega_{\perp 0}^2} \right) \approx 10^{-2} (y_0 - 2 \mu\text{m}), \end{cases} \quad (386)$$

où les applications numériques sont obtenues en utilisant nos paramètres expérimentaux.

On peut donner un critère de bon alignement relatif du condensat et du guide optique, en déterminant les positions x_0 et y_0 telles que les écarts (équations 386) soient bien inférieurs à la taille transverse caractéristique du guide, c'est-à-dire la taille de l'oscillateur harmonique, $\sigma_\ell = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp 0}} = 560 \text{ nm}$. On obtient

$$\begin{cases} |x_0| \ll 1 \text{ mm}, \\ |y_0| \ll 50 \mu\text{m}. \end{cases} \quad (387)$$

On voit sur ces expressions que le réglage le plus critique est clairement le réglage de la position de la pince optique sur la verticale y .

Potentiel ressenti dans la zone du condensat

Une autre caractéristique des potentiels, liée au réglage de la position transverse de la pince, intervient lorsque l'on s'intéresse au potentiel $V_{\ell 1}$ que ressent le laser à atomes lorsqu'il se situe dans la zone du condensat (équation 382).

En particulier, l'allure transverse du potentiel dépend, via x_m et y_m , du positionnement x_0 et y_0 de la pince du condensat. Selon l'axe donné y passant par le centre du condensat, l'écart d'énergie entre le point le plus énergétique et le point le moins énergétique est donné par

$$\Delta E_y = \begin{cases} m \omega_{my}^2 \max(|y_m - R_y|; |y_m + R_y|)^2 / 2 & \text{si } |y_m| \leq R_y, \\ 2 m \omega_{my}^2 |y_m| R_y & \text{si } |y_m| > R_y. \end{cases} \quad (388)$$

On écrit les relations équivalentes pour l'axe x , en remplaçant dans les relations précédentes y par x .

On peut, là encore, déterminer les valeurs des positions x_0 et y_0 telles que l'écart énergétique transverse $\Delta E_{x,y}$ soit petit devant l'énergie caractéristique de confinement du guide optique, $\hbar\omega_{\perp 0}$. On obtient, pour nos paramètres expérimentaux,

$$\begin{cases} |x_0| \ll 130 \mu\text{m}, \\ |y_0| \ll 7 \mu\text{m}. \end{cases} \quad (389)$$

On voit que ces conditions sont bien plus restrictives que les conditions 387. Une attention toute particulière doit donc être apportée à l'alignement de la pince verticalement, pour faire en sorte qu'elle soit la plus proche possible du centre du champ magnétique. Nous reviendrons sur ce point central dans la suite, en particulier pour justifier notre procédure expérimentale (§ VI.2.2.a), et au moment de l'étude de la dynamique transverse du laser (§ VI.2.3.b).

VI.2.2 Réalisation

VI.2.2.a Séquence expérimentale

Pour obtenir le laser à atomes guidé, nous partons d'un nuage à une température de l'ordre d'un microkelvin dans le piège comprimé, et réalisons les étapes suivantes.

- Nous décomprimons tout d'abord le gradient magnétique, afin d'obtenir un piège magnétique de fréquence quadrupolaire (selon y et z) de $2\pi \times 130$ Hz et de fréquence dipolaire (selon x), $2\pi \times 8$ Hz.
- Nous allumons alors la pince optique de manière progressive. Au bout d'une seconde de rampe, la valeur de la puissance lumineuse atteint 120 mW, ce qui correspond aux fréquences $\omega_{\perp 0} = 2\pi \times 360$ Hz et $\omega_{\parallel 0} = 2\pi \times 2$ Hz.
- Maintenant que les atomes sont piégés à la fois par le potentiel magnétique et optique, nous poursuivons la décompression du gradient magnétique, pour arriver à la configuration de piège décomprimé de fréquence quadrupolaire $2\pi \times 35$ Hz, et de fréquence dipolaire $2\pi \times 8$ Hz.
- Cette configuration finale du piège hybride est celle dans laquelle nous finissons l'évaporation radiofréquence. Les atomes dans l'état anti-piégeant $|F=1, m_F=1\rangle$, sont rapidement expulsés le long de l'axe de la pince, alors que selon x et y , ils sont confinés par le potentiel optique. En conséquence, cette évaporation est unidimensionnelle selon z , et son efficacité s'en trouve fortement ralentie, par rapport à une évaporation en l'absence de potentiel optique. Au terme de ce processus durant 6 secondes, nous obtenons

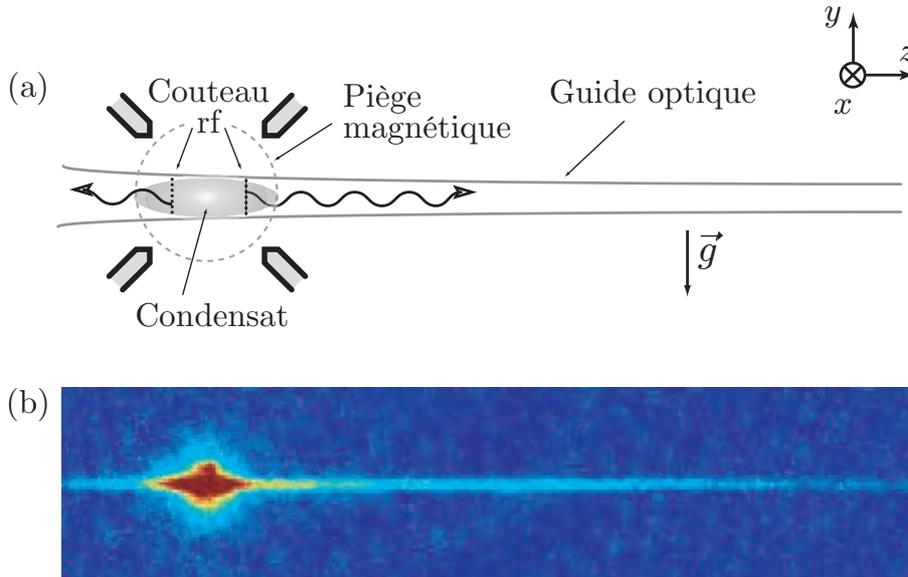


FIG. 86 – (a) Configuration du dispositif permettant l'obtention d'un laser à atomes guidé. Le condensat est produit à l'intersection du piège magnétique et du guide optique. Le confinement selon l'axe z étant assuré par le champ magnétique, une onde peut être émise par radiofréquence dans cette direction, et ce, des deux côtés du condensat. (b) Image d'absorption du laser à atomes guidé se propageant horizontalement sur un millimètre, et couplé pendant une durée $t_c = 60$ ms.

au sein du piège hybride un condensat de Bose-Einstein contenant 10^5 atomes.

- Nous appliquons alors un couteau radiofréquence et observons un laser à atomes extrait du condensat se propageant le long du guide, comme représenté en figure 86.

VI.2.2.b Intérêt de la décompression en deux temps

Nous avons observé que nous ne pouvons conserver un condensat dans un piège hybride, superposition d'un piège magnétique comprimé, et d'un piège optique. En effet, le piège résultant serait fortement confiné dans toutes les directions (les fréquences seraient toutes supérieures à $2\pi \times 360$ Hz) : la densité atomique d'un condensat contenant une centaine de milliers d'atomes, serait telle, que l'on ne pourrait envisager le garder plus de quelques dizaines de millisecondes, sans le dépeupler totalement. Il est donc nécessaire de travailler avec un piège magnétique décomprimé.

Cependant, nous aurions pu abaisser en une seule étape le confinement magnétique. Nous l'avons fait en deux temps, en passant par une étape intermédiaire de décompression modérée. En réalité, si nous décomprimions totalement le piège, avant d'allumer la pince optique, aucun atome ne serait transféré dans le piège hybride. En effet, la décompression a pour effet de déplacer verticalement le nuage atomique par rapport au centre du champ magnétique, du fait de la présence de la gravité. Dans le piège décomprimé, le "sag" est de $200 \mu\text{m}$. Ainsi placé, le nuage est totalement insensible à une pince centrée au voisinage du centre du champ magnétique, c'est-à-dire $200 \mu\text{m}$ au-dessus. Par contre, dans le piège faiblement décomprimé, le "sag" n'est que de $15 \mu\text{m}$, soit une taille inférieure à la taille w_0 du col de la pince, et le transfert vers le piège hybride se passe sans problème.

On pourrait penser qu'une solution alternative consisterait à aligner la pince sur la position du piège décomprimé placé $200 \mu\text{m}$ en-dessous du champ magnétique. C'est cette approche qui avait été utilisée dans des expériences préliminaires. Les résultats montraient en particulier des excitations transverses importantes par rapport à une configuration où la pince est alignée sur le champ magnétique. Ceci s'explique par le fait qu'un mauvais positionnement de la pince optique induit une asymétrie dans les potentiels entrant en jeu, et une mauvaise adaptation entre le mode du condensat et le mode transverse du laser guidé (§ VI.2.3.b).

VI.2.2.c Couplage du laser

Nous avons représenté en figure 87 la configuration de couplage du laser selon la direction z . Comme le potentiel guidant est pratiquement plat selon z , le champ moyen du condensat joue un rôle prépondérant dans le couplage du laser guidé.

En particulier, à une valeur de la radiofréquence donnée ν_{rf} , la conservation de l'énergie au cours du couplage implique que l'on observe deux points d'extraction z_g et z_d , et donc deux lasers, chacun se propageant dans un sens. En considérant par exemple la configuration représentée en figure 85, on remarque que le faisceau extrait vers les z négatifs ne peut se propager longtemps du fait de la pente de $V_{\ell 2}$. Expérimentalement, on observe bien des atomes couplés de part et d'autre du condensat (figure 86 b), mais le faisceau n'est réellement propagatif que d'un seul côté⁶. La partie non propagative (couplée en z_g dans notre exemple) reste piégée au voisinage du condensat et n'interagit pas avec le faisceau laser se propageant

⁶Notons que l'on peut cependant observer deux lasers se propageant des deux côtés du guide, soit dans le cas où la pente de $V_{\ell 2}$ est parfaitement nulle, soit dans le cas où les centres des pièges optiques et magnétiques sont très proches ($z_0 \approx 0$), et où $V_{\ell 2}$ est expulsant ($\omega_{//0} < \omega_{zQ}$).

vers les z positifs : le champ moyen du condensat et le confinement transverse du guide optique agissent conjointement comme une barrière de potentiel séparant distinctement les deux régions de couplage.

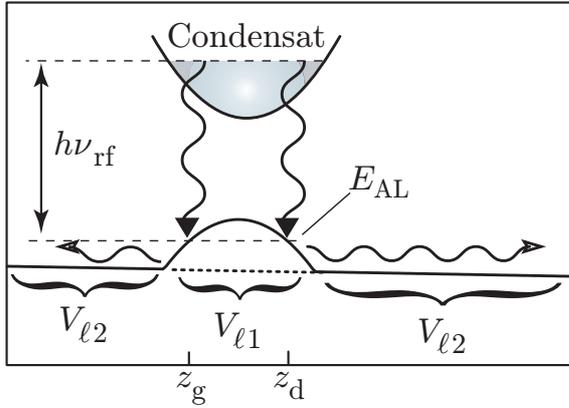


FIG. 87 – Configuration du couplage radio-fréquence selon z . Le couplage se fait du condensat, vers le potentiel $V_{\ell 1}$ en deux points z_g et z_d . Il en résulte deux ondes qui se propagent vers la gauche ou vers la droite. On a noté E_{AL} l'énergie dans le guide correspondant aux points de couplage.

En outre, du fait du confinement du guide, la dynamique transverse (selon x et y) du laser à atomes est fortement quantifiée. En particulier, au niveau du condensat, les tailles de l'oscillateur harmonique inversé du potentiel $V_{\ell 1}$ (équation 382) sont selon x et y ,

$$\begin{cases} \sigma_x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{mx}}} = 3.8 \mu\text{m}, \\ \sigma_y = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{my}}} = 1.8 \mu\text{m}, \end{cases} \quad (390)$$

c'est-à-dire très proches de la taille de Thomas-Fermi transverse du condensat égale à $2.4 \mu\text{m}$.

A priori, une approximation semi-classique du taux de couplage, comme l'utilisation du principe de Franck-Condon (§ III.2.3.b), n'est donc pas forcément valable. Il est préférable de partir d'une règle d'or de Fermi [156], prenant en compte les états propres du guide vers lesquels on se couple.

VI.2.3 Observation de la dynamique du laser

VI.2.3.a Propagation du laser guidé

La propagation du laser hors du condensat s'effectue dans le potentiel $V_{\ell 2}(\vec{r})$ (équation 383), que l'on peut décomposer en une partie transverse, confinante harmoniquement avec la fréquence $\omega_{\perp 0}$, et une partie longitudinale correspondant à l'accélération $a_{\text{guide}}(z_0)$, donnée par la position z_0 (équation 385),

$$V_{\text{guide}} = m a_{\text{guide}}(z_0) z. \quad (391)$$

Nous avons observé la dynamique axiale du laser se propageant dans ce potentiel. En figure 88a, nous montrons quelques images d'absorption nous permettant de déterminer la position du front d'onde du laser, pour différentes durées de couplage t_c . À partir de telles données obtenues dans deux configurations de guidage, nous traçons en figure 88b, l'évolution de la position du front d'onde du laser. Un ajustement quadratique par la fonction

$$z(t_c) = v t_c + a_{\text{guide}} \frac{t_c^2}{2}, \quad (392)$$

nous permet d'obtenir la vitesse initiale et l'accélération dans chaque cas (1 et 2)

$$\begin{cases} v^{(1)} = v^{(2)} = 9 \pm 2 \text{ mm/s}, \\ a_{\text{guide}}^{(1)} = 0.07 \pm 0.06 \text{ m/s}^2, \\ a_{\text{guide}}^{(2)} = 0.36 \pm 0.04 \text{ m/s}^2. \end{cases} \quad (393)$$

Dans la zone du condensat, les interactions jouent un rôle prépondérant, car ce sont elles qui communiquent une vitesse initiale v au laser guidé. On notera toutefois, que la vitesse correspondant au potentiel chimique, $v_0 = \sqrt{2\mu/m}$, est de 5.4 mm/s, ce qui est plus faible que la valeur de v que l'on obtient. Il semble que des imperfections expérimentales soient à même de rendre compte de l'écart observé et nous donnons quelques pistes d'explications et d'améliorations au paragraphe VI.2.3.c.

De plus, dans la configuration (1), la pince est pratiquement centrée comme le piège magnétique selon z et l'accélération $a_{\text{guide}}^{(1)}$ est assez faible pour que la vitesse reste proche de $v = 10 \text{ mm/s}$. Nous observons un flux atomique $\mathcal{F} = 5 \times 10^5 \text{ at/s}$, ce qui correspond à une densité linéique le long du guide,

$$n_{1D} = \frac{\mathcal{F}}{v} = 40 \text{ at}/\mu\text{m}. \quad (394)$$

La condition $n_{1D}a < 1$, où a est la longueur de diffusion, est vérifiée (nous avons $n_{1D}a = 0.2$). Notre laser se propage donc dans un régime quasiment unidimensionnel, où les interactions ne peuvent avoir des effets que sur la dynamique axiale (selon z) et non pas sur la dynamique transverse [183].

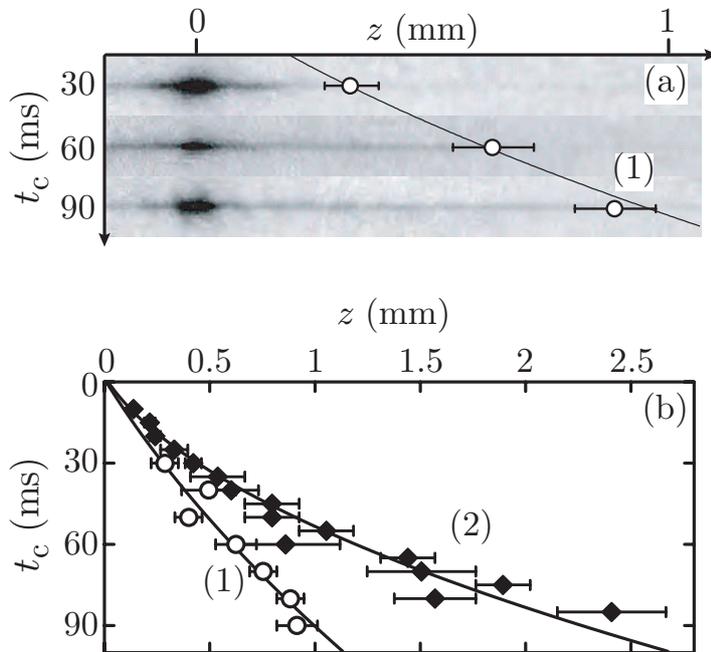


FIG. 88 – Dynamique longitudinale du laser à atomes guidé. (a) Images d'absorption pour différentes durées de couplage t_c . La courbe donne la position correspondante du front d'onde. (b) Évolution de la position du front d'onde pour deux configurations de guidage différentes. Les images (a) appartiennent à la courbe (b1).

De plus, nous considérons que la dynamique transverse du laser s'adapte adiabatiquement au mouvement longitudinal du laser selon z . En utilisant le formalisme introduit en [184], on peut séparer la dynamique axiale de la dynamique transverse. Comme dans le cas du traitement paraxial que nous avons utilisé dans un autre contexte (§ V.1), la dynamique axiale est bien décrite par des équations de propagation semi-classiques, et la partie longitudinale

de la fonction d'onde peut être exprimée à l'aide de la méthode WKB. En particulier, on peut écrire des équations hydrodynamiques de conservation du flux et de l'énergie, valables en régime stationnaire,

$$\begin{cases} \mathcal{F} = n_{1D}(z) v(z), \\ E_{AL} = \frac{1}{2} m v(z)^2 + V_{\text{guide}}(z) + \mu(z). \end{cases} \quad (395)$$

La quantité E_{AL} (figure 87) est l'énergie au point où s'effectue le couplage radiofréquence, et la quantité $\mu(z)$ est un potentiel chimique unidimensionnel effectif, prenant en compte les interactions intralaser ainsi que le confinement transverse [184]. Cette quantité passe continûment de la valeur μ (équation 380) au centre du condensat, à la valeur

$$\mu(z) = \hbar\omega_{\perp 0}(1 + 2a n_{1D}(z)), \quad (396)$$

dans le guide, hors du condensat. Pour analyser les images 88, nous avons négligé tout effet de $\mu(z)$ hors du condensat, car le premier terme dans la seconde équation 395 est prépondérant pour $v = 10$ mm/s.

VI.2.3.b Dynamique transverse

Afin de déterminer le comportement transverse du laser dans le guide, nous mesurons, par la technique de temps de vol la vitesse d'expansion du profil. Sur les images d'absorption, nous mesurons une vitesse $\langle v_y^2 \rangle$ d'expansion du profil intégré le long de l'axe d'imagerie x . Un ajustement donne (figure 89),

$$\langle v_y^2 \rangle = 4.5 \pm 0.2 \text{ mm}^2/\text{s}^2. \quad (397)$$

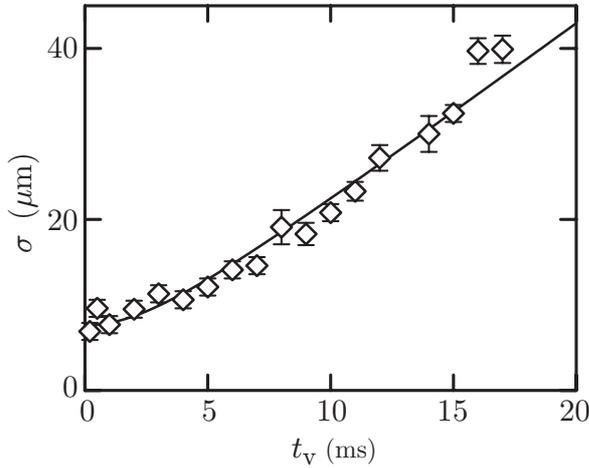


FIG. 89 – Évolution de la taille transverse σ du laser à atomes en fonction du temps de vol t_v : $\sigma = \sqrt{\sigma_0^2 + \langle v_y^2 \rangle t_v^2}$. La taille initiale $\sigma_0 \approx 7.5 \mu\text{m}$ est liée à la résolution du système d'imagerie, car celle-ci domine largement la taille initiale transverse que l'on extrapolerait des points à fort temps de vol.

D'après le théorème d'équipartition de l'énergie dans un piège harmonique, on s'attend à avoir selon la direction y une énergie totale (somme de l'énergie potentielle et cinétique) égale à deux fois l'énergie cinétique, et donc donnée par $E_y = m \langle v_y^2 \rangle$. De plus, en faisant l'hypothèse d'une symétrie cylindrique parfaite, l'énergie transverse du laser selon l'axe x est prise égale à E_y . Au final, l'énergie transverse totale selon les deux degrés de liberté x et y est donnée par

$$E_{\perp} = (5.5 \pm 0.8) \hbar\omega_{\perp 0}. \quad (398)$$

Les modes transverses majoritairement peuplés dans notre réalisation expérimentale sont les premiers modes excités du guide.

VI.2.3.c Vers un couplage monomode transverse

Au-delà de ce que nous avons obtenu expérimentalement jusqu'ici, nous nous attendons à ce que le schéma que nous proposons pour réaliser un laser guidé, permette d'atteindre un régime de fonctionnement monomode transverse.

Un atome dans le condensat et un atome du laser ressentent tous deux le potentiel optique, le champ moyen du condensat et la gravité. La seule chose qui différencie⁷ le potentiel ressenti par ces deux atomes, est donc le potentiel magnétique (expression 372) uniquement ressenti par le condensat.

Dans le cas d'une pince parfaitement centrée transversalement comme le champ magnétique ($x_0 = y_0 = 0$), on peut considérer en première approximation, le potentiel magnétique comme plat, sur l'échelle de la taille transverse du condensat ($2R_{x,y} = 4.8\mu\text{m}$). Ceci signifie, que la partie transverse de la fonction d'onde du laser est proche de la parabole inversée de Thomas-Fermi. Au fur et à mesure que l'onde sort de la zone du condensat, la largeur du « fond plat » du potentiel diminue lentement jusqu'à ce que le laser entre dans le potentiel harmonique transverse du guide (figure 90). Une simulation numérique des équations de Gross-Pitaevskii du système montre que cette évolution est assez lente, pour ne pas induire d'excitations significatives.

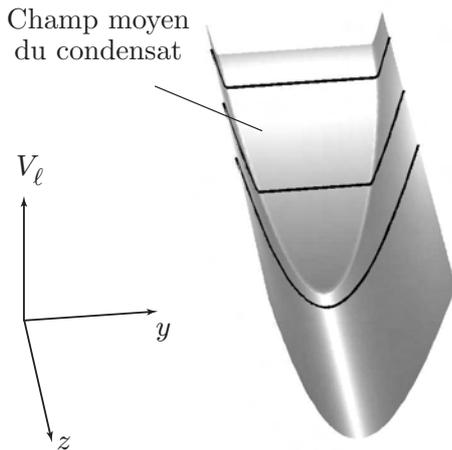


FIG. 90 – Potentiel V_l dans lequel évolue le laser à atomes, qui vaut V_{l1} (équation 382) dans la zone de recouvrement avec le condensat et V_{l2} (équation 383) en dehors. Nous nous sommes placés dans le cas d'un système à symétrie cylindrique, avec un guide et un condensat alignés l'un sur l'autre. En trait plein, on voit la déformation lente du potentiel transverse, au fur et à mesure que l'on sort de la zone du condensat.

Le raisonnement précédent n'est valide que si le guide est suffisamment bien aligné. En cas d'un décalage trop important, le potentiel transverse ne peut plus être approximé par un plan horizontal, mais par une pente transverse. On peut comprendre qualitativement qu'une telle pente induise des excitations transverses, car la fonction propre d'un tel potentiel transverse est plus éloignée de la forme de la parabole inversée de Thomas-Fermi, que dans le cas précédent.

Au-delà d'imperfections dans l'alignement du guide, différents facteurs peuvent expliquer, que le laser que nous avons obtenu ne se propage pas dans le mode fondamental transverse du guide. En particulier, on peut noter que la fréquence de Rabi $\Omega_R = 2\pi \times 40$ Hz que nous utilisons pour le couplage, est du même ordre que la fréquence axiale du piège hybride $\omega_z = 2\pi \times 35$ Hz. On s'attend à ce que l'hypothèse d'adiabaticité du couplage ne soit pas très bien respectée. Des simulations numériques de la dynamique du système exhibent, en effet pour nos paramètres expérimentaux, une excitation du condensat qui se traduit en une excitation transverse du laser à atomes guidé. Enfin, si la dynamique transverse n'est pas parfaitement adiabatique, on peut s'attendre à un transfert d'énergie des degrés de liberté

⁷L'effet Zeeman transverse est négligeable devant tous les autres potentiels.

transverses vers le degré de liberté axial, comme le suggère l'excédent d'énergie cinétique axiale observé (§ VI.2.3.a).

Des pistes d'amélioration du système sont développées actuellement au laboratoire. L'utilisation d'un système d'imagerie plus sensible nous permettrait de travailler à plus faible flux et donc à plus faible fréquence de Rabi. Nous pourrions alors minimiser les excitations du condensat. De plus, en affinant le contrôle du positionnement de la pince optique, par exemple à l'aide d'un asservissement, nous envisageons pouvoir obtenir un laser à atomes encore moins excité transversalement qu'il ne l'est aujourd'hui.

Conclusion à la troisième partie

Dans cette partie, nous avons présenté succinctement quelques idées concernant notre utilisation d'un potentiel optique, pour réaliser un laser à atomes guidé, à partir du dispositif expérimental existant de condensation. On trouvera une approche détaillée de la manipulation optique des atomes et de l'étude du laser à atomes guidé dans [156].

Le schéma présenté, permet d'obtenir une onde de matière guidée dont les spécificités sont résumées ci-dessous.

- Par rapport au cas d'atomes thermiques dans un guide, notre procédure permet de coupler un flux atomique dans un nombre restreint de modes transverses. De plus, grâce à l'adaptation adiabatique du mode transverse du laser en sortie du condensat, notre méthode rend possible le fonctionnement monomode transverse.
- Un réglage des paramètres expérimentaux, permet de contrôler l'accélération selon l'axe z du guide, jusqu'à pouvoir l'annuler. Nous pouvons obtenir ainsi des lasers à atomes se propageant à longueur d'onde de De Broglie constante, par opposition avec ce qui se passe lorsque la gravité joue un rôle dans l'extraction.
- En jouant sur la position de couplage, il est envisageable de modifier l'énergie initiale transmise par le champ moyen du condensat, et donc de régler la longueur d'onde du laser.
- Contrairement aux expériences consistant à relâcher un condensat dans un guide, notre schéma rend possible de manière continue le contrôle du flux atomique utilisé, en jouant sur les paramètres du couteau radiofréquence. En particulier, on a la possibilité de se placer expérimentalement dans un régime de propagation où les interactions au sein du laser sont négligeables.

CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce manuscrit les trois étapes qui ont constitué notre travail de thèse sur l'étude des lasers à atomes, à la fois du point de vue expérimental et théorique.

Avant toute chose, nous avons dû obtenir expérimentalement le condensat nécessaire à la réalisation du laser à atomes. C'est cette étape indispensable à la suite, que nous avons détaillée dans la première partie de ce manuscrit. Aussi, nous avons mis l'accent sur les spécificités de notre expérience. En particulier, après une description du dispositif et des méthodes utilisées, nous avons caractérisé les capacités de notre source atomique. Enfin, après une introduction succincte à la condensation de Bose-Einstein, nous avons présenté notre observation de la dégénérescence quantique dans notre électroaimant ferromagnétique hybride.

Dans la seconde partie, nous avons présenté notre étude de la dynamique de couplage et de la propagation des lasers à atomes. Nous avons tiré parti de notre configuration de piégeage spécifique, qui nous permet d'avoir accès à de nouveaux régimes de fonctionnement du laser. Tout au long de cette partie, nous avons mis en avant les effets liés à la prise en compte d'une interaction condensat-laser particulièrement importante.

Après avoir étendu à notre cas, le cadre général de la description de champ moyen du laser à atomes, nous avons reporté l'observation de la forte dépendance du profil de l'onde extraite en fonction des paramètres de couplage. Nous mettons ainsi en évidence un profil clairement non gaussien, attribuable directement à l'effet des interactions. De plus, nous avons interprété certaines de nos observations expérimentales comme la manifestation d'un caractère non markovien du laser, visible grâce à notre configuration particulière.

Puis, nous avons détaillé notre étude théorique de la propagation de l'onde de matière, en interaction avec le condensat-source. Un des intérêts de notre approche a été, en dérivant un certain nombre de résultats analytiques, de montrer que la propagation d'un laser à atomes est un phénomène physique d'une grande richesse, en présentant différents régimes. Ceci a été particulièrement mis en relief en introduisant des méthodes adaptées à chaque étape de la propagation (iconale, intégrale de Kirchhoff, matrices $ABCD$), et en montrant la pertinence de la transposition à l'optique atomique, des nombreux concepts issus de l'optique photonique.

Enfin, dans le dernier chapitre de cette partie, nous avons présenté une méthode permettant à la fois de quantifier de manière synthétique la qualité du faisceau atomique obtenu expérimentalement, mais aussi de caractériser la propagation du laser lorsqu'il est en régime paraxial. Ceci a été réalisé grâce à l'utilisation du facteur M^2 , qui indique combien de fois

le laser est limité par la diffraction. Ce facteur de qualité est utilisable en optique atomique, au-delà du cas particulier d'un laser à atomes [185].

Dans la troisième partie, nous avons présenté l'utilisation d'un outil pour l'optique atomique : la pince optique. De plus, nous avons décrit une procédure permettant à la fois de s'affranchir de la gravité lors de l'extraction du laser à atomes, et de guider l'onde de matière. Pour cela nous avons utilisé un piège hybride combinant le champ magnétique et un guide optique. Cette configuration dans laquelle le condensat est positionné dans le guide, à la manière des lasers fibrés en optique, est intrinsèquement favorable à l'obtention d'une onde cohérente guidée et monomode transverse. Enfin, nous avons donné les premiers résultats obtenus sur ce système.

À la suite de ce travail, de nouvelles possibilités d'investigations sont ouvertes dans différentes directions.

Tout d'abord, en ce qui concerne les lasers extraits sous l'effet de la gravité, il serait intéressant d'aller au delà de notre traitement, en prenant en compte les interactions au sein même du laser, dans le cas où la densité n'y est pas assez faible pour qu'elles soient négligeables. Une piste consisterait à voir dans quelle mesure, on pourrait traiter le problème en s'inspirant du cas de l'optique non linéaire [186].

En ce qui concerne le laser à atomes guidé, des développements ultérieurs sont envisagés. En premier lieu, une amélioration de la procédure d'alignement de la pince optique sur le piège magnétique, assortie d'un asservissement permettrait de minimiser les excitations transverses dans le guide. De plus, une amélioration de la sensibilité du processus d'imagerie rendrait possible la diminution du flux du laser, et donc minimiserait les excitations résiduelles dans le condensat, excitations pouvant aussi expliquer le caractère multimode transverse de notre guidage. Enfin, une réduction des effets initiaux de champ moyen (par décompression plus poussée du piège magnétique par exemple), permettrait de minimiser la vitesse de propagation du laser et donc d'augmenter sa longueur d'onde de De Broglie. Toutes ces pistes d'amélioration sont actuellement en cours d'investigation au laboratoire.

Notre système constitue une source d'onde cohérente et guidée quasi-continue. À moyen terme, on peut ainsi envisager utiliser notre dispositif pour des investigations dans le domaine du transport quantique, en particulier dans un guide présentant des obstacles [187, 188], ou encore du désordre [189].

Pour pouvoir observer des effets de réflexion quantique, il faut être capable de créer des potentiels variant sur une échelle de l'ordre de la longueur d'onde de De Broglie. Comme notre laser se propage avec une longueur d'onde de 500 nm, il est particulièrement plus favorable à la réalisation pratique d'obstacles, par exemple à l'aide de moyens optiques.

Ainsi, on envisage de réaliser par exemple, un Fabry-Pérot atomique à l'aide d'un faisceau optique transverse présentant deux lobes, et constituant donc une microcavité sur le chemin du laser à atomes. Entre autres, on pourrait utiliser ce système pour mesurer la largeur de raie du laser à atomes. De plus, on pourrait envisager tirer parti des interactions atomiques pour observer des effets non-linéaires, par exemple de bistabilité dans la cavité [190, 191].

Enfin, du point de vue de l'interférométrie atomique, on pourrait envisager utiliser notre schéma expérimental pour réaliser une source cohérente sur des dispositifs présentant des structures de guidage plus complexes [192, 193].

L'ATOME DE RUBIDIUM PLONGÉ DANS UN CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Nous présentons, dans cette annexe, les résultats concernant l'interaction de l'atome de Rubidium, avec le champ électromagnétique qui nous permet de le manipuler, ces résultats étant utilisés tout au long du manuscrit.

L'atome de Rubidium a une structure hyperfine (figure 2), et son état interne est pleinement déterminé par la donnée des nombres quantiques $a = \{L; J; F; m_F\}$. L'hamiltonien associé à ses niveaux atomiques s'écrit

$$\hat{H}_{\text{atomique}} = \sum_{a=\{L;J;F;m_F\}} E_a |a\rangle \langle a|. \quad (\text{A.1})$$

Dans cette écriture, les niveaux de même m_F sont dégénérés et l'énergie E_a ne dépend donc pas de m_F .

Nous abordons tout d'abord l'interaction atome-rayonnement en mettant tout particulièrement l'accent sur les spécificités liées à la structure multi-niveaux de l'atome. Ainsi, nous donnons les coefficients de branchement des transitions, sous l'effet de différentes polarisations du laser excitateur (§ A.1.2). Ceci nous permet de généraliser certains résultats de l'atome à deux niveaux au cas d'un atome réel (§ A.1.3), que ce soit pour l'interaction avec une onde proche de résonance, ou d'une onde fortement désaccordée. Dans ce dernier cas (§ A.1.4), nous discutons des déplacements lumineux, des couplages et du taux d'émission spontanée qui sont induits par le laser.

Dans un second temps (§ A.2), nous présentons l'effet d'un champ magnétique statique sur les niveaux atomiques et abordons le calcul général de l'effet Zeeman. Nous donnons enfin quelques résultats dans certains cas particuliers, comme la formule de Breit-Rabi pour la multiplicité fondamentale, permettant en particulier d'y calculer l'effet Zeeman quadratique.

A.1 L'interaction avec le rayonnement

A.1.1 L'hamiltonien dipolaire électrique

L'hamiltonien général (Appendice de [39]) auquel est soumis un atome de Rubidium interagissant avec le champ électromagnétique s'écrit comme,

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2 \vec{k}_G^2}{2m} + \hat{H}_{\text{atomique}} + \sum_i \hbar \omega_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{H}_{\text{e.m.}}, \quad (\text{A.2})$$

où le premier terme concerne le mouvement externe du centre de masse de l'atome \vec{r}_G . Le second terme est l'hamiltonien de l'équation A.1. Le troisième terme correspond à tous les modes i du champ quantifié. En particulier, il rend compte de la présence du champ du vide. Le dernier terme correspond au champ de couplage entre le champ \vec{E} et l'atome. Il s'agit du terme dipolaire électrique¹

$$\hat{H}_{\text{e.m.}} = - \sum_{q=-1,0,1} \hat{d}_q \vec{e}_q^* \cdot \vec{E}. \quad (\text{A.3})$$

La sommation s'effectue sur les trois polarisations possibles repérées par rapport à l'axe de quantification z . Les vecteurs de la base sphérique complexe associée s'écrivent (Complément E_X de [142])

$$\begin{cases} \text{Polarisation } \pi : \vec{e}_0 = \vec{e}_z, \\ \text{Polarisation } \sigma^\pm : \vec{e}_{\pm 1} = \mp \frac{(\vec{e}_x \pm i \vec{e}_y)}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Les trois composantes du tenseur dipolaire ($\hat{d}_{-1}; \hat{d}_0; \hat{d}_1$) sont reliées à l'opérateur de position de l'électron (de charge $e = -1.6 \times 10^{-19}$ C) relativement au noyau ($\hat{X}; \hat{Y}; \hat{Z}$), selon

$$\begin{cases} \hat{d}_{-1} = \frac{e}{\sqrt{2}} (\hat{X} - i \hat{Y}), \\ \hat{d}_0 = e \hat{Z}, \\ \hat{d}_1 = -\frac{e}{\sqrt{2}} (\hat{X} + i \hat{Y}). \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

A.1.2 Les coefficients de branchement

A.1.2.a Coefficients de Clebsch-Gordan

Les termes de couplage $\langle L'=1, J', F', m_{F'} | \hat{d}_q | L=0, J=1/2, F, m_F \rangle$ interviennent dans le couplage atome-rayonnement correspondant à une transition de polarisation q entre un état fondamental $|L=0, J=1/2, F, m_F\rangle$ et un état excité $|L'=1, J', F', m_{F'}\rangle$ (J' vaut respectivement 1/2 ou 3/2 pour la raie D₁ et D₂). On peut vérifier que l'opérateur ($\hat{d}_{-1}; \hat{d}_0; \hat{d}_1$) vérifie les relations de commutation

$$\begin{cases} [\hat{F}_\pm, \hat{d}_q] = \sqrt{2 - q(q \pm 1)} \hat{d}_{q \pm 1}, \\ [\hat{F}_z, \hat{d}_q] = q \hat{d}_q, \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

¹On peut considérer le champ \vec{E} du laser comme un champ classique, car ce dernier est bien décrit par un état cohérent. En effet, un tel état est la somme d'un champ classique et d'un champ quantique du vide (p. 571 de [39]), et cette dernière composante est déjà prise en compte dans le troisième terme de l'équation A.2.

où l'on a introduit les opérateurs $\hat{F}_\pm = \hat{F}_x \pm i\hat{F}_y$. Il s'agit donc d'un opérateur tensoriel irréductible d'ordre 1 qui vérifie le théorème de Wigner-Eckart (§ XIII-31/32 de [84])

$$\langle L', J', F', m_{F'} | \hat{d}_q | L, J, F, m_F \rangle = \langle F', m_{F'} | F, m_F; 1, q \rangle \langle L', J', F' || \hat{d} || L, J, F \rangle. \quad (\text{A.7})$$

L'élément de matrice est donc exprimé comme le produit du coefficient de Clebsch-Gordan $\langle F', m_{F'} | F, m_F; 1, q \rangle$ et d'un élément de matrice réduit $\langle L', J', F' || \hat{d} || L, J, F \rangle$. L'intérêt de cette écriture consiste à ne faire apparaître la dépendance en $m_F, m_{F'}$ et q que dans le coefficient de Clebsch-Gordan, tandis que l'élément de matrice réduit dépend seulement des espaces hyperfins considérés. Le ket $|F, m_F; 1, q\rangle$ correspond à la combinaison de l'état de l'atome dans le fondamental $|F, m_F\rangle$ avec un photon de moment cinétique 1 et de projection q , tandis que le bra $\langle F', m_{F'} |$ réalise le produit scalaire de cette combinaison avec l'état excité $|F', m_{F'}\rangle$. Le coefficient de Clebsch-Gordan, qui en résulte, n'est non nul que si les règles de sélection générales pour les transitions entre états hyperfins sont respectées

$$|F - F'| = 1 \quad \text{et} \quad m_{F'} = m_F + q. \quad (\text{A.8})$$

Il est utile de réécrire ce coefficient en utilisant les notations de la théorie des moments angulaires et en particulier les symboles « 3j » de Wigner (Appendice C de [84])

$$\langle F', m_{F'} | F, m_F; 1, q \rangle = (-1)^{F-1+m_{F'}} \sqrt{2F'+1} \begin{pmatrix} F & 1 & F' \\ m_F & q & -m_{F'} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

A.1.2.b Éléments de matrice réduits de l'opérateur dipôle

En outre, il est nécessaire de relier l'élément de matrice réduit $\langle L', J', F' || \hat{d} || L, J, F \rangle$ au dipôle de la transition² $S \rightarrow P$: $d = -\langle L' || \hat{d} || L \rangle = 2.53 \times 10^{-29} \text{ C.m}$ (table 1). Pour cela, exprimons d'abord $\langle L', J', F' || \hat{d} || L, J, F \rangle$ en fonction de $\langle L', J' || \hat{d} || L, J \rangle$. En effet, on peut réécrire $\langle L', J', F', m_{F'} | \hat{d}_q | L, J, F, m_F \rangle$ en introduisant la base partiellement découplée $|L, J, I, m_J, m_I\rangle$

$$\begin{aligned} \langle L', J', F', m_{F'} | \hat{d}_q | L, J, F, m_F \rangle &= \sum_{m_J, m_{J'}, m_I, m_{I'}} \langle F', m_{F'} | L', J', I, m_{J'}, m_{I'} \rangle \\ &\langle L', J', I, m_{J'}, m_{I'} | \hat{d}_q | L, J, I, m_J, m_I \rangle \langle L, J, I, m_J, m_I | F, m_F \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

et utiliser le théorème de Wigner-Eckart cette fois-ci sur le terme

$$\langle L', J', I, m_{J'}, m_{I'} | \hat{d}_q | L, J, I, m_J, m_I \rangle = \langle J', m_{J'} | J, m_J; 1, q \rangle \langle L', J' || \hat{d} || L, J \rangle \delta_{m_I, m_{I'}}. \quad (\text{A.11})$$

Le symbole de Kronecker $\delta_{m_I, m_{I'}}$ intervient car l'opérateur dipôle, qui agit uniquement sur l'espace des positions, commute avec les moments cinétiques internes \hat{I} et \hat{S} . On obtient de même les règles de transition $|J - J'| = 1$ et $m_{J'} = m_J + q$. En utilisant $m_I = m_F - m_J$, on remarque que la seule sommation qui reste est celle qui a lieu sur m_J et l'on réécrit l'équation A.10 en introduisant les symboles « 3j » de Wigner

$$\begin{aligned} \frac{\langle L', J', F', m_{F'} | \hat{d}_q | L, J, F, m_F \rangle}{\langle L', J' || \hat{d} || L, J \rangle} &= \sqrt{(2F'+1)(2F+1)(2J'+1)} \sum_{m_J} (-1)^{J'-1+m_J} \\ &\begin{pmatrix} J' & I & F' \\ m_{J'} & m_F - m_J & -m_F - q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & I & F \\ m_J & m_F - m_J & -m_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & 1 & J' \\ m_J & q & -m_J - q \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

²Le signe négatif dans l'expression de d provient du fait que le dipôle est orienté de l'électron vers le noyau.

D'autre part, ces symboles sont reliés aux symboles « 6j » de Wigner (Appendice C de [84]) selon

$$\sum_{M_1, M_2, M_3} (-1)^{J_1+J_2+J_3+M_1+M_2+M_3} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & j_3 \\ M_1 & -M_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_2 & J_3 & j_1 \\ M_2 & -M_3 & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_3 & J_1 & j_2 \\ M_3 & -M_1 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ J_1 & J_2 & J_3 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

On peut appliquer cette propriété à notre cas particulier en posant $j_1 = F$, $j_2 = 1$, $j_3 = F'$, $J_1 = J'$, $J_2 = I$, $J_3 = J$, $m_1 = m_F$, $m_2 = q$, $m_3 = -m_F - q$, $M_1 = m_J + q$, $M_2 = m_J - m_F$ et $M_3 = m_J$. Après avoir tiré parti des propriétés de permutation au sein des symboles « 3j » et « 6j » de Wigner, on retrouve le même symbole « 3j » que celui de la relation A.9. Ainsi, en identifiant les relations A.7 et A.12, on obtient

$$\langle L', J', F' | \hat{d} | L, J, F \rangle = (-1)^{F+I+J'+1} \sqrt{(2F+1)(2J'+1)} \begin{Bmatrix} J' & J & 1 \\ F & F' & I \end{Bmatrix} \langle L', J' | \hat{d} | L, J \rangle. \quad (\text{A.14})$$

On peut suivre le même raisonnement en remplaçant I par S , J par L et F par J , et l'on aboutit à

$$\langle L', J' | \hat{d} | L, J \rangle = (-1)^{J+S+L'+1} \sqrt{(2J+1)(2L'+1)} \begin{Bmatrix} L' & L & 1 \\ J & J' & S \end{Bmatrix} \langle L' | \hat{d} | L \rangle. \quad (\text{A.15})$$

A.1.2.c Expression des coefficients de branchement

Finalement, en utilisant les relations A.7, A.9, A.14 et A.15, on obtient une relation générale explicite pour le terme de couplage

$$\langle L', J', F', m_{F'} | \hat{d}_q | L, J, F, m_F \rangle = d (-1)^{m_{F'}+I+J'+J+S+L'} \begin{pmatrix} F & 1 & F' \\ m_F & q & -m_{F'} \end{pmatrix} \sqrt{(2F'+1)(2F+1)(2J'+1)(2J+1)(2L'+1)} \begin{Bmatrix} L' & L & 1 \\ J & J' & S \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J' & J & 1 \\ F & F' & I \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.16})$$

que l'on peut simplifier dans notre cas particulier où $L=0$, $L'=1$, $S=1/2$, $I=3/2$ et $J=1/2$ en

$$\langle J', F', m_{F'} | \hat{d}_q | 1/2, F, m_F \rangle = d (-1)^{m_{F'}+1} \sqrt{(2F'+1)(2F+1)(2J'+1)} \begin{pmatrix} F & 1 & F' \\ m_F & q & -m_{F'} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J' & 1/2 & 1 \\ F & F' & 3/2 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

Les coefficients de Wigner sont calculés en utilisant des algorithmes utilisant les formules de Racah (Appendice C de [84]), et sont par exemple accessibles via le logiciel de calcul symbolique Mathematica[®] [194]. Nous donnons, dans les figures A.1 et A.2, les valeurs que prennent les coefficients $\mathcal{C}(J', F, m_F, F', q) = \langle J', F', m_{F'} | \hat{d}_q | 1/2, F, m_F \rangle / d$ pour les deux raies du ⁸⁷Rb.

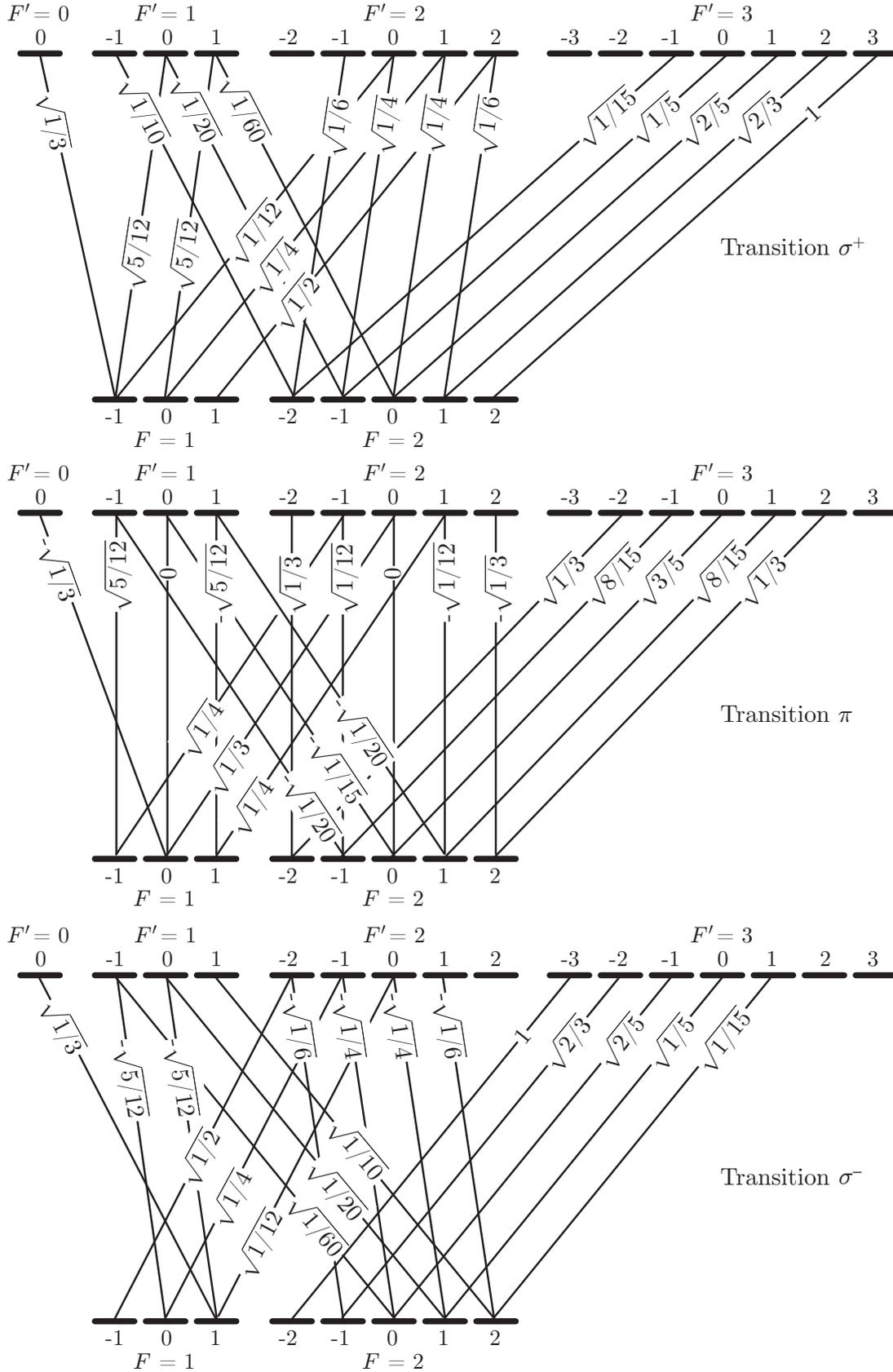


FIG. A.1 – Coefficients $\mathcal{C}(J'=3/2, F, m_F, F', q)$ des transitions de la raie D_2 du ^{87}Rb calculés à l'aide de la relation A.17.

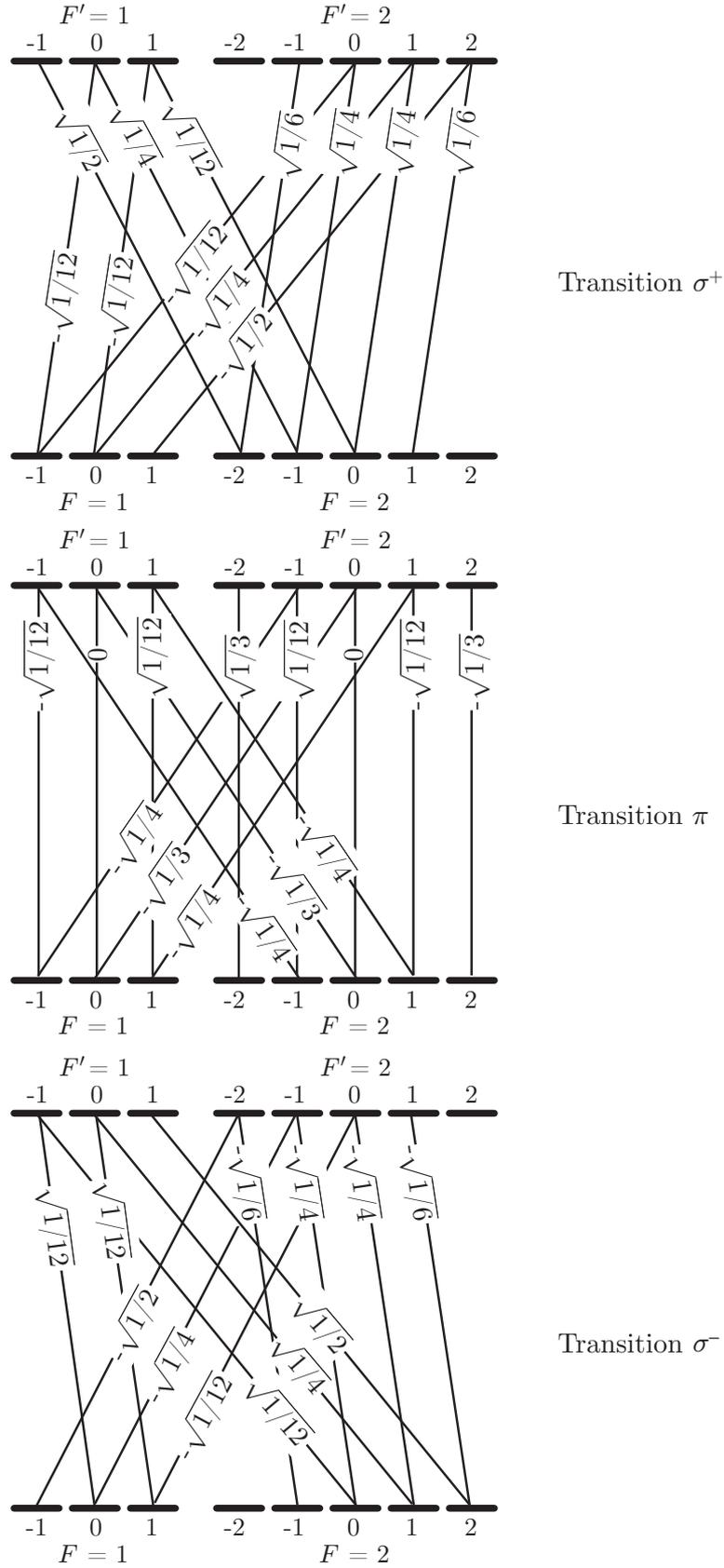


FIG. A.2 – Coefficients $\mathcal{C}(J'=1/2, F, m_F, F', q)$ des transitions de la raie D_1 du ^{87}Rb calculés à l'aide de la relation A.17.

A.1.2.d Deux propriétés

Ces coefficients vérifient, entre autres, les deux relations suivantes. Considérons un atome dans un état excité $|F', m_{F'}\rangle$ de durée de vie Γ . La somme des éléments de matrice au carré sur toutes les transitions partant de cet état est égale à d^2 , d'où la relation suivante sur les $\mathcal{C}(J', F, m_F, F', q)$,

$$\sum_{F,q} \mathcal{C}^2(J', F, m_{F'} - q, F', q) = 1. \quad (\text{A.18})$$

De même, une onde de polarisation q couple un état fondamental $|F, m_F\rangle$ à différents états excités $|F', m_{F'} + q\rangle$. Faire la somme des carrés de tous les éléments de couplage correspondants revient à négliger la structure fine et hyperfine et cette somme doit donc être égale à d^2

$$\sum_{J',F'} \mathcal{C}^2(J', F, m_F, F', q) = 1. \quad (\text{A.19})$$

A.1.3 Quelques résultats dérivés du cas de l'atome à deux niveaux

La structure atomique contient plusieurs niveaux, et l'on pourrait écrire les équations de Bloch optiques décrivant l'interaction atome-rayonnement dans le cas pratique où l'atome interagit avec un rayonnement monochromatique proche de résonance (les lasers). Ces équations sont dérivées en sommant la contribution des lasers et celle de l'équation pilote correspondant au couplage avec le champ du vide (Chap. IV et V de [39]). La résolution de ces équations nécessite dans le cas général une résolution numérique. Cependant, on peut décrire certains phénomènes comme le ralentissement Zeeman (§ I.2.2) et le piège magnéto-optique (§ I.2.3) en se basant sur les résultats des équations de Bloch pour l'atome à deux niveaux (Chap. V de [39]).

Soit une transition entre deux niveaux $|F, m_F\rangle$ et $|J', F', m_{F'} + q\rangle$ de fréquence ω . Ils sont couplés via l'hamiltonien dipolaire électrique à un champ \vec{E} de polarisation q , de fréquence ω_ℓ et d'intensité $I = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 / 2$. Le désaccord du laser par rapport à la transition est noté $\delta = \omega_\ell - \omega$. On introduit Ω , la fréquence de Rabi associée à ce couplage

$$\Omega = |\mathcal{C}(J', F, m_F, F', q)| \frac{d|\vec{E}|}{\hbar}, \quad (\text{A.20})$$

et s , le paramètre de saturation de la transition

$$s = \mathcal{C}^2(J', F, m_F, F', q) \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + 4\delta^2/\Gamma^2}. \quad (\text{A.21})$$

Nous avons noté Γ le taux d'émission spontanée dépendant de J' via λ (relation 1). De plus nous avons introduit l'intensité de saturation

$$I_{\text{sat}} = \frac{16c\pi^4 d^2}{9\epsilon_0 \lambda^6} = \begin{cases} 1.67 \text{ mW/cm}^2 & \text{pour la raie D}_2, \\ 1.49 \text{ mW/cm}^2 & \text{pour la raie D}_1. \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Ainsi, le taux de pompage Γ_p de $|F, m_F\rangle$ vers $|J', F', m_{F'} + q\rangle$ s'écrit

$$\Gamma_p = \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1 + s}, \quad (\text{A.23})$$

tandis que le taux d'émission spontanée Γ_{sp} de $|J', F', m_F + q\rangle$ vers $|F, m_F\rangle$ est

$$\Gamma_{\text{sp}} = \Gamma \mathcal{C}^2(J', F, m_F, F', q). \quad (\text{A.24})$$

Dans le cas d'une transition fermée c'est-à-dire pour laquelle $\mathcal{C}^2(J', F, m_F, F', q) = 1$, l'état stationnaire correspond à une population Π_e dans l'état excité donnée par

$$\Pi_e = \frac{s/2}{1 + s}. \quad (\text{A.25})$$

A.1.4 L'atome plongé dans un laser fortement désaccordé

Au cours du travail relaté dans ce manuscrit (chapitre VI), nous avons été amenés à manipuler les atomes à l'aide d'un laser très désaccordé et intense, constituant une pince optique. Bien que là encore, il s'agisse d'une interaction avec une onde lumineuse, l'effet de cette dernière est très différent de celui d'une onde proche d'une résonance atomique. Nous discutons en particulier, dans ce paragraphe, les effets liés à la prise en compte de la structure hyperfine de l'atome, à la fois sur le potentiel effectif qu'il ressent, et sur le taux d'émission spontanée résultant de l'interaction avec l'onde fortement désaccordée.

A.1.4.a Potentiel effectif

Considérons un laser très désaccordé ($\lambda = 1064 \text{ nm}$ pour notre cas d'un laser Nd : YAG) par rapport aux transitions optiques du Rubidium. Nous souhaitons mettre en évidence dans cette annexe, les couplages induits par un tel champ électromagnétique entre les niveaux atomiques. Lorsque le laser est proche de résonance, nous avons considéré le couplage à un photon entre un niveau fondamental et excité (§ A.1.3). Dans le cas, où le laser est très désaccordé, un tel processus est peu probable, ce qui se traduit par un taux d'émission spontanée faible (§ A.1.4.b). Par contre, le couplage d'ordre supérieur faisant intervenir deux photons du laser devient prépondérant. Ce couplage correspond à l'absorption d'un photon du laser et à l'émission induite d'un autre photon dans le laser. Contrairement au cas précédent, ce processus couple entre eux les états d'une même multiplicité ($5^2\text{S}_{1/2}$, $5^2\text{P}_{1/2}$ ou $5^2\text{P}_{3/2}$).

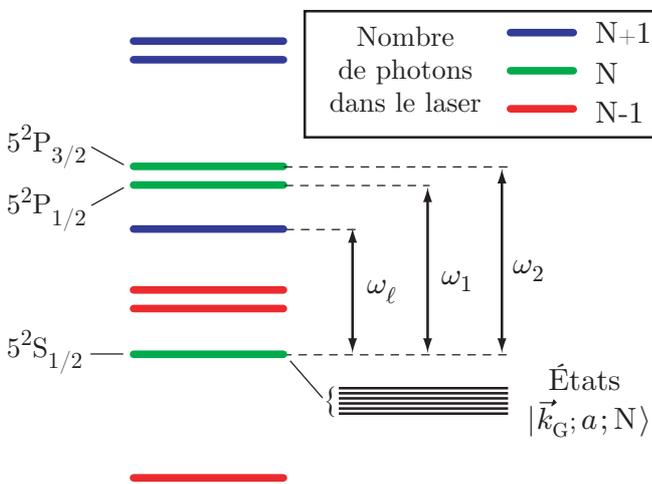


FIG. A.3 – Disposition des multiplicités atomiques ($5^2\text{S}_{1/2}$, $5^2\text{P}_{1/2}$ ou $5^2\text{P}_{3/2}$) habillées par les photons du champ du laser. Ce dernier est de fréquence $\omega_\ell = 2\pi c/\lambda$, et on a noté ω_1 et ω_2 , les fréquences des raies D₁ et D₂. Les différentes couleurs différencient les multiplicités avec différents nombres de photons. Comme détaillé pour la multiplicité $5^2\text{S}_{1/2}$ habillée par N photons, chaque état correspond au produit tensoriel de l'état externe de l'atome $|\vec{k}_G\rangle$, de l'état interne $|a\rangle$, et de l'état $|N\rangle$ du champ électromagnétique contenant N photons.

Hypothèses

Nous considérons les états $|\vec{k}_G; a; N\rangle$, correspondant à l'atome d'état externe \vec{k}_G , d'état interne a , et habillé par N photons du laser. Comme schématisé en figure A.3, ces états se regroupent au sein des multiplicités fines ($5^2S_{1/2}$, $5^2P_{1/2}$ ou $5^2P_{3/2}$). En effet, l'énergie associée au mouvement externe de l'atome est de l'ordre de l'énergie thermique $k_B T$, qui, aux températures des atomes que nous manipulons (inférieures au millikelvin), est au plus de quelques dizaines de mégahertz, et n'excède pas la largeur des multiplicités fines (figure 2).

Par contre, ces dernières, habillées par le champ du laser sont bien séparées les unes des autres, comme schématisé en figure A.3, puisque le laser est très désaccordé. En effet, la largeur de ces multiplicités, qui est au plus de l'ordre de Δ_{HF} (l'écart hyperfin de l'état fondamental), est à la fois, bien plus faible que le désaccord du laser par rapport à chacune des transitions (D_1 et D_2), et par rapport à l'écart entre ces dernières,

$$|\omega_\ell - \omega_1|, |\omega_\ell - \omega_2|, |\omega_1 - \omega_2| \gg 2\pi \Delta_{\text{HF}}. \quad (\text{A.26})$$

Enfin, on peut traiter le terme dipolaire électrique $\hat{H}_{\text{e.m.}}$ du hamiltonien (équation A.2), comme étant une perturbation par rapport à l'écart d'énergie entre les états qu'il couple au premier ordre,

$$\frac{\langle \hat{H}_{\text{e.m.}} \rangle}{\hbar(\omega_{1,2} - \omega_\ell)} = \frac{d|\vec{E}|}{\hbar(\omega_{1,2} - \omega_\ell)} \simeq 10^{-3}, \quad (\text{A.27})$$

avec d , le dipôle de la transition $S \rightarrow P$ (table 1), et en prenant une intensité lumineuse $I = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2 / 2 = 100 \text{ mW} / \mu\text{m}^2$, qui correspond à un champ bien plus important que celui que l'on est amené à considérer expérimentalement dans ce manuscrit.

Formalisme de l'hamiltonien effectif

Compte tenu de toutes ces hypothèses, le formalisme de l'hamiltonien effectif (Complément B.I. de [39]) est particulièrement bien adapté, pour connaître l'effet de l'hamiltonien \hat{H} au sein d'une même multiplicité. Ce formalisme permet d'écrire un hamiltonien \hat{H}_{eff} dans chaque multiplicité, ayant les mêmes valeurs propres que \hat{H} , mais n'ayant pas d'éléments de matrice entre différentes multiplicités. Ce hamiltonien effectif est obtenu par un développement de \hat{H} , et rend non seulement compte des déplacements énergétiques des niveaux perturbés, mais aussi d'éventuels couplages entre ces niveaux. Pour le cas qui nous intéresse, nous écrivons le hamiltonien effectif comme

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{\hbar^2 \vec{k}_G^2}{2m} + \hat{H}_{\text{atomique}} + \sum_i \hbar \omega_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \hat{V}_{\text{eff}}, \quad (\text{A.28})$$

où le terme de couplage effectif est obtenu à l'aide d'un développement au deuxième ordre. Les éléments de matrice de ce terme, entre deux états $|\alpha_1\rangle$ et $|\alpha_2\rangle$ appartenant à la même multiplicité, s'écrit

$$\langle \alpha_2 | \hat{V}_{\text{eff}} | \alpha_1 \rangle = \frac{1}{2} \sum_\beta \langle \alpha_2 | \hat{H}_{\text{e.m.}} | \beta \rangle \langle \beta | \hat{H}_{\text{e.m.}} | \alpha_1 \rangle \left(\frac{1}{E_{\alpha_2} - E_\beta} + \frac{1}{E_{\alpha_1} - E_\beta} \right). \quad (\text{A.29})$$

La sommation se fait sur tous les états intermédiaires $|\beta\rangle$ appartenant aux multiplicités différentes de celle commune à $|\alpha_1\rangle$ et $|\alpha_2\rangle$. Les numérateurs font apparaître les termes de couplage, tandis que les dénominateurs font intervenir les différences d'énergies E de chacun des états considérés. Comme la largeur des multiplicités est bien inférieure à l'écart énergétique entre elles (équation A.26), nous pouvons négliger dans les dénominateurs, la dépendance de l'énergie des états en \vec{k}_G , donc en particulier, l'énergie de recul, ainsi que la dépendance due à la structure hyperfine. Nous considérons donc que tous les états d'une même multiplicité ont environ la même énergie dans l'expression A.29, c'est-à-dire $E_{\alpha_1} = E_{\alpha_2} = E_\alpha$.

Application à notre cas

Écrivons le champ du laser de manière quantifiée [39], afin de faire apparaître explicitement les opérateurs de création (\hat{a}^\dagger) et d'annihilation (\hat{a}) d'un photon du laser,

$$\hat{\vec{E}} = i\vec{e} \left(\mathcal{E}(\vec{r}_G) \hat{a} - \mathcal{E}^*(\vec{r}_G) \hat{a}^\dagger \right), \quad (\text{A.30})$$

où \mathcal{E} est l'amplitude du champ complexe, et \vec{e} la polarisation du laser. En ne considérant le champ qu'à la position du centre de masse \vec{r}_G , nous avons fait l'approximation dipolaire considérant que la longueur d'onde λ est bien plus grande que l'extension de l'atome. Le terme de couplage $\hat{H}_{e.m.}$ s'écrit alors comme

$$\hat{H}_{e.m.} = -i \sum_{q=-1,0,1} c_q \left[\hat{d}_q^+ \mathcal{E}(\vec{r}_G) \hat{a} - \hat{d}_{-q}^+ \mathcal{E}^*(\vec{r}_G) \hat{a}^\dagger + \hat{d}_{-q}^- \mathcal{E}(\vec{r}_G) \hat{a} - \hat{d}_q^- \mathcal{E}^*(\vec{r}_G) \hat{a}^\dagger \right], \quad (\text{A.31})$$

et fait apparaître, pour chaque composante de la polarisation du laser $c_q = \vec{e}_q^* \cdot \vec{e}$, quatre termes correspondant à la combinaison des processus d'absorption-émission d'un photon et de ceux d'excitation-déexcitation de l'atome. Nous avons noté \hat{d}_q^+ (\hat{d}_q^+), l'opérateur dipolaire associé à la transition $S \rightarrow P$, en absorbant (émettant) un photon de moment cinétique q . De même, \hat{d}_q^- (\hat{d}_q^-) correspond à l'opérateur dipolaire associé à la transition $P \rightarrow S$, en émettant (absorbant) un photon de moment cinétique q .

Nous appliquons la relation A.29 au cas de deux états appartenant à la multiplicité $5^2S_{1/2}$ habillée de N photons, $|\alpha_1\rangle = \left| \vec{k}_1; F, m_F; N \right\rangle$ et $|\alpha_2\rangle = \left| \vec{k}_2; F', m_{F'}; N \right\rangle$, tandis que les états intermédiaires $|\beta\rangle = \left| \vec{k}; J', f, m_f; N \pm 1 \right\rangle$ sont ceux des multiplicités $5^2P_{1/2}$ ($J' = 1/2$) et $5^2P_{3/2}$ ($J' = 3/2$), habillés soit de $N + 1$ photons, soit de $N - 1$ photons. On obtient alors pour $\langle \alpha_2 | \hat{V}_{\text{eff}} | \alpha_1 \rangle$,

$$-\frac{|\mathcal{E}(\vec{r}_G)|^2}{\hbar} \sum_{\substack{q_1, q_2 \\ J', f, m_f}} c_{q_1} c_{q_2} \left[\frac{\langle F', m_{F'}, N | \hat{d}_{q_2}^- \hat{a}^\dagger | J', f, m_f, N-1 \rangle \langle J', f, m_f, N-1 | \hat{d}_{q_1}^+ \hat{a} | F, m_F, N \rangle}{\omega_{J'} - \omega_\ell} + \frac{\langle F', m_{F'}, N | \hat{d}_{-q_2}^- \hat{a} | J', f, m_f, N+1 \rangle \langle J', f, m_f, N+1 | \hat{d}_{-q_1}^+ \hat{a}^\dagger | F, m_F, N \rangle}{\omega_{J'} + \omega_\ell} \right]. \quad (\text{A.32})$$

Le terme $|\mathcal{E}(\vec{r}_G)|^2$ provient de l'application de $\hat{H}_{e.m.}$ sur la partie externe des états $|k_i\rangle$. La sommation est réalisée sur les polarisations q_1 et q_2 des photons du laser intervenant dans le processus du second ordre, ainsi que sur les états internes intermédiaires $|\beta\rangle$. Les deux termes entre crochets correspondent aux deux processus possibles :

- Premier terme : absorption d'un photon (polarisation q_1) du laser et excitation de l'atome, puis désexcitation accompagnée de l'émission d'un photon (polarisation q_2).
- Second terme : émission d'un photon (polarisation q_1) du laser et excitation de l'atome, puis désexcitation accompagnée de l'absorption d'un photon (polarisation q_2).

Le premier processus est appelé résonant (dénominateur en $\omega_{J'} - \omega_\ell$), tandis que le second est anti-résonant (dénominateur en $\omega_{J'} + \omega_\ell$). Comme le laser est très désaccordé, le terme anti-résonant n'est pas négligeable devant le terme résonant, $(\omega_{J'} + \omega_\ell)/(\omega_{J'} - \omega_\ell) \approx 6$, et il faut le prendre en compte.

On peut réécrire l'expression A.32, en faisant agir les opérateurs \hat{a} et \hat{a}^\dagger . Ils font apparaître un facteur N ou $N+1$ respectivement dans le terme résonant ou anti-résonant. Comme le laser contient un grand nombre de photons, on peut prendre $N + 1 \approx N$, et introduire l'intensité du laser définie par $I(\vec{r}_G) = 2N\epsilon_0 c |\mathcal{E}(\vec{r}_G)|^2$. Les termes du type $\langle J', f, m_f | \hat{d}_{q_1}^\dagger | F, m_F \rangle$ font apparaître le dipôle d et les coefficients de branchement \mathcal{C} des transitions hyperfines (§ A.1.2).

Finalement, on obtient

$$\langle \alpha_2 | \hat{V}_{\text{eff}} | \alpha_1 \rangle = -\frac{I(\vec{r}_G) d^2}{2\hbar\epsilon_0 c} \sum_{q_1, q_2} c_{q_1} c_{q_2} \left[\frac{\mathcal{A}(q_1, q_2)}{\omega_{J'} - \omega_\ell} + \frac{\mathcal{A}(-q_1, -q_2)}{\omega_{J'} + \omega_\ell} \right], \quad (\text{A.33})$$

où l'on a noté les coefficients $\mathcal{A}(q_1, q_2)$,

$$\mathcal{A}(J', F', m_{F'}, F, m_F, q_1, q_2) = \sum_f \mathcal{C}(J', F', m_{F'}, f, q_2) \mathcal{C}(J', F, m_F, f, q_1). \quad (\text{A.34})$$

L'expression générale A.33, permet de calculer les couplages induits par un laser très désaccordé de polarisation quelconque, et ce entre tous les états hyperfins $|F, m_F\rangle$ et $|F', m_{F'}\rangle$ de la multiplicité fondamentale $5^2S_{1/2}$.

Cas d'un laser de polarisation q donnée

À partir de ce résultat, nous pouvons par exemple calculer l'effet d'un laser de polarisation q donnée (soit π , soit σ^+ ou σ^-). Dans l'expression A.33, on a alors forcément $q_1 = q_2 = q$ et $c_{q_1} = c_{q_2} = 1$, et l'élément de matrice s'écrit

$$\langle F', m_{F'} | \hat{V}_{\text{eff}} | F, m_F \rangle = -\frac{I(\vec{r}_G) d^2}{2\hbar\epsilon_0 c} \sum_{J'} \left[\frac{\mathcal{A}(q, q)}{\omega_{J'} - \omega_\ell} + \frac{\mathcal{A}(-q, -q)}{\omega_{J'} + \omega_\ell} \right]. \quad (\text{A.35})$$

Nous pouvons voir sur l'expression de $\mathcal{A}(q, q)$ (équation A.34), que seuls sont non nuls les coefficients associés à des états tels que de $m_{F'} = m_F$. En effet, de par la conservation du moment cinétique, le processus d'absorption et d'émission d'un photon du laser de polarisation fixée, ne change pas, au final, le moment cinétique de l'atome.

Nous avons rassemblé les valeurs de ces coefficients dans les tables A.1, pour $q=0$ et $q=1$. Les valeurs pour $q=-1$ s'en déduisent à partir des propriétés de symétrie des coefficients de branchement et on a

$$\mathcal{A}(J', F', m_F, F, m_F, q, q) = (-1)^{|F-F'|} \mathcal{A}(J', F', -m_F, F, -m_F, -q, -q). \quad (\text{A.36})$$

$J'=3/2; q=0$	$F=1$			$F=2$				
	$m_F=1$	$m_F=0$	$m_F=-1$	$m_F=2$	$m_F=1$	$m_F=0$	$m_F=-1$	$m_F=-2$
$F'=1$	2/3	2/3	2/3	0	0	0	0	0
$F'=2$	0	0	0	2/3	2/3	2/3	2/3	2/3

$J'=1/2; q=0$	$F=1$			$F=2$				
	$m_F=1$	$m_F=0$	$m_F=-1$	$m_F=2$	$m_F=1$	$m_F=0$	$m_F=-1$	$m_F=-2$
$F'=1$	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0	0
$F'=2$	0	0	0	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3

$J'=3/2; q=1$	$F=1$			$F=2$				
	$m_F=1$	$m_F=0$	$m_F=-1$	$m_F=2$	$m_F=1$	$m_F=0$	$m_F=-1$	$m_F=-2$
$F'=1$	1/2	2/3	5/6	0	$1/\sqrt{12}$	1/3	$1/\sqrt{12}$	0
$F'=2$	$1/\sqrt{12}$	1/3	$1/\sqrt{12}$	1	5/6	2/3	1/2	1/3

$J'=1/2; q=1$	$F=1$			$F=2$				
	$m_F=1$	$m_F=0$	$m_F=-1$	$m_F=2$	$m_F=1$	$m_F=0$	$m_F=-1$	$m_F=-2$
$F'=1$	1/2	1/3	1/6	0	$-1/\sqrt{12}$	-1/3	$-1/\sqrt{12}$	0
$F'=2$	$-1/\sqrt{12}$	-1/3	$-1/\sqrt{12}$	0	1/6	1/3	1/2	2/3

TAB. A.1 – Coefficients $\mathcal{A}(J', F', m_F, F, m_F, q, q)$ (équation A.34).

Termes diagonaux de déplacement lumineux

Considérons les termes diagonaux $V(F, m_F) = \langle F, m_F | \hat{V}_{\text{eff}} | F, m_F \rangle$. On remarque que dans le cas d'une polarisation linéaire ($q=0$), \hat{V}_{eff} est proportionnel à l'identité dans la base des niveaux hyperfins d'axe de quantification z . On peut donc montrer par un changement de base approprié que \hat{V}_{eff} ne dépend pas de la direction de la polarisation linéaire du laser. Ceci est physiquement dû au fait que l'orbitale S sur laquelle s'applique \hat{V}_{eff} est à symétrie sphérique. En effet, la polarisation linéaire n'a aucune raison de privilégier tel état hyperfin par rapport à un autre. Ceci n'est plus vrai dans le cas d'une polarisation circulaire. Suivant la circularité, on observe un déséquilibre entre les différents sous-états. On peut donner une expression compacte des éléments de matrice diagonaux (en utilisant le concept de champ

magnétique fictif [195]), valable quelque soit $q \in \{-1, 0, 1\}$,

$$V(F, m_F) = -\frac{I(\vec{r}_G) d^2}{\hbar \epsilon_0 c} \left[\frac{(1 - qg_F m_F) \omega_1}{3(\omega_1^2 - \omega_\ell^2)} + \frac{(2 + qg_F m_F) \omega_2}{3(\omega_2^2 - \omega_\ell^2)} \right]. \quad (\text{A.37})$$

Notons qu'en négligeant toute structure fine, $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_{\text{at}}$, on retrouve la formule donnant les déplacements lumineux Δ , dans le cadre d'un atome à deux niveaux couplés par un laser d'intensité I , qui est désaccordé de $\delta = \omega_\ell - \omega_{\text{at}}$ par rapport à la transition atomique. En effet, en notant la fréquence de Rabi $\Omega = \sqrt{2Id^2/\hbar^2 \epsilon_0 c}$, on a

$$\hbar \Delta = \frac{\hbar \Omega^2}{4\delta}. \quad (\text{A.38})$$

Par rapport à la relation A.37, cette expression ne prend pas en compte, ni la structure atomique (donc les effets de polarisation), ni les termes anti-résonants. Dans notre cas, une application numérique montre, que la contribution de ces effets sur le potentiel ressenti par l'atome, est de l'ordre de la quinzaine de pour cent.

Termes non-diagonaux de couplage

Le potentiel \hat{V}_{eff} contient aussi des termes non diagonaux, couplant dans le cas d'une polarisation circulaire, $|F=1, m_F\rangle$ à $|F=2, m_F\rangle$ (table A.1). Les propriétés de symétrie des coefficients de branchement induisent la relation suivante sur les coefficients \mathcal{A}

$$\sum_{J'} \mathcal{A}(J', F', m_F, F, m_F, q_1, q_2) = \delta_{F,F'} \delta_{m_F, m_{F'}} \delta_{q_1, q_2}, \quad (\text{A.39})$$

comme on peut le vérifier sur les termes non diagonaux calculé en table A.1. On peut donc donner une borne supérieure des termes non diagonaux dans le cas général,

$$|\langle F', m_{F'} | \hat{V}_{\text{eff}} | F, m_F \rangle| \leq \frac{I(\vec{r}_G) d^2}{\hbar \epsilon_0 c} \frac{(\omega_1 \omega_2 + \omega_\ell^2) (\omega_2 - \omega_1)}{(\omega_1^2 - \omega_\ell^2) (\omega_2^2 - \omega_\ell^2)}, \quad (\text{A.40})$$

Une application numérique donne pour la fréquence de Rabi Ω_c associée au couplage maximum,

$$\Omega_c = \frac{\max \left(|\langle F', m_{F'} | \hat{V}_{\text{eff}} | F, m_F \rangle| \right)}{\hbar} = 2\pi \times 0.2 \text{ MHz} \cdot I(\text{mW}/\mu\text{m}^2). \quad (\text{A.41})$$

Ainsi, pour une intensité I de $1 \text{ mW}/\mu\text{m}^2$, la fréquence de Rabi correspondant au couplage entre niveaux différents $|F, m_F\rangle$ et $|F', m_{F'}\rangle$ est tout au plus de $2\pi \times 0.2 \text{ MHz}$. Pour déterminer l'effet sur la dynamique de l'atome piégé, il faut comparer Ω_c à l'écart énergétique entre les niveaux $|F, m_F\rangle$ et $|F', m_{F'}\rangle$. On voit déjà qu'à moins de focaliser 10 watts de laser sur un micron, l'effet est totalement négligeable pour $F \neq F'$, et ce à cause de l'écart hyperfin Δ_{HF} de 6.8 GHz séparant les états $F=1$ et $F=2$ du fondamental. Par contre, le couplage entre deux états $|F, m_F\rangle$ et $|F, m_{F'}\rangle$ n'est pas forcément négligeable. Tout particulièrement en l'absence de champ magnétique, quand l'écart entre les déplacements lumineux de deux niveaux de même F est du même ordre de grandeur que Ω_c . Par contre, en présence d'un champ magnétique de quelques gauss, la dégénérescence entre les état hyperfins est telle que l'on peut négliger les couplages entre eux.

Conclusion

Nous avons montré dans ce paragraphe, qu'en toute généralité, le calcul de l'effet d'un laser désaccordé sur les niveaux atomiques fait intervenir la polarisation de ce laser. Le calcul des déplacements lumineux en prenant en compte la structure multi-niveaux de l'atome et les termes anti-résonants, aboutit à un écart d'une quinzaine de pour cent par rapport au déplacement lumineux de l'atome à deux niveaux. La plus grande partie de cet écart est imputable au caractère non négligeable des transitions anti-résonantes, et seulement quelques pour cent sont dus à la prise en compte de la structure hyperfine. Pour la polarisation purement linéaire, le déplacement lumineux est indépendant de l'état considéré, et il n'y a pas de couplage entre états différents. En présence d'une composante circulaire, des variations de quelques pour cent apparaissent sur le déplacement lumineux en fonction de l'état hyperfin considéré. Une telle composante induit aussi des couplages entre niveaux, de même valeur que les variations de déplacement lumineux entre états.

Du point de vue expérimental, en l'absence de tout champ magnétique, on s'attend à avoir une dépolarisation de l'échantillon si le laser présente une composante circulaire. Il est donc dans l'absolu préférable d'avoir un laser de polarisation linéaire. Cependant, en pratique, comme nous considérons une pince optique en présence du champ du piège magnétique (expérience de laser à atomes guidé du chapitre VI), la polarisation du laser a un effet totalement négligeable.

A.1.4.b Taux d'émission spontanée

Diffusion élastique d'un photon du laser

Jusqu'ici, nous n'avons pris en compte que les processus stimulés correspondant à la redistribution de photons dans l'onde laser. Cependant des processus couplant au continuum du vide électromagnétique peuvent être aussi envisagés. Le traitement de l'émission spontanée pour un atome ayant une structure hyperfine, se fait selon le même schéma que celui présenté dans le paragraphe précédent. Le mode i du vide que nous considérons est caractérisé par sa fréquence ω_i , son vecteur d'onde \vec{k}_i , donné en coordonnées sphériques par

$$\frac{\vec{k}_i}{k_i} = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z, \quad (\text{A.42})$$

et sa polarisation $\vec{\epsilon}_i$, que nous décomposons sur la base des polarisation $q_i \{ \vec{e}_0; \vec{e}_{+1}; \vec{e}_{-1} \}$, avec les coefficients $f_{q_i} = \vec{e}_{q_i}^* \cdot \vec{\epsilon}_i$,

$$\vec{\epsilon}_i = \sum_{q_i=-1,0,1} f_{q_i} \vec{e}_{q_i}. \quad (\text{A.43})$$

Le terme de couplage inclut ce mode du vide en plus du champ du laser, et s'écrit comme

$$\hat{H}_{\text{e.m.}} = \text{équation A.31} - i \sum_{q_i=-1,0,1} f_{q_i} \left[\hat{d}_{q_i}^+ \mathcal{E}_i \hat{a}_i - \hat{d}_{-q_i}^+ \mathcal{E}_i^* \hat{a}_i^\dagger + \hat{d}_{-q_i}^- \mathcal{E}_i \hat{a}_i - \hat{d}_{q_i}^- \mathcal{E}_i^* \hat{a}_i^\dagger \right], \quad (\text{A.44})$$

où \mathcal{E}_i est le champ du vide quantifié dans une boîte fictive de volume \mathcal{V} ,

$$\mathcal{E}_i = \sqrt{\frac{\hbar \omega_i}{2\epsilon_0 \mathcal{V}}} \exp\left(i \vec{k}_i \cdot \hat{\vec{r}}_G\right). \quad (\text{A.45})$$

L'impulsion et l'énergie sont conservées au cours du couplage consistant en l'absorption d'un photon du laser (impulsion $\hbar\vec{k}_\ell$), et en l'émission d'un photon dans le mode i du vide,

$$\begin{cases} \vec{k}_1 + \vec{k}_\ell = \vec{k}_2 + \vec{k}_i, \\ \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} + \hbar\omega_\ell = \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} + \hbar\omega_i. \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

La résolution de ce système montre que le photon est émis dans le mode i à une longueur d'onde très proche de celle du laser, $\lambda = 1064 \text{ nm}$, et on a donc $\omega_i \approx \omega_\ell$, ce qui en fait un processus de diffusion pratiquement élastique. Par contre, l'orientation des vecteurs d'onde des photons mis en jeu peut être différente, $\vec{k}_i \neq \vec{k}_\ell$.

Couplage avec le vide

Avec ces notations, nous calculons les éléments de matrice de couplage entre les états $|\alpha_1\rangle = \left| \vec{k}_1; F, m_F; N; 0_i \right\rangle$ et $|\alpha_2\rangle = \left| \vec{k}_2; F', m_{F'}; N-1; 1_i \right\rangle$ (équation A.29). $|\alpha_1\rangle$ correspond à l'état de départ incluant N photons dans le laser et 0 photon dans le mode i du vide, tandis que $|\alpha_2\rangle$ est l'état d'arrivée correspondant à $N-1$ photons dans le laser et 1 photon dans le mode i . Dans l'équation A.29, l'état intermédiaire est $|\beta\rangle = \left| \vec{k}; J', f, m_f; N-1; 0_i \right\rangle$ ou $|\beta\rangle = \left| \vec{k}; J', f, m_f; N; 1_i \right\rangle$, suivant que l'on considère respectivement le terme résonant ou anti-résonant. On obtient finalement, pour l'élément de matrice correspondant à l'émission spontanée dans le mode i induite par le laser,

$$\langle \alpha_2 | \hat{V}_{\text{eff}} | \alpha_1 \rangle_i = \frac{\sqrt{N} \mathcal{E} \mathcal{E}_i^* d^2}{\hbar} \sum_{q, q_i, J'} c_q f_{q_i} \left[\frac{\mathcal{A}(q, q_i)}{\omega_{J'} - \omega_\ell} + \frac{\mathcal{A}(-q, -q_i)}{\omega_{J'} + \omega_\ell} \right], \quad (\text{A.47})$$

Du fait de la conservation du moment cinétique, on peut noter que seuls sont non nuls dans cette somme les termes tels que $q = m_{F'} - m_F + q_i$.

Les modes i forment un continuum, et le taux d'émission spontanée associé est calculé à l'aide de la règle d'or de Fermi. Nous notons $d\Gamma(F, m_F, \vec{k}_i, \vec{\epsilon}_i)$, le taux d'émission spontanée correspondant à l'absorption d'un photon du laser de polarisation q , et à l'émission d'un photon de polarisation $\vec{\epsilon}_i$, dans la direction de \vec{k}_i ,

$$d\Gamma(F, m_F, \vec{k}_i, \vec{\epsilon}_i) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{F', m_{F'}} \left| \langle \alpha_2 | \hat{V}_{\text{eff}} | \alpha_1 \rangle_i \right|^2 d\rho(E_\ell). \quad (\text{A.48})$$

Cette expression fait apparaître la densité d'états du vide prise à l'énergie $E_\ell = \hbar\omega_\ell = \hbar\omega_i$ du photon émis dans le mode $(\vec{k}_i, \vec{\epsilon}_i)$ (p. 34 de [39]),

$$d\rho(E_\ell) = \frac{\mathcal{V} \omega_\ell^2}{(2\pi)^3 \hbar c^3} d\Omega, \quad (\text{A.49})$$

où $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ est l'angle solide dans la direction \vec{k}_i . Le taux d'émission spontané total $\Gamma_\ell(F, m_F)$ à partir de l'état $|F, m_F\rangle$, s'écrit

$$\Gamma_\ell(F, m_F) = \int \sum_{\vec{\epsilon}_i = \vec{\epsilon}_\theta, \vec{\epsilon}_\phi} d\Gamma(F, m_F, \vec{k}_i, \vec{\epsilon}_i). \quad (\text{A.50})$$

Il correspond à la sommation de l'expression A.48, sur toutes les directions (θ, ϕ) possibles et tous les vecteurs de polarisation $\vec{\epsilon}_i$ possibles. Ces derniers correspondent à des polarisations transverses, telles que $\vec{\epsilon}_i \cdot \vec{k}_i = 0$, et se décomposent sur les vecteurs \vec{e}_θ et \vec{e}_ϕ de la base sphérique (figure A.4),

$$\vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z, \quad \text{et} \quad \vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y. \quad (\text{A.51})$$

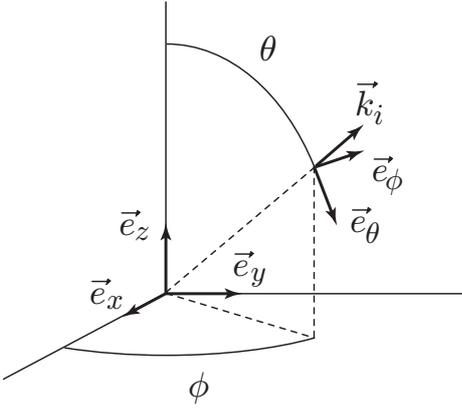


FIG. A.4 – Base sphérique associée à l'émission spontanée de vecteur d'onde \vec{k}_i .

$\Gamma_\ell(F, m_F)$ s'écrit finalement comme

$$\Gamma_\ell(F, m_F) = \frac{d^4 I(\vec{r}_G) \omega_\ell^3}{16\pi^2 \hbar^3 c^4 \epsilon_0^2} \int d\Omega \sum_{\substack{\vec{\epsilon}_i = \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi \\ F', m_{F'}}} \left| \sum_{q, q_i} c_q f_{q_i} \sum_{J'} \left[\frac{\mathcal{A}(q, q_i)}{\omega_{J'} - \omega_\ell} + \frac{\mathcal{A}(-q, -q_i)}{\omega_{J'} + \omega_\ell} \right] \right|^2. \quad (\text{A.52})$$

Cette expression est générale et prend en compte la présence de différentes polarisations q dans le laser exciteur. On peut remarquer que tous les termes ne sont pas de poids équivalents. En effet, d'après la propriété A.39, les termes tels que $q_i \neq q$ sont bien plus faibles que ceux pour lesquels $q_i = q$: la somme sur la structure fine J' les fait même disparaître quand ω_1 vers ω_2 . Il s'ensuit, que même si le laser a une polarisation quelconque, après avoir émis un photon spontané, l'atome retombe avec une très forte probabilité, dans le même état que celui de départ : $|F', m_{F'}\rangle = |F, m_F\rangle$.

Cas d'un laser de polarisation q définie

Nous pouvons simplifier cette expression dans le cas où la polarisation du laser est pure et donnée par q . La sommation sur q disparaît ($c_q = 1$), tout comme la sommation sur q_i ($q_i = m_F + q - m_{F'}$),

$$\Gamma_\ell(F, m_F) = \frac{d^4 I(\vec{r}_G) \omega_\ell^3}{16\pi^2 \hbar^3 c^4 \epsilon_0^2} \sum_{F', m_{F'}} \left(\sum_{\vec{\epsilon}_i = \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi} \int d\Omega |f_{q_i}|^2 \right) \left| \sum_{J'} \frac{\mathcal{A}(q, q_i)}{\omega_{J'} - \omega_\ell} + \frac{\mathcal{A}(-q, -q_i)}{\omega_{J'} + \omega_\ell} \right|^2. \quad (\text{A.53})$$

Le terme entre parenthèse est calculé explicitement et est indépendant de la valeur de q_i ,

$$\sum_{\vec{\epsilon}_i = \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi} \int d\Omega |f_{q_i}|^2 = \int d\Omega (|\vec{e}_{q_i}^* \cdot \vec{e}_\theta|^2 + |\vec{e}_{q_i}^* \cdot \vec{e}_\phi|^2) = \int d\Omega \begin{cases} \sin^2 \theta & \text{pour } q_i = 0, \\ \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} & \text{pour } |q_i| = 1. \end{cases} = \frac{8\pi}{3}, \quad (\text{A.54})$$

ce qui donne pour $\Gamma_\ell(F, m_F)$,

$$\Gamma_\ell(F, m_F) = \frac{d^4 I(\vec{r}_G) \omega_\ell^3}{6\pi \hbar^3 c^4 \epsilon_0^2} \sum_{F', m_{F'}} \left| \sum_{J'} \frac{\mathcal{A}(q, m_F + q - m_{F'})}{\omega_{J'} - \omega_\ell} + \frac{\mathcal{A}(-q, -m_F - q + m_{F'})}{\omega_{J'} + \omega_\ell} \right|^2. \quad (\text{A.55})$$

Comme discuté plus haut, dans la somme sur F' et $m_{F'}$, tous les termes ne sont pas de poids équivalent. Les termes tels que $m_{F'} \neq m_F$ et/ou $F' \neq F$ sont bien plus faibles que ceux pour lesquels $m_{F'} = m_F$ et $F' = F$. Une application numérique montre qu'ils ne rentrent en compte que pour moins d'un pour cent au taux d'émission spontané global, et nous les négligeons en prenant $m_{F'} = m_F$ et $F' = F$ dans la relation A.55,

$$\Gamma_\ell(F, m_F) = \frac{d^4 I(\vec{r}_G) \omega_\ell^3}{6\pi \hbar^3 c^4 \epsilon_0^2} \left| \sum_{J'} \frac{\mathcal{A}(q, q)}{\omega_{J'} - \omega_\ell} + \frac{\mathcal{A}(-q, -q)}{\omega_{J'} + \omega_\ell} \right|^2. \quad (\text{A.56})$$

En pratique, les valeurs de q_i et q sont donc pratiquement toujours égales. Ceci ne signifie pas que la polarisation du photon émis spontanément est la même que celle du laser. En effet, pour connaître la polarisation du photon spontané relativement à sa direction de propagation \vec{k}_i , il faut développer \vec{e}_{q_i} sur \vec{e}_θ et \vec{e}_ϕ . Cette polarisation dépend donc de la direction d'observation (θ, ϕ) .

Tout comme dans l'expression A.37, nous pouvons donner une expression explicite des coefficients \mathcal{A} , pour obtenir finalement

$$\Gamma_\ell(F, m_F) = \frac{2d^4 I(\vec{r}_G) \omega_\ell^3}{3\pi \hbar^3 c^4 \epsilon_0^2} \left[\frac{(1 - qg_F m_F) \omega_1}{3(\omega_1^2 - \omega_\ell^2)} + \frac{(2 + qg_F m_F) \omega_2}{3(\omega_2^2 - \omega_\ell^2)} \right]^2. \quad (\text{A.57})$$

Lien avec le résultat concernant l'atome à deux niveaux

En négligeant toute structure fine, $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_{\text{at}}$, on retrouve l'expression du taux de pompage Γ_p (équation A.23) pour l'atome à deux niveaux, qui n'est rien d'autre qu'un taux d'émission spontané induit par le laser interagissant avec l'atome. Le laser étant très désaccordé, le paramètre de saturation s est très petit devant 1, et on peut écrire $s = \Omega^2 / 2\delta^2$, en utilisant $I/I_{\text{sat}} = 2\Omega^2 / \Gamma^2$. L'expression A.23 appliquée à notre cas, donne donc

$$\Gamma_p = \left[\Gamma \left(\frac{\omega_\ell}{\omega_{\text{at}}} \right)^3 \right] \frac{\Omega^2}{4\delta^2}. \quad (\text{A.58})$$

Nous avons multiplié Γ par le facteur $(\omega_\ell / \omega_{\text{at}})^3$ pour prendre en compte le fait que, contrairement au cas de l'équation 1, l'émission spontanée résulte du couplage avec le vide à ω_ℓ , et non pas ω_{at} . Ce facteur inclut donc à la fois la modification de la densité d'états (équation A.49) variant en ω_ℓ^2 , et la modification de l'amplitude au carré du champ du vide (équation A.45) variant comme ω_ℓ . En comparant à l'aide d'applications numériques, l'équation A.58 à l'expression A.57, on voit qu'il y a environ 30% d'écart sur le résultat final. L'écart est deux fois plus prononcé que dans le cas du calcul du déplacement lumineux (équations A.37 et A.38). En effet, la différence provient du traitement du désaccord δ (prise en compte de la structure multi-niveaux, terme anti-résonant), et le déplacement lumineux ne varie qu'en $1/\delta$ alors que le taux d'émission spontanée varie deux fois plus vite, en $1/\delta^2$.

Conclusion

En conclusion, nous avons calculé dans ce paragraphe l'émission spontanée induite par un laser très désaccordé en prenant en compte la structure multi-niveaux de l'atome. Ce calcul aboutit à un écart d'une trentaine de pour cent par rapport au taux calculé pour un atome à deux niveaux. La plus grande partie de cet écart est imputable au caractère non négligeable des transitions anti-résonantes et environ 5% sont dus à la prise en compte de la structure hyperfine. L'émission spontanée a lieu à la même longueur d'onde que celle du laser et on peut enfin noter que quelque soit la polarisation du laser (même non pure), l'émission spontanée induite par le laser ne modifie pas l'état interne $|F, m_F\rangle$ de l'atome, et ce, avec une probabilité très proche de 1.

A.2 L'interaction avec le champ magnétique

Dans ce paragraphe, nous discutons le calcul général de l'effet Zeeman et donnons quelques résultats, dans certains cas particuliers utiles en pratique.

A.2.1 Cas général

L'énergie potentielle d'un atome de ^{87}Rb plongé dans un champ magnétique B_z orienté selon l'axe de quantification z est donnée par l'hamiltonien

$$\hat{H}_{\text{Zeeman}} = \frac{\mu_B B_z}{\hbar} \left(g_L \hat{L}_z + g_S \hat{S}_z + g_I \hat{I}_z \right), \quad (\text{A.59})$$

où g_L , g_S et g_I sont les rapports gyromagnétiques respectivement du moment cinétique orbital électronique \hat{L} , du spin de l'électron \hat{S} et du spin nucléaire \hat{I} , dont les valeurs sont données en table A.2. Cet hamiltonien commute avec \hat{L}^2 , \hat{S}^2 et \hat{I}^2 mais pas avec \hat{J}^2 ni \hat{F}^2 . Il est donc diagonalisable dans chaque sous-espace $5S$ ou $5P$ séparément mais couple les multiplicités $5^2P_{1/2}$ et $5^2P_{3/2}$ entre elles. Cependant ce couplage ne devient important que lorsque l'énergie magnétique $\mu_B B_z$ est de l'ordre de l'écart en énergie entre les niveaux $5^2P_{1/2}$ et $5^2P_{3/2}$, ce qui correspond à des champs de 500 tesla ! On négligera donc de tels effets, et l'on se restreindra à l'étude de \hat{H}_{Zeeman} dans chaque multiplicité indépendamment.

L'hamiltonien atomique $\hat{H}_{\text{atomique}}$ dont les niveaux d'énergie propre sont représentés sur la figure 2, possède une structure hyperfine. Écrivons donc l'élément de matrice de $\langle F', m_{F'} | \hat{H}_{\text{Zeeman}} | F, m_F \rangle$ dans la base hyperfine associée aux valeurs propres $(L; J; F)$:

$$\begin{aligned} \langle F', m_{F'} | \hat{H}_{\text{Zeeman}} | F, m_F \rangle &= \mu_B B_z \sum_{m_L, m_S, m_I} (g_L m_L + g_S m_S + g_I m_I) \\ &\langle F', m_{F'} | L, m_L; S, m_S; I, m_I \rangle_J \langle L, m_L; S, m_S; I, m_I | F, m_F \rangle_J. \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Le coefficient $\langle L, m_L; S, m_S; I, m_I | F, m_F \rangle_J$ correspondant au passage du vecteur de la base totalement découplée $|L, m_L; S, m_S; I, m_I\rangle$ à celui de la base totalement couplée $|F, m_F\rangle$, fait intervenir directement la composition des trois moments cinétiques \hat{L} , \hat{S} et \hat{I} dans la multiplicité de valeur propre associée J et s'exprime par

$$\langle L, m_L; S, m_S; I, m_I | F, m_F \rangle_J = \sum_{m_J} \langle L, m_L; S, m_S | J, m_J \rangle \langle J, m_J; I, m_I | F, m_F \rangle. \quad (\text{A.61})$$

Les coefficients de Clebsch-Gordan intervenant dans la somme sont calculés via les coefficients « 3j » de Wigner (relation A.9). On a donc $S=1/2$, $I=3/2$ et les nombres quantiques $(L; J)$

prennent les valeurs $(0; 1/2)$, $(1; 1/2)$ et $(1; 3/2)$ respectivement pour les multiplicités $5^2S_{1/2}$, $5^2P_{1/2}$ et $5^2P_{3/2}$.

Spin nucléaire effectif (I)		3/2
Écart hyperfin de l'état fondamental (Δ_{HF})		6.835 GHz
Moment magnétique de Bohr (μ_B)		$h \cdot 1.399624$ MHz/G
Rapports gyromagnétiques	du moment orbital électronique (g_L)	0.9999937
	du spin électronique (g_S)	2.002319304
	du spin nucléaire (g_I)	-0.00099514

TAB. A.2 – *Grandeurs intervenant dans le calcul du déplacement en énergie des niveaux atomiques du ^{87}Rb sous l'influence d'un champ magnétique.*

En règle générale, il faut diagonaliser la matrice $\hat{H}_{\text{atomique}} + \hat{H}_{\text{Zeeman}}$ pour connaître les déplacements en énergie sous l'effet d'un champ magnétique d'intensité quelconque. Outre un effet sur les énergies propres, le champ magnétique a aussi tendance à mélanger les états hyperfins couplés entre eux. Les déplacements en énergie des différents sous-niveaux en fonction du champ magnétique dans lequel ils sont plongés sont représentés sur la figure A.5. Cependant, dans les cas particuliers suivants, on peut faire des approximations simplificatrices.

A.2.2 Cas particuliers

A.2.2.a Cas des énergies magnétiques faibles devant la structure hyperfine

Dans ce cas, en appliquant la théorie des perturbations au premier ordre, on se restreint à chaque multiplicité F de dégénérescence $2F + 1$. Dans un tel sous espace, tout opérateur vectoriel est proportionnel à \hat{F} d'après le théorème de Wigner-Eckart et, en particulier l'hamiltonien Zeeman qui s'écrit

$$\hat{H}_{\text{Zeeman}} \approx \mu_B B_z g_F \hat{F}_z, \quad (\text{A.62})$$

où g_F est le facteur de Landé dépendant de F qui s'exprime en fonction de g_L , g_S , g_I , L , S , I , J et F , grâce au théorème de projection (Complément D_X de [142]). La figure 2 présente la valeur de ces facteurs de proportionnalité, calculés en faisant l'approximation $g_L \approx 1$, $g_S \approx 2$ et $g_I \approx 0$. Le déplacement des niveaux hyperfins est proportionnel à B_z , ce qui justifie le nom de cette approximation comme étant l'effet Zeeman linéaire. La figure A.5 met en évidence le domaine de champ magnétique sur lequel cette approximation est valide (courbes grises et noires superposées). On remarque que dans ce cadre, les états de projection $m_F = 0$ sont insensibles au champ magnétique, le premier effet non nul apparaissant alors au second ordre en B_z .

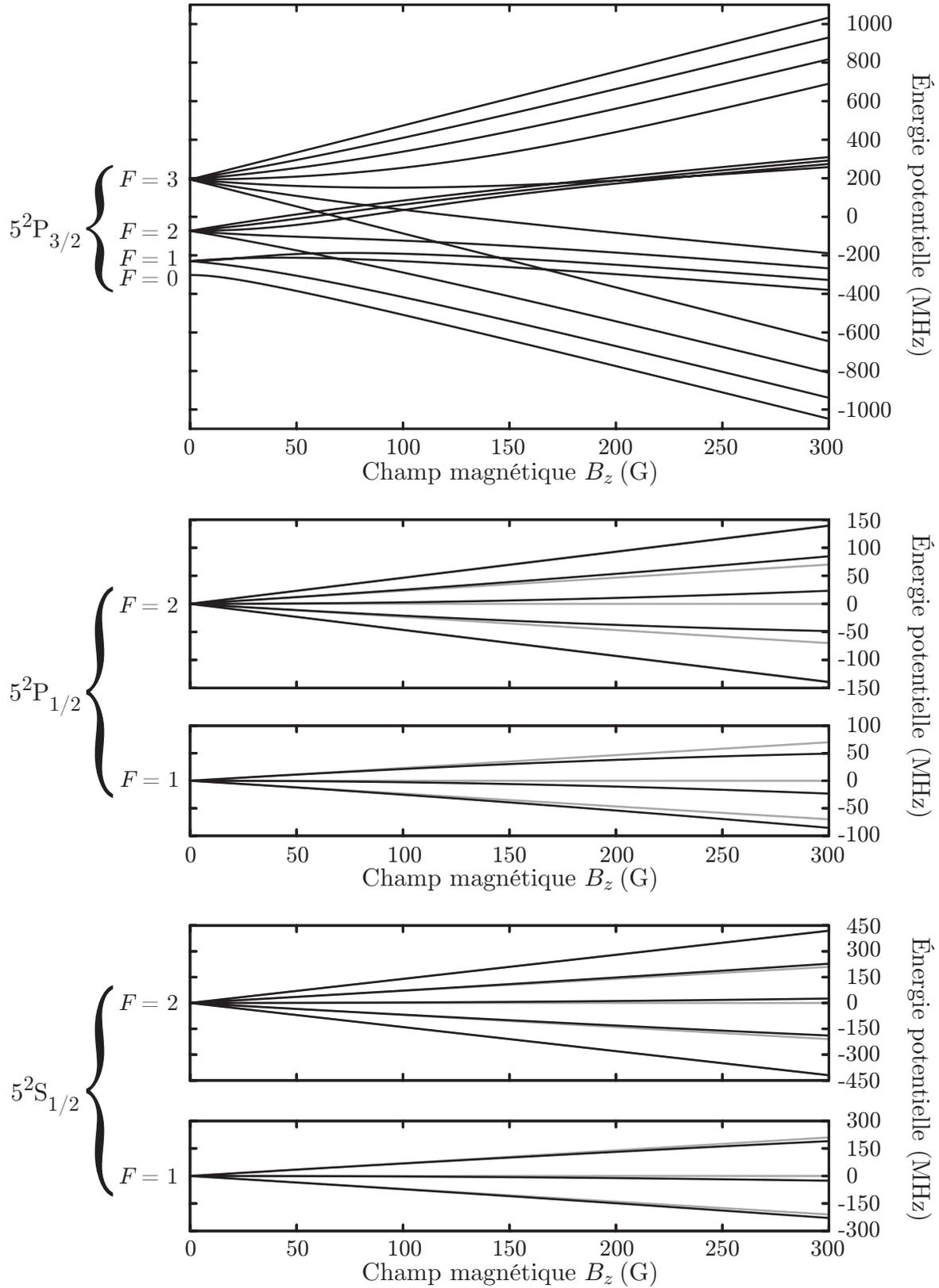


FIG. A.5 – Effet du champ magnétique B_z sur l'énergie potentielle des niveaux du ^{87}Rb (traits noirs), calculé via la diagonalisation de l'hamiltonien exact $\hat{H}_{\text{atomique}} + \hat{H}_{\text{Zeeman}}$ (équation A.59). Pour les multiplicités $5^2\text{S}_{1/2}$ et $5^2\text{P}_{1/2}$, nous avons aussi tracé en gris les déplacements en énergie calculés en se restreignant au premier ordre en perturbation (équation A.62).

A.2.2.b Cas des états non couplés à d'autres états hyperfins

On remarquera que l'hamiltonien Zeeman (équation A.59) commute avec F_z . Il ne couple donc pas des états de m_F différents. Ceci a pour conséquence que les états hyperfins totalement polarisés ($|5^2S_{1/2}; F=2, m_F=\pm 2\rangle$ et $|5^2P_{3/2}; F=3, m_F=\pm 3\rangle$) ne sont couplés à aucun autre état. L'équation A.62 devient exacte pour eux, puisque tous les ordres supérieurs du développement en perturbation sont rigoureusement nuls : ces états connaissent un effet Zeeman linéaire, quelque soit l'intensité du champ magnétique. Notons, en outre, qu'il en est de même, à une très bonne approximation, pour les états $|5^2P_{1/2}; F=2, m_F=\pm 2\rangle$ plongés dans des champs accessibles en laboratoire.

A.2.2.c Cas de la multiplicité $5^2S_{1/2}$

Dans le cas d'une multiplicité pour laquelle $J = 1/2$ et qui est non couplée aux autres niveaux, seules les deux valeurs de $F = I \pm 1/2$ sont possibles. Le hamiltonien (équation A.59) est diagonal par blocs, au plus de dimensions 2×2 , car seuls sont couplés les états $|F=I+1/2, m_F\rangle$ et $|F=I-1/2, m_F\rangle$. L'énergie $E_{\pm}(m_F)$ de ces niveaux plongés dans un champ magnétique quelconque est alors donnée par la formule de Breit-Rabi, [196] valable quelque soit I

$$E_{\pm}(m_F) = -\frac{h\Delta_{\text{HF}}}{2(2I+1)} + g_I\mu_B m_F B_z \pm \frac{h\Delta_{\text{HF}}}{2} \sqrt{1 + \frac{4m_F\xi}{2I+1} + \xi^2}, \quad (\text{A.63})$$

avec $\xi = (g_J - g_I)\mu_B B_z / h\Delta_{\text{HF}}$, le paramètre qui traduit l'intensité du couplage magnétique par rapport à l'écart hyperfin Δ_{HF} et g_J le facteur de Landé associé à la structure fine calculé grâce au théorème de projection en fonction de L , S et J

$$g_J = \frac{g_L + g_S}{2} + \frac{L(L+1) - S(S+1)}{J(J+1)} \frac{g_L - g_S}{2}. \quad (\text{A.64})$$

En développant la relation A.63 au premier ordre en B_z , on retrouve l'effet Zeeman linéaire (équation A.62). On peut aussi appliquer la formule de Breit-Rabi pour la multiplicité $5^2P_{1/2}$ tant que l'on peut négliger le couplage avec $5^2P_{3/2}$, c'est-à-dire pour tous les champs B_z que nous sommes amenés à manipuler en laboratoire.

EFFETS SPÉCIFIQUES AU RALENTISSEMENT D'UN ATOME À PLUSIEURS NIVEAUX

Nous discutons en détail dans cette annexe les phénomènes de pompage dus à la conjonction des effets énumérés à la fin du paragraphe I.2.2.b : l'effet Zeeman non-linéaire, la présence d'un champ perpendiculaire B_{\perp} et les défauts de polarisation du laser ralentisseur. En particulier, nous discutons l'effet du laser de repompage utilisé expérimentalement pour contrer le dépompage, et évaluons l'impact de ces phénomènes sur le flux ralenti utile.

B.1 L'atome plongé dans les champs extérieurs

À cause des couplages dus à l'effet Zeeman non-linéaire et au champ perpendiculaire, il est utile de travailler sur une nouvelle base $|\phi_{F, m_F}\rangle_{S,P}$ différente de la base hyperfine. C'est dans cette nouvelle base, que nous allons exprimer le couplage avec le rayonnement.

B.1.1 États propres dans les champs B et B_{\perp}

Négligeons dans un premier temps le rayonnement : l'effet Zeeman non-linéaire ainsi que la présence d'un champ B_{\perp} ont pour effet que les états $|F, m_F\rangle$ ne sont plus états propres du système dont l'hamiltonien s'écrit maintenant

$$\hat{H}_{\text{atomique}} + \hat{H}_{\text{Zeeman}}(B) + \frac{g_F \mu_B B_{\perp} \hat{F}_{\perp}}{\hbar}. \quad (\text{B.1})$$

Le premier terme est le terme atomique en champ nul, le second est le terme dû à l'interaction avec le champ le long de l'axe du jet, et le troisième concerne l'interaction avec le champ perpendiculaire. On a traité ce dernier de manière linéaire car nous nous intéressons à des champs B_{\perp} dont l'énergie est négligeable devant la structure hyperfine (§ A.2). Le second terme est responsable de l'effet Zeeman non-linéaire, qui mélange les niveaux de même m_F mais de F différent au sein d'une multiplicité donnée : on voit en figure A.5, que cet effet est important pour la multiplicité $5^2P_{3/2}$, à partir de valeurs de B de l'ordre d'une centaine

de gauss. Quant au dernier terme du hamiltonien, il mélange, à F donné, les niveaux de différents m_F (surtout pour des champs B faibles jusqu'à une valeur de l'ordre de B_\perp).

Nous avons représenté en figure B.1 l'allure du diagramme en énergie des états propres $|\phi_{F,m_F}\rangle_{S,P}$ du hamiltonien précédent pour $F=2$ au voisinage de $B=0$. Ces états sont définis de telle façon qu'à champ nul, ils se branchent adiabatiquement sur $|F, m_F\rangle_{S,P}$.

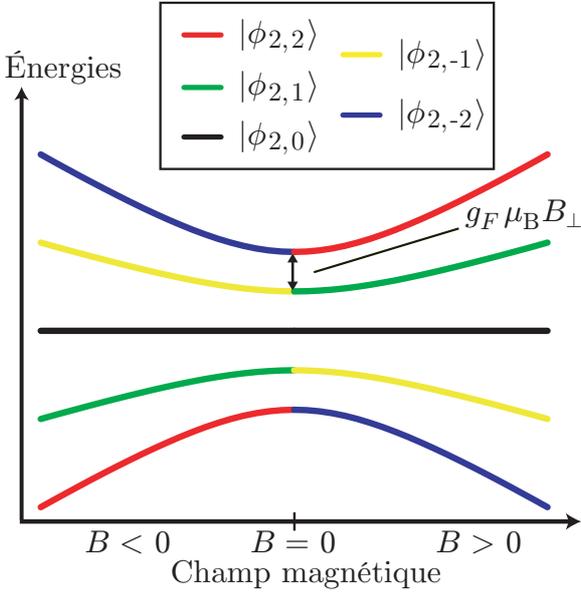


FIG. B.1 – Diagramme d'énergie des états propres de l'hamiltonien B.1 au voisinage de $B=0$ donné à titre d'exemple, pour une multiplicité $F=2$. On note $|\phi_{F,m_F}\rangle$ l'état propre qui, lorsque $|B|$ devient plus grand que B_\perp , tend vers $|F, m_F\rangle$. On voit que cette définition induit une discontinuité au niveau des énergies en $B=0$. Ce choix est le mieux adapté à la description du ralentissement Zeeman, car, comme détaillé au paragraphe B.2.2, le laser ralentisseur force l'atome à rester dans cet état au passage de $B=0$, et non pas à suivre adiabatiquement le champ magnétique seul.

B.1.2 Couplage dipolaire électrique entre les états $|\phi_{F,m_F}\rangle$

B.1.2.a Intensité du couplage et taux d'émission spontanée

Pour pouvoir discuter l'interaction entre l'atome à plusieurs niveaux et la lumière pendant le ralentissement, nous considérons le couplage dipolaire électrique $\hat{V}_{d.e.}$ entre les états propres $|\phi_{F,m_F}\rangle$ qui est différent de celui entre les états $|F, m_F\rangle$. Il est donc nécessaire de calculer le terme ${}_P\langle\phi_{F',m_{F'}}|\hat{V}_{d.e.}|\phi_{F,m_F}\rangle_S$. Les états $|\phi_{F,m_F}\rangle$ se décomposent dans leur multiplicité correspondante sur la base hyperfine

$$|\phi_{F,m_F}\rangle = \sum_{F',m_{F'}} c_{F,m_F} |F', m_{F'}\rangle, \quad (\text{B.2})$$

où les coefficients c_{F,m_F} , qui dépendent des champs B et B_\perp , sont obtenus numériquement par diagonalisation de l'hamiltonien B.1. Le couplage s'écrit alors

$${}_P\langle\phi_{F',m_{F'}}|\hat{V}_{d.e.}|\phi_{F,m_F}\rangle_S = \sum_{F'',m_{F''}} c_{F,m_F} c_{F',m_{F'}} {}_P\langle F'', m_{F''}|\hat{V}_{d.e.}|F, m_F\rangle_S. \quad (\text{B.3})$$

Le terme ${}_P\langle F', m_{F'}|\hat{V}_{d.e.}|F, m_F\rangle_S$, faisant intervenir l'intensité du couplage et les coefficients de Clebsch-Gordan, est explicité au paragraphe A.1.2.

Le calcul précédent permet de déterminer l'intensité du couplage entre les différents états propres $|\phi_{F,m_F}\rangle$. En figure B.2, on a représenté l'efficacité de couplage pour trois transitions partant de $|\phi_{2,2}\rangle_S$ et excitées par un photon σ^+ . L'intensité du couplage de la transition $|\phi_{2,2}\rangle_S \rightarrow |\phi_{3,3}\rangle_P$ est proche de l'unité, sauf lorsque B est proche de zéro : en effet, le champ perpendiculaire a alors un effet prépondérant et la composante de $|3, 3\rangle_P$ dans $|\phi_{3,3}\rangle_P$ devient plus faible. On remarque de plus, qu'un photon σ^+ peut induire une transition

$|\phi_{2,2}\rangle_S \rightarrow |\phi_{3,2}\rangle_P$ ou encore $|\phi_{2,2}\rangle_S \rightarrow |\phi_{2,2}\rangle_P$: ceci est dû à l'effet du champ perpendiculaire, qui mélange les états $|F, m_F\rangle$ entre eux.

Nous avons aussi représenté en figure B.3, les taux d'émission spontanée vers l'état fondamental $|\phi_{1,1}\rangle_S$ ¹ depuis les états excitables à partir $|\phi_{2,2}\rangle_S$. Là encore, la désexcitation est possible de $|\phi_{3,3}\rangle_P$ ou $|\phi_{3,2}\rangle_P$ vers $|\phi_{1,1}\rangle_S$, alors qu'elle serait interdite à champ nul entre $F'=3$ et $F=1$.

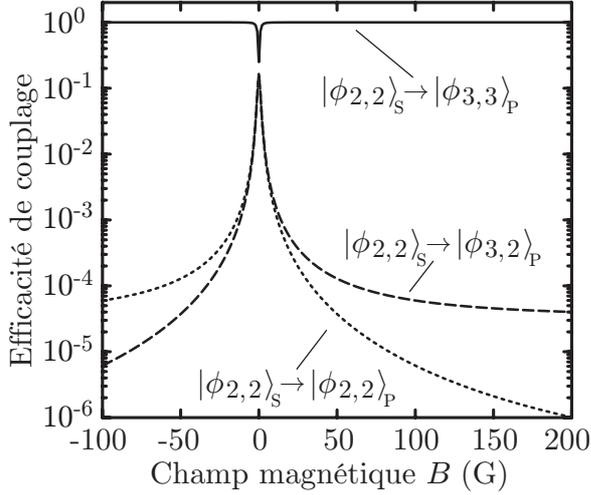


FIG. B.2 – Efficacité de couplage sous l'effet d'un rayonnement σ^+ pour quelques transitions $|\phi_{2,2}\rangle_S \rightarrow |\phi_{F',m_{F'}}\rangle_P$.

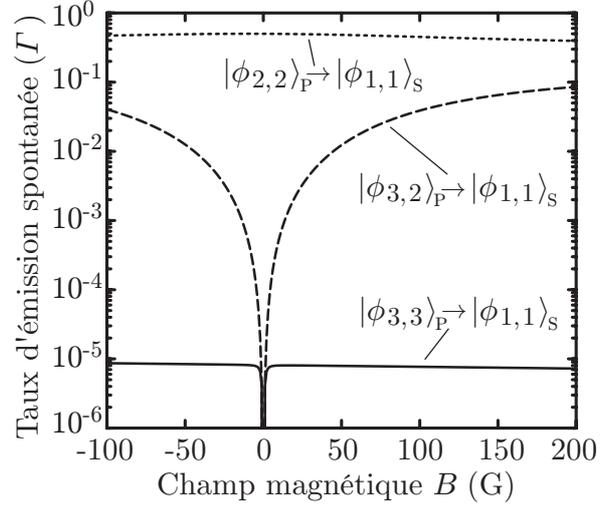


FIG. B.3 – Quelques taux d'émission spontanée (en unités de Γ) vers l'état fondamental hyperfin $|\phi_{F',m_{F'}}\rangle_P \rightarrow |\phi_{1,1}\rangle_S$ en fonction du champ magnétique B ($B_\perp = 1$ G).

B.1.2.b Mélange des états dû au champ perpendiculaire conjugué à l'effet Zeeman non-linéaire

Ces résultats peuvent être compris de manière qualitative. Considérons les niveaux $|F, m_F\rangle$ représentés en figure B.4 : ils sont déplacés au premier ordre de manière linéaire par le champ magnétique B . Là-dessus vient s'ajouter le terme de couplage non-linéaire entre $|3, 2\rangle_P$ et $|2, 2\rangle_P$, de fréquence de Rabi Ω_Z proportionnelle à B . Les niveaux $|3, 2\rangle_P$ et $|2, 2\rangle_P$ étant autant déplacés sous l'effet Zeeman linéaire, le désaccord Δ_Z de ce couplage est constant. De plus, le champ magnétique perpendiculaire B_\perp induit un couplage entre $|3, 3\rangle_P$ et $|3, 2\rangle_P$, ou encore entre $|2, 2\rangle_S$ et $|2, 1\rangle_S$. Le terme de couplage Ω_\perp est proportionnel à B_\perp , alors que le désaccord Δ_\perp est proportionnel à B . La théorie des perturbations au premier ordre (Chap. XI de [142]) indique que, deux états désaccordés de Δ et couplés par Ω , sont « contaminés » réciproquement d'un facteur Ω/Δ . Il s'ensuit que $|\phi_{3,3}\rangle_P$ a une composante selon $|2, 2\rangle_P$ via $|3, 2\rangle_P$ de l'ordre de $\Omega_Z\Omega_\perp/\Delta_Z\Delta_\perp$, donc proportionnelle à B_\perp . $|2, 2\rangle_P$ pouvant se désexciter vers $|1, 1\rangle_S$, le taux d'émission spontanée de $|\phi_{3,3}\rangle_P$ vers $|\phi_{1,1}\rangle_S$ varie en B_\perp^2 , et est indépendant de B dès que $|B| \gg B_\perp$ ($\Delta_\perp \gg \Omega_\perp$ est la condition de validité de la théorie des perturbations). On voit en effet sur la courbe en trait plein de la figure B.3, que le taux varie peu en fonction de B . Ce qui n'est pas le cas pour le taux de départ de $|\phi_{3,2}\rangle_P$, qui,

¹Les calculs montrent que les désexcitations vers $|\phi_{1,0}\rangle_S$ et $|\phi_{1,-1}\rangle_S$ sont complètement négligeables, depuis les états excités considérés.

selon le même raisonnement perturbatif, devrait varier en B^2 et être indépendant de B_\perp . On vérifie grossièrement le comportement en B sur la courbe en pointillé de la figure B.3. On peut noter, en outre, que les efficacités de couplage de la figure B.2 sont indépendantes de B_\perp pour $B = 0$: en effet, les états propres résultant de B_\perp seul, ne dépendent pas de son amplitude.

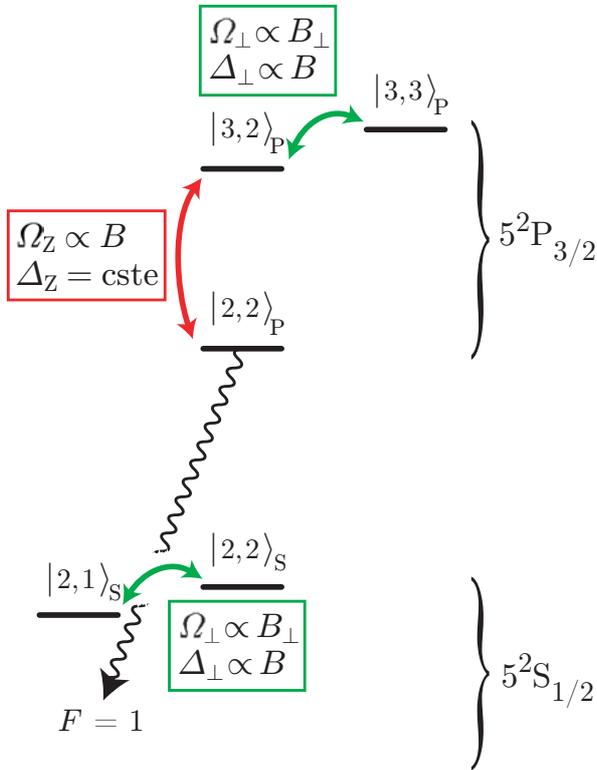


FIG. B.4 – Schéma de principe du couplage entre les différents niveaux entrant en jeu dans les figures B.2 et B.3. Le champ magnétique perpendiculaire couple entre eux les états de même F appartenant à la même multiplicité, avec une fréquence de Rabi Ω_\perp et un désaccord Δ_\perp . L'effet Zeeman non-linéaire, a pour effet de coupler les niveaux $|3, 2\rangle_P$ et $|2, 2\rangle_P$ entre eux (paramètres Ω_Z et Δ_Z). Ce dernier état pouvant se désexciter dans l'état $|1, 1\rangle_S$, une telle désexcitation, devient possible depuis tous les états qui sont couplés à $|2, 2\rangle_P$.

On voit donc sur ces exemples, que la combinaison de l'effet Zeeman non-linéaire et d'un champ perpendiculaire peut fortement perturber les couplages dipolaires électriques entre les niveaux hyperfins. La dynamique de l'interaction entre l'atome et le champ laser, est donnée par des équations de Bloch optique (Chap. V de [39]) couplées au mouvement externe de l'atome. Bien qu'une résolution numérique d'un tel problème soit envisageable, ceci dépasse largement le cadre de notre propos, et nous ne donnons dans la suite, qu'un aperçu des phénomènes de pompage entrant en jeu au cours du ralentissement.

B.2 Phénomènes de pompage au voisinage de $B=0$

B.2.1 Pompage avant l'entrée dans le premier solénoïde

Quelle est la proportion des atomes du jet qui auront effectivement atteint la transition fermée avant de commencer le processus de ralentissement ? L'énergie de l'écart hyperfin Δ_{HF} étant négligeable devant l'énergie thermique du jet, la population atomique est équirépartie, à la sortie du four, entre les 8 états fondamentaux. En l'absence d'autres processus, on s'attend donc à avoir $5/8$ des atomes dans l'état fondamental $F=2$.

B.2.1.a Effet du faisceau ralentisseur

Sans champ magnétique, et en présence d'une excitation polarisée σ^+ , on peut estimer le temps t_{m_F} que met l'atome à quitter $|2, m_F - 1\rangle_S$:

$$t_{m_F} = \frac{1}{1 - \mathcal{A}_{m_F}} \frac{2}{\Gamma} \frac{s(v)\mathcal{A}_{m_F} + 1}{s(v)\mathcal{A}_{m_F}}, \quad (\text{B.4})$$

où $s(v)$ est le paramètre de saturation donné par l'équation 24 avec $B=0$ et \mathcal{A}_{m_F} est la force de la transition $|2, m_F - 1\rangle_S \rightarrow |3, m_F\rangle_P$ ($\mathcal{A}_{m_F} = \mathcal{C}^2(J' = 3/2, F = 2, m_F - 1, F' = 3, q = 1)$ avec les notations du paragraphe A.1.2). Les états impliqués dans ce pompage sont indiqués en figure B.5. On ne considère pour l'évaluation de t_{m_F} que la transition $F=2 \rightarrow F'=3$, car les atomes animés d'une vitesse positive sont plus à résonance avec cette transition, qu'avec $F=2 \rightarrow F'=2$: par exemple pour des atomes de vitesse supérieure à 50 m/s, la transition vers $F'=3$ est plus de neuf fois plus excitée que celle vers $F'=2$.

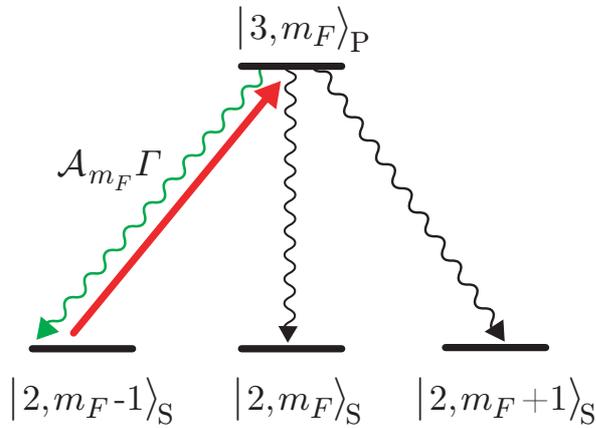


FIG. B.5 – Principe du pompage optique : la transition σ^+ est excitée par le ralentisseur (flèche rouge), et l'atome excité a une probabilité de revenir dans l'état de départ, donné par le coefficient de branchement de la transition \mathcal{A}_{m_F} . La probabilité qu'il n'y revienne pas est $1 - \mathcal{A}_{m_F}$ (préfacteur de l'équation B.4). L'atome se désexcite alors vers des états de m_F plus grand.

Le temps maximum nécessaire au pompage est la somme des t_{m_F} pour les différents m_F possibles, et la distance maximum parcourue par un atome à la vitesse v avant d'être pompé totalement dans $|2, 2\rangle_S$ est alors

$$d_p(v) = v \sum_{m_F=-1}^2 t_{m_F}. \quad (\text{B.5})$$

Il s'agit d'une borne supérieure, car on néglige dans cette évaluation les processus qui feraient passer directement l'atome de $|2, m_F - 1\rangle_S$ vers $|2, m_F + 1\rangle_S$ via $|3, m_F\rangle_P$. Nous avons tracé cette distance sur la figure B.6 : même pour les atomes les plus rapides, elle n'excède pas 10 cm.

On s'attendrait à ce que 5/8 des atomes du jet soient pompés vers $|2, 2\rangle_S$ en champ B nul, dans la zone entre le four et le ralentisseur Zeeman, et qu'une fois cet état atteint, ils ne puissent cycloser que sur la transition $|2, 2\rangle_S \rightarrow |3, 3\rangle_P$, qui est alors fermée. On se réduirait ainsi à l'atome à deux niveaux. En réalité, les choses sont légèrement modifiées, du fait des défauts expérimentaux. Les défauts de polarisation n'agissent pas sur le pompage initial de la population atomique dans $|2, 2\rangle_S$, du fait de la faiblesse relative de l'intensité lumineuse polarisée σ^- , par rapport à celle polarisée σ^+ . Par contre, la présence du champ magnétique transverse B_\perp , a un effet de redistribution sur les états atomiques. Cependant, cet effet peut être considéré comme négligeable dès que $B \gg B_\perp \approx 1 \text{ G}$, c'est-à-dire, peu

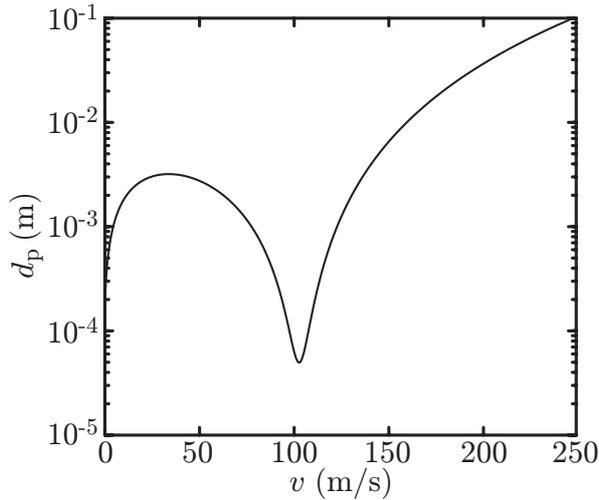


FIG. B.6 – Distance nécessaire d_p pour pomper un atome de vitesse v dans l'état $|2, 2\rangle_S$ sous l'effet du laser ralentisseur (équation B.5). d_p s'annule en $v = 0$ et présente un minimum à résonance ($v = 104$ m/s).

après l'entrée dans le ralentisseur Zeeman où B atteint une dizaine de gauss. La distance nécessaire pour pomper totalement les atomes, est alors du même ordre que d_p . On peut donc considérer que les 5/8 des atomes initialement répartis dans $F=2$, sont pompés dans $|2, 2\rangle_S$ avant de passer par le point de champ magnétique maximum.

B.2.1.b Effet du faisceau repompeur

Pour agir aussi sur les 3/8 des atomes qui sont initialement dans $F=1$, nous superposons un faisceau « repompeur » sur le faisceau ralentisseur. Ce faisceau d'intensité $I_{\text{rep}} = 2 \text{ mW/cm}^2$ est polarisé σ^+ et est désaccordé² de $\delta_{\text{rep}} = -2\pi \times 157 \text{ MHz}$ par rapport à la transition $F=1 \rightarrow F'=2$ prise en champ nul. Cette intensité est juste suffisante pour pouvoir repomper les atomes initialement dans $F=1$, entre le four et l'entrée du ralentisseur Zeeman (en champ nul). En prenant un coefficient moyen de branchement pour la transition σ^+ de $F=1 \rightarrow F'=2$ de 5/18, et un taux de désexcitation vers $F=2$ de $\Gamma/2$, on obtient comme distance sur laquelle les atomes sont repompés (en fonction de la vitesse v)

$$v \frac{2}{\Gamma} \frac{2 \left(5I_{\text{rep}}/18I_{\text{sat}} + 1 + 4(\delta_{\text{rep}} + kv)^2 / \Gamma^2 \right)}{5I_{\text{rep}}/18I_{\text{sat}}}. \quad (\text{B.6})$$

La valeur maximum de 27 cm est atteinte pour $v = 260 \text{ m/s}$, ce qui est inférieur à la distance four-ralentisseur. On peut donc considérer que les atomes initialement dans $F=1$ sont globalement pompés dans $F=2$ avant le début du ralentissement.

En conclusion, l'utilisation conjointe du ralentisseur et du repompeur, permet de pomper pratiquement tous les atomes de ^{87}Rb dans $|2, 2\rangle_S$ avant de débiter le ralentissement.

B.2.2 Pompage entre les deux solénoïdes

B.2.2.a Effet du champ magnétique seul

La zone entre les deux ralentisseurs Zeeman où B s'annule, est une zone où le champ transverse B_{\perp} joue un rôle important. Considérons les états $|F, m_F\rangle$ et $|F, m_F + 1\rangle$ d'une

²Le choix du désaccord est dicté par des considérations de repompage tout au long du ralentissement, comme décrit au paragraphe B.4.

multiplicité donnée. Ils sont couplés par le champ perpendiculaire B_\perp en régime linéaire avec la fréquence de Rabi

$$\frac{g_F \mu_B B_\perp}{2\hbar^2} \langle F, m_F | \hat{F}_- | F, m_F + 1 \rangle = \Omega_0 \sqrt{n(N-n)}, \quad (\text{B.7})$$

où l'on a noté $N = 2F + 1$ et $n = F - m_F + 1$ et $\Omega_0 = g_F \mu_B B_\perp / 2\hbar$.

Soit un atome animé d'une vitesse v passant en $t=0$ au voisinage du point x_0 d'annulation du champ B . L'écart en énergie des états de l'atome, dépend alors du temps

$$\hbar\Delta(t) = g_F \mu_B \left. \frac{dB}{dx} \right|_{x_0} vt. \quad (\text{B.8})$$

La formule de Landau-Zener [197], adaptée au cas d'un atome à plusieurs niveaux, permet de calculer la probabilité \mathcal{P}_n de transfert vers les états n , sachant que l'atome était initialement dans l'état $n=1$ (c'est-à-dire $|F, m_F\rangle$) [198] :

$$\mathcal{P}_n = \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} (1-p)^{N-n} p^{n-1}, \quad (\text{B.9})$$

où le paramètre p caractérise l'intensité de la transition

$$p = 1 - \exp \left[- \frac{2\pi\hbar\Omega_0^2}{g_F \mu_B v \left| \frac{dB}{dx} \right|_{x_0}} \right] = 1 - \exp \left[- \frac{\pi^2 g_F \mu_B B_\perp^2}{\hbar v \left| \frac{dB}{dx} \right|_{x_0}} \right]. \quad (\text{B.10})$$

On remarque que, plus p est proche de 1, plus la transition vers des états lointains de l'état initial $n=1$ est possible. Ceci arrive lorsque le champ B_\perp est assez grand (fort couplage), ou encore lorsque la vitesse est assez faible (le moment cinétique a le temps de suivre adiabatiquement l'orientation du champ B et B_\perp). Dans le cas précis qui nous intéresse (entre les deux solénoïdes), $v = 104 \text{ m/s}$, $|dB/dx| = 3 \text{ G/cm}$. Pour $B_\perp = 1 \text{ G}$, l'argument de l'exponentielle vaut $-450g_F$. Quelque soit g_F , nous avons donc $p = 1$. La probabilité $\mathcal{P}_N = p^{N-1}$ de passer adiabatiquement de l'état $|F, m_F\rangle$ à l'état $|F, -m_F\rangle$ vaut l'unité : en l'absence de laser, l'atome suit adiabatiquement l'état propre du système, et voit donc son spin changer de direction (dans la littérature anglophone, on appelle un tel ralentisseur Zeeman un "spin-flip Zeeman slower").

B.2.2.b Suivi de la transition du ralentissement

La situation change radicalement en présence du laser ralentisseur polarisé σ^+ . En effet, celui-ci couple les états $|F, m_F\rangle$ aux états $|F, m_F + 1\rangle$, et tend à pomper l'atome vers un état contenant la plus grande proportion de $|F, F\rangle$ comme on le voit en figure B.7. Ceci contrecarre le passage dans $|F, -F\rangle$ si l'intensité du laser est suffisamment grande. Si le désaccord $W \approx \mu_B B_\perp / \hbar$ entre deux transitions successives est faible devant la fréquence de Rabi $\Omega_{\text{Rabi}} \approx \Gamma \sqrt{I/2I_{\text{sat}}}$ du laser ralentisseur, alors, l'atome va pouvoir se « brancher » d'une transition à la suivante, et sortir de cette zone dangereuse dans l'état $|F, F\rangle$. Pour notre intensité de $I = 25 \text{ mW/cm}^2$, on obtient $B_\perp \ll 12 \text{ G}$. Dans cet ordre de grandeur, nous n'avons pas pris en compte la vitesse v des atomes. En ralentissant, l'atome est plus facilement à résonance avec les transitions successives qui permettent le pompage, et donc, on peut s'attendre à ce que ceci rende la condition précédente encore plus facile à réaliser. Dans notre cas où B_\perp est de l'ordre du gauss, on peut considérer que la quasi-majorité des atomes sortent dans l'état $|F, F\rangle$, et que le pompage est suffisamment efficace.

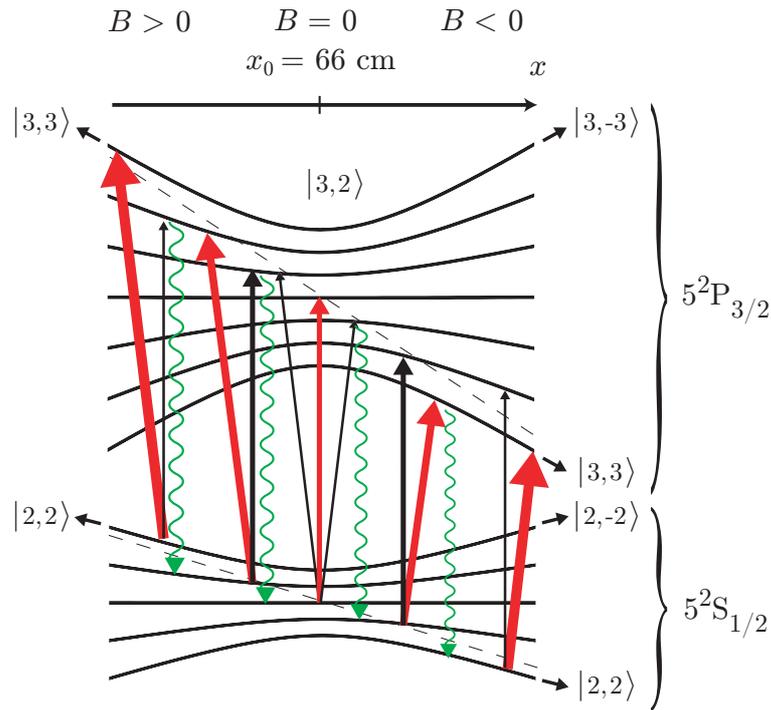


FIG. B.7 – Schéma de principe du pompage au voisinage du champ $B = 0$. L'atome se meut vers les x croissants en partant de l'état $|F, F\rangle$. Deux effets sont alors en compétition : sous l'effet du seul champ magnétique B_{\perp} , l'atome devrait suivre adiabatiquement l'état propre (tracé noir) et donc inverser sa polarisation en arrivant dans $|F, -F\rangle$ (équation B.10). Mais le laser ralentisseur polarisé σ^{+} a pour effet de repomper le moment cinétique vers des états contenant une forte proportion de $|F, F\rangle$. On a représenté par l'épaisseur des flèches la force des transitions. Les transitions en rouge sont celles qui deviennent prépondérantes à x donné. On voit ainsi qualitativement que le laser ralentisseur a tendance à ramener l'atome vers $|F, F\rangle$ pour les $B < 0$. En vert sont représentées quelques désexcitations spontanées qui permettent ce pompage.

B.3 Dynamique de dépompage

Nous avons vu au paragraphe B.1.2, que la combinaison du laser ralentisseur, de l'effet Zeeman non-linéaire et du champ perpendiculaire, couple l'état $|\phi_{2,2}\rangle_S$ à différents états qui peuvent se désexciter vers $|\phi_{1,1}\rangle_S$. Cet état ayant une énergie plus basse de l'ordre de $h\Delta_{HF}$ par rapport à $|\phi_{2,2}\rangle_S$, le laser ralentisseur ne peut plus agir sur l'atome qui est ainsi « dépompe ».

B.3.1 Temps caractéristique de dépompage

Considérons un atome au cours du ralentissement, dont la vitesse vérifie la relation 25. Le temps de dépompage associé à chacune des trois transitions représentées en figure B.2 est

donné par

$$\frac{2}{\Gamma_{\text{tr}}} \frac{1 + C_{\text{tr}} I / I_{\text{sat}} + 4 [(E_{\text{tr}} - E_0) / \hbar \Gamma]^2}{C_{\text{tr}} I / I_{\text{sat}}}, \quad (\text{B.11})$$

où E_{tr} est l'énergie de la transition excitatrice, C_{tr} , l'efficacité de cette transition (donnée en figure B.2), E_0 , l'énergie de la transition $|\phi_{2,2}\rangle_{\text{S}} \rightarrow |\phi_{3,3}\rangle_{\text{P}}$ et Γ_{tr} le taux d'émission spontanée donné en figure B.3.

En figure B.8, nous avons tracé les temps de dépompage relatifs aux états excités $|\phi_{3,3}\rangle_{\text{P}}$ et $|\phi_{2,2}\rangle_{\text{P}}$ (celui lié à $|\phi_{3,2}\rangle_{\text{P}}$ est négligeable devant les autres). On remarque que le processus de dépompage, hormis la zone où le champ s'annule, est dû à une excitation de $|\phi_{3,3}\rangle_{\text{P}}$ et a pour temps caractéristique 6 ms, alors que pour les valeurs de B entre ± 4 G, le processus de dépompage prédominant est lié à une excitation de $|\phi_{2,2}\rangle_{\text{P}}$. On peut retrouver l'ordre de grandeur du temps de dépompage via $|\phi_{2,2}\rangle_{\text{P}}$ pour $B=0$. La transition $F=2 \rightarrow F'=2$ est désaccordée de $\delta = -2\pi \times 266$ MHz par rapport à $F=2 \rightarrow F'=3$. Le taux de branchement moyen d'une transition σ^+ pour $F=2 \rightarrow F'=2$ est de $5/24$ et le taux de désexcitation $F'=2 \rightarrow F=1$ est de $\Gamma/2$ (§ A.1.2). Le temps de dépompage à $B=0$ est donc environ de

$$\frac{2}{\Gamma} \frac{2(1 + 4\delta^2/\Gamma^2)}{5I/24I_{\text{sat}}} = 0.25 \text{ ms}. \quad (\text{B.12})$$

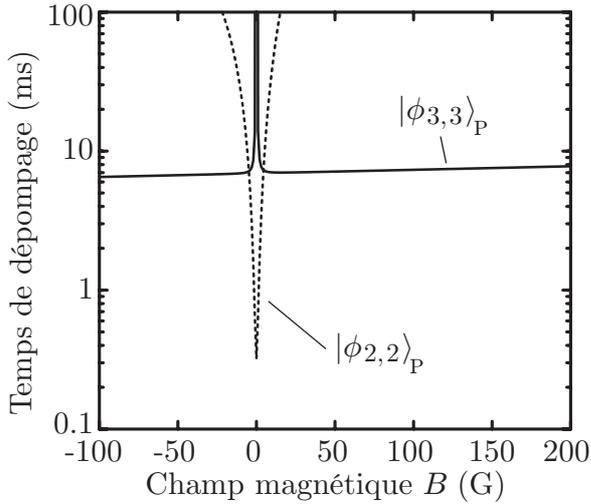


FIG. B.8 – Temps de dépompage (équation B.11) en passant par l'un des niveaux excités $|\phi_{3,3}\rangle_{\text{P}}$ ou $|\phi_{2,2}\rangle_{\text{P}}$, tracé en fonction du champ magnétique B (on a pris $B_{\perp} = 1$ G ici). D'après la discussion du paragraphe B.1.2, on note que le temps de dépompage depuis $|\phi_{3,3}\rangle_{\text{P}}$ varie en $1/B_{\perp}^2$, alors que le temps minimum de dépompage depuis $|\phi_{2,2}\rangle_{\text{P}}$ est indépendant de B_{\perp} .

B.3.2 Probabilité de dépompage

À la vue de la figure B.8, on pourrait penser que la zone la plus « dangereuse » au niveau du dépompage est la zone entre les deux ralentisseurs Zeeman, où le champ axial $B(x)$ s'annule (figure 12). En réalité, il faut aussi prendre en compte le temps que passent les atomes dans cette zone. La probabilité pour qu'un atome soit dépompe au cours du ralentissement entre les positions $x_e(v)$ et x_s est

$$\mathcal{P}^i = \int_{x_e(v)}^{x_s} \frac{dx}{v_{\mathcal{R}}(x) t_{\text{dép}}^i(B(x))}. \quad (\text{B.13})$$

$v_{\mathcal{R}}$ est donné par la relation 25 tandis que l'indice $i = 2$ ou 3 repère le processus considéré de dépompage via l'état excité $|\phi_{i,i}\rangle_{\text{P}}$. La position de sortie x_s est donnée par le minimum de champ magnétique ($x = 66$ cm), tandis que la position $x_e(v)$, correspondant à l'entrée en

résonance avec le ralentissement, dépend de la vitesse initiale de l'atome considéré dans le jet, et peut être lue sur la figure 12 (a).

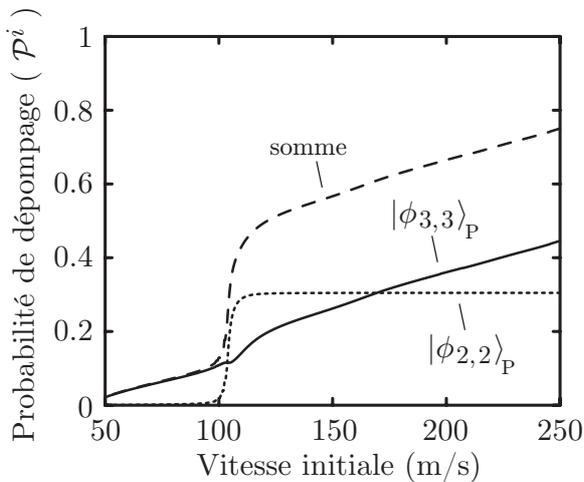


FIG. B.9 – Probabilité de dépompement (équation B.13) au cours du ralentissement en fonction de la vitesse initiale des atomes. On a tracé la probabilité en passant par l'un des niveaux excités $|\phi_{3,3}\rangle_P$ ou $|\phi_{2,2}\rangle_P$, ainsi que la somme des deux processus.

On remarque que les deux processus (figure B.9) ont une participation du même ordre de grandeur au dépompement des atomes, pour un champ perpendiculaire d'un gauss : le long temps de dépompement du processus faisant intervenir $|\phi_{3,3}\rangle_P$ est compensé par le fait que ce processus a lieu tout au long du ralentissement. Cependant, si le champ perpendiculaire est, ne serait-ce que de deux gauss, le processus de dépompement tout au long du ralentissement devient clairement prépondérant (il est multiplié par quatre).

B.4 Le repompement

On voit donc que les atomes ont une forte probabilité d'être dépompés au cours du ralentissement. On peut tenter de remédier à ce problème, en superposant un faisceau de repompement sur le faisceau ralentisseur. Il s'agit d'un faisceau excitant l'état fondamental $F = 1$ vers les états $F' = 1$ et $F' = 2$, qui peuvent alors se désexciter dans l'état $F = 2$. Le temps maximum que doit mettre un atome à être repompé pour ne pas être perdu pour le ralentissement, peut être estimé de la manière suivante.

B.4.1 Contrainte sur le temps caractéristique de repompement

Soit v'_{stat} (équation 27) la vitesse de l'atome dans le référentiel \mathcal{R} à l'abscisse x_1 correspondant au décrochage. L'atome pourra reprendre le processus de ralentissement au point x_2 si sa vitesse dans le référentiel \mathcal{R} en ce point est négative : $v'_{\text{stat}} + v_{\mathcal{R}}(x_1) - v_{\mathcal{R}}(x_2) \leq 0$. En considérant que les points x_1 et x_2 sont proches, on obtient la condition suivante sur le temps $t_{\text{déc}}$ pendant lequel l'atome peut être dépompé

$$t_{\text{déc}} \leq \frac{\hbar k v'_{\text{stat}}}{v_{\mathcal{R}} \mu_B dB/dx} \Big|_{x_1} = t_{\text{déc}}^{\text{max}}. \quad (\text{B.14})$$

Le repompement sera efficace si

$$t_{\text{rep}} \ll \min [t_{\text{déc}}^{\text{max}}; t_{\text{dép}}], \quad (\text{B.15})$$

où t_{rep} et $t_{\text{dép}}$ sont les temps caractéristiques de repompement et de dépompement. Nous avons comparé (figure B.10) $t_{\text{déc}}^{\text{max}}$ avec les temps de dépompement calculés en figure B.8. On remarque

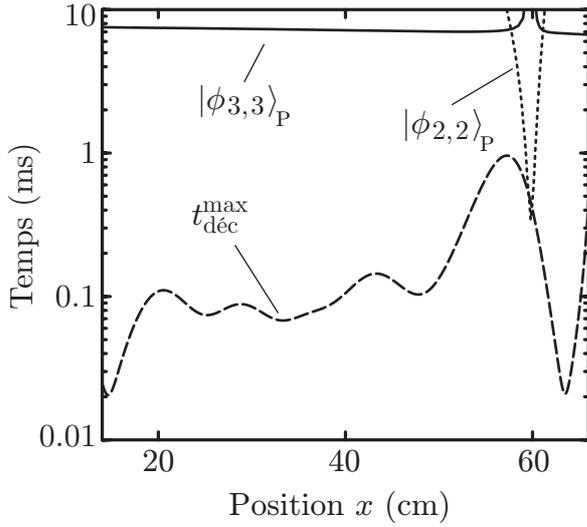


FIG. B.10 – Temps $t_{\text{déc}}^{\text{max}}$ maximum pendant lequel l'atome peut être dépompé sans décrocher (équation B.14 en trait tireté) en fonction de la position x dans le ralentisseur Zeeman. Ce temps est minimum au niveau des points critiques mentionnés en figure 12 (b). Il est maximum là où le champ magnétique décroît le moins vite (entre les deux ralentisseurs), c'est-à-dire là où l'atome peut plus se permettre de décrocher. On a aussi tracé les temps de dépompé associés aux processus discutés dans le paragraphe précédent pour $B_{\perp} = 1$ G.

que, quelle que soit la position, le processus de dépompé via $|\phi_{2,2}\rangle_{\text{P}}$ n'est jamais plus restrictif que $t_{\text{déc}}^{\text{max}}$ vis-à-vis de la condition B.15, et ceci quel que soit le champ B_{\perp} . Il en est de même pour le processus de dépompé via $|\phi_{3,3}\rangle_{\text{P}}$ tant que B_{\perp} est inférieur à environ 8 G, ce qui est le cas expérimentalement.

B.4.2 Intensité de repompé nécessaire

Soit δ_{rep} le désaccord du laser repompé par rapport à la transition $F=1 \rightarrow F'=2$ (pris à champ nul). Le désaccord $\delta(x)$ du laser par rapport à la transition $|\phi_{1,1}\rangle_{\text{S}} \rightarrow |\phi_{2,2}\rangle_{\text{P}}$ en un point donné est

$$\delta(x) = \delta_{\text{rep}} - \left[\frac{E_{\text{rep}}|_{B(x)} - E_{\text{rep}}|_{B=0}}{\hbar} - kv_{\mathcal{R}}(x) \right], \quad (\text{B.16})$$

où E_{rep} est l'énergie de la transition de repompé en champ B . D'après la figure B.11, il faut repompé sur une largeur de $2\Delta = 2\pi \times 200$ MHz, et le désaccord central de $-2\pi \times 110$ MHz correspond à la valeur optimum de δ_{rep} si l'on dispose d'une intensité de repompé suffisante.

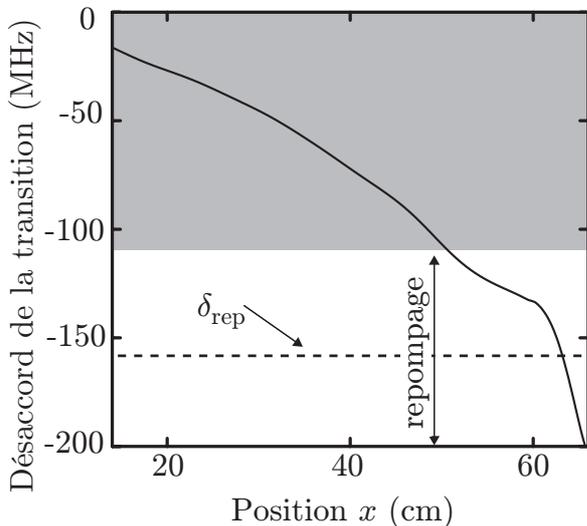


FIG. B.11 – Désaccord de la transition $|\phi_{1,1}\rangle_{\text{S}} \rightarrow |\phi_{2,2}\rangle_{\text{P}}$ incluant l'effet Zeeman et l'effet Doppler en fonction de la position x de l'atome (terme entre crochets de la relation B.16 divisé par 2π). Ce désaccord est pris par rapport à la transition $F=1 \rightarrow F'=2$ en champ nul. Nous avons aussi représenté le désaccord utilisé expérimentalement δ_{rep} et la zone repompée qui en résulte.

Nous pouvons évaluer celle-ci de la manière suivante. Soit n le nombre de photons nécessaires pour repomper un atome, c'est-à-dire le nombre de cycles réalisés pendant $t_{\text{déc}}$. Le repompage sera efficace tout au long du ralentissement, si le taux de repompage est supérieur à $n/t_{\text{déc}}$ pour des atomes désaccordés de Δ soit la condition suivante sur l'intensité :

$$I_{\text{rep}} \gg I_{\text{sat}} \frac{8n}{\Gamma t_{\text{déc}}^{\text{max}}} \left(\frac{\Delta}{\Gamma} \right)^2. \quad (\text{B.17})$$

Remarquons que cette condition est indépendante de B_{\perp} , tant que le facteur limitant reste le temps de décrochage (figure B.10), c'est-à-dire pour B_{\perp} inférieur à la dizaine de gauss. On prend n de l'ordre de 4 dans la relation B.17 : en effet, le coefficient de branchement de $|1, 1\rangle_{\text{S}} \rightarrow |2, 2\rangle_{\text{P}}$ est de 1/2 alors que le taux de désexcitation depuis $|2, 2\rangle_{\text{P}}$ vers $F=2$ est de $\Gamma/2$. En prenant une valeur pour $t_{\text{déc}}^{\text{max}}$ de 0.07 ms (figure B.10), on obtient $I_{\text{rep}} \gg 5 \text{ mW/cm}^2$. Notons que cette évaluation reste conservatrice, dans le sens où elle ne prend pas en compte le début et la fin du ralentissement où $t_{\text{déc}}^{\text{max}}$ peut descendre jusqu'à 0.02 ms. L'intensité repompeuse nécessaire pour éliminer tout dépompage pendant le ralentissement est donc loin d'être faible.

B.4.3 Performances du repompage sur le dispositif expérimental

Expérimentalement, nous n'avons à notre disposition qu'environ 2 mW/cm^2 de repompeur ralentisseur avec un désaccord $\delta_{\text{rep}} = -2\pi \times 157 \text{ MHz}$. Notons que, bien que le laser soit accordé sur la transition $F=1 \rightarrow F'=1$, la polarisation σ^+ du repompeur interdit toute transition directe, et seule la transition vers $F'=2$ est efficace. La puissance que nous avons nous permet donc de repomper sur une largeur d'au mieux $\Delta = 2\pi \times 50 \text{ MHz}$.

On peut donc considérer, que le repompage dans l'expérience est efficace à partir de la position $x_{\text{r}} \approx 50 \text{ cm}$ jusqu'à la fin du processus. Le pourcentage de pertes résiduelles (au début du ralentissement) est donné par la relation B.13, où nous avons remplacé x_{s} par x_{r} . Puisque le repompeur est efficace dans la zone entre les deux ralentisseurs, seul le processus de dépompage lié à $|\phi_{3,3}\rangle_{\text{P}}$ intervient, et le pourcentage de pertes croît rapidement en B_{\perp}^2 . Nous avons tracé, en figure B.12, le pourcentage de pertes attendu, en fonction de la classe de vitesse initiale considérée et de B_{\perp} . L'effet croît avec la vitesse initiale, car le temps passé dans le ralentissement croît aussi. Il est très sensible à la valeur du champ perpendiculaire, puisque par exemple, pour $B_{\perp} = 3 \text{ G}$, on perd tous les atomes de vitesse supérieure à 185 m/s !

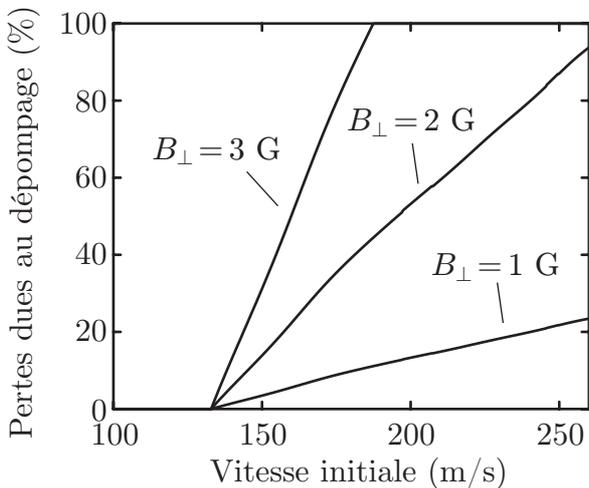


FIG. B.12 – Pourcentage de pertes par dépompage résiduel, en prenant en compte le repompage de largeur finie, lié à la puissance du repompeur (2 mW/cm^2) centré en δ_{rep} . On repompe efficacement toutes les vitesses jusqu'à 130 m/s , puis, au delà, des pertes par dépompage apparaissent, étant dues au couplage entre l'effet Zeeman non-linéaire et le champ perpendiculaire B_{\perp} . Nous avons tracé ces pertes pour trois valeurs du champ perpendiculaire.

Enfin, nous avons observé que le réglage du désaccord du repompeur est peu sensible dans une plage de quelques dizaines de MHz, ce que l'on retrouve, en faisant varier le désaccord dans le calcul. Par contre, il apparaît que le choix le plus favorable pour le désaccord du repompeur est tel que le repompage couvre toute la dernière partie du ralentissement. Ainsi, pour une largeur de repompage de Δ , l'optimum se situe vers $\delta_{\text{rep}} = -2\pi \times 200 \text{ MHz} + \Delta$, ce que nous avons expérimentalement. En effet, rien ne sert de repomper les atomes au début du ralentissement s'ils sont perdus sur la fin.

B.5 Défauts de polarisation

Nous avons décrit, dans les paragraphes précédents, les pertes dues à la conjonction de l'effet Zeeman non-linéaire et d'un champ perpendiculaire. Un autre phénomène peut aussi être à l'origine de pertes par dépompage : la mauvaise polarisation du laser ralentisseur. Du point de vue expérimental, la lame quart d'onde permettant de polariser le faisceau σ^+ ne peut être réglée à une précision meilleure que de quelques degrés. L'incertitude α sur ce réglage résulte en une intensité $I \sin^2 \alpha$ polarisée σ^- . Une incertitude de 6 degrés correspond à une situation, où un pour cent de l'intensité est ainsi incorrectement polarisée. Notons qu'une mauvaise polarisation finale peut tout autant résulter de la non pureté de la polarisation linéaire en entrée de la lame, ou encore des imperfections de ce composant optique, mais que ces effets peuvent être pris en compte par une valeur effective de α plus grande.

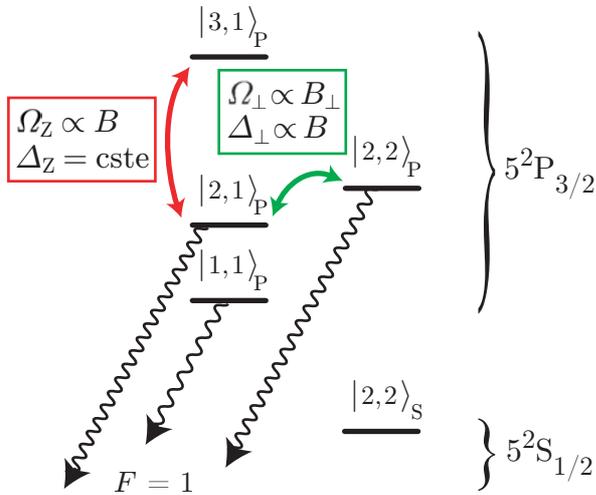


FIG. B.13 – États de la base $|F, m_F\rangle$ mis en jeu dans les processus prédominants de dépompage sous l'effet d'une polarisation σ^- . Cette polarisation excite $|\phi_{2,1}\rangle_P$, $|\phi_{1,1}\rangle_P$, $|\phi_{3,1}\rangle_P$ et $|\phi_{2,2}\rangle_P$ depuis $|\phi_{2,2}\rangle_S$. L'écart en énergie entre les états $|\phi_{2,2}\rangle_P$ et $|\phi_{2,1}\rangle_P$ est Δ_\perp , et le terme de couplage correspondant est Ω_\perp . L'effet Zeeman non-linéaire a pour effet de coupler les niveaux $|3, 1\rangle_P$ et $|2, 1\rangle_P$ entre eux avec les paramètres Ω_Z et Δ_Z .

Considérons donc l'effet de la présence d'une lumière σ^- d'intensité $I \sin^2 \alpha$. Le raisonnement pour calculer les taux de dépompage sous l'effet de cette lumière, est identique à celui que nous avons présenté aux paragraphes B.1.2 et B.3. L'excitation de différentes transitions, peut mener à des dépompages vers $F=1$ et les trois transitions prédominantes vis-à-vis de ce processus, sont celles qui correspondent à une excitation vers $|\phi_{2,1}\rangle_P$, $|\phi_{1,1}\rangle_P$, $|\phi_{3,1}\rangle_P$ et $|\phi_{2,2}\rangle_P$. On a représenté en figure B.13 les états mis en jeu. Pour les deux premiers cas, un photon σ^- pompe l'atome dans l'état $|\phi_{2,1}\rangle_P$ ou $|\phi_{1,1}\rangle_P$, à partir duquel il peut se désexciter dans $F=1$. Dans le troisième cas, le photon pompe l'atome dans $|\phi_{3,1}\rangle_P$ qui est contaminé via l'effet Zeeman non-linéaire par $|2, 1\rangle_P$ et peut ainsi se désexciter vers $F=1$. Le processus de dépompage pour ces trois premiers cas est donc très peu dépendant de B_\perp . Le cas du dépompage via $|\phi_{2,2}\rangle_P$, est quant à lui possible, car $|\phi_{2,2}\rangle_P$ est contaminé par $|2, 1\rangle_P$ propor-

tionnellement à $\Omega_{\perp}/\Delta_{\perp}$. Il s'ensuit que le taux de dépompement via $|\phi_{2,2}\rangle_{\text{P}}$ est proportionnel à B_{\perp}^2 .

On détermine les temps de dépompement pour des atomes au cours du ralentissement, en utilisant la relation B.11 où l'on remplace I par $I \sin^2 \alpha$. Il vient alors (relation B.13) la probabilité pour un atome de vitesse initiale v d'être dépompé selon chacun des quatre processus précédemment cités. Ces probabilités sont tracées en figure B.14 en prenant $\sin^2 \alpha = 0.01$ et $B_{\perp} = 1$ G.

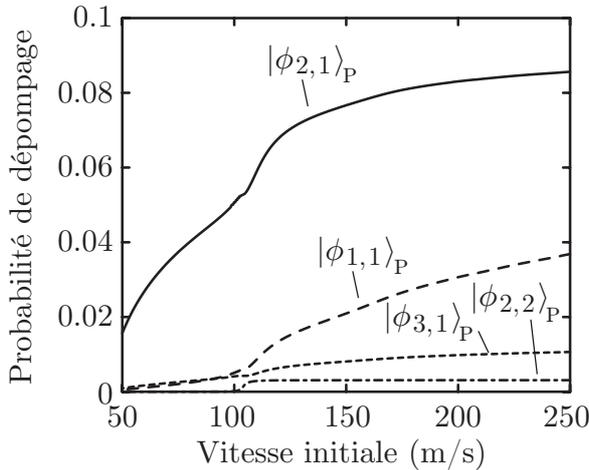


FIG. B.14 – Probabilité de dépompement au cours du ralentissement en fonction de la vitesse initiale des atomes sous l'effet de la polarisation σ^- . On a tracé la probabilité, en passant par l'un des niveaux excités $|\phi_{2,1}\rangle_{\text{P}}$, $|\phi_{1,1}\rangle_{\text{P}}$, $|\phi_{3,1}\rangle_{\text{P}}$ et $|\phi_{2,2}\rangle_{\text{P}}$. L'intensité du faisceau polarisé σ^- à résonance avec la transition $|\phi_{2,2}\rangle_{\text{S}} \rightarrow |\phi_{3,3}\rangle_{\text{P}}$ a été prise à 0.25 mW/cm^2 (1% de l'intensité totale) et $B_{\perp} = 1$ G.

Comme discuté précédemment, le seul processus dépendant de B_{\perp} est le dernier dont l'effet est proportionnel à B_{\perp}^2 . Cependant, on remarque qu'il n'a un effet supérieur au premier que pour des champs transverses assez importants, puisque supérieurs à 5 G. Toutes ces probabilités de dépompement sont globalement proportionnelles à $\sin^2 \alpha$, c'est-à-dire à la quantité de lumière polarisée σ^- (dans l'équation B.11, le terme proportionnel à I est pratiquement toujours négligeable devant le désaccord et disparaît). Si l'on compare la figure B.14 à la figure B.9, on observe que pour $B_{\perp} = 1$ G, les pertes dues à une mauvaise polarisation sont du même ordre que les pertes dues à la combinaison de l'effet Zeeman non-linéaire et du champ perpendiculaire, pour une proportion de l'intensité polarisée σ^- d'environ 5%. Ceci correspondrait à une incertitude effective sur α de l'ordre de 13 degrés, dans le cas où seul le réglage de la lame serait responsable de la mauvaise polarisation du faisceau ralentisseur. Expérimentalement, on observe une sensibilité sur le réglage angulaire de cette lame de l'ordre de quelques degrés, ce qui est compatible avec la discussion précédente.

QUELQUES PHÉNOMÈNES INTERVENANT PENDANT LE REFROIDISSEMENT LASER

Dans cette annexe nous discutons de deux phénomènes qui apparaissent à différentes étapes du refroidissement laser sur notre expérience (§ I.2). Nous décrivons tout d'abord au paragraphe C.1, les effets collectifs induits par la lumière, et qui apparaissent du fait des fortes densités atomiques manipulées, puis nous abordons au paragraphe C.2 le phénomène de refroidissement subdoppler, qui est plus particulièrement mis en œuvre pendant la phase de mélasse optique.

C.1 Effets collectifs dans un piège magnéto-optique

Comme discuté au paragraphe I.2.3.b, un nuage atomique de forte densité, présente un comportement collectif, lorsqu'il interagit avec le rayonnement [199, 60, 200]. Dans la suite, en reprenant les notations introduites au paragraphe I.2.3, nous présentons les différents phénomènes (atténuation des faisceaux et diffusion de photons) qui limitent, en particulier, la densité et la température du nuage dans le piège magnéto-optique.

C.1.1 Atténuation des faisceaux pièges

En interagissant avec les atomes, les faisceaux de piégeage pénétrant dans le piège magnéto-optique (PMO) perdent en intensité, ce qui résulte en la compression du nuage [201]. En effet, considérons une intensité totale $I_{\text{tot}} = 6I$ uniformément répartie spatialement, et convergeant vers l'origine des coordonnées $\vec{r} = 0$ (figure C.1). L'atome (1) ressent une force¹ de pression de radiation radiale $\vec{F}_{\text{piège}} = -\mathcal{C}I_{\text{tot}}\sigma_L d\vec{\Omega} / 4\pi c$ dans la direction $d\vec{\Omega}$. S'il était seul, il ressentirait la résultante sur toutes les directions possibles de ces forces, soit une force nulle. Cependant, un atome (2) placé à une distance r , absorbe de la lumière laser avec une section efficace σ_L , et donc occulte le rayonnement sur un angle solide $d\Omega = \sigma_L / r^2$ vis-à-vis de l'atome (1). Ce

¹ $\mathcal{C} \approx 0.5$ est le coefficient effectif de branchement introduit au paragraphe I.2.3.a.

dernier sent alors une force résultante qui l'attire vers l'atome (2),

$$F_A = -\frac{\mathcal{C}I_{\text{tot}}\sigma_L^2}{4\pi r^2 c}. \quad (\text{C.1})$$

Le même raisonnement s'applique pour l'effet d'écrantage de l'atome (1) sur l'atome (2), et l'absorption des faisceaux lumineux résulte donc en une force attractive entre les atomes.

La section efficace σ_L d'absorption de la lumière des lasers désaccordés de δ_{PMO} peut être évaluée via un modèle d'atome à deux niveaux [61]

$$\sigma_L = \frac{3\lambda^2}{2\pi} \frac{1}{1 + \mathcal{C}I_{\text{tot}}/I_{\text{sat}} + 4\delta_{\text{PMO}}^2/\Gamma^2} \approx 1.4 \times 10^{-14} \text{ m}^2. \quad (\text{C.2})$$

L'application numérique est réalisée avec nos paramètres expérimentaux, $I = 2 \text{ mW/cm}^2$ et $\delta_{\text{PMO}} = -2\Gamma$ (§ I.2.3.b).

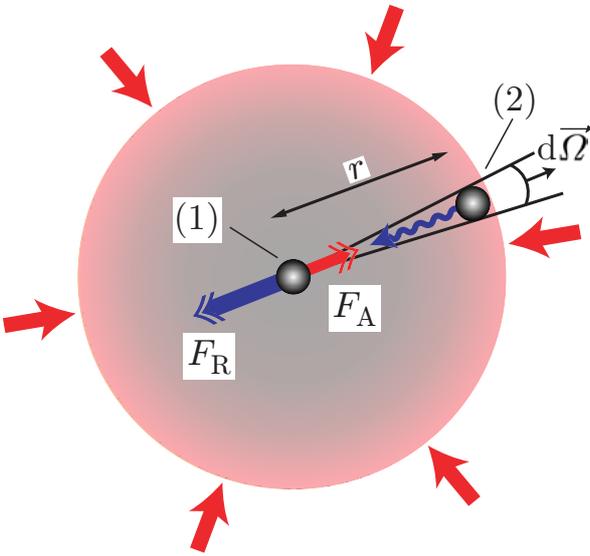


FIG. C.1 – Schéma de principe des effets collectifs dans un nuage piégé. La lumière des lasers (rouge) reçue par l'atome (1) est occultée par l'atome (2) sur un angle solide $d\vec{\Omega}$, ce qui résulte en une force attractive entre atomes F_A (équation C.1). Cependant, l'atome (2) ayant absorbé un photon des lasers, va en réémettre un par émission spontanée avec une composante spectrale désaccordée vers le bleu par rapport aux faisceaux (triplet de Mollow). Ce photon va être plus efficacement absorbé par l'atome (1) et résulte en une force F_R (équation C.3), plus répulsive que F_A n'est attractive. Au final, la force radiative entre deux atomes est répulsive.

C.1.2 Diffusion de photons

Le corollaire de l'absorption des faisceaux laser est le phénomène d'émission spontanée. Reprenant les notations précédentes, l'atome (2) réémet un photon spontané de manière isotrope en moyenne. La puissance rayonnée par l'atome (2) est $\mathcal{P} = \mathcal{C}I_{\text{tot}}\sigma_L$, et la section efficace d'absorption de cette lumière pour l'atome (1) est notée σ_R . La proportion de puissance absorbée par l'atome (1) est donc égale à $\sigma_R/4\pi r^2$, et la force répulsive entre (2) et (1) qui en résulte s'écrit

$$F_R = \frac{\mathcal{C}I_{\text{tot}}\sigma_L}{c} \frac{\sigma_R}{4\pi r^2}. \quad (\text{C.3})$$

En général, $\sigma_R \neq \sigma_L$, car le spectre d'émission de l'atome est différent du spectre du laser. En particulier, l'irradiation modifie les niveaux atomiques, ce qui résulte en une modification de la réponse atomique et en des phénomènes de diffusion inélastiques. Ainsi, dans le cadre d'un couplage de fréquence de Rabi Ω_{Rabi} avec une onde laser de fréquence ω_L , le spectre d'émission d'un atome fait apparaître, outre un pic central à ω_L , deux pics latéraux

à $\omega_L \pm \Omega_{\text{Rabi}}$ (triplet de Mollow [202]). Dans notre cas, les lasers étant désaccordés vers le rouge ($\delta_{\text{PMO}} < 0$), on s'attend à ce que σ_R soit supérieur à σ_L , du fait de la présence du pic à $\omega_L + \Omega_{\text{Rabi}}$ plus proche de résonance que le laser. L'effet est d'autant moins négligeable, qu'aux intensités auxquelles nous travaillons, Ω_{Rabi} est de l'ordre de Γ et donc de δ_{PMO} . En première approximation, on peut prendre pour σ_R la valeur suivante [203]

$$\sigma_R = \sigma_L \left[1 + \frac{4\delta_{\text{PMO}}^2 \mathcal{C}I_{\text{tot}}/I_{\text{sat}}}{(1 + \mathcal{C}I_{\text{tot}}/I_{\text{sat}})(\Gamma^2(1 + \mathcal{C}I_{\text{tot}}/I_{\text{sat}}) + 4\delta_{\text{PMO}}^2)} \right] \approx 1.6 \sigma_L. \quad (\text{C.4})$$

C.1.3 Densité maximale du piège magnéto-optique

On peut tirer parti du fait que les forces interatomiques F_R et F_A sont en $1/r^2$ pour pouvoir appliquer le théorème de Gauss à une assemblée d'atomes : les flux $\delta\Phi_R$ et $\delta\Phi_A$ de ces forces, à travers la surface δS entourant un volume δV , dépendent du nombre d'atomes $n(r) \delta V$ dans ce volume

$$\delta\Phi_{R,A} = [F_{R,A} 4\pi r^2 n(r)] \delta V = [\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}}_{R,A}] \delta V. \quad (\text{C.5})$$

On a introduit la divergence $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{F}}_{R,A}$ du champ de force global associé à la distribution de densité atomique $n(r)$. À l'équilibre, les forces de radiation sont contrebalancées par la force de piégeage $-\kappa r$ du piège magnéto-optique (équation 30), et la divergence de la somme de ces trois forces s'annule, ce qui impose une valeur pour la densité

$$n = \frac{3\kappa c}{\mathcal{C}I_{\text{tot}}\sigma_L(\sigma_R - \sigma_L)} \approx 3.6 \times 10^{11} \text{ at/cm}^3. \quad (\text{C.6})$$

En réalité [61], ce calcul donne plutôt la valeur maximum de la densité, telle que la répulsion radiative entre les atomes compense la force de piégeage : ainsi, plus on ajoute des atomes dans le PMO, plus le nuage grossit, de telle façon que la densité maximum soit constante.

Notons enfin que l'on néglige, dans ce modèle, des processus où le photon réémis est réabsorbé une seconde fois par un autre atome. A priori, ce phénomène a une forte chance d'arriver puisque le libre parcours moyen d'un photon dans le nuage $1/\sqrt{2} n \sigma_R = 90 \mu\text{m}$ est inférieur à la taille σ_0 de ce dernier dans la cas du piège magnéto-optique (figure 16).

C.2 Refroidissement subdoppler par gradient de polarisation

Nous présentons dans ce paragraphe le mécanisme de refroidissement subdoppler que nous avons mentionné pendant l'étape de mélasse optique (§ I.2.4).

C.2.1 Différents temps d'évolution

Le mécanisme physique de ce type de refroidissement a été développé dans [204, 205]. La dynamique de l'évolution du système atomique se mouvant à la vitesse v , dans un champ électromagnétique dont les caractéristiques varient sur une échelle de la longueur d'onde λ , repose sur deux échelles de temps différentes :

- le temps typique de l'évolution des degrés de liberté externes de l'atome $\tau_{\text{ext}} = \lambda/v$,
- le temps caractéristique d'évolution de l'état interne de l'atome donné par l'inverse du taux de pompage $\tau_{\text{int}} = 1/\Gamma_p$.

Si $\tau_{\text{int}} \gg \tau_{\text{ext}}$, l'état interne de l'atome ne suit pas adiabatiquement l'évolution du champ. En particulier, à faible saturation $s_0 \ll 1$, le taux de pompage vérifie $\Gamma_p = \Gamma s_0/2$, ce qui implique que des phénomènes non-adiabatiques, apparaissent pour des vitesses $v \approx s_0 \Gamma/k$ inférieures d'un facteur s_0 aux vitesses typiques du refroidissement Doppler. Dans notre cas, le paramètre qui change sur l'échelle de la longueur d'onde, est la polarisation. En effet, en conservant la configuration $\sigma^+ - \sigma^-$ des lasers de piégeage, on obtient un champ d'intensité constante, dont la polarisation $\vec{s}(u)$ est en tout point linéaire, et tourne autour de l'axe u des deux lasers contrapropageants sur une période λ (figure C.2).

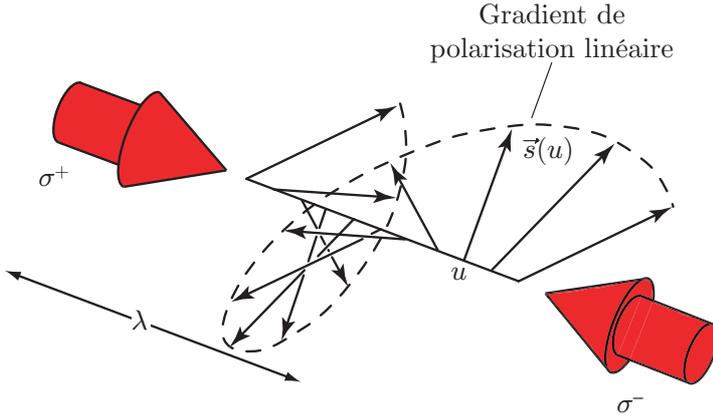


FIG. C.2 – Configuration de la mélasse subdoppler par gradient de polarisation. Les deux lasers d'axe u en configuration $\sigma^+ - \sigma^-$, créent une polarisation linéaire d'axe $\vec{s}(u)$ tournant sur une période λ .

C.2.2 Polarisation atomique induite par la vitesse

Soit un atome de Rubidium au repos en $u = u_0$, dont on ne considère que la transition $F=2 \rightarrow F'=3$. En prenant nos paramètres expérimentaux pendant la phase de mélasse (l'intensité $I = 2 \text{ mW/cm}^2$ et le désaccord $\delta_{\text{mél}} = -6\Gamma$), on obtient que le paramètre de saturation s_0 est faible,

$$s_0 = \frac{I \delta_{\text{mél}}^2}{4I_{\text{sat}} \Gamma^2} = 10^{-3}. \quad (\text{C.7})$$

Nous ne considérons donc que les états fondamentaux $F=2$. L'onde est polarisée linéairement selon $\vec{s}(u_0)$. La population atomique dans les états propres $|F=2, m_F\rangle_{\vec{s}(u_0)}$ liés à l'axe de quantification $\vec{s}(u_0)$, est donc centrée sur $m_F = 0$, et est symétrique vis-à-vis de cet état [206]. De plus, en considérant les transitions $\pi : |F=2, m_F\rangle_{\vec{s}(u_0)} \rightarrow |F'=3, m_F\rangle_{\vec{s}(u_0)}$, on observe que les lasers induisent un déplacement lumineux Δ_{m_F} des niveaux fondamentaux $|F=2, m_F\rangle_{\vec{s}(u_0)}$,

$$\Delta_{m_F} = \frac{\mathcal{C}_{m_F}^2 I \Gamma^2}{2I_{\text{sat}} \delta_{\text{mél}}} = -\mathcal{C}_{m_F}^2 2\pi \times 600 \text{ kHz}, \quad (\text{C.8})$$

où cette expression est valide dans la limite vérifiée expérimentalement $|\delta_{\text{mél}}| \gg \Gamma \sqrt{I/I_{\text{sat}}}$. Nous avons représenté ces déplacements lumineux en figure C.3.

Considérons maintenant l'axe u qui est l'axe de propagation des lasers, ainsi que les états hyperfins notés $|F=2, m_F\rangle_u$ qui l'ont comme axe de quantification. Pour des raisons de symétrie, chaque état $|F=2, m_F\rangle_{\vec{s}(u_0)}$ contient la même proportion de $|F=2, m_F\rangle_u$ et de $|F=2, -m_F\rangle_u$, ce qui résulte en une polarisation nulle de l'atome selon la direction des faisceaux u .

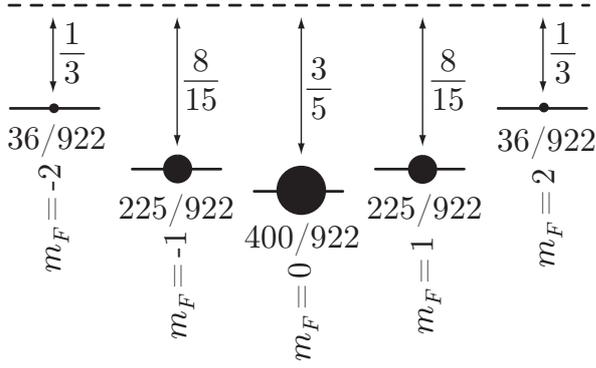


FIG. C.3 – Population et déplacement lumineux des différents états hyperfins $|F=2, m_F\rangle_{\vec{s}(u_0)}$, correspondant à l'axe de quantification $\vec{s}(u_0)$ confondu avec la polarisation linéaire de l'onde lumineuse. Les populations $(36/922, 225/922, 400/922)$ des différents états hyperfins, décroissent fortement avec $|m_F|$. De plus, les états de $|m_F|$ donné, subissent un déplacement lumineux $-\mathcal{C}_{m_F}^2 2\pi \times 600 \text{ kHz}$ où les coefficients $\mathcal{C}_{m_F}^2$ valent $(1/3, 8/15, 3/5)$ pour $|m_F| = (2, 1, 0)$.

Pour un atome immobile, la combinaison des faisceaux $\sigma^+ - \sigma^-$ ne polarise donc pas l'atome le long de l'axe u des lasers. Ce résultat est différent si l'on considère un atome en mouvement à la vitesse v . En effet, dans son référentiel propre, l'atome voit tourner la polarisation linéaire à une vitesse angulaire kv . Le système est alors équivalent à un atome au repos, plongé dans un champ électromagnétique de polarisation linéaire fixe $\vec{s}(u_0)$, auquel on a ajouté un terme énergétique inertiel $\hat{V}_{\text{rot}} = kv\hat{F}_u$ rendant compte de la rotation de la polarisation : en effet, \hat{F}_u qui est l'opérateur de moment cinétique hyperfin selon la direction u , intervient dans l'opérateur des rotations autour de l'axe u . Le terme inertiel \hat{V}_{rot} est formellement équivalent à celui créé par un champ magnétique fictif $B_{\text{fict}} = 2\hbar kv/\mu_B$, et tend donc comme ce dernier, à polariser les atomes selon l'axe u . Ce champ fictif brise la symétrie que l'on avait dans le cas d'un atome au repos : il induit une population plus importante dans l'état qui absorbe le plus de photons de la part de l'onde (σ^+ ou σ^-) contrapropageante à l'atome. À cet effet dépendant de la vitesse, dû au déséquilibre des populations des états $|F=2, m_F\rangle_u$, il faut ajouter un effet plus faible dû aux cohérences que le terme \hat{V}_{rot} crée entre les états fondamentaux.

C.2.3 Force de friction subdoppler

Au final, l'atome ressent la force de friction agissant sur la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$ [206],

$$F = -\alpha_{\text{sd}} \frac{v}{1 + (v/v_m)^2}, \quad (\text{C.9})$$

où

$$\begin{cases} \alpha_{\text{sd}} = 11 \left(-\frac{\Gamma}{\delta_{\text{mél}}} \right) \frac{\hbar k^2}{2} \approx 6.3 \times 10^{-21} \text{ kg/s}, \\ v_m = \frac{s_0 |\delta_{\text{mél}}|}{6.5k} \approx 3.7 \text{ cm/s}, \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

dans la limite $|\delta_{\text{mél}}| \gg \Gamma/2$. Le coefficient de friction α_{sd} est indépendant de l'intensité lumineuse (du moment qu'elle vérifie $s_0 \ll 1$). La vitesse v_m pour laquelle le refroidissement subdoppler est maximum, correspond à une température $T_m = mv_m^2/k_B = 15 \mu\text{K}$. Expérimentalement, puisque les températures que nous obtenons sont quatre fois supérieures (figure 19), notre mélasse est dans un régime, où la force dépend de manière non-linéaire de la vitesse, et la friction s'en trouve réduite (figure C.4).

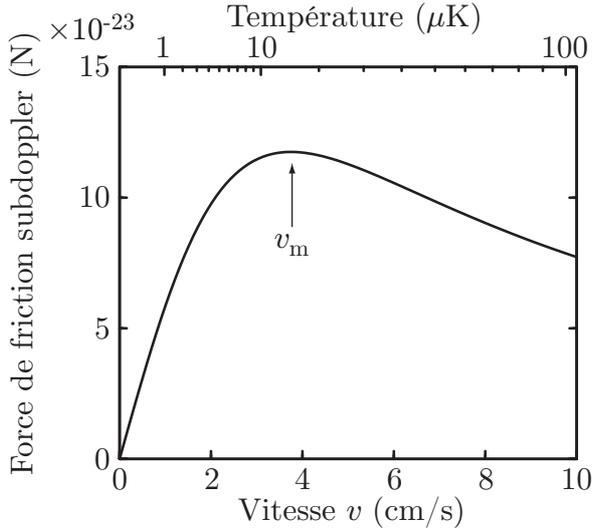


FIG. C.4 – Force de refroidissement subdoppler à une dimension calculée pour nos paramètres expérimentaux (relation C.9). On observe une saturation autour de v_m .

En principe, la température obtenue au terme de la mélasse optique, est le fruit d’une compétition entre la friction, qui a tendance à refroidir le nuage, et la diffusion qui a tendance à le chauffer. Dans le cas où seuls ces phénomènes sont à prendre en compte, et où la force de friction est dans le domaine linéaire ($v \ll v_m$), la température d’équilibre peut s’écrire (dans la limite $|\delta_{\text{mél}}| \gg \Gamma$),

$$T \propto T_D \frac{\Gamma}{|\delta_{\text{mél}}|} \frac{I}{I_{\text{sat}}}. \quad (\text{C.11})$$

Le facteur de proportionnalité peut être très inférieur à 1, et vaut par exemple 29/300 si l’on considérait une transition $F = 1 \rightarrow F' = 2$ [204]. Si l’on appliquait la relation C.11 à notre cas expérimental, on obtiendrait des températures de l’ordre $3 \mu\text{K}$. Expérimentalement, nous mesurons des températures plutôt 20 fois supérieures (figure 19). Les causes de cet écart sont multiples. Entre autres, on peut noter les raisons suivantes :

- Nous utilisons la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$ et non pas la transition $F = 1 \rightarrow F' = 2$ comme dans [204], ce qui a un effet sur la valeur du facteur de proportionnalité de l’équation C.11.
- Le modèle de mélasse utilisé est unidimensionnel, alors que l’expérience est réalisée à trois dimensions. On peut comprendre que la friction en dimension trois est fortement réduite par rapport au cas théorique : en effet, le refroidissement est fondé sur des variations de polarisation de l’atome, qui est perturbée par les autres faisceaux transverses de la mélasse.
- Des phénomènes liés à la diffusion multiple de photons, qui ont tendance à augmenter la température, tout comme ils sont responsables de la température du PMO. Ils ne sont pas négligeables du fait de la forte densité à laquelle nous travaillons : le libre parcours moyen d’un photon dans le nuage, est de l’ordre de sa taille.

C.2.4 Effet d’un champ magnétique parasite

Le refroidissement subdoppler introduit trois fréquences caractéristiques :

- via le déplacement lumineux, $\Delta_{m_F} \approx 2\pi \times 600 \text{ kHz}$,
- via le taux de pompage $\Gamma_p \approx 2\pi \times 3 \text{ kHz}$,
- via la fréquence de Larmor $\Omega_{\text{fict}} \approx k\sqrt{k_B T/m} \approx 2\pi \times 100 \text{ kHz}$ associée au champ magnétique fictif correspondant à la vitesse quadratique moyenne de notre distribution expérimentale de température $60 \mu\text{K}$.

Pour qu'un champ magnétique résiduel $B_{\text{rés}}$ ait peu d'incidence sur le refroidissement subdoppler, il faut que la fréquence de Larmor $|g_F|\mu_B B_{\text{rés}}/\hbar$ associée, soit bien inférieure aux trois fréquences précédentes. Ceci donne une limite supérieure à $B_{\text{rés}}$ de l'ordre de quelques milligauss, ce qui est expérimentalement très difficile à réaliser. Les températures que nous obtenons, sont plutôt compatibles avec des vitesses $v = |g_F|\mu_B B_{\text{rés}}/\hbar k$ correspondant à des champs magnétiques résiduels de la centaine de milligauss.

LA MÉTHODE DE LA PHASE STATIONNAIRE

Nous présentons dans cette annexe, une méthode d'approximation d'intégrales oscillantes, qui est utilisée dans la seconde partie de ce manuscrit : la méthode de la phase stationnaire (Appendice III de [153]).

Soit l'intégrale suivante portant sur une variable q

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dq g(q) e^{i\phi(q)}, \quad (\text{D.1})$$

où $g(q)$ et $\phi(q)$ sont des fonctions réelles. On peut comprendre qualitativement, que les points où cette intégrande oscille rapidement, ne vont pas beaucoup contribuer à l'intégrale, tandis que les points où la phase de l'intégrande ne varie pas trop (points stationnaires) vont avoir un poids prépondérant dans le résultat final. Différents traitements sont possibles en fonction du nombre de points stationnaires obtenus.

D.1 Cas de la présence d'un unique point stationnaire

Considérons le cas où ϕ présente un unique point stationnaire, c'est-à-dire un point q_0 où la dérivée de la phase s'annule, $\phi'(q_0)=0$, mais où la dérivée seconde est non nulle. On peut alors développer la phase à son voisinage,

$$\phi(q) = \phi(q_0) + \frac{\phi''(q_0)}{2}(q - q_0)^2 + \mathcal{O}((q - q_0)^3). \quad (\text{D.2})$$

L'approximation de phase stationnaire consiste à limiter ce développement à l'ordre 2 en $(q - q_0)$. Comme montré en figure D.1, seuls comptent dans l'intégrale I , les points assez proches de q_0 , tels que la phase n'oscille pas trop. Notons δq , la variation de q autour de q_0 telle que la phase soit modifiée de 2π ,

$$(\delta q)^2 = \frac{4\pi}{\phi''(q_0)}. \quad (\text{D.3})$$

δq donne l'extension typique du domaine d'intégration qui a une contribution non nulle à I . Pour que la méthode de la phase stationnaire soit utilisable, il faut que l'enveloppe $g(q)$ varie

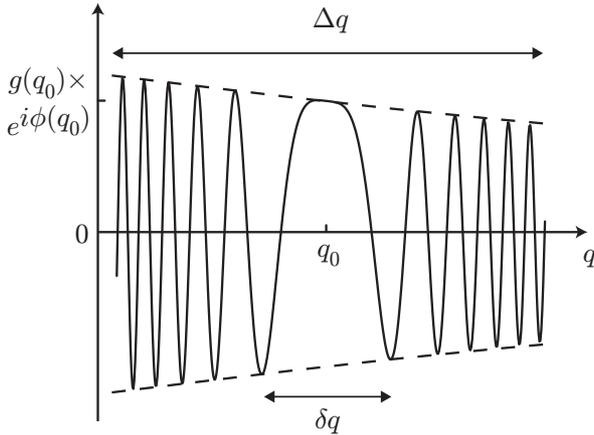


FIG. D.1 – Principe de la méthode de phase stationnaire. Nous avons tracé l'intégrande D.1. Celle-ci oscille rapidement hors de la zone d'extension δq autour du point stationnaire q_0 . La taille caractéristique Δq d'évolution de l'enveloppe $g(q)$, vérifie l'équation D.4, de telle façon que $g(q)$ soit prise constante à $g(q_0)$ dans l'intégrale.

très peu sur cet intervalle. En notant Δq la taille caractéristique de variation de $g(q)$ autour de q_0 , cette condition s'écrit

$$(\Delta q)^2 \gg (\delta q)^2. \quad (\text{D.4})$$

Si elle est vérifiée, on peut, à une très bonne approximation, égaler $g(q)$ à $g(q_0)$ dans I , et sortir l'enveloppe de l'intégrale en écrivant

$$I \approx g(q_0) e^{i\phi(q_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp\left(i \frac{\phi''(q_0)}{2} (q - q_0)^2\right). \quad (\text{D.5})$$

Cette dernière expression contient une intégrale gaussienne que l'on peut calculer pour aboutir à

$$I \approx \sqrt{\frac{2i\pi}{\phi''(q_0)}} g(q_0) e^{i\phi(q_0)}. \quad (\text{D.6})$$

D.2 Cas plus général

L'expression D.6 correspond au cas le plus simple où il y a un unique point stationnaire. En réalité, on peut aussi évaluer de telles intégrales oscillantes dans le cas où il y a plusieurs points stationnaires et où le domaine d'intégration est quelconque et ne correspond pas à tout \mathbb{R} .

Considérons donc l'intégrale suivante

$$I = \int_a^b dq g(q) e^{i\phi(q)}, \quad (\text{D.7})$$

où $a < b$ sont deux réels. Cette fois-ci nous considérons que l'équation $\phi'(q_j) = 0$ a au moins une solution dans \mathbb{R} . Nous faisons l'hypothèse que les q_j n'annulent pas la dérivée seconde, donc que ce sont des racines simples, $\phi''(q_j) \neq 0$. Nous classons ces solutions par ordre croissant. Dans la méthode que nous détaillons ci-dessous, seules ne peuvent participer au calcul de l'intégrale, que les solutions appartenant à l'intervalle $[a; b]$ ou les deux solutions qui sont les plus proches de cet intervalle. Ainsi, on ne considère que les n solutions telles que

$$q_1 < a \leq q_2 < q_3 \dots q_{n-2} < q_{n-1} \leq b < q_n. \quad (\text{D.8})$$

L'idée consiste à découper l'intervalle d'intégration $[a; b]$ en des intervalles centrés sur ces points stationnaires, c'est-à-dire que l'on écrit I comme la somme de n intégrales (figure D.2),

$$I = \underbrace{\int_a^{a(1,2)} dq g(q) e^{i\phi(q)}}_{I_1} + \sum_{j=2..n-1} \underbrace{\int_{a(j-1,j)}^{b(j,j+1)} dq g(q) e^{i\phi(q)}}_{I_j} + \underbrace{\int_{b(n-1,n)}^b dq g(q) e^{i\phi(q)}}_{I_n}, \quad (D.9)$$

où l'on a noté $a(j, k) = \max[a; (q_j + q_k)/2]$ et $b(j, k) = \min[b; (q_j + q_k)/2]$. Ces notations sur les bornes des intégrales sont introduites afin de prendre en compte correctement les effets de bord. Ainsi, par exemple, si le point milieu $(q_1 + q_2)/2$ est inférieur à a , I_1 est nulle car $a(1, 2) = a$. De plus, il se peut qu'il n'y ait pas de points stationnaires inférieurs à a , auquel cas l'intégrale I_1 est prise nulle, et on écrit $a(1, 2) = a$ dans l'équation D.9. De même, si q_n n'existe pas, $I_n = 0$ et $b(n-1, n) = b$.

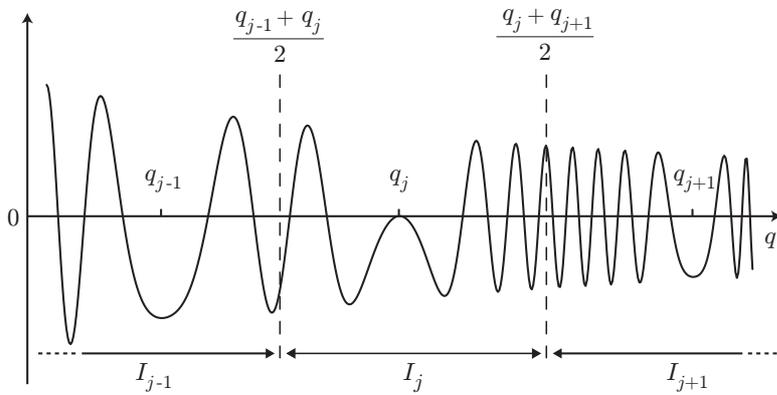


FIG. D.2 – Schéma de principe de la méthode dans le cas de plusieurs points stationnaires q_j . L'intervalle $[a; b]$ est découpé en sous-intervalles associés chacun à un q_j donné et dont la contribution à I est I_j .

Le calcul des termes de I se fait en approximant la phase apparaissant dans chacun des n termes I_j par un développement à l'ordre 2 autour du point stationnaire q_j . Ce point est le point stationnaire qui, soit appartient au domaine d'intégration de I_j , soit est le plus proche de ce domaine. De plus, comme dans le paragraphe précédent, on approxime sur chaque intervalle l'enveloppe $g(q)$ par sa valeur en q_j .

Nous avons donc besoin de calculer n intégrales de forme générique

$$I_j \approx g(q_j) e^{i\phi(q_j)} \int_{p_1}^{p_2} dq \exp\left(i \frac{\phi''(q_j)}{2} (q - q_j)^2\right). \quad (D.10)$$

Il s'agit d'une intégrale gaussienne sur un intervalle fini, que l'on peut exprimer à l'aide de la fonction d'erreur tabulée dans les logiciels mathématiques,

$$\operatorname{erf}(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^p dt e^{-t^2}. \quad (D.11)$$

I_j s'écrit alors

$$I_j \approx g(q_j) e^{i\phi(q_j)} \sqrt{\frac{i\pi}{2\phi''(q_j)}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\phi''(q_j)}(p_2 - q_j)}{\sqrt{2i}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\phi''(q_j)}(p_1 - q_j)}{\sqrt{2i}}\right) \right]. \quad (D.12)$$

Dans le cas où l'une des bornes tend vers l'infini, on peut utiliser le résultat

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\phi''(q_j)}(p - q_j)}{\sqrt{2i}}\right) = \pm 1, \quad (D.13)$$

et si l'intervalle $[p_1; p_2]$ est tout \mathbb{R} , on retrouve bien l'expression D.6. L'expression D.6 pourra être utilisée pour I_j , dès que la distance entre le point stationnaire et la borne (p_1 ou p_2) la plus proche, est bien supérieure à la distance caractéristique de variation de la phase, $1/\sqrt{\phi''(q_j)}$: en effet dans l'expression D.12, les fonctions d'erreur se rapprochent alors de l'unité en valeur absolue.

Notons enfin que nous montrons en annexe E.3 que l'on peut aussi utiliser la méthode de phase stationnaire à un ordre ultérieur, lorsqu'aucun point n'annule la dérivée de la phase.

PROPAGATION DANS LE POTENTIEL HARMONIQUE INVERSÉ

Dans cette annexe, nous donnons quelques résultats concernant le potentiel harmonique inversé, résultats que nous utilisons tout au long du chapitre IV. En effet, nous sommes amenés à considérer un tel potentiel, que ce soit pour la propagation du laser à l'intérieur du condensat, ou à l'extérieur.

E.1 Propagateur de l'oscillateur harmonique inversé

Nous considérons de manière générale le potentiel suivant,

$$V(\vec{r}) = V(\vec{0}) - \frac{m}{2} [\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2], \quad (\text{E.1})$$

qui correspond à un potentiel harmonique expulsant de fréquences ω_x , ω_y , et ω_z . Ce potentiel est quadratique, et le développement du propagateur autour des chemins classiques (équation 194) correspond à son expression exacte. Plus précisément, pour un potentiel au plus quadratique, le propagateur est donné par la formule de van Vleck [207],

$$K(\vec{r}, \vec{r}', \tau) = \frac{\Theta(\tau)}{(2\pi i \hbar)^{d/2}} \sqrt{\left| \frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial r'_i \partial r_j} \right|} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\text{cl}}(\vec{r}, \vec{r}', \tau)\right), \quad (\text{E.2})$$

où $d=3$ est la dimension de l'espace considéré, et Θ , la fonction de Heaviside qui assure la causalité de la propagation. Cette expression est entièrement déterminée par la donnée de l'action $S_{\text{cl}}(\vec{r}, \vec{r}', \tau)$, prise le long du chemin classique $r_{\text{cl}}(u)$ reliant \vec{r}' à \vec{r} en un temps τ . Si l'on compare cette expression à la relation 194, on voit que seule compte dans la phase du propagateur, celle associée au chemin classique, tandis que le préfacteur $\sqrt{|\partial^2 S_{\text{cl}} / \partial r'_i \partial r_j|}$, évalué en équation E.7, rend compte du développement de l'action autour de ce chemin.

Déterminons cette action classique dans le cas du potentiel V ,

$$S_{\text{cl}}(\vec{r}, \vec{r}', \tau) = \int_0^\tau du \left[\frac{m}{2} \vec{v}_{\text{cl}}^2(u) - V(\vec{r}_{\text{cl}}(u)) \right], \quad (\text{E.3})$$

où $\vec{r}_{\text{cl}}(u)$ et $\vec{v}_{\text{cl}}(u)$ sont respectivement la position et la vitesse le long du chemin classique. Le potentiel V étant séparable, les équations du mouvement donnent sur chacun des axes j les relations suivantes,

$$\begin{cases} r_{\text{cl}j}(u) = r'_j \cosh \omega_j u + \frac{v'_j}{\omega_j} \sinh \omega_j u, \\ v_{\text{cl}j}(u) = r'_j \omega_j \sinh \omega_j u + v'_j \cosh \omega_j u, \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

où r'_j et v'_j sont les composantes de la position et de la vitesse initiale. Si $\vec{r}' = \vec{r}_{\text{cl}}(0)$ est donné, \vec{v}' est fixé par le fait que le chemin relie \vec{r}' à \vec{r} en un temps τ . En écrivant $\vec{r}_{\text{cl}}(\tau) = \vec{r}$, on obtient

$$v'_j = \omega_j \frac{r_j - r'_j \cosh \omega_j \tau}{\sinh \omega_j \tau}. \quad (\text{E.5})$$

En utilisant ces résultats dans l'équation E.3, et après intégration, on obtient finalement pour S_{cl} ,

$$S_{\text{cl}}(\vec{r}, \vec{r}', \tau) = -V(\vec{0})\tau + \sum_{j=x,y,z} \frac{m\omega_j \left[(\cosh \omega_j \tau - 1)(r_j^2 + r_j'^2) + (r_j - r'_j)^2 \right]}{2 \sinh \omega_j \tau}. \quad (\text{E.6})$$

Le préfacteur de l'équation E.2 fait aussi intervenir S_{cl} via le déterminant de van Vleck

$$\left| \frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial r'_i \partial r_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial x' \partial x} & \frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial x' \partial y} & \frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial x' \partial z} \\ \frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial y' \partial x} & \frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial y' \partial y} & \frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial y' \partial z} \\ \frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial z' \partial x} & \frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial z' \partial y} & \frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial z' \partial z} \end{vmatrix} = \prod_{j=x,y,z} \frac{m\omega_j}{\sinh \omega_j \tau}. \quad (\text{E.7})$$

On retrouve explicitement sur cette expression, le fait que le préfacteur, dans le cas de potentiels quadratiques, ne dépend que du temps τ et pas des coordonnées \vec{r} ou \vec{r}' .

Le propagateur K est finalement obtenu en insérant les expressions E.6 et E.7 dans la formule E.2. Notons qu'il aurait pu être dérivé directement à partir de celui de l'oscillateur harmonique (Chap. III de [134]) dans lequel on aurait remplacé ω_j par $i\omega_j$.

E.2 Connexion entre la solution iconale et les fonctions propres de l'oscillateur harmonique inversé à deux dimensions

Dans ce paragraphe, nous donnons l'expression des états propres de l'oscillateur harmonique inversé correspondant au potentiel V_i (équation 199) dans la zone du condensat, et connectons ces solutions à celles dérivées de l'approximation iconale (§ IV.2.2).

Pour déterminer les états propres d'énergie E dans le potentiel $V_i(x, y'_0, z)$, il est naturel de réécrire l'équation de Schrödinger 234 en coordonnées polaires $(r; \alpha)$ en utilisant les expressions explicites de E et V_i ,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \right) - \frac{1}{2} m \omega_r^2 r^2 \psi = \tilde{E} \psi. \quad (\text{E.8})$$

En introduisant le moment angulaire $L_\alpha = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$, on peut décomposer la solution comme le produit d'une partie radiale et d'une partie angulaire,

$$\psi(r, \alpha) = \phi(r) e^{il\alpha}, \quad (\text{E.9})$$

où $l \in \mathbb{Z}$ et $\hbar l$ est le moment angulaire de la fonction d'onde. La solution générale $\phi(R)$ s'écrit comme

$$\phi(R) = \frac{c_1}{R} M\left(-i\frac{\epsilon}{4}; \frac{l}{2}; iR^2\right) + \frac{c_2}{R} W\left(-i\frac{\epsilon}{4}; \frac{l}{2}; iR^2\right), \quad (\text{E.10})$$

où l'on a utilisé les paramètres adimensionnés (équation 243). $M(\mu, \nu, \zeta)$ et $W(\mu, \nu, \zeta)$ sont les fonctions de Whittaker [79], et c_1 et c_2 sont des coefficients complexes. Comme nous sommes intéressés par une connexion avec la formule 235, nous cherchons des solutions purement radiales, ce qui fixe l à 0. De plus, la solution iconale correspond à une solution d'onde sortante (c'est-à-dire propagative vers R infini), et nous devons calculer c_1 et c_2 de telle façon à ce qu'il en soit de même pour ϕ [137]. Pour ceci, la méthode consiste à faire coïncider le développement asymptotique de $\phi(R)$ avec l'expression 235, quand R tend vers l'infini.

Les fonctions de Whittaker s'expriment à l'aide des fonctions hypergéométriques de première et seconde espèce [79], comme

$$\begin{cases} M(\mu, 0, \zeta) = e^{-\zeta/2} \sqrt{\zeta} {}_1F^1\left(\frac{1}{2} - \mu; 1; \zeta\right), \\ W(\mu, 0, \zeta) = e^{-\zeta/2} \zeta^\mu {}_2F^0\left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{1}{2} - \mu; ; -\frac{1}{\zeta}\right). \end{cases} \quad (\text{E.11})$$

où μ et ζ sont des paramètres complexes quelconques.

Pour $|\zeta| \rightarrow \infty$, ces fonctions sont développées asymptotiquement (Complément mathématique de [136]) comme

$${}_1F^1(a; b; \zeta) \sim \frac{\Gamma(b)(-\zeta)^{-a}}{\Gamma(b-a)} {}_2F^0\left(a, a-b+1; ; -\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{\Gamma(b) e^\zeta \zeta^{a-b}}{\Gamma(a)} {}_2F^0\left(b-a, 1-a; ; \frac{1}{\zeta}\right), \quad (\text{E.12})$$

et

$${}_2F^0\left(a, b; ; \frac{1}{\zeta}\right) \sim 1. \quad (\text{E.13})$$

En utilisant ces relations, on obtient donc une formule asymptotique de $\phi(R)$ dans laquelle des termes proportionnels à $e^{iR^2/2}$ ou $e^{-iR^2/2}$ apparaissent. Les seconds termes correspondent à une onde entrante se propageant vers le condensat. L'annulation de la participation de ces termes aboutit à l'équation suivante donnant c_2 en fonction de c_1 ,

$$c_2 = -i \frac{e^{-\pi\epsilon/4}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{\epsilon}{4}\right)} c_1. \quad (\text{E.14})$$

Le facteur c_1 est quant à lui calculé de telle façon que, pour R tendant vers l'infini, $\psi(R)$ soit donné par la relation 235. Le résultat final s'écrit comme

$$\psi(R) = \frac{\mathcal{C}(\vec{r}'_0)}{\sqrt{\hbar m \omega_r}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\epsilon}{4}\right) e^{i\epsilon[1 - \ln(-\epsilon/4)]/4}}{R} \left[e^{\pi\epsilon/8} M\left(-i\frac{\epsilon}{4}; 0; iR^2\right) - \frac{ie^{-\pi\epsilon/8}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{\epsilon}{4}\right)} W\left(-i\frac{\epsilon}{4}; 0; iR^2\right) \right]. \quad (\text{E.15})$$

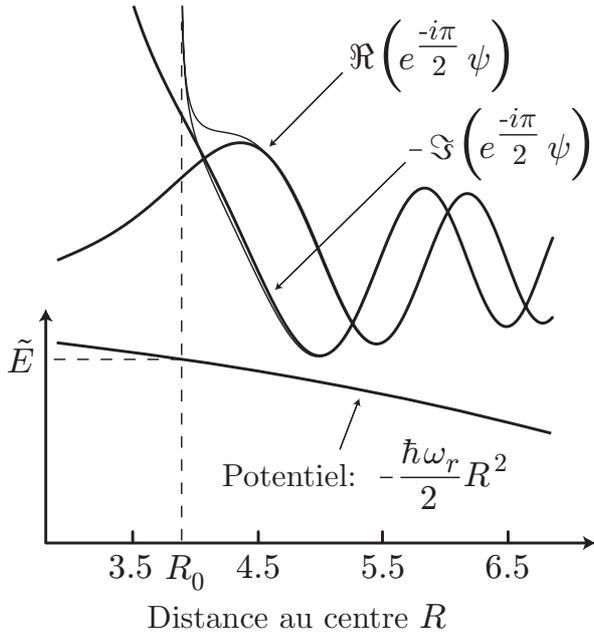


FIG. E.1 – Comparaison entre la solution iconale (équation 244 en trait fin) et la solution exacte (équation E.15 en trait plus épais). L'axe des abscisses correspond à la distance au centre du potentiel $R = r/\sigma_r$ (en unités réduites). Dans chaque cas nous avons tracé $\Re(\psi)$ et $-\Im(\psi)$. Nous avons pris comme point de rebroussement classique, $R_0 = \sqrt{-2\tilde{E}/\hbar\omega_r}$ correspondant à un couplage au centre du condensat ($R_0 = \sigma_M/\sigma_r$), avec une configuration de piège comprimé ($\omega_r = 2\pi \times 330$ Hz). On observe que les deux solutions sont équivalentes, sauf au voisinage de R_0 où la solution iconale diverge.

En figure E.1, nous avons comparé la solution exacte de l'oscillateur harmonique inversé à deux dimensions (équation E.15) à la solution iconale (équation 244). Cette dernière est suffisante pour déterminer la valeur de la fonction d'onde en des points qui ne sont pas trop proches du point de rebroussement classique $R_0 = \sqrt{-\epsilon}$. Par contre, lorsque l'on cherche à calculer la fonction d'onde en un point R tel que $R - R_0 \leq 0.5$ (c'est-à-dire si l'on est à une distance du point de rebroussement classique, inférieure à la moitié de la taille de l'oscillateur harmonique σ_r), il est préférable d'utiliser la solution E.15.

E.3 Propagateur indépendant du temps de l'oscillateur harmonique inversé à deux dimensions

Dans le cadre de la propagation du laser à l'aide de l'intégrale de Kirchhoff (§ IV.3.2), nous avons besoin de déterminer le propagateur indépendant du temps prenant en compte l'effet Zeeman quadratique expulsant. Pour cela nous évaluons cette fonction G_E comme la transformée de Fourier du propagateur K_o (équation 272) dans le potentiel expulsant bidimensionnel

$$V_o(\vec{u}) = \frac{m\omega_{Qr}^2}{2} (\sigma_Q^2 - \vec{u}^2). \quad (\text{E.16})$$

Ce potentiel correspond à celui ressenti par le laser dans chaque plan vertical (x, z) . Comme montré en figure E.2, nous utilisons le repère centré (u_x, u_z) défini par

$$[u_x; u_z] = [x; z + \sigma_Q]. \quad (\text{E.17})$$

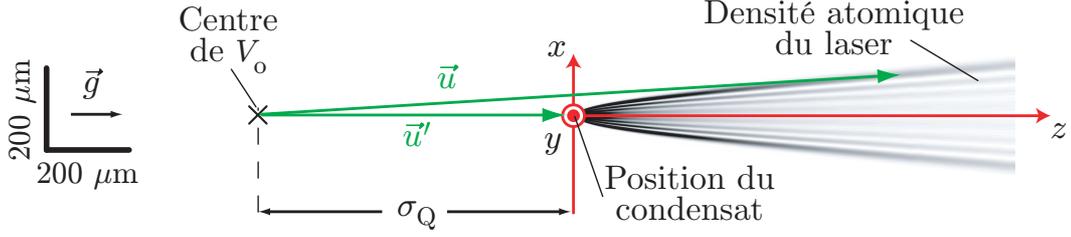


FIG. E.2 – Vue dans un plan (x, z) de la géométrie associée au calcul du propagateur indépendant du temps, pour notre configuration de laser à atomes. Le système de coordonnées est centré comme le potentiel V_0 , c'est-à-dire à une distance $\sigma_Q = 6.2 \times 10^2 \mu\text{m}$ au-dessus du condensat. Le point \vec{u}' est situé au niveau de la surface du condensat, tandis que le point \vec{u} est situé là où l'on veut calculer ψ_ℓ , c'est-à-dire vers les z positifs. On a aussi tracé la densité atomique d'un laser se propageant dans le plan repéré par $y'_0 = 0$, pour un couplage en haut du condensat. Même si le faisceau est divergent, il reste relativement directionnel, ce qui a pour conséquence, que l'angle entre \vec{u} et \vec{u}' reste petit, pour tous les points où la densité atomique n'est pas négligeable.

L'équation 257 donnant G_E s'écrit dans notre cas

$$G_E(\vec{u}, \vec{u}') = \int_0^{+\infty} ds \mathcal{H}(s) \exp[i\phi(\vec{u}, \vec{u}', s)], \quad (\text{E.18})$$

où l'on a posé $s = \omega_{Qr}\tau$, et

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}(s) = \frac{m}{2\pi i \hbar \sinh s}, \\ \phi(\vec{u}, \vec{u}', s) = \frac{1}{\hbar\omega_{Qr}} \left[\left(E - \frac{m\omega_{Qr}^2 \sigma_Q^2}{2} \right) s + \frac{m\omega_{Qr}^2 [(\vec{u}^2 + \vec{u}'^2) \cosh s - 2\vec{u} \cdot \vec{u}']}{2 \sinh s} \right]. \end{array} \right. \quad (\text{E.19})$$

E.3.1 Évaluation dans différents cas de figure

Les temps stationnaires de cette intégrale sont donnés par l'annulation de la dérivée de la phase,

$$\phi'(s) = \frac{a \cosh^2 s + b \cosh s - c}{\hbar\omega_{Qr} (\cosh^2 s - 1)}, \quad (\text{E.20})$$

c'est-à-dire, par l'équation

$$a \cosh^2 s + b \cosh s - c = 0, \quad (\text{E.21})$$

où l'on a noté les paramètres a , b et c comme,

$$\left\{ \begin{array}{l} a = E - \frac{m\omega_{Qr}^2 \sigma_Q^2}{2}, \\ b = m\omega_{Qr}^2 \vec{u} \cdot \vec{u}', \\ c = a + \frac{m\omega_{Qr}^2}{2} (\vec{u}^2 + \vec{u}'^2). \end{array} \right. \quad (\text{E.22})$$

Pour obtenir cette équation, nous avons exclu les solutions $s = 0$ qui correspondent à des chemins reliant \vec{u}' à \vec{u} en un temps nul, et qui interviennent donc uniquement si $\vec{u}' = \vec{u}$. Nous considérons tout au long de ce paragraphe des points \vec{u} et \vec{u}' différents¹. Le discriminant $\Delta(E, \vec{u}, \vec{u}')$ associé à l'équation E.21 s'écrit

$$\Delta(E, \vec{u}, \vec{u}') = b^2 + 4ac, \quad (\text{E.23})$$

et les solutions s^\pm sont

$$\cosh s^\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \quad (\text{E.24})$$

Nous n'avons des solutions dans $]0; +\infty[$ que si

$$\Delta(E, \vec{u}, \vec{u}') \geq 0 \text{ et } \cosh s^\pm > 1. \quad (\text{E.25})$$

Différents cas de figure sont possibles en fonction du nombre de solutions.

E.3.1.a Solutions stationnaires n'annulant pas la dérivée seconde de la phase

S'il y a deux solutions distinctes ($\Delta(E, \vec{u}, \vec{u}') > 0$) dans $]0; +\infty[$, nous les rangeons par ordre croissant et les notons s_{\min} et s_{\max} avec $s_{\min} < s_{\max}$. On applique la méthode de la phase stationnaire (annexe D.2), et on découpe l'intervalle d'intégration $[0; +\infty[$ en deux intervalles, $[0; (s_{\min} + s_{\max})/2]$ et $[(s_{\min} + s_{\max})/2; +\infty[$. Le résultat est

$$G_E(\vec{u}, \vec{u}') = \mathcal{H}(s_{\max}) e^{i\phi(s_{\max})} \sqrt{\frac{i\pi}{2\phi''(s_{\max})}} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\phi''(s_{\max})} (s_{\max} - s_{\min})}{2\sqrt{2i}} \right) \right] + \\ \mathcal{H}(s_{\min}) e^{i\phi(s_{\min})} \sqrt{\frac{i\pi}{2\phi''(s_{\min})}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\phi''(s_{\min})} (s_{\max} - s_{\min})}{2\sqrt{2i}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{s_{\min} \sqrt{\phi''(s_{\min})}}{\sqrt{2i}} \right) \right]. \quad (\text{E.26})$$

La dérivée seconde de la phase $\phi''(s)$ qui apparaît dans cette expression est donnée par

$$\phi''(s) = -\frac{b(1 + \cosh^2 s) + 2(a - c) \cosh s}{\hbar\omega_{Qr} (\cosh^2 s - 1)^{3/2}}. \quad (\text{E.27})$$

S'il y a une seule solution non dégénérée ($\Delta(E, \vec{u}, \vec{u}') > 0$), que nous notons s_1 , G_E s'écrit

$$G_E(\vec{u}, \vec{u}') = \mathcal{H}(s_1) e^{i\phi(s_1)} \sqrt{\frac{i\pi}{2\phi''(s_1)}} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{s_1 \sqrt{\phi''(s_1)}}{\sqrt{2i}} \right) \right]. \quad (\text{E.28})$$

E.3.1.b Solutions stationnaires annulant la dérivée seconde

Si, par contre il n'y a qu'une seule solution dégénérée ($\Delta(E, \vec{u}, \vec{u}') = 0$), que nous notons $s_2 = \operatorname{arccosh}(-b/2a)$, nous ne pouvons appliquer la même méthode de calcul car $\phi''(s_2) = 0$. De même, si E , \vec{u} et \vec{u}' sont tels qu'il n'y a pas de solutions réelles à l'équation E.21, la méthode de la phase stationnaire telle que développée au paragraphe D.2, n'est pas utilisable. Physiquement cela signifie qu'il n'y a pas de chemins classiques d'énergie E reliant \vec{u}' à \vec{u} .

¹La singularité de $G_E(\vec{u}, \vec{u}')$ est prise en compte dans sa définition (équation 258) par une fonction de Dirac.

Nous ne pouvons traiter ici de tels cas, comme dans le cadre de l'iconale (§ IV.2.2), où nous les avons simplement éliminés. En effet, G_E doit prendre en compte la diffraction qui peut connecter, par un chemin non classique, deux points \vec{u}' et \vec{u} .

Pour calculer la valeur de G_E dans les cas discutés au paragraphe précédent, il ne faut pas limiter le développement de la phase au second ordre, mais aller jusqu'à l'ordre qui donne un résultat non nul. Ainsi nous cherchons les points stationnaires d'ordre 2 : ce sont les points qui annulent $\phi''(s)$ (équation E.27). Ils sont solution de

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' \cosh^2 s - (\vec{u}^2 + \vec{u}'^2) \cosh s + \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0. \quad (\text{E.29})$$

Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = (\vec{u} + \vec{u}')^2 (\vec{u} - \vec{u}')^2 \geq 0. \quad (\text{E.30})$$

A priori, l'équation E.29 a deux solutions

$$\cosh s_0^\pm = \frac{(\vec{u}^2 + \vec{u}'^2) \pm \sqrt{\Delta}}{2\vec{u} \cdot \vec{u}'}. \quad (\text{E.31})$$

En réalité, on peut montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que $\phi''(s)$ s'annule en un seul point s_0^+ si $\vec{u} \cdot \vec{u}' > 0$, et en aucun sinon².

Dans le cas où $\vec{u} \cdot \vec{u}' > 0$, on peut donc développer la phase au troisième ordre autour de s_0 ,

$$\phi(s) = \phi(s_0) + \phi'(s_0)(s - s_0) + \frac{\phi^{(3)}(s_0)}{6}(s - s_0)^3. \quad (\text{E.32})$$

Le propagateur indépendant du temps s'écrit alors comme

$$G_E(\vec{u}, \vec{u}') = \frac{\mathcal{H}(s_0)}{\beta} e^{i\phi(s_0)} \int_{-\infty}^{\beta s_0} dv \exp \left[i \left(\frac{-\phi'(s_0)}{\beta} v + \frac{v^3}{3} \right) \right], \quad (\text{E.33})$$

où l'on a posé $v = (s_0 - s)\beta$ et $\beta = \sqrt[3]{-\phi^{(3)}(s_0)/2}$. Dans la limite où $\beta s_0 \gg 1$, on peut étendre les bornes de l'intégrale à l'infini. On reconnaît alors une représentation intégrale de la fonction d'Airy de première espèce [79]

$$\text{Ai}(q) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dv \cos \left(\frac{v^3}{3} + qv \right). \quad (\text{E.34})$$

On aboutit finalement à l'expression de G_E ,

$$G_E(\vec{u}, \vec{u}') = \frac{2\pi\mathcal{H}(s_0)}{\sqrt[3]{-\phi^{(3)}(s_0)/2}} e^{i\phi(s_0)} \text{Ai} \left(\frac{-\phi'(s_0)}{\sqrt[3]{-\phi^{(3)}(s_0)/2}} \right), \quad (\text{E.35})$$

Cette expression est utilisable dans le cas où, à la fois la dérivée première et le dérivée seconde s'annule ($s_0 = s_2$), ou dans le cas où seule la dérivée seconde s'annule ($s_0 = s_0^+$). La dérivée troisième intervenant dans cette expression s'écrit

$$\phi^{(3)}(s) = \frac{(a - c)(4 \cosh^2 s + 2) + b \cosh s (\cosh^2 s + 5)}{\hbar\omega_{Qr} (\cosh^2 s - 1)^2}. \quad (\text{E.36})$$

²En effet, on voit sur l'écriture de Δ , que $\sqrt{\Delta} < \vec{u}^2 + \vec{u}'^2$. Il s'ensuit que les cosinus hyperboliques (équation E.31) ne sont positifs que si le dénominateur du terme de droite est positif, c'est-à-dire si $\vec{u} \cdot \vec{u}' > 0$. La solution s_0^- existe si $\cosh s_0^- > 1$, c'est-à-dire, en utilisant les inégalités précédentes, si $\sqrt{\Delta} < (\vec{u} - \vec{u}')^2$. En mettant au carré cette dernière expression, on obtient $(\vec{u} - \vec{u}')^2 < 0$, ce qui est impossible.

En s_0 , cette expression peut se simplifier, en tirant parti que ces points annulent ϕ'' en vérifiant l'équation E.29, et l'on obtient

$$\phi^{(3)}(s_0) = -\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}'}{\Sigma^2 \cosh s_0}, \quad (\text{E.37})$$

avec $\Sigma = \sqrt{\hbar/m\omega_{Qr}}$, la taille de l'oscillateur harmonique de fréquence ω_{Qr} . On voit sur cette relation que $\phi^{(3)}(s_0) < 0$, ce qui justifie le signe négatif dans l'expression définissant β .

De plus, l'expression E.35 a été obtenue en étendant les bornes de l'intégrale E.33 à l'infini, ce qui est valide si $\beta s_0 \gg 1$. Pour mieux cerner la validité de cette approximation, on peut exprimer βs_0 en fonction de $X = (\vec{u}^2 + \vec{u}'^2)/2\vec{u} \cdot \vec{u}' > 1$,

$$\beta s_0 = \sqrt[3]{\frac{(\vec{u}^2 + \vec{u}'^2)}{4\Sigma^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{X^2}}\right) \operatorname{arccosh}\left[X + X\sqrt{1 - \frac{1}{X^2}}\right]}. \quad (\text{E.38})$$

Nous avons tracé cette expression en figure E.3, en fonction de la valeur de $X - 1$. Pour cela, nous avons utilisé la valeur la plus défavorable du préfacteur, c'est-à-dire la plus petite, prise en $|\vec{u}| \approx |\vec{u}'| \approx \sigma_Q = 6.2 \times 10^2 \mu\text{m}$, et nous avons utilisé $\Sigma = 2.4 \mu\text{m}$. En effet, dans le calcul de la propagation du laser à atomes, nous sommes amenés à ne considérer des points \vec{u} et \vec{u}' , qui sont soit au niveau de la surface du condensat, soit au-dessous (figure E.2). Le condensat étant situé à une distance σ_Q du centre du potentiel V_0 , $|\vec{u}|$ et $|\vec{u}'|$ sont au moins égaux à σ_Q .

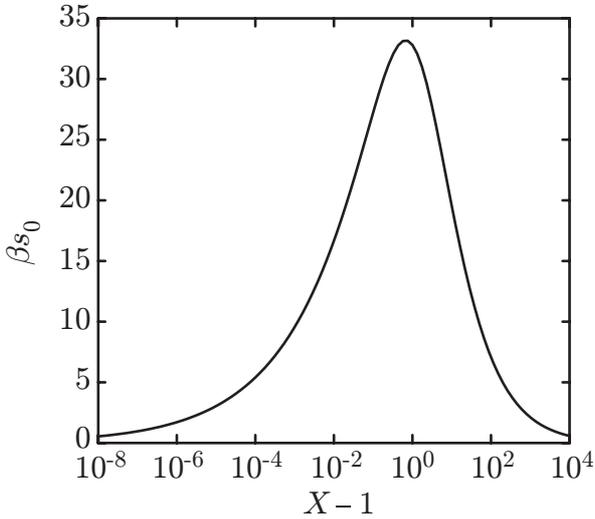


FIG. E.3 – Tracé de la fonction βs_0 (équation E.38) en fonction de $X - 1$. Nous avons pris la valeur la plus défavorable (petite) du préfacteur dans notre cas, c'est-à-dire, $|\vec{u}| \approx |\vec{u}'| = \sigma_Q$.

On voit qu'avec nos paramètres expérimentaux, la condition $\beta s_0 \gg 1$ n'est pas bien vérifiée pour les valeurs extrêmes de X , soit très proches de 1, soit supérieures à 100. Les très grandes valeurs de X correspondent, soit à des angles entre \vec{u} et \vec{u}' plus grands que les angles qu'il est utile de considérer pour la propagation du laser (figure E.2), soit à des rapports $|\vec{u}|/|\vec{u}'| \gg 1$, tels que les points \vec{u} où l'on calcule la fonction d'onde, sont hors de la cellule. En ce qui concerne le cas des valeurs de X proches de 1 (c'est-à-dire telles que $\vec{u} \approx \vec{u}'$), on peut effectuer un développement limité de βs_0 en écrivant $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{\epsilon}$ avec $|\vec{\epsilon}| \ll |\vec{u}'|$. On obtient alors avec nos paramètres expérimentaux ($|\vec{u}'| \approx \sigma_Q$), que $\beta s_0 = 1$ pour $|\vec{\epsilon}| = 0.3 \mu\text{m}$. L'approximation $\beta s_0 \gg 1$ est donc valide si la distance les deux points

vérifie $|\vec{u} - \vec{u}'| \gg 0.3 \mu\text{m}$. En pratique, si l'on ne s'intéresse pas à la valeur de ψ_ℓ juste après la sortie du condensat, la condition $\beta s_0 \gg 1$ est toujours valide. On remarquera toutefois que le domaine de validité de $\beta s_0 \gg 1$ est inclus dans le domaine pour lequel on peut calculer G_E . En effet, même si les points \vec{u} et \vec{u}' ne vérifient pas $\beta s_0 \gg 1$, il se peut qu'ils soient reliés par un chemin classique³, auquel cas, G_E est directement calculé via les expressions E.26 ou E.28.

En conclusion, pour tous les points \vec{u} et \vec{u}' que l'on est amené à considérer pour la propagation du laser à atomes, et sauf cas particulièrement pathologique, la condition $\beta s_0 \gg 1$ est valide, si l'on en vient à développer la phase au troisième ordre et à utiliser l'expression E.35 pour G_E .

On peut comprendre que le point s_0 annulant $\phi''(s)$ a un rôle prépondérant dans l'intégrale oscillante si les points stationnaires du premier ordre ($\phi'(s)=0$) ne jouent aucun rôle. A priori $|\phi'(s)|$ prend une valeur extrême en s_0 . Dans notre cas, il s'agit d'une valeur minimale, et c'est bien autour de ce point que l'intégrande va osciller le moins vite, et donc participer le plus au résultat final. La propriété selon laquelle, la valeur $|\phi'(s_0)|$ est minimale et non pas maximale, peut être éclaircie en étudiant la fonction ϕ' . Nous avons les deux équivalents suivants en $s=0$ et en $s=+\infty$,

$$\begin{cases} \phi'(s) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} -\frac{m\omega_{\text{Qr}}(\vec{u} - \vec{u}')^2}{2\hbar s^2}, \\ \phi'(s) \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{\hbar\omega_{\text{Qr}}}. \end{cases} \quad (\text{E.39})$$

On voit directement sur ces expressions que si a est positif, $\phi'(s)=0$ admet au moins une solution. Comme nous regardons le cas où il n'y a pas de points stationnaires au premier ordre, nous considérons $a < 0$. Comme $\phi^{(3)}(s_0) < 0$, le point s_0 correspond à un maximum de ϕ' , mais $\phi'(s_0) \leq 0$ et il s'agit bien d'un minimum en valeur absolue⁴. Physiquement, le temps s_0 est le temps associé avec le chemin classique qui connecte \vec{u}' à \vec{u} avec l'énergie la plus proche possible⁵ de E , c'est-à-dire telle que la phase oscille le moins possible.

Le dernier cas de figure non encore traité pour l'évaluation de G_E , est le cas où $\vec{u} \cdot \vec{u}' < 0$. S'il n'y a pas de points stationnaires s^\pm annulant le dérivée première, nous avons vu qu'il en était de même pour la dérivée seconde. En réalité, un calcul des différentes dérivées $\phi^{(n)}$ montre qu'elles ne peuvent s'annuler si $\vec{u} \cdot \vec{u}' < 0$. Ainsi, il s'agit d'un cas où il n'y a pas de points stationnaires, et ce à n'importe quel ordre. On s'attend donc à ce que dans un tel cas, G_E prenne des valeurs très petites. Pour ce qui nous intéresse, nous prenons simplement,

$$G_E(\vec{u}, \vec{u}') = 0. \quad (\text{E.40})$$

On remarquera, que de toute façon, comme le montre la figure E.2, le calcul de la fonction d'onde du laser, ne nécessite pas de déterminer le propagateur indépendant du temps en des points tels que $\vec{u} \cdot \vec{u}' < 0$.

³Par exemple, deux points \vec{u} et \vec{u}' distants de quelques microns sont, pratiquement toujours, reliés par un chemin classique.

⁴Ce raisonnement nous permet aussi de borner la dérivée première au point s_0 , $|\phi'(s_0)| < a/\hbar\omega_{\text{Qr}}$.

⁵Pour $s_0 = s_2$, le chemin considéré est d'énergie E ($\phi'(s_2)=0$), alors que dans le cas où $s_0 = s_0^+$, l'énergie du chemin est différente de E , tout en restant la plus proche possible.

Nous avons résumé dans la table E.1, les expressions de $G_E(\vec{u}, \vec{u}')$ que nous utilisons, en fonction des valeurs de E , \vec{u}' et \vec{u} .

Cas considéré	Expression de G_E
2 solutions s^\pm telles que $\phi'(s^\pm)=0$	Eq. E.26
1 seule solution s_1 telle que $\phi'(s_1)=0$ et $\phi''(s_1)\neq 0$	Eq. E.28
1 solution s_2 telle que $\phi'(s_2)=0$ et $\phi''(s_2)=0$	Eq. E.35
1 solution s_0^+ telle que $\phi'(s_0^+)\neq 0$ et $\phi''(s_0^+)=0$	Eq. E.35
E , \vec{u}' , et \vec{u} tels que ϕ' ne s'annule pas et $\vec{u} \cdot \vec{u}' < 0$	Eq. E.40

TAB. E.1 – Résumé des différents cas se présentant dans le calcul de G_E .

E.3.2 Comparaison avec un calcul numérique

E.3.2.a Application de la méthode

Nous avons voulu comparer notre approche analytique suivant la procédure résumée en table E.1, avec un calcul numérique de l'intégrale E.18.

Nous effectuons le calcul de $G_E(\vec{u}, \vec{u}')$ pour les paramètres suivants

$$\begin{cases} u_z = 643.5 \mu\text{m}, \\ u_x = 0 \mu\text{m}, \\ u'_z = 623.5 \mu\text{m}, \\ E = 2.769 \text{ neV}. \end{cases} \quad (\text{E.41})$$

Nous considérons le potentiel harmonique expulsant dû à l'effet Zeeman quadratique de fréquence $\omega_{Qr} = 2\pi \times 20 \text{ Hz}$. Le seul paramètre que nous laissons libre est la coordonnée transverse u'_x . Nous considérons uniquement les valeurs positives de ce paramètre comme le problème est symétrique par rapport à l'axe z .

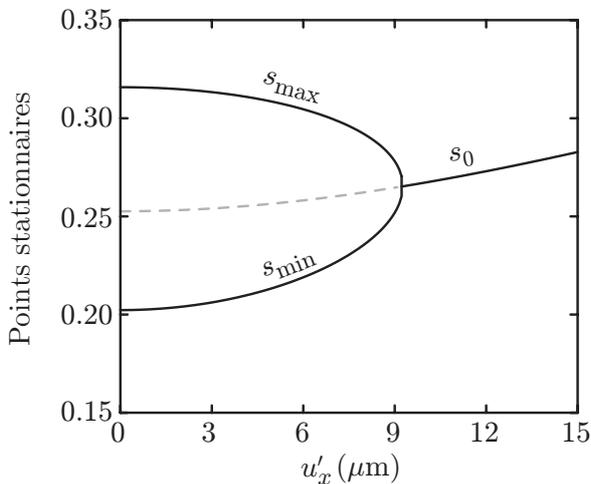


FIG. E.4 – Points stationnaires de ϕ en fonction de la coordonnée transverse u'_x . Les deux points s_{\min} et s_{\max} , qui annulent ϕ' , fusionnent en $u'_x \approx 9.2 \mu\text{m}$ et, au-delà, le seul point stationnaire s_0 , annule uniquement ϕ'' et pas ϕ' . De plus, nous avons tracé en pointillés la valeur de s_0 pour $u'_x < 9.2 \mu\text{m}$.

Nous avons tracé, en figure E.4, les points stationnaires de la phase ϕ en fonction de u'_x . Pour nos paramètres, nous voyons qu'il y a deux régimes :

- Si $u'_x < 9.2 \mu\text{m}$, nous avons deux points stationnaires distincts s_{\min} et s_{\max} correspondant aux solutions s^\pm de l'équation E.24.
- Si $u'_x > 9.2 \mu\text{m}$, il n'y a pas de points stationnaires au premier ordre et le point s_0 est celui qui annule ϕ'' (solution s_0^+ de l'équation E.31).

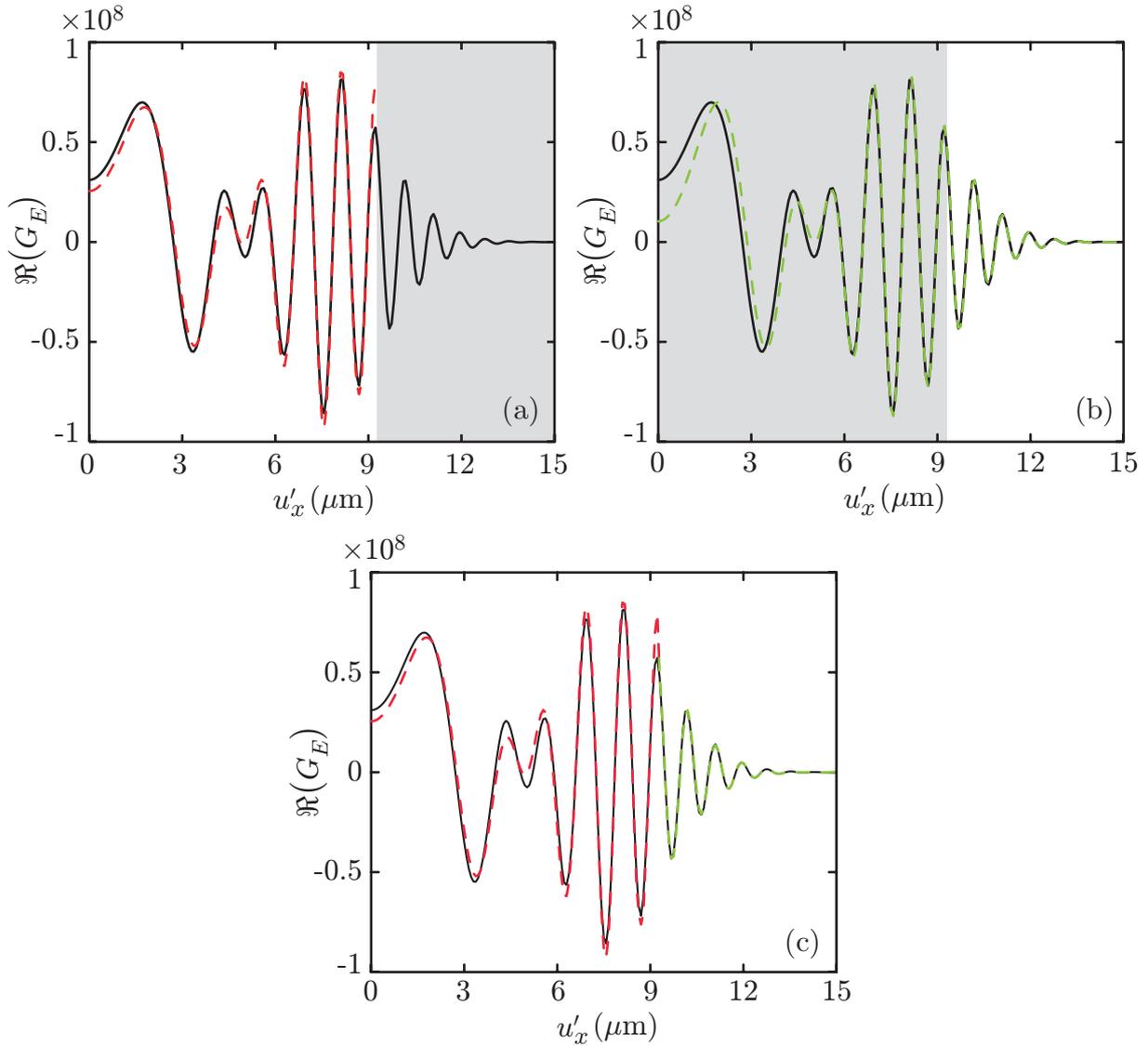


FIG. E.5 – Comparaison entre nos résultats et le calcul numérique de G_E (trait plein noir sur toutes les figures). En pointillé rouge, nous traçons l'expression E.26 (figure a), et en pointillé vert, l'expression E.35 (figure b). La partie non grisée, correspond au domaine de u'_x dans lequel, ces expressions sont dérivées. En figure c, nous traçons G_E défini en deux morceaux comme la combinaison (courbe rouge et verte) des équations E.26 et E.35, chacune pris dans son domaine respectif. Par simplicité, seules sont représentées les parties réelles des propagateurs indépendant du temps.

Ainsi, en fonction de la valeur de u'_x , nous utilisons soit la relation E.26 ($u'_x < 9.2 \mu\text{m}$), soit la relation E.35 ($u'_x > 9.2 \mu\text{m}$). En figure E.5 nous avons tracé ces deux relations, et nous les comparons à l'intégration numérique de G_E . Comme on le voit en figure E.5c, l'accord entre les deux méthodes est bon.

Cependant, on peut remarquer que la superposition est pratiquement parfaite pour $u'_x > 9.2 \mu\text{m}$, alors qu'un écart de l'ordre de 5-10% est visible pour $u'_x < 9.2 \mu\text{m}$. De plus, on remarque sur la figure E.5b, que la relation E.35 donne de très bons résultats, même lorsque deux points stationnaires existent ($u'_x < 9.2 \mu\text{m}$), pour peu que l'on ne se rapproche pas trop de $u'_x = 0$. En effet, on peut comprendre qu'un simple développement en s_0 situé entre s_{\min} et s_{\max} (pointillé de la figure E.4), reste valide tant que s_{\min} et s_{\max} ne sont pas trop différents.

E.3.2.b Approche heuristique

Nous avons voulu améliorer notre approximation de G_E pour le domaine où deux points stationnaires existent. Nous avons regardé ce que donnerait l'expression E.26, dans laquelle on aurait remplacé les fonctions d'erreur par l'unité,

$$G_E(\vec{u}, \vec{u}') = \mathcal{H}(s_{\max}) e^{i\phi(s_{\max})} \sqrt{\frac{2i\pi}{\phi''(s_{\max})}} + \mathcal{H}(s_{\min}) e^{i\phi(s_{\min})} \sqrt{\frac{2i\pi}{\phi''(s_{\min})}}. \quad (\text{E.42})$$

Le résultat obtenu est présenté dans la figure E.6. On remarque que pour les faibles valeurs de u'_x , l'approximation E.42 est meilleure que la relation E.26. Ceci est surprenant, car on s'attendrait à ce que l'utilisation de la fonction erreur dans l'équation E.26 décrive mieux notre problème. En effet, dans la méthode de la phase stationnaire (annexe D.2), cette fonction est utilisée pour prendre en compte le caractère fini de l'intervalle d'intégration. L'approximation E.42 serait justifiée si l'intervalle d'intégration autour de chaque point s_{\min} et s_{\max} était infini. Nous n'avons pas trouvé d'explication justifiant ce point précis. Toutefois, nous avons vérifié, en variant les paramètres sur plusieurs comparaisons numériques, qu'il est préférable d'utiliser l'expression E.42, plutôt que la relation E.26.

Pour pouvoir calculer G_E totalement, nous devons déterminer la zone où nous raccordons l'expression E.42 à l'expression E.35. Un raccord en $u'_x = 9.2 \mu\text{m}$ n'est pas approprié, car la relation E.42 diverge fortement en ce point (figure E.6a). Par contre, comme l'expression E.35 est valide au-delà de son domaine de définition, on peut trouver une zone sur laquelle les deux relations se raccordent bien. Sur plusieurs réalisations numériques, nous avons observé qu'un choix convenable pour la frontière était celui correspondant à la condition

$$s_{\max} - s_{\min} = \omega_{Qr} \times 0.65 \text{ ms}. \quad (\text{E.43})$$

Ainsi, en pratique, nous utilisons la procédure suivante lorsque nous calculons G_E . Si deux points stationnaires existent et sont séparés d'au moins $\omega_{Qr} \times 0.65 \text{ ms}$, nous utilisons la relation E.42, tandis que dans le cas contraire nous utilisons la relation E.35. L'accord avec le calcul numérique de G_E est alors très bon et l'écart est de l'ordre du pour cent (figure E.6c).

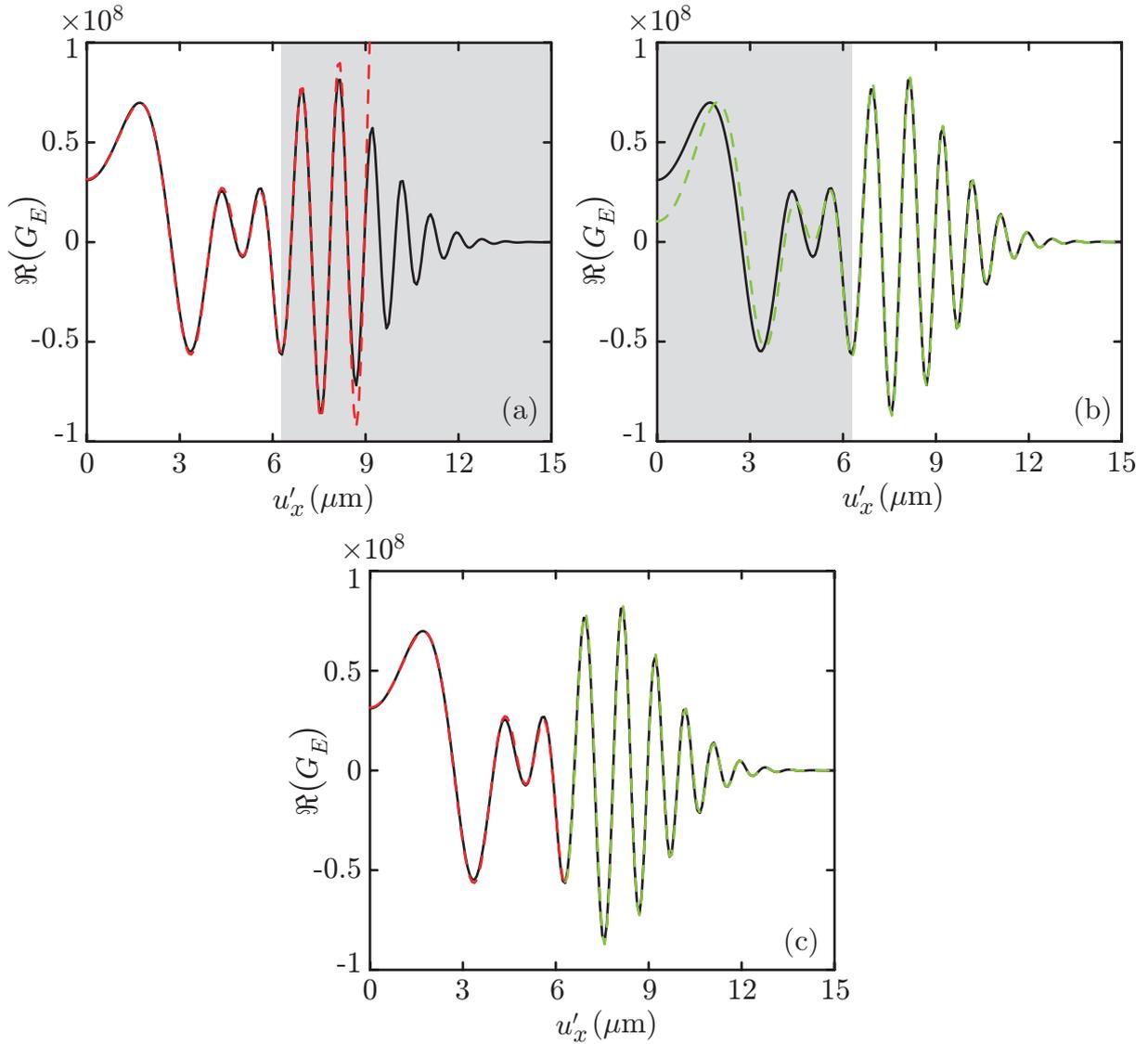


FIG. E.6 – Analogue de la figure E.5, en remplaçant l'expression E.26, par la relation E.42. De plus, cette fois-ci nous choisissons de manière heuristique la frontière séparant les deux domaines de définition de G_E selon la relation E.43. Cette approche nous permet d'obtenir une meilleure approximation de G_E (figure c) qu'en figure E.5c.

Nous avons dérivé dans cette annexe une méthode analytique pour calculer le propagateur indépendant du temps de l'oscillateur harmonique inversé à deux dimensions. Les résultats généraux montrent un bon accord avec un calcul numérique (figure E.5c). Dans notre cas particulier, nous avons présenté l'approche heuristique que nous utilisons, pour obtenir une erreur sur l'approximation de G_E de l'ordre du pour cent.

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DE GROSS-PITAEVSKII COUPLÉES

Nous présentons dans cette annexe la méthode numérique que nous avons utilisée pour résoudre les équations de Gross-Pitaevskii couplées, décrivant à deux dimensions la dynamique du laser à atomes se propageant verticalement, et dont les résultats ont été comparés à ceux de notre approche analytique (§ IV.4).

F.1 Réduction de la dimensionnalité de la dynamique

Nous partons donc des équations 138 associées à la condition de normalisation 139. Ces équations sont réécrites dans le cas d'un couplage radiofréquence ($\vec{K} \approx 0$), d'une intensité uniforme et constante ($F(\vec{r}, t) = 1$), et de constantes de collision toutes égales à g_{coll} ,

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi_c}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_c - \hbar\delta + g_{\text{coll}} (|\psi_c|^2 + |\psi_\ell|^2) \right] \psi_c + \frac{\hbar\Omega_R}{2} \psi_\ell, \\ i\hbar \frac{\partial \psi_\ell}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_\ell + g_{\text{coll}} (|\psi_c|^2 + |\psi_\ell|^2) \right] \psi_\ell + \frac{\hbar\Omega_R}{2} \psi_c. \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

Le traitement numérique de ces relations aux dérivées partielles, nécessite d'échantillonner la fonction d'onde sur un maillage de l'espace. Il est, en général, difficile de réaliser des simulations numériques à trois dimensions d'un tel système¹. En effet, le nombre de points, c'est-à-dire le nombre de valeurs de la fonction d'onde à traiter et stocker, varie comme la puissance de la dimension (à pas de maillage constant). Le problème lié aux capacités finies de traitement d'un ordinateur de bureau actuel est particulièrement criant si l'on s'intéresse à la fonction d'onde d'un laser à atomes, qui est bien plus étendue dans l'espace que celle d'un condensat de Bose-Einstein.

Cependant, dans notre cas particulier, nous pouvons tirer parti du fait que la dynamique selon l'axe y est négligeable devant celle sur les axes x et z . En effet, chaque plan repéré par

¹À moins de pouvoir tirer parti d'une symétrie réduisant la dimensionnalité du problème, ou de disposer de calculateurs bien plus puissants que les ordinateurs de bureau que nous avons à notre disposition.

$y = y_0$, évolue alors indépendamment à deux dimensions, ce qui rend le traitement numérique possible.

Pour pouvoir passer des équations de Gross-Pitaevskii (relations F.1) aux équations de Gross-Pitaevskii correspondantes dans chaque plan (x, z) , nous écrivons les fonctions d'onde à trois dimensions $\psi_{\ell,c}$ comme le produit de la densité linéique totale $n(y)$ selon l'axe y et d'une fonction transverse $\varphi_{\ell,c}$

$$\psi_{c,\ell}(x, y, z, t) = \sqrt{n(y)} \varphi_{c,\ell}(x, y, z, t), \quad (\text{F.2})$$

où la densité linéique $n(y)$ est définie comme

$$n(y) = \iint dx dz (|\psi_c(x, y, z, t)|^2 + |\psi_\ell(x, y, z, t)|^2). \quad (\text{F.3})$$

On en déduit qu'avec ces notations, les fonctions $\varphi_{c,\ell}$ sont normalisées selon,

$$\iint dx dz (|\varphi_c(x, y, z, t)|^2 + |\varphi_\ell(x, y, z, t)|^2) = 1. \quad (\text{F.4})$$

On remarquera que $n(y)$ ne dépend pas du temps, puisque l'on néglige toute dynamique selon y , c'est-à-dire en particulier, tout transfert de matière entre les différents plans adjacents. On peut donc calculer $n(y)$ à n'importe quel temps t et en particulier lorsque les N atomes du système sont dans le condensat (équation 143),

$$n(y) = \frac{\mu}{g_{cc}} \iint dx dz \max \left[1 - \left(\frac{x}{R_r} \right)^2 - \left(\frac{y}{R_y} \right)^2 - \left(\frac{z - \sigma_M}{R_r} \right)^2 ; 0 \right], \quad (\text{F.5})$$

ce qui après intégration donne,

$$n(y) = \frac{\pi \mu R_r^2}{2 g_{cc}} \left(1 - \frac{y^2}{R_y^2} \right)^2. \quad (\text{F.6})$$

Dans le système F.1, nous négligeons la dynamique selon l'axe y , ce qui se traduit par la condition

$$\frac{\partial^2 \psi_{c,\ell}}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 \psi_{c,\ell}}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \psi_{c,\ell}}{\partial z^2}. \quad (\text{F.7})$$

À l'aide de cette condition, et en utilisant la relation F.2 dans les équations F.1, nous obtenons finalement le système suivant pour la dynamique des fonctions $\varphi_{c,\ell}(x, y_0, z, t)$ correspondant au plan d'équation $y = y_0$,

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \varphi_c}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\partial_{x^2} + \partial_{z^2}) + V_c(y_0) - \hbar\delta + g_{\text{coll}}(y_0) (|\varphi_c|^2 + |\varphi_\ell|^2) \right] \varphi_c + \frac{\hbar\Omega_R}{2} \varphi_\ell, \\ i\hbar \frac{\partial \varphi_\ell}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\partial_{x^2} + \partial_{z^2}) + V_\ell(y_0) + g_{\text{coll}}(y_0) (|\varphi_c|^2 + |\varphi_\ell|^2) \right] \varphi_\ell + \frac{\hbar\Omega_R}{2} \varphi_c. \end{cases} \quad (\text{F.8})$$

Ce système a la structure d'équations de Gross-Pitaevskii à deux dimensions, paramétrées par y_0 , la position du plan considéré. Nous avons spécifié explicitement dans l'écriture des potentiels $V_{c,\ell}$, le fait qu'ils sont considérés en $y = y_0$. Cette position détermine aussi les constantes de collision effectives bidimensionnelles, $g_{\text{coll}}(y_0) = g_{\text{coll}} n(y_0)$. Cette modification de la constante de collision permet de prendre en compte, au niveau des interactions dans notre modélisation effective à deux dimensions, le caractère tridimensionnel du problème réel.

F.2 Utilisation de grandeurs adimensionnées

Dans les simulations numériques, il est souvent préférable d'éviter de manipuler des valeurs trop grandes ou trop petites, afin de minimiser les risques, qu'au cours des différentes étapes du calcul, une erreur d'arrondi ne fausse les résultats finaux. Il est donc utile de normaliser les grandeurs que nous manipulons par leur valeur caractéristique, et d'utiliser des grandeurs adimensionnées. Pour ceci, nous considérons les grandeurs caractéristiques du piège magnétique transversalement, c'est-à-dire l'énergie $\hbar\omega_r$, le temps $1/\omega_r$, et la taille caractéristique de l'oscillateur harmonique $\sigma_r = \sqrt{\hbar/m\omega_r}$. Nous utilisons donc comme grandeurs adimensionnées (repérées par une barre),

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \omega_r t, & \bar{x} &= \frac{x}{\sigma_r}, & \bar{y}_0 &= \frac{y_0}{\sigma_r}, & \bar{z} &= \frac{z}{\sigma_r}, \\ \bar{\omega}_y &= \frac{\omega_y}{\omega_r}, & \bar{\sigma}_M &= \frac{\sigma_M}{\sigma_r}, & \bar{\omega}_{Qr} &= \frac{\omega_{Qr}}{\omega_r}, & \bar{\omega}_{Qy} &= \frac{\omega_{Qy}}{\omega_r}, & \bar{\sigma}_Q &= \frac{\sigma_Q}{\sigma_r}, \\ \bar{\delta} &= \frac{\delta}{\omega_r}, & \bar{\Omega}_R &= \frac{\Omega_R}{\omega_r}, & \bar{g}_{\text{coll}}(y_0) &= \frac{g_{\text{coll}}(y_0)}{\hbar\omega_r\sigma_r^2}, & \bar{V}_{c,\ell} &= \frac{V_{c,\ell}}{\hbar\omega_r}, & \bar{\varphi}_{c,\ell} &= \sigma_r\varphi_{c,\ell}. \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Les potentiels $\bar{V}_{c,\ell}$ s'écrivent alors (équations 126 et 128),

$$\begin{cases} \bar{V}_c(\bar{x}, \bar{y}_0, \bar{z}) = \frac{1}{2} [\bar{x}^2 + \bar{\omega}_y^2 \bar{y}_0^2 + (\bar{z} - \bar{\sigma}_M)^2], \\ \bar{V}_\ell(\bar{x}, \bar{y}_0, \bar{z}) = -\frac{1}{2} [\bar{\omega}_{Qr}^2 \bar{x}^2 + \bar{\omega}_{Qy}^2 \bar{y}_0^2 + \bar{\omega}_{Qr}^2 ((\bar{z} + \bar{\sigma}_Q)^2 - \bar{\sigma}_Q^2)]. \end{cases} \quad (\text{F.10})$$

Nous introduisons le vecteur dont les deux composantes sont les fonctions d'onde du condensat et du laser,

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}_0, \bar{z}, \bar{t}) = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_c(\bar{x}, \bar{y}_0, \bar{z}, \bar{t}) \\ \bar{\varphi}_\ell(\bar{x}, \bar{y}_0, \bar{z}, \bar{t}) \end{bmatrix}. \quad (\text{F.11})$$

La condition de normalisation des fonctions d'onde se réécrit comme

$$\iint d\bar{x} d\bar{z} \|\Phi(\bar{x}, \bar{y}_0, \bar{z}, \bar{t})\|^2 = 1. \quad (\text{F.12})$$

Avec ces notations, l'équation différentielle que vérifie le vecteur $\bar{\varphi}_{c,\ell}$ s'écrit

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{t}} = \hat{H}\Phi = (\hat{T} + \hat{V})\Phi, \quad (\text{F.13})$$

où nous avons séparé dans le hamiltonien \hat{H} , la partie cinétique \hat{T} agissant dans l'espace des impulsions, du terme spatial \hat{V} agissant dans l'espace des positions. Ces deux termes s'écrivent

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2} \right) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2} \right) \end{bmatrix}, \quad (\text{F.14})$$

et

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} v_{cc} & v_{c\ell} \\ v_{\ell c} & v_{\ell\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V}_c(y_0) - \bar{\delta} + \bar{g}_{\text{coll}}(y_0) \|\Phi\|^2 & \frac{\bar{\Omega}_R}{2} \\ \frac{\bar{\Omega}_R}{2} & \bar{V}_\ell(y_0) + \bar{g}_{\text{coll}}(y_0) \|\Phi\|^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{F.15})$$

F.3 Évolution temporelle du système

La solution de l'équation F.13 s'écrit formellement comme

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}_0, \bar{z}, \bar{t}) = \hat{U}(\bar{t}, \bar{t}_0) \Phi(\bar{x}, \bar{y}_0, \bar{z}, \bar{t}_0), \quad (\text{F.16})$$

où \hat{U} est l'opérateur d'évolution,

$$\hat{U}(\bar{t}, \bar{t}_0) = \exp \left[-i \left(\hat{T} + \hat{V} \right) (\bar{t} - \bar{t}_0) \right]. \quad (\text{F.17})$$

Cette quantité que nous devons calculer, n'est pas globalement diagonale, ni dans l'espace des positions, ni dans l'espace des impulsions. Par contre \hat{T} et \hat{V} le sont. L'idée consiste alors à traiter l'évolution liée à ces quantités de manière séparée dans chacune des représentations (position/impulsion) où elles sont diagonales. Pour cela, on décompose la durée $\bar{t} - \bar{t}_0$ en une somme de n intervalles infinitésimaux $0 < \delta\bar{t} \ll 1$,

$$\hat{U}(\bar{t}, \bar{t}_0) = \prod_{k=0}^{n-1} \hat{U}(\bar{t}_0 + (k+1)\delta\bar{t}, \bar{t}_0 + k\delta\bar{t}), \quad (\text{F.18})$$

avec

$$\hat{U}(\bar{t}_0 + (k+1)\delta\bar{t}, \bar{t}_0 + k\delta\bar{t}) = \exp \left(-i \hat{T} \delta\bar{t} \right) \exp \left(-i \hat{V} \delta\bar{t} \right) \exp \left(\mathcal{O}(\delta\bar{t}^2) \right). \quad (\text{F.19})$$

Nous avons développé l'exponentielle de \hat{U} en séparant \hat{T} et \hat{V} . Le troisième terme est au moins d'ordre 2 en $\delta\bar{t}$, et fait intervenir un développement de commutateurs impliquant \hat{T} et \hat{V} . Nous choisissons $\delta\bar{t}$ assez petit pour nous limiter à un développement à l'ordre 1,

$$\hat{U}(\bar{t}_0 + (k+1)\delta\bar{t}, \bar{t}_0 + k\delta\bar{t}) \approx \exp \left(-i \hat{T} \delta\bar{t} \right) \exp \left(-i \hat{V} \delta\bar{t} \right). \quad (\text{F.20})$$

La propagation dans le temps consiste donc à appliquer n fois cet opérateur sur le vecteur Φ .

Le terme $\exp \left(-i \hat{V} \delta\bar{t} \right) \Phi(\bar{x}, \bar{y}_0, \bar{z}, \bar{t})$, se calcule en chaque point comme l'exponentielle d'une matrice 2×2 imaginaire pure [208]

$$\exp \left(-i \hat{V} \delta\bar{t} \right) \Phi = \exp \left(-\frac{i\delta\bar{t}}{2} (v_{cc} + v_{\ell\ell}) \right) \begin{bmatrix} \cos a + b \frac{v_{cc} - v_{\ell\ell}}{2} & v_{c\ell} b \\ v_{\ell c} b & \cos a - b \frac{v_{cc} - v_{\ell\ell}}{2} \end{bmatrix} \Phi, \quad (\text{F.21})$$

avec

$$\begin{cases} a = \frac{\delta\bar{t}}{2} \sqrt{(v_{cc} - v_{\ell\ell})^2 + 4v_{c\ell} v_{\ell c}}, \\ b = -i\delta\bar{t} \frac{\sin a}{a}. \end{cases} \quad (\text{F.22})$$

Le traitement du terme cinétique est particulièrement simple dans l'espace réciproque. En utilisant la transformée de Fourier de Φ vis-à-vis de \bar{x} et \bar{z} comme

$$\tilde{\Phi}(k_{\bar{x}}, k_{\bar{z}}, y_0, \bar{t}) = \frac{1}{2\pi} \iint d\bar{x} d\bar{z} \exp(-i(k_{\bar{x}}\bar{x} + k_{\bar{z}}\bar{z})) \Phi(\bar{x}, \bar{z}, y_0, \bar{t}), \quad (\text{F.23})$$

on obtient,

$$\exp(-i\hat{T}\delta\bar{t})\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \exp\left(-i\delta\bar{t}\frac{k_{\bar{x}}^2 + k_{\bar{z}}^2}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\delta\bar{t}\frac{k_{\bar{x}}^2 + k_{\bar{z}}^2}{2}\right) \end{bmatrix} \tilde{\Phi}. \quad (\text{F.24})$$

En résumé, le calcul associé à une itération pour passer de $\Phi(\bar{t}_0 + k\delta\bar{t})$ à $\Phi(\bar{t}_0 + (k+1)\delta\bar{t})$, consiste en la réalisation séquentielle des étapes suivantes :

- Multiplication du vecteur $\Phi(\bar{t}_0 + k\delta\bar{t})$ par la matrice $\exp(-i\hat{V}\delta\bar{t})$ (équation F.21).
- Transformée de Fourier du résultat selon \bar{x} et \bar{z} pour obtenir $\tilde{\Phi}$.
- Multiplication de $\tilde{\Phi}$ par $\exp(-i\hat{T}\delta\bar{t})$ (équation F.24),
- La transformée de Fourier inverse du résultat correspond au vecteur propagé $\Phi(\bar{t}_0 + (k+1)\delta\bar{t})$.

F.4 Détermination numérique de l'état initial du système

Les conditions initiales du système correspondent à une absence de laser à atomes $\bar{\varphi}_\ell = 0$, et à une fonction d'onde du condensat $\bar{\varphi}_c$ contenant les N atomes du système. Pour déterminer numériquement la fonction d'onde du condensat, il suffit d'écrire la décomposition d'une fonction d'onde d'essai quelconque contenant N atomes sur toute la base des états du système,

$$\varphi(\bar{x}, \bar{z}, y_0, \bar{t}) = c_0 \varphi_c(\bar{x}, \bar{z}, y_0) e^{-i\bar{\mu}\bar{t}} + \sum_{k \neq 0} c_k \varphi_k(\bar{x}, \bar{z}, y_0) e^{-i\bar{E}_k\bar{t}}, \quad (\text{F.25})$$

où l'on a noté les paramètres adimensionnés, tels que le potentiel chimique $\bar{\mu}$ du condensat φ_c , et les énergies \bar{E}_k des états excités φ_k . Par définition $\bar{E}_k > \bar{\mu}$, et nous avons noté c_k , les coefficients de la décomposition. Si l'on fait évoluer une fonction initiale quelconque φ selon la procédure détaillée plus haut, mais en faisant la transformation $\bar{t} \rightarrow i\bar{t}$, au bout d'un certain temps d'évolution, la fonction d'onde propagée dans ce temps imaginaire se rapproche de plus en plus de φ_c , car le poids relatif de cette composante par rapport aux autres croît avec le temps \bar{t} comme $\exp[(\bar{E}_k - \bar{\mu})\bar{t}]$. En pratique, comme la norme globale de la fonction d'onde décroît exponentiellement avec le temps, il est nécessaire de renormaliser φ à chaque itération. Bien entendu, le temps nécessaire à la convergence vers φ_c est d'autant plus court que la fonction d'essai φ est pertinente, c'est-à-dire proche de φ_c . Pour cela, un bon point de départ est de prendre pour φ , la fonction de Thomas-Fermi du condensat. Enfin notons que la comparaison de φ avec cette dernière, après propagation et stabilisation, permet de tester la validité du programme écrit. En effet, la solution de Thomas-Fermi ne diffère de la solution numérique qu'au niveau des ailes (figure 29).

F.5 Précautions liées au traitement numérique

Pour réaliser numériquement les calculs précédents, nous avons utilisé le logiciel Matlab[®] [46], qui possède des algorithmes de transformée de Fourier rapides (FFT), particulièrement adaptés à la manipulation de matrices représentant les valeurs de Φ échantillonnées spatialement et dans l'espace réciproque.

La méthode de propagation générale est valide tant que l'on choisit un pas temporel $\delta\bar{t}$ assez petit pour que l'opérateur d'évolution soit correctement approximé par la relation F.20. Si le choix de $\delta\bar{t}$ joue sur la durée finale du calcul via le nombre d'itérations n , l'échantillonnage spatial joue à la fois sur le temps de calcul (un plus grand nombre de données nécessitent plus de temps pour être traitées) mais aussi sur la quantité de mémoire utilisée. Il est donc important de rechercher l'échantillonnage à la fois nécessaire et suffisant pour rendre compte de la dynamique. Soit $\Delta\bar{x}$ et $\Delta\bar{z}$, les pas de l'échantillonnage en unités adimensionnées dans les directions x et z . Pour représenter correctement les potentiels, il faut que les tailles caractéristiques de variation de ces derniers, soient bien plus grandes que les pas d'échantillonnage. Dans notre cas, le potentiel le plus confinant étant de taille caractéristique σ_r , la condition s'écrit

$$\Delta\bar{x}, \Delta\bar{z} \ll 1. \quad (\text{F.26})$$

Cependant, ces considérations sur l'échantillonnage s'appliquent à toute simulation numérique. Dans la suite, nous avons voulu mettre l'accent sur les effets numériques propres à la simulation d'une onde propagative libre et accélérée (comme un laser à atomes), effets qui sont différents de ceux que l'on rencontre pour un condensat piégé par exemple.

F.5.1 Effet de l'accélération de l'onde sur l'échantillonnage

Une condition sur l'échantillonnage est donnée par des considérations sur les valeurs maximum prises par $k_{\bar{x}}$ et $k_{\bar{z}}$ dans l'espace réciproque, que l'on obtient en réalisant une transformée de Fourier discrète numérique (FFT). On a $k_{\bar{x}}^{\max} = 2\pi/\Delta\bar{x}$ et $k_{\bar{z}}^{\max} = 2\pi/\Delta\bar{z}$. Il s'ensuit que l'on ne peut calculer correctement la dynamique d'un paquet d'onde dont le vecteur d'onde est plus grand que ces valeurs, et ce, dans chacune de ces directions. Soient $\lambda_{\text{dB}\bar{x}} = 2\pi/k_{\bar{x}}$ et $\lambda_{\text{dB}\bar{z}} = 2\pi/k_{\bar{z}}$, les longueurs d'onde de De Broglie associées aux vecteurs d'onde selon différents axes. La condition que doivent vérifier $\Delta\bar{x}$ et $\Delta\bar{z}$ sur tout le domaine d'étude, s'écrit

$$\lambda_{\text{dB}\bar{x}} \gg \Delta\bar{x} \quad \text{et} \quad \lambda_{\text{dB}\bar{z}} \gg \Delta\bar{z}. \quad (\text{F.27})$$

On obtient donc que la longueur d'onde de De Broglie doit être grande devant le pas d'échantillonnage. Nous pouvons retrouver ce résultat en remarquant que λ_{dB} est la distance sur laquelle la phase de la fonction d'onde varie de 2π . La condition F.27 doit donc être vérifiée pour bien représenter cette variation.

Dans notre cas, les vecteurs d'ondes extrêmes sont atteints sur le bord de la zone d'étude puisque le potentiel V_ℓ est expulsant. On voit donc qu'à échantillonnage donné, la taille de la zone d'étude ne peut excéder une certaine valeur. De plus, l'échantillonnage doit être de plus en plus précis, lorsque la taille de la zone d'étude augmente. Soit n_z le nombre de points de l'échantillonnage vertical et $L_{\bar{z}} = n_z \Delta\bar{z}$, la hauteur de chute sur laquelle on veut calculer la dynamique du laser à atomes. Même en négligeant l'effet Zeeman quadratique qui expulse l'onde, sous le seul effet de la gravité, la vitesse v en fin de chute varie comme $v \propto \sqrt{L_{\bar{z}}}$. le nombre de points d'échantillonnage ne varie donc pas proportionnellement à $L_{\bar{z}}$, mais on a $n_z \propto L_{\bar{z}}^{3/2}$. On devient donc plus rapidement limité par la taille mémoire disponible, que si l'onde ne ressentait pas d'accélération, comme dans la simulation d'un condensat piégé.

Notons enfin que si la condition F.27 n'est pas vérifiée, les vecteurs d'ondes qui excèdent la valeur maximum, donnent naissance à une effet numérique de repliement de spectre, c'est-à-dire qu'ils sont interprétés comme des vecteurs d'onde de signe opposé. On voit donc apparaître sur la fonction d'onde, des réflexions « numériques » et les franges associées, en des points où le potentiel ne présente pas de discontinuité, mais où la longueur d'onde de De Broglie est de l'ordre de l'échantillonnage.

En pratique pour trouver l'échantillonnage adéquat que ce soit $\Delta\bar{x}$, $\Delta\bar{z}$ ou $\delta\bar{t}$, nous estimons ces paramètres à l'aide des conditions précédentes. Puis, en faisant varier l'échantillonnage, nous vérifions que le résultat numérique reste le même, ce qui signifie que nous avons atteint des valeurs correctes pour notre calcul.

F.5.2 Effet de bord

Un autre problème numérique survient de par la nature propagative du laser à atomes, lorsque la fonction d'onde prend des valeurs non négligeables, sur les points extrêmes de l'échantillonnage spatial. En effet, comme la fonction d'onde ne peut pas, par définition, sortir de l'espace sur lequel est réalisé la simulation, le bord de la zone d'échantillonnage est équivalent à une marche de potentiel infini. On y observe alors des réflexions qui se manifestent par l'apparition de franges d'interférences. Cet effet parasite est gênant, dans le sens où il introduit une réflexion, là où le système que l'on veut initialement simuler n'en présente pas.

Ainsi, il serait plus réaliste de faire en sorte, qu'un laser à atomes qui se propage jusqu'au bord de l'espace échantillonné, ne soit pas réfléchi, mais puisse sortir de la zone de la simulation, tout comme le fait la fonction d'onde réelle. Une façon d'y arriver consiste à rendre la paroi, non plus réfléchissante, mais absorbante.

Ceci peut être réalisé à l'aide d'un masque qui est multiplié à la fonction d'onde, à chaque itération du calcul de la propagation. Celui-ci vaut 1 pour tous les points qui sont loins du bord de l'espace de travail, et décroît lentement vers 0 lorsque l'on se rapproche du bord. La forme précise du masque est a priori peu importante, le paramètre principal est la taille adimensionnée caractéristique L_m , sur laquelle il passe de 1 à 0. Soit λ_{dB} , la longueur d'onde de De Broglie à la frontière du domaine d'échantillonnage. Pour que les réflexions soient négligeables, il faut prendre garde à ce que la condition suivante soit vérifiée

$$\lambda_{dB} \ll L_m . \tag{F.28}$$

L'écrêtage associé à ce masque s'accompagne inévitablement d'une perte en nombre d'atomes, puisqu'ils « sortent » de la simulation. La conséquence de ceci est que, pour garder la cohérence de l'ensemble, il ne faut pas renormaliser à chaque itération le vecteur Φ (équation F.12).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. R. HAMILTON, “On a general Method of expressing the Paths of Light, and of the Planets, by the Coefficients of a Characteristic Function”, *Dublin University Review and Quarterly Magazine*, **I**, 795 (1833).
- [2] L. DE BROGLIE, *Recherches sur la théorie des quanta*, Thèse de doctorat, Faculté des Sciences de Paris (1924).
- [3] C. DAVISSON ET L. H. GERMER, “Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel”, *Phys. Rev.* **30**, 705 (1927).
- [4] E. RUSKA, “The development of the electron microscope and of electron microscopy”, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 627 (1987).
- [5] O. R. FRISCH, H. VON HALBAN JR., ET J. KOCH, “Some Experiments on the Magnetic Properties of Free Neutrons”, *Phys. Rev.* **53**, 719 (1938).
- [6] P. E. MOSKOWITZ, P. L. GOULD, S. R. ATLAS, ET D. E. PRITCHARD, “Diffraction of an Atomic Beam by Standing-Wave Radiation”, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 370 (1983).
- [7] D. KEITH, M. SCHATTENBURG, H. SMITH, ET D. PRITCHARD, “Diffraction of Atoms by a Transmission Grating”, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1580 (1988).
- [8] P. MEYSTRE, *Atom optics*, Springer (2001).
- [9] H. FRIEDBURG ET W. PAUL, “Optical Presentation with Neutral Atoms.”, *Naturwissenschaften* **38**, 159 (1951).
- [10] J. BJORKHOLM, R. FREEMAN, A. ASHKIN, ET D. PEARSON, “Observation of Focussing of Neutral atoms by the Dipole Forces of Resonance-Radiation Pressure”, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1361 (1978).
- [11] S. CHU, “Nobel Lecture : The manipulation of neutral particles”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 685 (1998).
- [12] C. N. COHEN-TANNOUJDI, “Nobel Lecture : Manipulating atoms with photons”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 707 (1998).
- [13] W. D. PHILLIPS, “Nobel Lecture : Laser cooling and trapping of neutral atoms”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 721 (1998).
- [14] V. I. BALKIN, V. S. LETOKHOV, Y. B. OVCHINNIKOV, ET A. I. SIDOROV, “Quantum-State-Selective Mirror Reflection of Atoms by Laser Light”, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2137 (1988) ; Erratum, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 902 (1988).
- [15] C. G. AMINOFF, A. M. STEANE, P. BOUYER, P. DESBIOLLES, J. DALIBARD, ET C. COHEN-TANNOUJDI, “Cesium Atoms Bouncing in a Stable Gravitational Cavity”, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3083 (1993).

- [16] Y. B. OVCHINNIKOV, I. MANEK, ET R. GRIMM, “Surface Trap for Cs Atoms based on Evanescent-Wave Cooling”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2225 (1997).
- [17] “Special Issue : Atom optics”, *App. Phys. B* **54** (1992).
- [18] O. CARNAL ET J. MLYNEK, “Young’s double-slit experiment with atoms : A simple atom interferometer”, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2689 (1991).
- [19] D. W. KEITH, C. R. EKSTROM, Q. A. TURCHETTE, ET D. E. PRITCHARD, “An interferometer for atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2693 (1991).
- [20] P. R. BERMAN (Ed.), *Atom Interferometry*, Academic Press (1997).
- [21] C. J. BORDÉ, “Atomic clocks and inertial sensors”, *Metrologia* **39**, 435 (2002).
- [22] P. BOUYER, *Interférométrie atomique : des sources d’atomes refroidies aux lasers à atomes*, Habilitation à diriger les recherches, Laboratoire Charles Fabry de l’Institut d’Optique (2005).
- [23] T. H. MAIMAN, “Stimulated Optical Radiation in Ruby”, *Nature* **187**, 493 (1960).
- [24] S. BOSE, “Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese”, *Z. Phys.* **26**, 178 (1924).
- [25] A. EINSTEIN, “Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung”, *Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss.* (1925).
- [26] M. ANDERSON, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. WIEMAN, ET E. CORNELL, “Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor”, *Science* **269**, 198 (1995).
- [27] K. B. DAVIS, M.-O. MEWES, M. ANDREWS, N. VAN DRUTEN, D. DURFEE, D. M. KURN, ET W. KETTERLE, “Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [28] C. C. BRADLEY, C. A. SACKETT, J. J. TOLLETT, ET R. G. HULET, “Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
- [29] E. A. CORNELL ET C. E. WIEMAN, “Nobel Lecture : Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments”, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 875 (2002).
- [30] W. KETTERLE, “When atoms behave as waves : Bose-Einstein condensation and the atom laser”, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 1131 (2002).
- [31] M. R. ANDREWS, C. G. TOWNSEND, H.-J. MIESNER, D. DURFEE, D. M. KURN, ET W. KETTERLE, “Observation of Interference Between Two Bose Condensates”, *Science* **275**, 637 (1997).
- [32] I. BLOCH, T. W. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition”, *Nature* **403**, 166 (2000).
- [33] M. KÖHL, T. W. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Measuring the Temporal Coherence of an Atom Laser Beam”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160404 (2001).
- [34] M. SCHELLEKENS, R. HOPPELER, A. PERRIN, J. VIANA GOMES, D. BOIRON, A. ASPECT, ET C. I. WESTBROOK, “Hanbury Brown Twiss Effect for Ultracold Quantum Gases”, *Science* **310**, 648 (2005).
- [35] A. ÖTTL, S. RITTER, KÖHL, ET T. ESSLINGER, “Correlations and Counting Statistics of an Atom Laser”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090404 (2005).

- [36] L. DENG, E. W. HAGLEY, J. WEN, M. TRIPPENBACH, Y. BAND, P. S. JULIENNE, J. E. SIMSARIAN, K. HELMERSON, S. L. ROLSTON, ET W. D. PHILLIPS, "Four-wave mixing with matter waves", *Nature* **398**, 218 (1999).
- [37] Y. LE COQ, J. H. THYWISSEN, S. A. RANGWALA, F. GERBIER, S. RICHARD, G. DELANNOY, P. BOUYER, ET A. ASPECT, "Atom Laser Divergence", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 170403 (2001).
- [38] M. FAUQUEMBERGUE, J.-F. RIOU, W. GUERIN, S. RANGWALA, F. MORON, A. VILLING, Y. LE COQ, P. BOUYER, A. ASPECT, ET M. LÉCRIVAIN, "Partially ferromagnetic electromagnet for trapping and cooling neutral atoms to quantum degeneracy", *Rev. Sci. Instrum.* **76**, 103104 (2005).
- [39] C. COHEN-TANNOUJJI, J. DUPONT-ROC, ET G. GRYNBERG, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, EDP Sciences (1996).
- [40] S. BALI, K. M. O'HARA, M. GEHM, S. R. GRANADE, ET J. E. THOMAS, "Quantum-diffractive background gas collisions in atom-trap heating and loss", *Phys. Rev. A* **60**, R29 (1999).
- [41] A. ROTH, *Vacuum Technology*, North-Holland (1990).
- [42] M. FAUQUEMBERGUE, *Réalisation d'un dispositif de condensation de Bose-Einstein et de transport d'un échantillon cohérent d'atomes*, Thèse de doctorat, Université Paris XI (2004).
- [43] W. KETTERLE, D. DURFEE, ET D. M. STAMPER-KURN, dans *Bose-Einstein condensation in atomic gases : Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CXL*, ÉDITÉ PAR M. INGUSCIO, S. STRINGARI, ET C. E. WIEMAN, p. 67, IOS Press, Amsterdam (1999).
- [44] PCO Imaging[®], http://www.pco.de/download/?url=/data/BR_PFQEE_0505.pdf.
- [45] M. A. JOFFE, W. KETTERLE, A. MARTIN, ET D. E. PRITCHARD, "Transverse cooling and deflection of an atomic beam inside a Zeeman slower", *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 2257 (1993).
- [46] The Mathworks, Inc.- Matlab[®], The Language of Technical Computing, <http://www.mathworks.com>.
- [47] J. ESTÈVE, *Du miroir au guide d'onde atomique : effets de rugosité*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI (2004).
- [48] N. F. RAMSEY, *Molecular Beams*, Clarendon Press, Oxford (1956).
- [49] R. DRULLINGER, D. GLAZE, ET D. SULLIVAN, dans *Proceedings of the 39th Annual Frequency Control Symposium*, p. 13 (1985).
- [50] P. D. DUNN ET D. A. REAY, *Heat pipes*, Pergamon Press (1976).
- [51] V. I. BALYKIN, V. S. LETOKHOV, ET V. I. MUSHIN, "Observation of the cooling of free sodium atoms in a resonance laser field with a scanning frequency", *JETP Lett.* **29**, 560 (1979).
- [52] W. D. PHILLIPS ET H. J. METCALF, "Laser Deceleration of an Atomic Beam", *Phys. Rev. Lett.* **48**, 596 (1982).
- [53] P. A. MOLENAAR, P. VAN DER STRATEN, ET H. G. M. HEIDEMAN, "Diagnostic technique for Zeeman-compensated atomic beam slowing : Technique and results", *Phys. Rev. A* **55**, 605 (1997).

- [54] R. J. NAPOLITANO, S. C. ZILIO, ET V. S. BAGNATO, “Adiabatic following conditions for the deceleration of atoms with the Zeeman tuning technique”, *Opt. Commun.* **80**, 110 (1990).
- [55] A. ASHKIN ET J. P. GORDON, “Stability of radiation-pressure particle traps : an optical Earnshaw theorem”, *Opt. Lett.* **8**, 511 (1983).
- [56] J. DALIBARD, S. REYNAUD, ET C. COHEN-TANNOUDJI, “Potentialities of a new $\sigma^+ - \sigma^-$ laser configuration for radiative cooling and trapping”, *J. Phys. B* **17**, 4577 (1984).
- [57] D. PRITCHARD, E. L. RAAB, V. BAGNATO, C. E. WIEMAN, ET R. N. WATTS, “Light Traps Using Spontaneous Forces”, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 310 (1986).
- [58] E. L. RAAB, M. PRENTISS, A. CABLE, S. CHU, ET D. PRITCHARD, “Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure”, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2631 (1987).
- [59] M. DREWSSEN, P. LAURENT, A. NADIR, G. SANTARELLI, A. CLAIRON, Y. CASTIN, D. GRISON, ET C. SALOMON, “Investigation of sub-Doppler cooling effects in a cesium magneto-optical trap”, *Appl. Phys. B* **59**, 283 (1994).
- [60] D. W. SESKO, T. G. WALKER, ET C. WIEMAN, “Behavior of neutral atoms in a spontaneous force trap”, *J. Opt. Soc. Am. B* **8**, 946 (1991).
- [61] C. G. TOWNSEND, N. H. EDWARDS, C. J. COOPER, K. P. ZETIE, C. J. FOOT, A. M. STEANE, P. SZRIFTGISER, H. PERRIN, ET J. DALIBARD, “Phase-space density in the magneto-optical trap”, *Phys. Rev. A* **52**, 1423 (1995).
- [62] W. KETTERLE, K. B. DAVIS, M. A. JOFFE, A. MARTIN, ET D. E. PRITCHARD, “High Densities of Cold Atoms in a Dark Spontaneous-Force Optical Trap”, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2253 (1993).
- [63] Y. LE COQ, *Condensats de Bose-Einstein et lasers à atomes*, Thèse de doctorat, Université Paris XI (2002).
- [64] P. D. LETT, W. PHILLIPS, S. L. ROLSTON, C. E. TANNER, R. N. WATTS, ET C. WESTBROOK, “Optical molasses”, *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2084 (1989).
- [65] B. DESRUELLE, V. BOYER, P. BOUYER, G. BIRKL, M. LÉCRIVAIN, F. ALVES, C. I. WESTBROOK, ET A. ASPECT, “Trapping cold neutral atoms with an iron-core electromagnet”, *Eur. Phys. J. D.* **1**, 255 (1998).
- [66] J. WERNER, H. WALLIS, G. HILLENBRAND, ET A. STEANE, “Laser cooling by $\sigma^+ - \sigma^-$ circularly polarized beams of unequal intensities”, *J. Phys. B* **26**, 3063 (1993).
- [67] D. A. STECK, "Rubidium 87 D Line Data", <http://george.ph.utexas.edu/~dsteck/alkalidata/rubidium87numbers.pdf> (2003).
- [68] J. GIORDMAINE ET T. C. WANG, “Molecular Beam Formation by Long Parallel Tubes”, *J. Appl. Phys.* **31**, 463 (1960).
- [69] C. D. WALLACE, T. P. DINNEEN, K.-Y. N. TAN, T. T. GROVE, ET P. L. GOULD, “Isotopic Difference in Trap Loss Collisions of Laser Cooled Rubidium Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 897 (1992).
- [70] J. WEINER, V. S. BAGNATO, S. ZILIO, ET P. S. JULIENNE, “Experiments and theory in cold and ultracold collisions”, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 1 (1999).
- [71] D. SESKO, T. WALKER, C. MONROE, A. GALLAGHER, ET C. WIEMAN, “Collisional Losses from a Light-Force Atom Trap”, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 961 (1989).

- [72] S. D. GENSEMER, V. SANCHEZ-VILICANA, K. Y. N. TAN, T. T. GROVE, ET P. L. GOULD, “Trap-loss collisions of ^{85}Rb and ^{87}Rb : Dependence on trap parameters”, *Phys. Rev. A* **56**, 4055 (1997).
- [73] A. ASPECT, E. ARIMONDO, R. KAISER, N. VANSTEENKISTE, ET C. COHEN-TANNOUDJI, “Laser Cooling below the One-Photon Recoil Energy by Velocity-Selective Coherent Population Trapping”, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 826 (1988).
- [74] M. D. BARRETT, J. A. SAUER, ET M. S. CHAPMAN, “All-Optical Formation of an Atomic Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 010404 (2001).
- [75] A. L. MIGDALL, J. V. PRODAN, W. D. PHILLIPS, T. H. BERGEMAN, ET H. J. METCALF, “First Observation of Magnetically Trapped Neutral Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2596 (1985).
- [76] B. DIU, C. GUTHMANN, D. LEDERER, ET B. ROULET, *Physique Statistique*, Hermann (1997).
- [77] V. BAGNATO, D. E. PRITCHARD, ET D. KLEPPNER, “Bose-Einstein condensation in an external potential”, *Phys. Rev. A* **35**, 4354 (1987).
- [78] C. J. PETHICK ET H. SMITH, *Bose-Einstein Condensation in Dilute gases*, Cambridge University Press (2002).
- [79] M. ABRAMOWITZ ET I. E. STEGUN, *Handbook of Mathematical functions*, Dover, New York (1972).
- [80] S. GROSSMANN ET M. HOLTHAUS, “On Bose-Einstein condensation in harmonic traps”, *Phys. Lett. A* **208**, 188 (1995).
- [81] J. DALIBARD, dans *Bose-Einstein condensation in atomic gases : Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CXL*, ÉDITÉ PAR M. INGUSCIO, S. STRINGARI, ET C. E. WIEMAN, p. 321, IOS Press, Amsterdam (1999).
- [82] E. G. M. VAN KEMPEN, S. J. J. M. F. KOKKELMANS, D. J. HEINZEN, ET B. J. VERHAAR, “Interisotope Determination of Ultracold Rubidium Interactions from Three High-Precision Experiments”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 093201 (2002).
- [83] D. M. STAMPER-KURN, H.-J. MIESNER, S. INOUE, M. R. ANDREWS, ET W. KETTERLE, “Collisionless and hydrodynamic excitations of a Bose-Einstein condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 500 (1998).
- [84] A. MESSIAH, *Mécanique quantique*, Dunod (1995).
- [85] Y. CASTIN, dans *Coherent atomic matter waves, Lecture Notes of Les Houches Summer School*, ÉDITÉ PAR R. KAISER ET C. WESTBROOK, EDP Sciences and Springer-Verlag (2001).
- [86] F. DALFOVO, L. PITAEVSKII, ET S. STRINGARI, “Order parameter at the boundary of a trapped Bose gas”, *Phys. Rev. A* **54**, 4213 (1996).
- [87] W. H. WING, “On neutral particle trapping in quasistatic electromagnetic fields”, *Prog. Quant. Elect.* **8**, 181 (1984).
- [88] H. M. J. M. BOESTEN, A. J. MOERDIJK, ET B. J. VERHAAR, “Dipolar decay in two recent Bose-Einstein condensation experiments”, *Phys. Rev. A* **54**, R29 (1996).
- [89] J. SÖDING, D. GUÉRY-ODELIN, P. DESBIOLLES, F. CHEVY, H. INAMORI, ET J. DALIBARD, “Three-body decay of a rubidium Bose-Einstein condensate”, *Appl. Phys. B* **69**, 257 (1999).

- [90] E. A. BURT, R. W. GHRIST, C. J. MYATT, M. J. HOLLAND, E. A. CORNELL, ET C. E. WIEMAN, “Coherence, Correlations, and Collisions : What One Learns about Bose-Einstein Condensates from Their Decay”, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 337 (1997).
- [91] D. E. PRITCHARD, “Cooling Neutral Atoms in a Magnetic Trap for Precision Spectroscopy”, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1336 (1983).
- [92] T. BERGEMAN, G. EREZ, ET H. J. METCALF, “Magnetostatic fields for neutral atoms”, *Phys. Rev. A* **35**, 1535 (1987).
- [93] W. PETRICH, M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER, ET E. A. CORNELL, “Stable, Tightly Confining Magnetic Trap for Evaporative Cooling of Neutral Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3352 (1995).
- [94] M. GEHM, K. M. O’HARA, T. A. SAVARD, ET J. E. THOMAS, “Dynamics of noise-induced heating in atom traps”, *Phys. Rev. A* **58**, 3914 (1998).
- [95] E. A. CORNELL, J. R. ENSHER, ET C. E. WIEMAN, dans *Bose-Einstein condensation in atomic gases : Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CXL*, ÉDITÉ PAR M. INGUSCIO, S. STRINGARI, ET C. E. WIEMAN, p. 15, IOS Press, Amsterdam (1999).
- [96] H. F. HESS, “Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen”, *Phys. Rev. B* **34**, 3476 (1986).
- [97] O. J. LUITEN, M. W. REYNOLDS, ET J. T. M. WALRAVEN, “Kinetic theory of the evaporative cooling of a trapped gas”, *Phys. Rev. A* **53**, 381 (1996).
- [98] W. KETTERLE ET N. J. VAN DRUTEN, “Evaporative cooling of trapped atoms”, *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics* **37**, 181 (1996).
- [99] T. SCHUMM, S. HOFFERBERTH, L. M. ANDERSSON, S. WILDERMUTH, S. GROTH, I. BAR-JOSEPH, J. SCHMIEDMAYER, ET P. KRÜGER, “Matter-wave interferometry in a double well on an atom chip”, *Nature Physics* **1**, 57 (2005).
- [100] Y. CASTIN ET R. DUM, “Bose-Einstein Condensates in Time Dependent Traps”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).
- [101] F. GERBIER, *Condensats de Bose-Einstein dans un piège anisotrope*, Thèse de doctorat, Université Paris VI (2003).
- [102] P. FEDICHEV, M. W. REYNOLDS, ET G. V. SHLYAPNIKOV, “Three-Body Recombination of Ultracold Atoms to a Weakly Bound s Level”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2921 (1996).
- [103] B. D. ESRY, C. H. GREENE, ET J. P. BURKE JR., “Recombination of Three Atoms in the Ultracold Limit”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1751 (1999).
- [104] A. J. MOERDIJK, H. M. J. M. BOESTEN, ET B. J. VERHAAR, “Decay of trapped ultracold alkali atoms by recombination”, *Phys. Rev. A* **53**, 916 (1996).
- [105] B. LABURTHE TOLRA, O. K. M., J. H. HUCKANS, W. PHILLIPS, S. L. ROLSTON, ET J. V. PORTO, “Observation of Reduced Three-Body Recombination in a Fermionized 1D Bose Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 190401 (2003).
- [106] J.-F. RIOU, W. GUERIN, Y. LE COQ, M. FAUQUEMBERGUE, V. JOSSE, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Beam Quality of a Nonideal Atom Laser”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 070404 (2006).
- [107] M. NARASCHEWSKI ET R. J. GLAUBER, “Spatial coherence and density correlations of trapped Bose gases”, *Phys. Rev. A* **59**, 4595 (1999).

-
- [108] M. HOLLAND, K. BURNETT, C. GARDINER, J. I. CIRAC, ET P. ZOLLER, “Theory of an atom laser”, *Phys. Rev. A* **54**, R1757 (1996).
- [109] G. CENNINI, G. RITT, C. GECKELER, ET M. WEITZ, “All-Optical Realization of an Atom Laser”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 240408 (2003).
- [110] B. P. ANDERSON ET M. A. KASEVICH, “Macroscopic Quantum Interference from Atomic Tunnel Arrays”, *Science* **282**, 1686 (1998).
- [111] M.-O. MEWES, M. R. ANDREWS, D. M. KURN, D. S. DURFEE, C. G. TOWNSEND, ET W. KETTERLE, “Output Coupler for Bose-Einstein Condensed Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 582 (1997).
- [112] E. W. HAGLEY, L. DENG, M. KOZUMA, J. WEN, K. HELMERSON, S. L. ROLSTON, ET W. D. PHILLIPS, “A Well-Collimated Quasi-Continuous Atom Laser”, *Science* **283**, 1706 (1999).
- [113] I. BLOCH, T. W. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Atom Laser with a cw Output Coupler”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3008 (1999).
- [114] M. EDWARDS, D. A. GRIGGS, P. L. HOLMAN, C. W. CLARK, S. L. ROLSTON, ET W. D. PHILLIPS, “Properties of a Raman atom-laser output coupler”, *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.* **32**, 2935 (1999).
- [115] N. P. ROBINS, C. FIGL, S. A. HAINE, A. K. MORISON, M. JEPPESEN, J. J. HOPE, ET J. D. CLOSE, “Achieving Peak Brightness in an Atom Laser”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 140403 (2006).
- [116] G. M. MOY ET C. M. SAVAGE, “Output coupling for an atom laser by state change”, *Phys. Rev. A* **56**, R1087 (1997).
- [117] G. M. MOY, J. J. HOPE, ET C. M. SAVAGE, “Born and Markov approximations for atom lasers”, *Phys. Rev. A* **59**, 667 (1999).
- [118] A. S. BRADLEY, J. J. HOPE, ET M. J. COLLET, “Steady-state quantum statistics of a non-Markovian atom laser. II”, *Phys. Rev. A* **68**, 063611 (2003).
- [119] Y. JAPHA, S. CHOI, K. BURNETT, ET Y. B. BAND, “Coherent Output, Stimulated Quantum Evaporation, and Pair Breaking in a Trapped Atomic Bose Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1079 (1999).
- [120] S. CHOI, Y. JAPHA, ET K. BURNETT, “Adiabatic output coupling of a Bose gas at finite temperatures”, *Phys. Rev. A* **61**, 063606 (2000).
- [121] Y. JAPHA ET B. SEGEV, “Semiclassical theory of field-induced thermal transition rate with application to output coupling of a Bose-Einstein gas at finite temperature”, *Phys. Rev. A* **65**, 063411 (2002).
- [122] J. SCHNEIDER ET A. SCHENZLE, “Output from an atom laser : theory vs. experiment”, *Applied Physics B* **69**, 353 (1999).
- [123] R. J. BALLAGH, K. BURNETT, ET S. T. F., “Theory of an Output Coupler for Bose-Einstein Condensed Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1607 (1997).
- [124] M. NARASCHEWSKI, A. SCHENZLE, ET H. WALLIS, “Phase diffusion and the output properties of a cw atom-laser”, *Phys. Rev. A* **56**, 603 (1997).
- [125] W. ZHANG ET D. F. WALLS, “Gravitational and collective effects in an output coupler for a Bose-Einstein condensate in an atomic trap”, *Phys. Rev. A* **57**, 1248 (1998).
- [126] N. P. ROBINS, C. M. SAVAGE, J. J. HOPE, J. E. LYE, C. S. FLETCHER, S. A. HAINE, ET J. D. CLOSE, “Fluctuations and flux : The limits of multistate atom lasers”, *Phys. Rev. A* **69**, 051602 (2004).

- [127] N. P. ROBINS, A. K. MORRISON, J. J. HOPE, ET J. D. CLOSE, “Limits to the flux of a continuous atom laser”, *Phys. Rev. A* **72**, 031606 (2005).
- [128] B. KNEER, T. WONG, K. VOGEL, W. P. SCHLEICH, ET D. F. WALLS, “Generic model of an atom laser”, *Phys. Rev. A* **58**, 4841 (1998).
- [129] N. ROBINS, C. SAVAGE, ET E. A. OSTROVSKAYA, “Atom-laser dynamics”, *Phys. Rev. A* **64**, 043605 (2001).
- [130] H. STECK, M. NARASCHEWSKI, ET H. WALLIS, “Output of a Pulsed Atom Laser”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1 (1998).
- [131] R. GRAHAM ET D. F. WALLS, “Theory of strong outcoupling from Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **60**, 1429 (1999).
- [132] F. GERBIER, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Quasicontinuous Atom Laser in the Presence of Gravity”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4729 (2001); Erratum, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 059905 (2004).
- [133] B. D. ESRY, C. H. GREENE, J. P. BURKE JR., ET J. L. BOHN, “Hartree-Fock Theory for Double Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3594 (1997).
- [134] R. P. FEYNMAN ET A. R. HIBBS, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill (1965).
- [135] J. SCHNEIDER ET A. SCHENZLE, “Investigations of a two mode atom-laser model”, *Phys. Rev. A* **61**, 053611 (2000).
- [136] L. D. LANDAU ET E. M. LIFCHITZ, *Cours de physique théorique : Mécanique quantique*, Tome 3, Éditions Mir, Moscou (1975).
- [137] H. A. FERTIG ET B. I. HALPERIN, “Transmission coefficient of an electron through a saddle-point potential in a magnetic field”, *Phys. Rev. B* **36**, 7969 (1987).
- [138] M. W. JACK, M. NARASCHEWSKI, M. COLLET, ET D. WALLS, “Markov approximation for the atomic output coupler”, *Phys. Rev. A* **59**, 2962 (1999).
- [139] G. GRYNBERG, A. ASPECT, ET C. FABRE, *Introduction aux lasers et à l’optique quantique*, Ellipses (1997).
- [140] Y. B. BAND, P. S. JULIENNE, ET M. TRIPPENBACH, “Radio-frequency output coupling of the Bose-Einstein condensate for atom lasers”, *Phys. Rev. A* **59**, 3823 (1999).
- [141] F. DALFOVO, S. GIORGINI, L. PITAEVSKII, ET S. STRINGARI, “Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases”, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [142] C. COHEN-TANNOUJJI, B. DIU, ET F. LALOË, *Mécanique quantique*, Hermann (1996).
- [143] H. M. WISEMAN ET L. THOMSEN, “Reducing the Linewidth of an Atom Laser by Feedback”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1143 (2001).
- [144] R. GRAHAM, “Decoherence of Bose-Einstein condensates in traps at finite temperature”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5262 (1998).
- [145] A. L. SCHAWLOW ET C. H. TOWNES, “Infrared and Optical Masers”, *Phys. Rev.* **112**, 1940 (1958).
- [146] M. KÖHL, T. BUSCH, K. MØLMER, T. W. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER, “Observing the profile of an atom laser beam”, *Phys. Rev. A* **72**, 063618 (2005).
- [147] T. KRAMER, C. BRACHER, ET M. KLEBER, “Matter waves from quantum sources in a force field”, *J. Phys. A : Math. Gen.* **35**, 8361 (2002).

-
- [148] C. J. BORDÉ, dans *Fundamental Systems in Quantum Optics, Les Houches, Session LIII*, ÉDITÉ PAR J. DALIBARD, J. M. RAIMOND, ET J. ZINN-JUSTIN, Elsevier Science Publishers B. V. (1990).
- [149] T. BUSCH, M. KÖHL, T. ESSLINGER, ET K. MØLMER, “Transverse mode of an atom laser”, *Phys. Rev. A* **65**, 043615 (2002) ; Erratum, *Phys. Rev. A* **65**, 069902 (2002).
- [150] T. KRAMER ET M. RODRIGUEZ, “Quantum theory of an atom laser originating from a Bose-Einstein condensate or a Fermi gas in the presence of gravity”, *Phys. Rev. A* **74**, 013611 (2006).
- [151] L. D. LANDAU ET E. M. LIFCHITZ, *Cours de physique théorique : Mécanique*, Tome 1, Éditions Mir, Moscou (1982).
- [152] P. STOREY ET C. COHEN-TANNOUJDI, “The Feynman path integral approach to atomic interferometry. A tutorial”, *J. Phys. II France* **4**, 1999 (1994).
- [153] M. BORN ET E. WOLF, *Principles of Optics*, Cambridge Univ. Press, 7ème édition (2002).
- [154] C. HENKEL, J.-Y. COURTOIS, ET A. ASPECT, “Atomic diffraction by a thin phase grating”, *J. Phys. II France* **4**, 1955 (1994).
- [155] C. J. BORDÉ, “Theoretical tools for atom optics and interferometry”, *C. R. Acad. Sci. Paris t.2 Série IV*, 509 (2001).
- [156] W. GUERIN, *Source atomique cohérente dans des pièges optiques et magnétiques : réalisation d'un laser à atomes guidé*, Thèse de doctorat, Université Paris XI (2007).
- [157] S. DE NICOLA, R. FEDELE, V. MAN'KO, ET G. MIELE, “Coherent States for Particle Beams in the Thermal Wave Model”, *Physica Scripta* **52**, 191 (1995).
- [158] C. ANTOINE, *Contribution à la théorie des interféromètres atomiques*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI (2004).
- [159] J. A. ARNAUD, *Beam and Fiber Optics*, Academic Press, New York (1976).
- [160] A. E. SIEGMAN, dans *Solid State Lasers : New Developments and Applications*, ÉDITÉ PAR M. INGUSCIO ET R. WALLENSTEIN, Plenum Press, New York (1993).
- [161] P. A. BÉLANGER, "Faisceaux optiques et modes des résonateurs laser", <http://www.copl.ulaval.ca/pab/fomrl/fomrl.pdf>.
- [162] A. E. SIEGMAN, “Defining the Effective Radius of Curvature for a Nonideal Optical Beam”, *IEEE J. Quantum Electron.* **27**, 1146 (1991).
- [163] P. A. BÉLANGER, “Beam propagation and the *ABCD* ray matrices”, *Opt. Lett.* **16**, 196 (1991).
- [164] D. R. NEAL, W. J. ALFORD, J. K. GRUETZNER, ET M. E. WARREN, dans *Third International Workshop on Laser Beam and Optics Characterization*, The International Society for Optical Engineering (1996).
- [165] Y.-J. WANG, D. Z. ANDERSON, V. M. BRIGHT, E. A. CORNELL, Q. DIOT, T. KISHIMOTO, M. PRENTISS, R. A. SARAVANAN, S. R. SEGAL, ET S. WU, “Atom Michelson Interferometer on a Chip Using a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 090405 (2005).
- [166] J. SCHMIEDMAYER, “Guiding and trapping neutral atom on a wire”, *Phys. Rev. A* **52**, R13 (1995).
- [167] J. A. SAUER, M. D. BARRETT, ET M. S. CHAPMAN, “Storage ring for neutral atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 270401 (2001).

- [168] M. J. RENN, D. MONTGOMERY, O. VDOVIN, D. Z. ANDERSON, C. E. WIEMAN, ET E. CORNELL, “Laser-Guided Atoms in Hollow-Core Optical Fibers”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3253 (1995).
- [169] D. MÜLLER, D. Z. ANDERSON, R. J. GROW, P. D. D. SCHWINDT, ET E. A. CORNELL, “Guiding Neutral Atoms Around Curves with Lithographically Patterned Current-Carrying Wires”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5194 (1999).
- [170] M. VENGALATTORE, W. ROOIJAKKERS, ET M. PRENTISS, “Ferromagnetic atom guide with in situ loading”, *Phys. Rev. A* **66**, 053403 (2002).
- [171] K. BONGS, S. BURGER, S. DETTMER, D. HELLWEG, J. ARLT, W. ERTMER, ET W. SENGSTOCK, “Waveguide for Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **63**, 031602 (2001).
- [172] D. CLÉMENT, A. F. VARÓN, M. HUGBART, J. A. RETTER, P. BOUYER, L. SANCHEZ-PALENCIA, D. M. GANGARDT, G. V. SHLYAPNIKOV, ET A. ASPECT, “Suppression of Transport of an Interacting Elongated Bose-Einstein Condensate in a Random Potential”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170409 (2005).
- [173] P. HÄNSEL, W. AND HOMMELHOFF, T. W. HÄNSCH, ET J. REICHEL, “Bose-Einstein condensation on a microelectronic chip”, *Nature* **413**, 498 (2001).
- [174] A. E. LEANHARDT, A. P. CHIKKATUR, D. KIELPINSKI, Y. SHIN, T. L. GUSTAVSON, W. KETTERLE, ET D. E. PRITCHARD, “Propagation of Bose-Einstein Condensates in a Magnetic Waveguide”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 040401 (2002).
- [175] S. GUPTA, K. W. MURCH, K. L. MOORE, T. P. PURDY, ET D. M. STAMPER-KURN, “Bose-Einstein Condensation in a Circular Waveguide”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 143201 (2005).
- [176] T. LAHAYE, Z. WANG, G. REINAUDI, S. P. RATH, J. DALIBARD, ET D. GUÉRY-ODELIN, “Evaporative cooling of a guided rubidium atomic beam”, *Phys. Rev. A* **72**, 033411 (2005).
- [177] S. E. OLSON, R. R. MHASKAR, ET G. RAITHEL, “Continuous propagation and energy filtering of a cold atomic beam in a long high-gradient atom guide”, *Phys. Rev. A* **73**, 033622 (2006).
- [178] W. GUERIN, J.-F. RIOU, J. P. GAEBLER, V. JOSSE, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Guided Quasicontinuous Atom Laser”, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 200402 (2006).
- [179] Y. SHIN, M. SABA, T. A. PASQUINI, W. KETTERLE, D. E. PRITCHARD, ET A. LEANHARDT, “Atom Interferometry with Bose-Einstein Condensates in a Double-Well Potential”, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 050405 (2004).
- [180] D. M. STAMPER-KURN, M. R. ANDREWS, A. P. CHIKKATUR, S. INOUE, H.-J. MIESNER, J. STENGER, ET W. KETTERLE, “Optical Confinement of a Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2027 (1998).
- [181] J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, 3ème édition, Wiley, New York (1998).
- [182] S. CHU, J. E. BJORKHOLM, A. ASHKIN, ET A. CABLE, “Experimental Observation of Optically Trapped Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 314 (1986).
- [183] C. MENOTTI ET S. STRINGARI, “Collective oscillations of a one-dimensional trapped Bose-Einstein gas”, *Phys. Rev. A* **66**, 043610 (2002).
- [184] A. D. JACKSON, G. M. KAVOULAKIS, ET C. J. PETHICK, “Solitary waves in clouds of Bose-Einstein condensed atoms”, *Phys. Rev. A* **58**, 2417 (1998).

-
- [185] S. R. MUNIZ, S. D. JENKINS, T. A. B. KENNEDY, D. S. NAIK, ET C. RAMAN, “Axicon lens for coherent matter waves”, *Optics Express* **14**, 8947 (2006).
- [186] C. PARÉ ET P. BÉLANGER, “Beam propagation in a linear or non-linear lens-like medium using ABCD ray matrices : the method moments”, *Opt. Quantum Electron.* **24**, S1051 (1992).
- [187] P. LEBOEUF ET N. PAVLOFF, “Bose-Einstein beams : Coherent propagation through a guide”, *Phys. Rev. A* **64**, 033602 (2001).
- [188] N. PAVLOFF, “Breakdown of superfluidity of an atom laser past an obstacle”, *Phys. Rev. A* **66**, 013610 (2002).
- [189] T. PAUL, P. LEBOEUF, N. PAVLOFF, K. RICHTER, ET P. SCHLAGHECK, “Non-linear transport of Bose-Einstein condensates through waveguides with disorder”, *Phys. Rev. A* **72**, 063621 (2005).
- [190] I. CARUSOTTO, “Nonlinear atomic Fabry-Perot interferometer : From the mean-field theory to the atom blockade effect”, *Phys. Rev. A* **63**, 0223610 (2001).
- [191] T. PAUL, K. RICHTER, ET P. SCHLAGHECK, “Nonlinear Resonant Transport of Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 020404 (2005).
- [192] O. HOUDE, D. KADIO, ET L. PRUVOST, “Cold Atom Beam Splitter Realized with Two Crossing Dipole Guides”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5543 (2000).
- [193] R. DUMKE, T. MÜTHER, M. VOLK, W. ERTMER, ET G. BIRKL, “Interferometer-Type Structures for Guided Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 220402 (2002).
- [194] E. W. WEISSTEIN, From Mathworld - A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/topics/Clebsch-GordanRelated.html>.
- [195] C. COHEN-TANNOUJDI ET J. DUPONT-ROC, “Experimental Study of Zeeman Light Shifts in Weak Magnetic Fields”, *Phys. Rev. A* **5**, 968 (1972).
- [196] G. BREIT ET I. I. RABI, “Measurement of Nuclear Spin”, *Phys. Rev.* **38**, 2082 (1931).
- [197] C. ZENER, “Non-Adiabatic Crossing of Energy levels”, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **137**, 696 (1932).
- [198] N. VITANOV ET K.-A. SUOMINEN, “Time-dependent control of ultracold atoms in magnetic traps”, *Phys. Rev. A* **56**, R4355 (1997).
- [199] T. WALKER, D. SESKO, ET C. WIEMAN, “Collective Behavior of Optically Trapped Neutral Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 408 (1990).
- [200] L. PRUVOST, I. SERRE, H. T. DUONG, ET J. JORTNER, “Expansion and cooling of a bright rubidium three-dimensional optical molasses”, *Phys. Rev. A* **61**, 053408 (2000).
- [201] J. DALIBARD, “Laser cooling of an optically thick gas : the simplest radiation pressure trap?”, *Opt. Commun.* **68**, 203 (1988).
- [202] B. R. MOLLOW, “Power Spectrum of light Scattered by two-level Systems”, *Phys. Rev.* **188**, 1969 (1969).
- [203] A. STEANE, M. CHOWDHURY, ET C. J. FOOT, “Radiation force in the magneto-optical trap”, *J. Opt. Soc. Am. B* **9**, 2142 (1992).
- [204] J. DALIBARD ET C. COHEN-TANNOUJDI, “Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models”, *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2023 (1989).
- [205] P. J. UNGAR, D. S. WEISS, E. RIIS, ET S. CHU, “Optical molasses and multilevel atoms : theory”, *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2058 (1989).

- [206] A. M. STEANE, G. HILLENBRAND, ET C. J. FOOT, “Polarization gradient cooling in a one-dimensional $\sigma^+ - \sigma^-$ configuration for any atomic transition”, *J. Phys. B* **25**, 4721 (1992).
- [207] J. H. VAN VLECK, “The Correspondence Principle in the Statistical Interpretation of Quantum Mechanics”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **14**, 178 (1928).
- [208] Waterloo Maple, Inc.- Maple[®], <http://www.maplesoft.com>.

RÉSUMÉ

Ce manuscrit présente différents aspects expérimentaux et théoriques concernant un système propre à l'optique atomique : le laser à atomes. Dans notre expérience, celui-ci est issu d'un condensat de Bose-Einstein de Rubidium 87. Aussi, dans un premier temps, nous détaillons les différentes techniques de refroidissement que nous mettons en œuvre pour obtenir cette source atomique cohérente dans un piège ferromagnétique hybride.

Les lasers à atomes que nous réalisons sont extraits du nuage condensé par radiofréquence, et se propagent verticalement sous l'effet de la gravité. Une spécificité de notre expérience réside dans le fort confinement magnétique utilisé, ce qui a pour conséquence de rendre importantes les interactions collisionnelles entre le laser et le condensat-source. Nous montrons que ceci a une influence, non seulement sur la dynamique de couplage du laser, mais aussi sur sa propagation. Nous observons en effet une structure transverse du faisceau laser contenant des caustiques. En utilisant des méthodes initialement développées pour l'optique photonique (approximation iconale, intégrale de Fresnel-Kirchhoff, matrices $ABCD$), nous calculons la fonction d'onde du laser à atomes. De plus, nous caractérisons la propagation de l'onde de matière dans le régime paraxial à l'aide du facteur de qualité M^2 .

Enfin, nous rapportons la réalisation d'un laser à atomes guidé par un potentiel optique horizontal, ce qui nous permet d'annuler l'accélération due à la gravité de telle façon à ce que la longueur d'onde de De Broglie reste constante tout au long de la propagation.

MOTS-CLÉS

LASER À ATOMES – CONDENSAT DE BOSE-EINSTEIN – ONDE DE MATIÈRE – ICONALE – PROPAGATEUR – MATRICE $ABCD$ – FACTEUR DE QUALITÉ M^2 – GUIDE OPTIQUE

ABSTRACT

This manuscript presents various experimental and theoretical aspects concerning a specific system of atom optics : the atom laser. In our experiment, this one results from a Bose-Einstein condensate of rubidium 87 and we thus initially detail the various cooling techniques used to obtain this coherent atomic source in a hybrid ferromagnetic trap.

The atom lasers we produce are extracted from the condensed cloud by radiofrequency, and propagate vertically under the effect of gravity. One specificity of our setup lies in the strong magnetic confinement used, which results in non negligible collisional interactions between the laser and the condensed source. We show that this has an influence, not only on the atom laser coupling dynamics, but also on its propagation. We indeed observe a transverse structure containing caustics on the laser beam. By using methods initially developed for photonic optics (eikonal approximation, Fresnel-Kirchhoff integral, $ABCD$ matrices), we calculate the atom laser wavefunction. Moreover, we characterize the matter wave propagation in the paraxial regime by using the beam quality factor M^2 .

We finally report the realization of an atom laser, guided by a horizontal optical potential, which enables us to cancel the acceleration due to gravity in such way, that the De Broglie wavelength remains constant throughout propagation.

KEYWORDS

ATOM LASER – BOSE-EINSTEIN CONDENSATE – MATTERWAVE – EIKONAL – PROPAGATOR – $ABCD$ MATRIX – BEAM QUALITY FACTOR M^2 – OPTICAL WAVEGUIDE