



Dynamique et instabilités des interfaces grains/fluide dans les suspensions non-Browniennes

Christophe Chevalier

► To cite this version:

Christophe Chevalier. Dynamique et instabilités des interfaces grains/fluide dans les suspensions non-Browniennes. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2006. Français. $\langle$ NNT : $\rangle$. $\langle$ tel-00144599 $\rangle$

HAL Id: tel-00144599

<https://pastel.hal.science/tel-00144599v1>

Submitted on 4 May 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : Physique des liquides

présentée par **M. Christophe CHEVALIER**
pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris 6

Dynamique et instabilités des interfaces grains/fluide dans les suspensions non-Browniennes

Soutenue le 21 décembre 2006 devant le jury composé de :

Mme	Martine BEN AMAR	Présidente
M.	Éric CLÉMENT	Directeur de thèse
M.	Philippe COUSSOT	Examineur
M.	Jean-Christophe GÉMINARD	Rapporteur
M.	Hans HERRMANN	Rapporteur
Mme	Anke LINDNER	Co-directrice de thèse
M.	Knut Jørgen MÅLØY	Examineur

Remerciements

Les remerciements contiennent beaucoup de choses qui ne sont dites dans le manuscrit mais qui, pourtant, contribuent énormément au travail de thèse. La liste des personnes que je tiens à remercier à présent est longue, tant du point de vue professionnel que personnel et j'espère donc n'avoir oublié personne. Que ceux qui ne sont pas cités ne m'en veuillent pas...

Mon début de thèse a été assez original. En effet, mon arrivée dans le groupe "granulaire" d'Éric Clément correspondait également à l'arrivée du groupe au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes, à l'ESPCI. Ce fut donc une "double arrivée" qui s'est révélée particulièrement facile tant les membres du groupe que ceux du laboratoire sont accueillants, prévenants et sympathiques. Je remercie ainsi José-Éduardo Weisfreid de m'avoir accueilli dans son laboratoire.

Mes plus grands remerciements reviennent, bien évidemment, à Éric Clément et Anke Lindner. Ils ont tous les deux su, à leurs manières souvent différentes, rythmer et guider ce travail de thèse. J'ai appris beaucoup auprès d'eux.

Je les remercie déjà de m'avoir proposé un sujet de thèse au croisement de plusieurs disciplines me permettant d'évoluer à l'interface (c'est le cas de le dire...) de nombreux domaines et de fréquenter nombre de communautés scientifiques : granulaire, liquide, rhéologie, interface... C'est, je crois, en arrivant à marier de telles différences qu'on arrive à une certaine richesse.

Travailler avec Éric et Anke c'est, en un sens, expérimenter le concept du Yin et du Yang. Dans la philosophie chinoise, ces deux courants se complètent et sont indissociables, constituant chacun une facette d'une même chose.

Ainsi, à la manière des suspensions faites de grains et de fluides, ma thèse a pu trouver son équilibre par un subtil mélange de l'influence de mes deux encadrants.

Je remercie Éric pour son dynamisme, sa créativité et son sens "physique" toujours en éveil. Travailler avec lui n'est pas forcément de tout repos mais c'est toujours passionnant.

Je remercie Anke pour sa proximité, sa disponibilité, la perspicacité de ses remarques scientifiques et le dialogue permanent que nous avons pu établir pendant toutes ces années.

Ce fut, en somme, un grand plaisir de travailler avec eux.

Je tiens à remercier Martine Ben Amar d'avoir présidé mon jury de thèse.

Je remercie également Jean-Christophe Géminard et Hans Herrmann qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse ainsi que les autres membres du jury, Philippe Coussot et Knut Jørgen Måløy.

Je voudrais remercier l'ensemble du jury pour les discussions plus ou moins importantes que nous avons eues, les questions soulevées et les remarques pertinentes. Enfin, j'ai une attention particulière pour Jean-Christophe Géminard et ses corrections apportées au manuscrit et pour Knut Jørgen Måløy qui a accepté de faire partie de ce jury sans comprendre un mot de français (ou si peu).

Outre celles déjà citées, beaucoup de personnes m'ont plus ou moins directement permis d'avancer dans ce travail de thèse et ont, ainsi, contribué à sa richesse...

Au niveau du laboratoire, je tiens donc à remercier José Lanuza, le roi de la méca et son double informaticien Thierry Darnige. Que de bons moments passés avec José pour réaliser "parfaitement" la petite pièce manquante à une manip !

Je remercie également Frédérique Auger et Claudine Poirier, gestionnaires en chef, sans qui nous ne serions pas grand chose puisqu'incapables de commander quoique ce soit ou de voyager.

Enfin, les échanges scientifiques étant particulièrement riches et faciles au PMMH, je ne peux que remercier l'ensemble du groupe granulaire et la quasi-totalité des membres du laboratoire pour leur disponibilité et les aides que les uns ou les autres ont pu m'apporter à différents moments.

Mon travail de thèse m'a également permis de travailler avec de nombreuses personnes extérieures au laboratoire.

Je remercie donc d'abord Martine Ben Amar et Daniel Bonn du Laboratoire de Physique Statistique de l'ENS avec qui nous avons mené le travail sur les effets d'inertie. Ce fut un grand plaisir. Je me souviens notamment de la résurrection du code de Martine et des moments passés à chercher les bons paramètres. Merci à Daniel pour un certain nombre de cellules de Hele-Shaw prêtées et... cassées.

Je tiens également à remercier Michel Cloître et Fabrice Monti du Laboratoire Matière Molle et Chimie de l'ESPCI avec qui j'ai fait la rhéologie des suspensions et dont j'ai pu apprécier les commentaires, la patience et la disponibilité.

Les expériences sur les suspensions denses ont été l'occasion de développer des liens étroits avec le groupe Complex de l'Université d'Oslo : Knut Jørgen Måløy, Eirik Grude Flekkøy, Renaud Toussaint (maintenant à l'IPG de Strasbourg), Øistein Johnsen, Jan Ludvig Vinningland. Je les remercie pour les nombreuses discussions, suggestions et comparaisons scientifiques menées entre nos expériences et les leurs. Merci également pour le soin particulièrement attentionné qu'ils nous ont apporté lors de nos visites en Norvège. Merci enfin à Renaud pour son accueil lors de mon passage à Strasbourg.

La communauté granulaire peut être fière du groupement de recherche "Milieux Divisés", de ses réunions thématiques et des journées générales qui constituent de riches et intéressants moments d'échanges scientifiques et humains particulièrement bénéfiques

aux jeunes (et aux moins jeunes). Je tiens donc à remercier l'ensemble des acteurs et chercheurs participants au GdR "MiDi".

Enfin, je voudrais également remercier les différents étudiants que j'ai eu l'occasion d'encadrer en stage : Étienne Sigaud, Xavier Clain, Aurélien Albert-Aguilar, Mickael Anoufa et Maxime Leroux. Je leur souhaite à tous beaucoup de succès et de réussite.

L'ambiance au sein du groupe granulaire et du laboratoire est particulièrement propice à l'épanouissement scientifique mais également personnel autour de tout un ensemble de petits moments partagés : pauses piscine, goûters, pots ou repas...

Je tiens ainsi d'abord à remercier les différentes personnes avec qui j'ai eu le plaisir de partager le bureau. C'est, pour ainsi dire et avec quelques autres, une seconde famille que l'on retrouve le matin et que l'on quitte plus ou moins tard le soir, selon les périodes.

Je remercie donc Florent "El Gringo" et Gabriel, d'une année de thèse mes aînés et avec qui nous avons inauguré le bureau thésards des "granus" à l'arrivée du groupe au PMMH. Merci pour votre aide, votre soutien tant scientifique que psychologique, votre bonne humeur et ces quelques 2 années que nous avons passées ensemble.

A leur départ, je ne suis évidemment pas resté seul et de nouveaux co-bureaux sont arrivés. J'ai ainsi fait la connaissance de Shio et Julia dans un premier temps, puis de Claire au départ de Shio. Ce fut un réel plaisir de ne pas partager que le bureau avec elles mais également tant de moments joyeux, de bons souvenirs, de rires, d'échanges et de conseils. En conséquence, "domo arigato" à Shio, "Dankeschön" à Julia et "grand merci" à Claire !

Si notre bureau était historiquement le bureau thésards des "granus", il y avait, approximativement de l'autre côté de la cours, le bureau thésards des "mouilleurs" avec qui plein d'agréables moments (de concours de petits Lu ou autres activités ludiques du type "cercle et carré"...) ont été également passés. Un très grand merci donc à Manue, Giles (venu même un temps partager le bureau "granus"), Nolwenn et également Avin.

Je tiens enfin à remercier les nombreux thésards, post-docs, stagiaires avec qui j'ai pu échanger pendant ces années passées au PMMH, entre autres : Pierre, Lénaïc, Antoine, Rim, Joachim, Harunori, Jean-Sébastien, Mathilde, Étienne, Mehdi, Julien, Albens, Iván, Chay, Jacco, Maniya, Franck, Geoffroy...

J'ai bien sûr une pensée particulière pour le groupe granulaire et les gentils habitants du bâtiment T : Éric, Anke, Évelyne, Philippe C, Bruno, José, Thierry, Luc, Jacques, Vadim, mais également les "granus de passage" : Carlos, Gustavo et Philippe B. Je vous remercie tous pour l'accueil si exemplaire que vous m'avez fait, votre écoute, vos conseils, etc...

Je voudrais également remercier les autres membres du laboratoire qui participent activement à cette ambiance fort agréable et chaleureuse : Adrian, David, Benoit, José B, Ramiro, Pedro, Olivia, Eduardo, Frédérique, Claudine, Patrice, Sophie, Laurent, Mauri-

cio, Pascal, Philippe P, Bernard, François, Marc, Étienne, Denis, Antonio, Jean-Claude, Jean-Jacques, Marie-France et plein d'autres...

Pour finir, je tiens également à remercier les autres doctorants et chercheurs que je n'ai pas encore eu l'occasion de saluer, d'une manière ou d'une autre, lors de ces remerciements, dont Nicolas, Stéphanie, Delphine, Bérengère...

La fin d'une thèse est toujours un moment particulier. Je voudrais ainsi adresser un certain nombre de remerciements.

Merci à Évelyne pour la relecture patiente et détaillée de mon manuscrit.

Merci à tous ceux qui m'ont aidé à la préparation de mon pot de thèse et ont ainsi contribué à son succès : mes parents, ma famille, Catherine, Claire, Julia, Évelyne, Avin, Lénéïc, Antoine...

Merci à tous ceux qui m'ont fait l'honneur d'être à ma soutenance. Je pense en particulier à ma famille, bien sûr, mais également à mes amis qui se sont déplacés, certains venant de l'autre côté de l'Atlantique : Céline, Julien, Sébastien, Thibault, Christophe, Nicolas, Stéphanie.

En conclusion,

Merci à tous ceux qui, dans le cadre de mon travail, ont fait de ces 3 années de thèse une période particulièrement épanouissante et enrichissante.

Merci à tous ceux qui, extérieurs à ce travail, m'ont soutenu pendant ces années : mes parents, mon frère, Céline, mes amis...

Merci à celle qui était la plus jeune auditrice de ma soutenance mais dont la présence rayonnante et les câlins ont constitué un soutien sans faille dont je n'aurais pu me passer : ma fille Zoé.

Table des matières

Introduction	11
1 Généralités	17
1.1 Caractérisation des suspensions granulaires	17
1.1.1 Propriétés des suspensions granulaires	17
1.1.2 Étude du comportement des suspensions non-Browniennes	20
1.1.3 Structuration des écoulements	24
1.2 Cellule de Hele-Shaw et instabilité de Saffman–Taylor	26
1.2.1 Cellule de Hele-Shaw	27
1.2.2 Équations du mouvement	27
1.2.3 Analyse de stabilité linéaire	30
1.2.4 Évolution non-linéaire	32
1.2.5 Déstabilisation des doigts	35
1.2.6 Effets tridimensionnels	35
1.3 Milieux poreux	38
1.3.1 Caractérisation des milieux poreux	38
1.3.2 Écoulement dans les milieux poreux saturés	38
1.3.3 Modèles de perméabilité	40
1.3.4 Écoulements diphasiques dans les milieux poreux	42
1.3.5 Drainage, phénomènes de digitation	43
1.4 En résumé	47
2 Effets d’inertie dans la digitation de Saffman–Taylor	49
2.1 Introduction des effets d’inertie	49
2.1.1 Petit historique	49
2.1.2 Corrections de la loi de Darcy dues à l’inertie	50
2.2 Dispositif expérimental	51
2.3 Loi de Darcy	53
2.4 Largeur des doigts	54
2.4.1 Paramètre de contrôle classique $1/B$	54
2.4.2 Nombre de Reynolds modifié Re^*	56
2.4.3 Nombre de Weber modifié We^*	57
2.4.4 Extension à une nouvelle courbe maîtresse	58
2.5 Quelques éléments théoriques	60
2.5.1 Profil des doigts	60
2.5.2 Perturbation de la loi de Darcy	61
2.5.3 Simulations numériques et comparaison	62

2.6	Conclusion	64
3	Digitation dans les suspensions granulaires	67
3.1	Caractérisation des suspensions	68
3.1.1	Caractéristiques des grains et du fluide pur	68
3.1.2	Caractéristiques des suspensions	71
3.2	Protocole expérimental	75
3.2.1	Dispositif expérimental	75
3.2.2	Traitement des données	76
3.3	Écoulement et loi de Darcy	77
3.3.1	Résultats expérimentaux	77
3.3.2	Migration de particules induites par cisaillement	81
3.3.3	Modèle simple	84
3.3.4	Modèle de diffusion de particules	87
3.4	Motifs et stabilité	94
3.4.1	Motifs observés	94
3.4.2	Transitions	98
3.4.3	Interprétation	103
3.4.4	Comparaison du modèle aux résultats expérimentaux	107
3.5	Largeur relative des doigts stables	110
3.5.1	Traitement des données	110
3.5.2	Analyse des courbes de Saffman–Taylor	113
3.6	Vers de plus fortes fractions de grains	117
3.7	Conclusion	119
4	Déstabilisation d’un milieu granulaire immergé	121
4.1	Protocole expérimental	121
4.1.1	Préparation du milieu	121
4.1.2	Dispositif expérimental	124
4.2	Déroulement typique d’une expérience	125
4.3	Traitement des données	127
4.3.1	Traitement typique d’une image	127
4.3.2	Mesures effectuées	128
4.4	Temps d’attente et décompaction du milieu	129
4.4.1	Modèle théorique de décompaction	129
4.4.2	Obtention des paramètres du modèle	132
4.4.3	Mesures expérimentales et comparaison au modèle	133
4.5	Mobilisation du milieu et phénomène de digitation	136
4.5.1	Évolution de la compaction	136
4.5.2	Écoulement du fluide effectif	137
4.5.3	Modèles d’écoulement	142
4.5.4	Évolution conjointe de la mobilité et de la compaction	146
4.5.5	Largeur des structures observées	147
4.6	Conclusion	150

5	Injection d'air dans un milieu poreux réorganisable	153
5.1	Protocole expérimental	154
5.1.1	Préparation du milieu	154
5.1.2	Configurations expérimentales	155
5.2	Motifs observés, vue large	156
5.2.1	Cas des milieux non-décompactés	156
5.2.2	Évolution des motifs dans les milieux décompactés	158
5.3	Phénomènes locaux, vue rapprochée	160
5.3.1	Techniques de corrélation d'images	160
5.3.2	Étude du cas non-décompacté	161
5.3.3	Structures fines et recompaction locale	161
5.3.4	Structures larges et écoulement du milieu	165
5.4	Conclusion	166
	Conclusion	169
	Bibliographie	175

Introduction

Il est question dans cette thèse d'interface, de grains et de fluides, de leur mélange en suspensions granulaires.

Depuis les premiers travaux d'Einstein en 1906 [35], portant sur la dissipation visqueuse produite par l'écoulement autour d'une sphère, le comportement des suspensions et pâtes granulaires a fait l'objet de nombreuses études. Dans ces dernières, il s'agit principalement de comprendre comment le milieu s'écoule, se déforme : c'est l'objet général de la rhéologie des suspensions granulaires [28, 29, 56] vues comme des fluides effectifs.

Mais le comportement d'un fluide, effectif ou non, ne se réduit pas seulement à sa rhéologie : les mécanismes agissant aux interfaces sont également très importants. En témoigne le nombre d'instabilités classiques portant sur des problèmes d'interface entre fluides : Kelvin–Helmholtz, Rayleigh–Taylor, Saffman–Taylor. Or, dans le cas d'une suspension granulaire, le rôle des particules portées à l'interface est très mal connu et présente un aspect singulier. C'est particulièrement crucial pour les suspensions macroscopiques où le mouvement Brownien est négligeable, ce qui est le cas à partir du moment où les grains ont un diamètre de quelques microns. Dans ces suspensions, il n'y aura pas en effet d'homogénéisation induite par l'agitation thermique, et les particules seront ainsi soumises de manière prépondérante aux forces transmises par l'écoulement. En présence d'une interface, les grains pourront alors typiquement y être piégés [101].

Il existe également des problèmes d'interface importants dans les structures granulaires partiellement mobilisables. Les mécanismes de l'écoulement d'un fluide (pur) y sont ainsi mal compris. Dans ce type de milieu, l'interface sépare alors un milieu mobilisé, où grains et fluide coulent ensemble et une partie non mobilisée dont la structure granulaire reste immobile.

Or de tels problèmes de dynamique d'interfaces sont très courants. Dans le milieu pétrolier, cela concerne ainsi l'extraction des huiles lourdes chargées de sable ou l'érosion provoquée par l'écoulement du pétrole le long des puits de forage. Dans cette même industrie, nous pouvons aussi citer le problème des cristaux d'hydrates formés dans les conduites off-shore. Ces cristaux se comportent comme des grains et sédimentent si la production d'huile s'arrête. Au redémarrage de l'exploitation, ils peuvent alors boucher les canalisations.

Au niveau génie civil et environnement, les ouvrages en terre comme les digues sont également susceptibles d'être détruits par un écoulement d'eau à travers leur structure. Ce dernier peut en effet entraîner la formation de canaux d'écoulement (appelés renards)

dans la structure poreuse, ces canaux contribuant à l'érosion interne et à la destruction de la digue.

Nous nous sommes attachés dans cette thèse à mieux comprendre les mécanismes entrant en jeu dans les problèmes de dynamique d'interface entre une suspension granulaire et un fluide pur. Dans cet objectif, nous nous sommes servis d'une instabilité hydrodynamique classique en vue de sonder les propriétés d'interface d'une suspension modèle.

Nous avons ainsi majoritairement travaillé avec des suspensions macroscopiques iso-denses, où, grains et fluides ayant la même densité, nous évitons les problèmes liés à la sédimentation et à la ségrégation inertielle des particules. De tels systèmes nous permettent ainsi de travailler sur une large gamme de fractions volumiques de grains (volume relatif de grains dans la suspension) et de pouvoir faire la transition entre fluide visqueux effectif (peu de grains) et pâte granulaire plus ou moins bloquée (beaucoup de grains). Il s'agit d'une différence significative par rapport aux systèmes secs où les grains sont toujours à une fraction volumique de l'ordre de 60%.

Nous avons utilisé l'instabilité de Saffman-Taylor [92] pour étudier les propriétés interfaciales des suspensions. Cette instabilité apparaît lorsque l'on injecte un fluide peu visqueux dans un fluide plus visqueux localisé dans une cellule de Hele-Shaw (mince canal aux larges rapports d'aspect). Elle conduit à la formation d'un motif en forme de doigt. L'utilisation de cette instabilité présente beaucoup d'avantages. Elle a notamment fait l'objet de nombreuses études tant pour les fluides Newtoniens [47, 83, 91] que pour les fluides non-Newtoniens [14, 52, 70, 98]. C'est également un outil permettant une visualisation aisée des phénomènes.

Considérant l'injection de fluide pur dans les suspensions granulaires, de précédentes études sont riches d'enseignements bien que chacune présente des différences notables avec les expériences entreprises au cours de cette thèse.

Van Damme *et al.* ont ainsi étudié les motifs de digitation [65] et de décollement [64] de suspensions d'argile en faisant varier la fraction solide. La figure 1 représente les motifs observés dans le cas de l'injection d'eau dans une suspension d'argile localisée dans une cellule de Hele-Shaw circulaire.

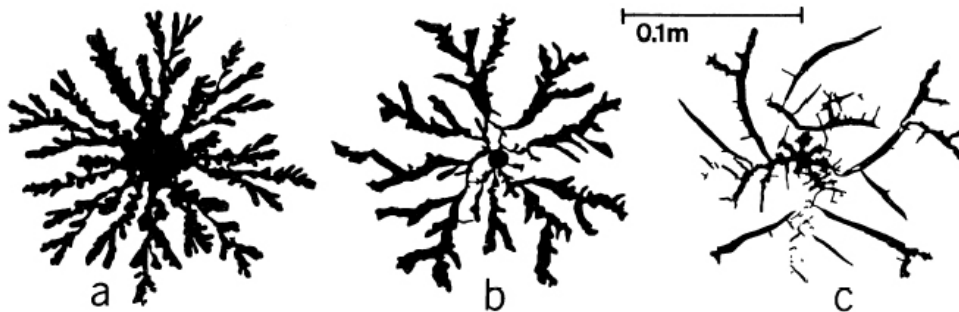


FIG. 1 – Injection d'eau dans des suspensions d'argile de concentration massique croissante (8, 10 et 20%) : passage d'un motif de digitation visqueuse à un motif de fracture visco-élastique. D'après Lemaire *et al.* [65].

L'étude des motifs à concentration croissante d'argile a permis aux auteurs de relier la transition des motifs observés entre digitation visqueuse et fracture visco-élastique aux propriétés rhéologiques du fluide.

Notons que les suspensions macroscopiques avec lesquelles nous travaillerons ne présentent pas de propriétés visco-élastiques, cependant la fraction de grains restera un paramètre important car elle déterminera le blocage ou non de la phase solide de la suspension.

Pour les fractions de grains les plus importantes, la structure granulaire est partiellement ou totalement bloquée. L'écoulement de fluide pur au travers de cette structure peut alors se faire de deux façons : soit au travers de la structure fixe de manière analogue aux milieux poreux, soit en mobilisant et en réorganisant les grains.

Johnsen *et al.* ont mené une étude sur l'injection d'air dans un milieu granulaire sec dense [51]. En appliquant une surpression d'air au centre d'une cellule circulaire les auteurs sont capables de compacter le milieu granulaire et de créer des structures vides de grain. La figure 2 représente un des motifs observés pour des surpressions "intermédiaires".

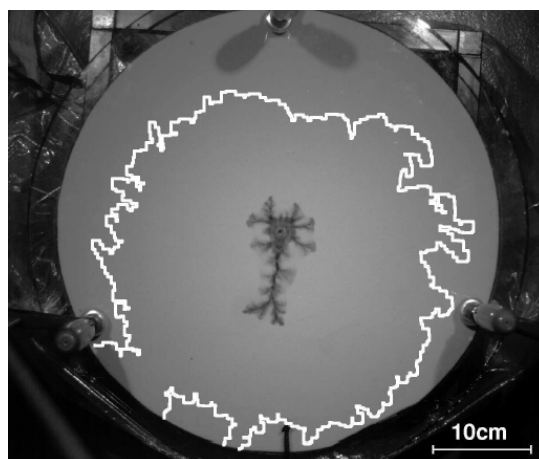


FIG. 2 – *Injection d'air dans un milieu granulaire sec. La ligne blanche délimite la zone de compaction du milieu. D'après Johnsen et al. [51].*

Selon la surpression appliquée, différents motifs sont observés. Aux faibles surpressions le milieu n'est mobilisé et recomposé que très localement, la zone vide de grains est alors très localisée au niveau de l'orifice d'injection. Aux pressions les plus importantes, l'ensemble du milieu est mobilisé et un doigt se propage jusqu'au bord de la cellule. Dans les régimes intermédiaires, il y a formation d'un doigt qui s'arrête bloqué par le milieu qu'il a lui-même compacté (Fig. 2).

Nous constatons donc que écoulement et mobilisation de la structure granulaire sont fortement liés. Notons que dans nos situations le fluide interstitiel sera incompressible, et présentera une viscosité beaucoup plus importante puisqu'il s'agira du liquide constituant la suspension. Les forces de trainée agissant sur les grains seront donc différentes.

Cerasi et Mills ont également proposé une étude portant sur la mobilisation d'un milieu granulaire. Dans leur étude, les auteurs se sont intéressés à un milieu granulaire immergé dont ils ont cherché à extraire le fluide interstitiel par le centre de la cellule,

créant de la sorte des canaux d'érosion, si la vitesse de retrait est suffisamment importante [20]. La figure 3 représente les motifs observés.

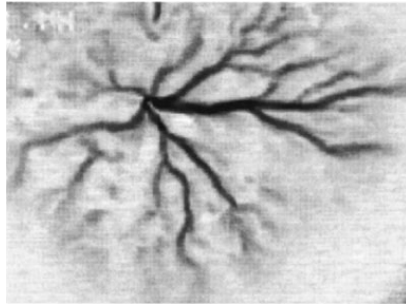


FIG. 3 – Canaux d'écoulement obtenus suite au pompage du fluide interstitiel dans un mélange billes de verre/eau. D'après Cerasi et Mills [20].

Les auteurs ont notamment montré, qu'ici aussi, l'écoulement était responsable d'une zone de mobilisation de la structure initialement dense. Il s'agit dans ce cas d'une zone de décompaction située au voisinage des canaux d'écoulement qui emportent grains et fluides. Notons que, dans nos expériences, nous nous intéresserons à l'effet d'une surpression de fluide interstitiel et étudierons son effet sur l'ensemble du milieu.

Nous nous proposons dans cette thèse d'étudier les problématiques d'une interface obtenue en injectant un fluide pur (air ou fluide pur constituant le milieu) dans une suspension granulaire. Dans cet objectif et pour faire varier la fraction de grains sur une gamme importante, nous avons eu recours à des fluides interstitiels de faible viscosité. De cette manière, la viscosité moyenne des suspensions ne devenait pas trop importante lorsque nous augmentions la fraction de grains, nous permettant ainsi d'éviter des désagréments pratiques comme des temps expérimentaux trop longs ou l'utilisation de pressions d'injection élevées. Or pour les fluides les moins visqueux, des effets d'inertie peuvent apparaître dans l'instabilité de Saffman–Taylor. Pour cette raison, un premier travail nous a amenés à étudier ces effets de sorte à les isoler du reste de nos mesures.

Cette thèse se découpe selon le plan suivant :

Dans le chapitre 1, nous introduirons les *généralités* nous permettant de conduire la suite de nos études : généralités sur les suspensions, sur l'instabilité de Saffman–Taylor et sur les écoulements dans les milieux poreux.

Dans le chapitre 2, nous nous intéresserons aux *effets d'inertie dans la digitation de Saffman–Taylor*. Nous les caractériserons expérimentalement et en donnerons une interprétation théorique. Nous concluons sur l'obtention d'un critère permettant de discerner l'apparition de ces effets.

Dans le chapitre 3, nous étudierons la *digitation dans les suspensions granulaires*. Pour les suspensions dont la fraction de grains est inférieure à 50%, l'injection d'air est visuellement semblable à celle effectuée dans les fluides visqueux. Nous verrons cependant qu'il existe des différences notables tant au niveau de l'écoulement de la suspension que

de la stabilité des doigts d'air ou de leur largeur. Nous nous intéresserons, à la fin de ce chapitre, à la manière dont se comportent les suspensions lorsque l'on fait croître la fraction de grains au dessus de 50%.

Dans le chapitre 4, nous traiterons la *déstabilisation d'un milieu granulaire immergé par une surcharge de fluide interstitiel*. Cette étude correspond à l'injection de fluide pur à l'intérieur d'un milieu granulaire totalement imbibé et initialement dense. Nous en étudierons les différentes phases : décompaction du milieu granulaire, écoulement de la pâte granulaire et phénomène de digitation. L'étude de la décompaction initiale nous permettra notamment de proposer un protocole expérimental permettant de mener l'étude du chapitre 5.

Dans le chapitre 5, le problème de l'*injection d'air dans un milieu poreux réorganisable* sera finalement abordé, faisant suite au chapitre 3 et avec les acquis du chapitre 4. Nous étudierons les motifs formés en fonction des paramètres du système à deux niveaux : global et local. Au niveau global, c'est à dire à l'échelle du canal, nous nous concentrerons sur la typologie des motifs formés tandis qu'au niveau local nous nous intéresserons à la réorganisation du milieu granulaire par une technique de corrélation d'images (Correlation Image Velocimetry).

Chapitre 1

Généralités

L'objectif de ce chapitre est de présenter un état de l'art des concepts et des outils expérimentaux existants nous permettant de mener à bien notre étude sur l'exploration des propriétés des interfaces grains/fluide lors de l'injection d'un fluide pur dans une suspension granulaire.

Dans ce contexte, nous avons besoin de bien comprendre à la fois le milieu étudié, c'est à dire la suspension et le système expérimental utilisé pour cette étude, en l'occurrence la cellule de Hele-Shaw [46].

Nous nous intéresserons ainsi, dans la première partie, à décrire les suspensions granulaires. Nous verrons notamment que les études existantes rapportent une grande variabilité des comportements selon la quantité de particules solides présentes dans cette suspension. En accroissant cette quantité, il est ainsi possible de passer d'un milieu se comportant comme un fluide visqueux à des situations bloquées où la matrice granulaire très dense empêche l'écoulement du milieu dans son ensemble.

Cette observation nous conduira naturellement à considérer, dans les parties suivantes, les deux cas expérimentaux limites pour l'injection dans les suspensions : cellule de Hele-Shaw (absence de grain - fluide pur) et milieu poreux (blocage total des grains). Nous verrons que ces situations ont fait l'objet de nombreuses études. Elles nous donnent, ainsi, un cadre clair pour comprendre les problèmes que nous traiterons d'un côté pour l'introduction des effets d'inertie ou l'étude des faibles fractions de grains (chapitres 2 et 3) et de l'autre pour les situations très denses en grains (chapitres 4 et 5).

Nous détaillerons donc ces deux configurations typiques : dans la deuxième partie, la cellule de Hele-Shaw puis dans la troisième, le milieu poreux. Nous nous intéresserons à chaque fois à l'écoulement de fluide pur dans ces géométries puis à l'écoulement de deux fluides et aux problèmes de digitation.

1.1 Caractérisation des suspensions granulaires

1.1.1 Propriétés des suspensions granulaires

Une suspension granulaire est composée de grains (matière solide) totalement immergés dans un liquide. Il s'agit donc d'un mélange diphasique à l'échelle microscopique mais pour lequel la communauté scientifique cherche à établir des lois en tant que milieu "uniforme" à une échelle macroscopique.

Les propriétés macroscopiques des suspensions dépendent ainsi fortement des propriétés de chacun de leurs constituants, grains et fluide, ainsi que de la quantité relative de l'un et de l'autre :

- Au niveau des propriétés du fluide, nous pouvons citer la viscosité et le comportement plus ou moins complexe du liquide : rhéofluidication, contrainte seuil d'écoulement, thixotropie, par exemple.
- Pour les grains, leur forme, leur taille et la distribution même de ces deux paramètres peuvent modifier les propriétés de la suspension. La prise en compte de leurs interactions est également très importante.
- Enfin, la densité des constituants, leur écart de densité ainsi que leur proportion relative interviennent également.

L'un des éléments clefs dans la compréhension et la caractérisation du comportement des suspensions est la nature des forces éventuellement subies par les grains : poids relatif des grains, forces hydrodynamiques, forces de contacts (friction solide entre grains, interaction physico-chimique...) et agitation thermique, par exemple.

Fraction de grains

La fraction de grains caractérise la proportion de grains dans la suspension. Elle peut être définie en faisant référence à la masse ou au volume. Généralement c'est la fraction volumique qui est utilisée et nous la noterons ϕ . Elle est définie comme le rapport entre le volume occupé par les grains et le volume total :

$$\phi = \frac{\text{volume grains}}{\text{volume total}} . \quad (1.1)$$

Il s'agit d'un paramètre très important qui influence énormément le comportement des suspensions puisqu'il donne la proportion de matière solide dans la suspension qui s'apparente à un fluide complexe.

Agitation thermique

Une distinction peut être faite selon l'influence des effets d'agitation thermique par rapport aux autres forces en particulier celles propagées par l'écoulement.

Le nombre de Péclet Pe est couramment utilisé pour comparer les propriétés advectives et les propriétés diffusives d'un écoulement. Dans le cas des suspensions, il peut être interprété comme le rapport entre le temps caractéristique τ_D de diffusion thermique des particules sur une distance typique de leur rayon R au temps caractéristique τ_A d'advection de ces particules par l'écoulement sur la même distance R [42] :

$$Pe = \frac{\tau_D}{\tau_A} = \frac{6\pi\eta\dot{\gamma}R^3}{k_B T} , \quad (1.2)$$

où η est la viscosité du fluide, $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement typique, k_B la constante de Boltzmann, et T la température.

Dans le cas où l'agitation thermique est importante (petits rayons de grains, $Pe \ll 1$) nous parlerons de suspensions Browniennes alors que dans le cas où elle est négligeable ($Pe \gg 1$) il sera question de suspensions non-Browniennes ou macroscopiques.

Comme nous le constatons équation (1.2), il existe une forte dépendance du nombre de Péclet avec le rayon des particules R . Dans les cas usuels aux températures standards, la limite $Pe \approx 1$ est aux alentours de quelques microns.

Agrégation

L'agrégation des particules correspond à leur regroupement dans des amas plus ou moins denses. Cette agrégation trouve son origine dans la nature attractive de certaines interactions entre particules. Cela peut être les forces de Van der Waals pour les plus petites particules ou des forces de nature électrostatique ou chimique pour les plus grosses. Ces amas de taille plus importante que celle de particules uniques conduisent à une augmentation effective de la fraction de grains du milieu puisqu'une partie du fluide interstitiel reste coincée à l'intérieur de ces amas. Il en résulte ainsi une augmentation de la viscosité de la suspension, cette dernière augmentant avec la fraction de grains comme nous verrons par la suite. L'agrégation peut finalement conduire au blocage de la suspension.

Sédimentation et ségrégation

Dû à un contraste de densité entre les grains et le fluide, des effets de sédimentation et de ségrégation peuvent apparaître. Ces effets viennent modifier localement la fraction de grains de la suspension et rendent donc cette dernière inhomogène.

La sédimentation est simplement induite par la gravité. La vitesse de sédimentation résulte de l'équilibre entre le poids effectif des grains et le frottement visqueux avec le fluide auquel s'ajoutent l'encombrement et la modification de l'écoulement dus aux autres particules [88]. Dans le cas des particules non-Browniennes sphériques, la vitesse de sédimentation est obtenue par l'équation empirique de Richardson–Zaki (Eq. 3.3).

Lors d'écoulement de suspensions, la différence de densité peut également provoquer une migration des particules [95, 96], ce qui aboutit à leur ségrégation, c'est à dire à des zones plus ou moins denses en grains.

Forces hydrodynamiques et forces de contact

Considérons maintenant le cas des suspensions non-Browniennes et monodisperses de sphères dures de même densité que le fluide. Il s'agit du cas le plus simple existant, puisque les forces détaillées précédemment sont nulles ou négligeables. C'est celui dans lequel se place notre étude.

Restent alors en présence les forces véhiculées par le fluide et celles de contact :

- Dans une suspension, la présence d'un grain modifie l'écoulement du fluide autour qui influence à son tour le mouvement d'une autre particule. C'est le principe de l'interaction hydrodynamique. Cette interaction entre particules est indirecte puisque véhiculée par le fluide en écoulement. Elle est donc susceptible d'avoir une influence sur le mouvement des particules et leur répartition comme nous le verrons pour la migration de particules induite par cisaillement.
- Lorsque la fraction de grains devient élevée et avant le contact solide entre grains, il est possible d'avoir un régime dit de lubrification avec des forces concentrées sur les zones de plus forte approche entre les particules. Si la distance inter-particule devient comparable à la rugosité des surfaces, les grains rentrent en contact et ces forces de lubrification laissent la place à des forces de frottement solide [76].
- Des forces de frottement solide entre les grains apparaissent lorsque les particules restent suffisamment longtemps en contact l'une de l'autre, formant alors un réseau de contacts solides. Ce type de forces n'apparaît que pour les fractions de

grains ϕ élevées (pour des sphères monodisperses typiquement vers 55%). Elles sont responsables de phénomènes de blocage et de seuil d'écoulement.

Les figures 1.1(a) et 1.1(b) représentent deux cas possibles de distributions de particules. Un réseau de contacts entre grains apparaît si la suspension est suffisamment dense en grains et sous certaines conditions (faibles cisaillements).

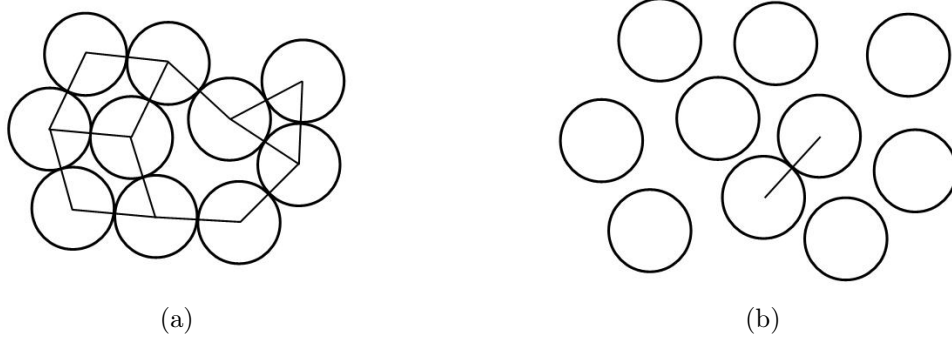


FIG. 1.1 – Évolution du réseau de contacts entre particules (symbolisés par des traits pleins). (a) Pour des fractions de grains ϕ très élevées ($\gtrsim 55/58\%$), il existe un réseau continu de contacts qui est responsable de phénomène de blocage et de seuil d'écoulement. (b) Pour des fractions de grains ϕ qui peuvent être à peine plus faibles, il n'y a plus de réseau. Cependant, si la distance inter-particule est faible, des forces de lubrification peuvent apparaître. D'après Coussot et Ancey [29]

L'importance (relative et absolue) des forces hydrodynamiques et des forces de frictions inter-grains va être ainsi modifiée selon la fraction de grains ϕ . Pour les fractions de grains les plus importantes il sera même question de pâtes granulaires, étant donnée leur consistance.

L'objet des prochaines sous-parties est ainsi l'étude de la dépendance du comportement de la suspension avec ϕ .

1.1.2 Étude du comportement des suspensions non-Browniennes

Nous restons dans le cadre des suspensions non-Browniennes et monodisperses de sphères dures de même densité que le fluide et abordons l'étude de leur rhéologie c'est à dire de leur déformation et leur écoulement

La viscosité η est définie comme le rapport entre la contrainte de cisaillement σ appliquée à un liquide visqueux et le gradient de vitesse ou taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ dans l'épaisseur du fluide :

$$\eta = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}}. \quad (1.3)$$

Pour un fluide Newtonien, σ et $\dot{\gamma}$ sont proportionnels, la viscosité est indépendante du taux de cisaillement (ou de la contrainte imposée).

L'ajout de sphères dans un fluide en écoulement modifie le champ de vitesse et donc la dissipation d'énergie visqueuse. Une augmentation de la viscosité du fluide est alors constatée.

Modèles théoriques de viscosité

Pour justifier cette augmentation, Einstein [35] a étudié en 1906 la dissipation visqueuse produite par un écoulement de fluide Newtonien autour d'une sphère et a déterminé ainsi une expression de la viscosité pour une suspension très diluée ($\phi \leq 3\%$) :

$$\eta(\phi) = \eta_0(1 + 2.5\phi) , \quad (1.4)$$

où η est la viscosité de la suspension, η_0 celle du fluide interstitiel et ϕ la fraction volumique de grains. Cette formule n'est valable que pour des suspensions très diluées et homogènes où les particules peuvent être considérées comme isolées : les interactions hydrodynamiques sont alors négligeables.

Batchelor [10] en considérant les interactions entre 2 sphères a déterminé l'expression de la viscosité au second ordre en ϕ :

$$\eta(\phi) = \eta_0(1 + 2.5\phi + 6.2\phi^2) , \quad (1.5)$$

avec un domaine de validité pour $\phi \leq 10\%$. Des termes d'ordre supérieur peuvent être ajoutés en tenant compte des interactions entre plus de 2 particules mais le domaine de validité ne s'accroît que de très peu à chaque fois, montrant les limites de cette approche théorique.

Modèles semi-empiriques de viscosité

Pour des fractions de grains élevées, il existe une divergence de la viscosité. Cette divergence trouve son origine dans le blocage des particules lorsque la fraction de grains approche une fraction maximale ϕ_m de grains estimée aux alentours de $60 \sim 65\%$: le réseau continu de contacts entre grains ne permet plus leur mouvement ou l'entrave fortement (Fig. 1.1a).

Les modèles semi-empiriques tentent de rendre compte de cette propriété tout en conservant, dans la mesure du possible, la limite d'Einstein (1.4). Le modèle le plus simple est celui de Krieger et Dougherty [57] qui en 1959 ont suggéré :

$$\eta(\phi) = \eta_0 \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-p} , \quad (1.6)$$

avec ϕ_m la fraction maximale de grains. Pour retrouver la loi d'Einstein, il convient alors de choisir $p = 2.5\phi_m$.

Krieger [56] dans une étude de 1972 a déterminé que les valeurs $\phi_m = 0.68$ et $p = 1.82$ permettaient un bon ajustement de ses données expérimentales jusqu'à 50% de grains. Constatons que dans ce cas $p/\phi_m = 2.67$ reste bien de l'ordre du coefficient 2.5 d'Einstein.

Remarquons que, dans l'expression de la viscosité de la suspension $\eta(\phi)$, la viscosité du fluide interstitiel η_0 se met toujours en facteur d'un terme faisant intervenir la fraction de grains ϕ (il s'agit simplement d'une contrainte de dimension). Nous pouvons ainsi définir la viscosité relative $\eta_r(\phi)$ comme :

$$\eta_r(\phi) = \frac{\eta(\phi)}{\eta_0} . \quad (1.7)$$

Le modèle de Krieger–Dougherty [56, 57] s’écrit alors :

$$\eta_r(\phi) = (1 - \phi/\phi_m)^{-p} , \quad \text{avec} \quad \phi_m = 0.68 , \quad p = 1.82 . \quad (1.8)$$

Il est représenté à la figure 1.2. La viscosité relative η_r y est tracée en fonction de la fraction de grains ϕ ainsi que la limite d’Einstein (1.4) pour les faibles fractions de grains et l’asymptote $\phi = \phi_m$ pour les forte fractions de grains.

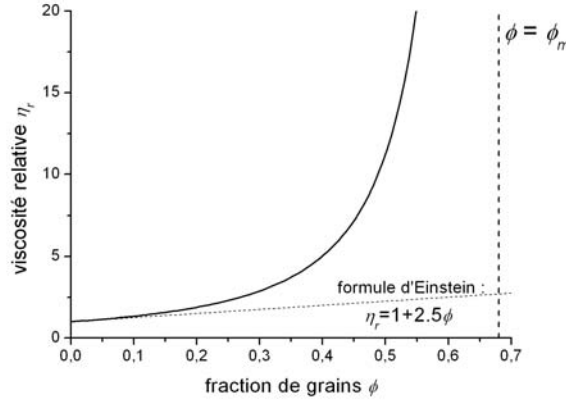


FIG. 1.2 – Modèle de viscosité relative η_r de Krieger–Dougherty [56, 57] en fonction de la fraction de grains ϕ . Les deux lignes en tirets représentent la limite aux faibles fractions de grains (loi d’Einstein) ainsi que l’asymptote $\phi = \phi_m$.

Il existe d’autres modèles empiriques plus récents et plus compliqués que celui de Krieger–Dougherty qui, à chaque fois tentent d’ajuster les données des auteurs. Pour des fractions de grains ϕ supérieures à 20%, ils rendent généralement mieux compte des observations expérimentales. Nous pouvons ainsi citer le modèle de Leighton, 1985 [63] :

$$\eta_r(\phi) = \left(1 + \frac{1.5\phi}{1 - \phi/\phi_m}\right)^2 , \quad \text{avec} \quad \phi_m = 0.58 , \quad (1.9)$$

ainsi que celui de Zarraga *et al.*, 2000 [104] :

$$\eta_r(\phi) = \frac{\exp(-2.34\phi)}{(1 - \phi/\phi_m)^3} , \quad \text{avec} \quad \phi_m \approx 0.62 . \quad (1.10)$$

L’ensemble des expressions et modèles précédemment cités de viscosité relative (1.4), (1.5), (1.8), (1.9), (1.10) est représenté figure 1.3.

Nous constatons que les modèles s’accordent sur des domaines de fractions de grains plus ou moins importants. Nous pouvons, en particulier, comparer le modèle le plus récent, celui de Zarraga *et al.*, aux autres modèles. Le modèle de Leighton est en bon accord avec celui de Zarraga *et al.* tandis que les autres sont en accord sur une plus petite gamme de fractions de grains, comme nous le soulignons précédemment.

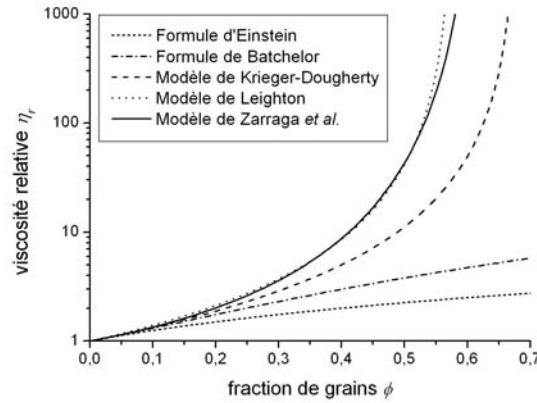


FIG. 1.3 – Viscosité relative η_r en fonction de la fraction de grains ϕ pour différents modèles théoriques (Einstein, Batchelor) et empiriques (Krieger–Dougherty, Leighton, Zarraga et al.).

Autres observations

Outre l'étude de la viscosité, la rhéologie comprend également l'étude de propriétés plus complexes comme la contrainte seuil.

La figure 1.4 représente la courbe d'écoulement d'une suspension granulaire à $\phi = 58\%$. Cette courbe est typique des écoulements de fluide à seuil : en dessous d'une contrainte critique σ_c , il n'y a pas d'écoulement possible.

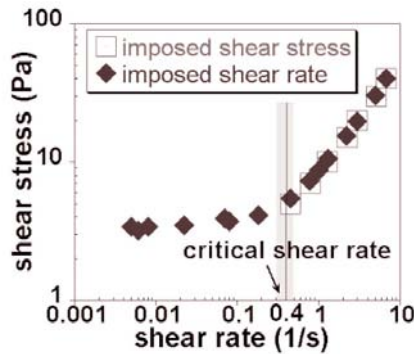


FIG. 1.4 – Courbe d'écoulement pour une suspension de billes de polystyrène de 290 μm à $\phi = 58\%$ dans une huile de silicone à 20 mPa.s : contrainte en fonction du taux de cisaillement dans une géométrie de Couette annulaire (diamètre interne 16 mm diamètre externe 26 mm) munie d'un croisillon. D'après Huang et al. [49].

Cette observation macroscopique a été interprétée comme l'existence (il vaudrait même mieux parler de coexistence) de deux régimes pour les plus fortes fractions de grains : régime frictionnel et régime visqueux [29].

Dans le régime frictionnel, à bas taux de cisaillement, les grains forment un réseau continu de contacts solides (Fig. 1.1a) qui résiste à la déformation et aboutit à un blo-

cage. La conséquence est qu'en dessous d'un taux de cisaillement critique $\dot{\gamma}_c$ apparent et éventuellement dépendant d'une faible pression de confinement, la contrainte mesurée (contrainte critique σ_c) apparaît comme quasi-indépendante du taux de cisaillement.

Dans le régime visqueux ou lubrifié, pour des taux de cisaillement ou des contraintes plus importants, le réseau de contacts est très fragmenté (Fig. 1.1b). Dans ce régime nous retrouvons un comportement visqueux avec une contrainte croissant linéairement avec le taux de cisaillement.

La transition frictionnelle/visqueuse est souvent caractérisée d'un point de vue macroscopique par le nombre de Leighton $Le = \frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\sigma}$, où η_0 est la viscosité du fluide interstitiel, $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement et σ la contrainte de cisaillement. Pour un fluide interstitiel et une fraction de grains donnés, la transition est déterminée par un nombre de Leighton critique : $Le_c = \frac{\eta_0 \dot{\gamma}_c}{\sigma_c}$.

Pour finir, notons que les suspensions granulaires présentent d'autres propriétés rhéologiques complexes comme la présence de contraintes normales [49, 104]. Ces contraintes seraient véhiculées par des réseaux transitoires de contacts entre grains qui transmettent les contraintes. Elles apparaissent ainsi aussi bien dans le régime frictionnel que dans le régime visqueux pour les pâtes granulaires et ont été observées expérimentalement pour des fractions de grains dès 30% expérimentalement [104]. Elles sont estimées apparaître pour des fractions de grains de l'ordre de 20% [77].

1.1.3 Structuration des écoulements

Nous avons, pour le moment, considéré que les suspensions pouvaient être appréhendées comme des milieux homogènes en étudiant leurs caractéristiques macroscopiques comme la viscosité. Cependant, rien ne justifie que les suspensions, systèmes à la structure microscopique très hétérogène, restent homogènes lorsque soumises à des contraintes extérieures.

Migration de particules induite par cisaillement

La migration induite par cisaillement est un phénomène résultant de la structure diphasique du milieu. Elle est la conséquence d'interactions irréversibles entre particules. Elle apparaît quand il existe des champs de contrainte ou de cisaillement inhomogènes et tend à faire diffuser les particules dans les zones de faibles cisaillements.

La première mise en évidence expérimentale d'un phénomène de migration de particules par cisaillement est due à Gadala-Maria et Acrivos en 1980 [37]. Ces derniers ont ainsi observé la décroissance permanente de viscosité d'une suspension concentrée dans un rhéomètre de Couette. Plus tard, en 1987, Leighton et Acrivos [2, 61, 62] ont montré avec de nouvelles expériences que cette décroissance était due à la migration des particules de l'entrefer vers le réservoir situé en dessous et qui se trouvait donc à un taux de cisaillement beaucoup plus faible. Les auteurs [62] expliquent ainsi ce phénomène par une fréquence d'interaction entre particules et une viscosité effective toutes les deux variables spatialement.

Le phénomène de migration de particules due au cisaillement a été, depuis, mis en évidence dans de nombreuses études expérimentales : écoulements de Couette [1, 84], écoulements de Poiseuille en conduite circulaire [6, 43, 44] ou rectangulaire (i.e. cellule de Hele-Shaw) [53, 72], autres géométries [5, 23]. Ces études s'appuient notamment sur

des systèmes de visualisation non intrusifs des champs de vitesse et de concentration : vélocimétrie Doppler à l'aide de Laser ou d'ondes acoustiques, Imagerie par Résonance Magnétique...

La figure 1.5 représente les champs de vitesse et de concentration dans l'épaisseur d'un mince canal (type cellule de Hele-Shaw) où, pour les fluides Newtoniens, s'établit un profil parabolique de Poiseuille.

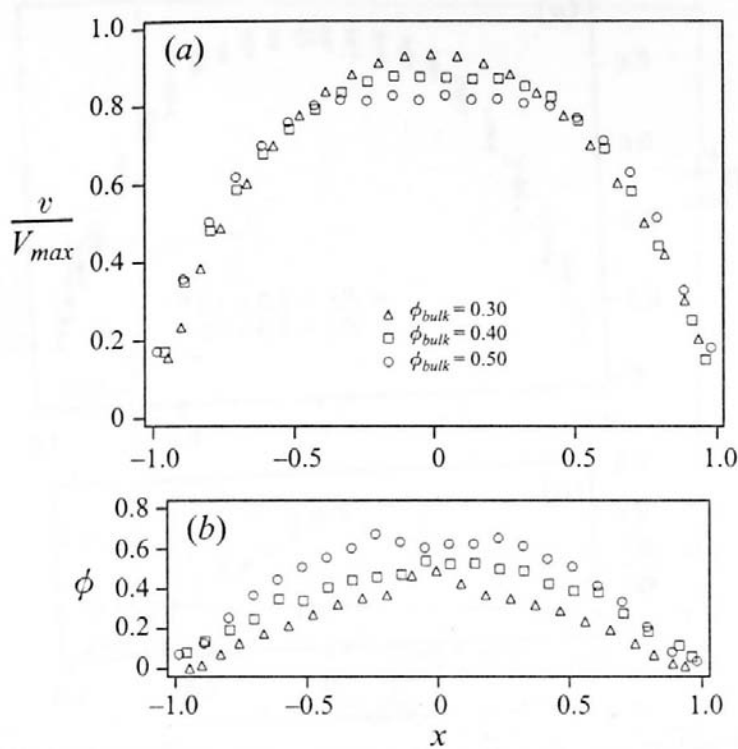


FIG. 1.5 – Influence de la fraction moyenne de la suspension ϕ_{bulk} . (a) Profil de vitesse en fonction de la position dans l'épaisseur du canal. (b) Fraction locale de grains selon la même position. D'après Lyon et Leal [72].

Pour les suspensions ce n'est plus le cas. En effet, le cisaillement étant moins important au centre du canal que sur les cotés, les particules ont tendance à y migrer et ce faisant à accroître la viscosité locale. Il en résulte ainsi, outre un profil de fraction de grains non uniforme, une modification du profil de vitesse qui tend à s'aplatir à la pointe. Ce phénomène s'accroît avec l'augmentation de fraction moyenne de grains comme nous pouvons le constater figure 1.5.

Soulignons pour finir que la migration induite par cisaillement est aussi responsable du phénomène de resuspension visqueuse [60, 93, 94]. Notons également que c'est un problème distinct de la migration de particules due à l'inertie et notamment observée par Segré et Silberberg [95, 96].

Localisation d'écoulement

Un autre phénomène résultant indirectement de la migration de grains et que nous trouvons dans le cas des suspensions granulaires est la localisation de l'écoulement.

Des études menées en imagerie RMN [49, 80] permettent de visualiser l'écoulement dans une cellule de Couette annulaire analogue à la configuration expérimentale de la figure 1.4.

La figure 1.6 représente les champs de vitesse relevés dans l'épaisseur de la cellule en fonction du taux de cisaillement.

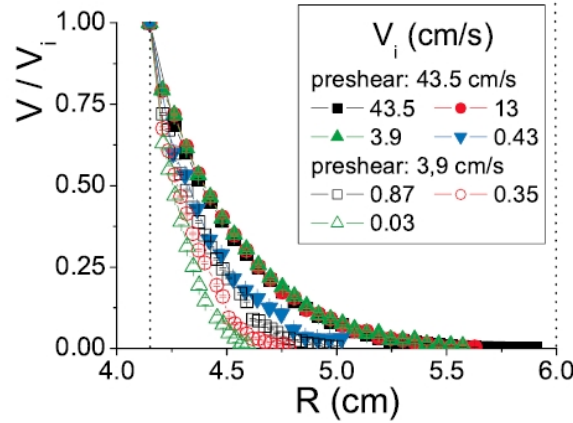


FIG. 1.6 – Profil de vitesse dans l'entrefer d'une cellule de Couette annulaire (rayon interne 41 mm rayon externe 60 mm) pour une suspension de billes de polystyrène de 290 μm à $\phi = 58\%$ dans une huile de silicone à 20 mPa.s. Les vitesses sont adimensionnées avec la vitesse du cylindre intérieur. D'après Huang *et al.* [49].

Pour les plus faibles vitesses, le profil ne se déploie que sur une partie de l'entrefer, il y a une localisation de l'écoulement. Cette observation est caractéristique du régime frictionnel décrit précédemment : le taux de cisaillement appliqué ne permet pas de mobiliser tout le milieu. Cette mobilisation s'accroît cependant lorsque le taux de cisaillement augmente (i.e. lorsque la vitesse du cylindre interne est augmentée). Au delà d'un taux de cisaillement macroscopique critique $\dot{\gamma}_c$ tout le milieu est cisailé. Ce taux de cisaillement est le même que celui caractérisant la transition frictionnelle/visqueuse.

Notons également que la fraction de grains dans l'entrefer n'est pas uniforme. Dans leurs conditions expérimentales, Huang *et al.* [49] ont montré que la fraction locale est indépendante de la vitesse de rotation du cylindre interne et qu'elle croît linéairement avec le rayon d'une valeur proche de 56% à près de 60%. Il s'agit vraisemblablement d'un effet de migration de particules. L'entrefer (1 cm) est en effet du même ordre de grandeur que le rayon moyen de la cellule de Couette (2.5 cm) et le cisaillement ne peut pas y être considéré comme uniforme.

1.2 Cellule de Hele-Shaw et instabilité de Saffman–Taylor

L'instabilité de Saffman–Taylor a pour la première fois été étudiée en 1958 par Saffman et Taylor [92] qui lui donnèrent leurs noms. Cette instabilité de Saffman–Taylor, ou digitation visqueuse, se produit quand un fluide moins visqueux pousse un fluide plus

visqueux dans un canal linéaire mince ou cellule de Hele-Shaw. L’interface entre les deux fluides se déstabilise ce qui mène à la formation de doigts. À vitesse élevée, le doigt tend à occuper la moitié du canal. Le mécanisme de sélection qui mène à cette limite n’avait pas été compris par Saffman et Taylor mais a finalement été élucidé beaucoup plus tard, dans les années 80 [25, 48, 75, 97]. L’instabilité de Saffman–Taylor a été beaucoup étudiée expérimentalement et théoriquement, comme nous pouvons le constater à travers les articles de revue de Saffman [91], de Bensimon *et al.* [13], de Homsy *et al.* [47], de Couder [26], de Pelcé [83] ou de Maher *et al.* [74]. Ces études ont conduit à une très bonne compréhension de l’instabilité pour les fluides simples.

Dans cette partie, nous décrirons uniquement les aspects de l’instabilité de Saffman–Taylor qui seront importants pour la suite.

1.2.1 Cellule de Hele-Shaw

Une cellule de Hele-Shaw [46] rectangulaire est constituée de deux plaques de verre séparées par un intervalle b petit devant la largeur W de la cellule (Fig. 1.7).

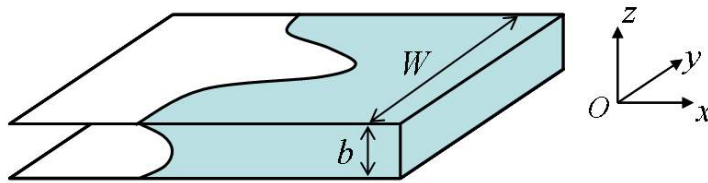


FIG. 1.7 – Vue schématique d’une cellule de Hele-Shaw, constituée de deux plaques de verre dont l’espacement b est petit devant la largeur W de la cellule. L’interface entre les deux fluides se déstabilise si un fluide moins visqueux pousse un fluide plus visqueux dans une telle cellule.

Le canal ainsi formé est rempli par un fluide visqueux. Quand on pousse ce fluide avec un fluide moins visqueux, typiquement de l’air, l’interface entre les deux fluides se déstabilise ce qui entraîne la formation d’un motif en forme de doigt dit doigt de Saffman–Taylor. Les paramètres importants qui caractérisent les fluides utilisés, sont la tension de surface entre les deux fluides γ et la différence de viscosités entre les fluides $\Delta\eta$.

1.2.2 Équations du mouvement

Loi de Darcy

Le profil de vitesse d’un fluide de viscosité η en écoulement dans une cellule de Hele-Shaw se déduit de l’équation de Navier–Stokes, dans laquelle on néglige les effets inertiels :

$$-\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} = 0, \quad (1.11)$$

où p est la pression. Nous nous plaçons ici dans le cas d’une cellule horizontale, ce qui permet de négliger les effets de gravité.

En toute généralité, l'écoulement est décrit par un champ de vitesse tridimensionnel $\mathbf{v}(x, y, z)$. Si le fluide est incompressible, nous avons :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 . \quad (1.12)$$

La différence d'échelle entre les phénomènes se passant selon la direction de l'épaisseur (z , échelle b) et selon le plan horizontal (x - y , échelle typique W) nous permet d'écrire, à partir de (1.12) :

$$v_z \sim \frac{b}{W}(v_x + v_y) \approx 0 . \quad (1.13)$$

Un raisonnement identique sur l'équation (1.11) nous permet d'en déduire que l'expression du Laplacien se limite à $\partial^2/\partial z^2$. Cette équation devient donc :

$$-\nabla_{\parallel} p + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{v}_{\parallel} = 0 , \quad (1.14)$$

avec $p = p(x, y)$. L'indice $\parallel$ désigne la composante des vecteurs (vitesse ou gradient) dans le plan xOy . Les variations lentes de la vitesse selon les directions x et y permettent de séparer les variables en écrivant :

$$\mathbf{v}_{\parallel}(x, y, z) = \mathbf{v}_{\parallel}(x, y, 0)f(z) , \quad (1.15)$$

où $f(z)$ est une fonction que l'on détermine par intégration de l'équation (1.14) en tenant compte des conditions aux limites :

$$\mathbf{v}_{\parallel}(x, y, -b/2) = \mathbf{v}_{\parallel}(x, y, b/2) = 0 . \quad (1.16)$$

La solution est un profil de vitesse parabolique dit de Poiseuille, et nous avons finalement le champ de vitesse :

$$\mathbf{v}_{\parallel}(x, y, z) = -\frac{b^2}{8\eta} \left[1 - \left(\frac{2z}{b} \right)^2 \right] \nabla_{\parallel} p . \quad (1.17)$$

Une représentation de ce champ de vitesse est en figure 1.8.

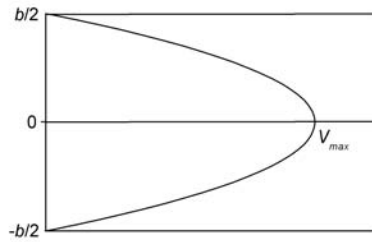


FIG. 1.8 – Profil parabolique de vitesse selon l'épaisseur de la cellule.

Soit $\mathbf{u}(x, y)$ la vitesse moyennée sur l'épaisseur b , nous obtenons alors la loi de Darcy en intégrant l'égalité précédente entre $z = -b/2$ et $+b/2$:

$$\mathbf{u}(x, y) = -\frac{b^2}{12\eta} \nabla p , \quad (1.18)$$

où le gradient est, comme le reste de l'équation, à deux dimensions.

Remarquons, pour finir sur la loi de Darcy, que pour le cas d'un écoulement stationnaire et uniforme à une vitesse V ($\mathbf{u} = V\mathbf{e}_x$) soumis à un gradient de pression ∇P ($\nabla p = \nabla P \mathbf{e}_x$), nous avons :

$$V = -\frac{b^2}{12\eta} \nabla P . \quad (1.19)$$

Ce sera notamment le cas de l'écoulement loin du doigt lorsque nous considérerons la digitation visqueuse.

Équation de Laplace et conditions aux limites

En tenant compte de l'incompressibilité du fluide :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 , \quad (1.20)$$

et de la loi de Darcy (1.18), nous en déduisons :

$$\Delta p = 0 . \quad (1.21)$$

Cette équation est appelée équation de Laplace. Le mouvement d'un fluide en cellule de Hele-Shaw est donc gouverné par un champ de pression Laplacien.

Dans le cas de l'instabilité de Saffman–Taylor, nous nous intéressons au déplacement d'un fluide 1 par un fluide 2 moins visqueux dans une cellule de Hele-Shaw. Les deux fluides sont supposés non miscibles. Les viscosités des fluides 1 et 2 sont notées η_1 et η_2 ($\eta_1 > \eta_2$).

En appliquant la loi de Darcy (1.18) au sein de chaque fluide, nous nous ramènon à un problème à deux dimensions décrit par le système d'équations :

$$\Delta p_1 = 0 , \quad \Delta p_2 = 0 , \quad (1.22)$$

où p_1 et p_2 désignent les pressions dans les fluides 1 et 2.

Pour obtenir une description complète du système, il faut de plus tenir compte des conditions aux limites à l'interface entre les deux fluides. Les composantes normales des vitesses des deux fluides au niveau de l'interface sont égales et définissent la vitesse U_n de l'interface :

$$U_n = -\frac{b^2}{12\eta_1} (\nabla p_1)_n = -\frac{b^2}{12\eta_2} (\nabla p_2)_n , \quad (1.23)$$

où les gradients de pression sont évalués à l'interface. Cette relation est aussi appelée condition de Stefan.

La loi de Laplace impose un saut de pression δp à l'interface entre les deux fluides :

$$\delta p = \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) , \quad (1.24)$$

où r_1 et r_2 sont les rayons de courbure de l'interface respectivement dans la direction de l'axe z , normale à la cellule et dans le plan x - y de la cellule, comme indiqué sur la figure 1.7. Cette condition pose un problème subtil. En effet, elle réintroduit à travers r_1 la troisième dimension (celle de l'épaisseur entre les plaques) éliminée par l'approximation de Darcy. Pour la plupart des traitements de l'instabilité, nous pouvons supposer que le

ménisque a un rayon de courbure r_1 constant imposé par la cellule, $r_1 = b/2$ [92]. Nous trouvons alors :

$$\delta p = \gamma \left(\frac{2}{b} + \frac{1}{r_2} \right) . \quad (1.25)$$

Avec cette hypothèse, le problème de Saffman–Taylor se ramène à la résolution de l'équation de Laplace pour un champ de pression bidimensionnel avec des conditions aux limites données. Bien que sa formulation soit simple, la résolution complète du problème de Saffman–Taylor est extrêmement complexe, du fait de la modification continue des conditions aux limites au fur et à mesure de la déformation de l'interface.

1.2.3 Analyse de stabilité linéaire

Considérons le déplacement d'un front initialement plan entre de l'air et un fluide visqueux. Dans l'air, on suppose que la viscosité est nulle. De ce fait, la pression y est constante et égale à la pression appliquée P_i (i=inlet, injection). Dans le fluide visqueux, la pression obéit à l'équation de Laplace $\Delta p = 0$ (1.21). Pour une interface plane parfaite, les isobares dans le fluide visqueux sont parallèles à l'interface. Si l'interface est perturbée, les isobares sont aussi perturbées. Le champ de pression étant Laplacien, une perturbation de taille caractéristique l déforme les isobares sur une distance de l . Une telle perturbation est représentée sur la figure 1.9.

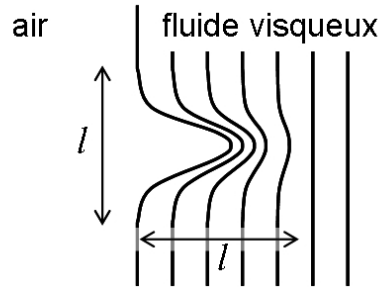


FIG. 1.9 – Schéma des isobares au voisinage de l'interface entre les deux fluides. Dans l'air dont on néglige la viscosité, la pression est constante. Dans le fluide visqueux, la pression obéit à l'équation de Laplace $\Delta p = 0$. Le champ de pression étant Laplacien, une perturbation de l'interface de taille caractéristique l déforme les isobares sur une distance l .

Le gradient de pression est augmenté au voisinage de la perturbation. La loi de Darcy montre que la vitesse du fluide est aussi augmentée au voisinage de cette déformation. En conséquence, l'amplitude de la perturbation augmente et l'interface se déstabilise. La différence de viscosités entre les deux fluides est donc, via l'équation de Laplace $\Delta p = 0$ (1.21), à l'origine du mécanisme d'instabilité. Le gradient de pression et la vitesse de la perturbation seront d'autant plus grands que la perturbation est pointue. Ce mécanisme favorise donc la croissance des petites perturbations. Cependant, les forces capillaires s'opposent à la formation de perturbations pointues et tendent à élargir ces protubérances. La compétition entre ces deux forces, les forces capillaires et les forces visqueuses, conduit à la sélection d'une longueur d'onde préférentielle.

La longueur d'onde caractéristique du système est déterminée par une analyse de stabilité linéaire (Chuoque *et al.* [24]). On suppose une petite perturbation sinusoïdale de l'interface initialement plane :

$$\zeta = Ut + \epsilon \tau^t \sin(ky) , \quad (1.26)$$

où U est la vitesse de déplacement du front, t le temps, ϵ l'amplitude de la perturbation, $l_k = 2\pi/k$ sa longueur d'onde et τ son taux de croissance. Si τ est négatif, la perturbation s'atténue au cours du temps et l'écoulement reste stable. Si au contraire τ est positif, la perturbation est amplifiée et l'interface se déstabilise.

La résolution des équations du mouvement (1.22) en tenant compte des conditions aux limites (1.23) et (1.25) conduit à la relation de dispersion suivante :

$$\tau = U |k| \left[1 - \frac{b^2 \gamma}{12 \eta U} k^2 \right] . \quad (1.27)$$

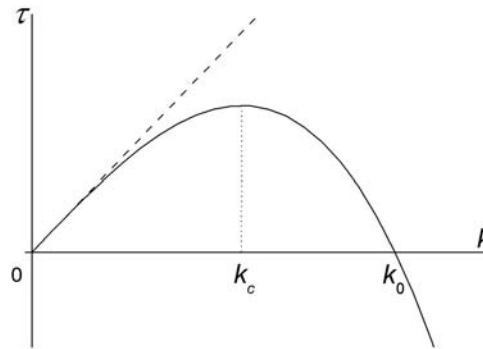


FIG. 1.10 – Taux de croissance τ d'une petite perturbation de l'interface initialement plane, se déplaçant à une vitesse donnée, en fonction du nombre d'onde k provenant de l'analyse de stabilité linéaire de Chuoque *et al.* [24]. Solution de l'équation (1.27) pour une tension de surface $\gamma = 0$ (courbe en tirets) et solution pour $\gamma \neq 0$ (courbe pleine).

Pour une tension de surface nulle, le taux de croissance est toujours positif et croît linéairement avec le nombre d'onde k (Fig. 1.10). En accord avec l'analyse qualitative précédente, la formation des nombres d'onde larges et donc des longueurs d'onde petites est favorisée en l'absence de tension de surface. Cependant, la tension de surface s'oppose à la croissance des petites longueurs d'ondes. En considérant les effets dus à la tension de surface, le taux de croissance (Fig. 1.10) n'est positif que pour l'intervalle des nombres d'onde compris entre 0 et $k_0 = \sqrt{12\eta U/b^2\gamma}$ avec un maximum en $k_c = k_0/\sqrt{3}$.

Pour une interface plane, l'écoulement est toujours instable quelle que soit la vitesse, si un fluide moins visqueux pousse un fluide plus visqueux. Dans le cas contraire qui n'est pas traité ici, l'interface est stable.

Dans la situation d'un canal de largeur finie, la longueur d'onde de la déstabilisation doit être plus petite que la largeur du canal W et donc $2\pi/k_0 < W$. Ceci conduit à un seuil d'instabilité qui est donné par :

$$\left(\frac{W}{b}\right)^2 \frac{\eta U}{\gamma} > (2\pi)^2 . \quad (1.28)$$

La longueur d'onde la plus instable aussi appelée longueur capillaire est donnée par :

$$l_c = \frac{2\pi}{k_c} = \pi b \sqrt{\frac{\gamma}{\eta U}} . \quad (1.29)$$

Elle définit l'échelle de longueur caractéristique du problème. Dans l'équation (1.29), nous pouvons encore une fois identifier la compétition entre les forces capillaires qui tendent à augmenter la longueur capillaire et les forces visqueuses qui tendent à la diminuer. Le rapport entre ces deux forces est appelé nombre capillaire Ca :

$$Ca = \frac{\text{forces visqueuses}}{\text{forces capillaires}} = \frac{\eta U}{\gamma} . \quad (1.30)$$

La longueur capillaire peut ainsi s'écrire de la façon suivante :

$$l_c = \frac{\pi b}{\sqrt{Ca}} . \quad (1.31)$$

1.2.4 Évolution non-linéaire

Digitation

L'évolution de l'interface au cours du temps est représentée figures 1.11(a), (b), (c) et (d). L'analyse de stabilité linéaire permet de prédire la taille caractéristique l_c des premiers doigts qui déforment l'interface, au tout début de l'instabilité (Fig. 1.11a). L'évolution ultérieure de l'interface n'est pas décrite par l'analyse linéaire. Expérimentalement, on constate qu'il y a une compétition entre les différents doigts (Fig. 1.11b et c). En raison du caractère Laplacien du champ de pression, les doigts les plus avancés écrantent les autres et peuvent alors occuper une partie plus importante de la largeur du canal. Cette compétition se poursuit jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul doigt stable qui continue à se propager dans la cellule (Fig. 1.11d).

Ce doigt se caractérise par sa largeur relative $\lambda = w/W$, où w est la largeur du doigt et W la largeur de la cellule, en fonction de sa vitesse U . Saffman et Taylor [92] ont montré que le paramètre de contrôle du système est le suivant :

$$1/B = 12 \left(\frac{W}{b} \right)^2 \frac{\eta U}{\gamma} = 12 \left(\frac{W}{b} \right)^2 Ca \propto \left(\frac{W}{l_c} \right)^2 . \quad (1.32)$$

Notons que ce paramètre mesure l'écart entre la petite échelle de longueur du problème l_c (la longueur de déstabilisation) et la grande échelle de longueur W (imposée par la largeur de la cellule de Hele-Shaw). Il décrit donc l'importance du confinement de l'interface.

Si les valeurs de λ pour différentes géométries ou différents fluides sont représentées en fonction de $1/B$, elles suivent une courbe maîtresse. Les résultats de mesures de λ obtenus par Saffman–Taylor pour différents fluides et une seule géométrie du canal sont représentés en fonction du nombre capillaire Ca sur la figure 1.12.

Pour les vitesses faibles, donc des Ca petits, les forces capillaires dominent. Nous trouvons alors des doigts larges. Quand la vitesse augmente, les forces visqueuses deviennent de plus en plus importantes et la largeur des doigts diminue. Nous pourrions donc nous attendre à une largeur extrêmement petite pour des vitesses élevées. Ce n'est

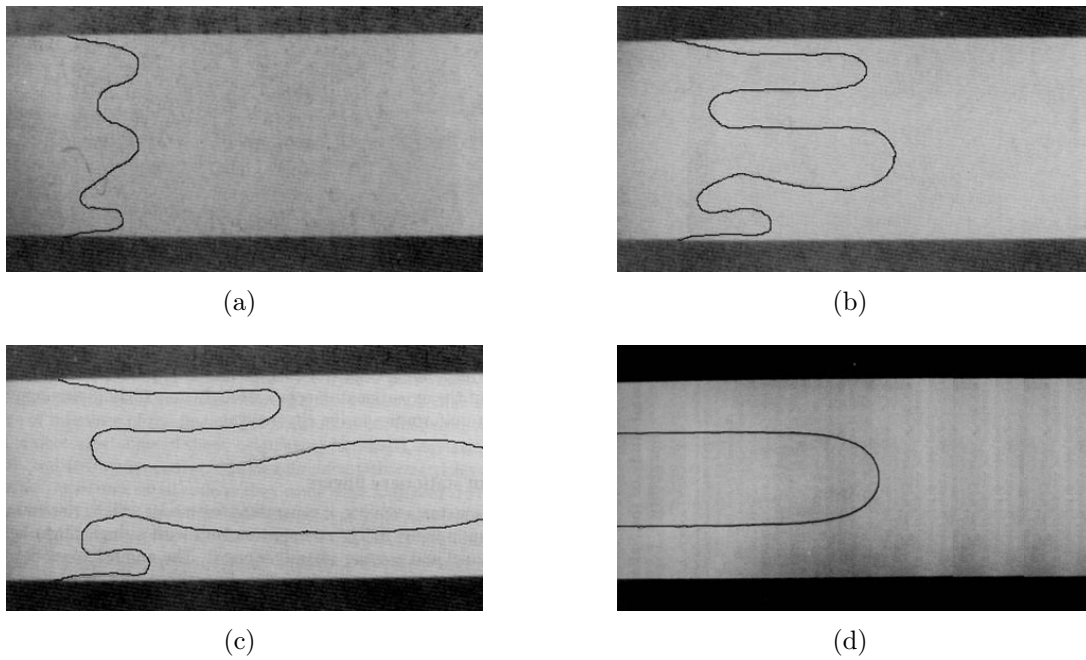


FIG. 1.11 – *Evolution de l'interface entre les deux fluides en cellule de Hele-Shaw d'après Tabeling et al. [100]. (a) Au premier stade de l'instabilité des bosses de taille caractéristique l_c déforment l'interface. (b,c) Rapidement la compétition entre ces bosses conduit à la sélection d'un seul doigt. (d) Ce doigt est caractérisé par sa largeur relative λ en fonction de sa vitesse U .*

cependant pas le cas : à vitesse élevée la largeur relative des doigts se stabilise sur un plateau à $\lambda = 0.5$, i.e. le doigt occupe toujours la moitié du canal. Cette limite de $\lambda = 0.5$ est restée inexploitée pendant très longtemps.

Les premières analyses de l'instabilité ont été menées par Saffman et Taylor [92] qui ont négligé la tension de surface. En utilisant une transformation conforme, ils ont calculé la forme des doigts. Ce faisant, ils trouvent une famille continue de solutions analytiques paramétrisées par λ ($0 < \lambda < 1$) :

$$x = \frac{1 - \lambda}{2\pi} \ln \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{\lambda} \right) , \quad (1.33)$$

où x et y sont les coordonnées des points de l'interface exprimées dans le repère de l'extrémité du doigt et en unité de largeur de cellule W .

Pour des doigts de largeur relative proche de 0.5, l'accord avec les résultats expérimentaux est très bon. Pour les doigts plus larges, correspondant à des vitesses plus faibles, la tension de surface ne peut plus être négligée et l'équation (1.33) n'est plus vérifiée. Notons que bien que l'équation (1.33) prédise correctement la forme des doigts pour λ proche de 0.5, elle n'explique pas pourquoi cette valeur particulière est sélectionnée.

Pitts [85] a de nouveau étudié le profil de l'interface dans les années 80. En utilisant une loi empirique pour décrire la courbure à la pointe du doigt, il a trouvé une expression modifiée :

$$x = \frac{\lambda}{2\pi} \ln \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{\lambda} \right) , \quad (1.34)$$

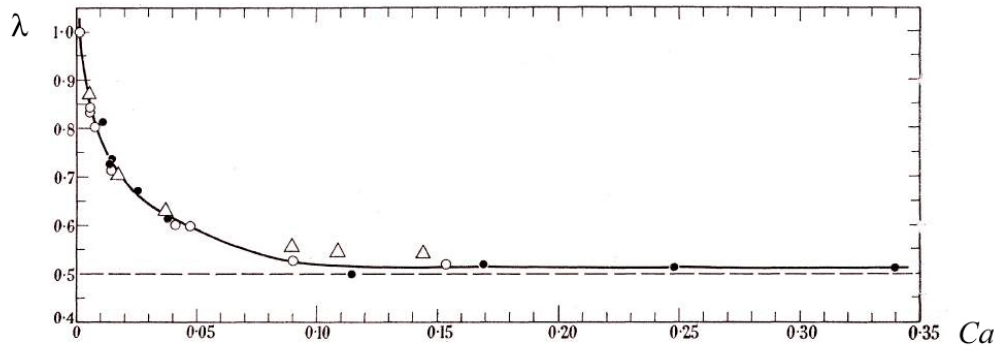


FIG. 1.12 – Largeur relative des doigts λ obtenue pour différents fluides dans une seule géométrie de cellule de Hele-Shaw en fonction du nombre capillaire Ca d'après les expériences de Saffman et Taylor [92].

qui convient beaucoup mieux à l'évolution du profil des doigts sur l'ensemble des valeurs de λ .

Mode de sélection de la largeur relative

Les études de sélection et de stabilité du doigt de Saffman–Taylor prenant en compte la tension de surface ont d'abord été numériques. En 1980, McLean et Saffman [75] ont ainsi calculé numériquement la dépendance de λ en fonction de $1/B$ et ont pu reproduire la limite 0.5 pour des $1/B$ élevés. Ce résultat montrait donc que la sélection des doigts est induite par la tension de surface.

Cependant, ce n'est seulement qu'en 1986 que trois groupes : Combescot *et al.* [25], Hong et Langer [48] et Shraiman [97] ont effectué simultanément une démonstration analytique de la sélection de la largeur des doigts de Saffman–Taylor. Leur travaux montrent que la tension de surface représente une perturbation singulière du problème et introduit ainsi (bien que les forces capillaires soient très faibles devant les forces visqueuses à vitesse élevée) une condition supplémentaire à la pointe des doigts. Pour une valeur donnée du paramètre de contrôle $1/B$, seule une famille de solutions discrètes λ_n provenant du continuum de Saffman et Taylor vérifie cette condition. Quelle que soit la famille de solutions, λ_n tend toujours vers 0.5 lorsque $1/B$ devient grand.

Dans cette limite de paramètre de contrôle $1/B$ grand, la formule analytique de λ_n en fonction de $1/B$ est la suivante [26] :

$$\left(\lambda_n - \frac{1}{2}\right) = \frac{(16\pi^2)^{2/3}}{8} a_n (1/B)^{-2/3}, \quad (1.35)$$

où les coefficients a_n sont donnés de façon approximative par $a_n = 2(n + 4/7)^2$. Cette même dépendance peut être retrouvée numériquement [26]. Les résultats ainsi obtenus pour $n = 0, 1$ et 2 sont représentés sur la figure 1.13. L'étude de la stabilité des différentes branches montre que seule la plus étroite ($n = 0$) est linéairement stable pour toutes les valeurs de $1/B$. C'est cette branche qui est observée expérimentalement. Il aura donc fallu près de 30 ans pour que le mécanisme de sélection des doigts de Saffman–Taylor soit finalement expliqué.

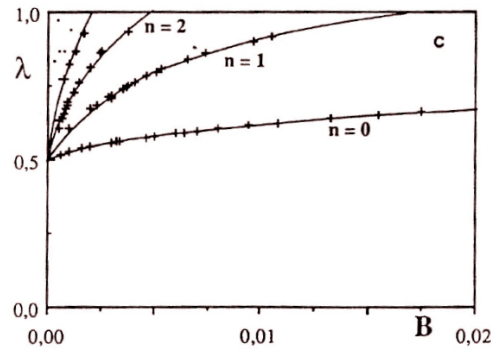


FIG. 1.13 – Familles discrètes de largeur relative λ_n sélectionnées par la tension de surface pour $n = 0, 1$ et 2 en fonction de B d'après [26]. La solution pour $n = 0$ est stable et correspond aux doigts observés expérimentalement.

1.2.5 Déstabilisation des doigts

Nous venons de décrire la dépendance de la largeur des doigts stables en fonction de leur vitesse et de voir que le mécanisme de sélection des doigts est maintenant bien compris. Mais il est expérimentalement observé que ce doigt se déstabilise quand $1/B$ devient suffisamment grand.

L'extrémité du doigt se scinde répétitivement en deux ("tip-splitting") : il y a formation d'une structure branchée. Un exemple de ce processus est montré sur la figure 1.14. La valeur de $1/B$ du seuil de cette instabilité secondaire varie fortement avec le niveau de bruit dans la cellule. Ainsi il existe une grande fluctuation de cette valeur d'une expérience à l'autre. Park et Homsy observent ainsi une déstabilisation du doigt vers $1/B = 5000$ [81]. En réduisant le bruit dans leurs expériences, Tabeling *et al.* [100] atteignent, eux, un seuil de $1/B \sim 60000$.

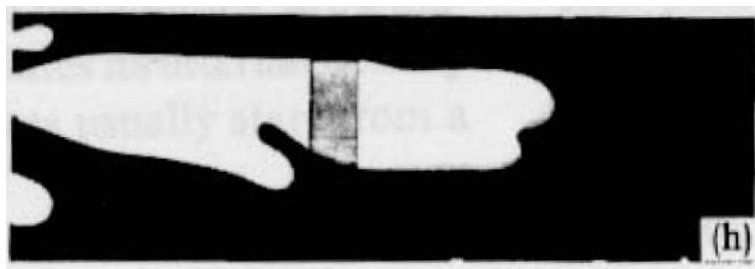


FIG. 1.14 – Déstabilisation d'un doigt à vitesse élevée par "tip-splitting" d'après Park et Homsy [81]

1.2.6 Effets tridimensionnels

Jusqu'à maintenant, nous avons discuté du traitement bidimensionnel de l'instabilité de Saffman–Taylor. Les analyses classiques comme celles de Saffman et Taylor [92] et de McLean et Saffman [75] sont faites dans le cadre de cette approximation.

En pratique, le problème est plus complexe : l'interface entre l'air et le fluide se déplace dans un espace à trois dimensions. Quand le ménisque à la pointe du doigt avance dans la cellule de Hele-Shaw, il laisse derrière lui un film de mouillage sur les plaques (Fig. 1.15).

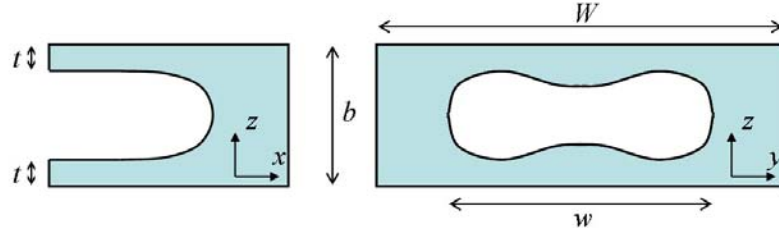


FIG. 1.15 – Vue schématique du film de mouillage entre le doigt et les plaques de verre. (à gauche) Vue du doigt de côté, t est l'épaisseur de film de mouillage. (à droite) Forme schématisée de la forme du film de mouillage le long de la largeur de la cellule.

Ce film a jusqu'ici été négligé. Dans le cas d'un fluide qui mouille la surface, une étude théorique du film de drainage laissé derrière des bulles d'air dans un capillaire a été menée par Bretherton [16]. Il montre que dans la limite des faibles nombres capillaires $Ca = \eta U / \gamma$, l'épaisseur du film t est proportionnelle au nombre capillaire Ca à la puissance $2/3$:

$$\frac{t}{R} = 0.643 (3 Ca)^{2/3} , \quad (1.36)$$

où R est le rayon du capillaire. Park et Homsy [81] ont vérifié que cette loi peut être appliquée au cas d'un doigt de Saffman–Taylor dans une cellule de Hele-Shaw. Pour cela, R est remplacé par la demi-épaisseur de la cellule $b/2$ et le nombre capillaire Ca est évalué avec $U = U_n$ où U_n est la composante de la vitesse normale à l'interface. Le film de mouillage induit ainsi une modification du saut de pression à l'interface. Ce saut de pression a été déterminé par Park et Homsy [81] :

$$\delta p = \frac{2\gamma}{b} [1 + 3.8 Ca^{2/3}] + \frac{\pi \gamma}{4 r_2} , \quad (1.37)$$

où r_2 est toujours le rayon de courbure de l'interface dans le plan $x-y$ de la cellule. Dans la limite $Ca \rightarrow 0$ où l'épaisseur du film tend vers zéro, nous retrouvons un saut de pression δp qui rappelle la forme de l'équation (1.25) utilisée pour le traitement bidimensionnel.

Une étude expérimentale de l'épaisseur du film de mouillage par interférométrie a été menée par Tabeling *et al.* [99, 100]. Pour un doigt de Saffman–Taylor, la vitesse normale U_n varie le long de l'interface courbée et induit ainsi une variation de l'épaisseur du film. Tabeling *et al.* ont montré que l'épaisseur de ce film est bien décrite par une loi de la forme suivante :

$$t = t_{\max} \left(\frac{U_n}{U} \right)^{2/3} . \quad (1.38)$$

Le film obéit donc à une loi de Bretherton locale le long de l'interface du doigt. La vitesse normale U_n est maximale à la pointe du doigt ce qui entraîne une largeur maximale du

film au milieu du doigt selon l'axe Ox . La forme de ce film est schématisée sur la figure 1.15.

L'évolution de l'épaisseur maximale $t_{\max}$ avec Ca est bien décrite par la loi de Bretherton pour $Ca < 3 \cdot 10^{-3}$. Pour les nombres capillaires plus grands, Tabeling *et al.* [99, 100] ont proposé une loi empirique qui ajuste l'ensemble de leurs données expérimentales :

$$t = \kappa b [1 - \exp(-\gamma W/b)] [1 - \exp(-\beta Ca^{2/3})] , \quad (1.39)$$

où $\kappa \approx 0.119$, $\gamma \approx 0.038$ et $\beta \approx 8.58$.

De plus, ce film exerce aussi une influence sur la largeur des doigts. Il en découle que les valeurs de λ pour différentes géométries et différents fluides dévient faiblement de la prédiction théorique $\lambda = 1/B$ de McLean et Saffman [75]. D'autre part, les différents résultats expérimentaux ne tombent pas précisément sur une seule courbe maîtresse. L'accord entre les résultats expérimentaux et la prédiction théorique peut être amélioré si on tient compte du film de mouillage. Pour cela, Tabeling *et al.* [100] utilisent une tension de surface effective γ^* qui découle du saut de pression à l'interface tenant compte du film de mouillage (Eq.(1.37)). L'épaisseur de ce film de mouillage étant moyennée le long de la largeur du doigt, ils obtiennent :

$$\gamma^* = \gamma \left[\frac{\pi}{4} + \alpha \left(\frac{\lambda W}{b} \right) Ca^{2/3} \right] . \quad (1.40)$$

Moyenner sur l'épaisseur du film fait intervenir un paramètre α déterminé expérimentalement : $\alpha = 1.7$.

Le paramètre de contrôle $1/B$ peut ensuite être recalculé avec cette tension effective de surface :

$$1/B^* = 12 \left(\frac{\eta U}{\gamma^*} \right) \left(\frac{W}{b} \right)^2 . \quad (1.41)$$

Si les résultats expérimentaux sont tracés en fonction de ce paramètre $1/B^*$, ils sont en bon accord avec la prédiction théorique de McLean et Saffman dans la domaine de validité de la loi de Bretherton (équ. (1.36)) ($Ca < 3 \cdot 10^{-3}$).

Pour des nombres capillaires supérieurs à $Ca \sim 10^{-2}$ les résultats obtenus pour $t_{\max}$ dévient de la prédiction de la loi de Bretherton et tendent vers une valeur de saturation pour des Ca larges (Eq. 1.39). Dans ce domaine, la largeur relative des doigts λ passe en dessous de la limite $\lambda = 0.5$ prédite par les théories classiques bidimensionnelles [25, 48, 75, 97]. L'écart entre les valeurs de λ observées et $\lambda = 0.5$ reste cependant faible. L'amincissement du doigt est très probablement induit par le film de mouillage.

En conclusion, nous avons montré que l'instabilité de Saffman–Taylor est modifiée si les effets tridimensionnels deviennent importants. Un traitement bidimensionnel de l'instabilité est cependant possible dans la limite des petits nombres capillaires où les effets tridimensionnels sont faibles.

1.3 Milieux poreux

1.3.1 Caractérisation des milieux poreux

Généralités

Un milieu poreux est un matériau massif à l'intérieur duquel se trouvent des pores ou cavités reliés eux par de fins canaux ou capillaires.

Dans la nature, les roches et les sols sont des milieux poreux très étudiés, notamment par l'industrie de l'extraction pétrolière qui s'intéresse à la récupération des hydrocarbures contenus dans les roches poreuses [40].

Au niveau industriel, les milieux poreux sont fréquemment rencontrés, par exemple lors du séchage des bétons et des ciments ou dans l'industrie du papier où la porosité et la structure poreuse jouent un grand rôle.

Une méthode de réalisation des poreux est le frittage qui consiste à chauffer un ensemble de grains en contact de telle sorte que les contacts entre grains fondent pour aboutir à une structure solide.

Description géométrique

Les milieux poreux ont une géométrie complexe. Il est cependant possible de définir un certain nombre de paramètres permettant de décrire les propriétés géométriques du milieu [32, 42].

Le plus important de ces paramètres est la porosité définie par :

$$\varepsilon = \frac{V_p}{V_0} = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total}} = 1 - \phi, \quad (1.42)$$

où ϕ est la compacité ou la fraction volumique solide¹. ε varie donc entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide). Notons que, pour un matériaux homogène et isotrope, ε est aussi égale à la fraction surfacique occupée par les pores dans une section plane ou à la fraction de longueur située à l'intérieur des pores pour une ligne traversant le milieu.

Un autre paramètre est l'aire spécifique qui est le rapport entre la surface interne des pores et le volume total de l'échantillon. Ce paramètre est essentiel pour tous les processus d'adsorption ou de catalyse car il indique la surface disponible dans le matériaux pour des réaction chimiques.

Les propriétés de transport des milieux poreux font intervenir bien d'autres caractéristiques géométriques que la porosité ou l'aire spécifique. Nous pouvons citer la connectivité, qui caractérise le nombre de voisins pour un pore mais aussi la tortuosité qui représente le caractère non rectiligne des trajectoires contenues dans le volume des pores.

1.3.2 Écoulement dans les milieux poreux saturés

Loi de Darcy

Nous nous intéressons, ici, aux milieux poreux complètement saturés, c'est à dire que le volume des pores est entièrement rempli de fluide. Ce dernier est supposé Newtonien et incompressible.

¹Dans la description de nos expériences, nous ferons également référence à ϕ comme la fraction de grains.

L'étude fondatrice des écoulements dans les poreux a été réalisée par l'ingénieur Darcy en 1856 [30] où il mit en évidence une relation linéaire entre la vitesse et le gradient de pression appliqué au milieu poreux.

En effet, si la vitesse est assez faible (i.e. si le nombre de Reynolds défini sur la taille des pores et la vitesse locale est très inférieur à 1), on peut admettre, en écoulement stationnaire, que les gradients de pression sont proportionnels à la vitesse de l'écoulement (loi de Poiseuille appliquée à chaque pore). Cette relation propre à chaque canal ou pore se conserve en moyenne si l'on considère un volume grand par rapport à la taille des pores. Nous avons donc pour un échantillon typique de milieux poreux représenté figure 1.16 :

$$Q = \frac{K}{\eta} S \frac{\Delta P}{L} , \quad (1.43)$$

où L et S sont la longueur et la section de l'échantillon, Q le débit volumique et η la viscosité du fluide en écoulement. La constante de proportionnalité K est la perméabilité. Elle est homogène à une surface et son ordre de grandeur est donné par la section d'un pore individuel. Il est important de noter que K est indépendant de la nature du fluide et ne dépend que de la structure des pores du matériau.

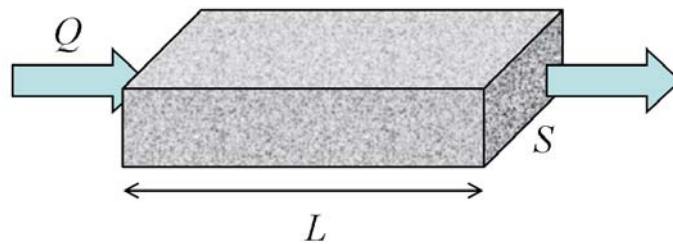


FIG. 1.16 – Bloc poreux soumis à un écoulement.

La vitesse débitante V_s (s pour section) est définie par :

$$V_s = \frac{Q}{S} = \frac{K}{\eta} \frac{\Delta P}{L} . \quad (1.44)$$

Remarquons que la vitesse moyenne à l'intérieur des pores, V_p , peut être bien plus élevée que V_s car seule une partie du volume total du matériau est disponible pour l'écoulement du fluide. Nous avons ainsi :

$$V_p = \frac{V_s}{\varepsilon} . \quad (1.45)$$

Généralisation à 3 dimensions

D'une manière plus générale, nous pouvons écrire la loi de Darcy (1.44) sous une forme vectorielle en tenant compte de la gravité :

$$\mathbf{v}_s = -\frac{K}{\eta} (\nabla p - \rho \mathbf{g}) . \quad (1.46)$$

Le champ de vitesse $\mathbf{v}_s$ est irrotationnel, par conséquent, il est possible de décrire l'écoulement à l'aide d'un potentiel Φ :

$$\mathbf{v}_s = -\nabla \Phi , \quad (1.47)$$

où :

$$\Phi = \frac{K}{\eta} (p + \rho g z) . \quad (1.48)$$

Si le fluide est incompressible, il vérifie aussi $\text{div } \mathbf{v}_s = 0$ d'où :

$$\Delta \Phi = 0 . \quad (1.49)$$

Le champ de vitesse $\mathbf{v}_s$ dérive donc d'un potentiel Φ , dont le laplacien est nul, comme ce serait le cas pour les fluides parfaits, ce qui peut paraître surprenant pour un écoulement où les forces visqueuses sont si importantes. Cependant, les détails de l'écoulement microscopique sont gommés par la loi de Darcy, qui moyenne les effets de la viscosité qui interviennent sur les petites échelles de longueur. Même si à petite échelle, les effets visqueux sont dominants, l'écoulement moyen à l'échelle de l'échantillon a donc les caractéristiques d'un écoulement potentiel.

Notons que les équations (1.46) et (1.49) sont le strict analogue des équations (1.19) et (1.21) que nous avons, à deux dimensions, dans la géométrie de la cellule de Hele-Shaw. Dans ce dernier cas, la perméabilité K était reliée à l'épaisseur de la cellule b par $K = b^2/12$, et les effets de la gravité étaient nuls (cellule horizontale).

Dans le cas de l'écoulement dans un milieu poreux, il nous faut donc maintenant un modèle pour calculer la perméabilité à partir des paramètres géométriques du matériau.

1.3.3 Modèles de perméabilité

Modèle des canaux tortueux

Les milieux poreux sont souvent représentés comme un ensemble de canaux ondulés de rayon individuel r reliant les pores.

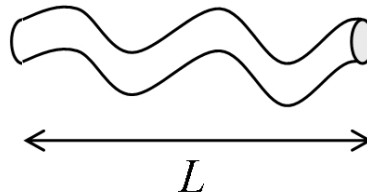


FIG. 1.17 – *Modèle de canal tortueux. La longueur réelle du canal L_e est supérieure à sa taille L dans le milieu.*

La figure 1.17 représente un tel canal. Notons que sa longueur effective L_e est plus grande que la longueur L occupée dans le matériau. La tortuosité τ peut être définie comme le rapport de ces deux longueurs :

$$\tau = \frac{L_e}{L} . \quad (1.50)$$

Pour un capillaire unique, la relation entre la perte de charge et le débit q est donnée par la relation de Poiseuille, analogue à l'équation (1.19) mais dans le cas d'une conduite circulaire :

$$q = \frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{L_e} . \quad (1.51)$$

Soit N le nombre de capillaires traversant une surface S perpendiculaire au sens de l'écoulement. Nous avons en reprenant la définition de la porosité (Eq. 1.42) :

$$\varepsilon = \frac{3N\pi r^2 L_e}{SL} , \quad (1.52)$$

où le facteur 3 du numérateur provient de l'observation que seul un tiers des canaux tortueux participent à l'écoulement dans une direction donnée.

Nous en déduisons le débit total :

$$Q = Nq = \frac{\varepsilon r^2}{24\eta} \frac{L^2}{L_e^2} S \frac{\Delta P}{L} . \quad (1.53)$$

D'après la loi de Darcy (1.44), nous trouvons la valeur de la perméabilité du modèle :

$$K_{tort} = \frac{\varepsilon r^2}{24\tau^2} . \quad (1.54)$$

Ainsi, pour une porosité donnée, la perméabilité varie comme le carré du rayon des canaux. La chute de pression pour un débit donné augmente donc très rapidement quand on augmente la taille des canaux.

Modèle de Carman–Kozeny

L'équation (1.54) fait intervenir un rayon qu'il est très difficile de définir sans ambiguïté. L'aire spécifique est une grandeur plus facile à mesurer et le modèle de Carman–Kozeny [18, 19, 55] l'inclue.

Reprenons la modélisation précédente. Dans un échantillon de longueur L et de section S , si le nombre total de canaux tortueux est N_t ($N_t = 3N$ dans la notation précédente) nous avons :

$$\varepsilon = \frac{N_t \pi r^2 L_e}{SL} . \quad (1.55)$$

L'aire spécifique A_s est donnée par :

$$A_s = \frac{N_t 2\pi r L_e}{SL} , \quad (1.56)$$

et nous en déduisons :

$$A_s = \frac{2\varepsilon}{r} . \quad (1.57)$$

En éliminant r entre les équations (1.54) et (1.57) nous obtenons l'expression suivante :

$$K_{CK} = \frac{\varepsilon^3}{6A_s^2 \tau^2} . \quad (1.58)$$

Un intérêt essentiel de la formule de Carman–Kozeny est que pour des milieux poreux réels formés de grains ou de poudres empilés ou comprimés, $6\tau^2$ peut être remplacé par une valeur expérimentale de l'ordre de 5 [18, 19].

Pour un empilement de billes de rayon D , l'aire spécifique A_s peut être aisément calculée. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}
 A_s &= \frac{\text{surface interne des pores}}{\text{volume total}} \\
 &= \frac{\text{surface externe des billes}}{\text{volume total}} \\
 &= \frac{\pi D^2}{\frac{1}{6}\pi D^3 (1 - \varepsilon)^{-1}} \\
 &= \frac{6(1 - \varepsilon)}{D} .
 \end{aligned} \tag{1.59}$$

Nous en déduisons donc la formule de Carman–Kozeny applicable à un empilement de billes sphériques :

$$K_{CK} = \frac{\varepsilon^3 D^2}{180 (1 - \varepsilon)^2} . \tag{1.60}$$

Pour un empilement de grains sphériques de diamètre $D = 80 \mu\text{m}$, à une fraction de grains $\phi = 60\%$, $\varepsilon = 0.4$, nous avons $K_{CK} \approx 6 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$.

1.3.4 Écoulements diphasiques dans les milieux poreux

Les écoulements diphasiques² dans les milieux poreux sont très souvent décrits par des lois macroscopiques [32, 42]. L'approche classique consiste à considérer les fractions volumiques de chaque fluide en présence et à écrire une équation de Darcy pour chacune des deux phases en introduisant des perméabilités relatives. Cependant, quand les forces capillaires (i.e. le saut de pression à l'interface) deviennent importantes par rapport aux forces visqueuses et aux forces de gravité, ces lois ne sont pas capables de rendre compte des phénomènes observés [68].

À ce stade, il faut donc arriver à mieux décrire ce qui se passe au niveau microscopique, c'est à dire à prendre en considération le caractère fortement hétérogène du milieu. Il existe un certain nombre d'études à la fois expérimentales [36, 67, 68, 71] et numériques [3, 67, 71] portant sur ce problème. La plupart de ces études considère des milieux poreux modèles à deux dimensions constitués de pores et de canaux. L'hétérogénéité est modélisée en introduisant une variabilité dans la taille de ces derniers. Au niveau expérimental, il peut ainsi s'agir de micro-canaux moulés dans de la résine [67] ou gravés dans le verre [36] ou bien également de billes prises en sandwich et bloquées entre 2 plaques de verre [71]. Soulignons pour finir qu'il existe des modèles statistiques rendant compte des propriétés observées [67].

La figure 1.18 représente le dispositif général mis en œuvre dans ces expériences. Un milieu poreux à 2 dimensions est initialement rempli d'un fluide 1 puis un fluide 2 est injecté par un des cotés. Les caractéristiques principales de ces fluides sont leurs viscosités, η_1 et η_2 , et leur tension de surface γ .

Il existe différents régimes d'injection qui dépendent des propriétés des fluides. La première distinction vient du contraste de mouillabilité des deux fluides : si le fluide

²Notons que le terme "diphasique" est, ici, à comprendre au sens de 2 fluides alors que la nature "diphasique" des suspensions faisait référence aux particules solides et au fluide interstitiel.

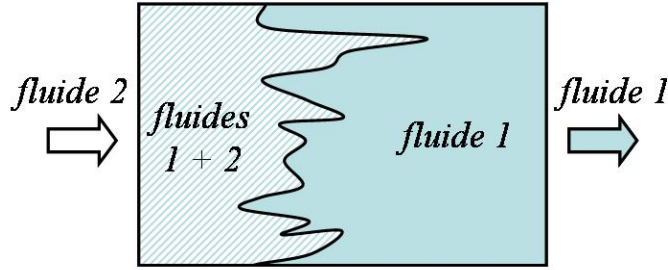


FIG. 1.18 – Schéma de la configuration expérimentale d'injection d'un fluide 2 dans un milieu poreux à deux dimensions initialement rempli d'un fluide 1.

injecté est non-mouillant, il s'agit d'un cas de drainage. S'il est mouillant il s'agit d'une imbibition.

Dans nos expériences, nous nous intéresserons au régime de drainage puisque, pour le cas des écoulements diphasiques, nous injecterons de l'air dans un milieu chargé d'huile.

1.3.5 Drainage, phénomènes de digitation

Nombres caractéristiques

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où un fluide non-mouillant (le fluide 2) pousse un fluide mouillant (fluide 1) dans un réseau de capillaires et de pores.

Il y a principalement 3 forces en présence : les forces visqueuses dans le fluide poussé, les forces visqueuses dans le fluide injecté et les forces capillaires à l'interface entre les deux fluides.

Un régime de drainage peut ainsi se caractériser avec deux nombres adimensionnels.

Le premier est le rapport des viscosités des deux fluides :

$$M = \frac{\eta_2}{\eta_1} . \quad (1.61)$$

Si $M > 1$ le fluide injecté est plus visqueux que le fluide déplacé. Si $M < 1$ c'est l'inverse. Dans ce dernier cas, nous nous trouvons ainsi dans les conditions de l'instabilité de Saffman–Taylor décrite dans la précédente partie. Étant dans le même type d'équations (champ de pression Laplacien), nous sentons dès lors que ce cas sera instable.

Le second nombre caractéristique est un nombre capillaire. Comme le représente la figure 1.19, le fluide injecté étant moins mouillant que le fluide poussé, il existe un saut de pression δp à l'interface. D'après la loi de Laplace, ce dernier s'écrit :

$$\delta p = p_2 - p_1 = \frac{2\gamma \cos \theta}{r} , \quad (1.62)$$

où γ est la tension de surface, θ l'angle de contact et r le rayon du capillaire.

Cela permet donc de définir le nombre capillaire Ca comme le rapport entre les forces visqueuses et les forces capillaires pour le fluide injecté :

$$Ca = \frac{\eta_2 u}{\gamma \cos \theta} , \quad (1.63)$$

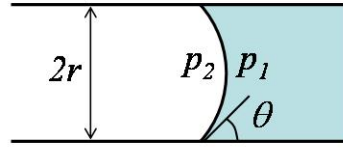


FIG. 1.19 – Schéma d'un capillaire. Le fluide 2 injecté étant moins mouillant que le fluide 1 il y a un saut de pression à l'interface de telle sorte que $p_2 < p_1$.

où u est la vitesse moyenne de l'écoulement, i.e. le débit total divisé par la section de l'échantillon.

Notons que la définition (1.63) du nombre capillaire varie selon les études [36, 67, 71] mais que la signification de ce dernier reste la même. En effet, remarquons que le saut de pression δp implique que la pression dans le fluide 1 déplacé est inférieure à la pression dans le fluide 2 injecté. Pour que le fluide 2 puisse traverser un capillaire de rayon r , il est donc nécessaire que la pression dans ce fluide soit supérieure à δp (Eq. 1.62).

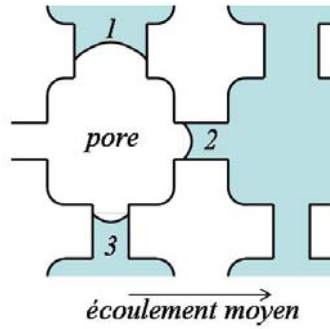


FIG. 1.20 – Schéma d'un pore envahi par le fluide 2 et de son réseau de capillaire. Pour des nombres capillaires faibles, le capillaire de plus grand diamètre (n°1) peut être favorisé puisque le saut de pression entre les deux fluides y est le plus faible.

Analysons le cas de la figure 1.20. Un raisonnement simple va nous montrer que le type d'écoulement peut dépendre fortement du nombre capillaire Ca . Un pore P est relié à d'autres pores par un ensemble de canaux de différents diamètres. Si la pression d'injection est très faible (i.e. Ca faible), le saut de pression capillaire va jouer un rôle important et les pores de plus grand diamètre (canal 1 sur la figure 1.20) seront favorisés même s'il ne sont pas dans le sens de l'écoulement. Si, au contraire, la pression d'injection est très importante (Ca élevé), le saut de pression entre différents capillaires ne jouera pas de rôle (puisque négligeable), le facteur important sera la viscosité. Or, la perte de charge totale est principalement liée au nombre de canaux traversés : le fluide injecté aura donc tendance à se diriger dans le sens de l'écoulement moyen (canal 2 sur la figure 1.20).

Cette analyse simple couplée à l'instabilité de Saffman–Taylor lorsqu'un fluide peu visqueux pénètre un fluide plus visqueux ($M < 1$) permet d'expliquer les types de motifs d'injection observés.

Les différents types de régime

Expérimentalement et numériquement, 3 types de motifs sont observés [67] selon les fluides employés et les conditions d'injection :

- digitation visqueuse,
- digitation capillaire,
- déplacement stable.

Ces trois régimes correspondent à la prédominance d'une des trois forces citées précédemment sur les autres.

Remarquons qu'en plus des nombres M et Ca mentionnés équations (1.61) et (1.63) nous pouvons rajouter le paramètre $Ca/M = \frac{\eta_1 u}{\gamma \cos \theta}$ qui décrit l'importance des forces visqueuses dans le fluide poussé par rapport aux forces capillaires.

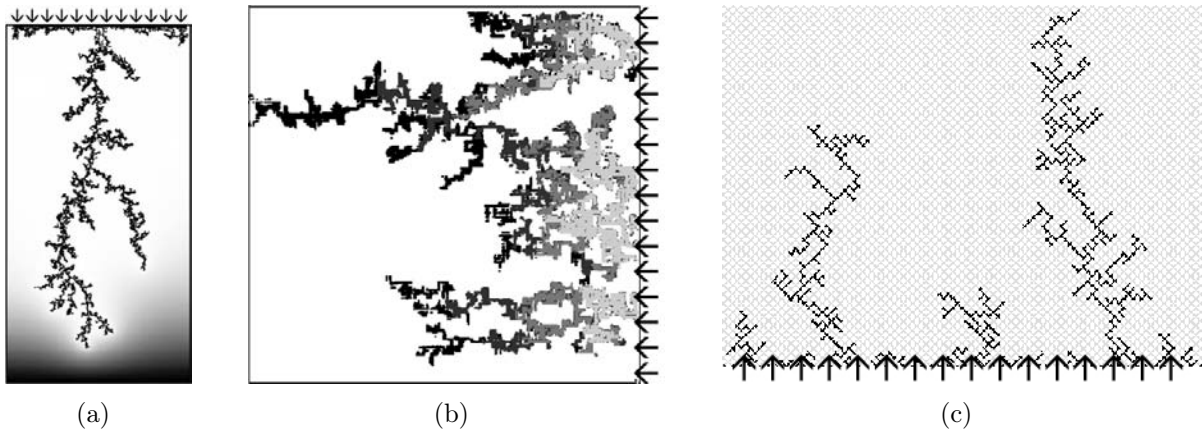


FIG. 1.21 – Images typiques de digitation visqueuse obtenues : (a) expérimentalement dans un milieu poreux constitué d'un réseau de billes coincées entre 2 plaques de verre par Løvoll et al. [71], (b) expérimentalement dans des canaux tracés dans du verre par Ferer et al. [36], (c) numériquement dans un réseau de canaux de taille variable par Aker et al. [3]. Les flèches indiquent les zones d'injection.

Des motifs de digitation visqueuse sont représentés figure 1.21. La principale force est ici la viscosité du fluide poussé ($M \ll 1$, $Ca/M \gg 1$). Les sauts de pression capillaires sont négligeables. Les motifs observés sont des doigts ramifiés se propageant vers la sortie du réseau. Nous sommes typiquement dans le cas de l'instabilité de Saffman–Taylor. Il y a un écrantage des doigts en arrière par le doigt le plus avancé et il n'y a pas de boucle.

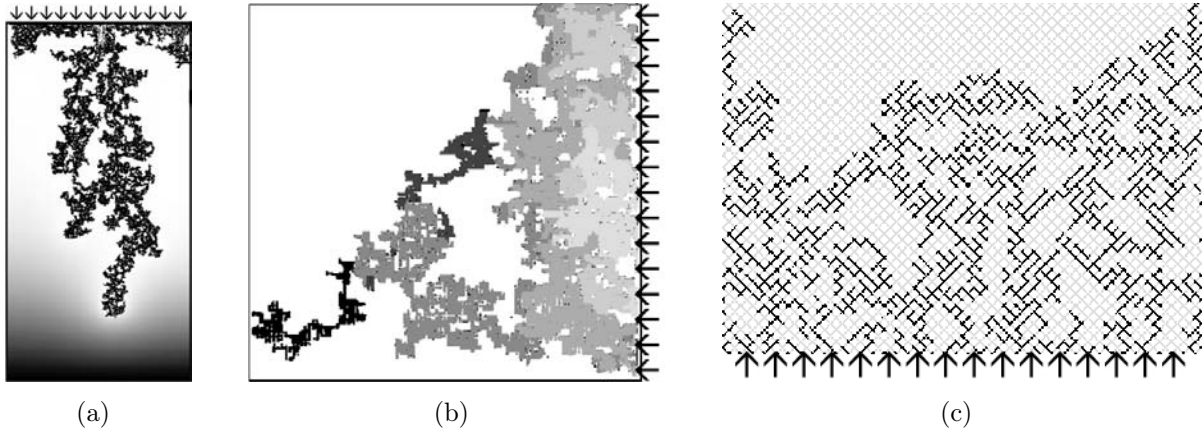


FIG. 1.22 – Images typiques de digitation capillaire obtenues : (a) expérimentalement dans un milieu poreux constitué d'un réseau de billes coincées entre 2 plaques de verre par Løvoll et al. [71], (b) expérimentalement dans des canaux tracés dans du verre par Ferer et al. [36], (c) numériquement dans un réseau de canaux de taille variable par Aker et al. [3]. Les flèches indiquent les zones d'injection.

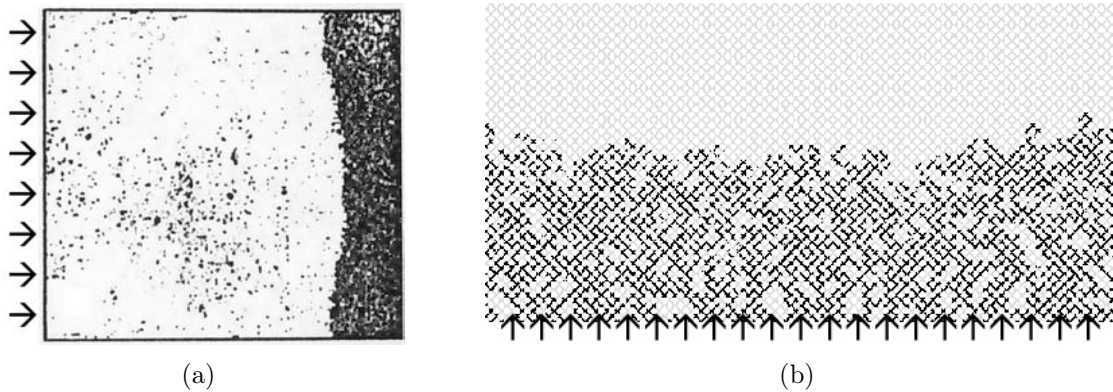


FIG. 1.23 – Images typiques de déplacement stable obtenues : (a) expérimentalement dans des canaux tracés dans de la résine par Lenormand et al. [67], (b) numériquement dans un réseau de canaux de taille variable par Aker et al. [3]. Les flèches indiquent les zones d'injection.

Des motifs de digitation capillaire sont représentés figure 1.22. La digitation capillaire est obtenue pour les faibles nombres capillaires, lorsque les forces visqueuses sont négligeables dans les deux fluides et que la principale force est due à la capillarité ($Ca \ll 1$ et $Ca/M \ll 1$). Des doigts se répandent dans le réseau en occupant une surface plus importante que dans le cas de la digitation visqueuse. Les doigts peuvent aller dans toutes les directions, y compris vers l'arrière et peuvent également former des boucles.

Des motifs de déplacement stable sont représentés figure 1.23. La force principale est ici la viscosité du fluide injecté ($M \gg 1$, $Ca \gg 1$). Les sauts de pression capillaires sont négligeables. L'injection se fait sous la forme d'un front plan avec quelques irrégularités

sur une taille de l'ordre de celle des pores. De petits ensembles de seulement quelques pores de fluide 1 peuvent rester bloqués une fois que le fluide 2 a avancé.

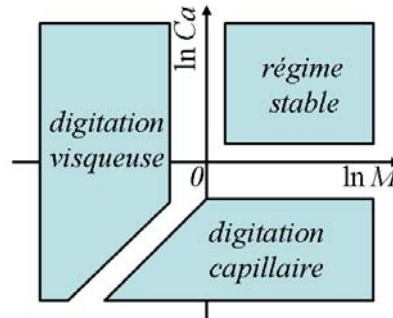


FIG. 1.24 – Diagramme de phase des différents régimes de drainage observés. D'après Lenormand et al. [66, 67].

La figure 1.24 représente un diagramme de phase des 3 régimes observés en fonction des deux nombres caractéristiques M et Ca .

Notons que, pour chacun de ces régimes, il existe un modèle statistique rendant compte des comportements observés [67]. Il s'agit ainsi d'un modèle d'invasion-percolation pour la digitation capillaire. La digitation visqueuse, est elle, bien décrite par un modèle DLA ("Diffusion Limited Aggregation") tandis que le déplacement stable est modélisable par un anti-DLA. L'étude de ces modèles est cependant en dehors de l'objet de cette thèse.

1.4 En résumé

Dans ce chapitre, nous avons introduit un certain nombre de bases scientifiques nous permettant de placer notre étude dans son contexte.

Dans un premier temps, nous avons décrit et caractérisé les suspensions granulaires. Nous avons notamment montré que leur comportement tant macroscopique que microscopique dépendait fortement de la fraction de grains.

Au niveau macroscopique, en tant que fluide effectif, les suspensions granulaires ont ainsi une viscosité qui diverge au voisinage d'une fraction maximale de grains. Elles présentent également pour des fractions de grains voisines de ce maximum des comportements complexes comme des seuils d'écoulement.

Au niveau microscopique, nous avons souligné deux phénomènes importants résultant de la structure diphasique (liquide+grains) : la migration de particules induite par cisaillement et la localisation d'écoulement. Cette dernière, intervenant pour les fractions de grains les plus importantes, est caractérisée par la coexistence de deux parties dans le milieu granulaire : une partie coulante et une autre figée.

Dans un second temps, nous avons décrit l'écoulement diphasique (2 fluides, cette fois-ci) dans deux géométries confinées, la cellule de Hele-Shaw et le milieu poreux. Les phénomènes se produisant dans ces deux configurations sont très similaires.

L'écoulement de fluide pur est ainsi régi dans les deux cas par une loi de Darcy et un champ de pression Laplacien à 2 (cellule de Hele-Shaw) ou à 3 (milieu poreux) dimensions.

Il en découle que, lorsque deux fluides sont en présence, le processus de déstabilisation d'une interface et le phénomène de digitation (instabilité de Saffman–Taylor) sont aussi relativement similaires. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'instabilité de Saffman–Taylor en cellule de Hele-Shaw a tant été étudiée, en particulier dans les milieux de l'industrie pétrolière.

Il existe cependant une différence subtile : le phénomène de digitation peut très bien se comprendre à un niveau macroscopique dans la cellule de Hele-Shaw, alors qu'il faut en venir au niveau microscopique pour le milieu poreux. Cette différence provient de l'obtention des équations macroscopiques du mouvement dans un milieu poreux : il s'agit d'une moyenne se faisant sur plusieurs tailles de pore.

Nous verrons, dans le chapitre 4, qu'en travaillant à une fraction de grains intermédiaire, il est possible de combiner écoulement dans un milieu poreux et écoulement de fluide complexe (pâte granulaire) dans une cellule de Hele-Shaw.

Chapitre 2

Effets d'inertie dans la digitation de Saffman–Taylor

Le phénomène de digitation dans l'instabilité de Saffman–Taylor est régi par la compétition entre capillarité et forces visqueuses. Cependant, si le fluide poussé est peu visqueux et pour les écoulements les plus rapides, l'inertie du fluide peut devenir importante. Dès lors, un troisième type de forces, celles d'inertie, doit être pris en compte. C'est l'objet du présent chapitre. Nous nous intéresserons donc à l'étude des effets d'inertie sur la largeur des doigts pour des nombres de Reynolds Re allant jusqu'à 100. Pour cela nous avons utilisé des huiles silicone, fluides Newtoniens, de faible viscosité que nous avons poussées par de l'air.

2.1 Introduction des effets d'inertie

2.1.1 Petit historique

Comme nous l'avons vu dans le chapitre "Généralités", la largeur des doigts issus de l'instabilité classique de Saffman–Taylor est bien décrite par la compétition entre forces visqueuses et forces capillaires. Le paramètre de contrôle de la digitation $1/B$ (Eq. 1.32) est dérivé du nombre capillaire $Ca = \eta U / \gamma$ (avec η la viscosité, U la vitesse and γ la tension de surface) et détermine donc la largeur des doigts. Dans la très grande majorité des cas étudiés précédemment cela est suffisant car les forces d'inertie sont négligeables.

L'importance de l'inertie est donnée par le rapport des forces d'inertie sur les forces visqueuses. C'est le nombre de Reynolds : $Re = \rho U b / \eta$, avec ρ la densité du fluide visqueux et b l'épaisseur de la cellule de Hele-Shaw dans laquelle les expériences sont menées. Dans la plupart des études sur l'instabilité de Saffman–Taylor, l'épaisseur b est petite et les fluides considérés tant au niveau des expériences que des applications sont typiquement des huiles de forte viscosité. Cela donne naturellement des nombres de Reynolds faibles ($Re \ll 1$) et des effets d'inertie négligeables.

Plus récemment, la digitation visqueuse a été étudiée dans les fluides non-Newtoniens, comme des solutions de polymères [14, 52, 69, 70, 98, 102]. Pour les solutions diluées, utilisées dans un certain nombre de ces études, la viscosité des fluides est généralement de l'ordre de grandeur de celle du fluide constituant (e.g. de l'eau). Ainsi, dans certains de ces cas, le nombre de Reynolds est supérieur à 1. Cela signifie donc que l'inertie

devient importante et il est alors nécessaire de pouvoir dissocier, lors de la digitation, les effets provenant du caractère non-Newtonien des fluides employés de ceux causés par l'inertie. Notons que, dans l'étude des suspensions granulaires (Chapitre 3), nous pouvons atteindre de tels cas pour les géométries de cellules les plus larges. Ce qui nous a aussi incité à étudier ces effets d'inertie.

Par ailleurs, sur le plan théorique, des corrections à la loi de Darcy ont aussi été développées récemment [38, 89]. La loi de Darcy, qui relie le champ de vitesse et celui du gradient de pression est l'une des équations fondamentales de l'instabilité de Saffman–Taylor. Ainsi, une correction de cette loi peut nous aider à mieux comprendre les observations expérimentales.

Nous allons détailler ces corrections dans la sous-partie suivante et voir comment ces dernières peuvent être adaptées à l'instabilité de Saffman–Taylor.

2.1.2 Corrections de la loi de Darcy dues à l'inertie

Modèles théoriques

Quand les forces d'inertie deviennent importantes, deux nombres caractéristiques peuvent, et doivent, être considérés :

- le nombre de Reynolds $Re = \rho U b / \eta$,
- le nombre de Weber $We = \rho U^2 b / \gamma$, rapport des forces d'inertie et des forces capillaires.

Des modifications à la loi de Darcy ont d'abord été proposées par Gondret et Rabaud [38] pour décrire l'écoulement dans la géométrie de la cellule de Hele-Shaw dans le cas de l'instabilité de Kelvin–Helmholtz. Pour cela, l'inertie est moyennée dans la troisième direction, i.e. selon la direction de l'espacement des plaques. Gondret et Rabaud obtiennent alors une équation non linéaire à 2 dimensions pour décrire le champ de vitesse.

Un peu plus tard, Ruyer-Quil [89] a proposé une nouvelle forme de cette équation en partant de l'équation tri-dimensionnelle de Navier–Stokes. Les corrections dues à l'inertie sont introduites de manière perturbative. En utilisant en plus une approximation polynômiale pour le champ de vitesse selon l'épaisseur, Ruyer-Quil propose une équation de Darcy à 2 dimensions de la forme :

$$\rho \left(\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \beta \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p - \frac{12\eta}{b^2} \mathbf{u} , \quad (2.1)$$

avec $\alpha = 6/5$, $\beta = 54/35$ et $\mathbf{u}$ la vitesse moyennée sur l'épaisseur.

Plouraboué et Hinch [86] ont aussi considéré des corrections et sont arrivés à une équation similaire à (2.1) mais avec des coefficients légèrement différents. Cette équation conduit à un meilleur accord entre l'analyse de stabilité linéaire et les données expérimentales de Gondret et Rabaud pour l'instabilité de Kelvin–Helmholtz jusqu'à des nombres de Reynolds pas trop élevés.

Finalement, notons que même si α et β varient selon la manière de moyenner sur l'épaisseur dans les différentes études [38, 86, 89], ils restent cependant toujours de l'ordre de grandeur de 1.

Nombres caractéristiques

De la même manière que pour l'instabilité classique de Saffman–Taylor, en considérant la largeur de la cellule W comme échelle de longueur, W/U comme échelle de temps et $12\eta UW/b^2$ comme échelle de pression, nous trouvons l'équation sans dimension suivante :

$$Re^* \left(\alpha \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \beta \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* \right) = -\nabla^* p^* - \mathbf{u}^* , \quad \text{avec} \quad Re^* = \frac{1}{12} \frac{b}{W} \frac{\rho U b}{\eta} = \frac{b}{12W} Re . \quad (2.2)$$

Re^* est un nombre de Reynolds modifié (i.e. prenant en compte la géométrie de la cellule de Hele-Shaw), de la même manière que le paramètre de contrôle de l'instabilité de Saffman–Taylor $1/B$ est un nombre capillaire modifié.

Nous pouvons aussi introduire un autre nombre caractéristique de l'importance relative entre forces d'inertie et forces capillaires. Il s'agit d'un nombre de Weber modifié :

$$We^* = \frac{\rho U^2 W}{\gamma} = \frac{W}{b} We . \quad (2.3)$$

Écoulement stationnaire et uniforme

Notons que si nous considérons un écoulement stationnaire et uniforme à 2 dimensions dans notre cellule de Hele-Shaw, nous déduisons de l'équation (2.1) qu'il n'y a alors pas de correction due à l'inertie, puisque $\partial \mathbf{u} / \partial t$ et $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ sont tous les deux nuls. Cela est particulièrement important si nous considérons l'écoulement loin du doigt et conduit à l'équation de Darcy classique (Eq. 1.19) :

$$V = -\frac{b^2}{12\eta} \nabla P \quad (2.4)$$

qui, selon cette théorie, resterait valable même pour des nombres de Reynolds Re élevés, ce que nous testerons pour nos expériences.

2.2 Dispositif expérimental

Matériel

Nous avons utilisé une cellule de Hele-Shaw linéaire constituée de 2 plaques de verre séparées par un mince film de Mylar. Les plaques de verre sont horizontales et serrées à l'aide de barres de fer pour obtenir un espacement régulier b . Le canal de largeur W est découpé dans le film de Mylar. Nous pouvons ainsi faire varier le rapport d'aspect du canal. L'épaisseur des plaques de verre est de 2 cm pour éviter leur flexion. La plaque supérieure est percée de deux trous de manière à pouvoir injecter l'air d'un côté et à chasser le fluide visqueux de l'autre. La figure 2.1 représente le montage.

Nous avons travaillé avec différents espacements de plaques b et largeurs de canal W , la longueur du canal étant toujours de 1 m. La cellule est remplie d'huile de silicone et de l'air sous pression est utilisé pour pousser le fluide visqueux.

Nous avons utilisé des huiles de silicone Rhodorsil 47V05, 47V10, 47V20 et 47V100 de Rhodia Silicones. Les mesures de viscosité sur un rhéomètre Reologica Stress-Tech confirment les valeurs de viscosité données par le fournisseur : 5, 10, 20 et 100 mPa.s

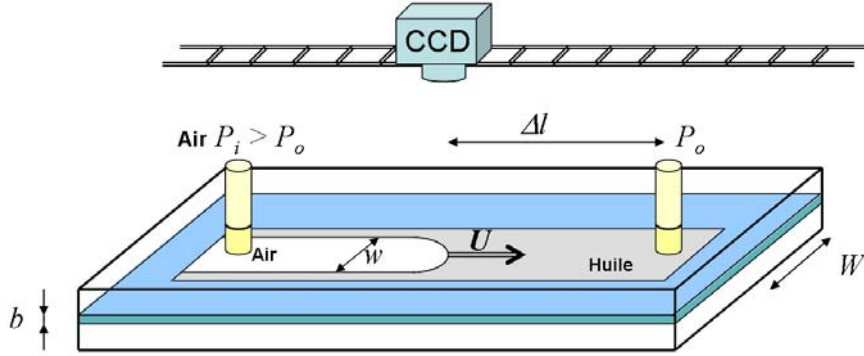


FIG. 2.1 – Schéma du dispositif expérimental.

respectivement, avec une déviation ne dépassant pas 4%. Nous avons aussi utilisé de l'huile 47V02, dont la viscosité a été mesurée à 2.8 mPa.s. La tension de surface γ et la densité ρ des huiles de silicone données par Rhodia Silicones sont de $19.5 \pm 1 \text{ mN m}^{-1}$ et de $0.95 \pm 0.03 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$.

Protocole et mesures

La digitation est induite en appliquant une chute de pression constante $\Delta P = P_i - P_o$ entre l'entrée (inlet) et la sortie (outlet) de la cellule. Selon l'ordre de grandeur du saut de pression appliqué, deux méthodes ont été utilisées. Pour les sauts de pression ΔP plus grands que 3000 Pa, nous avons employé de l'air comprimé et un détendeur associé à un manomètre pour fixer la pression P_i à l'entrée de la cellule. Dans ce cas, la sortie est maintenue à la pression atmosphérique $P_o = P_{atm}$ grâce à un réservoir d'huile couplé à la cellule. Pour les sauts de pression ΔP plus petits que 3000 Pa, nous avons obtenu la chute de pression en baissant simplement le réservoir de sortie d'une certaine hauteur ce qui fixe P_o . Dans ce cas, la pression à l'entrée est la pression atmosphérique : $P_i = P_{atm}$.

Les doigts ont été capturés à l'aide d'une caméra CCD reliée à un ordinateur via une carte d'acquisition (National Instruments). La caméra repose sur un rail parallèle à la cellule de Hele-Shaw de sorte à pouvoir suivre le doigt lors de son avancée dans la cellule. Des graduations régulières placées sur la cellule permettent de mesurer la largeur et la position du doigt et d'en déduire la largeur relative de ce dernier $\lambda = w/W$ en fonction de sa vitesse U . Pour chaque configuration (géométrie de cellule et viscosité de fluide), entre 10 et 20 expériences ont été faites. En faisant varier la chute de pression, nous avons obtenu différentes plages de vitesse. La limite de stabilité a été atteinte dans certains cas mais l'ensemble des résultats présentés ici correspondent à des doigts stables.

Pour atteindre des nombres de Reynolds élevés, nous pouvons non seulement faire varier la vitesse du doigt et la viscosité de l'huile mais aussi l'épaisseur du canal. Nous avons ainsi travaillé avec différentes géométries de cellule. Elles sont indiquées tableau 2.1.

Pour les géométries utilisées, le rapport d'aspect W/b varie entre 28 (géométrie 4) et 160 (géométrie 1). Notons que même si un rapport de 28 est plutôt petit, il est suffisant pour considérer l'expérience comme étant quasi bi-dimensionnelle. Nous observons ainsi que, pour les différentes géométries, les résultats de largeurs de doigts obtenus pour les fluides de plus grande viscosité (et donc ceux pour lesquels les effets d'inertie sont

	épaisseur b	largeur W	rapport d'aspect W/b
géométrie 1	0.25 mm	40 mm	160
géométrie 2	0.75 mm	80 mm	107
géométrie 3	0.75 mm	40 mm	53
géométrie 4	1.43 mm	40 mm	28

TAB. 2.1 – *Géométries de cellule utilisées dans nos expériences.*

négligeables) ne présentent que très peu de différences entre eux. La petite différence observée est uniquement due au effets de film [99], comme nous le verrons par la suite.

Les expériences ont été menées dans toutes les géométries pour les huiles silicone 47V05, 47V10 et 47V20. L'huile silicone 47V02 a été utilisée dans les géométries 2 et 3, tandis que l'huile 47V100 a été testée dans les géométries 3 et 4. Notons finalement que les valeurs typiques de nombre capillaire Ca dans nos expériences étaient situées entre 0.01 (pour l'huile V02) et 0.5 (V100).

2.3 Loi de Darcy

Considérant que l'écoulement loin de la tête du doigt est uniforme, nous nous attendons à ce que la loi de Darcy (1.19) reliant classiquement la vitesse V moyennée sur l'épaisseur du canal au gradient de pression imposé ∇P dans la cellule de Hele-Shaw reste valable pour nos expériences :

$$V = -\frac{b}{12\eta}\nabla P . \quad (2.5)$$

La conservation de la masse nous permet d'obtenir la vitesse V du fluide loin de l'interface en fonction de la vitesse mesurée du doigt U et de sa largeur relative λ en utilisant simplement $V = \lambda U$, si le film de mouillage laissé sur les plaques derrière le doigt est négligé. Le gradient de pression imposé est calculé par : $|\nabla P| = \Delta P / \Delta l$ où ΔP est le saut de pression mesuré et Δl la distance entre la tête du doigt et la sortie de la cellule. Notons que le saut de pression à l'interface estimé par $2\gamma/b$ est de l'ordre de 40 Pa ce qui est négligeable par rapport aux différences de pression appliquées.

Dans nos expériences, les doigts ont des vitesses élevées et nous atteignons des nombres capillaires Ca qui peuvent être importants. La présence d'un film de mouillage laissé sur les plaques de verre après le passage du doigt ne peut donc plus être négligée. Ce film de mouillage est pris en compte en écrivant :

$$V = \lambda U(1 - 2t/b) , \quad (2.6)$$

où t est l'épaisseur du film de mouillage, que nous estimons en utilisant le résultat empirique de Tabeling *et al.* [99, 100] :

$$t = \kappa b[1 - \exp(-\gamma W/b)][1 - \exp(-\beta Ca^{2/3})] , \quad (2.7)$$

où $\kappa \approx 0.119$, $\gamma \approx 0.038$ et $\beta \approx 8.58$. Pour nos données, la correction $2t/b$ varie de 0.02 à 0.2. Notons que cette simple correction ne prend pas en compte une éventuelle

modification de l'épaisseur du film de mouillage due aux effets d'inertie. Quoiqu'il en soit cette correction permet d'obtenir une amélioration significative de l'ajustement de nos données.

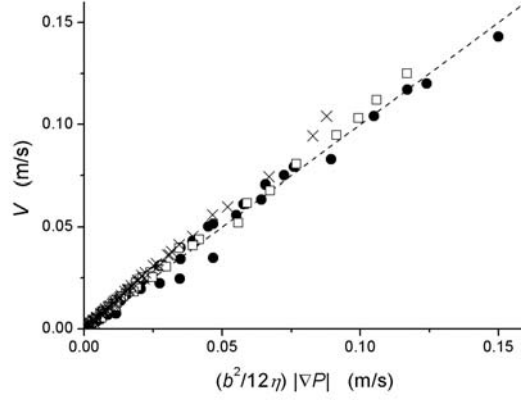


FIG. 2.2 – Vitesse de l'écoulement en fonction du gradient de pression appliqué pour toutes les viscosités (V02, V05, V10, V20 et V100) et les différentes géométries de cellule : ●, $b = 1.43$ mm $W = 4$ cm ; ×, $b = 0.75$ mm $W = 4$ cm ; □, $b = 0.75$ mm $W = 8$ cm ; +, $b = 0.25$ mm $W = 4$ cm.

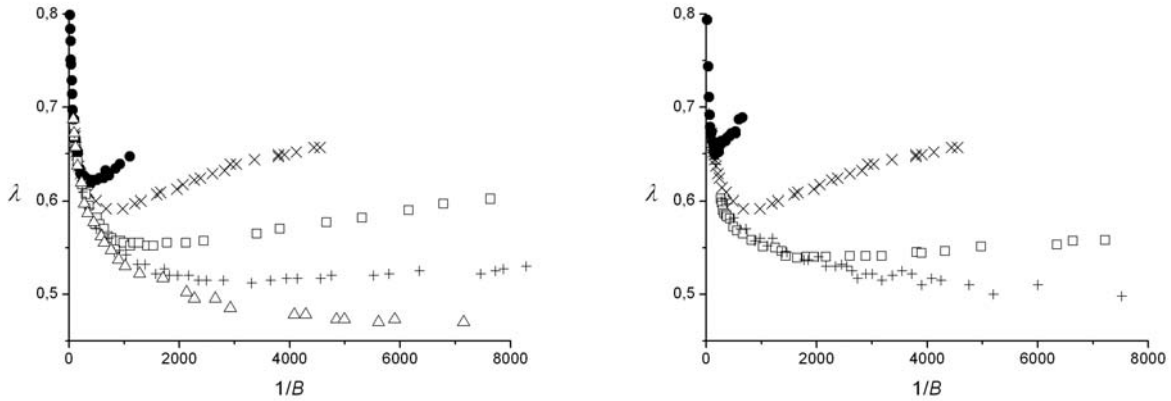
Ayant appliqué cette correction, nous pouvons tester la validité de la loi de Darcy (2.5). La figure 2.2 représente la vitesse V en fonction de $(b^2/12\eta)|\nabla P|$ pour les différentes géométries et huiles utilisées. La ligne en tirets représente la relation linéaire de pente unitaire que l'on attend de l'équation (2.5). Nous remarquons que les données expérimentales sont en très bon accord avec la loi de Darcy classique. Ce résultat reste en particulier valable pour les vitesses élevées où un effet significatif de l'inertie est pourtant observé sur la largeur des doigts.

Nous avons donc montré que, pour l'écoulement uniforme loin du doigt et pour les valeurs de nombre de Reynolds testées ici, aucun effet de l'inertie n'est observé sur la loi de Darcy. C'est le résultat que nous attendions de notre première analyse dans la sous-partie 2.1.2. Notons cependant que ce résultat n'implique nullement qu'il n'existerait pas de correction due à l'inertie sur la relation locale entre gradient de pression ∇p et vitesse $\mathbf{u}$ à proximité du doigt.

2.4 Largeur des doigts

2.4.1 Largeur relative des doigts en fonction du paramètre de contrôle classique $1/B$

Les figures 2.3(a) et 2.3(b) représentent la largeur relative des doigts en fonction du paramètre de contrôle classique $1/B$ lorsque l'on fait varier la viscosité du fluide à géométrie de cellule donnée (Fig. 2.3a) ou lorsque l'on fait varier la géométrie pour un fluide donné (Fig. 2.3b). Ces figures montrent que pour les faibles valeurs de $1/B$, la largeur évolue de manière classique : elle décroît lorsque le paramètre $1/B$ augmente. Par



(a) Géométrie de cellule $b = 0.75$ mm $W = 4$ cm, pour différents fluides : $\bullet$, V02; $\times$, V05; $\square$, V10; $+$ V20; $\triangle$, V100.

(b) Fluide V05, pour différentes géométries de cellule : $\bullet$, $b = 1.43$ mm $W = 4$ cm; $\times$, $b = 0.75$ mm $W = 4$ cm; $\square$, $b = 0.75$ mm $W = 8$ cm; $+$, $b = 0.25$ mm $W = 4$ cm.

FIG. 2.3 – Largeur relative des doigts λ en fonction du paramètre de contrôle classique $1/B$.

contre, à une certaine valeur de $1/B$, qui diffère selon les configurations, une croissance de la largeur relative est observée. Ce phénomène apparaît systématiquement pour des valeurs élevées du nombre de Reynolds et nous en déduisons qu'il est lié aux effets d'inertie.

Pour une géométrie donnée, le fluide de plus forte viscosité donne la courbe maîtresse de la digitation classique de Saffman–Taylor. Considérant cela, nous en déduisons que l'écart au cas classique arrive à des paramètres de contrôle $1/B$ d'autant plus petits que le fluide est peu visqueux (Fig. 2.3a). Les données à viscosité fixée (Fig. 2.3b) montrent, elles, que la croissance de la largeur des doigts apparaît pour un $1/B$ d'autant plus petit que l'épaisseur entre les plaques est grande. Ces deux observations sont en accord avec la possibilité que l'augmentation de la largeur relative soit due aux effets d'inertie.

Comparons, figure 2.3(b), les données à épaisseur de canal fixée ($b = 0.75$ mm) et pour deux largeurs différentes ($W = 4$ et $W = 8$ cm). Nous voyons que la valeur minimale des largeurs relatives est obtenue pour un $1/B$ qui dépend aussi de W . Nous observons que ce $1/B$ est d'autant plus petit que la largeur du canal l'est. Cela est toujours consistant avec un nombre de Reynolds élevé (Re ou Re^*) : à une valeur donnée de $1/B$ et pour des valeurs fixes de η et b , une diminution de la taille du canal provoque une augmentation du nombre de Reynolds. En effet, des hypothèses précédentes nous déduisons que $W^2 U$ est fixé et que, par conséquent le nombre de Reynolds Re évolue comme $1/W$ (et Re^* comme $1/W^3$).

Finalement, notre conclusion est que, dû aux effets d'inertie, nos résultats expérimentaux dévient du résultat classique de Saffman–Taylor : nous observons un régime où la largeur du doigt augmente. Cette augmentation arrive pour un paramètre de contrôle $1/B$ d'autant plus petit que la viscosité est faible, l'épaisseur du canal grande ou la largeur du canal petite. Considérant l'ensemble de nos expériences, ces effets d'inertie sont observés pour toutes les vitesses supérieures à 0.08 m s^{-1} . Ainsi, même si de forts

changements sont observés pour la largeur des doigts, notons qu'il n'y a aucune variation pour la loi de Darcy dans ce régime (Fig. 2.2).

Nous allons étudier, par la suite, ces effets d'inertie en introduisant les nombres caractéristiques faisant intervenir l'inertie (Reynolds et Weber). Pour cela, nous nous intéresserons principalement à une géométrie donnée ($b = 0.75$ mm, $W = 4$ cm), bien que les résultats soient valables pour l'ensemble de nos résultats.

2.4.2 Largeur relative des doigts en fonction du nombre de Reynolds modifié Re^*

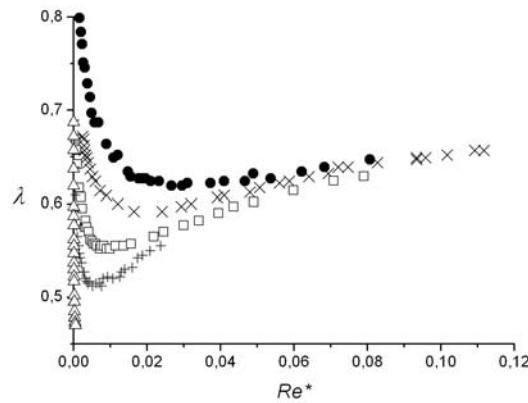


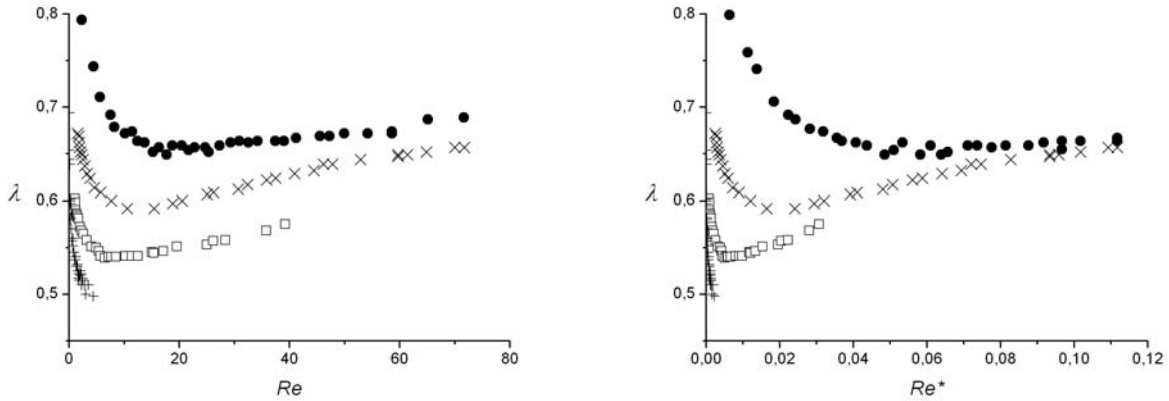
FIG. 2.4 – Largeur relative des doigts λ en fonction du nombre de Reynolds modifié Re^* pour une géométrie donnée de cellule $b = 0.75$ mm $W = 4$ cm et différents fluides : ●, V02; ×, V05; □, V10; +, V20; △, V100.

Nous avons représenté, figure 2.4, la largeur relative des doigts en fonction du nombre de Reynolds modifié Re^* . La première observation que l'on puisse faire est que le minimum des courbes (qui signale le moment où l'on s'écarte de l'instabilité classique) n'est pas fixé par un nombre de Reynolds Re^* particulier.

Cependant, pour les nombres de Reynolds modifiés élevés, nous observons que les résultats tendent à s'aligner sur une nouvelle courbe maîtresse. La largeur des doigts semble dans ce cas être uniquement donnée par Re^* .

Pour pouvoir discerner le caractère réellement relevant du nombre de Reynolds modifié Re^* par rapport au nombre de Reynolds classique Re ($Re^* = \frac{b}{W} Re$), il convient de comparer des résultats en faisant varier la géométrie de la cellule. Les figure 2.5(a) et 2.5(b) représentent les résultats expérimentaux pour l'huile V05 en fonction de Re et de Re^* . Sur la figure 2.5(b), nous remarquons que le tracé de nos données en fonction du nombre de Reynolds modifié Re^* permet de retrouver la courbe limite mentionnée précédemment tandis que, sur la figure 2.5(a), ces mêmes données placées en fonction de Re ne s'ajustent manifestement pas.

Nous en concluons, que le nombre de Reynolds modifié Re^* est vraisemblablement le paramètre pertinent pour décrire la largeur des doigts lorsque les effets d'inertie sont importants.



(a) Largeur relative des doigts λ en fonction du nombre de Reynolds non modifié Re .

(b) Largeur relative des doigts λ en fonction du nombre de Reynolds modifié Re^* .

FIG. 2.5 – Observations pour le fluide V05 et différentes géométries de cellule : $\bullet$, $b = 1.43$ mm $W = 4$ cm ; $\times$, $b = 0.75$ mm $W = 4$ cm ; $\square$, $b = 0.75$ mm $W = 8$ cm ; $+$, $b = 0.25$ mm $W = 4$ cm.

2.4.3 Largeur relative des doigts en fonction du nombre de Weber modifié We^*

Nous avons donc maintenant deux cas limites. Pour les "faibles" vitesses, les données de largeurs relatives se placent sur la courbe classique de Saffman–Taylor, le paramètre de contrôle étant $1/B$. Pour les vitesses "élevées", il existe une seconde courbe universelle et le paramètre pertinent est Re^* . Cela nous suggère que la bifurcation entre les deux régimes puisse être déterminée par le nombre de Weber modifié, combinant Re^* et $1/B$:

$$We^* = Re^* \cdot 1/B = \frac{\rho U^2 W}{\gamma} = \frac{W}{b} We . \quad (2.8)$$

Les données expérimentales viennent appuyer cette remarque. La figure 2.6 représente la largeur relative des doigts en fonction du nombre de Weber modifié We^* . Toutes les données expérimentales présentent un minimum pour une même valeur We_c^* du nombre de Weber modifié de l'ordre de 15 et qui sépare ainsi les deux cas limites.

Notons que, même si le nombre de Weber modifié régit la transition, nous n'observons pas de régime où la largeur des doigts serait donnée par une compétition entre capillarité et inertie. En effet, si nous considérons la dépendance en vitesse des différentes forces, les forces capillaires sont en U^0 , les forces visqueuses en U^1 et les forces d'inertie en U^2 . Par conséquent, les forces dominantes sont, à faible vitesse, les forces capillaires et visqueuses (paramètre de contrôle $1/B$) et à vitesse élevée, les forces visqueuses et l'inertie (paramètre de contrôle Re^*). Cet argument simple explique ainsi qu'en fonction de la vitesse, il n'existe pas de régime où la largeur des doigts est donnée par We^* .

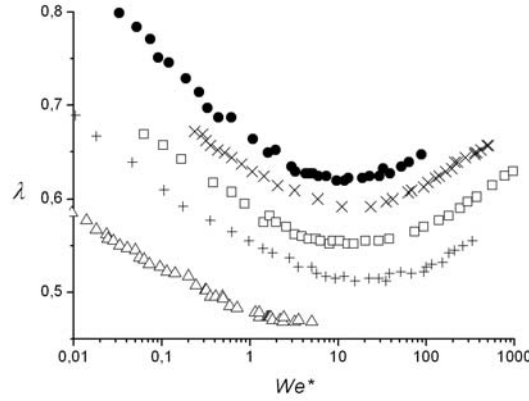


FIG. 2.6 – Largeur relative des doigts λ en fonction du nombre de Weber modifié We^* pour une géométrie donnée de cellule $b = 0.75$ mm $W = 4$ cm et différents fluides : $\bullet$, V02; $\times$, V05; $\square$, V10; $+$ V20; $\triangle$, V100.

2.4.4 Extension à une nouvelle courbe maîtresse

Le paramètre We^* ($= Re^* \cdot 1/B$) qui peut être vu comme le rapport entre $1/B$ et $1/Re^*$, représente l'importance relative de ces deux paramètres avec un croisement donné par la valeur critique $We_c^* \approx 15$.

Nous pouvons, dès lors, définir empiriquement un paramètre de contrôle modifié prenant en compte ce croisement :

$$1/B' = 1/B \left(\frac{1}{1 + We^*/We_c^*} \right). \quad (2.9)$$

Le paramètre $1/B'$ tend vers $1/B$ pour les petits We^* ($We^* < We_c^*$) et vers We_c^*/Re^* pour les grands We^* ($We^* > We_c^*$).

La figure 2.7 montre les données expérimentales déjà représentées figure 2.3(a), mais la largeur relative λ est maintenant tracée en fonction de $1/B'$ en considérant $We_c^* = 15$. Nous observons avec enthousiasme que les données expérimentales se placent sur une seule courbe universelle quand elles sont représentées en fonction du paramètre de contrôle modifié. Cette courbe est, de plus, identique au résultat classique de McLean et Saffman [75] sur la digitation visqueuse qui est représenté expérimentalement par les données obtenues sur le fluide le plus visqueux (où les effets d'inertie n'interviennent pas). Notons que dans cette représentation, les données sont maintenant repliées sur elles-mêmes.

Les figures 2.8(a) and 2.8(b) présentent l'ensemble de nos résultats. Sur la figure 2.8(a), les largeurs relatives des doigts sont représentées en fonction du paramètre de contrôle classique $1/B$. Remarquons que ces données ne sont pas uniquement obtenues en faisant varier la viscosité du fluide mais aussi la géométrie de la cellule en changeant l'épaisseur et la largeur. Sur la figure 2.8(b), les mêmes données sont représentées en fonction de $1/B'$, notre paramètre de contrôle modifié, en considérant pour toutes les expériences $We_c^* = 15$. Nous observons que la totalité de nos données se replace bien sur une seule courbe quand elles sont représentées en fonction de $1/B'$. Rappelons que cette courbe est identique à celle du résultat classique de McLean et Saffman [75].

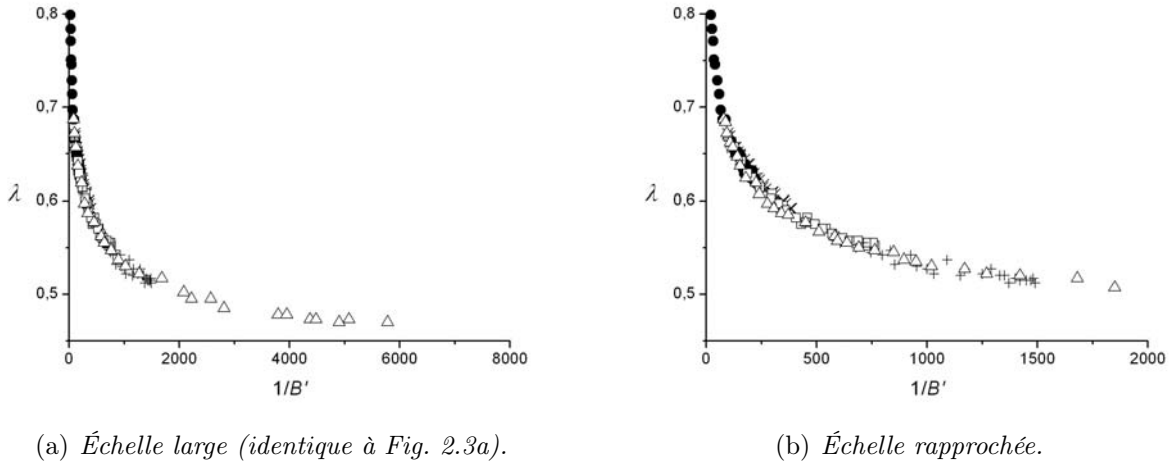
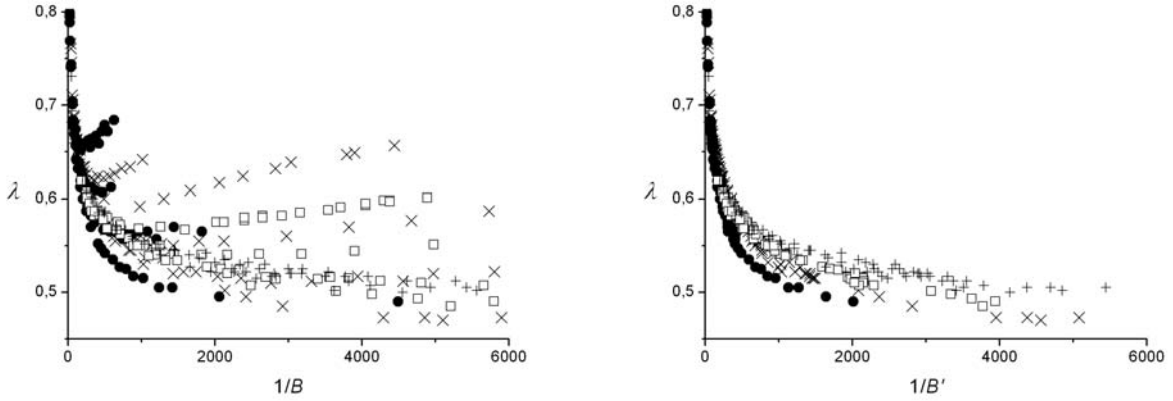


FIG. 2.7 – Largeur relative des doigts λ en fonction du paramètre de contrôle modifié $1/B'$ pour une géométrie donnée de cellule $b = 0.75$ mm $W = 4$ cm et différents fluides : $\bullet$, V02; $\times$, V05; $\square$, V10; $+$ V20; $\triangle$, V100.

Nous n'avons, pour le moment, pas discuté de l'influence du rapport d'aspect sur la largeur relative des doigts. Même si cette influence est faible, elle peut expliquer la petite différence observable entre les 4 géométries utilisées (Fig. 2.8b). Par contre, si nous considérons une géométrie de cellule fixée, les données expérimentales s'ajustent parfaitement, comme nous pouvons le constater figures 2.7. Si nous remarquons également que ces différences peuvent déjà être observées pour les cas où les effets d'inertie sont négligeables, nous en déduisons que les petites différences résiduelles observées figure 2.8(b) sont dues aux effets de film. Notons que ces effets sont aussi responsables de la légère décroissance de la largeur relative des doigts en dessous de $\lambda = 0.5$ [100] observable sur la même figure.

L'interprétation physique de nos résultats est la suivante. Le paramètre de contrôle modifié représente un croisement entre $1/B$ et Re^* . Pour les petits We^* ($We^* < We_c^*$), $1/B$ est le paramètre de contrôle et les principales forces en présence sont la tension de surface et les forces visqueuses, qui donnent un amincissement des doigts quand la vitesse augmente car les forces visqueuses l'emportent alors sur la tension de surface. Pour des vitesses plus élevées ($We^* > We_c^*$), les forces principales sont les forces visqueuses et l'inertie. La compétition entre ces deux forces conduit à un élargissement des doigts pour des vitesses croissantes. Nous en déduisons que l'inertie tend à élargir les doigts. Une tentative d'explication qualitative serait qu'en présence d'inertie, la vitesse du doigt étant réduite pour un débit donné, il y aurait alors un élargissement du doigt.

Comme les effets des forces d'inertie sont similaires à ceux des forces capillaires, dans le sens où elles conduisent, toutes les deux à un élargissement des doigts, et comme le mécanisme classique de sélection des doigts semble rester intact, nous pouvons essayer d'inclure les forces d'inertie dans une tension de surface effective. Le paramètre de contrôle modifié $1/B'$ peut ainsi être réécrit comme un paramètre de contrôle classique $1/B = 12(\frac{W}{b})^2 \eta U / \gamma$ en incluant l'inertie dans une tension de surface effective de la



(a) Largeur relative des doigts λ en fonction du paramètre de contrôle classique $1/B$.

(b) Largeur relative des doigts λ en fonction du paramètre de contrôle modifié $1/B'$.

FIG. 2.8 – Observations pour toutes les viscosités ($V02$, $V05$, $V10$, $V20$ et $V100$) et les différentes géométries de cellule : $\bullet$, $b = 1.43$ mm $W = 4$ cm ; $\times$, $b = 0.75$ mm $W = 4$ cm ; $\square$, $b = 0.75$ mm $W = 8$ cm ; $+$, $b = 0.25$ mm $W = 4$ cm.

forme :

$$\gamma_{eff} = \gamma(1 + We^*/We_c^*), \quad (2.10)$$

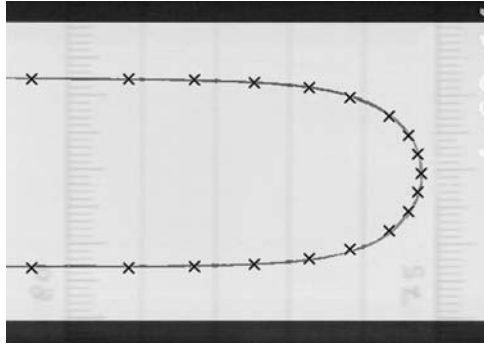
qui donne exactement le même ajustement des données observé figures 2.7 and 2.8(b).

2.5 Quelques éléments théoriques

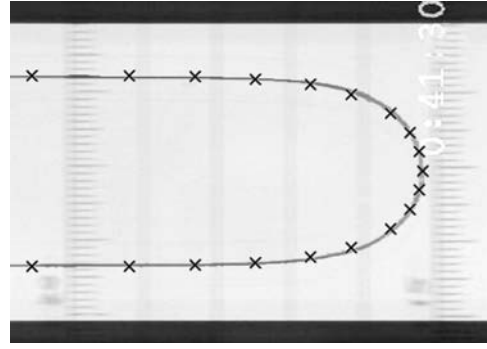
2.5.1 Profil des doigts

Expérimentalement, nous observons que même si le mode de sélection de la largeur relative du doigt évolue pour des vitesses suffisamment élevées, le profil du doigt n'est pas modifié. Les figures 2.9(a) et 2.9(b) représentent les images de doigts obtenus pour des $1/B'$ identiques (à 5% près) et ayant donc des largeurs relatives identiques ($\lambda = 0.63$), mais présentant dans un cas des effets d'inertie (Fig. 2.9b) et dans l'autre cas non (Fig. 2.9a). Nous avons comparé le profil de ces doigts à la prédiction faite par Pitts [85] pour les doigts classiques de Saffman–Taylor, ne prenant donc pas en compte les effets d'inertie (Eq. 1.34). Les profils expérimentaux sont en excellent accord avec la prédiction. Cela indique donc que, pour une taille de doigt donnée, le profil de ce dernier n'est pas modifié par l'inertie. Ces observations sont valables pour l'ensemble des expériences.

Ces résultats nous incitent à introduire les effets d'inertie d'une manière perturbative dans le cadre classique du traitement de l'instabilité de digitation visqueuse de Saffman–Taylor. Nous avons ainsi choisi de simplement considérer une modification de la loi de Darcy.



(a) Doigt sans effets d'inertie : $We^* = 5 < We_c^*$, huile V02, vitesse $U = 5.2 \text{ cm s}^{-1}$, $b = 0.75 \text{ mm}$, $W = 4 \text{ cm}$.



(b) Doigt avec effets d'inertie : $We^* = 30 > We_c^*$, huile V02, vitesse $U = 12.5 \text{ cm s}^{-1}$, $b = 0.75 \text{ mm}$, $W = 4 \text{ cm}$.

FIG. 2.9 – Photographies de doigts de largeur relative $\lambda = 0.63$ sans et avec effets d'inertie. $\times$, profil du doigt ($\lambda = 0.63$) prédit, sans effets d'inertie, par la théorie de Pitts [85].

2.5.2 Perturbation de la loi de Darcy

Une modification de la loi de Darcy a déjà été introduite dans la partie 2.1.2. Nous allons maintenant considérer une équation de type Euler–Darcy (une équation de Darcy qui sera corrigée pour prendre l'inertie en compte) dans le repère du doigt.

Nous partons de l'équation (2.1) portant sur le champ de vitesse à deux dimensions $\mathbf{u}(x, y, t)$ dans le repère du laboratoire. Dans le repère mobile du doigt, le problème est par définition stationnaire. Considérons $\mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{u}'(x - Ut, y) + U\mathbf{e}_x$. Nous obtenons pour la vitesse $\mathbf{u}'(x, y)$ dans le repère lié au doigt :

$$\rho \left(-\alpha U \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} + \beta U \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} + \beta \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' \right) = -\nabla p - \frac{12\eta}{b^2} (\mathbf{u}' + U\mathbf{e}_x) . \quad (2.11)$$

En utilisant le même adimensionnement que dans la sous-partie 2.1.2, et en se passant d'indiquer les $*$ (valeurs adimensionnées) et les $'$ (repère du doigt) pour les variables, nous trouvons :

$$Re^* \left((\beta - \alpha) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \beta \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p - \mathbf{u} - \mathbf{e}_x . \quad (2.12)$$

Nous supposons maintenant que l'écoulement reste potentiel, c'est à dire que $\mathbf{u} = \nabla \phi$. Cette restriction à un écoulement potentiel sans vorticité est possible dès lors que les conditions aux limites qui s'appliquent sur les bords de la cellule et au doigt ne sont pas modifiées. Si c'est le cas, nous pouvons écrire :

$$\phi = - \left[p + Re^* [(\beta - \alpha)u_x + \frac{1}{2}\beta u^2] + x + cst \right] \quad \text{et} \quad \Delta \phi = 0 . \quad (2.13)$$

Sur le coté du doigt et loin de sa tête, il n'y a pas d'effets d'inertie : le fluide est au repos dans le repère du laboratoire et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{u} = -\mathbf{e}_x$ dans le repère du doigt. Par conséquent, nous devons choisir la constante égale à $Re^*(\beta/2 - \alpha)$ de manière à annuler les effets d'inertie dans les conditions citées.

Notons que loin de l'interface du doigt en aval de l'écoulement, nous avons une vitesse $\mathbf{u}$ uniforme et nous déduisons de (2.13) :

$$\mathbf{u} = \nabla \phi = -\nabla p - 1 , \quad (2.14)$$

qui donne simplement l'équation classique de Darcy (2.5) dans le repère du laboratoire.

L'équilibre mécanique de l'interface impose que la contrainte normale s'équilibre des deux cotés : $p = -\tilde{\gamma}/R$ ($R > 0$), où $\tilde{\gamma} = (b/W)^2\gamma/(12\eta U) = 1/B^{-1}$ est la tension de surface et R le rayon de courbure, tous les deux étant adimensionnalisés. En considérant cela nous obtenons la condition aux limites suivante pour le potentiel ϕ à l'interface :

$$\phi_\Gamma = - \left[-\tilde{\gamma}/R + Re^*[(\beta - \alpha)u_x + \frac{1}{2}\beta u^2 + \beta/2 - \alpha] + x \right] . \quad (2.15)$$

Comme la vitesse normale à l'interface u_n est nulle dans le repère du doigt, la seule composante restante de la vitesse est celle tangentielle u_t et nous pouvons utiliser les notations de McLean et Saffman [75] :

$$\mathbf{u} = u_t \mathbf{e}_t = -q(\cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y) , \quad (2.16)$$

où q varie de 0 (à la tête du doigt) à 1 (sur ses cotés) quand θ varie de $-\pi/2$ à 0. Nous pouvons donc remplacer u^2 par q^2 et $-u_x$ par $q \cos \theta$.

Comme q est principalement donné par $\cos \theta$, nous pouvons écrire :

$$\phi_\Gamma = -x + \tilde{\gamma} \left[1/R + We^*(\alpha - \beta/2) \sin^2 \theta \right] . \quad (2.17)$$

Dans l'équation (2.17), peu importe que nous considérons les travaux de Gondret et Rabaud [38], de Ruyer–Quil [89] ou de Plouraboué et Hinch[86], $(\alpha - \beta/2)$ est positif. La correction due à l'inertie a ainsi le même signe que la courbure. De plus, elle s'annule également sur le coté du doigt. Cela montre que le terme inertiel est vraiment très similaire à celui de la capillarité. Les forces d'inertie doivent donc agir de manière similaire aux forces capillaires. C'est ce qui est effectivement observé expérimentalement puisque les forces d'inertie tendent à élargir le doigt.

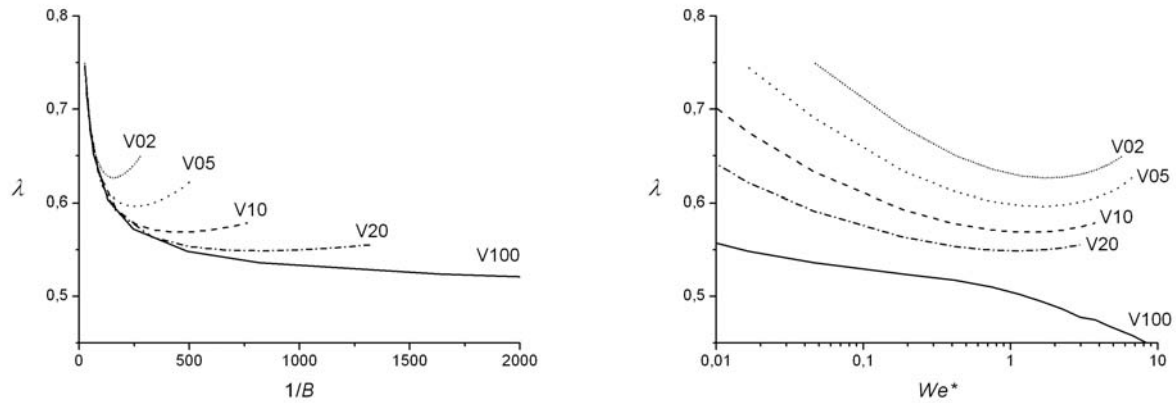
Finalement, si nous réécrivons l'équation (2.17), nous pouvons obtenir :

$$\phi_\Gamma = -x + \hat{\gamma}(\theta)/R, \quad \text{avec} \quad \hat{\gamma}(\theta) = \tilde{\gamma} \left[1 + We^*(\alpha - \beta/2)R(\theta) \sin^2 \theta \right] . \quad (2.18)$$

Cette équation au niveau théorique rappelle la précédente équation phénoménologique (2.10) obtenue en considérant le paramètre de contrôle modifié $1/B'$ et une tension de surface effective γ_{eff} .

2.5.3 Simulations numériques et comparaison aux données expérimentales

Le mode de sélection de la taille relative des doigts ne peut, bien sûr, être compris théoriquement qu'en utilisant une analyse sophistiquée des perturbations singulières à la pointe du doigt. Cependant, la taille relative des doigts peut être obtenue numériquement en modifiant la méthode de McLean et Saffman [75]. Nous avons choisi de comparer cette procédure à nos résultats expérimentaux. Les corrections de Ruyer–Quil ont ainsi été introduites par Martine Ben Amar dans son modèle numérique en utilisant l'équation (2.15). Les corrections du film de mouillage ont été introduites simplement par une modification de la tension de surface comme proposée par Tabeling et Libchaber [99]. Pour l'épaisseur du film, l'équation (2.7) a été utilisée (sans prise en compte d'un possible effet de l'inertie).



(a) Largeur relative des doigts λ en fonction du paramètre de contrôle $1/B$.

(b) Largeur relative des doigts λ en fonction du nombre de Weber modifié We^* .

FIG. 2.10 – Simulations numériques pour une géométrie donnée de cellule $b = 0.75$ mm $W = 4$ cm.

Dans ce cadre, les simulations numériques confirment les arguments simples donnés dans la sous-partie précédente. De manière similaire aux expériences, les courbes présentent bien une phase d'augmentation de la largeur relative des doigts comme nous pouvons le voir sur la figure 2.10(a). Les observations pour les résultats du modèle numérique sont les suivants :

- Les effets d'inertie sont effectivement plus importants et apparaissent pour des plus petites valeurs critiques de $1/B$ pour les fluides les moins visqueux (Fig. 2.10a) ainsi que pour les canaux plus épais ou moins larges.
- Les minima de la courbe de largeur relative en fonction du nombre de Weber modifié We^* sont situés aux alentours d'une unique valeur We_c^* . Cependant, comme nous pouvons le voir figure 2.10(b), la valeur numérique de We_c^* est différente pour les simulations (≈ 2) et pour nos expériences (≈ 15).

Si nous comparons les résultats des simulations avec les données expérimentales, nous observons qu'ils sont en accord qualitatif mais pas quantitatif, comme représenté figure 2.11.

Quand il existe des effets d'inertie, nous pouvons caractériser ces derniers en s'intéressant à la valeur critique du paramètre de contrôle $1/B_c$ pour lequel la largeur relative des doigts est minimale (valeur λ_c). Comme nous constatons figure 2.11, il apparaît alors que les simulations numériques tendent à donner des estimations plutôt correctes de λ_c mais que, par contre, elles sous-estiment la valeur de $1/B_c$. Remarquons également que la croissance de la courbe $\lambda-1/B$ est nettement plus forte pour les simulations.

Cependant, même pour les cas où l'inertie est négligeable (pour les fluides les plus visqueux), les résultats des simulations diffèrent faiblement mais significativement des données expérimentales. Nous pensons que cela provient de notre correction trop simple du film de mouillage. Par conséquent il est clair que nous ne pouvons pas obtenir d'accord parfait entre expériences et simulations en y ajoutant les effets d'inertie. Pour avoir un accord quantitatif, il faudrait certainement analyser les effets tri-dimensionnels qui

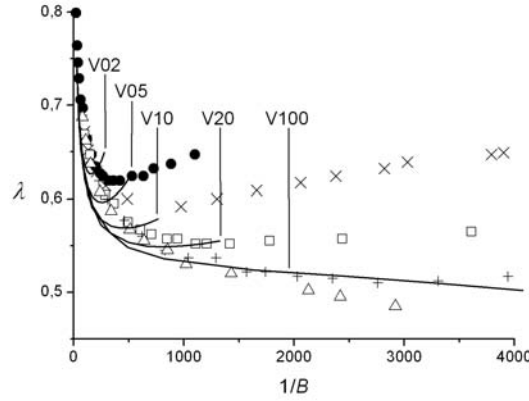


FIG. 2.11 – Largeur relative des doigts λ en fonction du paramètre de contrôle $1/B$ pour une géométrie donnée de cellule $b = 0.75$ mm $W = 4$ cm : comparaison entre simulations (lignes) et résultats expérimentaux ($\bullet$, V02; $\times$, V05; $\square$, V10; $+$ V20; $\triangle$, V100).

deviennent importants lorsque l'on se place à une distance de l'ordre de b de l'interface. Park, Homsy, Reinelt et Saffman [81, 87] ont ainsi montré qu'il n'est pas possible de réduire le problème à 2 dimensions dès lors que les conditions aux limites des doigts étaient modifiées [11]. Ils ont aussi trouvé que cette réduction à 2 dimensions n'était possible que pour un paramètre $We = \rho U^2 b / \gamma$ petit. Ce n'est pas vraiment le cas de notre problème et il faudrait donc trouver de nouvelles conditions aux limites corrigées à partir de la théorie à 3 dimensions de Park, Homsy, Reinelt et Saffman en y incorporant les effets d'inertie. Cela n'est cependant pas l'objectif ici où l'accord qualitatif est déjà très satisfaisant.

2.6 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre les effets d'inertie sur l'instabilité de Saffman–Taylor [22]. Ces effets deviennent importants pour les fluides de faible viscosité, les grandes épaisseurs et les faibles largeurs de cellule de Hele-Shaw. Dans ces situations, nous observons, pour des vitesses croissantes et à la suite de la classique décroissance, une phase d'augmentation de la largeur relative des doigts. Cette phase est due aux effets d'inertie.

Nous avons introduit un nombre de Weber modifié $We^* = \frac{\rho U^2 W}{\gamma}$ qui nous permet de délimiter les deux régimes, la transition étant donnée par un nombre de Weber critique We_c^* . En dessous de We_c^* , le régime classique de décroissance de la largeur relative des doigts est observé. Cette largeur est bien déterminée par le paramètre de contrôle classique $1/B = 12(\frac{W}{b})^2 \frac{\eta U}{\gamma}$, qui est un nombre capillaire modifié. La taille des doigts dans ce régime est donnée par la compétition entre forces capillaires (qui tendent à élargir les doigts) et forces visqueuses (qui tendent à les amincir). Pour des vitesses croissantes, les forces visqueuses dominent et nous observons donc un amincissement des doigts. Dans le second régime, au delà de We_c^* , nous observons au contraire une phase d'augmentation de la largeur relative avec la vitesse. Dans ce cas, la largeur des doigts est déterminée

par un nombre de Reynolds modifié $Re^* = \frac{1}{12} \frac{\rho U b^2}{\eta W}$ et donc par la compétition entre forces visqueuses et forces d'inertie. Il apparaît alors que les forces d'inertie, dominantes pour les fortes vitesses, tendant à élargir le doigt.

Nous avons aussi montré que l'on peut définir un nouveau paramètre de contrôle, $1/B'$, qui prend les corrections dues à l'inertie en compte. Ce paramètre tend vers $1/B$ pour les faibles We^* et est proportionnel à $1/Re^*$ pour les grands We^* . Lorsque les données expérimentales des largeurs relatives des doigts sont représentées en fonction du paramètre $1/B'$, elles s'ajustent sur une unique courbe identique à celle, classique, de Saffman–Taylor.

En ne prenant en compte qu'une modification de l'équation de Darcy, des arguments simples et des simulations numériques confirment ces observations expérimentales. Cependant, l'accord entre résultats expérimentaux et numériques n'est que qualitatif. Nous pensons que cela est dû certainement à la nature tri-dimensionnelle du problème et nécessiterait une correction plus élaborée en prenant en considération la théorie complète et tri-dimensionnelle de Park, Homsy, Reinelt et Saffman [81, 87].

En guise de perspective, nous pourrions nous demander si les effets d'inertie ont une influence sur les phénomènes de "tip-splitting" observés expérimentalement aux grandes valeurs de $1/B$. Pour cela, il est plus simple de travailler en géométrie circulaire où les phénomènes d'instabilité apparaissent naturellement. Les quelques expériences que nous avons tentées dans une géométrie angulaire avec des fluides peu visqueux ne nous ont malheureusement pas permis de tirer de conclusion et le sujet reste ouvert.

Finissons ce chapitre par une mise en garde d'ordre général sur les effets d'inertie. Ces derniers sont, en effet, responsables d'une déviation importante du comportement classique de la digitation de Saffman–Taylor. Même si, la plupart du temps, l'inertie est négligeable, il convient de s'en assurer notamment pour les fluides de faible viscosité. Un bon outil pour cela est, comme nous l'avons montré, l'utilisation du nombre de Weber modifié We^* . Pour être sûr que les effets d'inertie soient négligeables, il convient de se placer dans un cas où le Weber modifié est typiquement inférieur à 10. Si tel n'est pas le cas, il faut alors être extrêmement vigilant dans l'interprétation des déviations par rapport au cas classique de Saffman–Taylor et être sûr de pouvoir discriminer nouvelles observations et effets d'inertie.

Chapitre 3

Digitation dans les suspensions granulaires

En vue de décrire et de comprendre les propriétés d’une interface grains/fluide, nous nous intéressons dans ce chapitre à décrire l’injection d’air dans les suspensions granulaires de fraction de grains ϕ inférieure à 40%. Pour ces fractions de grains nous sommes loin de la transition de blocage, les grains ne sont pas en contact et n’interagissent que par le biais des forces hydrodynamiques.

L’originalité de notre étude repose sur deux points :

- d’une part, l’utilisation de l’instabilité de Saffman–Taylor, moyen fort commode de visualisation des processus et modèle d’injection bien défini,
- d’autre part, l’emploi de suspensions isodenses où les effets de sédimentation et de ségrégation inertielle peuvent être considérés comme nuls.

Nous partons ainsi d’un terrain connu, l’instabilité de Saffman–Taylor [13, 26, 47, 92], pour développer l’étude de l’injection dans les suspensions peu denses en grains. Une approche simpliste serait de décrire les suspensions en terme de fluide visqueux effectif. Pour les fractions de grains considérées dans ce chapitre, il n’y a pas, en effet, de blocage dû aux particules. Nous verrons cependant que la présence de grains ne se réduit pas simplement à une modification de viscosité ou à l’introduction de propriétés complexes pouvant conduire aux observations déjà réalisées dans des études antérieures [14, 52, 69, 70, 98, 102]. En effet, la présence de grains induit une perturbation de l’instabilité de Saffman–Taylor dès les plus faibles fractions de grains. Nous nous servons, dès lors, de cette instabilité comme d’un outil pour sonder les propriétés de la suspension et de l’interface grains/fluide.

Après avoir détaillé les caractéristiques des suspensions utilisées et du protocole expérimental, nous analyserons l’influence des grains à trois niveaux, avec, à chaque fois, la motivation de comprendre le lien entre observations macroscopiques et comportements microscopiques de la suspension :

1. Nous étudierons d’abord l’écoulement de la suspension seule dans la géométrie confinée de la cellule de Hele-Shaw, écoulement décrit par une loi de Darcy effective.
2. Nous analyserons ensuite le déroulement de la déstabilisation des doigts de Saffman–Taylor en lien avec le devenir des perturbations provoquées par les grains à l’interface (i.e. sur le doigt).

3. Pour finir, nous nous attacherons à décrire les largeurs relatives des doigts stables et, dans la mesure du possible, à les relier aux caractéristiques de la suspension.

3.1 Caractérisation des suspensions

Pour pouvoir correctement travailler dans la géométrie de la cellule de Hele-Shaw et y étudier l'instabilité de Saffman–Taylor, notre suspension devait répondre à différentes contraintes :

- les grains devaient être aussi idéaux que possible : sphériques et de diamètre identique,
- le fluide pur devait correctement mouiller les plaques pour permettre une observation convenable de l'instabilité de Saffman–Taylor,
- la densité des grains et celle de l'huile devaient être aussi proches que possible de sorte à obtenir une suspension isodense, évitant les phénomènes de sédimentation et de ségrégation,
- les suspensions étant non-Browniennes, il ne devait cependant pas y avoir d'autres interactions entre grains (électrostatiques ou autres).

Nous avons utilisé différentes suspensions de composition cependant similaire : une huile silicone modifiée (2 types d'huile) avec des billes de polystyrène (4 diamètres possibles).

Nous rapportons dans cette partie les différentes mesures systématiques qui permettent de s'assurer que les différents critères mentionnés précédemment sont respectés. Ces mesures ont été effectuées d'une part sur les grains et les fluides isolés et d'autre part sur les suspensions élaborées.

3.1.1 Caractéristiques des grains et du fluide pur

Grains

Les grains utilisés sont des billes de polystyrène "Dynoseed" fabriquées par une société Norvégienne, Microbeads. Leur densité est d'environ 1050 kg m^{-3} . Nous avons utilisé différents diamètres : 20, 40, 80 et $140 \mu\text{m}$. Le procédé de fabrication garantit l'obtention de grains bien sphériques et de milieux très majoritairement monodisperses. Cependant, comme il est possible d'avoir des grains intrus de taille double, nous avons filtré nos particules avec un tamis de taille légèrement supérieure à leur diamètre.

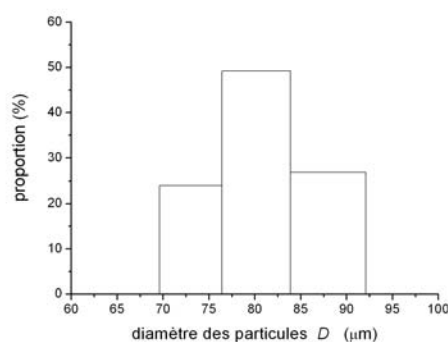
La photographie de la figure 3.1 permet de se rendre compte de la sphéricité des particules.

Nous avons également effectué la granulométrie de nos poudres tamisées par une technique de granulométrie LASER [4] à l'aide d'un appareil de marque Horiba¹. Cette dernière est en figure 3.2 et permet de vérifier la bonne monodispersité de nos particules.

Fluides

Les huiles de silicone (huiles polydiméthylsiloxaniques) sont classiquement utilisées en cellule de Hele-Shaw pour étudier l'instabilité de Saffman–Taylor car elles présentent

¹Mesure réalisée au Centre d'Enseignement et de Recherche en Mécanique des Sols, ENPC.

FIG. 3.1 – Photographie des billes de polystyrène de diamètre 80 μm .FIG. 3.2 – Granulométrie d'un échantillon tamisé de billes de polystyrène de diamètre 80 μm .

de nombreux avantages : elles mouillent correctement les plaques de verre, elles existent dans une grande gamme de viscosité et sont miscibles entre elles et, enfin, leur viscosité est relativement indépendante de la température. Leur densité est cependant inférieure à 1000 kg m^{-3} et il n'est donc pas possible de les utiliser avec les grains de polystyrène de densité 1050 kg m^{-3} en vue d'obtenir une suspension isodense.

Nous avons essayé plusieurs couple grains+fluides pour obtenir une suspension isodense. La qualité des billes de polystyrène nous ayant rapidement convaincus, il restait à trouver le fluide adéquat. La solution la plus simple aurait été de réaliser une suspension isodense avec de l'eau salée. Cependant l'eau ne mouille pas bien les plaques de verre et cela perturbe nettement les doigts. L'ajout de tensio-actifs permet à l'eau de mieux mouiller les plaques mais cela entraîne une modification de la tension de surface qui est très loin d'être simple (e.g. micelles portées à l'interface) et surtout non-uniforme. En particulier, pour l'instabilité de Saffman–Taylor, où la tension de surface est déterminante, l'ajout de tensio-actifs modifie le comportement de l'instabilité et le mode de sélection de la largeur des doigts [14, 21].

La solution retenue a finalement été d'utiliser des huiles de silicone modifiées. Nous en avons retenues deux :

- l'huile silicone phénylée Dow Corning 704 et

– l’huile silicone polyétherée Shin Etsu KF-6011, dont les caractéristiques "constructeur" sont mentionnées tableau 3.1². Elles présentent l’intérêt d’avoir une densité plus importante que les huiles de silicone classiques tout en conservant une bonne mouillabilité des plaques de verre. Cependant elles ne sont pas bien miscibles à d’autres fluides et surtout elles ont des viscosités qui dépendent notablement de la température.

huile	densité	tension de surface	viscosité
DC 704	1070 kg m ⁻³ à 25 °C	37 mN m ⁻¹	58.5 mPa.s à 25 °C
SE KF-6011	1070 kg m ⁻³ à 25 °C	non-renseignée	139 mPa.s à 25 °C

TAB. 3.1 – Caractéristiques "constructeur" des fluides utilisés.

Nous nous sommes ainsi intéressés à la rhéologie de ces fluides. Les principales techniques rhéologiques sont, par exemple, présentées dans les livres de Barnes [9], Macosko [73] ou Coussot [29].

Dans notre cas, les huiles employés étant a priori des fluides Newtoniens, nous nous sommes juste intéressés à leurs viscosités. Celles-ci ont été mesurées à l’aide d’un rhéomètre Thermo-Haake³. La géométrie utilisée était un double Couette de 2×0.5 mm de façon à travailler dans une configuration géométrique proche de celle de notre cellule de Hele-Shaw, les épaisseurs employées étant de l’ordre de $b = 1$ mm. La viscosité en fonction du taux de cisaillement à différentes températures est représentée figure 3.3. Ces mesures permettent de vérifier le caractère Newtonien de ces fluides. Notons que la décroissance de la viscosité observée aux plus faibles cisaillements est due à la limite de précision de l’appareil de mesure qui est atteinte. Notons également que ces cisaillements sont bien plus faibles que les cisaillements typiques de nos expériences, situés entre 1 et 60 s⁻¹.

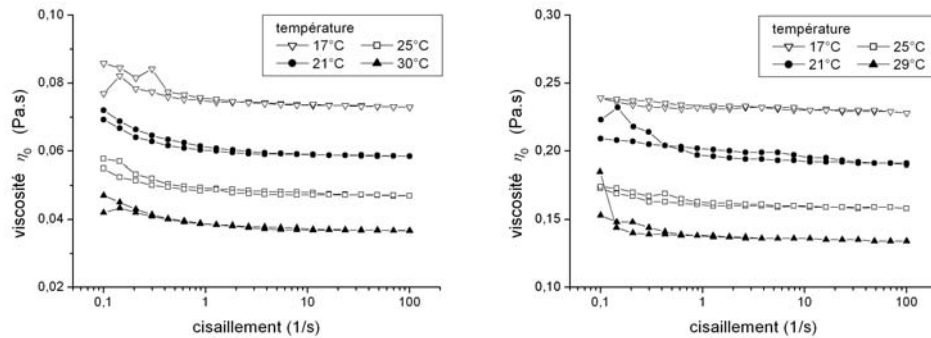


FIG. 3.3 – Viscosité des fluides purs DC 704 (à gauche) et SE KF-6011 (à droite) en fonction du cisaillement pour différentes températures.

Nous en déduisons les courbes caractéristiques de viscosité en fonction de la température $\eta_0(T)$ représentées figure 3.4. La viscosité est évaluée en moyennant les viscosités

²Remarquons que la densité des huiles est légèrement plus élevée que celle des grains. Nous y revenons par la suite.

³Avec l’aimable aide de Michel Cloître, laboratoire Matière Molle et Chimie, ESPCI.

précédemment obtenues pour un cisaillement compris entre 1 et 40 s⁻¹. Nous avons également ajusté les résultats expérimentaux par une exponentielle décroissante :

$$\eta_0(T) = \eta_0(T_0) \exp\left(-\frac{T - T_0}{\Delta T}\right), \quad (3.1)$$

où T_0 représente une température de référence (21 °C dans nos expériences) et ΔT caractérise la décroissance. Pour les huiles utilisées, les paramètres sont rapportés tableau 3.2.

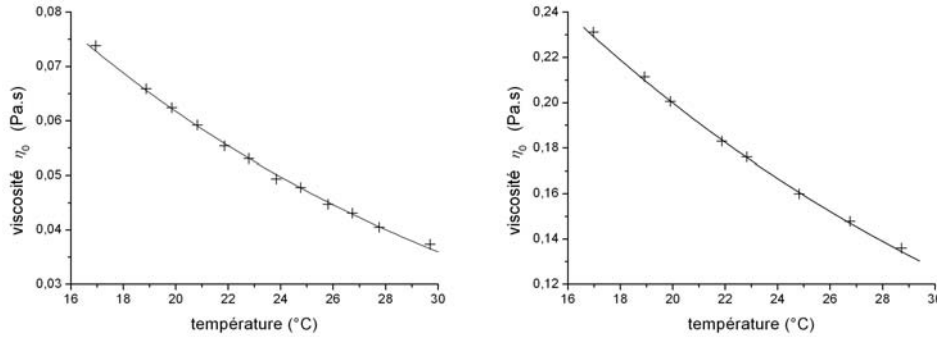


FIG. 3.4 – Viscosité des fluides purs DC 704 (à gauche) et SE KF-6011 (à droite) en fonction de la température, points expérimentaux (+) et ajustement (ligne pleine).

La tension de surface de ces huiles a été mesurée à l'aide d'un tensiomètre KS10ST de marque Krüss à la fois par la méthode de Wilhelmy (plaque) [103] et celle de du Noüy (anneau) [59]. Les résultats sont présentés tableau 3.2.

huile	tension de surface	viscosité $\eta_0(T_0)$	ΔT
DC 704	33±1 mN m ⁻¹	58.5 mPa.s	18.5 °C
SE KF-6011	21±1 mN m ⁻¹	191 mPa.s	20 °C

TAB. 3.2 – Caractéristiques mesurées des fluides utilisés pour $T_0=21$ °C.

3.1.2 Caractéristiques des suspensions

Les suspensions sont préparées en fraction massique de grains à l'aide d'une balance de précision. Et, sauf mention contraire, nous ferons par la suite référence à cette fraction massique comme la fraction de grains ϕ de la suspension. En pratique, vu le très faible écart entre la densité des fluides et celle des grains, cette fraction ne diffère guère de la fraction volumique de grains.

Caractère non-Brownien

Comme nous l'avons vu dans le chapitre "Généralités" sur les suspensions, le comportement de ces dernières est très différent selon l'influence des effets d'agitation thermique.

Dans nos expériences nous souhaitons travailler avec des suspensions non-Browniennes où les effets hydrodynamiques sont dominants.

L'importance relative de ces deux effets est mesurée par le nombre de Péclet Pe (Eq. 1.2). Dans nos suspensions, nous travaillons avec des cisaillements typiques supérieurs à 1 s^{-1} dans des fluides visqueux et avec des grains d'au moins $20 \mu\text{m}$ de telle sorte que $Pe \gg 1$. Nous sommes donc dans le cadre de suspensions macroscopiques où les effets hydrodynamiques sont effectivement dominants.

Isodensité

Les fluides employés et les billes de polystyrène présentent une légère différence de densité (moins de 2%). Pour s'assurer que cette dernière est négligeable sur le temps de nos expériences, nous avons réalisé des tests en tubes à essai. Nous avons préparé des suspensions à 10% et étudié le front de "flottabilité" (puisque les grains sont légèrement plus légers que les fluides).

Pour cela, nous avons placé des suspensions dont les grains ont des diamètres de 20, 40, 80 et $140 \mu\text{m}$ dans des tubes à essais de 10 mm de diamètre (Fig. 3.5a) et nous les avons filmées pendant plusieurs jours. Nous avons effectué des diagrammes spatio-temporels (Fig. 3.5b) et constaté que les vitesses de flottabilité de nos suspensions étaient quasiment constantes. Cette mesure est rapportée tableau 3.3.

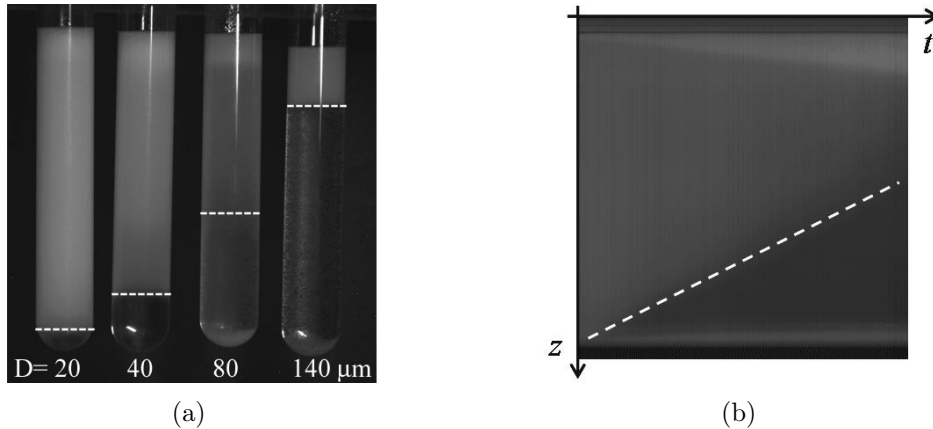


FIG. 3.5 – Étude de la "flottabilité" des suspensions. (a) Vue d'ensemble des tubes au bout de 48 heures. (b) Diagramme spatio-temporel pour la suspension composée de grains de $80 \mu\text{m}$ de diamètre. L'axe des temps s'étale sur une durée d'environ 65 heures. En tirets blancs, l'évolution quasi-linéaire du front de flottabilité.

Dans un fluide pur, la vitesse de sédimentation d'une particule sphérique isolée est donnée par la vitesse de Stokes, où forces de gravité et forces de frottement visqueux s'équilibrent :

$$V_s = \frac{\Delta\rho g D^2}{18\eta} , \quad (3.2)$$

avec $\Delta\rho$ la différence de densité entre la particule et le fluide pur, D le diamètre de la particule et η la viscosité du fluide.

Richardson et Zaki [88] ont montré que cette vitesse était réduite dans le cas d'une suspension. En effet, il existe des écoulements de retour de fluide autour des particules qui diminuent la vitesse absolue de sédimentation. Cette dernière peut alors être mise sous la forme empirique suivante :

$$V_{RZ} = V_s(1 - \phi)^n, \quad (3.3)$$

avec n un coefficient de l'ordre de 4 à 5 dépendant faiblement du rapport d'échelle entre diamètre des particules et taille du récipient .

Le tableau 3.3 récapitule nos résultats expérimentaux et les vitesses calculées avec la formule de Richardson–Zaki (3.3). Notons que nous n'avons accès qu'à une estimation partielle de la différence de densité entre fluide et grains⁴.

D	$\Delta\rho$	$\Delta\rho/\rho$	V_s calculée	V_{RZ} calculée	Mesures exp.
20 μm	0.02 kg L^{-1}	1.9%	0.097 mm h^{-1}	0.059 mm h^{-1}	0.048 mm h^{-1}
40 μm	0.02 kg L^{-1}	1.9%	0.39 mm h^{-1}	0.24 mm h^{-1}	0.16 mm h^{-1}
80 μm	0.01 kg L^{-1}	0.9%	0.77 mm h^{-1}	0.46 mm h^{-1}	0.36 mm h^{-1}
140 μm	non mes.				0.88 mm h^{-1}

TAB. 3.3 – *Vitesses de sédimentation (en millimètre par heure) de suspensions d'huile SE KF-6011 à une fraction de grains $\phi = 10\%$: modèle de Richardson–Zaki et mesures expérimentales.*

Le temps de sédimentation caractéristique sur une épaisseur de l'ordre de 1 mm est donc bien supérieur au temps typique de déroulement d'une expérience, ce qui garantit le caractère idéal des suspensions. Par ailleurs, ces dernières sont mélangées à chaque nouvelle expérience de telle sorte que, le cas échéant, il y a obligatoirement réhomogénéisation. Pour conclure sur l'absence d'effets parasites dus à la très faible différence de densité, remarquons que les expériences réalisées en début de série (i.e. juste après que la suspension a été préparée) ou en fin donnent lieu à des résultats identiques.

Rhéologie

Nous avons étudié le comportement rhéologique de différentes suspensions dans le même dispositif que pour l'étude des fluides purs (rhéomètre Thermo-Haake, géométrie double couette $2 \times 0.5 \text{ mm}^5$).

Le protocole expérimental permettant d'obtenir les résultats les plus reproductibles (en particulier pour les fractions de grains 30 ou 40%) a été de procéder à un fort cisaillement puis d'effectuer deux balayages "aller-retour", à cisaillement imposé, entre 1 et 300 s^{-1} et entre 300 et 1 s^{-1} . Les mesures de ces deux balayages sont représentées figure 3.6. Les points expérimentaux des différentes mesures se superposent de sorte que

⁴Nous avons en particulier remarqué que les billes de diamètres les plus élevés (80 et 140 μm) présentaient la particularité d'être "polydisperses en densité". Les billes d'un même lot ont ainsi des densités légèrement différentes entre elles, comme nous l'avons observé lors d'essais dans des suspensions d'eau salée de densité voisine de celle des billes.

⁵Toujours avec l'aide de M. Cloître. Notons que la largeur de l'entrefer (0.5 mm) est très petite devant son rayon moyen (de l'ordre de 25 mm). Dans cette situation, le cisaillement est quasi-uniforme et la migration de particules est négligeable. La suspension reste donc homogène.

l'on puisse définir une viscosité à cisaillement donné. Pour les suspensions de fraction de grain inférieure à 30%, nous observons que la rhéologie se résume à un simple plateau Newtonien. Pour la suspension de 40% la rhéologie est plus complexe : les points sont plus dispersés et le fluide montre un léger effet rhéofluidifiant à fort cisaillement, phénomène déjà connu dans ce type de situation [104]. La décroissance observée aux faibles cisaillements est vraisemblablement due à la limite de précision de l'appareil de mesure. Cependant, pour ce dernier cas à 40% comme pour toutes les autres fractions de grains ϕ , nous pouvons définir une viscosité de la suspension que nous nommerons "rhéologique" et noterons $\eta_{Rh}(\phi)$. Cette dernière est calculée en considérant la moyenne des mesures obtenues pour des cisaillements compris entre 1 et 40 s^{-1} .

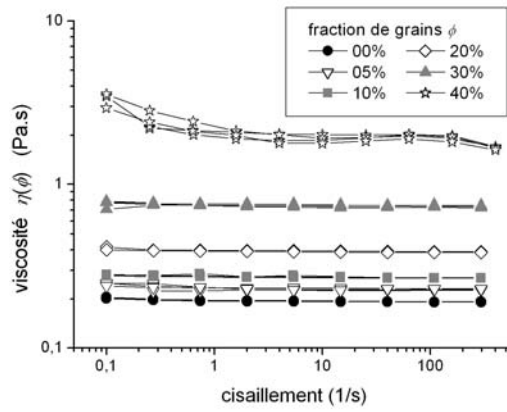


FIG. 3.6 – Viscosité des suspensions de SE KF-6011 et de billes de 80 μm en fonction du cisaillement pour différentes fractions de grains ϕ à la température $T_0=21\text{ }^\circ\text{C}$. Résultats issus de deux balayages "aller-retour", à cisaillement imposé.

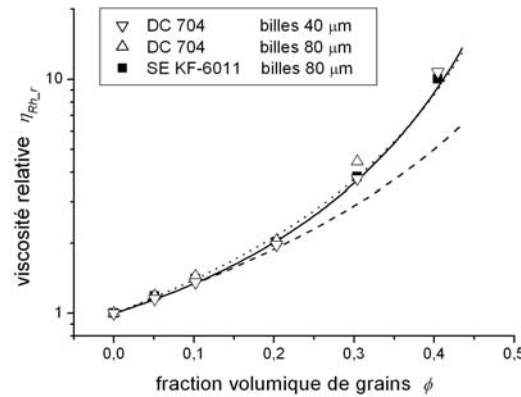


FIG. 3.7 – Viscosité relative η_{Rh_r} en fonction de la fraction de grains ϕ , points expérimentaux, modèles phénoménologiques de Krieger–Dougherty (tirets), de Leighton (ligne en points) et de Zarraga et al. (ligne pleine).

La figure 3.7 représente les viscosités relatives $\eta_{Rh_r}(\phi) = \eta_{Rh}(\phi)/\eta_0$ dans différentes configurations de fluides et grains. Nous avons également tracé les trois modèles évoqués dans la sous partie 1.1.2 : celui, très souvent utilisé, de Krieger–Dougherty (Eq. 1.8), celui de Leighton (Eq. 1.9), ainsi que celui, plus récent, de Zarraga *et al.* (Eq. 1.10).

Nous voyons que les modèles de Leighton et de Zarraga *et al.* permettent un ajustement quantitatif de l'augmentation de la viscosité relative η_r avec la fraction de grains ϕ . Le modèle de Krieger–Dougherty, plus simple, sous-estime cette augmentation pour les fractions de grains supérieures à 20%.

Ceci nous permet de conclure sur le caractère "idéal" des suspensions utilisées et en particulier sur l'absence d'agrégation de grains par exemple due à la présence d'interaction chimique entre grains. En effet, cette dernière conduirait à une fraction de grains effective plus élevée (les grains se regroupant en cluster) et donc à une viscosité relative, elle aussi, plus élevée.

Pour compléter la caractérisation des suspensions, nous avons également mesuré leur tension de surface. Aucun écart significatif n'a été trouvé par rapport à la tension de surface du fluide pur constitutif.

3.2 Protocole expérimental

3.2.1 Dispositif expérimental

Le montage expérimental est identique à celui utilisé pour l'étude des effets d'inertie (fig. 2.1). En particulier, l'acquisition se fait, ici aussi, à l'aide d'une caméra CCD reliée à un ordinateur, l'acquisition se faisant grâce au logiciel LabView.

Cependant, nous avons ajouté :

- un capteur de pression DTM de la marque STS. Ce dernier, connecté au port RS232 de l'ordinateur, permet d'automatiser la mesure de la surpression d'injection. Il a une plage de mesure de -600 à $+600$ mbar et une précision de ± 0.3 mbar,
- deux réservoirs placés aux entrées de la cellule. Ils permettent, au cours des expériences, de s'assurer de la bonne homogénéité de la suspension.

Une photo de l'ensemble du dispositif est en figure 3.8.

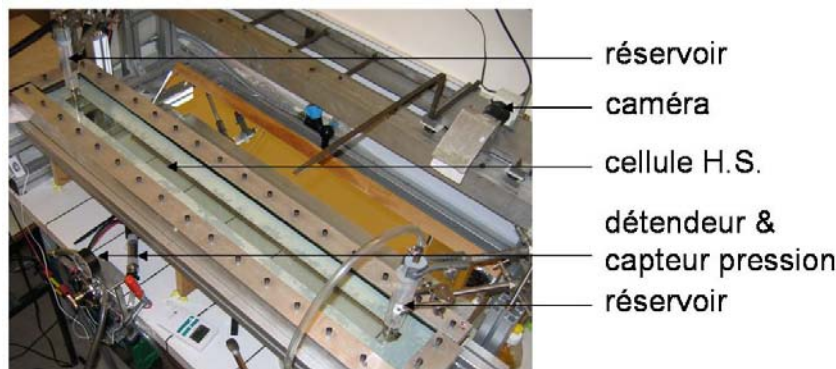


FIG. 3.8 – Photographie du dispositif expérimental.

Nous avons utilisé différentes configurations d'huiles, diamètres de grains, géométries de cellule et fractions de grains. Elles sont mentionnées tableau 3.4.

huile	diam. grains $2R$	épaisseur b	largeur W	fractions grains ϕ (%)					
DC 704	40 μm	0.75 mm	40 mm	0	5	10	20	30	
	80 μm	0.75 mm	40 mm	0		10	20	30	
	80 μm	1.43 mm	40 mm	0	5	10	20	30	
SE KF-6011	20 μm	0.75 mm	40 mm	0		10			
	40 μm	0.75 mm	40 mm	0		10			
	80 μm	0.84 mm	20 mm	0		10			
	80 μm	0.75 mm	40 mm	0	1	2	5	10	20 30
	80 μm	1.43 mm	40 mm	0		5	10	20	30 40
	140 μm	1.43 mm	40 mm	0			10		

TAB. 3.4 – Configurations utilisées.

La suspension, à une fraction de grains donnée, est introduite dans la cellule au début de la série d'expériences. Un doigt est formé d'un côté de la cellule en appliquant une surpression d'air constante à l'entrée, la suspension s'écoule alors dans le réservoir opposé. Les expériences se font en injectant de l'air alternativement par un côté puis l'autre de la cellule ce qui permet, d'une part, de vérifier qu'il n'y a pas d'erreur systématique lié à la position de la cellule et d'autre part, d'homogénéiser correctement la suspension lorsqu'elle se trouve dans un des deux réservoirs avant de la réinjecter dans l'autre sens. Notons que travaillant à pression imposée, nous ne sommes pas rigoureusement en régime stationnaire (le doigt accélère). Nous sommes cependant dans un régime quasi-stationnaire, ce que la reproductibilité de nos mesures aux différentes surpressions appliquées vient appuyer. Nous en discuterons à nouveau au moment de commenter les différents résultats.

Une quinzaine d'expériences par sens d'écoulement est généralement réalisée pour une configuration donnée.

3.2.2 Traitement des données

Pour exploiter la grande quantité d'expériences menées et avoir un traitement statistique suffisant, nous avons écrit un programme pour automatiser le dépouillement des images. Ce programme, écrit en Java et fonctionnant sous imageJ, permet à la fois d'accéder à la largeur des doigts et à leur vitesse. La figure 3.9 représente une visualisation du traitement.

Pour calculer la vitesse et la position du doigt, des graduations sont placées à intervalles réguliers sur les côtés du canal et permettent de calculer avec précision le déplacement de la caméra lorsque le doigt avance. Pour cela, le programme recherche l'extrémum d'une fonction de corrélation sur une tranche verticale de l'image incluant la règle entre deux images successives (fig. 3.9 : flèches sur la droite de l'image). Notons que pour calculer l'échelle de l'image une fonction d'autocorrélation similaire est appliquée (intervalle sur la gauche de l'image).

Le programme est également capable de détecter les zones de transition (extrémum ou saut dans les niveaux de gris). La tête du doigt est ainsi repérée. Il est alors possible,

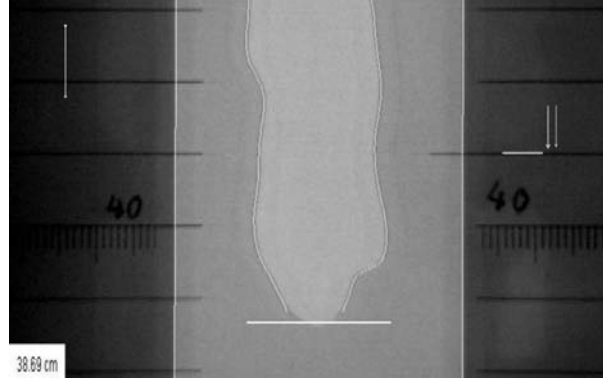


FIG. 3.9 – Visualisation (en blanc) du traitement appliqué aux images.

avec les mesures précédentes, d'en déduire à la fois la position (en bas à gauche) et la vitesse du doigt. Le programme repère enfin les cotés de la cellule et les cotés du doigt permettant de calculer la largeur relative ou de trouver le profil du doigt.

Nous avons donc accès aux principales caractéristiques de l'écoulement :

- la vitesse U du doigt,
- la largeur relative λ du doigt par rapport à la largeur du canal, moyennée en amont de la tête du doigt, ainsi qu'à son écart type (pour un doigt de largeur variable),
- la valeur du gradient de pression ∇P estimée comme la différence de pression $\Delta P = P_i - P_o$ entre l'entrée (inlet) et la sortie (outlet) divisée par la distance de la tête du doigt à la sortie⁶.

3.3 Écoulement et loi de Darcy

Dans cette partie, nous allons discuter de l'adaptation de la loi de Darcy (1.19) à l'écoulement des suspensions dans la cellule de Hele-Shaw. Nous nous intéressons d'abord aux résultats expérimentaux puis à leur interprétation.

3.3.1 Résultats expérimentaux

La loi de Darcy (1.19) en cellule de Hele-Shaw permet de décrire l'écoulement du fluide visqueux loin de la tête du doigt (i.e. à une distance typique supérieure à la largeur W de la cellule). Cet écoulement est en effet uniforme et la vitesse moyennée sur l'épaisseur de la cellule est notée V . Dans le cas de fluide newtonien cette vitesse est proportionnelle au gradient de pression ∇P (Eq. 1.19) :

$$V = -\frac{b^2}{12\eta}\nabla P, \quad (3.4)$$

où η est la viscosité du fluide et b l'épaisseur de la cellule.

⁶Remarquons, ici, que le saut de pression à l'interface ($2\gamma/b$, de l'ordre de 0.1 mbar) est négligeable devant les surpressions imposées (au minimum 15 mbar).

Premières observations

Nous considérons, comme dans le cas newtonien, que l'écoulement des suspensions selon la largeur est uniforme. La conservation de la masse impose que la vitesse V de la suspension loin du doigt soit reliée à la vitesse U du doigt par :

$$V = \lambda U , \quad (3.5)$$

où λ est la largeur relative du doigt (nous négligeons pour le moment le film mince de mouillage restant sur les plaques).

En considérant la loi de Darcy nous pouvons former un gradient de pression ∇P^* à partir de la viscosité rhéologique $\eta_{Rh}(\phi)$ et de la vitesse V :

$$\nabla P^* = \frac{12\eta_{Rh}(\phi)}{b^2} V . \quad (3.6)$$

La figure 3.10 représente ce gradient de pression⁷ ∇P^* en fonction du gradient de pression $|\nabla P|$ imposé dans une géométrie donnée pour différentes fractions de grains ϕ .

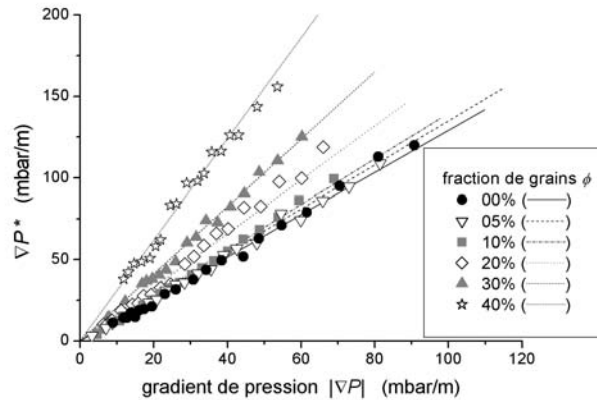


FIG. 3.10 – ∇P^* en fonction du gradient de pression mesuré $|\nabla P|$ pour des suspensions d'huile SE et de billes de $80\ \mu\text{m}$ ($b = 1.43\ \text{mm}$, $W = 4\ \text{cm}$), quelques points expérimentaux et ajustements linéaires.

Si les suspensions se comportaient exactement comme des fluides Newtoniens avec une viscosité $\eta_{Rh}(\phi)$, nous devrions observer une seule droite reliant ∇P^* à $|\nabla P|$. Dans le cas présent, ce n'est pas ce que nous avons : bien que les points expérimentaux restent visiblement sur des droites, ils s'écartent en effet de plus en plus du cas newtonien à mesure que la fraction de grains ϕ augmente, les vitesses observées étant plus élevées que celles attendues. Il existe donc une loi de Darcy (caractérisant la proportionnalité de V et $|\nabla P|$) mais avec une pente différente. Il faut donc introduire une viscosité effective plus faible que $\eta_{Rh}(\phi)$. Cette viscosité effective témoigne d'une restructuration de l'écoulement et nous en conduisons l'étude dans la suite de cette partie.

⁷Nous ne traitons ici que les doigts stables, de manière à correctement approcher le débit. Des résultats similaires à cette sous-partie (et celles qui suivent) peuvent cependant être obtenus, avec plus ou moins de précision, sur l'ensemble des données.

Viscosité effective $\eta_C(\phi)$

Comme les données de la figure 3.10 s'alignent sur des droites, nous pouvons supposer que l'écoulement de la suspension dans la cellule reste régi par une loi de Darcy (1.19) mais que, pour une suspension donnée, la viscosité considérée n'est plus la viscosité rhéologique $\eta_{Rh}(\phi)$ mais une viscosité caractéristique de l'écoulement dans la cellule $\eta_C(\phi)$:

$$V = -\frac{b^2}{12\eta_C(\phi)} \nabla P . \quad (3.7)$$

Cette viscosité effective, qui est inférieure à $\eta_{Rh}(\phi)$ varie selon la fraction de grains ϕ mais peut *a priori* dépendre aussi des paramètres géométriques (taille des grains, épaisseur du canal b , largeur du canal W).

De manière analogue à la sous-partie 2.3, nous prenons en compte le film de mouillage laissé sur les plaques. Nous utilisons le résultat empirique de Tabeling *et al.* [99, 100] qui caractérise l'épaisseur t du film de mouillage (Eq. 2.7) :

$$t = \kappa b [1 - \exp(-\gamma W/b)] [1 - \exp(-\beta Ca^{2/3})] , \quad (3.8)$$

avec $\kappa \approx 0.119$, $\gamma \approx 0.038$ et $\beta \approx 8.58$, pour une large gamme de nombre capillaire (Ca proche de 0 et jusqu'à 0.2). Prenant en compte ce film laissé sur les plaques, la conservation de la masse (3.5) s'écrit alors :

$$V = \lambda U (1 - 2t/b) . \quad (3.9)$$

Dans le cas des suspensions, nous avons atteint des nombres capillaires Ca voisins de 0.1 et une valeur typique de $2t/b$ vaut alors 0.15 . Notons que nous n'avons vu aucun effet notable des grains sur le film de mouillage. En particulier, celui-ci semble toujours rester uniforme et la quantité de grains déposée sur les plaques semble cohérente avec l'évolution de l'épaisseur du film et la quantité moyenne de grains présente dans la suspension. Ainsi, lors des expériences et comme nous pouvons l'observer figures 3.11(a) et 3.11(b), nous avons remarqué qu'il ne restait quasiment aucun grain sur les plaques pour les très faibles vitesses (film de mouillage très mince) tandis qu'il y en avait nettement pour des vitesses élevées. Nous avons aussi observé que le nombre de grains déposés croissait bien avec la fraction de grains de la suspension.

La définition du nombre capillaire n'est pas simple dans notre cas car nous ne savons pas exactement quelle viscosité considérer : viscosité effective η_C , rhéologique η_{Rh} , du fluide pur η_0 . Comme la correction par le film ne nécessite pas une connaissance très précise du nombre capillaire, notamment car il est quasi-saturé dans la plupart de nos expériences, nous considérons donc une dépendance du nombre capillaire Ca avec la viscosité effective η_C . Considérant cette dépendance et vu que η_C dépend aussi de l'ajustement de nos points expérimentaux corrigés par le film, nous procédons par itération pour déterminer la viscosité effective. En pratique, une seule itération suffit pour avoir une valeur fixe.

Nous cherchons maintenant à connaître le plus précisément possible la valeur de la viscosité effective relative $\eta_{C_r}(\phi)$ et notamment à repérer de faibles variations par rapport à la viscosité rhéologique $\eta_{Rh_r}(\phi)$. Pour cela, il faut connaître suffisamment précisément les paramètres des expériences. Il s'agit en particulier de l'épaisseur b de la

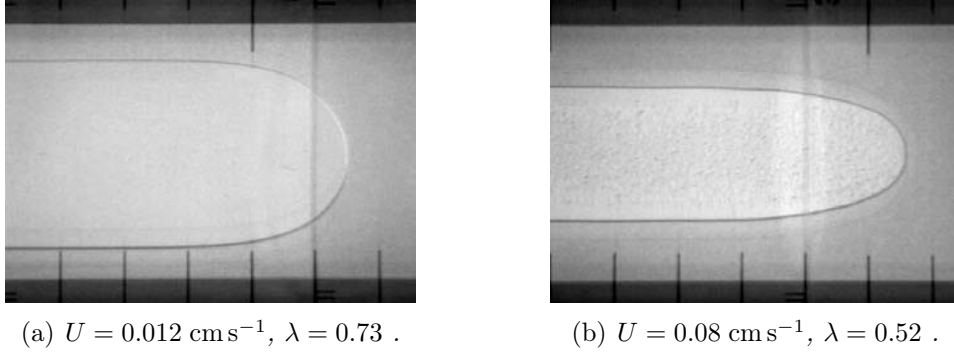


FIG. 3.11 – *Présence de grains dans le film pour une suspension d’huile SE KF-6011 et de billes de 80 μm avec une fraction de grains $\phi = 30\%$ dans une géométrie de cellule $W = 4 \text{ cm}$, $b = 0.75 \text{ mm}$. (a) Aux faibles vitesses (faibles Ca) le film de mouillage est mince et ne renferme pas de grains : le doigt apparaît clair. (b) Pour des vitesses plus élevées, des grains sont pris dans le film de mouillage : nous observons une texture grisée à l’intérieur du doigt.*

cellule –qui intervient dans la définition de η_C (Eq. 3.7)– et de la température T –dont dépend la viscosité du fluide pur $\eta_0(T)$ –.

L’épaisseur in situ b de la cellule est évaluée avec la loi de Darcy pour le fluide pur où nous savons que $\eta_C = \eta_{Rh} = \eta_0$. Ayant relevé les valeurs de température pour l’ensemble des séries, la température est ainsi simplement corrigée dans la définition de la viscosité relative :

$$\eta_{C_r}(\phi) = \frac{\eta_C(\phi, T)}{\eta_0(T)} , \quad (3.10)$$

où la dépendance en température disparaît. Notons que les viscosités se rapportent toujours à un fluide donné (DC 704 ou SE KF-6011).

La figure 3.12 représente les viscosités relatives η_{C_r} en fonction de la fraction de grains ϕ ⁸. Vu la faible dispersion des points pour une fraction de grains ϕ donnée, nous en déduisons que la viscosité η_{C_r} dépend de manière prépondérante de ϕ . Par ailleurs cette viscosité est bien inférieure à la viscosité rhéologique η_{Rh_r} matérialisée par le modèle de Zarraga *et al.* [104].

Nous considérons maintenant l’écart relatif entre la viscosité rhéologique et la viscosité effective dans la cellule, qui ne dépend que de ϕ dans le cadre de nos mesures :

$$\Delta_r \eta(\phi) = \frac{\eta_{Rh_r}(\phi) - \eta_{C_r}(\phi)}{\eta_{Rh_r}(\phi)} . \quad (3.11)$$

La figure 3.13 représente l’écart $\Delta_r \eta(\phi)$ en fonction de la fraction de grains. La viscosité effective est donc plus faible que la viscosité rhéologique et cela d’autant plus que la fraction de grains ϕ est importante.

Cette observation peut s’expliquer en considérant une structuration de l’écoulement due aux grains. En effet, l’écoulement dans l’épaisseur de la cellule est caractérisé par

⁸Pour des raisons de lisibilité, nous n’avons indiqué qu’un nombre limité de configuration. Les résultats sont cependant identiques pour les autres configurations.

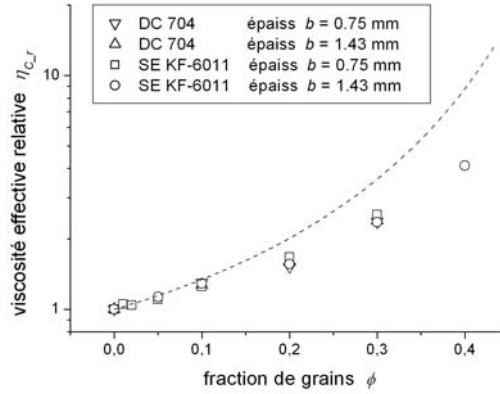


FIG. 3.12 – Viscosité relative η_{Cr} en fonction de la fraction de grains ϕ pour différentes configurations (diamètre des billes : 80 μ m), points expérimentaux et modèle de Zarraga et al. (tirets).

un profil de vitesse de Poiseuille. Par conséquent, le cisaillement n'est pas uniforme. Or comme l'ont notamment expliqué Leighton et Acrivos [61, 62], un cisaillement non-uniforme provoque la migration des particules dans les zones de faible cisaillement. Dans le cas de l'écoulement dans la cellule de Hele-Shaw pour un fluide Newtonien, la vitesse dans l'épaisseur est décrite par un profil parabolique, dit de Poiseuille :

$$v(z) = V_{max}(1 - \hat{z}^2), \quad (3.12)$$

avec $\hat{z} = 2z/b$ la coordonnée adimensionnée et $V_{max} = v(\hat{z} = 0)$ la vitesse maximale située au centre du canal. Les zones de plus faible cisaillement sont ainsi au centre du canal et les particules ont tendance à y migrer. La distribution de particules n'est dès lors plus uniforme et la viscosité locale s'en trouve changée. Le profil de vitesse est par conséquent modifié. Or pour obtenir la loi de Darcy, la vitesse moyenne est calculée en supposant un profil parabolique. Comme ce n'est plus le cas, la loi de Darcy s'en trouve changée, ce qui explique l'origine d'une viscosité effective différente de la viscosité rhéologique. Remarquons pour finir que les particules s'accumulant au centre du canal, la viscosité locale y est plus importante, ce qui conduit à un profil de vitesse plus bombé.

Nous détaillons cela dans les prochaines sous-parties.

3.3.2 Migration de particules induites par cisaillement

Comme nous l'avons vu dans les généralités, sous-partie 1.1.3, la migration induite par cisaillement est la conséquence d'interactions hydrodynamiques irréversibles entre particules. Elle apparaît quand il existe des champs de contrainte ou de cisaillement inhomogènes comme c'est le cas dans l'épaisseur de la cellule de Hele-Shaw.

Comme nous le présentions, le phénomène de migration de particules due au cisaillement a été mis en évidence dans de nombreuses études expérimentales [1, 6, 43, 44, 84], notamment pour le cas d'un écoulement de Poiseuille en géométrie rectangulaire (i.e. cellule de Hele-Shaw) [53, 72], avec une situation analogue à la nôtre. Soulignons cependant que, de manière assez étonnante, ces études ne font jamais référence à une viscosité

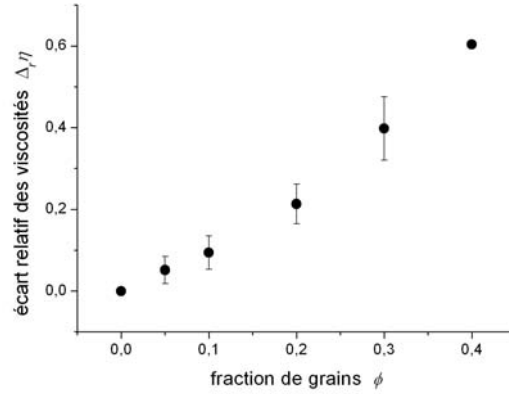


FIG. 3.13 – Écart relatif entre η_{C_r} et η_{Rh_r} évalué sur l'ensemble des expériences en fonction de la fraction de grains ϕ .

effective. À débit donné, les auteurs ne s'intéressent pas, en effet, à la perte de charge dans leur système.

Soulignons que, dans notre cas, la suspension se trouve bien dans un régime de Stokes, c'est à dire que $Re_p \ll 1$ où Re_p est le nombre de Reynolds particulaire, i.e. calculé sur la taille des grains :

$$Re_p = \frac{\rho V R}{\eta_0} \quad (3.13)$$

avec ρ la densité du fluide, V la vitesse typique, R le rayon des grains et η_0 la viscosité du fluide pur.⁹

Nous allons voir dans les sous-parties suivantes comment ce phénomène de migration de particules induite par cisaillement s'applique à nos expériences (régime permanent), en insistant auparavant sur le régime transitoire.

Transition vers un écoulement permanent

Lors du développement de leur modèle de diffusion de particules dans une configuration analogue à la nôtre, Nott et Brady [79] ont évalué la distance caractéristique d'écoulement L_p pour que le régime permanent soit atteint.

Les particules sont initialement dispersées uniformément dans le canal. Selon les hypothèses de Leighton et Acrivos [62], la distance moyenne d parcourue selon la normale à l'écoulement par les particules pendant un temps t est de la forme :

$$d = 2(D_{\dot{\gamma}} t)^{1/2}, \quad (3.14)$$

où $D_{\dot{\gamma}}$ est le coefficient de la diffusion induite par cisaillement. La distance typique que doivent parcourir les particules est la moitié de la demi-épaisseur soit $b/4$. Le temps typique t_p pour atteindre le régime permanent est donc :

$$t_p \sim \frac{b^2}{64 D_{\dot{\gamma}}}. \quad (3.15)$$

⁹Notons que dans nos expériences, la valeur maximale de Re_p est de 10^{-2} et la valeur typique de l'ordre de 10^{-4} .

Le coefficient D peut s'écrire $D_{\dot{\gamma}} = R^2 \dot{\gamma} \hat{D}(\phi)$, où $\hat{D}(\phi)$ est le coefficient de diffusion adimensionné, $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement et R le rayon des particules. Le taux de cisaillement peut être estimé par sa moyenne pour un profil de Poiseuille : $\dot{\gamma} = 3V_{moy}/b$. Ainsi l'équation (3.15) devient :

$$t_p \sim \left(\frac{b}{2R}\right)^3 \frac{R}{24\hat{D}(\phi)V_{moy}}. \quad (3.16)$$

De manière équivalente, nous pouvons donc donner une estimation de la longueur $L_p = V_{moy}t_p$:

$$\frac{L_p}{b} \sim \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \frac{1}{48\hat{D}(\phi)}. \quad (3.17)$$

Ce résultat ne dépend pas de la vitesse. Cette dernière disparaît en effet à partir du moment que nous raisonnons en terme de distance. Cela est particulièrement pertinent et utile pour l'analyse de nos expériences où le doigt accélère et où il serait, finalement, assez difficile de définir une seule vitesse par expérience. L_p représente ainsi la distance entre l'entrée de la cellule et le point où l'écoulement a atteint un profil établi.

Pour les suspensions denses ($\phi \geq 30\%$), Nott et Brady [79] estiment que le coefficient $12\hat{D}(\phi)$ est de l'ordre de 1, conduisant à l'estimation $L_p \sim b/4(b/2R)^2$. Les valeurs données par ce modèle sont reportées tableau 3.5 pour nos différentes configurations.

diamètre billes $D = 2R$	épaisseur canal b	longueur caractéristique L_p
20 μm	0.75 mm	26 cm
40 μm	0.75 mm	6.5 cm
80 μm	0.75 mm	1.5 cm
80 μm	1.43 mm	11 cm
140 μm	1.43 mm	3.5 cm

TAB. 3.5 – Longueur caractéristique L_p estimée pour atteindre le régime permanent en écoulement de Poiseuille.

Nous remarquons, sur le tableau 3.5 que, selon ce calcul, hormis pour la configuration ($2R = 20 \mu\text{m}$, $b = 0.75 \text{ mm}$), la longueur L_p est petite voire très petite devant la longueur L du canal ($L \sim 100 \text{ cm}$). Nous pouvons donc en conclure qu'un régime permanent doit être atteint dans ces cas. Soulignons que même pour la configuration ($2R = 20 \mu\text{m}$, $b = 0.75 \text{ mm}$), il y a lieu de penser que le régime permanent doit être atteint. En effet, L_p est une longueur d'établissement du profil. Ce profil est ainsi établi dans notre cellule de Hele-Shaw pour toute distance à l'entrée supérieure à L_p or nous ne considérons typiquement nos données expérimentales que pour des doigts ayant au moins parcouru 20 cm. La très grande majorité de la perte de charge estimée dans nos expériences se trouve donc dans une zone au profil établi même pour la configuration ($2R = 20 \mu\text{m}$, $b = 0.75 \text{ mm}$). Pour finir, notons également que les résultats de la figure 3.12 ne présentent pas d'écart significatif entre les différents points expérimentaux ($L_p \sim 11 \text{ cm}$ pour $b = 1.43 \text{ mm}$ contre $L_p \sim 1.5 \text{ cm}$ pour $b = 0.75 \text{ mm}$).

Reprenant les mesures de coefficients de diffusion de Leighton et Acrivos [61, 62] basées sur l'ajustement de leurs mesures expérimentales, Lyon et Leal [72] rapportent

l'ajustement suivant de $\hat{D}(\phi)$ pour les fractions de grains plus faibles que 30% :

$$\hat{D}(\phi) = \frac{1}{3}\phi^2(1 + \frac{1}{2}\exp(8.8\phi)) . \quad (3.18)$$

Les valeurs données par cette formule sont reportées tableau 3.6 pour une configuration ($2R = 80 \mu\text{m}$, $b = 0,75 \text{ mm}$) et différentes valeurs de ϕ .

fraction de grains ϕ	longueur caractéristique L_p
10%	19 cm
20%	2.6 cm
30%	0.57 cm
40%	0.14 cm

TAB. 3.6 – Longueur caractéristique L_p estimée pour atteindre le régime permanent en écoulement de Poiseuille en fonction de la fraction de grains ϕ pour $2R = 80 \mu\text{m}$ et $b = 0.75 \text{ mm}$.

Nous remarquons que la longueur caractéristique est rapidement atteinte dans notre cellule de Hele-Shaw pour les fractions de grains supérieures ou égales à 10%. En revanche pour des fractions de grains inférieures (typiquement 5%), le régime permanent ne semblerait pas atteint. Notons cependant que les points expérimentaux semblent suffisamment cohérents entre eux (Fig. 3.12) : les points à $\phi = 1, 2$, et 5% semble dans l'alignement de ceux à 10% ou plus. Nous pouvons donc penser que, pour ces expériences, à défaut d'atteindre un régime permanent, nous en sommes assez proches.

Pour finir, nous pourrions nous demander quelle influence le doigt a sur cet écoulement. A priori, la migration, phénomène diffusif, n'est pas influencée par la présence du doigt tant que celui ci ne modifie pas l'écoulement dans l'épaisseur de la cellule. Or les effets de modification du champ de vitesse induits par le doigt dans l'épaisseur arrivent à une distance typique de b (épaisseur de la cellule) en aval du doigt. Cette zone est négligeable pour le calcul de la viscosité effective.

Nous retenons donc que, dans la plupart de nos expériences, la migration de particules a eu le temps de s'établir. Ainsi, nous nous intéressons maintenant au profil établi.

3.3.3 Modèle simple

Nous présentons, dans cette sous-partie, un modèle relativement simple qui permet de comprendre qualitativement comment un changement dans le profil d'écoulement peut être responsable d'une baisse de viscosité effective. L'ensemble des notations est résumé à la figure 3.14.

Nous supposons que, dû à la migration de particules, le profil de vitesse dans l'épaisseur de la cellule est modifié. Celui-ci ne suit plus une loi de Poiseuille (3.12) mais conserve une forme en loi de puissance :

$$v_x(\hat{z}) = V_{max}(1 - |\hat{z}|^n) , \quad \text{avec} \quad \hat{z} = 2z/b , \quad n > 2 . \quad (3.19)$$

En particulier la vitesse est uniquement orientée selon Ox et sa valeur ne dépend que de z . L'expression de v_x faisant intervenir une valeur absolue, la suite des calculs est effectuée pour $z \geq 0$.

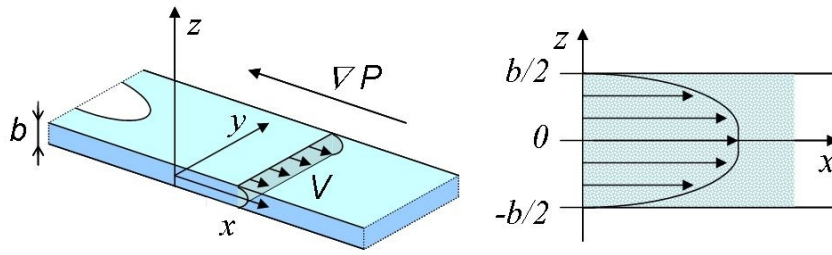


FIG. 3.14 – (à gauche) *vue d'ensemble du système considéré*. (à droite) *coupe selon l'épaisseur de la cellule*.

Nous considérons ensuite qu'il existe une viscosité locale $\eta(z)$ liée à la fraction locale de grains $\phi(z)$ par un modèle de Krieger–Dougherty [56, 57] (Eq. 1.8) :

$$\eta(\phi) = \eta_0 (1 - \phi/\phi_m)^{-p} , \quad \text{avec} \quad \phi_m = 0.68 , \quad p = 1.82 . \quad (3.20)$$

Notons que même s'il ne reproduit pas correctement les observations expérimentales (voir Fig. 3.7), il s'agit d'un modèle qui est très simple et permet de rendre compte de la divergence de viscosité pour ϕ tendant vers ϕ_m .

L'équilibre des forces s'écrit :

$$-\nabla P + \frac{d}{dz} \sigma_{xz} = 0 , \quad (3.21)$$

et l'équation constitutive est supposée être identique à celle des fluides Newtoniens :

$$\sigma_{xz} = \eta(\phi) \dot{\gamma} = \eta(\phi) \frac{d}{dz} v_x . \quad (3.22)$$

Nous allons maintenant suivre le raisonnement suivant pour trouver une relation entre viscosité rhéologique et viscosité effective :

- l'hypothèse du profil de vitesse nous permet d'avoir la vitesse moyenne et donc la *viscosité effective*,
- l'équilibre des forces et l'équation constitutive nous donnent le profil de viscosité,
- le profil de viscosité permet d'obtenir le profil de fraction de grains par la loi de Krieger–Dougherty et d'avoir le flux local de grains,
- en moyennant le flux de grains sur l'épaisseur, nous avons le flux total de grains,
- par la conservation du flux de grains, nous avons la fraction moyenne de grain,
- la fraction moyenne de grains permet d'avoir la *mesure rhéologique* de la viscosité par la loi de Krieger–Dougherty.

À partir de deux équations (3.21) et (3.22) et du profil d'écoulement (3.19), nous pouvons en déduire la viscosité locale :

$$\eta(\hat{z}) = \frac{b^2(-\nabla P)}{4V_{max}n} \hat{z}^{(2-n)} , \quad (3.23)$$

et la fraction de grains locale, à partir du modèle de Krieger :

$$\phi(\hat{z}) = \phi_m \left[1 - \left(\frac{4\eta_0 V_{max} n}{b^2(-\nabla P)} \right)^{1/p} \hat{z}^{(n-2)/p} \right] . \quad (3.24)$$

Il faut maintenant relier ces valeurs locales aux moyennes que nous observons pour l'écoulement. La vitesse moyenne V_{moy} se déduit de (3.19) :

$$V_{moy} = \frac{n}{n+1} V_{max} . \quad (3.25)$$

La conservation du flux de particules permet d'écrire :

$$\phi_{moy} V_{moy} = \int_0^1 \phi(\hat{z}) v(\hat{z}) d\hat{z} . \quad (3.26)$$

et d'en déduire la fraction moyenne :

$$\phi_{moy} = \phi_m \left[1 - \left(\frac{4\eta_0 V_{max} n}{b^2 (-\nabla P)} \right)^{1/p} \left(\frac{p^2 (n+1)}{(n+p-2)(n(1+p)+p-2)} \right) \right] . \quad (3.27)$$

Si nous écrivons ensuite la loi de Darcy effective :

$$V_{moy} = -\frac{b^2}{12\eta_C} \nabla P , \quad (3.28)$$

et la définition de la viscosité rhéologique par le modèle de Krieger–Dougherty :

$$\eta_{Rh}(\phi_{moy}) = \eta_0 (1 - \phi_{moy}/\phi_m)^{-p} , \quad (3.29)$$

nous déduisons de la relation (3.27) l'équation reliant les deux viscosités :

$$\eta_{Rh} = \frac{3}{(n+1)} \left[\frac{(n+p-2)(n(1+p)+p-2)}{p^2(n+1)} \right]^p \eta_C . \quad (3.30)$$

Considérons ce résultat. Nous remarquons déjà que pour $n = 2$, nous retrouvons bien $\eta_{Rh} = \eta_C$ ce qui correspond au cas Newtonien. Ensuite pour $n > 2$ le préfacteur de η_C est supérieur à 1. Par conséquent, ce résultat prouve que l'on peut diminuer la viscosité effective en changeant le profil d'écoulement de la suspension.

Soulignons que la forme de ce profil ne fait nullement intervenir la fraction de grain ϕ , ni la fraction maximale ϕ_m . Outre n , le seul paramètre restant est l'exposant p de la loi de Krieger–Dougherty (Eq. 1.8). Cependant la forme de la loi de Krieger–Dougherty est essentielle car c'est la divergence en un ϕ_m donné qui empêche la migration de toutes les particules au centre de la cellule. Cette divergence représente, physiquement, la non-interpénétration des particules. Le modèle ne donne pas, en effet, de diamètre aux particules, leur présence étant simplement modélisée par la modification de la viscosité.

Considérant l'équation (3.30), le tableau 3.7 rassemble les valeurs de n , estimées à partir des données expérimentales moyennées, pour différentes fractions de grains ϕ .

La figure 3.15 représente les profils de vitesse (Eq. 3.19) que nous en déduisons ($V_{max} = 1$). Comme attendu, pour ϕ croissant, ces profils ont tendance à être de plus en plus bombés et à évoluer vers des profils bouchons. Notons que pour $\phi = 10\%$, le profil est très peu modifié. Cela ne permet donc pas de le distinguer d'un profil parabolique. C'est une explication possible de l'impossibilité dans certaines études expérimentales sur les écoulements de Poiseuille [43, 54] de trouver une migration quantifiable des particules vers le centre de l'écoulement pour les plus faibles fractions de grains (typiquement

fraction de grains ϕ	écart relatif des viscosités $\Delta_r \eta(\phi)$	indice n estimé
5%	0.05	2.05
10%	0.09	2.11
20%	0.21	2.26
30%	0.40	2.62
40%	0.60	3.33

TAB. 3.7 – Estimation de l'indice n du profil de vitesses en fonction de la fraction de grains ϕ et de la différence relative de viscosité observée expérimentalement.

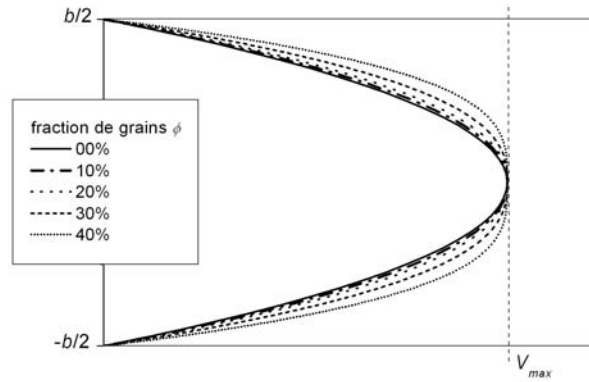


FIG. 3.15 – Profil estimé de vitesse dans l'épaisseur de la cellule en fonction de la fraction de grains ϕ .

$\phi = 10\%$). Nous constatons, par contre, que la mesure de l'écart relatif de viscosité permet de rendre compte de l'existence probable d'une migration.

La figure 3.16 représente les données expérimentales extraites de l'étude de Lyon et Leal [72] et déjà rapportées figure 1.5. Nous avons ajusté ces données avec un profil en loi de puissance du type (3.19) et obtenu des coefficients $n = 2.7$ et 3.5 pour $\phi = 30\%$ et 40% respectivement. Les profils semblent plutôt bien s'adapter aux mesures expérimentales et les coefficients n sont relativement proches de ceux que nous avons estimés tableau 3.7 uniquement à partir de l'écart relatif des viscosités. Ces résultats sont donc très satisfaisants. Cependant, pour mener nos calculs, nous avons pour le moment supposé un profil de vitesse, dépendant d'un paramètre n et nous avons estimé ce paramètre à l'aide de nos données expérimentales. Nous voudrions pourtant ne pas avoir à supposer de profil (ou à obtenir n à partir de ϕ).

Pour pouvoir aller plus loin dans cette étude, il nous faut donc avoir un modèle permettant de rendre compte de la migration des particules.

3.3.4 Modèle de diffusion de particules

Plusieurs modèles théoriques ont été développés pour calculer le profil de vitesse et celui de fraction de grains [17, 61, 77, 79, 84]. En général, ces modèles assimilent la rhéologie des suspensions à celle d'un fluide Newtonien dont la viscosité varie avec

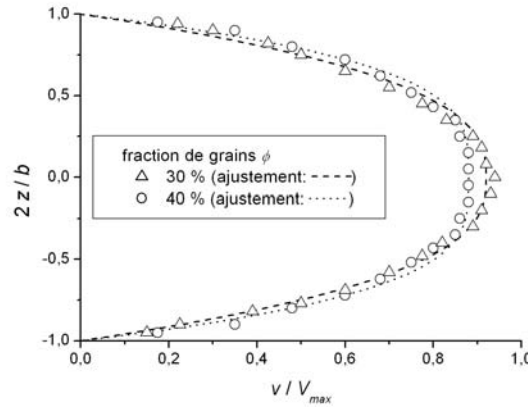


FIG. 3.16 – Profil de vitesse dans l'épaisseur de la cellule en fonction de la fraction de grains ϕ obtenu par Lyon et Leal [72] : points expérimentaux et ajustement par un profil en loi de puissance (3.19).

la fraction de grains. Ils diffèrent cependant dans la manière de calculer le profil de concentration. Deux approches sont ainsi utilisées.

La première approche développée par Leighton et Acrivos [61] puis par Phillips *et al.* [84] utilise l'expression des flux de particules résultant des gradients de concentration et de viscosité locaux pour déterminer le profil à l'équilibre. La seconde approche [17, 77, 79] est basée sur la conservation de la quantité de mouvement des particules transverse à l'écoulement qui va de pair avec l'existence d'une contrainte normale qui résulte de l'interaction entre particules. L'expression du tenseur de contrainte varie selon les auteurs.

Nous abordons ici le modèle de Phillips *et al.* [84] qui est adapté de celui de Leighton et Acrivos [62], pour établir une équation de diffusion des particules.

Pour établir cette équation de diffusion il faut d'abord répertorier les différentes interactions existantes entre les particules. Par interaction, il faut comprendre l'influence que peut avoir une particule sur le mouvement d'une autre. Notons que deux particules, lisses et sphériques, en suspension dans un écoulement en cisaillement ont une interaction réversible. C'est à dire qu'après avoir interagi entre elles, chacune des particules se retrouve sur sa ligne de courant initiale. Cette réversibilité peut cependant être brisée si les particules ne sont pas parfaitement lisses [8].

Comme Leighton et Acrivos l'ont montré [62], il est également possible d'avoir de l'irréversibilité à partir du moment où l'on fait intervenir au moins trois particules. Mais les mesures expérimentales de telles diffusions restant inférieures aux phénomènes de migrations observées [34, 61, 62], le modèle développé par Phillips *et al.* est basé sur l'interaction irréversible à deux particules.

Deux effets sont à prendre en compte pour faire le bilan des flux : celui de la variation spatiale de la fréquence d'interaction entre particules et celui de la variation spatiale de la viscosité.

Variation spatiale de la fréquence d'interaction

Un schéma de l'interaction est représenté figure 3.17(a). Due à la présence d'un cisaillement, une interaction telle que décrite sur cette figure peut se produire et déplace les particules de manière irréversible. Si, du fait de la non uniformité du cisaillement, une particule subit plus d'interactions dans une direction que dans celle opposée, les déplacements irréversibles causés par l'ensemble des interactions auront tendance à la déplacer dans la direction où il y a peu d'interactions, c'est à dire dans la zone de faible cisaillement. Le nombre moyen d'interactions par unité de temps subi par une particule peut être estimé par $\phi\dot{\gamma}$ où $\dot{\gamma}$ est le taux de cisaillement local. Par conséquent, la variation de fréquence d'interaction sur une distance de l'ordre du rayon R des particules est donnée par $R\nabla(\phi\dot{\gamma})$. Si la vitesse de migration des particules est proportionnelle à cette variation dans la fréquence d'interaction et si les interactions donnent lieu à des déplacement en $O(R)$ alors le flux N_i de particules normal au cisaillement et causé par ces effets s'exprime comme :

$$N_i = -K_i R^2 (\phi^2 \nabla \dot{\gamma} + \phi \dot{\gamma} \nabla \phi) , \quad (3.31)$$

où K_i est une constante de l'ordre de 1.

Le premier terme dans l'équation (3.31) implique que même s'il n'y a d'inhomogénéité initiale dans le profil spatial de fraction de grains, une migration de particules vers les plus faibles cisaillements peut intervenir si une particule subit plus d'interactions d'un coté que d'un autre. De même, le second terme montre que même si le cisaillement est uniforme, une variation spatiale de fraction de grains entraîne aussi une variation spatiale dans la fréquence d'interaction et un flux vers les plus faibles densités. Notons pour finir que les deux termes agissent généralement dans des sens opposés. Cela permet néanmoins la présence de particules dans les zones de faibles cisaillement lorsque le premier terme domine.

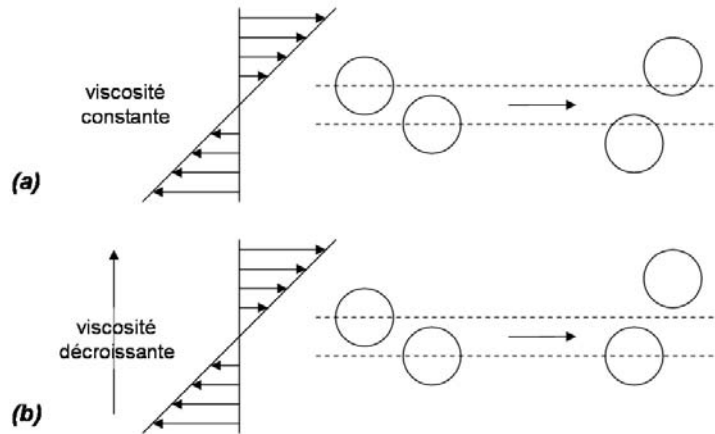


FIG. 3.17 – Schéma des interactions irréversibles entre 2 particules en présence de cisaillement. (a) Pour une viscosité uniforme, il y a une séparation finale différente de la séparation initiale. (b) Pour une viscosité variable spatialement, il y a également un déplacement vers les zones de plus faibles viscosités. D'après Phillips et al. [84].

Variation spatiale de viscosité

En supplément du flux causé par la variation spatiale d'interaction, Phillips *et al.* suivent le raisonnement de Leighton et Acrivos et ajoutent une interaction supplémentaire due à la non-uniformité de la viscosité. Cet effet est représenté figures 3.17(a) et 3.17(b). Du gradient de viscosité résulte en effet une résistance au mouvement supérieur pour une des deux particules en interaction. Par conséquent, lors de cette interaction, le doublet constitué de ces deux particules va avoir tendance à migrer vers la zone de plus faible viscosité.

Pour estimer ce flux, Phillips *et al.* supposent qu'il est proportionnel à la variation relative de viscosité sur une distance $O(R)$: $(R/\eta)\nabla\eta$. Si, comme précédemment, les interactions ont une fréquence de l'ordre de $\phi\dot{\gamma}$ et que le déplacement est en $O(R)$ alors la vitesse de migration est en $(\phi\dot{\gamma})(R^2/\eta)\nabla\eta$. Finalement, en multipliant par ϕ et en considérant que la viscosité ne dépend que de la valeur locale de la fraction de grains ($\eta = \eta_0\eta_r(\phi)$), nous trouvons l'expression de cet autre flux :

$$\mathbf{N}_\eta = -K_\eta\phi^2\dot{\gamma}\left(\frac{R^2}{\eta_r}\right)\frac{d\eta_r}{d\phi}\nabla\phi, \quad (3.32)$$

où K_η est, à nouveau une constante de l'ordre de 1. Notons que le fait que $\mathbf{N}_\eta$ soit indépendant de la valeur de la viscosité du fluide suspensé η_0 est à la fois en accord avec les travaux de Abbott *et al.* [1] et avec nos expériences. En effet, aucune différence notable sur les valeurs des viscosités relatives n'a été observée entre les deux huiles utilisées.

Équation de diffusion

L'équation de diffusion des particules s'écrit dans un cadre Eulérien :

$$\frac{D\phi}{Dt} = -\nabla \cdot (\mathbf{N}_i + \mathbf{N}_\eta), \quad (3.33)$$

où D/Dt est la dérivée totale : $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$. Notons que nous nous plaçons dans le cadre de suspensions non-Browniennes, où le nombre de Péclet ($Pe = \dot{\gamma}R^2/D$, où D est le coefficient de diffusion Brownien des particules) est très supérieur à 1. Si ce n'était pas le cas, il faudrait ajouter un flux supplémentaire : $\mathbf{N}_b = -D\nabla\phi$.

Considérant les équations (3.31), (3.32) et (3.33), nous trouvons donc :

$$\frac{D\phi}{Dt} = R^2 K_i \nabla \cdot (\phi^2 \nabla \dot{\gamma} + \phi \dot{\gamma} \nabla \phi) + R^2 K_\eta \nabla \cdot \left(\phi^2 \dot{\gamma} \frac{1}{\eta_r} \frac{d\eta_r}{d\phi} \nabla \phi \right). \quad (3.34)$$

Plaçons nous maintenant, dans le cadre de nos expériences (Fig. 3.14). Notons déjà qu'au vue de la géométrie, $\mathbf{v}$ est normal à ϕ . Nous cherchons de plus le régime permanent. Par conséquent, le flux de particules transverse à l'écoulement est constant. Comme ce flux doit être nul aux parois, il est nul partout et nous déduisons de l'équation 3.34 :

$$K_i \left(\phi^2 \frac{d\dot{\gamma}}{dz} + \phi \dot{\gamma} \frac{d\phi}{dz} \right) + K_\eta \left(\phi^2 \dot{\gamma} \frac{1}{\eta_r} \frac{d\eta_r}{d\phi} \frac{d\phi}{dz} \right) = 0, \quad (3.35)$$

qui peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{1}{\dot{\gamma}} \frac{d\dot{\gamma}}{dz} + \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dz} + \frac{K_\eta}{K_i} \frac{1}{\eta_r} \frac{d\eta_r}{d\phi} \frac{d\phi}{dz} = 0. \quad (3.36)$$

Il est intéressant de remarquer que l'équation (3.35) ne contient plus de référence à la taille des particules. L'écoulement permanent n'en dépend donc pas, ce qui est conforme à nos observations expérimentales, la viscosité relative étant indépendante de la taille des particules.

L'intégration de l'équation (3.36) donne :

$$\frac{\dot{\gamma}\phi}{\dot{\gamma}_p\phi_p} = \left(\frac{\eta_p}{\eta}\right)^{K_\eta/K_i}, \quad (3.37)$$

où ϕ_p , $\dot{\gamma}_p$ et η_p sont les valeurs de ϕ , $\dot{\gamma}$ et η aux parois. Phillips *et al.* ont cherché expérimentalement à établir les valeurs de K_η et K_i . Ils ont notamment trouvé $K_\eta/K_i = 1.52$.

Pour compléter ces équations, nous reprenons les mêmes hypothèses que dans la sous-partie 3.3.3. Nous décrivons donc la viscosité de la suspension par un modèle de Krieger–Dougherty (Eq. 1.8) :

$$\eta(\phi) = \eta_0 (1 - \phi/\phi_m)^{-p}, \quad \text{avec } \phi_m = 0.68, \quad p = 1.82. \quad (3.38)$$

et modélisons la suspension comme un fluide Newtonien. À partir des équations (3.21) et (3.22), il vient donc :

$$\frac{d}{dz}(\eta_0\eta_r(\phi)\dot{\gamma}) = \nabla P. \quad (3.39)$$

Adimensionalisant cette équation avec $\hat{z} = 2z/b$, $\hat{\gamma} = \dot{\gamma} \cdot [2\eta_0]/[b(-\nabla P)]$ et après intégration ($\hat{\gamma}(\hat{z} = 0) = 0$), nous obtenons :

$$\hat{\gamma} = \frac{-\hat{z}}{\eta_r(\phi)}. \quad (3.40)$$

En utilisant cette dernière équation, le modèle de Krieger–Dougherty et en remarquant que $p(1 - K_\eta/K_i) \approx -1$ où $p = 1.82$, il vient de l'équation (3.37) :

$$\phi = \frac{\phi_m}{1 + \alpha\hat{z}} \quad \text{avec } \alpha = \frac{\phi_m - \phi_p}{\phi_p}. \quad (3.41)$$

Application aux expériences

Cherchons maintenant à calculer, d'après ce modèle, la viscosité effective relative observée dans nos expériences. La démarche est la suivante : supposant la forme de ϕ , donnée par l'équation (3.41), nous pouvons calculer la vitesse moyenne V_{moy} de l'écoulement ainsi que le flux moyen de grains F_ϕ et en déduire la fraction moyenne ϕ_{moy} par la conservation du débit de grains : $F_\phi = \phi_{moy} V_{moy}$.

La vitesse adimensionnée, $\hat{V}(\hat{z}) = V \cdot [4\eta_0]/[b^2(-\nabla P)]$, est calculée à partir de l'expression du cisaillement $\hat{\gamma}$ (Eq. 3.40) en considérant une vitesse nulle à la paroi :

$$\begin{aligned} \hat{V}(\hat{z}) &= \int_{\hat{z}_1=\hat{z}}^1 \frac{\hat{z}_1}{\eta_r(\phi)} d\hat{z}_1 \\ &= \int_{\hat{z}_1=\hat{z}}^1 \hat{z}_1 \left(1 - \frac{\phi(\hat{z}_1)}{\phi_m}\right)^{1.82} d\hat{z}_1 \\ &= \int_{\hat{z}_1=\hat{z}}^1 \hat{z}_1 \left(1 - \frac{1}{1 + \alpha\hat{z}_1}\right)^{1.82} d\hat{z}_1. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Nous en déduisons l'expression de la vitesse moyenne :

$$\hat{V}_{moy} = \int_{\hat{z}=0}^1 \hat{V}(\hat{z}) d\hat{z} , \quad (3.43)$$

et du flux moyen de grains :

$$\hat{F}_\phi = \int_{\hat{z}=0}^1 \phi(\hat{z}) \hat{V}(\hat{z}) d\hat{z} . \quad (3.44)$$

Une intégration numérique permet de calculer ces deux dernières valeurs en fonction du paramètre α . Les résultats sont en figure 3.18. Soulignons que la limite $\alpha \rightarrow 0$ correspond à $\phi \rightarrow \phi_m$ et la limite $\alpha \rightarrow \infty$ à $\phi \rightarrow 0$. Nous remarquons, que la vitesse adimensionnée est une fonction croissante de α . Elle est par conséquent maximale à fraction de grains nulle. On retrouve simplement ici que la dissipation visqueuse et donc la viscosité relative effective η_{C_r} est une fonction croissante de ϕ . Sur le transport des grains, on remarque que, à la fois dans la limite $\alpha \rightarrow \infty$ (pas de grains) et la limite $\alpha \rightarrow 0$ (vitesse moyenne tendant vers 0, pas de transport) le flux de grains tend bien vers 0.

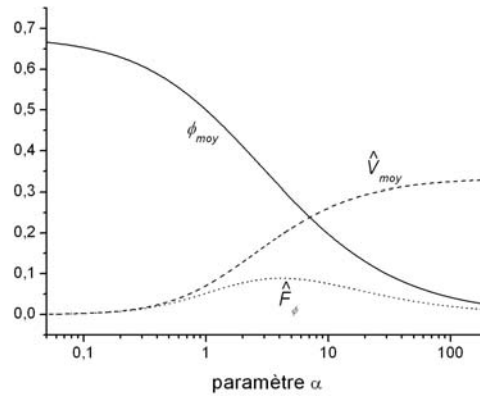


FIG. 3.18 – Fraction moyenne de grains ϕ_{moy} (courbe pleine), vitesse moyenne adimensionnée $\hat{V}_{moy}$ (tirets) et débit moyen de grains adimensionné $\hat{F}_\phi$ (pointillés) en fonction du paramètre α .

Nous déduisons des équations (3.43) et (3.44) la valeur de la fraction moyenne de grains :

$$\phi_{moy} = \frac{\hat{F}_\phi}{\hat{V}_{moy}} . \quad (3.45)$$

De plus, considérant la forme de la vitesse adimensionnée, il vient :

$$\eta_{C_r} = \frac{1}{3\hat{V}_{moy}} . \quad (3.46)$$

La figure 3.19 représente les données expérimentales avec la valeur de la viscosité effective calculée à l'aide du présent modèle. Y sont également représentés les valeurs des viscosités "rhéologiques" et le modèle de Krieger–Dougherty (Eq. 1.8).

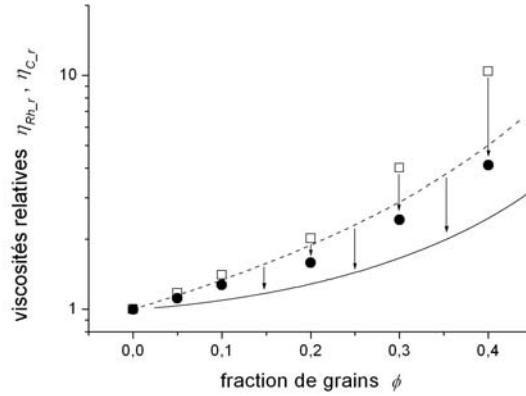


FIG. 3.19 – Viscosités relatives en fonction de la fraction de grains ϕ . Viscosité rhéologique η_{Rh_r} ($\square$: points expérimentaux, tirets : modèle de Krieger–Dougherty) et viscosité effective η_{C_r} ($\bullet$: points expérimentaux, ligne pleine : valeurs déduites du modèle de Phillips *et al.*).

Nous pouvons remarquer que le modèle décrit dans ce paragraphe sous-estime les valeurs expérimentales de la viscosité effective $\eta_{C_r}(\phi)$. Cela vient en partie de la mauvaise adaptation du modèle de Krieger–Dougherty pour décrire nos données. En effet, ce modèle n’ajuste pas correctement nos données pour les fortes fractions de grains, comme nous pouvons le voir figure 3.7. Pour remédier à cela, nous avons utilisé le modèle de Zarraga *et al.* [104] et résolu numériquement l’ensemble des équations. Les résultats finaux de ce modèle restent cependant comparables à ceux présentés ici (en particulier la figure 3.20).

La figure 3.20 représente les écarts relatifs des viscosités calculés selon l’équation (3.11) pour les données expérimentales et le présent modèle.

La courbe calculée ne reproduit pas parfaitement les données. Cependant nous pouvons constater que le modèle donne des ordres de grandeurs qui sont tout à fait valables et que l’écart relatif des viscosités reste une fonction croissante de la fraction de grains. Notons aussi que si le régime permanent n’était pas atteint (voir la sous-partie 3.3.2), cela se traduirait par un écart relatif trop faible dans nos expériences. Cela pourrait donc expliquer l’écart. Cependant, cette remarque ne vaut que pour les suspensions de 5 et de 10%, puisque d’après le tableau 3.6, nous avons trouvé que pour $\phi \geq 20\%$ le régime permanent devrait être atteint.

Quelques remarques pour conclure

Notons que l’approche de Phillips *et al.* a été conçue pour décrire des suspensions suffisamment concentrées (en particulier $\phi > 20\%$). Les hypothèses d’interactions entre particules ne peuvent en effet tenir que s’il y a suffisamment de particules en suspensions. Cependant, l’ordre de grandeur des valeurs mesurées des écarts relatifs de viscosité tendent à prouver que des phénomènes analogues doivent se produire.

Comme illustré par la figure 3.21, le calcul de la fraction locale de grains en fonction de la coordonnée $\hat{z}$ présente un pic à la valeur ϕ_m au centre du canal. Cette remarque

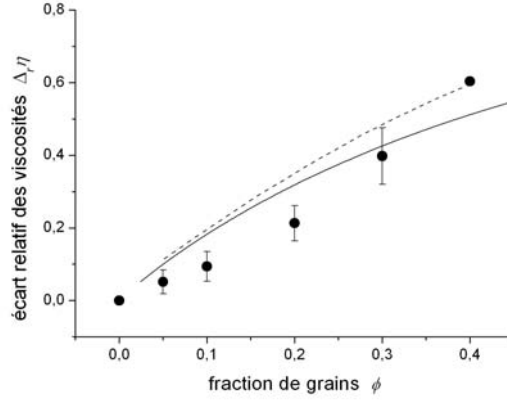


FIG. 3.20 – Écart relatif des viscosités $\Delta_r \eta$ en fonction de la fraction de grains ϕ : points expérimentaux (●) et valeurs déduites du modèle de Phillips et al. avec viscosité du type Krieger–Dougherty (courbe pleine) ou avec viscosité du type Zarraga et al. (courbe en tirets).

est également valable pour le calcul du paragraphe 3.3.3). Ce pic provient du taux de cisaillement nul au centre du canal et de l’assimilation de la suspension à un fluide visqueux. En effet, notons qu’en prenant en compte la taille finie des particules, il serait possible d’obtenir des fractions de grains au centre de la cellule inférieures à ϕ_m .

3.4 Motifs et stabilité

Nous étudions, dans cette partie, les différents motifs de digitation observés dans les suspensions granulaires. La très grande différence par rapport à l’étude d’autres phénomènes de digitation (dans les fluides newtoniens ou les fluides à seuil par exemple) est l’observation d’une déstabilisation très précoce des doigts que nous attribuons à la présence de grains.

3.4.1 Motifs observés

Introduction

La chute de pression $\Delta P = P_i - P_o$ entre l’entrée (inlet) et la sortie (outlet) étant constante, la loi de Darcy implique une accélération du débit moyen et donc du doigt lorsque ce dernier avance dans la cellule. Nous ne nous trouvons donc pas rigoureusement dans un régime stationnaire avec une largeur (et un motif) de doigt fixée. Le régime d’écoulement peut cependant être considéré comme quasi-stationnaire, ce qui est supposé dans la plupart des études sur l’instabilité de Saffman–Taylor [58, 70, 99]. Notons aussi que dans le cas de nos suspensions, la non-dépendance du profil d’écoulement dans l’épaisseur de la cellule par rapport à la vitesse et à la position du doigt dans la cellule permet d’écarter la possibilité d’un artefact dû à un régime transitoire trop important.

Remarquons qu’il est très difficile de travailler à vitesse imposée. Nous avons en effet tenté d’utiliser plusieurs pousses-seringues dans le but de tirer, à vitesse constante,

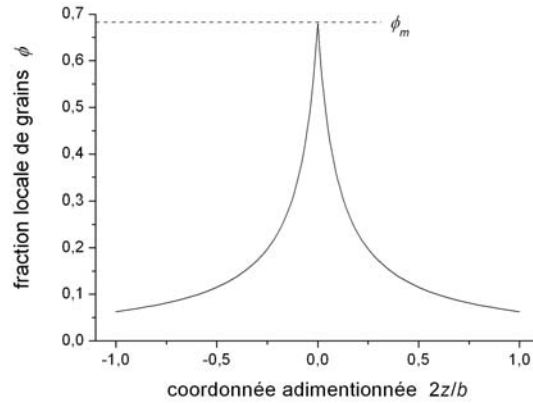


FIG. 3.21 – Fraction locale de grains ϕ en fonction de $\hat{z}$ selon le modèle de Phillips et al. pour une fraction moyenne de grains $\phi_{moy} = 20\%$ ($\alpha = 9.8$).

les suspensions de la cellule. Cependant nous observons systématiquement des oscillations dans le débit de suspensions. En effet, les pousses-seringues sont de très bons appareils pour délivrer (ou retirer) une quantité donnée de fluide ou assurer un débit temporel moyen constant mais de par leur fabrication ils génèrent des débits oscillants. Leur conception repose sur une vis sans fin sur laquelle est monté un bloc qui permet de pousser ou de tirer une seringue lorsque la vis tourne. Cependant la mécanique n'est jamais parfaite et il existe toujours une variation dans la force imposée sur la seringue lorsque la vis fait un tour ce qui entraîne une variation de débit. Dans les expériences que nous avons menées, cette variation pouvait atteindre 10%, ce qui ne convenait pas dès lors que l'on cherche à observer des déstabilisations.

Travailler à pression imposée était donc la seule possibilité. Elle présente cependant un grand avantage. Quand le doigt avance dans la cellule, il accélère et son profil va être modifié. C'est ainsi le cas de la largeur relative qui généralement diminue lorsque le doigt avance. Pour l'étude de la déstabilisation, cette accélération va être un outil très puissant car, sur une expérience donnée nous allons pouvoir localiser la transition d'un type de motif à un autre et déterminer ainsi beaucoup plus facilement des vitesses de transition.

Les différents profils de doigts

La figure 3.22 présente l'évolution typique des doigts observée pour des vitesses croissantes. Cette évolution est relativement continue et le classement des motifs en est le reflet.

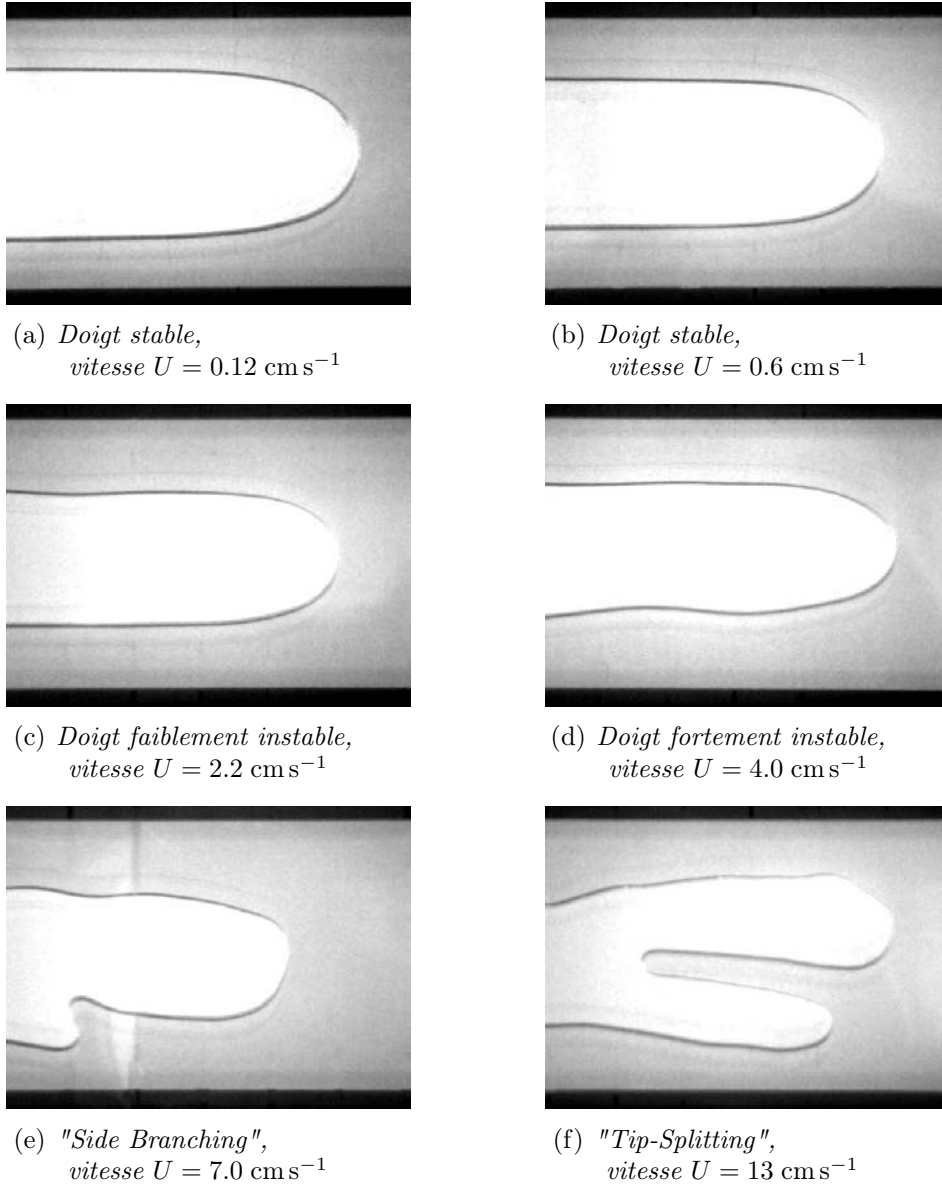
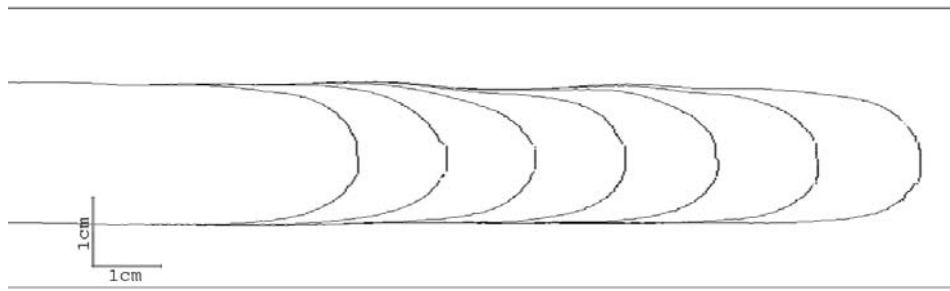


FIG. 3.22 – Évolution du profil du doigt en fonction de la vitesse pour une suspension d'huile SE KF-6011 et de billes de $80 \mu\text{m}$ avec une fraction de grains $\phi = 10\%$, dans une géométrie de cellule $W = 4 \text{ cm}$, $b = 1.43 \text{ mm}$ (images tirées de différentes expériences).

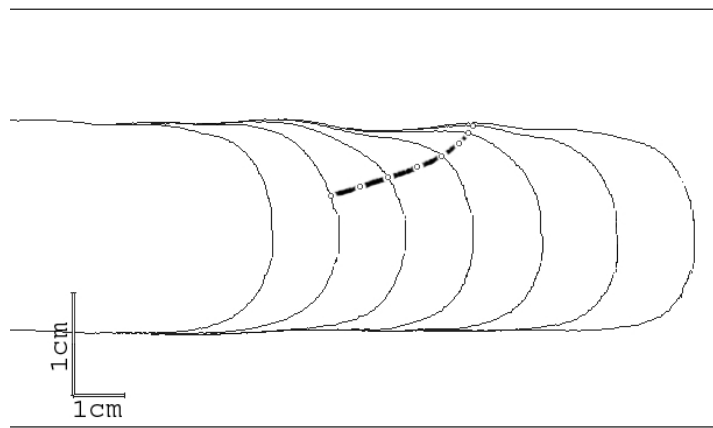
Aux faibles vitesses (Fig. 3.22a et 3.22b), le doigt est stable et son profil n'est pas perturbé.

Pour des vitesses plus importantes (Fig. 3.22c), les premières déstabilisations apparaissent, généralement préférentiellement sur un des 2 cotés du doigt. Notons que nous observons que ces déstabilisations naissent près de la tête du doigt et sont ensuite advectées sur le côté comme le présentent les figures 3.23(a) et 3.23(b) extraites de nos expériences. Plus la vitesse est grande, plus les déstabilisations observées deviennent importantes (Fig. 3.22d).

Lorsque le doigt est encore plus rapide, nous observons des motifs analogues à des "side branching" (Fig. 3.22e) ou des "tip-splitting" (Fig. 3.22f). Comme l'ont fait re-



(a) Vue non déformée.



(b) Échelle selon la largeur élargie d'un facteur 2.

FIG. 3.23 – Exemple d'advection d'une perturbation de la tête vers le côté du doigt, profils successifs extraits à l'aide du traitement d'image (sous-partie 3.2.2) pour un doigt formé dans une suspension d'huile SE KF-6011 et de billes de $80\text{ }\mu\text{m}$ avec une fraction de grains $\phi = 30\%$, dans une géométrie de cellule $W = 4\text{ cm}$, $b = 1.43\text{ mm}$ (temps entre 2 profils : $\sim 0.96\text{ s}$).

marquer Lajeunesse *et al.* [58], il n'existe pas à proprement parler de "side branching" dans l'instabilité de Saffman–Taylor. Il s'agit donc du même phénomène dans les deux cas, à savoir que le doigt se sépare (se "splitte") à proximité de sa tête pour donner naissance à deux sous-doigts dont un seul se développe par la suite. Nos observations nous conduisent tout de même à séparer 2 cas, selon que la séparation apparaît très près de la pointe du doigt, donnant lieu à la réelle propagation de 2 sous-doigts (Fig. 3.22f) ou plus éloignée ne laissant qu'une trace de sous-doigt (Fig. 3.22e).

Dans certaines expériences, nous avons également remarqué des doigts stables asymétriques. Un exemple est représenté figure 3.24.

Ces doigts asymétriques sont caractérisés par un profil non symétrique par rapport à l'axe central de la cellule. Ils semblent principalement dus à un artefact de manipulation. En effet, ils n'apparaissent pas systématiquement (il n'existe pas de transition, comme pour les autres motifs) et semblent plutôt être la conséquence de déstabilisations mal résorbées. Ce type de doigt a ainsi été particulièrement observé à la suite de déstabilisations initiales créées lorsque l'air pénètre dans la cellule de Hele-Shaw. Il peut s'agir typiquement de "tip-splitting" à très faibles vitesses ou de dissymétrie dans l'injection.

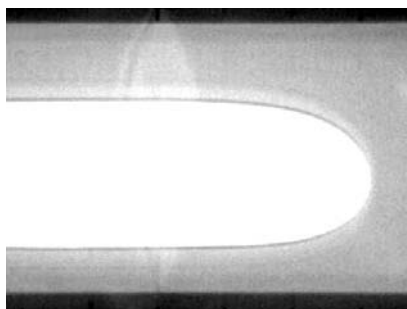


FIG. 3.24 – Profil de doigt asymétrique observé pour une suspension d'huile SE KF-6011 et de billes de $80\text{ }\mu\text{m}$ avec une fraction de grains $\phi = 40\%$, dans une géométrie de cellule $W = 4\text{ cm}$, $b = 1.43\text{ mm}$ (vitesse $U = 0.17\text{ cm s}^{-1}$, pour une expérience particulière).

Dans ces cas, le doigt se réadapte mal par la suite et ne revient pas rapidement au centre de la cellule.

Notons que les précautions expérimentales prises au fur et à mesure de la mise en place du protocole expérimental définitif nous conduisent à ne quasiment plus observer de tels doigts.

3.4.2 Transitions

Nous allons maintenant observer les transitions entre les différents types de doigts et déterminer les valeurs critiques de vitesse.

Observations

Les figures 3.25(a) et 3.25(b) schématisent l'évolution des doigts pour deux séries d'expériences (fraction de grains et géométrie de cellule fixées). L'axe des abscisses représente un numéro attribué à chaque expérience (ordre temporel des expériences) tandis que l'axe des ordonnées donne la vitesse. Les données expérimentales d'une expérience particulière sont donc représentées par un ensemble vertical de points. Comme la vitesse augmente lorsque le doigt avance dans la cellule, le suivi temporel du motif du doigt se fait en partant des points du bas vers ceux du haut. Un repérage visuel permet de discerner les différents types de doigt, ces derniers étant représentés à l'aide de différents symboles.

Nous observons ainsi que, pour les différentes expériences d'une même série, il existe des transitions assez bien définies entre les différents types de doigt. Notons également que ces transitions ne présentent pas de dépendance particulière autre que celle en vitesse. L'hypothèse d'un régime quasi-permanent est donc justifiée dans ce cas, puisque, pour une expérience donnée, l'évolution du doigt ne dépend pas de la vitesse en début de cellule (i.e. le point le plus bas sur la colonne représentant l'expérience, figures 3.25a,b).

Pour chaque géométrie de cellule, taille et fraction de grains, il est ainsi possible de calculer des vitesses critiques moyennes (ainsi que leurs écarts-types) pour la transition stable/instable et pour le passage vers les motifs très perturbés de "side branching" ou "tip-splitting". Ces dernières valeurs sont également représentées figures 3.25(a) et 3.25(b).

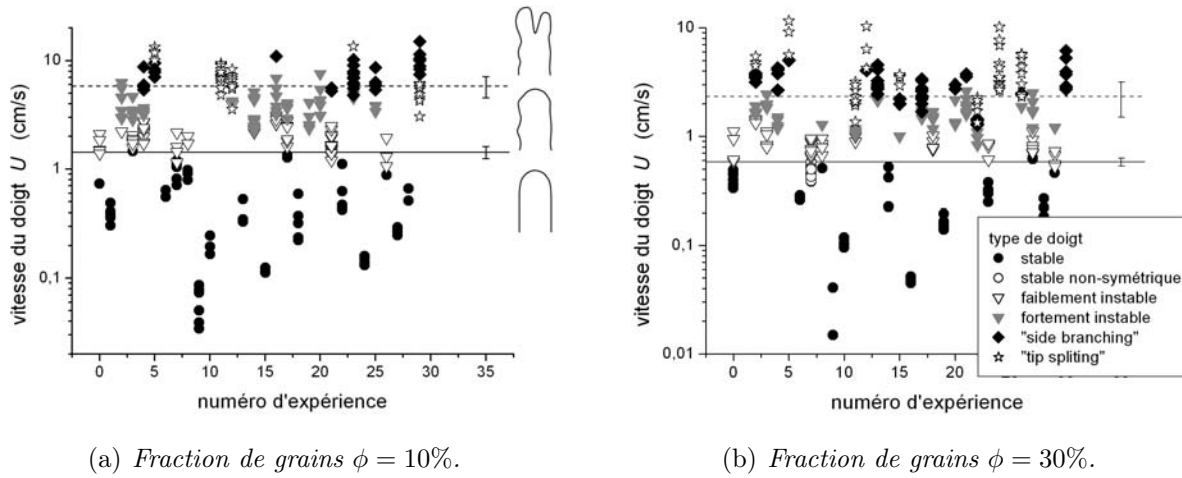


FIG. 3.25 – Diagramme de stabilité : typologie des doigts observés selon les expériences et la vitesse pour des suspensions d'huile SE KF-6011 et de billes de 80 μm dans une géométrie de cellule $W = 4\text{ cm}$, $b = 1.43\text{ mm}$. La ligne pleine représente la moyenne des valeurs de transition d'un doigt stable à un doigt instable, la ligne en tirets celle d'un doigt instable aux phénomènes de "side branching" ou de "tip-splitting".

Soulignons que le critère de sélection des types de doigt est avant tout visuel. Il y a donc une forte dépendance des mesures faites par rapport à la qualité de l'observation par l'expérimentateur. Il peut également y avoir des différences d'appréciation des types de doigt si les observations sont faites par 2 expérimentateurs différents.

Mesure de l'écart-type moyen

Pour obtenir une mesure plus objective du seuil de déstabilisation, nous nous sommes intéressés aux écarts-types de largeur relative de doigt. Pour chaque image de doigt, le programme de traitement de données (voir sous-partie 3.2.2) permet en effet d'extraire le profil de largeur relative : la figure 3.26(a) présente le profil d'un doigt typique et la figure 3.26(b) la largeur relative qui en est déduite le long du doigt. Le programme calcule ensuite la moyenne, que nous noterons simplement λ , et l'écart-type $\delta\lambda$, en ne considérant que les largeurs suffisamment loin de la tête (typiquement au delà de 2 cm).

La figure 3.27 représente l'écart-type moyen de la largeur relative en fonction de la vitesse dans une géométrie de cellule donnée pour différentes fractions de grains. Cet écart-type moyen est simplement calculé en moyennant les écarts-types pour des doigts ayant une vitesse comparable.

Nous observons, que l'évolution de l'écart-type peut être, pour l'ensemble des expériences, caractérisée de la manière suivante :

- Une phase légèrement décroissante aux faibles vitesses. Cette phase est caractéristique des doigts où l'écart-type reste faible, la largeur relative étant par conséquent bien définie et le doigt stable¹⁰.

¹⁰Nous pouvons nous interroger sur la raison d'une faible décroissance. Deux éléments viennent étayer cette interrogation. Si nous considérons d'abord l'écart-type relatif (i.e. divisé par la moyenne de la

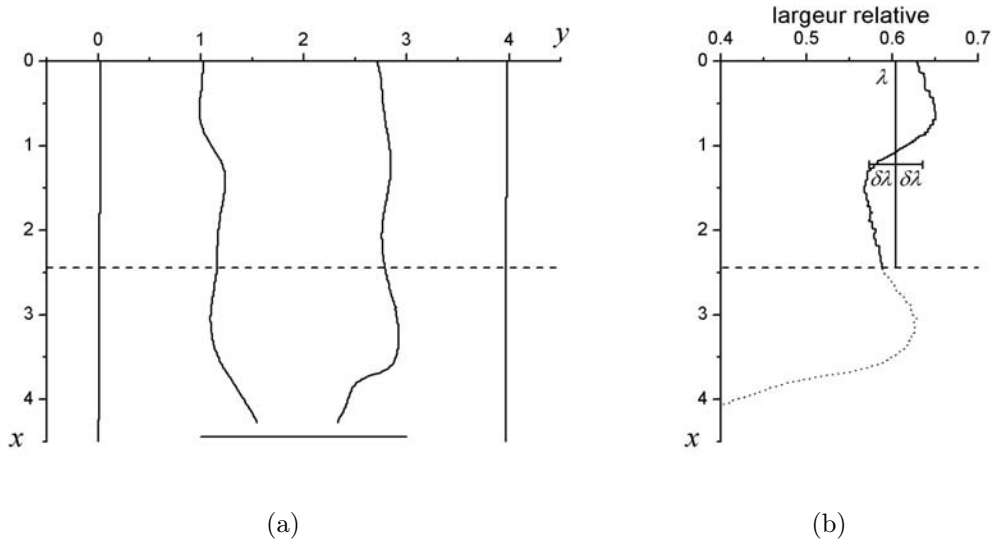


FIG. 3.26 – Analyse effectuée par le programme de traitement des images. (a) Profil de doigt et bords latéraux de la cellule extraits par le programme (voir Fig. 3.9). (b) Largeur relative mesurée le long du doigt. La ligne verticale représente la moyenne de la largeur relative courante le long du doigt et à une distance minimum de 2 cm de sa tête. $\delta\lambda$ en est l'écart type.

- Une phase de plus forte croissance pour des vitesses plus élevées. Cette phase est caractéristique des doigts en cours de déstabilisation. En effet, comme nous pouvons le voir figure 3.22, les doigts se déstabilisant ont une largeur de plus en plus fluctuante à mesure que la vitesse augmente.

Il est donc maintenant possible de déterminer de manière objective une vitesse critique de transition stable/instable. Cette dernière est définie comme étant le point d'intersection des deux régimes discutés ci-dessus. Nous remarquons que cette vitesse est relativement bien définie. En particulier, c'est une mesure plus précise et objective que les vitesses critiques mesurées visuellement.

Récapitulatif et comparaison des résultats

Nous avons déterminé, à la fois visuellement et par observation de la fluctuation de la largeur relative, des vitesses critiques de transition. Pour maintenant pouvoir comparer différentes concentrations de particules et géométries de cellule, il faut que nous fassions référence à un paramètre sans dimension plutôt qu'à des vitesses de transition. Assez intuitivement, le paramètre adéquat semble être $1/B$, le paramètre de contrôle de

largeur relative) plutôt que l'écart-type absolu représenté figure 3.27 nous diminuons légèrement la pente. Cela ne suffit cependant pas à rendre cette première partie de courbe horizontale. Le second élément tient au fait que moyenne et écart-type sont calculés à partir d'une certaine distance de la tête du doigt. Pour les doigts les plus larges (et donc pour les vitesses les plus faibles), le profil de largeur relative sera un peu moins établi à la même distance de la tête que pour des doigts plus fins et les fluctuations seront donc plus importantes. Quoiqu'il en soit cela n'a que peu d'importance dans la présente étude, l'observation d'une transition marquée nous suffisant largement.

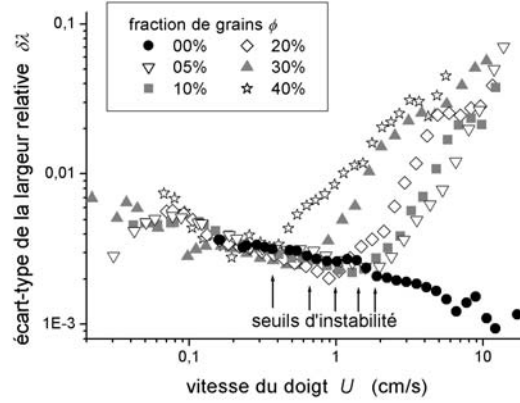


FIG. 3.27 – Écart-type moyen $\delta\lambda$ de la largeur relative des doigts en fonction de la vitesse U du doigt pour des suspensions d'huile SE KF-6011 et de billes de $80\ \mu\text{m}$ dans une géométrie de cellule $W = 4\ \text{cm}$, $b = 1.43\ \text{mm}$. Les flèches indiquent les seuils d'instabilité repérés pour les différentes fractions de grains.

l'instabilité de Saffman–Taylor. C'est ce qui est notamment considéré dans les études portant sur l'instabilité des doigts [12, 13, 58, 100].

Dans notre cas il reste cependant une ambiguïté sur la définition de $1/B = 12(\frac{W}{b})^2\eta U/\gamma$. En effet, comme nous l'avons vu dans la partie 3.3, la structuration de l'écoulement implique que l'on observe une viscosité effective η_C différente de la viscosité rhéologique pour la suspension uniforme η_{Rh} . Dès lors quelle viscosité choisir ? Nous retenons la viscosité effective η_C pour deux raisons :

- Cette viscosité reflète la viscosité moyenne du fluide en aval du doigt mais également très près de celui-ci. En effet, comme nous l'avons vu, le profil de fractions de grains, une fois établi, ne dépend pas de la vitesse. Par conséquent, un écoulement quasi-2D, comme nous pouvons le rencontrer à une distance typique W de la tête du doigt, ne va pas modifier ce profil. Pour agir effectivement sur ce dernier, il faut que le profil de vitesse soit modifié dans l'épaisseur de la cellule, et donc avoir un écoulement 3D. Cela n'arrive qu'à une distance typique b du doigt et nous pouvons dès lors supposer que le profil de fractions de grains ne sera pas profondément modifié sur cette longueur .
- La viscosité effective est reliée au gradient de pression par la relation (3.28). On en déduit une expression de $1/B$ où la viscosité a disparu $1/B = \frac{W^2}{\lambda} |\nabla P|/\gamma$ (par simplicité, il n'est pas question ici de film de mouillage). Cette expression ne fait plus intervenir de viscosité mais juste des conditions d'écoulement au travers du gradient de pression. Elle est ainsi plus générale, ce qui conforte le choix de η_C .

Nous considérons donc maintenant le paramètre de contrôle $1/B$ évalué de la manière suivante :

$$1/B = 12 \left(\frac{W}{b} \right)^2 \frac{\eta_C U}{\gamma} , \quad (3.47)$$

où nous rappelons que W et b sont la largeur et l'épaisseur de la cellule de Hele-Shaw, η_C la viscosité effective, U la vitesse du doigt et γ la tension de surface. Notons que η_C

dépend de la fraction de grains ϕ et que γ est supposée en être indépendante, comme nous l'avons mesurée dans la sous-partie 3.1.2.

Les figures 3.28(a) et 3.28(b) représentent les paramètres de contrôle critiques $1/B_c$ (i.e. calculés à partir des vitesses seuils observées pour les différentes transitions) en fonction de la fraction de grains dans deux configurations différentes.

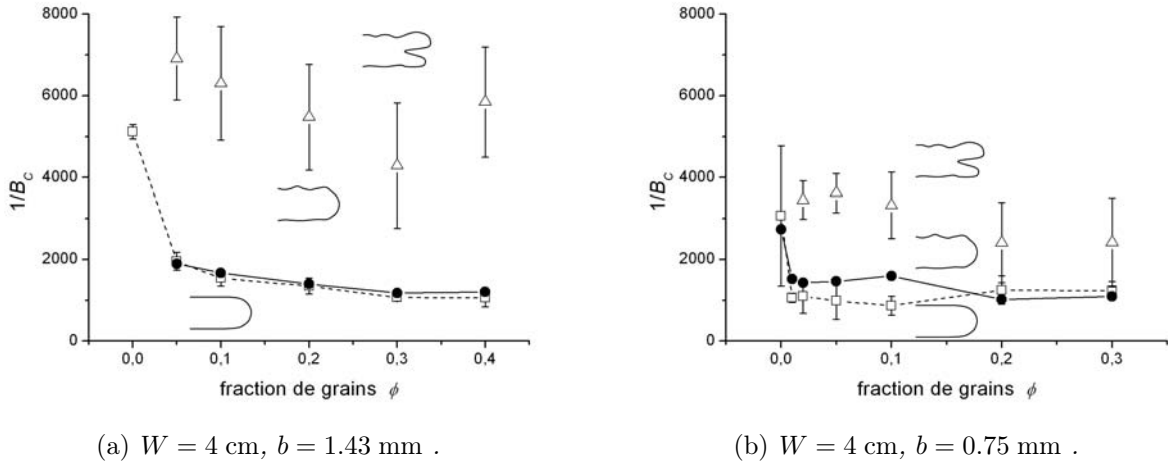


FIG. 3.28 – Paramètres de contrôle critiques en fonction de la fraction de grains (suspensions d'huile SE KF-6011 et de billes de $80 \mu\text{m}$) pour deux configurations différentes : $\bullet$, transition stable/instable déterminée par la variation de l'écart-type ; $\square$, transition stable/instable déterminée visuellement ; Δ , transition instable/"tip-splitting" déterminée visuellement.

Intéressons nous d'abord à la transition stable/instable, c'est à dire au seuil de stabilité du doigt. Nous remarquons déjà que les deux types de mesure donnent des résultats similaires (Fig. 3.28a et b) : observations visuelles et mesure d'écart-type sont donc consistantes. Nous observons ensuite que le comportement des courbes de stabilité est identique pour les deux géométries de cellule : alors que le seuil de déstabilisation des suspensions pures (i.e. $\phi = 0$) est relativement élevé, l'ajout de grains vient considérablement réduire la stabilité des doigts. Comme nous pouvons le constater sur la figure 3.28(b), une fraction de grains aussi faible que 1% provoque cette déstabilisation précoce. Par ailleurs, nous observons que la fraction de grains joue peu sur le seuil de stabilité (courbes quasi horizontales pour ϕ différent de zéro). Enfin, si nous comparons les deux géométries, nous trouvons la même valeur du seuil $1/B_c \sim 1500$.

La transition instable/"tip-splitting" semble elle-aussi indépendante de la fraction de grains. Nous notons cependant que la valeur du paramètre de contrôle à la transition diffère selon la géométrie considérée. Il est cependant difficile de conclure là-dessus car nous n'avons pas de comparaison avec des mesures plus objectives comme l'écart-type de largeur relative pour le cas du seuil de stabilité. De plus, ces mesures ont été réalisées dans deux cellules de Hele-Shaw différentes et vue la valeur plus importante du paramètre de contrôle, le bruit même de la cellule peut avoir de l'importance [100], ce que nous constatons également sur le seuil de stabilité du fluide pur. Nous retenons donc que,

comme pour le seuil de stabilité, la transition instable/"tip-splitting" se produit à un paramètre de contrôle critique relativement indépendant de la fraction de grains.

La principale conclusion de ces premières observations, est que, dû à la présence de grains, même en quantité très faible, dans la suspension, le doigt est déstabilisé précocement. De plus, le paramètre de contrôle au seuil, $1/B_c$, est peu sensible à la fois à la fraction de grains ϕ et à l'épaisseur de la cellule b .

Nous interprétons cette observation par la présence d'un bruit induit par la présence même faible de grains sur le doigt et qui vient donc perturber ce dernier et le déstabiliser. Notons que l'influence du bruit environnant sur la déstabilisation des doigts de Saffman–Taylor a déjà été observée expérimentalement [58, 81, 100] et numériquement [12] mais en considérant un bruit dû à la cellule de Hele-Shaw. Dans ce dernier cas, la déstabilisation des doigts intervenant dans un fluide Newtonien varie très sensiblement selon le dispositif expérimental, comme nous l'avons souligné dans la sous-partie 1.2.5 : Park et Homsy ont ainsi une déstabilisation du doigt vers $1/B = 5000$ [81] tandis que Tabeling *et al.* [100], en réduisant le bruit dans leurs expériences, ont atteint un seuil de 60000. Dans notre cas, par contre, c'est relativement différent puisque le bruit n'est pas dû à l'environnement matériel du doigt mais au fluide poussé par le doigt. Nous pouvons donc étudier l'influence de ce bruit sur le doigt beaucoup plus directement.

Nous n'avons pour le moment étudié la dépendance du paramètre de contrôle critique $1/B_c$ que par rapport à la fraction de grains ϕ et à l'épaisseur de la cellule b , en montrant qu'il en était relativement indépendant. Il reste donc à évaluer l'influence des deux paramètres restants, le diamètre des grains $D = 2R$ et la largeur de la cellule W . Cependant, plutôt que d'ajouter de nouveaux paramètres, nous cherchons d'abord à comprendre ces premières observations en étudiant plus en détail le mode de déstabilisation du doigt.

3.4.3 Interprétation

Dans cette sous-partie, nous reprenons les travaux de Bensimon *et al.* [13] sur l'étude de la déstabilisation du doigt par une analyse des perturbations d'amplitude finie.

Cette étude part des observations relevées en premier expérimentalement par Tabeling et Libchaber [100] et numériquement par DeGregoria et Schwarz [31]. Le mécanisme observé est qu'une perturbation développée à proximité de la pointe du doigt est advectée sur le coté du doigt lorsque celui-ci avance dans la cellule (voir Fig. 3.23a et b).

L'étude de cette advection montre que la perturbation est étirée lorsqu'elle est expulsée sur le coté du doigt : sa longueur d'onde augmente tandis que son amplitude décroît. Par ailleurs, elle ne peut se développer qu'à proximité de la tête du doigt (là où la vitesse normale est la plus importante). Par conséquent, soit cette perturbation expérimente pendant suffisamment de "temps" ce développement et elle pourra conduire à une déstabilisation du doigt. Soit ce n'est pas le cas et elle disparaîtra en étant advectée sur le coté du doigt. Le phénomène est représenté schématiquement figure 3.29.

Nous considérons donc un doigt de Saffman–Taylor se propageant à une vitesse U . Les coordonnées de l'interface sont décrites par l'angle θ entre la normale à l'interface et l'axe des abscisses et par l'abscisse curviligne τ ayant pour origine la pointe du doigt. Sur cette interface une petite perturbation, d'amplitude A et de vecteur d'onde q , est localisée à une coordonnée θ (ou τ). Notons que l'amplitude est la hauteur mesurée perpendiculairement à l'interface et que la longueur d'onde $l_q = 2\pi/q$ doit être petite devant la largeur du doigt λW pour que la localisation ait un sens.

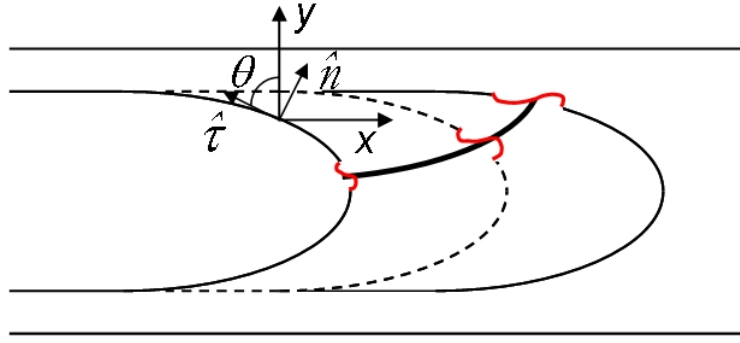


FIG. 3.29 – Schéma de l'advection d'une perturbation le long d'un doigt de Saffman-Taylor lorsque celui-ci avance dans la cellule. D'après Bensimon et al. [13].

Dans nos expériences, il est relativement intuitif de penser que l'amplitude A de la perturbation va être liée au diamètre des grains en présence. L'émergence d'une longueur d'onde est cependant moins claire : provient-elle de l'interaction entre 1 grain et l'interface ou alors est-elle le reflet de la fraction moyenne de grains et donc de la fréquence d'interaction ? Nous verrons cependant aux résultats de l'analyse que la longueur d'onde n'est pas déterminante pour la détermination d'un seuil de stabilité.

Évolution de la longueur d'onde

Si les effets dus à la perturbation sont négligés, la vitesse normale à l'interface dans le repère du laboratoire est donnée par :

$$v_n = U \cos \theta . \quad (3.48)$$

Dans ce même repère, la vitesse tangentielle v_τ est donnée par la loi de Darcy le long de l'interface :

$$v_\tau = -\frac{b^2}{12\eta} \partial_\tau P_\Gamma . \quad (3.49)$$

La pression est imposée par le saut de pression $P_\Gamma = -\gamma\kappa$, où κ est la courbure de l'interface. Dans le référentiel du doigt, en tenant compte de vitesse de translation U , nous obtenons pour la vitesse tangentielle :

$$U_\tau = U \sin \theta + \frac{\gamma b^2}{12\eta} \partial_\tau \kappa . \quad (3.50)$$

Si nous supposons que la perturbation est advectée sur le côté du doigt avec une vitesse U_τ alors sa longueur d'onde va être modifiée car U_τ varie spatialement. La perturbation étant localisée en τ au temps t , la modification de sa longueur d'onde dl_q pendant le temps dt est :

$$dl_q = (U_\tau(\tau + l_q) - U_\tau(\tau))dt = l_q \frac{dU_\tau}{d\tau} dt . \quad (3.51)$$

Nous en déduisons le changement sur le vecteur d'onde dû à l'étirement :

$$\frac{d}{dt} \ln q = -S , \quad \text{avec} \quad S = \frac{d}{d\tau} U_\tau . \quad (3.52)$$

Évolution de l'amplitude

L'amplitude A de la perturbation va aussi être modifiée par cet étirement. Comme la longueur d'onde augmente, l'amplitude va diminuer. Ce qui aboutit à un terme en $-S$ dans l'expression de $\frac{d}{dt} \ln A$. Par ailleurs, il faut aussi considérer le coefficient provenant de l'analyse de stabilité linéaire [24] comme nous l'avons vu dans le premier chapitre (Eq. 1.27) :

$$\frac{\dot{A}}{A} = q \left(v_n - \frac{\gamma b^2}{12\eta} q^2 \right) . \quad (3.53)$$

Notons que c'est la vitesse normale dans le repère du laboratoire définie à l'équation (3.48) qui est utilisée pour déterminer le taux de croissance. En mettant ensemble les deux effets, nous trouvons donc :

$$\frac{d}{dt} \ln A = q \left(v_n - \frac{\gamma b^2}{12\eta} q^2 \right) - S . \quad (3.54)$$

Considérons l'équation (3.52). Comme $\tau = dt(d\tau/dt) = dtU_\tau$, cette équation peut être intégrée et nous obtenons :

$$q = \frac{C}{U_\tau} , \quad (3.55)$$

où C est une constante d'intégration. Remarquons que, comme U_τ tend vers zéro à la pointe du doigt, la longueur d'onde tend aussi vers zéro. Par ailleurs, sur les cotés du doigt, U_τ tend vers U constant donc la longueur d'onde tend elle aussi vers une constante. En notant que :

$$dt = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{d\theta} d\theta = \frac{1}{U_\tau \kappa} d\theta , \quad (3.56)$$

et en utilisant les équations (3.52) et (3.54), nous obtenons :

$$\frac{d}{d\theta} (\ln A - \ln q) = \frac{q}{U_\tau \kappa} \left(v_n - \frac{\gamma b^2}{12\eta} q^2 \right) . \quad (3.57)$$

Nous pouvons intégrer cette dernière équation par θ . En remplaçant q par U_τ (Eq. 3.55), nous trouvons :

$$A(\theta) = \frac{A(\theta_0) U_\tau(\theta_0)}{U_\tau(\theta)} \exp(I(\theta, \theta_0)) , \quad (3.58)$$

où l'intégrale I est définie par :

$$I(\theta_1, \theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \frac{C}{U_\tau^2 \kappa} \left(v_n - \frac{\gamma b^2}{12\eta} \frac{C^2}{U_\tau^2} \right) . \quad (3.59)$$

L'intégrale de l'équation (3.59) caractérise l'amplification de l'amplitude A quand cette dernière est advectée sur le coté du doigt. Notons qu'à partir du moment où nous supposons un profil de doigt, cette intégrale est entièrement définie. En effet, cette hypothèse nous donne la relation $\tau(\theta)$ et nous pouvons en déduire $\kappa = d\theta/d\tau$ ainsi que v_n et U_τ à l'aide des équations (3.48) et (3.50).

Il est donc possible de calculer cette intégrale. Pour étudier les grandes perturbations (et la déstabilisation), Bensimon *et al.* ont cherché la plus grande valeur possible de l'amplification du produit de A par U_τ . Cette valeur de $I(\theta_1, \theta_0)$ est atteinte si θ_1 et θ_0

sont choisis de sorte à annuler le terme entre parenthèses dans l'équation (3.59), ce qui correspond à n'intégrer que sur les valeurs positives de la fonction.

Nous nous plaçons dans le cas de valeurs élevées de $1/B$. Par conséquent le second élément du terme entre parenthèse est faible sauf pour les valeurs de θ faibles où, alors, U_τ tend vers zéro. En considérant que U_τ est bien estimé par le premier terme de l'équation (3.50), i.e. $U_\tau = U \sin \theta$, un développement limité au voisinage de $\theta = 0$ nous donne :

$$\theta_0 = \left(\frac{\gamma b^2 C^2}{12\eta U^3} \right)^{1/2}. \quad (3.60)$$

Sur les bords du doigt, θ tend vers $\pi/2$ et v_n tend vers zéro. Le terme entre parenthèses de l'équation (3.59) peut à nouveau s'annuler. En remarquant que ce dernier se réécrit $U(\cos\theta - \theta_0^2/\sin^2\theta)$, nous pouvons à nouveau faire un développement limité (cette fois-ci pour θ proche de $\pi/2$) et trouver :

$$\theta_1 = \pi/2 - \theta_0^2. \quad (3.61)$$

La plus grande contribution de l'intégrale (3.59) est au voisinage de $\theta = \theta_0$. En effet, c'est dans cette région que le préfacteur $1/U_\tau^2$ est le plus important. Cela correspond au fait que, dans la région près du doigt, la perturbation est advectée beaucoup plus lentement que par la suite et a donc plus le temps de s'accroître. Par ailleurs, la vitesse normale est également beaucoup plus élevée, ce qui agit dans le même sens. Partant de ce constat, il est possible d'évaluer l'intégrale I :

$$\begin{aligned} I(\theta_1, \theta_0) &\approx \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \frac{C}{U\kappa_0\theta^2} \left(1 - \frac{\theta_0^2}{\theta^2} \right) \\ &\approx \left[\frac{C}{U\kappa_0} \left(-\frac{1}{\theta} + \frac{\theta_0^2}{3\theta^3} \right) \right]_{\theta_0}^{\theta_1} \\ &\approx \frac{2C}{3\theta_0\kappa_0 U}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

où κ_0 est la courbure à proximité de la tête du doigt.

Pour un doigt de Saffman–Taylor de largeur relative $\lambda = \frac{1}{2}$, κ_0 est évalué par $2\pi/W$. En remarquant que $\theta_0 = CW(1/B)^{-1/2}$, nous en déduisons¹¹ :

$$I(\theta_1, \theta_0) \approx \frac{1}{3\pi} 1/B^{1/2}. \quad (3.63)$$

Déstabilisation du doigt

Considérant ce résultat, Bensimon *et al.* [13] s'interrogent sur le devenir d'une petite perturbation d'amplitude initiale A_i . Si cette perturbation est suffisamment petite, elle le restera car la valeur de I est bornée. Par contre si l'amplitude A_i est suffisamment importante, elle conduira à une amplitude $A_{max} \sim W$ capable de déstabiliser le doigt. L'équation (3.58) nous permet d'avoir une estimation de l'amplitude initiale critique A_c au dessus de laquelle il y a déstabilisation :

$$A_c \sim W \exp(-0.106 \ 1/B^{1/2}), \quad (3.64)$$

¹¹Notons, ici, que le paramètre de contrôle original utilisé par Bensimon *et al.* [13] n'est pas $1/B$ mais $d_0 = \frac{(2\pi)^2}{\lambda} 1/B^{-1}$, ce qui les amène à trouver $I(\theta_1, \theta_0) \approx \frac{2^{3/2}}{3} d_0^{-1/2}$.

où la dépendance en U_τ a été négligée par rapport à l'équation d'origine.

Le résultat de l'équation (3.64) est déterminant. En effet, le calcul a fait disparaître toute dépendance de la déstabilisation sur la longueur d'onde l_q de la perturbation. Si nous analysons les calculs, nous voyons que l'évolution temporelle de la longueur d'onde et celle de l'amplitude sont intrinsèquement liées par le facteur S . Cependant ce qui compte pour la déstabilisation du doigt c'est l'amplitude (finale) de la perturbation. La longueur d'onde ne sert que d'intermédiaire pour calculer S mais n'intervient pas en tant que "valeur". Rappelons que la longueur d'onde est supposée petite par rapport à la largeur du doigt de sorte que, d'une part, l'analyse de stabilité linéaire (Eq. 3.53) s'applique et que, d'autre part, l'évolution de q (Eq. 3.52) puisse être estimée.

Les premiers résultats de nos expériences sont en accord avec l'absence de dépendance de (3.64) sur la longueur d'onde. En effet, à géométrie de cellule et taille de grains données, nous avons observé qu'il n'y avait qu'une faible dépendance de la valeur critique $1/B_c$ du paramètre de contrôle selon la fraction de grains ϕ de nos suspensions ou selon l'épaisseur de la cellule b . Le modèle de Bensimon *et al.* confirme donc les expériences : ce n'est pas la longueur d'onde de la perturbation (ou la fréquence de perturbation/d'interaction, qui est fortement reliée à la fraction de grains ϕ) mais l'amplitude de cette dernière qui détermine la déstabilisation du doigt. Cette amplitude, comme nous le soulignons au début de cette sous-partie est très vraisemblablement liée à la taille des grains.

Nous pressentons, dès lors, que la taille des particules a un rôle déterminant dans le seuil de stabilité. C'est ce que nous allons voir en considérant l'intégralité de nos résultats.

3.4.4 Comparaison du modèle aux résultats expérimentaux

Données expérimentales en fonction du diamètre des grains

Pour analyser plus en détail l'effet de la taille des particules sur la déstabilisation du doigt, nous considérons l'ensemble de nos résultats pour une fraction de grains et un fluide donnés ($\phi = 10\%$, huile SE KF-6011). Le tableau 3.8 récapitule les données expérimentales extraites de ces différentes configurations.

N° config.	diam. grains D	épaisseur b	largeur W	$1/B_c$
1	80 μm	0.84 mm	20 mm	1110
2	20 μm	0.75 mm	40 mm	3200
3	40 μm	0.75 mm	40 mm	2710
4	80 μm	0.75 mm	40 mm	1600
5	80 μm	1.43 mm	40 mm	1670
6	140 μm	1.43 mm	40 mm	1040

TAB. 3.8 – Paramètres de contrôle critiques $1/B_c$ observés dans différentes configurations pour des suspensions à base d'huile SE KF-6011 et de fraction de grains $\phi = 10\%$.

Nous pressentons que la bonne échelle des perturbations expérimentées par le doigt est la taille des grains D . D'après l'équation (3.64) nous avons :

$$-\ln(A_c/W) \sim 0.106 \, 1/B^{1/2} , \quad (3.65)$$

où A_c est l'amplitude critique nécessaire à la déstabilisation d'un doigt caractérisé par le paramètre $1/B$. Cela nous incite ainsi à tracer $1/B_c^{1/2}$ en fonction de $-\ln(D/W)$. La figure 3.30 représente ces données.

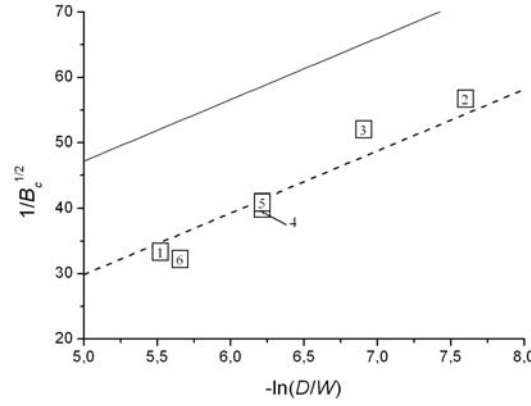


FIG. 3.30 – Données expérimentales relatives au seuil de déstabilisation en fonction des paramètres du système. Les numéros font référence aux configurations indiquées tableau 3.8. La ligne pleine représente la relation de Bensimon *et al.* (3.65) en considérant $A_c = D$ et la ligne en tirets, un ajustement des points expérimentaux obtenu en conservant la pente du modèle théorique.

Nous observons que nos points expérimentaux s'alignent de manière plutôt remarquable sur une droite respectant la pente du modèle de Bensimon *et al.* (3.65). Précisons ici que nous avons changé tous les paramètres possibles du système : géométrie de cellule (épaisseur et largeur) et taille des grains. Un ajustement linéaire des données expérimentales en imposant la pente nous donne :

$$-\ln(D/W) \sim 1.83 + 0.106 \, 1/B_c^{1/2} . \quad (3.66)$$

Comparaison au modèle

Interprétons maintenant l'ensemble de nos résultats et leur déviation de la courbe de Bensimon *et al.*. Nous pouvons réécrire l'équations (3.66), sous la forme :

$$-\ln\left(\frac{D}{0.16 \, W}\right) \sim 0.106 \, 1/B^{1/2} . \quad (3.67)$$

Dans ce cas, le dénominateur dans le logarithme n'est pas W mais une valeur inférieure : $0.16 \, W$. Cela peut être, en fait, interprété assez facilement. En effet l'amplitude maximale de déstabilisation est estimée dans le modèle par $A_{max} \sim W$. Ce n'est certainement pas la valeur considérée dans nos expériences. Nous estimons en effet que le doigt se déstabilise à partir du moment où il n'a plus une largeur bien définie. L'analyse de l'écart-type $\delta\lambda$ de la largeur relative nous donne ainsi un ordre de grandeur de l'amplitude maximale pour nos expériences $A_{max} \sim 2\sqrt{2} \, \delta\lambda \, W$. Le facteur $2\sqrt{2}$ provient

de la transformation d'un écart-type en amplitude crête à crête¹². En se référant à la figure 3.27 nous en déduisons $A_{max} \sim 0.009 W$ pour nos expériences.

Ce dernier résultat semble, à première vue, ne pas être beaucoup plus juste que $A_{max} \sim W$ si nous le comparons aux valeurs attendues, aux alentours de $0.16 W$. Cependant il est tout de même plus pertinent. En effet, nous n'avons pas encore discuté de l'amplitude initiale A_i de la perturbation. Nous avons supposé que cette dernière était de l'ordre de grandeur du diamètre du grain : $A_i \sim D$. Or, il est beaucoup plus probable que, du fait de la tension de surface et à l'écoulement tangentiel au doigt, un grain de taille D provoque une perturbation d'amplitude plus faible que son diamètre : $A_i < D$. Cela est permis si nous considérons $A_{max} \sim 0.009 W$. Un ordre de grandeur $A_{max} \sim W$ conduirait en effet à avoir des perturbations initiales devant être plus grandes que la taille des grains, ce qui semble absurde.

Si nous considérons $A_{max} \sim 2\sqrt{2} \delta\lambda W \sim 0.009 W$, nous trouvons alors $A_i \sim 0.06 D$. Cette valeur de l'ordre d'un dixième de taille de grains est probable et vient appuyer le fait que :

1. la déstabilisation que nous observons est obtenue à une amplitude maximale A_{max} bien plus faible que la largeur W du canal,
2. les grains provoquent une perturbation d'amplitude initiale A_i plus faible que leur diamètre D .

Notons, pour finir que nous n'avons pas d'accès visuel à l'amplitude initiale estimée ici car elle est bien en deçà de la résolution de notre caméra.

Quelques remarques supplémentaires

La figure 3.31 représente, en plus des données évaluées à l'aide des mesures d'écart-types, les mesures collectées visuellement sur les suspensions à base d'huile DC 704. Ces dernières données présentent des incertitudes beaucoup plus importantes. Cependant, elles restent du même ordre de grandeur : les résultats pour l'huile DC 704 sont tout à fait comparables à ceux de l'huile SE KF-6011 alors que ces deux huiles ont des viscosités η_0 et des tensions de surface γ différentes.

Notons que Bensimon *et al.* [13] ont également proposé d'autres méthodes pour déterminer le seuil de stabilité. Elles donnent cependant des résultats relativement similaires et n'améliorent pas l'accord avec nos résultats.

Nous retenons donc que, dû à la présence de grains, les doigts se déstabilisent précocement. Cette déstabilisation est caractérisée par une valeur critique du paramètre de contrôle $1/B_c$ qui est indépendante de la fraction de grains ϕ . Ainsi même pour de très faibles fractions de grains ($\phi = 1\%$), les doigts se déstabilisent précocement. Nous avons montré que cette perturbation s'expliquait principalement par la taille des grains dans la suspension, ce qui est en bon accord avec le résultat d'analyse des perturbations d'amplitude finie de Bensimon *et al.* [13].

¹²Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'écart-type d'une fonction sinus, $1/\sqrt{2}$, et de le comparer à l'amplitude crête à crête, 2 (voir aussi la figure 3.26). Nous retenons cette définition de l'amplitude car nous considérons également le diamètre des grains D et non leur rayon R .

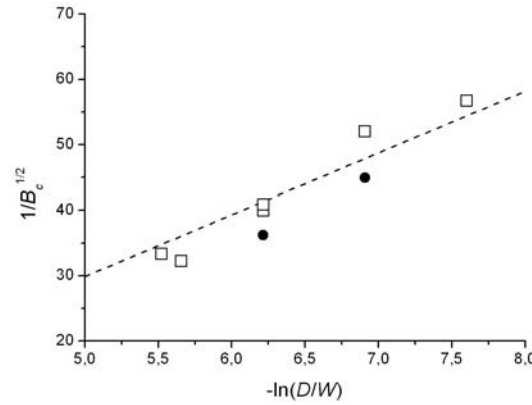


FIG. 3.31 – Données expérimentales relatives au seuil de déstabilisation en fonction des paramètres du système pour des suspensions à une fraction de grains $\phi = 10\%$: $\square$, points déterminés par la variation de l'écart-type pour l'huile SE KF-6011; $\bullet$, points déterminés "visuellement" pour l'huile DC 704. La droite en tiret représente l'ajustement linéaire (3.66).

Pour des valeurs du paramètre de contrôle en dessous de $1/B_c$ (i.e. les faibles vitesses), les doigts sont stables (Fig. 3.22a, b) et nous pouvons donc en mesurer la largeur. La prochaine partie s'attache à décrire cette largeur.

3.5 Largeur relative des doigts stables

Nous cherchons, dans cette partie, à caractériser, le plus précisément possible la largeur relative des doigts stables λ en fonction du paramètre de contrôle $1/B$ pour les différentes configurations (suspensions et géométries de cellule) utilisées. Nous verrons d'abord comment les données sont traitées avant de nous attacher à décrire et à comprendre les courbes $\lambda-1/B$.

3.5.1 Traitement des données

Préliminaires

Le paramètre de contrôle de la digitation de Saffman–Taylor est un nombre capillaire modifié $1/B = 12(\frac{W}{b})^2 \eta U / \gamma$. Une fois tracées en fonction de ce paramètre, les largeurs relatives des doigts se placent relativement correctement sur une courbe maîtresse. Cependant, comme nous l'avons déjà souligné dans la sous-partie 2.4.4, il existe une légère influence du rapport d'aspect de la cellule W/b sur le comportement de la courbe $\lambda-1/B$ [100].

Comme nous cherchons à détecter des variations relativement faibles du comportement de la largeur relative en fonction du paramètre $1/B$, il nous faut connaître la courbe maîtresse adaptée à chacune de nos géométries. Pour cela, le moyen le plus efficace est simplement de considérer les courbes de Saffman–Taylor obtenues pour le(s) fluide(s) pur(s). Ces dernières sont en effet les courbes maîtresses de l'instabilité puisque

les fluides purs sont strictement Newtoniens. Notons que nous observons de très légers effets d'inertie dans la configuration $b = 1.43$ mm, $W = 4$ cm mais que ces derniers sont, en fait, bien au delà du seuil de stabilité de nos doigts et ne nous empêchent donc pas de conduire notre présente analyse. Dans le cas des suspensions, le maximum atteint du nombre de Weber modifié We^* (Eq. 2.3) ne dépasse pas 1 ce qui est un ordre de grandeur en dessous du seuil de 10 préconisé dans notre étude sur les effets d'inertie (Chap. 2). Le mode de sélection de la largeur relative n'est donc pas modifié.

Les courbes maîtresses indiquées dans les graphes suivants sont extraites de nos données pour les fluides purs en suivant un traitement identique à celui des suspensions et que nous détaillons maintenant.

Pour tracer les courbes $\lambda-1/B$, il nous reste à définir le paramètre de contrôle de nos suspensions. Pour les raisons évoquées dans la sous-partie 3.4.2, nous considérons toujours le paramètre de contrôle calculé avec la viscosité effective η_C (Eq. 3.47). Nous reviendrons sur la pertinence de ce choix une fois tracées les courbes $\lambda-1/B$.

Évolution caractéristique de la largeur

La figure 3.32 représente l'évolution typique de la largeur relative des doigts pour 6 expériences différentes issues d'une même série (i.e. même suspension et même géométrie de cellule) et obtenues pour des surpressions ΔP différentes.

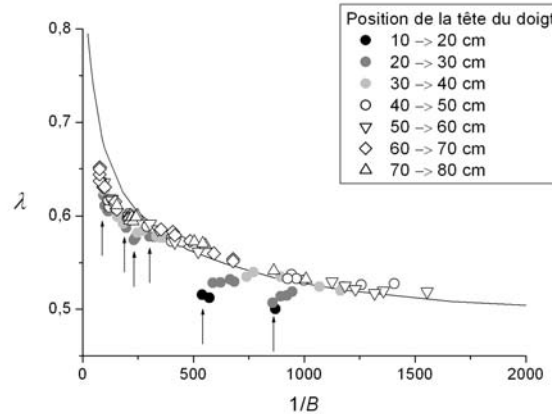


FIG. 3.32 – Largeur relative des doigts λ en fonction du paramètre de contrôle $1/B$ et de la position du doigt pour différentes expériences menées dans une suspension d'huile SE KF-6011 et de billes de 80 μm à une fraction de grains $\phi = 20\%$ dans une géométrie de cellule $W = 4$ cm, $b = 1.43$ mm. La courbe pleine représente la courbe maîtresse de la digitation de Saffman-Taylor dans cette géométrie. Les flèches verticales indiquent les premiers points de chaque expérience.

Sur cette figure, nous avons représenté la position de la tête du doigt, c'est à dire la distance que le doigt a parcouru dans la cellule depuis son entrée. Nous voyons très nettement qu'il existe une sorte de distance caractéristique, une longueur d'adaptation l_a , nécessaire au doigt pour atteindre sa largeur établie. Cette dernière largeur est définie par la reproductibilité des mesures de λ pour différentes surpressions initiales. Lors de la phase transitoire, avant d'avoir une largeur établie, nous observons que les doigts ont une

phase de croissance de leur largeur relative. Nous pensons que cela est lié à un artefact de la procédure d'injection. Notons, en effet, que l'injection d'air se fait par un trou de 1 cm de diamètre et que le doigt doit ensuite s'adapter à la géométrie de la cellule (ici $W = 4$ cm). Pour les fluides Newtoniens, cette adaptation est très rapide et dans nos mesures concernant les fluides purs, nous n'observons pas de transition spéciale. Ils semblent par contre que, dans le cas des suspensions, la largeur relative met du temps à "s'adapter". Ce phénomène semble être de même nature que celui conduisant aux doigts asymétriques observés dans la sous-partie 3.4.1 (Fig. 3.24). Dans ce dernier cas aussi, le doigt semble avoir des difficultés à s'adapter à la géométrie de la cellule.

Il est assez difficile d'avoir un critère plus pertinent que la simple observation visuelle pour déterminer la longueur d'adaptation l_a . Nos observations sur les différentes configurations tendent à montrer que cette longueur l_a dépend principalement de la fraction de grains ϕ . Les longueurs typiques sont représentées figure 3.33.

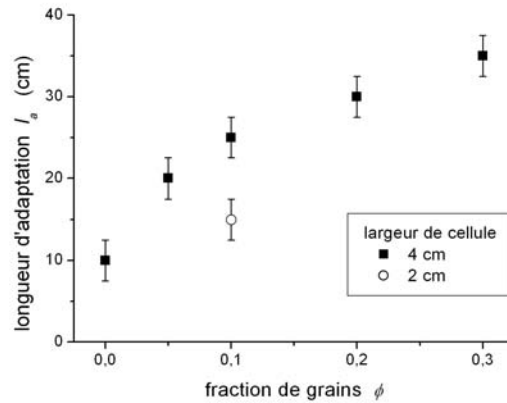


FIG. 3.33 – Longueur d'adaptation l_a nécessaire au doigt pour que la largeur relative soit "établie" en fonction de la fraction de grains ϕ dans une cellule de longueur totale $L = 90$ cm.

Nous remarquons qu'il y a une croissance de la longueur d'adaptation l_a avec la fraction de grains ϕ . Plus ϕ est élevée, plus le doigt a donc de mal à rejoindre sa largeur établie. C'est un phénomène principalement dû à la présence de grains, puisqu'il n'existe pas de telles observations dans les fluides Newtoniens très visqueux où les doigts s'adaptent quasiment dès l'entrée à la géométrie de la cellule. Notons cependant que ce phénomène ne peut pas simplement s'expliquer par des problèmes de diffusion de particules car ceux-ci conduiraient à des processus plus rapides pour des fractions plus fortes de grains, comme nous l'avons vu dans la sous-partie 3.3.2.

L'observation, sur la figure 3.33, du résultat pour la géométrie à $W = 2$ cm est cohérente avec cette interprétation d'adaptation. En effet, l'injection se faisant par un trou de 1 cm de diamètre, les doigts créés à l'entrée ont dès le départ des largeurs relatives de l'ordre de $1/2$ beaucoup plus proches des largeurs établies.

Notons, pour finir, que nous n'observons pas d'influence de cette adaptation sur la loi de Darcy.

Nous ne chercherons pas à comprendre plus cette phase de l'écoulement qui est très vraisemblablement fortement dépendante du mode d'injection et nous nous concentrons sur la suite sur les résultats obtenus en régime établi.

Obtention des courbes $\lambda-1/B$

Puisqu'une fois passée la longueur d'adaptation, les doigts semblent avoir une largeur relative bien établie sur un graphe $\lambda-1/B$, nous considérons que ces points constituent la courbe de Saffman–Taylor pour la suspension étudiée.

Nous traitons donc les données en deux temps :

- Pour l'ensemble de nos résultats, nous ne considérons que les données relatives aux doigts stables situés au delà de 35 cm de l'entrée de la cellule (valeur maximale observée, voir figure 3.33).
- Pour chaque suspension et géométrie de cellule, nous procédons à un calcul de moyenne et d'écart-type sur des intervalles de taille croissante avec la vitesse (environ 10~20 intervalles par série d'expériences). Ce qui permet d'obtenir une courbe $\lambda-1/B$ moyennée.

Le résultat d'un tel traitement est visible en comparant les figures 3.34(a) et 3.34(b).

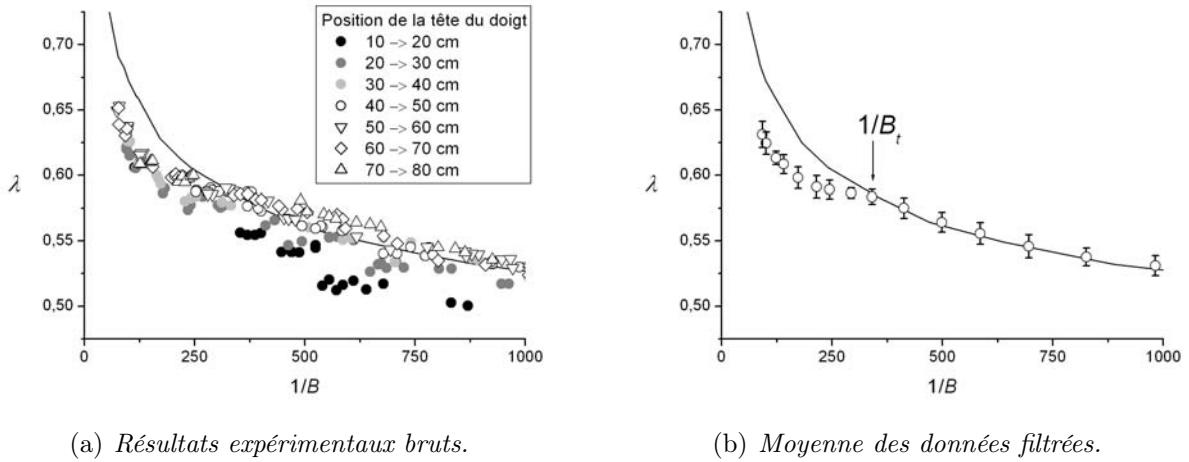


FIG. 3.34 – Largeur relative des doigts λ en fonction du paramètre de contrôle $1/B$ pour une suspension d'huile SE KF-6011 à une fraction de $\phi = 20\%$ de billes de $80 \mu\text{m}$ dans une géométrie de cellule $W = 4 \text{ cm}$, $b = 1.43 \text{ mm}$. La courbe pleine représente la courbe maîtresse de la digitation de Saffman–Taylor dans cette géométrie. Le paramètre de contrôle de transition $1/B_t$ est localisé sur la figure (b).

Nous sommes donc maintenant en mesure de tracer les courbes de Saffman–Taylor pour l'ensemble de nos séries d'expériences et de les analyser.

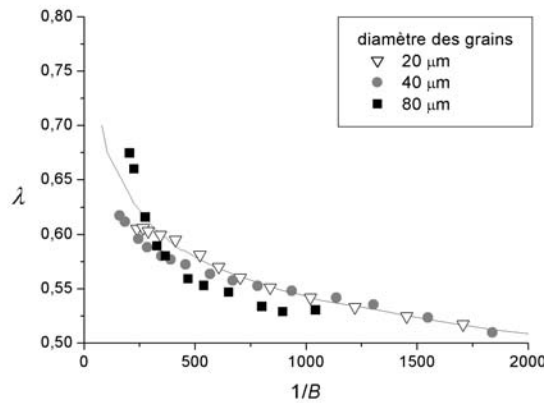
3.5.2 Analyse des courbes de Saffman–Taylor

L'analyse des courbes $\lambda-1/B$ est une étape assez compliquée comme l'atteste la plupart des études menées sur des fluides complexes [14, 52, 69, 70, 98, 102] et même dans

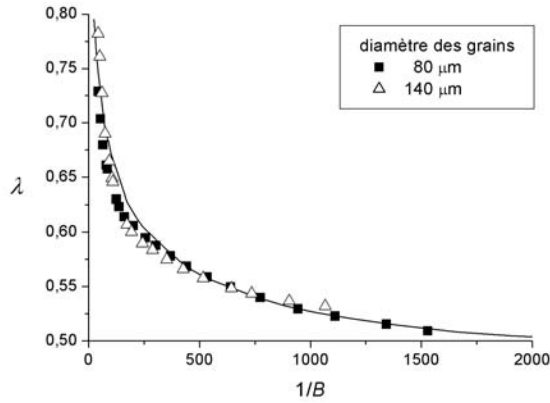
certains cas sur les fluides Newtoniens [78]. Nous allons dans cette sous-partie décrire les graphes obtenus dans le cas des suspensions granulaires et donner quelques tentatives d'explication des observations. Pour cela, nous considérons d'abord l'ensemble des graphes pour une fraction donnée de grains puis pour une taille donnée de grains.

Évolution selon le diamètre des grains

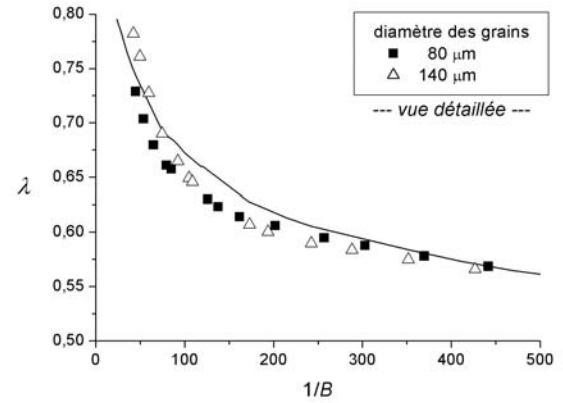
Les figures 3.35(a) et 3.35(b) représentent la largeur relative des doigts λ en fonction du paramètre $1/B$ pour différents diamètres de grains à $\phi = 10\%$ dans l'huile SE KF-6011. Y est également indiquée la courbe maîtresse de l'instabilité classique.



(a) $W=4$ cm, $b=0.75$ mm



(b) $W=4$ cm, $b=1.43$ mm (échelle large)



(c) $W=4$ cm, $b=1.43$ mm (échelle rapprochée)

FIG. 3.35 – Largeur relative des doigts λ en fonction du paramètre de contrôle $1/B$ et de la taille des grains pour des suspensions à base d'huile SE KF-6011 à une fraction de grains $\phi = 10\%$. La courbe pleine représente la courbe maîtresse de la digitation de Saffman–Taylor dans chaque géométrie.

Le comportement des courbes $\lambda-1/B$ est relativement similaire pour l'ensemble des suspensions. Nous pouvons faire les observations suivantes :

- Il semble exister une plage de $1/B$ plus ou moins grande où les doigts sont plus fins que prévu. Cette plage est suivie d'une transition vers la courbe classique de Saffman–Taylor. Nous notons $1/B_t$, ce paramètre de transition (voir Fig. 3.34b).
- Dans certains cas, nous observons que la largeur relative est supérieure à celle prévue pour un fluide simple. Quand $1/B$ augmente elle décroît très rapidement pour ensuite rejoindre les valeurs de largeur relative plus faibles que nous venons d'évoquer ci-dessus.

En faisant varier la taille des grains D ainsi que l'épaisseur de la cellule b , nous varions le rapport d'aspect b/D de 9 à 37. Nous observons que :

- le paramètre de contrôle à la transition est plus élevé si D augmente ou si b diminue (voir tableau 3.9),
- les doigts trop larges sont particulièrement observés pour des rapport b/D de l'ordre de 10.

Notons que le choix de la viscosité effective pour définir le paramètre de contrôle $1/B$ semble a posteriori judicieux puisque nos résultats expérimentaux tendent vers la courbe classique de Saffman–Taylor au delà de $1/B_t$.

Évolution selon la fraction de grains

Les figures 3.36(a) et 3.36(b) représentent la largeur relative des doigts en fonction du paramètre $1/B$ pour différentes fractions de grains avec des grains de diamètre $D = 80 \mu\text{m}$. Y est également indiquée la courbe maîtresse de l'instabilité de Saffman–Taylor.

Nous retrouvons sur ces figures le comportement typique des courbes $\lambda-1/B$ évoqué dans le paragraphe précédent.

Les résultats obtenus dans la cellule d'épaisseur $b = 0.75 \text{ mm}$ ($b/D = 9$) montrent que la phase de décroissance rapide semble indépendante de la fraction de grains ϕ , mais que ce n'est pas le cas des valeurs des largeurs de doigts plus fins observées quand $1/B$ augmente. Dans cette phase, plus la fraction de grains est élevée plus les largeurs relatives sont faibles. Les données expérimentales semblent ensuite rejoindre la courbe maîtresse pour une valeur de $1/B_t$ de nouveau indépendante de la fraction de grains.

En passant à la cellule d'épaisseur $b = 1.43 \text{ mm}$ ($b/D = 18$), nous doublons le rapport d'aspect. Nous y retrouvons des observations comparables (Fig 3.36c) mais avec des seuils de paramètre de contrôle différents : décroissance prononcée de λ (bien que peu visible), doigts plus fins dont l'écart de largeur relative par rapport à la courbe maîtresse dépend de ϕ et finalement largeurs qui rejoignent cette courbe maîtresse. Notons que pour les rapports d'aspect plus grand, les différences selon la fraction de grains ϕ sont moins prononcées.

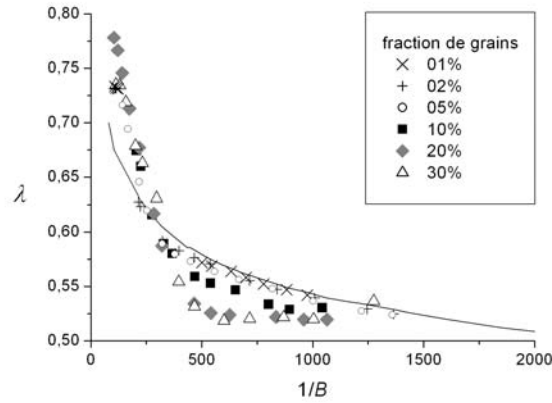
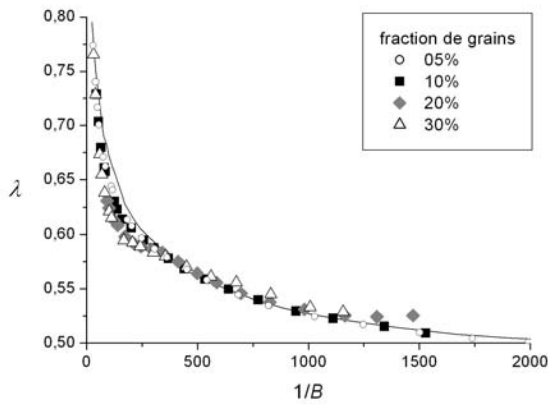
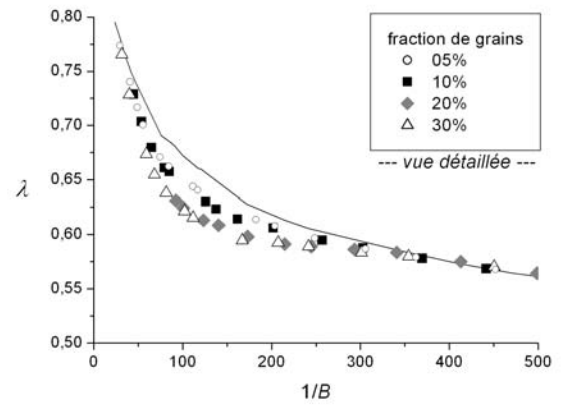
(a) $W=4$ cm, $b=0.75$ mm(b) $W=4$ cm, $b=1.43$ mm (échelle large)(c) $W=4$ cm, $b=1.43$ mm (échelle rapprochée)

FIG. 3.36 – Largeur relative des doigts λ en fonction du paramètre de contrôle $1/B$ et de la fraction de grains ϕ pour des suspensions à base d'huile SE KF-6011 et de billes de $80\ \mu\text{m}$ dans deux géométries de cellule.

Analyse

Une caractérisation de nos données est la mesure du paramètre de contrôle de transition $1/B_t$. Ce paramètre qui donne la valeur de $1/B$ lorsque les données expérimentales rejoignent la courbe maîtresse semble relativement indépendant de la fraction de grains ϕ . Le tableau 3.9 rassemble les valeurs relevées de $1/B_t$ en fonction des caractéristiques expérimentales.

Comme nous l'avons souligné lors des premières observations, le paramètre de contrôle à la transition augmente lorsque b diminue et lorsque la taille des grains augmente. Il semble probable que $1/B_t$ évolue comme la taille des grains D (et hypothétiquement comme b^{-2}). Il est difficile cependant d'en faire réellement une remise à l'échelle étant donné la faible gamme de valeurs dont nous disposons et l'absence de mécanisme expliquant les observations.

largeur W	épaisseur b	diam. grains D	$1/B_t$ estimé
20 mm	0.84 mm	80 μm	≥ 1200
40 mm	0.75 mm	20 μm	300
	0.75 mm	40 μm	750
	0.75 mm	80 μm	1200
	1.43 mm	80 μm	350
	1.43 mm	140 μm	600

TAB. 3.9 – Valeur du paramètre de contrôle à la transition $1/B_t$.

Nous avons en effet tenté de comprendre quels effets pouvaient expliquer les comportements observés sur nos données expérimentales $\lambda-1/B$.

Nous avons notamment étudié une modification de l'épaisseur du film de mouillage, due à une éventuelle absence de grains dans les films trop fins ou une modification du rayon de courbure effective par la perturbation de l'interface par les grains (Eq. 1.40 et 1.41) [100].

Nous avons également envisagé l'influence de propriétés non-Newtoniennes de la suspension sur la largeur des doigts, comme par exemple l'existence d'une contrainte normale qui entraînerait un élargissement des doigts [69, 70]. Nous nous sommes aussi intéressés à la possibilité d'une viscosité rhéofluidifiante effective due à la déplétion en particules devant un ménisque de suspension qui recule [101] et qui, elle, tendrait à amincir les doigts [69, 70].

Enfin des fluctuations de la largeur du doigt pourraient aussi expliquer un amincissement de ce dernier comme nous l'observons dans certaines gammes de $1/B$ [78].

Cependant aucune des approches ne s'est avérée concluante et n'a permis d'expliquer la totalité des phénomènes observés. Le mode de sélection des doigts dans nos suspensions reste donc encore mal compris. Notons cependant que les variations observées sont cependant relativement faibles comparées à celles mesurées dans d'autres études [78, 99].

3.6 Vers de plus fortes fractions de grains

Nous nous sommes, pour le moment, consacrés à étudier les suspensions de fractions de grains ϕ plus petites que 40%, ce qui est inférieur à une limite de blocage où l'encombrement des grains rentrerait en compte et que nous pouvons situer vers 55%. Nous nous intéressons donc dans cette partie à un brève étude qualitative de l'effet de l'augmentation de la fraction de grains ϕ sur les motifs observés.

Augmenter sensiblement la fraction de grains ϕ signifie, dans un premier temps, accroître nettement la viscosité de la suspension. Nous avons ainsi des fluides de plus en plus visqueux. Pour en faciliter l'étude nous avons donc travaillé dans une petite cellule de Hele-Shaw (25 cm de longueur contre 90 auparavant).

Le protocole expérimental est analogue à celui décrit dans la sous-partie 3.2.1 à l'exception notable que nous utilisons maintenant une caméra numérique de résolution élevée pour acquérir nos images : une définition de 1348×300 permet ainsi de couvrir la quasi-totalité du canal. Une seule géométrie de cellule a été utilisée : largeur $W = 4$ cm et

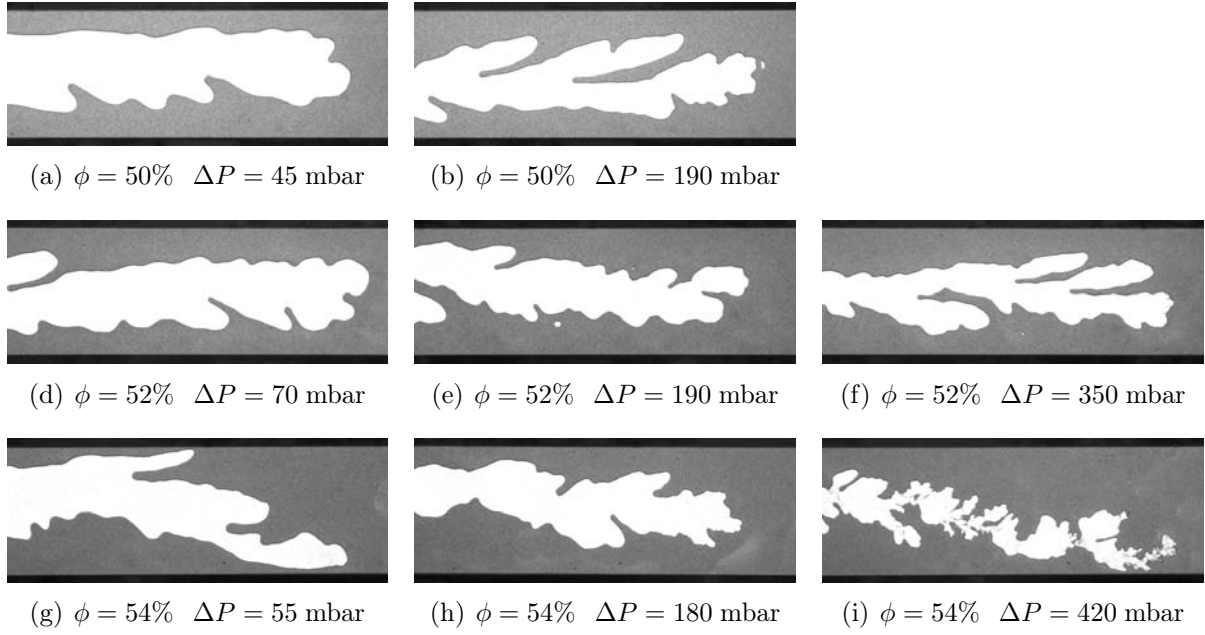


FIG. 3.37 – Motifs de digitation observés lors de l’injection d’air dans des suspensions à base d’huile SE KF-6011 et de billes de $80\ \mu\text{m}$ pour une géométrie de cellule $W = 4\ \text{cm}$ $b = 0.75\ \text{mm}$ et pour différentes fractions de grains ϕ et surpressions appliquées ΔP . L’injection se fait de gauche à droite.

épaisseur $b = 0.75\ \text{mm}$. Nous n’avons également employé qu’un seul type de suspension : des grains de $80\ \mu\text{m}$ de diamètre dans de l’huile SE KF-6011.

Il nous reste donc deux paramètres de contrôle : la fraction de grains ϕ et la surpression appliquée ΔP .

Les figures 3.37(a-i) représentent l’évolution des motifs en fonction de ces deux paramètres pour des fractions de grains ϕ de 50 à 54%. Notons que des suspensions de fractions de grains de 30 et 40 % ont également été testées dans ce dispositif. Les motifs ne montrent pas de différence significative avec les précédentes expériences dans la grande cellule de Hele-Shaw.

La plupart des motifs représentés figures 3.37(a-i) est analogue aux motifs instables observés classiquement [81] et détaillés précédemment (observation de side branching et de tip-splitting, notamment). Nous observons que les motifs sont plus fins et plus ramifiés lorsque la surpression ΔP est augmentée (Fig. 3.37a→b ; d→e→f ; g→h→i), ce qui est en accord avec une plus grande instabilité lorsque le gradient de pression augmente. Les observations faites dans le cadre des expériences similaires à $\phi = 30$ et 40% sont également en accord avec cette variation en fonction de ΔP .

La figure 3.37(i) présente cependant un motif particulier. La figure 3.38 en offre un similaire obtenu pour une surpression appliquée légèrement plus importante.

Nous remarquons qu’il y a deux types de structures différentes :

- des structures larges, analogues aux digitations observées dans les fluides visqueux et dont la taille est comparable à la largeur de la cellule W ,
- des structures nettement plus fines, dont la taille est cette fois-ci comparable à l’épaisseur de la cellule b .

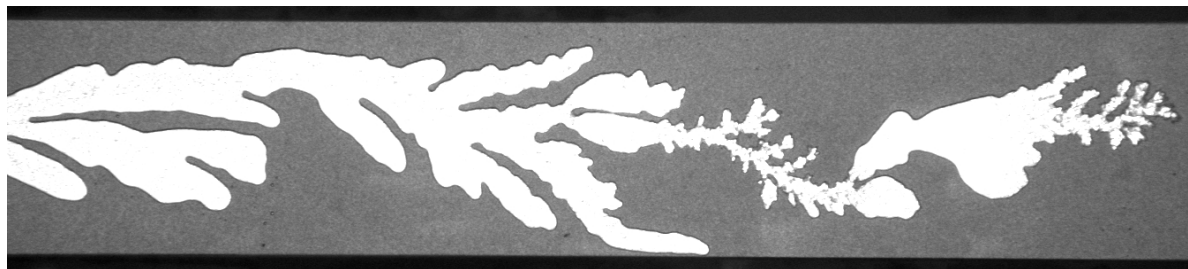


FIG. 3.38 – Motif de digitation observé lors de l'injection d'air dans une suspension d'huile SE KF-6011 à une fraction de $\phi = 54\%$ de billes de $80\ \mu\text{m}$ dans une géométrie de cellule $W = 4\ \text{cm}$ $b = 0.75\ \text{mm}$. La surpression d'injection est de $\Delta P = 520\ \text{mbar}$.

Nous constatons que la transition entre ces motifs est très abrupte. Elle résulte en fait d'inhomogénéités de la fraction locale de grains apparaissant dans la cellule. De manière dynamique, il y a formation d'une zone dense en grains, qui freine la progression du doigt "classique" de Saffman–Taylor. Celui-ci ralentit nettement puis forme spontanément une structure beaucoup plus fine et ramifiée. Lorsque le milieu redevient moins dense en grains, des motifs larges peuvent réapparaître.

Pour des fractions de grains plus élevées, la formation de telles hétérogénéités locales est systématique. C'est la limite de l'approche fluide visqueux effectif et homogène que nous avons eue dans ce chapitre. En effet, l'écoulement se bloquant, nous ne pouvons plus considérer le fluide comme simplement "visqueux effectif" et la structuration locale interdit et d'envisager le fluide comme restant "homogène".

Pour l'étude des suspensions plus denses en grains (fraction de grains $\phi \geq 54\%$), il nous faut donc envisager un autre dispositif. C'est ce qui est proposé dans les chapitres suivants où nous avons développé un principe de préparation in situ du milieu par décompaction. Plutôt que de démarrer des faibles fractions de grains pour aller vers les plus importantes (démarche de ce chapitre), nous sommes ainsi partis d'un milieu totalement compacté que nous avons ensuite décompacté. Nous étudierons, en détails, la décompaction et la déstabilisation d'un édifice granulaire soumis à une surpression dans le prochain chapitre avant de s'intéresser à nouveau à l'injection d'air mais cette fois-ci dans un milieu dense décompacté au chapitre 5.

3.7 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre l'instabilité de Saffman–Taylor pour les suspensions granulaires dont la fraction de grains ϕ était inférieure à 40% . Pour cette gamme de ϕ , il n'y a aucun phénomène de blocage ou de contraintes seuils.

Nous avons montré que le comportement de ces suspensions ne pouvait se réduire à une analogie avec un fluide complexe dont la viscosité croîtrait simplement avec la fraction de grains : les grains ont un rôle singulier, à la fois sur l'écoulement de la suspension, sur la digitation et sur sa stabilité.

D'une manière assez étonnante, les 3 points d'étude macroscopiques sur lesquels nous nous sommes focalisés, loi de Darcy, seuil de stabilité et largeur des doigts, sont liés de manière univoque à une propriété du système.

Pour la loi de Darcy, la présence de grains entraîne la modification du profil d'écoulement dans l'épaisseur. Les grains migrent en effet dans les zones de faible cisaillement et le profil d'écoulement n'est plus parabolique mais tend à se bomber. La conséquence est l'observation d'une viscosité effective inférieure à la viscosité rhéologique obtenue pour une répartition uniforme des grains. Cette propriété est majoritairement liée à la fraction de grains ϕ de la suspension. Un modèle de diffusion de particules [84] permet de rendre compte des ordres de grandeur de la variation de viscosité effective en fonction de ϕ .

Le seuil de stabilité des doigts est abaissé très nettement par la présence des grains. Nous avons ainsi observé que les doigts se déstabilisent précocement. Cette déstabilisation précoce est très majoritairement liée à la taille des grains (diamètre D) et n'est que peu influencée par la fraction de grains ϕ . Nous observons ainsi que même une fraction de grains de 1% suffit à provoquer une déstabilisation précoce. Une analyse de l'advection des perturbations sur le coté du doigt [13] vient confirmer ces observations. Cette dernière nous a permis de rationaliser nos résultats en montrant que la racine carrée du seuil de déstabilisation $1/B_c^{1/2}$ dépendait linéairement du facteur $\ln(D/W)$ où W est la largeur du canal.

Au niveau des largeurs des doigts, même si une partie du mode de sélection reste encore à éclaircir nous avons montré le rôle singulier du rapport d'aspect b/D donnant le nombre de grains dans l'épaisseur b de la cellule. Nous avons observé que pour les faibles valeurs de b/D et même aux fractions de grains faibles, la largeur se comporte de manière très particulière aux plus faibles vitesses. Elle est notamment plus élevée que celle attendue pour un fluide Newtonien. Pour les plus grandes vitesses quelle que soit la configuration, nous observons que les largeurs tendent cependant à rejoindre celles de la courbe maîtresse si le paramètre de contrôle est calculé avec la viscosité effective η_C .

Au final, l'instabilité de Saffman–Taylor s'est montrée un outil macroscopique très efficace pour sonder les propriétés microscopiques (fraction de grains, diamètre des grains) des suspensions et comprendre l'influence des grains portés à l'interface. Pour aller plus loin dans ce type d'étude, il serait certainement intéressant de se pencher sur des cas plus complexes (plusieurs diamètres de grains dans un premier temps, suspensions "naturelles" comme des loess ou des boues) dans le but de voir quelles propriétés resteraient robustes.

Chapitre 4

Déstabilisation d'un milieu granulaire immergé par une surcharge de fluide interstitiel

Ce chapitre et le suivant sont consacrés à l'étude de l'injection dans les suspensions denses en grains ($\phi \sim 60\%$) : injection d'air, comme dans le chapitre précédent, mais aussi injection de fluide interstitiel pur. Pour des raisons techniques que nous évoquerons au chapitre suivant, nous commencerons par ce dernier cas.

Nous nous trouvons ainsi dans la situation d'un édifice granulaire totalement immergé et soumis à une surpression de fluide interstitiel.

Dans la pratique c'est typiquement le cas des géostructures comme les digues où des édifices en terre partiellement saturés servent à retenir une masse d'eau.

Dans notre cas, nous étudions la déstabilisation de cette assemblée granulaire dans une cellule de Hele-Shaw. du fait de l'écoulement, la structure granulaire initialement dense va pouvoir être mobilisée et les grains vont pouvoir être emportés par le fluide. Il y aura, dès lors, deux situations extrêmes : d'un côté, le fluide interstitiel peut s'écouler au travers d'une matrice poreuse fixe et d'un autre, les grains et le fluide peuvent s'écouler ensemble à la manière d'une pâte granulaire [39]. Par ailleurs, la pâte granulaire étant un milieu beaucoup plus visqueux que le fluide interstitiel pur, nous nous trouvons également dans le cas de la digitation de Saffman–Taylor.

Après avoir présenté le protocole expérimental, nous nous intéresserons au déroulement typique d'une expérience et isolerons les différentes phases du processus, en particulier la décompaction initiale du milieu et le phénomène de digitation qui suit. Une fois détaillé le traitement que nous pouvons appliquer aux images et données obtenues, nous nous attacherons alors à caractériser et à comprendre les deux processus.

4.1 Protocole expérimental

4.1.1 Préparation du milieu

Composition

Nous abordons dans ce chapitre le cas des situations où la fraction relative de grains est très élevée. D'un point de vue fluide effectif, il s'agit ainsi de suspensions très denses,

de pâtes granulaires qui présentent, outre des effets complexes, une viscosité relative élevée. Il est donc important de travailler avec des fluides interstitiels peu visqueux. Pour cela, nous avons utilisé une huile silicone de faible viscosité, l'huile Rhodorsil 47V05 dont nous nous sommes déjà servis dans l'étude des effets d'inertie (Chap. 2). Cette huile a une viscosité η_0 de 5.0 mPa.s ne dépendant que très peu de la température. Sa densité est de 930 kg m^{-3} .

Nous avons travaillé avec des grains de diamètre $D = 80 \text{ }\mu\text{m}$ dont les caractéristiques ont déjà été rapportées dans le chapitre 3. Il s'agit ainsi de grains de polystyrène de densité 1060 kg m^{-3} parfaitement sphériques et monodisperses. Une petite fraction de ces grains (de l'ordre de 0.04%) est teintée à l'encre noire. Ce marquage permet de créer un plus fort contraste de texture au niveau de la surface visible du milieu dans le but initial d'utiliser des techniques de suivi de particules¹. Il n'y a pas d'influence de cette encre sur les propriétés du milieu. Par ailleurs cette dernière n'est pas soluble à l'huile et reste donc sur les grains marqués.

Notons qu'il existe donc une différence de densité entre grains et fluide plus importante dans la présente étude que dans les travaux portant sur la digitation dans les suspensions de faibles fractions de grains. Elle n'est cependant que de l'ordre de 10%. Cela s'avère tout à fait suffisant puisque nous travaillons avec des fractions de grains très élevées. Il n'est alors plus indispensable d'avoir une iso-densité parfaite pour négliger les effets dus à la gravité.

Imbibition

La mise en œuvre de l'étude des suspensions très denses en grains est plus complexe que celle des suspensions faite au chapitre 3. Il n'est, en effet, pas possible de placer convenablement une suspension très dense ou pâte granulaire dans la cellule de Hele-Shaw. Il y a deux raisons à cela. La première tient à la nature complexe du fluide présent. Nous sommes typiquement dans le cadre de fluides très visqueux et potentiellement à seuil. Ce sont donc des fluides très difficiles à placer dans une cellule de Hele-Shaw. Par ailleurs, même si cette mise en place était réalisable, une seconde contrainte provient de la nature granulaire de la pâte : il y a un fort risque de structuration. Comme nous l'avons vu pour les suspensions de faibles fractions de grains, les profils de fraction de grains et de vitesse sont modifiés dans l'épaisseur de la cellule du fait de la géométrie. Cette structuration adviendra aussi dans le cas présent si nous injectons la pâte. D'une manière plus générale, il existe également un risque de créer des inhomogénéités selon la largeur de la cellule avec des zones bloquées et des zones en écoulement.

La solution que nous avons retenue a donc été de préparer le milieu grains+fluide in situ. La figure 4.1 représente le protocole.

Nous localisons initialement le milieu sec dans une cellule de Hele-Shaw n'ayant qu'une entrée. Nous tassons verticalement le milieu de sorte qu'il se rapproche de la fraction maximale d'empilement ou "random close packing" (située entre 0.60 et 0.65 [50]). Le milieu est bloqué à une des extrémités de la cellule par un bouchon mobile constitué de feuilles de Mylar de même épaisseur que celles constituant le canal. Cette technique permet de créer une surface libre relativement plane à l'entrée (Fig. 4.1a).

L'huile est ensuite injectée en appliquant une surpression à l'entrée de la cellule (Fig. 4.1b). Remarquons que nous augmentons la pression d'injection quand le front

¹Ces techniques nous serviront plus particulièrement dans le chapitre suivant sur l'injection d'air.

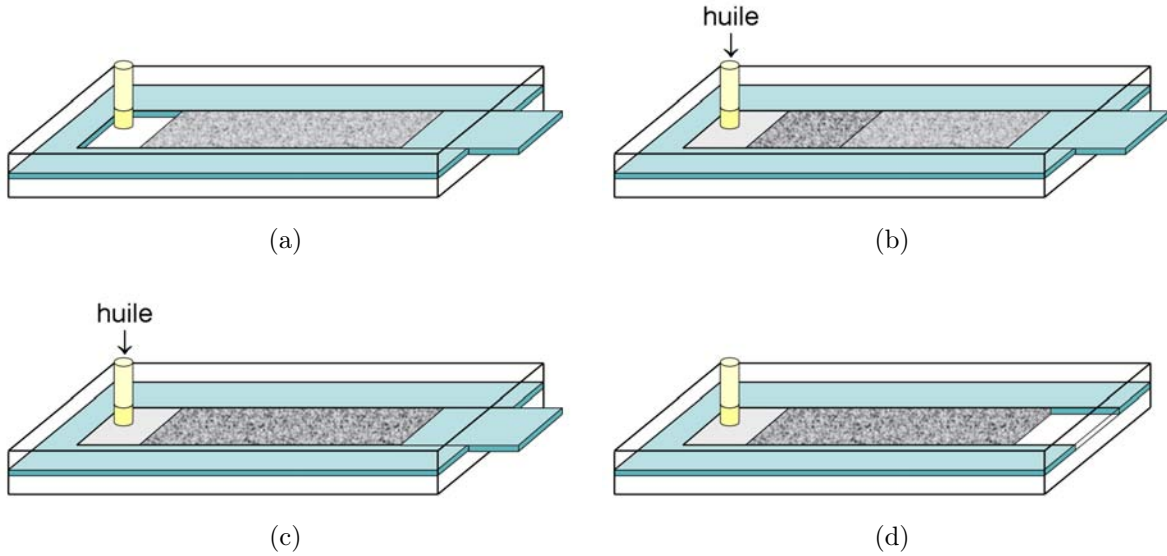


FIG. 4.1 – Schéma du protocole d'imbibition. (a) Le milieu granulaire sec est placé compacté dans la cellule de Hele-Shaw. (b,c) L'huile est injectée, elle imbibe totalement le milieu qui ne bouge pas grâce au bouchon placé en sortie. (d) Une fois l'imbibition terminée, le bouchon est retiré.

avance de manière à contrer la perte de charge qui augmente avec la taille de la zone imbibée. Le front d'injection est plan et nous n'observons pas de bulles d'air coincées lorsque le front avance. Ce cas d'imbibition est "doublement stable". En effet nous injectons un fluide visqueux ET mouillant dans un milieu granulaire rempli d'air (viscosité négligeable). L'air peut s'écouler dans le mince intervalle entre les feuilles et les plaques au contraire de l'huile. Quand le milieu est totalement imbibé, nous arrêtons l'injection (Fig. 4.1c).

Nous retirons ensuite le bouchon de Mylar (Fig. 4.1d). Nous avons ainsi deux interfaces bien délimitées : une entre l'huile et le milieu granulaire imbibé, l'autre entre ce milieu et l'air.

Loi de Darcy

Il est possible de suivre le front d'injection lors de l'imbibition. Nous mesurons également la surpression appliquée. Nous pouvons ainsi calculer la vitesse du front et le gradient de pression imposé dans le milieu. La perte de charge étant très majoritairement localisée au niveau du poreux imbibé (viscosité de l'air négligeable et perméabilité de la cellule très grande comparées au poreux) le gradient de pression est calculé comme la surpression ΔP appliquée sur la longueur L de milieu imbibé.

La figure 4.2 représente la vitesse du front d'imbibition V_i en fonction du gradient de pression $\Delta P/L$ pour les 4 épaisseurs de cellule employées et de nombreuses expériences.

Nous constatons que les points se placent relativement bien sur une droite indépendante de l'épaisseur de la cellule. Un ajustement linéaire permet d'estimer la pente à $3.3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ Pa}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

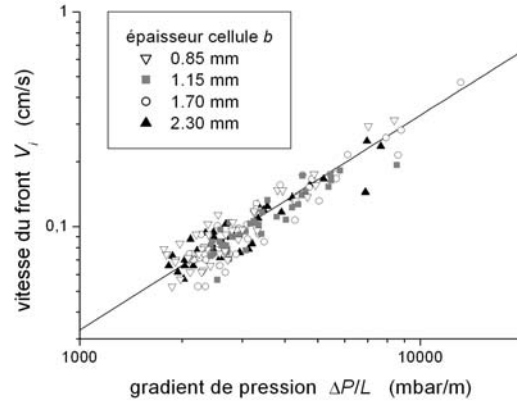


FIG. 4.2 – Vitesse du front d'imbibition en fonction du gradient de pression appliqué pour différentes épaisseurs de cellule. La droite représente un ajustement linéaire des données.

L'écoulement dans un milieu poreux est régi par la loi de Darcy (1.44) :

$$V_s = \frac{K}{\eta} \frac{\Delta P}{L} . \quad (4.1)$$

La vitesse du front V_i est celle du fluide à l'intérieur des pores. D'après la relation (1.45), nous avons donc la vitesse débitante $V_s = \varepsilon V_i$, où $\varepsilon = 1 - \phi$ est la porosité ou l'indice des vides.

Si nous supposons une fraction de grains ϕ de l'ordre de 60% soit $\varepsilon = 0.4$ cela conduit à une estimation de la perméabilité K_i de $6.60 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$. La relation de Carman-Kozeny (1.60) pour une telle porosité et des grains de $80 \mu\text{m}$ de diamètre nous donne, elle, une valeur K_{CK} de $6.32 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$. Les deux valeurs sont donc en très bon accord et nous trouvons une première estimation de la fraction de grains initiale que nous noterons $\phi_0 : \phi_0 \sim 60\%$.

Une seconde estimation de cette fraction nous vient de l'aire occupée par les grains dans la cellule. Pour occuper un volume de $18 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 1.15 \text{ mm}$, nous avons typiquement besoin de 8.0 g de grains. La densité des grains étant de 1060 kg m^{-3} , nous trouvons donc $\phi_0 \sim 61\%$. Les deux calculs donnent donc des résultats très similaires.

4.1.2 Dispositif expérimental

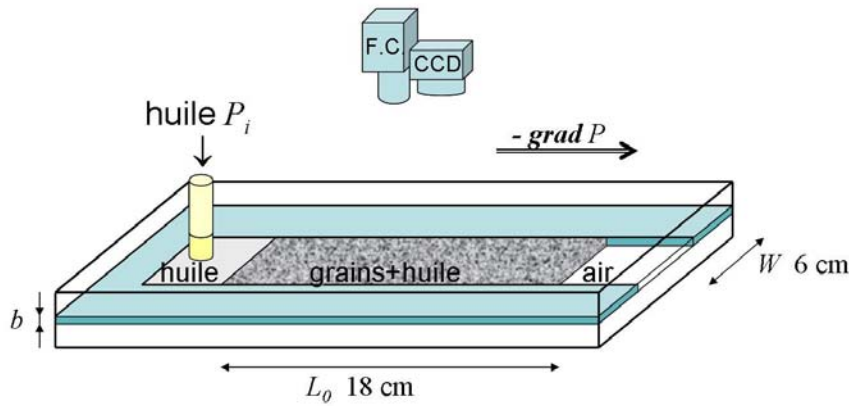
Un schéma du dispositif expérimental est représenté sur la figure 4.3.

Le canal a une largeur W fixée à 6 cm . La longueur L_0 initiale du milieu granulaire est de 18 cm . Nous avons utilisé 4 épaisseurs b différentes de canal : 0.85 , 1.15 , 1.70 et 2.30 mm .

Comme nous l'avons vu, le fluide utilisé est de l'huile silicone de viscosité $\eta_0 = 5.0 \text{ mPa.s}$ et le diamètre des grains est $D = 80 \mu\text{m}$.

Nous disposons de deux modes de visualisation :

- Une caméra numérique CCD Prosilica EC1280 connectée sur un port FireWire permet d'enregistrer des images de l'ensemble du canal avec une résolution de l'ordre de 1280×400 pixels, soit une zone d'environ $200 \times 200 \mu\text{m}^2$ par pixel.

FIG. 4.3 – *Dispositif expérimental.*

- Une caméra rapide Photron Super 10K équipée d'un zoom et capturant une zone d'environ $30 \times 30 \text{ mm}^2$ avec une résolution 512×480 soit environ $60 \times 60 \mu\text{m}^2$ par pixels, correspondant à moins d'une taille de grain².

Ces deux caméras sont montées sur un mât, l'une à côté de l'autre, au dessus de la cellule. Elles permettent à la fois de visualiser les phénomènes et motifs à une échelle macroscopique et les processus se déroulant à l'échelle de quelques grains (utile plus particulièrement pour les problèmes évoqués au chapitre 5)

L'éclairage est assuré par trois projecteurs halogènes placés derrière un fond diffusant opaque pour avoir un éclairage aussi uniforme que possible.

À l'instant initial $t_i = 0$, une surpression d'huile constante $\Delta P = P_i - P_0$ (où P_i est la pression d'injection et P_0 la pression atmosphérique) est appliquée à l'entrée de la cellule. Cette surpression, mesurée à l'aide d'un capteur, est obtenue en poussant l'huile par de l'air comprimé. Elle conduit à la déstabilisation du milieu que nous allons maintenant étudier en faisant varier deux paramètres : la surpression d'injection ΔP et l'épaisseur de la cellule b .

4.2 Déroulement typique d'une expérience

L'ensemble des expériences suit le même processus de déstabilisation. Les figures 4.4(a,c,e,g,i) représentent le déroulement typique d'une expérience. Les figures 4.4(d,f,h,j) sont les différences d'images entre, respectivement, les figures 4.4(c,e,g,i) et la figure 4.4(a). Elles permettent de repérer les zones mobilisées au cours de la déstabilisation. Les zones sombres représentent en effet les parties de l'image ayant le plus bougé.

²L'exploitation des données issue de cette caméra ne s'est pas révélée nécessaire dans cette étude. Elle sera par contre d'une grande utilité pour la compréhension des phénomènes dans le cas de l'injection d'air (Chap. 5).

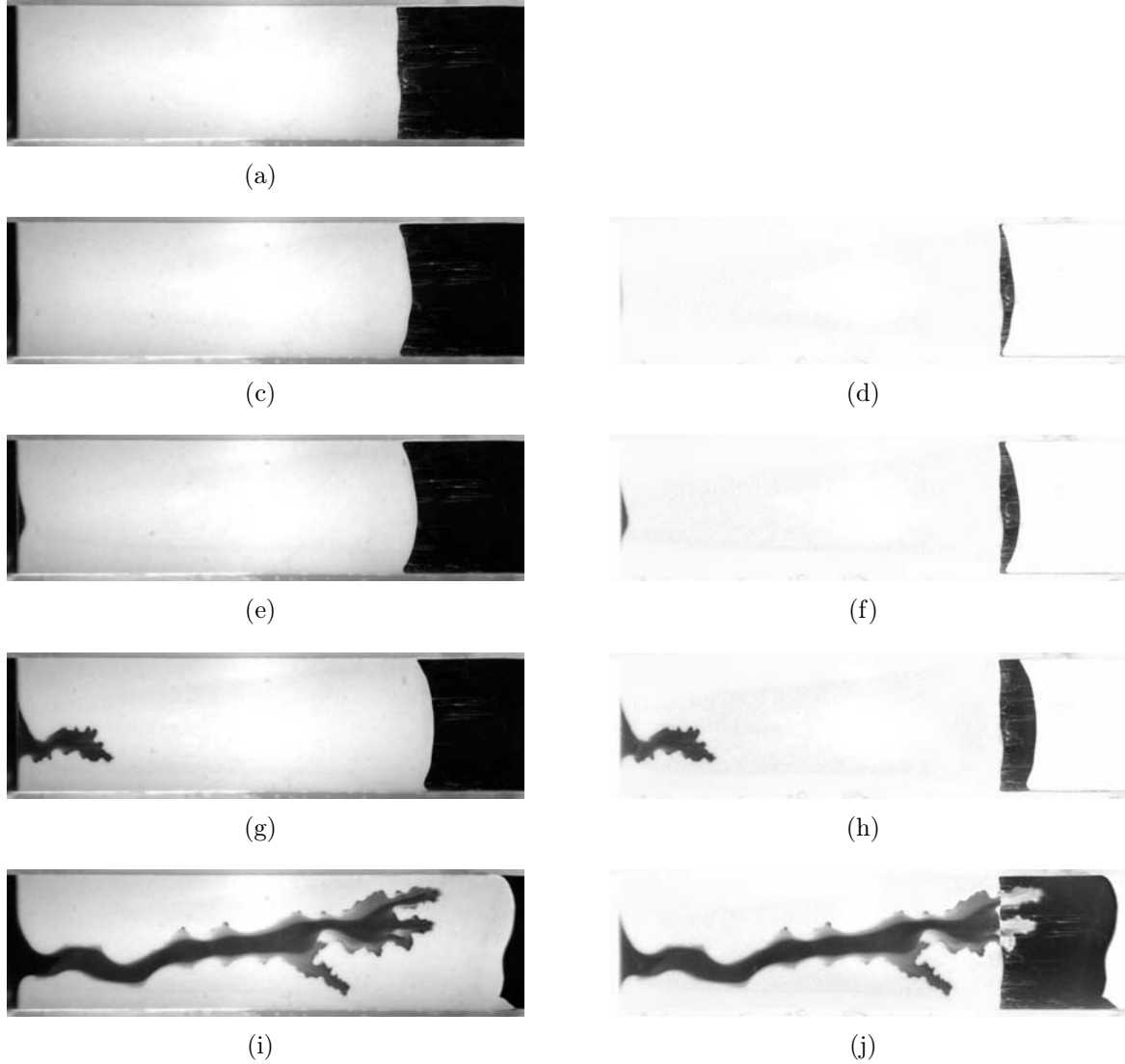


FIG. 4.4 – *Déroulement typique d'une expérience, $\Delta P = 90$ mbar, $b = 1.15$ mm. A gauche : Images brutes capturées. A droite : Différences d'image avec la première. (a) Au début de l'expérience. (c,d) Après 25 s. (e,f) Après 32 s. (g,h) Après 38 s. (i,j) Après 41 s.*

Nous pouvons séparer le processus de la manière suivante :

- Avant d'appliquer la surpression, le système est bien délimité par deux interfaces planes, l'une "interne" séparant l'huile pure du milieu grains+huile, l'autre "externe" entre ce milieu et l'air (Fig. 4.4a).
- Dans les premiers temps de l'expérience, seule l'interface externe bouge (Fig. 4.4c et d). L'interface interne n'est pas mobilisable car les grains, à une compaction maximale ϕ_0 , y sont bloqués. Ces premiers temps correspondent à une décompaction globale du milieu granulaire qui permet de faire diminuer la fraction moyenne de grains ϕ .
- Passé un certain laps de temps, le processus de décompaction est suffisamment avancé pour que l'interface interne soit mobilisable (Fig. 4.4e et f). Cette mobilisa-

tion se fait sur quasiment toute la largeur de la cellule. Le milieu est ici quasiment entièrement mobile : nous sommes donc passés d'un état "milieu poreux" à un état "pâte granulaire".

- Relativement rapidement nous observons cependant un canal d'écoulement de fluide pur en forme de doigt qui pousse la pâte granulaire dans la cellule (Fig. 4.4g et h).
- Le doigt se propage en direction de la sortie (Fig. 4.4i et j). Notons qu'il est constitué d'huile pure, les grains présents sur le côté du doigt provenant de l'érosion par l'écoulement de fluide pur des petites structures formées précédemment par le doigt.

De cette première analyse des motifs, il ressort que nous avons des zones (huile, grains+huile) et des interfaces relativement bien définies. Il est donc possible d'automatiser le traitement des images dans le but d'extraire les caractéristiques du phénomène.

4.3 Traitement des données

Le traitement des images et des données est effectué comme dans la partie 3.2 à l'aide du programme ImageJ. Nous avons, ici aussi, développé les plug-in dans le but d'exploiter au mieux nos expériences.

4.3.1 Traitement typique d'une image

La figure 4.5 schématise le traitement appliqué à chaque image.

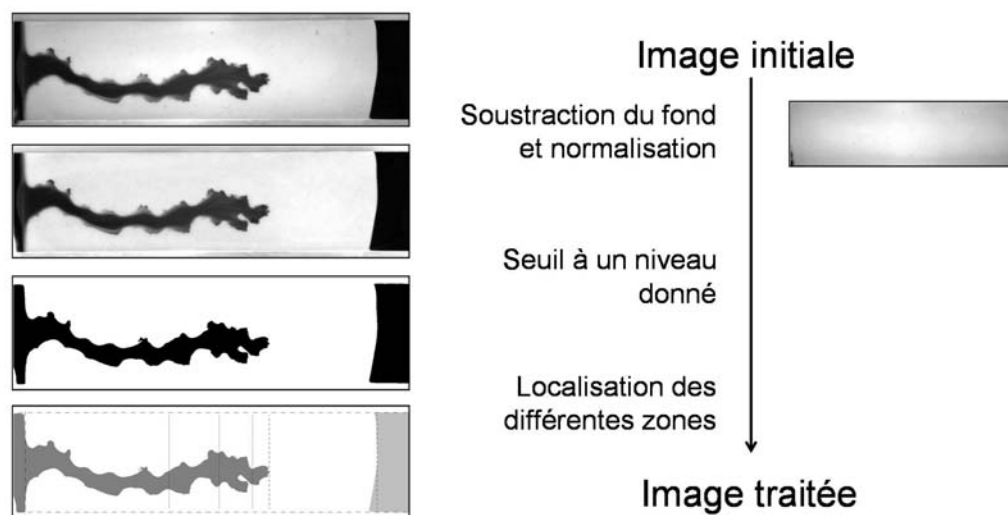


FIG. 4.5 – Schéma du traitement des images.

Le traitement s'effectue en plusieurs étapes dont nous donnons brièvement les principaux éléments.

La première étape consiste à uniformiser les niveaux de gris sur l'image. L'éclairage est en effet aussi uniforme que possible mais il reste cependant des variations aux grandes échelles de longueur. Pour effectuer cette uniformisation, nous avons réalisé un fond, pour chaque épaisseur de cellule, en prenant des images de notre milieux témoin totalement

imbibé sur l'ensemble de la zone couverte par la caméra. Nous avons ensuite divisé chaque image par ce fond et uniformisé les niveaux de gris moyens pour l'ensemble des expériences (i.e. pour les différentes épaisseurs).

La deuxième étape consiste à binariser les images. Cette étape peut se faire à différents seuils. Il n'y a cependant quasiment aucune différence selon le choix du seuil dans une gamme de seuils située autour du niveau intermédiaire de luminosité ($= (\text{niveau maximal} + \text{niveau minimal})/2$). C'est donc ce dernier niveau que nous considérons.

La troisième étape permet de repérer les différentes zones de l'image et d'éliminer les éventuels artefacts (dépôts de grains isolés à la sortie, par exemple). En pratique, nous repérons les zones d'huile pure et d'air.

En parallèle à ces étapes, les bords de la cellule et les interfaces initiales sont déterminés. Il est ainsi possible de calculer de nombreuses caractéristiques.

4.3.2 Mesures effectuées

La figure 4.6(a) représente une image brute et la figure 4.6(b) l'image une fois traitée.

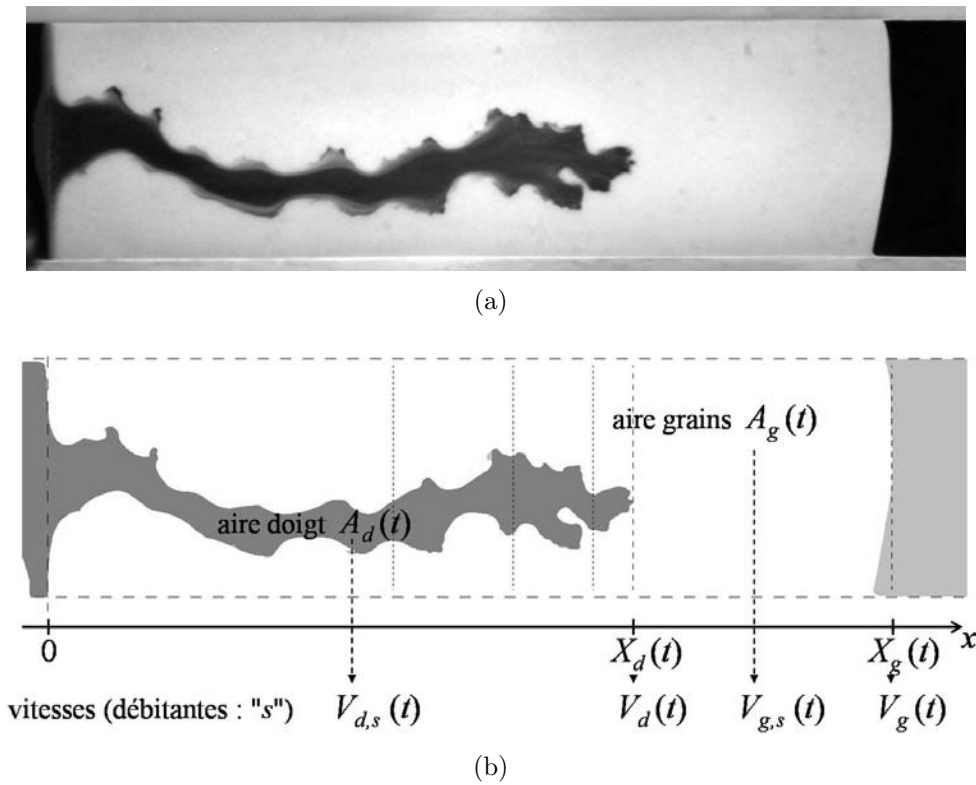


FIG. 4.6 – (a) Image avant traitement. (b) Image résultant du traitement d'image.

Le programme est capable d'effectuer de nombreuses mesures "brutes" sur cette image prise à un instant t : l'aire de la zone du doigt d'huile ($A_d(t)$), l'aire de la zone de grains ($A_g(t)$), l'aire totale ($A_t(t) = A_d(t) + A_g(t)$), la position de l'interface interne ou de l'extrémité du doigt ($X_d(t)$), la position de l'interface externe ($X_g(t)$) ainsi que la largeur

du ou des doigt(s) à n'importe quel endroit (typiquement à 1, 3 ou 6 cm de la tête du doigt comme indiqué sur la figure).

À partir de ces mesures brutes, il est possible d'obtenir des mesures "élaborées" en les couplant aux mesures de temps et de pression. Le programme calcule ainsi :

- La fraction moyenne de grains exprimée sous la forme d'un indice de compaction : $c(t) = \phi(t)/\phi_0$, où ϕ_0 est la fraction initiale de grains. Par conservation de la quantité de grains, nous avons : $c(t) = A_g(t=0)/A_g(t)$.
- Les débits instantanés de fluide pur, de "milieu effectif" (grain+huile) et le débit total. Divisant ces débits surfaciques par la largeur de la cellule, ils sont exprimés sous forme de vitesses débitantes : $V_{d,s}(t)$, $V_{g,s}(t)$ et $V_{t,s}(t)$ respectivement. Notons que nous avons repris l'indice s (section) comme dans la partie 1.3.
- Les vitesses de la tête du doigt et de l'extrémité de l'interface externe : $V_d(t)$ et $V_g(t)$.
- Si elle existe, la largeur totale moyenne occupée par le ou les doigts $w_{t,m}(t)$ définie comme l'aire occupée par le doigt dans une surface carrée de 6 cm de long en amont de la tête du doigt le plus avancé et divisé par cette longueur.
- Si elle existe, la largeur individuelle moyenne $w_{i,m}(t)$ où la précédente aire est divisée par la moitié du périmètre. Elle représente la largeur typique d'un seul doigt.
- La valeur absolue du gradient de pression $\nabla P(t)$ définie comme la surpression mesurée ΔP divisée par la distance $X_g(t) - X_d(t)$ entre l'interface interne (ou la tête du doigt) et l'interface externe.

4.4 Temps d'attente et décompaction du milieu

Comme nous l'avons vu lors de la description du processus de déstabilisation, les expériences commencent toujours par une décompaction du milieu granulaire : il faut attendre un certain intervalle de temps (un temps d'attente t_a) entre l'application de la surpression et la mobilisation de l'interface interne. C'est ce temps d'attente et la décompaction du milieu que nous allons étudier dans la présente partie.

4.4.1 Modèle théorique de décompaction

Description du modèle

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction de ce chapitre, nous sommes en présence d'un milieu granulaire mobilisable soumis à un écoulement et où les grains peuvent donc être emportés par le flux de fluide... à condition de pouvoir bouger.

Tant qu'il n'y a pas de phénomène de digitation, il y a deux cas extrêmes : soit le fluide (i.e. l'huile pure) coule au travers des grains fixes, comme dans un milieu poreux, soit fluide et grains coulent ensemble, sous la forme d'une pâte granulaire dans la cellule de Hele-Shaw. Pour les fractions de grains les plus importantes ($\phi \sim \phi_0$) les grains ne pourront pas bouger et nous serons dans le premier cas. Par contre si la fraction de grains est plus faible, il est possible d'envisager un écoulement de type fluide complexe. C'est la coexistence et la transition entre ces deux régimes qui va nous guider pour établir un modèle.

La figure 4.7 représente un schéma du processus de décompaction.

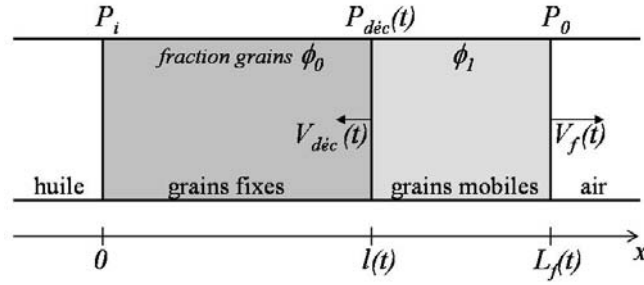


FIG. 4.7 – Schéma du processus de décompaction.

Nous supposons que, dû à l'écoulement de fluide pur, il y a une décompaction possible entre un milieu à une fraction maximale de grains de type poreux et un milieu de type pâte granulaire où grains et fluides coulent ensemble.

Les caractéristiques des deux milieux sont les suivantes :

- Le milieu poreux a une fraction de grains ϕ_0 uniforme. Les grains y sont fixes. L'écoulement est décrit par une loi de Darcy dans les poreux (1.44) en notant K la perméabilité du milieu et η_0 la viscosité de l'huile pure.
- La pâte granulaire (fraction de grains ϕ_1) est en écoulement dans la cellule de Hele-Shaw. Sans faire d'hypothèse sur les profils de vitesse et de fraction de grains, nous supposons cependant que l'écoulement est décrit par une loi de Darcy dans la géométrie de la cellule (1.19) avec une viscosité effective η_S et une perméabilité $K_{HS} = b^2/12$.

Notons qu'expérimentalement nous avons bien $\phi_1 < \phi_0$. L'arrivée de fluide pur au travers du poreux fixe permet en effet une décompaction. Cette dernière se traduit par l'existence d'un front entre les deux milieux qui remonte vers l'entrée de la cellule à une vitesse V_{dec} tandis que l'interface pâte granulaire/air avance à une vitesse V_f .

Calcul du temps d'attente

À l'instant initial le milieu est à une fraction de grains uniforme ϕ_0 ; nous avons donc en suivant les notations de la figure 4.7 :

$$L_f(t=0) = l(t=0) = L_0 , \quad (4.2)$$

où L_0 est la longueur initiale du milieu.

La conservation du nombre de grains à un instant t s'écrit alors :

$$\phi_0 l + \phi_1 (L_f - l) = \phi_0 L_0 . \quad (4.3)$$

Nous trouvons la conservation du flux de grains en dérivant cette expression :

$$V_f = \left(1 - \frac{\phi_0}{\phi_1}\right) V_{dec} . \quad (4.4)$$

Par conservation du flux d'huile, la vitesse débitante du fluide dans le milieu poreux est égale à V_f . La loi de Darcy s'écrit donc dans ce milieu :

$$\frac{P_i - P_{dec}}{l} = \frac{\eta_0}{K} V_f . \quad (4.5)$$

La loi de Darcy pour la pâte granulaire qui se déplace à une vitesse uniforme V_f dans la cellule de Hele-Shaw, s'écrit :

$$\frac{P_{dec} - P_0}{L_f - l} = \frac{\eta_S}{K_{HS}} V_f . \quad (4.6)$$

Nous déduisons des équations (4.5) et (4.6) :

$$\begin{aligned} \frac{P_i - P_0}{V_f} &= \frac{\eta_0}{K} l + \frac{\eta_S}{K_{HS}} (L_f - l) \\ &= \frac{\eta_0}{K} l + \frac{\eta_S}{K_{HS}} \frac{\phi_0}{\phi_1} (L_0 - l) . \end{aligned} \quad (4.7)$$

En considérant l'équation (4.4), il vient :

$$\frac{P_i - P_0}{V_{dec}} = \left(1 - \frac{\phi_0}{\phi_1}\right) \left[\frac{\eta_S}{K_{HS}} \frac{\phi_0}{\phi_1} L_0 + \left(\frac{\eta_0}{K} - \frac{\eta_S}{K_{HS}} \frac{\phi_0}{\phi_1} \right) l \right] . \quad (4.8)$$

Or nous avons :

$$V_{dec} = \frac{dl}{dt} , \quad (4.9)$$

et nous en déduisons :

$$(P_i - P_0) dt = \left(1 - \frac{\phi_0}{\phi_1}\right) \left[\frac{\eta_S}{K_{HS}} \frac{\phi_0}{\phi_1} L_0 dl + \left(\frac{\eta_0}{K} - \frac{\eta_S}{K_{HS}} \frac{\phi_0}{\phi_1} \right) l dl \right] . \quad (4.10)$$

Nous intégrons cette équation entre $t = 0$, $l = L_0$ et $t = t_a$, $l = 0$ pour obtenir le temps d'attente t_a nécessaire pour avoir un milieu totalement décompacté :

$$t_a = \frac{\left(\frac{1}{c_1} - 1\right) L_0^2}{2\Delta P} \left[\frac{\eta_S}{K_{HS}} \frac{1}{c_1} + \frac{\eta_0}{K} \right] . \quad (4.11)$$

où $c_1 = \phi_1/\phi_0$ est le rapport des fractions de grains entre les deux milieux et $\Delta P = P_i - P_0$ est la surpression. Nous trouvons donc que le temps d'attente est inversement proportionnel à la surpression appliquée.

Notons qu'un temps caractéristique τ_P peut être extrait de l'équation (4.11) :

$$\tau_P = \frac{L_0^2}{\Delta P} \frac{\eta_0}{K} . \quad (4.12)$$

Le temps $\phi_0 \tau_P$ est le temps typique mis par une particule de fluide pour parcourir un milieu poreux de perméabilité K sur une longueur L_0 lorsqu'un gradient de pression $\Delta P/L_0$ est appliqué.

L'équation (4.11) se réécrit alors :

$$\frac{t_a}{\tau_P} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_1} - 1 \right) \left[\frac{M}{c_1} + 1 \right] , \quad (4.13)$$

où M est le rapport des mobilités (définies comme le rapport d'une perméabilité sur une viscosité) dans les phases "poreux" et "pâte granulaire" :

$$M = \frac{K/\eta_0}{K_{HS}/\eta_S} . \quad (4.14)$$

4.4.2 Obtention des paramètres du modèle

Pour comparer le résultat de notre modèle à nos données expérimentales (en pratique t_a en fonction de ΔP et de b), il nous faut déterminer les différents paramètres du modèle. Nous connaissons déjà la viscosité du fluide pur ($\eta_0 = 5.0 \text{ mPa.s}$), la perméabilité du milieu poreux fixe par nos expériences d'imbibition ($K = 6.6 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$) et la longueur initiale du milieu ($L_0 = 18 \text{ cm}$). Nous pouvons ainsi facilement obtenir τ_P .

Il nous faut donc maintenant estimer les valeurs de la mobilité de la phase "pâte granulaire" K_{HS}/η_S et c_1 . Pour accéder à K_{HS}/η_S , nous remarquons que, dans notre modèle, à $t = t_a$ le milieu est totalement décompacté et se trouve intégralement dans un état "pâte granulaire". La fraction de grains de cette pâte est alors $\phi_1 = \phi_0 A_g(t=0)/A_g(t_a)$. Nous allons donc calculer les paramètres manquants en considérant les résultats de nos expériences à $t = t_a$.

Paramètre de la loi de Darcy

La figure 4.8 représente la vitesse débitante totale $V_{t,s}$ en fonction du gradient de pression ∇P à l'instant $t = t_a$ pour différentes épaisseurs de cellule.

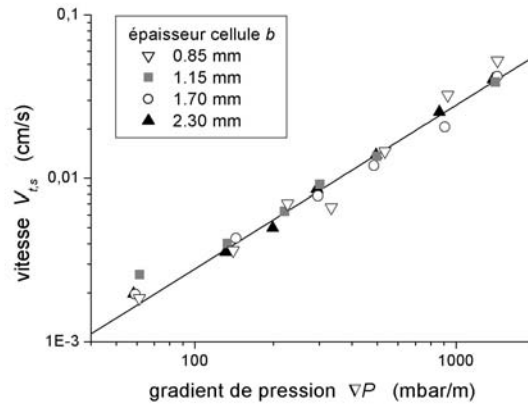


FIG. 4.8 – Vitesse débitante au moment de la mobilisation de l'interface interne ($t = t_a$) en fonction du gradient de pression pour différentes épaisseurs de cellule. La droite représente un ajustement linéaire des données.

Nous observons que l'ensemble des points expérimentaux se place sur une droite en log-log. Un ajustement linéaire nous donne : $V_{t,s}(t_a) = a \nabla P$ avec $a \approx 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ Pa}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Vitesse et gradient de pression sont proportionnels et nous pouvons donc considérer une loi de Darcy pour décrire l'écoulement de la pâte granulaire. Le coefficient a n'est autre que la mobilité K_{HS}/η_S que nous cherchons. Notons que, de manière relativement surprenante, cette mobilité ne dépend pas de l'épaisseur b de la cellule. Rappelons en effet que dans le cas classique de l'écoulement d'un fluide newtonien dans une cellule de Hele-Shaw la mobilité est en $b^2/12\eta$. Dans nos expériences, nous verrons également que les lois d'écoulement lors de la digitation dépendent de b .

Remarquons que, d'après les résultats de la sous-partie 4.1.1, nous avons $K/\eta_0 \approx 1.3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ Pa}^{-1} \text{ s}^{-1} < K_{HS}/\eta_S$. L'écoulement dans la partie "milieu poreux" est donc plus difficile que dans la partie "pâte granulaire" puisque la mobilité y est plus faible.

Indice de compaction

La figure 4.8 représente l'indice de compaction c en fonction du gradient de pression ∇P à l'instant $t = t_a$ pour différentes épaisseurs de cellule.

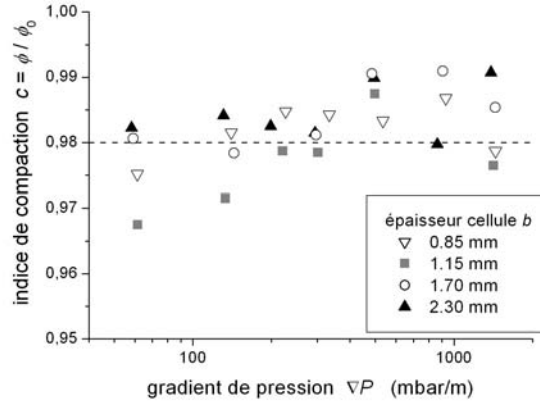


FIG. 4.9 – Indice de compaction du milieu au moment de la mobilisation de l'interface interne ($t = t_a$) en fonction du gradient de pression pour différentes épaisseurs de cellule.

Nous observons qu'il existe une grande variabilité de cet indice et nous ne pouvons pas affirmer de tendance précise sur son évolution par rapport à l'épaisseur de la cellule ou au gradient de pression. Nous notons cependant qu'il est toujours autour de 0.98.

4.4.3 Mesures expérimentales et comparaison au modèle

Définition d'un temps d'attente

Pour mesurer le temps d'attente, il convient de définir un critère permettant de déterminer si l'interface interne a bougé ou non.

Pour cela nous étudions la différence entre l'image au temps initial t_i et l'image à un instant t . Il s'agit typiquement des images en figures 4.4(c,e,g,i). Nous binarisons cette différence avec un seuil très bas : un "seuil" de manière à filtrer le bruit mais "très bas" de sorte à obtenir les premiers (petits) mouvements de l'interface. Nous comptabilisons ensuite les points noirs correspondants aux mouvements sur une surface d'aire donnée et centrée sur la position initiale de l'interface interne et nous obtenons un indice de mobilisation.

La figure 4.10 représente l'évolution de la valeur de cet indice en fonction du temps ($t_i = 0$).

L'indice de mobilisation est initialement nul puis croît très rapidement après un certain temps. Cette croissance correspond à la mobilisation de l'interface interne immobile au départ. Dans le but d'éviter d'éventuels problèmes de bruit, nous définissons alors le temps d'attente t_a comme le temps nécessaire à ce que l'indice de mobilisation dépasse une valeur typique non nulle relativement faible (5 dans notre programme).

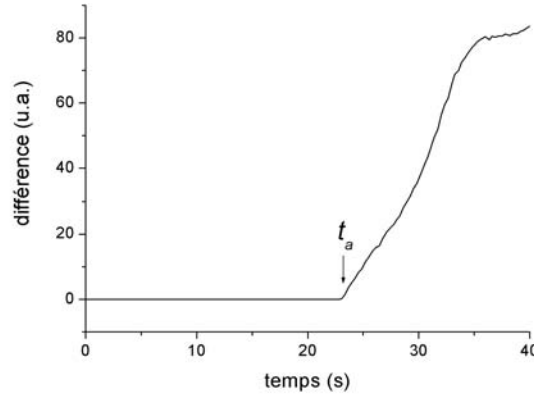


FIG. 4.10 – Indice de mobilisation en fonction du temps pour une expérience typique.

Mesures expérimentales

La figure 4.11 représente le rapport des données expérimentales t_a aux prédictions théoriques t_{a_TH} (4.11) en fonction de la surpression appliquée et de l'épaisseur de la cellule. Notons que, compte tenu des paramètres issus de la sous-partie 4.4.2, nous avons calculé t_{a_TH} en considérant d'un côté la valeur estimée de K_{HS}/η_S et d'un autre les valeurs relatives à chaque expérience pour l'indice de compaction c_1 , ce dernier présentant une plus grande variabilité.

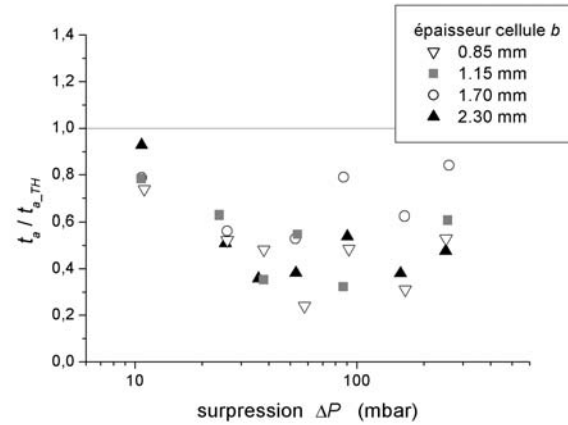


FIG. 4.11 – Temps d'attente redimensionné t_a/t_{a_TH} en fonction de la surpression ΔP appliquée pour différentes épaisseurs de cellule. Ligne continue : résultat du modèle (4.11).

Nous observons que le modèle surestime d'un facteur 2 les mesures expérimentales. Ces dernières ne présentent pas de dépendance par rapport à l'épaisseur de la cellule et semblent être légèrement plus élevées pour les faibles pressions.

Notons cependant que le modèle que nous avons employé est très simple et que, de ce fait, les résultats obtenus sont déjà tout à fait convaincants.

Une des limites du modèle est qu'il ne considère un écoulement qu'à une seule dimension. Or il est tout à fait possible qu'il existe des phénomènes à deux dimensions. Remarquons notamment que nous nous trouvons dans une situation voisine de l'instabilité de Saffman–Taylor. Nous avons en effet deux "fluides" dans lesquels une loi de Darcy s'applique et où le champ de pression est Laplacien. Or comme nous l'avons remarqué précédemment $K/\eta_0 < K_{HS}/\eta_S$: en terme de viscosité, le milieu "pâte granulaire" est moins visqueux que le milieu "poreux". Dans l'instabilité de Saffman–Taylor, l'instabilité de l'interface entre deux fluides visqueux n'est pas fonction du sens de l'écoulement mais du sens de propagation de l'interface³. Dans notre cas l'interface se propage effectivement du milieu le moins visqueux vers le milieu le plus visqueux et pourrait conduire à un cas instable.

Nous n'avons cependant pas accès à la mesure de la position de l'interface entre le milieu poreux et la pâte granulaire, la différence relative de densité (et donc de contraste) entre les deux milieux étant très faible. Nous verrons qu'il est cependant possible d'observer, après cette première phase de décompaction, la formation d'un canal préférentiel d'écoulement une fois la déstabilisation de l'interface interne suffisamment avancée (Fig. 4.19).

Vitesse du front

Remarquons que l'équation (4.7), nous donne la vitesse V_f du front grains+huile en fonction de la longueur l :

$$V_f = \frac{L_0}{\tau_P} \left[\frac{l}{L_0} + \frac{M}{c_1} \left(1 - \frac{l}{L_0} \right) \right]^{-1}. \quad (4.15)$$

où τ_P et M sont définis équations (4.12) et (4.14).

Par ailleurs avec l'équation (4.10), il est également possible d'établir une relation entre le temps et l :

$$(t_a - t) = \tau_P \left(\frac{1}{c_1} - 1 \right) \left[\frac{M}{c_1} \frac{l}{L_0} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{M}{c_1} \right) \left(\frac{l}{L_0} \right)^2 \right]. \quad (4.16)$$

V_f et t étant deux fonctions relativement simple de l , il serait possible d'en déduire une expression analytique de $V_f(t)$. Cela n'est cependant pas nécessaire puisque nous connaissons le domaine de variation de l et pouvons en déduire les valeurs de V_f et t .

La figure 4.12 représente, pour différentes configurations expérimentales (épaisseur de cellule et surpression imposée), la vitesse adimensionnée $V_f^* = V_f \frac{\tau_P}{L_0}$ en fonction du temps adimensionné $(t - t_a)^* = (t - t_a)/\tau_P$.

Nous observons que le modèle rend bien compte de l'évolution de la vitesse pour l'ensemble des données. Nous remarquons notamment une accélération de l'interface au cours du temps. Cette accélération est due à la différence de mobilité entre les phases "milieu poreux" et "pâte granulaire". Nous avons en effet vu dans la sous-partie 4.4.2

³Merci à R. Soto (professeur associé à l'université du Chili) pour cette remarque tout a fait judicieuse dont m'avait également fait part P. Mills (professeur émérite à l'université de Marne-la-Vallée) pour un autre cas.

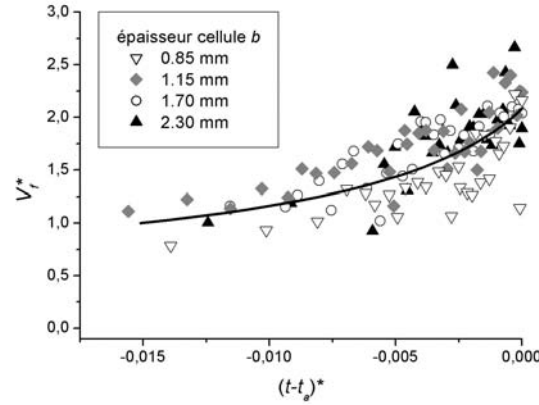


FIG. 4.12 – Vitesse adimensionnée du front grains+huile en fonction du temps adimensionné pour différentes épaisseurs de cellule et différentes surpressions. Ligne pleine : résultat du modèle à 1 dimension sans paramètre ajustable.

que les mesures expérimentales des lois de Darcy dans les deux milieux nous donnaient : $K/\eta_0 < K_{HS}/\eta_S$. L'écoulement se fait plus facilement dans la partie "pâte granulaire" avec, par conséquent un écoulement global plus rapide lorsque le processus de décompaction avance.

Au final, l'analyse à 1 dimension du processus de décompaction se révèle très efficace vue sa simplicité. Nous avons montré que le modèle rendait ainsi relativement bien compte de la décroissance du temps d'attente t_a ainsi que de la vitesse V_f de l'interface externe pâte granulaire/air. Une fois le temps d'attente t_a atteint, l'interface interne se met elle aussi à bouger et un phénomène de digitation apparaît.

4.5 Mobilisation du milieu et phénomène de digitation

Nous étudions dans cette partie le phénomène de digitation se produisant une fois l'interface interne mobilisée. Nous pouvons donc maintenant repérer l'état d'avancement de la digitation (et de l'expérience) par la position de l'interface interne, c'est à dire par la position X_d de la tête du doigt, l'origine étant choisie à la position initiale de l'interface.

4.5.1 Évolution de la compaction

Les figures 4.13(a) et 4.13(b) représentent l'évolution de l'indice moyen de compaction $c = \phi/\phi_0$ en fonction de la position du doigt X_d pour différentes expériences.

Nous remarquons que l'allure de la courbe $c-X_d$ est similaire pour l'ensemble des expériences.

Il y a d'abord une forte décroissance lorsque le doigt est peu avancé dans la cellule. Cette décroissance intervient après la décompaction initiale du milieu de ϕ_0 à ϕ_1 que nous avons étudiée dans la précédente partie et qui se produit alors que l'interface interne n'a pas bougé (i.e. $X_d = 0$). La nouvelle décroissance de c intervient sur une distance typique

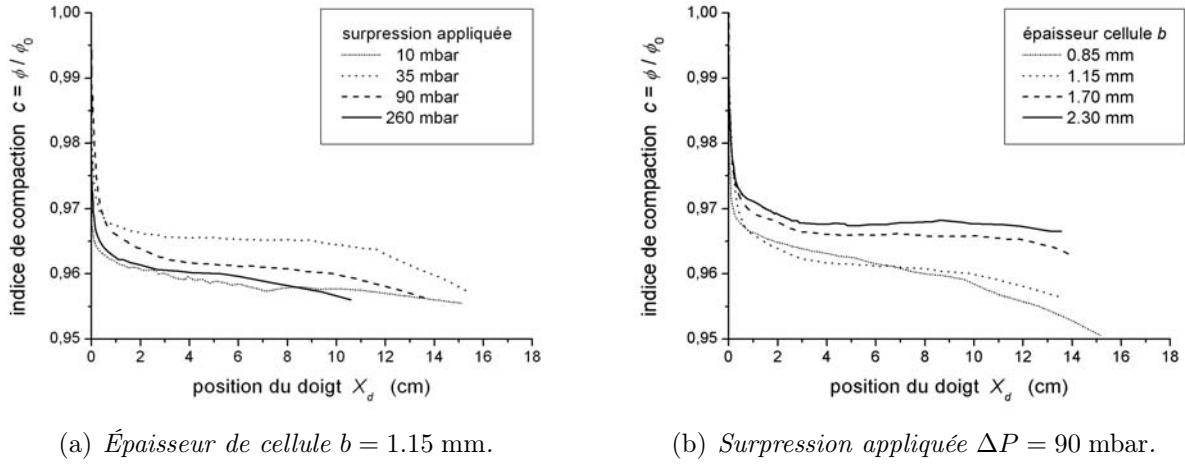


FIG. 4.13 – Indice de compaction en fonction de la position du doigt pour différentes configurations expérimentales.

de parcours du doigt de 2 cm. Le milieu reste ensuite à indice de compaction c quasi-fixe et donc à une fraction de grain constante que nous noterons $\phi_2 \approx 0.965\phi_0$. La suite du traitement des expériences sera ainsi faite au delà de cette distance de 2 cm.

Nous allons donc pouvoir considérer la pâte granulaire (le mélange grains+huile) comme un milieu "homogène", un fluide effectif, poussé par de l'huile quasi-pure. Le contraste de viscosité est tel que nous observons un phénomène de digitation. Notons cependant que nous nous trouvons ici dans le cas d'une interface miscible, puisque le fluide interstitiel de la pâte granulaire est le même que le fluide injecté et que le contraste de viscosité provient de la présence de grains. Le milieu homogène "pâte granulaire" peut, par ailleurs, voir ses propriétés (viscosité, seuil...) évoluer au cours du temps car même si très faible, une variation de fraction de grains à proximité du maximum de compaction peut avoir des effets majeurs sur le comportement rhéologique des pâtes granulaires [49, 57].

Considérer le milieu comme homogène permet enfin d'assimiler le débit d'huile $V_{d,s}$ au débit total $V_{t,s}$ et finalement à la vitesse débitante de la suspension dans la cellule. Nous nous intéresserons donc par la suite à $V_{d,s}$ pour caractériser l'écoulement.

4.5.2 Écoulement du fluide effectif

Nous étudions, dans cette sous-partie, les caractéristiques de l'écoulement du fluide effectif une fois le doigt formé. En particulier, nous allons nous intéresser à la généralisation d'une loi de Darcy permettant de relier le débit de ce fluide (caractérisé par $V_{d,s}$) et le gradient de pression ∇P .

Débit fonction du gradient de pression

Les figures 4.14(a) et 4.14(b) représentent les vitesses débitantes $V_{d,s}$ en fonction du gradient de pression ∇P pour différentes expériences.

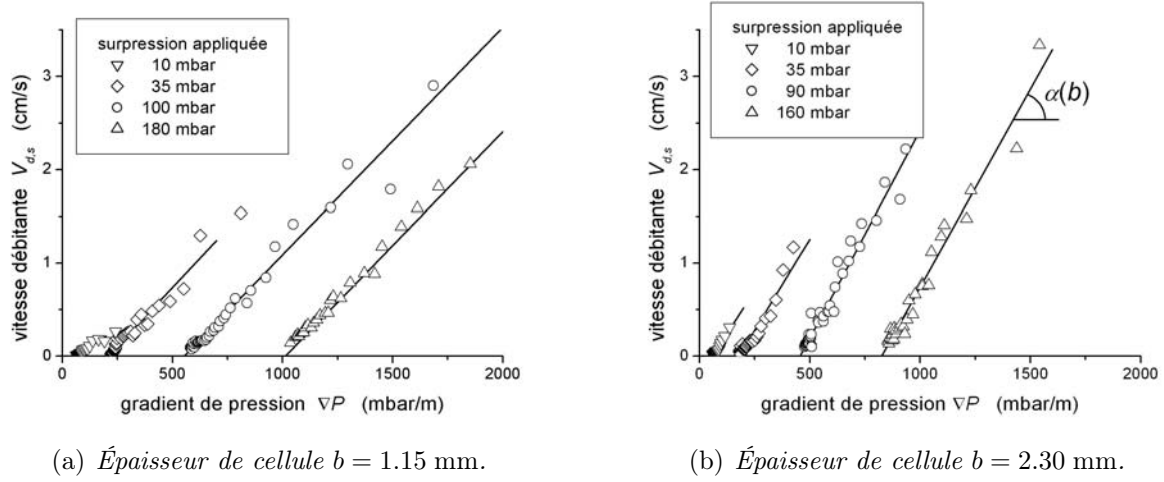


FIG. 4.14 – Vitesse débitante de la pâte granulaire $V_{d,s}$ en fonction du gradient de pression ∇P pour différentes surpressions appliquées. Les lignes droites représentent un ajustement affine de chaque configuration.

Nous observons que, pour chaque expérience, les points expérimentaux s'alignent bien sur une droite mais qu'à la différence de la loi de Darcy classique (1.19) cette droite ne passe pas par l'origine.

Un ajustement affine de chaque expérience montre que la vitesse est nulle pour un gradient de pression égal au gradient de pression initial, c'est à dire à la différence de pression divisée par la longueur initiale L_1 du milieu après décompaction : $(\nabla P)_0 = \Delta P / L_1$.

Notons que l'observation d'un seuil initial fonction du gradient de pression ne peut pas s'expliquer par une approche de type fluide à seuil. Dans ce cas, nous devrions en effet trouver un seuil de gradient de pression identique quelles que soient les expériences. Par ailleurs, à vitesse élevée, l'effet du seuil serait négligeable et nous devrions avoir une proportionnalité entre vitesse et gradient de pression.

Considérons les ajustements à une épaisseur de cellule donnée (Fig. 4.14a ou Fig. 4.14b). Pour les différentes surpressions appliquées, la pente semble être identique. La comparaison des figures 4.14(a) et 4.14(b) nous montre que cette pente est plus importante pour l'épaisseur la plus grande. Cela est cohérent avec les observations classique, où la perméabilité de la cellule étant en $b^2/12$ l'écoulement est facilité dans les cellules de grande épaisseur.

Nous avons donc, pour chaque expérience, un ajustement possible des points expérimentaux par une droite d'équation :

$$V_{d,s} = \alpha (\nabla P - (\nabla P)_0) , \quad \text{avec} \quad (\nabla P)_0 = \Delta P / L_1 , \quad (4.17)$$

où α est une mobilité fonction de l'épaisseur b et a priori indépendante de la surpression ΔP .

La figure 4.15 représente la moyenne et l'écart-type des valeurs de α observées en fonction de l'épaisseur b de la cellule. Y est également indiquée l'échelle des valeurs

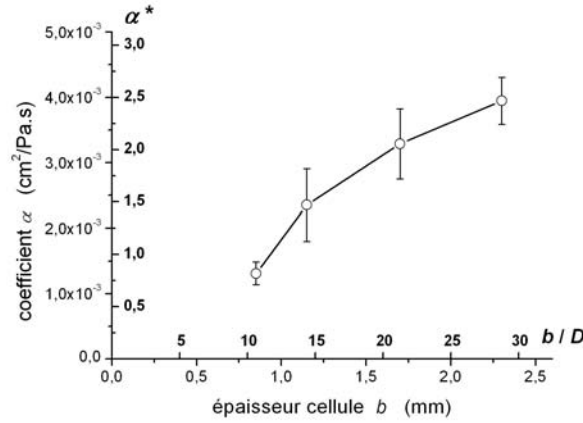


FIG. 4.15 – Coefficient α moyennée en fonction de l'épaisseur de cellule b et du rapport de cette dernière avec le diamètre D des grains. Le coefficient α^* est la valeur de α adimensionnée par α_0 (4.18).

adimensionnées $\alpha^* = \alpha/\alpha_0$ telle que :

$$\alpha_0 = \frac{D^2}{8\eta_0}, \quad (4.18)$$

où D est le diamètre des grains et η_0 la viscosité du fluide pur. α_0 correspond à la mobilité du fluide pur circulant dans un canal de taille de l'ordre de D . Nous justifierons ultérieurement le coefficient 8 lors de l'analyse de l'écoulement dans l'épaisseur de la cellule.

La pente $\alpha(b)$ est donc une fonction croissante de b . Notons cependant dès maintenant qu'il n'y a pas de relation simple entre α et b . En particulier nous ne retrouvons pas une évolution en carré de l'épaisseur comme c'est le cas dans l'équation de Darcy classique où la pente vaut $b^2/12\eta$.

Loi de Darcy instantanée

Nous venons de nous intéresser à l'évolution de la vitesse débitante en fonction du gradient de pression et nous en avons déduit un coefficient α qui n'est autre que la dérivée de la vitesse débitante $V_{d,s}$ par le gradient de pression ∇P .

Un autre paramètre pertinent à étudier est le rapport entre cette vitesse et le gradient de pression : $V_{d,s}/\nabla P$. Ce coefficient représente la mobilité issue de la loi de Darcy instantanée qu'un observateur serait tenté d'écrire s'il considérait l'écoulement à un instant donné.

Les figures 4.16(a) et 4.16(b) représentent cette mobilité et sa valeur adimensionnée avec α_0 en fonction de la position du doigt X_d pour différentes expériences. Remarquons que la mobilité $K_{HS}/\eta_S = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ Pa}^{-1} \text{ s}^{-1} = 0.017\alpha_0$ observée pour la phase "pâte granulaire" lors de la décompaction (p.132) est bien inférieure aux mobilités évaluées ici.

À épaisseur de cellule donnée, l'ensemble des points expérimentaux, même dispersés, semble s'aligner sur une unique droite passant par l'origine. Cette remarque rejoint la

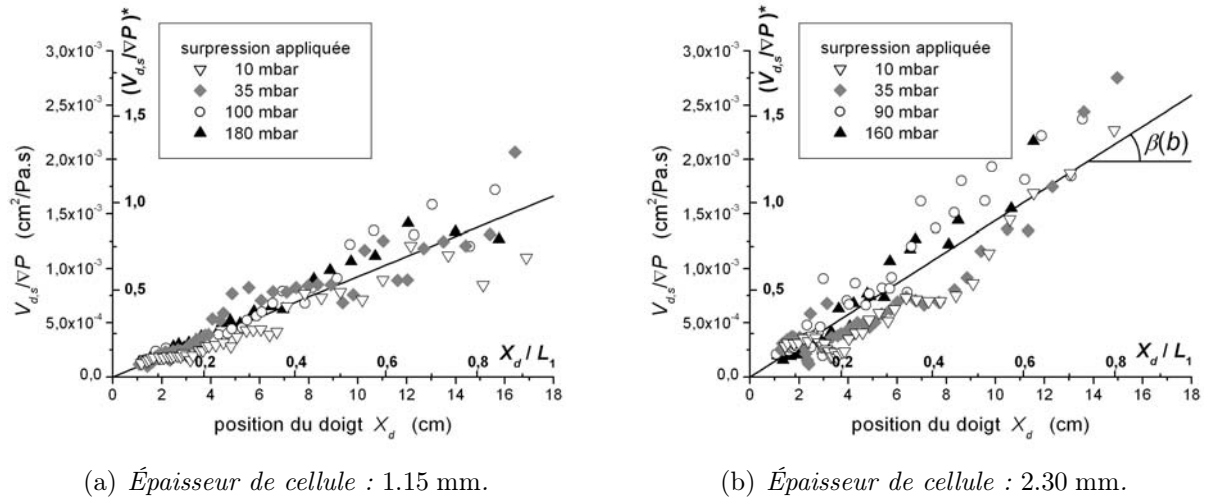


FIG. 4.16 – Rapport $V_{d,s}/\nabla P$ en fonction de la position du doigt X_d (et du rapport X_d/L_1) pour différentes surpressions appliquées. La ligne droite représente un ajustement linéaire de l'ensemble des données à épaisseur donnée. $(V_{d,s}/\nabla P)^*$: valeurs de $V_{d,s}/\nabla P$ adimensionnées par α_0 (4.18).

précédente sur le fait qu'initialement (i.e. $X_d = 0$) le doigt (l'interface interne) a une vitesse nulle.

La pente est, ici aussi, et pour les mêmes raisons, plus importante pour les grandes épaisseurs de cellule (Fig. 4.16b comparée à Fig. 4.16a).

Nous avons maintenant empiriquement une loi du type

$$\frac{V_{d,s}}{\nabla P} = \beta X_d. \quad (4.19)$$

Comme pour le coefficient α , ce coefficient β dépend principalement de l'épaisseur de la cellule b et ne semble pas dépendre significativement et régulièrement de la surpression appliquée.

La figure 4.17(b) représente la moyenne et l'écart-type des valeurs de β ainsi que la valeur adimensionnée $\beta^* = \beta L_1/\alpha_0$ observées en fonction de l'épaisseur b de la cellule. Le coefficient $\beta(b)$ est donc également une fonction croissante de b .

Lien entre les deux approches

Nous avons maintenant deux lois empiriques différentes (4.17) et (4.19) pour décrire une même réalité expérimentale. Il est cependant possible de les relier à partir du moment où nous supposons que les coefficients α et β ne dépendent que de b .

La figure 4.18 représente schématiquement le phénomène de digitation. Comme nous l'avons vu dans la sous-partie 4.5.1, nous pouvons considérer le problème comme un fluide effectif (grains+huile) occupant initialement la cellule sur une longueur voisine de L_1 et poussé par un fluide pur (huile). Dans ce cadre, si nous considérons un doigt de largeur relative $\lambda = w/W$ se propageant dans la cellule, l'incompressibilité du fluide nous impose que l'interface externe avance de λX_d lorsque le doigt avance de X_d .

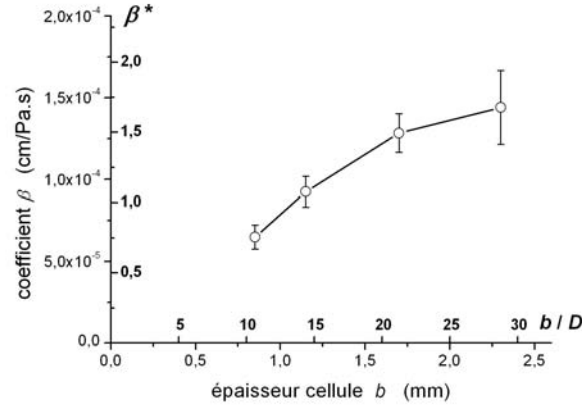


FIG. 4.17 – Coefficient β moyennée en fonction de l'épaisseur de cellule b et du rapport de cette dernière avec le diamètre D des grains. Le coefficient β^* est la valeur de β adimensionnée par α_0/L_1 .

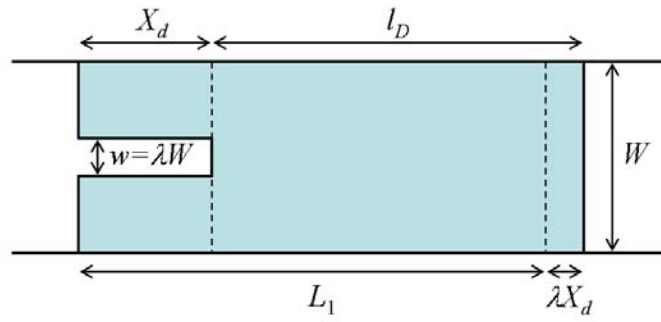


FIG. 4.18 – Schéma de la digitation.

Nous supposons que la chute de pression se répartit uniformément dans le milieu entre la tête du doigt et l'interface externe sur une distance l_D . En s'aidant de la figure 4.18, nous trouvons donc :

$$X_d + l_D = L_1 + \lambda X_d, \quad \text{soit} \quad X_d = \frac{L_1 - l_D}{1 - \lambda}. \quad (4.20)$$

En considérant l'équation (4.19) et en notant que $\nabla P = \Delta P/l_D$, nous en déduisons :

$$V_{d,s} = \beta X_d \frac{\Delta P}{l_D}. \quad (4.21)$$

En reportant la valeur (4.20) de X_d dans cette équation nous trouvons finalement :

$$\begin{aligned} V_{d,s} &= \frac{\beta L_1}{1 - \lambda} \left(\frac{\Delta P}{l_D} - \frac{\Delta P}{L_1} \right) \\ &= \frac{\beta L_1}{1 - \lambda} (\nabla P - (\nabla P)_0). \end{aligned} \quad (4.22)$$

D'après l'équation (4.17) nous en déduisons une relation entre α et β :

$$\alpha = \frac{\beta L_1}{1 - \lambda} . \quad (4.23)$$

Les deux approches et les deux lois expérimentales sont donc compatibles.

Le tableau 4.1 rassemble les rapports expérimentaux α/β ainsi que les mesures de $L_1/(1 - \lambda)$ obtenues en supposant $L_1 \sim 19$ cm et en considérant les mesures de largeurs obtenues dans la sous-partie 4.5.5.

épaisseur b	α/β	$L_1/(1 - \lambda)$
0.85 mm	20.2 cm	22.1 cm
1.15 mm	25.4 cm	22.8 cm
1.70 mm	25.6 cm	23.4 cm
2.30 mm	27.4 cm	23.8 cm

TAB. 4.1 – Comparaison entre le rapport α/β et la valeur $L_1/(1 - \lambda)$ en fonction de l'épaisseur de la cellule.

Les deux valeurs sont très comparables. Il y a un écart maximum de 10% qui, compte tenu de la dispersion de nos données est très satisfaisant.

Nous avons donc caractérisé empiriquement par deux lois compatibles l'écoulement de la pâte granulaire dans la cellule de Hele-Shaw. Cependant nous n'avons pas, pour le moment, donné d'explications à cette observation surprenante d'une loi de Darcy (4.17) ne passant pas par l'origine.

4.5.3 Modèles d'écoulement

Nous cherchons dans cette sous-partie à fournir des éléments essentiellement qualitatifs permettant de comprendre (en partie) les lois d'écoulements précédemment trouvées.

Structuration selon la largeur : formation d'un canal

La première source d'une modification possible de la loi de Darcy réside dans la formation d'un canal d'écoulement de largeur variable.

La figure 4.19 représente la différence entre une image prise avec un doigt formé et l'image au tout début de l'expérience. Il s'agit de la même différence qu'à la figure 4.4(j) mais le contraste a été augmenté.

Les zones les plus foncées sont celles où il y a eu le plus de mouvements. Nous voyons très bien alors que l'écoulement ne s'est pas déroulé sur l'ensemble de la largeur du canal mais seulement sur une fraction de celle-ci, fraction d'autant plus faible que l'on se rapproche de l'entrée de la cellule.

L'explication sur l'origine de la formation de ce canal n'est pas complètement claire. Il peut s'agir d'un problème d'instabilité lié à un mécanisme type Saffman–Taylor au moment de la décompaction, comme nous l'évoquions au sujet du temps d'attente. Il peut également provenir d'un problème intrinsèque aux conditions expérimentales, les grains sur le côté étant légèrement plus confinés par les plaques que les grains au centre.

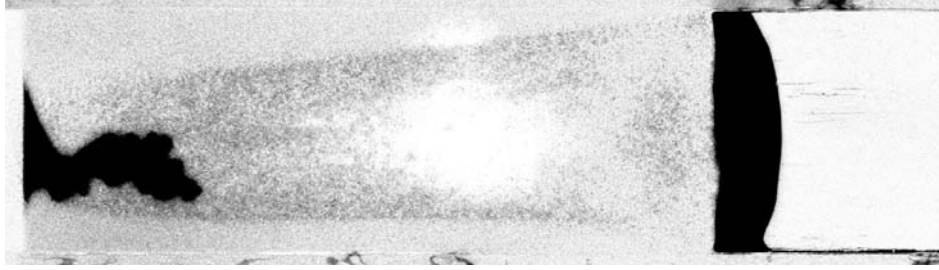


FIG. 4.19 – *Allure du canal d'écoulement : figure 4.4(j) au contraste accentué. La zone blanche au centre du canal correspond à une saturation de luminosité sur l'image d'origine. Il s'agit d'un artefact et elle devrait être sombre.*

Quoiqu'il en soit, la présence d'un canal d'écoulement de largeur variable peut fournir une source d'explication aux lois de Darcy modifiées observées précédemment. En effet, nous considérons dans nos calculs la vitesse débitante, c'est à dire le débit divisé par la largeur de la cellule. Dans ce cadre, si la largeur est réduite au départ et même si la loi de Darcy est localement respectée, le débit observé sera moindre et la vitesse débitante aussi. Cependant, un calcul d'écoulement faisant intervenir une largeur de canal $W(x)$ variable nécessiterait une évolution de $W(x)$ en x^2 pour retrouver des lois du type (4.17) ou (4.19). Ce n'est manifestement pas ce que nous obtenons à la figure 4.19. Il convient donc d'envisager des phénomènes complémentaires.

Structuration dans l'épaisseur : modification de l'écoulement

Comme nous l'avons vu dans le cas des suspensions peu denses au chapitre 3 ou comme le montrent des études récentes sur la rhéologie des suspensions denses [49, 80], il y a une relation non triviale entre valeurs macroscopiques relevées (fraction de grains, contraintes, taux de cisaillement) et structuration locale des écoulements. Dans notre cas, cette structuration dans l'épaisseur est complexe à déterminer et nous allons donc simplifier les lois d'écoulement en fonction de la fraction de grains.

Considérons un écoulement de suspensions de fraction de grains moyenne ϕ_{moy} à une vitesse moyenne V_{moy} . Nous faisons l'hypothèse que l'écoulement se réarrange sous la forme d'un écoulement bouchon selon l'épaisseur b comme représenté sur la figure 4.20.

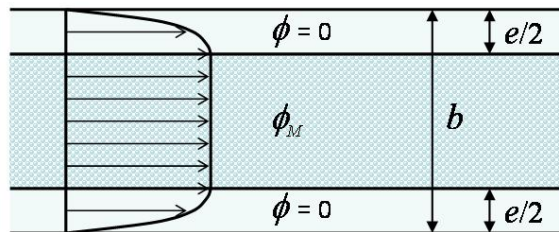


FIG. 4.20 – *Schéma de l'écoulement structuré dans l'épaisseur de la cellule.*

Cette configuration est la plus simple que nous puissions envisager. Le cisaillement est concentré sur chaque bord avec une zone de fluide pur d'épaisseur $e/2$. Dans la zone

centrale, les grains sont à une fraction de grains ϕ_M et l'écoulement se fait à une vitesse uniforme V_M . Le profil de vitesse dans la zone de fluide pur est un demi-Poiseuille avec une vitesse moyenne $\frac{2}{3}V_M$.

La conservation du flux de grains s'écrit :

$$\phi_M V_M (b - e) = \phi_{moy} V_{moy} b , \quad (4.24)$$

et celle du flux total (huile+grains) :

$$V_M (b - \frac{1}{3}e) = V_{moy} b . \quad (4.25)$$

Nous en déduisons :

$$e = b \frac{\phi_M - \phi_{moy}}{\phi_M - \frac{1}{3}\phi_{moy}} . \quad (4.26)$$

La loi de Darcy (1.19) dans la zone de fluide pur nous permet d'y relier la vitesse moyenne $\frac{2}{3}V_M$ et ∇P :

$$\frac{2}{3}V_M = \frac{e^2}{12\eta_0} \nabla P \quad (4.27)$$

Si nous considérons $e \ll b$, la vitesse moyenne sur l'épaisseur b est égale à la vitesse maximale. Nous trouvons donc :

$$V_{moy} = \frac{e^2}{8\eta_0} \nabla P . \quad (4.28)$$

La mobilité de la pâte granulaire donnée empiriquement par βX_d , vaut donc dans ce modèle $\frac{e^2}{8\eta_0}$, expliquant a posteriori notre mise à l'échelle des mobilités avec α_0 (Eq.4.18).

Nous devons maintenant chercher quelles peuvent être les sources de variation de l'épaisseur e de fluide pur lors de l'avancée du doigt dans la cellule.

La fraction de grains dans la partie "pâte granulaire" est quasiment constante. Cependant, elle décroît légèrement quand le doigt avance dans la cellule (Fig. 4.13a et b). Cette décroissance arrivant à une fraction de grains presque maximale peut suffire à changer fortement la rhéologie de la suspension [49, 57, 80] et par conséquent l'écoulement de celle-ci au travers de la cellule de Hele-Shaw.

Ainsi une décompaction même lente au cours de la digitation pourrait expliquer une accélération "anormale" de la pâte granulaire, comme nous l'avons caractérisée précédemment. Nous allons donc tenter d'évaluer l'ordre de grandeur de ce phénomène.

Pour cela, nous faisons l'hypothèse que nous partons d'une suspension à une fraction de grains ϕ_M qui ne permet pas l'écoulement. Dû à la décompaction lors de l'avancée du doigt, la fraction de grains décroît :

$$\phi(X_d) = \phi_M (1 - \varepsilon_\phi(X_d)) , \quad (4.29)$$

où $\varepsilon_\phi(X_d) \ll 1$.

Par (4.26), nous en déduisons la valeur de e au premier ordre en ε :

$$e = \frac{3}{2} \varepsilon_\phi b . \quad (4.30)$$

Pour observer une loi du type (4.19) il nous faut donc considérer une fonction ε du type $\varepsilon_\phi = \varepsilon_1 X_d^q$ avec $q = 1/2$. Ce qui nous donne alors :

$$\beta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{b^2}{8\eta_0} \varepsilon_1^2. \quad (4.31)$$

Une estimation haute de ε_1 avec nos données expérimentales est de $0.004 \text{ cm}^{-1/2}$ ($\phi_M \approx 0.97\phi_0$).

Cette approche conduit cependant à des valeurs de β bien inférieures à celles mesurées avec un facteur de 3 à 5. Notons cependant qu'il permet d'expliquer qualitativement la dépendance de la "perméabilité" $V_{d,s}/\nabla P$ en fonction de la position X_d du doigt⁴.

De plus, ce modèle ne rend pas correctement compte de l'évolution de β en fonction de b . En effet, il aboutit à $\beta \propto b^2$. Or même si β est une fonction croissante de b , elle ne se réduit pas à un carré de b . Notons que c'est également le cas du coefficient α .

Une des limite de l'analyse que nous venons de mener est de considérer que le centre de la cellule est occupée par une suspension dont la fraction de grains est fixe et déterminée à ϕ_M par (4.29). Mais la valeur estimée ($\phi_M \approx 0.97\phi_0$) est cependant bien inférieure à la fraction maximale que l'on pourrait atteindre : 60 voire 62%.

Nous supposons maintenant que la fraction moyenne est constante, aux alentours de $\phi_2 \sim 0.965\phi_0 = 58\%$ et que l'écoulement reste bouchon mais que la fraction de grains ϕ_M (qui interdit toujours le développement d'un cisaillement dans la région centrale) est susceptible d'augmenter au cours du temps. La croissance de ϕ_M permet alors aussi une augmentation de e (Eq. 4.26). Cette concentration des particules au centre du canal peut typiquement être due à la migration induite par cisaillement que nous avons étudiée dans le chapitre 3.

En suivant un raisonnement analogue à celui mené dans la sous-partie 3.3.2, nous supposons que la partie vide de grains est le résultat de particules qui ont migré vers le centre du canal au cours de l'écoulement. Cela signifie que e évolue comme la longueur typique de migration des particules lorsque la pâte granulaire a été déplacée de λX_d dans la cellule de Hele-Shaw. Nous remplaçons donc $b/2$ par e , et L_p par λX_d dans l'équation (3.17) et trouvons :

$$e^3 \sim 6\hat{D} \lambda X_d D^2, \quad (4.32)$$

où $\hat{D}$ est le coefficient de diffusion adimensionné. Notons que e et par conséquent la mobilité ne dépendent pas dans ce cas de l'épaisseur de la cellule b .

Si nous nous suivons l'expression du coefficient de diffusion évalué par Nott et Brady [79] $12\hat{D} \sim 1$, nous obtenons une mobilité adimensionnée de la forme $\left(\frac{\lambda X_d}{2D}\right)^{2/3}$ dont les valeurs sont beaucoup trop élevées : d'après les figures 4.16(a,b) l'échelle typique des X_d est en effet L_1 et non D .

Il est cependant très difficile de savoir quel serait le coefficient de diffusion dans le cas présent. La diffusion de particules permet d'introduire une dépendance avec la position du doigt X_d dans l'expression de la mobilité qui ne dépend pas de l'épaisseur b

⁴Remarquons que, nous aurions pu également considérer une modification de la loi de Darcy (1.19) non pas en considérant une structuration de l'écoulement mais en introduisant une viscosité dépendant de la fraction de grains de type Krieger-Dougherty : $\eta = \eta_0(1 - \phi/\phi_m)^{-p}$. Dans ce cas, nous aurions $\varepsilon_\phi = \varepsilon_2 X_d^{1/p}$ et $\beta = \frac{b^2}{12\eta_0} \varepsilon_2^p$.

de la cellule. En complément de l'approche précédente sur une décompaction moyenne au cours de l'écoulement conduisant à $\beta \propto b^2$, l'analyse que nous venons de mener s'avère donc utile pour envisager une dépendance en b plus complexe.

Nous retiendrons finalement que nous sommes arrivés à établir des lois empiriques décrivant la rhéologie de l'écoulement. En revanche, nous n'avons pas, pour l'instant de théorie claire permettant de mettre en avant des explications microscopiques sur la mobilité croissante du milieu.

4.5.4 Évolution conjointe de la mobilité et de la compaction

L'étude que nous venons de mener lors de la phase de digitation, nous a montré que l'évolution de la mobilité est indépendante de la surpression appliquée. C'est en fait le cas dès la fin du processus de décompaction initiale. Nous pouvons donc moyenner ces valeurs de mobilité à une épaisseur de cellule b donnée pour l'ensemble des surpressions ΔP que nous avons appliquées.

Les figures 4.21(a,b) représentent les valeurs moyennées de l'indice de compaction et de la mobilité $V_{t,s}/\nabla P$ en fonction de la position du doigt X_d en coordonnées logarithmiques. Y sont également représentées les quantités adimensionnées par α_0 et L_1 . Ces figures permettent de caractériser la manière dont se fait la décompaction du milieu et l'accroissement de mobilité.

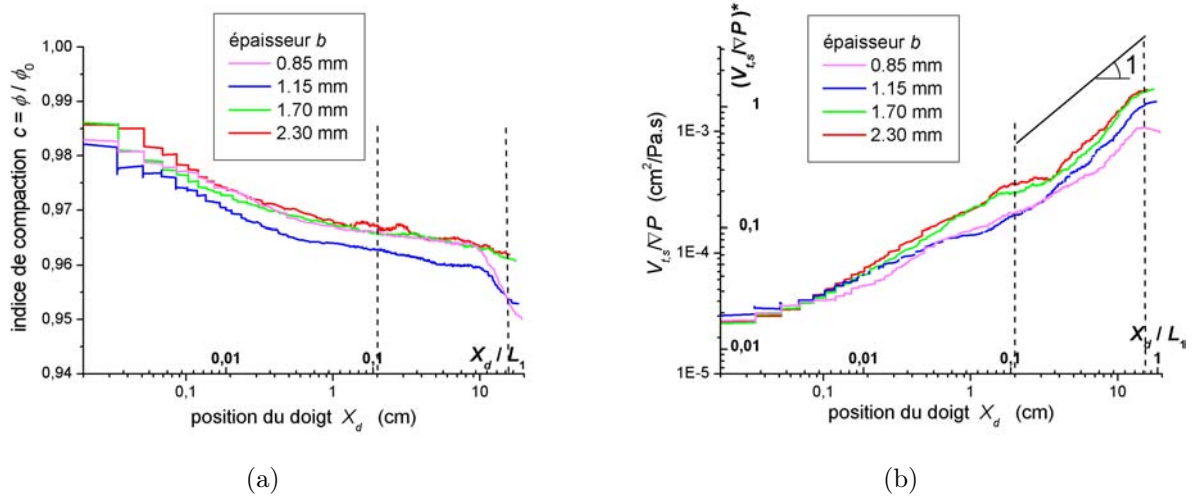


FIG. 4.21 – Évolution (a) de l'indice de compaction et (b) de la mobilité $V_{t,s}/\nabla P$, moyennés en fonction de la position du doigt. Le rapport $(V_{t,s}/\nabla P)^*$ est la valeur de la mobilité adimensionnée par α_0 (4.18). Les lignes verticales délimitent de manière indicative la zone de mesure des coefficients α et β .

Nous retrouvons sur ces graphes les différentes observations que nous venons de développer. De plus nous pouvons maintenant visualiser la manière dont évoluent l'indice de compaction et la mobilité entre la fin de la phase de décompaction initiale ($X_d = 0$) et les premiers stades de la digitation ($X_d \sim 2$ cm).

Nous remarquons sur la figure 4.21(a) que, comme souligné dans la sous-partie 4.5.1, la décompaction est plus importante au tout début de la mobilisation de l'interface interne, lorsque le doigt commence à pousser ($X_d < 1$ cm). L'indice de décompaction décroît ensuite plus doucement.

Nous observons, figure 4.21(b), que la mobilité croît bien à partir de la valeur $K_{HS}/\eta_S = 0.017\alpha_0$ relevée au début de la mobilisation de l'interface interne (voir p. 132) et tend vers une loi linéaire dépendant de l'épaisseur b pour les doigts suffisamment avancés ($X_d > 2$ cm). Nous remarquons qu'à l'inverse de l'indice de compaction, la croissance de la mobilité ne présente pas d'inflexion au delà de $X_d \sim 1$ cm.

Nous relierons ces observations aux explications avancées à la fin de la sous-partie précédente. Dans le modèle qui y est développé, l'épaisseur e de fluide pur au niveau des plaques peut, en effet, croître soit par une diminution de l'indice de compaction moyen, soit par une migration des grains vers le centre du canal. Il semblerait ainsi que la migration des grains vers le centre du canal puisse "prendre le relais" de la diminution de la compaction pour expliquer l'augmentation continue de la mobilité.

Notons que, vers la fin de la cellule ($X_d > 12 \sim 13$ cm), l'indice de compaction chute pour les plus faibles épaisseurs tandis que la mobilité semble atteindre un palier. Nous pensons que la faible quantité de pâte granulaire restante peut être responsable de ces observations. Par ailleurs, il est également vraisemblable que, selon notre modèle et pour la plus petite épaisseur $b = 0.85$ mm, la fraction de grains dans le bouchon au centre du canal atteigne un maximum de l'ordre de 60 ou 62%, ne permettant plus alors l'augmentation de la mobilité.

4.5.5 Largeur des structures observées

Nous nous intéressons, dans cette sous-partie à la largeur des doigts obtenus lors du processus de déstabilisation.

Comme nous l'avons d'ores et déjà souligné, ces doigts sont formés de fluide pur et ils pénètrent dans un milieu qui reste relativement uniforme à partir du moment où nous excluons les bords qui ne sont pas mobilisés (voir Fig. 4.19).

Résultats expérimentaux

Nous avons choisi de présenter ici les résultats pour deux types de largeurs : largeur individuelle et largeur totale. La largeur individuelle w_i caractérise la taille d'un seul doigt tandis que la largeur totale w_t représente la mesure de la largeur du canal occupée par le ou les doigts. Un schéma de ces largeurs est représenté figure 4.22.

Les structures sont relativement hétérogènes et il convient donc de suffisamment moyenner les largeurs observées pour obtenir des tendances et des résultats quantitatifs.

En premier lieu, nous considérons les valeurs moyennées des largeurs individuelle et totale. La moyenne de la largeur totale $w_{t,m}$ est calculée en considérant l'aire occupée par le doigt dans une surface de longueur 6 cm (soit W , la largeur du canal) et en la divisant par cette même longueur. La largeur individuelle moyenne $w_{i,m}$ est calculée en considérant toujours l'aire occupée par le doigt sur une longueur 6 cm mais en la divisant par la moitié du périmètre du doigt sur cette longueur. Cette définition permet également de prendre en compte des doigts qui ne seraient pas alignés dans l'axe de la cellule.

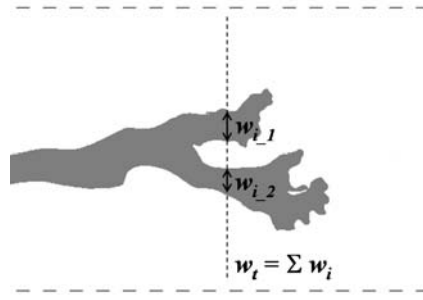


FIG. 4.22 – Image traitée de doigt : largeur individuelle et largeur totale représentées à une position de doigt donnée.

Les figures 4.23(a) et 4.23(b) représentent, en fonction de la position du doigt X_d , les largeurs individuelle et totale mesurées pour différentes expériences dans une cellule de Hele-Shaw d'épaisseur $b = 1.15$ mm.

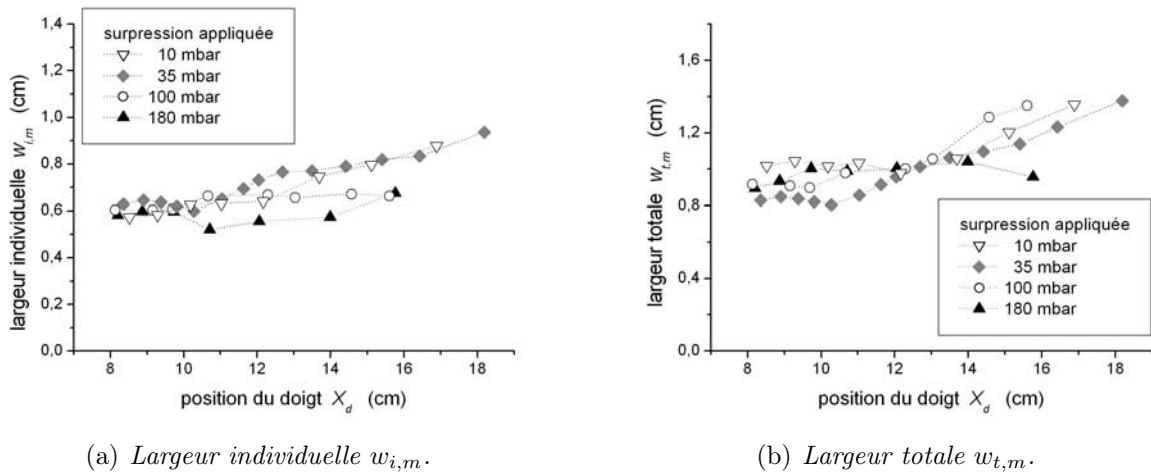


FIG. 4.23 – Largeurs (individuelle et totale) des doigts en fonction de la position du doigt X_d pour une épaisseur de cellule $b = 1.15$ mm et différentes surpressions appliquées.

Nous observons que les largeurs, de l'ordre du centimètre, ne dépendent pas significativement de la surpression imposée mais que les structures ont tendance à être plus larges lorsque le doigt avance dans la cellule. Cette observation reste cohérente avec la vision d'un fluide effectif dont les propriétés changent lorsque le doigt évolue dans la cellule. Ce sont alors les propriétés du fluide qui donneraient le mode de sélection de la taille des doigts et non la vitesse d'écoulement comme dans le cas de l'instabilité de Saffman–Taylor [92].

De la même manière que pour l'étude de l'écoulement de fluide effectif, nous pouvons considérer les moyennes de nos données pour les différentes épaisseurs de cellule en ajoutant cette fois-ci la position du doigt.

Les figures 4.24(a) et 4.24(b) représentent les moyennes des largeurs individuelle et totale des doigts en fonction de l'épaisseur de la cellule et de la position des doigts.

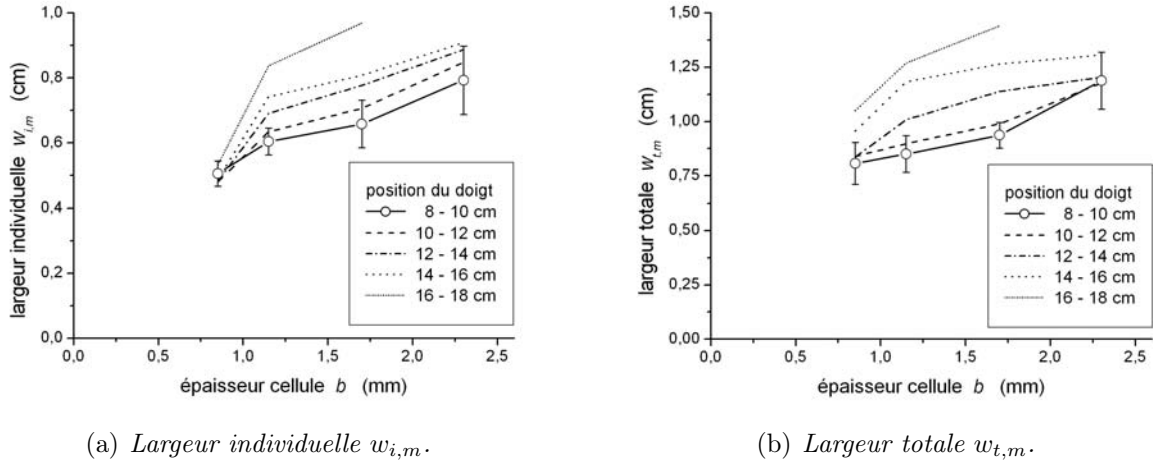


FIG. 4.24 – Largeurs (individuelle et totale) des doigts en fonction de l'épaisseur de la cellule et de la position moyenne du doigt, moyennées sur l'ensemble des surpressions appliquées.

Nous observons que la largeur des doigts (individuelle ou totale) croît avec l'épaisseur b de la cellule. Elle croît également, mais dans une moindre mesure avec la position du doigt X_d . Il est cependant difficile de caractériser plus en avant la sélection de la largeur des doigts sans modèle.

Liens avec les travaux existant, quelques ordres de grandeur

Deux types de travaux peuvent nous aider à comprendre les phénomènes observés et notamment l'absence de dépendance de la largeur par rapport à la surpression appliquée.

Dans le cas de fluides miscibles, Paterson [82] en analysant la dissipation visqueuse d'énergie arrive à une prédiction de la taille des doigts en :

$$w_i = 4b . \quad (4.33)$$

Cette taille des doigts est reportée sur la figure 4.25. L'ordre de grandeur est le bon même si nos données ne semblent pas suivre une loi linéaire.

D'un autre côté, Coussot [27] théoriquement et Lindner *et al.* [70] expérimentalement se sont intéressés au problème de la digitation dans les fluides à seuil. Ces fluides présentent une contrainte critique en dessous de laquelle l'écoulement n'est pas possible. Ils ont montré que la largeur individuelle des structures se mettait à l'échelle de la racine carrée de l'épaisseur :

$$w_i \sim 2\pi \sqrt{\frac{3b\gamma}{2\tau_c}} , \quad (4.34)$$

où τ_c est la contrainte critique et γ la tension de surface entre les deux fluides.

Un ajustement de nos données expérimentales en $\sqrt{b}$ est possible et indiqué figure 4.25. Nous trouvons un préfacteur $1.2 \text{ cm}^{1/2}$ dans cet ajustement. Cependant nous n'avons aucun argument rationnel qui permettent de trouver une échelle de tension de surface effective ni un seuil τ_c .

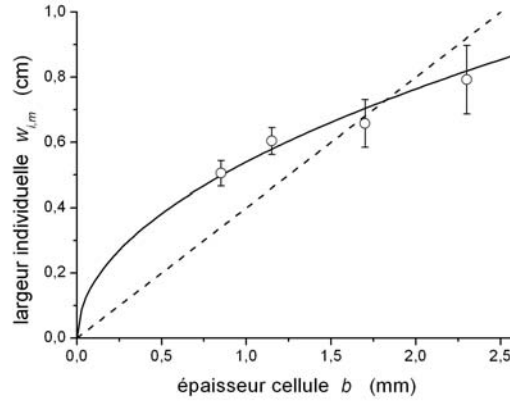


FIG. 4.25 – Largeur individuelle moyenne des doigts en fonction de l'épaisseur de la cellule : données expérimentales pour $8 \text{ cm} < X_d < 10 \text{ cm}$, ajustement par une loi en $\sqrt{b}$ (courbe pleine) et loi en $4b$ (tirets).

Il existe par ailleurs d'autres limites à ces deux analyses.

La première, commune aux deux, est qu'il n'y a majoritairement qu'un seul doigt se propageant dans la cellule. Tous les processus de ramification sont suivis d'une compétition entre les doigts formés et nous n'observons pas la propagation simultanée de plusieurs doigts qui serait permise dans les deux théories. Le phénomène d'écrantage observé peut cependant être renforcé par les lois d'écoulement que nous avons trouvées.

De plus, dans l'approche de Paterson, même si la loi en $4b$ semble être envisageable pour les largeurs de doigts représentées à la figure 4.25, ce n'est pas le cas des doigts plus avancés dans la cellule. Leur largeur est en effet plus grande et s'écarte donc davantage de cette loi, ce qui peut faire douter de la pertinence de ce modèle pour nos expériences.

Nous n'avons pas le même problème avec l'approche fluide à seuil car la légère baisse de l'indice de compaction lorsque le doigt avance peut expliquer une diminution de la contrainte seuil et donc une augmentation de la largeur (Eq. 4.34).

Nous soulignerons cependant que les deux approches ont l'avantage de ne conserver qu'une dépendance (majoritaire) en b pour la largeur individuelle des doigts ce qui est conforme à nos observations expérimentales.

4.6 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre la déstabilisation d'un édifice granulaire dense en grains et immergé sous l'action d'une surpression de fluide interstitiel dans une cellule de Hele-Shaw.

Nous avons observé que cette déstabilisation se déroulait essentiellement en deux étapes. Il existe d'abord une phase de décompaction. Elle aboutit à une diminution globale de la fraction de grains et permet à l'ensemble du milieu d'être mis en mouvement, mobilisable par l'écoulement. Elle est suivie d'une phase de digitation où un doigt plus ou moins ramifié de fluide pur pénètre dans le milieu décompacté.

Dans la phase de décompaction, nous avons montré que le paramètre pertinent pour caractériser le temps d'attente entre application de la surpression et mobilisation totale du milieu était la surpression imposée. Un modèle de décompaction à une dimension nous a permis de rendre compte des valeurs de temps d'attente observées ainsi que de l'évolution de la vitesse de l'interface libre.

Lors de la phase de digitation, nous nous sommes d'abord intéressés à la caractérisation de l'écoulement du fluide effectif huile+grains, c'est à dire à la relation débit/gradient de pression pour la pâte granulaire en écoulement. Nous avons proposé deux lois empiriques permettant de rendre compte de l'évolution de la vitesse et montré qu'elle étaient compatibles entre elles. Ces lois ne dépendent que d'un paramètre fonction de l'épaisseur b . Nous avons ensuite tenté d'expliquer par quelques arguments qualitatifs l'observation assez surprenante d'une loi de Darcy avec une perméabilité fonction de la position du doigt. Nous avons notamment retenu que les caractéristiques de l'écoulement selon l'épaisseur de la cellule étaient susceptibles d'évoluer lors de la digitation.

Nous avons enfin caractérisé les largeurs de doigts formés. Nous avons montré que la largeur des doigts dépendait principalement de l'épaisseur b de la cellule et, de manière moins sensible de la position du doigt dans la cellule X_d . Nous avons aussi observé qu'une loi en $\sqrt{b}$ similaire à celle observée dans les fluides à seuil pouvait convenir pour décrire les largeurs individuelles.

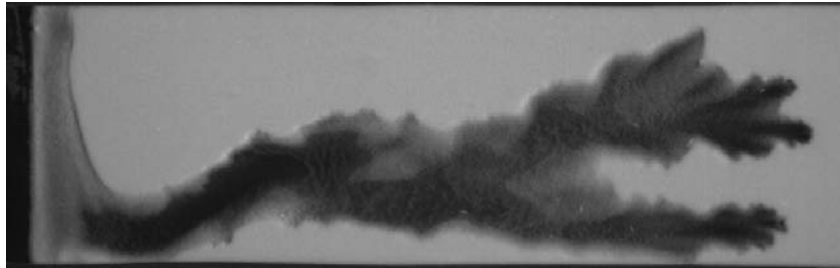


FIG. 4.26 – *Digitation obtenue dans un système air/milieu granulaire sec d'après Johnsen et al. [communication privée]. Géométrie de cellule $W = 6$ cm $b = 1.08$ mm, taille des grains $D = 80$ μ m, surpression d'air $\Delta P = 14$ mbar.*

Soulignons pour finir que cette étude se place dans le cadre plus général de l'étude des écoulements de fluides au travers de milieux poreux mobilisables. Nos travaux ont ainsi été menés en parallèle avec l'équipe Complexe de l'Université d'Oslo et l'IPGS de l'Université de Strasbourg, où des études analogues ont été menées sur des systèmes air/granulaires secs (Fig. 4.26).

Il est ainsi assez remarquable d'obtenir des motifs relativement similaires dans un système qui fait intervenir un fluide beaucoup moins visqueux et compressible, la comparaison des deux systèmes permettant dès lors de sonder un peu plus les propriétés des interactions écoulements/structures.

Chapitre 5

Injection d'air dans un milieu poreux réorganisable

Comme nous l'avons vu dans les généralités, partie 1.3, l'injection d'air dans les milieux poreux modèles à deux dimensions a été étudiée depuis les années 80 [66–68] et fait encore l'objet de nombreux travaux actuels [36, 71].

Ces études se limitent cependant au cas de milieux figés où la structure poreuse ne peut pas se réarranger sous l'effet de l'écoulement. Or, dès que le milieu poreux est constitué de grains, l'écoulement exerce sur ces derniers une force qui peut les mettre en mouvement, les déplacer individuellement ou collectivement.

En pratique, cette mobilisation de la structure peut être un but recherché ou un désagrément. Typiquement, concernant l'injection de résines ou de coulis dans les sols, une opération de recompactage [41] permet d'obtenir un tassement des sols et ainsi de renforcer une structure abîmée par une cause accidentelle (fuite d'eau, fouille proche...) tandis qu'une opération d'imprégnation consiste en l'injection de coulis de ciment au travers de la matrice poreuse [90] afin de renforcer une structure de type sableuse, la mobilisation étant alors à éviter.

Nous nous intéressons donc dans ce chapitre à l'étude de l'injection d'air dans un milieu poreux faiblement consolidé et donc réorganisable. Pour cela, nous employons un dispositif similaire au chapitre précédent. Nous nous trouvons, cependant ici, dans un cas plus complexe. En effet, alors qu'auparavant, le système choisissait lui-même la fraction de grains à laquelle il "désirait" se placer au moment de la digitation, nous devons maintenant imposer une fraction de grains au milieu avant l'injection d'air. Ces expériences sont donc beaucoup plus difficiles à mettre en œuvre et présentent des variabilités plus importantes. Nous nous attacherons donc plus dans le présent chapitre à donner des observations et des interprétations qualitatives qu'à rapporter une description fine des phénomènes.

Après avoir présenté le protocole expérimental, nous nous intéresserons au processus d'injection et aux motifs en résultant à deux échelles. À l'échelle de la cellule, notre intérêt se portera essentiellement sur une étude qualitative de la typologie des motifs d'injection et sur la description des phénomènes y conduisant. À une échelle locale, nous étudierons le champ de vitesse du milieu à l'aide d'une méthode de suivi de particules et corrélerons ensuite les résultats à la réorganisation locale du milieu et aux observations macroscopiques.

5.1 Protocole expérimental

5.1.1 Préparation du milieu

Nous travaillons avec un dispositif expérimental similaire à celui du chapitre 4. Le système granulaire est exactement le même : des billes de polystyrène de 80 μm de diamètre dont une petite partie (0.04%) est teintée et de l'huile de silicone de viscosité $\eta_0 = 5.0 \text{ mPa.s}$. La cellule de Hele-Shaw présente cependant une entrée supplémentaire dans la plaque du dessus, située à l'opposée de la première.

Dans le but de pouvoir accéder à différentes fractions de grains ϕ , nous effectuons une décompaction in-situ du milieu.

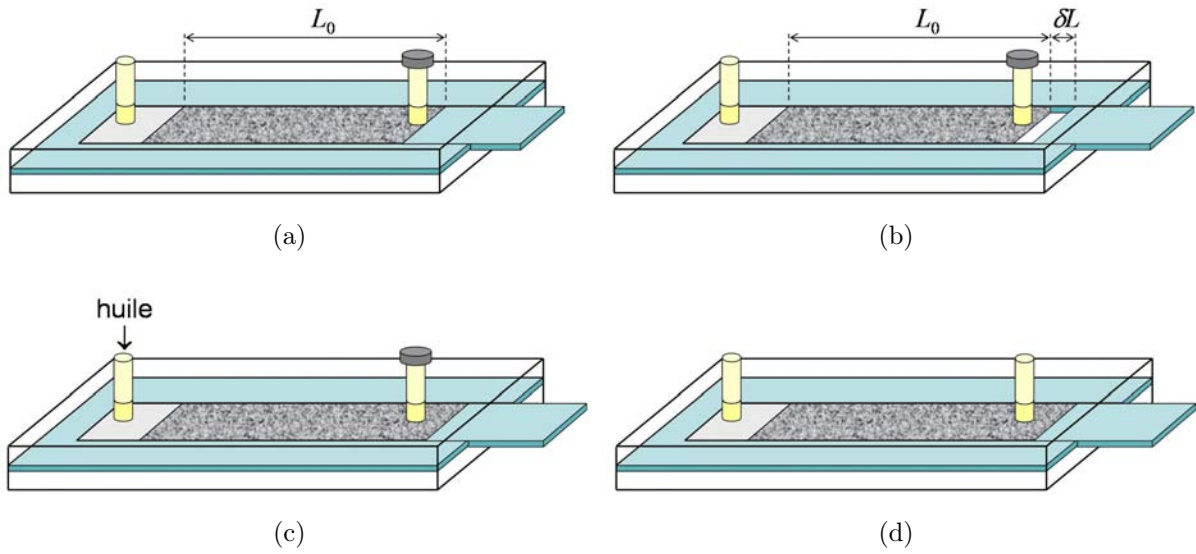


FIG. 5.1 – Schéma du protocole de décompaction. (a) Le milieu imbibé est préparé exactement comme décrit figures 4.1(a,b,c). Il existe une entrée supplémentaire initialement bouchée. (b) Le bouchon de Mylar est déplacé d'une distance δL laissant un espace vide. (c) Le milieu est décompacté progressivement. (d) Une fois la décompaction réalisée, le bouchon de Mylar est maintenu et la seconde entrée dans la cellule est libérée.

Les différentes étapes sont représentées figure 5.1 :

- L'entrée supplémentaire est bouchée et le milieu est d'abord préparé de la même manière qu'à la partie 4.1.1 (Fig. 5.1a – voir les figures 4.1a-c pour la préparation). Le bouchon de Mylar à la sortie de la cellule n'est pas retiré. Le milieu se trouve alors à une fraction de grains voisine de $\phi_0 = 60\%$ comme constaté dans le précédent chapitre (voir p. 124).
- Après cette première étape d'imbibition, la surpression d'huile est coupée et le bouchon de Mylar est déplacé d'une distance δL (Fig. 5.1b).
- De l'huile est à nouveau injectée de sorte à combler l'espace δL (Fig. 5.1c). Comme nous l'avons vu lors de l'étape de décompaction dans le chapitre précédent (sous-partie 4.4.1), une injection continue donne une décompaction non-uniforme et conduit à une digitation. Pour essayer de palier à ce problème, nous injectons

l'huile par des pulses de pression qui permettent une relative meilleure uniformité de la décompaction.

- Une fois le milieu décompacté, l'injection d'huile est coupée et l'entrée supplémentaire du côté grains est libérée (Fig. 5.1d).

Nous nous trouvons ainsi initialement avec un milieu décompacté dont la fraction moyenne de grains est passée d'une valeur ϕ_0 sur une longueur L_0 à une fraction moyenne ϕ_1 telle que :

$$\phi_1 = \phi_0 \frac{L_0}{L_0 + \delta L} , \quad (5.1)$$

où δL est l'augmentation de longueur du milieu. À longueur initiale donnée, il y a donc une relation univoque entre la fraction de grains ϕ_1 du milieu et la longueur de décompaction δL . Nous ferons référence de manière indifférenciée à l'un ou l'autre. Dans nos expériences, la valeur typique de L_0 est de 17~18 cm.

Remarquons cependant que, malgré le soin apporté à la décompaction, quelques difficultés expérimentales persistent. Il y a toujours des "traces" des processus de déstabilisation miscible (décompaction et digitation). Nous en reparlerons pour l'étude des motifs.

5.1.2 Configurations expérimentales

Le dispositif expérimental est analogue à celui de l'étude précédente. Il est représenté figure 5.2. L'injection d'air s'y fait par l'entrée opposée à celle qui a servi à l'injection d'huile pour la préparation du milieu.

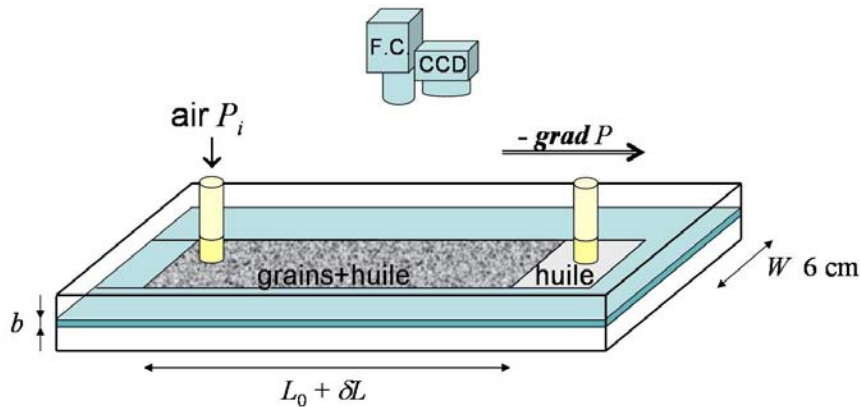


FIG. 5.2 – *Dispositif expérimental. La cellule est représentée dans un sens opposé aux figures 5.1(a,b,c,d).*

Remarquons que, pour être précis, l'injection d'air ne se fait pas par un orifice de largeur centimétrique mais à l'aide d'une buse constituée d'un réseau de 5 canaux de 300 μm de diamètre. Cela présente l'avantage de favoriser l'injection à l'échelle des pores du milieu¹. Soulignons que l'utilisation d'orifices de 300 μm garantit que les particules

¹Nous avons en effet tenté d'injecter l'air au niveau d'une interface plane (analogue au chapitre 4) et constaté que la compétition entre doigts d'injection se déroulant sur plusieurs centimètres menait à la formation d'un doigt unique de forme similaire à ceux obtenus dans ce chapitre.

ne peuvent y pénétrer. En effet avec une taille inférieure à 4 diamètres de grains, les phénomènes d'arches bloquent complètement l'écoulement des grains [33].

L'ensemble du dispositif de visualisation a d'ores et déjà été décrit page 124. Rappelons que la caméra CCD numérique permet une acquisition sur l'ensemble du canal tandis que la caméra rapide (FC :Fast Camera) permet de s'intéresser à une zone de quelques cm^2 .

Trois paramètres ont été variés au cours des expériences :

- l'épaisseur b de la cellule : 1.15 ou 2.30 mm,
- la longueur de décompaction δL : 0, 2, 5, 10 ou 15 mm, soit des fractions moyennes de grains ϕ_1 de 60, 59, 58, 57 ou 55%,
- et la surpression appliquée ΔP : 30, 60, 120 ou 250 mbar.

L'ensemble de ces expériences nous ont permis de couvrir une large gamme de phénomènes.

5.2 Motifs observés, vue large

Le premier niveau d'observation est la vue large prenant en compte l'ensemble du canal où l'étude des motifs formés nous renseigne sur le déroulement de l'injection. Un nouveau programme de traitement des images a été mis en place mais les résultats sont difficilement exploitables à cause du bruit important et de la dispersivité des résultats. Nous nous concentrerons donc dans la suite sur des résultats qualitatifs, en particulier sur la nature des motifs.

Soulignons qu'à défaut d'une loi d'écoulement clairement établie, nous observons néanmoins une augmentation de la vitesse des doigts (ou du débit d'air) avec la différence de pression ΔP .

5.2.1 Cas des milieux non-décompactés

Nous nous intéressons d'abord aux motifs formés dans le cas où le milieu n'est pas décompacté ($\delta L = 0.0$ mm, $\phi_1 = \phi_0 = 60\%$). Les figures 5.3(a-c) représentent les motifs observés dans un tel milieu en fonction de la surpression imposée ΔP .

Les parties blanches correspondent aux zones où l'air s'est infiltré et a chassé l'huile laissant les grains en place. Notons dès maintenant que le milieu ne semble pas bouger (nous confirmerons cette observation lors de l'étude locale).

L'évolution des motifs est semblable à celle initialement décrite par Lenormand *et al.* [67] pour les milieux poreux figés à deux dimensions. La figure 5.3(a) présente ainsi des caractéristiques proches de la digitation capillaire (Fig. 1.22a-c) comme décrite par Lenormand *et al.* [67]. Nous trouvons notamment que les doigts d'injection peuvent aller dans le sens contraire de l'injection dans la cellule, pousser dans la zone arrière et former des boucles. Les figures 5.3(b) et 5.3(c) présentent des motifs plus proches de la digitation visqueuse (Fig. 1.21a-c) avec des doigts en faible nombre, se propageant essentiellement vers l'avant et ne se croisant pas (ou peu). Notons également que les angles formés par les structures de digitation avec la direction d'injection sont en moyenne plus réduits lorsque la pression d'injection augmente. Cela montre une influence plus grande du gradient de pression dans ces cas, ce qui est en accord avec un problème où la viscosité du fluide poussé domine.

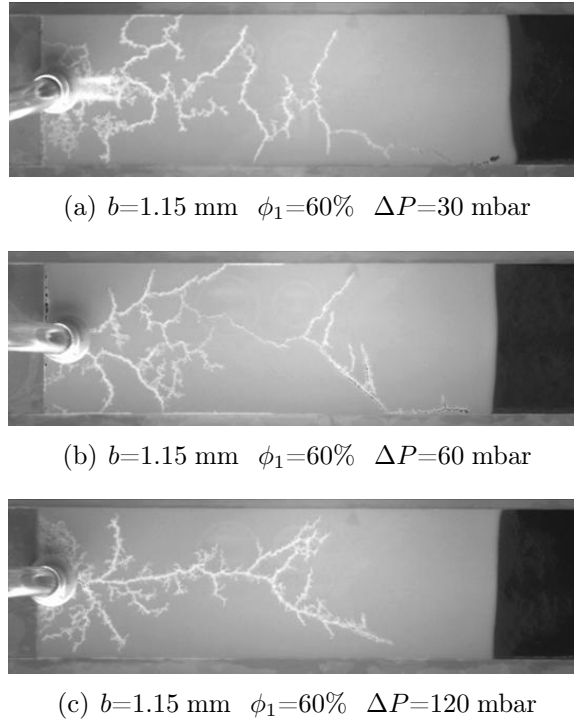


FIG. 5.3 – Évolution des motifs d’injection en fonction de la surpression appliquée ΔP pour un milieu non décompacté ($\phi_1 = 60\%$, $\delta L = 0.0$ mm) et pour une épaisseur de cellule $b = 1.15$ mm.

Nous nous trouvons donc dans un cas a priori similaire à celui de la digitation dans les poreux fixes.

Calculons maintenant le saut de pression capillaire dans un canal typique de ce milieu. Dans les expériences de drainage, c’est la partie la plus petite du canal qui est relevante pour calculer le saut de pression. Pour un empilement de billes, nous pouvons estimer que cette taille est de l’ordre de grandeur d’un cinquième de taille de grains. Nous obtenons ainsi une estimation du saut de pression δP par la formule de Laplace (1.62) :

$$\delta P = \frac{2\gamma}{R/5}, \quad (5.2)$$

où R est le rayon des grains et γ la tension de surface du fluide mouillant. Notons que nous avons omis le terme en $\cos \theta$ de l’équation (1.62). Nous avons $\gamma = 21 \text{ mN m}^{-1}$ et $R = 40 \text{ }\mu\text{m}$. Nous en déduisons un saut typique de pression $\delta P \sim 50$ mbar au dessous duquel les forces capillaires sont vraisemblablement dominantes. Cette valeur δP est en bon accord avec l’évolution des motifs constatée en accroissant la surpression appliquée ΔP (Fig. 5.3a→b→c) et la transition d’un régime de digitation capillaire vers un régime de digitation visqueuse.

Ces observations confirment ainsi que lorsqu’il n’y a pas de décompaction, le milieu se comporte plus ou moins comme un milieu poreux 2D fixe et peut être considéré comme figé : la réorganisation est interdite à cause de l’encombrement des grains. Cette observation rejoint l’analyse conduite dans le chapitre précédent qui montrait que le milieu initial ne pouvait pas être mobilisé avant qu’il ne soit décompacté (voir la partie 4.4).

5.2.2 Évolution des motifs dans les milieux décompactés

Nous nous intéressons maintenant aux résultats obtenus dans les milieux décompactés.

Les figures 5.4(a-f) représentent une ébauche de diagramme de phase des motifs observés dans la configuration d'épaisseur $b = 1.15$ mm en fonction de la fraction de grains ϕ_1 et de la surpression appliquée ΔP .

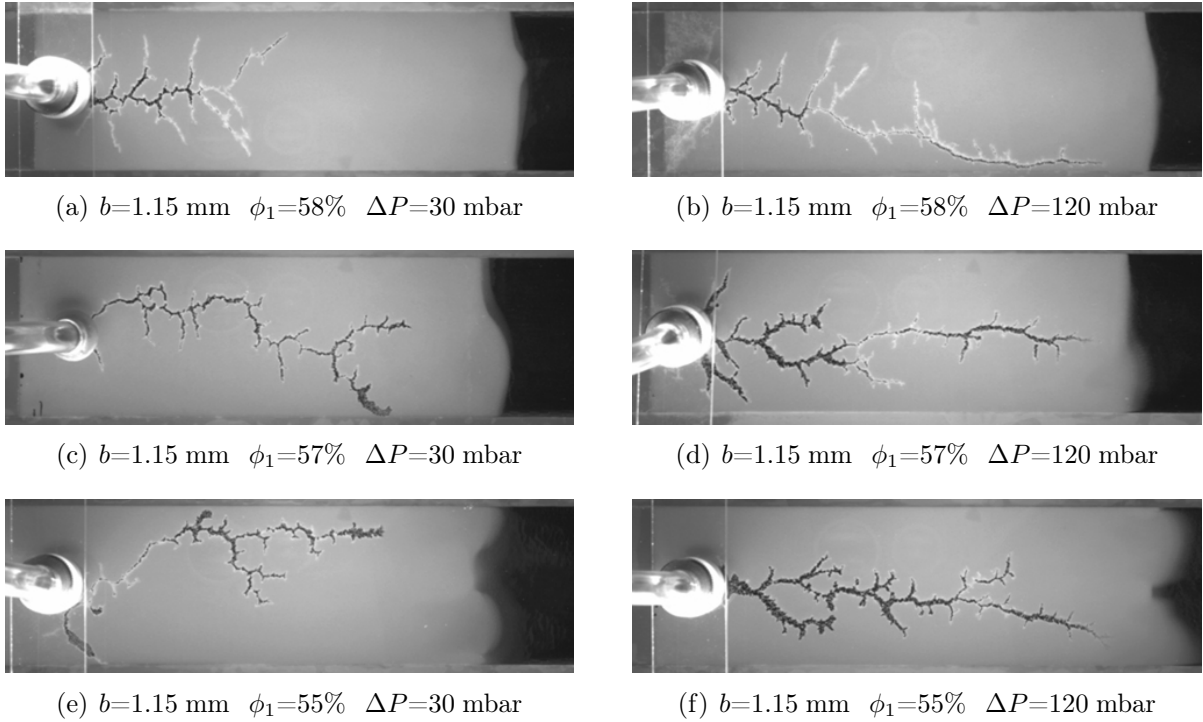


FIG. 5.4 – Évolution des motifs d'injection en fonction de la surpression appliquée ΔP et de la fraction de grains ϕ_1 pour une épaisseur de cellule $b = 1.15$ mm.

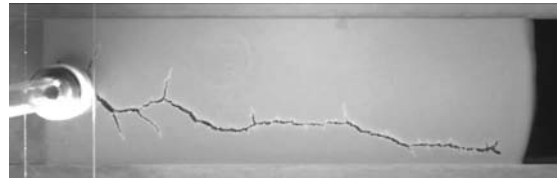
En comparaison avec le cas sans décompaction (Fig. 5.3a-c), nous observons qu'il y a maintenant des zones vides de grains : les zones en noir. En effet, le fond de la cellule étant sombre, les régions sans grain apparaissent noires. Nous en déduisons que ce sont des zones de mobilisation du milieu granulaire. Dans ces zones, la taille des structures est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la cellule $b = 1.15$ mm, elle dépasse donc nettement la taille des grains $D = 80$ μm et par conséquent celle des pores.

Étudions plus en détail les motifs des figures 5.4(a-f) et leur variation avec les paramètres du système : ϕ_1 (ou δL) et ΔP . Les observations se rejoignent concernant l'effet d'une diminution de ϕ_1 ou d'une augmentation de ΔP : il existe des structures plus larges lorsque la fraction de grains est plus faible et donc la décompaction plus prononcée (Fig. 5.4a→c→e ; b→d→f) ou lorsque la surpression appliquée est plus importante (Fig. 5.4a→b ; c→d ; e→f). Ces structures ont également tendance à être plus orientées dans l'axe de la cellule, c'est à dire dans la direction de la sortie imposée par le gradient de pression moyen. Elles sont généralement aussi légèrement moins ramifiées ou ont des ramifications plus courtes.

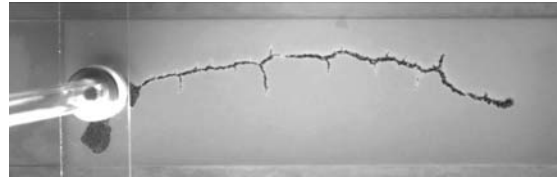
L'ensemble de ces observations concorde vers un concept de "mobilisabilité" qui traduirait la plus ou moins grande disponibilité du milieu à être, selon les termes, mobilisé, réarrangé, réorganisé ou déformé. Cette mobilisabilité est d'autant plus importante que la surpression, c'est à dire la force appliquée, est grande ou que le milieu se trouve localement à une fraction de grains plus faible.

Notons que pour certaines expériences, nous observons des doigts relativement larges à proximité du lieu d'injection puis des structures plus fines par la suite. Il s'agit vraisemblablement d'un problème dû à la procédure initiale de décompaction du milieu : lors de la préparation, le milieu loin de l'injection d'huile (et donc celui à proximité de l'injection d'air) aura tendance à être en moyenne plus décompacté. Ce dernier sera donc plus mobilisable et en présente les caractéristiques.

Les motifs observés dans la cellule d'épaisseur $b = 2.30$ mm sont en bon accord avec le concept de mobilisabilité. Les figures 5.5(a-c) représentent ces motifs pour une surpression $\Delta P = 30$ mbar en fonction de la fraction de grains ϕ_1 .



(a) $b=2.30$ mm $\phi_1=58\%$ $\Delta P=30$ mbar



(b) $b=2.30$ mm $\phi_1=57\%$ $\Delta P=30$ mbar



(c) $b=2.30$ mm $\phi_1=55\%$ $\Delta P=30$ mbar

FIG. 5.5 – Évolution des motifs d'injection en fonction de la fraction de grains ϕ_1 pour une épaisseur de cellule $b = 2.30$ mm et une surpression appliquée $\Delta P = 30$ mbar.

Nous remarquons que ces structures semblent de largeur comparable (voire légèrement plus larges) à celles mesurées dans la cellule d'épaisseur $b = 1.15$ mm à la même surpression (Fig. 5.4a-c-e). Notons cependant que ces doigts sont plus rectilignes, moins ramifiés et alignés en direction de la sortie.

Le concept de "mobilisabilité" aurait également un sens dans ces observations car en augmentant l'épaisseur b de la cellule nous réduisons le confinement du milieu poreux dû aux parois et favorisons l'essor de structures en direction de la sortie, de l'exutoire.

Observons que la mobilisation du milieu peut être de plusieurs natures, les deux extrêmes étant liées à deux types d'écoulement dans la cellule de Hele-Shaw² :

- une mobilisation locale, avec un écoulement loin du doigt de type "milieux poreux" et qui correspond à un écoulement de fluide pur à l'intérieur de la matrice poreuse faiblement mobilisée associé à une (re)compaction locale du milieu près du doigt,
- une mobilisation plus large, liée à un écoulement de pâte granulaire dans la cellule de Hele-Shaw.

Intuitivement ces deux types de mobilisation interviennent pour des "mobilisabilités" différentes :

- Pour les mobilisabilités faibles (fraction de grains importante, surpression faible et cellule plutôt fine) la structure granulaire va résister à la mise en mouvement due à l'écoulement et la réorganisation va rester locale conduisant à un écoulement de type "milieu poreux" pour évacuer l'huile. Cela favorise, comme observé expérimentalement, des structures fines.
- pour des mobilisabilités plus importantes le milieu granulaire pourra être plus largement restructuré et couler à la manière d'une suspension granulaire. Des structures plus larges peuvent alors apparaître.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'analyse des images locales en suivi de particules dans le but de comprendre les mécanismes structurant au niveau microscopique.

5.3 Phénomènes locaux, vue rapprochée

5.3.1 Techniques de corrélation d'images

Pour étudier, au niveau local, les mécanismes de réarrangement, nous nous sommes servis de techniques de corrélation d'images (P.I.V. Particle Image Velocimetry). Ces techniques sont couramment employées en mécanique des fluides pour étudier les champs de vitesse ou en mécanique du solide pour visualiser les champs de déplacement.

Le principe de base en mécanique des fluides est d'ensemencer l'écoulement avec de fines particules dont il sera possible de suivre les déplacements entre deux images très rapprochées "temporellement" (typiquement le déplacement des particules entre deux images doit être très inférieur à l'écart entre ces particules). Deux types de "suivi" sont cependant possibles : pour des densités de particules assez faibles, chaque particule peut être suivie (technique de "suivi de particules" – Particle Image Velocimetry ou PIV) tandis que pour des densités plus élevées, c'est la correspondance entre sous-régions de l'image qui est établie (technique de "corrélation d'images" – Correlation Image Velocimetry ou CIV).

C'est cette dernière technique qui est mise en œuvre pour nos expériences. Le principe est schématisé à la figure 5.6.

Nous travaillons avec deux images voisines temporellement pour lesquelles la structure a peu bougé par rapport aux tailles caractéristiques des textures du milieu³. La première image est découpée en sous-régions et le programme va tenter de trouver où chaque sous-

²Notons, ici aussi, que nous retrouvons les deux types d'écoulement précisés dans l'étude du chapitre 4.

³Dans notre milieu la texture est typiquement formée par les grains à la surface du milieu, c'est à dire en contact avec la plaque supérieure de la cellule de Hele-Shaw. L'ajout de grains teintés permet alors d'augmenter le contraste des textures et le suivi de ces dernières.

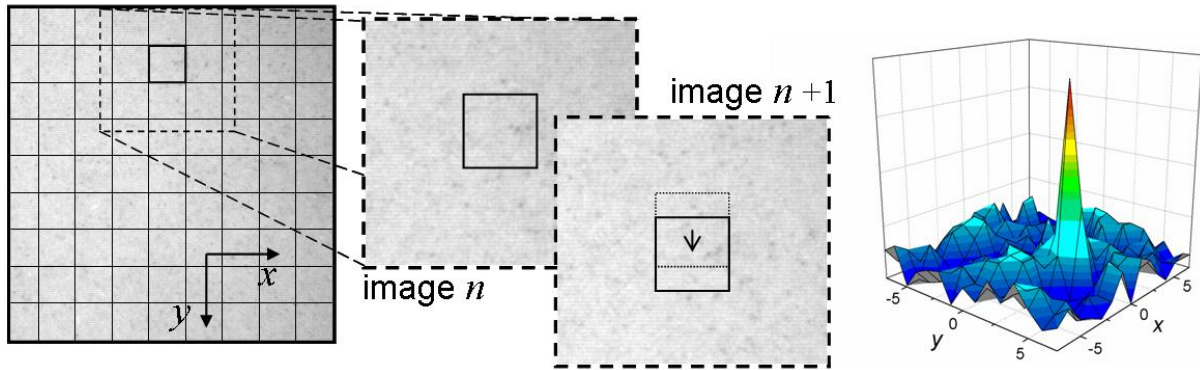


FIG. 5.6 – Principe de la corrélation d'images (Correlation Image Velocimetry).

région s'est déplacée. Pour cela, il déplace une sous-région donnée d'une certaine distance et calcule la corrélation entre cette sous-région déplacée et la zone correspondante dans l'image suivante. Regardant les valeurs de la corrélation pour les différents déplacements possibles de la sous-région, un pic est généralement trouvé (partie droite Fig. 5.6) et correspond alors au déplacement le plus probable de la sous-région entre les deux images. En effectuant cette démarche pour l'ensemble des sous-régions, il est possible d'en déduire un champ de déplacement entre les deux images.

C'est ce dernier que nous allons étudier maintenant pour nos expériences à l'aide du logiciel DaVis de LaVision.

5.3.2 Étude du cas non-décompacté

Les figures 5.7(a) et 5.7(b) (respectivement 5.7c et 5.7d) représentent la propagation typique de la digitation à deux temps voisins dans un cas non-décompacté ($\delta L = 0$ mm, $\phi_1 = 60\%$). Les champs de déplacement entre ces deux images sont superposés à ces images. Notons que ces derniers sont dilatés d'un facteur 3, l'origine des vecteurs déplacements correspondant aux points initiaux des "sous-régions" et que ces images locales sont placées de telle sorte que le sens de l'écoulement imposé par le gradient de pression moyen est maintenant du haut vers le bas.

Nous constatons sur ces figures que malgré l'avancée du motif de digitation dans la cellule, aucun mouvement de la structure des grains n'est détectée (hors bruit). Cette observation est concordante avec celle de la sous-partie 5.2.1. Le milieu dans le cas non-décompacté n'est donc pas mobilisé : la structure granulaire n'est pas déplacée et nous observons ainsi des motifs analogues à la digitation dans les milieux poreux figés.

5.3.3 Structures fines et recompaction locale

Nous étudions maintenant le cas des structures fines obtenues pour des mobilisabilités intermédiaires pour lesquelles le milieu ne semble que partiellement mobilisé.

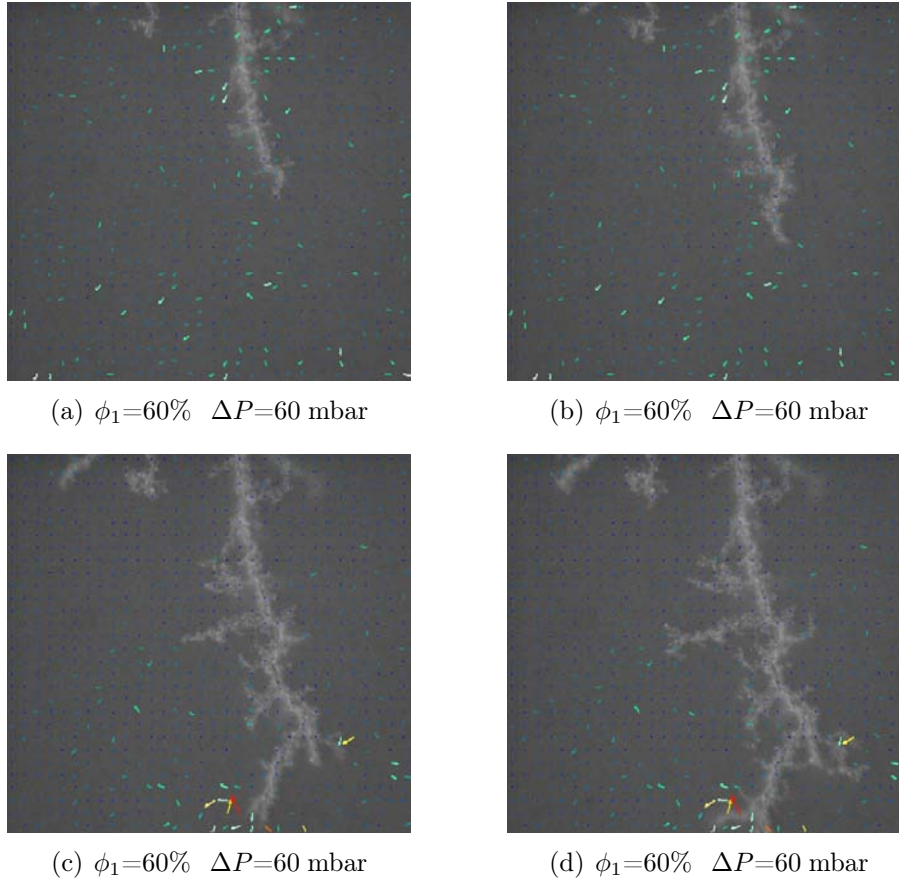


FIG. 5.7 – Champs de déplacement extraits par le logiciel de corrélation d'images (CIV) entre les images (a) et (b) et entre les images (c) et (d). Norme des vecteurs déplacements multipliée par un facteur 3, origine conservée. Épaisseur de cellule $b = 1.15$ mm.

Les figures 5.8(a-d)⁴ représentent les champs typiques de déplacement observés pour de telles structures. De manière analogue au cas précédent, les figures 5.8(a) et 5.8(b) sont des prises de vue à des instants rapprochés de même que les figures 5.8(c) et 5.8(d). Remarquons également qu'un facteur d'échelle est appliqué aux déplacements superposés à ces images.

Dans le cas présent, les doigts sont d'une largeur comparable à l'épaisseur de la cellule et le milieu granulaire est donc (en partie) mobilisé. Nous observons en effet des vecteurs déplacements non nuls alors que ce n'était pas le cas dans la situation compactée.

Nous remarquons cependant que ces déplacements non nuls sont seulement localisés à proximité de la pointe du doigt. Cette observation nous montre que la réorganisation est locale et nous l'interprétons donc comme une région de recompaction du milieu. Cette recompaction est provoqué par l'écoulement qui tend d'un coté à chasser les grains mais d'un autre n'est pas capable de suffisamment mobiliser le milieu pour bouger ensemble grains et fluide : il y a une résistance de la structure granulaire.

⁴Remarquons que l'exploitation des recompactions provoquées par les structures fines est plus aisée dans la cellule épaisse. Les structures y sont en effet moins ramifiées. Des comportements analogues sont cependant également observables pour $b = 1.15$ mm.

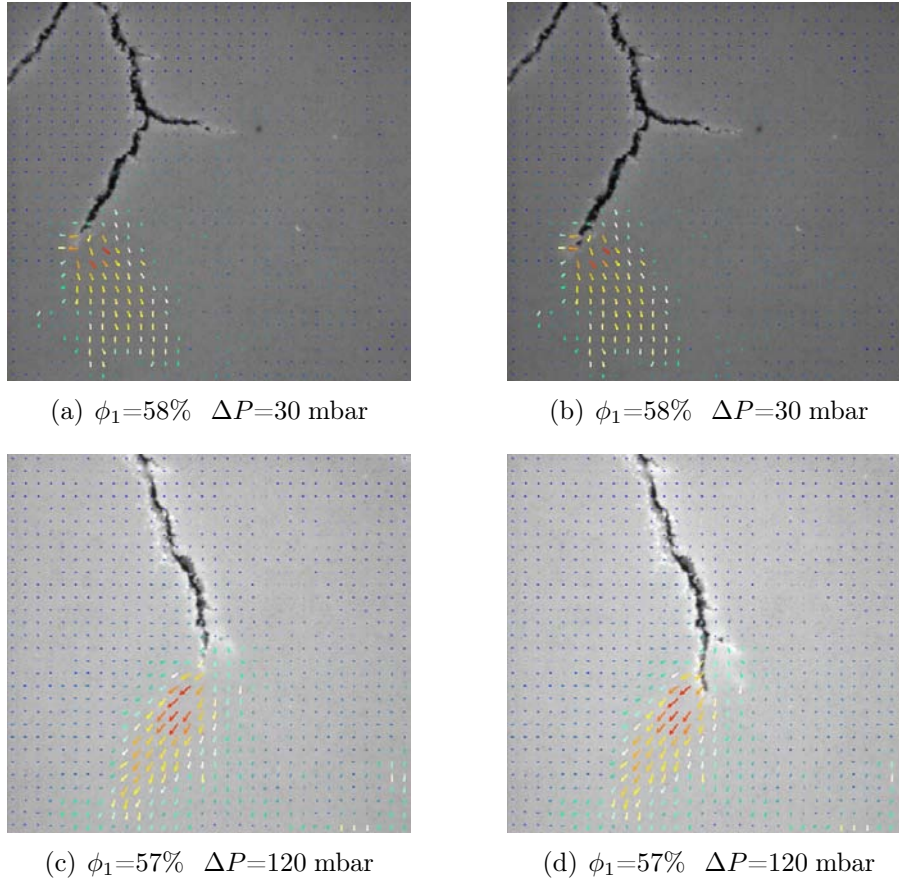


FIG. 5.8 – Champs de déplacement extraits par le logiciel de corrélation d'images (CIV) entre les images (a) et (b) et entre les images (c) et (d). Norme des vecteurs déplacements multipliée par un facteur 4 (images a,b) ou 3 (images c,d), origine conservée. Épaisseur de cellule $b = 2.30$ mm.

Nous observons, sur les figures 5.8(a-d), que la recompaction est directionnelle : elle se fait sur le côté du doigt. Par ailleurs, comme pour la digitation, la recompaction n'est pas dans la direction imposée par le gradient de pression moyen : doigt et zone de recompaction présentent tous les deux un angle avec cette direction comme représenté sur la figure 5.9.

Partant de cette remarque, nous obtenons une explication possible des angles observables macroscopiquement entre doigt d'air et direction "préférentielle" d'écoulement. Dans une structure faiblement mobilisable, l'air injecté, pour développer des structures larges doit mobiliser et recompacter une partie du milieu (puisqu'il ne peut pas le pousser entièrement). Ce phénomène aboutit à la création de zones à plus forte fraction de grains où le passage de l'air est beaucoup plus difficile. Ces zones sont donc développées sur le côté du doigt. Or nous avons deux "écoulements" qui s'opposent et seraient favorisés en se dirigeant chacun dans le sens du gradient de pression moyen. D'un côté, l'air injecté (et donc le motif de digitation) tend à pousser le milieu dans le sens du gradient de pression, cela correspondrait à l'écoulement moyen. Par ailleurs, au niveau de la zone de recompaction, il y a un écoulement de fluide pur à travers la matrice poreuse emportant

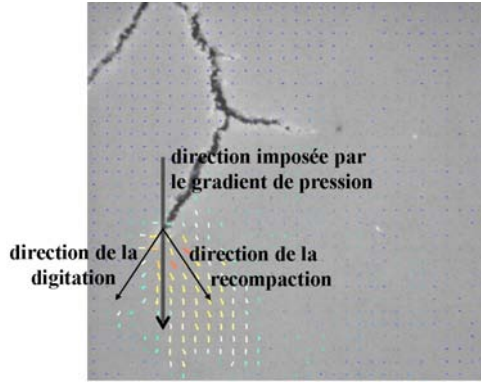


FIG. 5.9 – Directions de propagation de la digitation, de la recompaction et direction imposée par le gradient de pression moyen. Image identique à la figure 5.8(a).

plus ou moins de grains et qui compacte le milieu. Cet écoulement aussi tend à s'aligner dans la direction du gradient de pression. Or comme nous l'avons vu, la zone de décompaction se produit sinon orthogonalement au moins sur le côté du doigt. Le compromis entre ces deux écoulements est que direction de propagation du doigt et direction de propagation de la recompaction forment tous deux un angle avec la direction du gradient de pression moyen (Fig. 5.9). Ce phénomène permet ainsi d'expliquer l'observation d'un angle macroscopique entre l'axe de la cellule de Hele-Shaw et la digitation, même si à ce stade de l'analyse aucun angle ne peut être prévu.

Intéressons nous maintenant à la taille de la zone de recompaction. Initialement, le milieu est décompacté : il passe d'une fraction de grains ϕ_0 maximale à une fraction ϕ_1 comme décrit par l'équation (5.1). La digitation va provoquer localement la recompaction du milieu, c'est à dire le passage local de la fraction ϕ_1 à une fraction $\phi_2 > \phi_1$. Un ordre de grandeur de cette recompaction peut être estimée simplement en considérant qu'elle se fait sur une longueur typique l_r quasi-orthogonale au doigt de largeur w . De manière analogue à (5.1), nous avons alors :

$$\phi_2 = \phi_1 \frac{l_r + w}{l_r}. \quad (5.3)$$

Considérant la figure 5.8(a), nous avons : $w \sim 10$ pixels et $l_r \sim 200$ pixels. Nous en déduisons $\phi_2 - \phi_1 \sim 0.047\phi_1$. Par ailleurs, considérant la décompaction initiale de ce milieu ($L_0 = 17$ cm, $\delta L = 5$ mm, $\phi_1 \sim 58\%$), nous avons également : $\phi_1 - \phi_0 = \phi_1 \frac{\delta L}{L_0} \sim 0.029\phi_1$. La recompaction est donc du même ordre de grandeur que la décompaction initiale avec cependant $\phi_2 \gtrsim \phi_0$.

Si nous nous intéressons à la figure 5.8(c), des mesures analogues nous donnent : $\phi_2 - \phi_1 \sim 0.044\phi_1$ et $\phi_1 - \phi_0 \sim 0.058\phi_1$. Notons que cette fois-ci : $\phi_2 \lesssim \phi_0$.

Nous retiendrons donc, que, pour ce type de digitation, la zone de recompaction se retrouve vraisemblablement à une fraction proche de la fraction maximale initiale : $\phi_2 \sim \phi_0$. Notons que nos estimations de ϕ_2 présentent un bruit important : mesure approximative de la décompaction moyenne, impossibilité de mesurer la décompaction locale, mesure de déplacement effectuée au niveau des plaques.

La taille du doigt dépend donc, dans une hypothèse de recompaction locale, de la taille de la zone de recompaction. À fraction de grains donnée, nous en déduisons que

plus la zone de recompaction est importante, plus le doigt est large. Or si une pression plus importante est appliquée, elle pourra mobiliser le milieu sur une plus grande échelle et produira donc des zones de recompaction et des structures vides de grains plus larges. C'est bien ce qui est observé expérimentalement entre les figures 5.4(a) et (b) (respectivement 5.4c et d ou 5.4e et f).

Notons que ce raisonnement est cependant limité au cas où la sollicitation du milieu granulaire n'est pas trop importante. Dans le cas contraire, un écoulement global de l'ensemble du milieu (fluide et grains) peut advenir.

5.3.4 Structures larges et écoulement du milieu

Pour les mobilisations les plus importantes du milieu, il existe des structures plus larges et généralement relativement ramifiées se propageant davantage dans la direction imposée par le gradient de pression moyen.

Les figures 5.10(a-d) représentent les champs typiques de déplacement observés pour de telles structures.

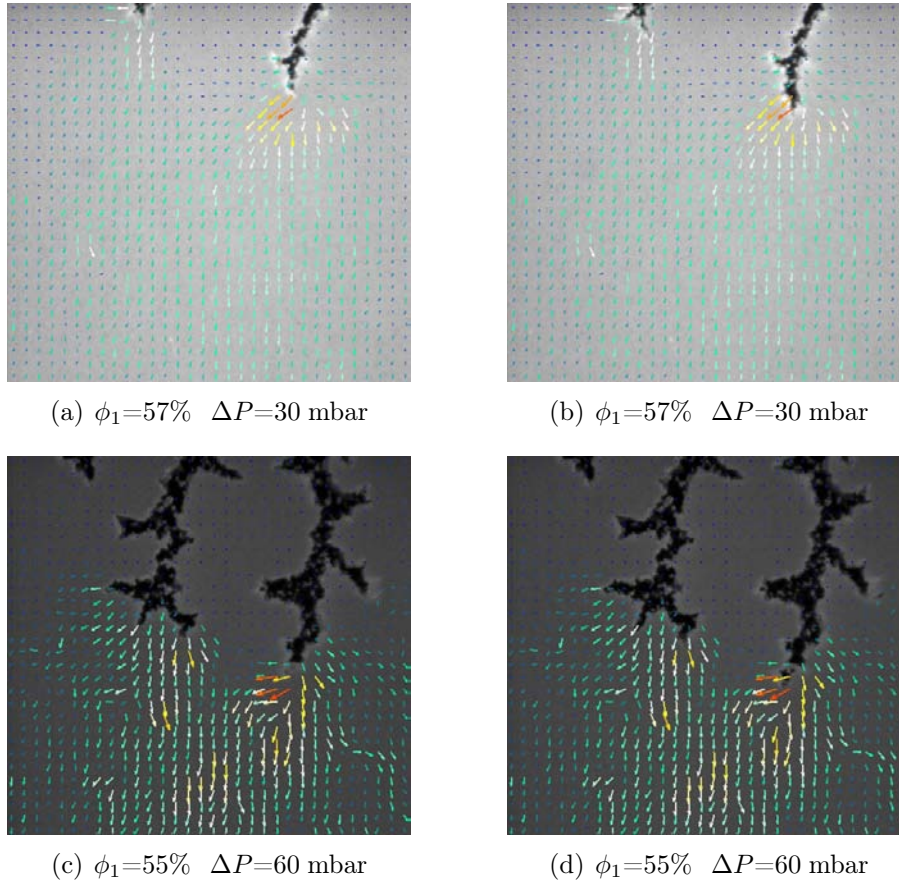


FIG. 5.10 – Champs de déplacement extraits par le logiciel de corrélation d'images (CIV) entre les images (a) et (b) et entre les images (c) et (d). Norme des vecteurs déplacements multipliée par un facteur 3, origine conservée. Épaisseur de cellule $b = 1.15$ mm.

Nous observons, sur ces figures, que l'écoulement est très différent de celui commenté dans la sous-partie précédente. Il n'est plus localisé à proximité de la structure de digitation mais tend à occuper tout le canal et à être dirigé selon l'axe de la cellule c'est à dire selon la direction du gradient de pression moyen.

Nous avons donc dans ce cas une mobilisation large de la structure granulaire et nous pouvons supposer que l'écoulement est de type "fluide effectif" où fluide pur et grains sont ensemble mobilisés. Ce fluide est typiquement une pâte granulaire dont l'écoulement dans la cellule de Hele-Shaw serait analogue à celui décrit dans le chapitre 4. Nous aurions donc plus, dans cette situation, une instabilité du type Saffman–Taylor sans pour autant avoir de mesure quantitative à ce stade de l'étude. Remarquons cependant que les ramifications courtes et nombreuses pourraient être des réminiscences de tip-splitting, ces derniers arrivant pour des pressions élevées.

5.4 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre l'injection d'air dans un milieu poreux saturé réorganisable.

Notre protocole de décompaction nous a permis de passer d'un milieu poreux compacté et non-mobilisable à un milieu décompacté potentiellement mobilisable par l'air envahissant la structure. Dans le milieu non-décompacté, l'air est incapable de bouger les grains tandis que l'injection dans les milieux décompactés conduit à des structures dépassant la taille du pore et permises par une réorganisation partielle du milieu.

Nous avons étudié les motifs formés dans notre dispositif à deux niveaux : global et local.

Au niveau global, nous avons constaté une relative variété de largeur et de mode de propagation de doigts. En particulier, nous avons souligné l'importance de considérer, dans un concept de type "mobilisabilité", l'ensemble des facteurs qui permettent à l'écoulement d'air d'avoir une plus grande influence sur la structure granulaire : une fraction moyenne de grains plus faibles (un milieu plus décompacté), une pression d'injection plus importante, un milieu moins confiné dans l'épaisseur (soit une grande épaisseur de cellule).

L'étude du niveau local par des techniques de suivi de particules nous a permis de comprendre les mécanismes en œuvre dans le processus de digitation. Nous avons d'abord vérifié que le milieu non-décompacté n'était pas mobilisable. Nous avons ensuite étudié les deux types de mobilisation possibles : recompaction locale ou écoulement de type pâte granulaire.

L'étude de la recompaction locale nous a ainsi permis de mettre en lumière certains mécanismes pouvant expliquer les caractéristiques des motifs observés : direction et largeur. Nous avons notamment souligné que la zone de recompaction advenant sur le coté du doigt pouvait être une source d'explication aux angles observés entre direction de propagation des doigts et axe de la cellule de Hele-Shaw. Nous avons également montré que la taille de cette zone et la largeur des doigts étaient vraisemblablement liées, le milieu se recompactant à la fraction maximale initiale.

Dans le cas d'un écoulement de type pâte granulaire, nous observons des motifs plus larges et une mobilisation générale du milieu.

Du fait des problèmes de digitation évoqués au chapitre précédent, il est difficile d'avoir des décompactions plus importantes que $\delta L = 15$ mm ($\phi_1 \sim 55\%$). Nous avons cependant essayé d'atteindre $\delta L = 20$ mm ($\phi_1 \sim 53\%$) malgré de fortes hétérogénéités de la fraction locale de grains dans la cellule. La figure 5.11 représente les motifs observés dans une telle configuration.

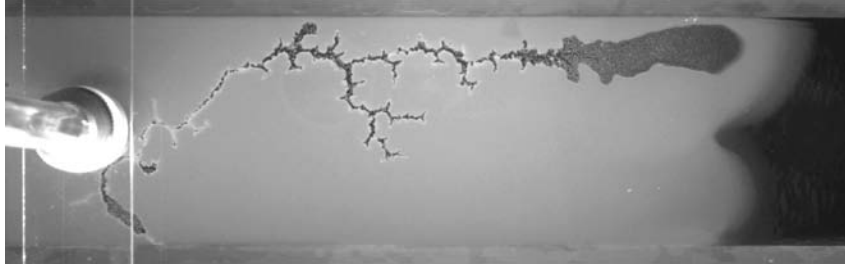


FIG. 5.11 – *Motif d'injection pour une longueur de décompaction $\delta L = 20$ mm ($\phi_1 \sim 53\%$), une épaisseur de cellule $b = 1.15$ mm et une surpression appliquée $\Delta P = 30$ mbar.*

De manière analogue à la figure 3.38, nous observons une transition entre motifs fins (dont la largeur typique est de l'ordre de l'épaisseur b de la cellule) et motifs plus larges (de l'ordre d'une fraction de largeur W de cellule). L'élargissement du doigt intervient quand le milieu est suffisamment décompacté ou mobilisé pour se comporter comme les fluides effectifs étudiés au chapitre 3.

Notons que les figures 3.38 et 5.11 présentent des cas opposés : d'un côté, un fluide effectif dont la structure se compacte localement et de l'autre, une structure plutôt dense qui se décompacte suffisamment pour se comporter comme un fluide effectif. Dans les deux cas cependant la transition entre motifs larges et motifs fins semble être relativement abrupte. Nous n'observons pas, en effet, de motifs de largeur intermédiaire. La transition apparaîtrait vraisemblablement pour une fraction de grains aux croisement de nos 2 types d'expériences et que nous pouvons situer au voisinage de 55%. Cela correspond tout à fait au seuil d'encombrement où des réseaux permanents de contacts entre les grains peuvent apparaître et où nous pouvons donc nous attendre à des changements de comportement abruptes, ce qui est finalement observé sur la taille des structures.

Conclusion

Au cours de cette thèse nous avons exploré un certain nombre de propriétés des interfaces grains/fluide. Pour cela, nous avons procédé à l'injection de fluide pur dans une suspension granulaire confinée dans une cellule de Hele-Shaw, l'utilisation de suspensions isodenses nous permettant de faire varier la fraction de grains sur une large gamme.

A partir des expériences que nous avons mises en œuvre, nous avons pu explorer différentes configurations d'interface. Ainsi, nous avons travaillé à la fois sur l'injection d'air (situation non-miscible) et sur l'injection de fluide interstitiel pur (situation miscible).

Dans le cas où la suspension est poussée par de l'air, les expériences menées nous ont conduits à étudier l'ensemble des fractions de grains possibles en partant des deux cas extrêmes : instabilité de Saffman–Taylor pour un fluide Newtonien (absence de grain - fluide pur) et digitation dans un milieu poreux figé (fraction maximale de grains - milieu bloqué).

Dans le cas miscible, nous nous sommes focalisés sur l'étude des suspensions très concentrées et donc de la déstabilisation d'une pâte granulaire dense.

Un travail préliminaire nous a amenés, au chapitre 2, à considérer l'introduction des effets d'inertie dans l'instabilité de Saffman–Taylor qui pourraient se faire sentir pour un fluide de faible viscosité comme notre fluide interstitiel.

Nous avons d'abord étudié expérimentalement ces effets en fonction des différents nombres caractéristiques. Nous avons montré que ces effets devenaient importants pour les fluides Newtoniens de faible viscosité, les grandes épaisseurs et les faibles largeurs de cellule et que leur apparition pouvait être reliée à un nombre de Weber critique. En dessous de ce seuil, le régime classique de décroissance de la largeur relative avec le paramètre de contrôle $1/B$ (nombre capillaire modifié) est observé tandis qu'au dessus, il existe une phase d'augmentation de la largeur des doigts gouvernée par un nombre de Reynolds modifié. Nous avons défini empiriquement un nouveau paramètre de contrôle permettant de prendre en compte les corrections dues à l'inertie et de replacer l'ensemble des données sur une courbe maîtresse. Des arguments théoriques simples et des simulations numériques ont complété et confirmé nos observations.

L'obtention d'un critère permettant de discerner l'apparition des effets d'inertie (le nombre de Weber critique) nous a finalement permis de conclure sur l'absence de ces phénomènes dans nos expériences suivantes sur les suspensions granulaires.

Nous nous sommes intéressés, au chapitre 3), au problème de l'injection d'air dans les suspensions granulaires dont la fraction de grains est inférieure à 40%. Les caractéristiques rhéologiques de ces suspensions sont majoritairement celles de fluides Newtoniens dont la viscosité dépend de la fraction de grains.

Bien que la digitation soit, elle aussi, visuellement semblable à celle observée dans les fluides visqueux lors d'une expérience classique de Saffman–Taylor, nous avons montré que l'étude des phénomènes de digitation ne pouvait se réduire à la considération d'un fluide visqueux effectif et que la présence de particules en suspension devait être explicitement prise en compte dans la déstabilisation de l'interface.

Nous avons d'abord étudié la loi de Darcy caractérisant l'écoulement de la suspension dans la géométrie de la cellule de Hele-Shaw. Nous avons montré que, dû à la migration de particules, nous observions une viscosité effective dans la cellule inférieure à celle obtenue par mesure rhéométrique. Un modèle de diffusion de particules nous a permis de rendre compte des ordres de grandeur de la diminution de viscosité en fonction de la fraction de grains.

L'étude de la stabilité des doigts nous a révélé qu'il existait un effet singulier des grains sur l'interface : dès les plus faibles fractions de grains, les doigts sont déstabilisés précocement. Nous avons montré que le paramètre gouvernant la déstabilisation est la taille des grains tandis que le seuil de stabilité dépend très faiblement de la fraction de grains. Dans un fluide simple, ce seuil de stabilité dépend fortement du niveau de bruit dans la cellule et est donc mal défini. Les grains représentent dans notre cas un "bruit contrôlé" qui engendre des perturbations d'amplitude donnée. L'analyse théorique du devenir des perturbations advectées sur le côté du doigt a donné à la fois un accord qualitatif et quantitatif avec ces observations. Cela a ainsi permis de valider un mécanisme de déstabilisation à amplitude finie proposé par Bensimon *et al.* [13].

La présence de grains entraîne également une modification de la largeur des doigts qui même si elle est relativement faible présente des caractéristiques spécifiques. Nous avons notamment observé à faible vitesse une largeur de doigts plus élevée que celle attendue pour un fluide Newtonien puis une décroissance rapide de cette largeur en dessous de la valeur classique lorsque la vitesse du doigt augmente. Pour les plus grandes vitesses, les courbes de largeur relative tendent à rejoindre la courbe maîtresse de Saffman–Taylor. Ce mode de sélection de la largeur des doigts n'a pu être totalement expliqué. Nous avons cependant montré empiriquement que la taille des grains D et son rapport avec l'épaisseur de la cellule b avaient une influence notable sur la largeur des doigts.

Nous nous sommes également intéressés, au chapitre 5, au cas de l'injection d'air dans des suspensions très concentrées, des pâtes granulaires. Pour ces fractions élevées de grains, les particules forment des réseaux de contact qui sont susceptibles de bloquer le milieu tout en restant localement réorganisables. Nous nous plaçons ainsi dans le cadre important en pratique mais peu étudié des milieux poreux faiblement consolidés.

Notre protocole expérimental nous a permis d'étudier les motifs de digitation par l'injection d'air en fonction d'une légère variation de fraction de grains en dessous d'une fraction maximale de l'ordre de 60%. Dans ces milieux, l'air injecté est capable de mobiliser la structure granulaire et de créer des motifs vides de grains dont la taille dépasse celle des pores initiaux et est de l'ordre de l'épaisseur de la cellule.

Nous avons alors mené une étude à deux niveaux : global et local.

Au niveau global, à l'échelle du canal, nous avons étudié la typologie des motifs d'injection formés en fonction des différents paramètres. Si, dans l'étude menée au chapitre 3, une variation même forte de la fraction de grains n'avait que peu d'influence sur la stabilité des doigts, il n'en est pas de même pour les milieux poreux faiblement consolidés. En effet, une diminution même faible de la fraction de grains tout comme une

augmentation de la surpression appliquée ou une diminution du confinement des grains selon l'épaisseur de la cellule conduisent à une mobilisation plus importante du milieu granulaire et à des structures d'invasion plus larges.

L'étude du niveau local par des techniques de corrélation d'images nous a permis de comprendre les mécanismes mis en œuvre au niveau de l'interface et de sa dynamique. Nous avons ainsi distingué deux types de mobilisation possibles : une recompaction locale du milieu associée à un écoulement de fluide pur au travers de la matrice poreuse ou bien un écoulement global du type "pâte granulaire". Nous avons relié ces deux types de mobilisation aux paramètres expérimentaux et ainsi aux largeurs des doigts d'air.

Nous nous sommes placés, au chapitre 4, dans le cas d'un milieu granulaire dense totalement imbibé et soumis à une surpression du fluide interstitiel pur. Nous y avons également distingué deux types d'écoulement.

Dans une première phase, nous observons une décompaction du milieu granulaire. Le fluide pur n'est en effet pas capable de mobiliser le milieu à la fraction maximale de grains. Nous avons alors montré que la décompaction pouvait se comprendre comme la transition entre un milieu compacté où le fluide pur s'écoule à travers le milieu granulaire fixe et un milieu mobilisé où grains et fluide s'écoulent ensemble sous forme de pâte granulaire. Cette transition s'effectue sous la forme d'une interface séparant les deux milieux et remontant en sens inverse de l'écoulement vers le lieu de l'injection de fluide pur. Nous avons ainsi développé un modèle à 1 dimension en accord quantitatif avec nos données expérimentales. Néanmoins, il nous semble que cet accord pourrait être amélioré si la géométrie de l'interface de décompaction était explicitement prise en compte.

Une fois le milieu décompacté, un phénomène de digitation se produit où un doigt de fluide pur déplace la pâte granulaire formée. Nous avons, dans un premier temps, étudié l'écoulement de cette pâte. Nous avons montré qu'une loi empirique, qui présente la particularité d'être fonction de la position du doigt, permet de rendre compte de l'évolution de la vitesse en fonction du gradient de pression, cette évolution n'étant pas réductible à celle d'un fluide complexe équivalent. Nous avons également montré que cette loi ne dépendait que d'un paramètre fonction de l'épaisseur et pourrait éventuellement s'expliquer par une restructuration dynamique lors de l'écoulement.

Nous avons ensuite caractérisé les largeurs des doigts formés et observé que ces dernières de taille intermédiaire entre l'épaisseur et la largeur du canal, ne dépendaient pas de la vitesse mais de l'épaisseur de la cellule comme cela est constaté dans les études sur les fluides miscibles ou dans celles sur la digitation dans les fluides à seuil. Les détails du mécanisme de sélection restent cependant, dans notre cas, incompris.

L'ensemble des expériences présentées dans cette thèse nous a permis de sonder à la fois les propriétés intrinsèques des suspensions et celles de leur interface.

Nous avons ainsi observé un certain nombre de phénomènes propres aux suspensions que nous avons évoqués dans les généralités.

C'est en particulier le cas de la migration de particules induite par cisaillement. Dans le cas de l'injection d'air dans les suspensions peu denses (Chap. 3), nous avons montré que cette migration était responsable de la diminution de la viscosité effective dans la cellule de Hele-Shaw par rapport aux mesures rhéologiques. Dans le cas de l'injection

miscible (Chap. 4), nous pensons également que des phénomènes migratoires puissent être à l'origine des lois décrivant l'écoulement de la pâte granulaire dans la cellule de Hele-Shaw.

Dans les cas denses (Chap. 4 et 5), nous avons souligné que les problèmes de structuration de l'écoulement étaient très importants dès lors que des pâtes granulaires sont considérées. Cela s'est particulièrement manifesté dans nos expériences par la possibilité d'avoir deux types d'écoulement : soit de type "poreux" avec une matrice granulaire fixe ou très faiblement mobilisée, soit de type fluide effectif avec un écoulement simultané du fluide et des grains dans la cellule de Hele-Shaw.

Les expériences menées dans les différentes configurations nous ont également permis de cerner, en fonction de la fraction de grains, l'influence sur la structure des interfaces soit des particules, soit du réseau granulaire. En effet, si la suspension n'est pas trop dense, les grains viennent perturber l'interface avec l'air et déstabiliser le doigt tandis que si la suspension est très dense, ces mêmes grains peuvent être en contact et influencent nettement la taille des structures.

Cette différence de comportement explique vraisemblablement les différentes tailles de structures observées pour l'injection d'air : doigts de taille proche de la demi-largeur de la cellule si les grains sont isolés (i.e. la fraction de grains relativement faible) ou structures se mettant à l'échelle de l'épaisseur de la cellule s'il existe un réseau (plus ou moins) continu de contacts entre grains (i.e. pour les fractions de grains élevées). La transition entre ces deux régimes semble abrupte et a lieu aux alentours d'une fraction de grains de 54% où elle peut simplement être provoquée par une inhomogénéité dans la fraction locale de grains. Cette observation pourrait être liée aux réseaux de contacts : soit ces réseaux sont présents et l'interface ne peut s'étendre que sur une taille typique de l'épaisseur de la cellule, soit ils sont absents et nous nous trouvons dans le cas de l'instabilité de Saffman–Taylor avec des largeurs de doigts comparables à celle du canal.

Nous pouvons également comparer les tailles des structures observées pour les suspensions denses dans le cas de l'injection d'air et du fluide interstitiel pur. Les largeurs des doigts sont en effet beaucoup plus grandes dans le second cas que dans le premier. Deux raisons peuvent expliquer ces observations. La première raison tient dans la nature des interfaces en présence. Dans le cas de l'injection de fluide interstitiel pur, nous avons une interface miscible qui sépare un fluide très visqueux, car dense en grains, d'un fluide peu visqueux. Cependant de par la nature miscible de l'interface, cette dernière ne "sent" pas la structure granulaire de la phase envahie. Dans le cas de l'injection d'air, la non-miscibilité fait que les structures d'injection "sentent" la taille nettement plus fine des pores, conduisant à des doigts plus fins. La seconde raison est la différence de viscosité des fluides injectés : l'air est de viscosité négligeable tandis que l'huile, de viscosité plus élevée est certainement capable de mobiliser davantage le milieu et de donner lieu à des structures plus larges. Notons que l'injection du milieu décompacté par un fluide visqueux non-miscible et non-mouillant devrait permettre de discerner entre ces deux raisons.

Nous avons présenté, dans cette thèse, un certain nombre de résultats permettant de mettre en lumière des phénomènes intervenant dans le domaine très peu exploré des interfaces grains/fluide. Pour cela, nous avons eu recours à des expériences modèles en quasi-2 dimensions. Des explications microscopiques faisant explicitement intervenir la

dynamique des grains en présence d'une interface ont été avancées pour répondre aux observations expérimentales. Il serait cependant très pertinent d'introduire des modèles d'interfaces au niveau des simulations numériques de dynamique des suspensions [7, 15, 45]. Cela permettrait certainement d'avoir une meilleure identification des mécanismes microscopiques. L'extension de nos résultats et l'exploration de phénomènes interfaciaux à 3 dimensions est aussi un enjeu important. Cela permettrait de se rapprocher de la complexité des cas réels en s'aidant toutefois des premiers résultats présentés ici.

Bibliographie

- [1] J. R. Abbott, N. Tetlow, A. L. Graham, S. A. Altobelli, E. Fukushima, L. A. Mondy, and T. S. Stephens. Experimental-observations of particle migration in concentrated suspensions - Couette-flow. *Journal of Rheology*, 35 :773–795, 1991.
- [2] A. Acrivos. Shear-induced particle diffusion in concentrated suspensions of a non-colloidal particles. *Journal of Rheology*, 39 :813–826, 1995.
- [3] E. Aker, K. J. Måløy, A. Hansen, and G. G. Batrouni. A two-dimensional network simulator for two-phase flow in porous media. *Transport in Porous Media*, 32 :163–186, 1998.
- [4] T. Allen. *Particle Size Measurements, 5th Ed.* Chapman & Hall, London, 1997.
- [5] S. A. Altobelli, E. Fukushima, and L. A. Mondy. Nuclear magnetic resonance imaging of particle migration in suspensions undergoing extrusion. *Journal of Rheology*, 41 :1105–1115, 1997.
- [6] S. A. Altobelli, R. C. Givler, and E. Fukushima. Velocity and concentration measurements of suspensions by Nuclear-Magnetic-Resonance imaging. *Journal of Rheology*, 35 :721–734, 1991.
- [7] A. Alvarez, E. Clement, and R. Soto. Confined suspension jet and long-range hydrodynamic interactions : A destabilization scenario. *Physics of Fluids*, 18 :083301, 2006.
- [8] P. A. Arp and S. G. Mason. Kinetics of flowing dispersions .9. Doublets of rigid spheres (experimental). *Journal of Colloid and Interface Science*, 61 :44–61, 1977.
- [9] H. A. Barnes, J. F. Hutton, and K. Walters. *An introduction to rheology*. Elsevier, Amsterdam, 1989.
- [10] G. K. Batchelor. Effect of Brownian motion on bulk stress in a suspension of spherical particles. *Journal of Fluid Mechanics*, 83 :97–117, 1977.
- [11] M. Ben Amar and J. R. Rice. Exact results with the J-integral applied to free-boundary flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 461 :321–341, 2002.
- [12] D. Bensimon. Stability of viscous fingering. *Physical Review A*, 33 :1302–1308, 1986.
- [13] D. Bensimon, L. P. Kadanoff, S. D. Liang, B. I. Shraiman, and C. Tang. Viscous flows in 2 dimensions. *Reviews of Modern Physics*, 58 :977–999, 1986.

- [14] D. Bonn, H. Kellay, M. Ben Amar, and J. Meunier. Viscous finger widening with surfactants and polymers. *Physical Review Letters*, 75 :2132–2135, 1995.
- [15] J. F. Brady and G. Bossis. Stokesian dynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 20 :111–157, 1988.
- [16] F. P. Bretherton. The motion of long bubbles in tubes. *Journal of Fluid Mechanics*, 10 :166–188, 1961.
- [17] Y. A. Buyevich. Particle distribution in suspension shear flow. *Chemical Engineering Science*, 51 :635–647, 1996.
- [18] P. C. Carman. Fluid flow through granular beds. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, 15 :150–156, 1937.
- [19] P. C. Carman. Some physical aspects of water flow in porous media. *Discussions of the Faraday Society*, 3 :72–77, 1948.
- [20] P. Cerasi and P. Mills. Insights in erosion instabilities in nonconsolidated porous media. *Physical Review E*, 58 :6051–6060, 1998.
- [21] C. K. Chan. Surfactant wetting layer driven instability in a Hele-Shaw cell. *Physica A*, 288 :315–325, 2000.
- [22] C. Chevalier, M. Ben Amar, D. Bonn, and A. Lindner. Inertial effects on Saffman–Taylor viscous fingering. *Journal of Fluid Mechanics*, 552 :83–97, 2006.
- [23] A. W. Chow, S. W. Sinton, J. H. Iwamiya, and T. S. Stephens. Shear-induced particle migration in couette and parallel-plate viscometers - NMR imaging and stress measurements. *Physics of Fluids*, 6 :2561–2576, 1994.
- [24] R. L. Chuoke, P. Vanmeurs, and C. Vanderpoel. The instability of slow, immiscible, viscous liquid-liquid displacements in permeable media. *Transactions of the American Institute of Mining and Metallurgical Engineers*, 216 :188–194, 1959.
- [25] R. Combescot, T. Dombre, V. Hakim, Y. Pomeau, and A. Pumir. Shape selection of Saffman–Taylor fingers. *Physical Review Letters*, 56 :2036–2039, 1986.
- [26] Y. Couder. *Growth patterns : from stable curved fronts to fractal structures*. Chaos, Order and Patterns. Ed. R. Artuso et al., Plenum press, New York, 1991.
- [27] P. Coussot. Saffman–Taylor instability in yield-stress fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 380 :363–376, 1999.
- [28] P. Coussot. *Rheometry of Pastes Suspensions and Granular Materials*. Wiley, New York, 2005.
- [29] P. Coussot and C. Ancey. *Rhéophysique des pâtes et des suspensions*. EDP Sciences, Paris, 1999.
- [30] H. Darcy. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. V. Dalmont, Paris, 1856.

- [31] A. J. DeGregoria and L. W. Schwartz. A boundary-integral method for 2-phase displacement in Hele-Shaw cells. *Journal of Fluid Mechanics*, 164 :383–400, 1986.
- [32] F. A. L. Dullien. *Porous media : fluid transport and pore structure*, 2nd edition. Academic press, New York, 1988.
- [33] J. Duran. *Sands, powders and grains : an introduction to the physics of granular materials*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [34] E. C. Eckstein, D. G. Bailey, and A. H. Shapiro. Self-diffusion of particles in shear-flow of a suspension. *Journal of Fluid Mechanics*, 79 :191–208, 1977.
- [35] A. Einstein. Zur Theorie der Brownschen Bewegung. *Annalen der Physik*, 19 :371–381, 1906.
- [36] M. Ferer, C. Ji, G. S. Bromhal, J. Cook, G. Ahmadi, and D. H. Smith. Crossover from capillary fingering to viscous fingering for immiscible unstable flow : experiment and modeling. *Physical Review E*, 70 :016303, 2004.
- [37] F. Gadalamaria and A. Acrivos. Shear-induced structure in a concentrated suspension of solid spheres. *Journal of Rheology*, 24 :799–814, 1980.
- [38] P. Gondret and M. Rabaud. Shear instability of two-fluid parallel flow in a Hele-Shaw cell. *Physics of Fluids*, 9 :3267–3274, 1997.
- [39] L. Gostiaux, H. Gayvallet, and J. C. Geminard. Dynamics of a gas bubble rising through a thin immersed layer of granular material : an experimental study. *Granular Matter*, 4 :39–44, 2002.
- [40] D. W. Green and G. P. Willhite. *Enhanced Oil Recovery*. Society of Petroleum Engineers, Dallas, 1998.
- [41] P. Groce and A. Flora. Analysis of single-fluid jet grouting. *Geotechnique*, 50 :739–748, 2000.
- [42] E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. EDP sciences/CNRS, Paris, 2001.
- [43] R. E. Hampton, A. A. Mammoli, A. L. Graham, N. Tetlow, and S. A. Altobelli. Migration of particles undergoing pressure-driven flow in a circular conduit. *Journal of Rheology*, 41 :621–640, 1997.
- [44] M. Han, C. Kim, M. Kim, and S. Lee. Particle migration in tube flow of suspensions. *Journal of Rheology*, 43 :1157–1174, 1999.
- [45] M. Hecht, J. Harting, M. Bier, J. Reinshagen, and H. J. Herrmann. Shear viscosity of claylike colloids in computer simulations and experiments. *Physical Review E*, 74 :021403, 2006.
- [46] H. S. Hele-Shaw. The flow of water. *Nature*, 58 :34–36, 1898.

- [47] G. M. Homsy. Viscous fingering in porous media. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 19 :271–311, 1987.
- [48] D. C. Hong and J. S. Langer. Analytic theory of the selection mechanism in the Saffman–Taylor problem. *Physical Review Letters*, 56 :2032–2035, 1986.
- [49] N. Huang, G. Ovarlez, F. Bertrand, S. Rodts, P. Coussot, and D. Bonn. Flow of wet granular materials. *Physical Review Letters*, 94 :028301, 2005.
- [50] H. M. Jaeger and S. R. Nagel. Physics of the granular state. *Science*, 255 :1523–1531, 1992.
- [51] Ø. Johnsen, R. Toussaint, K. J. Måløy, and E. G. Flekkøy. Pattern formation during air injection into granular materials confined in a circular Hele-Shaw cell. *Physical Review E*, 74 :011301, 2006.
- [52] M. Kawaguchi, Y. Hibino, and T. Kato. Anisotropy effects of Hele-Shaw cells on viscous fingering instability in dilute polymer solutions. *Physical Review E*, 64 :051806, 2001.
- [53] C. J. Koh, P. Hookham, and L. G. Leal. An experimental investigation of concentrated suspension flows in a rectangular channel. *Journal of Fluid Mechanics*, 266 :1–32, 1994.
- [54] T. A. Kowalewski. Velocity profiles of suspension flowing through a tube. *Archives of Mechanics*, 32 :857–865, 1980.
- [55] J. Kozeny. Die Durchlässigkeit des Bodens. *Kulturtechniker*, 35 :301–307, 1932.
- [56] I. M. Krieger. Rheology of monodisperse latices. *Advances in Colloid and Interface Science*, 3 :111–136, 1972.
- [57] I. M. Krieger and T. J. Dougherty. A mechanism for non-Newtonian flow in suspensions of rigid spheres. *Transactions of the Society of Rheology*, 3 :137–152, 1959.
- [58] E. Lajeunesse and Y. Couder. On the tip-splitting instability of viscous fingers. *Journal of Fluid Mechanics*, 419 :125–149, 2000.
- [59] P. Lecomte du Noüy. A new apparatus for measuring surface tension. *Journal of General Physiology*, 1 :521–524, 1919.
- [60] D. Leighton and A. Acrivos. Viscous resuspension. *Chemical Engineering Science*, 41 :1377–1384, 1986.
- [61] D. Leighton and A. Acrivos. Measurement of shear-induced self-diffusion in concentrated suspensions of spheres. *Journal of Fluid Mechanics*, 177 :109–131, 1987.
- [62] D. Leighton and A. Acrivos. The shear-induced migration of particles in concentrated suspensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 181 :415–439, 1987.

- [63] D. T. Leighton. The shear induced migration of particulates in concentrated suspensions. *Ph.D. thesis, Stanford University*, 1985.
- [64] E. Lemaire, Y. O. M. Abdelhay, J. Larue, R. Benoit, P. Levitz, and H. Vandamme. Pattern formation in noncohesive and cohesive granular media. *Fractals*, 1 :968–976, 1993.
- [65] E. Lemaire, P. Levitz, G. Daccord, and H. Vandamme. From viscous fingering to viscoelastic fracturing in colloidal fluids. *Physical Review Letters*, 67 :2009–2012, 1991.
- [66] R. Lenormand. Liquids in porous media. *Journal of Physics - Condensed Matter*, 2 :SA79–SA88, 1990.
- [67] R. Lenormand, E. Touboul, and C. Zarcone. Numerical models and experiments on immiscible displacements in porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 189 :165–187, 1988.
- [68] R. Lenormand, C. Zarcone, and A. Sarr. Mechanisms of the displacement of one fluid by another in a network of capillary ducts. *Journal of Fluid Mechanics*, 135 :337–353, 1983.
- [69] A. Lindner, D. Bonn, and J. Meunier. Viscous fingering in a shear-thinning fluid. *Physics of Fluids*, 12 :256–261, 2000.
- [70] A. Lindner, D. Bonn, E. C. Poire, M. Ben Amar, and J. Meunier. Viscous fingering in non-Newtonian fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 469 :237–256, 2002.
- [71] G. Løvøll, Y. Meheust, R. Toussaint, J. Schmittbuhl, and K. J. Måløy. Growth activity during fingering in a porous Hele-Shaw cell. *Physical Review E*, 70 :026301, 2004.
- [72] M. K. Lyon and L. G. Leal. An experimental study of the motion of concentrated suspensions in two-dimensional channel flow. part 1. monodisperse systems. *Journal of Fluid Mechanics*, 363 :25–56, 1998.
- [73] C. Macosko. *Rheology : Principles, Measurements and Applications*. Wiley, New York, 1994.
- [74] K. V. McCloud and J. V. Maher. Experimental perturbations to Saffman–Taylor flow. *Physics Reports-Review Section of Physics Letters*, 260 :139–185, 1995.
- [75] J. W. McLean and P. G. Saffman. The effect of surface-tension on the shape of fingers in a Hele-Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, 102 :455–469, 1981.
- [76] J. R. Melrose, J. H. van Vliet, and R. C. Ball. Continuous shear thickening and colloid surfaces. *Physical Review Letters*, 77 :4660–4663, 1996.
- [77] P. Mills and P. Snabre. Rheology and structure of concentrated suspensions of hard spheres - Shear-induced particle migration. *Journal de Physique II*, 5 :1597–1608, 1995.

- [78] M. G. Moore, A. Juel, J. M. Burgess, W. D. McCormick, and H. L. Swinney. Fluctuations in viscous fingering. *Physical Review E*, 65 :030601, 2002.
- [79] P. R. Nott and J. F. Brady. Pressure-driven flow of suspensions - Simulation and theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 275 :157–199, 1994.
- [80] G. Ovarlez, F. Bertrand, and S. Rodts. Local determination of the constitutive law of a dense suspension of noncolloidal particles through magnetic resonance imaging. *Journal of Rheology*, 50 :259–292, 2006.
- [81] C. W. Park and G. M. Homsy. Two-phase displacement in Shaw-Hele cells - Theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 139 :291–308, 1984.
- [82] L. Paterson. Fingering with miscible fluids in a Hele-Shaw cell. *Physics of Fluids*, 28 :26–30, 1985.
- [83] P. Pelcé. *Dynamics of curved fronts*. Academic press, Boston, 1988.
- [84] R. J. Phillips, R. C. Armstrong, R. A. Brown, A. L. Graham, and J. R. Abbott. A constitutive equation for concentrated suspensions that accounts for shear-induced particle migration. *Physics of Fluids A-Fluid Dynamics*, 4 :30–40, 1992.
- [85] E. Pitts. Penetration of fluid into a Hele-Shaw cell - Saffman–Taylor experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, 97 :53–64, 1980.
- [86] F. Plouraboué and E. J. Hinch. Kelvin–Helmholtz instability in a Hele-Shaw cell. *Physics of Fluids*, 14 :922–929, 2002.
- [87] D. A. Reinelt and P. G. Saffman. The penetration of a finger into a viscous fluid in a channel and tube. *Siam Journal on Scientific and Statistical Computing*, 6 :542–561, 1985.
- [88] J. F. Richardson and W. N. Zaki. The sedimentation of a suspension of uniform spheres under conditions of viscous flow. *Chemical Engineering Science*, 3 :65–73, 1954.
- [89] C. Ruyer-Quil. Inertial corrections to the Darcy law in a Hele-Shaw cell. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Série II B - Mécanique*, 329 :337–342, 2001.
- [90] Z. Saada, J. Canou, L. Dormieux, J. C. Dupla, and S. Maghous. Modelling of cement suspension flow in granular porous media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29 :691–711, 2005.
- [91] P. G. Saffman. Viscous fingering in Hele-Shaw cells. *Journal of Fluid Mechanics*, 173 :73–94, 1986.
- [92] P. G. Saffman and G. Taylor. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proceedings of the Royal Society of London Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 245 :312–329, 1958.

- [93] U. Schafflinger, A. Acrivos, and H. Stibi. An experimental-study of viscous resuspension in a pressure-driven plane channel flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 21 :693–704, 1995.
- [94] U. Schafflinger, A. Acrivos, and K. Zhang. Viscous resuspension of a sediment within a laminar and stratified flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 16 :567–578, 1990.
- [95] G. Segre and A. Silberberg. Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow .1. Determination of local concentration by statistical analysis of particle passages through crossed light beams. *Journal of Fluid Mechanics*, 14 :115–135, 1962.
- [96] G. Segre and A. Silberberg. Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow .2. Experimental results and interpretation. *Journal of Fluid Mechanics*, 14 :136–157, 1962.
- [97] B. I. Shraiman. Velocity selection and the Saffman–Taylor problem. *Physical Review Letters*, 56 :2028–2031, 1986.
- [98] D. E. Smith, X. Z. Wu, A. Libchaber, E. Moses, and T. Witten. Viscous finger narrowing at the coil-stretch transition in a dilute polymer solution. *Physical Review A*, 45 :R2165–R2168, 1992.
- [99] P. Tabeling and A. Libchaber. Film draining and the Saffman–Taylor problem. *Physical Review A*, 33 :794–796, 1986.
- [100] P. Tabeling, G. Zocchi, and A. Libchaber. An experimental study of the Saffman–Taylor instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 177 :67–82, 1987.
- [101] H. Tang, W. Grivas, D. Homentcovschi, J. Geer, and T. Singler. Stability considerations associated with the meniscoid particle band at advancing interfaces in Hele-Shaw suspension flows. *Physical Review Letters*, 85, 2000.
- [102] D. H. Vlad and J. V. Maher. Tip-splitting instabilities in the channel Saffman–Taylor flow of constant viscosity elastic fluids. *Physical Review E*, 61 :5439–5444, 2000.
- [103] L. Wilhelmy. Über die Abhängigkeit der Capillaritätskonstanten des Alkohols von Substanz und Gestalt des benetzten Körpers. *Annalen der Physik*, 119 :177–179, 1863.
- [104] I. E. Zarraga, D. A. Hill, and D. T. Leighton. The characterization of the total stress of concentrated suspensions of noncolloidal spheres in Newtonian fluids. *Journal of Rheology*, 44 :185–220, 2000.

Dynamique et instabilités des interfaces grains/fluide dans les suspensions non-Browniennes

Depuis les premiers travaux d'Einstein en 1906, le comportement des suspensions granulaires macroscopiques a fait l'objet de nombreuses études notamment en rhéologie. Cependant, la question des mécanismes susceptibles d'intervenir aux interfaces de ces suspensions reste ouverte et peu abordée. C'est précisément l'objet de cette thèse.

Nous proposons de sonder les propriétés d'une interface grains/fluide en injectant un fluide dans une suspension granulaire isodense dont nous contrôlons la fraction de grains. Cette suspension est confinée dans une cellule de Hele-Shaw et nous pouvons injecter soit de l'air soit du fluide interstitiel pur.

Pour les fractions de grains inférieures à 50%, l'injection d'air s'apparente à la digitation de Saffman–Taylor. Nous montrons que le mode de sélection des largeurs relatives et la stabilité des doigts sont modifiés par la présence des grains et que ces modifications ne peuvent se réduire à la simple considération d'un fluide effectif.

Pour les fractions plus importantes, des phénomènes de blocage liés au réseau des contacts entre grains apparaissent et nous nous trouvons dans le cas d'un milieu poreux réorganisable. L'écoulement de fluide peut alors se faire de deux façons : soit au travers de la structure granulaire restée fixe, soit en mobilisant en partie cette structure.

Dans le cas de l'injection d'air, des réarrangements localisés permettent d'obtenir des structures dont la taille dépasse celle des pores mais reste fine. Dans le cas de l'injection de fluide interstitiel pur, une mobilisation plus globale est observée qui mène à une décompaction homogène du milieu et à des structures de digitation plus larges.

Mots-clefs : suspension granulaire, poreux réorganisables, interface, injection, Saffman–Taylor, inertie

Dynamics and instabilities of interfaces or free surfaces within a non-Brownian suspension

Since the first works of Einstein in 1906, many studies have focussed on the behaviour of granular suspensions, in particular on their rheology. However, the dynamical properties of interfaces or free-surfaces within or bounding such suspensions are quite unknown and are the subject of the present work.

We propose to investigate the properties of such interfaces by injecting a pure fluid into an isodense granular suspension, whose grain fraction is systematically varied. The suspension is confined in a Hele-Shaw cell and either air or the pure suspending fluid can be injected.

For grain fractions below 50%, air injection yields patterns that are visually identical to Saffman–Taylor viscous fingering. However, the width selection and the stability of the fingers are modified and we demonstrate that these modifications do not follow from considering the suspension as a homogeneous fluid with renormalized viscosity.

For higher grain fractions, the media becomes partially jammed due to contacts between the grains and we obtain a weakly consolidated porous media. There are then two mechanisms of flow of the pure fluids : through the fixed granular structure or by mobilising this structure.

For air injection, localized rearrangements lead to narrow air fingers whose width remains larger than the pore size. For the injection of suspending fluid, a more global mobilisation is observed leading to homogenous decompaction of the media and larger fingering structures.

Keywords : granular suspension, porous media, interface - free surface, injection, Saffman–Taylor, inertia