



**HAL**  
open science

# Schéma à pas de temps caractéristique pour l'aérodynamique transsonique et conception aéroélastique optimale d'aile de grand allongement

Pascal Joubert de La Motte

► **To cite this version:**

Pascal Joubert de La Motte. Schéma à pas de temps caractéristique pour l'aérodynamique transsonique et conception aéroélastique optimale d'aile de grand allongement. Autre. Arts et Métiers ParisTech, 2007. Français. NNT : 2007ENAM0005 . tel-00144844

**HAL Id: tel-00144844**

**<https://pastel.hal.science/tel-00144844>**

Submitted on 5 May 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



*Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers*

École Doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

# **THÈSE**

*pour obtenir le titre de*

## **DOCTEUR**

*de*

### **L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS**

**Spécialité : Mécanique**

*présentée et soutenue publiquement*

*par*

**Pascal JOUBERT DE LA MOTTE**

le 17 avril 2007

**SCHÉMA À PAS DE TEMPS CARACTÉRISTIQUE POUR  
L'AÉRODYNAMIQUE TRANSSONIQUE ET CONCEPTION AÉROÉLASTIQUE  
OPTIMALE D'AILE DE GRAND ALLONGEMENT**

*Directeur de thèse :*     **Pr. Alain LERAT**

*Co-directeur de thèse :*   **Pr. Christophe CORRE**

devant le jury composé de :

<b>M. Thierry ALZIARY DE ROQUEFORT</b> Professeur à l'ENSMA, Poitiers .....	président
<b>M. Marc BRÉDIF</b> Ingénieur-Docteur, MBDA, Le Plessis Robinson .....	examinateur
<b>M. Christophe CORRE</b> Professeur à l'ENSHMG, Grenoble .....	examinateur
<b>M. Alain LERAT</b> Professeur à l'ENSAM, Paris .....	examinateur
<b>M. Jean-Marc MOSCHETTA</b> Professeur à SUPAERO, Toulouse .....	rapporteur
<b>M. Michel VISONNEAU</b> Directeur de recherche au CNRS, École Centrale de Nantes .....	rapporteur

**Laboratoire de Simulation Numérique en Mécanique des Fluides**

**ENSAM – CER de Paris**



*Nunc est bibendum*

HORACE – Odes, I, 37  
*après la victoire d'Octave sur Antoine à la bataille d'Actium*



# Remerciements

Au cour de cette thèse, j'ai été amené à rencontrer beaucoup de personnes, dont un grand nombre m'a apporté une aide, un conseil, des encouragements. . . Je voudrais ici les remercier et, à défaut d'être exhaustif, j'aimerais que ces remerciements concernent chacune de ces personnes que j'ai croisées au cours de ces quatre années de thèse.

**L'encadrement.** Mes remerciements vont donc tout d'abord à Alain LERAT, directeur du laboratoire SINUMEF. Je le remercie pour son accueil au sein du laboratoire ainsi que pour la direction de mon travail de thèse. C'est grâce à lui, en particulier, que ce sujet industriel, et néanmoins de recherche, a pu voir le jour et que j'ai pu poursuivre cette thèse, malgré les vicissitudes qui ont accompagné son début.

C'est ensuite à Christophe CORRE que je voudrais adresser mes remerciements. Il m'a en effet apporté un soutien constant dans ce travail ainsi qu'une aide quotidienne, pour le temps que j'ai passé au laboratoire, et quasi-quotidienne par la suite, lors de ma période châillonnaise et de sa nouvelle vie grenobloise, en s'efforçant d'être aussi disponible que possible, pour répondre typiquement à mes longues questions téléphoniques.

Je voudrais ensuite remercier Marc BRÉDIF, qui a été l'instigateur de cette thèse et qui m'a accueilli pendant deux années dans son service, chez MBDA, à Châtillon. Je le remercie en particulier de m'avoir conseillé dans mes choix, en faisant parfois abstraction de sa position de prescripteur de ce travail de thèse. En tant que « père » d'AEROLOG, il fut également pour moi l'ultime recours pour la compréhension du code, une sorte de « manuel vivant ».

Enfin, ce travail n'aurait pas été ce qu'il a été sans André WENG-LAW et Christophe NOTTIN, qui m'ont accompagné quotidiennement chez MBDA. André m'a fait patiemment découvrir les joies d'AEROLOG ; je le remercie en particulier d'avoir pris le temps de se « plonger dans le code » avec moi, pour des séances de débogage souvent fructueuses. Christophe m'a fait partager son grand sens physique et aérodynamique, que je n'avais pas. Je le remercie également pour m'avoir fait une confiance totale dans l'utilisation de la chaîne aéroélastique RATAN.

**Le jury.** C'est maintenant à Messieurs Jean-Marc MOSCHETTA et Michel VISONNEAU que je souhaiterais adresser mes remerciements les plus vifs. Ils ont accepté la charge de rapporteur de ma thèse et je les remercie de l'intérêt qu'ils ont porté à mon mémoire, de leur lecture jusque dans les détails et de leurs remarques pertinentes. Je remercie également Monsieur Thierry ALZIARY DE ROQUEFORT d'avoir présidé le jury.

**Ma femme.** C'est à ma femme que j'adresse mes remerciements les plus profonds. Je la remercie en particulier d'avoir accepté que je commence et poursuive ce travail de thèse. Je la remercie également pour son soutien indéfectible ainsi que sa patience à toute épreuve à mon égard.

**L'ENSAM.** Je voudrais maintenant exprimer toute ma reconnaissance aux membres du Laboratoire SINUMEF et tout d'abord à Jean-Christophe ROBINET, d'une culture scientifique incomparable, qui a répondu à mes nombreuses questions (parfois peut-être trop nombreuses). Je suis reconnaissant à Xavier GLOERFELT, notamment pour ses remarques très pertinentes durant la préparation de la soutenance. Ces années passées au Laboratoire n'auraient certainement pas été aussi agréables sans David ALFANO et Frédéric ALIZARD, avec qui j'ai partagé mon bureau ; je ne sais plus si je dois les remercier de m'avoir supporté ou si ça ne serait pas par hasard l'inverse. Une chose est sûre : nous devons tous les trois, et la primeur m'en revient, remercier les autres membres du laboratoire d'avoir supporté notre bonne humeur bruyante, nos éclats de voix et notre finesse légendaire : Thomas LE GARREC, Patrick KUSZLA, Fabrice FALISSARD, Bertrand MICHEL, Xi DU, Xavier MERLE, Mazen ZAKI, Virginie DARU et Farid OUKACI. Je n'oublie pas non plus Jean-Philippe BOIN, amateur de bonnes choses, qui fut ATER au Laboratoire quand je débutais ma thèse. Enfin, j'ai pu partager avec Huguette THAS et Jeanine DIDELOT mon goût du rangement et ma manie de la propreté.

Je tiens également à remercier la SERAM, par laquelle cette thèse a été financée et tout particulièrement Mme VAYSSET, directrice des ressources humaines et Valérie DELAHAYE, du service administratif, qui ont contribué au bon déroulement matériel de cette étude.

**MBDA.** Ce sont maintenant les ingénieurs du service d'Aérodynamique Numérique de MBDA, que j'ai côtoyé tous les jours pendant deux ans, que je voudrais remercier, et en premier lieu Rémi, dont j'ai partagé le bureau, mais également Jean-Philippe, *l'expert scripts UNIX et Awk*, Éric W., Thomas, Héliodore, Philippe M., Nicolas G., Emmanuel, Nicolas R., Philippe S. et Remy, *le philosophe*, ainsi que Chantal, secrétaire du service. J'ajoute à cette liste Nicolas V. et Matthieu H., prestataires au sein du service, ainsi que les nombreux stagiaires.

Ce fut également un plaisir de croiser et travailler avec les ingénieurs du service d'Aérodynamique et Performances et en particulier Christophe J., Nicolas L., Marc-Lionel, Matthieu S.B., du service de Thermique et en particulier Stéphane, *l'expert SAMCEF*, du service de Furtivité et en particulier Pierre, *expert en programmation et autres choses informatiques*.

**Et tous les autres...** Après avoir remercié les personnes que j'ai croisées sur les lieux de mon travail de thèse, j'en viens à remercier celles avec qui j'ai pu travailler plus ponctuellement et notamment l'équipe MS du département DDSS de l'ONERA, particulièrement Jean-Pierre GRISVAL, Alain DUGEAI et Philippe GIRODROUX-LAVIGNE.

Je voudrais enfin remercier tous les contributeurs au forum Usenet `fr.comp.text.tex`, qui m'ont apporté leur aide précieuse concernant  $\text{\LaTeX}$  et qui ont permis que ce mémoire soit aussi esthétique que possible. Je recommande vivement ce forum à tous ceux qui voudraient consolider leur connaissance et leur pratique de ce formidable outil de composition de documents.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xiii</b>
<b>Notations</b>	<b>xv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Simulation numérique d'écoulements instationnaires</b>	<b>5</b>
<b>1 Méthodes numériques disponibles dans AEROLOG</b>	<b>7</b>
1.1 Modèles physiques . . . . .	7
1.1.1 Équations résolues . . . . .	7
1.1.2 Cas d'un repère cartésien . . . . .	9
1.2 Principes de discrétisation . . . . .	10
1.2.1 Formulation semi-discrète . . . . .	10
1.2.2 Discrétisation spatiale . . . . .	11
1.2.3 Viscosité artificielle . . . . .	13
1.3 Traitement implicite . . . . .	14
1.3.1 Construction du système implicite . . . . .	14
1.3.2 Résolution numérique par factorisation approchée . . . . .	15
1.4 Analyse théorique . . . . .	16
1.4.1 Établissement du facteur d'amplification . . . . .	16
1.4.2 Résultats de stabilité . . . . .	18
1.5 Mise en œuvre dans AEROLOG . . . . .	26
1.5.1 Organisation du logiciel . . . . .	26
1.5.2 Repères relatif et absolu . . . . .	26
1.5.3 Principe de distribution . . . . .	26
1.5.4 Formulation en volumes finis . . . . .	28
1.5.5 Éléments géométriques et notations . . . . .	29

1.5.6	Calcul du terme consistant non visqueux . . . . .	31
1.5.7	Viscosité artificielle . . . . .	32
1.5.8	Dissipation numérique du schéma . . . . .	35
1.5.9	Calcul du terme consistant visqueux . . . . .	36
1.5.10	Traitement implicite . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Nouvelles méthodes numériques proposées</b>	<b>41</b>
2.1	Technique de pas de temps fictif . . . . .	42
2.1.1	Principes généraux . . . . .	42
2.1.2	Cas particulier des schémas LAX-WENDROFF . . . . .	43
2.1.3	Discrétisation spatiale . . . . .	44
2.2	Schéma à pas de temps caractéristique . . . . .	44
2.2.1	Cas d'une équation scalaire mono-dimensionnelle . . . . .	45
2.2.2	Cas d'un système d'équations mono-dimensionnelles . . . . .	46
2.2.3	Cas d'une équation scalaire bidimensionnelle . . . . .	46
2.2.4	Extension à un système d'équations bidimensionnelles . . . . .	47
2.2.5	Discrétisation spatiale du schéma . . . . .	49
2.3	Phase implicite sans matrice . . . . .	50
2.3.1	Construction de la phase implicite . . . . .	50
2.3.2	Résolution du système implicite . . . . .	53
2.3.3	Schéma à pas de temps caractéristique et pas de temps fictif . . . . .	56
2.4	Analyse théorique . . . . .	57
2.4.1	Analyse du schéma à pas de temps caractéristique . . . . .	57
2.4.2	Analyse de la technique de pas de temps fictif . . . . .	71
2.5	Mise en œuvre dans AEROLOG . . . . .	77
2.5.1	Technique de pas de temps fictif . . . . .	77
2.5.2	Schéma à pas de temps caractéristique . . . . .	79
<b>3</b>	<b>Applications stationnaires</b>	<b>93</b>
3.1	Écoulement turbulent autour d'un profil NACA 0012 . . . . .	94
3.2	Écoulement tridimensionnel autour d'une gouverne générique . . . . .	108
<b>4</b>	<b>Applications instationnaires</b>	<b>119</b>
4.1	Écoulements laminaires autour d'un profil NACA 0015 . . . . .	119
4.1.1	Calcul stationnaire à 4° d'incidence . . . . .	121
4.1.2	Calcul instationnaire à 16° d'incidence . . . . .	127
4.2	Écoulements turbulents autour d'un profil NACA 0012 . . . . .	138
4.2.1	Écoulement attaché autour d'un profil NACA 0012 à 1,5° d'incidence. . . . .	138
4.2.2	Écoulement décollé autour d'un profil NACA 0012 à 4° d'incidence. . . . .	145
	<b>Conclusions</b>	<b>155</b>
<b>II</b>	<b>Conception aéroélastique optimale d'une aile de missile</b>	<b>157</b>
<b>5</b>	<b>Formulation du problème aéroélastique</b>	<b>159</b>
5.1	Calcul préliminaire autour d'une aile et d'un demi-fuselage de missile . . . . .	160
5.2	Principe du calcul aéroélastique couplé . . . . .	164
5.2.1	Estimation de la portée par la formule de BREGUET-LEDUC . . . . .	164
5.2.2	Évidement de l'aile . . . . .	165

---

---

5.2.3	Adaptation d'incidence . . . . .	166
5.2.4	Calcul aéroélastique . . . . .	167
<b>6</b>	<b>Mise en œuvre de la chaîne de calcul aéroélastique</b>	<b>173</b>
6.1	Paramétrage . . . . .	173
6.1.1	Paramètres de vol . . . . .	174
6.1.2	Géométrie extérieure de l'aile . . . . .	174
6.1.3	Évidement . . . . .	176
6.1.4	Paramètres effectivement retenus . . . . .	178
6.2	Chaîne de calcul . . . . .	179
6.2.1	Pré-traitement . . . . .	179
6.2.2	Déroulement du calcul . . . . .	189
6.2.3	Post-traitement . . . . .	189
<b>7</b>	<b>Étude paramétrique du problème aéroélastique</b>	<b>195</b>
7.1	Analyse des résultats . . . . .	196
7.1.1	Principaux effets . . . . .	196
7.1.2	Validité de la modélisation . . . . .	202
7.2	Améliorations possibles . . . . .	206
7.2.1	Comparaison avec une configuration « de référence » . . . . .	206
7.2.2	Aile fendue . . . . .	206
	<b>Conclusions</b>	<b>209</b>
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>211</b>
	<b>Annexes</b>	<b>215</b>
<b>A</b>	<b>Établissement des équations de NAVIER-STOKES moyennées</b>	<b>217</b>
A.1	Équations de NAVIER-STOKES instantanées . . . . .	217
A.2	Équations de NAVIER-STOKES moyennées . . . . .	219
<b>B</b>	<b>Modèle algébrique de turbulence de BALDWIN-LOMAX mis en œuvre dans AEROLOG</b>	<b>221</b>
B.1	Couche intérieure . . . . .	221
B.2	Couche extérieure . . . . .	222
B.3	Coefficients de fermeture . . . . .	222
B.4	Mise en œuvre . . . . .	222
<b>C</b>	<b>Diagonalisation de la matrice jacobienne</b>	<b>223</b>
<b>D</b>	<b>Formule de DIEDERICH</b>	<b>229</b>
<b>E</b>	<b>Résultats d'optimisation</b>	<b>231</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>243</b>

---



# Table des figures

1.1	Maillage cartésien régulier utilisé en différences finies. . . . .	12
1.2	Rayon spectral de la matrice d'amplification associée au schéma implicite de LAX-WENDROFF-NI – effet de l'utilisation de la vitesse caractéristique et de la sur-implication. . . . .	21
1.3	Rayon spectral de la matrice d'amplification associée au schéma implicite de LAX-WENDROFF-NI – effet de la viscosité artificielle. . . . .	22
1.4	Rayon spectral de la matrice d'amplification associée au schéma implicite de LAX-WENDROFF-NI – effet du nombre $CFL$ et de méthode de résolution de la phase implicite. . . . .	24
1.5	Rayon spectral de la matrice d'amplification associée au schéma implicite de LAX-WENDROFF-NI – effet du rapport d'aspect du maillage et de la direction de l'écoulement. . . . .	25
1.6	Support de maillage nécessaire au calcul du schéma utilisé dans AEROLOG. . .	27
1.7	Coupe bidimensionnelle du maillage et principe de distribution. . . . .	27
1.8	Cellule $\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$ du maillage avec les surfaces $\vec{S}_C^{(1)}$ , $\vec{S}_C^{(2)}$ et $\vec{S}_C^{(3)}$ . . . . .	30
1.9	Cellule de maillage $\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$ avec représentation des normales aux faces. .	31
1.10	Cellule $\Omega_C$ du maillage pour le calcul du prédicteur. . . . .	32
1.11	Éléments géométriques nécessaires pour le calcul du coefficient de viscosité artificielle $(\nu^{va})_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(1)}$ . . . . .	34
2.1	Rayon spectral de la matrice d'amplification associée au schéma à pas de temps caractéristique – effet de l'utilisation de la vitesse caractéristique et de la sur-implication. . . . .	62
2.2	Rayon spectral de la matrice d'amplification associée au schéma à pas de temps caractéristique – effet de la viscosité artificielle. . . . .	63
2.3	Rayon spectral de la matrice d'amplification associée au schéma à pas de temps caractéristique – effet de l'implication des termes consistants. . . . .	64
2.4	Rayon spectral de la matrice d'amplification associée au schéma à pas de temps caractéristique – effet du nombre $CFL$ . . . . .	65
2.5	Rayon spectral de la matrice d'amplification associée au schéma à pas de temps caractéristique – effet de la méthode de résolution implicite. . . . .	67
2.6	Rayon spectral de la matrice d'amplification associée au schéma à pas de temps caractéristique – effets combinés du nombre $CFL$ et du nombre de sous-itérations de relaxation. . . . .	68
2.7	Rayon spectral de la matrice d'amplification associée au schéma à pas de temps caractéristique – effet du rapport d'aspect et de la direction de l'écoulement. .	69
2.8	Rayon spectral de la matrice d'amplification associée aux schémas de LAX-WENDROFF-NI et à pas de temps caractéristique disponibles dans AEROLOG. . . . .	70

2.9	Rayon spectral de la matrice d'amplification associée au schéma implicite de LAX-WENDROFF-NI – technique de pas de temps fictif. . . . .	74
2.10	Rayon spectral de la matrice d'amplification associée au schéma implicite à pas de temps caractéristique – technique de pas de temps fictif. . . . .	75
2.11	Réorganisation des boucles de calcul pour la technique de pas de temps fictif.	78
2.12	Maillage multidomaine bidimensionnel et raccord du champ $\underline{\Delta w}^{\text{expl}}$ explicite.	87
2.13	Maillage multidomaine bidimensionnel et raccord du champ $\underline{\Delta w}$ implicite. . .	89
3.1	Frontière d'apparition du phénomène de tremblement autour du profil NACA 0012 en fonction du nombre de MACH et de l'angle d'incidence pour un nombre de REYNOLDS $Re = 9,9 \times 10^6$ . . . . .	94
3.2	Maillage n° 1 du domaine de calcul du profil NACA 0012 utilisé par AEROLOG et le logiciel maquette – détail. . . . .	95
3.3	Maillage n° 2 du domaine de calcul du profil NACA 0012 utilisé par AEROLOG et FLUENT – détail. . . . .	96
3.4	Évolution de la norme L2 du résidu de l'équation de conservation de la masse en fonction des itérations pour les calculs d'écoulements autour d'un profil NACA 0012 à 1,5° d'incidence menés avec AEROLOG sur le maillage n° 1. . . .	98
3.5	Évolution de la norme L2 du résidu de l'équation de conservation de la masse en fonction des itérations pour les calculs d'écoulements autour d'un profil NACA 0012 à 1,5° d'incidence menés avec AEROLOG sur le maillage n° 2. . . .	98
3.6	Évolutions des coefficients aérodynamiques globaux en fonction des itérations au cours des différents calculs d'écoulements autour d'un profil NACA 0012 à 1,5° d'incidence. . . . .	99
3.7	Évolutions des coefficients de traînée (a) et de portance (b) en fonction des itérations au cours des calculs d'écoulements autour d'un profil NACA 0012 à 1,5° d'incidence. . . . .	100
3.8	Exemple d'application du critère $ C_L - \overline{C_L}  \leq \epsilon \times \overline{C_L}$ . . . . .	103
3.9	Plages et lignes d'isovaleurs du nombre de MACH pour les calculs d'écoulements stationnaires autour d'un profil NACA 0012 à 1,5° d'incidence sur le maillage n° 1 avec AEROLOG – comparaison du schéma de LAX-WENDROFF et du schéma à pas de temps caractéristique. . . . .	104
3.10	Plages et lignes d'isovaleurs du nombre de MACH pour les calculs d'écoulements stationnaires autour d'un profil NACA 0012 à 1,5° d'incidence sur le maillage n° 2 avec AEROLOG – comparaison du schéma de LAX-WENDROFF et du schéma à pas de temps caractéristique. . . . .	105
3.11	Répartition des coefficients pariétaux pour les calculs d'écoulements stationnaires autour d'un profil NACA 0012 à 1,5° d'incidence sur le maillage n° 1 – comparaison entre la maquette, AEROLOG avec le schéma de LAX-WENDROFF et AEROLOG avec le schéma à pas de temps caractéristique. . . . .	106
3.12	Répartition des coefficients pariétaux pour les calculs d'écoulements stationnaires autour d'un profil NACA 0012 à 1,5° d'incidence sur le maillage n° 2 – comparaison entre FLUENT, AEROLOG avec le schéma de LAX-WENDROFF et AEROLOG avec le schéma à pas de temps caractéristique. . . . .	107
3.13	Maillage de la gouverne générique. . . . .	109
3.14	Vues en plan et en perspective de la gouverne générique montée sur plaque de garde avec les traces des plans de coupe. . . . .	109

3.15	Évolution des coefficients d'effort axial et d'effort normal en fonction des itérations au cours des calculs d'écoulement autour de la gouverne générique à $10^\circ$ d'incidence et $Ma = 0,7$ . . . . .	110
3.16	Évolution du coefficient d'effort axial en fonction des itérations au cours des calculs d'écoulement autour de la gouverne générique à $10^\circ$ d'incidence et $Ma = 0,7$ . . . . .	111
3.17	Évolution du coefficient d'effort normal en fonction des itérations au cours des calculs d'écoulement autour de la gouverne générique à $10^\circ$ d'incidence et $Ma = 0,7$ . . . . .	111
3.18	Évolution de la norme L2 du résidu de l'équation de conservation de la masse en fonction des itérations pour les calculs d'écoulements autour de la gouverne générique à $10^\circ$ d'incidence et $Ma = 0,7$ menés avec AEROLOG. . . . .	112
3.19	Répartition du coefficient de pression pariétale le long de la corde située à mi-envergure (cf. figure 3.14) pour les calculs d'écoulements autour de la gouverne générique à $10^\circ$ d'incidence et $Ma = 0,7$ menés avec AEROLOG. . . . .	113
3.20	Plages d'isovaleurs des coefficients de pression (a) et de frottement (b) sur l'extrados de la gouverne générique à $10^\circ$ d'incidence et $Ma = 0,7$ . . . . .	114
3.21	Plages d'isovaleurs des coefficients de pression (a) et de frottement (b) sur l'intrados de la gouverne générique à $10^\circ$ d'incidence et $Ma = 0,7$ . . . . .	115
3.22	Plages d'isovaleurs du nombre de MACH dans deux plans de coupe aux deux tiers de la corde (a) et à deux cordes (b) à partir du bord d'attaque (cf. figure 3.14) de la gouverne générique à $10^\circ$ d'incidence et $Ma = 0,7$ . . . . .	116
3.23	Plages d'isovaleurs du nombre de MACH dans le plan de coupe à mi-envergure (cf. figure 3.14) de la gouverne générique à $10^\circ$ d'incidence et $Ma = 0,7$ . . . . .	117
4.1	Maillage du domaine de calcul du profil NACA 0015 utilisé par les logiciels AEROLOG et FLUENT – détail. . . . .	120
4.2	Évolutions des coefficients aérodynamiques globaux en fonction des itérations au cours des calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0015 à $4^\circ$ d'incidence. . . . .	122
4.3	Évolutions de la norme L2 du résidu de l'équation de conservation de la masse en fonction des itérations au cours des calculs d'écoulement menés avec AEROLOG autour d'un profil NACA 0015 à $4^\circ$ d'incidence. . . . .	123
4.4	Répartitions des coefficients pariétaux de frottement et pression le long de la corde d'un profil NACA 0015 à $4^\circ$ d'incidence pour plusieurs valeurs du coefficient $C_{\mu_0}$ . . . . .	124
4.5	Répartitions des coefficients pariétaux de frottement et pression le long de la corde d'un profil NACA 0015 à $4^\circ$ d'incidence pour les schéma de LAX-WENDROFF-NI et à pas de temps caractéristique. . . . .	125
4.6	Plages et lignes d'isovaleurs du nombre de MACH pour les calculs d'écoulement stationnaire autour d'un profil NACA 0015 à $4^\circ$ d'incidence. . . . .	126
4.7	Évolutions des coefficients aérodynamiques globaux en fonction du temps au cours des calculs d'écoulement instationnaire autour d'un profil NACA 0015 à $16^\circ$ d'incidence. . . . .	129
4.8	Évolution sur un cycle d'oscillation du coefficient de portance pour le calcul avec AEROLOG d'un écoulement instationnaire autour d'un profil NACA 0015 à $16^\circ$ d'incidence. . . . .	130
4.9	Interprétation des courbes de répartition pariétale de coefficient de frottement. . . . .	131

4.10	Distribution pariétale du coefficient de frottement au cours d'un cycle d'oscillation de portance (cf. figure 4.8) du profil NACA 0015 à 16° d'incidence calculé par AEROLOG avec le schéma de LAX-WENDROFF et par FLUENT. . . . .	133
4.11	Distribution pariétale du coefficient de pression au cours d'un cycle d'oscillation de portance (cf. figure 4.8) du profil NACA 0015 à 16° d'incidence calculé par AEROLOG avec le schéma de LAX-WENDROFF et par FLUENT. . . . .	134
4.12	Plages et lignes d'isovaleurs du nombre de MACH au cours d'un cycle d'oscillation de portance (cf. figure 4.8) du profil NACA 0015 à 16° d'incidence calculé par AEROLOG avec le schéma de LAX-WENDROFF et par FLUENT. . . . .	135
4.13	Représentation des lignes de courant au cours d'un cycle d'oscillation de portance (cf. figure 4.8) du profil NACA 0015 à 16° d'incidence calculé par le logiciel FLUENT. . . . .	136
4.14	Plages d'isovaleurs du nombre de MACH et lignes de courant à l'instant E (cf. figure 4.8) du cycle d'oscillation de portance du profil NACA 0015 à 16° d'incidence calculé par AEROLOG avec le schéma de LAX-WENDROFF (b) et par FLUENT (a). . . . .	137
4.15	Évolution temporelle des coefficients aérodynamiques globaux pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à 1,5° d'incidence menés avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2 en pas de temps fictif. . . . .	139
4.16	Détails des évolutions temporelles des coefficients aérodynamiques globaux pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à 1,5° d'incidence menés avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2 en pas de temps fictif. . . . .	140
4.17	Répartitions du coefficient de pression pariétale au cours des calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à 1,5° d'incidence menés avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2 en pas de temps fictif. . . . .	142
4.18	Plages et lignes d'isovaleurs du nombre de MACH au cours des calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à 1,5° d'incidence menés avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2 en pas de temps fictif. . . . .	143
4.19	Plages et lignes d'isovaleurs du nombre de MACH au cours des calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à 1,5° d'incidence menés avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2 en pas de temps fictif – détail du choc et du bord de fuite à l'extrados. . . . .	144
4.20	Évolution temporelle des coefficients aérodynamiques globaux pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à 4° d'incidence menés en pas de temps fictif avec la maquette numérique sur le maillage n° 1 et avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2. . . . .	146
4.21	Détails des évolutions temporelles des coefficients aérodynamiques globaux pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à 4° d'incidence menés en pas de temps fictif avec la maquette numérique sur le maillage n° 1 et avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2. . . . .	147
4.22	Évolution temporelle des coefficients aérodynamiques globaux dans le régime transitoire pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à 4° d'incidence menés en pas de temps fictif avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2. . . . .	149
4.23	Répartition pariétale du coefficient de pression à quatre instants (cf. figure 4.22) du régime transitoire pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à 4° d'incidence menés en pas de temps fictif avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2. . . . .	150

---

4.24	Répartition pariétale du coefficient de frottement à quatre instants (cf. figure 4.22) du régime transitoire pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à 4° d'incidence menés en pas de temps fictif avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2. . . . .	151
4.25	Plages et lignes d'isovaleurs du nombre de MACH à quatre instants (cf. figure 4.22) du régime transitoire pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à 4° d'incidence menés en pas de temps fictif avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2. . . . .	152
4.26	Évolution temporelle du coefficient de portance dans le régime transitoire pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à 4° d'incidence menés avec différents choix de formulation du modèle de turbulence de BALDWIN-LOMAX en pas de temps fictif avec la maquette sur le maillage n° 1 et avec AEROLOG sur le maillage n° 2. . . . .	154
5.1	Maquette AMIS avec aile non déformée et aile déformée et représentation du maillage sur les parois. . . . .	161
5.2	Lois d'évolution de la flèche et du vrillage de l'aile de la maquette AMIS sous charge à 5° d'incidence, en fonction de l'envergure. . . . .	162
5.3	Évolution des coefficients aérodynamiques globaux en fonction des itérations, pour le calcul de l'écoulement autour de la maquette AMIS, sans puis avec la prise en compte de la déformation de l'aile sous charge, à 5° d'incidence. . . . .	162
5.4	Répartitions pariétales du coefficient de pression pour cinq coupes le long de l'envergure de l'aile de la maquette AMIS, à 5° d'incidence. . . . .	163
5.5	Modification du logiciel AEROLOG pour l'asservissement de l'incidence à la portance. . . . .	167
5.6	Schématisme de la chaîne aéroélastique RATAN. . . . .	171
6.1	Vue du missile – paramètres géométriques extérieurs. . . . .	175
6.2	Vue en plan de l'aile du missile – contraintes d'encombrement. . . . .	175
6.3	Profil NACA 63209 à bord de fuite épais, de corde $c$ et évidé entre $\bar{x}_1 = 15\%$ et $\bar{x}_2 = 75\%$ . . . . .	177
6.4	Évidement de l'aile du missile vu de dessus, dans le plan $(xOy)$ . . . . .	177
6.5	Schématisme de la génération du maillage du domaine fluide destiné au calcul aérodynamique. . . . .	181
6.6	Maillage aérodynamique – vue du maillage à la surface du missile. . . . .	182
6.7	Maillage aérodynamique – vue du plan de symétrie $(xOz)$ . . . . .	182
6.8	Maillage aérodynamique – vue de dessus en coupe à $z = 0$ . . . . .	183
6.9	Schématisme de la génération du maillage de la structure de l'aile évidée. . . . .	184
6.10	Maillage de structure de l'aile. . . . .	185
6.11	Choix des nœuds force et déplacement sur l'aile. . . . .	185
6.12	Schéma illustrant la nécessité d'introduire des nœuds à déplacement nul. . . . .	186
6.13	Détail de la zone d'emplanture de l'aile avec repérage de l'aile, de la semelle et du fuselage. . . . .	188
6.14	Vue de l'aile non déformée avec les vecteurs déplacement $\vec{q}$ permettant de passer à l'aile déformée une fois le calcul convergé. . . . .	190
6.15	Historique de convergence du coefficient de portance et de l'incidence en fonction des itérations lors du calcul aéroélastique couplé. . . . .	190

6.16	Historique de convergence du coefficient de portance et de l'incidence en fonction des itérations lors du calcul aéroélastique couplé ; détail avec repérage de quelques itérations avec adaptation d'incidence et déformation de maillage. . . . .	191
7.1	Répartition des configurations en fonction du produit du nombre de MACH par la finesse $Ma \times f_{eq}$ et de l'incidence d'équilibre $\alpha_{eq}$ ; mise en évidence du nombre de MACH. . . . .	197
7.2	Répartition des configurations en fonction du coefficient de traînée calculé par AEROLOG $C_D$ et de l'incidence d'équilibre $\alpha_{eq}$ ; mise en évidence du nombre de MACH. . . . .	197
7.3	Répartition des configurations en fonction du produit du nombre de MACH par la finesse $Ma \times f_{eq}$ et de la contrainte structurale maximale $\sigma^{max}$ ; mise en évidence du paramètre de début d'évidement $\bar{y}_1$ . . . . .	200
7.4	Répartition des configurations ayant une position de début d'évidement maximale ( $\bar{y}_1 = 10\%$ ) en fonction du produit du nombre de MACH par la finesse $Ma \times f_{eq}$ et de la contrainte structurale maximale $\sigma^{max}$ ; mise en évidence du paramètre d'épaisseur des capots $\bar{e}$ . . . . .	200
7.5	Répartition des configurations ne présentant pas de pré-vrillage géométrique ( $\theta_t = \theta_s = 0^\circ$ ) et telles que $Ma = 0,7$ , en fonction de la flèche maximale $f_{z_{max}}$ et du vrillage dû aux charges aérodynamiques $\theta_{aero}$ ; mise en évidence du produit du nombre de MACH par la finesse $Ma \times f_{eq}$ . . . . .	203
7.6	Répartition des configurations en fonction du produit du nombre de MACH par la finesse $Ma \times f_{eq}$ et de la première fréquence propre structurale. . . . .	203
7.7	Maillage de structure de l'aile présentant un évidement débouchant et une fente sur l'extrados. . . . .	207
D.1	Schéma d'une aile en flèche avec les cotes nécessaires au calcul de la formule de DIEDERICH . . . . .	229

# Liste des tableaux

3.1	Valeurs des coefficients de traînée et de portance obtenues pour les différentes simulations d'écoulements stationnaires autour d'un profil NACA 0012 à $1,5^\circ$ d'incidence. . . . .	99
3.2	Temps de calcul pour les différentes simulations d'écoulements stationnaire autour d'un profil NACA 0012 à $1,5^\circ$ d'incidence avec AEROLOG. . . . .	102
3.3	Nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le critère $ C_L - \overline{C_L}  \leq \epsilon \times \overline{C_L}$ pour les différentes simulations d'écoulements stationnaires autour d'un profil NACA 0012 à $1,5^\circ$ d'incidence avec AEROLOG. . . . .	102
3.4	Temps de calcul et nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le critère $ C_N - \overline{C_N}  \leq 0,01\% \overline{C_N}$ pour les simulations d'écoulements stationnaires autour de la gouverne générique à $10^\circ$ d'incidence et $Ma = 0,7$ avec AEROLOG. . . . .	112
4.1	Valeurs des coefficients aérodynamiques globaux obtenues pour les différentes simulations d'écoulement stationnaire autour d'un profil NACA 0015 à $4^\circ$ d'incidence. . . . .	121
4.2	Valeurs des coefficients aérodynamiques globaux et du nombre de STROUHAL obtenues pour les différentes simulations d'écoulements instationnaires autour d'un profil NACA 0015 à $16^\circ$ d'incidence. . . . .	128
4.3	Valeurs des coefficients de traînée et de portance obtenues pour les simulations en pas de temps fictif (PTF) d'écoulements autour d'un profil NACA 0012 à $1,5^\circ$ d'incidence. . . . .	139
6.1	Tableau récapitulatif des paramètres fixés. . . . .	178
6.2	Tableau récapitulatif des paramètres retenus pour cette étude avec indication des bornes de l'intervalle de variation. . . . .	179
7.1	Paramètres et résultats relatifs aux configurations ne présentant pas de prévrillage géométrique ( $\theta_t = \theta_s = 0^\circ$ ) et telles que $Ma = 0,7$ . . . . .	201
7.2	Comparaison entre le calcul avec 10 nœuds force et celui avec 330 nœuds force pour la configuration optimale $Id = 146$ , $\theta_t = 1,5^\circ$ , $\theta_s = 0^\circ$ , $\bar{y}_1 = 10\%$ , $\bar{e} = 1,125\%$ et $Ma = 0,7$ . . . . .	204
7.3	Comparaison des paramètres, objectif et contraintes entre la configuration de référence $Id = 0$ et la configuration optimale $Id = 146$ . . . . .	206
E.1	Résultats d'optimisation. . . . .	239



# Notations

Cette table des notations n'est pas exhaustive ; elle a pour but de définir les symboles les plus utilisés afin de faciliter la compréhension de certaines formules sans avoir recours à une lecture complète du mémoire.

## Grandeurs physiques

$c$	célérité du son dans le fluide
$\rho$	masse volumique du fluide
$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	base cartésienne orthonormée
$\vec{v}$	vitesse du fluide ; se projette en $(u, v, w)$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
$p$	pression du fluide
$T$	température du fluide
$x$ (resp. $y, z$ )	variable spatiale associée à la direction $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}, \vec{z}$ )
$t$	variable temporelle
$Ma$	nombre de MACH
$\mu$	coefficient de viscosité dynamique totale du fluide
$\nu$	coefficient de viscosité cinématique totale du fluide
$\mu_{\text{mol}}$	coefficient de viscosité dynamique moléculaire du fluide
$\mu_{\text{t}}$	coefficient de viscosité dynamique turbulente du fluide
$\nu_{\text{mol}}$	coefficient de viscosité cinématique moléculaire du fluide
$\nu_{\text{t}}$	coefficient de viscosité cinématique turbulente du fluide
$Pr_{\text{mol}}$	nombre de PRANDTL moléculaire
$Pr_{\text{t}}$	nombre de PRANDTL turbulent

## Notations utilisées pour la formulation en différences finies

Ces notations concernent essentiellement les sections 1.2, 1.3, 2.2 et 2.3.

$w$	vecteur des variables conservatives
$f$ (resp. $g$ )	flux physique dans la direction $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}$ )
$h^1$ (resp. $h^2$ )	flux numérique dans la direction $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}$ )
$R$	prédicteur des flux

$A$ (resp. $B$ )	matrice jacobienne des flux dans la direction $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}$ )
$\Delta w$	incrément de variable, inconnue du problème
$\Delta t$	pas de temps
$\delta x$ (resp. $\delta y$ )	pas d'espace dans la direction $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}$ )
$\delta_1$ (resp. $\delta_2$ )	opérateur de différence discrète dans la direction $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}$ )
$\mu_1$ (resp. $\mu_2$ )	opérateur de moyenne discrète dans la direction $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}$ )
$\nu^{\text{va1}}$ (resp. $\nu^{\text{va2}}$ )	coefficient de viscosité artificielle dans la direction $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}$ )
$V^{\text{car}}$	vitesse caractéristique du fluide $V^{\text{car}} = c + \ \vec{v}\ $
$\rho(\bullet)$	rayon spectral de la matrice $\bullet$
$\beta$	coefficient de sur-implication
$\phi$ (resp. $\psi$ )	matrice de décentrement dans la direction $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}$ )
$P_\bullet$	matrice des vecteurs propres à droite de la matrice $\bullet$
$\Lambda_\bullet$	matrice diagonale des valeurs propres de la matrice $\bullet$
$\lambda_\bullet^{(i)}$	$i^{\text{e}}$ valeur propre de la matrice $\bullet$
$\varsigma(\bullet)$	une certaine fonction scalaire de la matrice $\bullet$
$A_1^V$ (resp. $B_2^V$ )	matrice jacobienne des flux visqueux dans la direction $\vec{x}$ selon la première composante de $\overrightarrow{\text{grad}}(w)$ (resp. dans la direction $\vec{y}$ selon la seconde composante de $\overrightarrow{\text{grad}}(w)$ )
$C^0$	coefficient diagonal de la phase implicite
$C_\pm^1$ (resp. $C_\pm^2$ )	coefficient de la phase implicite dans la direction $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}$ ), pour + (resp. -) au-dessus (resp. au-dessous) du point courant
$l$	variable de la boucle de relaxation
$w^{(l)}$	variable intermédiaire de relaxation
$\Delta\bullet$	incrément de relaxation de la variable $\bullet$ ; $\Delta\bullet^{(l)} = \bullet^{(l)} - \bullet^n$

## Notations utilisées pour l'analyse de stabilité linéaire

Ces notations concernent essentiellement les sections 1.4 et 2.4.

$\hat{w}$	amplitude complexe
$i$	racine carrée de $-1$
$\xi$ (resp. $\eta$ )	nombre d'onde réduit dans la direction $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}$ )
$G$	matrice d'amplification du schéma
$\mathcal{K}$	opérateur explicite
$\mathcal{H}$	opérateur implicite
$K$	symbole de FOURIER de l'opérateur explicite
$H$	symbole de FOURIER de l'opérateur implicite
$\dot{A}$ (resp. $\dot{B}$ )	matrice jacobienne adimensionnée $A\Delta t/\delta x$ (resp. $B\Delta t/\delta y$ )
$CFL$	nombre de COURANT-FRIEDRICH-LEVY
$CFL^*$	nombre de COURANT-FRIEDRICH-LEVY relatif au temps fictif $\tau$

---

## Notations utilisées pour la formulation en volumes finis<sup>1</sup>

Ces notations concernent essentiellement les sections 1.5 et 2.5.

### Variables

$\underline{w}$	vecteur des variables conservatives
$\vec{F}$	tenseur d'ordre deux des flux
$\overrightarrow{F^E}$	tenseur d'ordre deux des flux non visqueux
$\overrightarrow{F^V}$	tenseur d'ordre deux des flux visqueux
$\underline{\underline{J}}$	tenseur jacobien d'ordre trois des flux non visqueux $\overrightarrow{F^E}$
$\Omega$	cellule de maillage ou de contrôle
$ \Omega $	volume de la maille $\Omega$
$\partial\Omega$	bord de la cellule $\Omega$ , c'est-à-dire ensemble des faces qui délimitent cette cellule
$\Delta w$	vecteur des incréments de variables, inconnue du problème
$\Delta t$	pas de temps
$\vec{n}$	normale unitaire extérieure à la cellule d'intégration
$S$	surface d'une face de cellule de maillage $\Omega_C$
$\Sigma$	surface d'une face de cellule de contrôle $\Omega_{i,j,k}$
$\partial^2\Omega$	ensemble des sommets de la cellule $\Omega$
$\vec{S}$	normale à la face d'une face de cellule de maillage portant la surface
$\vec{\Sigma}$	normale à la face d'une face de cellule de contrôle portant la surface
$\underline{R}$	prédicteur des flux non visqueux
$\nu^{\text{va}}$	coefficient de viscosité artificielle
$V^{\text{car}}$	vitesse caractéristique du fluide $V^{\text{car}} = c + \ \vec{v}\ $
$S^{\text{va}}$	senseur de discontinuité
$S^{\text{max}}$	plus grande surface dans les trois directions d'espace
$f_{\text{dis}}$	flux de dissipation numérique du schéma (LAX-WENDROFF)
$f'_{\text{dis}}$	flux de dissipation numérique du schéma (à pas de temps caractéristique)
$f_{\text{visq}}$	flux physiques visqueux
$\varpi$	vecteur des variables primitives
$\rho(\bullet)$	rayon spectral de la matrice $\bullet$
$\beta$	coefficient de sur-implicitation
$\tilde{\phi}$	matrice de décentrement
$\lambda_{\phi}^{(i)}$	$i^{\text{e}}$ valeur propre de $\tilde{\phi}$

<sup>1</sup>Par souci de précision, nous noterons ici l'ordre des tenseurs manipulés; les flèches placées au-dessus des variables indiqueront que ces variables sont spatiales (et non scalaires); les soulèvements successifs des variables indiquent l'ordre du tenseur dans l'espace des variables du problème.

$\underline{P}$	matrice des vecteurs propres à droite de la matrice $\underline{\underline{J}} \cdot \vec{n}$
$\lambda_{\perp}^{(i)}$	$i^e$ valeur propre de la matrice $\underline{\underline{J}} \cdot \vec{n}$
$\varsigma(\bullet)$	une certaine fonction scalaire de la matrice $\underline{\underline{J}}$
$\underline{\underline{J}}_{(m)}^V$	matrice jacobienne des flux visqueux dans la $m^e$ direction d'espace selon la $m^e$ composante de $\text{grad}(w)$
$C^{(0)}$	coefficient diagonal de la phase implicite
$C^{(1)}$ (resp. $C^{(2)}, C^{(3)}$ )	coefficient de la phase implicite dans la direction $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}, \vec{z}$ )
$l$	variable de la boucle de relaxation
$\underline{\Delta}\bullet$	incrément de relaxation de la variable $\bullet$ ; $\underline{\Delta}\bullet^{(l)} = \bullet^{(l)} - \bullet^n$
$\partial\Omega_{i,j,k}^{\pm}$	moitié supérieure (resp. inférieure) de la cellule $\Omega_{i,j,k}$ délimitée par les faces centrées sur les points d'indices $(i + \frac{1}{2}, j, k)$ , $(i, j + \frac{1}{2}, k)$ et $(i, j, k + \frac{1}{2})$ (resp. $(i - \frac{1}{2}, j, k)$ , $(i, j - \frac{1}{2}, k)$ et $(i, j, k - \frac{1}{2})$ )
$\underline{\Delta}\bullet$	incrément de relaxation de la variable $\bullet$ ; $\underline{\Delta}\bullet^{(l)} = \bullet^{(l)} - \bullet^n$
$\Omega_{i,j,k n_{\text{dom}}}$	intersection de la cellule $\Omega_{i,j,k}$ et du sous-domaine numéroté $n_{\text{dom}}$

## Indices et exposants

- <sub>M</sub> variable • au nœud  $M$  du maillage (équivalent à  $\bullet_{i,j,k}$ )
- <sub>C</sub> variable • au centre  $C$  d'une cellule de maillage (équivalent à  $\bullet_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$ )
- <sub>f</sub> variable • au centre d'une face de la cellule de maillage  $\Omega_C = \Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$ ;  
 $f \in \{(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}), (i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}), (i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)\}, (i, j, k) \in \mathbb{N}^3$
- <sub>s</sub> variable • au centre d'une face de la cellule de contrôle  $\Omega_M = \Omega_{i,j,k}$ ;  
 $s \in \{(i + \frac{1}{2}, j, k), (i, j + \frac{1}{2}, k), (i, j, k + \frac{1}{2})\}, (i, j, k) \in \mathbb{N}^3$
- <sup>n</sup> variable • au temps numéroté  $n$
- <sup>(m)</sup> variable • (normale, flux. . .) dans la  $m^e$  direction d'espace, c'est-à-dire pour  $m = 1$  (resp. 2, 3) dans la direction  $\vec{x}$  (resp.  $\vec{y}, \vec{z}$ )

## Notations utilisées pour la technique de pas de temps fictif

Ces notations concernent essentiellement la section 2.1.

- $\tau$  variable de temps fictif
- <sup>n,m</sup> variable • au temps physique numéroté  $n$  et au temps fictif numéroté  $m$
- $\Delta\tau$  pas de temps fictif

## Notations utilisées pour les calculs aérodynamiques et aéroélastiques

- $\alpha$  angle d'incidence

---

$Re$	nombre de REYNOLDS
$C_p$	coefficient de pression
$C_f$	coefficient de frottement pariétal
$C_D$	coefficient de traînée
$C_L$	coefficient de portance
$C_A$	coefficient d'effort axial
$C_N$	coefficient d'effort normal
$z$	altitude
$m$	masse moyenne
$f_{eq}$	finesse à l'équilibre de la portance et du poids
$\sigma^{\max}$	contrainte structurale maximale
$\lambda$	angle de flèche
$h$	demi-envergure
$c_v$ (resp. $c_n$ )	corde du profil dans la direction du vent (resp. dans la direction normale au bord d'attaque)
$y_1$ (resp. $y_2$ )	position de début (resp. de fin) d'évidement selon la direction $\vec{y}$
$x_1$ (resp. $x_2$ )	position de début (resp. de fin) d'évidement selon la direction $\vec{x}$
$\phi$	calibre du missile
$e$	épaisseur des capots
$l$	longueur de l'aile
$\theta_t$ (resp. $\theta_s$ )	angle de calage de l'aile dans le plan de tangage ( $xOz$ ) (resp. au saumon)
$E$	module d'YOUNG du matériau
$\nu$	coefficient de POISSON du matériau
$\sigma_e$	limite élastique du matériau
$S_{ref}$	surface de référence utilisée notamment dans $C_D$ et $C_L$
$g$	accélération de la pesanteur
$f_0$	première fréquence propre de la structure
$\alpha_{eq}$	incidence pour laquelle la portance équilibre le poids
$\theta, \theta_{aero}$	angle de vrillage de l'aile, angle de vrillage de l'aile sous l'effet de la charge aérodynamique
$f_z, f_{z_{\max}}$	flèche de l'aile, flèche en bout d'aile

---



# Introduction

**Objectifs de l'étude.** La société MBDA est aujourd'hui le premier acteur mondial en matière de conception et de fabrication de missiles et de systèmes de missiles. Elle conçoit notamment des missiles de croisière transsoniques dont la caractéristique principale est la possibilité d'atteindre des cibles à grande distance. Pour atteindre ces performances, ces missiles possèdent des ailes de grand allongement et les paramètres du vol sont particulièrement étudiés. MBDA utilise depuis de nombreuses années des outils permettant la prédiction des efforts aérodynamiques subis par ces missiles. La détermination de ces efforts par le calcul et les essais permet de mettre en place un modèle de comportement aérodynamique qui servira de base au pilotage de l'engin. Mais la prédiction de ces efforts est rendue plus ou moins aisée selon les conditions de vol, le type de mission... et les choix des formes aérodynamiques du missile. Contrairement au cas des avions de transport civils et même des avions de combat, ces paramètres de vols (nombre de MACH, incidence, pression, température, facteur de charge...) ont des plages de variation importantes. Pour certaines combinaisons de ces paramètres de vol, on voit apparaître dans l'écoulement, outre les phénomènes classiques d'aérodynamique stationnaire, des phénomènes plus complexes. Ces effets peuvent avoir une origine purement aérodynamique comme le phénomène instationnaire de tremblement ou bien provenir d'une interaction entre la structure du missile et l'écoulement ; il s'agit alors de phénomènes *aéroélastiques*. C'est dans ce contexte que la Délégation Générale pour l'Armement (DGA) a apporté son soutien financier à MBDA et à l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA) sur ce thème, dans le cadre d'un Plan d'Études Amont intitulé « aéroélasticité des missiles souples » (PEA AMIS).

Par ailleurs, le Laboratoire SINUMEF de l'ENSAM développe depuis longtemps déjà des méthodes numériques pour la simulation des écoulements turbulents compressibles. Sous la direction du Professeur Alain LERAT, de nombreux travaux ont été publiés ces dernières années sur les schémas décentrés compacts (cf. notamment [21], [22], [31], [32] et [10]). Le Laboratoire a également acquis ces dernières années une expertise en matière de simulation numérique des phénomènes instationnaires, en particulier du tremblement transsonique sur des profils d'aile. Ces travaux ont notamment été développés dans la thèse de Thomas RENAUD [40] en 2001.

MBDA s'est donc adressé au Laboratoire SINUMEF pour débiter cette thèse, dans le but d'améliorer l'efficacité de ses outils de simulation et d'analyse des écoulements instationnaires transsoniques turbulents tridimensionnels, d'une part, et, d'autre part, de développer une stratégie de conception optimale d'une aile de missile de croisière, incluant des effets aéroélastiques.

**Contexte.** MBDA possède depuis de nombreuses années plusieurs logiciels de simulation numérique des écoulements turbulents. Le logiciel AEROLOG en particulier, qui est la propriété de MBDA, a été développé et est très régulièrement utilisé au sein de l'entreprise. La simulation des écoulements turbulents stationnaires avec de tels logiciels fait partie du travail quotidien

des ingénieurs, mais la simulation des écoulements instationnaires est plus délicate et fait encore l'objet de différents développements et validations.

Le logiciel de calcul AEROLOG permet de résoudre les équations de NAVIER-STOKES moyennées ou les équations d'EULER. L'avance en temps est effectuée soit par une stratégie de pas de temps local soit par une avance globale en temps. Le schéma numérique est de type LAX-WENDROFF-NI avec un lissage implicite des résidus et nécessite une viscosité artificielle. La formulation de ce schéma est tridimensionnelle en volumes finis basée sur les nœuds du maillage (formulation « cell-vertex »). La turbulence est prise en compte par un modèle algébrique de BALDWIN-LOMAX. Dans la pratique et comme nous le verrons plus loin, l'utilisation d'une avance uniforme en temps, dans la version du logiciel AEROLOG disponible au début de ce travail de thèse, entraîne des coûts de calcul prohibitifs pour la résolution des équations de NAVIER-STOKES moyennées en régime instationnaire.

MBDA souhaitait donc ajouter à ce logiciel de calcul la possibilité de simuler des écoulements instationnaires turbulents. Il a donc été naturellement proposé la mise en place d'une technique de pas de temps fictif (« dual time stepping » en anglais) qui permet l'utilisation de grands pas de temps physiques, y compris pour des écoulements turbulents. Pour accroître l'efficacité et la robustesse de la méthode, il faut augmenter la vitesse de convergence du système en temps fictif qui assure l'évolution du système entre deux pas de temps physiques. On a donc recours à des schémas décentrés. MBDA souhaitait que la structure du code AEROLOG, qui utilise un schéma de LAX-WENDROFF mono-prédicteur, soit conservée au maximum. Dans la mesure où, avec le schéma de LAX-WENDROFF, le calcul du point courant nécessite la connaissance de l'écoulement sur les  $3 \times 3 \times 3$  points voisins (on parle de « support » compact ou « molécule » compacte) pour discrétiser au second ordre les termes convectifs, il était donc nécessaire d'avoir recours à un schéma décentré compact ; de plus, il était également essentiel de préserver une formulation basée sur la « distribution du résidu » des nœuds vers les centres des mailles, associée au schéma de NI. Il a donc été proposé d'utiliser un schéma original dit « à pas de temps caractéristique » développé au Laboratoire SINUMEF [21] et [22] et dont une version mono-prédicteur, basée sur le résidu, compatible avec la discrétisation adoptée dans AEROLOG, a également été récemment étudiée dans la thèse de F. FALISSARD [16] en vue de préserver la vorticité discrète et appliquée avec succès à la résolution des équations d'EULER en deux dimensions d'espace. Nous avons donc eu pour premier objectif dans notre travail de construire, de mettre en œuvre puis de valider une extension de ce schéma au cas des équations de NAVIER-STOKES moyennées tridimensionnelles. Dans la mesure où le traitement implicite, dit « de lissage implicite des résidus », actuellement disponible dans AEROLOG n'était pas compatible avec cette nouvelle phase explicite décentrée, nous avons dû également mettre en place un traitement implicite adapté. Toujours dans le souci de préserver au maximum les caractéristiques du code existant (et notamment la faible place en mémoire qu'il nécessite), nous avons retenu une phase implicite qualifiée « sans matrice », proposée initialement dans [46] et résolue par relaxation.

MBDA s'intéresse depuis quelques années aux problèmes d'optimisation et a acquis dans ce domaine une expérience sur des problèmes multi-objectifs et multi-points de vol. Cette activité a fait l'objet de contrats avec le Ministère de la Recherche ou le Ministère de la Défense. Le but de ces optimisations multidisciplinaires est la recherche des meilleurs paramètres de forme aérodynamique et de mécanique des structures de divers éléments du système (ailes, gouvernes, prises d'air...) afin d'en augmenter les performances pour une large gamme de paramètres de vol. C'est dans cette même optique qu'a été proposé le développement d'une chaîne d'optimisation d'aile de missile de croisière. En effet pour de tels missiles la conception des ailes est particulièrement soignée car elles contribuent pour une part importante à l'objectif de portée recherché. Contrairement aux avions civils, le domaine de vol de ces mis-

siles (plage d'incidences, facteurs de charge...) est étendu ; les phénomènes de couplage entre l'aérodynamique et la structure peuvent donc être plus importants et doivent être pris en compte dans le processus d'optimisation. Le second volet de ce travail a donc consisté à développer et mettre en œuvre une approche de dimensionnement optimal qui prenne en compte les phénomènes de déformation structurale de l'aile.

**Organisation du mémoire.** Ce mémoire est organisé en deux parties. Dans la première partie, nous traiterons de la simulation numérique d'écoulements instationnaires. Au chapitre 1, après avoir brièvement rappelé la modélisation utilisée, nous présenterons la construction des schémas de type LAX-WENDROFF et de la phase implicite de lissage des résidus associée. Nous analyserons ensuite dans l'espace de FOURIER les propriétés de ces méthodes avant de présenter leur mise en œuvre dans AEROLOG.

Au chapitre 2, nous présenterons la technique de pas de temps fictif utilisée pour la résolution des équations de NAVIER-SOKES instationnaires dans le cas général mais également pour le cas particulier des schémas de type LAX-WENDROFF pour lesquels les approximations en espace et en temps sont liées. Nous poursuivrons en introduisant le schéma à pas de temps caractéristique ainsi que la phase implicite sans matrice associée. Nous analyserons ensuite ces nouvelles méthodes dans l'espace de FOURIER et conclurons en présentant leur mise en œuvre dans AEROLOG.

Au chapitre 3, nous analyserons les résultats de calculs obtenus pour des écoulements stationnaires à l'aide des méthodes initialement présentes dans AEROLOG et de la nouvelle approche proposées au chapitre 2. Les résultats fournis seront comparés tant du point de vue de la précision et que de celui de l'efficacité.

Au chapitre 4, une analyse similaire sera conduite pour le cas de la simulation d'écoulements instationnaires.

La seconde partie du mémoire est consacrée à la conception optimale d'une aile de missile de croisière en incluant des effets aéroélastiques. Dans le chapitre 5, après avoir exposé les résultats d'un calcul préliminaire présentant des effets aéroélastiques, nous formulerons le problème de conception optimale en détaillant l'objectif à atteindre, les contraintes à respecter et les principes des méthodes de calcul retenues.

Dans le chapitre 6, on exposera le paramétrage de la configuration qui a été retenu avant de détailler la mise en œuvre des principes énoncés au chapitre précédent.

Le chapitre 7 conclura le mémoire en exploitant les premiers résultats obtenus grâce à la chaîne de calcul mise en place. Les principaux mécanismes physiques apparus dans les écoulements autour des configurations calculées seront analysés et des conclusions seront tirées sur la pertinence du paramétrage et des méthodes retenus au chapitre 6.

**Cadre contractuel.** Le travail présenté dans ce mémoire de thèse a été réalisé dans le cadre de deux contrats industriels passés entre MBDA (groupes EADS, BAE Systems et Finmeccanica) et la SERAM (Société d'Études et de Recherches de l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers).



Première partie

Simulation numérique d'écoulements  
instationnaires



# Chapitre 1

## Méthodes numériques disponibles dans AEROLOG

Dans ce premier chapitre, nous rappellerons brièvement les équations dites de NAVIER-STOKES moyennées qui sont à la base de la modélisation statistique des écoulements compressibles turbulents ainsi que les choix de fermeture de ce système par modélisation d'une viscosité turbulente. Nous exposerons ensuite les méthodes numériques disponibles dans AEROLOG pour résoudre ce système, en nous limitant à une formulation bidimensionnelle en maillage cartésien afin de rendre la présentation des principes de ces méthodes la plus claire possible. Nous détaillerons la construction de la phase explicite des schémas de type LAX-WENDROFF et un choix particulier de discrétisation spatiale, dite mono-prédicteur, qui conduit au schéma de NI, complété par une viscosité artificielle que l'on précisera également. Nous poursuivrons en présentant la phase implicite de lissage des résidus qui, en théorie, permet de rendre inconditionnellement stable le schéma numérique, ainsi que la méthode de résolution du système implicite par factorisation approchée. Nous nous placerons ensuite dans l'espace de FOURIER pour effectuer une analyse de stabilité linéaire du schéma implicite. Nous concluons ce chapitre par la présentation de la mise en œuvre tridimensionnelle, en volumes finis, et dans une formulation basée sur les nœuds du maillage, de ces méthodes dans le programme AEROLOG, en précisant les aspects les plus contraignants pour le choix de nouvelles méthodes à implémenter.

### 1.1 Modèles physiques

#### 1.1.1 Équations résolues

Les modèles physiques sur lesquels nous nous appuyerons pour résoudre les écoulements étudiés sont basés sur les équations de NAVIER-STOKES, en formulation eulérienne, dont on rappelle l'expression en annexe (cf. Annexe A). On y adjoint un certain nombre d'hypothèses qui tiennent compte de la nature du fluide – ici l'air – telles que la loi de FOURIER, l'hypothèse de STOKES et la loi d'état des gaz parfaits. L'ensemble de ces équations, auxquelles il faut adjoindre les conditions aux limites et initiales, constitue la fermeture des équations de NAVIER-STOKES. La résolution directe de ces équations discrétisées à l'aide de maillage adaptés, c'est-à-dire permettant de rendre compte de tous les phénomènes mis en jeu, consiste en ce qu'on appelle une « simulation numérique directe » (ou DNS en anglais). Ce type d'approche n'est cependant applicable qu'à des écoulements à nombre de REYNOLDS très modéré (jusqu'à quelques milliers). En effet, si le nombre de REYNOLDS devient trop élevé, il est alors nécessaire, pour représenter toutes les échelles de la turbulence, de recourir à des tailles

de maille qui rendent le calcul absolument hors de portée des moyens informatiques actuels. On peut donc avoir recours, de façon plus réaliste, à la simulation directe des plus grandes échelles de la turbulence avec modélisation des échelles plus petites dites de « de sous-maille ». Cependant, si cette stratégie permet de simuler avec succès des écoulements à des nombres de REYNOLDS de l'ordre de  $10^4$  voire  $10^5$ , elle ne permet pas encore de calculer, pour des coûts de simulation acceptables, les écoulements rencontrés en pratique dans l'aérodynamique des missiles avec des nombres de REYNOLDS de l'ordre de  $10^6$  ou  $10^7$ .

On a donc recours à une approche statistique qui consiste à décomposer toute grandeur instantanée comme la somme d'une grandeur moyenne et d'une grandeur fluctuante. Cette décomposition proposée pour la première fois par REYNOLDS conduit au système des équations de NAVIER-STOKES aux moyennes de REYNOLDS (en anglais RANS pour « REYNOLDS-Averaged NAVIER-STOKES »). Pour les écoulements en régime compressible considérés dans cette étude, les grandeurs moyennes sont pondérées par la masse volumique du fluide, suivant la démarche proposée par FAVRE. Si on applique les équations de NAVIER-STOKES aux grandeurs ainsi décomposées, on obtient un système formellement identique au précédent sur les grandeurs moyennes, mais dans lequel le tenseur des contraintes est augmenté d'un tenseur des contraintes turbulentes dit tenseur des contraintes de REYNOLDS  $\overline{\tau}^R$ , liées aux fluctuations de vitesse, et le flux de chaleur est augmenté d'un flux de chaleur turbulent lié aux fluctuations de vitesse et d'énergie interne. Afin de fermer le système obtenu, on modélise le tenseur de REYNOLDS et le flux de chaleur turbulent en reliant ces grandeurs turbulentes aux grandeurs moyennes. La modélisation linéaire classique, qui s'appuie sur l'hypothèse de BOUSSINESQ, donne aux composantes du tenseur de REYNOLDS (resp. du flux de chaleur turbulent) une forme similaire à celles du tenseur des contraintes visqueuses (resp. du flux de chaleur perdu ou gagné par conduction) présentées précédemment. L'annexe A présente l'établissement de ces équations moyennées avec les différentes hypothèses sur les grandeurs turbulentes introduites.

Finalement, on ramène la modélisation de la turbulence à la prédiction d'un coefficient de viscosité turbulente  $\mu_t$ . Les équations de NAVIER-STOKES sont donc formellement conservées mais on modifie l'expression du coefficient de viscosité dans le tenseur des contraintes visqueuses et le flux de chaleur :

$$\mu = \mu_{\text{mol}} + \mu_t \tag{1.1}$$

$$\lambda = \lambda_{\text{mol}} + \frac{\mu_t c_p}{Pr_t} \tag{1.2}$$

où  $\mu_{\text{mol}}$  et  $\lambda_{\text{mol}}$  sont les coefficients de viscosité et conductivité thermique moléculaires calculés en fonction de la température par la relation de SUTHERLAND. Ceci permet donc de traiter, avec les mêmes équations, des simulations numériques directes, pour des écoulements laminaires à faibles nombre de REYNOLDS notamment – on annule alors le coefficient de viscosité turbulente  $\mu_t$  – et des simulations des équations de NAVIER-STOKES moyennées, pour des écoulements à plus grands nombres de REYNOLDS. Les maillages alors nécessaires à de telles simulations sont beaucoup moins fins que ceux nécessaires à une simulation numérique directe, puisqu'une partie des phénomènes mis en jeu – les phénomènes turbulents – est modélisée et non plus simulée.

Les modèles de turbulence les plus simples sont les modèles algébriques qui prédisent directement la viscosité turbulente à partir du champ moyen sans avoir recours à aucune équation de transport. Ceci est particulièrement intéressant lorsque l'on cherche à réduire au maximum le temps de calcul car le coût du calcul de la viscosité turbulente est minime. Parmi ces modèles algébriques, le modèle de BALDWIN-LOMAX [1] est certainement le plus utilisé. L'annexe B détaille ce modèle de turbulence qui est mis en œuvre dans AEROLOG en présence de parois.

### 1.1.2 Cas d'un repère cartésien

Dans le cas où l'on projette le système des équations de NAVIER-STOKES moyennées dans une base cartésienne  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , on peut mettre ce système sous forme matricielle<sup>2</sup> :

$$\underline{w}_t + \underline{f}_x + \underline{g}_y + \underline{h}_z = 0 \quad (1.3)$$

où :  $\bullet_\circ$  représente la dérivée partielle de  $\bullet$  par rapport à  $\circ$  ;

$t$  représente la variable de temps ;

$\underline{w}$  représente le vecteur des variables conservatives ;

$\underline{f} = \underline{f}^E - \underline{f}^V$  (resp.  $\underline{g}$  et  $\underline{h}$ ) est le flux dans la direction  $\vec{x}$  (resp.  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ ) avec  $\underline{f}^E$  le flux non visqueux et  $\underline{f}^V$  le flux visqueux ;

$x$  (resp.  $y$  et  $z$ ) la variable spatiale associée à cette direction  $\vec{x}$  (resp.  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ ).

Ainsi, si on note  $u$  (resp.  $v$  et  $w$ ) la projection de  $\vec{v}$  selon la direction  $\vec{x}$  (resp.  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ ), on a :

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix}$$

$$\underline{f}^E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{bmatrix} \quad \underline{g}^E = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vH \end{bmatrix} \quad \underline{h}^E = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho wH \end{bmatrix}$$

$$\underline{f}^V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \lambda T_x + u\tau_{11} + v\tau_{12} + w\tau_{13} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau_{11} = \frac{2\mu}{3} (2u_x - v_y - w_z) \\ \tau_{12} = \mu (v_x + u_y) \\ \tau_{13} = \mu (w_x + u_z) \end{cases}$$

$$\underline{g}^V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ \tau_{23} \\ \lambda T_y + u\tau_{21} + v\tau_{22} + w\tau_{23} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau_{21} = \mu (v_x + u_y) \\ \tau_{22} = \frac{2\mu}{3} (2v_y - u_x - w_z) \\ \tau_{23} = \mu (w_y + v_z) \end{cases}$$

$$\underline{h}^V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \tau_{33} \\ \lambda T_z + u\tau_{31} + v\tau_{32} + w\tau_{33} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau_{31} = \mu (w_x + u_z) \\ \tau_{32} = \mu (w_y + v_z) \\ \tau_{33} = \frac{2\mu}{3} (2w_z - u_x - v_y) \end{cases}$$

Dans le cas où l'on annule  $\underline{f}^V$ ,  $\underline{g}^V$  et  $\underline{h}^V$ , on retrouve les équations d'EULER.

<sup>2</sup>Par souci de précision, nous noterons ici l'ordre des tenseurs manipulés ; les flèches placées au-dessus des variables indiqueront que ces variables sont spatiales (et non scalaires) ; les soulèvements successifs des variables indiquent l'ordre du tenseur dans l'espace des variables du problème. Ainsi  $\underline{w}$  est le vecteur des variables conservatives,  $\underline{\vec{F}}$  est le tenseur des flux qui se projette en  $(\underline{f}, \underline{g}, \underline{h})$  dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et  $\underline{\vec{J}}$  le tenseur jacobien des flux qui se projette en  $(\underline{A}, \underline{B}, \underline{C})$  dans cette même base.

## 1.2 Principes de discrétisation

Les équations d'EULER constituent un système hyperbolique de lois de conservation. Pour résoudre ces équations discrétisées, nous allons maintenant détailler une méthode qui exploite l'existence de matrices jacobiniennes diagonalisables. Une fois les termes convectifs discrétisés, le choix d'une discrétisation centrée des termes diffusifs permet de compléter la technique d'approximation des équations de NAVIER-REYNOLDS moyennées. Nous nous placerons désormais dans le cadre d'une approche en différences finies dans un maillage cartésien régulier bidimensionnel – on simplifie ainsi cette première présentation des méthodes numériques mises en œuvre dans notre étude – et nous écrivons le système des équations d'EULER<sup>3</sup> :

$$w_t + f_x + g_y = 0 \quad (1.4)$$

Nous allons maintenant détailler la méthode de discrétisation du système (1.4) mise en œuvre dans AEROLOG avant d'analyser ses limites, de façon théorique dans l'espace de FOURIER. L'extension de cette approche au cas des équations de NAVIER-STOKES moyennées sera présentée dans la dernière section de ce chapitre, en adoptant la formulation tridimensionnelle en volumes finis utilisée dans le logiciel AEROLOG.

Nous chercherons donc des solutions approchées de (1.4) dans un maillage cartésien régulier de pas d'espace  $\delta x$  et  $\delta y$  et nous utiliserons à cet effet les opérateurs aux différences  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  définis par :

$$\begin{cases} \delta_1 \phi_{i,j} = \phi_{i+\frac{1}{2},j} - \phi_{i-\frac{1}{2},j} \\ \delta_2 \phi_{i,j} = \phi_{i,j+\frac{1}{2}} - \phi_{i,j-\frac{1}{2}} \\ \mu_1 \phi_{i,j} = \frac{1}{2} (\phi_{i+\frac{1}{2},j} + \phi_{i-\frac{1}{2},j}) \\ \mu_2 \phi_{i,j} = \frac{1}{2} (\phi_{i,j+\frac{1}{2}} + \phi_{i,j-\frac{1}{2}}) \end{cases} \quad \forall (i,j) \in \left(\frac{1}{2}\mathbb{N}^*\right)^2 \quad (1.5)$$

où  $\phi_{i,j}$  désigne la valeur de la fonction de maillage  $\phi$  au point  $(i \times \delta x, j \times \delta y)$ .

### 1.2.1 Formulation semi-discrète

Les schémas de type LAX-WENDROFF (cf. [28] et [29]) s'appuient sur le développement de TAYLOR en temps :

$$w^{n+1} = w^n + \Delta t (w_t)^n + \frac{\Delta t^2}{2} (w_{tt})^n + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

où  $w^n$  désigne  $w(x, y, n \times \Delta t)$  et  $\Delta t$  le pas de temps. Puisque  $w$  est solution de (1.4), on a :

$$w_t = -(f_x + g_y)$$

et de façon similaire :

$$\begin{aligned} w_{tt} &= -(f_x + g_y)_t \\ &= -(f_t)_x - (g_t)_y \\ &= -(Aw_t)_x - (Bw_t)_y \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Dans cette section, ainsi que dans les suivantes où nous traiterons les équations d'EULER ou de NAVIER-STOKES dans une formulation en différences finies, il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ordre des tenseurs utilisés. Afin d'alléger les notations, nous omettons les soulèvements des variables indiquant l'ordre de ces tenseurs.

où l'on introduit les matrices jacobiennes des flux :

$$A = \frac{df}{dw}, \quad B = \frac{dg}{dw}$$

Finalement, on a pour expression de  $w_{tt}$  :

$$w_{tt} = [A(f_x + g_y)]_x + [B(f_x + g_y)]_y$$

On peut alors remplacer les dérivées en temps du développement de TAYLOR par des dérivées en espace pour obtenir :

$$\frac{\Delta w^n}{\Delta t} + f_x + g_y = \left[ A \frac{\Delta t}{2} (f_x + g_y) \right]_x + \left[ B \frac{\Delta t}{2} (f_x + g_y) \right]_y \quad (1.6)$$

où  $\Delta w^n = w^{n+1} - w^n$  est la nouvelle inconnue du problème. L'équation (1.6) constitue l'expression semi-discrète (seule la discrétisation temporelle est effectuée) du schéma de LAX-WENDROFF approchant (1.4) au deuxième ordre en temps et en espace.

L'équation (1.6) constitue l'expression semi-discrète (seule la discrétisation temporelle est effectuée) du schéma de LAX-WENDROFF qui approche (1.4) au deuxième ordre en temps. Nous allons maintenant préciser les choix de discrétisation spatiale centrée du deuxième ordre retenus dans AEROLOG.

### 1.2.2 Discrétisation spatiale

On peut reformuler (1.6) en faisant apparaître la notion de flux numérique :

$$\frac{\Delta w^n}{\Delta t} + \left[ f - \frac{\Delta t}{2} A (f_x + g_y) \right]_x + \left[ g - \frac{\Delta t}{2} B (f_x + g_y) \right]_y = 0$$

soit, en discrétisant la divergence des flux à l'aide des opérateurs  $\delta_1$  et  $\delta_2$  :

$$\frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t_{i,j}} + \frac{\delta_1 h_{i,j}^1}{\delta x} + \frac{\delta_2 h_{i,j}^2}{\delta y} = 0 \quad (1.7)$$

où :  $h_{i-\frac{1}{2},j}^1$  est la discrétisation centrée de  $\left[ f - A \frac{\Delta t}{2} (f_x + g_y) \right]_{i-\frac{1}{2},j}$

$h_{i,j-\frac{1}{2}}^2$  est la discrétisation centrée de  $\left[ g - B \frac{\Delta t}{2} (f_x + g_y) \right]_{i,j-\frac{1}{2}}$

$\Delta t_{i,j}$  est le pas de temps local au point de coordonnées  $(i \times \delta x, j \times \delta y)$ .

On récapitule sur la figure 1.1 les caractéristiques du maillage utilisé. Le formalisme utilisé ici consiste à stocker les variables et à calculer les inconnues du problème aux nœuds du maillage. On parle de formalisme basé sur les nœuds (ou « cell-vertex » en anglais). L'avantage d'une telle formulation réside dans le fait qu'il y a nécessairement des points sur les frontières des domaines de calcul. D'une part, les géométries complexes nécessitent souvent des maillages multidomaines et le raccord entre domaines de calcul est plus aisé lorsqu'il y a des points sur la frontière de raccord (pas de cellule fictive). D'autre part, cela permet d'imposer facilement les conditions aux limites fortes ou de DIRICHLET.

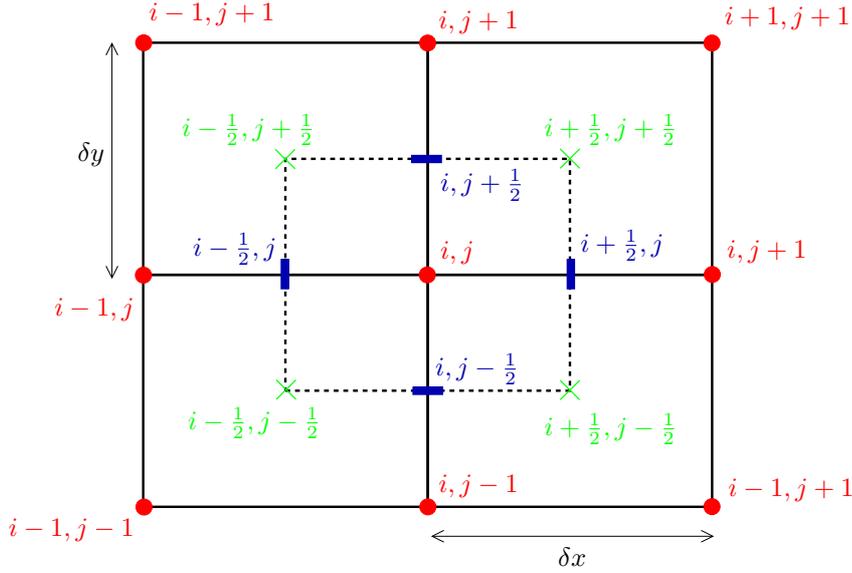


FIG. 1.1 – Maillage cartésien régulier utilisé en différences finies.

Pour construire les flux numériques discrets  $h_{i-\frac{1}{2},j}^1$  et  $h_{i,j-\frac{1}{2}}^2$  il existe deux possibilités. La discrétisation de LERAT [30] consiste à calculer le prédicteur  $R$ , expression discrète de  $(f_x + g_y)$ , directement sur la face de la cellule; elle est qualifiée d'approche multi-prédicteurs puisque l'expression de la discrétisation du prédicteur sera différente sur chaque face. L'approche de NI [38], qui est utilisée dans AEROLOG, consiste à utiliser la même discrétisation du prédicteur sur une cellule et d'effectuer des opérations de moyenne pour obtenir le flux numérique sur la face de la cellule de contrôle. Pour le schéma de NI, on a donc :

$$\begin{cases} h_{i-\frac{1}{2},j}^1 = \mu_2 \tilde{h}_{i-\frac{1}{2},j}^1 \\ \tilde{h}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^1 = \mu_1 \mu_2 f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \left( \frac{\Delta t}{2} A \right)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} R_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (1.8a)$$

et

$$\begin{cases} h_{i,j-\frac{1}{2}}^2 = \mu_1 \tilde{h}_{i,j-\frac{1}{2}}^2 \\ \tilde{h}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^2 = \mu_1 \mu_2 g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \left( \frac{\Delta t}{2} B \right)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} R_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (1.8b)$$

avec le prédicteur  $R$ , discrétisation centrée de  $(f_x + g_y)$  au noeud  $(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})$  du maillage :

$$R_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \left[ \frac{\delta_1 \mu_2 f}{\delta x} + \frac{\delta_2 \mu_1 g}{\delta y} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \quad (1.9)$$

On pourra évaluer les matrices jacobiennes  $A$  et  $B$  en ce noeud du maillage par exemple par :

$$A_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = A \left( \mu_1 \mu_2 w_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \quad \text{et} \quad B_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = B \left( \mu_1 \mu_2 w_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right)$$

On remarque que dans ce schéma interviennent deux pas de temps  $\Delta t$  différents. En effet, le pas de temps intervient dans l'expression de la dissipation du schéma (cf. formules (1.8)) et

ce pas de temps est calculé, comme les matrices jacobiennes intervenant dans cette dissipation, au centre des cellules de maillage  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ . La solution stationnaire du problème dépend donc de ce pas de temps. Le pas de temps apparaît également dans la discrétisation de type EULER retardé (premier terme de la formule (1.7) du terme  $w_t$ , qui assure l'avance en temps du schéma et il est alors nécessaire d'obtenir une évaluation du pas de temps au nœud  $(i, j)$  du maillage. Dans le cas d'une avance globale en temps, le pas de temps est uniforme ; dans le cas d'une technique de pas de temps local, nous verrons que, dans le programme AEROLOG, le pas de temps introduit dans la dissipation est calculé aux centres des cellules de maillage comme une fonction de l'état moyen à ce même point, faisant également intervenir le nombre *CFL* et la géométrie, et que le pas de temps aux nœuds du maillage est calculé comme la moyenne des pas de temps aux centres des cellules avoisinantes :

$$\begin{aligned}\Delta t_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \Delta t \left( \mu_1 \mu_2 w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right) \\ \Delta t_{i,j} &= (\mu_1 \mu_2 \Delta t)_{i,j}\end{aligned}$$

En rassemblant (1.7), (1.8) et (1.9), on peut aussi écrire le schéma de LAX-WENDROFF-NI sous la forme :

$$\frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t_{i,j}} + \mu_1 \mu_2 R_{i,j} = \frac{\delta_1 \mu_2}{\delta x} \left[ \frac{\Delta t}{2} AR \right]_{i,j} + \frac{\delta_2 \mu_1}{\delta y} \left[ \frac{\Delta t}{2} BR \right]_{i,j} \quad (1.10)$$

et on observe ainsi que ce schéma s'exprime en fonction du seul prédicteur  $R$  (évaluation du résidu  $(f_x + g_y)$  au nœud) et des jacobiens  $A$  et  $B$  ; la formulation de NI du schéma de LAX-WENDROFF peut donc être qualifiée de « mono-prédicteur ».

### 1.2.3 Viscosité artificielle

Comme nous allons le voir plus loin (cf. 1.4), la phase explicite du schéma de NI ainsi construite est non dissipative pour les grands nombres d'onde. Elle nécessite l'adjonction d'une viscosité artificielle pour corriger ce défaut d'amortissement de l'erreur. La viscosité artificielle construite dans AEROLOG se décompose en deux parties : une partie uniforme et une partie sensible aux discontinuités. Ainsi on ajoute à l'expression de la dissipation numérique (membre de droite) dans (1.10) le terme de viscosité artificielle suivant :

$$\delta_1 [\mathbf{v}^{\text{va1}} \times \delta_1 w]_{i,j} + \delta_2 [\mathbf{v}^{\text{va2}} \times \delta_2 w]_{i,j} \quad (1.11)$$

avec

$$\mathbf{v}_{i-\frac{1}{2},j}^{\text{va1}} = \frac{1}{\min(\delta x, \delta y)} \times \max \left[ T_{i-\frac{1}{2},j}^0, T_{i-1,j}^2, T_{i,j}^2 \right] \quad (1.12a)$$

$$\mathbf{v}_{i,j-\frac{1}{2}}^{\text{va2}} = \frac{1}{\min(\delta x, \delta y)} \times \max \left[ T_{i,j-\frac{1}{2}}^0, T_{i,j-1}^2, T_{i,j}^2 \right] \quad (1.12b)$$

avec

$$\begin{aligned}T_{i-\frac{1}{2},j}^0 &= C\mu_0 \times \mu_1 V_{i-\frac{1}{2},j}^{\text{car}} \\ T_{i,j-\frac{1}{2}}^0 &= C\mu_0 \times \mu_2 V_{i,j-\frac{1}{2}}^{\text{car}} \\ \text{et } T_{i,j}^2 &= C\mu_2 \times \left| \frac{(\delta_1^2 + \delta_2^2) \mathcal{S}^{\text{va}}}{\mathcal{S}^{\text{va}}} \right|_{i,j} \times V_{i,j}^{\text{car}}\end{aligned}$$

où  $V^{\text{car}}$  est la vitesse caractéristique  $V^{\text{car}} = \sqrt{\gamma r T} + \|\vec{v}\| = c(1 + Ma)$  avec  $c = \sqrt{\gamma r T}$  la vitesse du son,  $\mathcal{S}^{\text{va}}$  le senseur de discontinuités (dans AEROLOG on choisit également la vitesse caractéristique  $V^{\text{car}}$ ) et  $C\mu_0$  et  $C\mu_2$  les coefficients de viscosité artificielle au choix de l'utilisateur. Ces deux coefficients, choisis de façon empirique, sont le fruit de l'expérience de l'utilisateur sur de nombreux cas de calculs. Les coefficients habituels utilisés chez MBDA ont pour valeur  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$  et  $C\mu_2 = 2 \times 10^{-1}$ ; cela permet de corriger le défaut d'amortissement de l'erreur du schéma et ainsi d'éviter l'apparition d'oscillations dans l'écoulement, notamment au voisinage des discontinuités.

## 1.3 Traitement implicite

### 1.3.1 Construction du système implicite

Le schéma de LAX-WENDROFF-NI (1.10) peut être implicité afin d'augmenter la vitesse de convergence vers un état stationnaire. On choisit de construire une phase implicite simple à trois points par direction :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t_{i,j}} + \frac{\delta_1}{\delta x} [A\mu_1 \Delta w^n]_{i,j} + \frac{\delta_2}{\delta y} [B\mu_2 \Delta w^n]_{i,j} \\ - \frac{\delta_1}{2\delta x^2} [\Delta t A^2 \delta_1 \Delta w^n]_{i,j} - \frac{\delta_2}{2\delta y^2} [\Delta t B^2 \delta_2 \Delta w^n]_{i,j} = \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} \end{aligned} \quad (1.13)$$

où l'incrément explicite  $\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}$  est donné par les formules (1.10) et (1.11).

La phase implicite ainsi construite sera qualifiée de phase implicite par blocs puisque les coefficients de l'incrément  $\Delta w^n$  sont matriciels et non scalaires. La résolution d'une telle phase implicite exige dans tous les cas l'inversion, coûteuse, d'une matrice (de dimension  $4 \times 4$  pour un problème bidimensionnel).

On peut simplifier cette phase implicite par blocs en omettant les termes du premier ordre  $(\delta_1 A\mu_1 \Delta w^n)_{i,j} / \delta x$  et  $(\delta_2 B\mu_2 \Delta w^n)_{i,j} / \delta y$ , qui ne sont pas ici nécessaires à la stabilité du schéma numérique, et en remplaçant les matrices définies positives  $A^2$  et  $B^2$  par leurs rayons spectraux respectifs  $\rho(A^2)$  et  $\rho(B^2)$ . On opère ainsi un *lissage implicite des résidus* (LIR ou IRS en anglais) [33] et le système implicite obtenu est de la forme :

$$\frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t_{i,j}} - \frac{\delta_1}{2\delta x^2} [\Delta t \rho(A^2) \delta_1 \Delta w^n]_{i,j} - \frac{\delta_2}{2\delta y^2} [\Delta t \rho(B^2) \delta_2 \Delta w^n]_{i,j} = \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}}$$

Dans cette formule, on doit évaluer la quantité  $\Delta t \rho(A^2)$  (resp.  $\Delta t \rho(B^2)$ ) aux interfaces  $i + \frac{1}{2}, j$  (resp.  $i, j + \frac{1}{2}$ ) ; or l'état  $w$  n'est pas connu à ces points ; on introduit donc une moyenne à l'aide de l'opérateur  $\mu_2$  (resp.  $\mu_1$ ) pour calculer cette quantité, et uniquement celle-ci, au centre des cellules de maillage :

$$\frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t_{i,j}} - \frac{\delta_1}{2\delta x^2} [\mu_2 [\Delta t \rho(A^2)] \times \delta_1 \Delta w^n]_{i,j} - \frac{\delta_2}{2\delta y^2} [\mu_1 [\Delta t \rho(B^2)] \times \delta_2 \Delta w^n]_{i,j} = \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} \quad (1.14)$$

De plus, afin d'augmenter la robustesse du schéma ainsi constitué, on remplace les rayons spectraux des matrices jacobiennes dans chaque direction  $\rho(A)$  et  $\rho(B)$  par la vitesse caractéristique non directionnelle  $V^{\text{car}} = c + \|\vec{v}\|$  de l'écoulement ; cette grandeur majore en effet le rayon spectrale de la matrice jacobienne dans chaque direction. On peut également, pour cette

même raison, remplacer le coefficient  $1/2$  par un coefficient de « sur-implication »  $\beta \geq 1/2$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t_{i,j}} - \beta \frac{\delta_1}{\delta x^2} \left[ \mu_2 [\Delta t \times (V^{\text{car}})^2] \times \delta_1 \Delta w^n \right]_{i,j} \\ - \beta \frac{\delta_2}{\delta y^2} \left[ \mu_1 [\Delta t \times (V^{\text{car}})^2] \times \delta_2 \Delta w^n \right]_{i,j} = \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Comme nous allons le voir plus loin (cf. 1.4), cette implication rend le schéma inconditionnellement stable pour tous les nombres  $CFL$ . Les phases implicites (1.14) et (1.15) utilisent trois points par direction de maillage et les coefficients associés aux incréments inconnus en chacun de ces points sont scalaires. Il est donc possible de résoudre, de façon relativement efficace, ces systèmes à l'aide de techniques que nous rappelons dans le paragraphe qui suit.

### 1.3.2 Résolution numérique par factorisation approchée

Dans AEROLOG, le système (1.14) est résolu par factorisation approchée ou factorisation alternée par direction (ADI en anglais) [13]. Cette technique de résolution d'un système linéaire consiste à approcher l'opérateur implicite par une composition d'opérateurs unidirectionnels et ainsi décomposer le problème de résolution du système implicite (1.14) en plusieurs problèmes implicites unidirectionnels. L'intérêt de cette décomposition tient au fait que le système linéaire associé à chaque direction est tridiagonal (puisque la phase implicite fait intervenir trois points par direction de maillage) et qu'il existe un algorithme très efficace de résolution d'un système tridiagonal par factorisation LU de la matrice du système (algorithme de THOMAS). On peut récrire le système implicite sous la forme :

$$(\mathcal{I}d + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \Delta w_{i,j}^n = \Delta w_{i,j}^{\text{expl}} \quad (1.16)$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2} \delta_1 \left[ \rho(\dot{A}^2) \delta_1 \right] \\ \mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2} \delta_2 \left[ \rho(\dot{B}^2) \delta_2 \right] \end{cases}$$

où  $\dot{A} = \frac{A\Delta t}{\delta x}$  et  $\dot{B} = \frac{B\Delta t}{\delta y}$ .

On peut alors approcher (1.16) par la méthode de factorisation par direction :

$$\begin{cases} (\mathcal{I}d + \mathcal{L}_1) \Delta w_{i,j}^* = \Delta w_{i,j}^{\text{expl}} \\ (\mathcal{I}d + \mathcal{L}_2) \Delta w_{i,j}^n = \Delta w_{i,j}^* \end{cases} \quad (1.17)$$

Si on écrit cette méthode en une étape unique, on obtient :

$$(\mathcal{I}d + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2) \Delta w_{i,j}^n = \Delta w_{i,j}^{\text{expl}}$$

et le terme  $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$ , en  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ , constitue l'erreur de factorisation. Aux grands pas de temps, cette erreur de factorisation devient dominante par rapport aux autres termes, ce qui compromet l'efficacité de la méthode lorsque ces grands pas de temps sont utilisés.

## 1.4 Analyse théorique

Les méthodes numériques présentées plus haut sont analysées ici dans le cadre d'une analyse de stabilité linéaire de VON NEUMANN. Cette analyse consiste tout d'abord à linéariser le schéma autour d'un état  $w^0$ . En se basant sur la décomposition de la solution numérique du schéma en série de FOURIER, on introduit une solution harmonique :

$$w_{i,j}^n = \hat{w}^n e^{i(i\xi + j\eta)}$$

où  $\hat{w}^n$  est l'amplitude complexe au temps  $n\Delta t$ ,  $\xi = k_1\delta x$  et  $\eta = k_2\delta y$  sont les nombres d'onde réduits associés aux nombres d'onde  $k_1$  et  $k_2$  dans l'espace de FOURIER et  $i^2 = -1$  ; on introduit également  $\Delta\hat{w}^n = \hat{w}^{n+1} - \hat{w}^n$ . On calcule ensuite le facteur d'amplification  $G = \hat{w}^{n+1}/\hat{w}^n$ , qui traduit la capacité du schéma à amortir les erreurs.

Le schéma étudié peut être synthétisé sous la forme :

$$\mathcal{H}\Delta w_{i,j}^n = -\mathcal{K}w_{i,j}^n \quad (1.18)$$

où  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  sont les opérateurs associés respectivement à la phase implicite et à la phase explicite du schéma. En appliquant une transformation de FOURIER à (1.18), on obtient :

$$H(\xi, \eta) \Delta\hat{w}^n = -K(\xi, \eta) \hat{w}^n \quad (1.19)$$

où  $H$  et  $K$  sont les symboles de FOURIER des opérateurs  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$  et, de façon immédiate, on établit :

$$G = \text{Id} - H^{-1}K \quad (1.20)$$

La stabilité du schéma (1.18) est assurée si le rayon spectral du facteur d'amplification,  $\rho(G)$ , est de module inférieur ou égal à l'unité pour tout couple de nombres d'ondes réduits appartenant à  $[0, \pi]^2$ . De plus, pour tout  $(\xi, \eta) \neq (0, 0) [\pi]$ , on souhaite avoir  $|\rho(G)|$  aussi proche de zéro que possible afin d'assurer l'amortissement rapide des erreurs et une convergence efficace vers un état stationnaire.

### 1.4.1 Établissement du facteur d'amplification

#### 1.4.1.1 Expression des matrices $H$ et $K$

Pour obtenir l'expression des symboles de FOURIER  $H$  et  $K$  associés respectivement aux phases implicites scalaire (1.14) et factorisée (1.17) d'une part, et à la phase explicite d'autre part, nous allons utiliser les résultats préliminaires suivants. Les symboles de FOURIER associés aux opérateurs aux différences élémentaires  $\delta_1\mu_1$ ,  $\delta_2\mu_2$ ,  $\delta_1^2$  et  $\delta_2^2$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \widehat{\delta_1\mu_1} &= i \sin(\xi) & \widehat{\delta_2\mu_2} &= i \sin(\eta) \\ \widehat{\delta_1^2} &= 2(\cos(\xi) - 1) & \widehat{\delta_2^2} &= 2(\cos(\eta) - 1) \end{aligned}$$

ou encore, en introduisant  $z_1 = \frac{1}{2}(1 - \cos \xi) \in [0, 1]$  et  $z_2 = \frac{1}{2}(1 - \cos \eta) \in [0, 1]$  :

$$\widehat{\delta_1^2} = -4z_1 \quad \widehat{\delta_2^2} = -4z_2.$$

De plus, on établit facilement :

$$\mu_1^2 = \mathcal{I}d + \frac{\delta_1^2}{4} \quad \mu_2^2 = \mathcal{I}d + \frac{\delta_2^2}{4}$$

La phase explicite (1.10) du schéma numérique peut être linéarisée ; on obtient alors :

$$\begin{aligned} \Delta w_{i,j}^{\text{expl}} = & - \left[ \dot{A} \delta_1 \mu_1 \mu_2^2 w_{i,j}^n + \dot{B} \delta_2 \mu_2 \mu_1^2 w_{i,j}^n \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \dot{A}^2 \delta_1^2 \mu_2^2 w_{i,j}^n - \frac{1}{2} (\dot{A} \dot{B} + \dot{B} \dot{A}) \delta_1 \mu_1 \delta_2 \mu_2 w_{i,j}^n - \frac{1}{2} \dot{B}^2 \delta_2^2 \mu_1^2 w_{i,j}^n \right] \end{aligned} \quad (1.21)$$

où les matrices jacobiennes  $\dot{A} = A \Delta t / \delta x$  et  $\dot{B} = B \Delta t / \delta y$  sont constantes et dépendent de l'état moyen :  $\dot{A}(w^0)$  et  $\dot{B}(w^0)$ . La viscosité artificielle (1.11) est composée d'une partie non linéaire qui ne peut être retenue dans cette analyse ; seule la partie linéaire est retenue et on peut modifier (1.21) de façon à obtenir :

$$\begin{aligned} \Delta w_{i,j}^{\text{expl}} = & - \left[ \dot{A} \delta_1 \mu_1 \mu_2^2 w_{i,j}^n + \dot{B} \delta_2 \mu_2 \mu_1^2 w_{i,j}^n - \frac{\Delta t C \mu_0 V^{\text{car0}}}{\min(\delta x, \delta y)} (\delta_1^2 w_{i,j}^n + \delta_2^2 w_{i,j}^n) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \dot{A}^2 \delta_1^2 \mu_2^2 w_{i,j}^n - \frac{1}{2} (\dot{A} \dot{B} + \dot{B} \dot{A}) \delta_1 \mu_1 \delta_2 \mu_2 w_{i,j}^n - \frac{1}{2} \dot{B}^2 \delta_2^2 \mu_1^2 w_{i,j}^n \right] \end{aligned} \quad (1.22)$$

soit :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \dot{A} \delta_1 \mu_1 \mu_2^2 + \dot{B} \delta_2 \mu_2 \mu_1^2 - \frac{\Delta t C \mu_0 V^{\text{car0}}}{\min(\delta x, \delta y)} (\delta_1^2 + \delta_2^2) \\ & - \frac{1}{2} \dot{A}^2 \delta_1^2 \mu_2^2 - \frac{1}{2} (\dot{A} \dot{B} + \dot{B} \dot{A}) \delta_1 \mu_1 \delta_2 \mu_2 - \frac{1}{2} \dot{B}^2 \delta_2^2 \mu_1^2 \end{aligned} \quad (1.23)$$

En appliquant la transformation de FOURIER à (1.23), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \left[ 2 \dot{A}^2 z_1 (1 - z_2) + \frac{1}{2} (\dot{A} \dot{B} + \dot{B} \dot{A}) \sin(\xi) \sin(\eta) + 2 \dot{B}^2 z_2 (1 - z_1) \right. \\ & \left. + 4 \frac{\Delta t C \mu_0 V^{\text{car0}}}{\min(\delta x, \delta y)} (z_1 + z_2) \right] + i \left[ \dot{A} \sin(\xi) (1 - z_2) + \dot{B} \sin(\eta) (1 - z_1) \right] \end{aligned} \quad (1.24)$$

L'opérateur implicite exact associé à la phase implicite de lissage des résidus (1.14) s'écrit :

$$\mathcal{H} = \mathcal{I}d + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$

Pour écrire l'opérateur correspondant dans le domaine de FOURIER, nous allons utiliser les symboles de FOURIER associés aux opérateurs directionnels élémentaires  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  :

$$\mathbf{H} = \text{Id} + \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \quad (1.25)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1 = 2\rho(\dot{A}^2) z_1 \text{Id} \\ \mathbf{L}_2 = 2\rho(\dot{B}^2) z_2 \text{Id} \end{cases}$$

Si l'on préfère étudier la phase implicite mettant en jeu la vitesse caractéristique non directionnelle  $V^{\text{car}}$  de l'écoulement plutôt que les rayons spectraux (cf. formule (1.15)) et le coefficient de sur-implication  $\beta$ , on utilise alors :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1 = 4\beta \times (V^{\text{car}} \Delta t / \delta x)^2 z_1 \text{Id} \\ \mathbf{L}_2 = 4\beta \times (V^{\text{car}} \Delta t / \delta y)^2 z_2 \text{Id} \end{cases}$$

Lorsque cette phase implicite est résolue par une méthode de factorisation par direction, le schéma (1.17) peut se mettre sous la forme (1.18) et l'opérateur implicite devient :

$$\mathcal{H}^{\text{FA}} = (\mathcal{I}d + \mathcal{L}_1) (\mathcal{I}d + \mathcal{L}_2) = \mathcal{I}d + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$$

Le symbole de FOURIER associé s'écrit donc :

$$\mathbf{H}^{\text{FA}} = \text{Id} + \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \quad (1.26)$$

Que la résolution de la phase implicite soit exacte (1.25) ou approchée (1.26), le facteur d'amplification associé au schéma est toujours donné par (1.20).

### 1.4.1.2 Modes non amortis

Nous allons étudier numériquement le facteur d'amplification dont l'expression vient d'être établie. Cependant, on peut d'ores et déjà faire une remarque importante. Le schéma de LAX-WENDROFF-NI (1.10), linéarisé autour de  $w^0$ , peut se récrire :

$$\Delta w_{i,j}^n = -\mu_1\mu_2 (\Delta t \times R)_{i,j}^n + \left( \frac{1}{2}\dot{A}\delta_1\mu_2 + \frac{1}{2}\dot{B}\delta_2\mu_1 \right) (\Delta t \times R)_{i,j}^n$$

soit, en tenant compte de l'expression linéarisée  $\Delta t \times R = \dot{A}\delta_1\mu_2 w + \dot{B}\delta_2\mu_1 w$  :

$$\Delta w_{i,j}^n = \left( -\mu_1\mu_2 + \frac{1}{2}\dot{A}\delta_1\mu_2 + \frac{1}{2}\dot{B}\delta_2\mu_1 \right) \left( \dot{A}\delta_1\mu_2 w + \dot{B}\delta_2\mu_1 w \right)_{i,j}^n \quad (1.27)$$

et le symbole de FOURIER associé à cette phase explicite peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} K = & \left[ \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) - i\dot{A} \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) - i\dot{B} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \\ & \times \left[ 2i\dot{A} \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) + 2i\dot{B} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

On constate donc que  $K = 0$  pour  $(\xi, \eta) = (0, 0) [2\pi]$ , ce qui traduit la consistance du schéma, mais aussi pour  $(\xi, \eta)$  tels que

$$\dot{A} \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) + \dot{B} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) = 0 \quad (1.28)$$

Pour les nombres d'onde vérifiant (1.28), on a  $G = \text{Id}$  et  $\rho(G) = 1$ . Cela signifie que ces modes d'erreur ne sont pas amortis par le schéma de LAX-WENDROFF-NI. Il sera donc nécessaire d'ajouter à la phase explicite de ce schéma une viscosité artificielle qui permette la convergence vers l'état stationnaire. Cet inconvénient déjà connu de l'approche de LAX-WENDROFF-NI peut être corrigé en ayant recours à l'approche multi-prédicteurs proposée par LERAT qui, contrairement à celle de NI utilisée dans AEROLOG, est dissipative au sens de KREISS ; dans ce cas, tous les modes d'erreur sont alors amortis [30].

Nous nous proposons maintenant d'analyser numériquement le facteur d'amplification du schéma de LAX-WENDROFF-NI afin de mettre en évidence les principales caractéristiques de ce schéma, en termes de stabilité et surtout d'efficacité.

### 1.4.2 Résultats de stabilité

L'analyse du facteur d'amplification qui suit est effectuée pour les équations d'EULER linéarisées. Les paramètres d'étude qui s'offrent à nous sont donc :

- le nombre de MACH  $Ma$  ;
- la direction de l'écoulement  $v/u$  ;
- le rapport d'aspect des mailles du maillage cartésien  $\delta y/\delta x$  ;
- le nombre  $CFL$  ;
- le coefficient de viscosité artificielle  $C\mu_0$  ;
- le choix du coefficient implicite : rayon spectral ou vitesse caractéristique ;
- le choix du coefficient de sur-implicite  $\beta$  ;
- le choix de la méthode de résolution de la phase implicite : résolution directe ou factorisation approchée.

Nous allons choisir un écoulement de référence. Cet écoulement sera transsonique à  $Ma = 0,8$ , diagonal par rapport au maillage ( $u = v$ ) et le maillage sera uniforme ( $\delta x = \delta y$ ). De plus, on choisira les paramètres numériques suivants :  $CFL = 1$ ,  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\beta = 0,8$  et une phase implicite de lissage des résidus construite à partir de la vitesse caractéristique et résolue par factorisation par direction. Ces choix constituent un cas relativement représentatif des applications visées, voire un peu sévère pour la direction de l'écoulement notamment. À partir de cet écoulement, nous allons faire varier certains paramètres séparément : choix de coefficient implicite et coefficient de sur-implication, coefficient de viscosité artificielle, nombre  $CFL$  et méthode de résolution du système implicite, rapport d'aspect et direction d'advection.

Le pas de temps est calculé par la formule :

$$\Delta t = CFL \frac{\min(\delta x, \delta y)}{c \times (1 + Ma)}$$

de sorte que les matrices  $\dot{A}$  et  $\dot{B}$  ne dépendent que de l'état physique, du rapport d'aspect et du nombre  $CFL$ .

Nous allons maintenant étudier les plages d'isovaleurs de  $\rho(G)$ , tracées dans le plan  $(\xi, \eta)$  des nombres d'ondes, pour différents choix des paramètres numériques<sup>4</sup>. De plus, pour faciliter la comparaison entre plusieurs figures, nous tracerons également les valeurs du facteur d'amplification suivant la diagonale  $\xi = \eta$  du plan des nombres d'ondes. Nous rappelons que, pour assurer une efficacité idéale, le facteur d'amplification devrait être nul partout sauf pour  $(\xi, \eta) = (0, 0)$  [ $2\pi$ ].

**Vitesse caractéristique et sur-implication.** Nous avons tout d'abord effectué la comparaison entre la phase implicite de lissage des résidus telle qu'elle apparaît dans le schéma théorique (1.14) avec des coefficients faisant intervenir les rayons spectraux des matrices jacobiniennes (cf. figure 1.2(a)) et telle qu'elle est implémentée dans AEROLOG (1.14) (cf. figure 1.2(d)) en mettant en évidence les effets du coefficient de sur-implication  $\beta$  (cf. figure 1.2(b)) et du choix de la vitesse caractéristique  $V^{\text{car}}$  dans la phase implicite (cf. figure 1.2(c)). Dans tous ces cas, on se place dans le cas d'un écoulement avec un nombre de MACH  $Ma = 0,8$  dont la vitesse fait un angle de  $45^\circ$  avec l'axe horizontal ( $v/u = 1$ ), sur un maillage cartésien uniforme  $\delta y/\delta x = 1$ . On utilise un nombre  $CFL = 1$  et un coefficient de viscosité artificielle  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$  qui correspondent aux valeurs habituellement utilisées dans AEROLOG ; la phase implicite est résolue par factorisation approchée par direction.

Ces deux choix d'une sur-implication et d'une majoration des coefficients implicites faits dans AEROLOG se justifient par le surcroît de robustesse que cela apporte au programme ; mais la robustesse d'un logiciel de calcul résolvant les équations de NAVIER-STOKES est essentiellement liée à des phénomènes non linéaires. On ne verra donc pas dans cette analyse les effets bénéfiques de ces choix, mais uniquement la perte d'efficacité qu'ils entraînent.

Sur la figure 1.2, et en particulier (e) et (f), on peut tout d'abord noter que, quel que soit le cas étudié, le rayon spectral de la matrice d'amplification  $\rho(G)$  est très proche de l'unité ; on en déduit que la vitesse de convergence du schéma vers l'état stationnaire, c'est à dire sa capacité à amortir les erreurs, sera dans tous les cas très lente. C'est pour cette raison que l'on représente la coupe (f) avec une échelle  $[0,98 ; 1]$ . Comme annoncé ci-dessus, on observe que l'introduction de la sur-implication et le choix de la vitesse caractéristique dans la phase implicite diminuent encore les capacités de convergence du schéma, en particulier pour les

<sup>4</sup>Les échelles utilisées seront indépendantes les unes des autres afin de représenter au mieux la surface obtenue pour chaque jeu de paramètres.

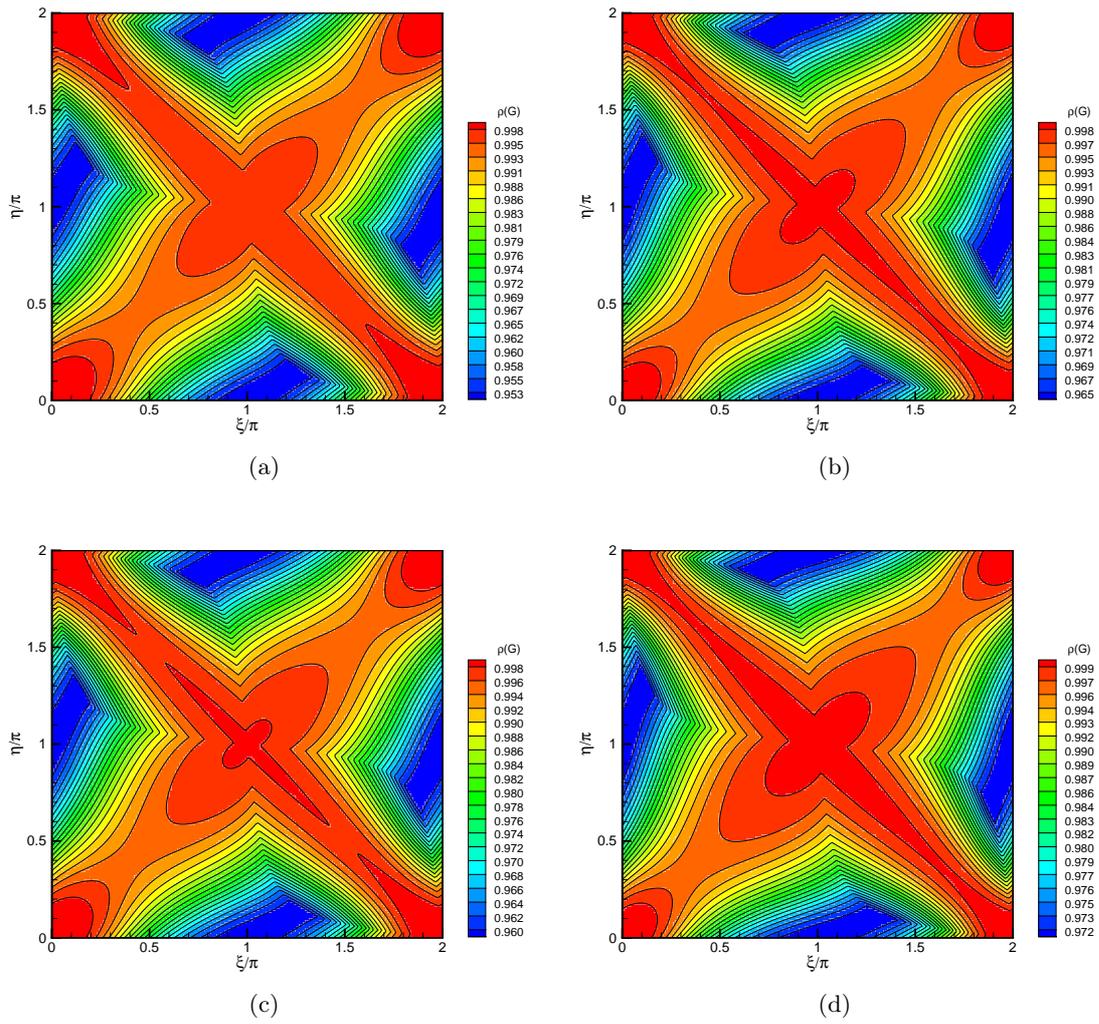


FIG. 1.2 – Suite de la figure page 21.

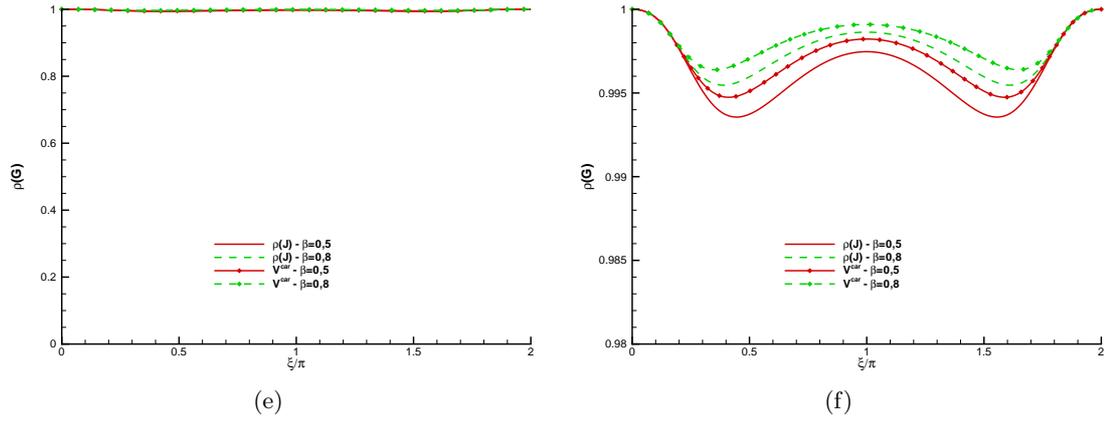


FIG. 1.2 – Rayon spectral de la matrice d’amplification associée au schéma de LAX-WENDROFF-NI à  $Ma = 0,8$   $v/u = 1$ ,  $\delta y/\delta x = 1$ ,  $CFL = 1$ ,  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$ , lissage implicite des résidus résolu par factorisation par direction :

- (a) utilisation des rayons spectraux  $\rho(A)$  et  $\rho(B)$  et  $\beta = 0,5$  (schéma théorique (1.14)) ;
- (b) utilisation des rayons spectraux  $\rho(A)$  et  $\rho(B)$  et  $\beta = 0,8$  ;
- (c) utilisation de la vitesse caractéristique  $V^{\text{car}}$  et  $\beta = 0,5$  ;
- (d) utilisation de la vitesse caractéristique  $V^{\text{car}}$  et  $\beta = 0,8$  (utilisé dans AEROLOG (1.15)) ;
- (e) coupe selon la ligne  $\xi = \eta$  ;
- (f) détail de (e).

longueurs d’onde intermédiaires ( $\xi \approx \pi/2, \eta \approx \pi/2$ ). La combinaison de ces deux choix fournit un schéma pour lequel les propriétés d’amortissement sont relativement uniformes quelles que soient les longueurs d’onde et qui entraîne une convergence lente de la solution vers l’état stationnaire.

**Viscosité artificielle.** Comme nous l’avons déjà précisé plus haut (cf. section 1.2.3 et paragraphe 1.4.1.2), le schéma de LAX-WENDROFF-NI n’amortit pas les grandes longueurs d’onde  $(\xi, \eta) = (\pi, \pi)$  ; il nécessite donc l’adjonction d’une viscosité artificielle. La figure 1.3 montre les résultats de l’analyse de stabilité pour différentes valeurs du coefficient de viscosité artificielle linéaire. On obtient, comme prévu au paragraphe 1.4.1.2, le non amortissement des hautes fréquences ( $\xi = \eta = \pi$ ) qui se traduit par un facteur d’amplification égal à l’unité (a). La valeur  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$  correspond à la valeur utilisée habituellement dans AEROLOG pour des écoulements transsoniques turbulents. On observe (b) que cette valeur permet juste de s’affranchir du défaut précédent concernant l’amortissement aux hautes fréquences puisque  $\rho(G)(\pi, \pi) = 0,999\,093$  ; cependant elle ne modifie pas profondément le comportement du schéma, en apportant un facteur d’amortissement quasiment identique à celui du cas précédent. Enfin, un coefficient de viscosité artificielle plus élevé  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-2}$  laisse augurer une vitesse de convergence meilleure ; cependant, si on choisit des valeurs trop élevées pour ce coefficient, la solution obtenue est alors lissée et sa précision est dégradée.

**Phase implicite.** Les calculs suivants ont consisté à mettre en évidence le rôle du nombre  $CFL$  et de la méthode de résolution du lissage implicite des résidus. Ainsi, pour un écoulement avec un nombre de MACH  $Ma = 0,8$  dont la vitesse fait un angle de  $45^\circ$  avec l’axe horizontal ( $v/u = 1$ ), sur un maillage cartésien uniforme  $\delta y/\delta x = 1$ , un coefficient de viscosité artificielle standard  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$ , un coefficient de sur-implication  $\beta = 0,8$  et une phase implicite

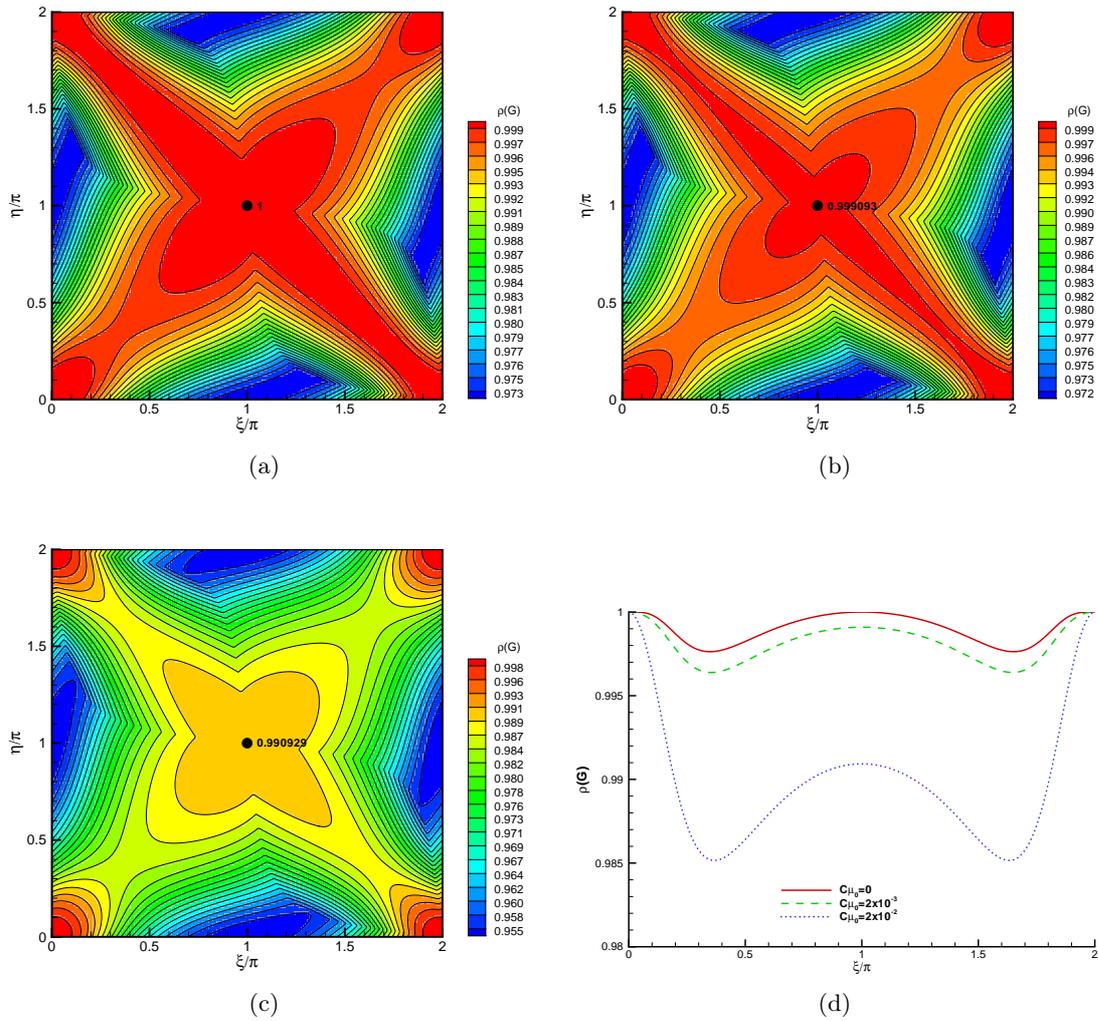


FIG. 1.3 – Rayon spectral de la matrice d'amplification associée au schéma de LAX-WENDROFF-NI à  $Ma = 0,8$ ,  $v/u = 1$ ,  $\delta y/\delta x = 1$ ,  $CFL = 1$ ,  $\beta = 0,8$  lissage implicite des résidus avec vitesse caractéristique résolu par factorisation par direction :

(a)  $C_{\mu_0} = 0$ ; (b)  $C_{\mu_0} = 2 \times 10^{-3}$ ; (c)  $C_{\mu_0} = 2 \times 10^{-2}$ ; (d) coupe selon la ligne  $\xi = \eta$ .

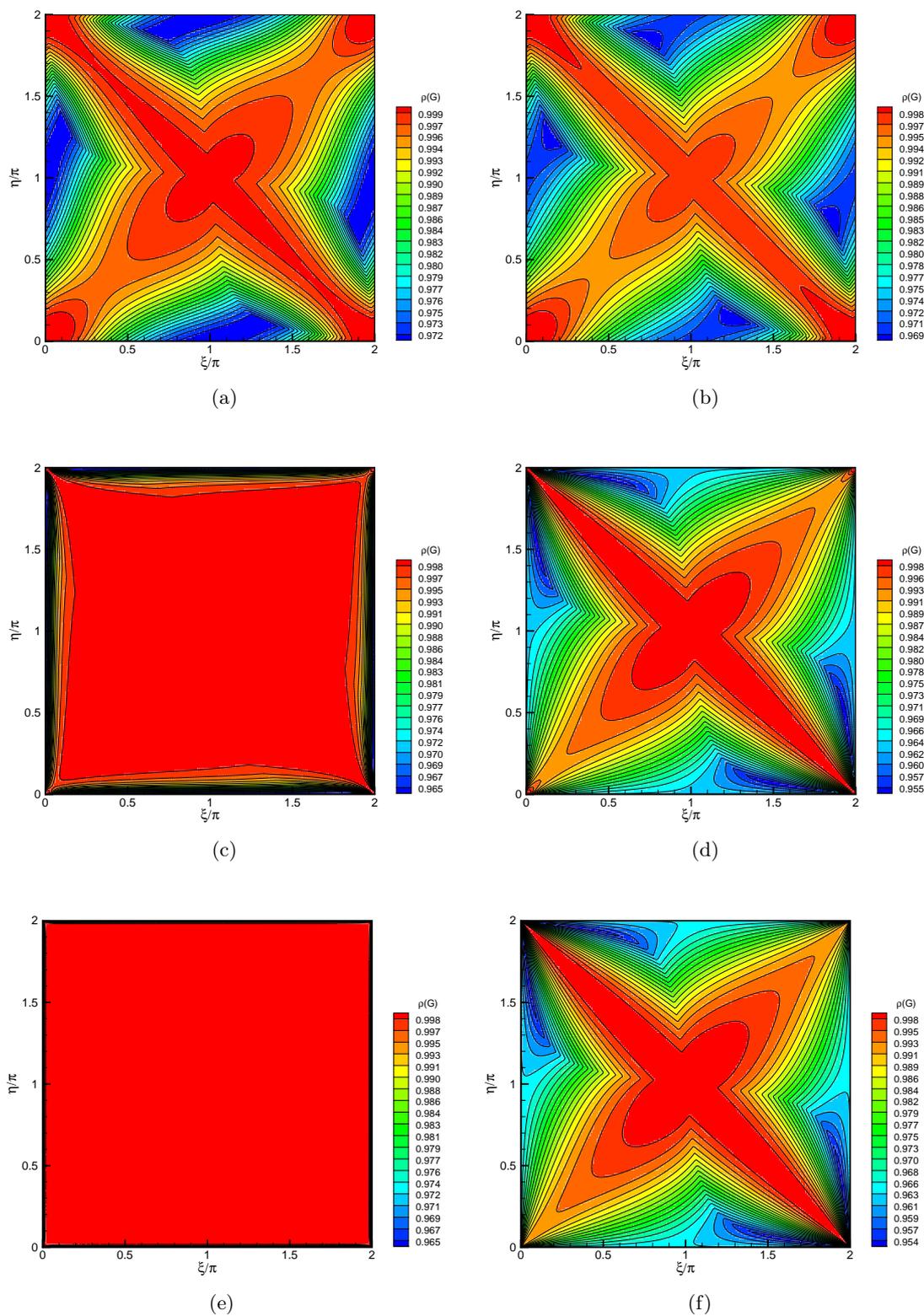


FIG. 1.4 – Suite de la figure page 24.

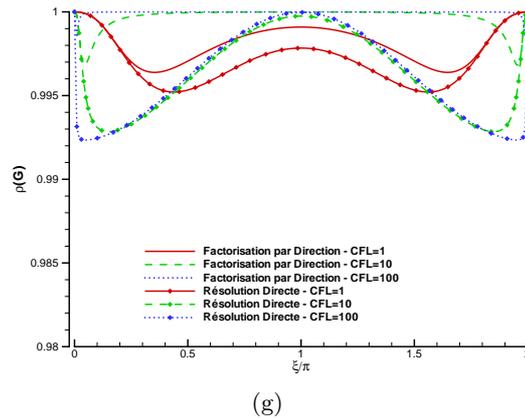


FIG. 1.4 – Rayon spectral de la matrice d’amplification associée au schéma de LAX-WENDROFF-NI à  $Ma = 0,8$ ,  $v/u = 1$ ,  $\delta y/\delta x = 1$ ,  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\beta = 0,8$  lissage implicite des résidus avec vitesse caractéristique :

- (a)  $CFL = 1$ , factorisation par direction ;
- (c)  $CFL = 10$ , factorisation par direction ;
- (e)  $CFL = 100$ , factorisation par direction ;
- (b)  $CFL = 1$ , résolution directe ;
- (d)  $CFL = 10$ , résolution directe ;
- (f)  $CFL = 100$ , résolution directe ;
- (g) coupe selon la ligne  $\xi = \eta$ .

utilisant la vitesse caractéristique, on a choisit trois nombres  $CFL$  (1, 10 et 100) et on a comparé la résolution du système implicite (1.16) par factorisation approchée par direction (cf. figure 1.4(a)-(e)) ou par inversion directe (cf. figure 1.4(b)-(f)).

On note alors que, à partir d’un nombre  $CFL$  compris entre 1 et 10, l’efficacité de la factorisation par direction est quasiment nulle ( $\rho(G) \approx 1$ ) alors que par une résolution directe, l’efficacité de la phase implicite croît avec le nombre  $CFL$ . On en déduit que la résolution par factorisation approchée par direction, qui permet de n’inverser que des systèmes tridiagonaux, est plus efficace lorsqu’elle est utilisée avec des nombres  $CFL$  de l’ordre de l’unité. Cependant, pour ces deux méthodes de résolution du système implicite, les erreurs à haute fréquence  $(\xi, \eta) \approx (\pi, \pi)$  sont moins amorties à grand nombre  $CFL$  ; en effet, l’augmentation du nombre  $CFL$  tend à neutraliser l’effet de la viscosité artificielle ; c’est ce qui ressort du développement limité de l’expression de la matrice d’amplification  $G$  quand  $CFL$  tend vers l’infini (ce calcul est détaillé dans le rapport [24]).

**Rapport d’aspect et direction de l’écoulement.** Alors que nous avons jusque-là analysé des écoulements sur des maillages cartésiens uniformes tels que  $\delta y/\delta x = 1$ , et avec des vitesses diagonales par rapport à ce maillage ( $v/u = 1$ ), nous allons étudier le comportement de ces méthodes numériques sur des mailles ayant un rapport d’aspect faible ( $\delta y/\delta x \ll 1$ ), avec une vitesse portée quasiment intégralement par l’axe horizontal ( $v/u \ll 1$ ) ; de tels cas d’écoulement se présentent, par exemple, à proximité des parois dans les maillages adaptés à la résolution des équations de NAVIER-STOKES. Nous étudions ici la stabilité des équations d’EULER, mais en dehors de la couche limite, alors que le rapport d’aspect des mailles est souvent encore faible et la direction vitesse essentiellement parallèle à la paroi, ces équations constituent une bonne approximation des équations de NAVIER-STOKES.

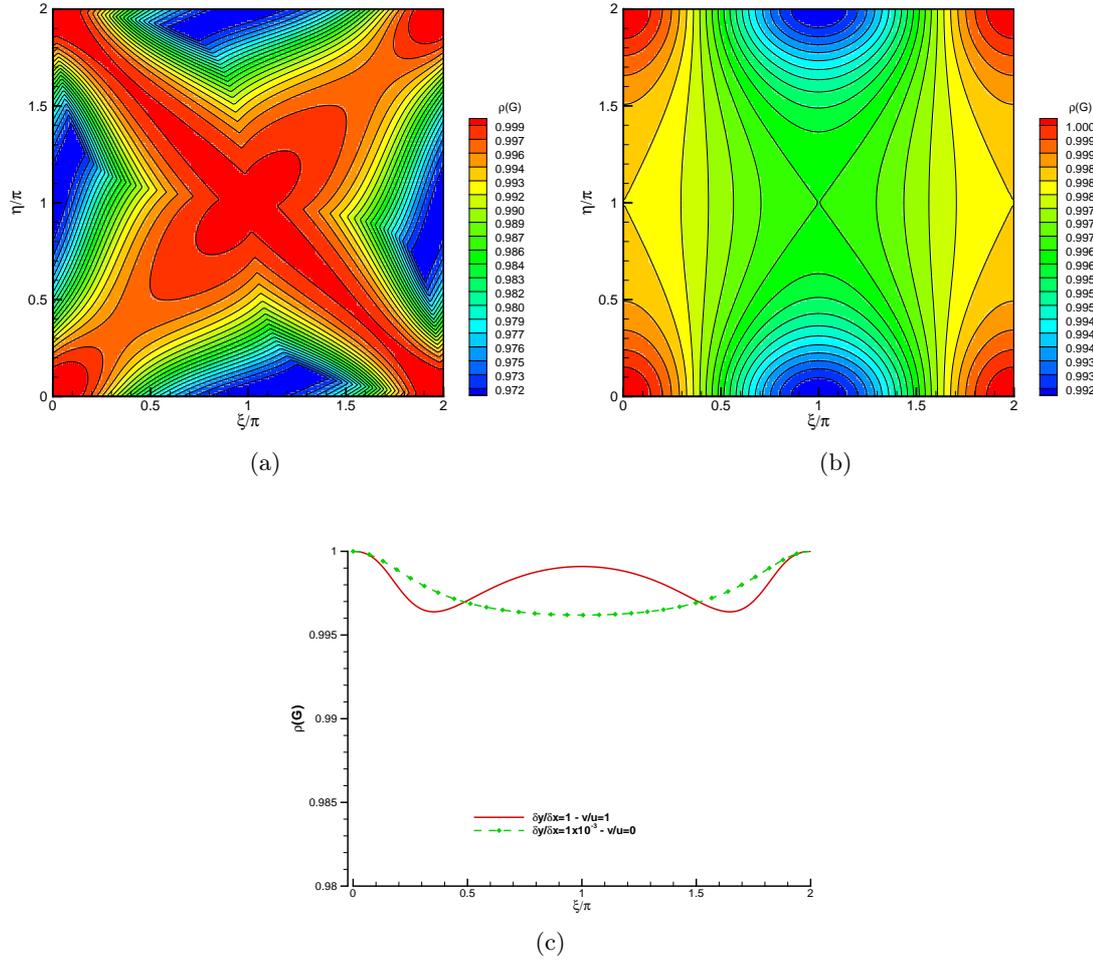


FIG. 1.5 – Rayon spectral de la matrice d’amplification associée au schéma de LAX-WENDROFF-NI à  $Ma = 0,8$   $CFL = 1$ ,  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\beta = 0,8$  lissage implicite des résidus avec vitesse caractéristique résolu par factorisation par direction :

(a)  $v/u = 1$  et  $\delta y/\delta x = 1$ ; (b)  $v/u = 0$  et  $\delta y/\delta x = 10^{-3}$ ; (c) coupe selon la ligne  $\xi = \eta$ .

La figure 1.5(c) montre qu’avec un écoulement quasiment unidirectionnel, on conserve le même niveau d’amortissement général que précédemment, en l’améliorant même pour les erreurs à hautes fréquences. Cependant une observation attentive des figures 1.5(a)-(c) révèle que dans le cas de l’écoulement unidirectionnel, le facteur d’amortissement est presque uniforme dans le plan des nombres d’onde.

On note finalement que les méthodes numériques implémentées dans AEROLOG ont une faible capacité à amortir les erreurs. Les différents choix qui ont été faits dans le but d’augmenter la robustesse du programme de calcul affectent légèrement le facteur d’amortissement, mais c’est essentiellement de la viscosité artificielle, nécessaire pour amortir les hautes fréquences, que dépendent finalement les capacités de convergence de ces méthodes. On notera bien, enfin, que l’analyse de stabilité confirme les choix de nombres  $CFL$  proches de l’unité habituellement faits dans AEROLOG, puisque c’est avec de telles valeurs que la méthode de résolution du système implicite par factorisation approchée par direction est la plus efficace.

## 1.5 Mise en œuvre dans AEROLOG

### 1.5.1 Organisation du logiciel

Nous allons présenter ici la mise en œuvre des méthodes introduites plus haut, dans le logiciel de calcul AEROLOG de MBDA. Comme nous en avons déjà parlé dans l'introduction de ce mémoire, ce programme de calcul a été développé chez MATRA puis MBDA et a fait l'objet de plusieurs communications (cf. [6] et [5] notamment). Les méthodes numériques implémentées ont une formulation tridimensionnelle en volumes finis et multidomaine, basée sur les nœuds du maillage (« cell-vertex » en anglais). Ce logiciel est écrit en langage FORTRAN 77 avec des directives de parallélisation en OpenMP. Les sous-programmes sont classés en modules ; le module `class` regroupe les sous-programmes qui codent les méthodes numériques ; il y a ensuite, pour chaque modèle physique différent (équations d'EULER, de NAVIER-STOKES avec modèle de turbulence de BALDWIN-LOMAX...), un module particulier. Ainsi le module `nsalgbpg` regroupe les sous-programmes qui codent le modèle d'équations de NAVIER-STOKES avec un modèle de turbulence algébrique de BALDWIN-LOMAX pour un gaz parfait. Cette décomposition en modules permet donc à AEROLOG de traiter indifféremment  $n$  équations de lois de conservation, les sous-programmes du module `class` faisant appel, lorsque c'est nécessaire, aux sous-programmes du modèle utilisé afin d'obtenir l'expression des flux, des termes source ou bien encore des variables primitives du problème.

### 1.5.2 Repères relatif et absolu

Le logiciel de calcul AEROLOG est dédié au calcul d'écoulements aérodynamiques autour de missiles ; certains de ces missiles sont stabilisés en auto-rotation. Il existe donc deux repères intéressants qui se définissent assez naturellement :

- le repère dit « absolu », généralement le repère terrestre supposé galiléen ;
- le repère dit « relatif », lié à l'engin, ayant généralement pour origine le centre de gravité  $G$  de l'engin ; ce repère est en mouvement par rapport au repère « absolu », soit en translation uniforme à la vitesse  $\vec{v}_0 = \vec{v}_G$  et il est alors lui-même galiléen, soit en translation et rotation composées ; dans les deux cas, le maillage est fixe dans ce repère.

Dans AEROLOG, on choisit donc des inconnues du problème qui sont liées au repère absolu, mais exprimées dans le repère relatif. Ainsi, la vitesse au loin est nulle et celle de l'engin est  $\vec{v}_G$ , mais on utilise la projection de ce vecteur dans le repère relatif, ce qui permet de simplifier les expressions faisant intervenir les éléments vectoriels de géométrie (vecteurs normaux aux faces de cellules...) qui sont naturellement constants dans ce repère relatif. Pour plus de précision sur ce point, on pourra se reporter à la thèse de Ch. BOREL [5] au chapitre II.2.

### 1.5.3 Principe de distribution

Le schéma numérique implémenté dans AEROLOG est l'extension tridimensionnelle en maillage curviligne du schéma de LAX-WENDROFF-NI décrit précédemment (cf. section 1.2) dans le contexte simplifié d'un maillage cartésien régulier en deux dimensions d'espace. Ce schéma de NI peut être vu comme une formule de « distribution » du résidu aux différents nœuds du maillage. Précisément, la formulation étant basée sur les nœuds du maillage, le support du schéma pour le calcul de l'évolution  $\Delta w_{i,j,k}^n$  inclut les 27 sommets des 8 cellules entourant le nœud d'indices  $(i, j, k)$  comme le montre la figure 1.6. La formulation du schéma due à NI consiste à calculer les éléments nécessaires au schéma sur une cellule de maillage puis à « distribuer » sur les nœuds qui définissent cette cellule. En effectuant le bilan explicite (1.32b), on ne se place pas du point de vue des nœuds  $(i, j, k)$  du maillage, mais du point de

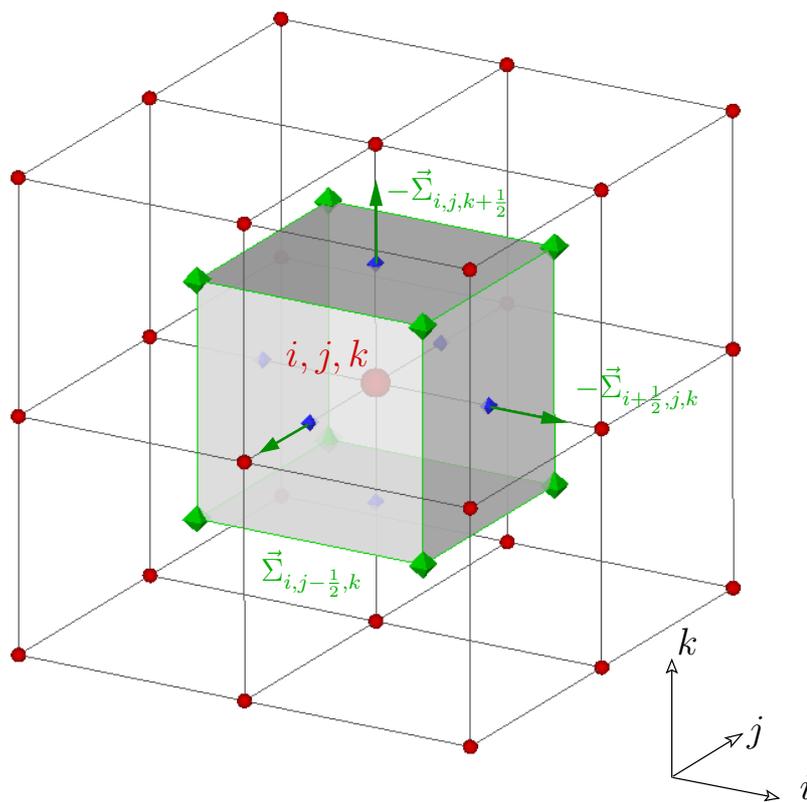


FIG. 1.6 – Support de maillage nécessaire au calcul du schéma utilisé dans AEROLOG.

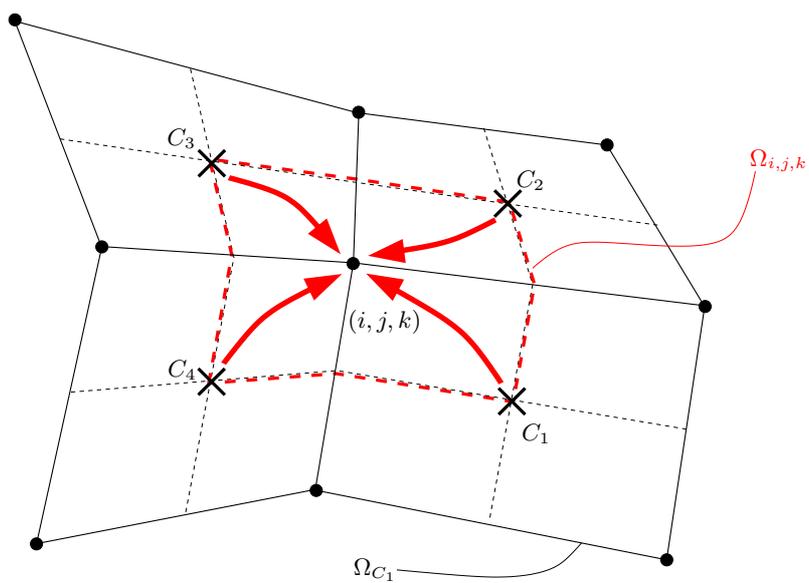


FIG. 1.7 – Coupe bidimensionnelle du maillage et principe de distribution.

vue des cellules  $\Omega_C$  de maillage et on distribue les différents termes calculés en fonction de la contribution de cette cellule  $\Omega_C$  aux bilans des nœuds  $(i, j, k)$  l'entourant, comme le suggère la figure bidimensionnelle 1.7. Il n'y a donc pas vraiment de notion de cellule de contrôle *stricto sensu* ; si l'on voulait en représenter une, il s'agirait d'une cellule à 24 faces dans un maillage tridimensionnel ou 8 côtés dans un maillage bidimensionnel (cf. pointillés rouges dans la figure 1.7), puisque chaque face de la cellule de contrôle habituelle (cf. figure 1.6) est en fait la réunion des quatre quarts de face de chacune des quatre cellules adjacentes (deux demi-faces en maillage bidimensionnel).

#### 1.5.4 Formulation en volumes finis

Dans le contexte que nous venons de décrire, le système (1.3) s'écrit<sup>5</sup> :

$$\underline{w}_t + \operatorname{div} \underline{\vec{F}} = 0 \quad (1.29)$$

où  $\underline{\vec{F}}$  est le tenseur d'ordre deux des flux. La formulation intégrale du schéma s'écrit alors :

$$\int_{\Omega_{i,j,k}} \underline{w}_t \, d\Omega = - \int_{\Omega_{i,j,k}} \operatorname{div} \underline{\vec{F}} \, d\Omega + \int_{\Omega_{i,j,k}} \left[ \frac{\Delta t}{2} \operatorname{div} \left( \underline{\vec{J}} \operatorname{div} \underline{\vec{F}} \right) \right] \, d\Omega \quad (1.30)$$

où  $\underline{\vec{J}}$  est le tenseur jacobien d'ordre trois des flux  $\underline{\vec{F}}$  défini par :

$$\underline{\vec{J}} = \frac{d\underline{\vec{F}}}{d\underline{w}}$$

Dans une approche en volumes finis, on introduit la valeur moyenne  $\varphi_{i,j,k}$  d'une fonction de maillage  $\varphi$  définie par la relation :

$$\varphi_{i,j,k} = \frac{1}{|\Omega_{i,j,k}|} \int_{\Omega_{i,j,k}} \varphi \, d\Omega$$

Dans la mesure où nos travaux s'intéressent à des schémas d'ordre deux au plus, nous pouvons assimiler ces valeurs moyennes à des valeurs aux nœuds sans dégrader l'ordre de précision du schéma de discrétisation. En utilisant le théorème de GREEN-OSTROGRADSKI pour transformer une intégrale de divergence en intégrale de flux à travers la surface de la cellule de contrôle, on peut finalement reformuler (1.30) comme suit :

$$\frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \Delta w_{i,j,k} = - \int_{\partial\Omega_{i,j,k}} \underline{\vec{F}} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{\partial\Omega_{i,j,k}} \frac{\Delta t}{2} \left( \underline{\vec{J}} \cdot \vec{n} \right) \operatorname{div} \underline{\vec{F}} \, dS \quad (1.31)$$

où  $\vec{n} = {}^T(n_x, n_y, n_z)$  est la normale unitaire extérieure à  $\partial\Omega_{i,j,k}$ . D'une façon plus générale, on peut récrire le schéma (1.31), en y adjoignant la phase implicite, sous la forme :

$$\frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \Delta w_{i,j,k}^n = \frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \Delta w_{i,j,k}^{\text{expli}} + \left( \Delta \tilde{I}_2 \right)_{i,j,k}^n \quad (1.32a)$$

$$\text{avec } \frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \Delta w_{i,j,k}^{\text{expli}} = - \left[ \left( \underline{I}_1^E \right)_{i,j,k}^n - \left( \underline{I}_1^V \right)_{i,j,k}^n \right] + \left( \underline{I}^{\text{va}} \right)_{i,j,k}^n + \left( \underline{I}_2 \right)_{i,j,k}^n \quad (1.32b)$$

---

<sup>5</sup>Cf. note 2 page 9 au sujet des notations tensorielles utilisées.

- où :
- $\underline{I_1^E}$  représente l'approximation consistante des flux non visqueux ;
  - $\underline{I_1^V}$  représente l'approximation consistante des flux visqueux ;
  - $\underline{I^{va}}$  représente la viscosité artificielle ;
  - $\underline{I_2}$  représente la dissipation numérique du schéma ;
  - $\underline{\Delta \tilde{I}_2}$  représente l'implicitation des termes dissipatifs  $\underline{I_2}$  ;
- et
- $\underline{\Delta w_{i,j,k}^n}$  est l'incrément implicite des variables conservatives au temps  $n$  et au point  $(i, j, k)$ , inconnue du problème ;
  - $\underline{\Delta w_{i,j,k}^{\text{expli}}}$  est l'incrément explicite des variables conservatives à la fin de la phase explicite ;
  - $|\Omega_{i,j,k}|$  est le volume de la cellule de contrôle  $\Omega_{i,j,k}$  centrée sur le point  $(i, j, k)$  ; dans AEROLOG, il est calculé comme la moyenne arithmétique des volumes des huit cellules qui entourent le point  $(i, j, k)$  (cf. figure 1.6 et paragraphe 1.5.5 pour les notations) :

$$|\Omega_{i,j,k}| = \frac{1}{8} \sum_{C \subset \partial^2 \Omega_{i,j,k}} |\Omega_C|$$

- $\Delta t_{i,j,k}$  est le pas de temps local au point  $(i, j, k)$  ; il est également calculé à partir des volumes et pas de temps au centre des huit cellules voisines :

$$\frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} = \frac{1}{8} \sum_{C \subset \partial^2 \Omega_{i,j,k}} \frac{|\Omega_C|}{\Delta t_C}$$

Le calcul du pas de temps  $\Delta t_C$  au centre de la cellule de maillage  $\Omega_C$  sera donné plus loin.

### 1.5.5 Éléments géométriques et notations

Avant de poursuivre la construction du schéma dans une formulation en volumes finis, nous allons présenter quelques éléments géométriques et notations nécessaires par la suite. On se reportera par exemple à la figure 1.6.

Les points du maillage définis par le logiciel de maillage seront désignés  $M_{i,j,k}$  où les indices sont des nombres entiers  $(i, j, k) \in \mathbb{N}^{*3}$  ; c'est en ces points que sont calculées les variables conservatives inconnues du problème. Ces points définissent des faces quadrilatérales  $S_f$  dont la normale  $\vec{S}_f$  est orientée dans le sens des indices décroissants ; l'indice  $f$  introduit ici appartient donc à l'ensemble  $\{(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}), (i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}), (i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)\}$  où les indices  $i, j$  et  $k$  sont toujours des nombres entiers. Ces points définissent également des cellules hexaédriques dont les centres  $C$  sont les isobarycentres des sommets  $M_{i,j,k}$  ; ces cellules du maillage sont donc désignées  $\Omega_C = \Omega_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}$ . L'ensemble des six faces d'une cellule de maillage  $\Omega_C$  constitue le « bord » de  $\Omega_C$  et sera noté  $\partial \Omega_C$  ; de même, on appellera  $\partial S_f$  l'ensemble des quatre sommets d'une face et par extension enfin, on notera  $\partial^2 \Omega_C$  l'ensemble des huit sommets de la cellule de maillage  $\Omega_C$ .

De plus, nous utilisons une formulation basée sur les nœuds du maillage et, comme nous l'avons déjà présenté au paragraphe 1.5.3, le bilan s'effectue sur une cellule de contrôle centrée sur le nœud du maillage considéré ; cette cellule comporte en toute rigueur 24 faces, mais pour simplifier – c'est le point de vue qui sera adopté pour la construction de la phase

implicite – on peut considérer une cellule de contrôle hexaédrique  $\Omega_{i,j,k}$ , décalée par rapport au maillage, dont les sommets sont les centres  $C$  des cellules de maillage et les centres  $M_{i,j,k}$  les sommets des cellules de maillage. L'ensemble des sommets d'une cellule de contrôle décalée se notera donc  $\partial^2\Omega_{i,j,k}$ . Les sommets  $C$  des cellules décalées définissent également des faces notées  $\Sigma_s$ , dont les normales  $\vec{\Sigma}_s$  sont également orientées dans le sens des indices décroissants, l'ensemble de ces six faces étant noté  $\partial\Omega_{i,j,k}$  et l'indice  $s$  appartenant à l'ensemble  $\{(i + \frac{1}{2}, j, k), (i, j + \frac{1}{2}, k), (i, j, k + \frac{1}{2})\}$ ,  $(i, j, k) \in \mathbb{N}^3$ . Les quatre sommets d'une face  $\Sigma_s$  appartiennent à l'ensemble  $\partial\Sigma_s$ .

On récapitule ci-dessous les différents éléments géométriques du maillage et du maillage décalé :

	Maillage	Maillage décalé
<b>Cellule</b>	$\Omega_C = \Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$	$\Omega_{i,j,k}$
<b>Face</b>	$S_f \subset \partial\Omega_C$	$\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}$
<b>Sommets</b>	les points $M_{i,j,k} \subset \partial^2\Omega_C$	les points $C \subset \partial^2\Omega_{i,j,k}$
<b>Centre</b>	les points $C$	les points $M$

Pour plus de commodité dans AEROLOG, on définit, sur une cellule de maillage  $\Omega_C$ , trois surfaces notées  $\vec{S}_C^{(m)}$ ,  $m \in \{1, 2, 3\}$  (cf. figure 1.8).

Ces surfaces sont construites à partir des faces de la cellule de maillage  $\Omega_C$  :

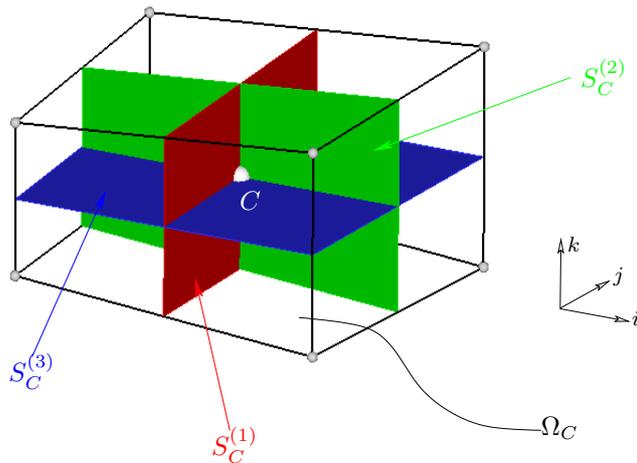


FIG. 1.8 – Cellule  $\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$  du maillage avec les surfaces  $\vec{S}_C^{(1)}$ ,  $\vec{S}_C^{(2)}$  et  $\vec{S}_C^{(3)}$ .

$$\begin{aligned}\vec{S}_C^{(1)} &= \frac{1}{2} \left( \vec{S}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \vec{S}_{i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) \\ \vec{S}_C^{(2)} &= \frac{1}{2} \left( \vec{S}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} + \vec{S}_{i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}} \right) \\ \vec{S}_C^{(3)} &= \frac{1}{2} \left( \vec{S}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + \vec{S}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1} \right)\end{aligned}$$

soit de manière synthétique :

$$\vec{S}_C^{(m)} = \vec{S}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{(m)} = \left[ \mu_m \vec{S} \right]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$$

où l'opérateur de moyenne  $\mu_m$ ,  $m \in \{1, 2, 3\}$  est celui qui a été défini à la section 1.2 (cf. formule (1.5)). Les normales aux faces des cellules de maillage sont construites en effectuant le demi-produit vectoriel des diagonales des faces de telle sorte que les normales soient orientées selon les sens des indices décroissants avec un triplet d'indices  $(i, j, k)$  direct (cf. figure 1.9).

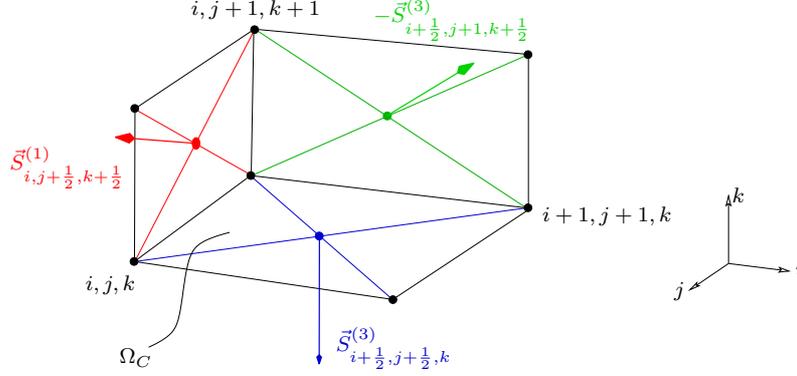


FIG. 1.9 – Cellule de maillage  $\Omega_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}$  avec représentation des normales aux faces.

### 1.5.6 Calcul du terme consistant non visqueux

Sous le terme de « flux non visqueux » (resp. « visqueux »), on regroupe l'ensemble des flux qui sont fonction des variables elles-mêmes (resp. des variables et de leurs gradients). Pour calculer le terme consistant non visqueux

$$\left(\underline{I}_1^E\right)_{i,j,k} = \int_{\partial\Omega_{i,j,k}} \overrightarrow{F^E} \cdot \vec{n} \, dS$$

et particulariser ce schéma de LAX-WENDROFF en schéma de NI, il faut faire le choix d'une discrétisation spatiale pour le calcul des flux. On calcule donc ici l'intégrale  $\underline{I}_1^E$  comme la moyenne arithmétique de cette même intégrale calculée sur les huit cellules de maillage  $\Omega_C$  qui partagent le nœud  $(i, j, k)$  comme sommet. Ainsi on calcule :

$$\left(\underline{I}_1^E\right)_{i,j,k}^n = \frac{1}{8} \sum_{C \subset \partial^2\Omega_{i,j,k}} |\Omega_C| \times \underline{R}_C^n \quad (1.33)$$

où :  $|\Omega_C|$  est le volume de la cellule de maillage ayant pour centre le point  $C$  ;

$\underline{R}_C^n$  est la discrétisation centrée de la divergence des flux non visqueux au centre  $C$  des cellules de maillage.

Pour calculer le prédicteur  $\underline{R}_C^n$ , discrétisation de la divergence des flux non visqueux, au centre des cellules de maillage (cf. figure 1.10), on écrit :

$$\begin{aligned} \underline{R}_C &= \frac{1}{|\Omega_C|} \int_{\partial\Omega_C} \left( \overrightarrow{F^E} \cdot \vec{n} \right) \, dS \\ &= \frac{1}{|\Omega_C|} \sum_{S_f \subset \partial\Omega_C} \left[ \frac{1}{4} \left( \sum_{M \subset \partial S_f} \overrightarrow{F_M^E} \right) \cdot (\pm \vec{S}_f) \right] \\ &= \sum_{S_f \subset \partial\Omega_C} \left( \sum_{M \subset \partial S_f} \overrightarrow{F_M^E} \right) \cdot \frac{\pm \vec{S}_f}{4 \times |\Omega_C|} \end{aligned}$$

- où :
- $S_f$  représente une des six faces du bord  $\partial\Omega_C$  de la cellule de maillage ;
  - le vecteur  $\pm\vec{S}_f$  représente la normale à la cellule portant la surface de la face  $S_f$ , le signe étant choisi pour que cette normale soit orientée vers l'extérieur ;
  - les points du maillage  $M$  délimitent la face  $S_f$  considérée.

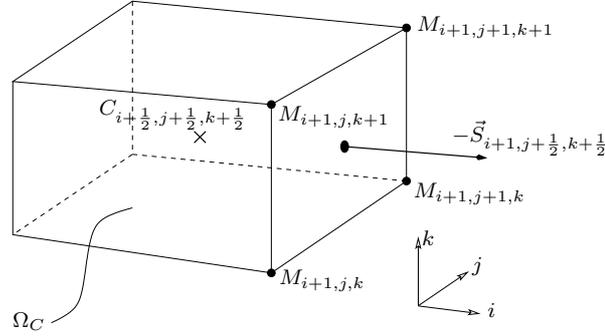


FIG. 1.10 – Cellule  $\Omega_C$  du maillage pour le calcul du prédicteur.

Cependant, comme les éléments géométriques  $\vec{S}_f$  ne sont pas disponibles dans AEROLOG, on utilise les moyennes  $\vec{S}_C^{(m)}$  définies au paragraphe précédent et on modifie légèrement la formule précédente en écrivant :

$$\underline{R}_C = \sum_{m=1}^3 -\delta_m \left( \sum_{M \subset \partial S_f} \overrightarrow{F}_M^E \right) \cdot \frac{\vec{S}_C^{(m)}}{4 \times |\Omega_C|} \quad (1.34)$$

où  $\delta_m$ ,  $m \in \{1, 2, 3\}$  est l'opérateur de différence défini à la section 1.2 (cf. formule (1.5)) et l'indice  $f$  dépend de la direction  $m$  considérée :  $f \in \{(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}), (i + 1, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})\}$  pour  $m = 1$  et de façon similaire pour  $m \in \{2, 3\}$ .

### 1.5.7 Viscosité artificielle

Comme nous l'avons vu plus haut (cf. section 1.4), le schéma de NI nécessite l'adjonction d'une viscosité artificielle pour amortir tous les modes d'erreurs. La formulation en volumes finis dans le logiciel AEROLOG de cette viscosité artificielle (1.11) s'écrit :

$$(\underline{I}^{va})_{i,j,k}^n = \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}} (\nu^{va})_s^{(m)} \times (\underline{w}_{\text{ext}} - \underline{w}_{i,j,k}) \quad (1.35)$$

Dans cette expression,  $\Sigma_s$  représente l'une des six faces de la cellule de contrôle  $\Omega_{i,j,k}$  ; l'indice  $s$  de cette face appartient à l'ensemble :

$$\{(i + \frac{1}{2}, j, k), (i - \frac{1}{2}, j, k), (i, j + \frac{1}{2}, k), (i, j - \frac{1}{2}, k), (i, j, k + \frac{1}{2}), (i, j, k - \frac{1}{2})\}.$$

De plus,  $\underline{w}_{\text{ext}}$  est le vecteur des variables conservatives pris au point de maillage situé à l'extérieur de la cellule de contrôle  $\Omega_{i,j,k}$ , par rapport à la face  $\Sigma_s$  considérée :

$$\text{ext} \in \{(i + 1, j, k), (i - 1, j, k), (i, j + 1, k), (i, j - 1, k), (i, j, k + 1), (i, j, k - 1)\}$$

et l'exposant  $(m) \in \{1, 2, 3\}$  représente l'orientation de la face  $\Sigma_s$  (indice  $i$ ,  $j$  ou  $k$  identique pour les quatre sommets de la face). Le coefficient de viscosité artificielle  $(\nu^{va})_s^{(m)}$  est calculé

sur cette même face  $\Sigma_s$  par les formules :

$$(\mathcal{V}^{\text{va}})^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j,k} = (\mu_2\mu_3\mathcal{S}^{\text{max}})_{i+\frac{1}{2},j,k} \times \max \left[ T_{i,j,k}^2, T_{i+1,j,k}^2, C\mu_0 \times (\mu_1 V^{\text{car}})_{i+\frac{1}{2},j,k} \right] \quad (1.36a)$$

$$(\mathcal{V}^{\text{va}})^{(2)}_{i,j+\frac{1}{2},k} = (\mu_1\mu_3\mathcal{S}^{\text{max}})_{i,j+\frac{1}{2},k} \times \max \left[ T_{i,j,k}^2, T_{i,j+1,k}^2, C\mu_0 \times (\mu_2 V^{\text{car}})_{i,j+\frac{1}{2},k} \right] \quad (1.36b)$$

$$(\mathcal{V}^{\text{va}})^{(3)}_{i,j,k+\frac{1}{2}} = (\mu_1\mu_2\mathcal{S}^{\text{max}})_{i,j,k+\frac{1}{2}} \times \max \left[ T_{i,j,k}^2, T_{i,j,k+1}^2, C\mu_0 \times (\mu_3 V^{\text{car}})_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right] \quad (1.36c)$$

avec

$$T_{i,j,k}^2 = C\mu_2 \times \left| \frac{(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) \mathcal{S}^{\text{va}}}{\mathcal{S}^{\text{va}}} \right|_{i,j,k} \times V^{\text{car}}_{i,j,k} \quad (1.37)$$

et

$$\mathcal{S}^{\text{max}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \max \left\{ \mathcal{S}^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}, \mathcal{S}^{(2)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}, \mathcal{S}^{(3)}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right\} \quad (1.38)$$

où :  $C\mu_0$  et  $C\mu_2$  sont des coefficients réglables par l'utilisateur ;

$V^{\text{car}} = \sqrt{\gamma r T} + \|\vec{v}\|$  représente la vitesse caractéristique de l'écoulement ;

$\mathcal{S}^{\text{va}}$  le senseur de discontinuité est ici égal à la vitesse caractéristique  $V^{\text{car}}$  ;

$\mathcal{S}^{\text{max}}$  représente la plus grande des trois surfaces  $\mathcal{S}_C^{(m)} = \|\vec{\mathcal{S}}_C^{(m)}\|$ ,  $m \in \{1, 2, 3\}$  au centre  $C$  d'une cellule de maillage  $\Omega_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$  (cf. figure 1.8).

Détaillons maintenant la formule (1.36a) qui utilise les opérateurs de moyenne et de différence introduits plus haut (cf. formules (1.5) page 10). Comme nous venons de le voir, le terme  $\mathcal{S}_C^{\text{max}}$  est une grandeur attachée au centre  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$  d'une cellule de maillage ; le terme  $(\mu_2\mu_3\mathcal{S}^{\text{max}})_{i+\frac{1}{2},j,k}$  de la formule (1.36a) permet d'obtenir la valeur de ce terme sur la face de la cellule de contrôle  $\Omega_{i,j,k}$ , décalée par rapport au maillage et centrée sur le point d'indice  $(i + \frac{1}{2}, j, k)$ . Ainsi on obtient :

$$(\mu_2\mu_3\mathcal{S}^{\text{max}})_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{4} \left\{ \mathcal{S}^{\text{max}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \mathcal{S}^{\text{max}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \mathcal{S}^{\text{max}}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \mathcal{S}^{\text{max}}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right\}$$

On note donc que la viscosité artificielle est proportionnelle à la plus grande surface de la maille, ou, si l'on divise par le volume de la maille, à la plus petite distance séparant deux faces opposées (caractéristique importante des maillages de couche limite). Le second terme de la formule (1.36a) est le maximum de deux termes de discontinuité pris de part et d'autre de la face  $(i + \frac{1}{2}, j, k)$  considérée et d'un terme uniforme calculé sur cette même face (cf. figure 1.11 à rapprocher de la figure 1.6). Le terme uniforme est  $C\mu_0 \times \frac{1}{2} (V^{\text{car}}_{i,j,k} + V^{\text{car}}_{i+1,j,k})$  et prend en compte la vitesse caractéristique qui reflète à la fois les caractéristiques thermodynamiques de l'écoulement (par la vitesse du son  $\sqrt{\gamma r T}$ ) et son caractère convectif (par la vitesse de l'écoulement  $\|\vec{v}\|$ ). Elle peut directement être calculée sur la face  $(i + \frac{1}{2}, j, k)$  de la cellule de contrôle considérée. Les deux autres termes reflètent les discontinuités qui peuvent exister dans l'écoulement et sont donc calculés sur les nœuds du maillage, de part et d'autre de la face considérée. Pour prendre en compte les discontinuités, on multiplie la vitesse caractéristique par un terme positif de différence seconde non directionnelle adimensionnée d'un senseur qui est choisi comme étant également la vitesse caractéristique (il ne s'agit pas tout à fait d'un

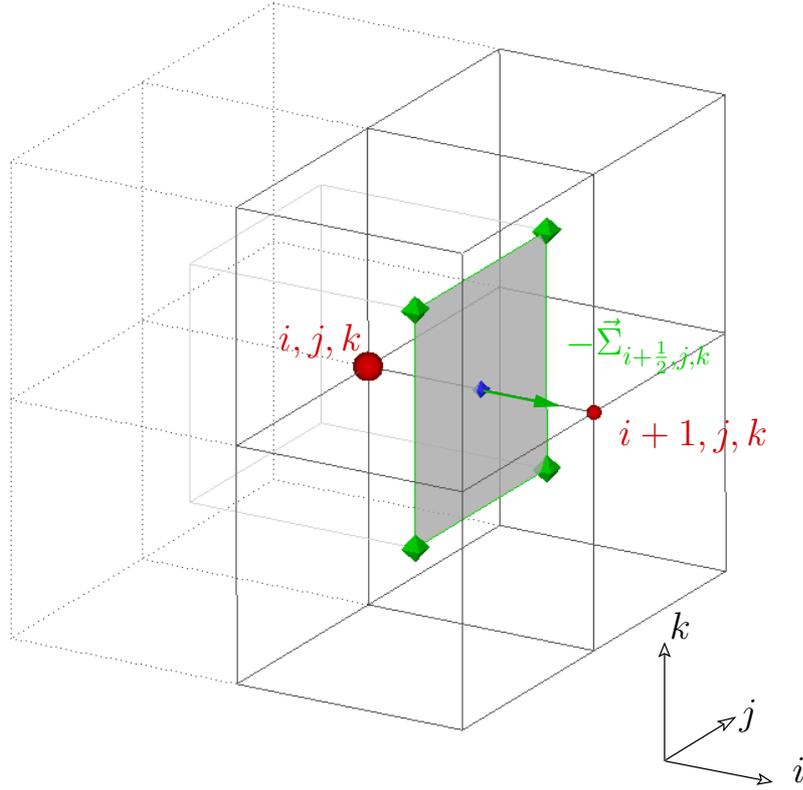


FIG. 1.11 – Éléments géométriques nécessaires pour le calcul du coefficient de viscosité artificielle  $(\nu^{va})_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(1)}$ .

opérateur laplacien puisque les pas d'espace ne sont pas pris en compte). Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) \mathcal{S}^{va}}{\mathcal{S}^{va}} \right|_{i,j,k} \\ &= \left| \frac{\mathcal{S}_{i+1,j,k}^{va} + \mathcal{S}_{i-1,j,k}^{va} + \mathcal{S}_{i,j+1,k}^{va} + \mathcal{S}_{i,j-1,k}^{va} + \mathcal{S}_{i,j,k+1}^{va} + \mathcal{S}_{i,j,k-1}^{va} - 6 \times \mathcal{S}_{i,j,k}^{va}}{\mathcal{S}_{i,j,k}^{va}} \right| \\ &= \left| \frac{\mathcal{S}_{i+1,j,k}^{va}}{\mathcal{S}_{i,j,k}^{va}} + \frac{\mathcal{S}_{i-1,j,k}^{va}}{\mathcal{S}_{i,j,k}^{va}} + \frac{\mathcal{S}_{i,j+1,k}^{va}}{\mathcal{S}_{i,j,k}^{va}} + \frac{\mathcal{S}_{i,j-1,k}^{va}}{\mathcal{S}_{i,j,k}^{va}} + \frac{\mathcal{S}_{i,j,k+1}^{va}}{\mathcal{S}_{i,j,k}^{va}} + \frac{\mathcal{S}_{i,j,k-1}^{va}}{\mathcal{S}_{i,j,k}^{va}} - 6 \right| \end{aligned}$$

Cela permet de garantir la régularité de la solution à proximité des discontinuités et notamment des chocs. Les coefficients  $C_{\mu_0}$  et  $C_{\mu_2}$  ne sont bien évidemment pas du même ordre de grandeur, puisque le premier affecte *a priori* la quasi-totalité des points de l'écoulement et notamment ceux situés loin de toute paroi alors que le second n'agit que dans des zones bien localisées de l'écoulement. Les valeurs communément utilisées chez MBDA sont celles déjà indiquées lors de la présentation simplifiée (bidimensionnelle en maillage cartésien) du paragraphe 1.2.3, soit :

$$\begin{aligned} C_{\mu_0} &= 2 \times 10^{-3} \\ C_{\mu_2} &= 2 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

### 1.5.8 Dissipation numérique du schéma

Le terme  $(\underline{I_2})_{i,j,k}^n$  dans l'équation (1.32b) représente la dissipation numérique du schéma mis en œuvre dans AEROLOG (cf. membre de droite de l'équation (1.10)). Dans une formulation en volumes finis, il s'écrit :

$$(\underline{I_2})_{i,j,k}^n = \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}} \left( \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial\Sigma_s} \underline{f}_{\text{dis}_C}^{(m)} \right) \quad (1.39a)$$

$$= \sum_{C \subset \partial^2\Omega_{i,j,k}} \left( \sum_{m=1}^3 \frac{1}{4} \times \underline{f}_{\text{dis}_C}^{(m)} \right) \quad (1.39b)$$

$$\text{avec } \underline{f}_{\text{dis}_C}^{(m)} = \pm \frac{\Delta t_C}{2} \left( \underline{\vec{J}}_{\underline{C}} \cdot \vec{S}_C^{(m)} \right) \underline{R}_C \quad \forall m \in \{1, 2, 3\} \quad (1.39c)$$

À partir de cette expression, on peut formuler plusieurs remarques :

- le coefficient  $1/4$  provient de l'opération de moyenne ( $\mu_2\mu_3$  sur une face de normale  $\vec{S}_C^{(1)}$ ) qui consiste à distribuer les valeurs obtenues sur la cellule de maillage vers la cellule de contrôle décalée  $\Omega_{i,j,k}$  ;
- le signe  $\pm$  de l'expression de  $\underline{f}_{\text{dis}_C}^{(m)}$  dépend de l'orientation ( $m$ ) de la face et de la position relative du point  $C$  par rapport au point de calcul  $(i, j, k)$  ; étant donné que  $\vec{S}_C^{(m)}$  est orienté dans le sens des indices décroissants, on s'assure ainsi que la normale  $\pm\vec{S}_C^{(m)}$  est extérieure à la cellule  $\Omega_{i,j,k}$  ; si le  $m^{\text{e}}$  indice du point  $C_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}, k \pm \frac{1}{2}}$  est supérieur au  $m^{\text{e}}$  indice du point  $M_{i,j,k}$ , le signe sera négatif ; dans le cas contraire il sera positif ;
- ce flux dissipatif  $\underline{f}_{\text{dis}_C}^{(m)}$  s'évalue en ne prenant en compte que des éléments calculés sur la cellule de maillage au point  $C$  d'indice  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$  afin de pouvoir appliquer une distribution de cette valeur, des centres des cellules vers les nœuds du maillage ;
- le produit de la matrice  $\left( \underline{\vec{J}}_{\underline{C}} \cdot \vec{S}_C^{(m)} \right)$  par le vecteur  $\underline{R}_C$  est effectué formellement, conformément à l'article de NI [38] ; il n'y a donc pas de calcul du tenseur jacobien  $\underline{\vec{J}}_{\underline{C}}$  à proprement parler, ce qui économise à la fois la place nécessaire en mémoire et le temps de calcul.

On peut également noter que, dans la formule (1.39c), il existe une séparation entre les éléments  $\Delta t$ ,  $\underline{\vec{J}}$  et  $\underline{R}_C$ , qui dépendent uniquement de l'état  $\underline{w}_C$ , d'une part et les métriques  $\vec{S}_C^{(m)}$ , d'autre part. On peut alors, dans la formule (1.39b) factoriser partiellement les normales ( $\vec{S}_C^{(1)}$  et  $\vec{S}_C^{(2)}$  par exemple) sur une cellule et ainsi obtenir :

$$\sum_{m=1}^3 \underline{f}_{\text{dis}_C}^{(m)} = \left[ \underline{\vec{J}}_{\underline{C}} \cdot \left( \pm \vec{S}_C^{(1)} \pm \vec{S}_C^{(2)} \right) \right] \left[ \frac{\Delta t_C}{2} \underline{R}_C \right] \pm \left[ \underline{\vec{J}}_{\underline{C}} \cdot \vec{S}_C^{(3)} \right] \left[ \frac{\Delta t_C}{2} \underline{R}_C \right] \quad (1.40)$$

avec les signes  $\pm$  des normales qui sont choisis en fonction de l'orientation et de la position de la face considérée. Sur une cellule de maillage  $\Omega_C$ , on calcule donc toujours trois termes, mais à la place des normales  $\vec{S}_C^{(1)}$ ,  $\vec{S}_C^{(2)}$  et  $\vec{S}_C^{(3)}$ , on utilise les normales  $\vec{S}_C^{(1)} + \vec{S}_C^{(2)}$ ,  $\vec{S}_C^{(1)} - \vec{S}_C^{(2)}$  et  $\vec{S}_C^{(3)}$ . Lorsque l'on effectue le bilan (1.39b), on ne somme alors plus que  $8 \times 2 = 16$  contributions, alors qu'en utilisant les normales  $\vec{S}_C^{(1)}$ ,  $\vec{S}_C^{(2)}$  et  $\vec{S}_C^{(3)}$  on en aurait sommé vingt-quatre. Ce découplage entre l'état au centre de la cellule et les éléments géométriques, propre au schéma LAX-WENDROFF-NI, permet d'économiser quelques opérations et apporte un gain en terme de temps de calcul.

Dans la formule (1.39c), le pas de temps  $\Delta t_C$  est calculé au centre de la cellule de maillage centrée sur le point  $C$  à partir de l'état moyen au centre de cette cellule et selon

des critères de stabilité classiques prenant en compte à la fois les phénomènes de convection ( $V^{\text{car}} = \sqrt{\gamma r T} + \|\vec{v}\|$ ) et de diffusion ( $\nu^{\text{car}} = \gamma \nu_{\text{mol}}/Pr_{\text{mol}} + \gamma \nu_t/Pr_t$ ) :

$$\frac{CFL}{\Delta t_C} = \left( \frac{\nu_C^{\text{car}}}{\delta s_C} + \sqrt{(V_C^{\text{car}})^2 + \left(\frac{\nu_C^{\text{car}}}{\delta s_C}\right)^2} \right) \times \frac{1}{\delta s_C}$$

avec  $\delta s_C = |\Omega_C|/S_C^{\text{max}}$  qui représente la distance caractéristique moyenne minimale entre deux faces opposées dans une cellule de maillage  $\Omega_C$ .

### 1.5.9 Calcul du terme consistant visqueux

Comme de nombreux programmes de calcul, AEROLOG ne prend pas en compte les flux visqueux dans le calcul de la dissipation afin notamment de ne pas étendre le support du schéma. Le terme  $\underline{I}_2$  ne fait donc intervenir que les flux non visqueux (cf. section 1.5.8). Ainsi les termes visqueux apparaissent sous la forme :

$$\left(\underline{I}_1^V\right)_{i,j,k}^n = \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}} \left( \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial\Sigma_s} f_{\text{visq}_C}^{(m)} \right) \quad (1.41a)$$

$$= \sum_{C \subset \partial^2\Omega_{i,j,k}} \left( \sum_{m=1}^3 \frac{1}{4} \times f_{\text{visq}_C}^{(m)} \right) \quad (1.41b)$$

$$\text{avec } \underline{f}_{\text{visq}_C}^{(m)} = \pm \underline{F}_C^{\vec{V}} \cdot \vec{S}_C^{(m)} \quad \forall m \in \{1, 2, 3\} \quad (1.41c)$$

Dans cette expression, l'exposant  $m \in \{1, 2, 3\}$  est choisi selon l'orientation de la face de la cellule décalée considérée (cf. section 1.5.5 et figure 1.8). Le choix du signe  $\pm$  s'effectue en fonction de l'orientation ( $m$ ) de la face et de la position relative du point  $C$  par rapport au point de calcul  $(i, j, k)$  de manière à ce que  $\pm \vec{S}_C^{(m)}$  soit extérieure à la cellule  $\Omega_{i,j,k}$  (cf. remarque après la formule (1.39)). De plus  $\underline{F}_C^{\vec{V}}$  est calculé au centre  $C$  de la cellule de maillage en fonction des variables conservatives  $\underline{w}_C$  moyennées au centre de cette cellule et du gradient des variables primitives  $\vec{\text{grad}}(\underline{\varpi})$  à ce même point  $C$  :

$$\begin{aligned} \underline{w}_C &= \frac{1}{8} \sum_{M \subset \partial^2\Omega_C} \underline{w}_M \\ \vec{\text{grad}}(\underline{\varpi})_C &= \frac{1}{|\Omega_C|} \int_{\partial\Omega_C} \underline{\varpi} \vec{n} \, dS \\ &= \sum_{S_f \subset \partial\Omega_C} \pm \underline{\varpi}_f \frac{\vec{S}_f}{|\Omega_C|} \end{aligned}$$

Pour utiliser les normales  $\vec{S}_C^{(m)}$  déjà calculées et évaluer les variables primitives  $\underline{\varpi}_f$  sur les faces de la cellule, on récrit cette expression :

$$\vec{\text{grad}}(\underline{\varpi})_C = \sum_{m=1}^3 -\delta_m \left( \sum_{M \subset \partial S_f} \underline{\varpi}_M \right) \frac{\vec{S}_C^{(m)}}{4 \times |\Omega_C|}$$

où  $\delta_m$ ,  $m \in \{1, 2, 3\}$  est l'opérateur de différence défini à la section 1.2 (cf. formule (1.5)) et l'indice  $f$  dépend de la direction  $m$  considérée :  $f \in \{(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}), (i + 1, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})\}$  pour  $m = 1$  etc.

### 1.5.10 Traitement implicite

La phase d'implicitation de la dissipation du schéma numérique par lissage des résidus, présentée plus haut (cf. section 1.3), est mise en œuvre dans le logiciel AEROLOG et constitue le terme  $\underline{\Delta \tilde{I}_2}$  de l'équation (1.32a). Pour construire ce terme, on évalue les termes dissipatifs au pas de temps suivant l'instant courant ; le schéma devient implicite, et on sépare la contribution explicite de ce terme d'implicitation :

$$(\underline{I_2})_{i,j,k}^{n+1} = (\underline{I_2})_{i,j,k}^n + (\underline{\Delta I_2})_{i,j,k}^n$$

Pour continuer la construction de cette phase implicite, il convient de réinterpréter le terme  $\underline{I_2}$  (cf. formule (1.39)) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (\underline{\tilde{I}_2})_{i,j,k}^n &= \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}} \pm \frac{\Delta t_s}{2} \left( \underline{\vec{J}}^n \cdot \underline{\vec{\Sigma}}_s \right) \underline{R}_s^n \\ \text{avec } \underline{R}_s^n &= \pm \frac{1}{|\Omega_s|} \left( \underline{\vec{F}}_{\text{ext}}^E - \underline{\vec{F}}_{i,j,k}^E \right) \cdot \underline{\vec{\Sigma}}_s \end{aligned}$$

où la normale  $\underline{\vec{\Sigma}}_s$  est orientée dans le sens des indices décroissants, le signe  $\pm$  permettant de prendre en compte une normale orientée vers l'extérieur de la cellule. À la différence de la formule (1.39a), on maintient, dans un premier temps, l'évaluation des différents éléments de la formule sur la face  $\Sigma_s$  de la cellule de contrôle  $\Omega_{i,j,k}$  et le prédicteur est évalué sur la face  $f$  en ne prenant en compte les flux qu'aux points de maillage situés de part et d'autre de cette face ; ce sont ces points qui nous intéressent pour la phase implicite et qui y contribuent majoritairement.

On construit ensuite un incrément  $\underline{\Delta I_2}$  modifié que l'on note  $\underline{\Delta \tilde{I}_2}$ , où l'on évalue le tenseur jacobien des flux au temps  $n$  pour les deux contributions  $(\underline{I_2})^{n+1}$  et  $(\underline{I_2})^n$  ; seule l'évaluation du prédicteur est faite en deux instants  $n$  et  $n+1$  différents :

$$(\underline{\Delta \tilde{I}_2})_{i,j,k}^n = \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}} \pm \frac{\Delta t_s}{2} \left( \underline{\vec{J}}^n \cdot \underline{\vec{\Sigma}}_s \right) \underline{\Delta R}_s^n$$

Pour calculer le terme  $\underline{\Delta R}_s^n = \underline{R}_s^{n+1} - \underline{R}_s^n$ , on linéarise les flux et, encore une fois, on évalue tous les tenseurs jacobiens à l'instant  $n$ . Ainsi on a :

$$\underline{\Delta R}_s^n = \pm \frac{1}{|\Omega_s|} \left( \underline{\vec{J}}^n \cdot \underline{\vec{\Sigma}}_s \right) (\underline{\Delta w}_{\text{ext}}^n - \underline{\Delta w}_{i,j,k}^n)$$

soit :

$$(\underline{\Delta \tilde{I}_2})_{i,j,k}^n = \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}} \frac{\Delta t_s}{2 \times |\Omega_s|} \left( \underline{\vec{J}}^n \cdot \underline{\vec{\Sigma}}_s \right)^2 (\underline{\Delta w}_{\text{ext}}^n - \underline{\Delta w}_{i,j,k}^n)$$

Comme, la matrice  $\left( \underline{\vec{J}}^n \cdot \underline{\vec{\Sigma}}_s \right)^2$  est définie positive, on effectue alors la même simplification de rayon spectral que dans la section 1.3.1 et on obtient alors :

$$(\underline{\Delta \tilde{I}_2})_{i,j,k}^n = \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}} \frac{\Delta t_s}{2 \times |\Omega_s|} \times \left[ \rho \left( \underline{\vec{J}} \cdot \underline{\vec{\Sigma}} \right)_s^n \right]^2 \times (\underline{\Delta w}_{\text{ext}}^n - \underline{\Delta w}_{i,j,k}^n)$$

où  $\rho \left( \underline{\vec{J}} \cdot \underline{\vec{\Sigma}} \right)$  représente le rayon spectral de la matrice  $\left( \underline{\vec{J}} \cdot \underline{\vec{\Sigma}} \right)$ . Il reste à choisir une méthode d'évaluation des différents éléments de ce coefficient sur la face  $\Sigma_s$  de la cellule  $\Omega_{i,j,k}$ .

Pour conserver une structure du code compatible avec le principe de distribution déjà évoqué lors de la construction de la phase explicite, on choisit donc de calculer cette formule aux quatre sommets de la face  $\Sigma_s$ , qui sont des centres de cellule de maillage, puis d'en déduire linéairement la quantité souhaitée sur la face. Ainsi on obtient :

$$\left(\frac{\Delta \tilde{I}_2}{\Delta t}\right)_{i,j,k}^n = \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}} \frac{1}{4} \times \left( \sum_{C \subset \partial \Sigma_s} \frac{\Delta t_C}{2 \times |\Omega_C|} \times \left[ \rho \left( \underline{\vec{J}} \cdot \vec{S}^{(m)} \right)_C^n \right]^2 \right) \times (\Delta w_{\text{ext}}^n - \Delta w_{i,j,k}^n) \quad (1.42)$$

Le système implicite (1.32a) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} C_{i,j,k}^{(0)} \Delta w_{i,j,k}^n - C_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(1)} \Delta w_{i+1,j,k}^n - C_{i-\frac{1}{2},j,k}^{(1)} \Delta w_{i-1,j,k}^n \\ - C_{i,j+\frac{1}{2},k}^{(2)} \Delta w_{i,j+1,k}^n - C_{i,j-\frac{1}{2},k}^{(2)} \Delta w_{i,j-1,k}^n \\ - C_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{(3)} \Delta w_{i,j,k+1}^n - C_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{(3)} \Delta w_{i,j,k-1}^n = \frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \Delta w_{i,j,k}^{\text{expli}} \end{aligned} \quad (1.43a)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(1)} = \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial \Sigma_{i+\frac{1}{2},j,k}} \tilde{\varrho}_C^{(1)} \\ C_{i,j+\frac{1}{2},k}^{(2)} = \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial \Sigma_{i,j+\frac{1}{2},k}} \tilde{\varrho}_C^{(2)} \\ C_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{(3)} = \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial \Sigma_{i,j,k+\frac{1}{2}}} \tilde{\varrho}_C^{(3)} \\ C_{i,j,k}^{(0)} = \frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \\ \quad + C_{i-\frac{1}{2},j,k}^{(1)} + C_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(1)} + C_{i,j-\frac{1}{2},k}^{(2)} + C_{i,j+\frac{1}{2},k}^{(2)} + C_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{(3)} + C_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{(3)} \end{array} \right. \quad (1.43b)$$

où on évalue au centre des cellules de maillage la quantité :

$$\tilde{\varrho}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{(m)} = \tilde{\varrho}_C^{(m)} = \frac{\Delta t_C}{2 \times |\Omega_C|} \times \left[ \rho \left( \underline{\vec{J}} \cdot \vec{S}^{(m)} \right)_C^n \right]^2 \quad (1.43c)$$

À ce stade de la construction de ce lissage implicite des résidus, comme cela a déjà été fait au paragraphe 1.3.1 pour l'équation (1.15), on introduit deux modifications par rapport à ce qui vient d'être présenté. Tout d'abord, dans l'expression du rayon spectral

$$\rho \left( \underline{\vec{J}} \cdot \vec{S}^{(m)} \right) = \left( \sqrt{\gamma r T} + \left| \vec{v} \cdot \vec{n}^{(m)} \right| \right) \times S^{(m)}$$

on remplace la vitesse dans la direction  $\vec{n}^{(m)}$  normale à la face considérée par la norme de la vitesse; on fait ainsi intervenir la vitesse caractéristique dans la direction de l'écoulement  $V^{\text{car}} = \sqrt{\gamma r T} + \|\vec{v}\|$ . On substitue également un coefficient de sur-implication  $\beta \geq 1/2$  au coefficient  $1/2$  de l'expression (1.43c). Ces deux choix conduisent à maximiser la dissipation implicite introduite et contribuent notamment à renforcer la robustesse du schéma au détriment de son efficacité. Cette formule (1.43c) devient :

$$\tilde{\varrho}_C^{(m)} = \beta \times \frac{\Delta t_C}{|\Omega_C|} \times \left[ (V^{\text{car}})_C^n \times S^{(m)} \right]^2 \quad (1.44)$$

De la même façon qu'en (1.17), on résout le système implicite (1.43) par factorisation par direction :

$$\left\{ \begin{array}{l} C^{(0)} \underline{\Delta w}_{i,j,k}^* - C_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(1)} \underline{\Delta w}_{i+1,j,k}^* - C_{i-\frac{1}{2},j,k}^{(1)} \underline{\Delta w}_{i-1,j,k}^* = \frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \underline{\Delta w}_{i,j,k}^{\text{expli}} \\ C^{(0)} \underline{\Delta w}_{i,j,k}^{**} - C_{i,j+\frac{1}{2},k}^{(2)} \underline{\Delta w}_{i,j+1,k}^{**} - C_{i,j-\frac{1}{2},k}^{(2)} \underline{\Delta w}_{i,j-1,k}^{**} = \frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \underline{\Delta w}_{i,j,k}^* \\ C^{(0)} \underline{\Delta w}_{i,j,k}^n - C_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{(3)} \underline{\Delta w}_{i,j,k+1}^n - C_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{(3)} \underline{\Delta w}_{i,j,k-1}^n = \frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \underline{\Delta w}_{i,j,k}^{**} \end{array} \right. \quad (1.45)$$

On notera que, dans la version d'AEROLOG disponible en début de thèse et qui vient d'être décrite, les termes de viscosité artificielle et les flux visqueux ne sont pas implicites. Ce choix simple a été adopté par MBDA sur la base de nombreuses simulations effectuées, qui ont montré qu'il assurait une robustesse suffisante — pour le choix  $CFL = 1$  généralement effectué.

Ce premier chapitre nous a donc permis de récapituler les principales méthodes numériques du code AEROLOG, dans sa formulation de base. Comme nous allons l'expliquer au chapitre suivant, cette formulation ne permet pas de traiter de façon satisfaisante la simulation d'écoulements instationnaires et le premier objectif des ce travail de thèse était de fournir cette capacité à AEROLOG. Cependant, il est rapidement apparu intéressant d'aller au-delà d'une simple extension des méthodes existantes en vue de simulations instationnaires : nous avons donc cherché à accroître l'efficacité du logiciel en modifiant à la fois le schéma explicite et la phase implicite associée pour permettre l'emploi de pas de temps plus importants. La présentation détaillée de ces modifications fait l'objet du chapitre suivant.



## Chapitre 2

# Nouvelles méthodes numériques proposées

Dans la version existante du logiciel AEROLOG, l'intégration en temps peut se faire de deux façons différentes. La première possibilité est celle d'une approche en pas de temps local ; la seconde est celle d'une avance globale en temps (ou pas de temps global). Cette technique permet de mener un calcul consistant en temps et donc de simuler des écoulements instationnaires. Cependant, pour pouvoir mener un tel calcul, il faut choisir un pas de temps sur la plus petite cellule qui soit compatible avec les conditions de stabilité du schéma. Ainsi, pour le schéma de LAX-WENDROFF implémenté dans le logiciel AEROLOG, qui admet un nombre  $CFL$  maximal de l'ordre de l'unité, et pour des applications transsoniques à grand nombre de REYNOLDS, sur des géométries de dimensions de l'ordre du mètre, avec un maillage associé caractérisé par une taille de première maille de quelques micromètres, on ne peut pas utiliser un pas de temps supérieur à quelques nanosecondes. Ceci ne permet donc pas de réaliser des simulations instationnaires d'écoulements turbulents dans des temps de restitution raisonnables. Pour réaliser de telles simulations, on a donc recours à une technique de pas de temps fictif, bien connue pour la simulation des écoulements incompressibles [39] et popularisée par JAMESON [23] pour le calcul des écoulements compressibles. En effet, il est bien établi que l'utilisation d'une telle stratégie est nécessaire pour décrire à moindre coût les évolutions instationnaires à basse fréquence visées dans cette étude. Nous décrirons donc, dans une première section, les méthodes numériques associées à cette stratégie.

Pour accroître l'efficacité de la stratégie de pas de temps fictif, il faut assurer, à chaque pas de temps physique, une convergence rapide vers l'état stationnaire en temps fictif. Le schéma de LAX-WENDROFF-NI couplé à une technique de lissage implicite des résidus résolue par factorisation approchée ne permet pas de converger rapidement vers l'état stationnaire. En revanche, cette convergence rapide est offerte notamment par des schémas décentrés implicites tels que le schéma de HARTEN-ROE ou d'autres schémas décentrés (AUSM+ par exemple) accompagnés d'une phase implicite idoine. Cependant, le recours à de tels schémas décentrés aurait induit des modifications profondes du logiciel AEROLOG dans la mesure où, avec ces approches, l'obtention de solutions numériques précises à l'ordre deux en espace suppose habituellement l'utilisation d'une reconstruction (généralement de type « MUSCL ») des variables qui s'appuie sur un support étendu comptant cinq points par direction de maillage. Outre la modification du calcul au point courant, les traitements aux bords du domaine de calcul devraient aussi être remis en cause.

Une alternative aux schémas décentrés d'ordre deux, obtenus par reconstruction des variables, réside dans l'utilisation d'un schéma décentré compact qui permette de conserver le

support compact à  $3^d$  points (en  $d$  dimensions d'espace) du schéma actuel. Un tel schéma existe : il s'agit du schéma dit « à pas de temps caractéristique » proposé dans [21] et [22]. La version semi-discrète de ce schéma a été initialement construite comme étant un compromis entre le schéma de LAX-WENDROFF et le schéma de ROE; la discrétisation spatiale adoptée dans [21] et [22] s'inspire directement de l'approche multi-prédicteurs proposée par LERAT pour le schéma de LAX-WENDROFF. Plus récemment, dans la thèse de F. FALISSARD [16], ce même schéma semi-discrète a été discrétisé en s'inspirant de l'approche mono-prédicteur de NI. C'est également ce dernier point de vue qui a été adopté dans notre travail puisque c'est celui qui permet de préserver au mieux la structure existante du code AEROLOG, en exploitant de façon similaire la notion de distribution du résidu associée au schéma de LAX-WENDROFF-NI. Nous détaillerons donc, dans une deuxième section, la façon dont on construit, dans une formulation en différences finies, le schéma à pas de temps caractéristique mono-prédicteur, de façon similaire au schéma de LAX-WENDROFF mono-prédicteur précédemment exposé.

Cependant, le schéma à pas de temps caractéristique que nous proposons ne présente pas des propriétés de stabilité suffisantes à grand nombre  $CFL$  lorsqu'il est associé à la phase de lissage implicite des résidus présentée à la section 1.3; il nécessite une implicitation plus complète, prenant notamment en compte les termes du premier ordre. Nous présenterons donc, dans la section 2.3, la construction de cette phase implicite ainsi que sa résolution par une méthode de relaxation par point; on constitue ainsi une phase implicite dite « sans matrice ».

Nous présenterons, dans la quatrième section, les résultats issus de l'analyse de stabilité linéaire de VON NEUMANN, selon les principes que nous avons exposés plus haut (cf. 1.4). Nous traiterons le cas des écoulements stationnaires résolus avec le schéma implicite à pas de temps caractéristique et le cas des écoulements instationnaires traités avec la technique de pas de temps fictif. Il s'agit alors de juger de la pertinence des choix numériques proposés, préalablement à leur mise en œuvre dans le code de calcul.

Dans la cinquième section, enfin, nous présenterons une formulation tridimensionnelle en volumes finis de ces nouvelles méthodes numériques mises en œuvre dans AEROLOG.

## 2.1 Technique de pas de temps fictif

### 2.1.1 Principes généraux

Dans le chapitre 1 qui précède, on a décrit des méthodes numériques pour la résolution des écoulements stationnaires :

$$w_t + f_x + g_y = 0$$

Pour résoudre des écoulements instationnaires, on peut modifier le schéma à l'aide d'une technique de pas de temps fictif. Cette approche consiste à faire évoluer le système, entre deux instants indicés  $n$  et  $n + 1$ , en résolvant un problème pseudo-stationnaire par un processus sous-itératif en temps fictif  $\tau$ . On résout donc :

$$w_\tau + w_t + f_x + g_y = 0 \tag{2.1}$$

On note toujours  $w^n$  l'état connu au temps d'indice  $n$  et  $w^{n+1}$  le nouvel état à déterminer à l'instant indicé  $(n + 1)$  avec  $\Delta w^n = w^{n+1} - w^n$ . De plus, on introduit les états intermédiaires en temps fictif  $w^{n,m}$  et  $w^{n,m+1}$  tels que  $\Delta w^{n,m} = w^{n,m+1} - w^{n,m}$ .

On discrétise alors partiellement (2.1) en faisant apparaître l'approximation du terme de dérivée en temps :

$$\frac{\Delta w^{n,m}}{\Delta \tau} + \mathcal{T}(w^{n,m}, w^n, w^{n-1}) + f_x + g_y = 0 \tag{2.2}$$

Pour approcher la dérivée en temps physique, on choisit la formule à trois niveaux de temps suivante :

$$\mathcal{T}(w_{i,j}^{n,m}, w_{i,j}^n, w_{i,j}^{n-1}) = \frac{3}{2} \frac{w^{n,m} - w^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{\Delta w^{n-1}}{\Delta t} \quad (2.3)$$

Lorsque  $w^{n,m} \rightarrow w^{n+1}$  la formule (2.3) approche  $(w_t)^{n+1}$  à l'ordre deux en temps, assurant ainsi une précision temporelle de l'approximation de l'équation (2.1).

Par ailleurs, on note  $\mathcal{R}$  l'opérateur de discrétisation spatiale qui approche le bilan de flux  $f_x + g_y$ . Le résidu du calcul de l'évolution du système vis-à-vis du temps fictif devient  $w_t + f_x + g_y$  et la discrétisation  $\mathcal{T}(w^{n,m}, w^n, w^{n-1})$  constitue un terme source qui est inclus dans ce résidu. On peut impliciter cette méthode numérique vis-à-vis du temps fictif en évaluant les discrétisations des flux et de la dérivée en temps à l'instant  $n, m + 1$  :

$$\frac{\Delta w^{n,m}}{\Delta \tau} + \mathcal{T}(w^{n,m+1}, w^n, w^{n-1}) + \mathcal{R}(w^{n,m+1}) = 0$$

La formulation de la discrétisation  $\mathcal{T}$  est ainsi rendue implicite. On peut séparer la partie explicite de la contribution implicite :

$$\mathcal{T}(w^{n,m+1}, w^n, w^{n-1}) = \mathcal{T}(w^{n,m}, w^n, w^{n-1}) + \frac{3}{2} \frac{\Delta w^{n,m}}{\Delta t}$$

Ainsi, on ajoutera le terme  $3/(2\Delta t)$  au coefficient diagonal de la phase implicite. Comme c'est le cas pour le schéma de LAX-WENDROFF, la dissipation numérique du schéma peut s'appuyer sur le prédicteur des flux et donc inclure, dans le cadre d'une technique de pas de temps fictif, la discrétisation  $\mathcal{T}$  de la dérivée en temps physique ; cependant l'expérience montre que l'implicitation de ce terme supplémentaire n'est pas nécessaire pour garantir la stabilité du schéma ainsi formé.

Lorsque la technique de pas de temps fictif est mise en œuvre, on peut finalement distinguer plusieurs niveaux d'itérations :

- les itérations en temps physique :  $w^n \rightarrow w^{n+1}$ ,
- les itérations en temps fictif, à chaque pas de temps physique  $n$  :  $w^{n,m} \rightarrow w^{n,m+1}$ ,
- les sous-itérations éventuelles pour la phase implicite.

### 2.1.2 Cas particulier des schémas LAX-WENDROFF

L'approche que nous venons de présenter est valable lorsque l'opérateur  $\mathcal{R}$  de discrétisation spatiale des flux ne dépend que des variables spatiales (pas d'espace  $\delta x$  et  $\delta y \dots$ ). Or pour le schéma de LAX-WENDROFF que nous avons présenté au chapitre 1, les dimensions d'espace et de temps sont liées, la discrétisation des flux dépend donc également du pas de temps :  $\mathcal{R}(w^{n,m}, \Delta \tau)$ . Il faut donc effectuer une construction particulière du schéma en temps fictif (cf. notamment [20]). En effet un développement limité à l'ordre deux en temps fictif de  $w^{n,m+1}$  par rapport à  $w^{n,m}$  donne :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w^{n,m}}{\Delta \tau} &= w_{\tau}^{n,m} + \frac{\Delta \tau}{2} w_{\tau\tau}^{n,m} + \mathcal{O}(\Delta \tau^2) \\ &= -[w_t^{n,m} + (f_x + g_y)^{n,m}] - \frac{\Delta \tau}{2} [w_{t\tau}^{n,m} + (f_x + g_y)_{\tau}^{n,m}] + \mathcal{O}(\Delta \tau^2) \end{aligned}$$

En introduisant la discrétisation (2.3) de  $w_t$ , on obtient :

$$\begin{aligned} w_{t\tau}^{n,m} &= \frac{3}{2} \frac{w_{\tau}^{n,m}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= \frac{3}{2\Delta t} \frac{\Delta w^{n,m}}{\Delta \tau} + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta \tau) \end{aligned}$$

de plus, en utilisant l'équation (2.1) et en introduisant les matrices jacobiennes des flux  $A = \frac{df}{dw}$  et  $B = \frac{dg}{dw}$ , le terme  $(f_x + g_y)_\tau^{n,m}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} (f_x + g_y)_\tau &= (f_\tau)_x + (g_\tau)_y \\ &= (A w_\tau)_x + (B w_\tau)_y \\ &= - \left( [A(w_t + f_x + g_y)]_x + [B(w_t + f_x + g_y)]_y \right) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\Delta\tau} + \frac{3}{4\Delta t} \right) \Delta w^{n,m} &= - \left( \mathcal{T}(w^{n,m}, w^n, w^{n-1}) + (f_x + g_y)^{n,m} \right) \\ &\quad + (A [\mathcal{T}(w^{n,m}, w^n, w^{n-1}) + (f_x + g_y)^{n,m}])_x \\ &\quad + (B [\mathcal{T}(w^{n,m}, w^n, w^{n-1}) + (f_x + g_y)^{n,m}])_y \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta\tau^2) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

On a ainsi construit le schéma LAX-WENDROFF dans une version incluant le pas de temps fictif ; le terme qui a été ajouté est directement implicite puisqu'on a utilisé une discrétisation de type EULER rétrograde pour le calcul du  $w_\tau$  dans l'expression de  $w_{t\tau}$ . Cette expression diffère de la précédente par le coefficient 3/4 (au lieu de 3/2) dans le terme diagonal de la phase implicite.

### 2.1.3 Discrétisation spatiale

Dans le contexte de la formulation basée sur les nœuds du maillage que nous adoptons, la discrétisation  $\mathcal{T}(w_{i,j}^{n,m}, w_{i,j}^n, w_{i,j}^{n-1})$  de la dérivée des variables conservatives vis-à-vis du temps physique peut être ajoutée directement au point courant  $(i, j)$  du maillage. Cependant pour conserver la structure du code – en particulier pour le schéma de LAX-WENDROFF – on choisit d'ajouter cette contribution directement au prédicteur  $R_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n$ . La nouvelle expression du prédicteur, intervenant à la fois pour l'expression des flux consistants et dans l'expression de la dissipation du schéma LAX-WENDROFF et du schéma à pas de temps caractéristique que nous allons présenter, est alors :

$$R_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \left[ \frac{\delta_1 \mu_2 f}{\delta x} + \frac{\delta_2 \mu_1 g}{\delta y} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \left[ \mu_1 \mu_2 \left( \frac{3}{2} \frac{w^{n,m} - w^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{\Delta w^{n-1}}{\Delta t} \right) \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

## 2.2 Schéma à pas de temps caractéristique

Il existe actuellement deux voies principales pour atteindre une précision du deuxième ordre en espace pour des calculs stationnaires : on peut utiliser un schéma centré, de type LAX-WENDROFF par exemple, ou bien avoir recours à un schéma décentré du premier ordre, à décomposition de flux, (en anglais FVS : « Flux Vector Splitting ») comme le schéma de VAN LEER par exemple, ou à différence de flux, (en anglais FDS : « Flux Difference Splitting ») comme le schéma de ROE, étendu au deuxième ordre par une technique de reconstruction MUSCL (en anglais « Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws »). Les inconvénients des schémas de type LAX-WENDROFF sont bien connus : ces schémas présentent une dépendance de la solution stationnaire vis-à-vis du pas de temps et un certain manque de robustesse aux grands nombres  $CFL$  pour des écoulements présentant des chocs. Le recours à un schéma

décentré d'ordre élevé s'appuyant sur une reconstruction MUSCL, même si elle est désormais très populaire, ne manque pas non plus de défauts : elle n'est pas compacte puisqu'elle utilise cinq points par direction alors que le schéma de LAX-WENDROFF est construit sur un support à  $3^d$  points avec  $d$  dimensions d'espace ; pour des raisons de simplicité, l'implicitation d'un schéma décentré d'ordre deux est généralement réalisée à partir de la formulation à l'ordre un, utilisant trois points par direction, et l'utilisation d'une phase implicite non consistante avec la phase explicite limite l'efficacité du schéma aux grands nombres  $CFL$  ; enfin, cette approche requiert la mise en œuvre de limiteurs pour la simulation d'écoulements transsoniques.

Après analyse de cette situation, HUANG et LERAT [22] ont proposé un schéma dit à *pas de temps caractéristique* qui constitue un compromis intéressant entre le schéma de ROE et le schéma de LAX-WENDROFF et possède les propriétés suivantes :

- compacité du schéma ( $3^d$  points au plus en  $d$  dimensions),
- précision réelle au deuxième ordre à l'état stationnaire,
- absence de limiteur pour les problèmes transsoniques,
- stabilité et efficacité à haut nombre  $CFL$ ,
- solutions numériques stationnaires indépendantes du nombre  $CFL$ .

La construction de ce schéma s'appuie sur le constat que, pour résoudre une équation de loi de conservation mono-dimensionnelle et scalaire, le schéma de LAX-WENDROFF est équivalent au schéma de ROE si l'on choisit un certain pas de temps dit « caractéristique ».

### 2.2.1 Cas d'une équation scalaire mono-dimensionnelle

Considérons donc la loi de conservation suivante :

$$w_t + f_x = 0 \quad (2.6)$$

et le schéma aux différences finies :

$$\Delta w_i = -\frac{\Delta t}{\delta x} \delta_1 h_i$$

où :  $w_i = w_i^n$  représente la solution numérique au temps  $t = n \times \Delta t$  et au point  $x = i \times \delta x$  ;

$h_{i+\frac{1}{2}}$  le flux numérique à l'interface  $(i + \frac{1}{2}) \delta x$  ;

$\Delta$  est l'opérateur de différence en temps ; ainsi  $\Delta w_i = w_i^{n+1} - w_i^n$ .

On utilisera également les opérateurs  $\delta_1$  et  $\mu_1$  introduits plus haut (cf. formules (1.5) page 10).

Les schémas de LAX-WENDROFF et ROE se distinguent par l'expression du flux numérique :

$$h_{i+\frac{1}{2}}^{\text{LW}} = \left( \mu_1 f - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\delta x} A_{\text{R}} \delta_1 f \right)_{i+\frac{1}{2}}^n$$

$$h_{i+\frac{1}{2}}^{\text{R}} = \left( \mu_1 f - \frac{1}{2} |A_{\text{R}}| \delta_1 w \right)_{i+\frac{1}{2}}^n$$

où  $A_{\text{R}}$  est la moyenne de ROE du jacobien des flux  $A = \frac{df}{dw}$ .

$$(A_{\text{R}})_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} (\delta f)_{i+\frac{1}{2}} / (\delta w)_{i+\frac{1}{2}} & \text{si } (\delta w)_{i+\frac{1}{2}} \neq 0 \\ A(w_i) & \text{sinon} \end{cases}$$

On choisit alors un pas de temps caractéristique  $\Delta t^c$  tel que :

$$\Delta t_{i+\frac{1}{2}}^c |A|_{i+\frac{1}{2}} = \delta x$$

Ainsi, en introduisant l'expression de ce pas de temps caractéristique dans la formule du flux numérique du schéma de LAX-WENDROFF, celui-ci se transforme en flux numérique du schéma de ROE :

$$h_{i+\frac{1}{2}}^{\text{LW}} = \left( \mu_1 f - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(A_R) \delta_1 f \right)_{i+\frac{1}{2}}^n = h_{i+\frac{1}{2}}^{\text{R}}$$

### 2.2.2 Cas d'un système d'équations mono-dimensionnelles

Dans le cas où (2.6) est un système d'équations, c'est-à-dire que  $w$  et  $f$  sont des vecteurs, le jacobien  $A_R$  devient une matrice. En choisissant le pas de temps caractéristique introduit plus haut, on garde l'égalité entre les deux schémas de LAX-WENDROFF et ROE, mais le pas de temps caractéristique devient également une matrice et vérifie l'égalité matricielle :

$$\Delta t_{i+\frac{1}{2}}^c |A|_{i+\frac{1}{2}} = \delta x \operatorname{Id}$$

où  $\operatorname{Id}$  représente la matrice identité.

### 2.2.3 Cas d'une équation scalaire bidimensionnelle

On considère maintenant l'équation scalaire suivante :

$$w_t + f_x + g_y = 0$$

Le schéma de LAX-WENDROFF peut s'écrire (cf. formule (1.6)) :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w^n}{\Delta t} + f_x + g_y &= P^{\text{LW}}(w) \\ \text{avec } P^{\text{LW}}(w) &= \left[ A \frac{\Delta t}{2} (f_x + g_y) \right]_x + \left[ B \frac{\Delta t}{2} (f_x + g_y) \right]_y \end{aligned}$$

où  $A = df/dw$  et  $B = dg/dw$  sont les jacobiens des flux. En appliquant la même technique qu'à la section précédente 2.2.1, on obtiendrait deux pas de temps caractéristiques *a priori* différents. Pour garantir le caractère dissipatif du schéma et sa stabilité, on introduit un pas de temps unique et on relaxe la contrainte sur les pas de temps caractéristique dans chaque direction de maillage :

$$\begin{aligned} \Delta t^c |A| &= \delta x \Phi \\ \Delta t^c |B| &= \delta y \Psi \end{aligned}$$

L'opérateur de dissipation  $P(w)$  devient alors :

$$P^c(w) = \frac{\delta x}{2} [\Phi \operatorname{sgn}(A) (f_x + g_y)]_x + \frac{\delta y}{2} [\Psi \operatorname{sgn}(B) (f_x + g_y)]_y \quad (2.7)$$

La condition d'utilisation d'un unique pas de temps caractéristique implique :

$$\frac{|A|}{\delta x} \Psi = \frac{|B|}{\delta y} \Phi$$

Le caractère dissipatif de l'opérateur  $P^c(w)$  est assuré si les coefficients  $\Phi$  et  $\Psi$  sont positifs ou nuls. De plus, si l'écoulement est unidirectionnel, on veut retrouver le schéma de ROE; dans le cas contraire, on veut minimiser la distance de ce nouveau schéma au schéma de ROE, ce qui se traduit, par exemple<sup>6</sup>, par la recherche du minimum de :

$$|\Phi - 1| + |\Psi - 1|$$

On considère donc que ces deux coefficients  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des fonctions de la direction d'advection :

$$\alpha = \frac{\delta x |B|}{\delta y |A|}$$

On peut alors reformuler les contraintes précédentes en faisant apparaître ce paramètre :

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha) &= \alpha \times \Phi(\alpha) \\ \Phi(\alpha) &\geq 0 \\ \Phi(0) &= 1 \\ \Phi(\alpha) &\sim \frac{1}{\alpha} \quad \text{lorsque } \alpha \rightarrow \infty \end{aligned}$$

On cherche ensuite  $z = \Phi(\alpha)$  minimisant  $|z - 1| + |\alpha z - 1|$ . On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} \\ \Psi(\alpha) &= \begin{cases} \alpha & \text{si } 0 < \alpha \leq 1 \\ 1 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On peut alors récrire l'expression de ces coefficients :

$$\begin{aligned} \Phi &= \min\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right) = \min\left(1, \frac{\delta y |A|}{\delta x |B|}\right) \\ \Psi &= \min(1, \alpha) = \min\left(1, \frac{\delta x |B|}{\delta y |A|}\right) \end{aligned}$$

Ainsi on remarque que le pas de temps caractéristique utilisé est le plus petit des pas de temps dans chaque direction.

$$\Delta t^c = \min\left(\frac{\delta x}{|A|}, \frac{\delta y}{|B|}\right) = \min(\Delta t_1^c, \Delta t_2^c)$$

#### 2.2.4 Extension à un système d'équations bidimensionnelles

Reprenons enfin le système des équations bidimensionnelles (1.4) dans lequel  $w$ ,  $f$  et  $g$  sont maintenant des vecteurs :

$$w_t + f_x + g_y = 0 \tag{2.8}$$

---

<sup>6</sup>Ce choix de minimiser la distance en norme L1 n'est pas le seul. Bertrand MICHEL propose dans sa thèse [36] d'autres choix intéressants.

On cherche alors à définir correctement le pas de temps caractéristique adapté à ce problème matriciel. Nous considérons donc des matrices  $\Phi$  et  $\Psi$  qui possèdent les mêmes vecteurs propres que les matrices jacobiniennes  $A$  et  $B$  respectivement. On construit les valeurs propres de ces matrices par analogie avec le cas scalaire bidimensionnel :

$$\begin{aligned}
 A &= P_A \Lambda_A P_A^{-1} & B &= P_B \Lambda_B P_B^{-1} \\
 \Phi &= P_A \Lambda_\Phi P_A^{-1} & \Psi &= P_B \Lambda_\Psi P_B^{-1} \\
 \Lambda_\Phi &= \text{Diag}_i \left( \lambda_\Phi^{(i)} \right) & \Lambda_\Psi &= \text{Diag}_i \left( \lambda_\Psi^{(i)} \right) \\
 \lambda_\Phi^{(i)} &= \min \left( 1, \frac{\delta y |\lambda_A^{(i)}|}{\delta x \varsigma(B)} \right) & \lambda_\Psi^{(i)} &= \min \left( 1, \frac{\delta x |\lambda_B^{(i)}|}{\delta y \varsigma(A)} \right)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

où  $\lambda_M^{(i)}$  est la  $i^{\text{e}}$  valeur propre de la matrice  $M$  et  $\varsigma(M)$  une certaine fonction scalaire de la matrice  $M$ . Dans [22], HUANG et LERAT proposent le choix  $\varsigma(M) = \min_i |\lambda_M^{(i)}|$ ; ce choix permet de maximiser le caractère dissipatif du schéma; cependant, lorsque l'une des valeurs propres  $\lambda_M^{(i)}$  est proche de zéro, cette définition pose problème. FALISSARD dans sa thèse [16] propose le choix  $\varsigma(M) = \max_i |\lambda_M^{(i)}| = \rho(M)$ , qui est dicté par la nature même des équations étudiées : il s'agit en effet dans ce cas des équations de l'acoustique sans advection, c'est-à-dire des équations d'EULER linéarisées autour d'un état constant, caractérisé par une vitesse d'advection nulle, qui correspond donc à une valeur propre identiquement nulle, de sorte qu'il est indispensable d'adopter une définition de  $\varsigma(M)$  qui évite toute division par cette valeur propre nulle. Pour notre part, nous avons mené de nombreuses expériences numériques sur les cas d'écoulement qui seront présentés dans les chapitres suivants et nous avons privilégié, pour des raisons de robustesse et d'efficacité du schéma le choix  $\varsigma(M) = \rho(M)$ . Il faut cependant souligner qu'une étude plus approfondie de ce point précis serait sans nul doute intéressante : elle pourrait permettre de justifier, sur des bases théoriques, un choix plutôt qu'un autre, en s'affranchissant d'un appel à l'expérience pratique.

L'expression de l'opérateur de dissipation  $P^c(w)$  reste formellement identique à celle donnée par la formule (2.7). Cependant, puisque l'on se place maintenant dans le cadre d'un système d'équation et non plus avec une seule équation scalaire, les coefficients  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $\text{sgn}(A)$ ,  $\text{sgn}(B)$  sont matriciels. Il en va de même pour les pas de temps caractéristiques correspondants :

$$\begin{aligned}
 \Delta t_\Phi^c |A| &= \delta x \Phi \\
 \Delta t_\Psi^c |B| &= \delta y \Psi
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \Delta t_\Phi^c &= P_A \text{Diag}_i \left[ \min \left( \frac{\delta x}{|\lambda_A^{(i)}|}, \frac{\delta y}{\varsigma(B)} \right) \right] P_A^{-1} \\
 \Delta t_\Psi^c &= P_B \text{Diag}_i \left[ \min \left( \frac{\delta y}{|\lambda_B^{(i)}|}, \frac{\delta x}{\varsigma(A)} \right) \right] P_B^{-1}
 \end{aligned}$$

Finalement, compte tenu du fait que  $\text{sgn}(M) = P_M \text{Diag}_i \left[ \text{sgn} \left( \lambda_M^{(i)} \right) \right] P_M^{-1}$ , l'opérateur de dissipation du schéma s'écrit :

$$P^c(w) = \frac{\delta x}{2} [\phi(f_x + g_y)]_x + \frac{\delta y}{2} [\psi(f_x + g_y)]_y$$

$$\text{avec } \phi = P_A \text{Diag}_i \left[ \text{sgn} \left( \lambda_A^{(i)} \right) \times \min \left( 1, \frac{\delta y |\lambda_A^{(i)}|}{\delta x \varsigma(B)} \right) \right] P_A^{-1}$$

$$\text{et } \psi = P_B \text{Diag}_i \left[ \text{sgn} \left( \lambda_B^{(i)} \right) \times \min \left( 1, \frac{\delta x |\lambda_B^{(i)}|}{\delta y \varsigma(A)} \right) \right] P_B^{-1}$$

### 2.2.5 Discrétisation spatiale du schéma

Le schéma à pas de temps caractéristique qui vient d'être présenté peut être mis sous forme conservative :

$$\frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t_{i,j}} + \frac{\delta_1 h_{i,j}^1}{\delta x} + \frac{\delta_2 h_{i,j}^2}{\delta y} = 0 \quad (2.10)$$

où les flux numériques  $h^1$  et  $h^2$  sont analogues à ceux associés au schéma de LAX-WENDROFF-NI, mais avec une partie dissipative modifiée, soit :

$$\begin{cases} h_{i-\frac{1}{2},j}^1 = \mu_2 \tilde{h}_{i-\frac{1}{2},j}^1 \\ \tilde{h}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^1 = \mu_1 \mu_2 f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \frac{\delta x}{2} \phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} R_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2.11a)$$

et

$$\begin{cases} h_{i,j-\frac{1}{2}}^2 = \mu_1 \tilde{h}_{i,j-\frac{1}{2}}^2 \\ \tilde{h}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^2 = \mu_1 \mu_2 g_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \frac{\delta y}{2} \psi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} R_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2.11b)$$

Le prédicteur est toujours calculé de façon centrée par la formule :

$$R_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \left[ \frac{\delta_1 \mu_2 f}{\delta x} + \frac{\delta_2 \mu_1 g}{\delta y} \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$$

Les matrices de dissipation  $\phi$  et  $\psi$  sont calculées au point d'indices  $i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}$  à partir de l'état moyen à ce point :

$$\phi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \phi \left( \mu_1 \mu_2 w_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \quad (2.12a)$$

$$\psi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \psi \left( \mu_1 \mu_2 w_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \quad (2.12b)$$

En rassemblant (2.10),(2.11) et (2.12), on peut aussi écrire le schéma à pas de temps caractéristique sous la forme :

$$\frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t_{i,j}} + \mu_1 \mu_2 R_{i,j} = \frac{\delta_1 \mu_2}{2} [\phi R]_{i,j} + \frac{\delta_2 \mu_1}{2} [\psi R]_{i,j} \quad (2.13)$$

Le schéma à pas de temps caractéristique que nous venons de construire s'appuie sur un support compact, pour atteindre une précision d'ordre deux en espace, et un coefficient de

dissipation matriciel introduisant un décentrement, pour assurer un calcul robuste d'écoulements compressibles. Nous avons retenu une discrétisation qui repose sur le calcul d'un prédicteur unique, de façon analogue à l'approche développée par NI pour le schéma de LAX-WENDROFF. Comme pour ce schéma de LAX-WENDROFF-NI, le choix d'un prédicteur unique a pour conséquence le caractère non-dissipatif du schéma pour certaines longueurs d'onde, ce qui exige donc le recours à une viscosité artificielle pour assurer la convergence de la méthode vers l'état stationnaire. En contrepartie, le choix d'un prédicteur unique simplifie le coût de mise en œuvre du schéma et surtout, dans le contexte particulier de notre travail, permet de réexploiter très largement la formulation déjà disponible dans le logiciel AEROLOG. Comme nous l'expliquerons plus en détail par la suite, dans la phase explicite du logiciel, seul le traitement de la dissipation numérique doit être modifié pour passer de la formulation initiale de LAX-WENDROFF-NI au schéma à pas de temps caractéristique mono-prédicteur proposé.

D'autre part, nous signalons qu'il existe également une version multi-prédicteurs du schéma à pas de temps caractéristique (analogue à la formulation de LERAT du schéma de LAX-WENDROFF). Elle a été développée au Laboratoire SINUMEF et généralisée pour donner naissance à une classe de schémas dits « basés sur le résidu », puisque leur expression repose de façon capitale sur l'évaluation de différentes discrétisations du résidu aux centres et aux faces des cellules du maillage.

## 2.3 Phase implicite sans matrice

Pour construire la phase implicite associée au schéma explicite qui vient d'être décrit, on suit une démarche analogue à celle exposée à la section 1.3 pour la phase implicite associée au schéma de LAX-WENDROFF-NI. On cherche ainsi à augmenter la vitesse de convergence du schéma vers un état stationnaire. La présence, nécessaire à la stabilité, des termes du 1<sup>er</sup> ordre dans la phase implicite associée au schéma à pas de temps caractéristique introduit cependant certaines spécificités qui sont détaillées ici. Notons que la phase implicite utilisée dans nos travaux s'inspire de l'approche développée notamment dans [26] et [34].

### 2.3.1 Construction de la phase implicite

On choisit encore une fois de construire une phase implicite simple à trois points par direction, en éliminant, pour la dissipation, les termes correspondant à des dérivées croisées suivant les directions d'espace ; notons qu'ici il est indispensable d'impliciter également les termes du premier ordre pour garantir la stabilité du schéma :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t_{i,j}} + \frac{\delta_1 \mu_1}{\delta x} [\Delta f^n]_{i,j} + \frac{\delta_2 \mu_2}{\delta y} [\Delta g^n]_{i,j} \\ - \frac{\delta_1}{2\delta x} [\phi A \delta_1 \Delta w^n]_{i,j} - \frac{\delta_2}{2\delta y} [\psi B \delta_2 \Delta w^n]_{i,j} = \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

où l'incrément explicite  $\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}$  est donné par les formules (2.13) et (1.11), avec  $\Delta f = f^{n+1} - f^n$  et  $\Delta g = g^{n+1} - g^n$  les incréments de flux. Comme à la section 1.3, et par la suite,  $A$  et  $B$  désignent les matrices jacobiennes des flux non visqueux.

On remarque que cette phase implicite constitue un système non linéaire, puisque les incréments de flux  $\Delta f$  et  $\Delta g$  sont des fonctions non linéaires des incréments des variables  $\Delta w$  ; de plus elle peut être qualifiée de phase implicite par blocs puisque les coefficients de l'incrément  $\Delta w^n$  sont matriciels et non scalaires.

Les matrices  $\phi A = \Phi |A|$  et  $\psi B = \Psi |B|$  étant définies positives, on peut effectuer une simplification analogue au lissage implicite des résidus (1.14) en majorant ces coefficients matriciels de dissipation par leurs rayons spectraux  $\rho(|A|) = \rho(A)$  et  $\rho(|B|) = \rho(B)$ ; on obtient alors une phase implicite dite scalaire puisque les coefficients ne sont plus matriciels :

$$\frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t_{i,j}} + \frac{\delta_1 \mu_1}{\delta x} [\Delta f^n]_{i,j} + \frac{\delta_2 \mu_2}{\delta y} [\Delta f^n]_{i,j} - \frac{\delta_1}{2\delta x} [\rho(A) \delta_1 \Delta w^n]_{i,j} - \frac{\delta_2}{2\delta y} [\rho(B) \delta_2 \Delta w^n]_{i,j} = \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}}$$

Dans cette formule, on doit évaluer les rayons spectraux  $\rho(A)$  (resp.  $\rho(B)$ ) aux interfaces  $i + \frac{1}{2}, j$  (resp.  $i, j + \frac{1}{2}$ ); or l'état  $w$  n'est pas connu à ces points; on introduit donc une moyenne à l'aide de l'opérateur  $\mu_2$  (resp.  $\mu_1$ ) pour calculer cette quantité, et uniquement celle-ci, au centre des cellules de maillage :

$$\frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t_{i,j}} + \frac{\delta_1 \mu_1}{\delta x} [\Delta f^n]_{i,j} + \frac{\delta_2 \mu_2}{\delta y} [\Delta f^n]_{i,j} - \frac{\delta_1}{2\delta x} [\mu_2[\rho(A)] \times \delta_1 \Delta w^n]_{i,j} - \frac{\delta_2}{2\delta y} [\mu_1[\rho(B)] \times \delta_2 \Delta w^n]_{i,j} = \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} \quad (2.15)$$

On peut également appliquer un traitement implicite à la viscosité artificielle introduite au chapitre 1 (cf. équations (1.11) et (1.12)) et ainsi augmenter encore la stabilité et l'efficacité du schéma implicite. Ainsi, on modifie le schéma implicite (2.15) comme suit :

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t_{i,j}} + \frac{\delta_1 \mu_1}{\delta x} [\Delta f^n]_{i,j} + \frac{\delta_2 \mu_2}{\delta y} [\Delta f^n]_{i,j} \\ & - \frac{\delta_1}{2\delta x} [\mu_2[\rho(A)] \times \delta_1 \Delta w^n]_{i,j} - \frac{\delta_2}{2\delta y} [\mu_1[\rho(B)] \times \delta_2 \Delta w^n]_{i,j} \\ & - \delta_1 [\nu^{\text{va1}} \times \delta_1 \Delta w^n]_{i,j} - \delta_2 [\nu^{\text{va2}} \times \delta_2 \Delta w^n]_{i,j} = \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Enfin, on implícite les termes visqueux. On a vu que les flux visqueux sont les flux qui dépendent à la fois des variables conservatives et de leur gradient :

$$f^V(w, w_x, w_y) \quad , \quad g^V(w, w_x, w_y)$$

Une implication complète de ces flux, résultant d'une linéarisation selon la variable  $w$  et toutes les composantes de son gradient, ferait apparaître trois types de jacobiens différents :

$$\begin{aligned} A_0^V &= \frac{\partial f^V}{\partial w} & A_1^V &= \frac{\partial f^V}{\partial (w_x)} & A_2^V &= \frac{\partial f^V}{\partial (w_y)} \\ B_0^V &= \frac{\partial g^V}{\partial w} & B_1^V &= \frac{\partial g^V}{\partial (w_x)} & B_2^V &= \frac{\partial g^V}{\partial (w_y)} \end{aligned}$$

Cependant, on ne retient que les contributions principales, faisant intervenir  $A_1^V$  et  $B_2^V$  (on pourra se référer, sur ce point, à [27]) :

$$\begin{aligned} \Delta f^V &\approx A_1^V \Delta w_x \\ \Delta g^V &\approx B_2^V \Delta w_y \end{aligned}$$

et on ajoute donc à la phase implicite (membre de gauche de l'équation (2.16)) la quantité :

$$-\frac{\delta_1}{\delta x^2} [A_1^V \delta_1 \Delta w] - \frac{\delta_2}{\delta y^2} [B_2^V \delta_2 \Delta w]$$

Cette contribution est matricielle puisque les coefficients  $A_1^V$  et  $B_2^V$  sont des matrices. Cependant, comme ces matrices sont définies positives, on ne change pas les propriétés de stabilité de la phase implicite en les remplaçant par leurs rayons spectraux  $\rho(A_1^V)$  et  $\rho(B_2^V)$ . Ces quantités doivent *a priori* être calculées aux interfaces  $i \pm \frac{1}{2}, j$  et  $i, j \pm \frac{1}{2}$ . Comme elles ne sont pas disponibles directement à ces points, on introduit une moyenne qui permet d'utiliser les valeurs calculées aux centres des cellules de maillage. La phase implicite devient donc :

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t_{i,j}} + \frac{\delta_1 \mu_1}{\delta x} [\Delta f^n]_{i,j} + \frac{\delta_2 \mu_2}{\delta y} [\Delta f^n]_{i,j} \\ & - \frac{\delta_1}{2\delta x} [\mu_2 [\rho(A)] \times \delta_1 \Delta w^n]_{i,j} - \frac{\delta_2}{2\delta y} [\mu_1 [\rho(B)] \times \delta_2 \Delta w^n]_{i,j} \\ & - \delta_1 [\mathbf{v}^{\text{va1}} \times \delta_1 \Delta w^n]_{i,j} - \delta_2 [\mathbf{v}^{\text{va2}} \times \delta_2 \Delta w^n]_{i,j} \\ & - \frac{\delta_1}{\delta x^2} [\mu_2 [\rho(A_1^V)] \times \delta_1 \Delta w^n]_{i,j} - \frac{\delta_2}{\delta y^2} [\mu_1 [\rho(B_2^V)] \times \delta_2 \Delta w^n]_{i,j} = \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

On remarque que l'on peut regrouper les contributions à la phase implicite des termes de dissipation numérique de viscosité artificielle et de flux visqueux. On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t_{i,j}} + \frac{\delta_1 \mu_1}{\delta x} [\Delta f^n]_{i,j} + \frac{\delta_2 \mu_2}{\delta y} [\Delta g^n]_{i,j} \\ & - \delta_1 \left[ \left( \mu_2 \left[ \frac{\rho(A)}{2\delta x} + \frac{\rho(A_1^V)}{\delta x^2} \right] + \mathbf{v}^{\text{va1}} \right) \times \delta_1 \Delta w^n \right]_{i,j} \\ & - \delta_2 \left[ \left( \mu_1 \left[ \frac{\rho(B)}{2\delta y} + \frac{\rho(B_2^V)}{\delta y^2} \right] + \mathbf{v}^{\text{va2}} \right) \times \delta_2 \Delta w^n \right]_{i,j} = \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

De la même façon qu'au chapitre précédent (cf. section 1.3.1), on introduit deux modifications dans l'expression de la phase implicite (2.18) afin d'augmenter encore la robustesse du schéma construit. On remplace donc les rayons spectraux des matrices jacobiennes dans chaque direction  $\rho(A)$  et  $\rho(B)$  par la vitesse caractéristique  $V^{\text{car}} = c + \|\vec{v}\|$ . De plus, le coefficient de sur-implication  $\beta \geq 1/2$  se substitue au coefficient  $1/2$  qui provient de l'implication des termes de dissipation numérique ; cependant, on l'appliquera à l'ensemble des termes dissipatifs (c'est-à-dire également aux termes de viscosité artificielle et visqueux). On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t_{i,j}} + \frac{\delta_1 \mu_1}{\delta x} [\Delta f^n]_{i,j} + \frac{\delta_2 \mu_2}{\delta y} [\Delta g^n]_{i,j} \\ & - \delta_1 \left[ \beta \left( \mu_2 \left[ \frac{\rho(A)}{\delta x} + 2 \times \frac{\rho(A_1^V)}{\delta x^2} \right] + 2 \times \mathbf{v}^{\text{va1}} \right) \delta_1 \Delta w^n \right]_{i,j} \\ & - \delta_2 \left[ \beta \left( \mu_1 \left[ \frac{\rho(B)}{\delta y} + 2 \times \frac{\rho(B_2^V)}{\delta y^2} \right] + 2 \times \mathbf{v}^{\text{va2}} \right) \delta_2 \Delta w^n \right]_{i,j} = \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Les systèmes (2.18) et (2.19) obtenus comportent une partie non linéaire ( $\Delta f$  et  $\Delta g$ ) et une partie linéaire.

### 2.3.2 Résolution du système implicite

Nous cherchons à résoudre les systèmes non linéaires (2.18) et (2.19). La méthode retenue repose sur la notion de relaxation. Elle permet de résoudre ce système sans inversion de matrice, de manière itérative. On peut tout d'abord récrire ces deux systèmes implicites en faisant apparaître explicitement les voisins du point courant :

$$C^0 \Delta w_{i,j}^n - C_+^1 \Delta w_{i+1,j}^n - C_-^1 \Delta w_{i-1,j}^n - C_+^2 \Delta w_{i,j+1}^n - C_-^2 \Delta w_{i,j-1}^n + \frac{1}{2\delta x} \Delta f_{i+1,j}^n - \frac{1}{2\delta x} \Delta f_{i-1,j}^n + \frac{1}{2\delta y} \Delta g_{i,j+1}^n - \frac{1}{2\delta y} \Delta g_{i,j-1}^n = \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} \quad (2.20a)$$

avec, pour le système (2.18) :

$$C_{\pm}^1 = \left( \mu_2 \left[ \frac{\rho(A)}{2\delta x} + \frac{\rho(A_1^V)}{\delta x^2} \right] + \mathbf{v}^{\text{va1}} \right)_{i \pm \frac{1}{2}, j} \quad (2.20b)$$

$$C_{\pm}^2 = \left( \mu_1 \left[ \frac{\rho(B)}{2\delta y} + \frac{\rho(B_2^V)}{\delta y^2} \right] + \mathbf{v}^{\text{va2}} \right)_{i, j \pm \frac{1}{2}}$$

pour le système (2.19) :

$$C_{\pm}^1 = \beta \left( \mu_2 \left[ \frac{\rho(A)}{\delta x} + 2 \times \frac{\rho(A_1^V)}{\delta x^2} \right] + 2 \times \mathbf{v}^{\text{va1}} \right)_{i \pm \frac{1}{2}, j} \quad (2.20c)$$

$$C_{\pm}^2 = \beta \left( \mu_1 \left[ \frac{\rho(B)}{\delta y} + 2 \times \frac{\rho(B_2^V)}{\delta y^2} \right] + 2 \times \mathbf{v}^{\text{va2}} \right)_{i, j \pm \frac{1}{2}}$$

et, dans les deux cas :

$$C^0 = \frac{1}{\Delta t_{i,j}} + C_+^1 + C_-^1 + C_+^2 + C_-^2 \quad (2.20d)$$

#### 2.3.2.1 Relaxation de JACOBI par point

On résout alors le système (2.20a) par relaxation de JACOBI par point, en relaxant tous les termes qui ne mettent pas en jeu le point courant  $(i, j)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta' w_{i,j}^{(0)} = \frac{1}{C^0} \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} \\ \forall l \in \llbracket 1, l_{\max} \rrbracket, \\ \Delta' w_{i,j}^{(l)} = \frac{1}{C^0} \left[ \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} - \frac{1}{2\delta x} \Delta' f_{i+1,j}^{(l-1)} + \frac{1}{2\delta x} \Delta' f_{i-1,j}^{(l-1)} \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2\delta y} \Delta' g_{i,j+1}^{(l-1)} + \frac{1}{2\delta y} \Delta' g_{i,j-1}^{(l-1)} \right. \\ \quad \left. + C_+^1 \Delta' w_{i+1,j}^{(l-1)} + C_-^1 \Delta' w_{i-1,j}^{(l-1)} \right. \\ \quad \left. + C_+^2 \Delta' w_{i,j+1}^{(l-1)} + C_-^2 \Delta' w_{i,j-1}^{(l-1)} \right] \\ \Delta w_{i,j}^n = \Delta' w_{i,j}^{(l_{\max})} \end{array} \right.$$

où  $l$  est l'indice de relaxation qui intervient dans le processus sous-itératif. On a alors introduit des états intermédiaires  $w^{(l)}$  et l'opérateur de différence  $\Delta'$  tel que  $\Delta'w^{(l)} = w^{(l)} - w^n$ . On remarquera que l'on n'initialise pas le premier incrément à une valeur nulle ; cela permet de gagner une itération puisque, si l'on avait initialisé avec une valeur nulle, la première itération de l'algorithme aurait consisté en cette multiplication par un coefficient scalaire.

### 2.3.2.2 Relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique par point

Pour résoudre le système (2.20a), on peut utiliser une méthode de relaxation *a priori* plus efficace. Cette relaxation de GAUSS-SEIDEL (cf. notamment [47]) exploite le fait que dans le processus de relaxation, lors du calcul d'un point, un certain nombre d'incrément voisins ont déjà été calculés et peuvent être utilisés. Ainsi, si l'on parcourt le domaine de calcul dans le sens croissant des indices – l'indice  $i$  variant plus rapidement que l'indice  $j$  – lorsque l'on calcule l'incrément au point  $(i, j)$ , les incréments aux points  $(i - 1, j)$  et  $(i, j - 1)$  sont déjà connus. On peut ainsi écrire ce calcul d'incrément :

$$\begin{aligned} \Delta'w_{i,j}^{(l)} = \frac{1}{C^0} \left[ \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} - \frac{1}{2\delta x} \Delta'f_{i+1,j}^{(l-1)} + \frac{1}{2\delta x} \Delta'f_{i-1,j}^{(l)} - \frac{1}{2\delta y} \Delta'g_{i,j+1}^{(l-1)} + \frac{1}{2\delta y} \Delta'g_{i,j-1}^{(l)} \right. \\ \left. + C_+^1 \Delta'w_{i+1,j}^{(l-1)} + C_-^1 \Delta'w_{i-1,j}^{(l)} + C_+^2 \Delta'w_{i,j+1}^{(l-1)} + C_-^2 \Delta'w_{i,j-1}^{(l)} \right] \quad (2.21) \end{aligned}$$

Pour assurer une efficacité dans tous les cas de calcul, on parcourt ensuite immédiatement le domaine de calcul dans le sens des indices décroissants, et le calcul de l'incrément qui en résulte est :

$$\begin{aligned} \Delta'w_{i,j}^{(l)} = \frac{1}{C^0} \left[ \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} - \frac{1}{2\delta x} \Delta'f_{i+1,j}^{(l)} + \frac{1}{2\delta x} \Delta'f_{i-1,j}^{(l-1)} - \frac{1}{2\delta y} \Delta'g_{i,j+1}^{(l)} + \frac{1}{2\delta y} \Delta'g_{i,j-1}^{(l-1)} \right. \\ \left. + C_+^1 \Delta'w_{i+1,j}^{(l)} + C_-^1 \Delta'w_{i-1,j}^{(l-1)} + C_+^2 \Delta'w_{i,j+1}^{(l)} + C_-^2 \Delta'w_{i,j-1}^{(l-1)} \right] \quad (2.22) \end{aligned}$$

On peut alors résumer cette résolution itérative de la phase implicite par<sup>7</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Delta'w_{i,j}^{(0)} = \frac{1}{C^0} \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} \\
 \forall l \in \llbracket 1, l_{\max} \rrbracket, \\
 \left[ \begin{array}{l}
 \Delta'w_{i,j}^{(*)} = \frac{1}{C^0} \left[ \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} \right. \\
 \quad - \frac{1}{2\delta x} \Delta'f_{i+1,j}^{(l-1)} + \frac{1}{2\delta x} \Delta'f_{i-1,j}^{(*)} - \frac{1}{2\delta y} \Delta'g_{i,j+1}^{(l-1)} + \frac{1}{2\delta y} \Delta'g_{i,j-1}^{(*)} \\
 \quad \left. + C_+^1 \Delta'w_{i+1,j}^{(l-1)} + C_-^1 \Delta'w_{i-1,j}^{(*)} + C_+^2 \Delta'w_{i,j+1}^{(l-1)} + C_-^2 \Delta'w_{i,j-1}^{(*)} \right] \\
 \\
 \Delta'w_{i,j}^{(l)} = \frac{1}{C^0} \left[ \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} \right. \\
 \quad - \frac{1}{2\delta x} \Delta'f_{i+1,j}^{(l)} + \frac{1}{2\delta x} \Delta'f_{i-1,j}^{(*)} - \frac{1}{2\delta y} \Delta'g_{i,j+1}^{(l)} + \frac{1}{2\delta y} \Delta'g_{i,j-1}^{(*)} \\
 \quad \left. + C_+^1 \Delta'w_{i+1,j}^{(l)} + C_-^1 \Delta'w_{i-1,j}^{(*)} + C_+^2 \Delta'w_{i,j+1}^{(l)} + C_-^2 \Delta'w_{i,j-1}^{(*)} \right] \\
 \\
 \Delta w_{i,j}^n = \Delta'w_{i,j}^{(l_{\max})}
 \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Ce type de relaxation ne permet pas cependant de prendre en compte facilement les raccords entre deux domaines de maillage, en particulier si l'on souhaite paralléliser ces algorithmes de calcul. Pour conserver cette possibilité d'une gestion parallélisée des domaines de maillage, on applique donc l'algorithme de GAUSS-SEIDEL symétrique sur la totalité des points intérieurs aux domaines de maillage (c'est-à-dire tels que  $i \notin \{1, i_{\max}\}$  et  $j \notin \{1, j_{\max}\}$ ) et l'algorithme de JACOBI sur les points de raccord entre domaines de maillage, puisque ces raccords sont facilement réalisables avec cet algorithme.

### 2.3.2.3 Application à la phase implicite du schéma LAX-WENDROFF

Nous venons de présenter la résolution du système implicite (2.18) associé au schéma à pas de temps caractéristique. Cependant, cette méthode de résolution par relaxation – de JACOBI ou de GAUSS-SEIDEL symétrique – d'un système linéaire ou non linéaire permet également de résoudre les systèmes implicites (1.14) et (1.15). Ces systèmes peuvent être mis sous la forme donnée à l'équation (2.20a) et on obtient alors :

$$C^0 \Delta w_{i,j}^n - C_+^1 \Delta w_{i+1,j}^n - C_-^1 \Delta w_{i-1,j}^n - C_+^2 \Delta w_{i,j+1}^n - C_-^2 \Delta w_{i,j-1}^n = \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}}$$

avec, pour le système (1.14) :

$$C_{\pm}^1 = \left( \mu_2 \left[ \frac{\Delta t \rho(A^2)}{2\delta x^2} \right] \right)_{i \pm \frac{1}{2}, j} \quad C_{\pm}^2 = \left( \mu_1 \left[ \frac{\Delta t \rho(B^2)}{2\delta y^2} \right] \right)_{i, j \pm \frac{1}{2}}$$

<sup>7</sup>On notera que l'on a conservé la même initialisation que pour l'algorithme de JACOBI par point.

avec, pour le système (1.15) :

$$C_{\pm}^1 = \beta \times \left( \mu_2 \left[ \frac{\Delta t \times (V^{\text{car}})^2}{\delta x^2} \right] \right)_{i \pm \frac{1}{2}, j} \quad C_{\pm}^2 = \beta \times \left( \mu_1 \left[ \frac{\Delta t \times (V^{\text{car}})^2}{\delta y^2} \right] \right)_{i, j \pm \frac{1}{2}}$$

et, dans les deux cas :

$$C^0 = \frac{1}{\Delta t_{i,j}} + C_+^1 + C_-^1 + C_+^2 + C_-^2$$

Bien que ce ne soit pas nécessaire pour en assurer la stabilité inconditionnelle, on peut également inclure dans ce système les contributions à la phase implicite des flux visqueux, de la viscosité artificielle et des flux consistants. On obtient alors le système (2.20a) où l'on a modifié l'expression des coefficients :

$$\begin{aligned} C^0 \Delta w_{i,j}^n - C_+^1 \Delta w_{i+1,j}^n - C_-^1 \Delta w_{i-1,j}^n - C_+^2 \Delta w_{i,j+1}^n - C_-^2 \Delta w_{i,j-1}^n \\ + \frac{1}{2\delta x} \Delta f_{i+1,j}^n - \frac{1}{2\delta x} \Delta f_{i-1,j}^n + \frac{1}{2\delta y} \Delta g_{i,j+1}^n - \frac{1}{2\delta y} \Delta g_{i,j-1}^n = \frac{\Delta w_{i,j}^{\text{expl}}}{\Delta t_{i,j}} \end{aligned}$$

avec, pour le système (1.14) :

$$\begin{aligned} C_{\pm}^1 &= \left( \mu_2 \left[ \frac{\Delta t \rho(A^2)}{2\delta x^2} + \frac{\rho(A_1^V)}{\delta x^2} \right] + \nu^{\text{va1}} \right)_{i \pm \frac{1}{2}, j} \\ C_{\pm}^2 &= \left( \mu_1 \left[ \frac{\Delta t \rho(B^2)}{2\delta y^2} + \frac{\rho(B_2^V)}{\delta y^2} \right] + \nu^{\text{va2}} \right)_{i, j \pm \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

avec, pour le système (1.15) :

$$\begin{aligned} C_{\pm}^1 &= \beta \times \left( \mu_2 \left[ \frac{\Delta t \times (V^{\text{car}})^2}{\delta x^2} + 2 \times \frac{\rho(A_1^V)}{\delta x^2} \right] + 2 \times \nu^{\text{va1}} \right)_{i \pm \frac{1}{2}, j} \\ C_{\pm}^2 &= \beta \times \left( \mu_1 \left[ \frac{\Delta t \times (V^{\text{car}})^2}{\delta y^2} + 2 \times \frac{\rho(B_2^V)}{\delta y^2} \right] + 2 \times \nu^{\text{va2}} \right)_{i, j \pm \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et, dans les deux cas :

$$C^0 = \frac{1}{\Delta t_{i,j}} + C_+^1 + C_-^1 + C_+^2 + C_-^2$$

On peut alors appliquer à ce système les mêmes méthodes de relaxation de JACOBI ou de GAUSS-SEIDEL.

### 2.3.3 Schéma à pas de temps caractéristique et pas de temps fictif

Pour la résolution des écoulements instationnaires, il est possible d'utiliser le schéma à pas de temps caractéristique et la phase implicite sans matrice, décrits aux sections 2.2 et 2.3, avec la technique de pas de temps fictif, présentée à la section 2.1.

Dans ce cas, outre l'organisation des boucles de calcul qui est modifiée selon ce qui a été décrit au paragraphe 2.1.1, on modifie également les expressions des phases explicite et implicite. Comme on l'a présenté au paragraphe 2.1.3, la modification de la phase explicite passe par l'ajout d'un terme source dans l'expression du prédicteur. Ainsi elle s'écrit alors (cf. formule (2.13)) :

$$\frac{\Delta w_{i,j}^n}{\Delta t_{i,j}} + \mu_1 \mu_2 R'_{i,j} = \frac{\delta_1 \mu_2}{2} [\phi R']_{i,j} + \frac{\delta_2 \mu_1}{2} [\psi R']_{i,j}$$

où le prédicteur  $R'$  est modifié selon la formule (2.5) :

$$R'_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = R_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \left[ \mu_1 \mu_2 \left( \frac{3}{2} \frac{w^{n,m} - w^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \frac{\Delta w^{n-1}}{\Delta t} \right) \right]_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$$

La phase implicite est modifiée par l'ajout d'un terme diagonal, qui a été présenté au paragraphe 2.1.3. Ainsi les phases implicites (2.18) et (2.19) sont modifiées :

$$\left( \frac{1}{\Delta \tau_{i,j}} + \frac{3}{2\Delta t} \right) \Delta w_{i,j}^{n,m} + \frac{\delta_1 \mu_1}{\delta x} [\Delta f^n]_{i,j} + \dots$$

Enfin, pour la résolution de cette phase implicite par relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique par point, il faut modifier le coefficient diagonal de la façon suivante :

$$C^{0'} = C^0 + \frac{3}{2\Delta t}$$

On prend ainsi en compte la technique de pas de temps fictif dans la phase d'initialisation et chacune des deux sous-étapes de la résolution par relaxation de la phase implicite.

On note donc que, hormis la réorganisation des boucles de calcul et des sorties de données associées qui seront présentées à la section 2.5, les modifications du schéma à pas de temps caractéristique pour une utilisation dans le cadre de la technique de pas de temps fictif sont minimales.

## 2.4 Analyse théorique

Comme au chapitre 1, nous allons étudier les méthodes présentées précédemment, dans le cadre d'une analyse de stabilité linéaire de VON NEUMANN. Cette analyse sera effectuée d'une part pour le calcul d'écoulements stationnaires à l'aide du schéma à pas de temps caractéristique associé à la phase implicite sans matrice résolue par un algorithme de relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique par point, et, d'autre part, pour le calcul d'écoulements instationnaires à l'aide de la technique de pas de temps fictif. Dans ce cas, on effectuera l'analyse vis-à-vis du temps fictif et on envisagera les deux cas du schéma de LAX-WENDROFF et du schéma à pas de temps caractéristique.

### 2.4.1 Analyse du schéma à pas de temps caractéristique

Pour l'analyse de stabilité du schéma à pas de temps caractéristique, il convient tout d'abord de linéariser les expressions définissant le schéma. Ce schéma est implicite et la phase implicite est résolue par une méthode de relaxation. En reprenant les notations introduites à la section 1.4, on introduit un opérateur explicite  $\mathcal{K}$ , correspondant à la formule (2.13), et un opérateur implicite  $\mathcal{H}$ , correspondant à la formule (2.20a) :

$$\mathcal{H} \Delta w_{i,j}^n = -\mathcal{K} w_{i,j}^n \quad (2.24)$$

De plus, le système implicite est résolu de façon itérative par une méthode de relaxation à deux étapes qui peut s'écrire (cf. équation (2.23)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_0 \Delta' w_{i,j}^{(0)} = -\mathcal{K} w_{i,j}^n \\ \forall l \in \llbracket 1, l_{\max} \rrbracket, \\ \left[ \begin{array}{l} \mathcal{H}_1 \Delta' w_{i,j}^{(*)} = -\mathcal{K} w_{i,j}^n - (\mathcal{H} - \mathcal{H}_1) \Delta' w_{i,j}^{(l-1)} \\ \mathcal{H}_2 \Delta' w_{i,j}^{(l)} = -\mathcal{K} w_{i,j}^n - (\mathcal{H} - \mathcal{H}_2) \Delta' w_{i,j}^{(*)} \end{array} \right. \\ \Delta w_{i,j}^n = \Delta' w_{i,j}^{(l_{\max})} \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Si on se place maintenant dans le domaine de FOURIER (cf. section 1.4), on obtient alors l'algorithme de relaxation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 \Delta' \hat{w}^{(0)} = -K \hat{w}^n \\ \forall l \in \llbracket 1, l_{\max} \rrbracket, \\ \left[ \begin{array}{l} H_1 \Delta' \hat{w}^{(*)} = -K \hat{w}^n - (H - H_1) \Delta' \hat{w}^{(l-1)} \\ H_2 \Delta' \hat{w}^{(l)} = -K \hat{w}^n - (H - H_2) \Delta' \hat{w}^{(*)} \end{array} \right. \\ \Delta \hat{w}^n = \Delta' \hat{w}^{(l_{\max})} \end{array} \right. \quad (2.26)$$

où  $K$ ,  $H$ ,  $H_0$ ,  $H_1$  et  $H_2$  sont les transformées de FOURIER des opérateurs  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H}_0$ ,  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ . On introduit alors, pour chaque étape de ce processus itératif, un facteur d'amplification intermédiaire :

$$\forall l \in \llbracket 1, l_{\max} \rrbracket, \quad \hat{w}^{(l)} = G_l \hat{w}^n$$

Les étapes initiale et finale du processus de relaxation conduisent naturellement à

$$G_0 = \text{Id} - H_0^{-1}K \quad \text{et} \quad G = G_{l_{\max}}$$

où  $G$  est le facteur d'amplification résultant du processus global. Nous voulons maintenant exprimer cette matrice en fonction de  $H$ ,  $H_0$ ,  $H_1$  et  $H_2$ . Chaque itération du processus itératif peut s'écrire :

$$\forall p \in \{1, 2\}, \quad H_p \left( G_{l-1+\frac{p}{2}} - \text{Id} \right) = -K - (H - H_p) \left( G_{l-1+\frac{p-1}{2}} - \text{Id} \right)$$

avec

$$G_{l-\frac{1}{2}} = \frac{\hat{w}^{(*)}}{\hat{w}^n}$$

soit, en introduisant le facteur d'amplification  $G_D = \text{Id} - H^{-1}K$  correspondant à la résolution directe du système implicite :

$$G_{l-1+\frac{p}{2}} = G_{l-1+\frac{p-1}{2}} - H_p^{-1}H \left( G_{l-1+\frac{p-1}{2}} - G_D \right)$$

soit encore, en soustrayant  $G_D$  à chacun des deux membres :

$$\left( G_{l-1+\frac{p}{2}} - G_D \right) = (\text{Id} - H_p^{-1}H) \left( G_{l-1+\frac{p-1}{2}} - G_D \right)$$

Ainsi, lorsque l'on effectue les deux étapes d'une même itération, on obtient :

$$(G_l - G_D) = (\text{Id} - H_2^{-1}H) (\text{Id} - H_1^{-1}H) (G_{l-1} - G_D)$$

Après  $l_{\max}$  itérations, on obtient :

$$(G_{l_{\max}} - G_D) = (\text{Id} - H_2^{-1}H)^{l_{\max}} (\text{Id} - H_1^{-1}H)^{l_{\max}} (G_0 - G_D)$$

soit finalement :

$$G = \text{Id} - H^{-1}K + (\text{Id} - H_2^{-1}H)^{l_{\max}} (\text{Id} - H_1^{-1}H)^{l_{\max}} (H^{-1} - H_0^{-1})K \quad (2.27)$$

### 2.4.1.1 Établissement du facteur d'amplification

La linéarisation des phases explicite – avec la viscosité artificielle (cf. paragraphe 1.4.1) – et implicite résolue par relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique fournit les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \dot{A}\delta_1\mu_1\mu_2^2 + \dot{B}\delta_2\mu_2\mu_1^2 - \frac{\Delta t C\mu_0 V^{\text{car}0}}{\min(\delta x, \delta y)} (\delta_1^2 + \delta_2^2) \\ & - \frac{1}{2}\Phi|\dot{A}|\delta_1^2\mu_2^2 - \frac{1}{2}\Psi|\dot{B}|\delta_2^2\mu_1^2 - \frac{1}{2} \left( \Phi \operatorname{sgn}(\dot{A})\dot{B} + \Psi \operatorname{sgn}(\dot{B})\dot{A} \right) \delta_1\mu_1\delta_2\mu_2 \end{aligned} \quad (2.28a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \Delta t C^0 \mathcal{I}d - \Delta t C^1 (\mathcal{E}_+^1 + \mathcal{E}_-^1) - \Delta t C^2 (\mathcal{E}_+^2 + \mathcal{E}_-^2) \\ & + \frac{\dot{A}}{2} (\mathcal{E}_+^1 - \mathcal{E}_-^1) + \frac{\dot{B}}{2} (\mathcal{E}_+^2 - \mathcal{E}_-^2) \end{aligned} \quad (2.28b)$$

$$\mathcal{H}_0 = \Delta t C^0 \mathcal{I}d \quad (2.28c)$$

$$\mathcal{H}_1 = \Delta t C^0 \mathcal{I}d - \left( \frac{\dot{A}}{2} + \Delta t C^1 \right) \mathcal{E}_-^1 - \left( \frac{\dot{B}}{2} + \Delta t C^2 \right) \mathcal{E}_-^2 \quad (2.28d)$$

$$\mathcal{H}_2 = \Delta t C^0 \mathcal{I}d + \left( \frac{\dot{A}}{2} - \Delta t C^1 \right) \mathcal{E}_+^1 + \left( \frac{\dot{B}}{2} - \Delta t C^2 \right) \mathcal{E}_+^2 \quad (2.28e)$$

Dans ces expressions, on a introduit quatre opérateurs  $\mathcal{E}_\pm^p$  dits de « décalage » selon l'indice  $p$  du maillage :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\pm^1 \varphi_{i,j} = \varphi_{i\pm 1,j} \\ \mathcal{E}_\pm^2 \varphi_{i,j} = \varphi_{i,j\pm 1} \end{cases}$$

pour toute fonction  $\varphi$  définie sur le maillage.

On utilise alors les résultats présentés au paragraphe 1.4.1 où l'on a noté

$$z_1 = \frac{1}{2} (1 - \cos \xi) \in [0, 1] \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1}{2} (1 - \cos \eta) \in [0, 1]$$

et on remarque que les transformées de FOURIER des opérateurs  $\mathcal{E}_\pm^p$  de décalage sur le maillage sont :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\pm^1 = e^{\pm i\xi} \\ \mathbf{E}_\pm^2 = e^{\pm i\eta} \end{cases}$$

On établit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \left[ 2\Phi|\dot{A}|z_1(1-z_2) + 2\Psi|\dot{B}|z_2(1-z_1) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( \Phi \operatorname{sgn}(\dot{A})\dot{B} + \Psi \operatorname{sgn}(\dot{B})\dot{A} \right) \sin(\xi) \sin(\eta) + 4 \frac{\Delta t C \mu_0 V^{\text{car0}}}{\min(\delta x, \delta y)} (z_1 + z_2) \operatorname{Id} \right] \\ & + \mathbf{i} \left[ \dot{A}(1-z_2) \sin(\xi) + \dot{B}(1-z_1) \sin(\eta) \right] \end{aligned} \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{H} = [\Delta t C^0 - 2\Delta t C^1 \cos(\xi) - 2\Delta t C^2 \cos(\eta)] \operatorname{Id} + \mathbf{i} [\dot{A} \sin(\xi) + \dot{B} \sin(\eta)] \quad (2.29b)$$

$$\mathbf{H}_0 = \Delta t C^0 \operatorname{Id} \quad (2.29c)$$

$$\mathbf{H}_1 = \Delta t C^0 \operatorname{Id} - \left( \frac{\dot{A}}{2} + \Delta t C^1 \operatorname{Id} \right) e^{-\mathbf{i}\xi} - \left( \frac{\dot{B}}{2} + \Delta t C^2 \operatorname{Id} \right) e^{-\mathbf{i}\eta} \quad (2.29d)$$

$$\mathbf{H}_2 = \Delta t C^0 \operatorname{Id} + \left( \frac{\dot{A}}{2} - \Delta t C^1 \operatorname{Id} \right) e^{\mathbf{i}\xi} + \left( \frac{\dot{B}}{2} - \Delta t C^2 \operatorname{Id} \right) e^{\mathbf{i}\eta} \quad (2.29e)$$

On peut noter que la phase explicite (2.13) de ce schéma peut se mettre sous la même forme que celle donnée à l'équation (1.27). En effet, on peut factoriser la quantité  $\Delta t R$  et l'expression de la matrice  $\mathbf{K}$  dans l'espace de FOURIER permet d'arriver aux mêmes conclusions que précédemment : pour les nombres d'onde  $(\xi, \eta)$  vérifiant

$$\dot{A} \sin\left(\frac{\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) + \dot{B} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\xi}{2}\right) = 0$$

la matrice  $\mathbf{K}$  est nulle et  $\rho(\mathbf{G}) = 1$ . Ceci permet donc d'expliquer qu'il est également nécessaire de recourir à l'ajout d'une viscosité artificielle pour le schéma à pas de temps caractéristique discrétisé par une approche mono-prédicteur.

#### 2.4.1.2 Résultats de stabilité

Comme nous l'avons fait précédemment pour les méthodes numériques déjà mises en œuvre dans AEROLOG (cf. section 1.4.2), nous allons présenter ici les propriétés de stabilité linéaire du schéma à pas de temps caractéristique appliqué aux équations d'EULER. Nous choisirons donc comme référence un écoulement transsonique à  $Ma = 0,8$ , diagonal par rapport au maillage ( $u = v$ ) et un maillage uniforme ( $\delta x = \delta y$ ) et nous étudierons les effets de l'introduction de la vitesse caractéristique dans les coefficients implicites, nous mettrons en évidence la nécessité de conserver la viscosité artificielle, nous justifierons l'implication des termes consistants et nous analyserons la phase implicite sans matrice et sa résolution par relaxation de GAUSS-SEIDEL. Nous analyserons ensuite les effets de l'aplatissement des mailles et d'une vitesse horizontale. En dernier lieu, nous analyserons l'utilisation de la phase implicite sans matrice résolue par relaxation de GAUSS-SEIDEL avec le schéma de LAX-WENDROFF.

Le pas de temps est toujours calculé par la formule :

$$\Delta t = CFL \frac{\min(\delta x, \delta y)}{c \times (1 + Ma)}$$

Nous présenterons les plages d'isovaleurs de  $\rho(G)$ , tracées dans le plan  $(\xi, \eta)$  des nombres d'ondes et, pour faciliter la comparaison entre plusieurs figures, nous tracerons également les valeurs du facteur d'amplification suivant la diagonale  $\xi = \eta$  du plan des nombres d'onde.

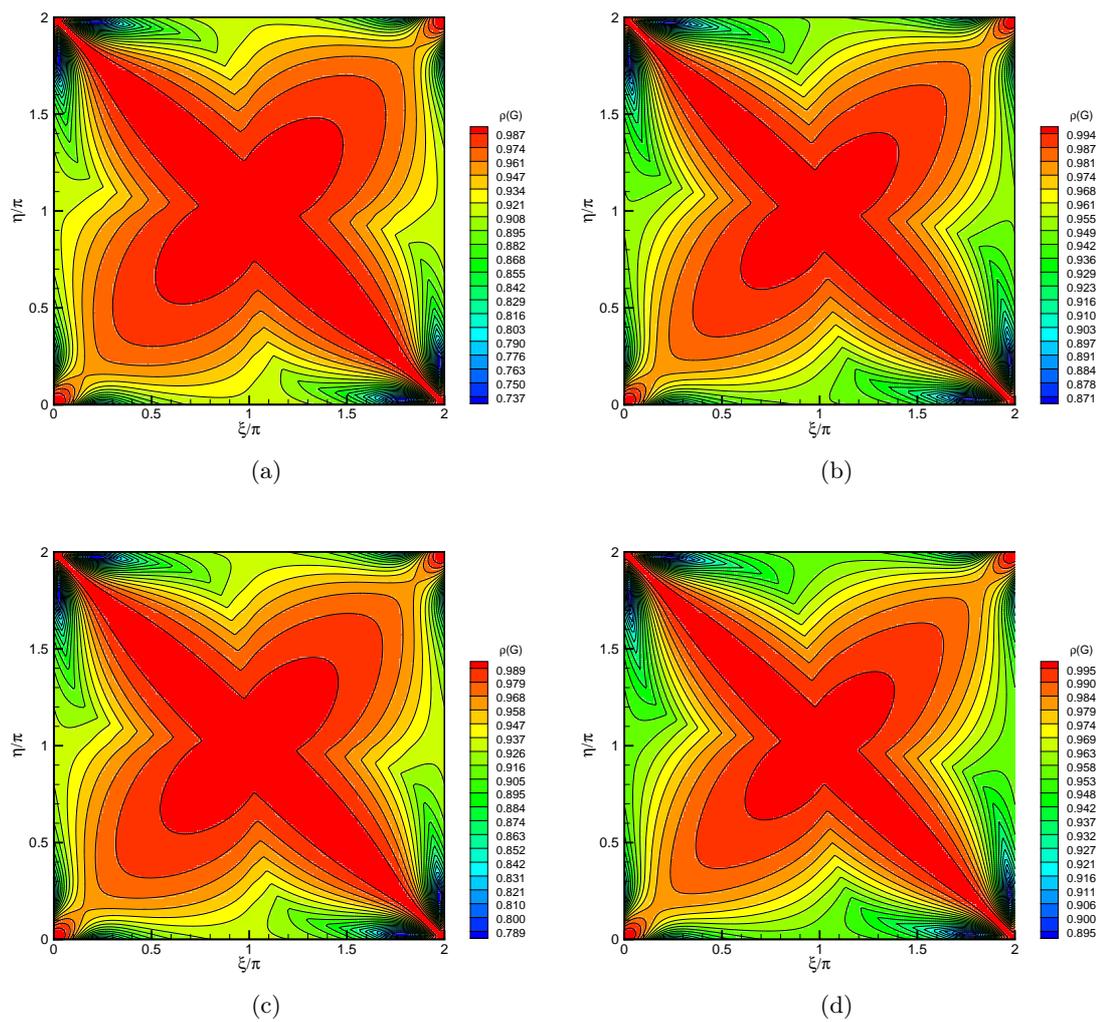


FIG. 2.1 – Suite de la figure page 62.

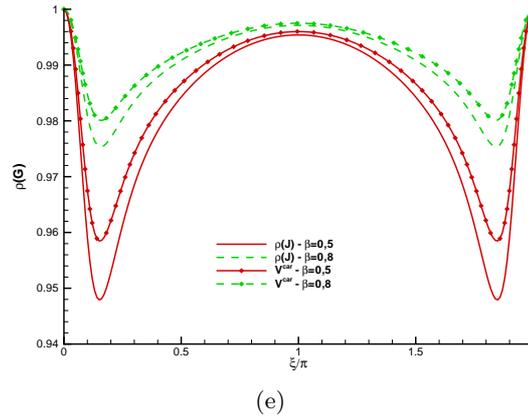


FIG. 2.1 – Rayon spectral de la matrice d’amplification associée au schéma à pas de temps caractéristique à  $Ma = 0,8$ ,  $v/u = 1$ ,  $\delta y/\delta x = 1$ ,  $CFL = 10^4$ ,  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$ , phase implicite sans matrice résolue par relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique avec 5 sous-itérations :

- (a) utilisation des rayons spectraux  $\rho(A)$  et  $\rho(B)$  et  $\beta = 0,5$  (schéma théorique (2.18)) ;
- (b) utilisation des rayons spectraux  $\rho(A)$  et  $\rho(B)$  et  $\beta = 0,8$  ;
- (c) utilisation de la vitesse caractéristique  $V^{\text{car}}$  et  $\beta = 0,5$  ;
- (d) utilisation de la vitesse caractéristique  $V^{\text{car}}$  et  $\beta = 0,8$  (utilisé dans AEROLOG (2.19)) ;
- (e) coupe selon la ligne  $\xi = \eta$ .

**Vitesse caractéristique et sur-implication.** Comme nous l’avons déjà fait au premier chapitre, nous avons comparé les différents choix de phase implicite : le choix des rayons spectraux des matrices jacobienues ou de la vitesse caractéristique dans les coefficients de la phase implicite ; le choix d’un coefficient de sur-implication  $\beta \geq 1/2$  ou non. L’écoulement de référence a un nombre de MACH  $Ma = 0,8$  la vitesse fait un angle de  $45^\circ$  avec l’axe horizontal ( $v/u = 1$ ) et le maillage est cartésien uniforme  $\delta y/\delta x = 1$ . On utilise un nombre  $CFL = 10^4$  et un coefficient de viscosité artificielle  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$  qui correspond à la valeur habituellement utilisée dans AEROLOG ; la phase implicite sans matrice est résolue par relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique avec cinq sous-itérations. La figure 2.1 montre, comme au chapitre un, que le choix de la vitesse caractéristique et la sur-implication diminue l’efficacité du schéma, qui n’est guère plus élevée que celle du schéma de LAX-WENDROFF. Cependant, bien que cela ne puisse être mis en évidence avec une analyse de stabilité linéaire, ce choix permet d’augmenter la robustesse du schéma.

**Viscosité artificielle.** L’effet de la viscosité artificielle est présenté sur la figure 2.2. Tout comme le schéma de LAX-WENDROFF et conformément à ce qui a été présenté au paragraphe précédent page 60, il apparaît que sans viscosité artificielle, certaines erreurs à haute fréquence ne sont pas amorties par le schéma. L’adjonction d’une viscosité artificielle corrige ce défaut et une valeur  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$  permet l’amortissement de tous les modes d’erreurs sans apporter une trop grande dissipation de la solution. Ce caractère dissipatif, qui n’est pas visible dans cette analyse de stabilité, est d’autant plus marqué que le coefficient  $C\mu_0$  est élevé et une valeur de  $2 \times 10^{-2}$  dégraderait trop la précision des solutions calculées.

**Implication des termes consistants.** Contrairement au schéma de LAX-WENDROFF, pour être théoriquement inconditionnellement stable, le schéma à pas de temps caractéristique nécessite l’implication des flux consistants. En effet, la figure 2.3 montre que si la phase

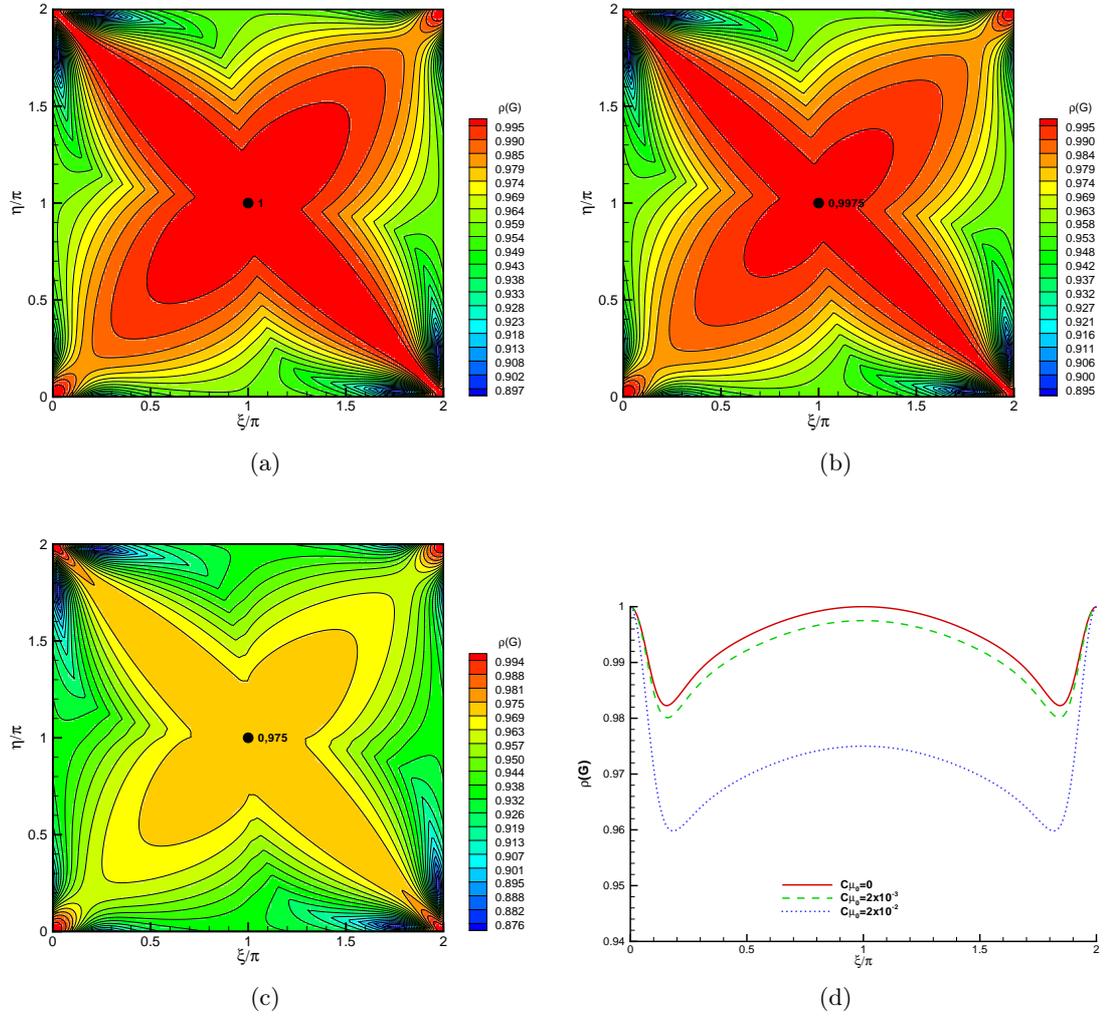


FIG. 2.2 – Rayon spectral de la matrice d’amplification associée au schéma à pas de temps caractéristique à  $Ma = 0,8$   $v/u = 1$ ,  $\delta y/\delta x = 1$ ,  $CFL = 10^4$ ,  $\beta = 0,8$  phase implicite sans matrice avec vitesse caractéristique résolue par relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique avec 5 sous-itérations :

(a)  $C\mu_0 = 0$ ; (b)  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$ ; (c)  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-2}$ ; (d) coupe selon la ligne  $\xi = \eta$ .

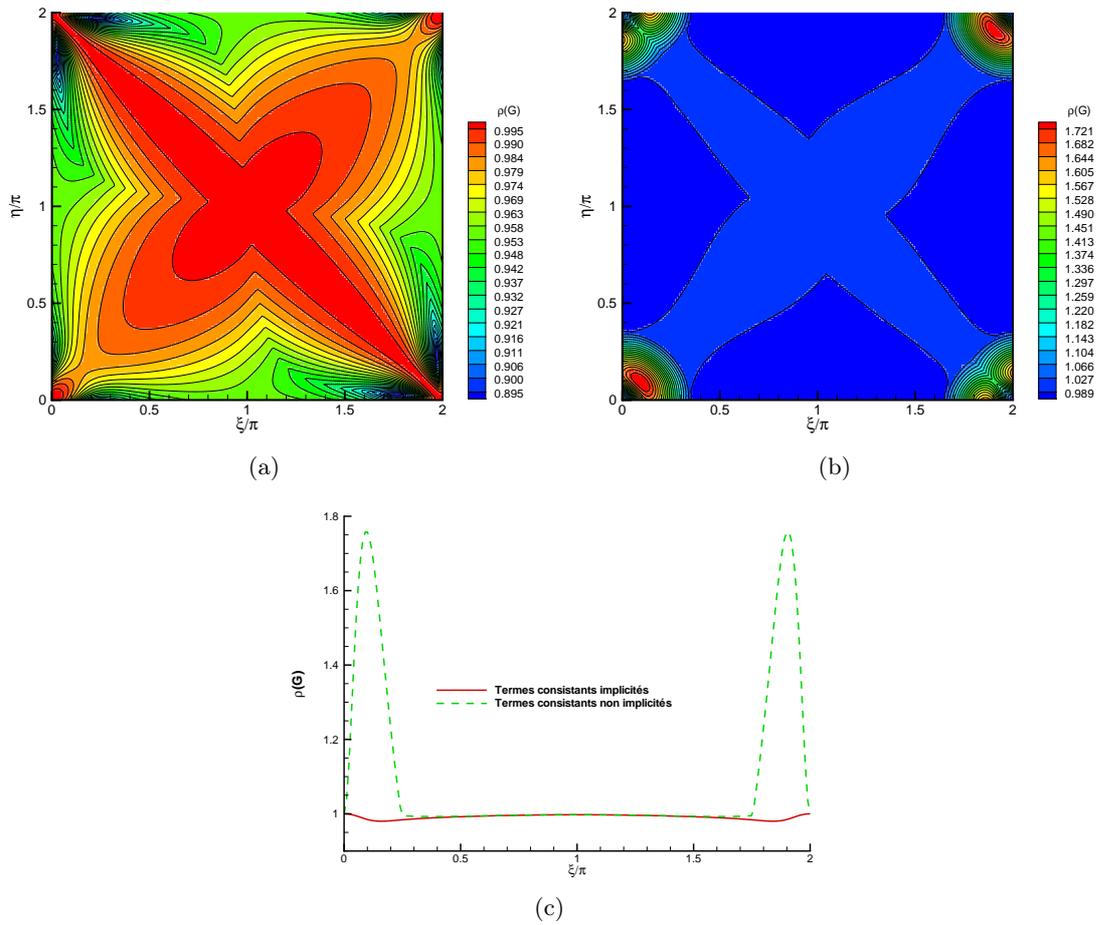


FIG. 2.3 – Rayon spectral de la matrice d’amplification associée au schéma à pas de temps caractéristique à  $Ma = 0,8$   $v/u = 1$ ,  $\delta y/\delta x = 1$ ,  $CFL = 10^4$ ,  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\beta = 0,8$  phase implicite sans matrice avec vitesse caractéristique résolue par relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique avec 5 sous-itérations :

- (a) termes consistants implicités ;
- (b) termes consistants non implicités ;
- (c) coupe selon la ligne  $\xi = \eta$ .

implicite n'intègre pas les termes  $\Delta f$  et  $\Delta g$  dans le schéma implicite (2.19), alors le facteur d'amplification dépasse l'unité pour certains nombres d'onde et certaines erreurs sont alors amplifiées au lieu d'être amorties, ce qui traduit l'instabilité du schéma.

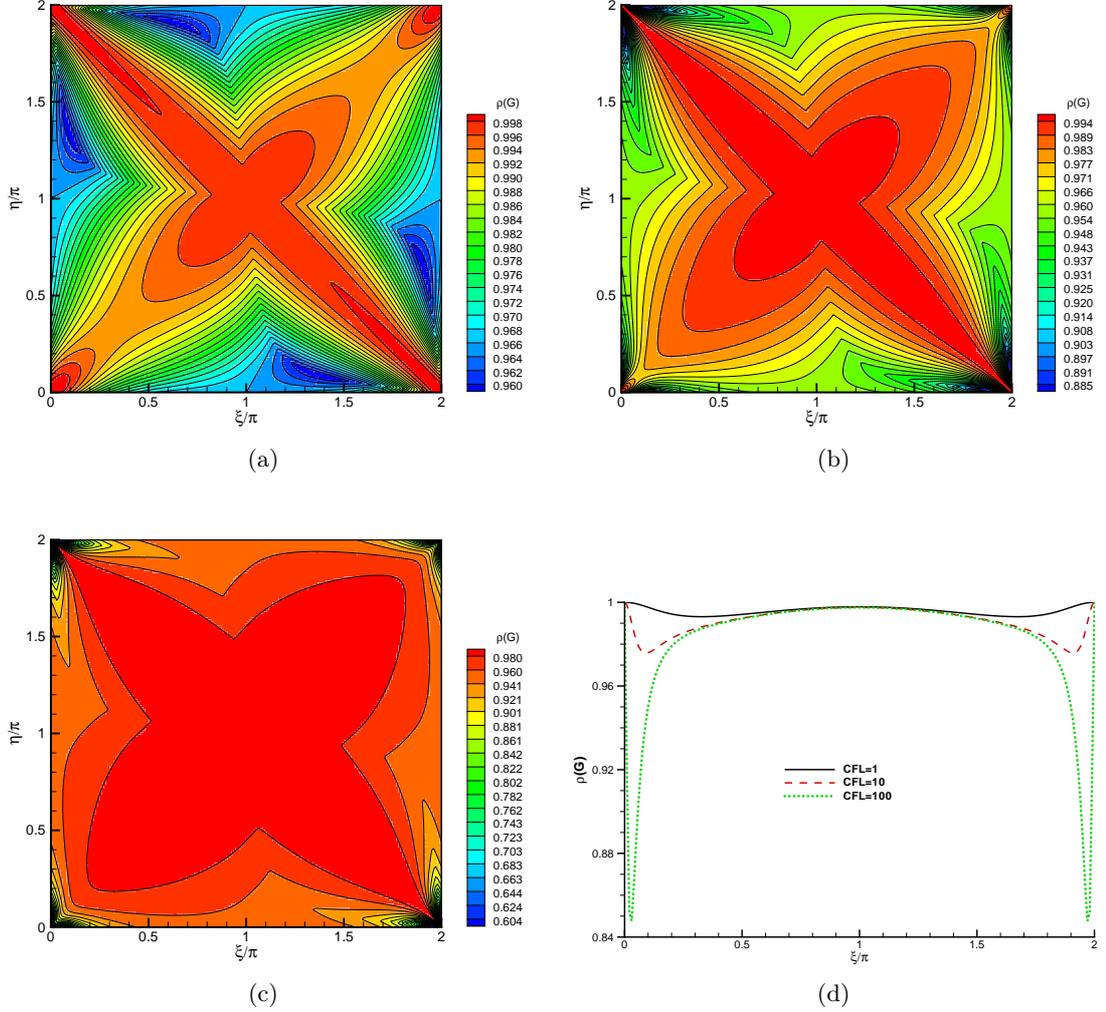


FIG. 2.4 – Rayon spectral de la matrice d'amplification associée au schéma à pas de temps caractéristique à  $Ma = 0,8$   $v/u = 1$ ,  $\delta y/\delta x = 1$ ,  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\beta = 0,8$  phase implicite sans matrice avec vitesse caractéristique résolue directement :

(a)  $CFL = 1$ ; (b)  $CFL = 10$ ; (c)  $CFL = 100$ ; (d) coupe selon la ligne  $\xi = \eta$ .

**Relaxation de GAUSS-SEIDEL.** Les calculs suivants avaient pour but de démontrer à la fois l'effet du nombre  $CFL$  et ceux de la méthode de résolution sur les propriétés d'amortissement du schéma. Nous avons donc dans un premier temps résolu la phase implicite de manière exacte en faisant varier le nombre  $CFL$ . La figure 2.4 présente les résultats obtenus pour trois nombres  $CFL$  différents. Comme pour le schéma de LAX-WENDROFF-NI associé au lissage des résidus résolu de façon directe, on observe que plus le nombre  $CFL$  est grand, plus le schéma est efficace pour les faibles nombres d'onde. En revanche, aux grands nombres d'onde, et malgré l'utilisation d'une viscosité artificielle qui ne peut cependant pas être trop importante pour ne pas dégrader les propriétés de précision, le facteur d'amplification reste proche de

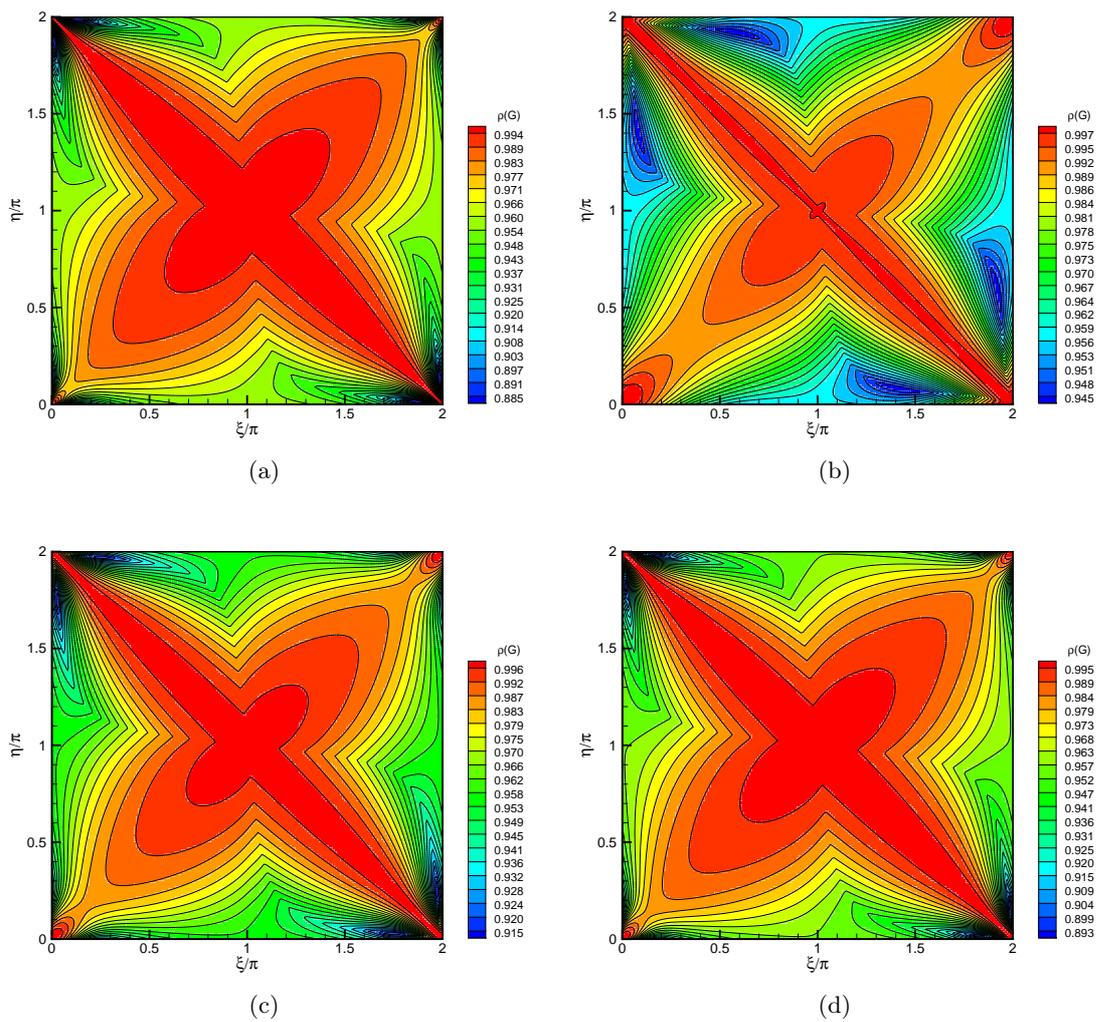


FIG. 2.5 – Suite de la figure page 67.

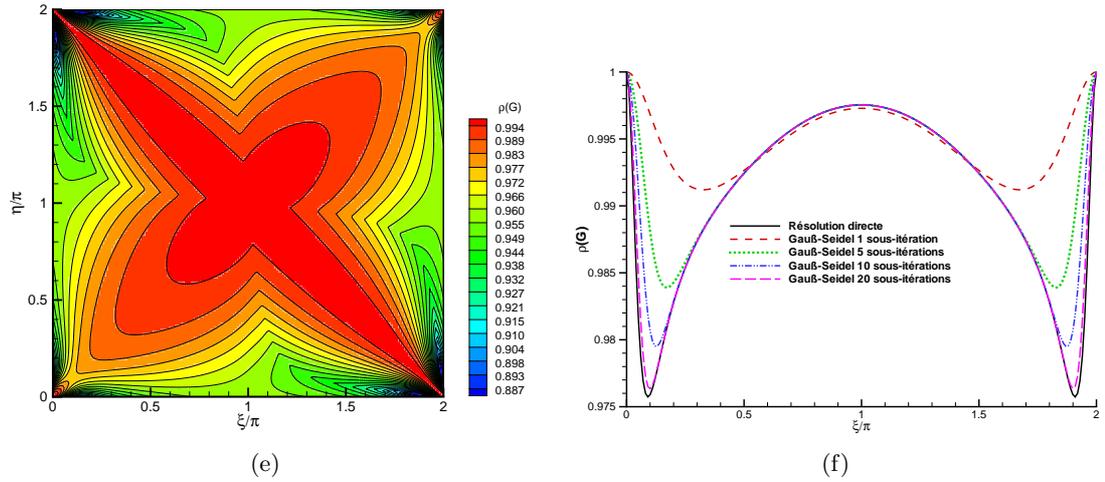


FIG. 2.5 – Rayon spectral de la matrice d’amplification associée au schéma à pas de temps caractéristique à  $Ma = 0,8$ ,  $v/u = 1$ ,  $\delta y/\delta x = 1$ ,  $CFL = 10$ ,  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\beta = 0,8$  phase implicite sans matrice avec vitesse caractéristique :

- (a) résolution directe ;
- (b) relaxation de GAUSS-SEIDEL avec une sous-itération ;
- (c) relaxation de GAUSS-SEIDEL avec 5 sous-itérations ;
- (d) relaxation de GAUSS-SEIDEL avec 10 sous-itérations ;
- (e) relaxation de GAUSS-SEIDEL avec 20 sous-itérations ;
- (f) coupe selon la ligne  $\xi = \eta$ .

l’unité quel que soit le nombre  $CFL$ . L’expérience démontre, de plus, qu’au fur et à mesure que l’on augmente le nombre  $CFL$ , son effet diminue, si bien que l’on atteint une asymptote et que l’utilisation de très grands nombres  $CFL$  n’apporte plus de surcroît d’efficacité.

La phase implicite sans matrice mise en œuvre est résolue par une relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique par point ; il faut donc choisir d’effectuer un certain nombre de sous-itérations pour cette relaxation. La figure 2.5 présente, pour un nombre  $CFL = 10$ , le facteur d’amplification obtenu avec une résolution de la phase implicite puis une résolution avec 1, 5, 10 et 20 sous-itérations de relaxation. On s’aperçoit qu’aux hautes fréquences, le facteur d’amplification a la même valeur quel que soit le nombre de sous-itérations – à l’exception d’une seule sous-itération qui est évidemment nettement insuffisante ; même un faible nombre de sous-itérations permet à la méthode de relaxation d’atteindre le même résultat que la méthode directe. En revanche, pour les faibles nombres d’onde, on voit que plus le nombre de sous-itérations est élevé, plus on obtient un facteur d’amplification faible, qui se rapproche de celui obtenu par résolution directe. Avec 20 sous-itérations, à ce nombre  $CFL$  là, la méthode de relaxation donne quasiment le même résultat que la méthode directe.

On voit, à partir des deux figures précédentes, qu’il existe deux paramètres qui permette d’obtenir un bon amortissement : le choix du nombre  $CFL$  et le choix du nombre de sous-itérations ; cependant, aussi nombreuses soient les sous-itérations de relaxation, le résultat obtenu avec une telle méthode ne pourra pas être meilleur que celui obtenu par la résolution directe. La figure 2.6 illustre bien ces deux aspects puisque l’on note que les résultats obtenus à  $CFL = 10$  avec 10 sous-itérations de relaxation et à  $CFL = 100$  avec 5 sous-itérations de relaxation sont sensiblement équivalents. Cependant le coût de calcul engendré par la première solution est bien plus important que celui engendré par la seconde. Ainsi on verra dans les

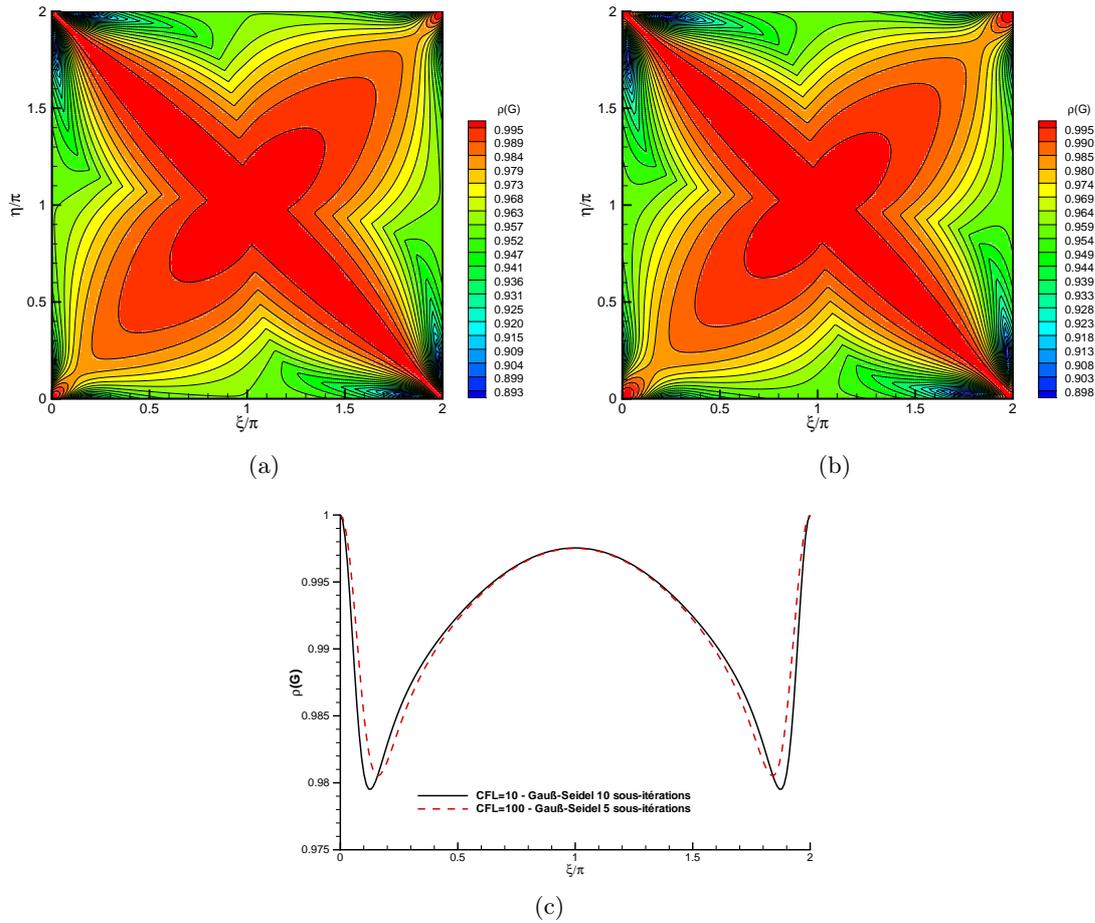


FIG. 2.6 – Rayon spectral de la matrice d’amplification associée au schéma à pas de temps caractéristique à  $Ma = 0,8$   $v/u = 1$ ,  $\delta y/\delta x = 1$ ,  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\beta = 0,8$  phase implicite sans matrice avec vitesse caractéristique résolue directement :

- (a)  $CFL = 10$ , relaxation de GAUSS-SEIDEL avec 10 sous-itérations ;
- (b)  $CFL = 100$ , relaxation de GAUSS-SEIDEL avec 5 sous-itérations ;
- (c) coupe selon la ligne  $\xi = \eta$ .

chapitres traitant des applications, qu’on a préféré l’utilisation de grands nombres  $CFL$  avec relativement peu de sous-itérations de relaxation.

**Rapport d’aspect et direction de l’écoulement.** Lorsque l’écoulement est unidirectionnel et sur un maillage avec un rapport d’aspect faible, comme on peut en trouver à proximité des parois, (cf. figure 2.7) le schéma se comporte de façon acceptable, puisque le facteur d’amortissement, s’il est globalement uniforme et proche de l’unité, reste du même ordre que celui obtenu pour un maillage à mailles carrées et à vitesse transversale.

**Schéma de LAX-WENDROFF et phase implicite sans matrice.** Sur la figure 2.8 on a regroupé les résultats de stabilité linéaire pour les méthodes numériques disponibles dans AEROLOG, utilisées avec un nombre  $CFL$  adapté au schéma choisi. Ainsi on compare le schéma de LAX-WENDROFF-NI avec une phase implicite de lissage des résidus résolue par factorisation par direction à  $CFL = 1$ , ce même schéma associé à une phase implicite sans matrice (incluant

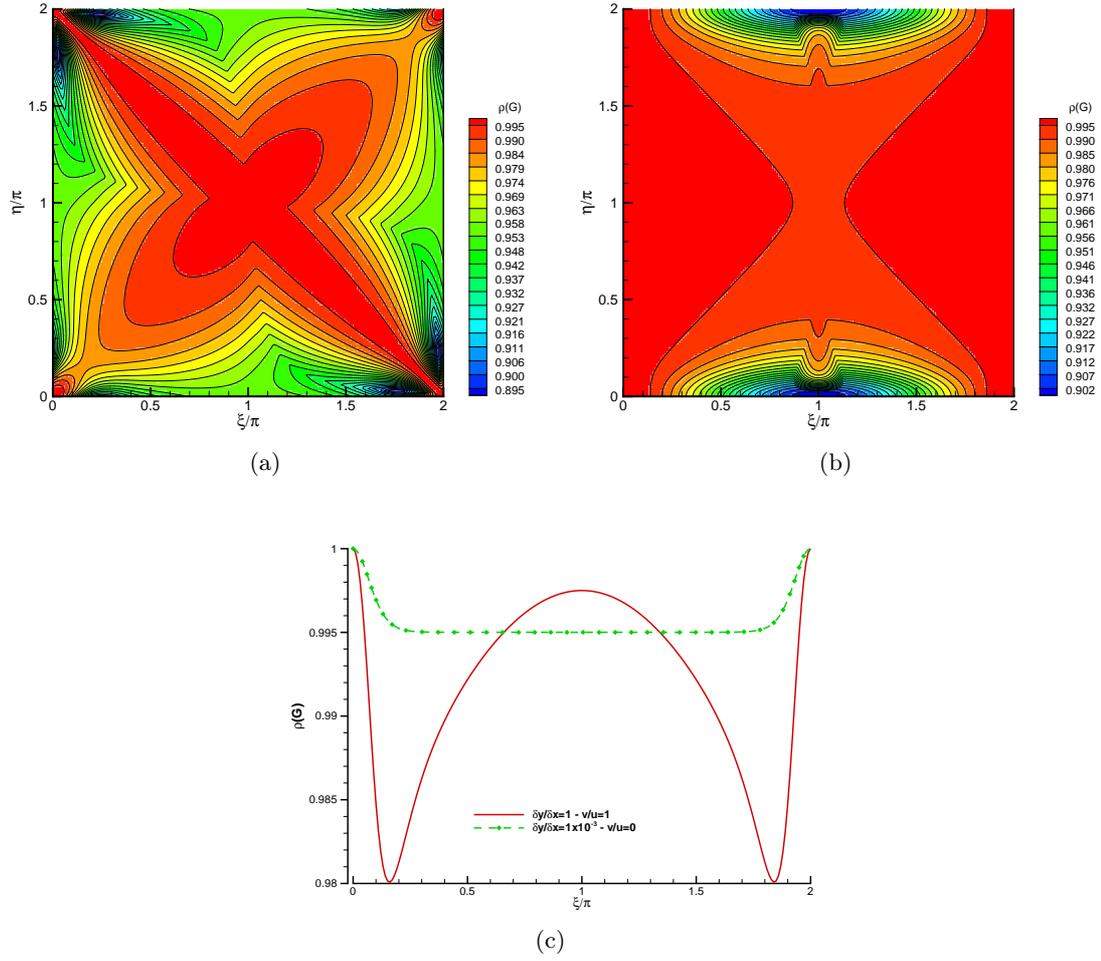


FIG. 2.7 – Rayon spectral de la matrice d’amplification associée au schéma à pas de temps caractéristique à  $Ma = 0,8$   $CFL = 10^4$ ,  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\beta = 0,8$  phase implicite sans matrice avec vitesse caractéristique résolue par relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique avec 5 sous-itérations :

(a)  $v/u = 1$  et  $\delta y/\delta x = 1$ ; (b)  $v/u = 0$  et  $\delta y/\delta x = 10^{-3}$ ; (c) coupe selon la ligne  $\xi = \eta$ .

la viscosité artificielle et les termes consistants) à  $CFL = 1$  et le schéma à pas de temps caractéristique associé à la phase implicite sans matrice à  $CFL = 10^4$ . On constate que le schéma à pas de temps caractéristique est un peu plus efficace que le schéma de LAX-WENDROFF. On constate également que, pour la même phase explicite de LAX-WENDROFF, la phase implicite sans matrice résolue par relaxation de GAUSS-SEIDEL avec cinq sous-itérations est plus efficace que le lissage des résidus résolu par factorisation par direction. Cependant, quel que soit le schéma, on note la présence d’une zone du plan des nombres d’onde où l’amortissement reste faible et qui dénote le caractère non dissipatif de ces schémas à ces fréquences; l’amortissement y est essentiellement assuré par la viscosité artificielle.

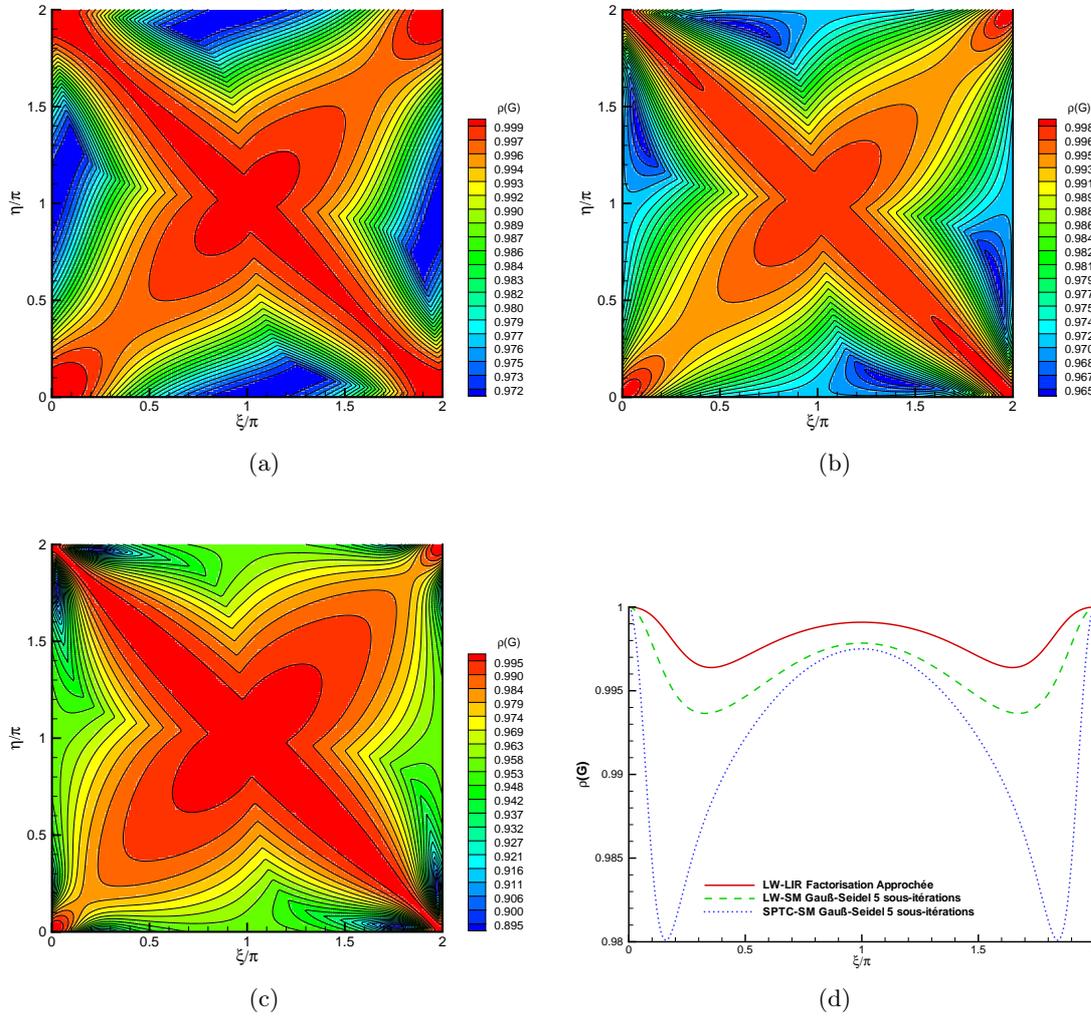


FIG. 2.8 – Rayon spectral de la matrice d’amplification associée aux schémas disponibles dans AEROLOG à  $Ma = 0,8$   $v/u = 1$ ,  $\delta y/\delta x = 1$ ,  $\beta = 0,8$  phase implicite utilisant la vitesse caractéristique :

- (a) schéma de LAX-WENDROFF-NI, lissage implicite des résidus résolu par factorisation par direction,  $CFL = 1$  ;
- (b) schéma de LAX-WENDROFF-NI, phase implicite sans matrice résolue par relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique avec 5 sous-itérations,  $CFL = 1$  ;
- (c) schéma à pas de temps caractéristique, phase implicite sans matrice résolue par relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique avec 5 sous-itérations,  $CFL = 10^4$  ;
- (d) coupe selon la ligne  $\xi = \eta$ .

### 2.4.2 Analyse de la technique de pas de temps fictif

Lorsque l'on utilise un schéma avec la technique de pas de temps fictif, on ajoute, aux expressions des opérateurs explicites et implicites précédemment utilisés pour le calcul d'écoulements stationnaires, une expression mettant en jeu la discrétisation, à 3 niveaux de temps, du terme source  $\mathcal{T}(w_{i,j}^{n,m}, w_{i,j}^n, w_{i,j}^{n-1})$ . Ainsi, si on linéarise ces opérateurs, on peut modifier l'égalité (2.24) et on obtient alors un schéma, qui peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{H}' \Delta w_{i,j}^{n,m} = -\mathcal{K}' w_{i,j}^{n,m} + \mathcal{K}'_0 w_{i,j}^n + \mathcal{K}'_1 w_{i,j}^{n-1} \quad (2.30)$$

où les expressions des opérateurs  $\mathcal{H}'$  et  $\mathcal{K}'$  seront précisées par la suite. Cependant, au cours du processus de convergence en temps fictif, les états  $w^n$  et  $w^{n-1}$  restent constants. Ils n'ont donc pas d'impact sur les propriétés d'amplification du schéma que nous étudions ici et l'application de la transformation de FOURIER à l'équation (2.30) conduit à :

$$\mathbf{H}' \Delta \hat{w}^{n,m} = -\mathbf{K}' \hat{w}^{n,m} \quad (2.31)$$

La matrice d'amplification recherchée est alors :

$$\mathbf{G} = \frac{\hat{w}^{n,m+1}}{\hat{w}^{n,m}} = \text{Id} - \mathbf{H}'^{-1} \mathbf{K}'$$

#### 2.4.2.1 Schéma à pas de temps caractéristique

Avec l'utilisation de la technique de pas de temps fictif, le prédicteur est modifié : il prend en compte la discrétisation  $\mathcal{T}(w_{i,j}^{n,m}, w_{i,j}^n, w_{i,j}^{n-1})$  de la dérivée des variables conservatives vis-à-vis du temps physique. Ce prédicteur intervenant dans l'expression de la dissipation numérique du schéma, il faut en tenir compte dans l'analyse de stabilité.

Dans le cas du schéma à pas de temps caractéristique utilisé dans le cadre d'une technique de pas de temps fictif pour résoudre des écoulements instationnaires, les expressions des opérateurs explicite et implicite linéarisés sont :

$$\mathcal{K}' = \mathcal{K} + \frac{3}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \mu_1^2 \mu_2^2 - \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \Phi \operatorname{sgn}(\dot{A}) \delta_1 \mu_1 \mu_2^2 - \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \Psi \operatorname{sgn}(\dot{B}) \delta_2 \mu_2 \mu_1^2 \quad (2.32a)$$

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{3}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \mathcal{I}d \quad (2.32b)$$

Dans cette formule,  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{H}$  sont donnés par les expressions (2.28b) et (2.28a) où le pas de temps utilisé n'est plus  $\Delta t$  mais le pas de temps fictif  $\Delta\tau$ . Les expressions (2.28c), (2.28d) et (2.28e) des opérateurs  $\mathcal{H}_0$ ,  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont également modifiées en conséquence :

$$\mathcal{H}'_0 = \mathcal{H}_0 + \frac{3}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \mathcal{I}d \quad \mathcal{H}'_1 = \mathcal{H}_1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \mathcal{I}d \quad \mathcal{H}'_2 = \mathcal{H}_2 + \frac{3}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \mathcal{I}d \quad (2.32c)$$

Les transformées de FOURIER de ces opérateurs sont alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}' &= \mathbf{K} + \frac{3}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} (1 - z_1) (1 - z_2) \text{Id} \\ &\quad - \mathbf{i} \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \left[ \Phi \operatorname{sgn}(\dot{A}) (1 - z_2) \sin(\xi) + \Psi \operatorname{sgn}(\dot{B}) (1 - z_1) \sin(\eta) \right] \end{aligned} \quad (2.33a)$$

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \frac{3}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \text{Id} \quad (2.33b)$$

$$\mathbf{H}'_0 = \mathbf{H}_0 + \frac{3}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \text{Id} \quad \mathbf{H}'_1 = \mathbf{H}_1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \text{Id} \quad \mathbf{H}'_2 = \mathbf{H}_2 + \frac{3}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \text{Id} \quad (2.33c)$$

où  $K, H, H_0, H_1$  et  $H_2$  sont donnés par (2.29).

#### 2.4.2.2 Schéma de LAX-WENDROFF

De façon similaire au cas du schéma à pas de temps caractéristique présenté au paragraphe précédent, les opérateurs implicite et explicite linéarisés associés au schéma de LAX-WENDROFF pour la résolution d'écoulements instationnaires par technique de pas de temps fictif ont pour expressions :

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \mathcal{I}d \quad (2.34a)$$

$$\mathcal{K}' = \mathcal{K} + \frac{3}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \mu_1^2 \mu_2^2 - \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \dot{A} \delta_1 \mu_1 \mu_2^2 - \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \dot{B} \delta_2 \mu_2 \mu_1^2 \quad (2.34b)$$

et, dans l'espace de FOURIER :

$$H' = H + \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \text{Id} \quad (2.35a)$$

$$K' = K + \frac{3}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} (1 - z_1)(1 - z_2) \text{Id} - i \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \left[ \dot{A} (1 - z_2) \sin(\xi) + \dot{B} (1 - z_1) \sin(\eta) \right] \quad (2.35b)$$

où  $H$  et  $K$  sont donnés par (1.25) et (1.24).

Si l'on ne résout pas de façon exacte la phase implicite, mais par factorisation par direction (cf. paragraphe 1.3.2), alors le système implicite s'écrit, en deux étapes :

$$\begin{cases} \left[ \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \right) \mathcal{I}d + \mathcal{L}_1 \right] \Delta w_{i,j}^* = -\mathcal{K}' w_{i,j}^{n,m} \\ \left[ \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \right) \mathcal{I}d + \mathcal{L}_2 \right] \Delta w_{i,j}^{n,m} = \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \right) \Delta w_{i,j}^* \end{cases}$$

soit, en une seule étape :

$$\left[ \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \right) \mathcal{I}d + \mathcal{L}_1 \right] \left[ \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \right) \mathcal{I}d + \mathcal{L}_2 \right] \Delta w_{i,j}^{n,m} = - \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \right) \mathcal{K}' w_{i,j}^{n,m}$$

Dans l'espace de FOURIER, on obtient donc :

$$\left[ \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \right) \text{Id} + L_1 \right] \left[ \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \right) \text{Id} + L_2 \right] \Delta \hat{w}^{n,m} = - \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \right) K' \hat{w}^{n,m}$$

soit une matrice d'amplification  $G$  défini alors par :

$$G = \text{Id} - \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \right) H'^{-1} K' \quad (2.36)$$

#### 2.4.2.3 Résultats de stabilité

Avant d'analyser les résultats de stabilité des schémas proposés, vis-à-vis du temps fictif, il faut noter que la forme idéale du facteur d'amplification n'est plus celle présentée à la section 1.4.2 : une valeur nulle sauf en  $(\xi, \eta) = (0, 0) [2\pi]$  où elle vaut l'unité. En effet le terme

provenant de la discrétisation de la dérivée en temps physique dans l'expression de l'opérateur explicite  $K'$  ne s'annule pas en  $(\xi, \eta) = (0, 0)$   $[2\pi]$ ; le facteur d'amplification n'y vaut donc plus l'unité mais dépend de la valeur du rapport  $\Delta\tau/\Delta t$ .

Dans un calcul en temps fictif, le pas de temps fictif  $\Delta\tau$  est choisi localement, comme pour un calcul stationnaire, en fonction de la géométrie de la maille, de l'état au point de calcul et du nombre  $CFL^*$  relatif au temps fictif. Le pas de temps fictif est alors calculé par la formule :

$$\Delta\tau = CFL^* \frac{\min(\delta x, \delta y)}{c \times (1 + Ma)}$$

Sur un maillage complet, ce pas de temps fictif  $\Delta\tau$  peut donc prendre des valeurs très différentes les unes des autres, puisqu'il s'agit d'un pas de temps local. Le pas de temps physique  $\Delta t$  reste cependant identique pour tout le maillage. Le rapport  $\Delta\tau/\Delta t$  prend donc des valeurs très différentes d'une maille à l'autre et est directement dépendant du nombre  $CFL^*$  relatif au temps fictif. Notons que le rapport  $\Delta\tau/\Delta t$  dépend également du choix du pas d'avancement en temps physique : plus  $\Delta t$  est petit, et plus ce rapport est grand, à  $\Delta\tau$  fixé. Nous étudierons donc la stabilité des méthodes numériques disponibles dans AEROLOG vis-à-vis du temps fictif en considérant trois valeurs du rapport  $\Delta\tau/\Delta t$  :  $10^{-2}$ , 1 et  $10^2$ . Dans chaque maillage, il existe des zones où l'une de ces trois valeurs convient ; cependant plus le nombre  $CFL^*$  utilisé sera grand, plus le rapport  $\Delta\tau/\Delta t$  sera élevé dans une grande partie du maillage.

**Schéma de LAX-WENDROFF.** Lorsque la stabilité du schéma de LAX-WENDROFF mis en œuvre dans une boucle en temps fictif est étudiée, les différents paramètres de l'écoulement et du schéma sont ceux qui ont déjà été retenus pour les analyses précédentes, auxquels s'ajoute le rapport  $\Delta\tau/\Delta t$ , soit, en récapitulant : nombre de MACH  $Ma = 0,8$  écoulement diagonal par rapport au maillage  $v/u = 1$ , maillage cartésien uniforme tel que  $\delta y/\delta x = 1$ , nombre  $CFL = 1$ , coefficient de viscosité artificielle  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$ , coefficient de sur-implication  $\beta = 0,8$  lissage implicite des résidus, utilisant la vitesse caractéristique, résolu par factorisation par direction et rapport  $\Delta\tau/\Delta t$  prenant les valeurs  $10^{-2}$ , 1 et  $10^2$ . On montre sur la figure 2.9 les résultats obtenus. On note que pour une valeur de  $\Delta\tau/\Delta t$  proche de l'unité, le terme source supplémentaire de dérivée en temps physique stabilise le schéma, particulièrement aux faibles fréquences. Pour des valeurs du rapports des pas de temps fictif et physique plus grandes, cette remarque reste valable mais pour les nombres d'onde très petits  $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$   $[2\pi]$  traduisant la consistance du schéma, le facteur d'amplification atteint une valeur proche de l'unité. Pour des valeurs plus faibles, le terme source n'est pas prépondérant et ce cas de calcul diffère alors peu d'un calcul stationnaire en pas de temps local ; on retrouve donc le même comportement que celui présenté précédemment, par exemple à la figure 2.8(a) : le facteur d'amplification est proche de l'unité pour tous les nombres d'onde.

**Schéma à pas de temps caractéristique.** On étudie maintenant les propriétés de stabilité linéaire du schéma à pas de temps caractéristique utilisé dans le cadre d'une technique de pas de temps fictif. Les paramètres de l'étude sont les mêmes que pour le schéma de LAX-WENDROFF à l'exception du nombre  $CFL^*$  relatif au temps fictif à qui l'on donne la valeur  $10^4$ . La figure 2.10 montre les résultats obtenus pour trois valeurs du rapport des pas de temps physique et fictif. On note, tout d'abord, que les résultats obtenus pour  $\Delta\tau/\Delta t = 10^{-2}$  et  $\Delta\tau/\Delta t = 1$  sont très proches l'un de l'autre. Le facteur d'amortissement est proche de l'unité dans ces deux cas ; cela encourage à utiliser un nombre  $CFL^*$  important pour s'éloigner de ces faibles valeurs du rapport  $\Delta\tau/\Delta t$ . En effet, lorsque le rapport des pas de temps croît, l'amortissement des erreurs à basse fréquence s'améliore. Cependant, on remarque que pour

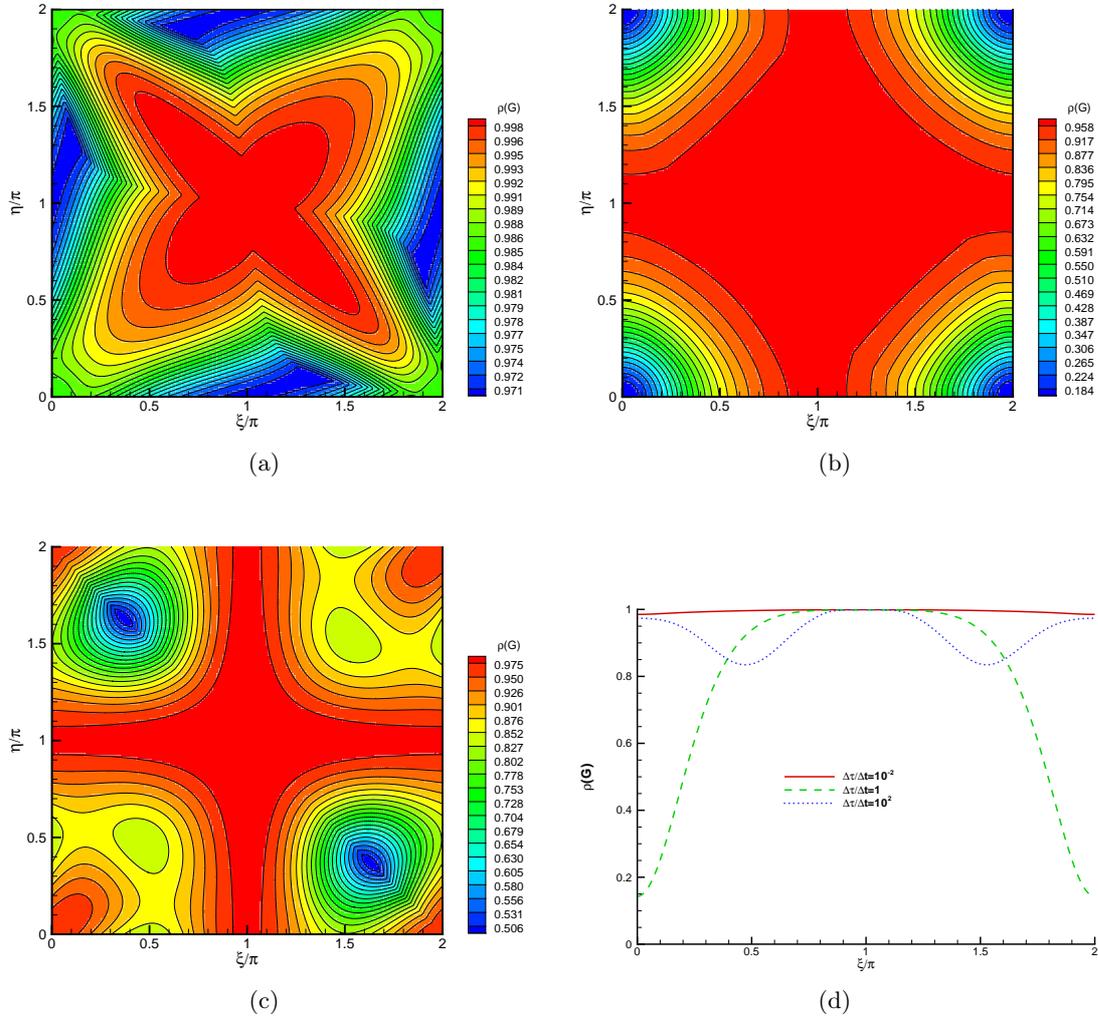


FIG. 2.9 – Rayon spectral de la matrice d'amplification associée au schéma de LAX-WENDROFF-NI avec la technique de pas de temps dual à  $Ma = 0,8$ ,  $v/u = 1$ ,  $\delta y/\delta x = 1$ ,  $CFL = 1$ ,  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\beta = 0,8$  lissage implicite des résidus avec vitesse caractéristique résolu par factorisation par direction :

- (a)  $\Delta\tau/\Delta t = 10^{-2}$  ;
- (b)  $\Delta\tau/\Delta t = 1$  ;
- (c)  $\Delta\tau/\Delta t = 10^2$  ;
- (d) coupe selon la ligne  $\xi = \eta$ .

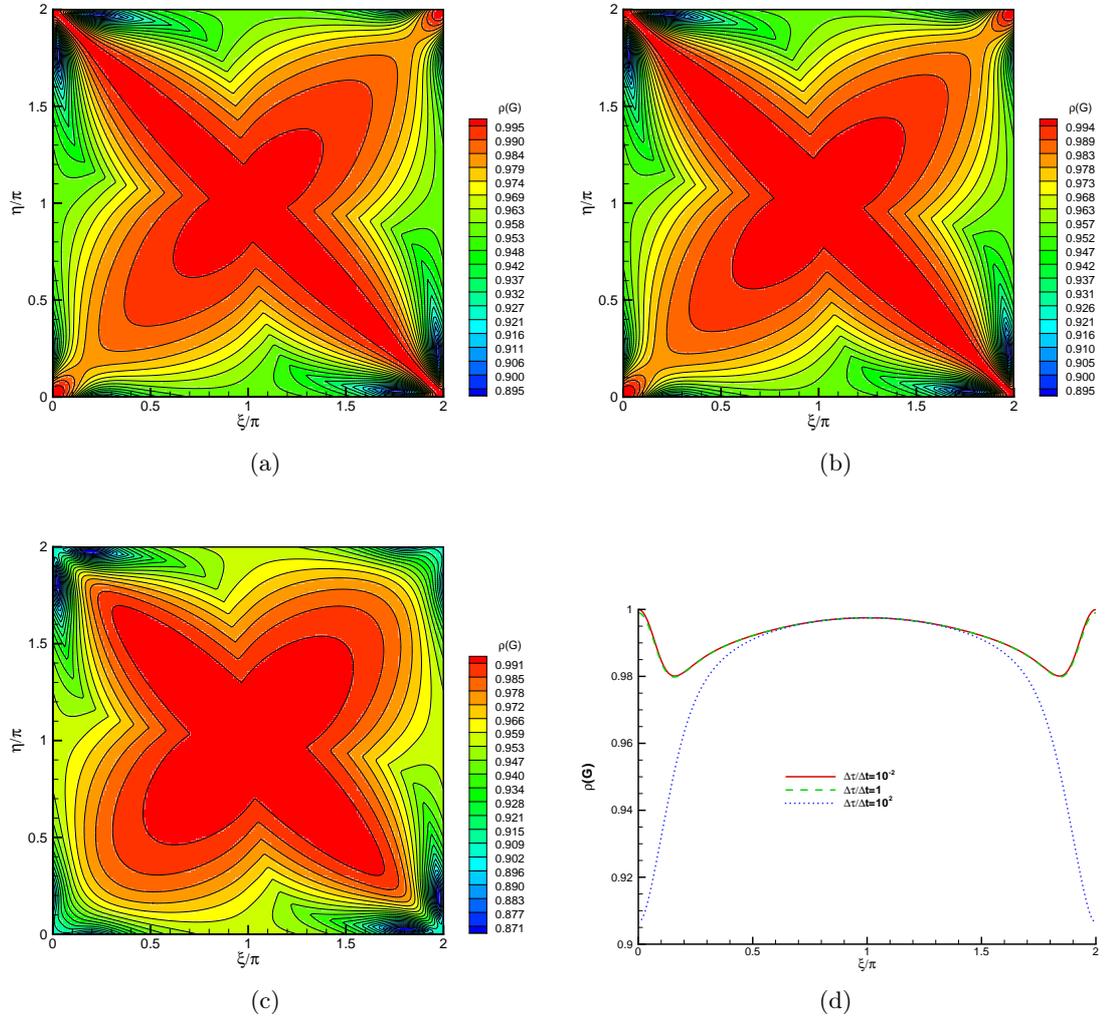


FIG. 2.10 – Rayon spectral de la matrice d’amplification associée au schéma à pas de temps caractéristique avec la technique de pas de temps dual à  $Ma = 0,8$ ,  $v/u = 1$ ,  $\delta y/\delta x = 1$ ,  $CFL = 10^4$ ,  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\beta = 0,8$  phase implicite sans matrice, avec vitesse caractéristique, résolu par relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique :

- (a)  $\Delta\tau/\Delta t = 10^{-2}$  ;
- (b)  $\Delta\tau/\Delta t = 1$  ;
- (c)  $\Delta\tau/\Delta t = 10^2$  ;
- (d) coupe selon la ligne  $\xi = \eta$ .

les hautes fréquences, l'amortissement est toujours proche de l'unité et la valeur du rapport  $\Delta\tau/\Delta t$  n'influe presque pas sur le facteur d'amplification.

## 2.5 Mise en œuvre dans AEROLOG

Dans cette section, nous allons décrire, comme à la section 1.5, la mise en œuvre de ces nouvelles méthodes numériques proposées. Nous présenterons les modifications, essentiellement sur la structure et l'organisation du code, apportées par la mise en œuvre de la technique de pas de temps fictif. Nous décrirons ensuite les changements apportés par la mise en œuvre du schéma à pas de temps caractéristique.

### 2.5.1 Technique de pas de temps fictif

La mise en œuvre de cette nouvelle méthode numérique dans AEROLOG a nécessité plusieurs modifications : la prise en compte du terme source dans la phase explicite, la prise en compte de ce terme dans la phase implicite et la réorganisation de la structure générale des boucles de calcul et des procédures de sortie. En effet, l'équation (2.1) diffère de l'équation (1.4) uniquement par le terme de dérivée en temps physique  $w_t$ , le temps fictif  $\tau$  dans l'équation (2.1) jouant le même rôle que le temps local  $t$  dans l'équation (1.4). D'un point de vue pratique, la technique de pas de temps fictif peut être vue comme un calcul avec un choix de pas de temps local auquel on ajoute un terme source évoluant à intervalle régulier. Ceci permet de réutiliser la structure du code existante, en intégrant ce nouveau terme source et en réorganisant la production des données pertinentes pour l'utilisateur.

Les schémas qui sont disponibles dans AEROLOG, tant le schéma de LAX-WENDROFF que le schéma à pas de temps caractéristique, utilisent le prédicteur des flux dans l'expression de la dissipation numérique. La modification qui permet l'utilisation de la technique de temps fictif consiste à modifier ce prédicteur pour y inclure la discrétisation de la dérivée des variables conservatives par rapport au temps physique, conformément à ce qui a été présenté au paragraphe 2.1.3. Dans l'équation (2.5), il a été choisi d'ajouter le terme source dans l'expression du prédicteur, ce qui permet de traiter à l'aide d'un seul terme les modifications des flux consistants et de la dissipation. Ainsi, la formule (1.34) est modifiée pour devenir :

$$\begin{aligned} \underline{R}_C = & \sum_{m=1}^3 -\delta_m \left( \sum_{MC\partial S_f} \vec{F}_M^E \right) \cdot \frac{\vec{S}_C^{(m)}}{4 \times |\Omega_C|} \\ & + \frac{1}{8} \sum_{MC\partial^2\Omega_C} \left( \frac{3}{2} \frac{w_M^{n,m} - w_M^n}{\Delta t_2} - \frac{1}{2} \frac{w_M^n - w_M^{n-1}}{\Delta t_1} \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

où :

- $\delta_m$ ,  $m \in \{1, 2, 3\}$  est l'opérateur de différence défini à la section 1.2 (cf. formule (1.5));
- les indices  $f$  dépendent de la direction  $m$  considérée  
 $f \in \left\{ \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right), \left( i + 1, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) \right\}$  pour  $m = 1$  etc ;
- $\Delta t_1$  et  $\Delta t_2$  sont les pas de temps physique permettant de passer respectivement des instants  $n - 1$  à  $n$  et  $n$  à  $n + 1$  ; en général,  $\Delta t_1 = \Delta t_2$ , mais on peut envisager, pour une reprise après interruption d'un calcul par exemple, qu'ils soient différents.

Que ce soit avec le lissage implicite des résidus ou avec la phase implicite sans matrice, la prise en compte de la technique de pas de temps fictif consiste à modifier le terme diagonal de la matrice implicite :

$$\frac{|\Omega|}{\Delta \tau} \longrightarrow \frac{|\Omega|}{\Delta \tau} + \frac{3}{2} \frac{|\Omega|}{\Delta t}$$

D'un point de vue purement numérique cela revient uniquement à modifier le pas de temps fictif  $\Delta \tau$  dans la mise en place de la phase implicite et de sa résolution ; de cette façon, les

formules de résolution de la phase implicite, par factorisation par direction ou par relaxation de JACOBI ou GAUSS-SEIDEL restent valables.

Enfin, l'organisation du programme de calcul est légèrement modifiée. En effet, alors qu'il n'existait qu'une seule boucle itérative dans le logiciel, il faut en mettre en place une seconde pour permettre l'évolution en temps fictif et en temps physique. La gestion des trois niveaux de temps physique  $n-1$ ,  $n$  et  $n, m$  est également à prendre en compte en particulier au niveau de leur actualisation lorsque la convergence en temps fictif est atteinte. La réorganisation du traitement des sorties mises à la disposition de l'utilisateur est également modifiée car le contrôle de la convergence du calcul ne se fait plus vis-à-vis du pas  $w^{n+1} - w^n$  mais  $w^{n,m+1} - w^{n,m}$ . Le choix a été fait ici d'ajouter une boucle interne en temps fictif. La figure 2.11

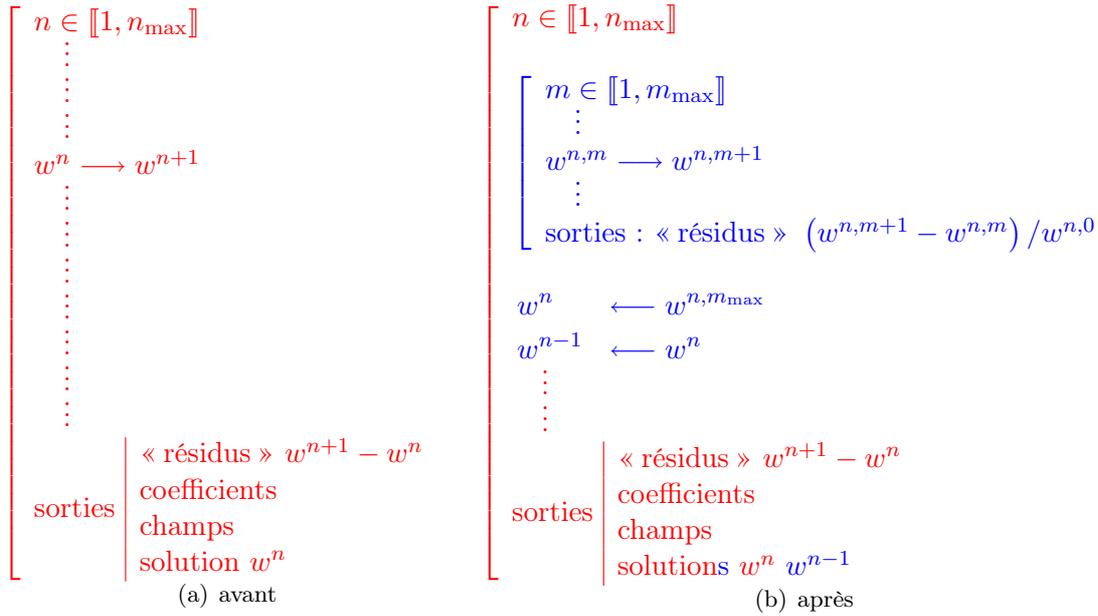


FIG. 2.11 – Réorganisation des boucles de calcul pour la technique de pas de temps fictif.

récapitule les changements qui ont été faits dans la structure du code. Dans cette figure on notera que  $w^n \longrightarrow w^{n+1}$  et  $w^{n,m} \longrightarrow w^{n,m+1}$  représentent l'application du schéma numérique qui permet d'avancer d'un pas de temps respectivement local et fictif, alors que  $w^n \longleftarrow w^{n,m_{\max}}$  et  $w^{n-1} \longleftarrow w^n$  représente uniquement la mise à jour des solutions antérieures nécessaires au calcul de la discrétisation  $\mathcal{T}(w^{n,m}, w^n, w^{n-1})$  de la dérivée en temps physique.

Dans AEROLOG, le contrôle de la convergence s'effectue au vu de grandeurs appelées abusivement « résidus » puisqu'il ne s'agit en fait que des incréments  $\Delta w$  ; pour chaque équation, sont calculés les normes L2 et infinie de l'incrément de la variable conservative adimensionnées par la norme L2 de l'incrément de la variable conservative à la première itération du calcul. Dans le cadre d'une technique de pas de temps fictif, c'est l'incrément relatif au pas de temps fictif qui devient pertinent à observer car c'est cet incrément que l'on cherche à annuler à chaque pas de temps physique. De plus, on adimensionne les normes L2 et infinie calculées à chaque pas de temps fictif par la norme L2 du premier état  $w^{n,0}$  calculé dans le pas de temps physique considéré ; ainsi à la première itération de chaque pas de temps physique, la norme L2 des incréments vaut toujours l'unité.

La structure des fichiers de données a également été modifiée afin de pouvoir prendre en compte les informations supplémentaires liées à cette nouvelle méthode numérique. En effet, alors que pour un calcul stationnaire il n'est nécessaire de fournir qu'un nombre  $CFL$  – pour

une approche en pas de temps local – ou un pas de temps – pour une avance globale en temps, dans le cadre de la technique de pas de temps fictif, il convient de fournir à la fois un pas de temps physique et un nombre  $CFL^*$ . De plus, les critères d'arrêt doivent être dédoublés : il est nécessaire de fournir un nombre de pas de temps physique ou un temps physique maximal, pour l'avance en temps physique, et un nombre d'itérations ou un niveau de convergence à atteindre, pour la boucle en temps fictif. Il faut aussi renseigner les fréquences de sortie des « résidus » en temps physique – ils fournissent uniquement une information sur le caractère instationnaire de l'écoulement – et des résidus en temps fictif dont nous venons de parler. Enfin, la sauvegarde du calcul ainsi que sa reprise éventuelle nécessitent la sauvegarde et le chargement de deux niveaux de temps. L'ensemble de ces modifications, qui permettent d'intégrer la méthode de pas de temps fictif dans le logiciel, affectent essentiellement l'organisation générale et la gestion des données dans AEROLOG.

### 2.5.2 Schéma à pas de temps caractéristique

Ces nouvelles méthodes ont été construites afin de rester aussi proches que possible de celles qui existaient déjà dans le logiciel AEROLOG, et pour conserver les principes régissant l'organisation du codage et notamment le principe de distribution. Ainsi tout ce qui a été exposé concernant le traitement des flux consistants non visqueux (paragraphe 1.5.6), la viscosité artificielle (paragraphe 1.5.7) et les flux visqueux (paragraphe 1.5.9) reste valable ; seuls changent le traitement de la dissipation numérique et le traitement implicite. On peut alors formuler<sup>8</sup> le schéma implicite mis en œuvre dans cette nouvelle approche (cf. équation (1.32)) en y adjoignant notamment l'implication des flux consistants non visqueux :

$$\frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \Delta w_{i,j,k}^n = \frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \Delta w_{i,j,k}^{\text{expli}} - \left( \underline{\Delta \widetilde{I}_1^E} \right)_{i,j,k}^n + \left( \underline{\Delta \widetilde{I}_1^V} \right)_{i,j,k}^n + \left( \underline{\Delta I^{va}} \right)_{i,j,k}^n + \left( \underline{\Delta \widetilde{I}_2'} \right)_{i,j,k}^n \quad (2.38a)$$

$$\text{avec } \frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \Delta w_{i,j,k}^{\text{expli}} = - \left[ \left( \underline{I_1^E} \right)_{i,j,k}^n - \left( \underline{I_1^V} \right)_{i,j,k}^n \right] + \left( \underline{I^{va}} \right)_{i,j,k}^n + \left( \underline{I_2'} \right)_{i,j,k}^n \quad (2.38b)$$

où :  $\underline{I_1^E}$  représente l'approximation consistante des flux non visqueux, déjà présentée au paragraphe 1.5.6 ;

$\underline{I_1^V}$  représente l'approximation consistante des flux visqueux, déjà présentée au paragraphe 1.5.9 ;

$\underline{I^{va}}$  représente la viscosité artificielle, déjà présentée au paragraphe 1.5.7 ;

$\underline{I_2'}$  représente la dissipation numérique du schéma ;

$\underline{\Delta \widetilde{I}_1^E}$  représente l'implication des flux consistants non visqueux  $\underline{I_1^E}$  ;

$\underline{\Delta \widetilde{I}_1^V}$  représente l'implication des flux consistants visqueux  $\underline{I_1^V}$  ;

$\underline{\Delta I^{va}}$  représente l'implication des termes de viscosité artificielle  $\underline{I^{va}}$  ;

$\underline{\Delta \widetilde{I}_2'}$  représente l'implication des termes dissipatifs  $\underline{I_2'}$ .

#### 2.5.2.1 Dissipation numérique du schéma

La dissipation numérique du schéma a donc été modifiée afin de prendre en compte un décentrement, mais cette modification de la matrice de dissipation ne modifie pas la méthode

<sup>8</sup>On se remémorera la note 2 page 9 concernant les notations tensorielles utilisées.

de calcul de la dissipation. En effet, si l'on reprend l'expression (1.39), on ne modifie que le calcul des flux dissipatifs sur les cellules de maillage :

$$\left(\underline{I}'_2\right)_{i,j,k}^n = \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}} \left( \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial\Sigma_s} \underline{f}'_{\text{dis}C}{}^{(m)} \right) \quad (2.39a)$$

$$= \sum_{C \subset \partial^2\Omega_{i,j,k}} \left( \sum_{m=1}^3 \frac{1}{4} \times \underline{f}'_{\text{dis}C}{}^{(m)} \right) \quad (2.39b)$$

$$\text{avec } \underline{f}'_{\text{dis}C}{}^{(m)} = \pm \frac{1}{2} \frac{\tilde{\phi}^{(m)}}{\underline{\phi}_C} \underline{R}_C \quad \forall m \in \{1, 2, 3\} \quad (2.39c)$$

De plus, on définit  $\forall m \in \{1, 2, 3\}$  :

$$\underline{\tilde{\phi}}_C^{(m)} = \underline{P}_C^{(m)} \text{Diag} \left[ \lambda_{\underline{\tilde{\phi}}_C^{(m)}}^{(i)} \right] \left( \underline{P}_C^{(m)} \right)^{-1} \quad (2.40a)$$

$$\lambda_{\underline{\tilde{\phi}}_C^{(m)}}^{(i)} = |\Omega_C| \times \text{sgn} \left( \lambda_{\perp_C}^{(i)} \right) \times \min \left( 1, \frac{\left| \lambda_{\perp_C}^{(i)} \right|}{\varsigma \left( \underline{\vec{J}}_C \cdot \underline{\vec{n}}_C^{(m+1)} \right)} \frac{S^{(m)}}{S^{(m+1)}}, \frac{\left| \lambda_{\perp_C}^{(i)} \right|}{\varsigma \left( \underline{\vec{J}}_C \cdot \underline{\vec{n}}_C^{(m+2)} \right)} \frac{S^{(m)}}{S^{(m+2)}} \right) \quad (2.40b)$$

$$\varsigma \left( \underline{\vec{J}}_C \cdot \underline{\vec{n}}_C^{(m)} \right) = \max_i \left| \lambda_{\perp_C}^{(i)} \right| \quad (2.40c)$$

où :  $\lambda_{\perp_C}^{(i)}$  est la  $i^e$  valeur propre de la matrice  $\underline{\vec{J}}_C \cdot \underline{\vec{n}}_C^{(m)}$  ;

$\underline{P}_C^{(m)}$  et  $\left( \underline{P}_C^{(m)} \right)^{-1}$  sont les matrices de passage dans la base des valeurs propres de la matrice  $\underline{\vec{J}}_C \cdot \underline{\vec{n}}_C^{(m)} = \underline{P}_C^{(m)} \text{Diag} \left[ \lambda_{\perp_C}^{(i)} \right] \left( \underline{P}_C^{(m)} \right)^{-1}$  ; leur expression est donnée en annexe C ;

$\underline{\vec{S}}_C^{(m)}$  est le vecteur normal à la surface dirigé dans le sens des indices décroissants, portant l'aire de cette surface et défini au paragraphe 1.5.5 (cf. notamment figure 1.8) ;

$$S_C^{(m)} = \left\| \underline{\vec{S}}_C^{(m)} \right\| ;$$

$\underline{\vec{n}}_C^{(m)} = \underline{\vec{S}}_C^{(m)} / S_C^{(m)}$  est la normale unitaire dirigée dans le sens des indices décroissants.

On peut formuler plusieurs remarques :

- dans les formules (2.39a) et (2.39b), le coefficient 1/4 provient de l'opération de moyenne ( $\mu_2\mu_3$  sur une face de normale  $\underline{\vec{S}}^{(1)}$ ) qui consiste à distribuer les valeurs obtenues sur la cellule de maillage vers la cellule de contrôle décalée  $\Omega_{i,j,k}$  ;
- dans la formule (2.39c), le signe  $\pm$  de l'expression de  $\underline{f}'_{\text{dis}C}{}^{(m)}$  dépend de l'orientation ( $m$ ) de la face et de la position relative du point  $C$  par rapport au point de calcul  $(i, j, k)$  ; étant donné que  $\underline{\vec{n}}_C^{(m)}$  est orienté dans le sens des indices décroissants, on s'assure

ainsi que la normale  $\pm \vec{n}_C^{(m)}$  est extérieure à la cellule  $\Omega_{i,j,k}$  ; si le  $m^e$  indice du point  $C_{i\pm\frac{1}{2},j\pm\frac{1}{2},k\pm\frac{1}{2}}$  est supérieur au  $m^e$  indice du point  $M_{i,j,k}$ , le signe sera négatif ; dans le cas contraire il sera positif ;

- dans la formule (2.40b), on adopte, pour l'indice  $m$ , la convention suivante :  
 $(m = 4) \Leftrightarrow (m = 1)$  et  $(m = 5) \Leftrightarrow (m = 2)$  ;
- dans la formule (2.39c) et les formules (2.40), le flux dissipatif  $f_{\text{dis}C}^{\prime(m)}$  s'évalue en ne prenant en compte que des éléments calculés sur la cellule de maillage au point  $C$  d'indice  $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$  et notamment l'état moyen au centre des cellules de maillage :

$$\underline{w}_C = \frac{1}{8} \sum_{M \subset \partial^2 \Omega_C} \underline{w}_M$$

on peut ainsi appliquer une distribution de ce flux, des centres des cellules vers les nœuds du maillage.

En outre, on note que le calcul de cette dissipation matricielle est beaucoup plus coûteux en temps d'exécution que le calcul de celle présentée au chapitre 1 dans la mesure où il implique deux produits de matrice pour construire la matrice  $\underline{\phi}_C^{(m)}$  et un produit de cette même matrice par le vecteur  $\underline{R}_C$ . De plus, aucun regroupement du même type que celui signalé au paragraphe 1.5.8 ne peut être envisagé. Cependant, cette dissipation ne dépend plus du pas de temps, ce qui constituait un handicap majeur pour le schéma de LAX-WENDROFF. Elle met également en œuvre un décentrement qui devrait permettre de traiter plus efficacement les calculs des écoulements envisagés, notamment en présence de chocs.

### 2.5.2.2 Traitement implicite

Afin de conserver les propriétés essentielles du logiciel de calcul AEROLOG, on a choisi de construire une phase implicite qui ne nécessite pas de stockage de matrice. Cette phase implicite sans matrice présentée plus haut dans le cas d'un écoulement bidimensionnel sur un maillage cartésien, est construite, dans le cadre d'une formulation en volumes finis, d'une façon assez analogue à la phase de lissage implicite des résidus déjà présentée.

**Implication des flux non visqueux.** L'implication du terme  $\underline{I}_1^E$  est construite en récrivant ce terme directement sur la cellule de contrôle  $\Omega_{i,j,k}$  et en n'y retenant que les contributions principales :

$$\widetilde{\underline{I}}_1^E = \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}} \pm \left( \mu_m \overrightarrow{\underline{F}}^E \right)_s \cdot \vec{\Sigma}_s$$

où  $\vec{\Sigma}_s$  est la normale à la face  $\Sigma_s$  de la cellule de contrôle  $\Omega_{i,j,k}$  orientée dans le sens des indices décroissants tel que cela a été présenté au paragraphe 1.5.5. Le signe  $\pm$  permet de considérer, dans cette formule, la normale  $\pm \vec{\Sigma}_s$  extérieure à la cellule de contrôle  $\Omega_{i,j,k}$ . De plus, on remarque que :

$$\sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}} \pm \overrightarrow{\underline{F}}_{i,j,k}^E \cdot \vec{\Sigma}_s = \overrightarrow{\underline{F}}_{i,j,k}^E \cdot \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}} \pm \vec{\Sigma}_s = 0$$

et on choisit d'évaluer la surface  $\vec{\Sigma}_s$  par :

$$\begin{aligned}\vec{\Sigma}_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \left(\mu_2\mu_3\vec{S}^{(1)}\right)_{i+\frac{1}{2},j,k} \\ \vec{\Sigma}_{i,j+\frac{1}{2},k} &= \left(\mu_1\mu_3\vec{S}^{(2)}\right)_{i,j+\frac{1}{2},k} \\ \vec{\Sigma}_{i,j,k+\frac{1}{2}} &= \left(\mu_1\mu_2\vec{S}^{(3)}\right)_{i,j,k+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

où  $\vec{S}_C^{(m)}$  est la surface définie au centre des cellules de maillage (cf. paragraphe 1.5.5), soit :

$$\vec{\Sigma}_s = \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial \Sigma_s} \vec{S}_C^{(m)}$$

où l'exposant (m) dépend de l'orientation de la face  $\Sigma_s$ . Ainsi, on a :

$$\widetilde{I}_1^E = \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}} \pm \frac{1}{2} \overrightarrow{F}_{\text{ext}}^E \cdot \vec{\Sigma}_s$$

où  $M_{\text{ext}}$  représente le point de maillage situé à l'extérieur de la cellule de contrôle  $\Omega_{i,j,k}$ , par rapport à la face  $\Sigma_s$  considérée :

$$\text{ext} \in \{(i+1, j, k), (i-1, j, k), (i, j+1, k), (i, j-1, k), (i, j, k+1), (i, j, k-1)\}$$

L'implication qui en découle est immédiate dans la mesure où aucune hypothèse de linéarisation n'est effectuée :

$$\underline{\Delta I}_1^E = \frac{1}{2} \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}} \pm \overrightarrow{\Delta F}_{\text{ext}}^E \cdot \vec{\Sigma}_s \quad (2.41)$$

où  $\left(\overrightarrow{\Delta F}^E\right)^n = \left(\overrightarrow{F}^E\right)^{n+1} - \left(\overrightarrow{F}^E\right)^n$  est l'incrément implicite des flux non-visqueux.

**Implication des flux visqueux.** Pour construire l'implication des flux visqueux, on reprend l'expression (1.41) et on la simplifie :

$$\widetilde{I}_1^V = \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}} \pm \overrightarrow{F}_s^V \cdot \vec{\Sigma}_s$$

où le signe  $\pm$  permet de considérer des normales  $\pm \vec{\Sigma}_s$  extérieures à la cellule  $\Omega_{i,j,k}$ . Comme nous l'avons déjà exposé plus haut, à la section 2.3.1, nous linéarisons ce flux en ne retenant que la contribution principale, dans la direction normale à la face considérée :

$$\underline{\widetilde{I}}_1^V = \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}} \left( \overrightarrow{J}_{(m)}^V \cdot \vec{\Sigma}_s \right) \times \left( \pm \overrightarrow{\text{grad}}(\underline{w})_s \cdot \vec{n}_s^{(m)} \right)$$

où

$$\underline{\overrightarrow{J}}_{(m)}^V = \frac{\partial \overrightarrow{F}^V}{\partial \left( \overrightarrow{\text{grad}}(\underline{w}) \cdot \vec{n}^{(m)} \right)} \quad \text{et} \quad \vec{n}_s^{(m)} = \frac{\vec{\Sigma}_s}{\|\vec{\Sigma}_s\|} = \frac{\vec{\Sigma}_s}{\Sigma_s}$$

On notera que le terme  $\overrightarrow{J_{(m)}^V} \cdot \vec{\Sigma}_s$  ne dépend pas de l'orientation de la normale puisque celle-ci intervient à la fois dans les expressions de la matrice jacobienne et de la surface. On choisit d'approcher la composante  $\overrightarrow{\text{grad}}(\underline{w})_s \cdot \vec{n}_s^{(m)}$  du gradient des variables conservatives par :

$$-\frac{(\delta_m \underline{w})_s \Sigma_s}{|\Omega_s|}$$

où  $\Omega_s$  est une certaine cellule de contrôle entourant la face  $\Sigma_s$ . On obtient finalement :

$$\underline{\widetilde{I}}_1^V = \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}} \left( \overrightarrow{J_{(m)}^V} \cdot \vec{n}_s^{(m)} \right) \frac{\Sigma_s^2}{|\Omega_s|} \times (\underline{w}_{\text{ext}} - \underline{w}_{i,j,k})$$

où  $M_{\text{ext}}$  représente le point de maillage situé à l'extérieur de la cellule de contrôle  $\Omega_{i,j,k}$ , par rapport à la face  $\Sigma_s$  considérée :

$$\text{ext} \in \{(i+1, j, k), (i-1, j, k), (i, j+1, k), (i, j-1, k), (i, j, k+1), (i, j, k-1)\}$$

L'implication qui en découle, avec une simplification qui consiste à remplacer la matrice jacobienne  $\overrightarrow{J_{(m)}^V}$  par son rayon spectral, prend la forme suivante :

$$\underline{\Delta \widetilde{I}}_1^V = \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}} \rho \left( \overrightarrow{J_{(m)}^V} \cdot \vec{n}_s^{(m)} \right) \frac{\Sigma_s^2}{|\Omega_s|} \times (\underline{\Delta w}_{\text{ext}} - \underline{\Delta w}_{i,j,k}) \quad (2.42)$$

Nous verrons plus loin la façon dont est évalué le coefficient sur la face  $\Sigma_s$ .

**Implication de la viscosité artificielle.** L'équation (1.35) fournit l'expression de la viscosité artificielle et l'implication de ce terme est immédiat et donne :

$$\underline{\Delta I}^{\text{va}} = \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}} (\nu^{\text{va}})_s^{(m)} \times (\underline{\Delta w}_{\text{ext}} - \underline{\Delta w}_{i,j,k}) \quad (2.43)$$

où les coefficients  $\nu_s^{\text{va}(m)}$  sont donnés par les formules (1.36).

**Implication de la dissipation numérique.** Pour impliciter la dissipation numérique du schéma, qui a été modifiée par rapport à celle du schéma de LAX-WENDROFF, on interprète ce terme de la façon suivante :

$$\underline{\widetilde{I}}_2' = \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}} \pm \frac{1}{2} \underset{=s}{\widetilde{\phi}}^{(m)} \widetilde{\underline{R}}_s$$

où le signe  $\pm$  est choisi de telle manière à ce que  $\pm \vec{n}_s$  soit extérieure à la cellule  $\Omega_{i,j,k}$  et  $\widetilde{\underline{R}}_s$  représente une certaine évaluation du prédicteur des flux sur la face  $\Sigma_s$ . On choisit pour cela de ne conserver que les contributions dans le direction normale à cette face  $\Sigma_s$  et ainsi :

$$\underline{\widetilde{I}}_2' = \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}} \pm \frac{1}{2} \underset{=s}{\widetilde{\phi}}^{(m)} \frac{\Sigma_s}{|\Omega_s|} \cdot \left( \overrightarrow{F}_{\text{ext}}^E - \overrightarrow{F}_{i,j,k}^E \right)$$

où  $M_{\text{ext}}$  représente le point de maillage situé à l'extérieur de la cellule de contrôle  $\Omega_{i,j,k}$ , par rapport à la face  $\Sigma_s$  considérée :

$$\text{ext} \in \{(i+1, j, k), (i-1, j, k), (i, j+1, k), (i, j-1, k), (i, j, k+1), (i, j, k-1)\}$$

On choisit de linéariser les flux et on obtient alors :

$$\underline{\tilde{I}}_2 = \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}} \pm \frac{1}{2} \frac{1}{|\Omega_s|} \underline{\tilde{\phi}}_{=s}^{(m)} \left( \underline{\vec{J}}_{=s} \cdot \underline{\vec{\Sigma}}_s \right) (\underline{w}_{\text{ext}} - \underline{w}_{i,j,k})$$

En effectuant une simplification de la matrice  $\underline{\tilde{\phi}}_{=s}^{(m)} \left( \underline{\vec{J}}_{=s} \cdot \underline{\vec{\Sigma}}_s \right)$  définie positive par son rayon spectral, on en déduit l'implication suivante :

$$\underline{\Delta\tilde{I}}_2 = \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}} \frac{1}{2} \rho \left( \underline{\vec{J}}_{=s} \cdot \underline{\vec{\Sigma}}_s \right) (\underline{\Delta w}_{\text{ext}} - \underline{\Delta w}_{i,j,k}) \quad (2.44)$$

**Établissement du système implicite.** L'équation (2.41) fournit la partie non linéaire du système implicite. Les équations (2.42), (2.43) et (2.44) en fournissent la partie linéaire. Dans les équations (2.42) et (2.44), il faut évaluer un rayon spectral sur la face  $\Sigma_s$  de la cellule de contrôle  $\Omega_{i,j,k}$ . On fait alors le choix d'une formulation compatible avec le principe de distribution en calculant ce coefficient sur les cellules de maillage  $\Omega_C$  puis en effectuant une opération de moyenne. De plus, on introduit un coefficient  $\beta$  de sur-implication ; avec  $\beta = 1/2$ , on retrouve les formulations données plus haut. Enfin, au lieu de calculer les rayons spectraux sur les cellules de maillage, nous allons calculer la vitesse caractéristique maximale  $V^{\text{car}} = \sqrt{\gamma r T} + \|\vec{v}\|$  qui les majore quelle que soit la normale considérée. Ainsi, le système implicite que l'on construit s'exprime :

$$C_{i,j,k}^{(0)} \underline{\Delta w}_{i,j,k}^n + \frac{1}{2} \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}} \pm \overrightarrow{\Delta F}_{\text{ext}} \cdot \underline{\vec{\Sigma}}_s - \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}} C_s^{(m)} \underline{\Delta w}_{\text{ext}} = \frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \underline{\Delta w}_{i,j,k}^{\text{expli}} \quad (2.45a)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(1)} = \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial\Sigma_{i+\frac{1}{2},j,k}} \tilde{\varrho}_C^{(1)} + 2\beta (\mathbf{v}^{\text{va}})^{(1)}_{i+\frac{1}{2},j,k} \\ C_{i,j+\frac{1}{2},k}^{(2)} = \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial\Sigma_{i,j+\frac{1}{2},k}} \tilde{\varrho}_C^{(2)} + 2\beta (\mathbf{v}^{\text{va}})^{(2)}_{i,j+\frac{1}{2},k} \\ C_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{(3)} = \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial\Sigma_{i,j,k+\frac{1}{2}}} \tilde{\varrho}_C^{(3)} + 2\beta (\mathbf{v}^{\text{va}})^{(3)}_{i,j,k+\frac{1}{2}} \\ C_{i,j,k}^{(0)} = \frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \\ \quad + C_{i-\frac{1}{2},j,k}^{(1)} + C_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(1)} + C_{i,j-\frac{1}{2},k}^{(2)} + C_{i,j+\frac{1}{2},k}^{(2)} + C_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{(3)} + C_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{(3)} \end{array} \right. \quad (2.45b)$$

où on évalue au centre des cellules de maillage la quantité :

$$\tilde{\varrho}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{(m)} = \tilde{\varrho}_C^{(m)} \beta \left( V^{\text{car}} \times S^{(m)} \right)_C + 2\beta \left( \frac{\mathbf{v}^{\text{car}}}{|\Omega|} \times \left( S^{(m)} \right)^2 \right)_C \quad (2.45c)$$

avec la vitesse caractéristique  $V^{\text{car}} = \sqrt{\gamma r T} + \|\vec{v}\|$  et la viscosité caractéristique  $\mathbf{v}^{\text{car}} = \gamma \frac{\mathbf{v}_{\text{mol}}}{Pr_{\text{mol}}} + \gamma \frac{\mathbf{v}_t}{Pr_t}$  qui sont calculées au centre  $C$  des cellules de maillage à partir de l'état moyen :

$$\underline{w}_C = \frac{1}{8} \sum_{M \subset \partial^2\Omega_C} \underline{w}_M$$

Dans le cas où l'on utilise le schéma de LAX-WENDROFF avec cette phase implicite sans matrice, l'implication des termes dissipatifs est donnée par (1.42) et l'expression de  $\tilde{\varrho}^{(m)}$  par (1.43c).

**Résolution du système implicite.** Le système implicite (2.45) peut être résolu par relaxation de JACOBI par point :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\Delta'w}_{i,j}^{(0)} = \frac{|\Omega_{i,j,k}| \underline{\Delta w}_{i,j}^{\text{expl}}}{C_{i,j,k}^{(0)} \Delta t_{i,j}} \\ \forall l \in \llbracket 1, l_{\text{max}} \rrbracket, \\ \underline{\Delta'w}_{i,j,k}^{(l)} = \frac{1}{C_{i,j,k}^{(0)}} \left[ \frac{|\Omega_{i,j,k}| \underline{\Delta w}_{i,j,k}^{\text{expli}}}{\Delta t_{i,j,k}} - \frac{1}{2} \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}} \pm \vec{\Sigma}_s \cdot \left( \overrightarrow{\underline{\Delta'F}_{\text{ext}}^E} \right)^{(l-1)} \right. \\ \left. + \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}} C_s^{(m)} \left( \underline{\Delta'w}_{\text{ext}} \right)^{(l-1)} \right] \\ \underline{\Delta w}_{i,j}^n = \underline{\Delta'w}_{i,j}^{(l_{\text{max}})} \end{array} \right. \quad (2.46)$$

où  $l$  est l'indice de relaxation qui intervient dans le processus sous-itératif. On rappelle que l'opérateur de différence  $\Delta'$  est défini tel que  $\Delta'w^{(l)} = w^{(l)} - w^n$ .

On peut également appliquer, pour les points intérieurs aux domaines de maillage, une relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique par point :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\Delta'w}_{i,j,k}^{(0)} = \frac{|\Omega_{i,j,k}| \underline{\Delta w}_{i,j,k}^{\text{expl}}}{C_{i,j,k}^{(0)} \Delta t_{i,j,k}} \\ \forall l \in \llbracket 1, l_{\text{max}} \rrbracket, \\ \left[ \begin{array}{l} \underline{\Delta'w}_{i,j,k}^{(*)} = \frac{1}{C_{i,j,k}^{(0)}} \left[ \frac{|\Omega_{i,j,k}| \underline{\Delta w}_{i,j,k}^{\text{expli}}}{\Delta t_{i,j,k}} \right. \\ \left. + \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}^-} C_s^{(m)} \left( \underline{\Delta'w}_{\text{ext}} \right)^{(*)} + \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}^+} C_s^{(m)} \left( \underline{\Delta'w}_{\text{ext}} \right)^{(l-1)} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}^-} \pm \vec{\Sigma}_s \cdot \left( \overrightarrow{\underline{\Delta'F}_{\text{ext}}^E} \right)^{(*)} - \frac{1}{2} \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}^+} \pm \vec{\Sigma}_s \cdot \left( \overrightarrow{\underline{\Delta'F}_{\text{ext}}^E} \right)^{(l-1)} \right] \\ \underline{\Delta'w}_{i,j,k}^{(l)} = \frac{1}{C_{i,j,k}^{(0)}} \left[ \frac{|\Omega_{i,j,k}| \underline{\Delta w}_{i,j,k}^{\text{expli}}}{\Delta t_{i,j,k}} \right. \\ \left. + \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}^-} C_s^{(m)} \left( \underline{\Delta'w}_{\text{ext}} \right)^{(*)} + \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}^+} C_s^{(m)} \left( \underline{\Delta'w}_{\text{ext}} \right)^{(l)} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}^-} \pm \vec{\Sigma}_s \cdot \left( \overrightarrow{\underline{\Delta'F}_{\text{ext}}^E} \right)^{(*)} - \frac{1}{2} \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k}^+} \pm \vec{\Sigma}_s \cdot \left( \overrightarrow{\underline{\Delta'F}_{\text{ext}}^E} \right)^{(l)} \right] \\ \underline{\Delta w}_{i,j,k}^n = \underline{\Delta'w}_{i,j,k}^{(l_{\text{max}})} \end{array} \right. \quad (2.47)$$

où :  $\partial\Omega_{i,j,k}^+$  représente l'ensemble des faces de la cellule  $\Omega_{i,j,k}$  centrées sur les points d'indices  $(i + \frac{1}{2}, j, k)$ ,  $(i, j + \frac{1}{2}, k)$  et  $(i, j, k + \frac{1}{2})$  ;

$\partial\Omega_{i,j,k}^-$  représente l'ensemble des faces de la cellule  $\Omega_{i,j,k}$  centrées sur les points d'indices  $(i - \frac{1}{2}, j, k)$ ,  $(i, j - \frac{1}{2}, k)$  et  $(i, j, k - \frac{1}{2})$ .

et, pour le calcul du premier incrément  $\underline{\Delta}w^{(*)}$  de chaque sous-itération, les points du maillage sont parcourus dans le sens croissant des indices, puis, pour le calcul du second incrément  $\underline{\Delta}w^{(l)}$ , les points du maillage sont parcourus dans le sens décroissant des indices.

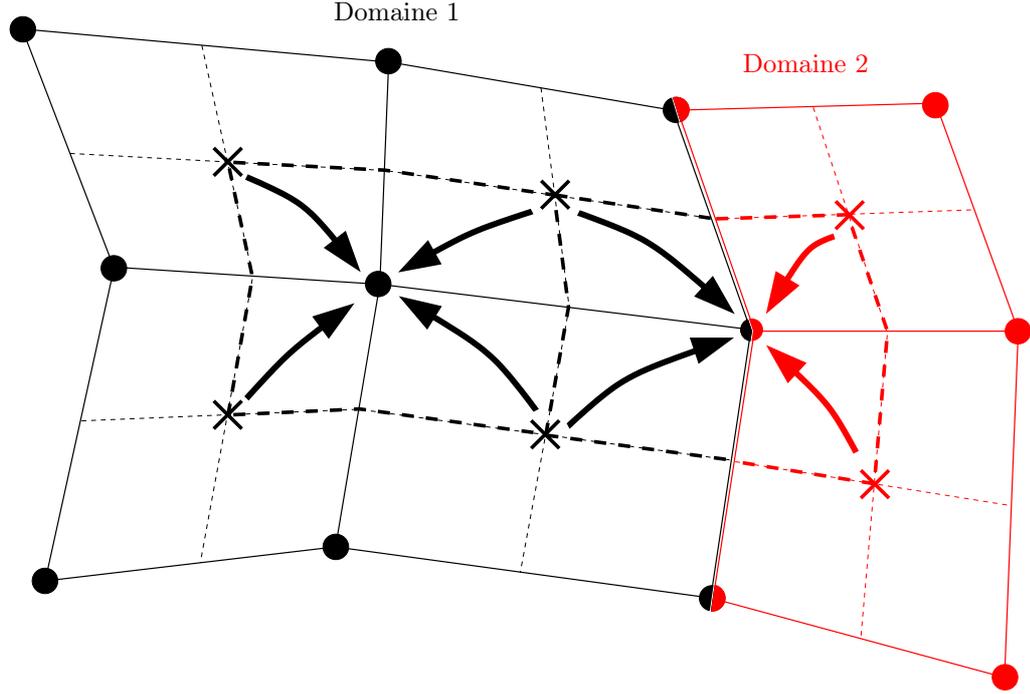
### 2.5.2.3 Traitements aux bords

Le logiciel AEROLOG permet de traiter des maillages multidomaines. De ce fait, on distingue deux types de bord de domaine différents : les bords de domaines qui constituent la limite du domaine de calcul, auxquels il faut appliquer une condition aux limites, et les bords de domaines qui partagent une frontière commune avec un autre domaine, auxquels il faut appliquer un traitement de raccord.

**Conditions aux limites.** Lors de la réalisation des modifications apportées au logiciel AEROLOG, une des contraintes imposées consistait à conserver un schéma compact à trois point par direction, comme le sont les schémas de LAX-WENDROFF. De cette façon le traitement des conditions aux limites est inchangé. Comme la formulation des méthodes numériques est basée sur les nœuds du maillage, il existe des nœuds sur la frontière. De cette façon, les conditions aux limites « fortes » dites « de DIRICHLET » s'appliquent directement, en remplaçant si nécessaire les valeurs calculées par le schéma par celles imposées par le type de condition souhaité. L'application de conditions « faibles » dites « de VON NEUMANN » nécessite la modification du bilan de flux pour les points situés sur la frontière – ce point n'est pas détaillé ici.

**Raccords de domaines.** Nous allons décrire ici la méthode qui permet, dans une formulation basée sur les nœuds du maillage, de raccorder les différentes contributions à la solution issues de chaque domaine. En effet, il convient de raccorder la solution explicite, c'est-à-dire le champ  $\underline{\Delta}w^{\text{expl}}$  issu des équations (1.32b) ou (2.38b) et la solution implicite  $\underline{\Delta}w^n$  issu des équations (1.32a) ou (2.38a). Lorsque le système implicite est résolu en plusieurs étapes – par factorisation ou par relaxation – il convient de raccorder le champ solution à chaque étape du processus de résolution du système.

**Incrément explicite.** Considérons tout d'abord le raccord du champ explicite ; dans le logiciel AEROLOG, le calcul du bilan (équation (1.32b) ou (2.38b)) est effectué domaine par domaine. La formulation des méthodes numériques étant basée sur les nœuds du maillage, chaque cellule de maillage fait partie d'un seul et unique domaine. D'autre part, avec le principe de distribution proposé par NI et exposé plus haut, les différents éléments du schéma numérique (flux consistants et dissipatifs) sont calculés aux centres des cellules de maillage, puis distribués vers les nœuds. Les points situés aux frontières ne reçoivent donc pas de traitement particulier, le bilan de flux issu d'un seul domaine pour ces points est seulement incomplet ; il ne concerne que la demi-cellule de contrôle incluse dans le domaine considéré (cf. le contour en pointillés épais sur la figure 2.12). Raccorder le champ explicite consiste alors à additionner les différents bilans de flux partiels issus des domaines qui partagent le point frontière considéré. En effet, le raccord de la solution doit s'effectuer à partir du bilan


 FIG. 2.12 – Maillage multidomaine bidimensionnel et raccord du champ  $\Delta w^{\text{expl}}$  explicite.

de flux qui est une grandeur extensive<sup>9</sup> et non directement à partir des incréments  $\Delta w^{\text{expl}}$  qui constituent un champ intensif<sup>9</sup>. Ainsi, pour un point intérieur au domaine, la formule (2.38b) donne :

$$\frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \Delta w_{i,j,k}^{\text{expl}} = \underline{BF}_{i,j,k}$$

où la quantité  $|\Omega_{i,j,k}| / \Delta t_{i,j,k}$  est calculée aux nœuds du maillage par la formule (cf. paragraphe 1.5.4) :

$$\frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} = \frac{1}{8} \sum_{C \subset \partial^2 \Omega_{i,j,k}} \frac{|\Omega_C|}{\Delta t_C}$$

et où  $\underline{BF}_{i,j,k}$  représente le bilan de flux explicite qui peut se décomposer ainsi (cf. formules (1.33-1.34), (1.41), (1.35) et (2.39-2.40)) :

$$\underline{BF}_{i,j,k} = \sum_{C \subset \partial^2 \Omega_{i,j,k}} \widetilde{BF}_C + \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}} \left[ (\mathbf{v}^{\text{va}})_s^{(m)} \times (w_{\text{ext}} - w_{i,j,k}) \right]$$

Au vu des formules exposées au paragraphe 1.5.7, on peut récrire le coefficient de viscosité artificielle :

$$(\mathbf{v}^{\text{va}})_s^{(m)} = (\overline{\mathbf{v}^{\text{va}}})_s^{(m)} \times \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial \Sigma_s} S_C^{\text{max}}$$

où  $(\overline{\mathbf{v}^{\text{va}}})_s^{(m)}$  est une fonction qui dépend uniquement des deux états de part et d'autre de la face  $\Sigma_s$ . Lorsque le point de calcul  $M_{i,j,k}$  se situe à une frontière entre deux domaines, on peut alors récrire le bilan de flux précédent en séparant les contributions provenant des deux

<sup>9</sup>On a emprunté ce vocable à la thermodynamique où, par exemple, la pression est une grandeur intensive et le volume une grandeur extensive.

domaines :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{8} \sum_{C \subset \partial^2 \Omega_{i,j,k|1}} \frac{|\Omega_C|}{\Delta t_C} + \frac{1}{8} \sum_{C \subset \partial^2 \Omega_{i,j,k|2}} \frac{|\Omega_C|}{\Delta t_C} \right) \underline{\Delta} w_{i,j,k}^{\text{expl}} = \\ & \sum_{C \subset \partial^2 \Omega_{i,j,k|1}} \widetilde{BF}_C + \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k|1}} \left[ (\overline{\nu^{\text{va}}})_s^{(m)} \times \left( \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial \Sigma_s} S_C^{\text{max}} \right) \times (w_{\text{ext}} - \underline{w}_{i,j,k}) \right] \\ & + \sum_{C \subset \partial^2 \Omega_{i,j,k|2}} \widetilde{BF}_C + \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k|2}} \left[ (\overline{\nu^{\text{va}}})_s^{(m)} \times \left( \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial \Sigma_s} S_C^{\text{max}} \right) \times (w_{\text{ext}} - \underline{w}_{i,j,k}) \right] \end{aligned}$$

où  $\partial^2 \Omega_{i,j,k|1}$  (resp.  $\partial^2 \Omega_{i,j,k|2}$ ) représente l'ensemble des sommets  $C$  de la cellule  $\Omega_{i,j,k}$  appartenant au domaine n° 1 (resp. au domaine n° 2). Pour un point  $M_{i,j,k}$  situé sur la frontière entre deux domaines, il existe deux faces  $\Sigma_s$  qui sont partagées entre les deux domaines telles que  $\Sigma_{s|1} \cup \Sigma_{s|2} = \Sigma_s$ . Considérons l'une de ces faces et examinons le terme de viscosité artificielle : les quantités  $(\overline{\nu^{\text{va}}})_s^{(m)}$  et  $(w_{\text{ext}} - \underline{w}_{i,j,k})$  sont identiques que l'on se place dans les domaines n° 1 ou n° 2, puisqu'elles ne font intervenir que les états aux points du maillage situés de part et d'autre de la face considérée, dans la direction normale à cette face. Dès lors, les seuls éléments qu'il faut raccorder sont les sommes des surfaces  $S^{\text{max}}$  :

$$(\overline{\nu^{\text{va}}})_s^{(m)} \times \left( \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial \Sigma_{s|1}} S_C^{\text{max}} + \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial \Sigma_{s|2}} S_C^{\text{max}} \right) \times (w_{\text{ext}} - \underline{w}_{i,j,k})$$

Cette formule peut se généraliser pour le cas d'un point  $M_{i,j,k}$  appartenant à  $N_{\text{dom}}$  domaines différents, tels que

$$\Omega_{i,j,k} = \bigcup_{n_{\text{dom}}=1}^{N_{\text{dom}}} \Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n_{\text{dom}}=1}^{N_{\text{dom}}} \left( \frac{1}{8} \sum_{C \subset \partial^2 \Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}} \frac{|\Omega_C|}{\Delta t_C} \right) \underline{\Delta} w_{i,j,k}^{\text{expl}} &= \sum_{n_{\text{dom}}=1}^{N_{\text{dom}}} \left( \sum_{C \subset \partial^2 \Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}} \widetilde{BF}_C \right) \\ &+ \sum_{n_{\text{dom}}=1}^{N_{\text{dom}}} \left\{ \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}} \left[ (\overline{\nu^{\text{va}}})_s^{(m)} \times \left( \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial \Sigma_s} S_C^{\text{max}} \right) \times (w_{\text{ext}} - \underline{w}_{i,j,k}) \right] \right\} \end{aligned}$$

Le coefficient de pondération reste égal à  $1/8$  car, pour un maillage tridimensionnel structuré, un point  $M_{i,j,k}$  est toujours le sommet de huit cellules différentes. Pour effectuer le raccord du champ  $\underline{\Delta} w^{\text{expl}}$ , on calcule donc d'abord, de façon indépendante sur chaque domaine, les quantités

$$\frac{|\Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}|}{\Delta t_{i,j,k|n_{\text{dom}}}} = \frac{1}{8} \sum_{C \subset \partial^2 \Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}} \frac{|\Omega_C|}{\Delta t_C}$$

et

$$\sum_{C \subset \partial^2 \Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}} \widetilde{BF}_C + \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}} \left[ (\overline{\nu^{\text{va}}})_s^{(m)} \times (w_{\text{ext}} - \underline{w}_{i,j,k}) \right]$$

et, comme pour tous les points intérieurs de ce même domaine, on calcule :

$$\frac{|\Omega_{i,j,k}|_{n_{\text{dom}}}}{\Delta t_{i,j,k}|_{n_{\text{dom}}}} \Delta w_{i,j,k}|_{n_{\text{dom}}}^{\text{expl}} = \sum_{C \subset \partial^2 \Omega_{i,j,k}|_{n_{\text{dom}}}} \widetilde{BF}_C + \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}|_{n_{\text{dom}}}} \left[ (\mathbf{v}^{\text{va}})_s^{(m)} \times (\underline{w}_{\text{ext}} - \underline{w}_{i,j,k}) \right] \quad (2.48)$$

On effectue ensuite le raccord :

$$\frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \Delta w_{i,j,k}^{\text{expl}} = \sum_{n_{\text{dom}}=1}^{N_{\text{dom}}} \frac{|\Omega_{i,j,k}|_{n_{\text{dom}}}}{\Delta t_{i,j,k}|_{n_{\text{dom}}}} \Delta w_{i,j,k}|_{n_{\text{dom}}}^{\text{expl}} \quad (2.49)$$

et on affecte la nouvelle valeur calculée  $\Delta w_{i,j,k}^{\text{expl}}$  à toutes les occurrences du point  $M_{i,j,k}$  dans les différents domaines.

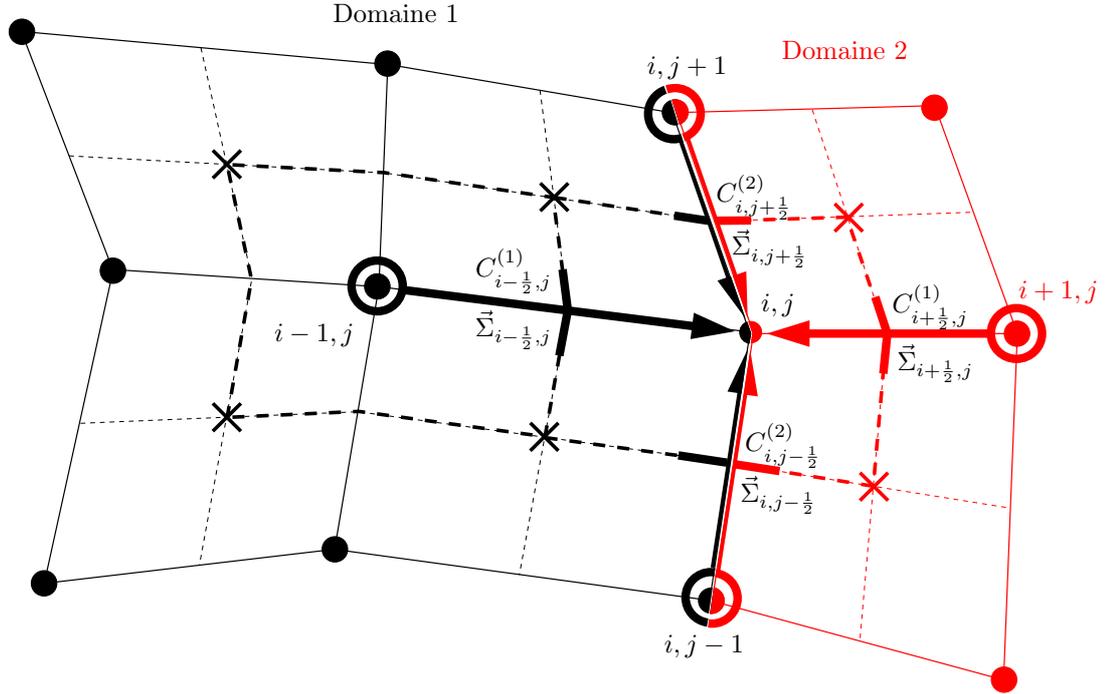


FIG. 2.13 – Maillage multidomaine bidimensionnel et raccord du champ  $\Delta w$  implicite<sup>10</sup>.

**Incrément implicite.** Considérons maintenant la phase implicite sans matrice résolue par une méthode de relaxation de JACOBI par point (2.46) et récrivons de manière simplifiée l'écriture du schéma implicite pour la sous-itération courante ( $l$ ) :

$$C_{i,j,k}^{(0)} \Delta w_{i,j,k}^{(l)} = \frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} \Delta w_{i,j,k}^{\text{expl}} - \frac{1}{2} \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}} \pm \vec{\Sigma}_s \cdot \left( \overrightarrow{\Delta' F_{\text{ext}}^E} \right)^{(l-1)} + \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}} C_s^{(m)} (\Delta w_{\text{ext}})^{(l-1)}$$

où l'on rappelle que :

- les indices ext dépendent de la face  $\Sigma_s$  considérée ;

<sup>10</sup>On a utilisé ici une unique numérotation des nœuds  $i, j$  pour simplifier les notations ; cependant en pratique chaque domaine possède sa propre numérotation et un tableau permet de connaître les points situés à la frontière et qui coïncident.

– les surfaces  $\pm\vec{\Sigma}_s$  et les coefficients  $C_s^{(m)}$  sont calculées aux interfaces  $\Sigma_s$  :

$$\begin{aligned} \text{ext} &\in \{(i \pm 1, j, k), (i, j \pm 1, k), (i, j, k \pm 1)\} \\ s &\in \left\{ \left( i \pm \frac{1}{2}, j, k \right), \left( i, j \pm \frac{1}{2}, k \right), \left( i, j, k \pm \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

Lorsque le point  $M_{i,j,k}$  est à la frontière de  $N_{\text{dom}}$  domaines, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n_{\text{dom}}=1}^{N_{\text{dom}}} C_{i,j,k|n_{\text{dom}}}^{(0)} \right) \underline{\Delta} w_{i,j,k}^{(l)} &= \sum_{n_{\text{dom}}=1}^{N_{\text{dom}}} \left( \frac{|\Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}|}{\Delta t_{i,j,k|n_{\text{dom}}}} \underline{\Delta} w_{i,j,k}^{\text{expli}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n_{\text{dom}}=1}^{N_{\text{dom}}} \left( \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}} \pm \vec{\Sigma}_s \cdot \left( \overrightarrow{\underline{\Delta} F_{\text{ext}}^E} \right)^{(l-1)} \right) \\ &\quad + \sum_{n_{\text{dom}}=1}^{N_{\text{dom}}} \left( \sum_{\Sigma_s \subset \partial\Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}} C_s^{(m)} \left( \underline{\Delta} w_{\text{ext}} \right)^{(l-1)} \right) \end{aligned}$$

où l'expression du coefficient  $C_{i,j,k|n_{\text{dom}}}^{(0)}$  sera donnée plus loin et on note :

$$\frac{|\Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}|}{\Delta t_{i,j,k|n_{\text{dom}}}} = \frac{1}{8} \sum_{CC \subset \partial^2 \Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}} \frac{|\Omega_C|}{\Delta t_C}$$

Pour le raccord du champ de l'incrément implicite il apparaît donc :

- des grandeurs  $\underline{\Delta} w_{i,j,k}^{\text{expli}}$ ,  $\left( \overrightarrow{\underline{\Delta} F_{\text{ext}}^E} \right)^{(l-1)}$  et  $\left( \underline{\Delta} w_{\text{ext}} \right)^{(l-1)}$  calculées aux nœuds, qui sont des champs déjà raccordés car ils ont été évalués pour l'ensemble des domaines antérieurement (phase explicite ou sous-itération de relaxation précédente) ;
- des grandeurs  $\pm\vec{\Sigma}_s$  et  $C_s^{(m)}$  calculées aux faces de la cellule de contrôle  $\Omega_{i,j,k}$ .

La présence de ces coefficients calculés aux faces  $\Sigma_s$  impose un traitement similaire à celui des termes de viscosité artificielle présenté lors du raccord du champ de l'incrément explicite. En effet, certaines faces  $\Sigma_s$  (par exemple les faces  $(i, j \pm \frac{1}{2})$  sur la figure 2.13) sont partagées entre plusieurs domaines – jusqu'à quatre dans un maillage tridimensionnel. Nous allons donc examiner maintenant la méthode de calcul des différents coefficients aux faces  $\Sigma_s$  de la cellule de contrôle lorsqu'ils sont partagés entre plusieurs domaines. Nous avons exposé, lors de l'établissement de l'implicitation des flux non visqueux au paragraphe 2.5.2.2, la méthode de calcul des surfaces  $\vec{\Sigma}_s$  et à une frontière de domaines, on peut ainsi écrire :

$$\vec{\Sigma}_s = \frac{1}{4} \sum_{CC \subset \partial\Sigma_s} \vec{S}_C^{(m)} = \sum_{n_{\text{dom}}=1}^{N_{\text{dom}}} \left( \frac{1}{4} \sum_{CC \subset \partial\Sigma_s|n_{\text{dom}}} \vec{S}_C^{(m)} \right)$$

De même, si on se reporte à la formule (2.45b), on pourra noter que les coefficients  $C_s^{(m)}$  sont de la forme :

$$C_s^{(m)} = \frac{1}{4} \sum_{CC \subset \partial\Sigma_s} \tilde{\varrho}_C^{(m)} + 2\beta (\nu^{\text{va}})_s^{(m)}$$

soit, comme au paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} C_s^{(m)} &= \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial \Sigma_s} \tilde{\varrho}_C^{(m)} + 2\beta (\overline{v^{va}})_s^{(m)} \times \left( \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial \Sigma_s} S_C^{\max} \right) \\ &= \sum_{n_{\text{dom}}=1}^{N_{\text{dom}}} \left( \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial \Sigma_s | n_{\text{dom}}} \tilde{\varrho}_C^{(m)} + 2\beta (\overline{v^{va}})_s^{(m)} \times \left( \frac{1}{4} \sum_{C \subset \partial \Sigma_s | n_{\text{dom}}} S_C^{\max} \right) \right) \end{aligned}$$

où  $(\overline{v^{va}})_s^{(m)}$  est une fonction qui dépend uniquement des deux états de part et d'autre de la face  $\Sigma_s$ . De plus on a :

$$\begin{aligned} C_{i,j,k}^{(0)} &= \frac{1}{8} \sum_{C \subset \partial^2 \Omega_{i,j,k}} \frac{|\Omega_C|}{\Delta t_C} + \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k}} C_s^{(m)} \\ &= \sum_{n_{\text{dom}}=1}^{N_{\text{dom}}} \left( \frac{1}{8} \sum_{C \subset \partial^2 \Omega_{i,j,k} | n_{\text{dom}}} \frac{|\Omega_C|}{\Delta t_C} + \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k} | n_{\text{dom}}} C_s^{(m)} \right) \end{aligned}$$

Dans le processus de relaxation (2.46), les coefficients  $\vec{\Sigma}_s$ ,  $C_s^{(m)}$  et  $C^{(0)}$  dépendent uniquement de la géométrie et de l'état  $\underline{w}^n$ ; ils ne sont donc pas recalculés à chaque sous-itération; seuls les variables  $\underline{\Delta'w}$  et les flux  $\overrightarrow{\Delta'F^E}$  sont recalculés. Comme on a vu que, à la sous-itération  $(l)$ , les champs  $\underline{\Delta'w}_{i,j,k}^{\text{expli}}$ ,  $\left( \overrightarrow{\Delta'F_{\text{ext}}^E} \right)^{(l-1)}$  et  $(\underline{\Delta'w}_{\text{ext}})^{(l-1)}$  étaient déjà raccordés, on a

alors deux possibilités de traiter le raccord de l'incrément  $\underline{\Delta'w}^{(l)}$  :

- on peut raccorder une fois pour toutes les coefficients  $\vec{\Sigma}_s$ ,  $C_s^{(m)}$  et  $C^{(0)}$  et calculer l'incrément  $\underline{\Delta'w}^{(l)}$  de façon indépendante et complète (le raccord sera déjà effectué) sur chaque domaine ;
- on peut également calculer les contributions de chaque domaine aux points aux frontières en ne prenant en compte, pour le calcul des coefficients  $\vec{\Sigma}_s$ ,  $C_s^{(m)}$  et  $C^{(0)}$ , que la contribution du domaine considéré et effectuer ensuite un raccord pour l'incrément  $\underline{\Delta'w}^{(l)}$ .

C'est cette deuxième solution qui a été retenue dans AEROLOG. On calcule donc sur chaque domaine, et pour tous les points, intérieurs et à la frontière :

$$\begin{aligned} C_{i,j,k|n_{\text{dom}}}^{(0)} \underline{\Delta'w}_{i,j,k|n_{\text{dom}}}^{(l)} &= \frac{|\Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}|}{\Delta t_{i,j,k|n_{\text{dom}}}} \underline{\Delta'w}_{i,j,k}^{\text{expli}} - \frac{1}{2} \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}} \pm \vec{\Sigma}_s \cdot \left( \overrightarrow{\Delta'F_{\text{ext}}^E} \right)^{(l-1)} \\ &\quad + \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}} C_s^{(m)} (\underline{\Delta'w}_{\text{ext}})^{(l-1)} \end{aligned} \tag{2.50}$$

avec

$$C_{i,j,k|n_{\text{dom}}}^{(0)} = \frac{|\Omega_{i,j,k}|}{\Delta t_{i,j,k}} + \sum_{\Sigma_s \subset \partial \Omega_{i,j,k|n_{\text{dom}}}} C_s^{(m)}$$

et on effectue ensuite le raccord :

$$\left( \sum_{n_{\text{dom}}=1}^{N_{\text{dom}}} C_{i,j,k|n_{\text{dom}}}^{(0)} \right) \underline{\Delta'w}_{i,j,k}^{(l)} = \sum_{n_{\text{dom}}=1}^{N_{\text{dom}}} C_{i,j,k|n_{\text{dom}}}^{(0)} \underline{\Delta'w}_{i,j,k|n_{\text{dom}}}^{(l)} \tag{2.51}$$

On affecte alors la nouvelle valeur calculée  $\underline{\Delta'w}_{i,j,k}^{\text{expli}}$  à toutes les occurrences du point  $M_{i,j,k}$  dans les différents domaines.

**Calcul parallèle et relaxation de GAUSS-SEIDEL.** Les processus de calcul des incréments explicite et implicite dans une approche multidomaine que nous venons de décrire (cf. équations (2.48) et (2.50)) s'intègrent parfaitement dans le cadre du calcul parallèle. En effet le logiciel AEROLOG permet la mise en œuvre de plusieurs tâches de calcul parallèles grâce aux directives OpenMP ; cette parallélisation repose essentiellement sur un traitement indépendant des domaines de maillage. Ainsi on peut calculer de façon totalement indépendante, y compris pour les points aux frontières, le bilan (2.48) pour la phase explicite (resp. le bilan (2.50) pour la phase implicite) sur la totalité des domaines dans des tâches parallèles différentes, puis effectuer dans une unique tâche le raccord (2.49) (resp. le raccord (2.51)).

Dans la mise en œuvre de la résolution de la phase implicite pour un maillage multidomaines qui précède, nous avons considéré la relaxation de JACOBI par point (2.46). Examinons maintenant la relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique par point (2.47). On note que l'utilisation de variables mises à jour au cours du balayage des points pour le calcul d'un incrément ne permet plus d'utiliser de maillages multidomaines ni de traiter les différents domaines de maillage de façon indépendante dans le cadre d'un calcul parallèle. Pour cette raison et comme cela a déjà été proposé par ailleurs (cf. notamment [46]), la résolution par relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique par point sera appliquée uniquement aux points intérieurs des différents domaines de maillage (c'est-à-dire tels que  $(i, j, k) \in \llbracket 2, i_{\max} - 1 \rrbracket \times \llbracket 2, j_{\max} - 1 \rrbracket \times \llbracket 2, k_{\max} - 1 \rrbracket$ ), le traitement des points à la frontière se faisant avec un algorithme de JACOBI par point. On conserve ainsi la possibilité de traiter, par le calcul parallèle, des maillages multidomaines.

## Chapitre 3

# Applications stationnaires

Après avoir présenté les méthodes numériques déjà existantes et nouvellement mises en œuvre dans AEROLOG, nous allons présenter des calculs qui constituent une première validation de ces nouvelles méthodes numériques. Ces nouvelles méthodes peuvent être séparées en technique de pas de temps fictif, d'une part, et nouveau schéma implicite pour atteindre l'état stationnaire ou pseudo-stationnaire, d'autre part. Si la finalité de cette seconde modification est l'amélioration de la convergence vers l'état pseudo-stationnaire d'un calcul instationnaire mettant en œuvre la méthode de pas de temps fictif, on peut également vérifier les propriétés de ce nouveau schéma à l'aide de calculs stationnaires avec un choix de pas de temps local. Nous présenterons donc dans ce chapitre deux cas de calcul d'écoulements stationnaires ; le régime sera transsonique et turbulent puisque c'est la simulation de ce type d'écoulement qui est visée *in fine*.

Dans tous les cas, la finalité des calculs qui vont être présentés consiste à valider la mise en œuvre des nouvelles fonctionnalités. Pour le calcul d'écoulements stationnaires avec le schéma à pas de temps caractéristique, cette validation consiste à vérifier la préservation de la précision des résultats par rapport à ceux obtenus auparavant avec le schéma de LAX-WENDROFF. De plus, avec le schéma à pas de temps caractéristique, la solution ne dépend plus du pas de temps utilisé ; on a donc la possibilité d'employer de grands nombres *CFL* pour converger plus rapidement vers l'état stationnaire et ainsi diminuer le temps de restitution des calculs. En effet comme nous l'avons déjà précisé, l'amélioration du schéma implicite doit permettre de diminuer le temps de restitution final pour un calcul instationnaire en pas de temps fictif.

Cependant, pour compléter cette vérification concernant la précision des méthodes proposées, on présentera des calculs effectués avec un logiciel de recherche utilisé au Laboratoire SINUMEF, qualifié de « maquette » numérique, mais ne possédant pas toutes les caractéristiques d'un logiciel de calcul industriel tel que l'est AEROLOG (maillages tridimensionnels, multidomaines...) et utilisant un schéma décentré de ROE avec une extension MUSCL qui permet d'atteindre une précision d'ordre deux en espace. Des calculs ont également été menés avec le logiciel FLUENT. Ce logiciel du commerce a été choisi non seulement parce qu'il était disponible chez MBDA, mais aussi parce qu'il sera considéré comme une alternative possible pour des calculs industriels. Ce logiciel a été utilisé avec un schéma décentré d'ordre deux en espace ; bien que ce logiciel puisse également travailler avec des maillages – non structurés – à mailles triangulaires, nous avons conservé les mêmes maillages quadrangulaires structurés que ceux utilisés par AEROLOG. Les méthodes qui ont été mises en œuvre dans AEROLOG ont directement été codées pour des maillages tridimensionnels, le calcul de configurations bidimensionnelles nécessitant en réalité trois plans de maillage dans la direction normale au plan de l'écoulement.

Nous allons donc tout d'abord présenter des résultats de calcul d'écoulement autour d'un profil bidimensionnel NACA 0012. Il s'agit d'un cas de calcul qui a déjà été étudié au laboratoire notamment dans le cadre de la thèse de Th. RENAUD [40] et que nous examinerons également, pour d'autres conditions initiales, dans le cadre de l'analyse d'écoulements instationnaires. Nous proposerons pour ce calcul des comparaisons avec la maquette numérique et le logiciel FLUENT. Le second cas de validation stationnaire présenté sera un calcul d'écoulement tridimensionnel autour d'une gouverne générique.

### 3.1 Écoulement turbulent autour d'un profil NACA 0012

Le profil NACA 0012 est un profil conventionnel qui a été largement utilisé pour mettre en évidence le phénomène de tremblement. Nous allons également nous y intéresser, en particulier parce que les nombres de MACH et de REYNOLDS utilisés sont représentatifs des applications visées en régime transsonique pleinement turbulent. Le phénomène de tremblement peut être défini comme la réponse d'une structure à une excitation aérodynamique due à un décollement. La cause de ce phénomène est aérodynamique, son apparition étant liée à la combinaison de certaines valeurs de paramètres tels que le nombre de MACH et l'incidence (cf. figure 3.1), comme c'est le cas pour le profil NACA 0012. Dans le cas de ce profil, un décollement apparaît tout d'abord sous la forme d'un bulbe à la base du choc qui grossit progressivement avec une augmentation du nombre de MACH ou de l'angle d'incidence ; le tremblement se met finalement en place lorsque le décollement s'étend du choc jusqu'au bord de fuite. Le nombre

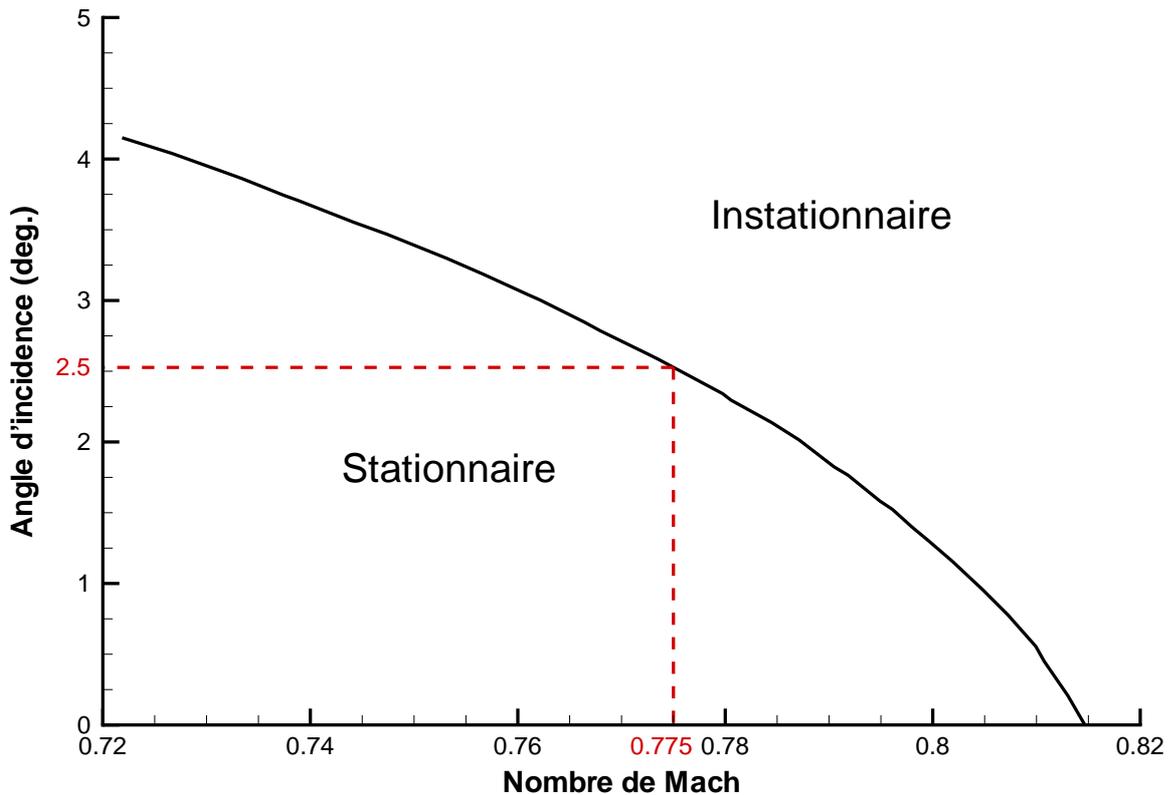


FIG. 3.1 – Frontière d'apparition du phénomène de tremblement autour du profil NACA 0012 en fonction du nombre de MACH et de l'angle d'incidence pour un nombre de REYNOLDS  $Re = 9,9 \times 10^6$ . (Données issues de [35].)

de REYNOLDS choisi est égal à  $Re = 9,9 \times 10^6$  et nous nous placerons à un nombre de MACH égal à  $Ma = 0,775$ . Pour cette valeur, l'expérience (cf. figure 3.1 et [35]) prédit une entrée en tremblement dès une incidence  $\alpha = 2,5^\circ$ . Puisque nous voulons simuler dans un premier temps un écoulement stationnaire, nous nous placerons à une incidence de  $\alpha = 1,5^\circ$  et nous verrons qu'à cette incidence l'écoulement reste attaché. Ce premier cas de calcul permettra d'apprécier les performances des méthodes numériques nouvellement codées dans AEROLOG pour le calcul d'écoulements compressibles turbulents stationnaires représentatifs des applications visées.

Sur cette configuration, différents logiciels ont été utilisés pour mener les calculs : AEROLOG, FLUENT et la maquette numérique du Laboratoire SINUMEF. Pour des raisons pratiques, deux maillages ont été utilisés. Le premier de ces maillages (cf. figure 3.2), qui sera utilisé par AEROLOG et par le logiciel maquette, est constitué de deux domaines en « CH » et comporte  $325 \times 64$  points ; il est bidimensionnel lorsqu'il est utilisé par le logiciel maquette et comporte trois plans de maillage lorsqu'il est utilisé par AEROLOG. La corde du profil vaut 1 m et les frontières du maillages sont situées à dix fois la corde en amont, en aval, au dessus et en dessous du profil ; dans le cas du maillage destiné à AEROLOG, les plans sont séparés de deux longueurs de la corde. La taille de la première maille à la paroi est de  $5 \times 10^{-6}$  m. Le second maillage (cf. figure 3.3) sera utilisé par AEROLOG et FLUENT ; il est constitué de trois domaines disposés en « C » autour du profil. Il comporte  $441 \times 87$  points et la corde du profil vaut également 1 m. Lorsqu'il est utilisé par AEROLOG, ce maillage comporte trois plans séparés chacun d'une longueur de corde, tandis que FLUENT utilise un maillage bidimensionnel. Les frontières du maillage sont situées à cinquante fois la corde en amont, en aval, au dessus et en dessous du profil et la taille de la première maille à la paroi vaut  $1 \times 10^{-6}$  m.

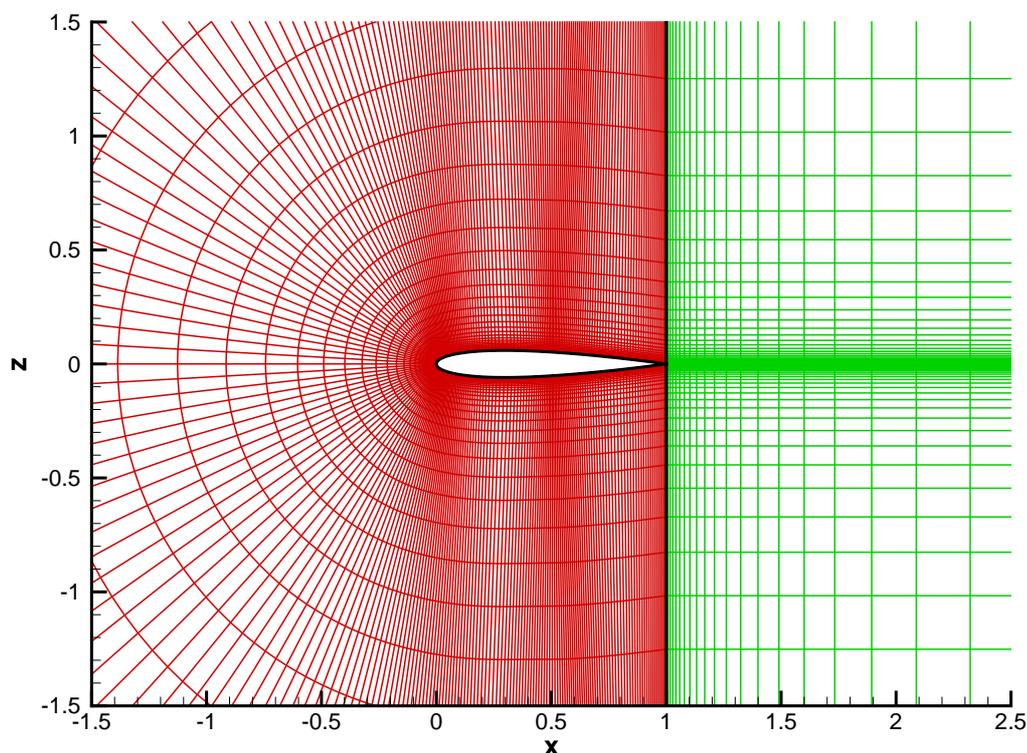


FIG. 3.2 – Maillage n° 1 du domaine de calcul du profil NACA 0012 utilisé par AEROLOG et le logiciel maquette – détail.

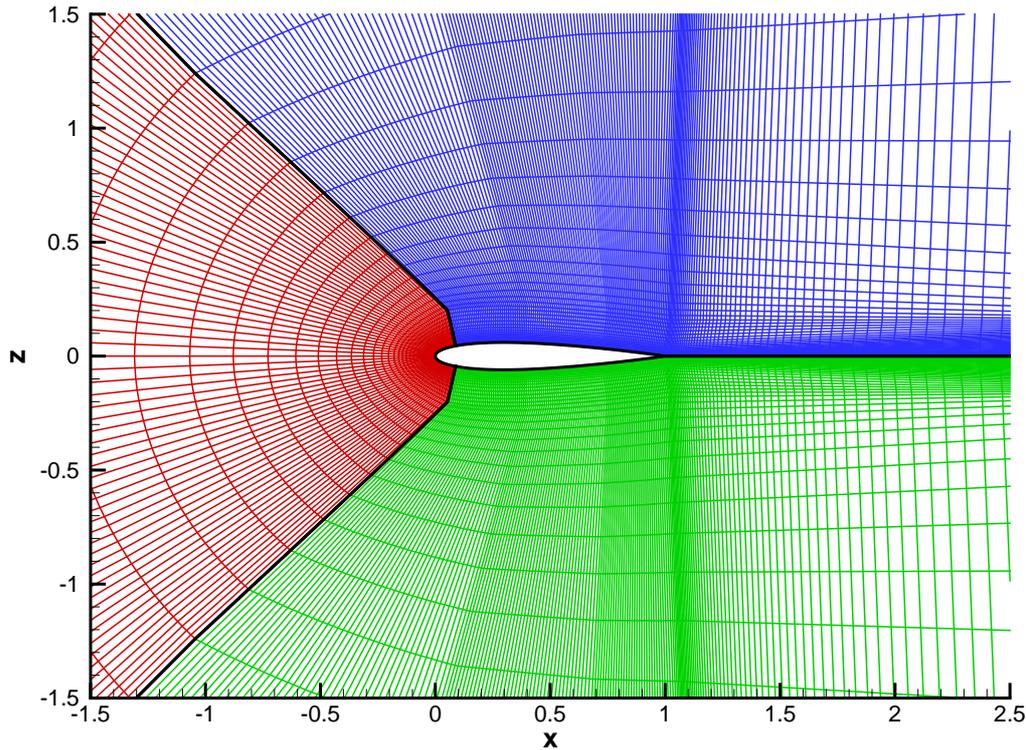


FIG. 3.3 – Maillage n° 2 du domaine de calcul du profil NACA 0012 utilisé par AEROLOG et FLUENT – détail.

Six calculs ont été menés :

- deux calculs avec AEROLOG, sur chacun des deux maillages, utilisant un schéma de LAX-WENDROFF avec une phase implicite de lissage des résidus résolue par factorisation par direction, avec un nombre  $CFL = 1$ , la turbulence étant prise en compte à travers un modèle de BALDWIN-LOMAX ; nous noterons « LW-LIR-BL » ;
- deux calculs avec AEROLOG, sur chacun des deux maillages, utilisant un schéma à pas de temps caractéristique avec une phase implicite sans matrice résolue par relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique par point avec 5 sous-itérations, avec un nombre  $CFL = 10^4$ , la turbulence étant prise en compte à travers un modèle de BALDWIN-LOMAX ; nous noterons « SPTC-SM-BL » ;
- un calcul mené avec la maquette numérique utilise également une modélisation de BALDWIN-LOMAX ; nous noterons « ROE-MUSCL-BL » ;
- un calcul avec FLUENT où l'on a choisi de modéliser la turbulence à l'aide d'une équation de transport de SPALART-ALLMARAS, aucun modèle algébrique n'étant plus désormais disponible dans ce logiciel ; nous noterons « décentré-SA ».

Pour les calculs menés sur le maillage n° 1, la maquette maquette servira de point de référence dans la mesure où le schéma ROE-MUSCL utilisé ne fait pas appel à une viscosité artificielle. Les comparaisons des calculs effectués avec ce maillage se font *a priori* avec le même modèle de turbulence, même si nous verrons ultérieurement qu'il existe en fait des différences d'implémentation du modèle de BALDWIN-LOMAX entre AEROLOG et la maquette numérique. Les calculs menés dans le maillage n° 2 permettent, par comparaison avec les résultats obtenus dans le maillage n° 1, d'évaluer les effets du raffinement de maillage sur les résultats fournis par les deux schémas mis en œuvre dans AEROLOG. Pour les calculs sur

ce maillage n° 2, c'est le logiciel FLUENT qui sert de point de référence, dans la mesure où il s'appuie lui-aussi sur un schéma décentré avec reconstruction qui ne nécessite pas l'usage d'une viscosité artificielle. La comparaison ne peut malheureusement pas se faire en conservant le même modèle de turbulence mais les modèles de SPALART-ALLMARAS et de BALDWIN-LOMAX fournissent des solutions très proches pour un écoulement essentiellement attaché comme celui qui est considéré ici. Précisons enfin que certains calculs, tels qu'un calcul avec FLUENT sur le maillage n° 1 ou avec la maquette numérique sur le maillage n° 2, n'ont pas été menés ; en effet, les maillages n° 1 et 2 ayant été générés à l'aide d'outils différents, de telles simulations auraient nécessité des conversions de format de maillage, ce qu'il n'a pas été possible de mener à bien dans le cadre du déroulement de cette thèse.

Les figures 3.4 et 3.5 présentent l'évolution des résidus au cours des calculs menés avec AEROLOG. Dans tous les cas, les résidus perdent au moins quatre ordres de grandeur (c'est-à-dire qu'ils sont divisés par  $10^4$ ) et on distingue dès à présent que le schéma à pas de temps caractéristique converge plus rapidement – en terme d'itérations – que le schéma de LAX-WENDROFF. Plus précisément, cette efficacité supérieure est perceptible lors des premiers milliers d'itérations et est directement liée aux propriétés d'amortissement de l'erreur du schéma à pas de temps caractéristique ; lorsque la solution est déjà bien formée, la viscosité artificielle joue un rôle déterminant dans l'amortissement de l'erreur et agit de façon analogue pour les deux schémas utilisés.

Les figures 3.6, 3.7(a) et 3.7(b) présentent les évolutions des coefficients aérodynamiques globaux au cours des calculs différents calculs et le tableau 3.1 récapitule les valeurs de ces coefficients à convergence des calculs. La dispersion des résultats pour le calcul du coefficient de portance reste modérée, de l'ordre de 5 %. La valeur de ce coefficient dans le maillage le plus fin se situe aux alentours de 0,29, un peu au-dessus avec le modèle de turbulence de BALDWIN-LOMAX et un peu en-dessous avec le modèle de SPALLART-ALLMARAS. Dans le maillage n° 1 cette valeur est sous-estimée par AEROLOG, de 5 % environ. Il est intéressant de noter que le schéma à pas de temps caractéristique et le schéma de LAX-WENDROFF mis en œuvre dans AEROLOG fournissent les mêmes valeurs à moins de 0,2 % près, quel que soit le maillage utilisé. La dispersion des résultats sur le coefficient de traînée est plus importante : de l'ordre de 14 % sur les 6 simulations effectuées, et de 10 % si l'on raisonne sur les calculs utilisant le même modèle de turbulence, c'est-à-dire en ne prenant pas en compte les résultats de FLUENT obtenus avec le modèle de SPALART-ALLMARAS. Pour le schéma de LAX-WENDROFF, on constate, entre les résultats des calculs sur les maillages n° 1 et 2, une différence de 9 % environ des valeurs du coefficient de traînée, soit presque le double de la variation observée sur le coefficient de portance, ce qui s'explique par la plus grande sensibilité du coefficient de traînée aux effets visqueux alors que le coefficient de portance dépend essentiellement de la distribution du coefficient de pression à la paroi. On peut remarquer la très faible sensibilité vis-à-vis du maillage de la prédiction de traînée par le schéma à pas de temps caractéristique.

Du point de vue de la précision des résultats obtenus, sur la base des coefficients aérodynamiques globaux, on peut apprécier les performances très satisfaisantes du schéma à pas de temps caractéristique introduit dans AEROLOG. Rappelons que les résultats présentés correspondent aux premières simulations d'écoulements turbulents effectuées à l'aide de cette stratégie de discrétisation, puisque les travaux [22] s'appuient sur une formulation multi-prédicteurs tandis que [16], qui utilise bien la même version mono-prédicteur, se limite à des calculs non visqueux. Cependant, notre démarche a pour but de mettre en œuvre cette nouvelle stratégie de discrétisation pour augmenter l'efficacité du logiciel sans en dégrader la précision. Nous sommes désormais renseignés au sujet de la préservation de la précision (globale en tout cas) ; il nous reste à analyser les résultats obtenus en termes d'efficacité.

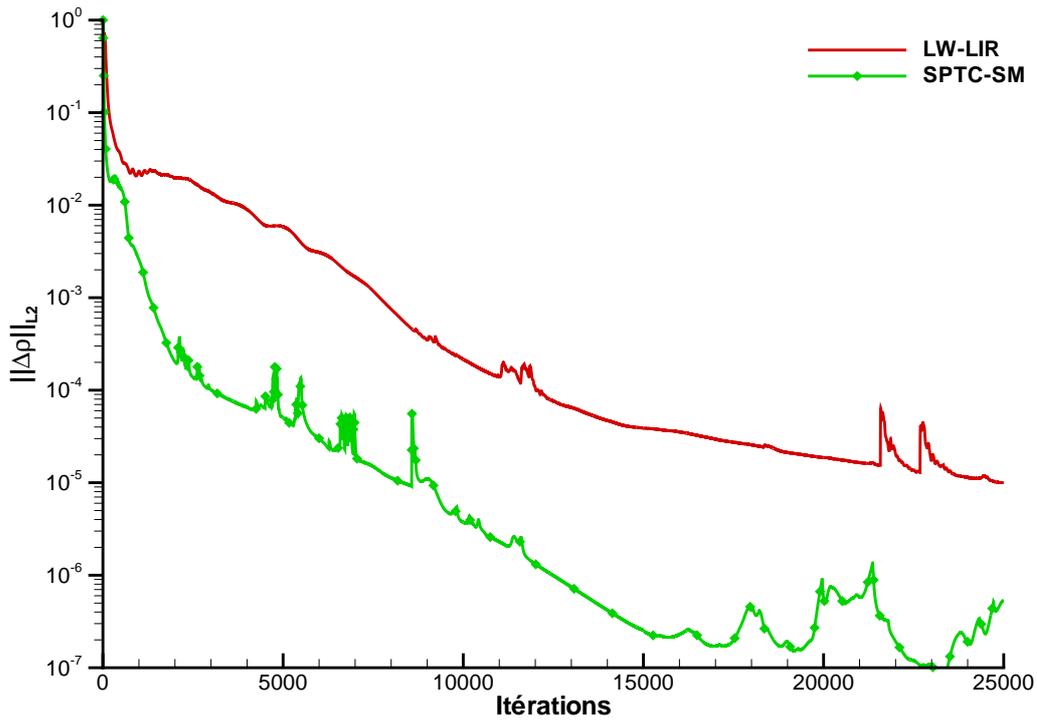


FIG. 3.4 – Évolution de la norme L2 du résidu de l'équation de conservation de la masse en fonction des itérations pour les calculs d'écoulements autour d'un profil NACA 0012 à 1,5° d'incidence menés avec AEROLOG sur le maillage n° 1.

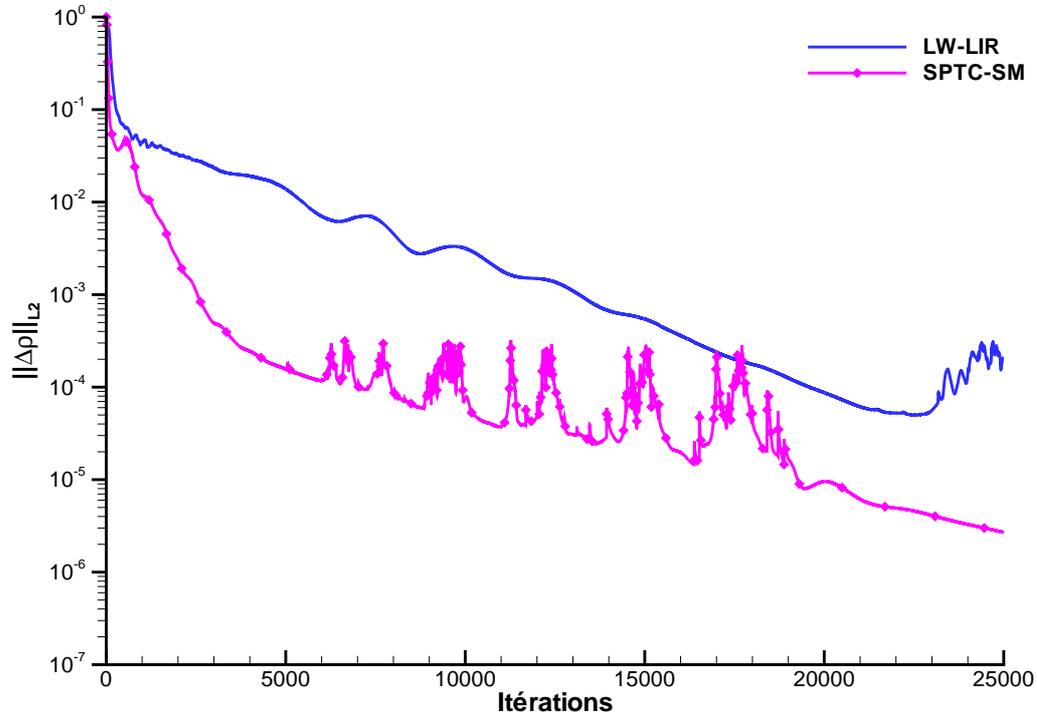


FIG. 3.5 – Évolution de la norme L2 du résidu de l'équation de conservation de la masse en fonction des itérations pour les calculs d'écoulements autour d'un profil NACA 0012 à 1,5° d'incidence menés avec AEROLOG sur le maillage n° 2.

Logiciel	Maillage	Schéma	Coef. de traînée	Coef. de portance
AEROLOG	maillage n° 1	LW-LIR-BL	0,0186	0,2774
AEROLOG	maillage n° 1	SPTC-SM-BL	0,0204	0,2773
maquette	maillage n° 1	ROE-MUSCL-BL	0,0189	0,2924
AEROLOG	maillage n° 2	LW-LIR-BL	0,0203	0,2919
AEROLOG	maillage n° 2	SPTC-SM-BL	0,0205	0,2915
FLUENT	maillage n° 2	décentré-SA	0,0212	0,2890

TAB. 3.1 – Valeurs des coefficients de traînée et de portance obtenues pour les différentes simulations d'écoulements stationnaires autour d'un profil NACA 0012 à  $1,5^\circ$  d'incidence.

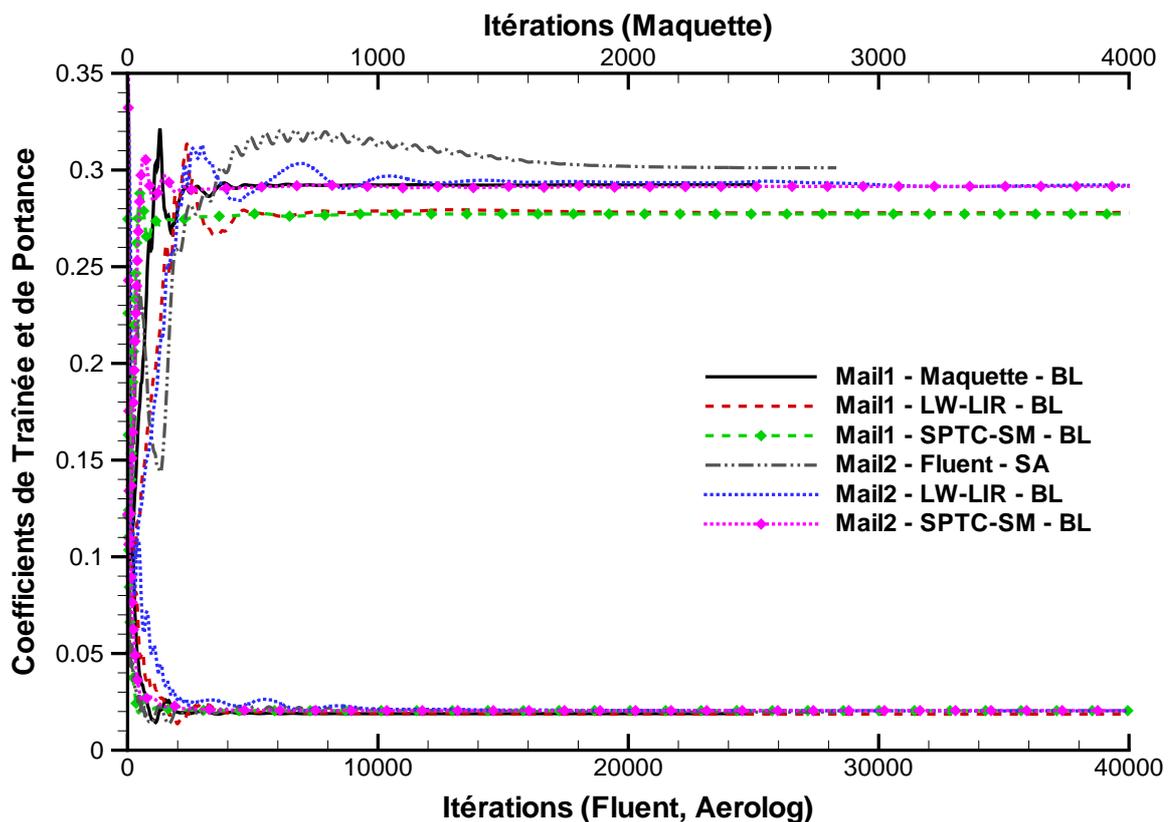
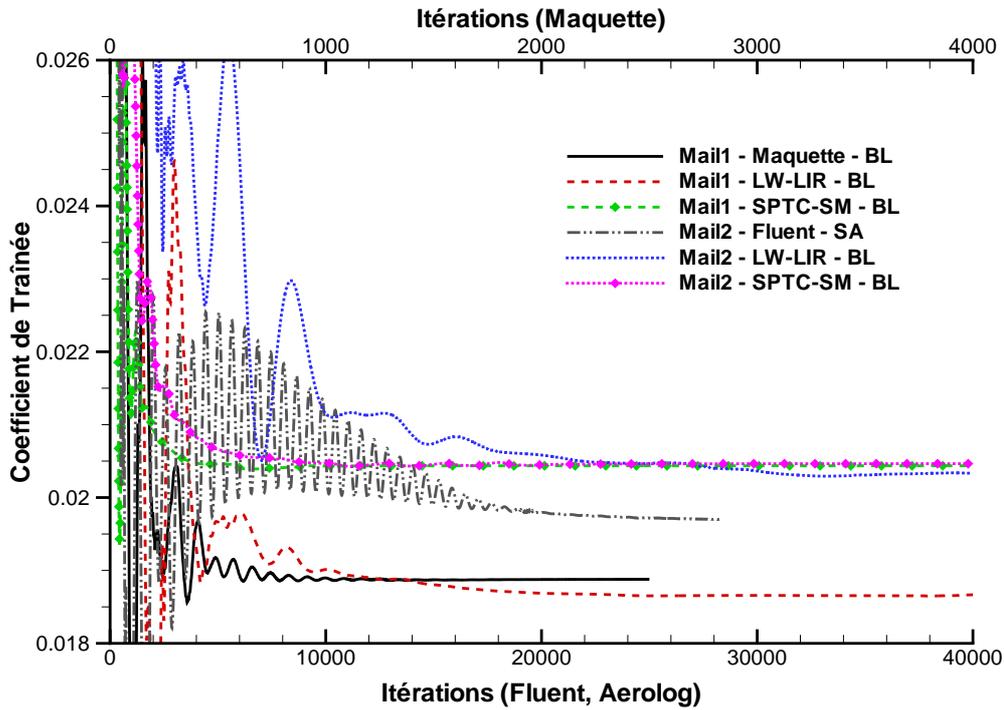
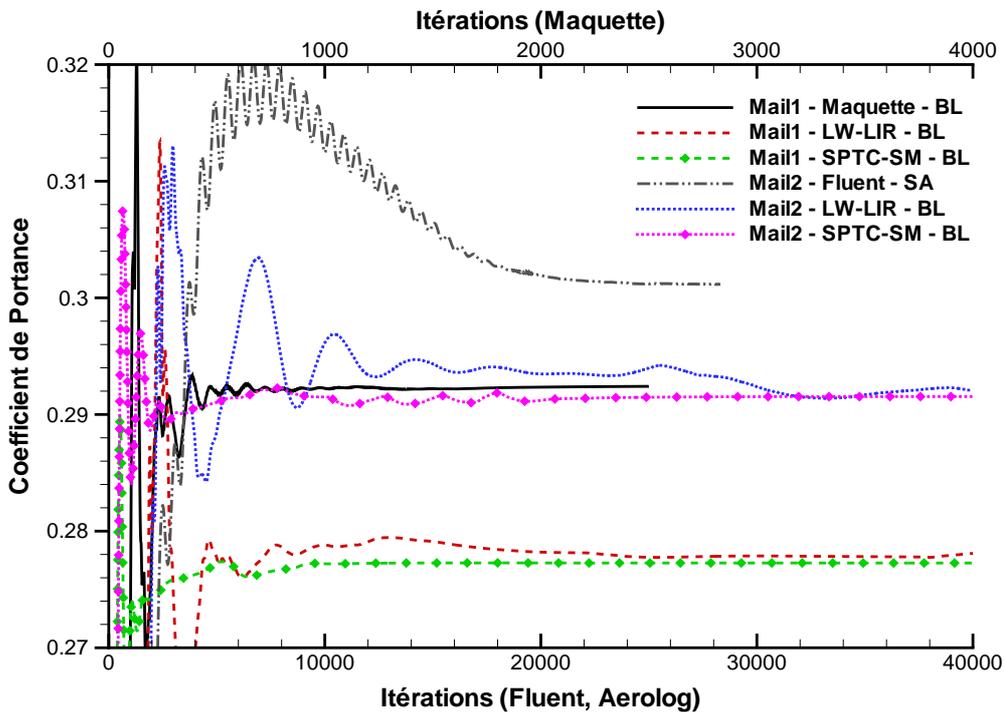


FIG. 3.6 – Évolutions des coefficients aérodynamiques globaux en fonction des itérations au cours des différents calculs d'écoulements autour d'un profil NACA 0012 à  $1,5^\circ$  d'incidence. On notera que l'échelle utilisée pour représenter l'évolution des itérations au cours des calculs avec la maquette numérique est différente de celle utilisée avec AEROLOG et FLUENT.



(a) Coefficients de traînée



(b) Coefficients de portance

FIG. 3.7 – Détail des évolutions des coefficients de traînée (a) et de portance (b) en fonction des itérations au cours des calculs d'écoulements autour d'un profil NACA 0012 à  $1,5^\circ$  d'incidence. On notera que l'échelle utilisée pour représenter l'évolution des itérations au cours des calculs avec la maquette numérique est différente de celle utilisée avec AEROLOG et FLUENT.

Les temps de calcul sont récapitulés dans le tableau 3.2. Les bonnes propriétés de convergence du schéma à pas de temps caractéristique énoncées plus haut doivent maintenant être tempérées par un coût par point et par itération plus élevé. En effet, le coût du schéma à pas de temps caractéristique est trois fois plus élevé que celui du schéma de LAX-WENDOFF (avec la phase implicite qui leur est associée). Il convient maintenant de quantifier le gain qu'apporte le schéma à pas de temps caractéristique vis-à-vis du nombre d'itérations nécessaires pour obtenir un niveau de convergence acceptable. Ceci pourrait être fait à partir des courbes d'évolution des résidus moyens ou maximaux. Cependant l'expérience atteste la difficulté à relier avec précision l'évolution des résidus et celle de la solution du calcul. C'est pour cette raison que nous allons déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une solution « convergée » à partir de l'évolution du coefficient de portance. Nous adopterons le critère suivant :

$$\forall n \geq n_\epsilon, \quad |C_L - \overline{C_L}| \leq \epsilon \times \overline{C_L}$$

où :  $\overline{C_L}$  symbolise la valeur du coefficient de portance obtenue à la fin du calcul ;  
 $n$  est le numéro de l'itération et  $C_L$  le coefficient de portance à cette itération ;  
 $n_\epsilon$  est le numéro de l'itération cherché (cf. figure 3.8).

Pour  $\epsilon = 10^{-3}$  (resp.  $\epsilon = 10^{-4}$ ), on obtient une évaluation du coefficient de portance avec trois (resp. quatre) chiffres significatifs. Ce critère est utilisé ici *a posteriori* puisqu'il utilise la valeur  $\overline{C_L}$  du coefficient de portance en fin de calcul et ne pourrait donc pas être utilisé comme un test permettant d'arrêter le calcul. Ce type de critère est loin d'être le meilleur, il possède seulement l'avantage d'être simple, même s'il ne donne pas pleinement satisfaction dans la mesure où, entre autres, on ne prend pas en compte l'évolution au cours des itérations précédant l'itération  $n_\epsilon$ . On pourrait par exemple envisager de calculer l'écart-type sur un intervalle de quelques centaines ou milliers d'itérations et lui fixer une valeur maximale à ne pas dépasser.

Le tableau 3.3 récapitule le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre ce critère pour  $\epsilon = 10^{-3}$  et  $\epsilon = 10^{-4}$ . On peut donc ainsi vérifier que sur le maillage n° 1, le coût intrinsèque d'une itération est 2,6 fois plus élevé avec le schéma à pas de temps caractéristique qu'avec le schéma de LAX-WENDROFF, mais avec ce dernier schéma il faut 6,3 ou 7 fois plus d'itérations (selon le paramètre  $\epsilon$  choisi) pour arriver au même niveau de convergence sur la valeur du coefficient de portance. Finalement, sur ce maillage, on calcule un gain de 2,4 à 2,7 en faveur du schéma à pas de temps caractéristique, ce qui est assez satisfaisant compte tenu des objectifs fixés. Sur le maillage n° 2, un facteur 3,5 existe entre les coûts intrinsèques des schémas à pas de temps caractéristique et de LAX-WENDROFF ; le schéma à pas de temps caractéristique nécessite 2,3 ou 2,6 fois moins d'itérations (selon le choix de  $\epsilon$ ) que le schéma de LAX-WENDROFF pour obtenir le même niveau de convergence sur la portance. Finalement le gain est de 1,5 à 1,3 en faveur du schéma de LAX-WENDROFF, ce qui va à l'encontre du résultat recherché.

La différence entre les rapports des coûts intrinsèques des deux schémas sur chaque maillage est liée à l'organisation du calcul par le programme exécutable et à la machine de calcul ; cette valeur varie donc d'un maillage à l'autre et peut également varier d'un calcul à l'autre, en fonction de l'occupation de la mémoire, notamment par d'autres processus utilisant les autres processeurs du nœud de calcul. Cependant, ce rapport reste de l'ordre de 3. Par ailleurs, le maillage n° 2 est plus représentatif des maillages utilisés que le maillage n° 1, notamment en terme de raffinement des mailles et de leur répartition. En observant les courbes d'évolution des coefficients aérodynamiques globaux (cf. figures 3.7(a) et 3.7(b)), nous pouvons nous apercevoir que les évolutions calculées par les deux schémas sont différentes, la convergence des coefficients calculés par le schéma à pas de temps caractéristique étant beaucoup plus

monotone que celle calculée par le schéma de LAX-WENDROFF. Nous sommes donc en présence de deux cas apportant des conclusions contradictoires ; cependant, le nouveau schéma devrait être plus efficace que le précédent dans toutes les situations. Nous pouvons donc conclure, en nous appuyant également sur l’expérience acquise avec l’utilisation du schéma à pas de temps caractéristique dans AEROLOG – dont la simulation présentée ici est un élément représentatif – que celui-ci n’atteint pas un niveau de performance le rendant compétitif vis-à-vis du schéma de LAX-WENDROFF. Le manque de compétitivité du schéma à pas de temps caractéristique

Maillage	Schéma	Temps de calcul
maillage n° 1	LW-LIR	14,10 $\mu$ s/pt/it
maillage n° 1	SPTC-SM	36,30 $\mu$ s/pt/it
maillage n° 2	LW-LIR	9,74 $\mu$ s/pt/it
maillage n° 2	SPTC-SM	34,08 $\mu$ s/pt/it

TAB. 3.2 – Temps de calcul pour les différentes simulations d’écoulements stationnaires autour d’un profil NACA 0012 à 1,5° d’incidence avec AEROLOG – les calculs ont été effectués avec un processeur AMD Opteron 246, 2 GHz, 1 Mo de mémoire cache, 7 Go de mémoire partagée entre les deux processeurs de chaque nœud.

Maillage	Schéma	Itération $n_\epsilon$	
		$\epsilon = 10^{-3}$	$\epsilon = 10^{-4}$
maillage n° 1	LW-LIR	55 387	83 042
maillage n° 1	SPTC-SM	8820	11 827
maillage n° 2	LW-LIR	45 837	72 344
maillage n° 2	SPTC-SM	20 176	27 940

TAB. 3.3 – Nombre d’itérations nécessaires pour atteindre le critère  $|C_L - \overline{C_L}| \leq \epsilon \times \overline{C_L}$  pour les différentes simulations d’écoulements stationnaires autour d’un profil NACA 0012 à 1,5° d’incidence avec AEROLOG.

qui vient d’être constaté peut avoir deux origines :

- l’efficacité intrinsèque d’une itération effectuée avec ce schéma, bien qu’elle soit supérieure à celle du schéma de LAX-WENDROFF (cf. figures 3.4 et 3.5), est encore insuffisante ;
- le coût intrinsèque de la méthode est trop élevé.

Malgré ce premier constat d’échec relatif, analysons tout de même de façon un peu plus poussée la précision des solutions obtenues. Les figures 3.9 et 3.10 présentent les champs de nombre de MACH calculés par le schéma de LAX-WENDROFF et le schéma à pas de temps caractéristique pour les deux maillages utilisés. On peut constater que les lignes d’isovaleurs de nombre de MACH prédites par les deux schémas sont très proches et que le schéma à pas de temps caractéristique supprime les oscillations précédant et suivant immédiatement le choc.

Pour pouvoir quantifier avec plus de précision les écarts entre les solutions obtenues par les différents logiciels utilisés, nous nous sommes intéressés aux grandeurs pariétales, coefficient de pression et coefficient de frottement, figures 3.11 et 3.12. Sur la figure 3.11(b) on note, pour le calcul effectué avec la maquette numérique, que la valeur du coefficient de frottement diminue puis réaugmente entre 0,5 % et 4 % de corde ; ceci est dû au phénomène de transition de l’écoulement vers un régime turbulent qui est simulé dans la maquette alors que l’écoulement est directement imposé totalement turbulent pour les simulations effectuées avec AEROLOG et

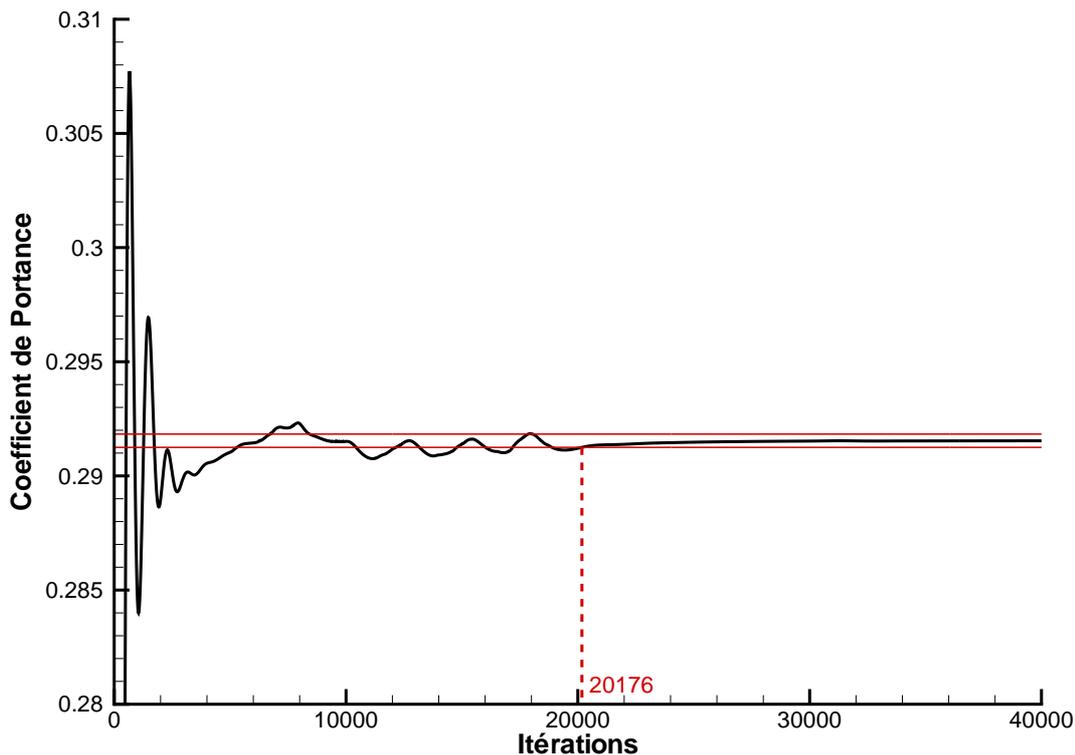
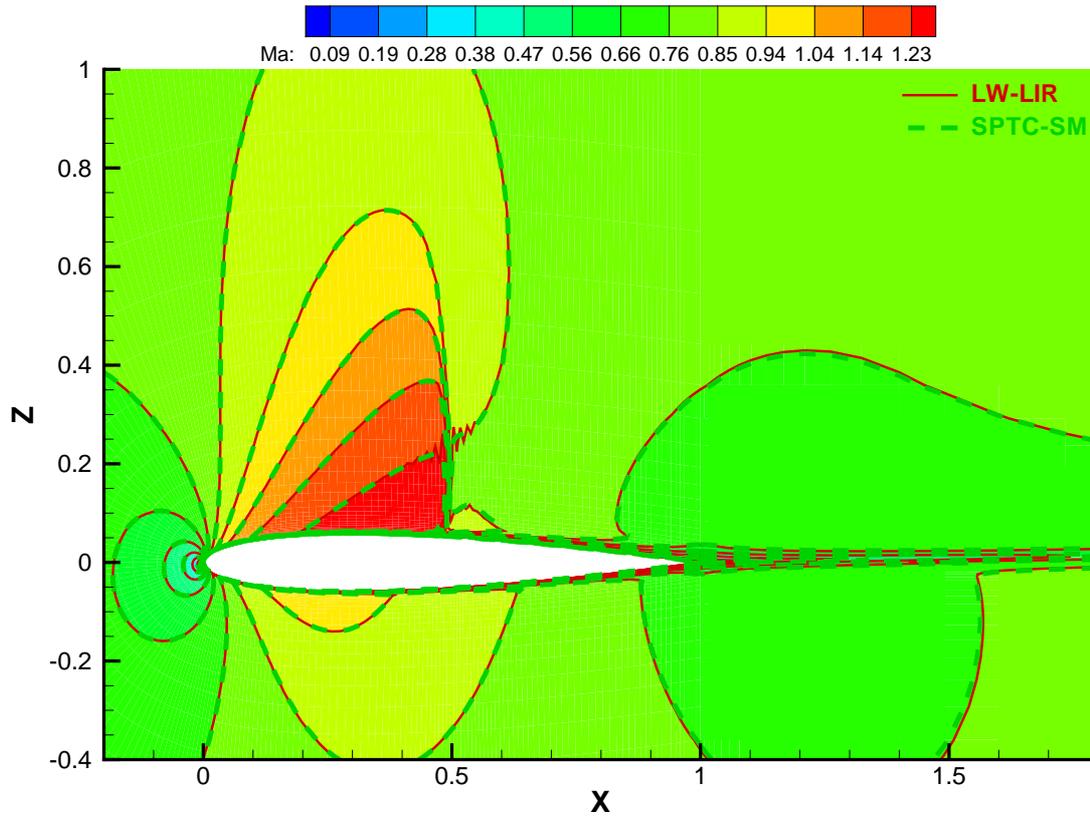


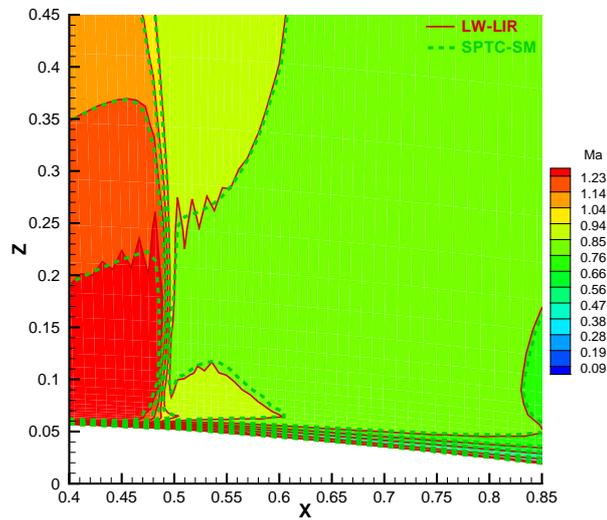
FIG. 3.8 – Exemple d'application du critère  $|C_L - \overline{C_L}| \leq \epsilon \times \overline{C_L}$ .

FLUENT. De plus, au bord de fuite du profil, le coefficient de frottement est relativement mal calculé par AEROLOG avec un dépassement important qui semble dû à la présence d'un bord de fuite pincé qui constitue une discontinuité de la normale entre l'extrados et l'intrados.

Les courbes 3.11(a) et 3.12(a) représentant le coefficient de pression attestent que le schéma à pas de temps caractéristique fournit la même précision que le schéma de LAX-WENDROFF. En comparant avec les résultats obtenus avec la maquette et FLUENT, spécialement au niveau du choc, on retrouve le caractère dissipatif des schémas de la classe LAX-WENDROFF qui est en particulier dû à l'utilisation d'une viscosité artificielle. En observant les courbes représentant le coefficient de frottement, on confirme l'hypothèse, qui motivait ce calcul, d'un écoulement restant attaché à la paroi ; plus précisément, il existe bien une zone décollée mais son étendue est extrêmement restreinte (quelques centièmes de corde), après le choc. Le choc calculé par AEROLOG apparaît également légèrement dissipé. Sur le maillage n° 2 (figure 3.12(b)) les différents calculs semblent prédire le même comportement ; sur le maillage n° 1 en revanche, les valeurs du coefficient de frottement calculées par le logiciel maquette, le schéma de LAX-WENDROFF dans AEROLOG et le schéma à pas de temps caractéristique dans AEROLOG sont différentes les unes des autres, en particulier à l'intrados et en amont du choc à l'extrados. Néanmoins, malgré ces défauts, la position du choc est correctement prédite. Dans l'ensemble, l'écoulement semble donc correctement décrit, avec un maillage suffisamment fin et le schéma à pas de temps caractéristique fournit une solution aussi précise que le schéma de LAX-WENDROFF sur ce cas d'écoulement stationnaire attaché.

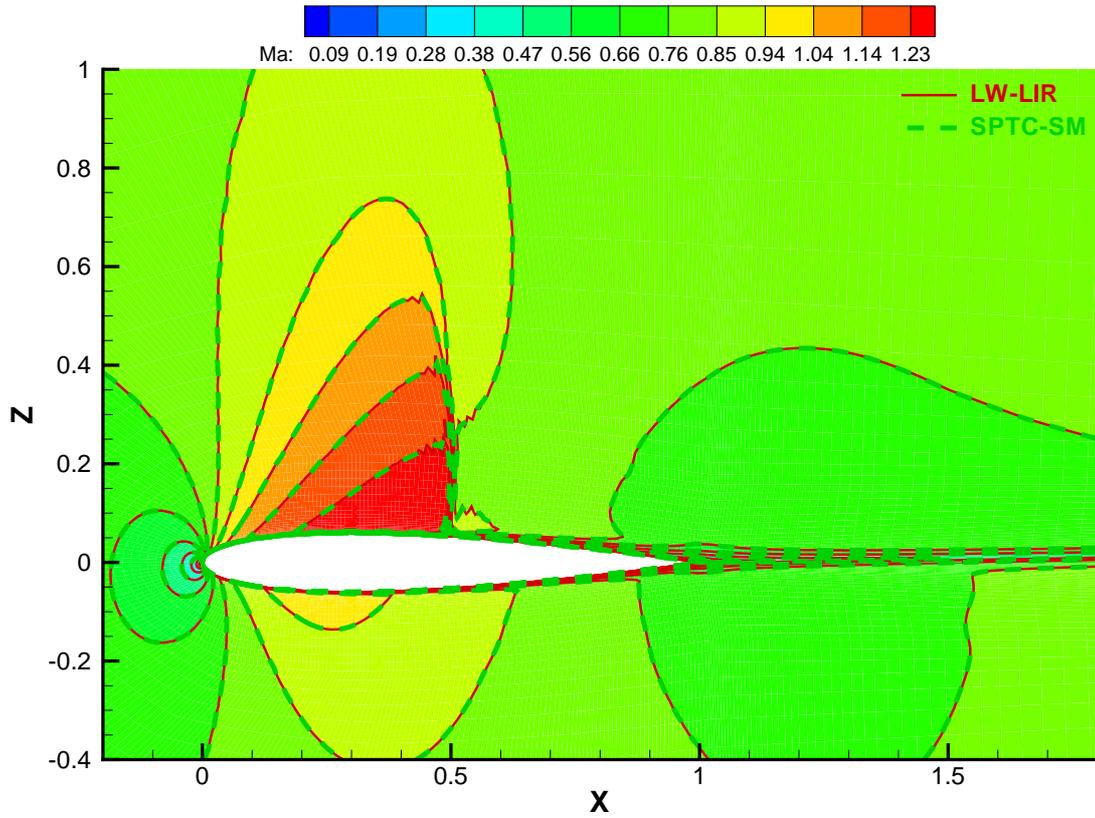


(a) Vue générale du profil.

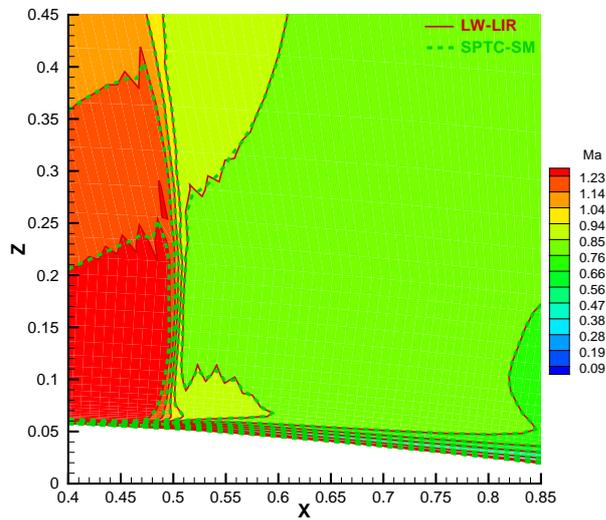


(b) Détail du choc.

FIG. 3.9 – Plages et lignes d'isovaleurs du nombre de MACH pour les calculs d'écoulements stationnaires autour d'un profil NACA 0012 à  $1,5^\circ$  d'incidence sur le maillage n° 1 avec AEROLOG – comparaison du schéma de LAX-WENDROFF et du schéma à pas de temps caractéristique.

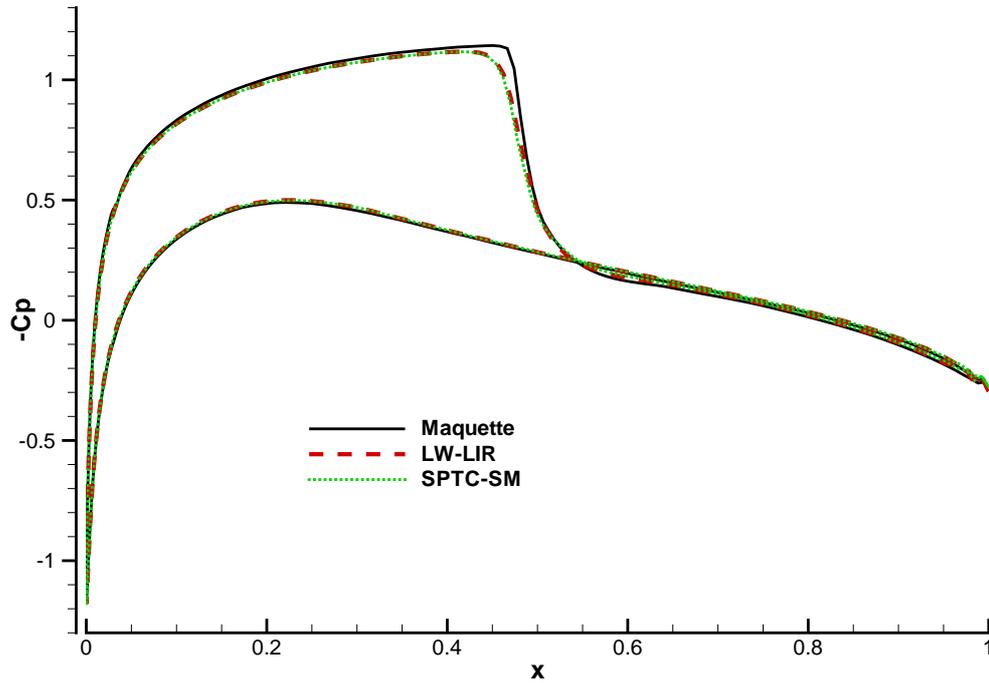


(a) Vue générale du profil.

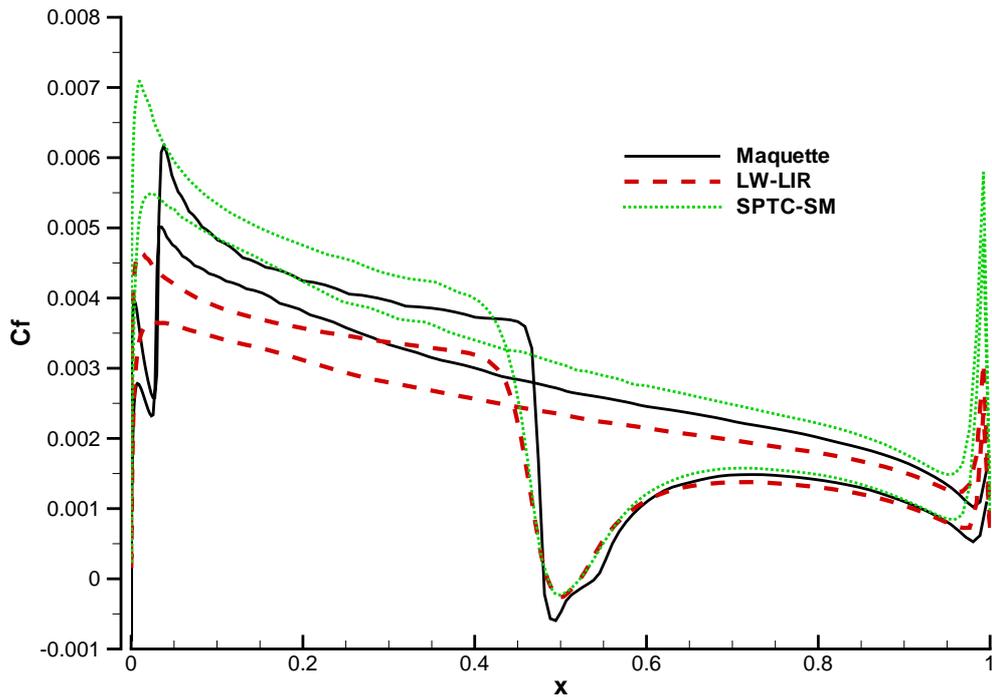


(b) Détail du choc.

FIG. 3.10 – Plages et lignes d'isovaleurs du nombre de MACH pour les calculs d'écoulements stationnaires autour d'un profil NACA 0012 à  $1,5^\circ$  d'incidence sur le maillage n° 2 avec AEROLOG – comparaison du schéma de LAX-WENDROFF et du schéma à pas de temps caractéristique.

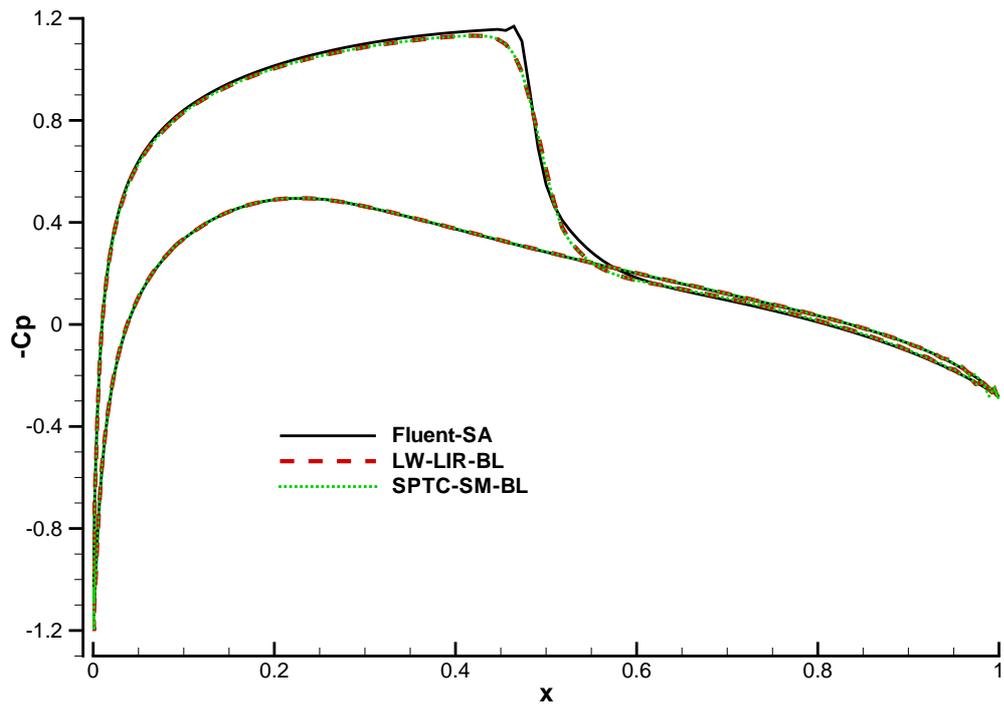


(a) Coefficient de pression.

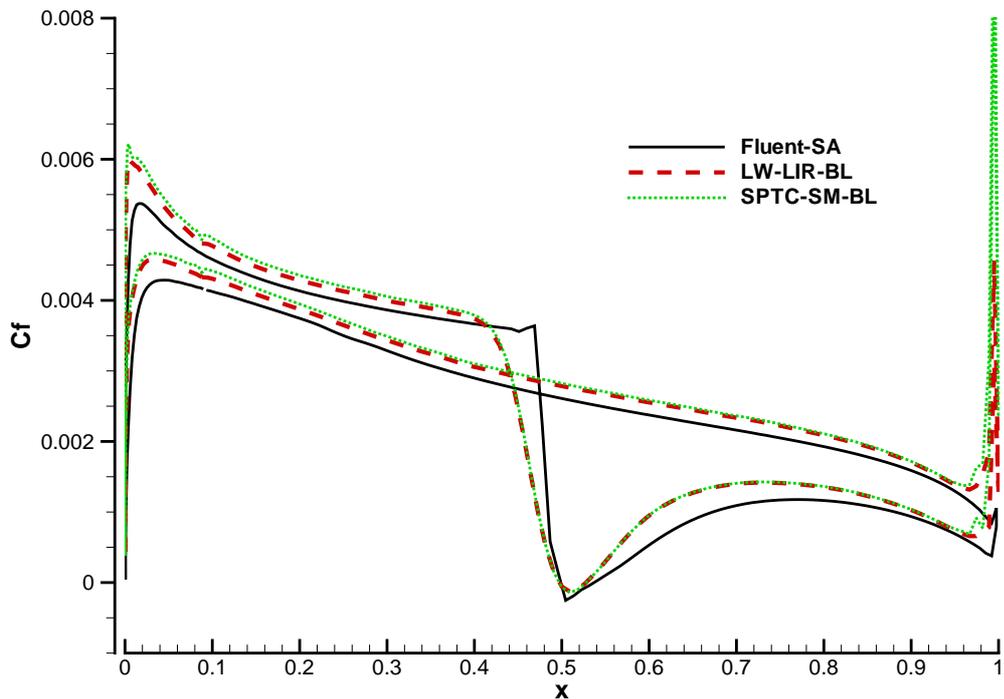


(b) Coefficient de frottement.

FIG. 3.11 – Répartition des coefficients pariétaux pour les calculs d'écoulements stationnaires autour d'un profil NACA 0012 à  $1,5^\circ$  d'incidence sur le maillage n° 1 – comparaison entre la maquette, AEROLOG avec le schéma de LAX-WENDROFF et AEROLOG avec le schéma à pas de temps caractéristique.



(a) Coefficient de pression.



(b) Coefficient de frottement.

FIG. 3.12 – Répartition des coefficients pariétaux pour les calculs d'écoulements stationnaires autour d'un profil NACA 0012 à  $1,5^\circ$  d'incidence sur le maillage n° 2 – comparaison entre FLUENT, AEROLOG avec le schéma de LAX-WENDROFF et AEROLOG avec le schéma à pas de temps caractéristique.

## 3.2 Écoulement tridimensionnel autour d'une gouverne générique

Le second cas de validation présenté ici est un calcul d'écoulement tridimensionnel autour d'une gouverne générique déjà étudiée chez MBDA. Après avoir ouvert la présentation de nos simulations sur une comparaison avec d'autres logiciels pour l'application bidimensionnelle précédente, nous revenons à présent à une validation que l'on pourrait qualifier de « relative », plus proche de nos préoccupations immédiates : notre but sur ce cas est simplement de vérifier en premier lieu que le schéma à pas de temps caractéristique, nouvellement implémenté, permet de retrouver une qualité de solution proche ou éventuellement supérieure à celle fournie par le schéma de LAX-WENDROFF disponible ; dans un second temps nous souhaitons bien sûr analyser le coût d'obtention de chacune de ces solutions.

La gouverne étudiée possède un profil bi-trapézoïdal à bord de fuite épais ; il y a un angle de flèche entre le bord d'attaque et la normale à la paroi, mais le bord de fuite est perpendiculaire à la paroi. Cette gouverne est montée sur une plaque de garde hexaédrique sur laquelle se développe donc une couche limite. La figure 3.13 montre le maillage en « O » autour de la gouverne ; ce maillage possède 136 points le long du profil (extrados et intrados), 49 points dans l'envergure de la gouverne et 65 points dans la direction normale à la paroi, soit en prenant en compte les raccords entre les dix domaines qui composent le maillage, un total de 520 674 points. Les dimensions approximatives de cette gouverne sont une corde à l'emplanture  $l \approx 0,3$  m, une épaisseur totale à l'emplanture  $e \approx 0,02$  m et une envergure  $E \approx 0,2$  m ; les frontières du maillage ont été placées à environ 4,3 m de la gouverne. Pour pouvoir exploiter correctement les résultats de calculs sur ce cas tridimensionnel, nous utiliserons, outre les parois de la gouverne et la plaque de garde, des plans de coupe à  $x = 2l/3$ ,  $x = 2l$  et  $y = E/2$  (cf. figure 3.14).

L'écoulement est calculé à une incidence de  $10^\circ$  et un nombre de MACH  $Ma = 0,7$  ; avec AEROLOG on a utilisé :

- le schéma de LAX-WENDROFF avec une phase implicite de lissage des résidus résolue par factorisation par direction, avec un nombre  $CFL = 1$ , la turbulence étant prise en compte à travers un modèle de BALDWIN-LOMAX ; nous noterons « LW-LIR » ;
- le schéma à pas de temps caractéristique avec une phase implicite sans matrice résolue par relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique par point avec 5 sous-itérations, avec un nombre  $CFL = 10^4$ , la turbulence étant prise en compte à travers un modèle de BALDWIN-LOMAX ; nous noterons « SPTC-SM ».

Les figures 3.15, 3.16 et 3.17 présentent l'évolution des coefficients aérodynamiques globaux au cours des calculs. Les évolutions sont très proches et en fin de calcul, on obtient un écart relatif de 0,12 % sur le coefficient d'effort normal et un écart absolu de  $6 \times 10^{-4}$  sur le coefficient d'effort axial entre les résultats donnés par les deux schémas. La figure 3.18 montre l'historique de convergence de ces deux calculs ; on voit clairement que le schéma à pas de temps caractéristique converge plus rapidement – en terme de nombre d'itérations – puisque après 5000 itérations de calcul, les résidus calculés par le schéma à pas de temps caractéristique sont inférieurs de deux ordres de grandeur à ceux calculés par le schéma de LAX-WENDROFF. On voit assez nettement sur ce cas tridimensionnel le surcroît d'efficacité qu'apporte ce nouveau schéma. Le tableau 3.4 récapitule les temps de calcul pour chacun des deux schémas utilisés ainsi que le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le critère de convergence du coefficient d'effort normal  $|C_N - \overline{C}_N| \leq \epsilon \times \overline{C}_N$  (cf. paragraphe précédent et figure 3.8 page 103) par lequel on tente de constituer un critère de convergence de la solution. Le schéma à pas de temps caractéristique nécessite 5,8 à 7,1 fois moins d'itérations (selon le

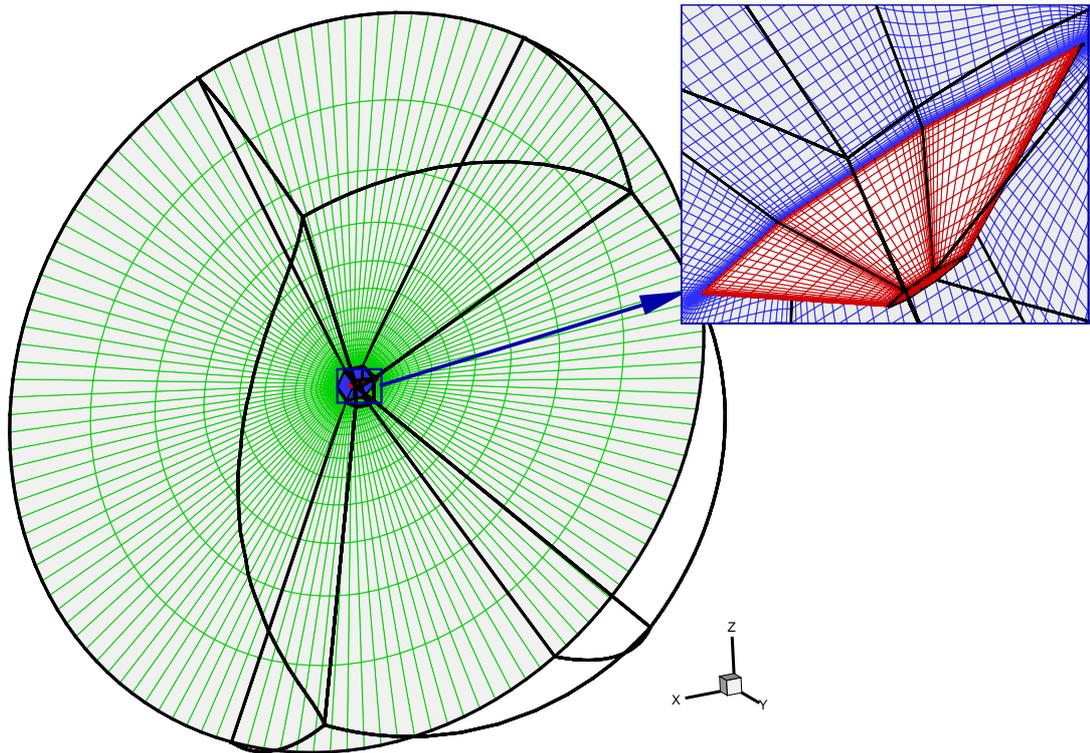


FIG. 3.13 – Maillage de la gouverne générique.

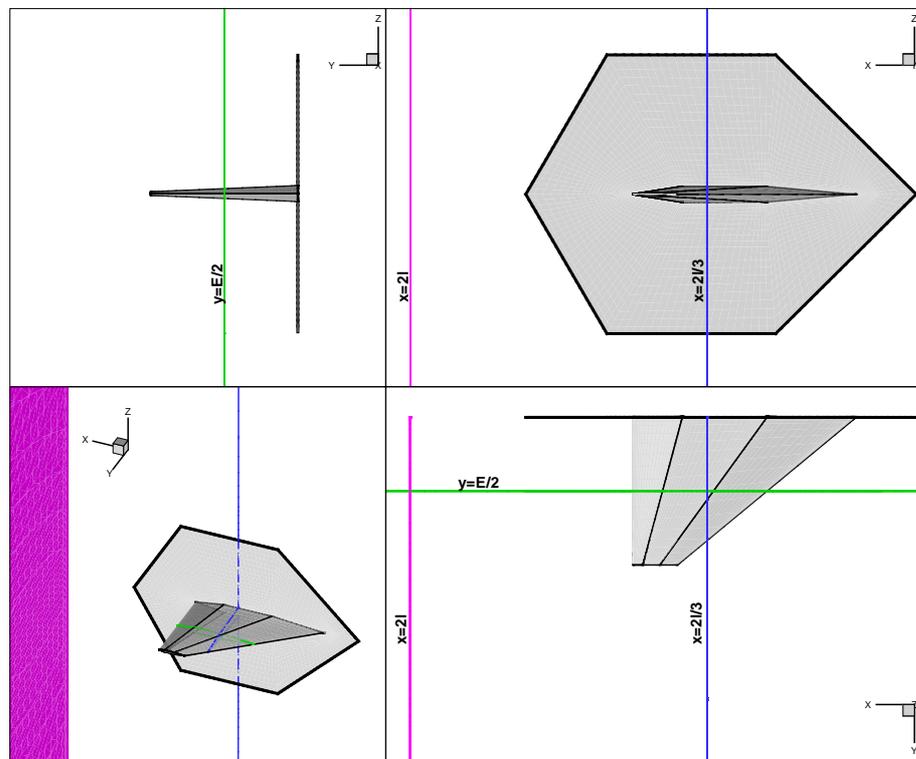


FIG. 3.14 – Vues en plan et en perspective de la gouverne générique montée sur plaque de garde avec les traces des plans de coupe.

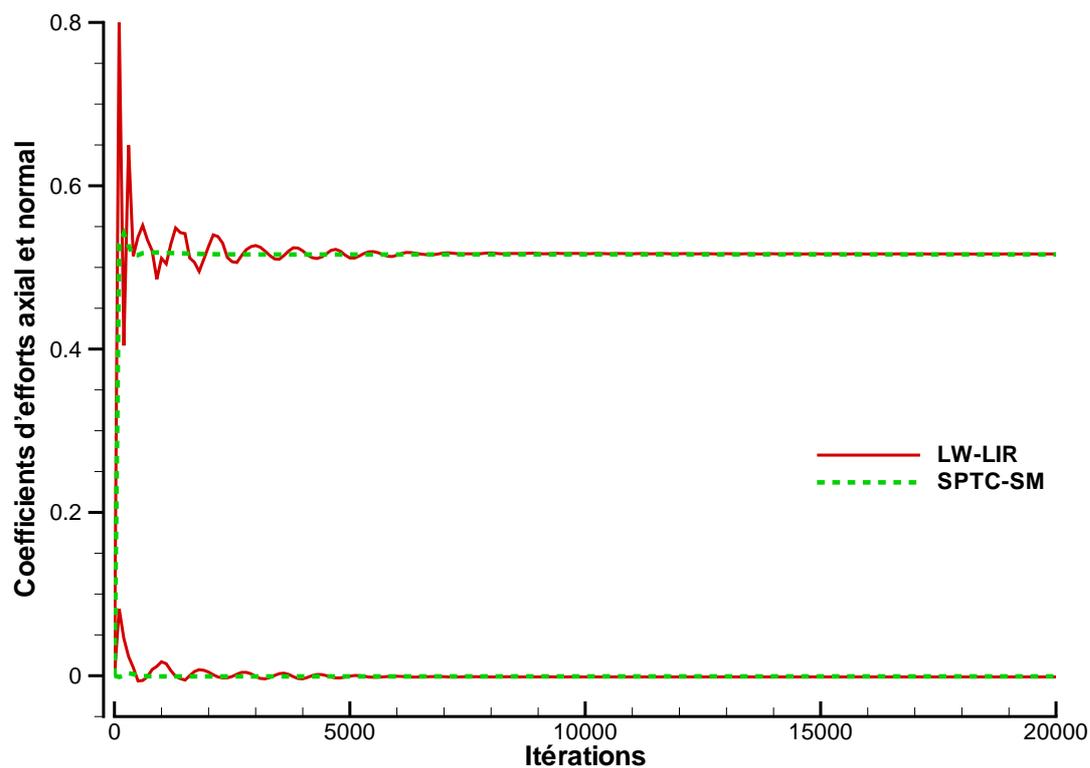


FIG. 3.15 – Évolution des coefficients d'effort axial et d'effort normal en fonction des itérations au cours des calculs d'écoulement autour de la gouverne générique à  $10^\circ$  d'incidence et  $Ma = 0,7$ .

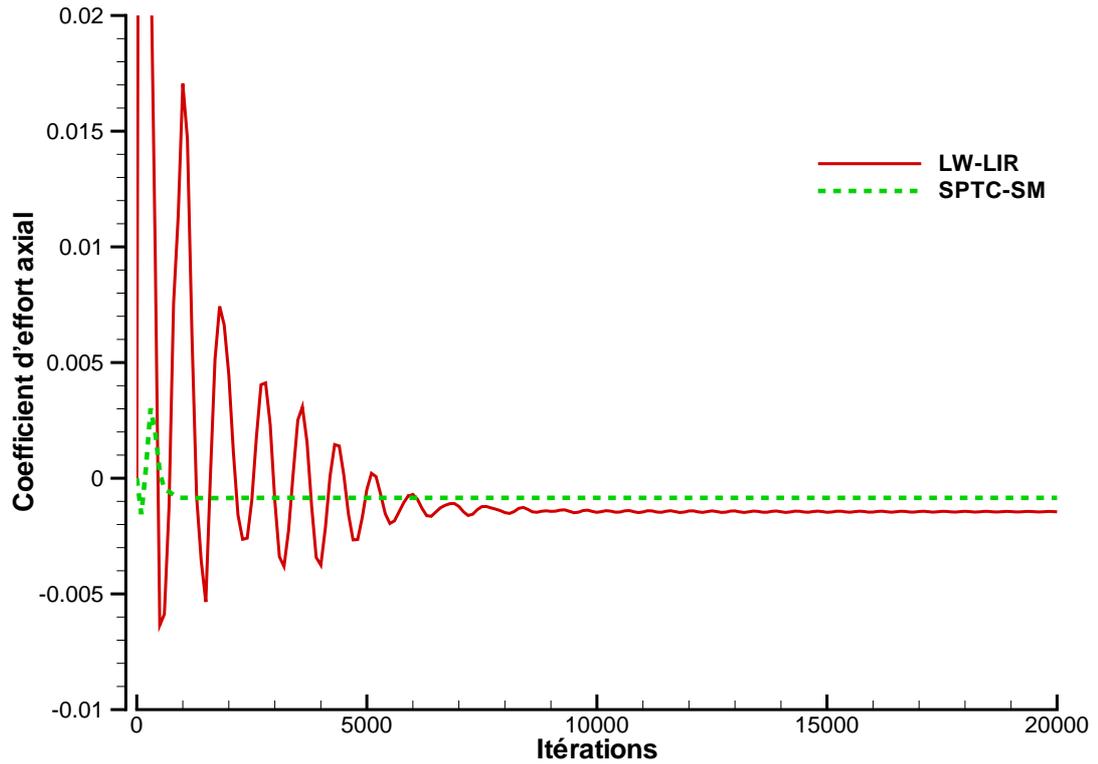


FIG. 3.16 – Évolution du coefficient d'effort axial en fonction des itérations au cours des calculs d'écoulement autour de la gouverne générique à  $10^\circ$  d'incidence et  $Ma = 0,7$ .

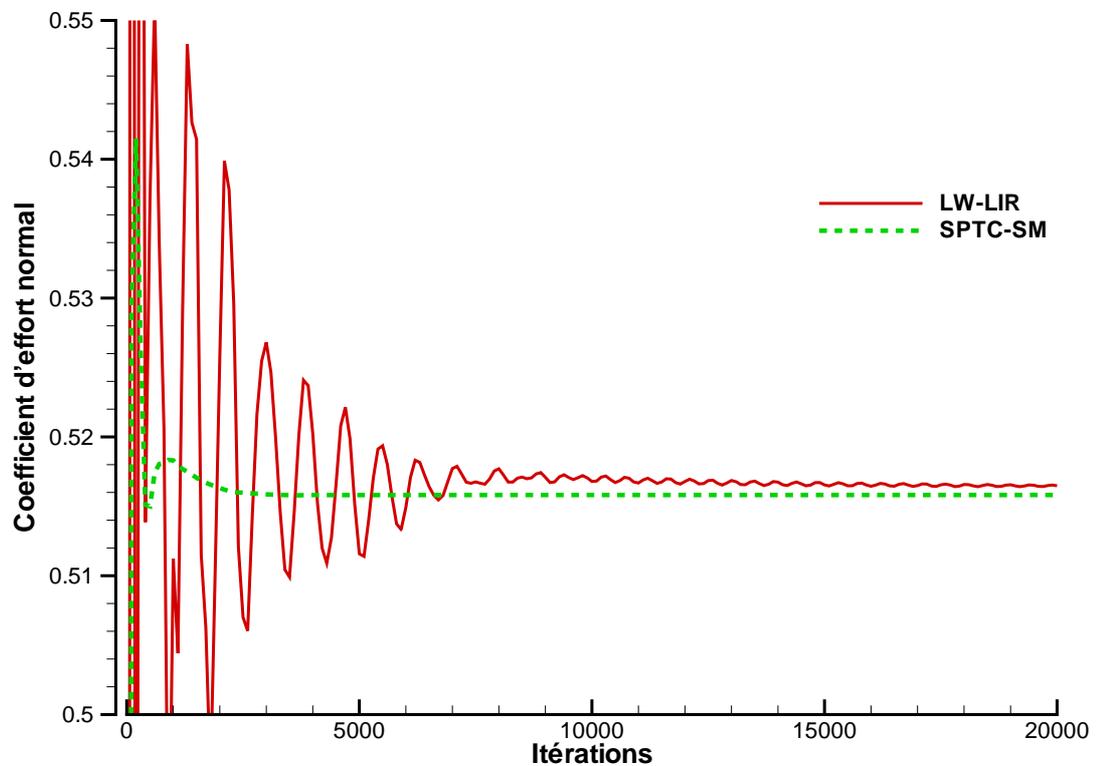


FIG. 3.17 – Évolution du coefficient d'effort normal en fonction des itérations au cours des calculs d'écoulement autour de la gouverne générique à  $10^\circ$  d'incidence et  $Ma = 0,7$ .

niveau de convergence choisi) que le schéma de LAX-WENDROFF pour obtenir une solution avec le même niveau de convergence, et ces itérations coûtent 4,5 fois plus de temps de calcul. Finalement, le gain est de 1,6 à 1,3 en faveur du schéma à pas de temps caractéristique.

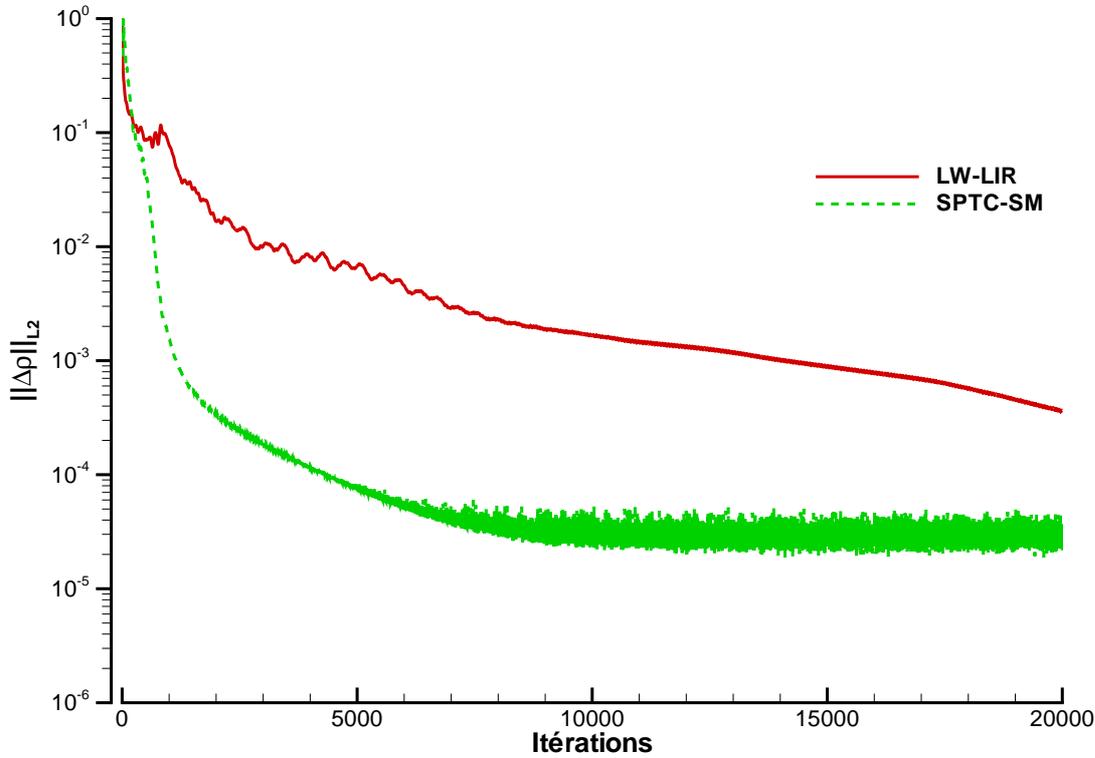


FIG. 3.18 – Évolution de la norme L2 du résidu de l'équation de conservation de la masse en fonction des itérations pour les calculs d'écoulements autour de la gouverne générique à  $10^\circ$  d'incidence et  $Ma = 0,7$  menés avec AEROLOG.

Schéma	Temps de calcul	Itération $n_\epsilon$	
		$\epsilon = 10^{-3}$	$\epsilon = 10^{-4}$
LW-LIR	7,75 $\mu$ s/pt/it	11 639	21 300
SPTC-SM	34,51 $\mu$ s/pt/it	1993	2980

TAB. 3.4 – Temps de calcul et nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le critère  $|C_N - \overline{C_N}| \leq 0,01\% \overline{C_N}$  pour les simulations d'écoulements stationnaires autour de la gouverne générique à  $10^\circ$  d'incidence et  $Ma = 0,7$  avec AEROLOG – les calculs ont été effectués avec un processeur Alpha EV68, 1,25 GHz, 16 Mo de mémoire cache, 8 Go de mémoire partagée entre les quatre processeurs de chaque nœud.

Les figures 3.19 à 3.23 attestent toutes de l'accord presque parfait qui existe entre la solution calculée par le schéma à pas de temps caractéristique et celle calculée par le schéma de LAX-WENDROFF. En particulier, on remarque que des grandeurs très sensibles telles que le coefficient de frottement (cf. figures 3.20(b) et 3.21(b)), sont calculées exactement de la même façon avec les deux schémas.

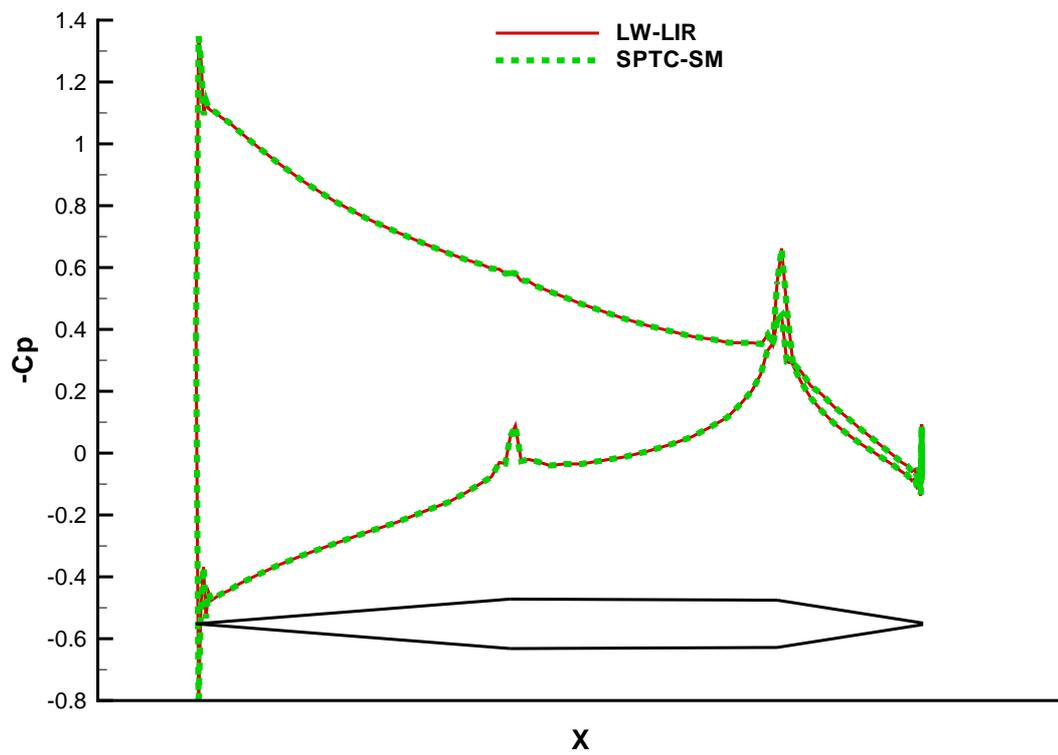
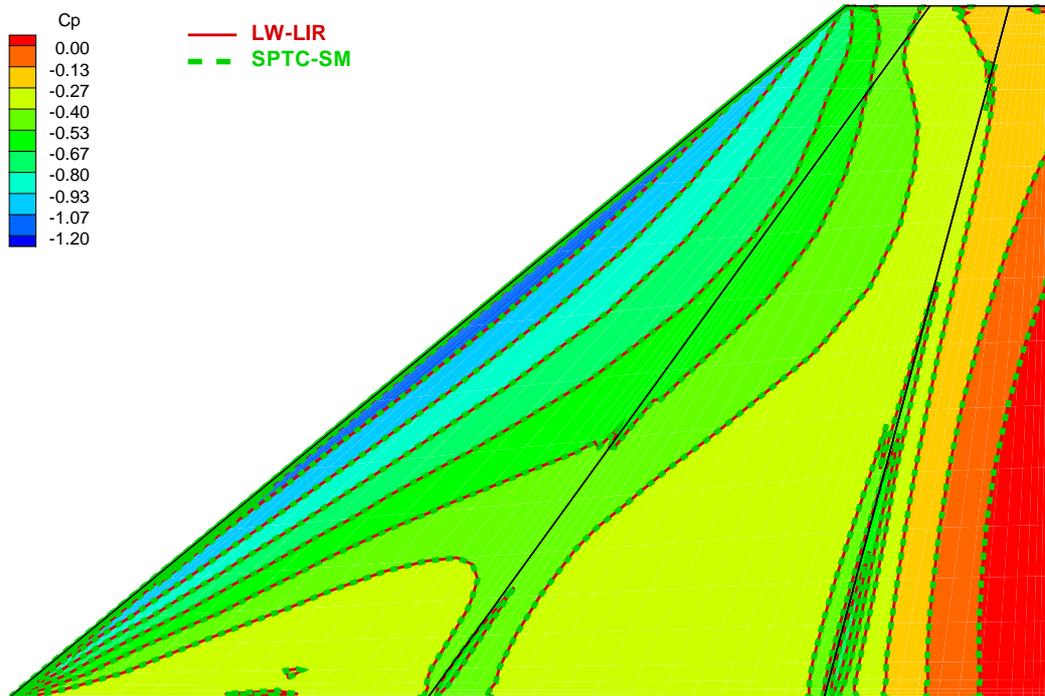
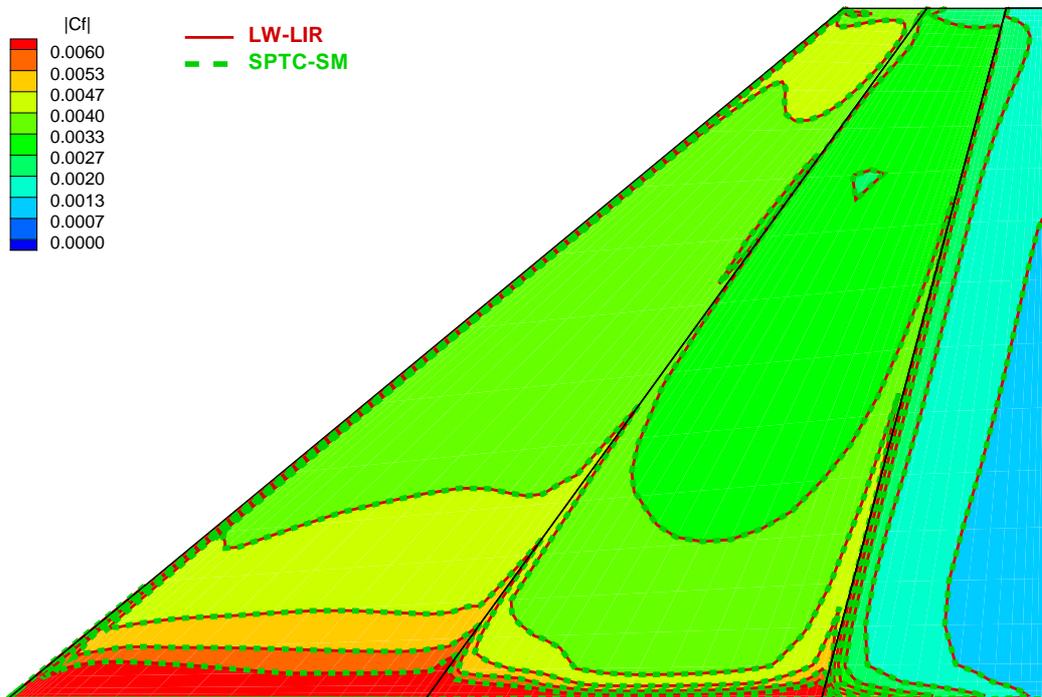


FIG. 3.19 – Répartition du coefficient de pression pariétale le long de la corde située à mi-envergure (cf. figure 3.14) pour les calculs d'écoulements autour de la gouverne générique à  $10^\circ$  d'incidence et  $Ma = 0,7$  menés avec AEROLOG.

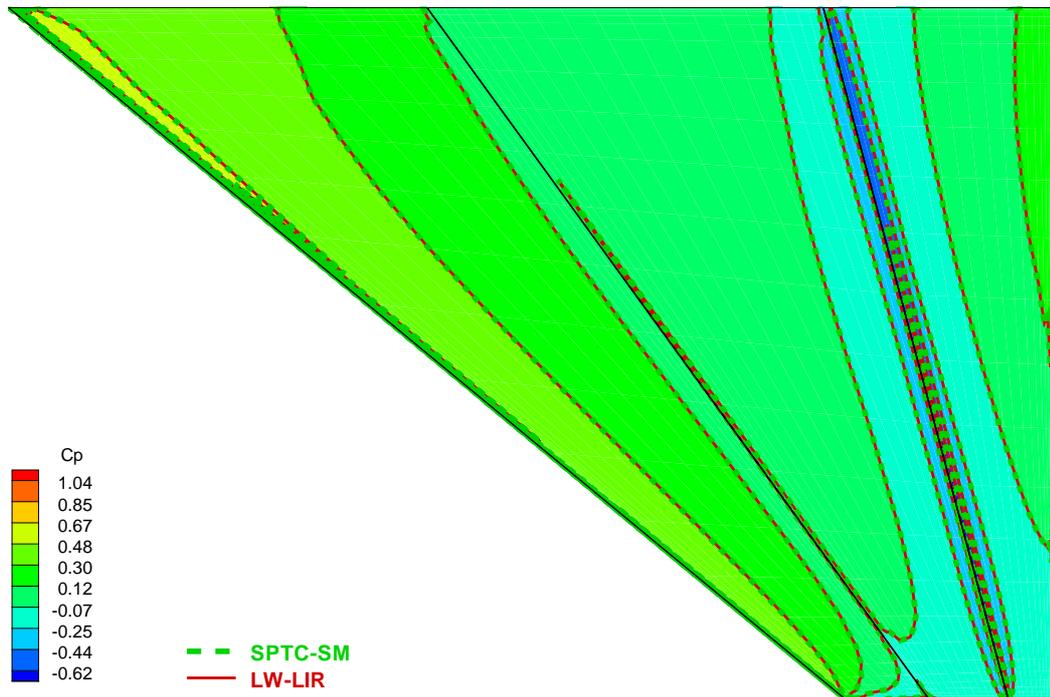


(a) Coefficient de pression.

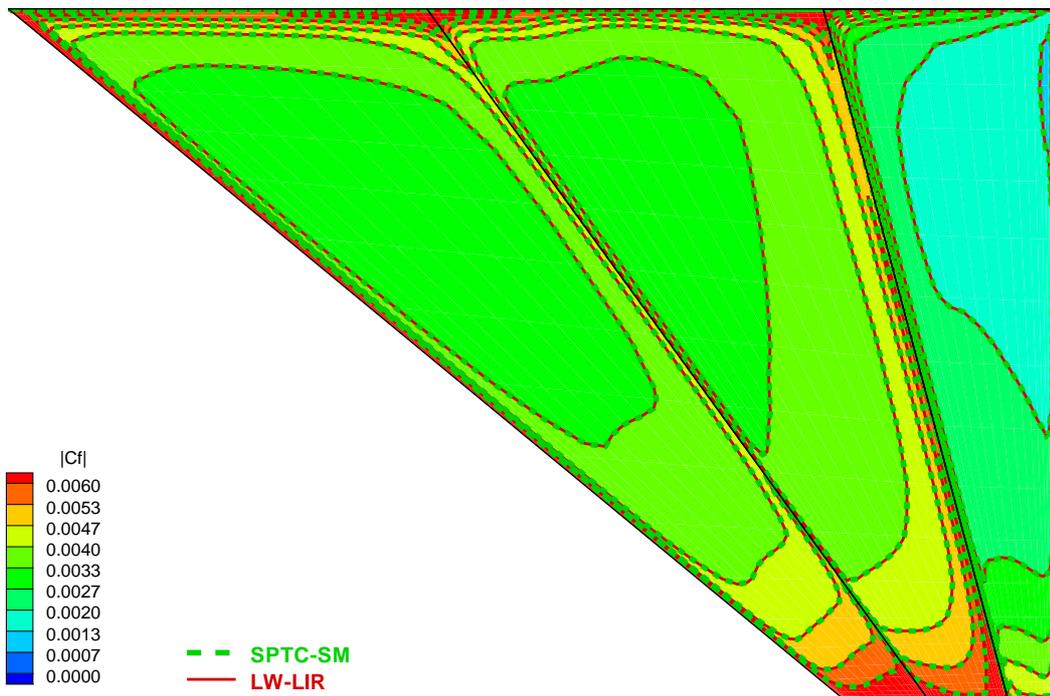


(b) Coefficient de frottement.

FIG. 3.20 – Plages d'isovaleurs des coefficients de pression (a) et de frottement (b) sur l'extrados de la gouverne générique à  $10^\circ$  d'incidence et  $Ma = 0,7$ .

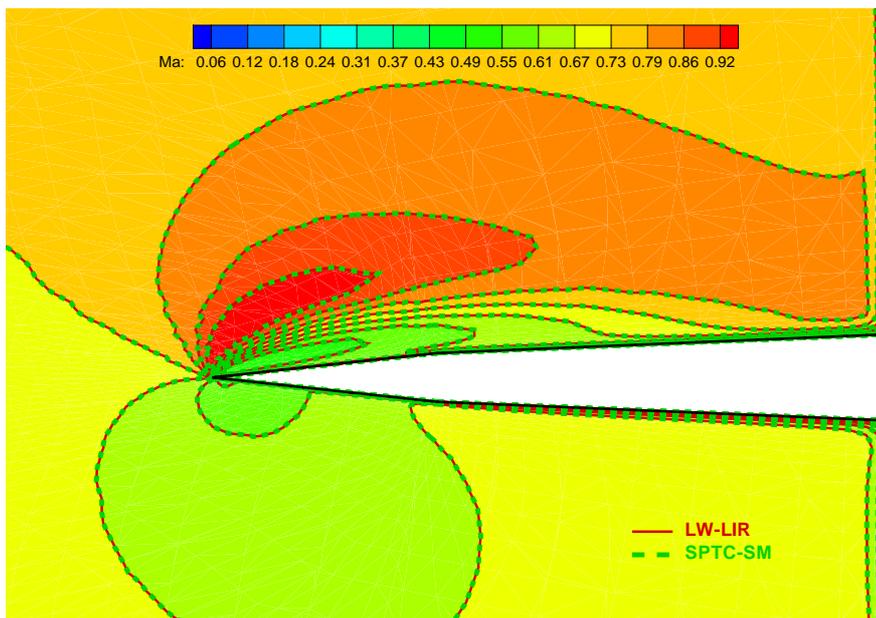


(a) Coefficient de pression.

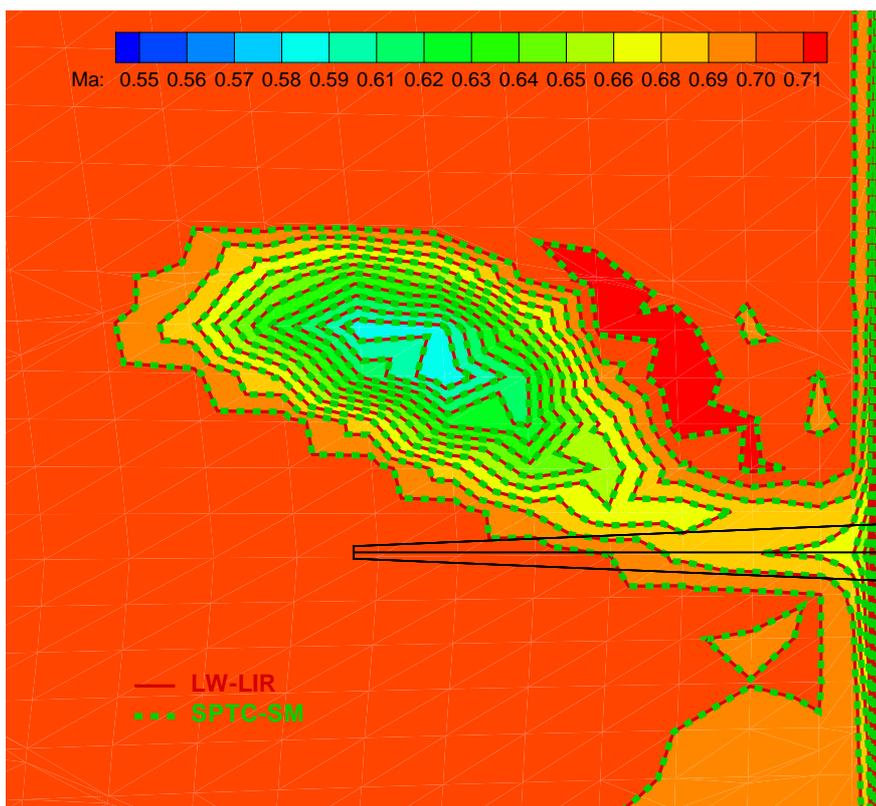


(b) Coefficient de frottement.

FIG. 3.21 – Plages d'isovaleurs des coefficients de pression (a) et de frottement (b) sur l'intrados de la gouverne générique à  $10^\circ$  d'incidence et  $Ma = 0,7$ .



(a) Coupe à  $x = 2l/3$ .



(b) Coupe à  $x = 2l$ .

FIG. 3.22 – Plages d'isovaleurs du nombre de MACH dans deux plans de coupe aux deux tiers de la corde (a) et à deux cordes (b) à partir du bord d'attaque (cf. figure 3.14) de la gouverne générique à  $10^\circ$  d'incidence et  $Ma = 0,7$ .

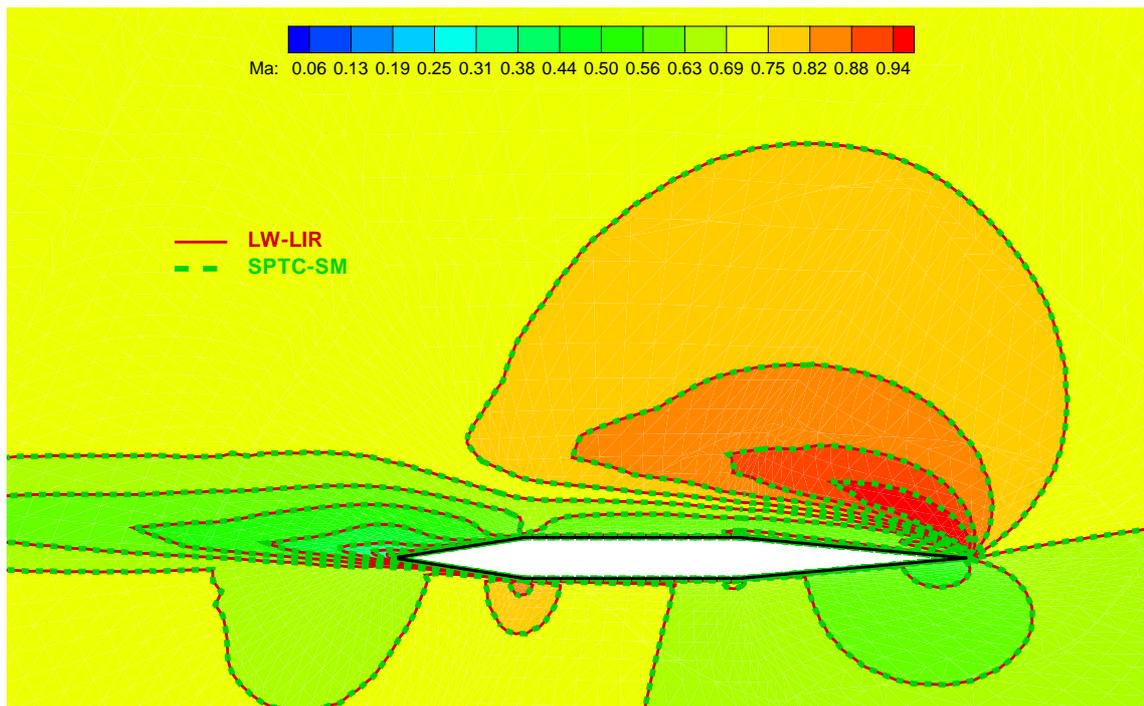


FIG. 3.23 – Plages d'isovaleurs du nombre de MACH dans le plan de coupe à mi-envergure (cf. figure 3.14) de la gouverne générique à  $10^\circ$  d'incidence et  $Ma = 0,7$ .

On peut conclure sur ces cas de calculs stationnaires que le schéma à pas de temps caractéristique est visiblement aussi précis que le schéma de LAX-WENDROFF ; il apporte même un surcroît de précision dans la mesure où il supprime les oscillations précédant et suivant le choc (cf. figures 3.9(b) et 3.10(b)). Cependant, il se peut que le coût global d'un calcul effectué avec ce schéma soit encore plus élevé qu'avec le schéma de LAX-WENDROFF. Comme nous l'avons déjà précisé, il existe deux manières de tenter d'améliorer ce point : augmenter l'efficacité intrinsèque du schéma et réduire son coût intrinsèque.

Pour agir sur ce premier point, il faut se rappeler que, au paragraphe 2.2.4 page 47, nous avons fait le choix  $\varsigma(M) = \rho(M)$  dans la définition des valeurs propres des matrices de dissipation associées au schéma à pas de temps caractéristique. Des études en cours au Laboratoire SINUMEF, sur des schémas d'ordre élevé basés sur le résidu et ayant une dissipation de la même forme que le schéma à pas de temps caractéristique utilisé ici, ont montré que ce même choix pouvait être amélioré en ayant, par exemple, recours à une fonction  $\varsigma(M)$  qui permette de passer continûment de  $\min |\lambda_M^{(i)}|$  à  $\max |\lambda_M^{(i)}|$  en fonction notamment de la direction locale d'advection [37]. Il semble ainsi possible d'optimiser le compromis entre la stabilité et l'efficacité, qui dépend essentiellement de l'expression des matrices de dissipation. Une étude analogue mériterait sans doute d'être menée pour le cas spécifique du schéma à pas de temps caractéristique dans sa version mono-prédicteur, les conclusions tirées du cas multi-prédicteurs n'étant pas nécessairement directement transposables à ce cas.

Le premier et le second point peuvent être améliorés en agissant sur la phase implicite : il serait ainsi probablement judicieux de coupler notre schéma implicite avec une approche multi-grilles. Alternativement, d'autres phases implicites, intrinsèquement plus efficaces, peuvent être envisagées (cf. par exemple les traitements implicites par blocs associés au schéma à pas de temps caractéristique mono-prédicteur dans [16]). Enfin, lorsque le système implicite est résolu par relaxation, il est particulièrement avantageux d'optimiser le nombre d'opérations

effectuées; un travail, essentiellement informatique, consistant à réduire encore le nombre d'opérations pourrait également être mené.

## Chapitre 4

# Applications instationnaires

Après avoir étudié des écoulements stationnaires qui ont permis de caractériser le comportement du nouveau schéma à pas de temps caractéristique et de sa phase implicite sans matrice, nous allons nous intéresser à la simulation d'écoulements instationnaires qui constituent la finalité des modifications apportées à AEROLOG. Les écoulements que nous souhaitons simuler sont des cas d'instabilités intrinsèques à l'écoulement dont la simulation est délicate dans la mesure où, à grand nombre de REYNOLDS, les résultats sont fortement dépendants de la modélisation de la turbulence adoptée. Afin de faciliter l'analyse et l'interprétation de nos résultats, nous avons tout d'abord retenu un cas d'écoulement laminaire instationnaire à faible nombre de MACH autour d'un profil NACA 0015 ; ce cas a déjà été étudié numériquement par FANG [17] avec le logiciel CFL3D de la NASA dédié au calcul d'écoulements compressibles. Un calcul stationnaire préliminaire a été nécessaire afin d'examiner le comportement des schémas, et notamment de la viscosité artificielle, sur ce cas d'écoulement laminaire. Nous avons ensuite calculé l'évolution transitoire d'un écoulement attaché stationnaire turbulent autour d'un profil NACA 0012 à  $1,5^\circ$  d'incidence déjà étudiée à la section 3.1 avec une approche de pas de temps local. Nous présenterons enfin un calcul instationnaire turbulent d'un écoulement détaché autour du même profil NACA 0012 à  $4^\circ$ , qui met en évidence le phénomène de tremblement transsonique et qui est particulièrement représentatif des instabilités intrinsèques que l'on cherche à simuler.

### 4.1 Écoulements laminaires autour d'un profil NACA 0015

Le premier écoulement que nous allons étudier est un écoulement instationnaire autour d'un profil NACA 0015. FANG, de l'Université de CINCINNATI, a utilisé cet écoulement comme cas de validation dans sa thèse [17]. Pour diverses incidences, il compare l'écoulement calculé autour de ce profil par un logiciel dédié à la résolution des écoulements incompressibles et celui calculé par le logiciel CFL3D de la NASA, dédié à la résolution des écoulements compressibles. Ce logiciel est donc comparable en ce point à AEROLOG. Pour calculer cet écoulement laminaire, dont le nombre de MACH à l'infini en amont est  $Ma = 0,2$  et le nombre de REYNOLDS basé sur la corde du profil et l'état en amont à l'infini vaut  $Re = 1000$ , nous avons effectué des simulations directes des équations de NAVIER-STOKES avec AEROLOG pour les deux schémas disponibles et nous avons comparé ces résultats à ceux obtenus avec FLUENT<sup>11</sup>. La longueur de la corde du profil vaut 1 m. Le maillage utilisé (cf. figure 4.1) est composé de trois domaines

---

<sup>11</sup>Dans FLUENT, bien que l'on puisse également se placer dans le cadre d'écoulements incompressibles, on a utilisé les méthodes numériques de résolution des équations en régime compressible ; on se place ainsi dans le même cadre qu'avec AEROLOG.

structurés en « C autour du profil ; il comporte  $445 \times 71$  points dans le plan de l'écoulement et lorsqu'il est tridimensionnel (pour AEROLOG) trois plans distants chacun d'une longueur de corde. Enfin la taille de la première maille près de la paroi vaut  $10^{-4}$  m.

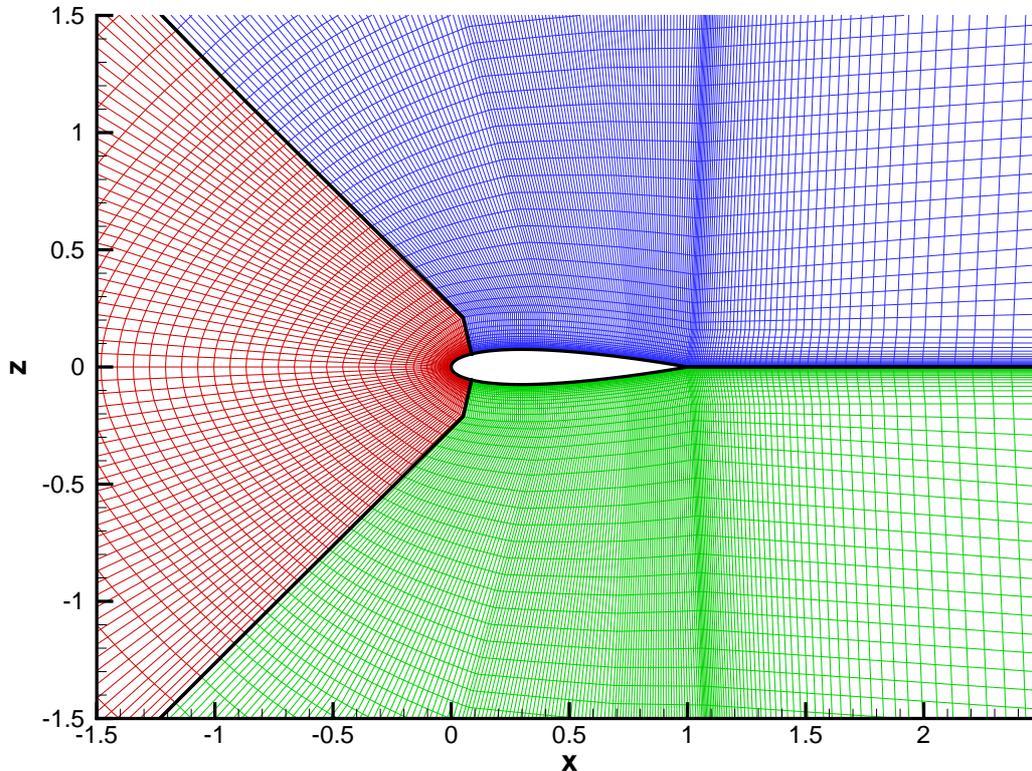


FIG. 4.1 – Maillage du domaine de calcul du profil NACA 0015 utilisé par les logiciels AEROLOG et FLUENT – détail.

Avec une telle taille de première maille, une simulation instationnaire avec une avance globale en temps, qui est précise à l'ordre deux avec le schéma de LAX-WENDROFF, n'est pas possible dans un temps raisonnable. En effet, un rapide calcul du critère de stabilité hyperbolique avec un nombre  $CFL = 1$  sur cette plus petite maille du maillage et une vitesse caractéristique  $V^{\text{car}} = c \times (1 + Ma)$  amène à un pas de temps de l'ordre de  $\Delta t = 2,5 \times 10^{-7}$  s. D'autre part, si l'on cherche à simuler des phénomènes dont la fréquence est de quelques dizaines de Hertz (fixons  $f = 50$  Hz), et que l'on veut simuler une durée égale à quelques périodes (5 par exemple), il faut alors atteindre un temps en fin de simulation de l'ordre de 0,1 s, soit près de 400 000 itérations. De plus, le pas de temps utilisé en pratique est généralement plus petit (jusqu'à cent fois plus petit) que celui donné par le critère hyperbolique de stabilité. Même sur ce cas laminaire, une simulation avec une avance globale en temps serait très coûteuse.

Une première série de calculs a été menée et il est apparu que les valeurs des coefficients de viscosité artificielle utilisées habituellement pour la résolution des écoulements turbulents ( $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$  et  $C\mu_2 = 2 \times 10^{-1}$  cf. paragraphe 1.5.7) n'étaient pas adaptées à ce cas laminaire. En effet, les sources de dissipation dans le calcul sont nombreuses : dissipation numérique du schéma, viscosité moléculaire et turbulente du fluide, viscosité artificielle... Ces coefficients ont été choisis pour la simulation d'écoulements transsoniques turbulents ; dans le cas d'un écoulement subsonique laminaire, il est probable que l'équilibre de ces différentes

sources de dissipation soit modifié et que les valeurs des coefficients adoptées jusque là doivent être modifiées. Nous avons donc mené un calcul à une incidence de  $4^\circ$ , où l'écoulement est stationnaire, avec une approche en pas de temps local pour pouvoir étudier les effets de cette viscosité artificielle.

#### 4.1.1 Calcul stationnaire à $4^\circ$ d'incidence

Étant donné que l'écoulement étudié a un nombre de MACH faible, le seul coefficient de viscosité artificielle qui entre en jeu est le coefficient  $C_{\mu_0}$  ; nous avons donc mené des calculs avec AEROLOG en faisant varier sa valeur. Les calculs présentés sont donc :

- trois calculs avec AEROLOG et le schéma de LAX-WENDROFF associé à un lissage implicite des résidus avec un nombre  $CFL = 1$ , pour trois valeurs du coefficient  $C_{\mu_0}$  :  $0$ ,  $1 \times 10^{-4}$  et  $2 \times 10^{-3}$  ; ils seront notés « LW-LIR » ;
- deux calculs avec AEROLOG et le schéma à pas de temps caractéristique associé à la phase implicite sans matrice avec un nombre  $CFL = 10^4$ , pour deux valeurs du coefficient  $C_{\mu_0}$  :  $1 \times 10^{-4}$  et  $2 \times 10^{-3}$  ; ils seront notés « SPTC-SM » ;
- un calcul FLUENT.

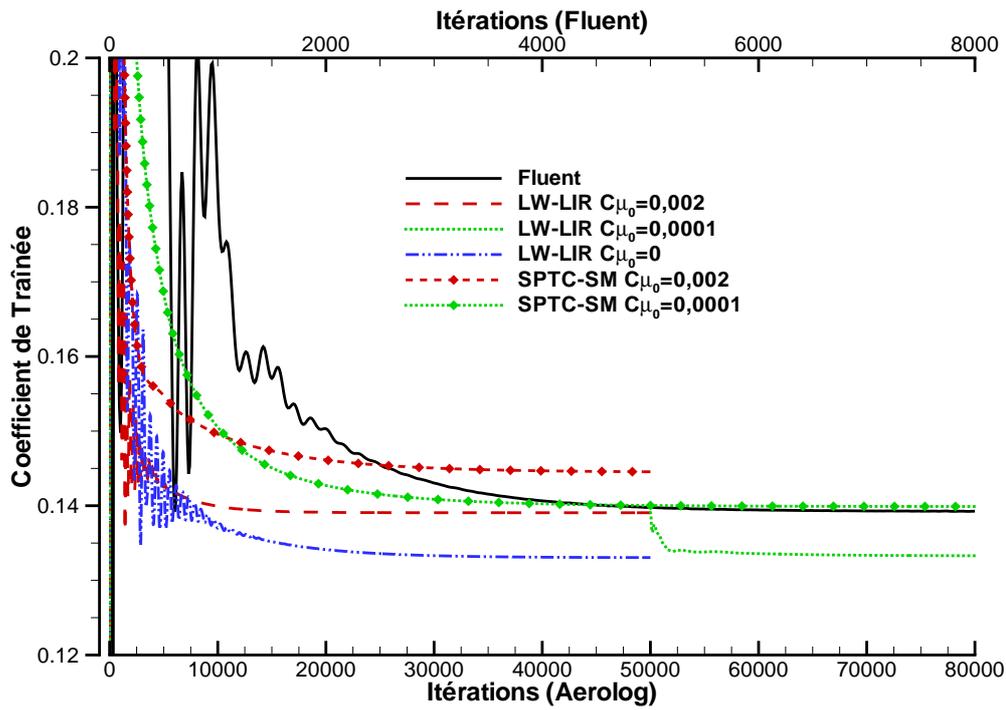
Il n'a pas été possible de mener une simulation avec le schéma à pas de temps caractéristique et un coefficient  $C_{\mu_0} = 0$  car alors le calcul diverge. D'autre part, le calcul effectué avec AEROLOG, le schéma de LAX-WENDROFF et un coefficient de viscosité artificielle  $C_{\mu_0} = 1 \times 10^{-4}$  a été initialisé avec la solution obtenue avec le même schéma mais un coefficient  $C_{\mu_0} = 2 \times 10^{-3}$ .

La figure 4.2 montre l'historique de la convergence des coefficients aérodynamiques globaux. On peut déjà noter que, en fonction du schéma et de la valeur du coefficient de viscosité artificielle, les valeurs atteintes par ces coefficients sont assez différentes (cf. tableau 4.1) ; les écarts sur la valeur du coefficient de portance atteignent 30 % pour un même schéma voire 40 % pour deux schémas différents. On note enfin que la valeur du coefficient  $C_{\mu_0}$  affecte assez notablement la convergence des résidus (cf. figure 4.3), en particulier au début du calcul, ce qui vient corroborer le fait que c'est la viscosité artificielle qui contrôle la convergence du calcul.

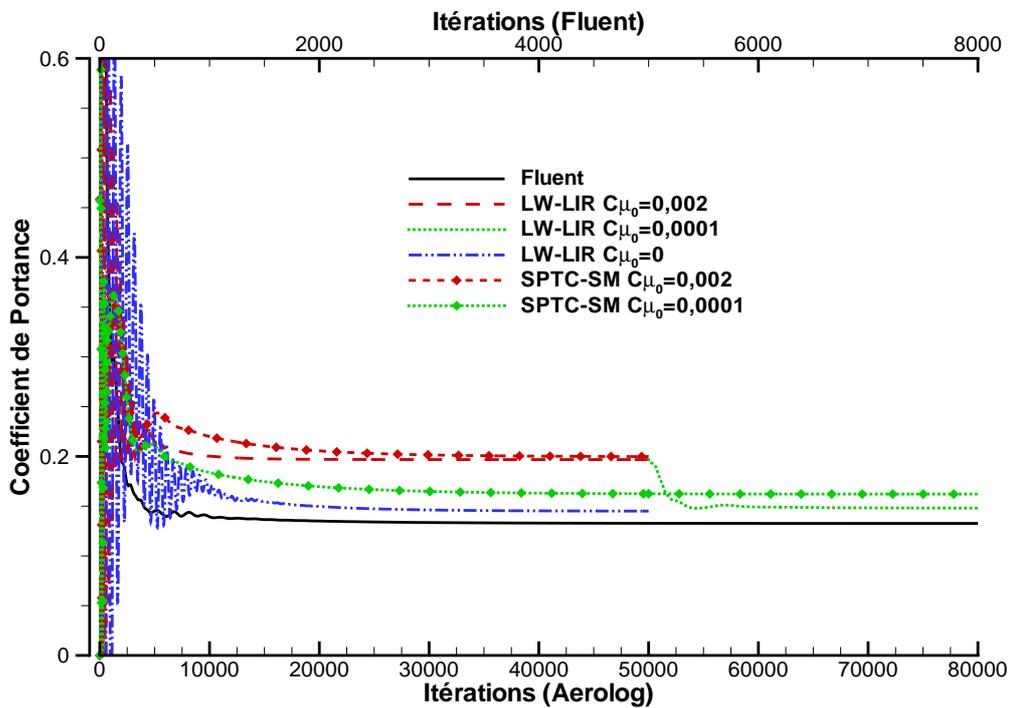
Logiciel	Schéma	$C_{\mu_0}$	Coef. de traînée	Coef. de portance
Incompress. [17]	—	—	0,129	0,148
CFL3D [17]	—	—	0,134	0,143
FLUENT	—	—	0,139	0,133
AEROLOG	LW-LIR	$2 \times 10^{-3}$	0,139	0,197
AEROLOG	LW-LIR	$1 \times 10^{-4}$	0,133	0,148
AEROLOG	LW-LIR	0	0,133	0,145
AEROLOG	SPTC-SM	$2 \times 10^{-3}$	0,145	0,200
AEROLOG	SPTC-SM	$1 \times 10^{-4}$	0,140	0,162

TAB. 4.1 – Valeurs des coefficients aérodynamiques globaux obtenues pour les différentes simulations d'écoulement stationnaire autour d'un profil NACA 0015 à  $4^\circ$  d'incidence.

Observons maintenant l'impact du coefficient de viscosité artificielle sur la solution. La figure 4.4 montre la répartition des coefficients pariétaux pour plusieurs valeurs de  $C_{\mu_0}$  et la figure 4.5 présente différemment ces mêmes résultats. On s'aperçoit que pour ce cas laminaire, le coefficient de pression est plus sensible que le coefficient de frottement ; le choix  $C_{\mu_0} = 0$  semble donner de meilleurs résultats pour les deux schémas alors que pour  $C_{\mu_0} = 1 \times 10^{-4}$



(a) Coefficient de traînée.



(b) Coefficient de portance.

FIG. 4.2 – Évolutions des coefficients aérodynamiques globaux en fonction des itérations au cours des calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0015 à  $4^\circ$  d'incidence. On notera que l'échelle utilisée pour représenter l'évolution des itérations au cours des calculs avec FLUENT est différente de celle utilisée avec AEROLOG.

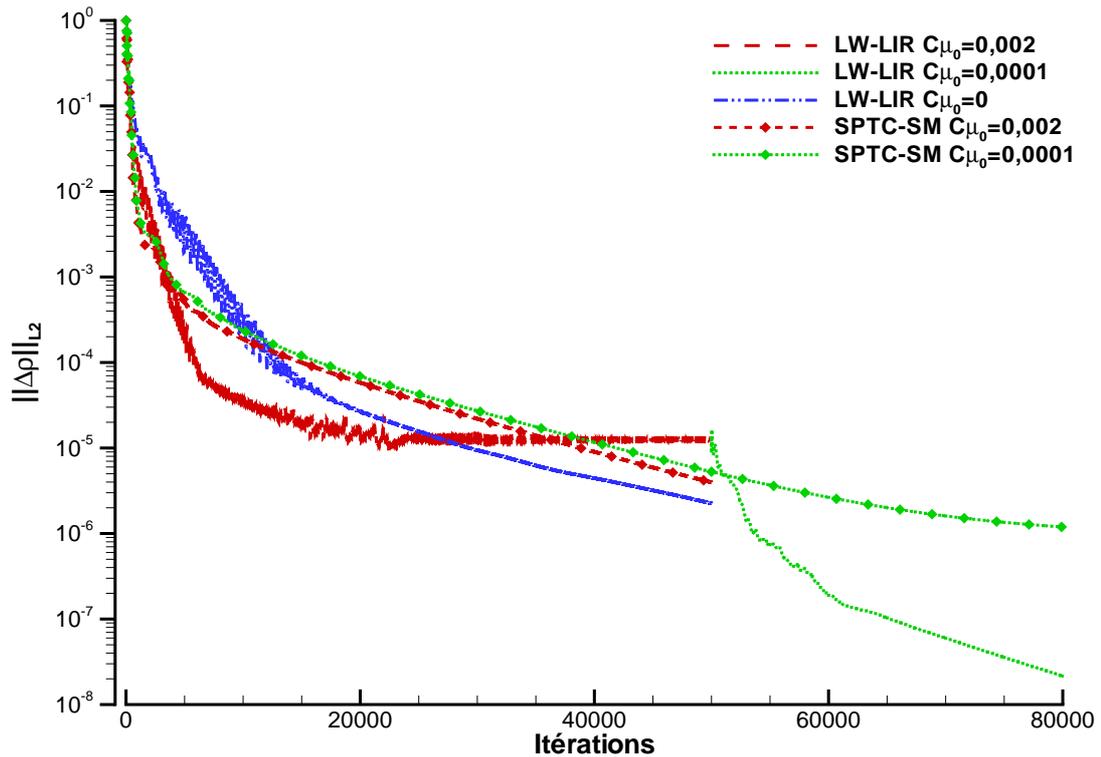


FIG. 4.3 – Évolutions de la norme L2 du résidu de l'équation de conservation de la masse en fonction des itérations au cours des calculs d'écoulement menés avec AEROLOG autour d'un profil NACA 0015 à  $4^\circ$  d'incidence.

le résultat donné par le schéma à pas de temps caractéristique s'éloigne assez nettement des autres et que les niveaux « habituels » conduisent à des résultats différents pour les deux schémas. Il semblerait donc que le meilleur choix pour  $C_{\mu_0}$  soit la plus petite valeur possible (0 pour le schéma de LAX-WENDROFF et  $10^{-4}$  pour le schéma à pas de temps caractéristique).

Cependant si l'on observe le champ de la solution dans l'ensemble du domaine de calcul, et non plus seulement les distributions pariétales, on constate que, avec  $C_{\mu_0} = 0$ , dans le maillage utilisé, la solution présente des oscillations non physiques marquées, qui gêneraient fortement l'exploitation de cette solution. Il semble donc plus raisonnable de retenir également pour LAX-WENDROFF le choix  $C_{\mu_0} = 1 \times 10^{-4}$  qui offre un compromis satisfaisant entre la précision des coefficients globaux et des distributions pariétales (cf. figure 4.2, tableau 4.1 et figures 4.4(c) et 4.4(d)) et la régularité de la solution dans l'ensemble du domaine de calcul (cf. figure 4.6). Par ailleurs, cette figure montre un bon accord entre les solutions calculées par AEROLOG avec les deux schémas et par FLUENT.

Finalement, on peut retenir de cette simulation stationnaire que la viscosité artificielle influe de façon importante sur la qualité de la solution et les niveaux des coefficients calculés. Une valeur trop importante modifie trop fortement les valeurs des coefficients globaux mais une valeur trop faible voire nulle ne permet pas de calculer correctement la solution. Soulignons encore une fois que le recours à une viscosité artificielle est la conséquence directe de la discrétisation spatiale mono-prédicteur, adoptée dans AEROLOG pour ses propriétés intéressantes en termes de coût notamment, avec l'évaluation d'un unique prédicteur. Il conviendra donc dans la simulation instationnaire qui va suivre de porter une attention toute particulière à cet aspect.

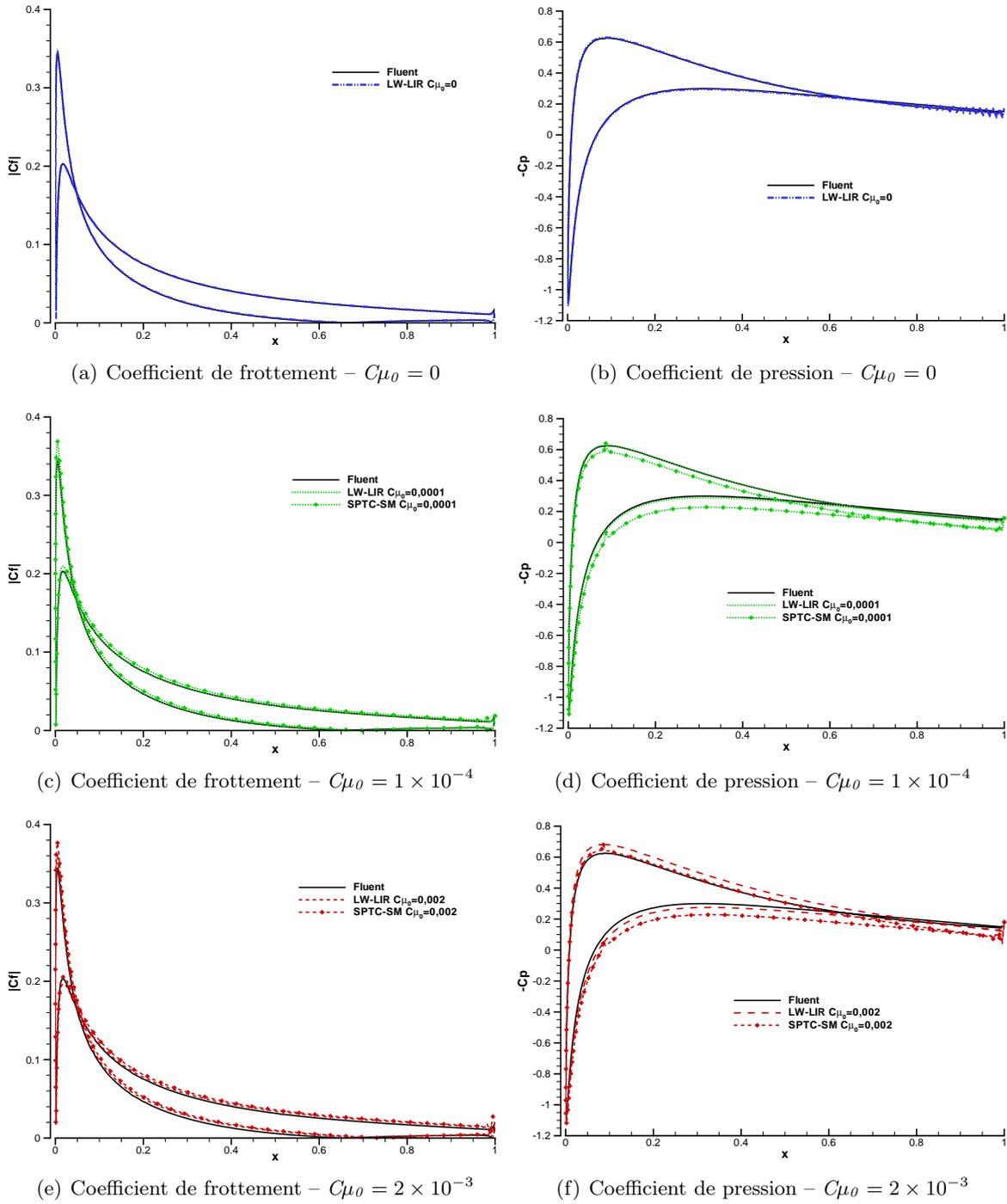


FIG. 4.4 – Répartitions des coefficients pariétaux de frottement et pression le long de la corde d'un profil NACA 0015 à  $4^\circ$  d'incidence pour plusieurs valeurs du coefficient  $C_{\mu_0}$ .

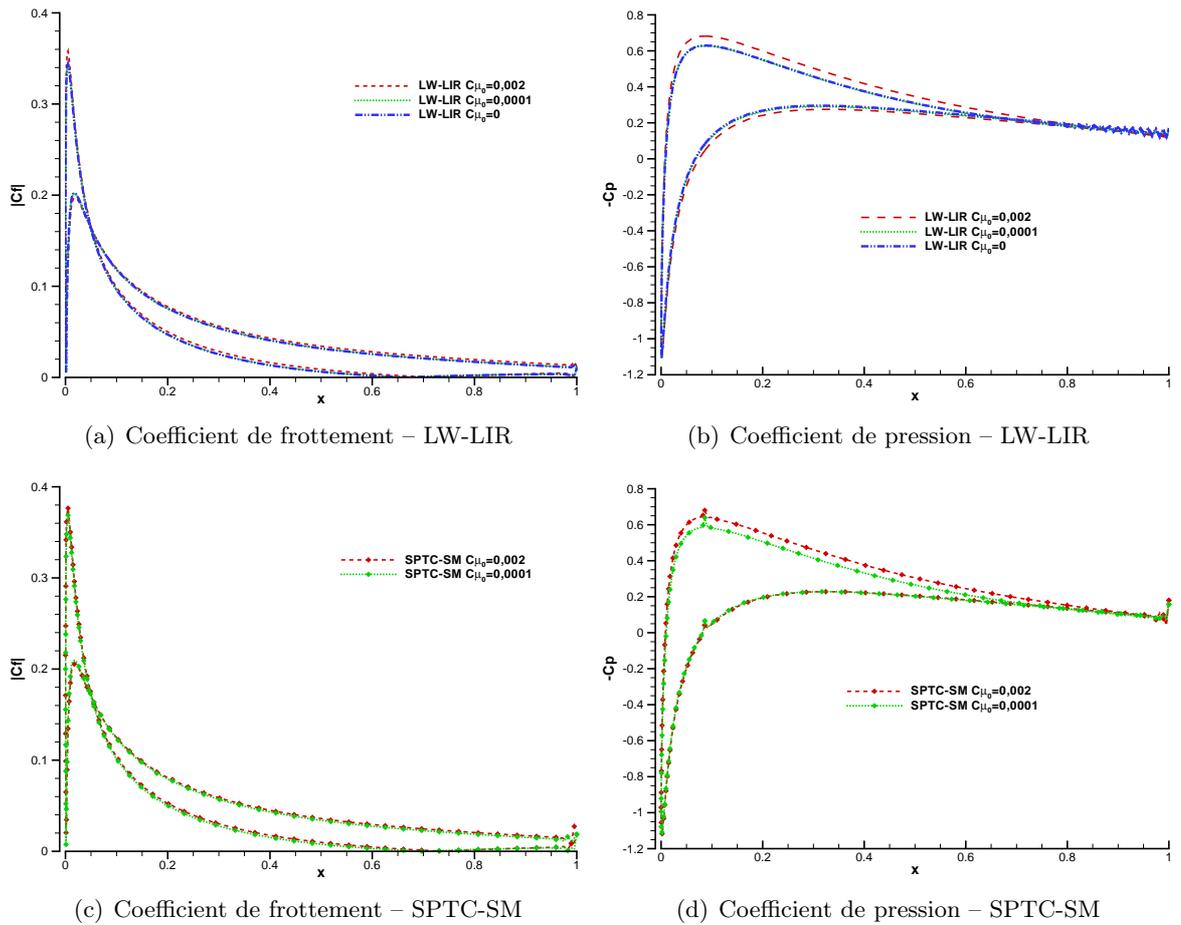
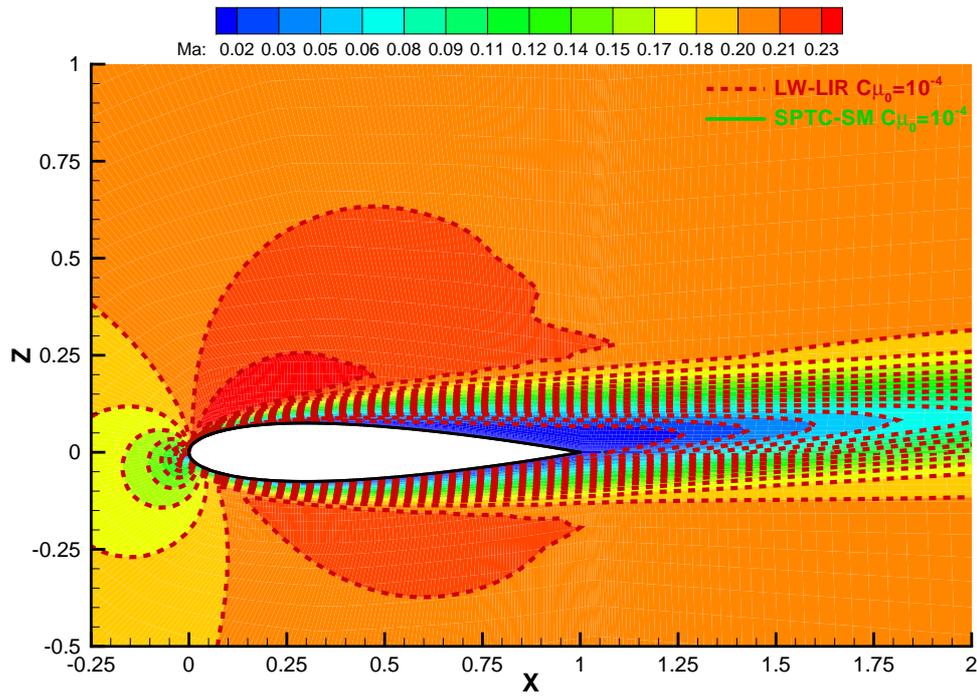
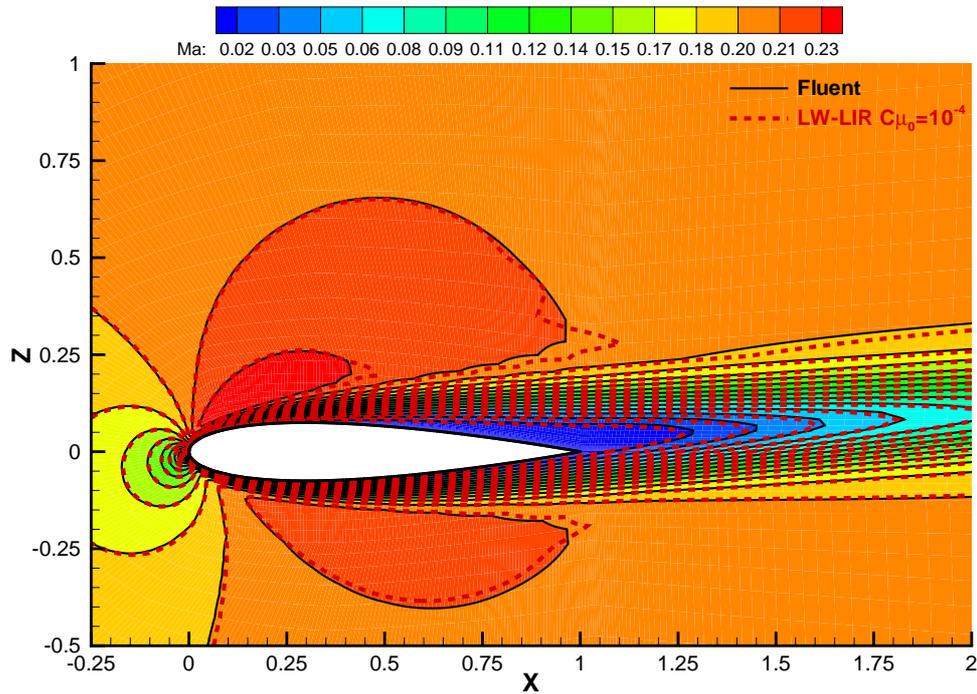


FIG. 4.5 – Répartitions des coefficients pariétaux de frottement et pression le long de la corde d'un profil NACA 0015 à  $4^\circ$  d'incidence pour les schéma de LAX-WENDROFF-NI et à pas de temps caractéristique.



(a) Calculs AEROLOG LW-LIR et SPTC-SM.



(b) Calculs AEROLOG-LW-LIR et FLUENT.

FIG. 4.6 – Plages et lignes d'isovaleurs du nombre de MACH pour les calculs d'écoulement stationnaire autour d'un profil NACA 0015 à  $4^\circ$  d'incidence – comparaisons entre les schémas de LAX-WENDROFF et à pas de temps caractéristique avec AEROLOG (a) et entre le schéma de LAX-WENDROFF avec AEROLOG et FLUENT (b).

### 4.1.2 Calcul instationnaire à 16° d'incidence

Maintenant que nous avons étudié l'impact de la viscosité artificielle sur ce cas laminaire stationnaire, nous allons exposer les résultats d'une simulation instationnaire à 16° d'incidence. À cette incidence, l'écoulement est détaché à l'extrados du profil et des tourbillons sont lâchés alternativement. Ce phénomène engendre une oscillation auto-entretenu et une évolution périodique des coefficients aérodynamiques globaux. Outre le calcul effectué à l'aide de FLUENT, deux simulations ont été menées avec AEROLOG :

- un calcul avec le schéma de LAX-WENDROFF associé au lissage implicite des résidus ; le pas de temps physique vaut  $\Delta t = 2,5 \times 10^{-4}$  s, le nombre  $CFL^*$  relatif au temps fictif vaut  $CFL^* = 1$  et le coefficient de viscosité vaut  $C\mu_0 = 10^{-3}$  ; dans chaque pas de temps physique, soit on effectue 200 itérations, soit les résidus perdent deux ordres de grandeur par pas de temps pour atteindre l'état pseudo-stationnaire (le premier des deux critères atteint) ;
- un calcul avec le schéma à pas de temps caractéristique associé à la phase implicite sans matrice résolue par une relaxation de GAUSS-SEIDEL symétrique par point avec 5 sous-itérations ; le pas de temps physique vaut  $\Delta t = 2,5 \times 10^{-4}$  s, le nombre  $CFL^*$  relatif au temps fictif vaut  $CFL^* = 10^4$  et le coefficient de viscosité vaut  $C\mu_0 = 10^{-3}$  ; dans chaque pas de temps physique, soit on effectue 200 itérations, soit les résidus perdent deux ordres de grandeur par pas de temps pour atteindre l'état pseudo-stationnaire.

On peut tout d'abord noter que le coefficient de viscosité artificielle utilisé n'est pas celui retenu au paragraphe précédent 4.1.1. En effet, conformément aux conclusions énoncées plus haut, on observe également sur ce cas instationnaire que, sans viscosité artificielle, la prédiction des niveaux de portance est correcte mais les solutions peuvent localement présenter des anomalies, compte tenu du maillage relativement grossier utilisé (notamment dans le sillage). Si l'on adjoint de la viscosité artificielle pour améliorer la régularité de la solution, on fausse la prédiction des coefficients aérodynamiques ; cependant des simulations avec  $C\mu_0 = 10^{-4}$  fournissaient une solution trop irrégulière, il a donc été choisi une valeur plus élevée pour ce coefficient ; on gardera cependant à l'esprit que ce choix affecte les niveaux des coefficients globaux calculés.

Il a été fait le choix d'effectuer 200 itérations par pas de temps physique dans le processus de convergence vers l'état pseudo-stationnaire vis-à-vis du temps fictif. En effet, l'expérience montre qu'il est nécessaire que les résidus moyens perdent environ deux ordres de grandeur à chaque pas de temps pour obtenir une simulation correcte de ces phénomènes instationnaires. Dans le cas contraire, la solution obtenue à la fin d'un pas de temps n'est pas suffisamment convergée, et cette solution dissipée est utilisée comme solution initiale du problème pseudo-stationnaire suivant ; on arrive ainsi à une « stationnarisation » de la solution. Pour ces calculs, un choix de 200 itérations par pas de temps physique permet d'assurer une convergence de deux ordres de grandeur des résidus moyens.

Comme nous l'avons déjà montré auparavant, le schéma à pas de temps caractéristique converge plus vite – en terme d'itérations – que le schéma de LAX-WENDROFF. En effet, avec le schéma de LAX-WENDROFF le critère des 200 itérations par pas de temps est atteint avant que les résidus n'aient perdu deux ordres de grandeur (on perd en réalité 1,8 ordre en 200 itérations) ; avec le schéma à pas de temps caractéristique, les résidus perdent deux ordres de grandeur en moyenne en 191 itérations. Cependant, le coût intrinsèque du schéma à pas de temps caractéristique (ici 27,7  $\mu$ s/pt/it) est 5,7 fois plus élevé que celui du schéma de LAX-WENDROFF (ici 4,9  $\mu$ s/pt/it). Le gain de 5 % sur l'efficacité intrinsèque du schéma est loin de compenser le surcoût engendré ; cependant, afin de pouvoir tout de même étudier la solution

calculée par le schéma à pas de temps caractéristique, on a initialisé le calcul effectué avec ce schéma par la solution calculée avec le schéma de LAX-WENDROFF.

La figure 4.7(a) montre l'évolution des coefficients aérodynamiques globaux pour les calculs effectués avec AEROLOG et FLUENT. On remarque que, de façon générale, la prédiction du phénomène est correcte ; cependant les niveaux des coefficients calculés par AEROLOG sont plus faibles que ceux calculés par FLUENT ou ceux que l'on peut trouver dans [17] (cf. figures 4.7(b)-(c)) ; comme nous l'avons expliqué plus haut, la viscosité artificielle semble en être la cause principale. Ces différentes valeurs sont récapitulées dans le tableau 4.2 où l'on trouve également les valeurs du nombre de STROUHAL reflétant la bonne précision temporelle des calculs.

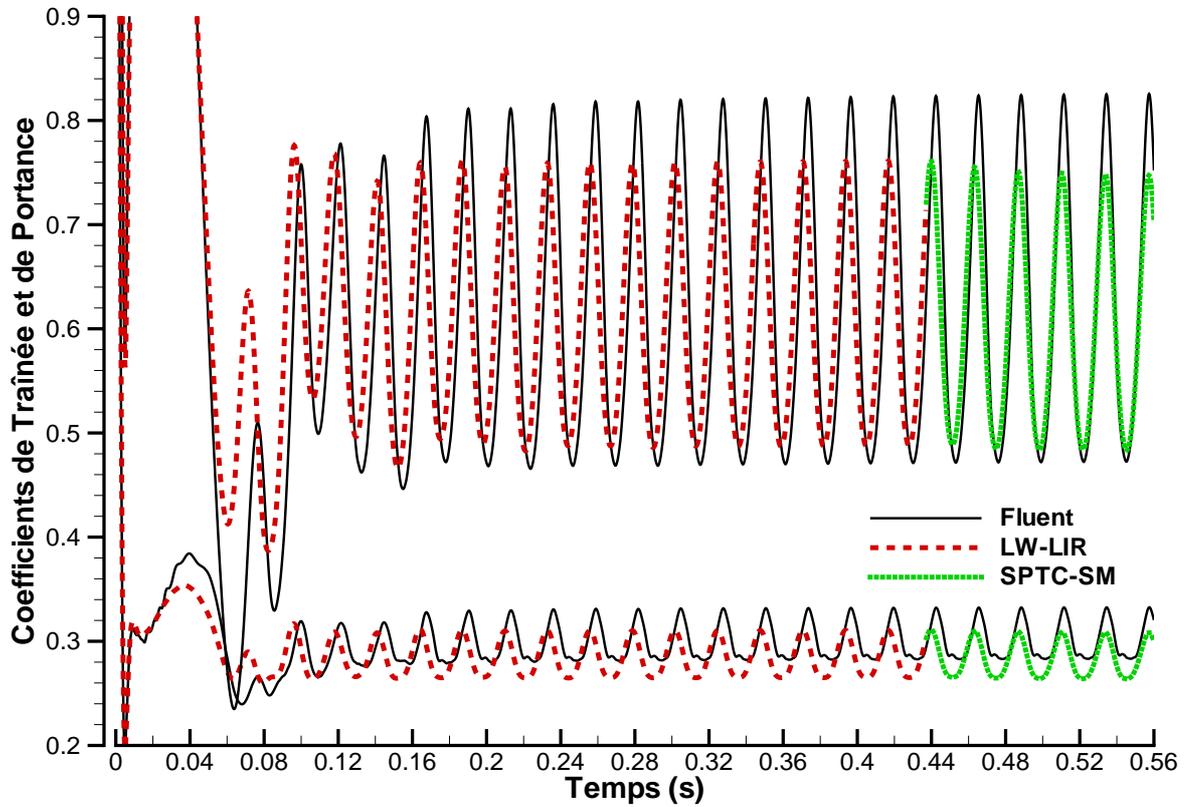
Logiciel	Schéma	Coef. de traînée	Coef. de portance	$St$
Incompress. [17]	—	$0,307 \pm 0,027$	$0,685 \pm 0,158$	0,628
CFL3D [17]	—	$0,302 \pm 0,027$	$0,615 \pm 0,175$	0,588
FLUENT	—	$0,307 \pm 0,024$	$0,645 \pm 0,175$	0,627
AEROLOG	LW-LIR	$0,288 \pm 0,023$	$0,623 \pm 0,136$	0,625
AEROLOG	SPTC-SM	$0,287 \pm 0,022$	$0,619 \pm 0,134$	0,613

TAB. 4.2 – Valeurs des coefficients aérodynamiques globaux et du nombre de STROUHAL obtenues pour les différentes simulations d'écoulements instationnaires autour d'un profil NACA 0015 à  $16^\circ$  d'incidence.

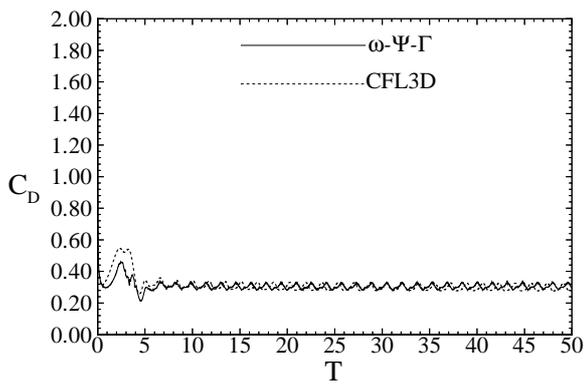
La lecture de ces résultats permet d'ores et déjà d'affirmer qu'AEROLOG prédit correctement les grandeurs globales de ce phénomène instationnaire laminaire. En particulier le nombre de STROUHAL, qui représente la fréquence adimensionnée du phénomène, nous indique que les simulations données prédisent une fréquence correcte : le nombre de STROUHAL calculé par AEROLOG avec le schéma à pas de temps caractéristique présente un écart de 2% par rapport à celui calculé par le logiciel dédié aux écoulements incompressibles présenté dans [17].

Nous allons maintenant étudier l'évolution de la solution au cours d'un cycle d'oscillation du coefficient de portance (cf. figure 4.8) en comparant les résultats obtenus par AEROLOG avec le schéma de LAX-WENDROFF et ceux obtenus par le logiciel FLUENT. Comme les valeurs extrêmes du coefficient de portance au cours d'un cycle ne sont pas identiques pour les deux calculs et que l'évolution de ce cycle n'est pas sinusoïdal, nous avons repéré dans ce cycle huit instants différents déterminés à partir de ces valeurs extrêmes :

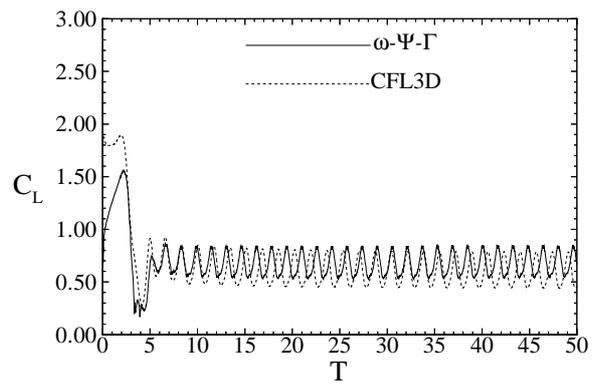
Instant	Coef. de portance
A	$C_{L\max}$
B	$C_{L\max} - \frac{1}{4}\Delta C_L$
C	$C_{L\max} - \frac{1}{2}\Delta C_L$
D	$C_{L\max} - \frac{3}{4}\Delta C_L$
E	$C_{L\min}$
F	$C_{L\max} - \frac{3}{4}\Delta C_L$
G	$C_{L\max} - \frac{1}{2}\Delta C_L$
H	$C_{L\max} - \frac{1}{4}\Delta C_L$



(a) Coefficients aérodynamiques calculés par AEROLOG et FLUENT.



(b) Coefficients de traînée issus de [17].



(c) Coefficients de portance issus de [17].

FIG. 4.7 – Évolutions des coefficients aérodynamiques globaux en fonction du temps au cours des calculs d'écoulement instationnaire autour d'un profil NACA 0015 à  $16^\circ$  d'incidence.

où  $\Delta C_L = C_{L_{\max}} - C_{L_{\min}}$  est l'amplitude de l'oscillation du coefficient de portance. Les valeurs  $C_{L_{\max}}$  et  $C_{L_{\min}}$  sont prises indépendamment pour chacun des deux calculs. Pour ces deux calculs et à chaque instant (A-H), nous allons présenter les distributions pariétales de coefficients de pression et de frottement ainsi qu'une visualisation des plages d'isovaleurs de nombre de MACH. Cependant, le logiciel FLUENT ne donnant accès qu'à la valeur absolue du coefficient de frottement, c'est cette dernière qui sera représentée. La compréhension de l'écoulement n'en est pas facilitée ; nous demandons par avance au lecteur de bien vouloir nous en excuser. La figure 4.9 montre néanmoins, sur l'exemple du coefficient de frottement pariétal à l'instant F calculé avec AEROLOG, l'exercice consistant à retrouver la courbe originale de distribution pariétale du coefficient. On montre également les profils de vitesse le long de la corde à proximité immédiate du point de décollement principal et du point de décollement secondaire.

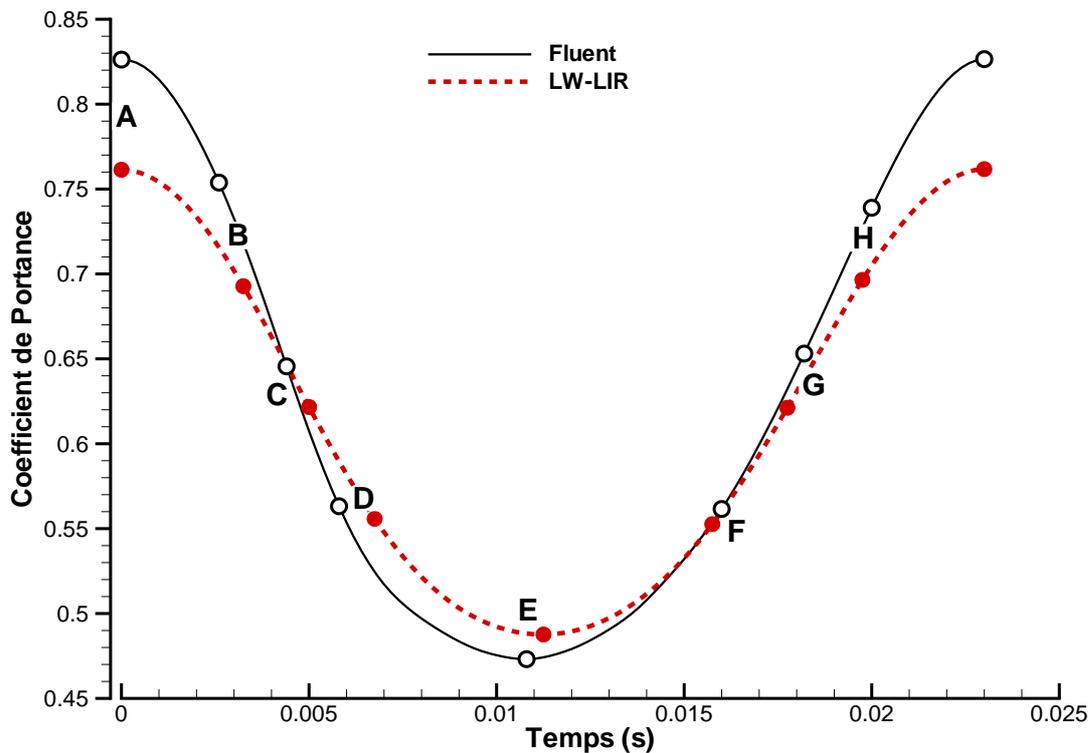
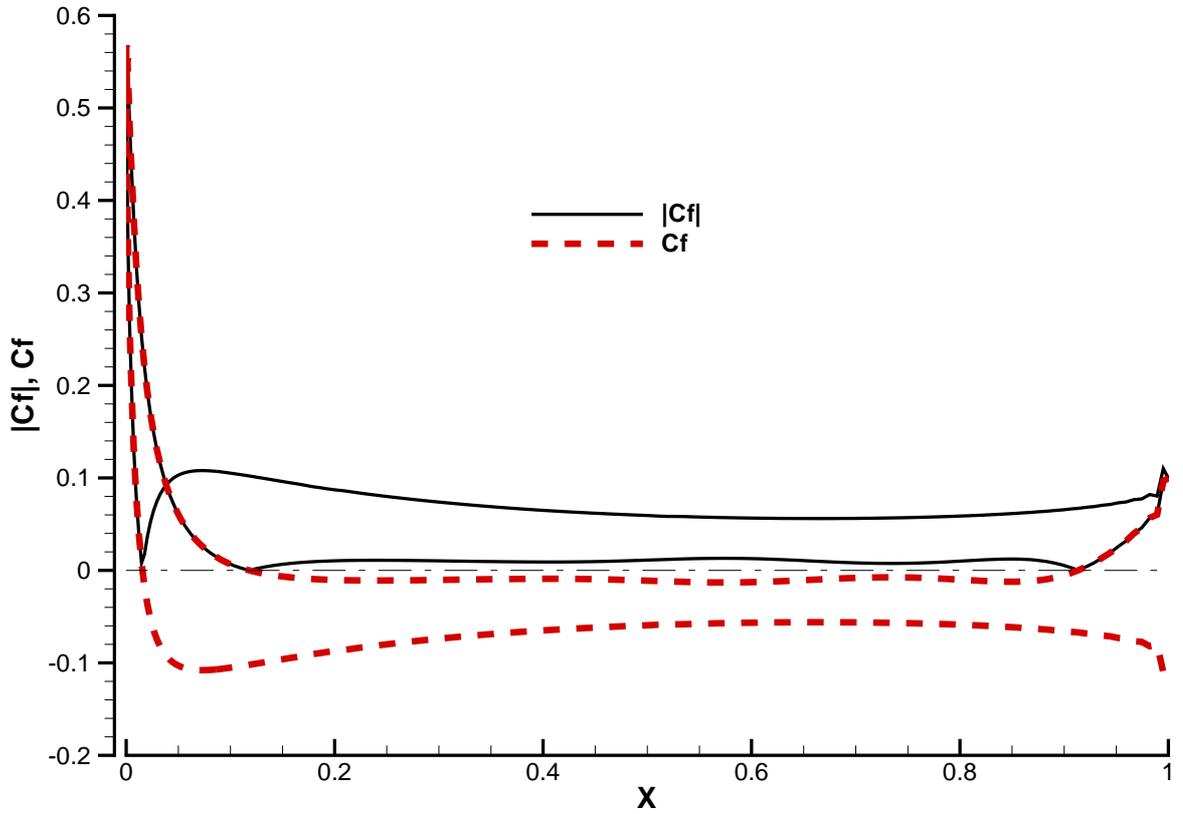
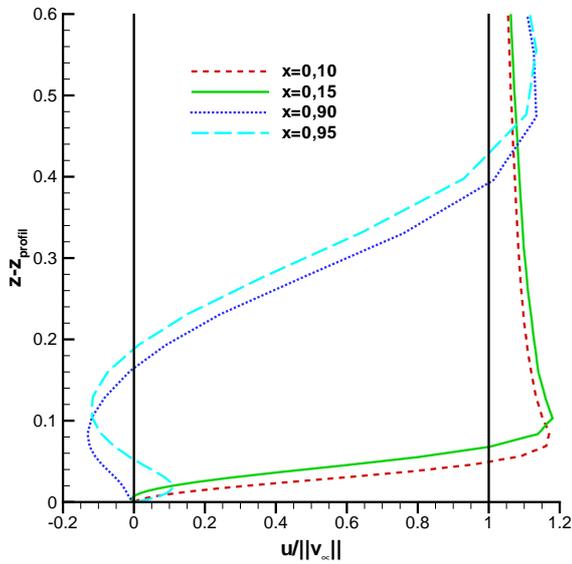


FIG. 4.8 – Évolution sur un cycle d'oscillation du coefficient de portance pour le calcul avec AEROLOG d'un écoulement instationnaire autour d'un profil NACA 0015 à 16° d'incidence.

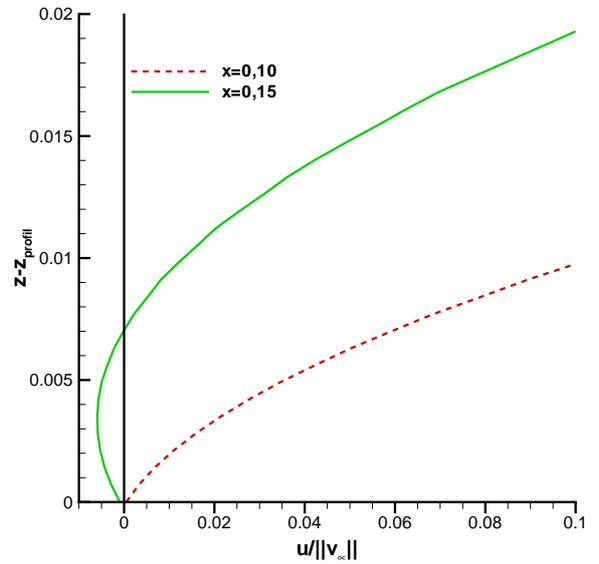
La figure 4.10 montre l'évolution de la répartition pariétale du coefficient de frottement au cours du cycle, tandis que la figure 4.11 montre celle du coefficient de pression et que la figure 4.12 présente l'évolution des isovaleurs de nombre de MACH. L'observation de la figure 4.10 permet tout d'abord de formuler une remarque générale : le frottement pariétal est prédit de façon quasiment identique dans ces deux calculs, hormis éventuellement dans la zone de l'extrados située après le point de décollement secondaire et à proximité immédiate du bord de fuite sur l'intrados. Nous avons déjà expliqué (cf. section 3.1 page 103) que cette dernière différence était due à la difficulté qu'a AEROLOG à traiter la discontinuité de normale entre l'intrados et l'extrados engendrée par la présence, sur ce profil, d'un bord de fuite pincé. De plus, on note sur la figure 4.11 la présence d'oscillations parasites à proximité du bord de fuite ; cette anomalie se retrouve dans la plupart des calculs d'écoulement sur profil qui



(a) Courbes de  $C_f$  et  $|C_f|$ .



(b) Profils de vitesse.



(c) Détail de (b).

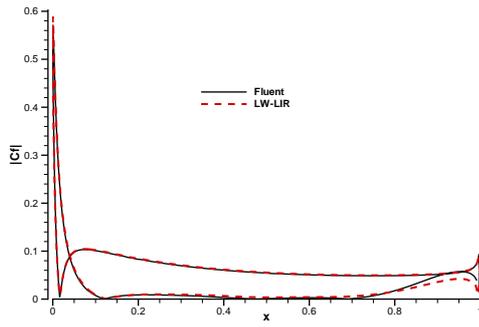
FIG. 4.9 – Interprétation des courbes de répartition pariétale de coefficient de frottement.

ont été effectués (cf. figures 3.11 et 3.12 page 107) et semble être accentuée dans ce cas d'un écoulement laminaire.

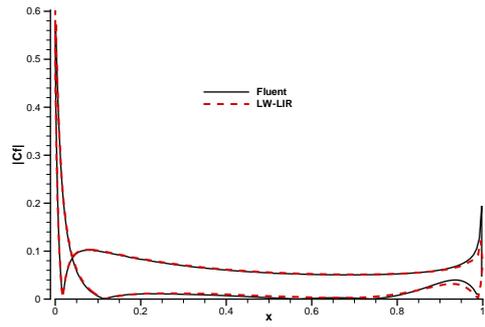
La figure 4.13 montre l'évolution des lignes de courant au cours du cycle et permet de mieux comprendre les phénomènes qui interviennent. C'est à l'instant E, c'est-à-dire à l'instant où la portance est minimale, que l'écart entre les coefficients de frottement prédit par les deux calculs est le plus important. La figure 4.14 présente un détail de la figure 4.12(e) avec une représentation des lignes de courant à proximité de l'extrados du profil à cet instant. On remarque alors que le tourbillon qui constitue le décollement secondaire commence à se détacher de l'extrados. Cette recirculation secondaire a commencé à se créer à l'instant A ; elle grossit, et s'apparie à l'instant C avec une structure au bord de fuite, puis continue à grossir jusqu'à l'instant E où elle commence à se détacher de l'extrados tandis que la zone de recirculation principale reprend de l'importance ; à l'instant H, il n'y a plus qu'une seule zone décollée s'étendant de 10 % de la corde jusqu'au bord de fuite.

Ce mécanisme est calculé de la même façon par les deux logiciels, et en particulier les positions des points de décollement. Cependant les niveaux des coefficients de frottement et pression diffèrent légèrement, en particulier au voisinage du décollement secondaire. Si on observe la figure 4.14, on remarque que la taille de cette structure n'est pas la même pour les deux calculs ; cela corrobore l'observation faite plus haut à propos du coefficient de frottement, figure 4.10. En effet la taille de se décollement secondaire atteint 30 % de la corde dans la solution calculée par FLUENT et seulement 14 % dans la solution calculée par AEROLOG. Le caractère dissipatif des méthodes employées, en particulier l'utilisation de viscosité artificielle, explique cette différence, le tourbillon n'ayant pas la même taille au moment où il quitte l'extrados.

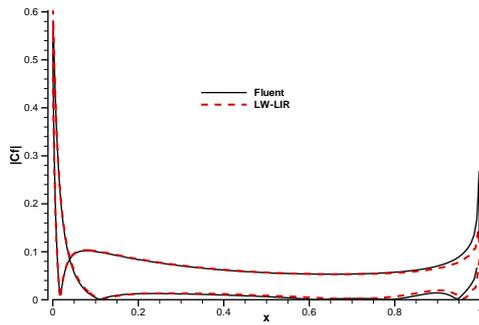
Ce cas de calcul, bien qu'il s'agisse d'un écoulement subsonique laminaire, a permis de mettre une première fois en évidence les capacités d'AEROLOG à simuler des écoulements instationnaires. Les quelques difficultés rencontrées sont dues à la spécificité laminaire de cet écoulement (viscosité artificielle mal adaptée par exemple) ou sont propres à AEROLOG et étaient déjà connues (oscillation de bord de fuite par exemple). Notons cependant à nouveau la relative déception apportée par le schéma à pas de temps caractéristique. Si la simulation présentée constitue un premier exemple d'application de ce schéma à la simulation d'écoulements visqueux instationnaires et établit les propriétés de précision satisfaisantes de l'approche (en tout cas, par rapport au schéma de LAX-WENDROFF disponible dans AEROLOG), les performances en terme de coût de calcul de cette nouvelle stratégie de discrétisation la rendent non compétitive par rapport à l'extension du schéma de LAX-WENDROFF-NI par la technique de pas de temps fictif. Le point le plus positif à retenir de ce cas de démonstration est en réalité la possibilité de mener avec AEROLOG, dans des temps de calcul raisonnables, la simulation d'écoulements instationnaires, précédemment hors de portée de la seule approche en pas de temps global disponible avant nos travaux. Cette observation nous conduit donc à poursuivre l'application des nouvelles fonctionnalités mises en œuvre dans AEROLOG sur des cas d'écoulements plus proches des applications visées par MBDA.



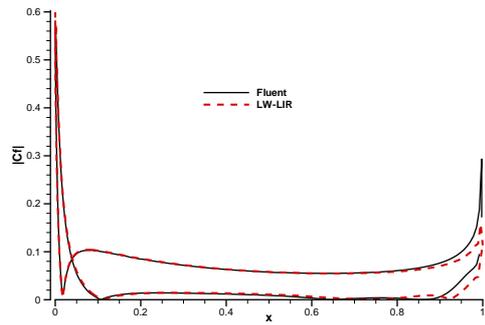
(a) Coefficient de frottement – instant A.



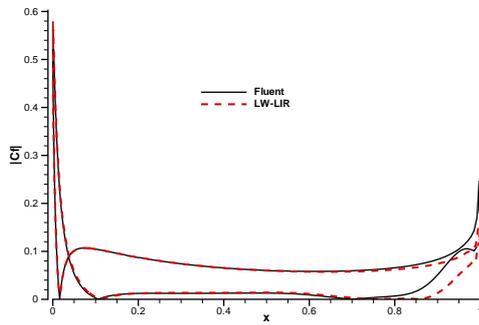
(b) Coefficient de frottement – instant B.



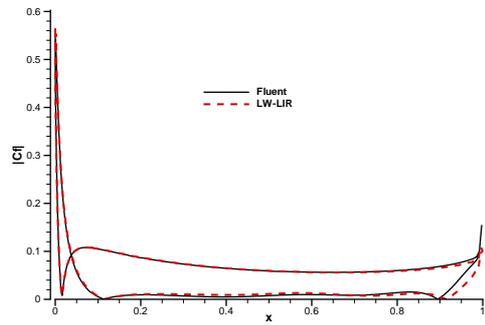
(c) Coefficient de frottement – instant C.



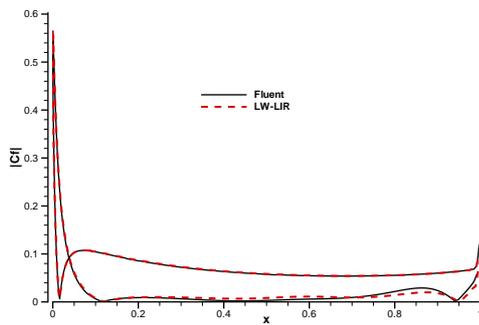
(d) Coefficient de frottement – instant D.



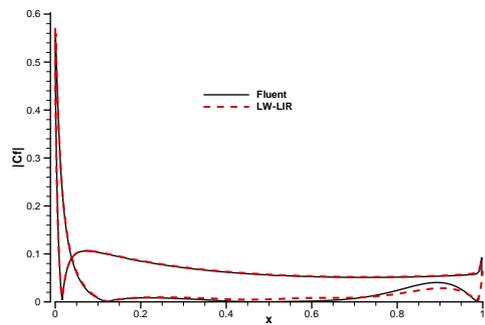
(e) Coefficient de frottement – instant E.



(f) Coefficient de frottement – instant F.

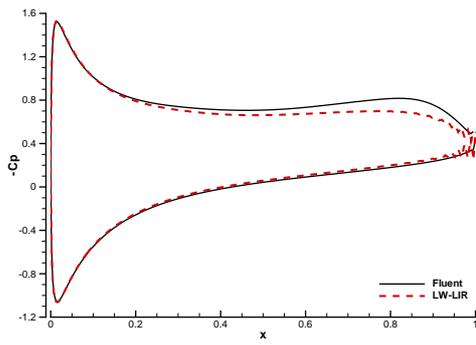


(g) Coefficient de frottement – instant G.

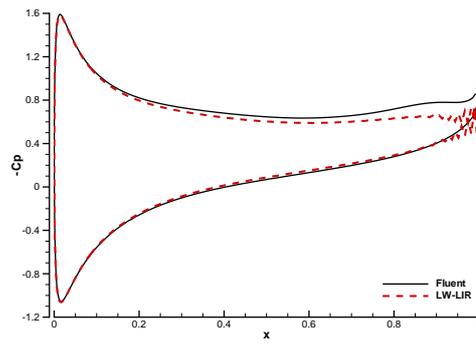


(h) Coefficient de frottement – instant H.

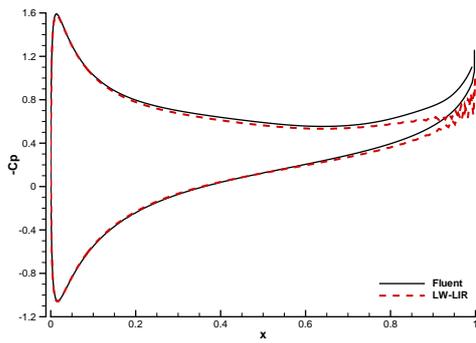
FIG. 4.10 – Distribution pariétale du coefficient de frottement au cours d'un cycle d'oscillation de portance (cf. figure 4.8) du profil NACA 0015 à  $16^\circ$  d'incidence calculé par AEROLOG avec le schéma de LAX-WENDROFF et par FLUENT.



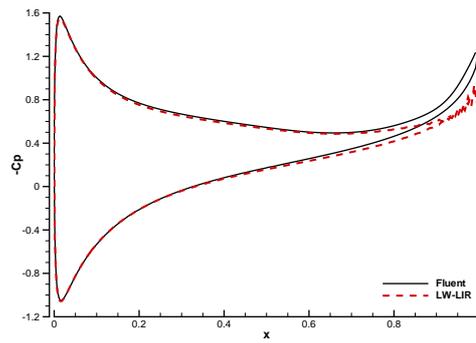
(a) Coefficient de pression – instant A.



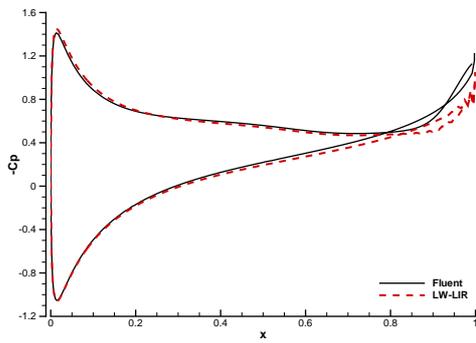
(b) Coefficient de pression – instant B.



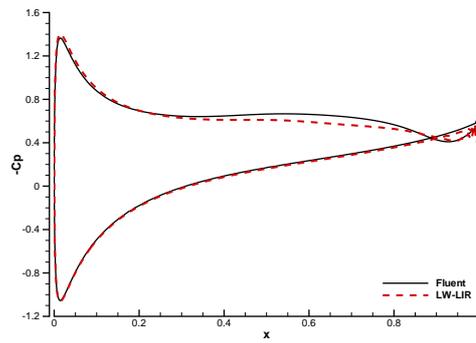
(c) Coefficient de pression – instant C.



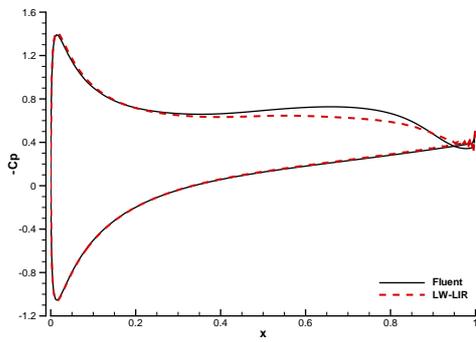
(d) Coefficient de pression – instant D.



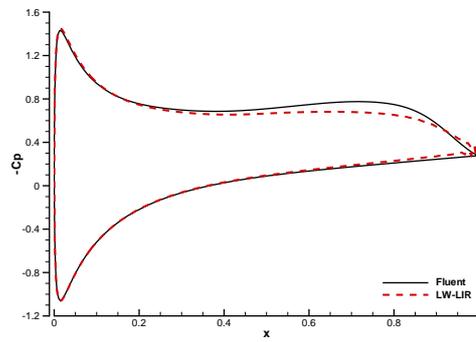
(e) Coefficient de pression – instant E.



(f) Coefficient de pression – instant F.



(g) Coefficient de pression – instant G.



(h) Coefficient de pression – instant H.

FIG. 4.11 – Distribution pariétale du coefficient de pression au cours d'un cycle d'oscillation de portance (cf. figure 4.8) du profil NACA 0015 à  $16^\circ$  d'incidence calculé par AEROLOG avec le schéma de LAX-WENDROFF et par FLUENT.

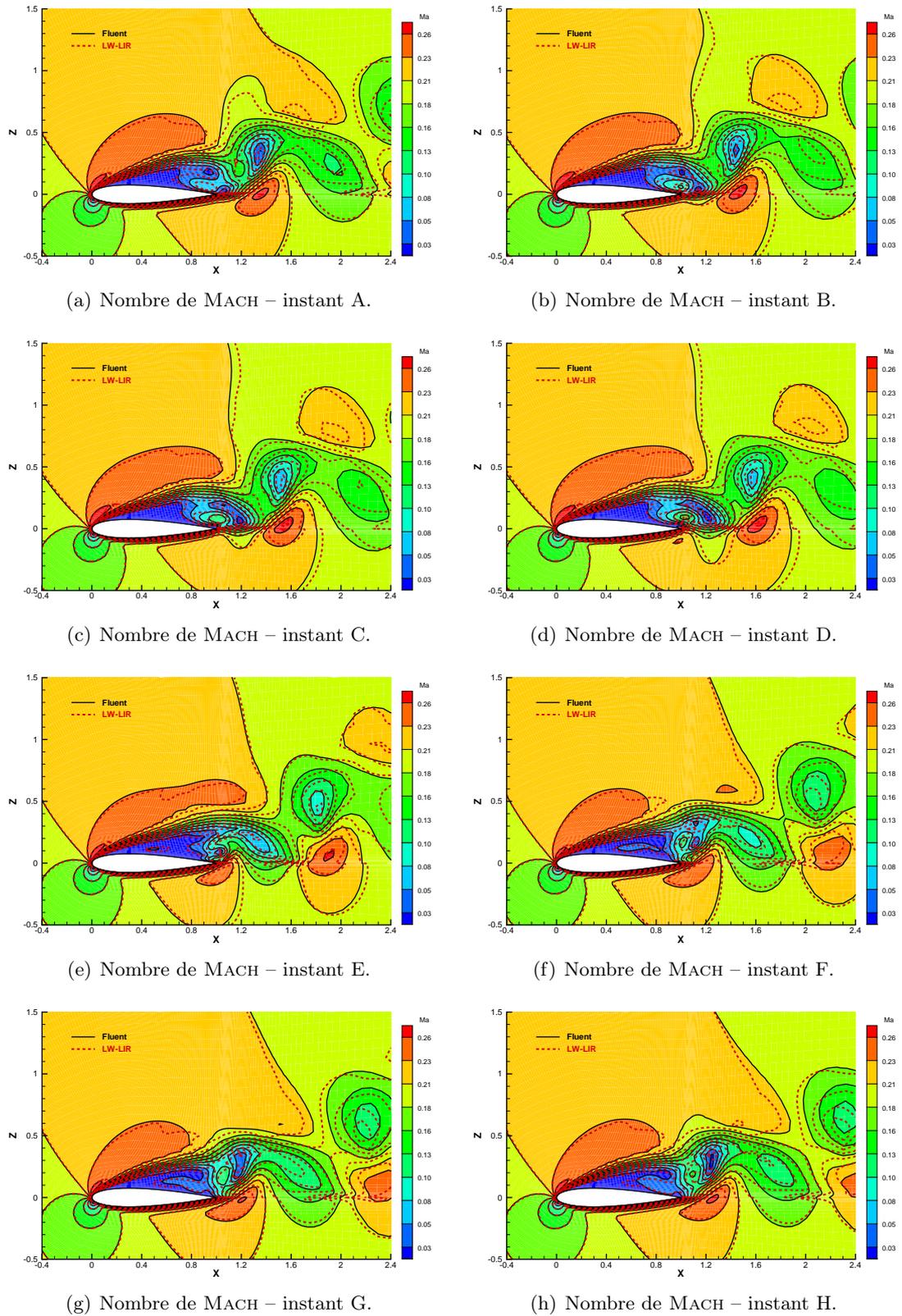


FIG. 4.12 – Plages et lignes d'isovaleurs du nombre de MACH au cours d'un cycle d'oscillation de portance (cf. figure 4.8) du profil NACA 0015 à  $16^\circ$  d'incidence calculé par AEROLOG avec le schéma de LAX-WENDROFF et par FLUENT.

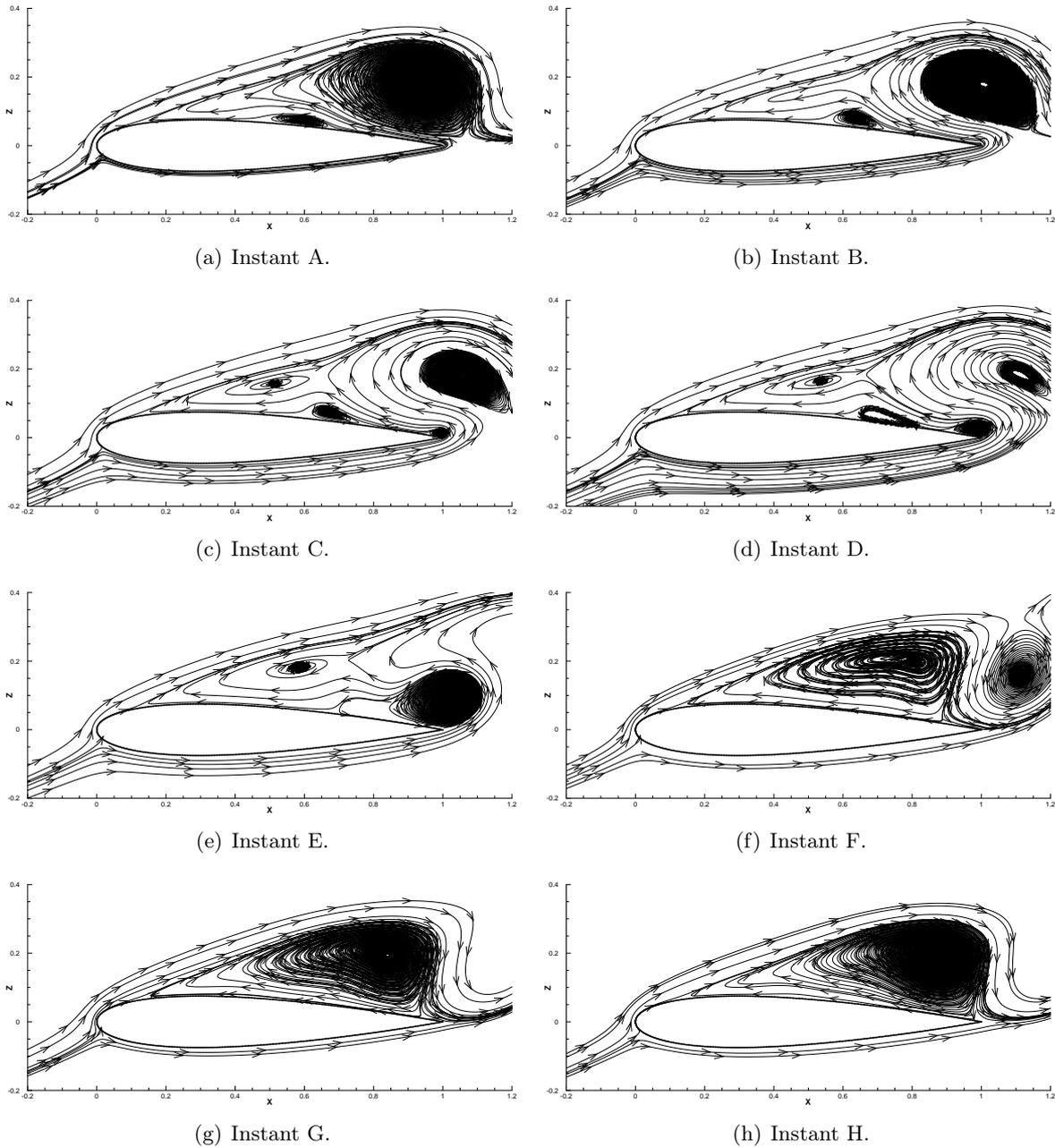
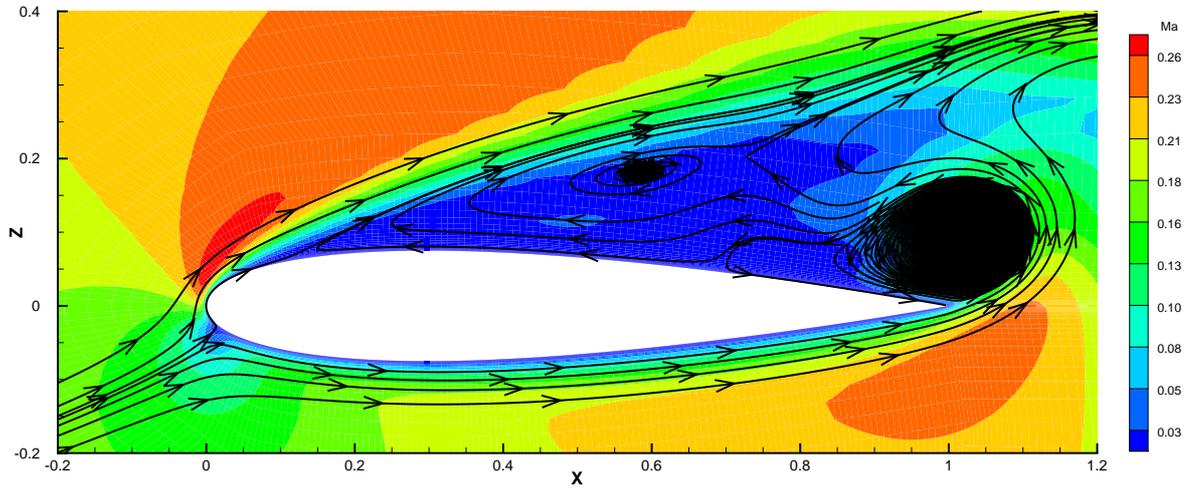
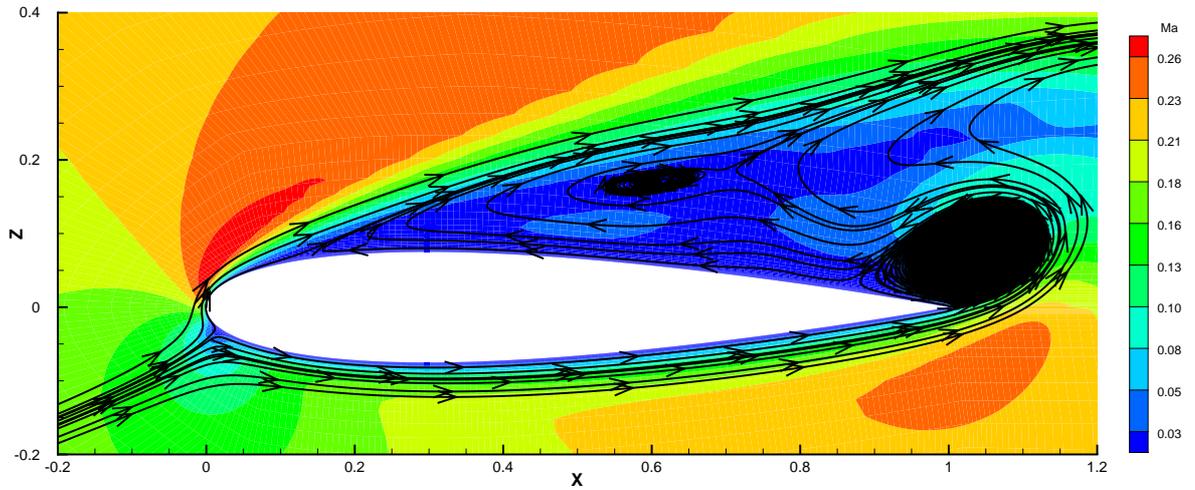


FIG. 4.13 – Représentation des lignes de courant au cours d'un cycle d'oscillation de portance (cf. figure 4.8) du profil NACA 0015 à  $16^\circ$  d'incidence calculé par le logiciel FLUENT.



(a) Calcul FLUENT.



(b) Calcul AEROLOG avec le schéma de LAX-WENDROFF.

FIG. 4.14 – Plages d'isovaleurs du nombre de MACH et lignes de courant à l'instant E (cf. figure 4.8) du cycle d'oscillation de portance du profil NACA 0015 à  $16^\circ$  d'incidence calculé par AEROLOG avec le schéma de LAX-WENDROFF (b) et par FLUENT (a).

## 4.2 Écoulements turbulents autour d'un profil NACA 0012

Pour achever la validation des méthodes de simulation des écoulements stationnaires implémentées dans AEROLOG, nous allons nous pencher sur un cas d'écoulement turbulent. Cet écoulement autour d'un profil NACA 0012 a déjà été étudié à la section 3.1 à une incidence de  $1,5^\circ$  avec une approche en pas de temps local. Dans une première étape, nous allons étudier à nouveau cet écoulement mais nous mènerons une simulation instationnaire précise en temps. Cela permet d'examiner le comportement des méthodes sur un cas d'écoulement non plus laminaire mais turbulent ; cependant les phénomènes physiques restent relativement simples puisque la couche limite est attachée. Nous analyserons enfin un écoulement autour du même profil NACA 0012 à une incidence de  $4^\circ$  où l'écoulement est alors instationnaire (cf. figure 3.1 page 94). Outre l'incidence, les conditions des écoulements que nous allons examiner sont les mêmes que précédemment : un nombre de MACH  $Ma = 0,775$  et un nombre de REYNOLDS basé sur la corde du profil et l'état en amont à l'infini  $Re = 9,9 \times 10^6$ . Les maillages utilisés sont également les mêmes que ceux décrits à la section 3.1 (pages 95 et suivantes).

### 4.2.1 Écoulement attaché autour d'un profil NACA 0012 à $1,5^\circ$ d'incidence.

À  $1,5^\circ$  d'incidence, nous avons vu que l'écoulement autour du profil NACA 0012 était attaché et stationnaire. Nous avons donc mené une simulation avec une approche en pas de temps local qui est suffisante pour prédire l'écoulement stationnaire solution des équations. Cependant, nous pouvons également mener une simulation avec une approche consistante en temps, afin de calculer l'évolution de l'écoulement durant le régime transitoire vers l'établissement de cet écoulement stationnaire, à partir de la condition initiale d'écoulement uniforme. En effet, bien que l'écoulement soit turbulent, sa topologie reste assez simple, étant donné qu'il n'y a pas de décollement de la couche limite.

Sur le maillage n° 2 (cf. figure 3.3 page 96), nous avons donc mené trois calculs avec la technique de pas de temps fictif :

- un calcul avec AEROLOG en utilisant le schéma de LAX-WENDROFF associé au lissage implicite des résidus ; le pas de temps physique vaut  $\Delta t = 10^{-4}$  s, le nombre  $CFL^*$  relatif au temps fictif vaut  $CFL^* = 1$  et les coefficients de viscosité valent  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$  et  $C\mu_2 = 2 \times 10^{-1}$  ; dans chaque pas de temps physique, soit on effectue 250 itérations, soit les résidus perdent deux ordres de grandeur par pas de temps pour atteindre l'état pseudo-stationnaire (le premier des deux critères atteint) ; la turbulence est modélisée par un modèle algébrique de BALDWIN-LOMAX ; on notera « LW-LIR-BL »
- un calcul avec AEROLOG en utilisant le schéma à pas de temps caractéristique associé à la phase implicite sans matrice ; le pas de temps physique vaut  $\Delta t = 10^{-4}$  s, le nombre  $CFL^*$  relatif au temps fictif vaut  $CFL^* = 10^4$  et les coefficients de viscosité valent  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$  et  $C\mu_2 = 2 \times 10^{-1}$  ; dans chaque pas de temps physique, soit on effectue 250 itérations, soit les résidus perdent deux ordres de grandeur par pas de temps pour atteindre l'état pseudo-stationnaire ; la turbulence est modélisée par un modèle algébrique de BALDWIN-LOMAX ; on notera « SPTC-SM-BL » ;
- un calcul avec FLUENT où l'on a choisi de modéliser la turbulence à l'aide d'une équation de transport de SPALART-ALLMARAS ; on notera « décentré-SA ».

Les figures 4.15 et 4.16 présentent l'évolution temporelle des coefficients aérodynamiques globaux lors de ces calculs et le tableau 4.3 retient les valeurs finales obtenues après que l'écoulement est devenu stationnaire. On peut déjà noter un écart entre les résultats des calculs en pas de temps fictif avec AEROLOG et avec FLUENT ; ces deux logiciels n'utilisent pas la même modélisation de la turbulence, et l'écart évolue au cours du temps ; nous tenterons de

déterminer l'origine de cet écart. On note également un écart entre les coefficients calculés par FLUENT avec une approche en pas de temps local et une approche en pas de temps fictif ; avec AEROLOG cependant, les écarts entre l'approche en pas de temps local et en pas de temps fictif sont faibles (inférieurs à 1,5 %). Nous allons donc nous pencher sur les écarts qui existent, avec une approche en pas de temps fictif, entre FLUENT et AEROLOG, les écarts entre les solutions calculées avec le schéma de LAX-WENDROFF et le schéma à pas de temps caractéristique étant faibles, comme nous allons également le confirmer par la suite.

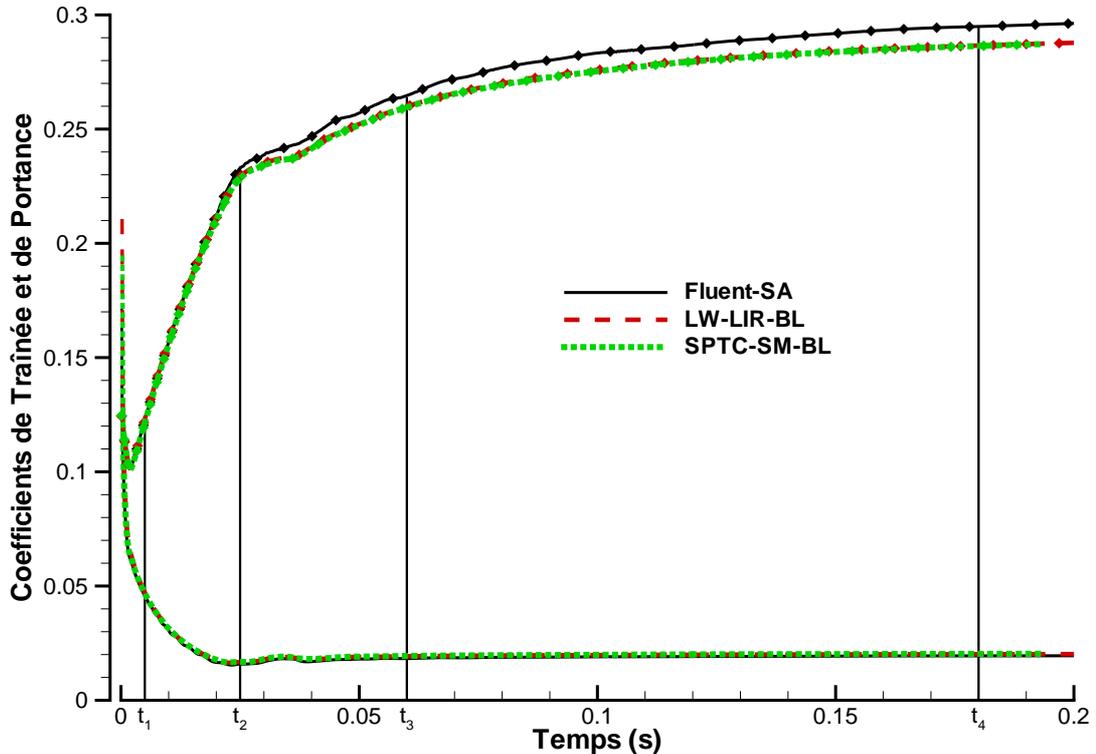
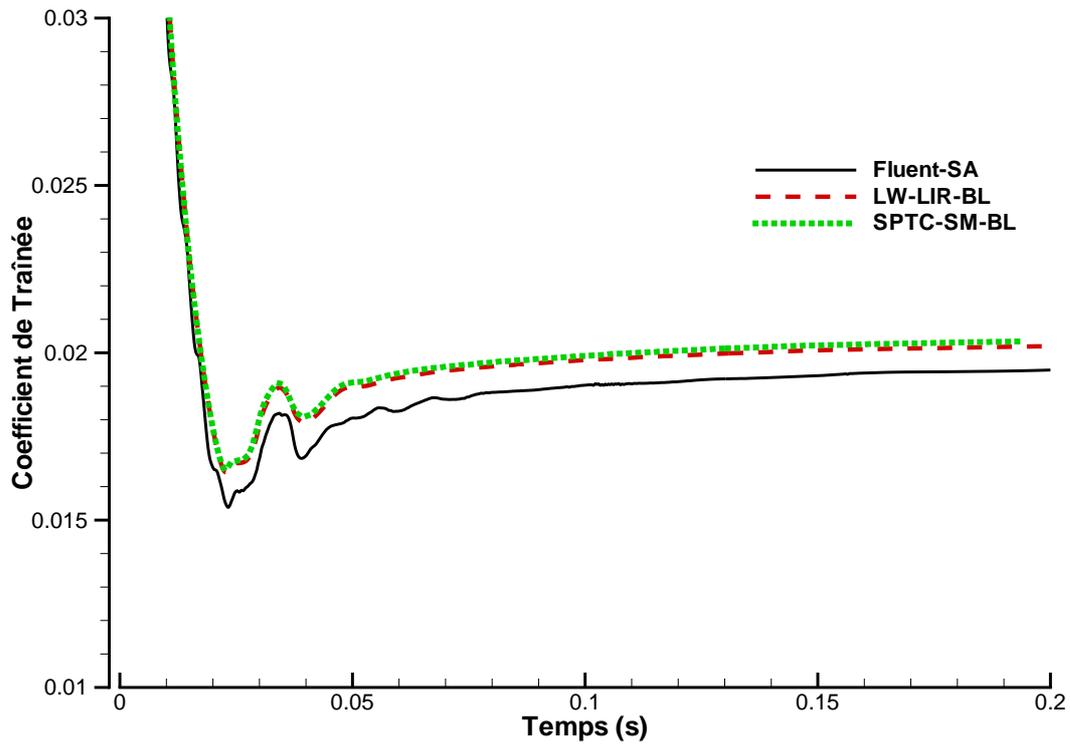


FIG. 4.15 – Évolution temporelle des coefficients aérodynamiques globaux pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à  $1,5^\circ$  d'incidence menés avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2 en pas de temps fictif.

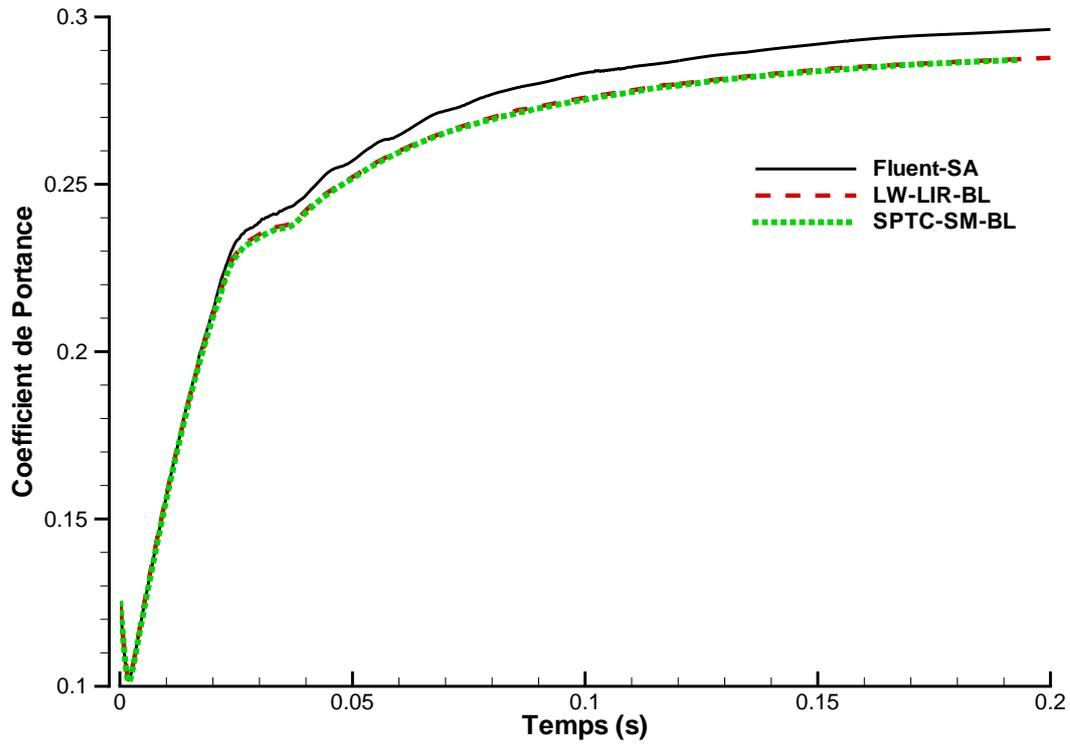
Logiciel	Schéma	Coef. de traînée		Coef. de portance	
		PTF	PTL	PTF	PTL
FLUENT	décentré-SA	0,0195	0,0212	0,2978	0,2890
AEROLOG	LW-LIR-BL	0,0203	0,0203	0,2915	0,2919
AEROLOG	SPTC-SM-BL	0,0203	0,0205	0,2872	0,2915

TAB. 4.3 – Valeurs des coefficients de traînée et de portance obtenues pour les simulations en pas de temps fictif (PTF) d'écoulements autour d'un profil NACA 0012 à  $1,5^\circ$  d'incidence – rappel des valeurs obtenues avec une approche en pas de temps local (PTL, cf. tableau 3.1 page 99).

On peut observer sur la figure 4.16 que l'écart entre les solutions données par FLUENT et AEROLOG apparaît de manière assez brusque à un temps proche de  $t_2 = 0,025$  s et ne cesse de croître ensuite. Nous allons donc étudier la solution à quatre instants différents lors de la mise en place de cet écoulement stationnaire :  $t_1 = 0,005$  s,  $t_2 = 0,025$  s,  $t_3 = 0,060$  s et



(a) Coefficient de traînée.



(b) Coefficient de portance.

FIG. 4.16 – Détails des évolutions temporelles des coefficients aérodynamiques globaux pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à  $1,5^\circ$  d'incidence menés avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2 en pas de temps fictif.

$t_4 = 0,180$  s. La figure 4.17 présente la répartition du coefficient de pression à la paroi pour ces quatre instants. À l'observation de cette figure, on note que ces répartitions de pression sont très proches, tout au long du régime transitoire, pour les deux logiciels utilisés. Seule une petite différence existe entre les solutions calculées par AEROLOG et par FLUENT à proximité des chocs ; ce caractère dissipatif des méthodes numériques mise en œuvre dans AEROLOG a déjà été observé auparavant ; il est notamment dû à l'utilisation d'une viscosité artificielle.

Les figures 4.18 et 4.19 présentent les valeurs de nombre de MACH pour les solutions calculées aux quatre instants précités. Globalement l'accord entre les solutions calculées est satisfaisant ; on retrouve des oscillations à proximité du choc dans les solutions calculées par AEROLOG. On observe également (cf. notamment figure 4.19(d)) que la zone située au pied du choc, en aval, diffère légèrement d'une solution à l'autre. Il semble donc que les écarts de traînée et de portance qui apparaissent à  $t_2 = 0,025$  s soient dus au léger écart de pression présent en amont du choc – cet écart apparaît également à partir de  $t_2 = 0,025$  s – et au sillage proche de la paroi en aval du choc, qui diffère légèrement entre les différentes solutions et détermine le positionnement précis du choc et donc les valeurs des coefficients aérodynamiques globaux.

Cependant, les écarts entre les solutions calculées par AEROLOG et par FLUENT restent faibles (4% maximum) et il faut bien noter que ces comparaisons ont été effectuées avec des modèles de turbulence différents. Cette simulation permet assurément de valider la capacité de ces nouvelles méthodes numériques à calculer correctement une évolution instationnaire d'écoulement turbulent non décollé. Le caractère dissipatif des schémas disponibles dans AEROLOG, introduit par la nécessité d'ajouter une viscosité artificielle, reste toutefois présent.

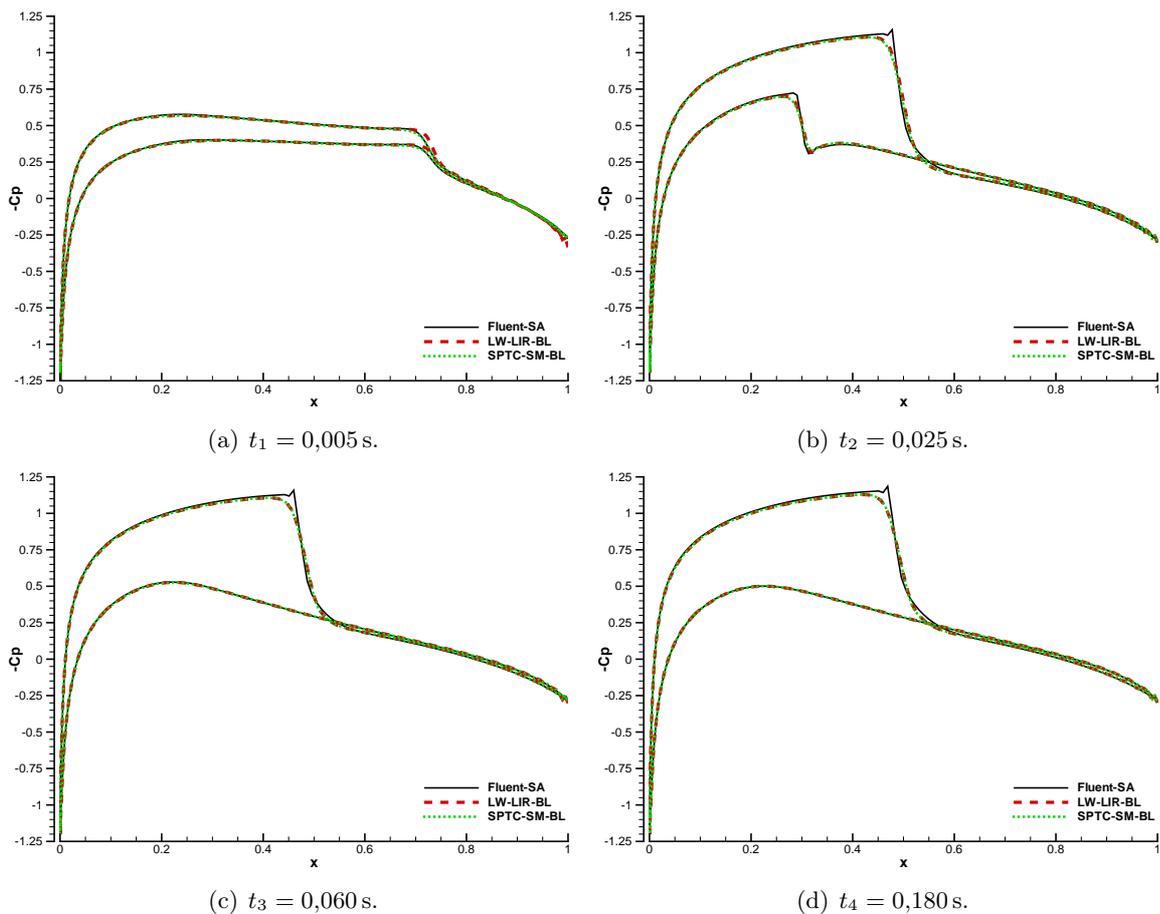


FIG. 4.17 – Répartitions du coefficient de pression pariétale au cours des calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à  $1,5^\circ$  d'incidence menés avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2 en pas de temps fictif.

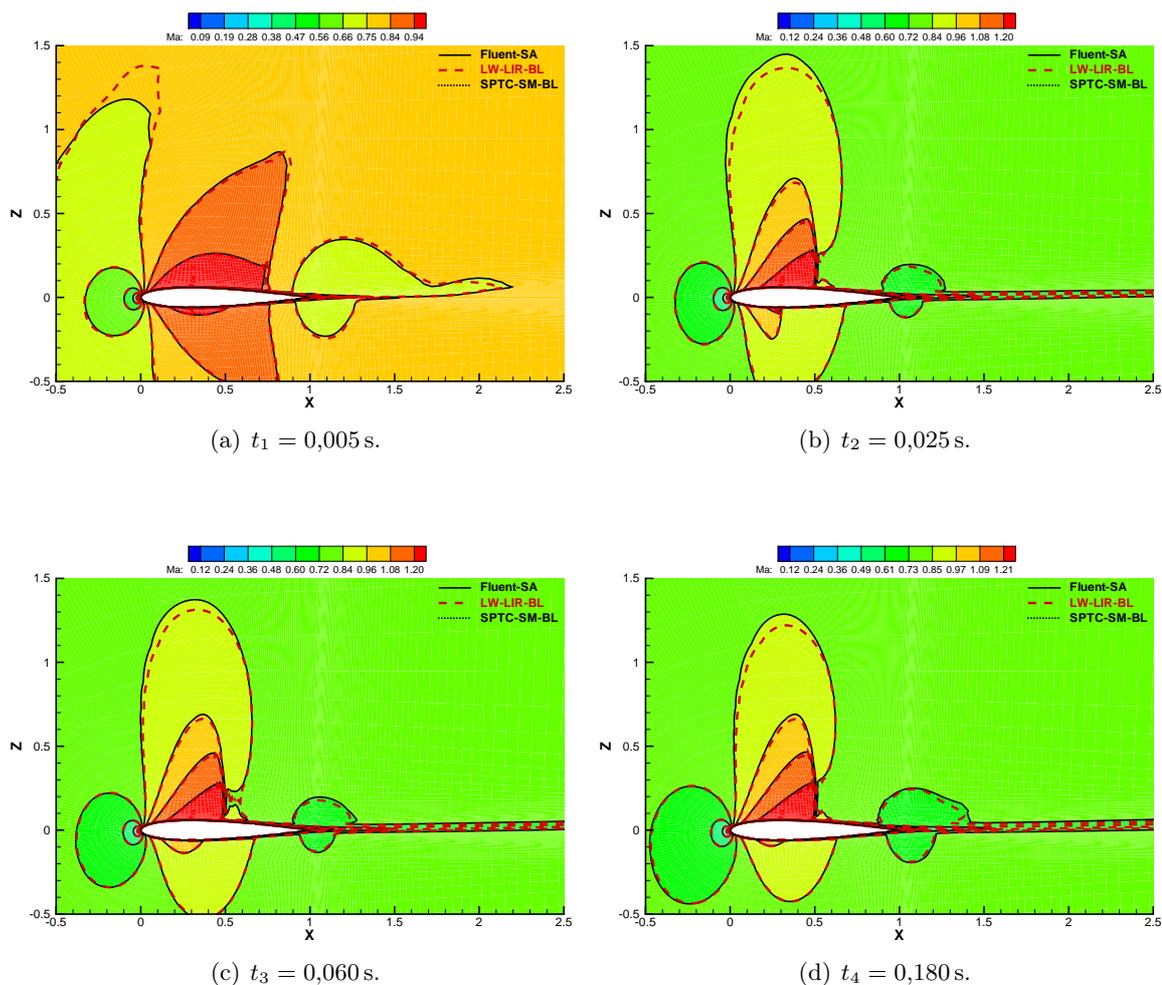


FIG. 4.18 – Plages et lignes d'isovaleurs du nombre de MACH au cours des calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à  $1,5^\circ$  d'incidence menés avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2 en pas de temps fictif.

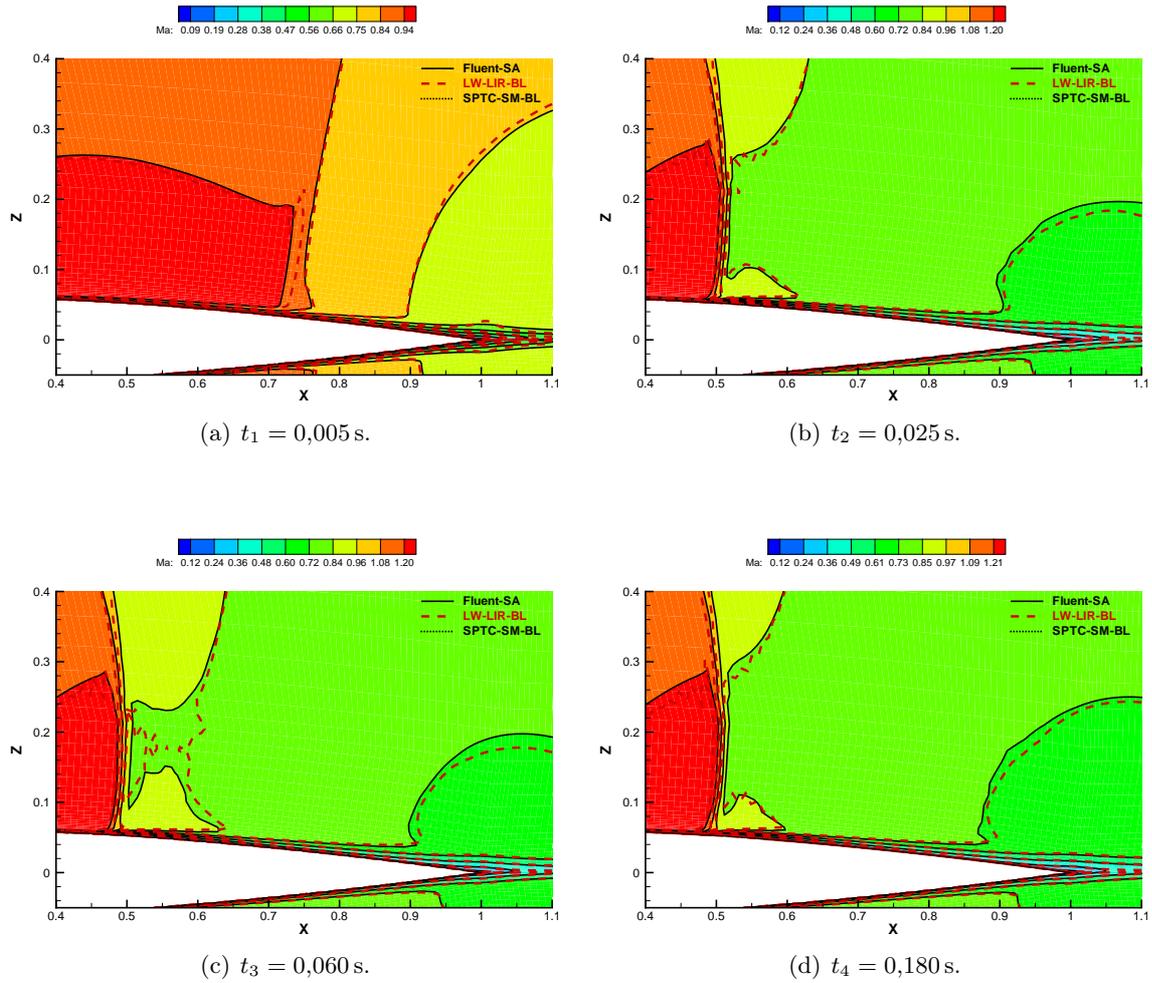


FIG. 4.19 – Plages et lignes d'isovaleurs du nombre de MACH au cours des calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à  $1,5^\circ$  d'incidence menés avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2 en pas de temps fictif – détail du choc et du bord de fuite à l'extrados.

### 4.2.2 Écoulement décollé autour d'un profil NACA 0012 à 4° d'incidence.

Après avoir simulé l'établissement d'un écoulement stationnaire turbulent autour d'un profil NACA 0012, à une incidence suffisamment faible pour que la couche limite ne décolle pas, nous allons tenter de simuler maintenant une configuration avec une incidence plus haute, où se produit alors un décollement de la couche limite qui rend l'écoulement instationnaire. Cette configuration possède toutes les caractéristiques des applications visées, hormis le caractère tridimensionnel : instationnaire, turbulent, transsonique, impliquant un phénomène d'interaction entre une onde de choc et une couche limite...

À cette incidence, nous avons mené un calcul avec la maquette numérique sur le maillage n° 1 ; la turbulence y est prise en compte à travers un modèle de BALDWIN-LOMAX. Nous avons également mené des calculs sur le maillage n° 2 avec AEROLOG et FLUENT :

- un calcul avec AEROLOG, le schéma de LAX-WENDROFF, le lissage implicite des résidus ;  $\Delta t = 10^{-4}$  s,  $CFL^* = 1$ ,  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$  et  $C\mu_2 = 2 \times 10^{-1}$  ; le critère de convergence dans chaque pas de temps est fixé à 200 itérations ou trois ordres de grandeur perdus par les résidus ; la turbulence est modélisée par un modèle algébrique de BALDWIN-LOMAX ; on notera « LW-LIR-BL »
- un calcul avec AEROLOG, le schéma à pas de temps caractéristique, la phase implicite sans matrice ;  $\Delta t = 10^{-4}$  s,  $CFL^* = 10^4$ ,  $C\mu_0 = 2 \times 10^{-3}$  et  $C\mu_2 = 2 \times 10^{-1}$  ; le critère de convergence dans chaque pas de temps est fixé à 200 itérations ou trois ordres de grandeur perdus par les résidus ; la turbulence est modélisée par un modèle algébrique de BALDWIN-LOMAX ; on notera « SPTC-SM-BL » ;
- un calcul avec FLUENT où l'on a choisi de modéliser la turbulente à l'aide d'une équation de transport de SPALART-ALLMARAS ; on notera « FLUENT-SA » ;
- un calcul avec FLUENT où l'on a choisi de modéliser la turbulente à l'aide de deux équations de transport de  $k$  et  $\epsilon$  ; on notera « FLUENT- $k$ - $\epsilon$  ».

Les critères de convergence choisis pour les calculs effectués avec AEROLOG permettent d'assurer une diminution des résidus de 1,7 ordres en moyenne pour le schéma de LAX-WENDROFF et de 2,2 ordres pour le schéma à pas de temps caractéristique.

Les figures 4.20 et 4.21 présentent l'évolution temporelle des coefficients aérodynamiques globaux lors des premiers instants (régime transitoire et début de la première période). On peut tout d'abord noter que ces résultats peuvent être classés en trois catégories :

- le calcul avec la maquette et le calcul avec FLUENT et le modèle de turbulence «  $k$ - $\epsilon$  » qui prédisent tous deux une évolution instationnaire des coefficients aérodynamiques globaux avec une évolution périodique établie, dont la fréquence, la valeur moyenne et l'amplitude peuvent être mesurées ; ces valeurs, en particulier valeur moyenne et amplitude, sont cependant assez différentes pour ces deux cas ;
- le calcul avec FLUENT et le modèle de turbulence de SPALART-ALLMARAS qui prédit un comportement oscillant qui va s'amortir rapidement, après quelques pseudo-périodes ;
- les deux calculs effectués avec AEROLOG, qui prédisent après un régime transitoire relativement court, une évolution stationnaire des coefficients aérodynamiques globaux.

Afin de faciliter l'analyse des résultats obtenus, il est important de les situer dans le contexte plus large de la simulation des écoulements turbulents instationnaires. Soulignons donc en premier lieu que l'on s'attend à voir apparaître une disparité des résultats de ces simulations des équations de NAVIER-STOKES moyennées en fonction du modèle de turbulence utilisé. Il existe en effet une série de références [40], [18], [9] et [44] qui confirment l'influence du choix de modèle sur la prédiction du phénomène de tremblement. Ainsi il n'y a pas lieu d'être particulièrement surpris, par exemple, de la différence de comportement, sur un même maillage et avec un même schéma, entre le modèle  $k$ - $\epsilon$  et le modèle de SPALART-ALLMARAS de FLUENT,

ce dernier conduisant finalement à un écoulement stationnaire alors que le premier permet de décrire, au moins qualitativement, le phénomène d'oscillations de choc auto-entretenues. Finalement, le point le plus surprenant dans l'analyse globale de ces résultats est la différence de comportement entre la maquette numérique et AEROLOG, ces deux codes de calcul étant mis en œuvre sur le même maillage et avec le même modèle de turbulence. Les travaux existants déjà cités n'ont, en effet, pas montré d'influence déterminante du schéma de résolution sur la prédiction qualitative du phénomène de tremblement. De plus, nos simulations précédemment effectuées ont montré, en général, un bon accord entre les résultats obtenus par la maquette numérique et AEROLOG. Nous souhaitons donc essentiellement éclaircir les causes de ce comportement du logiciel AEROLOG qui nous semble anormal puisque, sur la base de l'expérience acquise avec la maquette numérique, les oscillations de choc auto-entretenues devraient être, au moins qualitativement, prédites par le modèle de BALDWIN-LOMAX.

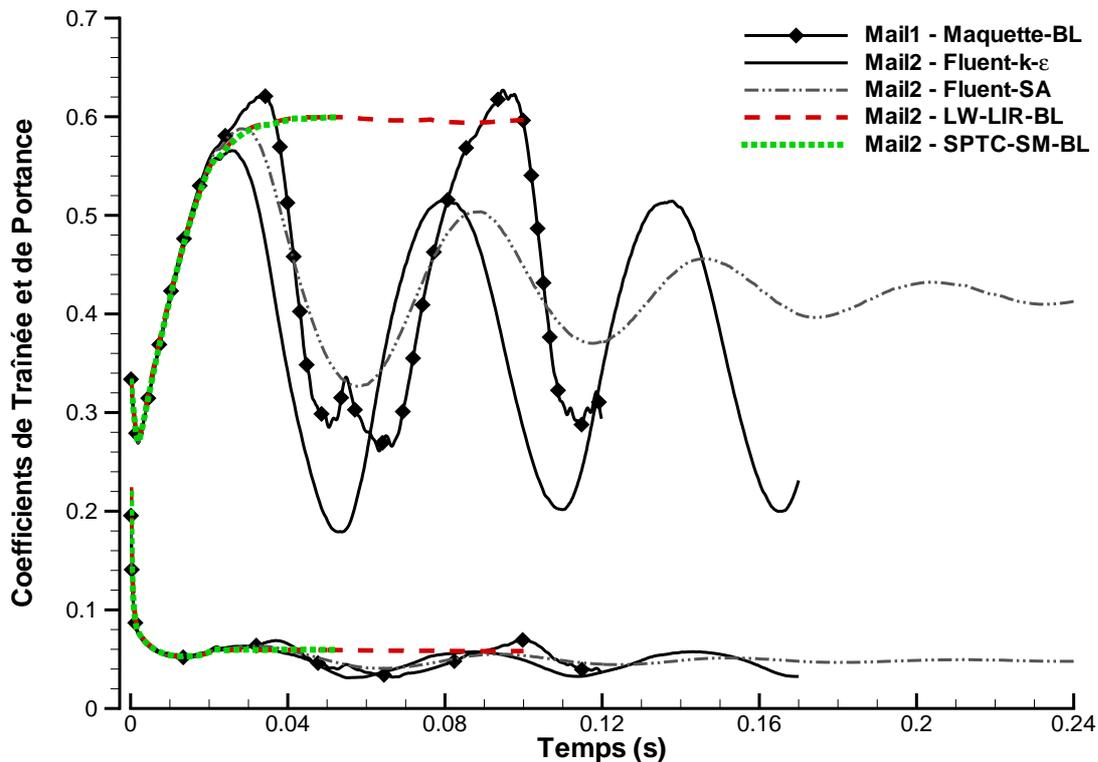
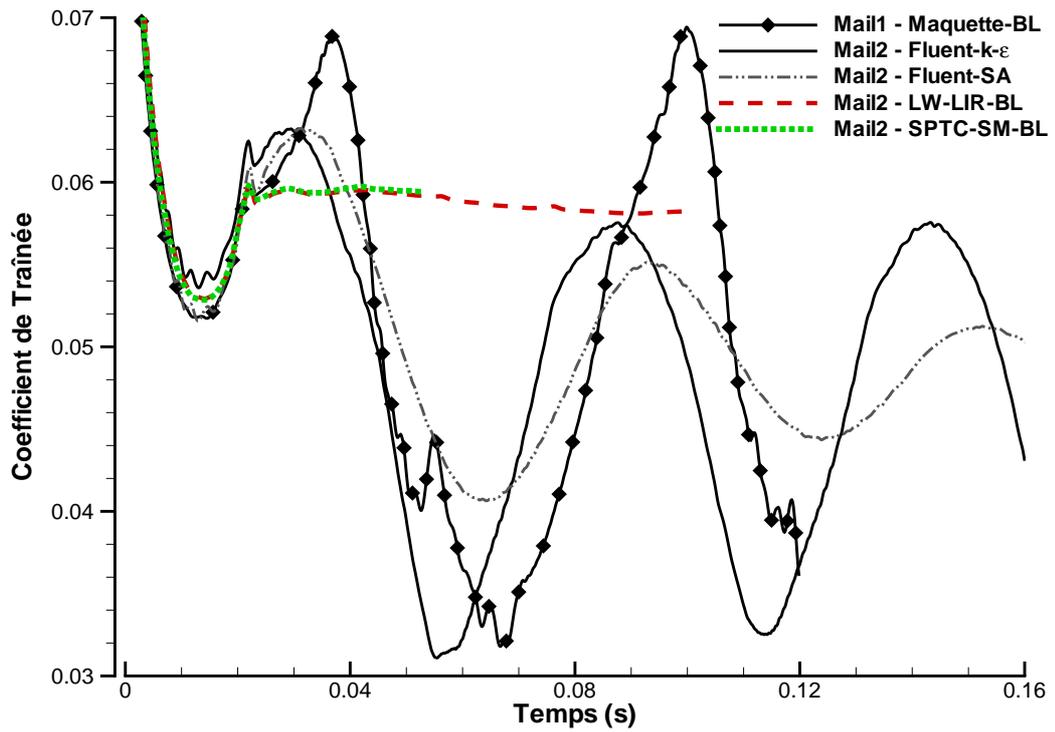


FIG. 4.20 – Évolution temporelle des coefficients aérodynamiques globaux pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à  $4^\circ$  d'incidence menés en pas de temps fictif avec la maquette numérique sur le maillage n° 1 et avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2.

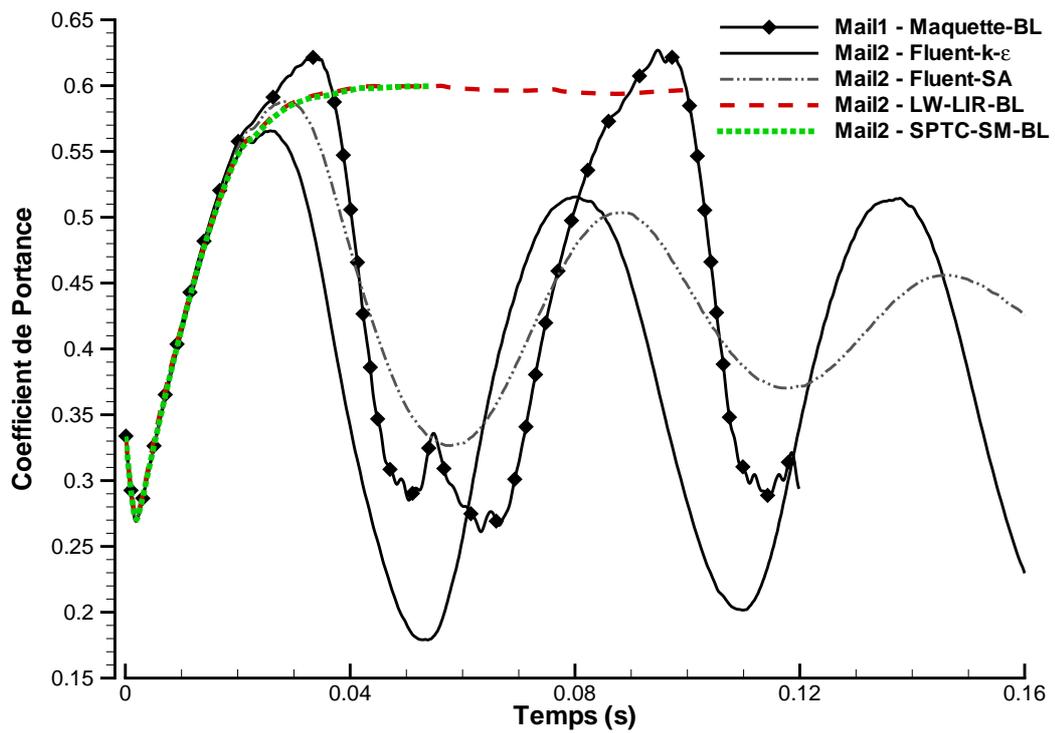
Afin de mieux comprendre les phénomènes mis en jeu lors du régime transitoire, qui vont permettre ou non une évolution instationnaire périodique de l'écoulement, nous allons analyser trois calculs différents sur le maillage n° 2 :

- le calcul avec FLUENT et le modèle de turbulence  $k-\epsilon$  ;
- le calcul avec FLUENT et le modèle de turbulence de SPALART-ALLMARAS ;
- le calcul avec AEROLOG, le schéma à pas de temps caractéristique, phase implicite sans matrice et modèle de turbulence de BALDWIN-LOMAX.

Au cours du régime transitoire, il a été choisi quatre instants différents (cf. figure 4.22) pour comparer les solutions obtenues. Les deux premiers instants  $t_1 = 63 \times 10^{-4}$  s et  $t_2 =$



(a) Coefficient de traînée.



(b) Coefficient de portance.

FIG. 4.21 – Détails des évolutions temporelles des coefficients aérodynamiques globaux pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à  $4^\circ$  d'incidence menés en pas de temps fictif avec la maquette numérique sur le maillage n° 1 et avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2.

$133 \times 10^{-4}$  s sont situés dans la zone où le coefficient de traînée diminue. Le troisième instant  $t_3 = 238 \times 10^{-4}$  s correspond au changement de comportement de la simulation effectuée avec AEROLOG par rapport aux deux autres. Enfin le dernier instant  $t_4 = 308 \times 10^{-4}$  s correspond au moment où la traînée prédite par FLUENT amorce une diminution. La figure 4.23 présente les répartitions du coefficient de pression pariétale pour ces quatre instants alors que la figure 4.24 présente les répartitions du coefficient de frottement ; la figure 4.25 enfin présente les isovaleurs de nombre de MACH.

Au vu des courbes de pression (cf. figures 4.23(a)-(b)) et de nombre de MACH (cf. figures 4.25(a)-(c)), on remarque que les solutions aux deux premiers instants  $t_1$  et  $t_2$  sont relativement semblables ; seuls les chocs ne sont pas prédits de manière identique : il existe un très léger décalage entre les deux calculs effectués avec FLUENT et le calcul mené avec AEROLOG dissipe légèrement le choc ; ceci explique les 5 % d'écart sur le coefficient de traînée constatés sur la figure 4.22. Cependant la prédiction des coefficients de frottement (cf. figures 4.24(a)-(b)) est assez différente d'une solution à l'autre. En effet, outre l'important dépassement prédit par AEROLOG au bord de fuite, dont on a déjà parlé (cf. section 3.1 page 103) mais qui est ici encore plus important que précédemment, les niveaux de frottement de ces trois solutions sont relativement différents, et en particulier sur la figure 4.24(b) le comportement de l'écoulement calculé avec FLUENT et le modèle  $k-\epsilon$  diffère des deux autres, puisque le frottement ne s'annule pas à l'abscisse  $x = 0,6$  m. D'une manière générale le frottement prédit par FLUENT et le modèle  $k-\epsilon$  est assez nettement supérieur au frottement prédit par FLUENT et le modèle de SPALART-ALLMARAS et par AEROLOG, la prédiction de la position des chocs restant cependant quasiment identique – pour ces deux premiers instants – d'un calcul à l'autre.

Au troisième instant  $t_3$ , les trois solutions que l'on compare deviennent complètement différentes dans la zone de l'extrados au niveau du choc et en aval de celui-ci. Sur la figure 4.23(c) on constate que la solution calculée par AEROLOG à l'extrados est sensiblement la même qu'à l'instant  $t_2$  alors que FLUENT prédit un choc nettement moins dissipé. Les figures 4.25(e)-(f) montrent que la position du pied de choc est décalée d'une solution à l'autre alors que plus loin dans le fluide (par exemple  $y = 0,4$  m) le choc est situé au même endroit pour les trois écoulements. Le problème semble donc se situer au pied du choc. La figure 4.24(c) nous permet de déterminer l'étendue du décollement de la couche limite provoqué par le choc :  $0,53 \text{ m} \leq x \leq 0,82 \text{ m}$  avec FLUENT et le modèle  $k-\epsilon$ ,  $0,54 \text{ m} \leq x \leq 0,86 \text{ m}$  avec FLUENT et le modèle SPALART-ALLMARAS et  $0,57 \text{ m} \leq x \leq 0,74 \text{ m}$  avec AEROLOG. Le décollement prédit par AEROLOG est deux fois plus petit que celui prédit par FLUENT. On voit donc déjà à cet instant un décalage conséquent de la position du pied de choc et un décollement nettement trop petit pour l'écoulement calculé avec AEROLOG.

Au quatrième instant, l'écoulement calculé par AEROLOG diffère très peu de celui calculé à l'instant  $t_3$  alors que ceux calculés par FLUENT ont continué à évoluer de façon assez importante. On note sur les figures 4.25(g)-(h) que le pied du choc calculé par FLUENT a encore avancé (de façon plus importante avec le modèle  $k-\epsilon$ ). La figure 4.24(d) nous renseigne sur l'étendue des décollements : pour les calculs effectués avec FLUENT, le décollement s'étend de  $x = 0,44$  m pour le modèle  $k-\epsilon$  et de  $x = 0,48$  m pour le modèle SPALART-ALLMARAS jusqu'au bord de fuite ; pour le calcul mené avec AEROLOG en revanche, le décollement est plus restreint  $0,53 \text{ m} \leq x \leq 0,82 \text{ m}$  ; il s'est légèrement étendu depuis l'instant  $t_3$ , mais son intensité reste faible.

Finalement, la limitation du décollement, qui ne s'étend pas jusqu'au bord de fuite au dernier instant analysé pour le calcul mené avec AEROLOG, est probablement la cause principale de l'évolution vers un état stationnaire au lieu d'un déclenchement d'oscillations auto-entretenues du système constitué de l'onde de choc et de la couche limite turbulente. De façon plus intéressante encore, l'analyse des simulations menées à l'aide du logiciel maquette, qui utilise

le même modèle de turbulence qu'AEROLOG, montre que le modèle de BALDWIN-LOMAX implémenté dans la maquette numérique prédit, à ce même instant, un décollement qui s'étend jusqu'au bord de fuite, comme dans le cas des modèles  $k-\epsilon$  et de SPALART-ALLMARAS de FLUENT. Cette comparaison nous a donc conduit à analyser plus en détail la mise en œuvre de ce modèle algébrique au sein d'AEROLOG (cf. annexe B). Deux différences sont alors apparues : l'une, assez habituelle, est relative à la simplification du modèle au niveau du sillage ; l'autre, plus difficile à déceler, correspond à une simplification, sans doute abusive, du modèle de couche externe. Nous synthétisons maintenant notre analyse de ce point particulièrement technique mais qui, en l'occurrence, joue un rôle important – au moins autant que le schéma de discrétisation – dans la capacité du code à simuler les écoulements turbulents instationnaires visés.

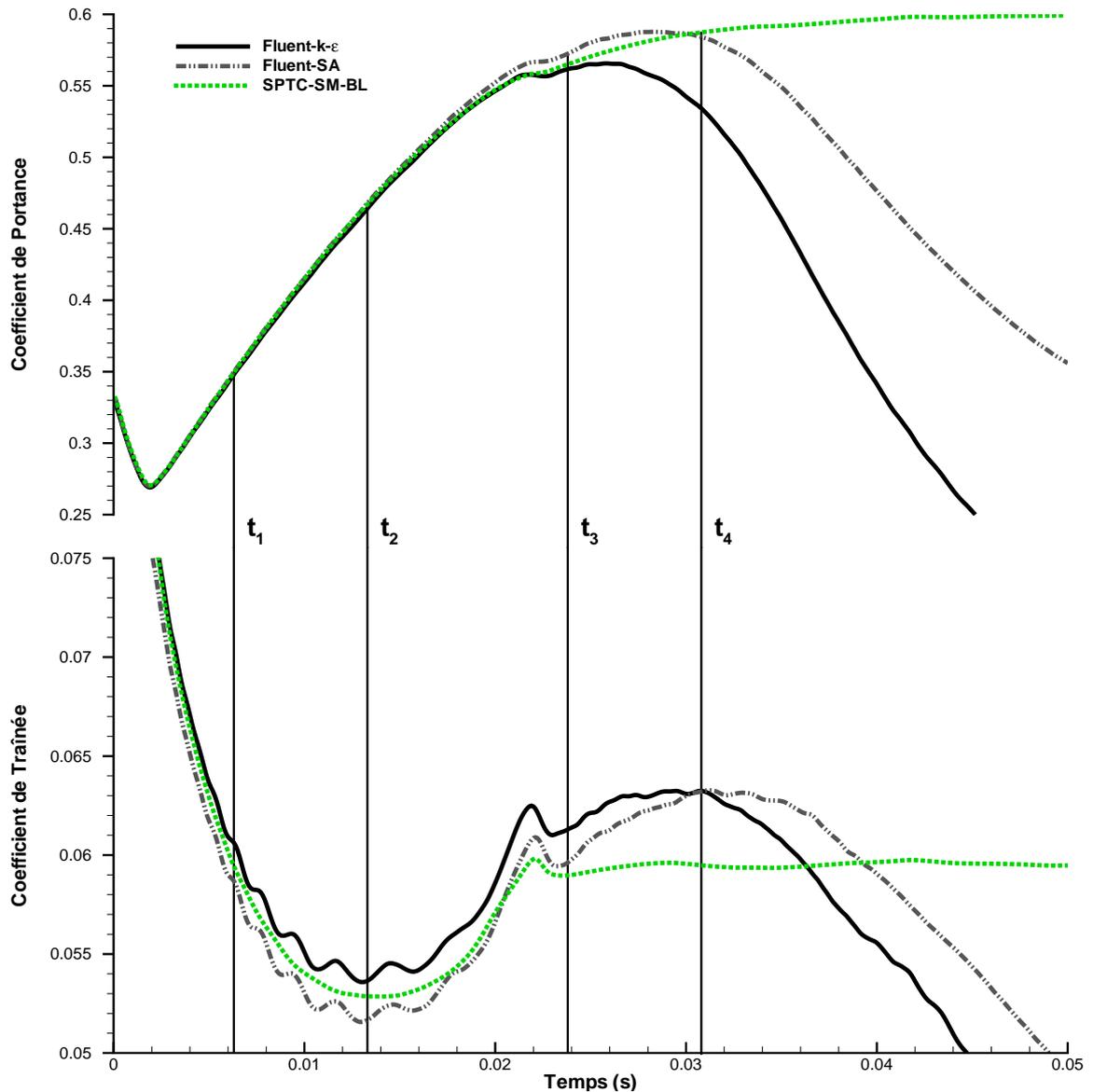


FIG. 4.22 – Évolution temporelle des coefficients aérodynamiques globaux dans le régime transitoire pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à  $4^\circ$  d'incidence menés en pas de temps fictif avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2.

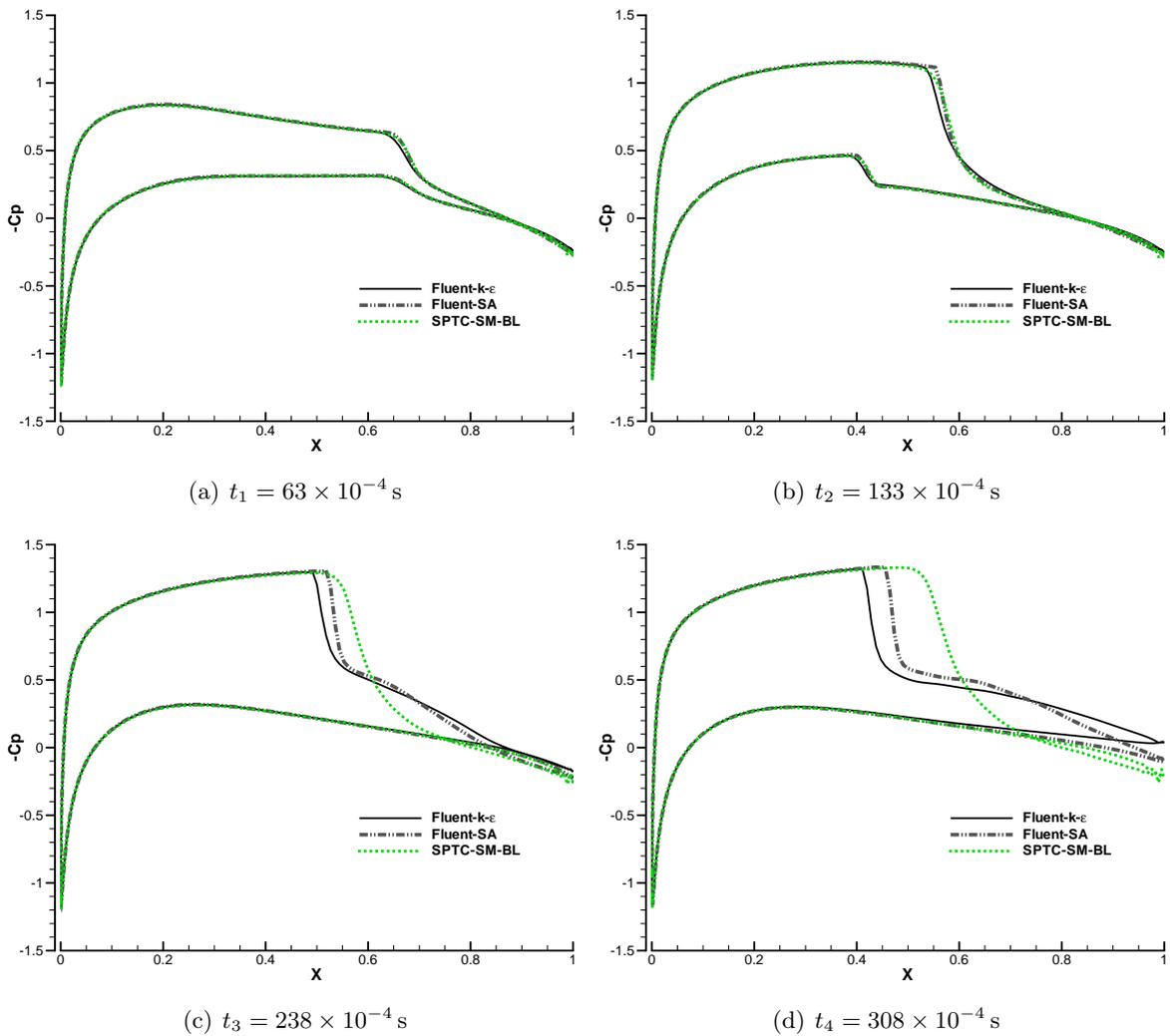


FIG. 4.23 – Répartition pariétale du coefficient de pression à quatre instants (cf. figure 4.22) du régime transitoire pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à  $4^\circ$  d'incidence menés en pas de temps fictif avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2.

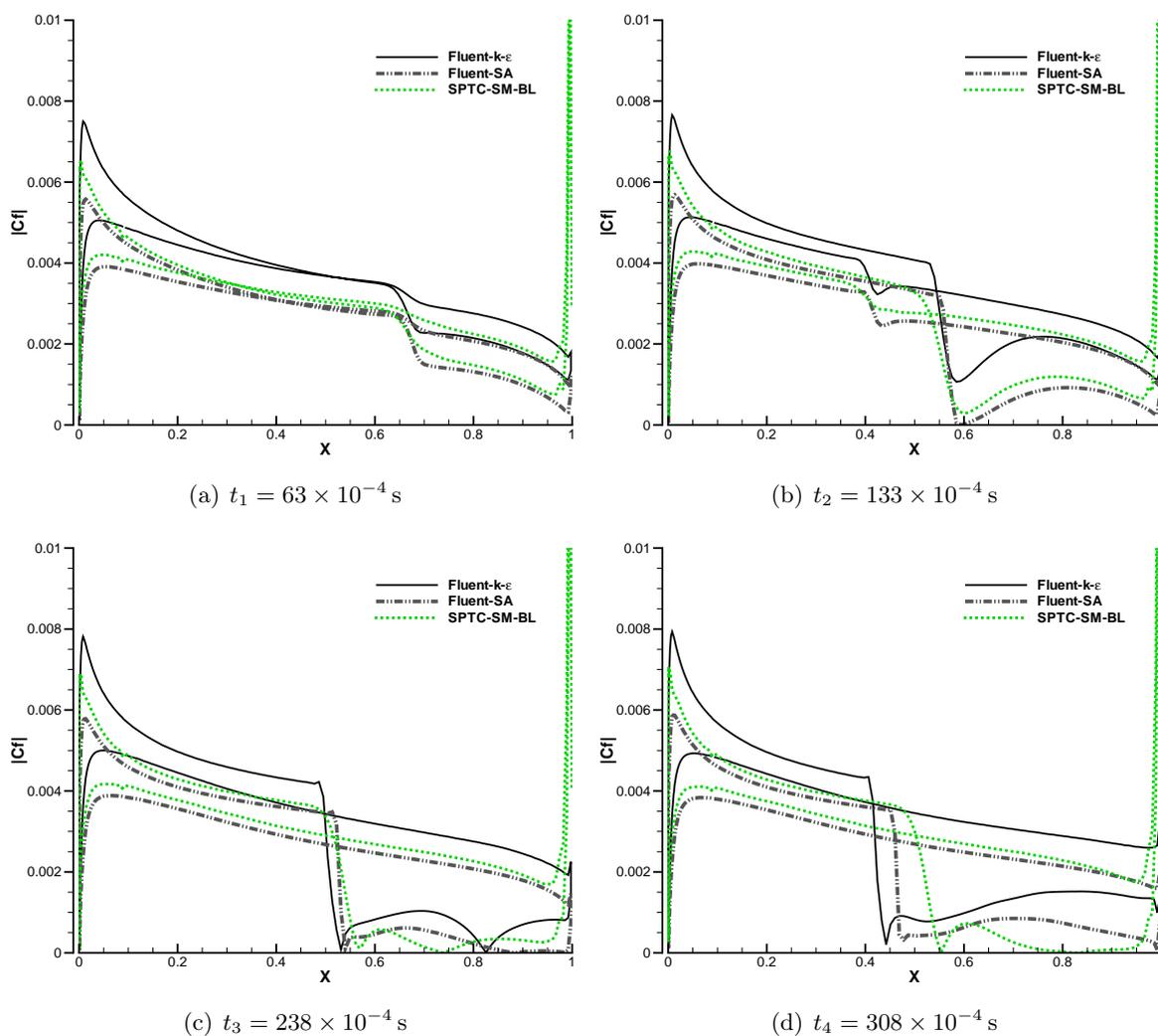


FIG. 4.24 – Répartition pariétale du coefficient de frottement à quatre instants (cf. figure 4.22) du régime transitoire pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à  $4^\circ$  d'incidence menés en pas de temps fictif avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2.

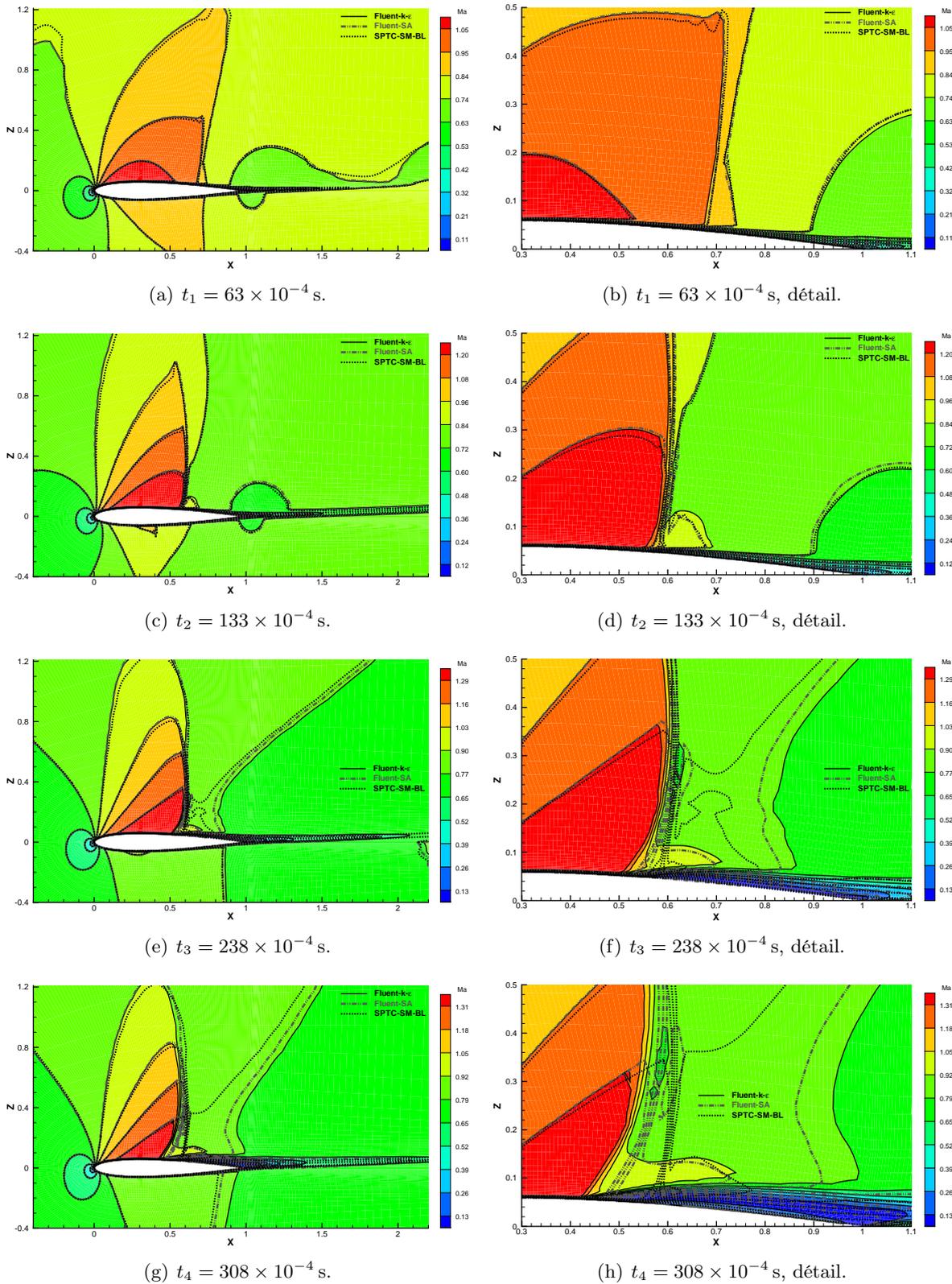


FIG. 4.25 – Plages et lignes d'isovaleurs du nombre de MACH à quatre instants (cf. figure 4.22) du régime transitoire pour les calculs d'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à  $4^\circ$  d'incidence menés en pas de temps fictif avec AEROLOG et FLUENT sur le maillage n° 2.

Le modèle de turbulence de BALDWIN-LOMAX [1] prévoit un traitement du coefficient  $(\mu_t)_e$  de la couche dite « externe » différent selon que l'on se situe en présence d'une paroi ou dans un sillage. Cependant, lorsque le point de calcul se situe dans un sillage, la mise en œuvre est légèrement plus complexe qu'en présence d'une paroi, puisqu'il faut calculer la vitesse minimale sur la ligne turbulente considérée et la distance du point au centre du sillage. De plus, dans le cas de configurations tridimensionnelles complexes (une aile en flèche attaché à un fuselage par exemple), le sillage de l'aile correspond encore à une zone en présence d'une paroi, la paroi du fuselage. Pour ces raisons, différents choix peuvent être faits :

- dans la maquette numérique, destinée à calculer uniquement des écoulements bidimensionnels autour de profils, la valeur de la viscosité turbulente  $\mu_t$  calculée en un point situé au droit du bord de fuite est reportée sur tous les points de la ligne de maillage du sillage correspondante, dans le sens de l'écoulement (cf. maillage figure 3.2 page 95) ;
- dans AEROLOG, le coefficient de viscosité turbulente  $\mu_t$  est uniquement calculé à partir des parois ; dans le cas particulier d'un écoulement bidimensionnel autour d'un profil, la viscosité turbulente est donc nulle dans le sillage.

Pour vérifier si cette utilisation partielle du modèle de turbulence de BALDWIN-LOMAX pouvait être à l'origine des problèmes rencontrés, la maquette numérique a été modifiée afin de reproduire ce comportement ( $\mu_t = 0$  dans le sillage). La courbe intitulée « Mail1 - Maquette-BL sans sillage » de la figure 4.26 présente l'évolution temporelle du coefficient de portance alors obtenue. Il semble que cette modification du modèle de turbulence affecte effectivement la solution obtenue mais ne remette pas en cause son caractère instationnaire périodique.

Il a donc fallu chercher ailleurs la cause du comportement réellement atypique d'AEROLOG. En pratique, cette recherche a été délaissée pendant quelque temps pour se consacrer au deuxième volet de l'étude dédié à la conception aéroélastique optimale d'une aile mais nous avons néanmoins poursuivi parallèlement un travail régulier sur l'analyse précise de la mise en œuvre du modèle BALDWIN-LOMAX dans AEROLOG. Au moment de la rédaction de ce mémoire de thèse, il est apparu que la formulation de la partie externe (cf. annexe B.2) du coefficient de viscosité turbulente utilisée dans AEROLOG était une version simplifiée de celle de BALDWIN et LOMAX. Cette simplification a été également reproduite dans la maquette et le résultat obtenu est donné à la figure 4.26 avec la courbe intitulée « Mail1 - Maquette-BL modifié sans sillage ». Il semble bien que cette simplification, qui visiblement permet d'obtenir des résultats satisfaisants pour les écoulements turbulents dans lesquels la couche limite reste attachée à la paroi, empêche une prédiction correcte de cet écoulement instationnaire où la couche limite décolle de la paroi. Faute de temps, il n'a malheureusement pas été possible de modifier le modèle de turbulence dans AEROLOG de manière à revenir à une version plus complète qui aurait certainement permis une simulation correcte – au moins qualitativement – de ce phénomène instationnaire turbulent.

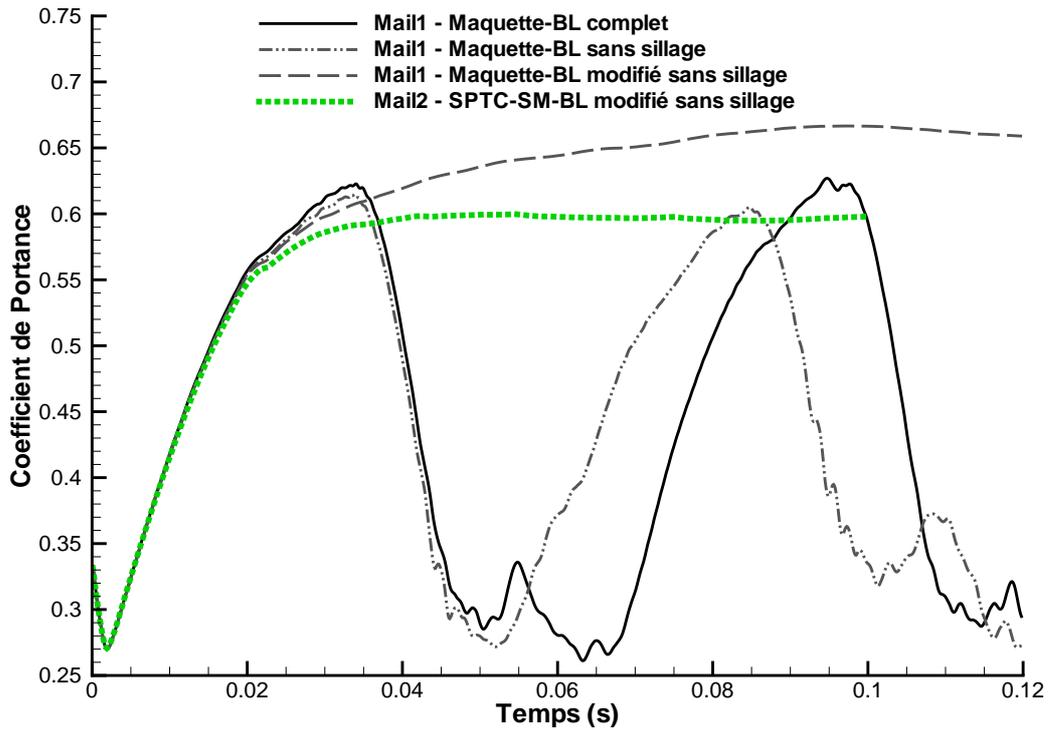


FIG. 4.26 – Évolution temporelle du coefficient de portance dans le régime transitoire pour les calculs d’écoulement autour d’un profil NACA 0012 à  $4^\circ$  d’incidence menés avec différents choix de formulation du modèle de turbulence de BALDWIN-LOMAX en pas de temps fictif avec la maquette sur le maillage n° 1 et avec AEROLOG sur le maillage n° 2.

# Conclusions

Dans cette première partie, nous avons donc présenté les méthodes numériques disponibles dans AEROLOG : le schéma de LAX-WENDROFF-NI et le lissage implicite des résidus, et la formulation particulière de ces méthodes basées sur un principe qualifié de « distribution » tel qu'énoncé par NI [38]. En respectant cette structure, nous avons introduit un nouveau schéma de résolution des écoulements dit « à pas de temps caractéristique » et une phase implicite adaptée qui reprend, dans la mesure du possible, les caractéristiques du lissage des résidus : des coefficients scalaires uniquement et une méthode de résolution peu coûteuse en mémoire. De plus il a été implémenté la technique de pas de temps fictif qui permet de mener des calculs instationnaires avec de grands pas de temps.

Ces modifications ont ensuite été validées sur des cas d'écoulements stationnaires puis instationnaires. On constate que ces nouvelles méthodes numériques nécessitent toujours l'adjonction d'une viscosité artificielle qui agit de façon prédominante sur la convergence du calcul ; la formulation adoptée pour cette viscosité artificielle et les valeurs des coefficients couramment utilisées sont spécialement adaptées à des cas d'écoulements transsoniques turbulents, rendant délicates la mise en œuvre et l'interprétation de calculs d'écoulements laminaires subsoniques. Cette adjonction de viscosité artificielle est en définitive rendue nécessaire par le choix d'utiliser un seul prédicteur des flux non visqueux, calculé aux centres des cellules de maillage, pour la discrétisation des flux consistants et dans l'expression de la dissipation, qui différencie le schéma de NI des autres schémas de type LAX-WENDROFF tels que le schéma multi-prédicteurs de LERAT.

Ce choix d'un schéma mono-prédicteur semble également limiter l'efficacité intrinsèque du schéma à pas de temps caractéristique. Ce manque d'efficacité est particulièrement préjudiciable dans le cas de calculs des écoulements instationnaires, où l'on désire que les résidus moyens atteignent rapidement une valeur donnée. En effet, dans ce cas le gain d'efficacité qu'apporte le schéma à pas de temps caractéristique par rapport au schéma de LAX-WENDROFF est très nettement insuffisant. Cependant, ce constat concerne la version actuelle du schéma à pas de temps caractéristique, telle que les valeurs propres de la matrice de dissipation soient construites avec le choix  $\varsigma(M) = \max |\lambda_M|$  (cf. paragraphe 2.2.4). Des travaux encore en cours au Laboratoire SINUMEF [37] concernant un choix d'expression de ce coefficient  $\varsigma(M)$  pourraient rendre le schéma intrinsèquement plus efficace tout en conservant une robustesse importante.

La phase implicite associée au schéma à pas de temps caractéristique est plus complète que le lissage implicite des résidus, puisqu'elle inclut, outre l'implicitation des flux dissipatifs, une implicitation des flux consistants. D'autre part, le système implicite est résolu par une méthode de relaxation ; un soin tout particulier pourrait certainement être apporté au codage informatique de cette étape, pour permettre d'économiser encore le nombre d'opérations utilisées. L'efficacité du schéma implicite construit pourrait également être améliorée à l'aide d'une approche multi-grilles. On peut autrement avoir recours à des phases implicites par

blocs, qui sont plus coûteuses à inverser, mais qui ont potentiellement une efficacité intrinsèque bien supérieure à celle de la phase sans matrice utilisée ici.

Ces premiers constats rendent partiellement inopérants les développements qui concernent le schéma à pas de temps caractéristique et la phase implicite associée puisque ceux-ci devaient permettre de diminuer le temps de restitution des calculs d'écoulements instationnaires turbulents. Cependant, compte tenu des possibilités d'améliorations énoncées, ce constat n'est pas nécessairement définitif. Par ailleurs, on note que ce nouveau schéma possède les mêmes propriétés de précision que le schéma de LAX-WENDROFF ; elles sont même meilleures à proximité des chocs où les oscillations parasites sont généralement diminuées ou supprimées. Ces propriétés de précision sont également vérifiées pour des configurations tridimensionnelles.

La simulation d'écoulements instationnaires turbulents est rendue possible grâce à la technique de pas de temps fictif. La précision en temps de cette méthode, qui peut aussi bien être associée au schéma de LAX-WENDROFF qu'au schéma à pas de temps caractéristique, est vérifiée, pourvu qu'une convergence suffisante vis à vis du temps fictif soit assurée à chaque pas de temps. Cependant ces méthodes ne sont pleinement efficaces que si elles sont associées à un schéma permettant une convergence rapide vers l'état pseudo-stationnaire à chaque pas de temps ; comme nous avons vu que cet objectif n'a pas été atteint, le coût de simulations instationnaires turbulentes reste élevé. Néanmoins, ces simulations instationnaires sont alors accessibles, ce qui n'était pas le cas avec une simple approche en pas de temps global.

Enfin il faut noter que la modélisation de la turbulence par le modèle de BALDWIN-LOMAX, tel qu'il a été mis en œuvre de façon simplifiée dans AEROLOG, ne permet pas de simuler correctement des écoulements instationnaires présentant un décollement de la couche limite. Une correction doit donc être apportée à la version actuelle du logiciel AEROLOG. Il faut cependant noter que la modélisation de la turbulence reste un point capital de la simulation d'écoulements instationnaires turbulents mettant en jeu des phénomènes complexes comme l'interaction d'un choc et d'une couche limite. Le choix minutieux des modèles et paramètres régissant la prise en compte de la turbulence dans le calcul s'avère souvent déterminant pour le succès de telles simulations (cf. notamment [18], [9] et [44]) et une évolution dans les choix de modélisation de la turbulence actuellement disponibles dans AEROLOG sera probablement indispensable pour obtenir une prédiction numérique fiable du phénomène de tremblement.

Deuxième partie

Conception aéroélastique optimale  
d'une aile de missile



## Chapitre 5

# Formulation du problème aéroélastique

La première partie de ce mémoire a été consacrée à l'amélioration d'outils numériques pour la simulation de phénomènes instationnaires ayant une origine purement aérodynamique. Outre ces phénomènes, les différents régimes de vol qu'emprunte un missile de croisière, et en particulier le régime transsonique, font apparaître des phénomènes complexes faisant intervenir à la fois l'aérodynamique et la structure du système. En effet, les missiles de croisière possèdent des ailes de grand allongement ; cette caractéristique rend ces ailes particulièrement sensibles aux charges aérodynamiques résultant de l'écoulement d'air qui les contourne. Sous cet effet, ces ailes se déforment et modifient, en retour, l'écoulement. Le couplage qui s'instaure ainsi peut aboutir soit à un équilibre statique où l'aile prend une forme constante dans le temps, soit à un équilibre dynamique avec apparition de cycles limite où l'aile subit une déformation périodique, soit enfin à la divergence de la structure entraînant un endommagement important de l'aile.

L'ensemble de ces phénomènes de couplage entre le fluide et la structure donne lieu à de nombreuses études dont les enjeux et les méthodes de simulations associés diffèrent fortement selon que l'on s'intéresse à l'aéroélasticité statique, à l'aéroélasticité dynamique avec apparition d'oscillation de cycles limite ou au phénomène divergent de flottement transsonique, selon que l'on se place dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel, selon que le type d'application est un aéronef à voilure fixe (avion, missile. . .), une turbomachine ou un aéronef à voilure tournante (hélicoptère). Si la simulation numérique des problèmes d'aéroélasticité statique est étudiée depuis plusieurs années déjà, l'étude plus récente des phénomènes de flottement transsonique et d'aéroélasticité dynamique fait aujourd'hui l'objet de nombreux travaux (cf. par exemple [3] et [19]). On pourra consulter [2] ou l'article [25] pour plus de détails sur ce panorama des problèmes aéroélastiques et de leur traitement numérique. Dans nos travaux, nous nous intéressons à un problème classique d'aéroélasticité statique mais l'originalité de notre étude va porter sur la possibilité d'exploiter les phénomènes aéroélastiques en vue d'améliorer la performance des missiles.

En effet, alors que l'on cherche généralement à fixer les conditions de vol du missile de façon à éviter l'apparition de ces phénomènes dynamiques qui peuvent entraîner un endommagement de la structure ou tout au moins à en limiter fortement les effets, les phénomènes d'aéroélasticité statique ne sont pas nécessairement néfastes à la structure, dès lors qu'ils sont pris en compte dans le dimensionnement des pièces et affectent, de façon positive ou négative, les performances des surfaces aérodynamiques (ailes, gouvernes. . .).

Pour mieux comprendre les phénomènes mis en jeu, nous présenterons, dans le premier chapitre, un calcul autour d'une configuration, composée d'une aile et d'un demi-fuselage, qui a fait l'objet d'une campagne d'essais [45]. Sur ce cas qui n'a pas fait l'objet d'un calcul couplé mais d'un calcul sur une géométrie déformée reconstruite à partir de mesures d'essais, nous verrons en quoi la prise en compte de la déformation due à l'écoulement joue sur les résultats obtenus. Nous verrons ensuite comment se formule l'étude de conception optimale d'une aile de missile de croisière que nous avons menée, en nous attachant à exploiter au mieux les effets aéroélastiques observés précédemment. Ces effets aéroélastiques pourraient être exploités pour améliorer la portée maximale de l'engin, critère important de sa performance. Il est donc intéressant d'intégrer à la chaîne de conception la prise en compte de l'interaction aéroélastique au niveau des ailes d'un missile dans la perspective de maximiser sa portée. Nous présenterons également la méthode permettant un calcul aéroélastique couplé. Cela constituera les bases de notre étude.

Nous présenterons, dans le chapitre suivant, le paramétrage de la configuration constituée d'une aile et d'un fuselage, ainsi que les valeurs ou plages de valeurs retenues pour ces paramètres. Nous exposerons aussi la mise en œuvre des éléments de la chaîne de calcul aéroélastique et les communications nécessaires entre ces différents outils. Étant donné le nombre important de calculs envisagés – cette chaîne de calcul pourrait être utilisée dans le cadre d'une optimisation par algorithme génétique, par exemple – il est nécessaire que cette chaîne de calcul soit complètement automatisée.

Dans le dernier chapitre, enfin, nous présenterons les principaux résultats obtenus en nous attachant à comprendre les phénomènes importants réellement mis en jeu. Nous verrons en quoi le paramétrage initial a engendré des effets qui sont plus aérodynamiques qu'aéroélastiques. Nous en tirerons donc aussi les enseignements majeurs et verrons quelles solutions peuvent *a priori* conduire à de meilleurs résultats.

## 5.1 Calcul préliminaire autour d'une aile et d'un demi-fuselage de missile

Dans le cadre du PEA AMIS, une campagne d'essais a été menée [45]; elle consistait notamment à caractériser les effets aéroélastiques sur une maquette constituée d'une aile de grand allongement et d'un demi-fuselage de missile avec un culot profilé. L'aile de cette maquette a été évidée et des capots de différentes épaisseurs, supportés par des nervures, ont été rapportés. Pour différentes valeurs du nombre de MACH et de la pression d'arrêt, des polaires en incidence ont été réalisées. L'instrumentation de cette maquette comportait, entre autres, 9 capteurs à fibre optique et 160 capteurs de pression. Les capteurs à fibre optique, répartis par deux (environ 11 % et 77 % de corde) à 4 envergures données (environ 40 %, 60 %, 80 % et 95 % d'envergure de l'aile) et au bord d'attaque à environ 15 % d'envergure de l'aile, ont permis de suivre la déformation de l'aile pour chaque incidence. Les capteurs de pression, répartis par 32 (25 à l'extrados et 7 à l'intrados) à 5 envergures différentes (15 %, 40 %, 60 %, 80 % et 95 % d'envergure de l'aile), permettent de connaître le coefficient de pression pariétale. On dispose donc, pour chaque incidence, de la forme de l'aile sous charge et de la répartition de pression sur celle-ci.

À partir des capteurs à fibre optique, la géométrie de l'aile sous charge a été reconstituée et un maillage dit « déformé » a été réalisé. À l'aide d'AEROLOG, nous avons donc effectué deux calculs stationnaires pour une incidence de  $5^\circ$ , un nombre de MACH  $Ma = 0,8$  et une pression d'arrêt  $P_i = 1$  bar, l'un sur la géométrie non déformée (sans charge) et l'autre sur la géométrie déformée (sous charge). La figure 5.1 montre les deux géométries superposées,

tandis que la figure 5.2 présente l'évolution de la flèche<sup>12</sup> et du vrillage de l'aile en fonction de l'envergure pour la géométrie déformée. La flèche  $f_z$  a été mesurée comme la moyenne des déplacements selon la direction  $\vec{z}$  au bord d'attaque et au bord de fuite dans un plan tel que  $y$  soit constant, tandis que le vrillage  $\theta$  est calculé comme étant l'angle entre la corde joignant le bord d'attaque et le bord de fuite et la direction  $\vec{x}$  dans un plan tel que  $y$  soit constant.

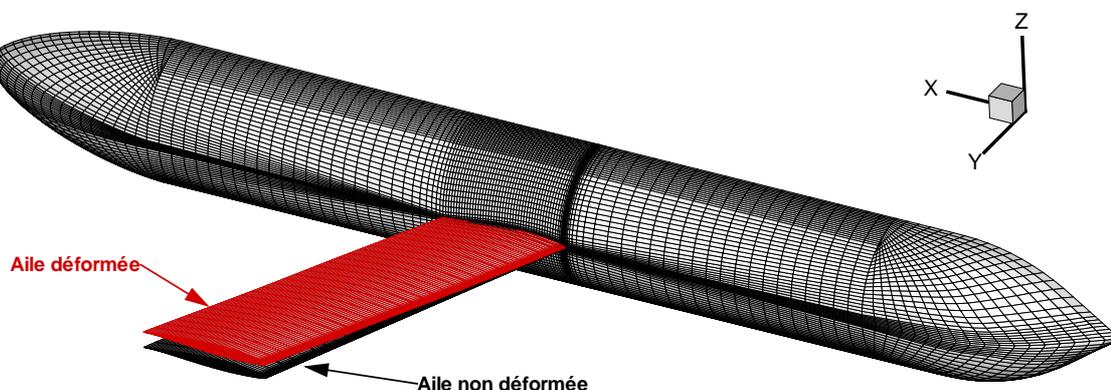


FIG. 5.1 – Maquette AMIS avec aile non déformée et aile déformée et représentation du maillage sur les parois.

La figure 5.3 montre l'évolution des coefficients de portance et traînée avec un changement de géométrie au cours du calcul. La sensibilité de ces coefficients à la prise en compte de la déformation de l'aile est importante : baisse relative du coefficient de portance de plus de 11 % et écart absolu sur le coefficient de traînée supérieur à  $2 \times 10^{-2}$ . La figure 5.4 montre les répartitions pariétales de pression pour des cordes placées à cinq envergures différentes. On peut tout d'abord formuler une remarque à propos du calcul du pied de choc : on a vu au paragraphe 4.2.2 pages 145 et suivantes, que la modélisation de la turbulence utilisée dans AEROLOG pour les écoulements présentant des décollements de la couche limite n'était pas correcte ; or la zone située au pied du choc présente vraisemblablement un décollement ; il est donc prévisible que le calcul ne prédise pas correctement l'écoulement dans cette zone.

On voit néanmoins sur cette figure que la prédiction des niveaux de pression autour de l'aile est meilleure lorsque le calcul est effectué avec prise en compte des charges aérodynamiques. Pour les cordes situées à 15 % et 40 % d'envergure, la position du choc semble mieux prédite par le calcul sur le maillage non déformé, mais ce constat s'inverse pour les autres cordes. De plus, dans les zones où l'écoulement est attaché, et en particulier à l'intrados et à l'extrados en amont du choc, les niveaux de pressions prédits par AEROLOG sont plus proches des résultats d'essais quand le maillage déformé est utilisé. Il faut également noter qu'à l'emplanture de l'aile, l'écoulement est perturbé par la couche limite développée sur le fuselage et que l'interaction de celle-ci avec le bord d'attaque de l'aile est complexe.

On peut donc retenir de ce calcul aéroélastique préliminaire que, sur des ailes de grand allongement (ici supérieur à 6 en prenant en compte l'envergure totale d'une aile à l'autre), avec des profils d'épaisseur relative modérée (ici moins de 9 % compte tenu de l'angle de flèche), et présentant un évidement interne, les effets aéroélastiques sont importants et doivent être pris en compte pour une meilleure prédiction par le calcul des phénomènes aérodynamiques.

<sup>12</sup>Il ne faut pas confondre la flèche, résultat du phénomène structural de flexion, et l'angle de flèche qui peut être présent entre le bord d'attaque d'une aile et le fuselage, intervenant notamment dans le phénomène aérodynamique de divergence de traînée.

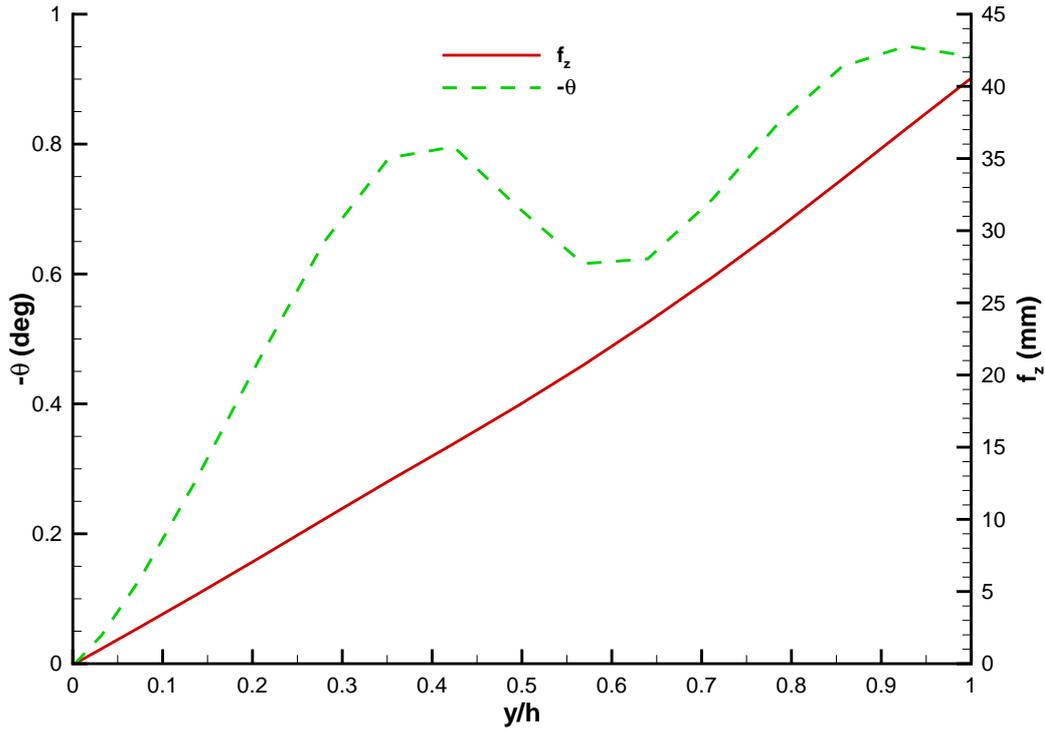


FIG. 5.2 – Lois d'évolution de la flèche et du vrillage de l'aile de la maquette AMIS sous charge à  $5^\circ$  d'incidence, en fonction de l'envergure.

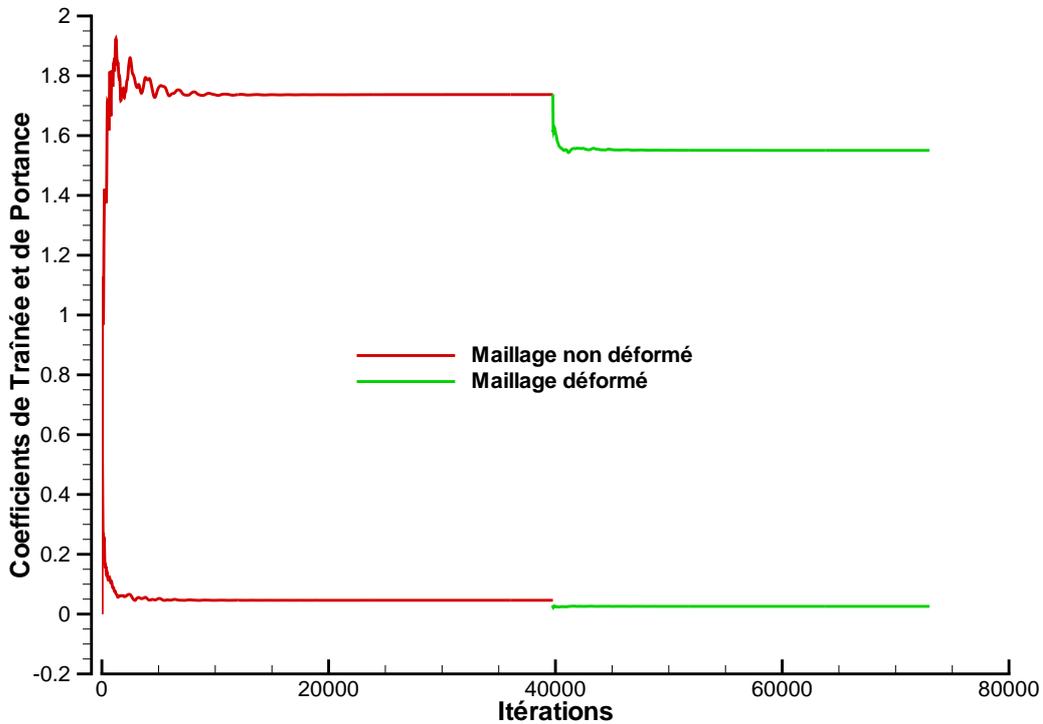
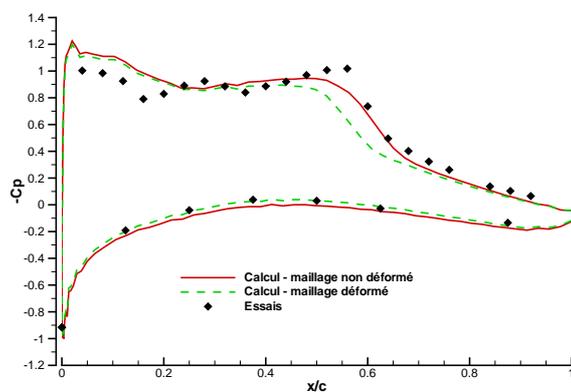
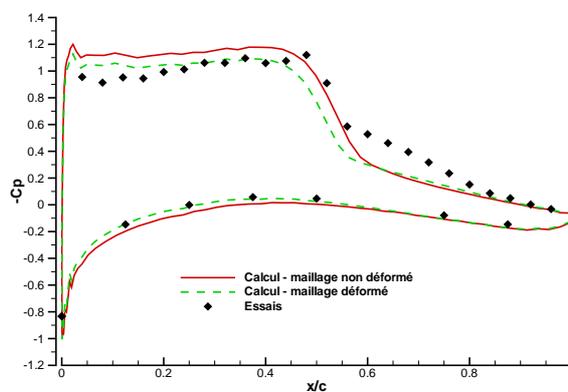
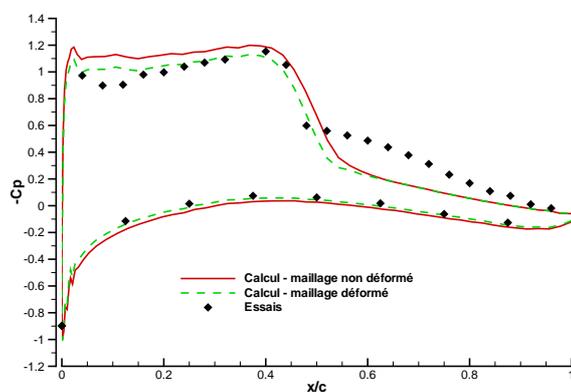
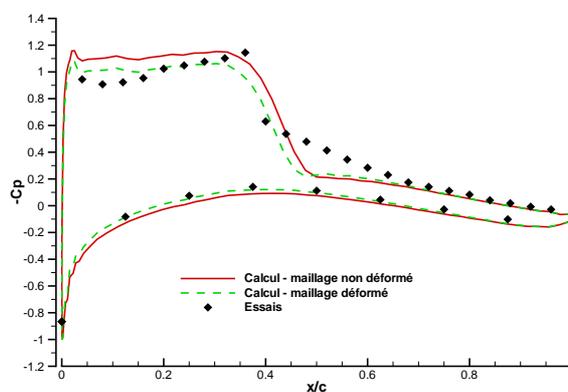
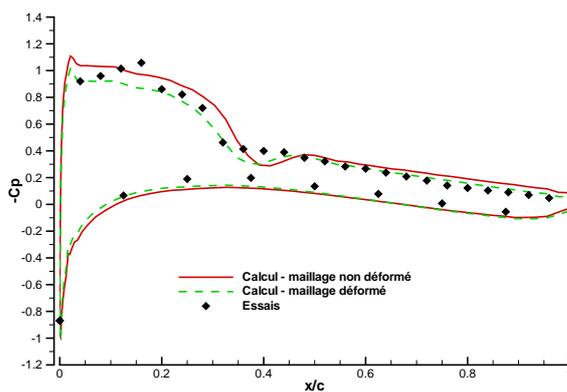


FIG. 5.3 – Évolution des coefficients aérodynamiques globaux en fonction des itérations, pour le calcul de l'écoulement autour de la maquette AMIS, sans puis avec la prise en compte de la déformation de l'aile sous charge, à  $5^\circ$  d'incidence.

(a) Corde  $y/h = 15\%$ .(b) Corde  $y/h = 40\%$ .(c) Corde  $y/h = 60\%$ .(d) Corde  $y/h = 80\%$ .(e) Corde  $y/h = 95\%$ .FIG. 5.4 – Répartitions pariétales du coefficient de pression pour cinq coupes le long de l'envergure de l'aile de la maquette AMIS, à  $5^\circ$  d'incidence.

## 5.2 Principe du calcul aéroélastique couplé

Les progrès récents des machines de calcul donnent de plus en plus la possibilité de mener un grand nombre de calculs aérodynamiques lors de la phase de conception des missiles. Cela laisse aussi la possibilité d'automatiser cette conception en cherchant la forme optimale vis-à-vis d'un certain nombre de critères et sous un certain nombre de contraintes. L'optimisation de forme, lorsqu'elle est bien menée et correctement guidée, notamment par le choix des paramètres et de leurs plages de variation, peut permettre de retenir des solutions, c'est-à-dire des formes, qui n'auraient pas *a priori* été choisies par le concepteur.

Dans le cadre de cette étude, le calcul numérique a permis de prendre en compte les phénomènes aéroélastiques directement dans la phase de conception. La portée pouvant être atteinte par un missile est l'un des critères principaux de sa performance. Grâce à une formule de mécanique du vol, nous verrons quels sont les principaux facteurs qui permettent d'améliorer la portée. Parmi ces paramètres, la finesse du missile est particulièrement importante. Or cette finesse, rapport des coefficients de portance et de traînée, est sensible aux phénomènes aéroélastiques. Nous étudierons donc la façon dont on peut intégrer ces effets dans la conception d'une aile de grand allongement tout en respectant un certain nombre de contraintes. Nous verrons également les principes à la base du calcul aéroélastique avec adaptation d'incidence.

### 5.2.1 Estimation de la portée par la formule de BREGUET-LEDUC

La portée réelle des engins volants (missiles de croisière ou avions) est une grandeur qui demeure complexe à calculer. En effet, pour être réaliste, le calcul doit prendre en compte, outre le vol de croisière, la phase de lancement (ou le décollage) et la phase finale avec ressource (ou l'atterrissage). Les aérodynamiciens (cf. par exemple [11]) ont donc pris l'habitude de définir un rayon d'action *brut* (ou *Gross Still Air Range* en anglais), qui considère uniquement un vol en palier jusqu'à épuisement du carburant. Par la suite nous appellerons – improprement donc – « portée » cette distance. La formule de BREGUET-LEDUC [11] établit une expression de cette portée  $\mathbf{R}$  en fonction de divers paramètres de vol. Une expression locale de cette formule s'écrit :

$$d\mathbf{R} = -Ma \times c_{\text{son}}(z) \times I_{\text{sp}}(Ma, z) \times \frac{C_L}{C_D} \times \frac{dm}{m} \quad (5.1)$$

où :  $Ma$  est le nombre de MACH ;

$c_{\text{son}}(z)$  est la célérité du son dans l'air à l'altitude  $z$  considérée ;

$I_{\text{sp}}(Ma, z)$  est l'impulsion spécifique (en secondes) qui caractérise le système de propulsion et dépend essentiellement du nombre de MACH et de l'altitude ;

$C_L$  est le coefficient de portance du missile ;

$C_D$  est le coefficient de traînée du missile ;

$m$  est la masse totale (masse à vide et carburant) du missile.

Pour poursuivre, nous allons faire un certain nombre d'hypothèses. En effet, nous allons considérer que le vol s'effectue à altitude  $z$  constante et à un nombre de MACH constant. De plus nous allons nous placer dans l'hypothèse d'une incidence faible, telle que la contribution à la portance du système de propulsion, qui produit une poussée dans l'axe du missile, soit négligeable. Sous ces conditions, la portance aérodynamique équilibre le poids. Avec ces

hypothèses, on peut intégrer la formule (5.1) entre la masse initiale  $m_{\text{ini}}$  et la masse finale  $m_{\text{fin}}$  :

$$\mathbf{R} = Ma \times c_{\text{son}}(z) \times I_{\text{sp}}(Ma, z) \times \int_{m_{\text{ini}}}^{m_{\text{fin}}} - \left( \frac{C_L}{C_D} \right)_{\text{eq}} \times \frac{dm}{m} \quad (5.2)$$

où  $(C_L/C_D)_{\text{eq}}$  représente la finesse du missile à l'équilibre. Étant donné que la portance doit équilibrer le poids, et que celui-ci diminue au cours du vol, la portance doit diminuer au cours du vol. C'est donc l'incidence du missile qui s'adapte au cours du vol ; de ce fait, la finesse n'est pas constante au cours du vol. Cependant, contrairement aux avions commerciaux, la masse de carburant est relativement faible par rapport à la masse totale ; on peut donc faire l'hypothèse que la finesse ne varie pas au cours du vol en considérant une masse moyenne. On obtient ainsi :

$$\mathbf{R} \approx Ma \times c_{\text{son}}(z) \times I_{\text{sp}}(Ma, z) \times \overline{\left( \frac{C_L}{C_D} \right)_{\text{eq}}} \times \ln \left( 1 + \frac{m_{\text{crb}}}{m_{\text{str}}} \right) \quad (5.3)$$

où  $m_{\text{crb}}$  représente la masse de carburant au début du vol et  $m_{\text{str}}$  la masse de la structure à vide. D'après cette formule simplifiée (5.3), on note que si le système propulsif est fixé, les facteurs prépondérants de gain potentiel de portée sont le nombre de MACH, la finesse globale du système à l'équilibre et la masse de la structure.

On notera qu'on n'a pas traité ici l'équilibre du missile en moment de tangage. En effet réaliser un tel équilibre nécessite de connaître les positions du foyer aérodynamique et du centre de gravité. Or l'obtention de ce dernier requiert de connaître la répartition de masse à l'intérieur du missile, ce qui n'est pas aisé en phase d'avant-projet. De plus la distance qui sépare ces deux points permet de régler la marge de stabilité du missile. Nous ne nous préoccupons donc pas de cet équilibre en moment et considérerons qu'il est réalisé à tout moment du vol par un choix approprié du centre de gravité.

### 5.2.2 Évidement de l'aile

Il est bien évident que le concepteur d'un engin volant cherche à en alléger au maximum la structure et que cela contribue à augmenter la portée. Dans le cas des avions commerciaux, un évidement des ailes est réalisé avec le double but d'alléger la structure et de ménager le volume nécessaire au carburant ; dans le cas des missiles de croisière, l'évidement des ailes a pour but d'alléger le système et de modifier la fréquence propre du système. En effet, pour des raisons de pilotage du missile, il est nécessaire que la première fréquence propre du système soit située à l'extérieur de la bande passante de pilotage. Dans notre cas, il faudra donc que la première fréquence propre du système soit supérieure à  $f_p = 20$  Hz.

Cet évidement de l'aile contribue certes à alléger la structure du missile mais, compte tenu des dimensions relativement faibles de cette aile (épaisseur et corde) par rapport au corps du missile, le gain sur la masse totale est très limité. Cependant, l'idée originale de cette étude est de tirer parti de cet évidement, qui fournit une certaine souplesse à l'aile, pour favoriser des phénomènes aéroélastiques qui pourraient contribuer à augmenter la finesse et donc la portée du missile.

L'aile d'un missile de croisière, si elle peut présenter une certaine souplesse favorable aux performances aérodynamiques, doit avant tout offrir une résistance suffisante aux contraintes structurales qu'elle pourra subir tout au long du vol. En effet, nous avons considéré ici un vol en palier qui constitue la majeure partie du vol d'un missile de croisière ; le facteur de charge<sup>13</sup> est unitaire  $n = 1$ . La phase finale du vol d'un tel missile nécessite cependant des manœuvres

<sup>13</sup>Le facteur de charge est le rapport entre l'effort total subit par le système et le poids du système.

importantes. Dans de tels cas le facteur de charge est supérieur à l'unité et cependant les ailes ne doivent pas subir de déformations plastiques irréversibles qui rendraient caduques les lois de pilotage. C'est donc cette phase finale qui va guider notre choix d'une contrainte maximale à ne pas dépasser. Nous choisirons donc – ici arbitrairement – un facteur de charge  $n = 3$  et appliquerons un coefficient de sécurité d'une valeur de 1,5. De plus nous considérerons que la contrainte maximale est linéaire vis-à-vis du facteur de charge de sorte que la contrainte imposée pour la conception de l'aile sera :

$$\sigma_{(n=3)}^{\max} = 3 \times \sigma_{(n=1)}^{\max} < \frac{\sigma_e}{1,5}$$

où  $\sigma_{(n=1)}^{\max}$  est la contrainte maximale dans l'aile pour un facteur de charge  $n = 1$  et  $\sigma_e$  la limite élastique du matériau utilisé pour la fabrication de l'aile. Cette vision de la tenue structurale de l'aile est bien sûr simplifiée puisqu'elle repose en particulier sur une hypothèse de linéarité de la structure qui n'est pas vérifiée sur des systèmes présentant des phénomènes de rattrapage de jeu engendrés par la présence de capots, vis... .

Nous avons vu avec la formule (5.3) que la finesse du missile à l'équilibre intervient directement dans l'expression de la portée. Il convient donc de chercher à augmenter cette finesse. Pour des missiles transsoniques tels que ceux étudiés ici, la finesse globale du système est largement dépendante des caractéristiques géométriques de l'aile (surface en plan, allongement, vrillage, effilement, angle de flèche, profil...). Il a été mentionné que la masse de la structure dépendait peu de la géométrie de l'aile évidée; de plus, nous ne prendrons pas en compte le système propulsif, qui dépend, outre de l'altitude et du nombre de MACH, de paramètres tels que les angles d'incidence et de dérapage du missile, du rendement du moteur... ; nous considérerons donc un vol non propulsé. En conséquence, l'objectif fixé pour cette conception optimale sera la recherche du produit de la finesse à l'équilibre par le nombre de MACH maximal :

$$Ma \times f_{eq}$$

### 5.2.3 Adaptation d'incidence

Nous devons donc calculer le champ aérodynamique autour d'une configuration de missile composée d'une aile et d'un demi-fuselage avec pour objectif d'atteindre un niveau de portance donné. Pour réaliser cette tâche, nous pouvons mener une série de calculs stationnaires à différentes incidences pour réaliser une polaire puis, *a posteriori*, choisir l'incidence qui fournit la portance recherchée. Cependant, cette méthode oblige à réaliser un grand nombre de calculs complets. Il a donc été choisi<sup>14</sup> chez MBDA d'insérer une boucle d'asservissement de l'incidence au coefficient de portance au cours du calcul stationnaire lui-même. La figure 5.5 présente, sous forme d'un schéma fonctionnel, la mise en œuvre de cet asservissement dans le logiciel AEROLOG. Pour des raisons de simplicité, il a été choisi un asservissement de type proportionnel :

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n - \frac{k_{relax}}{\overline{C_{L_\alpha}}} \times (C_{L_{calc}}^n - C_{L_{obj}})$$

Le coefficient de proportionnalité est ici  $k_{relax}/\overline{C_{L_\alpha}}$  où  $k_{relax}$  est un coefficient de relaxation et  $\overline{C_{L_\alpha}}$  une estimation du gradient de portance des ailes du missile (nous considérerons que le corps du missile ne porte pas) par la formule de DIEDERICH (cf. annexe D). Le gradient de portance est, par définition, le meilleur choix qui puisse être fait pour converger rapidement vers la portance demandée. Cependant, nous verrons plus loin que le processus de

---

<sup>14</sup>Cette idée revient à André WENG-LAW, ingénieur chez MBDA, qui a participé à l'encadrement de cette thèse.

déformation de maillage est très délicat ; une variation trop brusque de l'incidence entraîne des problèmes numériques importants ; c'est la raison de la présence de ce coefficient de relaxation. De plus, l'adaptation d'incidence n'est pas effectuée à toutes les itérations du calcul aérodynamique, mais avec une fréquence donnée par l'utilisateur. De cette manière, ces itérations à incidence constante permettent de calculer une solution adaptée à la nouvelle incidence avant que l'écoulement ne soit perturbé par un nouveau changement d'incidence. Il faut noter que lorsque l'incidence est modifiée, elle est modifiée instantanément en tout point du domaine de calcul et non uniquement sur les surfaces de conditions aux limites comme on le ferait pour une reprise d'un calcul à une incidence différente.

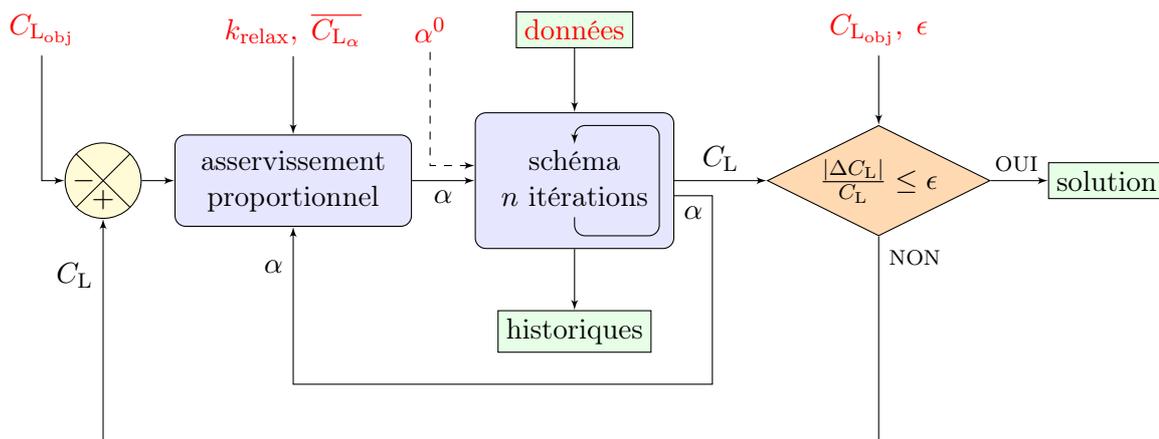


FIG. 5.5 – Modification du logiciel AEROLOG pour l'asservissement de l'incidence à la portance<sup>16</sup> ; l'erreur commise sur le coefficient de portance est notée  $\Delta C_L = C_L - C_{L_{obj}}$ , la valeur initiale de l'incidence est  $\alpha^0$ .

### 5.2.4 Calcul aéroélastique

Nous venons de décrire le processus de calcul d'un écoulement autour d'un missile permettant d'atteindre un niveau de portance fixé. Cependant les seuls mouvements mis en jeu – l'adaptation de l'incidence globale du missile – sont des mouvements de corps solide c'est-à-dire ici de l'ensemble du missile. Nous allons maintenant décrire le processus de calcul aéroélastique, où sont mises en jeu des déformations élastiques de la structure et du maillage du domaine fluide. La chaîne de calcul, intitulée « RATAN », qui va être présentée a été développée par l'ONERA et utilisée notamment dans le cadre du PEA AMIS [14] ; ces méthodes ont également été intégrées au logiciel *elsA* de l'ONERA et continuent d'être développées [19]. La chaîne de calcul peut être décomposée en trois parties distinctes : la modélisation structurale du missile, la déformation de maillage, et le couplage statique ; nous allons successivement décrire ces trois éléments qui constituent, avec le calcul aérodynamique, la chaîne de calcul aéroélastique.

<sup>16</sup>Pour les figures de cette partie, nous utiliserons les conventions suivantes :

action représente une action effectuée par un programme, généralement écrit en FORTRAN ;

fichier représente un fichier ; test représente un test ;

paramètre représente un paramètre fourni par l'utilisateur ;  représente une initialisation.

### 5.2.4.1 Modélisation structurale

On considérera dans ce calcul que la seule partie du missile susceptible de se déformer est l'aile. Dans la modélisation structurale de l'aile utilisée, on fait une hypothèse de linéarité ; les déformations calculées seront donc uniquement élastiques et non plastiques. Le modèle structural est pris en compte dans le calcul aéroélastique par l'intermédiaire d'une « matrice de flexibilité réduite ». Cette matrice, qui est calculée dans une phase préliminaire au calcul aéroélastique lui-même, exprime les déplacements d'un ensemble de points appelés « nœuds déplacement » pour une succession de cas de charge constitués d'une charge unitaire dans une direction donnée<sup>17</sup> sur un des points constituant l'ensemble des « nœuds force ». Schématiquement, on peut écrire :

$$D_d = SF_f$$

où :  $D_d$  est la matrice colonne représentant tous les déplacements des nœuds déplacement  $M_d$  du maillage de structure ;  
 $F_f$  est la matrice colonne représentant tous les cas de charge sur les nœuds force  $M_f$  du maillage de structure ;  
 $S$  est la matrice rectangulaire dite de « flexibilité réduite ».

Les ensembles  $\{M_d\}$  et  $\{M_f\}$  peuvent bien sûr se recouper et englober la totalité des nœuds du maillage de structure nécessaire au calcul de la matrice  $S$ . Cependant, et notamment pour des géométries complexes comportant un grand nombre de points, on préférera sélectionner un nombre réduit de points.

Compte tenu de l'hypothèse de linéarité de la structure faite, la matrice  $S$  est suffisante pour décrire les déplacements induits par n'importe quel cas de chargement. Le format de stockage de cette matrice  $S$  est le format « punch » du logiciel NASTRAN. Cependant, comme nous le verrons par la suite, des raisons de disponibilité des logiciels nous ont contraints à utiliser le logiciel SAMCEF associé à des scripts de commandes c-shell et awk pour écrire cette matrice.

### 5.2.4.2 Déformation de maillage

La déformation de maillage du domaine fluide qui va être mise en œuvre repose sur l'analogie qui est faite entre le maillage du domaine fluide et un matériau continu élastique<sup>18</sup>. On affecte donc à chaque maille un module d'YOUNG (inversement proportionnel à la racine carrée du volume de la maille considérée) et un coefficient de POISSON constant. Le modèle d'éléments finis et l'écriture de l'équilibre mécanique du système conduisent à un système linéaire :

$$Kq = p$$

où :  $p$  est la matrice colonne des efforts sur les nœuds du maillage du domaine fluide ;  
 $q$  est la matrice colonne des déplacements des nœuds du maillage du domaine fluide ;  
 $K$  est la matrice carrée de rigidité issue de la modélisation décrite précédemment.

L'ensemble des nœuds  $\{M\}$  du maillage du domaine fluide peut être partitionné en deux sous-ensembles  $\{M_c\}$  et  $\{M_i\}$  regroupant respectivement les nœuds à déplacement connu et imposé et les nœuds dont le déplacement inconnu est à déterminer. L'équation donnant l'équilibre

---

<sup>17</sup>En théorie, six cas de charge sont possibles pour chaque nœud force (les résultantes et les moments dans les trois directions) et six déplacements pour chaque nœud déplacement (trois translations et trois rotations).

<sup>18</sup>Les deux autres méthodes disponibles, qui n'ont pas été utilisées, sont la « méthode de BATINA » et la « méthode des ressorts couplée ».

du système peut donc s'écrire :

$$\begin{pmatrix} K_{ii} & K_{ic} \\ K_{ci} & K_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_i \\ q_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i \\ p_c \end{pmatrix}$$

Or la résultante des efforts est nulle pour l'ensemble des noeuds  $M_i$  ; on a donc  $p_i = 0$ . Les déplacements  $q_i$  sont donc liés aux déplacements connus  $q_c$  par :

$$K_{ii}q_i = -K_{ic}q_c$$

Ce système linéaire est résolu par une méthode de gradient conjugué pré-conditionné ; pour accélérer la convergence de cette méthode itérative et augmenter sa robustesse, on l'initialise à l'aide d'une technique dite de « volume spline » qui consiste à calculer le déplacement de quelques points judicieusement choisis de chaque bloc qui constitue le maillage du domaine fluide. Cette méthode fournit une première approximation de la déformation de maillage et constitue une solution initiale pertinente à la méthode de gradient conjugué ; en particulier, les mouvements rigides de blocs sont pris en compte directement, seules les déformations internes aux blocs restant à calculer.

Le maillage du domaine fluide, que l'on souhaite déformer, est composé de plusieurs blocs, qui sont généralement les mêmes blocs que ceux utilisés dans le calcul aérodynamique. La déformation de l'ensemble de ce maillage est décomposée en une séquence de déformation individuelle de chacun de ces blocs dans un ordre donné, les méthodes et paramètres de déformation pouvant être différents pour chaque bloc. On introduit des conditions aux limites sur les surfaces des blocs à la frontière du domaine fluide à déformer. Ces conditions sont essentiellement de trois type : déplacement nul, déplacement imposé par le modèle structural et déplacement libre.

Pour les maillages impliquant un très grand nombre de points et notamment dans la zone de couche limite des maillages destinés à la résolution des équations de NAVIER-STOKES comme ceux que l'on a utilisés, on met en œuvre une technique de « macro-blocs ». Elle consiste à regrouper, direction par direction, les mailles par 2, 3 ou 5 et à les déformer comme si elles ne constituaient qu'une seule maille puis, à l'aide d'une interpolation linéaire, à calculer les déplacements des points intérieurs.

### 5.2.4.3 Couplage statique

Le couplage que l'on veut effectuer est statique, c'est-à-dire que l'on recherche une déformation stationnaire de la structure pour un régime d'écoulement stationnaire. La résolution des équations de NAVIER-STOKES moyennées est donc effectuée avec une technique de pas de temps local. On a vu précédemment que ce calcul s'accompagnait d'une adaptation de l'incidence asservie à la portance. Étant donnée la différence entre les temps de réponse caractéristiques de l'écoulement et de la structure, le couplage – c'est-à-dire l'actualisation de la forme de l'aile – ne s'effectue pas toutes les itérations du calcul aérodynamique mais à une fréquence moins élevée, de  $n_{\text{coupl}}$  itérations.

La figure 5.6, présente sous la forme d'un schéma fonctionnel, la séquence qui est mise en œuvre jusqu'à convergence et qui peut se résumer ainsi :

1. calcul de l'écoulement aérodynamique avec adaptation d'incidence pendant  $n_{\text{coupl}}$  itérations ;
2. calcul des charges aérodynamiques sur les surfaces ;
3. transfert des charges sur les surfaces vers le maillage de structure ;
4. calcul des déplacements sur le maillage de structure à l'aide de la matrice de flexibilité  $S$  ;

5. transfert des déplacements sur les surfaces du maillage aérodynamique ;
6. déformation du maillage aérodynamique.

Quand ce processus risque d'engendrer de trop grands déplacements pour conserver un problème correctement conditionné, il est possible de recourir à une sous-relaxation pour stabiliser ce couplage. Pour gérer au mieux le transfert des efforts du maillage aérodynamique au maillage de structure et des déplacements du maillage structure au maillage aérodynamique, les surfaces du maillage aérodynamique et les nœuds force et déplacement du maillage structure sont associés par famille ; dans notre cas, nous verrons au chapitre suivant que nous avons trois familles « aile », « fuselage » et « semelle ». Pour réaliser le transfert de l'étape n° 3 du processus présenté ci-dessus, chaque nœud de frontière du maillage aérodynamique est associé au nœud force le plus proche. Pour le transfert à l'étape n° 5 des déplacements des nœuds déplacement vers les surfaces du maillage aérodynamique de l'aile, on utilise une technique d'interpolation polynomiale et de lissage bidimensionnelle du troisième ordre dans chaque direction.

Nous venons de décrire les principes du calcul aéroélastique couplé appliqué à la conception optimale d'un missile de croisière. Les ailes de grand allongement d'un tel missile sont évidées pour satisfaire un critère de pilotage. Cet évidement est exploité pour permettre d'augmenter le produit du nombre de MACH par la finesse, à portance fixée, tout en respectant une certaine tenue mécanique sous un fort facteur de charge. Compte tenu des temps de réponse des phénomènes aérodynamiques et mécaniques, on adapte l'incidence toutes les  $n_{\text{adap}}$  itérations (typiquement  $n_{\text{adap}} = 5$ ) et on effectue le couplage fluide-structure toutes les  $n_{\text{coupl}}$  itérations (typiquement  $n_{\text{coupl}} = 100$ ). Ceci permet d'obtenir, à convergence du problème, une solution stationnaire prenant en compte la déformation sous charge de l'aile et fournissant une portance qui équilibre le poids du missile. Cependant, il arrive qu'il soit difficile d'obtenir la convergence du problème. Pour remédier à cela, il existe plusieurs possibilités ; outre la possibilité d'augmenter les nombres d'itérations  $n_{\text{adap}}$  et  $n_{\text{coupl}}$ , on peut également relaxer l'application des déplacements et obtenir ainsi une convergence, qui sera bien évidemment plus lente.

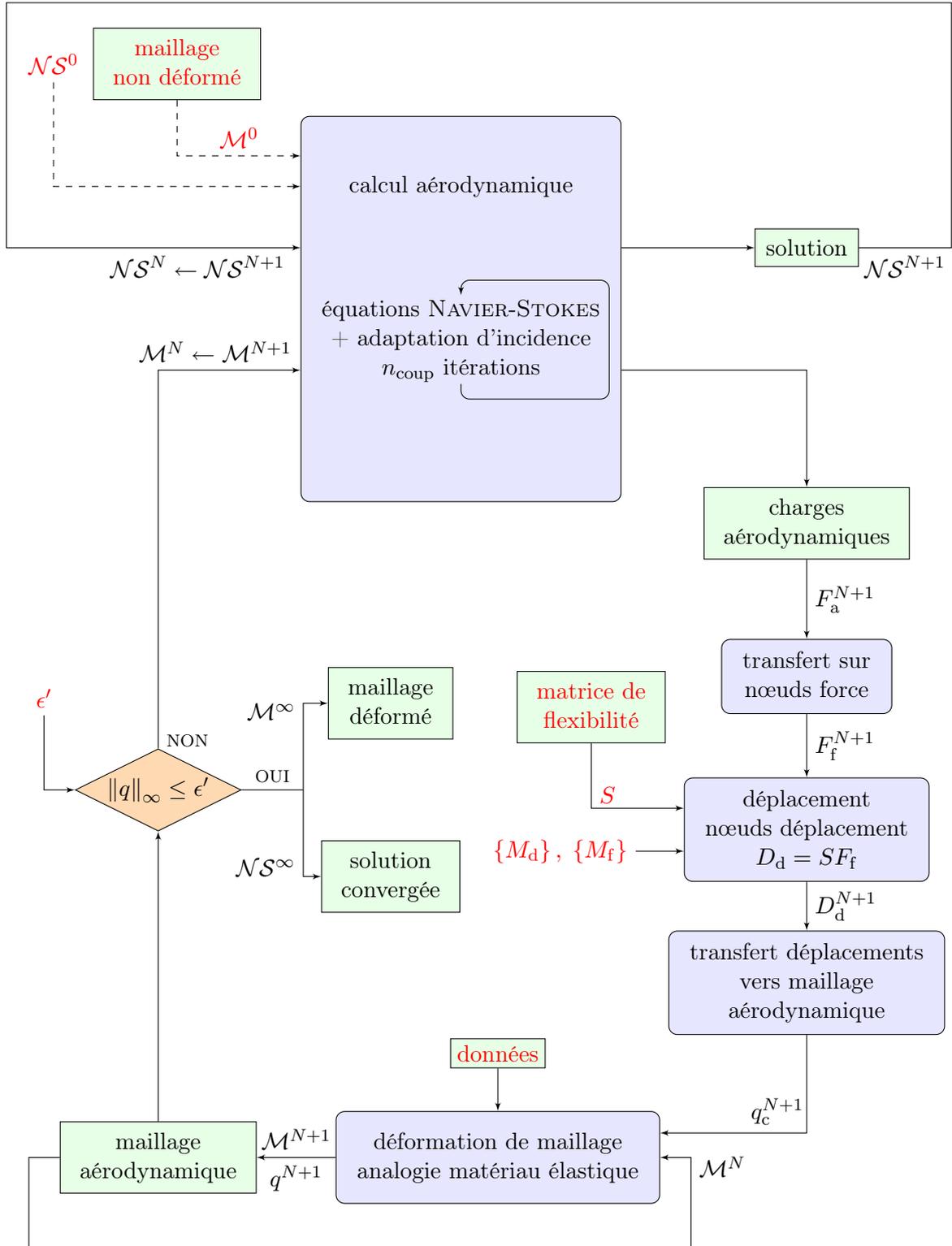


FIG. 5.6 – Schématisation<sup>16</sup> de la chaîne aéroélastique RATAN ; l'initialisation est faite par un maillage non déformé  $\mathcal{M}^0$ , une solution initiale uniforme  $\mathcal{NS}^0$  ; on fournit également la matrice de flexibilité  $S$  et les positions des nœuds déplacement  $\{M_d\}$  et force  $\{M_f\}$  ; enfin, on se fixe une valeur maximale  $\epsilon'$  de déplacement du maillage pour le test de convergence de la déformation.



## Chapitre 6

# Mise en œuvre de la chaîne de calcul aéroélastique

Nous avons vu au chapitre précédent les principes généraux du calcul aéroélastique couplé avec adaptation d'incidence. On rappelle que l'on cherche à concevoir de façon optimale une aile de missile de croisière en tirant parti de son évidement pour maximiser la portée en respectant des critères structuraux. Il convient donc tout d'abord de choisir un paramétrage du problème qui soit adapté aux objectifs fixés ; nous nous attacherons à définir ces paramètres pertinents ainsi que leur plage de variation. Le calcul aéroélastique couplé nécessite un certain nombre de pré-traitements, notamment pour déterminer la matrice de flexibilité réduite et calculer le maillage adapté à la nouvelle forme générée automatiquement à partir des paramètres. Pour évaluer l'objectif à atteindre et les contraintes à respecter, il faut également procéder à un post-traitement des résultats du calcul aéroélastique couplé. Nous verrons donc comment s'articulent ces différents modules de calcul et sur quelles hypothèses ils reposent.

### 6.1 Paramétrage

Choisir un jeu de paramètres adaptés en vue d'une simple étude paramétrique ou l'optimisation complète d'un système est une tâche délicate, tout particulièrement lorsque l'obtention des valeurs des objectifs et contraintes définissant le problème d'optimisation exige un calcul itératif coûteux. En pratique, il est souvent nécessaire de reconsidérer le paramétrage envisagé initialement, afin de choisir des paramètres plus pertinents, qui influent de façon plus significative sur les valeurs des objectifs et contraintes à calculer, ou plus simplement pour modifier les plages de variations d'un ou plusieurs paramètres, ou encore pour rajouter des contraintes supplémentaires entre paramètres. . . Lorsque le nombre de paramètres devient important, leurs effets croisés sont plus difficiles à apprécier et il convient alors de mener une étude préliminaire afin de déterminer les paramètres les plus significatifs.

Nous présentons ici le paramétrage complet qui a été envisagé au début de l'étude. Nous présenterons ensuite les paramètres retenus *in fine*, compte tenu notamment des contraintes de coût de simulation associées à l'étude. Signalons dès maintenant qu'une étude critique de ce paramétrage sera réalisée au chapitre suivant, après analyse des premiers résultats d'une étude paramétrique ; nous précisons alors les éléments qui devraient permettre, selon nous, de poursuivre cette étude.

Nous considérons trois types de paramètres qui influent sur les performances du missile à aile souple dont nous souhaitons maximiser la portée :

- les paramètres de vol ;

- les paramètres de la géométrie extérieure de l’aile ;
- les paramètres de l’évidement de l’aile.

### 6.1.1 Paramètres de vol

Les paramètres de vol retenus dépendent naturellement de la mission du missile. En général, plus la représentation du comportement aérodynamique ou aéroélastique du missile est grossière et plus la description de la mission peut être complexe. Ainsi, lorsque le comportement aérodynamique du missile est sommairement décrit, à très faible coût, par la théorie de la ligne portante par exemple, la trajectoire complète du missile peut être prise en compte dans l’optimisation, incluant donc plusieurs points de vol comme la phase de montée vers l’altitude de croisière, la phase de croisière, la phase finale en basse altitude sous facteur de charge important... (cf. par exemple les études [41] et [8] réalisées récemment chez MBDA lors de stages d’étudiants). Dans ce travail de thèse, nous avons retenu une représentation relativement détaillée du comportement aéroélastique du missile, avec un coût qui est donc élevé. Par conséquent et comme nous l’avons déjà évoqué lors de la présentation de la formule de BREGUET-LEDUC (cf. paragraphe 5.2.1), nous considérerons seulement le vol de croisière à altitude constante. Dans ce cas les paramètres de vol se réduisent au nombre de MACH de croisière  $Ma$  et à l’altitude de croisière  $z$ . Un modèle d’atmosphère standard permet en effet de déduire de l’altitude la pression et la température statiques correspondantes.

### 6.1.2 Géométrie extérieure de l’aile

Les ailes des missiles de croisière sont de grande envergure. Pour faciliter l’emport du missile sous l’avion lanceur et sa séparation de cet avion, les ailes du missile sont repliées. Elles se déplient dans les premiers instants du vol. Dans le choix des paramètres il faut donc tenir compte de cette contrainte de repliement. Les paramètres de la géométrie extérieure de l’aile qu’il faut choisir caractérisent donc l’aile et sa position par rapport au fuselage.

Le premier des paramètres est le profil de l’aile. Afin de conserver une certaine simplicité en vue de la fabrication du missile, l’hypothèse d’un même profil tout le long de l’envergure a été faite. Définir ce profil peut se faire de plusieurs façons ; parmi celles-ci on a distingué les méthodes qui consistent à créer le profil à partir de points de contrôle (courbes de BÉZIER, splines...) dont les coordonnées sont des paramètres à choisir, ou à partir de paramètres géométriques (rayons de courbure, pentes...). On peut également utiliser l’enveloppe convexe d’une famille de profils choisis par avance ; les coefficients affectant chacun des profils de la base sont alors les paramètres à choisir. Les profils générés par cette deuxième méthode sont *a priori* plus classiques que ceux générés par des méthodes à base de points de contrôle. Autrement dit, on explore un espace de formes potentielles moins vaste puisque l’on procède par combinaison de formes existantes. Ce relatif manque d’originalité des formes géométriques produites n’est pas nécessairement un inconvénient dans notre approche dans la mesure notamment où l’on ne cherche pas tant à innover sur la forme de l’aile proprement dite que sur ses caractéristiques aéroélastiques, dépendant principalement des paramètres d’évidement dont nous parlerons ci-après.

Les ailes des missiles de croisière présentent généralement un angle de flèche entre le bord d’attaque et la normale au fuselage (cf. figure 6.1). Cet angle  $\lambda$  est généralement associé au nombre de MACH en raison du phénomène de divergence de traînée. En effet, lorsque le nombre de MACH augmente, il apparaît qu’à partir d’une valeur critique, qui correspond à l’entrée dans le régime transsonique avec apparition d’une région d’écoulement supersonique fermée par une onde de choc, la traînée des ailes augmente fortement en raison de l’apparition d’une traînée « d’onde », ce qui diminue notablement les performances aérodynamiques ; l’angle de

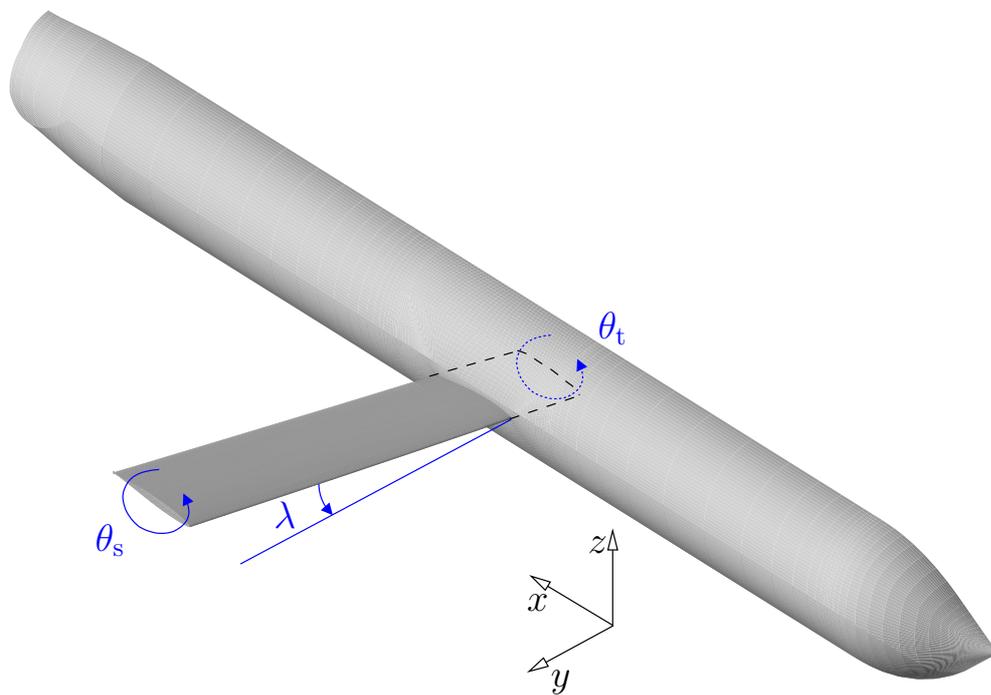


FIG. 6.1 – Vue du missile – paramètres géométriques extérieurs.

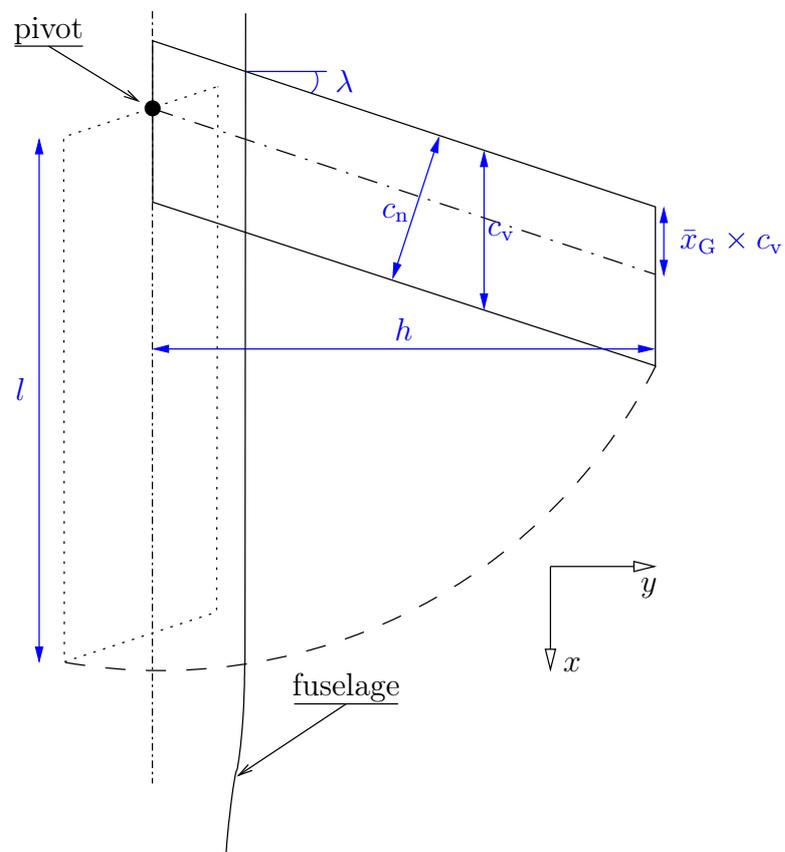


FIG. 6.2 – Vue en plan de l'aile du missile – contraintes d'encombrement.

flèche est important dans la mesure où c'est du nombre de MACH normal au bord d'attaque  $Ma \times \cos(\lambda)$  que dépend l'apparition de cette traînée d'onde.

Pour déterminer le pré-*vrillage* de l'aile, sans charge, on définit deux paramètres qui sont les angles de calage de l'aile dans le plan de tangage ( $xOz$ ), plan de symétrie du missile, et au saumon de l'aile, respectivement  $\theta_t$  et  $\theta_s$ , orientés par  $\vec{y}$ . En effet, les ailes du missile se repliant, on considère qu'il n'y a pas de liaison mécanique entre le fuselage et l'aile à l'implanture, mais que cette liaison pivot est placée dans le plan de tangage du missile. Pour des raisons de simplicité dans la définition de l'aile, on choisit donc de prendre comme paramètre l'angle de calage dans le plan de tangage, même si l'aérodynamique de l'aile n'est évidemment pas influencée par la partie située entre l'implanture et le plan de tangage.

Les paramètres de la forme en plan de l'aile (corde normale  $c_n$  au bord d'attaque et longueur  $l$ , cf. figure 6.2) sont des paramètres dont les bornes maximales sont naturellement fixées en fonction du critère d'encombrement des ailes repliées. On cherchera en définitive à obtenir la longueur maximale des ailes pour obtenir un allongement maximal; la longueur  $l$  sera donc considérée comme fixée par la géométrie du missile. En outre, on considérera que la position du pivot sur l'aile se situe au centre de gravité de la section extrême de l'aile dont l'abscisse adimensionnée sera notée  $\bar{x}_G$ . La demi-envergure  $h$  est donc reliée à la longueur  $l$  de l'aile par la relation :

$$h = l \times \cos(\lambda)$$

et la corde dans le vent  $c_v$  à la corde normale  $c_n$  par :

$$c_v = \frac{c_n}{\cos(\lambda)}$$

Enfin, la position du pivot par rapport au fuselage, qui détermine la position du foyer aérodynamique du missile et qui influe sur la position du centre de gravité sera ici fixée.

Finalement, on recense, comme paramètres de la géométrie extérieure, l'angle de flèche  $\lambda$ , les angles de calage dans le plan de tangage  $\theta_t$  et au saumon  $\theta_s$ , la corde normale  $c_n$  du profil et les coefficients de pondération affectant chaque profil de la base utilisée pour construire le profil de l'aile (un coefficient par profil).

### 6.1.3 Évidement

L'évidement des ailes de missile, déjà pratiqué pour alléger la structure et obtenir une fréquence propre hors de la bande passante de pilotage, rend complexe la géométrie intérieure de ces ailes. En effet, une fois l'évidement effectué, des capots sont rapportés sur l'aile pour lui redonner sa forme aérodynamique. Ces capots présentent généralement des nervures qui renforcent leur rigidité. De plus, ces capots sont fixés à l'aide de dispositifs (pions de centrage, vis...) qui peuvent modifier la rigidité de l'ensemble. Cependant, il n'est pas possible de prendre en compte de tels détails dans le cadre d'une étude paramétrique telle que celle menée ici. Il a donc été choisi de donner une forme simple à l'évidement.

Dans le plan ( $xOy$ ), cet évidement a la forme d'un parallélogramme, comme la forme extérieure de l'aile. Dans une section dans le plan ( $xOz$ ), l'évidement est caractérisé par les positions  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$ , de début et fin de l'évidement, relatives à la corde du profil dans cette section; on fixe également une épaisseur  $e$  du capot qui recouvre l'évidement sur l'extrados et l'intrados de l'aile (cf. figure 6.3); cette épaisseur sera rapportée à la corde normale  $c_n$  sous la forme d'un paramètre  $\bar{e}$ . Dans l'envergure de l'aile, l'évidement est caractérisé par deux positions  $y_1$  et  $y_2$ , de début et fin d'évidement (cf. figure 6.4), qui seront ramenés à deux paramètres  $\bar{y}_1$  et  $\bar{y}_2$  relatifs à l'envergure de la partie visible de l'aile  $h - \phi/2$  où  $\phi$  est le calibre – c'est-à-dire le diamètre du corps, puisqu'il est ici cylindrique.

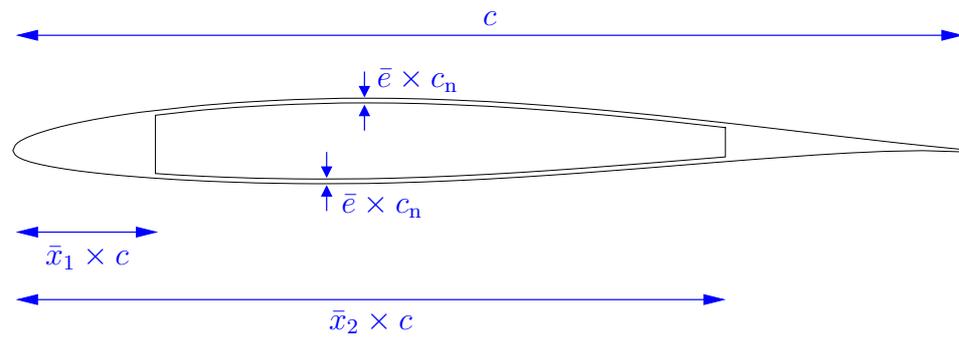


FIG. 6.3 – Profil NACA 63209 à bord de fuite épais, de corde  $c$  et évidé entre  $\bar{x}_1 = 15\%$  et  $\bar{x}_2 = 75\%$ .

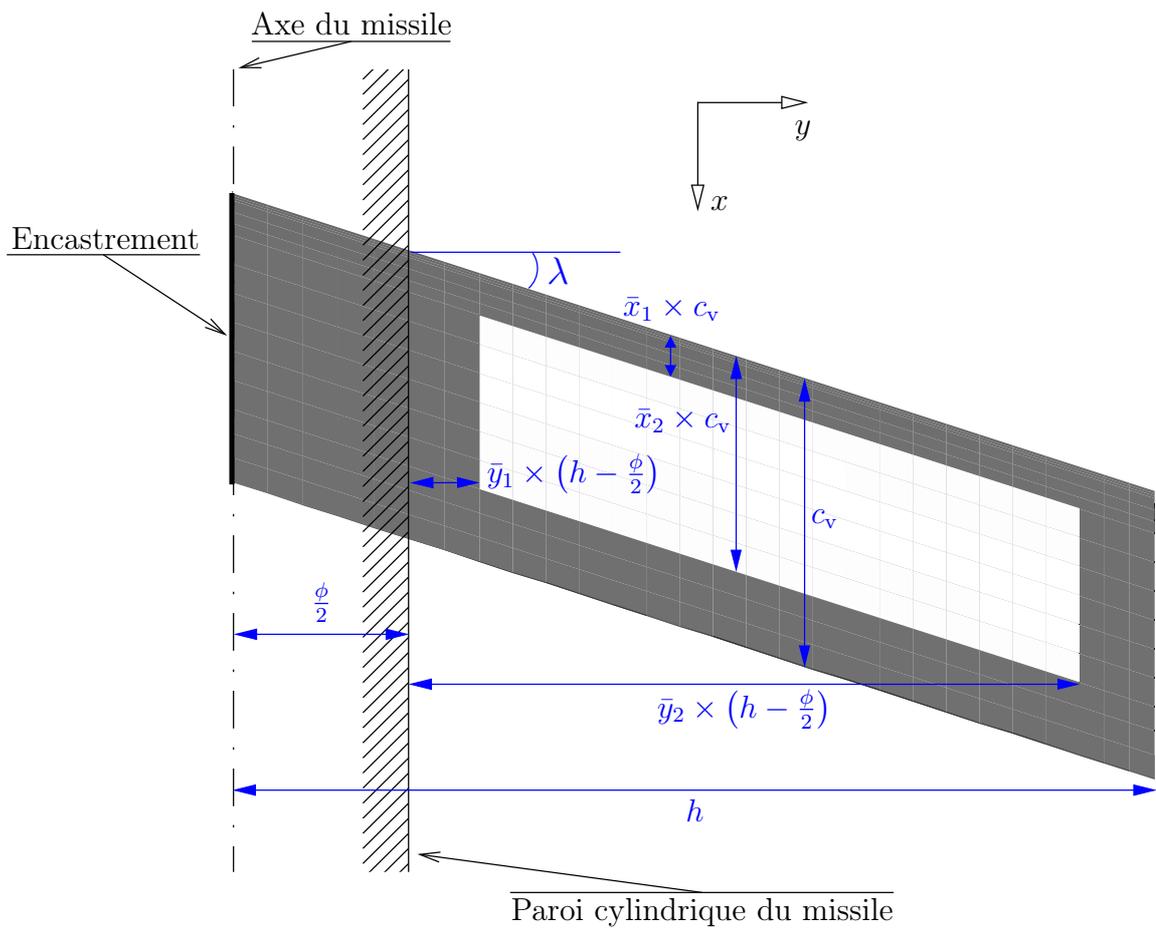


FIG. 6.4 – Évidement de l'aile du missile vu de dessus, dans le plan  $(xOy)$ .

On dénombre ainsi cinq paramètres pour cet évidement : les abscisses adimensionnées  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$ , l'épaisseur adimensionnée  $\bar{e}$  et les positions adimensionnées  $\bar{y}_1$  et  $\bar{y}_2$  de début et fin d'évidement dans l'envergure.

#### 6.1.4 Paramètres effectivement retenus

Parmi tous les paramètres qui viennent d'être décrits, certains ont été fixés afin de ne garder variables que les paramètres susceptibles d'influencer de la façon significative le comportement aéroélastique du missile. Un nombre réduit de paramètres permet de tirer plus facilement des conclusions d'une étude paramétrique, tout en se réservant la possibilité de revenir au besoin sur ce choix ou d'étoffer ultérieurement le jeu des paramètres retenus.

Soulignons que les outils qui ont été développés dans cette étude permettent cependant de prendre en compte tous les paramètres introduits ci-dessus. Les paramètres qui ont été fixés sont récapitulés dans le tableau 6.1. Les valeurs d'altitude et d'angle de flèche retenues sont des valeurs moyennes. La valeur de la corde normale est la valeur maximale ; on maximise ainsi la surface de l'aile au risque d'augmenter la traînée de frottement. Le profil NACA 63209 a été retenu car il est proche de profils déjà utilisés pour de tels missiles ; pour ce profil  $\bar{x}_G = 41,6\%$ . Les abscisses d'évidement  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  sont choisies de manière à ce que la position du centre de gravité du profil évidé soit la même que celle du profil plein. Il a enfin été choisi d'évider l'aile jusqu'à une position proche du saumon. En effet, du point de vue structural, c'est surtout la position  $\bar{y}_1$  qui joue puisque plus on se rapproche de l'emplanture et plus est alors importante la contribution à la portance d'une section de longueur donnée. En revanche, du point de vue du calcul de la première fréquence propre de la structure, un enlèvement de matière en bout d'aile permet d'élever cette fréquence propre. Enfin, la valeur de la longueur de l'aile, le calibre du missile, la masse moyenne considérée, dépendent de nombreux facteurs comme la position du pivot dans le missile ou les impératifs d'aménagement intérieur du missile.

Paramètre	Valeur
altitude $z$	fixées
angle de flèche $\lambda$	
corde normale $c_n$	
longueur de l'aile $l$	
calibre $\phi$	
masse moyenne $m$	
profil	NACA 63209
début d'évidement $\bar{x}_1$	15 %
fin d'évidement $\bar{x}_2$	75 %
fin d'évidement $\bar{y}_2$	90 %

TAB. 6.1 – Tableau récapitulatif des paramètres fixés.

Pour les paramètres que l'on a choisi de faire varier, il convient de fixer les bornes de l'intervalle de variation des valeurs correspondantes. Le tableau 6.2 indique les bornes maximale et minimale pour chacun des cinq paramètres finalement retenus.

Enfin, on aura remarqué qu'il n'a jamais été suggéré de modifier la corde du profil le long de l'envergure, pour permettre d'ajouter un effilement à l'aile, ou de construire une aile à flèches multiples. Cette exigence d'une longueur de corde et d'un angle de flèche constants est dictée par des contraintes de furtivité. De plus, le matériau utilisé sera considéré comme fixé. En effet, prendre comme paramètres les propriétés du matériau oblige à prendre en compte une

Paramètre	Valeur minimale	Valeur maximale
calage dans le plan de tangage $\theta_t$	0°	3°
calage au saumon $\theta_s$	-3°	0°
nombre de MACH $Ma$	0,6	0,8
début d'évidement $\bar{y}_1$	10 %	80 %
épaisseur des capots $\bar{e}$	0,5 %	1,75 %

TAB. 6.2 – Tableau récapitulatif des paramètres retenus pour cette étude avec indication des bornes de l'intervalle de variation.

nouvelle discipline dans l'étude. Le matériau sera ici de l'aluminium, avec un module d'YOUNG  $E = 70$  GPa, un coefficient de POISSON  $\nu = 0,33$ , une masse volumique  $\rho = 2700$  kg·m<sup>-3</sup> et une limite élastique  $\sigma_e = 390$  MPa.

On a donc réduit le nombre de paramètres à cinq. Ce faible nombre va permettre de tirer assez rapidement et relativement simplement des conclusions sur les effets et la pertinence de ce choix.

## 6.2 Chaîne de calcul

Nous avons présenté au chapitre 5 les principes généraux du calcul aéroélastique couplé. On remarque que, dans ce processus (cf. figures 5.5 et 5.6), il est nécessaire de fournir un certain nombre de données pour initialiser et contrôler l'évolution du calcul. À l'aide du paramétrage qui a été proposé au paragraphe précédent 6.1, nous allons exposer le processus de calcul de ces éléments, qui constitue la phase de pré-traitement du calcul aéroélastique couplé. Dans un premier temps, nous verrons la façon dont sont générés la forme géométrique de l'aile et les maillages du fluide et de structure associés. Nous exposerons ensuite le calcul de la matrice de flexibilité réduite  $S$ , avant de présenter les éléments nécessaires à l'initialisation du calcul aérodynamique. Une fois le calcul effectué, il est nécessaire d'appliquer un post-traitement aux résultats obtenus afin de déterminer les valeurs de la finesse à l'équilibre, de la contrainte structurale maximale atteinte avec un facteur de charge  $n = 3$  dans l'aile, et de la première fréquence propre de la structure.

### 6.2.1 Pré-traitement

Le pré-traitement est une phase du calcul qui fait intervenir plusieurs logiciels qui doivent être intégrés dans une chaîne de calcul *automatique* et *robuste*.

En effet, qu'il s'agisse d'un balayage systématique de l'espace des paramètres ou de l'exploration de cet espace par un algorithme d'optimisation, un nombre important de calculs aéroélastiques couplés devra être réalisé et l'efficacité de ce processus exige de s'affranchir de l'intervention humaine, en envisageant toutes les situations possibles, y compris les situations d'erreur, pour pouvoir éliminer du calcul ces configurations problématiques. Nous allons donc décrire la façon de procéder pour créer les maillages aérodynamique et structural, pour calculer la matrice de flexibilité réduite et divers autres éléments nécessaires à l'initialisation du calcul.

### 6.2.1.1 Maillages

La première étape, lors du calcul d'une nouvelle configuration, consiste à construire la géométrie à partir du jeu de paramètres définissant cette configuration. Sur la base de cette définition géométrique, il faut créer deux maillages : le maillage du domaine fluide sera destiné au calcul aérodynamique avec AEROLOG, le maillage de structure de l'aile sera destiné au calcul de la matrice de flexibilité réduite détaillé ci-après. À partir des paramètres définissant la configuration, des paramètres de référence (dimensions du fuselage, base des profils de référence. . .) et d'éléments géométriques pré-construits, qui restent inchangés d'une configuration à l'autre (ici le fuselage), on construit la géométrie de la configuration considérée.

Le maillage du domaine fluide construit pour le calcul aérodynamique est un maillage structuré constitué d'hexaèdres. Ce maillage ayant la même structure quelle que soit la configuration, il est seulement nécessaire d'actualiser les projections des éléments constituant les frontières de ce maillage, afin de positionner correctement un certain nombre de points, permettant ainsi de contrôler la forme et la régularité du maillage. Il est ensuite converti par l'utilitaire « CATMESH » au format nécessaire à AEROLOG. Le processus de construction de ce maillage est schématisé figure 6.5 ; les figures 6.6, 6.7 et 6.8 présentent des vues de ce maillage, respectivement à la surface du missile, sur le plan de symétrie ( $xOz$ ) et vu de dessus suivant une coupe à  $z = 0$ .

Le maillage de la structure de l'aile est un maillage non structuré. Pour réaliser les opérations automatiques de génération de maillage, il a été choisi de réaliser également un maillage à base d'hexaèdres. Le maillage de la configuration considérée est également généré à partir d'un maillage de référence mis à jour par des opérations de projection. Le processus de construction de ce maillage est schématisé figure 6.9 ; la figure 6.10(a) présente une vue cavalière de ce maillage et la figure 6.10(b) le maillage d'une section de l'aile à une extrémité de l'évidement.

### 6.2.1.2 Matrice de flexibilité réduite

La matrice de flexibilité réduite sert à représenter, de façon simplifiée, le comportement linéaire de l'aile au cours du calcul aéroélastique couplé. Elle est dite « réduite » car pour les nœuds force  $M_f$  et déplacement  $M_d$ , on ne choisit en général pas l'ensemble des nœuds du modèle. Le format qui a été retenu par l'ONERA pour l'utilisation de cette matrice dans la chaîne RATAN est le format « punch » du logiciel NASTRAN. Cependant, comme ce logiciel n'était pas disponible au moment de cette étude, il a été choisi d'utiliser le logiciel SAMCEF.

Le maillage construit précédemment comprend 2844 éléments hexaédriques. À partir de ce maillage, on choisit les ensembles  $\{M_f\}$  et  $\{M_d\}$  des nœuds force et déplacement. On considère que l'aile est bidimensionnelle, c'est-à-dire qu'une section donnée de l'aile ne pourra pas se déformer. Cette hypothèse est en particulier utilisée lors de l'opération de lissage du processus de déformation du maillage (cf. figure 5.6 page 171) puisque cette opération modélise l'aile sous forme d'un polynôme de deux paramètres. On recherche donc, pour les nœuds force et déplacement, les nœuds du maillage de structure les plus proches de positions prédéterminées (cf. figure 6.11) qui ont une cote  $z = 0$ .

L'aile est encadrée au plan  $y = 0$  ; les nœuds du maillage situés dans ce plan ne possèdent donc aucun degré de liberté. Les éléments utilisés par SAMCEF sont des hexaèdres et le matériau est de l'aluminium dont les caractéristiques ont été rappelées plus haut (cf. paragraphe 6.1.4). On applique donc successivement une charge unitaire dans la direction  $\vec{z}$  ( $F_z = 1\text{ N}$ ) sur chacun des nœuds force  $M_f$  et on enregistre les déplacements, dans les trois directions  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ , des nœuds déplacement  $M_d$  engendrés.

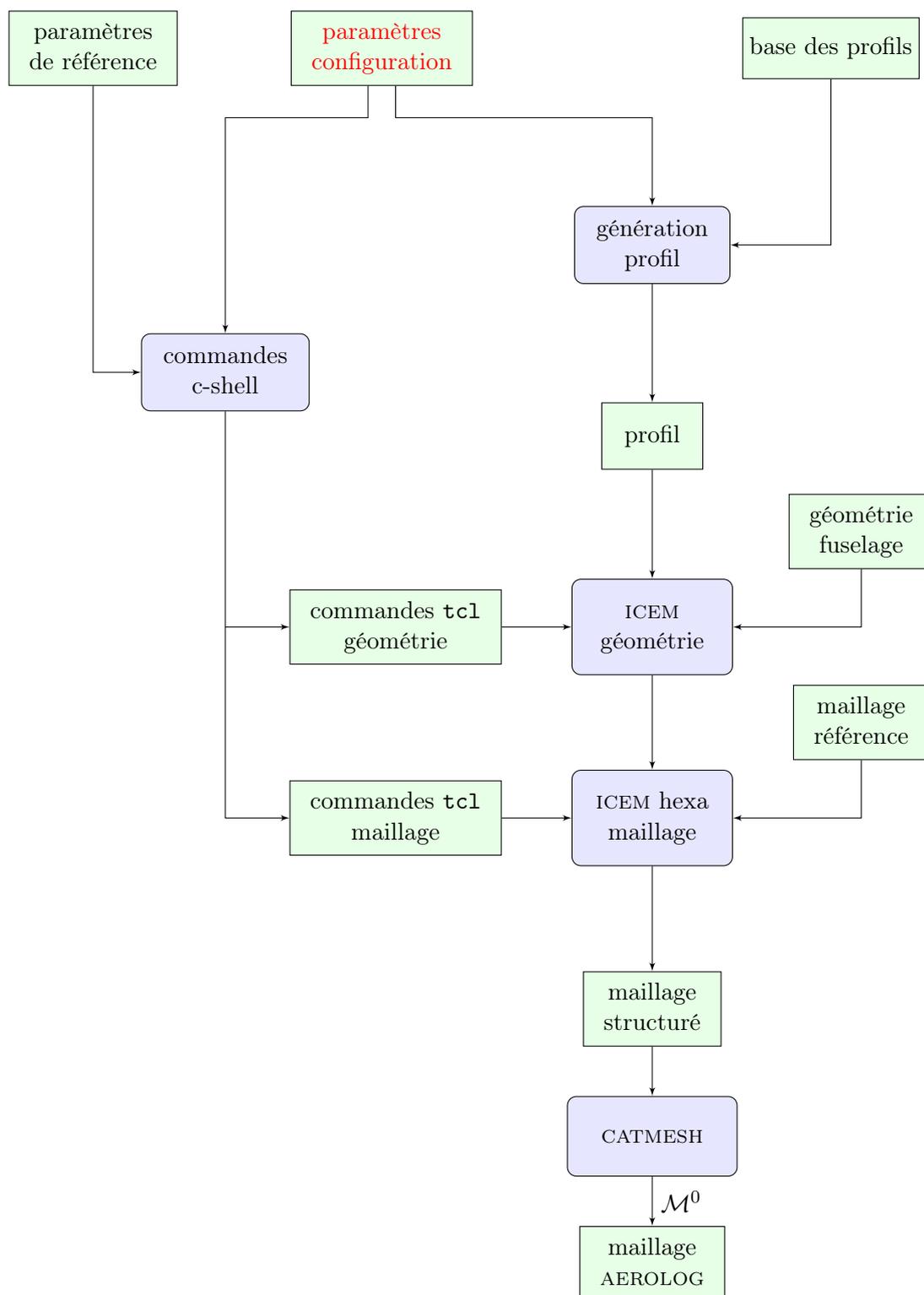


FIG. 6.5 – Schématisation de la génération du maillage du domaine fluide destiné au calcul aérodynamique.

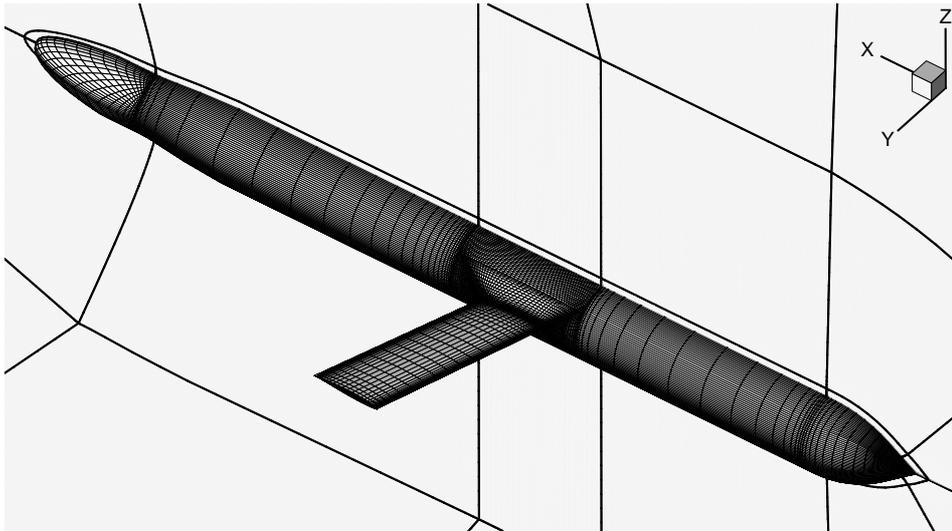


FIG. 6.6 – Maillage aérodynamique – vue du maillage à la surface du missile.

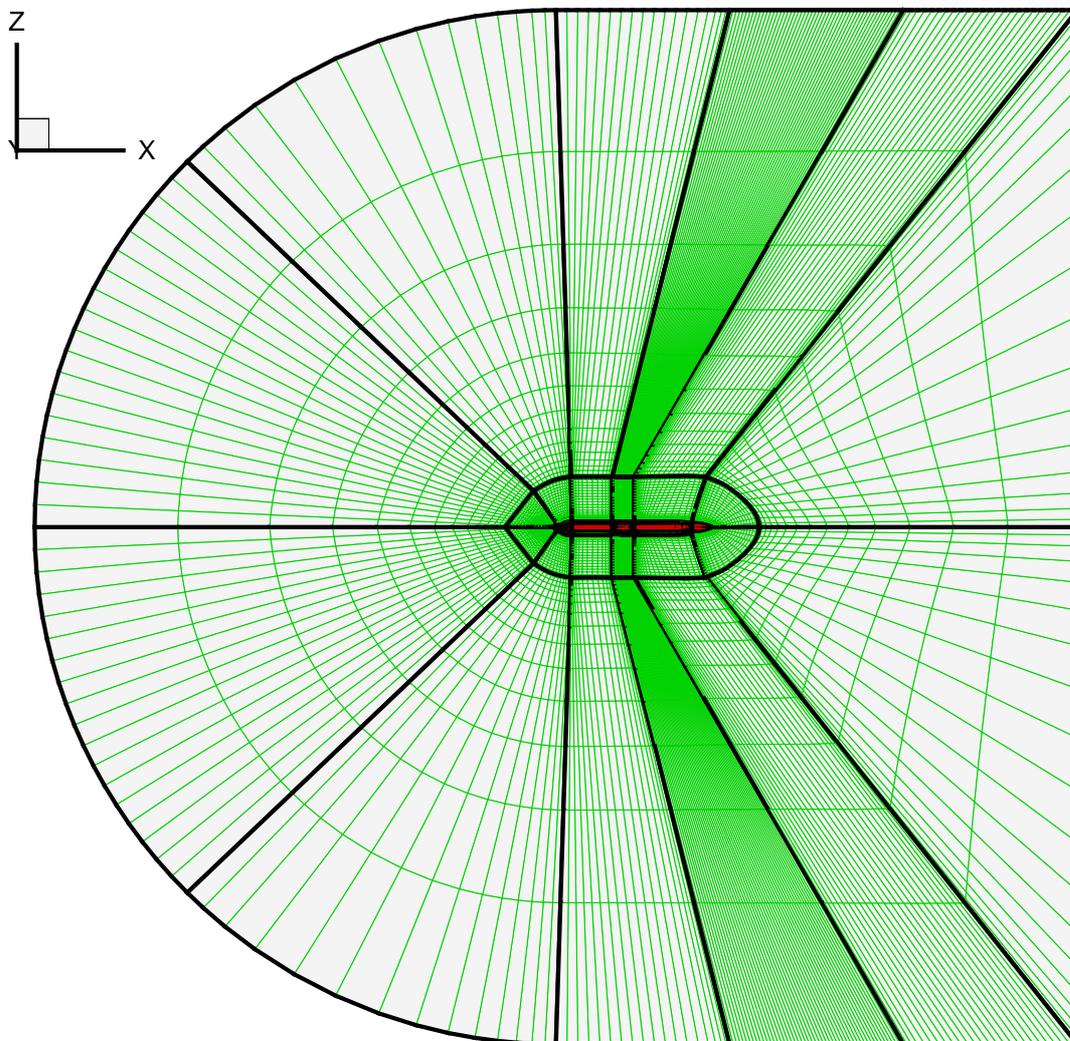
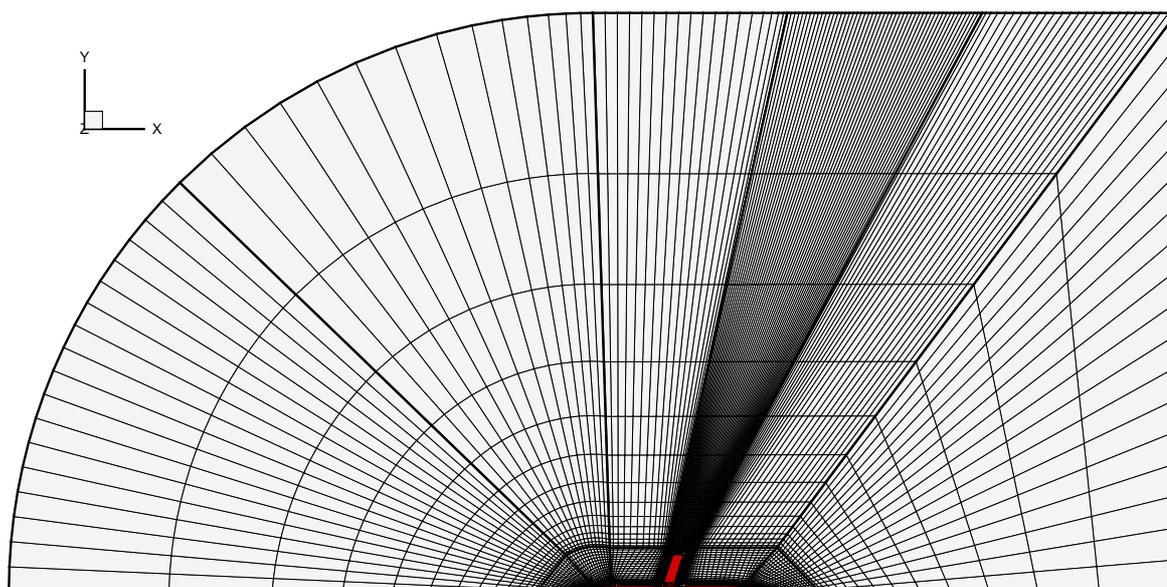
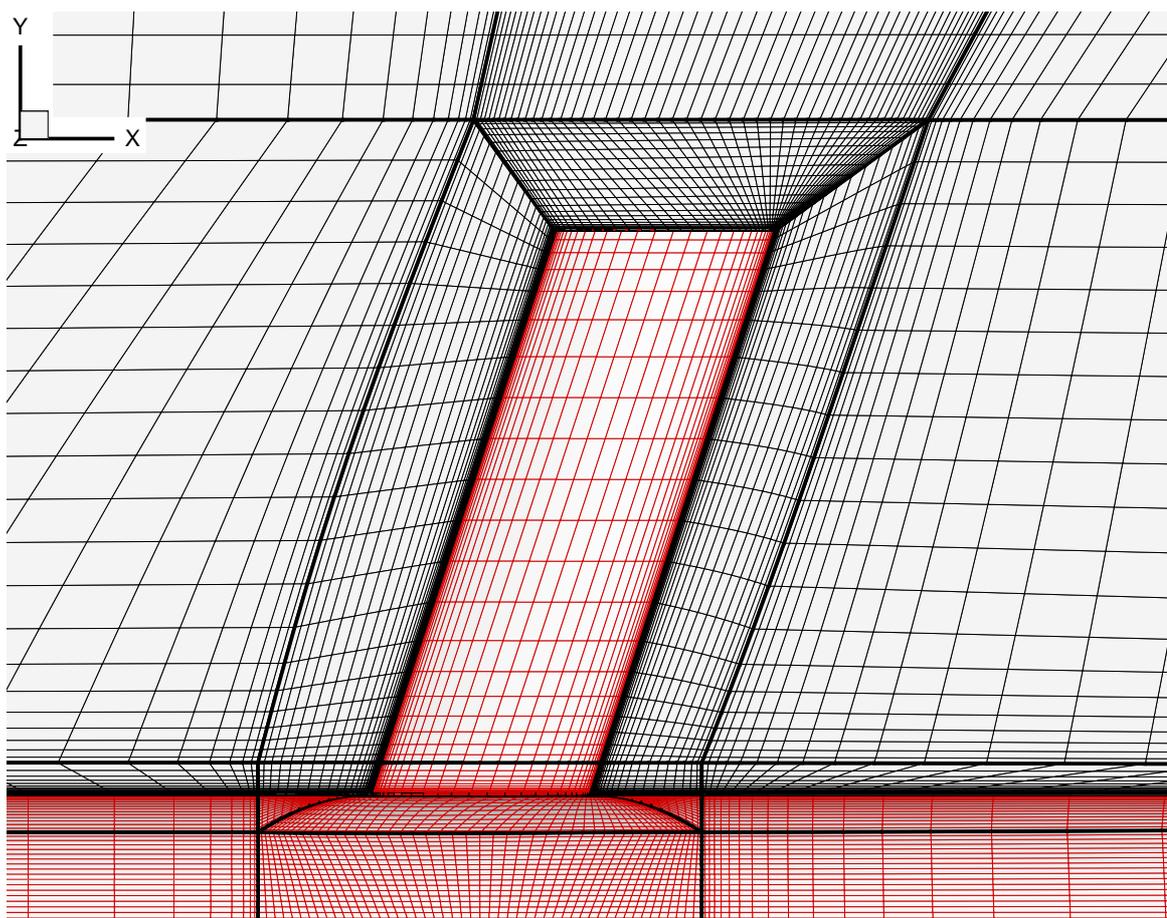


FIG. 6.7 – Maillage aérodynamique – vue du plan de symétrie  $(xOz)$ .



(a) Vue générale.



(b) Détail de l'aile.

FIG. 6.8 – Maillage aérodynamique – vue de dessus en coupe à  $z = 0$ .

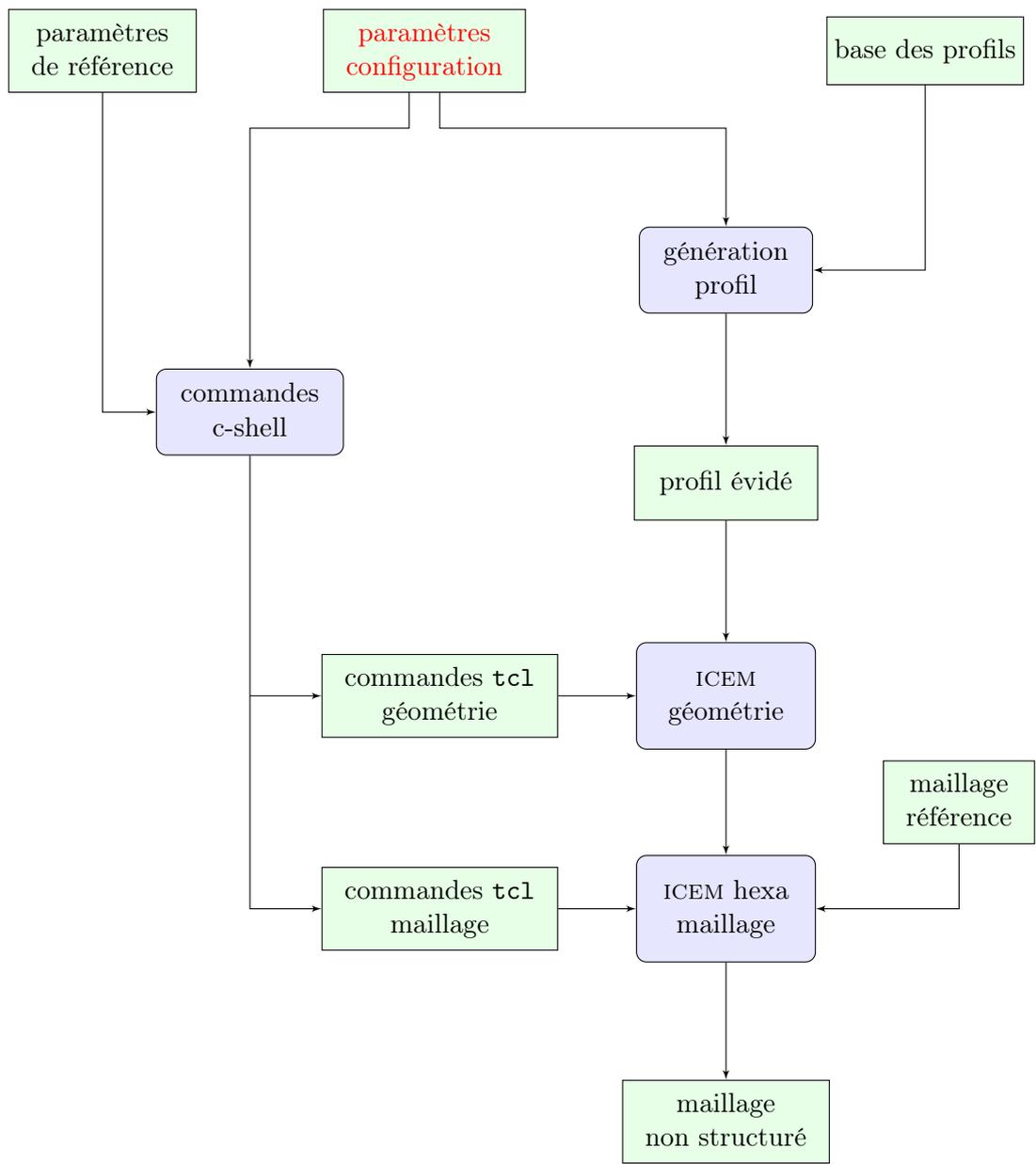


FIG. 6.9 – Schématisation de la génération du maillage de la structure de l’aile évidée.

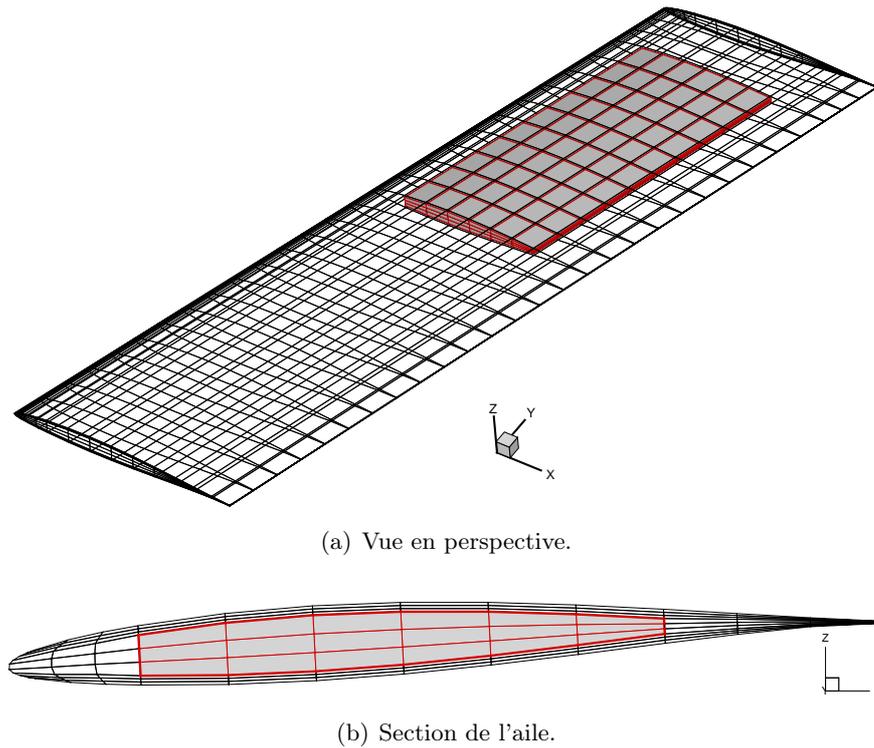


FIG. 6.10 – Maillage de structure de l'aile ; la zone grisée centrale représente l'évidement ; on notera le calage négatif de la section.

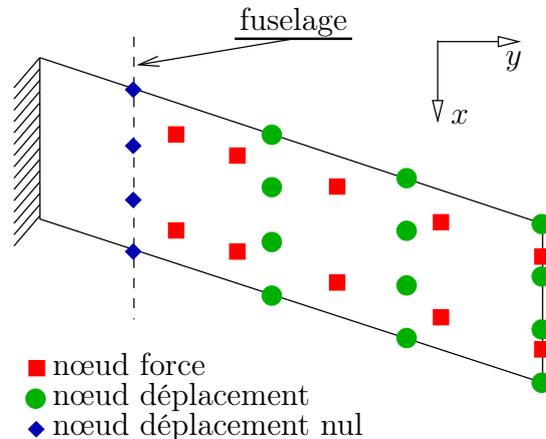


FIG. 6.11 – Choix des nœuds force et déplacement sur l'aile.

L'agencement de l'aile et du fuselage utilisés est particulière puisque ces ailes se replient dans le fuselage avant le largage du missile. Le pivot entre les ailes et le fuselage, qui, une fois les ailes déployées, est bloqué et peut être assimilé à un encastrement, se situe dans le plan  $(xOz)$  de symétrie du missile, à l'intérieur du fuselage (cf. figure 6.12). Lorsque l'on calcule l'aile avec SAMCEF, le fuselage n'entre pas en compte ; la seule contrainte qui existe se situe au niveau des positions des nœuds force et déplacement qui doivent être placés, de préférence, à l'extérieur du fuselage. Cependant, les déplacements engendrés au niveau du fuselage ne sont pas nuls. Dans un tel mécanisme réaliste, il faudrait vérifier que ces déplacements sont suffisamment faibles pour que l'aile ne se déplace qu'à travers une fente dans le fuselage et ne

rentre pas en contact avec celui-ci. Cependant, pour la mise en œuvre du calcul aéroélastique couplé, la prise en compte de déplacements importants n'est pas envisageable. Pour cette raison, on rajoute à la matrice de flexibilité réduite, un certain nombre de nœuds dont le déplacement sera considéré comme nul quel que soit le cas de chargement. Ces nœuds sont répartis le long de la corde du profil située à la jonction de l'aile et du fuselage (cf. figure 6.11).

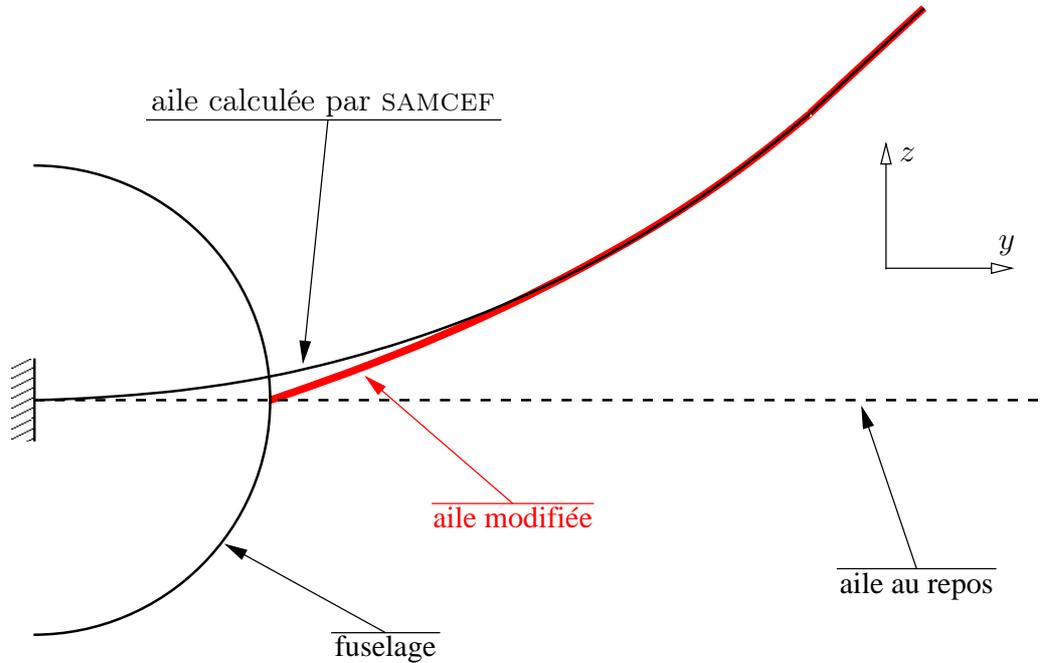


FIG. 6.12 – Schéma illustrant la nécessité d'introduire des nœuds à déplacement nul ; les déformations ont été exagérées.

À partir des résultats issus du calcul mené avec SAMCEF et des nœuds supplémentaires à déplacement nul, on construit le fichier contenant la matrice de flexibilité réduite au format « punch » qui sera utilisé par la chaîne aéroélastique RATAN.

### 6.2.1.3 Initialisation du calcul aéroélastique

Pour fonctionner correctement, la chaîne de calcul a besoin d'un certain nombre d'informations qui peuvent être regroupées en deux catégories : les informations d'initialisation du calcul aérodynamique avec adaptation d'incidence et les informations nécessaires à la chaîne RATAN. Outre le maillage du domaine fluide non déformé dont nous avons parlé plus haut, les informations nécessaires au calcul aérodynamique sont la solution initiale, les conditions aux limites et les données d'asservissement. La solution initiale utilisée est une solution calculée sur une configuration dite « de référence » (aile non vrillée et non évidée). L'utilisation d'une telle solution déjà convergée, même si les conditions aux limites ne se réfèrent pas tout à fait au même état (pression, température et nombre de MACH différents), permet généralement de s'affranchir d'un long régime transitoire d'établissement de l'écoulement stationnaire. Les conditions aux limites que l'on applique se réfèrent à l'état en amont qui est défini par l'altitude  $z$  considéré et l'incidence de départ  $\alpha^0$ , les caractéristiques thermodynamiques de l'air étant fixées. AEROLOG contient, en effet, un modèle d'atmosphère standard, qui fournit les valeurs de pression et température statiques à une altitude donnée. L'incidence de départ n'est

pas d'une grande importance puisqu'elle va être adaptée en cours de calcul pour permettre d'atteindre la portance nécessaire pour équilibrer le poids. Néanmoins, fixer une valeur de  $\alpha^0$  qui soit proche de l'incidence d'équilibre permet d'accélérer le processus d'asservissement. Nous utiliserons donc la formule suivante :

$$\alpha^0 = \frac{C_{L_{obj}}}{\overline{C_{L_\alpha}}} - \alpha_0 \times \cos(\lambda)$$

- où :
- $C_{L_{obj}}$  est le coefficient de portance du missile complet, nécessaire pour équilibrer le poids ;
  - $\overline{C_{L_\alpha}}$  est une estimation du gradient de portance par la formule de DIEDERICH (cf. annexe D) ;
  - $\alpha_0$  est la valeur absolue de l'incidence à laquelle la portance du profil normal au bord d'attaque s'annule ;
  - $\lambda$  est l'angle de flèche de l'aile ; on multiplie  $\alpha_0$  par  $\cos(\lambda)$  pour obtenir l'incidence à laquelle la portance du profil dans le vent s'annule.

Les données d'asservissement, enfin, sont le coefficient de portance qui équilibre le poids, le gradient de portance  $\overline{C_{L_\alpha}}$  déjà évoqué ci-dessus et la borne maximale de l'erreur statique acceptable  $\epsilon$  dont la valeur est fixée à  $\epsilon = 5 \times 10^{-3}$ . On calcule le coefficient de portance à atteindre par :

$$C_{L_{obj}} = \frac{m \times g}{\frac{1}{2} \gamma p_0 S_{ref} Ma^2} \quad (6.1)$$

- où :
- $m$  est la masse totale moyenne du missile ;
  - $g$  est l'accélération de la pesanteur dont la valeur est fixée à  $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  ;
  - $\gamma$  est le rapport des coefficients de chaleur spécifique à pression et volume constants ;
  - $p_0$  est la pression statique de l'état en amont fournie par le modèle d'atmosphère standard ;
  - $Ma$  est le nombre de MACH de l'état en amont, variable du problème ;
  - $S_{ref}$  la surface de référence du calcul des coefficients aérodynamiques globaux utilisée dans AEROLOG.

Outre le fichier au format punch contenant la matrice de flexibilité réduite évoqué au paragraphe précédent, les informations nécessaires à la chaîne RATAN sont regroupées dans un seul autre fichier. On y détaille essentiellement :

- la liste des blocs du maillage du domaine fluide avec leurs dimensions ;
- la liste des frontières de ces blocs, qui constituent soit un raccord dans le fluide, soit une condition aux limites ;
- les listes des nœuds force et déplacement avec la numérotation qui leur est donnée dans le fichier au format punch ;
- l'association qui est faite entre les nœuds du maillage de structure (force et déplacement) et les frontières des blocs du domaine fluide, par le biais de « familles » ; dans notre cas, tous les nœuds force et déplacement sont associés à l'aile, les surfaces constituant le fuselage et la semelle n'ayant pas de nœuds structuraux associés ;
- le type de lissage qui est utilisé ; dans notre cas, un lissage polynomial d'ordre  $3 \times 3$  ;
- la liste des instructions de déformation de maillage pour chaque bloc (cf. paragraphe 5.2.4.2) : type de déformation (ici, analogie matériau élastique continu), valeurs associées (module d'YOUNG, coefficient de POISSON...), découpage en macro-blocs, tolérance de l'algorithme de gradient conjugué... ;

- la séquence de déformation, c'est-à-dire l'ordre dans lequel on va déformer chaque bloc ;
- la liste des conditions aux limites pour le processus de déformation de maillage ; pour nos calculs, toutes les conditions sont à déplacement nul (fuselage, limites extérieures du domaine de calcul...), sauf l'aile, dont la déformation est imposée par le déplacement des nœuds déplacement et une zone tampon appelée « semelle » dont le déplacement est laissé libre et dont on va justifier l'existence ci-après.

Les points du maillage du domaine fluide situés à la jonction entre l'aile et le fuselage devraient hériter de deux conditions aux limites, celle provenant du fuselage, qui impose un déplacement nul et celle provenant de l'aile qui impose un déplacement calculé à partir de celui des nœuds déplacement. Il est évident que seule la première d'entre-elles devrait être appliquée. À partir des déplacements des nœuds déplacement, on calcule la déformation de la frontière du maillage aérodynamique associée, l'aile, en réalisant un lissage polynomial d'ordre  $3 \times 3$  (cf. paragraphe 5.2.4.3). Même avec l'ajout de trois nœuds à déplacement nul à proximité de cette ligne de jonction du fuselage et de l'aile, la forme imposée à la surface engendre des déplacements petits mais non nuls pour les points du maillage aérodynamique situés sur cette ligne de jonction. Ces déplacements, dès lors qu'ils sont supérieurs à la taille de maille, deviennent incompatibles avec la condition de déplacement nul sur les points voisins appartenant au fuselage. Pour assurer la continuité entre les deux surfaces de l'aile et du fuselage, on définit donc, sur le fuselage, une zone nommée « semelle » (cf. figure 6.13). Dans cette zone, l'algorithme de déformation de maillage pourra déplacer librement, c'est-à-dire dans les trois directions d'espace, les nœuds du maillage. Ainsi, à la jonction de cette zone « semelle » avec la zone « fuselage », les déplacements des nœuds seront nuls tandis qu'à la jonction avec la zone « aile », les déplacements des nœuds de cette zone seront ceux imposés par ceux des nœuds de la zone « aile ». Pour les autres points, le déplacement sera calculé par l'algorithme. Dans un mécanisme réel, cette zone « semelle » pourrait correspondre à un dispositif de soufflet permettant de minimiser l'effet aérodynamique de la fente nécessaire au déploiement des ailes.

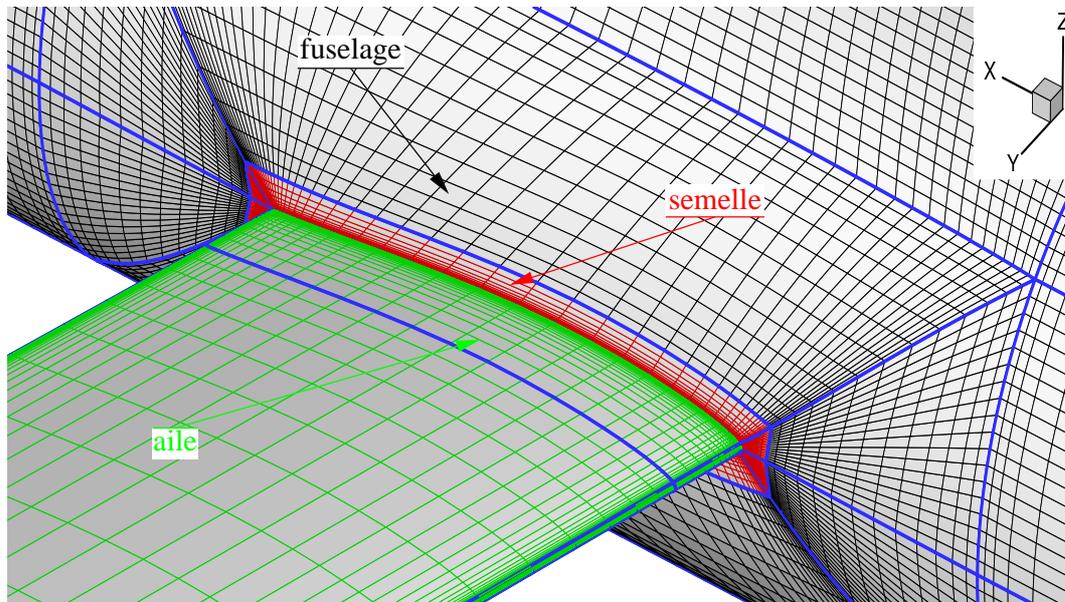


FIG. 6.13 – Détail de la zone d'emplanture de l'aile avec repérage de l'aile, de la semelle et du fuselage.

### 6.2.2 Déroulement du calcul

Avec ces éléments d'initialisation calculés ci-dessus, le calcul aéroélastique avec couplage statique et adaptation d'incidence se déroule selon la procédure décrite au paragraphe 5.2.4.3. Le calcul produit des données d'historique qui permettent de vérifier son bon déroulement et notamment le couplage et l'adaptation d'incidence. En particulier, on s'intéresse à l'évolution du coefficient de portance et de l'incidence qui sont liés par un asservissement proportionnel. Les figures 6.15 et 6.16 représentent cette évolution pour une configuration donnée. La déformation de maillage est introduite toutes les 100 itérations, sans sous-relaxation tandis que le test permettant l'asservissement de l'incidence à la portance est réalisé toutes les 5 itérations et le coefficient de relaxation  $k_{\text{relax}}$  de l'adaptation d'incidence vaut 0,2. On voit assez clairement que la déformation de maillage affecte la convergence du calcul, mais de façon relativement modérée tandis que l'adaptation d'incidence, qui consiste en une rotation de la solution en tout point du domaine, entraîne une brusque perturbation de la convergence malgré une sous-relaxation importante.

La figure 6.14 montre les déplacements calculés pour passer de l'aile non déformée à l'aile à la fin du calcul. On voit que le phénomène prépondérant est la flexion ; on note également en bout d'aile un léger effet de vrillage négatif. Cependant, il faut garder à l'esprit que le vrillage des sections de l'aile, même faible, modifie l'incidence locale de l'écoulement et peut avoir des effets importants alors que la flexion de l'aile, y compris lorsqu'elle atteint plusieurs dizaines de millimètres, a souvent des effets plus limités.

Le calcul aéroélastique couplé est légèrement plus coûteux en temps de calcul qu'un calcul aérodynamique classique :  $4,0 \mu\text{s}/\text{pt}/\text{it}$  au lieu de  $3,8 \mu\text{s}/\text{pt}/\text{it}$  pour la même configuration<sup>19</sup>. De plus, il faut environ 12 000 itérations pour faire converger le calcul alors qu'un calcul aérodynamique classique demande environ 10 000 itérations. Au niveau du temps de restitution, on a donc un surcoût de l'ordre de 23 %. Compte tenu de la taille du maillage, qui contient 964 168 nœuds, un calcul aéroélastique couplé demande, par conséquent, environ 12,9 heures de calcul.

L'arrêt du calcul aéroélastique couplé devrait théoriquement être effectué une fois satisfait un critère sur la norme infinie des déplacements du maillage du domaine fluide qui doit être inférieure à une valeur  $\epsilon'$ . En pratique, on arrête le calcul après avoir effectué un certain nombre d'itérations et on vérifie *a posteriori* que le critère est vérifié.

### 6.2.3 Post-traitement

Une fois le calcul achevé, il convient de post-traiter les résultats obtenus afin de calculer les valeurs des objectifs et contraintes définis à la section 5.2. Il s'agit du produit du nombre de MACH par la finesse totale du missile équilibré, de la contrainte maximale atteinte dans l'aile et de la première fréquence propre de la structure de l'aile.

Pour déterminer la finesse du missile complet, on utilise les coefficients d'effort axial et d'effort normal calculés par AEROLOG dans le repère lié au missile. Or, la configuration que l'on a calculée est une configuration dite lisse, c'est-à-dire sans gouverne ni entrée d'air. Théoriquement la contribution de la prise d'air au coefficient de traînée varie en fonction de l'incidence et du régime moteur. Cependant, il faudrait inclure un modèle de motorisation dans notre problème ; cette étude intervient trop en amont de la phase de conception du missile pour pouvoir choisir un modèle pertinent ; on se contentera donc d'une valeur forfaitaire moyenne établie à partir de résultats de calcul et expérimentaux. D'autre part, la traînée produite

<sup>19</sup>Les calculs ont été effectués avec un processeur Alpha EV68, 1,25 GHz, 16 Mo de mémoire cache, 8 Go de mémoire partagée entre les quatre processeurs de chaque nœud.

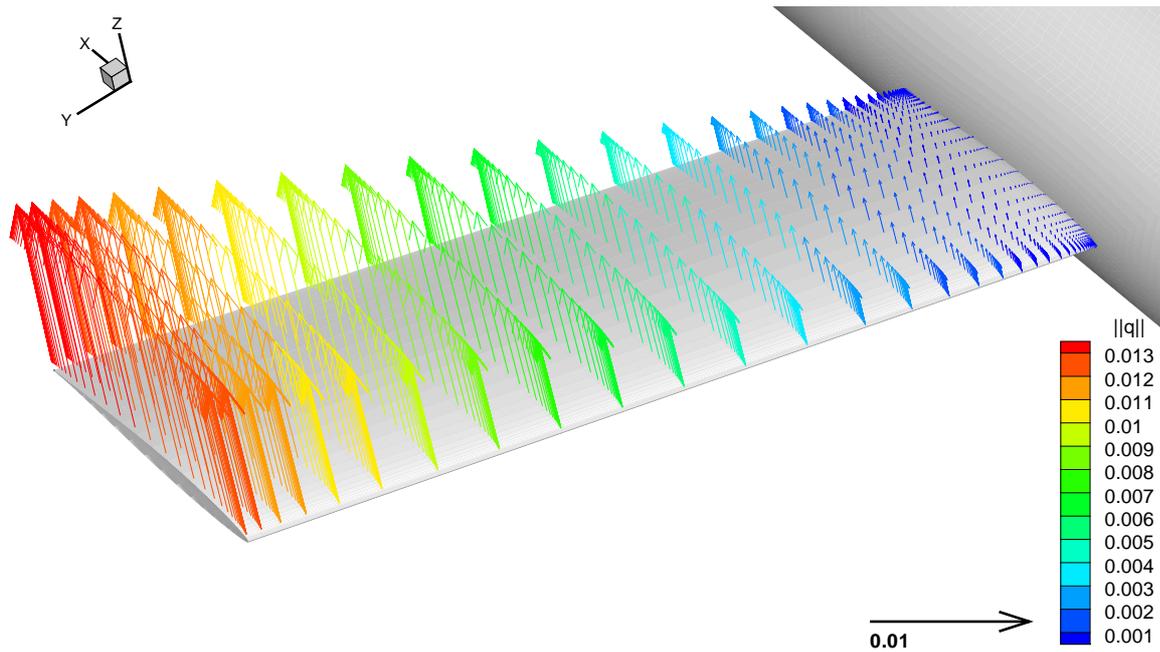


FIG. 6.14 – Vue de l’aile non déformée avec les vecteurs déplacement  $\vec{q}$  permettant de passer à l’aile déformée une fois le calcul convergé ; les déplacements sont exprimés en mètres.

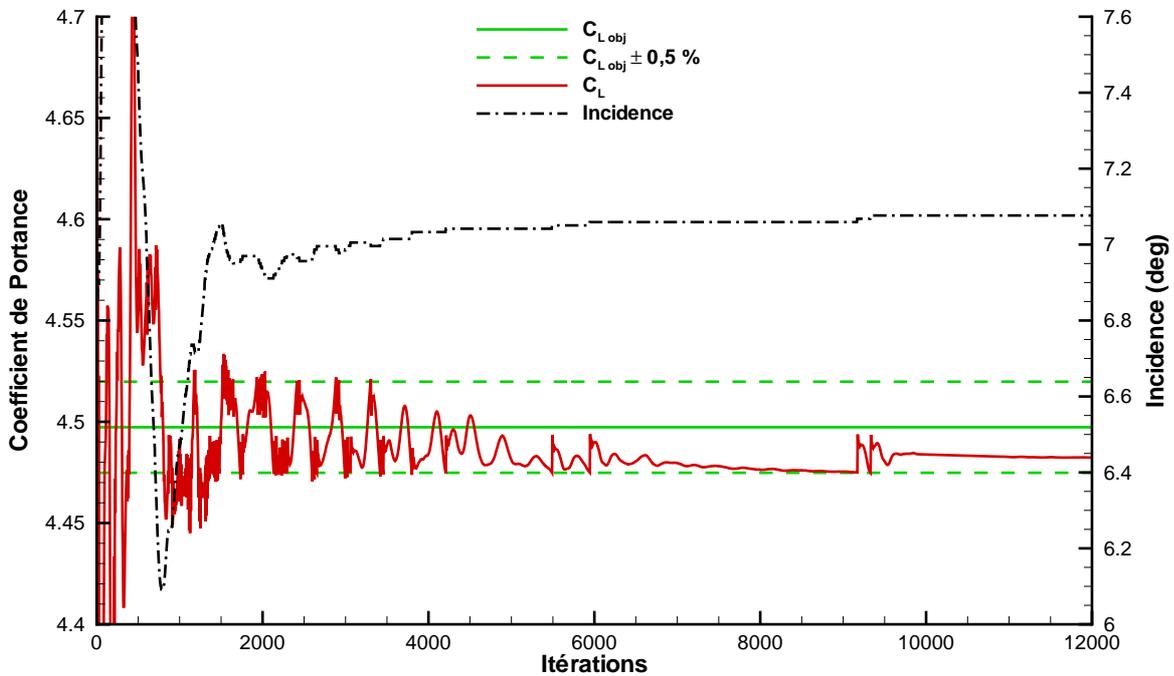


FIG. 6.15 – Historique de convergence du coefficient de portance et de l’incidence en fonction des itérations lors du calcul aéroélastique couplé.

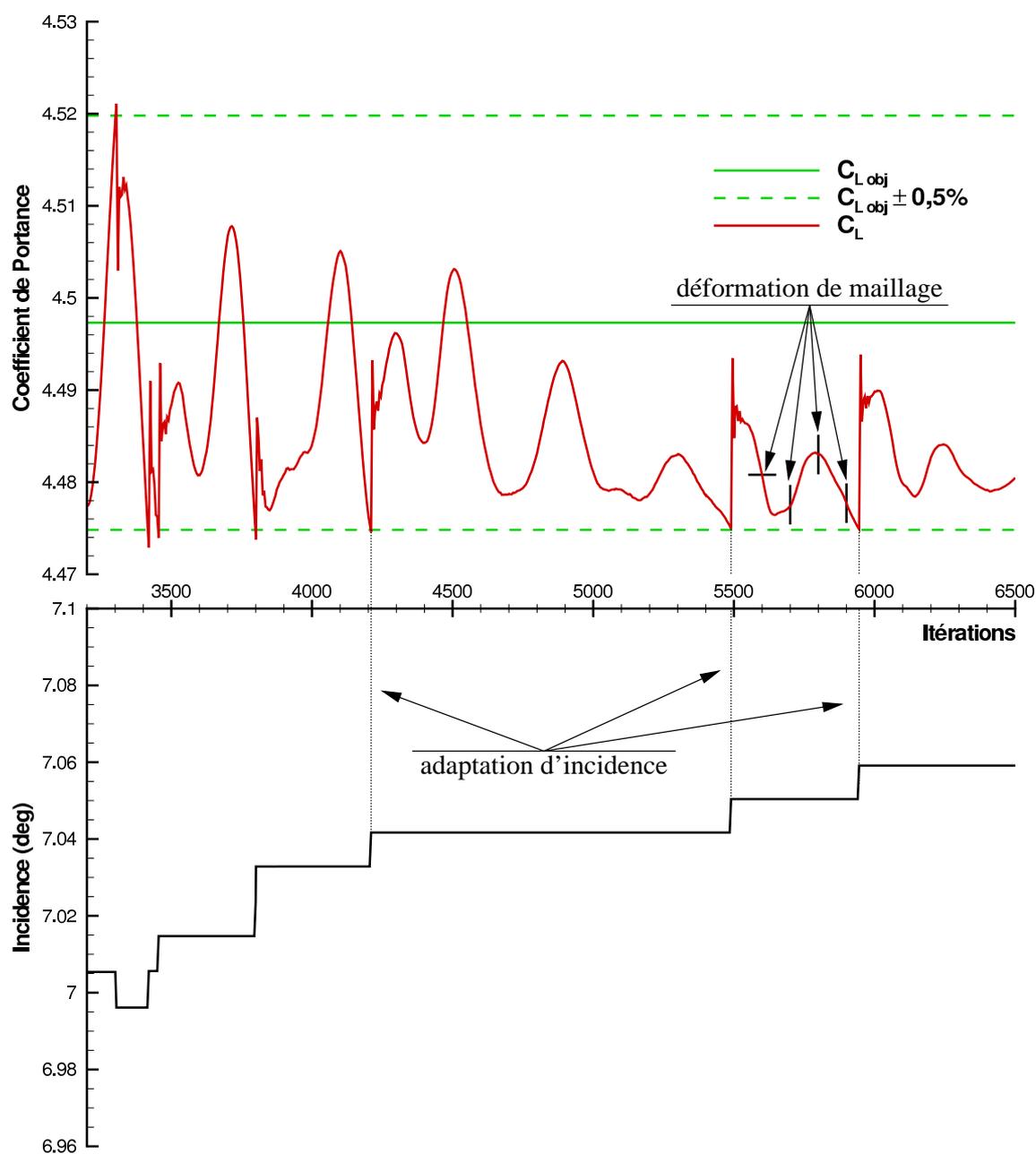


FIG. 6.16 – Historique de convergence du coefficient de portance et de l'incidence en fonction des itérations lors du calcul aéroélastique couplé ; détail avec repérage de quelques itérations avec adaptation d'incidence et déformation de maillage.

par les gouvernes, et spécialement la traînée induite, dépend du braquage de celles-ci. Or, le braquage des gouvernes est déterminé de manière à réaliser l'équilibre en moment du missile. On a déjà vu au paragraphe 5.2.1 que la réalisation de cet équilibre en moment nécessitait la connaissance de la répartition de masse dans le missile, ce qui n'est pas possible à ce stade actuel de la conception ; nous négligerons donc cette traînée. Finalement, le produit du nombre de MACH par la finesse s'écrit :

$$Ma \times f_{\text{eq}} = Ma \times \frac{C_L}{C_D}$$

avec

$$\begin{aligned} C_L &= C_{N_{\text{calc}}} \times \cos(\alpha_{\text{eq}}) - (C_{A_{\text{calc}}} + C_{A_{\text{ea}}}) \times \sin(\alpha_{\text{eq}}) \approx C_{L_{\text{obj}}} \\ C_D &= C_{N_{\text{calc}}} \times \sin(\alpha_{\text{eq}}) + (C_{A_{\text{calc}}} + C_{A_{\text{ea}}}) \times \cos(\alpha_{\text{eq}}) \end{aligned}$$

où :  $\alpha_{\text{eq}}$  est l'incidence d'équilibre du missile issue du calcul aérodynamique ;

$C_{A_{\text{calc}}}$  et  $C_{N_{\text{calc}}}$  sont les coefficients d'effort axial et d'effort normal calculés par AEROLOG ;

$C_{A_{\text{ea}}}$  est la contribution forfaitaire à l'effort axial de l'entrée d'air ; elle vaut  $C_{A_{\text{ea}}} = 0,025$ .

Le calcul de la première fréquence propre de la structure est directement effectué par SAMCEF au cours du pré-traitement. Pour le calcul de la contrainte maximale subie par l'aile (cf. paragraphe 5.2.2), la méthode la plus naturelle consisterait à fournir à SAMCEF la répartition pariétale de pression sur l'aile à la fin du calcul convergé, ou la distribution des efforts sur les nœuds force précédemment utilisés ; ceci consisterait en un cas de charge que SAMCEF pourrait calculer et dont on pourrait tirer la contrainte maximale. Cependant, compte tenu du caractère relativement grossier du maillage de structure utilisé (cf. figure 6.10), les résultats auraient été difficilement interprétables. Il a donc été choisi d'effectuer, pour ce calcul, une modélisation du problème par une poutre encastree travaillant en flexion. Cette modélisation est justifiée dans la mesure où les principaux efforts subis par l'aile sont des efforts de flexion. Du fait de l'évidement de l'aile, on doit considérer une poutre dont l'inertie de section est constante par morceaux : pour  $0 \leq y < y_1$  il s'agit de l'inertie du profil plein, pour  $y_1 \leq y < y_2$  de l'inertie du profil évidé et pour  $y_2 < y$  à nouveau de l'inertie du profil plein. On cherchera donc la section où la contrainte est maximale, celle-ci étant alors calculée, dans une section à la cote  $y$ , par la formule :

$$\sigma_m(y) = \frac{M_f \frac{\Delta z}{2}}{I}$$

où :  $M_f$  est le moment fléchissant des efforts aérodynamiques intégrés entre le saumon de l'aile et la cote  $y$  ;

$\Delta z$  est l'épaisseur maximale du profil ;

$I$  est l'inertie de section du profil.

Dans une telle configuration, la contrainte maximale dans l'aile se situera soit à l'encastrement en  $y = 0$ , soit dans la section de début d'évidement en  $y = y_1$  ; on a finalement :

$$\sigma^{\text{max}} = \max \left[ \left( \frac{M_f \frac{\Delta z}{2}}{I} \right)_{y=0}, \left( \frac{M_f \frac{\Delta z}{2}}{I} \right)_{y=y_1} \right]$$

En résumé, l'estimation de la contrainte maximum atteinte dans l'aile nécessite :

- le calcul de l'inertie de section  $I$  des profils évidé et non évidé, par rapport à l'axe dirigé par  $\vec{x}$  et passant par le bord d'attaque ; ce calcul est effectué par SAMCEF lors de la phase de pré-traitement ;

- le calcul du moment fléchissant des efforts aérodynamiques pariétaux intégrés entre le saumon et la cote  $y = y_1$  ;
- le calcul du moment fléchissant des efforts aérodynamiques pariétaux intégrés entre le saumon et l'implanture, mais calculé à l'encastrement en  $y = 0$  ; en effet, la partie de l'aile située à l'intérieur du fuselage ne supporte pas d'efforts aérodynamiques ;
- l'épaisseur maximale du profil dans chaque section ; dans notre cas, celle-ci est la même tout au long de l'aile.

Les calculs des moments de flexion et de l'épaisseur maximale dans chaque section sont effectués par AEROLOG dans un calcul de post-traitement, qui reprend la solution déterminée par le calcul aéroélastique couplé et procède à une intégration des efforts sur l'aile et détermine également l'épaisseur maximale du profil.

On a ainsi pu déterminer l'ensemble des trois objectifs et contraintes proposés pour ce problème, qui vont permettre de déterminer les performances pouvant être atteintes par ces configurations. La finesse a été déterminée avec précision, mais pour une configuration lisse ; une étude plus avancée devrait prendre en compte l'entrée d'air et le régime du moteur. La première fréquence propre de la structure résulte d'un calcul classique de mécanique des structures. Enfin, la détermination de la contrainte maximale dans l'aile fait appel à une modélisation plus importante ; les résultats obtenus devront être analysés avec soin, notamment pour vérifier que l'hypothèse de poutre en flexion est vérifiée.



## Chapitre 7

# Étude paramétrique du problème aéroélastique

Dans ce chapitre, la chaîne de calcul aéroélastique décrite au chapitre précédent va être appliquée, afin de fournir les premiers résultats qui permettront de répondre au problème de conception optimale d'une aile de missile de croisière. Nous récapitulons ici la formulation de ce problème :

- on considère un missile de croisière ; le vol de ce missile est caractérisé par le nombre de MACH  $Ma$  ; l'aile du missile est définie par les angles de calage dans le plan de tangage  $\theta_t$  et au saumon  $\theta_s$  ; l'évidement de cette aile est caractérisé par la position de début d'évidement selon l'envergure  $y_1$  et l'épaisseur  $e$  des capots ;
- on cherche à maximiser la portée du missile ; pour cela, on cherchera à maximiser la quantité  $Ma \times f_{eq}$  où la finesse  $f_{eq} = (C_L/C_D)_{eq}$  est celle qui est associée à l'écoulement autour du missile à l'équilibre des forces, avec prise en compte de la déformation de l'aile sous l'action de l'écoulement ;
- on souhaite également satisfaire simultanément les contraintes suivantes :
  - i. première fréquence propre de la structure  $f_0$  supérieure à une valeur fixée ;
  - ii. contrainte maximale atteinte dans l'aile  $\sigma^{\max}$  inférieure à une valeur fixée.

Ce problème aéroélastique peut donc s'exprimer sous la forme mathématique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } [Ma \times f_{eq}] (Ma, \theta_t, \theta_s, y_1, e) \\ \text{avec } \left| \begin{array}{l} f_0(y_1, e) \geq f_p \\ \sigma^{\max}(Ma, \theta_t, \theta_s, y_1, e) \leq \sigma_{\lim}^{\max} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où les paramètres varient entre des bornes prescrites (cf. tableau 6.2) et où  $f_p$  et  $\sigma_{\lim}^{\max}$  ont également leur valeur fixée.

L'une des difficultés de ce problème réside dans le coût extrêmement élevé de l'évaluation de l'objectif et des contraintes associées pour chaque jeu de paramètres : on rappelle en effet que le calcul de l'objectif et des contraintes pour une configuration donnée représente environ 12,9 heures de calcul<sup>20</sup>. Une autre difficulté de ce problème tient au fait que la complexité de l'évaluation de l'objectif rend extrêmement difficile l'obtention des dérivées formelles de cette fonction objectif. Ces deux raisons nous ont amenés à préférer une technique d'optimisation stochastique<sup>21</sup>, comme les algorithmes génétiques, à des méthodes déterministes<sup>21</sup> telles que

<sup>20</sup>Les calculs ont été effectués avec un processeur Alpha EV68, 1,25 GHz, 16 Mo de mémoire cache, 8 Go de mémoire partagée entre les quatre processeurs de chaque nœud.

<sup>21</sup>Pour plus de précision sur les différentes méthodes d'optimisation, leurs avantages et inconvénients, on pourra, par exemple, se référer à [15].

celles basée sur l'évaluation du gradient de l'objectif. De plus, la mise en œuvre d'un algorithme génétique ne pose pas de difficulté particulière dès lors que la chaîne de calcul aéroélastique a été entièrement automatisée.

Cependant, pour le problème à cinq paramètres envisagé ( $Ma$ ,  $\theta_t$ ,  $\theta_s$ ,  $y_1$  et  $e$ ), le temps de calcul *a priori* nécessaire pour déterminer l'optimum, ou au moins un voisinage restreint de cet optimum, à l'aide d'un algorithme génétique, reste important (supérieur à la dizaine de milliers d'heures). Il semble donc plus intéressant de réduire ce nombre d'évaluations et de chercher à construire une surface de réponse<sup>22</sup> représentative du comportement de la fonction objectif. Cette surface de réponse permettrait ensuite de réaliser une optimisation, pour un coût extrêmement faible, une unique évaluation exacte de l'optimum ainsi déterminé permettant finalement d'en confirmer ou infirmer la validité. Pour déterminer cette surface de réponse et dans le but d'explorer systématiquement l'espace des paramètres, nous avons donc calculé 243 configurations en choisissant, pour chaque paramètre, les valeurs extrêmes ou la valeur moyenne de l'intervalle de variation associé (cf. tableau 6.2).

Cependant, comme nous l'avons déjà annoncé à la section 6.1, choisir un nombre réduit de paramètres en vue d'une étude telle que la nôtre est une tâche délicate. L'analyse des résultats obtenus à l'issue de cette première exploration de l'espace des paramètres va montrer que c'est avant tout le choix initial des paramètres qui est peu satisfaisant, dans la mesure où il ne permet pas réellement de produire des effets aéroélastiques favorables à une augmentation de la finesse de l'aile du missile. Nous n'avons donc pas jugé pertinent de mettre en œuvre dans ce cas la phase de construction et d'exploitation d'une surface de réponse. Nous concluons donc ce chapitre par des propositions concernant les choix de paramètres et de définition de la géométrie et présenterons des résultats sur une configuration modifiée en ce sens.

## 7.1 Analyse des résultats

Les résultats des 243 calculs effectués sont donnés, pour mémoire, en annexe E. Nous exposons maintenant les principales tendances qui peuvent être dégagées de l'analyse de ces résultats.

### 7.1.1 Principaux effets

Nous avons défini, au chapitre 5, un objectif et deux contraintes pour le problème de conception optimale traité ici. La contrainte concernant la première fréquence propre de la structure de l'aile ne dépend que de deux paramètres : la position  $y_1$  de débit d'évidement et l'épaisseur  $e$  des capots ; de plus, elle interagit avec le domaine du pilotage et du guidage du missile qui n'est pas traité ici. Nous la considérerons donc comme une contrainte binaire (vérifiée ou non). En revanche, la contrainte de non-plastification du matériau sous forte charge, qui est au cœur du calcul aéroélastique couplé, sera analysée comme un objectif, c'est-à-dire que nous ne nous intéresserons pas seulement à sa vérification, mais également aux valeurs atteintes par cette contrainte structurale.

#### 7.1.1.1 Effet du nombre de MACH

La première conclusion que l'on peut tirer de cette étude paramétrique concerne l'effet du nombre de MACH. Il semble effectivement prépondérant par rapport à celui des autres paramètres : le nombre de MACH intervient bien évidemment directement dans l'objectif  $Ma \times f_{eq}$ , mais il intervient également de façon importante dans le calcul aérodynamique avec

---

<sup>22</sup>Au sujet des surfaces de réponse et des plans d'expérience, on pourra consulter [7], [42] et [43].

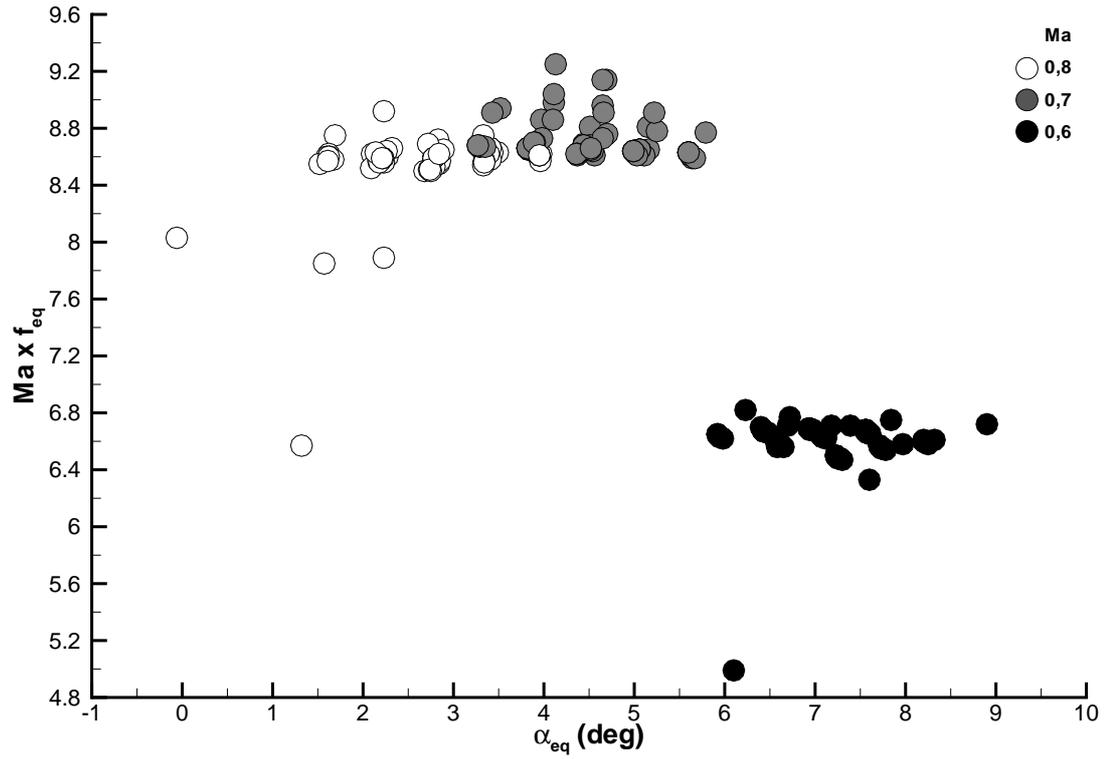


FIG. 7.1 – Répartition des configurations en fonction du produit du nombre de MACH par la finesse  $Ma \times f_{eq}$  et de l'incidence d'équilibre  $\alpha_{eq}$  ; mise en évidence du nombre de MACH.

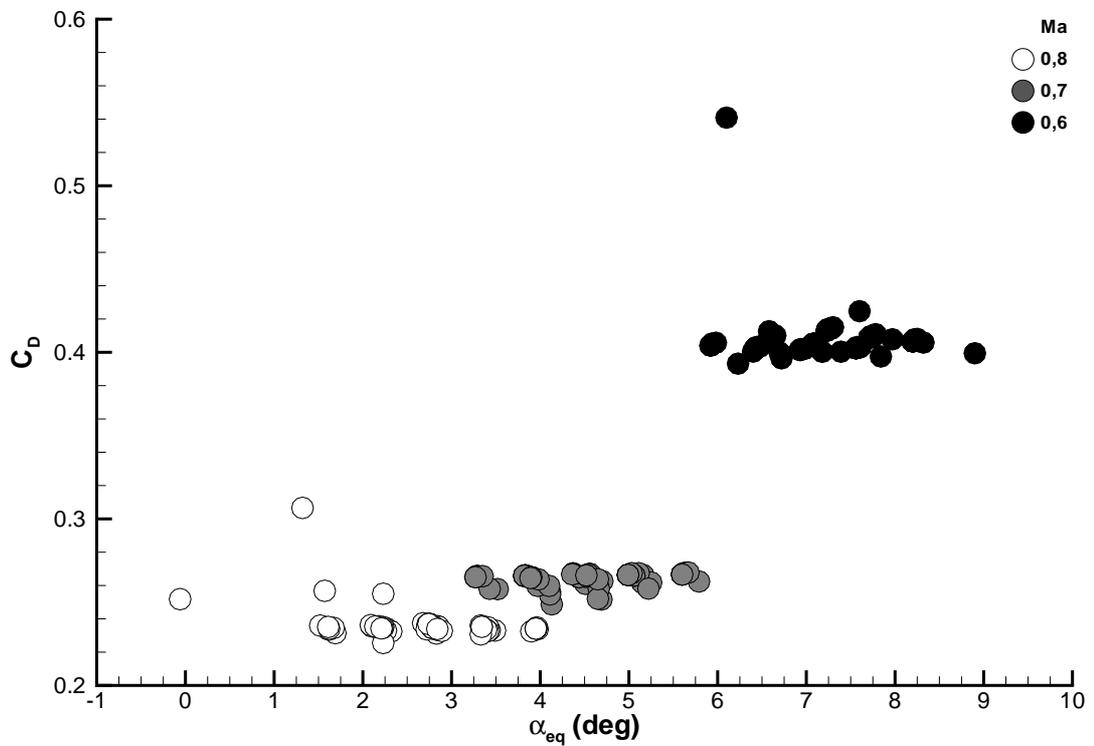


FIG. 7.2 – Répartition des configurations en fonction du coefficient de traînée calculé par AEROLOG  $C_D$  et de l'incidence d'équilibre  $\alpha_{eq}$  ; mise en évidence du nombre de MACH.

asservissement de l'incidence à la portance. Les figures 7.1 et 7.2 illustrent cet effet du nombre de MACH. Sur la figure 7.1, qui présente la répartition des solutions en fonction de l'incidence d'équilibre et de l'objectif  $Ma \times f_{eq}$ , en faisant apparaître la valeur du nombre de MACH associé à chaque solution, on distingue clairement trois groupes pour les valeurs de nombre de MACH  $Ma \in \{0,6 ; 0,7 ; 0,8\}$ .

Les configurations les moins performantes correspondent à  $Ma=0,6$ , valeur pour laquelle l'incidence d'équilibre est élevée, afin de pouvoir atteindre le niveau de portance nécessaire à équilibrer le poids du missile ; ceci engendre une traînée importante du fait de l'apparition d'une traînée induite. C'est également ce qu'atteste la figure 7.2, qui présente les solutions en fonction de l'incidence d'équilibre et du coefficient de traînée. L'augmentation de traînée, due à la traînée induite, est responsable d'une diminution de la finesse ; compte tenu de la valeur faible du MACH, on obtient donc des valeurs de  $Ma \times f_{eq}$  également faibles.

Pour le nombre de MACH  $Ma = 0,8$ , la divergence de traînée est déjà amorcée et la traînée d'onde qui apparaît entraîne une diminution de la finesse. Cependant, comme le nombre de MACH est plus élevé, il compense en partie cette diminution de la finesse et les valeurs de l'objectif  $Ma \times f_{eq}$  restent également relativement élevées. Les valeurs maximales de  $Ma \times f_{eq}$  sont finalement atteintes presque systématiquement pour  $Ma=0,7$ .

On peut expliquer cet effet, plus précisément, par les phénomènes de traînée de frottement et de traînée induite, qui varient de façon inverse. Comme l'altitude de vol  $z$  et le poids à équilibrer sont fixés, l'incidence varie avec le nombre de MACH et avec elle, la traînée induite. Si on modélise la traînée en une composante de frottement, que l'on suppose constante (sa dépendance vis-à-vis du nombre de MACH est moins forte que les autres effets), et une composante de traînée induite (cf. par exemple [4]), on obtient :

$$f_{eq} = \frac{C_{Leq}}{C_{Deq}}$$

$$\approx \frac{C_{Leq}}{\overline{C_{Dfrot}} + \frac{C_{Leq}^2}{\pi A \eta} \times \frac{S_{ref}}{S_{ailes}}}$$

où on a exprimé la traînée induite en fonction de la portance

avec :  $\overline{C_{Dfrot}}$  qui représente la composante de traînée de frottement supposée indépendante du nombre de MACH ;

$A$  qui représente l'allongement de l'aile ;

$\eta$  qui représente un facteur d'efficacité en envergure ; pour une aile elliptique  $\eta = 1$  ; pour les autres ailes d'envergure finie,  $\eta < 1$  ;

$S_{ref}$  la surface de référence pour le calcul des coefficients aérodynamiques globaux ;

$S_{ailes}$  la surface totale des ailes.

Puisque la portance équilibre le poids du missile, on peut également écrire :

$$f_{\text{eq}} \approx \frac{m \times g}{q_{\text{dyn}} \times S_{\text{ref}}} \times \frac{1}{\overline{C_{\text{Dfrot}}} + \frac{C_{\text{Leq}}^2}{\pi A \eta} \times \frac{S_{\text{ref}}}{S_{\text{ailes}}}}$$

$$\approx \frac{1}{\overline{C_{\text{Dfrot}}} \times \frac{\frac{1}{2} \gamma p_0 S_{\text{ref}} Ma^2}{m \times g} + \frac{S_{\text{ref}}}{\pi A \eta S_{\text{ailes}}} \times \frac{m \times g}{\frac{1}{2} \gamma p_0 S_{\text{ref}} Ma^2}}$$

où :  $q_{\text{dyn}}$  est la pression dynamique ;  $q_{\text{dyn}} = \frac{1}{2} \gamma p_0 Ma^2$  (cf. formule (6.1)) ;  
 $m$  est la masse totale moyenne du missile ;  
 $g$  est l'accélération de la pesanteur.

Si  $z$ ,  $p_0$  et  $m$  sont fixés, ce qui est le cas dans notre étude, la finesse à l'équilibre peut donc finalement s'exprimer comme :

$$f_{\text{eq}} = \frac{1}{a \times Ma^2 + \frac{b}{Ma^2}}$$

où  $a$  et  $b$  sont des coefficients indépendants du nombre de MACH. Cette fonction passe bien par un maximum pour une valeur du nombre de MACH qui traduit l'équilibre entre le frottement et la traînée induite. À haut nombre de MACH, le frottement est fort mais l'incidence est réduite et la traînée induite faible ; à faible nombre de MACH, le frottement est faible mais l'incidence est élevée, pour équilibrer le poids, et la traînée induite est forte. Ceci est bien traduit dans les résultats présentés à la figure 7.2.

Ce premier effet est purement aérodynamique ; il est lié au contexte particulier d'un calcul à portance fixée. Néanmoins, comme nous allons le constater par la suite, c'est le phénomène prépondérant qui ressort des résultats.

### 7.1.1.2 Contrainte structurale

Le deuxième effet qui ressort des résultats concerne la contrainte structurale maximale et les paramètres  $\bar{y}_1$  et  $\bar{e}$  de l'évidement. Sur la figure 7.3, on a colorié les configurations calculées en fonction du paramètre d'évidement  $\bar{y}_1$ . On remarque tout d'abord que certaines configurations dépassent la contrainte maximale fixée, pour un facteur de charge  $n = 1$ , avec un coefficient de sécurité de 1,5, à  $390 / (3 \times 1,5) = 87$  MPa. Il est donc légitime de s'intéresser à cette contrainte structurale dès lors que l'on pratique un évidement de l'aile tel qu'il a été défini ici.

On note ensuite que se dégagent six groupes de configurations différents, autour des valeurs  $Ma \times f_{\text{eq}} \in \{6,6 ; 8,7\}$  et  $\sigma^{\text{max}} \in \{40 ; 53 ; 85\}$  MPa. La séparation selon les valeurs de l'expression  $Ma \times f_{\text{eq}}$  est due à l'effet du nombre de MACH expliquée au paragraphe précédent : à  $Ma = 0,6$  correspond  $Ma \times f_{\text{eq}} = 6,6$  et à  $Ma \in \{0,7 ; 0,8\}$  correspond  $Ma \times f_{\text{eq}} = 8,7$ .

D'autre part, on remarque que seules les configurations avec  $\bar{y}_1 = 10\%$  se situent dans les groupes autour de  $\sigma^{\text{max}} = 53$  MPa et  $\sigma^{\text{max}} = 85$  MPa, alors qu'autour de la valeur  $\sigma^{\text{max}} = 40$  MPa se regroupent des configurations présentant des valeurs de  $\bar{y}_1$  quelconques. Nous avons donc isolé les configurations telles que  $\bar{y}_1 = 10\%$  (cf. figure 7.4). Il apparaît que la contrainte

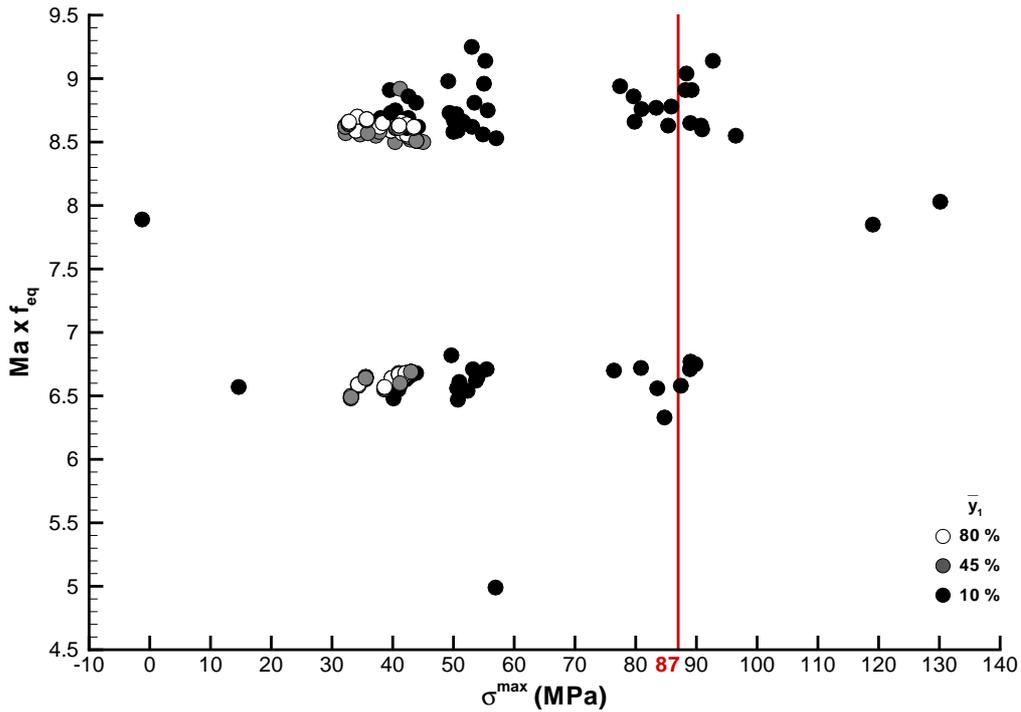


FIG. 7.3 – Répartition des configurations en fonction du produit du nombre de MACH par la finesse  $Ma \times f_{eq}$  et de la contrainte structurale maximale  $\sigma^{max}$  ; mise en évidence du paramètre de début d'évidement  $\bar{y}_1$ .

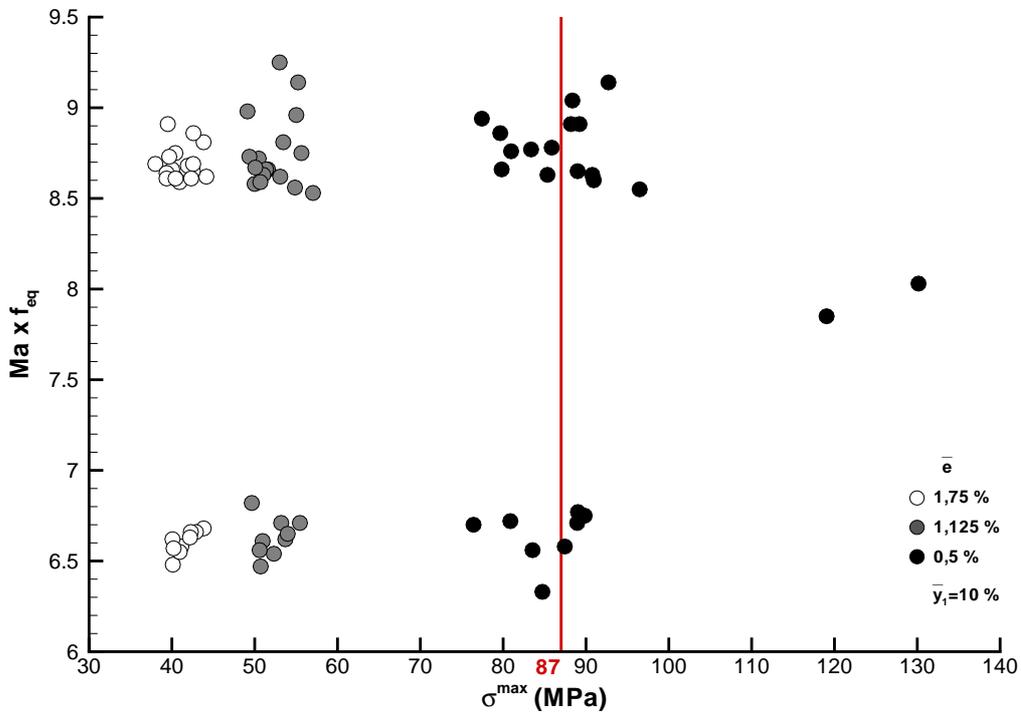


FIG. 7.4 – Répartition des configurations ayant une position de début d'évidement maximale ( $\bar{y}_1 = 10\%$ ) en fonction du produit du nombre de MACH par la finesse  $Ma \times f_{eq}$  et de la contrainte structurale maximale  $\sigma^{max}$  ; mise en évidence du paramètre d'épaisseur des capots  $\bar{e}$ .

varie avec l'épaisseur du capot ; cela signifie que la contrainte maximale est atteinte dans la section de début d'évidement, l'inertie  $I$  de cette section étant en première approximation inversement proportionnelle à  $e$  :

$$I = \int_S z^2 \, dS$$

Pour les individus à  $\bar{y}_1 = 45\%$  et  $80\%$ , la contrainte maximale est atteinte dans le plan de tangage, où l'aile est non évidée, ce qui explique que cette contrainte soit alors indépendante de l'épaisseur de capot.

L'étude de la contrainte structurale maximale met en évidence les dangers d'un évidement important de l'aile. Il est donc nécessaire de considérer un tel critère qui s'oppose à un évidement trop important de l'aile favorisant les effets aéroélastiques.

### 7.1.1.3 Effet aéroélastique

Nous avons finalement tenté de mettre en évidence les effets aéroélastiques recherchés. Hélas, ces effets ne sont pas prépondérants et aucune tendance générale ne se dégage de l'ensemble des résultats. La figure 7.5 fait néanmoins ressortir, sur une sélection de configurations ne présentant pas de vrillage initial de l'aile et ayant un nombre de MACH  $Ma = 0,7$ , une tendance intéressante. En effet, on remarque que plus le vrillage est négatif (on parle alors de « dévrillage ») et plus la flèche en bout d'aile est importante ; les déformations de l'aile en torsion et flexion sont donc liées. D'autre part, la représentation de l'objectif  $Ma \times f_{eq}$  fixé pour cette étude fait ressortir que plus la déformation de l'aile est importante, et plus la finesse est élevée (cf. également le tableau 7.1). On peut donc tirer une première conclusion sur les effets aéroélastiques qui semblent être favorables à une augmentation de la finesse.

$Id$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	$\alpha_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$
230	45	0,5	4,37	8,61	15,58	-0,21
114	80	0,5	4,37	8,62	14,38	-0,16
239	80	1,125	4,36	8,62	14,39	-0,16
115	80	1,75	4,37	8,62	14,42	-0,16
231	45	1,75	4,37	8,62	14,67	-0,18
161	45	1,125	4,37	8,62	14,92	-0,19
113	10	1,75	4,51	8,81	16,89	-0,26
238	10	1,125	4,65	9,14	19,14	-0,30
112	10	0,5	4,69	9,14	24,02	-0,39

TAB. 7.1 – Paramètres et résultats relatifs aux configurations ne présentant pas de pré-vrillage géométrique ( $\theta_t = \theta_s = 0^\circ$ ) et telles que  $Ma = 0,7$ .

Pour que l'étude de cet effet soit pleinement satisfaisante, il faudrait établir un lien entre une déformation importante de l'aile, qui entraîne donc une finesse élevée, et les paramètres définissant la configuration, en particulier les paramètres de l'évidement de l'aile. Le tableau 7.1 recense les configurations concernées et tracées sur la figure 7.5. Dans un premier temps, on a cherché une corrélation entre la finesse du missile et une combinaison des paramètres  $\bar{y}_1$  et  $\bar{e}$  qui rende compte de la déformation de l'aile. Malheureusement, les résultats ne sont pas satisfaisants et le nombre relativement faible de configurations calculées ne permet pas de chercher de façon beaucoup plus approfondie. On remarque simplement, sans surprise, que pour les configurations telles que  $\bar{y}_1 = 80\%$ , la valeur du dévrillage sous charge ne dépend pas de l'épaisseur  $\bar{e}$  des capots. La configuration présentant un évidement maximal  $\bar{y}_1 = 10\%$  et

une épaisseur minimale  $\bar{e} = 0,5\%$  présente un dévissage et une flèche maximaux ; cependant pour les paramètres intermédiaires, aucune corrélation simple ne se dégage.

Pour les configurations présentant un vrillage initial, on ne peut *a fortiori* pas tirer de conclusions, le nombre de configurations ayant la même valeur de vrillage étant encore plus restreint. De plus, l'effet qui a été mis en évidence ici n'est pas reproduit de façon aussi nette pour les configurations présentant d'autres valeurs du nombre de MACH, ces configurations étant également moins nombreuses, et  $Ma = 0,7$  semblant être le nombre de MACH optimal dans notre étude pour lequel les phénomènes aéroélastiques sont vraisemblablement les plus marqués.

On a donc mis en évidence que, plus le dévissage et la flèche étaient importants, plus la finesse du missile était élevée ; cependant, aucune corrélation précise avec les valeurs des paramètres n'a été établie. On sait par ailleurs que le dévissage agit de façon importante sur l'écoulement puisqu'il en modifie l'incidence locale, alors que la flèche joue de façon beaucoup moins importante. Or ici les valeurs du dévissage sont faibles ( $|\theta_{\text{aéro}}| < 0,45^\circ$ ) ; les effets aéroélastiques sont donc limités et masqués par les phénomènes plus importants déjà décrits et d'origine purement aérodynamique ou purement structurale. La définition géométrique et le paramétrage initialement retenus pour le problème ne sont donc vraisemblablement pas adaptés aux effets attendus.

Cependant, l'effet aéroélastique mis en évidence est tout de même intéressant car si l'on arrive à obtenir un dévissage suffisamment conséquent, on augmentera alors, par la même occasion, la finesse et donc la portée du missile.

#### 7.1.1.4 Respect de la fréquence de pilotage

Pour cette étude, la limite supérieure de la bande passante de pilotage a été fixée à  $f_p = 20\text{ Hz}$ . L'ensemble des configurations calculées présente une première fréquence propre structurale supérieure à cette valeur  $f_0 > f_p$ . Il s'agit d'une vérification indispensable du point de vue de la conception des missiles de croisière, mais cela n'aura pas d'impact sur la conception aéroélastique et ne participera donc pas à la disqualification des configurations les moins adaptées. La figure 7.6 représente les résultats des configurations calculées. Le calcul de  $f_0$  faisant intervenir uniquement la géométrie et les paramètres géométriques ne pouvant prendre chacun que trois valeurs, le nombre de valeurs prises par cette fréquence est réduit. La répartition en deux groupes de valeur de  $Ma \times f_{\text{eq}}$  est liée à l'effet du nombre de MACH :  $Ma = 0,6$  autour de  $Ma \times f_{\text{eq}} = 6,6$  et  $Ma \in \{0,7 ; 0,8\}$  autour de  $Ma \times f_{\text{eq}} = 9,6$ .

#### 7.1.2 Validité de la modélisation

Les calculs que nous avons menés sont peu nombreux et présentent peu de recoupement ; il convient donc de se préoccuper tout particulièrement de la validité de la modélisation effectuée. Les étapes de la modélisation sont nombreuses : si l'on met de côté les erreurs liées à la modélisation des effets turbulents par moyenne de REYNOLDS des équations de NAVIER-STOKES, il reste néanmoins à s'interroger sur la discrétisation de ces équations sur le maillage aérodynamique ainsi qu'à la discrétisation des équations de la mécanique sur le maillage structural ; de la même façon, si l'on considère que le couplage permet de converger vers une solution supposée unique, on peut se demander quelles sont les conséquences du choix d'un nombre réduit de points dans la matrice de flexibilité. Enfin, le calcul de la contrainte maximale repose sur l'hypothèse d'une poutre en flexion qu'il faut vérifier.

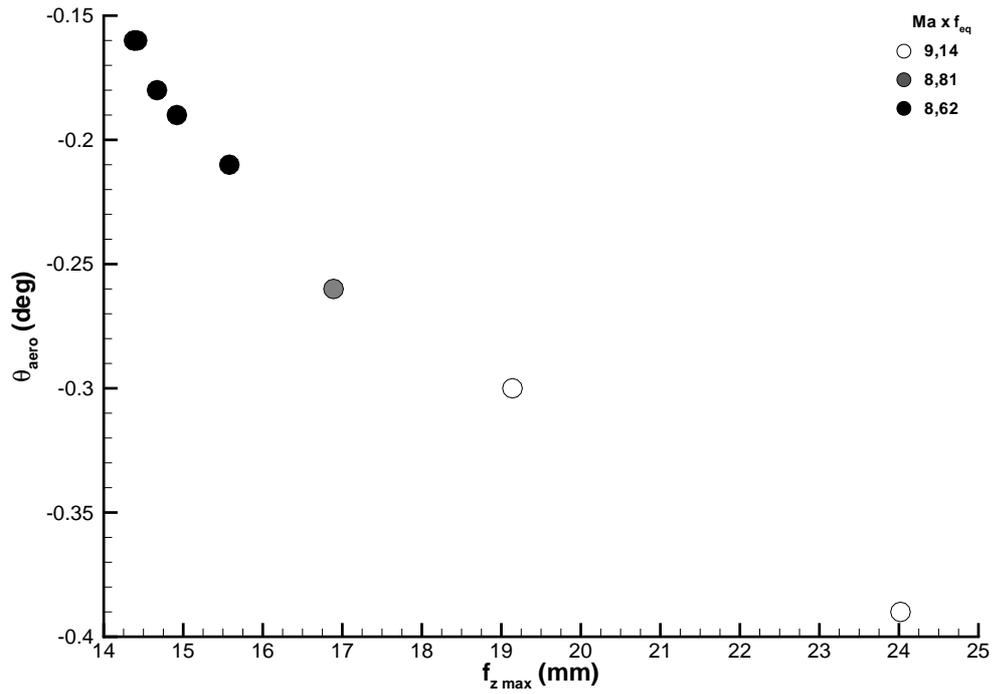


FIG. 7.5 – Répartition des configurations ne présentant pas de pré-vrillage géométrique ( $\theta_t = \theta_s = 0^\circ$ ) et telles que  $Ma = 0,7$ , en fonction de la flèche maximale  $f_{z\max}$  et du vrillage dû aux charges aérodynamiques  $\theta_{\text{aero}}$ ; mise en évidence du produit du nombre de MACH par la finesse  $Ma \times f_{\text{eq}}$ .

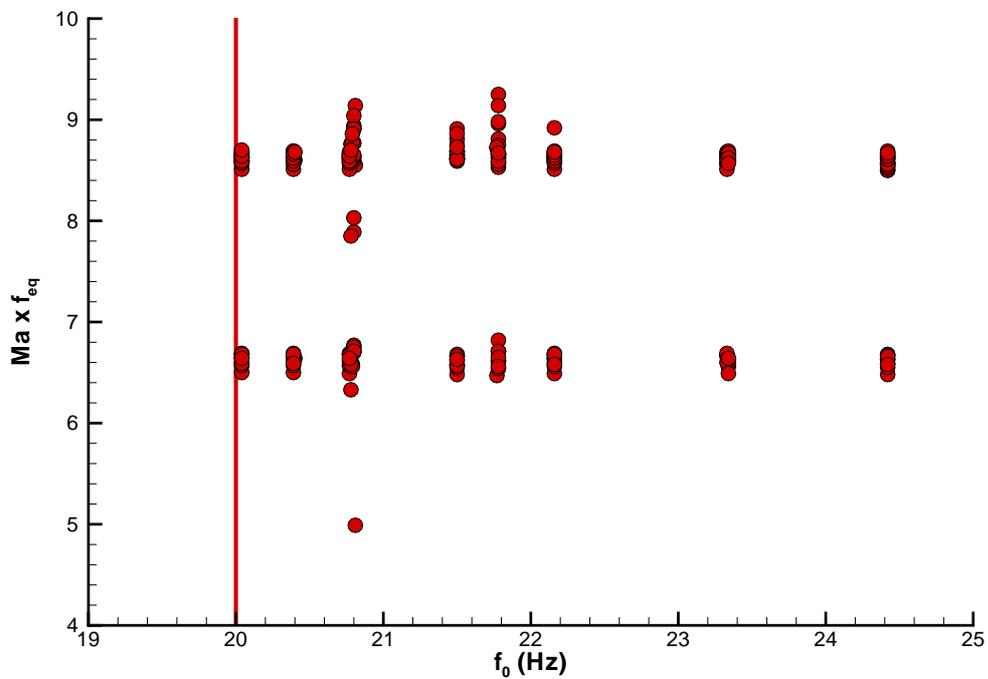


FIG. 7.6 – Répartition des configurations en fonction du produit du nombre de MACH par la finesse  $Ma \times f_{\text{eq}}$  et de la première fréquence propre structurale.

### 7.1.2.1 Hypothèse d'une aile en flexion

Pour calculer la contrainte maximale dans l'aile, AEROLOG intègre les efforts aérodynamiques par tranche selon la direction  $\vec{y}$ ; on a donc bien une répartition linéique d'effort réelle, mais on fait ensuite, dans chaque section, l'hypothèse d'un cisaillement dans la direction  $\vec{y}$ . Une telle modélisation suppose la prépondérance du phénomène de flexion sur celui de torsion. D'une façon générale on aurait donc un cisaillement selon deux directions  $\vec{y}$  et  $\vec{x}$ .

Dans la plupart des cas de calculs étudiés, la modélisation semble correcte puisque les angles de dévissage de l'aile mesurés sont faibles. Cependant, pour quelques configurations, dont le calcul a été laborieux et qui n'ont finalement pas été présentées, les effets de torsion semblent plus importants et le mode de calcul de la contrainte maximale dans l'aile devient alors caduque. Pour lever le doute sur ce calcul, il faudrait réaliser un calcul de structure complet, sur un maillage relativement fin. Un tel calcul serait trop coûteux pour être effectué pour chaque configuration; une vérification *a posteriori* sur les configurations les mieux adaptées pourrait être envisagée.

### 7.1.2.2 Choix des nœuds force et déplacement

Lors du processus de déformation de maillage dans la chaîne RATAN, on utilise un nombre réduit de points (cf. figure 6.11). Le champ de pression est distribué en torseurs d'efforts résultants calculés sur les nœuds force; comme ces nœuds sont relativement espacés, la représentation des efforts dans le maillage constitué de ces nœuds force est relativement grossière. On commet donc là une erreur de discrétisation qui peut être préjudiciable à la précision du résultat final.

Pour la configuration présentant la plus grande valeur de  $Ma \times f_{eq}$  ( $Id = 146$ ), nous avons donc mené à nouveau un calcul aéroélastique en choisissant comme nœuds force la totalité des nœuds de surface du maillage de structure de l'aile extérieure au fuselage, c'est-à-dire tels que  $y \geq \phi/2$ . On s'assure ainsi une meilleure représentation de la répartition des efforts aérodynamiques et *de facto* les erreurs de discrétisation sont plus faibles. Le tableau 7.2 présente une comparaison entre les résultats obtenus avec le calcul initial et ceux obtenus en prenant en compte tous les nœuds de surface du maillage structural.

card $\{M_f\}$	$\alpha_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{\max}}$	$\theta_{aero}$
10	4,13	9,25	53,01	19,01	-0,29
330	3,62	7,11	57,68	11,15	-0,08

TAB. 7.2 – Comparaison entre le calcul avec 10 nœuds force et celui avec 330 nœuds force pour la configuration optimale  $Id = 146$ ,  $\theta_t = 1,5^\circ$ ,  $\theta_s = 0^\circ$ ,  $\bar{y}_1 = 10\%$ ,  $\bar{e} = 1,125\%$  et  $Ma = 0,7$ .

On note des écarts importants entre les deux résultats; en particulier, les effets de torsion sont encore plus faibles ( $|\theta_{aero}| \leq 0,1^\circ$ ) que précédemment et l'écart entre les deux valeurs de  $Ma \times f_{eq}$  est suffisamment important pour que l'on s'interroge sur la pertinence d'un nombre trop réduit de nœuds force. Il conviendrait donc d'étudier l'influence du nombre de nœuds utilisés pour la déformation de maillage et, lorsque ce nombre est faible, l'influence de la position de ceux-ci. On rappelle que dans notre étude, le choix d'un nombre réduit de nœuds se justifiait par une volonté de diminuer le temps imparti au calcul de la matrice de flexibilité réduite.

### 7.1.2.3 Lissage des déplacements de la surface de l'aile

Dans le processus de déformation de l'aile, on calcule les déplacements d'un nombre réduit de nœuds déplacement. Pour obtenir la déformation de la totalité de la surface de l'aile, on effectue un lissage, à partir de ces déplacements. Il a été choisi ici, et conformément à l'expérience de MBDA, un lissage polynomial de degré  $3 \times 3$ . Cependant, il est possible que ce degré ne soit pas suffisant pour rendre compte de la déformation de l'aile. En effet, si l'on modélise l'aile par une poutre encastree soumise à un effort de flexion réparti constant ou linéaire et décroissant, on note que la forme alors obtenue est un polynôme de degré strictement supérieur à trois. Il serait donc intéressant d'étudier l'effet d'un lissage polynomial de degré supérieur mais également les autres possibilités de lissage offertes, comme par exemple le modèle de plaque infinie.

### 7.1.2.4 Convergence en maillage

Le dernier point à étudier concerne les maillages utilisés tant pour le calcul aérodynamique que pour le calcul de structure préliminaire. En effet, dans le calcul aérodynamique, on cherche à obtenir la finesse globale du missile. Or, on adapte l'incidence afin d'obtenir une portance fixée. Les écarts de calcul sur ce coefficient de portance – ils sont généralement faibles sur les maillages habituels (taille de la première maille de l'ordre de quelques micromètres, cf. figures 6.6 à 6.8) – sont donc reportés sur l'incidence et la traînée induite. D'autre part, lorsque les mailles à la paroi sont trop grossières, la précision de l'évaluation du frottement pariétal en souffre et donc la traînée. Pour que le modèle de turbulence prédise correctement les phénomènes visqueux présents dans la couche limite, il faut une unité de paroi  $y^+ \leq 1$ . Or, on a calculé que le paramètre  $y^+$  au premier point après la paroi pouvait atteindre des valeurs de 1,5 à 2. De plus, pour conserver les ordres de précision des méthodes numériques utilisées, il convient de respecter une certaine continuité dans l'évolution de la taille des mailles ; une évolution trop brusque de celle-ci peut aussi engendrer des phénomènes parasites numériques. Cependant, la création d'un maillage structuré tridimensionnel n'est pas un exercice facile, d'autant plus que le calcul aérodynamique est, de loin, la phase du calcul aéroélastique couplé la plus coûteuse et que l'on recherche donc à économiser au maximum le nombre de points du maillage du domaine fluide.

Le maillage de structure de l'aile (cf. figure 6.10) est également relativement grossier. Un tel caractère entraîne une mauvaise discrétisation des équations de la mécanique qui peut se traduire par une rigidité excessive de l'aile. On avait déjà souligné, au paragraphe 6.2.3, au sujet du calcul de la contrainte maximale dans l'aile, que le caractère grossier de ce maillage de structure interdisait un calcul direct par le logiciel SAMCEF de cette contrainte.

Que ce soit pour le maillage de structure pour lequel la tâche est relativement aisée, ou pour le maillage du domaine fluide pour laquelle elle l'est beaucoup moins, il conviendrait d'effectuer une étude de convergence en maillage pour pouvoir quantifier l'erreur commise en fonction du nombre et de la taille des mailles et pouvoir choisir ces paramètres en maîtrisant les effets.

Nous venons d'analyser les premiers résultats obtenus au cours de ce calcul de conception optimale d'une aile de missile de croisière. Les effets qui apparaissent sont d'origine purement aérodynamique, comme l'effet du nombre de MACH, ou purement structurale, comme l'évolution de la contrainte structurale maximale ; les effets aéroélastiques, qui ont été mis en évidence, sont cependant peu importants au regard des effets précédents. Nous avons donc cherché les causes qui pourrait affecter la précision des résultats, la cause principale résidant certainement dans le choix des nœuds pour exprimer la matrice de flexibilité réduite.

## 7.2 Améliorations possibles

Après avoir analysé de façon critique les résultats et les méthodes de calcul mises en jeu, nous nous proposons d'étudier la façon dont le paramétrage et la définition même de la forme géométrique de l'aile pourraient être améliorés pour donner plus d'importance aux phénomènes aéroélastiques. En effet, comme nous l'avons déjà signalé à la section 6.1, un travail intégrant un choix de paramétrage nécessite généralement de vérifier *a posteriori* voire de modifier ce paramétrage pour obtenir les effets voulus. C'est ce qui va être fait dans cette section.

Dans un premier temps, nous allons comparer les résultats obtenus sur une configuration dite « de référence » que nous définirons, avec ceux obtenus sur la configuration présentant la plus grande valeur de  $Ma \times f_{\text{eq}}$ . Nous exposerons ensuite quelques résultats obtenus avec un paramétrage et une définition géométrique différents, qui permettraient *a priori* de donner plus d'importance aux effets aéroélastiques recherchés.

### 7.2.1 Comparaison avec une configuration « de référence »

En plus des 243 calculs analysés ci-dessus, il a été mené un calcul sur une configuration dite « de référence ». Celle-ci est définie par une aile sans vrillage géométrique initial ( $\theta_t = \theta_s = 0^\circ$ ) ne présentant pas d'évidement, placé dans un écoulement avec un nombre de MACH initial  $Ma = 0,7$ .

Nous avons extrait de l'annexe E les résultats obtenus pour cette configuration de référence ( $Id = 0$ ) et pour la configuration optimale ( $Id = 146$ ); ces données sont reportées dans le tableau 7.3.

$Id$	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	$Ma$	$Ma \times f_{\text{eq}}$	$f_0$	$\sigma^{\text{max}}$
0	0,0	0,0	—	—	0,70	8,62	19,41	44,12
146	1,5	0,0	10	1,125	0,70	9,25	21,78	53,01

TAB. 7.3 – Comparaison des paramètres, objectif et contraintes entre la configuration de référence  $Id = 0$  et la configuration optimale  $Id = 146$ .

On constate que, pour l'objectif  $Ma \times f_{\text{eq}}$ , on obtient un gain de près de 7% entre les configurations de référence et optimale, ce qui représente potentiellement un gain de 7% en portée, sous les hypothèses posées pour l'établissement de (5.3). L'enlèvement de matière dans l'aile permet d'obtenir une première fréquence propre structurale qui satisfait alors le critère de pilotage. La contrainte maximale est, dans les deux cas, largement inférieure à la borne maximale fixée ici à 87 MPa. Étant donnés les résultats qui précèdent, on peut affirmer que ces améliorations sont le fruit de phénomènes aérodynamiques purs et non de phénomènes aéroélastiques. Visiblement l'évidement, tel qu'il a été paramétré, ne procure pas à l'aile une souplesse en torsion qui soit suffisante pour modifier de façon conséquente sa finesse (cf. les valeurs de  $\theta_{\text{aero}}$  dans les résultats en annexe E).

### 7.2.2 Aile fendue

Nous avons déjà souligné que l'aile évidée, telle qu'elle a été initialement définie, reste relativement rigide en torsion; de ce fait l'incidence locale n'est pas modifiée et les effets du dévrillage sur le comportement général du missile restent faibles. Pour modifier ce comportement, et laisser à l'aile une souplesse en torsion plus grande, on peut envisager d'avoir recours à une aile qui soit non seulement évidée jusqu'au saumon, mais également qui présente une

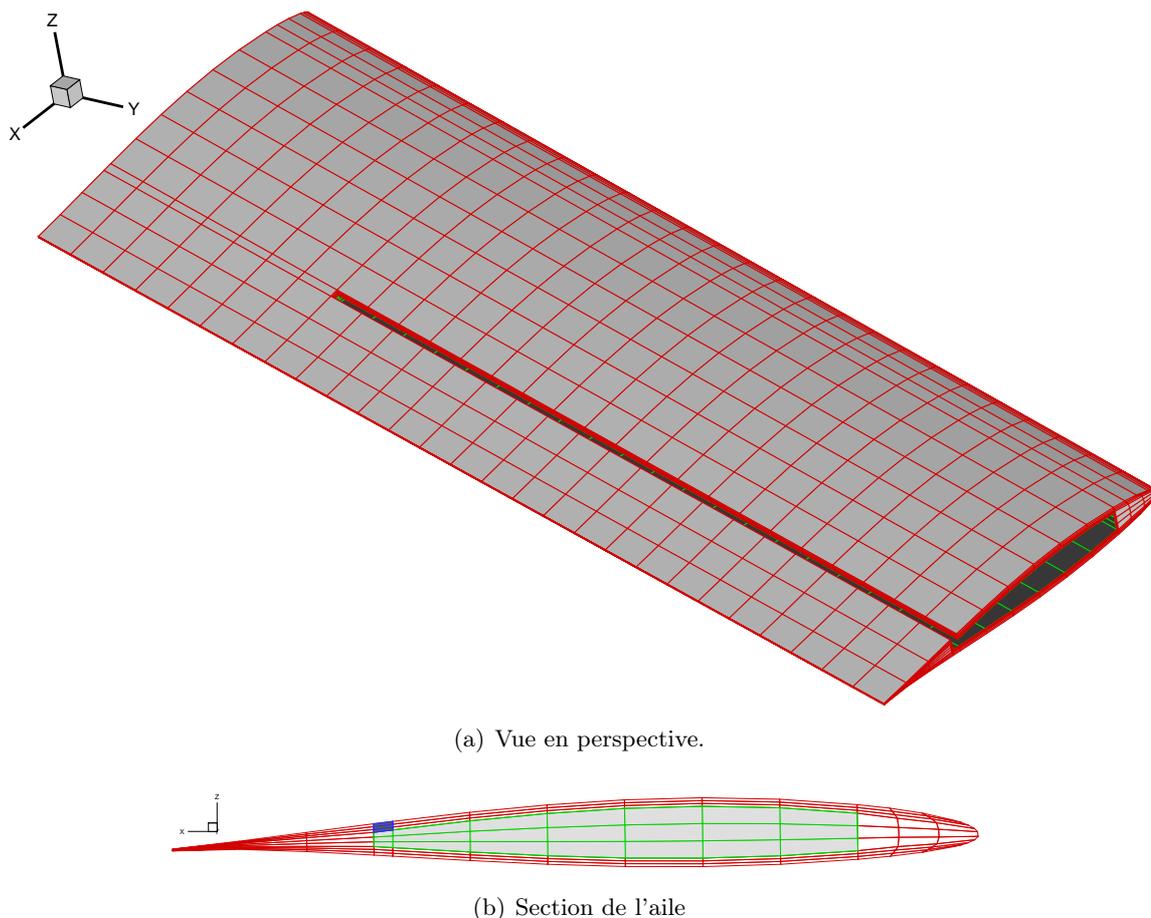


FIG. 7.7 – Maillage de structure de l’aile présentant un évidement débouchant et une fente sur l’extrados; la zone en vert et gris clair correspond à l’évidement et la zone en bleu et gris foncé à la trace de la fente.

fente sur l’extrados (cf. figure 7.7). Cette fente, qui débute à la même cote  $y_1$  que l’évidement et se poursuit jusqu’au saumon de l’aile, consisterait en un enlèvement de matière dans l’aile. De cette manière, la répartition des efforts de torsion dans une section serait perturbée et engendrerait certainement des angles de dévissage plus importants que ceux calculés jusque là; on donne ainsi la possibilité de modifier l’incidence locale de l’écoulement et donc la répartition des efforts aérodynamiques. La forme aérodynamique extérieure reste inchangée, la fente et l’évidement débouchant en bout d’aile étant, par exemple comblés avec un matériau dit « non structurant », c’est-à-dire dont les propriétés de tenue mécanique sont négligeables en comparaison de celle du matériau utilisé pour l’aile, ici de l’aluminium.

On a mené un calcul sur une telle configuration, dérivée de la configuration n° 146. On remarque, sans surprise, que la première fréquence propre de la structure est plus élevée dans le cas d’un évidement débouchant au saumon – 24,42 Hz au lieu de 21,78 Hz – puisque l’on a pratiqué un enlèvement de matière à une distance importante de l’encastrement. On constate également que l’on obtient un angle de dévissage sous charge plus important –  $-0,62^\circ$  au lieu de  $-0,29^\circ$  – ce qui était l’effet recherché, tandis que la flèche maximale en bout d’aile est plus faible – 14,60 mm au lieu de 19,01 mm. Cependant, les déformations de maillage induites sont plus grandes, et un tel calcul n’a pu être mené à convergence qu’au prix d’une sous-relaxation importante et de nombreuses itérations. Pour utiliser une telle définition

géométrique de l'aile, il faudrait certainement revoir la stratégie de déformation de maillage et notamment le découpage en macro-blocs.

Pour cet unique cas de calcul sur une géométrie modifiée, la finesse calculée à l'équilibre du missile est moins importante, mais il faudrait bien évidemment rechercher l'optimum obtenu avec une telle définition géométrique et le comparer à l'optimum précédemment obtenu. Plus généralement, il semble que le fait de pratiquer une fente sur la totalité de l'évidement à l'extrados du profil permette effectivement de plus grandes déformations en torsion. Il faudrait alors vérifier, selon l'idée qui a été suggérée au paragraphe 7.1.1.3, qu'un dévissage important de l'aile sous charge permet effectivement d'augmenter la finesse globale du missile.

# Conclusions

Cette seconde partie a porté sur la présentation des principes et des méthodes mises en œuvre pour mener un calcul aéroélastique puis sur l'analyse des résultats de l'étude paramétrique des performances, effectuée sur une configuration d'aile évidée à vrillage réglable de missile de croisière en vol transsonique.

Les principes mêmes qui sont à la base de la chaîne de calcul développée sont originaux à deux titres. D'une part, cette chaîne intègre un couplage statique entre le fluide et la structure ; elle est donc qualifiée d'aéroélastique puisque l'on fait l'hypothèse de déformations suffisamment faibles pour rester dans le domaine de l'élasticité linéaire. D'autre part, dans le souci de limiter le nombre de calculs nécessaires à la définition, même sommaire, d'un missile dans une phase d'avant-projet, on s'est donné la possibilité de calculer l'écoulement avec l'objectif d'atteindre, au cours même du calcul, une portance fixée à l'avance, qui équilibre le poids du missile. Cette recherche de la portance s'effectue en adaptant l'incidence du missile au cours du calcul, par un asservissement de l'incidence à l'effort de portance.

La mise en œuvre de ces principes généraux a nécessité un certain nombre de choix. Pour le calcul aérodynamique avec adaptation d'incidence, on a fait, par simplicité, le choix d'un asservissement proportionnel de l'incidence à la portance ; de plus, cet asservissement n'est pas réalisé toutes les itérations. D'une manière générale, on pourrait étudier l'influence et l'efficacité d'un asservissement incluant des effets proportionnels, intégraux et dérivés ainsi que l'influence de la fréquence de l'adaptation d'incidence. Pour le couplage entre le calcul aérodynamique et le calcul de déformation de la structure, on a recours à un modèle de structure représenté par une matrice de flexibilité réduite. On effectue alors des choix concernant les positions des nœuds force et déplacement, la méthode de lissage lors du transfert des déplacements de la structure vers le maillage du domaine fluide. . . La chaîne de calcul présentée au chapitre 6 constitue donc une des mises en œuvre possibles du calcul aéroélastique avec adaptation d'incidence, mais n'est en aucun cas la seule ni nécessairement la meilleure qui soit, même si nous nous sommes efforcés de la rendre aussi efficace et robuste que possible. De la même façon, et comme cela a déjà été signalé, le paramétrage de la géométrie du missile et, plus largement, le choix de tous les paramètres définissant une configuration de missile en vol, ont été faits de la manière la plus judicieuse possible – l'expérience des ingénieurs de MBDA a été ici déterminante – mais nécessiteraient d'être revus de manière critique, à la lumière des résultats obtenus dans cette étude.

Une première série de calculs a été menée avec la chaîne ainsi construite. Les résultats ont été présentés au chapitre 7. On a vu que certains effets découlaient directement du calcul aérodynamique avec asservissement, au cours du calcul, de l'incidence à la portance. Il s'agit en particulier de l'effet du nombre de MACH, qui intervient dans l'équilibre entre traînée induite et traînée de frottement. Ces effets purement aérodynamiques sont prédominants par rapport aux effets aéroélastiques qui restent donc plus marginaux. Les principales sources possibles d'erreur et d'approximation, qui résultent des choix effectués au chapitre 6, ont été passées en revue. Il conviendrait, dans une étude ultérieure poursuivant ces travaux, d'étudier

de manière critique l'effet de ces différents choix de modélisation mais également des choix relatifs à la définition même du problème. Une analyse de ces premiers résultats a en effet montré que l'aile définie ici conservait une grande rigidité en torsion, ce qui restreint les possibilités de modification de l'incidence locale de l'écoulement et donc les effets aéroélastiques recherchés. Il a donc été proposé une nouvelle définition géométrique de l'aile du missile qui offre une plus grande souplesse en torsion. Un premier calcul a montré que cette modification du paramétrage semblait orienter les recherches dans la bonne direction. Cependant, il faut également associer cette recherche du meilleur paramétrage possible à celle des méthodes de calcul les plus adaptées et les plus précises possibles. Par exemple, une modification de la définition géométrique de l'aile (cf. le cas de l'aile fendue, paragraphe 7.2.2) peut en effet avoir des conséquences importantes sur la robustesse et l'efficacité des algorithmes de calcul aérodynamique et structural.

Malgré les incertitudes qui subsistent – faute de temps pour les lever une à une – sur la précision des méthodes retenues et sur le paramétrage adapté au problème posé, cette seconde partie a permis, non seulement de valider les grands principes et la mise en œuvre d'un calcul aéroélastique couplé avec adaptation d'incidence, mais a également apporté des éléments de réponse au sujet des effets prépondérants dans l'étude d'aérodynamique et de performance d'une configuration de missile qualifié de « souple ». Ces indications permettent donc d'aborder d'éventuels travaux d'avant-projet ou de projet, ayant pour objet l'étude de la performance de missiles de croisière transsonique, avec une certaine connaissance des phénomènes en jeu, des problèmes de mise en œuvre d'une telle chaîne de calcul ainsi que des résultats attendus.

# Conclusions et perspectives

Ce travail de thèse a été réalisé dans le cadre de deux contrats industriels et s'est déroulé, pour sa plus grande part, au sein de la société MBDA. Il semble donc important, au moment de conclure ce mémoire, de dresser un bilan du travail effectué tant du point de vue des réponses apportées aux attentes industrielles que du point de vue des contributions nouvelles dans le domaine de la simulation numérique des écoulements transsoniques. L'objectif du travail de thèse présenté dans ce mémoire consistait tout d'abord à donner au logiciel de calcul AEROLOG de MBDA la possibilité de simuler des écoulements tridimensionnels instationnaires turbulents puis à développer une chaîne d'optimisation aéroélastique d'une aile de missile de croisière.

L'analyse détaillée des méthodes numériques disponibles dans le logiciel AEROLOG au début de cette thèse, présentée au chapitre 1 de ce mémoire, nous a permis de récapituler les points forts et les points faibles du schéma de LAX-WENDROFF-NI associé à un lissage implicite des résidus. Ils peuvent être résumés comme suit : faible coût par itération mais efficacité intrinsèque limitée et commandée par la viscosité artificielle nécessaire pour assurer le caractère dissipatif du schéma. En outre, le support compact de ce schéma, mettant en jeu  $3 \times 3 \times 3$  en 3 dimensions d'espace, et le principe de distribution des résidus des centres des cellules vers les nœuds permet une gestion efficace des raccords pour des maillages comprenant de nombreux sous-domaines, ce qui est le cas dans la plupart des applications traitées par MBDA. En l'état, le code AEROLOG permet de calculer de façon efficace des écoulements stationnaires autour de configurations de missiles, en étant toutefois limité à une simple modélisation algébrique de la turbulence. Par contre, la technique de pas de temps global utilisée jusqu'alors pour la simulation d'écoulements instationnaires ne permet d'utiliser que de très faibles valeurs du pas de temps et conduit donc à des temps de calcul excessifs.

L'approche dite de pas de temps fictif est désormais régulièrement mise en œuvre pour améliorer l'efficacité d'une méthode numérique implicite de résolution d'écoulements instationnaires. Nous aurions donc pu limiter nos développements dans le code AEROLOG à l'insertion de cette approche, ce qui nécessite essentiellement un travail technique de réorganisation des boucles à l'intérieur du code et de gestion des entrées et sorties. Mais il nous a également semblé intéressant de chercher à améliorer l'efficacité intrinsèque du logiciel ; une façon d'y parvenir consiste à remplacer le schéma centré de type LAX-WENDROFF par un schéma décentré qui autorise l'utilisation de pas de temps bien plus élevés. La difficulté de l'exercice résidait dans la nécessité de construire un schéma décentré avec la contrainte qu'il puisse s'intégrer aisément dans l'architecture du logiciel de calcul existant et préserver notamment toute la gestion des conditions aux limites et des raccords entre domaines qui repose sur la compacité du support du schéma. Cette exigence écartait par exemple le recours à des schémas décentrés classiques (ROE, AUSM+...) étendus au second ordre par une reconstruction MUSCL sur les variables, puisqu'une telle approche s'appuie sur un support non compact comprenant cinq cellules par direction de maillage.

Notre réflexion nous a alors conduits à proposer un schéma à pas de temps caractéristique comme alternative au schéma de LAX-WENDROFF existant. Ce schéma décentré à support

compact a été développé au Laboratoire SINUMEF dans le contexte d'une approche multi-prédicteurs. Récemment, il a été étudié une version mono-prédicteur, basée sur le résidu, sous forme d'un schéma distribué de type NI, pour la résolution des équations d'EULER bidimensionnelles, en raison des propriétés particulières de ce schéma vis-à-vis de l'équation d'évolution de la vorticité. Pour notre part, la mise en œuvre de ce schéma à pas de temps caractéristique pour la simulation d'écoulements turbulents stationnaires et instationnaires répondait, grâce à son support compact, aux contraintes fixées en ce qui concerne la gestion des frontières et des raccords et offrait potentiellement le gain d'efficacité intrinsèque attendu, à condition d'être associé à une phase implicite dite « sans matrice » de faible encombrement en mémoire et de c ut unitaire réduit, comme le lissage implicite des r sids associé au schéma de LAX-WENDROFF. Cependant, la structure même de ce schéma, à base de distribution aux nœuds des r sids calculés aux centres des cellules, nécessite toujours le recours à la viscosité artificielle associée au schéma de LAX-WENDROFF. L'analyse théorique de ce schéma original, menée au chapitre 2 du mémoire, montre alors que les termes de viscosité artificielle contrôlent l'efficacité intrinsèque du schéma.

Les applications stationnaires présentées au chapitre 3 du mémoire démontrent que le schéma à pas de temps caractéristique proposé offre une précision et une efficacité intrinsèque supérieures à celles du schéma de LAX-WENDROFF utilisé jusqu'à alors. Malheureusement, l'efficacité globale du schéma à pas de temps caractéristique reste inférieure à celle du schéma de LAX-WENDROFF en raison d'un c ut par itération plus élevé. La même tendance est confirmée au chapitre 4 où les deux schémas sont utilisés, dans le cadre d'une technique de pas de temps fictif, pour la simulation d'écoulements instationnaires.

  l'issue de cette première partie du travail de thèse, nous pouvons donc conclure, que si l'objectif premier, qui était de donner à AEROLOG la capacité de simuler des écoulements instationnaires, a été atteint en introduisant simplement une approche de pas de temps fictif dans le code existant, il n'en va pas de même pour l'objectif plus ambitieux que nous nous étions fixé et qui consistait à gagner en efficacité grâce à un schéma décentré original dit schéma à pas de temps caractéristique. Telle que nous l'avons implémentée, l'association du schéma à pas de temps caractéristique et de la phase implicite sans matrice s' st révélé en effet d'un c ut par itération bien supérieur à celui du schéma de LAX-WENDROFF associé au lissage implicite des r sids, ce qui a conduit en général, avec la nouvelle approche proposée, à un c ut global finalement plus élevé que celui de l'approche existante. Notons cependant que le schéma à pas de temps caractéristique offre, grâce au décentrement qu'il introduit, de meilleures propriétés de capture de choc que le schéma de LAX-WENDROFF.

Plusieurs pistes peuvent être explorées pour améliorer l'efficacité du schéma à pas de temps caractéristique, soit en réduisant son c ut unitaire, soit en améliorant son efficacité intrinsèque – une combinaison de ces deux options est bien sûr possible et souhaitable. Les tests effectués en cours de thèse ont montré que le surc ut de l'approche développée était essentiellement lié à la phase implicite sans matrice. Celle-ci peut probablement être rendue moins c uteuse en optimisant davantage le nombre d'opérations effectuées à chaque itération du processus de relaxation. En outre, elle gagnerait à être associée à une méthode multi-grilles qui permettrait de tirer profit des propriétés d'amortissement de l'erreur pour les faibles valeurs du nombre d'onde. Il a été également observé, lors des différents calculs menés pour mettre au point le schéma à pas de temps caractéristique, que l'efficacité de ce schéma pouvait dépendre de façon importante de la définition précise des valeurs propres des matrices de dissipation. Rappelons en effet que, si ces matrices de dissipation sont définies de façon univoque pour un problème d'advection multidimensionnel, leur extension au cas des équations d'EULER introduit un degré de liberté dans le choix du paramètre  $\varsigma(M)$  (voir également le paragraphe 2.2.4), qui peut être exploité pour optimiser les propriétés de convergence du schéma.

La seconde partie de ce mémoire a été consacrée à la description et à la mise en œuvre d'une chaîne de calcul aéroélastique dans le but d'étudier la possibilité de tirer parti des effets aéroélastiques sur une aile de missile de croisière pour augmenter la portée de ce missile. Il a été expliqué au chapitre 5 que l'augmentation de la portée nécessitait de maximiser le produit du nombre de MACH de croisière par la finesse à l'équilibre, c'est-à-dire la finesse calculée à l'incidence pour laquelle la portance du missile compense le poids de celui-ci. Nous avons alors exposé la méthode permettant d'obtenir numériquement cette finesse à l'équilibre à l'issue d'un unique calcul avec adaptation de l'incidence de vol. Le principe du couplage aéroélastique avec la mise en œuvre d'une matrice de flexibilité réduite pour calculer la déformation de l'aile au cours du calcul a également été exposé. Le chapitre 6 a permis de présenter la mise en œuvre de la chaîne de calcul utilisée, de la définition de la géométrie et du choix des paramètres, jusqu'au post-traitement de l'objectif et des contraintes. Cinq paramètres (deux pour la géométrie extérieure de l'aile  $\theta_t$  et  $\theta_s$ , deux pour son évidement  $e$  et  $y_1$  et un pour caractériser le vol  $Ma$ ) ont finalement été retenus. On a ensuite mené une étude paramétrique, dont les résultats ont été présentés au chapitre 7, en effectuant une première série de 243 calculs. Les effets majeurs qui ressortent de cette étude sont purement aérodynamiques, comme l'effet du nombre de MACH lié à l'adaptation d'incidence, ou purement structuraux, comme l'effet sur la contrainte maximale lié à l'évidement de l'aile ; les effets aéroélastiques, bien que présents, sont masqués par ces autres effets.

La mise en place de la chaîne d'optimisation aéroélastique présentée dans la seconde partie a surtout permis de décrire la méthode utilisée. Les perspectives de travail qui se dégagent peuvent se classer en trois catégories : un certain nombre de remarques concernant la validité de la méthode utilisée ont été proposées au paragraphe 7.1.2 ; à la section 7.2, une nouvelle définition de la géométrie a été proposée pour permettre de mieux prendre en compte les effets aéroélastiques ; enfin, il ne faut pas perdre de vue que l'objectif initialement fixé consistait à réaliser une optimisation qui pourra alors être menée à terme. En premier lieu, il conviendrait donc d'effectuer une étude de sensibilité de la méthode au nombre et aux positions des nœuds force et déplacement, de vérifier la convergence en maillage du calcul de structure préliminaire et du calcul aérodynamique et enfin de vérifier les paramètres utilisés pour l'opération de lissage des déplacements de l'aile. Une fois ces vérifications faites sur la méthode, il serait nécessaire d'effectuer des calculs supplémentaires de validation autour de l'aile fendue et d'adapter en conséquence les paramètres de la chaîne de calcul aéroélastique, en particulier pour s'assurer que la séquence de déformation de maillage est robuste, mais aussi pour vérifier la présence effective des effets aéroélastiques recherchés (vrillage négatif sous charge). Enfin, une fois la méthode validée et le paramétrage modifié, on pourra mener une optimisation à base d'algorithmes génétiques associés, par exemple, à des techniques de surface de réponse ou de réseau de neurones.

D'une manière générale, cette seconde partie du mémoire nous a permis de voir que, d'une part, la prise en compte de l'aéroélasticité statique dans un calcul aérodynamique était possible, et d'autre part, que l'on pouvait mettre en œuvre une chaîne de calcul entièrement automatisée en vue de l'intégrer dans une boucle d'optimisation. Cela montre que l'on peut, à l'heure actuelle, s'intéresser à des effets que l'on cherchait auparavant surtout à éviter et que l'on peut alors envisager de les utiliser pour augmenter encore les performances de portée.



# Annexes



## Annexe A

# Établissement des équations de NAVIER-STOKES moyennées

### A.1 Équations de NAVIER-STOKES instantanées

Les équations de NAVIER-STOKES sont utilisées pour modéliser les écoulements étudiés. Nous les présentons ici sous forme conservative avec trois dimensions d'espace. Les trois équations du système expriment successivement la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et enfin la conservation de l'énergie. Le système s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{A.1a})$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{div}}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(p) + \overrightarrow{\operatorname{div}}\left(\overrightarrow{\vec{\tau}}\right) \quad (\text{A.1b})$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho H \vec{v}) = \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\vec{\tau}} \cdot \vec{v}\right) + \operatorname{div}\left(\vec{q}\right) \quad (\text{A.1c})$$

où :  $t$  est la variable temporelle ;

$\rho$  désigne la masse volumique du fluide ;

$\vec{v}$  désigne la vitesse eulérienne d'une particule fluide ;

$p$  désigne la pression ;

$\overrightarrow{\vec{\tau}}$  est le tenseur des contraintes visqueuses ;

$E$  est l'énergie totale par unité de masse ;

$H = E + p/\rho$  est l'enthalpie totale par unité de masse ;

$\vec{q}$  est le flux de chaleur perdu par conduction thermique ;

$\overrightarrow{\operatorname{grad}}$  est l'opérateur de gradient qui s'applique à une grandeur scalaire ;

$\operatorname{div}$  est l'opérateur de divergence qui s'applique à un tenseur du premier ordre ;

$\overrightarrow{\operatorname{div}}$  est l'opérateur de divergence qui s'applique à un tenseur du deuxième ordre.

Dans notre étude, le seul fluide considéré est l'air. Ce fluide est bien sûr newtonien et le tenseur des contraintes visqueuses suit la loi de NEWTON. De plus, le flux de chaleur est proportionnel

au gradient de la température (loi de FOURIER).

$$\vec{\tau} = \mu \left[ \left( \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v}) \right) + {}^T \left( \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v}) \right) \right] + \eta \operatorname{div}(\vec{v}) \vec{I} \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (\text{A.3})$$

où :  $\mu$  désigne le coefficient de viscosité dynamique du fluide ;

$\eta$  désigne le coefficient de viscosité volumique du fluide ;

$\overrightarrow{\text{grad}}$  est l'opérateur de gradient qui s'applique à un tenseur du deuxième ordre ;

$\lambda$  désigne le coefficient de conductivité thermique du fluide ;

$T$  désigne la température du fluide.

De plus, on y adjoint l'hypothèse de STOKES qui exprime que la trace du déviateur des contraintes est nulle :

$$3\eta + 2\mu = 0$$

ce qui nous permet de réécrire le tenseur des contraintes visqueuses :

$$\vec{\tau} = 2\mu \left[ \frac{1}{2} \left( \left( \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v}) \right) + {}^T \left( \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v}) \right) \right) - \frac{1}{3} \operatorname{div}(\vec{v}) \vec{I} \right] \quad (\text{A.4})$$

Le seul fluide étudié étant l'air, il sera considéré comme un gaz parfait et suivra la loi d'état :

$$\begin{cases} p &= \rho r T \\ e &= c_v T \\ h &= c_p T \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

où :  $r$  est le rapport entre la constante universelle des gaz parfaits et la masse molaire du fluide ; pour l'air  $r \approx 287 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  ;

$e$  est l'énergie interne par unité de masse, liée à l'énergie totale par la relation  $E = e + \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2$  ;

$h$  est l'enthalpie spécifique par unité de masse, liée à l'enthalpie totale par la relation  $H = h + \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2$  ;

$c_v$  est le coefficient de chaleur spécifique à volume constant et, pour l'air, on prendra  $c_v = 714,28 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  ;

$c_p$  est le coefficient de chaleur spécifique à pression constante et, pour l'air, on prendra  $c_p = 1001 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  ; il est lié à  $c_v$  par la relation  $c_p = \gamma c_v$  où, pour l'air,  $\gamma \simeq 1,4$ .

Enfin, on supposera que les coefficients de viscosité dynamique  $\mu$  et de conductivité thermique  $\lambda$  suivent la loi de SUTHERLAND :

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \times \frac{T_0 + S}{T + S} \quad (\text{A.6})$$

où  $S = 110,4 \text{ K}$  est un paramètre de la loi et  $T_0$ ,  $\lambda_0$  et  $\mu_0$  sont les température, conductivité thermique et viscosité dynamique de référence. On prendra typiquement  $T_0 = 273 \text{ K}$ ,  $\lambda_0 = 0,025 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\mu_0 = 1,711 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cette loi reste valable pour des températures vérifiant  $100 \text{ K} < T < 1900 \text{ K}$ .

## A.2 Équations de NAVIER-STOKES moyennées

On effectue une opération de moyenne à l'ensemble des formules (A.1) (A.3) (A.4) (A.5) et (A.6). À cette fin, on décompose toute grandeur instantanée comme la somme d'une grandeur moyenne et d'une grandeur fluctuante et on pondère les grandeurs moyennes par la masse volumique. On applique les équations de NAVIER-STOKES (A.1) aux grandeurs ainsi décomposées et on obtient un système formellement identique au précédent sur les grandeurs moyennes, mais dans lequel le tenseur des contraintes est augmenté d'un tenseur des contraintes turbulentes de REYNOLDS  $\overrightarrow{\tau}^R$  et le flux de chaleur est augmenté d'un flux de chaleur turbulent. La modélisation du tenseur de REYNOLDS et du flux de chaleur turbulent relie ces grandeurs turbulentes aux grandeurs moyennes. La modélisation linéaire classique, qui s'appuie sur l'hypothèse de BOUSSINESQ, donne aux composantes du tenseur de REYNOLDS une forme similaire à celles du tenseur des contraintes visqueuses présentées précédemment. On écrit donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{A.7a})$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{div}}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(p) + \overrightarrow{\operatorname{div}}\left(\overrightarrow{\tau} + \overrightarrow{\tau}^R\right) \quad (\text{A.7b})$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho H \vec{v}) = \operatorname{div}\left[\left(\overrightarrow{\tau} + \overrightarrow{\tau}^R\right) \cdot \vec{v}\right] + \operatorname{div}\left(\vec{q} + \vec{q}^t\right) \quad (\text{A.7c})$$

où l'on a introduit le tenseur de REYNOLDS et le flux de chaleur turbulent :

$$\overrightarrow{\tau}^R = 2\mu_t \left[ \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\vec{v}) + {}^T \left( \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\vec{v}) \right) \right) - \frac{1}{3} \operatorname{div}(\vec{v}) \overrightarrow{I} \right] \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{q}^t = -\lambda_t \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T) \quad (\text{A.9})$$

On introduit également le nombre de PRANDTL turbulent tel que :

$$Pr_t = \frac{\mu_t c_p}{\lambda_t} \quad (\text{A.10})$$

et, pour l'air, on suppose constante sa valeur :  $Pr_t = 0,9$ .



## Annexe B

# Modèle algébrique de turbulence de BALDWIN-LOMAX mis en œuvre dans AEROLOG

Le modèle de turbulence de BALDWIN-LOMAX repose sur l'expression algébrique de la viscosité turbulente à partir des échelles de longueur et de temps du champ moyen. Nous présentons ici la mise en œuvre qui en a été faite dans AEROLOG, qui est légèrement différente de la version originale présentée dans [1] (cf. paragraphe 4.2.2 page 153). Il s'agit d'un modèle à deux couches, où  $\mu_t$  est donné par des expressions différentes dans la sous-couche limite extérieure et intérieure :

$$\mu_t = \begin{cases} (\mu_t)_i & \forall y \leq y^* \\ (\mu_t)_e & \forall y \geq y^* \end{cases}$$

où  $y$  est la distance à la paroi et  $y^*$  la plus petite valeur de  $y$  pour laquelle  $(\mu_t)_i = (\mu_t)_e$ .

### B.1 Couche intérieure

La viscosité turbulente est calculée par une loi basée sur la longueur de mélange :

$$(\mu_t)_i = \rho l^2 |\omega|$$

où  $|\omega| = \left\| \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \right\|$  désigne le module de la vorticité et  $l$  la longueur de mélange. Cette longueur de mélange est calculée en fonction de la distance à la paroi  $y$  par la fonction de VAN DRIEST :

$$l = \kappa y \left[ 1 - e^{-y^+/A^+} \right]$$

où :  $\kappa$  est la constante de VON KARMAN définie plus loin ;

$y^+ = u_\tau y / \nu_p = \sqrt{\tau_p / \rho_p} \times y / \nu_p$  est la distance à la paroi adimensionnée par la vitesse de frottement et la viscosité moléculaire ;

$A^+$  est une constante définie plus loin.

## B.2 Couche extérieure

Dans la couche extérieure, en présence d'une paroi, la viscosité turbulente est donnée par la formule :

$$(\mu_t)_e = \rho K C_{cp} y_{\max} F_{\max} F_{\text{Kleb}}(y)$$

avec la fonction d'intermittence de KLEBANOFF qui s'écrit :

$$F_{\text{Kleb}} = \left[ 1 + 5,5 \left( \frac{C_{\text{Kleb}} \times y}{y_{\max}} \right)^6 \right]^{-1}$$

où :  $K$  est la constante de CLAUSER définie plus loin ;

$C_{cp}$  est une constante additionnelle également définie plus loin ;

$$F_{\max} = \frac{1}{\kappa} \max_y (l \times |\omega|) ;$$

$y_{\max}$  est la valeur de  $y$  pour laquelle  $l \times |\omega|$  atteint sa valeur maximale  $\kappa \times F_{\max}$ .

Il faut noter que c'est la formulation de ce coefficient  $(\mu_t)_e$  qui différencie la mise en œuvre de ce modèle dans AEROLOG par rapport à la version originale. En effet, dans [1], l'expression de la viscosité turbulente dans la couche extérieure est donnée par :

$$(\mu_t)_e = K C_{cp} \rho F_{\text{wake}} F_{\text{Kleb}}(y)$$

avec  $F_{\text{wake}} = \min \left( y_{\max} F_{\max}, C_{wk} y_{\max} \frac{u_{\max}^2}{F_{\max}} \right)$ , où  $u_{\max}$  est la vitesse maximale dans la couche limite et  $C_{wk} = 0,25$ .

## B.3 Coefficients de fermeture

Les différents coefficients introduits ci-dessus permettent la fermeture des équations :

$$\begin{aligned} \kappa &= 0,4 & C_{cp} &= 1,6 \\ A^+ &= 26 & C_{\text{Kleb}} &= 0,3 \\ K &= 0,0168 \end{aligned}$$

## B.4 Mise en œuvre

Pour le calcul de la distance à la paroi  $y$ , on suit les lignes de maillages issues d'une paroi qui a été définie dans le fichier de données comme « turbulente », et on introduit une correction permettant de prendre en compte le défaut d'orthogonalité de cette ligne avec la paroi. De plus, afin de limiter l'effet de la turbulence, l'utilisateur choisit la borne supérieure  $y_M$  de l'intervalle de recherche du maximum de la fonction  $l \times |\omega|$ , de sorte que :

$$F_{\max} = \frac{1}{\kappa} \max_{0 \leq y \leq y_M} (l \times |\omega|) \quad \text{et} \quad 0 \leq y_{\max} \leq y_M .$$

Enfin, dans les zones du maillage qui sont considérées comme faisant partie du sillage de l'obstacle que l'écoulement contourne – en pratique, il s'agit, plus largement, des blocs de maillage n'ayant aucune frontière déclarée comme paroi turbulente – la viscosité turbulente est nulle  $\mu_t = 0$ .

## Annexe C

# Diagonalisation de la matrice jacobienne

Les flux non visqueux intervenant dans les équations de NAVIER-STOKES (ou d'EULER) projetés dans une base cartésienne  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  s'écrivent :

$$\underline{f}^E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uH \end{bmatrix} \quad \underline{g}^E = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vw \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vH \end{bmatrix} \quad \underline{h}^E = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + p \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho wH \end{bmatrix}$$

où  $u$  (resp.  $v$  et  $w$ ) est la projection de  $\vec{v}$  selon la direction  $\vec{x}$  (resp.  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ ),  $p$  la pression,  $\rho$  la masse volumique et  $H = E + p/\rho$  l'enthalpie totale par unité de masse. Le vecteur d'état des variables conservatives s'écrit :

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix}$$

Plus généralement on peut écrire le tenseur des flux non visqueux :

$$\overrightarrow{\underline{F}}^E = \begin{bmatrix} \underline{f}^E \\ \underline{g}^E \\ \underline{h}^E \end{bmatrix} \quad \text{et de cette façon, on a :} \quad \begin{cases} \overrightarrow{\underline{F}}^E \cdot \vec{x} = \underline{f}^E \\ \overrightarrow{\underline{F}}^E \cdot \vec{y} = \underline{g}^E \\ \overrightarrow{\underline{F}}^E \cdot \vec{z} = \underline{h}^E \end{cases}$$

On peut alors définir le tenseur jacobien  $\underline{\underline{J}}$  d'ordre trois des flux  $\overrightarrow{\underline{F}}^E$  :

$$\underline{\underline{J}} = \frac{d\overrightarrow{\underline{F}}^E}{d\underline{w}}$$

Sa projection selon un vecteur unitaire quelconque  $\vec{n} = {}^T[n_x, n_y, n_z]$  est donnée à la page suivante.

$$\underline{\underline{\vec{J} \cdot \vec{n}}} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y & n_z & 0 \\ -u \vec{v} \cdot \vec{n} + \frac{\gamma-1}{2} \vec{v}^2 n_x & \vec{v} \cdot \vec{n} + (2-\gamma) u n_x & u n_y - (\gamma-1) v n_x & u n_z - (\gamma-1) w n_x & (\gamma-1) n_x \\ -v \vec{v} \cdot \vec{n} + \frac{\gamma-1}{2} \vec{v}^2 n_y & v n_x - (\gamma-1) u n_y & \vec{v} \cdot \vec{n} + (2-\gamma) v n_y & v n_z - (\gamma-1) w n_y & (\gamma-1) n_y \\ -w \vec{v} \cdot \vec{n} + \frac{\gamma-1}{2} \vec{v}^2 n_z & w n_x - (\gamma-1) u n_z & w n_y - (\gamma-1) v n_z & \vec{v} \cdot \vec{n} + (2-\gamma) w n_z & (\gamma-1) n_z \\ -\vec{v} \cdot \vec{n} [\gamma E - (\gamma-1) \vec{v}^2] & \left( \gamma E - \frac{\gamma-1}{2} \vec{v}^2 \right) n_x & \left( \gamma E - \frac{\gamma-1}{2} \vec{v}^2 \right) n_y & \left( \gamma E - \frac{\gamma-1}{2} \vec{v}^2 \right) n_z & \gamma \vec{v} \cdot \vec{n} \\ & -(\gamma-1) u \vec{v} \cdot \vec{n} & -(\gamma-1) v \vec{v} \cdot \vec{n} & -(\gamma-1) w \vec{v} \cdot \vec{n} & \end{bmatrix}$$

---

Cette matrice jacobienne peut être diagonalisée ainsi :

$$\underline{\underline{\vec{J}}} \cdot \underline{\underline{\vec{n}}} = \underline{\underline{P}} \underset{i}{\text{Diag}} \left[ \lambda^{(i)} \right] \underline{\underline{P}}^{-1}$$

où les valeurs propres  $\lambda^{(i)}$ ,  $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$  sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^{(1)} = \vec{v} \cdot \vec{n} \\ \lambda^{(2)} = \vec{v} \cdot \vec{n} \\ \lambda^{(3)} = \vec{v} \cdot \vec{n} \\ \lambda^{(4)} = \vec{v} \cdot \vec{n} + c \\ \lambda^{(5)} = \vec{v} \cdot \vec{n} - c \end{array} \right.$$

où  $c = \sqrt{\gamma r T}$  est la vitesse du son ; les matrices de passage sont données à la page suivante.

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & \frac{\rho}{2c} & \frac{\rho}{2c} \\ un_x & un_y - \rho n_z & un_z - \rho n_y & \frac{\rho}{2c}(u + n_x c) & \frac{\rho}{2c}(u - n_x c) \\ vn_x - \rho n_z & vn_y & vn_z - \rho n_x & \frac{\rho}{2c}(v + n_y c) & \frac{\rho}{2c}(v - n_y c) \\ wn_x - \rho n_y & wn_y + \rho n_x & wn_z & \frac{\rho}{2c}(w + n_z c) & \frac{\rho}{2c}(w - n_z c) \\ \frac{\bar{v}^2}{2}n_x + vn_z - wn_y & \frac{\bar{v}^2}{2}n_y + wn_x - un_z & \frac{\bar{v}^2}{2}n_z + un_y - vn_x & \frac{\rho}{2c}(H + c\vec{v} \cdot \vec{n}) & \frac{\rho}{2c}(H - c\vec{v} \cdot \vec{n}) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)n_x - \frac{1}{\rho}(vn_z - wn_y) & (\gamma-1)\frac{u}{c^2}n_x & (\gamma-1)\frac{v}{c^2}n_x + \frac{n_z}{\rho} & (\gamma-1)\frac{w}{c^2}n_x - \frac{n_y}{\rho} & -\frac{\gamma-1}{c^2}n_x \\ \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)n_y - \frac{1}{\rho}(wn_x - un_z) & (\gamma-1)\frac{u}{c^2}n_y - \frac{n_z}{\rho} & (\gamma-1)\frac{v}{c^2}n_y & (\gamma-1)\frac{w}{c^2}n_y + \frac{n_x}{\rho} & -\frac{\gamma-1}{c^2}n_y \\ \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)n_z - \frac{1}{\rho}(un_y - vn_x) & (\gamma-1)\frac{u}{c^2}n_z + \frac{n_y}{\rho} & (\gamma-1)\frac{v}{c^2}n_z - \frac{n_x}{\rho} & (\gamma-1)\frac{w}{c^2}n_z & -\frac{\gamma-1}{c^2}n_z \\ \frac{c}{\rho}\left(\frac{\gamma-1}{2}Ma^2 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c}\right) & \frac{n_x}{\rho} - \frac{\gamma-1}{\rho c}u & \frac{n_y}{\rho} - \frac{\gamma-1}{\rho c}v & \frac{n_z}{\rho} - \frac{\gamma-1}{\rho c}w & \frac{\gamma-1}{\rho c} \\ \frac{c}{\rho}\left(\frac{\gamma-1}{2}Ma^2 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c}\right) & -\frac{n_x}{\rho} - \frac{\gamma-1}{\rho c}u & -\frac{n_y}{\rho} - \frac{\gamma-1}{\rho c}v & -\frac{n_z}{\rho} - \frac{\gamma-1}{\rho c}w & \frac{\gamma-1}{\rho c} \end{bmatrix}$$

---

## Remarque concernant les repères relatif et absolu

Nous avons présenté au paragraphe 1.5.2 page 26 la spécificité du logiciel AEROLOG qui utilise comme inconnues du problème les variables liées au repère absolu exprimées dans le repère relatif lié au maillage et à l'engin. Habituellement, on choisit plutôt des inconnues liées au repère relatif et exprimées dans ce même repère lié au maillage, le fluide se déplaçant et le maillage étant fixe (comme en soufflerie). Dans un tel cas, le tenseur des flux non-visqueux – on le notera  $\overrightarrow{F}_{r/r}^E$  pour rappeler que les inconnues sont liées au repère relatif et exprimées dans ce même repère – peut se décomposer en une partie de convection et une autre de pression telles que :

$$\overrightarrow{F}_{r/r}^E = \vec{v}_r \otimes \underline{w}_r + \overrightarrow{F}_r^p$$

avec le tenseur des flux de pression :

$$\overrightarrow{F}_r^p = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & pu_r \\ 0 & 0 & p & 0 & pv_r \\ 0 & 0 & 0 & p & pw_r \end{pmatrix}$$

Si on applique ce tenseur à un vecteur unitaire quelconque  $\vec{n} = {}^T[n_x, n_y, n_z]$ , on obtient :

$$\overrightarrow{F}_{r/r}^E \cdot \vec{n} = \underline{w}_r \cdot \vec{v}_r \cdot \vec{n} + \overrightarrow{F}_r^p \cdot \vec{n}$$

où

$$\overrightarrow{F}_r^p \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ pn_x \\ pn_y \\ pn_z \\ p\vec{n}_r \cdot \vec{n} \end{pmatrix}$$

On exprime alors le tenseur jacobien des flux comme étant la dérivée du tenseur des flux par celui des variables :

$$\vec{J}_{r/r} = \frac{d\overrightarrow{F}_{r/r}^E}{d\underline{w}_r}$$

on peut alors diagonaliser la matrice jacobienne obtenue :

$$\vec{J}_{r/r} \cdot \vec{n} = \underline{P}_r \underline{\Lambda}_r \underline{P}_r^{-1}$$

où  $\vec{n} = {}^T[n_x, n_y, n_z]$  est un vecteur unitaire quelconque et  $\underline{\Lambda}_r$  la matrice dont la diagonale est composée des valeurs propres de la matrice  $\vec{J}_{r/r} \cdot \vec{n}$ .

Dans le cas d'AEROLOG, le tenseur des flux est noté  $\overrightarrow{F}_{a/r}^E$  et se décompose ainsi :

$$\overrightarrow{F}_{a/r}^E = \vec{v}_r \otimes \underline{w}_a + \overrightarrow{F}_a^p$$

On peut alors utiliser la décomposition de la vitesse dans le repère absolu  $\vec{v}_a$  comme la somme de la vitesse dans le repère relatif  $\vec{v}_r$  et de la vitesse d'entraînement de ce repère relatif  $\vec{v}_e$  ; ainsi on obtient :

$$\overrightarrow{F}_{a/r}^E = \vec{v}_r \otimes \underline{w}_a + \overrightarrow{F}_a^p - \vec{v}_e \otimes \underline{w}_a$$

que l'on peut également noter :

$$\overrightarrow{F}_{a/r}^E = \widetilde{\overrightarrow{F}}_{a/r} - \vec{v}_e \otimes \underline{w}_a$$

avec  $\vec{F}_{a/r} = \vec{F}(w_a)$  de même que précédemment on avait  $\vec{F}_{r/r} = \vec{F}(w_r)$ ; formellement ces deux expressions sont identiques, seul change le vecteur des inconnues utilisées. Ainsi le jacobien des flux s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\underline{a}/r} \cdot \vec{n} &= \frac{d\vec{F}_{a/r}}{dw_a} \cdot \vec{n} \\ &= \frac{d\vec{F}_a}{dw_a} \cdot \vec{n} - \vec{v}_e \cdot \vec{n} \underline{\underline{Id}} \\ &= \underline{P}_a \underline{\underline{\Lambda}}_a \underline{P}_a^{-1} - \vec{v}_e \cdot \vec{n} \underline{\underline{Id}} \end{aligned}$$

Or compte tenu de l'expression de la matrice  $\underline{\underline{\Lambda}}_a = \underline{\underline{Diag}}_i[\lambda^{(i)}]$  donnée plus haut, on peut regrouper ces deux termes; on obtient alors :

$$\vec{J}_{\underline{a}/r} \cdot \vec{n} = \underline{P}_a \underline{\underline{\Lambda}}_r \underline{P}_a^{-1}$$

Ainsi, les matrices des vecteurs propres  $\underline{P}$  et  $\underline{P}^{-1}$  sont formellement les mêmes; dans le cas d'AEROLOG, les inconnues utilisées sont exprimées dans le repère absolu. Les valeurs propres, en revanche, sont dans les deux cas exprimées par rapport au repère relatif.

## Annexe D

# Formule de DIEDERICH

Pour calculer le gradient de portance  $C_{L\alpha}$  d'une aile présentant un angle de flèche, dans un écoulement compressible subsonique, on peut utiliser une formule empirique dite « formule de DIEDERICH » (cf. [4] et [12]) :

$$C_{L\alpha} = \frac{\pi A}{1 + \sqrt{1 + \left( \frac{\pi A}{C_{l\alpha} \cos(\bar{\lambda})} \right)^2 (1 - Ma^2 \cos^2(\lambda))}} \frac{S_a}{S_{\text{ref}}}$$

La figure D.1 expose les principales caractéristiques géométriques de l'aile utilisées pour ce calcul :

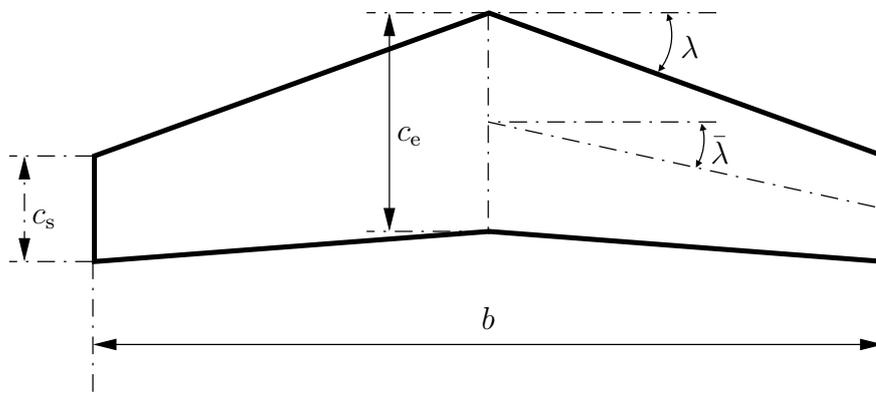


FIG. D.1 – Schéma d'une aile en flèche avec les cotes nécessaires au calcul de la formule de DIEDERICH

- où :
- $b$  est l'envergure totale des deux ailes, d'un saumon à l'autre ;
  - $c_e$  est la corde à l'emplanture de l'aile ;
  - $c_s$  est la corde au saumon de l'aile ;
  - $S_a$  est la surface des ailes ;  $S_a = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} c(y) dy = \frac{c_e + c_s}{2} \times b$  ;
  - $S_{\text{ref}}$  est la surface de référence servant au calcul des coefficients aérodynamiques globaux ;
  - $A$  est le rapport d'aspect ;  $A = \frac{b^2}{S_a} = \frac{2 \times b}{c_e + c_s}$  ;
  - $\lambda$  est l'angle de flèche au bord d'attaque ;
  - $\bar{\lambda}$  est l'angle de flèche moyen de l'aile ;
  - $Ma$  est le nombre de MACH de l'écoulement libre ;
  - $C_{l_\alpha}$  est le gradient de portance dans un cas bidimensionnel ; pour des profils minces, on prendra, d'après la théorie de la ligne portante de PRANDTL,  $C_{l_\alpha} = 2\pi$ .

Ce gradient de portance  $C_{L_\alpha}$  est exprimé en  $\text{deg}^{-1}$ .

## Annexe E

# Résultats d'optimisation

Le tableau ci-dessous résume les résultats d'optimisation obtenus pour les  $3^5 = 243$  calculs effectués. On y a retranscrit :

- le numéro d'individu  $Id$  ;
- les 5 paramètres d'optimisation : les calages dans le plan de tangage et au saumon  $\theta_t$  et  $\theta_s$ , la position de début d'évidement  $y_1$ , l'épaisseur de capot  $e$  et le nombre de MACH  $Ma$  ;
- les résultats intermédiaires : les coefficients aérodynamiques globaux dans le repère du missile  $C_{A_{calc}}$ ,  $C_{N_{calc}}$ , le coefficient d'effort axial additif forfaitaire  $C_{A_{ea}}$ , l'incidence d'équilibre  $\alpha_{eq}$ , la finesse à l'équilibre  $f_{eq}$ , la flèche maximale en bout d'aile  $f_{z_{max}}$ , le vrillage de l'aile obtenu en charge  $\theta_{aero}$  ;
- les grandeurs d'optimisation : le produit du nombre de MACH par la finesse à l'équilibre  $Ma \times f_{eq}$ , la première fréquence propre de la structure  $f_0$  et la contrainte maximale  $\sigma^{max}$ .

Le meilleur individu est le n° 146 ; l'individu n° 0 correspond à la configuration de référence non évidée.

<i>Id</i>	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	<i>Ma</i>	$C_{A_{calc}}$	$C_{N_{calc}}$	$C_{A_{ea}}$	$\alpha_{eq}$	$f_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_0$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$
0	0,0	0,0	—	—	0,70	-0,0098	3,300	0,025	4,38	12,31	8,62	19,41	44,12	16,59	-0,17
1	1,5	-1,5	45	1,125	0,70	-0,0153	3,297	0,025	4,44	12,41	8,68	23,33	39,83	14,04	-0,18
2	0,0	-1,5	45	1,125	0,70	-0,0457	3,299	0,025	4,99	12,34	8,64	23,33	42,28	14,19	-0,18
3	3,0	-1,5	45	1,125	0,70	0,0155	3,300	0,025	3,90	12,42	8,69	23,34	34,20	13,91	-0,17
4	1,5	-3,0	45	1,125	0,70	-0,0503	3,299	0,025	5,07	12,34	8,64	23,34	38,35	13,57	-0,17
5	1,5	0,0	45	1,125	0,70	0,0209	3,298	0,025	3,83	12,35	8,65	23,33	41,32	14,76	-0,19
6	1,5	-1,5	10	1,125	0,70	-0,0356	3,301	0,025	4,65	12,80	8,96	21,78	55,02	17,80	-0,27
7	1,5	-1,5	80	1,125	0,70	-0,0154	3,300	0,025	4,44	12,41	8,69	20,39	39,87	13,76	-0,15
8	1,5	-1,5	45	0,500	0,70	-0,0154	3,297	0,025	4,45	12,38	8,67	24,42	39,81	14,62	-0,20
9	1,5	-1,5	45	1,750	0,70	-0,0155	3,300	0,025	4,45	12,39	8,67	22,16	39,87	13,83	-0,17
10	1,5	-1,5	45	1,125	0,60	-0,1751	4,495	0,025	7,08	11,06	6,63	23,34	39,87	13,98	-0,16
11	1,5	-1,5	45	1,125	0,80	0,0870	2,528	0,025	2,78	10,74	8,60	23,34	39,73	14,19	-0,20
12	0,0	-3,0	10	0,500	0,60	-0,3222	4,480	0,025	8,90	11,20	6,72	20,80	80,87	22,36	-0,34
13	0,0	-3,0	10	0,500	0,80	0,1319	2,525	0,025	2,23	9,87	7,89	20,80	-1,26	17,23	-0,43
14	0,0	-3,0	10	1,750	0,60	-0,2636	4,489	0,025	8,25	10,97	6,58	21,50	41,14	15,23	-0,22
15	0,0	-3,0	10	1,750	0,80	0,0338	2,528	0,025	3,97	10,77	8,62	21,50	40,30	15,19	-0,25
16	0,0	-3,0	80	0,500	0,60	-0,2610	4,488	0,025	8,20	11,01	6,61	20,77	41,23	13,36	-0,14
17	0,0	-3,0	80	0,500	0,80	0,0352	2,527	0,025	3,95	10,75	8,60	20,77	40,67	13,46	-0,17
18	0,0	-3,0	80	1,750	0,60	-0,2608	4,487	0,025	8,20	11,01	6,60	20,04	41,22	13,40	-0,14
19	0,0	-3,0	80	1,750	0,80	0,0351	2,528	0,025	3,95	10,76	8,60	20,04	40,67	13,50	-0,17
20	0,0	0,0	10	0,500	0,60	0,0352	4,526	0,025	6,10	8,31	4,99	20,81	56,93	15,68	-0,36
21	0,0	0,0	10	0,500	0,80	0,0855	2,526	0,025	2,84	10,69	8,55	20,81	96,48	23,59	-0,41
22	0,0	0,0	10	1,750	0,60	-0,1698	4,491	0,025	6,98	11,13	6,68	21,50	43,84	16,35	-0,24
23	0,0	0,0	10	1,750	0,80	0,2235	2,525	0,025	1,32	8,21	6,57	21,50	14,64	7,87	-0,27
24	0,0	0,0	80	0,500	0,60	-0,1669	4,494	0,025	6,93	11,16	6,69	20,77	43,02	14,12	-0,15
25	0,0	0,0	80	0,500	0,80	0,0916	2,527	0,025	2,73	10,63	8,51	20,77	43,99	14,72	-0,18
26	0,0	0,0	80	1,750	0,60	-0,1668	4,493	0,025	6,93	11,15	6,69	20,04	43,02	14,16	-0,14
27	0,0	0,0	80	1,750	0,80	0,0915	2,525	0,025	2,73	10,63	8,51	20,04	43,97	14,75	-0,18
28	3,0	-3,0	10	0,500	0,60	-0,1964	4,496	0,025	7,60	10,55	6,33	20,78	84,74	14,72	-0,34
29	3,0	-3,0	10	0,500	0,80	0,1627	2,526	0,025	1,57	9,81	7,85	20,78	119,05	9,22	-0,41
<i>Id</i>	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	<i>Ma</i>	$C_{A_{calc}}$	$C_{N_{calc}}$	$C_{A_{ea}}$	$\alpha_{eq}$	$f_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_0$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$

<i>Id</i>	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	<i>Ma</i>	$C_{A_{calc}}$	$C_{N_{calc}}$	$C_{A_{ea}}$	$\alpha_{eq}$	$f_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_0$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$
30	3,0	-3,0	10	1,750	0,60	-0,1812	4,491	0,025	7,28	10,81	6,48	21,50	40,12	15,12	-0,22
31	3,0	-3,0	10	1,750	0,80	0,0823	2,525	0,025	2,83	10,86	8,69	21,50	38,01	14,73	-0,25
32	3,0	-3,0	80	0,500	0,60	-0,1787	4,493	0,025	7,24	10,82	6,49	20,77	33,16	13,23	-0,14
33	3,0	-3,0	80	0,500	0,80	0,0840	2,527	0,025	2,83	10,78	8,62	20,77	32,22	13,12	-0,17
34	3,0	-3,0	80	1,750	0,60	-0,1783	4,490	0,025	7,23	10,83	6,50	20,04	33,14	13,26	-0,14
35	3,0	-3,0	80	1,750	0,80	0,0840	2,527	0,025	2,83	10,78	8,62	20,04	32,22	13,16	-0,17
36	3,0	0,0	10	0,500	0,60	-0,1258	4,490	0,025	6,40	11,17	6,70	20,80	76,42	23,24	-0,36
37	3,0	0,0	10	0,500	0,80	0,2295	2,527	0,025	-0,06	10,04	8,03	20,80	130,15	6,95	-0,42
38	3,0	0,0	10	1,750	0,60	-0,0880	4,496	0,025	5,98	11,04	6,62	21,50	40,08	16,13	-0,23
39	3,0	0,0	10	1,750	0,80	0,1316	2,538	0,025	1,69	10,94	8,75	21,50	40,42	16,58	-0,27
40	3,0	0,0	80	0,500	0,60	-0,0847	4,493	0,025	5,92	11,08	6,65	20,78	35,56	13,93	-0,14
41	3,0	0,0	80	0,500	0,80	0,1373	2,523	0,025	1,62	10,78	8,62	20,78	35,95	14,35	-0,18
42	3,0	0,0	80	1,750	0,60	-0,0847	4,493	0,025	5,92	11,08	6,65	20,04	35,56	13,98	-0,14
43	3,0	0,0	80	1,750	0,80	0,1387	2,522	0,025	1,60	10,75	8,60	20,04	35,80	14,34	-0,17
44	1,5	-3,0	10	0,500	0,60	-0,2413	4,486	0,025	7,97	10,97	6,58	20,79	87,44	21,50	-0,34
45	1,5	-3,0	10	0,500	0,80	0,0544	2,526	0,025	3,49	10,79	8,63	20,79	85,35	20,87	-0,38
46	1,5	-3,0	10	1,750	0,60	-0,2226	4,486	0,025	7,75	10,92	6,55	21,50	40,94	15,22	-0,22
47	1,5	-3,0	10	1,750	0,80	0,0573	2,530	0,025	3,41	10,83	8,66	21,50	40,03	15,06	-0,25
48	1,5	-3,0	80	0,500	0,60	-0,2204	4,490	0,025	7,71	10,94	6,57	20,77	38,66	13,30	-0,14
49	1,5	-3,0	80	0,500	0,80	0,0593	2,526	0,025	3,39	10,78	8,62	20,77	37,85	13,28	-0,17
50	1,5	-3,0	80	1,750	0,60	-0,2204	4,490	0,025	7,71	10,94	6,57	20,04	38,66	13,34	-0,14
51	1,5	-3,0	80	1,750	0,80	0,0592	2,528	0,025	3,39	10,78	8,63	20,04	37,88	13,33	-0,17
52	1,5	0,0	10	0,500	0,60	-0,1550	4,491	0,025	6,72	11,28	6,77	20,80	89,03	23,11	-0,36
53	1,5	0,0	10	0,500	0,80	0,1092	2,524	0,025	2,27	10,75	8,60	20,80	90,94	23,19	-0,41
54	1,5	0,0	10	1,750	0,60	-0,1294	4,495	0,025	6,48	11,10	6,66	21,50	42,90	16,24	-0,24
55	1,5	0,0	10	1,750	0,80	0,1173	2,546	0,025	2,10	10,78	8,62	21,50	44,16	16,93	0,00
56	1,5	0,0	80	0,500	0,60	-0,1260	4,493	0,025	6,42	11,13	6,68	20,77	41,00	14,03	-0,14
57	1,5	0,0	80	0,500	0,80	0,1141	2,526	0,025	2,18	10,72	8,58	20,77	41,55	14,54	-0,18
58	1,5	0,0	80	1,750	0,60	-0,1260	4,493	0,025	6,42	11,13	6,68	20,04	41,00	14,07	-0,14
59	1,5	0,0	80	1,750	0,80	0,1141	2,525	0,025	2,17	10,73	8,58	20,04	41,53	14,58	-0,18
60	0,0	-1,5	10	0,500	0,60	-0,2416	4,487	0,025	7,84	11,25	6,75	20,80	89,84	22,30	-0,34
<i>Id</i>	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	<i>Ma</i>	$C_{A_{calc}}$	$C_{N_{calc}}$	$C_{A_{ea}}$	$\alpha_{eq}$	$f_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_0$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$

<i>Id</i>	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	<i>Ma</i>	$C_{A_{calc}}$	$C_{N_{calc}}$	$C_{A_{ea}}$	$\alpha_{eq}$	$f_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_0$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$
61	0,0	-1,5	10	0,500	0,80	0,0572	2,526	0,025	3,43	10,78	8,63	20,80	90,76	22,16	-0,39
62	0,0	-1,5	10	1,750	0,60	-0,2173	4,488	0,025	7,60	11,11	6,66	21,50	42,29	15,69	-0,22
63	0,0	-1,5	10	1,750	0,80	0,0598	2,528	0,025	3,36	10,81	8,65	21,50	42,53	15,94	-0,25
64	0,0	-1,5	80	0,500	0,60	-0,2154	4,493	0,025	7,57	11,12	6,67	20,77	42,16	13,72	-0,14
65	0,0	-1,5	80	0,500	0,80	0,0631	2,528	0,025	3,34	10,71	8,57	20,77	42,34	14,06	-0,18
66	0,0	-1,5	80	1,750	0,60	-0,2147	4,488	0,025	7,56	11,13	6,68	20,04	42,11	13,76	-0,14
67	0,0	-1,5	80	1,750	0,80	0,0631	2,528	0,025	3,34	10,71	8,57	20,04	42,34	14,10	-0,17
68	3,0	-1,5	10	0,500	0,60	-0,1324	4,532	0,025	6,58	10,93	6,56	20,79	83,55	21,78	0,02
69	3,0	-1,5	10	0,500	0,80	0,1054	2,525	0,025	2,32	10,82	8,66	20,79	79,82	21,45	-0,38
70	3,0	-1,5	10	1,750	0,60	-0,1360	4,497	0,025	6,63	10,95	6,57	21,50	40,21	15,50	-0,22
71	3,0	-1,5	10	1,750	0,80	0,1085	2,525	0,025	2,26	10,80	8,64	21,50	39,36	15,51	-0,25
72	3,0	-1,5	80	0,500	0,60	-0,1336	4,500	0,025	6,59	10,97	6,58	20,78	34,35	13,58	-0,14
73	3,0	-1,5	80	0,500	0,80	0,1120	2,525	0,025	2,22	10,74	8,59	20,78	33,95	13,68	-0,17
74	3,0	-1,5	80	1,750	0,60	-0,1327	4,493	0,025	6,57	10,99	6,59	20,04	34,29	13,60	-0,14
75	3,0	-1,5	80	1,750	0,80	0,1120	2,524	0,025	2,21	10,74	8,59	20,04	33,94	13,72	-0,17
76	0,0	-3,0	45	0,500	0,60	-0,2614	4,489	0,025	8,22	10,98	6,59	24,42	41,18	14,58	-0,20
77	0,0	-3,0	45	0,500	0,80	0,0355	2,526	0,025	3,96	10,71	8,57	24,42	40,55	14,61	-0,24
78	0,0	-3,0	45	1,750	0,60	-0,2610	4,488	0,025	8,20	11,01	6,60	22,16	41,21	13,46	-0,15
79	0,0	-3,0	45	1,750	0,80	0,0351	2,528	0,025	3,95	10,76	8,61	22,16	40,66	13,54	-0,19
80	0,0	0,0	45	0,500	0,60	-0,1673	4,494	0,025	6,94	11,14	6,68	24,42	42,99	15,31	-0,19
81	0,0	0,0	45	0,500	0,80	0,0942	2,529	0,025	2,68	10,62	8,50	24,42	45,01	15,70	-0,23
82	0,0	0,0	45	1,750	0,60	-0,1672	4,494	0,025	6,94	11,15	6,69	22,16	43,01	14,41	-0,16
83	0,0	0,0	45	1,750	0,80	0,0911	2,526	0,025	2,74	10,64	8,51	22,16	43,84	15,01	-0,20
84	3,0	-3,0	45	0,500	0,60	-0,1789	4,490	0,025	7,25	10,80	6,48	24,42	33,09	14,42	-0,20
85	3,0	-3,0	45	0,500	0,80	0,0848	2,530	0,025	2,85	10,71	8,57	24,42	32,25	14,21	-0,24
86	3,0	-3,0	45	1,750	0,60	-0,1788	4,493	0,025	7,24	10,82	6,49	22,16	33,14	13,32	-0,15
87	3,0	-3,0	45	1,750	0,80	0,0838	2,527	0,025	2,83	10,78	8,63	22,16	32,21	13,19	-0,18
88	3,0	0,0	45	0,500	0,60	-0,0851	4,494	0,025	5,94	11,05	6,63	24,42	35,53	15,10	-0,19
89	3,0	0,0	45	0,500	0,80	0,1440	2,527	0,025	1,52	10,69	8,55	24,42	37,23	15,10	-0,23
90	3,0	0,0	45	1,750	0,60	-0,0851	4,493	0,025	5,93	11,07	6,64	22,16	35,54	14,22	-0,16
91	3,0	0,0	45	1,750	0,80	0,1378	2,524	0,025	1,63	10,75	8,60	22,16	35,75	14,62	-0,20
<i>Id</i>	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	<i>Ma</i>	$C_{A_{calc}}$	$C_{N_{calc}}$	$C_{A_{ea}}$	$\alpha_{eq}$	$f_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_0$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$

<i>Id</i>	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	<i>Ma</i>	$C_{A_{calc}}$	$C_{N_{calc}}$	$C_{A_{ea}}$	$\alpha_{eq}$	$f_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_0$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$
92	0,0	-3,0	10	1,125	0,60	-0,2709	4,486	0,025	8,32	11,02	6,61	21,78	50,96	17,00	-0,25
93	0,0	-3,0	10	1,125	0,80	0,0357	2,528	0,025	3,90	10,82	8,66	21,78	51,60	16,45	-0,28
94	0,0	-3,0	80	1,125	0,60	-0,2610	4,488	0,025	8,20	11,01	6,60	20,39	41,22	13,39	-0,14
95	0,0	-3,0	80	1,125	0,80	0,0351	2,528	0,025	3,95	10,76	8,61	20,39	40,68	13,48	-0,17
96	0,0	0,0	10	1,125	0,60	-0,1876	4,493	0,025	7,18	11,19	6,71	21,78	55,46	18,48	-0,28
97	0,0	0,0	10	1,125	0,80	0,0882	2,526	0,025	2,79	10,66	8,53	21,78	57,04	18,81	-0,31
98	0,0	0,0	80	1,125	0,60	-0,1669	4,494	0,025	6,93	11,15	6,69	20,39	43,01	14,14	-0,14
99	0,0	0,0	80	1,125	0,80	0,0914	2,527	0,025	2,73	10,64	8,51	20,39	43,90	14,75	-0,18
100	3,0	-3,0	10	1,125	0,60	-0,1818	4,490	0,025	7,30	10,78	6,47	21,77	50,72	16,75	-0,25
101	3,0	-3,0	10	1,125	0,80	0,0815	2,528	0,025	2,83	10,90	8,72	21,77	50,48	16,19	-0,28
102	3,0	-3,0	80	1,125	0,60	-0,1784	4,490	0,025	7,23	10,83	6,50	20,39	33,13	13,25	-0,14
103	3,0	-3,0	80	1,125	0,80	0,0840	2,527	0,025	2,83	10,78	8,62	20,39	32,22	13,14	-0,17
104	3,0	0,0	10	1,125	0,60	-0,1197	4,491	0,025	6,23	11,37	6,82	21,78	49,65	18,58	-0,28
105	3,0	0,0	10	1,125	0,80	0,1361	2,523	0,025	1,67	10,72	8,58	21,78	49,99	18,26	-0,30
106	3,0	0,0	80	1,125	0,60	-0,0852	4,497	0,025	5,93	11,06	6,64	20,40	35,58	13,97	-0,14
107	3,0	0,0	80	1,125	0,80	0,1378	2,523	0,025	1,62	10,76	8,60	20,40	35,73	14,37	-0,17
108	0,0	-3,0	10	0,500	0,70	-0,0957	3,298	0,025	5,79	12,52	8,77	20,80	83,37	21,50	-0,36
109	0,0	-3,0	10	1,750	0,70	-0,0819	3,299	0,025	5,64	12,28	8,59	21,50	40,93	15,23	-0,23
110	0,0	-3,0	80	0,500	0,70	-0,0802	3,296	0,025	5,60	12,33	8,63	20,77	41,01	13,38	-0,15
111	0,0	-3,0	80	1,750	0,70	-0,0806	3,299	0,025	5,60	12,33	8,63	20,04	41,05	13,44	-0,15
112	0,0	0,0	10	0,500	0,70	-0,0431	3,298	0,025	4,69	13,06	9,14	20,81	92,71	24,02	-0,39
113	0,0	0,0	10	1,750	0,70	-0,0233	3,298	0,025	4,51	12,58	8,81	21,50	43,83	16,89	-0,26
114	0,0	0,0	80	0,500	0,70	-0,0093	3,301	0,025	4,37	12,31	8,62	20,77	43,53	14,38	-0,16
115	0,0	0,0	80	1,750	0,70	-0,0091	3,300	0,025	4,37	12,31	8,62	20,04	43,51	14,42	-0,16
116	3,0	-3,0	10	0,500	0,70	-0,0326	3,297	0,025	4,70	12,51	8,76	20,78	80,96	21,07	-0,36
117	3,0	-3,0	10	1,750	0,70	-0,0201	3,298	0,025	4,56	12,30	8,61	21,50	39,36	15,00	-0,23
118	3,0	-3,0	80	0,500	0,70	-0,0191	3,301	0,025	4,52	12,37	8,66	20,77	32,79	13,17	-0,15
119	3,0	-3,0	80	1,750	0,70	-0,0187	3,297	0,025	4,51	12,36	8,66	20,04	32,76	13,19	-0,15
120	3,0	0,0	10	0,500	0,70	0,0303	3,300	0,025	3,52	12,77	8,94	20,80	77,43	23,20	-0,38
121	3,0	0,0	10	1,750	0,70	0,0359	3,296	0,025	3,43	12,72	8,91	21,50	39,51	16,57	-0,25
122	3,0	0,0	80	0,500	0,70	0,0517	3,302	0,025	3,28	12,40	8,68	20,78	35,77	14,10	-0,16
<i>Id</i>	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	<i>Ma</i>	$C_{A_{calc}}$	$C_{N_{calc}}$	$C_{A_{ea}}$	$\alpha_{eq}$	$f_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_0$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$

<i>Id</i>	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	<i>Ma</i>	$C_{A_{calc}}$	$C_{N_{calc}}$	$C_{A_{ea}}$	$\alpha_{eq}$	$f_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_0$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$
123	3,0	0,0	80	1,750	0,70	0,0520	3,298	0,025	3,27	12,40	8,68	20,04	35,73	14,13	-0,16
124	1,5	-1,5	45	0,500	0,60	-0,1746	4,492	0,025	7,08	11,05	6,63	24,42	39,82	14,55	-0,18
125	1,5	-1,5	45	0,500	0,80	0,0911	2,526	0,025	2,75	10,62	8,50	24,42	40,39	14,59	-0,22
126	1,5	-1,5	45	1,750	0,60	-0,1750	4,495	0,025	7,08	11,06	6,64	22,16	39,87	13,75	-0,15
127	1,5	-1,5	45	1,750	0,80	0,0870	2,526	0,025	2,78	10,74	8,59	22,16	39,71	13,96	-0,19
128	1,5	-1,5	10	1,125	0,60	-0,1773	4,488	0,025	7,12	11,03	6,62	21,78	53,70	17,28	-0,25
129	1,5	-1,5	10	1,125	0,80	0,0835	2,525	0,025	2,84	10,78	8,62	21,78	53,08	17,44	-0,29
130	1,5	-1,5	80	1,125	0,60	-0,1744	4,492	0,025	7,07	11,07	6,64	20,39	39,84	13,67	-0,14
131	1,5	-1,5	80	1,125	0,80	0,0872	2,526	0,025	2,78	10,74	8,59	20,39	39,73	13,89	-0,17
132	1,5	-1,5	10	0,500	0,70	-0,0348	3,297	0,025	4,66	12,72	8,91	20,80	88,18	22,18	-0,36
133	1,5	-1,5	10	1,750	0,70	-0,0191	3,298	0,025	4,51	12,40	8,68	21,50	41,93	15,73	-0,24
134	1,5	-1,5	80	0,500	0,70	-0,0154	3,300	0,025	4,44	12,40	8,68	20,77	39,87	13,74	-0,16
135	1,5	-1,5	80	1,750	0,70	-0,0154	3,300	0,025	4,44	12,40	8,68	20,04	39,87	13,78	-0,15
136	1,5	-3,0	45	1,125	0,60	-0,2205	4,489	0,025	7,72	10,94	6,56	23,34	38,64	13,61	-0,16
137	1,5	-3,0	45	1,125	0,80	0,0591	2,526	0,025	3,39	10,78	8,62	23,34	37,83	13,57	-0,19
138	1,5	0,0	45	1,125	0,60	-0,1266	4,495	0,025	6,43	11,12	6,67	23,33	41,00	14,56	-0,17
139	1,5	0,0	45	1,125	0,80	0,1145	2,524	0,025	2,17	10,71	8,57	23,33	41,58	15,03	-0,21
140	1,5	-3,0	45	0,500	0,70	-0,0507	3,300	0,025	5,08	12,33	8,63	24,42	38,31	14,45	-0,21
141	1,5	-3,0	45	1,750	0,70	-0,0502	3,299	0,025	5,06	12,36	8,65	22,16	38,36	13,36	-0,17
142	1,5	0,0	45	0,500	0,70	0,0210	3,298	0,025	3,83	12,36	8,65	24,42	41,30	15,41	-0,21
143	1,5	0,0	45	1,750	0,70	0,0210	3,298	0,025	3,82	12,37	8,66	22,16	41,32	14,52	-0,18
144	1,5	-3,0	10	1,125	0,70	-0,0556	3,300	0,025	5,16	12,36	8,65	21,78	51,33	16,89	-0,27
145	1,5	-3,0	80	1,125	0,70	-0,0501	3,299	0,025	5,06	12,36	8,65	20,39	38,36	13,30	-0,15
146	1,5	0,0	10	1,125	0,70	-0,0138	3,298	0,025	4,13	13,22	9,25	21,78	53,01	19,01	-0,29
147	1,5	0,0	80	1,125	0,70	0,0212	3,298	0,025	3,82	12,37	8,66	20,39	41,34	14,26	-0,16
148	0,0	-1,5	45	1,125	0,60	-0,2147	4,488	0,025	7,56	11,12	6,67	23,33	42,10	14,04	-0,16
149	0,0	-1,5	45	1,125	0,80	0,0633	2,525	0,025	3,34	10,70	8,56	23,33	42,27	14,37	-0,20
150	3,0	-1,5	45	1,125	0,60	-0,1329	4,493	0,025	6,58	10,98	6,59	23,34	34,28	13,87	-0,16
151	3,0	-1,5	45	1,125	0,80	0,1119	2,525	0,025	2,22	10,73	8,59	23,34	33,93	13,97	-0,19
152	0,0	-1,5	45	0,500	0,70	-0,0462	3,300	0,025	5,00	12,33	8,63	24,42	42,25	15,10	-0,22
153	0,0	-1,5	45	1,750	0,70	-0,0460	3,303	0,025	4,99	12,35	8,64	22,16	42,33	13,98	-0,17
<i>Id</i>	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	<i>Ma</i>	$C_{A_{calc}}$	$C_{N_{calc}}$	$C_{A_{ea}}$	$\alpha_{eq}$	$f_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_0$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$

<i>Id</i>	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	<i>Ma</i>	$C_{A_{calc}}$	$C_{N_{calc}}$	$C_{A_{ea}}$	$\alpha_{eq}$	$f_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_0$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$
154	3,0	-1,5	45	0,500	0,70	0,0157	3,297	0,025	3,90	12,41	8,69	24,42	34,15	14,46	-0,19
155	3,0	-1,5	45	1,750	0,70	0,0155	3,300	0,025	3,90	12,42	8,69	22,16	34,20	13,69	-0,17
156	0,0	-1,5	10	1,125	0,70	-0,0596	3,300	0,025	5,15	12,58	8,81	21,78	53,45	17,87	-0,27
157	0,0	-1,5	80	1,125	0,70	-0,0457	3,299	0,025	4,99	12,35	8,64	20,39	42,29	13,89	-0,16
158	3,0	-1,5	10	1,125	0,70	-0,0051	3,298	0,025	4,11	12,83	8,98	21,78	49,13	17,63	-0,27
159	3,0	-1,5	80	1,125	0,70	0,0157	3,299	0,025	3,90	12,42	8,69	20,39	34,20	13,63	-0,15
160	0,0	-3,0	45	1,125	0,70	-0,0802	3,296	0,025	5,60	12,32	8,63	23,33	40,99	13,68	-0,17
161	0,0	0,0	45	1,125	0,70	-0,0094	3,300	0,025	4,37	12,31	8,62	23,33	43,49	14,92	-0,19
162	3,0	-3,0	45	1,125	0,70	-0,0190	3,300	0,025	4,52	12,36	8,65	23,34	32,77	13,44	-0,17
163	3,0	0,0	45	1,125	0,70	0,0517	3,299	0,025	3,28	12,39	8,67	23,34	35,72	14,62	-0,19
164	1,5	-1,5	10	0,500	0,60	-0,2035	4,489	0,025	7,39	11,18	6,71	20,80	88,94	22,16	-0,34
165	1,5	-1,5	10	0,500	0,80	0,0806	2,525	0,025	2,89	10,81	8,65	20,80	88,99	21,82	-0,39
166	1,5	-1,5	10	1,750	0,60	-0,1775	4,492	0,025	7,12	11,04	6,63	21,50	42,19	15,62	-0,23
167	1,5	-1,5	10	1,750	0,80	0,0880	2,546	0,025	2,72	10,86	8,69	21,50	42,57	16,01	-0,30
168	1,5	-1,5	80	0,500	0,60	-0,1744	4,492	0,025	7,07	11,07	6,64	20,77	39,84	13,64	-0,14
169	1,5	-1,5	80	0,500	0,80	0,0871	2,529	0,025	2,78	10,74	8,59	20,77	39,77	13,88	-0,17
170	1,5	-1,5	80	1,750	0,60	-0,1744	4,491	0,025	7,07	11,07	6,64	20,04	39,84	13,68	-0,14
171	1,5	-1,5	80	1,750	0,80	0,0873	2,526	0,025	2,78	10,74	8,59	20,04	39,72	13,91	-0,17
172	1,5	-3,0	45	0,500	0,60	-0,2207	4,489	0,025	7,73	10,92	6,55	24,42	38,60	14,50	-0,20
173	1,5	-3,0	45	0,500	0,80	0,0598	2,527	0,025	3,41	10,72	8,58	24,42	37,81	14,41	-0,24
174	1,5	-3,0	45	1,750	0,60	-0,2206	4,490	0,025	7,72	10,94	6,56	22,16	38,65	13,39	-0,15
175	1,5	-3,0	45	1,750	0,80	0,0590	2,528	0,025	3,39	10,79	8,63	22,16	37,87	13,37	-0,18
176	1,5	0,0	45	0,500	0,60	-0,1266	4,495	0,025	6,44	11,11	6,67	24,42	40,99	15,21	-0,19
177	1,5	0,0	45	0,500	0,80	0,1193	2,524	0,025	2,09	10,65	8,52	24,42	42,87	15,38	-0,23
178	1,5	0,0	45	1,750	0,60	-0,1266	4,495	0,025	6,43	11,12	6,67	22,16	41,00	14,32	-0,16
179	1,5	0,0	45	1,750	0,80	0,1024	2,523	0,025	2,23	11,16	8,92	22,16	41,19	15,01	-0,20
180	1,5	-3,0	10	1,125	0,60	-0,2237	4,490	0,025	7,78	10,90	6,54	21,78	52,31	16,88	-0,25
181	1,5	-3,0	10	1,125	0,80	0,0575	2,528	0,025	3,41	10,83	8,66	21,78	51,37	16,50	-0,28
182	1,5	-3,0	80	1,125	0,60	-0,2204	4,490	0,025	7,71	10,94	6,57	20,39	38,66	13,32	-0,14
183	1,5	-3,0	80	1,125	0,80	0,0593	2,526	0,025	3,39	10,78	8,62	20,39	37,85	13,31	-0,17
184	1,5	0,0	10	1,125	0,60	-0,1497	4,488	0,025	6,70	11,19	6,71	21,78	53,20	18,38	-0,27
<i>Id</i>	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	<i>Ma</i>	$C_{A_{calc}}$	$C_{N_{calc}}$	$C_{A_{ea}}$	$\alpha_{eq}$	$f_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_0$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$

<i>Id</i>	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	<i>Ma</i>	$C_{A_{calc}}$	$C_{N_{calc}}$	$C_{A_{ea}}$	$\alpha_{eq}$	$f_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_0$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$
185	1,5	0,0	10	1,125	0,80	0,1119	2,524	0,025	2,23	10,71	8,56	21,78	54,86	18,53	-0,31
186	1,5	0,0	80	1,125	0,60	-0,1264	4,496	0,025	6,43	11,12	6,67	20,39	41,03	14,06	-0,14
187	1,5	0,0	80	1,125	0,80	0,1144	2,526	0,025	2,17	10,71	8,57	20,39	41,55	14,56	-0,18
188	1,5	-3,0	10	0,500	0,70	-0,0651	3,298	0,025	5,25	12,54	8,78	20,79	85,86	21,37	-0,36
189	1,5	-3,0	10	1,750	0,70	-0,0517	3,301	0,025	5,11	12,31	8,61	21,50	40,45	15,18	-0,23
190	1,5	-3,0	80	0,500	0,70	-0,0501	3,299	0,025	5,06	12,36	8,65	20,77	38,36	13,28	-0,15
191	1,5	-3,0	80	1,750	0,70	-0,0501	3,299	0,025	5,06	12,36	8,65	20,04	38,36	13,32	-0,15
192	1,5	0,0	10	0,500	0,70	-0,0068	3,299	0,025	4,11	12,91	9,04	20,80	88,36	23,61	-0,38
193	1,5	0,0	10	1,750	0,70	0,0066	3,297	0,025	3,97	12,65	8,86	21,50	42,60	16,72	-0,25
194	1,5	0,0	80	0,500	0,70	0,0212	3,298	0,025	3,82	12,37	8,66	20,77	41,34	14,23	-0,16
195	1,5	0,0	80	1,750	0,70	0,0213	3,298	0,025	3,82	12,37	8,66	20,04	41,34	14,27	-0,16
196	0,0	-1,5	45	0,500	0,60	-0,2152	4,488	0,025	7,57	11,11	6,66	24,42	42,07	14,96	-0,20
197	0,0	-1,5	45	0,500	0,80	0,0644	2,527	0,025	3,33	10,67	8,54	24,42	42,73	15,17	-0,24
198	0,0	-1,5	45	1,750	0,60	-0,2148	4,488	0,025	7,56	11,13	6,68	22,16	42,10	13,82	-0,15
199	0,0	-1,5	45	1,750	0,80	0,0631	2,528	0,025	3,34	10,71	8,57	22,16	42,32	14,16	-0,19
200	3,0	-1,5	45	0,500	0,60	-0,1333	4,496	0,025	6,59	10,97	6,58	24,42	34,30	14,46	-0,18
201	3,0	-1,5	45	0,500	0,80	0,1145	2,527	0,025	2,18	10,70	8,56	24,42	34,62	14,36	-0,21
202	3,0	-1,5	45	1,750	0,60	-0,1337	4,500	0,025	6,59	10,97	6,58	22,16	34,35	13,68	-0,15
203	3,0	-1,5	45	1,750	0,80	0,1118	2,525	0,025	2,22	10,74	8,59	22,16	33,94	13,76	-0,18
204	0,0	-1,5	10	1,125	0,60	-0,2176	4,486	0,025	7,61	11,09	6,65	21,78	53,98	17,41	-0,25
205	0,0	-1,5	10	1,125	0,80	0,0588	2,530	0,025	3,33	10,94	8,75	21,78	55,64	17,46	-0,29
206	0,0	-1,5	80	1,125	0,60	-0,2147	4,488	0,025	7,56	11,13	6,68	20,39	42,11	13,74	-0,14
207	0,0	-1,5	80	1,125	0,80	0,0632	2,526	0,025	3,34	10,71	8,56	20,39	42,31	14,08	-0,17
208	3,0	-1,5	10	1,125	0,60	-0,1363	4,496	0,025	6,65	10,93	6,56	21,78	50,60	17,19	-0,25
209	3,0	-1,5	10	1,125	0,80	0,1154	2,547	0,025	2,14	10,79	8,63	21,78	51,03	17,55	0,06
210	3,0	-1,5	80	1,125	0,60	-0,1331	4,496	0,025	6,58	10,98	6,59	20,39	34,32	13,59	-0,14
211	3,0	-1,5	80	1,125	0,80	0,1120	2,524	0,025	2,21	10,73	8,59	20,39	33,94	13,70	-0,17
212	0,0	-1,5	10	0,500	0,70	-0,0670	3,297	0,025	5,22	12,73	8,91	20,80	89,22	22,52	-0,36
213	0,0	-1,5	10	1,750	0,70	-0,0468	3,298	0,025	5,03	12,29	8,61	21,50	42,33	15,83	-0,24
214	0,0	-1,5	80	0,500	0,70	-0,0457	3,299	0,025	4,99	12,35	8,64	20,77	42,30	13,86	-0,16
215	0,0	-1,5	80	1,750	0,70	-0,0457	3,299	0,025	4,99	12,35	8,64	20,04	42,30	13,91	-0,16
<i>Id</i>	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	<i>Ma</i>	$C_{A_{calc}}$	$C_{N_{calc}}$	$C_{A_{ea}}$	$\alpha_{eq}$	$f_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_0$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$

<i>Id</i>	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	<i>Ma</i>	$C_{A_{calc}}$	$C_{N_{calc}}$	$C_{A_{ea}}$	$\alpha_{eq}$	$f_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_0$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$
216	3,0	-1,5	10	0,500	0,70	-0,0009	3,297	0,025	4,10	12,66	8,86	20,79	79,65	21,88	-0,36
217	3,0	-1,5	10	1,750	0,70	0,0098	3,299	0,025	3,98	12,48	8,73	21,50	39,68	15,58	-0,24
218	3,0	-1,5	80	0,500	0,70	0,0157	3,299	0,025	3,90	12,42	8,70	20,78	34,20	13,60	-0,15
219	3,0	-1,5	80	1,750	0,70	0,0159	3,297	0,025	3,89	12,42	8,70	20,04	34,17	13,63	-0,15
220	0,0	-3,0	45	1,125	0,60	-0,2608	4,487	0,025	8,20	11,00	6,60	23,33	41,20	13,67	-0,16
221	0,0	-3,0	45	1,125	0,80	0,0351	2,528	0,025	3,95	10,76	8,61	23,33	40,65	13,76	-0,19
222	0,0	0,0	45	1,125	0,60	-0,1673	4,495	0,025	6,94	11,15	6,69	23,33	43,00	14,66	-0,17
223	0,0	0,0	45	1,125	0,80	0,0911	2,529	0,025	2,74	10,64	8,51	23,33	43,88	15,26	-0,21
224	3,0	-3,0	45	1,125	0,60	-0,1788	4,493	0,025	7,24	10,82	6,49	23,34	33,14	13,54	-0,16
225	3,0	-3,0	45	1,125	0,80	0,0839	2,527	0,025	2,84	10,77	8,62	23,34	32,20	13,38	-0,19
226	3,0	0,0	45	1,125	0,60	-0,0851	4,493	0,025	5,93	11,06	6,64	23,34	35,53	14,46	-0,17
227	3,0	0,0	45	1,125	0,80	0,1393	2,524	0,025	1,61	10,71	8,57	23,34	35,91	14,79	-0,20
228	0,0	-3,0	45	0,500	0,70	-0,0809	3,300	0,025	5,62	12,30	8,61	24,42	40,99	14,58	-0,21
229	0,0	-3,0	45	1,750	0,70	-0,0803	3,297	0,025	5,60	12,33	8,63	22,16	41,01	13,47	-0,17
230	0,0	0,0	45	0,500	0,70	-0,0093	3,298	0,025	4,37	12,30	8,61	24,42	43,45	15,58	-0,21
231	0,0	0,0	45	1,750	0,70	-0,0095	3,301	0,025	4,37	12,31	8,62	22,16	43,52	14,67	-0,18
232	3,0	-3,0	45	0,500	0,70	-0,0195	3,301	0,025	4,54	12,34	8,64	24,42	32,74	14,31	-0,21
233	3,0	-3,0	45	1,750	0,70	-0,0188	3,298	0,025	4,52	12,36	8,65	22,16	32,76	13,23	-0,16
234	3,0	0,0	45	0,500	0,70	0,0516	3,300	0,025	3,29	12,38	8,67	24,42	35,72	15,26	-0,21
235	3,0	0,0	45	1,750	0,70	0,0517	3,299	0,025	3,28	12,39	8,68	22,16	35,73	14,37	-0,18
236	0,0	-3,0	10	1,125	0,70	-0,0832	3,297	0,025	5,67	12,27	8,59	21,78	50,68	16,91	-0,27
237	0,0	-3,0	80	1,125	0,70	-0,0806	3,299	0,025	5,60	12,33	8,63	20,39	41,05	13,42	-0,15
238	0,0	0,0	10	1,125	0,70	-0,0407	3,302	0,025	4,65	13,05	9,14	21,78	55,24	19,14	-0,30
239	0,0	0,0	80	1,125	0,70	-0,0089	3,298	0,025	4,36	12,31	8,62	20,39	43,48	14,39	-0,16
240	3,0	-3,0	10	1,125	0,70	-0,0288	3,300	0,025	4,65	12,47	8,73	21,77	49,36	16,80	-0,27
241	3,0	-3,0	80	1,125	0,70	-0,0190	3,301	0,025	4,52	12,36	8,66	20,39	32,80	13,19	-0,15
242	3,0	0,0	10	1,125	0,70	0,0480	3,298	0,025	3,35	12,39	8,67	21,78	50,07	18,08	-0,28
243	3,0	0,0	80	1,125	0,70	0,0520	3,298	0,025	3,27	12,40	8,68	20,40	35,73	14,12	-0,16
<i>Id</i>	$\theta_t$	$\theta_s$	$\bar{y}_1$	$\bar{e}$	<i>Ma</i>	$C_{A_{calc}}$	$C_{N_{calc}}$	$C_{A_{ea}}$	$\alpha_{eq}$	$f_{eq}$	$Ma \times f_{eq}$	$f_0$	$\sigma^{\max}$	$f_{z_{max}}$	$\theta_{aero}$

TAB. E.1: Résultats d'optimisation.



# Bibliographie

- [1] Barrett BALDWIN et Harvard LOMAX : Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *In AIAA 16th Aerospace Sciences Meeting Proceedings*, numéro 78-257, 1978.
- [2] Raymond L. BISPLINGHOFF, Holt ASHLEY et Robert L. HALFMAN : *Aeroelasticity*. Dover Publications, 2<sup>de</sup> édition, 1996.
- [3] Julien BOHBOT : *Simulation numérique d'écoulements transsoniques autour de voilures mobiles et analyse aéroélastique du flottement des sections d'ailes*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2002.
- [4] Allan W. BONNET et James LUNEAU : *Aérodynamique : Théories de la Dynamique des Fluides*. Éditions Cépaduès, septembre 1989.
- [5] Christian BOREL : *Méthode implicite multidomaine vectorisée et parallélisée pour la simulation des écoulements tridimensionnels instationnaires de fluide parfait compressible*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1992.
- [6] Christian BOREL et Marc BRÉDIF : High Performance Parallelized Implicit Euler Solver For The Analysis Of Unsteady Aerodynamic Flows. *In Charles HIRSCH et al.*, éditeur : *Computational Fluid Dynamics '92 Proceedings*, volume 2, pages 1069–1076. Elsevier Science Publishers, 1992.
- [7] George E. P. BOX, William G. HUNTER et J. Stuart HUNTER : *Statistics for Experimenters : An Introduction to Design, Data Analysis, and Model Building*. Wiley Interscience, 1978.
- [8] Jérôme BROSSARD : Optimisation d'une aile de missile subsonique. Rapport de stage de fin d'étude, Sup'Aéro, été 2005.
- [9] Bastien CARUELLE : *Simulations d'écoulements instationnaires turbulents en aérodynamique : Application à la simulation du phénomène de tremblement*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Constructions Aéronautiques, 2000.
- [10] Christophe CORRE, Grégoire HANSS et Alain LERAT : A residual-based compact scheme for the unsteady compressible Navier–Stokes equations. *Computers & Fluids*, 34:561–580, 2005.
- [11] Gérard DEGREZ : Performances et stabilité des avions. Polycopié de cours – Service de Mécanique Appliquée – Département d'Électro-Mécanique – Université Libre de Bruxelles, printemps 2004.
- [12] Franklin W. DIEDERICH : A Plan-Form Parameter for Correlating Certain Aerodynamic Characteristics of Swept Wings. Technical Note 2335, National Advisory Committee for Aeronautics, avril 1951.
- [13] Jim Jr. DOUGLAS et James E. GUNN : A General Formulation of Alternating Direction Methods - Part I. Parabolic and Hyperbolic Problems. *Numerische Mathematik*, 6:428–453, décembre 1964.

- [14] Alain DUGEAI et Philippe GIRODROUX-LAVIGNE : Développement de la chaîne de prévision aéroélastique RATAN. PEA AMIS – Rapport Technique Intermédiaire 1B.1, février 2004. note ONERA RT 4/07774 DDSS.
- [15] Régis DUVIGNEAU : *Contribution à l'optimisation de forme pour des écoulements à forts nombres de Reynolds autour de géométries complexes*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes et Université de Nantes, octobre 2002.
- [16] Fabrice FALISSARD : *Schémas numériques préservant la vorticité en aérodynamique compressible*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, janvier 2006.
- [17] Kuan-Chieh FANG : *Unsteady Incompressible Flow Analysis Using C-Type Grid with a Curved Branch Cut*. Thèse de doctorat, University of Cincinnati, 2000.
- [18] Frédéric FURLANO : *Comportement de modèles de turbulence pour les écoulements décollés en entrée de tremblement*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2001.
- [19] Philippe GIRODROUX-LAVIGNE : Progress in steady/unsteady fluid-structure coupling with Navier-Stokes equations. *In International Forum on Elasticity and Structural Dynamics IFASD'2005*, Munich, 28 juin - 1<sup>er</sup> juillet 2005. ONERA TP 2005-130.
- [20] Benoît GRANIER, Alain LERAT et Zi-Niu WU : An Implicit Centered Scheme for Steady and Unsteady Incompressible One and Two-Phase Flows. *Computers & Fluids*, 26(4):373–393, 1997.
- [21] Ying HUANG : *Décentrement par matrice de pas de temps caractéristique pour le calcul d'écoulements compressibles instationnaires dans les turbomachines*. Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 1995.
- [22] Ying HUANG et Alain LERAT : Second-Order Upwinding through a Characteristic Time-Step Matrix for Compressible Flow Calculations. *Journal of Computational Physics*, 142:445–472, 1998.
- [23] Antony JAMESON : Time-Dependent Calculations Using Multigrid with Applications to unsteady Flows Past Airfoils and Wings. *In AIAA 10th Computational Fluid Dynamics Conference Proceedings*, numéro 91-1596, juin 1991.
- [24] Pascal JOUBERT DE LA MOTTE et Christophe CORRE : Développement d'outils logiciels de prédiction des efforts dynamiques à grande incidence sur des ailes de grand allongement. Rapport final de contrat n° 63612, SERAM, juin 2003.
- [25] Ramji KAMAKOTI et Wei SHYY : Fluid–structure interaction for aeroelastic applications. *Progress in Aerospace Sciences*, 40:535–558, 2004.
- [26] Thibaud KLOCZKO : *Développement d'une méthode implicite sans matrice pour la simulation 2D-3D des écoulements compressibles et faiblement compressibles en maillages non-structurés*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, mars 2006.
- [27] Gilles LACOMBE : *Schémas centrés à deux et trois niveaux de temps. Applications aux équations de Navier-Stokes en régime supersonique*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1991.
- [28] Peter LAX et Burton WENDROFF : Systems of Conservation Laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XIII:217–237, 1960.
- [29] Peter D. LAX et Burton WENDROFF : Difference Schemes for Hyperbolic Equations with High Order of Accuracy. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XVII:381–398, 1964.

- 
- [30] Alain LERAT : Multidimensional centered schemes of the Lax–Wendroff type. In M. HAFEZ et K. OSHIMA, éditeurs : *Computational Fluid Dynamics Review 1995*, pages 124–140. John Wiley and Sons, 1995.
- [31] Alain LERAT et Christophe CORRE : A Residual-Based Compact Scheme for the Compressible Navier–Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 170:642–675, 2001.
- [32] Alain LERAT et Christophe CORRE : Residual-based compact schemes for multidimensional hyperbolic systems of conservation laws. *Computers & Fluids*, 31:639–661, 2002.
- [33] Alain LERAT, Jacques SIDÈS et Virginie DARU : An implicit finite-volume method for solving the euler equations. In E KRAUSE, éditeur : *Lecture Notes in Physics*, volume 170, pages 343–349. Springer Berlin / Heidelberg, 1982.
- [34] Hong LUO, Joseph D. BAUM et Rainald LÖHNER : A Fast, Matrix-free Implicit Method for Compressible Flows on Unstructured Grids. *Journal of Computational Physics*, 146:664–690, 1998.
- [35] John B. MCDEWITT et Arthur F. OKUNO : Static and Dynamic Pressure Measurements on a NACA 0012 Airfoil in the Ames High Reynolds Number Facility. Technical Paper 2485, NASA, juin 1985.
- [36] Bertrand MICHEL : *Contribution à la simulation numérique efficace des écoulements dans les prises d’air supersoniques*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d’Arts et Métiers, 2004.
- [37] Bertrand MICHEL : Nouvelle expression des éléments diagonaux de la matrice de dissipation des schémas de type RBC. Communication privée, juillet 2006.
- [38] Ron-Ho NI : A Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler Equations. *AIAA Journal*, 20(11):1565–1571, Novembre 1982.
- [39] Roger PEYRET et Thomas D. TAYLOR : *Computational methods for fluid flows*. Springer, New-York, 1983.
- [40] Thomas RENAUD : *Simulation numérique du tremblement autour de profils d’ailes en régime transsonique*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d’Arts et Métiers, 2001.
- [41] Céline SAMBA : Optimisation d’une aile de missile subsonique. Rapport de stage de 2<sup>e</sup> année, École Centrale de Lyon, été 2005.
- [42] Paul SCHIMMERLING, Jean-Claude SISSON et Ali ZAÏDI : *Pratique des plans d’expériences*. Tech & Doc/Lavoisier, 1998.
- [43] Genichi TAGUCHI : *System of Experimental Design*. Unipub/Kraus International Publications, 1987.
- [44] Mylène THIERY : *Modélisation numérique du tremblement sur profil d’aile supercritique*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace, 2005.
- [45] Paul VIGUIER : Essais en soufflerie de la maquette AMIS. PEA AMIS – Rapport Technique 2.3, juillet 2005. note MBDA M/T/SM/VP/F 2003-2122 – note ONERA RTI 9/07774 DDSS.
- [46] Andrew M. WISSINK, Anastasios S. LYRINTZIS et Roger C. STRAWN : Parallelization of a Three-Dimensional Flow Solver for Euler Rotorcraft Aerodynamics Predictions. *AIAA Journal*, 34(11):2276–2283, novembre 1996.
- [47] Seokkwan YOON et Antony JAMESON : Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel Method for the Euler and Navier-Stokes Equations. *AIAA Journal*, 26(9):1025–1026, septembre 1988.
-





# Schéma à pas de temps caractéristique pour l'aérodynamique transsonique et conception aéroélastique optimale d'aile de grand allongement

**Résumé :** Le logiciel Aerolog de MBDA est usuellement mis en œuvre pour la simulation d'écoulements compressibles stationnaires autour de géométries complexes. Le schéma de Lax-Wendroff-Ni, à distribution de résidu, est associé à une technique de lissage implicite des résidus pour assurer un faible coût par itération et une mise en œuvre flexible pour des géométries complexes avec des maillages multidomaines. Afin d'améliorer l'efficacité du code pour la simulation d'écoulements instationnaires, on propose dans ce travail un schéma décentré original, dit à pas de temps caractéristique, dont le support compact permet de préserver les traitements aux frontières et aux raccords existants. Ce schéma est associé à une nouvelle phase implicite, dite sans matrice, et mis en œuvre dans le cadre d'une technique de pas de temps fictif. Les résultats fournis par cette nouvelle approche sont analysés du point de vue de l'efficacité et de la précision pour des écoulements stationnaires et instationnaires autour de profils et de gouvernes et comparés à ceux produits par l'approche existante. Un problème de conception optimale d'une aile est ensuite étudié dans le cadre de l'aéroélasticité statique : les effets aéroélastiques associés à l'évidement des ailes d'un missile de croisière sont exploités dans le but de maximiser la portée de l'engin. Une chaîne de calcul aéroélastique entièrement automatisée est mise en place pour permettre une étude numérique de ces effets et une première étude paramétrique est menée afin d'évaluer la pertinence des paramètres retenus et la précision des méthodes utilisées.

**Mots-clés :** *schéma à pas de temps caractéristique, méthode implicite sans matrice, multi-blocs, aéroélasticité statique, conception optimale, aile de grand allongement.*

## Characteristic Time-Step Scheme for Transonic Flows and Optimum Aeroelastic Design of Wing with a Large Aspect Ratio

**Abstract:** The MBDA Aerolog software is commonly used for computing steady compressible flows over complex geometries. The residual-distribution scheme of Lax-Wendroff-Ni is coupled with an implicit residual smoothing technique to provide a low cost per iteration and a flexible use in multi-block computational domains. In order to improve the code efficiency for the simulation of unsteady flows a so-called characteristic time-step upwind scheme is proposed in this work: its compact stencil allows to preserve the existing boundary and interface treatments. This scheme is coupled with a new matrix-free implicit stage and applied in the framework of a dual time-step technique. The results provided by this new approach are analyzed from the viewpoint of accuracy and efficiency for steady and unsteady flows over airfoils and rudders and compared with those produced by the existing method. The optimal design of a wing is studied next in the context of static aeroelasticity: since the wings of a cruise missile are hollowed out, one seeks to take advantage of the associated aeroelastic effects to maximise the range of the missile. A fully automated aeroelastic computational chain is developed to perform a numerical study of these effects and a first parametric study is carried out to assess the relevance of the chosen parameters and the accuracy of the methods employed.

**Keywords:** *characteristic time-step scheme, matrix-free implicit stage, multiblock, static aeroelasticity, optimum design, large aspect-ratio wing.*

