



HAL
open science

Comportement des matériaux granulaires sous vibration - Application au cas du ballast

Ali Karrech

► **To cite this version:**

Ali Karrech. Comportement des matériaux granulaires sous vibration - Application au cas du ballast. Matériaux. Ecole des Ponts ParisTech, 2007. Français. NNT : . tel-00174829

HAL Id: tel-00174829

<https://pastel.hal.science/tel-00174829>

Submitted on 25 Sep 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES**

Spécialité : Mécanique des Matériaux et des Structures

Présentée par :

Ali KARRECH

Titre :

**Comportement des matériaux granulaires sous vibration :
Application au cas du ballast**

Soutenue le 20 Septembre 2007

Composition du jury :

Didier CLOUTEAU	Président
Pierre-Yves HICHER	Rapporteur
Farhang RADJAI	Rapporteur
Abdenour SEIBI	Examineur
Jean CANOU	Examineur
Jean-Noël ROUX	Examineur
Guy BONNET	Co-Directeur de thèse
Denis DUHAMEL	Directeur de thèse

"Tout solide est un fluide qui s'ignore"

Jean Lemaitre et Jean-Louis Chaboche

À ma mère, à l'âme de mon père

À tous ceux qui me sont chers

REMERCIEMENTS

Je remercie très chaleureusement **Denis DUHAMEL**, mon Directeur de thèse, pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant de travailler sur un thème riche qu'est la vibration des matériaux granulaires. J'ai apprécié sa patience tout au long de ce travail et j'ai été fasciné par la richesse de ses idées et par sa rigueur scientifique. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Mes plus sincères remerciements vont également à Monsieur **Guy BONNET**. Son expérience, sa clarté d'esprit et ses qualités humaines ont été un précieux recours pour mener à bien cette étude. En agissant à titre de co-directeur, il a fortement enrichi ma formation. Je tiens à remercier vivement **Jean-Noël ROUX** et **François CHEVOIR** sans qui ce travail n'aurait certainement pas pris la forme actuelle. Les nombreuses et diverses discussions que nous avons eues ont été fort utiles. Grâce à eux, j'ai pris goût au travail numérique et j'ai compris son importance dans la compréhension de la physique des phénomènes étudiés.

J'exprime aussi ma sincère reconnaissance à **Jean CANOU** et **Jean-Claude DUPLA** qui m'ont fait profiter de leurs expériences et savoirs faire dans la conception et la réalisation des essais mécaniques.

Je remercie tout particulièrement Monsieur **Pierre-Yves HICHER**, Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes, ainsi que Monsieur **Farhang RADJAI**, Directeur de Recherche au CNRS, de l'Université Montpellier II, qui ont accepté de juger ce travail et d'en être les rapporteurs.

Messieurs **Didier CLOUTEAU**, Professeur à l'Ecole Centrale de Paris et **Abdennour SEIBI**, Professeur Associé à l'Institut de Pétrole d'Abu Dhabi, ont bien voulu participer à ce jury et je les en remercie vivement.

Je tiens à remercier également **Karam SAB** qui m'a accueilli au Laboratoire Analyse des Matériaux et d'Identification (LAMI) qui fait maintenant partie de l'UMR Navier. Il a suivi mon travail et m'a souvent fasciné par sa rigueur et son enthousiasme.

Ma sincère sympathie va aussi à mes **collègues** et **amis** au LAMI pour l'ambiance chaleureuse et motivante qu'ils créent au sein du laboratoire. En particulier, ma gratitude va à **Sylvain**, **Tiffany**, **Fadi**, **Céline** et **Duc** avec qui j'ai eu des échanges très fructueux et

partagé le bureau pendant près de trois ans.

Enfin, je voudrais adresser ma gratitude à **ma mère** pour son soutien inconditionnel et sa patience pendant toutes ces années. J'exprime ma gratitude à tous les membres de **ma famille** et mes **amis** pour m'avoir supporté et encouragé.

RÉSUMÉ

Le comportement des matériaux granulaires est généralement difficile à décrire par des approches statistiques ou de mécanique des milieux continus. D'une part, il est difficile de trouver un volume élémentaire représentatif compte tenu des tailles des grains, d'autre part, les trajectoires des grains qui le constituent sont corrélées à cause de l'écoulement dense. Dans la première partie, nous nous penchons sur la description du modèle d'éléments discrets adopté dans cette étude. Nous nous intéressons également à l'effet des paramètres de simulation sur la qualité des échantillons et leurs réponses sous chargement axial quasi-statique. La deuxième partie est consacrée à l'étude du phénomène de tassement sous chargements périodiques. Une approche expérimentale est menée afin de comprendre les effets des grandeurs physiques qui peuvent, à priori, influencer la vitesse de tassement. Ces résultats sont confrontés, par la suite, à l'approche numérique basée sur la dynamique moléculaire. Pour compléter l'étude du mécanisme de tassement, les effets de la granulométrie, de la forme des grains, du degré de confinement et des paramètres de simulation sur la vitesse de tassement sont étudiés en utilisant l'approche discrète. Confrontés au coût élevé de la dynamique moléculaire, une nouvelle approche de calcul de tassement à long terme a été proposée. Elle consiste à utiliser séquentiellement un calcul de dynamique moléculaire, une technique de prolongement et une méthode de relaxation afin de simuler à long terme l'écoulement de la matière au cours des cycles de chargement.

Mots clefs : Matériaux granulaires, Dynamique moléculaire, Tassement, Vibration.

ABSTRACT

Granular materials are discrete solid particles which are large enough to avoid any thermal fluctuations. These materials are widely encountered especially in construction, transportation and pharmaceutical industries. The behavior of these materials is generally out of the scope of the statistical and continuum mechanical approaches. In the first part of this thesis, we focus on the description of the discrete element model that we use, the effect of the simulation parameters on the sample quality and their response under quasi-static axial loading. The second part is dedicated to the settlement of granular materials under periodic loading. An experimental study is conducted to investigate the effects of the physical factors on the settlement speed. These results are confronted and completed by numerical results based on the molecular dynamics. Moreover, the settlement mechanism, the effect of granular shape, the interaction and mode of confinement on this phenomenon are described in details. At this level, we also introduced a computational method for the prediction of bed response under long term dynamic loading. The suggested approach uses sequentially a molecular dynamics scheme, a time averaging technique, and a relaxation method in order to simulate long term granular materials settlement.

Key words : Granular materials, Molecular dynamics, Settlement, Vibration.

Table des matières

Introduction générale	3
I Synthèse Bibliographique	5
1 Synthèse bibliographique	7
1.1 Introduction	9
1.2 Observation des matériaux granulaires vibrés	10
1.2.1 Instabilités surfaciques	10
1.2.2 Régimes vibratoires d'un lit mince	11
1.2.3 Phénomènes résultant de la vibration d'un lit épais	12
1.2.4 Essais de vibration et de bourrage de ballast	13
1.2.5 Problématique de ségrégation	15
1.3 Phénomène de tassement sous vibration	16
1.3.1 Loi de Chicago	16
1.3.2 Caractérisation du déplacement résiduel avec des essais classiques	17
1.3.3 Tassement du micro-ballast	19
1.4 Tribologie et lois de contact	20
1.4.1 Frottement, les lois de base	21
1.4.2 Contact normal et loi de Hertz	22
1.4.3 Procédure de Mindlin et Deresiewicz	23
1.4.4 Phénomène de "stick-slip"	24
1.4.5 Loi de Coulomb et condition de Signorini	25
1.5 Modèles discrets	25
1.5.1 Pilotage par événement	26
1.5.2 Dynamique des contacts	28
1.5.3 Dynamique moléculaire	29

1.6	Modèles continus, concepts et limites	32
1.6.1	Élasticité	33
1.6.2	Plasticité Parfaite	33
1.6.3	Écrouissage	35
	Les modèles Cam-Clay	36
	Les cap-modèles	37
1.6.4	Un modèle élasto-plastique cyclique	38
1.7	Conclusion	41

II Les Matériaux Granulaires en Quasi-statique 43

2	Simulation numérique discrète par la méthode de la dynamique moléculaire	45
2.1	Introduction	46
2.2	Méthode de simulation numérique	47
2.2.1	Equations du mouvement	47
2.2.2	Interaction des particules	48
	Contact de Hertz-Mindlin	48
	Distributions uniformes de la pression et de la traction	48
	Intégration des dissipations dans les lois de contact	49
2.2.3	Détection des contacts	51
2.2.4	Schéma numérique suivant l'algorithme prédicteur-correcteur	54
2.3	Préparation des échantillons	55
2.3.1	Paramètres de simulation	57
2.3.2	Compacité des assemblages aléatoires	59
2.3.3	Nombre de coordination	63
2.3.4	Orientations des contacts	64
2.4	Effet de la paroi sur la distribution des contraintes dans un agglomérat granulaire cylindrique	66
2.4.1	Phénomène d'écrantage	67
2.4.2	Résultats Numériques	68
2.5	Conclusion	71

3	Comportement des matériaux granulaires en compression	73
3.1	Introduction	74
3.2	Protocole expérimental	74
3.2.1	Description du dispositif expérimental	74
3.2.2	Procédure de préparation des échantillons	75
3.2.3	Mesure de la fraction volumique	77
3.2.4	Effet du protocole de préparation sur le comportement	78
3.3	Exploitation des résultats	81
3.3.1	Analyse paramétrique	81
3.3.2	Comparaison des résultats numériques et expérimentaux	82
3.3.3	Estimation des lois de comportement élastique	84
3.4	Conclusion	87
III	Tassement sous chargements dynamiques	89
4	Etude Expérimentale du mécanisme de tassement d'un lit de micro-ballast sous chargement dynamique	91
4.1	Introduction	92
4.1.1	Dispositif expérimental et procédure	92
4.2	Etude expérimentale du phénomène de tassement	95
4.2.1	Identification des fréquences critiques	96
4.3	Résultats des essais et discussion	97
4.3.1	Déplacement Résiduel sous le blochet	98
4.3.2	Vérification des résultats obtenus	100
4.3.3	Effet des paramètres de contrôle sur la vitesse de tassement	103
4.3.4	Vitesse de tassement en fonction de l'accélération	104
4.3.5	Effet du degré de confinement	106
4.3.6	Effet de la hauteur des échantillons et de l'élasticité du sol	107
4.3.7	Effet de la forme des grains	108
4.4	Conclusion	109
5	Etude numérique du mécanisme de tassement	111
5.1	Introduction	112
5.2	Tassement sous chargement dynamique	113

5.2.1	Effet du degré de confinement et de l'accélération	113
5.2.2	Effet de la forme des grains	114
5.2.3	Etude paramétrique	115
5.3	Homogénéisation des champs mécaniques	117
5.3.1	Trajectoires des grains	117
5.3.2	Nombre de coordinations et densité relative	118
5.3.3	Champs de contrainte et de déformation	122
5.3.4	Glissements locaux et modes de dissipation	126
5.3.5	Phénomène de rochet	129
5.4	Lien de causalité entre la perte de contacts et la vitesse de tassement . . .	135
5.4.1	Mesure de causalité	136
5.4.2	Calcul des coefficients d'estimation	137
5.5	Conclusion	140
6	Procédure de calcul numérique à long terme	141
6.1	Introduction	142
6.2	Estimation des déplacements résiduels	142
6.2.1	Conditions aux limites et mode de chargement	142
6.2.2	Méthode d'estimation et phase d'apprentissage	144
6.2.3	Phase de prolongement	148
6.2.4	Application Numérique	149
6.3	Méthode de relaxation	150
6.3.1	Fonctionnelle de minimum d'énergie	151
6.3.2	Application numérique	153
6.4	Calcul du tassement à long terme	155
6.4.1	Organigramme de la procédure de calcul	155
6.4.2	Etude de convergence	157
6.4.3	Applications	157
6.5	Conclusion	161
	Conclusions et perspectives	165
	Annexe	183

Table des figures

1.1	Phénomènes d'instabilité surfacique à une fréquence de 42 Hz : la surface est initialement plane, la mise en tas spontanée se produit lorsque l'accélération $\Gamma = 2.87g$ (g est la gravité), des arêtes et des cannelures apparaissent à des accélérations entre $\Gamma = 3.17g$ et $4.16g$, le tas se subdivise en petites cellules qui deviendront hexagonales sous des conditions bien déterminées (Falcon et al. (1999)).	11
1.2	Phénomène de "stick-slip"	21
1.3	Modèle de contact de sphères déformables	30
1.4	Les surfaces de charges des modèles Cam-Clay (a) original et (b) modifié	36
1.5	Illustrations graphiques des (a) cap-modèles et de (b) l'écroutissage cinématique	37
1.6	Propagation de la zone de plasticité.	39
1.7	Simulation par éléments finis du mécanisme de tassement - Modèle d'Écroutissage Mixte.	40
2.1	Distribution de pression et de traction uniformes	50
2.2	Modèle de contact de corps déformables	51
2.3	Technique de détection des voisins.	52
2.4	(a)Détermination des sommets extrêmes par la méthode de dichotomie. (b) Identification du point d'application et de la normale de l'interaction.	54
2.5	Algorithme de calcul schématisant la méthode de dynamique moléculaire.	56
2.6	Vérification de la loi de contact normal par comparaison entre résultats numériques et expérimentaux.	58
2.7	Grain polygonal typique caractérisé par les paramètres géométriques r_1 , r_2 et θ	58

2.8	Préparation d'un échantillon de 4500 sphères de rayons 1.5 mm dans un cylindre de rayon 3.5 cm. La compacité finale est de 0.56. Le principe de préparation est analogue dans le cas de grains circulaires ou polygonaux.	59
2.9	Préparation de l'échantillon sous champs de pesanteur, variation (a) du poids apparent de l'échantillon, (b) du nombre de coordinations, (c) de la fraction volumique, (d) et de l'énergie cinétique (resp. énergie potentielle) au cours du temps. Les courbes correspondent au cas de grains sphériques, mais le principe est le même dans le cas de grains circulaires ou polygonaux	60
2.10	Variation des compacités locales en fonction des hauteurs des échantillons pour différents coefficients de frottement.	61
2.11	Variation des compacités locales en fonction des hauteurs des échantillons pour différentes caractéristiques mécaniques des matériaux.	62
2.12	Distribution du nombre de coordination pour différents coefficients de frottement.	64
2.13	Distribution du nombre de coordination pour différentes rigidités de contact.	65
2.14	Histogramme d'orientations de contacts : assemblage (a) polygones, (b) circulaires et (c) sphériques.	66
2.15	Contraintes longitudinales et radiales pour des assemblages de 3000 jusqu'à 15000 grains. Le coefficient de frottement est $\mu = 0.5$	69
2.16	Contraintes longitudinales et radiales pour un assemblage de 7400 grains et pour différents coefficients de frottement.	70
3.1	Photo du dispositif expérimental : (a) opération de préparation et de pesage (b) essai de compression.	75
3.2	Méthodes de remplissage des matériaux granulaires. M1 : préparation des échantillons relativement denses par versement à travers un entonnoir, M2 : préparation des échantillons lâches moyennant un tube intermédiaire que l'on soulève lentement	77
3.3	Préparation des échantillons (a) compaction par chargement cyclique d'un échantillon de billes en acier préparé par la méthode M1 (b) compaction par chargement cyclique d'un échantillon de billes en acier préparé par la méthode M2.	79

3.4	Effet du mode de préparation sur la réponse des échantillons. Échantillons de (a) billes d'acier de rayons 2.25 mm (b) billes d'acier de rayons 4.75 mm (c) billes de verre de rayons 3.5 mm et (d) de granulats de ballast de rayon moyen 5.88 mm. Les échantillons sont préparés suivant les méthodes M1 et M2	80
3.5	Effet des paramètres de simulation sur la raideur des empilements.	81
3.6	Comparaison des résultats expérimentaux et numériques : essais de compression d'éprouvettes granulaires, (1) billes en acier ($E = 210GPa$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800kg/m^3$) de rayons 2.25 mm avec $\mu = 0.3$, (2) billes en acier de rayons 4.75 mm avec $\mu = 0.3$ (a) courbe force-déplacement (b) courbe force-compacité.	83
3.7	Comparaison des résultats expérimentaux et numériques : essais de compression d'éprouvettes granulaires, (1) billes en verre de rayons 3.5 mm avec $\mu = 0.3$, $E = 85GPa$, $\nu = 0.25$, $\rho = 2500$ (2) agglomérat de ballast de rayon moyen 5.88 mm avec $\mu = 0.8$, $E = 46.9GPa$ (diorite), $\nu = 0.3$, $\rho = 2710$ (a) courbe force-déplacement (b) courbe force-compacité.	84
3.8	Effet de la compacité sur les réponses d'un échantillon de 2000 billes de verre de rayon moyen 3.5 mm et de frottement interne $\mu = 0.2$. Ajustement des résultats et estimation des paramètres M et κ	86
4.1	Distribution des tailles des constituants du micro-ballast.	93
4.2	(a) Dispositif expérimental (b) Schéma du flux de données	94
4.3	(a) Dispositif de mesure des paramètres modaux (b) Représentation FRF des modes et fréquences propres du système enceinte-échantillon.	97
4.4	Filtrage des données afin d'isoler les déplacements résiduels.	98
4.5	Tassement des matériaux granulaires en fonction du nombre de cycles (cas d'échantillons complètement confinés).	99
4.6	Tassement des matériaux granulaires par rapport au nombre de cycles : Échantillons partiellement (50%) confinés.	101
4.7	Estimation de la loi de puissance reliant l'incrément de tassement, $\frac{d\tau}{dN}$, à la déflexion élastique, δ , dans le cas complètement (a) et partiellement (b) confiné.	102
4.8	Régression linéaire montrant la faible dépendance de l'incrément de tassement, $\frac{d\tau}{dN}$, avec l'amplitude des forces appliquées, ΔF	104

4.9	Variation de l'incrément de tassement, $\frac{d\tau}{dN}$, en fonction de l'intensité d'accélération, Γ	105
4.10	Coefficient de tassement, B , en fonction de l'intensité d'accélération, Γ	106
4.11	Variation du coefficient de tassement, B , en moyenne et écart type en fonction de la souplesse du sol simulée par des élastomères de propriétés différentes. (M_1 correspond au cas sans élastomère)	107
4.12	(a) Variation du coefficient de tassement en moyenne et écart type en fonction de la hauteur des échantillons. (b) Raideur d'un échantillon de ballast pour différentes vitesses de pénétration	108
4.13	Raideur d'un échantillon de ballast pour différentes vitesses de pénétration, (a) cas de billes en verre (b) et de billes en acier	109
5.1	Incrément de tassement en fonction de l'intensité d'accélération dans le cas (a) complètement (b) partiellement confiné.	115
5.2	Effet de la forme des grains sur la vitesse de tassement.	116
5.3	Effet de la taille des grains et des coefficients de frottement sur la vitesse de tassement.	116
5.4	Trajectoires des grains dans le cas d'un échantillon partiellement confiné.	118
5.5	Trajectoires dans le cas d'un échantillon complètement confiné.	119
5.6	Distribution des densités relatives et des nombres de contacts pour différents cycles de chargements, dans le cas partiellement confiné.	120
5.7	Distribution des densités relatives et des nombres de contacts pour différents cycles de chargements, dans le cas complètement confiné.	121
5.8	Distribution des contraintes de pression hydrostatique p pour différents cycles de chargements, dans le cas d'un échantillon partiellement confiné.	123
5.9	Distribution de la contrainte équivalente q pour différents cycles de chargement pour le cas d'un échantillon partiellement confiné.	124
5.10	Distribution du temps de contact moyen pour différents cycles de chargements.	125
5.11	Différentes régions du milieu granulaire choisies pour étudier les grandeurs physiques locales.	127
5.12	Ajustement des données par rapport au modèle (5.4).	128
5.13	Déplacements locaux au niveau des différentes régions du milieu.	129

5.14	Forces normales en fonction des déplacements normaux dans les différentes régions du milieu et dissipation d'énergie dans la direction normale.	130
5.15	(a) Variation de la force tangentielle en fonction du déplacement tangentiel et dissipation d'énergie dans cette direction, (b) Distribution des efforts par rapport au cône de Coulomb, (c) glissement au niveau de la région IV, (d) glissement au niveau de la region V.	131
5.16	Discrétisation du domaine en coordonnées polaires pour le calcul des contraintes et des déformations.	132
5.17	Phénomène de rochet pour des chargements cycliques progressifs dans le cas (a) partiellement confiné et (b) le cas complètement confiné.	134
5.18	Tassement et variation du nombre de contacts permanents en fonction du nombre de cycles.	137
5.19	Applications des modèles (5.8) et (5.9) sur les signaux de tassement et de contacts permanents.	139
6.1	(a) Conditions aux limites en forces et déplacements appliquées (b) à l'échantillon.	143
6.2	Evolution du déplacement par rapport au temps : illustration du déplacement résiduel et réversible.	145
6.3	Précision de la procédure d'estimation pour un estimateur linéaire avec deux nombres de cycles de chargement initiaux de différents, k_i	147
6.4	Estimation linéaire : distributions des erreurs relatives pour différents nombres de cycles initiaux (k_i), nombre de cycles d'apprentissage (k), et longueur d'extrapolation (h).	150
6.5	Estimation logarithmique : distributions des Erreurs relatives pour différents nombre de cycles initiaux (k_i), nombre de cycles d'apprentissage (k), et longueur d'extrapolation (h).	151
6.6	Relaxation d'une cellule de 9 particules. (a) Configuration estimée, (b) Configuration corrigée.	154
6.7	Relaxation d'un échantillon complet. (a) Configuration estimée, (b) Configuration corrigée.	154
6.8	Organigramme de la procédure de calcul de tassement à long terme.	156
6.9	Convergence de la procédure avec les paramètres de simulation k (a) et h (b) et comparaison avec le calcul de dynamique moléculaire complet.	157

6.10 (a) Variation du nombre de coordination par rapport au nombre de cycles, (b) précision en terme de nombre de coordination final, (c) positions des particules, et (d) déplacements résiduels.	159
6.11 (a) Nombre de coordination en fonction du nombre de cycles, (b) Tassement par rapport au nombre de cycles, Erreur relative en terme(c) de nombre de coordination (d) et de tassement.	160

Liste des tableaux

1.1	Surfaces de charges usuelles	35
2.1	Paramètres de simulation	57
2.2	Paramètres de simulation : Comparaison des résultats numériques avec le modèle de Janssen	68
2.3	Récapitulatif de l'effet d'écrantage sur les échantillons granulaires. Les simulations concernent des échantillons cylindriques de diamètre 7cm et portent sur les caractéristiques des matériaux, frottement interne et tailles des constituants. Les résultats montrent les tailles caractéristiques maximales ainsi que la contrainte de saturation correspondante.	70
3.1	Dimensions des particules et des enceintes(* L'intervalle de tolérance de fabrication des billes semble inférieur à la précision de nos instruments de mesure).	76
3.2	Effet du mode de préparation sur la densité des échantillons avant et après la série de charge-décharge, $\bar{\phi}$ et $\hat{\sigma}$ désignent respectivement les compacités moyennes et leurs écarts types	78
3.3	Ajustement des résultats expérimentaux et numériques.	85
3.4	Résumé des résultats de l'ajustement pour des échantillons de différentes compacités. Les empilements sont de 2000 grains de billes de verre de rayon moyen 3.5 mm.	87
4.1	Programme d'essais (Υ désigne le degré de confinement).	95
4.2	Comparaison des incréments de tassement en fonction de la déflexion élastique avec des résultats publiés précédemment. * Echantillon Partiellement Confiné, ** Echantillon Complètement Confiné	102

4.3	Corrélation entre la vitesse de tassement et les paramètres de contrôle expérimentaux, $\frac{d\tau}{dN}$ en (mm/cycle) et B en (mm/Log(cycle))	103
5.1	Paramètres de simulation par la dynamique moléculaire.	114
5.2	Calcul de la mesure de causalité pour différents cas de chargement	140
6.1	Paramètres du modèle discret.	143

Introduction générale

Introduction générale

Les matériaux granulaires représentent les assemblages discrets de particules solides dispersées dans le vide ou dans un fluide interstitiel. Bien que ces matériaux soient omniprésents dans la nature, leur comportement dynamique reste un problème ouvert. Leur comportement global dépend des interactions, des arrangements, de l'historique, et des caractéristiques mécaniques des constituants. En quasi-statique, plusieurs modèles de la mécanique des milieux continus et notamment ceux qui permettent de faire des calculs de plasticité sont généralement utilisés. Lorsque le matériau est hautement agité, la théorie cinétique permet d'étudier assez convenablement ces matériaux puisqu'elle repose sur des modèles hydrodynamiques qui ressemblent aux équations de Navier-Stokes, et qui peuvent être résolues analytiquement ou numériquement selon la complexité et la géométrie du problème. Cependant, un modèle continu ne peut être appliqué que sous l'hypothèse de séparation d'échelle entre la taille des grains et celle du "volume élémentaire représentatif". Dans le cas de notre étude, nous nous intéressons au tassement des matériaux granulaires agités dans un large intervalle d'accélération, afin de comprendre en particulier le comportement des ballasts des chemins de fer sous sollicitations dynamiques. Ainsi, en ce qui nous concerne, le matériau n'est ni quasi-statique ni hautement agité. Il est également loin d'être considéré comme milieu continu puisque le nombre de grains niveau du lit granulaire est faible.

Afin de pouvoir étudier cette problématique, nous nous appuyons d'abord sur une approche expérimentale. Le dispositif est mécaniquement robuste et l'échantillon est de faible taille afin de diminuer la dispersion expérimentale observée au cours d'études antérieures sur des matériaux comparables. Ensuite, nous adoptons une approche de calcul numérique par éléments discrets où les formes sont polygonales, circulaires ou sphériques selon les aspects que nous voulons étudier. A l'échelle locale, le comportement est régi essentiellement par la nature des contacts intergranulaires. Par conséquent, l'étude du mécanisme de tassement nécessite la compréhension des interactions à l'échelle des grains. Une attention

particulière sera donc accordée à la description de ces lois et aux techniques de modélisation en particulier en ce qui concerne la détection des voisins et des contacts. Les deux approches que nous adoptons sont complémentaires. En effet, la cohérence des résultats expérimentaux par rapport aux résultats numériques sera étudiée. D'autre part, des grandeurs physiques inaccessibles expérimentalement peuvent être étudiées numériquement afin d'analyser le mécanisme de tassement.

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous décrivons des observations expérimentales concernant la dynamique des matériaux granulaires, à travers une synthèse bibliographique. Nous présentons également des approches discrètes et continues qui permettent d'étudier les écoulements granulaires. Le deuxième chapitre est consacré au modèle discret de dynamique moléculaire pour des grains de différentes formes où nous décrivons la méthode de calcul. Un intérêt particulier est porté aux lois de contact, à leur détection et à l'algorithme d'intégration. Nous nous intéressons également à la préparation des assemblages granulaires ainsi qu'à l'effet de la paroi sur la distribution des contraintes. Le troisième chapitre de cette thèse concerne la phase de mise en place et de préparation des matériaux granulaires, ensuite le mode de confinement, puis l'essai de compression. L'exploitation des résultats permet d'identifier des lois décrivant le comportement élastique des matériaux granulaires en régime quasi-statique. Le quatrième chapitre représente une étude expérimentale du phénomène de tassement sous sollicitation cyclique, l'objectif étant d'étudier les effets des différents facteurs qui peuvent, à priori, affecter ce phénomène. Une étude empirique est proposée afin de tenir compte des facteurs clés dans la description de la vitesse de tassement. Afin de compléter l'étude expérimentale qui ne permet pas d'accéder à certaines grandeur locales, le cinquième chapitre est consacré à l'étude numérique du mécanisme de tassement. A ce niveau, l'accent est mis sur les effets des paramètres de simulation, sur le mécanisme de rochet et sur la causalité entre la perte des contacts et la vitesse de tassement. Tout au long de cette étude, nous nous sommes confrontés au problème de coût de calcul induit par la dynamique moléculaire lors de l'étude du comportement cyclique à grand nombre de cycles. Afin de contribuer à réduire ce coût, nous proposons une procédure de calcul à long terme, dans le dernier chapitre. Cette méthode consiste à faire des calculs séquentiels en utilisant d'abord la dynamique moléculaire, puis une méthode de prolongement et enfin une méthode de relaxation afin de prédire le tassement.

Première partie

Synthèse Bibliographique

Chapitre 1

Synthèse bibliographique

Sommaire

1.1	Introduction	9
1.2	Observation des matériaux granulaires vibrés	10
1.2.1	Instabilités surfaciques	10
1.2.2	Régimes vibratoires d'un lit mince	11
1.2.3	Phénomènes résultant de la vibration d'un lit épais	12
1.2.4	Essais de vibration et de bourrage de ballast	13
1.2.5	Problématique de ségrégation	15
1.3	Phénomène de tassement sous vibration	16
1.3.1	Loi de Chicago	16
1.3.2	Caractérisation du déplacement résiduel avec des essais classiques	17
1.3.3	Tassement du micro-ballast	19
1.4	Tribologie et lois de contact	20
1.4.1	Frottement, les lois de base	21
1.4.2	Contact normal et loi de Hertz	22
1.4.3	Procédure de Mindlin et Deresiewicz	23
1.4.4	Phénomène de "stick-slip"	24
1.4.5	Loi de Coulomb et condition de Signorini	25
1.5	Modèles discrets	25
1.5.1	Pilotage par événement	26
1.5.2	Dynamique des contacts	28
1.5.3	Dynamique moléculaire	29
1.6	Modèles continus, concepts et limites	32
1.6.1	Élasticité	33

1.6.2	Plasticité Parfaite	33
1.6.3	Écrouissage	35
1.6.4	Un modèle élasto-plastique cyclique	38
1.7	Conclusion	41

1.1 Introduction

Grâce à leur abondance, les matériaux granulaires sont largement rencontrés dans les industries de transport, de construction et de pharmacie. Sous chargement quasi-statique, un matériau granulaire peut avoir l'apparence d'un solide traditionnel, cependant, une description par un modèle continu ne donne pas toujours une information complète sur son comportement. En effet, une telle description, traite le milieu de façon globale et néglige le comportement individuel de ses constituants. Certains résultats expérimentaux tels que la saturation de pression sous un silo (To et al. (2001)) ou le minimum de pression sous un tas conique (Vanel et al. (1999)), résistent aux analyses classiques de la mécanique des sols et montrent l'insuffisance des modèles classiques issus de la mécanique des milieux continus. En écoulement, le matériau granulaire se comporte comme un fluide (Da Cruz (2004), Duran (1997)), mais là aussi, les modèles de comportement de fluide ne suffisent pas pour le décrire. Dans le cas d'un sablier par exemple, le débit de sable est constant quelque soit la hauteur de la colonne, contrairement au cas du fluide dont le débit dépend de la hauteur. Lorsqu'il est agité à haute accélération et à haute fréquence, le matériau granulaire se comporte comme un gaz. Dans ce cas, la théorie cinétique permet de décrire de façon satisfaisante le comportement du matériau (Azanza (1998)). Notons en outre que le contact direct entre les particules joue un rôle important lorsque le milieu se met en mouvement ; la dissipation d'énergie et le transfert de quantité de mouvement dépendent des contacts particule-particule et particule-paroi. Le fluide interstitiel influe également sur le comportement du matériau granulaire ; en effet, le fluide joue le rôle d'un lubrifiant au niveau des interfaces de contact (Ovarlez (2002)) et le rôle d'un amortisseur autour des particules en mouvement.

Dans ce mémoire, l'étude est toutefois restreinte aux cas de matériaux granulaires secs et sans cohésion. Ceci signifie que nous négligeons l'effet des forces électrostatiques, capillaires ou hydrodynamiques. Nous présenterons dans ce chapitre des observations expérimentales en rapport avec la fluidification des matériaux granulaires. Nous nous intéresserons par la suite aux problèmes de contact. Enfin, nous introduirons diverses approches théoriques pour décrire et simuler la dynamique des matériaux granulaires.

1.2 Observation des matériaux granulaires vibrés

L'étude de la vibration des matériaux granulaires remonte à plus de deux siècles. En utilisant des plaques vibrantes couvertes de sable mince, [Chladni \(1787\)](#) a observé un phénomène qui éveille encore la curiosité des chercheurs ([Duran \(1997\)](#)). Il a remarqué que les grains de sables agités se rangent et forment des figures géométriques régulières ; ils sont éjectés des régions de la plaque où l'amplitude des vibrations est maximale (lignes ventrales), et se rassemblent le long des endroits où la plaque vibre le moins, là où l'amplitude est faible ou nulle (lignes nodales). Plus il y a de lignes ou plus elles sont rapprochées, et plus la fréquence est élevée. La distance entre deux lignes nodales donne l'ordre de grandeur de la demi-longueur d'onde. Une même plaque peut fournir, selon la façon dont elle est mise en vibration, des figures de Chladni distinctes ; chacune d'elles correspondant à un mode de vibration et à une fréquence distincte. [Faraday \(1831\)](#) a aussi observé ce phénomène. Il a mis en évidence une expérience qui consiste à secouer verticalement une fine couche de matériau granulaire. Au-dessus d'une certaine amplitude de vibration, la surface du matériau, initialement plane, se déstabilise et donne lieu à des ondes de surface (similaires aux vagues à la houle).

1.2.1 Instabilités surfaciques

Le phénomène d'instabilité de surface libre de matériaux granulaires sous vibration est souvent attribué à la convection due au frottement des particules avec la paroi du récipient ou à la présence de fluide interstitiel ([Falcon et al. \(1999\)](#)). Mais, parmi les grandeurs externes contrôlables qui peuvent affecter ces phénomènes, nous distinguons l'accélération, la fréquence, la taille des grains et leurs arrangements. Lorsque la taille des particules est relativement petite (de l'ordre de $100\mu m$), l'effet de l'air interstitiel devient prédominant ([Pak et al. \(1995\)](#)). De plus, le choix de formes irrégulières augmente la dissipation due aux collisions et aux frottements ([Makse et al. \(1997\), \(1998\)](#)). Il est important de noter ici que la vibration des matériaux granulaires dissipatifs engendre des instabilités surfaciques (mise en tas, propagation d'ondes surfaciques, formes géométriques répétitives etc.), indépendamment de la présence d'un récipient. Pour étudier l'effet de l'accélération sur le comportement de poudres, [Falcon et al. \(1999\)](#) ont mis en place une expérience qui consiste à vibrer des matériaux granulaires de grains irréguliers de petites tailles, à fréquence constante (de 10 à 100 Hz). Les chercheurs ont observé des comportements similaires quelque soit le type de poudre ou de récipient utilisé. Lorsque l'accélération aug-

mente au dessus d'un seuil critique ($\Gamma \geq \Gamma_{cr}$), la surface libre du matériau initialement plane devient instable et le phénomène de mise en tas apparaît. Lorsque l'accélération augmente, un nouveau phénomène d'instabilité est observé, des arêtes et des cannelures apparaissent tout au long de la surface conique du tas. En augmentant l'accélération pour franchir un nouveau seuil $\Gamma \geq \Gamma_h$, le tas formé au début de la manipulation se subdivise en tas de tailles inférieures qui peuvent prendre des formes hexagonales dans des conditions de fréquence et d'accélération précises.

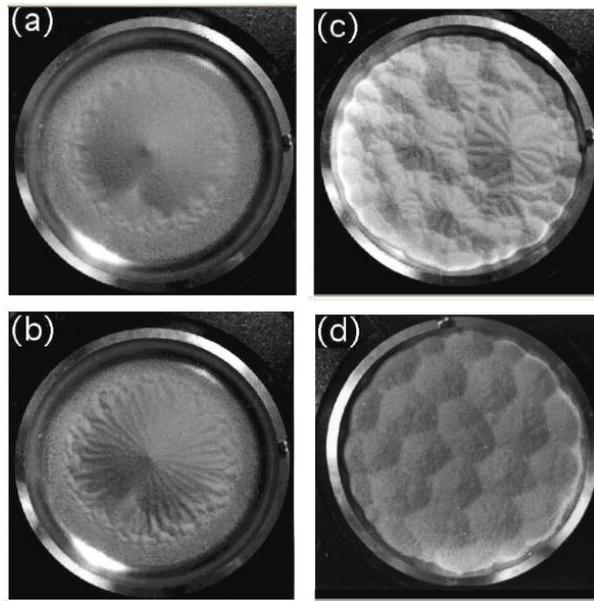


FIG. 1.1: Phénomènes d'instabilité surfacique à une fréquence de 42 Hz : la surface est initialement plane, la mise en tas spontanée se produit lorsque l'accélération $\Gamma = 2.87g$ (g est la gravité), des arêtes et des cannelures apparaissent à des accélérations entre $\Gamma = 3.17g$ et $4.16g$, le tas se subdivise en petites cellules qui deviendront hexagonales sous des conditions bien déterminées (Falcon et al. (1999)).

1.2.2 Régimes vibratoires d'un lit mince

Les réflexions sur les lits vibrants, bien que largement discutées, sont encore d'actualité. Les chercheurs continuent à étudier les phénomènes qui en résultent. Les travaux de Bachmann (1940) montrent que le comportement d'un lit vibrant dépend de sa profondeur. Bachmann a montré que lorsque la profondeur moyenne du lit est inférieure à six fois le diamètre des particules ($h_0/d < 6$ où d est le diamètre des particules et h_0 est la hauteur

du lit), le mouvement est aléatoire tout comme dans le cas d'un lit fluidifié. Cependant, lorsque la profondeur du lit est supérieure à six strates de particules, le lit a un comportement elasto-plastique. [Thomas et al. \(1989\)](#) ont décrit quatre types de comportements de lits granulaires minces soumis à des vibrations externes. Lorsque le milieu granulaire est de faible épaisseur ($h_0/d = 0.17$), le nombre de particules ne suffit pas pour remplir une seule couche, le mouvement des particules nommé régime *newtonien de type I* est aléatoire et désordonné. Pour une épaisseur plus importante ($h_0/d \approx 0.273$), le régime *newtonien de type II* s'installe ; une dense couche de particules s'accumule à la surface du lit à chaque cycle. Les couches de particules plus larges ($h_0/d \approx 1.7$), entraînent un mouvement de bloc où toutes les couches oscillent de façon cohérente. Le régime *condensé-cohérent* observé par Thomas et al. est équivalent au régime observé par Bachmann lorsque $h_0/d > 6$.

L'étude de lits minces a attiré l'attention de plusieurs chercheurs tels que Chelnov et Mikhailov ([1965](#)) qui se sont intéressés au transfert de chaleur dans un lit mince sous vibration. Plus tard, Lan et Rosato ([1995](#)) ont simulé le comportement d'un lit mince avec des grains sphériques en comparant les résultats numériques avec ceux de la théorie cinétique formulée par Richman et Martin ([1992](#)). [Thomas et al. \(1989\)](#) ainsi que [Bachmann \(1940\)](#) ont montré que les régimes du lit mince diffèrent de ceux du lit épais.

1.2.3 Phénomènes résultant de la vibration d'un lit épais

Un lit épais oscillant fait apparaître des phénomènes de mise en tas, de convection, de ségrégation et d'ondes similaires à celles décrites par [Faraday \(1831\)](#). Lorsqu'il est vibré verticalement, un matériau granulaire dans un lit épais voit sa surface s'incliner à un angle proche de l'angle de talus pour former des pics en forme de chapeaux ([Evesque et Rajenbach \(1989\)](#)). Plusieurs effets perturbateurs peuvent contribuer à la mise en tas. L'hétérogénéité de la vibration excitatrice ([Gallas et al. \(1992\)](#)), l'effet des parois latérales, le frottement ([Duran \(1997\)](#)) ainsi que la présence de fluide interstitiel ([Evesque \(1990\)](#)) représentent les effets les plus connus. Une expérience rapportée par [Duran \(1997\)](#) révèle qu'en réalité, la mise en tas résulte du processus de convection généré au niveau des parois latérales. La ségrégation est l'un des cas particuliers de convection, c'est un phénomène de séparation de particules au cours du mouvement du milieu granulaire. On peut trouver plusieurs types et techniques de ségrégation dans la littérature ([Duran \(1997\)](#)), mais on distingue surtout la "ségrégation de noix de Brésil" et celle du "Tambour d'Oyama". En mélangeant des billes de différentes tailles dans un récipient sous vibration verticale, les

billes de grande taille “grimpent” vers la surface (Rosato et al. (2002)). C’est ce qu’on entend par “ségrégation de noix de Brésil”.

Les travaux dédiés à l’étude de matériaux granulaires sous vibration verticale sont abondantes dans la littérature, mais très peu de chercheurs se sont intéressés à d’autres types d’excitations tels que la vibration horizontale, horizontale et verticale conjuguées ou à la rotation des matériaux granulaires. La mise en vibration horizontale se caractérise par une surface libre parallèle au chargement et par une sollicitation non altérée par l’effet de la gravité. Une telle excitation fait apparaître des effets supplémentaires ; les résultats numériques et analytiques mettent en évidence des mouvements de convection aussi bien dans la direction de sollicitation que dans celle de la gravité (Rosenkranz et Pöschel (1997), Liffman et al. (1997)). Rosenkranz et Pöschel (1997) montrent que la mise en vibration horizontale fait apparaître des phénomènes nouveaux tel que le phénomène d’expansion (“swelling”). Ils attribuent ce phénomène à la dilatance de Reynolds et affirment que le phénomène se produit indépendamment du matériau granulaire choisi. Son intensité est toutefois dépendante des paramètres extérieurs tel que l’amplitude et la fréquence de vibration. Tennakoon et Behringer (1998) ont examiné l’effet des vibrations verticales et horizontales simultanées. Ils ont montré que les phénomènes que nous venons de citer dans le dernier paragraphe se produisent. En particulier, l’expérience a révélé que la mise en tas et la convection dépendent non seulement des accélérations verticales et horizontales, mais aussi du déphasage entre les deux.

1.2.4 Essais de vibration et de bourrage de ballast

Le ballast est un milieu granulaire particulier qui provient du concassage de roches dures et inertes vis à vis de l’eau. Son rôle principal est de transmettre au sol les charges dues aux passages de trains de façon uniforme. Grâce à sa structure poreuse, le ballast facilite le drainage des voies ferrées et l’absorption des vibrations. Les normes françaises [NF F 53-695] fixent les critères de granulométrie, de dureté et de caractéristiques mécaniques précises auxquels le ballast doit répondre. La compréhension du comportement du ballast nécessite des essais de vibration et de bourrage spécifiques qui permettent d’étudier la stabilité du matériau en fonction des paramètres d’excitation.

L’essai de vibration de lit de ballast de Morgan et Markland (1981) a pour objectifs l’étude de l’effet de l’accélération sur la stabilité du ballast et la détermination d’une fréquence de résonance pour laquelle une faible excitation engendre le phénomène de fluidifi-

cation. Le matériau utilisé est du calcaire à l'échelle 1/2. Le premier type de manipulation consiste à mettre 280 kg de ballast d'épaisseur 250 mm dans une caisse de dimensions (800mm x 800mm x 300mm) que l'on fixe sur une table sous vibration sinusoïdale de fréquence variable entre 24 Hz et 60 Hz. Cette manipulation montre que l'échantillon est stable lorsque l'accélération est inférieure à la gravité ($\Gamma < g$). Dans le cas contraire ($\Gamma > g$), le matériau garde une certaine stabilité jusqu'à une valeur limite après laquelle le matériau commence à tasser. Le deuxième type de manipulation consiste à appliquer, à l'aide d'une plaque placée sur la surface libre, un chargement vibratoire. L'échantillon dont la masse est de 1,4 T est placé dans une caisse de dimensions (1200mm x 1200mm x 700mm). Le résultat de la manipulation montre qu'à une fréquence située entre 30 Hz et 40 Hz, la plaque pénètre facilement dans le ballast.

Le bourrage est un essai qui consiste à appliquer un serrage et une vibration simultanés sur un échantillon de ballast tout en évitant la cassure des grains. L'objectif de cette opération est de redonner à la voie ferrée son niveau initial en corrigeant les défauts de géométrie. La fréquence de vibration des bourreuses est généralement de l'ordre de 35 Hz tandis que la contrainte de serrage dépend de la qualité du matériau et varie de 1.4 MPa à 1.7 MPa. Les chercheurs ont adopté cette technique pour étudier le comportement des ballasts. En remarquant que la densité représente aussi une grandeur mesurable intéressante qui permet de décrire l'effet de bourrage sur un échantillon de ballast 25/60, [Fischer \(1983\)](#) a montré que la densité optimale est obtenue pour une fréquence de 35 Hz et une amplitude de ± 5 mm. Il a montré qu'une fréquence au delà de 50 Hz engendre l'effondrement de la structure constituée de ballast.

Le bourrage nécessite des installations coûteuses en moyens humains et financiers, avec des équipements spécifiques difficiles à mettre en place et à suivre du point de vue de la maintenance et de l'instrumentation. Pour étudier le ballast sous ces contraintes, [Oviedo-Marlot \(2001\)](#) a mis en place un dispositif moins sophistiqué. Il s'agit d'un banc d'essai, appelé "BOUBA", constitué d'une caisse en bois contenant du ballast¹ réduit à l'échelle 1/3, d'un quart de blochet en béton, d'un vérin à double effet qui simule l'effet de serrage et d'un moteur électrique muni d'un régulateur de fréquence permettant de générer une vibration sinusoïdale horizontale au niveau du bourroir. Le mouvement du bourroir à l'intérieur de la caisse permet de vibrer le matériau granulaire et le déplacement de la caisse permet d'effectuer le serrage. Les résultats de l'expérience montrent que pour effectuer une course de vérin donnée, les forces de serrage dépendent de la fréquence de vibration. Ainsi,

¹le ballast utilisé répond aux critères des normes françaises [NF F 53-695]

Oviedo-Marlot distingue trois comportements possibles selon les fréquences de vibration :

1. Faibles fréquences ($f < 25$ Hz) : le matériau se comporte comme un “solide”, la résistance du ballast est importante, le vérin atteint la fin de sa course mais avec des arrêts de faible durée et les effets de vibration ne perturbent pas les contacts des grains ;
2. Moyennes fréquences ($25 \text{ Hz} < f < 50 \text{ Hz}$) : le matériau a un comportement “visqueux”, la résistance du ballast est relativement plus faible, le déplacement continu du vérin montre l’effet de la vibration sur l’échantillon et le contact des grains devient plus perturbé ;
3. Hautes fréquences ($f > 50$ Hz) : le matériau se comporte comme un “liquide”, le ballast ne présente aucune résistance au serrage, l’amas de grains de ballast est totalement liquéfié.

Les trois types d’essais et notamment l’essai BOUBA permettent de montrer que la fréquence est un paramètre important qui peut engendrer un passage d’un état “quasi-solide” à un état “quasi-fluide” du ballast. La fréquence n’est toutefois pas le seul paramètre qui permet un tel passage ([Thomas et al. \(1989\)](#)).

1.2.5 Problématique de ségrégation

L’étude d’écoulement de matériaux granulaires dans un cylindre tournant a débuté avec l’expérience d’Oyama en 1939. L’expérience consiste à mélanger deux classes de billes de mêmes matériaux mais de tailles différentes et à les introduire dans un tambour tournant. Le mélange subit une ségrégation qui fait apparaître des tranches tout au long de l’axe du tambour. D’autres chercheurs se sont intéressés à d’autres aspects du problème ; [Rajchenbach \(1998\)](#) a montré expérimentalement que l’inclinaison de sable dans un cylindre tournant dépend de façon non-linéaire de la vitesse angulaire de rotation. En outre, il a remarqué que l’écoulement dans un cylindre tournant engendre un phénomène de convection ; le nombre de cellules de convection dépend de la vitesse angulaire de rotation. [Pöschel et Buchholtz \(1995\)](#) ont vérifié les résultats précédents, mais ils ont remarqué qu’en revanche le phénomène de “stick-slip” (qu’on décrira plus tard) apporte des instabilités aux cellules de convection et des irrégularités de la vitesse d’écoulement avec le temps.

Ce paragraphe reflète qu’une manipulation aussi simple que la mise en vibration ou en rotation d’un récipient rempli de matériau granulaire, produit des phénomènes com-

plexes et intéressants. Mais, la majorité de ces phénomènes échappe à l'analyse et à la compréhension.

1.3 Phénomène de tassement sous vibration

1.3.1 Loi de Chicago

Cette section présente certains résultats expérimentaux qui ont été obtenus afin d'expliquer le phénomène de tassement. Les matériaux granulaires comportent des constituants de tailles relativement importantes tels que les poudres, les sables et les graves. Par conséquent, ils ne peuvent pas être considérés comme des systèmes thermiques tant que les fluctuations thermiques sont négligeables par rapport aux forces gravitationnelles et aux forces d'inertie. Pourtant, des travaux de recherche active sont en cours pour prouver l'existence d'une analogie entre les systèmes thermiques et les milieux granulaires notamment quand ceux-ci sont prédisposés à des vibrations. Une théorie statistique a été établie afin de décrire l'évolution des poudres sous vibration (Edwards et Oakeshott (1989), Mehta et Edwards (1989), Edwards et Mounfield (1994)). Motivés par cette théorie, Nowak et al. (1998) ont étudié la compaction des matériaux granulaires confinés sous vibration. Ils ont utilisé des grains sphériques monodisperses de diamètre 2 mm confinés dans un tube de diamètre 1.88 cm et de longueur 1 m. L'excitation consiste à appliquer des cycles sinusoïdaux discrets de fréquences 30 Hz. Les résultats expérimentaux ont conduit à une dépendance de la fraction solide en fonction du temps donnée par :

$$\phi = \phi_{\infty} - \frac{(\phi_{\infty} - \phi_0)}{1 + B \ln(1 + t/\tau)} \quad (1.1)$$

où ϕ_0 et ϕ_{∞} sont les fractions solides initiales et finales, τ est un temps caractéristique et B est un paramètre d'interpolation sans interprétation physique. Dans le même contexte, Pouliquen et al. (2003) ont étudié l'effet du cisaillement cyclique sur la compaction des matériaux granulaires. Pour ce faire, ils ont considéré des échantillons parallélépipédiques de dimensions 7.7 cm \times 10.2 cm \times 10.5 cm constitués de particules monodisperses de diamètre 3 mm. Bien qu'ils n'aient pas proposé de relations empiriques décrivant la variation de la fraction solide en fonction du temps, les résultats présentés montrent une allure logarithmique. D'autres travaux ont été réalisés pour étudier le phénomène de compaction des matériaux granulaires sous différents modes d'excitation. A titre indicatif, Ribiere et al. (2005) ont vérifié la validité de la loi empirique (1.1) dans le cas de grains non uniformes et

d'aspects physiques comparables tels que le riz basmati ou arrondi. Ils ont remarqué que l'allure globale de la loi de compaction est qualitativement indépendante de la forme des grains. Ces observations ont été confirmées par les travaux expérimentaux de [Villarruel et al. \(2000\)](#) consacrés à l'étude de la compaction de matériaux granulaires anisotropes constitués de barres monodisperses de nylon. Plus récemment, [Ludewig et al. \(2006\)](#) a utilisé un mélange de grains carrés ou de forme en "T" afin de vérifier la validité de la loi de Chicago (1.1) et de comprendre l'effet du mélange sur la mobilité des grains. Il faut noter toutefois que les accélérations introduites au cours de ces essais sont relativement élevées par rapport à la gravité. [Richard et al. \(2003\)](#) ont étudié l'effet de la vibration verticale couvrant une plage d'accélération de 0 à 30 ms^{-2} sur des échantillons granulaires. La microtomographie par rayons X leur a permis d'étudier la structure géométrique des échantillons au cours de la compaction. Les résultats ont révélé que la distribution des pores suit une distribution exponentielle dont la dispersion diminue avec l'accélération.

Bien qu'empirique, la loi de Chicago (1.1) est une relation intéressante qui a été vérifiée pour différentes formes et caractéristiques mécaniques des grains et différentes sollicitations. Cependant, cette loi concerne essentiellement des matériaux vibrés par le bas ("shaking") et d'autre part elle est obtenue par ajustement et ses paramètres sont difficiles à interpréter physiquement.

1.3.2 Caractérisation du déplacement résiduel avec des essais classiques

Une autre approche de recherche concernant les matériaux granulaires a été initiée indépendamment de l'approche statistique depuis les années soixante-dix. Cette approche a pour but la description des matériaux de construction tels que les graves non traitées, le ballast et le micro-ballast utilisés dans les chaussées et les plateformes des chemins de fer. Ces matériaux sont généralement sujets à des charges cycliques à cause du trafic. Avec des vitesses de véhicules de plus en plus élevées et des normes de confort et de sécurité de plus en plus strictes, la compréhension du comportement des matériaux granulaires sous sollicitations rapides est devenue cruciale. Des travaux de recherches d'envergure considérable ont été réalisés afin d'expliquer le phénomène de tassement des matériaux granulaires sous chargement cyclique afin de relier les déformations permanentes à différents paramètres tels que le nombre de cycles de chargement, la déformation élastique verticale, les déplacements verticaux et horizontaux couplés, ainsi que les vitesses des trains. [Shenton \(1978\)](#)

est l'un des pionniers de l'étude du phénomène de tassement dans le ballast. Il a conduit des essais triaxiaux sur des échantillons de granulométrie allant de 13 à 38 mm. Pour la majorité des essais, le diamètre de l'échantillon étant de 229 mm et la hauteur de 250 mm. Les signaux appliqués ont couvert des contraintes axiales allant de 0 à 400 kPa et des fréquences allant de 0.1 à 30 Hz. En revanche, le nombre de cycles était limité à environ 50. Les résultats expérimentaux ont montré que le tassement axial peut s'écrire sous la forme :

$$\epsilon_N = \epsilon_1(1 + 0.2 \ln N) \quad (1.2)$$

où ϵ_N représente la déformation axiale permanente correspondant au cycle N . D'après [Shenton \(1978\)](#), ϵ_1 , déformation permanente correspondant au premier cycle, dépend essentiellement de la fraction solide ϕ . Avec son unique paramètre, la loi de Shenton a l'avantage d'être facile à utiliser, mais elle n'offre pas beaucoup de flexibilité pour expliquer d'autres phénomènes qui peuvent se produire à cause du chargement cyclique et notamment l'effet de la vitesse. Une loi similaire a été proposée par [Barksdale \(1972\)](#), cette loi s'écrit comme suit :

$$\epsilon_N = a + b \ln N \quad (1.3)$$

où a et b sont des grandeurs qui dépendent de la pression hydrostatique p et de la contrainte déviatorique q . [Paute et al. \(1988\)](#) ont introduit une nouvelle expression qui décrit la déformation axiale permanente des graves :

$$\epsilon_N = f(p, q) \times g(N) \quad (1.4)$$

où p et q sont les invariants du tenseur de contraintes et N est le nombre de cycles. Des expressions similaires ont été proposées pour décrire les déformations dans les autres directions principales. Dans la description présentée ci-dessus, l'idée de base réside dans la séparation de variables et dans la dépendance du tassement par rapport aux efforts appliqués. Ainsi, f est une fonction des contraintes déviatoriques et hydrostatiques et g est une fonction de forme qui dépend uniquement du nombre de cycles. D'après [Paute et al. \(1988\)](#), ces fonctions peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{cases} f(p, q) = a \frac{q_{max}}{p_{max} - m} \\ g(N) = \frac{\sqrt{N}}{D + \sqrt{N}} \end{cases} \quad (1.5)$$

où a et D sont des paramètres de régression, q_{max} et p_{max} sont les contraintes déviatoriques et hydrostatiques maximales et m correspond à l'intersection entre la droite limite et l'axe

des contraintes hydrostatiques. Bien que cette loi ne soit pas logarithmique, elle peut être ajustée aux résultats expérimentaux grâce à ses nombreux paramètres. Ce modèle signifie que (i) la déformation permanente est négligeable quand la contrainte est hydrostatique, (ii) la déformation permanente est infinie quand les contraintes déviatorique et hydrostatique sont sur la droite limite et (iii) la déformation permanente dépend du ratio $\frac{q_{max}}{p_{max}-m}$. [Hornych et al. \(1993\)](#) ont montré que la loi ci-dessus est un cas particulier d'une loi plus générale qui s'écrit sous la la forme :

$$\epsilon_N = \epsilon_{100} + A \left[1 - \left(\frac{N}{100} \right)^{-B} \right] \quad (1.6)$$

Plus tard, [Paute et al. \(1994\)](#) ont amélioré la loi ci-dessus en montrant empiriquement que le paramètre A peut être relié aux contraintes comme indiqué par l'équation (1.5). La relation (1.6) a été introduite pour des applications techniques dans la norme française NF P 98-235-1. [Pérez et al. \(2006\)](#) ont étudié à l'aide de l'essai triaxial le tassement des matériaux granulaires dans des chaussées en Espagne. Ils ont comparé les résultats obtenus avec le modèle de Hornych (1.6) de la forme $AN^B + C$. Les relations (1.2), (1.3), (1.4), (1.6) présentées ci-dessus et d'autres relations empiriques rapportées par [Lekarp \(1998\)](#) ont été établies à l'aide de l'essai triaxial.

1.3.3 Tassement du micro-ballast

Les matériaux granulaires partiellement confinés ont fait l'objet d'un intérêt considérable surtout à l'École Nationale des Ponts et Chaussées (ENPC). La plupart des travaux qui ont été réalisés dans ce sens consistent à étudier le comportement d'échantillons de dimensions réduites et de déduire le comportement du ballast par similitude. Contrairement aux essais à l'échelle 1, les essais de dimensions réduites sont plus faciles à réaliser dans les conditions de laboratoire avec des coûts moindres et une meilleure répétabilité. [Guérin \(1996\)](#) a mené des essais expérimentaux sur des échantillons de micro-ballast à l'échelle 1 :3 de dimensions 500 mm×500 mm avec une hauteur initiale de 100 mm. L'échantillon est partiellement confiné et la sollicitation est appliquée moyennant un blochet cylindrique en acier de diamètre 192 mm. Les sollicitations ont couvert une plage d'amplitudes allant de 0 à 45 kPa avec des fréquences allant jusqu'à 50 Hz. [Guérin \(1996\)](#) a montré que le tassement dans l'intervalle des actions décrites ci-dessus peut être représenté par une loi de puissance qui relie le tassement à la "déflexion élastique", définie comme étant le

déplacement élastique moyen sous le blochet :

$$\frac{d\tau}{dN} = \alpha d^\beta \quad (1.7)$$

où d représente la déflexion élastique, β et α sont deux paramètres d'ajustement qui dépendent de la rigidité des matériaux constituant les grains. Plus tard, [Bodin \(2000\)](#) a étudié le tassement des matériaux granulaires sous chargement latéral et vertical couplés. Elle a utilisé des échantillons de micro-ballast à l'échelle 1 :3 et elle a abouti à une loi de tassement similaire qui fait intervenir les déflexions dans les deux directions de sollicitation :

$$\frac{d\tau_i}{dN} = \alpha \|d\|^\beta d_i^\gamma \quad (1.8)$$

où i est l'une des directions de sollicitation et γ est une constante qui dépend de la forme des grains. [Al-Shaer \(2005\)](#) a amélioré le dernier banc d'essai en utilisant trois traverses munies de trois vérins qui simulent le déphasage de l'excitation entre blochets induit par le passage de trains. L'objectif de l'essai est d'étudier l'effet de la déflexion élastique, de la vitesse et de l'accélération sur la déformation permanente des voies ferrées.

Dans le même contexte, [McDowell et al. \(2005\)](#) a envisagé une procédure expérimentale afin d'étudier la faisabilité des essais cycliques dans des enceintes au laboratoire. L'échantillon granulaire est constitué de 60% (par rapport au poids total) de particules de 25 à 37.5 mm de taille et de 40% de particules de 37.5 à 50 mm de taille. L'échantillon est contenu dans une enceinte de 70 cm × 45 cm × 30 cm représentant une portion de couche de ballast. Les essais ont été réalisés en utilisant différents types de ballast et le chargement appliqué comporte un million de cycles. Les résultats sous forme de tassement par rapport au nombre de cycles ont été comparés en terme de rigidité des matériaux et de leur dégradation afin de montrer que de telles enceintes de ballast étaient un outil performant pour l'étude du comportement du ballast sous de telles sollicitations. On note toutefois que ces essais n'ont pas montré l'effet de l'accélération sur le tassement du ballast.

1.4 Tribologie et lois de contact

Les milieux granulaires ont un comportement rhéologique riche ; on peut citer des mécanismes aussi variés que le glissement, le roulement des grains, la friction au niveau des surfaces de contact, la friction avec la paroi et la dilatance. L'arrangement des grains ainsi que l'historique influe aussi sur les interactions entre les constituants du milieu.

1.4.1 Frottement, les lois de base

Le frottement peut avoir lieu lorsqu'il y a mouvement relatif entre deux solides en contact ou plus. Le frottement sec correspond à la force de résistance entre deux solides en contact et le frottement fluide décrit les forces de résistance dans un fluide en écoulement. Leonardo Da Vinci (1452-1519) fut l'un des premiers chercheurs ayant essayé d'expliquer le phénomène de frottement. Il a proposé deux lois de base : la première indique que la force de frottement est indépendante de la surface de contact apparente entre les objets et la deuxième stipule que la force de frottement est proportionnelle à la force normale appliquée. Les observations de Da Vinci n'ont pas été publiées. Amontons a redécouvert indépendamment les deux lois de frottement en 1699. Il pensait toutefois que le frottement était dû essentiellement à la rugosité des surfaces en contact. En 1785, Coulomb a vérifié les travaux d'Amontons et les a complétés en montrant qu'avant le mouvement relatif de deux solides en contact, la force de frottement augmente jusqu'à atteindre une valeur maximale (frottement statique). Il a considéré aussi que le frottement sec est indépendant de la vitesse relative des solides en interaction (Fig. 1.2-a).

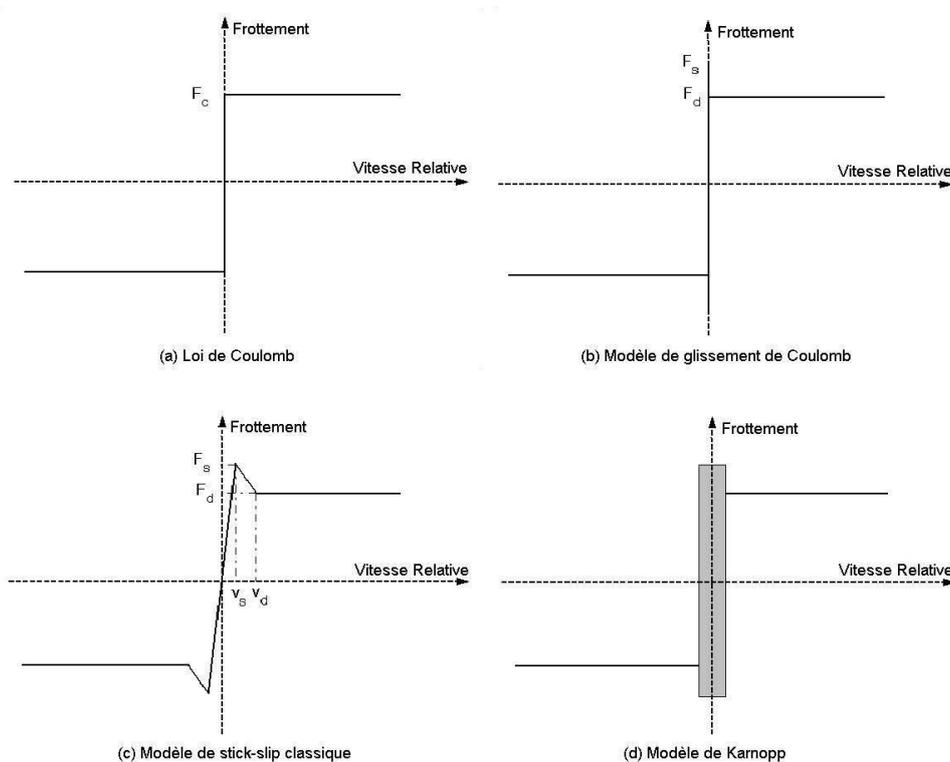


FIG. 1.2: Phénomène de “stick-slip”

Le tribologiste F. P. Bowden a donné une explication physique des lois de frottement, en 1950. Il a stipulé que l'aire réelle de contact, formée d'aspérités ne représente qu'une petite partie de l'aire de contact apparente. Lorsque l'effort normal augmente, davantage d'aspérités des deux solides entrent en contact et la surface fonctionnelle augmente. Selon l'hypothèse de Bowden, la force de frottement dépend de l'aire réelle de contact. L'invention du microscope à force atomique en 1986 a confirmé cette hypothèse et a beaucoup aidé les chercheurs à comprendre et à étudier les phénomènes de frottement à l'échelle microscopique.

La théorie de contact élastique entre deux sphères a été développée par Hertz en 1882 pour le contact normal et par Mindlin et Deresiewicz en 1953 pour le contact tangentiel. La généralisation de ces lois de contact pour le cas oblique n'est pas facile (Di Renzo et Maio (2004)). En effet, les travaux de Mindlin et Deresiewicz démontrent qu'à cause de la présence de glissement tangentiel, la relation force-déplacement dépend de l'histoire du chargement, et du taux de changement instantané de la force ou du déplacement tangentiel et normal.

1.4.2 Contact normal et loi de Hertz

En cas d'absence de déplacement tangentiel, l'évolution du système peut être décrite par une relation non linéaire, mais facile à prendre en compte. Le calcul effectué par Hertz dans le cadre de l'hypothèse de petites perturbations et pour des surfaces de solides élastiques, homogènes et isotropes et non frottants, permet de décrire le contact binaire. En effet, le rayon de contact entre les particules a , le déplacement δ et la pression de contact p_0 s'expriment en fonction du rayon de courbure équivalent R^* , du module d'Young équivalent E^* et de la force normale N^1 :

$$a = \left(\frac{3NR^*}{4E^*} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.9)$$

$$\delta = \frac{a^2}{R^*} \quad (1.10)$$

$$p_0 = \frac{3N}{2\pi a^2} \quad (1.11)$$

¹Ces résultats ont été rapportés aussi par Johnson (1985)

où la relation entre l'effort normal N et le déplacement δ est :

$$N = K_n \delta^{\frac{3}{2}} \quad (1.12)$$

La constante élastique normale est déduite à partir des caractéristiques mécaniques des deux matériaux en contact :

$$K_n = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} \quad (1.13)$$

Le module d'Young et le rayon équivalents sont définis par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{E^*} &= \frac{1 - \nu_\alpha^2}{E_\alpha} + \frac{1 - \nu_\beta^2}{E_\beta} \\ \frac{1}{R^*} &= \frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \end{aligned} \quad (1.14)$$

où (E_α, ν_α) , (E_β, ν_β) sont les constantes élastiques respectives des matériaux α et β en contact. Il est utile de rappeler que l'hypothèse de quasi-staticité est vérifiée étant donné que les vitesses de déformation sont très inférieures aux vitesses des ondes élastiques des matériaux en collisions ([Azanza \(1998\)](#)). Cependant, l'hypothèse d'élasticité n'est pas réellement adaptée ; un choc de deux grains constitués de matériaux usuels en génie civil (métaux, roches, etc.) peut engendrer des déformations irréversibles même à des vitesses de l'ordre de quelques centimètres par seconde.

1.4.3 Procédure de Mindlin et Deresiewicz

D'après la loi de Hertz, l'effort normal ainsi que le rayon de l'aire de contact sont constants lorsque le déplacement normal est constant. Dans ce cas de figure, il est possible de relier l'effort tangentiel au déplacement tangentiel. Le problème devient plus compliqué lorsque les déplacements tangentiel et normal varient simultanément. Di Renzo et Maio ([2004](#)) ont proposé une procédure incrémentale reliant les efforts et les déplacements tangentiels :

$$F = F_0 + K_t(\delta_t - \delta_{t_0}) \quad (1.15)$$

L'effort tangentiel actuel est calculé en considérant l'effort tangentiel précédent et l'incrément de déplacement tangentiel. Avec une telle procédure incrémentale, l'histoire de chargement se réduit à l'effort tangentiel de l'incrément précédent. La précision de calcul de l'histoire de chargement dépend du calcul de la constante de raideur tangentielle K_t . En

mode de chargement et lorsque le déplacement normal est constant, cette raideur s'écrit :

$$K_t = K_{t_0} \left(1 - \frac{F}{\mu N} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.16)$$

où μ est le coefficient de frottement, $K_{t_0} = 8G^* \sqrt{R^* \delta_n}$ est la constante de raideur initiale et $\frac{1}{G^*} = \frac{1-\nu_\alpha}{G_\alpha} + \frac{1-\nu_\beta}{G_\beta}$ est le module de cisaillement équivalent des deux corps en contact.

L'effort tangentiel maximal est toutefois limité par la loi de Coulomb. Mindlin et Deresiewicz (1953) ont montré que le chemin de déchargement est légèrement différent du chemin de chargement à cause des micro-glissements entre les surfaces de contact. Dans ce cas de figure, Mindlin et Deresiewicz proposent une formule qui décrit la raideur tangentielle en tenant compte de l'effort de retour au chargement F_1 :

$$K_t = K_{t_0} \left(1 - \frac{F_1 - F}{\mu N} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.17)$$

Une formule analogue décrivant le rechargement a été proposée pour corriger de nouveau la raideur des efforts tangentiels. La raideur de rechargement dépend du point de retour au chargement F_2 :

$$K_t = K_{t_0} \left(1 - \frac{F - F_2}{\mu N} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.18)$$

Ainsi, le cycle de chargement-déchargement-rechargement peut se présenter sous forme d'hystérésis. Il serait intéressant d'étudier ce type de comportement pour un matériau granulaire, sous différentes fréquences de sollicitation.

1.4.4 Phénomène de “stick-slip”

Pour expliquer les phénomènes vibratoires au niveau des interfaces, Bowden et Leben (Voir Christopher (2000) par exemple) ont introduit le terme “stick-slip”. C'est un phénomène qui peut avoir lieu quand le frottement statique F_s dépasse le frottement dynamique F_d . Le modèle de Coulomb (Fig. 1.2-b) explique le frottement avec “stick-slip”. Ce modèle est toutefois loin d'être physiquement réaliste puisqu'à vitesse relative nulle, il peut y avoir plus qu'un niveau de frottement. Une telle singularité peut s'avérer contraignante lors de l'intégration du modèle dans un code de simulation. En 1991, Haessig et Friedland ont introduit un modèle continu (Fig. 1.2-c) pour surmonter les problèmes de singularités du modèle de Coulomb. L'inconvénient principal de ce modèle appelé “classique” est

qu'il permet au solide d'accélérer même si la force externe est inférieure à la limite de frottement. Pour surmonter les problèmes de singularité du modèle de Coulomb, [Karnopp \(1985\)](#) a introduit un nouveau modèle (Fig. 1.2-d) caractérisé par une bande au voisinage de la vitesse nulle où le système est forcé d'être en blocage ("sticking"). A l'intérieur de cette bande, la vitesse relative des corps en contact est nulle et la force de frottement est à l'intérieur du cône de Coulomb. Lorsque la vitesse relative franchit la bande de blocage, la force de frottement chute de F_s à F_d et le système entame une phase de glissement relatif ("slipping").

1.4.5 Loi de Coulomb et condition de Signorini

Le frottement est généralement dû aux états de surface de deux corps en contact. Il peut dépendre des vitesses de glissement v_t et s'exprime sous forme d'efforts de réaction R . Le frottement sec entre deux solides correspond à la composante tangentielle de réaction T . C'est un effort qui peut s'exercer sans qu'il y ait glissement entre les corps, celui-ci ne se produit que lorsque la réaction tangentielle franchit un seuil bien déterminé. Dans la loi de Coulomb, le seuil est proportionnel à la composante normale de la réaction N . Ceci signifie que l'effort de frottement se situe dans un cône (le cône de Coulomb) $\|T\| \leq \mu N$, où μ est le coefficient de frottement. Lorsque le glissement se déclenche, l'effort de frottement atteint le seuil et reste opposé à la vitesse de glissement. La relation entre l'effort de frottement et la vitesse tangentielle est illustrée par la figure 1.2-a.

Dans le cas de contact unilatéral, les particules se chevauchent sans interpénétration ou attraction. Ceci signifie que le gap g et les efforts de réaction entre les particules sont positifs. Les efforts de réaction s'annulent dès la rupture du contact. Cette relation est connue sous le nom de *Condition de Signorini* : $g \geq 0$, $N \geq 0$, $gN = 0$. La condition de Signorini décrit rigoureusement le contact unilatéral dans le cas de contact de solides. Pour améliorer cette description, on peut faire appel aux lois de chocs et aux formules de restitution de Newton ([Azanza \(1998\)](#)).

1.5 Modèles discrets

Contrairement à la simulation des milieux continus qui ne permettent pas d'accéder aux grandeurs physiques à l'échelle des grains, l'approche discrète donne plus de souplesse. Elle permet de modéliser séparément les particules qui constituent le milieu granulaire et

de suivre leurs évolutions au cours du temps. Cependant, l'approche discrète est plus difficile à mettre en oeuvre puisqu'elle est évidemment très coûteuse en temps de calcul². Pour écrire un code de calcul et simuler le comportement de matériaux granulaires, il faut tenir compte de quatre étapes fondamentales (Müller (1996)) :

1. Choisir l'espace de travail (deux ou trois dimensions) et décider de la géométrie et du nombre de grains ;
2. Mettre en oeuvre un algorithme de détection de contact. Cette étape est souvent la plus coûteuse, le nombre d'opérations dépend du nombre et de la géométrie des grains ;
3. Décrire l'évolution du milieu en programmant les lois qui régissent les interactions, les déplacements et les efforts ;
4. Visualiser les résultats obtenus par simulation.

Dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse surtout à la modélisation discrète des milieux granulaires. Les principaux courants de cette modélisation discrète sont les modèles newtoniens et les approches non déterministes. Les modèles newtoniens reposent sur la mécanique classique. Parmi ces modèles, on peut distinguer la méthode de pilotage par événement (ED), la méthode de Dynamique de Contact (DC) et la méthode de Dynamique Moléculaire (DM). Les modèles non déterministes reposent par exemple sur la méthode de Monte Carlo.

1.5.1 Pilotage par événement

La méthode de pilotage par événement repose sur la résolution de problèmes de collisions de corps indéformables. Par corps indéformables, on entend que les déformations sont tellement petites que le corps est supposé rigide à l'échelle macroscopique. La description des collisions des particules rigides est basée entre autres sur les travaux de Mindlin et Deresiewicz (1953). D'après Luding (1998), la description de l'évolution de corps indéformables nécessite la connaissance de trois coefficients : le coefficient e_n qui définit la restitution incomplète de la vitesse des particules subissant le choc, dans la direction normale au point de contact, le coefficient e_t qui décrit la restitution de la vitesse tangentielle au point de contact et le coefficient de frottement μ des deux corps. On considère deux

²Le temps de calcul est différent du temps réel, c'est le temps nécessaire pour simuler un événement donné.

particules α et β de diamètres d_α et d_β et de masses m_α et m_β . Le vecteur normal unitaire de contact entre les particules est :

$$n_{\alpha\beta} = \frac{r_\alpha - r_\beta}{\|r_\alpha - r_\beta\|} \quad (1.19)$$

où r_j est un vecteur entrant au centre de la particule j ($j = \alpha, \beta$). La vitesse relative du point de contact est :

$$v_{\alpha\beta} = v_\alpha - v_\beta - \left(\frac{d_\alpha}{2} w_\alpha + \frac{d_\beta}{2} w_\beta \right) \wedge n_{\alpha\beta} \quad (1.20)$$

où v_j et w_j sont les vitesses linéaire et angulaire de la particule j , juste avant la collision. Les lois de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique impliquent que :

$$\begin{aligned} v'_\alpha &= v_\alpha + \frac{\Delta P}{m_\alpha} \\ v'_\beta &= v_\beta - \frac{\Delta P}{m_\beta} \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} w'_\alpha &= w_\alpha + \frac{d_\alpha}{2I_\alpha} n \wedge \Delta P \\ w'_\beta &= w_\beta - \frac{d_\beta}{2I_\beta} n \wedge \Delta P \end{aligned} \quad (1.22)$$

où v'_j et w'_j sont les vitesses linéaire et angulaire inconnues de la particule j , après la collision, I_j est le moment d'inertie de la particule j et ΔP est la variation de la quantité de mouvement de la particule (sachant que le moment d'inertie d'une sphère est de la forme $I = \frac{2}{5}mr^2$) :

$$\Delta P = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} (1 + e_n) v_{\alpha\beta}^n + \frac{2}{7} \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} (1 + e_t) v_{\alpha\beta}^t \quad (1.23)$$

où n et t désignent respectivement les directions normale et tangentielle. Dans le cas particulier où la particule α entre en contact avec la paroi fixe du récipient, la masse m_β tend vers l'infini et le diamètre d_β tend vers zéro de telle sorte que la particule β joue le rôle de la paroi fixe. Ainsi, connaissant les vitesses des particules avant le choc, les trois coefficients permettent de déterminer l'évolution du milieu après le choc. Dans ce cas de figure, le mouvement des grains n'est pas décrit par l'intégration de la relation fondamentale de la dynamique mais il est décrit par des séquences de collisions entre lesquelles les vitesses restent constantes. La méthode ne traite pas les contacts maintenus et ne se prête pas aux cas quasi-statiques ou à l'équilibre, mais fonctionne bien dans le cas des milieux fortement agités.

1.5.2 Dynamique des contacts

La méthode de dynamique des contacts a été initiée par J. J. Moreau et M. Jean au début des années quatre-vingt-dix. C'est une approche particulièrement fiable pour l'étude de matériaux granulaires aux constituants indéformables tant en statique qu'en dynamique. La méthode de dynamique de contact consiste à résoudre les équations de mouvement d'un ensemble de particules comme suit (Moreau (1993), Jean (1999), Azanza (1998) et Oviedo-Marlot (2001)) :

$$M\ddot{q} = F(q, \dot{q}, t) + r \quad (1.24)$$

où M est une matrice de masse symétrique définie positive, $F(q, \dot{q}, t)$ sont les efforts externes au milieu granulaire et r est une représentation des impulsions exercées en l'occurrence des contacts. La forme discrète de l'équation (1.24) sur un intervalle de temps $]t_i, t_{i+1}]$ de longueur Δt s'écrit :

$$M\Delta\dot{q}(t_i) = r\Delta t \quad (1.25)$$

En tenant compte de la relation (1.20), en inversant la matrice de masse et en remplaçant les coordonnées généralisées par leurs valeurs, on aboutit à des équations de la forme suivante pour tout couple de contact (α, β) :

$$\Delta v_{\alpha\beta}^n = \left(\frac{1}{m_\alpha} + \frac{1}{m_\beta}\right)N_{\alpha\beta} + \frac{1}{m_\alpha} \sum_{\kappa \neq \alpha} R_{\alpha\kappa} \cdot n_{\alpha\beta} - \frac{1}{m_\beta} \sum_{\lambda \neq \beta} R_{\beta\lambda} \cdot n_{\alpha\beta} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \Delta v_{\alpha\beta}^t &= \left(\frac{1}{m_\alpha} + \frac{1}{m_\beta} + \frac{d_\alpha^2}{I_\alpha} + \frac{d_\beta^2}{I_\beta}\right)T_{\alpha\beta} + \frac{1}{m_\alpha} \sum_{\kappa \neq \alpha} R_{\alpha\kappa} \cdot t_{\alpha\beta} - \frac{1}{m_\beta} \sum_{\lambda \neq \beta} R_{\beta\lambda} \cdot t_{\alpha\beta} \\ &+ \frac{d_\alpha^2}{I_\alpha} \sum_{\kappa \neq \alpha} T_{\alpha\kappa} + \frac{d_\beta^2}{I_\beta} \sum_{\lambda \neq \beta} T_{\beta\lambda} \end{aligned} \quad (1.27)$$

où $R_{\alpha\kappa}$ est l'impulsion transmise par la particule κ à la particule α pendant le temps Δt et $T_{\alpha\kappa}$ est la partie tangentielle de cette impulsion. Quand il y a une collision entre les grains α et β , pendant le temps d'intégration, la dynamique de contact permet d'écrire

une relation entre les vitesses relatives avant "-" et après "+" l'impact et les coefficients de restitution. Elle permet par conséquent de déduire une vitesse relative de la forme :

$$\tilde{v}_{\alpha\beta}^n = \frac{v_{\alpha\beta}^{n+} + e_n v_{\alpha\beta}^{n-}}{1 + e_n}; \tilde{v}_{\alpha\beta}^t = \frac{v_{\alpha\beta}^{t+} + e_t v_{\alpha\beta}^{t-}}{1 + e_t} \quad (1.28)$$

En tenant compte de ces relations, on peut déduire que les impulsions normale et tangentielle peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= \left(\frac{1}{m_\alpha} + \frac{1}{m_\beta}\right)^{-1} (1 + e_n) \tilde{v}_{\alpha\beta}^n + A_{\alpha\beta}^n \\ T_{\alpha\beta} &= \left(\frac{1}{m_\alpha} + \frac{1}{m_\beta} + \frac{d_\alpha^2}{I_\alpha} + \frac{d_\beta^2}{I_\beta}\right)^{-1} (1 + e_t) \tilde{v}_{\alpha\beta}^t + A_{\alpha\beta}^t \end{aligned} \quad (1.29)$$

Les seconds membres $A_{\alpha\beta}^n$ et $A_{\alpha\beta}^t$ étant connus, les impulsions sont des fonctions affines des vitesses. Ce système (1.29) admet une infinité de solutions. C'est à ce moment là que l'on utilise le graphe de Signorini et celui de Coulomb. Des conditions supplémentaires sont donc utilisées pour résoudre les équations :

- si $A_{\alpha\beta}^n < 0$ alors $N_{\alpha\beta} = 0$ et $\tilde{v}_{\alpha\beta}^n \neq 0$;
- si $A_{\alpha\beta}^n \geq 0$ alors $N_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}^n$ et $\tilde{v}_{\alpha\beta}^n = 0$;

D'autre part,

- si $\|A_{\alpha\beta}^t\| \geq \mu N_{\alpha\beta}$ alors $T_{\alpha\beta} = \text{signe}(\tilde{v}_{\alpha\beta}^t) \mu N_{\alpha\beta}$;
- si $\|A_{\alpha\beta}^t\| < \mu N_{\alpha\beta}$ alors $T_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}^t$ et $\tilde{v}_{\alpha\beta}^t = 0$;

Comme chaque impulsion sur un contact donné dépend des impulsions des contacts environnants, il est nécessaire d'avoir l'équilibre à chaque itération, il est donc nécessaire de procéder de façon itérative afin qu'il y ait équilibre tel que détaillé dans (Jean (1999)).

1.5.3 Dynamique moléculaire

L'idée de base derrière l'application de la méthode de dynamique moléculaire pour simuler le comportement des matériaux granulaires a été développée par Cundall et Strack au début des années quatre-vingts. L'algorithme de Cundall consiste à discrétiser le temps et à détecter, à chaque incrément toutes les particules qui interagissent entre elles. Ainsi, les efforts exercés sont déterminés de façon binaire et intégrés moyennant la seconde loi de Newton en tenant compte des relations cinétiques définissant les positions et les orientations diverses des constituants du milieu. Les forces typiques qui peuvent agir dans un milieu granulaire sont la force de gravitation, les actions de contact dues aux

collisions des particules, les interactions électrostatiques, les forces de Van der Waals et les forces de cohésion. Lorsqu'on s'intéresse aux matériaux granulaires de construction tels que les ballasts ou les granulats de béton non cohésifs, on néglige souvent les forces inter-particulaires d'ordres élevés (les interactions électrostatiques, les forces de Van der Waals etc..). Les contributions des actions de contact deviennent alors prépondérantes. En effet, les collisions orientent les mouvements des particules et les valeurs des actions de contact peuvent atteindre plusieurs fois celles des efforts gravitationnels.

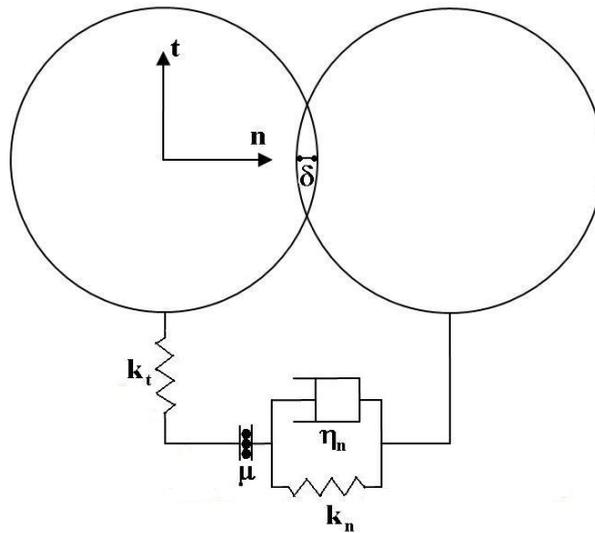


FIG. 1.3: Modèle de contact de sphères déformables

La modélisation de contact des particules est encore à l'ordre du jour, en effet, plusieurs siècles après les réflexions de Da Vinci et de Coulomb, on utilise toujours les mêmes modèles à des modifications près. Pour tenir compte des déformations des particules, on s'inspire du modèle de Hertz pour le contact normal (équation 1.12) et de celui de Mindlin et Deresiewicz pour le contact tangentiel (équation 1.15). Les chercheurs [Oviedo-Marlot \(2001\)](#), [Müller \(1996\)](#), [Da Cruz \(2004\)](#) adoptent souvent l'approche de Cundall qui consiste à modéliser le contact en utilisant des combinaisons de ressort-amortisseur-patin dont ils déterminent expérimentalement les paramètres de base pour les introduire dans les codes de calcul. Il faut toutefois admettre que plus le modèle de contact est réaliste, plus il comporte de paramètres et plus son utilisation est difficile et peu fructueuse. Le modèle de Cundall dépend de l'interpénétration, $\delta = \frac{1}{2}(d_\alpha + d_\beta) - (r_\alpha - r_\beta).n$, des particules

intéragissantes α et β . Dans la direction normale, la particule β subit un effort répulsif :

$$F_{el} = k_n(\delta_n)^\kappa \quad (1.30)$$

où k_n est un coefficient décrivant le caractère élastique du contact et δ_n est la composante normale de l'interpénétration. Dans le cas linéaire, le paramètre κ vaut 1 et la répulsion normale est modélisée par un ressort suivant la loi de Hooke. Dans le cas de sphères élastiques en trois dimensions, le contact est non linéaire, il faut considérer la loi de Hertz pour laquelle $\kappa = \frac{3}{2}$. Enfin, lorsque le contact est conique, (Herrmann et Luding (1998)) affirment que le paramètre κ doit valoir 2. Dans la direction normale, la particule β subit aussi l'action de l'effort dissipatif :

$$F_{diss} = \eta_n \dot{\delta}_n \quad (1.31)$$

où η_n est un coefficient phénoménologique décrivant l'amortissement visqueux. Dans le cas d'un contact linéaire de type amortisseur-ressort, le système obéit à une équation différentielle homogène de second ordre en δ_n dont la résolution montre que le temps de contact est de durée $\tau_c = \frac{\pi}{\omega}$ et que le coefficient de restitution normal est de valeur $\zeta = e^{-\frac{\pi\varpi}{\omega}}$ où $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \varpi^2}$, $\omega_0^2 = \frac{k_n}{m_{\alpha\beta}}$, $\varpi = \frac{\eta_n}{2m_{\alpha\beta}}$ et $m_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}$. Nous renvoyons le lecteur aux références (Da Cruz (2004), Luding (1998)) pour une discussion plus approfondie. La complexité du modèle de contact à adapter dépend de la particularité de l'application qu'on désire traiter. Il est souvent important de considérer le frottement statique (Herrmann et Luding (1998), Cundall et Strack (1971)). Il s'agit de décrire l'effort de frottement en considérant la loi de Coulomb ainsi que la force de restauration tangentielle $-k_t\chi$, où k_t est la raideur tangentielle, $\chi = \int_{t_0}^{t_1} v_{t_{\alpha\beta}} dt$ est le déplacement tangentiel et $v_{t_{\alpha\beta}}$ est la vitesse tangentielle relative des deux particules en contact. Formellement, l'effort de frottement statique s'exprime comme suit :

$$F_{fr} = -\min(k_t|\chi|, \mu N) \quad (1.32)$$

Il est important de noter que l'effort de frottement F_{fr} s'oppose à la direction du mouvement, d'où la présence d'un signe (-). En tenant compte des efforts d'interaction, il est possible d'écrire les équations du mouvement sous forme d'équations différentielles ordinaires que l'on résout numériquement. La méthode n'est toutefois fiable que dans certaines conditions précises : aux points de contact, l'interpénétration doit être faible par rapport aux dimensions des particules, de plus, il faut choisir le pas de temps de façon judicieuse. En se référant aux travaux de Roux et Chevoir (2005), Da Cruz (2004) estime

que le pas de temps doit être proportionnel au temps caractéristique de collision. Da Cruz (2004) précise à titre indicatif que dans le cadre des déformations lentes, la constante de proportionnalité est de l'ordre de 0.01. Cependant, lorsque les événements sont rapides, cette constante doit être plus faible.

1.6 Modèles continus, concepts et limites

Il existe dans la littérature un nombre impressionnant de modèles continus qui décrivent les comportements des milieux granulaires. Ces comportements dépendent de différents facteurs tels que la présence de l'eau, la composition chimique, les caractéristiques mécaniques, la variation de la température etc. Dans le cadre de notre étude, nous supposons que les grains sont de taille suffisamment importante pour négliger les forces de faible portée. De plus, nous supposons que les matériaux sont secs et que les grains sont homogènes. Lorsque l'évolution est considérée comme isotherme, la formulation d'un modèle de comportement mécanique repose sur des hypothèses simples qui peuvent être satisfaites pour différents types de matériaux. Il s'agit de partir de l'inégalité de Clausius-Duhem qui s'écrit sous la forme $\dot{\mathcal{D}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{W}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$. Cette inégalité s'établit à partir du premier et du deuxième principe de la thermodynamique. Dans cette expression, $\dot{\mathcal{D}}$ est le taux de dissipation, $\boldsymbol{\sigma}$ est la contrainte de Cauchy, $\boldsymbol{\epsilon}$ est la déformation, et \dot{W} est l'énergie libre (ou de Helmholtz). Lors d'une évolution isotherme, cette énergie dépend de la déformation et de variables d'états qui peuvent être aussi nombreuses que les mécanismes de dissipation susceptibles d'affecter le comportement. La relation de Clausius-Duhem peut aussi être exprimée sous la forme :

$$\dot{\mathcal{D}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0. \quad (1.33)$$

Cette relation peut fournir un fondement théorique solide pour proposer des modèles de comportements mécaniques. Dans la première section, nous présentons quelques modèles continus communs utilisés pour décrire les matériaux granulaires, puis nous nous intéressons dans la deuxième section à un modèle particulier que nous avons implémenté à l'aide de la procédure UMAT (Fortran) dans le code de calcul commercial Abaqus afin de décrire le tassement dans un milieu granulaire sous sollicitation cyclique.

1.6.1 Élasticité

L'élasticité repose sur l'hypothèse de conservation de l'énergie. La déformation est donc complètement réversible ce qui signifie que la dissipation est nulle. Dans ce cas, l'équation (1.33) est réduite à (Lemaitre et Chaboche (2001)) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (1.34)$$

Les déformations sont prises infinitésimales, on peut donc écrire l'énergie libre sous forme d'un développement limité à l'ordre 2 par rapport aux déformations principales (Salençon (2002)). A partir de cette description, on peut aboutir à la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (1.35)$$

où \mathbf{A} est un tenseur d'ordre 4. Si le matériau granulaire est anisotrope (argile, matériaux sédimentaire sous forme de strates etc.), ce tenseur permet de tenir compte des directions privilégiées. En revanche, lorsque le matériau est élastique, isotrope et linéaire, deux coefficients suffisent pour décrire son comportement élastique. On se limite généralement au cas de comportement isotrope compte tenu de la marge d'erreur admise par les ingénieurs de mécanique des sols et de la difficulté d'identifier expérimentalement les paramètres caractérisant le comportement anisotrope. Le comportement élastique du matériau peut alors s'écrire sous la forme :

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \left(K - \frac{2G}{3}\right) \epsilon_{kl}\delta_{kl}\delta_{ij} \quad (1.36)$$

cette écriture, dans laquelle δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker, se lit en tenant compte des indices répétés. Les coefficients G est le module de cisaillement et K est le module de compressibilité. Contrairement aux métaux, les expériences sur les matériaux granulaires montrent que ces modules ne sont pas constants. Dans la majorité des modèles de mécanique des sols ces modules dépendent de l'état de contrainte. Dans le modèle de Lade et Nelson (1987), à titre d'exemple, ces modules dépendent de la pression hydrostatique, de la contrainte équivalente de Von-Mises et de plusieurs paramètres d'ajustement.

1.6.2 Plasticité Parfaite

La plasticité repose d'abord sur la décomposition de la déformation en partie élastique et partie plastique : $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p$. D'après Lubliner (1990), cette décomposition est

compatible avec l'existence d'une énergie W , telle que définie dans l'inégalité (1.33), si et seulement si W peut être décomposée comme suit : $W(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\alpha}) = W_1(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p, \boldsymbol{\alpha}) + W_2(\boldsymbol{\alpha})$. Ainsi, la dissipation peut être écrite sous la forme :

$$\dot{D} = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0. \quad (1.37)$$

Une hypothèse classique (Lemaitre et Chaboche (2001), Lubliner (1990)) permet d'annuler certains termes dans la relation précédente. Il s'agit de supposer que les variables évoluent indépendamment. En se donnant une transformation pour laquelle les déformations plastiques et les variables internes sont conservées ($\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = 0$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = 0$), sachant que la relation est valable pour tout $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$, on déduit que :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \quad (1.38)$$

Par analogie, on définit des forces thermodynamiques correspondant aux variables internes. Le premier terme non nul de l'équation (1.37) correspond à la dissipation plastique $D^i = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ et le deuxième correspond au reste des variables de dissipation. A ce niveau, il convient de faire appel au principe de dissipation maximale. Ce principe stipule que parmi les états de contraintes plastiquement admissibles $\boldsymbol{\sigma}^* \in \mathbb{P}$, l'état de contrainte réel rend maximale la dissipation plastique (Lemaitre et Chaboche (2001), Salençon (2002), Lubliner (1990)). Le terme plastiquement admissible est important puisqu'il sous entend l'existence d'un domaine délimité par une fonction $g(\boldsymbol{\sigma}^*) \leq 0$. Pour simplifier les calculs, on suppose que cette fonction est convexe et qu'elle contient l'origine. Le principe de maximum de dissipation devient alors un problème d'optimisation sous contrainte d'inégalité sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = - \inf_{g(\boldsymbol{\sigma}^*) \leq 0} \boldsymbol{\sigma}^* : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (1.39)$$

La résolution de ce problème de minimisation sous contrainte d'inégalité est classique et comporte trois étapes. La première consiste à se donner un réel positif λ et à écrire le Lagrangien $L(\boldsymbol{\sigma}, \lambda) = \boldsymbol{\sigma}^* : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + \lambda g(\boldsymbol{\sigma}^*)$, où λ est appelé multiplicateur de Lagrange. La deuxième étape consiste à maximiser le Lagrangien pour aboutir à la règle d'écoulement :

$$\boldsymbol{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (1.40)$$

La troisième étape est sous forme de condition supplémentaire $\min(\lambda g(\boldsymbol{\sigma})) = 0$. Cette étape implique que si $g(\boldsymbol{\sigma}) > 0$ alors $\lambda = 0$. Ces conditions sont connus aussi sous

le nom des conditions de complémentarité de Kuhn-Tucker. Ainsi, dès qu'on connaît g , le problème d'élastoplasticité peut être résolu. La technique qui vient d'être décrite est généralement applicable pour les métaux qui admettent un potentiel plastique, g , confondu avec la fonction de charge f (matériau standard ou associé). La fonction, f qui définit la limite élastique d'un matériau est obtenue expérimentalement. Les matériaux granulaire ont comportement plutôt non associé où le potentiel g diffère de de la fonction de charge f . Au cours de l'écoulement plastique, la fonction f répond à la condition de consistance postulée par Drucker stipulant que pendant le chargement plastique, $df = 0$. Plusieurs modèles de plasticité parfaite existent dans la littérature pour décrire, f . Ils sont tous identifiés expérimentalement. Nous en présentons dans le tableau (1.1) quelques exemples appliqués aux matériaux granulaires.

Modèle	Fonction, f	Type de matériaux
Tresca	$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1 - \sigma_3 - 2c$	Argiles
Mohr-Coulomb	$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1 - \sigma_3 - \sin \phi(\sigma_1 + \sigma_3) - 2c \sin \phi$	Différents M G
Drucker-Prager	$f(\boldsymbol{\sigma}) = \alpha_1 I_1 + \sqrt{J_2} - k$	Sables et argiles
Matsuoka-Nakai	$f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{I_1 I_2}{I_3} - k$	Sables

TAB. 1.1: Surfaces de charges usuelles

La relation de consistance des surfaces de charge est importante pour calculer les relations incrémentales entre les contraintes et les déformations, aussi bien en plasticité parfaite qu'en plasticité avec écrouissage. On verra plus tard que cette condition apporte plus de flexibilité aux modèles élastoplastiques avec écrouissage.

1.6.3 Écrouissage

La relation de consistance permet d'aboutir à une relation incrémentale entre les contraintes et les déformations. En général, f dépend du tenseur de contrainte de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$ et d'un ensemble de paramètres a_1, \dots, a_n . Si ces paramètres permettent uniquement l'expansion de la surface de charge, l'écrouissage est dit isotrope. En revanche, s'ils permettent de translater la surface de charge, l'écrouissage est dit cinématique (1.5). Les deux mécanismes peuvent être combinés et on parle alors d'écrouissage mixte. En tenant compte de la consistance, le théorème d'Euler permet de différencier la fonction, f , comme

suit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial a_i} : da_i \quad (1.41)$$

A partir de la relation précédente et de la règle d'écoulement (1.40), on aboutit à une relation incrémentale entre la contrainte et la déformation comme le montre l'exemple présenté dans le paragraphe suivant. L'écrouissage élastoplastique isotrope des matériaux granulaires a été introduit dans les années cinquante. Cette technique a connu un grand succès après l'introduction des modèles avec "cap" et des modèles de Cam-clay³.

Les modèles Cam-Clay

Les modèles Cam-Clay, comme leur nom l'indique, concernent essentiellement les argiles, mais ils admettent une extension pour s'appliquer aux sables. Ils reposent sur trois éléments principaux : une élasticité non linéaire, une relation de contrainte-dilatance et une surface de charge. On distingue essentiellement deux familles de modèles Cam-Clay dont nous avons tracé les surfaces de charge et les droites d'état critique sur les figures (1.4).

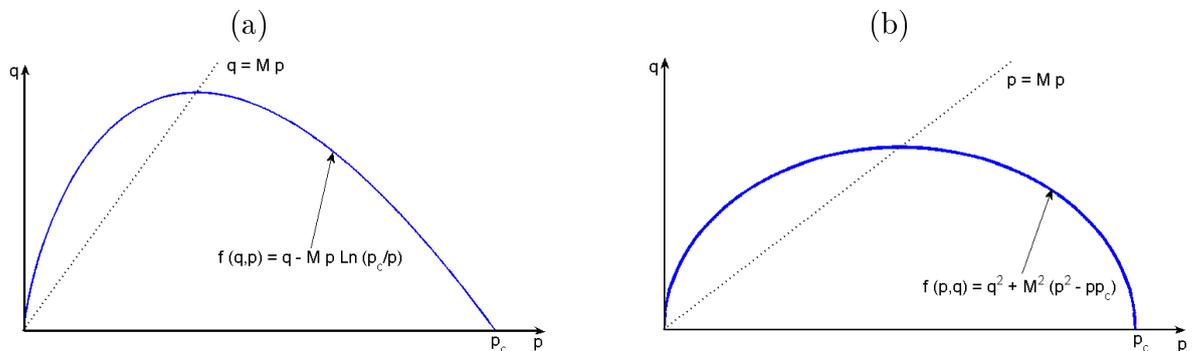


FIG. 1.4: Les surfaces de charges des modèles Cam-Clay (a) original et (b) modifié

Lorsque l'état de contrainte (p, q) est situé à droite de la ligne critique, la surface de charge subit une expansion que les chercheurs appellent écouissage "sub-critique" ou "mouillé". Dans ce cas la contrainte q subit une croissance monotone par rapport à la déformation. En revanche, lorsque l'état de contrainte est situé à gauche de cette ligne,

³ Modèles introduits par Roscoe et ses étudiants, dans les années cinquante, à l'université de Cambridge pour décrire les argiles d'où les termes "Cam" qui abrège Cambridge et "Clay" qui signifie argile.

le comportement est dit “sec” ou “super-critique”. La courbe de variation de la contrainte q par rapport à la déformation admet alors un pic puis une évolution adoucissante. Il est important de noter également que le modèle original et le modèle modifié diffèrent non seulement par leurs surfaces mais aussi par leurs comportements élastiques et leurs relations contrainte-dilatation. Une description détaillée de ces différences a été rappelée par (Hicher and Shao (2002)).

Les cap-modèles

Contrairement aux modèles Cam-Clay décrits par une seule surface de charge, les cap-modèles sont décrits par plusieurs surfaces. En effet, il faut d’abord une première surface conique de génératrice triangulaire (Matsuoka-Nakai), hexagonale (Mohr Coulomb), ou circulaire (Drucker-prager), une deuxième surface qui ferme la première au niveau des axes de compression isotrope (appelée aussi “cap”), et éventuellement une troisième surface pour réaliser un raccordement régulier. Une illustration de ce type de modèles est représenté sur la figure (1.5-a).

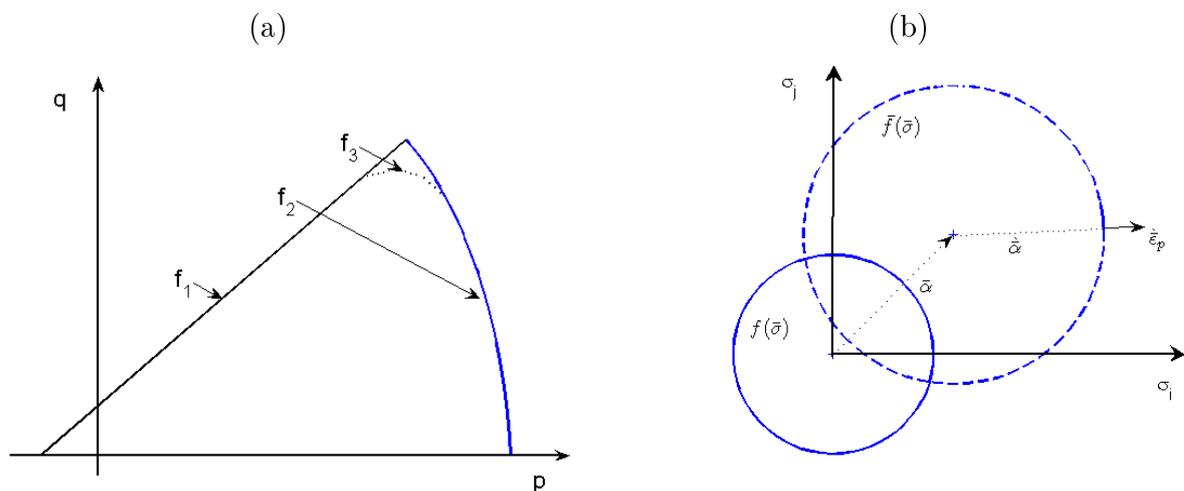


FIG. 1.5: Illustrations graphiques des (a) cap-modèles et de (b) l'écroûissage cinématique

L'apport du cap concerne essentiellement la surface f_2 (figure (1.5)) qui subit de l'expansion quand il y a des déformations plastiques sous pression hydrostatique.

1.6.4 Un modèle élasto-plastique cyclique

Dans le cadre de cette thèse, les simulations que nous proposons sont essentiellement discrètes. En effet, décrire le ballast des chemins de fer par un modèle continu viole une hypothèse importante de la mécanique des milieux continus qui stipule qu'un volume élémentaire représentatif doit contenir un nombre important de grains. Ceci ne nous empêche pas de montrer qu'un modèle continu peut donner, à priori, des résultats intéressants en terme de dérive de tassement en fonction du nombre de cycles. Le modèle que nous proposons est basé sur l'érouissage mixte. Nous nous sommes inspirés du modèle de Lemaitre et Chaboche (2001) développé pour décrire le phénomène de rochet dans les métaux aux structures amorphes. Contrairement à ce modèle qui repose sur le critère de Von Mises, nous avons opté pour le critère de Drucker-Prager qui décrit mieux les comportements des matériaux granulaires. Ce genre de modélisation est encore d'actualité, en effet, (Hau et al. (2005)) ont proposé récemment un modèle semblable basé sur le critère de Cam-Clay pour étudier le tassement des sols sous sollicitations quasi-statiques. Dans cette section, nous présentons une brève description du modèle que nous avons implémenté à l'aide d'une procédure en Fortran et introduit dans le code de calcul commercial Abaqus. Nous invitons le lecteur à consulter l'annexe c afin de trouver plus de détails. Il s'agit de partir de la décomposition additive de l'incrément de déformation :

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^i + d\epsilon_{ij}^c \quad (1.42)$$

Les exposants "e", "i" et "c" signifient respectivement élastique, plastique isotrope et plastique cinématique. Le comportement élastique du matériau est décrit par la loi de Hooke (1.35) et la surface de forme est décrite par le critère de Drucker-Prager. Le matériau est pris non associé et son potentiel élastique est pris de la forme de la fonction de Drucker-Prager. Les coefficients α_1 et α_2 qui figurent dans les fonctions surface de charge, f, et potentiel plastique, g, peuvent être identifiés pour décrire l'écoulement du matériau granulaire (annexe c). Quand on dispose de résultats expérimentaux donnant accès à l'angle de frottement, l'angle de dilatance, ainsi que la cohésion du matériau, on peut exprimer les paramètres du modèle comme suit :

$$a_1 = -\frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}, \quad a_2 = -\frac{2 \sin \psi}{\sqrt{3}(3 - \sin \psi)}, \quad k = \frac{2c(\epsilon^p) \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad (1.43)$$

Nous avons pris un angle de frottement $\phi = 45$ et un angle de dilatance $\psi = 15$. Quant au comportement élastique, nous l'avons considéré comme linéaire isotrope décrit par un

module d'Young de $E = 200\text{MPa}$ et un coefficient de Poisson de $\nu = 0.3$ conformément aux suggestions d'Al-Shaer (2005). Les expressions (1.43) montrent les relations entre les résultats expérimentaux qui peuvent être obtenus par l'essai triaxial et le critère de Drucker-Prager. Dans le cas de nos simulations numériques nous avons sélectionné les constantes en se référant aux travaux de Hicher and Shao (2002). L'érouissage isotope du matériau est décrit par la courbe effective présentée par les trois couples de points suivants $(\epsilon^p, \sigma_e \text{ (MPa)}) = \{(0,0.1), (0.002,0.3), (0.0049,0.5), (0.01,0.7)\}$.

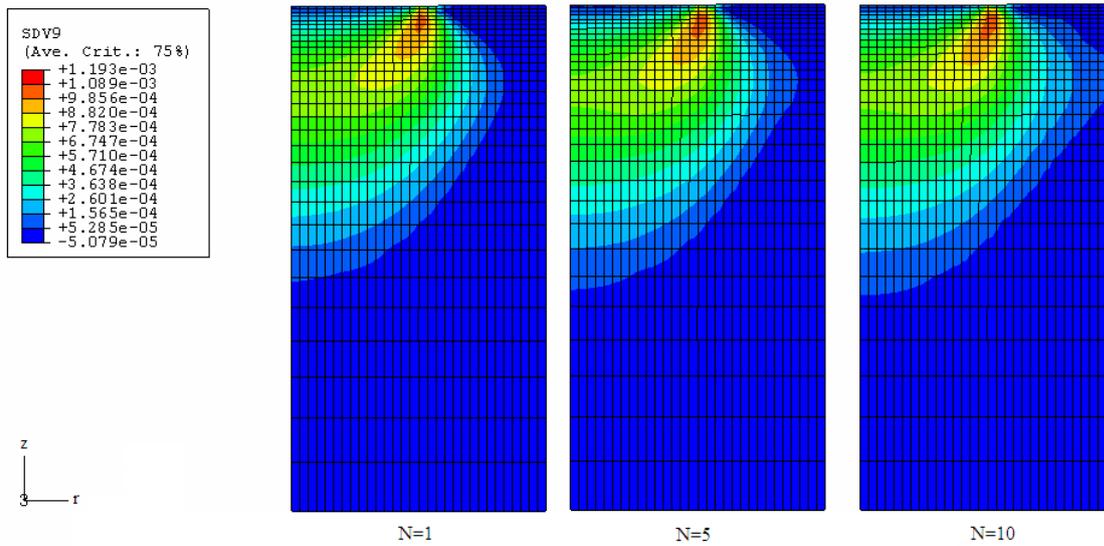


Fig. 1.6: Propagation de la zone de plasticité.

La géométrie et le maillage du modèle sont présentés dans la figure (1.6) où l'éprouvette est de longueur 150mm et de rayon 75mm . Les conditions aux limites sont : $u_r = u_z = 0$ à $z = 0$ et $u_r = 0$ à $r = R$. Le modèle considéré est axisymétrique et les éléments sont quadratiques linéaires. Nous notons en outre que nous nous intéressons à deux cas de chargement. Le premier consiste à appliquer une pression sinusoïdale de la forme $q = q_0(1 + \sin(2\pi ft))$ où $q_0 = 0.3\text{MPa}$ et $f = 10\text{Hz}$ sur la moitié interne de la surface supérieure et le second consiste à l'appliquer sur la totalité de la surface supérieure.

Nous avons implémenté le modèle dans un code d'élément finis commercial (ABAQUS) qui offre la possibilité d'intervenir à plusieurs niveaux et notamment à celui du comportement des matériaux. En l'absence de module adéquat pour le calcul cyclique avec les critères de mécanique des milieux granulaires, nous avons introduit notre modèle sous forme de procédure de calcul écrite sur Fortran. La figure (1.7) montre le cumul de

déformations sous chargement cyclique dans le cas d'écroissage isotrope et mixte, pour les deux cas de chargement. Nous verrons plus tard que ces résultats sont conformes aux résultats expérimentaux dans le sens où la dérive de tassement est beaucoup plus importante dans le cas d'échantillons partiellement confinés. Cependant, nous verrons que la vitesse de tassement augmente avec la fréquence. Cet aspect peut être reproduit facilement en considérant l'effet du taux de chargement ("rate dependent loading effect").

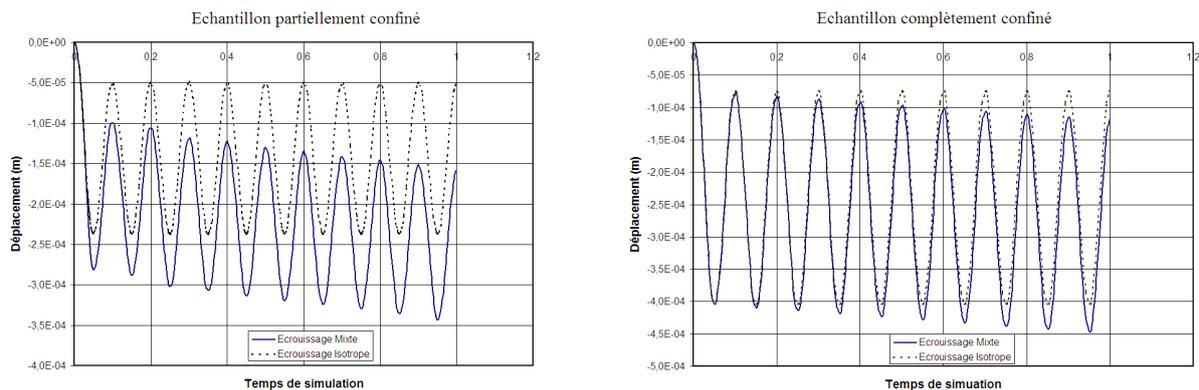


Fig. 1.7: Simulation par éléments finis du mécanisme de tassement - Modèle d'Écroissage Mixte.

Contrairement aux cas d'écroissage isotrope où la zone de déformation plastique atteinte au premier cycle reste la même pendant les différents cycles de chargement suivants, le cas d'écroissage isotrope produit un effet de propagation de cette zone. A chaque nouveau cycle de chargement la déformation plastique atteint de nouvelles zones comme le montrent les figures (1.6).

Le modèle présenté dans ce paragraphe permet de montrer que la prise en compte de l'écroissage cinématique est apte à modéliser le tassement cyclique. Ce modèle est toutefois simplifié par rapport aux modèles généralement utilisés pour décrire le comportement cyclique des géomatériaux (Prevost and Keane 1990, Hujeux (1982)). En effet, ces modèles doivent tenir compte des phénomènes tels que : la dilatance, l'augmentation de déformation plastique cyclique avec le déviateur de contraintes, avec la position des cycles dans le plan des contraintes, l'état de densité, etc. De plus les déformations plastiques apparaissent généralement pour des valeurs très faibles du déviateur de contraintes. Cet aspect n'est pas reflété par le modèle représenté ci-dessus. Par ailleurs, les premières utilisations de ces modèles en grand nombre de cycles avaient tendance à surévaluer fortement

le tassement cyclique : ce constat a d'ailleurs conduit à la mise en place par [Abdelkarim et al. \(2003\)](#) d'un modèle de comportement cyclique "global" qui nécessite d'être alimenté par des paramètres mesurés sur essais cycliques. Enfin, des résultats récents sur des matériaux de type "ballast" ([Karraz et al. \(2007\)](#)) ont montré qu'il existe un effet d'échelle significatif pour des structures en matériaux granulaires contenant très peu de gains. Pour toutes ces raisons, les simulations ont été réalisées dans ce mémoire par la dynamique moléculaire.

1.7 Conclusion

De nombreux travaux accumulés ces dernières années montrent la complexité du comportement des matériaux granulaires surtout lorsqu'ils sont soumis à des agitations intenses. Ce chapitre a été consacré à la synthèse bibliographique de quelques résultats qui ont été obtenus dans ce contexte. Dans un premier temps, des observations sur la dynamique des matériaux granulaires ainsi que leurs instabilités surfaciques sous vibration ont été discutées. Ensuite, quelques méthodes discrètes de simulation ont été décrites dans un bref aperçu. Cette description a permis de mettre l'accent sur les lois de contacts qui peuvent jouer un rôle important dans la description des matériaux granulaires à l'échelle des constituants. Le dernier paragraphe de ce chapitre a été consacré à la description de quelques modèles élastoplastiques utilisés pour étudier les milieux granulaires. Nous nous sommes limités, dans ce cadre, aux modèles qui découlent de l'inégalité de Clausius-Duhem et du principe de maximum de dissipation. Nous signalons toutefois que d'autres approches plutôt phénoménologiques telles que l'hypoplasticité ou les modèles endochroniques sont également utilisés. A travers un exemple de calcul par élément finis, basé sur l'érouissage mixte, nous avons montré qu'il est possible de décrire le tassement avec un modèle élastoplastique continu. Cependant, nous avons indiqué les limites d'une telle approche.

Au cours de notre étude bibliographique, nous nous sommes intéressés aussi à la théorie cinétique dont nous avons présenté un aperçu (annexe b). Étant donné que cette théorie est fondée sur une approche statistique qui a fait ses preuves dans de nombreux domaines et qui permet de décrire rigoureusement le comportement des fluides granulaires, elle peut être appliquée à notre cas d'étude. Cependant, la complexité des équations différentielles qui décrivent l'écoulement nécessite des simplifications excessives pour résoudre le problème à la main. Il se trouve que des simplifications en ne tenant compte que de

l'ordre 1 réduisent les équations à une forme linéaire qui ne permet d'aboutir qu'à des solutions simples qui ne comportent pas l'aspect dissipatif à long terme observé expérimentalement. D'autre part la théorie cinétique ignore l'effet des formes de grains sur l'écoulement. Pourtant, nous montrerons plus tard que cet aspect est important puisqu'il influence en particulier les vitesses de tassement. Confrontés à ces problèmes, nous avons privilégié l'approche discrète qui permet d'avoir des réponses plus réalistes puisqu'elle repose sur des hypothèses moins simplificatrices. Les approches continues restent toutefois prometteuses pour comprendre le phénomène que nous étudions.

Dans le cadre de cette thèse, nous décrivons d'abord la méthode discrète que nous utilisons pour décrire le tassement des matériaux granulaires sous vibration. Ensuite, nous présentons les méthodes de préparation des échantillons ainsi que leurs réponses sous chargements quasi-statiques. Nous nous penchons également sur le tassement de ces matériaux sous vibration. Pour ce faire, nous procédons d'abord expérimentalement en étudiant le tassement dans le cas confiné et non confiné et en cherchant les facteurs expérimentaux qui affectent le plus ce phénomène. Nous présentons par la suite, une étude numérique du mécanisme de tassement et nous proposons vers la fin une méthode de prédiction du tassement à long terme.

Deuxième partie

Les Matériaux Granulaires en
Quasi-statique

Chapitre 2

Simulation numérique discrète par la méthode de la dynamique moléculaire

Sommaire

2.1	Introduction	46
2.2	Méthode de simulation numérique	47
2.2.1	Equations du mouvement	47
2.2.2	Interaction des particules	48
2.2.3	Détection des contacts	51
2.2.4	Schéma numérique suivant l'algorithme prédicteur-correcteur	54
2.3	Préparation des échantillons	55
2.3.1	Paramètres de simulation	57
2.3.2	Compacité des assemblages aléatoires	59
2.3.3	Nombre de coordination	63
2.3.4	Orientations des contacts	64
2.4	Effet de la paroi sur la distribution des contraintes dans un agglomérat granulaire cylindrique	66
2.4.1	Phénomène d'écrantage	67
2.4.2	Résultats Numériques	68
2.5	Conclusion	71

2.1 Introduction

Les matériaux granulaires représentent les assemblages de solides discrets. Les tailles des constituants sont relativement importantes pour pouvoir négliger les efforts de faible portée et les effets thermiques. A l'échelle de la micro-structure, le comportement des matériaux granulaires est régi essentiellement par la nature du contact intergranulaire. Par conséquent, l'étude des mécanismes de fluidification, de compaction etc. nécessite la compréhension des interactions à l'échelle des grains. Dans le cas 2D, l'approche expérimentale par caméra numérique donne accès aux variables locales telles que les coordonnées, les vitesses et les accélérations des particules. Cependant, dans le cas 3D, la tâche devient plus délicate puisque l'accès à la majorité des grandeurs physiques devient difficile. Une approche numérique discrète permet d'estimer de telles grandeurs. Pour étudier de façon globale le comportement d'un milieu granulaire, plusieurs expériences classiques de caractérisation, tels que les essais œdométrique, triaxial ou de cisaillement sont couramment utilisées.

Dans le cadre de cette étude, nous adoptons la méthode de la Dynamique Moléculaire (DM) pour les simulations numériques discrètes. Depuis son introduction, cette méthode a couvert plusieurs champs d'application aussi bien dans le domaine des sciences fondamentales qu'appliquées. Elle permet d'étudier les interactions moléculaires d'où son appellation mais aussi les mécanismes complexes tels que le transport ([Moon et al. \(2003\)](#)), le mixage ([Clément et al. \(1995\)](#)), la ségrégation ([Ciamarra et al. \(2005\)](#)), la compaction ([Rosato et Doris \(2000\)](#)) etc. afin de pouvoir les exploiter dans les domaines pharmaceutique, agroalimentaire ou en mécanique des sols. Couplée avec l'approche expérimentale, la DM est actuellement reconnue en tant qu'outil fondamental pour l'étude des matériaux granulaires. D'après [Cundall et Strack \(1979\)](#), pionniers de l'application de la DM aux sciences de l'ingénieur, la simulation classique par éléments discrets consiste à résoudre de façon itérative les équations de Newton pour chaque particule, en tenant compte des forces de contact et de gravité. Ainsi, les champs de vitesses, les trajectoires et les composantes des forces de contact des particules se déterminent au cours de l'écoulement.

Dans la première section de ce chapitre, nous décrivons la méthode de simulation numérique en nous intéressant plus particulièrement aux lois de contact ainsi qu'à l'algorithme de calcul. Dans la deuxième section, nous nous intéressons à la préparation des assemblages granulaires. Dans la troisième section, nous nous concentrons sur l'effet de la paroi sur la distribution des contraintes dans un assemblage granulaire cylindrique.

2.2 Méthode de simulation numérique

Les simulations numériques sont réalisées à l'aide d'un code de calcul écrit en Fortran dont nous avons développé les routines en nous appuyant sur les travaux de Roux (2004) ainsi que sur son code de calcul qui traite des grains sphériques dans une configuration parallélépipédique périodique. Les modifications apportées au code se situent notamment au niveau des lois de contact que nous avons modifiées pour tenir compte des non linéarités ainsi qu'au niveau des effets de bords, où nous considérons les interactions avec une paroi cylindrique. Nous avons apporté des modifications au niveau des techniques de détection, des lois de contact et des définitions des interactions afin de traiter le cas de grains de formes polygonales qui sont plus complexes à gérer. Dans ce paragraphe, nous décrivons la méthode de calcul numérique, les procédures de détection de contact dans les cas de grains sphériques, circulaires et polygonaux ainsi que le principe de l'algorithme prédicteur-correcteur utilisé dans le cadre de cette étude. Le lecteur est invité à consulter Cundall et Strack (1971) et Allen et Tildesley (1989), afin de trouver plus de détails concernant la méthode de dynamique moléculaire ainsi que les différents algorithmes d'intégration des équations du mouvement.

2.2.1 Equations du mouvement

La méthode de dynamique moléculaire telle qu'adaptée par les mécaniciens fait intervenir la seconde loi de Newton pour décrire l'évolution des assemblages granulaires au cours du temps. Pour une particule α donnée d'un système granulaire \mathcal{S} , l'équation d'évolution s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\ddot{r}_\alpha &= \sum_{\beta \in \mathcal{S}} \frac{F_{\alpha\beta}}{m_\alpha} + g \\ \ddot{\theta}_\alpha &= \sum_{\beta \in \mathcal{S}} \frac{M_{\alpha\beta}}{I_\alpha}\end{aligned}\tag{2.1}$$

où m_α est la masse de la particule α , I_α est son moment d'inertie, F_α représente les efforts d'interactions, g désigne les efforts à distance et M_α représente les moments appliqués à la particule α . Plusieurs schémas numériques tels que l'algorithme prédicteur-correcteur ou l'algorithme de Verlet permettent d'intégrer cette équation d'évolution. Ces algorithmes comportent une étape dédiée au calcul des actions d'interaction dans chaque nouvelle configuration.

2.2.2 Interaction des particules

Les forces et les moments qui figurent dans l'équation (2.1) sont évalués en fonction des positions, des vitesses et de la nature des particules. Étant donné que la dynamique moléculaire repose essentiellement sur les interactions intergranulaires, une attention particulière est accordée aux choix des lois de contact. Les lois les plus réalistes qui décrivent l'interaction de deux particules voisines sont généralement non linéaires, dissipatives et dépendent des chemins de chargement.

Contact de Hertz-Mindlin

Parmi les lois les plus répandues dans la littérature, on distingue les lois de Hooke, Hertz (1882), Mindlin et Deresiewicz (1953) et la loi conique (Johnson (1985)). Pour les particules sphériques, nous avons opté pour le contact de Hertz pour décrire l'effort normal (paragraphe 1.4.2) :

$$F_n^e = k_n \delta_n = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} \delta_n^{3/2} \quad (2.2)$$

où E^* est le module d'Young équivalent, R^* est le rayon équivalent de deux sphères voisines. La loi définie ci-dessus engendre une surface de contact circulaire de rayon a qui dépend de l'interpénétration normale δ_n . Nous supposons que ce contact est sans glissement, il produit un déplacement tangentiel uniforme. Selon Johnson (1985), ce type de contact engendre un cisaillement de la forme $q(r) = q_0(1 - (r/a)^2)^{1/2}$, par rapport au cercle de rayon a et de centre $r = 0$. Le déplacement correspondant à cette traction est proportionnel à l'effort de contact tangentiel :

$$F_t^e = 8G^* a \quad (2.3)$$

Ainsi, la loi de contact tangentiel peut être déterminée dans le cas sphérique, $F_t^e = k_t \delta_t = 8G^* \sqrt{R^*} \delta_n^{1/2} \delta_t$. Ce déplacement est évalué en fonction de la vitesse relative $v_{t_{\alpha\beta}}$ de deux particules voisines qui rentrent en contact à l'instant t_0 , $\delta_t = \int_{t_0}^t v_{t_{\alpha\beta}} dt$.

Distributions uniformes de la pression et de la traction

Dans le cas de grains de forme polygonale, nous avons opté pour une loi particulière basée sur l'hypothèse d'uniformité des tractions tangentielles et des pressions normales,

au niveau des surfaces de contact des grains tel que le montre la figure (2.1). Ainsi en partant des équations d'équilibre d'un demi espace élastique sous chargement ponctuel et en utilisant le principe de superposition, Johnson (1985) montre que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial x} &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}p(x) - \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{q(s)}{x-s} ds \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} &= \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}qx - \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{p(s)}{x-s}\end{aligned}\quad (2.4)$$

L'intégration de ces équations par rapport à l'axe des x permet d'aboutir aux déplacements normal et tangentiel suivants :

$$\begin{aligned}u_x &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}px - \frac{(1-\nu^2)}{\pi E}q \left\{ (a+x)Ln\left(\frac{a+x}{a}\right)^2 - (a-x)Ln\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 \right\} + C_x \\ u_z &= \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}qx - \frac{(1-\nu^2)}{\pi E}p \left\{ (a+x)Ln\left(\frac{a+x}{a}\right)^2 - (a-x)Ln\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 \right\} + C_z\end{aligned}\quad (2.5)$$

Les constantes d'intégration peuvent être déduite en supposant que les déplacements s'annulent à une distance c donnée par rapport à l'origine. Nous prenons $c = na$ où a est la largeur de la zone de contact. Ainsi, quand $n \gg 1$, on peut montrer qu'à l'origine, les déplacements peuvent être écrits sous la forme :

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{(1-2\nu)(1+\nu)ap}{E}n + \frac{2(1-\nu^2)aq}{\pi E}nLn(n) \\ u_z &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)aq}{E}n + \frac{2(1-\nu^2)ap}{\pi E}nLn(n)\end{aligned}\quad (2.6)$$

Afin de simplifier les calculs numériques, on suppose également que $Ln(n) \gg 1$ et que p et q sont du même ordre de grandeur. Ainsi, on aboutit à des relations de la forme :

$$\begin{aligned}F_n &= k_n u_x \\ F_t &= k_t u_y\end{aligned}\quad (2.7)$$

où les raideurs sont de la forme $k_n = k_t = 2\frac{\pi E}{n(1-\nu^2)}$, mais étant donné que n est inconnu, il est nécessaire de procéder par identification expérimentale de ces raideurs sachant que n est $\gg 1$. Cette forme de loi sera utilisée dans le cas de grains polygonaux et de grains circulaires. Dans la section suivante, on intégrera également les effets viscoélastiques sous forme de variables phénoménologiques.

Intégration des dissipations dans les lois de contact

Les efforts agissant sur les particules comportent aussi des termes visqueux. Il s'agit d'introduire des termes phénoménologiques inspirés du modèle de Kelvin-Voigt (un ressort en parallèle avec un amortisseur). D'abord la force normale est calculée en se basant

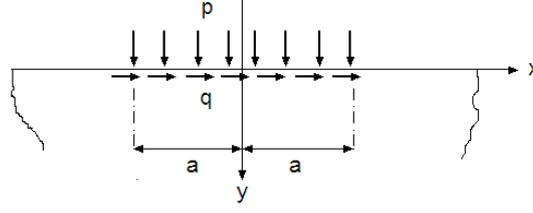


Fig. 2.1: *Distribution de pression et de traction uniformes*

sur la configuration à l'incrément $t - \delta t$ permettant d'obtenir les vitesses des constituants du milieu granulaire. Autrement dit, les positions donnent accès à des interpénétrations et donc à des efforts normaux. Les vitesses donnent accès à un terme visqueux correspondant à une force opposée à la vitesse normale. Les vitesses tangentielles et les durées des contacts permettent de calculer les efforts tangentiels provisoires. Ainsi, disposant d'un effort tangentiel et normal, on peut effectuer le test de Coulomb. Il s'agit d'examiner si les efforts tangentiels atteignent le seuil de Coulomb, si c'est le cas $F_t = \mu F_n$ où μ est le coefficient de frottement. Par la suite, on applique des efforts visqueux tangentiels au niveau du contact en question. Ainsi, les efforts de contact appliqués à une particule α s'écrivent sous la forme :

$$F_n = F_n^e - \gamma_n v_n$$

$$F_t = \begin{cases} F_t^* - \gamma_t v_t & \text{si } \|F_t^*\| \leq \mu F_n \\ \text{sign}(F_t^*) \mu F_n - \frac{m}{2} \gamma_t v_t & \text{si } \|F_t^*\| > \mu F_n \end{cases} \quad (2.8)$$

Les constantes m et d représentent la masse et le diamètre de la particule, $\gamma_{n,t}$ sont des coefficients phénoménologiques décrivant les amortissements visqueux normal et tangentiel respectivement. Les valeurs de ces coefficients sont liées aux coefficients de restitution $e_{n,t}$, ils s'écrivent sous la forme $\gamma_{n,t} = \alpha_{n,t} \sqrt{m k_{n,t}}$ où $\alpha_{n,t}$ représentent les coefficients de dissipation $\alpha_{n,t} = -\ln(e_{n,t}) / (\pi^2 + \ln^2(e_{n,t}))^{1/2}$.

L'une des différences importantes entre la loi de Hooke et les lois non-linéaires se situe au niveau du contact tangentiel et fait intervenir le chemin de chargement. Roux (2004) et Elata et Berryman (1996) montrent que les lois de contact qui comportent une raideur tangentielle k_t dépendant de l'interpénétration δ_n peuvent être thermodynamiquement incohérentes. En effet, certains chemins de chargement génèrent une énergie fictive dans le système. Afin d'argumenter ce constat, Agnolin et Roux (2007a) donnent un contre

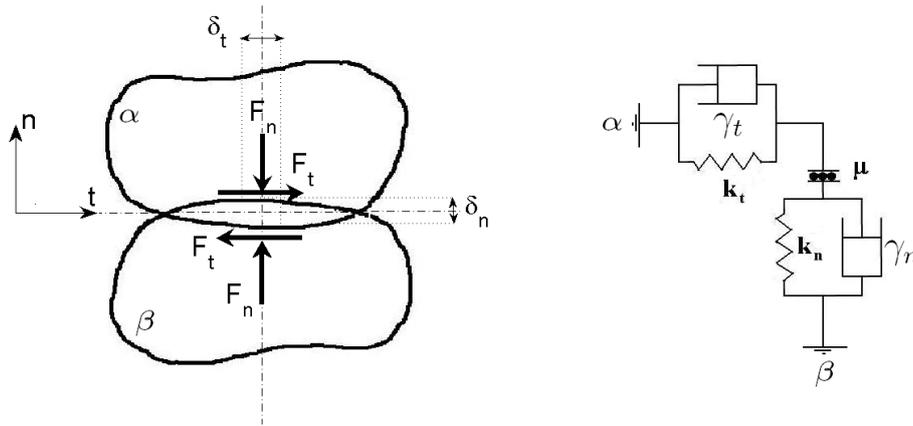


Fig. 2.2: Modèle de contact de corps déformables

exemple basé sur la loi de Hertz-Mindlin. Il s'agit de considérer un chargement situé à l'intérieur du cône de Coulomb pour lequel la force normale, f_n , diminue alors que la force tangentielle, f_t , reste constante par rapport au temps. L'énergie élastique emmagasinée dans le système est alors de la forme $\frac{2}{5}E^*\sqrt{R^*}\delta_n^{5/2} + \frac{1}{2}\frac{f_t^2}{k_t}$. Sous ce chargement particulier, l'énergie augmente puisque k_t diminue, sans qu'il y ait chargement externe. Afin d'éviter ce problème, une procédure de rectification a été proposée (Agnolin et Roux (2007a)) : dès que l'effort normal F_n diminue de ΔF_n , l'effort tangentiel est multiplié par le facteur $\frac{k_t(f_n - \Delta f_n)}{k_t(f_n)}$. Notons que ce problème ne se pose pas dans le cas où les lois sont linéaires (2.7).

2.2.3 Détection des contacts

La détection des voisins est une étape de préparation à la détection des contacts. Il s'agit d'identifier les grains susceptibles d'être en contact à un incrément donné. Parmi les techniques utilisées pour détecter les voisins, on distingue le quadrillage de l'espace utilisé par Cundall et Strack (1971). Cette technique consiste à subdiviser le milieu granulaire en plusieurs cellules sous forme de pavés. Lors de la recherche des voisins on se contente de vérifier les cellules voisines. Le maillage de l'espace suit dans ce cas la granulométrie des constituants. La deuxième technique utilisée couramment est la technique de "halo" que l'on peut trouver décrite avec plus de détails par Oviedo-Marlot (2001). Cette technique consiste à identifier, au niveau de l'étape d'initialisation, un rayon moyen, r_m , des espaces dans lesquels les grains sont circonscrits. Pendant le calcul des trajectoires, on définit

autour du centre de gravité de chaque grain α une boule B_α de rayon λr_m , où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pendant plusieurs incréments, la recherche des voisins de la particule se limite à son voisinage B_α . Le choix du paramètre λ , est crucial, en effet, il doit être assez petit pour ne pas faire de tests inutiles et assez grand pour ne pas manquer des contacts.

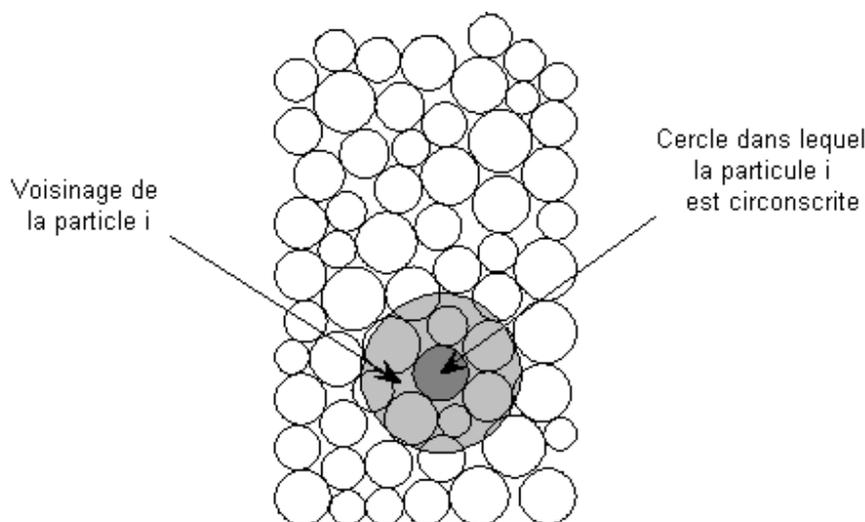


Fig. 2.3: *Technique de détection des voisins.*

Il faut noter qu'au cours des écoulements denses, les grains subissent de faibles déplacements irréversibles par rapport à leurs dimensions. Ainsi, les listes de voisins changent peu au cours du temps. Par conséquent, il est tout à fait avantageux de ne pas calculer les voisins à chaque pas de temps. D'autre part, dans notre cas particulier d'étude de tassement, les zones les plus proches de l'application des charges subissent plus de mouvement que celles qui sont situées au voisinage des parois fixes. Il est donc utile d'augmenter davantage la fréquence de calcul des voisins dans les zones de mobilité élevée. On note finalement que ces techniques peuvent être utilisées aussi bien dans les cas de grains réguliers circulaires et sphériques que dans le cas des grains irréguliers polygonaux.

Quand les listes de voisins sont identifiées, les contacts sont examinés de façon binaire. Pour la détection des contacts dans le cas de deux sphères ou cercles, α et β , il suffit de calculer leurs interpénétrations $\delta_{\alpha\beta} = R_\alpha + R_\beta - \|r_\alpha - r_\beta\|$. Lorsque $\delta_{\alpha\beta} > 0$, on dit que le contact existe. On calcule alors la normale du contact $n = \frac{r_\alpha - r_\beta}{\|r_\alpha - r_\beta\|}$ et le point d'application des forces qui coïncide avec le centre de gravité des deux grains.

Dans le cas de grains polygonaux, la tâche est un peu plus compliquée. Plusieurs travaux ont été réalisés pour détecter le contact quand on dispose de listes de voisins binaires

de formes polygonales. Les procédures les moins adéquates peuvent monopoliser plus de 80% du temps de calcul. L'optimisation de ce temps d'examen est donc crucial dans le cas de grains polygonaux et reste l'objet de recherches actives. L'une des techniques utilisées est celle du "Common Plane". D'après [Nezami et al. \(2003\)](#), cette technique consiste, à partir d'un couple de grains α et β , à déterminer un plan qui vérifie les propriétés suivantes :

- Les centres de gravité des deux particules sont situés de part et d'autre du plan commun ;
- Les distances des deux particules par rapport au plan sont égales en normes $\|d_\alpha\| = \|d_\beta\|$;
- La normale entre les deux particules minimise le gap $d_\alpha - d_\beta$.

Concrètement, le calcul consiste à identifier d'abord un point dit de référence (barycentre des deux grains) autour duquel le plan commun peut tourner de telle sorte que la normale se calcule de façon itérative. La direction qui minimise le gap est prise pour normale du contact et le point d'application de la force reste le point de référence. Le coût de cette méthode est associé surtout à la recherche de la normale puisqu'un grand nombre d'itérations est nécessaire pour assurer la convergence. D'autres techniques plus complexes telles que la "méthode du lien le plus court" introduite par [Nezami et al. \(2006\)](#), permettent de réduire le temps de calcul. Au lieu de procéder par itérations, le nombre de normales candidates est limité par la géométrie des grains.

Dans le cadre de cette étude, nous proposons une technique que nous avons voulu plus directe. Elle comporte essentiellement deux étapes : la première consiste à trouver les sommets extrêmes entre les grains et la deuxième consiste à trouver les points d'intersection. Deux grains polygonaux α et β peuvent être décrits par deux positions r_α et r_β et deux suites ordonnées de sommets $(s_{\alpha,i})_{i \in \llbracket 1, \tilde{n} \rrbracket}$ et $(s_{\beta,i})_{i \in \llbracket 1, \tilde{n} \rrbracket}$ où \tilde{n} est le nombre de sommets qui peut ne pas être le même pour les deux grains.

Initialement, la normale est calculée par défaut comme étant $n_0 = \frac{r_\alpha - r_\beta}{\|r_\alpha - r_\beta\|}$, comme le montre la figure (2.4-a). Par rapport à cette normale, les extrêmes sont calculées en maximisant le produit scalaire $n_0 \cdot Os_{\beta,i}$ et en minimisant $n_0 \cdot Os_{\alpha,i}$, par la méthode de dichotomie (O désigne le centre du repère). Dès que les sommets extrêmes sont disponibles, on cherche les intersections des arêtes en partant des sommets extrêmes. Dès que le nombre d'intersection atteint 2, on arrête les calculs et on identifie le point d'application de la force comme étant le barycentre p des deux points d'intersection i et j . La normale au contact est définie par le produit vectoriel $n = \frac{ij \wedge z}{\|ij \wedge z\|}$, où z est l'axe perpendiculaire au

plan des grains (2.4-b).

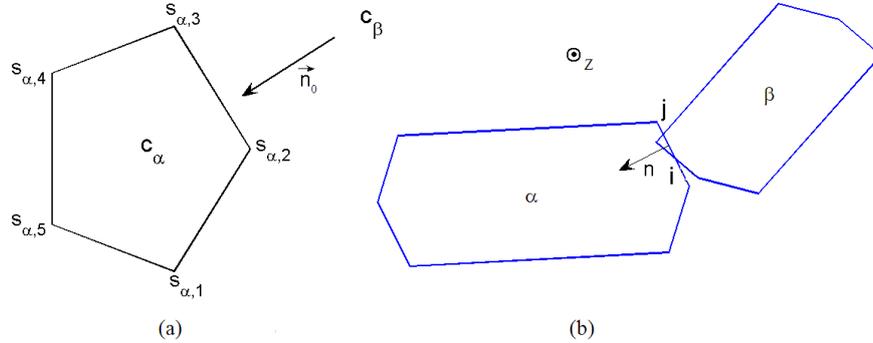


Fig. 2.4: (a) Détermination des sommets extrêmes par la méthode de dichotomie. (b) Identification du point d'application et de la normale de l'interaction.

2.2.4 Schéma numérique suivant l'algorithme prédicteur-correcteur

L'évolution d'un assemblage granulaire au cours du temps est évaluée en intégrant la seconde loi de Newton moyennant un schéma numérique de différences finies. Il s'agit de considérer un système conservatif de N particules dans une configuration connue, $\mathcal{S}(t) = (q_\alpha(t))_{\alpha \in \llbracket 1..N \rrbracket}$, où $q_\alpha(t)$ représente la position $r_\alpha(t)$ ou la rotation $\theta_\alpha(t)$ de la particule α à l'instant t . A partir de cette configuration et de ses dérivées par rapport au temps, la nouvelle configuration $\mathcal{S}^p(t + \Delta t)$ est prédite par un développement de Taylor :

$$\begin{aligned} q_\alpha^p(t + \Delta t) &= q_\alpha(t) + \dot{q}_\alpha(t)\Delta t + \ddot{q}_\alpha(t)\frac{\Delta t^2}{2} \\ \dot{q}_\alpha^p(t + \Delta t) &= \dot{q}_\alpha(t) + \ddot{q}_\alpha(t)\Delta t \end{aligned} \quad (2.9)$$

La configuration prédite permet de calculer les interactions entre les particules à l'instant $t + \Delta t$. Les accélérations qui en résultent sont généralement différentes des accélérations prédites. La différence entre les deux s'écrit :

$$\Delta a = \ddot{q}_\alpha^c(t + \Delta t) - \ddot{q}_\alpha^p(t + \Delta t) \quad (2.10)$$

Ces erreurs sont utilisées pour corriger la configuration prédite. La nouvelle configuration et les vitesses et accélérations qui lui correspondent s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} q_\alpha^c(t + \Delta t) &= q_\alpha^p(t + \Delta t) + c_0 \frac{\Delta t^2}{2} \Delta a \\ \dot{q}_\alpha^c(t + \Delta t) &= \dot{q}_\alpha^p(t + \Delta t) + c_1 \Delta t \Delta a \\ \ddot{q}_\alpha^c(t + \Delta t) &= \ddot{q}_\alpha^p(t + \Delta t) + c_2 \Delta a \end{aligned} \quad (2.11)$$

D'après Allen et Tildesley (1989), les coefficients correcteurs sont calculés pour optimiser la convergence de l'algorithme. Dans le cas d'un algorithme prédicteur-correcteur d'ordre 3, les coefficients sont $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ et $c_2 = 1$. La structure de l'algorithme de calcul présentée sur la figure (2.5) résume les étapes que nous venons de décrire dans ce paragraphe.

Le pas de temps Δt peut être déterminé automatiquement par le code de calcul en fonction des propriétés des matériaux ou introduit de telle sorte que cela ne gêne pas la convergence des calculs. Le pas de temps doit être inférieur au temps de collision entre deux particules voisines. Lors d'un choc entre deux particules identiques, l'interpénétration des grains s'écrit sous la forme :

$$m\ddot{\delta}_n + \gamma_n\dot{\delta}_n + k_n\delta_n = 0 \quad (2.12)$$

En linéarisant cette équation différentielle, Da Cruz (2004) montre que le temps caractéristique de contact est de la forme $\tau_c = \sqrt{\pi^2 m / (2k_n(1 - \alpha_n^2))}$ où α_n est le coefficient de dissipation normal. Le pas de temps est choisi de telle sorte qu'il soit plusieurs fois inférieur au temps de collision, il est estimé par :

$$\Delta t = \frac{1}{\hat{N}} \sqrt{\frac{m}{k_n}} \quad (2.13)$$

La durée de collision entre deux particules, \hat{N} , est de l'ordre de 10 à 100. A titre d'exemple, pour des billes de verre de diamètres 1 mm, le pas de temps est de l'ordre de 10^{-9} s.

2.3 Préparation des échantillons

Nous présentons dans ce paragraphe la méthode de "préparation numérique" des échantillons constitués de grains sphériques, circulaires ou polygonaux. Dans le cas de grains sphériques, le système est confiné dans un cylindre de rayon R centré en $x = y = 0$, d'axe vertical orienté selon z et de fond situé à $z = 0$. Dans le cas de grains circulaires ou polygonaux, les échantillons sont de largeur R et le fond est situé à $z = 0$.

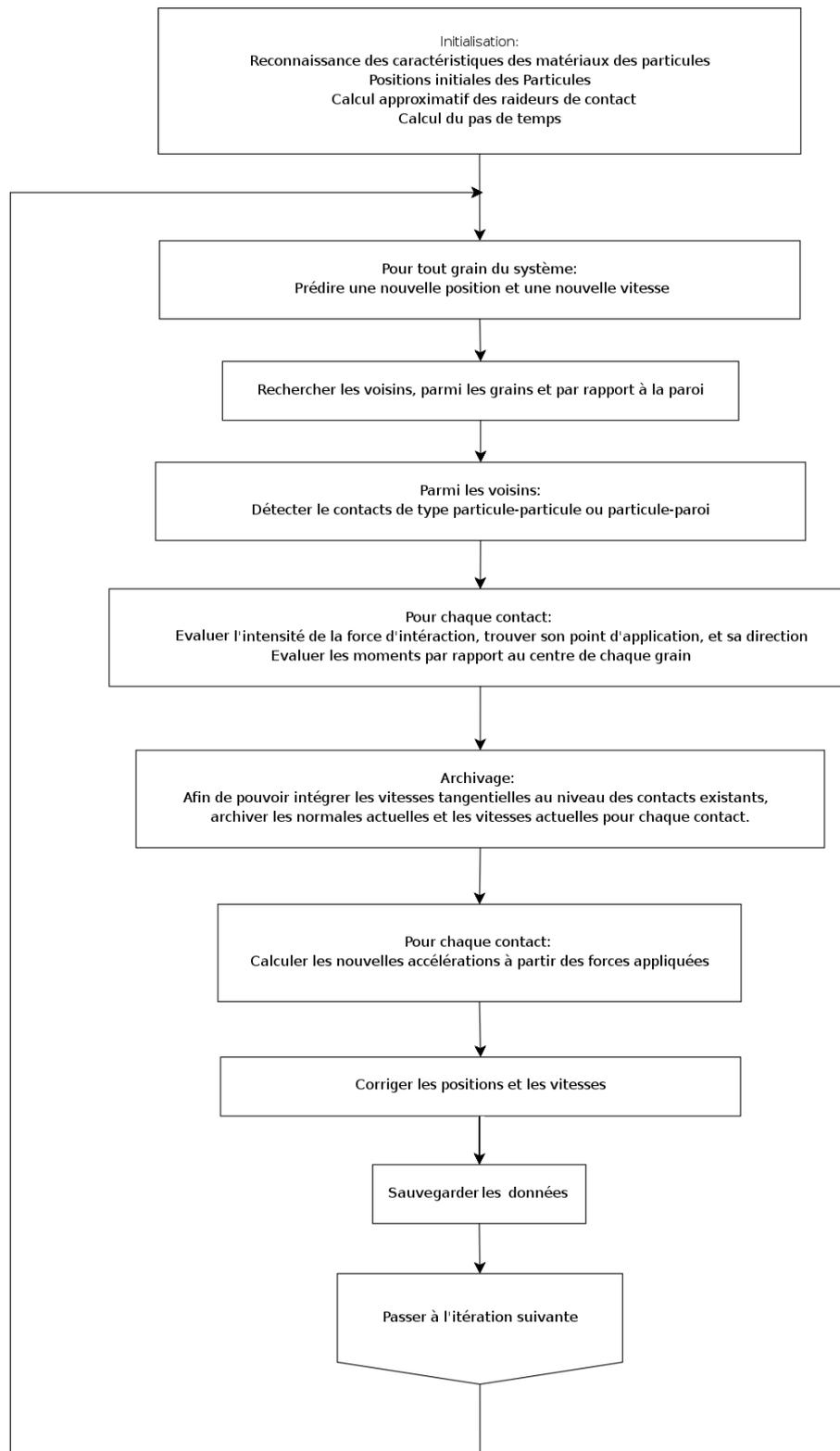


Fig. 2.5: Algorithme de calcul schématisant la méthode de dynamique moléculaire.

2.3.1 Paramètres de simulation

Les paramètres de simulation utilisés dans cette étude sont résumés dans le tableau 2.1, ils correspondent aux caractéristiques physiques des matériaux choisis. Ils sont généralement obtenus par expérience. Nous présentons à titre indicatif, la vérification de la loi de contact normal pour les billes en acier et en verre. Pour ce faire, nous appliquons un déplacement vertical sur une bille de diamètre donné via les plateaux d'une presse de compression et nous mesurons la force résultante. La figure 2.6 montre la correspondance entre les résultats numériques et expérimentaux pour ce cas particulier. Concernant la loi de contact tangentiel, il suffit d'estimer le module de cisaillement et de mesurer les dimensions des grains. Connaissant le coefficient de Poisson, le module de cisaillement ($G = \frac{E}{2(1+\nu)}$) peut être estimé au cours d'un essai de compression.

Paramètres		Acier	Verre	Ballast
Nombre de particules	N	< 10000	≈ 1000	≈ 1000
Rayons des particules	r (mm)	2.5 - 4.5	1.5 - 4	11.5 - 15
Masse Volumique	ρ_p (kg/m^3)	7800	2500	2710
Coefficient de Poisson	ν	0.3	0.25	0.25
Module d'Young	E (GPa)	210	82	46.9

Tab. 2.1: Paramètres de simulation

Les lois de contact décrivant les interactions de type particule-paroi sont analogues aux lois de contact particule-particule. Il est utile de noter, en revanche, qu'aucune réduction dimensionnelle n'est considérée et que les raideurs adoptées dans le cadre de notre étude correspondent aux données expérimentales, contrairement à ce qu'on pourrait trouver dans la littérature (Alonso-Marroquin et Herrmann (2004) et Landry et al. (2003)).

La "préparation numérique" des échantillons consiste à partir d'une configuration initiale où les particules sont éparpillées de façon aléatoire dans l'espace, avec une compacité initiale ϕ_i de l'ordre de 0.2 ± 0.05 . La granulométrie de l'échantillon est répartie suivant des lois uniformes dont les paramètres sont estimés expérimentalement. Dans le cas particulier où les grains sont polygonaux et décrits par des suites ordonnées de sommets $(s_{\alpha,i})_{i \in [1,6], \alpha \in [1,N]}$, les paramètres qui décrivent la géométrie des grains suivent des lois uniformes bornées comme suit : $r_1 \sim U_{[r_{\min}, r_{\max}]}$, $r_2 \sim U_{[0.25r_1, 0.75r_1]}$ et $\theta \sim U_{[0;2\pi]}$ (voir figure 2.7). A partir de cette configuration, les particules sont soumises à leur propre poids

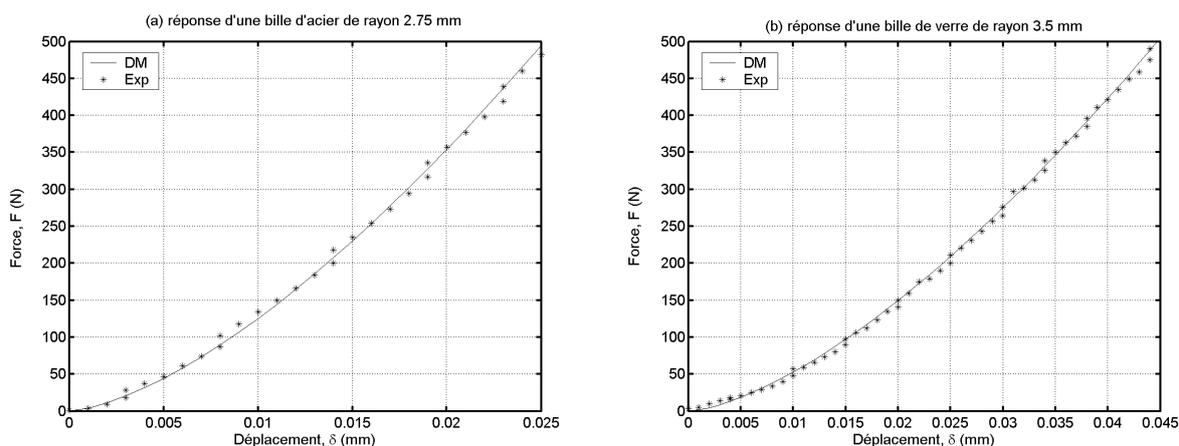


Fig. 2.6: Vérification de la loi de contact normal par comparaison entre résultats numériques et expérimentaux.

et déposées dans le récipient (Figure 2.8).

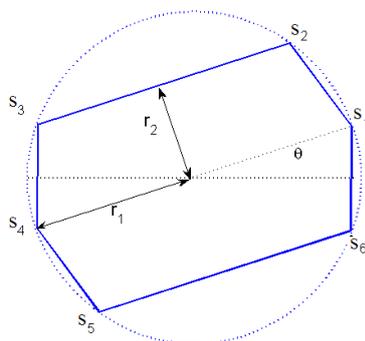


Fig. 2.7: Grain polygonal typique caractérisé par les paramètres géométriques r_1 , r_2 et θ .

Le processus continue jusqu'à ce que l'équilibre s'établisse. Cependant, un intérêt particulier est accordé à cet état d'équilibre afin d'éviter les perturbations qui peuvent se produire ultérieurement. Dans certains cas, il peut y avoir des particules qui soient en mouvement bien que les bords libres de l'échantillon soient stables. Afin d'éviter ces anomalies de déséquilibre local, le critère d'arrêt que nous considérons porte sur le rapport entre l'énergie cinétique de toutes les particules, $E_c(t)$ et l'énergie potentielle emmagasinée résultant de l'interaction mutuelle des particules, $E_p(t)$. Ce critère s'écrit sous la forme $\frac{\|E_c(t)\|}{\|E_p(t)\|} \leq \epsilon$, où ϵ est une constante faible par rapport à l'unité. Le critère d'arrêt nécessite

aussi la décroissance de l'énergie cinétique afin d'éviter l'arrêt du calcul dès le début du processus. Sur la figure (2.9), nous présentons quelques résultats du processus de "préparation numérique" d'un échantillon de 300 billes d'acier de rayon moyen 4.5 mm, dans une enceinte de 3.5 cm de rayon. Le seuil du critère choisi est $\epsilon = 10^{-6}$ (Karrech et al. (2006b)). Nous remarquons que l'évolution du poids apparent et de la fraction volumique de l'empilement se stabilisent vers la fin du processus. Nous remarquons également que le nombre de coordination tend vers une valeur moyenne de 4.4 et que l'énergie cinétique de l'ensemble tend vers zéro, lorsque l'équilibre s'établit. Les échantillons granulaires ainsi préparés seront utilisés pour étudier les structures des assemblages ainsi que leurs réponses sous différents modes de chargement.

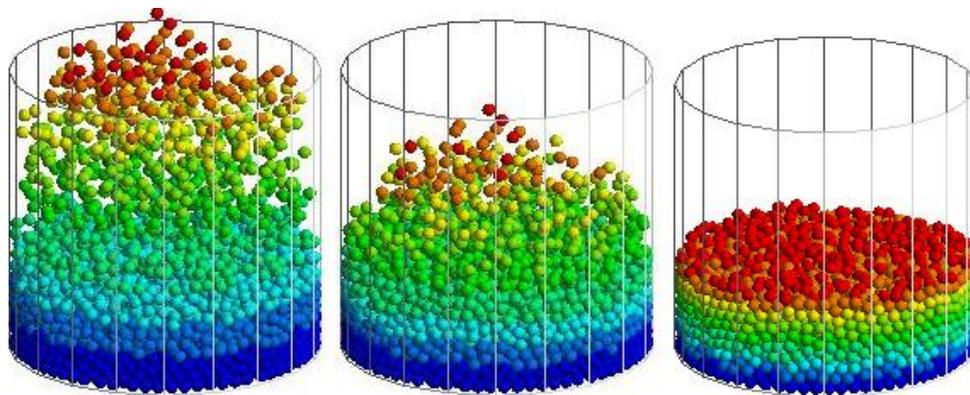


Fig. 2.8: Préparation d'un échantillon de 4500 sphères de rayons 1.5 mm dans un cylindre de rayon 3.5 cm. La compacité finale est de 0.56. Le principe de préparation est analogue dans le cas de grains circulaires ou polygonaux.

2.3.2 Compacité des assemblages aléatoires

La compacité des assemblages granulaires représente le rapport des volumes des particules au volume de l'assemblage. L'étude de ce paramètre donne une information pertinente à propos de la stabilité du matériau ainsi qu'à propos de son comportement mécanique. Il suffit d'imaginer une approche par homogénéisation d'amas granulaires isotropes élastiques linéaires (Pradel et Sab (1998)) pour se rendre compte que la compacité du matériau a un effet direct sur le comportement du matériau global équivalent. Un conglomérat aléatoire de particules sphériques mono-disperses peut être stable sous sollicitations diverses à partir d'une compacité ϕ_{al} de 0.555 ± 0.005 (assemblage lâche) (Onoda et Li-

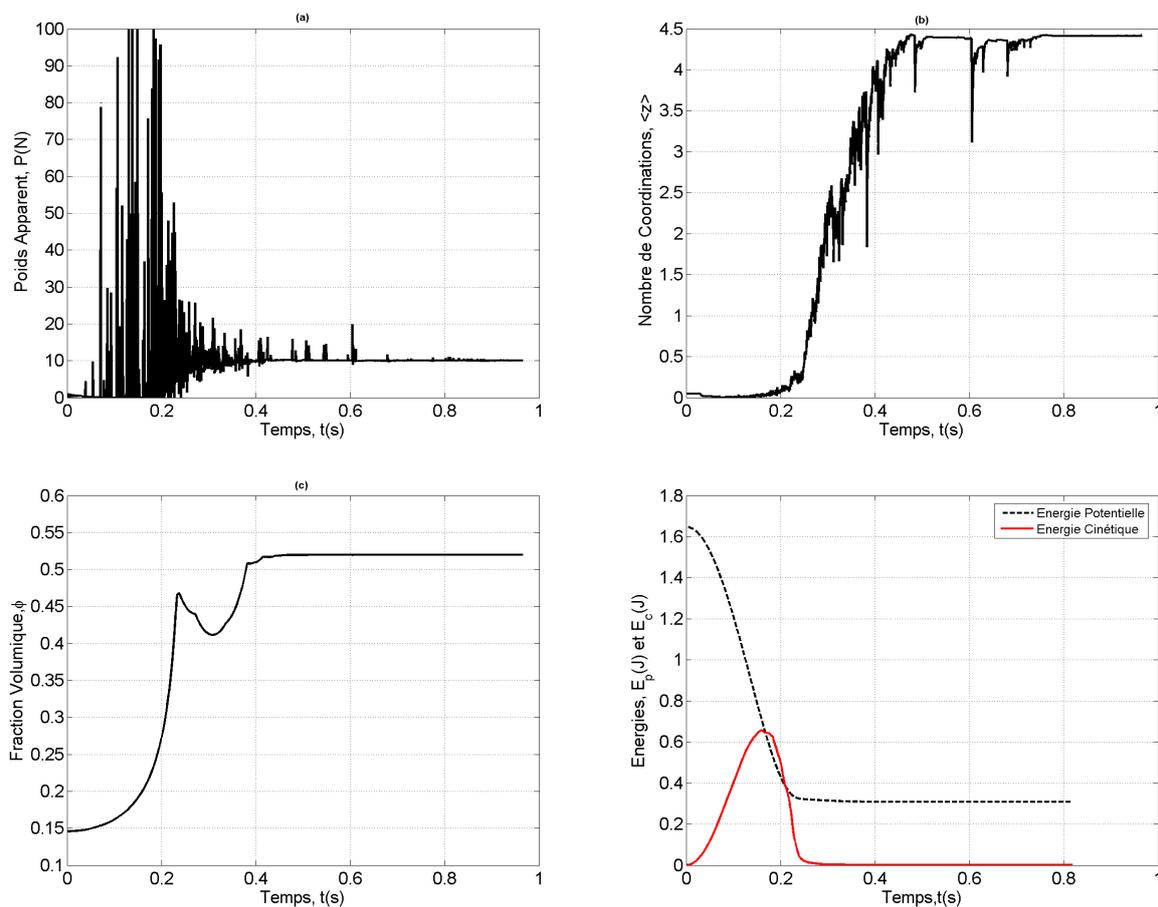


Fig. 2.9: Préparation de l'échantillon sous champs de pesanteur, variation (a) du poids apparent de l'échantillon, (b) du nombre de coordinations, (c) de la fraction volumique, (d) et de l'énergie cinétique (resp. énergie potentielle) au cours du temps. Les courbes correspondent au cas de grains sphériques, mais le principe est le même dans le cas de grains circulaires ou polygonaux

niger (1990)) jusqu'au seuil de densité $\phi_{ad} = 0.64$ (assemblage dense). Pour un système parfaitement ordonné dans un état cristallin cubique centré ou hexagonal, la compacité atteint $\phi_{ac} = 0.74$. Cette dernière valeur est une limite supérieure que l'on ne peut pas dépasser pour des sphères de rayons identiques. En pratique, des compacités situées entre ϕ_{ad} et ϕ_{ac} sont difficiles à atteindre à moins que l'on arrange les particules artificiellement pour obtenir une structure ordonnée. Les algorithmes disponibles pour la constitution des assemblages aléatoires sont de deux catégories.

La première regroupe les procédures géométriques qui consistent à construire les assemblages grain par grain. Lorsqu'un constituant est rangé dans une position, il la garde pendant tout le processus. On peut citer à titre indicatif l'algorithme de Jodrey et Tory (1979), l'un des outils les plus efficaces pour simuler des assemblages denses. Il permet d'obtenir des assemblages aléatoires de compacités voisines de 0.65. La deuxième catégorie regroupe les procédures de calcul mécaniques permettant aux particules de se mouvoir au cours du processus, le réarrangement des grains est possible jusqu'à l'atteinte d'un état d'équilibre stable.

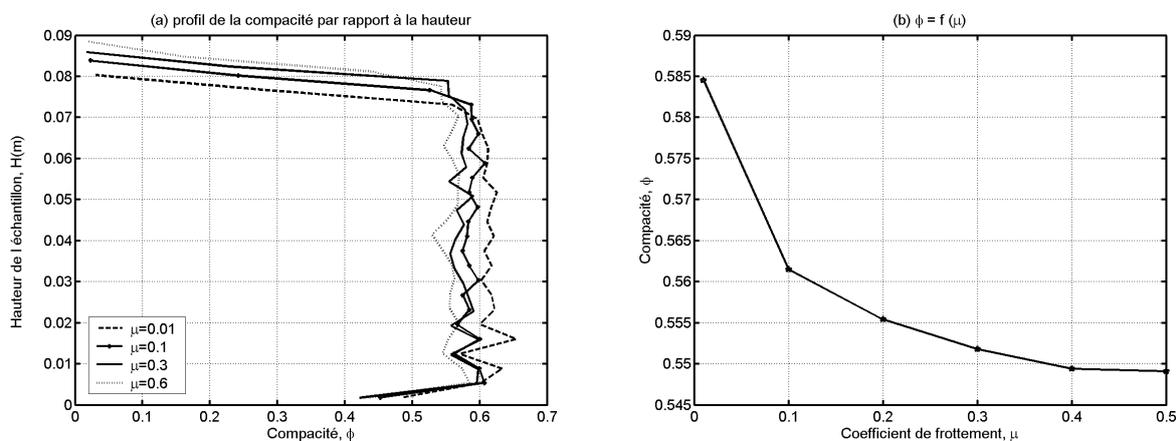


Fig. 2.10: Variation des compacités locales en fonction des hauteurs des échantillons pour différents coefficients de frottement.

Dans le cadre de cette étude nous avons opté pour la seconde approche pour son sens physique. La figure (2.10-a) montre les profils de répartition des compacités suivant la hauteur, pour différents coefficients de frottement. On remarque que les compacités locales sont homogènes tout au long des hauteurs des assemblages étudiés. Aux extrémités des échantillons, les compacités diminuent linéairement vers zéro, à cause de l'effet de bord.

On note en outre que loin des bords de l'assemblage, la compacité diminue lorsque le coefficient de frottement augmente. En effet, lorsque le coefficient de frottement augmente les particules se stabilisent rapidement au cours de leur dépôt dans le récipient, leurs réarrangements sont plus délicats en présence de frottements importants. Il en résulte que plus le frottement augmente, plus la compacité des assemblages constitués est faible. Cependant, la dépendance entre la compacité et le frottement n'est pas linéaire ; sur la figure (2.10-b), on remarque que la courbe $\phi = f(\mu)$ s'aplatit et tend vers l'asymptote ϕ_{al} décrite plus haut.

Bien que les effets des raideurs de contacts soient difficilement perceptibles lorsqu'ils varient faiblement, nous nous sommes rendus compte qu'ils ont un effet considérable sur la compacité des assemblages lorsqu'ils varient suffisamment. La figure 2.11 montre les profils de répartition des compacités des hauteurs pour différentes caractéristiques des matériaux. On remarque là aussi que les allures des compacités en fonction des hauteurs, décrites dans le paragraphe précédent sont conservées pour les différentes caractéristiques des matériaux. On note aussi (figure 2.11-b) que la compacité diminue quand l'élasticité des matériaux augmente. On remarque que pour un matériau souple de module d'Young $E = 0.8$ MPa, la compacité de l'échantillon est de l'ordre de 0.605. Cependant, pour un matériau usuel, on remarque sur la même figure que la procédure permet de préparer un échantillon de compacité plus faible ou égale à 0.545.

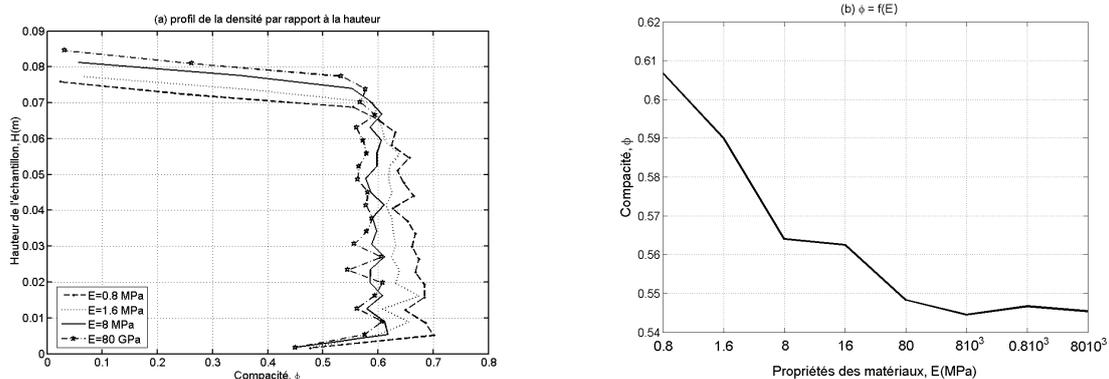


Fig. 2.11: *Variation des compacités locales en fonction des hauteurs des échantillons pour différentes caractéristiques mécaniques des matériaux.*

La compacité obtenue après le dépôt des particules donne des fractions volumiques lâches. Une étude détaillée de l'évolution des compacités des assemblages granulaires sera

abordée dans le prochain chapitre, mais nous indiquons ici que pour faire évoluer le système vers un état plus dense des excitations externes sont nécessaires. Diverses expériences numériques mettent en évidence l'évolution d'un assemblage granulaire lâche vers l'état dense. Les plus répandues ont été réalisées à Chicago par [Nowak et al. \(1998\)](#) et [Ben-Naim et al. \(1998\)](#). Plus tard, des expériences numériques analogues ont été réalisées à Rennes par Philippe et Bideau ([2001](#)). Les deux campagnes d'études consistent à vibrer verticalement pour augmenter la compacité. Une autre approche consistant à vibrer les assemblages horizontalement a été proposée par Pouliquen et al. ([1997](#)). Cette approche a permis d'atteindre des états de "cristallisation" dépassant la valeur seuil de 0.64. Une autre approche aussi importante est due à Nicolas et al. ([2000](#)). Elle permet d'obtenir des échantillons relativement denses à l'aide d'un processus de cisaillement cyclique.

2.3.3 Nombre de coordination

Des études antérieures ont montré que la stabilité des assemblages granulaires dépend aussi du nombre de coordination défini par le nombre moyen de points de contact d'une particule dans l'assemblage. Pour obtenir un équilibre statique d'un échantillon, chaque particule doit avoir suffisamment de contraintes qui réduisant ses mouvements possibles dans l'espace. Dans un espace de D dimensions, [Alexander \(1998\)](#) montre que le nombre minimum de coordination dans un assemblage sans frottement est $z = 2D$. En revanche, dans un assemblage frottant, [Edwards \(1998\)](#) affirme que ce nombre est de $z = D + 1$. Afin de vérifier cette proposition, nous considérons un échantillon d'un millier de particules de rayon 3.5 mm que l'on dépose dans un récipient de rayon 3.5 cm. En faisant varier le coefficient de frottement μ , et en gardant toutes choses égales par ailleurs, nous remarquons que le nombre de coordination suit une distribution d'allure gaussienne dont la moyenne diminue quand le coefficient de frottement μ augmente. On note également que la pente de la courbe $\langle z \rangle = f(\mu)$, présentée par la figure [2.12-b](#), diminue lorsque le coefficient de frottement augmente. Ceci signifie que le nombre de coordination moyen tend vers la valeur $z = 4$ définie par [Edwards \(1998\)](#). En revanche, le nombre de coordination moyen tend vers $z = 6$ lorsque le coefficient de frottement tend vers zéro, conformément à la proposition d'[Alexander \(1998\)](#).

Le réarrangement des grains au cours de leur dépôt est un mécanisme important pour obtenir un échantillon de densité élevée. Lorsque le coefficient de frottement augmente, les particules se stabilisent et trouvent leur équilibre rapidement, comme le montre la figure

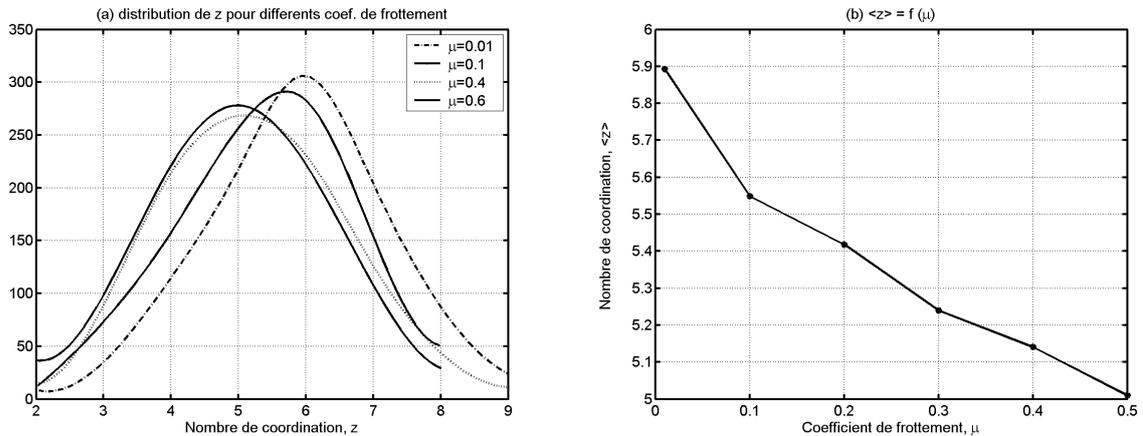


Fig. 2.12: *Distribution du nombre de coordination pour différents coefficients de frottement.*

2.12. Ceci s'explique par le fait que l'énergie potentielle due à la pesanteur est dissipée par frottement. Le réarrangement des grains est moins fréquent lorsque le frottement augmente. Ainsi, le nombre de coordination moyen décrivant la structure de l'assemblage diminue lorsque le coefficient de frottement augmente.

La figure 2.13 montre l'effet de la raideur des matériaux sur le nombre de coordination z , pour un échantillon de 1000 grains de rayons 3.5 mm et de coefficient de frottement $\mu = 0.2$. Nous remarquons que le nombre de coordination moyen augmente avec la souplesse des matériaux. Pour un matériau souple de module d'Young $E = 0.8$ MPa, le nombre de coordination moyen atteint 6.7, alors que pour un matériau usuel tel que le verre ou l'acier, ce nombre est de l'ordre de 5.2. Nous remarquons aussi sur la même figure 2.13 que l'écart type augmente avec la souplesse, ceci signifie que plus le matériau est souple plus le nombre de coordination est dispersé par rapport à la moyenne. L'augmentation du nombre de coordination moyen dans ce cas s'explique par l'interpénétration excessive des grains lorsque leur souplesse est élevée. En effet, plus l'interpénétration est permise, plus les grains rentrent en contact les uns avec les autres.

2.3.4 Orientations des contacts

Le dépôt des particules défini dans la section précédente génère des assemblages anisotropes par construction. Le mode de préparation induit des hétérogénéités au niveau des

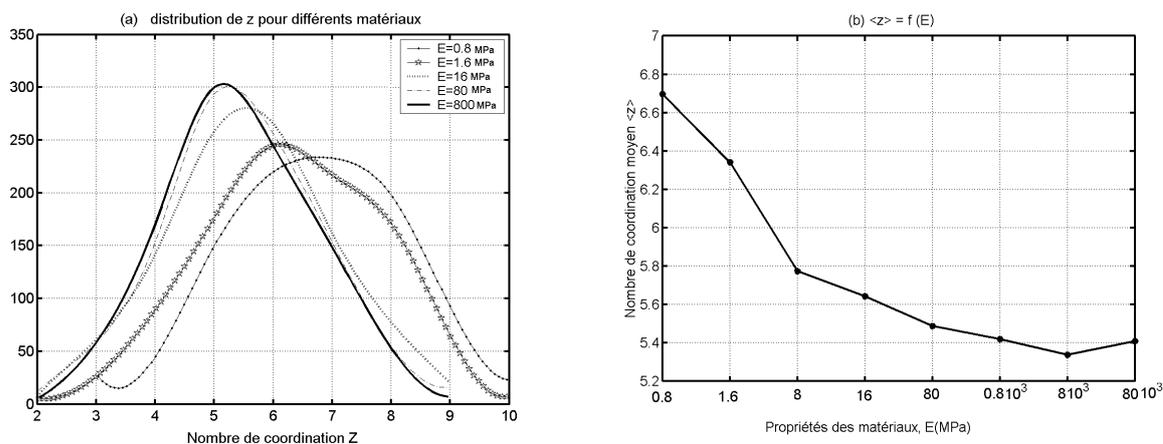


Fig. 2.13: *Distribution du nombre de coordination pour différentes rigidités de contact.*

orientations de contact. Certaines directions d'interaction entre les particules, et notamment la direction verticale, sont moins stables que d'autres. Plusieurs chercheurs tels que [Emam et al. \(2005\)](#), [Moreau \(1993\)](#), et [Radjai et al. \(2004\)](#) ont observé cette anisotropie aussi bien pour des grains polygonaux que pour des géométries plus régulières. Afin de mettre en évidence cette anisotropie, on étudie la distribution des normales aux contacts en comptabilisant leur nombre dans chaque direction afin d'établir un histogramme qui décrit cette distribution (figure 2.14). En 2D, [Radjai et Roux \(2004\)](#) proposent une fonction de distribution des orientations qui s'écrit sous la forme :

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} [1 + a_c \cos 2(\theta - \theta_0)] \quad (2.14)$$

où θ_0 est la direction de contact moyenne et a_c est l'anisotropie de l'assemblage. [Radjai et al. \(2004\)](#), [Rothenburg et Bathurst \(1989\)](#) affirment qu'il y a une corrélation importante entre les forces et les directions de contact. Étant préparés par pluviation et soumis qu'à la pesanteur, les échantillons auxquels nous nous intéressons présentent un déficit de contacts à normale verticale (figure 2.14).

Dans le cas d'échantillons de constituants sphériques en 3D, [Emam et al. \(2006\)](#) proposent une description, analogue à la distribution (2.14), écrite sous la forme d'un développement en série de polynômes de Légendre. La symétrie de révolution autour de l'axe vertical permet d'affirmer que la distribution est une fonction paire de $\cos \theta$ ce qui correspond à la symétrie observée sur la figure (2.14-c). Compte tenu de cette condition, seuls les polynômes pairs sont considérés. Pour montrer que le matériau est isotrope, il

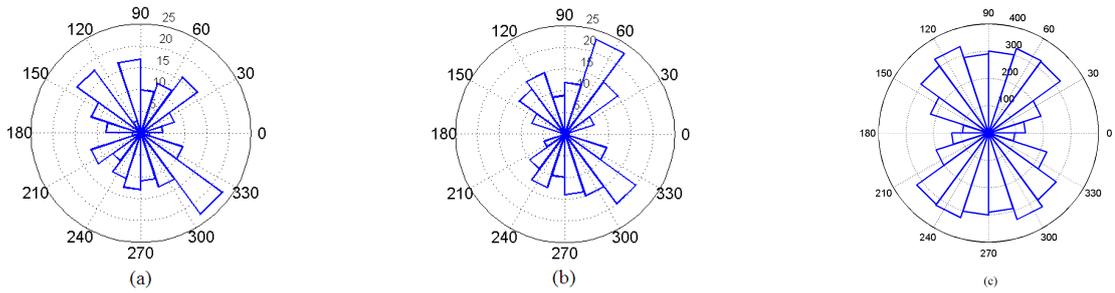


Fig. 2.14: *Histogramme d'orientations de contacts : assemblage (a) polygones, (b) circulaires et (c) sphériques.*

suffit de vérifier si la distribution est constante. Autrement dit, il suffit de vérifier si les moments de la distribution de $\cos \theta$ valent les racines des polynômes paires de Légendre ($\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{3}$, $\langle \cos^4 \theta \rangle = \frac{1}{5}$, etc).

2.4 Effet de la paroi sur la distribution des contraintes dans un agglomérat granulaire cylindrique

La rhéologie quasi-statique des matériaux granulaires est souvent décrite par approches phénoménologiques basées sur la modélisation élastique ou élasto-plastique des relations contrainte-déformation. A notre connaissance, il n'y a pas de relation rigoureuse qui exprime le comportement des matériaux granulaires en fonction de considérations microscopiques et qui permette de comprendre les distributions des contraintes dans des configurations simples. Ce thème fait l'objet de recherches scientifiques actives (Goldenberg et Goldhirsch (2005), Goldhirsch et Goldenberg (2004), Alexander (1998)), portant notamment sur les chaînes de force ou l'effet de protocoles de préparation des échantillons etc. La distribution des contraintes dans un cylindre de matériau granulaire est un problème qui a attiré encore l'attention de certains chercheurs. Janssen et Vereins (1895) ont déjà proposé une solution empirique à ce problème, mais leur approche fait l'objet de plusieurs critiques. Ainsi, le problème reste d'actualité. Landry et al. (2003) ont étudié la structure des contraintes axiales dans un assemblage granulaire cylindrique, ils ont proposé un modèle empirique à un seul paramètre d'ajustement. Vanel et Clément (1999) et Ovarlez et

Clément (2005) ont reproduit les essais de Janssen montrant la saturation de la masse d'un empilement à partir d'une certaine hauteur caractéristique. Ils ont proposé un modèle empirique relativement précis avec deux paramètres d'ajustement.

Dans cette section, nous proposons une étude de l'effet des parois sur les assemblages granulaires cylindriques, en utilisant la méthode de la dynamique moléculaire. Nous nous intéressons en particulier aux profils des contraintes et aux effets du frottement aux bords sur la variation de ces profils. Nous montrons à travers cette étude la concentration des contraintes au fond des échantillons ainsi que les effets de saturation loin des bords. Nous nous intéressons aussi au caractère hydrostatique des contraintes près du bord libre. Nous vérifions l'existence d'une longueur caractéristique délimitant la zone hydrostatique dont nous étudions la variation en fonction des paramètres du problème.

2.4.1 Phénomène d'écrantage

Contrairement aux fluides, pour lesquelles la pression hydrostatique est linéaire en fonction de la hauteur, dans une colonne de matériau granulaire la contrainte longitudinale et la contrainte radiale varient d'abord linéairement puis restent constantes tout au long du cylindre. Il s'agit du phénomène d'écrantage : à partir d'une hauteur donnée, peu importe la quantité de matériau granulaire que l'on mette dans un cylindre, les contraintes restent constantes jusqu'au fond du réservoir. La poids est écranté par la paroi latérale à cause de la mobilisation du frottement sur la paroi. Pour un échantillon cylindrique de longueur totale L , de rayon R_c et de coefficient de frottement au niveau de la paroi μ , Janssen et Vereins (1895) proposent une solution approximative où la contrainte longitudinale s'écrit sous la forme :

$$\sigma_{zz}(z) = \rho_p g \lambda (1 - \exp(-(L - z)/\lambda)) \quad (2.15)$$

où λ désigne la longueur caractéristique qui, selon le modèle de Janssen, s'écrit sous la forme $\lambda = R/(2\mu K)$, où K est la constante de Janssen reliant les contraintes longitudinale et radiale $K = \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_{zz}}$. Juste au dessous de la surface libre $z = L$, les contraintes varient en $\rho_p g z$, mais dès que la cote z dépasse la longueur caractéristique λ , les contraintes tendent vers le seuil de saturation comme l'indique l'équation 2.15.

2.4.2 Résultats Numériques

Les approches expérimentales de Vanel et Clément (1999) et Ovarlez et Clément (2005) consistent à mesurer la masse apparente d'un échantillon de matériau granulaire cylindrique par rapport à la masse réelle introduite. Les auteurs de ces résultats expérimentaux proposent alors un modèle empirique semblable au modèle de Janssen mais avec deux paramètres d'ajustement. Landry et al. (2003) proposent une loi empirique semblable à la loi de Janssen mais avec un seul paramètre d'ajustement. Dans cette section, nous montrons la limite de l'approche par mesure de la masse apparente, moyennant une analyse des résultats des simulations numériques. Nous étudions aussi les distributions des contraintes longitudinales et axiales dans l'empilement de matériaux granulaires cylindriques et nous proposons une explication descriptive de la concentration de contrainte au fond d'un réservoir. Pour réaliser les simulations numériques, nous avons considéré les paramètres de simulation indiqués dans le tableau 2.2.

Paramètres		
Nombre de particules	N	4000-16000
Rayons des particules	r (mm)	4.5
Masse volumique des particules	ρ_p (kg/m^3)	2500
Coefficients de restitution	$e_{t,n}$	0.8
Coefficients de frottement (particule-particule et particule-paroi)	μ	0.01 - 0.6
Coefficient de Poisson	ν	0.3
Module d'Young des particules	E (MPa)	82

Tab. 2.2: Paramètres de simulation : Comparaison des résultats numériques avec le modèle de Janssen

Sur la figure 2.15, nous présentons les profils des contraintes longitudinales et radiales pour des échantillons de nombres de particules et de hauteurs variables. Les résultats numériques permettent d'estimer la constante de Janssen $K = \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_{zz}} \approx 1.3$. D'après la figure, on constate que K reste indépendant de la taille de l'échantillon puisque le rapport entre les contraintes longitudinale et radiale est le même sur toutes les courbes. Ainsi, la longueur caractéristique définie ci-dessus peut être estimée à $\lambda = 0.028$ m, afin de comparer les résultats numériques avec ceux du modèle.

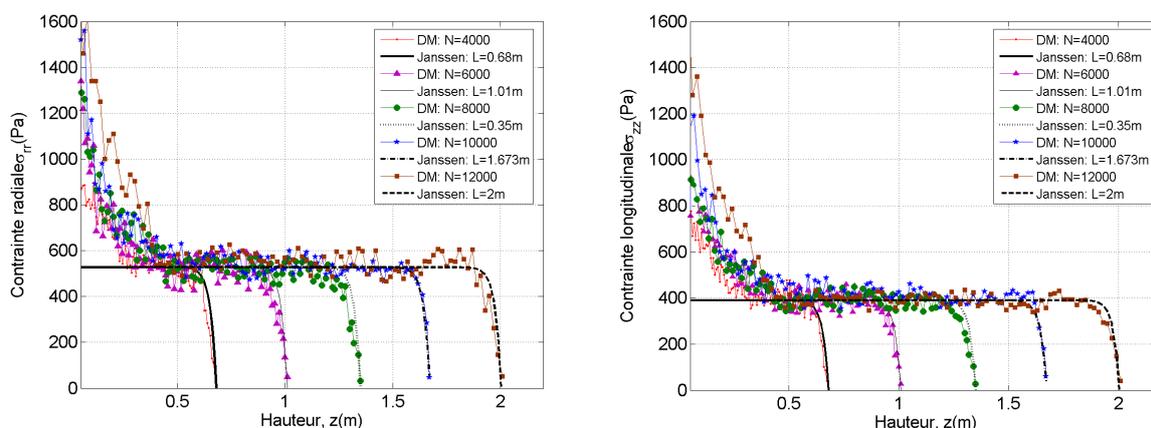


Fig. 2.15: Contraintes longitudinales et radiales pour des assemblages de 3000 jusqu'à 15000 grains. Le coefficient de frottement est $\mu = 0.5$.

La figure 2.15 montre la correspondance des résultats loin du fond de l'enceinte cylindrique. En effet, on observe l'augmentation des contraintes depuis le bord libre de l'échantillon suivant une loi de la forme $\rho_p(L - z)g$ rappelant le profil de la pression hydrostatique des fluides. Les résultats montrent aussi l'existence d'une zone de saturation ou d'iso-contraintes conformément au modèle de Janssen. En effet, loin des bords ($\lambda_1 < z < L - \lambda$), les contraintes longitudinales et radiales restent sensiblement constantes. Cependant, nous avons observé l'existence d'une troisième zone proche du fond du cylindre délimitée par ($0 < z < \lambda_1$), où les contraintes augmentent depuis la longueur caractéristique λ_1 jusqu'au fond. Cela représente une limite à l'approche expérimentale consistant à mesurer la masse apparente pour vérifier le modèle de Janssen puisque la valeur mesurée correspond au pic de contrainte et non pas à la contrainte de saturation. L'existence de ce pic est dû probablement à l'effet de voûte : les chaînes de forces reportent les efforts vers la paroi du cylindre.

Dans une seconde étape, nous nous sommes concentrés sur l'effet du frottement sur les profils des contraintes tout au long du cylindre, en gardant le même nombre de particules. La figure 2.16 montre les résultats de ces simulations numériques. On remarque d'une part l'augmentation de la longueur caractéristique avec la diminution du coefficient de frottement et d'autre part l'augmentation des seuils asymptotiques des contraintes avec la diminution du coefficient de frottement.

Dans le tableau 2.3, nous présentons un récapitulatif des résultats du calcul numérique

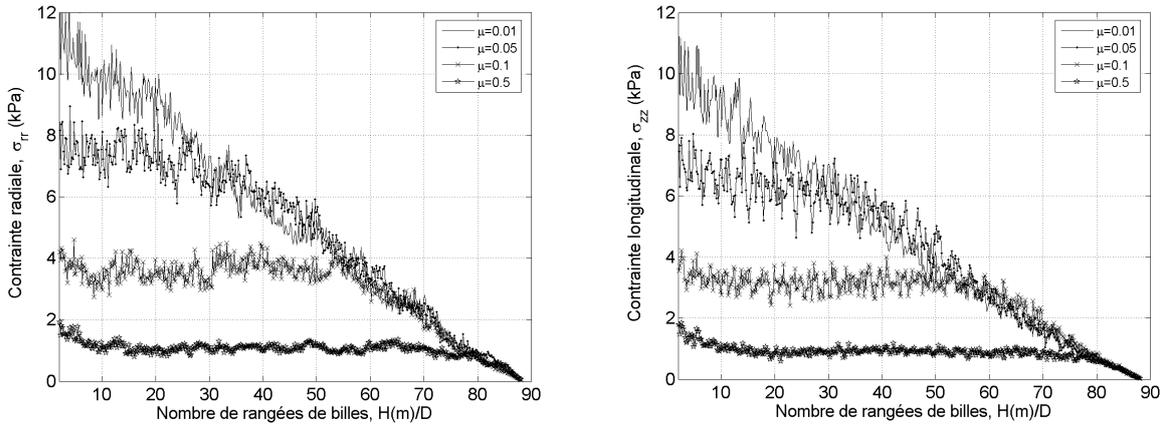


Fig. 2.16: Contraintes longitudinales et radiales pour un assemblage de 7400 grains et pour différents coefficients de frottement.

concernant les contraintes de saturation ainsi que les longueurs caractéristiques au delà desquelles le phénomène d'écrantage peut être observé. Ces simulations concernent des échantillons cylindriques de diamètre 7cm auxquels nous nous intéresserons par la suite. Ces échantillons sont constitués de différents matériaux, tailles de constituants, nombre de particules et frottement interne.

Matériau	(E(GPa), ν)	μ	\bar{r}	λ_{num}	σ_{sat}
Acier-a	(210, 0.3)	0.3	2.775 mm	6.2 cm	2,9MPa
Acier-b	(210, 0.3)	0.3	4.75 mm	6.8 cm	3 kPa
Verre	(85, 0.25)	0.3	3.5 mm	7.2 cm	1,1 kPa

Tab. 2.3: Récapitulatif de l'effet d'écrantage sur les échantillons granulaires. Les simulations concernent des échantillons cylindriques de diamètre 7cm et portent sur les caractéristiques des matériaux, frottement interne et tailles des constituants. Les résultats montrent les tailles caractéristiques maximales ainsi que la contrainte de saturation correspondante.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode de calcul par éléments discrets d'empilements granulaires cylindriques. Une attention particulière a été accordée aux lois de contacts choisies. Ces contacts sont non-linéaires et ils permettent de tenir compte de certaines caractéristiques intrinsèques des grains tels que leurs formes, leurs dimensions et leur nature. Nous nous sommes intéressés aussi à l'algorithme prédicteur-correcteur adopté pour intégrer les équations de mouvement des particules. La méthode de calcul consiste à résoudre les équations de Newton pour chaque particule, en tenant compte des forces de contact et de la gravité. Ainsi, les champs de vitesses, les trajectoires et les composantes des forces de contact entre particules se déterminent au cours de l'écoulement. A ce stade, l'application de la méthode de calcul permet d'affirmer que la stabilité d'un échantillon dépend essentiellement (i) de sa structure (compacité) (ii) des interactions et souplesses de ses constituants (frottement et lois de contact) (iii) et du chargement appliqué. Nous avons étudié aussi la distribution de contraintes dans un empilement cylindrique avec paroi afin de comprendre les effets de bord. Pour compléter le travail de simulation que nous venons de décrire, nous proposons dans la suite des essais de compression permettant de caractériser le comportement élastique des matériaux granulaires sous sollicitations quasi-statiques. Les résultats des essais seront comparés à ceux obtenus par simulations numériques.

Chapitre 3

Comportement des matériaux granulaires en compression

Sommaire

3.1	Introduction	74
3.2	Protocole expérimental	74
3.2.1	Description du dispositif expérimental	74
3.2.2	Procédure de préparation des échantillons	75
3.2.3	Mesure de la fraction volumique	77
3.2.4	Effet du protocole de préparation sur le comportement	78
3.3	Exploitation des résultats	81
3.3.1	Analyse paramétrique	81
3.3.2	Comparaison des résultats numériques et expérimentaux	82
3.3.3	Estimation des lois de comportement élastique	84
3.4	Conclusion	87

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le comportement quasi-statique des matériaux granulaires et notamment celui du ballast, sous compression simple. Le choix de ce type d'essai est motivé par l'application à laquelle nous nous intéressons au terme de ce travail. Notre objectif ultime est de modéliser et d'expliquer le tassement du ballast sous l'effet du blochet vibrant, in-situ. En quasi-statique, le problème équivalent est l'essai de compression qui consiste à appliquer une pression verticale sur un échantillon confiné. Pour étudier les voies ferrées, deux approches sont envisageables, à savoir : la reproduction complète de la voie en tenant compte des rails, attaches, blochet et ballast etc., ou l'approche modélisatrice n'impliquant que le matériau granulaire et la charge imposée. Nous avons opté pour la seconde approche, d'abord pour sa simplicité et pour éviter les perturbations dues aux interactions avec les structures non modélisables par éléments discrets.

Les essais que nous mettons en place complètent l'approche numérique par éléments discrets. La méthode numérique permet d'identifier les paramètres qui affectent le comportement des matériaux de façon plus systématique. Elle permet aussi d'accéder à des informations difficilement perceptibles expérimentalement. Une comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux permettra de conclure à propos du comportement élastique des matériaux granulaires sous compression.

Dans le premier paragraphe, nous expliquons la phase de mise en place et de préparation des matériaux granulaires, puis le mode de bourrage et de confinement, et enfin l'essai de compression. L'exploitation des résultats fait l'objet du second paragraphe, il s'agira d'identifier des lois décrivant le comportement élastique des matériaux granulaires sous sollicitation quasi-statique.

3.2 Protocole expérimental

3.2.1 Description du dispositif expérimental

Le dispositif expérimental considéré dans cette section est présenté sur la figure (3.1). L'assemblage de matériau granulaire est confiné dans un cylindre de rayon $R = 3.5$ cm, muni d'un fond fixe. Au niveau du bord supérieur, un piston permet de fermer l'ensemble et de le charger. Le piston est conçu de telle sorte qu'il coulisse sans frottement à l'intérieur du cylindre. Une presse permet de piloter l'ensemble en déplacement avec une précision de l'ordre de $10^{-3}mm$ et de mesurer l'effort résultant moyennant une cellule de force dont

la capacité est de 100 kN et la précision est de 1 N . La pression moyenne au niveau du bord de l'échantillon est transmise à travers le piston non frottant et les éléments rigides de la presse à la cellule de force.



Fig. 3.1: Photo du dispositif expérimental : (a) opération de préparation et de pesage (b) essai de compression.

Les signaux de commandes et l'acquisition des données sont gérés par un logiciel de pilotage permettant de paramétrer les essais en types et nombre de cycles, vitesses et amplitudes de chargement, dimensions des éprouvettes et stockage des données.

3.2.2 Procédure de préparation des échantillons

Les échantillons auxquels nous nous intéressons pour faire les essais sont de deux catégories. Nous disposons d'échantillons modèles tels que les particules sphériques de verre ou d'acier de différents diamètres et d'échantillons de ballast aux échelles réduites de deux granulométries différentes comme l'indique le tableau 3.1.

La préparation des échantillons de ballast nécessite une étape préliminaire importante, c'est l'opération de tamisage qui permet de limiter la dispersion des tailles des grains par rapport à la moyenne. Pour décrire la taille d'un grain de ballast, nous considérons la moyenne entre les dimensions extrêmes comme étant l'estimateur du diamètre d'un

Paramètres		verre	acier-a	acier-b	ballast-a	ballast-b
Diamètre moyen	d (mm)	6.99	5.55	9.5	11.77	18.5
Écart type	$\hat{\sigma}$	0.0885	*	*	4.5	3.26
Diamètre du cylindre	D (mm)	70	70	70/131	70/131	131/152

Tab. 3.1: *Dimensions des particules et des enceintes(* L'intervalle de tolérance de fabrication des billes semble inférieur à la précision de nos instruments de mesure).*

grain de ballast équivalent et nous évaluons la dispersion par rapport à cette moyenne (tableau 3.1). Ces estimateurs seront utiles pour faire les simulations numériques. Lors de la préparation des échantillons, nous effectuons aussi une opération de pesée afin d'estimer la masse volumique des grains ainsi que les masses volumiques globales des échantillons. Nous remplissons ensuite les enceintes suivant deux méthodes de remplissage. La première méthode (M1) consiste à verser les grains à travers un entonnoir placé à une altitude de 15 cm (Figure 3.2). Cette méthode permet d'obtenir des échantillons relativement denses puisque l'énergie cinétique des grains est importante lorsqu'ils arrivent au fond du cylindre. La deuxième méthode (M2) consiste à intercaler d'abord un tube intermédiaire tout au long du cylindre, puis à le remplir et à le soulever lentement de telle sorte que les grains s'arrangent avec de faibles énergies cinétiques. Cette méthode permet d'obtenir des échantillons plutôt lâches.

Après les étapes de tamisage, de pesée et de remplissage, l'échantillon est soumis à une série de cycles de charges-décharges afin d'obtenir la compacité voulue, avant d'entamer les essais de compression. Au cours de ces cycles de chargement, le matériau explore des états de plus en plus stables. Dans tous ces essais, on cherche à maîtriser la compacité, ce paramètre devant être le même pour les échantillons numériques et expérimentaux. Pour reproduire les échantillons numériquement, nous partons toujours d'une configuration diluée dont la compacité est de l'ordre de 0.15 ± 0.05 à laquelle nous appliquons un champ de pesanteur jusqu'à ce que l'assemblage granulaire atteigne un état stable (faible énergie cinétique). A partir de cet état, nous appliquons des cycles répétitifs de charge-décharge jusqu'à l'obtention d'une densité correspondant aux essais expérimentaux.

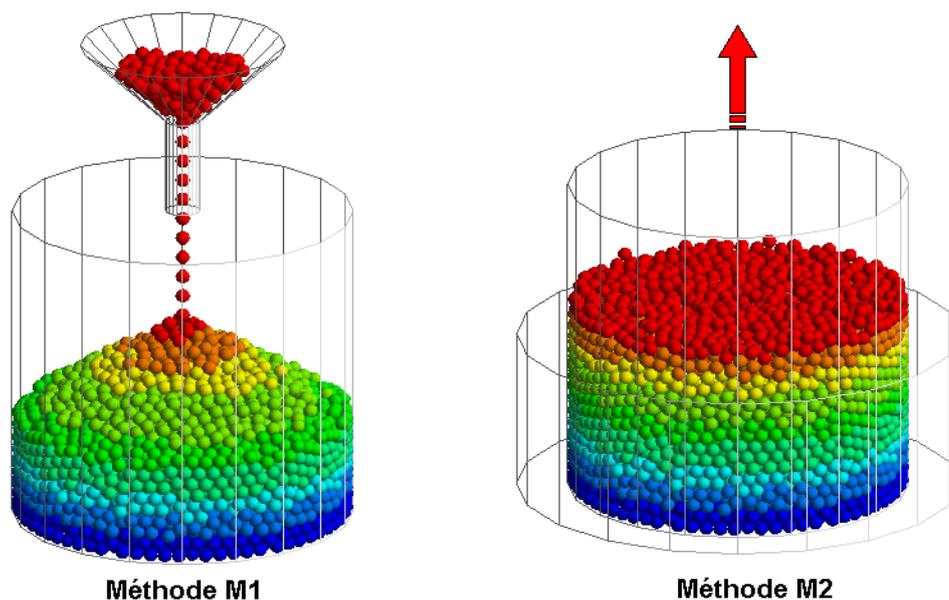


Fig. 3.2: Méthodes de remplissage des matériaux granulaires. *M1* : préparation des échantillons relativement denses par versement à travers un entonnoir, *M2* : préparation des échantillons lâches moyennant un tube intermédiaire que l'on soulève lentement

3.2.3 Mesure de la fraction volumique

Lors de la préparation préliminaire, la surface libre de l'échantillon dépend du frottement interne du matériau mais aussi du rapport R/r (Rayon du cylindre par rapport au rayon moyen des particules). Un rapport de dimension (R/r) élevé favorise la formation de tas coniques au niveau de la surface libre. L'application d'une légère pression verticale au niveau du bord supérieur de l'échantillon permet d'uniformiser la surface libre. Notons que cette pression n'a pas d'effets considérables sur la structure des contraintes à l'intérieur de l'échantillon, mais permet de faciliter la caractérisation de la compacité. Les mesures de fractions volumiques consistent à contrôler les hauteurs, H , des échantillons et d'estimer les densités moyennes $\rho = M/(\pi R^2 H)$. Les compacités sont par la suite déduites comme étant le rapport entre les densités des échantillons et celles des matériaux des particules, $\phi = \rho/\rho_p$. Pour ne pas perturber les mesures, le couvercle rigide de faible masse appartenant au piston est ajusté au niveau du bord de l'échantillon. Les échantillons sont versés dans une colonne d'eau après les essais de compression afin d'évaluer précisément le volume des grains.

Les mesures des compacités avant et après les cycles de charges et décharges permettent

d'affirmer qu'indépendamment du matériau choisi, la fraction volumique augmente lorsque les tailles moyennes des particules diminuent (tableau 3.2). Ceci peut s'expliquer entre autres par le fait que plus le rayon moyen des grains augmente plus les tailles des pores entre les particules et la paroi sont élevées. Les faibles dispersions par rapport aux valeurs des compacités obtenues permettent d'affirmer la répétabilité des résultats. Nous remarquons en outre que le mode de préparation des échantillons affecte les fractions volumiques obtenues. En effet, la méthode M1 (figure 3.2) permet d'obtenir des compacités plus élevées que la méthode M2 pour les matériaux considérés comme l'indique le tableau 3.2. De plus, les dispersions par rapport aux compacités obtenues sont moins importantes lorsqu'on applique la méthode M2.

Méthode			acier-a	acier-b	verre	ballast-a
M1	Avant chargement cyclique	$\bar{\phi}$	0.586	0.55	0.576	0.505
		$\hat{\sigma}$	0.00117	0.0027	0.00221	0.0098
	Après chargement cyclique	$\bar{\phi}$	0.59	0.562	0.584	0.53
		$\hat{\sigma}$	0.0009	0.00144	0.002	0.00854
M2	Avant chargement cyclique	$\bar{\phi}$	0.569	0.554	0.561	0.485
		$\hat{\sigma}$	0.00564	0.0016	0.0067	0.0471
	Après chargement cyclique	$\bar{\phi}$	0.584	0.558	0.573	0.518
		$\hat{\sigma}$	0.00075	0.0008	0.000455	0.04

Tab. 3.2: *Effet du mode de préparation sur la densité des échantillons avant et après la série de charge-décharge, $\bar{\phi}$ et $\hat{\sigma}$ désignent respectivement les compacités moyennes et leurs écarts types*

3.2.4 Effet du protocole de préparation sur le comportement

Après les opérations préliminaires de préparation, les échantillons sont soumis à des charges cycliques afin de maîtriser la compacité initiale. Nous avons remarqué que les réponses des éprouvettes de matériaux granulaires aux chargements cycliques considérés dépendent du mode de préparation préliminaire adopté. La figure 3.3 montre les résultats expérimentaux de deux échantillons typiques de billes en acier préparés suivant les méthodes M1 et M2 décrites plus haut. On remarque que le premier cycle est toujours caractérisé par une forte dissipation d'énergie qui se manifeste par un tassement élevé

comparé à celui des cycles qui suivent. La dissipation d'énergie peut être attribuée aux réarrangements importants des particules lors de la première sollicitation de confinement. L'hystérésis caractérisant la dissipation d'énergie subsiste pour tous les cycles suivants, mais avec une moindre ampleur. L'énergie dissipée par cycle de chargement dépend de la méthode de préparation. La figure 3.4 montre que la dissipation est plus importante pour les échantillons initialement lâches (méthode M2) comparée à celle des échantillons relativement denses (méthode M1).

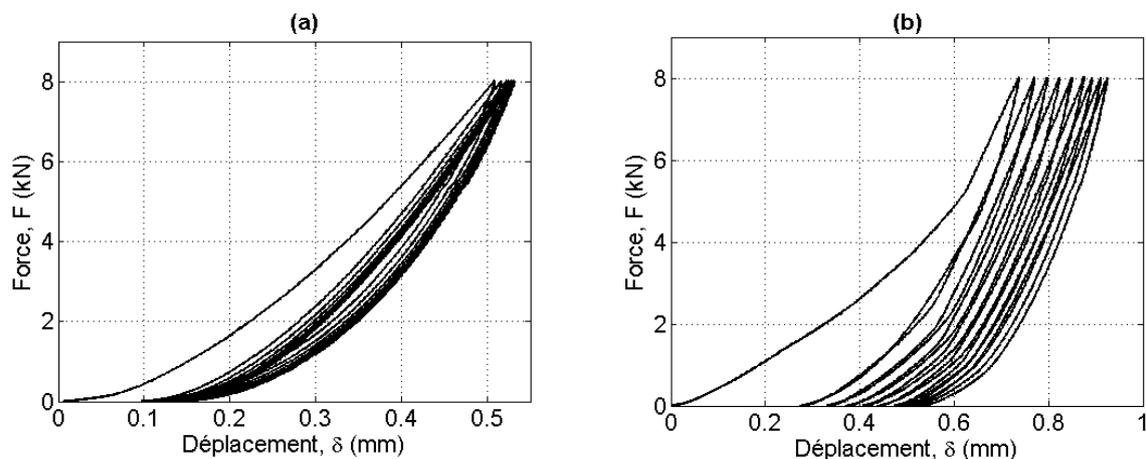


Fig. 3.3: Préparation des échantillons (a) compaction par chargement cyclique d'un échantillon de billes en acier préparé par la méthode M1 (b) compaction par chargement cyclique d'un échantillon de billes en acier préparé par la méthode M2.

Sur la figure 3.4, nous présentons le chargement du dernier cycle pour chaque matériau suivant le mode de préparation. Les résultats montrent, sans surprise, l'effet du mode de préparation sur la raideur de l'empilement. En effet la méthode de remplissage M1 permet d'aboutir à des échantillons plus raides que la méthode de remplissage M2, indépendamment de la nature du matériau et de sa taille. La figure 3.4 montre aussi que plus les constituants sont rigides plus la courbe force-déplacement est raide. En revanche, les essais ne permettent pas de conclure à propos des tailles des particules à cause de la corrélation entre la taille moyenne d'un grain et la compacité de l'empilement résultant dont on montrera les effets par la suite.

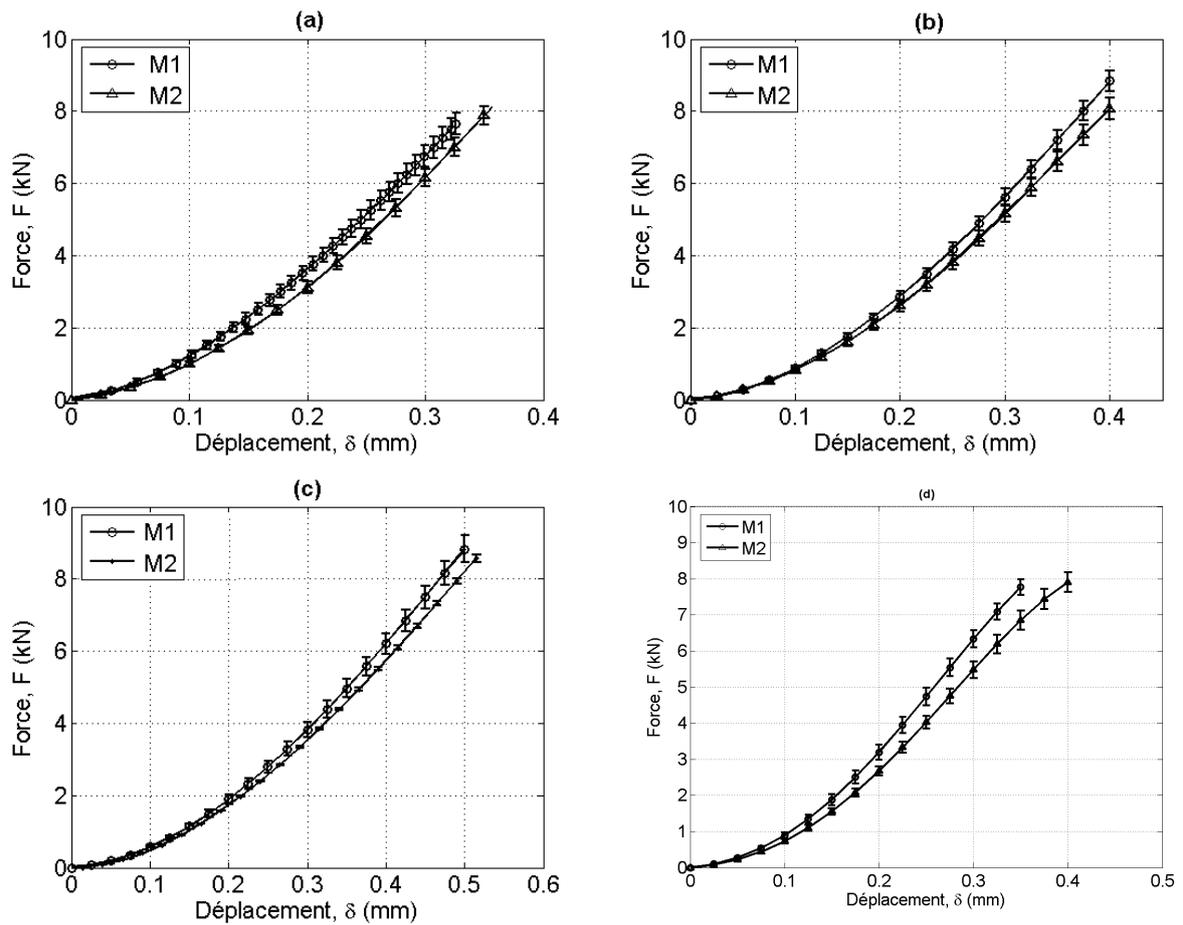


Fig. 3.4: Effet du mode de préparation sur la réponse des échantillons. Échantillons de (a) billes d'acier de rayons 2.25 mm (b) billes d'acier de rayons 4.75 mm (c) billes de verre de rayons 3.5 mm et (d) de granulats de ballast de rayon moyen 5.88 mm. Les échantillons sont préparés suivant les méthodes M1 et M2

3.3 Exploitation des résultats

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au comportement des matériaux granulaires sous chargement monotone. Nous présentons, dans la première section, une étude de sensibilité qui permettra de comprendre les effets des paramètres de simulation sur la réponse des empilements granulaires. Dans la deuxième section, nous comparons les résultats de compression simple d'éprouvettes de granulats de verre, d'acier et de ballast, obtenus numériquement et expérimentalement. Dans la troisième section, nous identifions des lois permettant de décrire le comportement élastique isotrope des matériaux granulaires.

3.3.1 Analyse paramétrique

Afin de pouvoir paramétrer le modèle numérique de façon à représenter au mieux les résultats expérimentaux, nous avons d'abord procédé à une analyse paramétrique qui consiste à faire varier les paramètres du modèle et à examiner leurs effets sur les réponses des éprouvettes considérées en compression.

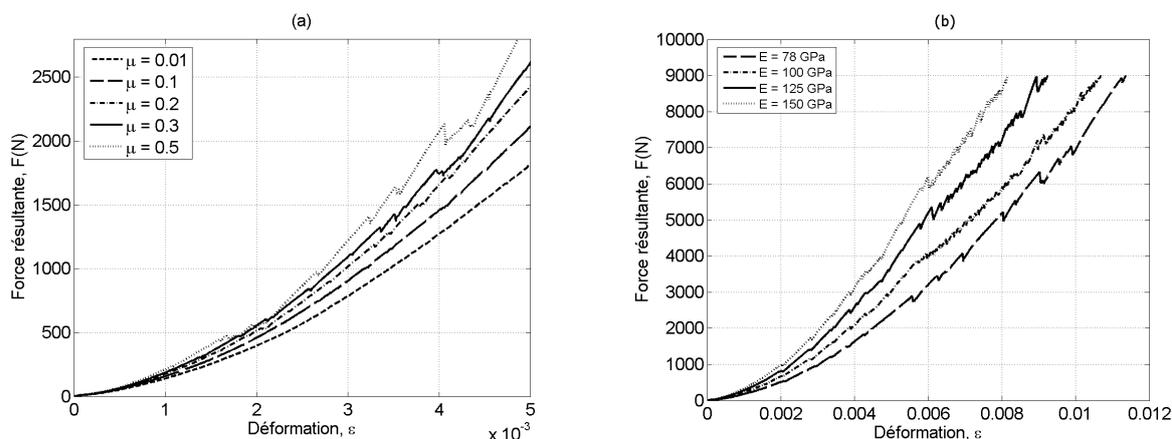


Fig. 3.5: *Effet des paramètres de simulation sur la raideur des empilements.*

Sur la figure 3.5 nous présentons les résultats de simulation d'un essai de compression simple d'empilements dont les rigidités et coefficients de frottement sont différents. Les résultats (3.5-a) montrent que plus le niveau de frottement intergranulaire est élevé, plus le comportement global de l'empilement est raide. Notons que les simulations sont réalisées en partant d'un même échantillon dont on fait évoluer la structure sous le même type de conditions aux limites, mais avec différents coefficients de frottement. Ainsi, les effets

de l'historique de préparation et de chargement ne perturbent pas les résultats. Suivant la même approche, la figure 3.5-b montre que plus les constituants sont rigides, plus le comportement global est raide, conformément aux résultats expérimentaux présentés sur la figure 3.4. Il est important de signaler en outre que la raideur de l'empilement augmente aussi avec la fraction volumique. Ce dernier résultat sera discuté avec plus de détails dans la section suivante. Cependant, nous avons noté que le coefficient de Poisson et le coefficient de restitution affectent également, bien que de façon secondaire, le comportement global force-déplacement.

3.3.2 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

Les empilements ainsi préparés sont soumis à un essai de compression simple afin de comparer les résultats expérimentaux avec ceux des simulations numériques pour différentes tailles de particules, types de matériaux et compacités. Rappelons que lors de la préparation, les échantillons sont d'abord versés dans un récipient cylindrique et par la suite soumis à des cycles de chargement. Les chargements cycliques servent surtout à unifier les conditions initiales aussi bien pour l'approche expérimentale que numérique. En effet, pour pouvoir comparer les résultats, nous partons toujours d'échantillons comparables du point de vue fraction volumique, type de matériaux, granulométrie et conditions aux limites.

Pour réaliser les simulations numériques des billes de verre et d'acier nous avons utilisé les lois de contact de Hertz afin de décrire les interactions intergranulaires. Pour les grains anguleux tels que ceux du ballast, le contact de Hertz s'avère inadapté ; nous adoptons alors une loi de contact linéaire.

Sur la figure 3.6, nous présentons les résultats de simulations numériques et de l'essai expérimental de compression d'un échantillon cylindrique de diamètre 70 mm de billes d'acier de rayons 2.25 mm (Fig. 3.6-a) et 4.75 mm (Fig. 3.6-b). Afin d'évaluer de manière systématique la correspondance entre les résultats numériques et expérimentaux, nous avons utilisé l'estimation de l'erreur relative \mathcal{E}_r définie par :

$$\mathcal{E}_r(u) = \frac{\| u - \hat{u} \|}{\| u \|} \quad (3.1)$$

La norme utilisée dans l'équation précédente est définie par $\| u \| = (\sum_{i=1}^{\hat{m}} |u_i|^2)^{\frac{1}{2}}$, où \hat{m} représente le nombre de mesures et u est une grandeur physique donnée. Dans la suite,

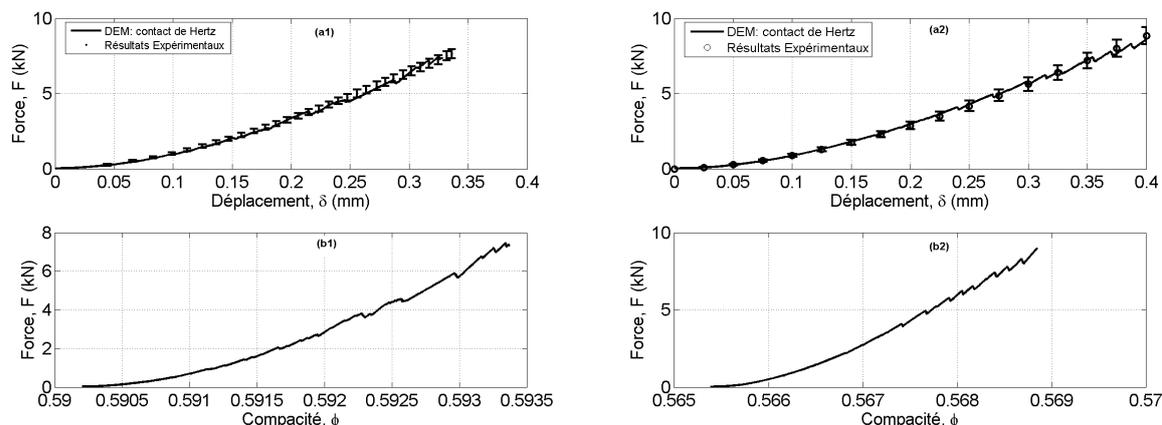


Fig. 3.6: Comparaison des résultats expérimentaux et numériques : essais de compression d'éprouvettes granulaires, (1) billes en acier ($E = 210\text{GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800\text{kg/m}^3$) de rayons 2.25 mm avec $\mu = 0.3$, (2) billes en acier de rayons 4.75 mm avec $\mu = 0.3$ (a) courbe force-déplacement (b) courbe force-compacité.

nous comparons pour chaque manipulation, les résultats de la simulation numérique ou de l'essai considéré, désigné par u dans l'équation 3.3, par rapport à la moyenne des essais désignée par \hat{u} . Nous remarquons que pour l'échantillon de billes d'acier de rayons 2.25 mm, l'écart moyen des essais par rapport au profil force-déplacement moyen (Figure 3.6) est de $\mathcal{E}_r(F_{exp}) = 0.039$. En revanche, l'écart relatif à la simulation numérique correspondante par rapport au profil force-déplacement moyen obtenu par expérience est de $\mathcal{E}_r(F_{DM}) = 0.051$.

Pour le second échantillon, dont les constituants sont des billes en acier de rayons 4.75 mm, la même conclusion d'adéquation est tirée puisque $\mathcal{E}_r(F_{exp}) = 0.0543$ et $\mathcal{E}_r(F_{DM}) = 0.0296$. Nous remarquons sur les figures 3.6 que les échantillons ont des compacités initiales de l'ordre de 0.59 et 0.565, conformément aux résultats expérimentaux présentés dans le tableau 3.2. Les compacités évoluent non linéairement avec les efforts résultants exercés sur l'échantillon. En effet, les compacités suivent le tassement de l'empilement. A partir du moment où les efforts sont non linéaires par rapport au déplacement imposé, les fractions volumiques suivent le même type de loi. Les résultats numériques et expérimentaux correspondant aux empilements de billes d'acier sont donc tout à fait compatibles, étant donné que l'écart relatif ne dépasse pas 6%.

Sur la figure 3.7, nous présentons les résultats numériques et expérimentaux de l'essai de compression simple d'un échantillon de billes de verre de rayon moyen 3.5 mm (Fig.

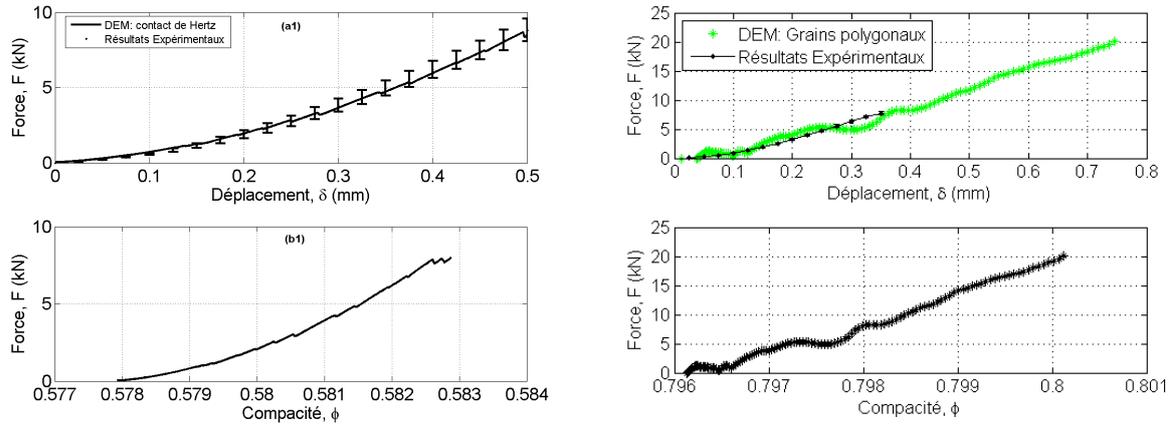


Fig. 3.7: Comparaison des résultats expérimentaux et numériques : essais de compression d'éprouvettes granulaires, (1) billes en verre de rayons 3.5 mm avec $\mu = 0.3$, $E = 85\text{GPa}$, $\nu = 0.25$, $\rho = 2500$ (2) agglomérat de ballast de rayon moyen 5.88 mm avec $\mu = 0.8$, $E = 46.9\text{GPa}$ (diorite), $\nu = 0.3$, $\rho = 2710$ (a) courbe force-déplacement (b) courbe force-compacité.

3.7-a) et d'un échantillon de ballast de taille réduite (Fig. 3.7-b). Pour simuler le premier échantillon, nous avons généré les diamètres des particules suivant une loi normale dont la moyenne et l'écart type sont conformes aux valeurs mesurées et présentées dans le tableau 3.1. Le deuxième échantillon est généré de uniformément comme décrit dans le paragraphe (2.3). Comme pour les empilements en acier, nous avons mesuré l'adéquation entre résultats numériques et expérimentaux moyennant le calcul de l'écart relatif. Nous avons remarqué que pour l'empilement en verre, $\mathcal{E}_r(F_{exp}) = 0.0673$ et $\mathcal{E}_r(F_{DM}) = 0.0355$, alors que pour l'empilement de ballast $\mathcal{E}_r(F_{exp}) = 0.0276$ et $\mathcal{E}_r(F_{DM}) = 0.03$, d'où la compatibilité des résultats. Là aussi nous remarquons que les compacités obtenues numériquement sont conformes aux résultats expérimentaux (voir tableau 3.2) dans le cas des billes de verre. Ainsi, on peut affirmer que la méthode numérique adoptée et les lois de contact choisies permettent de prédire avec une précision acceptable les résultats des essais expérimentaux.

3.3.3 Estimation des lois de comportement élastique

D'après les figures 3.6 et 3.7, les forces résultantes varient non linéairement avec les déplacements appliqués. Certains auteurs estiment que ce comportement est caractérisé

par deux régimes : un régime linéaire ($F \sim \delta$) correspondant au réarrangement des grains sous faibles sollicitations et un régime non linéaire ($F \sim \delta^\kappa$) observé pour les sollicitations relativement importantes. Etant donné que la déformation globale de l'empilement n'est que le résultat d'une combinaison des déformations intergranulaires, il est légitime de penser que les déformations globales suivent une loi comparable à celle des déformations locales. Il est donc intéressant d'évaluer les tendances des lois force-déplacement dont nous disposons. Nous rappelons à ce stade que nous avons considéré la loi de Hertz pour décrire les interactions locales des particules sphériques et une loi de contact linéaire pour décrire les interactions de particules de ballast. Ainsi, les résultats de l'ajustement des lois obtenues sont présentés dans le tableau suivant :

Matériaux	Force-Déformation	Ecart Relatif
Acier ($r = 2.25mm$)	$2.510^7 \epsilon^{1.555}$	0.011
Acier ($r = 4.75mm$)	$2.010^7 \epsilon^{1.54}$	0.021
Verre ($\bar{r} = 3.5mm$)	$1.3510^7 \epsilon^{1.535}$	0.038
Ballast ($\bar{r} = 5.88mm$)	$2.9310^7 \epsilon^{1.6}$	0.057

Tab. 3.3: *Ajustement des résultats expérimentaux et numériques.*

Théoriquement, le comportement des matériaux granulaires n'est pas élastique même pour les faibles chargements. En effet, des effets d'hystérésis persistent au cours des cycles de chargement. Mais, puisque d'une part la dissipation diminue au cours des cycles et que d'autre part la déformation irréversible est faible par rapport à la déformation élastique, nous pouvons parler d'un comportement élastique tout en gardant à l'esprit que ce n'est qu'une approximation. Les lois typiques modélisant le comportement élastique des matériaux granulaires sont généralement exprimées à l'aide de lois en puissance, elles dépendent de plus de la contrainte imposée. La non linéarité se traduit par un exposant n dans l'expression du module d'Young tangent initial (Lade et Nelson (1987)) :

$$E = BP_a \left(\frac{\sigma_a}{P_a} \right)^n \quad (3.2)$$

où P_a est la pression atmosphérique, σ_a désigne la contrainte appliquée et les constantes adimensionnelles B et n décrivant le comportement élastique isotrope sont obtenues par expérience. Pour les sables, Lade et Nelson (1987) affirment que l'exposant n est de l'ordre

de 0.5. A partir de cette loi et du fait que le module élastique s'écrit sous la forme $E = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}$, il est possible d'identifier l'effort résultant de l'essai de compression sous la forme :

$$F = M \epsilon^\kappa \quad (3.3)$$

où M est un module qui peut s'écrire sous la forme $M = SP_a \left(\frac{\kappa}{B}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, et κ est un exposant qui décrit la non linéarité de l'effort résultant, il s'écrit sous la forme $\kappa = \frac{1}{1-n}$. Ainsi, comme pour les sables, le module élastique des empilements granulaires auxquels nous nous intéressons varie en fonction du chargement comme le montre le tableau 3.3. Les calculs numériques confrontés aux résultats expérimentaux présentés dans le dernier paragraphe montrent que pour les empilements formés de grains sphériques l'exposant de la loi force-déplacement diffère légèrement de 3/2 (correspondant à la loi de Hertz), il est de l'ordre de $\kappa = 1.54$. Pour les empilements de ballast, l'exposant est différent puisque la loi de contact n'est plus celle de Hertz. Le terme constant M reflète les caractéristiques mécaniques des constituants puisqu'il augmente avec leurs raideurs. La différence entre les lois de contact et celles des comportements globaux est essentiellement due au changement de la structure de l'assemblage au cours de la sollicitation. D'après Roux (2004), de nouveaux contacts se créent au cours du chargement et affectent la tendance du comportement global, comme le montre la figure 3.8.

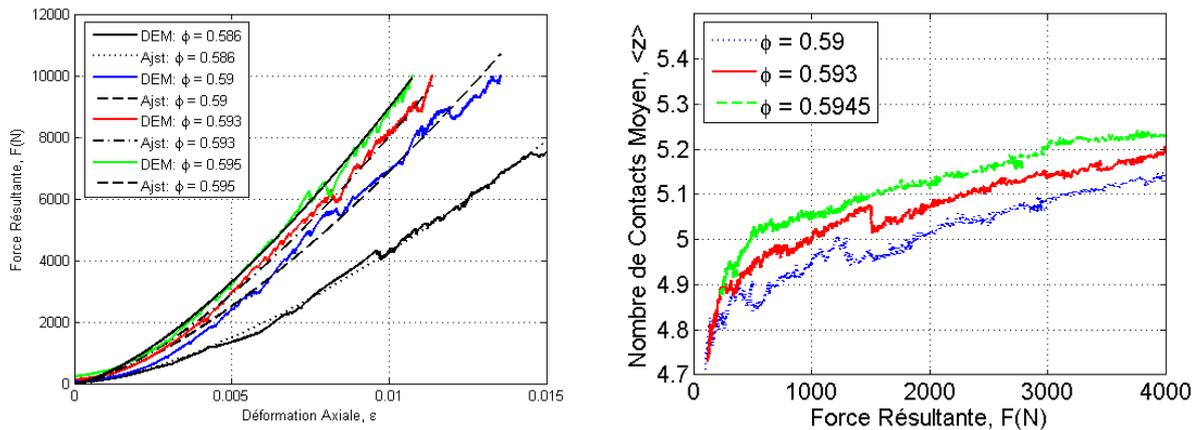


Fig. 3.8: Effet de la compacité sur les réponses d'un échantillon de 2000 billes de verre de rayon moyen 3.5 mm et de frottement interne $\mu = 0.2$. Ajustement des résultats et estimation des paramètres M et κ .

Sur les figures 3.8, nous présentons aussi les résultats numériques obtenus en appliquant la méthode de dynamique moléculaire ainsi que leurs ajustements relatifs pour différentes fractions volumiques (tableau 3.4). Les courbes force-déformation représentent le comportement d'éprouvettes granulaires de longueurs uniformes $L = 15$ cm sous compression monotone. La longueur relativement faible des éprouvettes est choisie pour minimiser les effets du frottement et d'écrantage. Cependant, cette longueur est suffisamment importante pour négliger la contribution des pores au niveau de la paroi du cylindre à la fraction volumique globale, d'où la compacité assez élevée $\phi \approx 0.59$. Sur la figure 3.8, nous remarquons aussi que le nombre de contacts moyen augmente aussi bien avec la force résultante qu'avec la fraction volumique. Ce résultat renforce la conclusion à laquelle nous avons abouti lors de l'analyse paramétrique montrant que les propriétés "élastiques" dépendent de la structure de l'assemblage aussi bien en termes de caractéristiques mécaniques des constituants qu'en termes de sollicitations et de compacité.

Echantillon	Force-Déformation $M\epsilon^\kappa$	Ecart Relatif
$\phi = 0.586$	$4.47 \cdot 10^6 \epsilon^{1.51}$	0.002
$\phi = 0.59$	$5.56 \cdot 10^6 \epsilon^{1.454}$	0.011
$\phi = 0.593$	$6.78 \cdot 10^6 \epsilon^{1.464}$	0.03
$\phi = 0.594$	$6.85 \cdot 10^6 \epsilon^{1.442}$	0.016

Tab. 3.4: *Résumé des résultats de l'ajustement pour des échantillons de différentes compacités. Les empilements sont de 2000 grains de billes de verre de rayon moyen 3.5 mm.*

Dans le tableau 3.4, nous résumons les résultats de l'ajustement par rapport aux résultats numériques. Nous remarquons que plus le matériau est dense plus le paramètre M est important, alors que l'exposant κ reste sensiblement le même. Il est important de noter que les résultats commentés dans ce paragraphe sont obtenus suite à un processus de compaction en partant d'un même empilement.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le comportement élastique des matériaux granulaires de constituants réguliers tels que les billes sphériques de différentes tailles et types

de matériaux et de constituants aléatoires tels que les ballasts. Les résultats numériques confrontés aux essais de compression montrent que le comportement élastique global dépend aussi bien des caractéristiques mécaniques des constituants que de leurs formes. Nous avons remarqué, à titre indicatif, que les grains de ballast caractérisés par leurs arêtes angulaires sont microscopiquement mieux décrits par une loi de contact linéaire que par la loi de Hertz. Au terme des comparaisons entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques, nous avons remarqué que la loi de contact locale ne permet pas d'estimer systématiquement une loi de comportement élastique globale. En effet, au cours du chargement, de nouveaux contacts intergranulaires se produisent et influent sur la tendance du comportement global.

Au cours de notre étude des matériaux granulaires en quasi-statique, nous avons remarqué aussi que les protocoles de préparation affectent beaucoup les résultats de simulation. Le cadre quasi-statique des essais a permis de reproduire les résultats expérimentaux sans difficulté considérable. Cependant, l'effet de l'historique pourrait influencer beaucoup plus les résultats dans le cas des excitations dynamiques. Il serait très difficile d'établir une loi rigoureuse qui tienne compte de l'historique des empilements de façon systématique. Pour étudier cette question, une approche non déterministe serait nécessaire.

Troisième partie

Tassement sous chargements dynamiques

Chapitre 4

Etude Expérimentale du mécanisme de tassement d'un lit de micro-ballast sous chargement dynamique

Sommaire

4.1	Introduction	92
4.1.1	Dispositif expérimental et procédure	92
4.2	Etude expérimentale du phénomène de tassement	95
4.2.1	Identification des fréquences critiques	96
4.3	Résultats des essais et discussion	97
4.3.1	Déplacement Résiduel sous le blochet	98
4.3.2	Vérification des résultats obtenus	100
4.3.3	Effet des paramètres de contrôle sur la vitesse de tassement	103
4.3.4	Vitesse de tassement en fonction de l'accélération	104
4.3.5	Effet du degré de confinement	106
4.3.6	Effet de la hauteur des échantillons et de l'élasticité du sol	107
4.3.7	Effet de la forme des grains	108
4.4	Conclusion	109

4.1 Introduction

Les plateformes de chemin de fer sont généralement constituées de rails connectés aux traverses qui transmettent les charges aux couches de ballast puis au sol. La géométrie de ces plateformes doit répondre à des exigences d'alignement spécifiques afin de satisfaire les critères de sécurité et de confort. Hormis les défauts de construction, ces alignements dépendent essentiellement des déformations permanentes qui peuvent avoir lieu au niveau des couches de ballast. Sous chargement cyclique, les couches de ballast peuvent subir de grandes déformations permanentes qui se traduisent par un tassement différentiel impliquant des pertes d'alignement. Ceci représente un défi considérable pour les ingénieurs de chemins de fer à cause du comportement complexe des matériaux granulaires sous chargements dynamiques.

Une large variété d'études a été réalisée afin de comprendre le comportement des matériaux granulaires sous chargement dynamique et sous vibration. Deux approches ont été adoptées afin d'étudier ce comportement. La première est basée sur la mécanique statistique, la relaxation des matériaux granulaire excités est en effet formellement analogue à la dynamique des systèmes thermiques déviés de leurs états d'équilibres. La deuxième approche décrit ce comportement avec des grandeurs homogènes équivalentes telles que les contraintes, les déformations, les déflexions élastiques, les vitesses etc. Cependant, la majorité des travaux qui ont été réalisés concernent des échantillons granulaires confinés où le réarrangement des particules ainsi que leurs usures sont les principaux responsables des déformations permanentes.

Dans ce chapitre, nous tenons compte des deux approches mentionnées ci-dessus pour décrire le mécanisme de tassement des matériaux granulaires, en considérant les effets de la gravité et des vibrations dans une large plage d'accélération. La deuxième section décrit le dispositif expérimental ainsi que la procédure utilisée pour réaliser les essais de tassement. La troisième section est dédiée à la discussion des résultats obtenus.

4.1.1 Dispositif expérimental et procédure

La granulométrie du micro-ballast utilisé pour ces essais est présentée sur la figure (4.1). D'après la norme française NF P18-560, ce type de matériaux est un mélange de gravier fin et grossier. Les caractéristiques des granulats utilisés pour faire ces essais sont identiques à celles de [Al-Shaer \(2005\)](#), [Al-Shaer et al. \(2005\)](#) et [Bodin \(2000\)](#), dans les bancs aux dimensions réduites. Les échantillons sont constitués de diorite, une roche

volcanique sombre et solide, largement utilisée dans les plateformes de chemins de fer. Les granulats sont obtenus par concassage de ce type de roche suivi d'un tamisage normalisé.

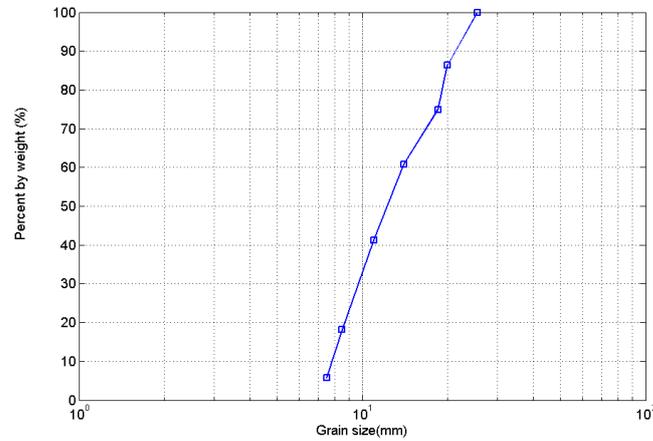


FIG. 4.1: Distribution des tailles des constituants du micro-ballast.

La préparation au laboratoire consiste d'abord à laver le micro-ballast afin de le débarrasser des débris qui peuvent jouer le rôle de lubrifiant et peuvent avoir un effet important sur les interactions intergranulaires. Ensuite, 4.5 kg de micro-ballast sont versés dans une enceinte cylindrique métallique de diamètre $D = 150$ mm et de profondeur $H = D$. Les colonnes granulaires sont compactées jusqu'à une densité proche de $\phi \approx 0.6$, afin d'assurer une répétabilité acceptable de l'état initial. La dimension moyenne des grains étant de $s = 16$ mm, le ratio entre le diamètre de l'enceinte et celui des grains est $D/s \approx 10$, comme le montre la figure (4.1). Les échantillons ainsi préparés sont soumis à des charges périodiques. Il est important de remarquer à ce niveau que l'homogénéité des échantillons, du point de vue de la granulométrie, est importante. En effet, le phénomène de ségrégation joue un rôle important lorsque les échantillons sont sous vibration, et la répartition de grains par taille doit être la plus uniforme possible.

Les lits granulaires sont chargés par un "blochet" modèle en acier de diamètre $d = 75$ mm, dans le cas partiellement confiné. Dans le cas complètement confiné, un plateau de diamètre $d = D$ est utilisé pour appliquer une pression uniforme sur l'échantillon. La rigidité est élevée afin d'éviter les effets de moments fléchissants au niveau de la surface de contact entre le piston et l'échantillon. Le chargement est assuré par un vérin hydraulique muni d'une servo-valve. Ce système hydraulique est asservi à l'aide d'une boucle de type PID telle que le montre le schéma (4.2). Le système est relié à un ordinateur afin de

commander et de contrôler automatiquement le fonctionnement de l'ensemble. Une cellule de force et un capteur de déplacement sont intégrés dans l'ensemble vérin-piston afin de mesurer la force appliquée ainsi que les déplacements relatifs effectués. Un accéléromètre a été collé sur le blochet métallique dans la direction verticale afin de suivre l'accélération par rapport au temps. Cet ensemble est maintenu par un châssis métallique constitué d'une plateforme et de quatre poutres de diamètres 100 mm attachées à une traverse ajustable qui maintient le vérin.

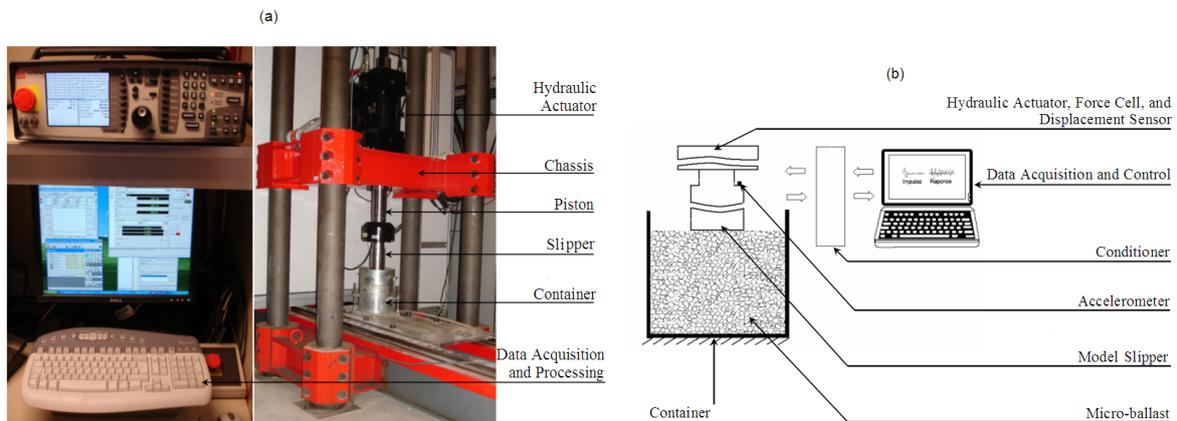


FIG. 4.2: (a) Dispositif expérimental (b) Schéma du flux de données

L'échantillon étant préparé, le blochet est ajusté sur la surface libre. Ensuite, une force initiale est appliquée de façon quasi-statique. La position du blochet atteinte jusque là est considérée par la suite comme étant un point de référence. Sur l'interface de commande, le signal à appliquer ainsi que la fréquence d'échantillonnage sont introduits. Une série de 2×10^5 cycles est par la suite appliquée aux échantillons que ce soit pour les cas partiellement ou totalement confinés. L'enregistrement des données se fait tous les 1000 cycles. Chaque enregistrement contient à peu près 30 points équidistants.

Afin d'estimer une loi empirique décrivant le tassement dans les échantillons partiellement ou totalement confinés, 115 essais ont été réalisés en appliquant différents signaux de chargement. Le programme d'essais est présenté dans le tableau (4.1). Parmi ces essais, 15 ont été dédiés à l'étude de l'effet de la longueur des échantillons sur la vitesse de tassement et 24 essais sont dédiés à l'étude de l'effet de l'élasticité du sol (modélisé par des couches d'élastomère) sur la vitesse de tassement.

Label	ΔF (kN)	Υ (%)	f(Hz)
1	0.5	50	10, 20, 30, 40
		100	10, 20, 30, 40, 50
2	1	50	10, 20, 30, 40
		100	20, 30, 40, 50, 60
3	1.5	50	20, 30, 40
		100	10, 20, 30, 40, 50, 60
4	2	50	20, 30, 40, 50, 60
		100	10, 20, 30, 40, 50, 55, 57, 60, 62, 65
5	2.5	50	50, 55, 57.5, 60, 61, 62, 63, 65
6	3	50	40, 50, 60, 65
		100	20, 30, 40, 50, 52, 53, 54, 55, 57, 60, 62, 63, 65

TAB. 4.1: Programme d'essais (Υ désigne le degré de confinement).

4.2 Etude expérimentale du phénomène de tassement

Dans l'étude bibliographique réalisée dans le premier chapitre, le tassement ou le déplacement résiduel dans les matériaux granulaires sous chargements cycliques peuvent être dus à plusieurs facteurs tels que (i) la compaction des matériaux résultant du réarrangement des particules, (ii) l'usure des grains et leur rupture, ainsi que (iii) la migration et l'écoulement des grains des zones plus chargées vers les zones moins chargées (Karrech et al. (2006a)). Le tassement dépend aussi de différentes quantités qui peuvent être impliquées dans les expressions mentionnées ci-dessus et qui affectent le mécanisme de tassement. Ces quantités sont : le nombre de cycles (équations (1.1)-(1.8)) les densités finales et initiales (équations (1.1) et (1.2)) les charges appliquées (équations (1.3)-(1.6)), la déflexion élastique (équations (1.7) et (1.8)) ainsi que la rigidité des grains (équations (1.7) et (1.8)).

L'une des motivations de ce chapitre est qu'aucune des expressions présentées dans la synthèse bibliographique ne prend en compte l'effet de l'accélération bien que celle-ci joue un rôle important dans le mécanisme de tassement. En outre, la majorité des lois

présentées concerne des échantillons confinés à l'exception des équations (1.7) et (1.8). Or le degré de confinement affecte significativement le tassement des matériaux granulaires.

4.2.1 Identification des fréquences critiques

Le milieu granulaire ainsi que l'enceinte métallique qui le contient sont soumis à des vibrations sous des charges de différentes fréquences (Figure 4.3-a). La plage de fréquences dans laquelle les signaux sont appliqués ne doit pas contenir des fréquences critiques de résonance de la structure. Les vibrations de résonance peuvent avoir lieu à cause des interactions entre les forces d'inertie et les propriétés élastiques des matériaux constituant la structure. Ceci peut induire des réponses non contrôlées sur le matériel utilisé pour réaliser les essais et peut induire aussi des résultats erronés.

Il y a différentes méthodes qui permettent d'étudier les paramètres modaux. Pour un système linéaire, la réponse en fréquence donne une information complète à propos de ces paramètres. La mesure de cette réponse nécessite le calcul du ratio entre la transformée de Fourier du signal d'entrée et celui de la sortie (en supposant que les signaux sont enregistrés sans bruit). Cette technique est insuffisante dans le cas d'un système plus complexe et non linéaire. Dans ce dernier cas, les signaux peuvent être contaminés par les contributions des non-linéarités et celles du bruit. Pour contourner ce problème, des techniques plus élaborées telles que l'estimateur de la fonction de réponse en fréquence (FRF) peuvent être utilisées pour obtenir les paramètres modaux du système composé par l'enceinte et l'échantillon de matériau granulaire. Les estimateurs FRF que l'on appelle H_1 et H_2 sont les plus connus. Ils sont tous les deux implémentés dans le système de mesure que nous avons utilisé (Pulse : BK 2032). L'estimateur H_1 caractérisé par une unique source de bruit est exprimé sous la forme :

$$H_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad (4.1)$$

Cet estimateur est établi en supposant que le bruit aléatoire est dû uniquement à la sortie et non pas à l'entrée ou au système de mesure. Le terme S_{xy} représente l'estimation de la puissance spectrale croisée entre l'entrée et la sortie, alors que S_{xx} désigne l'auto-puissance spectrale du signal d'entrée. Quant à l'estimateur H_2 , il s'écrit sous la forme :

$$H_2 = \frac{S_{yy}}{S_{xy}} \quad (4.2)$$

Cet estimateur est établi en supposant que le bruit aléatoire est dû uniquement à l'entrée et non pas à la sortie ou au système de mesure. S_{yy} désigne l'auto-puissance spectrale du signal de sortie. Le dispositif de mesure est constitué (i) d'un marteau muni d'un capteur de force afin de mesurer le signal d'entrée (ii) d'un accéléromètre utilisé pour mesurer l'accélération en un point et dans une direction donnés et (iii) d'un analyseur qui permet de calculer la réponse FRF (Figure 4.3-a).

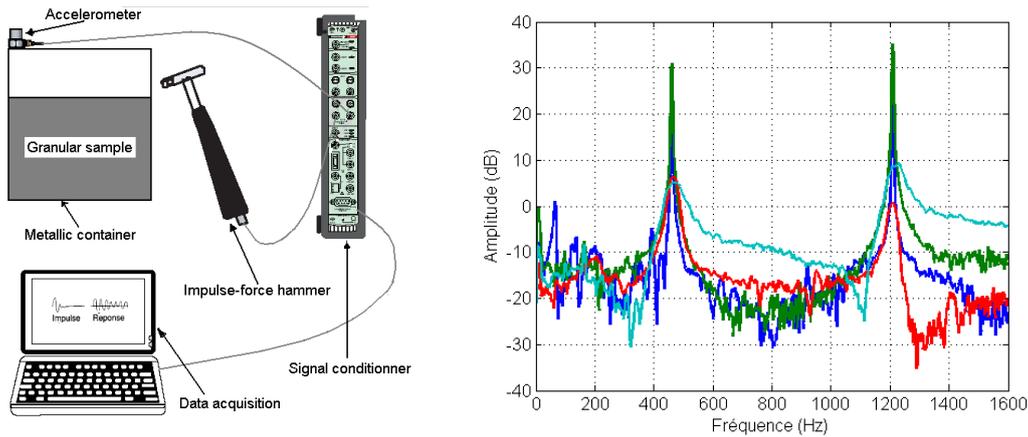


FIG. 4.3: (a) Dispositif de mesure des paramètres modaux (b) Représentation FRF des modes et fréquences propres du système enceinte-échantillon.

La figure (4.3-b) montre les représentations FRF pour différents modes de vibration obtenus expérimentalement. On peut remarquer que la première résonance a lieu à une fréquence $f_r = 450$ Hz. Les fréquences qui nous intéressent lors de passage de trains sont beaucoup moins élevées. Dans le cadre de cette étude expérimentale, les fréquences des signaux appliquées se situent dans l'intervalle $f \in [1, 100]$ Hz.

4.3 Résultats des essais et discussion

A cause des passages de trains, les plateformes de chemins de fer sont soumises à un signal en "M" qui dépend de la vitesse de roulement, des charges appliquées ainsi que des caractéristiques du sol. Ce signal s'écrit sous la forme :

$$F(Q, V, t) = Q \left(X\left(\frac{Vt-a}{d}\right)^2 + X\left(\frac{Vt-a-L}{d}\right)^2 \right) \quad (4.3)$$

où t est le temps, a est une distance caractéristique qui correspond à la position expérimentale de la charge nulle, d est la distance entre deux traverse, L est l'empattement des

bogies et X est une variable dépendant du sol. Ce type de signal a été utilisé par Guérin (1996), Bodin (2000) et Al-Shaer (2005)). Il contient un spectre de fréquences assez large. La complexité de ce type de signaux peut causer diverses anomalies en particulier quand le matériau granulaire se comporte de façon non linéaire. Dans le cadre de notre étude expérimentale, nous n'avons pas essayé de reproduire ce type de chargement, nous avons plutôt opté pour un signal sinusoïdal qui s'écrit sous la forme $F(t) = F_0 + \Delta F(1 + \sin 2\pi ft)$, où F_0 est pris égal à 0.5 kN et ΔF varie de 0.5 à 3 kN avec un incrément de 0.5 kN, alors que la fréquence, f , varie de 10 à 65 Hz. Le blochet subit alors des intensités d'accéléérations Γ , dans la plage allant de 0 à environ 3, où $\Gamma = \frac{\delta_{max}(2\pi f)^2}{g}$. δ_{max} est l'amplitude de la déflexion élastique et g est l'accélération de pesanteur.

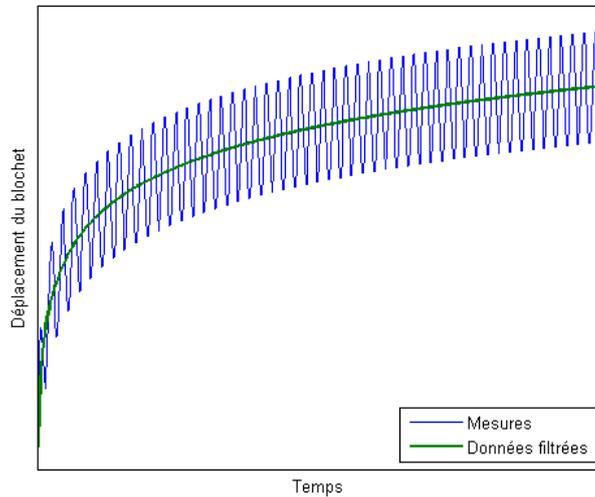


FIG. 4.4: Filtrage des données afin d'isoler les déplacements résiduels.

4.3.1 Déplacement Résiduel sous le blochet

La qualité des échantillons préparés dépend entre autres de la densité relative de la configuration initiale. Ce paramètre est mesuré systématiquement avant chaque essai. La moyenne de compacité obtenue est de $\phi = 0.601$ avec un écart type de 0.00511. Les figures (4.5) et (4.6) montrent des résultats typiques de variation du tassement τ (déplacement résiduel sous le blochet) avec le nombre de cycles, obtenus dans les cas complètement et partiellement confinés à différentes fréquences et amplitudes de chargements. Notons

que les déplacements élastiques sont filtrés en ne prenant en compte que la moyenne du déplacement absolu sur chaque cycle de chargement comme le montre la figure (4.4). Ces résultats montrent que, sous chargement dynamique, il y a deux phases de tassement. La première se manifeste au début du processus et est caractérisée par un déplacement résiduel rapide. La longueur de cette phase (en terme de nombre de cycles, N) augmente avec la fréquence d'excitation et avec le degré de confinement. On peut remarquer sur les figures mentionnées ci-dessus que cette première phase ne dépasse pas un nombre critique de cycles N_0 de 50000 cycles pour tous les cas de chargement. Ce nombre critique va être considéré comme la limite de la phase transitoire de tassement rapide. La phase transitoire est toujours suivie d'une phase sensiblement stationnaire qui correspond à $N > N_0$.

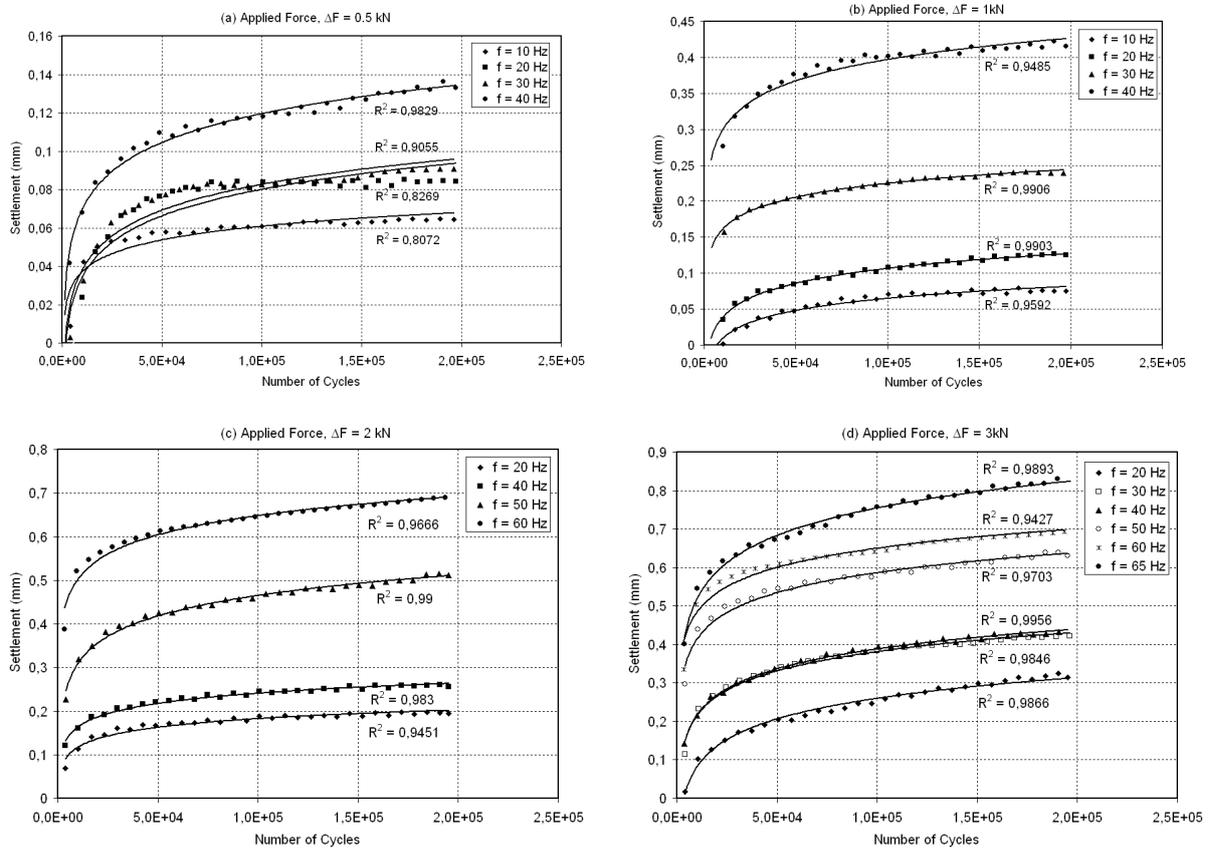


FIG. 4.5: Tassement des matériaux granulaires en fonction du nombre de cycles (cas d'échantillons complètement confinés).

Pour une force appliquée donnée, on peut remarquer que le tassement augmente avec la fréquence d'excitation, indépendamment du mode de chargement. A titre d'exemple,

la figure (4.5) montre que dans le cas d'échantillons complètement confinés, et d'une amplitude de force appliquée de $\Delta F = 1$ kN, le tassement maximum atteint 0.075 mm à une fréquence de 10 Hz. Cependant, il atteint 0.43 mm à une fréquence de 40 Hz. De façon similaire, dans le cas d'échantillons partiellement confinés, et d'une amplitude de force appliquée de $\Delta F = 1$ kN, la figure (4.6) montre que le tassement maximum atteint 0.4 mm à une fréquence d'excitation de 20 Hz et 1.4 mm à une fréquence d'excitation de 60 Hz. Les figures (4.5) et (4.6) montrent que ce comportement reste valable pour différentes amplitudes de forces appliquées.

D'autre part, les figures (4.5) et (4.6) révèlent que la variation du tassement en fonction du nombre de cycles peut être représentée par une loi logarithmique similaire aux lois (1.1), (1.2), et (1.3). Cette loi peut être écrite sous la forme :

$$\tau = A + B \ln N \quad (4.4)$$

L'ajustement logarithmique paraît convenable. Son adéquation est mesurée à travers le coefficient de détermination (voir annexe a). Dans la majorité des cas, ce coefficient dépasse 0.9 que ce soit pour le cas partiellement ou totalement confiné comme le montrent les figures (4.5) et (4.6). Théoriquement, le paramètre A correspond au tassement qui résulte du premier cycle de chargement et le paramètre B décrit la vitesse incrémentale de tassement. Jusque là, les paramètres A et B dépendent des différentes quantités expérimentales telles que la force appliquée, F , la fréquence, f , la déflexion élastique, δ , l'intensité d'accélération, Γ , et le degré de confinement Υ . Dans la section suivante, l'impact de ces différentes quantités va être discuté avec plus de détails.

4.3.2 Vérification des résultats obtenus

Une intense activité de recherche a été dédiée à l'établissement d'une loi empirique reliant l'incrément de tassement à la déflexion élastique comme expliqué dans la section (1.3). Ces lois concernent uniquement la partie quasi-stationnaire de la courbe $(\tau(N), N)$. Les résultats expérimentaux obtenus dans le cas partiellement confiné, ainsi que leurs adéquations respectives (en terme de coefficient de détermination) sont résumés dans le tableau (4.2). Les variations des tassements incrémentaux par rapport aux déflexions élastiques sont estimées avec des coefficients de détermination, R^2 , allant de 0.44 à 0.69 (voir annexe a). Les valeurs de ces coefficients montrent déjà la difficulté d'expliquer le phénomène de tassement surtout quand le dispositif expérimental est complexe. D'autre part,

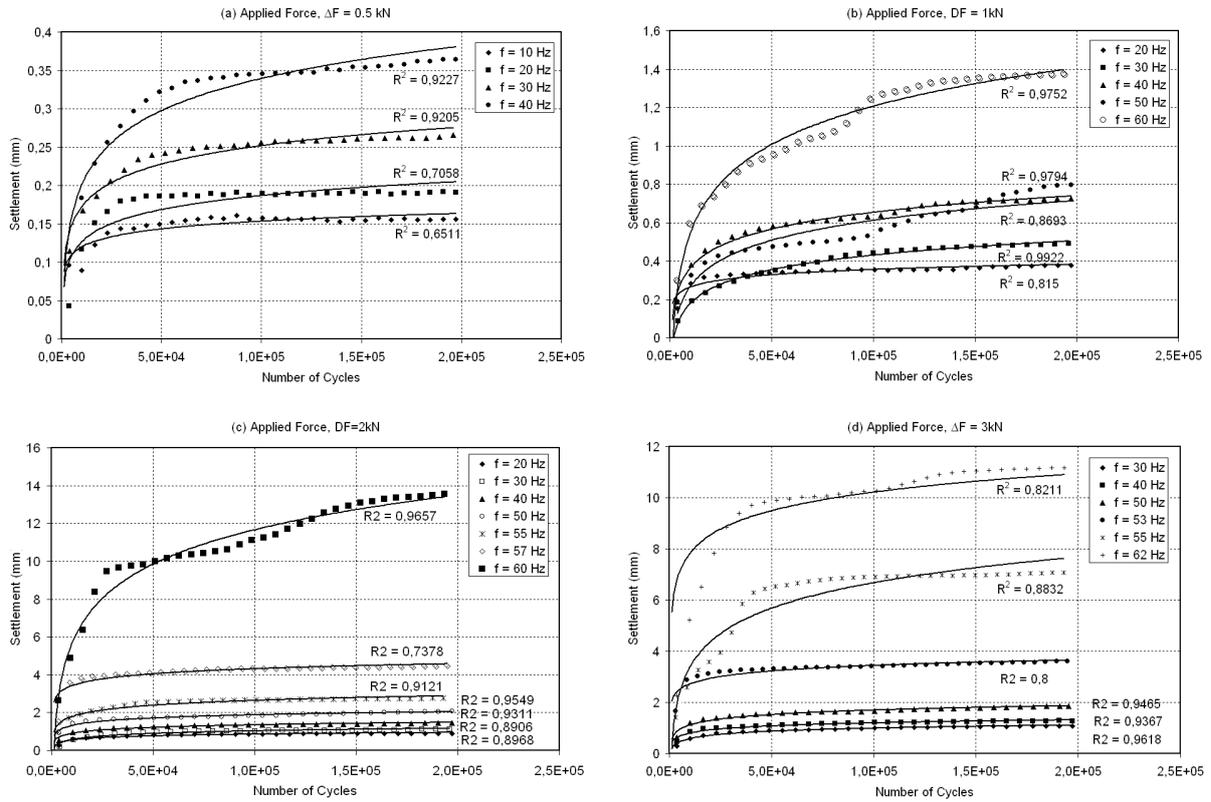


FIG. 4.6: Tassement des matériaux granulaires par rapport au nombre de cycles : Échantillons partiellement (50%) confinés.

ces valeurs montrent que la déflexion élastique peut être prise comme variable d'explication assez adéquate, bien qu'elle n'explique pas le phénomène avec précision. La loi de puissance présentée dans l'équation (1.7) et reliant l'incrément de tassement à la déflexion élastique a été maintenue avec précaution en tenant compte de la complexité des dispositifs expérimentaux mis en place. Les valeurs des coefficients de détermination justifient aussi le choix de notre dispositif expérimental. Dans notre étude, nous avons opté pour un dispositif moins complexe de par sa structure simple et ses dimensions relativement faibles. Ce choix permet en effet de diminuer le nombre d'aléas dus à la structure du dispositif expérimental. Cette approche nous a permis d'estimer des lois similaires pour différents degrés de confinement. Dans le cas partiellement confiné, un ajustement de qualité moyenne a été obtenu puisque R^2 ne dépasse pas 0.68. En revanche, dans le cas complètement confiné, les résultats sont plutôt satisfaisants puisque R^2 est de l'ordre de 0.86, comme le montre la figure (4.7). D'autre part, le tableau (4.3) montre que le coefficient de corrélation entre

l'incrément de tassement moyen et la déflexion élastique est de l'ordre de 0.789 dans le cas d'échantillons partiellement confinés et de l'ordre de 0.908 dans le cas d'échantillons complètement confinés. En revanche, d'après les résultats expérimentaux obtenus dans le cadre de cette étude, la corrélation diminue quand l'accélération augmente.

Modèle	Guérin	Bodin	Al-Shaer	En Cours	
Υ	EPC*	EPC	EPC	ECC**	EPC
$\frac{d\tau}{dN}$	$4.8 \times 10^{-7} \delta^{2.5}$	$2.5 \times 10^{-6} \delta^{1.17}$	$3.1 \times 10^{-5} \delta^{2.41}$	$7.6 \times 10^{-6} \delta^{1.35}$	$3.7 \times 10^{-5} \delta^{1.42}$
R^2	0.68	0.69	0.44	0.86	0.68

TAB. 4.2: Comparaison des incréments de tassement en fonction de la déflexion élastique avec des résultats publiés précédemment. * Echantillon Partiellement Confiné, ** Echantillon Complètement Confiné

Malgré les différences majeures entre le dispositif expérimental pour lequel nous avons opté et ceux conçus par Guérin (1996), Bodin (2000) et Al-Shaer (2005), en termes de forme des signaux appliqués et dimensions des échantillons, nous avons obtenus des résultats sous forme de loi de puissance similaires à (4.2). D'autre part, les différences en terme d'erreur par rapport à l'ajustement restent dans un ordre de précision accepté par les auteurs mentionnés ci-dessus.

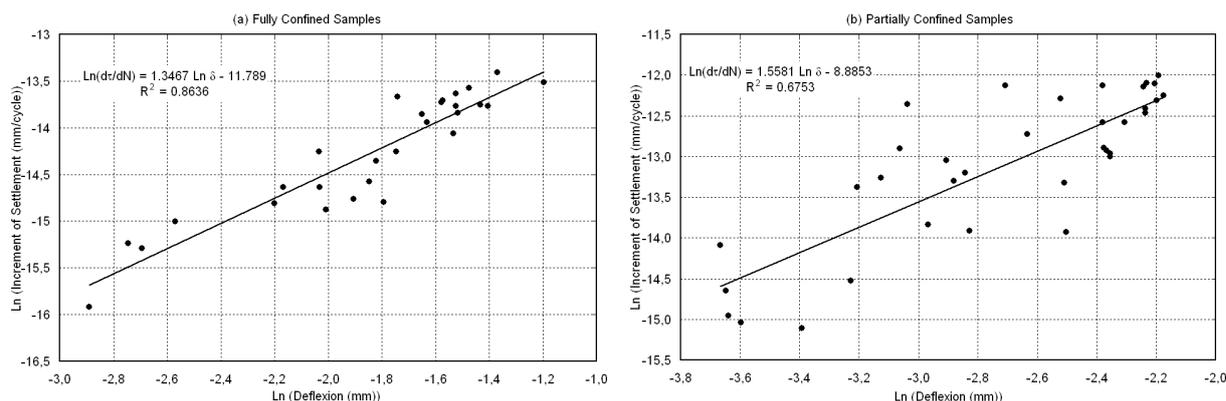


FIG. 4.7: Estimation de la loi de puissance reliant l'incrément de tassement, $\frac{d\tau}{dN}$, à la déflexion élastique, δ , dans le cas complètement (a) et partiellement (b) confiné.

4.3.3 Effet des paramètres de contrôle sur la vitesse de tassement

Le tableau (4.3) résume les effets des différentes quantités expérimentales accessibles avec les capteurs utilisés : la force appliquée, la fréquence, l'accélération, la déflexion élastique ainsi que le déplacement résiduel sous le blochet. Nous nous penchons sur le tassement incrémental tel que défini plus haut ainsi que sur le coefficient B tel que défini par l'équation (4.4). Ceci signifie que l'on tient compte non seulement de la phase quasi-stationnaire, mais aussi de la phase transitoire de tassement qui se manifeste au début du processus. Le tableau (4.3) montre que parmi tous les facteurs énumérés ci-dessus, l'accélération ainsi que la déflexion élastique sont les plus corrélées avec le paramètre B et avec le tassement incrémental $\frac{d\tau}{dN}$, que ce soit dans les cas d'échantillons complètement ou partiellement confinés. Nous remarquons également que le coefficient B a une corrélation plus élevée avec les facteurs considérés (Γ et δ) que le tassement incrémental $\frac{d\tau}{dN}$. D'autre part, nous remarquons que la corrélation est plus élevée dans le cas complètement confiné que dans le cas partiellement confiné.

	ECC		EPC	
	B	$\frac{d\tau}{dN}$	B	$\frac{d\tau}{dN}$
Force Appliquée, ΔF (kN)	0.805	0.832	0.678	0.6778
Fréquence, f (Hz)	0.891	0.893	0.768	0.792
Intensité d'accélération, Γ (g(m/s))	0.959	0.931	0.935	0.903
Déflexion élastique, δ (mm)	0.926	0.908	0.789	0.789

TAB. 4.3: Corrélation entre la vitesse de tassement et les paramètres de contrôle expérimentaux, $\frac{d\tau}{dN}$ en (mm/cycle) et B en (mm/Log(cycle))

Ceci peut être confirmé par la figure (4.8) qui montre la variation du tassement incrémental en fonction du nombre de cycles pour les deux degrés de confinement considérés. La régression linéaire montre que pour une force appliquée donnée, différents niveaux de tassement peuvent être obtenus. D'autre part, le coefficient de détermination est faible surtout dans les cas d'échantillons partiellement confinés où il atteint 0.08. Les figures (4.7), (4.8), et (4.9) montrent aussi que les meilleurs coefficients de détermination sont obtenus quand on considère l'accélération comme facteur de contrôle. En outre, les figures

(4.9) et (4.10) indiquent que le paramètre de tassement B explique de façon plus précise la vitesse de tassement que la pente de tassement incrémental.

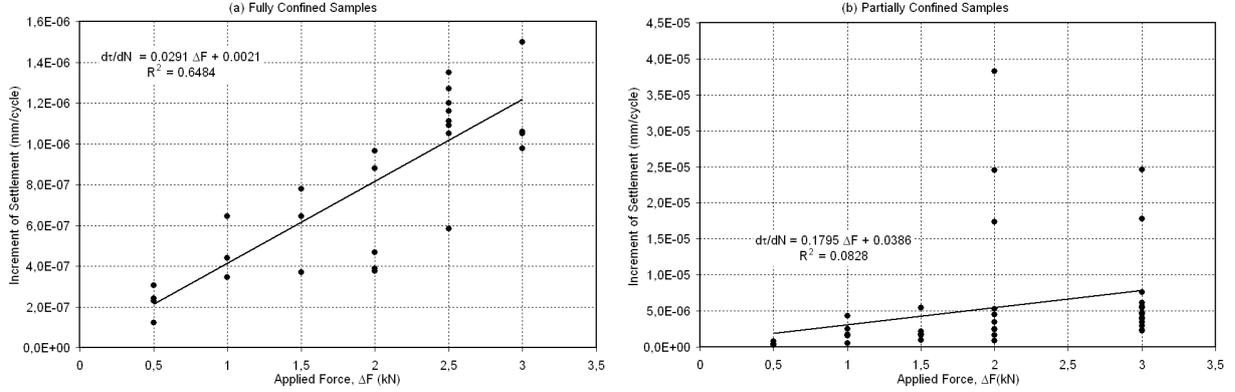


FIG. 4.8: Régression linéaire montrant la faible dépendance de l'incrément de tassement, $\frac{d\tau}{dN}$, avec l'amplitude des forces appliquées, ΔF .

Cette analyse permet de conclure que les paramètres qui peuvent être considérés pour expliquer le mécanisme de tassement sont, a priori, l'accélération et la déflexion élastique. Nous déduisons aussi qu'il est plus avantageux de considérer le paramètre de vitesse de tassement, B , que le tassement incrémental pour deux raisons. D'abord, ce coefficient est estimé en se basant sur toute la série temporelle représentant le déplacement du blochet, et puis, ce coefficient a des corrélations plus élevées avec les facteurs de l'expérience considérés Γ et δ que le tassement incrémental. Dans la suite, le coefficient B va être principalement considéré pour décrire la vitesse de tassement des échantillons.

4.3.4 Vitesse de tassement en fonction de l'accélération

Bien qu'il soit tout à fait adéquat de considérer la déflexion élastique comme facteur expérimental essentiel pour prévoir la vitesse de tassement lorsque les chargements sont de faible vitesse voire quasi-statiques, il paraît évident que ce facteur est inapproprié quand les matériaux sont agités de façon excessive surtout dans le cas d'échantillons partiellement confinés. En revanche, les courbes de tassement en fonction du nombre de cycles maintiennent leurs formes logarithmiques (4.4) comme le montrent les figures (4.5) et (4.6). Dans le cas idéal où les matériaux granulaires peuvent être considérés comme élastiques et linéaires, les forces appliquées sont proportionnelles à la déflexion élastique

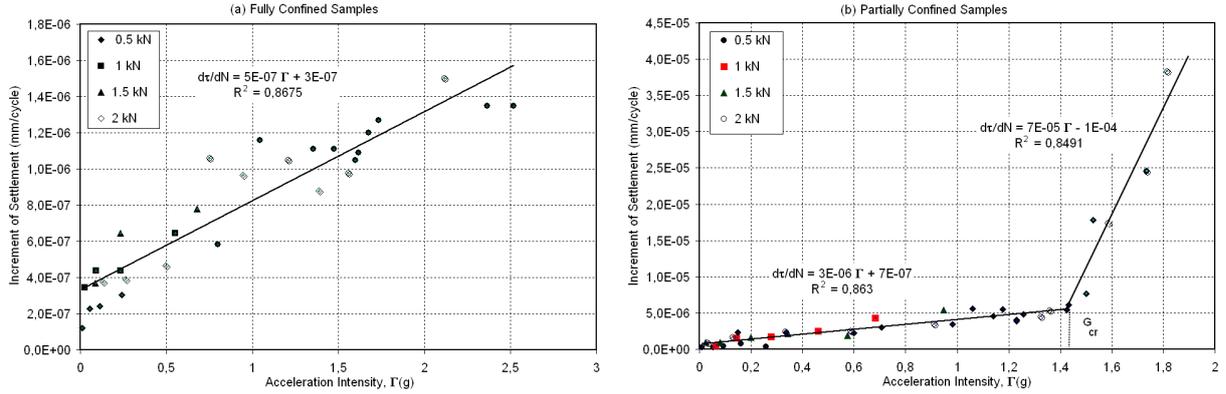


FIG. 4.9: Variation de l'incrément de tassement, $\frac{d\tau}{dN}$, en fonction de l'intensité d'accélération, Γ .

et les accélérations sont également reliées aux fréquences de chargement ainsi qu'aux déflexions élastiques. Ceci signifie que l'accélération, qui est une réponse accessible expérimentalement, contient suffisamment d'information pour décrire la dynamique du système granulaire considéré. Dans notre cas, nous avons remarqué que la réponse des échantillons en terme de vitesse de tassement est hautement corrélée avec l'intensité d'accélération par comparaison aux autres facteurs de l'expérience. La corrélation atteint 0.959 dans les cas d'échantillons complètement confinés et 0.935 dans les cas d'échantillons partiellement confinés. Puisque l'accélération dépend de paramètres non indépendants tels que la déflexion élastique, de la force appliquée et de la fréquence et qu'elle est hautement corrélée avec la vitesse de tassement B , elle représente un candidat potentiel pour expliquer le mécanisme de tassement. Une régression linéaire est effectuée pour trouver une relation entre les grandeurs mentionnées ci-dessus, comme le montre la figure (4.10).

$$B = 0.0379\Gamma + 0.0233 \quad (4.5)$$

$$B = 0.243\Gamma + 0.0527 \quad \text{si } \Gamma \leq \Gamma_{cr} \quad B = 5.144\Gamma - 6.887 \quad \text{si } \Gamma > \Gamma_{cr} \quad (4.6)$$

où l'équation (4.5) correspond aux cas d'échantillons complètement confinés et l'équation (4.6) correspond aux cas d'échantillons partiellement confinés. Les relations linéaires sont établies en se basant sur les mesures effectuées et leurs ajustements par rapport à la

loi logarithmique (4.4). La régression linéaire indique que le coefficient de détermination R^2 est de l'ordre de 0.92 et 0.87 dans les cas d'échantillons complètement et partiellement confinés, respectivement. Comparé au coefficient de détermination obtenu lorsque les relations entre la déflexion élastique et la vitesse de tassement sont considérés, l'explication de la vitesse de tassement par l'intensité d'accélération est plus avantageuse.

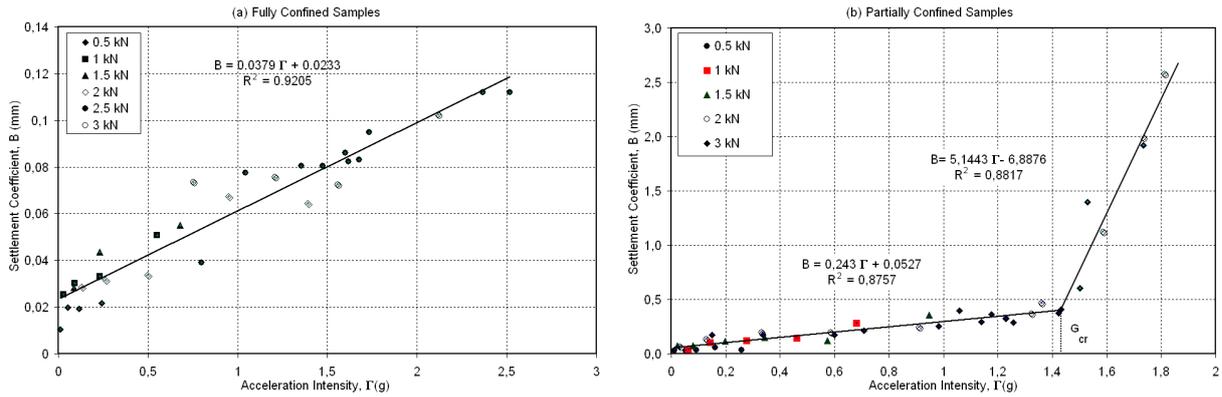


FIG. 4.10: Coefficient de tassement, B , en fonction de l'intensité d'accélération, Γ .

4.3.5 Effet du degré de confinement

Les équations (4.5) et (4.6) sont obtenues par régression linéaire et s'écrivent sous la forme $B_i = a_i \Gamma + b_i$ (où les indices $i = 1, 2$ désignent les échantillons partiellement et complètement confinés, respectivement) avec des coefficients de détermination de l'ordre de 0.9 quand l'intensité d'accélération est inférieure à 1.45. En outre, on note que la pente de la courbe $B = f(\Gamma)$ est plus élevée dans le cas d'échantillons partiellement confinés ($\frac{a_2}{a_1} \approx 6.5$). Quand les vitesses de tassement sont étudiées pour un large intervalle d'intensités d'accélération, pour toutes forces et fréquences confondues, nous remarquons qu'il y a une différence de comportement majeure selon le degré de confinement. La figure (4.10-a) montre que la vitesse de tassement B augmente linéairement avec l'intensité de tassement sous le blochet. En revanche, la figure (4.10-b) montre que cette vitesse augmente linéairement jusqu'à ce que l'intensité d'accélération atteigne $\Gamma_{cr} \approx 1.45$ puis affiche une croissance plus rapide. Cette intensité peut être considérée comme un point de transition entre un comportement quasi-solide et un comportement quasi-fluide.

En effet, le mécanisme de tassement diffère d'un degré de confinement à un autre.

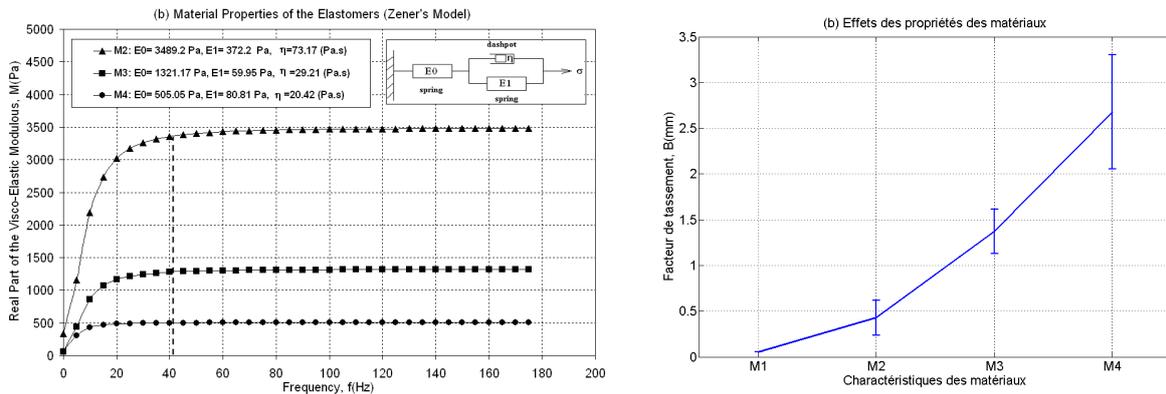


FIG. 4.11: Variation du coefficient de tassement, B , en moyenne et écart type en fonction de la souplesse du sol simulée par des élastomères de propriétés différentes. (M_1 correspond au cas sans élastomère)

Dans le cas d'échantillons complètement confinés soumis à des chargements dynamiques, le réarrangement des grains ainsi que leur usure sont responsables du déplacement résiduel. Cependant, dans le cas d'échantillons partiellement confinés, un autre facteur rentre en jeu, il s'agit de la mobilité des grains vers des régions aux niveaux de chargement moins élevés. La comparaison effectuée lors de cette étude expérimentale montre que ce facteur joue un rôle clef dans le mécanisme de tassement.

4.3.6 Effet de la hauteur des échantillons et de l'élasticité du sol

Afin d'étudier l'effet de l'élasticité du sol et de la hauteur des échantillons sur la vitesse de tassement un signal particulier a été sélectionné. Ce signal est caractérisé par une amplitude de force de $\Delta F = 1$ kN et une fréquence $f = 40$ Hz. L'élasticité du sol est simulée en intercalant des couches d'élastomère de hauteur 40mm sous chaque échantillon. Les caractéristiques mécaniques des matériaux sont identifiées moyennant des essais de relaxation ajustés au modèle de Zener (un ressort de module E_2 en série avec une combinaison parallèle d'un ressort de module E_1 et d'un amortisseur de module η). La figure (4.11) montre que le paramètre de tassement, B , augmente en moyenne et écart type avec la souplesse du sol. L'effet de la hauteur de l'échantillon est étudié en faisant varier la hauteur de l'échantillon de 0.095 à 0.195 m. Le paramètre de tassement, B , paraît indépendant de la hauteur de l'échantillon pour des hauteurs supérieures au

diamètre des échantillons ($H > D$), comme le montre la figure (4.12). Ce résultat peut être interprété comme suit : le tassement concerne essentiellement les grains les plus proches de la sollicitation.

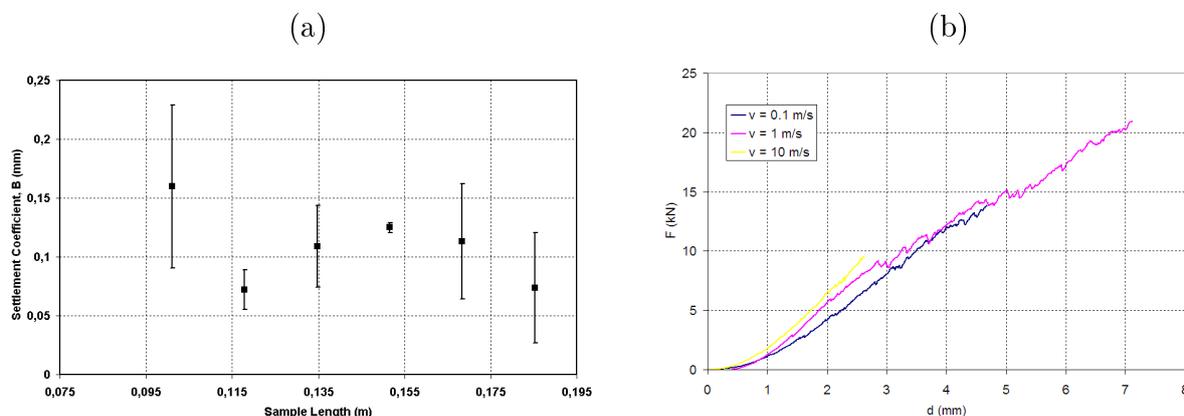


FIG. 4.12: (a) Variation du coefficient de tassement en moyenne et écart type en fonction de la hauteur des échantillons. (b) Raideur d'un échantillon de ballast pour différentes vitesses de pénétration

4.3.7 Effet de la forme des grains

A notre connaissance, aucun modèle de mécanique des milieux continus ne tient compte de la forme des grains dans sa formulation. La théorie cinétique développée pour décrire l'hydrodynamique des milieux granulaires ne tient pas compte de cet aspect non plus, puisqu'elle est formulée en partant de fonctions de distribution de grains sphériques ou circulaires (annexe b). Lorsque nous avons entamé la présente étude, pour examiner le tassement des ballasts des chemins de fer, nous avons prévu une modélisation par la dynamique moléculaire avec des grains sphériques pour simplifier les calculs. Les premiers essais de compression sur des échantillons complètement confinés (voir troisième chapitre) semblent montrer que cette approche est prometteuse. C'est à travers des essais de compression sur des échantillons partiellement confinés que nous nous sommes rendus compte de l'importance de la forme des grains.

La figure (4.12)-b montre les courbes force-déplacement pour un échantillon de ballast partiellement confiné. Les mesures sont prises au niveau du blochet comme dans les

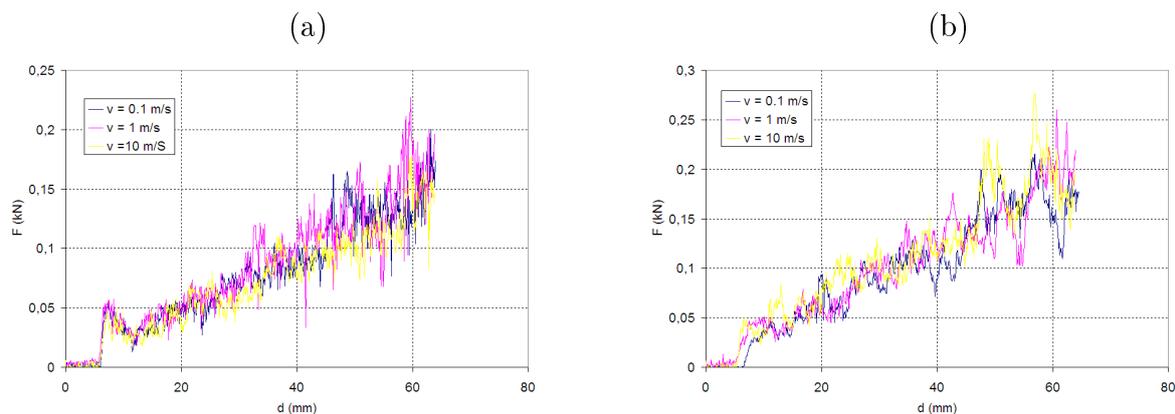


FIG. 4.13: Raideur d'un échantillon de ballast pour différentes vitesses de pénétration, (a) cas de billes en verre (b) et de billes en acier

essais décrits précédemment, mais pour différentes vitesses de pénétration sous chargements monotones. Les figures (4.13) montrent, quant à elles, les mêmes grandeurs pour des billes en acier et des billes en verre. A partir de ces figures, nous pouvons remarquer que la résistance des échantillons de constituants sphériques est négligeable devant celle du ballast. En effet, la réaction du ballast atteint plus de $10kN$ alors que celle des billes sphériques ne dépasse pas $0.3kN$. D'autre par la mobilité des grains arrondis est beaucoup plus élevée que celles des grains de ballast. Nous constatons que pour de faibles chargements monotones, le piston pénètre dans le milieu granulaire de constituants sphériques de l'ordre de 60 mm. Alors qu'il atteint 6 mm à peine dans le ballast avant de produire des ruptures au niveau des grains.

4.4 Conclusion

Le tassement des matériaux granulaires se produit suite aux déplacements résiduels qui peuvent avoir lieu dans le matériau sous chargement externe. En se basant sur des travaux publiés antérieurement, présentés dans le premier chapitre, le mécanisme de tassement peut être attribué au réarrangement des grains, à leur usure ainsi qu'à leur mobilité. En outre, différentes lois empiriques ont été présentées en l'absence de théorie précise décrivant le phénomène. Ces lois expriment le tassement en fonction de différents facteurs expérimentaux tels que la déflexion élastique, le nombre de cycles, les forces appliquées

etc. En se basant sur ces travaux, nous avons étudié expérimentalement le comportement du micro-ballast sous chargement périodique. Des colonnes cylindriques à l'échelle 1 :3 complètement et partiellement confinées sont soumises à des sollicitations axiales qui ont été sélectionnées de telle sorte que le matériau couvre un large intervalle d'accélération.

Les résultats obtenus indiquent que le tassement suit une forme logarithmique conformément aux résultats publiés ultérieurement. Sous des niveaux d'accélération inférieures à $1g$, la pente de la courbe de tassement incrémental évolue de façon régulière avec l'accélération. Il augmente, par contre, brusquement pour les hautes accélérations, dans le cas d'échantillons partiellement confinés. De plus, nous avons remarqué que la vitesse de tassement est beaucoup plus élevée dans le cas d'échantillons partiellement confinés que dans le cas d'échantillons complètement confinés. Ceci prouve que le mécanisme de tassement est lié plutôt à la migration des grains vers des régions moins chargées. D'autre part, nous avons considéré des échantillons de différentes longueurs et reposant sur des couches d'élastomères de différentes élasticités. Moyennant cette approche nous avons déduit que le tassement concerne essentiellement les couches supérieures de granulats. Nous avons noté de plus que l'élasticité du sol affecte de façon nette la vitesse de tassement. Finalement, nous avons observé l'effet de la forme des grains sur leur mobilité. Des essais uniaxiaux sur des échantillons partiellement confinés de ballast, de billes en acier, et de billes en verre ont permis de montrer que les grains arrondis ont une faible résistance aux charges appliquées et qu'ils présentent des écoulements importants en comparaison avec les grains irréguliers de ballast.

Avec le dispositif expérimental que nous avons conçu, nous n'avons malheureusement pas accès aux variables microscopiques telles que les déplacements de grains, les forces de contact, les accélérations locales etc. Ces informations peuvent donner une description plus complète du mécanisme de tassement. Dans le chapitre suivant, une approche de calcul par éléments discrets est adoptée afin d'accéder à ces grandeurs et d'expliquer de façon complémentaire le mécanisme de tassement.

Chapitre 5

Etude numérique du mécanisme de tassement

Sommaire

5.1	Introduction	112
5.2	Tassement sous chargement dynamique	113
5.2.1	Effet du degré de confinement et de l'accélération	113
5.2.2	Effet de la forme des grains	114
5.2.3	Etude paramétrique	115
5.3	Homogénéisation des champs mécaniques	117
5.3.1	Trajectoires des grains	117
5.3.2	Nombre de coordinations et densité relative	118
5.3.3	Champs de contrainte et de déformation	122
5.3.4	Glissements locaux et modes de dissipation	126
5.3.5	Phénomène de rochet	129
5.4	Lien de causalité entre la perte de contacts et la vitesse de tassement	135
5.4.1	Mesure de causalité	136
5.4.2	Calcul des coefficients d'estimation	137
5.5	Conclusion	140

5.1 Introduction

Une étude expérimentale du phénomène de tassement du micro-ballast sous chargement cyclique à différentes accélérations et degrés de confinement a été présentée dans le chapitre précédent. Cependant, l'approche expérimentale que nous avons adoptée ne permet pas d'accéder aux variables locales telles que les forces, les déplacements, les vitesses etc. Les approches numériques permettent de remédier à cet handicap sous réserve de cohérence par rapport aux grandeurs accessibles expérimentalement. L'objectif de notre étude numérique est de compléter l'approche expérimentale afin d'approfondir la compréhension du mécanisme de dérive de déplacements résiduels au cours des cycles de chargement. Cette problématique a attiré l'attention de plusieurs adeptes tels que [Saussine et al. \(2005\)](#) qui ont proposé un outil numérique permettant de simuler des matériaux granulaires de constituants polygonaux basé sur la dynamique des contacts. Ils se sont appuyés sur des résultats expérimentaux de tassement du ballast afin de valider cette approche. Plus récemment, [Lu et McDowell \(2007\)](#) ont développé une approche de calcul par la dynamique moléculaire où ils ont étudié la dégradation d'un lit de grains sous un cycle unique de chargement. Afin de reproduire des grains de formes complexes, ces auteurs ont utilisé une technique d'assemblages de billes sphériques. Bien que cette technique reproduise la forme des grains, l'assemblage qu'elle fournit est approximatif du point de vue inertiel. La méthode discrète appliquée aux voies ferrées a été adoptée également par [Lobo-Guerrero et Vallejo \(2006\)](#) afin d'étudier l'effet de rupture de grains sur la dégradation des voies sous chargements cycliques. Pour ce faire, ils ont utilisé des grains modèles de formes circulaires. La rupture des grains est simulée en remplaçant le grain sollicité par des fragments circulaires dont le nombre et les tailles dépendent de la nature du matériau (un grain de verre écrasé donne des fragments de tailles et de formes différentes d'un grain de diorite). Le critère de rupture adopté par ces auteurs dépend des forces appliquées, du nombre de coordination et aussi des tailles des grains. Il faut noter toutefois que ce critère reste empirique et nécessite une étude plus approfondie.

La méthode discrète que nous avons développée dans le cadre de ce travail permet de simuler les comportements des matériaux granulaires de différentes formes et caractéristiques mécaniques, mais elle ne tient pas compte d'un mécanisme de rupture à l'échelle du grain. La deuxième section de ce chapitre sera dédiée à l'étude numérique en terme de vitesse de tassement en fonction des facteurs étudiés dans le chapitre précédent, à savoir : la déflexion élastique et l'intensité d'accélération. Les résultats numériques seront confron-

tés aux résultats expérimentaux. D'autre part, les effets des formes des grains, de leurs tailles ainsi que de leur frottement sur la vitesse de tassement seront traités. Dans la troisième section, le mécanisme de tassement sera examiné à travers l'étude des distributions des champs de contact, de la densité, des déplacements, des vitesses et des contraintes. Nous vérifierons à ce niveau la différence majeure des mécanismes de tassement dans les cas d'échantillons partiellement et complètement confinés. Nous montrerons également l'existence d'un plan de perte de contacts au cours de l'évolution du milieu dans le cas partiellement confiné.

5.2 Tassement sous chargement dynamique

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'étudier numériquement le tassement de matériaux granulaires au cours de chargements périodiques de la forme $F(t) = F_0 + \Delta F (1 + \sin(2\pi ft))$ où $F_0 = 0.5kN$, au niveau de la surface supérieure. Nous vérifions d'abord la cohérence du modèle discret par rapport aux expériences et nous nous intéressons par la suite aux effets des paramètres de simulation tels que la granulométrie, les coefficients de frottement, et la forme des grains sur la vitesse de tassement.

5.2.1 Effet du degré de confinement et de l'accélération

L'objectif de cette section est de vérifier l'adéquation des simulations numériques avec les résultats expérimentaux présentés dans le chapitre précédent. Pour ce faire, nous utilisons des grains polygonaux avec les caractéristiques mécaniques décrites dans le tableau 5.1. La répartition des tailles des grains est uniforme et varie entre $8mm$ et $15mm$ afin de reproduire la répartition granulométrique utilisée expérimentalement. Les dimensions de l'échantillon sont inspirées de celles qui ont été étudiées expérimentalement, soit une largeur $l = 75mm$ et une hauteur $H = 150mm$. Afin de pouvoir faire cette comparaison, nous supposons qu'il y a une similitude du point de vue des contraintes appliquées. Sans cette hypothèse, l'approche simplificatrice que nous adoptons n'est pas comparable à l'essai axisymétrique considéré dans la partie expérimentale. Il est important d'indiquer également que les simulations considérées sont limitées à un nombre de cycles de 1000. Il est donc vraisemblable que l'on s'attende à des incréments de tassement surestimés, mais on remarquera que le modèle reproduit la dépendance par rapport à l'accélération et au degré de confinement de façon assez fidèle (Figure 5.1).

Matériau			Interactions		
Densité des particules	ρ_p	2710 kg/m^3	coeff. de frottement	μ	0.8
Module d'Young	E	46.9 GPa	coeff. visqueux	α_n, α_t	0.8, 0.1
Coeff. de Poisson	ν	0.25	facteur n	(équ. 2.6)	5×10^3

TAB. 5.1: Paramètres de simulation par la dynamique moléculaire.

Les simulations numériques considérées dans cette section consistent à appliquer des sollicitations verticales périodiques dans les cas partiellement et complètement confinés. Les amplitudes et les fréquences de ces sollicitations sont variées afin de parcourir une plage étendue d'accélération aux alentours de celle de la gravité. Ainsi, nous aboutissons à des signaux de sortie non linéaires en terme de déplacements résiduels sous le blochet. Ces signaux comportent une partie périodique et une dérive par rapport au nombre de cycles. Comme dans l'analyse des données expérimentales, la partie périodique est considérée comme étant une réponse élastique du milieu, elle est filtrée afin de se focaliser uniquement sur la réponse permanente qui correspond au tassement. Sans reprendre les étapes discutées dans le troisième chapitre, nous présentons les résultats des calculs dans les figures (5.1). Ainsi, nous retrouvons conformément aux résultats expérimentaux le comportement linéaire par rapport aux intensités d'accélération dans le cas complètement confiné et le comportement divergeant aux alentours de l'accélération critique dans le cas partiellement confiné. Les rapports entre les vitesses de tassement dans ces deux cas, permettent d'affirmer que la mobilité des grains affecte beaucoup plus la vitesse de tassement que leurs réarrangements. En effet, nous indiquons que même dans la partie linéaire de la courbe (5.1-b) (soit pour une accélération inférieure à l'intensité critique), le tassement est beaucoup plus important dans le cas partiellement confiné.

5.2.2 Effet de la forme des grains

En entamant l'étude en cours, nous avons voulu approximer le ballast à des grains modèles de formes sphériques puisqu'elles sont faciles à simuler numériquement. Ce type de modélisation a montré que l'approximation est très sommaire. En effet, une différence importante entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux a été observée. Ainsi, nous nous sommes rendu compte de l'importance de la forme des grains dans le mécanisme de tassement. En effet, dès les premiers cycles de chargement et même pour

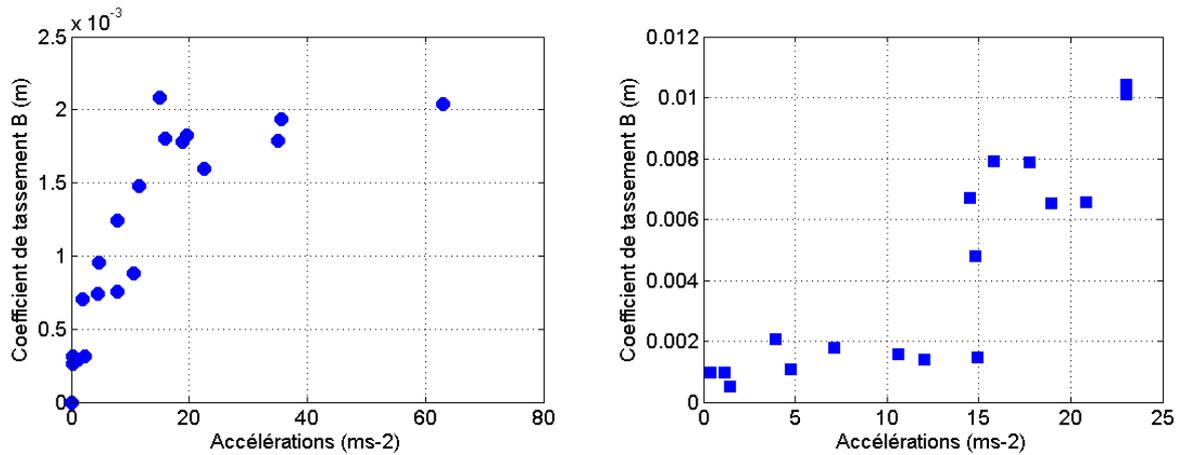


FIG. 5.1: Incrément de tassement en fonction de l'intensité d'accélération dans le cas (a) complètement (b) partiellement confiné.

de faibles fréquences et amplitudes de forces appliquées, le blochet pénètre dans le milieu granulaire avec une vitesse élevée, et ce que ce soit dans le cas de billes en verre ou en acier. Afin de mettre en évidence numériquement l'effet de la forme, nous avons considéré des échantillons où les caractéristiques mécaniques, les lois de contacts, le poids total et les dimensions sont équivalentes. Nous avons appliqué les mêmes excitations à ces échantillons afin d'obtenir le tassement que nous présentons sur la figure (5.2). Nous remarquons ainsi la différence importante en terme de vitesse de tassement entre les deux cas. En effet, en passant de la forme polygonale à la forme circulaire des grains et en gardant toutes choses égales par ailleurs, nous avons trouvé un rapport de l'ordre de 10 en terme de vitesse de tassement, au bout de quelques dizaines de cycles.

5.2.3 Etude paramétrique

Dans cette section, nous étudions l'effet du frottement et des tailles des grains sur la vitesse de tassement en considérant des échantillons conformes aux tailles et caractéristiques mécaniques présentées dans le tableau (5.1). Nous notons aussi que les grains utilisés sont de formes polygonales. La figure (5.3-a) montre que la vitesse de tassement augmente lorsque la taille moyenne de grains diminue. Ceci montre l'existence d'un effet d'échelle non linéaire et justifie l'approche discrète que nous avons adoptée. En effet, nous avons indiqué plus haut l'absence de volume élémentaire représentatif ce qui confirme

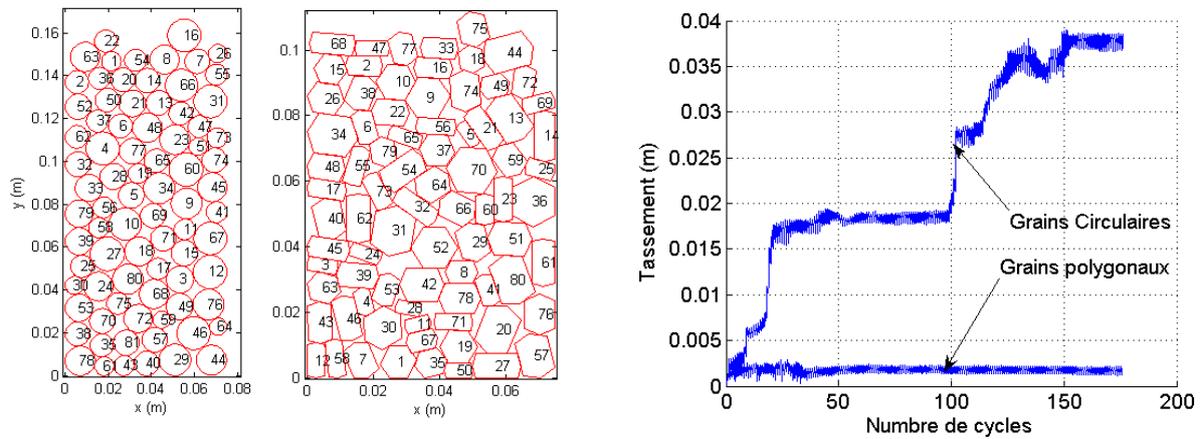


FIG. 5.2: Effet de la forme des grains sur la vitesse de tassement.

l'invalidité d'un modèle continu pour étudier le problème auquel nous nous intéressons. D'autre part, la figure (5.3-b) montre la variation de la vitesse de tassement avec le coefficient de frottement. Nous remarquons que la vitesse de tassement varie de façon non linéaire avec le frottement.

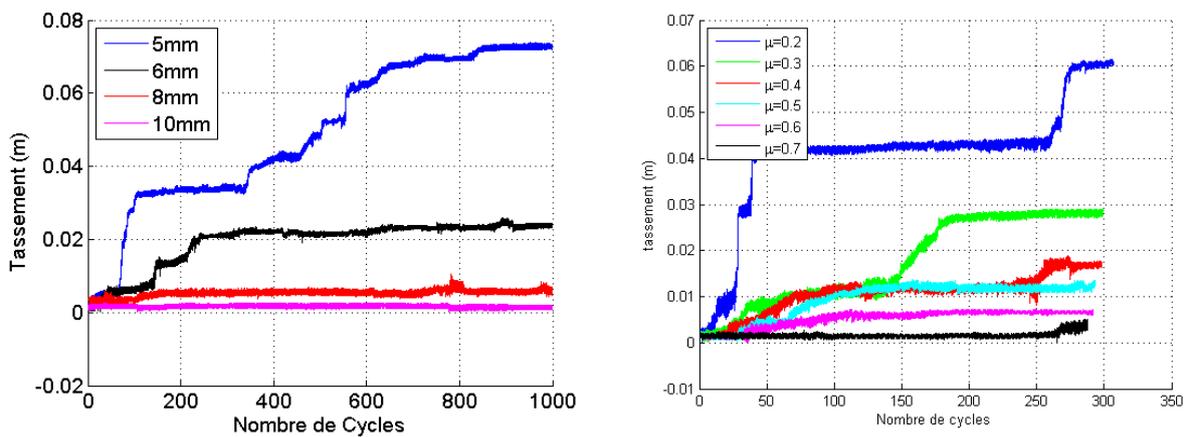


FIG. 5.3: Effet de la taille des grains et des coefficients de frottement sur la vitesse de tassement.

5.3 Homogénéisation des champs mécaniques

Dans cette section, nous nous intéressons aux profils des différents champs mécaniques afin d'examiner l'écoulement ou le réarrangement de la matière au cours des cycles de chargement. Pour ce faire, nous reprenons un cas typique qui correspond à l'échantillon de grains polygonaux où la taille moyenne des grains est de $5mm$ auquel nous appliquons le même type de signal de chargement que celui considéré dans le dernier paragraphe.

5.3.1 Trajectoires des grains

Sur les figures (5.4), nous observons la configuration initiale ainsi que la déformée au bout de 50 cycles de chargement, dans le cas d'un échantillon partiellement confiné. Nous remarquons qu'il y a essentiellement trois zones de déplacements résiduels différentes. La première est située au niveau de la surface libre soit approximativement dans le pavé $(r, y) \in [0.0325, 0.075] \times [0.12, 0.17]$ (l'unité des dimensions est le mètre). Cette zone est caractérisée par une agitation élevée puisque les grains sont soumis uniquement à l'accélération de la gravité et aux impulsions de courtes durées. La perte de contact est plus facile dans cette zone et l'équilibre ne peut pas être atteint quand le matériau est excité. Cette agitation peut être observée expérimentalement surtout quand les sollicitations présentent des accélérations élevées par rapport à celle de la gravité. La deuxième zone peut être décrite approximativement par une ellipse de centre $(0.0325, 0.15)$, de rayons 0.0325 et 0.1 et d'axe principal vertical. Les figures (5.4-b) et (5.4-c) montrent que cette zone est caractérisée par un écoulement quasi-stationnaire assez régulier où les grains présentent peu de rebroussements. Les trajectoires des grains montrent également que les déplacements sont de normes élevées puisqu'ils sont du même ordre que les dimensions des grains. La troisième zone, soit le reste de l'échantillon, correspond au fond de l'échantillon et à la proximité des parois fixes. Les figures (5.4-a) (5.4-d) montrent que les déplacements résiduels sont faibles par rapport aux déplacements dans les deux autres zones. Les trajectoires dans cette zone ressemblent plutôt à des marches aléatoires et s'expliquent par le réarrangement local des grains.

Similairement, les figures (5.5) présentent les lignes de courant des grains au cours de 50 cycles de chargement. Nous remarquons, dans le cas où l'échantillon est complètement confiné, que les déplacements résiduels sont beaucoup plus faibles. D'autre part, nous observons que les trajectoires contiennent des rebroussements plus fréquents ce qui montre que les grains sont plutôt en réarrangement local en l'absence d'un écoulement

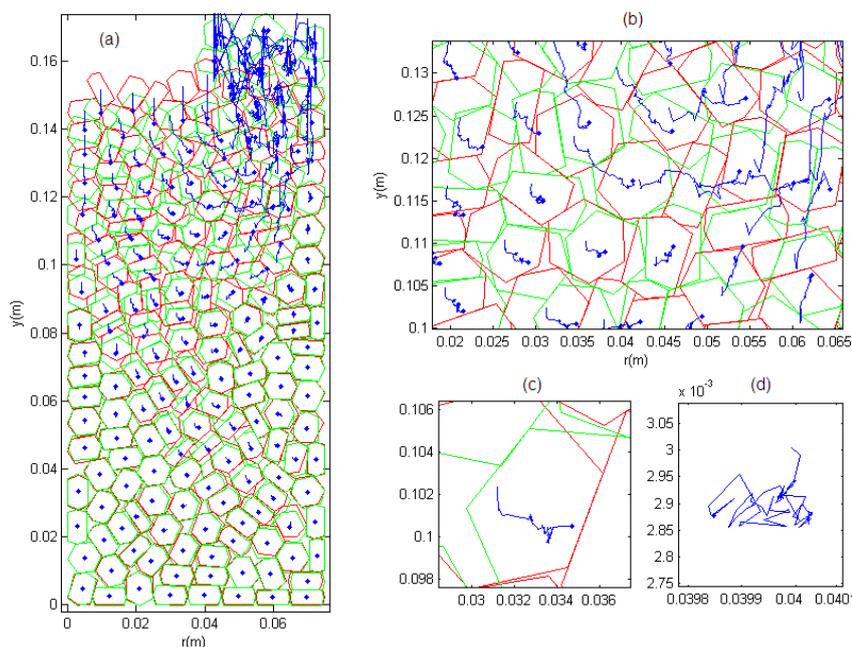


FIG. 5.4: Trajectoires des grains dans le cas d'un échantillon partiellement confiné.

d'ensemble. Les figures (5.5-c) et (5.5-d) qui représentent des trajectoires respectivement proches de la surface d'application de la charge et à proximité du fond fixe, montrent que les déplacements résiduels restent tout de même plus élevés dans la première zone. Ces figures montrent également l'existence d'un déplacement rapide au premier cycle puis des marches aléatoires dans un voisinage de rayon beaucoup plus faible que la dimension moyenne des grains.

5.3.2 Nombre de coordinations et densité relative

Afin de fournir un lien entre les grandeurs micro-mécaniques obtenues par la simulation numérique et les champs continus, nous définissons les procédures d'homogénéisation que nous avons implémentées. Étant donné que le processus que nous étudions est dynamique et partiellement irréversible, les grandeurs ne sont pas homogénéisées par rapport au temps. En effet, les mesures sont prises à la fin de chaque cycle de chargement. Cependant, nous procédons par homogénéisation spatiale. Pour une grandeur physique donnée, la moyenne est calculée dans un voisinage $B(r, y)$ de centre (r, y) et de surface S comme étant la contribution de tous les grains qui appartiennent à cet espace. Les contributions

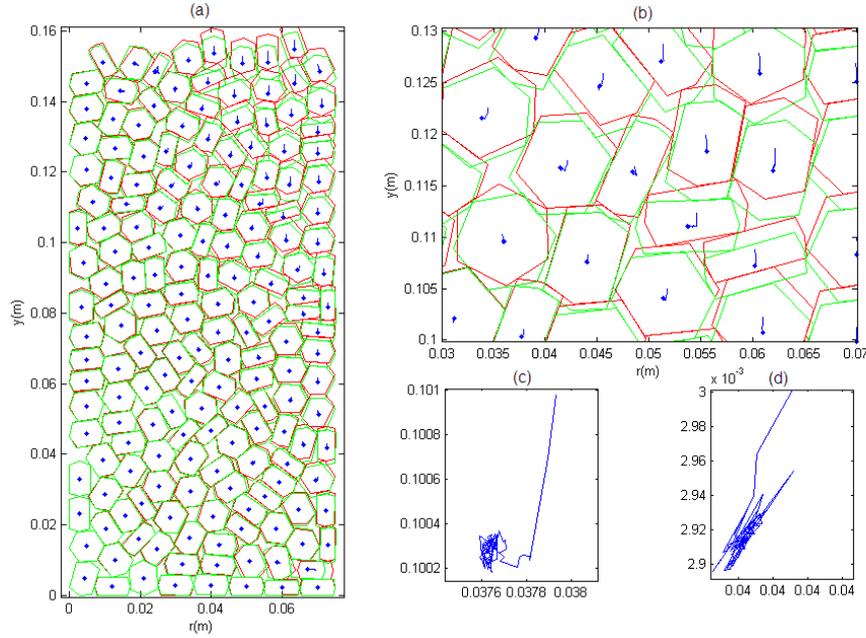


FIG. 5.5: Trajectoires dans le cas d'un échantillon complètement confiné.

des grains, qui ne sont pas totalement dans le voisinage en question, sont pondérées par leurs fractions surfaciques respectives incluses.

$$\begin{aligned}
 \langle z(r, y) \rangle &= \frac{1}{S} \sum_{\alpha, \alpha \cap B(r, y) \neq \emptyset} z_{\alpha} s_{\alpha \cap B(r, y)} \\
 \langle \rho(r, y) \rangle &= \frac{1}{S} \sum_{\alpha, \alpha \cap B(r, y) \neq \emptyset} \rho_{\alpha} s_{\alpha \cap B(r, y)}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

où $\langle z(r, z) \rangle$ représente le nombre de coordination moyen au point (r, y) , z_{α} est le nombre de coordinations du grain α , s_g désigne la surface d'une géométrie g donnée et $\langle \rho(r, y) \rangle$ correspond à la densité relative moyenne au point (r, y) . La figure (5.6) montre la répartition des grandeurs moyennes (5.1) dans le cas partiellement confiné. Nous remarquons ainsi l'existence d'un plan oblique de perte de contacts entre le point singulier du piston et la paroi. Ce plan reste actif indépendamment du nombre de cycles au cours de l'avancement du piston. Nous observons également que cette perte de contact est accompagnée par une diminution de la densité relative.

En revanche, la figure (5.7) montre qu'il y a création de contacts au cours des cycles. Nous observons à titre indicatif que la zone de contact décrite par l'isovaleur de centre $(0.015, 0.055)$ et d'amplitude 2.5 disparaît progressivement au cours des cycles alors que l'isovaleur d'amplitude 2.75 avance vers la paroi de l'échantillon. Nous constatons égale-

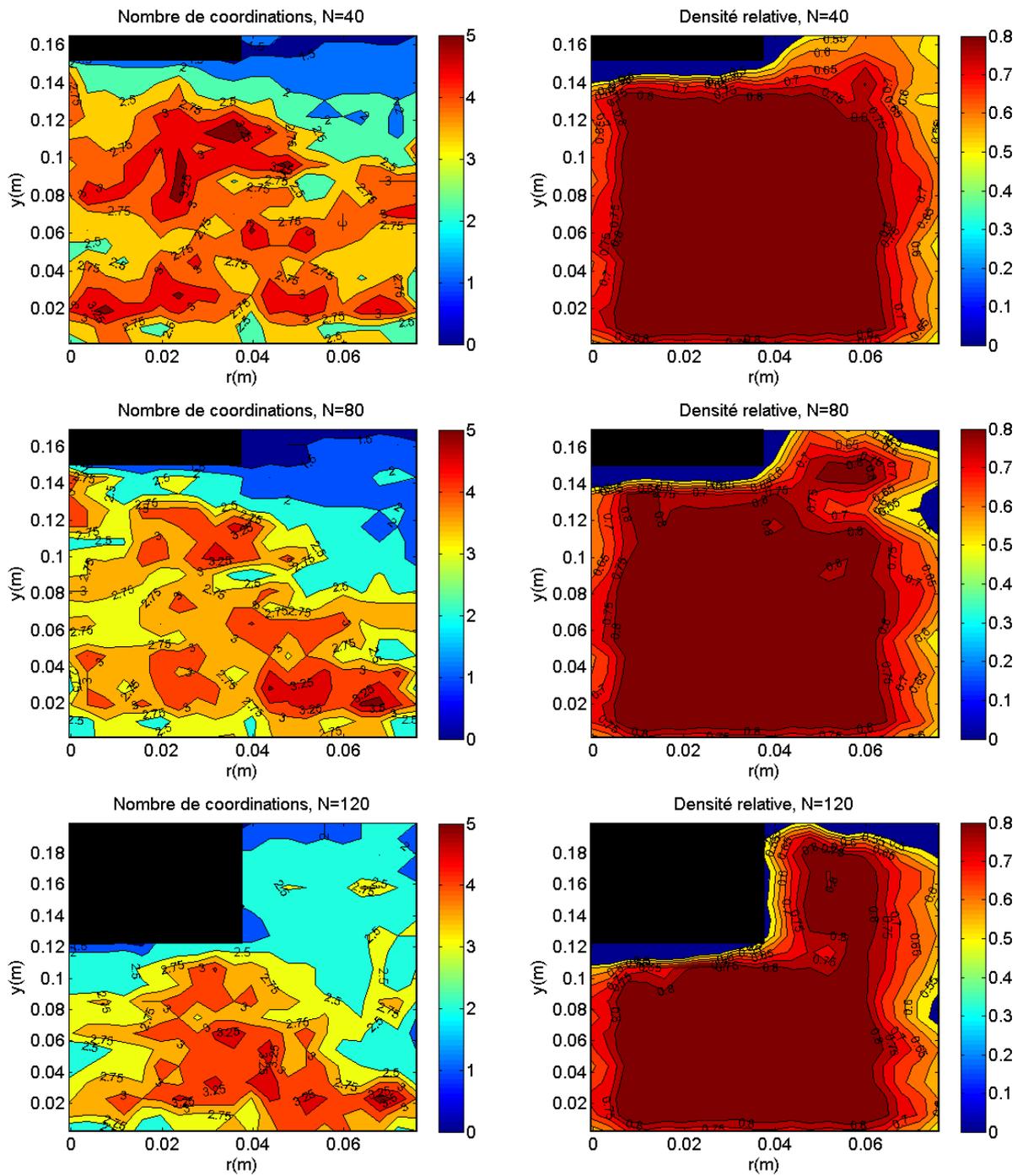


FIG. 5.6: Distribution des densités relatives et des nombres de contacts pour différents cycles de chargements, dans le cas partiellement confiné.

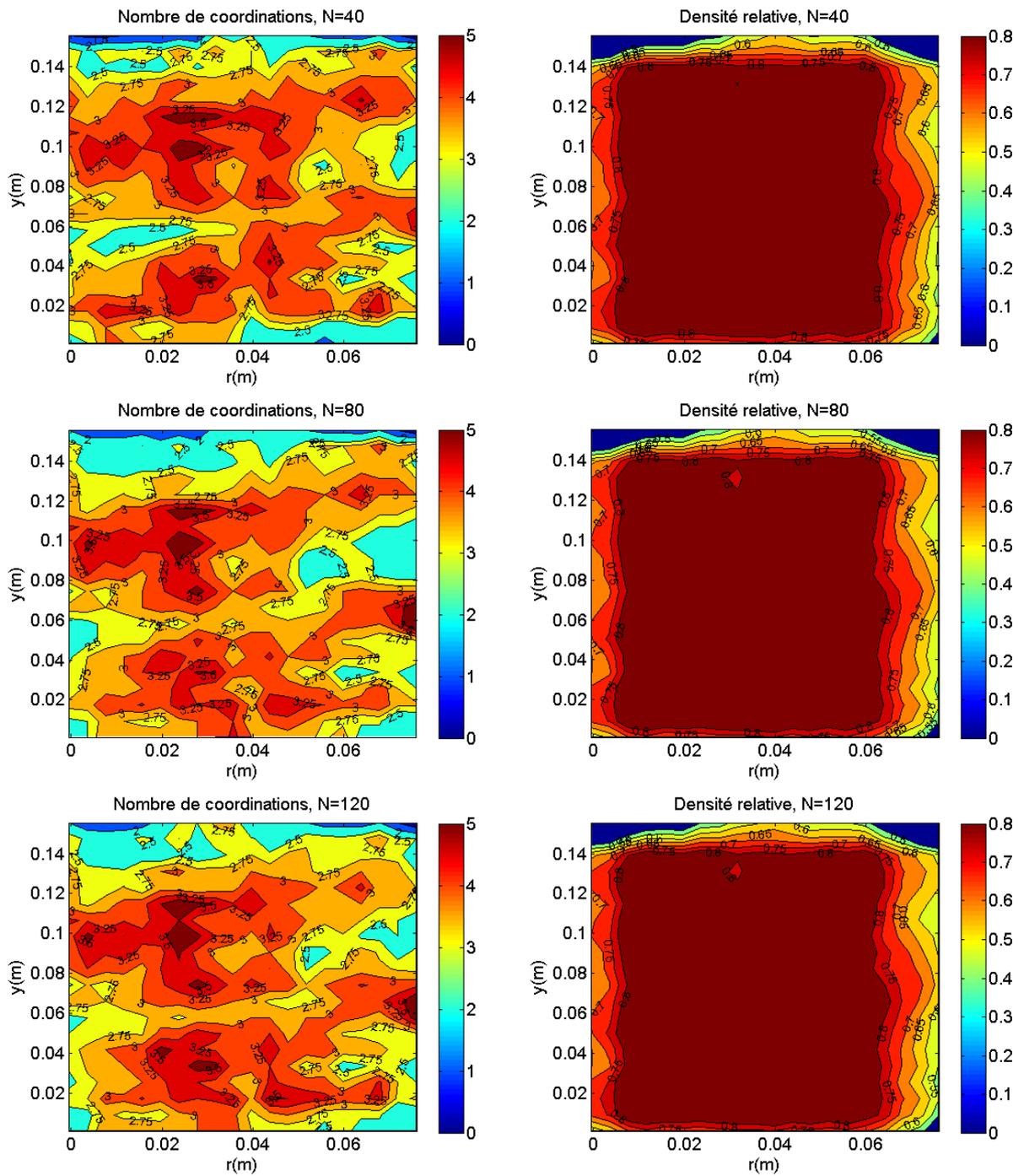


FIG. 5.7: Distribution des densités relatives et des nombres de contacts pour différents cycles de chargements, dans le cas complètement confiné.

ment que les zones de maximum de nombre de coordinations moyens augmentent de taille au cours des cycles de chargement.

La différence fondamentale entre les deux modes de chargement réside dans l'existence d'un plan de perte de contacts localisé. Au niveau de ce plan la densité relative est faible par rapport au reste du milieu comme nous venons de le décrire. En faisant le lien avec la théorie cinétique (annexe b), nous constatons qu'au niveau de ce plan où la densité peut atteindre des valeurs critiques, le comportement du milieu peut présenter des divergences. En effet, les constantes phénoménologiques décrites par les équations (B.13)-(B.16) sont singulières quand la densité atteint sa valeur critique de fluidification.

5.3.3 Champs de contrainte et de déformation

La technique d'homogénéisation présentée dans la section précédente est utilisée également pour estimer les champs de contrainte. En effet, pour une particule α donnée, Satake (2004) définit la contrainte sous la forme $\boldsymbol{\sigma}_\alpha = \frac{1}{V_\alpha} \mathbf{r}_{\alpha c} \otimes \mathbf{F}_{\alpha c}$, où V_α représente le volume de la particule, c désigne l'un de ses contacts, $\mathbf{r}_{\alpha c}$ est le vecteur sortant reliant le centre de la particule α au point de contact avec la particule c et $\mathbf{F}_{\alpha c}$ est l'action de contact. Considérant la définition (5.1), il est possible d'écrire la contrainte de contact moyenne comme suit :

$$\langle \sigma_{ij}(r, y) \rangle = \frac{1}{2S} \sum_{c, \alpha \in B(r, y)} r_{\alpha c}^{(i)} F_{\alpha c}^{(j)} \quad (5.2)$$

où i et j représentent l'une des directions r et y . A partir de cette définition, nous pouvons présenter les distributions des contraintes exprimées par $p = -tr(\boldsymbol{\sigma})/2$ et $q = 2\sqrt{(\boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I}) : (\boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I})}$. La figure (5.8) montre la distribution de la pression hydrostatique dans le milieu granulaire pendant l'avancement du piston sous vibration. Nous remarquons que la région située sous le plan de perte de contacts est sollicitée en compression, alors que la zone supérieure à ce plan, soit la zone dépassée par le piston, reste libre de contraintes. Similairement, nous nous intéressons à la distribution des contraintes équivalentes dans le milieu pour différents cycles de chargement. Ainsi, nous remarquons en se basant sur la figure (5.9) que seule la zone située au dessus du plan de perte de contacts est libre de contraintes. En revanche, la distribution de contrainte équivalente devient de plus en plus régulière avec le nombre de cycles. Après une phase transitoire d'à peu près 200 cycles, nous remarquons que la zone chargée est concentrée au dessous du piston. Ceci montre qu'au cours de l'avancement du piston, une série de chaînes de

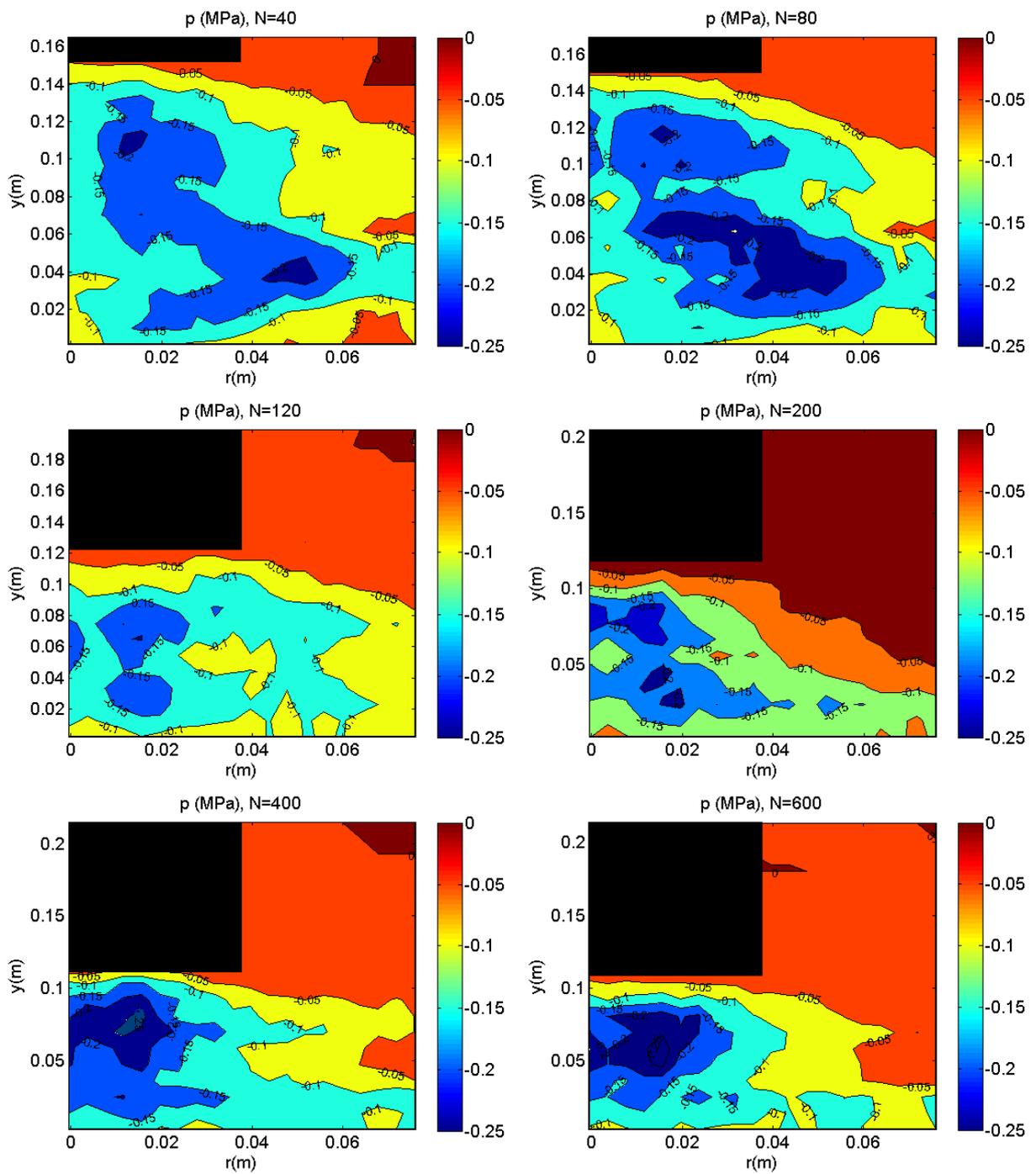


FIG. 5.8: Distribution des contraintes de pression hydrostatique p pour différents cycles de chargements, dans le cas d'un échantillon partiellement confiné.

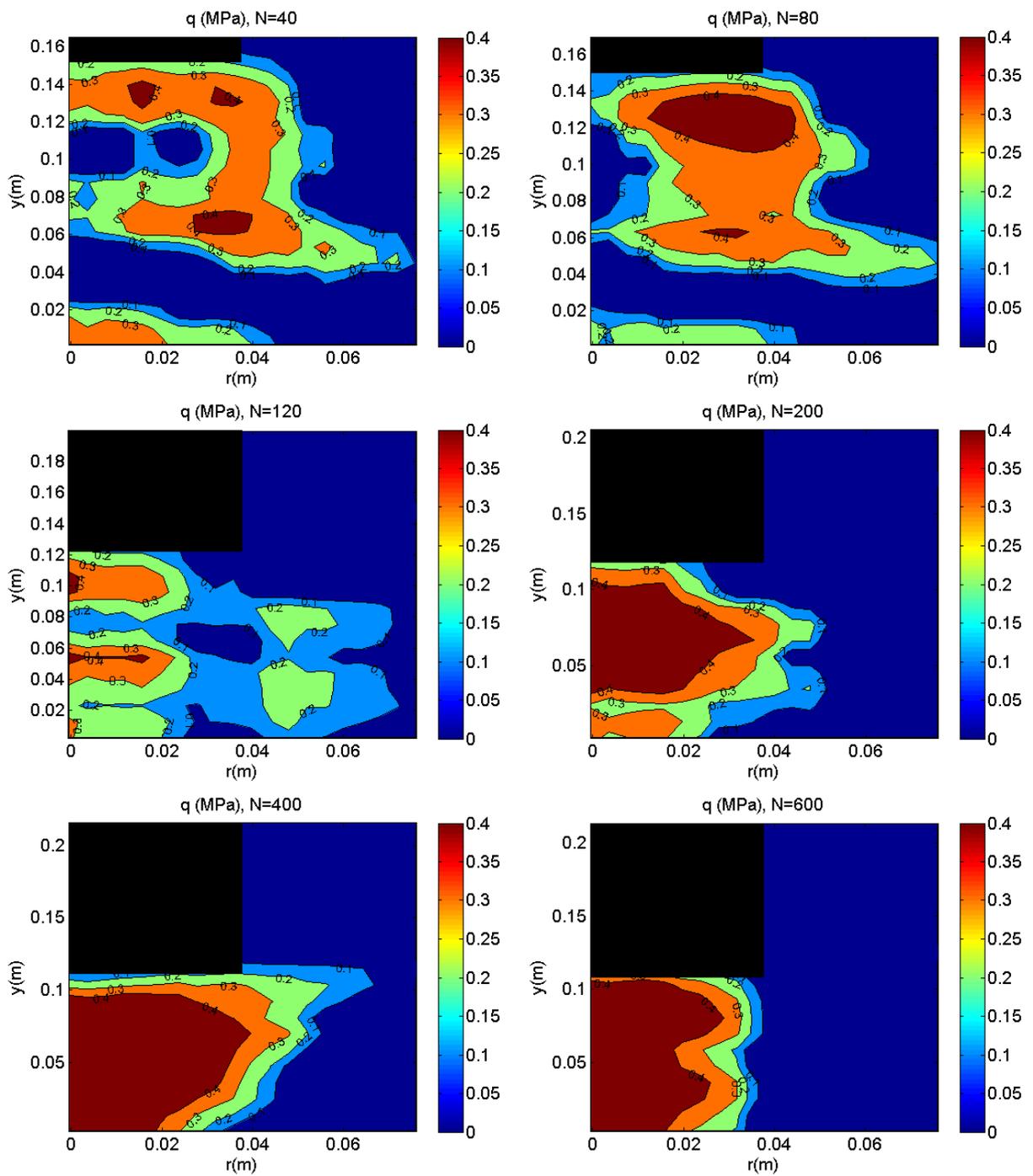


FIG. 5.9: Distribution de la contrainte équivalente q pour différents cycles de chargement pour le cas d'un échantillon partiellement confiné.

contacts stables dans le temps se crée et qu'elle supporte la totalité de la charge appliquée par le piston. D'autre part, la stabilité de ces chaînes de contact explique en partie la diminution de la vitesse de tassement au cours des cycles de chargement.

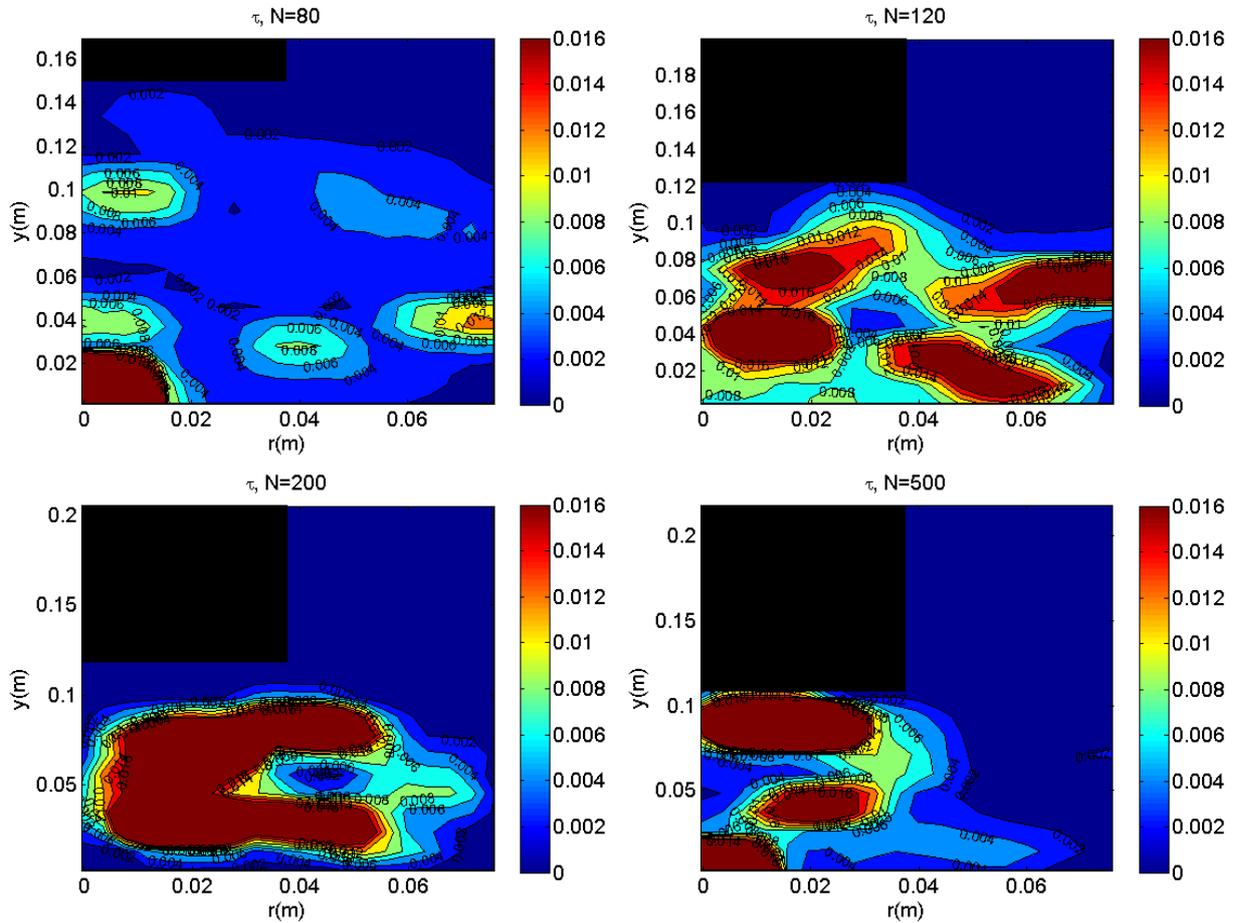


FIG. 5.10: Distribution du temps de contact moyen pour différents cycles de chargements.

Afin d'appuyer cette analyse, nous nous intéressons au temps caractéristique de contact (la durée maximale d'un contact binaire). Nous remarquons que la distribution de ce temps caractéristique est conforme à celle de la contrainte. En effet, la figure (5.10) montre qu'au cours du chargement, des contacts stables se créent dans la région sous compression. Ces chaînes sont de durées plus élevées sous le blochet ce qui montre qu'elles sont plus stables dans cette région que dans le reste du milieu. Nous remarquons, à titre indicatif, que la région dépassée par le blochet, qui reste relativement agitée, est caractérisée toujours par un temps caractéristique proche de zéro.

5.3.4 Glissements locaux et modes de dissipation

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons d'abord à l'évolution des grandeurs locales au niveau du contact en fonction du nombre de cycles et nous étudions ensuite le phénomène de rochet qui est habituellement décrit à travers des relations déformations-contraintes. Les forces d'interactions entre deux particules sont écrites par rapport à un repère $(c, \mathbf{n}, \mathbf{t})$ où c est le centre du repère qui correspond au point d'application des forces du contact décrit dans le deuxième chapitre, \mathbf{t} est le vecteur tangentiel, et \mathbf{n} est le vecteur normal au contact. Dans la suite, ce repère qui évolue au cours de l'écoulement granulaire sera utilisé pour décrire les grandeurs physiques locales telles que les déplacements relatifs et les forces de contacts. Par rapport à $(c, \mathbf{n}, \mathbf{t})$, nous pouvons définir les déplacements relatifs normal et tangentiel entre deux grains α et β comme étant : $u_n = (u_\alpha - u_\beta) \cdot \mathbf{n}$ et $u_t = (u_\alpha - u_\beta) \cdot \mathbf{t}$. Dans le même repère, nous définissons les efforts normal et tangentiel. Au cours d'un chemin de chargement donné, l'énergie peut être définie comme étant $w = \int F_t \delta u_t + F_n \delta u_n$. Le système est dit élastique quand le chargement s'établit sans dissipation, soit quand le chemin de chargement coïncide avec celui du déchargement dans les plans force-déplacement. Nous définissons cinq points de régions distinctes du milieu tel que le montre la figure (5.11). En se basant sur l'analyse faite dans les sections précédentes, nous pouvons intuitivement imaginer qu'il doit y avoir des comportements qui diffèrent selon les régions.

A cause des fluctuations des mouvements des grains en fonction des charges appliquées, il est difficile de comprendre le comportement du milieu directement à partir des nuages de points calculés. Pour éviter ces éventuelles ambiguïtés, nous supposons que les différentes grandeurs calculées peuvent être décrites par des combinaisons de lois périodiques et de lois de dérives. Pendant un temps T qui comprend m valeurs discrètes, le signal peut s'écrire sous la forme :

$$x(t_i) = x(t_1) + \tilde{x}(t_1 + t_i) \quad (5.3)$$

où $t_i \in [0, T], i = 1..m$. Ainsi, les fonctions \tilde{x} décrivant les grandeurs locales seront décrites par des lois de la forme :

$$\tilde{x}(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 \sin(2\pi f t) + a_5 \cos(2\pi f t) + \epsilon_x(t) \quad (5.4)$$

où $(a_p), p = 1..5$, représentent les paramètres à déterminer, f est la fréquence connue du signal appliqué et $\epsilon_x(t)$ sont les termes d'erreurs d'estimation. Bien que le signal appliqué ne comporte qu'un seul terme sinusoïdal augmenté d'une valeur constante, la réponse que

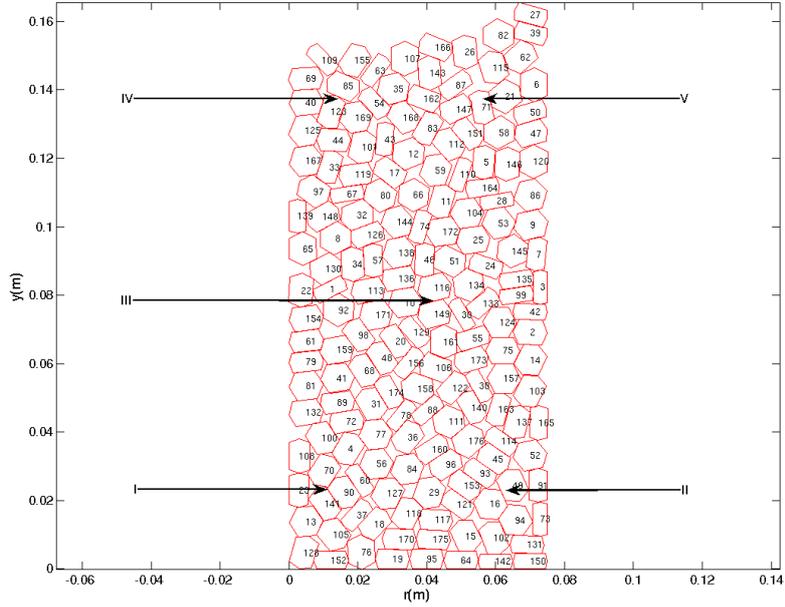


FIG. 5.11: Différentes régions du milieu granulaire choisies pour étudier les grandeurs physiques locales.

nous cherchons est plus complexe. Elle comporte une dérive non linéaire qui traduit la partie irréversible, et un deuxième terme sinusoidal qui permet de décrire le déphasage entre le signal appliqué et les réponses. Ce retard est lié au temps de parcours de l'onde tout au long du milieu (Karrech et al. (2006c), (2005), (2004)). Pour chaque grandeur physique, il est possible de calculer les paramètres a_p en minimisant la somme des carrés des erreurs :

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^m \epsilon_x^2(t_i)}{\partial a_p} = 0 \quad (5.5)$$

Ainsi, nous aboutissons au signal approximant chacune des réponses pendant un temps T souhaité. Nous présentons à titre indicatif les forces et déplacements relatifs normaux et tangentiels pour un couple de grains de la région I sur la figure (5.12). Nous remarquons que la description que nous proposons décrit assez fidèlement les nuages de points calculés. Disposant de ces fonctions de tendance, nous avons présenté sur la figure (5.13) les déplacements relatifs tangentiels en fonction des déplacements relatifs normaux pour des couples de grains situés dans différentes régions du milieu granulaire. Nous remarquons que le déplacement résiduel tangential varie d'une région à l'autre. Plus la région concer-

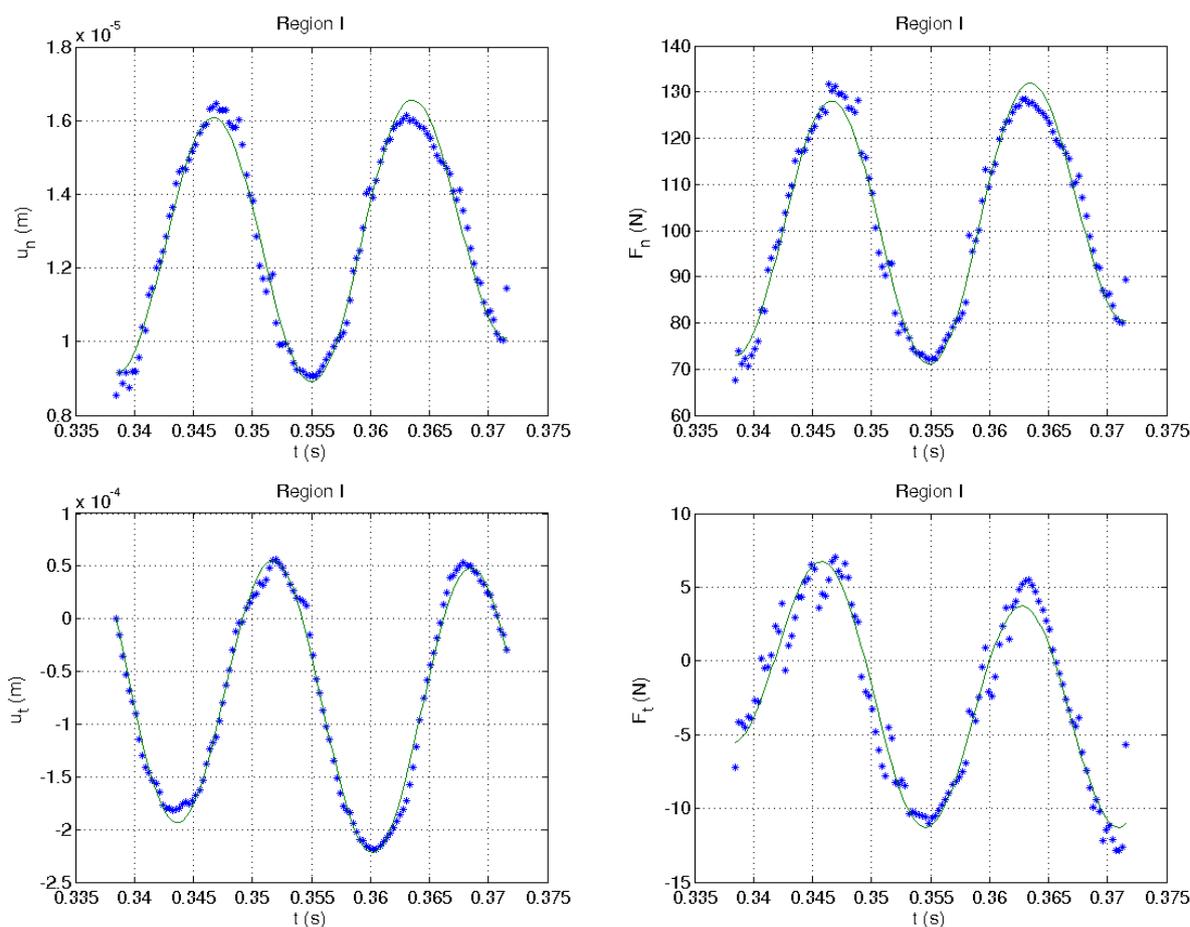


FIG. 5.12: Ajustement des données par rapport au modèle (5.4).

née est proche du front de tassement, plus le glissement résiduel permanent est important par rapport au glissement élastique. En revanche, le déplacement résiduel normal reste faible par rapport au déplacement élastique normal, dans toutes les régions. Cette dernière remarque signifie que la dissipation d'énergie due à la déformation irréversible suivant la normale des contacts est faible. Il est important de discuter également de la dissipation d'énergie due aux vitesses normales. Nous remarquons que les forces normales des contacts restent situées sensiblement aux alentours d'une ligne droite comme le montre la figure (5.14), pour toutes les régions du milieu. Les aires de l'hysteresis restent négligeable devant les intégrales des fonctions $f_n(u_n)$. Ceci signifie que la dissipation d'énergie est faible par rapport à l'énergie élastique récupérée dans le système.

En revanche, une dissipation importante peut être observée au niveau de la direction

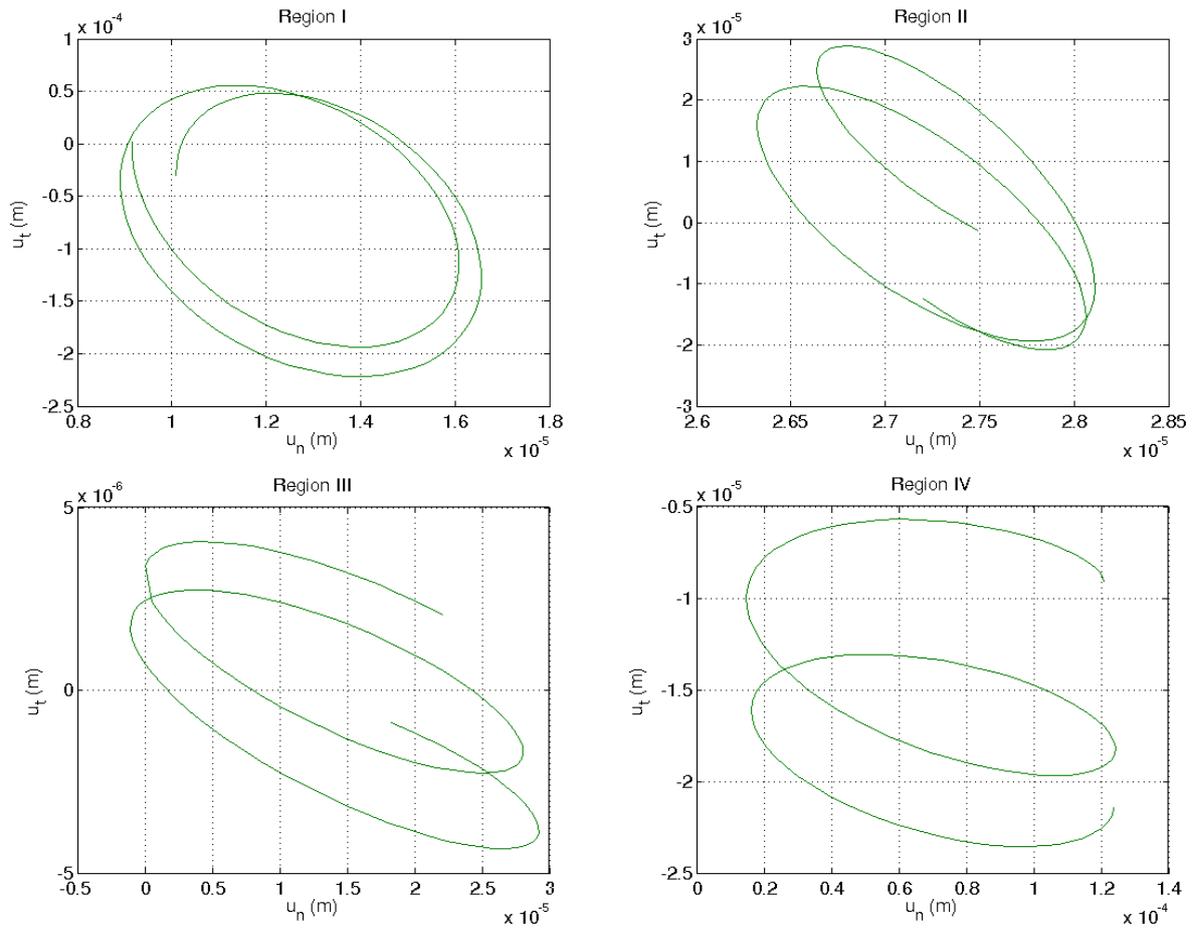


FIG. 5.13: Déplacements locaux au niveau des différentes régions du milieu.

tangentielle comme le montre la figure (5.15-a). Nous notons au passage que les forces normales et tangentielles sont conformes à la loi de Coulomb introduite dans le modèle comme le montre la figure (5.15-b). Les figures (5.15-c) et (5.15-d) montrent les déplacements relatifs au niveau de deux régions différentes pendant les premiers cinquante cycles de chargement. Ces figures indiquent un glissement important au niveau des directions tangentielles des contacts puisque les déplacements tangentiels cumulés dépassent les déplacements élastiques cycliques.

5.3.5 Phénomène de rochet

Le terme de “rochet” signifie “roue libre” ou “cliquet”, un mécanisme qui permet de maintenir un sens de mouvement unique. Ce terme est utilisé en général pour décrire

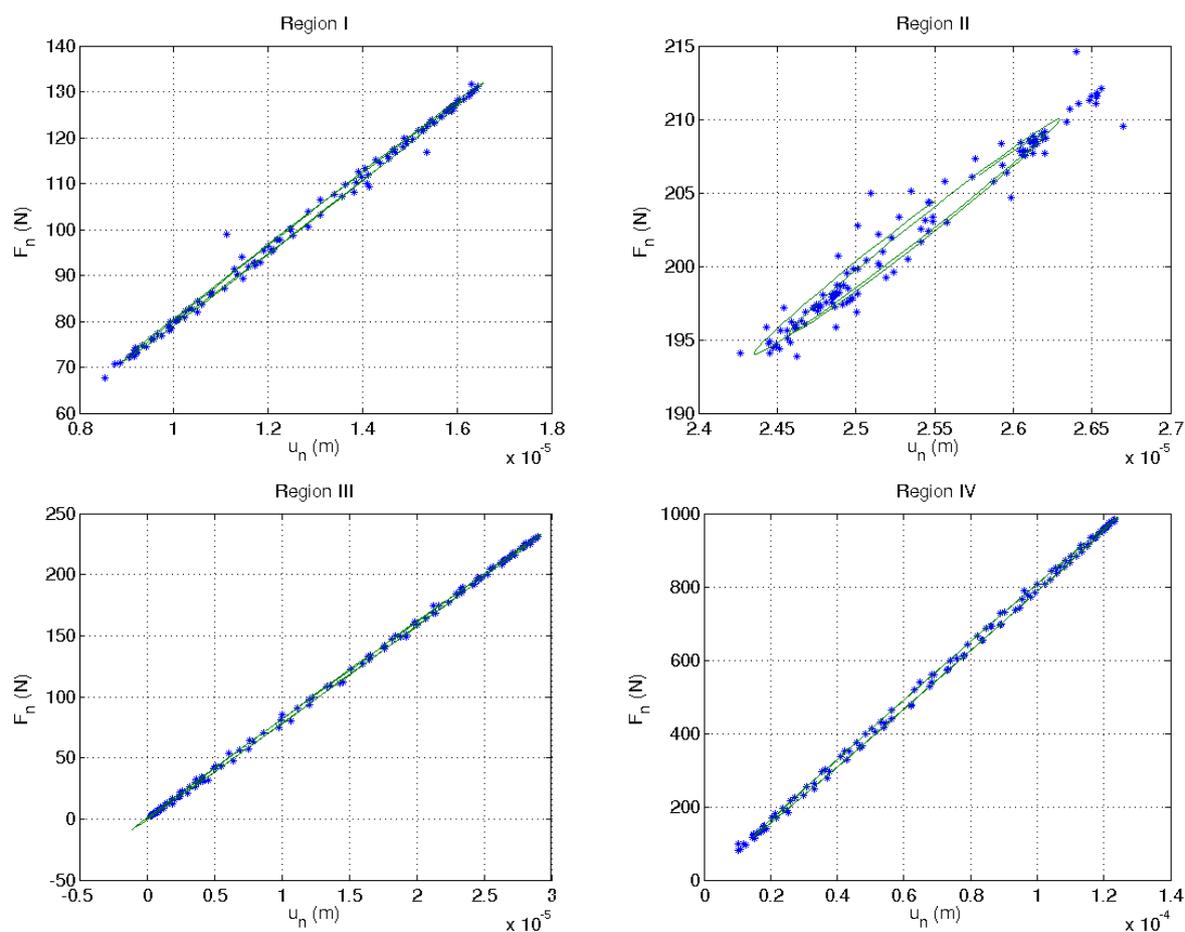


FIG. 5.14: Forces normales en fonction des déplacements normaux dans les différentes régions du milieu et dissipation d'énergie dans la direction normale.

le cumul de déformations ou de déplacements résiduels sous chargements cycliques dans différents matériaux. L'image en soit est riche en information puisqu'elle signifie que le phénomène de rochet se produit grâce aux cycles de charge-décharge. Il est différent des déformations plastiques isotropes. Plusieurs auteurs ont fait appel à ce mécanisme pour expliquer des phénomènes qui peuvent avoir lieu à cause de l'agitation des milieux granulaires tels que la ségrégation (Jaeger et al. (1996)), la convection (Knight (1996)) et la compaction (Alonso-Marroquin et Hermann, (2004)). Dans ce paragraphe, nous mettons l'accent sur l'effet de ce phénomène sur le mécanisme de tassement aussi bien dans le cas partiellement confiné que dans le cas complètement confiné. Dans le premier chapitre, nous avons proposé une ébauche d'un modèle de rochet basé sur le critère de plasticité de

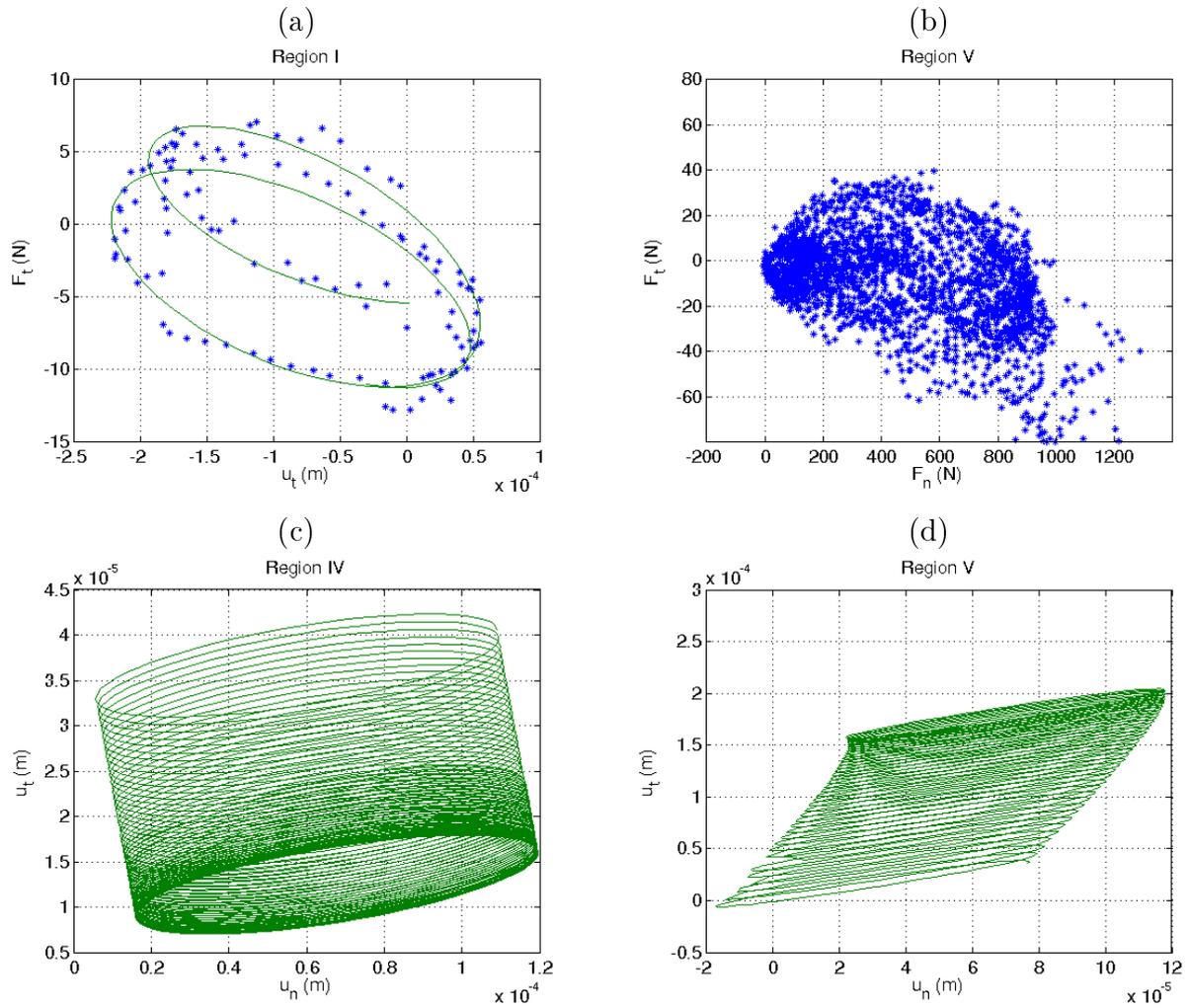


FIG. 5.15: (a) Variation de la force tangentielle en fonction du déplacement tangentiel et dissipation d'énergie dans cette direction, (b) Distribution des efforts par rapport au cône de Coulomb, (c) glissement au niveau de la région IV, (d) glissement au niveau de la region V.

Drucker-Prager et sur l'érouissage isotrope et cinématique. Nous avons remarqué que ce phénomène peut être mathématiquement attribué à la translation du convexe de plasticité. Cependant, nous avons indiqué que ce type de modèle est limité par la taille importante des grains par rapport au milieu. Un point matériel dans ce cas ne peut pas contenir suffisamment de grains pour justifier l'approche continue. Dans la pratique, l'approche discrète permet de visualiser plus facilement ce phénomène de rochet grâce au suivi des

variables locales telles que les déplacements et les forces de contacts. Sur la figure (5.13) nous pouvons observer les déplacements qui se produisent à cause du phénomène de rochet dans les régions III et IV du milieu. En effet ces déplacements irréversibles ont eu lieu après plusieurs cycles de charge-décharge. Si le milieu était élasto-plastique isotrope uniquement, le seuil maximal de plasticité aurait été atteint dès le premier cycle. Le déplacement de dérive est donc dû au mécanisme de rochet. Pour analyser le phénomène à l'aide de grandeurs globales, nous nous intéressons aux contraintes et aux déformations au niveau de l'arc de cercle dont le centre est situé au niveau du centre inférieur du blochet et le rayon correspond au rayon du blochet comme le montre la figure (5.16). Nous calculons ces grandeurs dans un repère de coordonnées polaires, à l'aide de la discrétisation de l'espace présentée sur la figure (5.16).

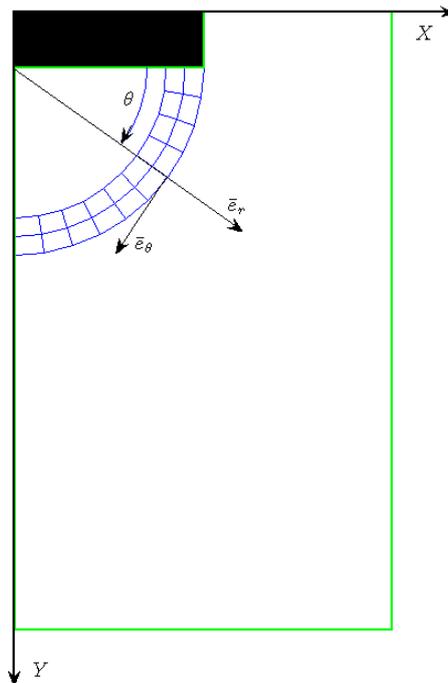


FIG. 5.16: Discrétisation du domaine en coordonnées polaires pour le calcul des contraintes et des déformations.

Moyennant cette discrétisation, nous disposons de cellules dans lesquelles nous pouvons calculer les contraintes et les déformations. Il est toutefois important de définir les contraintes dans un repère polaire. Pour ce faire, nous reprenons par analogie la formule

(5.2) et nous mettons en oeuvre les relations simples exprimant les vecteurs de forces, $\mathbf{F}_{\alpha c}$, et les vecteurs reliant les points de contact aux centres des grains, $\mathbf{r}_{\alpha c}$, dans le nouveau repère. Ainsi, nous aboutissons à une matrice de transformation du tenseur $\mathbf{r}_{\alpha c} \otimes \mathbf{F}_{\alpha c}$ du repère cartésien au repère polaire sous la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Quand cette matrice est appliquée au tenseur de contraintes, elle permet de l'écrire dans les coordonnées polaires. Nous remarquons au passage que le tenseur obtenue est symétrique. Nous avons aussi calculé les déformations dans le même repère en partant des définitions de la mécanique des milieux continus :

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) \right), \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \quad (5.7)$$

Disposant des champs de vitesses dans les cellules présentées plus haut, il est possible d'approximer les déformations en utilisant les formules (5.7) ainsi que le schéma d'Euler. Sur la figure (5.15), nous remarquons que la majorité des points sont situés à l'intérieur du cône de Coulomb, $f_t < \mu f_n$, bien que certains points sont situés au niveau de la surface limite $f_t = \mu f_n$. D'après Alonso-Marroquin et Hermann (2004), les contacts situés au niveau du cône de Coulomb sont responsables de la majeure partie des déplacements irréversibles. Si cette analyse est valable, le phénomène de rochet peut se produire même sous faibles chargements. Ce constat est conforme à l'étude menée par Agnolin et Roux (2007b) qui montrent que la limite élastique est atteinte très rapidement dans les matériaux granulaires. D'après ces auteurs, le comportement élastique n'est applicable qu'au dessous de déformations de l'ordre de 10^{-5} . Pour mettre cela en évidence, nous chargeons les échantillons de façon cyclique progressive. Les figures (5.17) montrent les résultats numériques auxquels nous avons aboutis au terme de ce calcul. Les figures (5.17) confirment cette hypothèse. En effet, bien que les contraintes augmentent progressivement à partir de faibles valeurs, nous remarquons que les déformations irréversibles ont lieu lors des premiers cycles de chargement. Ceci montre que des glissements se produisent même sous faible chargement et que la notion de critère de plasticité n'est peut être pas significative

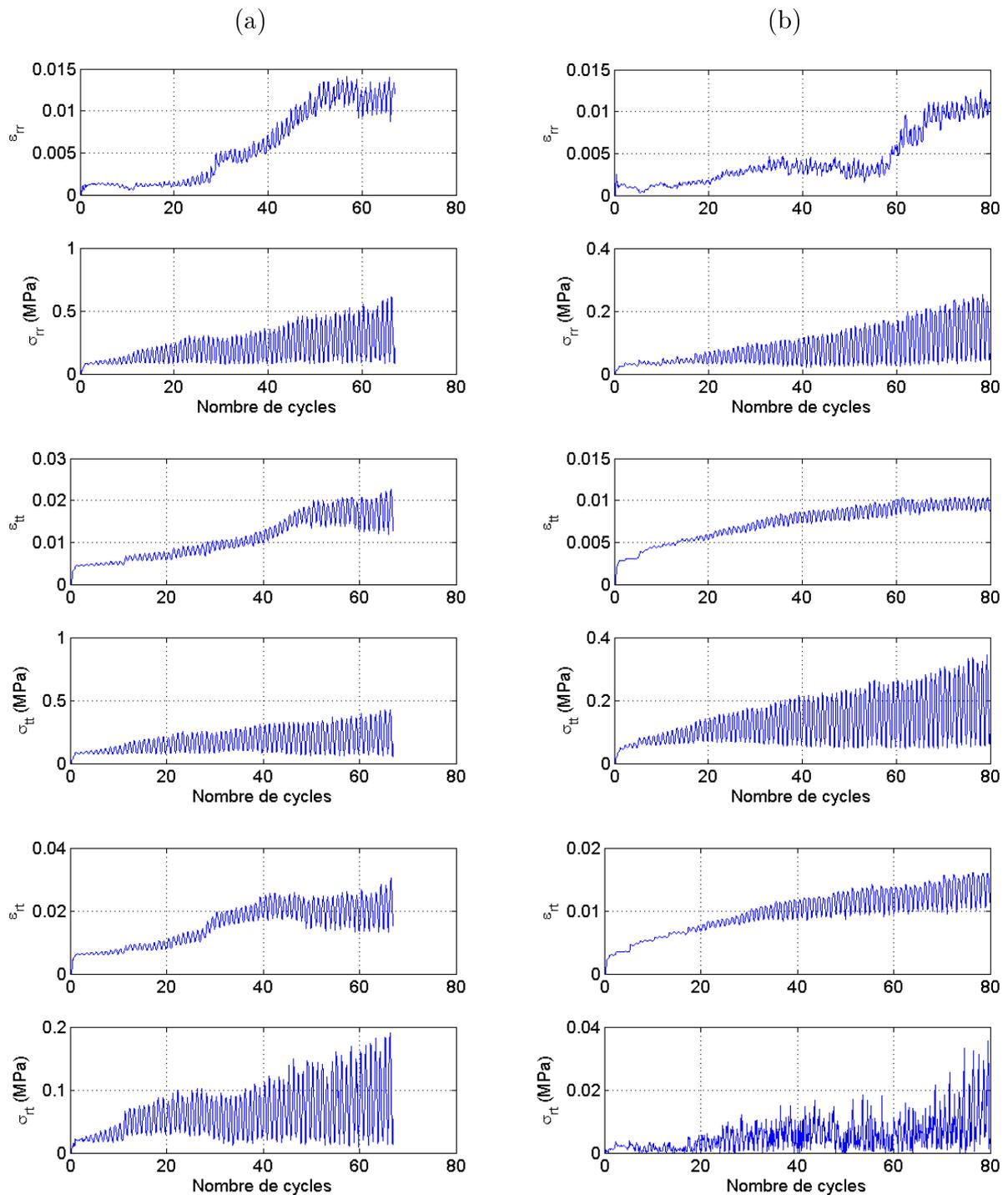


FIG. 5.17: Phénomène de rochet pour des chargements cycliques progressifs dans le cas (a) partiellement confiné et (b) le cas complètement confiné.

pour tenir compte du phénomène de rochet. D'autre part, nous remarquons que les déformations irréversibles sont plus importantes dans le cas partiellement confiné que dans le cas complètement confiné, conformément à l'analyse précédente.

Pour conclure, nous rappelons que nous nous intéressons au phénomène de glissement lorsque les contacts continuent à exister sous chargements cycliques. Cependant, il s'avère d'après les calculs que nous avons faits, qu'il existe une région de perte de contacts engendrée par l'avancement du blochet. Ces pertes de contacts peuvent influencer la vitesse de tassement. Nous nous proposons de montrer statistiquement un lien de causalité entre la perte de contact et la vitesse de tassement dans le paragraphe suivant.

5.4 Lien de causalité entre la perte de contacts et la vitesse de tassement

Afin d'identifier des relations logiques entre les réponses des échantillons granulaires, une analyse statistique est nécessaire en l'absence de solutions analytiques déterministes. Dans ce paragraphe, nous nous proposons de trouver une relation de causalité entre la vitesse de tassement et la perte de contact entre les grains. Pour ce faire, nous adoptons l'approche de [Granger \(1969\)](#) pour prouver cette relation de causalité. La notion de causalité au sens de Granger¹ a été introduite en économétrie afin d'étudier la causalité entre des séries temporelles discrètes. Cependant, elle s'applique également aux systèmes physiques dont les réponses sont accessibles sous forme de signaux temporels ([Chen et al. \(2004\)](#)). Le modèle de base repose sur la prévisibilité d'une grandeur donnée à travers son propre passé et celui d'une ou plusieurs autres grandeurs explicatives. D'autre part, ce modèle concerne essentiellement des signaux stationnaires (une suite dont l'espérance et la variance sont bornées et indépendantes du temps) ou linéaires (une suite dont le taux de variation est stationnaire). [Dufour et al. \(2007\)](#) ont montré plus tard que connaissant des fonctions de tendance, il est possible d'appliquer cette approche à des suites numériques non linéaires à condition que les erreurs par rapport aux fonctions de tendance soient indépendantes.

¹Clive Granger a eu le Prix Nobel en 2003 pour ses "travaux ayant permis d'améliorer la fiabilité des prévisions économiques".

5.4.1 Mesure de causalité

Les grandeurs auxquelles nous nous intéressons sont le tassement sous le blochet, $h(t)$, et le nombre de contacts permanents, $z(t)$. L'échantillon que nous considérons pour décrire cette approche est constitué de grains polygonaux en diorite de largeur $75mm$, de hauteur initiale $150mm$ et de taille moyenne de grains de $5mm$. Nous construisons d'abord deux suites de données à partir des résultats de simulation en prenant les moyennes par rapport aux cycles de chargements soit $z(n) = \langle z(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{(n-1)T}^{nT} z(t)dt$ et $h(n) = \langle h(t) \rangle$, où T est la période de chargement (Figure 5.18). Nous considérons également un modèle autorégressif multivarié d'ordre l décrivant les relations dynamiques entre les variables :

$$\begin{aligned} h(i) &= h^r(i) + \sum_{k=1}^l a_k h(i-k) + \sum_{k=1}^l b_k z(i-k) + \epsilon_h(i) \\ z(i) &= z^r(i) + \sum_{k=1}^l c_k h(i-k) + \sum_{k=1}^l d_k z(i-k) + \epsilon_z(i) \end{aligned} \quad (5.8)$$

où $h^r(i) = \alpha + \beta Ln(i)$ et $z^r(i) = \chi + \gamma i$ sont des fonctions de tendance par rapport au nombre de cycles, ϵ sont les termes d'erreur supposés indépendants. Afin de mettre en oeuvre la méthode de Granger, nous comparons, en terme de précision, la description précédente (5.8) avec le modèle autorégressif suivant :

$$\begin{aligned} h(i) &= \hat{h}^r(i) + \sum_{k=1}^l \hat{a}_k h(i-k) + e_h(i) \\ z(i) &= \hat{z}^r(i) + \sum_{k=1}^l \hat{d}_k z(i-k) + e_z(i) \end{aligned} \quad (5.9)$$

où $\hat{h}^r(i) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} Ln(i)$ et $\hat{z}^r(i) = \hat{\chi} + \hat{\gamma} i$ sont des fonctions de tendance par rapport au nombre de cycles, e_z, e_h sont les termes d'erreur supposés indépendants. L'idée est de comparer l'ordre de précision des deux approches. Si la description (5.8) améliore l'estimation de la grandeur h par rapport à la description (5.9), on dit que z cause h au sens de Granger, puisque z est une variable explicative de h . L'hypothèse de non causalité se traduit par $H_0 : b_1 = b_2 = \dots = b_l = 0$. Quand cette hypothèse est valable, le système (5.8) se réduit à (5.9). Ainsi, à travers ces deux descriptions, il est possible d'effectuer la mesure de causalité de z à h qui s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{F} = (N - 2l - 2) Ln \left(\frac{\sum e_i}{\sum \epsilon_i} \right) \quad (5.10)$$

où Σ_{e_i} et Σ_{ϵ_i} sont les autovariances respectives de e_i et ϵ_i avec $i = h, z$. Sous l'hypothèse de nullité H_0 , on montre que la mesure $\mathcal{F}_{z \rightarrow h}$ est asymptotiquement distribuée suivant la

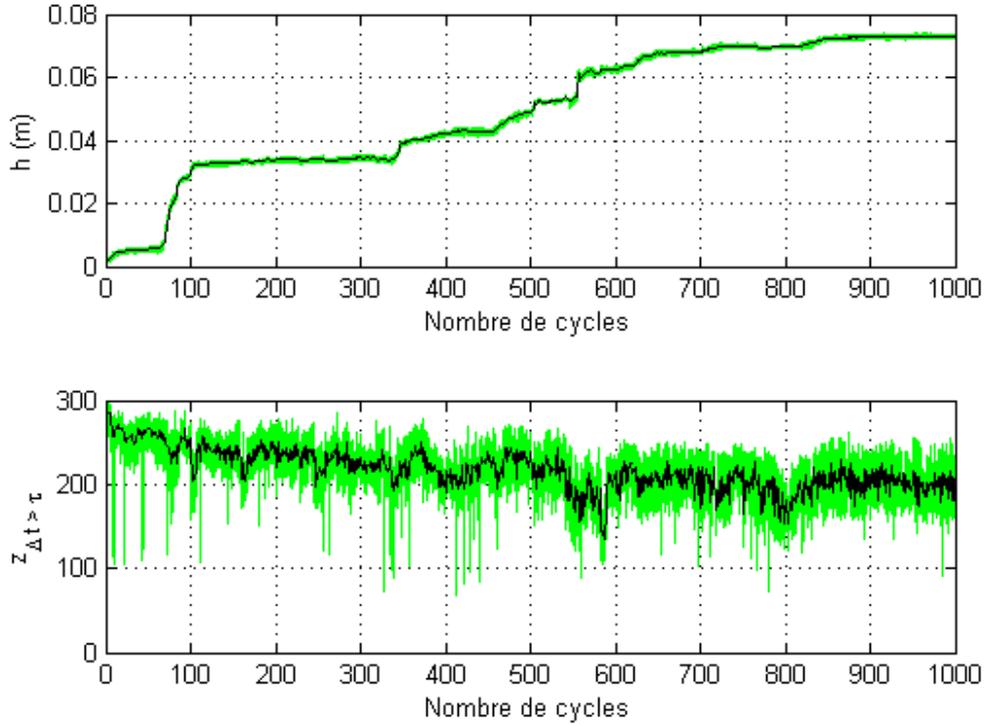


FIG. 5.18: Tassement et variation du nombre de contacts permanents en fonction du nombre de cycles.

loi $\chi^2(2l)$ (Gandolfo et Nicolettiy 2002). Afin de pouvoir rejeter H_0 au risque α choisi, il faut que le χ^2 calculé soit supérieur à la valeur donnée par la distribution standard (fonction de α et l).

5.4.2 Calcul des coefficients d'estimation

Afin de pouvoir mesurer la causalité entre les signaux mentionnés ci-dessus, il est indispensable d'estimer d'abord les suites d'erreurs $(\epsilon_i)_n$ et $(e_i)_n$. Cette tâche peut être accomplie en utilisant l'algorithme des Moindres Carrés Récursif (MCR) (Beex et Zeidler (2003)). Il s'agit d'écrire les deux modèles sous la forme :

$$d(i) = \mathbf{A}^t \mathbf{x}^{(i)} + u(i) \quad (5.11)$$

où $d(i)$ est la sortie estimée à partir du passé de h et celui de z , \mathbf{A} est le vecteur contenant les paramètres inconnus d'estimation et $u(i)$ représente l'erreur d'estimation, à l'étape i .

Dans le cas du modèle (5.8), ces vecteurs s'écrivent sous la forme de vecteurs de données $\mathbf{x}^{(i)} = [1, Ln(i), h(i-1), \dots, h(i-l), 1, i, z(i-1), \dots, z(i-l)]$, de vecteurs d'inconnues $\mathbf{A} = [\alpha, \beta, a_1, \dots, a_l, \chi, \gamma, b_1, \dots, b_l]$ et d'erreurs $u(i) = \epsilon_h(i)$. Similairement, dans le cas du modèle (5.9), ces vecteurs s'écrivent sous la forme $\mathbf{x}^{(i)} = [1, Ln(i), h(i-1), \dots, h(i-l)]$, $\mathbf{A} = [\alpha, \beta, a_1, \dots, a_l]$ et $u(i) = e_h(i)$. Afin d'estimer les paramètres du modèle (5.11), on utilise le critère des moindres carrés :

$$\mathcal{R} = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} (u(i))^2 \quad (5.12)$$

La résolution de ce problème repose sur la minimisation de \mathcal{R} par rapport aux vecteurs d'inconnues \mathbf{A} . Ainsi, on peut aboutir à la relation :

$$\sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} d(i) \mathbf{x}^{(i)} = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} [\mathbf{x}^{(i)} \mathbf{x}^{(i)t}] \mathbf{A}^{(n)} \quad (5.13)$$

On pose $p^{(n)} = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} d(i) \mathbf{x}^{(i)}$ et $R^{(n)} = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} [\mathbf{x}^{(i)} \mathbf{x}^{(i)t}]$ et on fait appel à l'identité des matrices de Woodbury (Kima et Bennighof (2006)) afin d'aboutir à la relation :

$$\mathbf{Q}^{(n)} = \lambda^{-1} \mathbf{Q}^{(n-1)} - \lambda^{-1} \mathbf{k}^{(n)} \mathbf{x}^{(n)t} \mathbf{Q}^{(n-1)} \quad (5.14)$$

où $\mathbf{Q}^{(n)} = \mathbf{R}^{-1(n)}$ et $\mathbf{k}^{(n)} = \frac{\lambda^{-1} \mathbf{Q}^{(n-1)} \mathbf{x}^{(n)}}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^{(n)t} \mathbf{Q}^{(n-1)} \mathbf{x}^{(n)}}$. En injectant cette relation dans l'équation $\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{Q}^{(n)} p^{(n)}$, et d'aboutir à la solution du problème sous forme de formule de récurrence :

$$\mathbf{h}^{(n)} = \mathbf{h}^{(n-1)} + \mathbf{k}^{(n)} u(n) \quad (5.15)$$

Ainsi, on aboutit à l'algorithme de MCR. Il s'agit d'initier les calculs en se donnant une constante $0 \ll \lambda < 1$, un vecteur de paramètres initial $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ et une matrice initiale $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ de taille $l \times l$ et on procède par calcul itératif à chaque étape n comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{\lambda^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{x}}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x} \mathbf{Q} \mathbf{x}^t} \\ u(n) &= d(n) - \mathbf{x}^t \mathbf{A} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{A} + \mathbf{k} u(n) \\ \mathbf{Q} &= \lambda^{-1} (\mathbf{Q} - \mathbf{k} \mathbf{x}^t \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

où le vecteur \mathbf{k} est appelé gain de Kalman. Disposant des paramètres des modèles (5.8) et (5.9), il est possible de tracer les courbes d'estimation du tassement et de contacts permanents comme le montre la figure (5.19). Disposant de tous les termes d'erreur, il est

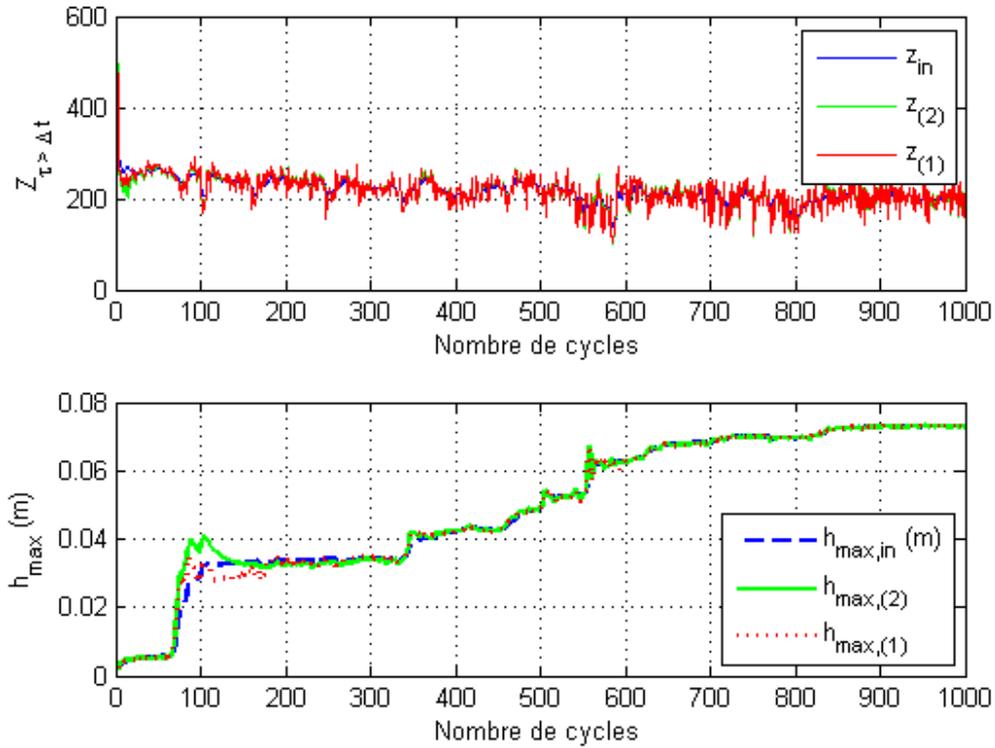


FIG. 5.19: Applications des modèles (5.8) et (5.9) sur les signaux de tassement et de contacts permanents.

possible de calculer la mesure de causalité (5.10). Dans le cas particulier considéré et décrit au début de cette section, nous avons considéré des vecteurs h et z de longueur $n = 1000$ cycles et une longueur d'autorégression de $L = n/100$. Nous avons pris également un niveau de risque, $\alpha = 1\%$ pour lequel l'hypothèse H_0 peut être rejetée. A ce niveau de risque et au nombre de paramètres l correspond une valeur théorique de $\chi^2(2l) = 37.52$, alors que la mesure de causalité vaut 590.85. Ainsi, nous pouvons conclure que le nombre de contacts est une variable d'explication significative pour le tassement sous le blochet. Cette approche peut être appliquée pour les différents cas de chargements et nous montrons en effet que la relation de causalité reste valable pour les différents cas tel que le montre le tableau (5.2).

Force, ΔF (kN)	0.5			1			1.5		
Fréquence, f (Hz)	20	30	40	20	30	40	20	30	40
χ^2	621.	634.	703.	227.	750.	430.	457.	640.	685.

TAB. 5.2: Calcul de la mesure de causalité pour différents cas de chargement

5.5 Conclusion

Les déplacements résiduels qui se produisent suite à des chargements dynamiques à différentes fréquences peuvent varier selon différents facteurs tels que le matériau utilisé, la forme des grains, le degré de confinement, etc. Une étude expérimentale peut ne pas être suffisante pour comprendre le mécanisme de tassement puisque l'accès aux grandeurs locales telles que les forces de contacts, les déplacements locaux n'est pas toujours possible. D'autre part, les approches continues s'avèrent inadéquates pour notre étude pour au moins deux raisons. D'abord le nombre de grains au niveau d'un point matériel n'est pas suffisamment important pour pouvoir parler d'un milieu continu. Ensuite, il est difficile de pouvoir tenir compte dans le cas de ce type de modèle de la variation du nombre de contacts, de l'effet des formes de grains, etc.

Ainsi, nous nous sommes intéressés à l'étude de ce phénomène grâce à une approche de calcul discrète. Dans ce chapitre, nous nous sommes concentrés surtout sur l'explication du mécanisme de tassement. Les techniques numériques associées à cette approche sont discutées précédemment dans le quatrième chapitre. Ainsi, dans le deuxième paragraphe, nous avons vérifié la cohérence du modèle par rapport aux résultats obtenus expérimentalement. Nous nous sommes intéressés également aux effets des paramètres de simulation ainsi qu'à la forme de grains sur la vitesse de tassement. Dans le troisième paragraphe, nous nous sommes penchés sur l'homogénéisation des champs mécaniques afin d'observer leurs distributions dans le milieu, tout au long des cycles de chargement. Nous avons comparé ainsi l'écoulement des matériaux granulaires dans le cas partiellement confiné à leurs réarrangements, dans le cas complètement confiné. A travers la variation des forces et des déplacements au niveau des contacts, dans différentes régions, nous avons observé le phénomène de rochet qui est dû aux glissements tangentiels entre les grains. Dans le quatrième paragraphe de ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la causalité entre la perte de contacts et la vitesse de tassement. Nous avons prouvé statistiquement l'existence de cette relation, dans les différents cas de chargement.

Chapitre 6

Procédure de calcul numérique à long terme

Sommaire

6.1	Introduction	142
6.2	Estimation des déplacements résiduels	142
6.2.1	Conditions aux limites et mode de chargement	142
6.2.2	Méthode d'estimation et phase d'apprentissage	144
6.2.3	Phase de prolongement	148
6.2.4	Application Numérique	149
6.3	Méthode de relaxation	150
6.3.1	Fonctionnelle de minimum d'énergie	151
6.3.2	Application numérique	153
6.4	Calcul du tassement à long terme	155
6.4.1	Organigramme de la procédure de calcul	155
6.4.2	Etude de convergence	157
6.4.3	Applications	157
6.5	Conclusion	161

6.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, une étude détaillée du mécanisme de tassement a été présentée à travers un travail expérimental et numérique. L'approche discrète a porté sur le comportement d'échantillons de grains polygonaux et circulaires en 2D et de billes sphériques en 3D. Avec cette approche numérique discrète, nous avons réussi à reproduire certains aspects observés expérimentalement. Cependant, le coût de simulation à long terme du problème de tassement sous sollicitations cycliques a limité l'étude de ce qui pourrait se passer lorsque les échantillons sont soumis à des sollicitations périodiques après un grand nombre de cycles.

Dans ce chapitre, nous introduisons une approche numérique pour la simulation discrète à long terme de la réponse d'un lit granulaire constitué de grains sphériques. La méthode proposée est basée sur un calcul de dynamique moléculaire, de l'homogénéisation temporelle et de relaxation. L'idée maîtresse est d'estimer des fonctions de tendance en se basant sur le calcul discret pendant un nombre limité de cycles. Ces fonctions d'apprentissage permettent d'extrapoler et de déduire des configurations ultérieures (Karrech et al. (2007), Abdelkarim et al. (2003)). Lorsque les configurations ainsi extrapolées présentent des efforts intérieurs importants, une approche dite de relaxation est utilisée afin d'y remédier. La précision, l'efficacité et les limites de cette approche seront discutées tout au long de ce chapitre, pour différents cas de chargement.

6.2 Estimation des déplacements résiduels

6.2.1 Conditions aux limites et mode de chargement

Bien que les particules soient distribuées de façon aléatoire en terme de position et de taille, l'échantillon cylindrique présente des plans de symétrie suivant les axes des "x" et des "y". La modélisation sous sollicitations cycliques porte uniquement sur un quart de cylindre afin d'optimiser le temps de calcul. Les conditions aux limites concernent les plans de symétrie mentionnés ci-dessus ($u_x = 0$ à $x = 0$ et $u_y = 0$ à $y = 0$), comme le montre la figure (6.1). Au niveau de la frontière, les interactions sont traitées de façon analogue aux interactions intergranulaires. Le chargement cyclique est décrit par une loi sinusoïdale comme le montre la figure (6.1). Les paramètres de simulation utilisés dans le cadre de cette étude sont présentés dans le tableau (6.1)

La méthode de dynamique moléculaire permet de calculer les trajectoires des grains

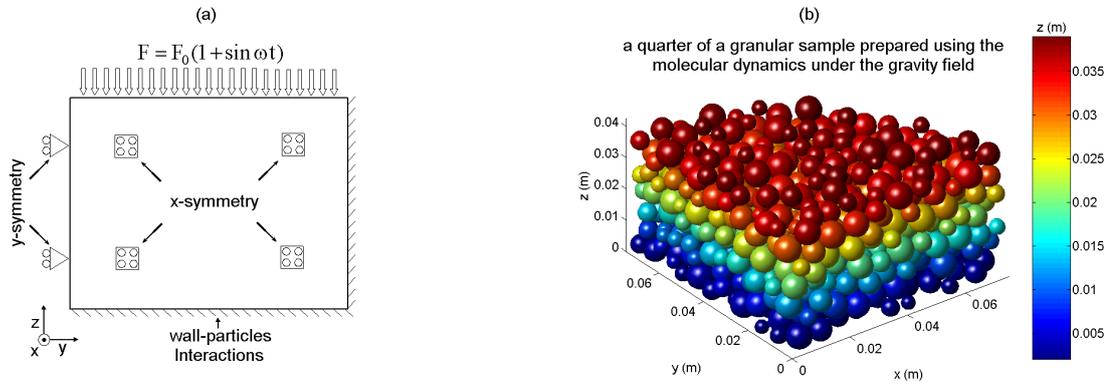


FIG. 6.1: (a) Conditions aux limites en forces et déplacements appliquées (b) à l'échantillon.

Dimensions			Propriétés		
Densité initiale	ϕ_i	0.5615	Densité des particules	ρ_p	2710 kg/m^3
Rayon moyen	\bar{r}	3.2 mm	Module d'Young	E	46.9 GPa
Ecart type de rayons	σ_r	5.6510^{-4}	Coefficient de Poisson	ν	0.25
Rayon du cylindre	R	75 mm	coefficient de frottement	μ	0.5
Hauteur de l'échantillon	H	60 mm	coefficients visqueux	α_n, α_t	0.44

TAB. 6.1: Paramètres du modèle discret.

au cours du temps en se basant sur les interactions. Pour éviter des écoulements excessifs, seuls les degrés de translation sont considérés. Au cours des cycles de chargement, des informations telles que les positions des grains permettent d'estimer des fonctions d'évolution, et d'estimer des configurations potentielles par extrapolation. Dans cette section, nous présentons les résultats de ce processus dénommé "prolongement temporel" et nous comparons les résultats obtenus avec ceux des calculs complets moyennant la dynamique moléculaire.

6.2.2 Méthode d'estimation et phase d'apprentissage

Nous considérons un échantillon de configuration \mathcal{S} soumis à un chargement cyclique de période T . Les particules évoluent en fonction des charges appliquées, des conditions aux limites, des caractéristiques mécaniques et des chaînes de contact. Les déplacements des particules peuvent être décomposés de façon additive comme suit :

$$\begin{cases} \forall t \in [0, T], \forall \beta \in \mathcal{S} \\ u_\beta(t) = u_\beta^r(t) + u_\beta^v(t) \end{cases} \quad (6.1)$$

Les indices (r) et (v) désignent respectivement les déplacements résiduels et réversibles. Il est important de noter que le chargement cyclique en question produit des effets dynamiques et viscoélastiques qui peuvent agir après le chargement pendant un laps de temps plus ou moins long. Ceci signifie que les grains peuvent continuer à se mouvoir et explorer de nouvelles positions jusqu'à l'atteinte d'une position d'équilibre final. Quand les effets dynamiques et viscoélastiques disparaissent, le déplacement résiduel d'une particule β donnée peut être décrit simplement comme étant la différence entre les positions initiale et finale (obtenue après un chargement cyclique et une relaxation).

$$u_\beta^r(T) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} (u_\beta(T + \tau) - u_\beta(0)) \quad (6.2)$$

où τ représente le temps de relaxation. On peut remarquer, à ce niveau que l'estimation du déplacement résiduel n'est pas une tâche des plus faciles. La définition mentionnée ci-dessus n'est pas tout à fait appropriée pour le calcul des déplacements résiduels instantanés, surtout quand l'échantillon est soumis à plusieurs cycles de chargement sans temps intermédiaire de relaxation.

Afin de remédier à ce problème, nous proposons une description moins intuitive mais plus efficace. On considère un déplacement global typique d'un milieu granulaire soumis à un chargement répété. Selon les observations faites sur des matériaux granulaires, le déplacement global peut être illustré par la description typique présentée par la figure (6.2). Dans cette représentation, le premier terme de l'équation (6.1) représente le déplacement résiduel qui augmente lentement avec le temps et le second désigne les fluctuations réversibles par rapport au temps.

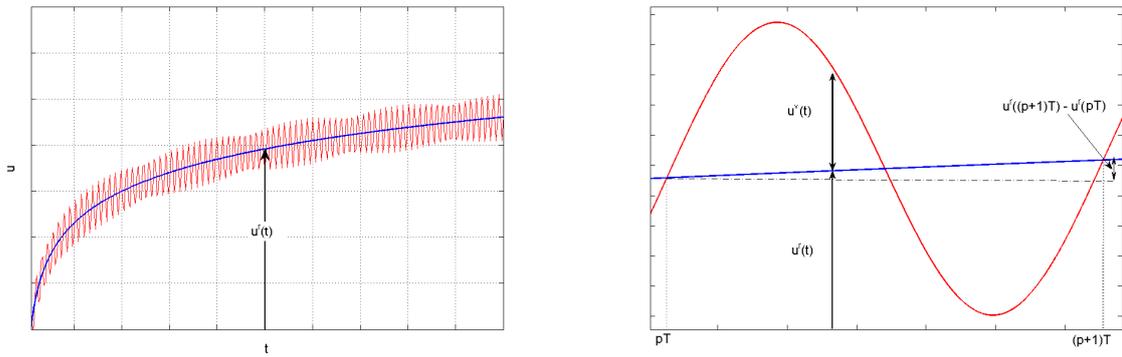


FIG. 6.2: Evolution du déplacement par rapport au temps : illustration du déplacement résiduel et réversible.

On peut remarquer que la dérive en déplacement résiduel au cours d'un cycle p est considérablement plus faible que la partie réversible. C'est le point de départ d'une méthode de calcul développée par Abdelkrim (2004), $\|u_\beta^r((p+1)T) - u_\beta^r(pT)\| \ll \max\|(u_\beta^v(t))\|, t \in [pT, (p+1)T]$. Ainsi, le déplacement global peut être vu comme étant la somme d'une fonction de fluctuation représentant les déplacements réversibles et d'une fonction de dérive lente représentant les déplacements irréversibles. Ces deux parties sont augmentées de termes d'erreur liés au fait que le déplacement n'est périodique qu'en moyenne. Ces termes d'erreur représentent les variations imprévues ou non expliquées par la variable de dépendance. Ce terme est conventionnellement dit "erreur" qu'il soit réellement mesurable ou non. Étant donné que le terme réversible est périodique, le déplacement peut, en utilisant l'équation (6.1), s'écrire comme suit :

$$u_\beta(t+T) = u_\beta(t) + u_\beta^r(t+T) + \xi_\beta(t+T) \quad (6.3)$$

Pendant plusieurs cycles de chargement, $p = 1, \dots, k$, le déplacement de la particule considérée, β , peut être écrit comme suit :

$$u_\beta(t+kT) = u_\beta(t) + \sum_{p=1}^k [u_\beta^r(t+pT) - u_\beta^r(t+(p-1)T) + \xi_\beta(t+pT) - \xi_\beta(t+(p-1)T)] \quad (6.4)$$

L'objectif de la phase d'apprentissage est alors d'estimer les fonctions inconnues $u_\beta^r(t)$, où ξ_β représentent les termes d'erreur dont la moyenne est supposée nulle. L'estimation est effectuée en se basant sur un nombre fini de données dites d'apprentissage $u(t+T), \dots, u(t+kT)$. Elle fournit la fonction adéquate $\hat{u}_\beta^r(t)$, estimateur de $u_\beta^r(t)$, exprimée en terme d'un ensemble de paramètres a . Ces paramètres peuvent être obtenus en minimisant la somme des erreurs $\|\hat{u}_\beta^r(t) - u_\beta^r(t)\|$ par la méthode des moindres carrés.

Différentes formes de fonctions peuvent être choisies pour estimer le déplacement résiduel $u_\beta^r(t)$, dans la phase d'apprentissage. A titre indicatif, la famille de fonctions linéaires par rapport au nombre de cycles peut être adoptée. La stabilité et la précision de ces fonctions d'estimation peuvent être étudiées en utilisant les deux fonctions suivantes :

$$g_u(k) = \frac{1}{k} \left(\sum_{\beta,p,d} [u_{\beta,d}^r(t+pT) - u_{\beta,d}^r(t+(p-1)T)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.5)$$

et

$$f_\xi(k) = \frac{1}{k} \left(\sum_{\beta,p,d} [\xi_{\beta,d}^p]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.6)$$

où β désignent les particules du système, p représente l'indice d'une donnée d'apprentissage et d un des trois degrés de liberté de translation. Les deux fonctions exprimées ci-dessus sont simplement des normes qui peuvent refléter la précision et la stabilité des fonctions de tendance. Dans la figure (6.3), on peut remarquer que g_u devient stable lorsque k augmente. D'autre part, la norme des termes d'erreurs f_ξ tend vers zéro quand k tend vers l'infini.

Le nombre de cycles de la phase d'apprentissage nécessaires pour faire des estimations peut être limité. Le nombre de cycles de calcul peut être exprimé de telle sorte que

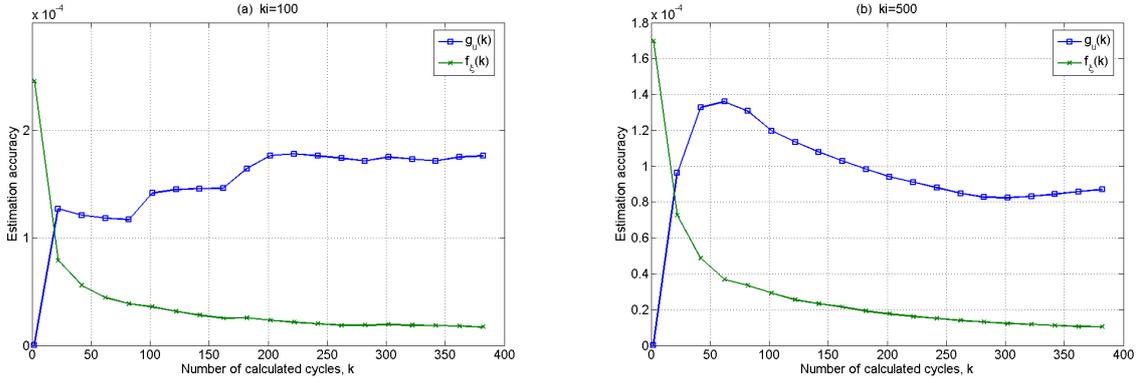


FIG. 6.3: Précision de la procédure d'estimation pour un estimateur linéaire avec deux nombres de cycles de chargement initiaux de différents, k_i .

la précision requise est contrôlée. En général, la loi des grands nombres fournit une limite supérieure qui peut être approchée en $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Dans notre cas, une limite supérieure plus avantageuse peut être obtenue puisque l'on peut supposer que les erreurs sont en effet bornées par les amplitudes des mesures elles même. La série de termes d'erreurs $(\xi_\beta^{(p)})_{p=1,\dots,k}$ peut être considérée comme étant un ensemble de réalisations de variables aléatoires où $\xi_\beta^{(p)} \in [a, b]$. La probabilité d'obtenir une fonction qui estime l'erreur de déplacement avec une précision ϵ peut s'écrire :

$$Pr \left[\left\| \frac{1}{k} \sum_p \xi_\beta^{(p)} \right\| \geq \epsilon \right] \leq 2e^{-\frac{2k\epsilon^2}{(b-a)^2}} \quad (6.7)$$

Cette inégalité est un théorème connu aussi sous le nom de "Chernoff Bound" dont la preuve peut être trouvée dans [Bouveau \(1986\)](#). D'après l'équation (6.7), il est possible de contrôler le nombre nécessaire de cycles, k , en choisissant un niveau d'erreur ϵ et une probabilité associée p . En effet, pour $k \geq \frac{(b-a)^2}{2\epsilon^2} \ln\left(\frac{2}{p}\right)$, $Pr \left[\left\| \frac{1}{k} \sum_p \xi_\beta^{(p)} \right\| \geq \epsilon \right] \leq p$. Les fonctions, $u_\beta^r(t)$, peuvent être estimées en utilisant les données d'apprentissage disponibles en tenant compte du niveau d'erreur présélectionné.

Jusque là, la précision des estimations est établie à travers une approche paramétrique. Le modèle obtenu pour l'estimation des déplacements résiduels au cours d'une période d'apprentissage de k cycles sera utilisé dans la phase d'extrapolation définie ci-après.

6.2.3 Phase de prolongement

En utilisant le modèle obtenu en phase d'apprentissage à partir d'une simulation sur k cycles de chargement, il est possible d'estimer la configuration au cycle $(k + h)$, où $h \in \mathbb{N}$. En particulier, si la fonction d'estimation est supposée linéaire en fonction du temps, cette configuration peut être décrite comme suit :

$$\hat{u}_\beta(t + (k + h)T) = u_\beta(t + kT) + \frac{h}{k} \sum_{p=1}^k [u_\beta^r(t + pT) - u_\beta^r(t + (p - 1)T)]. \quad (6.8)$$

Le premier terme de droite de l'équation précédente est connu à partir de la dernière étape alors que le second terme représente l'estimation du déplacement résiduel au cycle $(k + h)$. L'estimation proposée en phase d'apprentissage est supposée linéaire également avec le nombre de cycles. De façon similaire, une fonction de tendance logarithmique sous la forme $u_\beta^r(t + pT) = a_\beta \ln(t + pT) + b_\beta(t + pT)$ sera utilisée. Les paramètres a_β et b_β peuvent être déduits à partir des calculs de dynamique moléculaire suivis d'une minimisation par la méthode des moindres carrés (minimisant l'erreur quadratique entre la loi empirique et les déplacements résiduels). Ainsi le déplacement résiduel peut être décrit comme suit :

$$\hat{u}_\beta(t + (k + h)T) = u_\beta(t + kT) + a_\beta \ln(t + (k + h)T) + b_\beta(t + (k + h)T) \quad (6.9)$$

où les paramètres a_β et b_β sont calculés en utilisant les informations collectées pendant le calcul de dynamique moléculaire comme suit :

$$a_\beta = \frac{\sum_{p=1}^{p=k} t_p^2 \sum_{p=1}^{p=k} u_\beta(t_p) \ln(t_p) - \sum_{p=1}^{p=k} t_p \ln(t_p) \sum_{p=1}^{p=k} u_\beta(t_p) t_p}{\sum_{p=1}^{p=k} \ln^2(t_p) \sum_{p=1}^{p=k} t_p^2 - \left(\sum_{p=1}^{p=k} t_p \ln(t_p) \right)^2} \quad (6.10)$$

et

$$b_\beta = \frac{\sum_{p=1}^{p=k} \ln(t_p)^2 \sum_{p=1}^{p=k} u_\beta(t_p) t_p - \sum_{p=1}^{p=k} t_p \ln(t_p) \sum_{p=1}^{p=k} u_\beta(t_p) \ln(t_p)}{\sum_{p=1}^{p=k} \ln^2(t_p) \sum_{p=1}^{p=k} t_p^2 - \left(\sum_{p=1}^{p=k} t_p \ln(t_p) \right)^2} \quad (6.11)$$

où $t_p = t + pT$. Afin de distinguer les deux approches, l'équation (6.8) définit l'estimation linéaire et l'équation (6.9) définit l'estimation logarithmique. Il est évident que pour les deux types d'estimation présentés ci-dessus, plus le facteur h/k est proche de zéro, plus les fonctions d'estimation sont adéquates. En revanche, l'objectif de la procédure est de simuler les écoulements granulaires quand h est le plus grand possible. Ainsi, les paramètres doivent être optimisés pour que les estimations donnent des résultats comportant le moins d'erreur possible sur une durée de prolongement aussi grande que possible.

6.2.4 Application Numérique

Afin d'examiner la fiabilité de la technique de prolongement utilisée, les configurations estimées sont comparées avec celles qui sont obtenues avec un calcul de dynamique moléculaire complet. L'échantillon préparé est maintenant soumis successivement à k_i (initial) et k cycles de chargement comme décrit ci-dessus. Les informations collectées du calcul de dynamique moléculaire sont utilisées pour estimer une configuration après h . L'accord entre les deux configurations (calculée et estimée) est examiné systématiquement en utilisant l'expression d'erreur relative \mathcal{E}_r définie par :

$$\mathcal{E}_r(u) = \frac{\|u - \hat{u}\|}{\|u\|} \quad (6.12)$$

La norme L^2 , telle que définie dans les équations (6.5) et (6.6), est utilisée dans l'équation ci-dessus afin de calculer l'erreur relative. On note que u est une matrice $N \times 3$ qui contient les coordonnées des particules. Elle peut servir pour évaluer les déplacements. De façon similaire, \hat{u} représente une estimation de la configuration et N est le nombre de particules. Les figures (6.4) et (6.5) montrent que l'erreur entre les configurations calculées et estimées est faible surtout lorsque le nombre de cycles k est supérieur à 20, que ce soit dans le cas d'estimation linéaire ou logarithmique. On peut remarquer dans les figures mentionnées ci-dessus que l'erreur dans ces cas ne dépasse pas 2% (figures (6.4) et (6.5), les erreurs sont présentées en échelle logarithmique par souci de clarté).

On peut remarquer aussi que le nombre initial de cycles k_i affecte énormément la précision de la technique d'estimation. La figure (6.4) montre que le maximum d'erreur relative diminue de 14% à 2.5% quand k_i augmente de 10 à 500 cycles de chargement initiaux, dans le cas de simulation linéaire. De même, la figure (6.5) montre que l'erreur relative maximale diminue de 14% à 1% quand k_i augmente de 10 à 500 cycles de chargement initiaux,

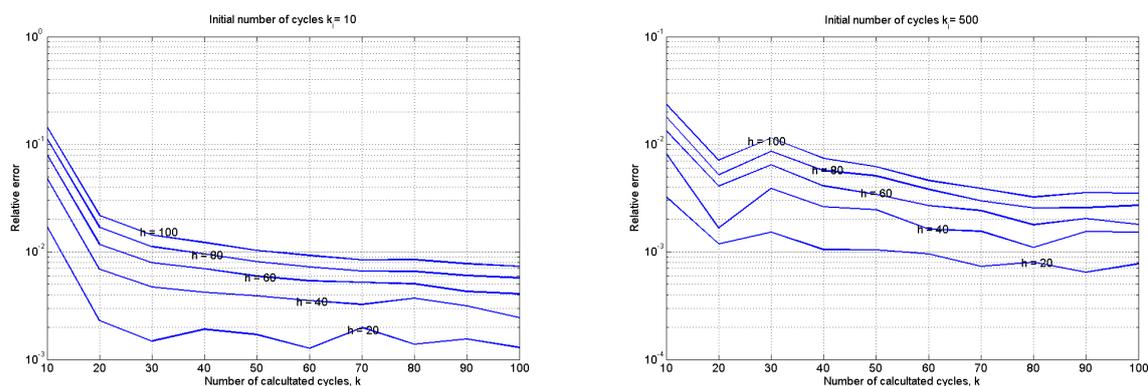


FIG. 6.4: Estimation linéaire : distributions des erreurs relatives pour différents nombres de cycles initiaux (k_i), nombre de cycles d'apprentissage (k), et longueur d'extrapolation (h).

dans le cas d'estimation logarithmique. D'autre part, les figures (6.4) et (6.5) indiquent que l'erreur relative d'estimation diminue avec le nombre de cycles d'estimation k . Ceci est évidemment dû au fait que plus les données sont disponibles plus les estimations sont précises. On peut remarquer également que l'erreur relative diminue quand la longueur de l'intervalle d'extrapolation h diminue. D'autre part, on peut constater que l'estimation logarithmique donne de meilleurs résultats que l'estimation linéaire. En fait, avec ses deux paramètres cette deuxième approche est plus appropriée pour approximer les fonctions de tendances. Dans la suite, l'estimation logarithmique sera choisie définitivement.

Malgré la précision obtenue à travers la technique de prolongement en terme de déplacement résiduel, les configurations obtenues peuvent présenter des pénétrations locales excessives entre les particules, surtout lorsque h est grand. Ce type de configuration peut être inapproprié pour un calcul de dynamique moléculaire ultérieur. Afin de remédier à ce problème, une technique de relaxation qui consiste à corriger les configurations obtenues est nécessaire et sera présentée dans la section suivante.

6.3 Méthode de relaxation

L'objectif de cette section est de prouver l'existence d'une propriété d'optimisation qui peut être satisfaite par les conditions aux limites du système \mathcal{S} ainsi que les équations de mouvement. Cette propriété sera utilisée pour corriger les configurations instables avec

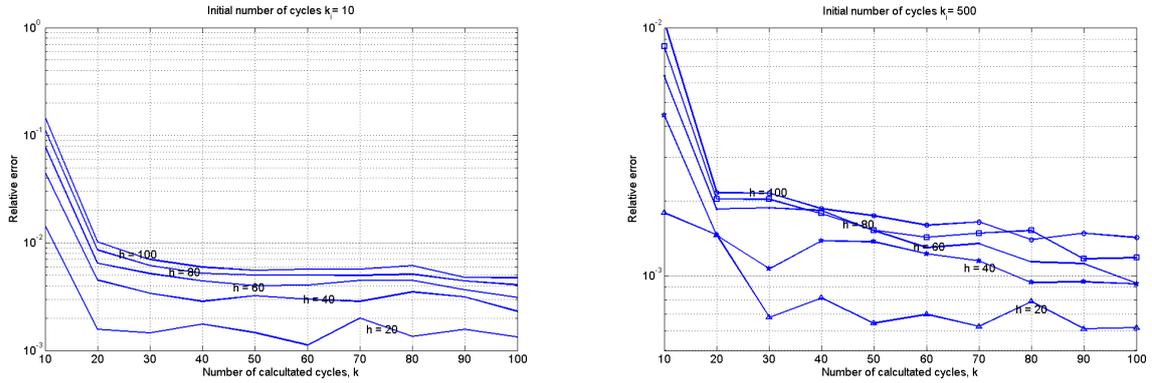


FIG. 6.5: Estimation logarithmique : distributions des Erreurs relatives pour différents nombre de cycles initiaux (k_i), nombre de cycles d'apprentissage (k), et longueur d'extrapolation (h).

des pénétrations excessives entre les grains.

6.3.1 Fonctionnelle de minimum d'énergie

En considérant le produit scalaire des équations de mouvement par $u_\beta \in \mathbb{R}^3$, il est possible d'établir le principe de travaux virtuels (p.t.v.) (Salençon (2002)), qui peut être écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (u_\beta)_{\beta \in \mathcal{S}} \in (\mathbb{R}^3)^N \\ \sum_{\beta \in \mathcal{S}} F_\beta u_\beta + \sum_{\beta \in \mathcal{S}} \sum_{\alpha \neq \beta \in \mathcal{S}} F_{\alpha\beta} u_\beta = \sum_{\beta \in \mathcal{S}} m_\beta a_\beta u_\beta \end{array} \right. \quad (6.13)$$

Le premier terme à gauche de cette équation correspond au travail virtuel des forces extérieures qui peut être exprimé sous la forme $\mathcal{P}_{(e)}(u_1, \dots, u_N) = \sum_{\beta \in \mathcal{S}} F_\beta u_\beta$. Le second terme exprime le travail virtuel des forces internes $\mathcal{P}_{(i)}(u_1, \dots, u_N) = \sum_{\beta \in \mathcal{S}} \sum_{\alpha \neq \beta \in \mathcal{S}} F_{\alpha\beta} u_\beta$. Le terme de droite désigne le travail des forces d'inertie $\mathcal{A}(u_1, \dots, u_N) = \sum_{\beta \in \mathcal{S}} m_\beta a_\beta u_\beta$. On note que l'ensemble des vecteurs $(u_\beta)_{\beta \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ est arbitraire dans l'espace $(\mathbb{R}^3)^N$. Par conséquent, cela peut être vu comme un déplacement ou une vitesse appliqué(e) aux constituants du système \mathcal{S} . En particulier, ce déplacement virtuel peut être choisi en cohérence avec les conditions aux limites ($u_\beta = u_\beta^d, \forall \beta \in \overline{\mathcal{S}}^d$), où $\overline{\mathcal{S}}^d$ est la partie de la frontière de \mathcal{S} où les déplacements sont appliqués. De même, les forces externes doivent

être cohérentes avec les conditions aux limites ($F_\beta = F_\beta^f, \forall \beta \in \overline{\mathcal{S}}^f$), où $\overline{\mathcal{S}}^f$ désigne la partie de la frontière de \mathcal{S} où les forces sont appliquées.

En appliquant des déplacements $(u_\beta)_{\beta \in [1, N]}$ au système de particules \mathcal{S} , l'existence de solution pour les équations du mouvement signifie qu'il existe un ensemble de forces internes $(F_{\alpha\beta})_{\beta, \alpha \in [1, N]^2}$ et un ensemble de forces externes $(F_\beta)_{\beta \in [1, N]}$ qui définissent l'évolution du système. En prenant en compte la solution mentionnée ci-dessus $(u_\beta, F_\beta, F_{\alpha\beta})_{\beta, \alpha \in [1, N]^2}$, il est possible d'écrire le p.t.v comme suit :

$$\begin{cases} \sum_{\beta \in \overline{\mathcal{S}}^f} F_\beta^f u_\beta + \sum_{\beta \in \overline{\mathcal{S}}^d} F_\beta u_\beta^d + \sum_{\beta \in \mathcal{S}} m_\beta (g - a) u_\beta \\ + \sum_{\beta \in \mathcal{S}} \sum_{\alpha \neq \beta \in \mathcal{S}} F_{\alpha\beta} u_\beta = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

où $\overline{\mathcal{S}}^d \cup \overline{\mathcal{S}}^f = \mathcal{S}$ et g représente les forces de volume. Comme une deuxième application du p.t.v., on considère le même ensemble de forces solution de l'équation du mouvement associé avec un ensemble différent de déplacements virtuels en cohérence avec les conditions aux limites $(u'_\beta, F_\beta, F_{\alpha\beta})_{\beta, \alpha \in [1, N]^2}$. Ceci conduit à l'équation suivante :

$$\begin{cases} \sum_{\beta \in \overline{\mathcal{S}}^f} (F_\beta^f u'_\beta - F_\beta^f u_\beta) + \sum_{\beta \in \mathcal{S}} m_\beta (g - a) (u'_\beta - u_\beta) \\ + \sum_{\beta \in \mathcal{S}} \sum_{\alpha \neq \beta \in \mathcal{S}} (F_{\alpha\beta} u'_\beta - F_{\alpha\beta} u_\beta) = 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

Le dernier terme à gauche de l'équation (6.15) peut être exprimé comme suit :

$$\begin{cases} \forall \alpha, \beta \in \mathcal{S}, \text{ en contact,} \\ F_{\alpha\beta}(u_\alpha, u_\beta) = \nabla \psi_{\alpha\beta}(u_\alpha, u_\beta) \end{cases} \quad (6.16)$$

où $\psi_{\alpha\beta}(u_\alpha, u_\beta)$ représente le potentiel des forces de contact. On travaille en quasi-statique et dans ce cas les forces normales sont prépondérantes. La preuve de l'existence d'une propriété d'optimisation peut être établie à travers le taux de variation de ce potentiel :

$$\delta \psi_{\alpha\beta}(u_\alpha, u_\beta) = \psi_{\alpha\beta}(u_\alpha + \delta u_\alpha, u_\beta + \delta u_\beta) - \psi_{\alpha\beta}(u_\alpha, u_\beta) \quad (6.17)$$

En utilisant les lois de contact qui est une fonction convexe, il est possible de montrer

que $\delta\psi_{\alpha\beta} \geq 0$ quand le contact existe. Par conséquent, on peut déduire que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \text{ solution } (u_\beta, F_\beta, F_{\alpha\beta})_{\beta, \alpha \in \llbracket 1, N \rrbracket^2} \\ \forall u' \neq u \text{ en cohérence avec } u^d \\ \sum_{\beta \in \bar{\mathcal{S}}^f} F_\beta^f u'_\beta + \sum_{\beta \in \mathcal{S}} m_\beta g u'_\beta + \sum_{\beta \in \mathcal{S}} \sum_{\alpha \neq \beta \in \mathcal{S}} \psi_{\alpha\beta}(u'_\beta) \\ \geq \sum_{\beta \in \bar{\mathcal{S}}^f} F_\beta^f u_\beta + \sum_{\beta \in \mathcal{S}} m_\beta g u_\beta + \sum_{\beta \in \mathcal{S}} \sum_{\alpha \neq \beta \in \mathcal{S}} \psi_{\alpha\beta}(u_\beta) \end{array} \right. \quad (6.18)$$

On note que les observations effectuées sur les déplacements des matériaux granulaires sous chargement cyclique montrent que pendant un cycle de chargement, l'incrément de déplacement résiduel est largement inférieur aux déplacements réversibles. L'inégalité prouve l'existence d'une fonctionnelle $\mathcal{F}(u)$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{F}(u) = \sum_{\beta \in \bar{\mathcal{S}}^f} F_\beta^f u_\beta + \sum_{\beta \in \mathcal{S}} m_\beta g u_\beta + \sum_{\beta \in \mathcal{S}} \sum_{\alpha \neq \beta \in \mathcal{S}} \psi_{\alpha\beta}(u_\beta) \quad (6.19)$$

La minimisation de cette fonctionnelle permet, en partant d'une configuration estimée comportant des efforts intrgranulaires excessifs, d'obtenir une configuration stable où les efforts sont faibles et de niveau comparable à ceux obtenus avant prolongement.

6.3.2 Application numérique

Dans cette section, on considère des configurations particulières instables caractérisées par des interpénétrations excessives que l'on soumet à la technique de relaxation qui consiste à minimiser la fonctionnelle d'énergie $\mathcal{F}(u)$ tout en gardant fixes toutes les particules de la frontière. Ceci permet d'obtenir des positions optimales des grains garantissant un système stable \mathcal{S} . Comme premier exemple simple, on considère une cellule de 9 particules dont les propriétés sont présentées dans le tableau (2.1). Cette cellule est présentée dans la figure (6.6). Les résultats montrent que cette approche permet d'équilibrer les pénétrations et de trouver des configurations utilisables pour un calcul de dynamique moléculaire ultérieur.

On considère maintenant un second exemple qui correspond à une configuration estimée par les simulations décrites précédemment. La configuration en question est obtenue après $k_i = 20$ cycles initiaux, $k = 20$ cycles d'apprentissage et une extrapolation de longueur $h = 20$ cycles. En terme de calcul de déplacement résiduel, une telle estimation est en accord avec les résultats calculés, comme nous venons de l'expliquer dans la section

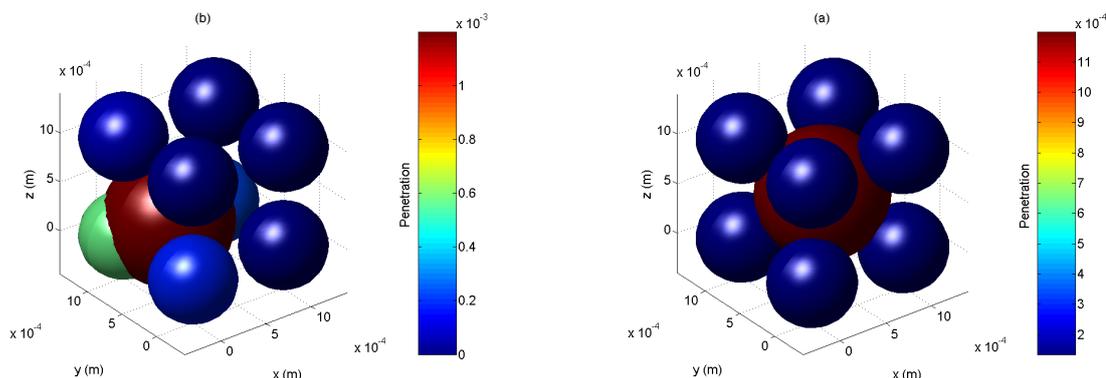


FIG. 6.6: Relaxation d'une cellule de 9 particules. (a) Configuration estimée, (b) Configuration corrigée.

précédente. Cependant, on peut remarquer dans la figure (6.7)-(a) que cette configuration présente des interpénétrations locales excessives. Bien que limitées en nombre, ces pénétrations représentent une énergie potentielle accumulée qui peut induire des divergences de l'écoulement granulaire.

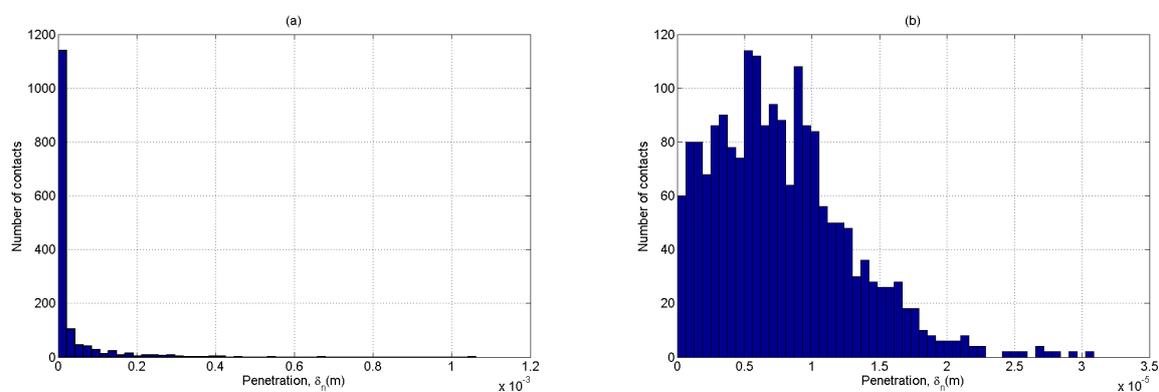


FIG. 6.7: Relaxation d'un échantillon complet. (a) Configuration estimée, (b) Configuration corrigée.

La relaxation dans ce cas consiste à fixer les particules de la frontière et à trouver les positions optimales en minimisant la fonctionnelle d'énergie (6.19) à l'aide de la méthode du gradient. Cette approche permet de corriger la configuration en question et d'aboutir à la distribution d'interpénétration présentée dans la figure (6.7)-(b). On peut remarquer

que la distribution d'interpénétration s'est améliorée en forme et que le maximum de pénétration est passé de 1.8×10^{-3} m à 6×10^{-5} m, réduisant d'autant les efforts internes.

Les deux exemples présentés dans cette section permettent de tester le fonctionnement de la technique de relaxation et montrent qu'elle permet d'améliorer les distributions d'interpénétration ainsi que leurs amplitudes. Dans la section suivante, le prolongement, l'extrapolation ainsi que la technique de relaxation que nous venons d'expliquer seront utilisées dans une procédure complète pour le calcul à long terme des vitesses de tassement.

6.4 Calcul du tassement à long terme

Dans cette section, nous présentons d'abord la procédure de calcul de tassement à long terme. Ensuite, nous nous intéresserons à l'étude de convergence de cette approche et enfin, nous l'appliquons à des cas de calcul concrets.

6.4.1 Organigramme de la procédure de calcul

L'organigramme présenté dans la figure (6.8) montre l'idée de base du concept sous forme d'algorithme de calcul. Le calcul commence à partir d'une configuration initiale diluée où les particules distantes sont distribuées de façon aléatoire dans un cylindre. Cette configuration est soumise au champ de gravité jusqu'à l'équilibre. Par la suite, l'échantillon obtenu est soumis à k_i cycles initiaux de chargement avant d'entamer la procédure séquentielle, étant donné que les premiers cycles sont toujours caractérisés par des déplacements résiduels élevés comme le montre la figure (6.2). La procédure séquentielle consiste d'abord à soumettre l'échantillon à k cycles de chargement dont la borne supérieure peut être déterminée en prenant une probabilité et un niveau d'erreur donnés tels que définis dans l'équation (6.7). Pendant k cycles de chargement, les données d'apprentissage sont évaluées à travers la dynamique moléculaire et sauvegardées à la fin de chaque cycle. Les informations collectées sont utilisées pour estimer des fonctions de tendance qui décrivent le comportement des échantillons granulaires en termes de déplacements résiduels. Les fonctions obtenues sont ensuite utilisées pour effectuer l'extrapolation logarithmique au cycle $(h + k)$ comme le décrivent les équations (6.9), (6.10) et (6.11).

Dans la section (6.2.1), nous avons montré que la précision dépend des valeurs de k_i , k et h . L'erreur relative diminue quand le rapport h/k diminue. Cette remarque sera justifiée dans la section suivante lors de la vérification de la convergence de la procédure.

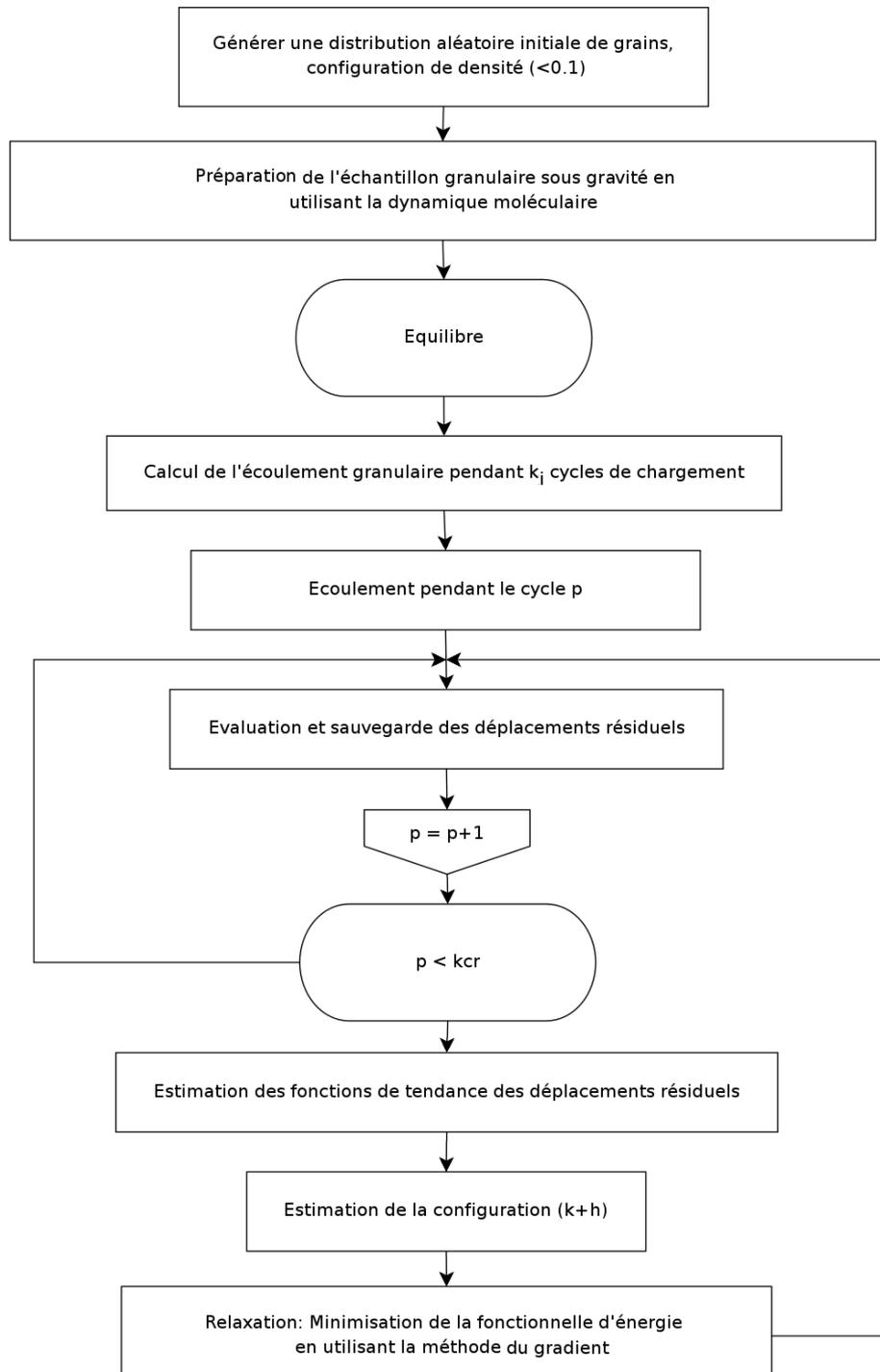


FIG. 6.8: Organigramme de la procédure de calcul de tassement à long terme.

6.4.2 Etude de convergence

Afin de valider la procédure proposée dans ce chapitre, les déplacements résiduels obtenus sont comparés à des calculs de dynamique moléculaire complets. Les paramètres de simulation utilisés pour étudier la convergence sont présentés dans le tableau (6.1). La figure (6.9) montre le tassement du matériau granulaire obtenu avec un calcul de dynamique moléculaire complet (MD) ainsi que les tassements obtenus avec la nouvelle procédure de calcul en utilisant différents paramètres de simulations. Dans un premier temps, le nombre de cycles initiaux est $k_i = 10$ et la longueur d'extrapolation est $h = 10$, alors que le nombre de cycles d'apprentissage k variable. On peut remarquer dans la figure (6.9)-(a) que l'erreur entre le calcul de dynamique moléculaire complet et les résultats obtenus diminuent avec ce nombre de cycles k . D'autre part, on peut remarquer que l'erreur se stabilise quand ce paramètre dépasse 20. De façon similaire, l'effet de la longueur de l'intervalle d'extrapolation sur la précision de l'approche peut être examiné en prenant à titre indicatif, $k_i = 10$, $k = 40$ et en variant h . La figure (6.9)-(a) montre, sans surprise, que l'erreur diminue quand h diminue.

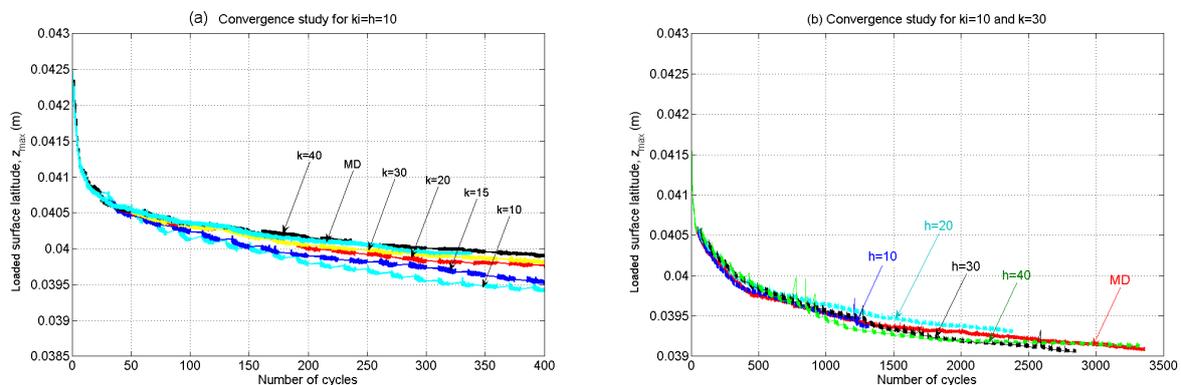


FIG. 6.9: Convergence de la procédure avec les paramètres de simulation k (a) et h (b) et comparaison avec le calcul de dynamique moléculaire complet.

6.4.3 Applications

Dans cette section, l'effet du gain de temps ainsi que du mode de chargement sur la précision des calculs sont examinés afin de montrer la limite de la procédure proposée. Les simulations que nous nous proposons de faire sont basées sur des échantillons dont les

caractéristiques sont présentées dans le tableau (6.1). Les conditions aux limites en charges appliquées et déplacements sont décrites dans la figure (6.1) sauf indication contraire. L'amplitude de la contrainte appliquée dans le cas d'échantillons complètement confinés est de $\Delta\sigma = 14.15$ kPa et la fréquence du signal est de $f = 50$ Hz (soit un signal qui provoque un tassement assez élevé comme le montrent les résultats des chapitres précédents).

En général, la procédure fonctionne convenablement quand les déplacements résiduels restent inférieurs aux déplacements réversibles ainsi qu'aux dimensions des grains. Quand le matériau granulaire est complètement confiné, le mécanisme de tassement est essentiellement lié au réarrangement des grains (comme précisé dans le chapitre précédent). Par conséquent, le déplacement résiduel reste faible et limité par les dimensions des interstices disponibles entre les grains. Dans ce cas, on peut remarquer comme le montrent les figures (6.9) et (6.10)-a que la procédure est suffisamment précise pour prédire l'évolution de l'échantillon aux cours des cycles de chargement, en termes de déplacements résiduels et de nombres de coordination.

La précision peut être évaluée en termes de déplacement résiduel, de nombre de coordination et de configuration définitive comme le montrent les figures (6.10). On peut remarquer que pour ces critères, l'erreur relative augmente avec le gain de temps. A titre indicatif, on remarque que le nombre de coordination présente une erreur de l'ordre de 12% quand le gain de temps vaut 180%. D'autre part, l'erreur relative calculée en terme de précision de la configuration définitive (en utilisant l'équation 6.12) est de l'ordre de 1% pour le même niveau de gain de temps. Le déplacement résiduel est évalué de façon plus précise puisque l'erreur ne dépasse pas 0.5% quand le même niveau de gain de temps est effectué.

Contrairement au cas de chargement d'échantillons complètement confinés, où le tassement est essentiellement dû au réarrangement des grains, les échantillons partiellement confinés subissent du tassement par réarrangement et par mobilité des grains sous chargements périodiques. En effet, les particules se déplacent vers les régions les moins chargées. Par conséquent, le tassement produit dans ce dernier cas dépasse largement les niveaux obtenus dans le cas complètement confiné pour un même chargement et une géométrie identique. En outre, en gardant toutes choses égales par ailleurs, la dispersion est plus importante sur les résultats dans le cas partiellement confiné. Ceci signifie que les interprétations excessives peuvent être trouvées de façon plus fréquente. L'échantillon étudié dans le cas partiellement confiné de cette section est caractérisé par une amplitude de

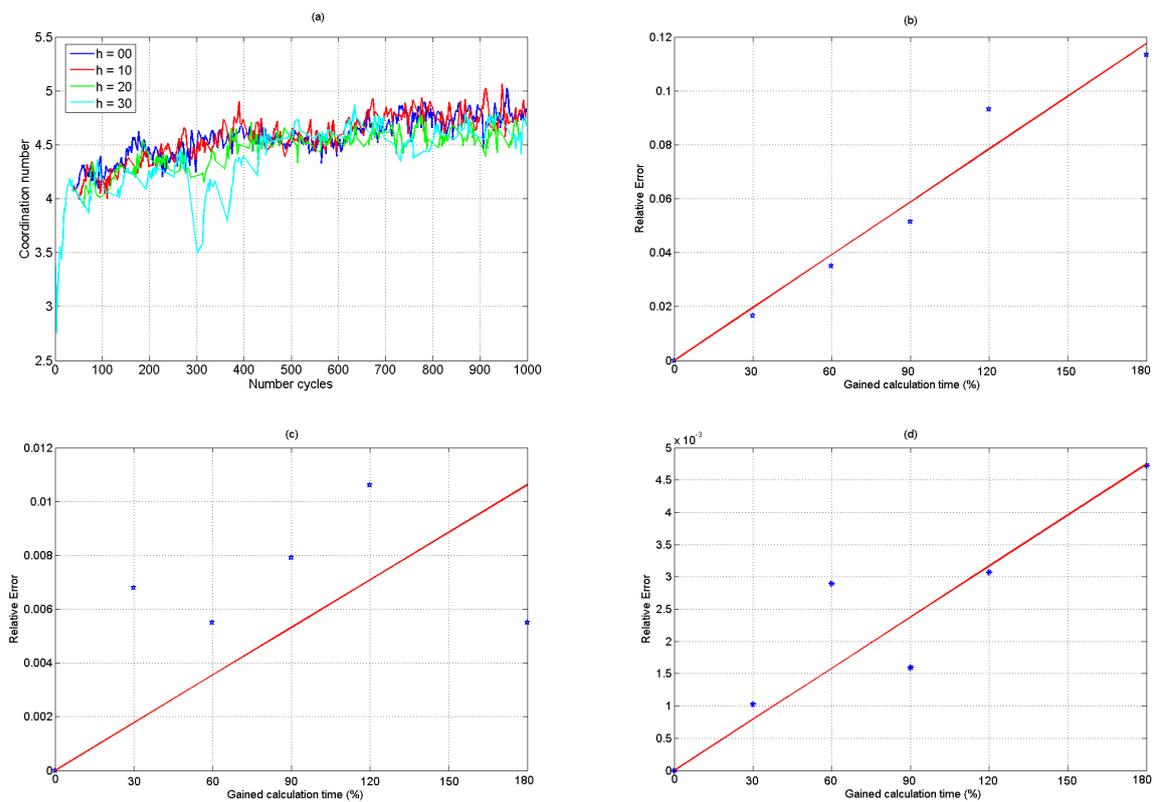


FIG. 6.10: (a) Variation du nombre de coordination par rapport au nombre de cycles, (b) précision en terme de nombre de coordination final, (c) positions des particules, et (d) déplacements résiduels.

contrainte de $\Delta\sigma = 5.87$ kPa, une fréquence d'excitation de $f = 10$ Hz, et un niveau de confinement de 80%. Les propriétés des matériaux sont les mêmes que celles utilisées précédemment (tableau (2.1)). Les figures (6.11)-(a) et (b) montrent la variation du nombre de coordination et du tassement avec le nombre de cycles. Les résultats de cette analyse montrent déjà, conformément aux résultats obtenus dans le chapitre précédent que la vitesse de tassement diminue avec le degré de confinement. Cependant, on peut remarquer que le nombre de coordination moyen reste dans les mêmes proportions. D'autre part, la figure (6.11)-(c) et (d) montrent les erreurs relatives en terme de nombre de coordination et de tassement pour différents gains de temps de calcul. On remarque que les erreurs diminuent avec le degré de confinement.

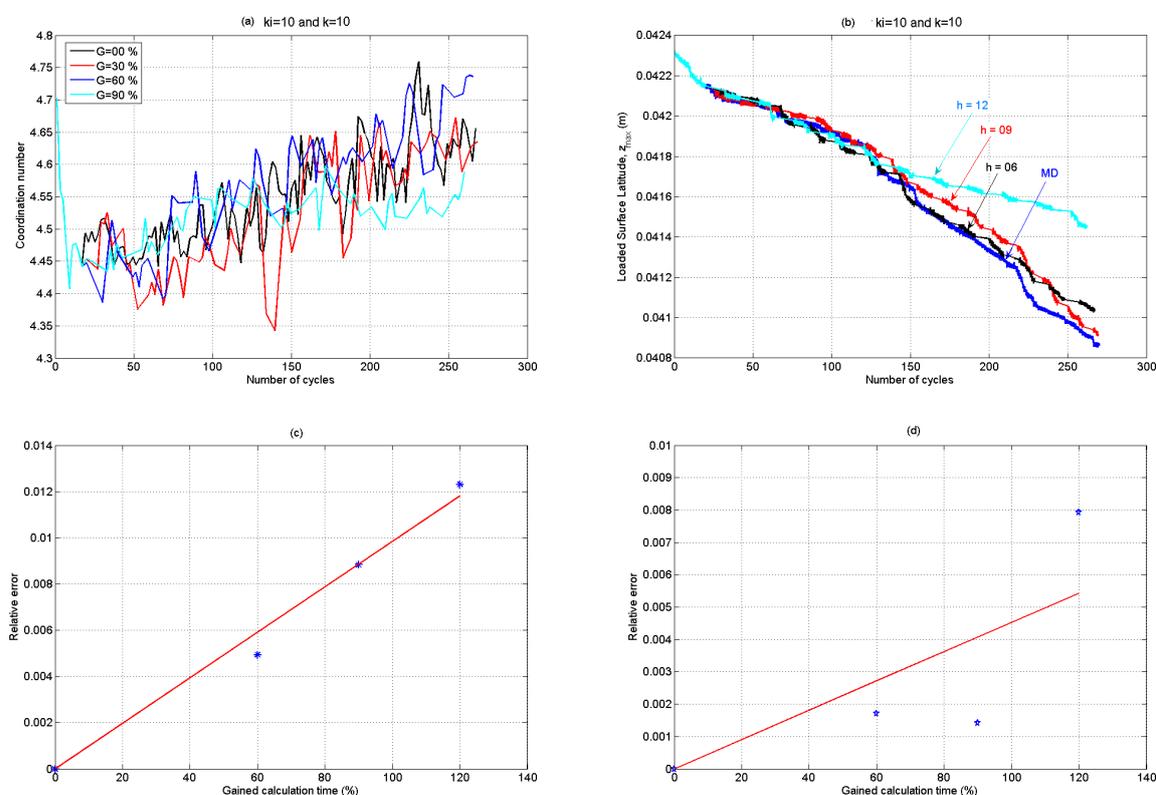


FIG. 6.11: (a) Nombre de coordination en fonction du nombre de cycles, (b) Tassement par rapport au nombre de cycles, Erreur relative en terme(c) de nombre de coordination (d) et de tassement.

Les exemples présentés dans cette section montrent que la procédure proposée donne des résultats tout à fait intéressants dans le cas complètement confiné. Cependant, dans le

cas partiellement confiné, l'erreur augmente en terme de prédiction de tassement. Notons aussi que la procédure est implémentée dans le cas de grains sphériques, mais avec plus de précautions cette approche peut être réécrite dans le cas de grains polygonaux.

6.5 Conclusion

Une procédure de calcul du tassement des matériaux granulaires à long terme a été présentée dans ce chapitre. La procédure proposée utilise de façon séquentielle la dynamique moléculaire, un prolongement temporel et une technique de relaxation afin de prédire l'écoulement des matériaux granulaires sous chargement cyclique. La dynamique moléculaire représente le moteur de la méthode, elle consiste à intégrer les équations de mouvement en tenant compte des interactions entre les grains. Le prolongement temporel consiste d'abord à estimer des fonctions de tendance en déplacements résiduels au cours des cycles, puis à les utiliser pour faire des extrapolations. Finalement, la relaxation consiste à apporter les corrections nécessaires aux configurations obtenues, en minimisant une fonctionnelle d'énergie avec la méthode du gradient.

Des comparaisons ont été réalisées entre les calculs complets de dynamique moléculaire et des calculs alternés par la procédure proposée. Elles ont donné des résultats satisfaisants, surtout dans les cas d'échantillons de degré de confinement élevé. Ces applications ont montré que la procédure permet d'estimer le tassement des matériaux tout en gagnant en temps de calcul. L'étude de convergence a montré toutefois qu'il existe un compromis entre le temps de calcul gagné et la précision obtenue. D'autre part, étant donné que les déplacements résiduels diminuent au cours des cycles, la procédure est de plus en plus adaptée au fur et à mesure que le nombre de cycles augmente.

Conclusions et perspectives

Conclusions et perspectives

Le travail de recherche présenté dans cette thèse a pour objectif d'étudier le tassement des matériaux granulaires sous sollicitations périodiques. Nous avons adopté essentiellement deux approches complémentaires : une approche expérimentale qui consiste à étudier l'influence des facteurs qui peuvent, à priori, affecter le tassement et une approche numérique qui permet de simuler cette expérience et d'analyser les grandeurs inaccessibles expérimentalement.

Dans un premier temps, nous avons présenté la méthode de calcul numérique en accordant de l'attention aux lois de contact ainsi qu'aux techniques de détection des contacts. Afin de vérifier le modèle dans le cas tridimensionnel et de l'ajuster dans le cas bidimensionnel, du point de vue de la rigidité, nous avons comparé les résultats qu'il fournit avec des essais de chargement axial en considérant des constituants de différents matériaux, formes et dimensions. Nous nous sommes intéressés également aux effets des paramètres de simulation sur les échantillons obtenus en discutant de l'influence des rigidités des grains et de leurs coefficients de frottement sur les profils de la densité et sur les distributions des nombres de contacts. Nous avons écarté l'adoption de rigidités "non physiques" souvent adoptée en dynamique moléculaire car elle induit des temps de calcul plus faibles.

Nous nous sommes intéressés, par la suite, à l'étude expérimentale du problème de tassement sous chargement dynamique. La comparaison entre le tassement dans un milieu complètement confiné et un milieu partiellement confiné a montré que le réarrangement joue un rôle mineur dans le mécanisme de tassement. En effet, c'est surtout l'écoulement de la matière vers les régions moins chargées qui est responsable du tassement excessif qui peut avoir lieu. D'autre part, nous avons remarqué que la forme des grains est un facteur clef qui influe sur l'écoulement de la matière et par conséquent sur la vitesse de tassement. Les essais ont permis aussi de mettre en évidence l'effet de l'accélération sur la vitesse de tassement et l'existence d'une accélération critique de fluidification du milieu dans le cas partiellement confiné. Nous avons considéré également des échantillons de

différentes longueurs et reposant sur des couches d'élastomère de différentes élasticités. Ces techniques ont montré que le tassement concerne essentiellement les couches supérieures des granulats. En revanche, ils ont montré que l'élasticité du sol affecte clairement la vitesse de tassement.

Le dispositif expérimental utilisé ne permet pas d'accéder aux variables locales telles que les déplacements des grains, les forces de contact, les accélérations etc. Pourtant, ces grandeurs peuvent donner une information plus complète sur le mécanisme de tassement. Pour remédier à cette limite, une approche numérique basée sur les calculs discrets a été adoptée. Après la vérification de sa cohérence par rapport aux expériences, cette technique a permis de se pencher sur les effets des paramètres de simulation sur la vitesse de tassement. Nous avons comparé l'écoulement des matériaux granulaires dans le cas partiellement confiné à leur réarrangement, dans le cas complètement confiné. A travers la variation des forces et déplacements au niveau des contacts dans différentes régions, nous avons observé le phénomène de rochet qui est dû aux glissements tangentiels entre les grains. Nous nous sommes intéressés aussi à la causalité entre la perte de contacts et la vitesse de tassement dont l'existence a été prouvée statistiquement pour différents cas de chargement.

Une procédure de calcul du tassement de matériaux granulaires à long terme a été présentée dans le dernier chapitre. La procédure proposée utilise de façon séquentielle la dynamique moléculaire, une homogénéisation temporelle et une technique de relaxation afin de prédire l'écoulement des matériaux granulaires sous chargements cycliques. La dynamique moléculaire représente le moteur de la méthode. Le calcul statistique consiste d'abord à estimer des fonctions de tendance en déplacements résiduels au cours des cycles, puis à les utiliser pour effectuer des prolongements dans le temps. Finalement, la relaxation consiste à apporter les corrections nécessaires aux configurations obtenues, en minimisant une fonctionnelle d'énergie avec la méthode du gradient. Des comparaisons ont été faites entre les calculs complets de dynamique moléculaire et des calculs alternés par la procédure proposée. Elles ont donné des résultats satisfaisants surtout dans les cas d'échantillons de degré de confinement élevés. Ces applications ont montré que la procédure permet d'estimer le tassement des matériaux tout en gagnant en temps de calcul.

Au cours de ce travail, nous avons répondu à certaines questions, mais ces réponses sont naturellement partielles puisque le travail est loin d'être exhaustif. Il serait, à titre indicatif, important de trouver un modèle continu équivalent. S'il existe, ce modèle pourrait tenir compte de l'endommagement des grains au cours des chargements cycliques.

Dans un tel modèle, il serait important de tenir compte de la forme des grains puisque nous avons prouvé son importance dans le cadre de cette thèse. Nous avons également proposé des idées qui peuvent être reprises. En effet, la méthode de calcul numérique à long terme que nous avons développée concerne des grains sphériques. Il serait intéressant de l'étendre à des grains de formes différentes.

Bibliographie

- Abdelkarim, M., de Buhan, P., and Bonnet, G. (2003). A computational procedure for predicting the long term residual settlement of a platform induced by repeated traffic loading. *Computers and Geotechnics*, 30(6) :463–476.
- Abdelkrim, M. (2004). *Analyse par le Calcul des Structures du Comportement Cyclique à Long Terme des Infrastructures de Transport*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France.
- Agnolin, I. and Roux, J.-N. (2007a). Internal states of model isotropic granular packing - assembling process, geometry and contact networks. *submitted to Physical Review Letter E*.
- Agnolin, I. and Roux, J.-N. (2007b). Internal states of model isotropic granular packing - elastic properties. *Accepted for publication in Physical Review Letter E*.
- Al-Shaer, A. (2005). *Analyse des Déformations Permanentes des Voies Ferrées Ballastées : Approche Dynamique*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France.
- Al-Shaer, A., Duhamel, D., Sab, K., Nguyen, V. H., Merliot, G. F. E., and Schmitt, L. (2005). Dimensionnement dynamique d'un banc d'essai de voie ferrée à échelle réduite avec le code cesar-lcpc (dynamic design of a reduced-scale railway test bench using the cesar-lcpc computation code). *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, (256-257) :227–242.
- Alexander, S. (1998). Amorphous solids : Their structure, lattice dynamics and elasticity. *Physics Reports*, 296(2-4) :65–236.
- Allen, M. and Tildesley, D. (1989). *Computer Simulation of Liquids*. Oxford University Press, Bristol.

- Alonso-Marroquin, F. and Hermann, H. J. (2004). Ratcheting of granular materials. *Physical Review Letters*, 92(5) :543011–543014.
- Azanza, E. (1998). *Écoulement Granulaires Bidimensionnels sur un Plan Incliné*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France.
- Bachmann, D. (1940). Verfahrenstechnik z. v. d. i. beiheft. *Cité par Thomas et al. 1989*.
- Barksdale, R. D. (1972). Laboratory evaluation of rutting in base course materials. *Third International Conference on Structural Design of Asphalt Pavement, September 1972, London, England*, 3 :161–174.
- Beex, A. A. and Zeidler, J. R. (2003). Non-wiener effects in recursive least squares adaptation. *IEEE*, pages 7803–7946.
- Ben-Naim, E., Knight, J., and Nowak, E. (1998). Slow relaxation in granular compaction. *Physica D*, 123 :380–384.
- Bodin, V. (2000). *Comportement du Ballast des Voies Ferrées Soumises à un Chargement Vertical et Latéral*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France.
- Bouleau, N. (1986). *Probabilité de l'Ingénieur, Variables Aléatoires et Simulation*. Hermann, Paris.
- Brilliantov, N. V. and Pöschel, T. (2004). *Kinetic Theory of Granular Gases*. Oxford University Press, New York.
- Chen, Y., Rangarajan, G., Feng, J., and Ding, M. (2004). Analyzing multiple nonlinear time series with extended granger causality. *Physics Letters A*, 324 :26–35.
- Chladni, E. (1787). Entdeckungen ueber die theorie des klangen. *Cité par J. Duran*.
- Chlenov, V. A. and Mikhailov, N. V. (1965). Some properties of vibrating fluidized beds. *Journal of Engineering Physics*, 9 :196–200.
- Christopher, R. (2000). *On the Identification and Haptic Display of Friction*. PhD thesis, PhD Thesis of Standford University, USA.
- Ciamarra, M. P., Coniglio, A., and Nicodemi, M. (2005). Shear-induced segregation of a granular mixture under horizontal oscillation. *Journal of Physics Condensed Matter*, 17(24) :2549–2556.

- Clément, E., Rajchenbach, J., and Duran, J. (1995). Mixing of a granular material in a bidimensional rotating drum. *Materials Research Society Symposium - Proceedings*, 367(13) :513–517.
- Cruz, F. D. (2004). *Ecoulement de Grains Secs : Frottement et Blocage*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France.
- Cundall, P. A. and Strack, O. D. L. (1971). A computer model for simulating progressive large scale movement of blocky rock systems. *Proceedings of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics, Nancy, France*, 1.
- Dufour, J., Pelletier, D., and Renault, E. (2007). Multivariate out-of-sample tests for granger causality. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51 :3319–3329.
- Duran, J. (1997). *Sables, Poudres et Grains*. Eyrolles Sciences, Paris.
- Edwards, S. (1998). The equations of stress in a granular material. *Physica A*, 249 :26–231.
- Edwards, S. F. and Mounfield, C. (1994). The statistical mechanics of granular systems composed of spheres and elongated grains. *Physica A*, 210(3-4) :290–300.
- Edwards, S. F. and Oakeshott, R. B. S. (1989). Theory of powders. *Physica A*, 157(3) :1080–1090.
- Elata, D. and Berryman, J. G. (1996). Contact force-displacement laws and mechanical behaviour of random packs of identical spheres. *Mechanics of Materials*, 24 :229–240.
- Emam, S., Canou, J., Corfdir, A., Dupla, J.-C., and Roux, J.-N. (2006). Elaboration et comportement mécanique de matériaux granulaires solides modèles : Expériences et simulations numériques. *Collection Etudes et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, SI12 :105–145.
- Emam, S., Roux, J., Canou, J., Corfdir, A., and Dupla, J. (2005). Granular packings assembled by rain deposition : An experimental and numerical study. *Powders and Grains Conference, July 2005, Stuttgart, Germany*.
- Evesque, P. (1990). Comment on : Convective flow of granular masses under vertical vibrations. *Journal de Physique*, 51(8) :697–699.

- Evesque, P. and Rajchenbach, J. (1989). Instability in a sand heap. *Physical Review Letters*, 69(1) :44–47.
- Falcon, E., Kumar, K., Bajaj, K. M. S., and Bhattacharjee, J. K. (1999). Heap corrugation and hexagon formation of powder under vertical vibrations. *Physical Review E*, 95(5).
- Faraday, M. (1831). On a peculiar class of acoustical figures and certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Phil. Trans. Roy. Soc., London*.
- Fischer, J. (1983). Einfluß von frequenz und amplitude auf die stabilisierung von oberbauschotter. *Eingereicht an der Technischen Universität Graz*.
- Gallas, J. A. C., Herrmann, H. J., and Sokolowski, S. (1992). Convection cells in vibrating granular media. *Physical Review Letters*, 69(9) :1371–1375.
- Gandolfo, G. and Nicoletti, G. (2002). Exchange rate volatility and economic openness : A causal relation? *Centro ricerche di economia internazionale*, 68.
- Goldenberg, C. and Goldhirsch, I. (2005). Friction enhances elasticity in granular solids. *Nature*, 435(7039) :188–191.
- Goldhirsch, I. and Goldenberg, C. (2004). Stress in dense granular materials. *The physics of granular media*.
- Granger, C. (1969). Investigating causal relations by econometric models and cross - spectral methods. *Econometrica*, 37 :424–459.
- Guérin, N. (1996). *Approche Expérimentale et Numérique du Comportement du Ballast des Voies de Chemins de Fer*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France.
- Hau, K., McDowell, G. R., Zhang, G. P., and Brown, S. F. (2005). The application of a three-surface kinematic hardening model to repeated loading of thinly surfaced pavements. *Granular Matter*, 7 :145–156.
- Herrmann, H. J. and Luding, S. (1998). Review article : Modeling granular media on the computer. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 10(4) :189–231.
- Hertz, H. (1882). Über die berührung fester elastischer körper (on the contact of elastic solids). *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik, cité par Di Renzo, Johnson, Elata etc.*, 92 :156–171.

- Hicher, P.-Y. and Shao, J.-F. (2002). *Elastoplasticité des Sols et des Roches*. France.
- Hornych, P., Corté, J., and Paute, J. (1993). Etudes de déformations permanentes sous chargements répétés de trois graves non traitées. *Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 184 :77–84.
- Hujeux, J. C. (1982). Constitutive law of mohor-coulomb type for soils with multiple mechanisms. *Revista Technica Intervep*, 2 :131–138.
- Jaeger, H., Nagel, S., and Behringer, R. (1996). Granular solids, liquids, and gases. *Reviews of Modern Physics*, 68 :1259–1273.
- Janssen, H. A. and Vereins, Z. (1895). *Deutsch Ing., cité par Clément et Gennes*, 39.
- Jean, M. (1999). Non-smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177 :235–257.
- Jodrey, W. S. and Tory, E. (1979). Simulation of random packing of spheres. *Simulation*, 32(1) :1–12.
- Johnson, K. L. (1985). *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, UK.
- Karnopp, D. (1985). Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 107 :100–103.
- Karraz, K., Bonnet, G., Dupla, J.-C., and Canou, J. (2007). Influence of sample size on mechanical behavior of granular materials. *Communication to the 60 th Canadian Geotechnical Conference, October, 21-24*.
- Karrech, A., Duhamel, D., Bonnet, G., Canou, J., Dupla, J. C., Roux, J. N., and Chevoir, F. (2006a). Experimental study of settlement mechanisms in micro-ballast beds under dynamic loading. *Submitted to the Journal of Materials in Civil Engineering*.
- Karrech, A., Duhamel, D., Bonnet, G., Roux, J. N., Chevoir, F., Canou, J., Dupla, J. C., and Sab, K. (2007). A computational procedure for the prediction of settlement in granular materials under cyclic loading. *Accepted for publication in Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.

- Karrech, A., Duhamel, D., Bonnet, G., Roux, J. N., Chevoir, F., Sab, K., Canou, J., and Dupla, J. C. (2006b). Discrete element method for granular materials preparation and settlement. *The Third International Conference on Advances In Mechanical Engineering and Mechanics, Hammamet, Tunisia, December 17-19*.
- Karrech, A., Seibi, A., and Pervez, T. (2006c). Damping effect on mechanical waves in an elastic solid expanded tubular. *Journal of Pressure Vessels Technology, ASME Transactions, PVT-06-1078*.
- Karrech, A., Seibi, A., Pervez, T., and Al-Hiddabi, S. (2004). Stress/fluid pressure waves in radially expanded solid tubular. *ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference, California, USA, July 25-29, 2004*.
- Karrech, A., Seibi, A., Pervez, T., and Sab, K. (2005). Dynamics of submerged expandable tubes in borehole wells. *ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference, Colorado, USA, July 17-21, 2005*.
- Kima, C.-W. and Bennighof, J. (2006). Fast frequency response analysis of partially damped structures with non-proportional viscous damping. *Journal of Sound and Vibration*, 297 :1075–1081.
- Knight, J. (1996). External boundaries and internal shear bands in granular convection. *Physical Review E*, 55 :6016–6023.
- Lade, P. V. and Nelson, R. B. (1987). Modelling the elastic behaviour of granular materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 11(5) :521–542.
- Lan, Y. and Rosato, A. (1995). Macroscopic behavior of vibrating beds of smooth inelastic spheres. *Physics of fluids*, 7(8) :1818–1831.
- Landry, J. W., Grest, G. S., Seilbert, L. E., and Plimpton, S. J. (2003). Confined granular packings : Structure, stress and forces. *Physical Review Letters E*, 67 :0413031–0413039.
- Lekarp, F. (1998). Permanent deformation behavior of unbound granular materials. *Construction and Building Materials*, 12 :9–18.
- Lemaitre, J. and Chaboche, J. (2001). *Mécanique des Matériaux Solides*. Duond, Paris.

- Liffman, K., Metcalfe, G., and Cleary, P. (1997). Convection due to horizontal shaking. *Proceeding of the 3rd International Conference on Powders and Grains, September 1997, North Carolina, USA*, pages 405–408.
- Lobo-Guerrero, S. and Vallejo, L. (2006). Discrete element method analysis of railtrack ballast degradation. *Granular Matter*, 8 :195–204.
- Lu, M. and McDowell, G. R. (2007). The importance of modelling ballast particle shape in the discrete element method. *Granular Matter*, 9 :69–80.
- Lubliner, J. (1990). *Plasticity Theory*. Macmillan Pub Co, USA.
- Ludewig, F., Vandewalle, N., and Dorbolo, S. (2006). Compaction of granular mixtures. *Granular Matter*, 8 :87–91.
- Luding, S. (1998). Collisions and contacts between two particules. *in : Physics of dry granular Media, eds. H. J. Herrmann, J.-P. Hovi, and S. Luding, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*.
- Makse, H. A., Ball, R. C., Stanley, H. E., and Warr, S. (1998). Dynamics of granular stratification. *Physical Review E*, 58 :3357–3367.
- Makse, H. A., Cizeau, P., and Stanley, H. E. (1997). Possible stratification mechanism in granular mixtures. *Physical Review Letters*, 78 :3298–3302.
- McDowell, G. R., Lim, W. L., Collop, A. C., Armitage, R., and Thom, N. H. (2005). Laboratory simulation of train loading and tamping on ballast. *Transport*, 158 :89–95.
- Mehta, A. and Edwards, S. F. (1989). Statistical mechanics of powder mixtures. *Physica A*, 157(3) :1091–1100.
- Mindlin, R. and Deresiewicz, H. (1953). Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *Transactions of ASME, Series E. Journal of Applied Mechanics*, 20 :327–344.
- Müller, D. (1996). *Techniques informatiques efficaces pour la Simulation de Milieux Granulaires par des Méthodes d'Éléments Distincts*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, France.
- Moon, S. J., Goldman, D. I., Swinney, H. L., and Swift, J. B. (2003). Kink-induced transport and segregation in oscillated granular layers. *Physical Review Letters*, 91(13) :1343011–1343014.

- Moreau, J. J. (1993). New computation methods in granular dynamics. *Powder and Grains*, éd. par Thornton (C.), pages 227–227.
- Morgan, J. G. D. and Markland, E. (1981). The effect of vibration on ballast beds. *Géotechnique*, 31(3) :367–382.
- Nezami, E. G., Hashash, Y., Ghaboussi, J., and Zhao, D. (2003). A fast contact detection algorithm for discret element method. *16 th ASCE Engineering Mechanics Conference, July 2003, Seattlen USA*.
- Nezami, E. G., Hashash, Y., Zhao, D., and Ghaboussi, J. (2006). Shortest link method for contact detection in discrete element method. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 30 :783–801.
- Nowak, E. R., Knight, J. B., Ben-Naim, E., Jaeger, H. M., and Nagel, S. R. (1998). Density fluctuations in vibrated granular materials. *Physical Review E. Statistical Physics*, 57(2) :1971–1982.
- Onoda, G. and Liniger, E. (1990). Random loose packings of uniform spheres and the dilatancy onset. *Physical Review Letters*, 64(22) :2727–2730.
- Ovarlez, G. (2002). *Statique et Rhéologie d'un Matériau Granulaire Confiné*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay, France.
- Oviedo-Marlot, X. (2001). *Etude du Comportement du Ballast par un Modèle Micromécanique : Application aux Opérations de Maintenance de la Voie Ferrée Ballastée*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France.
- Pak, H. K., van Doorn, E., and Behringer, R. P. (1995). Effects of ambient gases on granular materials under vertical vibration. *Physical Review Letters*, 74 :4643–4646.
- Paute, J., Jouve, P., Martinez, J., and Ragneau, E. (1988). Modèles de calcul pour le dimensionnement des chaussées souples. *Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 156 :21–36.
- Paute, J., Marignier, J., and Vidal, B. (1994). Le triaxial à chargements répétés lpc pour l'étude des graves non traitées. *Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 190 :19–26.

- Pérez, I., Medina, L., and Romana, M. (2006). Permanent deformation models for a granular material used in road pavements. *Construction and Building Materials*, 20 :790–800.
- Philippe, P. and Bideau, D. (2001). Numerical model for granular compaction under vertical tapping. *Physical Review E*, 63 :0513041–05130410.
- Pouliquen, O., Belzons, M., and Nicolas, M. (2003). Fluctuating particle motion during shear induced granular compaction. *Physical Review Letters*, 91(1) :014301–014305.
- Pradel, F. and Sab, K. (1998). Homogenization of discrete media. *Journal de Physique. IV*, 8(8) :317–324.
- Prevost, J. H. and Keane, C. M. (1990). Multimechanical elastoplastic model for soils. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 116 :1924–1944.
- Pöschel, T. and Buchholtz, V. (1995). Complex flow of granular material in a rotating cylinder. *Chaos, Solitons and Fractals*, 5 :1901–1912.
- Radjaï, F. and Roux, S. (2004). Contact dynamics of 2d granular media : Critical states and relevant internal variables. *The Physics of Granular Media*.
- Radjaï, F., Troadec, H., and Roux, S. (2004). Key features of granular plasticity. *Advances in Granular Materials : Fundamentals and Applications, Royal Society of Chemistry*.
- Rajchenbach, J. (1998). Vertical and horizontal vibration of granular materials : Coulomb friction and a novel switching state. *Physical Review Letters*, 81 :797–793.
- Renzo, A. D. and Maio, F. P. D. (2004). Comparison of contact-force models for the simulation of collisions in dem-based granular flow codes. *Chemical Engineering Science*, 59(3) :525–541.
- Ribiere, P., Richard, P., Bideau, D., and Delannay, R. (2005). Experimental compaction of anisotropic granular media. *The European Physical Journal E*, 16 :415–420.
- Richard, P., Philippe, P., Barbe, F., Bourlès, S., Thibault, X., and Bideau, D. (2003). Analysis by x-ray microtomography of a granular packing undergoing compaction. *Physical Review E*, 68 :0203011–0203014.
- Richman, M. W. and Martin, R. E. (1992). Unconfined granular materials thermalized by fluctuating horizontal surfaces. *Proceedings of the 9th Conference on Engineering Mechanics, July 1992 New York*, pages 900–903.

- Rosato, A., Blackmore, D. L., Zhang, N., and Lan, Y. (2002). A perspective on vibration-induced size segregation of granular materials. *Chemical Engineering Science*, 57(2) :265–275.
- Rosato, A. D. and Doris, Y. (2000). Microstructure evolution in compacted granular beds. *Powder Technology*, 109 :255–261.
- Rosenkranz, D. and Pöschel, T. (1997). Recurrent swelling of horizontally shaken granular material.
- Rothenburg, L. and Bathurst, R. J. (1989). Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials. *Géotechnique*, 39(4) :601–614.
- Roux, J. N. (2004). Elasticity, quasistatic deformation, and internal state of sphere packings. *17th ASCE Engineering Mechanics Conference, June 13-16 2004, Newark, DE*.
- Roux, J.-N. and Chevoir, F. (2005). Simulation numérique discrète et comportement mécanique des matériaux granulaires. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, (254) :109–138.
- Salençon, J. (2002). *Mécanique des Milieux Continus*. Ellipses, Paris.
- Satake, M. (2004). Tensorial form definitions of discrete-mechanical quantities for granular assemblies. *International Journal of Solids and Structures*, 41 :5775–5791.
- Saussine, G., Cholet, C., Gautier, P., Dubois, F., Bohatier, C., and Moreau, J. (2005). Modelling ballast behavior under dynamic loading, part1 : A 2d polygonal discrete element method approach. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 195(19-22) :2841–2859.
- Shenton, M. (1978). *Deformation of Railway Ballast under Repeated Loading Conditions*. Oxford.
- Tennakoon, S. G. K. and Behringer, R. P. (1998). Vertical and horizontal vibration of granular materials : Coulomb friction and a novel switching state. *Physical Review Letters*, 81(4) :794–797.
- Thomas, B., Mason, M. O., Liu, Y. A., and Squires, A. M. (1989). Identifying states in shallow vibrated beds. *Powder Technology*, 57 :267–280.

-
- To, K., Lai, P. Y., and Pak, H. K. (2001). Jamming of granular flow in a two-dimensional hopper. *Physical Review Letters*, 86(1) :71–74.
- Vanel, L., Howell, D., Clark, D., Behringer, R. P., and Clément, E. (1999). Memories in sand : Experimental test of construction history on stress distributions under sandpiles. *Physical Review Letters E*, 60(5) :5040–5043.
- Villarruel, F. X., Lauderdale, B. E., Mueth, D. M., and Jaeger, H. M. (2000). Compaction of rods : Relaxation and ordering in vibrated, anisotropic granular materials. *Physical Review E*, 61(6) :6914–6921.

Annexe

Calcul de R^2

On considère une série de n mesures $(\tau_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ réalisées à des instants équidistants t_i . Supposons que l'on veut estimer une relation de la forme $\tau_i = f(n_i, a, b) = a + bn_i$, où $n_i = \ln((t_{i+1} - t_i)N)$. La méthode des moindres carrés peut être utilisée pour estimer les paramètres a et b qui fournissent le meilleur ajustement. En effet, la minimisation de $\mathcal{L} = \sum [\tau_i - f(n_i, a, b)]^2$ par rapport a et b , il est possible d'obtenir ses paramètres avec le minimum d'erreur :

$$\begin{cases} a = \frac{\bar{\tau} \sum_{i=1}^{i=n} n_i^2 - \bar{n} \sum_{i=1}^{i=n} \tau_i n_i}{\sum_{i=1}^{i=n} n_i^2 - n \bar{n}^2} \\ b = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \tau_i n_i - n \bar{\tau} \bar{n}}{\sum_{i=1}^{i=n} n_i^2 - n \bar{n}^2} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

où $\bar{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \tau_i}{n}$ et $\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} n_i}{n}$. Ainsi, le coefficient de détermination est défini par $R^2 = \frac{s_{tn}^2}{s_{tt}s_{nn}}$, où $s_{tn} = \sum_{i=1}^{i=n} (\tau_i - \bar{\tau})(n_i - \bar{n})$, $s_{tt} = \sum_{i=1}^{i=n} (\tau_i - \bar{\tau})^2$, and $s_{nn} = \sum_{i=1}^{i=n} (n_i - \bar{n})^2$. Il peut être calculé afin de décrire l'adéquation des paramètres d'ajustement. Plus R^2 est proche de 1.0, plus ces paramètres sont convenables.

Aperçu sur la théorie cinétique

La théorie cinétique est à la base une approche statistique où l'on se donne une distribution définie par $f(r, v, t)drdv$ qui représente le nombre de particules dans un volume élémentaire de rayon dr autour de r dont les vitesses sont dans l'espace de centre v et de rayon dv , au temps t . Durant un certain temps Δt , le nombre de particules $f(r, v, t)drdv$ dans l'espace de phases (dr, dv) de centre (r, v) change à cause des collisions qui peuvent avoir lieu avec le milieu environnant. Dans le cas homogène (indépendance de r), une équation de bilan peut être établie comme le montre soigneusement Brilliantov et Pöshel (2004) et permet d'écrire l'équation de Boltzmann :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = J(f) \tag{B.4}$$

Où $J(f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}_n} (\chi f(v'_\beta, t) f(v'_\alpha, t) - f(v_\beta, t) f(v_\alpha, t)) H(n, v_\beta - v_\alpha) dndw$, avec $\mathbb{S}_n = \{n \in \mathbb{R}^3 : \|n\| = 1\}$, $H(n, v_\beta - v_\alpha) = \max(n \cdot (v_\beta - v_\alpha), 0)$, le couple v'_* représente les vitesses après collisions de particules de vitesses v_* avant collision) Compte tenue de la relation 1.28, on peut montrer que $\chi = e^{-2}$. L'équation précédente est établie en supposant que la distribution binaire de particules peut être décrite simplement par le produit des distributions $f \times f$, cependant, cette approximation n'est pas valable quand les particules binaires sont corrélées soit quand le matériau est dense. Enskog a apporté une amélioration en tenant compte des corrélations binaires en introduisant un facteur qui dépend des distances intergranulaires. L'équation différentielle qui décrit la distribution des milieux granulaires collisionnels est dite l'équation de Boltzmann-Enskog et s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = g(\rho)J(f) \tag{B.5}$$

où $g(\rho) = \frac{1-\rho}{2(1-\rho)^3}$, dans le cas de sphères en 3D. C'est une fonction qui décrit la probabilité pour qu'il y ait contact entre deux particules données. On note à ce niveau

que $g(\rho)$ dépend de la dimension de l'espace de travail et de la forme des grains. A partir de l'équation B.5, on peut écrire la moyenne d'une grandeur $\psi(v)$ donnée comme étant $\langle \psi \rangle = \int \psi(v)f(v,t)dv$. Le taux de variation par rapport au temps peut à son tour être écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \langle \psi \rangle = \int \psi(v) \frac{\partial}{\partial t} f(v,t) dv = g(\rho) \int \psi(v) J(f) dv \quad (\text{B.6})$$

En remplaçant la grandeur $\psi(v)$ par 1, mv et $\frac{1}{2}mv^2$ on peut établir respectivement les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\frac{dn}{dt} + \rho \nabla \cdot u = 0 \quad (\text{B.7})$$

où n est la densité de nombre de grains, u est la vitesse moyenne d'écoulement.

$$\rho \frac{du}{dt} = \nabla \cdot P + \rho g \quad (\text{B.8})$$

où P est le tenseur de contraintes et g est la gravité.

$$\frac{3}{2} \rho \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot Q + P : \nabla u - \gamma \quad (\text{B.9})$$

où T est la température granulaire, Q est le flux de chaleur, γ est la dissipation d'énergie à cause de l'inélasticité des collisions et $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$ est la dérivée totale. Ces équations de conservation ressemblent aux équations d'écoulement de fluides. Cependant, les coefficients de comportement dépendent des champs locaux impliqués au lieu d'être constants. Le tenseur de contraintes peut être exprimé sous forme d'une loi de comportement :

$$P = [-p(\rho, T) + \mu(\rho, T) \text{tr}(D)]I + 2\eta(\rho, T) \hat{D} \quad (\text{B.10})$$

où $D = \frac{1}{2}[\nabla v + (\nabla v)^t]$ et $\hat{D} = D - \frac{1}{3} \text{tr}(D)I$. On suppose également que le flux de chaleur peut être exprimé sous la forme d'une loi de Fourier :

$$Q = -\kappa(\rho, T) \nabla T \quad (\text{B.11})$$

Lorsque la densité du milieu ne change pas rapidement et reste proche d'une densité critique n_c , les constantes phénoménologiques présentées ci-dessus peuvent s'écrire sous la forme :

$$p = p_1 \frac{\rho_c^2 T}{\rho_c - \rho} \quad (\text{B.12})$$

$$\mu = \mu_1 \frac{\rho_c T^{1/2}}{(\rho_c - \rho) d^2} \quad (\text{B.13})$$

$$\kappa = \kappa_1 \frac{\rho_c T^{1/2}}{(\rho_c - \rho) d^2} \quad (\text{B.14})$$

$$\gamma = \gamma_1 (1 - r^2) \frac{\rho_c^2 T^{3/2}}{(\rho_c - \rho) d} \quad (\text{B.15})$$

$$\eta = \eta_1 \frac{\rho_c T^{1/2}}{(\rho_c - \rho) d^2} \quad (\text{B.16})$$

D'après Brilliantov et Pöshel (2004), en se donnant des fonctions de distributions de vitesses, on peut montrer que les constantes $p_1, \mu_1, \kappa_1, \gamma_1, \eta_1$ sont de l'ordre de l'unité.

Écrouissage mixte basé sur le modèle de Drucker-Prager

Le modèle que nous proposons est basé sur l'écrouissage mixte. Nous nous sommes inspiré du modèle de Lemaitre et Chaboche (2001) développé pour décrire le phénomène de rochet dans les métaux aux structures amorphes. Contrairement à ce modèle qui repose sur le critère de Von Misès, nous avons opté pour le critère de Drucker-Prager qui décrit mieux les comportements des matériaux granulaires. Pour ce faire, on part de la décomposition additive de l'incrément de déformation :

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^i + d\epsilon_{ij}^c = d\epsilon_{ij}^e + M d\epsilon_{ij}^p + (1 - M) d\epsilon_{ij}^c \quad (\text{C.4})$$

Les exposants "e" et "p" signifient respectivement élastique et plastique. Les déformations plastiques peuvent être décomposées à leurs tours en déformation plastique avec écrouissage isotrope désigné par l'exposant "i" et déformation plastique avec écrouissage cinématique désigné par l'exposant "c". Le paramètre M décrit la combinaison la partie isotrope et cinématique. Quand ce paramètre vaut 1, l'écrouissage est purement isotrope. Le comportement élastique du matériau est décrit de façon classique, il suit la loi de Hooke qui s'écrit sous la forme :

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\epsilon_{ij}^e \quad (\text{C.5})$$

où C_{ijkl} est le tenseur élastique d'ordre 4, σ_{ij} et ϵ_{ij} sont respectivement le tenseur de contrainte de Cauchy et de déformation d'ordre 2. On se donne comme prévu un critère de plasticité de Drucker-Prager qui s'écrit sous la forme :

$$f(\hat{\sigma}_{ij}) = f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = \alpha_1 \hat{I}_1 + \sqrt{\hat{J}_2} - k = 0 \quad (\text{C.6})$$

où $\hat{I}_1 = \sigma_{ii} - \alpha_{ii}$ est le premier invariant du tenseur de contrainte de Cauchy et $\hat{J}_2 = \frac{1}{2} \hat{s}_{ij} \hat{s}_{ij}$ est le second invariant du tenseur de contrainte déviatorique $s_{ij} = \sigma_{ij} - p \cdot \delta_{ij}$, avec p

la pression hydrostatique, $\hat{s}_{ij} = s_{ij} - \alpha_{ij} + \frac{1}{3}\alpha_{ii}\delta_{ij}$ et α_{ij} est le tenseur de contrainte cinématique ("backstress"). Pour trouver l'expression de k , on considère le cas particulier d'essai uniaxial. Ce type de chargement permet de montrer que :

$$f(\hat{\sigma}_e) = \alpha_1 \hat{\sigma}_e + \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{\sigma}_e = k \quad (\text{C.7})$$

De la même façon, on déduit que :

$$\hat{\sigma}_e = \frac{\sqrt{3}\alpha_1 \hat{I}_1 + \sqrt{3\hat{J}_2}}{1 + \sqrt{3}\alpha_1} \quad (\text{C.8})$$

On se donne également une fonction de potentiel plastique qui s'écrit sous la forme :

$$g(\hat{\sigma}_{ij}) = \alpha_2 \hat{I}_1 + \sqrt{\hat{J}_2} \quad (\text{C.9})$$

La variable α_1 étant différente de α_2 , le modèle est donc non associé. A partir du potentiel C.9, on peut définir une loi d'écoulement qui s'écrit sous la forme :

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{C.10})$$

où $d\lambda$ est un facteur positif qui dépend de l'état de contrainte dans le matériau. L'équation C.10 permet d'écrire la déformation plastique équivalente :

$$d\epsilon^p = d\lambda \hat{M} \sqrt{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} \quad (\text{C.11})$$

Où \hat{M} est un coefficient de normalisation. Le facteur $d\lambda$ est déterminé à travers la relation de consistance qui stipule que pour un matériau écrouissable et au cours d'un chargement plastique, les contraintes restent sous la surface de seuil. Cette condition signifie que :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} d\alpha_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0 \quad (\text{C.12})$$

A partir de la décomposition C.4 de la loi de comportement élastique C.5 et de la loi d'écoulement C.10, on peut voir que $d\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(d\epsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right)$. On remarque également que $\frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} = -\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$. D'autre part, on considère une loi d'écrouissage de type Prager qui s'écrit sous la forme $d\alpha_{ij} = c(1 - M)d\epsilon_{ij}^p$. Dans le cas où $k = k(\epsilon^p)$, on montre que $dk = \frac{dk}{d\epsilon^p} d\epsilon^p$. Ainsi on peut déduire que le coefficient d'écoulement s'écrit :

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} d\epsilon_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} + c(1 - M) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial k}{\partial \epsilon^p} \hat{M} \sqrt{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}}} \quad (\text{C.13})$$

Le comportement élastique étant pris isotrope linéaire, on peut montrer que :

$$C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 3K\alpha_1 \delta_{kl} + \frac{G}{\sqrt{\hat{J}_2}} \hat{s}_{kl} = A_{kl} \quad (\text{C.14})$$

et

$$C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = 3K\alpha_2 \delta_{kl} + \frac{G}{\sqrt{\hat{J}_2}} \hat{s}_{kl} = B_{kl} \quad (\text{C.15})$$

où K est le module de compression hydrostatique et G est le module de cisaillement. Les termes du dénominateur de l'équation C.13 peuvent être déduits :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} = A_{kl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} = 9K\alpha_1\alpha_2 + G \quad (\text{C.16})$$

$$c \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = (3\alpha_1\alpha_2 + 1/2)c(1 - M) \quad (\text{C.17})$$

$$\frac{\partial k}{\partial \epsilon^p} \hat{M} \sqrt{\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} = \frac{1}{\hat{\sigma}_e} \frac{k}{\epsilon_p} \hat{\sigma}_{ij} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{M(1 + \sqrt{3}\alpha_1)^2(\alpha_2 + \sqrt{\hat{J}_2})H_p}{3k} \quad (\text{C.18})$$

Ainsi, on déduit que l'écriture incrémentale de la loi d'évolution de contrainte suite à un incrément de $d\epsilon_{ij}$ est de la forme :

$$d\sigma_{ij} = \left(C_{ijkl} - \frac{B_{ij}A_{kl}}{\kappa} \right) d\epsilon_{kl} \quad (\text{C.19})$$

Où $\kappa = 9K\alpha_1\alpha_2 + G + (3\alpha_1\alpha_2 + 1/2)(1 - M)c + \frac{M(1 + \sqrt{3}\alpha_1)^2(\alpha_2 \hat{I}_1 + \sqrt{\hat{J}_2})H_p}{3k}$. On remarque que quand M vaut 1, le modèle correspond au cas d'écroutissement purement isotrope. D'autre part, quand $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, on retrouve le modèle de Von Mises duquel nous nous sommes inspirés pour écrire ce modèle.

